UAB
Universitat Autònoma de Barcelona

Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios

Claudio Fuentealba Aguilera

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Programa de Doctorat en Educació

TESIS DOCTORAL

Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios

Autor: Claudio Fuentealba Aguilera

Dirigida por las doctoras

Dra. Edelmira Badillo Dra. Gloria Sánchez-Matamoros

Bellaterra – septiembre de 2017

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Programa de Doctorat en Educació

Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios

Doctorando: Claudio Eduardo Fuentealba Aguilera Firma………………

Directora: Dra. Edelmira Badillo Jiménez Firma………………

Directora: Dra. Gloria Sánchez-Matamoros García Firma……….........

Bellaterra– Septiembre de 2017

Dra. Edelmira Badillo Jiménez, profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

y

Dra. Gloria Sánchez-Matamoros García, profesora del Departamento de Didáctica de las Matemáticas, con sede en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla.

HAGO CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo la dirección de los firmantes por el Licenciado Claudio Eduardo Fuentealba Aguilera, con el título *Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios* reúne todos los requerimientos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública ante la correspondiente Comisión, por la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universitat Autònoma de Barcelona, por tanto, consideramos procedente autorizar su presentación.

Bellaterra, 28 de septiembre de 2017.

Firmado: ………………………………

Firmado: ………………………………

Esta tesis doctoral se ha realizado gracias a una beca Conicyt, del Programa de Formación de Capital Humano Avanzado, BECAS-CHILE, para doctorado en el extranjero y ha contado con el apoyo de la Universidad Austral de Chile.

A mis padres

Daniel y Julia

"La ciencia será siempre una búsqueda, jamás un descubrimiento real. Es un viaje, nunca una llegada".

Karl Popper (1902-1994)

"Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión, de dudar de cualquier afirmación, de corregir errores".

Julius Robert Oppenheimer (1904-1967)

Agradecimientos

A mis directoras, la Dra. Edelmira Badillo y la Dra. Gloria Sánchez-Matamoros, que me apoyaron y guiaron con paciencia durante todo este proceso de formación inicial como investigador en Didáctica de la Matemática. He aprendido mucho de ustedes y el trabajo que aquí se presenta no solo es fruto de mi pensamiento, sino que incluye todas sus ideas, sabios consejos y comentarios.

A la Dra. Asuman Oktaç, quien me concedió una invitación para realizar una estancia predoctoral en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (CINVESTAV). Muchas gracias por permitirme participar de su seminario e intercambiar ideas con los participantes. Gracias a todos ellos por ayudarme a plantear y definir las variables utilizadas en este trabajo.

A la Dra. María Trigueros quien siempre ha tenido la disposición de ayudarme aclarando mis dudas referentes a la teoría APOE y al Análisis Implicativo.

A la Dra. Carmen Azcárate por su apoyo y sugerencias en la realización del trabajo final de máster que fue la antesala del desarrollo de esta tesis doctoral.

A todos los profesores del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la UAB que aportaron durante diversas instancias con ideas y sugerencias para llevar a cabo esta investigación.

A mi mujer, Andrea, mi amiga y compañera durante todo este proceso. Muchas gracias por todo tu apoyo.

A mis padres, suegros, hermanos y cuñados que me han apoyado siempre en todas mis desiciones.

A Diego, Edith y Sylvia por brindarme la oportunidad de poder desconectarme para recuperar fuerzas y por todos los buenos momentos vividos en la saleta.

A todas las personas que he conocido durante mi estancia en Barcelona y a todas aquellas que de una u otra forma permitieron el desarrollo de esta tesis ¡Muchas gracias!

