UNIVERSIDAD DE BARCELONA
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas

Memoria de la Tesis Doctoral

# EDUCACIÓN DEL RAZONAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN INFANTIL

Para optar al Título de Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación.
Sección Ciencias de la Educación.

Presentada por:
Mª Pilar Ruesga Ramos

Dirigida por:
Dra. Dª Mariela Orozco Hormaza
Dr. D. Joaquín Giménez Rodríguez

A mis hijos, que me permitieron ayudarles con las
Matemáticas y, con ellos, aprender muchas cosas.

Agradecimientos.

Dice Umberto Eco que quien aspira al título de doctor no debe agradecer al director, directores, en este caso, la ayuda prestada. Sin embargo, aún faltando a esta regla, no puedo permitir que pase la ocasión sin hacer público mi agradecimiento a sus personas y a sus familias, no ya por su inestimable contribución profesional al buen fin de este trabajo sino, sobre todo, por su continuo e impagable apoyo y amistad. Gracias.

Por otra parte, otras personas e instituciones son merecedoras de reconocimiento. Quiero señalar a D. José Cordero por su ayuda y opiniones en el proceso de análisis estadístico.

A las directivas de los colegios de la ciudad de Burgos cuyos niños son aquí protagonistas. A las tutoras de los grupos de niños entrevistados por su comprensión y colaboración de forma especial a las de los colegios San José, Marceliano Santamaría, Fernando de Rojas, Juan de Vallejo y Santa María la Nueva.

Y, sobre todo, a los niños de Educación Infantil participantes que nos han permitido conocer algo más acerca de su mundo de las Matemáticas y, con ello, intentar ayudar a otros como ellos a vivir mejor y con la misma alegría que nos han mostrado, durante su aprendizaje.

# INDICE

## CAPITULO II SOBRE LA PRUEBA REALIZADA



## CAPITULO III RESULTADOS

## CAPITULO IV UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN

## CAPITULO V DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

**PRESENTACIÓN**

> "Se nos confían niños; nosotros somos responsables de su educación. Traicionamos nuestra función humana si no nos esforzamos en desarrollar al máximo las posibilidades que lleva cada niño. Debemos mantener una inquietud constante y debemos responder con todas nuestras capacidades, todos nuestros métodos científicos de estudio y de investigación, todo nuestro amor al niño y nuestra total devoción a nuestra bella misión: formar hombres"
>
> (Mialaret 1986:174)

La educación en las sociedades democráticas, es el medio que debe proporcionar la realización del ser humano como tal. Desde el punto de vista social, le debe capacitar para dominar el complejo mundo de hoy y, desde el punto de vista personal debe propiciar el desarrollo sus capacidades al máximo de sus propias posibilidades.

La Educación Infantil, el período docente de más reciente incorporación a la estructura educativa, tiene un origen asistencial como consecuencia de los cambios sociales experimentados a raíz de la incorporación de la mujer al mundo del trabajo. Sin embargo, la posterior evolución de la investigación en diversas áreas de conocimiento, han mostrado cómo este período resulta ser crucial para desarrollos posteriores.

Para esta etapa educativa se proponen tres tipos de objetivos: conceptuales, procedimentales y actitudinales, a través de los cuales se pretende tanto dotar al niño de las *herramientas conceptuales básicas* para acceder a otros niveles educativos, como desarrollar sus capacidades cognitivas.

En relación con este objetivo, la matemática posee un doble potencial: informativo y formativo. El aspecto informativo se refiere a los métodos aplicables a una gran variedad de problemáticas sobre las que puede aportar una solución. Los conceptos y modelos matemáticos son herramienta de aplicación a situaciones muy diversas, por lo general, precisan de otros conocimientos previos e incluso hacen aparecer otros modelos matemáticos anteriores. Esta generalidad permite un tratamiento formal de forma desvinculada de lo concreto y mediatiza los contenidos abordables en la etapa.

El aspecto formativo tiene que ver con su concepción tradicional como ciencia deductiva, que conforma un pensamiento con algunas particularidades entre las cuales se encuentra el razonamiento riguroso que se manifiesta, de forma particular, en sus procedimientos de inferencia lógica.

La pretensión de una enseñanza individualizada, que procure a cada individuo el desarrollo pleno de sus capacidades, se contradice con la visión cerrada de unas hipotéticas potencialidades, asumidas de forma generalizada, por razones de estadio evolutivo. Por el contrario precisa abrir el abanico de alternativas hacia las posibilidades, recursos y estrategias personales de razonamiento que válidamente permitan conducir un razonamiento matemático riguroso.

Los planteamientos de la llamada Nueva Matemática introducen, por primera vez en los currículo, contenidos vinculados con el razonamiento pero con el objetivo de acceder al conocimiento matemático mediante el descubrimiento de estructuras comunes. Sin embargo, lo que debía ser un medio, se convirtió en un fin en sí mismo que al no producir el resultado buscado, pasó a ser abandonado. Con ello se abandona también una importante fuente de recursos para abordar las cuestiones de razonamiento durante la Etapa Infantil que pasan a ser tratadas en el contexto de los conocimientos concretos, fundamentalmente el número.

En este trabajo se muestra cómo la matemática presenta una demanda relativa a dos tipos de problemas, que diferenciamos, que abordables son en la Educación Infantil y permiten retomar las ideas de la teoría conjuntista como parte de las estrategias de

razonamiento reformulables en el marco de la concepción de la matemática como una ciencia que precisa establecer relaciones entre datos y hechos.
Estas estrategias, revisten un aspecto de juego de reglas practicables en dos modos: como aplicación y como descubrimiento.

El hecho de no estar desarrolladas las actividades de descubrimiento de reglas en el currículo de la etapa, las posibilidades de los niños al afrontar este tipo de tareas son desconocidas. Sin embargo, las características de los niños de esta edad permitieron intuir que, planteadas en un lenguaje adecuado, podrían ser accesibles para ellos y aceptarlas como un reto.

Se aborda, en el Capítulo I, el marco teórico referencial que permite identificar la problemática objeto de estudio. Está constituido por un análisis desde un triple punto de vista.

En primer lugar, se identifican en el discurso matemático los dos tipos de problemas, como fragmentos constitutivos de situaciones problemáticas diversas, que explicitamos, que tienen lugar de forma casi simultánea y son diferenciables por el objeto sobre el cuál, el sujeto que razona, debe focalizar su atención.

En segundo lugar, se analizan las distintas propuestas teóricas de construcción del conocimiento matemático, identificando en el marco de la concepción piagetiana, más concretamente, en el procedimiento de abstracción reflexiva semiempírica ligada a la construcción del pensamiento reversible, dos tipos de problemas. Las pruebas piagetianas de reversibilidad relativas a operaciones formales, permiten identificar estos problemas como problemas matemáticos relativos a cálculos algorítmicos. A través de ello definimos los problemas: en modo directo y en modo inverso.

En tercer lugar, se analizan las cuestiones de tipo pedagógico vinculadas con el aprendizaje durante la etapa de Educación Infantil, con el fin de identificar un espacio de acción sobre el cual poner en práctica los modos de razonamiento matemático y diseñar una prueba experimental que permita evaluar las posibilidades de los niños preescolares en tareas que los impliquen.

Esta panorámica permite determinar la problemática objeto de estudio, la necesidad de una investigación experimental y el establecimiento de los objetivos.

El Capítulo II se dedica a la prueba realizada. El diseño corresponde con el de una investigación quasiexperimental multivariada, con grupo piloto. Se describe la prueba sobre el grupo piloto, las pruebas definitivas y se determinan las variables objeto de registro.

En el Capítulo III se muestran los resultados obtenidos, mediante tratamiento estadístico, de las variables registradas y el análisis de los mismos.

En el Capítulo IV desarrollamos una propuesta relativa a tareas para la Educación Infantil desarrollada a través de las conocidas piezas de los bloques lógicos que los resultados obtenidos permiten.

Finalmente en el Capítulo V se recogen las conclusiones, limitaciones y perspectivas del estudio.

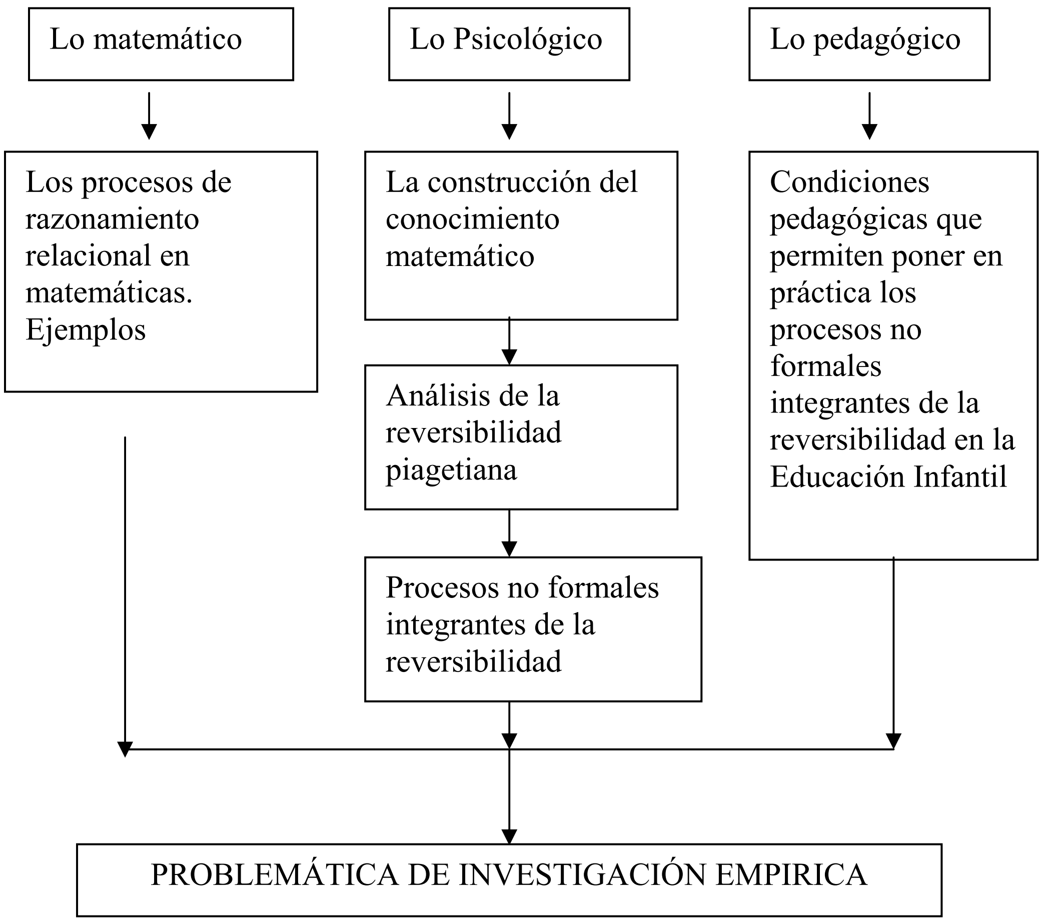
# CAPITULO I

## MODOS DE RAZONAMIENTO EN EDUCACIÓN INFANTIL. PRESENTACIÓN DE UNA PROBLEMÁTICA


**Resumen**

*Desde la conceptualización de la matemática como ciencia que consiste en el establecimiento de relaciones de muy diversos tipos, se distinguen dos procesos relacionales: directo e inverso que tienen lugar en aspectos distintos del campo matemático. En segundo lugar, mostramos la vinculación existente entre estos procesos y los procesos integrantes del concepto de reversibilidad piagetiana con los que se identifican en el caso particular de los cálculos algorítmicos. De acuerdo con este paradigma, el sujeto necesita construir un pensamiento reversible en todos los estadios de aprendizaje incluidos los que afectan a las operaciones no formales, propias de la etapa de Educación Infantil. Finalmente analizamos las condiciones pedagógicas que permiten por una parte, su práctica a través de tareas de aplicación y descubrimiento de reglas con representaciones icónicas, precursoras de las representaciones simbólicas que caracterizan la matemática y, por otra parte, cómo pueden ser analizados a través de los procesos relacionales que se ponen en juego, en ambos modos, a través de las relaciones de tipo lógico que implican.*


**Esquema**



## 1. Pensamiento relacional y Matemáticas

Las líneas generales que desarrolla este capítulo parten de nuestra concepción de la matemática como una ciencia cuyo objetivo es el establecimiento de relaciones de muy diversos tipos. Estas relaciones, que implican operaciones formales, tienen lugar entre objetos, reales o no, y se traducen a través de un lenguaje simbólico, que le es propio, a modelos que las generalizan y representan desde los cuales las situaciones de partida se obtienen por particularización. Estamos interesados en estudiar como pueden ser conceptualizadas estas dos formas relacionales y como se construyen desde el punto de vista cognoscitivo.

Este problema es interesante no sólo desde el punto de vista de la matemática, sino también de la didáctica. En efecto, mostraremos que no hay trabajos en Educación Infantil que hayan estudiado estos procesos detenidamente. Así, en este capítulo, justificaremos el interés de este tema, para terminar estableciendo nuestro problema específico de investigación.

Basándonos en el análisis del método de demostración progresivo-regresivo por Solow (1992) y en algunas estrategias de resolución de problemas propuestas por Polya (1984), identificamos dos modos de establecer las relaciones, de los cuales estos casos resultan situaciones particulares. Uno de ellos es el que tiene lugar cuando las relaciones progresan desde los datos, situaciones de partida o condiciones suficientes y, en general, desde las causas, en la búsqueda de las soluciones, situaciones finales o condiciones necesarias, es decir hacia los efectos. El otro progresa en sentido contrario, esto es, en general desde los efectos a las causas.
Mostramos en aspectos diversos del campo matemático, la presencia de ambos procesos.

En matemáticas las relaciones se establecen a través de una lógica que utiliza los recursos de la lógica inferencial clásica. La secuencia con que se producen las cadenas inferenciales lógicas en cualquier problemática, permite analizar cómo el individuo las utiliza y las comprende. Así encontramos estas cadenas inferenciales planteadas sobre situaciones que progresan en los dos sentidos señalados. Estas formas relacionales se presentan de forma entremezclada, casi conjunta y componen pasajes que permiten alcanzar el objetivo de la situación problemática a la que pertenecen.

Encontramos en la visión Piagetiana, más concretamente, en los procesos constituyentes de la reversibilidad de pensamiento, las dos formas relacionales matemáticas. Estas formas no son tratadas en la teoría Piagetiana que tiene por objeto describir cómo se produce el aprendizaje pero no analizar los procesos constitutivos de los mismos con intenciones de intervención educativa que a nosotros nos guía. Esto nos permite afirmar que existe un espacio dentro de la Educación Infantil en el que estas tienen una justificación. Finalmente analizamos las condiciones pedagógicas que nos permiten plantear un estudio de las mismas en la Educación Infantil.

### 1.1. Dos ejemplos paradigmáticos. El método progresivo-regresivo de demostración y los procesos de análisis y síntesis

Al analizar el método por demostración progresivo-regresivo, Solow (1992) identifica y separa pasajes que el razonador debe resolver respondiendo a dos tipos de preguntas. Uno de estos tipos son las preguntas de la forma: ***"¿qué tengo cuando tengo...?"*** mientras el otro tipo son preguntas de la forma: ***"¿qué debería tener para tener...?"***.

Desde la perspectiva relacional ambos tipos de preguntas ponen de relieve dos tendencias inversas en cuanto a que, bajo la primera formulación, se camina desde las condiciones necesarias hacia las suficientes, en tanto que bajo la segunda formulación se camina en sentido contrario, esto es, desde las condiciones suficientes hacia las necesarias.

Polya (1984) recoge los procesos de análisis y síntesis que el matemático griego Pappus distingue como parte integrante de la estrategia para resolver problemas.

Ambos procesos, bajo adaptación del autor de su texto original, son descritos de la siguiente forma:

> "Buscamos de qué antecedentes se podría deducir el resultado deseado; después buscamos cual podría ser el antecedente de este antecedente, y así sucesivamente, hasta que pasando de un antecedente a otro, encontremos finalmente alguna cosa conocida o admitida como cierta. Dicho proceso lo llamamos análisis, solución hacia atrás o razonamiento regresivo. En la síntesis, por el contrario, invirtiendo el proceso, partimos del último punto alcanzado en el análisis, del elemento ya conocido o admitido como cierto. Deducimos lo que en el análisis le precedía y seguimos así hasta que, volviendo sobre nuestros pasos, lleguemos finalmente a lo que se nos pedía. Dicho proceso lo llamamos síntesis, solución constructiva o razonamiento progresivo" (Polya 1984: 134)

Vamos a analizar estos dos procesos en los casos mencionados.

**El método progresivo-regresivo de demostración**

Ordinariamente, las demostraciones matemáticas presentan una importante omisión. Utilizan principios o reglas de inferencia que no están explícitamente formulados y de los que muchas veces no se tiene conciencia. Dice Daniel Solow en su libro "Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas":

> "Después de terminar mis estudios de Licenciatura, comencé a preguntarme porqué había sido tan difícil aprender matemáticas puras. A medida que avanzaba en mis estudios de postgrado me dí cuenta que las matemáticas poseen muchos de los aspectos de un juego: un juego en el cual las reglas habían estado parcialmente escondidas. ¡Imagínese tratando de jugar ajedrez antes de saber cómo se mueven todas las piezas! No es sorprendente que tantos estudiantes hayan tenido problemas con las matemáticas abstractas.

> Para jugar al ajedrez, usted debe aprender primero cómo se mueven cada una de las piezas. Solamente después de que estas reglas han sido asimiladas por su subconsciente usted podrá concentrar toda su atención en aspectos creativos como estrategias, tácticas, etc. De igual forma sucede en matemáticas. Al principio se necesita trabajar mucho para aprender las reglas fundamentales y lograr que se conviertan en algo muy conocido. Entonces encontrará que su mente puede enfocarse hacia los aspectos creativos de las matemáticas." (Solow 1992: 9)

La mayoría de los procedimientos de demostración en matemáticas, tienen por objeto la verificación de una proposición del tipo $A \Rightarrow B$. El método progresivo-regresivo (Solow 1992) es asimilable a un gran laberinto de ideas que tiene comienzo en A y salida en B, estableciendo un camino de conexión, posiblemente de entre muchos, que se recorre simultáneamente de A hacia B y de B hacia A. Al tratar de determinar cómo llegar a la conclusión de que B es verdadero, usamos el proceso regresivo, en tanto que, cuando hacemos uso de la información contenida en A, estamos usando el proceso progresivo.

El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow llama una "pregunta de abstracción" que consiste siempre en un planteamiento de la forma: "¿cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?". La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto, general y sin hacer referencia alguna al problema concreto que la suscita. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta. Después hay que aplicar esta respuesta a la situación específica. Ambas fases constituyen el llamado "proceso de abstracción" y ha proporcionado una nueva proposición $B_1$, con la propiedad de que si se pudiese demostrar que $B_1$ es verdadera, entonces B sería verdadera, es decir que $B_1 \Rightarrow B$. *Este paso regresivo se aplica a la proposición final e indaga su causa en forma de condición suficiente para B y supone, por tanto, la búsqueda de una relación no explícita que no es necesariamente única y debe encaminarse hacia la integración en $B_1$ de la información contenida en A.*

Veamos, por ejemplo un paso en la demostración de la relación conjuntista de que, siendo A y B dos conjuntos cualquiera se verifica que $(A\cap B) \subset (A\cup B)$. El primer paso consiste en tomar un elemento cualquiera de $(A\cap B)$

$\forall\ x\in (A\cap B)$, desde aquí pueden desprenderse múltiples condiciones necesarias, por ejemplo las siguientes:

que $x\in A$ y $x\in B$

ó que

$x\in (A\cap B) \cup W \quad \forall W$

ó que

$x \notin (A\cap B)^C$

ó que

$x \notin A^C \cup B$

ó que

$x \notin B^C \cup A$ …

pero de todas ellas es preciso optar por una que permita vincular la información que contiene con el objetivo de la demostración, es decir con el hecho de que x pertenezca a $(A\cup B)$, convirtiendo a la proposición $x\in (A\cup B)$, que se quiere demostrar, en condicionante para la elección del camino relacional que debe ser descubierto.

Así el proceso regresivo se transforma ahora en el planteamiento del proceso de abstracción para la proposición $B_1$. Nuevamente la formulación de una pregunta de abstracción correctamente formulada, su respuesta y adaptación al contexto proporcionan una nueva proposición $B_2$ tal que es condición suficiente para la $B_1$, esto es $B_2 \Rightarrow B_1$.

Este es un camino de progreso desde los efectos a las causas.

El proceso progresivo se inicia con la proposición A, que se supone es verdadera. A partir de ella se obtiene otra proposición $A_1$ de la cual sabremos ya que es verdadera como consecuencia de serlo A, esto es, obtenemos una proposición necesaria para la A, por tanto: $A \Rightarrow A_1$. El paso progresivo se aplica a datos ciertos desde los cuales se genera una consecuencia necesaria y supone, por tanto, un camino de progreso desde las causas a los efectos.

Ambos procesos progresivo y regresivo no son independiente sino que por el contrario van intrínsecamente ligados puesto que las proposiciones $A_i$ obtenidas progresivamente han de estar encaminadas a la obtención de la última $B_j$ obtenida regresivamente que de este modo reposicionan continuamente el proceso de razonamiento.
Finalmente la regla del silogismo hipotético aplicada entre proposiciones consecutivas proporciona la veracidad del condicional:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow A_1 \\ A_1 \Rightarrow A_2 \\ \quad \ldots \\ A_i \Rightarrow A_{i+1} \\ A_{i+1} \Rightarrow B_i \\ B_i \Rightarrow B_{i-1} \\ B_2 \Rightarrow B_1 \\ B_1 \Rightarrow B \\ \hline A \Rightarrow B \end{array}$$

Este sería un camino determinado entre un cúmulo de conocimientos construidos, sobre el que, en cada momento, hay que ir desechando posibilidades, argumentos o ideas que puedan considerarse no fructíferas o accesorias en cada problema.
Ambos procesos son bien diferentes uno de otro.

El proceso progresivo avanza sobre una afirmación construida, dada, conocida, poniendo de relieve parte de la información contenida en A: $A_1$. Mira la pirámide del conocimiento desde su vértice hacia abajo, descendiendo por un camino seguro de aplicación de relaciones ya conocidas en respuesta a una pregunta del tipo *"¿qué tengo cuando tengo A?"*. Pero la elección de $A_1$, de entre todas las posibles proposiciones que pueden desprenderse de A, depende de B. El proceso regresivo opera en sentido contrario, mirando desde la base de la pirámide hacia su vértice siempre desde la especulación*, tratando de descubrir una relación no conocida en la búsqueda de la respuesta a una pregunta del tipo "¿qué tendría que tener para B?."*

Si embargo, el camino relacional descrito por la conexión entre sentencias, depende a cada paso del contexto, no tiene porqué ser único y es necesario descubrirlo.

**El razonamiento regresivo**

Uno de los ejemplos con los que Polya ilustra la idea de razonamiento regresivo es la demostración clásica de Euclides del teorema que establece que la serie de números primos es ilimitada. La demostración dice:

> "Sea x el mayor número primo. Consideremos el número formado por el producto de todos los números primos menores que x y sumemos a este producto 1:
>
> $$\mathbf{y} = (2.3.5.7... x) + 1$$
>
> El número **y** es mayor que x. Pero **y** o es primo o es compuesto.
>
> Si **y** es primo, entonces x no es el mayor número primo.
>
> Si **y** es compuesto, entonces tiene que tener un divisor mayor que x puesto que por construcción ni x ni ninguno de los primos menores que él puede dividir a **y**, en consecuencia este divisor primo es mayor que x. Luego x no sería el mayor número primo."

La anterior es una demostración de las llamadas "por reducción al absurdo" pero a la vez por construcción, puesto que se ha "fabricado" el número **y**. Este número **y** ha resultado ser muy oportuno pero claramente no ha sido casual sino que ha surgido de recorrer la cadena de deducciones desde los postulados iniciales a los finales y de los postulados finales a los iniciales. Y ello ha ocurrido antes de sugerir la posibilidad de probar con un número concretamente así construido dentro de la enorme gama de posibilidades que tenemos para haber diseñado cualquier otro.

Este proceso aparece en una infinidad de situaciones familiares en matemáticas entre ellas: "la misteriosa elección de expresiones tales como $\varepsilon / 2\sqrt{M}$ en las demostraciones de teoremas de límites" (Dubinsky 1994: 105), y es característico de las demostraciones por construcción.

**1.2. Relaciones y modos de razonamiento**

Toda situación problemática resoluble en el ámbito de las matemáticas precisa establecer relaciones por medio de analogías y metáforas. Esta necesidad se hace patente en ámbitos muy diferentes y constituye una característica que hace de la matemática una ciencia que trata de las relaciones (Alsina y otros 1992) que pueden establecerse entre variables y hechos cuantificables. Inducción, deducción, generalización, particularización, abstracción son procesos que forman parte del razonamiento en matemáticas e implican poner en relación situaciones reales o hipotéticas (Polya 1984; Schoenfeld citado en Davis y Hersh 1989; Guzman 1997).

La forma en que tienen lugar los procesos relacionales que hemos visto operar en los ejemplos anteriores pueden identificarse como procesos en los que las relaciones son establecidas apoyándose en las situaciones de partida, datos o causas, tal como ocurre en la síntesis y en el proceso progresivo, o bien apoyándose en las situaciones finales, resultados o efectos como ocurre en el análisis y en el proceso regresivo.

Ahora bien, encontramos que ambos procesos, que pueden formularse explícitamente o no, no son independientes uno de otro, sino que tanto en el proceso de análisis (Polya 1984: 174), como en los pasos regresivos de demostración, el retroceso continuado de un antecedente a otro sería inútil si no fuera porque en el último antecedente encontrado se reconocen las situaciones o condiciones de partida.

Siendo así que son estas las que permiten encontrar un camino en retroceso fructífero.

De igual forma, el proceso de síntesis como los pasos progresivos de demostración, se establece de forma pertinente sólo cuando las situaciones finales presiden el objetivo del recorrido progresivo.

Desde esta perspectiva, encontramos que ambos procesos se dan también en otras ocasiones no vinculadas con la demostración.

Para referirnos a ellos llamaremos proceso en ***modo directo*** a todos aquellos pasos relacionales en los que las relaciones son establecidas apoyándose en las situaciones de partida, datos o causas. Llamaremos proceso en ***modo inverso*** a todos aquellos pasos relacionales en los que las relaciones se establecen apoyándose en las situaciones finales, resultados o efectos.
En lo que sigue, nos interesamos en el análisis del modo inverso en aspectos diversos de la matemática.

### 1.3. El modo inverso y los modelos matemáticos

> "Un modelo matemático es una especificación y una semi-descripción de un sistema conceptual creado por una interpretación de hechos. Por medio del modelo matemático, las descripciones verbales y no formales de relaciones entre diferentes parámetros pueden ser expresados en términos de relaciones funcionales, y las características de las relaciones pueden ser expresadas como propiedades de la función matemática seleccionada" (Skovsmose, 1994: 104)

Los métodos de resolución de problemas proponen estrategias cuyo fundamento está, de forma genérica, en el establecimiento y descubrimiento de relaciones.

Una de estas estrategias es la analogía que permite relacionar situaciones que, siendo diferentes, están gobernadas por reglas exportables entre ambas. La analogía, actividad que tiene lugar, según el modelo de Polya, en el momento de concebir un plan, puede ser el recurso que propicia el paso que conduce del mundo real al modelo matemático. Desde el punto de vista relacional, consiste en encontrar las relaciones que gobiernan la situación que los datos y condicionantes del problema expresan por similitud con otros casos conocidos.

Encontrar el modelo matemático al que responde una situación problemática, con ayuda o no de la analogía, no es otra cosa que plantear, en un lenguaje formal propio de la matemática, las relaciones descubiertas.

La solución de una situación resoluble matemáticamente supone la identificación de datos y la concreción de la relación que los liga en una expresión o modelo matemático sobre el que aplicar un método resolutivo que genere soluciones al modelo matemático. Sin embargo, en la resolución de problemas la obtención del modelo matemático es prevalente frente a la aplicación eficaz del método resolutivo. En efecto, en ocasiones, es posible resolver situaciones problemáticas sin utilizar una representación formal. Sin embargo, esto nunca es posible sin la determinación fidedigna de las relaciones que expresan las condiciones y los datos.
Problemáticas como:

> "Un club de fútbol está renovando su representación. Hay 12 candidatos para optar a los puestos de presidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas formas distintas pueden quedar establecidos los puestos de representación?"
>
> ó
>
> "Con los 40 alumnos de una clase se desea formar equipos de tres alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Pueden resolverse por procedimientos menos sistematizados, como la obtención del espacio muestral, pero esto no evita la necesidad de descubrir la regla de formación de ternas.

Pero, descubrir las relaciones que gobiernan una situación problemática implica un posicionamiento sobre los datos y el campo conceptual de pertenencia y supone, por tanto, poner en práctica un proceso en modo directo. La incorporación de esta información permite encontrar vínculos y reconocer los operadores que, de forma no explícita, intervienen en el problema.
La obtención de estos vínculos, es decir, el descubrimiento de la relación que el modelo matemático expresa, constituye un proceso en modo inverso en la medida en que generaliza las relaciones abstraídas de los datos.

Algunas de las estrategias propuestas por Guzmán (1997) denotan procedimientos habituales en matemáticas, mas allá de la resolución de problemas. Así, por ejemplo, la estrategia consistente en suponer el problema resuelto, indica un posicionamiento sobre la solución del mismo, punto desde el cuál hay que regresar, indicando un proceso que va de los efectos a las causas, o bien de las situaciones finales a las iniciales:

> "Al suponer el problema resuelto, de la forma práctica que veremos a continuación, aparecen los datos mas cercanos a lo que buscamos y mas fácilmente encontraremos el camino desde dónde estamos a donde queremos llegar" (de Guzmán, 1997: 204)

La asignación de variables es otra manifestación del mismo en tanto que supone un posicionamiento sobre la solución y dar nombre (ya que todavía no se puede dar valor numérico) a las incógnitas involucradas y ello como paso previo a la búsqueda de relaciones.

## 1.4. El modo inverso en situaciones algorítmicas

Algunos procedimientos algorítmicos revelan también la presencia de los modos directo e inverso. Examinemos la estrategia escolar de completar cuadrados para determinar el eje y el vértice de la parábola $y = x^2 – 3x$. Sobre el modelo general $y = a(x - p)^2 – q$ se reconoce el eje en la recta $x = p$ y el vértice en el punto de coordenadas cartesianas (p,q).

El problema se transfiere a un problema algebraico que requiere expresar la ecuación de la parábola dada en la forma general.

Analizamos los pasos que constituyen este objetivo:

a) Suponemos expresa la ecuación de la forma buscada, es decir que la igualdad

$$y = x^2 – 3x = a (x - p)^2 – q$$

Es una condición suficiente.

b) Puesto que $(x – p)^2 = x^2 – 2px + p^2$ debe ser la situación final

c) La comparación con la situación inicial conduce a que

$$a = 1 \text{ y } p = 3/2$$

Es condición necesaria.

d) Nuevamente, la comparación con la situación inicial $y = x^2 – 3x$, indica que es necesario añadir un término independiente para que a) se verifique

e) Es suficiente que $q = –(3/2)^2$

Utilizamos un proceso en modo inverso en los pasos a), b) y en modo directo en los pasos c), mientras en los pasos d) y e) ambos modos coexisten.

Vemos en este cálculo, una continua referencia de la situación de partida a la de llegada y al revés, de forma que el procedimiento queda determinado por las referencias conjuntas y continuas de una a otra.

### 1.5. El modo inverso en situaciones de cambio representacional

El procedimiento anterior proporciona la solución al problema consistente en la obtención de la gráfica de la función parábola de eje la recta x = p y vértice el punto de coordenadas cartesianas (p, q) utilizando un modelo algebraico.

Pero la representación algebraica conduce a la representación geométrica y recíprocamente.
Es decir, mientras el:

a) ejercicio de ida:

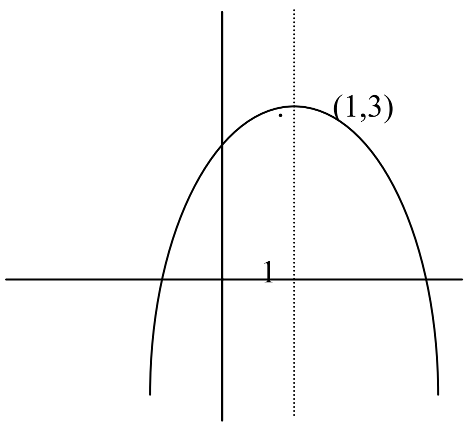
Obtener la gráfica de la parábola de ecuación

$$y = -2x^2 + 4x + 1$$

traslada isomórficamente el modelo algebraico en el modelo geométrico dado por la gráfica de la misma, el

(b) ejercicio de vuelta:

Obtener la ecuación de la parábola:




traslada isomórficamente el modelo geométrico al modelo algebraico.

Ambos problemas tienen contextos diferentes y objetivos diferentes y, por tanto son problemas distintos. Ambos contienen en sus procesos resolutivos respectivos fragmentos en modos directo e inverso que involucran puntos de vista centrados respectiva y simultáneamente en los modelos algebraico y geométrico.

Son semejantes en cuanto a que los datos y conclusiones son explícitos, sin embargo precisan un proceso en modo inverso en el reconocimiento y explicitación del sentido de la equivalencia representacional entre ambos modelos.

Es, sin embargo, notable el hecho de que mientras la obtención del modelo geométrico desde el algebraico es habitual en los procesos de aprendizaje, no lo es tanto, en sentido contrario.

**1.6. Modo inverso y axiomatización**

El proceso constructivo del conocimiento matemático que constituye la axiomatización suele comenzar con la exposición de los axiomas.

El Libro Primero de los Elementos de Euclides, que desarrolla la Geometría Euclidiana comienza, en su primera línea, diciendo:

> "1. Punto es, cuya parte es ninguna.
> 2. Línea es longitud que no se puede ensanchar.
> 3. Los términos de la línea son puntos...."

Pero los axiomas no pueden surgir espontáneamente. La axiomatización, sólo puede surgir desde la contemplación de un panorama general, de las relaciones que allí se dan, con unas leyes de operación determinadas que, finalmente, vistas en sentido contrario, van estableciendo las raíces comunes que hicieron posible la aparición del panorama general. No son primero los axiomas. Los axiomas surgen mas tarde mediante un proceso continuado de "regreso", desde las situaciones finales que, permanentemente está condicionado por el camino de "progreso" que pueda generar.

Es en la búsqueda de los axiomas donde identificamos este proceso en modo inverso en cuanto que se establece desde los efectos, las propiedades conocidas o intuidas, hacia sus causas o condiciones suficientes para las mismas.

### 1.7. Modos directo e inverso y construcción de conceptos y esquemas

La construcción de conceptos involucra elementos de tipo lógico inferencial. Para Wartofsky (1987:33) una parte de la lógica es el análisis de las formas de inferencia correcta; otra, relacionada con ella, se ocupa de la definición, o sea de precisar los significados y mostrar cómo unos conceptos se relacionan con otros o de cómo un concepto se define en función de otro. El establecimiento de un concepto a través de una definición surge cuando media una abstracción que traslada una situación reflejada en una infinidad de casos particulares al rango de una situación más general. Este procedimiento precisa de extraer todo lo que pudiera haber de común entre una infinidad de casos relativos a un mismo aspecto desechando todo lo que pueda ser circunstancial o irrelevante, lo que Skemp (1980) denomina "ruido" en referencia a todo aquello que no es relevante y distorsiona la idea central.

Las clasificaciones son un caso de proceso en modo directo.
Por ejemplo, la clasificación de los triángulos según sus lados en: equilátero, isósceles y escaleno. Dado un triángulo, por verificación sobre los elementos asignamos la clase a la cual corresponde. Sin embargo, la caracterización de elementos asociada a esa clasificación implica un proceso en modo inverso. En este caso, dado un triángulo de la clase equilátero, éste tiene los tres lados iguales, pero eso implica que también tiene dos lados iguales por lo que también pertenece a la clase de los isósceles. Es necesario añadir a los datos las características de clasificación adoptadas.

### 1. 8. Modos directo e inverso y equivalencia proposicional

Todas las problemáticas anteriores, tanto las que suponen procesos en modo directo como en modo inverso, tienen un denominador común: consisten en procedimientos de generación, a partir unas proposiciones verdaderas, de nuevas proposiciones verdaderas sobre las cuales se alcanza una particular sensación de seguridad y confianza, consecuencia del carácter apodíctico de las proposiciones matemáticas que se generan a través de la lógica inferencial que le es propia.

Este proceso de generación de nuevas proposiciones o terceros enunciados (Duval 1999) que caracteriza el razonamiento deductivo se realiza continua y simultáneamente desde la premisa a la conclusión y desde la conclusión a la premisa.

Pero el instrumento que permite esta operación es la lógica inferencial algunos de cuyos principios son patentes en los ejemplos mencionados.

En la demostración del teorema de Euclides

- se desecha la posibilidad de que la proposición pueda ser cierta recurriendo a la ley de contradicción: “no puede ocurrir que x sea el mayor número primo y a la vez que x no sea el mayor número primo”.
- Aparece el uso de la ley del tercio excluso: "**y,** o es primo o es compuesto".
- El silogismo hipotético aparece cuando se razona:"si **y** es compuesto, entonces tiene un divisor. Si tiene un divisor, éste ha de ser mayor que el número x. Luego si **y** es compuesto, su divisor ha de ser mayor que x".
- Ley de inferencia "modus ponens" cuando se razona: "todo número producto de otros varios positivos distintos de 1, es mayor que cada uno de los factores. El número **y** es producto de otros varios distintos de uno. Luego el número **y** es mayor que todos ellos".
- La particularización: "el número **y** es mayor que el x", se basa en el principio aristotélico de que todo lo que es cierto para el total lo es para la parte.
- El aspecto cuantificacional aparece de forma implícita en expresiones como: "sea x el mayor número primo", lo cual equivale a decir:

"supongamos que existe un número tal que es el mayor número primo posible."

Esta lógica que es necesario aplicar en los razonamientos matemáticos, que viene caracterizada por las leyes de la lógica clásica, forma parte del modo de razonar que el ser humano construye a través de su desarrollo.

La equivalencia proposicional permite sustituir una proposición: **p** por otra equivalente: **q**. Esto significa que **p** y **q** son respectivamente necesarias y suficientes cada una para la otra.

El tránsito de una proposición a otra equivalente es habitual en el razonamiento matemático. Esta equivalencia permite el uso indistinto de las siguientes definiciones de número divisor:

(1) "Un número **x** es divisor de un número **y**, cuando existe otro número natural **q** tal que **y** = **q.x**",

(2) "Un número **x** es divisor de un número **y** cuando el resto de la división de **y** entre **x** es cero",

(3) "Un número **x** es divisor de un número **y** cuando al dividir **y** entre **x** el cociente es un número natural",

(4) "Un número **x** es divisor de un número **y**, cuando **y** es múltiplo de **x**".

Es posible establecer un procedimiento relacional bidireccional a través de una cadena de deducciones que garantiza la equivalencia de dos cualquiera de ellas, es decir que si i, j = (1), (2), (3), (4)

$$(i) \Rightarrow (j)$$

y además

$$(i) \Leftarrow (j)$$

Completando un proceso que puede recorrerse en cualquiera de los dos sentidos.

En el paso (i) $\Rightarrow$ (j), se trata de mostrar que (j) es necesaria para (i) y todo lo que se dice en (j) está dicho en (i), mientras que en el paso (i) $\Leftarrow$ (j) hay algo nuevo, no explícito, que se añade y que constituye un proceso en modo inverso: el paso (1) $\Leftarrow$ (2) precisa utilizar las relaciones no expresas:

Dividendo = Divisor x Cociente + Resto, y que
cualquiera que sea el número a, se tiene: $a + 0 = a$.

Algunas equivalencias no son tan inmediatas. Consideremos el ejemplo del concepto de aplicación inyectiva.

(1) "f: A $\rightarrow$ B es inyectiva cuando para todo x, y de A si x es distinto de y, entonces f(x) es distinto de f(y)".

No obstante usamos indistintamente la siguiente formulación para el mismo concepto:

(2) "f: A $\rightarrow$ B es inyectiva cuando para todo x, y de A, si f(x) es igual a f(y), entonces x es igual a y"

Lo que está justificado por la equivalencia formal de las proposiciones

$$p \Rightarrow q, \text{ y}$$
$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

que las expresiones lingüísticas (1) y (2) ocultan.

## 1.9. A modo de resumen

Hemos identificado problemáticas en modo directo y en modo inverso en los siguientes casos:

| **Situaciones** | **Proceso en modo directo** | **Proceso en modo inverso** |
|---|---|---|
| Resolución de problemas | Acciones involucradas en la aproximación y familiarización con los datos y/o búsqueda de soluciones | Acciones involucradas básicamente en la determinación del modelo matemático |
| Métodos demostrativos progresivo-regresivo | Obtención de condiciones necesarias | Obtención de condiciones suficientes |
| Algorítmicas | Aplicación | Descubrimiento |
| Intercambios representacional | Práctica y comprensión del cambio | Reconocimiento y explicitación del sentido de la equivalencia representacional |
| Métodos demostrativos por construcción | Tratamiento inductivo | Creación del objeto solución |
| Axiomatización | Exploración | Enunciación de axiomas |
| Construcción de conceptos y esquemas | Clasificación y aplicación de relaciones de clasificación y jerarquías | Caracterización y establecimiento de relaciones |
| Equivalencia proposicional | Justificación de condiciones necesarias | Obtención justificaciones de condiciones suficientes |

Este continuo tránsito entre posiciones progresivas y regresivas, entre causas y efectos, conforma una dualidad bidireccional que necesita darse de forma conjunta y remite a la concepción Piagetiana de elaboración del conocimiento en lo que se refiere a la necesidad de presencia de una operación (en sentido genérico) y su opuesta, de forma simultánea, ya sea para: aplicar-descubrir relaciones, buscar equivalencias o razonar progresiva-regresivamente.

### 1.10. Modos directo e inverso y Educación Infantil

Los diversos ámbitos del conocimiento matemático sobre los que hemos visto operar los modos directo e inverso no son de aplicación en la etapa de Educación Infantil.

Sin embargo, con ligeras variaciones de contexto, todos ellos representan situaciones que el actual alumno de preescolar tendrá que afrontar en su futura formación matemática. La Educación Infantil debe proporcionar el soporte que las demandas del conocimiento matemático va a requerir en la medida posible.

El niño de esta edad no puede afrontar, por razones evolutivas, planteamientos con operaciones formales. El alumnado de Educación infantil no se enfrenta a situaciones en que las inferencias se producen en la forma verbal teórica de la lógica simbólica con uso de condicionales y frases complicadas. Por el contrario, la lógica inferencial que implican afecta a un universo proposicional simple, del que sí forman parte expresiones como “y”, “ó”, “no” incluso “entonces”. Sin embargo, las leyes de inferencia lógica, no dependen de la sencillez de las proposiciones sobre las cuales se aplican. Sobre este universo proposicional simple, tiene lugar el desarrollo de las destrezas de razonamiento.

Estamos interesados en estudiar como se construyen ambos procesos directo e inverso, a través de su manifestación lógica inferencial sobre tareas apropiadas para la Educación Infantil relativas a procedimientos de construcción del conocimiento matemático, que implican códigos y símbolos.

## 2. Construcción del pensamiento relacional

Dreyfus enfatiza que es necesario poner el acento sobre los procesos más que sobre los contenidos para capacitar al estudiante en el aprendizaje de las matemáticas abstractas de forma más independiente y comprensiva:

> "Descubrir relaciones, por ejemplo, está a menudo considerada como la forma más efectiva para que los niños aprendan matemáticas..." Dreyfus (1994:40)

Consideramos importante, pues, enmarcar los planteamientos psicológicos de enseñanza / aprendizaje que nos permitan reconocer cómo el alumnado accede al conocimiento matemático y qué papel juegan los dos procesos en modos directo e inverso en esa construcción.

El desarrollo vertiginoso que la Psicología experimentó durante el pasado siglo han conducido a un mejor conocimiento de la forma en que se construye el conocimiento matemático y situado al niño de la etapa preescolar como digno candidato a los beneficios de la vida cultural mediante su integración en la escuela. En algunos casos el papel de la educación cognitiva temprana es vista con una finalidad mas preventiva que educativa en el sentido de que su objetivo primordial es poner en manos de los niños herramientas básicas de aprendizaje, antes incluso, de que esas herramientas les sean necesarias para su tarea escolar (Haywood, 1996, citado por Ortiz 2002:377).

Es en 1908, con la publicación de los resultados de la "Enquête de L'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens" por Fehr, cuando se inicia el análisis de los modos de pensamiento matemáticos, introduciendo el punto de vista de la Psicología, que indicaba que las dificultades no siempre provenían de la lógica como se asumía antes del siglo XX. Este primer trabajo provocó la conferencia de Poincaré sobre "L'invention mathématique" cuyas ideas fueron retomadas y tratadas en mayor profundidad por Hadamard en 1945 en su obra sobre

Psicología de la invención que versa sobre los modos de proceder de matemáticos profesionales ante una situación matemática (Beth y Piaget, 1961: 96).

La primera aproximación a la construcción del conocimiento matemático tiene lugar a comienzos del siglo XX cuando Thorndike propone un principio general de aprendizaje de la aritmética, según el cuál la instrucción debe basarse en la enseñanza directa y en la fragmentación del currículo en un número de partes aisladas para ser aprendidas con el esfuerzo apropiado. Durante mucho tiempo, este fue el modelo predominante en la enseñanza de la aritmética. Posteriormente este modelo es acogido por B.F. Skinner y actualizado recientemente por R. Gagné constituyendo la conocida teoría conductista (English, 1995). Skinner, creador de la llamada teoría Conexionista (Maza, 1989: 47) mantiene que la construcción de un conocimiento es el resultado de la generalización de los vínculos creados entre determinados estímulos y sus respuestas. Propugna que el verdadero objeto de aprendizaje es el vínculo y no los conceptos en sí que resultan ser una consecuencia a la que se llega a través de un proceso que comienza con la discriminación y el establecimiento de características, relevantes y no relevantes, sobre una variedad de estímulos que, finalmente, crean un vínculo con una respuesta que el niño ha de generalizar.

El progresivo movimiento en educación que tuvo lugar durante los años 1930 a 1940 enfatizó el "aprender para vivir" y condujo a la aparición de la teoría cognitivista. Hubo un cambio en el cual la velocidad y la exactitud fueron el criterio para medir el aprendizaje. Algunos educadores como Wheeler recalcaban el aspecto de utilidad social del aprendizaje de la aritmética manteniendo que el niño aprende todo lo que de matemáticas requiere a través de la experiencia más que de la instrucción sistemática. Este planteamiento no es compartido por W. Brownell, por no considerarlo eficaz y enfatizan la importancia de enseñar la estructura de la matemática manteniendo que:

> “El sentido debe ser buscado en la estructura, la organización y la relación que internamente el sujeto hace” (Brownell 1945: 481 citado por English 1995: 4).

Lo importante es impartir a los estudiantes la estructura de la aritmética, esto es: las ideas, principios y procesos de las matemáticas. El objetivo del aprendizaje es ahora el entendimiento inteligente sobre relaciones numéricas y la comprensión tanto sobre su significación matemática como sobre su significación práctica. Sin esta comprensión, la práctica puede conducir al estudiante a ver las matemáticas como un cúmulo de ideas inconexas y de hechos independientes.

La teoría Gestaltista aparece como una reacción a las doctrinas estructuralistas y conexionistas. La palabra Gestalt significa organización total en contraste con una colección de partes. Aprender para estos psicólogos es un proceso de identificar relaciones y desarrollarlas internamente. Los Gestaltistas centran su interés en el desarrollo de procesos complejos relativos a la resolución de problemas y la naturaleza del pensamiento.

En esta perspectiva, cuando la solución a un problema no es inmediatamente evidente se produce una reorganización interna tendente a resolver el conflicto cuya solución sólo puede aparecer cuando los componentes del problema se perciben en su función correcta con relación a un todo (Resnick 1991).

Esta tendencia no llegó realmente a desarrollar una teoría del comportamiento o la cognición. Fundamentalmente, se centra en descripciones de fenómenos que no sirven como base para construir una teoría aunque sí evidencian la falta de adecuación de los modelos estructuralista y conexionista. Un prominente Gestaltista: Max Wertheimer acuño el término “pensamiento productivo” y produjo gran cantidad de recursos para fomentar el pensamiento en clase, algunos de ellos son importantes en la educación matemática de hoy, por ejemplo, los estudiantes son guiados a determinar la fórmula del área de figuras planas deduciéndola de la de algunas otras figuras conocidas y no siguiendo reglas dadas.

Los años sesenta fue el período en que tiene lugar el cambio más importante en el currículo de matemáticas como consecuencia del análisis crítico en la educación de matemáticas en América durante los años precedentes. Así se comienza a considerar esencial que los estudiantes tengan un conocimiento de la estructura de la matemática pensando que ello capacitará para reconstruir los hechos matemáticos y no olvidarlos.

La enseñanza de la estructura de la matemática pretende sobre enfatizar el aspecto lógico lo que se hizo evidente con la inclusión del tratamiento de la teoría de conjuntos, las leyes de la aritmética y también la geometría euclídea clásica. La enseñanza explícita de la notación y álgebra de conjuntos, y las leyes generales de la aritmética son, por su propia naturaleza abstractas. Las nuevas ideas matemáticas fueron presentadas en un formato espiral donde los conceptos fueron previamente pensados y luego revisados al mas alto nivel para después ser extendidos y reelaborados.

Se producen reacciones diversas a la idea de introducir para los niños pequeños los conceptos que formalmente están reservados para la escuela secundaria y posteriores niveles. Uno de los grandes defensores de esta corriente fue Jerome Bruner defensor de la enseñanza por descubrimiento y de la introducción a los niños de conceptos complejos presentados de forma simple. Junto a él, Zoltan Dienes, es reconocido, sobre todo, por haber desarrollado material concreto y juegos que constituyen experiencias de aprendizaje cuidadosamente estructuradas, y por los principios psicológicos que subyacen en el uso de estas ayudas. Muchas de las ideas de Dienes son todavía aplicadas hoy. Defiende el “aprendizaje en círculo” según el cuál el niño progresa como en un modelo cíclico a través de series de actividades encadenadas que van de lo concreto a lo simbólico.

La hipótesis constructivista se fundamenta en la idea de que el aprendizaje se genera a través de la actividad y el conocimiento preexistente. Sostiene que el conocimiento conceptual no puede transferirse como un producto elaborado de una persona a otra, sino que debe ser construido activamente desde la propia experiencia y no recibido pasivamente del entorno por el sujeto que aprende. El niño piensa por sí solo de un modo independiente y espontáneo como resultado de su esfuerzo por adaptarse al mundo que se le presenta. Cuando nuevas ideas inciden sobre otras ya existentes, se crea un conflicto, una situación de desequilibrio a la que el niño reacciona buscando un efecto como de contrapeso, que Jean Piaget llamó "equilibración".

Otras perspectivas cognitivas centradas en la interacción socio-cultural ponen el acento en la mediación del lenguaje para la construcción del pensamiento. Partiendo del hecho de que un sujeto nace en un medio cultural rodeado de símbolos estructurados convencionalmente, se concibe la idea de que puede descubrirlos y comprenderlos al interactuar con los demás. Es decir, el niño puede acceder a la conceptualización a través de operaciones simbólicas con herramientas culturales, tales como el lenguaje oral, la sucesión numérica o los utensilios propios de cada cultura. De este modo, la utilización de estos símbolos facilita el acceso a conceptualizaciones lógicas cada vez mas avanzadas. Al utilizar símbolos en contextos comunicativos significativos tiene la posibilidad de descubrir relaciones y significados que permitirán avanzar en su desarrollo matemático. La corriente derivada de la psicología de Vigotsky es la que mas fuertemente preconiza este papel de la mediación en el desarrollo de las conceptualizaciones. El dominio de símbolos es considerado un elemento esencial para el avance de la inteligencia por tanto, desde esta concepción, el niño no podrá formar un concepto si previamente no dispone del recurso lingüístico que le permita identificar sus características (D'Angelo en Sainz 1998: 129). Los recursos lingüísticos son, desde esta perspectiva, elementos necesarios.

Globalmente, las teorías psicológicas de construcción del conocimiento pueden ser agrupadas entorno a dos grandes tendencias: la teoría de la absorción y la teoría cognitiva (Baroody, 1988). Cada una de ellas refleja una creencia distinta acerca de la naturaleza del conocimiento, cómo se adquiere éste y qué significa saber:

a.- La teoría de la absorción nuclea todas las propuestas de origen experimentalista que consideran que el conocimiento se mide por la cantidad de datos memorizados y se imprime en la mente desde el exterior a partir de las acciones que hacen los demás para que haya aprendizaje. En síntesis, el aprendizaje es un proceso consistente en interiorizar o copiar información a través de la reiteración de determinadas actividades. El fin de la instrucción es ayudar a los niños a adquirir los datos y los conocimientos. Trata la matemática como un producto terminado que el niño debe absorber mediante la ayuda de la enseñanza.

b.- La teoría cognitiva aduce que el conocimiento significativo no puede ser impuesto desde el exterior sino que debe elaborarse desde dentro. La construcción tiene lugar activamente desde el interior de la persona mediante el establecimiento de relaciones nuevas y lo que ya se conoce y entre piezas de información conocidas pero aisladas previamente. Desde este punto de vista, el objetivo de la instrucción es ayudar a los niños a construir una representación mas exacta de las matemáticas y desarrollar pautas de pensamiento cada vez mas convencionales. En esencia, la enseñanza de las matemáticas consiste en traducirlas a una forma que los niños puedan comprender, ofrecer experiencias que les permitan descubrir relaciones y construir significado, y crear oportunidades para desarrollar y ejercer el razonamiento matemático y las aptitudes para la resolución de problemas. (D'Angelo, en Sáinz 1988:126).

### 2.1. Modos directo e inverso y operaciones reversibles

Los procesos en modo directo e inverso de los que hemos hablado son formas de razonamiento que tienen gran semejanza con los procesos directo e inverso constitutivos de la reversibilidad de las operaciones estudiada por Piaget. De hecho son éstos procesos los que están inspirando nuestro estudio y por ello vamos a conceptualizarlo.

Piaget asume la naturaleza de la experiencia lógico-matemática diferenciada de la experiencia física (Piaget 1961). Esta distinción, que es esencial, se encuentra en que en tanto la experiencia física recae sobre los objetos, la experiencia lógico-matemática recae sobre las acciones que el sujeto ejerce sobre los objetos de modo que la adquisición de conocimiento resulta de una abstracción que procede de estas acciones.

Se postula que todo aprendizaje posibilita la construcción de esquemas de conocimiento, esquemas que recogen la situación de relación o concatenación de saberes que el sujeto tiene integrados en un momento dado de su desarrollo a los cuales se da el nombre de esquemas de acciones y define como:

> "Un conjunto estructurado de caracteres generalizables de esta acción, es decir, los que permiten repetir la misma acción o aplicarla a nuevos contenidos" Piaget (1961: 251).

La experiencia psicológica recae sobre el desarrollo causal o introspectivo de las acciones, en tanto la experiencia lógico-matemática recae sobre los esquemas de las acciones. Estos esquemas de conocimiento están sometidos a continuos cambios a causa de los nuevos conocimientos que el individuo integra, fundamentalmente, a través de la experiencia y suponen desequilibrios y contradicciones que, por otra parte, no son inherentes a la lógica del sujeto.

El objetivo último de esta estructuración es siempre, el logro de un conocimiento en equilibrio, (lo que se consigue mediante los llamados procesos de asimilación y acomodación) componiendo un esquema cíclico en el cual todas sus partes componentes pueden recorrerse en cualquier sentido.

Desde un punto de vista epistémico, en lo que se refiere a constitución de las estructuras cognitivas, la negación juega un papel crucial en la asimilación y acomodación de estructuras (Piaget 1975:16) puesto que la diferenciación de dos estructuras como tales reposa sobre las negaciones, es decir, sobre todo aquello que no es en una dada estructura S1, y sí es en otra S2, de tal modo que la integración de ambas en una ulterior y total estructura S implica nuevamente a las negaciones.

El ajuste progresivo entre asimilación y acomodación, se puede efectuar de forma espontánea e intuitiva; pero “en la medida en que el sujeto busca una regularidad, es decir, tiende a obtener una estabilidad coherente, se convierte en necesario utilizar las exclusiones de forma sistemática, y sólo asegura el equilibrio una correspondencia exacta de las afirmaciones y negaciones”

> “En el dominio lógico-matemático, el equilibrio es máximo, puesto que una verdad adquirida por demostración se conservará indefinidamente: no constituye un punto de parada, puesto que es una estructura acabada puede siempre dar lugar a exigencias de diferenciación en nuevas subestructuras o a integraciones en estructuras más grandes” Piaget (1975: 36).

El aspecto constructivo queda expresado por el funcionamiento de interacciones entre entidades que se pueden esquematizar en la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \longleftarrow\!\!\!\text{———— OS ————}\!\!\dashv \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ (\text{Obs. S} \rightarrow \text{Coord. S}) \leftrightarrow (\text{Obs. O} \leftarrow \text{Coord. O}) \\ \vdash\text{———— SO ————}\uparrow \end{array}$$

donde Obs.S se refiere a los observables relativos a la acción del sujeto, Coord. S son las coordinaciones inferidas de las acciones (u operaciones) del sujeto; Obs. O son los observables relativos a los objetos y Coord. O las coordinaciones inferidas de las relaciones entre objetos y el signo ↔ denota un equilibrio global, durable o momentáneo (Piaget, 1975: 59).

El esquema anterior es momentáneo o relativo a un estado concreto, digamos: n que, con la incorporación de nuevos observables produce un movimiento cíclico entre sus componentes en el orden:

Obs. O $\rightarrow$ Obs. S $\rightarrow$ Coord. S $\rightarrow$ Coord. O $\rightarrow$ Obs. O $\rightarrow$ etc.

que los propios mecanismos de equilibración incorporan a un nuevo esquema del tipo anterior pero relativo a un nuevo estado, digamos (n+1), que modifica el anterior incorporándolo.

> *"Así, pues, llamamos* ***abstracción reflexiva*** *a la reconstrucción de una estructura anterior en un plano superior en el que se integra, posibilitando una regresión sin fin" Piaget (1961: 217.*

Esta abstracción reflexiva a partir de las acciones y operaciones, difiere de la abstracción a partir de los objetos percibidos que Piaget (1961: 203) llama "***abstracción empírica***" en que la primera, es necesariamente constructiva, en tanto que la "abstracción empírica" consiste simplemente en obtener de una clase de objetos sus caracteres comunes (por medio de una combinación de abstracción y generalización).

Entre ambas, Piaget encuentra un tercer tipo de abstracción a la que llama ***abstracción seudo-empírica*** que surge de las acciones del sujeto sobre los objetos (Piaget 1985: 18-19). Por ejemplo, la observación de una correspondencia 1-1 entre dos conjuntos de objetos que el sujeto ha colocado alineadamente (Ibíd.: 39). El conocimiento en esta situación puede ser considerado empírico porque ha sido creado con objetos, pero es su configuración en el espacio y las relaciones que la gobiernan las que interesan y, estas son debidas a la acción del sujeto. Comprender que esta es una relación 1-1 entre dos conjuntos es el resultado de construcciones internas hechas por el sujeto.

La abstracción reflexiva permite obtener de un sistema de acciones u operaciones de nivel inferior ciertos caracteres en los que asegura la reflexión (en el sentido casi físico del término) sobre acciones u operaciones de nivel superior (Piaget 1961: 203). Está constituida por lo que Piaget llama coordinaciones generales de las acciones, su fuente es el sujeto y es completamente interna y producto de la actividad autorreguladora del sujeto. Piaget usa como ejemplo el caso de la multiplicación aritmética a partir de la adición que surge como coordinación de acciones sobre un objeto: la adición que por su parte ya ha constituido su propio esquema de conocimiento en equilibrio momentáneo por efecto de la reversibilidad, de un nivel: n sobre el que la abstracción reflexiva actúa transformándolo en objeto sobre el que ejecuta sus acciones para nuevamente constituir un nuevo esquema que ha de reequilibrarse por acción de la reversibilidad de pensamiento en una espiral sin fin y, retrospectivamente, sin un origen nítido.

Este cambio de naturaleza que supone la transformación de una acción u operación en un objeto de nueva, diferente y más extensa acción, es lo que Piaget (1985: 49) llama ***encapsulación*** (Dubinsky 1994:95-123). Ello comporta la formación de "coordinaciones de coordinaciones" y "operaciones de operaciones" debidas a actividades reflexivas llevadas a cabo sobre el esquema.

Más concretamente, el paso entre distintos estados: n, (n+1), (n+2), etc. tiene lugar en el pensamiento matemático mediante abstracciones puramente reflexivas, donde las actividades del sujeto (Obs. S) se confunden cada vez mas con la construcción misma de las nuevas coordinaciones. De modo que el modelo final se reduce a un paso de las coordinaciones de rango n a las de rango n+1 con identidad entre las coordinaciones de objetos y de las acciones u operaciones.

El desequilibrio introducido sobre el esquema de nivel n por una nueva observación (n+1), tiende a equilibrarse de acuerdo con una conducta que, para el caso de las situaciones lógico-matemáticas, consiste en anticipar las variaciones posibles, las cuales pierden, en tanto que previsibles y deducibles, su carácter de perturbaciones y vienen a insertarse entre las transformaciones virtuales del sistema Piaget (1975: 73). Cada transformación puede ser enteramente anulada por su inversa o devuelta por su recíproca y forman parte de un mismo sistema en el cual todas las transformaciones son solidarias. El sentido de la compensación es el de una simetría inherente a la organización del sistema, y no de una eliminación de perturbaciones. Esta es la caracterización precisa de las estructuras en juego. Su simetría equivale a una compensación completa y su cerramiento elimina también toda contradicción proveniente tanto del interior como del exterior.

Esta necesidad intrínseca sobrepasa el nivel de las simples resultantes entre factores que son opuestos pero a la vez contingentes y recibe el nombre de ***reversibilidad***.

Piaget distingue dos tipos de reversibilidad: la reversibilidad empírica (también llamada revertibilidad) y la reversibilidad operacional (reversibilidad). La diferencia entre ambas es que la reversibilidad empírica no es mas que una vuelta al punto de partida, centrada en el resultado de la acción y sin implicar la identidad de los pasos recorridos. Por el contrario la reversibilidad operacional es una vuelta que puede tener lugar en el pensamiento, en la que los pasos son idénticos, siendo la única diferencia sus direcciones opuestas (Vuyk 1984: 245).

Los tipos de sistemas a los que Piaget aplica el modelo de equilibrio son sistemas de acciones que el sujeto lleva a cabo en medio del mundo de objetos y acontecimientos y, por tanto afectan a relaciones de muy diversa naturaleza que generan dos formas de reversibilidad: por inversión y por reciprocidad.
Corresponde a las operaciones de los agrupamientos aditivos de clase la reversibilidad por inversión y consiste en la presencia de una operación que compuesta con otra anula su efecto, es decir, que cada operación junto con su inversa constituyen, en realidad una sola operación de la cuál cada una de ellas es un aspecto de la misma y así la suma (T) y la resta ($T^{-1}$) son una única operación A en cuanto que a+b = c puesto que c = b-a y sólo por esta razón. De este modo podríamos definir la operación A = ($T$ $T^{-1}$) como constituyentes de un mismo y único esquema de conocimiento.

La reversibilidad por reciprocidad consiste ya sea en permutar los términos de una relación como $A<B$, o en invertir la relación $<$ en $>$. Esta es la reversibilidad propia de los sistemas aditivos de relaciones y tiene lugar de tres formas diferentes R, R’ y R’’ consistentes en:

$$R \quad (A<B) = B<A$$
$$R' \quad (A<B) = A>B$$
$$R'' \quad (A<B) = B>A$$

En el caso de estructuras de conocimiento mas complejas, como los agrupamientos multiplicativos de clases consistentes en clasificaciones de objetos según dos o más criterios a la vez, o bien clasificaciones de objetos entre los cuales hay dos o varios sistemas de relaciones a la vez, la reversibilidad está caracterizada por ambas formas: inversión y reciprocidad a la vez (Vuik, 1961: 191).

Este procedimiento fundado en el equilibrio como principio fundamental regiría en la construcción del conocimiento con independencia de la edad biológica o desarrollo.

**2.2. Reversibilidad: procesos componentes**

El concepto de reversibilidad en la obra de Piaget no queda definido con claridad.

> “En general parece significar cosas algo distintas en contextos diferentes sin que Piaget haga un intento de resolver las diferencias mediante una definición única e inequívoca” (Flavell 1982: 450).

Este aspecto es analizado en gran número de sus experimentos pero es en las pruebas específicamente sobre reversibilidad donde se identifican sus dos procesos componentes.

**La prueba numérica**

El experimento numérico (Piaget 1979:39) diferencia claramente, incluso en el tiempo, dos problemas a los que denomina proceso directo y proceso inverso.
En el primer caso, partiendo de un número n, se pide al niño que efectúe paso a paso las siguientes operaciones:

1º.- sumar 3 a n.

2º.- multiplicar por 2 el resultado de 1º

3º.- sumar 5 al resultado de 2º.

Obteniendo un número n'.
En este problema, por tanto, todas las reglas se van explicitando y aplicando para terminar obteniendo un nuevo número como efecto cuyas causas son las operaciones efectuadas.

El proceso inverso consiste en: conociendo el número n', se pide al niño que averigüe cual fue el número n de partida teniendo en cuenta que fue calculado haciendo las mismas operaciones que antes.
Es decir, ahora sabiendo que el efecto de aplicar las operaciones fue el número n', es necesario determinar el número n causante del resultado.

La determinación de n desde n' precisa reconstruir el camino de n hacia n' en orden que, siendo inverso, involucra en sí mismo otros procesos a su vez inversos, así el primer paso en la operación inversa será el último de su directa pero, no exactamente puesto que este paso consiste en una operación formal: la suma (+5) que, a su vez admite una inversa: la resta, y es esta la que opera en el proceso inverso. Lo mismo podemos decir del paso 2º que en la inversión del orden de las operaciones seguirá siendo el segundo pero consiste no en la operación que contiene (x2) sino en la inversa de esta (/2). Por último el tercer paso del proceso inverso, es el primero del proceso directo y como en los casos anteriores consiste en una operación (+3) así mismo inversible (-3).

Es decir, la operación inversa y su directa tienen la siguiente relación:

| Directa | Inversa |
|---|---|
| 1º.- sumar 3 a n. | 1º.- restar 5 a n’ |
| 2º.- multiplicar por 2 el resultado de 1º | 2º.- dividir entre 2 el resultado de 1º |
| 3º.- sumar 5 al resultado de 2º | 3º.- restar 3 al resultado de 2º |

Vemos en este ejemplo el campo de aplicación de la reversibilidad que opera a un doble nivel. Por una parte: el nivel más bajo o primero relativo a las operaciones, donde cada una es invertida en relación con ella misma, esto es la suma se invierte en resta, la multiplicación en división, por otra parte: hay una inversión del proceso del que las operaciones anteriores forman parte, así vemos como la primera operación en el problema directo, es la última en el inverso, etc.

El proceso directo se apoya en el dato de partida: el número n, las reglas de operación son explícitas, sólo es necesario aplicarlas al número n para conseguir la solución: el número n’. Por el contrario, en el proceso inverso, las reglas no se expresan, el dato de partida es el número n’ y lo es en tanto que resultado o efecto de la aplicación sobre otro de una serie de operaciones. Hay en el problema inverso un aspecto condicional, en sus datos -que no está en el problema directo- que implica en su solución un procedimiento relacionado con el propio procedimiento del problema directo -sin que lo haga explícito- que es su inverso, en el caso del ejemplo inverso en relación al proceso utilizado pero también inverso en cada una de las operaciones concretas intervinientes: suma por resta y multiplicación por división.

***Identificamos en esta prueba los dos procesos que hemos distinguido en el campo matemático como de modo directo e inverso.***

El proceso inverso, puede ser asumido como un problema escolar de cálculos algorítmicos. Los siguientes enunciados son un ejemplo:

> "La edad de un padre es 11 años más que el doble de la edad de su hijo. Si el padre tiene 69 años ¿Cuántos años tiene el hijo?".

> "La edad de un padre es 5 años más que el doble mas tres de la edad de su hijo. Si el padre tiene 69 años ¿Cuántos años tiene el hijo?".

Ambos conservan la similitud con el proceso inverso de la prueba Piagetiana con la única diferencia del contexto de referencia. En el caso de estos problemas las relaciones están implícitas mientras son mucho más explícitas en el caso de la prueba Piagetiana, especialmente por su vinculación en el tiempo con su problema directo asociado.

El proceso directo igualmente puede representar una actividad escolar de cálculo algorítmico por ejemplo:

> "Un chico tiene 10 años ¿Cuál es la edad de su padre si este tiene 5 años más que el doble más tres de los años de su hijo?"

La diferencia de este último problema con el proceso directo de la prueba Piagetiana está en el contexto que pone de relieve la situación, sin embargo, este probablemente sería considerado menos interesante por muchos profesores de matemáticas debido a su carácter directo y explícito.

Pero, la relación operacional que este problema presenta, se prolonga hacia otros campos matemáticos en los cuales éste es tratado como objeto.

Este es el caso, por ejemplo, del problema de interpolación enunciado de la siguiente forma:

"Encontrar la relación que liga a los números de la columna 1 con los números de la columna 2

| Columna 1 | Columna 2 |
|---|---|
| 1 | 13 |
| 2 | 15 |
| 3 | 17 |
| 4 | 19 |

........."

El papel de los número origen (columna 1) o de los números resultado (columna 2) es indistinto, ninguno es anterior al otro y en cambio ambos forman parte de un único problema que vincula los números en columna 1 con los de columna 2, en cualquier sentido. Observamos, en este ejemplo, que el problema que constituye la prueba piagetiana, se convierte aquí en objeto.

El reconocimiento de la operación en ámbitos o situaciones implícitas, supone el descubrimiento de la misma allá donde esté aplicada e implica los procesos de tipo inverso.

Tenemos así la presencia de la reversibilidad a nivel de operaciones y a nivel de operaciones de operaciones formando parte de un proceso equivalente en este contexto al de la encapsulación.

**Las pruebas no formales**

Para los niños más pequeños Piaget plantea una prueba con dos experimentos consistentes en armar y desarmar una lámpara y un cubo. En el caso de la lámpara las piezas necesitan un orden de colocación secuencial. No así en el caso del cubo en el que las piezas resultan intercambiables. En este último caso, el más sencillo, la inversión es una inversión del proceso únicamente. Igualmente, en este caso, la prueba se fragmenta en dos también separadas y diferentes: una de armar y otra de desarmar.

En el caso de la lámpara sin embargo hay también un doble proceso de inversión: no sólo hay que armar y desarmar sino que el orden en que se desmontan las piezas es inverso al orden en que se montan, por tanto, aquí se une una inversión propia de cada pieza particular en el sentido de que la pieza desmontada en i-ésimo lugar entre las n que componen la totalidad, es usada en el proceso de armado en el lugar (n-i)-ésimo complementario del anterior. Así la primera pieza que se quita es la última que se pone y recíprocamente.

El interés desde el punto de vista de la reversibilidad en todas las pruebas está en el vínculo que el sujeto establece entre un proceso y otro.

*De acuerdo con esta concepción es necesaria la equilibración, es decir, la reversibilidad de pensamiento, en de todos los estadios operacionales previos a los formales y, por tanto es necesario que el sujeto pueda resolver sus dos problemas integrantes entre operaciones no formales.*

*Las pruebas de reversibilidad ponen de manifiesto que, si bien el niño es capaz, en diversas medidas según la edad, de resolver uno de los procesos, no lo es, en la misma medida, de resolver el otro.*

### 2.3. Nuestro marco referencial: estadio de operaciones concretas piagetiano

En lo que se refiere al desarrollo evolutivo Piaget obtiene distintas clasificaciones a las respuestas de los niños ante una misma tarea. Estas clasificaciones son conocidas como estadios de desarrollo. Su número varía según distintas publicaciones. En general se señalan cuatro estadios: estadio sensorio motor, estadio del pensamiento preoperacional, estadio de las operaciones concretas y estadio de las operaciones formales (Vuyk 1984: 227). El paso de un estadio a otro viene señalado por un cambio cualitativo en las respuestas a una misma tarea.

La lógica preoperacional, caracterizada por la falta de comprensión del “todos” , del “algunos” y de las relaciones recíprocas da lugar al pensamiento causal llamado transductivo, es decir, el que concluye lo específico a partir de lo específico y existe, en general, una falta de diferenciación entre las conexiones causales o precausales y las conexiones lógicas o prelógicas que llevan a influencias continuas de unas sobre otras en ambas direcciones.

En nuestro trabajo nos movemos en el estadio de las operaciones concretas que se extiende hasta la adolescencia. Se caracteriza porque las estructuras lógico-matemáticas revisten determinadas propiedades que reciben el nombre de agrupamientos. En este estadio ya pueden aplicarse las operaciones y a veces incluso atribuirse a los objetos. Hay una diferenciación progresiva de las estructuras es decir, que éstas no se han independizado por completo del contenido.

La necesaria equilibración de las estructuras actuales de conocimiento implica la instauración de la reversibilidad de pensamiento y, por tanto, la posibilidad de resolver con éxito los procesos integrantes, como paso previo al vínculo entre ambos, que caracteriza la reversibilidad.

*Esto nos lleva a plantear el interés por estudiar los dos procesos constitutivos de forma diferenciada. La capacidad de los niños en resolver ambos nos proporcionará un indicativo de su proximidad en la equilibración del esquema de conocimiento en curso.*
*El modo en que el niño establece las relaciones en procesos en modo directo e inverso podría ser diferente puesto que ambos procesos también lo son.*

La ausencia de pensamiento formal en el niño de este período de edad y su percepción global de los hechos hacen que sea importante el desarrollo de sistemas simbólicos y códigos específicos de gran valor matemático para la designación de entidades, reconocimiento de sistemas clasificatorios, superación de esquemas dicotómicos, etc. como son las tablas de clasificación o los operadores de transformación representados mediante flechas entre otros.

El razonamiento deductivo matemático, en el horizonte de la educación matemática de la etapa preescolar, está ligado a un lenguaje simbólico (Duval, 1999) utilizable en la Educación Infantil en ciertas condiciones.

## 2.4. Relaciones, conectivos e inferencias

El vehículo a través del cuál, normalmente, expresamos nuestras ideas, es el lenguaje natural. Á través del lenguaje natural se manifiesta la forma en que ponemos en relación los hechos y acontecimientos.

El lenguaje matemático, utiliza los recursos del lenguaje natural, sin embargo, ambos son lenguajes distintos:

> "El lenguaje natural, normalmente, trata del mundo que nos rodea, mientras que las matemáticas expresan pensamientos especiales y denotan objetos y relaciones que normalmente, aunque no siempre, pueden aplicarse a nuestro mundo. Hay pensamientos especiales que sólo pueden expresarse a través del lenguaje matemático" (Nesher en Gorgorió y otros 2000: 110).

El lenguaje natural parece presentar abundantes ambigüedades, mientras el lenguaje matemático es independiente de la variación del contexto y expresa el pensamiento de forma clara y concisa. Ambos lenguajes, natural y matemático, tienen su propia sintaxis y, como afirma Popper también su propia semántica (íbid: 111).

El análisis de las formas relacionales que utilizamos en la vida cotidiana y se expresan a través de la lengua natural, constituye lógica cotidiana o lógica del sentido común y conserva algunas diferencias con la lógica propia de las matemáticas

> "Si las matemáticas fueran simplemente sentido común, tanto ellas como sus aplicaciones serían triviales... Por otra parte si el sentido

común no jugara un papel en las matemáticas, estas serían una concatenación incoherente de símbolos totalmente incomprensibles" (Davis 1996: 29)

Todo el mundo estará de acuerdo en que cuando, en la vida cotidiana, la mamá le dice al niño: "O meriendas o no juegas", el niño sobreentiende que merendar será una condición suficiente para jugar, esto es que funcionará la ley de inferencia modus ponens y, entendiendo la anterior disyuntiva como "si meriendas, entonces juegas", se producirá el deseado efecto. Pero, formalmente y de acuerdo con la lógica propia de las matemáticas este razonamiento no sería, ni mucho menos así puesto que: en primer lugar, la frase "o meriendas o no juegas" corresponde con una disyunción exclusiva, cuyo valor de verdad no da lugar a una equivalencia con la condicional en su forma disyuntiva. La equivalencia de la condicional "si meriendas, entonces juegas" en forma disyuntiva sería: "no meriendas o juegas", pero, dicho de este modo el niño probablemente no comprende la condición. Por otra parte, mirado el condicional desde el punto de vista propio de la matemática, la veracidad de "si meriendas, entonces juegas", en un niño matemáticamente pensante no tendría porqué inducir la necesidad de merendar para poder jugar, puesto que, siendo el condicional verdadero, para no quitar razón a la mamá, el antecedente (merendar) puede ser falso, con independencia de que sea verdadero o falso el consecuente. Es decir que, de conceder que uno cree en la veracidad de "si meriendas, entonces juegas", lógica-matemáticamente hablando, podría ocurrir que se juegue o no, aún sin ser cierto que se meriende. Claro que, en la vida cotidiana, sabemos que esto también sucede, pero es a costa de perder otros valores como la autoridad, la credibilidad u otros y, desde luego considerando la condicional de partida como una proposición que puede ser falsa.

Por otra parte, en la vida cotidiana, aparecen factores externos al propio razonamiento lógico neto y por eso, aún dando por cierto "si meriendas, entonces juegas" y además que "se merienda", no necesariamente (aunque sí lógicamente), se desprende que se juega, porque en la realidad pueden acontecer circunstancias concurrentes al momento, tales como: uno se tiene que ir, ó, se ha hecho demasiado tarde, ó sencillamente, la mamá se ha puesto de mal humor.

Esto es algo que no ocurre en el terreno del razonamiento formal matemático, donde las proposiciones, que se mueven en el ámbito de las ideas, están exentas de subjetividad en sí mismas. No hay en ellas más subjetividad que la que añade el propio sujeto por el hecho de serlo y, tanto es así que la veracidad o no de una proposición matemática puede probarse.

En diversas investigaciones se muestra las dificultades ligadas al modo de comprensión de condiciones necesarias y suficientes y sobre el modo de hacer inferencias. Mediante el test de las tarjetas de Wason - por ejemplo- se trata de ver cuándo, en qué condiciones y, por tanto, cómo entiende el sujeto que es verdadera una proposición condicional. La respuesta correcta es conseguida por un bajísimo porcentaje de estudiantes. Se vio que existe una tendencia clara a elegir aquellas cartas en las que el antecedente se cumple, resultando sin sentido aquellas expresiones condicionales en las que el antecedente no es verdadero. La razón es que la prueba precisa considerar solamente aquellos casos que pueden falsar la regla y esta estrategia no es la que generalmente se emplea en el pensamiento corriente, que es la de verificar.

El conocido test de O'Brien buscaba estudiar la capacidad del sujeto para realizar inferencias de los cuatro tipos siguientes:

1.- Modus ponens

Si P, entonces Q
y P

---

Conclusión:

2.- Modus tolens

Si P, entonces Q
y No Q

---

Conclusión:

| | |
|---|---|
| 3.- Inverso | Si P, entonces Q<br>y No P |
| | Conclusión: |

| | |
|---|---|
| 4.- Converso | Si P, entonces Q<br>y Q |
| | Conclusión: |

de las cuales las inferencias llamadas inverso y converso son las conocidas falacias de negación del antecedente y afirmación del consecuente, respectivamente, que no generan conclusiones válidas y, por tanto constituyen procedimientos lógicos inferenciales no válidos para el razonamiento en matemáticas. La investigación muestra las dificultades de alumnos de 15-16 con ellas.

Pero la lógica binaria más elemental usa también elementos del lenguaje que contrastan con su concepción en el lenguaje coloquial. En efecto, este introduce imprecisiones que se hacen patentes en la negación de proposiciones. Mientras en matemáticas la negación de proposiciones moleculares se rige por las leyes de Morgan, es decir que:

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \qquad \text{y,}$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

la ausencia del uso de paréntesis en el lenguaje coloquial hace entender la negación de “hay un cortocircuito o la batería está estropeada” (lo que resulta antinatural planteado como negación de una disyunción), como: “no hay un cortocircuito o la batería no está estropeada” lo que da como resultado formalmente, la equivalente a la negación de la conjunción “hay un cortocircuito y la batería está estropeada”. Es decir, tendemos a entender las equivalencias falsas:

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \quad \text{y,}$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q).$$

En matemáticas el buen manejo de las negaciones de proposiciones resulta capital pues es posible operar de modo inmediato con una proposición o con su negación. Así lo vemos, por ejemplo, en el método de demostración por contradicción.

Estas diferencias aparecen también en el uso de cuantificadores y conectivos. En la vida cotidiana, la lógica operante es modal; las proposiciones no son necesariamente verdaderas o falsas. Pensemos en una proposición como "En España, a las 7 de la tarde del 5 de marzo es de noche". Ante una expresión como esta (aunque hay un conocimiento astronómico que puede definir qué es la noche) es posible que no haya unanimidad de opinión: dependerá lo que cada uno entienda por "ser de noche", dependerá de lo oscuro que entienda que debe estar el cielo en un momento dado para valorar que es noche. En definitiva, esa valoración depende del conocimiento, pero también de la experiencia e introduce así una componente subjetiva que O'Brien (1998) analiza y que nada tiene que ver con la valoración que de una proposición matemática escolar puede hacerse cuyos casos de verdad y falsedad están bien determinados.

Los conectivos lógicos en la vida cotidiana se comprenden de otra forma, expresiones como: "O hay un cortocircuito o bien la batería está averiada" (Braine 1998), es entendida comúnmente como una disyunción exclusiva, es decir, ocurre una cosa o bien la otra pero no las dos, aunque, como en este caso, esta posibilidad exista. Es complicado encontrar expresiones en las que de forma natural se valore la disyunción como inclusiva. En la lógica matemática, ambos operadores disyunción inclusiva y exclusiva están bien diferenciados y definidos y se emplean de forma clara en las demostraciones en la forma distintiva que corresponde.

Mayor confusión se produce con el operador conjunción porque ¿qué entendemos cuando entre una pléyade de objetos en los que unos son totalmente rojos, otros totalmente amarillos y otros totalmente azules, decimos: “dame los rojos y amarillos”? Lo habitual es que un niño, incluso un adulto, tome todos los objetos rojos y a continuación todos los objetos amarillos, componiendo lo que debería ser la respuesta a la demanda de una disyunción, puesto que los objetos rojos y amarillos, en rigor, deberían componerse cada uno de ellos de ambos colores por ejemplo, porque estuvieran pintados a rayas o a manchas.

Estas expresiones, que son muy habituales en la vida cotidiana con este sentido, confunden los operadores conjunción y disyunción a causa del lenguaje que utiliza la contracción “dame los rojos y amarillos” en lo que en rigor correspondería: “dame los rojos y (también) dame los amarillos”. Como proposiciones matemáticas no puede ocurrir esto, puesto que la primera expresión indicaría los que son rojos y amarillos a la vez.

> “Usando este (*el lenguaje natural*) , tratamos de describir la realidad. El lenguaje natural está basado en las interpretaciones de la realidad a través del sentido común, y estas interpretaciones no son siempre consistentes o bien fundadas” (Oskovsmose 1994: 109)

En un estudio anterior se ha podido constatar que la comprensión y uso adecuado de cuantificadores es una cuestión difícil incluso para sujetos adultos con éxito en el aprendizaje matemático, de forma especial cuando intervienen negaciones.
La interpretación de expresiones que involucran los operadores universal y existencial, resultan, por lo general, enormemente complejas.
Es habitual entender la negación de una expresión del tipo “todos los individuos son X”, como: “ningún individuo es X”, confundiendo con la contraria desde el punto de vista lingüístico. Estas diferencias son primordiales en matemáticas donde las proposiciones tanto como los objetos que las cumplen están bien determinadas y delimitadas. Pero el ejercicio de la negación anterior, por ejemplo, es algo que no se

practica en la escuela. Falta enseñar que, la negación de “todos los individuos son X”, es “No todos los individuos son X”, es decir, “que existe algún individuo para el cuál se cumple no X”.

Por otra parte, en el mismo estudio se muestra una diferencia clara entre un grupo de sujetos de bajo rendimiento en matemáticas respecto a otro de alto rendimiento en cuanto a la presencia de razonamientos falaces significativamente mas abundante en el grupo de bajo rendimiento. Los razonamientos falaces impiden la obtención de conclusiones válidas en matemáticas y son abundantes en la vida cotidiana.

Johnson-Laird (1969), investiga como se comprende el condicional entre estudiantes de diversos niveles. Se pide valorar como verdadero, falso o independiente de los valores de verdad en cada caso una serie de situaciones que se corresponden con los estímulos del test de Wason pero presentadas en las cuatro formulaciones funcionalmente equivalentes siguientes: (1) Si p, entonces q, (2) No hay p, si no hay q (3) O bien no hay p, o hay q (o los dos), (4) Nunca p sin q. Los resultados mostraron que la implicación expresada en la forma disyuntiva (“no p ó q”) obtuvo el mayor porcentaje de acierto, de acuerdo con los valores de verdad de la implicación. El resto de las expresiones (“si p, entonces q”, “no p si no q”, “nunca p sin q”) no fueron valoradas de esta forma al no ser verdaderos los antecedentes de los condicionales, es decir que son expresiones valoradas como irrelevantes cuando el condicional no es verdadero. De igual modo en esta experiencia se vio que existe una tendencia clara a elegir aquellas cartas en las que el antecedente se cumple, resultando sin sentido aquellas expresiones condicionales en las que el antecedente no es verdadero.

Así pues, las formas relacionales que se manifiestan a través del lenguaje natural revelan usos en ocasiones no válidos para la matemática.

## 2.5. El discurso relacional como argumentativo

La práctica de razonamientos no forman parte expresa de los distintos currículo en matemáticas, por tanto, el razonamiento que el alumnado emplea es el que se desarrolla por efecto de la edad y de la experiencia de la vida cotidiana. Sin embargo y, aunque necesaria, esta lógica del sentido común no es suficiente para el estudio matemático que requiere otro tipo de reglas. Duval (1999) distingue con toda claridad argumentación de demostración, así, mientras la argumentación es un procedimiento lógico que busca convencer, la demostración es un procedimiento lógico que produce proposiciones apodícticas. En matemáticas, los razonamientos empleados buscan concluir proposiciones que se revelan necesariamente verdaderas, es decir, apodícticas. Por el contrario en la lógica cotidiana, se busca convencer.

Para Duval la deducción matemática es un proceso de razonamiento intrínsecamente ligado a un lenguaje y, como tal, en sus diversas formas, se caracteriza por movilizar explícitamente proposiciones y consiste en el paso "justificado" o "necesario" que tiene lugar desde la enunciación de ciertas proposiciones en calidad de premisas, a la aserción de una nueva proposición en calidad de su consecuencia o conclusión. Así mismo, un razonamiento ligado a un lenguaje no tiene que ser confirmado o invalidado por la experiencia, por el aporte de informaciones suplementarias o por el establecimiento de consenso en el interior de un grupo, sino que es por sí mismo válido o no válido dependiendo esto, únicamente del respeto a las reglas que rigen la organización de las proposiciones entre sí, y no del contenido de las mismas.

En los razonamientos matemáticos, las proposiciones tienen un doble estatus: teórico y operatorio de modo que el marco teórico funciona como un contexto global y consiste en la reserva de medios de la cual se puede sacar aquello que es necesario para demostrar el resultado pedido. El estatus operatorio, funciona como un contexto local y tiene que ver con la organización propia del discurso que se produce, mediante el cual las proposiciones se movilizan en pasos de razonamiento. Por su parte un paso de razonamiento consiste en general, en la verificación de las premisas y en la extracción de una nueva proposición para lo que se hace necesario poner en relación unas y otra. Esta operación de extracción se efectúa mediante las reglas de inferencia lógica y confiere a la nueva proposición conclusión el rango de definición, teorema, axioma..., propio del marco teórico de pertenencia.

El encadenamiento de pasos sucesivos de deducción tiene lugar por reutilización de la conclusión anterior en premisa para el paso siguiente, de un modo que podría decirse algorítmico y que, por tanto sustituye a cada paso las proposiciones por otras nuevas. Nuevamente, este encadenamiento requiere la puesta en relación de las proposiciones intervinientes. Pero esta organización relacional propia del razonamiento deductivo presenta unas restricciones vinculadas con el estatus operatorio de las proposiciones enunciadas (premisa, conclusión o tercer enunciado) dentro de su estatus teórico, y no en su contenido. Esta falta de vínculo con alguna forma lingüística particular así como el hecho de ser un razonamiento no acumulativo, permite que afirmemos con Duval (1999) que la lengua natural no es el primer registro en el cual puede hacerse la experiencia del funcionamiento del razonamiento deductivo y, en consecuencia, es posible analizar su presencia a través de procedimientos que pongan de relieve los requerimientos relacionales que implica no necesariamente justificados a través de la lengua natural.

En el mismo sentido, Piaget mantiene la prevalencia del razonamiento deductivo sobre el lenguaje al afirmar la menor dificultad de ejecutar materialmente un acto que ejecutarlo en el pensamiento, lo que requiere traducirlo de manera simbólica en palabras o imágenes y esta reelaboración supone una aceleración que llega hasta ciertas vistas de conjunto simultáneas (Piaget 1979 a: 238)

Durante la etapa de Educación Infantil, el desarrollo verbal del niño, le permite comunicarse con los demás, sin embargo, su riqueza verbal es limitada. Nos apoyamos en estas aserciones para proponer la acción, a través de juegos, como medio para analizar la forma en que establece relaciones aún sin renunciar a la expresión verbal.

## 2.6. Significación y contexto en la construcción de relaciones e inferencias

El actual énfasis en la resolución de problemas y razonamiento es reminiscencia del Gestaltismo en lo que se refiere al reconocimiento de la estructura de los problemas y al desarrollo de la percepción dentro del proceso de solución. La era de la justificación del aprendizaje y el período de la nueva matemática también muestran la importancia de manipular sobre materiales en contextos del mundo real y la necesidad de desarrollar en los estudiantes las condiciones que permitan crear un aprendizaje significativo que les permita reconocer la utilidad y conveniencia de los aprendizajes para dar solución a una multiplicidad de problemáticas cotidianas.
El contexto temático en el cuál se plantea una situación problemática es un referente claro para el niño. Supongamos el siguiente problema:

> "Un agricultor tiene 100 metros de valla y quiere construir un recinto rectangular en el que el área sea máxima. ¿Qué medidas debe tener?"

La forma de abordar esta situación problemática que refiere un problema real, puede ser muy distinta dependiendo del contexto de referencia en que es formulado. En el ámbito escolar, el marco teórico con motivo del cuál se suscita el problema actúa de orientador: no es lo mismo que el problema aparezca en la lección dedicada a las funciones polinómicas o en la de las cónicas. Pero si el problema surge en el contexto real que el problema transcribe, pongamos en un pueblo y el agricultor es de verdad y también lo es el problema, es posible que, incluso el lenguaje cambie y no sea tan técnico de tal manera que la situación problemática no tenga aspecto de problema resoluble a través de un método matemático.

La traducción de estos problemas al lenguaje simbolizado de la matemática (Alcalá 2002), modeliza la situación y la aleja de las múltiples características que rodean los problemas reales, permitiendo centrar la atención sobre aquellas relaciones formales que afectan a la obtención de la solución, en las cuales las características no relevantes al problema, propias del mundo real desparecen.

En la etapa de Educación Infantil, el contexto resulta especialmente importante. La particularidad del pensamiento del niño de esta edad, su concepción del mundo que le rodea, su pensamiento concreto, etc., hace que la actividad educativa deba tomar una forma activa que, respetando la naturaleza infantil, permita poner en práctica el lenguaje simbólico.

La influencia del contexto es analizada por Case (Resnick y otros 1997: 216) quien sostiene que las dificultades que los niños encuentran en la solución de una tarea y también la forma en que estas se manifiestan, depende:

- de las características exactas de la presentación de la misma
- de la influencia del campo perceptual que les rodea
- de la forma en que la información relevante se hace destacar y
- de la motivación de los niños para resolverla.

Case afirma que tareas complejas se pueden resolver a veces utilizando estrategias que reducen el número de conocimientos que se necesitan de forma simultánea, es decir, utilizando estrategias que efectivamente precisen menos esquemas de conocimiento en juego.

La presentación descontextualizada de tareas elimina los elementos distractores que rodean los objetos reales y permite centrar la atención del niño sobre el objeto de análisis.

Adoptaremos esta presentación para analizar la forma en que el niño establece las relaciones en los procesos en modo directo y en modo inverso.

