



Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Física  
Grup de Física Teòrica

# Algunes Aplicacions Fenomenològiques dels Lagrangians Efectius<sup>1</sup>

Rafel Escribano  
Universitat Autònoma de Barcelona  
Institut de Física d'Altes Energies  
E-08193 Bellaterra (Barcelona)

juny del 1996

---

<sup>1</sup>Memòria presentada com a Tesi Doctoral per a optar al grau de Doctor en Ciències Físiques per la Universitat Autònoma de Barcelona.

N'Eduard Massó i Soler, Professor Titular de Física Teòrica de la Facultat de Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona,

CERTIFICA: Que la present memòria, que porta per títol "Algunes Aplicacions Fenomenològiques dels Lagrangians Efectius", ha estat realitzada sota la seva direcció per en Rafel Escribano i Carrascosa i que constitueix la seva Tesi Doctoral per a optar al Grau de Doctor en Ciències Físiques per la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, juny del 1996

Eduard Massó i Soler

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>3</b>
1.1	Introducció històrica . . . . .	4
1.2	El Model Estàndard . . . . .	8
1.3	Més enllà del Model Estàndard . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Lagrangians Efectius</b>	<b>17</b>
2.1	Introducció i exemples . . . . .	17
2.2	El lagrangiana d'Euler-Heisenberg . . . . .	22
2.3	Definició i propietats . . . . .	25
2.4	Parametrització lineal . . . . .	28
2.5	Parametrització quirals . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Algunes Aplicacions Fenomenològiques dels Lagrangians Efectius</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>New Bounds on the Magnetic and Electric Moments...</b>	<b>40</b>
4.1	Introduction . . . . .	40
4.2	Bound on $a_\tau$ . . . . .	42
4.3	Bound on $d_\tau$ . . . . .	45
4.4	Conclusions . . . . .	46

---

<b>5</b>	<b>Constraints on Fermion Magnetic and Electric Moments from LEP-I</b>	<b>49</b>
5.1	Introduction . . . . .	49
5.2	Linear effective Lagrangian analysis of fermion moments . . . . .	51
5.3	Bounds on the magnetic and electric moments . . . . .	54
5.4	Non-linear effective Lagrangian approach . . . . .	66
5.5	Conclusions . . . . .	67
<b>6</b>	<b>High Precision Tests of QED and Physics beyond...</b>	<b>71</b>
6.1	Introduction . . . . .	71
6.2	The electron anomalous magnetic moment . . . . .	73
6.3	The muon anomalous magnetic moment . . . . .	75
6.4	The Lamb shift . . . . .	75
6.5	Muonium hyperfine splitting . . . . .	77
6.6	Summary and discussion . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>Integració dels Camps Pesats</b>	<b>84</b>

# Capítol 1

## Introducció

L'experiència adquirida en els molts anys de recerca en física de partícules ens ha acostumat a la situació d'assumir que les teories que construïm hem de considerar-les únicament com a provisionals. Les teories són posades a prova, i es comprova la seva validesa per explicar correctament els fenòmens naturals fins a una determinada escala d'energia o distància. Malgrat això, no coneixem el comportament d'aquestes teories en situacions extremes (energies més elevades o equivalentment distàncies més curtes) ni si seguiran essent vàlides en aquestes situacions. Hi han exemples de teories que han estat substituïdes per noves teories a alta energia, i és d'esperar que aquest procés continui.

El Model Estàndard electrofeble n'és un exemple. Durant gairebé trenta anys ha estat l'única teoria consistent capaç de descriure de manera senzilla i precisa les interaccions electrofebles entre les partícules elementals. L'acord entre teoria i experiment ha permès comprovar clarament que el rang de validesa del model s'estén fins a energies de l'ordre de 100 GeV. A pesar de l'èxit assolit, existeix la convicció ferma de què ha de ser substituït per un model més complet capaç de respondre els interrogants que planteja, i que alhora haurà de ser vàlid en un règim d'energia superior. A l'espera d'un model teòric alternatiu, una de les maneres més interessants i generals de parametritzar els efectes a baixa energia d'una possible nova dinàmica és la utilització dels anomenats Lagrangians efectius.

En la tesi doctoral que presentem a continuació mostrarem, com el seu títol anuncia, algunes aplicacions fenomenològiques dels Lagrangians efectius. En particular, centrarem la nostra discussió en dos grans apartats: d'una banda, l'aplicació del

mètode dels Lagrangians efectius a l'estudi de les propietats electromagnètiques de les partícules elementals (leptons i quarks); d'altra banda, usarem els Lagrangians efectius en determinats observables d'alta precisió d'electrodinàmica quàntica per extreure dades força interessants sobre la rellevància d'aquests experiments alhora de detectar la presència de nova física més enllà del Model Estàndard.

L'esquema de la tesi és el següent. Tot seguit en aquest capítol i a fi de discutir el concepte de provisionalitat de les teories esmentat al principi, exposarem breument el desenvolupament històric de les teories físiques que van acabar configurant l'actual Model Estàndard electrofeble. Seguirem amb la presentació del Model Estàndard com a model fenomenològic vigent i enunciaré els problemes que pateix. Finalment, comentarem els possibles models alternatius. En el capítol 2 introduïrem el mètode dels Lagrangians efectius mitjançant exemples i direm què són, per a què serveixen i quines propietats tenen, així com també exposarem les possibles realitzacions. El capítol 3 consistirà en una presentació i breu explicació sobre els continguts dels treballs publicats, els quals ocuparan els capítols 4, 5 i 6. Finalment en el capítol 7 presentarem les conclusions de la nostra recerca.

## 1.1 Introducció històrica

La ciència va nèixer de la curiositat humana envers la Natura. L'home, atret des de bon principi pels fenòmens naturals, s'ha capficat sempre en donar una explicació raonada al perquè d'aquests fenòmens. Una qüestió profunda i fonamental per entendre el funcionament de la natura és: de què està fet el món?

La recerca actual en física de partícules representa l'esforç més ambiciós i organitzat de l'home per a respondre la qüestió anterior. Primeres respostes a aquest misteri inclouen la solució proposada per Anaxímenes de Milet per a qui totes les formes de matèria s'obtenien per condensació o rarefacció de l'aire. La resposta de Mendeleev sorgí 25 segles després: tota la matèria s'obté a partir d'un centenar d'elements químics. El model d'Anaxímenes sobre l'estructura fonamental de la matèria és clarament superior conceptualment degut a la seva simplicitat i economia en el nombre de constituents elementals, però pateix d'un greu problema: és equivocada. La resposta de Mendeleev és encertada però massa complicada com per representar la solució "última" o fonamental. La proliferació d'elements i l'aparent sistematització de la seva taula suggereix l'existència d'una subestructura. Ara

sabem que els elements de la taula de Mendeleev estan proveïts d'una estructura més fonamental: electrons, i nuclis formats per protons i neutrons.

Així doncs, la resposta correcta a la pregunta de què està fet el món ha de tenir la simplicitat conceptual de la solució d'Anaxímenes però alhora ha de ser quantitativa i en acord amb els fets experimentals. Si situem el començament de l'era moderna de la física de partícules el 1947, any que el pió fou descobert, llavors els successius anys de recerca ens han revelat l'existència d'una descripció senzilla i consistent de la natura. Aquesta descripció, anomenada **Model Estàndard** de les interaccions fonamentals entre les partícules elementals, sembla ser la resposta actual més coherent al misteri formulat, i a més gaudeix de la simplicitat i concordança requerides amb els fets experimentals.

El Model Estàndard és la culminació d'una sèrie d'experiments que abracen els camps de la física atòmica, nuclear, de raigs còsmics, i d'alta energia. Aquest esforç experimental s'origina a finals del segle passat, però fou únicament una sèrie de descobriments importants de dues dècades ençà els que ens guiaren directament al món dels quarks, leptons, i bosons de gauge.

El marc teòric adient per circumstanciar el Model Estàndard és la **Teoria Quàntica de Camps (TQC)**, artífici matemàtic fruit de la confluència de la Mecànica Quàntica, imprescindible per a la descripció de les partícules elementals, i de la Relativitat Especial, indispensable per a introduir la idea de camp com a propagador de la interacció entre partícules. Aquest nou marc teòric de treball era necessari per traslladar els desenvolupaments conceptuals a un esquema calculacional quantitatiu. Clarament, l'equació quàntica de Schrödinger no podia explicar la creació i anihilació de partícules observades en la desintegració del neutró, ni tampoc era capaç de descriure les partícules altament relativistes que es trobaven en els experiments habituals de raigs còsmics.

Resseguint la història de la física de partícules, el primer exemple de teoria quàntica de camps és l'**electrodinàmica quàntica (QED)**, introduïda a principis dels anys 30. La *QED* descriu de manera simple i consistent la interacció electromagnètica entre partícules carregades elèctricament. La quantificació del camp electromagnètic clàssic autoritza la interpretació de la interacció electromagnètica com un bescanvi de partícules mitjanceres; en el cas de la *QED* la partícula bescanviadora és el fotó.

A part de la interacció electromagnètica existeixen la interacció feble, responsable

de la desintegració  $\beta$  radioactiva dels nuclis atòmics, i la interacció forta o nuclear, garant de la cohesió existent entre els protons i neutrons nuclears.

La desintegració  $\beta$  fou la primera evidència experimental coneguda d'interacció feble. L'explicació de Fermi (1932) a aquest nou tipus d'interacció es basa en un primer model inspirat en la interacció electromagnètica, on dos corrents vectorials carregats interactuen en un punt. Aquest primer model malgrat explicar les propietats d'alguns trets de la desintegració  $\beta$  no era satisfactori. Durant els següents 25 anys, els intents per a discernir l'autèntica forma de les interaccions febles dugueren a una sèrie d'enginyosos experiments sobre desintegració  $\beta$  que assoliren el punt culminant amb el descobriment de la violació de paritat el 1956. Sorprenentment, l'únic canvi essencial requerit en la proposta original de Fermi era reemplaçar l'estructura vectorial  $\gamma^\mu$  per una estructura del tipus  $V - A$ :  $\gamma^\mu(1 - \gamma_5)$ <sup>1</sup>. La teoria  $V - A$  de Fermi funcionà perfectament durant molts anys sense cap indici de ser incorrecta, i a pesar de l'èxit assolit, s'ha de considerar únicament com un model fenomenològic vàlid en el límit de baixa energia d'una teoria quàntica de camps més general de les interaccions febles i electromagnètiques anomenada **Model Estàndard electrofeble**.

La cohesió entre protons i neutrons insinuà l'existència d'una nova interacció a escales nuclears diferent de l'electromagnètica i de la feble. Un primer intent d'explicació de la força forta fou inspirat per Yukawa (1934); fent ús de la relació d'incertesa d'Heisenberg<sup>2</sup> estimava la massa del bescanviador fort en uns 200 MeV. El descobriment del pió amb una massa similar a la predita per Yukawa avalà inicialment la seva teoria. La proliferació de partícules "elementals" sensibles a la interacció forta aplegà ràpidament vora un centenar de *barions*, dels quals el protó i el neutró n'eren únicament els estats fermiònics més lleugers. Un nombre igual

<sup>1</sup>Fermi no havia previst la violació de paritat i per tant no hi havia cap raó per incloure una contribució  $\gamma^\mu\gamma_5$ ; una mescla de termes  $\gamma^\mu$  i  $\gamma^\mu\gamma_5$  automàticament viola la conservació de paritat.

<sup>2</sup>El principi d'incertesa d'Heisenberg  $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$  permet estimar la massa del bescanviador de la interacció conegut l'abast d'aquesta. Si la interacció forta es produeix en l'interior del nucli, l'abast és  $r \approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ , llavors posant  $r = c\Delta t$ , la massa del bescanviador ha de ser de l'ordre de

$$m_\pi c^2 \approx \frac{\hbar c}{r} \approx 200 \text{ MeV} .$$

En el cas de la interacció feble l'abast és encara més curt; com a conseqüència d'això, la massa del bescanviador és molt superior a la massa del pió, de fet és de l'ordre de 100 GeV. L'energia involucrada en una desintegració  $\beta$  és molt inferior a la massa anterior, llavors la interacció de Fermi pot considerar-se puntual.



d'estats bosònics anomenats *mesons* foren també descoberts. Aquesta proliferació d'*hadrons* (barions més mesons) apuntava cap a una subestructura dels nucleons (els *quarks*) en una repetició similar dels arguments d'àtoms compostos, basada en la taula de Mendeleev. D'acord amb el model de quarks, tots els hadrons estan constituïts per unes entitats bàsiques, anomenades quarks, seguint un patró molt senzill: tres quarks formen un barió i una parella quark-antiquark formen un mesó. Posteriors refinaments del model de quarks basats en la introducció del concepte de càrrega de color per evitar el problema estadístic de la configuració del barió  $\Delta^{++}$ , i el principi pel qual s'afirma que totes les partícules observables a la natura han de ser "incolores", desembocaren finalment en una teoria quàntica de camps anomenada **cromodinàmica quàntica (QCD)**, anàloga a *QED*, que descriurà consistentment la interacció forta entre els quarks.

Com hem relatat, les interaccions fonamentals de la natura a excepció de la gravetat poden descriure's mitjançant teories quàntiques de camps tals com *QED*, *QCD* o el model electrofeble. Aquestes teories s'assenten en dues propietats fonamentals: la invariància gauge i la renormalitzabilitat. D'una banda, la **invariància gauge** es basa en el principi gauge el qual estableix que *la dependència espacio-temporal de la fase dels camps carregats és inobservable*<sup>3</sup>. Obligar a una teoria inicialment lliure (sense interacció) a ser invariant gauge força la introducció d'uns camps vectorials anomenats camps de gauge que provoquen l'emergència de manera simple i natural de la interacció entre les partícules. Prenent com a exemple la *QED*, la invariància gauge  $U(1)_{em}$  obliga la introducció del fotó, i genera la interacció electromagnètica entre partícules carregades elèctricament. D'altra banda, la **renormalitzabilitat** de la teoria garanteix prediccions finites a qualsevol ordre en teoria de pertorbacions<sup>4</sup>.

L'enorme èxit assolit per la *QED*, fonamentat en l'acord entre les seves prediccions teòriques i els resultats experimentals (en el cas del moment magnètic anòmal de l'electró l'acord arriba fins a la vuitena xifra significativa), li ha valgut el títol simbòlic de teoria més perfecta mai construïda, i ha esdevingut un paradigma teòric a imitar per altres teories quàntiques de camps. Un exemple actual i fonamental de la descripció de la natura és el Model Estàndard.

---

<sup>3</sup>Quan ens referim a càrrega s'ha d'entendre un tipus concret de càrrega gènérica, com pot ser la càrrega elèctrica, la càrrega de color, l'isospin feble o la hipercàrrega feble.

<sup>4</sup>La renormalitzabilitat es basa en la capacitat de la teoria per absorbir els infinits que generen les correccions radiatives mitjançant la redefinició d'un nombre finit de paràmetres (en el cas de *QED* els infinits generats són absorbits en la redefinició de la càrrega elèctrica  $e$  i la massa de l'electró  $m_e$ ).

## 1.2 El Model Estàndard

El Model Estàndard (ME) aparegut fa gairebé 30 anys és una teoria quàntica de camps basada en la simetria gauge  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , que detalla de manera senzilla i auto-consistent les interaccions electromagnètica, feble i forta entre les partícules elementals. A més d'acomodar totes les partícules elementals conegudes —quarks i leptons— integra de forma elegant totes les simetries i propietats fonamentals de l'electrodinàmica quàntica, la teoria  $V - A$  de Fermi i el model de quarks.

D'una banda, el Model Estàndard està constituït per l'anomenat Model Estàndard electrofeble el qual descriu les interaccions electrofebles, i que fou inicialment desenvolupat per Glashow, Weinberg i Salam [1]. Més tard, les interaccions electrofebles entre els quarks foren també introduïdes en la teoria per Glashow, Iliopoulos i Maiani [2]. En aquest model, les interaccions electromagnètica i feble estan unificades usant una teoria invariant gauge local basada en el grup de transformacions  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Per incloure les interaccions fortes entre quarks, mediatees per gluons, el model electrofeble incorpora la cromodinàmica quàntica ( $QCD$ ) [3], una teoria invariant gauge local sota el grup de simetria  $SU(3)_{\text{Color}}$ .

El Model Estàndard requereix com a *input* 19 paràmetres independents<sup>5</sup>; la seva presència imprescindible i el seu origen desconegut ja apunten clarament cap a la necessitat d'una teoria més general que aportí un coneixement més profund de la Natura. Malgrat aquest primer inconvenient, posseeix una rica estructura teòrica que funciona esplèndidament fins a energies de l'ordre del centenar de GeV —o en termes de longitud— fins a distàncies de l'ordre de  $10^{-16}$  cm, i a més sembla tenir suficient contingut com per descriure totes les dades existents a excepció de les dades provinents de la interacció forta a baixa energia, la qual continua essent un repte calculacional a resoldre.

Una llarga trajectòria d'experiments fructífers coronats amb l'evidència de l'existència dels corrents neutres el 1973 [4], i el descobriment dels bosons gauge intermediaris de la interacció electrofeble ( $W^\pm, Z^0$ ) al CERN el 1983 [5], confirmaren de bon

<sup>5</sup>Els 19 paràmetres independents són 3 masses dels leptons carregats, 6 masses dels quarks, 3 constants d'acoblament gauge, 3 angles de mescla entre els quarks i una fase complexa, la massa de l'Higgs i la constant d'acoblament quàrtic, i l'angle del buit de  $QCD$ .

principi les seves prediccions teòriques. Això li ha valgut el títol de Model Estàndard després de la seva acceptació com a model de referència amb què comparar futures mesures experimentals i noves teories alternatives més generals.

La simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  juga un paper primordial en la determinació de l'estructura dinàmica de la teoria. Partint originàriament d'una teoria lliure de quarks i leptons la imposició de la simetria gauge anterior obliga a la inclusió d'uns camps de gauge, els bosons febles  $W^\pm$ ,  $Z^0$  i el fotó  $\gamma$ , que provoquen l'emergència d'una nova teoria interactuant que engloba les interaccions feble i electromagnètica, i on els acoblaments entre els quarks i leptons i els bosons gauge estan definits de manera precisa i unívoca.

La imposició de la simetria gauge sobre el lagrangiana del Model Estàndard,  $\mathcal{L}_{SM}$ , presenta *a priori* un greu inconvenient: no permet l'aparició de termes de massa per a les partícules. És ben sabut però, que totes les partícules elementals, llevat del fotó i possiblement dels neutrins tenen massa. Aquest aparent obstacle es soluciona de forma elegant afegint al  $\mathcal{L}_{SM}$  un doblet d'escalars, anomenat doblet de Higgs, el qual mitjançant el mecanisme de Higgs [6] indueix un trencament espontani de la simetria gauge que genera les masses de les partícules. El preu a pagar és l'aparició d'una nova partícula: el bosó escalar de Higgs.

Així doncs, el **Model Estàndard Mínim** és una teoria gauge amb trencament espontani de la simetria, formada per tres famílies de fermions —quarks i leptons—, bosons gauge —mediadors de les interaccions—, i un únic bosó escalar de Higgs —responsable del trencament de la simetria.

El Model Estàndard és una teoria tractable pertorbativament degut a què les constants d'acoblament són suficientment petites<sup>6</sup> com per fer càlculs teòrics amb molta precisió. El poder predictiu del Model Estàndard és conseqüència directa de la seva renormalitzabilitat.

El 1971 t'Hooft [7] demostrà que les teories gauge amb trencament espontani de la simetria són renormalitzables. Hom pot calcular més enllà del nivell arbre sabent com tractar les divergències infinites que apareixen quan es calculen correccions radiatives. Aquestes divergències es poden absorbir en un nombre finit de

---

<sup>6</sup>A baixa energia la constant d'acoblament forta deixa de ser petita, i és per això que les interaccions fortes no són tractables pertorbativament en aquest règim. Per tant, per calcular observables de *QCD* a baixa energia hem d'utilitzar mètodes calculacionals no pertorbatius com per exemple el *lattice*.

paràmetres del  $\mathcal{L}_{SM}$ , permetent d'aquesta manera donar un resultat finit a qualsevol ordre en teoria de perturbacions. Aquesta auto-consistència quàntica fa que el Model Estàndard es converteixi en una veritable teoria quàntica de camps més enllà de ser un model purament fenomenològic. A més, és important remarcar que la renormalitzabilitat del Model Estàndard i el seu conseqüent poder predictiu està indefugiblement lligat a l'estructura gauge que el basteix [8].

Les prediccions del Model Estàndard han estat posades a prova en més de mitja dotzena d'observables i el resultat de la confrontació amb l'experiment [9] (veure Taula 1.1) permet concloure que és la teoria que descriu la natura fins a escales d'energia de l'ordre de 100 GeV. També permet afirmar que qualsevol teoria més general l'haurà de contenir com a límit de baixa energia.

L'enorme èxit assolit pel Model Estàndard fa pensar seriosament si la imposició de la invariància gauge és únicament una hipòtesi teòrica, o bé és obligada per alguna raó que encara desconeixem. L'acord entre teoria i experiment fa pensar indubtablement en la invariància gauge com una característica irrenunciable de la teoria.

La precisió assolida en les mesures experimentals fa necessari el càlcul teòric a 1-loop per poder comparar teoria i experiment; tot i així, totes les dades experimentals de què es disposa actualment estan en perfecte acord amb les prediccions teòriques al nivell de significació de  $2\sigma$ , llevat possiblement dels observables de LEP  $R_b$  i  $R_c$  i de l'observable de SLC  $\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lep7}}$  (veure Taula 1.1).

Malgrat tot l'èxit, el Model Estàndard planteja interrogants que no és capaç de respondre i que ineludiblement apunten cap a l'existència d'una teoria més general que el contingui i que alhora expliqui simultàniament tots aquests interrogants. Alguns dels interrogants proposats són:

- El Model Estàndard en la seva versió mínima de tres famílies fermiòniques i un únic doblet de Higgs conté 19 paràmetres independents; de cap dels quals no en coneixem l'origen.
- Manquen principis generals que expliquin l'origen de la peculiar estructura

---

<sup>7</sup>A falta de confirmació definitiva de si les discrepàncies en aquests 3 observables són degudes a un problema experimental, diferents models han estat presentats, pe exemple en el cas de  $R_b$ , com a possible solució del conflicte. Supersimetria, *Extended Technicolor* o la presència d'acoblaments anòmals són alguns exemples.

Observable	Mesura Experimental	Predicció Model Estàndard	Desviació ( $\sigma$ )
<u>LEP</u>			
<i>line-shape</i> i assimetries leptòniques:			
$M_Z$ [GeV]	$91.1884 \pm 0.0022$	<i>input</i>	
$\Gamma_Z$ [GeV]	$2.4963 \pm 0.0032$	$2.4973 \pm 0.0032$	-0.3
$\sigma_h^0$ [nb]	$41.488 \pm 0.078$	$41.454 \pm 0.032$	0.4
$R_\ell$	$20.788 \pm 0.032$	$20.767 \pm 0.040$	0.7
$\Gamma_{\ell+\ell^-}$ [MeV]	$83.93 \pm 0.14$	83.98	-0.4
$A_{\text{FB}}^{0,\ell}$	$0.0172 \pm 0.0012$	0.0159	1.1
polarització $\tau$ :			
$\mathcal{A}_\tau$	$0.1418 \pm 0.0075$	0.1455	-0.5
$\mathcal{A}_e$	$0.1390 \pm 0.0089$	0.1455	-0.7
resultats quarks b i c:			
$R_b$	$0.2219 \pm 0.0017$	0.2156	3.7
$R_c$	$0.1543 \pm 0.0074$	0.1724	-2.5
$A_{\text{FB}}^{0,b}$	$0.0999 \pm 0.0031$	0.1020	-0.7
$A_{\text{FB}}^{0,c}$	$0.0725 \pm 0.0058$	0.0728	0.0
assimetria de càrrega $q\bar{q}$ :			
$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}} (\langle Q_{\text{FB}} \rangle)$	$0.2325 \pm 0.0013$	0.23172	0.6
<u>SLC</u>			
$\sin^2 \theta_{\text{eff}}^{\text{lept}} (A_{\text{LF}})$	$0.23049 \pm 0.00050$	0.23172	-2.5
$R_b$	$0.2171 \pm 0.0054$	0.2156	0.3
$\mathcal{A}_b$	$0.841 \pm 0.053$	0.935	-1.8
$\mathcal{A}_c$	$0.606 \pm 0.090$	0.667	-0.7
<u>p<math>\bar{p}</math> i <math>\nu N</math></u>			
$M_W$ [GeV] (p $\bar{p}$ )	$80.26 \pm 0.16$	80.35	-0.5
$1 - M_W^2/M_Z^2$ ( $\nu N$ )	$0.2257 \pm 0.0047$	0.2237	0.4

Taula 1.1: Determinació dels paràmetres electrofebles. Les prediccions del Model Estàndard estan calculades per a  $m_t = 180$  GeV i  $m_H = 300$  GeV, amb  $\alpha^{-1}(M_Z) = 128.9$  i  $\alpha_s(M_Z) = 0.123$ .

gauge, de la quantització de la càrrega o de l'estructura en famílies.