Preámbulo

El cálculo es uno de los mayores y más importantes logros del intelecto humano y es un sello distintivo del desarrollo de las matemáticas en nuestros días. Además, ha demostrado su poder y flexibilidad al reducir problemas complicados a normas y procedimientos sencillos en las más diversas áreas del conocimiento tales como: matemáticas, física, ingeniería, ciencias sociales y biología entre otras (Berry y Nyman, 2003; Kleiner, 2001). En este mismo sentido, Ferrini-Mundy y Lauten (1994, p.120) describen al cálculo como "un hito crítico en la preparación matemática de los estudiantes con la intención de perseguir casi todas las áreas de las ciencias". Por su parte, Tall (1997, p.289) menciona que el cálculo "es a la vez un punto culminante de la matemática escolar y una puerta a nuevos desarrollos teóricos", lo que lo trasforma en un punto de inflexión entre las matemáticas elementales y matemáticas avanzadas. Sin embargo, a pesar de la relevancia del Cálculo, un problema aún sin solución es cómo lograr la comprensión por parte de los estudiantes universitarios de los conceptos fundamentales de este curso.

En particular, este estudio se centra en el concepto de derivada que es uno de los elementos centrales y estructurantes del cualquier curso de cálculo, además, es una herramienta fundamental en el estudio y comprensión de fenómenos que involucran el cambio o variación de magnitudes (Vrancken y Engler, 2014). Por tanto, corresponde a un concepto básico y trasversal en los currículos universitarios de matemáticas, ingeniería y otras ciencias.

A pesar de la importancia del concepto de derivada los resultados de las investigaciones relacionadas con su comprensión constatan que esta resulta muy compleja, observándose una cantidad significativa de estudiantes universitarios que solo logra alcanzar una comprensión parcial de este concepto (Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Cooley, Trigueros y Baker, 2007; Fuentealba, Sánchez-Matamoros, Badillo y Trigueros, 2017; entre otros).

Uno de los aspectos que ha causado dificultades en la comprensión del concepto de derivada, se relaciona con la utilización de métodos de enseñanza que han privilegiado la excesiva mecanización por parte de los estudiantes (Artigue, 1995). Estos métodos han convertido al concepto de derivada en un conocimiento algorítmico construido por medio de la resolución de cientos de tareas que solo involucran la aplicación correcta de determinadas operaciones algebraicas, obstaculizando la construcción de una comprensión más completa de este concepto (Dawkins y Epperson, 2014). Esta predilección por métodos algorítmicos provoca que la mayoría de los estudiantes utilicen dichos métodos y sus automatismos derivados para resolver este tipo de tareas con éxito. Contrariamente, estos mismos estudiantes pueden mostrar dificultades y errores cuando se enfrentan a la resolución de tareas que requieren la comprensión del significado de la derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o de su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Baker *et al.*, 2000; Cooley *et al.*, 2007). Esta problemática a pesar de no ser nueva, aún constituye uno de los mayores desafíos de la educación matemática a nivel universitario y es una constante preocupación para las instituciones educativas de nivel superior pues causa bajas calificaciones, altos índices de reprobación y abandono en los cursos de Cálculo (Pyzdrowski *et al.*, 2013; Bergé, 2007). Considerando esta situación y la demanda social referente a que la investigación en Didáctica de la Matemática, no solo analice la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, sino que también contribuya a la solución, es que enfocamos esta investigación en comprender las relaciones que establecen los estudiantes, entre los distintos elementos matemáticos que configuran el *esquema* de la derivada. De esta forma, pretendemos aportar en la comprensión del desarrollo del *esquema* de la derivada y su posible *tematización* con el objeto de que esta información contribuya a la solución de los problemas mencionados.

La memoria de tesis doctoral que se presenta consta de cinco capítulos.

En el primer capítulo se expone, a manera de introducción, una revisión sintética del desarrollo histórico del concepto de derivada. Posteriormente, se presenta una síntesis bibliográfica sobre algunos trabajos relacionados con la comprensión de la derivada de una función como objeto de investigación. En particular, esta síntesis se enfocó en las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, el uso de los modos de representación y el desarrollo de un *esquema* desde el punto de vista de la teoría APOE. Asimismo, se presentan algunas investigaciones que abordan el estudio del desarrollo de distintos *esquemas,* utilizando como método el Análisis Estadístico Implicativo. Por último, se plantea el problema de investigación y se presentan los objetivos de este trabajo.

