UNIVERSIDAD DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR

ANGEL MEDIAVILLA SANCHEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS FISICAS

ESPECIALIDAD

ELECTRONICA

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE OSCILADORES MICROONDAS EN REGIMEN DE GRAN SEÑAL

SANTANDER, Julio de 1984

D. JOSE LUIS GARCIA GARCIA, Catedrático Numerario de Electricidad y Magnetismo de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santander

HACE CONSTAR:

Que el trabajo titulado "Contribución al Estudio de Osciladores Microonda en Régimen de Gran Señal" ha sido realizado por D. Angel Mediavilla Sanchez en el Departamento de Electricidad y Magnetismo de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santander y en la División de Composants Microonde de THOMSON-CSF Massy, bajo mi dirección, y que reúne las condiciones exigidas a los trabajos de doctorado.

Santander, Julio de 1984

ANTONIO TAZON PUENTE

Quiero expresar mi agradecimiento al Profesor Dr. D. JOSE LUIS GARCIA GARCIA, Director de esta Tesis. El ha sido quien me inició en este sugestivo campo de la Electrónica de Alta Frecuencia y no escatimó el mínimo esfuerzo y apoyo para llevar a buen término este trabajo.

Al Dr. D. JUAN OBREGON, Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Limoges, quiero agradecer la oportunidad que me ofreció de utilizar los laboratorios de THOMSON CSF (DCM), así como sus contínuas sugerencias tanto en la parte teórica como en la experimental.

Al Ingeniero Dr. D. ALAIN BERT, Responsable del Laboratorio de Estudios de la División Composants Microonde de THOMSON CSF (Massy), mi agradecimiento por la favorable acogida que me dispensó en su laboratorio y la ayuda que me brindó en todo momento, poniendo a mi disposición el material Electrónico e Informático necesario.

A todos los miembros del Dpto. de Electricidad y Magnetismo, mi consideración y en especial a D. Antonio Tazón y a D. Miguel Arce por su colaboración en la parte Informática del trabajo.

Finalmente, a MARIA DEL BARRIO por su paciente y cuidado mecanografiado de esta memoria, mi agradecimiento.

A. Mediavilla . Julio - 1984

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I : METODOS CLASICOS DE ANALISIS

I.1. INTRODUCCION 1
I.2. METODOS TOPOLOGICOS 2
I.3. METODOS ANALITICOS 4
I.4. ESTABILIDAD ABSOLUTA 7
I.5. METODOS NUMERICOS 9

CAPITULO II : DESARROLLO FUNCIONAL

II.1. INTRODUCCION 19
II.2. DISTORSION DE INTERMODULACION 20
II.3. DISTORSION ARMONICA 26
II.4. METODO DE LA ENTRADA ARMONICA 28

CAPITULO III : FUNCION DESCRIPTIVA

III.1. INTRODUCCION 38
III.2. QUASI-LINEALIZACION 40
III.3. FUNCION DESCRIPTIVA 44
III.4. EXACTITUD DE LA APROXIMACION 55

CAPITULO IV : OSCILACIONES SINUSOIDALES

IV.1. INTRODUCCION 58
IV.2. DIAGRAMAS DE NIQUIST-MIKAILOV: ESTABILIDAD 64
IV.3. OSCILACIONES TRANSITORIAS 76

CAPITULO V : INYECCION Y PULLING

V.1. INTRODUCCION 83
V.2. RANGO DE SINCRONIZACION 83
V.3. ESTABILIDAD DE LA SINCRONIA 94
V.4. TRANSITORIO DE LA FASE 103
V.5. SENSIBILIDAD FRENTE A LA CARGA 114

CAPITULO VI : OSCILADORES A RESISTENCIA NEGATIVA

VI.1. INTRODUCCION 120
VI.2. ANALISIS FRECUENCIAL 121
VI.3. APLICACION NUMERICA 126

CAPITULO VII : OSCILADORES A TRANSISTOR FET

VII.1. INTRODUCCION 164
VII.2. MODELIZACION FET 165
VII.3. METODO DE CALCULO FRECUENCIAL 169
VII.4. APLICACION NUMERICA 178

CAPITULO VIII : RESULTADOS EXPERIMENTALES

VIII.1. INTRODUCCION 209
VIII.2. MONTAJE EXPERIMENTAL 210
VIII.3. TIEMPO TRANSITORIO 216
VIII.4. ESPECTRO QUASI-ESTACIONARIO 238

REFERENCIAS

APENDICE I

ANTONIO TAZON PUENTE

INTRODUCCION

INTRODUCCION

La comunicación es una característica innata en la condición humana, y las innovaciones tecnológicas son una fuente abundante de progreso y enriquecimiento de nuestras relaciones sociales y profesionales. Las intercambios, cada vez más rápidos y numerosos, deben de estar asegurados a distancias cada vez mayores y, sobre todo, con una calidad cada vez mejor. Por ello, los progresos conseguidos en el dominio de las telecomunicaciones en cuanto a minaturización, capacidad y reducción de costos conllevan un cambio acelerado en nuestra sociedad.

La revolución tecnológica a la que estamos asistiendo es idéntica en importancia a la producida por el nacimiento de la electricidad a comienzos de siglo. Este fenómeno tiene su origen en la necesidad de encontrar nuevos sistemas para la transmisión de sonidos a gran distancia, debido a la importancia de la atenuación y escasa velocidad de las ondas sonoras. Afortunadamente, la intuición de Maxwell sirvió como base a la utilización de ondas electromagnéticas propagándose a la velocidad de la luz con una atenuación relativamente débil.

Fue Heinrich Hertz, en 1889, el primero que logró construir un aparato llamado oscilador que producía una onda electromagnética de frecuencia fija, revelando así a la percepción humana la existencia de las mismas. Posteriormente, Righi y Branly continuan sus investigaciones perfeccionando los prototipos que Hertz había construido.

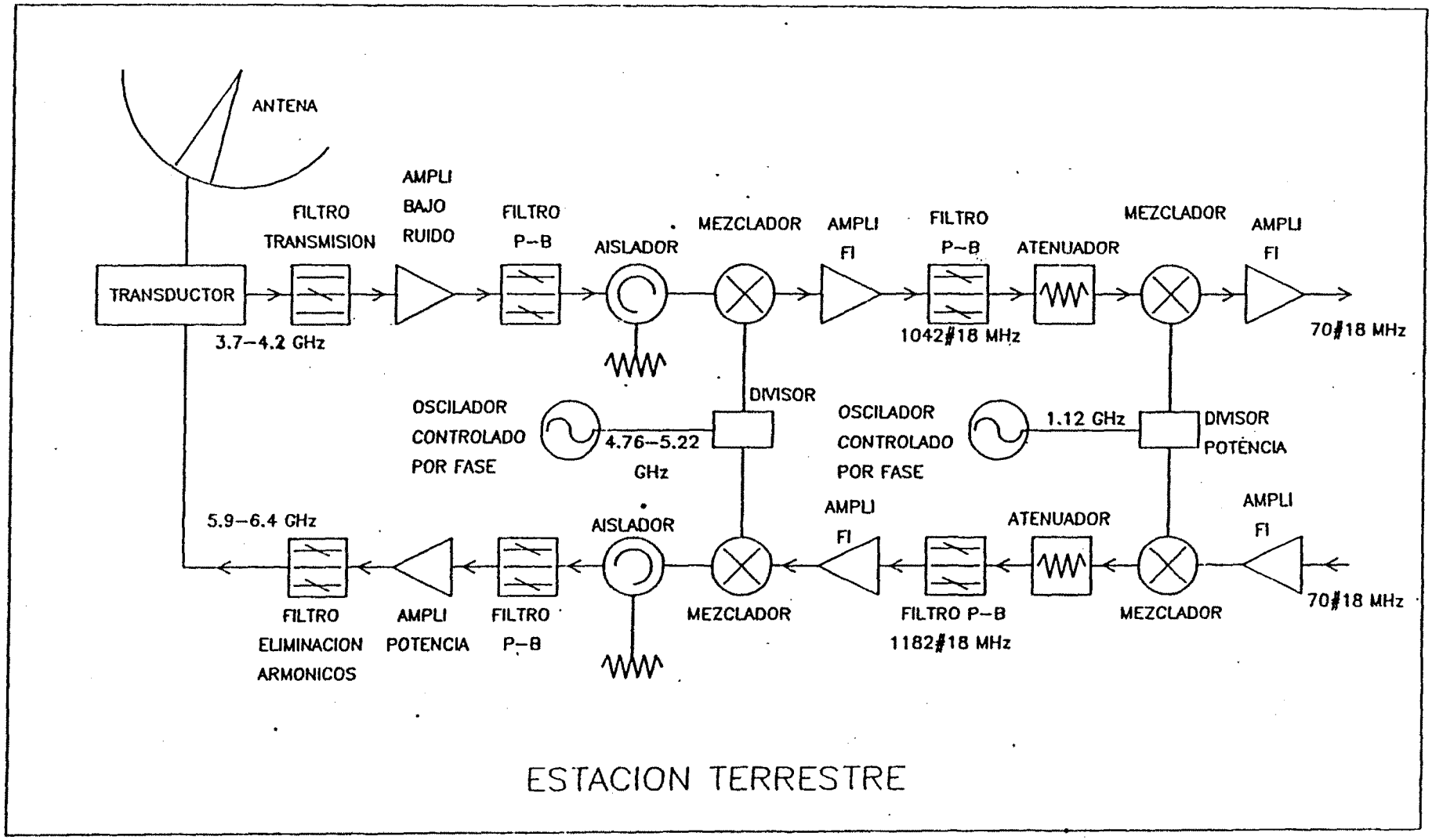
Sin embargo, hay que esperar hasta 1901 para que Marconi consiga transmitir estas señales a gran distancia uti-

lizando una rudimentaria antena. Hasta esta fecha, las ondas electromagnéticas solo habían servido para transmitir impulsos por cable (morse).

A partir de este momento, las investigaciones se orientan, principalmente, hacia la transmisión de la información, modulando convenientemente la señal portadora electromagnética, y el perfeccionamiento de los sistemas emisores receptores.

Tal como puede apreciarse en la figura adjunta, uno de los elementos más determinantes de la calidad de un sistema de comunicación es el generador de microondas puesto que es utilizado tanto en emisión (modulación, mezclado) cómo en recepción (demodulación). Los trabajos de investigación en este dominio tienen como fin aumentar la potencia generada aumentando el rendimiento y disminuyendo el ruido parásito de la oscilación, con el fin de que las fluctuaciones aleatorias de la portadora no se confundan con las fluctuaciones útiles de la señal modulante distorsionando así la información que deseamos transmitir o recibir. Paralelamente a estos problemas nos encontramos con la necesidad de subir cada vez más en frecuencia, con el fin de poder transmitir mayor cantidad de información.

Se comprende pues, que la base del estudio y desarrollo de los sistemas de comunicación es el diseño cuidadoso del generador de señal portadora. En la década de los años 30 se llegó a la evidencia de que a medida que la longitud de onda se aproximaba a las dimensiones físicas de los tubos de vacio clásicos, las limitaciones en cuanto a su aplicabilidad en la banda microonda se hacían cada vez más os-



ESTACION TERRESTRE

tensibles.

En 1935 A.A. Heil y O. Heil sugieren la idea de la generación de voltajes microonda a través de efectos de tiempo de tránsito junto con circuitos sintonizadores discretos.

En 1939 W.C. Hahn y G.F. Metcalf proponen una teoría de modulación de velocidad para los tubos microonda. Unos meses más tarde R.H. Varian y S.F. Varian describen su oscilador Klystron usando la teoría de modulación de velocidad y en 1544 R. Kompfner inventa el tubo de onda progresiva del tipo hélice (TWT). Como observamos, el concepto de tubos microonda hubo de modificarse a la luz de la aplicación de nuevos principios en la amplificación y generación de energía microonda.

A pesar de que las investigaciones en este sentido nunca han cesado debido a la necesidad de obtener potencia en transmisión, se tiende, progresivamente, a la sustitución de los tubos microonda por dispositivos activos de estado sólido en razón de una optimización en peso y potencia de contínua.

La invención del transistor bipolar por William Shockley /1/ en los laboratorios de la Bell (1948) produjo un impacto revolucionario en la tecnología electrónica. Posteriormente a este descubrimiento, Shockley /2/ propuso en 1952 un nuevo tipo de transistor unipolar FET en el que la conductividad estaba modulada por un campo eléctrico transversal. Ambos logros mostraron rápidamente su potencial como generadores y amplificadores de señal, sustituyendo progresivamente a los tubos de vacio clásicos.

Despues de la invención del transistor, Shockley /3/ sugiere en 1954 que el uso de dispositivos semiconductores a resistencia diferencial negativa podían tener ventajas sobre los transistores a frecuencias elevadas. Así, en 1961 Ridley y Watking describen un nuevo método para obtener movilidad diferencial negativa en los semiconductores /4/ transfiriendo electrones desde una banda de alta movilidad a otra de baja por medio de la aplicación de un campo eléctrico. En 1962 Hilsum /5/ calcula analíticamente el efecto de transferencia de electrones en varios tipos de semiconductores y no fue hasta 1963 en que J.B. Gunn /6/ descubre el así llamado efecto Gunn en muestras de AsGa mientras estudiaba las propiedades de ruido de semiconductores. Cinco años antes Esaky /7/ había conseguido formular, basándose en la teoría cuántica, el comportamiento anómalo de algunas uniones PN dando nacimiento al diodo Tunel.

Las investigaciones en este campo progresan y así en 1958 Read /8/ propone la obtención de resistencia negativa por medio de la ionización avalancha IMPATT, consiguiendo en 1965 la comprobación experimental de este modo de operación en los trabajos de Lee /9/ y Johnston /10/. Posteriormente en 1966 Copeland /11/ descubre su diodo de acumulación de carga espacial LSA; en 1967 Prager /12/ comprueba las oscilaciones microonda en los diodos TRAPATT y en 1971 Coleman /13/ consigue oscilaciones en estructuras metal-semicronductor-metal: BARITT.

Desde el descubrimiento de estos dispositivos de estado sólido capaces de generar microondas hasta nuestros días, ha habido una cantidad ingente de investigadores dedicados

a potenciar su aplicación en el dominio de la alta frecuencia, mejorando progresivamente su rendimiento, fiabilidad, nivel de ruido, etc. Así, los transistores que habían sido desbancados en una época por los diodos en la banda milimétrica, vuelven a ocupar el lugar que les corresponde en importancia consiguiendo oscilar y amplificar a frecuencias superiores a los 40 GHz.

De hecho, si consideramos las ventajas e inconvenientes de cada dispositivo, es el contexto en el que vamos a utilizarle el que primará su elección respecto de sus competidores. Por ejemplo, en el caso de un radar a efecto Doppler, son la potencia, el rendimiento, la estabilidad en frecuencia y el nivel de ruido los parámetros que justifican la elección del elemento activo. Por el contrario, en los sistemas de comunicación por satélite deberemos de tener muy en cuenta el tamaño, peso, tiempo medio de vida y ruido.

En cualquier caso, a estos problemas de elección del dispositivo se añaden los de comprensión del funcionamiento y los de diseño con un método seguro y repetitivo. Habida cuenta que el comportamiento dinámico de un oscilador real es en esencial gran señal, los métodos clásicos de análisis basados en aproximaciones frecuenciales pequeña señal no son capaces de predecir de forma satisfactoria las características intrínsecas del dispositivo, tales como potencia de salida, nivel de armónicos, estabilidad etc. Esta claro, pues, que las exigencias actuales que se imponen a los dispositivos de estado sólido son tales que el científico no puede contentarse con hacer un oscilador microonda sino que

debe de tratar de hacer el mejor, es decir, necesita obligatoriamente una comprensión profunda de su funcionamiento en régimen de gran señal.

Dentro de esta filosofía se encuadra el trabajo desarrollado en la presente memoria, y realizado en los laboratorios del Departamento de Electricidad y Magnetismo de la Facultad de Ciencias de Santander y en la División de Composants Microonde de Thomson-CSF Massy (Francia).

El estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales surge de la necesidad de modelizar con mayor exactitud la mayoría de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza, en los cuales el tratamiento lineal es una mera aproximación. Esta herramienta matemática fué inmediatamente aprovechada en el análisis de los sistemas osciladores naturales y, por extensión, a los provocados. Así, en el capítulo I de la memoria se pasa revista a estos métodos clásicos de análisis, haciendo incapié en su aplicabilidad y utilización como base de futuras simulaciones por ordenador.

Sin menosprecio de estos métodos, existen hoy en día otras formas mas adecuadas de tratar las oscilaciones no lineales. Si deseamos calcular con precisión la distorsión no lineal de un sistema de comunicación, el desarrollo funcional de Volterra (Capítulo II) es el más adecuado: la entrada del sistema se aplica a un sumatorio infinito de Funciones de Transferencia. Desafortunadamente, la exactitud del método tiene como precio la dificultad en la obtención de dichas Transferencias no lineales, incluso para sistemas de orden relativamente bajo. En este capítulo se hace el desarrollo completo para un oscilador simple del tipo Van-der-

Pol, pudiendo constatarse lo engorroso del cálculo y la consiguiente dificultad en la obtención de una solución aproximada.

Parece, pues, interesante acudir a métodos de cálculo menos generales pero mejor adaptados a nuestras necesidades. El concepto de respuesta en frecuencia es de tal utilidad en los sistemas lineales, que es lógico tratar de estudiar las propiedades de las no lineales utilizando técnicas análogas basadas en la extensión del concepto de Función de Transferencia a otros sistemas. Este es el principio en el que se basa la Función Descriptiva (Capítulo III). A diferencia del desarrollo Funcional, si consideramos una entrada múltiple al sistema no lineal, el método de la Función Descriptiva optimiza una Función de Transferencia quasilineal para cada una de las entradas, de forma que este tipo de aproximación está siempre calculada para una forma específica de señal de entrada. Se comprende inmediatamente que su aplicabilidad dependerá exclusivamente del acierto que tenga el investigador en elegir la señal de entrada a la no-linealidad cuando trabajemos en un lazo cerrado oscilatorio. La gran ventaja de este método no está en el hecho de que nos resuelva el comportamiento aproximado del sistema, ya que esto puede hacerse con mayor exactitud por simulación de ordenador, sino que es capaz de ayudar de forma sencilla y eficaz en el diseño de sistemas no lineales.

En el capítulo IV se aplica el concepto de Función Descriptiva al estudio de osciladores sinusoidales, donde aparece como una generalización de los métodos de Niquist y Mikaĭlov para sistemas lineales. Asimismo, se estudia la es

tabilidad del sistema utilizando el concepto de Función Descriptiva de entrada incremental que, como veremos, produce idénticos resultados que el método quasi-estático precedente. Por último, se estudian en este capítulo las oscilaciones transitorias que ocurren en los sistemas en lazo cerrado, introduciendo adecuadamente en concepto de constante de tiempo del sistema.

Una de las propiedades de los osciladores microonda es la posibilidad de utilización como amplificadores sincronos, estabilizadores, reductores de ruido, discriminadores FM etc. Por ello, en el capítulo VI se desarrolla una formulación compacta y desde el punto de vista de la Función Descriptiva, para los problemas que plantea la sincronización de osciladores, tales como estabilidad, ancho de banda y transitorio de fase. En el final del capítulo se hace un estudio del pulling sobre la base de pequeñas perturbaciones en los alrededores del equilibrio.

En los capítulos VI y VII se aplican los criterios precedentes al estudio transitorio de osciladores a resistencia negativa y a FET, generalizando los criterios clásicos de estabilidad y estudiando en profundidad las características dinámicas gran señal.

Por último, el capítulo VIII sirve como comprobación experimental de la validez del método frecuencial desarrollado en los capítulos anteriores. Para ello, se hacen experiencias de tiempos de crecimiento y corte de osciladores y de espectros quasi-estacionarios para modulaciones seno en Gate. Las medidas se efectúan sobre las diferentes puertas del oscilador, no observándose diferencias apreciables

entre ellas, lo que confirma la validez de nuestro método de cálculo.

/1/ SHOCKLEY W. # The Theory of P-N Junction in Semiconductors and P-N Junction Transistors # Bell System Tech. J. 28, pp.435, 1949.

/2/ SHOCKLEY W. # A Unipolar Field Effect Transistor # Proc. IRE. 40, N°11, pp. 1365-1376, Nov. 1952.

/3/ SHOCKLEY W. # Negative Resistance Arising From Transit Time in Semiconductor Diodes # Bell System Tech. J. 33, pp. 799-826, Jul. 1954.

/4/ RIDLEY B.K. and WATKINS T.B. # The Possibility of Negative Resistance Effects in Semiconductors # Proc. Phys. Soc. 78, pp. 293-304, Aug. 1961.

/5/ HILSUM C. # Transferred Electron Amplifiers and Oscillators # Proc. IEEE 50, pp. 185-189, Feb. 1962

/6/ GUNN J.B. # Microwave Oscillations of Current in III-V Semiconductors # Solid State Comun. 1, pp. 89-91, 1963.

/7/ ESAKY L. # New Phenomenon in Narrow Germanium PN Junction# Physical Review 169, pp. 603-604, 1959.

/8/ READ W.T. # A Proposed High-Frequency Negative Resistance Diode # Bell System Tech. J. 37, pp. 401-446, 1958.

/9/ LEE C.A. # The Read Diode, An Avalanche Transit-Time Negative Resistance Microwave Oscillator # Appl. Phys. Letters 6, pp. 89, 1965.

/10/ JOHNSTON R.L., DeLOACH B.C. and COHEN G.B. # A Silicon Diode Microwave Oscillator # Bell System Tech. J. 44, pp. 369-372, Feb. 1965.

/11/ COPELAND J.A. # CW Operation of LSA Oscillators Diodes : 44 To 88 Ghz # Bell System Tech. J. 46, pp.284-287, Jan. 1967.

/12/ PRAGER H.J. # High Power - High Efficiency Silicon Avalanche Diodes at Ultra High Frequencies # Proc. IEEE Letters 55, pp. 586-587, April 1967.

/13/ COLEMAN D.J. and SZE S.M. #A Low Noise Metal-Semiconductor -Metal (MSM) Microwave Oscillator # Bell System Tech. J. 50, pp. 1695-1699, May-June 1971.

CAPITULO I

METODOS CLASICOS DE ANALISIS

I.1.- INTRODUCCION

Los problemas causados por la aparición de no linealidades en los sistemas físicos, son tales, que no existen métodos de análisis con carácter general, por lo que la elección de una metodología para un problema específico dependerá de una gran variedad de factores. Estos, comprenden la estructura del sistema; el orden, número y forma de las ecuaciones diferenciales que describen el modelo; el tipo y número de efectos no lineales concernidos, etc. Análogamente, a pesar de la multiplicidad de los métodos, generalmente unos son más adecuados que otros para el estudio concreto de una característica particular del sistema tal como la estabilidad, existencia de ciclo límite, etc.

La determinación teórica de la existencia de una oscilación no lineal en un sistema requiere que la ecuación diferencial que lo describe posea una solución periódica y además que ésta sea estable. La capacidad de los ordenadores modernos permite la puesta a punto de métodos de cálculo para la evaluación muy aproximada de estas soluciones, sujetas a determinadas condiciones iniciales. Sin embargo, el establecimiento de la no existencia de las mismas en la totalidad del espacio de los estados por medios exclusivamente computacionales, puede resultar extraordinariamente costoso incluso para sistemas de orden relativamente bajo. Obviamente este encarecimiento conduce a la necesidad de disponer de una diversidad de técnicas analíticas o gráficas aproximadas, que nos dan respuesta a cuestiones de interés, con un grado suficiente de credibilidad para poder ser utilizadas como base de futuras simulaciones en ordenador.

La investigación de las oscilaciones no lineales está intimamente relacionada con la estabilidad, ya que un ciclo límite es a menudo una característica de inestabilidad. A pesar de que el problema de la estabilidad ha interesado a los matemáticos durante muchos años, generalmente no es posible hallar soluciones exactas o condiciones necesarias y suficientes, para la mayoría de los sistemás prácticos. Sin embargo, es importante poseer un conocimiento de los resultados de la teoría de la estabilidad absoluta y de los trabajos relacionados con la existencia de soluciones periódicas.

Cuando se trabaja con sistemas no lineales, normalmente se tiene planteado un problema de diseño, de forma que muchas veces se acude a métodos que permiten la visualización de los efectos que produce en cambio en determinados parámetros. Por esta razón los métodos gráficos son comunmente empleados y extendidos a una gran variedad de problemas ya que puede obtener fácilmente una multiplicidad de relaciones gráficas en sistemas definidos por ecuaciones relativamente complicadas.

En los apartados siguientes se va a pasar revista a los métodos más comunes de estudio de sistemas no lineales dando un breve resumen de su técnica y aplicabilidad.

I.2.- METODOS TOPOLOGICOS

Estos métodos gráficos son relativamente fáciles de utilizar en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden.

Dichas ecuaciones pueden reducirse a la forma típica de ecuaciones estado acopladas:

$$\begin{aligned} x &= f(x,y) \\ y &= g(x,y) \end{aligned} \qquad (1-1)$$

las cuales definen la trayectoria paramétrica en el espacio de las fases. Los primeros trabajos publicados en este área se deben a Poincaré /1,2/, Bendixon /3/ y Lienard /4/ mostrándonos los resultados básicos sobre la aparición de puntos singulares y las formas de trayectoria en el plano de los estados. Además sus teoremas acerca de las condiciones necesarias de existencia de ciclo límite (trayectoria cerrada) permanecen válidos.

Otros trabajos tales como los de Minorsky /6/ y Cunningham /5/ presentan estudios topológicos generales, mientras que West /7/ y Atherton /8/ trabajan especificamente con oscilaciones en sistemas de control no lineales. A pesar de que estos métodos están normalmente restringidos a procesos autónomos, son bastante versátiles y pueden aplicarse a sistemas con más de una no-linealidad, lo mismo que a características presentando histéresis. Dada su generalidad, estos métodos son engorrosos en el cálculo de las trayectorias y son raramente utilizados para la búsqueda de soluciones cuantitativas. Como contrapartida son capaces de dar una información cualitativa del comportamiento del sistema, sirviendo de base para la elección de condiciones iniciales en la búsqueda de soluciones por ordenador.

I.3.- METODOS ANALITICOS

Se basan en la conocida teoría de osciladores lineales de segundo orden, modificando la ecuación diferencial con la introducción de un término no lineal de amortiguamiento:

$$\ddot{x} + w_o^2 x + h.f(x,\dot{x}) = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

donde h es un parámetro pequeño. Existen muchos métodos asintóticos de solución que convergen a la solución ideal ($h \to 0$), siendo los más conocidos el método de las perturbaciones /1/ y el método de lenta variación de amplitud y fase /9/.

En el primero se propone una solución de la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0} h^n x_n(t) \qquad (1\text{-}3)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial e igualando términos con potencias iguales en h obtenemos una serie de ecuaciones diferenciales que pueden resolverse sucesivamente para x_0, x_1, etc. Una dificultad en la aplicación de este método es la aparición, en determinados sistemas, de términos no acotados ó seculares. Este inconveniente puede salvarse escogiendo los parámetros asociados a los términos seculares de forma que desaparezcan si permitimos una dependencia de la frecuencia de oscilación con h y la amplitud "a", escribiendo:

$$w = w_o + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \phi_n(a) \qquad (1\text{-}4)$$

Sustituyendo ambos sumatorios en la ecuación diferencial e igualando términos de potencia análoga en h, la serie resultante de ecuaciones diferenciales puede resolverse eligiendo las funciones $\phi_j(a)$ de forma que los $x_j(t)$ no contengan términos seculares.

El método de variación lenta de amplitud y fase fue inicialmente propuesto por Krylov y Bogolyubov, sugiriendo una solución de la forma:

$$x(t) = A(t) \sin (w_o t - \theta(t)) \qquad (1\text{-}5)$$

Una aproximación equivalente suponiendo una solución:

$$x(t) = B(t) \sin w_o t - C(t) \cos w_o t \qquad (1\text{-}6)$$

había sido anteriormente propuesta por Van der Pol /10/. Ambos métodos utilizan una técnica de promedio para obtener soluciones a los parámetros lentamente variables. Estas son:

$$\frac{dA}{dt} \approx -\frac{1}{2\pi w_o} \int_0^{2\pi} h.f(A \sin\psi \, , \, A\, w_o \cos\psi) \cos\psi \, d\psi$$

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{1}{2\pi . A w_o} \int_0^{2\pi} h.f(A \sin\psi \, , \, A\, w_o \cos\psi) \sin\psi \, d\psi \qquad (1\text{-}7)$$

$$\psi = w_o t + \theta$$

donde la amplitud de oscilación A se mantiene constante en los integrandos. La integración del miembro derecho de la primera ecuación proporciona una ecuación diferencial de primer orden con variables separadas. Su solución A(t) se

lleva a la segunda ecuación diferencial, obteniéndose así la solución para $\theta(t)$. Este método es formalmente más simple que el obtenido por perturbaciones, sin embargo la extensión a sistemas de orden superior no suele seguir esta regla.