- El Model Estàndard conté alguns paràmetres que es necessari ajustar molt finament a valors poc naturals per aconseguir un bon acord amb l'experiment (el terme  $\theta$  de  $QCD$ ), o per assegurar la seva pròpia consistència (massa del Higgs).

Molts models s'han construït per intentar desvetllar aquests interrogants, però malgrat resoldre'n alguns, cap d'ells com veurem ha estat capaç de resoldre'ls tots simultàniament i així erigir-se en una teoria més general que superi el Model Estàndard.

### 1.3 Més enllà del Model Estàndard

En aquesta situació, el principal objectiu dels experiments de física de partícules és la recerca de nous efectes que puguessin guiar-nos cap a una resposta a les qüestions que la teoria actual deixa obertes.

Paral·lelament a aquests experiments i a falta de discrepàncies experimentals a explicar<sup>8</sup>, en l'apartat teòric s'ha dut a terme un esforç considerable en construir teories alternatives que continguin el Model Estàndard com a límit de baixa energia, i que vagin més lluny en la resolució de les qüestions obertes. De moment però, l'esforç ha estat desafortunat i cap dels models alternatius proposats, malgrat resoldre alguns problemes parcialment, no els resol tots.

Per exposar breument quines són algunes de les alternatives al Model Estàndard, centrem la discussió en un dels aspectes més insatisfactoris, tant des del punt de vista experimental, perquè no ha estat encara descobert, com des del punt de vista teòric, pels problemes teòrics que planteja: el sector escalar responsable de la generació de masses dels bosons  $W^\pm$  i  $Z^0$ , i dels fermions.

La introducció del sector escalar en el  $\mathcal{L}_{SM}$  constitueix el mecanisme conegut més senzill que permet trencar la simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ , sense trencar la renormalitzabilitat original de la teoria. Aquest mecanisme presenta diferents problemes com són la necessitat d'introduir una partícula extra (el bosó de Higgs)

<sup>8</sup>Llevat possiblement de la discrepància  $R_b - R_c$ .

que encara no ha estat observada experimentalment<sup>9</sup>, i la massa de la qual no pot ser superior a aproximadament 1 TeV per raons d'auto-consistència del model<sup>10</sup>. Àdhuc en cas de què la partícula existís per sota del límit anterior, no es resolen els problemes de naturalitat i trivialitat que es presenten. El problema de naturalitat [10] es pot resumir dient que no hi ha cap simetria en el Model Estàndard que faci d'apantallament de les divergències quadràtiques que apareixen quan considerem

<sup>9</sup>La cota actual obtinguda a LEP és:  $M_H > 57$  GeV [9]. En principi, és possible fitar la massa del Higgs estudiant les seves contribucions a les correccions radiatives electrofebles, però desafortunadament les correccions quadràtiques del quark top dominen sobre les contribucions logarítmiques del Higgs, llavors en aquestes condicions és molt difícil extreure una fita útil per a la seva massa.

<sup>10</sup>L'auto-acoblament quàrtic del Higgs  $\lambda$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{M_H^2}{v^2},$$

creix amb el quadrat de la massa del Higgs i està escalat per l'energia  $v$ . Per  $M_H \gg v$ , entrem en un domini d'acoblament fort. Una expansió pertorbativa en  $\lambda$  ja no és possible i s'han d'utilitzar altres mètodes (noteu que  $M_H \simeq 1.4$  TeV correspon a  $\lambda \simeq 16$ ). Per  $M_H \simeq 1.4$  TeV, l'amplada total del Higgs iguala la seva massa, una característica que segurament indica un règim d'interacció forta i que posa en dubte inclús la identificació del Higgs com a ressonància. Una altra indicació d'acoblament fort és l'anomenada violació d'unitarietat: qualsevol element de matriu  $S$  ha de satisfer obligatòriament el lligam d'unitarietat per a tots els valors de les constants d'acoblament i les masses. Això però, només es satisfarà si la teoria es tractada a tots els ordres. Una aproximació pertorbativa no té perquè obeir unitarietat a un determinat ordre. Per exemple l'element de matriu  $T$  per a la dispersió en ona  $S$  de bosons  $Z^0$  longitudinals és

$$T_0 \xrightarrow{s \gg M_H^2} -\frac{3}{16\pi} \frac{M_H^2}{v^2}.$$

El resultat anterior violaria el lligam d'unitarietat

$$|T_0|^2 < \frac{s}{s - 4M_Z^2},$$

per  $M_H \simeq 1$  TeV,  $s \gg M_Z^2$ . Malgrat ser un càlcul únicament a nivell arbre, ja suggereix que la teoria de pertorbacions falla a aquestes energies.

correccions radiatives al paràmetre  $M_H$ <sup>11</sup>. D'altra banda, existeixen temptatives que afirmen que una teoria  $\lambda\Phi^4$  com la que descriu el sector escalar del Model Estàndard és trivial [11]; és a dir, l'únic valor possible de l'acoblament renormalitzat  $\lambda^r$  és zero i per tant la teoria és lliure<sup>12</sup>.

Davant d'aquesta situació, és lògic pensar que qualsevol extensió raonable del Model Estàndard ha de resoldre almenys aquests problemes. Dos possibles tipus d'escenaris alternatius podrien esdevenir la solució al problema anterior, associat amb el sector escalar del Model Estàndard; així com també, solucionar qualsevol tipus d'efecte no estàndard

- Un primer escenari és l'existència d'un tipus de nova física (partícules extres, supersimetria, simetries gauge més grans, *compositeness*, ...) caracteritzada per una escala d'energia  $\Lambda$  comparable a —o més gran que— l'escala electrofeble  $v$ . En aquest cas, el sector escalar del Model Estàndard està realitzat linealment, és a dir, el terme de massa i l'auto-acoblament quàrtic del potencial escalar són suficientment petits com per tractar la teoria pertorbativament. El bosó escalar de Higgs supervivent del trencament espontani de la simetria gauge és una partícula elemental d'amplada relativament lleugera i no molt més pesada que l'escala de trencament electrofeble  $v \simeq 250$  GeV.

La solució més inspirada en aquest tipus d'escenari és potser, si més no pel que fa al problema de la naturalitat del sector escalar, la donada per supersimetria

<sup>11</sup>Si considerem per exemple l'auto-energia generada per l'auto-acoblament quàrtic del Higgs mitjançant un diagrama de Feynman tipus *tadpole* tenim

$$-i\Sigma_H(p) = -3i\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - M_{H,0}^2 + i\epsilon}.$$

Aquesta expressió és quadràticament divergent,  $\Sigma_H \sim \Lambda_H^2$ , i du a un *shift* en la massa del Higgs,

$$M_H^2 = M_{H,0}^2 + \frac{3}{16} \frac{\lambda}{\pi^2} \Lambda_H^2.$$

Si  $\Lambda_H$  és tan gran com, per exemple, la massa de Planck  $E_{\text{Planck}} \simeq 10^{19}$  GeV, llavors per obtenir una massa renormalitzada de l'ordre de l'escala electrofeble ( $M_H = \mathcal{O}(v) \leq 1$  TeV), el paràmetre  $M_{H,0}^2$  hauria de ser negatiu i tenir una magnitud la qual hauria d'ajustar-se finament fins a 30 xifres decimals. Encara que tècnicament possible, és segurament antinatural.

<sup>12</sup>L'argument de trivialitat es basa en què, si hom renormalitza l'acoblament quàrtic  $\lambda$  d'una teoria  $\lambda\Phi^4$  utilitzant un *cut-off*, i envia el *cut-off* a infinit, aleshores obté un acoblament renormalitzat nul:  $\lambda^r \rightarrow 0$ , fet que implica  $M_H \rightarrow 0$ . En el Model Estàndard, la conclusió final pot ésser modificada amb la presència d'acoblements gauge o Yukawa no nuls; de totes maneres  $\lambda$  no pot ser massa gran.



[12], segons la qual tots els bosons i fermions coneguts tenen companys supersimètrics. En aquest model, el problema de la naturalitat es solventa sense eliminar el mecanisme de Higgs, mitjançant la cancel·lació de les divergències quadràtiques per part de les contribucions de les partícules supersimètriques. El preu a pagar és l'ampliació de l'espectre de partícules lleugeres ( $\leq 1$  TeV), les quals de ser certa aquesta solució apareixerien en futurs experiments d'alta energia. Sinó directament, la supersimetria també pot manifestar-se a través de desviacions en els acoblaments estàndards amb efectes pesats per l'invers de l'escala de ruptura de supersimetria.

Una altra possibilitat interessant és *compositeness* [13], segons la qual els bosons  $W^\pm$  i  $Z^0$  i els fermions són en realitat partícules compostes i que per tant, existeix una escala física  $\Lambda$  no llunyana a l'escala electrofeble  $v$ , on la nova dinàmica responsable de l'existència d'aquests estats lligats es posi de manifest.

- L'altre escenari és aquell basat en la possibilitat que el trencament de la simetria gauge no sigui espontani sinó dinàmic, com és el cas de les teories de tecnicolor [14] on s'elimina el camp escalar  $\Phi^{13}$ , o bé si és espontani sigui mitjançant un sector escalar estàndard fortament interactuant. En aquest darrer cas el Model Estàndard està realitzat no-linealment degut a què la massa del Higgs s'ha enviat a infinit i conseqüentment s'han de tractar els graus de llibertat longitudinals dels bosons de gauge d'una manera similar a la teoria de perturbacions quiral. En ambdós casos, l'escala característica  $\Lambda$  d'aquests models és de l'ordre de  $v$ .

Malgrat aquests models resolen alguns dels aspectes insatisfactoris del Model Estàndard, en el millor dels casos no semblen ser una solució definitiva. Fins que no aparegui una teoria alternativa convincent i que resolgui simultaniament tots els problemes, el principal objectiu dels experiments de física de partícules ha de ser la recerca de nous efectes no estàndards que indiquin clarament desviacions respecte del model vigent, i que ens ajudin a esbrinar, si més no a intuir, la solució final en forma de nova teoria.

---

<sup>13</sup>En les teories de tecnicolor el bosó fonamental de Higgs del Model Estàndard és reemplaçat per condensats de fermions els quals trenquen la simetria electrofeble via valors esperats en el buit de la forma  $\langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle \propto \Lambda_{TC}^3$ . Els nous fermions  $\Psi$  són coneguts com tecnifermions i interactuen via una nova força anomenada tecnicolor.

---

Pel que fa al camp teòric, una via d'actuació interessant és la d'incorporar els efectes deguts a una extensió arbitrària del Model Estàndard a través d'una parametrització el més general possible i alhora independent de qualsevol model al qual puguéssim restringir-nos. Aquest és l'objectiu proposat pel mètode dels **Lagrangians efectius**.

# Capítol 2

## Lagrangians Efectius

### 2.1 Introducció i exemples

Hem vist en el capítol anterior que la precisió de les mesures experimentals de LEP i la d'altres experiments comproven el Model Estàndard fins a primer ordre en teoria de pertorbacions (correccions radiatives). Aquesta comprovació consolida el Model Estàndard com una legítima teoria quàntica de camps pertorbativa, vàlida per a la descripció senzilla, acurada i auto-consistent de les interaccions electrofeble i forta entre les partícules elementals fins a l'escala d'energia de  $M_Z$ .

L'excel·lent acord mostrat fins ara entre mesures experimentals i prediccions teòriques limita fortament els efectes induïts per noves dinàmiques provinents d'escalas d'energia superiors a la de  $M_Z$ . En el cas de no descobrir discrepàncies entre teoria i experiment fora dels errors permesos, el Model Estàndard seguirà essent la teoria vàlida i ampliarà el rang d'energies on pot ser utilitzat. En cas contrari però, la natura estarà anunciant la presència en un règim energètic encara no accessible directament, de nova física més enllà del Model Estàndard en forma de noves partícules i/o tipus d'interacció.

Malgrat tot, existeix la convicció clara i generalitzada de què el Model Estàndard no és la teoria final i que ha d'existir una teoria més general capaç de resoldre tots els interrogants que el Model Estàndard planteja. Així doncs, teòrics i experimentals s'han d'embarcar en una croada comuna per determinar finalment com se'ns mostra la Natura realment.

Els camins a seguir per detectar experimentalment l'existència inequívoca de nova física a alta energia són bàsicament dos:

1. Construir nous acceleradors capaços de fer col·lisionar feixos de partícules a energies molt superiors a les actuals que permetin descobrir directament noves partícules i/o interaccions. Les dificultats tecnològiques i fonamentalment econòmiques són els inconvenients d'aquesta primera via.
2. Cercar sistemàticament totes les possibles desviacions entre teoria i experiment mitjançant
  - La realització d'experiments d'alta precisió (experiments on tant la mesura experimental com el càlcul teòric són donats amb molta precisió) amb l'objectiu de determinar si existeix una desavinença tal que pugui interpretar-se com un senyal de nova física.
  - L'estudi de processos rars (processos prohibits pel ME, o processos on la contribució estàndard està molt suprimida), els quals són molt sensibles a contribucions no-estàndards degudes a nova física.

En l'aspecte teòric i davant la mancança actual d'un model alternatiu tal com supersimetria, tecnicolor, etc. capaç de suplantar al ME; així com la no aparició d'un sleptó, wino o tecnirho en els acceleradors actuals, sembla prudent, adequat i interessant decantar-se per una parametrització absolutament general, sistemàtica i independent de model dels efectes induïts a baixa energia (baixa energia en el sentit d'assolible en els acceleradors actuals) per una dinàmica desconeguda subjacent a alta energia.

El mètode basat en els anomenats **Lagrangians efectius** aconsegueix tots els requisits anteriors i fa d'ells una filosofia de treball. Els Lagrangians efectius no permeten esbrinar exactament quin tipus de nova física ha estat la causant de les possibles desviacions però, proposat un model teòric concret, sí que permeten comprovar si aquest model pot haver estat el causant de la desviació o per contra ja es pot desestimar com a model alternatiu al ME.

L'objectiu dels Lagrangians efectius és

*representar d'una manera senzilla el contingut dinàmic d'una teoria en el seu límit de baixa energia, on els efectes de partícules pesades poden ser incorporats en unes poques constants.*

El significat de la frase anterior és el següent: a alta energia la nova dinàmica es manifesta amb la presència afegida d'interaccions amb partícules pesades (pesades en el sentit de massa superior a les energies assolibles actualment); en canvi, en el límit de baixa energia, les partícules pesades no poden produir-se realment i els efectes que generen són únicament virtuals. Aquests efectes són incorporats en el Lagrangiana efectiu mitjançant unes constants desconegudes. Tècnicament es diu que les partícules pesades han estat **integrades** del lagrangiana original de la teoria, i el seu efecte virtual incorporat en el lagrangiana efectiu, a través de constants.

El pla d'atac bàsic per aconseguir l'objectiu mencionat anteriorment és escriure el conjunt més general possible de Lagrangians efectius consistent amb les simetries de la teoria i construïts amb els camps de baixa energia. A energies suficientment baixes només un, o potser uns quants, d'aquests lagrangians seran rellevants, i d'ells extreurem les prediccions de la teoria. Més endavant, exposarem amb més detall aquest pla d'atac.

Malgrat pugui haver-se deduït de la lectura anterior que els Lagrangians efectius constitueixen una eina de treball nascuda arrel de l'estudi de les possibles desviacions del ME, el mètode és més antic, i s'usa abundantment en diferents camps de la física de partícules, des de l'electrodinàmica quàntica (*QED*) fins a les supercordes, abraçant també altres branques de la física teòrica com la Relativitat General. Fins i tot s'utilitza en altres camps de la física com l'estat sòlid, on la teoria BCS de la superconductivitat n'és un exemple [15].

Abans d'introduir un exemple històric [16] de lagrangiana efectiu, el lagrangiana d'Euler-Heisenberg on per primera vegada es donen a conèixer els trets fonamentals d'aquest mètode, i de presentar una definició formal, exposem una sèrie de breus exemples que ens facilitaran concebir una primera idea de què són i representen els Lagrangians efectius:

- Euler i Heisenberg presenten als anys 30 el primer exemple de lagrangiana efectiu anomenat lagrangiana d'Euler-Heisenberg:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2) \\ &+ \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} \left[ (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2)^2 + 7 (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}})^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

El lagrangiana anterior descriu correctament la dispersió llum per llum a baixa energia ( $E_\gamma \ll m_e$ ). Si considerem l'electró com la partícula pesada de la teoria

original, aleshores els seus efectes virtuals a baixa energia es parametritzen a primer ordre amb el lagrangia efectiu (2.1). En concret, el segon terme de (2.1) correspon en *QED* a l'efecte generat per un *loop* d'electrons mitjançant un diagrama de Feynman tipus caixa. El lagrangia d'Euler-Heisenberg mostra per primera vegada les peculiaritat típiques i característiques principals del mètode dels Lagrangians efectius. En la propera secció utilitzarem aquest lagrangia a mode d'exemple, i comentarem amb detall les seves propietats.

- El lagrangia de Fermi

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e, \quad (2.2)$$

descriu perfectament la desintegració del muó a baixa energia. En el Model Estàndard electrofeble la desintegració del muó es produeix a través del bes-canvi d'un bosó gauge  $W^-$  amb una massa  $M_W$  molt superior a la involucrada en aquest procés<sup>1</sup>:  $q^2 \simeq m_\mu^2 \ll M_W^2$ . El bosó  $W$  és considerat com la partícula pesada de la teoria original, el Model Estàndard, i per tant els seus efectes han estat integrats i parametritzats en el lagrangia efectiu de Fermi.

<sup>1</sup>En el Model Estàndard, el punt de partença per descriure la desintegració del muó és el lagrangia d'interacció

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g_2}{\sqrt{8}} W_\mu^+ [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] + \text{h.c.}, \quad (2.3)$$

on  $g_2$  és la constant d'acoblament associada al grup gauge del Model Estàndard  $SU(2)_L$ . A partir de (2.3) es calcula l'element de matriu corresponent a la desintegració i s'aproxima pel límit de baixa energia

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mu \rightarrow \nu_\mu e \bar{\nu}_e) &= -\left(\frac{g_2}{\sqrt{8}}\right)^2 \frac{1}{q^2 - M_W^2} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \\ &\simeq \frac{g_2^2}{8M_W^2} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e, \end{aligned} \quad (2.4)$$

on en la primera igualtat hem negligit el terme longitudinal del propagador del bosó  $W$ , doncs la seva contribució a l'amplada de desintegració és proporcional a  $(m_f/M_W)^2$ ; en la segona hem aproximat per petites energies  $q^2 \ll M_W^2$ , i en la tercera s'ha usat la relació

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2}.$$

En l'anterior demostració s'observa com l'element de matriu original del ME (2.4) pot ser reemplaçat a baixa energia per l'element de matriu associat al lagrangia efectiu (2.2). Tècnicament hem integrat el camp pesat del bosó  $W$  i els seus efectes han quedat parametritzats en el lagrangia de Fermi.

- El desenvolupament de les tècniques associades als Lagrangians efectius es basà en la seva aplicació a la cromodinàmica quàntica (*QCD*). Les prediccions de *QCD* a baixa energia són més aviat minses i poc transparents doncs, intervén una transferència dels graus de llibertat de quarks i gluons, als graus de llibertat presents en l'espectre físic —els hadrons— encara força desconeguda. Per aquesta raó, la física d'hadrons s'ha de descriure mitjançant models fenomenològics alternatius a *QCD*. De totes maneres, *QCD* a baixa energia i aquests altres models alternatius hauran de tenir algunes similituds. Els lagrangians efectius s'han mostrat molt útils en la descripció de la física hadrònica en una doble vessant: d'una banda, amb els lagrangians efectius anomenats **quirals** hom estudia els hadrons constituïts per quarks lleugers [17]. Per exemple, el lagrangianà renormalitzable del model sigma lineal permet calcular qualsevol procés que involucri pions<sup>2</sup>. Alternativament, si un treballa a baixa energia (energia de l'ordre de la necessària per produir únicament pions reals), resulta que tots els elements de matriu associats a processos purament piònics estan continguts en el lagrangianà efectiu

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left( \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right), \quad U = \exp i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} / F, \quad (2.5)$$

amb  $F = v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$  a nivell arbre. El lagrangianà anterior s'usa a la pràctica expandint en potències del camp piònic

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{6F^2} \left[ (\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 - \boldsymbol{\pi}^2 (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \right] + \dots,$$

i prenent elements de matriu a nivell arbre.

Per altra banda, la Teoria Efectiva de Quarks Pesats (*HQET*) [18] s'utilitza per predir les propietats dels hadrons que contenen un quark pesat, com és per exemple el quark  $b^3$ .

<sup>2</sup>El model sigma lineal és un model fenomenològic que descriu la interacció entre els nucleons —protons i neutrons— i els pions mitjançant el lagrangianà

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma = & \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \cdot \partial^\mu \sigma \\ & - g \bar{\psi} (\sigma - i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5) \psi + \frac{1}{2} \mu^2 (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \end{aligned}$$

A més inclou el camp escalar  $\sigma$ , el qual via el trencament espontani de la simetria quiral  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  genera una massa pels nucleons. Els pions són els bosons de Goldstone associats al trencament de la simetria.

<sup>3</sup>A més de descriure a ordre més baix (límit  $m_b \rightarrow \infty$ ) les propietats dels hadrons amb un quark  $b$ , representa una manera sistemàtica d'incloure les correccions al resultat anterior mitjançant una expansió en sèrie de potències inverses de  $m_b$ .

- La Relativitat General s'emmarca dins les teories efectives [19] si es considera el límit a baixa energia d'una teoria de la gravitació més general, vàlida fins a energies de l'ordre de la massa de Planck<sup>4</sup>. Les interaccions gravitatòries, proporcionals a l'energia, poden parametritzar-se de forma efectiva mitjançant una expansió en energia anàloga a la utilitzada en els lagrangians quirals.

## 2.2 El lagrangia d'Euler-Heisenberg

Abans de presentar en la següent secció una definició formal dels Lagrangians efectius i de discutir les seves propietats, fóra interessant introduir un exemple pedagògic de lagrangia efectiu, el lagrangia d'Euler-Heisenberg, on es reflecteixen per primera vegada les característiques fonamentals d'aquest mètode.