En el segundo capítulo se expone el marco teórico en el cual se sustenta esta investigación. Para comenzar se presenta una síntesis del pensamiento matemático avanzado y algunos modelos cognitivos desarrollados en esta línea de investigación que permiten situar este estudio al interior de ella. Posteriormente, se exponen las componentes que configuran el marco de la teoría APOE. En particular, se describen las estructuras y los mecanismos que según esta teoría permiten la construcción del conocimiento matemático, haciendo hincapié, a los niveles de desarrollo de un *esquema*, la *tematización* del mismo y la posible existencia de una nueva estructura denominada *totalidad*. Asimismo, se describe el paradigma de investigación de este marco y el modelo hipotético denominado descomposición genética que, según esta teoría, indica el camino cognitivo que un individuo podría seguir para construir un determinado concepto matemático.

En el tercer capítulo se describe el diseño metodológico de esta investigación. En primer lugar, se presenta el paradigma y enfoque, además, se describen los participantes y el contexto. Posteriormente, se presentan los 2 instrumentos de recolección de datos y se explican las características de cada uno de ellos. Por último, se exponen el tratamiento de los datos y se describen los métodos de análisis seleccionados para responder a los objetivos planteados.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de los métodos de análisis. En primer lugar, se muestran los resultados correspondientes al análisis de clúster, el que permitió dividir la matriz de datos en 6 submatrices asociadas a distintos subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada. Posteriormente, se seleccionaron las submatrices vinculadas a los subniveles Inter y Trans, y sobre estas se aplicaron los métodos Estadísticos Descriptivo e Implicativo, cuyos resultados fueron interpretados bajo el marco de la teoría APOE, lo que permitió caracterizar los subniveles de desarrollo Inter y Trans determinados por el Análisis de Clúster. Finalmente, se exponen los resultados del Análisis Cualitativo de 5 entrevistas clínicas aplicadas a estudiantes pertenecientes al subnivel de desarrollo Trans más avanzado, con lo cual se logró identificar y caracterizar distintos matices de la *tematización* del *esquema* de la derivada.

En el quinto y último capítulo de esta memoria de tesis doctoral se presenta la discusión y las conclusiones que se desprenden de los resultados obtenidos del análisis de datos. En primer lugar, se reflexiona sobre la *tematización* del *esquema* de derivada y la manifestación de dos distintos matices observados en ella. A continuación, de discute sobre los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada contrastando los resultados de esta investigación con los obtenidos en estudios previos. Posteriormente, se discute sobre algunos aportes relacionados con el diseño metodológico adoptado en esta investigación. Asimismo, se propone la modificación de algunas construcciones específicas de dos descomposiciones genéticas planteadas en estudios previos. Finalmente, se señalan las limitaciones y posibles rutas para el desarrollo de futuros trabajos, y por último, se mencionan algunos trabajos que son producto del desarrollo de esta tesis doctoral.

Resumen

El desarrollo de esta tesis doctoral tuvo como objetivo analizar el esquema de la derivada en estudiantes universitarios, con instrucción previa en Cálculo Diferencial, por medio de la identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del *esquema*, y la posible *tematización* del mismo.

Con el propósito de identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo se aplicó un cuestionario a 103 estudiantes universitarios. El cuestionario estaba compuesto por tres tareas que involucraban el uso de los elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada en los modos de representación analítico y gráfico. Los protocolos de resolución del cuestionario fueron discretizados por medio de una escala dicotómica con el fin de construir un vector asociado a cada protocolo de resolución. Estos vectores permitieron el desarrollo de un Análisis de Clúster por medio del cual se identificaron distintos subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada. Asimismo, el Análisis de Clúster permitió dividir la matriz de datos en submatrices, una para cada subnivel Inter y Trans. Desde estas submatrices se caracterizaron los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada por medio del Análisis Estadístico Descriptivo e Implicativo interpretando los resultados de estos análisis con el marco de la teoría APOE.