### 2.7. Sobre el lenguaje simbólico en la Educación Infantil

> "La esencia misma del ser humano descansa en el empleo de símbolos" (Bruner 1988:184)

La matemática utiliza un lenguaje consistente en conceptos, símbolos y técnicas propios que permiten tratar lo real de forma precisa y general y, recíprocamente, volver a lo real para comprobar empíricamente las conclusiones.

Cuando hacemos matemáticas utilizamos para razonar una diversidad de signos y códigos operacionales que conforman una compleja red de significados, esto es, un lenguaje creado a lo largo de la historia y recreado por cada uno en su proceso de aprendizaje (Alcalá 2002).

En la vida corriente operamos con representaciones de objetos que remiten a los objetos mismos. Los signos gráficos, los sonidos verbales ordenados, los iconos, se muestran a nuestros sentidos y se convierten en portadores de significado haciendo posible el pensamiento conceptual y la comunicación. Para pensar nos apoyamos en las simbolizaciones de los objetos mediante un proceso de conceptualización constituyendo de esta manera el pensamiento representacional.

En los primeros años de vida se conforma la inteligencia representativa a través del lenguaje y gracias a la concurrencia de procesos de simbolización. Crecemos en un entorno simbólico que exige un pensamiento representacional, es decir: conocer a través de mediadores y comunicarnos a través de mediadores simbólicos.

De acuerdo con Bruner las representaciones son necesarias para convertir en útiles las regularidades del entorno. El aprendizaje simbólico sigue un itinerario temporal que comienza en las representaciones de tipo enactivo propias de la etapa sensorio motora a la que siguen las representaciones icónicas, propias del período 3 a 12 años, que desembocan, por efecto de desarrollo del lenguaje, en las representaciones simbólicas mas poderosas, flexibles y desvinculadas de lo concreto (Bruner 1988: 49).

Peirce entiende la representación como algo que se supone está por otro y que puede expresar este otro a una mente que verdaderamente pueda entenderlo. Conocemos absolutamente las representaciones mientras que las formas y las cosas las conocemos sólo a través de representaciones.

Para Peirce, las formas de representación se distinguen por la amplitud de su campo de representación en iconos, índices y símbolos, siendo la representación icónica la mas ligada a lo representado.

> "El único modo de comunicar directamente una idea es por medio de un icono; y todo método indirecto de comunicar una idea tiene que depender para su fundamentación de la utilización de un icono" (Peirce 1988:147)

Este leguaje representacional conduce a la lengua escrita y a la notación numérica que guardan una diferencia fundamental relativa al dominio de referencia de ambos.

Ambos pueden tener un comienzo simultáneo pero se van diferenciando progresivamente a medida que el niño va tomando conciencia de la diferencia de dominios. Pontecorvo (1996:74 citado por Alcalá 2002:25) en experiencia con niños de entre 4 y 6 años sobre la noción de cantidad y su relación con la escritura mantiene la elaboración de la escritura de palabra es relativamente más tardía con respecto a la producción e interpretación de números y de las comprensiones aritméticas generales. A medida que vamos avanzando en la escolaridad el dominio de referencia aritmético se amplia hacia aspectos espaciales, el código inicial es más complejo, debido a las nuevas relaciones y propiedades de los símbolos mismos; pero mientras la escritura normal remite a la lengua oral, la escritura matemática remite a un ámbito específico, diferente de aquel aunque relacionado estrechamente con el lenguaje natural.

La matemática toma términos de la lengua ambiental pero les asigna un significado preciso y peculiar, las palabras: plano, agudo, total, más... son ejemplos de ello. Esta discrepancia conceptual se añade a los aspectos de operatividad lógica, discrepante también entre el dominio del razonamiento matemático y el de la lógica común operante en el medio ambiente (que antes se ha mencionado).

El tiempo que trascurre entre los 2 y los 6 años, es de una importancia tal que sobre él, se edifica toda educación posterior, ya sea formal o informal, sobre la presuposición de la competencia simbólica (Gardner 1993:69 citado por Alcalá 2002:23)

Cuando hacemos matemáticas utilizamos las creaciones simbólicas, los signos propios de este ámbito como mediadores, como herramientas para razonar y comunicar. Pero para que estas herramientas sean tales, han de tener un significado consensuado previamente que remita a conocimientos previos compartidos. Por otra parte, la construcción del lenguaje simbólico desde el lenguaje natural tiene lugar por incorporación de términos técnicos procedentes del nuevo campo teórico usados en la interpretación de la realidad (Skovsmose 1994:109).

Es decir que, la construcción del lenguaje simbólico, requiere incorporar la significación de los códigos propios del lenguaje. Esta incorporación tiene lugar desde lenguajes simbólicos anteriores que van ampliando su campo representacional y separándose de lo representado progresivamente.

Durante la etapa de Educación Infantil la representación necesita adecuarse a los campos de conocimiento presentes en los niños de esta edad, siendo la representación icónica, más ligada a lo representado la pertinente durante la etapa. El manejo de estos sistemas representacionales es precursor del lenguaje simbólico.

En nuestro trabajo el acento radica:

- En los procesos relacionales vinculados con procedimientos matemáticos. Estos tienen lugar entre entidades simbólicas cuyo significado es preciso conocer. Será, por tanto necesario, garantizar el reconocimiento previo por el niño de significados que los códigos utilizados en cada caso comportan.

- Tiene lugar en un período evolutivo en que no está conseguida la diferenciación entre los dominios de referencia del lenguaje natural y el lenguaje matemático.

*Las tareas relativas a procedimientos de razonamiento matemático básicos, como los de clasificación a través de tablas de doble entrada o transformaciones planteadas bajo representación icónica, permiten explorar la forma en que los niños establecen las relaciones en los dos procesos componentes de la reversibilidad de pensamiento.*

*Su condición de matemáticos hace que todas las estructuras cognoscitivas vinculadas a ellos sean equilibrables (Piaget 1975) a través del vínculo que el sujeto establece entre cada tarea y su inversa que, en este caso, se constituyen en tareas de codificación y decodificación.*

## 3. Currículo y relaciones inferenciales en la Educación Infantil

Si bien las relaciones básicas son indiscutiblemente objeto de trabajo en la Educación Infantil, las que hacen referencia a lo inferencial se ha supuesto que este alumnado no podría superarlas. A pesar de ello, las investigaciones de Carpenter, T.P., y Moser, J.M. (1984) ó Whiten y otros (1990), sugieren que los niños entran a la escuela con la capacidad para resolver problemas reales que requieren destrezas matemáticas que aún no se les han enseñado. Pero, para cuando llegan al segundo año de EGB (ahora Primaria), muchos de esos mismos niños muestran una disminución en sus habilidades creativas. Una explicación parece estar en el énfasis por "enseñar" algoritmos, datos y reglas matemáticas, en vez de dejar que los niños pequeños construyan su propia comprensión. Esto hace que, cuando se ven frente a nuevas situaciones, los niños no tengan muchos recursos.

Nuestra experiencia de trabajo con los Centros de Educación Infantil en la formación de docentes nos hace intuir que el alumnado de 3-5 años es capaz de resolver situaciones problemáticas que no se le presentan habitualmente, como ocurre con las de modo inverso, en contextos pre-operacionales, con un uso de lenguaje apropiado. Deseamos reconocer cómo se comporta ante procesos en modo inverso, cómo se muestran las relaciones que el niño establece en procesos de codificación y decodificación de representación icónica importantes para las matemáticas (tablas de doble entrada, operador flecha) en las edades de 3-5 años.

Con ello, tratamos de identificar una problemática sobre la que vamos a investigar: *hasta qué punto existe o no un razonamiento en modo inverso, caracterizado por procesos inferenciales de decodificación (propios de la matemática) a través de un uso de instrumentos como códigos y tablas y en qué sentido se asemeja a un razonamiento reversible en edades tempranas*.

### 3. 1. Elementos inferenciales en Educación Infantil

Hawkins y Pea (1984) demuestran cómo niños de 4-5 años son capaces de desarrollar razonamientos deductivos a través de la realización de tareas de silogismos verbales y que lo hace de forma tanto más eficaz en la medida en que el contexto elimina la influencia de su conocimiento práctico del mundo. A pesar de que la forma negativa de las premisas añade dificultad a los razonamientos, tanto en adultos como en niños según prueban Wason & Johnson-Laird y Falmagne (citados por Hawkins & Pea op.cit.:591), el niño preescolar tiende a contestar correctamente las preguntas negativas en mayor medida que las afirmativas.

El estudio examina las relaciones entre el desarrollo de procesos lógicos que forman parte de un razonamiento deductivo y las ocasiones en que estos son usados. Presentan a los niños de 4-5 años silogismos verbales a través de problemas que varían sistemáticamente en:

- <u>contenido</u>: premisas de fantasía; premisas incongruentes con los acontecimientos reales; premisas congruentes con acontecimientos reales
- <u>complejidad</u>:
  - a) presencia de universales; presencia de particulares; presencia de expresiones "entonces"
  - b) presencia de premisas en forma negativa y afirmativa
- <u>orden de presentación</u>: el orden de presentación es sitemáticamente variado.

Encuentran que los niños justifican sus razonamientos de una forma deductivamente correcta y mas eficaz en la medida que las preguntas eliminan la intrusión del conocimiento práctico de las cosas.

Dias y Harris (1988), muestran que niños de 4, 5 y 6 años poseen un modo de razonar deductivo. Teniendo en cuenta contenidos respectivamente: relativos a hechos conocidos, relativos a hechos desconocidos y contrario a los hechos conocidos, elaboran seis silogismos (2 de cada temática) sobre los que la respuesta esperable, desde el punto de vista lógico es, en un caso "si" y en otro caso "no". Los seis silogismos son objeto de experimentación sobre cuatro experimentos distintos, con niños distintos de niños de la edad indicada, subdividiendo para cada experimento a los niños participantes en dos grupos a los que se planteaban las preguntas en forma verbal ordinaria y en forma de juego respectivamente. En cada uno de los cuatro experimentos, a los niños que participan en forma de juego se les plantean las preguntas de forma distinta, así en el experimento 1 se les presentan los juguetes y se leen las premisas que hacen relación a lo que los juguetes hacen; a los niños del experimento 2 se presentan las preguntas mediante escenificaciones con los propios juguetes; en el experimento 3 se presenta una caja donde el niño puede mirar, por un agujero, cómo los juguetes escenifican las premisas, en el experimento 4 se presentan las preguntas como una historia que los juguetes escenifican y sobre la que se añade una entonación verbal enfática.

En los cuatro casos, los niños del grupo verbal se enfrentan a las preguntas de igual forma. A todos ellos se piden explicaciones verbales sobre porqué creen lo que afirman clasificando las respuestas como: teóricas, empíricas o arbitrarias.

Los resultados mostraron cómo todos los grupos de juego obtuvieron mayor éxito que los grupos verbales respectivos, y que el porcentaje de respuestas teóricas no es significativamente distinto por razón de la edad en los casos de los grupos 1, 2 y 3.

En el caso del experimento 4 los niños del grupo de juego ofrecen más justificaciones teóricas y muchas justificaciones empíricas que en el caso de los otros experimentos. Los resultados revelan que el modo de juego permite a los niños tratar premisas que saben que son falsas, como una base verdadera para la deducción habiendo una clara diferencia por razón de la edad entre los niños de 6 y los de 4 años que son menos proclives a hacer esto.

Este mismo resultado encuentra Días (1990), en experiencia con niños de 4-5 años. Identifica tres circunstancias que pueden ayudar a los niños a superar esta dificultad: cuando la premisa es presentada con una entonación enfática-imaginativa; cuando se presentan en un contexto relativo a un lugar remoto, por ejemplo otro planeta; y cuando se acompañan de imágenes visuales. El efecto facilitador de estos recursos sugiere que el niño aceptará premisas que violan su conocimiento empírico de las cosas como una base para razonar de la forma que se le presente en un modo de fantasía más que en un modo literal. El experimento muestra que este efecto facilitador sobre el razonamiento lógico ocurre por igual en niños de entre 4 y 6 años.

Falmagne y Siegler (citados por Dias, 1996:39) argumentan que los niños poseen un conocimiento lógico en forma de un conjunto de reglas, pero que el uso de este conocimiento es selectivo y depende del modo en que el problema se presenta.

### 3.2. Currículo matemático escolar y construcción de relaciones

Las distintas líneas de pensamiento han generado conocimiento respecto a cómo consideramos que aprenden los niños. Este ha dado lugar a la existencia de distintas alternativas respecto a qué y cómo enseñar.

La teoría constructivista es el planteamiento teórico sobre el que tienen consistencia y significado las cuestiones de mediación ejercida por el propio pensamiento infantil en la construcción de conocimiento así como la interacción en el descubrimiento de significados. Desde esta perspectiva, la influencia de la ideas de Piaget afirmando que el sujeto construye el conocimiento de la realidad a partir de los mecanismos de sus propias capacidades cognitivas conduce a considerar el desarrollo de dichas capacidades como la principal función del conocimiento matemático en esta etapa. Así, el desarrollo de las estructuras lógico- matemáticas pasa a ser el gran objetivo en la enseñanza de la matemática. Se considera fundamental para la conceptualización del número, la construcción de las operaciones lógicas de clasificación y seriación e inclusión jerárquica.

Para lograrlo se planifican actividades centradas en operaciones de clasificación y seriación que facilitan el acceso a la conservación de la cantidad y a las operaciones reversibles (D'Angelo, en Sáinz 1998:128).

Por otra parte, la perspectiva centrada en la interacción socio-cultural, ligada fundamentalmente a los paradigmas vigotskyanos, pone el acento en el papel del lenguaje en la construcción del pensamiento. Al utilizar símbolos en contextos comunicativos significativos, tendrá la posibilidad de descubrir relaciones y significados que le permitirán avanzar en su desarrollo matemático.

Las experiencias prácticas y las actividades que apelan a la curiosidad natural de los niños despiertan en ellos un sentido de la indagación y estimulan el descubrimiento y el aprendizaje matemático. A los cuatro años la mayoría de los niños habla sin dificultad, las respuestas son claras y ajustadas y las preguntas son concisas y serias, su curiosidad natural les provee de un gran deseo de saber. Se expresan con frases correctamente terminadas, usan toda clase de oraciones sintácticas, complejas hipotéticas y condicionales. Aunque todavía no leen palabras completas sílaba a sílaba, sí que se imaginan a partir de las primeras letras, el resto de la palabra, acertando en la mayor parte de los casos. Son capaces de seguir una conversación, o la trama de un cuento y de repetirlo con gran exactitud. Comienzan a utilizar categorías para clasificar objetos, animales... El desarrollo evolutivo permite una organización de la información con un nivel de abstracción mayor.

La modalidad perceptiva que predomina en los primeros años de la infancia determinan las siguientes estrategias didácticas (Pérez y otros 1981):

- Conexión natural con la experiencia. A través de la experiencia los niños pueden percibir modelos perceptuales que van más allá de los datos concretos y permiten captar los significados y asociaciones subyacentes.
- Refuerzo de la capacidad imaginativa. El creciente desarrollo de esta capacidad precisa un reconocimiento de su forma perceptiva de conocer y de la interdependencia que en su desarrollo tienen lo cognitivo, lo estético, lo psicomotor y lo social.
- Aprendizaje interactivo. Entre profesor, niño y actividades tomadas para producir un aprendizaje significativo manteniendo un diálogo continuo.

- Creación de posibilidades de acción significativa. Para los niños pequeños la construcción de un conocimiento significativo tiene lugar a través de su participación directa y consistente en el mundo que le rodea. Cada niño necesita una cantidad de tiempo diferente para lograr que su aprendizaje concluya en una experiencia significativa.
- Consideración del medio físico. Hay que tener en cuenta que el medio de implicación del niño es físico y la base de su motivación es su implicación directa.
- Auto apreciación de su desarrollo afectivo y social. Es necesario proporcionar al niño situaciones de actividad que puedan ser percibidas como exitosas y en las que pueda descubrirse como competente.

Siegler y Svetina (2002) introducen el método microgenético para para explicar las capacidades resolutivas de niños de 6 a 8 años en la solución de tareas relativas a completar matrices como las usadas por Inhelder y Piaget. Así mismo compara las posibilidades de los niños debidas a la edad y a la presencia del método microgenético, que requiere un alto número de observaciones durante el tiempo que trascurre entre la presentación de la tarea y su realización consistente. Señalan que los patrones de cambio presentes entre los 6 y 7 años de edad, observados a través de siete sesiones experimentales, son altamente coincidentes. El análisis microgenético indica que se incrementa la variabilidad de los errores de los niños inmediatamente antes del descubrimiento de la estrategia correcta y que esta se vuelve dominante inmediatamente después de haberla usado por primera vez.
Estos resultados avalan la importancia de la práctica en el aprendizaje de estrategias resolutivas adecuadas. Sin embargo, las matrices utilizadas por estos autores exigen a los niños resolver el modo directo pero no el inverso.

### 3.3. Argumentación y discurso matemático en Educación Infantil

La etapa de Educación Infantil ofrece un momento idóneo para la práctica de actividades a través de las cuales el niño pueda ejercitar el razonamiento que la matemática necesita. La necesidad de construir el aprendizaje a través de situaciones que respeten la situación evolutiva del niño de esta edad, introduce las actividades en forma de juego activo vinculadas con el entorno inmediato del niño, en cuyos aprendizajes está presente el lenguaje verbal.

> "...una parte importante del aprendizaje en matemáticas está relacionado con el desarrollo de explicaciones aceptables matemáticamente, es decir, con la elaboración de argumentos válidos en matemáticas" (Nesher en Gorgorió 2000:121)

Como consecuencia, el docente de educación infantil debe conocer que ciertos usos de lenguaje van a empobrecer y provocar obstáculos en el momento de introducir muchos conceptos y procedimientos matemáticos.

El uso del lenguaje verbal para expresar el lenguaje matemático y la necesidad de vincular el razonamiento matemático durante la etapa de Educación Infantil a las representaciones ligadas al mundo de lo cotidiano, provoca formas de razonamiento que, siendo propias del lenguaje verbal, no son válidas para el razonamiento matemático. Ya hemos hablado de la concepción de la disyunción como conjunción, de la errónea utilización de las leyes de Morgan o la formación errónea de expresiones con cuantificadores. La presencia de falacias en la argumentación cotidiana da lugar a conclusiones falsas no válidas para el razonamiento matemático. Además la forma inversa que toman los razonamientos en matemáticas representa un modo de razonar diferente del modo directo.

Organizar la superación de un obstáculo (Brousseau 1983) consistirá en proponer una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno de acuerdo con una dialéctica conveniente. No se trata de comunicar las informaciones que se quiere enseñar, sino de encontrar situaciones de aprendizaje en las cuales las informaciones sean las únicas que satisfacen la situación entre todas aquellas otras que se oponen y problemáticas que permitan abordar la construcción de una

solución, o al menos un intento, donde el alumno pueda aplicar su conocimiento nuevo.
Los obstáculos esperados en tareas de tipo lógico, son por una parte, de origen ontogénico que provienen de las limitaciones del niño en un momento dado de su desarrollo en la medida en que evolutivamente no ha desarrollado las destrezas razonadoras suficientes. Estos se ponen de manifiesto en la argumentación inconexa, o incoherente. Hemos visto cómo los razonamientos deductivos que el niño de esta etapa es capaz de realizar están claramente mediatizados por el lenguaje que se usa en las formulaciones. El uso de un lenguaje adecuado y la propuesta de situaciones de juego que planteen para él un desafío alcanzable, contribuye a superar las limitaciones que las acciones establecidas mediante relaciones de tipo lógico inferencial conllevan. Además la justificación verbal de sus acciones contribuirá a ratificar las mismas o a poner de manifiesto contradicciones.

Se darán también obstáculos de origen didáctico en la medida que ninguna medida de orden pedagógico sea tomada para que el niño pueda desarrollar las estrategias de razonamiento con las cuales la matemática le va a enfrentar en un futuro y ello incluye tanto el modo de razonar inverso como el uso de una lógica pertinente. No se trata de un concepto que pueda enseñarse, sino de una estrategia de pensamiento a la que algunos sujetos parecen acomodarse de forma espontánea y otros no.

En cualquier propuesta didáctica que hagamos debemos pensar que la superación de un obstáculo comporta necesariamente una serie de interacciones entre el alumno y el medio que ponen en juego sistemas de representación, en el alumno, que pueden ser interpretados como cambios de mensaje y toman, finalmente, un carácter dialéctico. Así, el desarrollo del aprendizaje no puede ser programado, sino solamente la situación y su elección las que pueden serlo.

Estas consideraciones nos llevan a plantear la necesidad de estudiar la respuesta del niño ante tareas que supongan el establecimiento, práctica y descubrimiento de relaciones observables a través de la acción sobre los objetos.

## 4. Necesidad de un estudio experimental. Problemática

La bibliografía consultada sobre fundamentación del curriculo en Educación Infantil en el campo del pensamiento matemático (Baroody 1988, Canals 1981, Crovetti 1984, Dienes 1997, Kamii 1984, Lovell 1986, Mialaret, 1986, Mira 1989, Viera 1997, Escuelas Infantiles de Reggio Emilia 1999) y aún los textos dedicados al diseño de actividades para esta etapa (Canals 1981, 1982, Dienes 1986, 1987, Dienes y Golding 1987, Kothe 1989, Marbach, 1986, Santos Asensi 1992, Selmi, 1988) responden a demandas curriculares planteadas desde el punto de vista constructivista. En Dienes (1986, 1987), Dienes y Golding (1987) y Kothe (1989) se desarrollan gran cantidad de actividades y constituyen el referente prácticamente para todas las demás programaciones que las utilizan en mayor o menor medida.

Los procesos que en todas ellas se ponen en juego son predominantemente (podríamos decir casi exclusivamente al haber una única excepción) procesos en modo directo. Esta circunstancia hace que desconozcamos:

- las posibilidades de los niños al resolver tareas en modo inverso
- las estrategias de resolución vinculadas a ambos modos
- la relación que las estrategias resolutivas entre ambos modos puedan tener.

La presencia simultánea de los procesos en modos directo-inverso en los contenidos matemáticos, en los procedimientos y en el razonamiento y, la fundamentación heurística que proporciona la explicación piagetiana de construcción del conocimiento, llevan a concluir la necesidad de tratar en igualdad de condiciones los procesos directo e inverso en el contexto de las tareas planificadas para la Educación Infantil, por cuanto las programaciones de actividades conocidas precisan ser complementadas mediante el desarrollo de la actividad en modo inverso propia de cada una de las propuestas.

La visión piagetiana, que vincula con la construcción y el desarrollo de los primeros conceptos matemáticos fundamentalmente del número, procedimientos como la clasificación han sido objeto de análisis detallado en cuanto a su concepción y funcionamiento en el niño. Una ingente investigación se ha desarrollado entorno al problema de la conservación de cantidades continuas y discontinuas, de la longitud, el número,  y otros conceptos básicos. En ellas, la reversibilidad es un factor de análisis pero no objetivo de investigación. Tampoco se conocen investigaciones en relación con la reversibilidad de pensamiento en procedimientos de transformación.

Conocemos que Gelman 1969 (Resnick y otros 1991), Zimmerman (1984), Feigenbaum (1968), desarrollaron programas de intervención educativa para acelerar o desarrollar la reversibilidad de pensamiento relativa a operaciones concretas sobre conservación de las cantidades y longitud y muestran que se producen resultados exitosos. Así mismo Bearison (1969 en Resnick y otros 1991) encontró que se produce transferencia entre tareas de conservación diferentes, lo que significaría que los niños comprenden el principio de la medida.

Estos programas de intervención, tuvieron lugar durante un período limitado de tiempo, seis meses en el caso del más prolongado. Se centran en la ejecución de tareas a través de las cuales se acerca al niño el concepto objeto de aprendizaje poniendo de relieve las variables que intervienen en la operación cuya reversibilidad se estudia después. Los resultados parecen conservarse durante períodos más o menos largo, pero no parecen ser logros estables.

En relación con estos estudios, como estudios de intervención, nuestro interés no está, en el aprendizaje de los conceptos ni en la familiaridad del niño con las variables que rodean la transformación, sino en *el desarrollo de las destrezas de razonamiento que están implicadas en la conexión de los dos estados: antes y después, que toda operación define.*

La capacidad de los niños en el desempeño de tareas en modo inverso, indicaría su grado de accesibilidad a las mismas y la eventual posibilidad de incluir este tipo de tareas como estrategia necesaria de intervención en las aulas de Educación Infantil tendente a desarrollar la reversibilidad de pensamiento actual.

La evaluación del éxito a través de la acción, permite minimizar los problemas de lenguaje y la influencia de éste sobre el resultado. Razones de tipo madurativo permiten esperar respuestas diferenciadas por razón de la edad, de tal modo que, de ser accesibles las tareas en modo inverso, lo que se manifestaría por el éxito de la tarea en la acción, en los mas pequeños, el procedimiento resolutivo debe estar mas vinculado a lo perceptivo, que en los de mayor edad; así mismo, que los niños de mayor edad serán mas capaces de argumentar sus acciones que los más pequeños. Estos supuestos avalan la necesidad de un estudio empírico.

**4.1. Sobre el estudio empírico**

El desarrollo e investigación sobre los modos de razonamiento es un campo de acción que involucra la reflexión sobre la lógica (bimodal y polimodal), la escuela y la construcción del conocimiento en general. En nuestro entorno, se acepta el planteamiento constructivista, como forma base de las justificaciones curriculares actuales. En particular la influencia del punto de vista piagetiano es crucial en los desarrollos curriculares en Educación Infantil. Sin embargo, la obra de Piaget tiene por objetivo describir la forma en que el niño comprende y esta comprensión implica la comprensión de los dos procesos que constituyen la reversibilidad como uno sólo. No está interesado en analizar los procesos que componen esa comprensión y tampoco en proponer estrategias de intervención que pudieran influir sobre ellos.

Siguiendo los principios asociados a los estadios evolutivos de desarrollo y la afirmación de la inexistencia de pensamiento reversible con anterioridad a los 7-8 años, y debido al llamado fracaso de la matemática moderna, se da una ausencia de intervención e investigación en edades tempranas sobre formas de razonamiento en situaciones no directamente vinculadas a espacio y número.

Por todo ello, pensamos que cabe establecer un campo de acción que implique la práctica de los dos procesos constituyentes de la reversibilidad, sobre procedimientos que, en el paradigma piagetiano, justifican la construcción del pensamiento matemático. Encontramos que sobre ellos falta el punto de vista investigativo que analice las posibilidades, rigor y características del pensamiento deductivo que el niño precisa poner en juego en cada uno de ellos y la posible relación entre ambos.

Estamos, así mismo, interesados en el análisis cualitativo de las estrategias de razonamiento utilizadas por los niños en algunos procesos concretos, como aquellos que tienen lugar cuando se resuelve tareas de clasificación en modo inverso comenzando por los elementos más claramente indicativos del descubrimiento de reglas que el niño manifiesta y su relación con la argumentación presentada.
Por ello formulamos el siguiente

**4.2. Problema**

Las consideraciones anteriores llevan a concluir la necesidad de tratar en igualdad de condiciones los procesos directo e inverso en el contexto de tareas planificadas para la Educación Infantil. Nos preguntamos cómo se construyen ambos procesos – directo e inverso - Estamos interesados en *el desarrollo de las destrezas de razonamiento implicadas en la conexión de las dos modalidades* de razonamiento: directa e inversa. Específicamente, en la caracterización de los modos de razonamiento que posibilitan la utilización de argumentos de modo directo e inverso.

En términos generales, nos formulamos las siguientes preguntas:

¿Cómo se construyen los dos tipos de procesos de razonamiento: directo e inverso? A través de su manifestación en la lógica inferencial que los argumentos de los niños permiten identificar, podremos responder esta pregunta.

*¿Hasta qué punto poseen* los niños, entre los 3 y los 5 años, *un razonamiento en modo inverso, caracterizado por procesos inferenciales de decodificación (propios de la matemática) a través de un uso de instrumentos como códigos y tablas y en qué sentido se asemeja a un razonamiento reversible en edades tempranas*?

*¿Qué resultados – éxito, dificultades, procedimientos y argumentos – se obtienen en cada modo y cuál es su relación con la edad de los niños?*

Estamos interesados en el análisis cualitativo de las estrategias de razonamiento utilizadas por los niños en algunos procesos concretos, como aquellos que tienen lugar cuando se resuelve tareas de clasificación en modo inverso; fundamentalmente, en identificar los elementos más claramente indicativos del descubrimiento de reglas y su relación con la argumentación que explicitan.

Suponemos que en las tareas en modo inverso, se encontrarán respuestas diferenciadas en función de la edad, de tal modo que en los más pequeños, el procedimiento resolutivo debe estar más vinculado con lo perceptivo, que en los de mayor edad.
Así mismo, los niños de mayor edad serán más capaces de argumentar sus acciones que los más pequeños.

*Tareas relativas a procedimientos de razonamiento matemático básicos, como los de clasificación a través de tablas de doble entrada o transformaciones planteadas bajo representación icónica, permiten explorar la forma en que los niños establecen las relaciones en estos dos procesos, componentes de la reversibilidad de pensamiento.*

*Finalmente, ¿Qué tipo de actividades de enseñanza se pueden proponer a partir de los resultados obtenidos?*

### 4.3 Objetivos

(1) Contribuir al reconocimiento de la posibilidad que los niños, entre los 3 y los 5 años, tiene de razonar de modo directo e inverso.

(2) Proponer un desarrollo metodológico que permita a los niños acceder tempranamente a las actividades de razonamiento deductivo implícitas en conceptos que, siendo complejos, tienen una presencia importante en el conocimiento matemático como es el caso de la transformación.

**Objetivos específicos**

(1) Establecer el logro que los niños alcanzan al resolver tareas que permiten indagar sobre modos diferenciados de razonamiento
(2) Identificar los procedimientos de solución que los niños utilizan para resolver las tareas de clasificación y transformación bajo dos modalidades: directa e inversa.
(3) Identificar procesos de argumentación de niños entre 3 y 5 años al resolver tareas como las previamente especificadas.
(4) Establecer si existe relación entre las características que presentan los modos diferenciados de razonamiento y la edad de los niños.
(5) Establecer si existen diferencias significativas en el proceso de solución – logro, procedimiento y argumentos – en función de los contenidos y las modalidades de tareas adoptadas.
(6) Proponer un desarrollo metodológico que recoja las implicaciones de los resultados encontrados.

En concreto, en este estudio nos proponemos realizar las siguientes actividades de investigación:

*1-1. Diseñar tareas que permitan reconocer las posibilidades de los niños ante modalidades diferenciadas de razonamiento y distintos tipos de códigos – tablas y flechas – asociados con dos tipos de tareas de carácter lógico: de clasificación y de transformación.*

*1-2. Implementarlas con una muestra de alumnos de edades entre 3 y 5 años.*

*1-3. Identificar la dificultad de las tareas tomando como indicador los porcentajes de acierto, al resolver cada tarea, en cada uno de los modos, según la edad. Para valorar: aciertos y errores, indicar mayor o menor dificultad en los modos y tareas.*

*1-4. Identificar los procedimientos empleados en la solución de cada tarea en función del éxito o fracaso en la misma en cada grupo de edad determinando si existen diferencias significativas.*

*1-5. Analizar los argumentos de los niños en función del éxito o fracaso, en cada grupo de edad para establecer si existe relación en el uso de las distintas categorías de argumentos con el éxito al resolver la tarea.*

*1-6. Reconocer y analizar la argumentación en función de los modos, en cada grupo de edad. Para analizar si existe relación en el uso de las distintas categorías de argumentos en función del modo y ver si se confirma el supuesto según el cual los modos inversos están ligados a categorías de argumentos más elaboradas.*

*2. Como consecuencia de los resultados obtenidos, justificar de forma sistematizada un conjunto de tareas que favorezcan la práctica de procesos inferenciales en Educación Infantil.*

### 4.4. Metodología

Para el desarrollo de nuestros objetivos realizamos el siguiente esquema.

| Objetivo | Subobjetivo | Cómo | Instrumentos |
|---|---|---|---|
| Prueba | Diseño e implementación | Justificación Quasiexperimental | Prueba piloto |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (Capítulo II) | | |
| Desarrollo | Resultados<br>(Capítulo III) | Registro y análisis de variables | Tablas de Frecuencias<br>Gráficos |
| | Análisis<br>(Capítulo III) | Éxito- Dificultad<br>Procedimientos<br>Argumentación | CHI cuadrado Descripción, clases, codificación y<br>tablas de frecuencias |
| Propuesta | Actividades<br>(Capítulo IV) | Sistemática según contenidos de razonamiento | Descripción de tareas con bloques lógicos |

**Desde el punto de vista del diseño experimental** se trata de un estudio descriptivo, de tipo exploratorio, con una sola medición, con la cual se realiza un análisis de proceso multivariado.

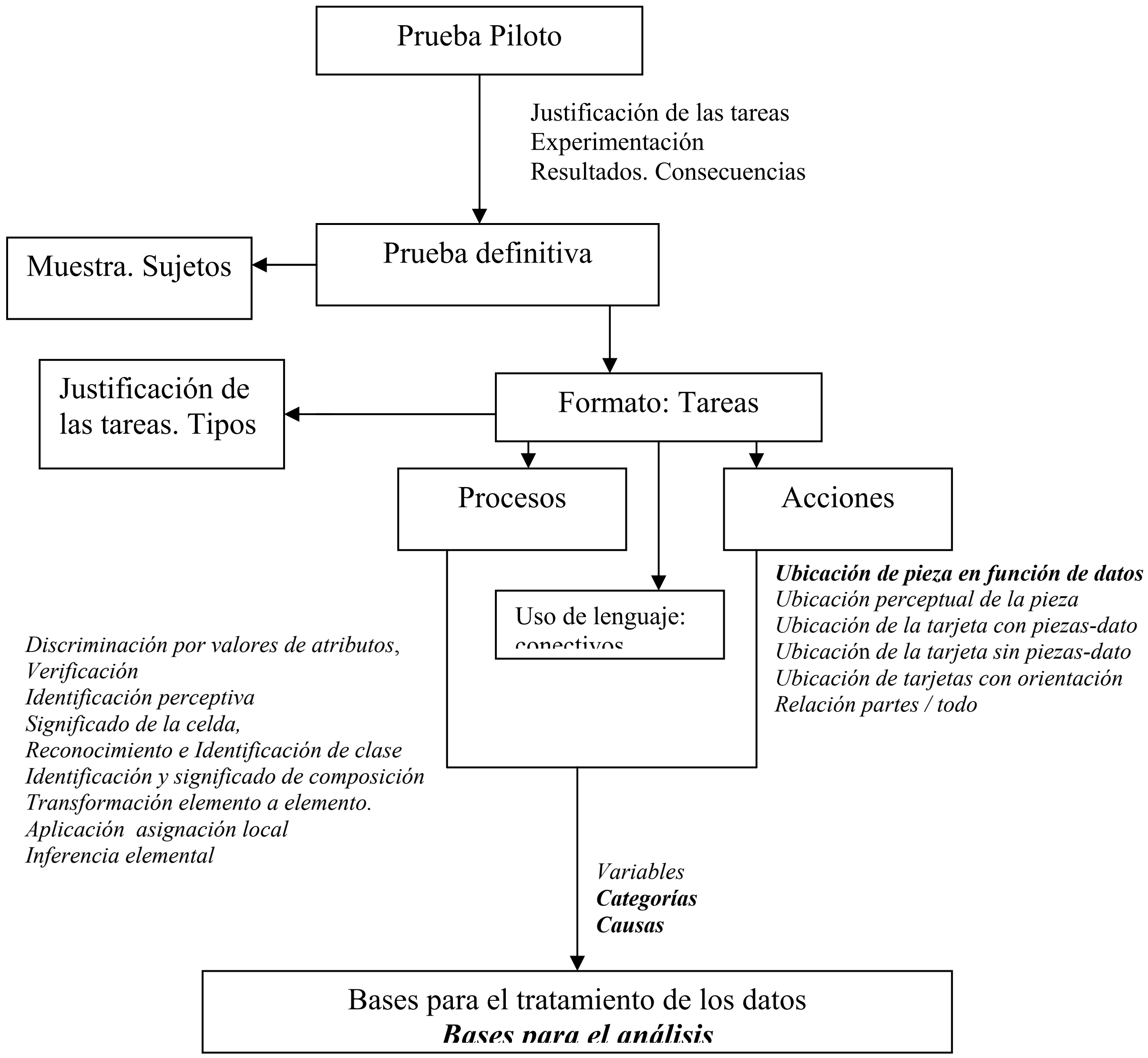
# CAPITULO II

# SOBRE LA PRUEBA REALIZADA


**Resumen**

*Se describe el estudio piloto que permitió definir las tareas sometidas a investigación, y la construcción de la prueba definitiva con las características de los sujetos participantes, el procedimiento utilizado en su aplicación y cómo se realiza el tratamiento de los datos obtenidos.*


**Esquema**



## 1. Diseño y realización de la prueba piloto

Para responder a nuestro primer objetivo, nos proponemos diseñar una prueba que permita medir el uso de relaciones inferenciales en situaciones elementales. Para ello consideramos que lo adecuado es fomentar el uso de relaciones mediante tablas y códigos básicos.

Se aplicaron las pruebas a un grupo de 39 niños de las tres aulas de Educación Infantil pertenecientes a tres colegios de la ciudad de Burgos, dos de ellos públicos y uno privado. Sobre este grupo se ajustó el tipo de explicación verbal y ejemplificación necesaria para asegurar que los niños comprendan las preguntas.

Para estudiar la posible influencia del contexto, más formal o más conocido y cotidiano se plantearon las pruebas con material estructurado (bloques lógicos) o con material cotidiano (lápices de colores).

Las pruebas se realizan individualmente a través de entrevista. La presencia de un entrevistador desconocido para el niño puede generar bloqueos, en estos casos, para lograr su respuesta, el entrevistador le ayuda a interpretar el código.

### 1.1. Las tareas propuestas en la prueba piloto

El objetivo de comparar resultados entre distintos grupos de edad ante una misma tarea, plantea la necesidad de elegir contenidos cuya complejidad no les haga inaccesibles a los niños más pequeños. Por tanto, se deshecha la posibilidad de plantear pruebas relativas a contenidos numéricos.

Medir la complejidad de los conceptos y relaciones conceptuales, es uno de los aspectos más difíciles en la ciencia del conocimiento.

Definimos ***complejidad relacional*** en términos de dimensionalidad como el número de ítem independientes de información contenidos en el concepto y se corresponde con el número de aspectos que son libres para variar independientemente. Este constructo "complejidad relacional" (Halford 1993) es una métrica útil para medir la complejidad conceptual. Los conceptos que requieren relaciones cuaternarias para ser representados se conjeturan como más difíciles que los que requieren relaciones ternarias, que a su vez serían más difíciles que los que requieren relaciones binarias. En la representación red-nodos, la tela de araña que precisa ser ubicada para un concepto que requiere relaciones cuaternarias ha de ser considerablemente más compleja que la necesaria para un concepto binario (Halford 1993).

De acuerdo con Vuyk (1984: 39), para Piaget los hechos de comparar y transformar constituyen las dos funciones primordiales del razonamiento pero esos procesos básicos (junto a clasificación y seriación) relativos a actividades de razonamiento tienen una naturaleza diferente que les confiere una complejidad distinta.

En primer lugar, mientras la clasificación, ordenación y seriación tiene lugar entre objetos de la misma naturaleza, la transformación es un procedimiento que pone en relación objetos que, en sentido general, pueden ser de naturalezas distintas. En todos los casos interviene un criterio relacional. Se comprende que la transformación sea un procedimiento más complejo en el sentido anterior puesto que en él aparecen, o pueden aparecer, dos aspectos que son libres de variar: la naturaleza de los elementos puestos en relación.

La presencia de los cuatro procedimientos es también diferente en los contenidos matemáticos posteriores. Así mientras la clasificación y la transformación son procedimientos que tienen una aplicación estructural, la seriación y la ordenación están presentes fundamentalmente en el seno de campos concretos. Mediante clasificación se crean los distintos campos numéricos y se transita de unos a otros y en sus representaciones, mediante transformación. Tal es el caso de la introducción formal de los enteros y fracciones. Es la transformación mediante biyectividad o mediante isomorfismo, la que permite transitar sin pérdida de significado, de unos tipos de representación a otros y la que permite poner en relación estructuras de naturalezas diferentes. La ordenación y seriación, sin embargo, son procedimientos que operan dentro de campos concretos que permiten conocer mejor la naturaleza y estructuración de los elementos que los componen.

La clasificación es desde el punto de vista psicológico, el procedimiento más simple, el que tiene lugar temporalmente en primer lugar (Piaget 1979). Así pues, mientras la clasificación resulta ser el procedimiento más elemental y básico, la transformación es el mas complejo. Además, éstos son los dos procedimientos más productivos en la generación de los contenidos matemáticos. En relación con su tratamiento desde el punto de vista didáctico para la etapa de Educación Infantil, se encuentra que, ninguna programación excluye las actividades de clasificación cosa que no ocurre con las de transformación. Cabe suponer, entonces que, en la realidad de las aulas de preescolar, es mas frecuente la actividad clasificatoria que la de transformación y que además, las últimas resultarán más difíciles de resolver para los niños.

P*or ello, en un estudio experimental se decide diseñar una tarea sobre cada uno de los contenidos anteriores para ser resueltas en modos directo e inverso que permitan estudiar las posibilidades reales de los niños. Además reúnen la condición de ser las actividades tipo mas y menos frecuentes respectivamente en la actividad preescolar por lo que, si los niños muestran posibilidades de resolver las actividades de transformación una eventual diferencia de éxito entre ambas a favor de la clasificación introduciría la variable experiencia como posible causa.*

Las tareas pretenden poner en práctica procesos de razonamiento inferencial en los que las proposiciones tanto como sus contrarias por negación tengan una presencia equivalente. Implican el uso de relaciones de distintos tipos de complejidad en el sentido que señala English (1995: 27). Asimismo, con las tareas deseamos comprobar las posibilidades de los niños para razonar sobre situaciones, de tipo fundamentalmente deductivo, que supongan el descubrimiento de reglas identificado este como el proceso que tiene presencia constante en los contenidos y procedimientos propios de la matemática, para la cual la educación matemática de la Etapa Infantil, debe servir de soporte. Por todo ello, decidimos:

(a) diseñar tareas sobre cada uno de los contenidos (clasificación y transformación) para ser resueltas en modos directo e inverso que permitan estudiar las posibilidades reales de los niños.

(b) a continuación, utilizar actividades de clasificación inspiradas en las que Santos Asensi y otros (1992) proponen para alumnos de 5 a 7 años sobre la base de que queremos constatar las posibilidades de razonamiento de alumnos de 3-5 años.

(c) consideramos actividades que admitan una gran diversidad de procedimientos resolutivos que pueden estar vinculados con la edad o a las posibilidades personales de cada cual que la educación individualizada debe respetar y potenciar.

En base a estas decisiones, organizamos la siguiente tabla de tipos de tareas

| | | | |
|---|---|---|---|
| Clasificación | Modo Directo | Material estructurado | 3 piezas |
| | | | 6 piezas |
| | | Material concreto (ANEXO 1 T1) | 3 piezas |
| | | | 6 piezas |
| | Modo Inverso | Material estructurado | 3 piezas |
| | | | 6 piezas |
| | | Material concreto (ANEXO 1 T2) | 3 piezas |
| | | | 6 piezas |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Transformación | Modo Directo | Material estructurado | CC[1] | 3 piezas | ANEXO1 T3 |
| | | | | 6 piezas | |
| | | | CS[2] | 3 piezas | ANEXO1 T4 |
| | | | | 6 piezas | |
| | | Material concreto | CC | 3 piezas | |
| | | | | 6 piezas | ANEXO1 T5 |
| | | | CS | 3 piezas | |
| | | | | 6 piezas | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Transformación | Modo Inverso | Material estructurado | CC | 3 piezas | |
| | | | | 6 piezas | ANEXO1 T6 |
| | | | CS | 3 piezas | |
| | | | | 6 piezas | |
| | | Material concreto | CC | 3 piezas | |
| | | | | 6 piezas | |
| | | | CS | 3 piezas | ANEXO1 T7 |
| | | | | 6 piezas | |

### 1.2. Diseño

Los niños participantes fueron niños elegidos al azar de los distintos cursos de Educación Infantil: 12 de 3 años, 16 de 4 años y 11 de 5 años pertenecientes a los centros participantes.

Se realizaron sin límite de tiempo.

[1] CC = “Construcción compleja”
[2] CS = “Construcción simple”

Para estudiar la posible influencia del material, todas ellas se llevaron a cabo con material estructurado y con material cotidiano.

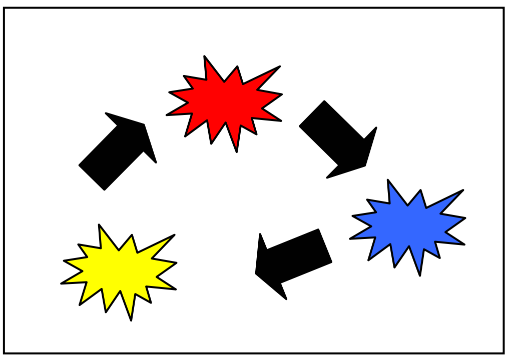
Para estudiar la posible influencia del número de piezas, dado que la tarea con 6 o con 3 piezas es idéntica, se comienza por plantear las tareas sobre el mayor número de piezas y, sólo si el niño fracasa, se repite sobre un número menor.
Se hace registro filmado.

### 1.3. Sobre los resultados de la prueba piloto

Ante las **tareas de clasificación en modo directo** se observa que tanto en el modo directo como en el inverso, el tipo de material empleado es irrelevante.
Prácticamente todos los niños entrevistados saben resolver el ejercicio de clasificación directa sobre material estructurado y mayor número de piezas. Los ejercicios repetidos sobre material concreto fueron irrelevantes e innecesarios.

En el caso de las tareas de **clasificación modo inverso**, seis niños cometieron errores al realizar la prueba sobre material estructurado y mayor número de piezas y el mismo resultado cuando se aplicó sobre material concreto y mayor número de piezas. La prueba en modo inverso planteada sobre material concreto y menor número de piezas tuvo éxito en dos de los seis casos y representan los menores niveles de dificultad planteables sobre la tarea.

La tarea **de transformación en modo directo** consiste en la elaboración de la figura imagen de otra que se presenta, de acuerdo con una transformación cíclica de color presentada sobre una tarjeta simbólica. Por ejemplo:



Para probar la influencia de las variables consideradas se plantearon las preguntas sobre los siguientes tipos de construcción por orden cronológico:

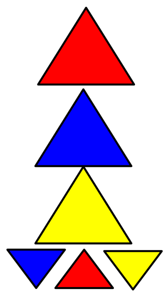
1. Figura con material estructurado y mayor número de objetos.
2. Figura con material concreto y mayor número de objetos.
3. Figura con material estructurado y menor número de objetos.
4. Figura con material concreto y menor número de objetos.

De entre los cuatro modos de presentación sólo se detectó una mejoría de resultados cuando el material es concreto, pero no en cuanto al número de elementos.

Sin embargo, sí se logró observar la influencia de la forma de la construcción.

Cuando la figura origen tiene un aspecto compacto de modo que las piezas que la integran guardan una posición relativa entre ellas, por ejemplo:

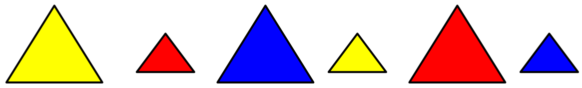
A



Se encontraron dificultades relacionadas con la falta de dominio espacial en la construcción de la figura imagen, que el niño tiene que construir a la derecha de la origen, que podían enmascarar o acrecentar dificultades de comprensión del operador.

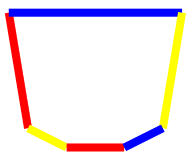
También se detectó la influencia de la disposición de los símbolos de color dentro de la tarjeta simbólica de transformación. La secuencia de los colores dentro de la tarjeta era, en ocasiones, la única razón para determinar la pieza imagen.

Las dificultades disminuyen cuando la figura se presenta en esta forma:



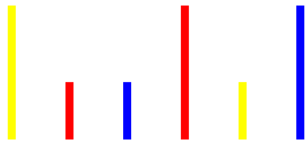
En este caso como unidades aisladas, la figura imagen se construye colocando debajo de cada pieza la que le corresponde según el operador. Esta presentación se corresponde con la práctica de una transformación punto a punto, aproxima las figuras original e imagen y palia parte de las dificultades de falta de dominio del espacio.

Lo mismo ocurre con el material concreto cuando las figuras se presentan en estas formas:



Ó

**B**



En el primer caso, la figura imagen se construye a la derecha mientras en el segundo (B) se construye debajo, en cualquier caso siempre se trata de aplicar el mismo operador.

El objetivo de la prueba es estudiar las posibilidades de los niños respecto a la aplicación correcta de un operador transformación, siendo así, el tipo o la forma de la construcción inicial es irrelevante y constituyen, en todo caso elementos metodológicos que facilitan poner de relieve esas posibilidades.

De las dos transformaciones cíclicas de color, en esta tarea sólo se utiliza una de ellas, la que el niño elige, con el fin de que comprenda que ambas, aunque diferentes, operan de forma semejante.

El objetivo de las **tareas de transformación en modo inverso** es estudiar las posibilidades de los niños para descubrir un operador transformación que se ha aplicado entre una construcción origen y una construcción imagen. Que las construcciones sean más o menos complejas no es relevante aunque constituye, igualmente en este caso, un elemento metodológico importante. El operador empleado es uno de los representados en las tarjetas de cambio cíclico de color, las cuales son mostradas, en el momento final de la tarea, para que el niño reconozca sobre ellas la transformación.

De los resultados obtenidos en el grupo piloto se pudo concluir que, en el caso de las tareas de clasificación, el tipo de material resulta irrelevante. El nivel de acierto mostrado por el grupo sobre las pruebas con mayor número de objetos, igualmente lleva a considerar irrelevante esta variable y eliminar las pruebas con menor número de objetos.

En cuanto a las tareas de transformación se observaron dificultades derivadas de la falta de dominio espacial cuando la figura propuesta tiene un aspecto compacto de modo que los elementos que la integran están dispuestos con determinada orientación y ello, con independencia del tipo de material. Si bien los resultados mejoraban algo en el caso del material concreto, ello podría deberse a una mayor experiencia en los niños al practicar la transformación sobre material concreto después. Así pues, *las pruebas realizadas sobre el grupo piloto, pusieron de manifiesto que la prueba nos permitía evaluar lo que esperábamos*.

Las condiciones de la investigación no permitían considerar todas las variables presentes. Las pruebas se hacían demasiado largas y pesadas para los niños que finalmente se cansaban y perdían interés y atención. Se decidió en el caso de la tarea de clasificación que, en modo directo, presentaba niveles muy altos de acierto, eliminar ambas variables y presentar la tarea en la forma más compleja, es decir: sobre material estructurado y mayor número de piezas; sobre la tarea de transformación, eliminar la variable número de piezas y seleccionar los casos más difícil: material estructurado y tipo de construcción compleja (CC), y el caso más fácil: material no estructurado y tipo de construcción simple (CS). Buscando los niveles más altos de dificultad, la prueba se propone sobre la figura de tipo (CC) y, sólo cuando se observa algún tipo de dificultad en la realización de la figura imagen, se plantea sobre una figura de tipo (CS).

Para evitar el efecto de la posición relativa de los colores dentro de la tarjeta, la figura de tipo CC se presenta con una disposición del color de sus triángulos integrantes (tanto en vertical como en horizontal) que es el inverso del que aparece en la secuencia de la tarjeta simbólica.

Puesto que el operador a aplicar es el color, el éxito sobre la figura CC denota, además de comprensión del operador, que no existen dificultades derivadas de la falta de dominio del niño sobre los dos espacios que ocupan en el plano las dos construcciones, ni en la composición de la figura (secuencia de arriba abajo o viceversa y de izquierda a derecha o viceversa, según la perspectiva desde la cual la enfoque el niño o un observador cualquiera). El éxito sobre una figura de tipo CS, significa que previamente se fracasó sobre una figura de tipo CC, ya sea por falta de comprensión del operador (que la repetición de la prueba puede mejorar) o porque en algunos casos las dificultades de tipo espacial se superan. Cualquiera de las dos razones proporcionaría evidencia empírica sobre la necesidad de adoptar una metodología que favorezca las posibilidades de los niños en este tipo de tareas.

La respuesta sobre la tarea de transformación en modo directo resulta condicionante sobre la misma en modo inverso pues para que el niño resuelva la prueba en modo inverso, es preciso que pueda establecer relación entre elementos correspondientes en ambas figuras: inicial e imagen. Para eliminar el problema derivado del dominio del espacio físico, la transformación inversa nunca se presentará sobre CC cuando al realizar la tarea en modo directo se detecte falta de dominio espacial.

Así pues, si un niño realiza la tarea de transformación inversa sobre CC es porque tuvo éxito en la transformación directa sobre CC. Si no tiene éxito en ella, se le plantea sobre CS.

Si un niño realiza la tarea de transformación inversa sobre CS es, o bien porque no tuvo éxito en transformación inversa sobre CC, o porque no tuvo éxito en transformación directa sobre CC.

## 2. Diseño de la prueba definitiva

### 2.1 Sujetos

Las pruebas se aplican a un total de 211 niños pertenecientes a siete centros escolares de la ciudad de Burgos, cuatro de ellos privados y tres públicos. Todos los niños pertenecen a aulas ordinarias de Educación Infantil.
La distribución de los niños según la edad y las aulas en que cursan es la siguiente:

| Edad | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| 3 | 70 | 33,2 |
| 4 | 76 | 36,0 |
| 5 | 65 | 30,8 |
| Total | 211 | 100,0 |

De los 76 niños de cuatro años, 14 cursan en aulas de tres años y 7 en aulas de cinco años. Así mismo entre los 65 niños de 5 años, 7 cursan en aulas de 4 años. Todos los demás cursan en aulas que corresponden con su actual edad.

El total de la muestra realiza las dos tareas de clasificación, en sus dos modalidades. La tarea de transformación directa sobre construcciones complejas (CC) fue realizada por 210 niños.

### 2.2. Las tareas en la prueba definitiva

Ante los resultados obtenidos en el estudio piloto, se decide una modificación del diseño, para hacer la prueba más ágil y adaptada a nuestras necesidades.

Para separar en el tiempo los dos modos de cada tarea, se comienza la prueba (1) con la tarea de clasificación en modo directo; (2) se continua con la tarea de transformación en modo directo sobre construcciones complejas (CC). (3) Si se ha fracasado sobre la anterior se plantea transformación modo directo sobre CS. Y si no se ha fracasado, se pasa a las tareas de modo inverso. Es decir:

(2) Transformación directa sobre construcción compleja (CC)

| *Si correcto* | *Si error* |
| --- | --- |
| (3) Clasificación modo inverso | (3) Transformación directa sobre construcción simple (CS) |
| (4) Transformación inversa sobre construcción compleja (CC) | (4) Clasificación modo inverso |
| *Si error* | |
| (5) Transformación inversa sobre construcción simple (CS) | (5) Transformación inversa sobre construcción simple (CS) |

Este diseño genera, para las tareas de transformación, tres grupos de análisis denominadas Muestras y constituidas de la siguiente forma:

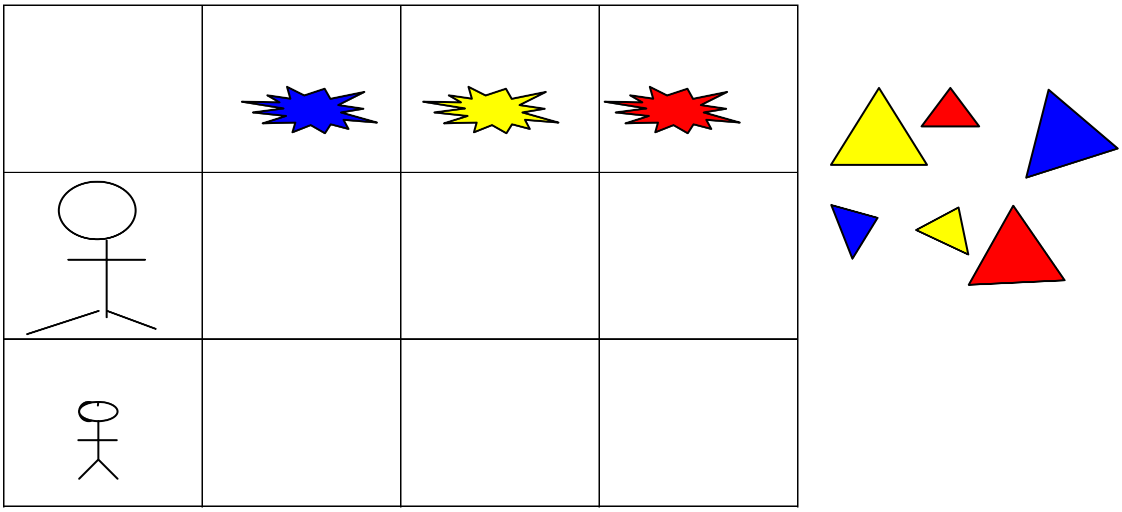
Muestra: Grupo de alumnos que tienen éxito sobre transformación en modo directo sobre CC. Total 62.

Muestra: Grupo de alumnos que tienen éxito sobre transformación directa sobre CC y no tienen éxito sobre transformación inversa sobre CC. Total 7.

Muestra: Grupo de alumnos que no tienen éxito sobre transformación directa sobre CC. Total 153.

### 2.2.1. La tarea de clasificación *Modo directo*

Al niño se le pide colocar las piezas que están fuera de la tabla en el cuadro que corresponde



Inicialmente se comprueba que el niño conoce los símbolos representativos de los dos atributos variables: color y tamaño y que los reconoce sobre las seis piezas objeto de colocación. Para esto se sostiene el siguiente diálogo:

> E.- ¿Cuántos años tienes?
>
> N.-
>
> E.- A ver si te gustan los juegos que me he inventado. Luego me lo dices ¿eh?
>
> E.- Mira, tú sabes que es esto...

[Se muestran las tarjetas de valores]

E.- ¿Sí? Pues a ver, estos son dos muñecos ¿verdad?

[E indica con el dedo las dos tarjetas de tamaño]

N.- Sí

E.- Pero este es...

N.- Pequeño

E.- Pequeño, y este otro...

N.- Grande

E.- Esto...

[E va recorriendo con el dedo las tarjetas de color]

N.- Rojo... Amarillo... Azul

E.- Eso es

E.- Y, este triángulo ¿de qué color es?

N.- Amarillo

E.- Y ¿es grande o pequeño?

N.- Pequeño

[E comprueba que el niño reconoce el valor de cada atributo que corresponde a cada pieza individualmente]

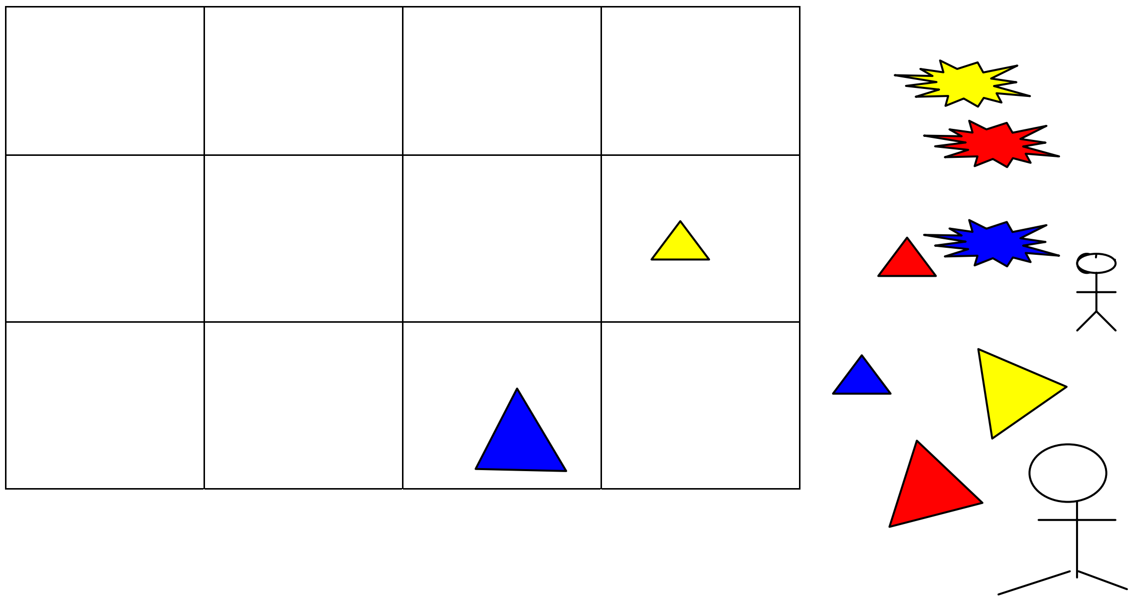
E.- Entonces voy a colocar las tarjetas aquí... Así...

[La matriz queda indicada en la siguiente forma: en vertical, arriba grande, abajo pequeño, en horizontal, azul, amarillo y rojo]

E.- Bueno pues mira, ahora tu tienes que colocar estos triángulos cada uno en un cuadro pero fijándote en lo que dicen las tarjetas.

### 2.2.2. La tarea de clasificación *Modo inverso*

Adivinar cómo hay que colocar los elementos que están fuera de la tabla teniendo en cuenta que los dos triángulos (amarillo pequeño y azul grande) no se pueden mover del cuadro donde están



Como ya se ha indicado, esta tarea se realiza después de la correspondiente en modo directo, por tanto el niño ya conoce la tabla y también se ha comprobado que reconoce los valores de ambos atributos.
El diálogo de presentación es el siguiente:

> E.- Vamos a jugar a adivinar. Mira yo me voy a inventar una manera de colocar los triángulos en estos cuadros
> [E indica con el dedo los cuadros de la tabla destinados a colocar los triángulos]
> E.- Yo voy a colocar dos triángulos. Solo dos ¿eh? Y tú fijándote muy bien en los que yo pongo, tienes que adivinar dónde tienes que poner las tarjetas estas...
> [E indica con el dedo las tarjetas de color y de tamaño]
> E.- Y los otros triángulos. Pero... los dos triángulos que yo pongo no hay que cambiarlos de sitio ¿De acuerdo?
> [Se colocan azul pequeño en (2,2) y amarillo grande en (1,3)].

### 2.2.3. Diferencia de nuestras tareas de clasificación con las pruebas de clasificación multiplicativa de Piaget

Entre las distintas pruebas realizadas por Piaget en relación con la clasificación, una serie de ellas se refieren a pruebas de clasificaciones multiplicativas, es decir las que

tienen lugar sobre objetos cuando entre ellos se establecen dos o más criterios clasificatorios simultáneamente.
Estas pruebas tienen lugar mediante la presentación de una tabla (en el caso de las pruebas piagetianas de dimensión 2x2) cuya presencia en la tarea introduce

> "un factor de configuración perceptiva que es tan importante que, bajo ciertas condiciones, puede facilitar y provocar por sí sólo la solución de pruebas que, a primera vista, estaríamos tentados a considerar como operatorias pero que de hecho involucran una solución que deriva del método de las meras colecciones figurales" (Piaget 1973: 169)

Nuestras tareas de clasificación utilizan una tabla de doble entrada de dimensiones 2x3 cuya incidencia en la presentación perceptiva de la tarea facilita, por tanto, su solución. Las pruebas piagetianas tienen por objeto analizar la forma en que el niño comprende las clasificaciones multiplicativas y explicar la relación de estas con las clasificaciones aditivas.

Ninguna de estas pruebas tiene por objetivo analizar la reversibilidad de pensamiento en el niño vinculada con los procedimientos clasificatorios de las distintas pruebas. De hecho no hay una sola referencia, en el análisis, a la reversibilidad. Por esto, mientras nosotros estamos interesados en los dos procesos relacionales que tienen lugar cuando una clasificación, con criterios expresos, se aplica y cuando estos se han de descubrir, las pruebas piagetianas toman la forma que corresponde con los procesos directos en unos casos, con los procesos inversos en otros o presentan fragmentos de ambos de forma entremezclada, según convenga al objetivo de cada prueba.

Las pruebas con matrices piagetianas (Piaget 1973:167), presentan la tabla organizada e incompleta y tienen por objetivo analizar la forma en que el niño la completa y las razones que encuentra para ello. Estas pruebas se corresponden con procesos en modo inverso y resultan equivalentes a nuestra tarea de clasificación en modo inverso, salvo por el uso de una tabla dimensionada de otra forma y porque, en nuestra tarea, todos los elementos sobre los que el niño puede elegir son ubicables, de modo que no sobra ninguno. Estas pruebas, sin embargo, no incluyen otras vinculadas con ellas, que suponen los procesos directos. Para estas, las tareas en modo directo consistirían en mostrar la tabla y los criterios clasificatorios y solicitar al niño que ubique en el lugar que corresponda los elementos pertinentes.

En cuanto a las pruebas piagetianas correspondientes a las clasificaciones espontáneas (Piaget 1973:183), tienen por objetivo

> "... investigar si logra repartirlos según esos dos criterios al mismo tiempo y cómo lo hace" (Piaget 1973: 190).

Para ello se lleva a efecto una técnica según la cuál el sujeto agrupa los elementos de acuerdo con la consigna "poner juntos los que van bien" criterio que, por otra parte, queda a libre elección del niño. Esto supone un proceso clasificatorio en modo directo en la medida en que el niño clasifica efectivamente los elementos, y resulta equiparable a nuestra tarea en modo directo salvo que, en nuestro caso el criterio clasificatorio está determinado de antemano y nuestras subclases son unitarias. En las tareas piagetinas se analiza si el sujeto establece relación entre las dos variables en juego, o sólo toma en cuenta una, clasificando en dos subclases o en cuatro subclases; se analiza cuando la estructura espacial de la tabla, se impone por razones figurales antes de que haya comprensión completa de la operación multiplicativa, pero nunca se muestra, como en las pruebas de matrices, una clasificación en dos subclases o en cuatro subclases y se interroga acerca de cómo se clasificó en cada caso, prueba, esta última, que compondría el proceso en modo inverso complementario del anterior desde el punto de vista de la reversibilidad.

Las pruebas de multiplicación (o intersección) simple piagetianas (Piaget 1973:195), tienen en común con nuestras tareas, la composición unitaria de las subclases generadas. En ellas se combinan los dos procesos directo en inverso. El proceso directo se pone de relieve en el objeto de la prueba: “encontrar una pieza que vaya bien” a las dos colecciones. Así ocurre en nuestra tarea en modo directo. Pero las preguntas previas como “¿porqué se han puesto juntos todos estos objetos?" ó “¿se parecen en algo?”, que también forman parte de la prueba, denotan el procedimiento en modo inverso en la medida en que suponen descubrir el criterio con el que fueron determinadas.

En el caso de las pruebas piagetianas, las clases se presentan por extensión a través de representaciones de objetos reales que dificultan la identificación de las clases, en nuestro caso, las colecciones componentes están dadas por comprensión y representadas simbólicamente mediante códigos.

En cualquier caso, las pruebas piagetianas y las que aquí presentamos difieren en que, en aquel caso, ambos modos se presentan de forma conjunta como corresponde a un objetivo de análisis de comprensión de un concepto, mientras en nuestro caso, los dos procesos componentes de esta comprensión se muestran separados como constitutivos de pruebas diferentes.

Por otra parte, el objetivo mas global de las pruebas piagetianas, hace que los ejemplos usados en aquel caso sean axtramatemáticos. Nosotros, por el contrario, nos centramos en un elemento matemático como es el caso de las tablas de doble entrada. Sin embargo, mientras este instrumento para Piaget es sólo una forma de representación, nosotros consideramos su valor como transmisor de la información que los códigos de designación tienen para lo que la tabla constituye un elemento facilitador.

### 2.2.4. Bases para el análisis de las tareas de clasificación. Procesos.

El material utilizado en la prueba: tarjetas simbólicas de valores y triángulos finos, tiene distinto valor simbólico. Mientras las cinco tarjetas de valores – tres de cada uno de los colores y dos de ambos tamaños– representan la clase de elementos que reúnen la característica que simbolizan, las piezas (triángulos finos) son elementos concretos pertenecientes a la clase definida por la conjunción de ambos valores: color y tamaño.

La presencia simultánea de una operación y su inversa, que explica la construcción piagetiana del conocimiento y que se presenta en los contenidos y procedimientos propios de la matemática, se presenta en estas tareas de razonamiento.

La tarea de clasificación presentada tiene por objeto asignar en la acción un lugar para cada pieza, determinado por la conjunción de dos atributos indicativos de clases y su posterior reconocimiento sobre objetos concretos. La operación que supone el reconocimiento de un valor sobre una de las piezas, va simultáneamente ligada con el reconocimiento de la negación del mismo valor sobre el resto de las piezas. Si se reconoce un valor en una pieza (por ejemplo "es amarilla") es porque, a la vez se la puede discriminar de lo que "no es amarillo", que en el caso del material empleado y de acuerdo a la ***ley inferencial de simplificación***, significa "ser rojo o ser azul".

Esta simultaneidad de presencia de la afirmación y la negación juega en esta actividad un papel importante puesto que la asignación de un cuadro, y solo uno, para cada triángulo, queda determinada por lo que el triángulo "es" (por ejemplo "rojo y grande"). Pero de la misma manera la asignación de cuadros no posibles para "rojo y grande" queda determinado por lo que el triángulo "no es" (en este caso "no rojo o no grande"), lo que eliminaría las columnas de amarillo y de azul, así como la fila de pequeños, por complementariedad de acuerdo con las Leyes de Morgan.

Formalmente si se simbolizan las proposiciones elementales siguientes:

$p \equiv$ "ser rojo"

$q \equiv$ "ser azul"

$r \equiv$ "ser amarillo"

$s \equiv$ "ser grande"

$$t \equiv \text{“ser pequeño”}$$

La tarea en modo directo, supone

a.- El ejercicio de las siguientes conjunciones:

$$p \wedge s \qquad q \wedge s \qquad r \wedge s$$

$$p \wedge t \qquad q \wedge t \qquad r \wedge t$$

b.- El posterior reconocimiento de la verificación de las mismas sobre cada pieza.

c.- La identificación de la única casilla en la que válidamente debe colocarse cada pieza, mediante inferencia.

En el caso de la tarea en modo inverso es todo este proceso el que debe ser descubierto y posteriormente aplicado.

Los procesos que definen las acciones determinadas pueden variar a medida que el proceso resolutivo avanza. Supongamos el momento correspondiente al inicio de la solución y veamos que tipo de proceso puede desencadenar la acción de colocar algunos elementos concretos.

***Acción 1. Ubicación de pieza en función de datos***

La colocación de uno de los triángulos correspondientes a columnas con datos (por ejemplo el triángulo grande amarillo) puede ser producto del siguiente proceso:

<u>Paso 1</u>. - Discriminación de la pieza por los valores de sus atributos.

La discriminación e identificación del color, que el niño verbaliza, supone el siguiente proceso de inferencia modus tollendo ponens:

$$\begin{array}{c} p \vee q \vee r \\ \underline{\sim p \wedge \sim q} \\ r \end{array}$$

La discriminación e identificación del tamaño, que el niño verbaliza, supone el siguiente proceso de inferencia modus tollendo ponens:

$$s \vee t$$
$$\underline{\sim t}$$
$$s$$

Paso 2. - La localización del lugar dentro de la tabla implica reconocer en la tabla 2x3 la presencia: en las filas, de los dos valores para el atributo tamaño y en las columnas, de tres valores para el atributo color; e inferir, por similitud y diferencia respecto a los dos triángulos colocados, el lugar que corresponde al triángulo grande amarillo.

De este modo, los niños podrían haber encontrado la solución por implicación significativa, lo cual introduce la necesidad de la solución encontrada (Vuyk 1984: 207).

***Acción 2. Ubicación perceptual de la pieza***

Paso 1. - La percepción sensorial puede llevar a reconocer este elemento como el indicado para ocupar el lugar correcto, sin que puedan explicitarse procesos inferenciales formales más que los que subyacen a la propia percepción.

***Acción 3. Ubicación de la tarjeta con piezas-dato***

La colocación de una de las tarjetas simbólicas con datos indicativos (por ejemplo la tarjeta de color amarillo) supone:

Paso 1.- Reconoce la columna ocupada por el triángulo amarillo y pequeño como la clase o reunión de elementos definidos por esta característica.

Paso 2.- Reconoce en la tarjeta simbólica del color amarillo la representación de la clase.[3]

***Acción 4. Ubicación de la tarjeta sin piezas-dato***

La colocación de la tarjeta simbólica de color sin datos indicativos (la tarjeta de color rojo) exige:

[3] Así resulta cerrado el proceso que conduce de los elementos de la columna al símbolo y después del símbolo hacia la columna que queda unívocamente determinada.

Paso 1.- Reconocer las distintas columnas con triángulo como las respectivas clases o reunión de elementos definidos por la característica correspondiente.
Paso 2.- Inferir: Puesto que la tercera columna es de amarillos y la segunda de azules, por inferencia, la primera tiene que ser de rojos.

Es esta la acción que pone de manifiesto más claramente el descubrimiento de las reglas que implícitamente se expresan a través de los dos triángulos dato.

El procedimiento es similar al que puede tener lugar cuando la primera pieza es uno de los triángulos rojos, con la diferencia de la concreción del elemento frente a la representación simbólica de clase.

De los múltiples procedimientos que pueden ser usados para resolver este ejercicio es el que comienza con la colocación de la tarjeta de color rojo o de una pieza roja el que más evidencia el uso de procesos inferenciales y de clase.

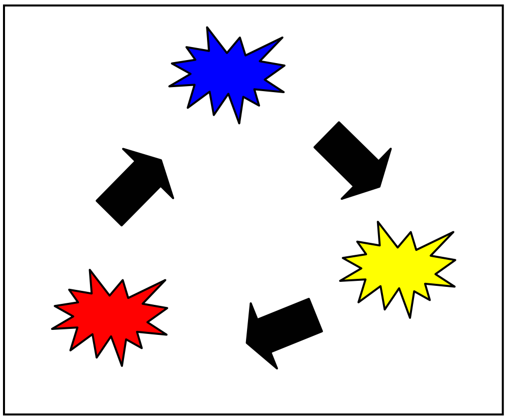
En el otro extremo se encuentra el procedimiento que comienza con las dos piezas de color con datos (los triángulos azul pequeño y amarillo grande). La colocación de los restantes elementos precisa reconocer el símbolo de clase (en el caso de las tarjetas) con una componente menos perceptiva en el caso de las tarjetas de tamaño que en el caso del color y el reconocimiento de los triángulos rojos como elementos de las clases respectivas de grandes y pequeños.

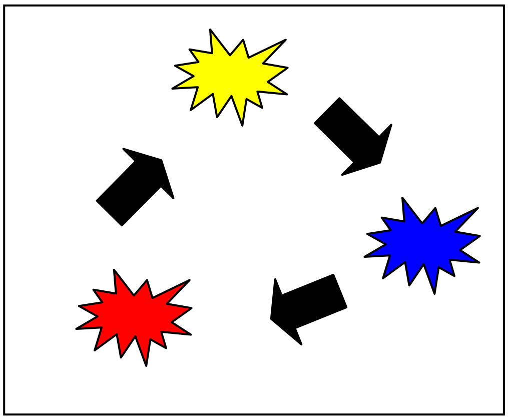
Un indicador claro del reconocimiento de la clase como tal sería la verbalización del plural ("aquí están los amarillos" ó "los pequeños van ahí", etc.) o incluso la señalización de filas o columnas como totalidades únicas con una característica.

### 2.2.5. Tarea de transformación en *Modo directo s*obre construcción compleja (CC)

Ante todo veamos la tarea escogida **de transformación en *Modo directo s*obre construcción compleja (CC).**

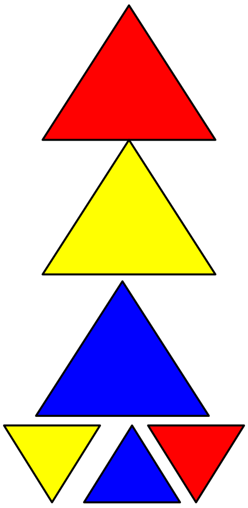
En primer lugar, se presentan al niño los dos códigos de transformación cíclica de color representados sobre tarjetas siguientes:





Este es un código complejo (tomado de Dienes 1987) que representa una transformación múltiple, constituida en realidad por las tres transformaciones de color parciales que vinculan cada dos códigos de color consecutivos.

A continuación se presenta la figura que el niño debe transformar:



Se dan al niño otros seis triángulos iguales a los que componen la figura inicial y se le pide que construya, a la derecha de esta, la figura en que se transforma.

Esta tarea se realiza después de la tarea de clasificación directa, por tanto el niño ya conoce los triángulos que intervienen en ella.

La explicación de los códigos de transformación que indican las tarjetas tiene lugar mediante el siguiente diálogo:

> E.- Ahora vamos a jugar a cambiar. Mira, yo tengo estas tarjetas que sirven para cambiar los colores. Te las voy a enseñar. Esta, sirve para cambiar el color rojo por el azul
> [E indica sobre la tarjeta el color rojo, la flecha y el color azul en el extremo de la flecha]
> ...El azul por el amarillo...
> [E indica con el dedo el color azul, la flecha y el color amarillo al extremo de la flecha]
> ...Y el amarillo por el rojo
> [E indica con el dedo el color amarillo la flecha y el color rojo al extremo de la flecha]
> E.- Entonces mira cómo voy a jugar. Si yo tengo un triángulo rojo...
> [E coloca el triángulo rojo grande sobre la mesa]
> ...El rojo le cambio por...
> [E indica en la tarjeta el rojo, la flecha y el azul]
> N.- Azul
> E.- Entonces pongo el azul aquí
> [E coloca el triángulo azul grande a la derecha del rojo inicial]
> E.- Y si tengo este azul...
> [E coge azul pequeño y le coloca debajo del rojo grande]
> ... Pues, como es azul, le cambio por...
> [E indica sobre la tarjeta el azul, la flecha y el amarillo]
> N.- Amarillo
> E.- Claro porque el azul cambia por amarillo
> [E indica el triángulo pequeño azul y el pequeño rojo a su derecha]
> [E deja la tarjeta sobre la mesa y coge la otra tarjeta de cambio]
> E.- Y mira, esta pone que lo rojo lo cambio por el amarillo, el amarillo por el azul y el azul por el rojo

[E va indicando cada uno de los colores]

... La flecha indica por cuál le cambio, ¿ves?

E.- Pero mira con esta otra, si tengo este triángulo...

[E señala triángulo rojo grande que está sobre la mesa]

... Como ahora el rojo se cambia por...

N.- Amarillo

E.- Entonces el azul ya no vale porque ahora tengo que poner este...

[Quita el azul imagen del ejemplo anterior y coloca en su lugar el amarillo]

[E quita también el amarillo pequeño imagen del ejemplo anterior]

E.- Y si tengo este azul

[È señala el pequeño azul situado bajo el grande rojo inicial]

E.-...Le cambiaré por...

[E señala sobre la tarjeta el color azul, la flecha y el color rojo]

N.-Rojo

E.- Elige una tarjeta de cambiar

[E muestra las dos tarjetas simbólicas de transformación y el niño señala o coge en su mano una de las dos]

E.- ¿Con esta quieres jugar?

E.- Entonces, yo voy a hacer un árbol

[E realiza la figura despacio diciendo: “esta... es la rama de arriba, esta... es la rama del medio, esta... la de abajo y la maceta la voy a hacer con este ladrillo... a la izquierda, este... en medio y este... a la derecha”. El árbol original se construye con la precaución de no seguir la secuencia de colores que correspondería según la secuencia que indica el operador]

E.- Pues mira, ahora con estos otros triángulos, tú tienes que hacer un árbol como este, aquí...

[E señala el espacio a la derecha de la figura]

... Pero cambiando los colores como dice la tarjeta

E.- Mira, la ramita de arriba del pino de qué color es...

[Se apunta el triángulo grande de arriba]

N.-...

[E apunta el color en la tarjeta]

E.- Y tu tarjeta de cambiar que dice...que el color... lo tenemos que cambiar por...

N.-...

E.- Pues entonces, en el árbol nuevo, este...

[E apunta el triángulo grande de arriba]

E.- Le tenemos que cambiar por uno que sea....

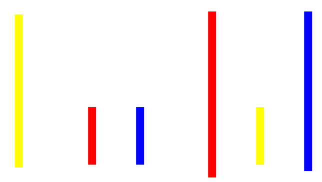
[E coloca el grande... a la derecha del grande de arriba]

E.- Sigue tú.

Dado que el cambio que se solicita es un cambio sobre el color, no se valora si el niño responde cambiando también el tamaño, sino únicamente si el cambio de color es acorde con el operador elegido.

**2.2.6. Tarea de transformación en *Modo directo* sobre construcción simple *Modo directo* sobre construcción simple (CS)**

Construir debajo la fila de lápices cambiando los colores como indica el mismo operador anteriormente elegido



El material que aquí se utiliza son lápices de colores: azul, amarillo y rojo, de dos tamaños bien diferenciados en cuanto a longitud. El código de transformación es el mismo que el utilizado sobre CC. Previamente se establece la discriminación de ambos atributos sobre estos objetos con el siguiente diálogo:

E.- Mira estos lapiceros. ¿De qué color son estos?

[E indica los dos de color rojo]

N.- Rojo

E.- Pero este...

[E indica el mas corto]

E.- ¿Es mas pequeño que este otro?

N.- Si

E.- Y... ¿estos?

[E indica los dos de color amarillo]

N.- Amarillo

E.- Y este... cómo es también...

[E indica el amarillo mas pequeño]

N.- Pequeño

E.- ¿Estos otros?

[E indica los dos de color azul]

N.- Azul

E.- Y este... cómo es también...

[E indica uno de los azules]

N.-...

E.- Pues mira, vamos a poner los lápices en fila

[Se colocan de izquierda a derecha de la siguiente forma: amarillo grande, rojo pequeño, azul pequeño, rojo grande, amarillo pequeño y azul grande]

E.- Y ahora tú tienes que cambiar cada uno por otro del color que le toca como dice tu tarjeta de cambiar los colores, y le pones debajo. Por ejemplo, este... ¿de qué color es?

N.- Amarillo

E.- Y ¿cómo dice tu tarjeta que hay que cambiar el amarillo?

N.-...

E.- Pues entonces ponemos el de color... debajo del amarillo

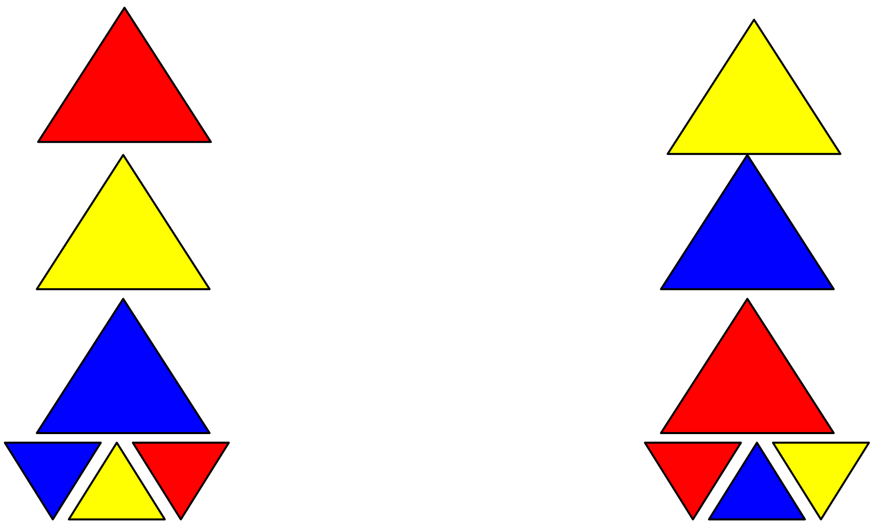
[E coloca el lápiz debajo del amarillo grande]

E.- Sigue tú.

Dado que el cambio que se solicita es un cambio sobre el color, no se valora si el niño igualmente cambia el tamaño, sino únicamente si el cambio de color es acorde con el operador elegido.

### 2.2.7. Tarea de transformación *Modo inverso* sobre construcción compleja (CC)

Se presenta la figura (1) y se dice que se cambia por la figura (2) que se construye. Se pide al niño que adivine que ha pasado a la figura (1)



(1) (2)

E identificar la tarjeta indicativa que corresponda.

Siempre se aplica, para construir ña figura (2), el cambio no seleccionado por el niño en la tarea de modo directo.

Esta tarea se realiza después de la correspondiente en modo directo. Por tanto el niño conoce tanto las características de las piezas que intervienen como los dos operadores de cambio cíclico de color que el entrevistador sólo muestra al final.

La explicación tiene lugar con el siguiente diálogo:

> E.- Ahora voy a hacer un árbol aquí...
> [E va construyendo una figura de árbol del mismo tipo que el empleado en el caso de transformación directa sobre CC. Va diciendo le pongo esta... que es la rama de arriba, esta... es la rama del medio, esta... la de abajo y la maceta la voy a hacer con este ladrillo... a la izquierda, este... en medio y este... a la derecha]
> E.- Y aquí...

[Señala el espacio a la derecha del árbol construido]

E.- Voy a hacer otro que me voy a inventar, en lugar de tener esta rama arriba...

[E señala el triángulo grande de arriba]

E.- Voy a poner esta... La rama del medio... voy a poner esta... La rama de abajo... pongo esta... y la maceta la hago con este ladrillo a la izquierda... este en medio... y este otro a la derecha... ¿Es igual el árbol que me ha salido ahora que el del principio?

[Se utiliza la transformación no empleada por el niño en la tarea directa.]

N.-...

[Si el niño acepta que son distintos]

E.- Entonces, a ver si adivinas tu qué he hecho

N.-...

.........

E.- ¿Te acuerdas de las tarjetas de cambiar los colores?

[E muestra ahora las dos tarjetas de cambio de color]

E.- ¿Tu sabes si yo he cambiado como dice una de estas?

N.-...

[Si el niño determina una]

E.- ¿Por qué con esta?

N.- Porque...

E.- Y ¿eso dice la tarjeta de cambiar?

N.-...

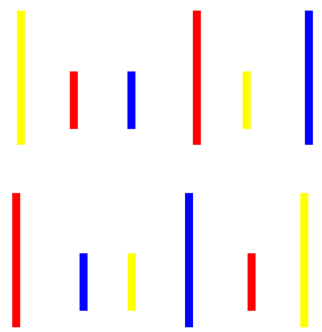
E.- ¿Dónde lo ves? Y ¿qué más dice la tarjeta de cambiar?

N.-...

E.- ¿Y eso he hecho yo? ¿Dónde lo ves?

### 2.2.8. Tarea de transformación *Modo inverso* sobre construcción simple (CS)

Se presentan los lápices en hilera. Después el entrevistador cambia cada uno de ellos por otro que coloca debajo construyendo una segunda hilera:



Se pide al niño que adivine qué ha ocurrido a los lápices que están en la fila superior e identificar la tarjeta indicativa que corresponda.

Si el niño no ha realizado la tarea directa con lápices, se identifican las variables color y tamaño sobre los lápices.

La explicación tiene lugar con el siguiente dialogo:

> E.- Voy a hacer una fila con los lapiceros. Por ejemplo, el primero pongo este... ahora este... este...
> [E coloca los seis lápices en fila cuidando de que no sean consecutivos los colores transformados en la misma secuencia que aparecen en el operador transformación]
> E.- Y ahora debajo de cada uno voy a colocar el que le toca. A este...
> [E toca con el dedo el de la izquierda]
> E.- Le toca este...
> [E coloca debajo el lápiz que corresponde según el operador conservando el tamaño]
> E.- A este... este...
> [E indica con el dedo cada uno de los lápices de arriba y su correspondiente debajo]
> E.- ¿Están igual los de arriba y los de abajo?
> N.-...
> [Si el niño acepta que son distintos]
> E.- Entonces, a ver si adivinas tu qué he hecho
> N.-...
> .........
> E.- ¿Te acuerdas de las tarjetas de cambiar los colores?
> [E muestra ahora las dos tarjetas de cambio de color]
> E.- ¿Tú sabes si yo he cambiado como dice una de estas?
> N.-...
> [Si el niño determina una]
> E.- ¿Por qué con esta?

N.- Porque...

E.- Y ¿eso dice la tarjeta de cambiar?

N.-...

E.- ¿Dónde lo ves? Y ¿qué más dice la tarjeta de cambiar?

N.-...

E.- ¿Y eso he hecho yo? ¿Dónde lo ves?

**2.2.9. Bases para el análisis de las tareas de transformación**

El material utilizado para esta tarea tiene distinto valor simbólico. Las tarjetas representativas de los cambios cíclicos de color suponen transformaciones de clases.

El procedimiento necesario para resolver la tarea, en el caso CC, supone la superación de los siguientes pasos:

1. - Es necesario comprender el operador transformación

2. - Reconocer en la figura inicial u original, elementos que los hacen pertenecer a alguna de las clases representadas en el operador.

3. - Comprender la figura CC como compuesta de elementos distintos.

4. - Comprender que la transformación afecta a cada uno de estos elementos particulares.

5. - Aplicar la transformación sobre cada elemento particular.

6. - Asignar en el espacio destinado a la figura imagen un lugar para el transformado de cada elemento.

7. - Colocar cada elemento imagen con una orientación conveniente que contribuya a la conformación de la figura final, como totalidad.

Es claro que si se consigue construir la figura imagen con éxito es porque todos los anteriores pasos del proceso se resuelven con éxito.

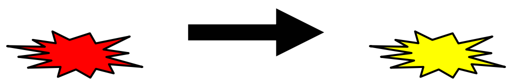
Además, si no se comprende el operador, será imposible construir correcta y justificadamente la figura imagen.

Los procesos inferenciales que subyacen a la acción de colocar una pieza como transformada de otra pueden ser varios, veamos alguno.

***Acción 1***

Algunos de los pasos anteriores coinciden con los vistos en la tarea de clasificación, es el caso del reconocimiento de un elemento como perteneciente a una clase.

Sin embargo, el proceso propio de la transformación consiste en una inferencia modus ponens que, por ejemplo, para la transformación



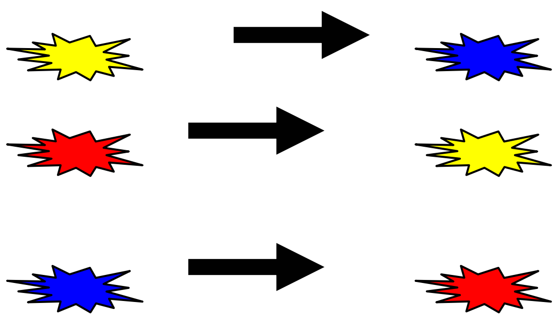
Tiene por premisas y conclusión:

- "Si un triángulo es rojo, entonces se transforma en amarillo"
- "El triángulo es rojo"
- "Luego se tiene que transformar en amarillo"

Expresiones que justifiquen la acción realizada, del tipo: "Porque el rojo va al azul" ó "El rojo cambia en amarillo" que expresa la relación entre elementos inicial y final, son indicativas de este proceso.

Esta inferencia ha de aplicarse, como mínimo sobre las dos primeras piezas grandes (la tercera puede ser colocada por exclusión) y las dos primeras piezas pequeñas, que conforman la figura inicial. La discriminación de cada uno de los tres colores en cada una de las tres transformaciones elementales de que se compone el operador, es decir: que pueden tener lugar en orden no secuencial:

1. - Es necesario



implica la presencia de la negación en la medida en que: si se reconoce que algo es rojo es porque se diferencia de lo que es no rojo.

***Acción 2***

En el otro extremo, es decir, si pensamos en el razonamiento inferencial más elemental que puede justificar una acción de cambio de color basado en la percepción y en el alto poder simbólico del código de color, es posible que el niño, asocie la transformación de una clase con la clase que secuencialmente aparece en el operador como siguiente. En definitiva, es lo que la tarjeta de transformación quiere expresar.

Una expresión argumental que indicara ambos valores: origen e imagen, como consecutivos sobre la tarjeta simbólica de cambio de color, puede ser indicativa de este tipo de procedimiento.

El proceso necesario para resolver la tarea, en el caso CS, supone la superación de los siguientes pasos que pueden tener lugar en orden no secuencial:

1. - Comprender el operador transformación
2. - Reconocer en la figura inicial u original elementos que los hacen pertenecer a alguna de las clases representadas en el operador.
3. - Comprender que la transformación afecta a cada uno de estos elementos particulares.
4. - Aplicar la transformación sobre cada elemento particular.
5. - Asignar en el espacio destinado a la figura imagen un lugar para el transformado de cada elemento.

Ahora no aparecen los requisitos relativos a la figura inicial y la aplicación del transformador se corresponde con el concepto de aplicación punto a punto.
Sin embargo el proceso inferencial vinculado es el mismo.

