En este trabajo, nos centraremos en cuestiones de regularidad sobre las soluciones de los sistemas del tipo

$$\operatorname{div} \mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\;=\;\operatorname{div} G\,.$$

En general, asumimos que $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\times R^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ satisface ciertas condiciones de acotación y elipticidad, y que G pertenece a un espacio de funciones adecuado. Para alcanzar nuestro resultados, iremos desgranando poco a poco el *Sistema en Forma de Divergencia* anterior. En un primer momento, nos limitaremos al caso $n=2$ y lineal con respecto a la variable del gradiente. En tal caso podemos interpretar el sistema como una *Ecuación de Beltrami Generalizada*

$$\overline{\partial} f=\mu\partial f+\nu\overline{\partial f}+h\,,$$

en el plano complejo. Esto nos permitirá estudiar el problema mediante herramientas del *Análisis Complejo*. Por contra, si $n>2$ no podemos resumirnos al plano complejo y trabajaremos en $\mathbb{R}^n$. Por ello, estudiaremos el problema $\mathcal{A}(x,\xi)$ no lineal mediante el herramientas clásicas de EDPs y de análisis armónico.

En el caso de la *Ecuación de Beltrami Generalizada* veremos que si μ, ν pertenecen a $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ y $h\in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$, entonces tenemos que

$$\left.\begin{array}{c} f\in L^r_{loc}(\mathbb{C})\\ \overline{\partial} f=\mu\partial f+\nu\overline{\partial f}+h\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad f\in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$$

para ciertos valores p, r y s. Además, estudiamos la función $\log(\partial\phi)$ donde $\phi\in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ es un homeomorfismo solución de la *Ecuación de Beltrami Generalizada Homogénea* (es decir, $h=0$) cuando los coeficientes tienen una regularidad Sobolev y Sobolev Fraccionaria. Concretamente alcanzamos la implicación

$$\mu,\,\nu\in W^{\alpha,p}_c(\mathbb{C})\quad\Longrightarrow\quad\log(\partial\phi)\in W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$$

para algunos valores $p\geq s>1$ si $\alpha=1$ y $p=s=\frac{2}{\alpha}$ si $\alpha<1$.

Cuando pasamos a dimensiones superiores ($\mathbb{R}^n$ con $n\geq 2$) primero estudiamos el sistema

$$\operatorname{div} \mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\;=\;0$$

donde supondremos que la aplicación $x\to\mathcal{A}(x,\xi)$ es de tipo de Besov o de Triebel-Lizorkin. En este caso llegaremos a demostrar que existe un número $p_0=p_0\,(n,\,\sigma,\,\ell)$ para el que se cumple que

$$x\to\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\in F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},\infty}(\Omega)\;\text{ local}\;\Longrightarrow\;Du\in B^{\alpha}_{p,\infty}(\Omega)\;\text{ local}$$

$$x\to\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\in B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega)\;\text{ local}\;\Longrightarrow\;Du\in B^{\alpha}_{p,q}(\Omega)\;\text{ local}$$

para toda $2\leq p\leq \min\{\frac{n}{\alpha},p_0\}$ donde $u\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es cualquier solución débil de del sistema homogéneo. Posteriormente pasaremos a tratar el caso no homogéneo. Aquí, la situación cambia dráticamente ya que aparecen ciertas dificultades en el índice q. En este caso, hemos demostrado que si $x\to\mathcal{A}(x,\xi)\in B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega)$ local, entonces toda $u\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ solución débil del sistema no homogéneo cumple la implicación

$$G\in B^{\alpha}_{p,q}\qquad\Longrightarrow\qquad Du\in B^{\alpha}_{p,q}$$

para toda $p\in\Big(\max\{p_0',\frac{nq}{n+\alpha q}\},\min\{\frac{n}{\alpha},p_0\}\Big)$. Además, nuestros argumentos demostrarán que la restricción $p<\min\{\frac{n}{\alpha},p_0\}$ puede relajarse hasta $p<\frac{n}{\alpha}$ cuando $\mathcal{A}$ es lineal en la variable del gradiente. Mas aún, las tres últimas implicaciones son óptimas en el sentido de que no podemos esperar $Du\in B^{\beta}_{r,l}$ para alguna $\beta>\alpha$.