En el método de Ritz-Galerkin suponemos que la ecuación diferencial no lineal:

$$F\ (p,x,t) = 0\ ;\ p = d/dt \qquad (1\text{-}8)$$

tiene una solución aproximada expresable como combinación lineal de una serie de funciones temporales linealmente independientes:

$$x_a(t) = \sum_{j=0}^{m} C_j\ \theta_j(t) \qquad (1\text{-}9)$$

Cuando las funciones $\theta_i(t)$ son ortogonales en el intervalo (a,b) y la ecuación diferencial original es lineal, la integral del cuadrado del residuo:

$$r(t) = F\ (p, x_a, t) \qquad (1\text{-}10)$$

extendido a todo el intervalo (a,b) será mínima sí:

$$\int_a^b r(t)\ \theta_j(t)\ dt = 0 \qquad \forall_j = 1, \ldots, m \qquad (1\text{-}11)$$

Este método es utilizable para ecuaciones de cualquier orden y usa la relación anterior para obtener una solución aproximada a la ecuación diferencial no lineal. Obviamente si esperamos una solución de tipo periódico debere

mos utilizar sin(nwt) y cos(nwt) como funciones ortogonales en el intervalo $(0, 2\pi/w)$.

Ya que una oscilación periódica puede ser representada por una serie de Fourier, es lógico aproximar una solución real por unos cuantos términos de dicho desarrollo. El principio del balance armónico consiste en sustituir esta solución aproximada en la ecuación diferencial que define el comportamiento del sistema, y asegurarnos de que no hay componentes de las frecuencias elegidas en el residuo r(t). Usualmente este método se aplica a soluciones oscilantes conteniendo uno ó dos armónicos y, debido a la ortogonalidad de las funciones seno y coseno, produce los mismos resultados que el método de Galerkin.

I.4.- ESTABILIDAD ABSOLUTA

En una gran parte de los sistemas físicos, el efecto no lineal puede ser aislado de la fenomenología dinámica del sistema de forma que éstos generalmente se representan en la forma canónica de la figura:

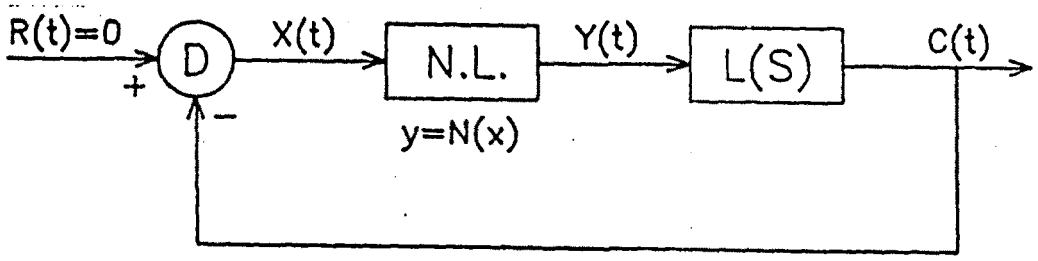


Fig. (1-1)

donde L(s) es la función de transferencia de la parte lineal del sistema para un proceso invariante temporal, y N(x) es la característica no lineal. La estabilidad de un

sistema como tal puede ser en principio evaluado, bajo determinadas condiciones iniciales, sin necesidad del cálculo detallado de las respuestas del mismo a unas excitaciones dadas. Todo lo que sería necesario es una indicación de las trayectorias, en el espacio de los estados, en la vecindad de un punto de equilibrio. En la década de los años sesenta se desarrolló una ingente labor en este sentido /11-14/, confeccionándose un método analítico que, ignorando las trayectorias detalladas, puede observar como tienden en un sentido generalizado hacia un punto de equilibrio: método directo de Liapunov. Para ello se recurre a una función escalar definida positiva de las variables de estado junto con ciertas propiedades, siendo la mayor restricción la dificultad de obtener una función de Liapunov apropiada.

La imposibilidad de encontrar funciones de Liapunov que nos pongan en evidencia la estabilidad o inestabilidad absoluta del sistema, solo indica que nuestra función no sigue de forma conveniente su comportamiento. Esta situación cambia radicalmente cuando Popov /15-18/, con una elección apropiada encuentra las condiciones suficientes para la estabilidad de un punto de equilibrio. Posteriormente se han desarrollado varios teoremas de estabilidad usando el análisis funcional /19-21/, basados fundamentalmente en la función de Popov para situaciones particulares y proporcionando siempre condiciones suficientes pero no necesarias.

Obviamente, un esfuerzo análogo ha sido dirigido hacia la búsqueda de condiciones de inestabilidad y ciclo límite en este tipo de sistemas. Los primeros resultados generales aparecen en los trabajos de Brockett y Lee /22/ dando

versiones de inestabilidad a los criterios de Popov. Pliss /23/ y Rauch /24/ calculan por la misma época las condiciones de existencia del ciclo límite para ecuaciones diferenciales específicas de tercer orden, utilizando el teorema de Brower del punto fijo. Por último, otros trabajos como el de Garber /25/ se dirigen hacia el estudio de las condiciones de ausencia de ciclo límite a una frecuencia particular usando los desarrollos de Fourier y el análisis funcional.

I.5.- METODOS NUMERICOS

Un sistema regido por una ecuación diferencial no lineal puede ser reducido a un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, cuya forma general es:

$$\begin{aligned} dX1/dt &= F1(X1, X2, \ldots, Xn) \\ dX2/dt &= F2(X1, X2, \ldots, Xn) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dXn/dt &= Fn(X1, X2, \ldots, Xn) \end{aligned} \qquad (1\text{-}12)$$

teniendo por condiciones iniciales $(X1_0, X2_0, \ldots, Xn_0)$ en t_0.

a) Método de la serie de Taylor

Partiendo de una serie de valores iniciales $X1_n, X2_n, \ldots, Xn_n, t_n$ se propone el cálculo del siguiente valor por medio de la relación:

$$Xi_{n+1} = Xi_n + h.\frac{dXi}{dt}(Xi_n) + \frac{h^2}{2}.\frac{d^2Xi}{dt}(Xi_n) + \ldots \qquad (1\text{-}13)$$

llamando $\frac{dXi}{dt} = Fi$, $\frac{d^2Xi}{dt^2} = F'i$, ... tendremos:

$$Xi_{n+1} = Xi_n + h.Fi_n + \frac{h^2}{2}.F'i_n + \frac{h^3}{3}.\ F''i_n + \ldots \qquad (1\text{-}14)$$

$$Xi_{n+2} = Xi_n + (2h).\ Fi_n + \frac{(2h)^2}{2}\ .\ F'i_n + \ldots \qquad (1\text{-}15)$$

y naturalmente de establecerá un criterio de parada en el desarrollo.

b) Método de Euler modificado

Si h es suficientemente pequeño, podemos parar la serie de Taylor en el segundo orden y escribir:

$$Xi_{n+1} = Xi_n + h.Fi_n + \frac{h^2}{2}.\ F'i_n \qquad (1\text{-}16)$$

$$i = 1, \ldots, n$$

$$Xi_{n-1} = Xi_n - h.Fi_n + \frac{h^2}{2}.\ F'i_n \qquad (1\text{-}17)$$

de donde $Xi_{n+1} = Xi_{n-1} + 2h.Fi_n \qquad (1\text{-}18)$

Podemos ahora obtener otro valor de Xi_{n+1} tomando el valor medio de Fi:

$$Xi_{n+1} = Xi_n + \frac{h}{2}\ (Fi_n + Fi_{n+1}) \quad i = 1, \ldots, n \qquad (1\text{-}19)$$

Partiendo de los datos Xi_{n-1}, Xi_n y Fi_n, calculamos a través de (1-18) el valor de Xi_{n+1} (i = 1, ..., n), obteniéndose inmediatamente del sistema de ecuaciones los valores Fi_{n+1} para todo valor de i. Se aplican en este momento los nuevos datos a la ecuación (1-19), observándose entre los

resultados de ambos métodos. Esta diferencia debe ser menor que un cierto umbral previamente escogido (si no lo fuese, se disminuye h). Si los valores son lo suficientemente próximos, se conserva el segundo para continuar el cálculo.

c) Método de Adam

Se utiliza el mismo razonamiento que en el método precedente, pero haciendo la aproximación incremental por:

$$Xi = Xi_n + a(t-t_n) + b(t-t_n)^2 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (1\text{-}20)$$

donde derivando obtenemos:

$$\frac{dXi}{dt} = F_i(X1, X2, \ldots, Xn) = a + 2b(t-t_n) \qquad (1\text{-}21)$$

Obviamente, en $t = t_n$ tenemos $Xi = Xi_n$ y $Fi_n = a$. Análogamente, para $t = t_{n-1}$:

$$Fi_{n-1} = Fi_n - 2bh \qquad (1\text{-}22)$$

de donde $$b = \frac{Fi_n - Fi_{n-1}}{2h} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (1\text{-}23)$$

y $$Xi_{n+1} = Xi_n + h\left(Fi_n + \frac{Fi_n - Fi_{n-1}}{2}\right) \qquad (1\text{-}24)$$

Esta ecuación, junto con la del método precedente:

$$Xi_{n+1} = Xi_{n-1} + 2h.Fi_n$$

nos definen el proceso iterativo.

d) Método de RUNGE-KUTTA

El cálculo de Xi_{n+1} a partir de Xi_n utiliza la relación:

$$Xi_{n+1} = Xi_n + \frac{h}{6} (Gi1 + 2Gi2 + 2Gi3 + 2Gi4) \qquad (1-25)$$

siendo:

$$Gi1 = Fi(t_n, X1_n, X2_n, \ldots, Xn_n)$$

$$Gi2 = Fi(t_n + \frac{h}{2}, X1_n + \frac{h}{2}.G11, X2_n + \frac{h}{2}.G21 + \ldots)$$

$$Gi3 = Fi(t_n + \frac{h}{2}, X1_n + \frac{h}{2}.G12, X2_n + \frac{h}{2}.G22 + \ldots)$$

$$Gi4 = Fi(t_n + \frac{h}{2}, X1_n + \frac{h}{2}.G13 + X2_n + \frac{h}{2}.G23 + \ldots)$$

$$i = 1, \ldots, n \qquad (1-26)$$

e) Método iterativo promedio

Se utiliza en circuitos donde la no linealidad puede ser aislada del resto del mismo, siendo su aplicabilidad y convergencia dependientes /26/ de la predominancia de la

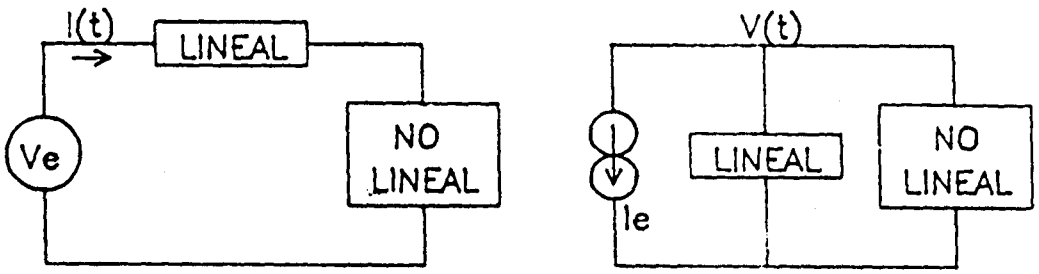


Fig. (1-2)

parte lineal sobre la no-lineal. En la figura (1-2) se muestran las configuraciones básicas de circuitos, a los cuales, estas técnicas son aplicables. El bloque lineal de ambos circuitos está formado por cualquier combinación posible de elementos pasivos conectados como una red de dos terminales. Similarmente, el bloque no-lineal puede ser considerado como la combinación de diferentes elementos.

Naturalmente, si trabajamos con más de un elemento no-lineal, a veces es dificil (o imposible) obtener la expresión del voltaje en sus terminales en función de la corriente que circula por él y viceversa. La más importante excepción ocurre cuando la combinación de elementos no-lineales está formada exclusivamente por componentes resistivas puras. En este caso, la característica v(i) puede calcularse facilmente por métodos gráficos o analíticos.

Como hemos apuntado anteriormente, la convergencia del método imperativo depende de la predominancia de la parte lineal sobre la no-lineal. Si el generador de voltaje en los circuitos serie se aplica al elemento lineal y posteriormente al no-lineal, la amplitud relativa de la corriente desarrollada separadamente nos la da una indicación de la predominancia. Esta regla empírica se obtiene con analogías lineales y no hay una demostración exacta; sin embargo, la experiencia nos muestra que es aplicable en la mayoría de los casos. Por último, dado que se va a desarrollar una técnica iterativa promedio, es necesario que el circuito a analizar no tenga /26/ oscilaciones libres ni respuesta subarmónica a la excitación.

Dada la analogía formal entre ambos tipos de circui-

tos, haremos el desarrollo para el paralelo siendo inmediata la extensión de la teoría al circuito serie. Para ello, llamaremos:

$i_e(t)$ ——— corriente excitadora del circuito.

$i_L(v)$ ——— corriente en el elemento lineal cuando tenemos aplicada una diferencia de potencial $v(t)$ en sus extremos.

$i_N(v)$ ——— corriente en el elemento no-lineal cuando tenemos aplicada una d.d.p. $v(t)$ en sus extremos.

$v_i(t)$ ——— i-ésima aproximación para el voltaje $v(t)$.

La ecuación general del circuito es:

$$i_e(t) = i_L(v) + i_N(v) \qquad (1\text{-}27)$$

y en lo que sigue supondremos la existencia y unicidad de las funciones inversas de las corrientes en el elemento lineal y no-lineal:

$$i_L^{-1}(i_L(v)) = v$$
$$i_N^{-1}(i_N(v)) = v \qquad (1\text{-}28)$$

Supongamos en primer lugar que el elemento no-lineal es el predominante. La primera aproximación para la tensión $v(t)$ será:

$$v_1(t) = i_N^{-1}(i_e) \qquad (1\text{-}29)$$

y la corriente en el elemento no-lineal debida a esta primera aproximación estará dada por $i_L(v_1)$. Teniendo en cuenta la ecuación general del circuito podemos escribir la siguiente aproximación:

$$v_2(t) = i_N^{-1}(i_e - i_L(v_1)) \qquad (1\text{-}30)$$

Si utilizamos la técnica de promedio para asegurar una convergencia más rápida, calcularemos la tercera aproximación como:

$$v_3(t) = (v_1(t) + v_2(t))/2 \qquad (1\text{-}31)$$

La cuarta aproximación se deduce de la tercera utilizando la iteración general:

$$v_4(t) = i_N^{-1}(i_e - i_L(v_3)) \qquad (1\text{-}32)$$

Los términos generales del desarrollo podrán, por tanto, escribirse como:

$$\begin{aligned} v_g(t) &= i_N^{-1}(i_e - i_L(v_{g-1})) && g\text{- par} \\ v_g(t) &= (v_{g-1} + v_{g-2})/2 && g\text{- impar} \end{aligned} \qquad (1\text{-}33)$$

Si deseamos estudiar lazos realimentados en los que la solución puede ser de naturaleza oscilante, deberemos de invalidar la técnica promedio y utilizar la primera ecuación para describir el término general, independientemente de la paridad de g.

Si trabajamos con un sistema en el que la parte lineal es la predominante, el desarrollo es análogo al anterior y los términos generales son:

$$v_g(t) = i_L^{-1}(i_e - i_N(v_{g-1})) \qquad g\text{- par}$$
$$v_g(t) = (v_{g-1} + v_{g-2})/2 \qquad g\text{- impar} \qquad (1\text{-}34)$$

Análogas conclusiones y resultados pueden deducirse para el estudio del circuito serie. Obviamente, cualquier red compleja que puede reducirse matemáticamente a una de las dos configuraciones básicas podrá ser tratada por este método.

Consideremos entonces una red arbitraria n-nudo compuesta primariamente de elementos lineales pero conteniendo en su interior cualquier combinación de elementos no-lineales reducibles a un bloque dos terminales. Dentro de la red puede haber cualquier número de funciones excitadoras independientes, siendo cada una de ellas una función arbitraria del tiempo desarrollable en serie de Fourier:

$$i_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (I_{cn} \cos(nwt) + I_{sn} \sin(nwt)) \qquad (1\text{-}35)$$

Las funciones excitadoras no necesitan tener una relación frecuencial específica entre ellas. Por ello, si excitamos dos nudos con corrientes de frecuencias diferentes, consideraremos una conexión serie de desarrollos de Fourier. En este estudio matricial supondremos que cualquier elemento de la red, lineal ó no-lineal, puede ser reemplazado por un generador de corriente equivalente a la corriente que lo

atraviesa sin perturbar el resto del circuito. Este generador de corriente puede tener admitancia interna nula. Dado que tratamos en principio con redes estacionarias, supondremos que después de un cierto tiempo se ha alcanzado el estado estacionario, independientemente de las condiciones iniciales.

Supondremos entonces que el elemento no-lineal se encuentra en el lazo n-ésimo. La ecuación matricial que describe el circuito es:

$$I_1(t) = Y_{11}(p).V_1 + Y_{12}(p).V_2 + \ldots + Y_{1n}(p).V_n$$

$$I_2(t) = Y_{21}(p).V_1 + Y_{22}(p).V_2 + \ldots + Y_{2n}(p).V_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n(t) = Y_{n1}(p).V_1 + Y_{n2}(p).V_2 + \ldots + Y_{nn}(p).V_n + i_n(t) \qquad (1\text{-}36)$$

donde:

$I_K(t)$ = suma de todos los generadores de corriente que fluyen al nudo k.

$Y_{jk}(t)$= operador admitancia del circuito.

p = operador diferencial d/dt.

$i_N(t)$ = corriente en el elemento no lineal como función del tiempo.

Resolviendo por Kramer para el voltaje correspondiente al elemento no lineal:

$$V_n = \frac{D_{1n}I_1(t) + D_{2n}I_2(t) + \ldots + D_{nn}I_n(t) - D_{nn}i_N(t)}{D} \qquad (1\text{-}37)$$

siendo D el operador determinante de la parte lineal del circuito y D_{ij} el menor resultante de eliminar la fila i y la columna j.

Podemos entonces escribir:

$$\frac{D_{kn}}{D_{nn}} I_K(t) = \frac{D}{D_{nn}} V_n + i_N(t) \qquad (1\text{-}38)$$

Habida cuenta que la característica de la parte no lineal es función del voltaje aplicado, escribimos:

$$\frac{D_{kn}}{D_{nn}} I_K(t) = \frac{D}{D_{nn}} V_n + i_N(V_n) \qquad (1\text{-}39)$$

A la vista de la ecuación anterior, podemos deducir una fuente de corriente equivalente para el miembro izquierdo:

$$I_e(t) = \frac{D_{kn}}{D_{nn}} I_k(t) \qquad (1\text{-}40)$$

y, puesto que D/D_{nn} es un operador lineal sobre el voltaje V_n, tendremos:

$$I_e(t) = i_L(V_n) + i_N(V_n) \qquad (1\text{-}41)$$

ecuación que es idéntica a la del circuito simple, por lo que los métodos iterativos anteriores son aplicables.

CAPITULO II

DESARROLLO FUNCIONAL

II.1.- INTRODUCCION

Las series funcionales de Volterra /28/ han sido ampliamente utilizadas en el estudio de sistemas conteniendo no linealidades débiles /29-33/, y están particularmente adaptadas para el cálculo de pequeñas distorsiones en los sistemas de comunicación. En realidad, son una generalización del análisis convencional en series de potencias para circuitos no lineales, el cual expresa la salida de un sistema no lineal dinámico en potencias de la entrada. En particular, si llamamos X(t) e Y(t) a la entrada y salida respectivas del sistema, la serie de Volterra aproxima Y(t) por un sumatorio acotado:

$$Y(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} h_n(u_1,\ldots,u_n).X(t-u_1)\ldots X(t-u_n).du_1\ldots du_n\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} Y_n(t) \qquad (2\text{-}1)$$

donde $h_n(u_1, \ldots, u_n)$ es el núcleo de Volterra de orden n, y el término general del sumatorio anterior puede ser interpretado como la convolución de una respuesta impulsional equivalente con la potencia n-ésima de nuestra entrada. De acuerdo con esta definición podemos representar esquemáticamente el sistema no lineal como se muestra en la Fig (2-1).

Generalmente se supone que los núcleos $h_n(u_1,\ldots,u_n)$ son simétricos en sus argumentos, puesto que uno no simétrico siempre puede simetrizarse reemplazándole por el promedio de todos los n! núcleos que resultan de permutar los ar

gumentos.

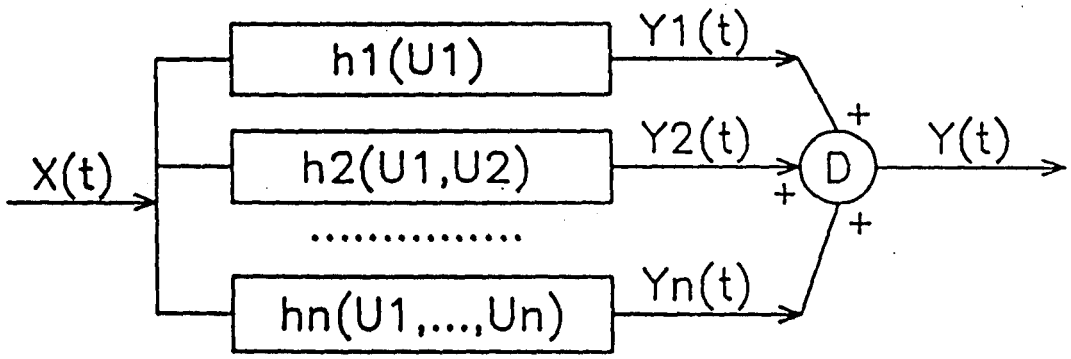


Fig. (2-1)

II.2.- DISTORSION DE INTERMODULACION

Suponemos la entrada del sistema compuesta por una suma de Q sinusoides de la forma:

$$X(t) = \sum_{q=1}^{Q} |E_q| e^{s_q t} \cos(w_q t + \theta_q) =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q} \mathrm{Re}(E_q . e^{p_q t}) = \sum_{q=-Q}^{Q} \tfrac{1}{2} E_q . e^{p_q t} \qquad (2\text{-}2)$$

siendo $p_q = s_q + jw_q$, $E_q = |E_q| e^{j\theta_q}$, $E_{-q} = E_q^*$, $p_{-q} = p_q^*$. Sustituyendo en la expresión (2-1) tenemos:

$$Y_n(t) = \frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(u_1, \ldots, u_n) . \sum_{q1=-Q}^{Q} E_{q1} . e^{p_{q1}(t-u_1)} \cdots$$

$$\cdots \sum_{qn=-Q}^{Q} E_{qn} . e^{p_{qn}(t-u_n)} . du_1 \cdots du_n =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{q1=-Q}^{Q} \cdots \sum_{qn=-Q}^{Q} E_{q1} \cdots E_{qn} \cdot e^{(p_{q1}+\ldots p_{qn})t} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(u_1,\ldots,u_n) \cdot e^{-(p_{q1}u_1+\ldots+p_{qn}u_n)} \cdot du_1 \ldots du_n =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{q1=-Q}^{Q} \cdots \sum_{qn=-Q}^{Q} E_{q1} \cdots E_{qn} \cdot H_n(p_{q1},\ldots,p_{qn}) \cdot$$

$$\cdot e^{(p_{q1}+\ldots+p_{qn})t} \qquad (2\text{-}3)$$

donde H_n es la función de transferencia de orden n que nos relaciona la respuesta a la pulsación $(p_{q1}+\ldots+p_{qn})$ con las entradas a las pulsaciones $p_{q1},\ldots,p_{qn}$, y puede interpretarse como la transformada de Fourier de orden n del núcleo h_n. Ya que suponemos los núcleos h_n simétricos, H_n también disfrutará de simetría respecto de sus argumentos. Observamos, por otro lado, que la función de transferencia de primer orden dada por:

$$H_1(p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u_1) \cdot e^{-p_1 u_1} \cdot du_1 \qquad (2\text{-}4)$$

es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional de la parte lineal del circuito.

De la ecuación (2-3) podemos escribir:

$$H_n(p_{q1},\ldots,p_{qn}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(u_1,\ldots,u_n) \cdot$$

$$\cdot e^{-(p_{q1}u_1+\ldots p_{qn}u_n)} \cdot du_1 \ldots du_n \qquad (2\text{-}5)$$

y su inverso:

$$h_n(u_1,\ldots,u_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} H_n(p_{q1},\ldots,p_{qn}) \cdot e^{(p_{q1}+\ldots+p_{qn})} \cdot dp_{q1}\ldots dp_{qn} \qquad (2\text{-}6)$$

De acuerdo con estas expresiones podemos representar

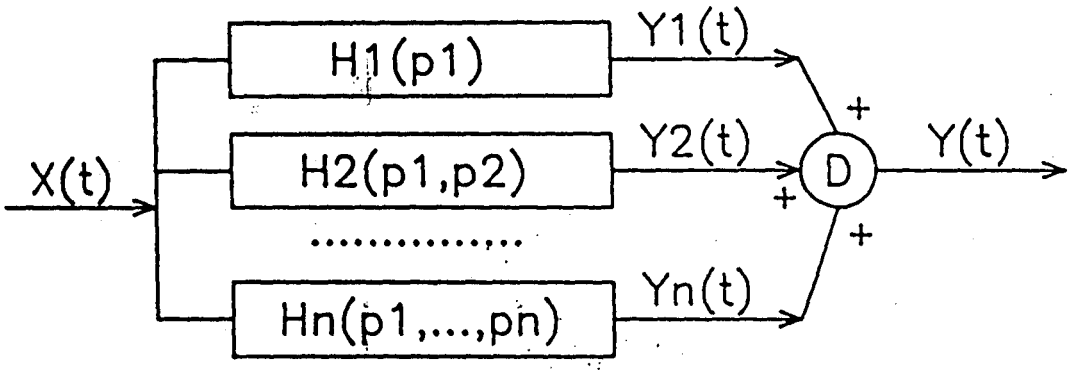


Fig. (2-2)

el circuito no lineal en el dominio frecuencial tal y como se muestra en la Fig. (2-2).

A la vista de las ecuaciones anteriores comprobamos que la multiplicación de la entrada X(t) por una constante K nos provoca una salida parcial $Y_n(t)$ multiplicada por K^n. Por otro lado, cada una de las componentes de salida $Y_n(t)$ está formada por un conjunto de componentes sinusoidales mezcla de las de entrada, teniendo en cuenta el hecho de que todas las funciones de transferencia que difieren únicamente en sus argumentos son idénticas. Para simplificar la representación del mezclado de frecuencias, llamaremos m_k al número de veces que aparece la pulsación p_k. Como consi-

deramos frecuencias negativas en la entrada, es decir, pulsaciones complejas conjugadas ($p_{-q} = p_q^*$), para una excitación consistente en Q sinusoides las pulsaciones de entrada son p_{-Q}, ..., p_{-1}, p_1, ..., p_Q. De aquí podemos representar cada posible mezclado en el término general $Y_n(t)$ por el vector m:

$$m = (m_{-Q}, \ldots, m_{-1}, m_1, \ldots, m_Q) \qquad (2\text{-}7)$$

y, para este mezclado de frecuencias, la correspondiente pulsación de intermodulación es:

$$p_m = s_m + jw_m = \sum_{k=-Q}^{Q} m_k p_k = m_{-Q} p_{-Q} + \ldots + m_Q p_Q \qquad (2\text{-}8)$$

Ya que hay exactamente n pulsaciones involucradas en cada mezclado de $Y_n(t)$, deberá de cumplirse que:

$$\sum_{\substack{k=-Q \\ k\neq 0}}^{Q} m_k = m_{-Q} + \ldots + m_{-1} + m_1 + \ldots + m_Q = n \qquad (2\text{-}9)$$

por lo que las pulsaciones que aparecen en $Y_n(t)$ son el resultado de todas las posibles combinaciones que cumplen la ecuación anterior. La simetría de las funciones de transferencia y de las exponenciales en $Y_n(t)$ nos condiciona el número de términos que contribuyen a un mezclado particular representado por el vector m. Esta cantidad será igual al número de formas diferentes en que n índices $(q_1, \ldots, q_n)$ pueden ser permutados de manera que m_{-Q} índices tomen el valor $-Q$, ..., m_{-1} índices tomen el valor -1, m_1 tomen el va-

lor 1, ..., m_Q tomen el valor Q. Este número viene dado por el coeficiente multinomial:

$$(n;m) = n!/(m_{-Q}!\ldots m_{-1}!.m_1!\ \ldots\ m_Q!) \qquad (2\text{-}10)$$

La parte de $Y_n(t)$ que corresponde al mezclado m es entonces:

$$Y_n(t;m) = \frac{(n;m)}{2^n}\,(E_Q^*)^{m_{-Q}}\ldots(E_1^*)^{m_{-1}}.(E_1)^{m_1}\ldots(E_Q)^{m_Q}.$$

$$\cdot\ H_n(\underbrace{p_{-Q},\ldots,p_{-Q}}_{m_{-Q}},\ldots,\underbrace{p_{-1},\ldots,p_{-1}}_{m_{-1}},\underbrace{p_1,\ldots,p_1}_{m_1},$$

$$,\ldots,\underbrace{p_Q,\ldots,p_Q''}_{m_Q}).e^{p_n t} \qquad (2\text{-}11)$$

La salida total del sistema será la suma para todos los mezclados del tipo anterior:

$$Y_n(t) = \sum_m Y_n(t;m) \qquad (2\text{-}12)$$

siendo $\sum_m = \sum_{m_{-Q}=0}^{n} \ldots \sum_{m_{-1}=0}^{n} \sum_{m_1=0}^{n} \ldots \sum_{m_Q=0}^{n}$ con (2-9)

Como tenemos Q sinusoides, puede demostrarse que la suma anterior se extiende a M vectores distintos del tipo de m, donde M está dado por:

$$M = (2Q + n - 1)! \,/\, (n!.(2Q - 1)!) \qquad (2\text{-}13)$$

A pesar de que $Y_n(t;m)$ es complejo, $Y_n(t)$ es una cantidad real ya que los términos en el desarrollo de Y_n aparecen en pares complejos conjugados. Habrá, pues, M/2 mezclados diferentes y, si llamamos $\bar{Y}_n(t;m)$ a la suma conjugada, tendremos:

$$\bar{Y}_n(t;m) = 2\,\mathrm{Re}(Y_n(t;m)) =$$

$$= \frac{(n;m)}{2^{n-1}} \cdot \left|E_1\right|^{(m_1+m_{-1})} \cdots \left|E_Q\right|^{(m_Q+m_{-Q})} \cdot \left|H_n(p_m)\right| \cdot$$

$$\cdot\, e^{s_m t} \cdot \cos(w_m t + \theta_m + \varphi_n(p_m)) \qquad (2\text{-}14)$$

siendo:

$$H_n(p_m) = \left|H_n(p_m)\right| e^{j\varphi_n(p_m)} = H_n(\underbrace{p_{-Q},\ldots,p_{-Q}}_{m_{-Q}},\ldots,$$

$$,\ \underbrace{p_{-1},\ldots,p_{-1}}_{m_{-1}},\ \underbrace{p_1,\ldots,p_1}_{m_1},\ \ldots\ldots,\ \underbrace{p_Q,\ldots,p_Q}_{m_Q}) \qquad (2\text{-}15)$$

$$\theta_m = (m_1 - m_{-1}).\theta_1 + \ldots + (m_Q - m_{-Q}).\theta_Q \qquad (2\text{-}16)$$

De acuerdo con la ecuación anterior puede surgir un término de contínua cuando $w_m = 0$, es decir, $m_k = m_{-k}$ para todo valor de k. Particularizando (2-11) para este caso te-

nemos:

$$Y_n(t,m^o) =$$

$$= \frac{(n;m^o)}{2^n} \left(|E_1|\right)^{2m_1} \ldots \left(|E_Q|\right)^{2m_Q} . H_n(p_{mo}) . e^{s_{mo}t} \qquad (2\text{-}17)$$

siendo $H_n(p_{mo}) = H_n^*(p_{mo})$, por lo que las funciones de transferencia asociadas a una componente de contínua son cantidades reales.