En el caso del modo inverso sobre CC el procedimiento resolutivo presenta un orden secuencial necesario cuyos pasos deben ser:

1. - Establecer relación entre elementos correspondientes de las figuras origen e imagen, para lo cual la posición y orientación de los elementos son indicativas.
2. - Determinar la relación por observación simultánea de parejas de elementos.
3. - Reconocer los cambios sobre la tarjeta simbólica de la transformación cíclica de color.

Para el caso de CS el procedimiento es el mismo con la diferencia de que los elementos correspondientes se encuentran físicamente más próximos y aislados lo que facilita la identificación. De igual forma, las parejas de elementos correspondientes se pueden visualizar simultáneamente con mayor facilidad.

El procedimiento para resolver esta tarea exige operaciones entre relaciones y se comprende que reviste una dificultad superior a la que presentan las otras tareas.

La tarea en modo directo es activa en el sentido de que solicita una acción sobre los objetos que el propio proceso puede modificar y, así mismo, la acción puede producir nuevos modos de argumentación.

El modo inverso, por el contrario, no es activo, la solución se encuentra por relación entre los objetos y se desprende de la misma. Dado que se trata de reconocer la simbolización de una transformación ya efectuada, es claro que ha de darse la previa conciencia de que existe un cambio para que tenga sentido proseguir solicitando identificar el cambio observado y su posterior reconocimiento simbólico. En este sentido, una eventual respuesta negativa sobre el reconocimiento de un cambio, de algún tipo de diferencia entre las construcciones inicial y final, es decir el conocimiento que el niño expresa a través de la argumentación es anterior y prevalente por lo que los resultados de éxito de esta tarea deberían estar más vinculados a niveles más precisos de argumentación que en el caso de la tarea en modo directo que permite accionar y argumentar y, por tanto, modificar la acción y la argumentación.

## 3. Aplicación de la prueba

Antes de presentar las tareas a los niños se mantuvo entrevista con las tutoras de los cursos respectivos con el fin de conocer el grado de experiencia que estos tenían con las actividades que se investigan. También se solicitó de las mismas una valoración sobre las posibilidades de éxito que, anticipadamente, podrían esperarse.

Los grupos participantes resultaron homogéneos en cuanto a experiencia: la actividad de clasificación en modo directo fue valorada como asequible para todos los niños, con algunas dudas respecto al grupo de niños de 3 años. La clasificación en modo directo por dos atributos no era una actividad extraña en ningún grupo, si bien mediante diagramas de Venn. En ningún caso sobre una tabla bidimensional.

La tarea de clasificación en modo inverso era por completo desconocida para todos los niños y fue valorada como difícil por las tutoras.

En cuanto a la tarea de transformación la experiencia de todos los niños era nula. Fue valorada por las tutoras como muy difícil y, en el caso del modo inverso plantearon serias dudas sobre las posibilidades de los niños, de modo especial en el caso de los más pequeños.

La actividad de razonar requiere atención y concentración. Es personal y se manifiesta de múltiples formas. Por otra parte, para conocer las estrategias que cada niño pueda presentar a la hora de abordar la solución, es necesario obtener respuestas personales en la acción y en la argumentación. Por tanto las entrevistas se realizaron individualmente en una sola sesión sin límite de tiempo, si bien, este nunca excedió de los 30 minutos en el caso más desfavorable, es decir, cuando hubo de presentarse la tarea de transformación en dos formas en alguno de sus modos, siendo los 20 minutos el tiempo aproximado empleado por la mayoría de los niños.

Las entrevistas fueron filmadas. Durante la filmación se realizó un registro escrito individual conteniendo: datos personales como nombre, edad en años y meses, aula en la que cursa y un código individual del alumno  entrevistado, día, hora de comienzo y de finalización de la entrevista,  y anotaciones relativas a las variables objeto de medida y observaciones relativas a cada tarea.

En el ANEXO II se incluye una hoja modelo de registro, así como la trascripción de una entrevista.

**4. Bases para el Tratamiento y análisis de datos. Variables**

La falta de experiencia de los niños con este tipo de tareas puede hacer que, a medida que la actividad avanza, la respuesta del niño se vaya modificando; esto exige realizar un análisis de proceso multivariado.

De acuerdo con los objetivos de la investigación, se comparan los resultados entre modos – directo e inverso – con el fin de determinar si existen diferencias significativas entre los resultados de acierto / error en las tareas, en cada uno de los modos separadamente, características que se relacionen con la dificultad, los procedimientos y la argumentación ligada con ambos, así como las características vinculadas con la edad.

Con el fin de verificar el supuesto relativo a una mayor dificultad en la tarea de transformación sobre la de clasificación, se analizan diferencias significativas de acierto / error entre ambos contenidos: clasificación y transformación.

Es indicador de dificultad el menor porcentaje de acierto en la solución activa de la tarea, se obtienen porcentajes de acierto y se analiza si existen diferencias significativas en el porcentaje de aciertos entre cada modo, en función de la edad.

Se estudian los procedimientos usados en el proceso resolutivo desde dos puntos de vista: por una parte se comparan los mostrados por los grupos que terminaron con acierto y error para tratar de encontrar estrategias ligadas con uno u otro resultado y, por otro, desde el punto de vista de la edad. Para las tareas de clasificación se estudia la evolución del acierto / error durante el proceso.

Se analiza la argumentación utilizada en el proceso de solución y su relación con el acierto o error final en la tarea, así como con los distintos grupos de edad para determinar si existen diferencias significativas.

Con los resultados obtenidos de la codificación de las variables de todas las tareas, se genera un archivo de datos para el programa estadístico SPSS, en el cual, cada registro corresponde con los datos obtenidos de un alumno y contiene: la identificación del alumno a través de los datos personales y la evaluación de cada una de las variables analizadas en cada tarea, que cada alumno responde.

Todas las variables utilizadas para el análisis estadístico son variables nominales y son analizadas con técnicas inferenciales no paramétricas mediante prueba chi cuadrado ($\chi^2$). El nivel de significación adoptado para el estudio es del 5%.

A continuación se especifican las variables establecidas para cada tipo de tarea, sus correspondientes indicadores y criterios para registrar la dificultad, así como las categorías que se utilizan para el análisis.

### 4.1. Tarea de clasificación *Modo directo*

**Variables**

Las variables establecidas sobre esta prueba son:

- *Dificultad*. Valora si el ejercicio se realiza en la acción correctamente y el tipo de error cometido si no es así.
- *Argumentación*. Valora el tipo de razonamiento que el niño da a su acción.
- *Atributo*. Valora si uno de los dos atributos es predominante.
- *Procedimiento*. Valora la secuencia de acciones que el niño realiza al responder la tarea.

Indicadores utilizados:

- La variable *Dificultad*, se valora mediante la acción que el niño ejecuta para colocar las piezas en cada uno de los lugares.
- La variable *Argumentación*, se valora mediante la expresión que el niño emplea tras la colocación de cada pieza (correctamente o no), en respuesta a la pregunta "¿Por qué la pones ahí?" que el entrevistador hace. La argumentación puede progresar a medida que el juego avanza. Así mismo, la respuesta puede inducir al niño a revisar sus decisiones anteriores y eventualmente a corregir sus errores si los tuviera.
- La variable *Atributo* recoge la referencia verbal del niño a uno o los dos valores.
- Como indicador de la variable *Procedimiento*, se utiliza la secuencia en que el niño coloca las seis piezas.

**Registro**

Las conductas indicadoras de dificultad se registran en tres momentos del proceso resolutivo: al comienzo (tras la primera pieza), en medio (tras la colocación de la tercera pieza) y, al final (tras la colocación de la sexta pieza). En estos momentos se registra igualmente, la verbalización relativa a los valores de las piezas colocadas.

La variable argumentación se registra una vez como la mejor entre las respuestas del niño durante todo el proceso resolutivo.

La variable procedimiento se registra al final del ejercicio.

Se establecen las siguientes categorías de análisis de la variable *dificultad:*

- Correcto (C)
- Error en tamaño (T)
- Error en color (CO)
- Error en tamaño y color (TC).

La valoración Correcto es acumulativa en el segundo y tercer momento de registro. Es decir:

- Correcto, tras el primer elemento, significa que esta primera pieza ha sido colocada correctamente.
- Correcto tras el tercer elemento, significa que los tres elementos han sido colocados correctamente.
- Correcto tras la sexta pieza, significa que es correcta la tabla completa.

La valoración Error es igualmente acumulativa en los momentos segundo y tercero. Si se produce error, es porque se ha colocado una (o eventualmente más de una pieza) en posición incorrecta, ya sea por equivocación en el tamaño, en el color o en ambos. En el caso de error, se indica cuál es el tipo de error. Es decir:

- cualquiera de estas codificaciones tras la primera pieza, significa que se ha cometido este tipo de error en esta pieza.
- cualquiera de estas codificaciones tras la tercera pieza, significa que tras la colocación de esta pieza, la tabla presenta uno ó más errores de este tipo.
- cualquiera de estas codificaciones tras la sexta pieza, significa que al final del ejercicio, la tabla presenta este tipo de error o errores.

De este modo, una eventual aparición de error en la tabla en el segundo registro, por ejemplo, y una valoración como correcto en el tercer registro, significan que el niño ha corregido el error o los errores registrados anteriormente.

Las siguientes categorías valoran *tipos de argumentación y verbalización de mayor profundidad:* Cuando el niño sólo verbaliza uno de los valores, tras la primera y la segunda pieza, se plantea otra pregunta con relación al atributo no mencionado. Por ejemplo:

> [Coloca correctamente azul pequeño en (1,1) y dice]
>
> N.- “Porque es azul”
>
> E.- Entonces, si la pongo aquí...
>
> [E cambia azul pequeño al cuadro de abajo, el (2,1)]

La respuesta a esta segunda pregunta se toma también como indicativo de argumentación.

| Expresión | Argumentación | Atributo |
|---|---|---|
| No argumenta nada consistente<br>- "No se..."<br>- "Porque me lo ha dicho mi papá"<br>- "Porque me gusta"<br>- "Porque si..." (1) | No argumenta (1). | Imprecisa |
| No responde, no quiere responder o responde<br>- "Porque es así"<br>- "Porque va ahí" (2) | Imprecisa (2) | Imprecisa |
| Predomina y verbaliza un sólo valor.<br>- "Porque es azul" | Predomina un valor (3) | Verbaliza color |
| Reconoce los dos valores sobre las tarjetas.<br>- "Va aquí porque está esta...y aquí... esta" (indicando las tarjetas de valores) | Refiere los símbolos (4) | Imprecisa |
| Puede reconocer los dos valores<br>- "Va aquí porque es pequeña y azul" | Puede reconocer los dos valores (5) | Verbaliza tamaño y color |
| Reconoce las clases.<br>- "Aquí van estas" (indicando la tarjeta de valor) | Reconoce las clases (6) | Imprecisa |
| Señala la fila o la columna recorriéndola con el dedo, por ejemplo<br>- "Aquí van las azules"<br>- "Es de las azules"<br>- "Estas son azules" | | Verbaliza color |

| Expresión | Argumentación | Atributo |
|---|---|---|
| Expresa la negación<br>- "No es azul"<br>- "Ahí no van las azules"<br>Expresa anticipación<br>- "Tendremos que poner azules"<br>Utiliza el futuro<br>- "Aquí irán las azules..." | Verbaliza alguna forma de inferencia (7) | Verbaliza color |
| Verbaliza cuantificadores o una inferencia clara.<br>- "Todos son azules" | Expresa inferencia (8) | Verbaliza color |
| - "Porque aquí están los grandes y aquí los azules" | | Verbaliza tamaño y color |

Para la variable *procedimiento* se establecen tres categorías:

- Resuelve el ejercicio atendiendo exclusivamente al tamaño de las piezas, es decir, primero una fila completa y luego la otra fila completa (T).
- Resuelve el ejercicio atendiendo exclusivamente al color, es decir completando las columnas (CO).
- TC Resuelve el ejercicio alternativamente atendiendo al color o al tamaño (TC).

**Codificación**

Para las distintas variables se establece la codificación que se muestra en el ANEXO III

### 4.2. Tarea de clasificación *Modo inverso*

Entre los elementos que el niño tiene que colocar en esta tarea se distinguen: (a) las 4 piezas (cualquiera de los cuatro triángulos) y (b) las cinco tarjetas: 3 de color y 2 de tamaño (símbolos de los distintos valores). Estas tienen grados de concreción distintos, siendo las tarjetas indicativas de clases, mientras las piezas son elementos concretos de las mismas.

A su vez entre ambos tipos de elementos hay que distinguir dos niveles indicativos de inferencia lógico relacional:

- elementos con datos presentes que los referencian: la pieza amarilla, la pieza azul, la tarjeta de color amarillo, la tarjeta de color azul y las dos tarjetas de tamaño, y
- elementos sin datos presentes que los referencian: las dos piezas rojas y la tarjeta de color rojo.

Estas características permiten el análisis del procedimiento empleado en el proceso resolutivo desde varios puntos de vista:

1. - de la concreción tomando como indicativo la secuencia de colocación de los distintos tipos de elementos
2. - de las estrategias inferenciales tomando como indicativo el tipo de elemento que el niño coloca en primer lugar y el elemento concreto que el niño coloca en primer lugar.

Con este fin se analiza la secuencia de colocación de los distintos tipos de elementos: tarjetas de color, tarjetas de tamaño y piezas. Así mismo se analizan los elementos colocados en primer lugar, especialmente los que resultan más claros indicadores del descubrimiento de reglas.

A lo largo de la prueba tanto la inferencia que el niño hace, como la argumentación pueden evolucionar, por lo que se establecen tres momentos de registro: al comienzo (tras la colocación del primer elemento), en medio (tras la colocación del cuarto elemento) y al final (tras la colocación del noveno elemento).

En estos momentos se registra la verbalización relativa a los valores variables entre las piezas para determinar si alguno de ellos es predominante.

**Variables**

Las variables establecidas sobre esta prueba son:

- *Dificultad*. Valora si es correcto o no el/los elementos colocados y el tipo de error cometido si no es así.
- *Argumentación*. Valora el tipo de razonamiento que el niño da a su acción.
- *Atributo*. Valora la posible preponderancia de uno de los atributos presentes en la tarea cuando se colocan piezas.
- *Tipo de elemento*. Valora el tipo de elemento que el niño coloca.
- *Procedimiento*. Describe la estrategia usada para colocar los nueve elementos.
- *Piezas*. Describe la estrategia usada para colocar las cuatro piezas.

Indicadores utilizados

- La variable *Dificultad*: como en el caso de la tarea en modo directo.
- La variable *Argumentación*: como en el caso de la tarea en modo directo.
- Como indicador de la variable *Atributo*: como en el caso de la tarea en modo directo.
- La variable *Tipo de elemento* se valora a través de la acción relativa a la colocación de un elemento en los momentos considerados.
- Como indicador a la variable *Procedimiento* se utiliza la secuencia seguida por el niño en la colocación de los nueve elementos.
- La variable *Piezas* se valora a través de los atributos de las piezas colocadas y la secuencia empleada en su colocación.

**Registro**

Las variables *Dificultad*, *Atributo* y *Tipo de elemento*, se registran en tres momentos del proceso resolutivo: al comienzo (tras la colocación del primer elemento), en el medio (tras la colocación del cuarto elemento), y al final (tras la colocación del noveno elemento).

Las variables *Procedimiento* y *Argumentación* se registran al final de la tarea.
La variable *Piezas* se registra una vez al final de la tarea.

Las Categorías de análisis que consideramos son:
Para las variables *Dificultad*, *Atributo* se establecen las mismas categorías que en el caso de la tarea en modo directo, en este caso en los momentos primero, cuarto y noveno.

Para la variable *Argumentación*. La expresión del niño puede ser sólo verbal o puede acompañarse de algún gesto significativo. Se establecen las siguientes categorías vinculadas con tipos de razonamiento de distintos niveles de profundidad.

- No argumenta nada consistente.

  "No se..."

  "Porque me lo ha dicho mi papá"

  "Porque me gusta"

  "Porque si..." (1)

- No responde, no quiere responder o responde

  "Porque es así"

  "Porque va ahí" (2)

- Claramente perceptivo. Se fija en un sólo valor.

  "Porque está aquí esta"

  "Porque es como ésta" (indicando con el dedo, por ejemplo, el triángulo amarillo pequeño) (3)

- Reconoce por posicionamiento espacial. Se fija en los dos valores.

  "Va aquí porque está esta... y aquí... esta" (indicando, elementos ya colocados de filas y columnas)

  "Va aquí porque es pequeña y azul" (4)

- Distingue elemento de clase con algún tipo de expresión. En este caso se encuentran las siguientes situaciones:

  Utiliza el plural "Aquí van estas" (indicando la tarjeta de valor). Señala la fila o la columna recorriéndola con el dedo "Aquí van las azules"

  "Es de las grandes" (5)

- Verbaliza alguna forma de inferencia.

  Expresa la negación “No es grande” ó “Ahí no van las pequeñas”

  Expresa anticipación “Tendremos que poner rojas”

  Utiliza el futuro “Aquí irán...” (6)
- Verbaliza cuantificadores o una inferencia clara.

  “Todos son grandes”

  ”Porque aquí están los azules y aquí los amarillos” (7)

Para la Variable *Tipo de elemento.* Se establecen las siguientes categorías:

- Pieza de columna sin datos (cualquiera de los dos triángulos rojos)(PCSD).
- Tarjeta de columna sin datos (tarjeta de color rojo)(TCSD).
- Tarjeta de columna con datos (tarjetas de color azul o amarillo)(TCD).
- Pieza de columna con datos (triángulo azul pequeño p amarillo grande)(PCD).
- Tarjeta de tamaño (TT).

Variable *Procedimiento*: Se establecen las siguientes categorías que hacen referencia al orden secuencial en que son usados los distintos tipos de elementos:

- Piezas, tarjetas de color y tarjetas de tamaño. Se colocan primero todas las piezas, después todas las tarjetas de color y después las tarjetas de tamaño (PCT).
- Piezas, tarjetas de tamaño y tarjetas de color. Se colocan primero todas las piezas, después las dos tarjetas de tamaño y por último las tres tarjetas de color (PTC).
- Tarjetas de color, piezas y tarjetas de tamaño (CPT).
- Tarjetas de color, tarjetas de tamaño y piezas (CTP).
- Tarjetas de tamaño, piezas y tarjetas de color (TPC).
- Tarjetas de tamaño, tarjetas de color y piezas (TCP).

- Alternativamente, piezas y tarjetas de color o tamaño (ALT) al menos en una ocasión.

Variable *Piezas*: Se establecen las siguientes categorías relativas al orden secuencial de colocación de las cuatro piezas en relación con sus atributos:

- Por color, si coloca las cuatro piezas completando las tres columnas secuencialmente (T).
- Por tamaño, si coloca las cuatro piezas completando secuencialmente las dos filas (CO)
- Alternativo, si coloca las cuatro piezas completando lugares de filas o columnas alternativamente al menos en una ocasión (ALT).

**Codificación**

Para las distintas variables se establece la codificación que se muestra en el ANEXO III.

**4.3. Tarea de transformación** ***Modo directo***

Un niño de 3 años no realizó esta prueba ni ninguna otra de transformación, por lo que estadísticamente está registrado como dato perdido (missing) con relación a los resultados de estas tareas.

De acuerdo con el diseño de la investigación, la tarea de transformación en modo directo sobre construcciones simples (CS), se propuso a todos los niños que no tuvieron éxito sobre CC, 148 en total. Los restantes 63 casos corresponden a los 62 niños que acertaron al resolver la tarea con CC y el caso antes mencionado, que no realizó tarea alguna de transformación. Estos 63 sujetos figuran estadísticamente codificados como datos perdidos (missing) sobre los resultados relativos a CS.

La tarea de transformación inversa sobre CC fue realizada por los 62 niños que realizaron correctamente transformación directa sobre CC. Los 149 casos restantes están codificados como datos perdidos (missing) para los resultados de esta prueba.

La tarea de transformación inversa sobre CS, fue presentada a los casos de error en transformación directa sobre CC y a en los casos de error sobre transformación inversa sobre CC. La muestra se compone de 153 casos, los 58 casos restantes figuran como datos perdidos para los resultados de esta prueba y corresponden con: 55 casos de acierto en transformación inversa sobre CC y tres casos que no realizaron la prueba (otros 2 niños, también de 3 años, además del que no realizó ninguna de las tareas de transformación).

**Variables**

Las variables establecidas en esta prueba sobre cada tipo de figura son:

- *Comprensión* del operador.
- *Dificultad*. Valora si aplica correctamente el operador y la causa del error detectado en caso contrario.
- *Argumentación*. Valora el tipo de razonamiento que el niño da a su acción.

Los Indicadores utilizados

Tras la acción de colocar cada una de las piezas en la figura imagen, se pregunta "¿Por qué pones esa?".

El acierto o error, en cada caso, juntamente con la expresión que el niño utiliza para responder a la pregunta, se utilizan como indicadores de la *Comprensión* del operador, de la *Dificultad* y de la *Argumentación*.

**Registro**

Toas las variables se valoran una vez.

- La variable *Comprensión* del operador se valora como afirmativa cuando transforma correctamente al menos dos piezas de diferente color de forma justificada, dado que el tercero puede ser cambiado por exclusión. En caso contrario se valora errónea.

- La variable *Dificultad* registra la obtención correcta de la figura imagen y la problemática observada cuando la figura imagen no es correcta.
- La variable *Argumentación* registra la mejor presentada durante el proceso resolutivo.

Categorías de análisis

Variable *Comprensión:* se establecen las categorías:

- Si (S)
- No (N)

Variable *Argumentación:* se establecen las siguientes categorías:

- No argumenta (1)
- Imprecisa (2)
- Posición de símbolos (3)
- Verbaliza posiciones (4).
- Referencia símbolo (5)
- Verbaliza la relación (6)

En el siguiente cuadro se muestran categorías de respuesta mas frecuentes, la valoración sobre la comprensión del operador y la codificación correspondiente a los distintos tipos de argumentación.

| Expresión | Comprensión del operador. | Argumentación. |
|---|---|---|
| No argumenta nada consistente:<br>“No sé”<br>“Porque sí”<br>“Porque es así”<br>”Porque me gusta”<br>“Porque me lo ha dicho mi mamá”. | Si. Si construye correctamente la figura imagen.<br>No. Si no construye correctamente la figura imagen | No argumenta (1). |
| No responde, no quiere responder o | Si. Si construye | Imprecisa (2) |

| | | |
|---|---|---|
| responde<br>“Porque es así”<br>“Porque va ahí” | correctamente la figura imagen.<br>No. Si no construye correctamente la figura imagen | |
| Valora la posición de los símbolos de color en la tarjeta de transformación<br>“Porque el azul está aquí”<br>(Valorando la representación más arriba o abajo del azul en la tarjeta de transformación)<br>“Porque está el azul, luego el rojo y luego el amarillo”<br>(Sigue la secuencia indicada por las flechas sin referencia alguna a los elementos sobre los que se aplica) | No comprende. | Posición de símbolos (3) |
| Reconoce la transformación por los símbolos sobre la tarjeta<br>“Porque aquí... aquí...”<br>(Indicando con el dedo sobre la tarjeta un elemento y su trasformado). | Si. Si es correcto.<br>No. Si no es correcto. | Verbaliza posiciones (4). |
| Reconoce en la tarjeta un operador<br>“Porque lo pone aquí”<br>(Indicando sobre la tarjeta el color inicial la flecha y el color final) | Si. Si es correcto.<br>No. Si no es correcto. | Referencia símbolo (5) |
| Reconoce en la tarjeta un operador y expresa las operaciones<br>“Porque azul cambia a rojo”<br>“El azul se va al rojo”<br>“De azul a rojo”<br>(Indicando o mirando la tarjeta) | Si. Si es correcto.<br>No. Si no es correcto. | Verbaliza la relación (6) |

Variable *Dificultad*: se valora mediante la acción que el niño ejecuta al colocar los elementos que componen la figura imagen. Se valora en primer lugar si puede aplicar la transformación f([A, R, Az, a ,r, az])[4] y, en caso negativo, si puede construir una transformación f(A), f(R), f(Az), f(a), f( r), f(az) elemento a elemento.
La aplicación correcta del operador, implica la comprensión correcta del mismo. Pero esta comprensión, que es condición necesaria, puede no ser suficiente para el éxito en el que pueden influir otras causas.

Una de ellas es la propia complejidad de la tarea que requiere retener tres puntos de atención simultánea o casi simultáneamente: la figura inicial, el operador y la construcción final, y que es inherente al propio concepto de transformación.

En otros casos la falta de destreza espacial, manual o perceptiva que requiere la construcción de la figura imagen, de forma especial en el caso del tipo de construcción CC, donde la figura se muestra compacta y compuesta por elementos que guardan una cierta disposición en el espacio (caso de los triángulos grandes de CC) y una cierta disposición y orientación (caso de los triángulos pequeños de CC).

Con estas causas se vinculan las respuestas siguientes:
*Causa 1:* la dificultad de la tarea hace que olvide la construcción inicial. Es decir, transforma bien una pieza y en lo sucesivo aplica el operador tomando la pieza transformada como origen (CI). Es decir si la figura inicial está construida en la forma:

R $\longrightarrow$ f(R)
Az $\longrightarrow$ f(f (R))
Am $\longrightarrow$ f(f(f®)
az r am

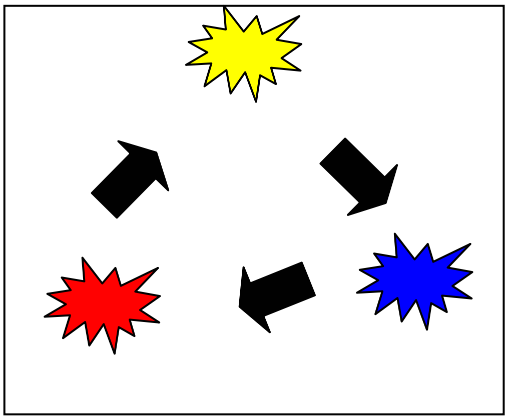
[4] A = Amarillo grande, R = Rojo grande, Az = Azul grande, a = Amarillo pequeño, r = Rojo pequeño, az = Azul pequeño, [A, R, Az, a, r, az] = figura CC.

*Causa 2:* direccionalidad en la lectura de las flechas que aparecen en la tarjeta de transformaciónNo consigue construir la figura correcta porque, siempre o a veces, interpreta las flechas en dirección opuesta (G).

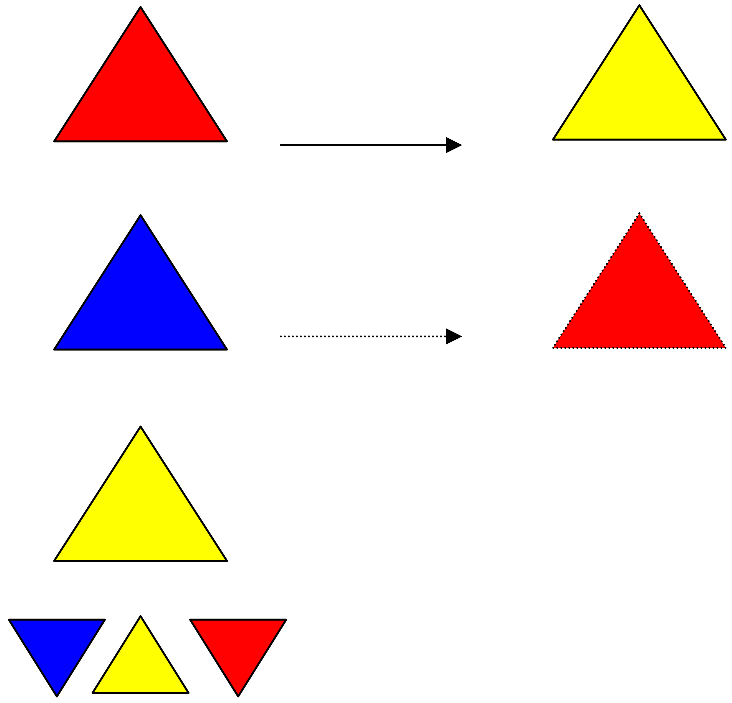
*Causa 3:* complejidad de la figura CC. Coloca correctamente las piezas grandes de la figura imagen, pero no lo consigue con las pequeñas por razones de destreza manual se desconcentra y bloquea (E).

*Causa 4:* dificultad de la tarea y complejidad de la figura CC. Al verbalizar la relación de cambio, por ejemplo en la forma "de azul a rojo", apunta al rojo de la construcción inicial tomando esta posición como referentes para continuar aplicando el operador (CP).

Esta codificación recoge las siguientes acciones:
Supongamos que el operador elegido es



La figura imagen se va construyendo así



El niño dice “de azul a rojo” y apunta a la pieza roja de la construcción inicial, que ya está transformada en amarilla, en lugar de añadir un triángulo rojo bajo el amarillo y se produce un bloqueo.

Cuando se observa este comportamiento para salir del bloqueo se le pregunta:

E.- ¿Cuál vas a cambiar?.
N.- Esta [Apuntando la azul]
o bien verbaliza
N.- La azul.
E.- Y ¿por cuál la tienes que cambiar?
N.- Por roja
E.- Pues... colócala a su derecha.

Con la siguiente pieza puede verbalizar sobre la tarjeta de cambio “De amarillo a azul”, pero al mirar las construcciones:

a.- Se fija en el amarillo de la construcción imagen que está a la derecha del rojo y, en una especie de inferencia invitada ve la pareja

E interpreta "Rojo a Amarillo y, Amarillo a Rojo" y nuevamente se produce un bloqueo.

Ó bien puede ocurrir que

b.- Se fija en el azul de la construcción inicial y ve la pareja

E interpreta "Azul a Rojo y Rojo a Azul" y nuevamente se produce un bloqueo.

Sobre la variable *Dificultad* se establecen las siguientes categorías:

- Correcto (S).
- Error debido a la falta de comprensión del operador (C)
- No construye la figura imagen correctamente
    - Olvida la construcción inicial (CI)
    - Construye la figura hasta cierto momento (E)
    - Error debido a la confusión de posiciones inicial y final (CP)

- Error debido a la interpretación de las flechas indicativas, en sentido opuesto (G).

**Codificación**

Para las distintas variables, se establece la codificación que se muestra en el ANEXO III.

### 4.4. Tarea de transformación *Modo inverso*

**Variables**

Las variables establecidas en esta prueba son:

- *Reconocimiento de cambio*. Valora si se reconoce un cambio entre las figuras inicial y final.
- *Reconocimiento del operador*. Valora si se reconoce la tarjeta simbólica de la transformación efectuada entre las dos transformaciones cíclicas de color posibles.
- *Argumentación*. Valora el tipo de justificación que se expresa.

Indicadores utilizados.

Sobre las construcciones inicial y final se pregunta "¿Te parece que están igual?".La respuesta del niño es el indicativo para la variable *Reconocimiento de cambio*. Si el niño reconoce un cambio, se pregunta: "¿Qué ha cambiado?"

Como indicador de la variable *Reconocimiento del operador* se toma la respuesta a las siguientes preguntas con las siguientes acciones. Una vez seleccionada por el niño una de las tarjetas simbólicas se pregunta "¿Porqué lo sabes?". La respuesta puede ser imprecisa o hacer referencia al cambio de colores que la tarjeta indica, en este caso, se pregunta "¿Eso he hecho?, ¿Dónde lo ves?" y se pide el mismo reconocimiento sobre otro cambio de color mediante la pregunta "¿Qué más dice la tarjeta?".... "¿Dónde lo ves?".

La respuesta exitosa a estas preguntas es indicador del reconocimiento del operador. La respuesta a las preguntas da valor a la variable *Argumentación*.

**Registro**

Las variables se registran una vez.

La variable *Reconocimiento del cambio* registra si reconoce o no cambio sobre ambas figuras inicial y final.

La variable *Reconocimiento del operador* registra si reconoce o no el operador seleccionado.

La variable *Argumentación* se registra como en el caso de transformación en modo directo.

Categorías de análisis

Variable *Reconocimiento de cambio* se establecen las categorías:

- Si (S)
- No (N)

Variable *Reconocimiento del operador* se establecen las categorías:

- Si (S)
- No (N)

Para la variable *Argumentación* se establecen las siguientes categorías:

- Imprecisa (1)
- Reconoce por posicionamiento (2)
- Verbaliza colores correspondientes (3)
- Verbaliza relación (4)

Vinculadas con las expresiones utilizadas en respuesta a las distintas preguntas formuladas durante el proceso:

| Expresión | Argumentación |
|---|---|
| No argumenta nada consistente<br>“No se...”<br>“Porque me lo ha dicho mi papá” | No argumenta (1) |

| | |
|---|---|
| “Porque me gusta”<br>“Porque si...” | |
| No responde, no quiere responder o responde<br>“Porque es así”<br>“Porque va ahí” | Imprecisa (2) |
| Reconoce elementos correspondientes<br>“Este... este”<br>(señalando con el dedo cada uno y su transformado) | Reconoce por posicionamiento (3) |
| Reconoce valores correspondientes<br>“Amarillo... azul”<br>(señalando elementos que se corresponden en la transformación). | Verbaliza colores correspondientes (4) |
| Reconoce la relación de cambio<br>“Amarillo por azul. El azul por el rojo”<br>“El amarillo se ha ido al azul. El azul se ha ido al rojo”<br>“El amarillo cambia por el azul. El azul cambia por el rojo” | Verbaliza relación (5) |

**Codificación**

Para las variables analizadas se establece la codificación que se muestra en el ANEXO III.

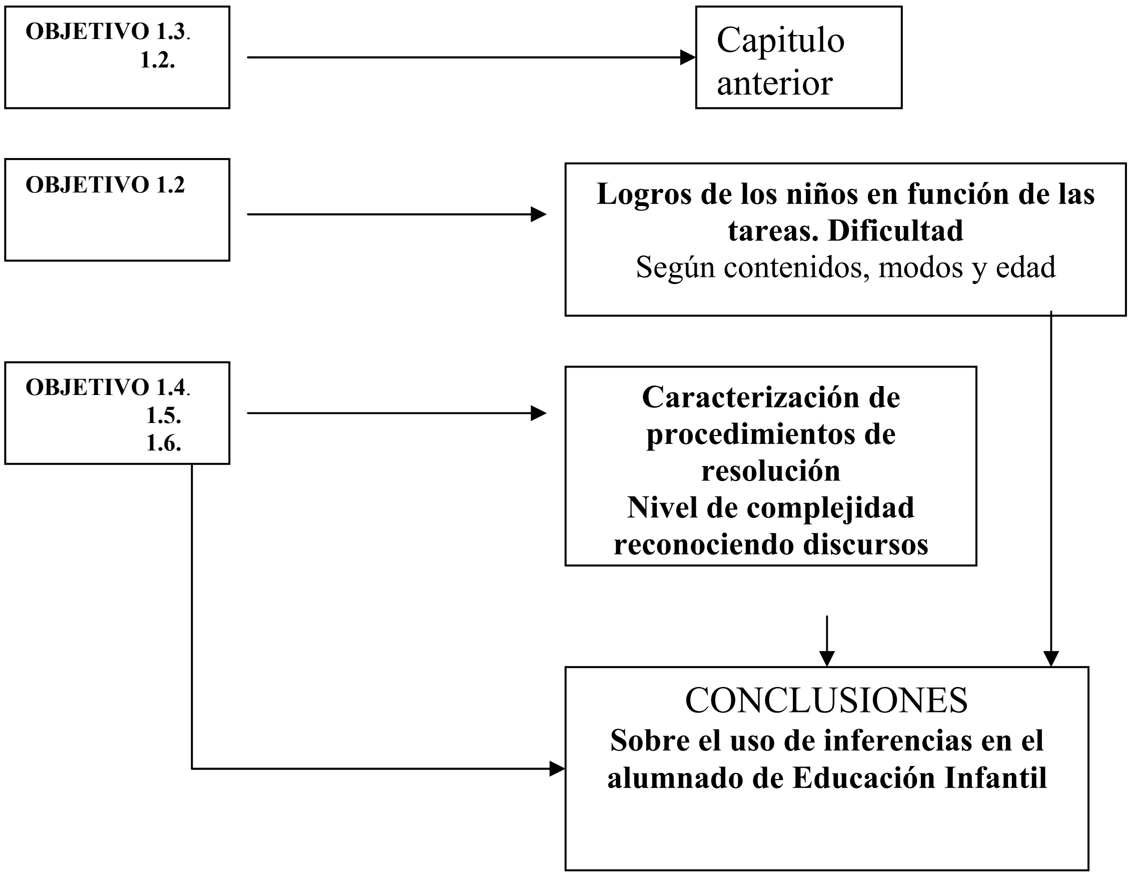
# CAPITULO III

# RESULTADOS


**Resumen**

*Los resultados se presentan en cuatro grandes secciones: la primera, dedicada al análisis de los logros de los niños al resolver las tareas y la dificultad de las mismas; la segunda, a los procedimientos utilizados y la tercera, a su argumentación. Para cada una de estas variables se realizan análisis comparativos en relación con los modos y la edad.*


**Esquema**



## 1. Logros de los niños en función de las tareas

Los resultados encontrados confirman que los modos inversos de ambas tareas resultan ser más difíciles para los niños que sus respectivos directos y, así mismo, que la tarea de transformación resulta más difícil que la de clasificación. Se detecta un elemento metodológico que favorece el éxito de la tarea de transformación en modo directo. Prácticamente todos los niños pueden resolver con gran seguridad y acertadamente la tarea de clasificación en modo directo.

Para el análisis, se obtienen los porcentajes de éxito en cada tarea y modo y la significación de las diferencias para establecer grados de dificultad comparativos. Se analiza igualmente, si existen diferencias significativas de los resultados por factor edad.

### 1.1. La tarea de clasificación

Los resultados relativos a los logros de los niños en la tarea de clasificación muestra que en modo inverso resulta ser significativamente más difícil que en modo directo. Mientras en modo directo el acierto es generalizado en todos los grupos de edad, el éxito en modo inverso difiere significativamente en los distintos grupos de edad.

#### 1.1.1. En función de los modos

En la siguiente tabla se muestran los resultados de acierto a la tarea en ambos modos en cada grupo de edad (Ver Tabla 1, ANEXO IV: 369):

| **Edad** | **Acierto** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Modo directo** | | **Modo inverso** | |
| | N | % | N | % |
| 3 | 67 | 95,7 | 39 | 55,7 |
| 4 | 74 | 97,4 | 65 | 85,5 |
| 5 | 62 | 95,4 | 54 | 83,1 |
| Total | 203 | 96,2 | 158 | 74,9 |

*Logros en la tarea de clasificación en ambos modos por grupos de edad.*

En el modo directo no se presentan diferencias significativas en función de las variaciones en la edad en cambio en el inverso las diferencias en función de edad resultan significativas ($\chi^2_6 = 27{,}189$ $P \leq 0.001$)

Los logros comparativos entre ambos modos en función del acierto y error en ambas tareas (Ver Tabla 1, ANEXO IV: 369), muestran que sólo se presenta un caso de acierto al modo inverso y error al modo directo, mientras que hay 46 casos de acierto al modo directo y error en el inverso.

La prueba $\chi 2$ permite afirmar que el modo inverso resulta significativamente más difícil de resolver que el modo directo ($\chi^2_1 = 17{,}204$ $P \leq ,001$); así las diferencias en logros entre las tareas de clasificación directa e inversa resultan significativas.

Podemos afirmar que el modo inverso resulta significativamente más difícil de resolver que el modo directo confirmando así el supuesto relativo a la dificultad, por razones del modo, para la tarea de clasificación.

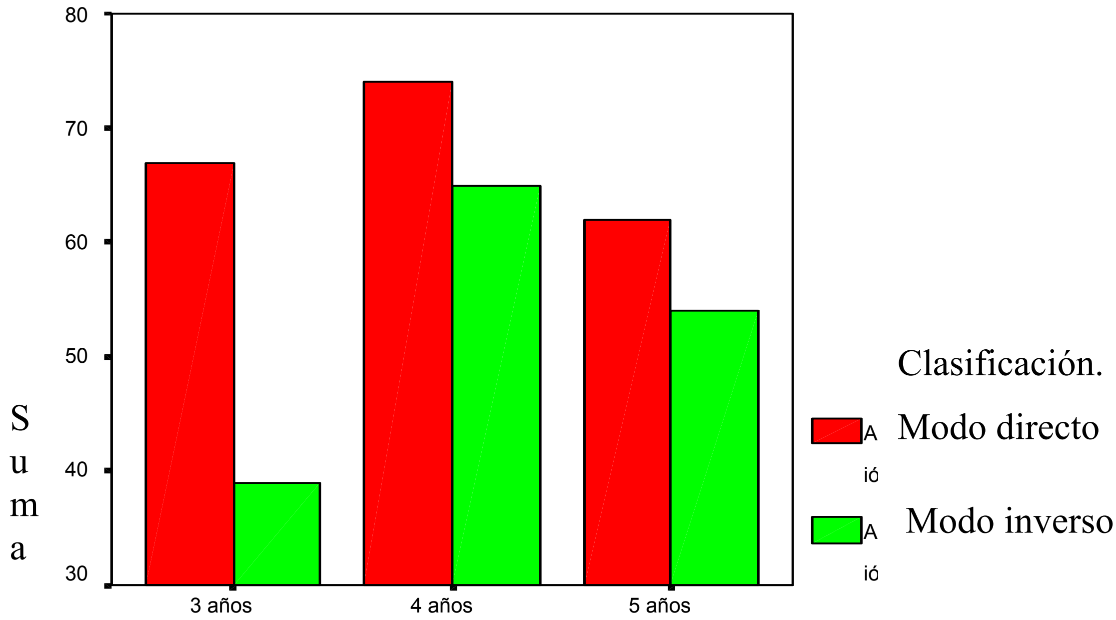
### 1.1.2. En función de la edad

Los resultados muestran que el acierto en la tarea de clasificación en modo directo es casi total sin que se presenten diferencias en función de la edad.

Los niños de 3 años alcanzan un porcentaje de éxito en la acción, igual que los de 5 años. Esto confirma que la clasificación es una de las actividades de tipo lógico que más tempranamente aparecen (Piaget 1979).

Los aciertos en el modo inverso son menores. Al contrario de lo que ocurre en el modo directo, los logros son significativamente distintos por razón de la edad siendo el grupo de 3 años el que alcanza un porcentaje de éxito menor (algo más del 55%).

Los aciertos relativos a ambos modos, por grupos de edad se muestran en la gráfica[1] 1.




*Gráfica 1: Aciertos relativos a la tarea de clasificación en ambos modos por grupos de edad*

### 1.2. La tarea de transformación

Los resultados obtenidos permiten afirmar que la tarea de transformación de modo inverso resulta significativamente más difícil de resolver que el modo directo, confirmando así el supuesto relativo a la dificultad, por razones del modo.

Esta conclusión en función de los modos exige presentar el análisis de los resultados en función de: las dos versiones de la tarea, la edad y los modos y de las muestras diferenciadas, para el caso de CS.

[1] En todos los gráficos del Capítulo, la leyenda "Suma" se refiere a recuento o suma total de casos. Se han mantenido las leyendas que genera el programa estadístico SPSS con el inconveniente de que, en algunos casos, los rótulos quedan en parte cortados. Estos se corresponden con las categorías de análisis establecidas.

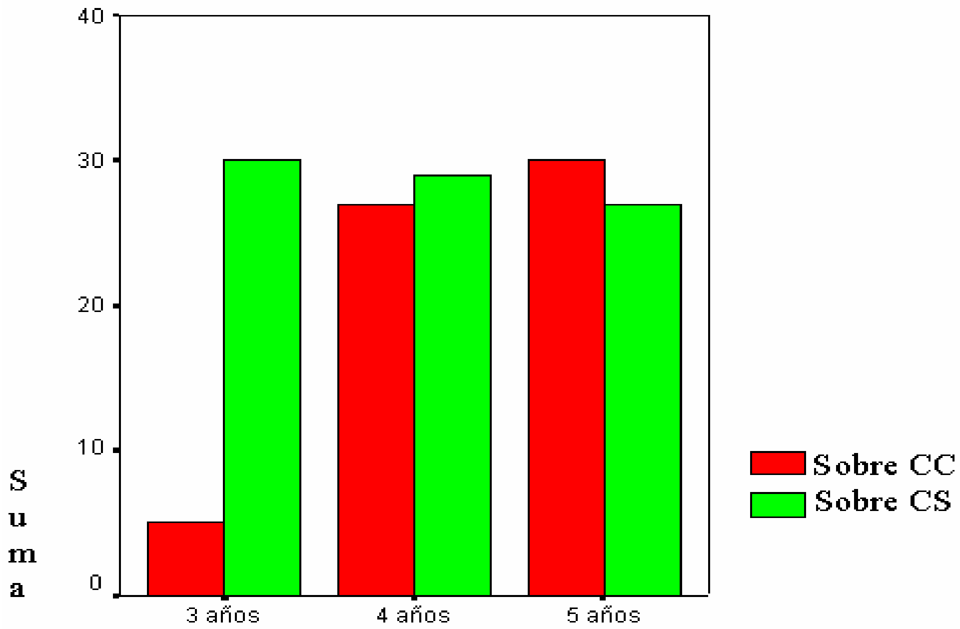
### 1.2.1. Tarea directa en función de las versiones CC y CS

En la siguiente tabla se muestran los resultados de acierto a la tarea en ambos modos y versiones CC y CS por grupo de edad (Ver Tabla 2, ANEXO IV: 369):

| Edad | Acierto | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Modo directo | | | | Modo inverso | | | |
| | CC (N = 210) | | CS (N = 148) | | CC (N = 62) | | CS (N = 153) | |
| | N | % del grupo | N | % del grupo | N | % del grupo | N | % del grupo |
| 3 | 5 | 7,2 | 30 | 46,9 | 5 | 100 | 21 | 33,9 |
| 4 | 27 | 35,5 | 29 | 59,2 | 23 | 85,2 | 28 | 52,8 |
| 5 | 30 | 46,2 | 27 | 77,1 | 27 | 90,0 | 24 | 63,1 |
| Total | 62 | 29,4 | 86 | 58,1 | 55 | 88,7 | 73 | 47,7 |

*Logros en la tarea de transformación en sus dos modos y versiones por grupos de edad.*

Sólo el 29,4% de los niños resuelve con éxito la tarea de transformación directa sobre CC. Sin embargo, de los 148 niños que fracasan en esta tarea (el 70,6% del total), 86 niños (el 58,1% de los 148) tienen éxito al resolverla sobre CS. La gráfica 2 muestra los resultados de acierto a la tarea en modo directo sobre CC y CS, por grupos de edad:




*Gráfica 2: Aciertos relativos a la tarea de transformación en modo directo sobre CC y CS por grupos de edad*

El incremento en el porcentaje de aciertos puede darse por el cambio adoptado en la presentación de la tarea o bien, por la mayor experiencia de los niños, que puede permitir mayor familiaridad y comprensión de la misma; ambos, aspectos de tipo metodológico.

Para analizar los logros en función de los modos es preciso considerar las condiciones de la investigación para establecer comparaciones dentro de cada grupo de edad.

### 1.2.2. En función de la edad

En el caso de la versión CC, los resultados de acierto dependen significativamente de la edad: a medida que la edad incrementa se produce un aumento en los aciertos al resolver la tarea. La tarea en modo directo sobre CC parece ser excesivamente difícil para el grupo de 3 años: sólo 5 niños la realizan correctamente.
En relación con la figura CS, todos los grupos de edad incrementan los aciertos en porcentajes significativamente distintos, según la edad.

### 1.2.3. En función de los modos

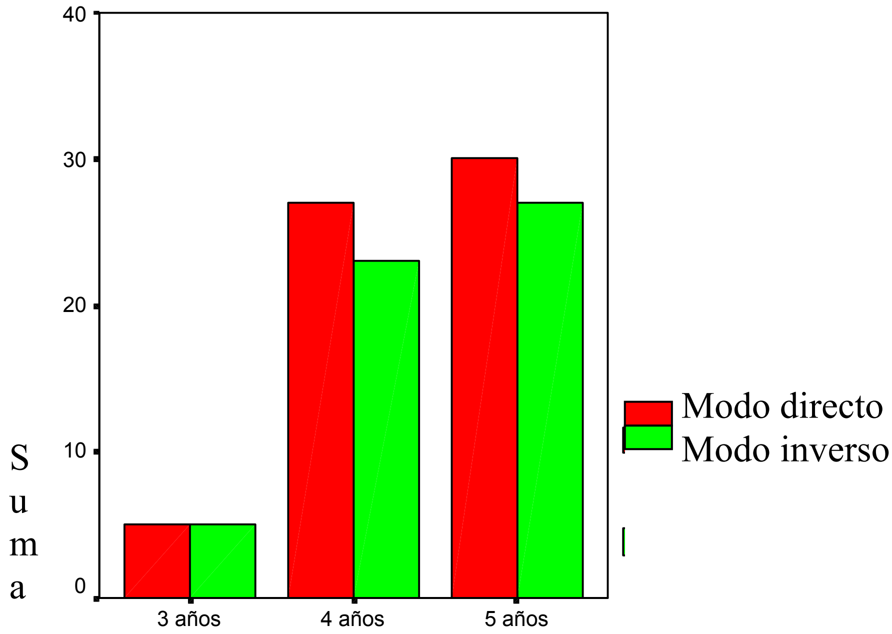
Las diferencias en función de la edad, permiten analizar la dificultad en función de los modos sobre las distintas muestras generadas.

Las condiciones de la investigación introducen los siguientes grupos de casos de comparación, entre los resultados de acierto y error, en función de los modos:

**Muestra.-** Componen esta muestra los 62 niños que realizaron transformación directa sobre CC con éxito y a los que se planteó transformación inversa sobre CC (N = 62).

Ninguno de los niños que acertó en modo inverso se equivocó en el directo, aunque sí ocurre al revés. Siete (Ver Tabla 3, ANEXO IV: 370) niños fallaron en modo inverso. Por tanto, en este grupo resultó más fácil el modo directo que el inverso.

Además, las medias de acierto en el modo directo por razón de la edad son estadísticamente significativas ($\chi^2_2$ = 26,413, P≤ 0.001) mientras esta significación no existe en modo inverso (Tabla 2, ANEXO IV: 369). Es decir, los niños muestran tener posibilidades distintas de éxito según la edad pero, casi todos los que pueden resolver el modo directo pueden resolver el modo inverso y eso ocurre por igual en todos los grupos de edad. Se puede destacar que todos los niños de 3 años que tienen éxito en modo directo también lo tienen en modo inverso. La gráfica 3 muestra el acierto comparativo en ambos modos por grupos de edad de esta muestra.




*Gráfica 3: Aciertos relativos a la tarea de transformación en ambos modos para la primera Muestra por grupos de edad*

**Muestra.-** Componen esta muestra los niños que realizaron transformación directa sobre CC con éxito, transformación inversa sobre CC con error y transformación inversa sobre CS (N = 7). En otras palabras, esta muestra es definida por el acierto al modo directo y el error en el modo inverso ambos sobre CC.

Cuatro de los 7 niños que fracasan en modo inverso sobre CC (4 de 4 años y 3 de 5 años) tienen éxito en modo inverso sobre CS (Tabla 4, ANEXO IV: 370), es decir, la repetición de la tarea inversa sobre la versión CS mejora los resultados en algo mas de la mitad de los niños (3 de 4 años y 1 de 5 años)

Podemos afirmar que, igualmente en esta muestra, el modo inverso resulta más difícil que el directo para ambos grupos de edad.

**Muestra.-** Componen esta muestra los niños que realizaron transformación directa sobre CC sin éxito, transformación directa sobre CS y transformación inversa sobre CS (N = 146).

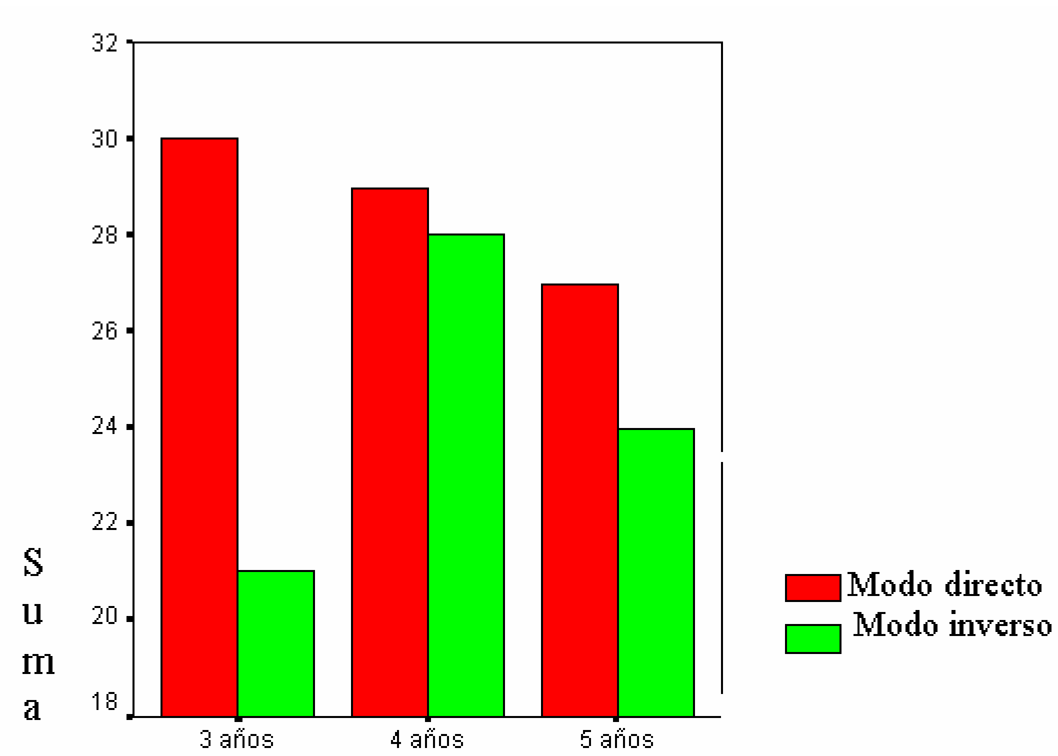
Sabemos que los resultados a ambas tareas son diferentes respecto de los distintos grupos de edad (Ver Tabla 2, ANEXO IV: 369). Los resultados comparativos de acierto / error a la tarea en ambos modos (Ver Tabla 5, ANEXO IV: 370) en cada grupo de edad muestran que es siempre superior el acierto al modo directo que al inverso.

La comparación de resultados de acierto / error en la tarea de transformación sobre CS tanto en el modo inverso como en el directo, proporciona los siguientes datos sobre la muestra total y sobre las muestras de cada grupo de edad:

| **Resultados** | $\chi^2$ | **P≤** |
|---|---|---|
| Transformación directa CS vrs. Transformación inversa CS. (N = 146) | $\chi^2_1 = 51{,}774$ | ,001 |
| Transformación directa CS vrs. Transformación inversa CS. Grupo de 3 años (N = 62) | $\chi^2_1 = 9{,}830$ | ,064 |
| Transformación directa CS vrs. Transformación inversa CS. Grupo de 4 años (N = 49) | $\chi^2_1 = 35{,}201$ | ,125 |
| Transformación directa CS vrs. Transformación inversa CS. Grupo de 5 años (N = 35) | $\chi^2_1 = 7{,}630$ | ,289 |

*Contraste de diferencias de acierto / error en transformación sobre CS según el modo*

Es decir que, aunque sobre el total de todos los niños participantes resulta significativamente más difícil la tarea en modo inverso que en modo directo, estas diferencias no son significativas para cada grupo de edad. Si embargo, los resultados de acierto muestran que, en todos los grupos son mas los niños que fallan en modo inverso y aciertan en modo directo que aquellos que aciertan en modo inverso y aciertan en modo directo. La gráfica 4 muestra los resultados de acierto a la tarea en ambos modos sobre CS.




*Gráfica 4: Aciertos relativos a la tarea de transformación en ambos modos para la tercera Muestra por grupos de edad*

Estos datos permiten sostener la mayor dificultad de la tarea de transformación en modo inverso.

## 2. Análisis de la dificultad de las tareas

### 2.1. Según contenido y los modos

La media de acierto para la tarea de clasificación en modo directo es $\overline{x}$ = 96,2. Para la tarea de clasificación en modo inverso (Tabla 1, ANEXO IV: 369) la media de acierto es $\overline{x}$ = 74,9.

En el caso de la tarea de transformación en modo directo, se presentan las medias de acierto sobre CC $\overline{x}_{CC} = 29{,}4$, y sobre CS $\overline{x}_{CS} = 40{,}8$ (Tabla 2, ANEXO IV: 369).

Dado que el operador de transformación aplicado en el caso de las dos versiones CC y CS es el mismo, la agrupación del acierto en ambos casos proporciona una idea que orienta las posibilidades de acierto de los niños, con independencia de la estrategia metodológica adoptada. Por ello, con el fin único de obtener una estimación global del acierto en transformación directa consideramos la suma de acierto sobre ambas versiones, cuya media es $\overline{x}_{CC+CS} = 70{,}1$.

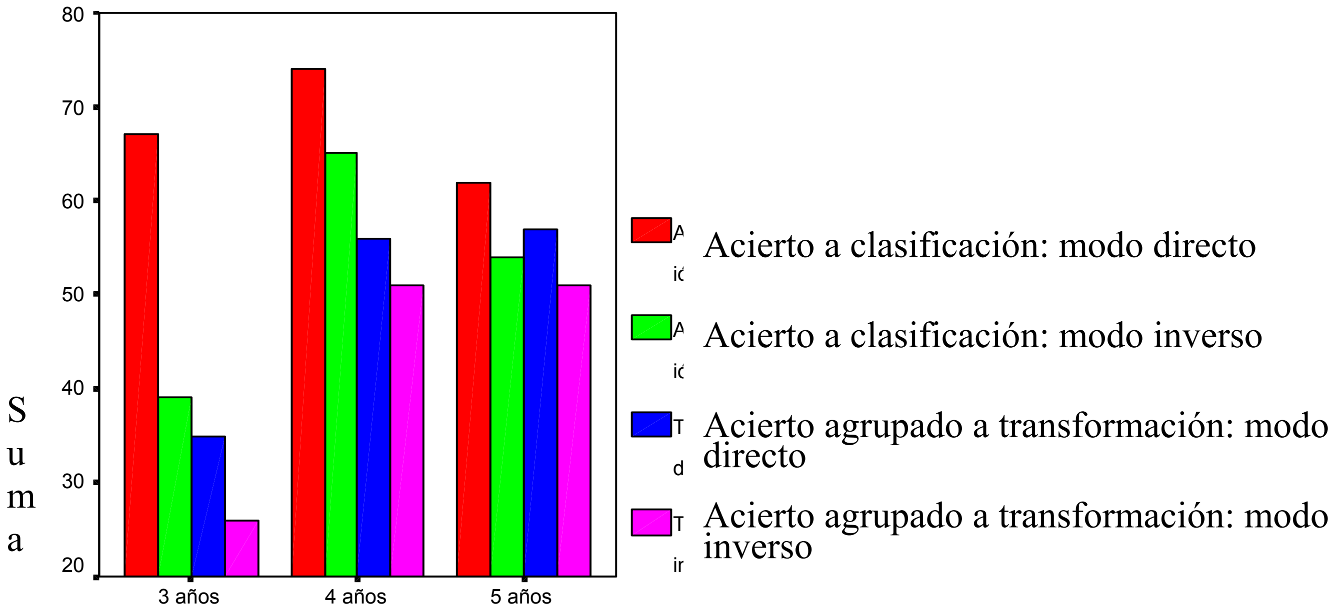
Con el mismo fin, para el caso del modo inverso, se tiene (Tabla 2, ANEXO IV: 369) $\overline{x}_{CC} = 26{,}1$ y $\overline{x}_{CS} = 34{,}6$, lo que agrupando el acierto representa una media de $\overline{x}_{CC+CS} = 60{,}7$.

Con las referencias que proporcionan las medias de acierto, en el caso de transformación, de forma agrupada, podríamos establecer los siguientes niveles de dificultad orientativos:

| **Dificultad / tarea** | **Aciertos** | **% acierto de 211** |
|---|---|---|
| **DIFICULTAD 1**<br>Transformación en modo inverso agrupando las versiones CC y CS | 128 | 60,7 |
| **DIFICULTAD 2**<br>Transformación en modo directo agrupando las versiones CC y CS | 148 | 70,1 |
| **DIFICULTAD 3**<br>Clasificación en modo inverso | 158 | 74,9 |
| **DIFICULTAD 4**<br>Clasificación en modo directo | 203 | 96,2 |

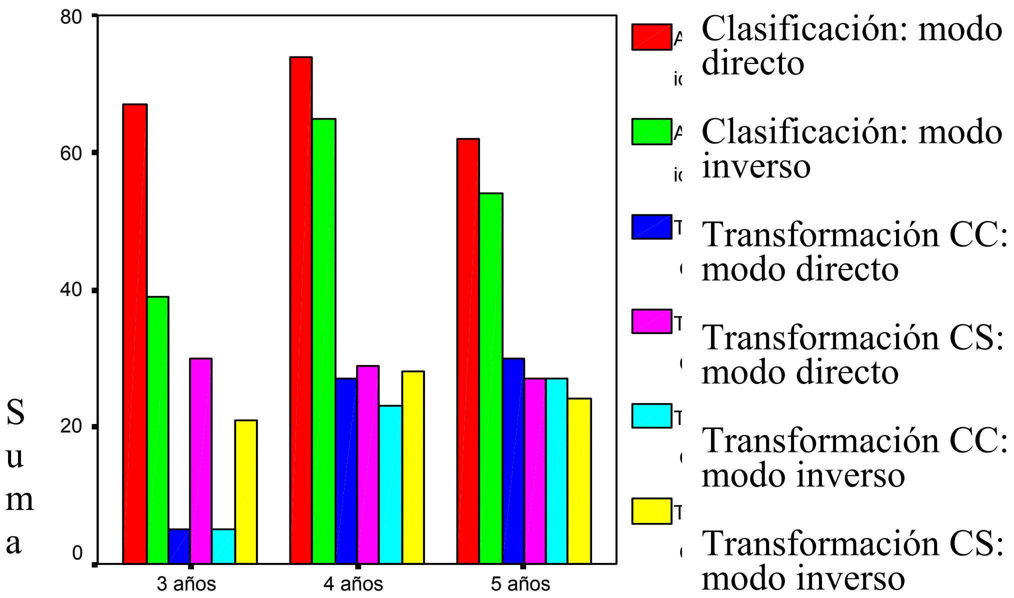
*Niveles de dificultad de las tareas en función de los modos y los contenidos.*

La gráfica 5 es orientativa del acierto en cada tarea y modo, considerando sobre transformación el acierto agrupado.




*Gráfica 5: Aciertos relativos a cada tarea y modo por grupos de edad considerando para las tareas de transformación el acierto agrupado*

Los resultados de acierto sobre cada tarea y modo, considerando las dos versiones en la tarea de transformación se muestran en la gráfica 6:




*Gráfica 6: Aciertos relativos a cada tarea, modo y versión de la tarea de transformación por grupos de edad*

Estos porcentajes permiten establecer diferencia de acierto entre las tareas que representan los niveles de dificultad 1 y 2 y ponen de relieve la mayor dificultad de la tarea de transformación en modo inverso sobre el modo directo.

Examinemos si la diferencia de acierto entre clasificación inversa y transformación directa es significativa.

Los resultados comparativos de acierto / error a las tareas de clasificación inversa y transformación directa sobre CC (Ver Tabla 6, ANEXO IV: 371) muestran que la clasificación en modo inverso es significativamente más fácil que la transformación ($\chi^2_1$ = 6,640, $P \leq ,010$).

Análogamente el contraste de los resultados de acierto / error de clasificación inversa con transformación directa sobre CS (Ver Tabla 7, ANEXO IV: 371) muestra de forma significativa la mayor dificultad de la transformación ($\chi^2_1$ = 14,837, $P \leq ,001$). Los resultados comparativos agrupando los aciertos en ambas versiones CC y CS (Ver Tabla 8, ANEXO IV: 371) resultan igualmente significativos ($\chi^2_1$ = 24,176, $P \leq ,001$).

Por tanto los cuatro niveles de dificultad anteriores establecidos por los porcentajes de acierto son estadísticamente significativos.

### 2.2. Por grupos de edad

La significación estadística de estas diferencias por grupos de edad en años, es la siguiente:

| Tarea | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5 años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2_1$ | P≤ | $\chi^2_1$ | P≤ | $\chi^2_1$ | P≤ |
| Clasificación modo directo | ,301 | ,583 | ,009 | ,926 | ,403 | ,525 |
| Clasificación modo inverso | 15,804 | ,000 | 11,774 | ,001 | ,160 | ,690 |
| Transformación modo directo sobre CC | -,2368 | ,000 | 26,256 | ,000 | 1,643 | ,200 |
| Transformación modo directo sobre CS | 1,685 | ,194 | 8,486 | ,004 | 2,963 | ,085 |
| Transformación modo directo agrupado | 8,705 | ,003 | 22,059 | ,000 | 4,320 | ,038 |
| Transformación modo inverso sobre CC | ,847 | ,358 | ,547 | ,460 | ,306 | ,580 |
| Transformación modo inverso sobre CS | 4,200 | ,040 | 8,165 | ,004 | ,964 | ,326 |
| Transformación modo inverso agrupado | 13,124 | 000 | 23,481 | 000 | 2,258 | ,133 |

*Significación de las diferencias de medias de acierto a las tareas entre grupos de edad*

Como ya se había visto (Tablas 1 y 2, ANEXO IV: 369), todos los grupos de edad muestran un comportamiento semejante en:

- Clasificación en modo directo, en esta tarea el comportamiento de acierto es generalizado, y
- Transformación en modo inverso sobre CC, en esta tarea los porcentajes de acierto que los distintos grupos de edad muestran son también similares y altos pero, referidos a la muestra sobre la que se plantearon que, como es sabido, está compuesta sólo por los casos en que se superó transformación en modo directo sobre CC. El comportamiento similar de todos los grupos de edad ante la tarea en modo inverso sobre CC confirma la relación existente entre transformación sobre CC en sus dos modos, de forma que podemos decir que los niños que pudieron realizar correctamente la tarea sobre CC en modo directo pudieron realizarla también correctamente en modo inverso y que los 7 casos encontrados en la segunda Muestra, no son significativos.

Con las salvedades anteriores, los resultados permiten establecer diferencia entre el comportamiento del grupo de tres años y los otros dos grupos de edad. En la tarea de clasificación en modo inverso la diferencia de acierto en el grupo de edad de 3 años, resulta significativa. Si se compara con su correspondiente directa, que es respondida con acierto por más del 95% de los niños, la versión en modo inverso es respondida con acierto sólo por poco mas de la mitad. En los otros grupos de edad, por el contrario, estas diferencias no son tan acusadas.

En la tarea de transformación directa sobre CC, que para el grupo de 3 años resultó excesivamente compleja, cuando la transformación se realiza punto a punto, este grupo no presenta diferencia significativa de acierto respecto al de 4 años. Es decir, si bien la edad puede resultar determinante para resolver esta tarea bajo determinadas formulaciones, los niños más pequeños de esta etapa educativa pueden resolver con el mismo éxito que los que tienen un año mas las actividades de transformación en modo directo con tal de adoptar estrategias metodológicas pertinentes que eviten los obstáculos circunstanciales que intervienen en ellas y que no son relevantes en la tarea o bien, se ejerciten con mayor frecuencia.

Por otra parte, la diferencia significativa encontrada en transformación modo inverso sobre CS que sólo existe en el grupo de 3 años respecto a los otros dos grupos de edad reúne la doble condición de ser desconocida tanto por su contenido como por su modo. Los elementos metodológicos o quizá la experiencia, propician un aumento del acierto que en conjunto ambas versiones CC y CS alcanza el 37,1% (26 niños).

Los grupos de 4 y 5 años se comportan, en cuanto al acierto, de igual forma en todas las tareas. La única diferencia entre ambos se encuentra cuando se consideran los resultados de acierto agrupado en la transformación en modo directo (Ver Tabla 9, ANEXO IV: 371). Estos resultados permiten afirmar la mejor respuesta de los niños de 5 años a la tarea de transformación directa, en uno u otro tipo de construcción, que sobre la inversa. En tanto que sobre la figura CC los resultados (Ver Tabla 10, ANEXO IV: 371) no son estadísticamente significativos ni tampoco lo son sobre CS (Ver Tabla 11, ANEXO IV: 372).

La actitud de los niños ante la tarea directa y la inversa es muy diferente. Mientras comprenden inmediatamente la tarea en modo directo y enseguida pasan a la acción, se muestran sorprendidos ante la tarea en modo inverso y es necesario plantearla como un juego de adivinar ante el que hay que inicialmente pararse. Esta actitud es la esperable cuando se prima una metodología basada en la acción más que en la reflexión.

En relación con el mayor éxito de la tarea de transformación directa sobre su correspondiente inversa en cada versión puede encontrarse la misma explicación.

Las actividades de transformación directa, aunque desconocidas para las niños participantes por su contenido, es una tarea de aplicación de reglas, de acción; mientras que la tarea de transformación en modo inverso reúne la doble condición de ser desconocida tanto por el contenido como por el modo y además, esta tarea exige el descubrimiento de la regla y la realización de las acciones directas; probablemente por esto resulta más difícil para todos los grupos de edad.

En cualquier caso, hay un elemento metodológico que resulta significativo en la realización de las tareas de transformación que es la complejidad de la figura sobre la cual se aplica.

**3. Análisis de procedimientos de resolución**

El análisis de los procedimientos utilizados revela que el grupo de niños que acierta utiliza procedimientos diferenciados de los que utilizan los que tienden a cometer errores.

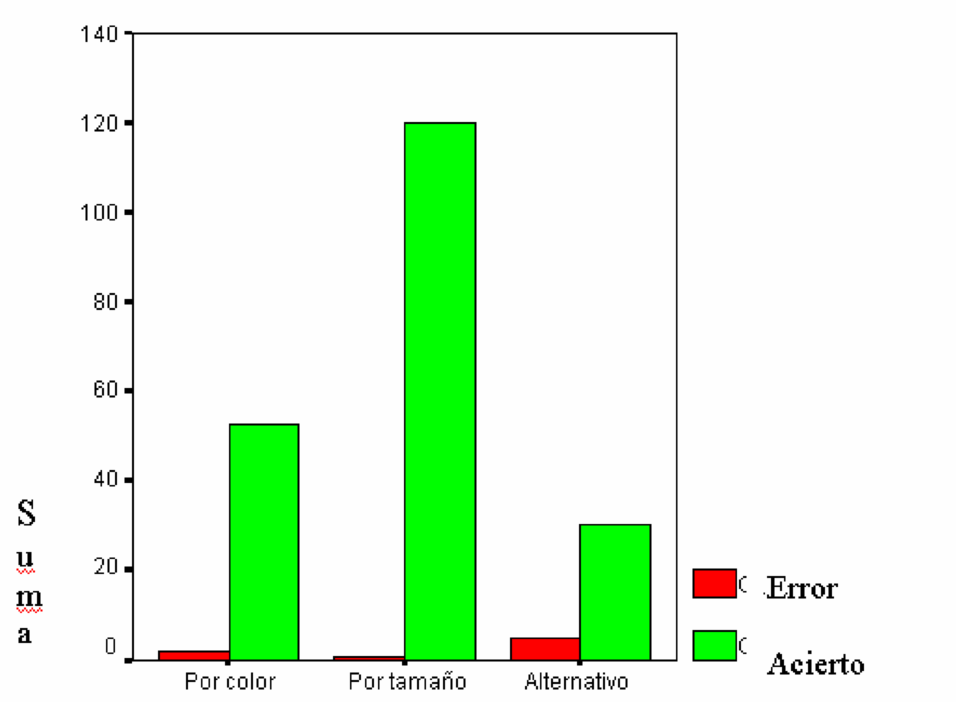
**3.1. Tarea de clasificación. Modo directo**

Los procedimientos se analizan en función de las siguientes regularidades, que definen las categorías de análisis:

(1) Por atributo color: colocan las piezas completando las columnas
(2) Por atributo tamaño: colocan las piezas completando las filas

(3) Procedimiento alternativo: colocan las piezas atendiendo a uno u otro atributo.

La gráfica 7 muestra la distribución de las frecuencias (Ver Tabla 12, ANEXO IV: 372) con la que los niños utilizan cada tipo de procedimiento, en función de acierto y error al resolver la tarea de clasificación.

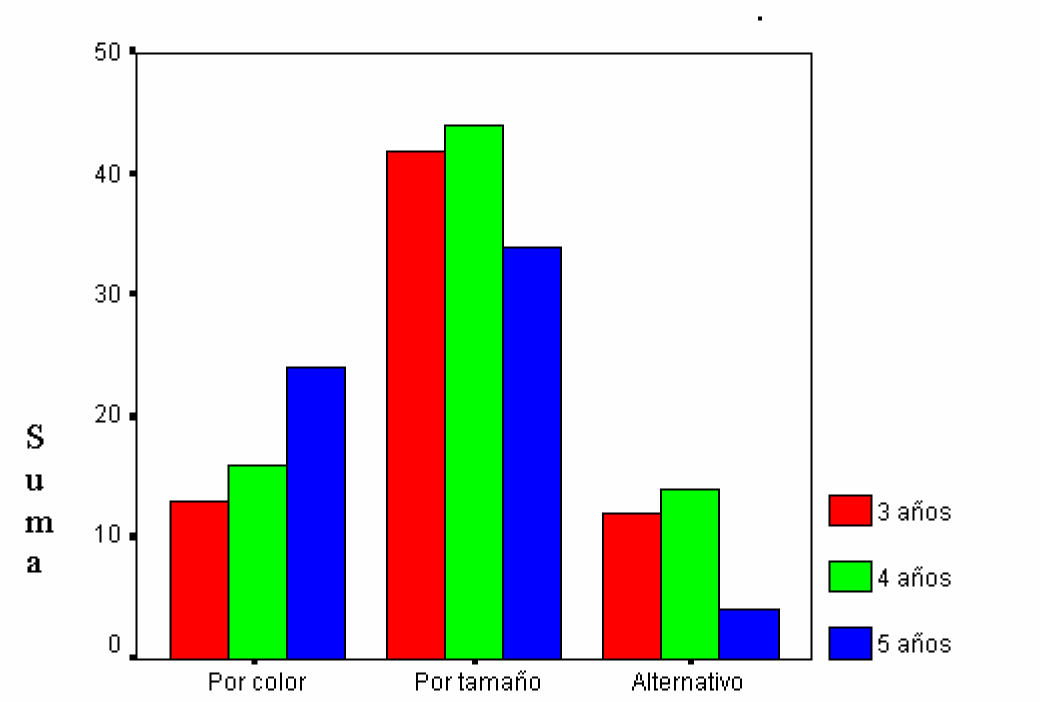



*Gráfica 7: Distribución de frecuencias de los distintos procedimientos para resolver la tarea de clasificación en modo directo según acierto / error.*

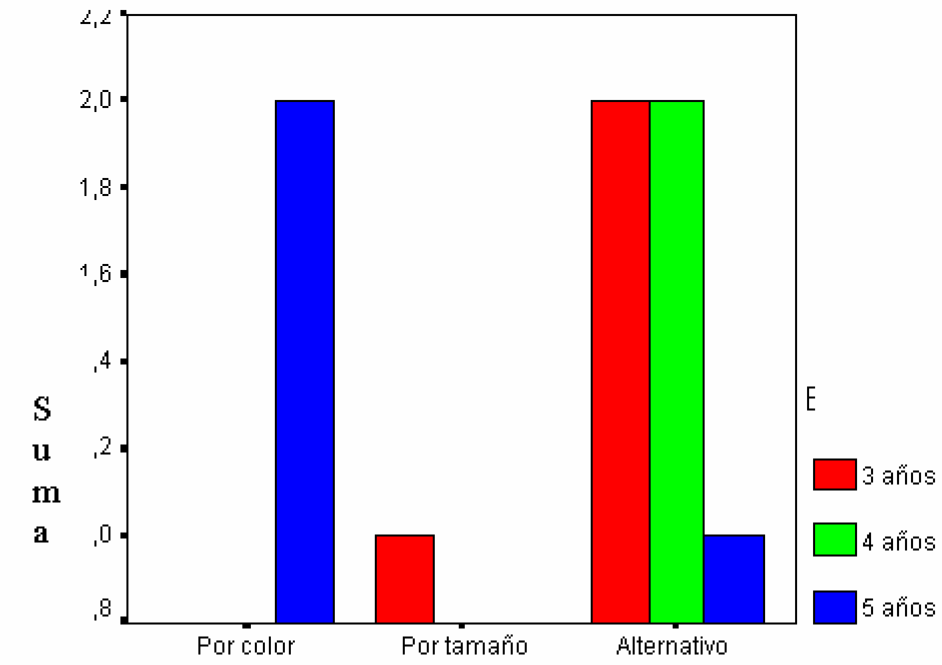
El procedimiento mas utilizado (más del 57%) para realizar la tarea es por filas, esto es, según el tamaño. Sólo un 16,6% de los niños, no siguen un criterio estricto de acuerdo con los atributos, es decir utiliza el procedimiento alternativo; su utilización revela un uso menor de las relaciones que los atributos en juego establecen en la definición de la tabla.

El porcentaje de uso del procedimiento alternativo es el más alto en el grupo que no tiene éxito (62,5%, o sea, 5 de 8 niños que se equivocan en esta tarea), contrariamente, en grupo de acierto, resulta ser el menos utilizado, frente al procedimiento por color que es el más usado (59%) por el grupo que acierta. El contraste entre estas diferencias de porcentajes mediante $\chi$ cuadrado proporciona $\chi^2_2 = 13{,}487$ $P \leq 0{,}001$, lo que permite afirmar que el grupo de acierto utiliza unos procedimientos de solución diferentes de los que utiliza el grupo de error. Estos resultados igualmente, permiten afirmar que el procedimiento alternativo, menos organizado, puede corresponder con el error al resolver la tarea.

El contraste de medias de estas categorías por factor edad proporciona $\chi^2_4 = 12{,}086$ $P \leq 0{,}017$, es decir que los distintos grupos de edad utilizan estos procedimientos en porcentajes significativamente diferenciados. Las frecuencias con que los dos grupos de acierto / error usan estos procedimientos en función de la edad (Ver Tabla 13, ANEXO IV: 372) se muestran en las gráficas 8 y 9.




*Gráfica 8: Grupo de acierto. Distribución de frecuencias de los procedimientos usados para resolver la tarea de clasificación en modo directo*




*Gráfica 9: Grupo de error. Distribución de frecuencias de los procedimientos usados para resolver la tarea de clasificación en modo directo.*

En el grupo de éxito, niños de todas las edades completan la tabla por filas en mayor porcentaje que aquellos que utilizan otros procedimientos. El uso de procedimientos distintos del alternativo aparece en porcentajes altos en todas las edades y presentan pocas variaciones: el menor corresponde al grupo de 3 años con un 78,6% y el mayor, al de 5, con 89,2%.

A medida que la edad aumenta, disminuye el uso del tamaño como referente principal para resolver la tarea e incrementa el uso del color como referente. La comparación entre grupos de edad muestra que los procedimientos del grupo de 5 años son significativamente distintos a los de los otros grupos de edad (entre 3 y 5 años $\chi^2_2=9,476$, $P\leq$ ,009 y entre 4 y 5 años $\chi^2_2=8,619$, $P\leq,013$). Este grupo usa con menor frecuencia que los otros grupos de edad, el procedimiento alternativo. Esto puede significar una que a esta edad los niños han logrado una mayor organización del procedimiento ligada con las clases que los atributos definen, que en los grupos con menor edad. Probablemente para los de 5 años, la organización del procedimiento, está ligada en mayor medida con los elementos concretos y sus características.

Una razón para adoptar este tipo de organización podría ser que el uso del tamaño implica el dominio (más simple) de dos zonas diferenciadas en la tabla que interviene en la tarea, frente a tres zonas (más complejo) que delimita el atributo color.

En el grupo de error no se encuentran diferencias significativas en función de la edad. Las edades de los ocho niños que no resolvieron la prueba con acierto, varían entre los 3:2 (que utilizó el procedimiento alternativo) y los 5:3 (que utilizó el procedimiento color).

**3.1.1 Evolución del acierto / error en el proceso**

Veamos ahora la progresión de acierto y error a lo largo de todo el proceso resolutivo, de forma diferenciada entre el grupo que terminó con acierto y el que terminó en error.

En la Tabla 14 (ANEXO IV: 373) se muestra la situación de acierto / error que la tarea presenta en los tres momentos del proceso resolutivo. De los 203 niños que realizan con éxito el ejercicio, el 94,8 no registran errores en los dos momentos anteriores, solo 3 niños del grupo de acierto, se equivocan durante el proceso y corrigen sus errores.

Este resultado es indicativo de la seguridad con que los niños afrontan la solución de esta prueba.

Por otra parte, de los 8 niños que no concluyen con éxito la tarea, 5 la comienzan correctamente pero a medida que el ejercicio avanza aparecen situaciones erróneas de tal forma que para el momento de la tercera pieza sólo uno de ellos ha colocado bien las tres piezas y finalmente este comete algún error antes de concluirla.

El contraste de medias de estos resultados por edad, no resulta significativo, es decir los niños de todas las edades aciertan o se equivocan a lo largo de la tarea de forma estadísticamente igual. Por otra parte, el alto porcentaje de acierto y la seguridad que muestran los niños del grupo de éxito, hace pensar que la programación de este tipo de actividad para niños de entre 5 y 7 años (Santos Asensi, 1992: 129) no se ajusta a las posibilidades de los niños por razón de la edad, que estas son excesivamente simples, no contienen suficientes elementos que puedan suscitar su interés y curiosidad y no aportan nada nuevo a sus posibilidades de razonamiento inferencial.

### 3.2. Tarea de clasificación. Modo inverso

La secuencia utilizada por los niños en la colocación de los nueve elementos permite agrupar todos los procedimientos de resolución de acuerdo con la regularidad secuencial con la que elementos del mismo tipo de concreción son colocados.

Tarjetas y piezas presentan niveles de concreción diferentes. Su uso, sistematizado o no, así como el orden en que aparecen dentro de la secuencia, son los indicadores descriptivos del proceso que posibilitan un análisis desde el punto de vista de la concreción de estos elementos.

Con el fin de analizar la posible influencia de los dos atributos variables, se diferencian las tarjetas de color y de las de tamaño aunque ambas tienen el mismo tipo de concreción, así se observan los siguientes procedimientos:

*Procedimiento ctp*: colocan primero todas las tarjetas de color, luego todas las tarjetas de tamaño y finalmente las cuatro piezas.
*Procedimiento cpt*: colocan primero todas las tarjetas de color, luego las cuatro piezas y finalmente las tarjetas de tamaño.
*Procedimiento pct*: colocan primero las cuatro piezas, luego todas las tarjetas de color y finalmente las tarjetas de tamaño.
*Procedimiento ptc*: colocan primero las cuatro piezas, luego todas las tarjetas de tamaño y finalmente todas las tarjetas de color.

*Procedimiento tcp*: colocan primero todas las tarjetas de tamaño, luego todas las tarjetas de color y finalmente las cuatro piezas.

*Procedimiento tpc*: colocan primero todas las tarjetas de tamaño, luego las cuatro piezas y finalmente todas las tarjetas de color.

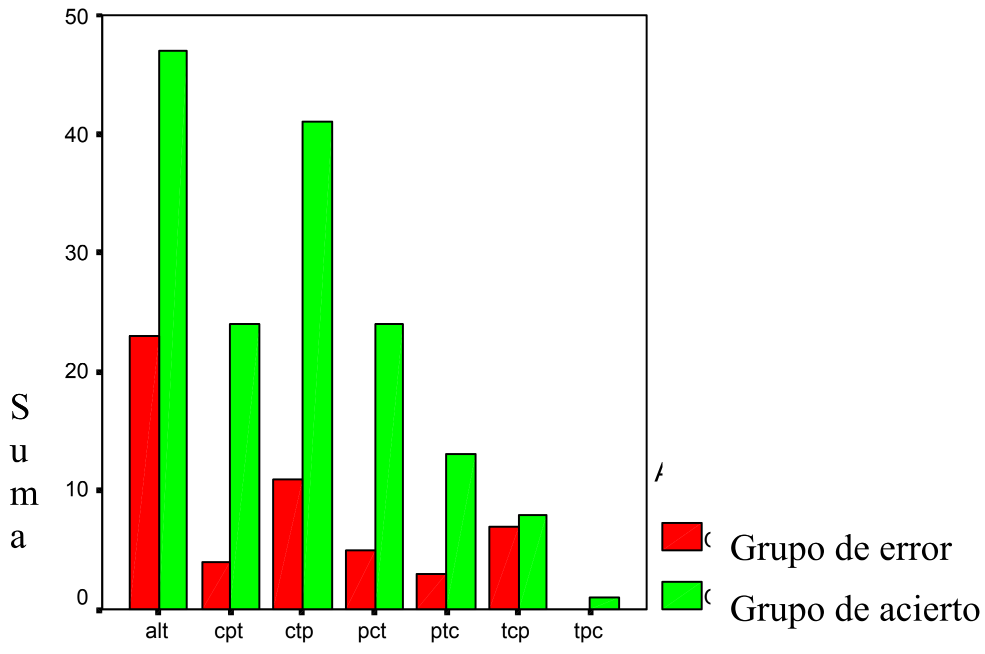
*Procedimiento alternativo alt***:** colocan en secuencia, al menos una vez, elementos de diferente tipo. Por ejemplo se codifica así la siguiente secuencia: 1º tarjeta de color, 2º tarjeta de color, 3º pieza, 4º tarjeta de color, 5º tarjeta de tamaño, 6º tarjeta de tamaño, 7º pieza, 8º pieza, 9º pieza; el tercer elemento colocado rompe la secuencia de tipos.

Sólo si todos los elementos de cada uno de los tipos son colocados secuencialmente, se considera que el procedimiento es diferente del alternativo.

Por otra parte, la utilización de cada uno de los nueve elementos de esta tarea, se analiza como indicador del nivel diferenciado de inferencia que los niños alcanzan, de acuerdo con el procedimiento que utilizan.

Veamos, en primer lugar, los procedimientos presentados por los grupos de acierto y error en la tarea y por los distintos grupos de edad.

En la Tabla 15 (Ver Anexo IV: 373) se muestra la distribución de frecuencias con que fueron usados los distintos procedimientos por los grupos que terminaron la tarea con acierto o error a la que responde la gráfica 10.




*Gráfica 10: Distribución de procedimientos resolutivos en la tarea de clasificación modo inverso en función del acierto / error.*

El procedimiento alternativo es el más usado, tanto por el grupo de acierto (29.1%), como por el de error (45,3%). El segundo procedimiento más utilizado por los dos grupos de acierto (25,9) y error (20,7%), consiste en colocar en primer lugar las tarjetas de color, luego las tarjetas de tamaño y finalmente las cuatro piezas. El 15,8% del grupo de acierto coloca primero las tarjetas de color, después las piezas y, finalmente las tarjetas de tamaño. Es decir que un 41,7% de los niños que aciertan, comienza el ejercicio colocando en primer lugar las tres tarjetas de color.

El contraste de medias de uso de cada uno de los procedimientos, en relación con el éxito o fracaso en la tarea proporciona $\chi^2_6 = 0{,}174$ $P \leq ,062$, es decir, ambos grupos: éxito o fracaso en la prueba emplean los mismos procedimientos. Al contrario de lo que ocurre entre los grupos de acierto / error en la tarea directa.

El contraste de uso de estos procedimientos en función de la edad proporciona $\chi^2_{14} = 6{,}118$ $P \leq ,963$, es decir, los procedimientos empleados no varían entre los distintos grupos de edad. Esto es igualmente lo contrario de lo que ocurre con los procedimientos empleados en la tarea en modo directo.

Las frecuencias con que se presentan en cada grupo de edad pueden verse en la Tabla 16 (ANEXO IV: 374).

Solamente en el grupo de niños de 4 años se encuentran diferencias significativas entre los procedimientos que permiten resolver con acierto el modo inverso de la tarea de clasificación, de aquellos que conducen al error ($\chi^2_7 = 15{,}143$, $P \leq {,}034$). Esta misma diferencia se observa en el grupo de 4 años respecto a la tarea en modo directo.

Los niños del grupo de 4 años utilizan con mayor frecuencia y éxito los procedimientos que comienzan con la colocación de las tarjetas de color y además es el único en el que se presenta un caso de solución mediante el procedimiento de colocar en primer lugar las tarjetas de tamaño y luego las piezas.

En ambos modos, el grupo de niños de cuatro años que tiene éxito, hace un uso significativamente diferenciado de los distintos procedimientos de solución, respecto del grupo que no lo tiene. Esta diferencia no se da en los otros dos grupos de edad.

La comparación de procedimientos entre grupos de edad no proporciona diferencias significativas. Es decir, ningún grupo de edad muestra un comportamiento diferenciado en cuanto a los procedimientos empleados.

### 3.2.1. Nivel de complejidad de los procedimientos

Los nueve elementos que el niño tiene que colocar para resolver la tarea tienen diferentes niveles de concreción. Así: mientras las piezas son elementos más concretos, las tarjetas son menos concretos.

Comenzar la tarea colocando las tres tarjetas de color, por ejemplo, forma parte de un procedimiento resolutivo menos concreto que comenzar la tarea colocando los dos triángulos de columnas con datos. Las frecuencias con que se presentan estas formas de comenzar el procedimiento resolutivo indican que los niños utilizan procedimientos resolutivos de menor concreción. Así encontramos que el 45,5% utilizan procedimientos que comienzan colocando las tarjetas (35,6% en el grupo de acierto y 9,9% en el grupo de error), mientras el 21,4% (17,6 en el grupo de acierto y 3,8% en el grupo de error) comienzan por los elementos menos concretos, es decir las cuatro piezas. El resto, 33,3% (21.8% del grupo de acierto y 11,4% del grupo de error) coloca primeros elementos de distinto tipo, es decir, usa un procedimiento alternativo (Tabla 17, ANEXO IV: 374).

Por otra parte, los nueve elementos tienen distinto poder revelador de la inferencia que puede estarse produciendo en el niño cuando son usados por éste en el primer lugar. Es el caso de la tarjeta de color rojo o de los dos triángulos rojos cuando estos son utilizados como primer elemento en la secuencia resolutiva.

El análisis de primer elemento que los niños utilizan permiten establecer los siguientes niveles de complejidad del procedimiento: basados conjuntamente en el grado de concreción de este elemento y en su poder revelador de inferencia:

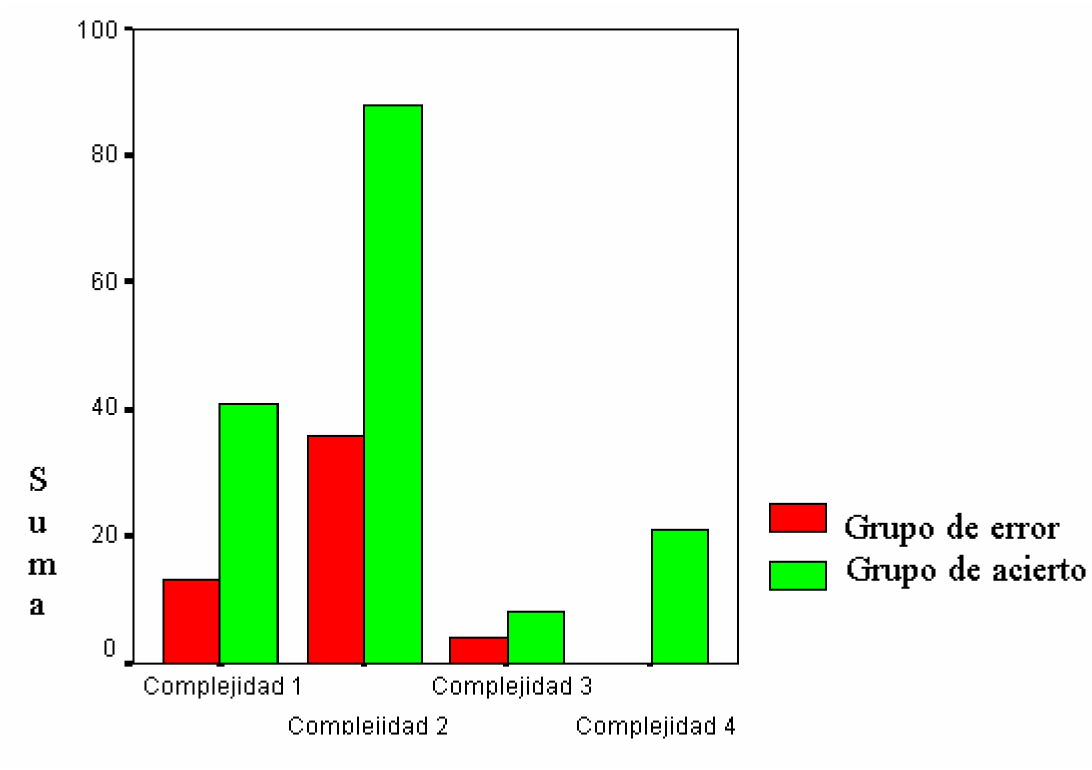
- Complejidad 4. Definido por: menor nivel de concreción y alto índice de inferencia. Es indicativo de este nivel la colocación de la tarjeta de color rojo en el primer lugar de la secuencia. (cpt)
- Complejidad 3. Definido por: mayor nivel de concreción y alto índice de inferencia Es indicativo de este nivel la colocación de uno de los dos triángulos rojos en el primer lugar de la secuencia.
- Complejidad 2. Definido por: menor nivel de concreción y bajo índice de inferencia. Es indicativo de este nivel la colocación de una tarjeta en el primer lugar de la secuencia.
- Complejidad 1. Definido por: mayor nivel de concreción y bajo índice de inferencia. Es indicativo de este nivel la colocación del triángulo amarillo o del triángulo azul en el primer lugar de la secuencia.