In this paper, we will focus on questions of regularity about the solutions of systems of the type

$$\operatorname{div} \mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\;=\;\operatorname{div} G\,.$$

In general, we assume that $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\times R^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ satisfies certain conditions of boundedness and ellipticity, and G belongs to a suitable space functions. To achieve our results, we gradually will decomposing the previous *System Divergence Form*. At first, we will limit ourselves to the case $n=2$ and linear with respect to the variable gradient. In this case we can interpret the system as a *Generalized Beltrami Equation*

$$\overline{\partial} f=\mu\partial f+\nu\overline{\partial f}+h\,,$$

in the complex plane. This will allow us to study the problem using tools of *Complex Analysis*. Conversely, if $n>2$, we can not summarize to the complex plane and we will work on $\mathbb{R}^n$. Therefore, we will study the problem $\mathcal{A}(x,\xi)$ nonlinear using the classic tools of PDEs and harmonic analysis.

In the case of the *Generalized Beltrami equation*, we will see that if μ, ν belong to $W^{1,p}_c(\mathbb{C})$ and $h\in W^{1,s}_{loc}(\mathbb{C})$, then we have that

$$\left.\begin{array}{c} f\in L^r_{loc}(\mathbb{C})\\ \overline{\partial} f=\mu\partial f+\nu\overline{\partial f}+h\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad f\in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{C})$$

for some values of p, r and s. Furthermore, we study the function $\log(\partial\phi)$ where $\phi\in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ is a homeomorphism solution of the *Homogeneous Generalized Beltrami Equation* (ie, $h=0$) when the coefficients have a Sobolev and Sobolev Fractional regularly. Specifically we attain the involvement

$$\mu,\,\nu\in W^{\alpha,p}_c(\mathbb{C})\quad\Longrightarrow\quad\log(\partial\phi)\in W^{\alpha,s}(\mathbb{C})$$

for some values of $p\geq s>1$ if $\alpha=1$ and $p=s=\frac{2}{\alpha}$ if $\alpha<1$.

When we pass to higher dimensions ($\mathbb{R}^n$ with $n\geq 2$) first we studied the system

$$\operatorname{div} \mathcal{A}\,(\,x\,,\,Du(x)\,)\;=\;0$$

where we suppose that the application $x\to\mathcal{A}(x,\xi)$ is of type Besov or Triebel-Lizorkin. In this casem we prove that there is a number $p_0=p_0\,(n,\,\sigma,\,\ell)$ for which it holds that

$$x\to\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\in F^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},\infty}(\Omega)\ \text{ local }\Longrightarrow\ Du\in B^{\alpha}_{p,\infty}(\Omega)\ \text{ local}$$

$$x\to\mathcal{A}\,(\,x\,,\,\xi\,)\in B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega)\ \text{ local }\Longrightarrow\ Du\in B^{\alpha}_{p,q}(\Omega)\ \text{ local}$$

for all $2\leq p\leq \text{mín}\{\frac{n}{\alpha},p_0\}$ where $u\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ is any weak solution of the homogeneous system. Later, we will treat the non-homogeneous case. Here, the situation changes drastically since certain difficulties arise in index q. In this case, we have shown that if $x\to\mathcal{A}(x,\xi)\in B^{\alpha}_{\frac{n}{\alpha},q}(\Omega)$ locally, then all $u\in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ weak solution of the nonhomogeneous system meets the involvement

$$G\in B^{\alpha}_{p,q}\qquad\Longrightarrow\qquad Du\in B^{\alpha}_{p,q}$$

for allv$p\in\Big(\text{máx}\{p_0',\frac{nq}{n+\alpha q}\},\text{mín}\{\frac{n}{\alpha},p_0\}\Big)$. In addition, our arguments showing that the restriction $p<\text{mín}\{\frac{n}{\alpha},p_0\}$ can relax until $p<\frac{n}{\alpha}$ when $\mathcal{A}$ is linear into the variable gradient. Moreover, the last three implications are optimal in the sense that we can not expect $Du\in B^{\beta}_{r,l}$ locally for some $\beta>\alpha$.