II.3.- DISTORSION ARMONICA

Un método conveniente para investigar la linealidad de un circuito electrónico consiste en aplicar una sinusoide a la entrada y medir las amplitudes relativas de los armónicos generados. Supongamos, pues, una entrada al circuito consistente en una sinusoide pura:

$$X(t) = |E_1| e^{s_1 t} . \cos(w_1 t + \Theta_1) = \tfrac{1}{2} \sum_{q=-1}^{1} E_q . e^{p_q t} \qquad (2\text{-}18)$$

Las pulsaciones de entrada serán p_1 y p_{-1} y el mezclado de orden n estará caracterizado por el vector $m(m_{-1},m_1)$ donde $m_{-1} + m_1 = n$. De acuerdo con ello, la porción de $Y_n(t)$ correspondiente al vector m será:

$$Y_n(t;m) = \frac{(n;m)}{2^n} (E_1^*)^{m_{-1}} . (E_1)^{m_1} . H_n(\underbrace{p_{-1},\ldots,p_{-1}}_{m_{-1}},\underbrace{p_1,\ldots,p_1}_{m_1}) .$$

$$. e^{(m_{-1}p_{-1}+m_1p_1)t} \qquad (2\text{-}19)$$

La ecuación anterior muestra claramente que la salida puede contener componentes de contínua ó armónicos, dependiendo de los valores asociados a m_{-1} y m_1. La contribución al armónico k resultará cuando:

$$m_{-1} + m_1 = k \qquad (2\text{-}20)$$

y, como la suma de ambos argumentos tiene que valer n, deducimos que

$$m_{-1} = \frac{n - k}{2} \qquad m_1 = \frac{n + k}{2} \qquad (2\text{-}21)$$

Puesto que m_{-1} es un entero positivo deberá de verificarse que n k, de donde concluimos que los armónicos impares solo pueden ser generados por los términos impares y viceversa para los pares. Combinando la expresión para $Y_n(t;m)$ con su complejo conjugado:

$$\bar{Y}_n(t;m) = 2\,\mathrm{Re}(Y_n(t;m)) =$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{(n;m)}{n-1}(E_1^*)^{m_{-1}}\cdot(E_1)^{m_1}\cdot H_n(p_{-1},..,p_{-1},p_1,..,p_1)\cdot$$

$$\cdot\, e^{(m_{-1}p_{-1} + m_1 p_1)t} \qquad (2\text{-}22)$$

Habida cuenta que la salida a un armónico particular está dada por la suma de las contribuciones de varios órdenes que cumplen (2-21), podemos escribir la respuesta total al armónico k como:

$$Y(t;kp_1) =$$

$$= \bar{Y}_k(t;0,k) + \bar{Y}_{k+2}(t;1,k+1) + \bar{Y}_{k+4}(t;2,k+2) + \ldots =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ (E_1)^k . e^{kp_1 t} \left[\frac{1}{2^{k-1}} \cdot H_k(\underbrace{p_1,\ldots,p_1}_{k}) + \right.\right.$$

$$+ \frac{k+2}{2^{k+1}} |E_1|^2 \cdot H_{k+2}(p_{-1},\underbrace{p_1,\ldots,p_1}_{k+1}) +$$

$$\left.\left. + \frac{(k+4)(k+3)}{2^{k+4}} |E_1|^4 \cdot H_{k+4}(p_{-1},p_{-1},\underbrace{p_1,\ldots,p_1}_{k+2}) + \ldots \right] \right\} \qquad (2\text{-}23)$$

II.4.- METODO DE LA ENTRADA ARMONICA

En los apartados anteriores se han desarrollado las fórmulas correspondientes a la teoría general de intermodulación de un sistema no lineal dinámico, basándonos en el desarrollo funcional de Volterra. Sin embargo, la validez de esta aproximación queda condicionada al cálculo de las funciones de transferencia asociadas y a la expresabilidad del sistema en forma de series funcionales.

Quizás el método de cálculo más general sea el denominado de la entrada armónica, el cual se basa en el hecho de que la respuesta del sistema a una señal armónica debe de ser armónica para aquellos circuitos desarrollables en serie. El proceso es de naturaleza iterativa: el circuito linealizado se prueba con una exponencial compleja de la forma exp ($p_1 t$) lo que permite, por igualación de términos equivalentes, la determinación de la función de transferen-

cia de primer orden H_1. Aplicando la suma de dos exponencia les exp $(p_1 + p_2)t$ a la entrada, hallaremos la función de transferencia de segundo orden en función de la de primero. Continuando de forma iterativa, hallaremos la transferencia de orden n en función de todas las anteriores.

Para verificar las cualidades de este método funcional, consideremos el circuito de la Fig. (2-3) donde suponemos que el elemento no lineal tiene, por simplicidad, una característica cúbica de la forma $v_N = -a.i + b.i^3$ $(a,b > 0)$.

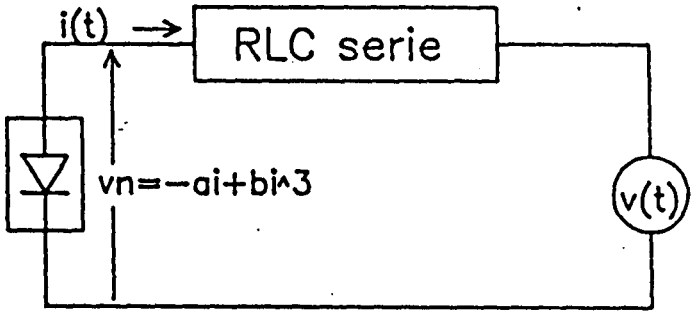


Fig. (2-3)

La ecuación integrodiferencial que gobierna el circuito es:

$$v = R.i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i.dt - a.i + b.i^3 \qquad (2\text{-}24)$$

Si llamamos D al operador derivada temporal y 1/D al operador integral, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$(LD + \frac{1}{CD} + R - a)\ i(t) = v(t) - b.i^3 \qquad (2\text{-}25)$$

de donde se deduce el operador impedancia Z^o:

$$Z^o = LD + \frac{1}{CD} + R - a$$

$$Z^o i(t) = v(t) - b.i^3 \qquad (2\text{-}26)$$

Si consideramos el circuito en su funcionamiento como amplificador, la entrada al sistema será v(t) y desarrollaremos i(t) en serie de Volterra de acuerdo con (2-3):

$$i(t) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{q1=-Q}^{Q} \cdots \sum_{qn=-Q}^{Q} V_{q1} \cdots V_{qn} \cdot Y_n(p_{q1}, \ldots, p_{qn}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot e^{(p_{q1}+\ldots+p_{qn})t} \right] \qquad (2\text{-}27\text{-}a)$$

sienvo v(t) un sumatorio de Q sinusoides:

$$v(t) = \sum_{q=-Q}^{Q} \tfrac{1}{2} V_q . e^{p_q t} \qquad (2\text{-}27\text{-}b)$$

Planteado el problema de esta forma, vamos a aplicar el método de la entrada armónica para el cálculo de las funciones de transferencia.

1) Supongamos $v(t) = \exp(p_1 t)$, lo cual de (2-27-b) supone que $V_1 = 2$, $Q=1$, $w_i > 0$. La ecuación (2-27-a) se nos transforma en:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t) = \sum_{n=1}^{N} Y_n(p_1, \ldots, p_1) . e^{np_1 t} \qquad (2\text{-}28)$$

y, sustituyendo en (2-26), resulta:

$$\sum_{n=1}^{N} Z^{o}(np_1).\ Y_n(p_1,\ldots,p_1).e^{np_1 t} =$$

$$= e^{p_1 t} - b\left[\sum_{n=1}^{N} Y_n(p_1,\ldots,p_1).e^{np_1 t}\right]^3 \qquad (2\text{-}29)$$

donde $Z^{o}(np_1)$ se obtiene del operador algebraico $Z^{o}(D)$ sin más que sustituir D por np_1. La función de transferencia de primer orden se obtiene igualando en ambos miembros de (2-26) los términos en $\exp(p_1 t)$:

$$Z^{o}(p_1).Y_1(p_1) = 1;\ Y_1(p_1) = \frac{Cp_1}{LCp_1^{\,2} + (R-a)Cp_1 + 1} \qquad (2\text{-}30)$$

2) Supongamos $v(t) = \exp(p_1 t) + \exp(p_2 t)$. Comparando con (2-27-b) tendremos que $V_1 = V_2 = 2$, $Q = 2$, $w_i > 0$, siendo el desarrollo de i(t) para este caso:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{q_1=1}^{2}\ \sum_{q2=1}^{2}\cdots\ \sum_{qn=1}^{2} Y_n(p_{q1},\ldots,p_{qn}).e^{(p_{q1}+\ldots+p_{qn})t}\right] \qquad (2\text{-}31)$$

Habida cuenta que la función de transferencia de segundo orden se obtiene igualando en ambos miembros de

(2-26) los términos en $\exp(p_1+p_2)t$, se comprende que la operación $Z^o i(t)$ solo tendrá términos de interés en $i_2(t)$:

$$i_2(t) = \sum_{q1=1}^{2} \sum_{q2=1}^{2} Y_2(p_{q1},p_{q2}).e^{(p_{q1}+p_{q2})t} \qquad (2\text{-}32)$$

y el vector mezcla que nos interesa será m = (0,0,1,1), cuyo coeficiente multinomial asociado es (n;m) = 2!. Particularizando la ecuación (2-32) para este mezclado tenemos:

$$i_2(t;m) = \frac{2!}{2^2}.2^2.Y_2(p_1,p_2).e^{(p_1+p_2)t} \qquad (2\text{-}33)$$

y la operación $Z^o i(t)$ podrá reducirse a:

$$Z^o i(t) \rightarrow Z^o i_2(t;m) = 2!.Z^o(p_1+p_2).Y_2(p_1,p_2).e^{(p_1+p_2)t} \qquad (2\text{-}34)$$

Puesto que el miembro derecho de (2-26) no contiene ningún término en $\exp(p_1+p_2)t$, concluimos que:

$$Y_2(p_1,p_2) = 0 \qquad (2\text{-}35)$$

3) Supongamos $v(t) = \exp(p_1t) + \exp(p_2t) + \exp(p_3t)$. De nuevo de la ecuación (2-27-b) deducimos $V_1=V_2=V_3=2$; $Q=3$, $w_i > 0$, escribiendose la particularización de (2-27-a) para este caso como:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{N} i_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{q1=1}^{3}\sum_{q2=1}^{3}\cdots\sum_{qn=1}^{3} Y_n(p_{q1},\ldots,p_{qn}).e^{(p_{q1}+\ldots+p_{qn})t}\right] \qquad (2\text{-}36)$$

Análogamente al caso anterior, $Z^o i(t)$ solo tendrá términos en $\exp(p_1+p_2+p_3)t$ cuando tratemos con $i_3(t)$:

$$i_3(t) = \sum_{q1=1}^{3}\sum_{q2=1}^{3}\sum_{q3=1}^{3} Y_3(p_{q1},p_{q2},p_{q3}).e^{(p_{q1}+p_{q2}+p_{q3})t} \qquad (2\text{-}37)$$

siendo el vector mezcla de interés $m = (0,0,0,1,1,1)$ cuyo coeficiente multinomial asociado vale $(n;m) = 3!$. La parte de $i_3(t)$ correspondiente a este mezclado es:

$$i_3(t;m) = \frac{3!}{2^3}.2^3.Y_3(p_1,p_2,p_3).e^{(p_1+p_2+p_3)t} \qquad (2\text{-}38)$$

y podemos escribir:

$$Z^o i(t) \rightarrow Z^o i_3(t;m) =$$

$$= 3!\ Z^o(p_1+p_2+p_3).Y_3(p_1,p_2,p_3).e^{(p_1+p_2+p_3)t} \qquad (2\text{-}39)$$

Si analizamos la ecuación (2-26) en su miembro derecho vemos que solamente la parte $-b.i^3(t)$ contendrá térmi-

nos de interés

$$i^3(t) = (i_1(t) + i_2(t) + \ldots)^3 =$$

$$= (i_1(t))^3 + 3(i_1(t))^2 . i_2(t) + \ldots \qquad (2\text{-}40)$$

y, puesto que solo consideramos frecuencias positivas, solo dispondremos de términos en $\exp(p_1+p_2+p_3)t$ en $(i_1(t))^3$, ya que los demás tendrán ordenes superiores al que nos interesa:

$$i_1^3(t) = \left[\sum_{q1=1}^{3} Y_1(p_{q1}) . e^{p_{q1}t}\right]^3 =$$

$$= \sum_{q1=1}^{3} \sum_{q2=1}^{3} \sum_{q3=1}^{3} Y_1(p_{q1}) . Y_1(p_{q2}) . Y_1(p_{q3}) .$$

$$. e^{(p_{q1}+p_{q2}+p_{q3})t} =$$

$$= 6\ Y_1(p_1) . Y_1(p_2) . Y_1(p_3) . e^{(p_1+p_2+p_3)t} + \text{superiores} \qquad (2\text{-}41)$$

donde hemos aplicado la propiedad de simetría de las funciones de transferencia. Teniendo en cuenta este desarrollo y las ecuaciones (2-26) y (2-39) deducimos:

$$6\ Z^{o}(p_1+p_2+p_3) . Y_3(p_1,p_2,p_3) = -6b . Y_1(p_1) . Y_1(p_2) . Y_1(p_3) \qquad (2\text{-}42)$$

de donde obtenemos la función de transferencia de orden ter

cero en función de la de orden 1:

$$Y_3(p_1,p_2,p_3) = -b.Y_1(p_1).Y_1(p_2).Y_1(p_3).Y_1(p_1+p_2+p_3) \quad (2\text{-}43)$$

Continuando de forma iterativa, podemos calcular las funciones de transferencia de orden superior. Se demuestra facilmente que las transferencias de orden par son identicamente nulas.

La representación global del circuito se muestra en la Fig. (2-4)

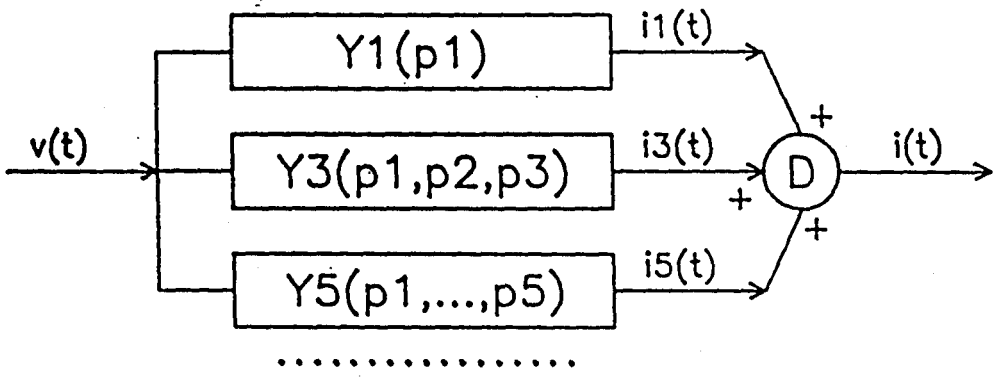


Fig. (2-4)

Si, por razones prácticas, acotamos la serie infinita de funciones de transferencia en el tercer orden y suponemos una entrada sinusoidal al circuito amplificador de la forma:

$$v(t) = A\, e^{st} \cos(wt + \theta) \qquad A \text{ real} \qquad (2\text{-}44)$$

la respuesta en corriente al fundamental y al tercer armónico se deducen inmediatamente de (2-23):

$$i(t;p) = \mathrm{Re}\left\{A e^{j\theta} e^{pt} \left[Y_1(p) + \frac{3}{4} A^2 . Y_3(p,p,p)\right]\right\}$$

$$i(t;3p) = \mathrm{Re}\left\{A^3 e^{j3\theta} e^{3pt} . \frac{1}{4} Y_3(p,p,p)\right\} \qquad (2\text{-}45)$$

La versatilidad del método descrito anteriormente puede ser utilizada para el análisis del carácter oscilatorio del circuito. Si nos interesamos, por simplicidad, en las oscilaciones libres al primer armónico, restringiremos $v(t) = 0$ para todo t y, puesto que buscamos una solución periódica aproximada para la corriente de la forma $i(t) = A.\cos(wt)$, consideraremos temporalmente que la entrada al sistema no lineal es i(t), y desarrollaremos v(t) en serie de Volterra. Aplicando de nuevo el método de la entrada armónica para este caso nos resulta:

$$Z_1(p_1) = \frac{LCp_1^2 + (R-a)Cp_1 + 1}{Cp_1} = 1/Y_1(p_1)$$

$$Z_2(p_1,p_2) = 0$$

$$Z_3(p_1,p_2,p_3) = b \qquad (2\text{-}46)$$

$$Z_r(p_1,\ldots,p_r) = 0 \quad (r > 3)$$

siendo la representación del sistema la mostrada en la Fig. (2-5)

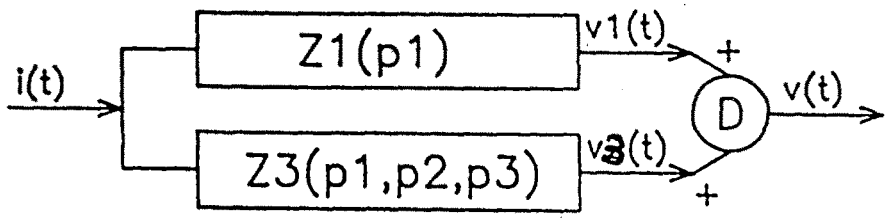


Fig. (2-5)

La respuesta en tensión al armónico fundamental se deduce inmediatamente de (2-33):

$$v(t,jw) = \mathrm{Re}\left\{ Ae^{jwt}\left[Z_1(jw) + \frac{3}{4} A^2 . Z_3(-jw,jw,jw)\right]\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ Ae^{jwt}\left[(R-a) + j\,\frac{LCw^2-1}{Cw} + \frac{3}{4} b.A^2\right]\right\} \qquad (2\text{-}47)$$

Si hacemos nulo este voltaje, tendremos las condiciones de oscilación libre al primer armónico:

$$R - a + \frac{3}{4} b.A^2 = 0 \quad ; \quad LCw^2 - 1 = 0 \qquad (2\text{-}48)$$

de donde despejamos la amplitud y frecuencia de la oscilación sinusoidal:

$$A = 2((a-R)/3b)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad w_o = 1/(LC)^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}49)$$

CAPITULO III

FUNCION DESCRIPTIVA

III.1.- INTRODUCCION

El concepto de respuesta en frecuencia es de tal utilidad en los sistemas lineales, que es lógico tratar de estudiar las propiedades de los no lineales utilizando técnicas análogas basadas en la extensión del concepto de Función de Transferencia a estos sistemas. Este es el principio en que se basa la Función Descriptiva.

Este método apareció, por primera vez, en los escritos de Theodorchick /34/ en URSS y las obras de Kochenburger /35/ USA, aparte de los trabajos contemporáneos de Blaquière /36/ y J. Loeb /37/ en Francia. La extensión del concepto de Función de Transferencia a sistemas regidos por ecuaciones diferenciales no lineales está basado, como veremos posteriormente, en el principio de Linealización Equivalente ó Quasi-Linealización introducido por Bogoliubov y Krylov /38/ para el estudio de osciladores no lineales.

Vamos a sentar las bases de este procedimiento diciendo que un cuadripolo pasivo lineal transforma linealmente toda señal de entrada X(t) en una señal de salida Y(t), y esta operación es formalmente expresable por:

$$Y = A^{o}(X) \qquad (3\text{-}1)$$

donde la operación es, en general, el resultado de una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$\frac{d^{n}Y}{dt^{n}} + a_{1}.\frac{d^{n-1}Y}{dt^{n-1}} +\ldots+ a_{n}.Y = b_{1}.\frac{d^{n-1}X}{dt^{n-1}} +\ldots+ b_{n}.X \qquad (3\text{-}2)$$

siendo el operador A^o:

$$A^o = \frac{b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \ldots + b_n}{\frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n} \qquad (3\text{-}3)$$

Por otra parte, desde un punto de vista geométrico, podemos considerar las funciones X(t) e Y(t) como vectores generalizados en un espacio funcional de Hilbert, en el cual los vectores base son las funciones:

$$\exp(jwt),\ \exp(j2wt),\ \ldots,\ \exp(jnwt),\ \ldots$$

Si K_1 y K_2 son dos escalares cualesquiera y $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ son dos vectores del espacio funcional, la transformación lineal anterior puede escribirse como:

$$K_1.\overline{Y}_1 - K_2.\overline{Y}_2 = A^o(K_1.\overline{X}_1 - K_2.\overline{X}_2) \qquad (3\text{-}4)$$

siendo $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ los vectores salida asociados a $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, y A(s) la Función de Transferencia asociada al operador lineal A^o:

$$A(s) = \frac{b_1.s^{n-1} + b_2.s^{n-2} + \ldots + b_n}{s^n + a_1.s^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad (3\text{-}5)$$

La definición de operador lineal y de Función de Transferencia asociada no está limitada al caso de un cua-

dripolo en el que tenemos perfectamente diferenciadas la entrada y la salida. Si consideramos un sistema físico regido por una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$b_o \cdot \frac{d^n X}{dt^n} + b_1 \cdot \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n \cdot X = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

siempre podemos estudiar las propiedades del operador lineal:

$$H^o = b_o \frac{d^n}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n \qquad (3\text{-}7)$$

independientemente del hecho de que nos encontremos frente a una ecuación diferencial de la que queremos obtener la solución. Análogamente al caso anterior, podemos definir una función:

$$H(s) = b_o \cdot s^n + b_1 \cdot s^{n-1} + \ldots + b_n \qquad (3\text{-}8)$$

aunque ésta no sea una Función de Transferencia en el sentido habitual, puesto que la transformada de X(t) no es la salida de un cuadripolo.

En el intento de definir Funciones de Transferencia que rijan el comportamiento no lineal de un problema, no se hará distinción entre cuadripolos y sistemas físicos regidos por ecuaciones diferenciales de evolución.

III.2.- QUASI-LINEALIZACION

Dada la operación no lineal N^o que ejerce un sistema

sobre su entrada Y(t):

$$Y(t) = N^{o}(X) \qquad (3\text{-}9)$$

una primera forma de atacar el problema es reemplazar directamente por un operador lineal y estudiar el sistema resultante Fig. (3-1). Obviamente, esta aproximación solo puede

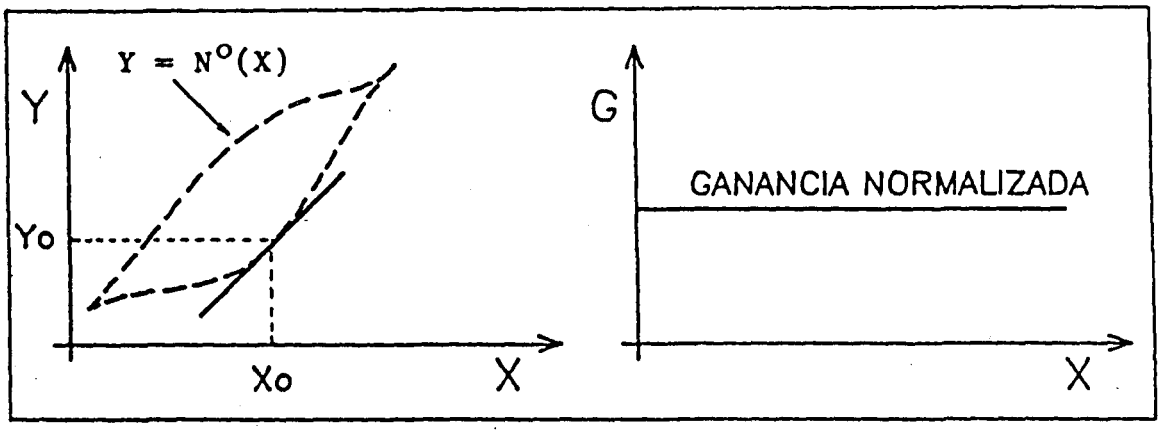


Fig. (3-1)

justificarse para pequeñas fluctuaciones de las variables alrededor de un punto de operación nominal. Cualquier respuesta que suponga un movimiento de variables en un rango fuera de una linealización razonable, provocará una distorsión importante en la salida. En este caso, pues, el sistema no podrá ser descrito por esta técnica, a menos que linealicemos repetidamente en otros puntos de operación cercanos. Esto nos conduce a la búsqueda de otros métodos que nos permitan el tratamiento de señales en gran amplitud.

Estudiando la respuesta del sistema no lineal a una determinada señal de entrada de amplitud finita y aproximando de alguna manera esta salida por medio de un operador lineal, no estamos linealizando su característica $Y = N^{o}(x)$ sino su comportamiento para una excitación específica, tal

como se muestra en la Fig. (3-2). Naturalmente, este procedimiento provocará diferentes operaciones quasi-lineales

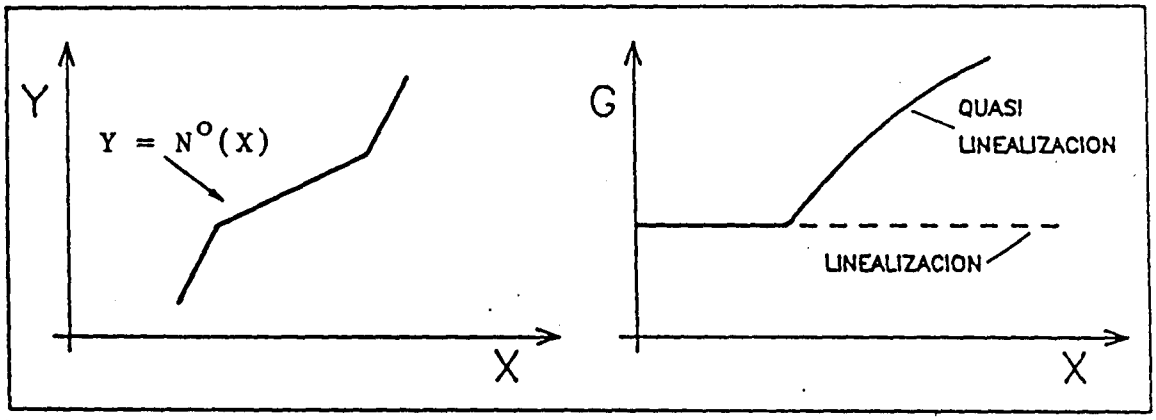


Fig. (3-2)

para diferentes señales de entrada pero, sin embargo, pone de manifiesto la característica básica del comportamiento no lineal: la dependencia de la transformada con la excitación.