En els anys 30, teòrics com Heisenberg tractaven de calcular la dispersió llum per llum com un exercici purament acadèmic de la recentment nascuda electrodinàmica quàntica (*QED*). L'any 1936, H. Euler [16] demostra que l'amplitud de dispersió fotó-fotó calculada en *QED* a primer ordre en teoria de perturbacions, mitjançant un *loop* d'electrons de tipus caixa, podia ser parametritzada a baixa energia i de forma efectiva pel lagrangia

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2) \\ & + \frac{e^4}{360\pi^2 m_e^4} \left[ (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2)^2 + 7 (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}})^2 \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

on el primer sumand correspon al terme cinètic dels fotons i el segon a la contribució

<sup>4</sup>El lagrangia efectiu més general que descriu una teoria de la gravitació pura en el seu límit de baixa energia és

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2}{\kappa^2} R + c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dots,$$

amb  $\kappa^2 = 32\pi G_N$ ,  $R_{\mu\nu}$  el tensor de curvatura i  $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ . La teoria d'Einstein s'acompleix quan  $c_1 = c_2 = \dots = 0$ . En els elements de matriu, les derivades del tensor de curvatura esdevenen en factors de moment  $i\partial_\mu \sim p_\mu$ , llavors la curvatura, la qual conté dues derivades, és d'ordre  $p^2$ , i dues potències de la curvatura és d'ordre  $p^4$ , etc. És així com s'indueix una expansió en potències de l'energia. Les constants  $c_i$  són constants adimensionals i determinen l'escala d'energia de la gravetat pura

$$1 + \kappa^2 q^2 c_i \approx 1 + \frac{q^2}{\Lambda_{\text{grav}}^2}.$$

Evidentment no es té encara constància de l'escala  $\Lambda_{\text{grav}}$ , però podria ser de l'ordre de la massa de Planck.



del *loop* d'electrons. Baixa energia significa en aquest context una energia molt inferior a la massa física dels electrons ( $E_\gamma \ll m_e$ ), llavors únicament els fotons apareixen com a partícules reals mentre que els electrons només indueixen efectes a través de la seva presència virtual en els *loops*. Tècnicament direm que s'ha integrat del lagrangiana original de *QED*, teoria que ja sabem que descriu perfectament la interacció entre fotons i electrons a alta energia, el camp considerat pesat de l'electró i els seus efectes a primer ordre han quedat absorbits o parametritzats a baixa energia en el segon terme del lagrangiana efectiu (2.6)<sup>5</sup>.

El lagrangiana d'Euler-Heisenberg ens presenta ja les característiques fonamentals d'un lagrangiana efectiu i ens alligona sobre els requisits que ha de satisfer qualsevol teoria efectiva. Comentem aquests trets característics:

- No és necessari fer teoria de pertorbacions ni tans sols conèixer l'existència de l'electrodinàmica quàntica per deduir l'estructura formal del lagrangiana efectiu (2.6). Només cal escriure el lagrangiana més general possible construït amb camps electromagnètics i que satisfaci la invariància Lorentz, les simetries discretes *C* i *P*, i la invariància gauge electromagnètica. Aquest lagrangiana és a ordre més baix

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2) \\ & + c_1 (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2)^2 + c_2 (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}})^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

on els punts suspensius denoten termes d'ordre superior.

$c_1, c_2$ , etc., són constants desconegudes que han d'ajustar-se experimentalment si no es coneix la teoria subjacent a alta energia. En aquest exemple però, sí que coneixem la teoria a alta energia —l'electrodinàmica quàntica— per tant, podem calcular exactament el valor d'aquestes constants<sup>6</sup>. Fent una anàlisi dimensional s'observa que les constants  $c_1$  i  $c_2$  tenen dimensions de  $[massa]^{-4}$ , mentre que constants d'ordre superior han de tenir dimensió de  $[massa]^{-n}$  amb  $n \geq 6$ . El lagrangiana efectiu (2.7) s'obté integrant els camps pesats (com per exemple l'electró) amb una massa típica  $M$ ; llavors  $c_1$  i  $c_2$  han de ser

<sup>5</sup>Per un càlcul detallat, veure l'apèndix A.

<sup>6</sup>Es pot fer una estimació de l'ordre d'aquestes constants sabent que el diagrama integrat correspon a un diagrama tipus caixa, llavors les constants han de ser proporcionals a  $e^4/16\pi^2 m_e^4$  ( $e^4$  degut als quatre vèrtex electró-fotó,  $1/m_e^4$  degut als quatre propagadors electrònics i  $1/16\pi^2$  degut al *loop*).

proporcionals a  $M^{-4}$  a fi i efecte de mantenir la dimensió del lagrangiana en 4, mentre que les constants associades a ordres superiors han d'estar pesades per potències addicionals de  $1/M$ . Aleshores, si calculem l'amplitud de dispersió fotó-fotó a baixa energia  $E \ll M$ , les contribucions dominants seran els termes proporcionals a  $c_1$  i  $c_2$ , mentre que les altres contribucions podran ser negligibles degut a què estan pesades per potències addicionals de  $E/M$ .

- El lagrangiana efectiu (2.7), que conté de fet infinits termes, és una legítima teoria quàntica de camps amb la qual calcular, a l'ordre que es desitgi, qualsevol procés físic que involucri únicament fotons. Les divergències que es presenten en el càlcul d'un determinat *loop* poden tractar-se de la manera habitual: renormalitzant els paràmetres de la teoria. Si el lagrangiana efectiu original que hem escrit és el més general consistent amb les simetries de la teoria, aleshores ha de tenir suficients paràmetres per absorbir qualsevol divergència que aparegui. A la pràctica, la renormalització es duu a terme de la següent manera: si per exemple, en el lagrangiana efectiu (2.7) considerem únicament els termes proporcionals a  $c_1$  i  $c_2$ , i calculem amb ells a 1-*loop*, la divergència que apareix no pot absorbir-se en un dels paràmetres originals del lagrangiana, sinó que s'ha d'anar a un ordre superior per absorbir-la; estrictament, el lagrangiana efectiu (2.7) no és renormalitzable a menys que considerem els infinits termes que el conformen. Així doncs, per calcular a 1-*loop* en un determinat ordre s'ha d'escriure el lagrangiana efectiu més general possible i consistent amb les simetries, i afegir el lagrangiana d'ordre superior que absorbirà les divergències creades pel primer.
- Fer teoria de perturbacions amb el lagrangiana efectiu (2.7) no depèn de què la constant d'acoblament electromagnètica  $e$  sigui petita. Si l'electrodinàmica quàntica fos una teoria fortament interactuant amb la qual no es pogués dur a terme un càlcul perturbatiu, el lagrangiana efectiu a baixa energia seria el mateix, ja que la teoria de perturbacions en el lagrangiana efectiu (2.7) és una expansió en sèrie de potències de  $E/M$ , i a cada ordre superior s'incrementa el número de potències addicionals de  $E/M$ . Com que l'energia  $E$  involucrada en un determinat procés és sempre molt inferior a la massa del camp pesat  $M$ ,  $E \ll M$ , les contribucions d'ordre superior poden negligir-se, i d'aquesta manera té sentit fer teoria de perturbacions. Si *QED* fos fortament interactuant l'única diferència seria que no podríem calcular a partir d'ella el valor de les constants  $c_1$  i  $c_2$ .

La situació normal en un lagrangiana efectiu és que no es conegui la dinàmica subjacent, llavors les constants efectives només poden ajustar-se experimentalment. A *posteriori*, i fent una estimació *naïve* de l'ordre de la constant d'acoblament, pot determinar-se també de forma *naïve*, l'escala de massa típica del camp integrat i per tant de la teoria subjacent a alta energia.

## 2.3 Definició i propietats

Després d'haver introduït alguns exemples i de comentar amb cert detall les característiques fonamentals, en aquesta secció definirem formalment que és, com es construeix i quines propietats ha de satisfer qualsevol lagrangiana efectiu que representi el contingut dinàmic d'una teoria en el seu límit de baixa energia.

Un lagrangiana efectiu es defineix com una sèrie infinita de monomis de dimensió creixent construït a partir dels camps lleugers i de les seves derivades, i que respecta les simetries de la teoria. De forma equivalent, es pot interpretar com una expansió en sèrie de potències inverses d'una escala d'energia,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{\Lambda^n} \sum_i \alpha_i \mathcal{O}_i^{(n+4)}, \quad (2.8)$$

on  $\Lambda$  és l'escala d'energia a la qual es manifesta la nova dinàmica i representa típicament la massa d'un camp pesat que no pot generar-se en forma de partícula real a baixa energia,  $\mathcal{O}_i^{(n+4)}$  són operadors efectius de dimensions de  $[\text{massa}]^{n+4}$  invariants sota les simetries de la teoria i construïts amb els camps lleugers i les seves derivades, i  $\alpha_i$  són constants d'acoblament adimensionals que denoten la força de la contribució associada a l'operador  $\mathcal{O}_i$  respectiu. En cas de conèixer la dinàmica a alta energia, les constants efectives  $\alpha_i$  poden calcular-se igualant les funcions de Green deduïdes del lagrangiana efectiu, amb les deduïdes de la teoria completa. La situació més corrent és però la contrària, no conèixer la teoria completa implica que les constants  $\alpha_i$  s'han d'ajustar experimentalment, malgrat que sovint encara pot fer-se una estimació *naïve* del seu valor.

Algunes de les propietats de la definició formal (2.8) són les següents:

- Un lagrangiana efectiu per definició, només pot ser aplicat en un règim d'energia limitat:  $E \ll \Lambda$ . Aquesta limitació ja determina l'estructura formal de (2.8). Si hom vol descriure la física a baixa energia, a l'hora de construir el lagrangiana

efectiu és evident que només pot incloure els camps lleugers, és a dir els camps amb massa molt inferior a  $\Lambda$ . Els camps pesats, és a dir camps amb massa de l'ordre o superior a  $\Lambda$ , no poden generar-se realment a l'escala d'energia  $E$  i per tant els seus efectes són únicament virtuals. Aquests efectes són representats en el lagrangiana (2.8) per uns acoblaments efectius  $\alpha_i$  entre els camps lleugers pesats per potències negatives de l'escala  $\Lambda$ . El procés de fer desaparèixer els camps pesats del lagrangiana original de la teoria a alta energia donant lloc a un lagrangiana efectiu s'anomena **Integració dels Camps Pesats**.

- La utilitat dels lagrangians efectius es basa precisament en l'expansió en potències inverses de l'escala d'energia  $\Lambda$ . Hom podria pensar en principi que el nombre de contribucions efectives a un determinat observable podria ser infinit, degut a la presència d'infinitos sumands en (2.8). Sortosament, el lagrangiana efectiu (2.8) pot organitzar-se sistemàticament prenent la dimensió dels seus operadors. Com que la dimensió de  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  és quatre llavors, si considerem operadors de dimensió  $n$ , aquests hauran de pesar-se amb un factor  $\Lambda^{4-n}$ , de manera que operadors de dimensió baixa seràn més rellevants que d'altres de dimensió superior, els quals estaran pesats per potències addicionals de  $E/\Lambda$ . I com que l'energia del procés,  $E$ , és petita comparada amb l'escala  $\Lambda$ , l'efecte dels operadors de dimensió superior serà negligible front els de dimensió més baixa que contribueixen a l'observable en qüestió. Així doncs, a la pràctica, la infinitat de possibles contribucions queda reduïda a només un petit nombre d'operadors, aquells amb la dimensió més baixa.
- Els operadors efectius  $\mathcal{O}_i$  han de satisfer les simetries de la teoria a baixa energia. Malgrat no ser un teorema rigorós sembla ser l'opció més adequada. Discutirem aquest punt important quan més endavant considerem el Model Estàndard com el límit de baixa energia d'una teoria més general.
- El nombre d'operadors efectius pot reduir-se considerablement utilitzant les equacions clàssiques de moviment associades al límit de baixa energia de la teoria. Donat un determinat observable, s'han de considerar inicialment tots els operadors efectius que l'afecten. Si d'entre tots aquests operadors una equació de moviment en relaciona alguns d'ells, aleshores és lícit utilitzar el lligam induït per l'equació per tal de poder reemplaçar un operador en con-

cret per una combinació lineal dels altres<sup>7</sup>. Un dilema se'ns planteja quan calculem correccions radiatives amb operadors efectius: és lícit utilitzar les equacions clàssiques de moviment en *loops*? Recentment s'ha demostrat que en teories gauge [20] i en teories gauge amb trencament espontani de simetria (el Model Estàndard per exemple) [21], les equacions clàssiques de moviment poden utilitzar-se per disminuir el nombre d'operadors efectius, fins i tot en el càlcul de *loops*.

En resum, tots els operadors efectius redundants poden obviar-se del lagrangiana efectiu sense modificar els observables físics.

- Estrictament parlant, el lagrangiana efectiu (2.8) només és renormalitzable i per tant predictiu, quan considerem els infinits operadors que el componen. A la pràctica però, per raons de dimensionalitat, només s'utilitzen els operadors efectius més rellevants és a dir, aquells a ordre més baix en  $\Lambda$ . Quan calculem correccions radiatives amb els operadors anteriors, les divergències són absorbides de la manera usual (mitjançant la redefinició dels paràmetres originals del lagrangiana) en operadors del mateix ordre en  $\Lambda$  o superior. Per tant les prediccions finites de la teoria són vàlides ordre a ordre.

La utilitat mostrada pels lagrangians efectius com a parametrització general i sistemàtica d'efectes induïts a baixa energia per una possible nova física desconeguda a alta energia, es basa en dues característiques fonamentals:

**Independència de model:** la parametrització és única, independentment de la teoria que la generi.

---

<sup>7</sup>Imaginem el lagrangiana efectiu

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \alpha_1 \mathcal{O}_1 + \alpha_2 \mathcal{O}_2, \quad (2.9)$$

i suposem que tenim una equació clàssica de moviment que relaciona ambdós operadors

$$\mathcal{O}_2 = c \mathcal{O}_1,$$

amb  $c$  una constant de proporcionalitat. Si ambdós operadors afecten simultàniament un determinat observable aleshores podem reescriure el lagrangiana (2.9) com

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = (\alpha_1 + \alpha_2 c) \mathcal{O}_1 \equiv \alpha'_1 \mathcal{O}_1,$$

de manera que la presència de  $\mathcal{O}_2$  en el lagrangiana original és redundant.

El nombre d'operadors també pot reduir-se en aquells operadors que contenen derivades mitjançant la integració per parts. L'acció efectiva és normalment invariant sota aquesta manipulació.

**Independència de procés:** les limitacions experimentals sobre les constants d'acoblament efectives extretes d'un procés concret, poden usar-se per limitar altres processos.

El mètode dels lagrangians efectius s'utilitza en dos possibles tipus d'escenari depenent de si la nova física desacobla o no. Si la dinàmica a alta energia desacobla, és a dir, els efectes induïts a baixa energia desapareixen en el límit  $\Lambda \rightarrow \infty$ , el sumatori (2.8) comença a  $n = 0$  i la parametrització efectiva s'anomena **lineal**. Si per contra, els efectes no desacoblen sinó que es mantenen a pesar de prendre el límit anterior, el sumatori comença a  $n = -2$  i la parametrització s'anomena **quiral**. Depenent de si el límit de baixa energia de la teoria subjacent és renormalitzable o no, s'usa la representació lineal o quiral respectivament.

En les següents dues seccions exposarem amb més detall les parametritzacions lineal i quiral. En ambdós casos prendrem, degut al context on s'emmarca aquest treball, el Model Estàndard com a límit de baixa energia, tant en la seva versió lineal (amb un bosó d'Higgs relativament lleuger), com en la seva versió no-lineal o quiral (amb un Higgs molt pesat o inexistent).

## 2.4 Parametrització lineal

El Model Estàndard en la seva versió mínima (tres famílies de fermions i un sector escalar amb un únic doblet de Higgs) i lineal (els acoblaments del sector escalar permeten un tractament pertorbatiu de la teoria) és una teoria renormalitzable i per tant predictiva a qualsevol ordre en teoria de pertorbacions. L'auto-consistència de la teoria, fonamentada en la gestió de les seves pròpies divergències, es basa en aquesta propietat de renormalitzabilitat.

En aquesta situació, qualsevol extensió del Model Estàndard deguda a la presència d'una nova dinàmica a alta energia, haurà de desacoblar quan l'escala d'energia  $\Lambda$ , escala d'energia típica de la nova dinàmica i que correspon generalment a la massa d'una partícula pesada de la teoria, s'envii a infinit:  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Aquesta afirmació és el resultat d'un teorema general de teoria quàntica de camps anomenat **Teorema de Desacoblament** [22]

*Si el límit de baixa energia d'una teoria és renormalitzable, aleshores tots els efectes induïts per partícules pesades es manifesten o bé a través*

*d'una renormalització de les constants d'acoblament de la teoria, o sinó estan suprimits per potències inverses de la massa de la partícula pesada.*

Aquest comportament sembla ser, *a priori*, el més esperat físicament. Si la massa d'una partícula pesada esdevé infinita, hom esperaria que la seva influència desaparegués completament. A més, les redefinicions que pugués induir en les constants d'acoblament són sempre inobservables, perquè els valors d'aquests acoblaments es determinen a partir de l'experiment. Aquest però, és únicament el comportament manifestat quan el límit a baixa energia de la teoria és renormalitzable, tal com afirma el teorema de desacoblament<sup>8</sup>. En aquest cas, l'escala electrofeble del Model Estàndard (el valor esperat en el buit  $v$ ) no està relacionada amb l'escala del sector pesat de la teoria  $\Lambda$ , i per tant el límit  $\Lambda \rightarrow \infty$  està ben definit. En cas contrari, si el límit a baixa energia fos no renormalitzable ambdues escales haurien d'estar relacionades i el límit anterior no estaria ben definit.

Un exemple de comportament desacoblant en el Model Estàndard és el paper interpretat pels bosons febles  $W^\pm$  i  $Z^0$  a baixa energia. En concret, l'efecte residual del bescanvi de bosons  $W^\pm$  en una interacció feble a baixa energia —interacció puntual de Fermi— és el producte local de dos corrents febles carregats multiplicats per una constant d'acoblament efectiva  $G_F$  de dimensions de massa negativa ( $G_F \propto M_W^{-2}$ ). A més, la contribució a la renormalització de la càrrega elèctrica induïda per *loops* de  $W^\pm$  és inobservable degut a què la càrrega elèctrica s'ajusta experimentalment.

Així doncs, en el cas de desacoblament de la nova dinàmica (límit de baixa energia renormalitzable) el lagrangiana efectiu més general possible és

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda^n} \sum_i \alpha_i \mathcal{O}_i^{(n+4)}, \quad (2.10)$$

amb  $\Lambda$  l'escala del sector pesat de la teoria,  $\mathcal{O}_i^{(n+4)}$  els operadors efectius de dimensió  $[massa]^{(n+4)}$  construïts amb els camps lleugers i consistents amb les simetries del ME, i  $\alpha_i$  les constants adimensionals que determinen la força de la contribució de l'operador  $\mathcal{O}_i$  respectiu.

<sup>8</sup>En el Model Estàndard hi ha exemples on l'efecte induït per partícules pesades no desacobla. Per a un quark top pesat, hi ha correccions radiatives que no s'anulen (no desacoblen) quan  $m_t \rightarrow \infty$ . El comportament del bosó escalar de Higgs n'és un altre exemple. Ambdós comportaments són deguts a què el Model Estàndard sense el quark top o sense l'Higgs deixa de ser renormalitzable i per tant, són exemples que incompleixen la hipòtesi del teorema de desacoblament

L'organització dimensional de (2.10) permet expressar el lagrangianà efectiu més general, que té com a límit de baixa energia el Model Estàndard com

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_5 + \frac{1}{\Lambda^2} \mathcal{L}_6 + \dots, \quad (2.11)$$

on  $\mathcal{L}_{\text{SM}}$  és el lagrangianà renormalitzable invariant gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  del ME, el qual descriu perfectament de manera senzilla i consistent les interaccions electrofebles entre les partícules elementals fins com a mínim a energies de l'ordre de  $M_Z$ , i prediu amb gran precisió la majoria de les dades existents. Els successius termes  $\mathcal{L}_n$ , pesats per potències inverses de  $\Lambda$ , parametritzen a baixa energia els efectes del sector pesat (nova dinàmica a alta energia) de la teoria. El conjunt de lagrangians  $\mathcal{L}_n$  té dimensió de  $[massa]^n$  i és una suma infinita d'operadors efectius

$$\mathcal{L}_n = \sum_i c_i \mathcal{O}_n^i,$$

amb  $\mathcal{O}_n^i$  operadors locals invariants gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  construïts amb els camps lleugers del ME, és a dir els camps bosònics  $\mathbf{W}_\mu$  i  $B_\mu$ , els camps fermiònics elementals i el doblet escalar de Higgs  $\Phi$ .  $c_i$  són constants adimensionals desconegudes que s'han d'ajustar experimentalment, encara que també pot estimar-se el seu valor teòric de forma *naïve*.

L'estructura dimensional de (2.11) permet destriar les contribucions dominants a un determinat observable i truncar la sèrie infinita en potències inverses de  $\Lambda$ , a l'ordre que considerem oportú. L'única condició necessària i suficient en el cas desacoblant per negligir contribucions d'ordre  $\Lambda^{n+1}$  front a contribucions d'ordre  $\Lambda^n$  és<sup>9</sup>

$$c_i \frac{E}{\Lambda^{n+1}} \ll c'_i \frac{1}{\Lambda^n}. \quad (2.12)$$

Ara volem comentar perquè els operadors efectius  $\mathcal{O}_i$  han de ser invariants gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Primer de tot, dir que malgrat no ser un teorema rigorós, és la posició comunament adoptada. Si creiem fermament en el Model Estàndard com la teoria que descriu la natura fins a energies de l'ordre de  $M_Z$  llavors, és lícit pensar que qualsevol extensió ha de satisfer igualment i com a mínim la simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Aquesta suposició es basa en el fet que la invariància gauge del Model Estàndard no és tan sols una simple hipòtesi teòrica sinó una suposició que ha estat posada a prova en més de mitja dotzena d'observables. L'auto-consistència del

<sup>9</sup>En el cas no desacoblant cal a més una relació natural entre l'escala del sector pesat  $\Lambda$  i l'escala del sector lleuger  $v$ .



Model Estàndard i la seva capacitat de predicció (renormalització) està intimament lligat a la seva naturalesa gauge. Cal no confondre però, que la invariància gauge sigui la responsable directa de l'èxit del ME.

Si se segueix un criteri diferent i no s'imposa la simetria gauge sobre el lagrangiana efectiu que parametriza una determinada extensió del ME, aleshores apareixen greus problemes d'auto-consistència<sup>10</sup> [23, 8].

Hom també pot argumentar que un lagrangiana arbitrari no invariant gauge pot ésser considerat, mitjançant el formalisme d'Stueckelberg [24], com el límit d'un lagrangiana invariant gauge en el gauge unitari. Aleshores, semblaria que la imposició de la invariància gauge no és rellevant, però aquest formalisme du problemes: primer, el procediment que permet convertir un lagrangiana en invariant gauge no fixa el grup gauge i segon, les transformacions gauge dels camps tampoc queden fixades.

Finalment podria decidir-se prescindir totalment de la invariància gauge i fer un *fine-tuning* total; això fóra possible però desafortunat, doncs una teoria així no té cap poder predictiu.

*En la nostra tesi doctoral, suposarem com a hipòtesi de treball que els operadors del lagrangiana efectiu que indueixen desviacions del Model Estàndard han de complir la invariància gauge sota el grup de transformacions  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .*

Resseguint l'expansió en sèrie de potències inverses de  $\Lambda$  mostrada a (2.11), la primera contribució consisteix en operadors efectius de dimensió 5. Si considerem els fermions com partícules elementals de Dirac, aleshores no existeix cap operador de dimensió 5 construït amb els camps del Model Estàndard i consistent amb la simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ <sup>11</sup>.

<sup>10</sup>Suposem per exemple que s'afegeix al  $\mathcal{L}_{SM}$  un operador efectiu no-invariant gauge que indueix un vèrtex de tres bosons gauge. Si es calculen les correccions quàntiques a la massa del bosó induïdes per aquest terme es troba

$$\delta M_V^2 \sim M_V^2 \left( \frac{g_V \Lambda^3}{4\pi M_V^3} \right)^2,$$

on  $M_V$  és la massa del bosó vectorial,  $\Lambda$  és l'escala que genera l'hipotètic terme no invariant gauge, i  $g_V$  la corresponent constant d'acoblament. En el Model Estàndard l'acord entre predicció teòrica i mesura experimental implica que les correccions a  $M_V$  han de ser petites, per tant  $\Lambda \ll M_V (4\pi/g_V)^{1/3}$ . En el cas del bosó  $W$  sabem que  $\delta M_W^2/M_W^2 \leq 0.0064$  que implica  $\Lambda \leq M_W/2$ . Si no impossem cap restricció sobre  $\Lambda$  llavors les correccions radiatives induïxen  $M_V \rightarrow O(\Lambda)$ .