A partir de la identificación y caracterización de estos subniveles, se seleccionó el subnivel de desarrollo Trans más avanzado y se entrevistó a 5 estudiantes de él, a fin de caracterizar la posible *tematización* del *esquema* de la derivada. Para la caracterización de la *tematización* del *esquema* de la derivada, se observaron las relaciones que los estudiantes establecen cuando se enfrentan al tratamiento de valores extremos, puntos de inflexión y puntos conflictivos en derivadas sucesivas de orden mayor a dos.

Los resultados de esta investigación permitieron identificar y caracterizar tres subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada para cada uno de los niveles Inter y Trans. Algunos de estos subniveles, ya habían sido identificados en investigaciones previas. Además, el análisis de la *tematización* del *esquema* permitió identificar dos manifestaciones distintas que fueron denominadas *tematización* como *totalidad* y *tematización* como *objeto*. Asimismo, estas dos manifestaciones distintas de la *tematización* permitieron refinar una descomposición genética que había sido planteada previamente en otra investigación.

Abstract

The objective of the development of this doctoral thesis was to analyze the derivative schema, in university students with prior instruction in differential calculus, through the identification and characterization of the sub-levels of development *schema* and their possible *thematization*.

In order to identify and characterize the sub-levels of development, a questionnaire was provided to 103 university students. The questionnaire consisted of three tasks involving that involved the use of mathematical elements that shape the derivative concept in the of analytical and graphical representation modes. The resolution protocols of the questionnaire were discretized by means of a dichotomous scale in order to construct a vector associated with each resolution protocol. These vectors allowed the development of a cluster analysis whereby different development sub-levels of the derivative *schema* were identified. Also, the cluster analysis allowed to partition the data matrix into submatrices, one for each sub-level: Inter and Trans. From these submatrices the sub-levels of development of the derivative schema were characterized by Descriptive and Implicative Statistical Analysis interpreting the results of these analyzes with the framework of the APOS theory.

From the identification and characterization of these sub-levels, the most advanced Trans sub-level development was selected, and five students were interviewed within it in order to characterize the possible *thematization* of the derivative *schema*. For the characterization of *thematization* of derivative *schema,* we observed the relationships that students establish when they face the treatment of extreme values, inflection points and conflictive points in successive derivatives of an order higher than two were observed.

The results of this research helped to identify and characterize three sub-levels of the development derivative *schema* for each Inter and Trans level, some of these sub-levels have already been identified in previous research. Furthermore, the analysis of the *thematization* of *schema* identified two different manifestations that were designated as *thematization* as a *totality* and *thematization* as an *object*. Also, these two different manifestations of *thematization* have allowed for a genetic descomposition to be established that had been previously raised in another investigation.

Tabla de contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1. Planteamiento del Problema

Este primer capítulo está organizado en cuatro secciones. En la primera, se describe de forma sintética el desarrollo histórico del concepto de derivada. En la segunda sección, se presenta un panorama general sobre la derivada como objeto de investigación en el área de Didáctica de la Matemática describiendo algunos trabajos que se relacionan con: (1) las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, (2) el uso de los modos de representación y, (3) el desarrollo de un *esquema*. En la tercera sección, se revisan algunas investigaciones que utilizan la teoría APOE y el Análisis Estadístico Implicativo en conjunto. Finalmente, en la última sección se plantea el problema de investigación y los objetivos de este trabajo.

1.1. Desarrollo histórico del concepto de derivada

La conceptualización de la derivada, tal y como hoy la conocemos, no es el producto de la inspiración de un matemático particular en una época especifica. Al contrario, surge como resultado de la utilización de distintos métodos para resolución problemas, tales como: el trazado de tangentes, la determinación de valores extremos y algunos relacionados con la física del movimiento (velocidad), en distintos periodos históricos.