Dado que un sistema físico está sometido en general a una excitación múltiple, consideramos la señal X(t) como la suma de cualquier número de componentes $X_i(t)$ como se muestra en la Fig. (3-3).

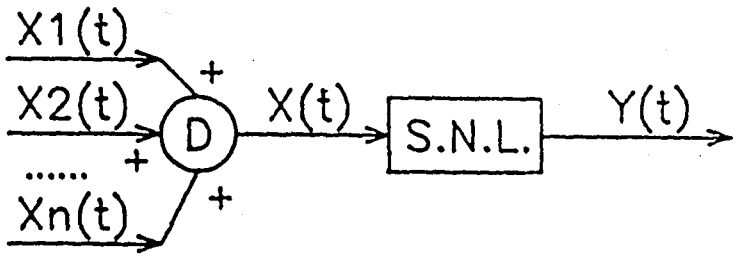


Fig. (3-3)

La forma más general de operador quasi-lineal aproximado para módulos de este tipo es un conjunto paralelo de filtros de forma que cada uno de ellos pase una componente

de entrada. Cada función $X_i(t)$ se supone estadísticamente estacionaria y el operador no lineal N° invariante con el tiempo. La configuración a optimizar se muestra en la Fig. (3-4) donde los h_i son las funciones peso de los filtros que transfieren cada entrada.

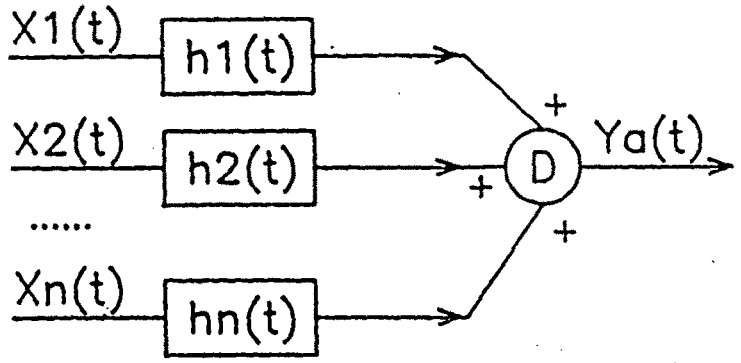


Fig. (3-4)

Una vez que se ha escogido la forma de la aproximación quasi-lineal, deberemos de definir un criterio de elección para los $h_i(t)$. El utilizado en el presente desarrollo es el que se refiere al error cuadrático mínimo, es decir, los filtros del operador equivalente son diseñados para minimizar la diferencia cuadrática media entre la salida del operador Y_a y la salida real de la no linealidad Y(t). Este criterio fue introducido por Booton /39-40/ para entrada gaussiana, y posteriormente extendido por Somerville y Atherton /41/ para sistemas con entrada múltiple. En cualquier caso, el método está muy próximo a la teoría lineal óptima -suficientemente probada- y es totalmente universal puesto que es aplicable a cualquier forma de onda de entrada.

El cálculo estadístico de la teoría quasi-lineal óptima, desarrollada en un Apéndice, puede resumirse de la si-

guiente forma: "La serie de filtros óptimos es aquella que iguala, para cada componente de entrada, la correlación entrada-salida para la no linealidad y su aproximación". En el caso más restrictivo, pero no menos general, de entradas estadisticamente independientes, la serie óptima es la que iguala separadamente la correlación entrada-salida de cada filtro con la correlación entre la componente de entrada y la salida de la no linealidad

$$\int_0^\infty h_i(u_2) \cdot G_{ii}(u_1-u_2) \cdot du_2 = \overline{Y(t) \cdot X_i(t-u_1)}$$

$$i = 1, \ldots, n \qquad u_1 > 0 \qquad (3\text{-}10)$$

III.3.- FUNCION DESCRIPTIVA

Hemos visto como la característica quasi-lineal aproximada para una no linealidad con entrada múltiple está formada por un conjunto de filtros de forma que cada uno de ellos es función no solo de la componente que transmite sino también del resto de las mismas. Las funciones peso que los caracterizan definen una ganancia quasi-lineal ò Función Descriptiva.

Dado que nos interesará posteriormente el estudio del comportamiento no lineal de los osciladores, nos referiremos principalmente al estudio de Funciones Descriptivas de entrada sinusoidal en presencia de otras posibles componentes. Para ello supongamos una excitación de la forma:

$$X(t) = A \cdot \sin(wt + \theta) + X_r(t) \qquad (3\text{-}11)$$

donde el resto de las componentes $X_r(t)$ tiene correlación

nula con la sinusoide. La función de entrada se supone determinista en amplitud y frecuencia, mientras que la fase θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$. La motivación de estas restricciones obedece, en primer lugar, al hecho de que en los sistemas en lazo cerrado no existe un mecanismo determinista que nos fije la fase de la sinusoide a la entrada no lineal y, en segundo lugar, al método estadístico de obtención del operador aproximado. Debido a estas consideraciones, la independencia estadística entre las posibles componentes sinusoidales en la entrada supondrá la independencia entre sus fases. Si existe una relación armónica entre dos ó más componentes, sus fases no son independientes ya que los periodos individuales son cantidades medibles y, en este caso, habrá una relación de fase entre ambas: la Función Descriptiva dependerá de esta relación.

Suponiendo pues una independencia estadística, podemos escribir:

$$G_{ii}(u) = \overline{X_i(t).X_i(t-u)} = \overline{X_i(0).X_i(u)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin\theta \, \sin(wu+\theta).d\theta = \tfrac{1}{2} A^2.\cos(wu) \qquad (3\text{-}12)$$

Sustituyendo en (3-10) =

$$\int_0^{\infty} h(u_2).\ \tfrac{1}{2} A^2.\ \cos(w.(u_1-u_2)).\ du_2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} A^2 \cos(wu_1) \int_0^{\infty} h(u_2).\cos(wu_2).du_2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} A^2 \sin(wu_1) \int_0^\infty h(u_2).\sin(wu_2).du_2 =$$

$$= \overline{Y(t).X_i(t-u_1)} = \overline{Y(0).X_i(-u_1)} = \overline{Y(0).A\ \sin(\theta-wu_1)} =$$

$$= A\cos(wu_1).\overline{Y(0)\sin\theta} - A\sin(wu_1).\overline{Y(0)\cos\theta} \qquad u_1 \geq 0 \qquad (3\text{-}13)$$

Igualando términos en $\sin(wu_1)$ y $\cos(wu_1)$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} A \int_0^\infty h(u_2).\cos(wu_2).du_2 = \overline{Y(0)\sin\theta} \\ &\tfrac{1}{2} A \int_0^\infty h(u_2).\sin(wu_2).du_2 = \overline{-Y(0)\cos\theta} \end{aligned} \qquad (3\text{-}14)$$

y dado que consideramos estadísticas estacionarias, el sistema de ecuaciones anterior tiene por solución, entre otras,:

$$h(u) = \frac{2}{A}\overline{Y(0)\sin\theta}.I(u) + \frac{2}{Aw}\overline{Y(0)\cos\theta}.\dot{I}(u) \qquad (3\text{-}15)$$

donde I(u) es la función impulso unidad. Cualquier otra solución que verifique el sistema de ecuaciones provocará la misma salida. Ya que la función peso de un filtro es la respuesta temporal a un impulso aplicado en la entrada, tomando transformadas en ambos miembros obtendremos la Función de Transferencia quasi-lineal N(A,jw) de entrada sinusoidal en presencia de otras excitaciones no correladas:

$$N(A,jw) = \frac{2}{A}\overline{Y(0)\sin\theta} + j\frac{2}{A}\overline{Y(0)\cos\theta} \qquad (3\text{-}16)$$

donde

$$\overline{Y(0)\cos\theta} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} da_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(a_1,\ldots,a_n) \cdot N^o(A\sin\theta + X_r(0)) \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$\overline{Y(0)\sin\theta} = \qquad (3\text{-}17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} da_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} da_n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(a_1,\ldots,a_n) \cdot N^o(A\sin\theta + X_r(0)) \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

siendo a_1, ..., a_n las variables aleatorias que definen el resto de la entrada y $p(a_1,\ldots,a_n)$ la Densidad de Probabilidad Ligada.

Podemos comprobar que el filtro quasi-lineal que pasa la componente sinusoidal se comporta como una ganancia compleja que modifica la amplitud y fase de la entrada. Se demuestra facilmente que si el operador N^o es estático y simple valuado, no hay ambigüedad en la determinación de Y(0) a partir de X(0), la parte imaginaria de esta ganancia es nula.

Un caso particularmente interesante en el estudio de osciladores no lineales ocurre cuando consideramos que la entrada a la no linealidad es una sinusoide pura de la forma:

$$X(t) = A\sin(wt + \theta) \qquad (3\text{-}18)$$

Particularizando las ecuaciones (3-16) y (3-17) para $X_r = 0$

nos resulta:

$$N(A,jw) =$$

$$= \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} N^o(A\sin\theta).\sin\theta.d\theta + j\,\frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} N^o(A\sin\theta).\cos\theta.d\theta \qquad (3\text{-}19)$$

La analogía entre este método y el de aproximación al primer armónico se evidencia si desarrollamos la salida N^o en serie de Fourier:

$$N(A,jw) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(A,jw).\sin(nt + \varphi_n(A,jw)) =$$

$$= \frac{w}{\pi}\int_0^{2\pi/w} N^o(A\sin wt).\sin wt.dt +$$

$$+ \frac{w}{\pi}\int_0^{2\pi/w} N^o(A\sin wt).\cos wt.dt + \text{térm. sup.} =$$

$$= -j\,\frac{w}{\pi}\int_0^{2\pi/w} N^o(A\sin wt).e^{-jwt}.dt + \text{térm. sup.} \qquad (3\text{-}20)$$

Si consideramos solamente el primer armónico de la salida y calculamos su ganancia respecto de la entrada, obtenemos de nuevo (3-19). La Función Descriptiva de entrada sinusoidal simple será, pues, la ganancia al armónico fundamental de la salida no lineal.

$$N(A,jw) = \frac{A_1(A,jw)}{A}\cdot e^{j\varphi_1(A,jw)} =$$

$$= -j\,\frac{w}{\pi}\int_0^{2\pi/w} N^o(A\sin wt).e^{-jwt}.dt \qquad (3\text{-}21)$$

Podemos interpretar geometricamente la transformación quasi-lineal anterior definiendo el eje E_1 del espacio vectorial como el conjunto de funciones A.exp(jwt) donde A es una cantidad positiva arbitraria:

$$E_1 = (A \sin wt;\ A > 0)$$

Debido a la existencia de armónicos en la salida, la transformada de un vector cualquiera de componentes (A, 0,...,0) no pertenece al eje E_1 sino que será, en general, un vector de n dimensiones. Concluimos entonces que la Función Descriptiva de entrada sinusoidal pura se deduce de N^o por proyección sobre el eje E_1:

$$N(A,jw) = \text{Proy } N^o \Big\|_{E_1}$$

Análogas consideraciones pueden hacerse para la Función Descriptiva que describe el comportamiento a una entrada sinusoidal en presencia de otras componentes. Sin embargo, aquí la Función de Transferencia quasi-lineal a considerar es la ganancia al fundamental de una pseudo-linealidad calculada promediando sobre los efectos de las otras componentes de entrada.

Esto puede ponerse de manifiesto considerando dos entradas sinusoidales al sistema no lineal de la forma:

$$X(t) = A_1 \sin(w_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(w_2 t + \theta_2) \qquad (3\text{-}22)$$

Suponiendo independencia estadística entre ellas, podemos particularizar las ecuaciones (3-16) y (3-17):

$$\cdot\ N_1(A_1,\ A_2,\ jw_1,\ jw_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 A_1}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2).\sin\theta_1 +$$

$$+ j\,\frac{1}{2\pi^2 A_1}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2).\cos\theta_1$$

$$\cdot\ N_2(A_1,\ A_2,\ jw_1,\ jw_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 A_2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2).\sin\theta_2 +$$

$$+ j\,\frac{1}{2\pi^2 A_2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta).\cos\theta_2 \qquad (3\text{-}23)$$

Desafortunadamente, cuando las dos sinusoides son armonicamente dependientes, tal como cuando se estudia el nivel de armónicos en un oscilador no lineal, no hay forma de aplicar las ecuaciones (3-23) con lo que tendremos que recurrir a la interpretación de la Función Descriptiva como la relación, en amplitud y fase, entre cada componente de entrada y la salida armónica a la misma frecuencia.

Existe un método de cálculo general /42-43/ que se basa en el doble desarrollo de Fourier para una función de entrada de la forma:

$$X(t) = A_1 \sin(wt) + A_2 \sin(kwt + \varphi) =$$

$$= A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2 \qquad (3\text{-}24)$$

La salida de la no linealidad puede escribirse:

$$Y(t) = N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin(m\theta_1 + n\theta_2) + B_{mn} \cos(m\theta_1 + n\theta_2) \qquad (3\text{-}25)$$

donde los coeficientes valen:

$$A_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2) \cdot \sin(m\theta_1 + n\theta_2) \cdot d\theta_1 \cdot d\theta_2$$

$$B_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} N^{o}(A_1 \sin\theta_1 + A_2 \sin\theta_2) \cdot \cos(m\theta_1 + n\theta_2) \cdot d\theta_1 \cdot d\theta_2 \qquad (3\text{-}26)$$

Si k es una cantidad irracional, no hay relación armónica y los términos a frecuencia w son debidos a (m=1,n=0) y los de frecuencia kw a (m=0,n=1). Calculando las ganancias para estos casos llegamos de nuevo a las ecuaciones (3-23).

Por el contrario, si k es racional, los términos a la frecuencia w verifican n = (1-m)/k y los de frecuencia kw cumplen n = (k-m)/k. Consecuentemente podemos escribir:

$$N_1(A_1, A_2, k, \varphi) = \frac{P_1(A_1, A_2, k, \varphi)}{A_1} \cdot e^{j\varphi_1(A_1, A_2, k, \varphi)}$$

$$N_2(A_1, A_2, k, \varphi) = \frac{P_2(A_1, A_2, k, \varphi)}{A_2} \cdot e^{j\varphi_2(A_1, A_2, k, \varphi)} \qquad (3\text{-}27)$$

siendo:

$$P_1(A_1,A_2,k,\varphi) = \sum_m A_{mn}.\sin(wt + \frac{(1-m)}{k}\varphi) +$$

$$+ B_{mn}.\cos(wt + \frac{(1-m)}{k}\varphi)$$

$$P_2(A_1,A_2,k,\varphi) = \sum_m A_{mn}.\sin(kwt + \frac{(k-m)}{k}\varphi) + \qquad (3\text{-}28)$$

$$+ B_{mn}.\cos(kwt + \frac{(k-m)}{k}\varphi)$$

donde observamos que las funciones de transferencia dependen de la fase entre las sinusoides.

Un caso especial de lo expuesto anteriormente ocurre cuando la amplitud de una de las sinusoides es mucho menor que la otra. Bajo estas condiciones, la ganancia de la no linealidad a la componente de entrada de pequeña amplitud se denomina Función Descriptiva Incremental y tiene un interés particular en el estudio de la estabilidad de las oscilaciones libres y de las respuestas sincronizadas debidas a una inyección externa.

Supongamos, pues, dos sinusoides de la misma frecuencia (perturbación síncrona):

$$X(t) = A.\sin wt + \delta A.\sin(wt + \theta) \qquad \delta A \ll A \qquad (3\text{-}29)$$

podemos aproximar la entrada como:

$$X(t) \cong (A + \delta A.\cos\theta).\sin(wt + \frac{\delta A}{A}\sin\theta) \qquad (3\text{-}30)$$

Si la no linealidad tiene una Función Descriptiva de entrada sinusoidal $N(A,w) = U(A,w) + jV(A,w)$ y tiene deriva

das contínuas respecto de A, la salida de la no linealidad puede escribirse como:

$$Y(t) \cong (A + \delta A.\cos\theta)\left[U(A + \delta A.\cos\theta, w).\sin(wt + \frac{\delta A}{A}\sin\theta)\right] +$$

$$+ (A + \delta A.\cos\theta)\left[V(A + \delta A.\cos\theta, w).\cos(wt + \frac{\delta A}{A}\sin\theta)\right] \qquad (3\text{-}31)$$

desarrollando en Taylor al primer orden:

$$Y(t) \cong A\left[U(A,w).\sin wt + V(A,w).\cos wt\right] +$$

$$+ \delta A\Big[U(A,w).\sin(wt + \theta) + V(A,w).\cos(wt + \theta) +$$

$$+ A.\cos\theta\,((\partial U/\partial A)\sin wt + (\partial V/\partial A)\cos wt)\Big] \qquad (3\text{-}32)$$

de donde se deduce inmediatamente la ganancia a la entrada incremental $N_{is}(A,w,\theta)$:

$$N_{is}(A,w,\theta) = N(A,w) + \frac{A}{2}(\partial N/\partial A).(1 + e^{-j2\theta}) \qquad (3\text{-}33)$$

y de esta ecuación se desprende que, para un par de valores A,w dados, la Función Descriptiva Incremental describe un círculo tal como se muestra en la Fig. (3-5).

Supongamos ahora que la entrada incremental tiene frecuencia diferente de la sinusoide principal (perturbación asíncrona):

$$X(t) = A.\sin wt + \delta A.\sin(kwt) \quad k \text{ irracional} \qquad (3\text{-}34)$$

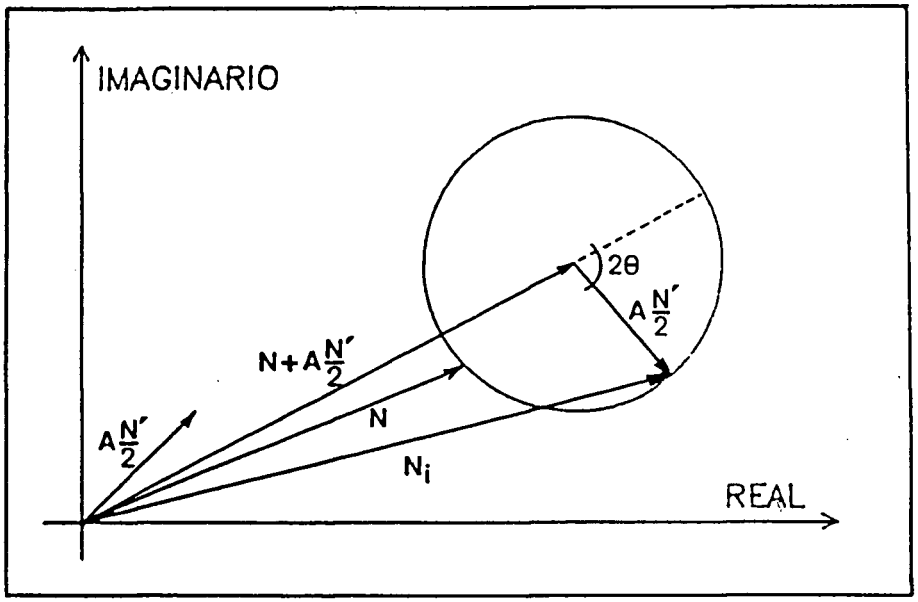


Fig. (3-5)

Se demuestra facilmente /44/ que la Función Descriptiva Incremental correspondiente se escribe como:

$$N_{ia}(A,w) = N(A,w) + \frac{A}{2}\,(\partial N/\partial A) \qquad (3\text{-}35)$$

es decir, corresponde al vector que va desde el origen al centro del círculo de la Fig. (3-5). En cualquier caso, el sistema no lineal bajo estas condiciones, puede representarse esquemáticamente como se muestra en la Fig. (3-6)

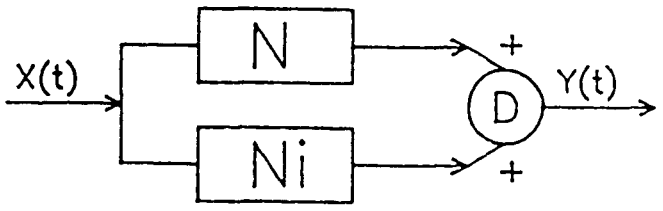


Fig. (3-6)

Existen por supuesto una multitud /45-47/ de métodos de solución más o menos generales, pero en todos ellos puede hacerse una representación matricial en nuestro espacio funcional escribiendo:

$$Y_1 = N_1(w,A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots)\ X_1$$
$$Y_2 = N_2(w,A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots)\ X_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_n = N_n(w,A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots)\ X_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 \quad N_n & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\overline{Y} = \overline{N}\ \overline{X}$$

donde $\overline{N}$ es el operador que transforma el vector $\overline{X}$ de componentes $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ en el vector $\overline{Y}$ de componentes $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\ldots)$.

III.4.- EXACTITUD DE LA APROXIMACION

Este tipo de quasi-linealización está siempre calcula

do para una forma específica de onda de entrada. Sin embargo, en los sistemas en lazo cerrado la señal de entrada a la no linealidad depende de la posible excitación externa al sistema y de la señal realimentada por el mismo. La presencia de esta realimentación complica considerablemente la determinación de la forma de onda que aparece a la entrada de la no linealidad. Aquí entramos en una contradicción aparente ya que el modelo linealizado depende de ciertas propiedades de las señales que recorren el sistema, las cuales, a su vez, deben de ser determinadas a partir del modelo. En consecuencia, la eficacia del análisis de lazos cerrados por medio de Funciones Descriptivas depende del acierto que tengamos en la elección de la forma de las señales a la entrada no lineal.

Si consideramos, por ejemplo, dos entradas armónicas, la salida no lineal tendrá, en principio, frecuencias mezcladas. Considerando que el lazo tiene en su interior un elemento lineal que hace las funciones de filtro, podemos normalmente olvidarnos de las frecuencias suma. Las frecuencias inferiores pueden resultar molestas particularmente si el sistema tiene resonancias sintonizadas con las mismas. En cualquier caso, lo normal es que sean de baja amplitud, sobre todo cuando la relación entre frecuencias de entrada es muy grande o muy pequeña.

Afortunadamente, los sistemas de microondas trabajan con bandas relativamente estrechas de forma que la parte lineal del lazo filtra suficientemente los armónicos superiores. En estos casos, la suposición de una entrada a la no linealidad formada por una sinusoide pura, o por una

sinusoide más el primer armónico, es generalmente válida y conduce a resultados correctos.

Otra característica importante de este método es que solamente responde a las preguntas precisas que se le han formulado, en el sentido de que no es capaz de dar explicación a comportamientos no previstos del sistema. Por ello, la Función Descriptiva de entrada sinusoidal pura no determina el contenido de armónicos de un oscilador, ni revela la posible resonancia subarmónica o superarmónica de un oscilador inyectado.

La gran ventaja de este método no está en el hecho de que nos resuelva el comportamiento aproximado de un sistema, ya que esto puede hacerse con más exactitud por simulación de ordenador, sino que es capaz de ayudar de forma sencilla en el diseño de sistemas no lineales.

CAPITULO IV

OSCILACIONES SINUSOIDALES

IV.1.- INTRODUCCION

En el capítulo anterior se ha desarrollado la forma general de tratamiento de una no-linealidad por medio de su Función Descriptiva. En este capítulo se va a aplicar este concepto al estudio de osciladores sinusoidales, donde aparecerá como una generalización de los métodos de Niquist y Mikaĭlov para sistemas lineales. Naturalmente, para poder aplicar la Función Descriptiva de entrada sinusoidal al cálculo de sistemas en bucle cerrado deberemos exigir que el elemento no lineal sea invariante temporal, que no se generen subarmónicos como respuesta a una excitación sinusoidal, y que la parte lineal del bucle filtre satisfactoriamente los armónicos generados.

Consideremos, en primer lugar, un sistema lineal realimentado como el que se muestra en la Fig. (4-1) donde, cada bloque está caracterizado por un operador diferencial, al cual, se le puede asociar una característica de transferencia

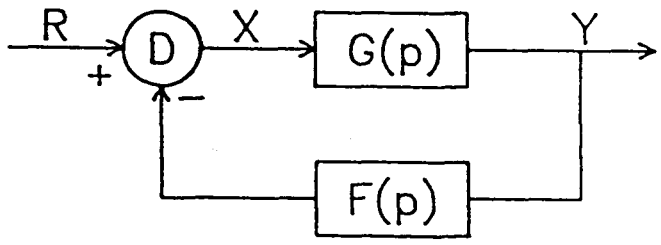


Fig. (4-1)

función de la pulsación compleja p = s + jw:

$$X = R + F(p).Y$$

$$Y = G(p).\ X$$

siendo la ecuación de realimentación:

$$R.\ G(p) = (1 - G(p)\ .\ F(p)).\ Y \qquad (4\text{-}1)$$

En el supuesto de que no haya excitación externa ($R = 0$), la ecuación característica del sistema se reduce a:

$$1 - G(p).\ F(p) = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

donde la resolución de la ecuación diferencial que define nuestro circuito vendrá dada en función de las raices complejas de la ecuación característica. A cada raiz p_k le está asociada una solución transitoria de la forma:

$$X_K = X_{0K}.\ e^{p_k t} \qquad (4\text{-}3)$$

que será oscilante o no dependiendo de la naturaleza de dicha raiz. En general escribiremos:

$$X_K = X_{0K}.\ e^{s_K t}\ .\ e^{jw_k t}$$

donde w_K es la pulsación del transitorio y s_k el coeficiente de amortiguamiento correspondiente a esta solución. Si s_k es negativo, el amortiguamiento es positivo y la solución es estable en si misma. Por el contrario, si s_K es positivo, el amortiguamiento es negativo con lo que tendremos un transitorio inestable. Si $s_K = 0$, caso puramente teórico en el dominio lineal, la solución $S_k(t)$ es o bien un término constante o bien una oscilación con amplitud invariante. La solución general de la ecuación (4-2) es una combinación lineal de estos términos transitorios.

Cuando el sistema realimentado contiene algún término

no lineal, el principio de superposición no es aplicable pero acudiendo, de nuevo, a la ecuación (4-2) podemos a priori entrever dos formas de solución para X(t): regimen oscilante y régimen no oscilante en el intervalo de observación (t_1, t_2). Si el régimen no es oscilante en este intervalo, como se muestra en la Fig. (4-2), se le puede aproximar en

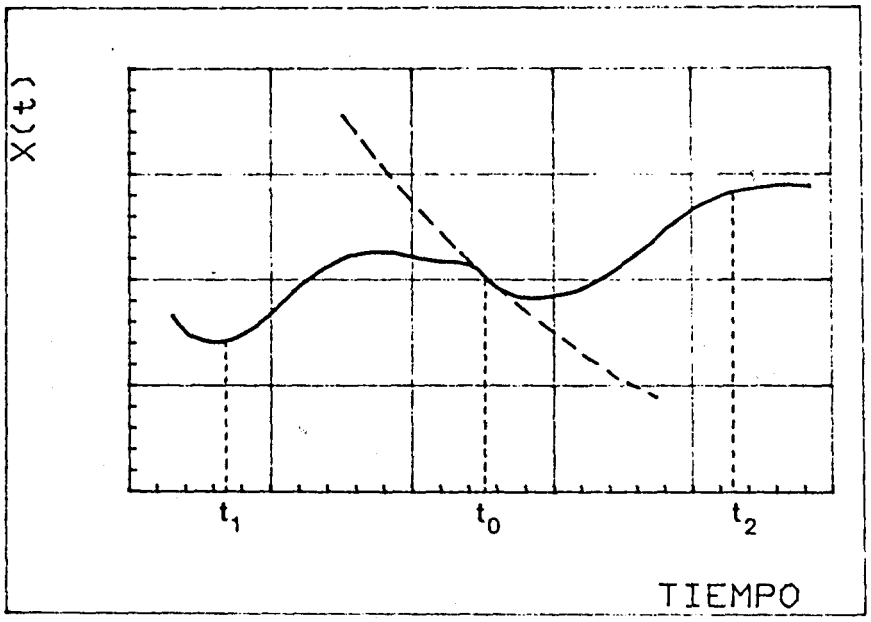


Fig. (4-2)

una vecindad suficientemente pequeña de un instante cualquier $t_o \in (t_1, t_2)$ por una función de la forma:

$$X(t) = Xo.\ e^{s_o t} \qquad \text{con} \quad s_o \text{ real} \tag{4-4}$$

cumpliéndose que $X(t_o) = Xo.\ \exp(s_o t_o)$. De la ecuación anterior se deduce inmediatamente el coeficiente de amortiguamiento

$$s_o = \frac{\dot{X}(t_o)}{X(t_o)} \tag{4-5}$$

y podemos interpretar la aproximación lineal como la tendencia del sistema no lineal en el instante t_o. Análogamente, si X(t) es un régimen oscilante quasi-sinusoidal, Fig. (4-3) de la forma:

$$X(t) = a(t).\ e^{jwt} \tag{4-6}$$

en el que la amplitud y la frecuencia son variaciones len-

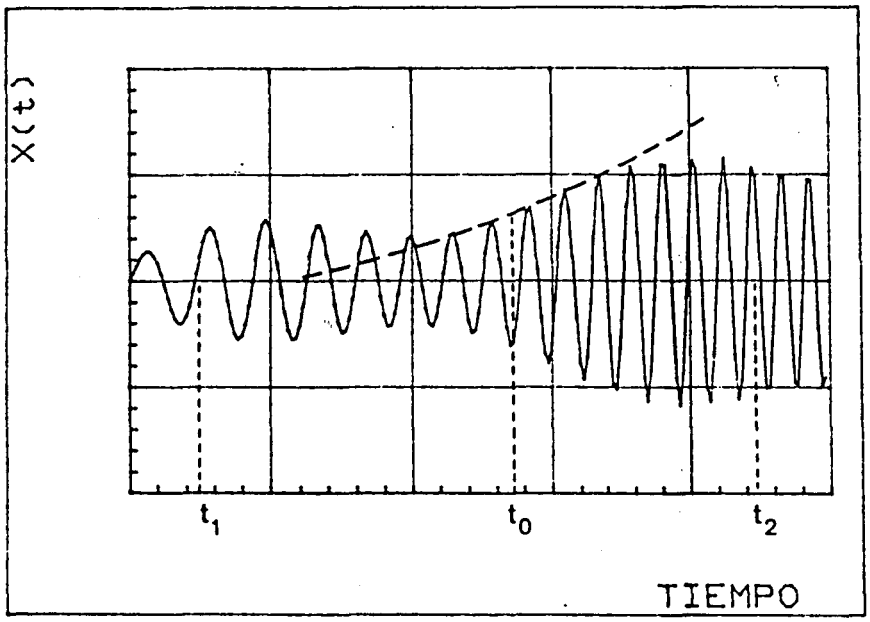


Fig. (4-3)

tas con el tiempo, podemos aproximar en los alrededores de un instante dado t_o:

$$a(t) = A_o.\ e^{s_o t} \tag{4-7}$$

con

$$a(t_o) = A_o.\ \exp(s_o t_o),\ y$$

$$w(t_o) = w_o$$

escribiendo la oscilación equivalente como:

$$X(t) = A_o \cdot e^{s_o t} \cdot e^{jw_o t} \quad ; \quad S_o = \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} \qquad (4\text{-}8)$$

En consecuencia podemos decir que si suponemos una solución oscilante en el bucle no lineal y una variación lenta de amplitud y frecuencia, en los alrededores de un instante dado t_0 podemos aproximar la oscilación real por una equivalente cuyo factor de amortiguamiento coincide con la forma real de variación en amplitud en ese instante, y cuya frecuencia es la frecuencia real de oscilación en t_0. Según esto, el régimen $A_0 \cdot \exp(s_0 + jw_0)t$ puede verse como un transitorio local en el que su forma varía lentamente con el tiempo, siendo el régimen verdadero una envolvente de este transitorio dinámico. De esta forma hemos puesto de manifiesto, una vez más, la diferencia entre linealidad y no-linealidad. En lugar de suponer un cierto número de estados base con el fin de obtener una representación global del comportamiento del sistema, deberemos de tratar estos estados separadamente y obtener una representación real no por superposición de los estados base sino por la determinación de la envolvente de un estado convenientemente elegido.