<sup>11</sup>Aquesta afirmació és falsa si considerem els neutrins com partícules de Majorana. En aquest

D'operadors efectius de dimensió 6 consistents amb les simetries del Model Estàndard n'hi ha molts i la majoria d'ells estan tabulats a [25]. L'ús de les equacions clàssiques de moviment redueix considerablement el nombre d'operadors efectius fins a compondre una base completa independent formada per 81 operadors [26]<sup>12</sup>.

Com explicàvem anteriorment, operadors efectius de dimensió superior estan penalitzats per potències addicionals de  $1/\Lambda$ , llavors podem negligir les seves contribucions seguint el criteri de naturalitat expressat a (2.12). Així doncs, per descriure possibles desviacions del Model Estàndard serà suficient considerar únicament els operadors de dimensió 6, per tant el lagrangian efectiu general (2.11) es pot reemplaçar per

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{\Lambda^2} \mathcal{L}_6 \equiv \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{\Lambda^2} \sum_i c_i \mathcal{O}_i^{(6)}. \quad (2.14)$$

El lagrangian efectiu (2.14) genera una extensa i variada gamma d'efectes sobre diferents processos físics que permeten aconseguir fites inferiors sobre l'escala d'energia  $\Lambda$  [26], generalment en el rang  $5 \rightarrow 3000$  TeV. Exemples concrets d'aquests efectes són modificacions de l'estructura  $V - A$  de les corrents febles carregades, variacions en el paràmetre  $\rho$ , contribucions al moment dipolar del neutró, etc. A mode d'exemple il·lustratiu presentem de forma resumida una de les aplicacions més interessants en el marc del mètode dels lagrangians efectius: la limitació

cas existeix un únic operador efectiu de dimensió 5

$$\mathcal{L}_5 = c_5 \epsilon^{ij} (\bar{\ell}_R^{(c)})_i \Phi_j \epsilon^{kl} (\ell_L)_k \Phi_l \quad (i, j, k, l = 1, 2), \quad (2.13)$$

on  $c_5$  és una constant,  $(\ell_L)_k$  i  $\Phi_k$  són respectivament membres del doblet de leptons i de Higgs, i

$$(\bar{\ell}_R^{(c)})_k \equiv i(\ell_L)_k^T \gamma_2 \gamma_0$$

és la representació leptònica conjugada. Reemplaçant el camp d'Higgs pel seu valor esperat en el buit  $v/\sqrt{2}$ , l'operador (2.13) indueix una massa de Majorana pel neutrí d'ordre

$$m_\nu \sim \frac{c_5 v^2}{2 \Lambda}.$$

Estimant qualitativament  $c_5 = \mathcal{O}(1)$  i  $\Lambda = \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$  es troba una massa pel neutrí de 60 GeV. Fent l'estimació a l'inrevés, límits superiors existents sobre la massa de Majorana dels neutrins de l'ordre de 10 eV requereixen  $\Lambda > 10^{10}$  TeV.

<sup>12</sup>En l'estudi d'un determinat observable s'ha de tenir en compte tots aquells operadors efectius capaços d'induir un efecte sobre l'observable. Per tant, hem d'utilitzar les equacions de moviment amb cura de no oblidar cap dels operadors que afecten l'observable per tal de cercar la base mínima d'operadors que hi contribueixen. Només es pot obviar l'acció si les equacions de moviment el relacionen directament amb un altre operador que també hi contribueixi.

d'acoblements no estàndard en vèrtexs de tres bosons gauge (TGV). El lagrangia efectiu més general possible consistent amb la simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  que parametriza aquests efectes és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{TGV}} = & -ieg_V \left[ (\hat{W}_{\mu\nu}^\dagger W^\mu - \hat{W}_{\mu\nu} W^{\dagger\mu}) V^\nu \right. \\ & \left. + \kappa_V W_\mu^\dagger W_\nu V^{\mu\nu} + \frac{\lambda_V}{M_W^2} V^{\mu\nu} W_{\nu\rho}^\dagger W_\mu^\rho \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

amb  $\hat{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$  per als camps  $W^\pm$  i  $V_{\mu\nu}$  el mateix per als camps  $V = \gamma, Z^0$ . Com a conseqüència de la invariància electromagnètica  $U(1)_{\text{em}}$   $g_\gamma = 1$ . A més, les prediccions del Model Estàndard a nivell arbre són

$$\begin{aligned} g_Z &= \cot \theta_W, \\ \kappa_\gamma &= \kappa_Z = 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  també implica

$$\lambda_\gamma = \lambda_Z \equiv \lambda. \quad (2.17)$$

A ordre més baix en el Model Estàndard hom troba

$$\lambda = 0 \quad (V = \gamma, Z^0). \quad (2.18)$$

Qualsevol modificació del Model Estàndard induïda per una nova dinàmica a alta energia estaria subjecta a una comprovació experimental. De fet, el valor dels acoblements (2.15) serà mesurat en un futur immediat al nou experiment del CERN: el LEP-2, on un feix d'electrons i un altre de positrons col·lisionaran a energies suficients per produir un parell real de bosons  $W^\pm$  en la reacció  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  mitjançant el bescanvi de bosons  $\gamma$  i  $Z^0$ . Les mesures de LEP-2 i altres experiments com NLC podran, en principi, limitar les desviacions no estàndards dels acoblements (2.15). Dos dels operadors efectius [8] que generen desviacions a nivell arbre sobre aquests acoblements<sup>13</sup> i de forma directa són

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{WB} &\equiv \Phi^\dagger \sigma \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_{DW} &\equiv [D^\rho \mathbf{W}_{\mu\nu}]^\dagger [D_\rho \mathbf{W}^{\mu\nu}]. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>D'altres operadors com per exemple

$$\mathcal{O}_W \equiv \frac{1}{3!} \mathbf{W}_\mu^\nu \times \mathbf{W}_\nu^\lambda \cdot \mathbf{W}_\lambda^\mu,$$

genera a 1-loop una desviació de l'acoblament  $\lambda$  [8]

$$\lambda = \frac{e}{4 \sin \theta_W} \epsilon_W.$$

El valor d'aquestes desviacions es calcula i hom troba

$$\begin{aligned}
 \delta g_Z &= -\frac{1}{\cos 2\theta_W} (\epsilon_{WB} + \frac{g^2}{2 \tan \theta_W} \epsilon_{DW}) , \\
 \delta k_\gamma &= \frac{1}{\tan \theta_W} \epsilon_{WB} , \\
 \delta k_Z &= -\tan \theta_W \epsilon_{WB} , \\
 \lambda_V &= 3g^2 \epsilon_{DW} ,
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

amb  $\epsilon_i \equiv \alpha_i \frac{v^2}{\Lambda^2}$  i  $g = \frac{e}{\sin \theta_W}$ . Calculant les prediccions teòriques del Model Estàndard i comparant-les amb les mesures experimentals poden fitar-se les desviacions no-estàndard (2.19), i estimant qualitativament el valor dels acoblaments  $\alpha_i$  posar una fita inferior a l'escala d'energia  $\Lambda^{14}$ .

L'estudi de corrents neutres amb canvi de sabor (*FCNC*) és un altre exemple molt interessant de la utilització dels Lagrangians efectius per parametritzar possibles desviacions del Model Estàndard [26].

## 2.5 Parametrització quiral

Un escenari alternatiu a l'escenari desacoblant —anomenat no-desacoblant o quiral— és aquell on el sector pesat de la teoria no es desacobla a baixa energia, mantenint-se els efectes virtuals induïts pels camps pesats encara que prenem el límit  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Aquest tipus d'escenari es dona quan el límit a baixa energia de la teoria és no renormalitzable. En aquest cas, els efectes dels camps pesats no poden desacoblar-se degut a que han de compensar la torre de contra-termes necessaris per mantenir la teoria finita llavors, el límit  $\Lambda \rightarrow \infty$  no està ben definit i ha d'existir obligatòriament una relació natural entre l'escala del sector lleuger i la del sector pesat. Un argument de naturalitat *naïve* [27] permet estimar  $\Lambda \sim 4\pi v$ .

Un senzill exemple introductori a l'escenari no-desacoblant el trobem en el Model Estàndard amb un quark top molt pesat. Moltes de les correccions radiatives induïdes pel quark top no s'anul·len per  $m_t \rightarrow \infty$ , sinó que es comporten com  $m_t^2$  o  $\ln(m_t^2)$ . Això passa perquè el Model Estàndard sense un quark top viola la

<sup>14</sup>Segons l'estudi anterior [8], les dades actuals de LEP-1 i d'altres experiments són ja suficients com per plantejar seriosos dubtes sobre la capacitat de LEP-2 per observar contribucions no-estàndards als vèrtexs de tres bosons gauge.

simetria  $SU(2)_L$ , doncs el doblet  $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$  ja no està present. Sense la imposició de la simetria d'isospin feble, la teoria no és renormalitzable i noves divergències poden aparèixer. Aquests aspirants a divergència són evitats en el Model Estàndard per la presència de la massa  $m_t$  que fa el paper de *cut-off*<sup>15</sup>.

La motivació original d'utilitzar els lagrangians quirals en el context de les interaccions electrofebles, va ser trobar una teoria efectiva que parametrizés a baixa energia la física associada a la dinàmica del trencament de la simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . La hipòtesi bàsica d'aquesta aproximació és que, independentment de quin sigui el mecanisme de trencament de simetria, imprescindible per generar la massa de les partícules, els camps involucrats en aquest trencament han de ser més pesats que els bosons  $W$  i  $Z$ . En aquest cas, és possible descriure la física electrofeble a energies de l'ordre de  $M_Z$  per un lagrangia efectiu de baixa energia construït en termes dels graus de llibertat rellevants a baixa energia, és a dir fermions, bosons de gauge, i els camps aspirants a bosons de Goldstone<sup>16</sup>. El camp del bosó d'Higgs desapareix de l'espectre físic de la teoria, bé perquè es suposa que és molt pesat o bé perquè es vol descriure algun altre escenari alternatiu de trencament de simetria.

A l'ordre més baix, el lagrangia efectiu quiral és un model sigma no-lineal gauge que respecta la simetria gauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  del Model Estàndard i la simetria quiral  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  del sector escalar<sup>17</sup>, però que no inclou cap dinàmica particular per a les interaccions que trenquen la simetria. Correccions d'ordre superior basades en l'addició al lagrangia a ordre més baix del conjunt d'operadors efectius consistents amb la simetria [28], conformen l'anomenat Lagrangia Quiral electrofeble que constitueix una teoria efectiva a baixa energia consistent a un *loop* [29].

<sup>15</sup>Notar que al mateix temps que es fa  $m_t \rightarrow \infty$ , els acoblaments Yukawa del quark top esdevenen infinits, i poden per tant induir un acoblament fort el qual violi també el desacoblament.

<sup>16</sup>El teorema de Goldstone afirma que si el lagrangia d'una teoria té una simetria contínua que no és simetria del buit, aleshores han d'existir un o més bosons sense massa (bosons de Goldstone). Per tant, un trencament espontani o dinàmic de la simetria contínua vincularà en l'espectre partícules sense massa.

<sup>17</sup>El potencial escalar original del Model Estàndard es pot reescriure com

$$V(\Phi) = \lambda \left( \Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2,$$

potencial que té per mínim  $\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2}$ . En el cas que la massa de l'Higgs  $M_H = v\sqrt{2\lambda}$  s'envii a infinit ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), el límit anterior esdevé una condició no-lineal i el sector escalar es transforma en un model sigma no-lineal.

Per completitud esmentarem que el lagrangianà quirial a ordre més baix és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}}^{\text{Ch}} = & -\frac{1}{2}\text{Tr}\{\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}\} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{v^2}{4}\text{Tr}\{(D_\mu U)^\dagger D^\mu U\} \\ & + \bar{\psi}i\not{D}\psi - gv(\bar{\psi}_L U\psi_R + \bar{\psi}_R U^\dagger\psi_L) . \end{aligned}$$

amb  $\mathbf{W}_{\mu\nu} \equiv \frac{\tau_i}{2}W_{\mu\nu}^i$ , i

$$D_\mu U \equiv \partial_\mu U + ig_2 \frac{\tau_i}{2}W_\mu^i U - ig_1 U \frac{\tau_3}{2}B_\mu ,$$

on  $U$  és una matriu exponencial unitaria que conté els bosons de Goldstone de la teoria  $U \equiv \exp i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi}/v$ .

## Capítol 3

# Algunes Aplicacions Fenomenològiques dels Lagrangians Efectius

En aquest capítol explicarem breument el contingut dels tres capítols següents on s'explica detalladament la tasca realitzada en la present tesi doctoral.

El marc comú de treball en totes les publicacions ha estat la utilització dels Lagrangians efectius per parametritzar possibles desviacions del Model Estàndard. Aquestes possibles desviacions, induïdes per una hipotètica dinàmica a alta energia, ens han permès deduir conseqüències fenomenològiques sobre determinats observables que comentarem a continuació.

Podem dividir el treball desenvolupat en la tesi en dues parts. Una primera part formada pels capítols 4 i 5 està dedicada a l'estudi de propietats electromagnètiques de quarks i leptons, amb especial atenció al leptó tau. La segona part representada pel capítol 6 conté un estudi detallat de la rellevància dels experiments d'alta precisió de l'electrodinàmica quàntica en la detecció de nova física més enllà del Model Estàndard.

En el capítol 4 es determinen unes noves fites pels moments magnètic i elèctric del leptó tau. Les propietats del leptó tau, a diferència de les de l'electró o el muó, són molt menys precises, i el seu estudi pot repercutir en millorar el coneixement que tenim sobre aquest leptó. En concret, propietats electromagnètiques tals com els moments magnètic i elèctric són especialment interessants. D'una banda, l'estudi

del moment magnètic anòmal conté informació rellevant sobre el caràcter puntual o estès del tau. Recordem que el Model Estàndard suposa que els quarks i els leptons són elementals per tant, si es mesura un moment magnètic allunyat del valor teòric predit podria ser un senyal inequívoc de nova física. D'altra banda, la detecció d'un moment dipolar elèctric del tau podria proporcionar informació rellevant sobre l'origen de la violació de  $CP$ . El procediment dut a terme per extreure les fites ha estat el següent: afegir nova física al Model Estàndard (en la seva versió mínima i lineal) indueix noves contribucions sobre ambdós moments. Si parametrizem aquestes contribucions mitjançant un lagrangiana efectiu i exigim que compleixi la invariància gauge del Model Estàndard, aleshores els mateixos operadors que afecten els moments dipolars també afecten simultàniament els acoblaments del tau amb el bosó  $Z$ . Aquests acoblaments són fortament limitats en el LEP, la qual cosa ens permet traslladar aquestes limitacions en fites sobre els dos moments dipolars.

En el capítol 5 l'estudi anterior s'estén a tots els fermions elementals del Model Estàndard (quarks i leptons) amb el propòsit de conèixer una mica més les propietats electromagnètiques d'aquestes partícules. Menció especial mereixen els neutrins i les diferents espècies de quarks, les propietats dels quals són molt poc conegudes. El procediment de treball és el mateix que el del capítol anterior. L'altre aportació d'aquesta publicació és la de fer extensiu l'estudi al cas en què el Model Estàndard estigui realitzat no linealment i per tant, s'hagi de parametrizar la nova física mitjançant un lagrangiana efectiu quiral.

Finalment, en el capítol 6 s'estudia la rellevància dels experiments d'alta precisió de  $QED$  en la detecció de possibles desviacions del Model Estàndard dins del context dels Lagrangians efectius. Els observables d'alta precisió considerats són el moment magnètic anòmal de l'electró i del muó, l'efecte Lamb en l'hidrogen, i l'estructura hiperfina del muoni. L'electrodinàmica quàntica és una teoria consistent i predictiva que mostra un acord amb l'experiment molt precís. Aquesta precisió permet fitar contribucions no estàndards que podrien afectar sobre els observables anteriors. La parametrització de les contribucions anteriors es du a terme mitjançant un lagrangiana efectiu al qual li exigim que sigui invariant gauge sota les simetries del Model Estàndard més enllà de ser únicament invariant sota la simetria electromagnètica. L'afirmació de si els experiments de  $QED$  d'alta precisió són rellevants o no en la recerca de nova física es basa en que els mateixos operadors efectius que afecten els observables abans esmentats, també indueixen nous efectes sobre altres observables mesurats en altres experiments diferents dels de  $QED$ . Aquest fet pot utilitzar-se



per comparar la capacitat de diferents experiments en la recerca de nova física, així com també saber quins experiments duen a límits més restrictius sobre qualsevol dels observables de *QED* que hem mencionat anteriorment.

# Capítol 4

## New Bounds on the Magnetic and Electric Moments of the Tau Lepton

In collaboration with E. Massó. Published in *Phys. Lett.* **B301** (1993) 419.

### 4.1 Introduction

The experimental knowledge we have on the properties of the electron and the muon is in general much more precise than the knowledge we have on the tau lepton. Effort is currently done to ameliorate our understanding on the  $\tau$  properties [1].

Electromagnetic properties, as the electric and magnetic moments, play a special role. The electromagnetic matrix element describing the interaction of  $\tau$ 's with photons,

$$\langle p_2 | J_{em}^\alpha(0) | p_1 \rangle = e \bar{u}(p_2) \left( F_1 \gamma^\alpha + \left[ \frac{i}{2m_\tau} F_2 + \gamma_5 \tilde{F}_2 \right] \sigma^{\alpha\beta} q_\beta \right) u(p_1) , \quad (4.1)$$

where  $q = p_2 - p_1$ , contains the tau anomalous magnetic moment

$$a_\tau = \frac{g_\tau - 2}{2} = F_2(q^2 = 0) , \quad (4.2)$$

and the electric dipole moment (EDM),

$$d_\tau = e \tilde{F}_2(q^2 = 0) . \quad (4.3)$$

While the precise measurements of  $(g_e - 2)$  and  $(g_\mu - 2)$  provide, among many other things, an accurate test of the point-like character of both leptons [1], no such stringent limitation exists for the tau lepton [3]. Constraints on  $a_\tau$  have been discussed in Refs. [4]–[6], and the best existing bound [4] is

$$|a_\tau| \leq 0.02 . \quad (4.4)$$

The tau EDM, if non vanishing, would shed light on our understanding of  $CP$  violation. Constraints on  $d_\tau$  have been discussed in Refs. [5, 7, 8], and the strongest bound is [7]

$$|d_\tau| \leq 1.4 \times 10^{-16} \text{ e-cm} . \quad (4.5)$$

For reference, we quote the expectations for these observables in the Standard Model (SM), where the tau lepton is elementary. We have

$$a_\tau|_{SM} = \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2) , \quad (4.6)$$

and a detailed calculation [9] leads to

$$a_\tau|_{SM} = 1.177 \times 10^{-3} . \quad (4.7)$$

The expected EDM of the  $\tau$ -lepton in the SM is extremely small, and depends on unknown leptonic mixing angles and neutrino masses. (See Ref. [10] for details.)

In the present letter we shall use the LEP1 data to place a bound on  $a_\tau$  and on  $d_\tau$ . Our procedure to place such bounds is the following. The addition of new physics to the minimal SM could lead to values higher than the SM expectations for both dipole moments. Deviations from the SM can be described by an effective Lagrangian with a new high mass scale  $\Lambda$ , and composed of operators that are built with the SM fields. We shall impose that the new operators respect the standard gauge symmetry  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . (A complete discussion on the necessary imposition of the gauge symmetry to new interactions is presented in Ref. [11].) We shall concentrate of course in the operators that would contribute to the dipole moments we are interested in. We will show that they inevitably induce anomalous couplings of the neutral boson  $Z$  to  $\tau$ 's. The presence of these new terms is severely constrained by the LEP1 data, and the constraints can be translated into bounds on  $a_\tau$  and  $d_\tau$ .

The form factors  $F_2$  and  $\tilde{F}_2$  will have a logarithmic  $q^2$ -dependence (with a scale  $M_Z$  in the SM and with a scale  $\Lambda$  in an effective gauge-invariant Lagrangian beyond

the SM). The effect is expected to be small and we shall neglect it, and approximate the form factors by constants, in the present work.

## 4.2 Bound on $a_\tau$

It may appear that one needs a dimension-five interaction to generate a magnetic dipole moment beyond the SM. However, such an interaction would not be  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  gauge invariant at the weak scale. The lowest dimension of the gauge-invariant operators that may contribute to  $a_\tau$  is six. The operators can be read from the complete lists that have been elaborated [12, 13]:

$$\mathcal{O}_{\tau B} = \overline{L}_\tau \sigma^{\mu\nu} \tau_R \Phi B_{\mu\nu} , \quad (4.8)$$

$$\mathcal{O}_{\tau W} = \overline{L}_\tau \sigma^{\mu\nu} \vec{\sigma} \tau_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} . \quad (4.9)$$

Here  $L_\tau$  is the  $\tau$  left-handed isodoublet,  $\tau_R$  its right-handed partner,  $\mathbf{W}, B$  are the  $SU(2)$  and  $U(1)$  field strengths, and  $\Phi$  is the scalar doublet. Contributions to  $a_\tau$  appear below the weak scale due to the spontaneous symmetry breaking,

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \dots \quad (4.10)$$

with  $v^2 = 1/(\sqrt{2} G_F) \simeq (246 \text{ GeV})^2$ .

Let us in turn examine the consequences of these two operators. We first consider the operator in Eq. (4.8) and the corresponding effective Lagrangian,

$$\mathcal{L}_{\tau B} = \frac{\alpha_{\tau B}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_{\tau B} + \text{h.c.} , \quad (4.11)$$

with an unknown (high) mass scale  $\Lambda$  and unknown strength  $\alpha_{\tau B}$ . We extend our Lagrangian by adding this new piece to the standard model Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_{\tau B} . \quad (4.12)$$

The new term in the Lagrangian clearly induces an anomalous coupling contributing to  $a_\tau$  as defined in Eq. (4.2). Let us call this contribution  $a_\tau^{\tau B}$ . We obtain

$$\frac{e}{2m_\tau} a_\tau^{\tau B} = c_W \frac{\sqrt{2}}{v} \epsilon_{\tau B} . \quad (4.13)$$

( $c_W$  stands for  $\cos \theta_W$ , with  $\theta_W$  the weak mixing angle.) The unknown parameters  $\Lambda$  and  $\alpha_{\tau B}$  have been combined in a unique dimensionless parameter

$$\epsilon_{\tau B} \equiv \frac{\alpha_{\tau B} v^2}{\Lambda^2} . \tag{4.14}$$

The new term has other effects. In particular it also induces an anomalous coupling of the  $Z$  to  $\tau$ 's,

$$\mathcal{L} = -\alpha_{\tau B} s_W \frac{\sqrt{2} v}{\Lambda^2} \bar{\tau} \sigma^{\alpha\beta} \tau \partial_\alpha Z_\beta + \dots \tag{4.15}$$

( $s_W = \sin \theta_W$ .) We see that the partial width  $\Gamma(Z \rightarrow \tau^- \tau^+) \equiv \Gamma_\tau$  will get modified from its predicted value in the Standard Model,

$$\Gamma_\tau = \Gamma_\tau^{SM} + \delta\Gamma_\tau , \tag{4.16}$$

and it is easy to calculate the relative shift

$$\frac{\delta\Gamma_\tau}{\Gamma_\tau} = \frac{s_W^2}{c_V^2 + c_A^2} \epsilon_{\tau B}^2 , \tag{4.17}$$

with  $c_V = -1/2 + 2s_W^2$ ,  $c_A = -1/2$ . Eq. (4.17), and similar equations hereafter, are valid to first order in  $\epsilon_{\tau B}^2$ .