Examinemos si el tipo de elemento que se coloca en primer lugar tiene relación con el éxito o error final en la tarea. La siguiente tabla, muestra las frecuencias con que se presentan estos niveles de complejidad diferenciando entre el grupo que terminó correctamente el ejercicio y el que lo acabó con error.

| | **Complejidad 1** | | **Complejidad 2** | | **Complejidad 3** | | **Complejidad 4** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % |
| **Acierto** | 41 | 19,4 | 88 | 41,7 | 8 | 3,8 | 21 | 10 |
| **Error** | 13 | 6,2 | 36 | 17,0 | 4 | 1,9 | | |
| **Total** | 54 | 25,6 | 124 | 58,7 | 12 | 5,7 | 21 | 10 |

*Distribución de frecuencias de los niveles de complejidad de los procedimientos resolutivos en la tarea de clasificación: modo inverso.*

Estas diferencias resultan significativas en función del acierto o error final en la tarea ($\chi^2_3 = 8{,}516$ $P \leq ,036$). La gráfica 11 muestra los datos anteriores.




*Gráfica 11 Distribución de frecuencias de los niveles de complejidad de los procedimientos resolutivos en la tarea de clasificación: modo inverso en función del acierto / error.*

El 100% de los 21 niños (10% del total) que inicialmente colocan la tarjeta de columna sin datos, es decir la tarjeta de color rojo, realizan correctamente el ejercicio completo. La utilización de este elemento, que corresponde con el procedimiento de mayor complejidad, es el mejor indicador del descubrimiento de reglas que el niño hace. Otros procedimientos, menos complejos (Complejidad 1, 25,6%); Complejidad 2, 58,7%, el más utilizado; y Complejidad 3, 5,7%) permiten igualmente resolver esta tarea exitosamente.

Excluida la categoría Complejidad 4, las diferencias entre las frecuencias correspondientes a las otras tres categorías de complejidad no son significativas en función del éxito o error en la tarea ($\chi^2_2 = 0{,}648$ $P \leq ,723$). Por tanto, salvo en el caso del elemento correspondiente a la columna sin datos, la utilización de cualquier otro no parece estar vinculado con el éxito o error en la tarea.

Estos resultados permiten concluir que el uso de procedimientos de complejidad 4 es condición suficiente para resolver con éxito la tarea y que éste nivel muestra el descubrimiento de reglas, la existencia de procesos de inferencia correctamente establecidos y la aplicación posterior exitosa de estas reglas. Sin embargo, el uso de otros procedimientos de mayor concreción, más cercanos a la respuesta perceptiva, no tiene relación con el éxito o error final en la tarea.

La utilización como primer elemento, de la tarjeta de color sin datos (tarjeta roja), el mejor indicador del descubrimiento de reglas en el niño, constituye el procedimiento óptimo, hasta tal punto que ninguno de los casos que utilizaron este primer elemento se equivocó finalmente en la solución. A su vez, la utilización en primer lugar de este elemento, revela en mayor medida que el resto de los elementos de menor complejidad, la capacidad de inferencia lógica del niño. La utilización inicial de los menos complejos revela una manera progresiva de establecer relaciones, incluidos aquellos que comienzan colocando las piezas de columnas con datos; el origen de este procedimiento probablemente es la percepción.

Veamos cual fue el elemento colocado en primer lugar en función de edad (Ver Tabla 18, ANEXO IV: 374). La diferencia entre las frecuencias no es significativa en función de la edad ($\chi^2_8 = 4{,}870 \quad P \leq ,771$). Es decir, el uso de estos elementos en primer lugar, es igualmente frecuente en todos los grupos de edad.

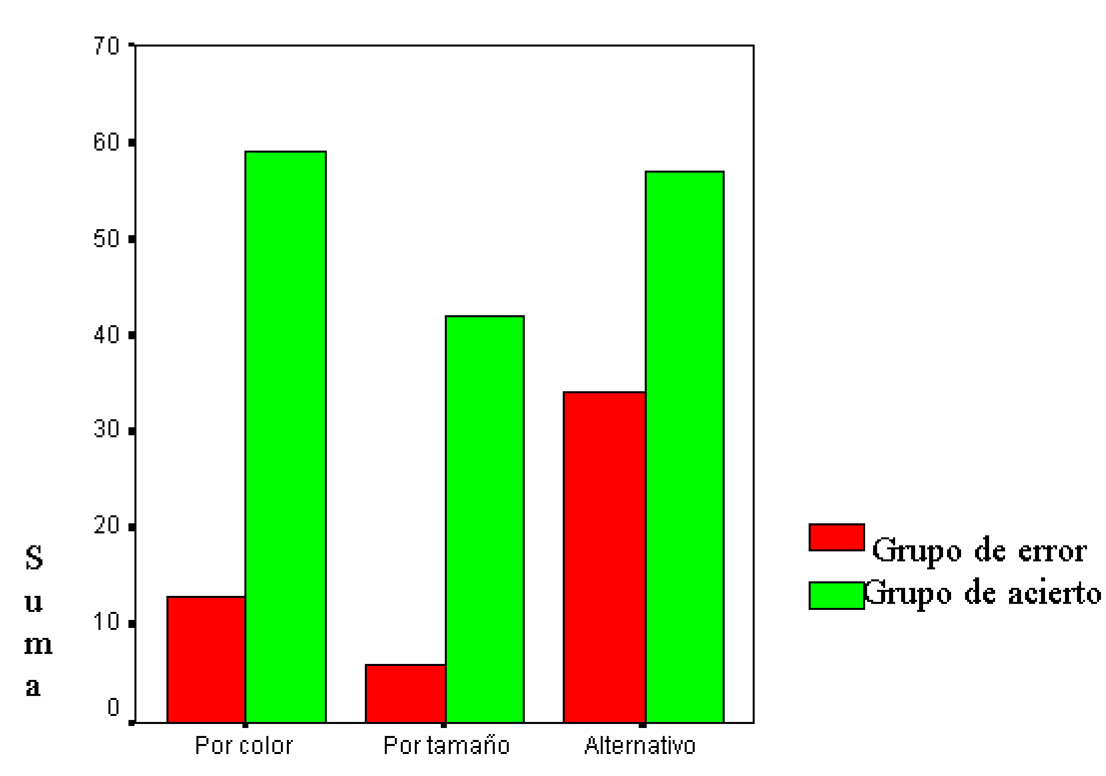
Se puede destacar que entre los niños que usaron un procedimiento alternativo se encuentran 7 casos que, en algún momento intermedio del proceso de solución, colocan antes pero casi simultáneamente, una de las piezas de color sin datos (roja) y la tarjeta de color sin datos (color rojo y explican: "Porque ahí voy a poner la tarjeta roja". Esta anticipación, indicativa del reconocimiento de las reglas, no es sin embargo, suficiente para concluir la tarea con éxito, pues de ellos, 2 no lograron acertar.

Esto indica que, en efecto, en la solución correcta de esta tarea, es necesario descubrir las reglas y, posteriormente aplicarlas con éxito. Es decir, la solución del Modo inverso incluye la solución del modo directo lo que aporta una razón más para considerar la tarea en modo inverso como más compleja que en modo directo[2].

### 3.2.2. Análisis del procedimiento usado para colocar las piezas

Las diferencias entre los procedimientos utilizados para colocar las cuatro piezas, entre los grupos que terminaron la tarea con acierto y error resultan significativas ($\chi^2_2 = 13{,}226 \quad P \leq ,001$) (Ver Tabla 19, ANEXO IV: 374). El procedimiento alternativo es mayoritario en el grupo de niños que finalizan la tarea con error y no lo es en el grupo que termina con acierto. La gráfica 12 recoge estas frecuencias.

[2] De hecho, sólo se encontró un caso que habiendo resuelto la tarea en modo inverso correctamente, no tuvo éxito sobre la tarea en modo directo. Es el caso de un niño de 4:7 de edad que distingue el tamaño con dificultad y termina la tarea en modo directo con un error en tamaño. La causa de su éxito en el modo inverso puede deberse a la mayor experiencia tanto con el material como con la tarea, ya que el modo inverso, se realizó después del directo. En cualquier caso, aunque para mantener el mismo criterio de valoración, la tarea en modo directo se valora como incorrecta, posteriormente se volvió a realizar la tarea en modo directo con otras reglas expresas y el niño tuvo igualmente éxito en este modo. Es decir, la causa en este caso, puede ser la falta de experiencia.



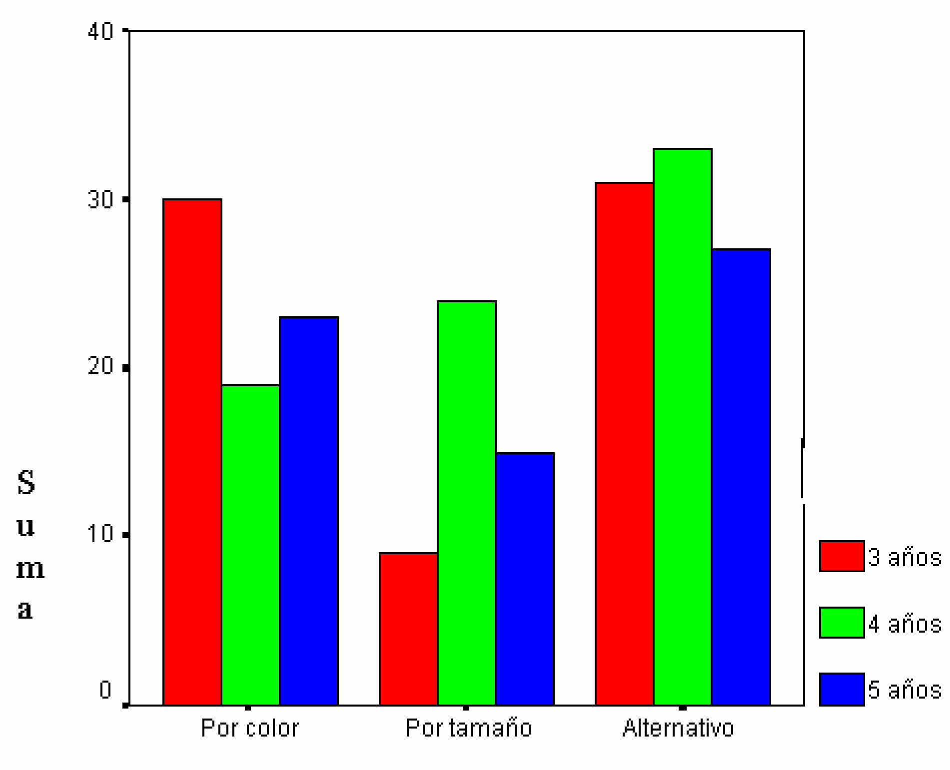

*Gráfica 12: Distribución de frecuencias de uso de los procedimientos usados para colocar las piezas en clasificación modo inverso según acierto / error.*

El procedimiento alternativo que revela el uso menos sistematizado de las relaciones expresadas en la tabla, porque la secuencia de acciones que el niño ejecuta cambia de referente de una a la siguiente sin agotar, en cada caso, las posibilidades. Esto podría indicar que el grupo de error gestiona peor las relaciones implícitas que los datos revelan o que las inferencias lógicas no son correctas.

Si comparamos los procedimientos utilizados en este caso con los utilizados en el ejercicio de clasificación directo, podemos ver que son también exactamente inversos en cuanto a los porcentajes de niños que usaron cada uno de ellos. Así, mientras en el ejercicio de clasificación en modo directo, donde sólo se colocan piezas, el procedimiento por tamaño es mayoritario con un 57,3%, y el alternativo es minoritario con un 16,6% (Ver Tabla 12, ANEXO IV: 372), los porcentajes de estos procedimientos, en el caso del modo inverso, son del 22,7%, en el caso del procedimiento por tamaño (que es el minoritario) y del 42,7%, en el caso del procedimiento alternativo (que es el mayoritario) (Ver Tabla 19, ANEXO IV: 374).

Esta característica es la propia de los modos: directo / inverso en los que, no sólo los objetivos son inversos en cuanto a que en un caso se trata de aplicar reglas y en otro de descubrir las reglas aplicadas, sino también los procedimientos utilizados son inversos.

En el modo inverso, todos los grupos de edad utilizan el mismo tipo de procedimientos al colocar las cuatro piezas ($\chi^2_4$ = 9,129 P≤ ,058) siendo el procedimiento alternativo el más usado (Ver Tabla 20, ANEXO IV: 375). En la gráfica 13 se muestra la distribución correspondiente.




*Gráfica 13: Distribución de frecuencias de los procedimientos usados para colocar las cuatro piezas en clasificación modo inverso por edad.*

Si comparamos estos procedimientos con los que aparecen en el modo directo, donde únicamente se colocan piezas, la situación se invierte doblemente pues, en el primer caso, no sólo los procedimientos utilizados resultan diferentes en función de la edad, sino que en el modo inverso, el procedimiento alternativo resulta ser el más utilizado y en el directo, el menos utilizado.

Estos resultados son explicables por razón de la mayor variedad de elementos que intervienen en el modo inverso, que hace más difícil encontrar referentes. Estos referentes son más claros y explícitos en el modo directo donde; recordemos que el principal referente es el tamaño.

### 3.2.3. Evolución del acierto / error en el proceso

Veamos ahora la evolución del acierto en la solución del ejercicio a lo largo de la tarea en los grupos que finalmente terminaron la tarea con acierto o error.

Todos los niños que realizaron con éxito la tarea colocaron bien el primer elemento. Sólo el 4,7% de ellos cometió algún error durante el proceso de solución que después corrigió. Es decir, este grupo realiza la tarea con gran seguridad cometiendo muy pocos errores durante el proceso.

De los 53 niños que no tuvieron éxito, 35 colocaron correctamente el primer elemento, (supone un 66% de los niños que finalmente no tuvieron éxito en la tarea), pero ya en el cuarto elemento, sólo el 3,8% tenían éxito (Tabla 21, ANEXO IV: 375).

El contraste de medias las respuestas encontradas en los tres momentos registrados, en función del acierto o error final en la tarea proporciona la siguiente significación:

| Tarea: Clasificación modo inverso Resultados Acierto | Primer elemento | | Cuarto elemento | | Noveno elemento | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_3$=58,665 | ,001 | $\chi^2_3$=128,51 | ,001 | $\chi^2_3$=211,00 | ,001 |

*Significación de las diferencias de medias de las distintas respuestas en los tres momentos registrados en función del acierto o error en la tarea.*

Es decir, el grupo que finalmente resolvió la tarea correctamente cometió menos errores durante el proceso que el grupo que finalmente no tuvo éxito.
Esta misma característica es la que se encuentra en el modo directo. Ambos ejercicios son abordados por los grupos de éxito con gran seguridad, sin tanteos ni errores intermedios.

Los resultados de acierto o tipos de error en cada uno de los momentos registrados, en función de la edad proporcionan la siguiente significación:

| Tarea: Clasificación modo inverso Resultados Edad | Primer elemento | | Cuarto elemento | | Noveno elemento | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_6$=3,516 | ,742 | $\chi^2_6$=11,09 | ,086 | $\chi^2_2$=8,188 | ,017 |

*Significación de las diferencias de medias de las distintas respuestas en los tres momentos registrados en función de la edad.*

Es decir, todos los niños, independientemente de su edad, comienzan cometiendo los mismos tipos de error, y continúan así incluso hasta la colocación del cuarto elemento; sin embargo, desde este momento hasta el final, los distintos grupos de edad operan de forma significativamente diferente. Son los niños de 3 años, cuyos resultados finales de acierto (Tabla 1, ANEXO IV: 369) son significativamente menores que los de los otros dos grupos de edad, los que no corrigen sus errores en el tramo final, al contrario que ocurre con los grupos de 4 y 5 años.

### 3.3. Comparación de procedimientos resolutivos de la tarea de clasificación según el modo

La tarea en modo inverso, muestra una variedad de procedimientos de solución mucho más rica que su correspondiente en modo directo. La presencia en el modo inverso de elementos con distintos grados de concreción, contrariamente a lo que ocurre con el modo directo, permite conjeturar que los niños disponen de recursos de razonamiento suficientes como para abordar la solución al modo inverso mediante procedimientos que implican grados de concreción más bajos: manejan y reconocen los símbolos de los valores como indicativos de clases y los usan con preferencia frente a los elementos concretos.

Además los modos directo e inverso muestran ser inversos también respecto a los referentes que operan con predominancia: tamaño y color.

Sin embargo, la variedad de procedimientos utilizados con éxito, muestran que los vínculos relacionales válidos pueden ser muy diversos y establecerse en el interior de cada sujeto por razones que no conocemos, con prioridad a otro tipo de vínculos, por efecto de las relaciones que implícitamente se encuentran en los objetos que el sujeto observa y que justifican una acción. El hecho de que estas acciones sean mas o menos reveladoras de la relación inferencial que se ha producido no significa que sean las primeras que el niño establece ni que sea necesario que tengan que ocurrir en primer lugar. Aún cuando la secuencia de acciones parezca más vinculada a lo perceptivo e incluso lo estén realmente, sólo podríamos afirmar que el niño opta por un procedimiento de pasos más elementales, sencillos y seguros, voluntariamente o no, que no excluyen la existencia de un pensamiento inferencial. Probablemente algunos adultos expertos, cuya capacidad de inferencia esté probada, optarían por métodos resolutivos diferentes a aquellos cuyas acciones son más reveladoras. Los dos casos particulares, no codificados, que reconstruyeron la tabla intercambiando las posiciones horizontal y vertical de los códigos, muestran la riqueza procedimental que presenta el modo inverso, que no existe en el modo directo, y que se corresponde con el modo de razonamiento inverso en la determinación de condiciones suficientes o en la búsqueda del modelo matemático que, en este caso, requiere encontrar un patrón de organización de los elementos sobre la tabla.

### 3.4. Tarea de transformación. Modo directo

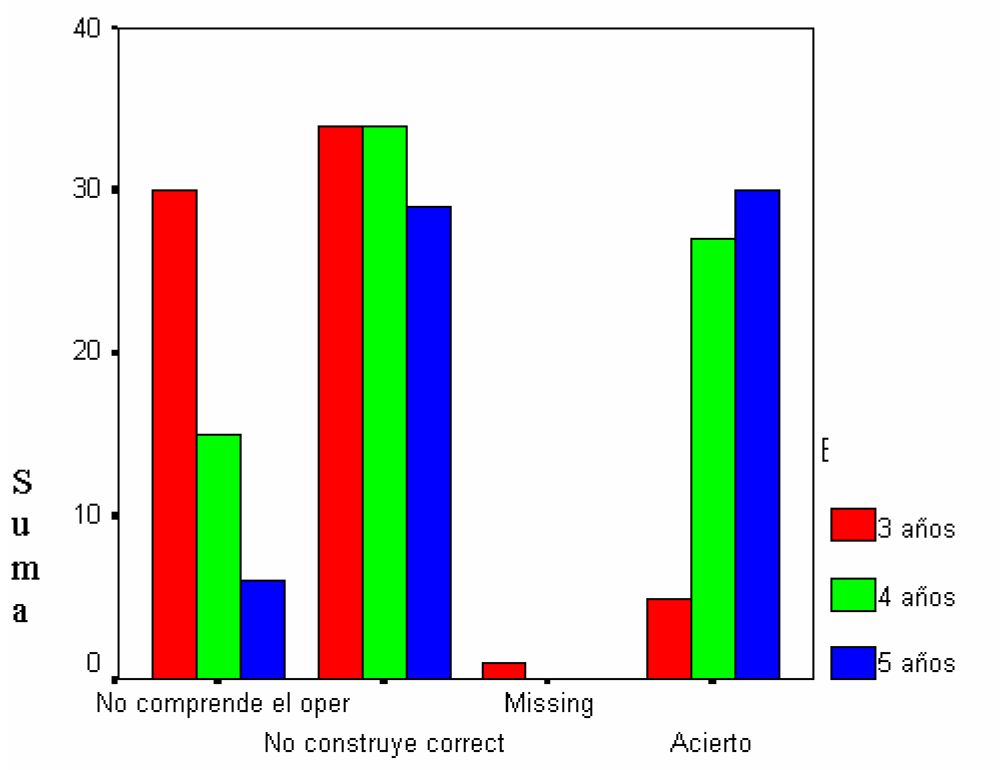
Como vimos en el Capítulo II, el análisis del procedimiento resolutivo que conduce al éxito en esta tarea, muestra que los niños deben comprender el operador y construir totalmente la figura. Estos se convierten en los criterios que permiten analizar los procedimientos al resolver la tarea de transformación en modo directo.

#### 3.4.1. Sobre CC

Como sabemos, los resultados de acierto / error en esta tarea (Tabla 2, ANEXO IV: 369) son significativos en función de la edad.

Se supone que el niño que acierta en esta tarea comprende el operador de transformación y lo aplica correctamente. Sin embargo, entre los niños que no lograron éxito, se encuentran situaciones de error vinculadas con los dos requerimientos anteriores: hay niños que no comprenden el operador y otros que no logran construir la figura imagen en su totalidad (Tabla 22, NEXO IV: 375).

Las diferencias en los resultados obtenidos en función de la edad ($\chi^2_6 = 37{,}883$ $P \leq 0{,}001$) son significativas; a medida que la edad aumenta el éxito al resolver la tarea aumenta. De la misma manera, la comprensión del operador aumenta de forma clara con la edad (el 42,9% de los niños de 3 años muestran este problema, mientras esto ocurre sólo en el 9,2% de los niños de 5 años). El porcentaje de niños encontrado que no logran construir la figura en su totalidad es prácticamente el mismo en los diferentes grupos de edad.
La gráfica 14 muestra estos resultados por grupos de edad:




*Gráfica 14.- Transformación sobre CC: modo directo. Acierto y causas de error*

La dificultad para construir la figura imagen en su totalidad se debe a diferentes causas. La siguiente es la distribución de frecuencias, para los distintos grupos de edad, de las causas encontradas en este caso:

| **Tipos de dificultad para construir correctamente la figura imagen** | 3 años | | 4 años | | 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % |
| Olvida la construcción inicial | 1 | 1,4 | 3 | 3,9 | 10 | 15,4 |
| Interpreta los signos de flecha del operador en sentido contrario | 13 | 18,6 | 8 | 10,5 | 2 | 3,1 |
| Construye la figura hasta cierto momento | 9 | 12,9 | 18 | 23,7 | 11 | 16,9 |
| Confunde posiciones inicial y final | 11 | 15,7 | 5 | 6,6 | 6 | 9,2 |
| Total | 34 | 48,6 | 34 | 44,7 | 29 | 44,6 |

*Transformación modo directo sobre CC. Distribución de tipos de dificultades para construir correctamente la figura imagen, por grupos de edad.*

Estos resultados son significativamente distintos entre grupos de edad ($\chi^2_6 = 23{,}876$ $P \leq 0{,}001$) y se muestran en la siguiente gráfica 15:

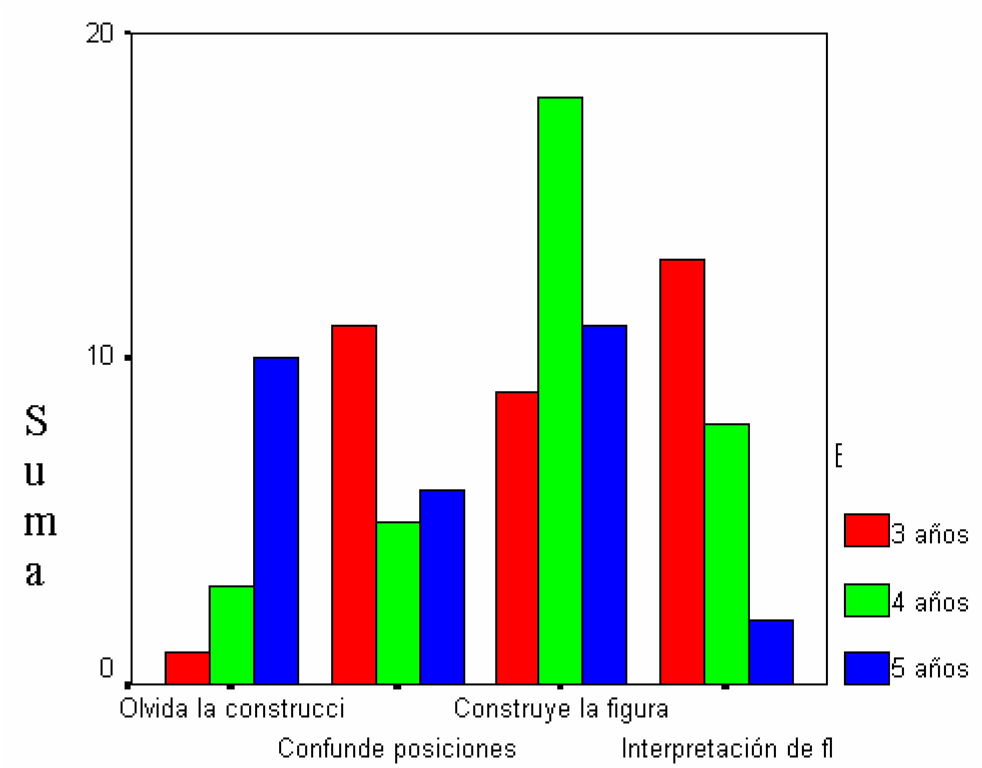



*Gráfico 15.- Transformación directa CC. Distribución de tipos de dificultades para construir correctamente la figura imagen, por grupos de edad*

El contraste de medias en estas categorías de dificultad entre los distintos grupos de edad (Tabla 23, ANEXO IV: 376) muestra que casi todos los grupos de edad presentan porcentajes diferenciados en relación con el tipo de dificultad; solamente el grupo de 5 años comparte con el de 4, la dificultad para construir la figura hasta el final. En el grupo de 3 prima la interpretación errónea del sentido de las flechas y confunden la posición inicial y final; el de 5, presenta porcentajes igualmente altos porque olvida la construcción inicial.

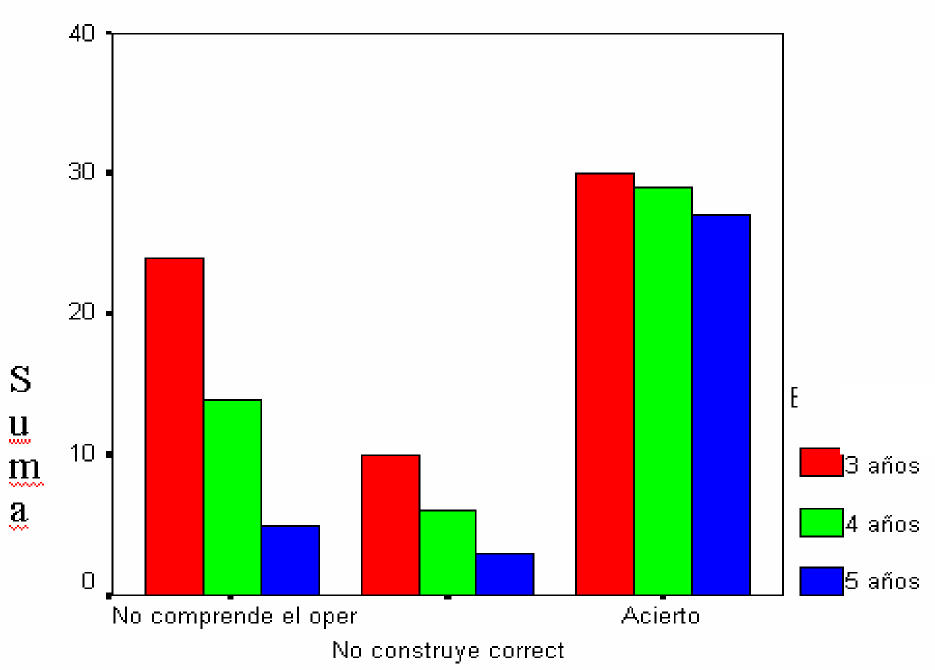
En general estas dificultades no significan falta de comprensión del operador. Es el caso de los niños que olvidan la construcción inicial y de los que construyen parcialmente la figura imagen. Este tipo de problemas puede estar relacionado con la forma de la figura, las posiciones relativas de las piezas que las integran o la falta de destreza en relación con el dominio del espacio o incluso con la falta de adecuación del razonamiento lógico.

La misma interpretación se puede dar al caso de los niños que interpretan las flechas simbólicas de la tarjeta de transformación en sentido contrario. En este caso, la dificultad es de direccionalidad y no tanto de comprensión de la transformación.

### 3.4.2. Sobre CS

A los 148 niños que no tuvieron éxito sobre CC se plantea la tarea sobre CS; en este caso tienen éxito el 58,1% (86 niños, que supone el 41% del total) este acierto sabemos que es significativo en función de la edad (Tabla 2, ANEXO IV: 369). El 29,1% (43 niños, que supone el 20,5% del total), continúa mostrando falta de comprensión del operador y el 12,8% (19 niños, que supone el 9% del total) no pueden construir la figura imagen (Tabla 24, ANEXO IV: 376).

Todos los grupos de edad muestran un comportamiento similar en la respuesta ($\chi^2_4 = 8{,}681$ $P \leq 0{,}070$). La gráfica 16 muestra los resultados obtenidos por grupos de edad:




*Gráfica 16.- Transformación sobre CS: modo directo. Acierto y causas de error*

Es decir que, ya sea por efecto de una mayor experiencia o por la mayor simplicidad de la construcción inicial, ambos factores de tipo metodológico, se produce un incremento de acierto superior al 40% de la muestra total, en esta tarea. El problema de comprensión del operador que fue del 24,3% sobre CC, desciende al 20,5% (del total de la muestra). De modo que, de los 51 niños que presentaron problema de comprensión del operador sobre CC, 8 lo comprenden al plantear la tarea sobre CS.

En relación con la distribución de los tipos de dificultad que se presentan en los casos que no pueden construir la figura imagen correctamente, por grupo de edad, se encuentran los siguientes resultados:

| **Tipos de dificultad para construir correctamente la figura imagen** | 3 años | | 4 años | | 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % |
| Olvida la construcción inicial | | | | | | |
| Interpreta los signos de flecha del operador en sentido contrario | 3 | 4,3 | 1 | 1,3 | | |
| Construye la figura hasta cierto momento | | | | | | |
| Confunde posiciones inicial y final | 7 | 10 | 5 | 6,6 | 3 | 4,6 |
| Total | 10 | 14,3 | 6 | 7,9 | 3 | 4,6 |

*Transformación modo directo sobre CS. Distribución de tipos de dificultades para construir correctamente la figura imagen, por grupos de edad*

Aunque estas diferencias entre los grupos de edad no son estadísticamente significativos ($\chi^2_2$ = 1,351 P≤ 0,509), la diferencia en las dificultades encontradas evidencian la importancia de la figura objeto de transformación. Al resolver la tarea sobre CS, en todos los grupos de edad desaparecen dos tipos de dificultades que se presentan ante CC: el olvido de la construcción inicial y el bloqueo que produce la complejidad de la figura CC, que impiden que finalicen su construcción.

### 3.5. Tarea de transformación. Modo inverso

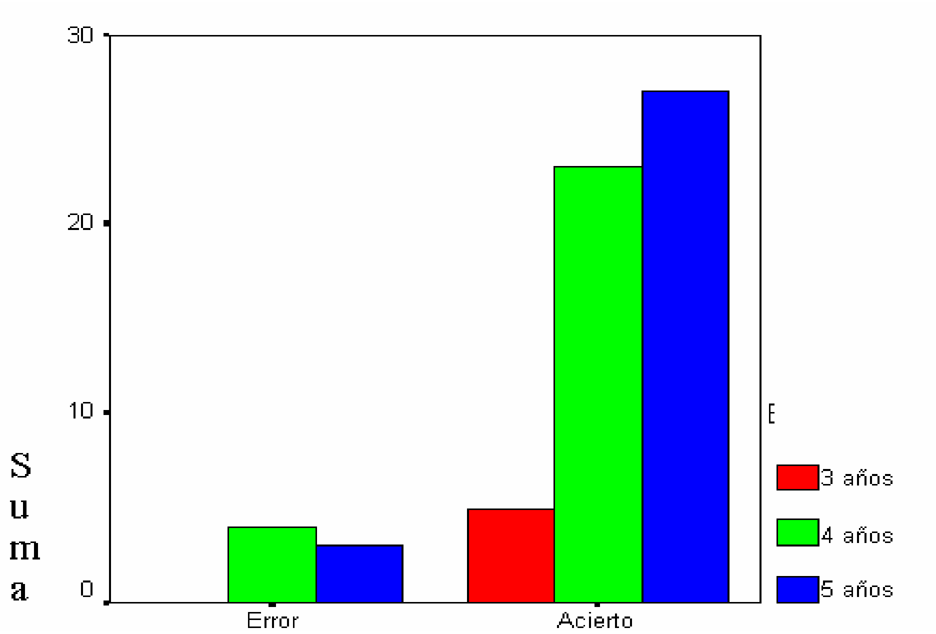
#### 3.5.1. Sobre CC

De los 62 niños a los que se plantea la tarea de transformación inversa sobre CC, 55, o sea el 88,7% (que supone un 26,2% de la muestra total), pueden identificar el operador empleado. En función de la edad los resultados fueron los siguientes:

| | 3 años | | | 4 años | | | 5 años | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % válido | % | N | % válido | % | N | % válido | % |
| Acierto | 5 | 100 | 7,1 | 23 | 85,2 | 30,3 | 27 | 90 | 41,5 |
| Error | | | | 4 | 14,8 | 5,2 | 3 | 19 | 4,6 |
| **Total** | 5 | 100 | 7,1 | 27 | 199 | 35,5 | 30 | 100 | 46,1 |
| (missing) | 65 | | 92.9 | 49 | | 64,5 | 35 | | 53,9 |
| Total | 70 | | 100 | 76 | | 100 | 65 | | 100 |

*Resultados a la tarea de transformación modo inverso sobre CC.*

Estos resultados se presentan en la gráfica 17:




*Gráfica 17.- Acierto y error a transformación sobre CC. Modo inverso*

Podemos ver que salvo 7 casos (4 del grupo de 4 años y 3 del grupo de 5 años), los niños que aciertan transformación en modo directo sobre CC, aciertan también transformación en modo inverso sobre CC. Por esto no se encuentran diferencias significativas en el acierto a esta tarea, en función de la edad (Tabla 2, ANEXO IV: 369).

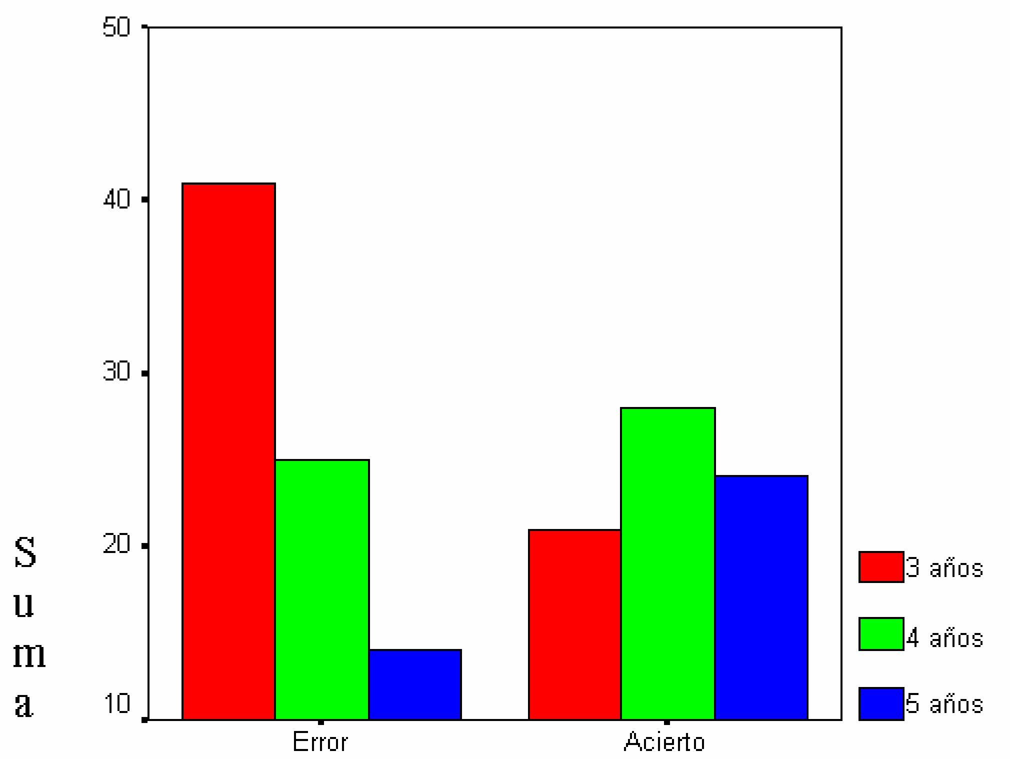
### 3.5.2. Sobre CS

Todos los grupos de edad incrementan los resultados de acierto en transformación inversa obteniéndose los siguientes resultados:

| | 3 años | | | 4 años | | | 5 años | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % válido | % | N | % válido | % | N | % válido | % |
| Acierto | 21 | 33,9 | 30 | 28 | 52,8 | 36,8 | 24 | 63,2 | 37 |
| Error | 41 | 66,1 | 58,6 | 25 | 47,2 | 32,9 | 14 | 36,8 | 21,5 |
| **Total** | 62 | 100 | 88,6 | 53 | 100 | 69,7 | 38 | 100 | 58,5 |
| (missing) | 8 | | 11,4 | 23 | | 30,3 | 27 | | 41,5 |
| Total | 70 | | 100 | 76 | | 100 | 65 | | 100 |

*Resultados de la tarea de transformación modo inverso sobre CS.*

Estos resultados, que sabemos, son significativamente distintos entre los grupos de edad (Tabla 2, ANEXO IV: 369**)** se representan en la gráfica 18:




*Gráfica 18.- Acierto y error en transformación sobre CS. Modo inverso*

El contraste de resultados entre cada dos grupos de edad revela que sólo existe diferencia significativa entre los grupos de 3 y 5 años (Tabla 25, ANEXO IV: 376), es decir que el grupo de 3 años mejora sus resultados hasta equipararse al grupo de cuatro años y el grupo de 4 años muestra el mismo comportamiento que el de 5 años.

De los 7 niños que no pudieron resolver el ejercicio sobre CC**,** sabemos que mas de la mitad pudieron resolverla sobre CS.

## 4. Análisis de la argumentación y verbalización

En esta sección se analizan las distintas categorías argumentativas que los niños utilizan en las tareas, en cada uno de sus modos y versiones. Estas categorías se estudian en relación con el acierto o error final en la tarea, para evaluar si existe diferencia significativa entre el modo de argumentar del grupo de éxito y el de error y en función de la edad para tratar de determinar si la argumentación está vinculada con la edad.

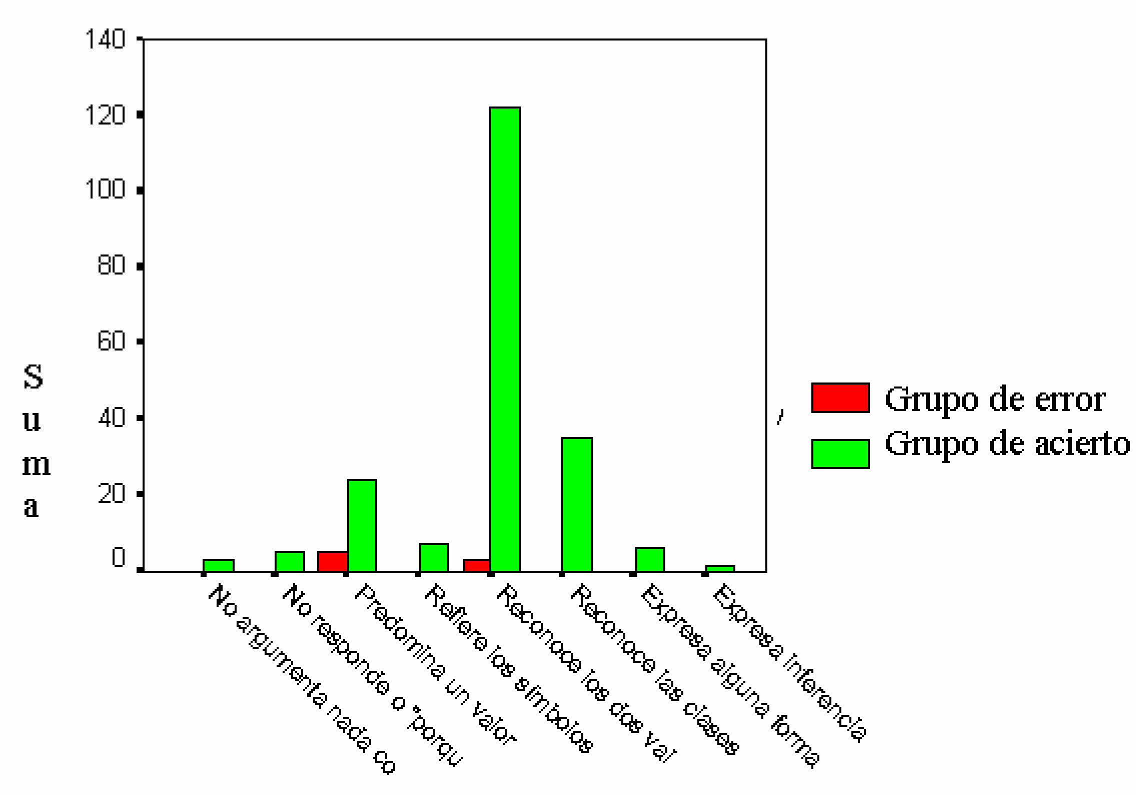
En los dos modos de la tarea de clasificación se encuentra que la argumentación está ligada con el éxito en la tarea. El grupo de 3 años muestra una argumentación significativamente distinta de los otros grupos de edad. Además, en el modo inverso, los tipos de argumentos son más próximos a la inferencia que en modo directo.

En la tarea de transformación, la argumentación muestra diferencias en relación con el éxito pues mientras en modo directo el tipo de argumentación no está vinculado con el éxito, si lo está en modo inverso.

### 4.1. Tarea de clasificación. Modo directo

#### 4.1.1. Análisis de la argumentación en función del acierto

La distribución de frecuencias de las distintas categorías de argumentos utilizadas por cada grupo de edad (Tabla 26, ANEXO IV: 377) diferenciada entre el grupo que terminó con acierto y el que finaliza con error resultan significativamente distintas en función del acierto en la tarea ($\chi^2_7$ = 17,294 $P \leq$ 0,016). Estos resultados se muestran en la siguiente gráfica:




*Gráfica 19.- Argumentación en clasificación: modo directo según acierto/error*

El grupo de error argumentó de forma significativamente distinta que el grupo que acertó.

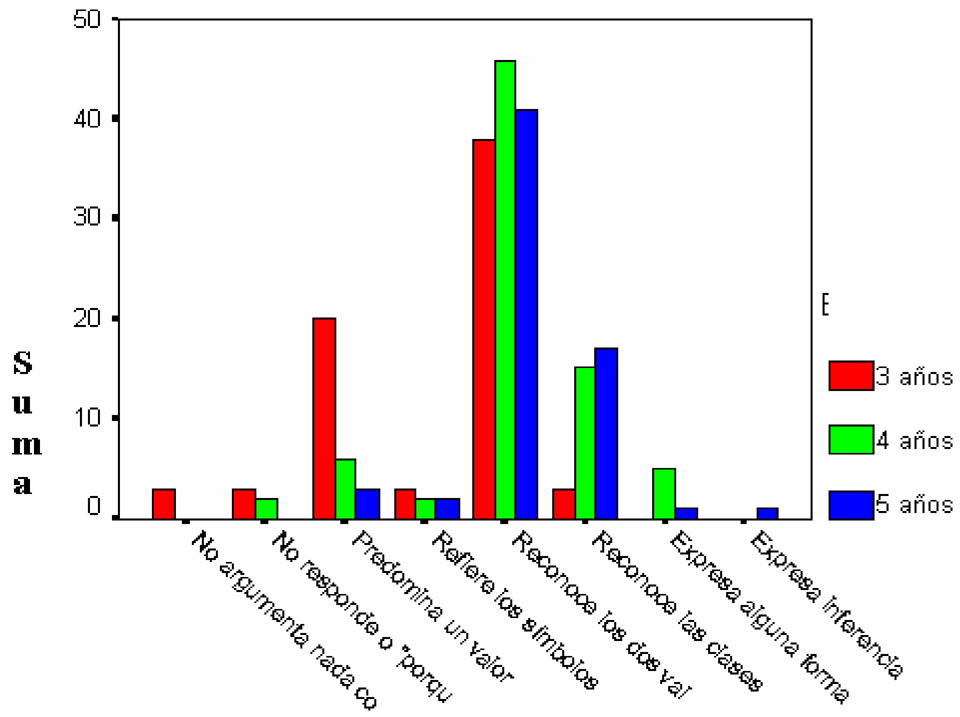
Los datos permiten señalar que los 8 niños que no aciertan se encuentran categorías de argumentos poco elaborados o bien no argumentan. Concretamente, los 3 niños que pueden reconocer los dos valores sobre las piezas, se encuentra en la misma situación: los niños no reconocen espontáneamente los dos valores, uno de ellos lo reconocen después de la pregunta complementaria y de inducción que la experimentadora formula tras la primera y segunda pieza. Los niños pueden reconocer los dos valores en el momento en que se les pregunta y a la vista de ambos símbolos, pero no les pueden aplicar la conjunción a ambos cuando, de forma autónoma, tienen que determinar el lugar que les corresponde; esto lo hacen considerando y verbalizando sólo uno de ellos. Es decir, estos niños operan en función de uno sólo de los atributos presentes y no dominan las relaciones múltiples que la tabla expresa.

En el grupo que acierta, los niños que no argumentan (categoría 1), muestran una destreza ejemplar al resolver el ejercicio, no titubean y responden con desparpajo e incluso sin preguntarles: “Porque me gusta” o “Porque me lo ha dicho mi papá”. El mayor de ellos tiene 4:4. Su actitud desenvuelta hace pensar que estas respuestas para ellos forman parte del juego. En relación con los niños que no responden o responden: "Porque es así", “Porque va ahí” (categoría 2), 3 muestran una actitud tímida, retraída o de intimidación y no responden pregunta alguna. El mayor de ellos tiene 4:4.

Las tres categorías de argumentos con el nivel mayor nivel de elaboración (6, 7 y 8) sólo se presentan en el grupo de acierto. Estos datos permiten afirmar que el tipo de argumentación está ligado con el acierto en la tarea.

### 4.1.2. Análisis de la argumentación en función de la edad

La argumentación es significativamente distinta en los distintos grupos de edad ($\chi^2_{14}$ = 45,292 P≤ 0,001). Los resultados se muestran en la gráfica 20.




*Gráfica 20.- Argumentación en clasificación: modo directo según la edad.*

Los contrastes entre grupos de edad (Tabla 27, ANEXO IV: 377) muestra diferencia significativa entre los niños de 3 años y los otros dos grupos de edad. El grupo de 3 años utiliza categorías de argumentación en las que predomina el uso de uno sólo atributo, en mayor medida que los otros grupos. Sin embargo, recordemos que los resultados de acierto de este grupo no se diferencian significativamente de los de los otros grupos, es decir que, aunque argumentan de forma significativamente menos elaboradas, menos vinculadas al dominio de las relaciones que implican las dos variables, esto no les impide tener un éxito en la acción, igual que el resto de niños que argumentan mejor. Además, logran éxito mostrando gran seguridad durante el proceso resolutivo; recordemos los escasos errores que los niños de todas las edades presentan durante la solución de la tarea. Nuevamente, esto podría ser un indicio de que la expresión verbal es posterior al razonamiento.

### 4.1.3. Análisis de la verbalización

El contraste de medias, en función de acierto, relativas a la verbalización de los valores, que se registra en tres momentos del desarrollo de la tarea (Tabla 28, ANEXO IV: 378), muestra que no hay diferencia significativa entre el grupo de éxito y el de error, ni en la primera, ni en la tercera pieza. Si lo hay entre ambos grupos al final de la tarea.

Es decir, la verbalización progresa a lo largo de la tarea, de tal modo que sólo al final se encuentra diferencia entre los que terminan con éxito y los que finalizan con error. Ninguno de los ocho niños que se terminan la tarea con error verbalizan ambos atributos. Se puede observar que en el grupo de 203 niños que resolvieron correctamente la tarea, la verbalización progresa a medida que la prueba avanza puesto que del 17,5% que verbaliza ambos valores tras la primera pieza, el 52,1% lo hace tras la tercera pieza y el 68,2% verbaliza los dos valores variables tras colocar la última pieza, por el contrario, en el grupo de error esta progresión no se da; ninguno de los niños de este grupo verbaliza los dos valores.

Por lo tanto un 28% de los niños, que resuelven correctamente el ejercicio en la acción, no verbalizan los dos valores que ponen en juego. Incluso un 4,7% (10 niños) resuelven correctamente la tarea en la acción y mantienen una verbalización imprecisa.

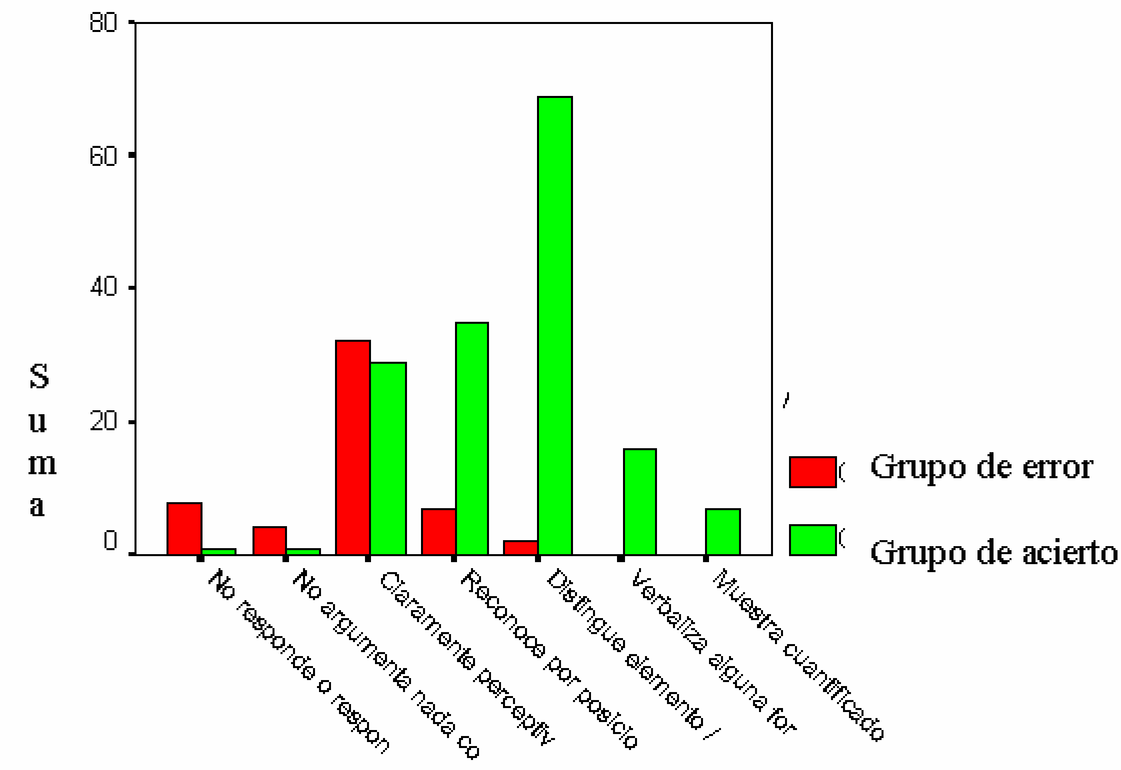
Si se compara la categoría que representa la verbalización más precisa, es decir la categoría de respuestas en que el niño verbaliza tamaño y color, con el acierto o error al final de la tarea (Tabla 29, ANEXO IV: 378), en cada uno de los momentos, se encuentra que esta diferencia es significativa sólo al finalizar la tarea. Sin embargo la prueba de McNemar proporciona en los tres momentos el valor 0,001, indicativo de la fuerte relación existente entre la verbalización de ambos valores y el acierto.

La verbalización de los dos valores está ligada con el éxito en la tarea, de forma significativa al final de la tarea, podemos ver (Tabla 28, ANEXO IV: 378) que ninguno de los niños que verbaliza ambos atributos se equivoca en la tarea. Sin embargo, este tipo de verbalización no es necesario para el éxito por tanto podemos decir que este tipo de verbalización es suficiente para el éxito, pero no necesaria.

## 4.2. Tarea de clasificación. Modo inverso

### 4.2.1. Análisis de la argumentación en función del acierto

La distribución de frecuencias de las distintas categorías de argumentos utilizadas por cada grupo de edad (Tabla 30, ANEXO IV: 379), diferenciada en función del grupo que acierta y el que comete error, resulta significativamente distinta para el que acierta ($\chi^2_6 = 79{,}792$ $P \leq 0{,}001$). Estos resultados se muestran en la siguiente gráfica:




*Gráfica 21.- Argumentación en clasificación: modo inverso según acieto/error*

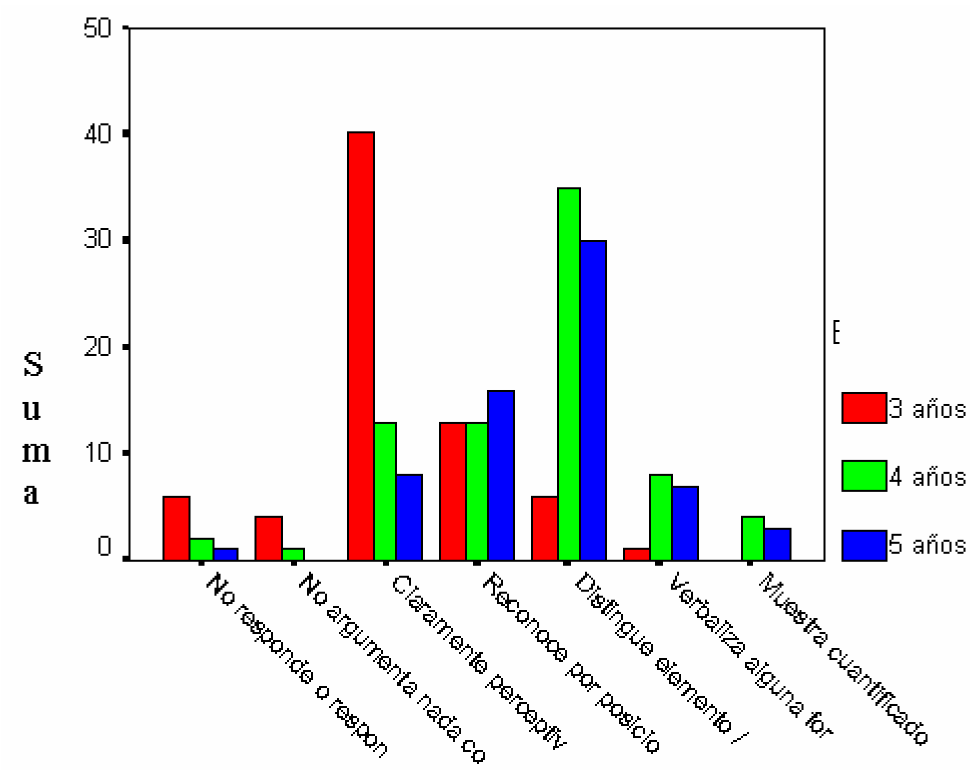
Es decir que el grupo de error argumentó de forma significativamente distinta que el grupo que acertó. Igualmente, las categorías de argumentos más elaboradas se presentan únicamente en el grupo de acierto. En este grupo, los casos que no presentan argumentación o no responden son únicamente 2, y un 42,2% muestra las tres categorías de argumentos con más alto nivel de elaboración.

En el grupo que terminó la tarea con error, se encuentran tres casos que, en algún momento del proceso resolutivo pueden distinguir las clases, sin embargo, la colocación correcta de una pieza supone particularizar en ella los dos valores correspondientes a cada una de las clases y esto sólo consiguen hacerlo sobre una de ellas, en estos casos el color, de tal modo que, aunque reconocen las clases "Grande" y "Pequeño", colocan las piezas rojas con error en tamaño y su razón para colocarla en esos lugares es "Porque es roja", olvidando su condición de elemento perteneciente a una de las clases de tamaño. Es decir, operan fundamentalmente, de acuerdo con una de las relaciones y sólo cuando se les recuerda la otra pueden valorar su error.

### 4.2.2. Análisis de la argumentación en función de la edad

El contraste de medias respecto a la edad proporciona $\chi^2_{12} = 68{,}432$ $P \leq 0{,}001$. Por lo tanto, igualmente resultan significativamente distintas las categorías de argumentos mostradas por los distintos grupos de edad.

Los datos referidos por grupos de edad (Tabla 31, ANEXO IV: 379) se muestran sobre la siguiente gráfica:




*Gráfica 22.- Argumentación en clasificación: modo inverso según la edad.*

Los contrastes de estos resultados entre grupos de edad, indican diferencia significativa de los tipos de argumentos de los niños de 3 años frente a los de los otros grupos de edad. Este grupo utiliza con mayor frecuencia categorías de argumentos menos elaboradas que los otros grupos de edad y se distingue, sobre todo, por mostrar una argumentación basada en razones de tipo perceptivo. Sin embargo la característica principal de los grupos de 4 y 5 años es la argumentación basada en el reconocimiento de las clases que los valores determinan, igualmente las categorías de argumentos mas altas se encuentran en estos grupos con frecuencias equivalentes.

### 4.2.3. Análisis de la verbalización

En cuanto a la verbalización de los nueve elementos que intervienen en esta tarea, sólo cuatro (las cuatro piezas) reúnen, por su naturaleza, los dos valores de los atributos variables en la misma. Examinemos la verbalización en los tres momentos que se registran, cuando en estos momentos se coloca una pieza. Los porcentajes válidos se refieren al número de casos en los que se coloca pieza en cada uno de los tres momentos, cuya frecuencia se presenta en la primera columna.

| **Elemento** | | | **Verbaliza tamaño** | | **Verbaliza color** | | **Verbaliza tamaño y color** | | **Impreciso / no verbaliza** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % 211 | N | % válido | N | % válido | N | % válido | N | % válido |
| 1° | 66 | 31.3 | 14 | 21,2 | 34 | 51,5 | 12 | 18,2 | 6 | 9,1 |
| 4° | 113 | 53,6 | 24 | 21,2 | 47 | 41,6 | 29 | 25,7 | 13 | 11,5 |
| 9° | 101 | 47,9 | 15 | 14,9 | 28 | 27,7 | 46 | 45,5 | 12 | 11,9 |

*Distribución de la verbalización de piezas a lo largo del ejercicio de clasificación inversa.*

Se aprecia un incremento del porcentaje de niños que verbalizan ambos valores, a medida que colocan las piezas en momentos más avanzados de la tarea. Así, por ejemplo, de los niños que colocan pieza en primer lugar, verbalizan ambos valores el 18,2%; de los que colocan pieza en cuarto lugar, la verbalización alcanza el 25,7%; y el 45,5% entre aquellos que colocaron pieza en noveno lugar. Sin embargo, los porcentajes de verbalización imprecisa, se mantienen. Igualmente, se puede apreciar que a lo largo de todo el proceso resolutivo, el color se verbaliza en mayor porcentaje que el tamaño, lo cual está en relación con los procedimientos resolutivos más frecuentes en esta tarea que, como sabemos, tiene el atributo color como referente principal.

Se observa (Tabla 32, ANEXO IV: 380), que la verbalización de ambos valores correspondió, prácticamente en su totalidad, al grupo de acierto. Sólo en el momento final de la tarea un 2% de los niños del grupo de error presentan este tipo de verbalización.

El contraste de las medias de estas categorías en cada uno de los momentos (Tabla 32, ANEXO IV: 380), muestra que, a lo largo de todo el proceso resolutivo, el grupo que finalmente termina la tarea con acierto, verbaliza de forma significativamente distinta del grupo que termina con error. En modo directo esta diferencia sólo ocurre al final de la tarea.

La comparación de la verbalización precisa, esto es, los casos en que colocando pieza se verbaliza tamaño y color, en cada uno de los momentos, entre el grupo de acierto y el de error (Tabla 33, ANEXO IV: 380), indica la fuerte vinculación entre este tipo de verbalización y el éxito en la tarea a lo largo de todo el ejercicio. De la misma forma que en el modo directo, la prueba de McNemar igualmente proporciona el valor 0,001 en los tres momentos.

Es posible señalar que aquellos que presentan una verbalización precisa aciertan a lo largo de la tarea, sin embargo, al final se presentan dos casos en el grupo de error.

Parece ser que verbalizar los dos valores no necesariamente implica éxito en la tarea, lo cual se explica porque, más allá de los dos valores de cada pieza, es necesario establecer la relación entre los dos valores que la tabla determina. Se puede, por tanto reconocer ambos valores sobre elementos concretos, pero otra cosa es vincular estos con el lugar que la relación que define la tabla, le asigna.

En cualquier caso, la relación del modo inverso con la verbalización precisa es mas fuerte que en el caso del modo directo donde se presentan mayores porcentajes de acierto con otras categorías de verbalización.

El análisis de la relación entre procedimiento y argumento muestra que los 21 casos que colocan en primer lugar la tarjeta de color sin datos, continuaron colocando en segundo y tercer lugar los elementos que se indican en la Tabla 34 (ANEXO IV: 381-382). De todos ellos, 16 comienzan colocando en primer lugar las tarjetas de color. Sólo dos usan un procedimiento alternativo para colocar los nueve elementos, es decir, la mayoría muestran procedimientos sistematizados y variados en cuanto a la secuencia en que colocan los distintos tipos de elementos e igualmente las piezas.

A lo largo del ejercicio, estos niños presentan las categorías de argumentación que se indican en la Tabla 34 (ANEXO IV: 381-382). Las diferencias entre categorías de argumentos que este grupo muestra son significativas en función de la edad $\chi^2_6 = 12{,}717$ $P \leq 0{,}048$, pero su nivel de significación no es alto. En general, los niños de 3 años muestran, una argumentación menos elaborada que la de los otros grupos de edad; sólo un niño de este grupo de edad presenta una argumentación que revela el reconocimiento de clases, los demás actúan más por razones de tipo perceptivo. Podría ser que su capacidad de expresión verbal no es suficiente para transmitir sus ideas, lo que avalaría la tesis según la cual el lenguaje es posterior al razonamiento en acción.

El comportamiento de los niños que comienzan colocando una de las piezas de columna sin datos (uno de los triángulos rojos) se muestra en Tabla 35 (ANEXO IV: 382). Los niños que comienzan colocando una de las piezas (uno de los triángulos rojos) en columna sin datos continúan colocando siempre en primer lugar todas las piezas; este procedimiento presenta una gran sistematización. Si bien, todos estos niños colocaron en primer lugar todas las piezas, tres de ellos continúan colocando las tarjetas de color, cinco colocaron tras las piezas, las tarjetas de tamaño, y los otros alternan unas y otras; sólo dos de ellos, usan un procedimiento alternativo.

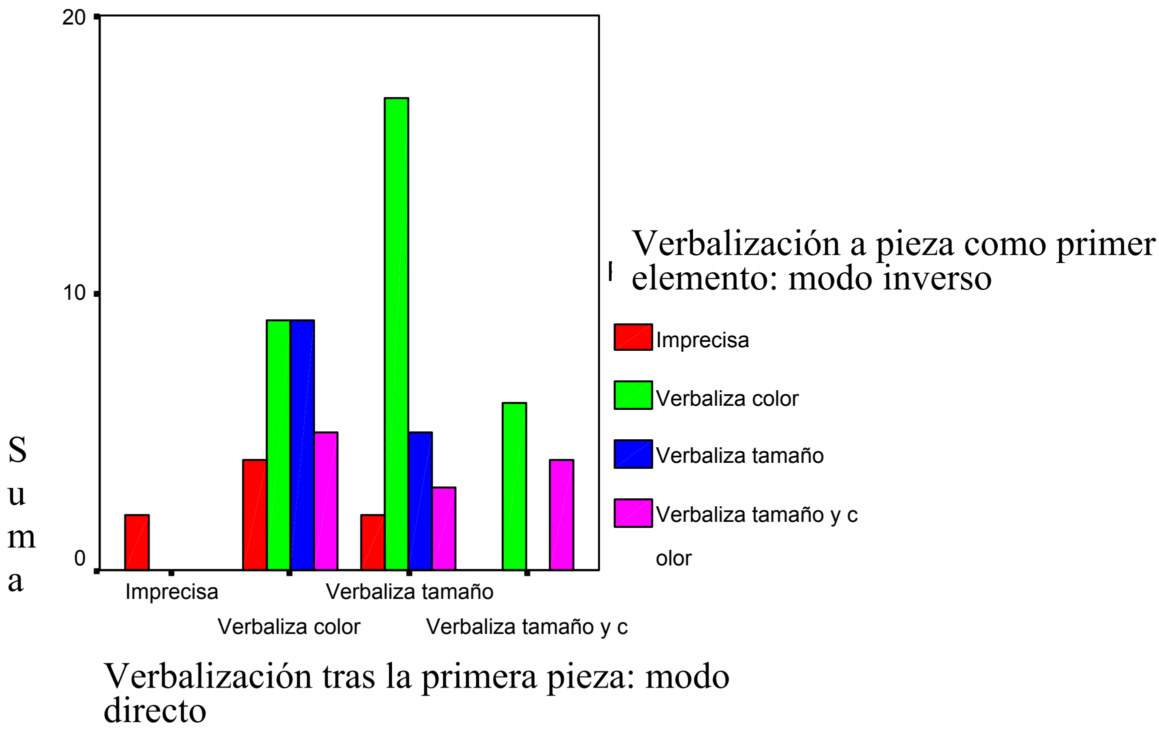
Este resultado permite señalar que colocar una pieza en columnas sin dato no está vinculado con el éxito en la tarea, como ocurre con la tarjeta de color. De los niños que comenzaron por colocar una de estas piezas, cuatro no aciertan. Tres de ellos no argumentan nada. El cuarto, (caso 10) (Tabla 35 ANEXO IV: 382) comienza colocando el triángulo rojo grande erróneamente, muestra un procedimiento resolutivo basado claramente en la percepción y el atributo principal referente es el tamaño. Utiliza la categoría argumental (3).

Los otros tres casos, que cometen errores durante el proceso y no corrigen, no establecen relación alguna entre los distintos elementos, si bien el caso 1 mostró sistematización en la secuencia en que los coloca.
Los casos 1 y 8 son niños que no resuelven con éxito la tarea en modo directo.

Los niños que presentan las categorías de argumentos más elaboradas, proceden de la siguiente manera: El niño que utiliza la categoría 7, primero completa la fila de los pequeños y luego la de los grandes; el que usa la categoría 6 es uno de los dos niños que, entre 211, reconstruye la tabla asignando un lugar a las piezas y tarjetas imaginando una tabla, no de tres filas y cuatro columnas de cuadros, sino al revés, con cuatro filas y tres columnas. El niño mas pequeño 3:4, que termina la tarea con éxito, trabaja perceptivamente y utiliza un procedimiento que es alternativo en relación con los distintos tipos de elementos, pero muestra sistematización en la colocación de las piezas que completan las dos filas.

### 4.2.4. Comparación de la verbalización en ambos modos

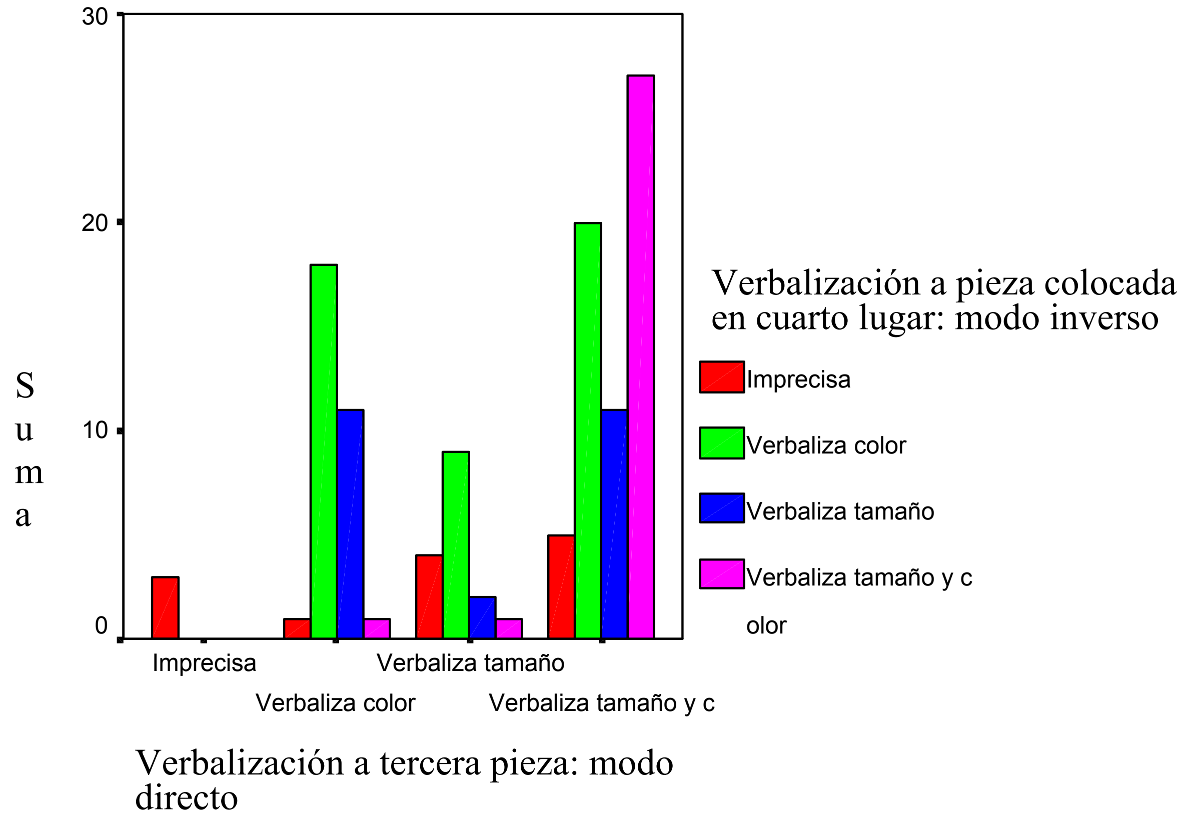
Si comparamos las verbalizaciones correspondientes al primer momento (Tabla 36 ANEXO IV: 383), cuando se coloca pieza en la tarea de modo inverso, con las verbalizaciones correspondientes al mismo momento en la tarea en modo directo, se encuentra que las diferencias entre las categorías de verbalización son estadísticamente significativas ($\chi^2_{12}$ =28,701 P≤ 0,004) y se muestran en la gráfica 23:




*Gráfica 23. Comparación de verbalizaciones tras la primera pieza en clasificación según el modo*

Estos datos permiten señalar que la colocación de la primera pieza, tamaño y color tienen distinta preponderancia en función del modo. Mientras en el modo directo, los niños verbalizan por igual uno u otro, en el inverso, el color es predominante sobre el tamaño. Esto se puede deber al poder de evocación de los símbolos de color, mucho más inmediato que el correspondiente a los símbolos de tamaño.

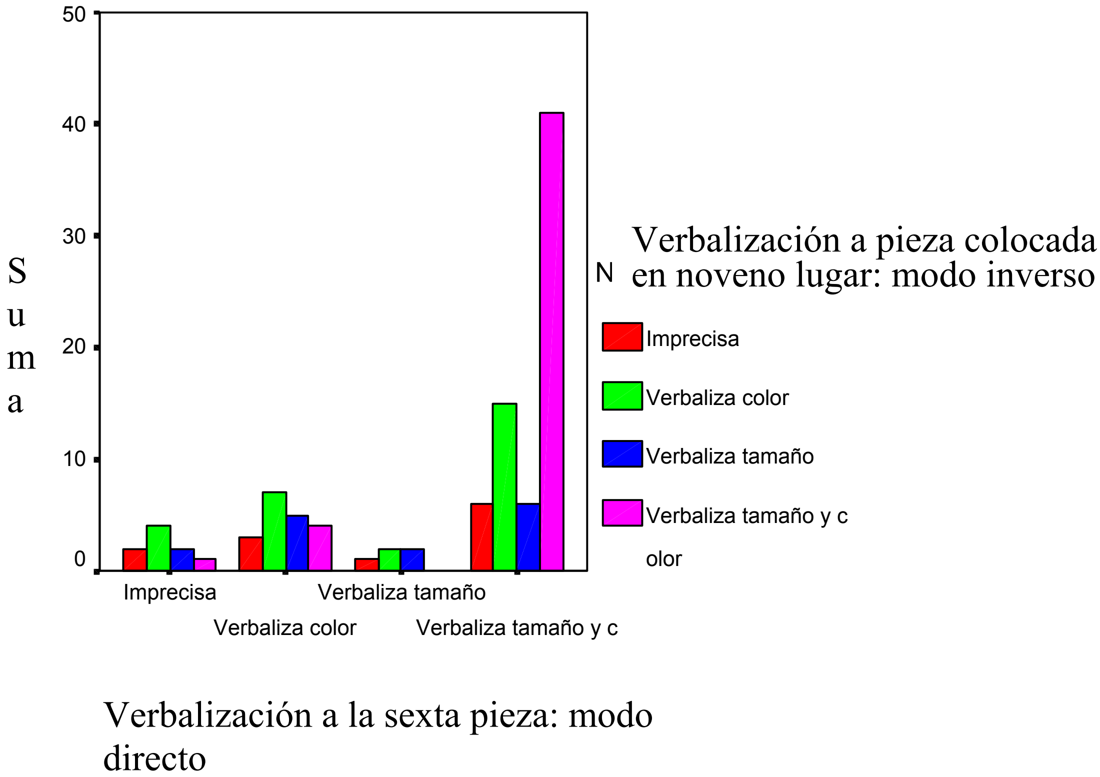
La comparación en los momentos intermedios de ambas tareas (Tabla 37 ANEXO IV: 383) es igualmente significativa ($\chi^2_9$=52,120 P≤ 0,001). Estos datos se muestran en la gráfica 24:




*Gráfica 24.- Comparación de verbalización a mitad de la tarea de clasificación según el modo*

En el modo inverso, el color sigue siendo un referente más importante que en el directo. Igualmente, se puede señalar cómo los dos valores se verbalizan en modo directo con mayor frecuencia que en modo inverso y la verbalización imprecisa o la falta de verbalización es también mayor en modo inverso.

Al finalizar ambas tareas se encuentra diferencias significativas en los tipos de verbalización (Tabla 38, ANEXO IV: 383) entre los dos modos ($\chi^2_9$ =20,578 P≤ 0,015). La siguiente gráfica ilustra estas diferencias:

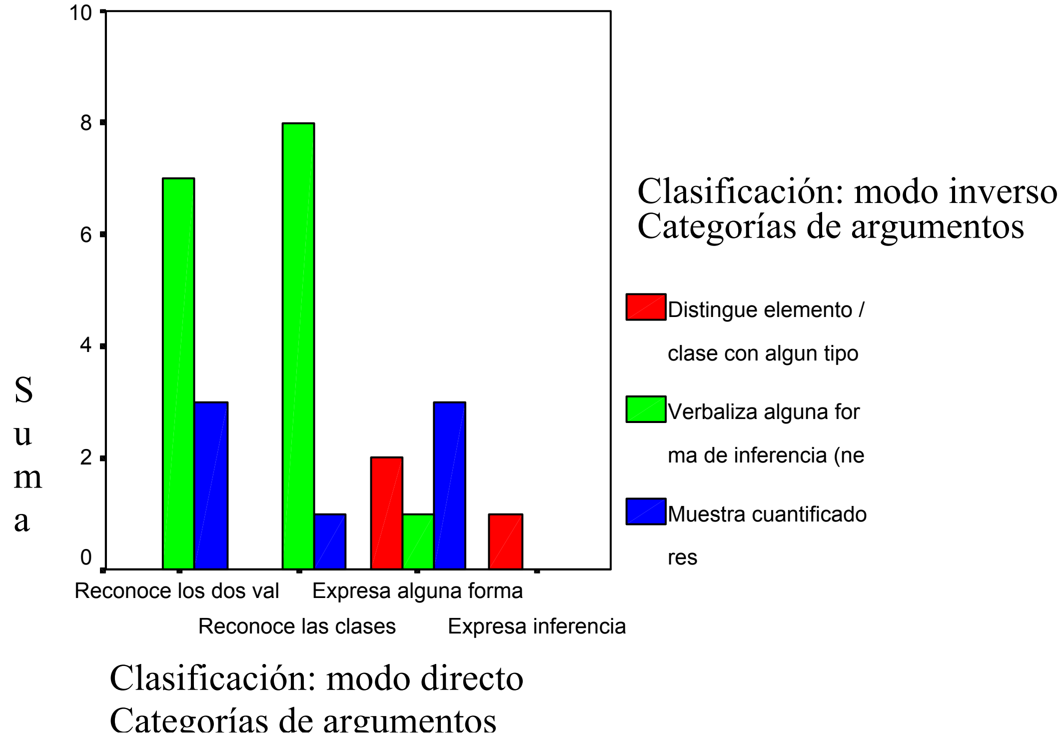



*Gráfica 25.-- Comparación de verbalización al finalizar la tarea de clasificación según el modo*

Igualmente el color es mayor referente en el modo inverso que en el directo. La verbalización de ambos valores sobre el modo directo es más frecuente que en modo inverso, lo que se explica porque en el modo directo la solución está determinada por las características de las piezas, mientras en el modo inverso está determinada por las relaciones entre clases y después por las características de las piezas.

**4.2.5. Comparación de la argumentación en ambos modos**

Los sujetos que utilizan una de las dos categorías argumentativas mas altas en uno de los modos no siempre muestran una de estas dos categorías en el otro modo (Tabla 39, ANEXO IV: 384), de modo que las diferencias resultan significativas ($\chi^2_6$ =17,560 P≤ 0,007). La siguiente gráfica muestra estas diferencias:



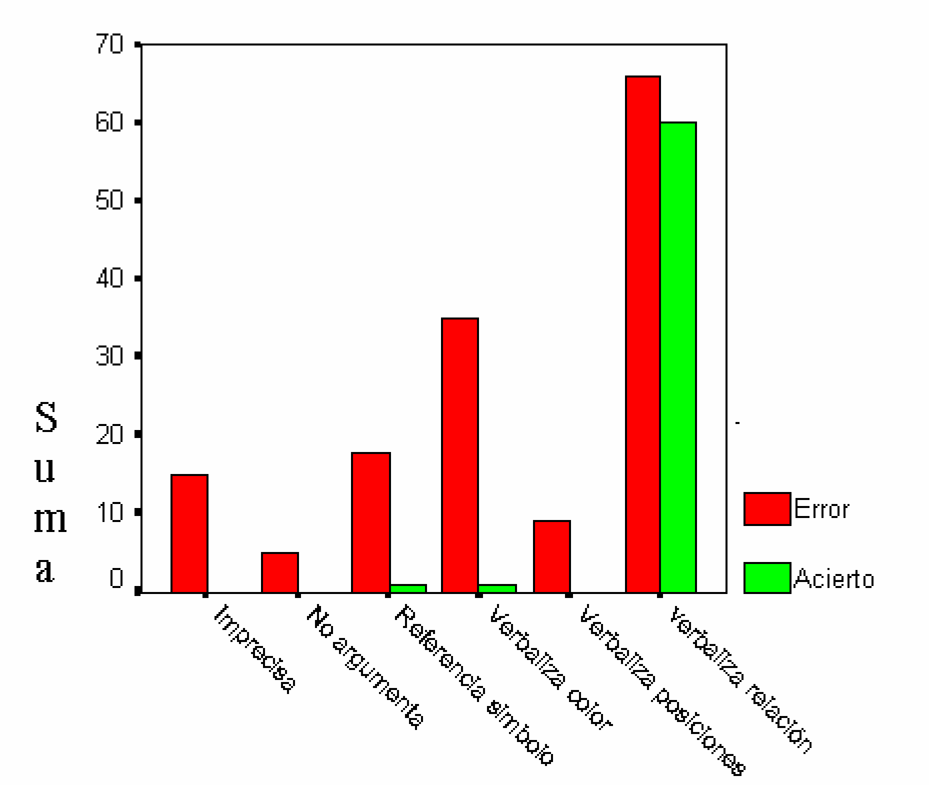

*Gráfica 26.- Comparación de las dos categorías argumentativas mas altas en clasificación según el modo*

Mientras que en el modo directo, un sólo caso utiliza un tipo de verbalización que revela inferencia, en el modo inverso, la inferencia se encuentra en 7 casos. Además, en modo inverso, 23 niños muestran las dos categorías argumentativas más elaboradas; sólo 4 utilizan estas mismas categorías en modo directo. Probablemente, todos ellos podrían argumentar de esta manera en modo directo, pero no resulta necesario porque este modo exige relacionar valores en mayor medida que en el modo inverso; este último, exige que relacionen clases y utilicen la inferencia.

### 4.3. Tarea de transformación. Modo directo

#### 4.3.1. Sobre CC en función del acierto

Las distintas categorías de argumentación que los niños utilizan durante el proceso de solución de la tarea (Tabla 40, ANEXO IV: 384) son significativamente distintas en función del acierto o error en la tarea ($\chi^2_5 = 49{,}728$  $P \leq 0{,}001$), gráficamente estos datos se expresan:




*Gráfica 27.- Distribución de categorías de argumentos en la tarea de transformación sobre CC: modo directo en función del acierto o error.*

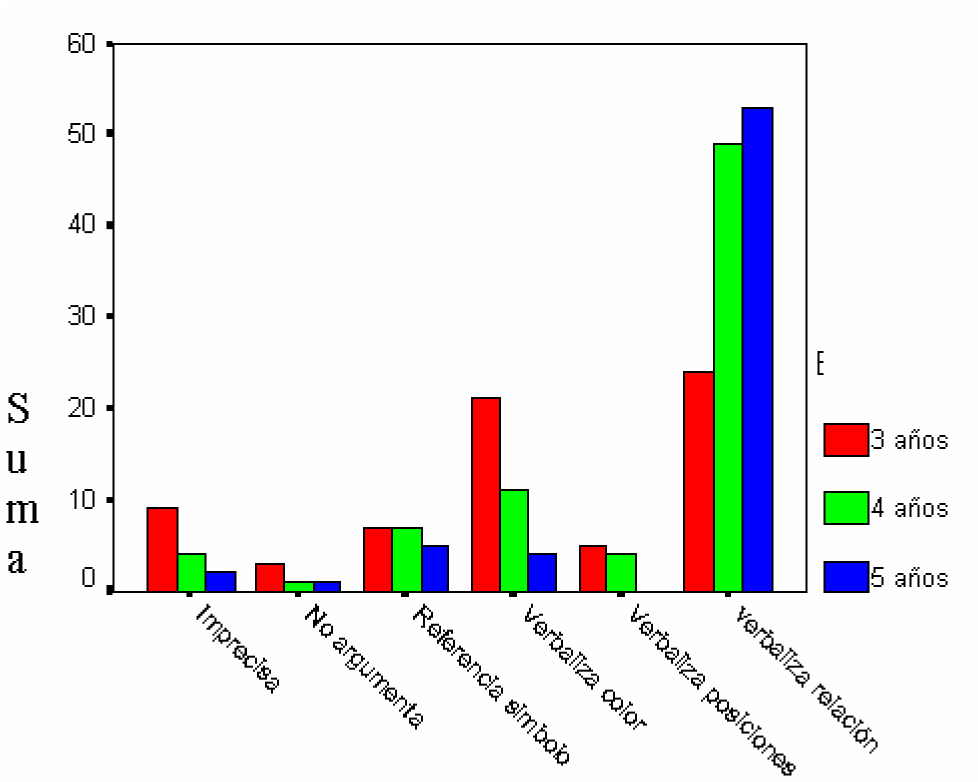
La mayoría de los niños que aciertan utilizan la categoría de argumentación "Verbaliza la relación", la cual representa de forma clara la comprensión del operador, sólo dos niños del grupo de acierto usan otro tipo de argumentación; en el grupo de error, la distribución que muestra el tipo de argumento que utilizan es más dispersa. Sin embargo, el contraste de medias entre los niños que verbalizan la relación y los que aciertan muestra diferencia significativa ($\chi^2_1 = 49{,}571$  $P \leq 0{,}001$), es decir, que este tipo de argumentación no está relacionada con el éxito en la tarea; entre los niños que verbalizan la relación con precisión, mas de la mitad no tienen éxito en la tarea.

Los 66 niños del grupo de error que utilizan este tipo de argumento, muestran que hay otros factores que intervienen en el éxito en la tarea y que, por lo tanto, la argumentación será condición necesaria pero no suficiente. En efecto, esta categoría argumentativa es claramente indicativa de la comprensión del operador que, como sabemos, es condición necesaria, aunque no suficiente para aplicarlo con éxito.

Dicho de otro modo, es muy raro que puedan operar con éxito, si no se argumenta con precisión, aunque esto no es imposible. Los dos casos de éxito pertenecientes a categorías de argumentos diferentes de la última, son ejemplos de ello y pueden nuevamente significar que son ejemplos en los cuales el lenguaje verbal es posterior al razonamiento.

### 4.3.2. Sobre CC en función de la edad

La anterior distribución de frecuencias es significativa por grupos de edad tarea ($\chi^2_{10}$ = 36,111 P≤ 0,001) de modo que, en cada uno de los grupos de edad (Tabla 41, ANEXO IV: 385) se encuentra:

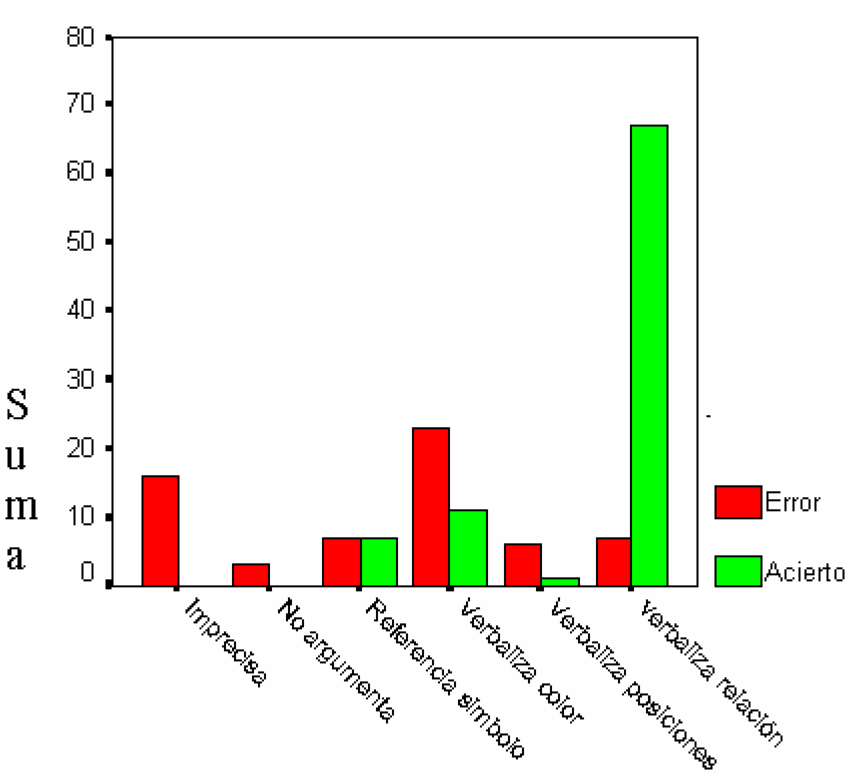



*Gráfica 28.- Categorías de argumentos en la tarea de transformación sobre CC: modo directo en función de la edad*

A medida que aumenta la edad, los niños tienden a usar la categoría de argumentación mas ligada con la comprensión del operador. Sin embargo, el porcentaje de niños de todos los grupos de edad que usan esta categoría argumentativa es casi el doble del que tiene éxito, siendo esta diferencia mayor en el grupo de 3 años donde sólo 5 niños resolvieron con éxito la tarea frente a los 24 que argumentan de esta forma (Ver Tablas 2, ANEXO IV: 369 y 41, ANEXO IV: 385). Por tanto, hay otros factores que intervienen en el éxito, como hemos podido ver en el apartado relativo a dificultad y que influyen negativamente.

### 4.3.3. Sobre CS en función del acierto

Las distintas categorías de argumentación utilizadas por los niños durante el proceso de solución de la tarea (Tabla 42, ANEXO IV: 385) son significativamente distintas en función del acierto o error en la tarea ($\chi^2_5 = 73{,}496$ $P \leq 0{,}001$). La gráfica muestra los datos por grupos de acierto y error:



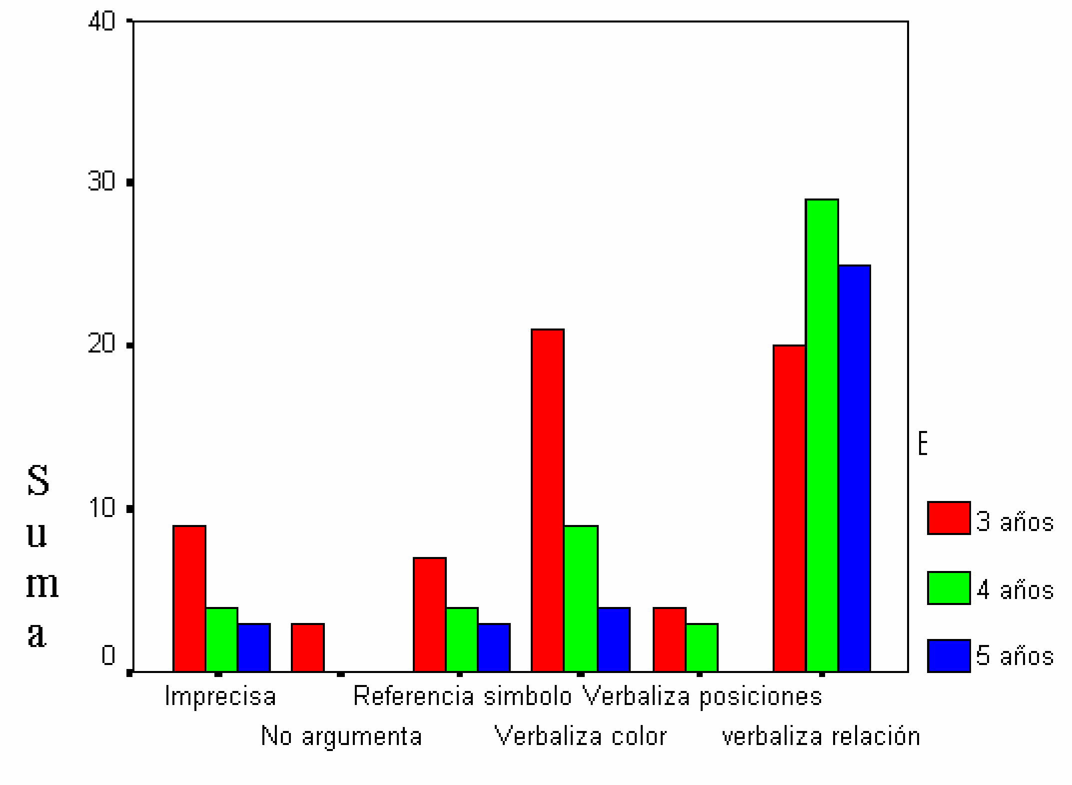

*Gráfica 29.- Categorías de argumentos en la tarea de transformación sobre CS: modo directo en función del acierto o error*

Ninguno de los niños que no argumenta o su argumento no es concreto, acierta en la tarea. También en esta versión, la argumentación del grupo de éxito está centrada sobre la categoría que expresa de forma más precisa la relación, mientras que la argumentación del grupo de error es mas dispersa; en este grupo la categoría argumental "Verbaliza la relación" es minoritaria. Sin embargo hay otros (en total 19 niños) que, emplean otros tipos de argumentos y aciertan. Estos casos permiten nuevamente interpretar estos resultados en el mismo sentido: la expresión lingüística parece ser posterior al razonamiento.