Los coeficientes de la ecuación diferencial que rige la evolución de un sistema lineal realimentado están generalmente determinados por su estructura, es decir, por factores exclusivamente geométricos. Por el contrario, si el bucle contiene partes no lineales, los coeficientes de la ecuación diferencial dependen no solo de factores geométricos sino también del régimen que establece, lo que es ya

problemático, pues, se desea establecer el régimen a partir de la ecuación diferencial.

En los sistemas quasi lineales la situación no es tan desesperada puesto que, la dependencia entre la solución y la forma de la ecuación diferencial se introduce por medio de un cierto número de parámetros que son funciones temporales a variación lenta y están ligados a ciertas magnitudes características del régimen establecido. Entonces, en una vecindad convenientemente escogida, a un instante cualquiera t_0, estos parámetros pueden ser fijados, linealizando con ello la ecuación diferencial en cada intervalo. Naturalmente, la solución local así obtenida depende de estos parámetros lentamente variables, y puede ser considerada como una envolvente del régimen verdadero.

Una vez que el problema ha sido expuesto de esta forma, está claro que el método de la Función Descriptiva proveerá una de las herramientas mejor adaptadas al estudio de sistemas realimentados quasi-lineales. El punto de partida será, pues, la Función Descriptiva:

$$H(p, m_1, m_2, \ldots, m_n) \qquad (4\text{-}9)$$

donde $m_1, \ldots, m_n$ son parámetros independientes a variación lenta y $p = s + jw$ la pulsación compleja. En el estudio de osciladores quasi sunusoidales en bucle cerrado, la función H será la transferencia en lazo cerrado Fig. (4-1) con R=0, y los parámetros a variación lenta serán la amplitud de la

oscilación, la frecuencia, la fase relativa a una sinusoide dada, etc.

IV.2.- DIAGRAMAS DE NIQUIST-MIKAILOV: ESTABILIDAD

En el caso lineal, el sistema realimentado es estable cuando todos los transitorios tienden a cero si t tiende a infinito, y esto ocurre siempre que la ecuación característica tiene todas sus raices con partes reales negativas. Esta condición puede siempre ser analizada sin necesidad de acudir al cálculo de las raices siguiendo el método de Niquist, cuya teoría está basada en la respuesta frecuencial -lazo abierto- del sistema en régimen permanente; es decir, en la representación en el plano complejo del lugar (L) de las imágenes

$$T(w) = G(w).\ F(w) = R(w) + jI(w) \qquad (4\text{-}10)$$

cuando w toma valores desde menos infinito hasta infinito. Por supuesto, se sobreentiende que el sistema es estable con lazo abierto: no hay polos en el semiplano derecho. Las coordenadas cartesianas de la imagen para cada L_o son R(w), I(w). El lugar (L) de esta representación puede considerarse el transformado del eje imaginario del plano complejo (P):

$$(P) : s + jw \qquad s,\ w \text{ reales} \qquad (4\text{-}11)$$

estando dicha transformación definida por la función analítica:

$$T(p) = G(p).\ F(p) \qquad p = s + jw \qquad (4\text{-}12)$$

que establece una correspondencia entre:

a) Los puntos (s,w) del plano (P) y los puntos (R(s,w), I(s,w) del plano cartesiano (C)

$$(C) : R + jI \qquad R, I \text{ real}$$

b) Los puntos del eje imaginario (E_i) (P)

$$(E_i): s = 0, \qquad -\infty < w < \infty$$

y los puntos (L) del diagrama de Niquist

$(L) \in (C)$

$$(L) : R = R(0,w)$$
$$I = I(0,w)$$

Si ahora llamamos $p_K = S_K + jw_k$ a las raices de la ecuación característica (4-2) y r_K a sus puntos representativos en (P), la transformada (4-12) nos traslada todos estos puntos en un punto único R1 del plano (C) ya que de acuerdo con (4-2) y (4-12) tenemos:

$$1 - T(p_k) = H(p_k) = 0$$
$$R(S_k, w_k) + jI(S_k, w_k) = 1 \qquad (4\text{-}13)$$

de donde se deducen las coordenadas de R1:

$$R(s_k, w_k) = 1$$
$$I(s_k, w_k) = 0$$

Además, la condición de función analítica para T(p) nos asegura que la posición de los puntos r_k con relación a (E_i)

es la misma que la posición de R1 con respecto al lugar (L). Se puede deducir inmediatamente un criterio de estabilidad diciendo que el sistema es estable si todas las raices de la ecuación característica tienen sus partes reales negativas, es decir, todos los puntos r_k están situados a la izquierda de (E_i) para un observador que describe el eje en el sentido creciente de frecuencia.

Se puede establecer que el diagrama de Niquist es una curva cerrada que pasa por el origen del plano complejo (C) para $w = 0$ y $w = \infty$. Esta curva es la frontera de un dominio $(D) \in (C)$ cerrado y, teniendo en cuenta la forma en que se describe el lugar (L), el criterio de estabilidad, puede formularse diciendo que el bucle de reacción es estable si y sólo si:

$$R1\ (1,0) \notin (D)$$

Obviamente, los argumentos desarrollados anteriormente permanecen válidos reemplazando la transformación T(p) por la función en lazo cerrado H(p) y el lugar asociado a esta nueva transformación se llama Hodógrafo de Mikaĭlov. Contrariamente al de Niquist, no forma curva cerrada y siempre es posible asociar un diagrama de este tipo a cada ecuación diferencial lineal. Nuestro propósito es extenderlo a la caracterización de sistemas no lineales.

De acuerdo con lo dicho hasta el momento, podemos enunciar la estabilidad sobre la base de este nuevo diagrama diciendo que el bucle de reacción es estable si y sólo si el origen del plano (C) está situado a la izquierda del

hodógrafo, cuando se le recorre en el sentido creciente de las frecuencias.

En el tratamiento de sistemas quasi-lineales, aplicaremos el método de la Función Descriptiva a la ecuación diferencial de evolución lo que nos conducirá a reemplazar la ecuación real, para una forma de solución elegida, por una localmente linealizada en la que los coeficientes sean función de unos parámetros (m_1, ..., m_n) lentamente variables con el tiempo (4-9). Para cada conjunto de valores podemos dibujar un diagrama de Mikailov haciendo p = jw y variando w en todo el eje imaginario de (P). Contrariamente al caso lineal, a cada ecuación de evolución no lineal deberemos de asociar una familia de Hodógrafos.

Puesto que, en este capítulo tratamos con oscilaciones sinusoidales de sistemas no lineales en lazo cerrado como se muestra en la Fig. (4-4) caracterizaremos el elemento no lineal por su Función Descriptiva de entrada sinusoidal N(A,w).

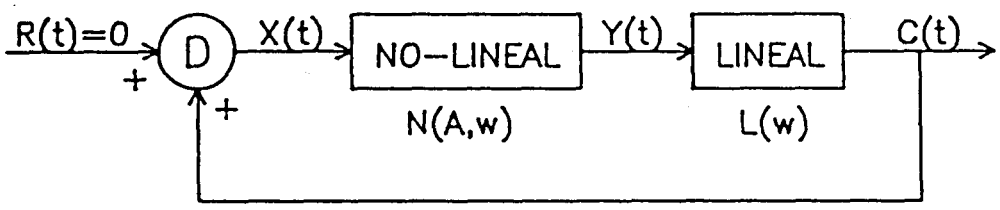


Fig. (4-4)

$X \simeq A.\ \sin w.t$

$$H(A,w) = 1 + N(A,w).\ L(w) = 0 \qquad (4\text{-}14)$$

Su expresión analítica, calculada en el capítulo anterior,

nos indica que el parámetro lentamente variable es la amplitud A de la sinusoide. Al hodógrafo que está definido por un valor (A_i) del parámetro se le denomina equi-amplitud y, si el sistema tiene ciclo límite, asistirá uno de ellos definido por (A_o) que pase por el origen del plano (C). Por

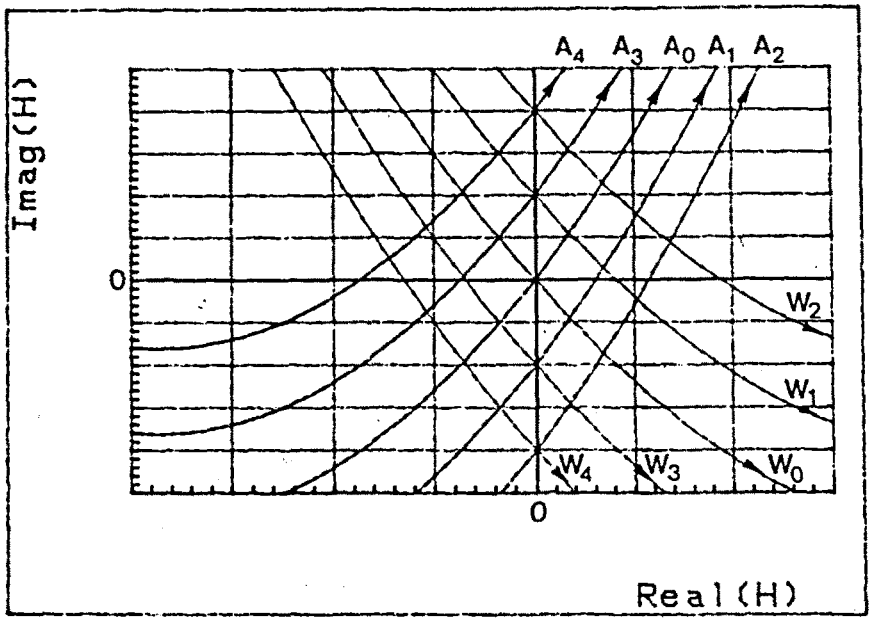


Fig. (4-5)

otro lado, a cada valor de w le corresponde un punto sobre cada equi-amplitud. Al lugar geométrico de estos puntos se le denomina equi-pulsación y existirá un hodógrafo (w_o) correspondiente al ciclo límite que pase por el origen. En la Fig. (4-5) se muestra un ejemplo típico de estos lugares. Las flechas indican el sentido creciente de frecuencias y amplitudes.

La extensión del criterio de Mikailov a los sistemas regidos por familias de hodógrafos es inmediata. Si la equi-amplitud (A_i) es tal, que el origen del plano (C) está situado a la izquierda de la misma, cuando la describimos en

el sentido de las frecuencias creciencias, la oscilación tiende a desaparecer (estabilidad local). Por el contrario, si el origen se encuentra a la derecha, existe una inestabilidad local y la amplitud de la oscilación tiende a crecer. De acuerdo con estas consideraciones deducimos que la equi-amplitud (A_o) de la figura corresponde a un régimen permanente estable: si cualquier perturbación modifica la amplitud A_o, esta tenderá a decrecer cualquiera que sea el signo de la misma: ciclo límite estable. Esta discusión nos muestra como una estabilidad y una inestabilidad locales pueden conjugarse de forma que el resultado sea un régimen permanente.

Este criterio puede resumirse fácilmente escribiendo

$$H(A,jw) = U(A,jw) + jV(A,jw)$$

y considerando en el origen del plano complejo los vectores:

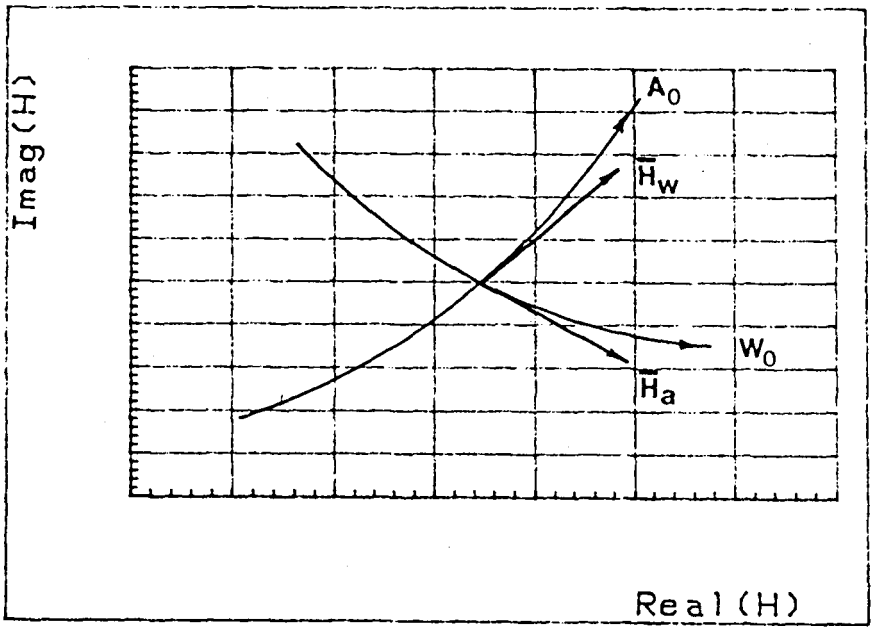


Fig. (4-6)

$\overline{H}w$ de componentes $((\partial U/\partial w)_o, (\partial V/\partial w)_o)$

$\overline{H}a$ de componentes $((\partial U/\partial A)_o, (\partial V/\partial A)_o)$ (4-15)

- derivadas parciales en el origen -

Podremos entonces decir que el régimen permanente definido por la equi-amplitud (A_o) y la equi-pulsación (w_o) es estable si y sólo si:

$$\overline{H}a \wedge \overline{H}w > 0 \qquad (4\text{-}16)$$

Como hemos dicho anteriormente, la aplicación de la Función Descriptiva a un oscilador no lineal indica que estamos linealizando el sistema en cada instante de tiempo. La ecuación de evolución de la señal de entrada al elemento no lineal se escribirá como:

$$x(t) = A(t).\ e^{j(w(t).t + \varphi(t))} \qquad (4\text{-}17)$$

Por otro lado sabemos que sobre cada curva equi-amplitud (A) existe un punto que corresponde a la frecuencia natural de oscilación y verifica la ecuación (4-14). Al lugar geométrico de estos puntos se le denomina "trayectoria del oscilador". Se comprende inmediatamente que, si el sistema tiene ciclo límite, esta trayectoria pasa por el origen del plano en el que se tiene:

$$\begin{aligned} &A(t) = A_o \\ &w(t) = w_o \qquad\qquad x(t) = A_o.e^{j(w_o t + \varphi_o)} \\ &H(A_o,\ jw_o) = 0 \end{aligned} \qquad (4\text{-}18)$$

Para estudiar esta trayectoria, consideremos una oscilación en la vecindad del régimen permanente definido por:

$$\begin{aligned} A &= A_o + \delta A \\ p &= \delta s + j(w_o + \delta w) = p_o + \delta p \\ H(p,A) &= 0 \end{aligned} \qquad (4\text{-}19)$$

entonces, desarrollando la función H en serie de Taylor hasta el primer orden, tenemos:

$$H(p,A) = H(p_o,A_o) + \delta A(\partial H/\partial A)_o + \delta p(\partial H/\partial p)_o =$$

$$= H(jw_o,A_o) + \delta A(\partial H/\partial A)_o + (\delta s + j\delta w)(\partial H/\partial p)_o = 0 \qquad (4\text{-}20)$$

pero, por otro lado $\partial H/\partial p = -j\partial H/\partial w$ y $H(jw_o,A_o) = 0$. Sustituyendo en (4-20), tenemos:

$$\delta H = \delta A(\partial H/\partial A)_o - j(\delta s + j\delta w)(\partial H/\partial w)_o = 0 \qquad (4\text{-}21)$$

que es la ecuación de evolución del oscilador en primera aproximación. Separando (4-21) en partes real e imaginaria nos resulta:

$$\begin{aligned} \delta A(\partial U/\partial A)_o + \delta w(\partial U/\partial w)_o &= -\delta s(\partial V/\partial w)_o \\ \delta A(\partial V/\partial A)_o + \delta w(\partial V/\partial w)_o &= \delta s(\partial U/\partial w)_o \end{aligned} \qquad (4\text{-}22)$$

Ahora bién, la tangente a la trayectoria está determinada por las partes lineales principales de los desarrollos:

$$\delta U = (\partial U/\partial A)_o \cdot \delta A + (\partial U/\partial w)_o \cdot \delta w$$
$$\delta V = (\partial V/\partial A)_o \cdot \delta A + (\partial V/\partial w)_o \cdot \delta w \qquad (4\text{-}23)$$

y puesto que $(\partial U/\partial w)_o$ y $(\partial V/\partial w)_o$ son las componentes de vector $\bar{H}w$, las ecuaciones (4-22) nos indican que la trayectoria en los alrededores del origen es perpendicular a la equi-amplitud (A_o) tal como se muestra en la Fig. (4-7)

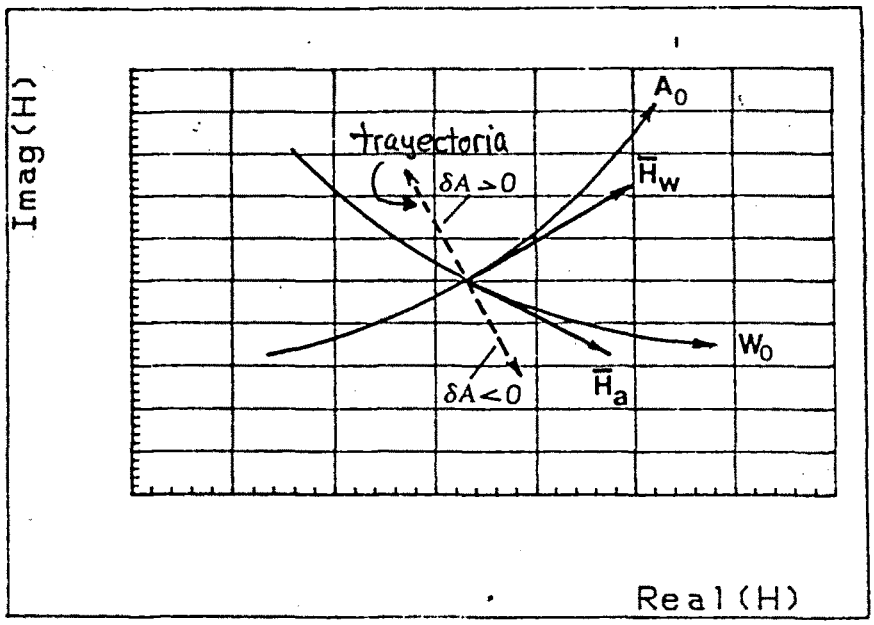


Fig. (4-7)

De las ecuaciones (4-22) deducimos:

$$\delta w = \frac{-(\partial U/\partial A)_o \cdot (\partial U/\partial w)_o + (\partial V/\partial A)_o \cdot (\partial V/\partial w)_o}{(\partial U/\partial w)_o^2 + (\partial V/\partial w)_o^2} \cdot \delta A$$

$$\delta s = \frac{(\partial V/\partial A)_o \cdot (\partial U/\partial w)_o - (\partial U/\partial A)_o \cdot (\partial V/\partial w)_o}{(\partial U/\partial w)_o^2 + (\partial V/\partial w)_o^2} \cdot \delta A \qquad (4\text{-}24)$$

o bien

$$\delta w = - \frac{\overline{Ha} \cdot \overline{Hw}}{\left(\frac{\partial H}{\partial w}\right)_o^2} \cdot \delta A = - \frac{\overline{Ha} \cdot \overline{Hw}}{\left|\overline{Hw}\right|^2} \cdot \delta A$$

$$\delta S = - \frac{\overline{Ha} \wedge \overline{Hw}}{\left(\frac{\partial H}{\partial w}\right)_o^2} \cdot \delta A = - \frac{\overline{Ha} \wedge \overline{Hw}}{\left|\overline{Hw}\right|^2} \cdot \delta A$$

ecuaciones que expresan la perturbación sufrida, en primera aproximación, en la pulsación compleja cuando nos alejamos una pequeña cantidad δA del régimen permanente. Notemos que una perturbación δA no afectará a la pulsación real del oscilador si el ángulo entre la curva equi-pulsación y equi-amplitud en el origen es 90^o. Esta propiedad es una consecuencia bien clara del hecho de que la trayectoria del oscilador es normal a la equi-amplitud (A_o) a el origen. Si la curva (w_o) es también normal a (A_o) entonces (w_0) será tangente en el origen a la trayectoria del oscilador. Ya que, por definición, la frecuencia real es constante a lo largo de (w_o), la frecuencia de oscilación no será modificada en el primer orden de aproximación cuando la amplitud fluctue en los alrededores del régimen permanente.

Por otro lado, δS es el factor de atenuación de la amplitud tangente en este punto será de la forma:

$$(A_o + \delta A) \cdot e^{\delta S \cdot t}$$

y para que la oscilación permanente sea estable necesitaremos que:

$$\delta A > 0 \longrightarrow \delta S < 0$$

$$\delta A < 0 \longrightarrow \delta S > 0$$

o bien, de (4-24):

$$(\partial U/\partial A)_o \cdot (\partial V/\partial w)_o - (\partial v/\partial A)_o \cdot (\partial U/\partial w)_o > 0 \qquad (4\text{-}25)$$

• La estabilidad del lazo realimentado de la Fig. (4-4) puede estudiarse alternativamente, considerando a la entrada de la no linealidad una señal de la forma:

$$X(t) = A_o e^{jw_o t} + \delta A \cdot e^{\delta s t} \cdot e^{j(w_o t + \theta)} \qquad \delta A \ll A_o \qquad (4\text{-}26)$$

Si δA y δs son lo suficientemente pequeños, podemos esperar razonablemente que el sistema no lineal pueda ser caracterizado por la Función Descriptiva Incremental junto con la de entrada sinusoidal, tal como se ha visto en el capítulo anterior. Para que esta perturbación en la entrada permanezca a lo largo del tiempo, deberá de verificarse:

$$H_i(A_o,\ \delta s + jw_o, \theta\ ) = 0 \qquad (4\text{-}27)$$

donde H_i es la Función Descriptiva Incremental para el lazo cerrado. Escribiendo su valor (3-33) y desarrollando en Taylor al primer orden tenemos:

$$j \cdot \delta s(\partial H/\partial w) = \frac{A_o}{2} (\partial H/\partial A) \cdot (1 + e^{-j2\theta}) \qquad (4\text{-}28)$$

donde $H(A,jw) = U + jV$ es la Función Descriptiva sinusoidal del lazo cerrado. Separando en partes real e imaginaria:

$$-\left[\delta s(\partial V/\partial w) - \frac{A_o}{2}(\partial U/\partial A)\right] + j\cdot\left[\delta s(\partial U/\partial w) - \frac{A_o}{2}(\partial V/\partial A)\right] =$$

$$= \frac{A_o}{2}(\partial H/\partial A)\cdot e^{-j2\theta} \qquad (4\text{-}29)$$

de donde se deduce una ecuación de segundo grado para δs:

$$\delta s^2 \cdot \left|\bar{H}_w\right|^2 + 2A_o \cdot \delta s\left[\bar{H}_a \wedge \bar{H}_w\right] = 0 \qquad (4\text{-}30)$$

ecuación que tiene por solución:

$$\delta s = 0 \; ; \; \delta s = -\frac{\bar{H}_a \wedge \bar{H}_w}{\left|\bar{H}_w\right|^2} \cdot A_o \qquad (4\text{-}31)$$

La primera nos define el estado estacionario de oscilación, mientras que la segunda nos calcula el factor de amortiguamiento previsible para una entrada incremental en la no linealidad. Obviamente, el regimen definido por $\delta s = 0$ será estable cuando la segunda solución tenga un valor negativo, lo cual, a la vista de (4-31), solo es posible si:

$$\bar{H}_a \wedge \bar{H}_w > 0 \qquad (4\text{-}32)$$

Concluimos pues que la Función Descriptiva Incremental produce idénticos resultados que el método quasi-estático desarrollado precedentemente. Podemos hacer una representación gráfica de la ecuación (4-28) sobre el diagrama de Mikailov tal como se muestra en la Fig. (4-8).

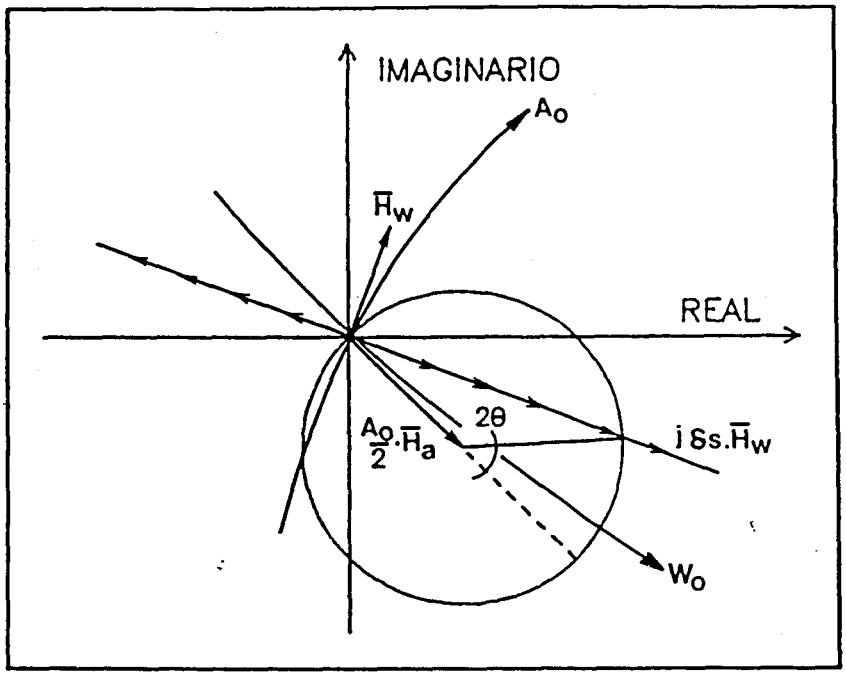


Fig. (4-8)

IV.3.- OSCILACIONES TRANSITORIAS

En los apartados precedentes se ha tratado el estudio y estabilidad de las oscilaciones quasi-sinusoidales en sistemas no lineales en lazo cerrado. Suponiendo que el sistema oscilaba, permitíamos una pequeña variación en la amplitud con objeto de ver si la oscilación tangente asociada tendía a crecer o decrecer con el tiempo (transitorio local). Sin embargo, es interesante estudiar, siempre bajo el punto de vista de la Función Descriptiva, el comportamiento real del oscilador frente a esta perturbación, así como el transitorio que recorre antes de llegar al régimen permanente. Como hemos adelantado anteriormente, el uso de la Función Descriptiva de entrada sinusoidal nos restringe el comportamiento oscilatorio en la entrada no lineal del lazo a

una variación lenta en amplitud y fase. La parte lineal del sistema está compuesta por operadores invariantes con el tiempo que son convertibles a una función de transferencia clásica.