The agreement between experiment and the SM predictions implies limitations on the coefficient  $\epsilon_{\tau B}$ . The use of the experimental result [14]

$$\Gamma_\tau^{exp} = 83.49 \pm 0.63 \text{ MeV} , \tag{4.18}$$

is not enough to constrain  $\epsilon_{\tau B}$ , due to the  $m_t$  dependence of the theoretical predictions of the SM, and the fact that we do not know yet this mass. Thus, on the one hand, we use the experimental LEP1 data [14], the neutrino-nucleon cross-section ratio  $R_\nu$  [15], the observed value of  $M_W$  [16, 9], and the CDF limit on the top mass [9]. On the other hand, for the theoretical predictions we use the results of Bardin *et al.* [18]. We keep the  $m_t$  dependence explicitly in the predictions. Since the dependence on the Higgs mass  $M_H$  is much weaker, we choose to allow  $M_H$  to span the range 60 – 1000 GeV. This can be regarded as having a theoretical uncertainty in our prediction, to be combined with the experimental error. To be conservative, we have added this theoretical uncertainty and the experimental errors *linearly*.

The  $2\sigma$  C.L. contour in the  $(m_t^2, \epsilon_{\tau B}^2)$  plane is shown in Fig. (4.1).

From there we infer the upper bound

$$\epsilon_{\tau B}^2 \leq 2.4 \times 10^{-2} , \tag{4.19}$$

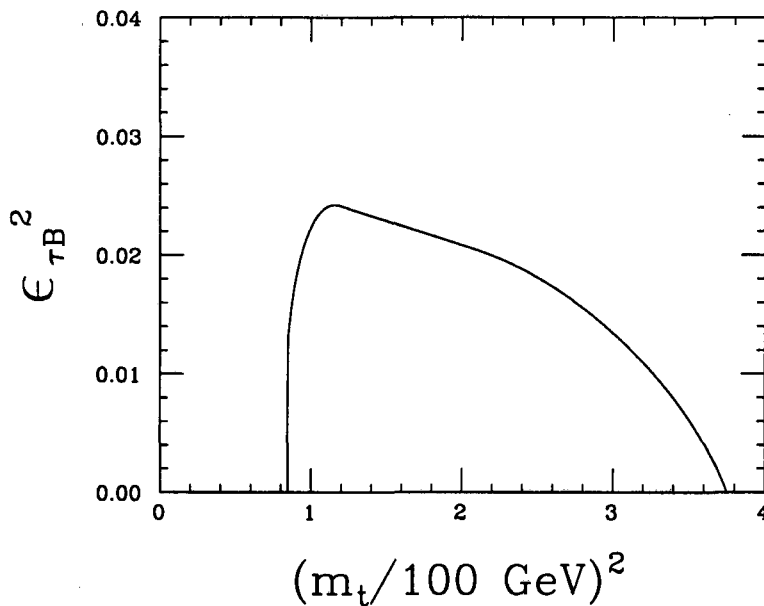


Figure 4.1:  $2\sigma$  upper bound on  $\epsilon_{\tau B}$  as a function of the top quark mass. As discussed in the text, the upper bound on  $\tilde{\epsilon}_{\tau B}$  is also the one shown here.

independent of the value of  $m_t$ . Introducing now this bound in Eq. (4.13) we have

$$|a_{\tau}^{\tau B}| \leq 9 \times 10^{-3} \quad (2\sigma). \quad (4.20)$$

We have now to combine the constraint (4.20) with the SM contribution, given in (4.7). We get at the 95.5 % confidence level

$$-8 \times 10^{-3} \leq a_{\tau} \leq 1 \times 10^{-2} \quad (2\sigma). \quad (4.21)$$

Finally, we turn our attention to the operator in Eq. (4.9). Its effects on  $a_{\tau}$  can be discussed in the very same terms that we have done for the operator (4.8). We shall only display the final equations,

$$\frac{e}{2m_{\tau}} a_{\tau}^{\tau W} = -s_W \frac{\sqrt{2}}{v} \epsilon_{\tau W}, \quad (4.22)$$

where  $\epsilon_{\tau W}$  is the adimensional parameter analogous to the parameter (4.14), and

$$\frac{\delta\Gamma_{\tau}}{\Gamma_{\tau}} = \frac{c_W^2}{c_V^2 + c_A^2} \epsilon_{\tau W}^2. \quad (4.23)$$

The experimental data that test the SM now set the bound

$$|a_{\tau}^{\tau W}| \leq 3 \times 10^{-3} \quad (2\sigma). \quad (4.24)$$

This limit is stronger than the one we found before, Eq. (4.20), and so we conclude that our limit on the anomalous magnetic moment of the tau-lepton is the one given in Eq. (4.21). In doing so, we bar unnatural cancellations of the effects produced by the independent operators  $\mathcal{O}_{\tau W}$  and  $\mathcal{O}_{\tau B}$ .

### 4.3 Bound on $d_\tau$

The procedure we follow to bound the EDM of the tau-lepton,  $d_\tau$ , is similar to the one we have used when considering  $a_\tau$ . The gauge-invariant operators contributing to  $d_\tau$  are the dimension-six operators [19]

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\tau B} = \bar{L}_\tau \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \tau_R \Phi B_{\mu\nu} , \quad (4.25)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\tau W} = \bar{L}_\tau \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \vec{\sigma} \tau_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} . \quad (4.26)$$

The piece of the effective Lagrangian containing the operator  $\tilde{\mathcal{O}}_{\tau B}$ ,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\tau B} = \frac{\tilde{\alpha}_{\tau B}}{\Lambda^2} \tilde{\mathcal{O}}_{\tau B} + \text{h.c.} , \quad (4.27)$$

induces indeed an EDM

$$d_\tau = c_W \frac{\sqrt{2}}{v} \tilde{\epsilon}_{\tau B} , \quad (4.28)$$

but it also induces a shift in the partial width  $Z \rightarrow \tau^- \tau^+$ ,

$$\frac{\delta\Gamma_\tau}{\Gamma_\tau} = \frac{s_W^2}{c_V^2 + c_A^2} \tilde{\epsilon}_{\tau B}^2 . \quad (4.29)$$

The parameter  $\tilde{\epsilon}_{\tau B}$ , defined as

$$\tilde{\epsilon}_{\tau B} \equiv \frac{\tilde{\alpha}_{\tau B} v^2}{\Lambda^2} , \quad (4.30)$$

is constrained by existing experimental data, in the same way that  $\epsilon_{\tau B}$  was before. The final  $2\sigma$  contour is exactly the same than the one displayed in Fig. (4.1), with  $\epsilon_{\tau B}$  substituted by  $\tilde{\epsilon}_{\tau B}$ , and we obviously get a bound identical to (4.19),

$$\tilde{\epsilon}_{\tau B}^2 \leq 2.4 \times 10^{-2} \quad (2\sigma) . \quad (4.31)$$

The limit on  $d_\tau$  turns out to be

$$|d_\tau| \leq 5 \times 10^{-17} \text{ e-cm} \quad (2\sigma) . \quad (4.32)$$

This bound is weaker than the one obtained when we extend the SM with an effective Lagrangian containing the operator in Eq. (4.26). Eq. (4.32) is thus our 95.5 % C.L. limit on  $d_\tau$ .

## 4.4 Conclusions

We have shown that gauge-invariant operators contributing to the magnetic and electric dipole moments of the tau-lepton,  $a_\tau$  and  $d_\tau$ , produce changes in the partial width  $\Gamma(Z \rightarrow \tau^- \tau^+)$ . We have used electroweak data to constrain these departures from the Standard Model. Assuming no  $q^2$ -dependence in the form factors, we obtain the 95.5 % C.L. bounds

$$-8 \times 10^{-3} \leq a_\tau \leq 1 \times 10^{-2} \quad (2\sigma), \quad (4.33)$$

and

$$|d_\tau| \leq 5 \times 10^{-17} \text{ e-cm} \quad (2\sigma). \quad (4.34)$$



# Bibliografia

- [1] M. L. Perl, *Rep. Prog. Phys.* **55** (1992) 653.
- [2] *Quantum Electrodynamics*, ed. T. Kinoshita, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, World Scientific (1990).
- [3] G. Domokos *et al.*, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 247.
- [4] D. J. Silverman and G. L. Shaw, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 1196.
- [5] J. A. Grifols and A. Méndez, *Phys. Lett.* **B255** (1991) 611.
- [6] J. Reid *et al.*, *Phys. Rev.* **D30** (1984) 245.
- [7] F. del Aguila and M. Sher, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 116.
- [8] S. M. Barr and W. J. Marciano, in *CP violation*, ed. C. Jarlskog, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, World Scientific (1989).
- [9] M. A. Samuel, G. Li and R. Mendel, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 668.
- [10] J. Donoghue, *Phys. Rev.* **D8** (1978) 1632.
- [11] A. De Rújula *et al.*, *Nucl. Phys.* **384B** (1992) 3.
- [12] C. J. C. Burges and H. J. Schnitzer, *Nucl. Phys* **228B** (1983) 464;  
C. N. Leung, S. T. Love and S. Rao, *Z. Phys.* **C31** (1986) 433.
- [13] W. Buchmüller and D. Wyler, *Nucl. Phys.* **268B** (1986) 621.
- [14] L. Rolandi, talk at the *XXVI International Conference on High Energy Physics*, Dallas 1992, to be published in the Proceedings, CERN preprint (1992);  
The LEP Electroweak Working Group, M. Martinez *et al.*, CERN preprint (1992).

- 
- [15] H. Abramowicz *et al.*, CDHS Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 298;  
J. V. Allaby *et al.*, CHARM Collaboration, *Phys. Lett.* **B177** (1986) 446.
- [16] J. Alliti *et al.*, UA2 Collaboration, *Phys. Lett.* **B241** (1990) 150.
- [17] F. Abe *et al.*, CDF Collaboration, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 2070.
- [18] D. Bardin *et al.* *Z. Phys.* **C44** (1989) 493;  
D. Bardin, W. Hollik and T. Riemann *Z. Phys.* **C49** (1991) 485.
- [19] A. De Rújula *et al.*, *Nucl. Phys.* **357B** (1991) 311.

# Capítol 5

## Constraints on Fermion Magnetic and Electric Moments from LEP-I

In collaboration with E. Massó. Published in *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 19.

### 5.1 Introduction

The magnetic and electric dipole moments of fermions contain important information about their nature and interactions. On the one hand, concerning the magnetic moments, the precise measurements of the  $g - 2$  values of the electron and the muon provide, among other things, an accurate test of the point-like character of both leptons. However, limits on the magnetic dipole moment of the tau lepton, of the neutrinos and of the different quark species are much poorer.

On the other hand, the most stringent limits on electric dipole moments concern the neutron and the electron, and this sets strong constraints on some of the  $CP$ -violating parameters. Using quark-model arguments, one is able to infer upper bounds on the electric dipole moments of the up and down quarks from the neutron measurements. However, again the electric dipole moments of the tau lepton, of the neutrinos, and of the second and third generation quarks are much less constrained.

The aim of the present paper is to extract “indirect” limits on fermion moments using the electroweak data, in the context of an effective Lagrangian approach. Our main idea is fairly simple. The effective Lagrangian that may induce fermion mo-

ments different from the Standard Model expectations inevitably induces anomalous couplings of the neutral boson  $Z$  to fermions. We will obtain constraints on these anomalous couplings using the available electroweak data, and these constraints will provide bounds on the fermion magnetic and electric moments.

Let us define here the general electromagnetic matrix element describing the interaction of a fermion with the photon. For a charged fermion one usually defines

$$\begin{aligned} \langle p_2 | J_{em}^\mu(0) | p_1 \rangle = & -e Q_f \bar{u}(p_2) \left( F_1^f \gamma^\mu + \frac{i}{2m_f} F_2^f \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(p_1) \\ & + e \bar{u}(p_2) F_3^f \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p_1) , \end{aligned} \quad (5.1)$$

where  $e Q_f$  is the fermion charge, and  $q = p_2 - p_1$ . The form factors  $F_2$  and  $F_3$ , evaluated in the static limit, correspond to the anomalous magnetic moment

$$a_f = F_2^f(q^2 = 0) , \quad (5.2)$$

and to the electric dipole moment

$$d_f = e F_3^f(q^2 = 0) , \quad (5.3)$$

of a charged fermion.

We now turn our attention to neutrinos. We will assume in this paper that neutrinos are Dirac particles. Thus, their electromagnetic interactions are described in terms of

$$\langle p_2 | J_{em}^\mu(0) | p_1 \rangle = \bar{u}(p_2) (i F_2^\nu \mu_B + e F_3^\nu \gamma_5) \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p_1) , \quad (5.4)$$

with  $\mu_B = e/2m_e$  the Bohr magneton. In units of  $\mu_B$ , the neutrino magnetic moment is

$$\kappa_\nu = F_2^\nu(q^2 = 0) , \quad (5.5)$$

and the electric dipole moment is

$$d_\nu = e F_3^\nu(q^2 = 0) . \quad (5.6)$$

In the following section we discuss the general analysis of the fermion moments in the linear effective Lagrangian approach, and in Section 5.3 we describe our procedure to extract our limits and find them. The non-linear effective Lagrangian approach is discussed in Section 5.4. In Section 5.5 we present our main conclusions.

## 5.2 Linear effective Lagrangian analysis of fermion moments

Deviations from the electroweak Standard Model (SM) realized in its minimal linear form, with a perturbative scalar sector, can be treated by using effective Lagrangians. The general idea of the linear effective Lagrangian approach is that theories beyond the SM, emerging at some characteristic energy scale  $\Lambda$ , have effects at low energies  $E \leq G_F^{-1/2}$ , and these effects can be taken into account by considering a Lagrangian that extends the SM Lagrangian,  $\mathcal{L}_{\text{SM}}$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{eff}} . \quad (5.7)$$

The effective Lagrangian  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  contains operators of increasing dimension that are built with the SM fields including the scalar sector, and is organized as an expansion in powers of  $(1/\Lambda)$ .

The success of the SM at the level of quantum corrections can be considered as a check of the gauge symmetry properties of the model. To preserve the consistency of the low energy theory, with a Lagrangian given by Eq. (5.7), we will assume that  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  is  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  gauge invariant. Some of the problems that originate when dealing with non-gauge invariant interactions have been discussed in Refs. [1, 2]. The gauge-invariant operators that dominate at low energies have dimension 6 and have been listed in Ref. [3]. We will now write the set of operators that would contribute to the dipole moments we are interested in. For each one of the listed operators, its hermitian conjugate will also contribute to the corresponding moment. We will not display the hermitian conjugate, although we considered it in our calculations.

Given a charged lepton  $\ell$ , there are two operators contributing to its magnetic dipole moment

$$\mathcal{O}_{\ell B} = \bar{L} \sigma^{\mu\nu} \ell_R \Phi B_{\mu\nu} , \quad (5.8)$$

$$\mathcal{O}_{\ell W} = \bar{L} \sigma^{\mu\nu} \vec{\sigma} \ell_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} ,$$

where  $L$  is the lepton isodoublet containing  $\ell$  and  $\ell_R$  the singlet partner. As we will see, the operators will involve the  $U(1)$  and  $SU(2)$  field strengths,

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu , \quad (5.9)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{jk}^i W^j W^k ,$$

as well as the Higgs field  $\Phi$  or its conjugate  $\tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^*$ . When considering quarks we have to distinguish between up-type and down-type induced magnetic moments. When the quark is  $U = u, c$  or  $t$ , we have contributions coming from

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{UB} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} U_R \tilde{\Phi} B_{\mu\nu} , \\ \mathcal{O}_{UW} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} \vec{\sigma} U_R \tilde{\Phi} \mathbf{W}_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (5.10)$$

where  $Q$  is the corresponding quark isodoublet, while for the case  $D = d, s$  or  $b$  one has

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{DB} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} D_R \Phi B_{\mu\nu} , \\ \mathcal{O}_{DW} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} \vec{\sigma} D_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Let us now display the operators contributing to the electric dipole moments. For the charged leptons we have

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_{\ell B} &= \bar{L} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \ell_R \Phi B_{\mu\nu} , \\ \tilde{\mathcal{O}}_{\ell W} &= \bar{L} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \vec{\sigma} \ell_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (5.12)$$

while for  $U = u, c, t$  we have

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_{UB} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 U_R \tilde{\Phi} B_{\mu\nu} , \\ \tilde{\mathcal{O}}_{UW} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \vec{\sigma} U_R \tilde{\Phi} \mathbf{W}_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (5.13)$$

and finally, for  $D = d, s, b$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_{DB} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 D_R \Phi B_{\mu\nu} , \\ \tilde{\mathcal{O}}_{DW} &= \bar{Q} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \vec{\sigma} D_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

The case of the neutrino dipole moments has to be treated separately. We need to enlarge the minimal SM by adding the right-handed neutrinos  $\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ . Once this is done, we have the following operators contributing to the neutrino magnetic moment

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\nu_\ell B} &= \bar{L} \sigma^{\mu\nu} \nu_{\ell R} \tilde{\Phi} B_{\mu\nu} , \\ \mathcal{O}_{\nu_\ell W} &= \bar{L} \sigma^{\mu\nu} \vec{\sigma} \nu_{\ell R} \tilde{\Phi} \mathbf{W}_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (5.15)$$

and to the neutrino electric dipole moment

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_{\nu_\ell B} &= \bar{L} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \nu_{\ell R} \tilde{\Phi} B_{\mu\nu} , \\ \tilde{\mathcal{O}}_{\nu_\ell W} &= \bar{L} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 \vec{\sigma} \nu_{\ell R} \tilde{\Phi} \mathbf{W}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (5.16)$$

In Eq. (5.15) and Eq. (5.16),  $L$  is the lepton isodoublet containing  $\nu_\ell$ .

The effective Lagrangian to be considered can now be written as a linear combination of the operators we have listed

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \sum_f \left( \frac{\alpha_{fB}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_{fB} + \frac{\alpha_{fW}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_{fW} \right) \\ & + \sum_f \left( \frac{\tilde{\alpha}_{fB}}{\Lambda^2} \tilde{\mathcal{O}}_{fB} + \frac{\tilde{\alpha}_{fW}}{\Lambda^2} \tilde{\mathcal{O}}_{fW} \right) . \end{aligned} \quad (5.17)$$

It is clear that below the scale of spontaneous symmetry breaking the effective Lagrangian in Eq. (5.17) induces contributions to the anomalous magnetic moments  $a_f$  and the electric moments  $d_f$ . Substituting

$$\Phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \quad (5.18)$$

with  $v^2 = 1/(\sqrt{2}G_F) \simeq (246 \text{ GeV})^2$ , one gets the following contributions

$$\delta a_f = -2\sqrt{2} \frac{m_f}{v} \frac{1}{e Q_f} (c_W \epsilon_{fB} + s_W \epsilon_{fW}) , \quad (5.19)$$

for any charged fermion  $f$  being the up-type component of the lepton and quark isodoublets, and

$$\delta a_f = -2\sqrt{2} \frac{m_f}{v} \frac{1}{e Q_f} (c_W \epsilon_{fB} - s_W \epsilon_{fW}) , \quad (5.20)$$

for the down-type components. We have defined the dimensionless parameters

$$\begin{aligned} \epsilon_{fB} &= \alpha_{fB} \frac{v^2}{\Lambda^2} , \\ \epsilon_{fW} &= \alpha_{fW} \frac{v^2}{\Lambda^2} , \end{aligned} \quad (5.21)$$

valid for any fermion, and  $c_W = \cos \theta_W$ ,  $s_W = \sin \theta_W$ . When  $f = \nu$  we obtain the following contribution to the neutrino magnetic moment

$$\delta \kappa_\nu = 2\sqrt{2} \frac{m_e}{v} \frac{1}{e} (c_W \epsilon_{\nu B} + s_W \epsilon_{\nu W}) . \quad (5.22)$$

Finally, for the up-type fermions  $f$  one gets the following contribution to  $d_f$

$$\delta d_f = -\frac{\sqrt{2}}{v} (c_W \tilde{\epsilon}_{fB} + s_W \tilde{\epsilon}_{fW}) , \quad (5.23)$$

and for the down-type fermions

$$\delta d_f = -\frac{\sqrt{2}}{v} (c_W \tilde{\epsilon}_{fB} - s_W \tilde{\epsilon}_{fW}) , \quad (5.24)$$

where

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{fB} &= \tilde{\alpha}_{fB} \frac{v^2}{\Lambda^2}, \\ \tilde{\epsilon}_{fW} &= \tilde{\alpha}_{fW} \frac{v^2}{\Lambda^2}.\end{aligned}\tag{5.25}$$

We have discussed in this section how fermion moments are described by linear effective Lagrangians. We will now address our attention to describe the procedure to extract limits in this case, and leave the discussion of non-linear effective Lagrangians until Section 5.4.

### 5.3 Bounds on the magnetic and electric moments

We have seen in the last section that the linear effective Lagrangian in Eq. (5.17) induces fermion moments to be added to the SM contributions. However, the new operators in the effective Lagrangian have other effects. The most interesting, from the phenomenological point of view, is the anomalous coupling of the  $Z$  boson to fermions

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sum_{f=up\text{-type}} \frac{\sqrt{2}}{v} (s_W \epsilon_{fB} - c_W \epsilon_{fW}) \bar{f} \sigma^{\mu\nu} f \partial_\nu Z_\mu \\ &+ \sum_{f=up\text{-type}} \frac{\sqrt{2}}{v} (s_W \tilde{\epsilon}_{fB} - c_W \tilde{\epsilon}_{fW}) \bar{f} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 f \partial_\nu Z_\mu \\ &+ \sum_{f=down\text{-type}} \frac{\sqrt{2}}{v} (s_W \epsilon_{fB} + c_W \epsilon_{fW}) \bar{f} \sigma^{\mu\nu} f \partial_\nu Z_\mu \\ &+ \sum_{f=down\text{-type}} \frac{\sqrt{2}}{v} (s_W \tilde{\epsilon}_{fB} + c_W \tilde{\epsilon}_{fW}) \bar{f} \sigma^{\mu\nu} i \gamma_5 f \partial_\nu Z_\mu + \dots\end{aligned}\tag{5.26}$$

These anomalous couplings would shift the partial widths  $\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) \equiv \Gamma_f$  from their predicted values in the Standard Model

$$\Gamma_f = \Gamma_f^{\text{SM}} + \delta\Gamma_f.\tag{5.27}$$

The agreement between experiment and the SM predictions implies limitations on the strength of the different *a priori* independent terms in the effective Lagrangian. We will not allow for unnatural cancellations of the effects produced by different operators, and thus we will consider one operator at a time.

We should emphasize that once we have selected one of the contributions to a particular fermionic width  $\Gamma_f$ , it is not enough to simply use the experimental result  $\Gamma_f^{\text{exp}}$  to get our constraints. This is due to the well-known  $m_t$ -dependence of the



theoretical predictions of the SM, and to a less extent to the dependence on the Higgs mass  $M_H$ . We choose to keep the  $m_t$ -dependence of our results explicitly and allow  $M_H$  to span the range 60 GeV to 1 TeV, with this “theoretical uncertainty” (and the theoretical uncertainty in the experimental value of  $\alpha_s$ ) linearly summed to the experimental errors. It is quite common to combine theoretical and experimental errors in quadrature. Here, we adopt the more conservative point of view of adding the two types of uncertainties *linearly*.

For the theoretical SM predictions we borrow the results of Bardin *et al.*[4], that were kindly made available to us by M.Bilenky.