Según Grabiner (1983) desde el punto de vista histórico el desarrollo del concepto de derivada ha tenido una secuencia de cuatro periodos claramente demarcados:

> [...]. Primero, la derivada se utilizó, después se descubrió, posteriormente se exploró y desarrolló y, finalmente, se definió. Es decir, ejemplos de lo que actualmente reconocemos como derivadas se usaron primeramente de forma *ad hoc* en un contexto particular para resolver problemas. Entonces se identificó el concepto general inmerso detrás de estos usos (como parte de la invención del Cálculo). Después muchas de las propiedades de la derivada fueron explicadas y desarrolladas en aplicaciones matemáticas y físicas. Finalmente, se estableció una definición precisa del concepto de derivada dentro de una teoría rigurosa. (p. 195)

Siguiendo lo planteado por Grabiner y considerando los distintos periodos históricos por los cuales ha transitado el desarrollo del concepto de derivada. En los siguientes apartados describimos algunos de los hechos y problemas fundamentales, que a lo largo de la historia, han favorecido su conceptualización.

1.1.1. Los griegos y el problema de la tangente

Al parecer fueron los griegos los primeros en plantearse el problema de trazado de tangentes a una curva y, específicamente, tangentes a circunferencias. De hecho, Euclides en su obra recopilatoria "Elementos de Geometría", universalmente conocida como "Los Elementos", proporciona las primeras evidencias históricas sobre la noción de tangente por medio de las siguientes definiciones y proposiciones:

> Definición II. Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta.
>
> Definición IV. Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan. (Vera, 1970, Tomo 1, p. 750).
>
> Proposición XVI. La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del circulo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor.
>
> Proposición XVII. Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo dado.
>
> Proposición XVIII. Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente. (Vera, 1970, Tomo 1, p. 760-761).

De estas definiciones y proposiciones, se puede inferir que la noción de tangente utilizada por los griegos está asociada con una línea que toca a una curva en un solo punto, pero no la corta (Grabiner, 1983). Asimismo, se observa que el tipo de razonamiento utilizado por Euclides es, más bien, estático y sintético. Esto se evidencia en las argumentaciones propuestas para exponer sus proposiciones, por ejemplo, para verificar la proposición XVIII, utiliza la Figura 1 y argumenta:

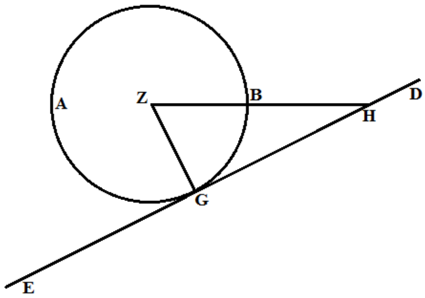


Figura 1. Solución de Euclides de la proposición XVIII

> Sea DE la tangente al círculo ABC en el punto G y trácese desde el centro Z del círculo la ZG. Si ZG no fuera perpendicular a DE, trácese la ZH perpendicular y entonces por ser

> recto el ángulo ZHG, es agudo el ZGH y como el lado mayor subtiende el ángulo mayor ZG, o sea: ZB es mayor que ZH, lo cual es imposible; luego ZH no es perpendicular a DE, y análogamente demostraríamos que ninguna otra lo es fuera de la ZG, l.q.q.d. (Vera, 1970, Tomo 1, p.762).

Posteriormente, en varias proposiciones del libro III de "Los Elementos", Euclides utiliza la noción de tangente en casos relacionados con ángulos exteriores y segmentos trazados desde un punto a una circunferencia. Asimismo, en el libro IX utiliza las nociones de recta tangente y circunferencias tangentes, para los casos de trazado de polígonos circunscritos a una circunferencia. Resulta evidente que todas definiciones y proposiciones mencionadas por Euclides son de utilidad para el caso de la circunferencia, sin embargo, no lo son para otro tipo de curvas.

En el siglo III a. C., Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.) en sus libros dedicados a las cónicas desarrolló métodos geométricos para la construcción de rectas tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas. Un ejemplo de estos métodos se observa en su razonamiento para construir rectas tangentes a parábolas:

> Sea P un punto de la parábola de vértice E, con PD perpendicular al eje de simetría de la parábola. Si A está el eje de simetría y $AE = ED$, entonces AP será tangente a la parábola en P (ver Figura 2).