Supongamos de nuevo el lazo realimentado de la Fig. (4-4) y consideremos una entrada externa nula. La ecuación integro-diferencial que caracteriza la relación entre X e Y a través de la parte lineal es:

$$a_n \frac{d^n X}{dt^n} + \ldots + a_o . X = -(b_o . Y + \ldots + b_m \frac{d^m Y}{dt^m}) \quad (4\text{-}33)$$

Si la solución de esta ecuación es de la forma de una oscilación con variación lenta en amplitud y fase:

$$X(t) = A(t) . e^{j\varphi(t)}$$

la relación entre X e Y puede escribirse como:

$$Y(t) = N(t).X(t) \quad ; \quad N(t) = N(A(t), \dot{\varphi}(t)) \quad (4\text{-}34)$$

donde N(t) es la Función Descriptiva de la no linealidad. La sustitución de (4-34) en (4-33) implica el cálculo de las derivadas superiores de X y NX. Definiendo una pulsación compleja como $p = s + jw = \dot{A}/A + j\dot{\varphi}$ podemos reescribir formalmente la ecuación (4-33) como:

$$a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \ldots + a_o =$$

$$= - (b_o G_o + b_1 G_1 + \ldots + b_m G_m) \quad (4\text{-}35)$$

con

$$F_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \left[(i:j) \frac{d^{i-j}p}{dt^{i-j}} F_j \right] \qquad F_o = 1$$

$$G_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} \left[(i:j) \frac{d^{i-j}p}{dt^{i-j}} G_j + \frac{d^{i-j+1}p}{dt^{i-j+1}} F_j \right] \qquad G_o = N$$

$$(i:j) = i!/(j!(i-j)!)$$

El resultado es pues una ecuación en p,N y sus derivadas, es decir, en $A, \dot{A}, \varphi$ y sus derivadas. Separando en partes real e imaginaria llegamos a un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales, a partir del cual obtendremos $A(t)$ y $\varphi(t)$, es decir, $X(t)$. En general no podremos obtener una solución formal para las incógnitas y habrá que acudir a la simulación por ordenador. Notemos además que el cálculo posterior del resto de las variables que configuren el lazo nos pondrá en evidencia la variación no solo de la amplitud sino también de la frecuencia en los diferentes puntos del bucle. Afortunadamente en la mayor parte de los osciladores microonda, y especialmente en aquellos que poseen un grado de estabilidad razonable, podemos despreciar con buena aproximación las derivadas de p y N, transformando así (4-35) en una ecuación algebraica cuya solución quasi-estática requiere una igualdad de pulsación en toda variable del lazo. Obviamente, si además de aplicar el criterio quasi-estático exigimos que la parte real de la pulsación sea nula, obtendremos una relación estática entre A y

w que nos define la posición estacionaria del ciclo límite. En cualquier caso, utilicemos la fórmula (4-35) o la aproximación quasi-estática, podemos obtener una relación entre s y A que nos definirá el tiempo transitorio entre dos intervalos:

$$t(A) = \int_{A(0)}^{A} \frac{dA}{A.s(A)} \qquad (4\text{-}36)$$

En la mayor parte de los sistemas realimentados, las oscilaciones transitorias que convergen en un ciclo límite son tales que las curvas $\dot{A} = sA$ frente a la amplitud A tienen una característica prácticamente lineal en un rango importante de amplitudes alrededor del punto de equilibrio A_o. Si no fuese así y tratásemos con ligeras perturbaciones sobre el estacionario, siempre podríamos linealizar de esta forma. Según esto, podemos escribir:

$$\dot{A} = (d\dot{A}/dA)_{A_o} \cdot (A-A_o)$$

y esta ecuación diferencial de primer orden tiene una constante de tiempo dada por:

$$Tau = -\frac{1}{(d\dot{A}/dA)_{A_o}} = -\frac{1}{A_o(ds/dA)_{s=0}} \qquad (4\text{-}37)$$

es decir, el paso de un estado a otro del oscilador en los alrededores del equilibrio se hace con una velocidad dada por la constante de tiempo anterior.

No debemos confundir esta trayectoria real del oscila

dor con la tendencia de la oscilación tangente en cada punto del transitorio. Para ello supongamos que el régimen estacionario sufre una perturbación en amplitud A. La ecuación (4-35) nos calcula, para este valor $A_o + \delta A$, cuánto vale en este instante la pulsación compleja $p = s + jw$. La oscilación lineal tangente sigue, como se ha visto precedentemente, una ley de variación de amplitud dada por:

$$A(t) = (A_o + \delta A) . e^{st} \qquad (4-38)$$

siendo su constante de tiempo $\overline{Tau}$:

$$\overline{Tau} = - \frac{1}{s(A_o + \delta A)} \qquad (4-39)$$

y tendiendo su amplitud a cero a medida que t crece. Por

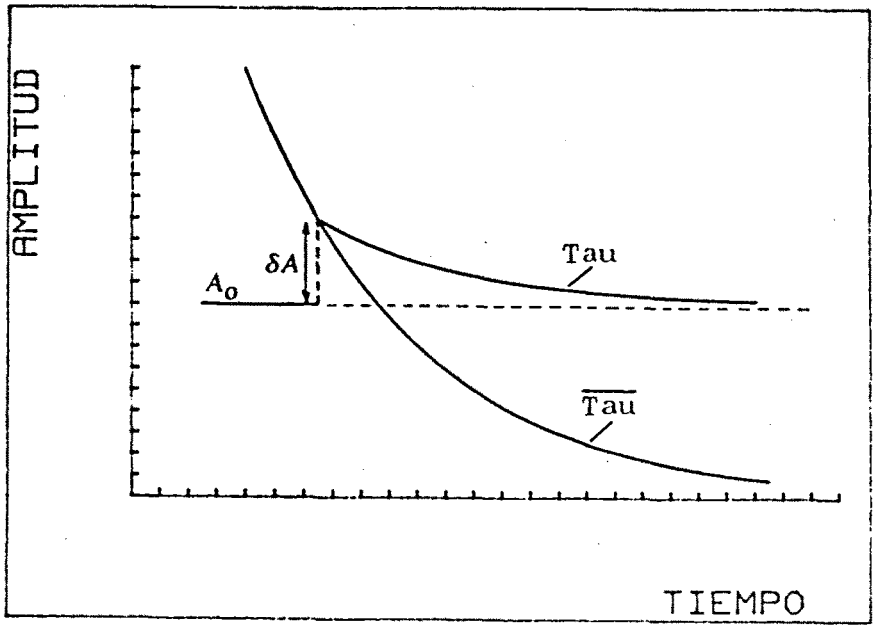


Fig. (4-9)

otro lado, la ecuación (4-37) nos proporciona la ley real

de variación. Como puede apreciarse en la Fig. (4-9), ambas leyes son diferentes, siendo (4-37) la envolvente de (4-39) en cada instante y tendiendo a A_o a medida que t crece, siempre que el sistema sea estable.

Recordando la ecuación (4-24) para sistemas sinusoidales en los que la Función Descriptiva depende unicamente de la amplitud y pulsación, y considerando la situación quasi-estática, podemos escribir:

$$\text{Tau} = \frac{1}{A_o} \cdot \frac{\left|\overline{H}_w\right|^2}{\overline{H}_a \wedge \overline{H}_w} \qquad (4\text{-}40)$$

Podemos encontrarnos con sistemas en los que la aproximación quasi-estática no es suficiente, sobre todo en aquellos en los que la contribución de la derivada de la frecuencia es importante. En estos casos, la ecuación (4-35) puede escribirse simbolicamente:

$$H = U + jV \qquad \begin{matrix} U(A,s,w,\dot{w}) = 0 \\ V(A,s,w,\dot{w}) = 0 \end{matrix} \qquad (4\text{-}41)$$

diferenciando estas ecuaciones y despejando ds obtenemos:

$$ds = \frac{(\overline{H}_a \wedge \overline{H}_w)\cdot(\partial U/\partial w)}{A_o\cdot(\partial U/\partial A)\cdot(\overline{H}_w \wedge \overline{H}_w) - (\partial U/\partial w)\cdot\left|\overline{H}_w\right|^2} \cdot dA \qquad (4\text{-}42)$$

y de (4-37):

$$\text{Tau} = \frac{(\partial U/\partial w)\cdot\left|\overline{H}_w\right|^2/A_o - (\partial U/\partial A)\cdot(\overline{H}_w \wedge \overline{H}_w)}{(\partial U/\partial w)\cdot(\overline{H}_a \wedge \overline{H}_w)} =$$

$$= \frac{1}{A_o} \frac{\left|\overline{H}_w\right|^2}{\overline{H}_a \wedge \overline{H}_w} - \frac{(\partial U/\partial A)[redacted](\overline{H}_{\dot{w}} \wedge \overline{H}_w)}{(\partial U/\partial w)(\overline{H}_a \wedge \overline{H}_w)} \qquad (4\text{-}43)$$

siendo $\overline{H}_{\dot{w}} = ((\partial U/\partial \dot{w}), (\partial V/\partial \dot{w}))$

La nueva constante de tiempo está formada por la componente quasi estática más un segundo término independiente, salvo derivadas en el origen, de la amplitud estacionaria.

En el apartado anterior vimos la estabilidad de la solución desde un punto de vista exclusivamente quasi-estático, en función del producto vectorial de los vectores tangentes asociados a la equi-amplitud y equi-pulsación en el origen. Esta claro que la forma correcta de tratamiento es el estudio de la oscilación transitoria que resulta de una perturbación del equilibrio. Si la constante de tiempo (4-43) es positiva, el ciclo límite es estable; si es negativa, el ciclo será inestable. Desde otro punto de vista notemos que un Tau positivo corresponde al caso en que la pendiente de $\dot{A}$ frente a A es negativa en la vecindad de A_o. Así, si A es mayor que A_o, $\dot{A}$ es negativo y la amplitud tiende a decrecer hacia el estacionario. Similarmente, si $A < A_o$, $\dot{A} > 0$ y A crece hacia A_o. El mismo razonamiento pone en evidencia la inestabilidad si Tau es negativo.

Deberemos, por último, indicar que a pesar de que el signo de Tau es un indicador de estabilidad más eficiente que el criterio quasi-estático, tiene en su cálculo ciertas restricciones condicionadas a la anulación de las derivadas superiores de la pulsación compleja.

CAPITULO V

INYECCION Y PULLING

VI.- INTRODUCCION

El problema de la sincronización de osciladores microonda ha sido tratado por muchos autores /48-72/ debido a su utilización como amplificadores síncronos, discriminadores FM, estabilizadores, reductores de ruido, medidores en gran señal, etc. además de su utilización como amplificadores armónicos y subarmónicos.

El propósito de este capítulo es desarrollar una formulación compacta, desde el punto de vista de la Función Descriptiva, para los problemas que plantea la sincronía, tales como estabilidad, ancho de banda y transitorio de fase. En el final del capítulo se estudia, desde el mismo punto de vista, la sensibilidad del oscilador frente a la carga (pulling), sobre la base de pequeñas perturbaciones en los alrededores del equilibrio.

VI.- RANGO DE SINCRONIZACION

Para su estudio consideremos la sincronización, a través de un circulador, de una señal microonda a una de las puertas de nuestro oscilador sinusoidal tal como se muestra en la Fig. (5-1-a), siendo su representación en parámetros discretos y diagrama de bloques esquematizados en las Fig. (5-1-b) y Fig. (5-1-c) respectivamente. Suponemos la entrada del oscilador caracterizada por su Función Descriptiva de entrada sinusoidal $Y_N(V,p)$ función de la amplitud y pulsación de la tensión aplicada en sus extremos. En presencia de la señal sincronizante, la ecuación frecuencial que rige el sistema, si hay inyección estable a la frecuencia w_e, es:

$$I_e \cdot e^{jwet} = H_N(V_e, w_e) \cdot V_e \cdot e^{j(wet + \varphi e)} \qquad (5\text{-}1)$$

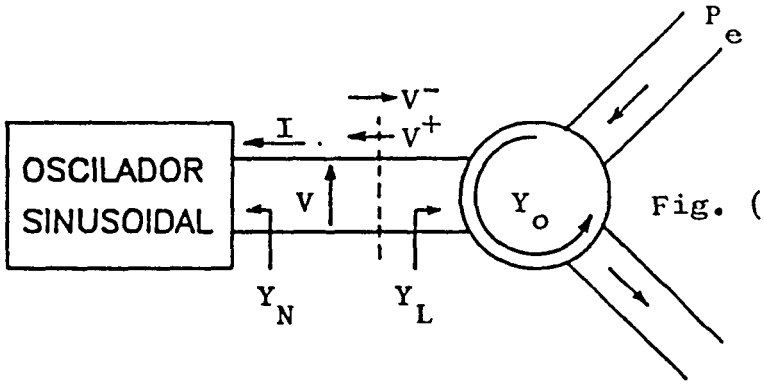
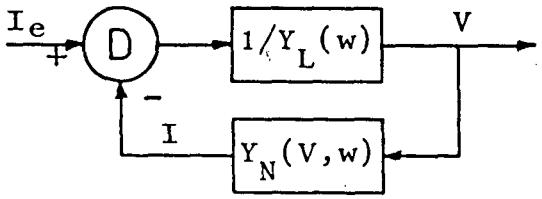


Fig. (5-1-a)

$$I_e = 2\, Y_o\, V^+$$

$$P_e = |I_e|^2 / 8Y_o$$

Fig. (5-1-b)



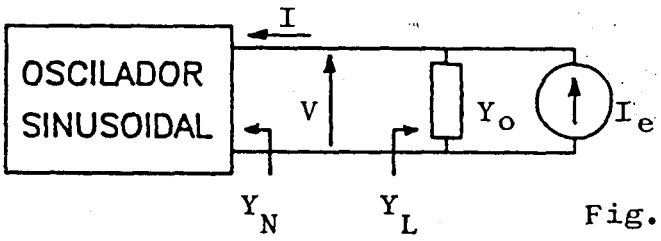


Fig. (5-1-c)

con

$$H_N(V,w) = Y_N(V,w) + Y_L(V,w) = G(V,w) + jB(V,w)$$

separando en partes real e imaginaria tenemos:

$$I_e \cdot \cos \varphi_e = G(V_e, w_e) \cdot V_e$$

$$- I_e \cdot \sin \varphi_e = B(V_e, w_e) \cdot V_e \qquad (5\text{-}2)$$

según esto, dada una frecuencia w_e y una amplitud de inyección I_e, la ecuación (5-2) nos resuelve la amplitud V_e y la

fase φ_e de la tensión de entrada con relación a la corriente excitadora equivalente.

Si suponemos que la oscilación libre ($I_e = 0$) está caracterizada por una amplitud y frecuencia dadas por la ecuación:

$$H_N(V_o, w_o) = 0 \qquad (5\text{-}3)$$

y que la tensión y frecuencia en sincronización no difieren en mucho de los valores del equilibrio libre (V_o, w_o), podemos escribir en primera aproximación:

$$H_N(V_e, w_e) = (\partial H_N/\partial V)\,\delta V + (\partial H_N/\partial w)\;\delta w \qquad (5\text{-}4)$$

derivadas en (V_o, w_o)

$$\delta V = V_e - V_o \qquad \delta w = w_e - w_o$$

Sustituyendo (5-4) en (5-1):

$$(\partial H_N/\partial V)\;\delta V + (\partial H_N/\partial w)\;\delta w = (I_e/(V_o + \delta V)).e^{j\varphi e} \qquad (5\text{-}5)$$

si despreciamos en esta ecuación δV frente a V_o, estamos considerando que el módulo de la función de transferencia no lineal del lazo es constante en toda la banda de sincronía:

$$I_e/(V_o + \delta V) \cong I_e/V_o = \left|H_N\right| \qquad (5\text{-}6)$$

separando (5-5) en partes real e imaginaria:

$$(\partial G/\partial w)\ \delta w + (\partial G/\partial V)\ \delta V = \left|H_N\right| . \cos \varphi_e$$

$$(\partial B/\partial w)\ \delta w + (\partial B/\partial V)\ \delta V = \left|H_N\right| . \sin \varphi_e \qquad (5\text{-}7)$$

y despejando de estas ecuaciones δw y δV tenemos:

$$\delta V = \left|H_N\right| \cdot \frac{(\partial B/\partial w)\cos\varphi_e - (\partial G/\partial w)\sin\varphi_e}{(\partial G/\partial V)(\partial B/\partial w) - (\partial B/\partial V)(\partial G/\partial w)} =$$

$$= \left|H_N\right| \cdot \frac{e^{j\varphi_e} \wedge \bar{H}_w}{\bar{H}_v \wedge \bar{H}_w} \qquad (5\text{-}8\text{-}a)$$

$$\delta w = \left|H_N\right| \cdot \frac{(\partial G/\partial V)\sin\varphi_e - (\partial B/\partial V)\cos\varphi_e}{(\partial G/\partial V)(\partial B/\partial w) - (\partial B/\partial V)(\partial G/\partial w)} =$$

$$= \left|H_N\right| \cdot \frac{e^{j\varphi_e} \wedge \bar{H}_w}{\bar{H}_v \wedge \bar{H}_w} \rightarrow \bar{H}_v \wedge e^{j\varphi_e} \qquad (5\text{-}8\text{-}b)$$

siendo $\bar{H}_v = ((\partial G/\partial V),(\partial B/\partial V))$

$$\bar{H}_w = ((\partial G/\partial w),(\partial B/\partial w)) \qquad \text{derivadas en } (V_o, w_o) \qquad (5\text{-}8\text{-}c)$$

A la vista de estas ecuaciones se deduce inmediatamente que si la señal de inyección coincide con w_o, deberá de verificarse:

$$\bar{H}_v \wedge e^{j\varphi_e} = 0 \qquad tg\varphi_e = (\partial B/\partial V)/(\partial G/\partial V) \qquad (5\text{-}9)$$

y que no habrá variación en la amplitud, respecto a la de

oscilación libre V_o, cuando se cumpla:

$$e^{j\varphi_e} \wedge \bar{H}_w = 0 \Rightarrow tg\varphi_e = (\partial B/\partial w) \,/\, (\partial G/\partial w) \qquad (5\text{-}10)$$

El rango completo de sinconización se calcula derivando (5-8-b) respecto de φ_e e igualando a cero:

$$d\delta w/d\varphi_e = 0 \Rightarrow \bar{H}_v \cdot e^{j\varphi_e} = 0$$

$$tg\varphi_e = -(\partial G/\partial V) \,/\, (\partial B/\partial V) \qquad (5\text{-}11)$$

y, por consiguiente, hay dos ángulos separados por 180^o que verifican la condición anterior. Sustituyendolos en (5-8-b) nos resulta:

$$\delta w1 = (|H_N| \cdot |\bar{H}_v|) \,/\, (\bar{H}_v \wedge \bar{H}_w)$$

$$\delta w2 = -(|H_N| \cdot |\bar{H}_v|) \,/\, (\bar{H}_v \wedge \bar{H}_w) \qquad (5\text{-}12)$$

y la banda de sincronización simétrica se escribirá como:

$$\delta wm = 2\,((|H_N| \cdot |\bar{H}_v|) \,/\, (\bar{H}_v \wedge \bar{H}_w)) \qquad (5\text{-}13)$$

Si, por el contrario, buscamos la variación máxima en amplitud, deberemos de derivar (5-8-a) con relación a φ_e e igualar a cero:

$$d\delta V/d\varphi_e = 0 \qquad \bar{H}_w \cdot e^{j\varphi_e} = 0$$

$$tg\varphi_e = -(\partial B/\partial w) \,/\, (\partial G/\partial w) \qquad (5\text{-}14)$$

y análogamente al caso anterior, hay dos fases separadas 180^{o} que verifican esta condición. Sustituyendo en (5-8-a) tenemos:

$$\delta V1 = \frac{|H_N| \cdot |\overline{H}_w|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w}$$

$$\delta Vm = 2. \frac{|H_N| \cdot |\overline{H}_w|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \qquad (5\text{-}15)$$

$$\delta V2 = - \frac{|H_N| \cdot |\overline{H}_w|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w}$$

Definiendo el factor de calidad externo del oscilador en la forma usual:

$$Q_{ext} = \frac{w_o}{2Y_o} \left[\frac{\partial B}{\partial w}\right] \qquad (5\text{-}16)$$

y teniendo en cuenta que la potencia de salida en oscilación libre P_o y la potencia sincronizante P_e pueden relacionarse por:

$$\sqrt{P_e/P_o} = 1/2y_o \cdot I_e^2/V_o^2 = 1/2Y_o \cdot |H_N| \qquad (5\text{-}17)$$

podemos escribir de nuevo la banda de sincronización:

$$\delta wm = \frac{2w_o}{Q_{ext}} \quad \frac{\partial B}{\partial w} \quad \frac{|\overline{H}_v|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \cdot \sqrt{\frac{P_e}{P_o}} \qquad (5\text{-}18)$$

Obtenemos la curva de variación de δw como función

de δV acudiendo a las ecuaciones (5-7) y eliminando φ_e:

$$|\bar{H}_w|^2 \, \delta w^2 + |\bar{H}_v|^2 \, \delta v^2 + 2\bar{H}_v \cdot \bar{H}_w \, \delta v \, \delta w = |H_N|^2 \qquad (5\text{-}19)$$

ecuación que nos define la elipse de sincronización. Esta elipse se reduce a un círculo cuando el ángulo formado por los vectores $\bar{H}_v$ y $\bar{H}_w$ es de 90^o en el origen del diagrama de Mikaïlov.

Podemos hacer otra aproximación a la banda de sincronía mirando la perturbación desde otro punto de vista. A la luz de la Fig. (5-1) observamos que el oscilador sin perturbar es tal que $V^+ = 0$. Si existe un $V^+ \neq 0$ a frecuencia próxima a la de oscilación libre, obtendremos una variación en V^- lo que puede traducirse en una variación de la impedancia de carga $Y_L(w)$. El coeficiente de reflexión de la carga será entonces:

$$\bar{r}_L = (V^+/V^-) = r_L \cdot e^{j\theta} \qquad (5\text{-}20)$$

por otro lado, en el plano del oscilador tenemos $V^- = V_o + \delta V$, luego:

$$\bar{r}_L = V^+ / (V_o + \delta V) \qquad (5\text{-}21)$$

y si suponemos que el nivel de perturbación es pequeño ($\delta V \ll V_o$) podemos considerar que, para una inyección de señal constante en potencia, el coeficiente de reflexión de la carga se mantiene constante en módulo a lo largo de toda la banda de sincronía, con un valor dado por:

$$r_L = \left| V^+ / V_o \right| = cte \qquad (5\text{-}22)$$

y sólo permitiremos variación en la fase a medida que hagamos variar la frecuencia de la señal de inyección. De acuerdo con (5-20), la admitancia equivalente de carga es:

$$Y_L = Y_o \frac{1 - \overline{r_L}}{1 + \overline{r_L}} = Y_o \frac{(1-r_L^2) - j2r_L.\sin\theta}{1 + r_L^2 + 2r_L.\cos\theta} \qquad (5\text{-}23)$$

donde la variación $\delta Y_L = Y_L - Y_o = \delta G_L + j\delta B_L$ sufrida respecto de la carga en oscilación libre se escribe como:

$$\delta G_L = - 2Y_o \frac{r_L(r_L + \cos\theta)}{1 + r_L^2 + 2r_L.\cos\theta} \qquad (5\text{-}24)$$

$$\delta B_L = - 2Y_o \frac{r_L.\cos\theta}{1 + r_L^2 + 2r_L.\cos\theta}$$

Esta variación en la carga ha de ser de tal que se verifiquen de nuevo las condiciones de oscilación en el lazo realimentado:

$$0 = H_N(V,w) + \delta Y_L = H_N(V_o,w_o) + (\partial H_N/\partial V)\delta V +$$

$$+ (\partial H_N/\partial w)\delta w + \delta G_L + j\delta B_L$$

separando en partes real e imaginaria y despejando δw, δV tenemos:

$$\delta w = \frac{(\partial B/\partial V.\ \delta G_L) - (\partial G/\partial V.\ \delta B_L)}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} = \frac{\overline{\delta Y}_L \wedge \overline{H}_v}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w}$$

$$\delta V = \frac{(\partial G/\partial w.\ \delta B_L) - (\partial B/\partial w.\ \delta G_L)}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} = \frac{\overline{H}_w \wedge \overline{\delta Y}_L}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \qquad (5\text{-}25)$$

Sustituyendo (5-24) en (5-25) llegamos a la expresión de variación de frecuencia y de amplitud, al primer orden, para el régimen inyectado permanente:

$$\delta w = -\frac{2Y_o r_L}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \cdot \frac{(\partial B/\partial V)(r_L + \cos\theta) - (\partial G/\partial V)\sin\theta}{1 + r_L^2 + 2r_L.\cos\theta} \qquad (5\text{-}26\text{-}a)$$

$$\delta V = -\frac{2Y_o r_L}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \cdot \frac{(\partial G/\partial w)\sin\theta - (\partial B/\partial w)(r_L + \cos\theta)}{1 + r_L^2 + 2r_L.\cos\theta}$$

o bien, si llamamos $\varphi = \theta/2$:

$$\delta w = -\frac{2Y_o r_L}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \cdot \frac{(\partial B/\partial V)((r_L+1) + (r_L-1)tg^2\varphi) - 2(\partial G/\partial V)tg\varphi}{(r_L + 1)^2 + (r_L-1)^2\, tg^2\,\varphi} \qquad (5\text{-}26\text{-}b)$$

$$\delta V = -\frac{2Y_o r_L}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \cdot \frac{2(\partial G/\partial w)tg\varphi - (\partial B/\partial w)((r_L+1) + (r_L-1)tg^2\varphi)}{(r_L+1)^2 + (r_L-1)^2 tg^2\varphi}$$

Si hacemos $\delta w = 0$ en estas expresiones, obtendremos los puntos de variación nula en frecuencia respecto de la oscilación libre w_o:

$$tg\varphi \ (\delta w = 0) = \frac{\partial G/\partial V \pm \sqrt{|\overline{H}_v|^2 - (\partial B/\partial V)^2 . r_L^2}}{(\partial B/\partial V)(r_L - 1)} \qquad (5\text{-}27)$$

análogamente obtendremos los puntos de variación nula en amplitud haciendo $\delta V = 0$ en la expresión (5-26)

$$tg\varphi \ (\delta V = 0) = \frac{\partial G/\partial w \pm \sqrt{|\overline{H}_w|^2 - (\partial B/\partial w)^2 . r_L^2}}{(\partial B/\partial w)(r_L - 1)} \qquad (5\text{-}28)$$

Nos interesará en este momento el cálculo de la desviación máxima en frecuencia. Si derivamos δw respecto de φ en (5-26-b) e igualamos a cero obtendremos:

$$tg\varphi = \frac{r_L + 1}{r_L - 1} \cdot \frac{-(\partial B/\partial V) \pm |\overline{H}_v|}{\partial G/\partial V} \qquad (5\text{-}29)$$

sustituyendo los dos ángulos solución en δw de (5-26) nos resulta en una sincronización no simétrica:

$$\delta w1 = \frac{-2Y_o r_L}{(r_L+1).(r_L-1)} \cdot \frac{r_L(\partial B/\partial V) - |\overline{H}_v|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w}$$

$$\delta w2 = \frac{-2Y_o r_L}{(r_L+1).(r_L-1)} \cdot \frac{r_L(\partial B/\partial V) + |\overline{H}_v|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \qquad (5\text{-}30)$$

siendo el ancho de banda de sincronismo:

$$\delta wm = \delta w_1 - \delta w_2 = \frac{4Y_o r_L}{(r_L^2-1)} \cdot \frac{\left|\overline{H}_v\right|}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \qquad (5\text{-}31)$$

Podemos, por último, calcular la ecuación de la curva que nos relaciona V con w. Tomando la ecuación (5-25), descomponiendo en parte real e imaginaria y manipulando el resultado tenemos:

$$(\delta G_L)^2+(\delta B_L)^2 = \left|\overline{H}_w\right|^2 . \delta w^2 + \left|\overline{H}_v\right|^2 . \delta V^2 + 2\overline{H}_v . \overline{H}_w \, \delta V . \delta w \qquad (5\text{-}32)$$