We use the LEP value  $M_Z = 91.187$  GeV as input, as well as the current values of  $\alpha$  and  $G_F$  [5, 6]. The observables we use to constrain deviations from the Standard Model are:

1. the experimental LEP-I data [5]

$$\begin{aligned}
 \Gamma_e &= 83.86 \pm 0.30 \text{ MeV} , \\
 \Gamma_\mu &= 83.78 \pm 0.40 \text{ MeV} , \\
 \Gamma_\tau &= 83.50 \pm 0.45 \text{ MeV} , \\
 \Gamma_{inv} &= 497.6 \pm 4.3 \text{ MeV} , \\
 \Gamma_{had} &= 1740.3 \pm 5.9 \text{ MeV} , \\
 g_{Ae} &= -0.50096 \pm 0.00093 , \\
 g_{A\mu} &= -0.5013 \pm 0.0012 , \\
 g_{A\tau} &= -0.5005 \pm 0.0014 ,
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

2. the  $W$ -mass determined from the ratio  $M_W/M_Z$  measured at  $p\bar{p}$  colliders and the LEP value for  $M_Z$  [7]

$$M_W = 80.24 \pm 0.09_{-0.02}^{+0.01} \text{ GeV} , \tag{5.29}$$

3. the ratio of inclusive neutral- to charged-currents neutrino cross sections on approximately isoscalar targets [8]

$$R_\nu = \frac{\sigma(\nu N \rightarrow \nu + \dots)}{\sigma(\nu N \rightarrow \mu + \dots)} = 0.308 \pm 0.002 , \tag{5.30}$$

and

4. the CDF limit on the top quark mass [9]

$$m_t \geq 108 \text{ GeV} . \quad (5.31)$$

We now turn our attention to the explicit expressions for  $\delta\Gamma_f$  due to the novel effects we are considering. Starting with the operators  $\mathcal{O}_{fB}$ , we have that for each fermion  $f$  the relative width shift is

$$\frac{\delta\Gamma_f}{\Gamma_f} = \frac{s_W^2}{v_f^2 + a_f^2} \epsilon_{fB}^2 , \quad (5.32)$$

where  $v_f = T_3^f - 2s_W^2 Q_f$  and  $a_f = T_3^f$ . The operators  $\mathcal{O}_{fW}$  induce the change

$$\frac{\delta\Gamma_f}{\Gamma_f} = \frac{c_W^2}{v_f^2 + a_f^2} \epsilon_{fW}^2 . \quad (5.33)$$

In the  $CP$ -violating sector, the operators  $\tilde{\mathcal{O}}_{fB}$  lead to

$$\frac{\delta\Gamma_f}{\Gamma_f} = \frac{s_W^2}{v_f^2 + a_f^2} \tilde{\epsilon}_{fB}^2 , \quad (5.34)$$

while the type  $\tilde{\mathcal{O}}_{fW}$  lead to

$$\frac{\delta\Gamma_f}{\Gamma_f} = \frac{c_W^2}{v_f^2 + a_f^2} \tilde{\epsilon}_{fW}^2 . \quad (5.35)$$

As we have already discussed, the limits on the different parameters  $\epsilon$  in Eqs. (5.32, 5.33) and  $\tilde{\epsilon}$  in Eqs. (5.34, 5.35) will depend sensitively on  $m_t$ , since we have chosen to combine the weak dependence on  $M_H$  linearly with the experimental uncertainties. The limits are obtained by comparing the experimental values of the observables in Eqs. (5.28–5.31) with the predictions that we get when adding the SM results and the corrections previously discussed. Our results on  $\epsilon_{fB}$  are presented in Figs. 5.1–5.6, and the ones on  $\epsilon_{fW}$  in Figs. 5.7–5.12. The projection on the  $\epsilon^2$  (or the  $m_t^2$ ) axis corresponds to a single-variable 68%, or  $1\sigma$ , confidence-level interval.

These limits can be read from Figs. 5.1–5.6 and 5.7–5.12

$$\begin{aligned} \epsilon_{eB}^2 &\leq 1.10 \times 10^{-2} & \epsilon_{eW}^2 &\leq 2.98 \times 10^{-3} , \\ \epsilon_{\mu B}^2 &\leq 1.13 \times 10^{-2} & \epsilon_{\mu W}^2 &\leq 3.05 \times 10^{-3} , \\ \epsilon_{\tau B}^2 &\leq 1.07 \times 10^{-2} & \epsilon_{\tau W}^2 &\leq 2.89 \times 10^{-3} , \\ \epsilon_{UB}^2 &\leq 7.17 \times 10^{-2} & \epsilon_{UW}^2 &\leq 1.93 \times 10^{-2} , \\ \epsilon_{DB}^2 &\leq 7.17 \times 10^{-2} & \epsilon_{DW}^2 &\leq 1.93 \times 10^{-2} , \\ \epsilon_{\nu B}^2 &\leq 4.31 \times 10^{-2} & \epsilon_{\nu W}^2 &\leq 1.16 \times 10^{-2} . \end{aligned} \quad (5.36)$$

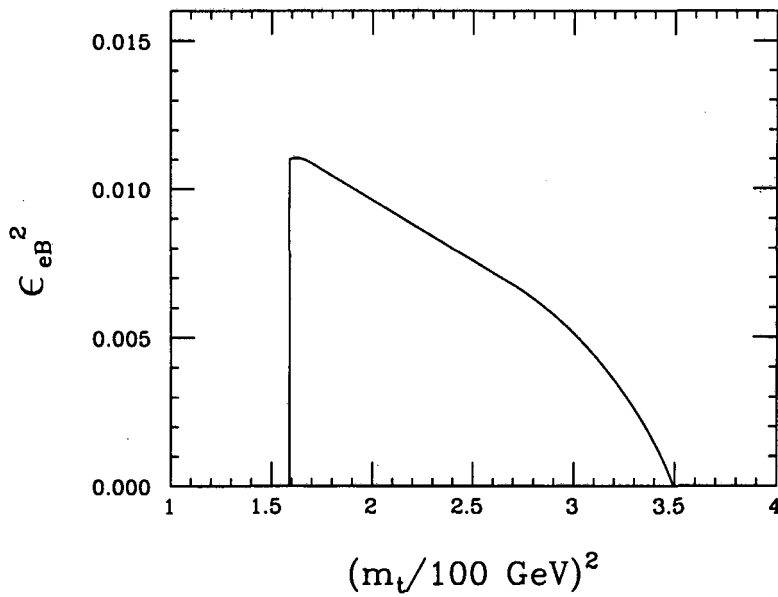


Figure 5.1: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{eB}^2)$  plane for  $f = e$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

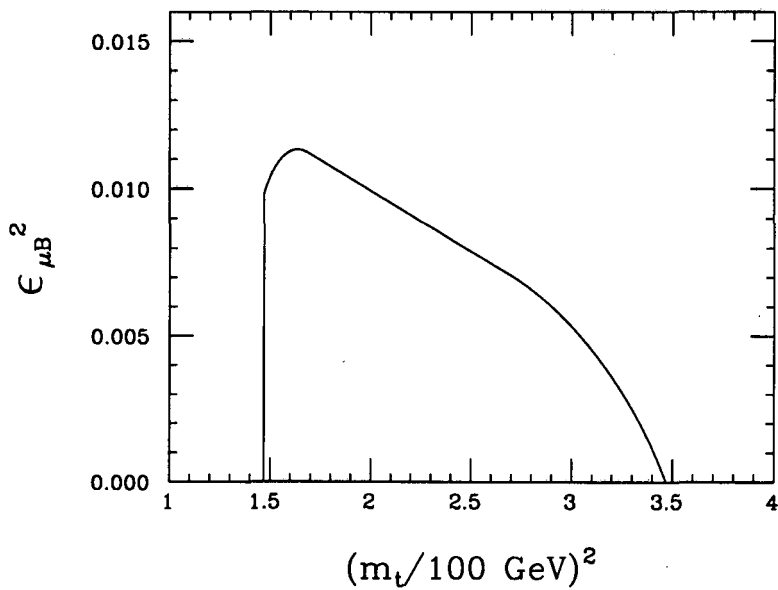


Figure 5.2: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{\mu B}^2)$  plane for  $f = \mu$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

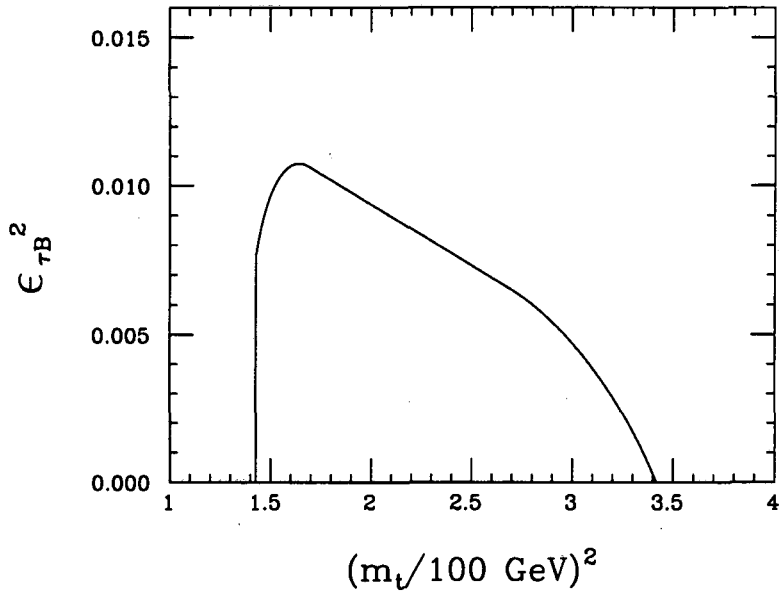


Figure 5.3: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{\tau B}^2)$  plane for  $f = \tau$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

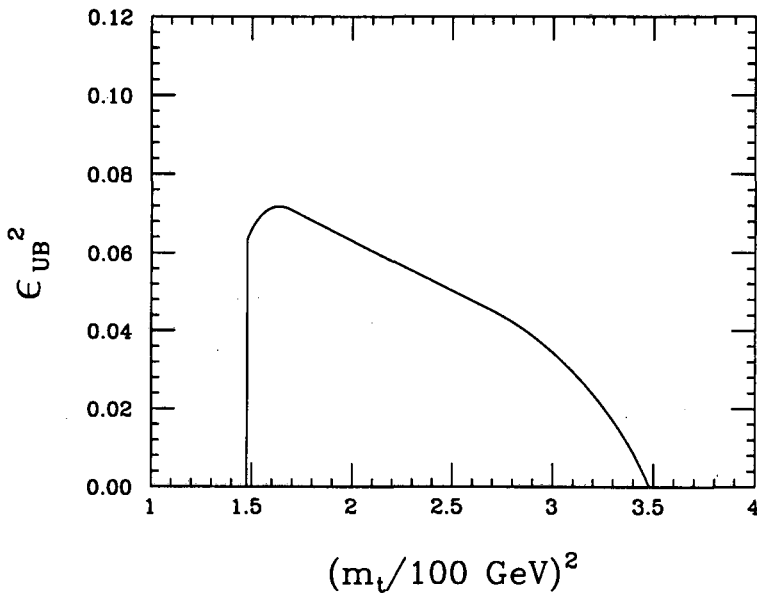


Figure 5.4: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{UB}^2)$  plane for  $f = U$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

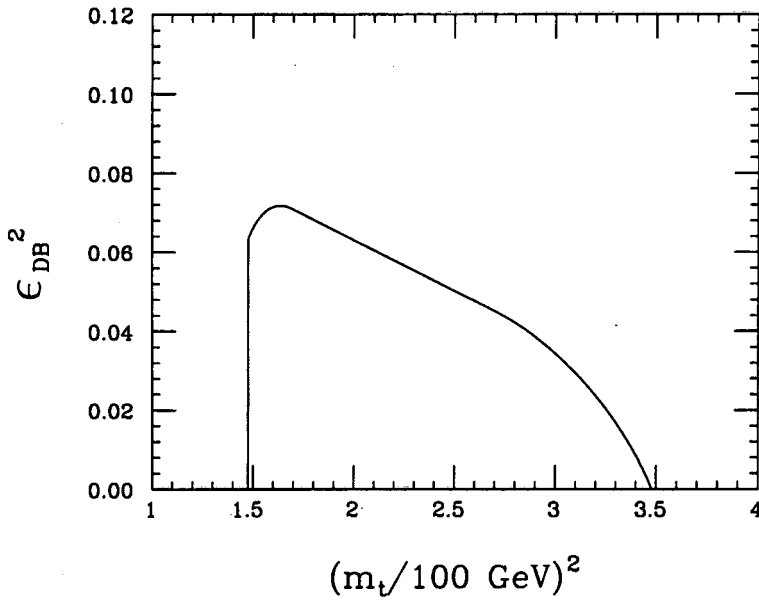


Figure 5.5: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{DB}^2)$  plane for  $f = D$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

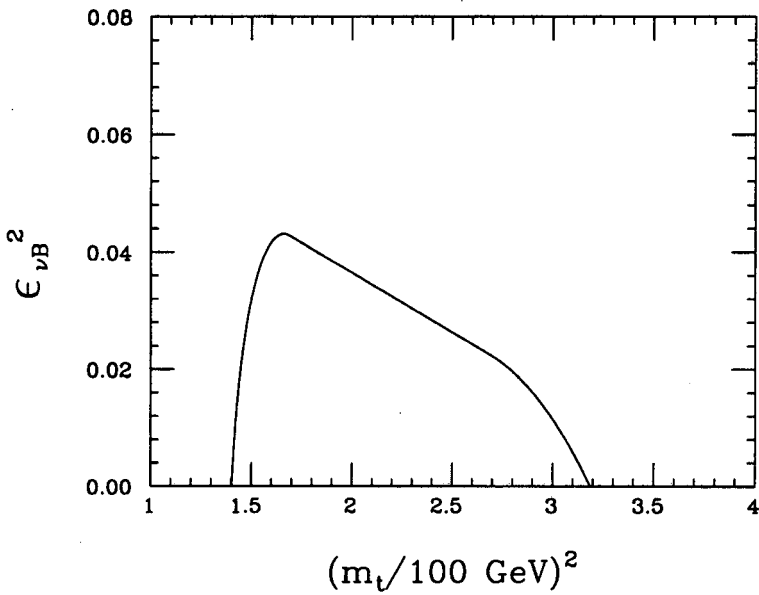


Figure 5.6: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{\nu B}^2)$  plane for  $f = \nu$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

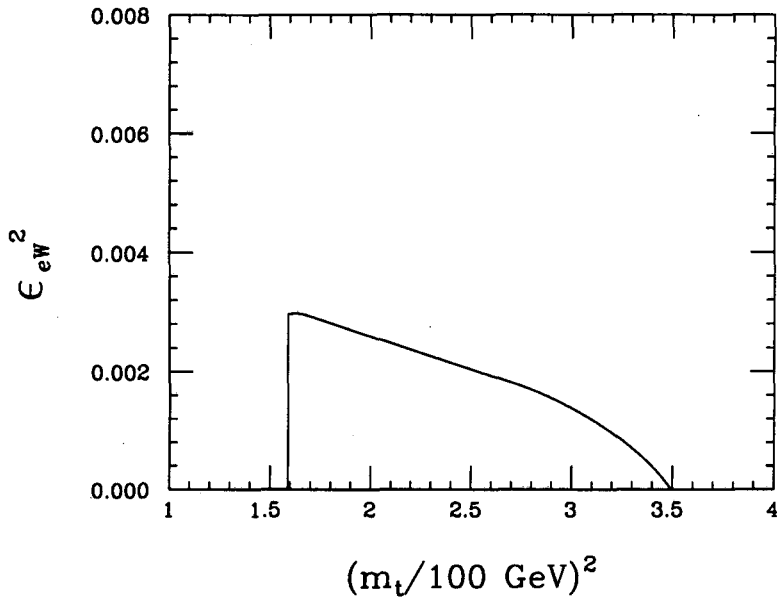


Figure 5.7: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{eW}^2)$  plane for  $f = e$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

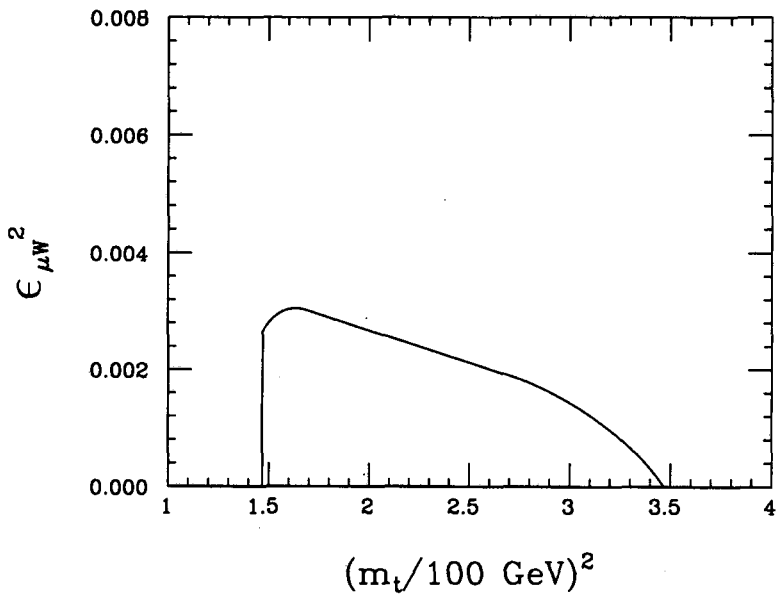


Figure 5.8: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{\mu W}^2)$  plane for  $f = \mu$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

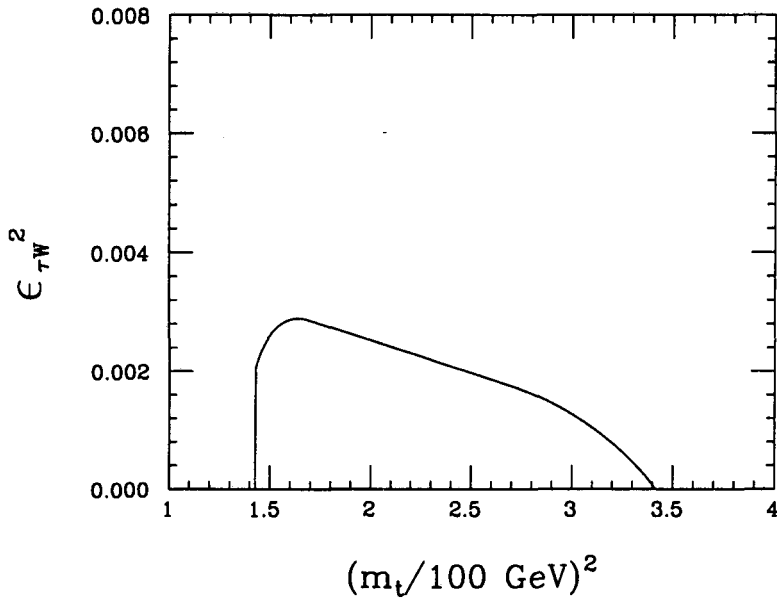


Figure 5.9: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{\tau W}^2)$  plane for  $f = \tau$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

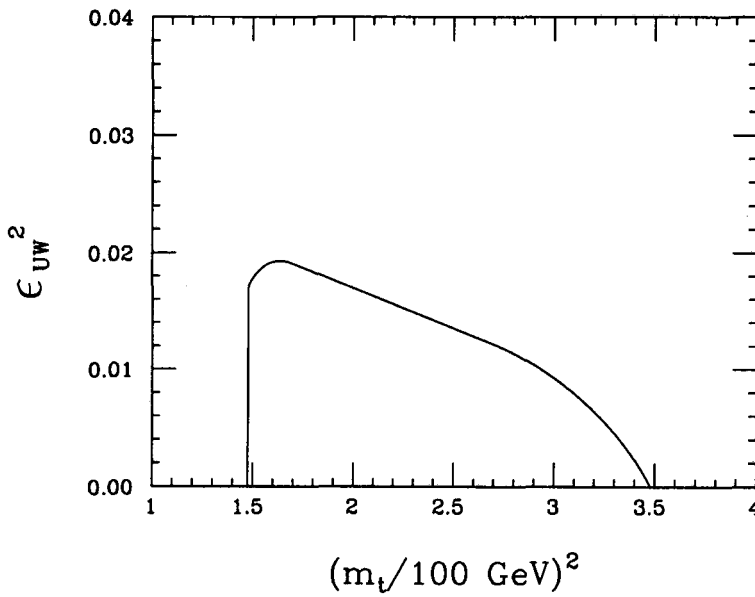


Figure 5.10: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{UW}^2)$  plane for  $f = U$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

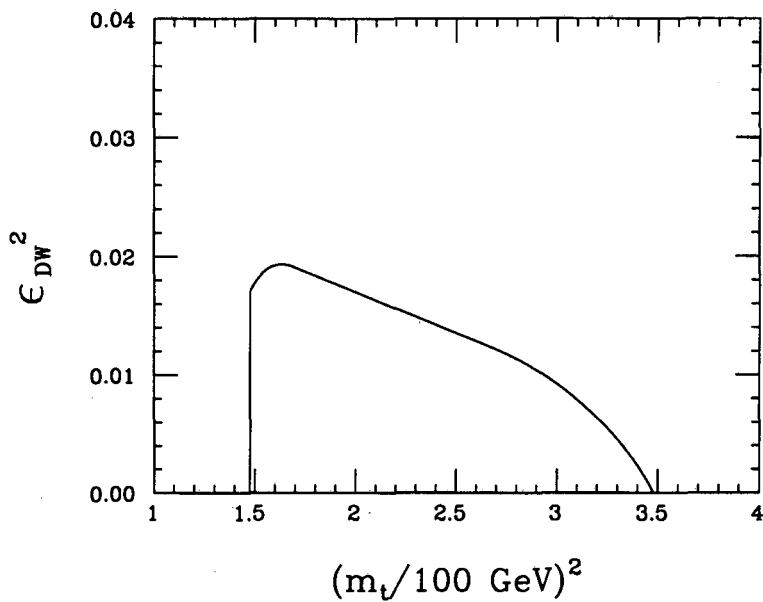


Figure 5.11: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{DW}^2)$  plane for  $f = D$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.

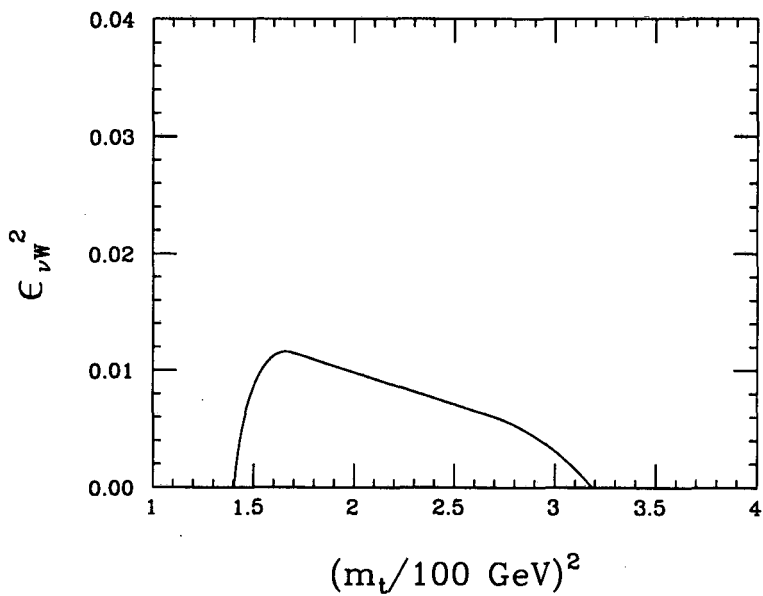


Figure 5.12: Allowed region in the  $(m_t^2, \epsilon_{\nu W}^2)$  plane for  $f = \nu$ . Projection on the  $\epsilon^2$  axis corresponds to a  $1\sigma$  C.L. interval.