Además, hay siete niños que utilizando el tipo de argumento más ligado con la comprensión del operador, no aciertan en la tarea. La diferencia de medias de acierto en la tarea y de argumentación precisa son significativamente distintas ($\chi^2_3 = 73{,}857$ $P \leq 0{,}001$). Esto puede significar que - aunque comprenden el operador y en la versión CS se han eliminado otras circunstancias independientes de la propia comprensión del operador - la tarea sigue conservando unas características que hacen que la comprensión del operador no sea suficiente. Ya vimos como la tarea de transformación es objetivamente compleja por los requerimientos que conlleva relativos a tres puntos de atención: las dos construcciones (inicial y final) y el operador y, este contenido determina su dificultad.

### 4.3.4. Sobre CS en función de la edad

Las frecuencias de las distintas categorías de argumentos por grupos de edad (Tabla 43, ANEXO IV: 385) se muestran en la siguiente gráfica:

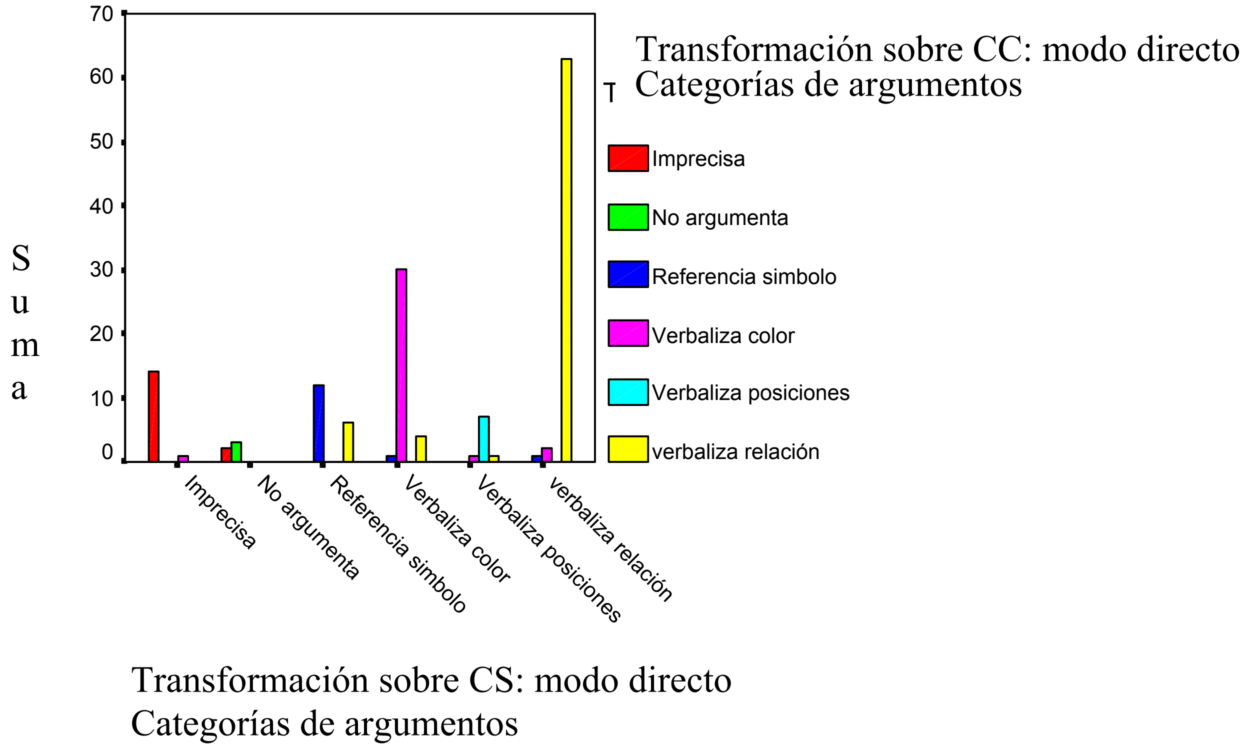



*Gráfica 30.- Categorías de argumentos en transformación sobre CS: modo directo por grupos de edad.*

Como en el caso CC, el porcentaje de niños que argumenta verbalizando la relación de cambio, aumenta con la edad alcanzando el 59,2% a los 4 años y el 71,4% a los 5 años. Ambos grupos utilizan argumentos que corresponden fundamentalmente a esta categoría, lo que no ocurre en el grupo de 3 años, en el cual, la distribución de categorías argumentativas es mas dispersa, en este grupo sólo 20 niños muestran la categoría argumentativa más ligada con la comprensión del operador (el 31,2% de los niños). Recordemos, sin embargo, que 30 niños de este grupo (Tabla 2, ANEXO IV: 369) tienen éxito en la tarea. Nuevamente vemos que el éxito en la acción precede a la argumentación precisa.

### 4.3.5. Comparación de la argumentación entre CC y CS

Se produce una importante evolución de las distintas categorías de argumentos entre la tarea sobre CC y la tarea sobre CS ($\chi^2_{25} = 507{,}591$ $P \leq 0{,}001$) (Tabla 44, ANEXO IV: 386). La gráfica expresa los resultados comparativos entre CC y CS:




*Gráfica 31.- Comparación de categorías de argumentos en transformación: modo directo según la versión*

Hay 11 niños que no verbalizan la relación sobre CC y sí lo hacen sobre CS. Esto puede indicar que la tarea sobre CS es más comprensible para los niños que sobre CC a causa de los elementos metodológicos, dado que el operador es el mismo, o bien que el efecto de la experiencia ha mejorado la comprensión.

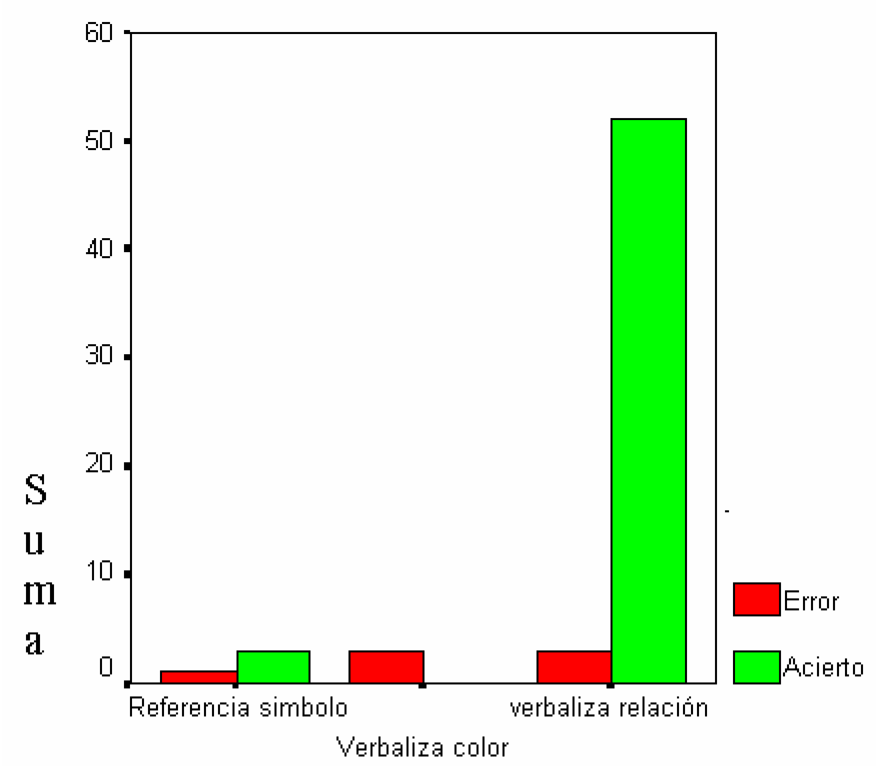
### 4.4. Tarea de transformación. Modo inverso

#### 4.4.1. Sobre CC en función del acierto

Recordemos que la muestra que respondió esta pregunta, la forman los niños que resolvieron correctamente transformación directa sobre CC.

Todos los niños reconocieron que había un cambio entre ambas construcciones: inicial y final. No hubo ningún niño que no argumentara ni que argumentara algo impreciso.

Las categorías de argumentos en los grupos de acierto y error (Tabla 45, ANEXO IV: 386) son significativamente distintas ($\chi^2_2 = 26{,}192 \quad P \leq 0{,}001$). Nuevamente, la categoría argumentativa más vinculada con la comprensión del operador está claramente ligada al éxito en la tarea de tal forma que, prácticamente todos los niños que tienen éxito muestran este tipo de argumentación. La gráfica 32 muestra los resultados:



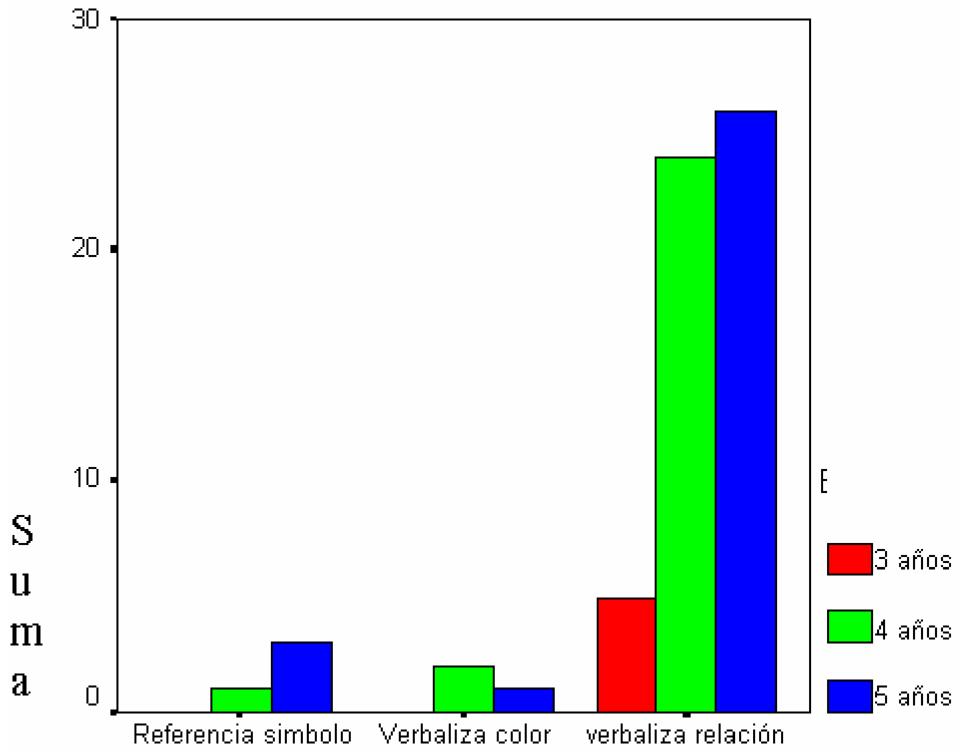

*Gráfica 32.- Categorías de argumentos en transformación sobre CC: modo inverso.*

Sin embargo, los 3 niños, del grupo de error, que utilizan la categoría argumentativa más ligada con la comprensión del operador, igualmente argumentan de esta manera en la tarea en modo directo, pero no pueden reconocer el operador empleado. Es claro que pueden comprender el operador y lo pueden aplicar con acierto, puesto que aciertan en modo directo sobre CC, pero su falta de éxito en modo inverso indica que descubrir el operador es otro tipo de tarea.

Sin embargo, la diferencia de medias entre el acierto en la tarea y la categoría argumentativa "Verbaliza la relación" no es significativa ($\chi^2_2 = 16{,}564 \quad P \leq 1{,}000$), es decir que, en esta modalidad, el acierto en la tarea está vinculado con el tipo de argumento o sea, con la verbalización precisa del operador, lo que no ocurría en modo directo sobre CC ni sobre CS; en ambas versiones del modo directo, sólo la mitad de los niños que utilizan este tipo de argumento tienen éxito.

### 4.4.2. Sobre CC en función de la edad

Las distintas categorías argumentativas utilizadas (Tabla 46, ANEXO IV: 386) no son significativamente diferentes en función de la edad ($\chi^2_4 = 2{,}061$  $P \leq 0{,}725$), tal como ocurre con el acierto en la tarea. Esto permite señalar que no son los niños más pequeños los que muestran categorías de argumentos mas bajas y que, por tanto, niños de menor edad pueden igualmente argumentar como otros mayores, e incluso mejor que muchos otros de mayor edad. Estas posibilidades deben ser atendidas también por la educación individualizada. La gráfica 33 corresponde a los resultados anteriores:

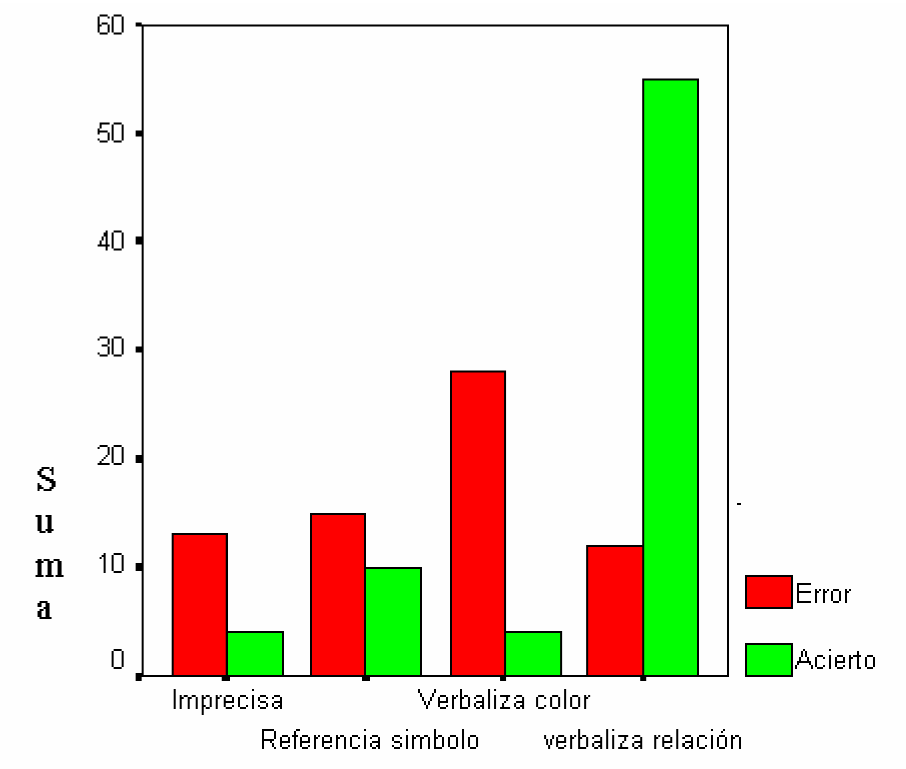



*Gráfica 33.- Categorías de argumentos en transformación sobre CC: modo inverso en función de edad*

### 4.4.3. Sobre CS en función del acierto

Se encuentra que 12 niños no reconocen cambio alguno entre la construcción inicial y la final. Su atención se centra sobre la forma igual de las dos hileras o sobre la igualdad de tamaños de cada lapicero y su transformado.

El análisis del tipo de argumentación que utilizan los 141 niños que si reconocen el cambio entre ambas figuras, en función del acierto o error en la tarea (Tabla 47, ANEXO IV: 387) se presenta en la siguiente gráfica:



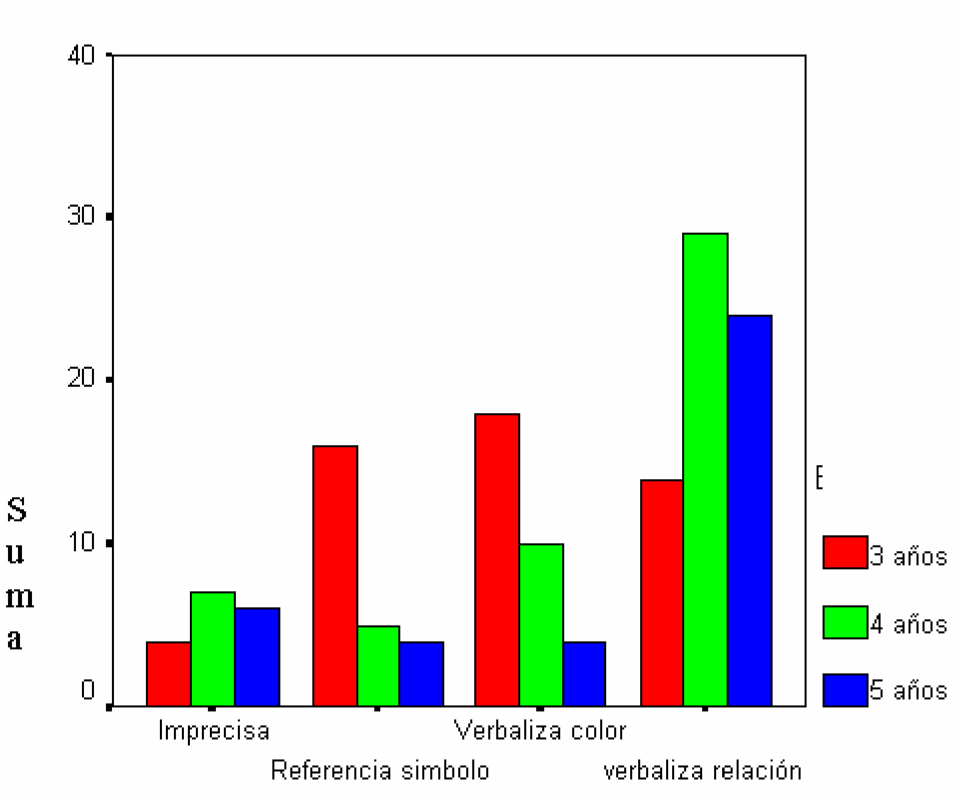

*Gráfica 34.- Categorías de argumentos en transformación sobre CS: modo inverso en función del acierto o error.*

Estas diferencias en los resultados son estadísticamente significativas respecto al acierto o error al resolver la tarea ($\chi^2_3$ = 51,249 P≤ 0,001); mientras la argumentación del grupo de acierto está centrada en la categoría "Verbaliza la relación", en el grupo de error la argumentación se encuentra distribuida entre varias categorías de forma mas homogénea. Sin embargo, 18 niños del grupo de acierto utilizan una categoría argumental distinta de "Verbaliza la relación" y 12 niños, que argumentan de esta forma precisa, no resuelven la tarea con éxito. Los siete niños que no aciertan en la tarea de transformación inversa sobre CC mantuvieron la misma argumentación en CS.

La diferencia de medias entre el acierto en la tarea y la categoría argumental más vinculada con la comprensión del operador: “Verbaliza la relación” ($\chi^2_1$ = 37,051 P≤ 0,458) no es significativa, es decir que el acierto y la verbalización precisa están vinculados. Nuevamente, sobre esta versión de la tarea, vemos que la argumentación que presenta la verbalización precisa de la relación, está vinculada con el acierto, algo que no ocurre en el modo directo y que apoya la conjetura relativa a la existencia de una mayor relación entre la argumentación y el éxito en el modo inverso que en el modo directo.

### 4.4.4. Sobre CS en función de la edad

Las categorías argumentativas anteriores son significativamente distintas en los distintos grupos de edad ($\chi^2_6$ = 22,768 P≤ 0,001) y se distribuyen (Tabla 48, ANEXO IV: 387) de acuerdo a la siguiente gráfica:

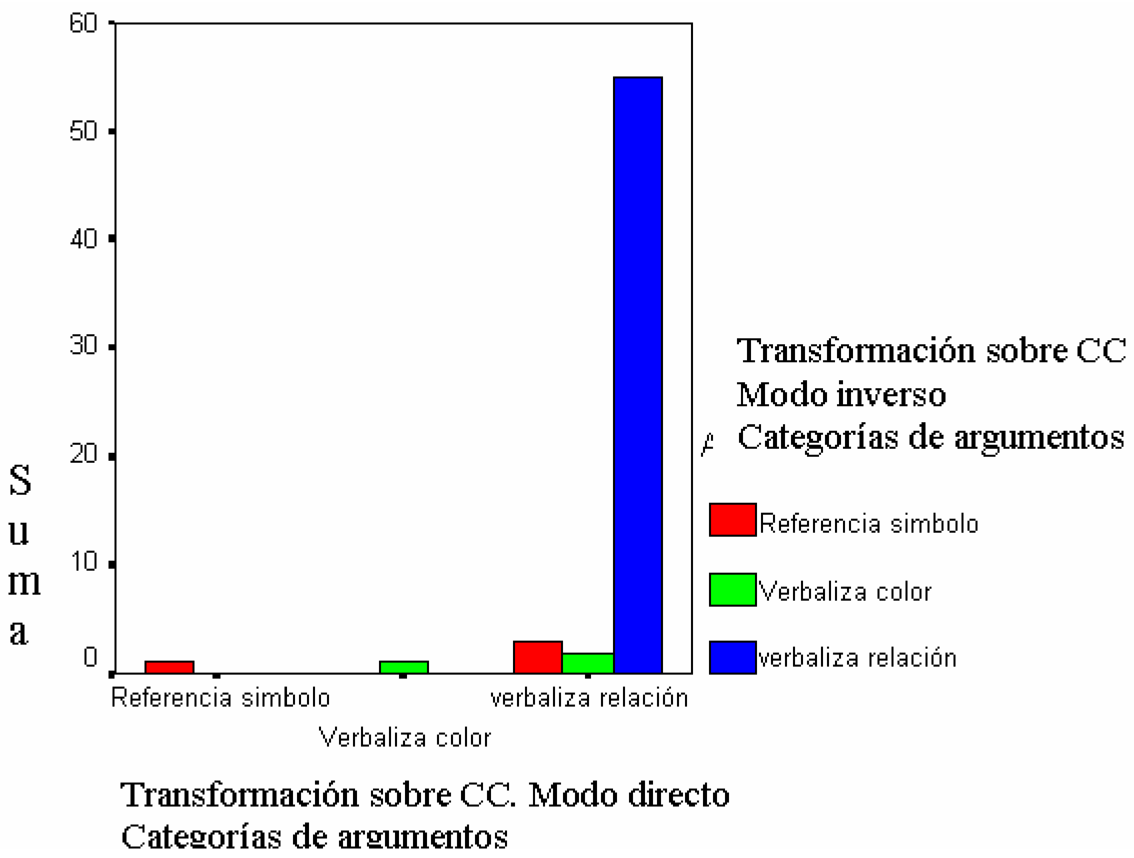



*Gráfica 35.- Categorías de argumentos en transformación sobre CS: modo inverso por grupos de edad.*

Vemos que los niños de 3 años muestran una argumentación más dispersa que los otros grupos de edad en los cuales es mayoritaria la categoría mas vinculada con la comprensión del operador. Además el grupo de 3 años utiliza en mayor medida que los otros grupos de edad las categorías argumentativas menos elaboradas.

### 4.4.5. Comparación de la argumentación en ambos modos

La comparación de las categorías argumentativas entre los niños que resuelven la transformación en modo directo e inverso sobre CC muestra mediante estadístico de McNemar para pruebas pareadas que no existe diferencia significativa (P≤ 0,063) (Tabla 49, ANEXO IV: 387). La gráfica muestra la relación:




*Gráfica 36.- Comparación de categorías de argumentos en transformación sobre CC según el modo.*

Por tanto, para los niños que comprendieron el operador y no tienen problemas relacionados con dominio del espacio, la argumentación en ambos modos es equivalente.

Los niños que aciertan en modo directo sobre CC y fallan en modo inverso sobre CC, utilizan en modo inverso sobre CS (Tabla 50, ANEXO IV: 388) categorías argumentativas más alejadas de la verbalización precisa, que en modo directo. Estos resultados están de acuerdo con la mayor exigencia argumentativa del acierto en modo inverso y se muestran comparativamente en la gráfica 37:

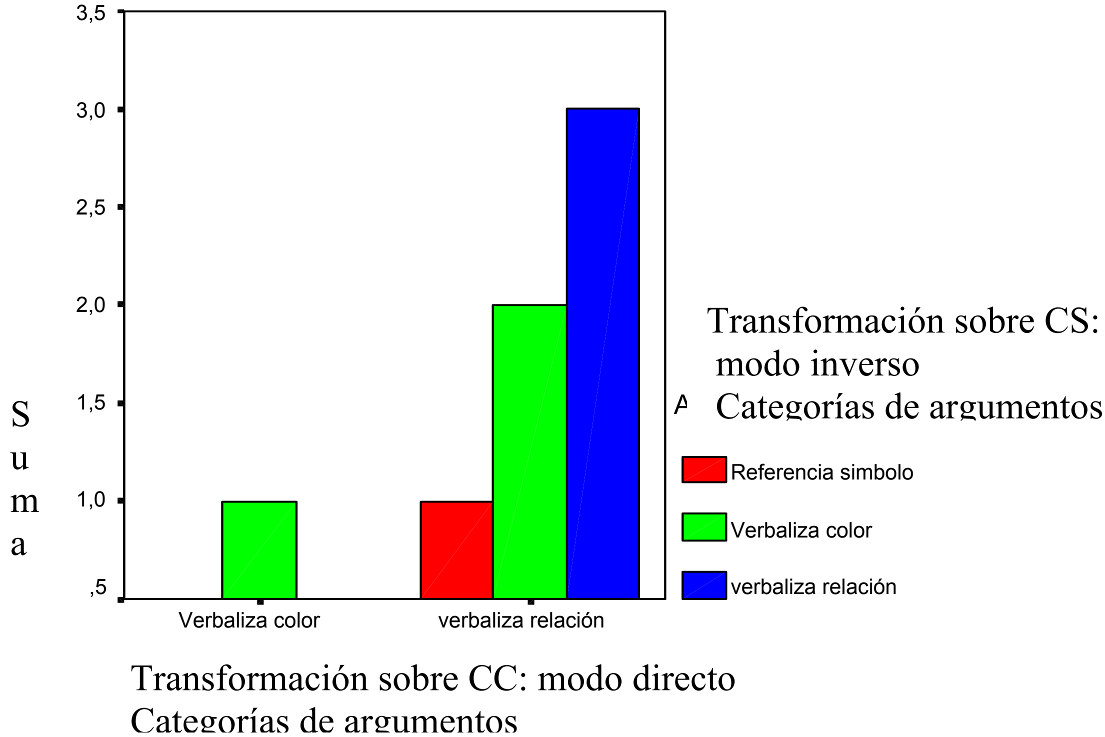
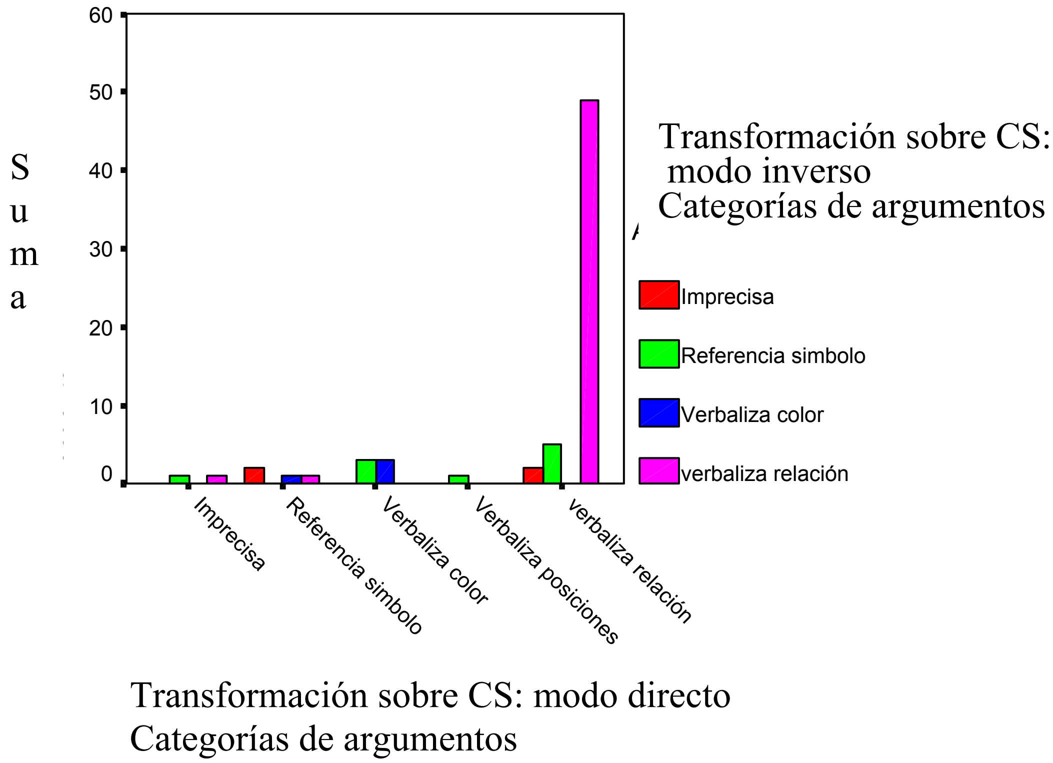



*Gráfico 37.- Comparación de categorías de argumentos en transformación sobre CC: modo directo y transformación sobre CS: modo inverso.*

En el caso de los niños que fallan en la transformación en modo directo sobre CC; la comparación de las categorías argumentativas sobre la versión CS, en ambos modos, muestra que en modo inverso hay menos niños que utilizan la argumentación que representa la verbalización mas precisa.

Las categorías de argumentos que utilizan en ambos modos sobre CS (Tabla 51, ANEXO IV: 388) son las siguientes:




*Gráfica 38.- Comparación de categorías de argumentos en transformación sobre CS según el modo.*

Estas categorías resultan significativamente diferentes ($\chi^2_{12} = 62,472$  $P \leq 0,001$). Podemos ver que las categorías de argumentos en modo inverso fueron siempre más elaboradas, o más próximas a la categoría argumental ligada con la comprensión del operador, que en el modo directo de la misma tarea y versión.

## 5. Análisis por grupos de edad

### 5.1. Grupo de 3 años

Este grupo se comporta ante la tarea de clasificación en modo directo igual que el resto de los grupos de edad en cuanto al acierto.

Para este grupo, la tarea de clasificación en modo inverso resulta claramente más difícil que en modo directo y también significativamente más difícil que para los niños de 4 y 5 años (su porcentaje de acierto en este modo es casi la mitad que el de estos grupos). Sin embargo, un 55,7% de los niños de esta edad pueden resolver la tarea con éxito. La diferencia principal con los niños de los otros grupos de edad está en que son menos capaces que ellos para corregir los errores que cometen durante el proceso resolutivo. La razón puede ser la menor capacidad de visionar el problema globalmente, como consecuencia de su atención sobre sus acciones particulares que no logran inscribir en la totalidad de la problemática.

Es el grupo logra los peores resultados en la tarea de transformación directo sobre CC. Es claro que la tarea, así planteada es muy difícil para este grupo. El porcentaje de niños que muestra no comprender el operador es el más alto de todos los grupos de edad (supera el 40%). Sin embargo, en este grupo resulta relevante la utilización de la transformación como una transformación punto a punto. Bajo esta modalidad, la construcción CS, los niños de tres años alcanzan resultados de éxito equivalentes a los restantes niños de otros grupos de edad, los problemas derivados de la complejidad de la figura y de la falta de dominio del espacio se reducen de forma importante. En esta versión, el problema de comprensión del operador, aunque persiste, disminuye de forma importante lo que permite conjeturar que la adopción de alguna estrategia metodológica en la presentación de la tarea puede mejorar los resultados de comprensión.

Es notable que los cinco niños que resolvieron con éxito transformación directa sobre CC, resolvieron también con éxito transformación inversa sobre CC, el menor de los cuales tiene una edad de 3:6. Sobre estos cinco niños no obran en contra las limitaciones de dominio del espacio ni la complejidad de la tarea de transformación y muestran, no sólo que pueden comprender el operador, sino también que pueden aplicar el cambio y construir la figura imagen. Por tanto para estos cinco niños no hay diferencia de dificultad en cuanto a los modos sobre la figura de tipo CC.
Sin embargo, superar estas dificultades en transformación, no supone superar las dificultades en clasificación pues, si bien todos ellos resolvieron con éxito clasificación en modo directo, sólo 2 lo lograron con clasificación en modo inverso.

Estos resultados muestran que las tareas de clasificación y transformación, para este grupo de edad, requieren procesos y estrategias diferentes, de modo que, aunque la tarea de transformación en modo inverso es la más difícil desde el punto de vista del acierto, eso no significa que acertar en ella implique acertar en las otras potencialmente menos difíciles.

Este grupo alcanza un porcentaje de acierto a transformación directa, con independencia del tipo de construcción, es decir considerando el acierto agrupado sobre CC y sobre CS, de prácticamente el 50%, el mas bajo de todos los grupos de edad, pero que puede representar un desafío alcanzable bajo ciertas condiciones pedagógicas.

De igual forma, la sencillez de las construcciones propicia un aumento del acierto en la tarea en modo inverso sobre la versión CS que, no obstante y desde el punto de vista del acierto, sigue resultando significativamente más difícil que su correspondiente en modo directo.

Desde el punto de vista de la argumentación, el grupo se diferencia significativamente de los otros dos grupos de edad en todas las tareas o versiones. Las categorías de argumentos, en ambos modos, están más ligadas a la percepción en mayor medida que los otros dos grupos y, en el caso de la tarea de clasificación, se observa que la verbalización de atributos no progresa hacia la verbalización de los dos valores presentes a medida que la tarea avanza.

### 5.2. Grupo de 4 años

El acierto generalizado que a esta edad aparece en la tarea de clasificación en modo directo, disminuye significativamente en el modo inverso de la misma tarea. La diferencia de acierto entre ambos modos es la menor de todos los grupos de edad, menor incluso que en el grupo de 5 años y la tarea en modo inverso alcanza un importante porcentaje de éxito. Es notable que los resultados de este grupo en la tarea de clasificación, en ambos modos, es superior al que alcanza el grupo de 5 años. El grupo alcanza un importante nivel de éxito en modo inverso en el que muestra un alto grado de seguridad en la resolución.

En cuanto a la tarea de transformación en modo directo, el 73,7% del grupo tiene éxito, si consideramos los logros acumulados en ambas versiones CC y CS. El efecto de la transformación punto a punto sobre este grupo hace que los resultados de acierto en modo directo continúen cuando se adopta esta versión, de tal modo que del 64,4% (49 niños) que fracasa sobre el tipo CC en el modo directo, algo más del 59% (29 niños) tiene éxito sobre el tipo CS.

En el caso del tipo de figura CC el grupo logra mejores resultados que el de 3 años y resultados equivalentes al del grupo de 5 años. Sólo 4 niños, de los 27 a los que se propuso, fallaron sobre el modo inverso CC de los cuales 3 la resolvieron con éxito sobre CS. Los resultados comparativos entre modos sobre la versión punto a punto muestran que no hay diferencia de acierto estadísticamente significativa, sin embargo, no hay ningún caso de acierto a transformación inversa y error a transformación directa, lo que, para este grupo también resultó más difícil el modo inverso.

Es notorio que, estadísticamente hablando, este grupo de edad se comporte en todas las tareas, salvo en transformación modo directo sobre CC, igual que el grupo de 5 años.

Las categorías de argumentos, en ambos modos, no se diferencian de las mostradas por el grupo de cinco años pero sí de las del grupo de 3 años. En ambos modos, la verbalización de los dos atributos progresa de forma clara hacia la verbalización de los dos valores presentes a medida que la tarea avanza.

### 5.3. Grupo de 5 años

Para este grupo el modo inverso de la tarea de clasificación resulta significativamente más difícil que el directo. Los resultados comparativos entre ambos modos muestran que no hay ningún caso de acierto al modo inverso y error al directo. El grupo muestra gran seguridad en la solución del modo inverso y un alto porcentaje de acierto en el mismo.

Es el grupo de edad que mayor éxito porcentual obtiene en transformación. En el caso del modo directo sobre CC logra un éxito significativamente mayor que los otros grupos de edad. Los problemas de comprensión del operador se presentan en menor porcentaje que en los otros grupos de edad de modo que los casos de fracaso en las tareas de transformación se deben fundamentalmente al olvido de la construcción inicial, un tipo de error que no tiene porqué significar falta de comprensión del operador.

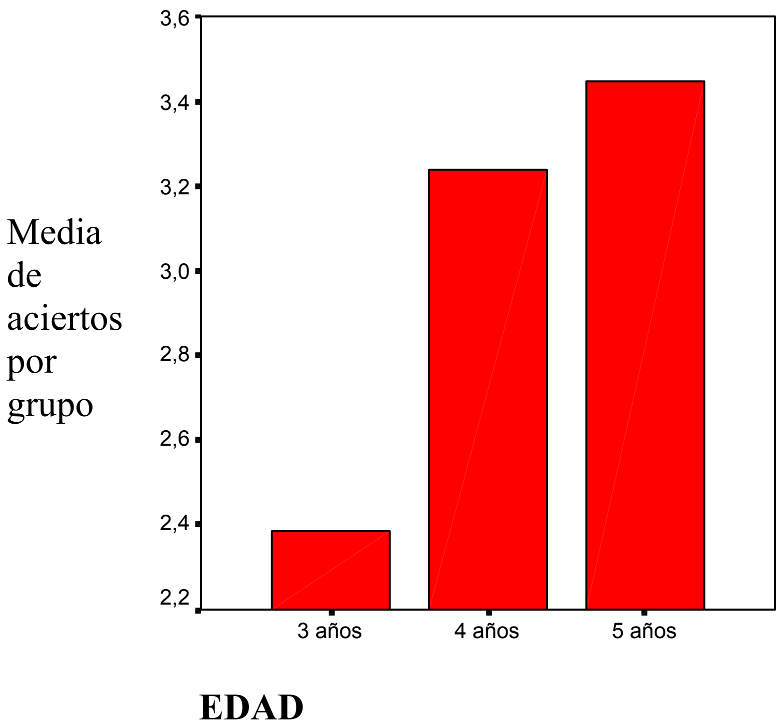
El uso de la figura CS hace que del 53,8% (35 niños) que fracasa sobre el tipo CC en el modo directo, algo más del 77% (27 niños) tenga éxito sobre la versión CS. Sobre este grupo también resulta significativamente más difícil la tarea en modo. Este grupo de edad es el que mejores resultados de acierto obtiene en la tarea de transformación en sus dos modos, con porcentajes importantes superiores al 75% y logra un porcentaje de éxito acumulado en transformación directa del 92,3%.

Es el grupo de edad que argumenta utilizando categorías de argumentos más elaboradas. Sin embargo, las diferencias de argumentación con el grupo de 4 años no son estadísticamente significativas en ninguna tarea o versión. Este resultado es también llamativo teniendo en cuenta el desarrollo de lenguaje que, por razones evolutivas tiene lugar entre los 4 y los 5 años.

En el caso de la tarea de clasificación, la verbalización progresa de forma clara a lo largo de la tarea en ambos modos.

### 5.4. Resumen

El gráfico muestra, a través de la media de aciertos por edad, que la evolución experimentada entre los 3 y los cuatro años, no tiene lugar entre los 4 y los 5 años en la misma medida.




Estas diferencias nos hacen afirmar que los 4 años constituye una etapa diferenciada dentro de la Educación Infantil, donde se da un progreso notorio con respecto a los 3 años y que, a la edad de 5 años, no se produce un progreso paralelo al desarrollo evolutivo que comparativamente cabría esperar.

El grupo de 3 años es el que se encuentra mas alejado del pensamiento reversible no formal. Es el que más dificultades encuentra en la resolución de los modos inversos y, por tanto está más alejado de establecer en vínculo entre ellos característico del pensamiento reversible.

En este sentido podría explicarse la igualdad de resultados entre el grupo de 4 y el de 5 años: es posible que esta represente sólo una igualdad en la acción y que la presencia de una argumentación más elaboradas en el grupo de 5 años (aunque no significativa estadísticamente) revele mayor grado de vinculación entre ambos modos y, por tanto un acercamiento mayor a la reversibilidad. Es decir, si bien los procesos parciales componentes no se dominan en la acción a los 5 años más que a los 4 años de edad, ello puede estar ocurriendo a cambio de una mayor equilibración e integración de ambos en una misma estructura común.

La reversibilidad formal, sobre la que Piaget (Vuik 1984) afirma no ser conseguida por todos los individuos adultos o quizá no en todas las áreas, precisa la equilibración de todas las estructuras momentáneas anteriores entre las cuales se encuentran las estructuras no formales.

Los resultados indican que entre operaciones no formales no se produce la equilibración necesaria entre los procesos componentes. Sin embargo, siendo la experiencia el factor que origina la incorporación de conocimiento nuevo, fundamentalmente a través de las exclusiones, es decir, de las negaciones y situaciones opuestas (Piaget 1975), la práctica de los modos directo-inverso permitirá desencadenar ese vínculo necesario entre ambas y favorecer la reversibilidad no formal y equilibrando así las estructuras previas a las de las operaciones formales cuya reversibilidad caracteriza los procesos de razonamiento de la matemática.

Puesto que los modos inversos son desconocidos en las aulas es posible que, en algunos casos, no se genere de forma natural la equilibración de estadios no formales, asentándose, de esta forma, el aprendizaje posterior sobre estructuras previas no suficientemente equibradas.

De igual forma, la lógica inferencial que los procesos utilizan, se adecua de forma espontánea en algunos casos a los requerimientos de la matemática y, en otros, el individuo sigue aplicando para el razonamiento en matemática la lógica de la vida cotidiana con la que, como hemos visto, no es coincidente. De ahí la importancia de enfrentar al niño con situaciones sobre las que poner en práctica las reglas de inferencia que le permitan construir su aprendizaje en matemáticas.

Aunque se ha realizado un estudio experimental de corte muy psicológico, las características evolutivas del niño de esta edad y el trabajo desarrollado en su totalidad han dado respuesta a un problema didáctico en donde las cuestiones de tipo pedagógico son un factor importante. Así, los resultados de acierto a las tareas planteadas permiten establecer diferencia de comportamiento del grupo de 3 años, salvo en clasificación en modo directo, y a la vez una semejanza no esperable entre los grupos de 4 y 5 años.

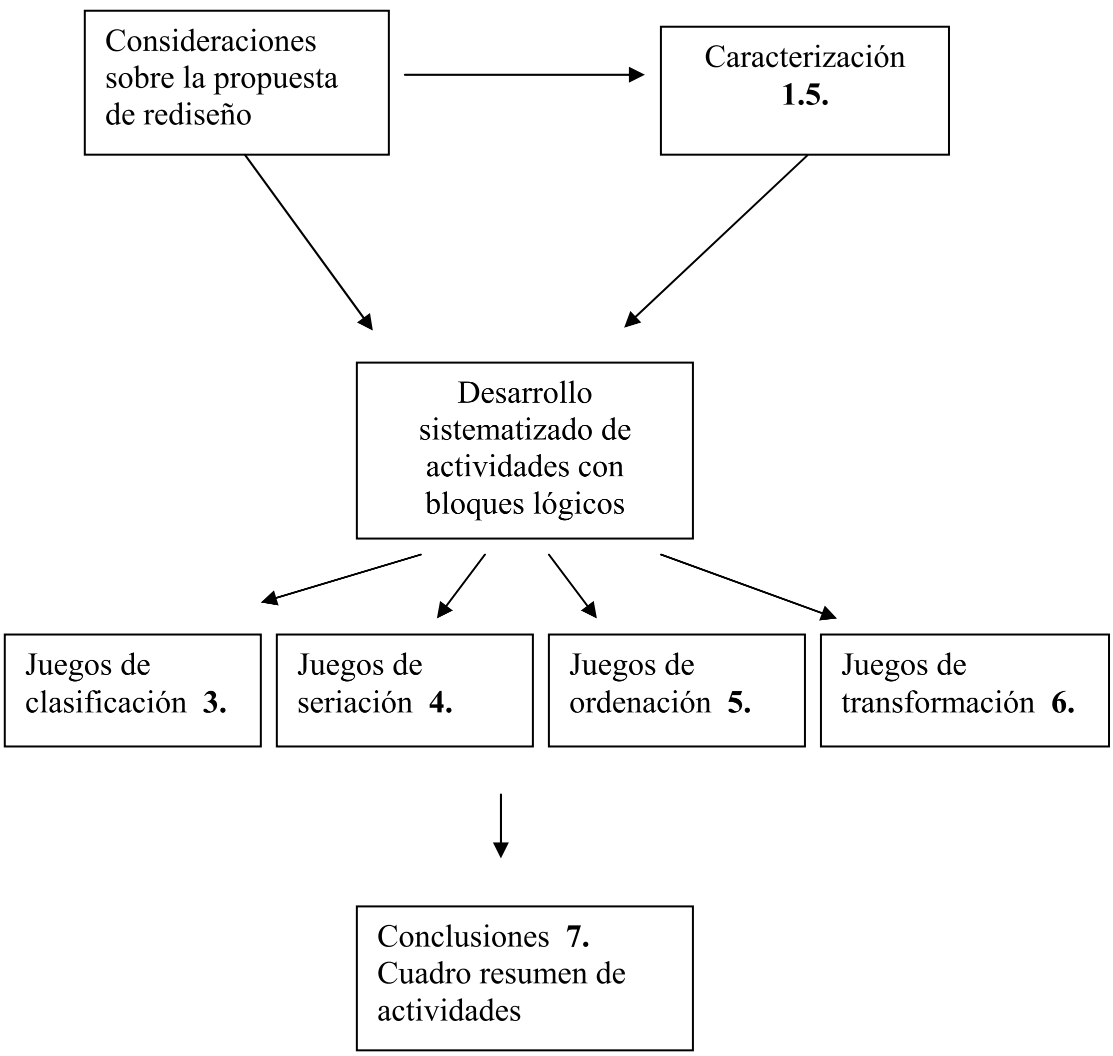
# CAPITULO IV

## UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN


### Resumen

*En este capítulo se caracteriza nuestra propuesta de actividades de acuerdo con los planteamientos teóricos establecidos, los resultados hallados y su relación con las actividades propuestas `por Dienes y Golding (1987) y Kothe (1989) en las cuales se inspiran. Desarrolla actividades con bloques lógicos para la Educación Infantil de forma sistematizada en función de los atributos de las piezas y relativas a los procedimientos de clasificación, seriación, ordenación y transformación.*


### Esquema



## 1. Hacia una propuesta de rediseño

Contrariamente a lo ocurrido con los otros periodos educativos, cuyo objetivo históricamente siempre fue la formación de la población en aspectos generalistas o especializados, la Educación Infantil se incorpora como etapa educativa recientemente, como consecuencia de los hallazgos colaborativos entre diversos campos de investigación que muestran al niño de esta edad capacitado para acceder a la vida cultural temprana. El modo en que este acceso tiene lugar viene determinado por las características psicológicas del estudiante que determinan la necesidad de establecer procedimientos metodológicos acordes que permitan el tratamiento de campos de conocimiento particulares. Así pues, en el desarrollo del currículo hay que tener en cuenta aspectos de tipo evolutivo, didácticos y pedagógico-organizativos (Sainz 1998).

El contenido del currículo es el conjunto de ideas, conocimientos y experiencias objeto de enseñanza, y los objetivos específicos vinculados a los mismos, así como su organización y secuencia. Sin embargo, no existe una taxonomía generalmente aceptada desde las distintas posiciones teóricas para clasificar los contenidos y objetivos de este nivel educativo. Se plantea incluso la dicotomía sobre si los contenidos deben acentuar los aspectos cognitivo-intelectuales o los afectivo-sociales. Incluso dentro del dominio cognitivo existen dos corrientes: destrezas académicas o dominio de materias escolares, frente a destrezas cognitivas o eficiencia intelectual. La primera opción supone un currículo estructurado en función de las materias mientras la segunda conduce a un currículo mas centrado sobre la heurística del aprendizaje. La investigación pedagógica no ha proporcionado hasta ahora una base firme para determinar cuales puedan ser los mejores contenidos para los distintos niveles de educación infantil (de la Orden, en Martínez Rodríguez, 1989: 93).

### 1.1. Importancia de los procedimientos en Educación Infantil

La concepción piagetiana de construcción del conocimiento mantiene que el conocimiento matemático se deriva de las acciones sobre los objetos y, entre las acciones que el niño realiza de forma espontánea está la comparación a través de la cual puede establecer relaciones de similitud (que le permiten hacer colecciones), de equivalencia (que le permiten identificar grupos), de diferencia (que le permiten ordenar) y de transformación (que le permiten operar).

Estas acciones espontáneas tienen lugar mediante:

- La observación, que le permite captar las propiedades de los objetos y reconocer relaciones de clase y contexto. Mediante la percepción el niño capta estas propiedades y esto le permite operar sobre los elementos a partir de sus propiedades. (Mira, 1992:302)
- La experimentación directa o indirecta a través de acciones sobre los objetos y la consiguiente provocación, a través de preguntas adecuadas, de relaciones de pertenencia.
- La evocación, que debe permitir el establecimiento de nuevas relaciones.
- El contraste, que debe provocar los desequilibrios necesarios para establecer relaciones de inferencia.

Y forman parte de procedimientos básicos como la asociación, la caracterización, los criterios preferenciales, las clasificaciones o las transformaciones que configuran el armazón del razonamiento que permite descubrir y establecer relaciones, clasificar, ordenar o transformar sobre elementos que ofrece su entorno y sobre los que se puede asentar la posterior conceptualización de conceptos propiamente matemáticos como los de número u operación numérica (Mira 1992:316, Flavell 1982).

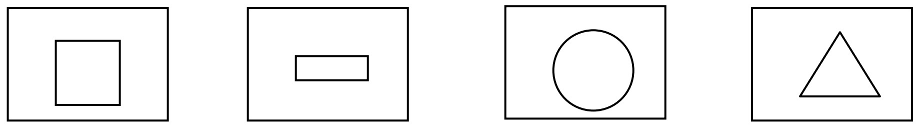
### 1.2. Conceptos y representaciones

Entendiendo por contenidos todo aquello que puede ser enseñado y puede ser aprendido, los contenidos primeros incluyen todas aquellas nociones que en un futuro son susceptibles de cuantificación o generalización sobre conceptos matemáticos. Estas primeras nociones forman parte del bagaje de conocimientos del párvulo desde muy temprano y se refieren a ideas relacionadas con la caracterización del tamaño (grande-pequeño-mediano), de la longitud (largo-corto, grueso-delgado), del peso (pesado-ligero), de la capacidad (lleno-vacío), a operadores de comparación como: mucho-poco ó más-menos, las que indican formas de objetos, su situación en el espacio, las relaciones de proximidad, de distancia, algunas propiedades topológicas y las ligadas con el conocimiento del número natural. A este objetivo el niño se aproxima a través de actividades cognoscitivas que son complejas y personales y requieren la práctica de procedimientos o acciones sistemáticas ordenadas y encaminadas hacia un fin.

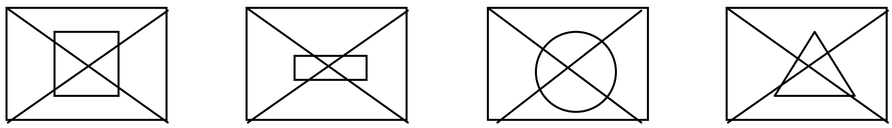
Hacer matemáticas es operar con símbolos y aprender matemáticas (Alcalá 2002: 39) es aprender a operar con los símbolos necesarios y de la forma adecuada a la situación. La indiferenciación entre el dominio referencial de la lengua hablada natural y del lenguaje simbólico propio de la matemática que se produce en la edad 2- 6 años requiere adoptar símbolos y códigos que, siendo significativos para el niño en su conocimiento actual permitan trasladar esa significatividad al ámbito de los procedimientos propiamente matemáticos. Así pues, los códigos que conviene adoptar son aquellos ligados a la representación simbólica de los conceptos que son reconocibles por los niños. Habitualmente la representación requiere un soporte material (una tarjeta de papel, por ejemplo) que el niño puede manipular.

La estabilización de un nuevo conocimiento supone de una parte su reconocimiento y discriminación entre otros pertenecientes a su misma clase, y como elemento de una clase superior y, de otra, el reconocimiento de su aspecto operativo como objeto relacionable dentro de algún procedimiento. De acuerdo con ello hay un doble nivel de uso de códigos uno que hace referencia al propio concepto que simboliza, su negación y discriminación de otros conceptos que forman parte de su misma clase.

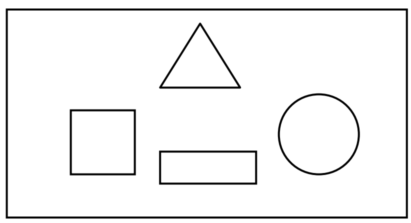
Por ejemplo los conceptos: triángulo, rectángulo, cuadrado y círculo que pueden representarse mediante los conocidos códigos:



Implican en este nivel los códigos negativos, también conocidos, para cada uno de los conceptos:



Todos estos códigos que se instauran entre conceptos permiten su discriminación como formas concretas en este ámbito referencial. Pero, en tanto que forman parte de otro concepto que los incluye como elementos de una clase: el concepto de forma, son reutilizables en la codificación de este otro concepto más general, por ejemplo en la forma



En cuanto al aspecto operativo, los códigos refieren las relaciones que pueden establecerse entre conceptos. Estas relaciones implican procedimientos y los códigos representativos actúan como pauta para llevar a cabo el procedimiento. Es el caso de las tablas de clasificación, de los diagramas de Venn o de Carroll o de las flechas de transformación.

### 1.3. Diseño de tareas promotoras de relaciones. Tipo de tareas

De acuerdo con la caracterización del razonamiento deductivo este está ligado a un lenguaje, no necesariamente verbal, y tienen lugar entre proposiciones cuyos estatus teórico y operatorio es preciso fijar (Duval 1999). Por ello, las actividades que propongamos deben tener un componente de provocación para la argumentación.

Para evitar las limitaciones del lenguaje propias del estadio evolutivo, el lenguaje está basado en acciones sobre objetos sin renunciar a la expresión verbal en relación con las acciones que emprende y resultados que obtiene.

Puesto que ponen en práctica procedimientos pueden ser llevadas a cabo con materiales diversos de la vida cotidiana. Sin embargo los bloques lógicos, por ser un material estructurado, tienen la ventaja de ser universalmente conocido.

**Tipo de tareas**

Es necesario desarrollar tareas que cubran con la máxima amplitud los objetivos propios de la Educación Infantil. De igual forma considerar grados de complejidad distintos permite poner de manifiesto las posibilidades reales de los niños.

Encontrar tareas que supongan un desafío alcanzable para el niño, lo que Furth (1974) llama "niveles de interés", puede resultar motivador y divertido para el niño, e incentivar su interés en actividades que ponen en juego razonamientos y modos de razonamiento propios de la matemática con los cuales en el futuro se encontrará.

Consisten en la práctica de los procedimientos de: clasificación, seriación, ordenación y transformación que pueden establecerse a través de las relaciones de atribución o designación y se formulan como reglas de juego o normas.

***La presencia de los dos procesos directo e inverso en la construcción del conocimiento que justifica, por ejemplo, la presentación simultánea de la suma y la resta como procesos diferentes de una misma operación, conduce a la necesidad de presentar, de forma igualmente simultánea, en tareas relativas a procedimientos matemáticos los dos procesos directo e inverso vinculados a los juegos de reglas, de los cuales el proceso inverso ha sido históricamente olvidado.***

***Las reglas serán de dos tipos: de aplicación y de descubrimiento. Ambos tipos de reglas se aplicarán a una misma tarea y suponen la práctica del razonamiento en modo directo, cuando son de aplicación, y del modo inverso, cuando son de descubrimiento.***

**Tareas de relaciones de atribución o designación**

Son las tareas más sencillas desde el punto de vista de la complejidad relacional que implican. Están vinculadas a las definiciones que se derivan del aspecto material de las piezas intervinientes en relación con sus atributos y valores. La necesaria presencia de la operación inversa, en el sentido piagetiano, introduce la necesidad de otorgar el mismo tratamiento a la afirmación que a la negación. Se establecen en el marco de la lógica de clases y se subdividen en simples y compuestas.

Serán simples, todas las definiciones vinculadas:

- a un valor o su negación
- a un atributo

Serán compuestas, las vinculadas a relaciones complejas. Implican relaciones múltiples y están formuladas haciendo referencia a:

- más de un valor (afirmativo o negativo)
- más de un atributo
- a atributos y valores

## 1.4. La organización de las tareas

Las características psicológicas y cognoscitivas del niño preescolar determinan algunos principios pedagógicos.

Principio de globalización. La percepción infantil es fundamentalmente global. Ello trae como consecuencia el fenómeno de la yuxtaposición por el cual las partes que integran un todo no se relacionan entre ellas de forma causal sino yuxtapuestas sin un hilo de continuidad. Este principio ha generado el uso de los llamados por Decroly "centros de interés" o temáticas generales respecto a las cuales el niño se siente interesado.

Principio del juego. La valoración del juego como elemento para la enseñanza obligó a un estudio de los fundamentos psicológicos y sociales que establecieran sus funciones dentro de la escuela. Los juegos de regla formulados por la teoría piagetiana fuerzan al niño a adoptar, dentro de una actividad lúdica, principios de comportamiento que pueden encontrar su origen en el propio niño y le preparan para comportamientos más sujetos a la realidad.

Principio de individualización. El alumno es el centro de la actividad escolar. Ello supone, dada su constante evolución un tratamiento específico y diferente que ha desembocado en una enseñanza por niveles de edad. Además los integrantes de un grupo presentan diferencias que pueden llegar a ser considerables.

Principio de socialización. El objetivo fundamental de la educación es facilitar el desarrollo armónico e integral del niño en cuanto individuo y en cuanto parte de la sociedad.

Estos principios deben ser tenidos en cuenta en la experimentación. La globalizada percepción infantil hará preciso explicitar las diversas componentes y elementos que intervienen en las mismas como conformadores de la tarea propuesta que ha de revestir forma de juego, ser activa, referente a una situación contextual familiar para él y facilitadora de sus propios modos de expresión. Por otra parte la concepción del pensamiento lógico como una construcción personal y única en cada sujeto hará que se planteen de forma individual.

### 1.5. Caracterización de nuestra propuesta

Las tareas que proponemos a continuación pretenden ser recursos útiles para el maestro en un momento dado. Sólo pretende ser exhaustiva en relación con las posibilidades del material y a los procedimientos mencionados. No se trata de ponerlas todas en práctica, la característica individual que la construcción del conocimiento tiene, hace que determinadas tareas sean adecuadas para cada niño particular en un momento dado de su desarrollo. El maestro puede seleccionar aquellas que resulten más convenientes en cada caso.

Hay, sin embargo, dos aspectos sobre los que propugnamos dos estrategias fundamentales con carácter general, sea cual fuere el tipo de juego elegido.
Una de ellas es la potenciación de la expresión verbal en general y, en particular de sus formas negativas. La expresión verbal de las acciones provoca su ordenación mental interna y facilita su asimilación dentro del esquema actual de conocimiento.

La nula presencia hallada en el uso de las formas negativas por los niños, les priva de introducir en sus formas de razonamiento las relaciones opuestas, necesarias para el desarrollo del pensamiento reversible. A través de la expresión verbal pone de relieve sus formas de razonamiento inferencial y sus formas de comprensión de los operadores lógicos.

Es, por tanto, esencial que todas las acciones se acompañen de la descripción verbal que las justifica.

La otra estrategia se refiere a la utilización del modo inverso. Ningún juego, es un juego completo si no se practica en sus dos modos: directo e inverso.

Nuestra propuesta introduce como principal novedad la utilización del modo inverso como estrategia general sobre todos los juegos. A diferencia con los juegos desarrollados por Dienes (1987) y Kothe (1989) que sólo relatan un juego en modo inverso: la clasificación de las piezas de igual tamaño sobre una cuadrícula 4x6, nosotros expresamos los modos inversos de práctica que cada actividad tiene, que complementan a sus respectivos directos y son por completo desconocidos en la realidad de las aulas de Educación Infantil.

También introducimos, como novedad, la posibilidad de uso de tarjetas simbólicas de atributo, que permiten ejercitar tareas de mayor generalidad que las ya conocidas tarjetas de valores y requieren mas alto grado de abstracción.

**2. Tareas sobre el lenguaje simbólico**

Hemos visto cómo, sobre todo los niños más pequeños, resuelven algunos ejercicios utilizando procedimientos ligados en gran parte a la percepción.
Tal vez la percepción es precursora de la inferencia clara de la cual es soporte y origen.

Entre los atributos de los bloques lógicos, unos son más fácilmente perceptibles que otros. Así el color tiene un poder evocador más inmediato que el grosor, por ejemplo.

Esto hace que, las actividades relativas a un mismo concepto e incluso estructuralmente iguales, tienen un interés distinto dependiendo de las variables que pongan en juego.

Es por esto interesante describir, de forma sistematizada, todas las posibilidades del material con relación a los contenidos de clasificación, seriación ordenación y transformación.

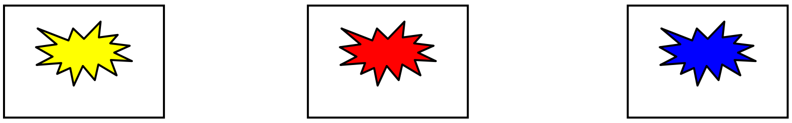
Se trata pues de una propuesta que, desde el punto de vista pedagógico se concreta en algo tan sencillo como proponer a los niños el juego de descubrir las reglas previamente aplicadas. Formular preguntas como “¿qué he hecho aquí?”, ó “¿cómo estará organizado esto?”, sobre las situaciones didácticas que generaron la aplicación de reglas de: clasificar, seriar, ordenar y transformar tanto como clasificar, seriar, ordenar o transformar de acuerdo con una regla explícita.

**Códigos**

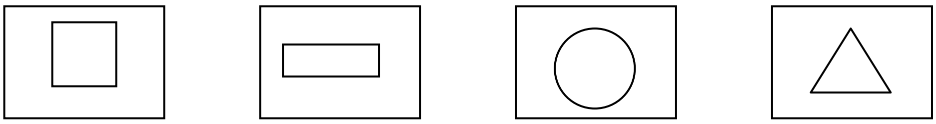
Las conocidas tarjetas simbólicas de valores, junto con la tarjeta que contiene “NO”, o en su lugar las tarjetas simbólicas de negación de valores, juegan un papel importante en todas las actividades e identifican las clases que los valores definen.

Hablamos  de las conocidas tarjetas que simbolizan:

Los tres valores del atributo color:



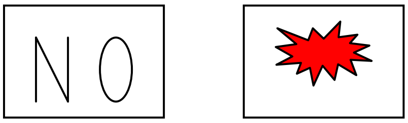
Los cuatro valores de la forma:



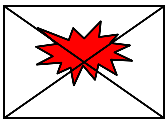
Los dos valores del grosor:

Los dos valores del tamaño:

La representación de la negación, puede hacerse mediante la tarjeta adicional a la que representa el valor afirmado. Por ejemplo para: “No rojo”, mediante las dos tarjetas yuxtapuestas:

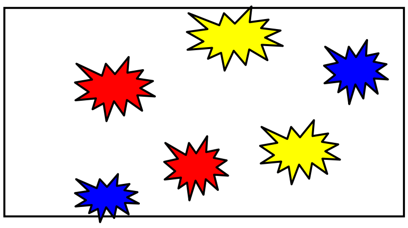



Ó bien, mediante la tarjeta:

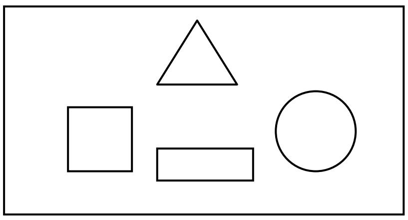


Siendo necesario, en este último caso, un nuevo juego de tarjetas para cada valor.
Estos códigos son conocidos y a ellos se hace referencia incluso en los manuales de utilización del material.

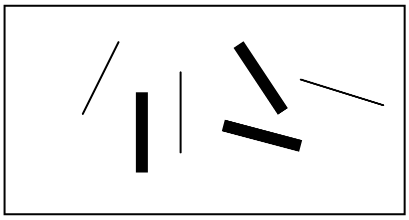
Sin embargo, junto con estas, pueden elaborarse otro juego de tarjetas simbólicas que tienen un nivel de concreciones menores, relativas a los atributos y así:



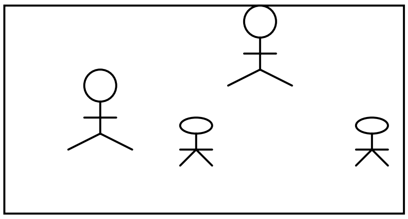
Simboliza el atributo color.



Simboliza el atributo forma.



Simboliza el atributo grosor, y



El atributo tamaño.

A estas últimas nos referiremos como tarjetas de atributo.

Todas las actividades, en ambos modos, tendrán en cuenta las fases de: manipulación, verbalización de valores, atributos y argumentos, y, obtención de su representación simbólica con las tarjetas de valor.

**2.1. Proposiciones simples**

Son juegos cuyas reglas o normas están ligadas a las definiciones simples de un sólo valor o su negación. Constituyen los juegos previos de discriminación de los distintos valores.

Estas actividades se llevan a cabo mediante dos procedimientos: clasificación y seriación y, en su modo directo, se relatan en Dienes y Golding(1987 ) y Kothe (1989) pero no así en su modo inverso.

Supongamos que trata de introducirse el valor “rojo”. La proposición que define en la acción es “ser rojo”, en lo que sigue: “p” y servirá genéricamente para representar cualquier otro valor afirmado o negado.

**A) Por clasificación**

***Contenido del ejercicio***: Clasificar las piezas elegidas en los dos grupos o subconjuntos en que se particiona, de acuerdo con la verificación o no del valor establecido.
***Modo directo***: Agrupar los elementos que verifican la proposición “p” y separadamente los “no p”, representando los grupos mediante las tarjetas simbólicas de valor respectivas.
***Modo inverso***: El maestro coloca las dos agrupaciones incompletas y pide al niño que coloque las restantes en el lugar correspondiente y las tarjetas simbólicas de valor en cada grupo.

**B) Por seriación**

***Contenido***: Elaborar una hilera con las piezas de determinada por igualdad o diferencia en el valor fijado.
***Modo directo***: Formar una seriación de modo que entre cada pieza y la siguiente se de igualdad en “p”. Análogamente, formar una seriación en la que entre cada pieza y la siguiente se de diferencia en “p”.
***Modo inverso***: El maestro realiza una seriación de modo que entre cada dos piezas consecutivas haya igualdad en “p”, pregunta “¿Cómo lo he hecho?” Y solicita que el niño continúe la seriación.
Análogamente, para diferencia en “p” con idénticas preguntas.

**2.2. Proposiciones compuestas**

Las proposiciones están vinculadas a las definiciones compuestas por conjunción o disyunción, en sus formas afirmada o negada. La utilización de la disyunción (o de la conjunción) implica la aparición de relaciones conjuntivas (respectivamente disyuntivas), por efecto de las leyes de Morgan. Todas las actividades siguientes son relativas a proposiciones compuestas.

**3. Juegos de clasificación**

Las actividades de clasificación que se describen en este apartado responden a dos modos matemáticos de clasificar: mediante enunciados disyuntivos y conjuntivos, y mediante relaciones de equivalencia. Ambos tipos son practicables a través de los valores y a través de los atributos.

A su vez, cada uno de ellos es practicable utilizando las formas lingüísticas afirmativa o negativa y de igualdad ó diferencia, tanto para valores como para atributos.

Sobre cada tipo de actividad, se indica su desarrollo o no en Dienes y Golding (1987) y Kothe (1989).

**3.1. Actividades por disyunción**

**3.1.1. - Por disyunción de dos valores o tres valores**

**De dos valores**

En Dienes y Golding (1987: 104, 106 y 110) se encuentran actividades en modo directo, ambos enunciados en forma afirmativa.

Supongamos que se va a clasificar el grupo de piezas que verifican la proposición "ser p ó ser q", donde ahora "p" y "q" designan valores diferentes.

***Contenido del ejercicio***: Clasificar las piezas elegidas en los grupos o subconjuntos en que se particiona, de acuerdo con la verificación o no de los dos valores establecidos.

***Modo directo***: Obtener y definir los distintos subconjuntos en que se clasifica el conjunto de elementos definido por verificar la proposición "ser p ó q", esto es, los cuatro subconjuntos que constituyen las piezas que verifican "p y q", "no-p y q", "p y no-q" y, "no-p y no-q".

Ejemplo: si “p” representa “ser cuadrado” y “q” representa “ser rectángulo”, el conjunto a clasificar se define como los que verifican “ser cuadrado ó rectángulo” en los siguientes subconjuntos que determinan su partición:

“cuadrados y rectángulos”

“cuadrados y no rectángulos”

“no cuadrados y rectángulos”

“No cuadrados y no rectángulos”.

***Modo inverso***: Realizar (el maestro), la clasificación en subconjuntos que se genera entre las piezas que verifican la proposición “p o q”. El niño debe descubrir que esta proposición es la que verifican las piezas clasificadas.
Igualmente, presentar la clasificación en subconjuntos incompletos. El niño debe colocar las restantes piezas en su lugar y las tarjetas simbólicas de cada clase.

El tratamiento de la negación en igualdad de condiciones que la afirmación, requiere utilizar las proposiciones en sus formas afirmativa y negativa. Por tanto el ejercicio anterior tiene cuatro posibilidades en cuanto a la utilización de las proposiciones para los mismos valore “p” y “q”:

1. - Con ambos valores afirmados: “p ó q”

2. - Con un valor afirmado y otro negado: “no-p ó q” ó “p ó no-q”.

3. - Con los dos valores negados: “no-p ó no-q”.

Si los valores empleados pertenecen a un mismo atributo, por ejemplo: “cuadrados o rectángulos”, el subconjunto intersección es vacío, pero si pertenecen a atributos distintos, por ejemplo: “cuadrados o rojos”, el subconjunto intersección no es vacío.

Teniendo en cuenta que hay 11 valores diferentes en forma afirmada y 11 en forma negada, la variación de p y q entre estas 22 posibilidades y su producto por 4 representan todas las posibilidades de esta tarea y constituyen tareas diferentes aunque estructuralmente iguales.

**De tres valores**

En Dienes y Golding (1987) se encuentran desarrolladas dos actividades de este tipo, ambas en modo directo, en un caso (página 108) los tres valores se enuncian en forma afirmativa y en la otra (página 120) los tres valores se enuncian en forma negativa.

Supongamos que se va a clasificar el grupo de piezas que verifican la proposición “ser p ó ser q ó ser r”, donde ahora “p”, “q” y “r” designan valores diferentes.
***Contenido del ejercicio***: Clasificar las piezas elegidas en los grupos o subconjuntos en que se particiona, de acuerdo con la verificación o no de los tres valores establecidos.
***Modo directo***: Obtener y definir los distintos subconjuntos en que se clasifica el conjunto de elementos definido por verificar la proposición “ser p ó q ó r”, esto es, los subconjuntos que constituyen las piezas que verifican “p y q y r”, “no-p y q y r”, “p y no-q y r”, “no-p y no-q y no-r”, “no-p y q y no-r”, “p y no-q y no-r” y, “no-p y no-q y no-r”.
Ejemplo: si “p” representa “ser cuadrado” y “q” representa “ser rojo”, y “r” es “ser grande”.

***Modo inverso***: Realizar (el maestro), la clasificación en subconjuntos que se genera entre las piezas que verifican la proposición “p ó q ó r”. El niño debe descubrir que esta proposición es la que verifican las piezas clasificadas.
Análogamente se mostrará la clasificación incompleta. El niño debe colocar las piezas que faltan y encontrar las tarjetas simbólicas de clases.

Como en el caso de dos valores el tratamiento de la negación en igualdad de condiciones que la afirmación, requiere utilizar las proposiciones en sus formas afirmativa y negativa. Por tanto el ejercicio anterior tiene ahora las siguientes posibilidades para los mismos valores “p” y “q” y “r”:

1. - Con ambos tres valores afirmados: “p ó q ó r”

2. - Con un valor negado y dos afirmados: “no-p ó q ó r”, “p ó no-q o r” y “p ó q ó no-r”.

3. - Con dos valores negados y uno afirmado: “p ó no-q ó no-r” ó “ no-p ó q ó no-r” ó “no-p ó no-q ó r”.

4. - Con los tres valores negados: “no ó no-q ó no-r”

Ahora, si los tres valores pertenecen a atributos distintos, todos los subconjuntos serán no vacíos, pero eso no ocurre así en el caso de que dos valores pertenezcan a un mismo atributo, en cuyo caso habrá dos subconjuntos vacíos.

Si los tres valores pertenecen al atributo color, sólo tres subconjuntos serán no vacíos. Finalmente, si los tres valores pertenecen al atributo forma, sólo cuatro subconjuntos serán no vacíos.

El producto 11x10x9x2 tiene en cuenta todas las posibilidades para las proposiciones: p, q y r y, el producto de este número por 8 representa todas las tareas con la misma estructura que son posibles y diferentes.

**3.1.2. Por disyunción de dos o tres atributos**

Las actividades de clasificación a través de atributos no se encuentran en Dienes y Golding (1987) y Kothe (1989).

**De dos atributos**

Se trata de clasificar el conjunto de piezas definido por verificar dos proposiciones formuladas entre atributos y no entre valores.

El uso de la definición por atributo es más complejo y reviste un grado de concreción menor que en el caso de valores. Estos ejercicios son la introducción a las tarjetas de atributo. La selección de las piezas de acuerdo con la igualdad en un atributo, no conduce a un conjunto único, pero, cualquiera de ellos es igualmente válido. Por ejemplo, si una de las proposiciones que definen los elementos a tomar es “tener la misma forma”, cuatro subconjuntos son posibles, y cualquiera de ellos, pero uno sólo, es válido para plantear la actividad.

La descripción de la actividad y sus dos modos de aplicación, coincide con el caso de disyunción de dos valores. Ningún subconjunto será vacío, en este caso.

La definición de los subconjuntos parciales, así como la enunciación de la regla en el caso del ejercicio inverso, se hace en términos de atributos y no de valores.
Ejemplo: Sea “p”, la proposición “tener igual forma”. Surgen cuatro subconjuntos posibles, de los cuales se toma uno cualquiera de ellos, sea “q” la proposición “tener igual color”. Surgen tres subconjuntos de los cuales como en el caso anterior, es necesario que el niño comprenda que uno cualquiera de ellos es válido para verificar las condiciones.

La clasificación ahora se refiere al conjunto de piezas que tienen “igual forma o igual color”. Supongamos que se toman los cuadrados como grupo que verifica tener igual forma y, los rojos, como grupo que verifica tener igual color.
Ahora se ha reducido el ejercicio a la clasificación por disyunción de dos valores ambos en modo afirmado.

La diferencia radica en la asociación de los elementos como representantes de una clase mayor. Ahora las tarjetas identificativas de las clases son las tarjetas de atributos, no las de valores.

**De tres atributos**

La selección de elementos para clasificar se hace de acuerdo a su definición por su igualdad en cada uno de los tres atributos.

Como en el caso de dos atributos, los subconjuntos elegibles no son únicos. Las intersecciones nunca son vacías y la diferencia con el caso de clasificación por tres valores radica en la elección de los elementos como casos particulares.
Su desarrollo posterior coincide con el ejercicio de clasificación por disyunción de tres valores.
Las tarjetas simbólicas son las de atributos y no las de valores.

**3.2. Actividades por conjunción**

Como sabemos, en la lógica común la conjunción y disyunción no son usadas de la misma forma que en la matemática.

Los bloques lógicos son un material idóneo para practicar ambas operaciones con todo el rigor matemático, puesto que cada pieza está determinada por un solo valor de cada atributo. Las indeterminaciones que introduce el lenguaje son evitables utilizando las expresiones disyuntiva (ó) ó conjuntiva (y), así el conjunto formado por la reunión de todas las piezas amarillas y azules, corresponde en su definición proposicional booleana a "amarillas ó azules", siendo inexistentes de acuerdo con la conjunción "sensu estricto" las piezas amarillas y azules, puesto que cada pieza está determinada por un solo valor de cada atributo.
Ahora se trata de clasificar un conjunto de piezas definido por conjunción

### 3.2.1. Por conjunción de dos o tres valores

**De dos valores**

En Dienes y Golding (1987: 85) se hace uso de estos juegos en modo directo y sobre las valores en forma afirmativa.

Los valores han de ser pertenecientes a atributos diferentes.

***Contenido***: Generar dos conjuntos de elementos: uno, el formado por las piezas que verifican ambos valores, otro, el formado por el resto de las piezas. Su intersección es vacía

***Modo directo***: Determinar y definir los conjuntos formados por las piezas que verifican ambos valores y su conjunto complementario. Mediante inferencia modus tollendo ponens se relacionan ambos.

***Modo inverso***: Sobre la distribución en dos conjuntos complementarios, el niño debe reconocer los valores de los atributos que definen ambos conjuntos.

Ejemplo: tomando "p" por "ser cuadrado" y "q" por "ser rojo", la conjunción de valores define el conjunto A formado por las cuatro piezas "cuadrados y rojos", por un lado, y por otro el resto que conforma el conjunto A' que será, según las leyes de Morgan, el de las piezas "no cuadradas o no rojas". El niño debe establecer entre ambos la siguiente relación: si una pieza no es cuadrada (o no es roja), tiene que estar en A', también, si una pieza está en A' y es roja (o es cuadrada), entonces es que no es cuadrada ( o no es roja), mediante la regla de inferencia citada.

El ejercicio es practicable:

1. - con los dos valores afirmados.
2. - con un valor afirmado y otro negado.
3. - con los dos valores negados.

**De tres valores**

En Dienes y Golding (1987: 85) se hace uso de estos juegos en modo directo y sobre valores en forma afirmativa.

Las piezas se definen por conjunción de tres valores.
El contenido y modos de este ejercicio son equivalentes al caso de dos valores

### 3.2.2. Por conjunción de dos, tres o cuatro atributos

Las actividades a través de atributos no están desarrolladas en Dienes y Golding (1987) ni Kothe (1989).

**De dos atributos**

Estos ejercicios, como en el caso de los ejercicios por disyunción, tiene como finalidad principal promover el pensamiento abstracto, mediante el uso de las tarjetas simbólicas de menor grado de concreción.

La conjunción de dos atributos cualquiera no define un único conjunto. Debe mostrarse que cualquiera de ellos es válido como representante de las características pedidas. Elegido uno de ellos, el complementario está también definido y el juego vuelve al de conjunción de dos valores.
El juego es practicable:

1. - con los dos atributos afirmados
2. - con un atributo afirmado y otro negado
3. - con los dos atributos negados.

**De tres atributos**

Análogamente, ligados a la introducción de los atributos como variable, y con ello dar paso a la abstracción.

Una vez elegido uno de los varios conjuntos de piezas posible, el juego se reduce al de conjunción de tres valores.

**De cuatro atributos**

Uno de los conjuntos sería único puesto que cada pieza está determinada por cuatro valores de cada uno de los atributos.

***Contenido***: Discriminar cada pieza del resto.
***Modo directo***: Encontrar la pieza cuyos cuatro valores de atributo se dan.
***Modo inverso***: Adivinar la pieza en que uno está pensando en un máximo de 7 preguntas.

Para el modo inverso, es preciso realizar inferencias mediante ponendo tollens y tollendo ponens. Dado que la disyunción de valores, en cada atributo, es una disyunción exclusiva, sólo serán necesarias: 3 preguntas como máximo para determinar la forma, 2 preguntas como máximo para determinar el color, 1 pregunta para determinar el tamaño y 1 para determinar el grosor.

Las actividades de determinación por conjunción de cuatro atributos tienen por objetivo el reconocimiento de las cuatro características de cada pieza y son, por tanto, practicables como actividades de iniciación. En Kothe se relatan estas planteadas como juegos directos consistentes en mencionar las cuatro características de una pieza que se muestra o en elaborar la tabla de valores.

Importante también la referencia a características que no tienen, que permiten ejercicios de inferencia. En este sentido, se relata por Dienes y Golding el llamado juego de las veinte preguntas con deducciones, según el cuál los niños, con 20 preguntas, van anotando las informaciones que aporta el que ha pensado en una pieza determinada que se trata de descubrir. Debe corregirse la catalogación como: "informaciones inútiles" que se hace en el texto, para aquellos casos en que la respuesta a la pregunta es negativa puesto que, de cada respuesta (sea afirmativa o negativa), se obtiene una deducción, ya sea unívoca como por ejemplo "no es grueso", en cuyo caso el grosor queda determinado; ó no unívoca, por ejemplo "no es rojo", por tanto tiene que ser azul ó amarillo.

Esta interpretación de "informaciones inútiles", tiene que ver con la tendencia generalizada de razonar siempre en positivo, hacia lo que crece, hacia lo que se cumple. En este ejemplo vemos claramente cómo tan significativa puede ser una respuesta afirmativa (sí se cumple algo), como negativa (no se cumple algo). Como ya se ha dicho esto aparece como característica en el razonamiento matemático y hace preciso enfocar la actividad de razonamiento con los niños en estos términos que requieren, para que la actividad sea realmente útil, delimitar el número de preguntas a 7 que son las necesarias, como máximo, es decir en el caso más desfavorable de no acertar a la primera con los valores de los atributos. De 20 preguntas sobran 13.

### 3.3. Por relaciones de equivalencia

Estos juegos son la esencia de las relaciones de equivalencia. La clasificación tiene lugar no por los valores de los atributos sino por conjunción de atributos.

El universal, el total de las piezas, queda clasificado en clases de equivalencia cuya reunión coincide formalmente con el concepto de conjunto cociente.

***Contenido***: Consisten en establecer entre las piezas la relación de equivalencia:

"Dos piezas están relacionadas sí y sólo sí tienen igual..."

***Modo directo*****:** Formar los grupos o montones de piezas que cumplen "tener igual...".

***Modo inverso***: Se presentará el universal distribuido en clases de equivalencia, se trata de determinar, cómo están formados los grupos, es decir el criterio de agrupación usado. Análogamente, mostrando las clases incompletas, se pide al niño que complete las clases, colocando las piezas que faltan.

Puesto que se manejan 4 atributos, son posibles:

4 clasificaciones diferentes por un solo atributo,

6 clasificaciones diferentes por la conjunción de dos atributos.

4 clasificaciones diferentes por la conjunción de tres atributos.

Estas actividades no se encuentran en Dienes y Golding (1987) ni Kothe (1989). Si se encuentra un ejemplo de clasificación multiplicativa en modos directo e inverso, relativa a una de las clases de equivalencia posibles (Dienes y Golding 1987: 90)

Veamos detenidamente las actividades posibles relativas a formación de clases.

### 3.3.1. Clasificaciones por uno, dos o tres atributos

**Por un solo atributo**

***Contenido***: Las relaciones de equivalencia posibles son:

a) Por forma, mediante la relación: "Dos piezas están relacionadas sí y sólo si tienen igual forma"
Las clases de equivalencia son cuatro, coincidiendo con cada uno de los grupos de piezas de igual forma. El universal, queda clasificado en estos cuatro grupos.

b) Por tamaño, mediante la relación: "Dos piezas están relacionadas sí y sólo si tienen igual tamaño"
Las clases de equivalencia son dos.

c) Por color, mediante la relación: "Dos piezas están relacionadas sí y sólo sí tienen igual color"
El conjunto cociente está determinado por tres elementos.

d) Por grosor, mediante la relación: "Dos piezas están relacionadas sí y sólo si tienen igual grosor"
El conjunto cociente está formado por dos elementos.

Al niño, le resulta difícil abstraer un solo atributo de entre los cuatro que ya ha de conocer y solicita alguna información sobre la condición que ha de cumplirse con el resto de atributos. Así no es infrecuente que con la clasificación a), por ejemplo, pregunten: "pero ¿también con igual color?". Es necesario elegir sólo una parte de la información de entre toda la disponible, en cada caso la que es relevante y desechar el resto. Esta acción, que es habitual en la vida cotidiana, lo es también en las matemáticas donde en un momento dado, de todas las propiedades válidamente aplicables elegimos sólo aquellas que nos han de conducir al fin buscado.

**Por conjunción de dos atributos**

Formalmente corresponden a la manipulación de los objetos bajo las siguientes posibles relaciones de equivalencia:

a) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual forma y tamaño"

Las clases de equivalencia aquí son ocho, conteniendo cada una seis piezas. Esta es la relación que se aplica en la presentación de las piezas de madera dentro de su caja. Este ejercicio que se practica en las aulas que emplean los bloques lógicos, como una cuestión de orden, hace que los niños estén familiarizados no sólo con el ejercicio directo sino también con su inverso puesto que conocen bien que las piezas están en la caja agrupadas de acuerdo con la igualdad de su forma y de su tamaño.

b) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual forma y color"

Doce clases de equivalencia, conteniendo cada una cuatro piezas.

c) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual forma y grosor"

Ocho clases de equivalencia, cada una con seis piezas.

d) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual color y tamaño"

Seis clases de equivalencia, cada una con ocho piezas.

e) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual grosor y tamaño"

Cuatro clases de equivalencia, cada una con doce piezas.

f) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual color y grosor"

Seis clases de equivalencia cada una con ocho piezas.

**Por conjunción de tres atributos**

Formalmente corresponde a las relaciones:

a) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual forma, tamaño y color".

Se determinan 24 clases de equivalencia, con dos piezas cada una.

b) "Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual forma, tamaño y grosor"

Se determinan 16 clases de equivalencia con tres piezas cada una.

c) “Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual grosor, tamaño y color”.

Se determinan 12 clases de equivalencia con cuatro piezas cada una.

d) “Dos piezas están relacionadas si y sólo si tienen igual forma, color y grosor”.

Se determinan 24 clases de equivalencia con dos piezas cada una.

### 3.3.2. Clasificaciones por rejillas o tableros. Clasificaciones multiplicativas

***Contenido***: Consisten en colocar sobre una cuadrícula plana, de medidas diversas, todos o parte de las piezas del universal.

***Modo directo***: Las tarjetas de valor, colocadas sobre filas y columnas de la cuadrícula, indican la pieza que hay que colocar en cada cuadro de la rejilla.

***Modo inverso***: Sobre la cuadrícula aparecen colocados en su lugar el número mínimo de piezas, necesario para indicar donde deben situarse las tarjetas de valor indicativas de filas y columnas y, como consecuencia, el resto de los elementos.

Para sistematizarlas, distinguiremos entre clasificaciones no unívocas y unívocas.

**No unívocas**

Se practican con un número no determinado de piezas, en general con todo el universal. En este caso, puede haber más de una pieza posible para ocupar cada lugar. También pueden presentarse con contradicciones, por ejemplo: en una fila la tarjeta de valor: grande, y en una columna, la tarjeta de valor: pequeño. Así han de quedar lugares vacíos dada la disyunción exclusiva entre valores de un mismo atributo.

**Unívocas**

Llamamos así a las actividades tendentes a asignar a cada pieza, un lugar único dentro de una cuadrícula conveniente.

Las posibilidades de clasificación dependen de las piezas y, por tanto de los valores de sus atributos.

También depende de las piezas la forma y tamaño de la cuadrícula.

### 3.3.2.1. Clases definidas por un solo atributo

Estos subconjuntos constituyen cada una de las clases de equivalencia que se determinan sobre el universal de acuerdo con la relación de equivalencia que formalmente hemos expresado como: “tener igual X”, donde con X expresamos cualquiera de los cuatro atributos posibles. Así como ya hemos visto, si procedemos a agrupar los elementos que resulten relacionados cuando se establece la relación “tener igual color”, resulta un conjunto cociente de tres elementos y, será a cualquiera de estos elementos (clase de equivalencia) a los que nos referiremos.

**Forma**

Las piezas determinadas por su igualdad en cuanto a la forma, en cualquiera de sus cuatro valores, son doce en total. Por tanto es posible su clasificación sobre cuadrículas de los siguientes tamaños: 2 x 6; 3 x 4 y 1 x 12 (o sus conmutativos).

Las piezas a ordenar difieren como máximo en tres atributos: color (3 valores), grosor (2 valores) y tamaño (2 valores).
Se trata de buscar los criterios más generales posible, que permitan asignar cada pieza a un lugar único.

<u>Cuadrícula 2 x 6</u>

Supongamos 2 filas y 6 columnas.

Podemos destinar las dos filas a cualquiera de los atributos bivalentes, por tanto hay 2 formas distintas de rellenar las dos filas. Fijada una de ellas, hemos de destinar las seis columnas a definir los lugares o bien, primero por el atributo de tres valores (color) y luego por el otro atributo bivalente o bien al revés produciéndose, evidentemente, ordenaciones diferentes en cada caso. En este caso son posibles un total de 2 x 2 x 2 x 3! = 48 clasificaciones diferentes.

Desarrollamos un par de ellas, fijando atributos y valores.

Supongamos que se trata de ordenar las doce piezas cuadradas (C).

Fijemos para las filas el atributo tamaño. Tenemos dos ordenaciones diferentes: fila de arriba grande (G) y fila de abajo pequeño (P), y al revés. Pongamos: primero grande (arriba) y luego pequeño (abajo).

En cuanto a las seis columnas, supongamos que se establece en primer lugar para la ordenación el atributo grosor, esto hará que la mitad del total de columnas agrupe las piezas de igual grosor: pongamos en primer lugar grueso y en segundo delgado, es decir, las tres primeras columnas se destinarán a las piezas gruesas (Gru) y las tres siguientes (hacia la derecha), las delgadas (F) o finas. Tenemos la opción contraria.
Finalmente, hay que fijar la ordenación correspondiente al atributo color que, como sabemos, tiene 3! Posibilidades, fijemos de entre ellas, la siguiente: rojo (R), azul (Az), amarillo (Am), siempre de izquierda a derecha.
La cuadrícula quedaría de la siguiente forma:

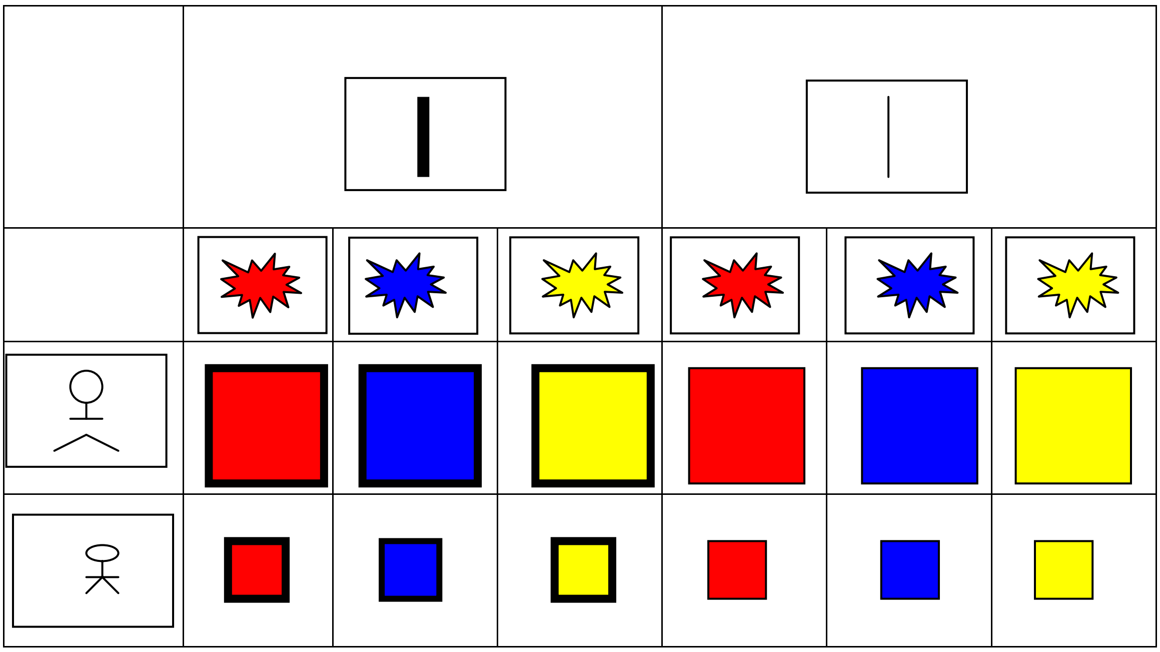


Tabla 1.1

Supongamos ahora que el primer criterio de clasificación por columnas fuera el color de acuerdo con la secuencia anterior, y el segundo el grosor con la misma secuencia de antes. Ahora la cuadrícula aparecería en la siguiente forma:

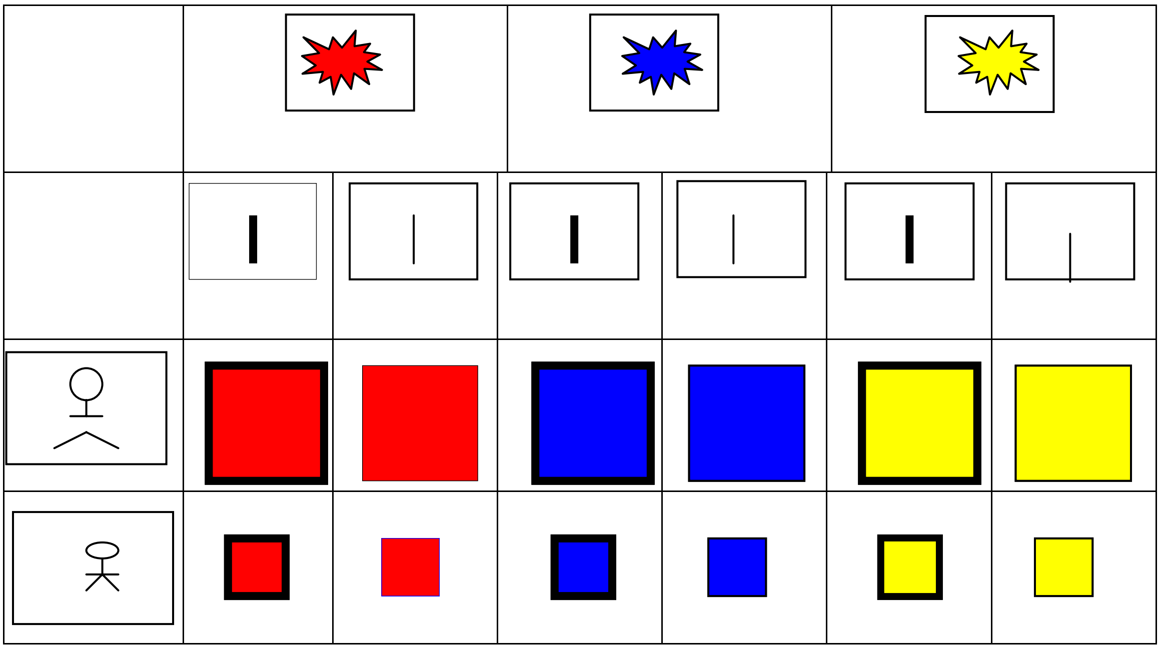


Tabla 1.2

Donde el segundo criterio de ordenación (ahora el grosor) es aplicado sobre cada parcial determinado por el criterio principal (el grupo de los rojos, de los azules y de los amarillos)

Como siempre, la actividad inversa es determinar las reglas que dan lugar a la disposición anterior de piezas, lo que puede practicarse en primer lugar con la tabla completa y después retirando algunas piezas y, finalmente, con el menor número de piezas necesarias para indicar el orden seguido, levantando de su lugar las piezas innecesarias.