Ahora bien, por la propia definición de coeficiente de reflexión para una admitancia de carga tenemos:

$$r_L^2 = (\delta G_L^2 + \delta B_L^2) \; / \; ((\delta G_L + Y_o)^2 + \delta B_L^2) \qquad (5\text{-}33)$$

y sustituyendo (5-33) en (5-32) llegamos a:

$$\left|\overline{H}_w\right|^2 . \delta w^2 + \left|\overline{H}_v\right|^2 . \delta V^2 + 2\overline{H}_v . \overline{H}_w . \delta V . \delta w + \qquad (5\text{-}34)$$

$$+ (4r_L^2 / (1-r_L^2)) \; (Y_o(\partial G/\partial w)\delta w + Y_o(\partial G/\partial V)\delta V - Y_o^2) = 0$$

ecuación que representa una elipse centrada en el punto $(\delta V_c, \delta w_c)$ de coordenadas:

$$\delta V_c = \frac{-2Y_o r_L^2}{1 - r_L^2} \; \frac{\partial B/\partial w}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w}$$

$$\delta w_c = \frac{-2Y_o r_L^2}{1 - r_L^2} \; \frac{\partial G/\partial V}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \qquad (5\text{-}35)$$

V.3.- ESTABILIDAD DE LA SINCRONIA

Hasta el momento, hemos tratado el rango de inyección desde un punto de vista totalmente formal y suponiendo que la sincronización es estable. Sin embargo, en las proximidades del régimen estacionario podemos caracterizar la forma de onda de tensión en la entrada del oscilador por:

$$v(t) = V(t)e^{j(w_e t + \varphi(t))} \tag{5-36}$$

donde, si suponemos que la amplitud y la fase son variaciones lentas con el tiempo, podemos considerar en primera aproximación que la pulsación equivalente para esta onda de tensión es:

$$P = (\dot{V}/V) + j(w_e + \varphi) \tag{5-37}$$

con lo que la (5-1) se nos transforma en:

$$I_e \cdot e^{jw_e t} = H_N(V,p) \cdot V e^{j(w_e t + \varphi)} \tag{5-38}$$

desarrollando $H_N(V,p)$ en Taylor, al primer orden, en los alrededores de w_e y sustituyendo en (5-38) tenemos después de separar en partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} I_e \cos\varphi &= \left[G(V,w_e) + \frac{\partial G}{\partial w}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \right] \cdot V \\ -I_e \sin\varphi &= \left[B(V,w_e) + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial G}{\partial w}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \right] \cdot V \end{aligned} \tag{5-39}$$

ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico, al primer orden, del oscilador sincronizado en su régimen transitorio. Naturalmente, haciendo $d\varphi/dt = dV/dT = 0$, $\varphi = \varphi_e$ y $V = V_e$ llegaremos a las ecuaciones estacionarias (5-2). Si nos interesamos por la estabilidad de la inyección, deberemos escribir:

$$V = V_e + \delta V$$
$$\varphi = \varphi_e + \delta\varphi \qquad (5\text{-}40)$$

sustituyendo (5-40) en (5-39) tenemos:

$$I_e \cos(\varphi_e + \delta\varphi) = \left[G(V_e + \delta V, w_e) + \frac{\partial G}{\partial W}\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{1}{V_e+\delta V}\frac{d\delta V}{dt}\right](V_e+\delta V)$$

$$-I_e \sin(\varphi_e + \delta\varphi) = \left[B(V_e + \delta V, w_e) + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} - \frac{\partial G}{\partial w}\frac{1}{V_e+\delta V}\frac{d\delta V}{dt}\right](V_e+\delta V) \qquad (5\text{-}41)$$

Desarrollando los términos de interés en Taylor al primer orden y teniendo en cuenta las ecuaciones (5-2) del estado estacionario:

$$-I_e \cdot \delta\varphi \sin\varphi_e = G(V_e, w_e)\ \delta V + \left[\delta V \frac{\partial G}{\partial V} + \frac{\partial G}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{1}{V_e+\delta V}\frac{d\delta V}{dt}\right] \cdot (V_e+\delta V) \qquad (5\text{-}42)$$

$$-I_e \cdot \delta\varphi \cos\varphi_e = B(V_e, w_e)\,\delta V +$$

$$+ \left[\delta V \frac{\partial B}{\partial V} + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} - \frac{\partial G}{\partial w}\frac{1}{V_e+\delta V}\frac{d\delta V}{dt}\right] \cdot (V_e+\delta V)$$

desarrollando y despreciando infinitesimos de orden superior tenemos:

$$\left[\frac{G}{V_e} + \frac{\partial G}{\partial V}\right]\delta V + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{1}{V_e}\frac{d\delta V}{dt} - B\delta\varphi + \frac{\partial G}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} = 0$$

$$\left[\frac{B}{V_e} + \frac{\partial B}{\partial V}\right]\delta V - \frac{\partial G}{\partial w}\frac{1}{V_e}\frac{d\delta V}{dt} + G\delta\varphi + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} = 0 \qquad (5\text{-}43)$$

- valores y derivadas en (V_e, w_e).

ecuaciones que nos proporcionan los valores de perturbación $dV, d\varphi$ respecto del estado estacionario sincronizado. Teniendo en cuenta (5-2), podemos escribir alternativamente las ecuaciones anteriores como:

$$\frac{\partial G}{\partial V}\delta V + \frac{\partial G}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{1}{V_e}\frac{d\delta V}{dt} = B\delta\varphi - \frac{G}{V_e}\delta V =$$

$$= -\frac{I_e}{V_e}\delta\varphi \cdot \sin\varphi_e - \frac{I_e}{V_e^2}\delta V \cdot \cos\varphi_e$$

$$\frac{\partial B}{\partial V}\delta V + \frac{\partial B}{\partial w}\frac{d\delta\varphi}{dt} - \frac{\partial G}{\partial w}\frac{1}{V_e}\frac{d\delta V}{dt} = -G\delta\varphi - \frac{B}{V_e}\delta V = \qquad (5\text{-}44)$$

$$= -\frac{I_e}{V_e}\delta\varphi \cdot \cos\varphi_e + \frac{I_e}{V_e^2}\delta V \cdot \sin\varphi_e$$

Se puede conseguir una ecuación más restringida si en (5-42) despreciamos δV frente a V_e en el miembro derecho de ambas ecuaciones:

$$\frac{\partial G}{\partial V}\,\delta V + \frac{\partial G}{\partial w}\,\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{\partial B}{\partial w}\,\frac{1}{V_e}\,\frac{d\delta V}{dt} = B\delta\varphi = -\frac{I_e}{V_e}\,\delta\varphi.\,\sin\varphi_e$$

$$\frac{\partial B}{\partial V}\,\delta V + \frac{\partial B}{\partial w}\,\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{\partial G}{\partial w}\,\frac{1}{V_e}\,\frac{d\delta V}{dt} = -G\delta\varphi = -\frac{I_e}{V_e}\,\delta\varphi.\,\cos\varphi_e \qquad (5\text{-}45)$$

utilizaremos (5-44) ó (5-45) dependiendo del tipo de restricción con el que se desee trabajar.

Vamos a calcular las ecuaciones diferenciales para la amplitud y la fase para poder establecer el criterio de inyección estable. Eliminando de (5-44) la variación de amplitud δA obtendremos:

$$\left|\overline{H}_w\right|^2 \frac{d^2\delta\varphi}{dt^2} + \left[\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w + 2\,\frac{\overline{H}_N \wedge \overline{H}_w}{V_e}\right] V_e \cdot \frac{d\delta\varphi}{dt} + \left[\overline{H}_N \cdot \overline{H}_V + \frac{\left|\overline{H}_N\right|^2}{V_e}\right] V_e \cdot \delta\varphi = 0 \qquad (5\text{-}46)$$

$$\overline{H}_N = (G,B)$$

análogamente puede obtenerse la ecuación diferencial que rige el comportamiento de amplitud. La condición para que una perturbación $\delta\varphi$ decrezca con el tiempo se deduce facil-

mente de (5-46) imponiendo:

$$(\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w)\, V_e + 2\, \overline{H}_N \wedge \overline{H}_w > 0 \qquad (5\text{-}47\text{-}a)$$

$$\overline{H}_N \cdot \overline{H}_V + \frac{|H_N|^2}{V_e} > 0 \qquad (5\text{-}47\text{-}b)$$

ó bien, teniendo en cuenta (5-2):

$$(\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w)V_e + 2\,\frac{I_e}{V_e}\left[\overline{H}_w \wedge e^{-j\varphi_e}\right] > 0 \qquad (5\text{-}48\text{-}a)$$

$$\overline{H}_V \cdot e^{-j\varphi_e} + \frac{I_e}{V_e^2} > 0 \qquad (5\text{-}48\text{-}b)$$

Análogos resultados pueden obtenerse de la ecuación (5-45). Eliminando la variación de amplitud δA obtendremos:

$$\left|\overline{H}_w\right|^2 \frac{d^2\,\delta\varphi}{dt^2} + \left[\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w + \frac{\overline{H}_N \wedge \overline{H}_w}{V_e}\right] V_e \frac{d\delta\varphi}{dt} +$$

$$+ (\overline{H}_N \cdot \overline{H}_V)V_e \cdot \delta\varphi = 0 \qquad (5\text{-}49)$$

y la condición de estabilidad se calcula análogamente al caso anterior:

$$(\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w)V_e + \overline{H}_N \wedge \overline{H}_w > 0 \qquad (5\text{-}50\text{-}a)$$

$$\overline{H}_N \cdot \overline{H}_V > 0 \qquad (5\text{-}50\text{-}b)$$

ó bien, sustituyendo (5-2):

$$(\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w)V_e + \frac{I_e}{V_e}\left[\overline{H}_w \wedge e^{-j\varphi_e}\right] > 0 \qquad (5\text{-}51\text{-}a)$$

$$\overline{H}_V \cdot e^{-j\varphi_e} > 0 \qquad (5\text{-}51\text{-}b)$$

Estos criterios de estabilidad deberán de ser aplicados a cada punto de las elipses de sincronización calculadas en el apartado anterior. Podemos, así mismo, obtener el ancho de banda de inyección a partir de estas condiciones de estabilidad, ya que nos definen los puntos límites en la elipse. Para ello, suponiendo que $V_e - V_o \ll V_o$, escribimos al primer orden:

$$G(V_e,w_e) + j\ B(V_e,w_e) \simeq$$

$$\cong \frac{\partial G}{\partial V}\cdot \delta V_e + \frac{\partial G}{\partial w}\cdot \delta w_e + j\ \frac{\partial B}{\partial V}\cdot \delta V_e + j\ \frac{\partial B}{\partial w}\cdot \delta w_e \qquad (5\text{-}52)$$

$$\delta V_e = V_e - V_o \qquad\qquad \delta w_e = w_e - w_o$$

donde las derivadas están calculadas en (V_o,w_o) que no debe de ser muy diferente de las tomadas en (V_e,w_e) para tener compatibilidad con (5-47). Por otro lado, si hacemos nula la ecuación (5-47-b) nos estaremos moviendo por los puntos del límite de la inyección estable. Sustituyendo (5-52) en (5-47-b) tenemos, después de despreciar los infinitesimos de segundo orden (o lo que es lo mismo utilizando (5-50-b) en vez de (5-47-b)):

$$\delta V_e = - \frac{\bar{H}_V \cdot \bar{H}_w}{\left|\bar{H}_V\right|^2} \cdot \delta w_e \qquad (5\text{-}53)$$

y como los puntos de esta ecuación deben de verificar las condiciones (5-2), a las cuales aplicamos de nuevo (5-52), obtenemos:

$$\frac{I_e^2}{V_e^2} = \frac{(\bar{H}_V \wedge \bar{H}_w)^2}{\left|\bar{H}_V\right|^2} \cdot \delta w_e^2 \qquad (5\text{-}54)$$

podemos ahora aproximar $V_e = V_o + \delta V_e \quad V_e^2 \simeq V_o^2$ lo que equivale a decir que mantenemos constante, en el rango de inyección, el módulo de la admitancia total del circuito:

$$\frac{I_e^2}{V_e^2} \simeq \frac{I_e^2}{V_o^2} = \left|H_N\right|^2 = \frac{(\bar{H}_V \wedge \bar{H}_w)^2}{\left|\bar{H}_V\right|^2} \cdot \delta wm^2 \qquad (5\text{-}55)$$

donde δwm es el ancho de banda de inyección. Despejando:

$$\delta wm = 2 \frac{\left|\bar{H}_N\right| \cdot \left|\bar{H}_V\right|}{\bar{H}_V \wedge \bar{H}_w} \qquad (5\text{-}56)$$

ecuación análoga a (5-13). Por último, de la ecuación (5-47-a) se deduce, aplicando (5-52):

$$(V_e + 2\,\delta V_e) \cdot (\bar{H}_V \wedge \bar{H}_w) > 0 \qquad (5\text{-}57)$$

que nos reproduce las condiciones de estabilidad del régimen permanente no inyectado.

Podemos rehacer el cálculo de la estabilidad de la inyección desde otro punto de vista, considerando que la tensión en la entrada del oscilador es, en un instante dado, de la forma:

$$v(t) = V_e.e^{jw_e t} + \delta V.e^{\delta s t}.e^{j(w_e t + \theta)} \qquad (5\text{-}58)$$

A esta entrada, le corresponde una Función Descriptiva Incremental síncrona H_{Ni} desarrollada en (3-33). La condición para que esta perturbación permanezca a lo largo del tiempo es:

$$H_{Nis}(V_e,\ \delta s + jw_e,\ \theta) = 0 \qquad (5\text{-}59)$$

ó lo que es lo mismo:

$$H_N(V_e, jw_e) - j\delta s \frac{\partial H_N}{\partial w} + \frac{V_e}{2} \frac{\partial H_N}{\partial V} (1 + e^{-j2\theta}) = 0 \qquad (5\text{-}60)$$

donde hemos desarrollado en Taylor al primer orden en los alrededores de w_e. Separando en partes real e imaginaria y manipulando, obtenemos la ecuación para δs:

$$\delta s^2 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial w}\right)^2 \right] + \delta s \left[G \frac{\partial B}{\partial w} - B \frac{\partial G}{\partial w} + \right.$$

$$\left. + \frac{V_e}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial V} \frac{\partial B}{\partial w} - \frac{\partial B}{\partial V} \frac{\partial G}{\partial w} \right) \right] + G^2 + B^2 +$$

$$+ GV_e \frac{\partial G}{\partial V} + BV_e \frac{\partial B}{\partial V} = 0 \qquad (5\text{-}61)$$

La condición para que δs decaiga con el tiempo nos devuelve a las ecuaciones (5-47). Veamos ahora, desde el mismo punto de vista, las ecuaciones límites del oscilador inyectado bajo perturbaciones síncronas y asíncronas. Supongamos, en primer lugar, una perturbación síncrona en la tensión del oscilador:

$$v(t) = V_e \cdot e^{jw_e t} + \delta V \cdot e^{j(w_e t + \theta)} \qquad (5\text{-}62)$$

la condición de permanencia en el lazo de esta perturbación es; de acuerdo con (3-33):

$$H_{Nis}(V_e, w_e, \theta) = 0$$

es decir,

$$H_N(V_e, w_e) + \frac{V_e}{2} \frac{\partial H_N}{\partial V} (1 + e^{-j\theta}) = 0 \qquad (5\text{-}63)$$

Para una (V_e, w_e) dado, tenemos la ecuación de un círculo en el plano de Mikailov (Fig. 3-5). Concluimos, entonces que la oscilación perturbada no tendrá posibilidad de existencia cuando este círculo no pase por el origen del plano para este par de valores (V_e, w_e).

Consideremos ahora una perturbación asíncrona en la tensión del oscilador de la forma:

$$v(t) = V_e \cdot e^{jw_e t} + \delta V \cdot e^{jwt} \qquad (5\text{-}64)$$

De nuevo, de acuerdo con (3-35), la condición de permanencia de esta perturbación en el lazo es:

$$H_{Nia}(V_e, w) = 0$$

es decir:

$$H_N(V_e, w) + \frac{V_e}{2} \frac{\partial H_N}{\partial V} = 0 \qquad w \neq w_e \tag{5-65}$$

entonces, la ecuación anterior no se verificaría, en ningún caso, cuando el Hodógrafo equi-amplitud (V_e) no encierre el origen del plano de Mikailov para w variando desde $-\infty$ hasta ∞ .

V.4.- TRANSITORIO DE LA FASE

Hemos visto en el apartado anterior que las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un oscilador fuera de la inyección estable, suponiendo variables lentas, vienen dadas por (5-39), cuya resolución, para unas condiciones iniciales dadas, requiere la utilización de métodos numéricos. Afortunadamente, en gran parte de los osciladores microonda, las variaciones de la conductancia total con la frecuencia y de la susceptancia total con el nivel de amplitud son lentas con respecto del resto de las pendientes, por lo que en estos casos podemos escribir:

$$\frac{\partial G}{\partial w} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial B}{\partial V} = 0$$

con lo que (5-39) se reduce a:

$$I_e \cos\phi = \left[G(V, w_e) + \frac{\partial B}{\partial w} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \right] . V \tag{5-65-a}$$

$$-I_e \sin\varphi = \left[B(V,w_e) + \frac{\partial B}{\partial w} \frac{d\varphi}{dt} \right] \cdot V \qquad (5\text{-}65\text{-}b)$$

y particularizando el ancho de banda de inyección (5-43) para este caso nos resulta:

$$\delta wm = 2 \frac{I_e}{V_o} \left(\frac{\partial B}{\partial w} \right)^{-1} \qquad (5\text{-}66)$$

Sustituyendo (5-66) en (5-65-b) y desarrollando $B(V,w_e)$ en Taylor al primer orden alrededor de w_o tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{\delta wm}{2} \sin\varphi - \delta w_e \qquad (5\text{-}67)$$

$$\delta w_e = w_e - w_o$$

El estado estacionario $(d\varphi/dt)$ estará caracterizado por:

$$\sin\varphi_e = - \frac{2 \cdot \delta w_e}{\delta wm} \qquad (5\text{-}68)$$

La solución a la ecuación (5-67) puede escribirse como:

$$tg(\varphi/2) = - \frac{\delta wm}{2\,\delta w_e} + \frac{\sqrt{\delta wm^2 - 4\,\delta w_e^2}}{2\,\delta w_e} \cdot \qquad (5\text{-}69\text{-}a)$$

$$\cdot \; tgh \left[\frac{\sqrt{\delta wm^2 - 4\,\delta w_e^2}}{4} (t - t_o) \right] \; ; \; 2\,|\delta w_e| < |\delta wm|$$

$$tg(\varphi/2) = -\frac{\delta wm}{2\,\delta w_e} + \frac{\sqrt{4\,\delta w_e^2 - \delta wm^2}}{2\,\delta w_e} \cdot$$

(5-69-b)

$$\cdot\ tg\left[\frac{\sqrt{4\,\delta w_e^2 - \delta wm^2}}{4}(t - t_o)\right]; \quad 2|\delta w_e| > |\delta wm|$$

la ecuación (5-69-a) nos proporciona la variación transitoria que sufre la fase de la tensión del oscilador cuando inyectamos, en un instante dado t_o, con una señal de frecuencia w_e dentro del rango de inyección estable, con una fase inicial φ_o. Ya que la tangente hiperbólica varía entre -1 y 1, concluimos que la máxima desviación de fase inicial permisible para poder llegar al estado estacionario es:

$$tg\,\frac{\delta\varphi m}{2} = \frac{\sqrt{\delta wm^2 - 4\,\delta w_e^2}}{2\,\delta w_e} \qquad (5\text{-}70)$$

Para un valor de ancho de banda de inyección δwm dado, el ancho de banda de fase $\delta\varphi m$ permitido aumenta a medida que la variación en frecuencia δw_e disminuye. La Fig. (5-2) muestra esta variación máxima de fase en función de $K = -2\,\delta w_e / \delta wm$.

Observamos que si $|K|$ toma valores próximos a la unidad $\delta\varphi m$ tiende a hacerse nulo, obteniéndose la máxima desviación $\delta\varphi m \longrightarrow 180^o$ cuando $w_e \longrightarrow w_o$. Obviamente, si deseamos utilizar el oscilador inyectado como amplificador de señales moduladas en fase, deberemos de tener la portadora cercana a la frecuencia de oscilación libre para obtener in

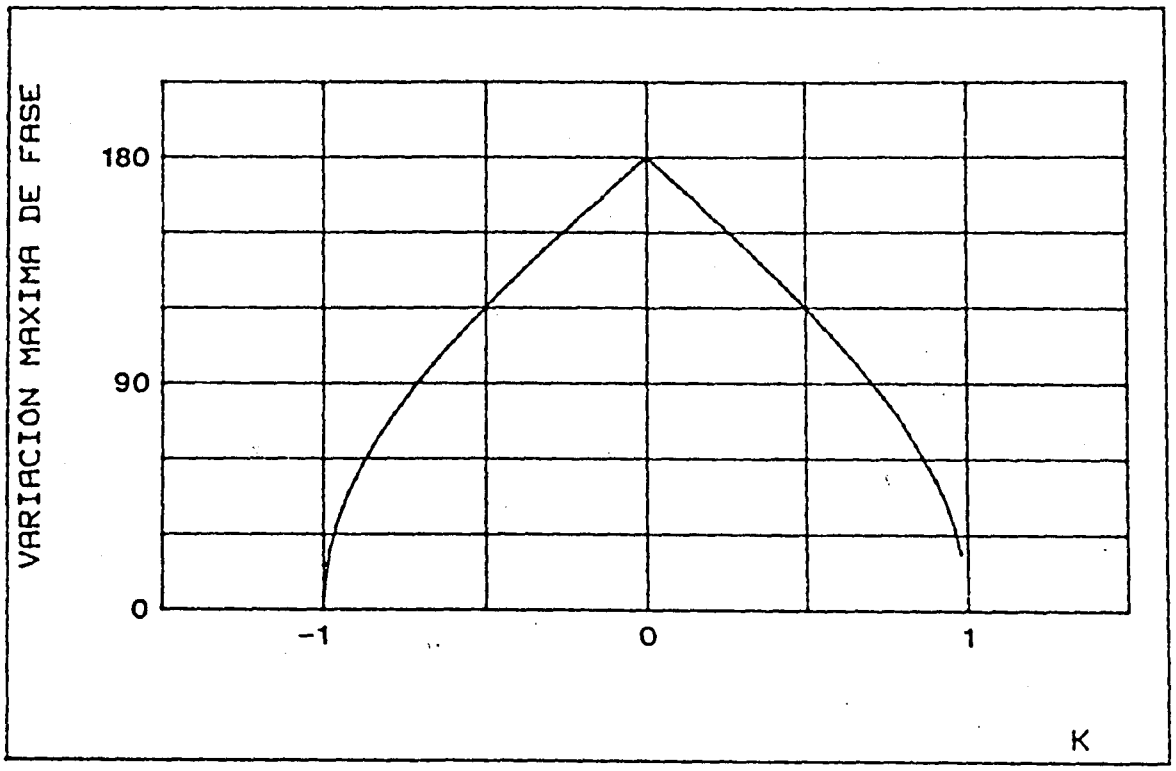


Fig. (5-2)

dices de modulación aceptables.

Por otro lado, notemos que la velocidad de respuesta del transitorio será, de nuevo, función de la diferencia de frecuencias en inyección δw_e y de la diferencia de fase inicial $\delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o$ entre el valor estacionario y el valor en el momento de conectar la fuente síncrona. La Fig. (5-3) nos muestra esta forma de variación para un δwm dado tomando δw_e como parámetro (el sentido de la flecha indica δw_e creciente) y suponiendo que en cada caso la fase inicial φ_o es la máxima desviación $\delta\varphi m$. La velocidad del transitorio crece a medida que la diferencial frecuencial disminuye, y este fenómeno puede apreciarse mejor si escribirmos

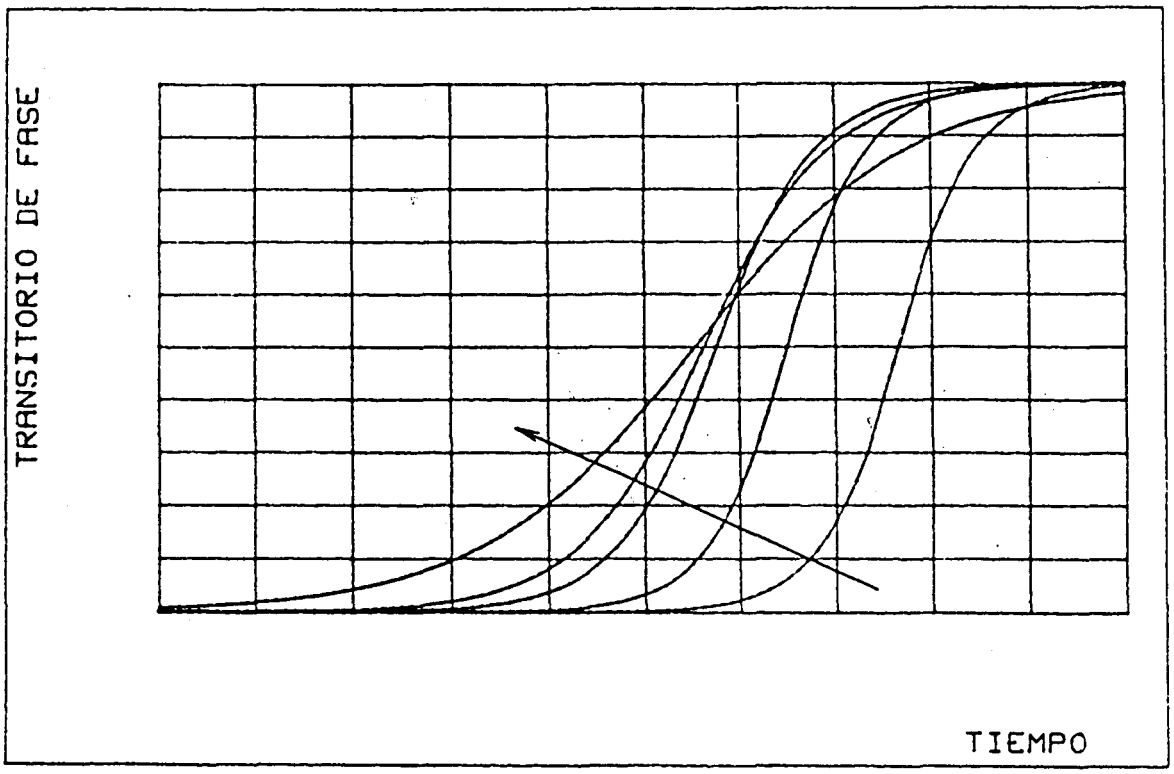


Fig. (5-3)

(5-65-a) de la siguiente forma:

$$\frac{2\delta w_e + \delta w_m \cdot \sin\varphi}{\delta wm + 2\delta w_e \sin\varphi - \sqrt{\delta wm^2 - 4\delta w_e^2}\cos\varphi} =$$

$$= \text{cte.} \exp \frac{t\sqrt{\delta wm^2 - 4\delta w_e^2}}{2} \qquad (5\text{-}71)$$

de donde podemos deducir una constante de tiempo aproximada:

$$Tau \cong - \frac{2}{\sqrt{\delta wm^2 - 4 . \delta w_e^2}} \qquad (5\text{-}72)$$

la cual, crece asintóticamente a medida que nos acercamos a los extremos de la banda de sincronia estable.

En el caso particular en que $\delta w_e = 0$, la solución (5-65-a) se reduce a:

$$tg \frac{\varphi}{2} = tg \frac{\varphi_o}{2} \; e^{- \frac{\delta wm}{2} t} \qquad (t_o = 0) \qquad (5\text{-}73)$$

siendo su constante de tiempo:

$$Tau = \frac{2}{\delta wm} \qquad (5\text{-}74)$$

La velocidad de respuesta es función del ancho de banda de inyección estable y de la fase inicial con que sincronizamos. Las Figs. (5-4) y (5-5) nos muestran un ejemplo típico de estos transitorios tomando como parámetro la fase inicial φ_o y el ancho de banda de sincronía respectivamente. Las flechas indican sentido creciente de los parámetros.

De las figuras se desprende que el oscilador más apto para amplificar señales moduladas en fase es aquel que tiene un ancho de banda de sincronización mayor.