As expected from a comparison of Eqs. (5.32) and (5.33) the limits coming from the operators  $\mathcal{O}_{fW}$  are stronger than the ones coming from  $\mathcal{O}_{fB}$ . Introducing the limits<sup>1</sup> on  $\epsilon$  into Eqs. (5.19, 5.20) we get limits on the anomalous magnetic moments. Looking at this equation, we anticipate that the operators  $\mathcal{O}_{fW}$  will lead to the tightest bounds on  $\delta a_f$ . We only quote here these strongest limits (we use  $m_u = 5$  MeV,  $m_d = 10$  MeV,  $m_c = 1.5$  GeV,  $m_s = 200$  MeV,  $m_b = 5.0$  GeV)

$$\begin{aligned}
\delta a_e &\leq 1.8 \times 10^{-6} & \delta a_u &\leq 2.3 \times 10^{-5}, \\
\delta a_\mu &\leq 3.8 \times 10^{-4} & \delta a_d &\leq 9.0 \times 10^{-5}, \\
\delta a_\tau &\leq 6.2 \times 10^{-3} & \delta a_c &\leq 6.8 \times 10^{-3}, \\
\delta \kappa_{\nu_e} &\leq 3.6 \times 10^{-6} & \delta a_s &\leq 1.8 \times 10^{-3}, \\
\delta \kappa_{\nu_\mu} &\leq 3.6 \times 10^{-6} & \delta a_b &\leq 4.5 \times 10^{-2}, \\
\delta \kappa_{\nu_\tau} &\leq 3.6 \times 10^{-6}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

We follow an identical procedure to constrain  $\tilde{\epsilon}_{fB}$  and  $\tilde{\epsilon}_{fW}$ . It turns out that the limits on  $\tilde{\epsilon}_{fB}$  are the same than the ones on  $\epsilon_{fB}$ , and similarly the  $\tilde{\epsilon}_{fW}$  and  $\epsilon_{fW}$  are identical<sup>2</sup>. Again we only quote our best limits on the electric dipole moments (in e-cm)

$$\begin{aligned}
\delta d_e &\leq 3.5 \times 10^{-17} & \delta d_u &\leq 8.9 \times 10^{-17}, \\
\delta d_\mu &\leq 3.5 \times 10^{-17} & \delta d_d &\leq 8.9 \times 10^{-17}, \\
\delta d_\tau &\leq 3.4 \times 10^{-17} & \delta d_c &\leq 8.9 \times 10^{-17}, \\
\delta d_{\nu_e} &\leq 6.9 \times 10^{-17} & \delta d_s &\leq 8.9 \times 10^{-17}, \\
\delta d_{\nu_\mu} &\leq 6.9 \times 10^{-17} & \delta d_b &\leq 8.9 \times 10^{-17}, \\
\delta d_{\nu_\tau} &\leq 6.9 \times 10^{-17}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

We finally turn our attention to a comparison of our limits with other results in the literature<sup>3</sup>. We present the comparison in Table 5.1 for the anomalous magnetic moment and in Table 5.2 for the electric dipole moment.

<sup>1</sup>To convert the bounds on  $\epsilon$  into bounds on the scale  $\Lambda$  one has to assume a value for  $\alpha$ , see Eq. (5.21). When  $\alpha \approx O(1)$  we would get  $\Lambda \geq O(1 \text{ TeV})$  and when  $\alpha \approx O(10^{-2})$  we would only get  $\Lambda \geq O(100 \text{ GeV})$ .

<sup>2</sup>One of the consequences is that we can make the same comment on the scale  $\Lambda$  than in the previous footnote.

<sup>3</sup>Bounds on the tau-lepton moments following the approach presented in this section were calculated in Ref. [27].

$a_f$	OUR LIMITS	OTHER LIMITS
$e$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$8.3 \cdot 10^{-11}$ [10]
$\mu$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$ [10]
$\tau$	0.0062	0.02 [11] 0.11 [12] $0.39 \pm 0.30$ [13]
$\nu_e$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$ [14]
$\nu_\mu$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$7.4 \cdot 10^{-10}$ [14]
$\nu_\tau$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	$5.4 \cdot 10^{-7}$ [16] $4 \cdot 10^{-6}$ [17] $8 \cdot 10^{-6}$ [18] $2 \cdot 10^{-12}$ (light $\nu$ ) [15]
$u$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$ [11]
$d$	$9.0 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$ [11]
$c$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	0.030 [11]
$s$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	0.025 [11]
$b$	$4.5 \cdot 10^{-2}$	0.13 [11] $-0.34 \pm 0.42$ [13]

Taula 5.1: Values of the anomalous magnetic moments excluded by our analysis using LEP-I data, compared to other limits we have found in the literature (light  $\nu_\tau$  means  $m(\nu_\tau) \leq O(10 \text{ keV})$ ).

$d_f$	OUR LIMITS (units $e\text{-cm}$ )	OTHER LIMITS (units $e\text{-cm}$ )
$e$	$3.5 \cdot 10^{-17}$	$1.1 \cdot 10^{-26}$ [19]
$\mu$	$3.5 \cdot 10^{-17}$	$7.1 \cdot 10^{-19}$ [20]
$\tau$	$3.4 \cdot 10^{-17}$	$1.2 \cdot 10^{-16}$ [21] $1.4 \cdot 10^{-16}$ [22, 23] $6 \cdot 10^{-16}$ [12]
$\nu_e$	$6.9 \cdot 10^{-17}$	$2.1 \cdot 10^{-23}$ [15]
$\nu_\mu$	$6.9 \cdot 10^{-17}$	$2.1 \cdot 10^{-23}$ [15]
$\nu_\tau$	$6.9 \cdot 10^{-17}$	$1.6 \cdot 10^{-16}$ [18] $3.9 \cdot 10^{-23}$ (light $\nu$ ) [15]
$u$	$8.9 \cdot 10^{-17}$	$3.9 \cdot 10^{-25}$ [24]
$d$	$8.9 \cdot 10^{-17}$	$9.5 \cdot 10^{-26}$ [24]
$c$	$8.9 \cdot 10^{-17}$	$6.5 \cdot 10^{-23}$ [24]
$s$	$8.9 \cdot 10^{-17}$	$1.0 \cdot 10^{-24}$ [24]
$b$	$8.9 \cdot 10^{-17}$	$7.8 \cdot 10^{-21}$ [24]

Taula 5.2: Same than Table 5.1 for the electric moments.

As we can see in the tables, we improve previous limits for  $a_\tau, a_u, a_d, a_c, a_s, a_b, d_\tau$ . We notice however that other experimental constraints [10, 19, 20, 24] give more stringent bounds for  $a_e, a_\mu, d_e, d_\mu, d_u, d_d$ . The analysis of Red Giant evolution [15] gives better constraints on  $k_{\nu_e}, k_{\nu_\mu}, d_{\nu_e}, d_{\nu_\mu}$  than our corresponding results. The  $\nu_\tau$  moments are also tightly bounded by this type of analysis, provided  $m(\nu_\tau) \leq O(10 \text{ keV})$ . For  $m(\nu_\tau) \geq O(10 \text{ keV})$ ,  $\nu_\tau$  cannot be produced in stellar cores and there is no limit from stellar evolution. In this case our bounds on  $k_{\nu_\tau}$  and  $d_{\nu_\tau}$  are better than the ones obtainable in other ways. Our results for  $\nu_\tau$  may be of interest in astrophysics. We stress again that our bounds have been obtained assuming that  $\nu_\tau$  is a Dirac particle<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>In the case that  $\nu$  is a Majorana neutrino, the magnetic and electric moments vanish [25], but still the neutrino may couple to electromagnetic fields. In our paper, we have not bounded this interesting type of couplings, which have been often discussed in connection with solar neutrinos [26].

## 5.4 Non-linear effective Lagrangian approach

In Section 5.2 we discussed the case where we extend a linearly realized Standard Model. However, there are models—as the technicolor ones—that do not fit into the linear framework. The assumptions of avoiding the presence of the physical scalar sector, or of sending its mass to infinity do not commute with the linear expansion since  $\Phi$  is no longer there to construct gauge-invariant effective operators. In this case,  $\Lambda \sim 4\pi v$ , and it is appropriate to use a non-linear or chiral realization of the Standard Model, and to extend it using non-linear effective Lagrangians. These were discussed in detail back in 1980 in Ref. [28] and have been recently reviewed in Ref. [29].

We would like to investigate the consequences of adopting the chiral approach for the fermion moments. Let us start with the magnetic moment of the up and down quarks. By working this specific example we will be able to understand the general pattern.

We add a piece to the SM Lagrangian that contains vertices corresponding to  $a_u$  and  $a_d$ . The leading terms in the chiral expansion are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \frac{g'\beta'}{v^2} \bar{\psi}_R M \hat{B}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \Sigma^\dagger \psi_L \\ & + \frac{g\beta}{v^2} \bar{\psi}_R M \Sigma^\dagger \hat{W}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \psi_L + \text{h.c.} , \end{aligned} \quad (5.39)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_{L,R} &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{L,R} , \\ \hat{W}_{\mu\nu} &= \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{\sigma} , \\ \hat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} \cdot \sigma_3 , \end{aligned} \quad (5.40)$$

$M$  is the mass matrix

$$\begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} , \quad (5.41)$$

and  $\Sigma$  contains the would-be Goldstone bosons

$$\Sigma = \exp \left\{ i \frac{\vec{\xi} \cdot \vec{\sigma}}{v} \right\} . \quad (5.42)$$

The contributions to the magnetic dipole moment coming from  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  will contain the coefficients  $\beta$  and  $\beta'$  in Eq. (5.39). In the unitary gauge, these contributions can

be put in the form of those we found in the linear case, Eqs. (5.19,5.20,5.22–5.24), provided we identify

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{uB} &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{v} g' \beta' m_u , \\
 \epsilon_{uW} &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{v} g \beta m_u , \\
 \epsilon_{dB} &\rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{v} g' \beta' m_d , \\
 \epsilon_{dW} &\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{v} g \beta m_d .
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

For our phenomenological purposes, it is interesting to notice that with the very same identifications made in the last equation, our Eq. (5.26) containing the anomalous couplings to the  $Z$ -boson is valid. We can use now the fact, shown in the last section, that our constraints on the anomalous magnetic moment from LEP-1 data do not depend on the definitions of the parameters  $\epsilon$ . This is also true in the case of the dipole electric moments, where we should use the effective Lagrangian

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{g' \beta'}{v^2} \bar{\psi}_R M \hat{B}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} i \gamma_5 \Sigma^\dagger \psi_L \\
 &+ \frac{g \beta}{v^2} \bar{\psi}_R M \Sigma^\dagger \hat{W}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} i \gamma_5 \psi_L + \text{h.c.} .
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

Here we have worked out the example of the magnetic moments of the  $u$  and  $d$  quarks. It is clear that it can be easily extended to the magnetic and electric moments of all fermions. Notice also that our final limits do not depend on the mass appearing in the mass matrix in Eq. (5.41).

Our conclusion is that our limits on fermion magnetic and electric moments derived in a linear effective Lagrangian approach hold true when using the chiral expansion of the non-linear effective Lagrangian.

## 5.5 Conclusions

Physics beyond the Standard Model of the electroweak interactions can be described in a general way using effective Lagrangians. We use this approach to study magnetic and electric moments of the fermions. We find that any contribution to these moments inevitably induces anomalous couplings of the  $Z$ -boson to fermions.

The LEP-I data severely constrains these anomalous couplings, and the constraints in turn set stringent bounds on the magnetic and electric moments. Some

of the bounds represent an improvement on previously derived limits on fermion moments.

We have studied both the linear and non-linear realizations of effective Lagrangians and have shown that both lead to the same numerical limits on moments.

# Bibliografia

- [1] A. De Rújula, M.B. Gavela, P. Hernández and E. Massó, *Nucl. Phys.* **384B** (1992) 3.
- [2] A. De Rújula, talk at the *TOPIC-91 Conference on  $e^+ e^-$  Physics at KEK*, Japan Nov. 1991, CERN-TH.6374/92.
- [3] W. Buchmüller and D. Wyler, *Nucl. Phys.* **268B** (1986) 621;  
C. N. Leung, S. T. Love and S. Rao, *Z. Phys.* **C31** (1986) 433.
- [4] D. Bardin *et al.* *Z. Phys.* **C44** (1989) 493; *Nucl. Phys.* **351B** (1991) 1; *Phys. Lett.* **B255** (1991) 290.
- [5] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL and the LEP Electroweak Working Group, CERN/PPE/93-157.
- [6] Particle Data Group, Review of Particle Properties, *Phys. Rev.* **D45** (1992) III.1.
- [7] UA2 Collaboration, J. Alliti *et al.*, *Phys. Lett.* **B276** (1992) 354;  
CDF Collaboration, F. Abe *et al.*, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 2070.
- [8] CDHS Collaboration , A. Blondel *et al.*, *Z. Phys.* **C45** (1990) 361;  
CHARM Collaboration , J. V. Allaby *et al.*, *Z. Phys.* **C36** (1987) 611;  
CCFR Collaboration , M. Shaevitz, *Proceedings of the LaThuile'93 Conference*.
- [9] B. Harral, talk at the *XXVIIth Rencontre de Moriond, Electroweak interactions and unified theories* (Les Arcs, March 1993).
- [10] E. R. Cohen and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 1121.
- [11] D. J. Silverman and G. L. Shaw, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 1196.
- [12] J. A. Grifols and A. Méndez, *Phys. Lett.* **B255** (1991) 611.

- 
- [13] G. Domokos *et al.*, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 247.
- [14] D. A. Krakauer *et al.*, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 177.
- [15] G. G. Raffelt, *Phys. Rep.* **198** (1990) 1.
- [16] A. M. Cooper-Sarkar *et al.*, BEBC, *Phys. Lett.* **B280** (1992) 153.
- [17] H. Crotch and R. W. Robinett, *Z. Phys.* **C39** (1988) 553.
- [18] G. F. Giudice, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 460.
- [19] K. Abdullah *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 2347.
- [20] J. Bailey *et al.*, *Nuc. Phys.* **150B** (1979) 1.
- [21] W. Bernreuther *et al.*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 78.
- [22] F. Del Aguila and M. Sher, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 116.
- [23] S. M. Barr and W. J. Marciano, in *CP Violation*, ed. C. Jarlskog, World Scientific (1989).
- [24] A. De Rújula *et al.*, *Nuc. Phys.* **357B** (1991) 311.
- [25] See for example, B. Kayser *et al.*, *The Physics of Massive Neutrinos*, World Scientific Lecture Notes in Physics Vol. 25, World Scientific (1989).
- [26] See for example, J. N. Bahcall, talk at the *Physical Processes in Astrophysics*, International Meeting in Honour of Evry Schatzman, September 1993, Paris, France. IASSNS-AST 93/69, and references therein.
- [27] R. Escribano and E. Massó, *Phys. Lett.* **B301** (1993) 419.
- [28] A. C. Longhitano, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 1166; *Nuc. Phys.* **191B** (1981) 146; T. Appelquist and C. Bernard, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 200.
- [29] F. Feruglio, *Int. Jour. of Mod. Phys. A*, Vol. 8, No. 28 (1993) 4937.



# Capítol 6

## High Precision Tests of QED and Physics beyond the Standard Model

In collaboration with E. Massó. Submitted to *Phys. Rev. D*.

### 6.1 Introduction

QED is the textbook example of the triumph of quantum field theory: it is a consistent and predictive theory that agrees with experiment to a very high accuracy [1]. We know, of course, that QED is a low energy remnant of the more complete Standard Model (SM) of electroweak interactions. Still, QED is usually treated as a self-contained theory, into which one may incorporate the corrections from electroweak and strong interactions. Also, and this is important for the present letter, any non-standard deviations from QED are assumed to come from extensions of QED that respect the  $U(1)$  electromagnetic gauge invariance.

This last point is illustrated by a classical example. Consider the anomalous magnetic moment of the electron  $a_e \equiv (g - 2)_e/2$ . To parameterise deviations from QED one introduces the  $U(1)$  invariant effective Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha_1}{\Lambda} \bar{\psi}_e \sigma^{\mu\nu} \psi_e F_{\mu\nu}. \quad (6.1)$$

Here  $\alpha_1$  is a coupling constant and  $\Lambda$  is a energy scale. The (tree-level) contribution

to  $a_e$  is

$$\delta a_e = 2 \frac{\alpha_1}{\Lambda} \frac{2 m_e}{e}.$$

The agreement between experiment [2] and the QED prediction [3] for  $a_e$  sets the stringent limit

$$-6.9 \times 10^{-11} \leq \delta a_e \leq 4.3 \times 10^{-11}. \quad (6.2)$$

This limit on  $\delta a_e$  (and on all other observables in the letter) is obtained at the 95% C. L.

In this fashion one can obtain an upper bound on the coefficients of the effective Lagrangian:

$$\frac{\alpha_1}{\Lambda} \lesssim 2 \times 10^{-5} \text{ TeV}^{-1}. \quad (6.3)$$

Although there is nothing wrong with this type of analysis, we think one can and should go beyond it. One of the reasons is due to the well-known success of the standard  $SU(2) \otimes U(1)$  model in describing the electroweak data. Deviations from the SM have been parameterised in terms of effective Lagrangians that respect  $SU(2) \otimes U(1)$  gauge invariance [4]. Here, we will follow the same prescription, namely we will describe the effects of physics beyond the SM by a set of  $SU(2) \otimes U(1)$  gauge-invariant effective Lagrangians that modify the high precision QED observables. Experimental data restrict the coefficients of the lowest-dimension effective operators. This constrains physics beyond the SM.

In fact, in the example we have presented, where the Lagrangian (6.1) is used, the allowed values of  $\Lambda$  are much greater than the Fermi scale [5], and thus it should be regarded as natural to use the full  $SU(2) \otimes U(1)$  invariance instead of the electromagnetic  $U(1)$  invariance.

We further remark that by using the full  $SU(2) \otimes U(1)$  gauge group we are sensitive to physics beyond the SM rather than just to QED. Since the SM includes QED we have widened the scope of the effective Lagrangian approach; going from the framework where Eq. (6.1) and (6.3) hold to the analysis performed in the present letter.

There is another aspect of our analysis that we describe below which can be of some phenomenological interest. The operators that lead to modifications of QED observables will also alter other quantities measured in other experiments like LEP; (we call these experiments “non-QED”). This fact can be used to compare the ability of different experiments to push the search for new physics. Both QED

and non-QED experiments restrict the coefficients of the effective operators. Which experiments lead to the most restrictive limits will tell us whether, for a particular QED observable, the high precision QED tests are or are not competitive with non-QED experiments.

We will in turn study the four observables that are known with the greatest precision [1]:  $(g-2)_e$ ,  $(g-2)_\mu$ , the Lamb shift and muonium hyperfine splitting. We will first calculate the bounds on all the effective operators. At the end of the letter, we will discuss our results and compare various bounds. Some of our conclusions may be relevant in the light of the upcoming experiment [7] at the Brookhaven Alternative Gradient Synchrotron (AGS) to measure the anomalous magnetic moment of the muon with a precision  $\Delta a_\mu = \pm 4 \times 10^{-10}$ .

## 6.2 The electron anomalous magnetic moment

The leading contributions to  $a_e$  come from the following two dimension six operators

$$\mathcal{O}_{eB} \equiv \overline{L}_e \sigma^{\mu\nu} e_R \Phi B_{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

and

$$\mathcal{O}_{eW} \equiv \overline{L}_e \sigma^{\mu\nu} \vec{\tau} e_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu}, \quad (6.5)$$

where  $L_e$  is the left-handed isodoublet containing  $e_L$ ,  $e_R$  is its right-handed partner,  $\mathbf{W}_{\mu\nu}$  and  $B_{\mu\nu}$  are the  $SU(2)$  and  $U(1)$  field strengths,  $\Phi$  is the scalar doublet, and  $\vec{\tau}$  are the Pauli matrices.

Let us now in turn analyse the effects of these two operators. The effective Lagrangian corresponding to the operator (6.4) is

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha_{eB}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_{eB}, \quad (6.6)$$

where  $\alpha_{eB}$  is a coupling constant and  $\Lambda$  is a high energy scale. After electroweak symmetry breaking, the shift in  $a_e$  is

$$\delta a_e = \frac{\sqrt{2}}{v} \frac{2 m_e}{e} c_W \epsilon_{eB}, \quad (6.7)$$

where  $\epsilon_{eB} \equiv \alpha_{eB} v^2 / \Lambda^2$  ( $v \simeq 246$  GeV is the Fermi scale). Hereafter we use  $c_W \equiv \cos \theta_W$  and  $s_W \equiv \sin \theta_W$ . The experimental limit (6.2) sets a bound on the parameter  $\epsilon_{eB}$ :

$$-5 \times 10^{-6} \leq \epsilon_{eB}(a_e) \leq 3 \times 10^{-6}. \quad (6.8)$$

Here,  $a_e$  inside the parentheses indicates that the limit on  $\epsilon_{eB}$  is obtained from the high precision QED observable  $a_e$ .

The Lagrangian (6.6) also leads to a modification of the standard  $Ze^+e^-$  coupling. The shift in the  $\Gamma_e = \Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)$  width is

$$\frac{\delta\Gamma_e}{\Gamma_e} = \frac{s_W^2}{g_V^2 + g_A^2} \epsilon_{eB}^2,$$

where  $g_V = -1/2 + 2s_W^2$  and  $g_A = -1/2$ .  $\Gamma_e$  is measured at the  $Z$ -peak at LEP [8], and it agrees well with the standard model prediction. One finds the restriction

$$|\epsilon_{eB(\text{non-QED})}| \leq 9 \times 10^{-2}, \quad (6.9)$$

where now “non-QED” inside the parentheses signifies that we obtain the limit using experiments other than high precision QED observations.

The operator (6.5) also contributes to  $a_e$ . Writing

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha_{eW}}{\Lambda^2} \mathcal{O}_{eW}, \quad (6.10)$$

we find

$$\delta a_e = -\frac{\sqrt{2}}{v} \frac{2m_e}{e} s_W \epsilon_{eW}, \quad (6.11)$$

with  $\epsilon_{eW} \equiv \alpha_{eW} v^2/\Lambda^2$ . Using (6.2), we get

$$-5 \times 10^{-6} \leq \epsilon_{eW}(a_e) \leq 8 \times 10^{-6}. \quad (6.12)$$

The operator  $\mathcal{O}_{eW}$  leads to couplings  $Ze^+e^-$  and  $We\nu$  that would modify the standard model predictions. We find, however, that the possible shift in  $Z \rightarrow e^+e^-$  decay leads to the most restrictive limits of all the “non-QED” experiments. We obtain

$$|\epsilon_{eW(\text{non-QED})}| \leq 5 \times 10^{-2}. \quad (6.13)$$

We should now comment on the question of cancellations among different effective contributions. The effective Lagrangian is a linear combination of both operators in (6.4) and (6.5), and the total contribution to  $a_e$  is the sum of both contributions in (6.7) and (6.11). A strong cancellation in the two contributions either to  $a_e$  (or to  $\Gamma_e$ ) would be unnatural. Still, a partial cancellation could occur and thus the limits could be relaxed but presumably only by a factor of order one. Fortunately, our main conclusions depend only on the order of magnitude of the limit and not on such details. We will assume that there are no fine-tuned cancellations among contributions to the observables.

### 6.3 The muon anomalous magnetic moment

There are two operators, similar to (6.4) and (6.5), that contribute to  $a_\mu$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mu B} &\equiv \bar{L}_\mu \sigma^{\mu\nu} \mu_R \Phi B_{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_{\mu W} &\equiv \bar{L}_\mu \sigma^{\mu\nu} \vec{\tau} \mu_R \Phi \mathbf{W}_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

The analysis is very similar to the case of  $a_e$ . The agreement between theory and experiment [9, 10] restricts any contribution to  $a_\mu$  as follows:

$$-1.4 \times 10^{-8} \leq \delta a_\mu \leq 2.2 \times 10^{-8},$$

which implies

$$\begin{aligned}-4 \times 10^{-6} &\leq \epsilon_{\mu B}(a_\mu) \leq 7 \times 10^{-6}, \\ -2 \times 10^{-5} &\leq \epsilon_{\mu W}(a_\mu) \leq 7 \times 10^{-6}.\end{aligned}\tag{6.15}$$

(The parameters  $\epsilon_{\mu B}$  and  $\epsilon_{\mu W}$  are defined in analogy to  $\epsilon_{eB}$  and  $\epsilon_{eW}$ ).

The operators (6.14) modify  $\Gamma(Z \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ . The LEP data imply

$$|\epsilon_{\mu B}(\text{non-QED})| \leq 9 \times 10^{-2},\tag{6.16}$$

$$|\epsilon_{\mu W}(\text{non-QED})| \leq 5 \times 10^{-2}.\tag{6.17}$$

$\mathcal{O}_{\mu W}$  contains vertices like  $W_{\mu\nu}$  that modify for instance  $\mu \rightarrow e\nu\nu$ . However, the corresponding limit on  $\epsilon_{\mu W}$  is much less stringent than (6.17).