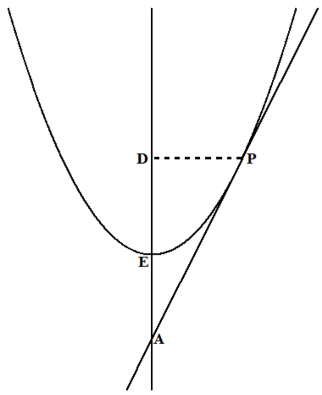


Figura 2. Método de Apolonio para determinar la tangente a una parábola (basado en Martínez de la Rosa, 2009, p. 8)

Los métodos utilizados por Apolonio en las cónicas, basados en el uso de rectas como sistema de referencia, son muy parecidos a los utilizados por René Descartes (1596-1650) en su geometría y se considera una anticipación de la geometría analítica actual. Además, de sus libros sobre cónicas Apolonio también escribió un tratado sobre "Tangencias", dicho tratado se perdió a través de la historia, sin embargo, gracias a Pappus de Alejandría (s. IV

d. C.) aún se conservan referencias sobre esta obra (Bruen, Fisher y Wilker, 1983). En este tratado, Apolonio describe el problema que actualmente se conoce como Problema de Apolonio y que tiene este enunciado:

> Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados (Ortega y Ortega, 2004, p. 59).

El análisis del problema implica el planteamiento de diez posibles casos. Boyer (1959) indica que los casos más sencillos (tres puntos y tres rectas) ya habían sido trabajados por Euclides, sin embargo, Apolonio trató aquellos dos casos junto a otros seis (dos puntos y una recta; dos rectas y un punto; dos puntos y una circunferencia; dos circunferencias y un punto, dos circunferencias y una recta; un punto, una recta y una circunferencia) en el Libro I del tratado sobre Tangencias, y los dos casos restantes (dos rectas y una circunferencia, y tres circunferencias) en el Libro II del mismo tratado. Hoy en día, se cree que Apolonio solo fue capaz de resolver los primeros nueve casos y, sería Isaac Newton (1643-1727) el primero el resolver el décimo caso, correspondiente a encontrar una circunferencia tangente a otras tres dadas, por medio del uso de la regla y el compás (Ortega y Ortega, 2004). Cabe mencionar que Apolonio también trabajó con problemas relativos a valores máximos y mínimos, pero sus teoremas sobre problemas valores extremos, en realidad, correspondían a consecuencias de sus teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas (Pino-Fan, Godino y Font, 2011).

Otros importantes aportes que más tarde influyeron en el desarrollo del concepto de derivada fueron realizados por Arquímedes (287-212 a. C). Estos aportes se basan principalmente en su trabajo sobre espirales. Un hecho curioso es que en dicho trabajo Arquímedes habla frecuentemente sobre tangentes a espirales, sin embargo, nunca definió que él entendía por tangente (Cooligde, 1951). Asimismo, considerando que la definición de espirales arquimedianas, basada en términos de un punto y una recta en movimiento, se cree que Arquímedes tuvo que romper con la concepción estática de la geometría griega y adoptar una concepción cinemática que le permitió determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva (Grabiner, 1983). Además, de estos aportes Arquímedes también trabajo sobre problemas relacionados con el cálculo de áreas (cuadraturas) y volúmenes, por medio del método de exhaución, los cuales más tarde dieron el soporte para el desarrollo de las integrales (Boyer, 1959; Wren y Garrett, 1933).

Los aportes de estos tres grandes matemáticos griegos fueron fundamentales y constituyeron la base para el desarrollo de técnicas y procedimientos que marcaron la ruta hacía el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral.

1.1.2. La edad media y la idea del movimiento

Durante más de una decena de siglos no se realizaron mayores contribuciones en el desarrollo específico del concepto de derivada, ni a otras nociones relacionas con el Cálculo. Sin embargo, en la edad media se realizaron importantes avances relacionados con el tratamiento de problemas que involucran la comprensión de una variedad de fenómenos: físicos, astronómicos y/o geométricos, que fueron abordados por medio del desarrollo de diversos métodos que involucraban el estudio de cantidades pequeñas o infinitesimales.