En este ejemplo, puesto que las piezas ordenadas contienen los tres valores del atributo color, para que la ordenación sea unívocamente identificable, bastará con dejar dos piezas, claro que no dos piezas cualquiera. Por ejemplo en el caso de la

Tabla 1, bastaría con las piezas (1,1) (primera fila y primera columna) y la pieza (2,2) (segunda fila y segunda columna) por ejemplo.

Cuadrícula 3 x 4

Supongamos tres filas y cuatro columnas. Las filas deberán destinarse al atributo color, según cualquiera de sus posibles permutaciones. Fijemos por ejemplo 1º: Azul, 2º: Amarillo y 3º: Rojo. Sobre las cuatro columnas hay que establecer un criterio preferente relativo a los otros dos atributos variables entre estas piezas.

Supongamos que se fija como preferente o primero, el grosor. Esto hace que el total de columnas (4) quede distribuido para cada uno de los dos valores del atributo grosor. Así que serán las dos primeras columnas para todas las piezas de un grosor y las otras dos columnas para las piezas del otro grosor según una doble opción como sabemos. Pongamos: primero grueso y luego fino.

Puesto que el segundo atributo será el tamaño, ahora hay que decidir con qué criterio se ordenan las dos primeras (o las dos segundas) columnas. Fijemos primero pequeño y luego grande.

Con estos criterios, la cuadrícula quedaría así:

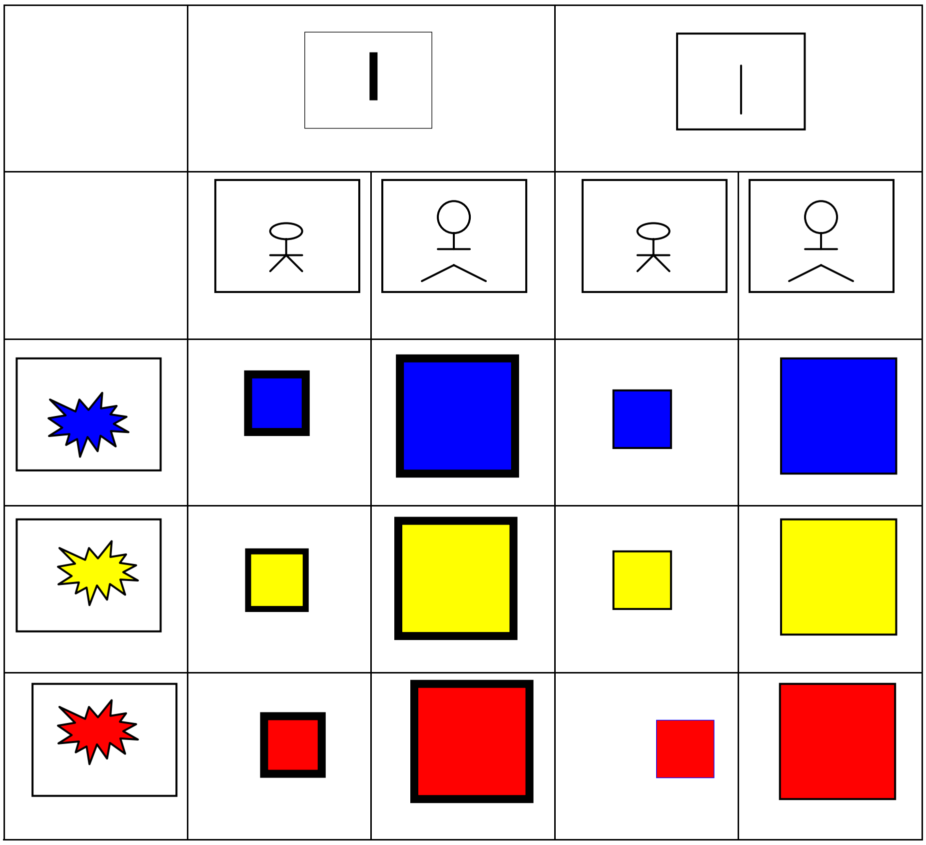


Tabla 1.3

El ejercicio inverso, como antes requiere dejar un mínimo de dos piezas, no cualquiera (por ejemplo si se dejaran las piezas de lugares (1,1) y (1,2), habría indeterminación en el orden relativo a los colores Am y R de las dos filas siguientes) Dos posibles serían (1,1) y (2,2) que no son evidentemente las únicas, otras candidatas: (1,3) y (3,2) ó también (1,2) y (2,3).

El ejercicio de estas actividades que el niño practica con gusto porque se pueden disfrazar de juegos de adivinación e incluso son posibles versiones competitivas, implica la ejercitación mental de reglas de inferencia y de deducción.

Finalmente digamos que sobre esta cuadrícula son posibles un total de 2 x 2 x 3! ordenaciones diferentes.

<u>Cuadrícula 1 x 12</u>

En este caso los tres criterios han de definirse sobre la misma dimensión.
Hay que definir en primer lugar cuál de los tres es el preferente o primero. Tomemos color.

La elección del atributo color en primer lugar señala tres regiones diferenciadas en las que habrán de colocarse todas las piezas de igual color en cada una de ellas, estos colores dependerán de la elección determinada dentro de las 3! Posibles. Pongamos: primero Rojo, luego Amarillo y luego Azul. Es decir, las cuatro primeras piezas serán las cuatro rojas, las cuatro segundas serán amarillas y las cuatro terceras serán azules.

Segundo criterio, elegible entre dos. Pongamos tamaño. Ahora el grupo de las cuatro rojas queda subdividido en las dos primeras de un tamaño, y las dos siguientes del otro tamaño. Análogamente para los otros grupos de colores. Si dentro de la doble opción se determina la secuencia: primero grande y luego pequeño, las dos primeras columnas serán de piezas grandes y las dos siguientes de pequeñas y análogamente con los otros grupos de color.

Queda ahora determinar el criterio de ordenación por grosor que en este caso quedó como tercero. Pongamos primero fino y luego grueso.
La cuadrícula, ahora con aspecto de seriación sería

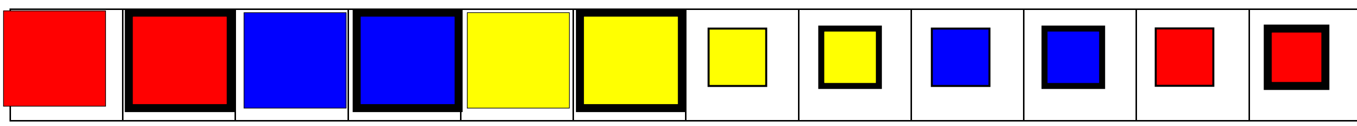


Tabla 1.4

Las ordenaciones posibles sobre esta tabla son 3! x 3! x 2 x 2.

En cuanto a la actividad inversa, que requiere dos piezas como mínimo, estas podrían ser las de lugares 1 y 6, ó bien las de lugares 1 y 8 por ejemplo.

**Color**

Tratamos ahora del conjunto de piezas determinado mediante el atributo color en cualquiera de sus tres valores. Las piezas de igual color son en total 16 por cuanto son ubicables de forma unívoca sobre rejillas de los siguientes formatos: 4 x 4, 2 x 8 y 1 x 16 .

Las piezas que integran este conjunto tienen por número máximo de diferencias entre ellas 3, siendo una de las posibles la forma. Dado que este atributo tiene cuatro valores, la práctica de los juegos inversos precisará como mínimo de tres piezas colocadas para determinar unívocamente el lugar correspondiente a cada una de las restantes.

<u>Cuadrícula 4 x 4</u>

Destinemos las filas al atributo forma, que puede ser determinado de 4! modos distintos.

Las columnas albergarán los dos atributos restantes en el orden que se establezca y cada uno de ellos con el criterio que se establezca. Esto hace un total de 4!  X 2 x 2 ordenaciones posibles.

<u>Cuadrícula 2 x 8</u>

Las 8 columnas (o filas) han de destinarse al atributo forma y a otro de los dos atributos bivalentes.
Las formas posibles de colocación son 2 x 2 x 2 x 4!.

<u>Cuadrícula 1 x 16</u>

Formas posibles de colocación: 2 x 2 x 3! x 4!.

**Grosor**

Las piezas definidas por el atributo grosor se pueden diferencias en el atributo forma, por cuanto la práctica de los juegos inversos requerirá de un mínimo de tres piezas colocadas.

Dado que este conjunto está formado por 24 piezas, son posibles cuadrículas de los siguientes formatos: 1 x 24; 2 x 12; 3 x 8; 4 x 6.

<u>Cuadrícula 1 x 24</u>

Ordenaciones posibles 2 x 3! x3! x 4!.

<u>Cuadrícula 2 x 12</u>

Ordenaciones posibles 2 x 2 x 3! X 4!

<u>Cuadrícula 3 x 8</u>

Ordenaciones posibles 2 x 2 x 3! X 4!.

<u>Cuadrícula 4 x 6</u>

Ordenaciones posibles 2 x 2 x 3! X 4!.

**Tamaño**

Como el atributo grosor.

Esta es la clase de equivalencia que se describe en modo directo e inverso en Dienes y Golding (1987: 90). Sin embargo, la forma en que el juego inverso es presentado, no supone la aplicación de todas las relaciones que las 24 piezas conservan, esto hace que allí se presente una pieza más de las necesarias para descubrir el lugar unívoco que cada pieza puede tener asignado.

#### 3.3.2.2. Clases definidas por la conjunción de dos atributos

Estos subconjuntos son las distintas clases de equivalencia que se determinan mediante las relaciones de equivalencia "tener igual.... y...." Por ejemplo: el subconjunto de piezas cuadradas rojas, correspondería a una de las doce clases de equivalencia que se generan mediante la relación de equivalencia definida formalmente como: "dos piezas están relacionadas sí y sólo sí tienen igual forma y color".

Veamos las posibilidades de ordenación de los distintos subconjuntos que se generan de acuerdo con las seis posibles clases de equivalencia.

**Forma y color**

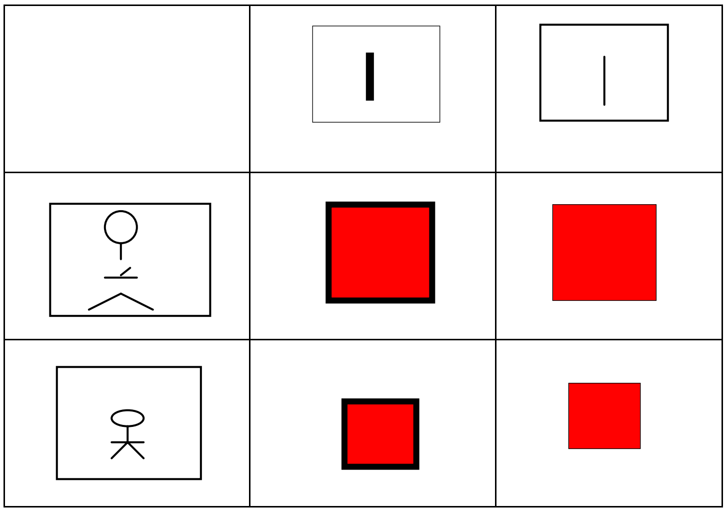
Como ya se ha visto, estas clases de equivalencia están compuestas por cuatro piezas entre las que varían los atributos grosor y tamaño como máximo. Son posibles dos tipos de cuadrícula 2 x 2 y 1 x 4.

<u>Cuadrícula 2 x 2</u>

Dado que los atributos variables entre elementos son los dos bivalentes, pueden destinarse las filas a un atributo (con dos posibilidades), y las columnas al otro (con otras dos opciones). Pongamos un ejemplo.

Consideremos las piezas relacionadas por tener forma círculo y color rojo.

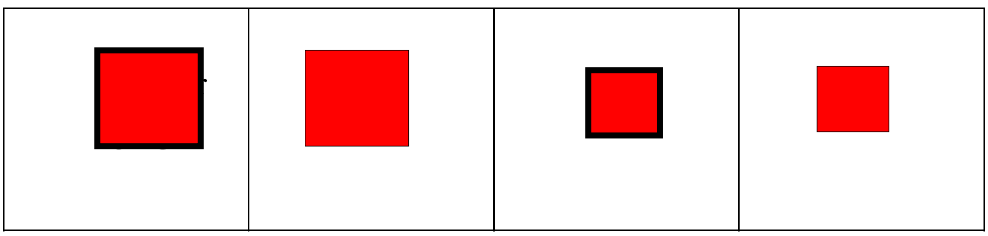
De las ocho ordenaciones posibles, elegimos: filas para el tamaño con el siguiente orden: primero grande (arriba) y luego pequeño (abajo). Las columnas para el grosor con la siguiente ordenación: primero grueso (izquierda) luego fino (derecha). La elección que intercambia filas por columnas daría lugar a la disposición simétrica respecto de la diagonal principal. La disposición de los elementos sería



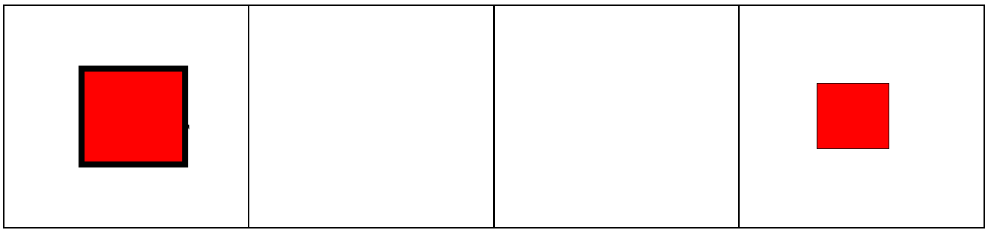
Cuadrícula 1 x 4

Ahora tendremos que ordenar las piezas en una fila (o columna) de cuatro. Si marcamos como primer criterio el tamaño en el orden: primero grande y luego pequeño, destinaremos las dos casillas mas a la izquierda para colocar las dos piezas grandes y las dos siguientes para las dos piezas pequeñas. Pero dentro de cada dos columnas (de grandes o de pequeñas), es necesario determinar el orden de valores del atributo restante: el grosor. Determinemos primero grueso y luego fino.

Con este criterio de ordenación las piezas quedarían como sigue:



El modo inverso para este caso requiere un mínimo de dos piezas, por ejemplo:



El total de ordenaciones posibles en esta cuadrícula es ocho

**Forma y grosor**

Ahora se determinan seis piezas entre las que los atributos variables son, a lo sumo dos: color y tamaño. Ejemplo: los triángulos finos.

Cuadrículas utilizables: 1 x 6, 2 x 3

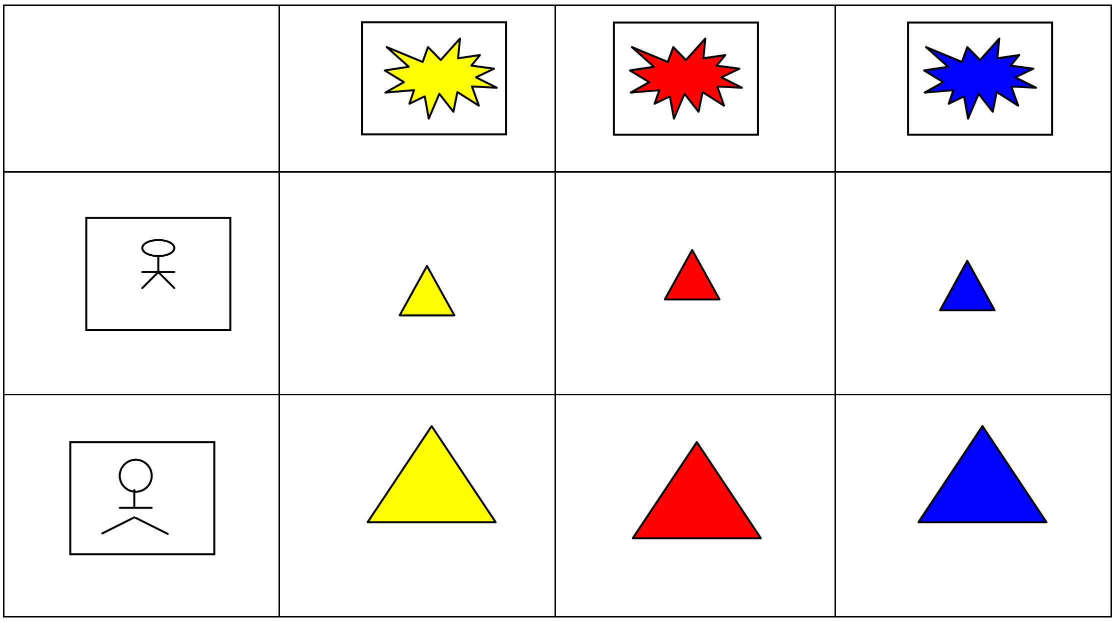
Cuadrícula 2 x 3

Las dos filas para el atributo variable bivalente: tamaño (2 posibilidades)

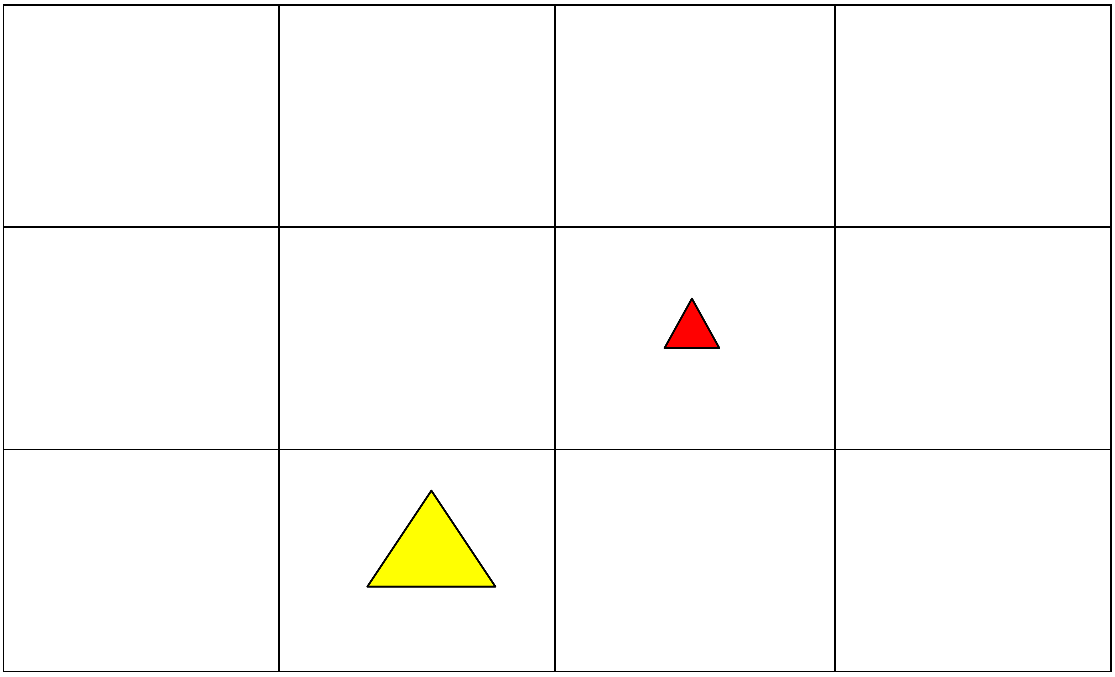
Las tres columnas para el atributo trivalente: color (6 posibilidades). Total 12 criterios de ordenación distintos sobre este tipo de cuadrícula.

Para la ordenación en filas: primero pequeño, luego grande y

Para la ordenación en columnas dada por: primero amarillo, luego rojo y luego azul, el aspecto de la cuadrícula sería:



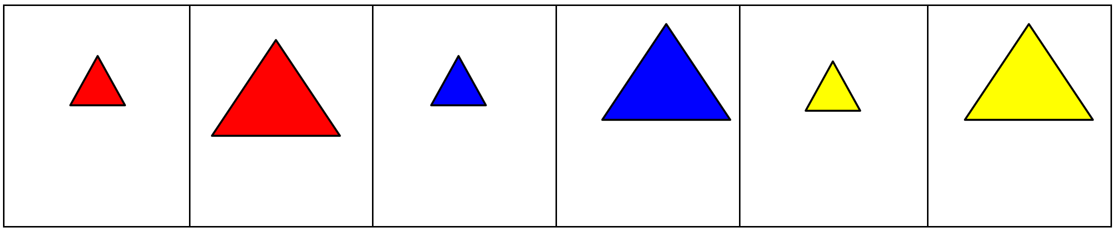
En modo inverso requiere dejar como mínimo dos piezas, por ejemplo:



<u>Cuadrícula 1 x 6</u>

Ahora hay un total de 2 x 6 x 2 = 24 posibles criterios de ordenación distintos.

Para la ordenación: primero color en la forma: R, Az, Am, y luego tamaño en la forma: P, G, el aspecto de la cuadrícula sería:



**Forma y tamaño**

En este caso vale todo lo dicho para el apartado anterior, cambiando grosor por tamaño.

**Color y grosor**

Se determinan ocho piezas entre las que pueden darse diferencias como máximo en dos atributos: forma y tamaño.

Las cuadrículas utilizables en este caso serían 2 x 4 ó 1 x 8. Siempre consideramos la misma cuadrícula cuando esta se sitúa en posiciones de 90º de giro.

<u>Cuadrícula 2 x 4</u>

Dos filas para el tamaño (como siempre con dos posibilidades)
Cuatro columnas para la forma en cualquiera de sus 24 posibilidades.
Posibles ordenaciones: 48.

<u>Cuadrícula 1 x 8</u>

Primer atributo según dos posibilidades, como cada uno de los dos atributos intervinientes tienen 2 y 24 posibilidades respectivamente, son posibles 96 ordenaciones diferentes.

**Color y tamaño**

Igual que en el apartado A.4.2.2.4, sustituyendo tamaño por grosor.

**Tamaño y grosor**

Aparecen ahora 12 piezas entren las que varían los atributos color y forma como máximo.

Los tipos de cuadrícula posibles son: 3 x 4 y 1 x 12.

<u>Cuadrícula 3 x 4</u>

Las tres filas se destinan al color, de acuerdo a sus 6 posibilidades.
Las cuatro columnas a la forma, de acuerdo a sus 24 posibilidades.
Total de posibles ordenaciones sobre esta cuadrícula: 6 x 24 = 144.

<u>Cuadrícula 1 x 12</u>

Doble número de opciones que en la cuadrícula 3 x 4.

**3.3.2.3. Clases definidas por conjunción de tres atributos**

Las piezas determinadas de este modo se diferencian entre sí en un único atributo por lo que sus ordenaciones obedecen únicamente a criterios de seriación de acuerdo con los valores de cada uno de los atributos. Estos criterios de seriación ya han sido vistos en el apartado correspondiente y tienen como objetivo principal reconocer el atributo variable de que se trate. Por tanto, las piezas así generadas no tienen valor para ordenaciones en el sentido en que se tratan en este apartado.

**4. Juegos de seriación**

Las actividades de seriación consisten en la colocación en hilera de las piezas de acuerdo con determinadas reglas de igualdad o diferencia de atributos entre piezas consecutivas.

El planteamiento de las reglas en términos de diferencias o en términos de igualdades no modifica los contenidos propios de cada actividad (por ejemplo la regla: "tener un solo atributo igual", es recíproca de la regla: tener los otros tres diferentes pero, sí son diferentes desde el punto de vista de los razonamientos que ponen en juego: unos en términos de afirmaciones (o igualdades) y otros en términos de negaciones (o diferencias) y ello tanto en el modo directo como en el inverso.

Todos los juegos de seriación son estructuralmente iguales y vienen determinados de la siguiente forma:

***Contenido***: Elaborar una hilera con las piezas de modo que entre cada dos piezas consecutivas exista una diferencia prefijada de atributos.
***Modo directo***: Se explicitan las reglas que ha de seguir la seriación.
***Modo inverso***: Se elabora una seriación sin explicitar las reglas, el niño debe continuarla.

Dependiendo de los atributos usados, el número de piezas que pueden formar parte de la serie es mayor o menor.

Podemos sistematizar las actividades de seriación en función de la variación o no del número de diferencias empleado en la enunciación de la regla. Dada la reciprocidad entre igualdades y diferencias en atributos, usamos para describirlos siempre los enunciados en términos de diferencias. Tenemos así:

- B.1.- Seriaciones con un número fijo de diferencias, y
- B.2.- Seriaciones con un número variable de diferencias.

En Dienes y Golding (1987:21 y 97) se relatan actividades de seriación con un número fijo de diferencias no vinculadas a atributos concretos, otro ejemplo de seriación en este texto, se refiere a aquellas formadas con un número de diferencias rítmicamente variable (página 100). Kothe (1989) desarrolla seriaciones con diferencias vinculadas a un mismo atributo a través de la permutación de códigos de valores.
Todas ellas se presentan únicamente en modo directo.

### 4.1. Seriaciones con un número fijo de diferencias

Pueden practicarse tres tipos de seriación diferentes:

4.1.1.- Seriaciones en que el número de diferencias establecido está vinculado a los mismos atributos.
4.1.2.- Seriaciones en que el número de diferencias establecido no está vinculado a atributos concretos.
4.1.3.- Seriaciones en que el número de diferencias establecido está vinculado a distintos atributos en cada paso.

#### 4.1.1. Seriaciones en que el número de diferencias establecido está vinculado a los mismos atributos

Las reglas de formación pueden hacer referencia a uno, dos, tres o a los cuatro atributos.

**Una sola diferencia**

Las seriaciones que hacen referencia a un solo atributo son las relativas a la introducción de los distintos valores y se aludió a ellas en el apartado correspondiente a Proposiciones Simples definiciones simples.

A estas series responden criterios como: “Formar una serie de manera que cada pieza sea distinta de la anterior sólo en forma (respectivamente color, ó tamaño, ó grosor)”.

Aquí se fija un sólo atributo de diferencia y este atributo es siempre el mismo durante toda la seriación.

Son, por tanto, cuatro las posibles:

1.- diferencia sólo en forma,

2.- diferencia sólo en color,

3.- diferencia sólo en tamaño y

4.- diferencia sólo en grosor.

Son equivalentes a las series planteadas bajo el criterio: “Formar una serie de manera que cada pieza sea igual a la anterior sólo en color, grosor y tamaño (respectivamente tamaño, grosor y color, color, grosor y forma o color tamaño y forma)”.

**Dos diferencias**

Con dos diferencias sólo, son posibles seis series diferentes:

1- diferencias en forma y color sólo,

2.- diferencias en forma y tamaño sólo,

3.- diferencias en forma y grosor sólo,

4.- diferencias en color y tamaño sólo,

5.- diferencias en color y grosor sólo y

6.- diferencias en tamaño y grosor sólo.

Cada una de ellas puede enunciarse en términos recíprocos de igualdades respectivamente como:

1.- igualdad en tamaño y grosor sólo,

2.- igualdad en color y grosor sólo,

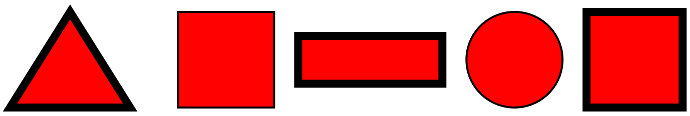
3.- igualdad en color y tamaño sólo,

4.- igualdad en forma y grosor sólo,

5.- igualdad en forma y tamaño sólo y

6.- igualdad en color y forma sólo.

Por ejemplo, la siguiente serie responde a las reglas de tipo 3 tanto en términos de diferencias como de igualdades:



**Tres diferencias**

Con tres diferencias sólo, son posibles cuatro:

- 1. diferencias en forma, color y tamaño sólo,
- 2. diferencias en forma, color y grosor
- 3. diferencias en forma, tamaño y grosor sólo
- 4. diferencias en color, tamaño y grosor sólo.

Cualquiera de ellas se puede formular de modo afirmativo como:

1.- igualdad en grosor sólo,

2.- igualdad en sólo tamaño,

3.- igualdad en color sólo y

4.- igualdad en forma sólo.

La siguiente serie es definible en cualquiera de las formas 2:

**4.1.2. Seriaciones en que el número de diferencias establecido no está vinculado a atributos concretos**

Los criterios que definen las reglas de seriación, no hacen referencia a ningún atributo concreto y tienen enunciados del tipo: “cada pieza se diferencia de la anterior en un (respectivamente dos, tres o cuatro) atributos”.

Las seriaciones que en los textos de referencia se denominan juegos de los cuadros o dominó que se practican sobre cuadros de doble entrada, son seriaciones de tres diferencias de las cuales dos de ellas se refieren a una pieza, la situada sobre la vertical y, la tercera a otra pieza, la situada sobre la horizontal.

Son posibles cuatro criterios diferentes:

1.- Con una diferencia sólo

2.- Con dos diferencias sólo

3.- Con tres diferencias sólo

4.- Con cuatro diferencias. En este caso con las 48 piezas se generan dos series diferentes.

Análogamente los criterios anteriores son formulables en términos de igualdades en la forma:

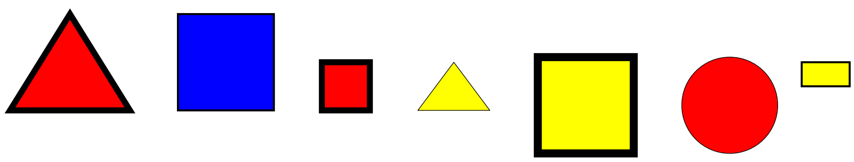
1.- Con tres igualdades sólo,

2.- Con dos igualdades sólo,

3.- Con una igualdad sólo

4.- Con ninguna igualdad.

El siguiente es un ejemplo de las series definibles en la forma 3:



### 4.1.3.- Seriaciones en que el número de diferencias establecido está vinculado a distintos atributos en cada paso

Son series que, como las anteriores, tienen determinado el número de diferencias pero, estas diferencias varían entre cada dos piezas consecutivas de forma prefijada.

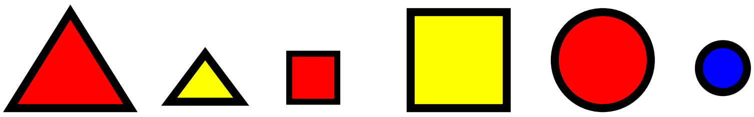
Por ejemplo con dos diferencias para toda la serie:

1º.- diferencia en tamaño y color sólo

2º.- diferencia en color y forma sólo

3º.- diferencia en tamaño y color sólo ...

La siguiente es un ejemplo de este caso:



## 4.2.- Seriaciones con un número de diferencias variable

En estas seriaciones el criterio recurrente se encuentra en el número de diferencias existente entre cada pieza y la siguiente o siguientes.

Se trata de series con un número de diferencias rítmicamente variable.

Estas diferencias pueden estar vinculadas a atributos concretos o no.

### 4.2.1.- Vinculadas o no a atributos concretos

**Vinculadas a atributos concretos**

Es preciso fijar el ritmo de variación del número de atributos. Por ejemplo: 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3....

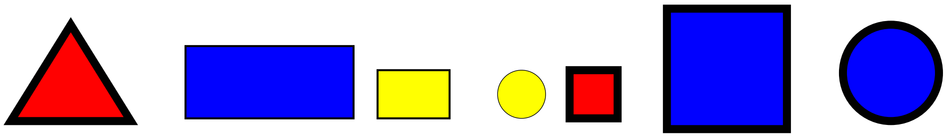
Además hay que fijar los atributos concretos en que se dan las diferencias (o igualdades). Por ejemplo:

Tres diferencias en: color, forma y grosor

Dos diferencias en: color y tamaño

Una diferencia en: forma.

La siguiente es un ejemplo de una seriación con estas reglas:

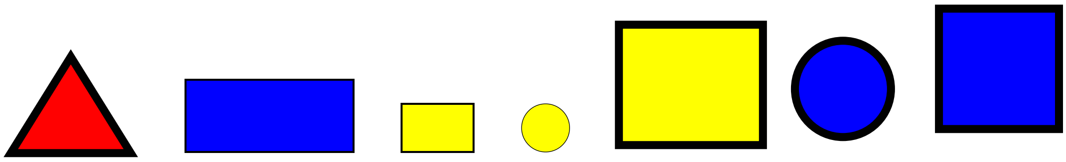


**No vinculadas a atributos concretos**

Es preciso fijar el ritmo de variación del número de atributos. Se establece así un número de diferencias rítmicamente variable. Supongamos, como antes: 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3...

Ahora estas diferencias no están vinculadas a atributos concretos.

La anterior, es un ejemplo de este tipo de serie. También esta otra:



Estas reglas complejas pueden mantenerse a la vista de los niños con la secuencia de tarjetas de atributo adecuadas a cada caso.

**5.- Juegos de ordenación**

En nuestra cultura la direccionalidad horizontal está determinada en el sentido izquierda-derecha y la vertical por el sentido arriba-abajo.

Las actividades de ordenación responden a la práctica de las propiedades que definen una relación matemática de orden cuando se vincula el sentido preferencial de ordenación de acuerdo con los que corresponden a nuestra cultura. Se definen como criterios de preferencia o anterioridad y se corresponden con la colocación izquierda-derecha, para ordenaciones horizontales y arriba- abajo para ordenaciones verticales.

Una vez elegido el conjunto de piezas a ordenar, los atributos variables entre ellas, y después sus valores, determinan los criterios preferenciales de ordenación.
Kothe (1989) desarrolla algunas ordenaciones mediante árboles modo directo.

En este apartado se desarrollan dos modos de poner en práctica ordenaciones: las ordenaciones en vertical y mediante árboles.

***Contenido***: Disponer las piezas en fila ó columna, de acuerdo con criterios preferenciales de ordenación.
***Modo directo***: Una vez seleccionadas las piezas, se enuncian los criterios preferenciales de ordenación, en primer lugar por atributo, después, dentro de cada atributo, por valores.
***Modo inverso***: Una ordenación se presenta realizada, se trata de descubrir los criterios preferenciales de ordenación seguidos.
Estos ejercicios inversos sobre ordenaciones horizontales son practicables presentando el número mínimo de piezas, en su lugar.

### 5.1. Ordenaciones verticales

Se trata ahora de practicar criterios de ordenación, teniendo las piezas situadas en torre, es decir, una sobre otra. Esta actividad introduce la tercera dimensión espacial con un tratamiento análogo a las dos dimensiones del plano.

Elegidas las piezas para ordenar a través de los atributos, es posible ordenarlas utilizando el máximo de relaciones. Así, una vez seleccionado el conjunto y determinados los criterios de preferencia, cada pieza tendrá un lugar, y sólo uno, dentro de la torre.

Puesto que la ordenación es en vertical, fijado un primer atributo como preferente, la torre quedará subdividida de acuerdo con este atributo, verticalmente, agrupando las piezas con iguales valores en el mismo. Como quiera que se trata de ordenar en vertical, los valores preferentes del atributo preferente ocuparán las posiciones más altas. Esto añade una dificultad grande para los niños, puesto que para construir la torre han de comenzar por colocar las piezas de más abajo, en la base, que se corresponderían con las relativas a valores menos preferentes, por lo que es conveniente adoptar el criterio inverso al del sentido vertical, prevaleciendo sobre la convencionalidad el desarrollo de la capacidad de ordenación de acuerdo con criterios determinados.

Puesto que se trata de ordenar piezas de acuerdo con los atributos, han de elegirse subconjuntos de elementos relacionados y estos resultan ser, las clases de equivalencia determinadas por cada una de las relaciones de equivalencia mencionadas más arriba. Veamos cómo es posible ordenar, con el máximo de relaciones cada una de las clases de equivalencia posibles.

### 5.1.1. - Clases de equivalencia definidas por un sólo atributo

Las clases de equivalencia ordenables en este caso, están compuestas por piezas que se diferencian en un máximo de tres atributos. El número de ordenaciones, depende de cuales sean los atributos diferenciadores.

### Forma

Este conjunto, que queda definido por la propiedad "tener la misma forma". Está, por tanto, constituido por piezas que se diferencian, como máximo, en: color, tamaño y grosor habiendo un total de doce piezas.

Son posibles un total de 6 x 6 x 2 x 2 = 144 ordenaciones.

Pongamos un ejemplo de una de ellas, para una cualquiera de las clases.
Consideremos, por ejemplo, como primer a tributo de ordenación el grosor, concretamente en la forma: primero fino y luego grueso. Esto hará, con el criterio que se ha explicado antes, que el total de las doce piezas quede en primer lugar subdividido en: las seis de abajo finas y las seis de encima gruesas.

Si el segundo criterio de ordenación es el color, por ejemplo, de acuerdo con la secuencia: amarillo, azul, rojo, tendríamos las seis piezas de abajo distribuidas ahora según el color de modo que las dos piezas finas primeras serían las amarillas, la tercera y la cuarta azules y la quinta y sexta, rojas. Lo mismo para el grupo superior de las seis piezas gruesas.

El tercer criterio, determinará unívocamente el lugar de cada pieza porque disponemos del atributo tamaño como diferencial entre piezas, si se establece el orden: primero grande y, luego pequeño, tendremos en la primera posición la pieza fina amarilla grande, segunda, la fina amarilla pequeña, tercera la fina azul grande, cuarta la fina azul pequeña, quinta la fina roja grande y sexta la fina roja pequeña. Y la misma situación para las piezas gruesas, de modo que la pieza siete sería la gruesa amarilla grande, ocho: la gruesa amarilla pequeña, nueve, la gruesa azul grande, diez: gruesa azul pequeña, once: gruesa roja grande y doce: gruesa roja pequeña.

**Color**

Las piezas para ordenar son todas aquellas que tienen igual color.
El conjunto de piezas está formado por un total de 16, Las posibles diferencias entre ellas están como máximo en: forma, tamaño y grosor.
El número de ordenaciones posibles es, por tanto: 6 x 24 x 2 x 2 = 576.

**Tamaño**

Las piezas que se ordenan son las que tienen el mismo tamaño.
Tenemos un total de 24 piezas, con un máximo de diferencias entre ellas en: forma, color y grosor. Por tanto, son posibles en total de 6 x 24 x 6 x 2 = 1728 criterios diferentes de ordenación.

**Grosor**

Igual que para el caso anterior, sustituyendo tamaño por grosor y recíprocamente.

Puede observarse la cantidad de posibilidades que ofrece simplemente esta actividad que permite innovar continuamente, no repetirse nunca si se observa una cierta sistematización y, sin embargo, requiere siempre de la ejercitación de los criterios relacionales de ordenación puesto que nunca la situación de las piezas será la misma con dos criterios diferentes. Es decir, no se puede memorizar, hay que relacionar.

### 5.1.2. Clases de equivalencia definidas por conjunción de dos atributos

**Forma y color**

El número de elementos que corresponde a cada clase de equivalencia es de cuatro. Las diferencias entre los cuatro elementos están en grosor y tamaño como máximo. Los modos de ordenación son 2 x 2 x 2 = 8.

**Forma y tamaño ( ó forma y grosor)**

En cualquiera de los dos casos, el número de elementos de cada clase es de seis. Las diferencias entre ellos están en color y grosor (en color y tamaño, respectivamente) Los modos posibles de ordenación, en ambos casos son 2 x 6 x 2 = 24.

**Color y grosor ( ó color y tamaño)**

Los ocho elementos de cada clase, se diferencian entre sí en forma y tamaño (respectivamente, forma y grosor). Por tanto los posibles criterios distintos de ordenación son, para ambos casos 2 x 24 x 2 = 96.

**Grosor y tamaño**

Cada clase de equivalencia está compuesta por 12 elementos que, entre sí se pueden diferenciar en color y forma, como máximo. Esto permite 2 x 6 x 24 = 288 criterios distintos de ordenación.

## 5.2. - Ordenación en diagramas de árbol

La colocación se hace en horizontal, esto supone mayor facilidad para niños pequeños y, además permite expresar los criterios de ordenación mediante las tarjetas de valor que se van situando de arriba abajo.

De acuerdo con los atributos, los distintos conjuntos que se generan son los determinados en las actividades anteriores de ordenación en torres.

Veamos como pueden realizarse los ejercicios directo e inverso con un ejemplo concreto relativo a cada uno de los casos anteriores.

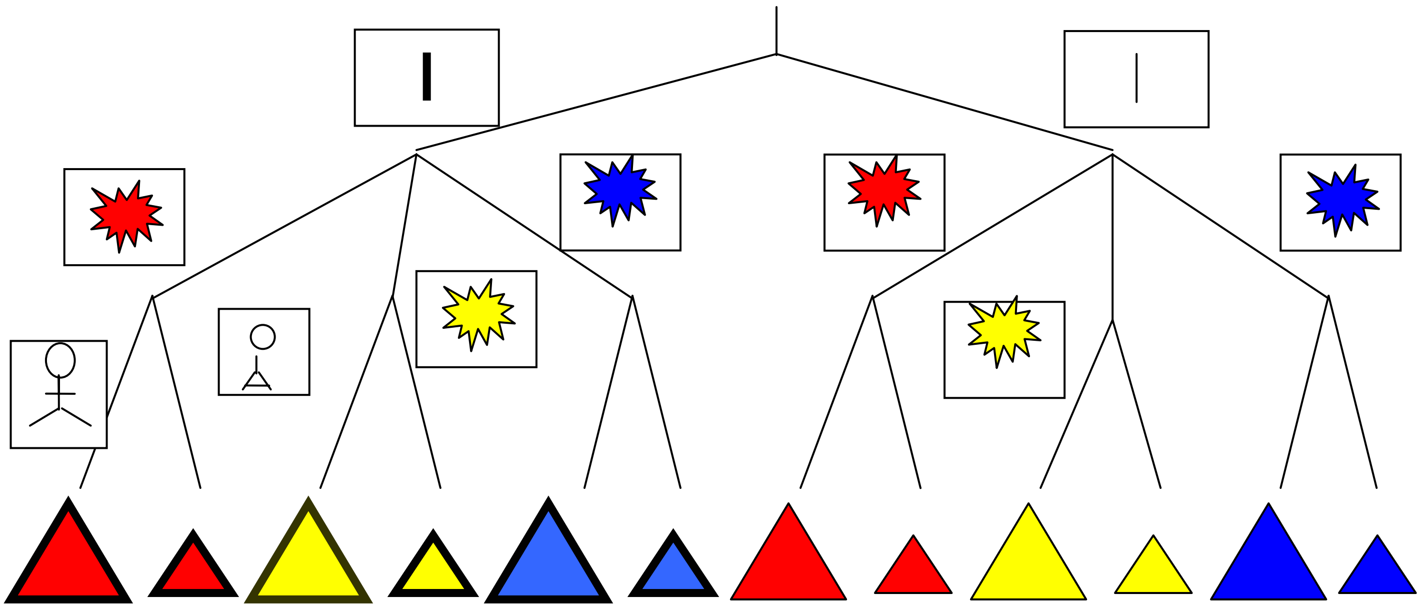
### Forma

Supongamos que se quieren ordenar los triángulos.
Atributos variables: color, grosor y tamaño.

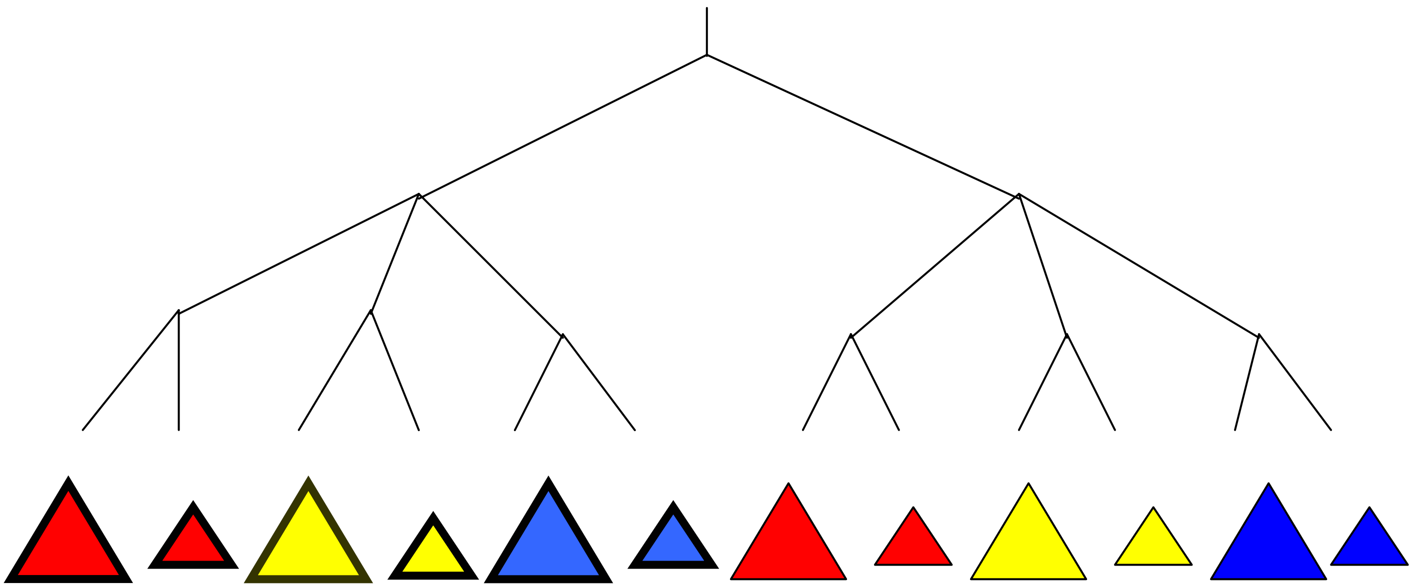
Criterios de ordenación: primero por grosor, en la forma: primero grueso y luego fino; segundo por color: primero rojo, luego amarillo y luego azul; tercero por tamaño: primero grande y luego pequeño.

Modo directo: se construye la hilera siguiente siguiendo las indicaciones del árbol de ordenación en una cualquiera de sus 144 ordenaciones posibles.

Por ejemplo:

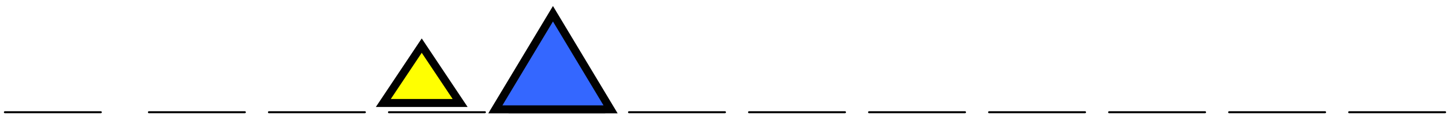


El modo inverso puede practicarse de diversas formas, una de ellas consiste en presentar la hilera de piezas y el árbol sin tarjetas. El niño tiene que encontrar las tarjetas que corresponden en cada lugar:

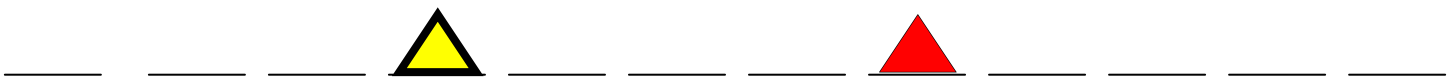


O también se pueden eliminar piezas de la hilera, hasta dejar, en el caso más complicado, el mínimo necesario para descubrir el orden. Este número mínimo, depende de las piezas. En el caso del ejemplo, bastaría con dejar únicamente dos, aunque no dos cualquiera.

La presencia de las dos piezas siguientes:



Serían suficientes para indicar cómo se ordenó y recolocar cada pieza en su lugar.
Sin embargo estas otras dos:



Podrían indicar más de una ordenación.

**Color**

Todas las piezas de igual color, en total 16, tienen como atributos variables de clase: el tamaño, el grosor y la forma.
En este caso, para el caso del ejercicio en modo inverso, es preciso dejar al menos tres piezas de diferente forma.

**Grosor (o Tamaño)**

Las clases definidas por igualdad en cualquiera de los dos atributos, en total 24, tienen variables los atributos: color, forma y tamaño (respectivamente grosor).
El modo inverso, en ambos casos, en la versión más compleja, requiere dejar presentes tres piezas de formas diferentes.

## 6. Juegos de transformación

Uno de los conceptos básicos en matemáticas es el de transformación.

De modo formal, las transformaciones se analizan algebraicamente mediante aplicaciones. A través de aplicaciones trasferimos el estudio de propiedades geométricas y algebraicas, buscando otros referentes o modelos que, conservando su misma estructura y propiedades lo hacen más sencillo o claro e incluso como transformación se entienden las operaciones formales.

La estructura de una transformación en general, requiere la existencia de unos elementos originales sobre los que actuar, la determinación explícita del modo en que se actúa y el resultado de tal actuación. Se suele referenciar en la literatura relativa al tema como: estado inicial, operador y estado final respectivamente.

Los estados inicial y final en matemáticas pueden tener naturalezas diferentes o no, en cambio el operador tiene siempre el mismo sentido de transformador.

Las transformaciones que conservan la univocidad en ambos sentidos, esto es, aquellas en que partiendo de dos elementos originales permiten anticipar y determinar que hay un único elemento final (también llamado imagen) y, al revés, es decir, partiendo de un elemento final o imagen, determinar unívocamente de qué elemento o elementos es imagen mediante la transformación de que se trate. Esta univocidad bidireccional es posible cuando la transformación tiene carácter biyectivo.

Pero la propiedad de biyectividad es un tipo de relación particular entre dos estructuras o conjunto de elementos que se inscribe dentro de un tipo de relación más general que puede ser de tipo correspondencia, de tipo aplicación, de tipo aplicación inyectiva y de tipo aplicación sobreyectiva. Sólo cuando hay una relación de tipo aplicación inyectiva y además sobreyectiva se da la unicidad en el sentido biyectivo pero, cualquiera de los tipos anteriores supone una transformación y, cada uno de estos tipos traslada sobre los objetos originales un resultado diferente con sus propias características. Además, un mismo criterio transformador tiene unas propiedades diferentes dependiendo de los elementos a los que se aplica y de aquellos en los que se proyecta, es decir, dependiendo de los conjuntos origen e imagen. Así pues, la transformación globalmente sólo está bien definida cuando lo están los tres elementos que intervienen.

A través de los bloques lógicos pueden plantearse una gran cantidad de actividades que impliquen la práctica de las ideas implícitas en el concepto de transformación.

Los juegos de transformación que se desarrollan en Dienes y Golding (1987: 136 y siguientes), siempre planteados en modo directo, sólo hace referencia al transformador y nunca a los elementos origen y final.

Nosotros vemos cómo pueden plantearse estas actividades teniendo en cuenta los tres elementos en juego además del modo inverso asociado en cada una de ellas.

Para este grupo de actividades tendremos:

***Contenido***: Transformaciones establecidas entre conjuntos de piezas definidos por sus atributos y criterios de transformación determinados por los atributos.
***Modo directo***: Aplicación de un criterio de transformación explícito sobre diversos conjuntos inicial y final.
***Modo inverso***: Sobre conjuntos origen e imagen dados, descubrir el criterio de transformación aplicado.

Con el fin de definir los criterios de transformación de forma sistematizada, en función de los atributos, supondremos que los conjuntos inicial y final son las 48 piezas.

### 6.1. Correspondencias

Las correspondencias requieren únicamente un criterio de asociación de elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto.

Pueden establecerse, por ejemplo con dos cajas de piezas de modo que a piezas de una caja se haga corresponder una o más de una pieza de la otra caja.

Con una sola caja, puede subdividirse el total en dos grupos, de modo que algunas piezas del subconjunto inicial tengan una correspondiente, o más de una, en el conjunto final.

El criterio de transformación afecta sólo a algunos elementos o bien hay elementos del conjunto inicial que tienen mas de una imagen.

Esto es lo que caracteriza una correspondencia: o bien no todos los elementos tienen imagen o, si todos la tienen hay al menos uno que tiene por imagen dos o más elementos del conjunto final.
Son estas características las que han de percibirse en el modo inverso.

#### 6.1.1. Transformaciones unívocas

Las correspondencias que asignan a cada elemento del conjunto inicial uno, y sólo uno en el conjunto final hacen que, por esa unicidad, el elemento imagen esté bien determinado.

Dado que los conjuntos inicial y final no deben ser arbitrarios, sino que han de estar definidos de acuerdo a los atributos, veamos qué transformaciones son aplicables sobre cada uno de los atributos separadamente, que permitan obtener correspondencias de tipo aplicación.

**<u>Transformaciones unívocas en forma (TUF)</u>**

Estas transformaciones suponen igualdad en los restantes atributos.

a) **Sin cambios en los valores**

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo⇒ rectángulo y círculo ⇒ círculo y triángulo ⇒ triángulo

Que constituye la aplicación identidad sobre el atributo forma

b) **Con un cambio en los valores**

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ cuadrado.

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ rectángulo

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ triángulo

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ círculo y triángulo ⇒ cuadrado

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ círculo y triángulo ⇒ rectángulo

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ círculo y triángulo ⇒ círculo

Rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y círculo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ rectángulo

Rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y círculo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ triángulo

Rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y círculo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ círculo

Cuadrado ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ círculo y rectángulo ⇒ cuadrado

Cuadrado ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ círculo y rectángulo ⇒ triángulo

Cuadrado ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ círculo y rectángulo ⇒ círculo

Ninguna de estas transformaciones es inversible

c) **Con dos cambios en los valores**

**c.1. Inversibles**

c.1.1 Cuadrado ⇒ cuadrado, rectángulo ⇒ rectángulo, y círculo ⇔ triángulo

c.1.2 Cuadrado ⇒ cuadrado, círculo ⇒ círculo, y rectángulo ⇔ triángulo

c.1.3 Cuadrado ⇒ cuadrado, triángulo ⇒ triángulo, y rectángulo ⇔ círculo

c.1.4 Rectángulo ⇒ rectángulo, círculo ⇒ círculo, y cuadrado ⇔ triángulo

c.1.5 Rectángulo ⇒ rectángulo, triángulo ⇒ triángulo, y cuadrado ⇔ círculo

c.1.6 Triángulo ⇒ triángulo, círculo ⇒ círculo, y cuadrado ⇔ rectángulo

Todas estas biyecciones son autoinversas.

**c.2. No inversibles**

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ cuadrado y círculo ⇒ cuadrado.

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ rectángulo

Cuadrado ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ triángulo y rectángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ triángulo

Cuadrado ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ triángulo y rectángulo ⇒ cuadrado y círculo ⇒ cuadrado

Cuadrado ⇒ cuadrado y círculo ⇒ círculo y rectángulo ⇒ círculo y triángulo ⇒ círculo.

Cuadrado ⇒ cuadrado y círculo ⇒ círculo y rectángulo ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ cuadrado

Rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y cuadrado ⇒ triángulo y círculo ⇒ triángulo.

Rectángulo ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ triángulo y cuadrado ⇒ rectángulo y círculo ⇒ rectángulo.

Rectángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ círculo y triángulo ⇒ círculo

Rectángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ rectángulo

Triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ círculo y rectángulo ⇒ círculo

Triángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ triángulo y rectángulo ⇒ triángulo.

Ninguna de estas transformaciones es inversible

d) **Con tres cambios en los valores**

**d.1. Inversibles**

d.1.1 cuadrado ⇒ cuadrado, y rectángulo ⇒ triángulo ⇒ círculo ⇒ rectángulo

d.1.2 cuadrado ⇒ cuadrado, y rectángulo ⇒ círculo ⇒ triángulo ⇒ rectángulo

d.1.3 círculo ⇒ círculo, y rectángulo ⇒ cuadrado ⇒ triángulo ⇒ rectángulo

d.1.4 círculo ⇒ círculo, y rectángulo ⇒ triángulo ⇒ cuadrado ⇒ rectángulo

d.1.5 rectángulo ⇒ rectángulo y, cuadrado ⇒ círculo ⇒ triángulo ⇒ cuadrado

d.1.6 rectángulo ⇒ rectángulo y, cuadrado ⇒ triángulo ⇒círculo ⇒ cuadrado d.1.7 triángulo ⇒ triángulo, y rectángulo ⇒ cuadrado ⇒ círculo ⇒ rectángulo

d.1.8 triángulo ⇒ triángulo, y rectángulo ⇒ círculo ⇒ cuadrado ⇒ rectángulo

Las biyecciones (d.1.1 y d.1.2), (d.1.3 y d.1.4), (d.1.5 y d.1.6) y (d.1.7 y d.1.8) son inversas una de otra y de ciclo dos, es decir, una de ellas es la composición de la otra consigo misma.

**d.2. No inversibles**

Cuadrado ⇒ cuadrado y rectángulo ⇒ cuadrado y triángulo ⇒ cuadrado y círculo ⇒ cuadrado.

Rectángulo ⇒ rectángulo y cuadrado ⇒ rectángulo y triángulo ⇒ rectángulo y círculo ⇒ rectángulo.

Triángulo ⇒ triángulo y cuadrado ⇒ triángulo y rectángulo ⇒ triángulo y círculo ⇒ triángulo.

Círculo ⇒ círculo y cuadrado ⇒ círculo y rectángulo ⇒ círculo y triángulo ⇒ círculo.

e) **Con cuatro cambios**

**e.1.- Cambios dos a dos**

e.1.1 Cuadrado ⇔ rectángulo, y círculo ⇔ triángulo

e.1.2 Cuadrado ⇔ círculo, y rectángulo ⇔ triángulo

e.1.3 Cuadrado ⇔ triángulo, y círculo ⇔ rectángulo

Todas las biyecciones son autoinversas.

**e.2.- Cambios cíclicos**

e.2.1.1 Cuadrado ⇒ rectángulo ⇒ círculo ⇒ triángulo ⇒ cuadrado

e.2.1.2 Cuadrado ⇒ triángulo ⇒ círculo ⇒ rectángulo ⇒ cuadrado

e.2.2.1 Cuadrado ⇒ rectángulo ⇒ triángulo ⇒ círculo ⇒ cuadrado

e.2.2.2 Cuadrado ⇒ círculo ⇒ triángulo ⇒ rectángulo ⇒ cuadrado e.2.3.1 Cuadrado ⇒ círculo ⇒ rectángulo ⇒ triángulo ⇒ cuadrado

e.2.3.2 Cuadrado ⇒ triángulo ⇒ rectángulo ⇒ círculo ⇒ cuadrado

Las biyecciones (e.2.1.1 y e.2.1.2) son inversas entre sí, al igual que las (e.2.2.1 y e.2.2.2), (e.2.3.1 y e.2.3.2) de tal modo que cualquiera de ellas coincide con la composición de la otra consigo misma tres veces.

## Transformaciones unívocas en color (TUC).

**a) Sin cambios en los valores**

Rojo ⇒ rojo y amarillo ⇒ amarillo y azul ⇒ azul

Esta aplicación es la identidad sobre el atributo color.

**b) Con un cambio en los valores**

Rojo ⇒ rojo y azul ⇒ azul y amarillo ⇒ rojo.

Rojo ⇒ rojo y azul ⇒ azul y amarillo ⇒ azul.

Rojo ⇒ rojo y amarillo ⇒ amarillo y azul ⇒ rojo.

Rojo ⇒ rojo y amarillo ⇒ amarillo y azul ⇒ amarillo.

Azul ⇒ azul y amarillo ⇒ amarillo y rojo ⇒ amarillo.

Azul ⇒ azul y amarillo ⇒ amarillo y rojo ⇒ azul.

Ninguna de ellas es inversible

c) **Con dos cambios en los valores**

c.1.- Rojo ⇒ rojo y azul ⇔ amarillo

Azul ⇒ azul y rojo ⇔ amarillo

Amarillo ⇒ amarillo y rojo ⇔azul

Todas ellas son autoinversas.

c.2.- Rojo $\Rightarrow$ rojo y amarillo $\Rightarrow$ rojo y azul $\Rightarrow$ rojo

Amarillo $\Rightarrow$ amarillo y rojo $\Rightarrow$ amarillo y azul $\Rightarrow$ amarillo

Azul $\Rightarrow$ azul y rojo $\Rightarrow$ azul y amarillo $\Rightarrow$ azul.

Rojo $\Rightarrow$ rojo y amarillo $\Rightarrow$ rojo y azul $\Rightarrow$ amarillo

Amarillo $\Rightarrow$ amarillo y rojo $\Rightarrow$ amarillo y azul $\Rightarrow$ rojo

Rojo $\Rightarrow$ rojo y azul $\Rightarrow$ rojo y amarillo $\Rightarrow$ azul

Rojo $\Rightarrow$ azul y azul $\Rightarrow$ azul y amarillo $\Rightarrow$ rojo

Amarillo $\Rightarrow$ amarillo y azul $\Rightarrow$ amarillo y rojo $\Rightarrow$ azul

Amarillo $\Rightarrow$ azul y azul $\Rightarrow$ azul y rojo $\Rightarrow$ amarillo

Ninguna de ellas es inversible.

d) **Con tres cambios en los valores ó cíclicas**

d.1: Rojo $\Rightarrow$ azul $\Rightarrow$ amarillo $\Rightarrow$ rojo

d.2: Rojo $\Rightarrow$ amarillo $\Rightarrow$ azul $\Rightarrow$ rojo

Estas biyecciones son inversas una de otra y cíclicas de periodo dos, esto es, su inversa coincide con la composición de la transformación consigo misma dos veces.

## Transformaciones unívocas en tamaño (TUT)

a) **Sin cambios en los valores**

Grande $\Rightarrow$ grande y pequeño $\Rightarrow$ pequeño

Esta es la aplicación identidad sobre el atributo tamaño.

b) **Con un cambio en los valores**

Grande $\Rightarrow$ grande y pequeño $\Rightarrow$ grande

Grande $\Rightarrow$ pequeño y pequeño $\Rightarrow$ pequeño

Ninguna de estas dos transformaciones es inversible

c) **Con dos cambios**

Grande ⇔ Pequeño

Esta biyección es autoinversa.

**Transformaciones unívocas en grosor (TUG)**

a) **Sin cambios en los valores**

Grueso ⇒ grueso y fino ⇒ fino

Esta es la aplicación identidad sobre el atributo grosor.

b**) Con un cambio**

Grueso ⇒ grueso y fino ⇒ grueso

Grueso ⇒ fino y fino ⇒ fino.

Ninguna de estas dos transformaciones es inversible

c) **Con dos cambios**

Grueso ⇔ Fino

Esta biyección es autoinversa.

### 6.2. Aplicaciones

Ahora buscaremos correspondencias de modo que todos los elementos del conjunto inicial tengan un correspondiente, o imagen, y sólo uno en el conjunto final. Será por tanto necesario marcar algún criterio determinante tanto para las piezas que compongan los conjuntos inicial y final, como para el criterio de asociación.

Consideremos, por el momento, que se utiliza una sola caja de piezas y sistematizaremos las actividades sobre aplicaciones mediante la elección de los conjuntos inicial y final.

Es importante hacer notar al niño cómo, en el caso de las aplicaciones, todos los elementos del conjunto inicial tienen una sola imagen en el final, pero ocurrirá que más de un elemento del conjunto inicial tiene por imagen la misma pieza en el conjunto final y que, en el conjunto final quedan piezas que no son imagen de ningún original.

### 6.2.1. No inyectivas ni sobreyectivas

**a) Conjunto inicial definido por un solo atributo**

**Forma**

Los conjuntos inicial y final son clases de equivalencia definidas por la relación "tener igual forma" (total 12 piezas)

Las correspondencias que cumplen la condición de aplicación sólo (esto es: no son inyectivas ni sobreyectivas) son las más arriba descritas y correspondientes a los siguientes apartado:

- Las composiciones de TUGb) con TUCa) ó TUCc.1) ó TUCd) y, TUTa) ó TUTc).
- Las composiciones de TUTb) con TUCa) ó TUCc.1) ó TUCd) y, TUGa) ó TUGc).
- Las composiciones de TUCc.2) con TUTa) ó TUTc) y, TUGa) ó TUGc).
- Las composiciones de TUCb) con TUTa) ó TUTc) y, TUGa) ó TUGc).
- Las composiciones de TUGb), TUTb) y TUCc.2).
- Las composiciones de TUGb), TUTb) y TUCb).

**Color**

Los conjuntos inicial y final son clases de equivalencia definidas por la relación "tener igual color" (total 16 piezas).

Podemos definir aplicaciones no inyectivas ni sobreyectivas, considerando las siguientes transformaciones:

- Las composiciones de aplicaciones biyectivas en forma y tamaño con las no biyectivas en grosor (TUGb))
- Las composiciones de aplicaciones biyectivas en forma y grosor con las no biyectivas en tamaño (TUTb))
- Las composiciones de aplicaciones biyectivas en tamaño y grosor con las no biyectivas en forma (TUFb), TUFc.2), TUFd.2) ó TUFe))
- Las composiciones de aplicaciones biyectivas en forma, con las no biyectivas en grosor y las no biyectivas en tamaño
- Las composiciones de aplicaciones biyectivas en tamaño con las no biyectivas en grosor o en forma
- Las composiciones de aplicaciones biyectivas grosor con las no biyectivas en tamaño y en forma
- Las composiciones de aplicaciones no inversibles en forma, no inversibles en tamaño y no inversibles en grosor.

**Tamaño**

Los conjuntos inicial y final serán las clases de equivalencia por la relación "tener igual tamaño", por tanto, este atributo no será diferencial entre los elementos de ambos conjuntos (inicial y final) y tampoco puede constituir un elemento optativo de transformación. Las transformaciones posibles serán relativas a los atributos: forma y/ó color y/ó grosor.

Las transformaciones que dan lugar a aplicaciones no inyectivas ni suprayectivas son:

- Las composiciones de cualquiera de las transformaciones en forma contenidas en los apartados TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con cualquiera de las transformaciones en color incluidas en los apartados TUCc.2) ó TUCb), con las transformaciones en grosor TUGb).
- Las composiciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las TUGa) ó TUGc) y/ó con las TUCd) ó TUCc.1) ó TUCa) y/ó las TUGa) ó TUGc)

- Las composiciones de TUGb) con las TUCd) ó TUCc.1) ó TUCa) y/ó cualquiera de las transformaciones de los apartados TUFe) ó TUFd.1) ó TUFc.1) ó TUFa).
- Las composiciones de los apartados TUCc.2) ó TUCb), con cualquiera de las TUFe) ó TUFd.1) ó TUFc.1) ó TUFa) y/ó con las TUGa) ó TUGc)
- Las composiciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las TUGb) con las TUCd) ó TUCc.1) ó TUCa).
- Las composiciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) y TUCc.2) ó TUCb) con las TUGa) ó TUGc)
- Las composiciones delas transformaciones apartados TUCc.2) ó TUCb) y TUGb) con las TUFe) ó TUFd.1) ó TUFc.1) ó TUFa).

**Grosor**

Igual que para el caso a3) sustituyendo tamaño por grosor y las referencias a los conjuntos de transformaciones TUG por los mismos apartados de TUT.

**b) Conjuntos inicial y final definidos por la conjunción de dos atributos**

**Forma y color**

Los conjuntos inicial y final están constituidos por dos de las clases de equivalencia definidas mediante la relación "tener igual forma y color".

Las transformaciones que dan lugar a aplicaciones no inyectivas ni sobreyectivas son:

- Las composiciones de las transformaciones de TUGb) con las de TUTb).
- Las composiciones de las transformaciones de TUTa) ó TUTc) con las de TUGb).
- Las composiciones de las transformaciones de TUTb) con las de TUGa) ó TUGc).

**Forma y tamaño**

Los conjuntos inicial y final se definen por estar constituidos por piezas, en cada caso, de igual forma y tamaño. Las variables sobre las que se pueden aplicar criterios de transformación serán: color y grosor. Por tanto, las transformaciones que dan lugar a aplicaciones no inyectivas ni suprayectivas son:

- Las composiciones de TUCb) ó TUCc.2) con las de TUGb).
- Las composiciones de TUCa) ó TUCc.1) ó TUCd) con las de TUGb)
- Las composiciones de TUCb) ó TUCc.2) con las de TUGa) ó TUGc).

**Forma y grosor**

Como en el apartado b.2), cambiando grosor por tamaño y las referencias a los grupos de transformaciones TUG por sus correspondientes TUT.

**Color y tamaño**

Los conjuntos inicial y final están compuestos por piezas de igual color y tamaño.

Las posibles transformaciones están en forma y grosor y serán:

- Las composiciones de transformaciones de los grupos TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las de TUGb).
- Las composiciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las de TUGa) ó TUGc).
- Las composiciones de TUGb) con las de TUFa) ó TUFc.1) ó TUFd.1) ó TUFe).

**Color y grosor**

Los conjuntos inicial y final están compuestos por piezas de igual color y grosor, por tanto las transformaciones viables lo serán sobre forma y/ó tamaño.

Las transformaciones posibles son:

- Las composiciones de transformaciones de los grupos TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las de TUTb).
- Las composiciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las de TUTa) ó TUTc).
- Las composiciones de TUTb) con las de TUFa) ó TUFc.1) ó TUFd.1) ó TUFe).

**Tamaño y grosor**

Los conjuntos inicial y final están formados por piezas de igual tamaño y grosor.

Las transformaciones posibles serán sobre forma y color. En este caso:

- Las composiciones de las transformaciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las de TUCb) ó TUCc.2).
- Las composiciones de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb) con las de TUCa) ó TUCc.1) ó TUCd).
- Las composiciones de TUFa) ó TUFc.1) ó TUFd.1) ó TUFe) con las TUCb) ó TUCc.2).

**c) Conjuntos definidos por la conjunción de tres atributos**

**Forma, color y tamaño**

Las piezas que forman ambos conjuntos son las clases de equivalencia determinadas por la relación "tener igual forma, color y tamaño" y, por tanto sólo tienen sentido las transformaciones en grosor del grupo TUGb).

**Forma, tamaño y grosor**

En este caso el único criterio que tiene sentido es una transformación en color. Son válidas como transformaciones que definen aplicaciones no inyectivas ni suprayectivas las de los grupos TUCb) ó TUCc.2).

**Color tamaño y grosor**

En este caso, podemos emplear transformaciones en forma. Siendo válidas las de TUFd.2) ó TUFc.2) ó TUFb).

**Forma, color y grosor**

Las piezas que forman ambos conjuntos son las clases de equivalencia determinadas por la relación "tener igual forma, color y grosor" y, por tanto sólo tienen sentido las transformaciones en tamaño del grupo TUTb).

### 6.2.2. Actividades en modo inverso de aplicaciones no inyectivas ni sobreyectivas

Como puede verse, el número de ejercicios diferentes practicables es muy grande, lo que permite plantear siempre situaciones nuevas que, por tanto, siempre precisan la aplicación de razonamientos distintos.

En todos los casos, las actividades inversas deben practicarse tras la directa al principio, después, como en el caso de todas las inversas, cuando el niño está suficientemente familiarizado, no necesariamente el orden tiene que ser este.

En todo caso, se mostrarán las parejas que resultan emparejadas tras aplicar uno cualquiera de los criterios y, consistirán en determinar la transformación que han experimentado los elementos de partida. Es muy importante hacer notar que, si bien todos los elementos tienen una imagen única, no se cumplen las propiedades de inyectividad ni sobreyectividad que caracterizan este tipo de aplicaciones.

### 6.2.3. Aplicaciones inyectivas y no sobreyectivas

Hay muchas formas de establecer este tipo de transformación, eligiendo convenientemente los conjuntos inicial y final y alguno de los criterios unívocos de transformación. Algunos ejemplos son los siguientes:

**Entre conjuntos definidos por un solo atributo**

**Forma**

Los conjuntos inicial y final se definen por los valores del atributo forma.

Para este propósito, son posibles dos opciones:

- Subconjuntos inicial y final con distinto cardinal definidos en el caso del conjunto inicial por un solo valor y el conjunto final por disyunción de dos valores, ó bien

- Conjunto inicial definido por un solo valor y, el conjunto final definido por la disyunción de los otros tres valores.

Los criterios válidos son todas las composiciones de las transformaciones:

TUTa) ó TUTc), con TUGa) ó TUGc) con TUCa) ó TUCc) ó TUCd)

**Color**

Conjunto inicial: uno de los valores, conjunto final: disyunción de los otros dos valores. Es decir, por ejemplo: conjunto inicial: rojos, conjunto final: amarillos ó azules.

Criterios: todas las composiciones entre las trasformaciones que aparecen en los siguientes apartados

- En cuanto a la forma: TUFa), TUFc.1), TUFd.1) y TUFe)
- En cuanto al tamaño: TUTa) y TUTc)
- En cuanto al grosor: TUGa) y TUGc).

**6.2.4. Aplicaciones sobreyectivas y no inyectivas**

Hay muchas formas de establecer este tipo de transformación, eligiendo convenientemente los conjuntos inicial y final y alguno de los criterios unívocos de transformación. Algunos ejemplos son los siguientes:

**Entre conjuntos definidos por un solo atributo**

**Forma**

Los conjuntos inicial y final se definen por los valores del atributo forma. Para este propósito, son posibles dos opciones:

Subconjuntos inicial y final con distinto cardinal definidos en el caso del conjunto inicial por disyunción de dos valores y el conjunto final por un solo valor, ó bien el conjunto inicial por la disyunción de tres valores y el final por el cuarto.

Los criterios válidos son todas las composiciones de las transformaciones:

TUTa) ó TUTc), con TUGa) ó TUGc) con TUCa) ó TUCc) ó TUCd)

**Color**

Conjunto inicial: disyunción de dos valores, conjunto final el valor complementario. Es decir, por ejemplo: conjunto inicial: rojos ó azules, conjunto final: amarillos. Criterios:

Todas las composiciones entre las trasformaciones que aparecen en los siguientes apartados

- En cuanto a la forma: TUFa), TUFc.1), TUFd.1) y TUFe)
- En cuanto al tamaño: TUTa) y TUTc)

En cuanto al grosor: TUGa) y TUGc).

**6.2.5. Aplicaciones biyectivas**

**a) Entre conjuntos definidos por un solo atributo.**

**Forma**

Los conjuntos utilizables son las clases de equivalencia definidas por la relación "tener igual tamaño". Por ejemplo: conjunto inicial: cuadrados, conjunto final: triángulos. Son posibles doce ejercicios diferentes según la elección de los valores del atributo forma para los conjuntos inicial ó final.

Los criterios de biyectividad posibles vienen dados por la elección de una de las transformaciones TUC, una de las transformaciones TUT y una de las transformaciones TUG. Algo más detalladamente en este caso serían: todas las composiciones de las trasformaciones de los apartados: TUTa) ó TUTc), con las de TUGa) ó TUGc), con las de TUCa), ó bien TUCc.1) ó bien TUCd).

**Color**

Son utilizables como conjuntos inicial y final las clases de equivalencia definidas por la relación “tener el mismo color” mismo color. Son posibles seis ejercicios diferentes.

Los criterios de biyectividad posibles son los que vienen determinados por la composición de las transformaciones de los grupos TUTa) ó TUTc), con los de TUGa) ó TUGc) con las de TUFa), ó TUFc.1) ó TUFd.1) ó TUFd).

**Tamaño**

Conjuntos definidos por los valores del atributo tamaño. Son posibles dos elecciones diferentes para los conjuntos inicial y final.

Los criterios de biyección vienen determinados por la composición de una de las transformaciones de TUFa), ó TUFc.1) ó TUFd.1) ó TUFd) ), con las de TUGa) ó TUGc) con las de TUCa), ó bien TUCc.1) ó bien TUCd).

**Grosor**

Conjuntos definidos por los valores del atributo grosor. . Son posibles dos elecciones diferentes para los conjuntos inicial y final.

Los criterios de biyección vienen determinados por la composición de una de las transformaciones de TUFa), ó TUFc.1) ó TUFd.1) ó TUFd) ), con las de TUTa) ó TUTc) con las de TUCa), ó bien TUCc.1) ó bien TUCd).

### b) Entre conjuntos definidos por conjunción de dos atributos

Los conjuntos inicial y final han de ser las clases de equivalencia definidas por conjunción de los atributos de que se trate en cada caso.

**Forma y color**

Ambos conjuntos vendrán determinados por aquellas piezas que tienen igual forma y color. Son posibles 132 elecciones diferentes como conjuntos inicial y final.

Criterios: cualquiera de los inversibles recogidos en las tablas TUT y TUG conjuntamente.

**Forma y tamaño**

Ambos conjuntos están compuestos por las piezas que tienen igual forma y tamaño. Son posibles 56 elecciones diferentes como conjuntos inicial y final.

Criterios de biyectividad válidos son todos los inversibles de las tablas TUC y TUG conjuntamente.

**Forma y grosor**

Ambos conjuntos contienen todas las piezas que tienen igual forma y grosor. Son posibles 56 elecciones diferentes como conjuntos inicial y final

Criterios de biyectividad aplicables: todos los inversibles de las tablas TUC y TUT conjuntamente.

**Color y tamaño**

Ambos conjuntos contienen todas las piezas que tienen igual color y tamaño. Son posibles 30 elecciones diferentes como conjuntos inicial y final

Criterios de biyectividad válidos: todos los inversibles de las tablas TUF y TUG conjuntamente.

**Color y grosor**

Ambos conjuntos contienen todas las piezas con igual color y grosor. Son posibles 30 elecciones diferentes como conjuntos inicial y final.

Criterios válidos de biyectividad: todos los inversibles de las tablas TUF y TUT conjuntamente.

**Tamaño y grosor**

Ambos conjuntos contienen todas las piezas con igual tamaño y grosor.
Por tanto hay doce elecciones diferentes como conjuntos inicial y final.
Criterios de biyectividad válidos: todos los inversibles de las tablas TUF y TUC conjuntamente.

### c) Entre conjuntos definidos por conjunción de tres atributos

Estos conjuntos tienen la ventaja de estar formados por un número reducido de elementos por lo que son interesantes para la práctica con niños muy pequeños.

**Forma, color y tamaño**

En los conjuntos inicial y final tendremos parejas de elementos que difieren sólo en el grosor habiendo, por tanto 552 elecciones diferentes para conjuntos inicial y final.
Los criterios aplicables son los inversibles de la tabla TUG.

**Forma, color y grosor**

En los conjuntos inicial y final tendremos parejas de elementos que difieren sólo en el tamaño, como en el caso anterior hay 552 elecciones de los conjuntos de definición.
Los criterios de biyectividad aplicables son los inversibles de la tabla TUT.

**Color, tamaño y grosor**

Los conjuntos inicial y final contienen cuatro elementos. Los ejercicios posibles, teniendo en cuenta la elección de los conjuntos de definición son 132.
Los criterios válidos de biyectividad son los inversibles de la tabla TUF.

**Forma, grosor y tamaño**

Los conjuntos contienen tres elementos cada uno. Los ejercicios posibles según la elección de los conjuntos de definición son 240.

Los criterios válidos de biyectividad son los inversibles de la tabla TUC.

**d) Entre las 48 piezas**

**Transformaciones en forma sólo**

1.1. - Manteniendo las cuatro formas invariables: TUF a)

1.2. - Manteniendo tres formas invariables: Ninguna.

1.3. - Manteniendo dos formas invariables: TUFc.1)

1.4. - Manteniendo una forma invariable: TUFd.1)

1.5. - Variando todos los valores: TUFe.1) TUFe.2)

**Transformaciones en color sólo**

2.1. - Manteniendo los tres colores invariables: TUCa)

2.2. - Manteniendo dos colores invariables: Ninguna.

2.3. - Manteniendo un valor invariable: TUCc.1)

2.4. - Variando los tres valores: TUCd)

**Transformaciones en tamaño sólo**

3.1. - Manteniendo los dos valores invariables: TUTa)

3.2. - Manteniendo un valor invariable: Ninguna.

3.3. - Variando los dos valores: TUTc).

**Transformaciones en grosor sólo**

4.1.- Manteniendo los dos valores invariables: TUGa)

4.2.- Manteniendo un valor invariable: Ninguna.

4.3.- Variando los dos valores: TUGc).

### 6.2.6. Actividades en modo inverso de aplicaciones biyectivas

La elección de los conjuntos de definición sabemos que es primordial dado que, un criterio aplicado a conjuntos inicial y/o final diferentes puede dar lugar a aplicaciones e incluso correspondencias de muy distinta índole y, por tanto no biyectivas. Los conjuntos son pues, parte sustancial de los ejercicios de aplicaciones, sin embargo el hincapié, el objetivo de estos ejercicios, no es tanto la definición y el tratamiento de conjuntos, como la propia transformación. Por tanto el acento debe recaer en el cambio experimentado por los elementos de origen hasta llegar a los elementos finales

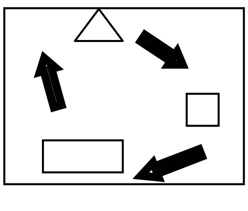
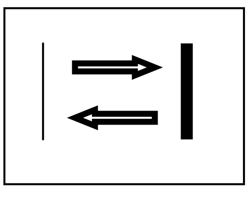
En todos los casos, los ejercicios inversos serán: formadas todas las parejas (objeto inicial, objeto imagen), señalando que ha habido una transformación tal que a los objetos iniciales ha cambiado en los objetos finales. Determinar el criterio de transformación requiere abstraer propiedades comunes en los conjuntos inicial y final y proceder a determinar la relación que liga a todos los originales con sus respectivas imágenes.

### 6.3. Operaciones entre aplicaciones

#### 6.3.1. Composición

La composición de aplicaciones puede practicarse de forma sencilla, en general, disponiendo de más de un juego de 48 piezas.

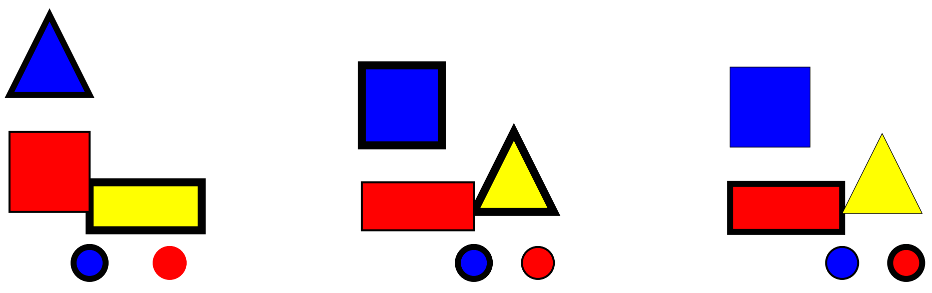
Basta determinar el conjunto inicial, tan sencillo como se quiera y determinar el tipo de transformación que ha de aplicarse y que, puede hacer referencia a un atributo o a mas de uno. Supongamos que se quieren componer las siguientes transformaciones f y g simbolizadas por las siguientes tarjetas de transformación:

f:  y g: 

No se establece, en este caso, trasformación sobre los otros atributos, ni a través de f, ni a través de g.

Tal como se define la composición de aplicaciones (g•f), será la aplicación que resulte de aplicar g sobre la imagen determinada por f.

Supongamos que el conjunto inicial, está formado por unas piezas arbitrarias o no, que podemos disponer de modo que recuerde algún objeto concreto. Por ejemplo:



I = Figura inicial          f(I)= Figura 2          g(f(I) = Figura 3

La composición de ambas, es la transformación que hace cambiar la figura I, en la Figura 3 que se obtiene por cambio simultáneo en la forma (del modo que indica la tarjeta) y de grosor.

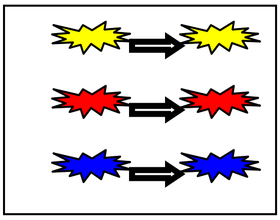
La tarea en modo inverso consistirá en reproducir las figuras y encontrar que ha pasado en el proceso.

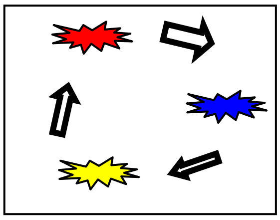
Algunas composiciones generan grupos de Klein. Uno de ellos es el que Dienes (1987: 57) recoge, formado por las transformaciones C (copia, es decir TUTa y TUGa), T (TUTc), G (TUGc), y TG (TUTc y TUGc).

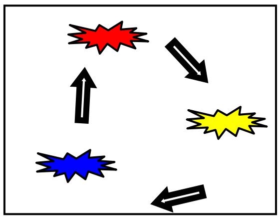
Además, otros grupos de Kein se generan con las transformaciones siguientes:

En el atributo color: TUCa (copia), TUCd.1, TUCd.2.

Estas podemos representarlas simbólicamente mediante:


TUCa

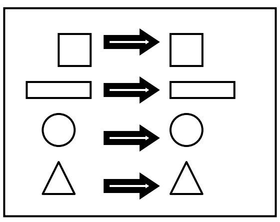

TUCd.1

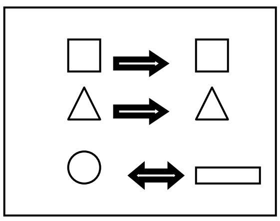

TUCd.2

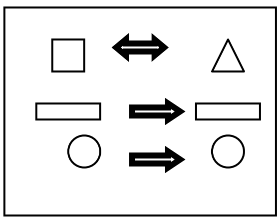
La ley de composición entre ellas determina los siguientes resultados:

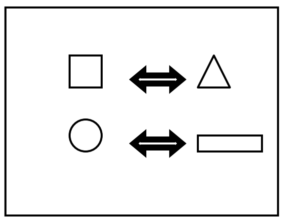
| | TUCa | TUCd.1 | TUCd.2 |
|---|---|---|---|
| TUCa | TUCa | TUCd.1 | TUCd.2 |
| TUCd.1 | TUCd.1 | TUCd.2 | TUCa |
| TUCd.2 | TUCd.2 | TUCa | TUCd.1 |

En el atributo forma: TUFa (copia), TUFc.1.3, TUFc.1.4 y TUFe.1.3, que podemos simbolizar como:


TUFa


TUFc.1.3


TUFc.1.4


TUFe.1.3

Entre las cuales, la ley de composición verifica:

| | TUFa | TUFc.1.4 | TUFc.1.3 | TUFe.1.3 |
|---|---|---|---|---|
| TUFa | TUFa | TUFc.1.4 | TUFc.1.3 | TUFe.1.3 |
| TUFc.1.4 | TUFc.1.4 | TUFa | TUFe.1.3 | TUFc.1.3 |
| TUFc.1.3 | TUFc.1.3 | TUFe.1.3 | TUFa | TUFc.1.4 |
| TUFe.1.3 | TUFe.1.3 | TUFc.1.3 | TUFc.1.4 | TUFa |

### 6.3.2. Inversión

La inversa de todas las transformaciones biyectivas determinadas mas arriba son practicables en forma de juego de composiciones.

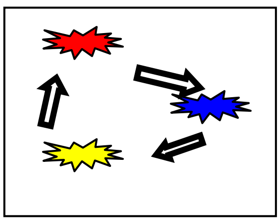
La inversa de una función: f, es otra: $f^{-1}$ que verifica $f \bullet f^{-1} = f^{-1} \bullet f$.

Todas las transformaciones biyectivas que hemos visto, poseen una inversa determinable por composición de la transformación dada sobre sí misma.

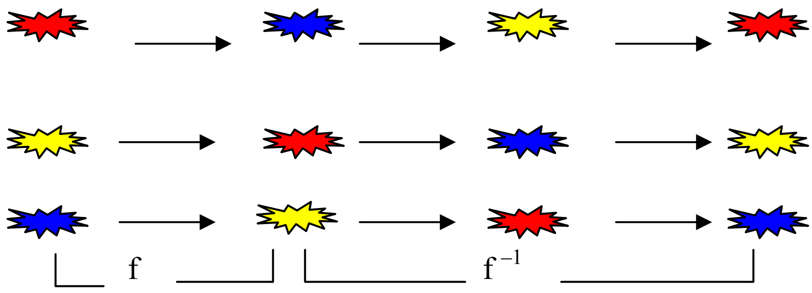
Por tanto, la aplicación de una determinada transformación sobre una figura inicial y su posterior composición consigo misma, produce la aparición de la figura original.

Supongamos que se quiere determinar la inversa de la transformación cíclica en color siguiente:

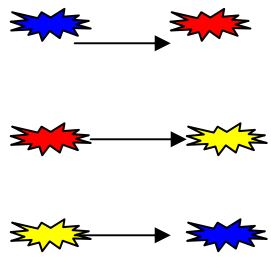
f



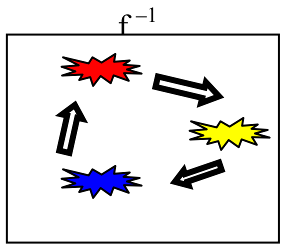
Si los elementos iniciales son: $\{$rojo, amarillo, azul$\}$, la composición reiterada de f consigo misma produce los siguientes resultados:




Es decir que $f^{-1}$ queda determinada por la transformación que cambia



Es decir,




Es fácil observar cuando la transformación queda anulada.

Sin embargo, la obtención de la aplicación inversa, se corresponde con una tarea relativa a la práctica de las relaciones recíprocas, pero, desde el punto de vista de los modos de razonamiento, es un ejercicio en modo directo. Tanto para f, como para $f^{-}$

[1], el modo inverso de razonamiento supone el descubrimiento de la transformación efectuada.

Dado que la transformación puede estar determinada por cambio sobre uno de los atributos o sobre dos, tres o los cuatro, los niveles de dificultad, probablemente son diversos.

Por ejemplo, supongamos que se ha aplicado una determinada transformación a la figura 1, obteniéndose la figura 2. ¿Cuál ha sido el cambio realizado?

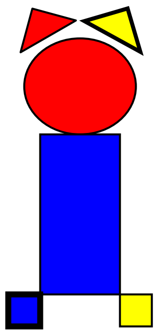


Figura 1

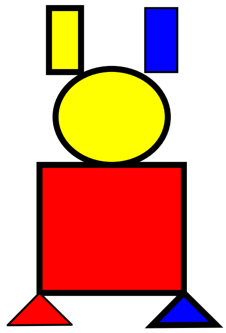
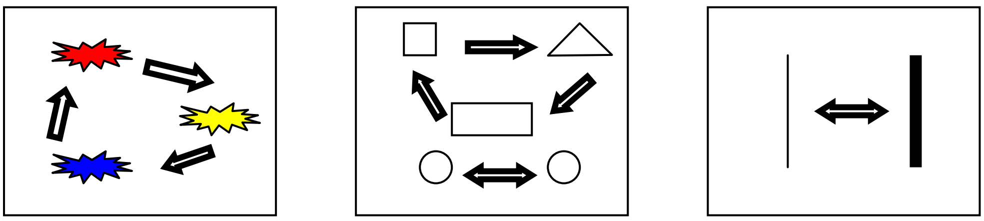


Figura 2

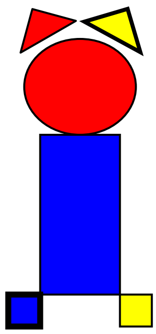
La determinación de las tres tarjetas identificativas de los cambios realizados sobre los atributos:



Implica la práctica y reconocimiento de cada una de las inversas particulares. En el caso del ejemplo: la inversa de la transformación en color, la de la transformación en forma y en tamaño.