### 6.4 The Lamb shift

The splitting of the hydrogen levels  $2S_{1/2}$  and  $2P_{1/2}$ ,  $\Delta E_H(2S_{1/2} - 2P_{1/2}) \equiv E_{\text{LS}}$ , known as the Lamb shift, is an important observable to test QED. The agreement between experiment [11] and QED radiative corrections [12] requires that other contributions to the Lamb shift respect the stringent limit

$$-38 \leq \delta E_{\text{LS}} \leq 10 \text{ kHz}.\tag{6.18}$$

There is a long list of dimension six operators that could contribute to the Lamb shift. However, after discarding the effective operators that induce redefinitions of

the physical parameters and using the equations of motion in a rigorous way, one can select the following independent basis [13]:

$$\{\mathcal{O}_{eB}, \mathcal{O}_{eW}, \mathcal{O}_{\partial B}, \mathcal{O}_{DW}\},$$

where  $\mathcal{O}_{eB}$ ,  $\mathcal{O}_{eW}$  are defined in (6.4) and (6.5), and

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\partial B} &\equiv \partial_\lambda B^{\mu\nu} \partial^\lambda B_{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_{DW} &\equiv [D_\lambda \mathbf{W}^{\mu\nu}]^\dagger [D^\lambda \mathbf{W}_{\mu\nu}].\end{aligned}\quad (6.19)$$

Let us start with the first operator,  $\mathcal{O}_{eB}$ . Its effects are expressed via the Lagrangian (6.6), that arose earlier. Its contribution to the Lamb shift is given by

$$\delta E_{\text{LS}} = \frac{(m_e \alpha)^3}{6\pi} \frac{e}{2m_e} \frac{\sqrt{2}}{v} c_W \epsilon_{eB}. \quad (6.20)$$

The experimental limit (6.18) leads to

$$-7 \times 10^{-3} \leq \epsilon_{eB}(E_{\text{LS}}) \leq 2 \times 10^{-3}.$$

The Lagrangian (6.10), containing  $\mathcal{O}_{eW}$ , has a contribution similar to (6.20), with  $c_W \epsilon_{eB} \rightarrow -s_W \epsilon_{eW}$ . The corresponding restriction is

$$-3 \times 10^{-3} \leq \epsilon_{eW}(E_{\text{LS}}) \leq 2 \times 10^{-2}.$$

While these two operators affect the  $ee\gamma$  vertex, the operators (6.19) contribute to the Lamb shift through the photon self-energy. We find

$$\delta E_{\text{LS}} = m_e \alpha^4 \frac{m_e^2}{v^2} \left( c_W^2 \epsilon_{\partial B} + s_W^2 \epsilon_{DW} \right),$$

where  $\epsilon_{\partial B}$  and  $\epsilon_{DW}$  are defined in analogy to  $\epsilon_{eB}$  and  $\epsilon_{eW}$ . Assuming that there are no cancellations among the contributions of  $\mathcal{O}_{\partial B}$  and  $\mathcal{O}_{DW}$ , yields

$$\begin{aligned}-6 \times 10^3 &\leq \epsilon_{\partial B}(E_{\text{LS}}) \leq 2 \times 10^3, \\ -2 \times 10^4 &\leq \epsilon_{DW}(E_{\text{LS}}) \leq 5 \times 10^3.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Following our general strategy we now calculate the limits to the different  $\epsilon$ 's using other experimental data. The limits on  $\epsilon_{eB}$  and  $\epsilon_{eW}$  have already been quoted in (6.9) and (6.13). The best bounds on  $\epsilon_{\partial B}$  and  $\epsilon_{DW}$  come from the LEP measurements on  $Z$  widths. They are

$$\begin{aligned}-2 \times 10^{-2} &\leq \epsilon_{\partial B}(\text{non-QED}) \leq 2 \times 10^{-2}, \\ -6 \times 10^{-3} &\leq \epsilon_{DW}(\text{non-QED}) \leq 4 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

## 6.5 Muonium hyperfine splitting

Muonium is a system which displays many of the hydrogen properties but does not contain constituent hadrons. It is in this respect a good testing ground for QED. Its ground state hyperfine splitting,  $\nu_{\mu\text{-hfs}}$ , corresponds to the energy difference among states with parallel or antiparallel alignment of the  $e^-$  and  $\mu^+$  magnetic moments. It has been measured very accurately [14] and there are precise theoretical calculations [15]. Additional contributions to this observable are limited by

$$-2.5 \leq \delta\nu_{\mu\text{-hfs}} \leq 3.0 \text{ kHz.} \quad (6.22)$$

The independent dimension six operators contributing to  $\nu_{\mu\text{-hfs}}$  can be classified into two types. We have, first,  $\mathcal{O}_{eB}$  and  $\mathcal{O}_{eW}$  that affect the  $ee\gamma$  vertex and  $\mathcal{O}_{\mu B}$  and  $\mathcal{O}_{\mu W}$  that affect the  $\mu\mu\gamma$  vertex. These four operators have already appeared in our analysis. The second type are four-fermion operators. Using Fierz shuffling, one can select the following complete set of effective operators that we call  $\mathcal{O}_{4f}$ :

$$\mathcal{O}_{4f} = \{ \mathcal{O}_{\ell\ell}^{(1)}, \mathcal{O}_{\ell\ell}^{(3)}, \mathcal{O}_{e\mu}, \mathcal{O}_{\ell\mu}, \mathcal{O}_{e\ell} \},$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\ell\ell}^{(1)} &\equiv (\bar{L}_e \gamma^\mu L_e)(\bar{L}_\mu \gamma_\mu L_\mu), \\ \mathcal{O}_{\ell\ell}^{(3)} &\equiv (\bar{L}_e \gamma^\mu \vec{\tau} L_e)(\bar{L}_\mu \gamma_\mu \vec{\tau} L_\mu), \\ \mathcal{O}_{e\mu} &\equiv (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R)(\bar{\mu}_R \gamma_\mu \mu_R), \\ \mathcal{O}_{\ell\mu} &\equiv (\bar{L}_e \gamma^\mu L_e)(\bar{\mu}_R \gamma_\mu \mu_R), \\ \mathcal{O}_{e\ell} &\equiv (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R)(\bar{L}_\mu \gamma_\mu L_\mu). \end{aligned} \quad (6.23)$$

The contribution of  $\mathcal{O}_{eB}$  and  $\mathcal{O}_{eW}$  is calculated to be

$$\delta\nu_{\mu\text{-hfs}} = \frac{8}{3\pi} \alpha^2 R_\infty \frac{m_e}{m_\mu} \left[ \frac{2m_e}{e} \frac{\sqrt{2}}{v} (c_W \epsilon_{eB} - s_W \epsilon_{eW}) \right], \quad (6.24)$$

and that from  $\mathcal{O}_{\mu B}$  and  $\mathcal{O}_{\mu W}$  is similar to (6.24), with  $m_e \rightarrow m_\mu$  inside the brackets. The four-fermion effective operators contribute as

$$\delta\nu_{\mu\text{-hfs}} = \frac{\alpha}{\pi^2} R_\infty \frac{m_e^2}{v^2} \left( \epsilon_{\ell\ell}^{(1)} + \epsilon_{\ell\ell}^{(3)} + \epsilon_{e\mu} - \epsilon_{\ell\mu} - \epsilon_{e\ell} \right),$$

where  $R_\infty$  is the Rydberg constant.

Again excluding fortuitous cancellations, we use (6.22) to find

$$\begin{aligned} -4 \times 10^{-2} &\leq \epsilon_{eB}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 4 \times 10^{-2}, \\ -8 \times 10^{-2} &\leq \epsilon_{eW}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 6 \times 10^{-2}, \\ -2 \times 10^{-4} &\leq \epsilon_{\mu B}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 2 \times 10^{-4}, \\ -4 \times 10^{-4} &\leq \epsilon_{\mu W}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 3 \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -40 &\leq \epsilon_{\ell\ell}^{(1)}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 50, \\ -40 &\leq \epsilon_{\ell\ell}^{(3)}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 50, \\ -40 &\leq \epsilon_{e\mu}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 50, \\ -50 &\leq \epsilon_{\ell\mu}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 40, \\ -50 &\leq \epsilon_{e\ell}(\nu_{\mu\text{-hfs}}) \leq 40, \end{aligned} \tag{6.25}$$

where we have defined  $\epsilon_i \equiv \alpha_i v^2 / \Lambda^2$  and the  $\alpha_i$ 's are the corresponding coefficients of the operators (6.4), (6.5), (6.14), and (6.23) in the effective Lagrangian.

As before, we now use other experimental data to limit the  $\epsilon$  parameters. The best limits on  $\epsilon_{eB}$ ,  $\epsilon_{eW}$ ,  $\epsilon_{\mu B}$ , and  $\epsilon_{\mu W}$  are extracted from the LEP data and have been already quoted in (6.9), (6.13), and (6.16).

The new operators (6.23) have vertices that modify the standard prediction for  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  and  $\mathcal{O}_{\ell\ell}^{(3)}$  also modifies the  $Z$ -widths. LEP data restrict all these operators. Additionally, the operator  $\mathcal{O}_{\ell\ell}^{(3)}$  alters the  $\mu$ -decay prediction but the restriction is less severe. Finally, we obtain

$$\begin{aligned} |\epsilon_{\ell\ell}^{(1)}(\text{non-QED})| &\leq 9 \times 10^{-1}, \\ -3 \times 10^{-3} &\leq \epsilon_{\ell\ell}^{(3)}(\text{non-QED}) \leq 2 \times 10^{-3}, \\ |\epsilon_{e\mu}(\text{non-QED})| &\leq 9 \times 10^{-1}, \\ |\epsilon_{\ell\mu}(\text{non-QED})| &\leq 9 \times 10^{-1}, \\ |\epsilon_{e\ell}(\text{non-QED})| &\leq 9 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

## 6.6 Summary and discussion

In this letter we have studied four high precision observables that provide excellent tests of QED. For each observable we have identified the effective Lagrangians



that can contribute to it. The Lagrangians are composed of the (lowest-dimension) independent operators that are  $SU(2) \otimes U(1)$  gauge-invariant.

We have, first, bounded all the  $\epsilon$  coefficients of the effective Lagrangian using QED data and theoretical predictions. The best bounds are given in (6.8), (6.12), (6.15), (6.21), and (6.25). This constrains the effects of physics beyond the SM.

Second, we have noticed that the operators in the effective Lagrangian contain terms that lead to new effects in observables other than the above four. We can thus use further data to restrict the same coefficients, but now the data is not from the “QED” observables but rather from “non-QED” observables. In fact, the most restrictive “non-QED” data turns out to be LEP data.

We have bounds from two experimental sources. As we said in the introduction a comparison between them is enlightening since it is clear that the experiment placing the strongest bounds on the effective coefficients  $\epsilon$ ’s is the one most sensitive to new physics.

The anomalous magnetic moments of the electron and the muon restrict the coefficients of the operators  $\mathcal{O}_{eB}$ ,  $\mathcal{O}_{eW}$ , and  $\mathcal{O}_{\mu B}$ ,  $\mathcal{O}_{\mu W}$  much more severely than any “non-QED” data. This suggests that by improving the high precision measurements of  $(g - 2)_e$  and  $(g - 2)_\mu$  one could be sensitive to physics beyond the standard electroweak model. In the light of this remark, we think it is interesting that  $(g - 2)_\mu$  will be measured with unprecedented precision at the AGS [7].

The conclusion we reach for the other two observables, the hydrogen Lamb shift and the muonium hyperfine splitting, is the opposite. Looking at the numerical limits obtained in this letter, we see that the limits on the operators  $\mathcal{O}_{eB}$ ,  $\mathcal{O}_{eW}$ ,  $\mathcal{O}_{\mu B}$ , and  $\mathcal{O}_{\mu W}$  obtained from the hydrogen Lamb shift and muonium hyperfine splitting are weaker than the limits using  $(g - 2)_e$  and  $(g - 2)_\mu$ . For the remaining operators, namely  $\mathcal{O}_{\partial B}$ ,  $\mathcal{O}_{DW}$ , and  $\mathcal{O}_{4f}$ , bounds from LEP data are more stringent. This suggests that these two observables are far from being sensitive to new physics.

# Bibliografia

- [1] For a recent review of QED, see *Quantum Electrodynamics*, edited by T. Kinoshita, Advanced Series on Directions in High Energy Physics Vol. 25 (World Scientific, Singapore, 1990).
- [2] R. S. Van Dyck, Jr., P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 26 (1987).
- [3] T. Kinoshita, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4728 (1995).
- [4] W. Buchmüller and D. Wyler, *Nucl. Phys.* **B268**, 621 (1986); C. N. Leung, S. T. Love, and S. Rao, *Z. Phys.* **C31**, 433 (1986).
- [5] One can estimate [6] the coupling constant  $\alpha_1$  in (6.3) to be of order  $\alpha_1 \approx e/16\pi^2 \simeq 10^{-3}$ , so then  $\Lambda \gtrsim 50$  TeV.
- [6] C. Arzt, M. B. Einhorn, and J. Wudka, *Phys. Rev.* **D49**, 1370 (1994).
- [7] V. W. Hughes, in *Frontiers of High Energy Spin Physics*, edited by T. Hasegawa *et al.*, (Universal Academy Press, Tokio, 1992), pp. 717–722.
- [8] The LEP Electroweak Working Group, LEPEWWG/95–02 (1995).
- [9] T. Kinoshita, in *Frontiers of High Energy Spin Physics* (Ref. [7]), pp. 9–18.
- [10] J. Bailey *et al.*, *Phys. Lett.* **68B**, 191 (1977); F. J. M. Farley and E. Picasso, in *Quantum Electrodynamics* (Ref. [1]), pp. 479–559.
- [11] S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 232 (1981); *Metrologia* **22**, 9 (1986).
- [12] A. van Wijngaarden, J. Kwela, and G. W. F. Drake, *Phys. Rev.* **A43**, 3325 (1991).

- [13] R. Escibano and E. Massó, (preprint in preparation).
- [14] F. G. Mariam *et al.*, Phys. Rev. Lett. **49**, 993 (1982); E. Klempt, R. Schulze, and H. Wolf, Phys. Rev. **D25**, 652 (1982).
- [15] T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. Lett. **72**, 3803 (1994).

# Capítol 7

## Conclusions

En aquesta tesi doctoral hem presentat algunes aplicacions fenomenològiques dels Lagrangians efectius.

Hem vist que qualsevulla extensió del Model Estàndard induïda per una nova dinàmica a alta energia, pot ser parametritzada a baixa energia de manera sistemàtica i general mitjançant Lagrangians efectius invariants gauge sota la simetria electrofeble  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . La imposició de la simetria gauge en els operadors efectius és la nostra principal hipòtesi teòrica.

Al llarg de tot el treball, la invariància gauge ens ha permès establir relacions fenomenològiques interessants entre diferents observables, les quals han servit per imposar fites sobre determinades propietats a partir dels límits obtinguts en altres experiments, així com també, per a determinar la rellevància d'alguns experiments en la recerca de nova física més enllà del Model Estàndard.

Les nostres contribucions a la fenomenologia dels Lagrangians efectius han estat les següents

- la determinació d'unes noves fites sobre els moments dipolars del leptó tau, tant sobre el moment magnètic anòmal com sobre el moment dipolar elèctric,
- la determinació de diferents fites sobre els moments dipolars de leptons carregats, quarks, i neutrins,
- la demostració de què tant la realització lineal com la quiral dels Lagrangians efectius duen als mateixos límits numèrics sobre els moments dipolars,

- la constatació de què una millora en la precisió del moment magnètic anòmal de l'electró i del muó pot ser sensible a física més enllà del Model Estàndard electrofeble,
- la constatació també de què tant l'efecte Lamb en l'hidrogen com l'estructura hiperfina del muoni estan lluny d'ésser sensibles a nova física.

En la nostra opinió, la determinació dels moments dipolars del leptó tau ha estat molt interessant, ja que ha permès millorar el nostre coneixement sobre les propietats d'aquest leptó. En particular, l'estudi del moment magnètic anòmal del tau pot haver aportat nova informació sobre el seu caràcter puntual. Anàlogament, l'estudi del moment dipolar elèctric ens pot ajudar a comprendre l'origen de la violació de  $CP$ . Ambdós resultats han suposat una millora considerable de les fites existents anteriorment. Els nostres límits han estat adoptats pel recull del *Particle Data Group* [6].

Pel que fa als moments dipolars de la resta dels fermions elementals, el nostre treball ha permès també, millorar les fites existents sobre els moments magnètics anòmals dels quarks, però no les dels neutrins ni les dels leptons carregats lleugers. En el cas dels moments dipolars elèctrics, únicament hem pogut millorar les fites sobre el leptó tau i el seu neutrí, en canvi els límits ja existents sobre l'electró, el muó, els neutrins, i totes les espècies de quarks superen amb escreix els nostres resultats.

També ha estat interessant poder afirmar que els resultats sobre els moments dipolars són independents de la realització final del Model Estàndard, és a dir independents de la presència d'un sector escalar en la teoria a baixa energia, o fins i tot de si la seva massa és molt gran comparada amb l'escala electrofeble.

Finalment, en el cas dels *tests* d'alta precisió de  $QED$  ha estat molt interessant comprovar com alguns dels experiments de  $QED$ , malgrat ser d'alta precisió, no semblen ser rellevants alhora de cercar una possible nova física. Aquest és el cas de l'efecte Lamb en l'hidrogen i de l'estructura hiperfina del muoni. En canvi, sí ens ha semblat constatar que una millora en les mesures del moment magnètic anòmal de l'electró i del muó podria ser sensible a la nova física.

# Apèndix A

## Integració dels Camps Pesats

En aquest apèndix veurem com s'integra l'electró, que en el lagrangiana d'Euler-Heisenberg juga el paper de camp pesat i que per tant en processos a baixa energia només intervé de forma virtual. Amb aquesta integració aconseguirem finalment un lagrangiana efectiu invariant gauge que únicament contindrà els camps lleugers de la teoria, és a dir fotons, i que ens permetrà calcular en primera aproximació i a baixa energia ( $E_\gamma \ll m_e$ ) el procés de dispersió llum-llum.

El procediment el definirem mitjançant la següent integral de camí:

$$\begin{aligned} & \int [dA_\mu] \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(A_\mu) \right] \\ & \equiv \frac{\int [dA_\mu][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) \right]}{\int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_0(\psi, \bar{\psi}) \right]}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

on  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$  és el lagrangiana de QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi,$$

amb  $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$ , i  $\mathcal{L}_0$  és el lagrangiana de fermions lliures

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi;$$

aleshores  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  té els mateixos elements de matriu per als fotons que té  $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ . Específicament inclou els efectes virtuals induïts pels electrons.

Utilitzant les relacions

$$W[O] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[ i \int d^4x \bar{\psi} O \psi \right] = N \det O,$$

i

$$\det O = e^{\text{tr} \ln O} = e^{\int d^4x \text{Tr} \langle x | \ln O | x \rangle},$$

on 'Tr' és una traça sobre variables internes tals com isospin, matrius de Dirac, *etc.*, i 'tr' és una traça sobre l'espai-temps més les variables internes anteriors, obtenim l'acció efectiva següent:

$$\int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(A_\mu) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \text{Tr} \ln \left[ \frac{i \not{D} - m}{i \not{\partial} - m} \right] \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Per conèixer les contribucions efectives a baixa energia induïdes per l'electró hem de calcular la traça

$$\delta \mathcal{L} \equiv -i \text{Tr} \ln \left[ \frac{i \not{D} - m}{i \not{\partial} - m} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Fent ús de la invariància de la traça sota transposició, i que la matriu de conjugació de càrrega  $C$  satisfà

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T,$$

podem escriure la traça (A.3) com

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{(\not{p} - e \not{A})^2 - m^2}{p^2 - m^2} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{(p - eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2}{p^2 - m^2} \right]. \end{aligned}$$

La identitat

$$\ln \frac{a}{b} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{isb} - e^{isa}),$$

permet reescriure el logaritme com

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} \left( e^{-ism^2} \left\{ e^{is[(p-eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}]} - e^{isp^2} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-ism^2} \left[ e^2 ab \frac{\cosh(eas) \cos(ebs)}{\sinh(eas) \sin(ebs)} - \frac{1}{s^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

on  $a$  i  $b$  es defineixen com

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &\equiv \vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2 = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ ab &\equiv \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -\frac{1}{8} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

amb  $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ .

Expandint (A.4) en potències de la constant d'acoblament electromagnètica  $e$  trobem

$$\delta\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}C(\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2) + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[ (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2)^2 + 7(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \right], \quad (\text{A.6})$$

on  $C$  és una constant infinita. Aquesta divergència és inobservable ja que la podem reabsorbir en el lagrangiana lliure electromagnètic  $\mathcal{L}_{\text{em}}$

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2).$$

Redefinint  $\mathcal{L}_{\text{em}}$  com  $(1 - C)\mathcal{L}_{\text{em}}$  i sumant la contribució finita de (A.6) obtenim finalment el lagrangiana d'Euler-Heisenberg

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{E-H}} &\equiv \mathcal{L}_{\text{em}} + \delta\mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2) + \frac{2\alpha^2}{45m^4} \left[ (\vec{\mathbf{E}}^2 - \vec{\mathbf{B}}^2)^2 + 7(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

En notació quadridimensional i fent ús de les relacions (A.5) trobem que el lagrangiana efectiu invariant gauge que descriu, en primera aproximació, la dispersió llum-llum a baixa energia ( $E_\gamma \ll m_e$ ) és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(A_\mu) &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i \text{Tr} \ln \left[ \frac{i\not{D} - m}{i\not{\partial} - m} \right] \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{90m^4} \left[ (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{16} (F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$



# Bibliografia

- [1] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961);  
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967);  
A. Salam, en *Elementary Particle Theory; Nobel Symposion No. 8*, ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm), 367 (1969).
- [2] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, i L. Maiani, *Phys. Rev.* **D2**, 1285 (1970).
- [3] W. J. Marciano i H. Pagels, *Phys. Rep.* **36C**, 137 (1978).
- [4] F. J. Hasert *et al.*, *Phys. Lett.* **46B**, 121, 138 (1973).
- [5] G. Arnison *et al.*, *Phys. Lett.* **B126**, 398 (1983);  
P. Bagnaia *et al.*, *Phys. Lett.* **B129**, 130 (1983).
- [6] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 132 (1964), **13**, 321 (1964), *Phys. Rev.* **145**, 1156 (1966).
- [7] G. 't Hooft i M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972).
- [8] A. de Rújula, M. B. Gavela, P. Hernández i E. Massó, *Nucl. Phys.* **B384**, 3 (1992).
- [9] M. Martinez *et al.*, LEP Electroweak Working Grup, LEPEWWG/95-02.
- [10] S. Dimopoulos i H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193**, 150 (1981).
- [11] D. Callaway, *Phys. Rep.* **167**, 241 (1988).
- [12] H. E. Haber i G. L. Kane, *Phys. Rep.* **117C**, 75 (1985).
- [13] G. Altarelli, *Nuovo Cimento* **7**, 1 (1984).
- [14] E. Farhi i L. Susskind, *Phys. Rep.* **C74**, 277 (1981).

- 
- [15] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (W. A. Benjamin, New York 1964).
- [16] C. Itzykson i J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York) (1980).
- [17] S. Weinberg, *Physica* **96A**, 327 (1979);  
J. Gasser, *Nucl. Phys.* **B279**, 65 (1987).
- [18] M. Neubert, *Phys. Rep.* **245**, 259 (1994).
- [19] J. F. Donoghue, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2996 (1994).
- [20] H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B361**, 339 (1991).
- [21] C. Arzt, *Phys. Lett.* **B342**, 189 (1995).
- [22] T. Appelquist i J. Carrazone, *Phys. Rev.* **D11**, 2856 (1975);  
B. Ovrut i H. Schnitzer, *Phys. Rev.* **D22**, 2518 (1980).
- [23] M. Veltman, *Acta Phys. Pol.* **B12**, 437 (1981).
- [24] R. Delbourgo i G. Thompson, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2601 (1986).
- [25] C. N. Leung, S. T. Love i S. Rao, *Zeit. Phys.* **C31**, 433 (1986).
- [26] W. Buchmüller i D. Wyler, *Nucl. Phys.* **B268**, 621 (1986).
- [27] A. Manohar i H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B234**, 189 (1984).
- [28] A. C. Longhitano, *Phys. Rev.* **D22**, 200 (1980), D234251981.
- [29] M. J. Herrero i E. Ruiz Morales, *Nucl. Phys.* **B418**, 431 (1994).
- [30] *Review of Particles Properties*, *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994).