Muñoz-Legana y Román-Roy (1999) señalan que la situación a mediados del siglo XVII era aproximadamente la siguiente:

> Además de tener readquiridos los resultados y métodos de la matemática griega, el desarrollo de la geometría analítica (el método de las coordenadas) había permitido plantear y resolver algunos problemas relacionados con curvas, de las cuales se conocían muchos tipos. Por otra parte, la física proporcionaba un punto de vista cinemático: una curva podía interpretarse como la trayectoria de un punto material móvil. Varios tipos de problemas se planteaban sobre las curvas. Aunque la clasificación existente en aquel momento era más amplia (pues se utilizaba un método apropiado para cada problema), se va a simplificar utilizando el punto de vista, e incluso el lenguaje, actuales. (p.4)

En este periodo, los aportes de Galileo, Kepler, Cavalieri, Barrow, Fermat, entre otros, fueron fundamentales y permitieron trazar la ruta que permitió avanzar en el desarrollo del concepto de derivada en épocas posteriores.

En los siguientes párrafos, se exponen de manera general y cronológica, algunos de los aportes desarrollados por los matemáticos antes mencionados.

A Kepler (1571-1630), se le conoce por el método denominado como “Los Infinitésimos”. Este método se utilizó para resolver problemas que involucran el cálculo de volúmenes y áreas. El procedimiento empleado por Kepler partía de la premisa que todos los cuerpos se podrían descomponer en infinitas partes, infinitamente pequeñas (indivisibles) de áreas o de otros volúmenes ya conocidos. Así determinó el volumen de más de noventa cuerpos diferentes (Muñoz-Legana y Román-Roy, 1999). Posteriormente, Galileo (1564-1642) construyó un método similar para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio recorrido por el objeto.

Una herramienta (geométrica) importante para la investigación de problemas de cálculo correspondió a la noción de un “indivisible”. Si bien los “indivisibles” fueron utilizados en el cálculo por Galileo y otros matemáticos a comienzos del siglo XVII, fue Cavalieri (1598-1647), quien era alumnos de Galileo, el que utilizó de manera sistemática estas técnicas infinitesimales para resolver la tipología de problemas de la época y las plasmó en su obra “Los Indivisibles” de 1635 (Kleiner, 2001). Su método consiste en considerar que una figura geométrica está compuesta de un número infinito de indivisibles de dimensión inferior. Así, una superficie consiste en un número infinito de líneas paralelas equidistantes, y un sólido, de un número infinito de planos paralelos igualmente espaciados.

El procedimiento de Cavalieri para encontrar el área (o el volumen) de una figura es compararla con una segunda figura de igual altura (o anchura), cuya área (o volumen) es conocida, estableciendo una correspondencia uno a uno entre los elementos indivisibles de las dos figuras y utilizando el principio de que lleva su nombre, el cual indica que “Si los elementos indivisibles correspondientes están siempre en una proporción dada, entonces las áreas (o volúmenes) de las dos figuras están en la misma proporción” (Kleiner, 2001, p.140). El método propuesto por Cavalieri es de naturaleza dinámica y supone una ruptura con los procedimientos previos de los griegos y de Kepler. Asimismo, su postura puede resumirse en una frase que se le atribuye “el rigor es cosa de la filosofía, no de la geometría" (Kline, 1972, p. 383). Esto muestra que él estaba más interesado en los resultados prácticos de los cálculos que en la justificación de estos. Además, Cavalieri fue uno de los primeros en indicar que la tangente a una curva estaba definida por dos puntos sucesivos sobre la misma, como en un collar de perlas muy pequeñas, una al lado de otra (Ferrante, 2009). Esto supone que en el razonamiento de Cavalieri existe la idea intuitiva de la aproximación a la recta tangente por medio de las secantes.