Probablemente será más complicado, si se plantea la pregunta de la siguiente forma:

Sobre la figura 1, se ha aplicado una determinada transformación, para obtener una figura 2 y, sobre esta, nuevamente la misma transformación, obteniendo la figura 3.



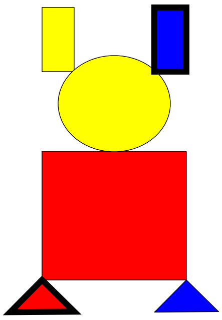
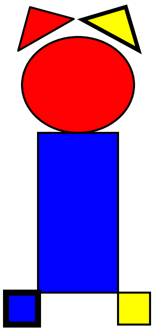


Figura 1 Figura 2 Figura 3

¿Cómo será la figura 2? ¿Cuántas figuras mas tenemos que construir para obtener otra vez la figura 1?

La respuesta a estas preguntas, igualmente implica el reconocimiento y la práctica de las transformaciones inversas particulares sobre cada atributo.

Pero podemos plantear también el ejercicio en modo inverso que requiera considerar las trasformaciones sobre todos los atributos conjuntamente. Por ejemplo: ¿Cuántas figuras más tenemos que construir para obtener otra vez la figura 1 en el siguiente caso?:



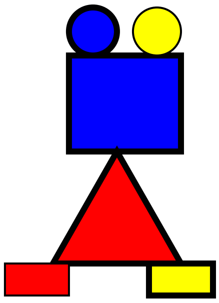


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

¿Sería posible si la última figura fuera la figura 3?

**7. Conclusiones**

Con la descripción de todas estas actividades pretendemos aportar situaciones de juego en las que los procedimientos de clasificar, ordenar, seriar y transformar pueden practicarse en un contexto no formal de acuerdo con su concepción en el ámbito matemático y a través del uso de una lógica acorde con los requerimientos que la matemática presenta.

Pensamos que el simbolismo del material permite crear un espacio de razonamiento en el que la práctica de esta lógica no cree conflictos en el niño debidos a su discrepancia con la lógica cotidiana y, en cambio, posibilita poner en juego procesos de inferencia lógica vinculados a la deducción matemática.

Las actividades anteriores complementan en unos casos y desarrollan en otros, las recogidas en los textos de Dienes (1987) y Kothe (1989). Una de las diferencias con estos textos es que, en nuestro caso, no están expresadas en la forma didácticamente conveniente, adoptando una forma de juego ni teniendo en cuenta los intereses de los niños que el material, por ser simbólico, permite. Otra diferencia es que las presentamos en forma sistematizada entorno a los cuatro procedimientos y de acuerdo con los atributos de las piezas, con el objetivo de enumerar de forma exhaustiva todas las posibilidades. Pensamos que, probablemente, los atributos bivalentes no ofrecen la misma respuesta en el niño que los trivalentes o los tetravalentes, de ahí el interés por todas las formas posibles de poner en práctica los cuatro procedimientos.

Una tercera diferencia es la relativa a las actividades con atributos y su simbolización a través de las tarjetas de atributo. Estas actividades permiten practicar juegos en los que la generalización sobre los valores tiene lugar.

También se ha encontrado otros conjuntos de transformaciones que, como el descrito por Dienes (1987: 57), tienen la estructura de grupo de Klein.

Resultan así las actividades descritas en los textos citados casos particulares de las que presentamos y, por tanto una gran parte de ellas son complemento de aquellas.

Por otra parte, con una única excepción -la actividad clasificatoria desarrollada por Dienes (1987:91) que hemos elegido para poner en práctica el experimento-, todas las actividades en modo inverso, desarrollan juegos nuevos en relación con los citados textos.

Como resumen, aportamos en el capítulo la siguiente relación genérica de actividades:

| **Juegos de clasificación** | | **Modos directo e inverso** |
|---|---|---|
| | Actividades por disyunción | Por disyunción de dos o 3 valores |
| | | Por disyunción de dos o tres atributos |
| | Actividades por conjunción | Por conjunción de dos o tres valores |

| | | |
|---|---|---|
| | | Por conjunción de dos, tres o cuatro atributos |
| | Por relaciones de equivalencia | Clasificaciones por uno, dos o tres atributos |
| | | Clasificaciones por rejillas o tableros |
| | Subconjuntos definidos por un valor | Relativo al atributo forma; color; grosor; tamaño |
| | Subconjuntos definidos por la conjunción de dos atributos | |
| | Subconjuntos definidos por conjunción de tres atributos | |
| **Juegos de seriación** | | **Modos directo e inverso** |
| | Seriaciones con un número fijo de diferencias | Seriaciones en que el número de diferencias establecido está vinculado a los mismos atributos |
| | | Seriaciones en que el número de diferencias establecido no está vinculado a atributos concretos |
| | | Seriaciones en que el número de diferencias establecido está vinculado a distintos atributos en cada paso |
| | Seriaciones con un número de diferencias variable | Vinculadas o no a atributos concretos |
| **Juegos de ordenación** | | **Modos directo e inverso** |
| | Ordenaciones verticales | |
| | | Clases de equivalencia definidas |

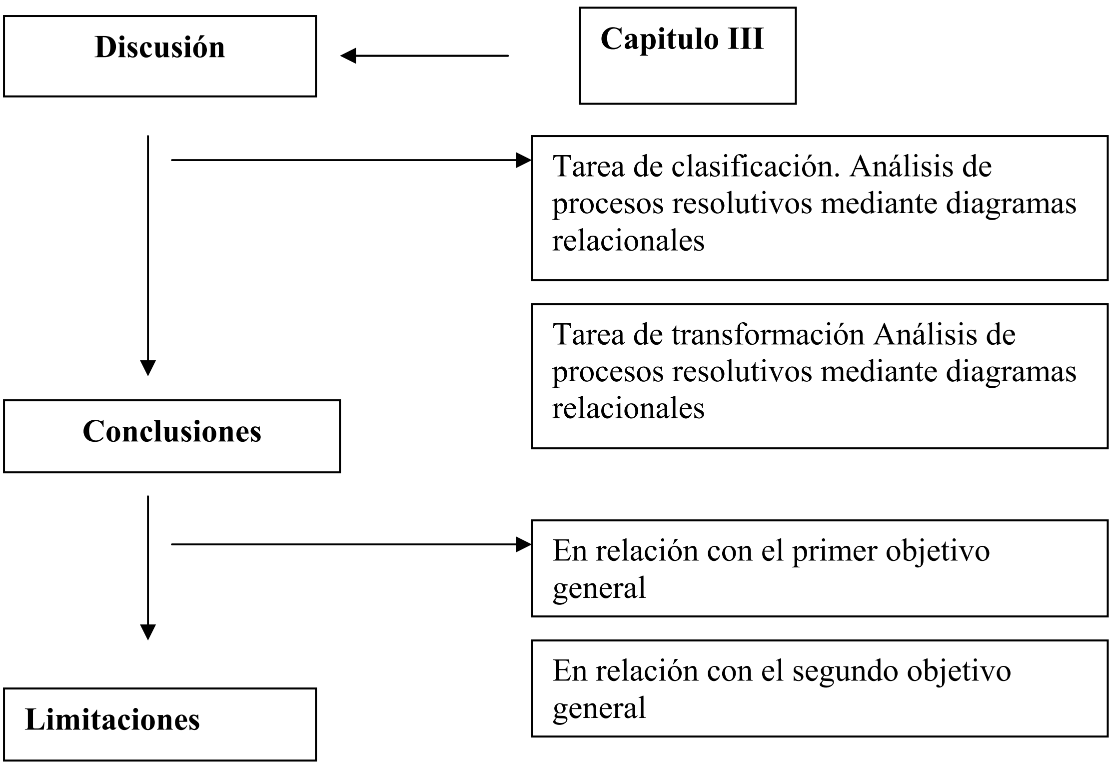
| | | |
|---|---|---|
| | | por un sólo atributo |
| | | Por conjunción de dos atributos |
| | Ordenación en diagramas de árbol | |
| **Juegos de transformación** | | **Modos directo e inverso** |
| | Correspondencias | Transformaciones unívocas en forma, color, tamaño y grosor |
| | Aplicaciones | No inyectivas ni sobreyectivas |
| | | Actividades en modo inverso de aplicaciones no inyectivas ni sobreyectivas |
| | | Aplicaciones inyectivas y no sobreyectivas |
| | | Aplicaciones sobreyectivas y no inyectivas |
| | | Aplicaciones biyectivas |
| | | Actividades en modo inverso de aplicaciones biyectivas |
| | Operaciones entre aplicaciones | Composición |
| | | Inversión |

# CAPITULO V

# DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

**Resumen**

*En este capítulo se exponen las conclusiones a las que llegamos tras el análisis de los resultados de acuerdo con los objetivos planteados. Finalmente se enumeran las limitaciones que los resultados pueden presentar a causa de las condiciones en que la experiencia tiene lugar y las perspectivas que el trabajo presenta.*



Desde la perspectiva de los objetivos de esta investigación el análisis de los resultados permite señalar:

**1. Discusión**

La tarea de clasificación en modo directo resulta accesible a todos los niños. La similitud en el acierto, la seguridad con que la resuelven y la diferencia significativa en los porcentajes de acierto que presenta frente a las demás tareas por todos los grupos de edad, apoya la afirmación piagetiana que considera la clasificación como una de las actividades lógico-relacionales de más temprana aparición en el ser humano.

En modo inverso el grupo de niños de 3 años alcanza un acierto significativamente menor que los otros grupos de edad que, no obstante, este supone el 50%. No hay, sin embargo, diferencia significativa entre los grupos de 4 y 5 años que alcanzan un acierto superior al 80%.

Esto permite afirmar que el desequilibrio entre los procesos que integran el pensamiento reversible entre operaciones no formales es significativamente mayor a la edad de 3 años que a los 4 años, es decir que el niño de 3 años se encuentra mas alejado de la reversibilidad no operacional, mientras que, aquellos niños que pueden resolver ambos modos han alcanzado una situación de pensamiento reversible no operacional.

La tarea de clasificación requiere una respuesta activa, en sus dos modos. El análisis de la secuencia de actividades que el niño realiza, en ambos casos, a partir de los procesos resolutivos en cada modo y de la verbalización a lo largo de los mismos, permite constatar que mientras el tamaño es el referente principal en la tarea en modo directo, el color lo es en el modo inverso.

Los niños que resuelven la tarea en modo inverso con éxito, muestran gran seguridad en el proceso resolutivo, lo que permite conjeturar que este grupo de niños, que representa un alto porcentaje, domina este tipo de actividad.

La simbolización de la secuencia de acciones que el niño realiza en el proceso resolutivo, permite construir unos diagramas relacionales para la tarea que facilitan la comparación de los procesos vinculados en ambos modos. Vemos a continuación estas representaciones.

### 1.1. Tarea de clasificación. Análisis de algunos procedimientos mediante diagramas relacionales

La solución al problema en el modo directo es simbolizable mediante una operación T, mientras la solución al mismo problema en el modo inverso es simbolizable mediante la operación $T^{-1}$.

En ambos modos, existe un elemento: la tabla, que da soporte tanto a las relaciones existentes entre los elementos concretos, como a los códigos y a las reglas de juego. La construcción de la tabla, tanto en el modo directo como en el inverso, presenta al niño una situación en la cual el problema está parcialmente resuelto. En el modo directo los códigos están colocados y, en el inverso, dos triángulos están debidamente ubicados. Uno y otro modo, presentan al niño unos objetos observables, sobre la mesa que, siguiendo la nomenclatura y el tipo de análisis del modelo piagetiano representamos como: Obs. O, que guardan entre sí unas relaciones: Coord O que dependen de los propios objetos, es decir existe la relación material entre los objetos:

$$\text{Obs. O} \leftarrow \text{Coord. O}$$

En el modo directo esta situación se corresponde con la presentación de la tarea que se expresa en Capitulo II: 2.2.1. y, en el modo inverso, con la presentación de la tarea que se expresa en Capitulo II: 2.2.2.

Quien resuelve el problema se ve enfrentado a estas situaciones, las observa: Obs. S y actúa sobre ellas, construyendo la solución pedida, de acuerdo con las relaciones que él establece como consecuencia de lo que observa: Coord. S y de lo cual es consecuencia, es decir:

$$\text{Obs. S} \rightarrow \text{Coord. S}$$

Son estas acciones (Coord. S) las que vamos a simbolizar.
En cualquier caso, esta situación es interdependiente una de otra en la medida en que, lo que el niño observa y las coordinaciones que establece, son dependientes de los objetos que se le presentan y las relaciones que presentan entre ellos. En los modos directo/inverso de las tareas propuestas se trata de resolver o conseguir la misma situación final que representa igualmente tanto la aplicación de reglas (modo directo) como la obtención del modelo matemático (modo inverso) que, en el caso de las tareas presentadas es único, pero accesible desde múltiples vías.

En el caso de la tarea de clasificación es posible visualizar la red de relaciones que hay que establecer mediante observación del procedimiento empleado en la solución. Esta red puede explicarse desde algunas características propias del modo como las siguientes:

**Características del modo directo**: Va siempre de lo general explícito (tarjetas-dato) a lo particular explícito (triángulos). Es posible ejecutar las acciones independientemente una de otra. Si se produce un error en una acción particular, es posible cambiarla modificando a su vez una acción previa particular.

**Características del modo inverso**: Siempre es preciso partir de lo particular (triángulos- dato). Desde lo particular se puede ir a lo:

a) particular explícito (triángulo amarillo y triángulo azul) mediante un procedimiento que podemos llamar ***perceptivo*.** En este caso están incluidos los procedimientos codificados como *pct*[1], *ptc* y algunos de los *alt* cuando comienzan colocando las piezas amarilla y azul

b) particular implícito (triángulos rojos), podríamos llamar a estos procedimientos ***particular inferencial.*** En este caso están incluidos los procedimientos codificados como *pct*, *ptc* y algunos de los *alt* cuando comienzan colocando las dos piezas rojas

c) general explícito (tarjetas de color amarillo, de color azul o ambas tarjetas de tamaño), siguiendo un procedimiento que podríamos decir ***por generalización.*** En este caso están incluidos los procedimientos codificados como *cpt*, *tpc, tcp, ctp* y algunos de los *alt* cuando comienzan colocando las tarjetas con piezas -dato

d) general implícito (tarjeta de color rojo), poniendo de relieve un procedimiento ***inferencial.*** Estos procedimientos son de los tipos *ctp*, *cpt* ó *alt*, cuando estos comienzan por la tarjeta de color sin piezas-dato.

Es posible ejecutar las acciones de forma encadenada, cada una desde la anterior. Es necesario, en algún momento pasar de lo particular (implícito o explícito) a lo general (implícito o explícito) estableciendo las relaciones pertinentes.
Es necesario, en todo momento, conservar la visión de conjunto de todas las relaciones que la tabla expresa; de tal modo que una decisión errónea pueda ser restablecida desde el conjunto y no desde la última acción aisladamente.

### 1.1.1. Simbolización de diagramas relacionales

Las redes de relaciones que el sujeto pone en juego en la solución de la tarea en uno y otro modo permite comparar la complejidad relativa de ambos. Estos diagramas relacionales superan el modelo piagetiano y adoptan un modelo procedural y procesual que pone de relieve los pasos que los sujetos dan al resolver la tarea.

Para describir el proceso adoptamos las siguientes simbologías relativas a los objetos que intervienen y a las acciones que el sujeto realiza. En uno y otro caso, se

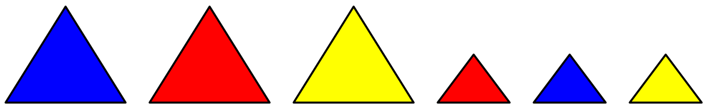
[1] Ver Capitulo III p. 152

distingue entre observables – objetos presentes (Obs. O) y objetos observados por el sujeto (Obs. S)- y coordinaciones –entre los objetos presentes (Coord. O) y establecidas por el sujeto (Coord. S) que se manifiestan a través de las acciones que ejecuta.

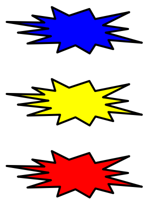
OBJETOS

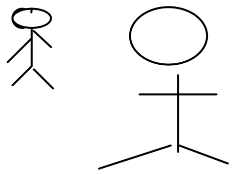
**Observables (Obs. O)**

*Triángulos*



*Códigos de valores*





**Coordinables (Coord. O)**

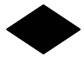
*Tabla*

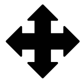
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

SUJETO

**Observables (Obs. S)**

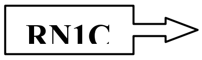
*Acciones de observación* de triángulos. Código: 

*Acciones de observación* de códigos: Código: 

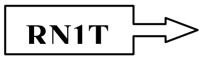
*Acciones de observación* de la tabla en cada momento: Código: 

**Coordinables (Coord. S)**

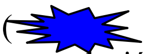
***Relaciones de pertenencia Nivel 1***: Pertenencia de un triángulo a la clase:
- Formada por los triángulos del mismo color.

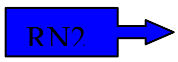
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: 

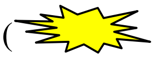

- Formada por los triángulos del mismo tamaño.

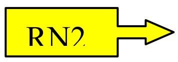
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: 


***Relaciones de pertenencia Nivel 2***: Pertenencia de un código a un lugar en la tabla:

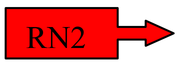
- Columna de triángulos azules (  ).

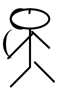
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: 

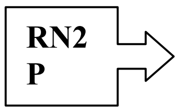

- Columna de triángulos amarillos (  ).

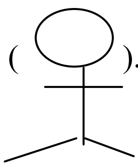
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: 


- Columna de triángulos rojos (  ).

*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: 


- Fila de triángulos pequeños (  )

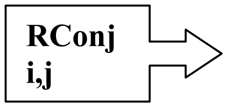
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: 


- Fila de triángulos grandes (  ).

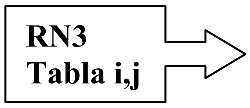
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código:


***Relaciones de conjunción***: Conjunción de valores, de ambos atributos, que la tabla expresa en el cuadro de fila i y columna j.

*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código:

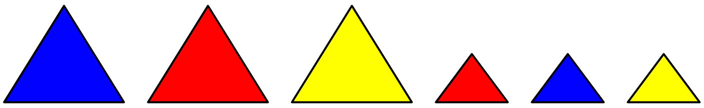



***Relaciones de pertenencia Nivel 3***: Pertenencia de un triángulo al cuadro de fila i, columna j de la tabla.
*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código:

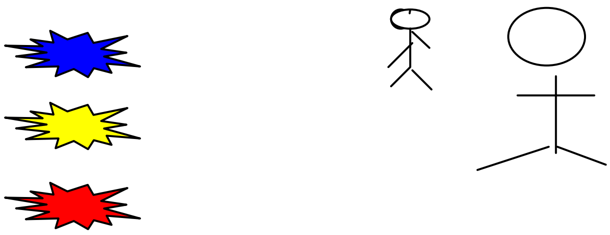



La sucesión de acciones que el niño ejecuta se simbolizan con el Código:

*Acciones de selección* de cada triángulo particular. Códigos:



*Acciones de selección* de cada código de valores. Códigos:



*Acciones de selección*

- de la fila i, columna j de la tabla. Código: 

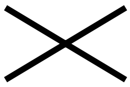

- de un lugar de tarjeta. Código: 

*Acciones de colocación* de un elemento dentro de un cuadro. Código 

Finalizada una cadena de acciones (lo que se indica con el código: 

al final de la cadena vertical), las acciones siguientes se expresan a su derecha.

Errores. Código:

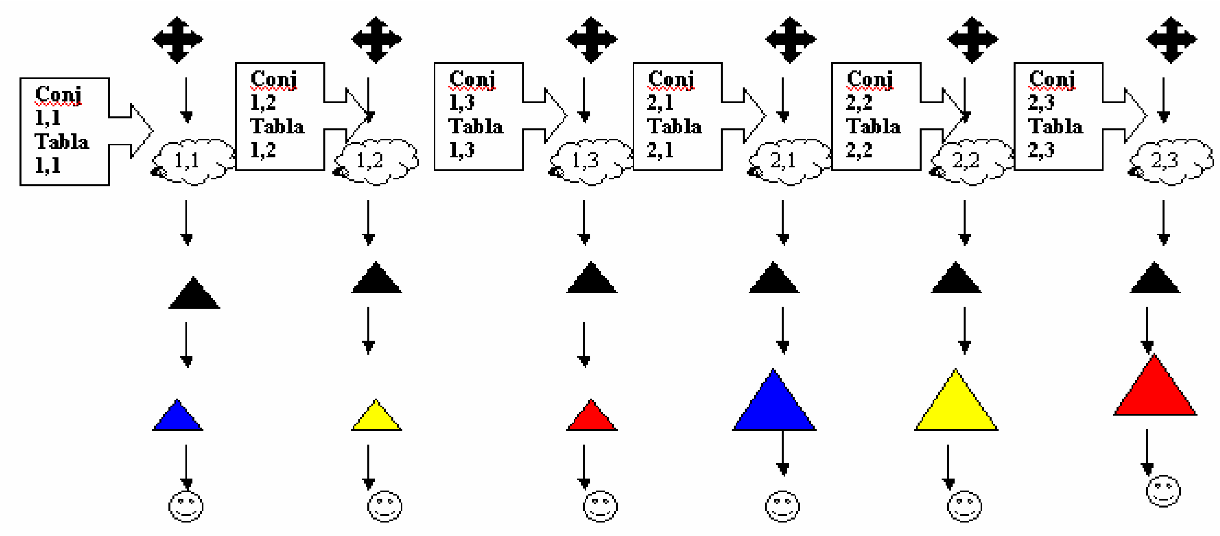


### 1.1.2. Algunos diagramas relacionales

Los siguientes son los árboles o redes de relaciones establecidos por distintos sujetos.

Veamos, en primer lugar, como resuelve la tarea, en sus dos modos, un adulto.

**Para clasificación: modo directo**




**Para clasificación: modo inverso**

Se usa un ***procedimiento perceptivo*** que precisa la siguiente red de relaciones:

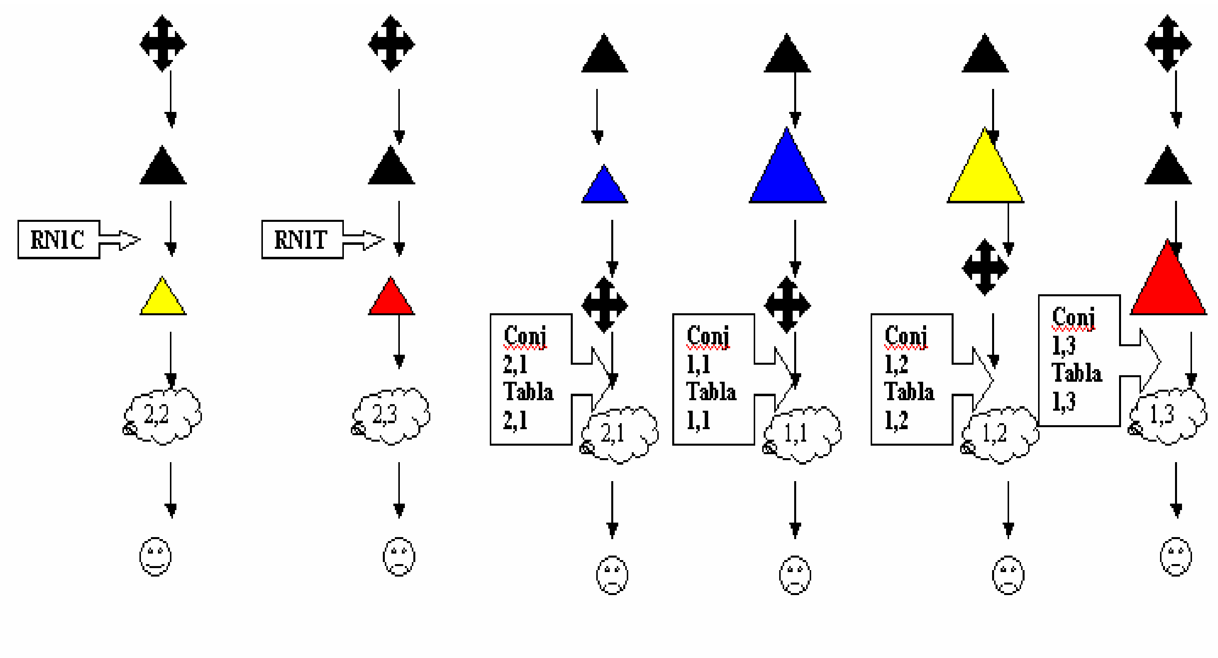
Cuando, como en este caso, el procedimiento utilizado para resolver modo inverso comienza con la colocación, como primer elemento, de uno de los triángulos que completan columna, está estableciendo relación en función del color entre el elemento-dato visible y los otros elementos visibles no colocados. En el caso de los niños de Educación Infantil, hemos visto que el uso de uno u otro procedimiento no depende de la edad. Este es el caso de un adulto que lo utiliza a pesar de ser el que, en menor medida, pone de relieve los procesos inferenciales.

Esta construcción de relaciones es lo que Piaget llama abstracción reflexiva cuando tiene lugar entre operaciones. En el caso de las tareas propuestas, el proceso tiene lugar desde objetos, sin embargo, difiere de la abstracción empírica (1961: 203) en la medida en que es la configuración de los objetos en el espacio y las relaciones que la gobiernan las que interesan y éstas, el niño las manifiesta y construye a través de la acción sobre los objetos y nuevamente desde los objetos, identificándose con la abstracción semi empírica (Piaget 1985: 18-19).

Los distintos procedimientos encontrados en la solución a la tarea de clasificación en modo inverso tienen lugar cuando el niño establece sus coordinaciones (Coord. S) sobre relaciones distintas de los elementos que observa. Así cuando coloca como primer elemento una de las tarjetas de color con datos (en el caso de la experiencia la azul o la amarilla) está estableciendo una relación en función del color entre el elemento-dato visible y el código que representa la clase a la cual pertenece según el color.

Los siguientes son los árboles de relaciones que una misma niña, Inés (4:8), utiliza para resolver la tarea en los dos modos.

**Cómo resuelve  Inés (4:8) clasificación: modo directo**




**Cómo resuelve Inés (4:8) clasificación: modo inverso**

Para resolver la tarea, construye la siguiente red relacional:

Inés, por tanto, utiliza un procedimiento de los llamados ***por generalización***, en este caso sobre el atributo color.

El procedimiento que se ha mostrado mas vinculado al éxito, de acuerdo con los resultados, aquel con el que ningún niño falló en modo inverso, es el método que hemos llamado ***inferencial***. Desde este momento la tarea es de modo directo, en la medida en que el niño muestra conocer las reglas aplicadas y, por tanto la solución se continúa por aplicación de las mismas, como ocurre con el modo directo.

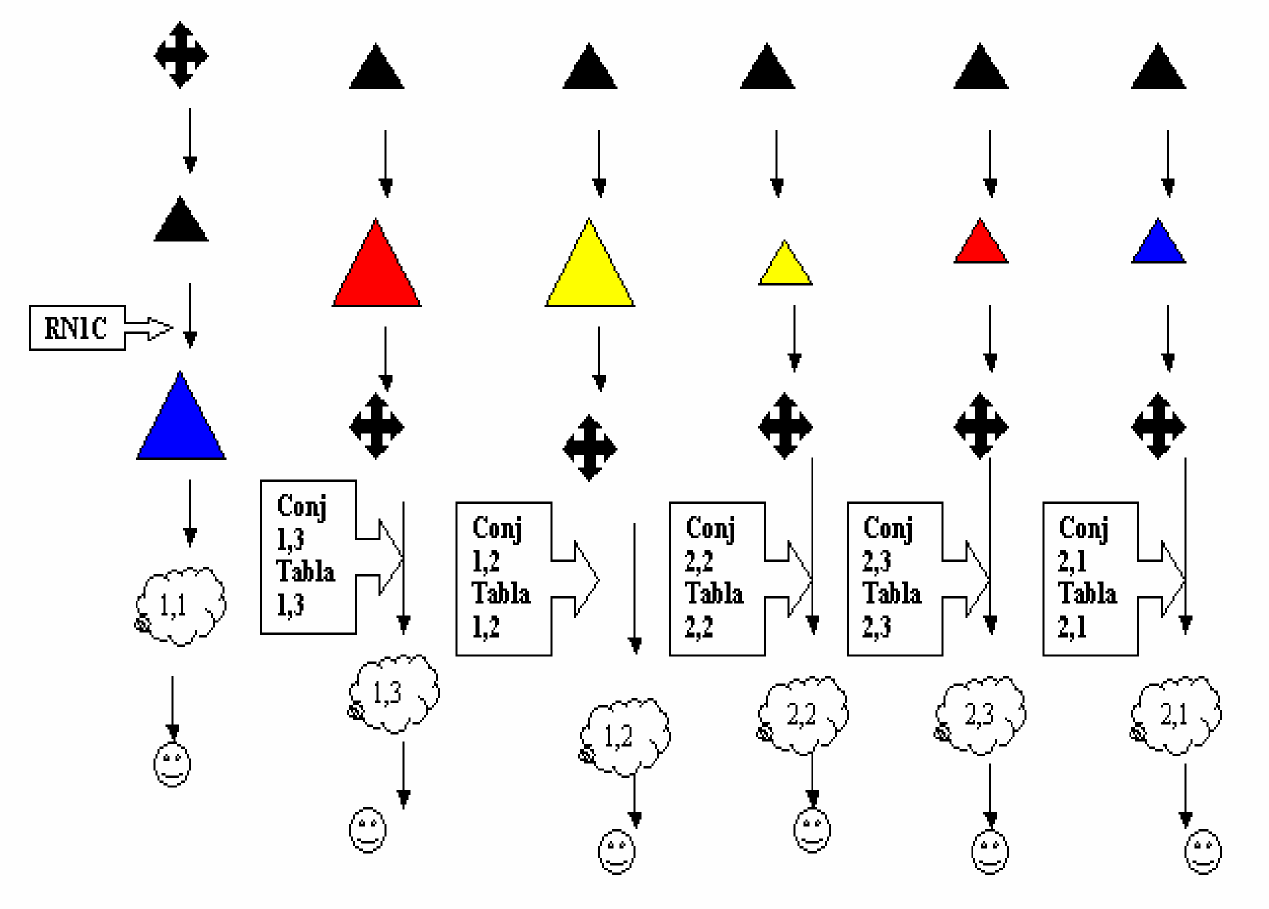
Este es el procedimiento que utiliza Enrique (3:11) para resolver la tarea.

En el diagrama relacional que construye para el modo inverso, la colocación de las piezas se realiza mediante una secuencia de acciones que coincide plenamente con el procedimiento que él mismo utiliza para resolver la tarea en modo directo. Lo que muestra cómo el modo inverso contiene al directo y es, por tanto, más difícil que el directo.

Nuevamente, vemos cómo los distintos procedimientos no están vinculados a la edad (Enrique sólo tiene 3:11). Y de igual forma, este ejemplo muestra, cómo el razonamiento inferencial está presente desde edades tempranas.

Los siguientes son los árboles de relaciones que Enrique (3:11) ha establecido para resolver la tarea de clasificación en ambos modos.

**Cómo resuelve Enrique (3:11) clasificación: modo directo**

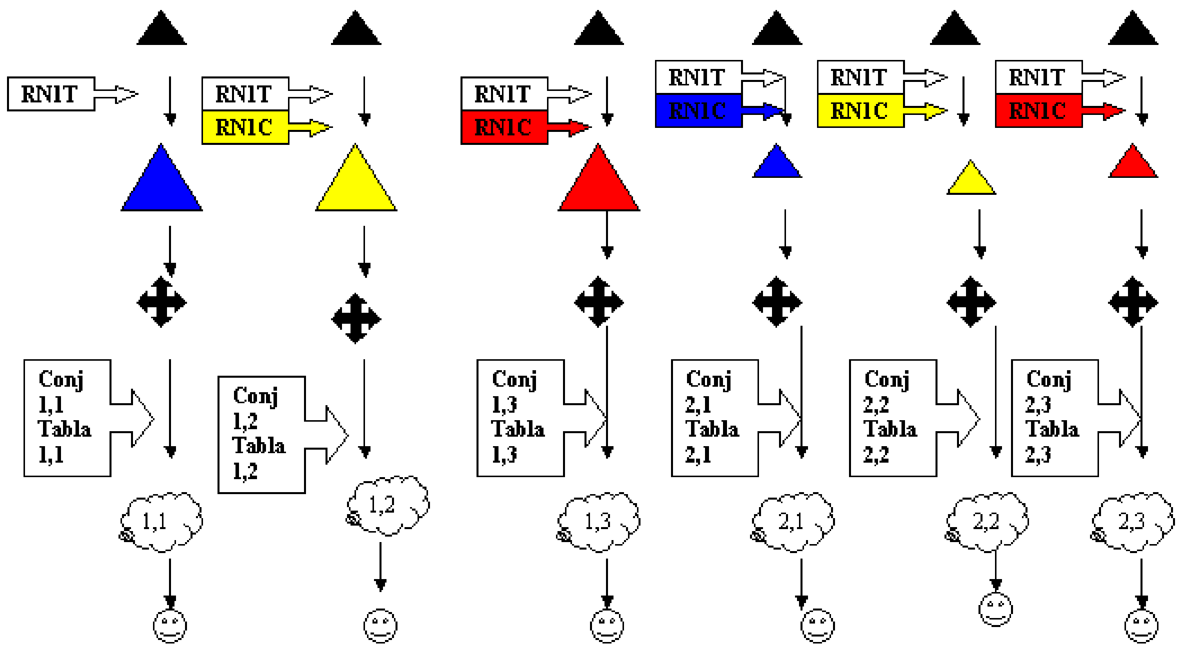



La tarea en modo inverso se resuelve, en este caso, estableciendo las siguientes relaciones:

El procedimiento alternativo (*alt*), mas frecuente en el grupo de niños que terminan la tarea con error, tiene lugar cuando las nuevas coordinaciones Coord. O' se establecen sobre referente distinto que en Coord. O sin que se hayan agotado las posibilidades de utilización del mismo referente, es decir, la acción siguiente se establece sobre otra relación diferente aunque la anterior no haya agotado sus posibilidades de aplicación; esto indica menor sistematización y explica porqué este procedimiento es más usado en el modo inverso que en el directo donde las regularidades son mas fácilmente observables. A su vez la menor sistematización en el uso de las relaciones puede conducir a establecer inferencias lógicas no correctas.

Es el procedimiento que usa Víctor (5:1) que comienza el ejercicio en modo inverso desde lo particular explícito hacia lo general explícito. Falla al relacionar mediante conjunción las dos variables en juego y continúa el procedimiento desde esta relación errónea que afecta al resto de elementos posibles: los dos triángulos rojos. El resto de elementos a los cuales no afecta el error previo los coloca con éxito.
Los árboles de relaciones que establece en ambos modos son los siguientes.

**Cómo resuelve Víctor (5:1) clasificación: modo directo**

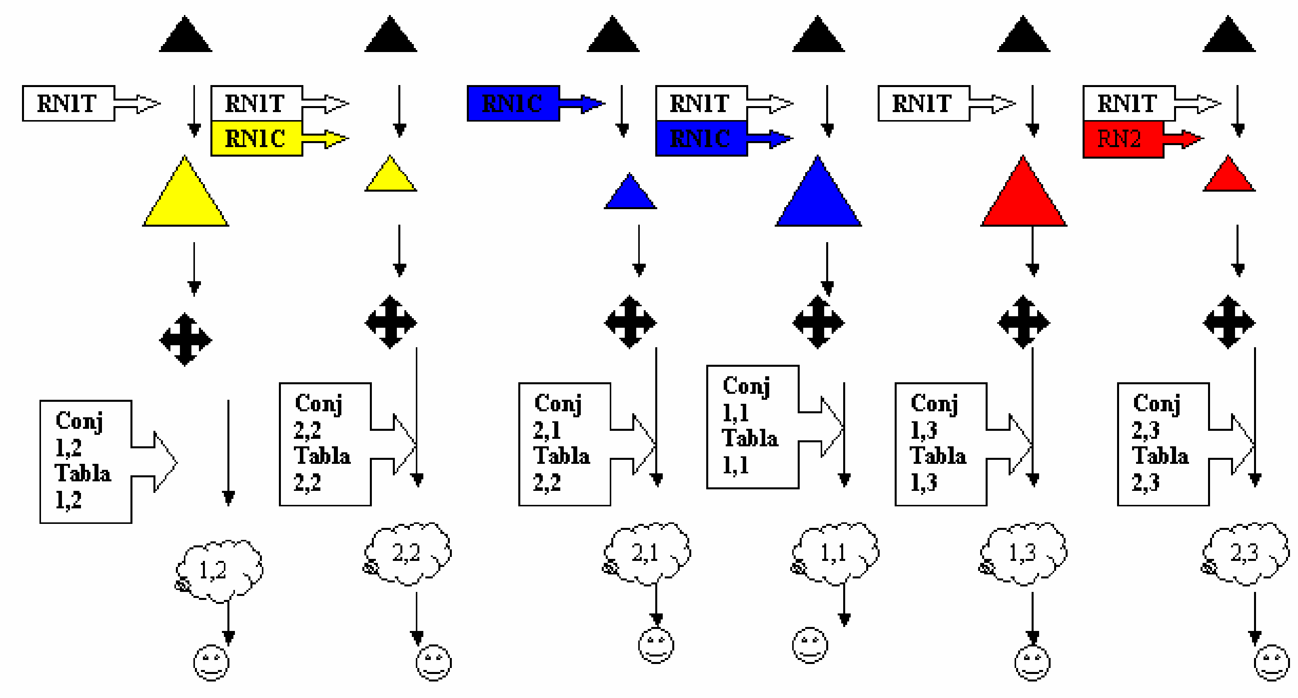


**Cómo resuelve Víctor (5:1) clasificación: modo inverso**

La red relacional que establece durante el proceso resolutivo es la siguiente:

Es también el que utiliza Ainoa (4:2) que comienza la tarea en modo inverso de lo particular explícito a lo general explícito. Establece relaciones de pertenencia desde un solo elemento y no desde más de un elemento. Así se equivoca al colocar los códigos de color fundándose en la aparición de una sola pieza del código elegido y no de las dos piezas posibles. Es decir generaliza desde un elemento y no desde una pluralidad. Sus acciones erróneas van determinando las siguientes que continúan siendo erróneas sin que se produzca una visión global, sino siempre fundamentada en la última acción.
Estos son los árboles de relaciones que construye.

**Cómo resuelve Ainoa (4:2) clasificación: modo directo**




Para Ainoa, el color resulta el referente principal en la solución de esta tarea. Podemos ver que en los casos anteriores este referente es el tamaño, como ocurre mayoritariamente.

**Cómo resuelve Ainoa (4:2) clasificación: modo inverso**

Los diagramas relacionales permiten observar la diferencia de complejidad relativa de los procesos relacionales puestos en juego en los modos directo e inverso.

El hecho de que todos los grupos de edad comiencen la tarea cometiendo los mismos errores y, finalmente sean los niños de 5 años los mas capaces de corregirlos, indica que la diferencia real entre grupos de edad se encuentra en que a esta edad los niños son capaces de desarrollar procedimientos resolutivos mas complejos que posibilitan una visión de conjunto de la tarea en mayor medida que los otros grupos de edad, indicativo de las diferencias evolutivas por razón de la edad. Sin embargo, las posibilidades que todos los grupos de edad muestran en la solución de la tarea, indican que este tipo de tarea se puede encontrar en la zona de desarrollo próximo (Vigotsky 1962) y pueden suponer un desafío alcanzable para el niño, lo que Furth (1974) llama "niveles de interés".

La construcción de relaciones que los árboles muestran permite poner de relieve algunos aspectos que nos proponíamos analizar.

En primer lugar, la gran diversidad de procedimientos encontrados en la tarea en modo inverso, muestra hasta que punto el establecimiento de relaciones, implícito en la construcción del conocimiento, es una construcción personal, íntima y diferenciada en cada sujeto que sólo resulta observable individualmente.

La sencillez y homogeneidad de los procedimientos mostrados para resolver la tarea en modo directo, contrasta con la variedad y mayor complejidad de los mismos en el caso del modo inverso y pone de relieve que, en efecto, modo directo y modo inverso son formas diferentes de razonar, siendo el inverso más complejo y, por tanto más difícil de resolver con éxito.

El menor éxito de los niños en formas de razonamiento de modo inverso, muestra que no siempre se produce la necesaria equilibración entre los dos procesos constitutivos del pensamiento reversible según la concepción piagetiana. Enfrentar al niño con estas situaciones problemáticas puede desencadenar en él la vinculación operativa entre los problemas en modo directo e inverso característica del pensamiento reversible sobre una panorámica de relaciones que antecede a las operaciones formales, propias de la matemática, y puede constituir su antesala.

Ello introduce la necesidad de poner en práctica modos de razonamiento de tipo inverso vinculados con los directos asociados.

El acierto generalizado de la tarea de clasificación en modo directo, que ratifica la afirmación piagetiana sobre la temprana capacidad del niño en actividades de clasificación, confirma que falta una base firme para determinar cuales puedan ser los mejores contenidos para los distintos niveles de educación infantil (de la Orden, en Martínez Rodríguez, 1989:93). Los porcentajes de acierto a las tareas en modo inverso, a pesar de la nula experiencia de los niños en ellas, ponen de relieve la posibilidad cierta de plantear problemáticas en las cuales en niño preescolar puede lograr la equilibración de los procesos constituyentes del pensamiento reversible.

Por otra parte, los casos observados de anticipación en el descubrimiento de reglas, indicativos claros de la inferencia que se ha producido indican que, en edades tempranas se presenta un pensamiento lógico inferencial que es posible poner de relieve a través de un lenguaje adecuado no formal.

Las tareas nos han permitido ver que, si bien las relaciones de tipo lógico inferencial correctas son necesarias para lograr el éxito, esta sola condición no es suficiente. Los casos encontrados que, poniendo de relieve la inferencia correcta, no logran el éxito, indican que esta condición, es subsidiaria del establecimiento correcto de relaciones.

Es decir, la lógica inferencial correcta, es sólo un elemento necesario que debe tener lugar dentro de un contexto más amplio que se localiza en la necesidad de establecer relaciones adecuadamente.

La argumentación se manifiesta diferente en función de la edad, de modo que los niños de 3 años muestran tipos de argumentos mas ligados con la percepción y significativamente distintos a los de los niños de los otros grupos de edad. No ocurre así entre el grupo de 4 y 5 años. Esta semejanza, que está en contra de lo esperable, podría indicar un cierto retroceso de los niños de 5 años de edad.

La utilización del "No" como operador sólo se encontró en un niño de 4 años. Esto puede ser consecuencia de los modos habituales de argumentar en la vida cotidiana que priman las afirmaciones y lo que se verifica, frente a lo que no se verifica. Sin embargo, esta marginación de las relaciones contrarias, puede tener consecuencias no determinadas sobre el razonamiento matemático y el posterior aprendizaje.

El modo inverso induce categorías de argumentos más altas que los directos y, por tanto, más interesantes desde el punto de vista del ejercicio del razonamiento que implican, que los directos.

La evolución hacia la verbalización de ambos valores progresa en los grupos de acierto, en ambos modos, a medida que el proceso resolutivo avanza. Esto indica que la experiencia promueve la expresión verbal probablemente porque proporciona mayor certeza, seguridad y firmeza en las propias convicciones presenta la acción como promotora de la expresión verbal y, con ello del desarrollo de las ideas.

La mayor exigencia del modo inverso se muestra también en su vinculación mayor con la expresión argumental verbal. El hallazgo de categorías de argumentos más altas en las tareas en modo inverso que en las de modo directo, indica que el modo inverso, requiere algo más que su directo asociado y que la abstracción semi empírica vinculada con los modos inversos da lugar a un tipo de construcción diferente, menos perceptiva e inmediata, de la que es propia al modo directo.

Que las categorías de argumentos utilizados por los grupos que aciertan, en cada tarea, sean diferentes y más altas que en los grupos de error, muestra la relación del razonamiento y el lenguaje.

Desde el punto de vista de la dificultad, la tarea de transformación en modo inverso resulta ser significativamente más difícil que la tarea en modo directo, de acuerdo con los porcentajes de acierto.

Mientras en modo directo los logros de los niños no difieren significativamente por razón de la edad, esto sí ocurre en modo inverso.

Los modos también son inversos en cuanto a los procedimientos resolutivos. Esta doble inversión, que es característica del proceso inverso de la reversibilidad y lo identifica como tal inverso en el caso de las operaciones formales, se manifiesta también en el proceso inverso no formal.

Los logros de los niños en esta tarea son significativamente distintos en función de la edad. El acierto, experimenta un incremento muy importante, en todos los grupos de edad, cuando se introducen ciertas consideraciones de tipo metodológico relativas a la presentación de la figura origen. Esta medida, permite practicar este procedimiento, complejo e importante para el razonamiento matemático, y hace que el acierto de los niños de 3 años, para los cuales la tarea planteada como una transformación global resulta excesivamente compleja, se equipare con el de los niños de 4 años, cuando se presenta como una transformación punto a punto.

Las condiciones de la investigación, introducen también la consideración del factor experiencia como causa de la mejora de resultados de acierto. Estos resultados alcanzan el 70% considerando conjuntamente las dos versiones.

Ambas causas avalan la conveniencia de introducir estas actividades como habituales en el aula de Educación Infantil.

La tarea en modo inverso muestra ser más difícil que su correspondiente en modo directo teniendo en cuenta los porcentajes de acierto. Sin embargo esto no ocurre para aquellos niños que pueden realizar la transformación global por lo que podría conjeturarse que la dificultad de la tarea sobre esta versión hace que sus modos directo e inverso estén suficientemente próximos de modo que ambos sean necesarios simultáneamente como ocurre cuando el aprendizaje se produce.

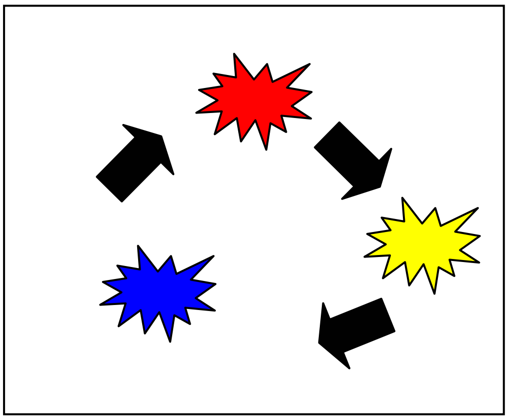
Los procesos resolutivos mostrados por los niños ponen de relieve la dificultad de comprensión del operador y la posible influencia del código simbólico con que este se presenta.

El uso de las dos versiones: global y punto a punto, muestra cómo la comprensión mejora y cómo las limitaciones que introduce la falta de dominio del espacio pueden superarse y permitir un desarrollo exitoso.

La tarea en modo directo es activa, por lo que podemos simbolizar las acciones que el niño lleva a cabo durante el proceso resolutivo a través de los diagramas relacionales que establece. En el caso de la tarea en modo inverso, que no es activa, nos fundamos en la observación que el niño realiza y en la argumentación con que sustenta para sus decisiones.

**1.2. Tarea de transformación. Análisis de algunos procedimientos mediante diagramas relacionales**

El lenguaje simbólico establecido a través del código que representa, por ejemplo, la tarjeta de transformación cíclica de color:



apoya la acción del niño, quien establece las relaciones a través de la flecha indicativa del operador. Las diferencias halladas entre las presentaciones CC y CS en modo directo, indican que, aunque las coordinaciones que el niño abstrae de los objetos (Coord. S) sean válidas, esta componente lógica no es suficiente, pues existen elementos que distorsionan las acciones que conducen a un nuevo estado (Obs. O') dando lugar a un encadenamiento entre estados:

Coord. O→ Obs. O → Obs. S → Coord. S → Coord. O' → Obs. O' → etc.

donde el encadenamiento Coord. S → Coord. O' se produce de forma incorrecta debido a causas pedagógicamente evitables.

Es el caso de los niños que no dominan las relaciones de tipo espacial que la figura origen e imagen requieren y se bloquean cuando no saben colocar correctamente las piezas integrantes. También el de aquellos que confunden los colores inicial y final en una transformación particular que se produce por efecto de las mismas limitaciones de dominio espacial o bien por el establecimiento incorrecto de inferencias.

### 1.2.1. Simbolización de diagramas relacionales

OBJETOS

**Observables (Obs. O)**

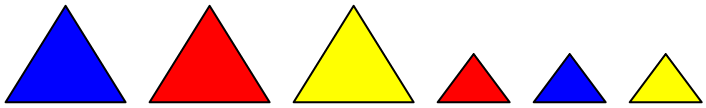
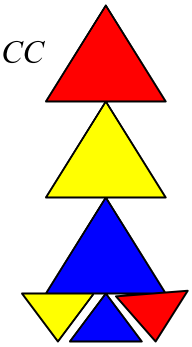
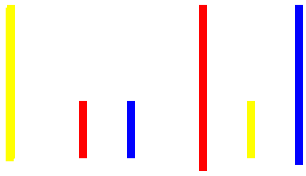
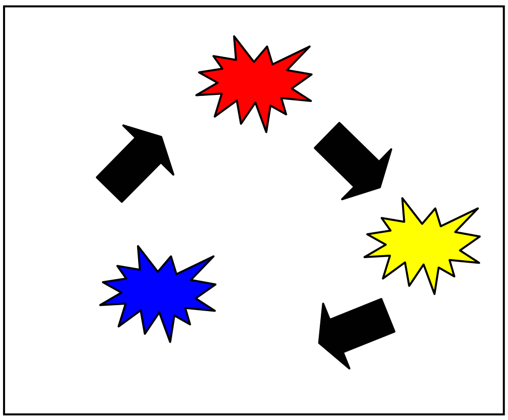
*Triángulos* 

*Figura* *CC*  *ó CS* 

**Coordinables (Coord. O)**



SUJETO

**Observables (Obs. S)**

*Acciones de observación* de un triángulo o lápiz. Código: 

*Acciones de observación* del código de transformación. Código: ◆

*Acciones de observación* de las figuras inicial en cada momento. Código:

*Acciones de observación* de un triángulo origen y su triángulo imagen (respectivamente un lápiz origen y su lápiz imagen). Código:

**Coordinables (Coord. S)**

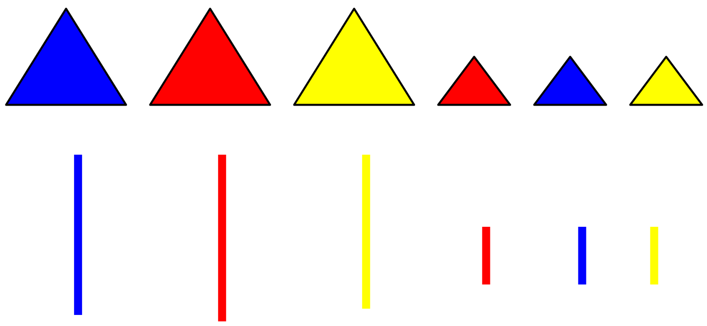
***Relaciones de pertenencia***: Pertenencia de un elemento (triángulo o lápiz) a la clase cuyo código de color está representado en el código de transformación

*Acciones de reconocimiento* de esta relación. Código: **RN1 C**

***Relación de transformación***: Comprensión de la transformación de un color determinado en otro. Código:

La sucesión de acciones que el niño ejecuta se simbolizan con el Código: ↓

*Acciones de selección* de cada triángulo o lápiz particular. Códigos:



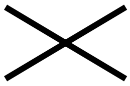
*Acciones de colocación* de un elemento como imagen. Código: ☺

*Acciones de selección* de un código de transformación. Código: □

Finalizada una cadena de acciones (lo que se indica con el código: ☺

al final de la cadena vertical), las acciones siguientes se expresan a su derecha.

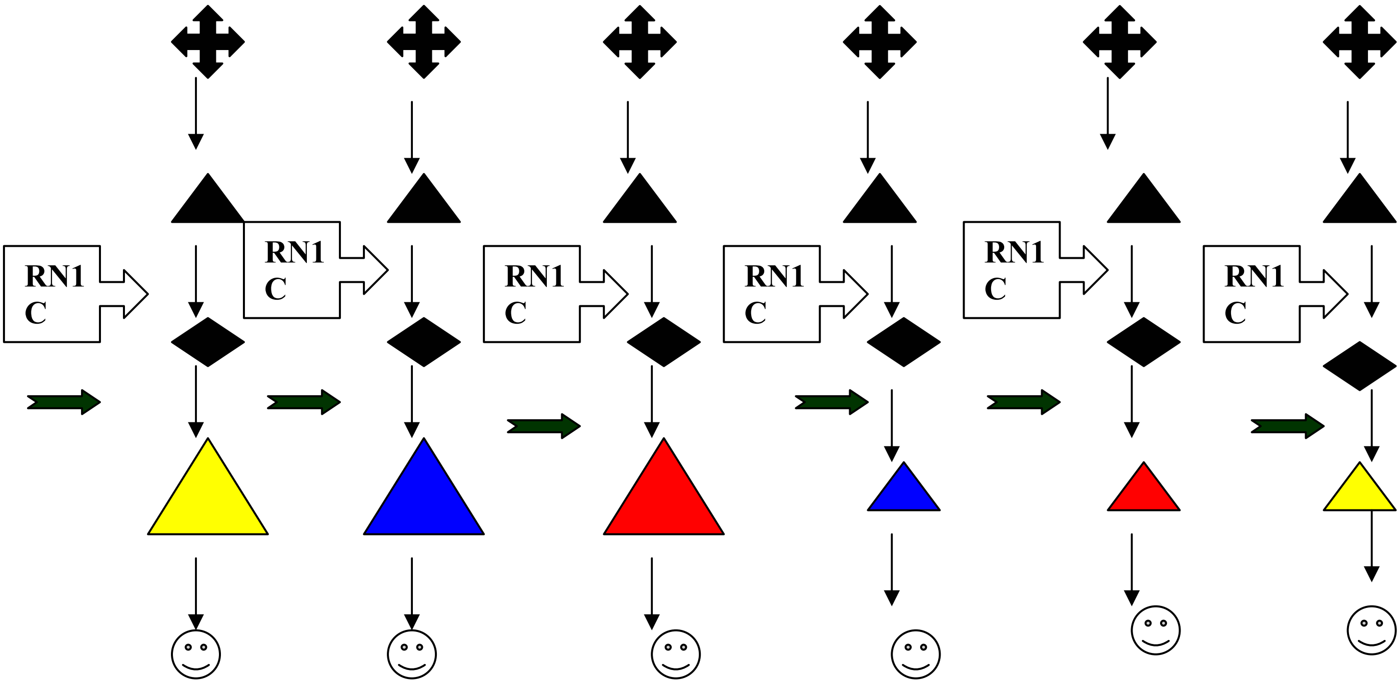
Errores. Código:



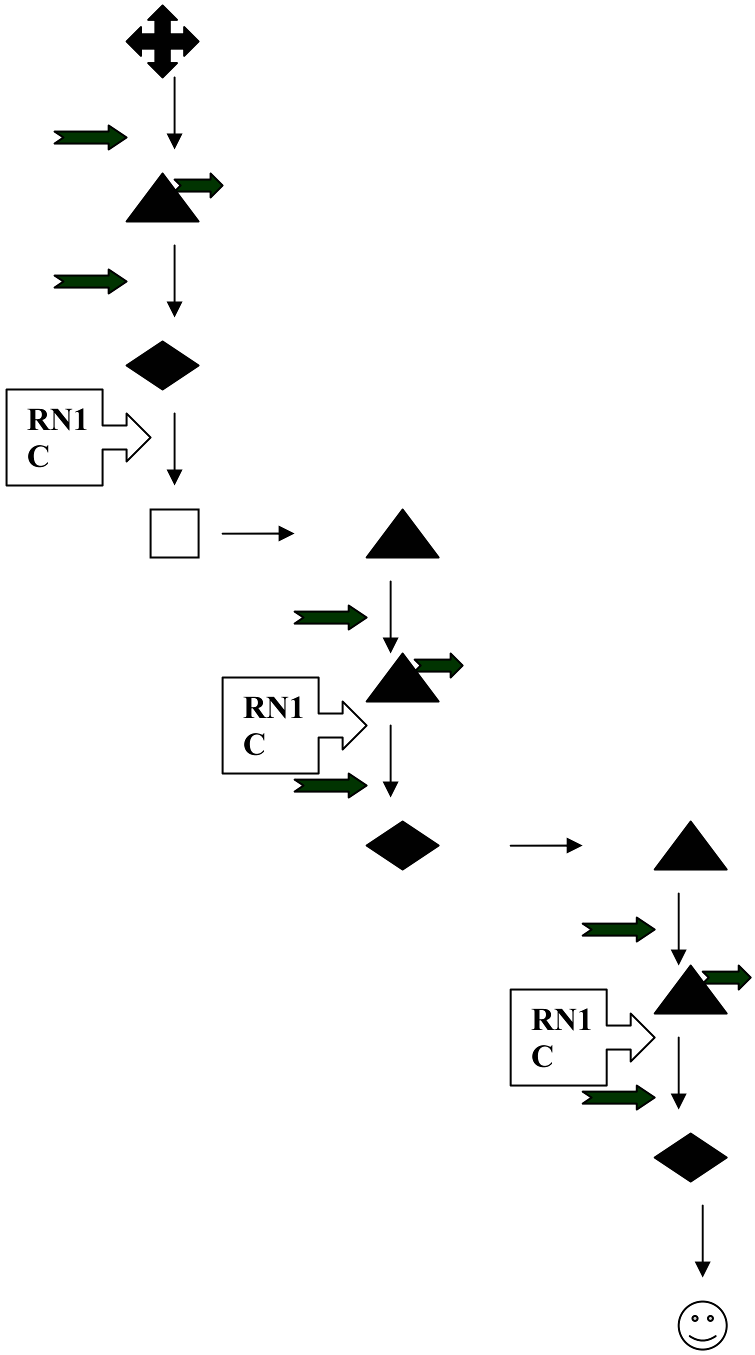
**1.2.2. Algunos diagramas relacionales**

Los siguientes son los árboles o redes de relaciones establecidos por el mismo sujeto en los procesos resolutivos de modos directo e inverso.

**Cómo resuelve un adulto transformación: modo directo (sobre CC)**



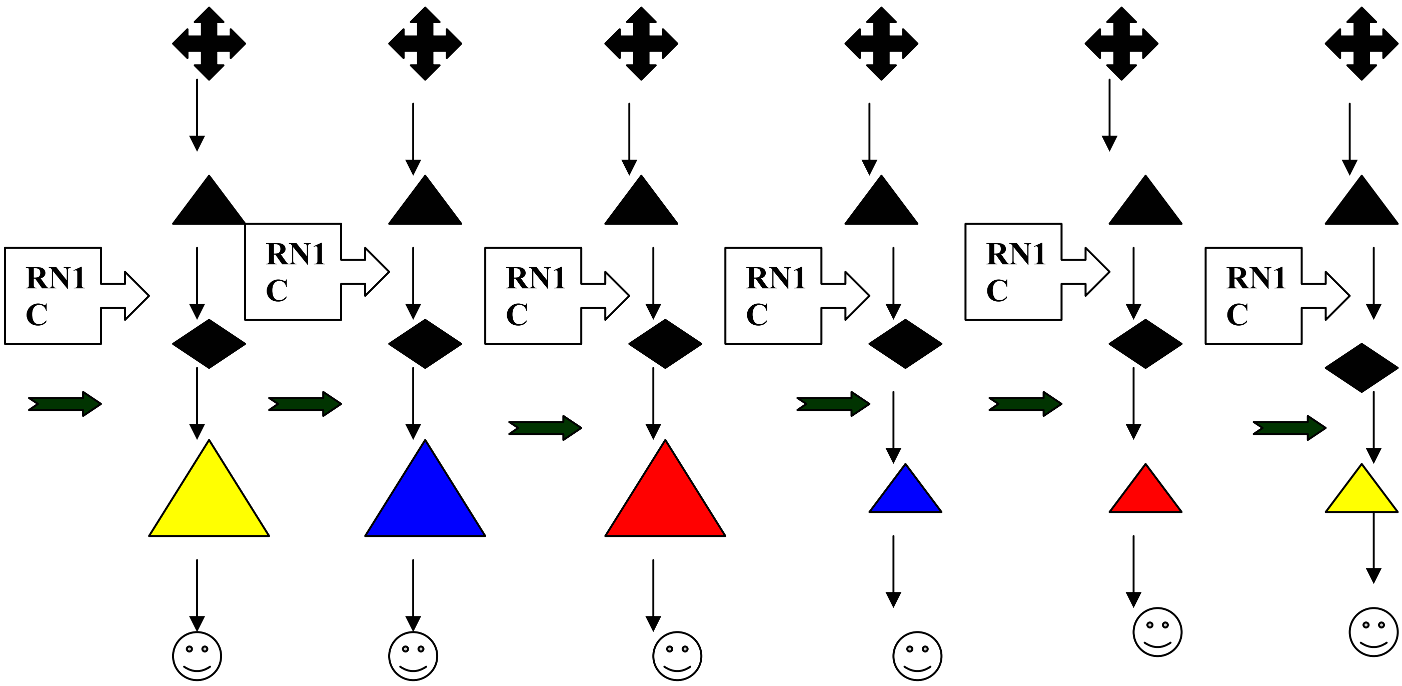
**Cómo resuelve el mismo adulto transformación: modo inverso (sobre CC)**




Podemos observar en primer lugar que la tarea en modo inverso contiene acciones y observaciones diferentes a las de modo directo. La acción necesaria de observar simultáneamente dos elementos (un triángulo y su transformado) no existe en modo directo, así mismo la acción de seleccionar un código de los dos posibles, necesario en la solución en modo inverso, tampoco existe en modo directo. En modo inverso las acciones nunca tienen lugar sobre un solo elemento particular (sobre un solo triángulo o un solo lápiz) y además de esta simultaneidad es preciso considerar el código de transformación. Esto explica la dificultad de la tarea.

Veamos el procedimiento que utiliza un niño para resolver transformación directa sobre CC.

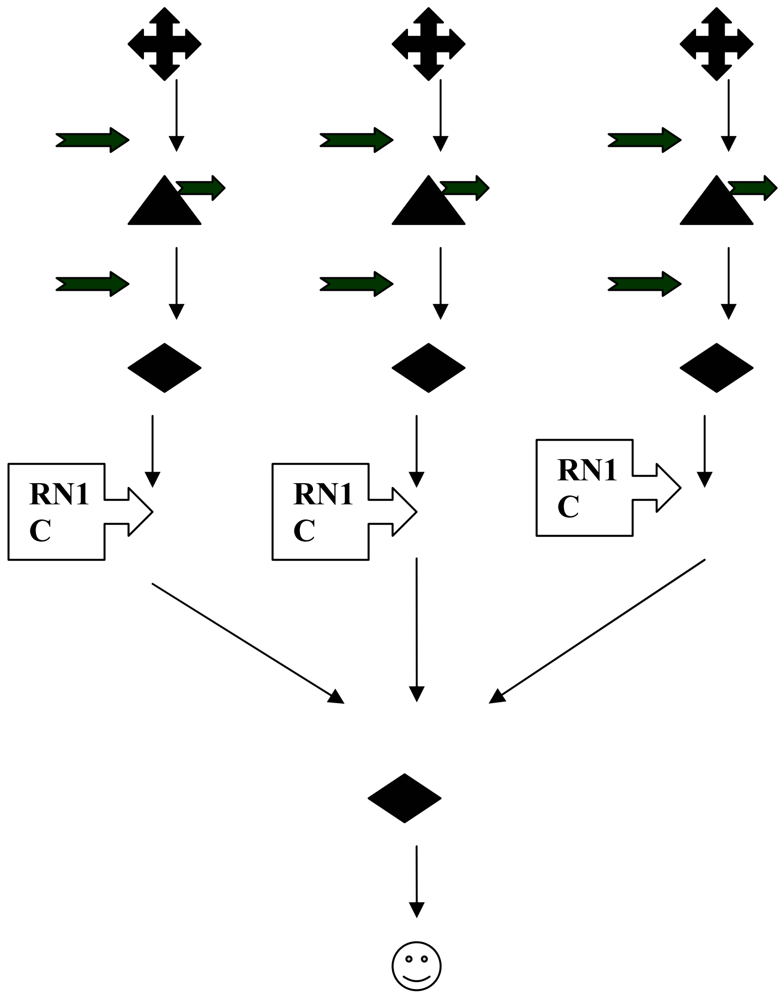
**Cómo resuelve Iván (5:2) transformación: modo directo (sobre CC)**




Podemos ver que el procedimiento es idéntico al utilizado por el adulto. Esta coincidencia plena puede explicarse por el factor de disposición espacial de la figura cuyos elementos integrantes conservan una orientación en el espacio que, en nuestra cultura, es convencionalmente de arriba abajo y de izquierda a derecha.

El procedimiento que usa para resolver transformación: modo inverso implica el establecimiento de las siguientes redes relacionales:

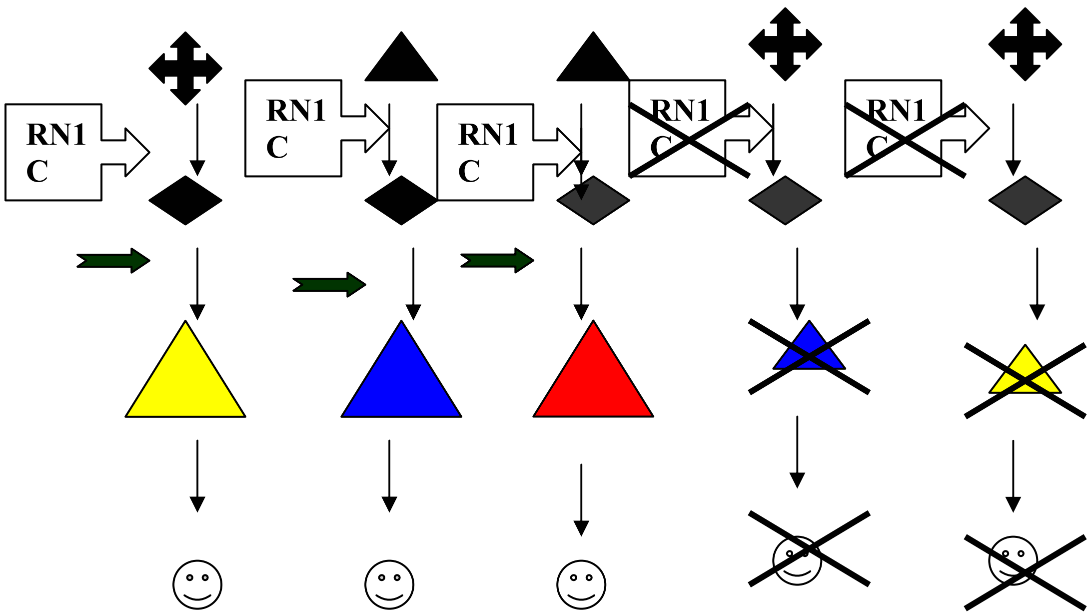
**Cómo resuelve Iván (5:2) transformación: modo inverso (sobre CC)**




El niño identifica y verbaliza la transformación realizada sobre las tres piezas grandes, que ocupan la parte superior de ambas figuras, y posteriormente reconoce estas sobre el código simbólico de transformación.

Veamos el procedimiento que utiliza una niña que no tiene éxito en transformación modo directo sobre CC, si lo tiene sobre CS.

**Cómo intenta resolver Julia (5:4) transformación: modo directo (sobre CC)**

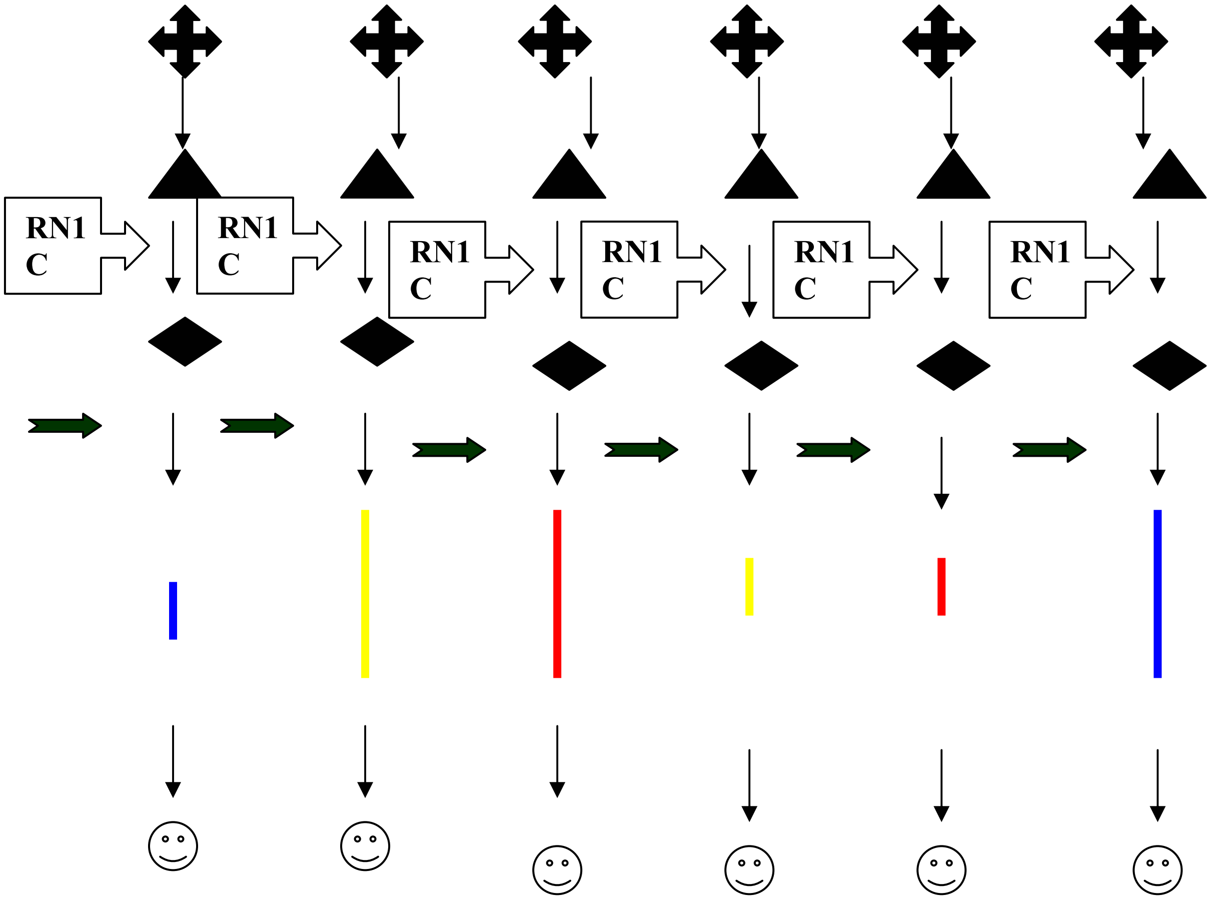



La niña transforma correctamente el primer triángulo grande, los otros dos grandes los transforma correctamente olvidando la construcción inicial, es decir va construyendo f(Am) y f(f(Am)), cuando se la hace observar los triángulos origen (ahora los pequeños) no reconoce sobre el operador el código de color que corresponde al elemento que tiene que transformar al se este de color distinto al de f(f(Am)). No tiene en cuenta la figura inicial y, por tanto tampoco la relación entre elementos correspondientes de la construcción inicial y final. La niña comprende la transformación que el código simboliza, pero la aplica sobre los elementos imagen.
La distorsión que se ha introducido en el procedimiento y que la lleva al error, no es de origen lógico: el reconocimiento erróneo del código de color sobre la tarjeta de

transformación, hubiera podido ser igual que exitoso que en las ocasiones anteriores si su dominio de la concreción que representan los elementos inicial e imagen, situados espacialmente mas alejados, hubiera sido suficiente. Igualmente hubiera podido aplicar el operador transformación como lo hizo con las piezas grandes.

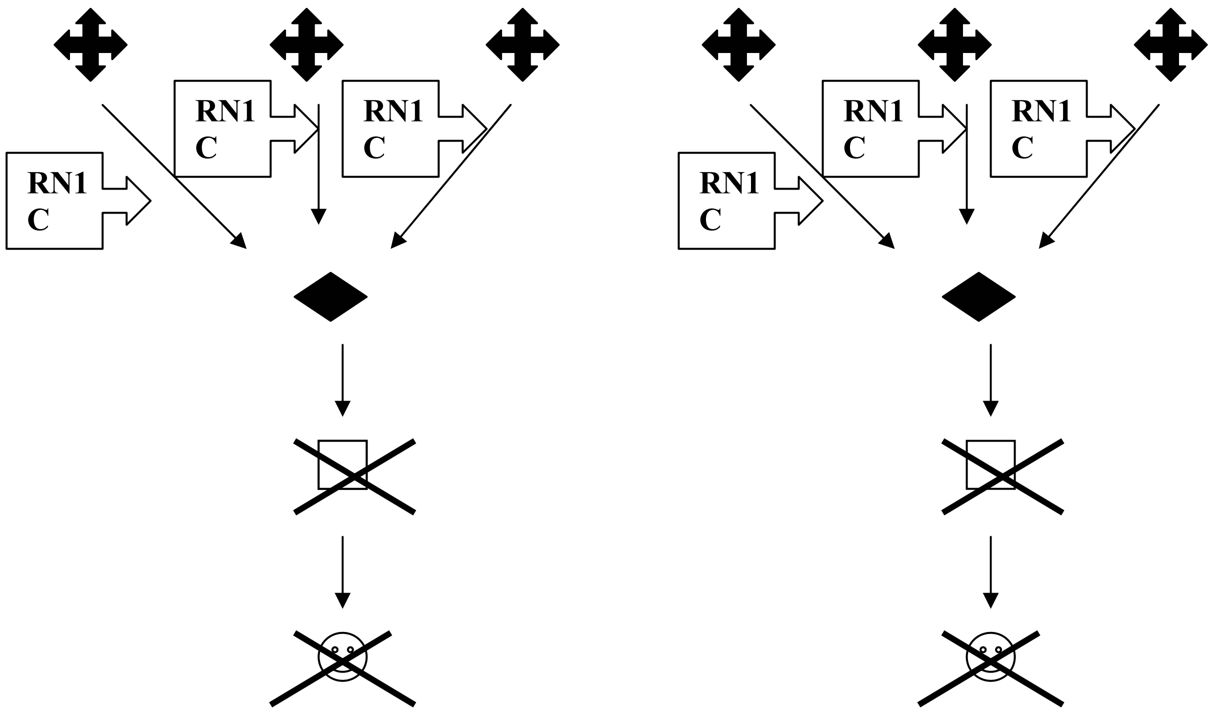
Veamos cómo se comporta sobre la figura CS.

**Como resuelve Julia (5:4) transformación: modo directo (sobre CS)**




La enumeración uno a uno de cada lápiz, permite reconocer su código de color sobre la tarjeta de transformación y seleccionar el lápiz imagen sin dificultad.

**Cómo resuelve Julia (5:4) transformación: modo inverso (sobre CS)**




En ningún momento establece la relación entre elementos correspondientes. Como ocurrió en transformación: modo directo sobre CC, el olvido de la construcción imagen hace que su atención recaiga sólo sobre la construcción inicial como si la transformación se hubiera efectuado, como entendió en CC, sobre los elementos componentes de una sola construcción, en este caso la inicial. Es decir, considerando la sucesión de los tres primeros elementos de la hilera origen, como si el segundo fuera el transformado del primero y el tercero del segundo, selecciona la tarjeta de transformación, pero la repetición del procedimiento sobre los siguientes tres elementos de la hilera, con la misma consideración, la lleva a seleccionar la otra tarjeta de transformación. Esto la lleva al bloqueo. No se produce, en este caso una visión global suficiente, como la que exige la tarea en modo inverso, para permitir una solución exitosa.

En la tarea en modo inverso, no existe diferencia significativa entre el acierto y la categoría de argumentación que revela de forma clara la comprensión del operador que constituye la verbalización precisa. Es la única tarea en que esto ocurre.
En el caso del modo directo, las categorías de argumentación son mas dispersas. Esto puede indicar que la solución exitosa de una tarea más compleja, que no está apoyada en la acción, resulta ser más exigente con la argumentación que se muestra como requisito imprescindible.

La argumentación que revela de forma más clara la comprensión de la transformación está vinculada con la solución exitosa de la tarea de modo que el grupo que fracasa muestra una argumentación más dispersa. Sin embargo un importante número de niños, muestra esta argumentación y no tiene éxito, lo que revela que la tarea contiene otros elementos de dificultad ajenos a la propia comprensión del operador.

Los procedimientos resolutivos muestran que estas dificultades añadidas tienen que ver con la falta de dominio del espacio y son, en gran medida, evitables adoptando estrategias metodológicas convenientes.

Los resultados confirman lo esperado en relación con la dificultad tanto en los contenidos como en los modos. Los modos directos son más fáciles que los inversos y la transformación es un procedimiento más complejo que la clasificación.

Prácticamente todos los niños que pueden resolver con éxito los modos inversos también resuelven con éxito los directos correspondientes. Hemos visto que, en realidad, los modos inversos contienen a los directos, en el sentido de que para resolver con acierto el modo inverso, no sólo es preciso descubrir las reglas, sino también aplicarlas con éxito, aspecto este último que define el modo directo.

En el caso de la tarea de transformación en modo inverso, la argumentación es necesaria y suficiente para el éxito, sin embargo, en el caso de la tarea de clasificación en modo inverso, más activa y sencilla que su correspondiente de transformación, los argumentos mas elaborados no son necesarios para que se produzca el acierto. En este caso, podemos decir que las categorías de argumentos altas son razón suficiente pero no necesaria para que se produzca el éxito. Esto nos lleva a afirmar la primacía del razonamiento sobre el lenguaje.

El porcentaje de acierto a la tarea de clasificación en modo directo es notablemente superior a la correspondiente de transformación en modo directo. Ello puede deberse a la influencia de la experiencia. Sin embargo, el análisis de los procesos resolutivos y su simbolización a través de diagramas relacionales revela que el código que representa la transformación es notablemente más complejo que cualquiera de los códigos que se manejan en la tarea de clasificación. En efecto, en el caso de transformación la comprensión de la transformación (que hemos simbolizado por $\rightarrow$) requiere el reconocimiento previo de relación de pertenencia de un elemento a una clase de color de tal modo que el código de transformación es un código de códigos. Mientras los códigos de color son los que operan en el caso de la tarea de clasificación, éstos no son más que elementos sometidos a nuevas operaciones en el caso de transformación. Podría decirse que estos resultan encapsulados (Dubinsky 1994) en la operación transformación.

Por otra parte, la presencia de la tabla en la tarea de clasificación, actúa como referente facilitador de la solución (Piaget 1976) y un elemento con este potencial no existe en el caso de transformación.

## 2. Conclusiones

En relación a los objetivos generales obtenemos las siguientes conclusiones.

De acuerdo con los objetivos que nos planteamos, reconocemos ante todo la importancia que debe darse al desarrollo del razonamiento matemático de forma especial durante la etapa de Educación Infantil desde la cuál es posible comenzar a abordar aspectos que lo definen.

### 2.1. En relación al primer objetivo general

Como pusimos de relieve en el Capítulo I, la explicación piagetiana de construcción del conocimiento matemático, mediante operaciones que se construyen a través de la acción sobre los objetos, permite definir un modo de acción para la etapa estudiada, a través de la cuál el niño puede poner en práctica los modos de razonamiento directo-inverso, propios de la matemática y comenzar a ajustar sobre estos y otros contenidos, la lógica inferencial pertinente.

Este estudio permite mostrar diferencias significativas entre los modos directo e inverso en relación con la reversibilidad piagetiana puesto que no se produce el deseado equilibrio argumentativo aunque se resuelvan las tareas. Igualmente, permite proponer que las mayores dificultades del alumnado ante las tareas de modo inverso se presenta porque el análisis de las tareas y los resultados obtenidos nos permiten constatar que las modalidades inversas contienen a las directas; para resolver con acierto el modo inverso, es preciso no sólo descubrir las reglas, sino realizar las acciones correspondientes, o sea, utilizar procesos de aplicación de las mismas.

La clara diferencia en el porcentaje de acierto que presenta la tarea de clasificación en modo directo frente a las demás, apoya la afirmación piagetiana que considera la clasificación como una de las actividades lógico-relacionales de más temprana aparición en el ser humano. Y más concretamente, los resultados hallados en la tarea de clasificación en modo directo, muestran que este tipo de actividad es accesible a todos los niños.

La solución a la tarea de clasificación en modo directo consiste en particularizar; las tarjetas-código representan las clases a las que pertenecen los triángulos que hay que colocar y por tanto verifican la condición que el código expresa. Esto es lo que ocurre con la determinación de las condiciones necesarias en matemáticas. Ante el modo inverso, por el contrario, el niño encuentra una situación abordable desde muchos puntos de vista con el único condicionante de respetar la situación final o condiciones que los dos triángulos colocados expresan; esto igualmente ocurre con la determinación de condiciones suficientes, en matemáticas.

A partir de los resultados, nos permitimos conjeturar que las múltiples formas en las que los sujetos identifican ubicaciones (colocación de los triángulos y tarjetas-código) en la tabla condicionadas por la situación de los dos triángulos-dato, de las cuales los árboles de solución son algunos ejemplos, se corresponden con la diversidad de situaciones vinculadas con la determinación de condiciones suficientes.

La reversibilidad de pensamiento en la concepción piagetiana está ligada a las operaciones concretas y formales. En el campo matemático hemos identificado sus dos procesos componentes en el caso particular de los cálculos algorítmicos, sin embargo, estos se extienden a otros ámbitos matemáticos bajo las formas que hemos identificado como procesos directo y proceso inverso, que no se limitan a las operaciones formales y constituyen una anticipación de los mismos. Por lo tanto, los porcentajes de acierto encontrados en las tareas de modo inverso no contradicen la afirmación piagetiana según la cuál no existe pensamiento reversible antes de los 7-8 años, pero si nos indican que, a edades tempranas, se presentan las condiciones de razonamiento que permiten la equilibración del conocimiento que el niño logra a esa edad.

**2.2. En relación al segundo objetivo general**

Hemos encontrado un espacio de razonamiento en el cuál el niño de Educación Infantil, que aún no posee pensamiento operatorio concreto y mucho menos formal, puede ejercitar en la acción los modos de razonamiento que componen el razonamiento reversible de los algoritmos y de los procesos demostrativos propios de la matemática, en un ámbito protomatemático en cuanto a la no presencia explícita del número y el espacio.

Este hecho justifica la propuesta que hacemos de una intervención centrada fundamentalmente en la utilización de estrategias que posibiliten el uso de la negación y el modo inverso.

La igualdad de respuesta de todos los grupos de edad ante la tarea de clasificación en modo directo y la seguridad con la que abordan la solución y que pone de manifiesto el proceso resolutivo, permite plantear la conveniencia de revisar los contenidos de las actividades de razonamiento lógico-matemático y orientarlos hacia actividades con otros niveles de dificultad no necesariamente vinculados con la edad. En el capítulo IV, mostramos una propuesta para desarrollar esta idea como posibilidad.

Las propuestas de clasificación no pueden ser las únicas que se realicen en Educación Infantil. En efecto, los resultados obtenidos, permiten conjeturar que este grupo de niños, domina este tipo de actividad y puede enfrentarse con otras distintas de mayor calibre.

Dado que la argumentación se manifiesta inestable en relación con la edad, parece aconsejable que se acompañe siempre la acción de verbalizaciones y confrontaciones dialogadas para ir aprendiendo a justificar con los apoyos perceptivos. La práctica de todo tipo de procesos y tareas (como las mostradas en el capítulo IV) es necesaria para superar el uso casi único de argumentaciones afirmativas.
Los modos inversos inducen categorías de argumentos mas altas que los directos y, por tanto, más interesantes desde el punto de vista del ejercicio del razonamiento matemático, que los directos. Conjeturamos que la habitual marginación de las relaciones contrarias, puede tener consecuencias no determinadas sobre el razonamiento matemático y el posterior aprendizaje.

El análisis de la secuencia de actividades que el niño realiza, en ambos modos de la tarea de clasificación, que la tarea permite constatar que los modos también son inversos en cuanto a los procedimientos resolutivos. Además la evolución hacia la verbalización de ambos valores a medida que el proceso resolutivo progresa en los grupos de acierto, en ambos modos indica que la experiencia promueve la expresión verbal probablemente porque proporciona mayor certeza, seguridad y firmeza en las propias convicciones.

La equilibración de una estructura de conocimientos relativa a un determinado estado es, de acuerdo con la perspectiva piagetiana, necesaria (Piaget 1975) para que esta pueda ser ampliada. Los resultados obtenidos muestran que no siempre existe el equilibrio necesario entre los procesos directo e inverso que componen la reversibilidad no formal: por lo general, el proceso inverso resulta estar menos integrado en el conocimiento de los niños. Esta equilibración tiene lugar a costa de las negaciones, de diferenciaciones relativas a lo que no se cumple y este aspecto no se genera de forma espontánea en el niño en la medida suficiente como para provocar la equilibración.

Por otra parte, la sorprendente igualdad de resultados obtenidos por los grupos de 4 y 5 años nos permite conjeturar que, a la edad de 5 años, la Educación Infantil no está ofreciendo las posibilidades de desarrollo que los niños de esta edad podrían alcanzar, para las cuales, algunas de las actividades desarrolladas en el capitulo IV podrían suponer un objetivo mas interesante.

Si la tarea de clasificación tiene un referente en las pruebas piagetianas de clasificación multiplicativa, no ocurre así con las tareas de transformación que suponen una propuesta completamente nueva. El hecho constatado de la mejora de resultados a lo largo del desarrollo de la prueba en el grupo de 3 años indica nuevamente que los logros de los niños parecen ser dependientes de la metodología y que ésta, no sólo debe incluir actividades adecuadas e interesantes desde el punto de vista de sus posibilidades sino, un buen repertorio de estrategias didácticas por parte del maestro. Esto permite al niño poner en práctica su razonamiento en conceptos matemáticos necesarios, mediante la eliminación de aspectos no relevantes, que puedan convertirse en barreras y producir bloqueos no vinculados con las posibilidades de los niños en relación con el concepto.

La práctica de las tareas en modo inverso precisa abstraer relaciones de los objetos mediante la llamada abstracción reflexiva (Piaget, 197?), y supone descartar posibilidades mediante inferencia cuando la concreción se contradice con la hipótesis, no son necesariamente activas (así ocurre con la tarea de transformación inversa), al contrario que sus correspondientes directas y si, básicamente reflexivas, por cuanto la argumentación que se desprende de la solución exitosa de las mismas revela la presencia del razonamiento inferencial con mayor garantía que sus correspondientes directas, cuya solución puede obedecer a factores de tipo perceptivo.

Esta práctica reflexiva, no es habitual en las aulas de Educación Infantil, más allá de la vinculada a la acción. Sin embargo, los resultados obtenidos en la investigación permiten conjeturar que la práctica habitual mejoraría los resultados escolares actuales.

## 3. Limitaciones

Las condiciones en que la experiencia tuvo lugar impusieron la necesidad de realizar todas las pruebas en una sola sesión. De esta forma la separación entre pruebas en modo directo e inverso no se realizó en dos días diferentes como estaba propuesto, sino con la diferencia de tiempo que resultó de realizar las tareas en el siguiente orden secuencial:

1º.- Tarea de clasificación. Modo directo.
2º.- Tarea de transformación sobre CC. Modo directo.
3º (si procede).- Tarea de transformación sobre CS. Modo directo.
4º.- Tarea de clasificación. Modo inverso.
5º (si procede).- Tarea de transformación sobre CC. Modo inverso.
6º (si procede).- Tarea de transformación sobre CS. Modo inverso.

El efecto de una separación mayor en el tiempo está por determinar.

Por otra parte, la aplicación individualizada de las tareas, requirió sacar a cada niño de su clase en el momento para responder a preguntas formuladas por alguien desconocido para ellos, por lo que el factor empatía también podría tener alguna influencia no determinada que, probablemente en este caso haya jugado en contra, por lo que se considera que los resultados de acierto podrían ser superiores.

Las limitaciones anteriores, de igual modo impusieron no extender las pruebas hacia otro tipo de contenidos, concretamente seriaciones y ordenaciones, ni plantearlas con otras variables.

El atributo color y los símbolos de sus valores, tienen un alto poder perceptivo. Se eligió este atributo buscando niveles de dificultad más bajos para la tarea de clasificación en modo directo, dado que las programaciones consultadas destinan esta tarea a edades comprendidas entre los 5 y los 7 años. El efecto de otros atributos menos perceptibles (la forma y el grosor, por ejemplo) está por determinar.

Sin embargo, la presentación de estas variables en forma codificada introduce la posibilidad de analizar el valor semiótico de los códigos utilizados, aspecto que no abordamos en el trabajo.

De igual modo está por determinar el efecto de variables no bivalentes. Conservando la estructura de la actividad, las posibilidades inferenciales aumentan cuando los valores posibles son trivalentes y tetravalentes, por ejemplo (como ocurriría entre el color y la forma).

En cuanto a las tareas de transformación, se eligió la mencionada buscando la familiarización previa de los niños con el material y a la vez, un tipo de transformación biyectiva por ser más fácil.

La enorme tendencia mostrada por los niños hacia la reproducción exacta de la figura origen, pone de manifiesto el uso y abuso que en las aulas de Educación Infantil, se hace de copiar, calcar, marcar, recortar... las cosas tal como se presentan.
Los resultados de acierto hallados sobre la tarea de transformación deben tener en cuenta la nula experiencia de los niños entrevistados en este tipo de tareas y permiten predecir una respuesta mucho más exitosa si la transformación fuera una actividad habitual.

De igual modo el efecto de transformaciones no biyectivas, o de otras que, siendo biyectivas no sean cíclicas o no varíen todos los valores, o varíen atributos con otro número diferente de valores o valores diferentes del color está por determinar.

También a causa de la nula experiencia de los niños sobre tareas en modo inverso, se impuso la necesidad de plantearlas, en primer lugar en modo directo. Resultó imposible pensar en una forma de explicar la tarea inversa sin hacer referencia a su propia solución.

La influencia de los hábitos de razonar en forma inversa, sin la previa introducción de la directa, abre otros campos muy distintos que pueden llegar hasta a la posibilidad de encontrar las piezas que entran en el juego, sin necesidad de tenerlas presentes en el momento. Esto es lo que ocurre con los problemas matemáticos cuando se presentan fuera del contexto de las lecciones o temas a los que están asociados.

Así pues, circunscribiéndonos al ámbito del material que representan los bloques lógicos, las dos tareas experimentadas son a penas dos casos particulares de los cientos que pueden experimentarse. Todos ellos diferentes pero, entre ellos, algunos estructuralmente iguales.

## 4. Perspectivas

Los resultados de la prueba numérica piagetiana ponen de relieve que el proceso inverso resulta considerablemente más difícil que su asociado directo. La extensión de estos procesos sobre aspectos distintos dentro de las matemáticas, nos lleva a plantear la necesidad de estudiar si, en el caso de las restantes problemáticas, donde ambos se muestran indisolublemente unidos formando pasajes de procesos más amplios, este desequilibrio persiste. Esta es una cuestión que tiene interés desde el punto de vista didáctico en la medida en que puede afectar al aprendizaje.

El destacado porcentaje de acierto sobre la única tarea en la que los niños entrevistados tenían una cierta experiencia, la de clasificación en modo directo, permite plantear el interrogante sobre las posibilidades reales de los niños de esta etapa sobre los demás tipos de contenidos así como sobre los modos inversos.

De igual modo, la confirmación del retroceso que podría presentarse en el grupo de cinco años, precisaría ejercitar actividades más adecuadas e interesantes para la edad para poder efectivamente comparar resultados significativos con respecto a otros grupos de edad.

El efecto que una metodología que contemple los modos inversos, en igualdad de oportunidades que sus directos asociados, tendría sobre el desarrollo del pensamiento matemático y, por supuesto, sobre el aprendizaje de los propios contenidos matemáticos, está por investigar.

De igual forma, requiere ser investigado su efecto sobre el aprendizaje del escolar en matemáticas.

Con el mismo material es posible proponer actividades muy distintas que, a falta de una experimentación explícita, pueden, a priori, suponer grados de dificultad muy distintos.
Los logros de los niños de Educación Infantil, en este sentido están por determinar.

Una eventual graduación de dificultades entre actividades con bloques lógicos, o material equivalente, proporcionaría una programación de actividades de razonamiento matemático adecuadas a niños con distintas posibilidades, por razón de sus capacidades o por razón de su edad.