Consideremos ahora el caso en que la frecuencia de inyección está fuera de la banda de sincronía estable. Para este caso, deberemos de utilizar la ecuación (5-69-b) donde notamos que, a diferencia del problema anterior, la variación temporal del $\varphi/2$ no es asintótica sino periódica debi-

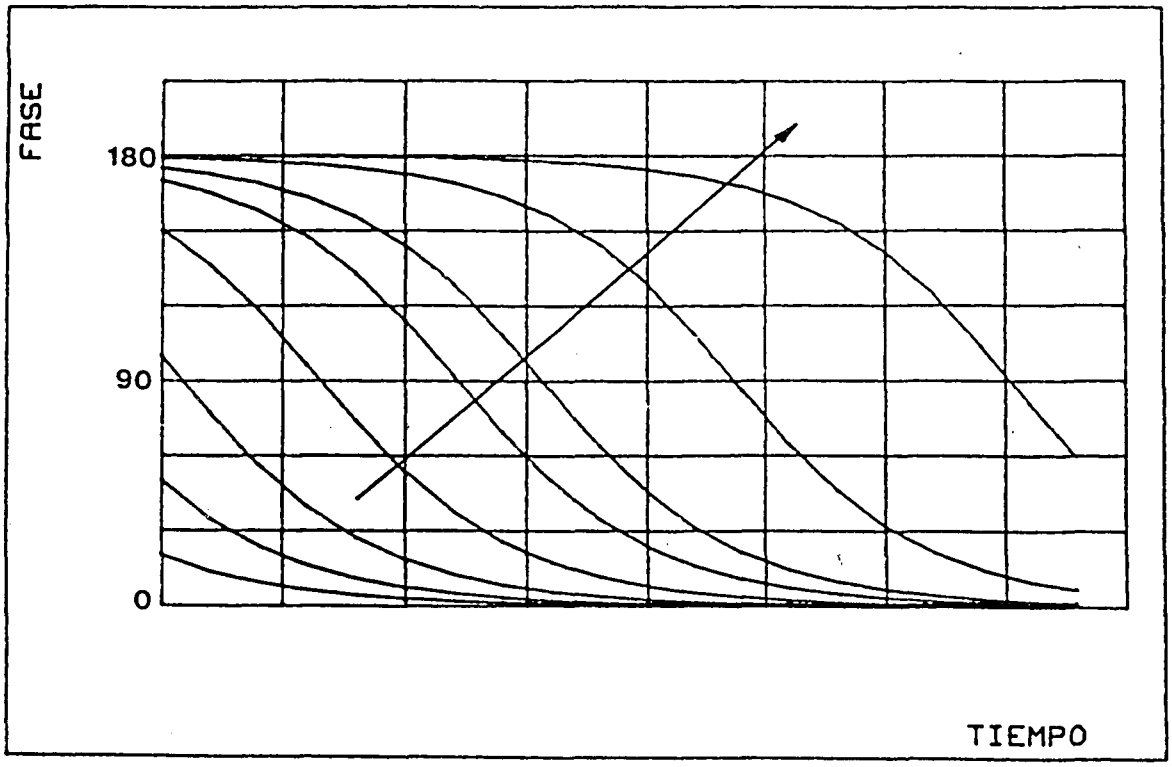


Fig. (5-4)

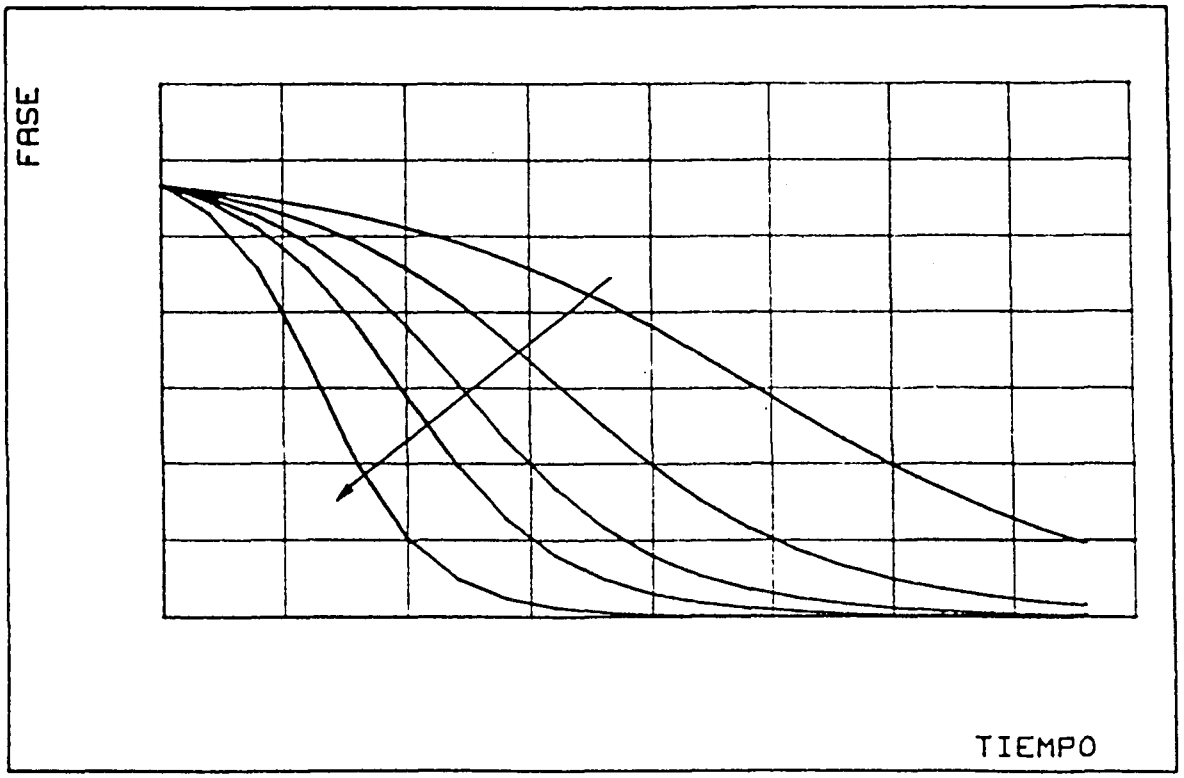


Fig. (5-5)

do a la oscilación de la tangente. La forma de onda de tensión en el oscilador, normalizando la amplitud, es:

$$v(t) = e^{j(w_e t + \varphi(t))} \qquad (5\text{-}75)$$

llamando

$$\sin\theta = -\frac{\delta wm}{2\delta w_e} \qquad \delta W = -\delta w_e \cos\theta \qquad (-90 < \theta < 90) \qquad (5\text{-}76)$$

y sustituyendo en (5-69-b), tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sin\theta + \cos\theta \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{\delta W}{2} t\right] \qquad (5\text{-}77)$$

Por otro lado:

$$e^{j\varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}(\varphi/2)}{1 - j\operatorname{tg}(\varphi/2)} =$$

$$= \frac{\cos(\delta Wt/2) + j \sin(\delta Wt/2 + \theta)}{\cos(\delta Wt/2) - j \sin(\delta Wt/2 + \theta)} \qquad (5\text{-}78)$$

siendo su desarrollo de Fourier:

$$e^{j\varphi} = j \operatorname{tg}(\theta/2) + \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\theta/2)}{j \operatorname{tg}(\theta/2)} \sum_{n=1} (j.\operatorname{tg}(\theta/2)^n . e^{jn(\delta Wt+\theta)} \qquad (5\text{-}79)$$

luego la señal en el oscilador será:

$$v(t) = j\ tg(\theta/2)e^{jw_e t} + (1 - tg^2(\theta/2)).$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (j\ tg(\theta/2))^{n-1} \cdot e^{j(w_e t + n(\delta W t + \theta))} \qquad (5\text{-}80)$$

A la vista del presente desarrollo observamos una componente a la frecuencia w_e (n = 0) cuya amplitud decrece con la variación frecuencial δw_e. La componente n = 1 a la frecuencia $w_e + \delta W$ crece asintóticamente desde el límite del rango estable, hasta un valor normalizado unidad, a medida que δw_e crece. Si δw_e es suficientemente grande $\delta W = -\delta w_e$ y la componente frecuencial n = 1 se reduce a w_o. El resto de las componentes existen a frecuencias $w_e + n.\delta W$ (n = 2, 3 ...) y sus amplitudes relativas decrecen a medida que aumentamos n, pasando éstas por un máximo y luego tendiendo asintóticamente a cero a medida que la desviación en frecuencia crece.

La Fig. (5-6) muestra un ejemplo típico de amplitudes relativas de las componentes n = 0, 1, 2, 3, 4 en función de δw_e. Las Figs. (5-7), (5-8) y (5-9) representan las variaciones relativas de las componentes a n = 0, 1, 3 respectivamente, en función de δw_e, tomando δwm como parámetro. (Las flechas indican sentido creciente del parámetro).

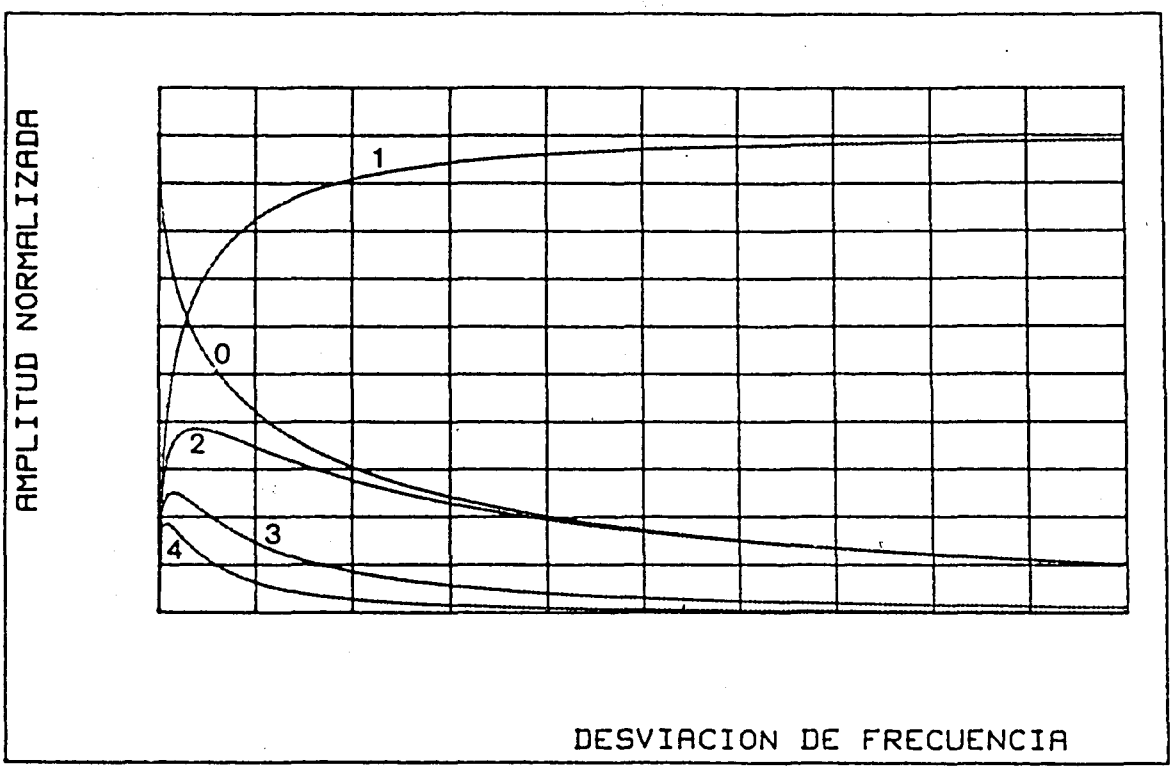

AMPLITUD NORMALIZADA
1
0
2
3
4
DESVIACION DE FRECUENCIA

Fig. (5-6)

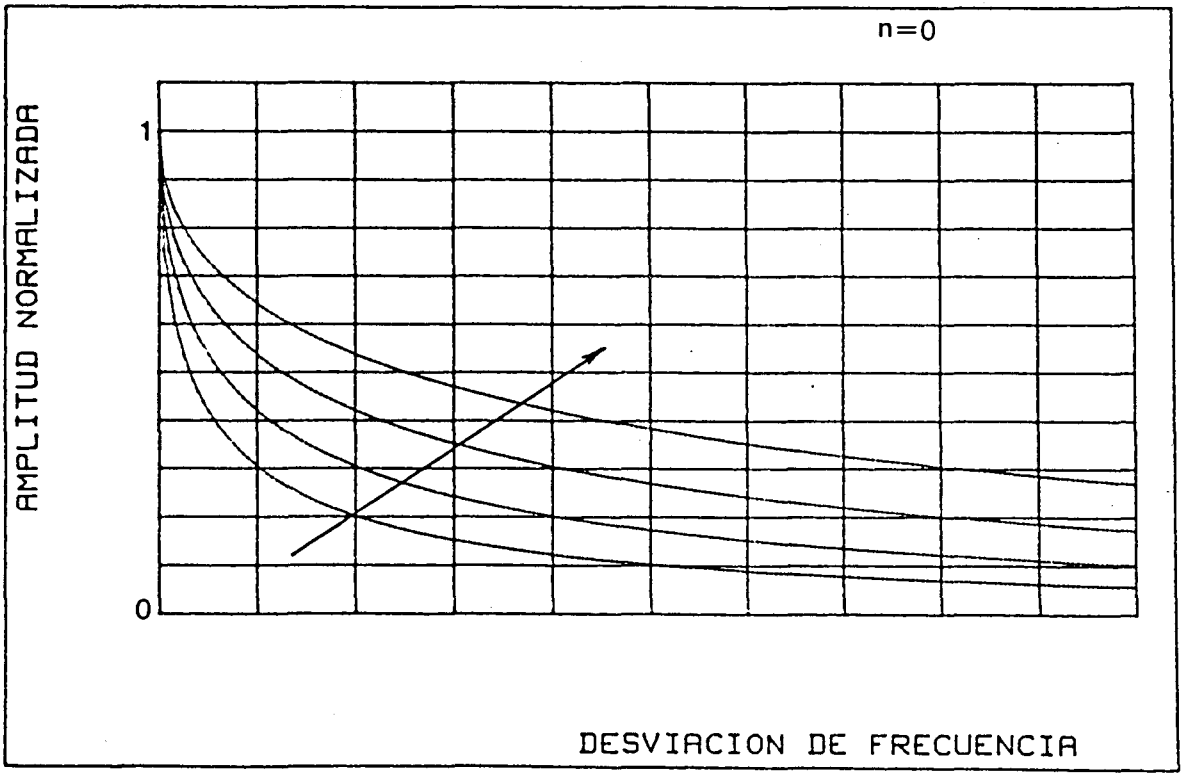

n=0
AMPLITUD NORMALIZADA
1
0
DESVIACION DE FRECUENCIA

Fig. (5-7)

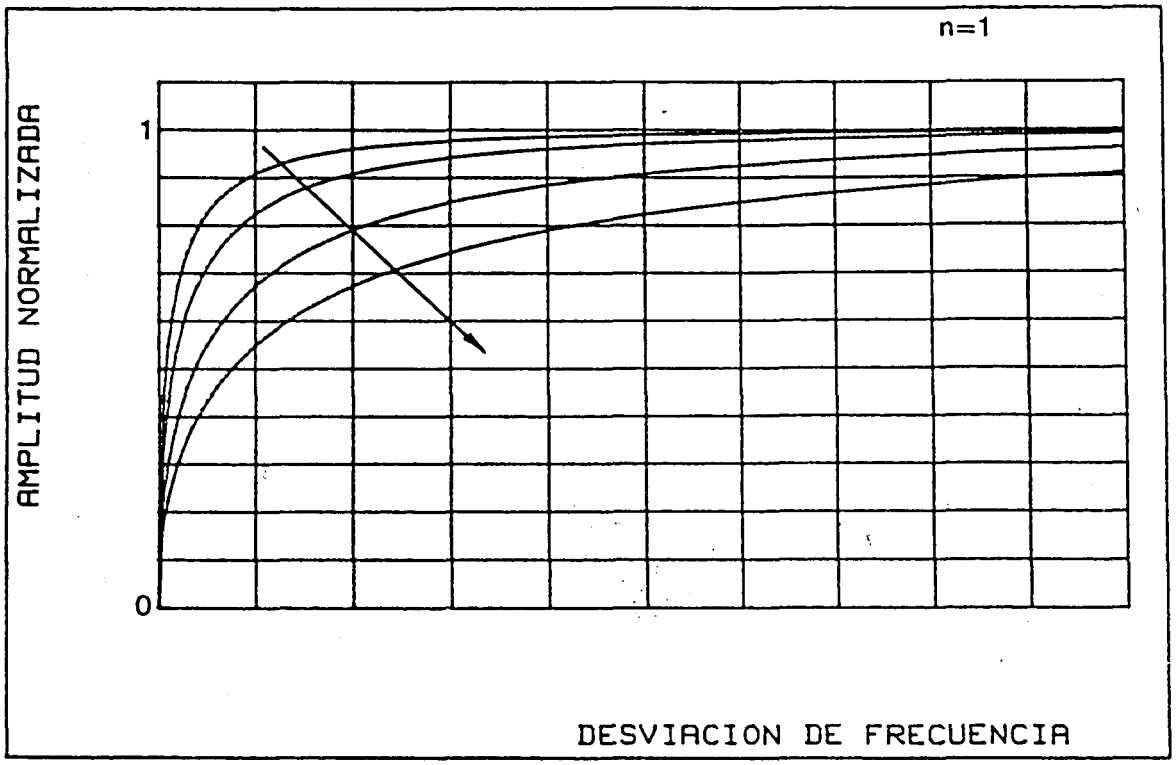

n=1
AMPLITUD NORMALIZADA
1
0
DESVIACION DE FRECUENCIA

Fig. (5-8)

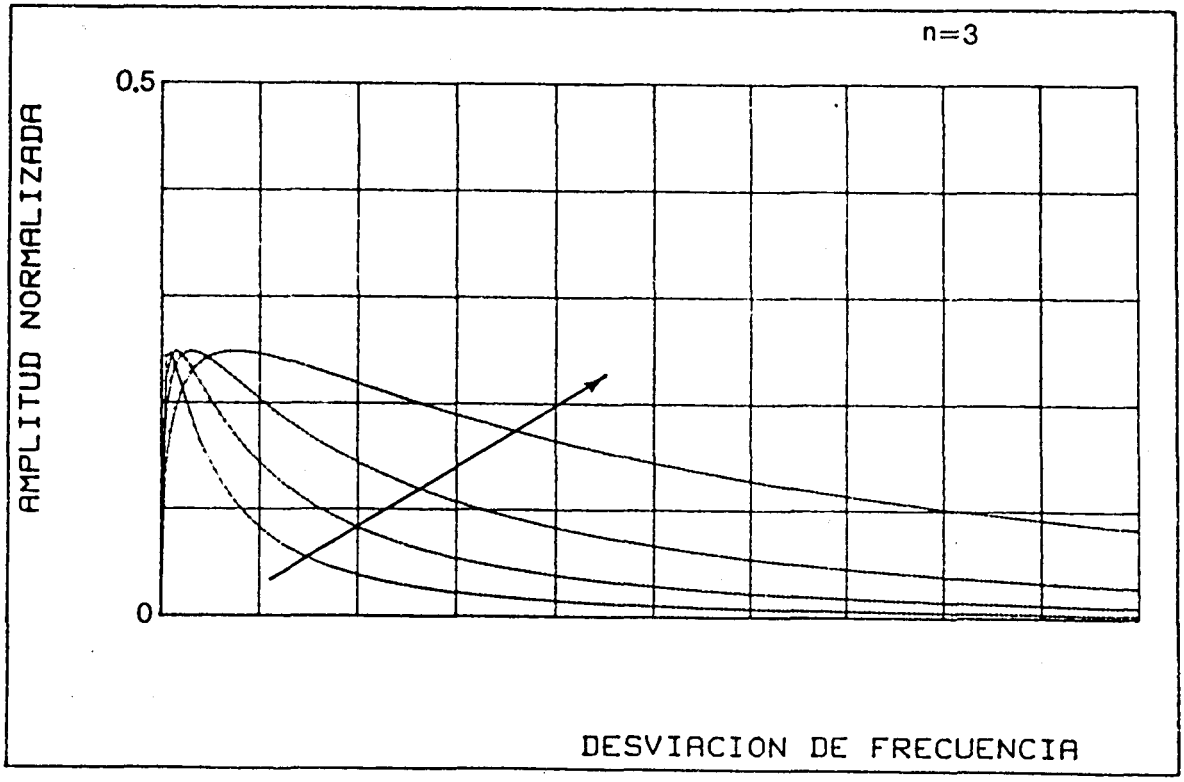

n=3
AMPLITUD NORMALIZADA
0.5
0
DESVIACION DE FRECUENCIA

Fig. (5-9)

V.5.- SENSIBILIDAD FRENTE A LA CARGA (FULLING)

Los cambios en la razón de ondas estacionarias ó en la fase del circuito de carga de un oscilador pueden desviar la frecuencia de oscilación. Este efecto se observa a menudo cuando el oscilador está conectado a un conmutador, un multiplexor, etc. En este apartado se va a calcular, desde el punto de vista de la Función Descriptiva, el comportamiento del oscilador frente a variaciones periódicas en el circuito de carga.

Para simular una carga periodicamente variable acudiremos, entre otros sistemas, a un atenuador mdb seguido de una sección de línea cortocircuitada de impedancia característica idéntica a la impedancia de carga del oscilador no perturbado, tal como se muestra en la Fig. (5-10)

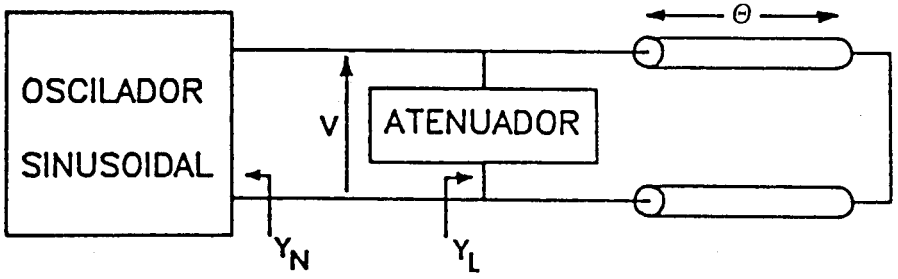


Fig. (5-10)

La nueva admitancia de carga Y_L vista en el plano de salida es:

$$Y_L = Y_o \frac{1 - \overline{r}_L}{1 + \overline{r}_L} = Y_o \frac{1 - r_L^2 - j2r_L \sin\varphi}{1 + r_L^2 - 2r_L \cos\varphi} \qquad (5\text{-}81)$$

donde:

$$\overline{r}_L = -r_L \cdot e^{-j2\theta} \quad ; \quad m = -10 \log r_L \quad ; \quad \varphi = 2\theta$$

La variación sufrida en la admitancia de carga $Y_L = G_L + j\,B_L$ es:

$$\delta G_L = Y_o \frac{2r_L(\cos\varphi - r_L)}{1 + r_L^2 - 2r_L\cos\varphi}$$

$$\delta B_L = -Y_o \frac{2r_L \sin\varphi}{1 + r_L^2 - 2r_L\cos\varphi} \qquad (5\text{-}82)$$

y ya que $r_L = (S-1)/(S+1)$ siendo S la razón de ondas estacionarias de la carga, podemos escribir:

$$\delta G_L = Y_o \frac{(S^2-1)\cos\varphi - (S-1)^2}{(S^2+1) - (S^2-1)\cos\varphi}$$

$$\delta B_L = -Y_o \frac{(S^2-1)\sin\varphi}{(S^2+1) - (S^2-1)\cos\varphi} \qquad (5\text{-}83)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (5-25) que nos definen el nuevo estudio de equilibrio perturbado; obtenemos:

$$\delta w = \frac{2Y_o}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \frac{\frac{\partial B}{\partial V}\left[(S^2-1)\cos\varphi - (S-1)^2\right] + \frac{\partial G}{\partial V}\cdot(S^2-1)\sin\varphi}{(S^2+1) - (S^2-1)\cos\varphi}$$

$$\delta V = \frac{-2Y_o}{\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w} \frac{\frac{\partial G}{\partial w}\cdot(S^2-1)\sin\varphi + \frac{\partial B}{\partial w}\left[(S^2-1)\cos\varphi - (S-1)^2\right]}{(S^2+1) - (S^2-1)\cos\varphi} \qquad (5\text{-}84)$$

ecuaciones que, combinadas en (5-33) y (5-34), nos definen una elipse de pulling en el plano ($\delta V, \delta w$):

$$\left|\overline{H}_V\right|^2 \delta V^2 + \left|\overline{H}_w\right|^2 \delta w^2 + \overline{H}_V \cdot \overline{H}_w \, \delta V \cdot \delta w +$$

$$+ Y_o \frac{\partial G}{\partial V} \frac{(S-1)^2}{S} \delta V + Y_o \frac{\partial G}{\partial w} \frac{(S-1)^2}{S} \delta w - Y_o^2 \frac{(S-1)^2}{S} = 0 \qquad (5\text{-}85)$$

con centro en:

$$\delta V_o = - \frac{Y_o (S-1)^2}{2S} \frac{\partial B/\partial w}{\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w}$$

$$\delta w_o = \frac{Y_o (S-1)^2}{2S} \frac{\partial G/\partial V}{\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w} \qquad (5\text{-}86)$$

Para el cálculo de los puntos importantes de la elipse, es conveniente escribir δw y δV de (5-84) en función de $tg\phi$:

$$\delta w = \frac{2Y_o}{\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w} \frac{\frac{\partial B}{\partial V} \cdot (S-1)(1-Stg^2\theta) - \frac{\partial G}{\partial V} \cdot (1-S^2) tg\phi}{1 + S^2 \, tg^2\theta}$$

$$\delta V = \frac{-2Y_o}{\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w} \frac{\frac{\partial G}{\partial w} \cdot (S+1) tg\theta - \frac{\partial B}{\partial w} \left[Stg^2\phi - 1 \right]}{1 + S^2 \, tg^2\theta} \qquad (5\text{-}87)$$

siendo:

$$\delta G_L = \frac{Y_o\,(S-1)(1-S\,tg^2\theta)}{1 + S^2 tg^2\theta}$$

$$\delta B_L = \frac{Y_o(1-S^2)\,tg\theta}{1 + S^2 tg^2\theta} \qquad (5\text{-}88)$$

Los puntos de desviación nula de frecuencia se calculan haciendo $\delta w = 0$ en (5-87) lo que implica:

$$tg\theta(\delta w=0) = \frac{\frac{\partial G}{\partial V}(S+1) \pm \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)^2 (S+1)^2 + 4S\left(\frac{\partial B}{\partial V}\right)^2}}{2S\,\frac{\partial B}{\partial V}} \qquad (5\text{-}89)$$

Analogamente, los puntos de variación nula de amplitud se calculan de (5-87):

$$tg\theta(\delta V=0) = \frac{\frac{\partial G}{\partial w}(S+1) \pm \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2 (S+1)^2 + 4S\left(\frac{\partial B}{\partial w}\right)^2}}{2S\,\frac{\partial B}{\partial w}} \qquad (5\text{-}90)$$

La variación maxima de frecuencia que se puede conseguir para un valor determinado de razón de ondas estacionarias se deduce derivando δw de (5-87) respecto de θ e igualando a cero:

$$tg\theta\left(\frac{d\delta w}{d\theta} = 0\right) = -\frac{\frac{\partial B}{\partial V} \pm |\overline{H}_V|}{S \cdot \frac{\partial G}{\partial V}} \qquad (5\text{-}91)$$

y sustituyendo esta expresión de tgθ en (5-87) tenemos las dos frecuencias extremas:

$$\delta w_1 = \frac{Y_o(S-1)}{2S} \quad \frac{\left[\left|\overline{H}_V\right| - \frac{\partial B}{\partial V}\right]^2 + S\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)^2}{\left[\left|\overline{H}_V\right| - \frac{\partial B}{\partial V}\right]\left[\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w\right]}$$

$$\delta w_2 = \frac{Y_o(1-S)}{2S} \quad \frac{\left[\left|\overline{H}_V\right| + \frac{\partial B}{\partial V}\right]^2 + S\left(\frac{\partial G}{\partial V}\right)^2}{\left[\left|\overline{H}_V\right| - \frac{\partial B}{\partial V}\right]\left[\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w\right]} \qquad (5\text{-}92)$$

de donde se deduce el ancho de banda del pulling:

$$\delta wm = \delta w_1 - \delta w_2 = \frac{Y_o \left|\overline{H}_V\right|}{\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w}\left(S - \frac{1}{S}\right) \qquad (5\text{-}93)$$

La variación máxima de amplitud Vm se calculará análogamente haciendo nula la derecha de δV respecto de φ e igualando a cero:

$$tg\theta\left(\frac{d\delta V}{d\theta} = 0\right) = \frac{\frac{\partial B}{\partial w} \pm \left|\overline{H}_w\right|}{S \cdot \frac{\partial G}{\partial w}} \qquad (5\text{-}94)$$

y sustituyendo en la expresión de V obtenemos los dos puntos extremales de amplitud:

$$\delta V_1 = \frac{Y_o(S-1)}{2S} \quad \frac{\left[\left|\overline{H}_w\right| - \frac{\partial B}{\partial w}\right]^2 + S\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2}{\left[\left|\overline{H}_w\right| - \frac{\partial B}{\partial w}\right]\left[\left(\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w\right)\right]}$$

$$\delta V_2 = \frac{Y_o(S-1)}{2S} \; \frac{\left[\left|\overline{H}_w\right| + \frac{\partial B}{\partial w}\right]^2 + S\left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^2}{\left[\left|\overline{H}_w\right| + \frac{\partial B}{\partial w}\right] \cdot \left(\overline{H}_v \wedge \overline{H}_w\right)}$$

de donde se deduce la variación máxima en amplitud:

$$\delta Vm = \delta V_1 - \delta V_2 = \frac{Y_o \left|\overline{H}_w\right|}{\overline{H}_V \wedge \overline{H}_w} \left(\frac{S^2 - 1}{S}\right) \qquad (5\text{-}96)$$

En lo visto hasta el momento, hemos calculado matemáticamente los puntos sobre la elipse de pulling. Realmente, la estabilidad de estos puntos dependerá en gran parte del método de medida, pudiendo ocurrir que solamente una parte de la elipse sea estable.