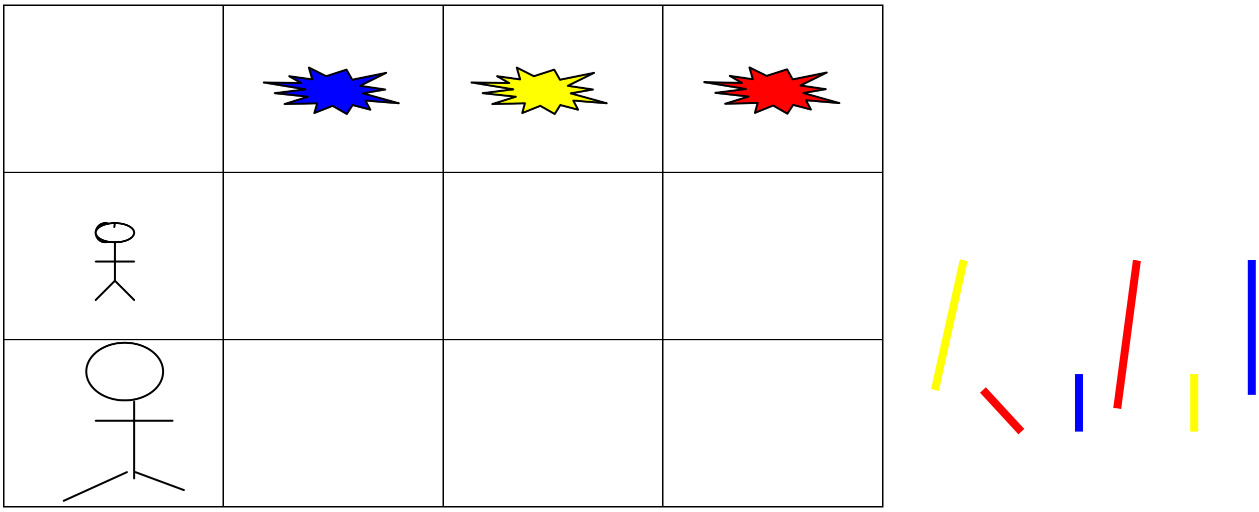
Por otra parte, el derecho a una educación individualizada que propicie el desarrollo de todas las capacidades, al máximo de sus posibilidades para cada sujeto, supone atender los casos de diversidad en aquellas ocasiones en que, como en el caso de algunos niños de 3 años, estas están por encima de la media de su edad.

Otros factores de gran relevancia en el aprendizaje como la influencia social a través de circunstancias como el uso de un lenguaje familiar y escolar mas depurado deben ser valorados. Esto contribuiría a explicar los buenos resultados de algunos niños de 3 años para poder decidir si ello se debe a sus condiciones naturales o a la influencia de sus experiencias sociales o familiares.

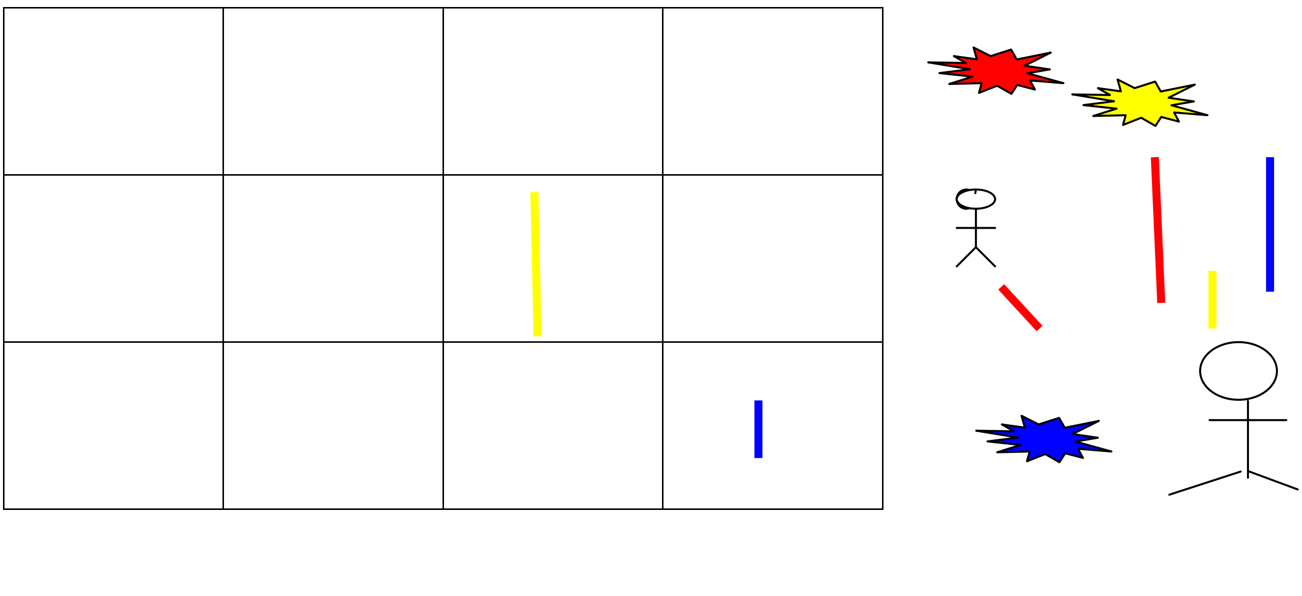
Ahora bien, la atención a estos aspectos, recae bajo el quehacer del maestro. La influencia de las estrategias metodológicas sobre los resultados, nos llevan a mantener que sólo cuando las estrategias didácticas se agoten sin éxito, podremos decir que nuestros pequeños no son capaces de llevar a cabo razonamientos inferenciales como los que emplearán cuando estudien matemáticas en la escuela.
Pero para eso queda mucho por hacer...

## ANEXO I PRUEBA PILOTO

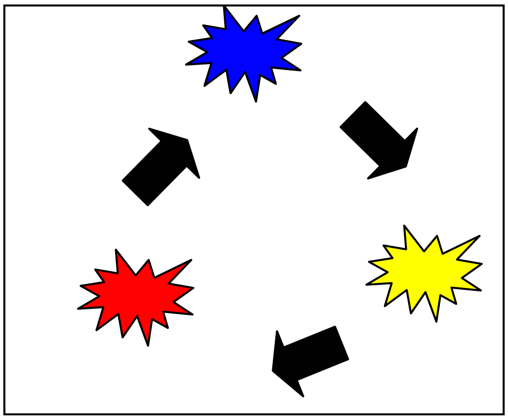
### Tarea T1

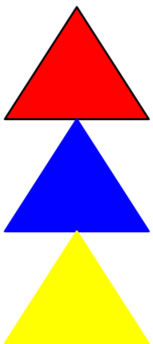


### Tarea T2

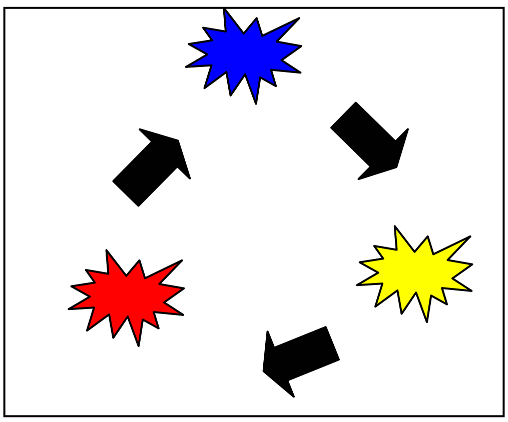


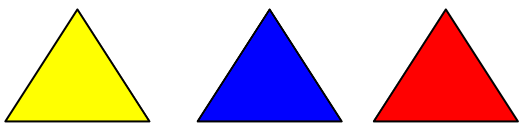
**Tarea T3**



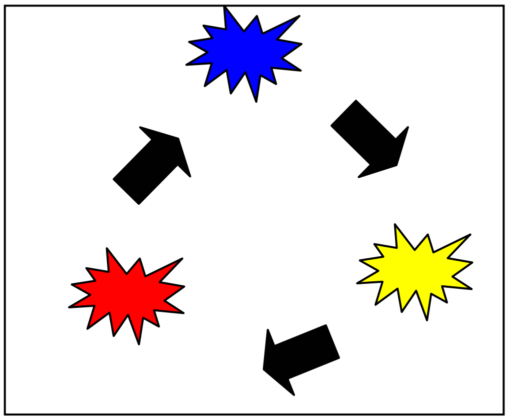


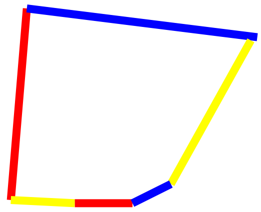
**Tarea T4**



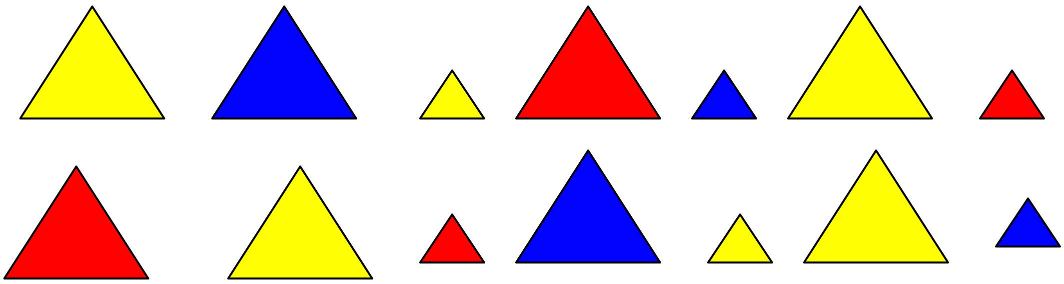


**Tarea T5**

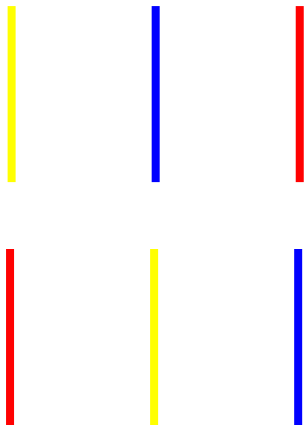




**Tarea T6**



**Tarea T7**



**ANEXO II HOJA DE REGISTRO Y TRASCRIPCIÓN DE UNA ENTREVISTA**

**HOJA DE REGISTRO**

Colegio:

Alumno: Años: Meses: Aula: 3, 4 5 años.

Código:

Día: Hora de comienzo: Hora de finalización:

| Clasificación. Modo directo. | | | |
|---|---|---|---|
| Secuencia de acciones | Correcto / tipo de error | Verbalización | Observaciones |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| **Clasificación. Modo inverso** | | | |
|---|---|---|---|
| Primer elemento. | | | |
| Correcto / tipo de error | Verbalización | Observaciones | |
| | | | |
| Secuencia de acciones | Correcto / tipo de error | Verbalización | Observaciones |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| **Transformación. Modo directo** | | |
|---|---|---|
| | Comprensión: S/N | Observaciones |
| Figura CC | Correcto / tipo de error | |
| Figura CS | Verbalización. | |

| **Transformación. Modo directo** | | |
|---|---|---|
| | Reconoce cambio: S/N | Observaciones |
| Figura CC | Reconoce el operador: S/N | |
| Figura CS | Verbalización. | |

**TRASCRIPCIÓN DE UNA ENTREVISTA**

**Niño: E.**

**T1.- Clasificación. Modo directo**

| **Entrevista** | **Observaciones** | **Análisis** | **Argumentación** |
|---|---|---|---|
| E.- ¿Cuántos años tienes?<br>N.- Tres.<br>E.- A ver si te gustan los juegos que me he inventado. Luego me los dices ¿eh?<br>E.- Mira, tu sabes que es esto...<br>(Asiente).<br>[Se muestran las tarjetas de valores].<br>(Asiente). | | | |
| E.- ¿Si? Pues a ver, estos son dos muñecos ¿verdad?<br>N.- Si<br>E.- Pero este es...<br>N.- Pequeño.<br>E.- Pequeño, y este otro... | | Identifica explícitamente los valores del atributo tamaño. | |

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| N.- Grande.<br>E.- Esto...<br>[Se van recorriendo con el dedo las tarjetas de color].<br>N.- Rojo... Amarillo... Azul.<br>E.- Eso es. | | Identifica explícitamente los valores del atributo color. | |
| E.- Entonces voy a colocar las tarjetas aquí... Así...<br>[La matriz queda indicada en la siguiente forma: en vertical, arriba grande, abajo pequeño, en horizontal, azul, amarillo y rojo]<br>(Asiente) | | | |
| E.- Bueno pues mira, ahora tu tienes que colocar estos triángulos, estos que son pequeños y estos que son grandes...<br>[El niño ya ha identificado el tamaño]<br>Cada uno en un cuadro pero fijándote en lo que dicen las tarjetas. | | | |

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| Coge el azul grande y le coloca en (1,1) | Utiliza primera casilla de la matriz | Correcto | |
| E.- ¿Por qué le pones ahí?<br>N.- Porque es azul. | | | Expresa un valor, correspondiente al color de la forma |
| E.- Y... que más.<br>N.- Y grande | La entrevistadora facilita que el niño tenga en cuenta el otro criterio. | | |
| [Coloca rojo grande en (1,3), amarilla grande en (1,2), amarillo pequeño en (2,2), rojo pequeño en (2,3) y azul pequeño en (2,1)] | Utiliza la última casilla y la casilla del medio de la primera fila y luego asigna los de la segunda. Parece que no sigue orden alguno en el color. Inmediatamente, sin ninguna duda | Correcto<br>Parece ser que utiliza el criterio tamaño, para ordenar las tarjetas. | |
| E.- ¿Por qué pones este aquí?<br>[E señala la amarilla grande de (1,2)]<br>N.- Porque es grande y amarilla. | | | Expresa el valor de la forma y el valor del color. |

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| E.- Y... esta otra ¿por qué la pones aquí? [E señala el azul pequeño de (2,1)] N.- Porque es pequeño y azul. | | | Expresa el valor de la forma y el valor del color. |

***T2.-* Clasificación. Modo inverso**

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| E.- Vamos a jugar a adivinar. Mira te doy las tarjetas porque ahora las vas a tener que poner tu. [El niño sabe reconocer los valores que representan las tarjetas] E.- Yo voy a colocar dos triángulos. Solo dos ¿eh?. Y tu fijándote muy bien en los que yo pongo, tienes que adivinar dónde tienes que poner las tarjetas y los otros triángulos. ¿Vale? (Mira muy atento y asiente). | | | |

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| [Se colocan azul pequeño en (2,2) y amarillo grande en (1,3)].<br>[N coloca la tarjeta de color rojo]. | | Comienza colocando tarjeta de color, en una columna sin datos. | |
| E.- Y esa ¿por qué la pones ahí?<br>(No contesta). | | | |
| (Coloca la tarjeta de azul sobre el triángulo amarillo y la de amarillo sobre el triángulo azul).<br>(Coloca la tarjeta de grande y debajo la de pequeño). | | Utiliza el criterio color.<br><br>Consigue colocar en orden las tarjetas correspondientes al criterio tamaño. | |
| E.- Y esa ¿por qué la pones ahí?<br>(E indica la tarjeta de grande)<br>N.- Porque es el grande. | | | Expresa un valor del criterio tamaño. |
| E.- ¿Ya está? ¿Lo dejas así?.<br>(Mira muy atento la matriz).<br>(Se queda callado mirando la matriz)<br>E.- Esta ¿por qué está aquí? | E le induce a la inferencia sobre sus acciones. | | |

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| [E indica con el dedo la tarjeta de azul]. N.- Porque es azul. | | Identifica el valor en la tarjeta | |
| E.- ¿Está bien ahí? (Niega con la cabeza e intercambia rápidamente las tarjetas de amarillo y azul). | E induce a la inferencia sobre el color. | Consigue realizar la inferencia. | |
| [El niño, hasta el momento sólo ha colocado las tarjetas] E.- Entonces como colocamos estos triángulos. [E señala los triángulos que tiene sin colocar] [N mira las tarjetas a cada pieza]. (Coloca rojo grande en (1,1), rojo pequeño en (2,1), azul grande en (1,2) y amarillo pequeño en (2,3)). | Completa la tabla siguiendo las columnas. | Colocación correcta. Parece que sigue el criterio color | |
| E.- Y esta... ¿Por qué la pones aquí? (E indica el amarillo pequeño de (2,3)) N.- Porque aquí está el amarillo y aquí | | | |

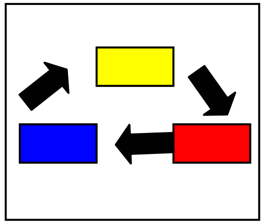
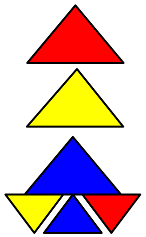
| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| pequeño.<br>(N señala con el dedo las tarjetas de amarillo y pequeño) | | Identifica los dos valores de la pieza. | Expresa los dos valores. |

***T3*.- Tarea de transformación. Modo directo**

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| E.- Ahora vamos a jugar a cambiar. Mira, yo tengo estas tarjetas que sirven para cambiar los colores. Te las voy a enseñar. Esta, sirve para cambiar el color rojo por el azul<br>[E indica con el dedo el color rojo, la flecha y el color azul en el extremo de la flecha]<br>...El azul por el amarillo...<br>[E indica con el dedo el color azul, la flecha y el color amarillo al extremo de la flecha]<br>...Y el amarillo por el rojo.<br>[E indica con el dedo el color amarillo la flecha y el color rojo al extremo de la flecha]. | | | |

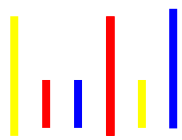
| | | | |
|---|---|---|---|
| E.- Entonces mira cómo voy a jugar. Si yo tengo un triángulo rojo...<br>[E coloca el triángulo rojo grande sobre la mesa]<br>...El rojo le cambio por...<br>[E indica en la tarjeta el rojo, la flecha y el amarillo]<br>N.- Azul.<br>E.- Entonces pongo el azul aquí.<br>[E coloca el azul a la derecha del rojo inicial]<br>E.- Y si tengo este azul...<br>[E coge azul pequeño y le coloca debajo del rojo grande]<br>... Pues, como es azul, le cambio por...<br>[E indica sobre la tarjeta el azul, la flecha y el amarillo]<br>N.- Amarillo<br>E.- Claro porque el azul cambia por amarillo.<br>[E indica el triángulo pequeño azul y el pequeño rojo a su derecha] | Se explica el ejercicio con dos ejemplos para introducir los dos lugares destinados a construcción origen y construcción imagen. | | |
| [E deja la tarjeta sobre la mesa y coge la otra tarjeta de cambio]<br>E.- Y mira, esta pone que lo rojo lo cambio por el amarillo, el amarillo por el azul y el azul por el rojo. | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| [E va indicando cada uno de los colores]<br>... La flecha indica por cuál le cambio, ¿ves?<br>(Asiente) | | | |
| E.- Pero mira con esta otra, si tengo este triángulo...<br>[E señala triángulo rojo grande que está sobre la mesa]<br>... Como ahora el rojo se cambia por...<br>N.- Amarillo<br>E.- Entonces el azul ya no vale porque ahora tengo que poner este...<br>[Quita el azul imagen del ejemplo y coloca en su lugar el amarillo]<br>[E quita también el amarillo pequeño imagen del ejemplo anterior]<br>E.- Y si tengo este azul<br>[È señala el pequeño azul situado bajo el grande rojo inicial]... Le cambiaré por...<br>[E señala sobre la tarjeta el color azul, la flecha y el color rojo]<br>N.-Rojo. | Se explica la otra transformación con dos ejemplos. | Está muy atento. | |
| E.- Elige una tarjeta de cambiar. | Elige: | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (Mira las dos y apunta una de ellas).<br>E.- ¿Con esta quieres jugar?<br>(Asiente. La mira).<br>[Elige de rojo a azul, de azul a amarillo y de amarillo a rojo] |  | | |
| E.- Entonces, yo voy a hacer un árbol.<br>[E realiza la figura despacio] | La figura inicial es<br> | Figura compleja con bloques lógicos. | |
| E.- Pues mira, ahora con estos otros triángulos, tu tienes que hacer un árbol como este, aquí...<br>[E señala el espacio a la derecha de la figura]<br>... Pero cambiando los colores como dice la tarjeta. | | Se explicitan las reglas de juego. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (Se queda parado). | | Pausa | |
| E.- Mira, la ramita de arriba del pino de qué color es...<br>[E apunta el triángulo rojo grande].<br>N.- Rojo.<br>(Mira la tarjeta).<br>[ E apunta al rojo en la tarjeta].<br>E.- Y tu tarjeta de cambiar que dice...que el rojo lo tenemos que cambiar por...<br>N.- Azul.<br>E.- Pues entonces, en el árbol nuevo, esta...<br>[E apunta el triángulo rojo grande].<br>E.- La tenemos que cambiar por azul.<br>[E coloca el azul grande a la derecha del rojo grande].<br>E.- Sigue tu.<br>(Se queda parado).<br>E.- Esta otra, de qué color es...<br>[E apunta al triangulo amarillo grande]<br>N.- Amarilla.<br>E.- Entonces... | E explica el juego con un ejemplo | | |
| (Coloca el triángulo rojo debajo del azul en la figura | Cambia la amarilla según el | Aplica correctamente el | |

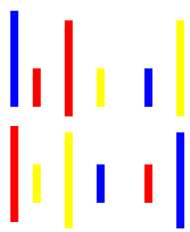
| | | | |
|---|---|---|---|
| imagen). | operador. | operador. | |
| (Coloca el triángulo amarillo debajo del rojo en la figura imagen). | Realiza sólo el tercer cambio.<br>Cambia la azul según el operador. | Aplica correctamente el operador. | |
| E.- Y este...<br>[E señala el triángulo amarillo que N acaba de colocar en la figura imagen]<br>... Por qué le pones ahí...<br>N.- Porque amarillo cambia a...<br><br>(Mira las dos construcciones y el operador). | Ese amarillo es el color final. | | |
| N.- Azul cambia a amarillo.<br>(Mirando la tarjeta).<br>(Mira las dos construcciones).<br>(Se queda parado) | Se confunde Entre las construcciones inicial y final. | No lo consigue<br>Problema de espacialidad | Verbaliza la relación. |
| E.- Mira, con la tarjeta que tu has elegido, vamos a cambiar de color estos lápices. ¿Ves? | | Se cambia a construcción compleja con material | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | concreto. | |
| [E coloca los seis lápices verticalmente uno tras otro]<br>E.- Mira están todos en fila y, ahora tu con estos otros...<br>[E da al niño otros seis lápices iguales a los colocados]<br>E.- Son iguales ¿a que si?<br>N.- Si<br>E.- Bueno pues tienes que ir poniendo debajo de cada uno la pintura en la que cambia pero fijándote muy bien en lo que dice la tarjeta ¿vale?<br>(Asiente).<br>E.- Por ejemplo, la primera de qué color es...<br>[E la apunta con el dedo].<br>N.- Amarilla.<br>E.- Pues ahora nos fijamos en la tarjeta. ¿Qué nos dice?<br>N.- Cambia a roja.<br>E.- Pues entonces, ponemos la roja debajo de ella. ¿Ves?<br>(Asiente) | Figura inicial:<br><br>E explica el ejercicio con el nuevo material y la nueva disposición de las piezas. | | Verbaliza relación |
| [No se ha mencionado nada sobre el tamaño aunque en los ejemplos se conserva el tamaño en la transformación]<br>E.- Sigue tu. | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| [Coge azul pequeña y la coloca debajo de la roja pequeña] | | Aplica correctamente el operador | |
| [Coge amarilla pequeña y la coloca debajo de la azul pequeña]<br>(Despacio).<br>(Mira la tarjeta a cada cambio). | | Aplica correctamente el operador. | |
| [Coge amarilla grande]<br>(Mira la tarjeta)<br>(Mira los lápices)<br>[Deja la amarilla grande, coge la azul grande y la coloca debajo de la roja grande] | Parece que hubiera seleccionado en primer lugar el tamaño. | Aplica correctamente el operador | |
| (Muy despacio)<br>[Coge roja pequeña y la pone bajo la amarilla pequeña] | | Aplica correctamente el operador | |
| (Mira la tarjeta)<br>[Coge la amarilla grande y la coloca debajo de azul grande] | Todavía mira la tarjeta aunque es la única que le queda. | Aplica correctamente el operador | |
| E.- ¿Ya está? ¿Está bien? ¿Cómo has cambiado?.<br>N.- Amarilla, roja.<br>(Apunta con el dedo, la de arriba y la de abajo). | Señala el cambio que ha realizado.<br>Transforma grande en | | Verbaliza el color inicial y final. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| N.-Roja, azul. Azul amarilla...<br>(Va apuntando la de arriba y la de abajo). | grande y pequeña en pequeña. | | |

***T4.-* Transformación. Modo inverso**

| Entrevista | Observaciones | Análisis | Argumentación |
|---|---|---|---|
| E.- Ahora vamos a ver si tu adivinas.<br>Mira, he puesto todos los lápices en fila. Y ahora cada uno le voy a cambiar por otro y le voy a poner debajo. A ver si tu adivinas cómo los cambio<br>[E hace la hilera transformada<br>debajo, muy despacio]<br>E.- ¿Qué te parece?. | Hileras inicial y final<br> | Figura compleja con material concreto.<br><br>El niño está atento. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| N.- Esta azul por esta, esta por esta.<br>[Señala la primera a la izquierda y la que está debajo, la segunda y la de abajo hasta el final, diciendo siempre: esta por esta]<br>E.- ¿Qué he cambiado?<br>N.- Los colores. | . | Reconoce cambio en el color. | No verbaliza |
| E.- ¿Te acuerdas de las dos tarjetas de cambiar los colores que teníamos?.<br>(Asiente)<br>E.- Mira aquí están. Cógelas tu.<br>[E le da las dos tarjetas de transformación de color]<br>E.- ¿Con cual he cambiado los colores?<br>(Pone el dedo en la pintura azul primera y luego en el azul de una de las tarjetas. Mira las hileras)<br>N.- Con esta.<br>[Coge una de las tarjetas]<br>E.- ¿Seguro? ¿Lo comprobamos?<br>(Asiente) | Tiene las dos tarjetas en la mano.<br>Pone las dos tarjetas sobre la<br>mesa. | Está muy atento. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| E.- En la tarjeta pone que el rojo cambia por...<br>(Mira la tarjeta)<br>N.- Amarilla.<br>E.- Y ¿es eso lo que he hecho yo?<br>(Mira las hileras y asiente)<br>E.- ¿Dónde lo ves?<br>(Apunta un rojo arriba y un amarillo abajo).<br>E.- Muy bien. | | Puede reconocer la representación simbólica del cambio. | Tiene buena expresión verbal pero habla poco. En cambio resulta muy expresivo con la mirada y está muy atento. |

## ANEXO III CODIFICACION DE DATOS

### Tarea de clasificación: Modo directo

Para obtener resultados a través de la aplicación estadística SPSS, se establecen las siguientes variables con las codificaciones alfanuméricas que se señalan en cada caso.

**Dprimera**: Valora si la primera pieza colocada es correcta y el tipo de error si es errónea.

Codificación: c = correcto; t = error en tamaño, co = error en color, tc = error en tamaño y color.

**Dvprimer**: Verbalización de valores sobre la primera pieza.

Codificación: t = verbaliza tamaño, c = verbaliza color, tc = verbaliza tamaño y color ó i = imprecisión.

**Dtercera**: Valora si, hasta la tercera pieza, la tabla es correcta y el tipo de error si es errónea.

Codificación: c= correcto; t = error en tamaño, co = error en color, tc = error en tamaño y color.

**Dvtercera**: Verbalización de valores sobre la tercera pieza..

Codificación: t = verbaliza tamaño, co = verbaliza color, tc = verbaliza tamaño y color ó i = imprecisión.

**Dsexta**: Valora si, tras la sexta pieza, la tabla es correcta y el tipo de error, si es errónea.

Codificación: c = correcto; t = error en tamaño; co = error en color; tc = error en tamaño y color.

**Dvsexta**: Verbalización de valores sobre la sexta pieza.

Codificación: t = verbaliza tamaño, c = verbaliza color, tc = verbaliza tamaño y color ó i = imprecisión.

**Dprocedim**: Procedimiento seguido para completar la tabla.

Codificación: t = por filas; co = por columnas; tc = por filas o columnas.

**Dargumen:** Categoría de argumentación más alta mostrada durante el desarrollo de la solución.

Codificación:

1 = No argumenta nada consistente,

2 = No responde, no quiere responder o responde "Porque es así","Porque va ahí"

3 = Predomina un valor,

4 = Refiere los símbolos,

5 = Puede reconocer los dos valores,

6 = Reconoce las clases,

7 = Verbaliza alguna forma de inferencia,

8 = Expresa inferencia.

**Tarea de clasificación: Modo inverso**

Se establecen las siguientes variables con las codificaciones alfanuméricas que se señalan en cada caso.

**Iprimero**: Se valora si el primer elemento colocado es correcto y el tipo de error si lo hubiera.

Codificación: c = correcto; t = error en tamaño; co = error en color; tc = error en tamaño y color.

**Ivprimera**: Verbalización del primer elemento colocado.

Codificación: t = verbaliza tamaño; co = verbaliza color; tc = verbaliza tamaño y color ó i = imprecisión.

**Itelem1**: Se registra el tipo de elemento colocado en primer lugar.

Codificación: tcd = tarjeta de color con datos; tcsd = tarjeta de color sin datos; pcd = pieza de color con datos; pcsd = pieza de color sin datos; tt = tarjeta de tamaño.

**Icuarto**: Se valora si, hasta el cuarto elemento, la tabla es correcta o el tipo de error que tiene.

Codificación: c = correcto; t = error en tamaño; co = error en color; tc = error en tamaño y color.

**Itelem4**: Tipo de elemento colocado en cuarto lugar.

Codificación: tcd = tarjeta de color con datos; tcsd = tarjeta de color sin datos; pcd = pieza de color con datos; pcsd = pieza de color sin datos, tt = tarjeta de tamaño..

**Ivcuarto**: Se registra la verbalización correspondiente al cuarto elemento.

Codificación: t = verbaliza tamaño; co = verbaliza color; tc = verbaliza tamaño y color ó i = imprecisión.

**Inoveno**: Se valora si es correcta la tabla en su totalidad ó el tipo de error que tiene.

Codificación: c = correcto; t = error en tamaño; co = error en color; tc = error en tamaño y color.

**Itelem9**: Tipo de elemento colocado en último lugar.

Codificación: tcd = tarjeta de color con datos; tcsd = tarjeta de color sin datos; pcd = pieza de color con datos; pcsd = pieza de color sin datos, tt = tarjeta de tamaño.

**Ivnoveno**: Verbalización del último elemento.

Codificación: t = verbaliza tamaño; co = verbaliza color; tc = verbaliza tamaño y color ó i = imprecisión.

**Iproced**: Procedimiento seguido para colocar los elementos.

Codificación: ptc = piezas, tarjetas de tamaño y tarjetas de color; pct = pieza tarjetas de color y tarjetas de tamaño; tcp = tarjetas de tamaño, tarjetas de color y piezas; tpc = tarjetas de tamaño, piezas y tarjetas de color; cpt = tarjetas de color, piezas y tarjetas de tamaño; ctp = tarjetas de color, tarjetas de tamaño y piezas; alt = alternativamente piezas y tarjetas.

**Iargumen**: Categoría más alta de argumentación registrada durante la solución.

Codificación: 1 = No argumenta 2 = No responde, no quiere responder o responde "Porque es así","Porque va ahí", 3 = Claramente perceptivo. Se fija en un sólo valor, 4 = Reconoce por posicionamiento espacial. Se fija en los dos valores, 5 = Distingue elemento de clase con algún tipo de expresión, 6 = Verbaliza alguna forma de inferencia, 7 = Verbaliza cuantificadores o una inferencia clara.

**Piezas**: Secuencia de colocación de las cuatro piezas.

Codificación: t = por tamaño, co = por color, alt = alternativamente.

**Tarea de transformación: Modo directo**

Se establecen las siguientes variables con las codificaciones alfanuméricas que se señalan en cada caso.

**Dtfarbol:** Sobre el tipo de figura CC, se registran las variables comprensión y dificultad.

Codificación: s = construye correctamente la imagen; ci = olvida la construcción inicial; e = construye la figura hasta cierto momento; cp = confunde posiciones inicial y final, g = interpretación del sentido de giro de las flechas; c = problema de comprensión del operador.

**Darbolar** Registra el tipo de argumentación empleado.

Codificación: 1 = imprecisa, 2 = posición de símbolos, 3 = verbaliza posiciones, 4 = referencia símbolo, 5 = verbaliza relación.

**Dtflapiz** Sobre el tipo de figura CS, se registran las variables comprensión y dificultad.

Codificación: s = construye correctamente la imagen; ci = olvida la construcción inicial; e = construye la figura hasta cierto momento; cp = confunde posiciones inicial y final, g = interpretación del sentido de giro de las flechas; c = problema de comprensión del operador.

**Dlapizar** Registra el tipo de argumentación empleado.

Codificación: 1 = imprecisa, 2 = posición de símbolos, 3 = verbaliza posiciones, 4 = referencia símbolo, 5 = verbaliza relación.

**Tarea de transformación: Modo inverso**

Se establecen las siguientes variables con las codificaciones alfanuméricas que se señalan en cada caso.

**Iarbolv** Sobre tipo de figuras CC se registra si se reconoce algún cambio entre ambas construcciones y el tipo de argumentación.

Codificación: n = no reconoce cambio; 1 = no argumenta, 2 = imprecisa, 3 = Reconoce por posicionamiento, 4 = Verbaliza colores correspondientes, 5 = Verbaliza relación

**Iarbolr** Sobre tipo de figuras CC se registra el reconocimiento del cambio sobre las tarjetas simbólicas.

Codificación: s = si; n = no

**Ilapizv** Sobre tipo de figuras CS se registra si se reconoce algún cambio entre ambas construcciones y el tipo de argumentación.

Codificación: n = no reconoce cambio; 1 = no argumenta, 2 = imprecisa, 3 = Reconoce por posicionamiento, 4 = Verbaliza colores correspondientes, 5 = Verbaliza relación

**Ilapizr** Sobre tipo de figuras CS se registra el reconocimiento del cambio sobre las tarjetas simbólicas.

Codificación: s = si; n = no.

# ANEXO IV TABLAS

## Logros

| Acierto | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (N = 211) | Modo directo | | | Modo inverso | | |
| Edad | N | % del grupo | % de 211 | N | % del grupo | % de 211 |
| 3 años | 67 | 95,7 | 31,8 | 39 | 55,7 | 18,5 |
| 4 años | 74 | 97,4 | 35,1 | 65 | 85,5 | 30,8 |
| 5 años | 62 | 95,4 | 29,4 | 54 | 83,1 | 25,6 |
| Total | 203 | 96,2 | 96,2 | 158 | 74,9 | 74,9 |
| Significación[1] | $\chi^2_6 = 4{,}588$ $P \leq 0.598$ | | | $\chi^2_6 = 27{,}189$ $P \leq 0.001$ | | |

| Resultados comparativos | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Clasificación: modo inverso | | Total |
| | | Error | Acierto | |
| Clasificación: modo directo | Error | 7 | 1 | 8 |
| | Acierto | 46 | 157 | 203 |
| Total | | 53 | 158 | 211 |

*Tabla 1. - Logros en la tarea de clasificación en sus dos modos y contraste de medias de resultados por razón de la edad y logros comparativos entre ambos modos.*

| Acierto | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Modo directo | | | | | | Modo inverso | | | | | |
| | Sobre CC (N = 210) | | | Sobre CS (N = 148) | | | Sobre CC (N = 62) | | | Sobre CS (N = 153) | | |
| Edad | N | % válido | % de 211 | N | % válido | % de 211 | N | % válido | % de 211 | N | % válido | % de 211 |
| 3 años | 5 | 7,2 | 2,4 | 30 | 46,2 | 14,2 | 5 | 100 | 2,4 | 21 | 32,3 | 10 |
| 4 años | 27 | 35,5 | 12,8 | 29 | 59,2 | 13,8 | 23 | 85,2 | 10,9 | 28 | 52,8 | 13,2 |
| 5 años | 30 | 46,2 | 14,2 | 27 | 77,1 | 12,8 | 27 | 90,0 | 12,8 | 24 | 63,2 | 11,4 |
| Total | 62 | | 29,4 | 86 | | 40,8 | 55 | | 26,1 | 73 | | 34,6 |
| Significación | $\chi^2_2 = 26{,}413$ $P \leq 0.001$ | | | $\chi^2_2 = 8{,}550$ $P \leq 0.014$ | | | $\chi^2_2 = 1{,}021$ $P \leq 0.600$ | | | $\chi^2_2 = 8{,}951$ $P \leq 0.011$ | | |

*Tabla 2. - Resultados de acierto a la tarea de transformación en sus distintas versiones, contraste de medias de resultados en función de la edad y logros comparativos entre ambos modos en las versiones CC y CS.*

[1] El nivel de significación utilizado es del 95%.

| Resultados comparativos sobre CC | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Transformación sobre CC: modo inverso | | | |
| Transformación sobre CC: modo directo | Edad | Error | Acierto | Total |
| | 3 años | | 5 | 5 |
| | 4 años | 4 | 23 | 27 |
| | 5 años | 3 | 27 | 30 |
| Total | | 7 | 55 | 62 |

*Tabla 3. - Logros comparativos entre modos en la tarea de transformación.*

| Resultados comparativos en modo inverso según la versión | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Transformación sobre CS: modo inverso | | Total |
| | Edad | Error | Acierto | |
| | 4 años | 1 | 3 | 4 |
| | 5 años | 2 | 1 | 3 |
| Total | Total | 3 | 4 | 7 |

*Tabla 4. - Transformación modo inverso sobre CS. Comportamiento de los 7 niños que fracasan en modo inverso sobre CC.*

| Resultados comparativos sobre CS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Transformación sobre CS: modo inverso | | | Total |
| Transformación sobre CS: modo directo | Edad | | Error | Acierto | |
| | 3 años | Error | 27 | 5 | 32 |
| | | Acierto | 14 | 16 | 30 |
| | Total | | 41 | 21 | 62 |
| | 4 años | Error | 20 | | 20 |
| | | Acierto | 4 | 25 | 29 |
| | Total | | 24 | 25 | 49 |
| | 5 años | Error | 6 | 2 | 8 |
| | | Acierto | 6 | 21 | 27 |
| | Total | | 12 | 23 | 35 |
| Total | | | 77 | 69 | 146 |

*Tabla 5. - Logros comparativos entre modos en la tarea de transformación sobre CS.*

| | | Clasificación: modo inverso | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | Error | Acierto | |
| **Trasformación sobre CC: modo directo** | Error | 44 | 104 | 148 |
| | Acierto | 8 | 54 | 62 |
| Total | | 52 | 158 | 210 |

*Tabla 6. - Logros comparativos entre clasificación modo inverso y transformación modo directo sobre CC.*

| | | Clasificación: modo inverso | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | Error | Acierto | |
| **Transformación sobre CS: modo directo** | Error | 29 | 33 | 62 |
| | Acierto | 15 | 71 | 86 |
| Total | | 44 | 104 | 148 |

*Tabla 7. - Logros comparativos entre clasificación modo inverso y transformación modo directo sobre CS.*

| | | Logros clasificación: modo inverso | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | Error | Acierto | |
| **Logros agrupados: transformación modo directo** | Error sobre CC y sobre CS | 30 | 33 | 63 |
| | Acierto sobre CC ó sobre CS | 23 | 125 | 148 |
| Total | | 53 | 158 | 211 |

*Tabla 8. - Logros comparativos a transformación directa agrupando los aciertos en ambas versiones CC y CS y clasificación modo inverso.*

| | | Edad | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 5 | |
| **Transformación agrupado: modo directo** | Error sobre CC y sobre CS | 20 | 8 | 28 |
| | Acierto sobre CC ó sobre CS | 56 | 57 | 113 |
| Total | | 76 | 65 | 141 |

*Tabla 9. - Grupos de 4 y 5 años. Logros a transformación modo directo en CC o CS.*

| | | Edad | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 años | 5 años | |
| **Transformación sobre CC: modo directo** | Error | 49 | 35 | 84 |
| | Acierto | 27 | 30 | 57 |
| Total | | 76 | 65 | 141 |

*Tabla 10. - Grupos de 4 y 5 años. Logros a transformación modo directo sobre CC.*

| | | Edad | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 años | 5 años | |
| **Transformación sobre CS: modo directo** | Error | 20 | 8 | 28 |
| | Acierto | 29 | 27 | 56 |
| Total | | 49 | 35 | 84 |

*Tabla 11. - Grupos de 4 y 5 años. Logros a transformación modo directo sobre CS.*

## Procedimientos

| **Tipo de procedimiento** | Acierto | | Error | | Total del procedimiento | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % |
| Por color | 53 | 26,1 | 2 | 25,0 | 55 | 26,1 |
| Por tamaño | 120 | 59,1 | 1 | 12,5 | 121 | 57,3 |
| Alternativo | 30 | 14,8 | 5 | 62,5 | 35 | 16,6 |
| Total | 203 | 100,0 | 8 | 100,0 | 211 | 100,0 |
| Distinto del alternativo | 173 | 85,2 | 3 | 37,5 | 176 | 83,4 |

*Tabla 12. - Distribución de los procedimientos utilizados en la solución de la tarea de clasificación modo directo.*

| **Tipo de procedimiento** | 3 años | | | | 4 años | | | | 5 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Acierto | | Error | | Acierto | | Error | | Acierto | | Error | |
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Por color | 13 | 18,6 | | | 16 | 21 | | | 24 | 36,9 | 2 | 3,1 |
| Por tamaño | 42 | 60 | 1 | 1,4 | 44 | 57,9 | | | 34 | 53,3 | | |
| Alternativo | 12 | 17,1 | 2 | 2,9 | 14 | 18,4 | 2 | 2,6 | 4 | 6,2 | 1 | 1,5 |
| Total | 67 | 95,7 | 3 | 4,3 | 74 | 97,4 | 2 | 2,6 | 62 | 95,4 | 3 | 4,6 |
| Distinto del alternativo | 55 | 78,6 | 1 | 1,4 | 60 | 78,9 | 0 | 0 | 58 | 89,2 | 2 | 3,1 |

*Tabla 13. - Distribución de procedimientos para resolver la tarea de clasificación modo directo según acierto / error en cada grupo de edad*

| | | Primer elemento | | Tercer elemento | | Sexto elemento | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N | % | N | % | N | % |
| Acierto | Correcto | 200 | 94,8 | 200 | 94,8 | 203 | 94,8 |
| | Error en color | | | | | | |
| | Error en tamaño | 3 | 1,4 | 2 | 0,9 | | |
| | Error en tamaño y color | | | 1 | 0,5 | | |
| Total | | 203 | 96,2 | 203 | 96,2 | 203 | 96,2 |
| Error | Correcto | 5 | 2,4 | 1 | | | |
| | Error en color | | | | | 1 | 0,5 |
| | Error en tamaño | 2 | 0,9 | 6 | | 4 | 1,9 |
| | Error en tamaño y color | 1 | 0,5 | 1 | 0,5 | 3 | 1,4 |
| Total | | 8 | 3,8 | 8 | 3,8 | 8 | 3,8 |

*Tabla 14. - Progresión de acierto / error durante la tarea de clasificación modo directo.*

| **Tipo de procedimiento** | Acierto | | | Error | | | Total del procedimiento | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % del grupo | % de 211 | % | % del grupo | % de 211 | N | % de 211 |
| Alternativo | 46 | 29,1 | 21,8 | 24 | 45,3 | 11,4 | 70 | 33,2 |
| (c[2],c,c,t,t,p,p,p,p) | 41 | 25,9 | 19,4 | 11 | 20,7 | 5,2 | 52 | 24,6 |
| (c,c,c,p,p,p,p,t,t) | 25 | 15,8 | 11,8 | 3 | 5,7 | 1,4 | 28 | 13,3 |
| (p,p,p,p,c,c,c,t,t) | 24 | 15,2 | 11,4 | 5 | 9,4 | 2,4 | 29 | 13,6 |
| (p,p,p,p,t,t,c,c,c) | 13 | 8,3 | 6,2 | 3 | 5,7 | 1,4 | 16 | 7,6 |
| (t,t,c,c,c,p,p,p,p) | 8 | 5,1 | 3,8 | 7 | 13,2 | 3,3 | 15 | 7,1 |
| (t,t,p,p,p,p,c,c,c) | 1 | 0,6 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Total | 158 | 100,0 | 100,0 | 53 | 100,0 | 100,0 | 211 | 100,0 |

*Tabla 15. - Secuencia de elementos usados en los procedimientos para resolver la tarea de clasificación modo inverso según acierto / error.*

[2] C = Tarjeta de color", t = " Tarjeta de tamaño", p = "Pieza"

| Tipo de procedimiento | 3 años | | | | 4 años | | | | 5 años | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Acierto | | Error | | Acierto | | Error | | Acierto | | Error | |
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Alternativo | 15 | 21,4 | 12 | 7,1 | 18 | 23,7 | 6 | 7,9 | 13 | 20 | 6 | 9,2 |
| (c,c,c,t,t,p,p,p,p) | 9 | 12,9 | 7 | 10 | 21 | 27,6 | 0 | 0 | 11 | 17 | 4 | 6,1 |
| (c,c,c,p,p,p,p,t,t) | 6 | 8,6 | 2 | 2,9 | 10 | 13,1 | 1 | 1,3 | 9 | 13,8 | 0 | 0 |
| (p,p,p,p,c,c,c,t,t) | 5 | 7,1 | 5 | 7,1 | 8 | 10,5 | 0 | 0 | 11 | 17 | 0 | 0 |
| (p,p,p,p,t,t,c,c,c) | 3 | 4,3 | 2 | 2,9 | 5 | 6,6 | 1 | 1,3 | 5 | 7,7 | 0 | 0 |
| (t,t,c,c,c,p,p,p,p) | 1 | 1,4 | 3 | 4,3 | 2 | 2,6 | 3 | 3,9 | 5 | 7,7 | 1 | 1,5 |
| (t,t,p,p,p,p,c,c,c) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Total | 39 | 55,7 | 31 | 44,3 | 65 | 85,6 | 11 | 14,4 | 54 | 83,2 | 11 | 16,8 |

*Tabla 16. - Procedimientos para resolver la tarea de clasificación modo inverso por grupos de edad.*

| Primeros elementos en los procedimientos | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Alternativo | | c,c,c | | t,t | | p,p,p,p | |
| | N | % de 211 | N | % de 211 | N | % de 211 | N | % de 211 |
| Acierto | 46 | 21,8 | 66 | 31,3 | 9 | 4,3 | 37 | 17,6 |
| Error | 24 | 11,4 | 14 | 6,6 | 7 | 3,3 | 8 | 3,8 |
| Total | 70 | 33,3 | 80 | 37,9 | 16 | 7,6 | 45 | 21,4 |

*Tabla 17. - Distribución del tipo de elementos colocados en primer lugar según acierto o error en la tarea de clasificación modo inverso.*

| Primer elemento en los procedimientos | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 años | | 4 años | | 5 años | |
| | N | % | N | % | N | % |
| Pieza de columna con datos | 21 | 30 | 17 | 22,4 | 16 | 24,6 |
| Tarjeta de columna con datos | 31 | 44,3 | 36 | 47,4 | 32 | 49,2 |
| Tarjeta de tamaño | 8 | 11,4 | 7 | 9,2 | 10 | 15,4 |
| Pieza de columna sin datos | 4 | 5,7 | 6 | 7,9 | 2 | 3,1 |
| Tarjeta de columna sin datos | 6 | 8,6 | 10 | 13,2 | 5 | 7,7 |
| Pieza o tarjeta de color de columna sin datos | 10 | 14,3 | 16 | 20,1 | 7 | 10,8 |

*Tabla 18. - Primer elemento colocado por los distintos grupos de edad en los procedimientos para clasificación modo inverso.*

| Procedimiento | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Acierto | | Error | | Total | |
| | N | % | N | % | N | % |
| Por color | 60 | 28,4 | 13 | 6,2 | 73 | 34,6 |
| Por tamaño | 42 | 19,9 | 6 | 2,8 | 48 | 22,7 |
| Alternativo | 56 | 26,5 | 34 | 16,1 | 90 | 42,7 |
| Distinto del alternativo | 102 | 48,3 | 19 | 9 | 121 | 56,7 |

*Tabla 19. - Distribución de los procedimientos utilizados para colocar las piezas en clasificación modo inverso por los grupos de acierto y error.*

| Procedimiento | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 años | | 4 años | | 5 años | |
| | N | % | N | % | N | % |
| Por color | 30 | 42,9 | 19 | 25 | 24 | 36,9 |
| Por tamaño | 9 | 12,8 | 24 | 31,5 | 15 | 23,1 |
| Alternativo | 31 | 44,3 | 33 | 43,4 | 26 | 40 |
| Distinto del alternativo | 39 | 55,7 | 43 | 56,5 | 39 | 60 |

*Tabla 20. - Distribución de los procedimientos utilizados para colocar las piezas en clasificación modo inverso por los grupos de edad.*

| | | **Primer elemento** | | **Cuarto elemento** | | **Noveno elemento** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N | % | N | % | N | % |
| Acierto | Correcto | 158 | 74,9 | 148 | 70,1 | 158 | 74,9 |
| | Error en color | | | 2 | 0,9 | | |
| | Error en tamaño | | | 3 | 1,4 | | |
| | Error en tamaño y color | | | 5 | 2,4 | | |
| Total | | 158 | 74,9 | 158 | 74,9 | 158 | 74,9 |
| Error | Correcto | 35 | 16,6 | 8 | 3,8 | | |
| | Error en color | 7 | 3,3 | 15 | 7,1 | 10 | 4,7 |
| | Error en tamaño | 8 | 3,8 | 17 | 8,1 | 11 | 5,2 |
| | Error en tamaño y color | 3 | 1,4 | 13 | 6,2 | 32 | 15,2 |
| Total | | 53 | 25,1 | 53 | 25,1 | 53 | 25,1 |

*Tabla 21. - Progresión de acierto / error durante la tarea de clasificación modo inverso.*

| **Resultados a Transformación: modo directo sobre CC** | **3 años** | | **4 años** | | **5 años** | | **Total** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % de 210 |
| Acierto | 5 | 7,1 | 27 | 35,5 | 30 | 46,2 | 62 | 29,5 |
| Error. No construye correctamente la figura imagen | 34 | 48,6 | 34 | 44,7 | 29 | 44,6 | 97 | 46,2 |
| Error. No comprende el operador | 30 | 42,9 | 15 | 19,8 | 6 | 9,2 | 51 | 24,3 |
| (missing) | 1 | 1,4 | | | | | 1 | 0,5 |
| **Total** | 70 | 100 | 76 | 100 | 65 | 100 | 211 | 100 |

| **Significación de diferencias entre grupos de edad** | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_3 = 20{,}914$ | 0,001 | $\chi^2_3 = 35{,}117$ | 0,001 | $\chi^2_2 = 3{,}575$ | 0,167 |

*Tabla 22. - Resultados a transformación modo directo sobre CC y significación de las diferencias de medias entre grupos de edad en función de los criterios de análisis.*

| | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| **"No construye correctamente la figura imagen"** | $\chi^2_3 = 7{,}440$ | 0,059 | $\chi^2_3 = 6{,}810$ | 0,001 | $\chi^2_3 = 8{,}808$ | 0,032 |

*Tabla 23. - Transformación modo directo sobre CC. Significación de las diferencias de medias entre grupos de edad, en función de la dificultad para construir correctamente la figura imagen en su totalidad.*

| Resultados a Transformación directa sobre CS | 3 años | | 4 años | | 5 años | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % de 210 |
| Acierto | 30 | 42,8 | 29 | 38,2 | 27 | 41,5 | 86 | 41 |
| Error. No construye correctamente la figura imagen | 10 | 14,3 | 6 | 7,9 | 3 | 4,6 | 19 | 9,0 |
| Error. No comprende el operador | 24 | 34,3 | 14 | 18,4 | 5 | 7,7 | 43 | 20,5 |
| **Total** | 64 | 91,4 | 49 | 64,5 | 35 | 53,8 | 148 | 70,5 |
| (missing) | 6 | 8,6 | 27 | 35,5 | 30 | 46,2 | 63 | 29,9 |
| **Total** | 70 | 100 | 76 | 100 | 65 | 100 | 211 | 100 |

*Tabla 24. - Resultados a la tarea de transformación modo directo sobre CS por grupos de edad.*

| Tarea Transformación sobre CS. Modo inverso | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_1 = 3{,}317$ | 0,069 | $\chi^2_1 = 9{,}152$ | 0,002 | $\chi^2_1 = 1{,}800$ | 0,180 |

*Tabla 25. - Significación de la diferencia de medias a las categorías de respuestas por grupos de edad.*

| Clasificación: modo directo. Argumentación | | | Edad | | | | | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 años | | 4 años | | 5 años | | De 211 | |
| | | | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Error | | Predomina un valor (3) | 3 | 4,3 | | | 2 | 3,1 | 5 | 2,4 |
| | | Puede reconocer los dos valores (5) | | | 2 | 2,6 | 1 | 1,5 | 3 | 1,4 |
| | Total | | 3 | 4,3 | 2 | 2,6 | 3 | 4,6 | 8 | 3,8 |
| Acierto | | No argumenta nada consistente (1) | 3 | 4,3 | | | | | 3 | 1,4 |
| | | No responde o Responde "Porque es así" "Porque va ahí"(2) | 3 | 4,3 | 2 | 2,6 | | | 5 | 2,4 |
| | | Predomina un valor (3) | 17 | 24,3 | 6 | 7,9 | 1 | 1,5 | 24 | 11,4 |
| | | Refiere los símbolos (4) | 3 | 4,3 | 2 | 2,6 | 2 | 3,1 | 7 | 3,3 |
| | | Puede reconocer los dos valores (5) | 38 | 54,3 | 44 | 57,9 | 40 | 61,5 | 122 | 57,8 |
| | | Reconoce las clases (6) | 3 | 4,3 | 15 | 21,4 | 17 | 26,2 | 35 | 16,6 |
| | | Verbaliza alguna forma de inferencia (Negación, anticipación...) (7) | | | 5 | 6,6 | 1 | 1,5 | 6 | 2,8 |
| | | Verbaliza cuantificadores o inferencia clara (8) | | | | | 1 | 1,5 | 1 | 0,5 |
| | Total | | 67 | 95,7 | 74 | 97,4 | 62 | 95,4 | 203 | 96,2 |

*Tabla 26. - Clasificación modo directo. Categorías de argumentación en función de la edad y del acierto en la tarea.*

| Tarea Clasificación. Modo directo | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_6 = 24{,}495$ | 0,001 | $\chi^2_7 = 30{,}536$ | 0,001 | $\chi^2_6 = 6{,}259$ | 0,395 |

*Tabla 27. - Clasificación modo directo. Significación de la diferencia de medias a las categorías de argumentación entre grupos de edad.*

| | Primera pieza | | | Tercera pieza | | | Sexta pieza | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N | % | | N | % | | N | % |
| Acierto | Verbaliza color | 83 | 39,3 | Verbaliza color | 48 | 22,7 | Verbaliza color | 31 | 14,7 |
| | Verbaliza tamaño | 75 | 35,5 | Verbaliza tamaño | 35 | 16,6 | Verbaliza tamaño | 18 | 8,5 |
| | Verbaliza tamaño y color | 37 | 17,5 | Verbaliza tamaño y color | 110 | 52,1 | Verbaliza tamaño y color | 144 | 68,2 |
| | Impreciso / no argumenta | 8 | 3,8 | Impreciso / no argumenta | 10 | 4,7 | Impreciso / no argumenta | 10 | 4,7 |
| Total | | 203 | 96,2 | | 203 | 96,2 | | 203 | 96,2 |
| Error. | Verbaliza color. | 3 | 1,4 | Verbaliza color. | 4 | 1,9 | Verbaliza color. | 5 | 2,4 |
| | Verbaliza tamaño | 2 | 0,9 | Verbaliza tamaño | 1 | 0,5 | Verbaliza tamaño | 1 | 0,5 |
| | Verbaliza tamaño y color | 1 | 0,5 | Verbaliza tamaño y color | 2 | 0,9 | Verbaliza tamaño y color | 0 | |
| | Impreciso / no argumenta | 2 | 0,9 | Impreciso / no argumenta | 1 | 0,5 | Impreciso / no argumenta | 2 | 0,9 |
| Total | | 8 | 3,8 | | 8 | 3,8 | | 8 | 3,8 |

| **Significación de diferencia de medias** | **Primera pieza** | | **Tercera pieza** | | **Sexta pieza** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_3 = 7{,}665$ | ,053 | $\chi^2_3 = 4{,}353$ | ,226 | $\chi^2_3 = 21{,}304$ | ,000 |

*Tabla 28. - Clasificación modo directo. Distribución de las categorías verbales y comparación de medias de estas categorías en función del acierto o error en los momentos indicados.*

| | **Primera pieza** | | **Tercera pieza** | | **Sexta pieza** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tarea: Clasificación modo directo Verbalización precisa vers. Acierto** | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_1 = {,}171$ | ,679 | $\chi^2_1 = 2{,}633$ | ,105 | $\chi^2_1 = 17{,}872$ | ,001 |

*Tabla 29. - Clasificación modo directo. Significación de la verbalización precisa en los momentos indicados en función del éxito*

| Argumentación | | | Edad | | | | | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | | 4 | | 5 | | | |
| | | | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Error | | No argumenta nada consistente (1) | 6 | 8,6 | 1 | 1,3 | 1 | 1,5 | 8 | 3,8 |
| | | No responde o Responde "Porque es así" "Porque va ahí"(2) | 3 | 4,3 | 1 | 1,3 | | | 4 | 1,9 |
| | | Claramente perceptivo. Se fija en características (3) | 17 | 24,3 | 8 | 10,5 | 6 | 9,2 | 31 | 14,7 |
| | | Reconoce por posicionamiento espacial (4) | 3 | 4,3 | 1 | 1,3 | 3 | 4,6 | 7 | 3,3 |
| | | Distingue elemento / clase con algún tipo de expresión (5) | 2 | 2,8 | | | 1 | 1,5 | 3 | 1,4 |
| | Total | | 31 | 44,3 | 11 | 14,5 | 11 | 16,9 | 53 | 25,1 |
| Acierto | | No argumenta nada consistente (1) | 1 | 1,4 | | | | | 1 | 0,5 |
| | | No responde o Responde "Porque es así" "Porque va ahí"(2) | | | 1 | 1,3 | | | 1 | 0,5 |
| | | Claramente perceptivo. Se fija en características (3) | 23 | 32,8 | 7 | 9,2 | 2 | 3,1 | 32 | 15,2 |
| | | Reconoce por posicionamiento espacial (4) | 10 | 14,3 | 12 | 15,8 | 13 | 20 | 35 | 16,6 |
| | | Distingue elemento / clase con algún tipo de expresión (5) | 4 | 5,7 | 33 | 43,2 | 29 | 44,6 | 66 | 31,3 |
| | | Verbaliza alguna forma de inferencia (Negación, anticipación...) (6) | 1 | 1,4 | 8 | 10,5 | 7 | 10,8 | 16 | 7,6 |
| | | Verbaliza cuantificadores o inferencia clara (7) | | | 4 | 5,2 | 3 | 4,6 | 7 | 3,3 |
| | Total | | 39 | 55,7 | 65 | 85,5 | 54 | 83,1 | 158 | 74,9 |

*Tabla 30. - Clasificación modo inverso. Categorías de argumentación en función de la edad y del acierto en la tarea.*

| **Tarea Clasificación. Modo inverso** | **Entre 3 y 4 años** | | **Entre 3 y 5años** | | **Entre 4 y 5 años** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_6 = 47{,}345$ | 0,001 | $\chi^2_6 = 52{,}602$ | 0,001 | $\chi^2_6 = 2{,}586$ | 0,859 |

*Tabla 31. - Clasificación modo inverso. Significación de la diferencia de medias a las categorías de argumentación por grupos de edad.*

| | | Verbalización a pieza en primer lugar | | Verbalización a pieza en cuarto lugar | | Verbalización a pieza en noveno lugar | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N | % de 66 | N | % de 113 | N | % de 101 |
| Acierto | Verbaliza tamaño | 11 | 16,6 | 18 | 15,9 | 11 | 10,9 |
| | Verbaliza color | 24 | 36,4 | 31 | 27,4 | 18 | 17,8 |
| | Verbaliza tamaño y color | 12 | 18,2 | 29 | 25,7 | 44 | 43,6 |
| | Impreciso / no verbaliza | 2 | 3 | 9 | 7,9 | 2 | 1,9 |
| | **Total** | 49 | 74,2 | 87 | 77 | 75 | 74,3 |
| Error | Verbaliza tamaño | 3 | 4,5 | 6 | 5,3 | 4 | 3,9 |
| | Verbaliza color | 8 | 12,1 | 16 | 14,2 | 10 | 9,9 |
| | Verbaliza tamaño y color | | | | | 2 | 1,9 |
| | Impreciso/ No verbaliza | 6 | 9,1 | 4 | 3,5 | 10 | 9,9 |
| | **Total** | 17 | 25,8 | 26 | 23 | 26 | 25,7 |
| **Total** | | 66 | 100 | 113 | 100 | 101 | 100 |

| **Significación de diferencia de medias** | **Pieza en primer lugar** | | **Pieza en cuarto lugar** | | **Pieza en noveno lugar** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_4$ =14,454 | ,006 | $\chi^2_3$ =12,392 | ,006 | $\chi^2_3$ =33,299 | ,001 |

*Tabla 32. - Clasificación modo inverso. Distribución y significación de diferencias de la verbalización cuando se coloca pieza según grupos de éxito o error.*

| | **Pieza colocada en 1er lugar** | | | **Pieza colocada en 4º lugar** | | | **Pieza colocada en 9º lugar** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Error | Acierto | Total | Error | Acierto | Total | Error | Acierto | Total |
| No verbaliza tamaño y color / imprecisa | 17 | 37 | 54 | 26 | 58 | 84 | 24 | 31 | 55 |
| Verbaliza tamaño y color | | 12 | 12 | | 29 | 29 | 2 | 44 | 46 |
| Total | 17 | 49 | | 26 | 87 | | 26 | 75 | 101 |

| **Significación de diferencia de medias vers. Acierto** | **Pieza en primer lugar** | | **Pieza en cuarto lugar** | | **Pieza en noveno lugar** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_1$ = 5,088 | 0,024 | $\chi^2_1$ = 11,659 | 0,001 | $\chi^2_1$ = 20,227 | 0,001 |

*Tabla 33. - Clasificación modo inverso. Distribución y significación de la verbalización precisa en la pieza colocada en el momento indicado en función del éxito*

| Procedimiento[3] | 2º elemento | 3er. elemento | Argumentación | Edad |
|---|---|---|---|---|
| 1. - (c,c,t,t,az,AmR,r)<br>Coloca piezas por color, saltando columna | tcd | tcd | 5 | 3:10 |
| 2. - (c,c,t,t,R,r,az,Am)<br>Coloca piezas por color | tcd | tcd | 3 | 3:11 |
| 3.-(c,c,az,r,R,t,t,Am) (Alternativo)<br>Coloca piezas por color, saltando columna | tcd | tcd | 4 | 3:6 |
| 4. - (az,R,Am,r,c,c,t,t)<br>Coloca piezas por tamaño o color. | pcd | tcsd | 3 | 3:8 |
| 5. - (c,c,t,t,Am,r,az,R)<br>Coloca piezas por tamaño o color | tcd | tcd | 3 | 3:8 |
| 6.- (c,c,Am,az,R,r,t,t)<br>Coloca las piezas por color | tcd | tcd | 4 | 3:11 |
| 7. - (c,c,t,t,az,r,Am,R)<br>Coloca piezas por tamaño | tcd | tcd | 4 | 4:0 |
| 8. - (c,c,t,t,Am,R,r,az)<br>Coloca piezas por tamaño | tcd | tcd | 5 | 4:8 |
| 9. - (R,r,t,t, c,c,Am,az)<br>Coloca las piezas alternando tamaño y color | pcsd | pcsd | 5 | 4:3 |
| 10.- (c,c,Am,R,az,r,t,t)<br>Coloca piezas por tamaño | tcd | tcd | 4 | 4:4 |
| 11. - (c,c,t,t,Am,az,R,r)<br>Coloca piezas por color | tcd | tcd | 5 | 4:7 |
| 12.- (c,c,Am,az,R,r,t,t)<br>Coloca piezas por color | tcd | tcd | 7 | 4:3 |
| 13. - (c,c,t,t,R,az,r,Am)<br>Coloca piezas alternando tamaño y color | tcd | tcd | 5 | 4:6 |
| 14. - (Am,R,az,r,c,c,t,t)<br>Coloca piezas por tamaño. | pcd | pcsd | 5 | 4:6 |
| 15. - (c,c,R,Am,r,az,t,t)<br>Coloca piezas por tamaño | tcd | tcd | 5 | 4:7 |
| 16. - (c,c,Am,R,az,r,t,t)<br>Coloca piezas por tamaño | tcd | tcd | 5 | 4:3 |
| 17.- (c,c,Am,az,r,R,t,t)<br>Coloca piezas por color | tcd | tcd | 7 | 5:3 |
| 18. - (t,c,c,Am,az,R,r,t)(Alternativo)<br>Coloca piezas por color | tt | tcd | 5 | 5:11 |
| 19. - (c,c,Am,r,R,az,t,t)<br>Coloca piezas por color, saltando columna | tcd | tcd | 5 | 5:6 |
| 20.- (c,c,r,az,R,Am,t,t)<br>Coloca piezas por color, saltando columna | tcd | tcd | 5 | 5:2 |
| 21. - (c,c,t,t,Am,az,R,r) | tcd | tcd | 5 | 5:11 |

[3] La secuencia indica el orden de colocación de los elementos que se indican como:
Am = triángulo amarillo grande
az = triángulo pequeño azul
R = triángulo rojo grande
r = triángulo rojo pequeño
c = tarjeta de color
t = tarjeta de tamaño.

| **Procedimiento[3]** | **2º elemento** | **3er. elemento** | **Argumentación** | **Edad** |
|---|---|---|---|---|
| Coloca piezas por color | | | | |

*Tabla 34. - Comportamiento de los casos que comienzan colocando la tarjeta de color sin datos.*

| **Procedimiento** | **2º elemento** | **3er. elemento** | **Argumentación** | **Edad** |
|---|---|---|---|---|
| 1. - (az,r,Am,c,c,c,t,t) Coloca las piezas por tamaño o color. Termina con error | pcd | pcsd | 1 | 3:6 |
| 2. - (Am,r,az,t,c,c,t,c) (Alternativo) Coloca las piezas por tamaño. Termina con error | pcd | pcsd | 1 | 3:5 |
| 3. - (R,az,Am,t,t,c,c,c) Coloca las piezas por color | pcsd | pcd | 5 | 3:8 |
| 4. - (az,R,Am,c,c,t,c,t) (Alternativo) Coloca las piezas por tamaño | pcd | pcsd | 3 | 3:4 |
| 5. - (az,Am,R,t,t,c,c,c,) Construye fuera del tablero. Coloca las piezas por tamaño | pcd | pcd | 6 | 4:7 |
| 6. - (az,Am,R,c,c,c,t,t) Coloca las piezas por tamaño | pcd | pcd | 7 | 4:3 |
| 7. - (Am,az,R,t,t,c,c,c) Coloca las piezas por tamaño o color | pcd | pcd | 4 | 4:9 |
| 8.-(Am,az, ...) Termina con error | pcd | pcd | 1 | 4:10 |
| 9. - (Am,az,R,t,t,c,c,c) Coloca las piezas por tamaño o color | pcd | pcsd | 5 | 4:9 |
| 10.-(Am,t,c,c,az,t,r,c) (Alternativo) Coloca las piezas por tamaño. Termina con error | pcd | tt | 3 | 4:4 |
| 11. - (az,Am,R,c,c,c,t,t) Coloca las piezas por tamaño | pcd | pcd | 5 | 5:6 |
| 12. - (Am,r,az,t,t,c,c,c) Coloca las piezas por tamaño | pcd | pcd | 5 | 5:8 |

*Tabla 35. - Comportamiento de los casos que comienzan colocando pieza de columna sin datos.*

| | | Modo inverso | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Color | Tamaño | Tamaño y color | Imprecisa /No verbaliza | |
| **Modo directo** | Color | 9 | 9 | 5 | 4 | 27 |
| | Tamaño | 17 | 5 | 3 | 2 | 27 |
| | Tamaño y color | 6 | | 4 | | 10 |
| | Imprecisa / No verbaliza | | | | 2 | 2 |
| Total | | 32 | 14 | 12 | 8 | 66 |

*Tabla 36. - Comparación de la verbalización en la tarea de Clasificación después de la primera pieza en función del modo.*

| | | Clasificación: modo inverso | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Color | Tamaño | Tamaño y color | Imprecisa / No verbaliza | |
| **Clasificación: modo directo** | Color | 18 | 11 | 1 | 1 | 31 |
| | Tamaño | 9 | 2 | 1 | 4 | 16 |
| | Tamaño y color | 20 | 10 | 28 | 5 | 63 |
| | Imprecisa / No verbaliza | | | | 3 | 3 |
| Total | | 47 | 23 | 30 | 13 | 113 |

*Tabla 37. - Comparación de la verbalización en la 4º pieza que colocan en los procesos resolutivos en modo directo e inverso*

| | | Modo inverso | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Color | Tamaño | Tamaño y color | Imprecisa / no verbaliza | |
| **Modo directo** | Color | 7 | 5 | 4 | 3 | 19 |
| | Tamaño | 2 | 2 | | 1 | 8 |
| | Tamaño y color | 15 | 6 | 41 | 6 | 68 |
| | Imprecisa / no verbaliza | 4 | 2 | 1 | 1 | 8 |
| Total | | 28 | 15 | 46 | 12 | 101 |

*Tabla 38. - Comparación de la verbalización al finalizar los procesos resolutivos en modo directo e inverso*

| | | Argumentación en clasificación inversa | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Distingue elemento /clase (5) | Verbaliza alguna forma de inferencia (Negación, anticipación) (6) | Verbaliza cuantificadores o una inferencia clara (7) | |
| **Argumentación en clasificación directa** | Reconoce los dos valores (5) | | 7 | 3 | 10 |
| | Reconoce las clases (6) | | 8 | 1 | 9 |
| | Verbaliza alguna forma de inferencia (Negación, anticipación...)(7) | 2 | 1 | 3 | 6 |
| | Verbaliza cuantificadores o una inferencia clara (8) | 1 | | | 1 |
| **Total** | | 3 | 16 | 7 | 26 |

*Tabla 39. - Categorías de argumentos mostradas en clasificación modos directo e inverso por los sujetos que muestran una de las dos categorías más elaboradas en cualquiera de las tareas.*

| | | Resultados a transformación sobre CC. Modo directo | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Argumentación** | | Error | | Acierto | | Total | |
| | | N | % | N | % | N | % |
| | Imprecisa | 15 | 10,1 | | | 15 | 7,1 |
| | No argumenta | 5 | 3,4 | | | 5 | 2,4 |
| | Referencia símbolo | 18 | 12,2 | 1 | 1,6 | 19 | 9,0 |
| | Verbaliza color | 35 | 23,6 | 1 | 1,6 | 36 | 17,2 |
| | Verbaliza posiciones | 9 | 6,1 | | | 9 | 4,3 |
| | Verbaliza relación | 66 | 44,6 | 60 | 96,8 | 126 | 60,0 |
| Total | | 148 | 100 | 62 | 100 | 210 | 100 |

*Tabla 40. - Transformación modo directo sobre CC. Distribución de frecuencias de las categorías de argumentos según el acierto.*

| | | Edad | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **3 años** | | **4 años** | | **5 años** | | **Total** | |
| Argumentación | | N | % | N | % | N | % | N | % |
| | Imprecisa | 9 | 13,0 | 4 | 5,3 | 2 | 3,1 | 15 | 7,1 |
| | No argumenta | 3 | 4,3 | 1 | 1,2 | 1 | 1,5 | 5 | 2,4 |
| | Referencia símbolo | 7 | 10,1 | 7 | 9,2 | 5 | 7,7 | 19 | 9,1 |
| | Verbaliza color | 21 | 30,4 | 11 | 14,5 | 4 | 6,2 | 36 | 17,1 |
| | Verbaliza posiciones | 5 | 7,3 | 4 | 5,3 | | | 9 | 4,3 |
| | Verbaliza relación | 24 | 34,9 | 49 | 64,5 | 53 | 81,5 | 126 | 60,0 |
| Total | | 69 | 100 | 76 | 100 | 65 | 100 | 210 | 100 |

| **Significación de diferencia de medias** | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5 años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_4 = 14{,}376$ | 0,006 | $\chi^2_4 = 33{,}126$ | 0,000 | $\chi^2_4 = 7{,}444$ | 0,114 |

*Tabla 41. - Transformación modo directo CC. Distribución de frecuencias de las categorías de argumentos según la edad.*

| | | **Resultados a transformación sobre CS. Modo directo** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Argumentación** | | Error | | Acierto | | Total | |
| | | N | % | N | % | N | % |
| | Imprecisa | 16 | 25,8 | | | 16 | 10,8 |
| | No argumenta | 3 | 4,8 | | | 3 | 2,0 |
| | Referencia símbolo | 7 | 11,3 | 7 | 8,1 | 14 | 9,5 |
| | Verbaliza color | 23 | 37,1 | 11 | 12,8 | 34 | 23,0 |
| | Verbaliza posiciones | 6 | 9,7 | 1 | 1,2 | 7 | 4,7 |
| | Verbaliza relación | 7 | 11,3 | 67 | 77,9 | 74 | 50 |
| Total | | 62 | 100 | 86 | 100 | 148 | 100 |

*Tabla42.- Transformación modo directo sobre CS. Distribución de frecuencias de categorías de argumentos según el acierto.*

| | | Edad | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **3 años** | | **4 años** | | **5 años** | | **Total** | |
| **Argumentación** | | N | % | N | % | N | % | N | % |
| | Imprecisa | 9 | 14,1 | 4 | 8,2 | 3 | 8,6 | 16 | 10,8 |
| | No argumenta | 3 | 4,7 | | | | | 3 | 2,0 |
| | Referencia símbolo | 7 | 10,9 | 4 | 8,2 | 3 | 8,6 | 14 | 9,5 |
| | Verbaliza color | 21 | 32,8 | 9 | 18,3 | 4 | 11,4 | 34 | 23,0 |
| | Verbaliza posiciones | 4 | 6,3 | 3 | 6,1 | | | 7 | 4,7 |
| | Verbaliza relación | 20 | 31,2 | 29 | 59,2 | 25 | 71,4 | 74 | 50 |
| Total | | 64 | 100 | 49 | 100 | 35 | 100 | 148 | 100 |

| **Significación de diferencia de medias** | Entre 3 y 4 años | | Entre 3 y 5 años | | Entre 4 y 5 años | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ | $\chi^2$ | P≤ |
| | $\chi^2_4 = 9{,}945$ | 0,041 | $\chi^2_4 = 15{,}736$ | 0,000 | $\chi^2_4 = 3{,}654$ | 0,455 |

*Tabla 43. - Transformación modo directo sobre CS. Distribución de frecuencias de categorías de argumentos según la edad.*

| Argumentación | | Sobre CC. Modo directo | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Imprec. | No argumen. | Referen. símbolo | Verbaliz. color | Verbaliz. Posic. | Verbaliz. relación | |
| Sobre CS. Modo directo | Imprecisa | 14 | 2 | | | | | 16 |
| | No argumenta | | 3 | | | | | 3 |
| | Referencia símbolo | | | 12 | 1 | | 1 | 14 |
| | Verbaliza color | 1 | | | 30 | 1 | 2 | 34 |
| | Verbaliza posiciones | | | | | 7 | | 7 |
| | Verbaliza relación | | | 6 | 4 | 1 | 63 | 74 |
| Total | | 15 | 5 | 18 | 35 | 9 | 66 | 148 |

*Tabla 44. - Transformación modo directo. Comparación de categorías de argumentos entre CC y CS.*

| Argumentación | | **Resultados a transformación sobre CC. Modo inverso** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Error | | Acierto | | Total | |
| | | N | % | N | % | N | % |
| | Reconoce por posicionamiento | 1 | 14,2 | 3 | 5,5 | 4 | 6,5 |
| | Verbaliza colores correspondientes | 3 | 42,9 | | | 3 | 4,8 |
| | Verbaliza relación | 3 | 42,9 | 52 | 94,5 | 55 | 88,7 |
| Total | | 7 | 100 | 55 | 100 | 62 | 100 |

*Tabla 45. – Transformación modo inverso sobre CC. Resultados de categorías de argumentos según el acierto.*

| Argumentación | | **Edad** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **3 años** | | **4 años** | | **5 años** | | **Total** | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % |
| | Reconoce por posicionamiento | | | 1 | 3,7 | 3 | 10 | 4 | 6,5 |
| | Verbaliza colores correspondientes | | | 2 | 7,4 | 1 | 3,3 | 3 | 4,8 |
| | Verbaliza relación | 5 | 100 | 24 | 88,9 | 26 | 86,7 | 55 | 88,7 |
| Total | | 5 | 100 | 27 | 100 | 30 | 100 | 62 | 100 |

*Tabla 46. – Transformación modo inverso sobre CC. Distribución de categorías de argumentos según la edad.*

| Argumentación | | Resultados a transformación sobre CS Modo inverso | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Error | | Acierto | | Total | |
| | | N | % | N | % | N | % |
| | Imprecisa / no argumenta | 13 | 19,1 | 4 | 5,5 | 17 | 12,1 |
| | Reconoce por posicionamiento | 15 | 22,1 | 10 | 13,7 | 25 | 17,7 |
| | Verbaliza colores correspondientes | 28 | 41,2 | 4 | 5,5 | 32 | 22,7 |
| | Verbaliza relación | 12 | 17,6 | 55 | 75,3 | 67 | 47,5 |
| Total | | 68 | 100 | 73 | 100 | 141 | 100 |

*Tabla 47. - Transformación modo inverso sobre CS. Categorías de argumentos en función del acierto.*

| **Argumentación** | | **Edad** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **3 años** | | **4 años** | | **5 años** | | **Total** | |
| | | N | % | N | % | N | % | N | % |
| | Imprecisa / no argumenta | 4 | 7,7 | 7 | 13,7 | 6 | 15,8 | 17 | 12,1 |
| | Reconoce por posicionamiento | 16 | 30,8 | 5 | 9,8 | 4 | 10,5 | 25 | 17,7 |
| | Verbaliza colores correspondientes | 18 | 43,6 | 10 | 19,6 | 4 | 10,5 | 32 | 22,7 |
| | Verbaliza relación | 14 | 26,9 | 29 | 56,9 | 24 | 63,2 | 67 | 47,5 |
| Total | | 52 | 100 | 51 | 100 | 38 | 100 | 141 | 100 |

*Tabla 48. - Transformación modo inverso sobre CS. Categorías de argumentación en función de la edad.*

| | | **Argumentación. Modo inverso sobre CC** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Referencia símbolo | Verbaliza color | Verbaliza relación | Total |
| **Argumentación. Modo directo sobre CC** | Referencia símbolo | 1 | | | 1 |
| | Verbaliza color | | 1 | | 1 |
| | verbaliza relación | 3 | 2 | 55 | 60 |
| Total | | 4 | 3 | 55 | 62 |

*Tabla 49. - Comparación de argumentación en transformación directo sobre CC.*

| | | Argumentación. Modo inverso sobre CS | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Argumentación. Modo directo sobre CC** | | Referencia símbolo | Verbaliza color | Verbaliza relación | Total |
| | Verbaliza color | | 1 | | 1 |
| | verbaliza relación | 1 | 2 | 3 | 6 |
| Total | | 1 | 32 | 3 | 7 |

*Tabla 50. - Comparación de argumentación en transformación directo sobre CC y modo inverso sobre CS.*

| | | **Argumentación modo inverso sobre CS** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Imprecisa | Referenc. símbolo | Verbaliz. color | Verbaliz. relación | Total |
| **Argumentación. Modo directo sobre CS** | Imprecisa | | 1 | | 1 | 2 |
| | Referencia símbolo | 2 | | 1 | 1 | 4 |
| | Verbaliza color | | 3 | 3 | | 6 |
| | Verbaliza posiciones | | 1 | | | 1 |
| | Verbaliza relación | 2 | 5 | | 49 | 56 |
| Total | | 4 | 10 | 4 | 51 | 69 |

*Tabla 51. - Comparación de argumentación en transformación, según el modo, sobre CS.*

# BIBLIOGRAFÍA


Alcalá, M. (2002) **La construcción del lenguaje matemático**. Barcelona. Graó.

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M., Giménez, J. Y Torra, M. (1996) **Enseñar matemáticas**. Barcelona. Graó.

Asensio, M., Martín Cordero, J., García Madruga, J. A. y Recio, J., (1990) "Ningún Iroqués era Mohicano": La influencia del contenido en las tareas de razonamiento lógico. *Estudios de Psicología*. n 43-44, p. 35-60.

Baroody, A.J. (1988) **El pensamiento matemático de los niños**. Madrid. Visor-M.E.C.

Beth, E.W. et Piaget, J. (1961) **Épistemologie Mathématique et Psychologie**. Paris. Press Universitaires de France.

Bonatti, L. (1998) Why it took so long to bake the mental-logic cake: Historycal analysis of de recipe and its ingredients. In Braine M. D. S. y O'Brien, D. P. *Mental Logic.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p. 7-23

Boole, G. (1979) **El análisis matemático de la lógica**. Madrid Cátedra. Colección Teorema.

Boole, G (1982) **Investigación sobre las leyes del pensamiento**. Madrid Paraninfo.

Braine, M.D.S., Reiser, B.J. y Rumain, B. (1998) Evidence for the theory: Predicting the difficulty of Propositional Logic Inference Problems. *Mental Logic*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p. 91-145.

Braine, D.S. y O'Brien, D.P. (1998b) The theory of mental-propositional Logic: Description and Illustration. In Braine M. D. S. y O'Brien, D. P. *Mental Logic.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p. 79-91.

Brousseau, G. (1983) Les obstacles epistemologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique de les Mathématiques*, Vol 4, n. 2 p.165-198.

Brousseau, G. (1986) Fondaments et Methodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. Vol. 7 n. 2 p. 33-115.

Bruner, J. S. **Desarrollo cognitivo y educación**. Madrid. Morata.

Camacho Rosales, J. (1998) **Estadística con SPSS para Windows**. Madrid Ra-Ma.

Canals, M.A. (1981) **La matemática en el parvulario**. Madrid.Nuestra Cultura.

Canals, M. A. (1992) **Per una didàctica de la Matemàtica a l'escola. I Parvulari**. . Barcelona.Eumo

Carpenter, T.P., y Moser, J.M. (1984) The acquisition of addition and Subtraction Concepts in Grades One Though Three. *Journal of Research in Mathematics Education* n. 15, p. 179-202.

Cheng, P.W. y Holyoak, K.J. (1985) Pragmatic reasoning schemas. *Cognitive Psychology* n.17 p.391-416.

Crovetti, G. (1984) **Educación lógico-matemática 1**. Madrid. Cincel.

Davis, P.J. y Hersh, R. (1989) **Experiencia Matemática**. Madrid.Labor-M.E.C.

De Guzmán, M. (1997) **Para pensar mejor**. Madrid. Pirámide.

Dewey, J. (1989) **Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo**. Barcelona. Paidós.

Dias, M. G. y Harris, P. L. (1988) The effect of make-believe play on deductive reasoning. *British Journal of Developmental Psychology.* Vol. 6, p. 207-221.

Dias, M.G. y Harris, P.L. (1990) The influence of the imagination on reasoning by young children. *British Journal of Developmental Psychology.* Vol. 4, p. 305-318.

Dias, M.G. (1990) The influence of the imagination on reasoning by young children. *British Journal of Developmental Psychology*. Vol 9, p. 305-318.

Dias, M.G. y Spinillo, A. (1996) O desenvolvimento do raciocinio dedutivo. *Tópicos en Psicología cognitiva*. Brasil. Editora Universitaria da UFPE.

Díaz Godino, J. (1991) Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. Madrid. Síntesis.

Dienes, Z.P. (1986) Las seis etapas del aprendizaje en la Matemática. Barcelona. Teide.

Dienes, Z.P. (1987) Los primeros pasos en matemática. Tomo I Lógica y juegos lógicos. Barcelona.Teide

Dienes, Z.P. y Golding, E.W. (1987) Lógica y juegos lógicos. Barcelona. Teide.

Dienes, Z. (1997) **Propuesta para una renovación de la enseñanza de las matemáticas a nivel elemental**. Madrid. Fundación Infancia y Aprendizaje.

Dickinson, L., Brown, M y Gibson, O. (1991) El aprendizaje de las matemáticas. . Barcelona. Labor- M.E.C

Dreyfus, T. (1994) Advanced Mathematical Thinking Processes. *Advanced Mathematical Thinking*, cap. II. Dordrecht. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1994) Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. *Advanced Mathematical Thinking*, cap. VII. Dordrecht. Netherlands. Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999) **Semiosis y pensamiento humano. Registros semioticos y aprendizajes intelectuales**. Cali. Peter Lang-Universidad del Valle.

English, L.D y Halford, G.S. (1995) **Mathematics Education. Models and Processes**. New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates.

Escuelas Infantiles de Reggio Emilia (1999) **La inteligencia se construye usándola**. Madrid. MEC-Morata.

Euclides (1999) **Elementos. Libros 1-6**. Salamanca. Universidad de Salamanca.

Fehr H. (1908) **Enquête de l'"Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens, en colaboración con Th. Fluornoy**. Paris-Genève. Claparède.

Feigenbaum, K.D. (1971) A pilot investigation of the effects of training techniques designed to accelerate childrens' acquisition of conservatio of discontinuous quantity. *Journal of genetic Psychology*. Vol 119 (1): 13-23

Flavel, J. H.(1982) **La psicología evolutiva de J. Piaget**. Barcelona. Paidós.

Furth H. (1978) **La teoría de Piaget en la práctica**. Buenos Aires. Kapeluz.

González Carlomán, A. (1991) **Lógica matemática para niños** . Oviedo. Universidad de Oviedo.

Gorgorió, N Deulofeu, J., Bishop, A., Abreu, G., Balacheff, N., Clements. K., Dreyfus, T., Goffree, ., Hilton, P., Nesher, P. Ruthven, K. (2000) **Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional**. Universidad de Barcelona. Graó.

Grupo Cero (1987) **De 12 a 16 años. Un proyecto de curriculum de Matemáticas.** Valencia. Mestral.

Hadamard, J. (1945) **An essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field.** New York. Princenton.

Hawkins, J. Y.y Pea, R.D. (1984) Merds that laugh don't like mushrooms: evidence for deductive reasoning by preeschoolers. *Developmental Psychology*. Vol.20, n.4, p. 584-594.

INCE (2000) **Resultados de la prueba de Matemáticas de cuarto curso de la ESO.** Madrid. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

Johnson-Laird, P.N. (1969) How implication is understood. *Journals of Psychology*. n. 82, p. 367-373.

Johnson-Laird, P.N. (1993) Mental models or formal rules? *Behavioral and Brain Sciences* n. 16 p. 368-380.

Johnson-Laird, P.N., Byrne, R.M.J. y Schaeken, W (1994) Why Models rather than rules give a better account of propositional reasoning: a replay to Bonatti and to O'Brien, Braine and Yang. *Psychological Review* n 101 p. 734-739.

Kamii, C (1984) **El número en la educación preescolar**. Madrid. Visor-M.E.C.

Kothe, S. (1989) **Cómo utilizar los bloques lógicos de Z.P. Dienes**. Barcelona. Teide.

Lowell, K. (1986) **Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños**. Madrid. Morata.

Mannoury, G. (1947) **Les fondaments psycho-linguistiques des mathématiques**. . Neuchâtel. Bussum.

Marbach, E.S. (1986) **Curriculum creativo para preescolar y ciclo inicial**. Madrid. Narcea.

Martinez Rodriguez, E. (1989) Pedagogía de la escuela infantil. Madrid. Santillana. Siglo XXI.

Mialaret, G.(1986) **Las matemáticas: cómo se aprende cómo se enseñan**. Madrid. Visor.

Mira, M.R. (1989) **Matemática "viva" en el parvulario**. Barcelona. CEAC.

Mira, M.R. (1992) Introducción al lenguaje matemático. En Educación Infantil (0-6 años) Vol 2, cap. V. Barcelona. Paidotribo.

Maza Gómez, C. (1989) **Conceptos y numeración en la Educación Infantil**. Madrid. Sintesis.

O'Brien, D.P. (1997) Thre criticisms of Mental-Logic theory miss their target. *Cahiers of Psychologie Cognitive*. Vol. 16, n. 1-2, p. 173-180.

O' Brien, D. P. (1998) Mental Logic and Irrationality: We can put a men in the Moon, so why can't we solve those logical reasoning problems?. *Mental Logic,* cap. 3. New Jersey. Lawrence Erlbaum Associates.

Ortiz, L. (2002) La inserción curricular de estrategias de aprendizaje en Educación Infantil. Fundamentos teóricos. *Actas del II Congreso Internacional de Educación Infantil*, p. 377-382. Granada.

Penalva, M.C. (1998) **Formación de profesores de Educación Infantil**. Alicante. Universidad de Alicante.

Perez, G. Velasco, E. Aguado, A. De Prada, D. (1981) **Fundamentos sociales, psicológicos y pedagógicos en preescolar y ciclo preparatorio**. Madrid. Narcea.

Piaget J. (1964) **Génesis del número en el niño**. Buenos Aires. Guadalupe

Piaget, J. (1975) **L'equilibration des structures cognitives**. París. Presses Universitaires de France.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1976) **Génesis de las estructuras lógicas elementales**. Buenos Aires. Guadalupe

Piaget, J. (1979 a) **Tratado de lógica y conocimiento científico**. Buenos Aires. Paidos.

Piaget, J. (1979) **Investigaciones sobre la abstracción reflexionante 1**. Buenos Aires .Huemul.

Piaget, J. (1987) **Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático**. México. Paidós.

Polya, G. (1984) **Cómo plantear y resolver problemas**. México. Trillas.

Pozo, J.I. (1989) **Teorías cognitivas del aprendizaje**. Madrid. Morata.

Resnick, B. y Ford, W. W. (1990) **La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos**. Barcelona. Paidós-Centro de Publicaciones del MEC.

Rowan T. E. y Bourne B.(1999) **Pensando como matemáticos**. Buenos Aires. Manantial.

Sáinz, M.C. y Argos, J (1998) **Educación Infantil Contenidos, Procesos y Experiencias**. Madrid. Narcea

Skemp, R. (1980) **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. Madrid. Morata.

Selden, J. Y Selden, A. (1995) Unpacking the logic of statements. *Educational Studies in Mathematics*, n 29, p. 123-151.

Selmi, L. y Turrini, A. (1988) **La escuela infantil a los tres años**. Madrid. MEC-Morata.

**La escuela infantil a los cuatro años**. Madrid. MEC-Morata.

**La escuela infantil a los cinco años**. Madrid. MEC-Morata.

Skovsmose, O. (1994) **Towards a Philosophy of critical mathematics education.** Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Siegler, R.S. y Svetina, M. (2002) A microgenetic/cross-sectional study of matriz completion: comparing short-term and long-term change. *Chil Development*. May/June vol. 73 n. 3: 793-809

Solow, D. (1992) **Como entender y hacer demostraciones en matemáticas**. . Limusa. México

Santos Asensi M.C. Ingelmo, E. Y Mena, A. (1992) **Los bloques lógicos de Dienes en Educación Infantil y primaria (Diseño experimental y programa para alumnos de 5 a 7 años)**. Salamanca. Amarú.

Soviet Studies in Mathematics Education **The development of elementary Mathematical Concepts in Preeschool Children**. Vol 4 **Mathematics in Preeschool: An Aid for the Preeschool Educator**. Vol 5 National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia. U.S.A.

Tall, D. (1994) Advanced Mathematical Thinking Processes. *Advanced Mathematical Thinking. Reflections*. Dordrecht. Netherlands. Kluwer Academic Publishers

Viera, A.M. (1997) **Matemáticas y medio. Ideas para favorecer el desarrollo cognitivo infantil.** Sevilla. Diada.

Vuik, R. (1984) **Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1965-1980, I**. Madrid. Alianza.

Vygotsky, L.S. (1962) **Thought and language**. MA: MIT Press. Cambridge U.K. (Original work published 1934)

Wartofsky, M.W. (1987) **Introducción a la Filosofía de la Ciencia**. Madrid. Alianza.

Zimmerman, B. J. y Larano, P. (1974) Acquiring and retaining conservation of length through modelling and reversibility cues. *Merril Palmer Quarterly*. Vol 20(3): 145- 161