Otro de los matemáticos destacados que realizaron contribuciones importantes al desarrollo del concepto de derivada es Pierre de Fermat (1601-1665). A él se le atribuye la invención de dos métodos conocidos como “Método de Fermat” para la determinación de valores extremos y el “Método de las Tangentes”. Fermat ilustró su primer método con un problema simple y fácil de resolver, cuya solución era bien conocida: “dada una línea, dividirla en dos partes, de tal forma que el producto de las partes sea máxima" (Grabiner, 1983, p. 195). Para resolver el problema consideró una línea de longitud B y un segmento de longitud A, sobre la primera parte de la línea, de modo que la longitud de la segunda parte fuese $B-A$ (ver Figura 3).

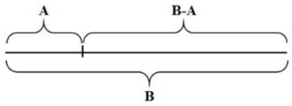


Figura 3. Ejemplo del Método de Fermat para valores extremos

De aquí se obtiene que el producto de los dos segmentos determinados sobre la línea de longitud B es:

$$A(B-A)=AB-A^2$$

Se considera que Fermat conocía los escritos del matemático griego Pappus de Alejandría y sabía que el problema tiene, por lo general, dos soluciones deberá tener sola una solución para el caso específico de un máximo (Grabiner, 1983). Considerando este hecho Fermat fue capaz de desarrollar su método para determinar valores extremos, utilizando la idea de que la segunda solución se basaba en un incremento del primer segmento sobre la línea de longitud B. Para determinar la solución, consideró que la primera parte de la línea tenía longitud $A+E$, entonces la segunda parte de la línea tendría longitud $B-(A+E)=B-A-E$. Multiplicando las dos partes obtuvo que el producto era:

$$(A+E)(B-A-E)=AB-A^2-2AE+BE-E^2$$

Así, al considerar el principio de Pappus para el máximo, que indica que en lugar de dos soluciones, existe solo una. Estableció que ambas expresiones deben ser iguales, esto es a lo que Fermat denominó pseudo-igualdad (Grabiner, 1983):

$$AB-A^2=AB-A^2-2AE+BE-E^2$$

Multiplicando y reduciendo Fermat simplifica la expresión obteniendo que $2A+E=B$, además, suprime el término E por lo que obtiene:

$$A=\frac{B}{2}$$

Hay que observar que Fermat consideró que el término E debe suprimirse, sin embargo, no entrega ninguna justificación al respecto. Además, Fermat tampoco considera a este término como un infinitesimal, ni como un límite, él no explicó el porqué se podía dividir en primer lugar por E (considerando a $E\neq 0$) y entonces eliminarlo (como si fuera cero). Es más, Fermat tampoco explicó explícitamente que usaba un caso especial de un concepto más general, que más tarde se convertiría en la derivada, la razón de cambio, o incluso la pendiente de la recta tangente. Asimismo, él no había comprendido la relación entre su método de extremos y la manera de calcular una tangente, que correspondía a su segundo método. En realidad, él siguió su tratamiento de extremos diciendo que el mismo método se podría utilizar para encontrar tangentes pues eran equivalentes (Grabiner, 1983).

Por otra parte, Descartes (1596-1650) afirma que el problema geométrico que más deseos tiene de solucionar es el trazado de tangentes. Su procedimiento se enmarca, más bien, en la geométrica estática de los griegos y consiste en trazar la circunferencia con centro en el corte de la normal a la curva (en el punto que se considere) con el eje de abscisas y que pase por el punto en cuestión. Todo esto con la condición de que la circunferencia no corte a la curva en ningún otro punto, de esta manera, se tiene como tangente a la curva, la de la circunferencia en este punto. Este método es útil para curvas del tipo $y = f(x)$, en donde $y = (f(x))^2$ es un polinomio sencillo. Tanto este método como el de Fermat fueron refinados con posterioridad (Muñoz-Legana y Román-Roy, 1999).

Las aportaciones realizadas por Fermat al desarrollo del Cálculo Diferencial a través de sus trabajos sobre valores extremos y tangentes, hacen que importantes matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace (1749-1827) y Lagrange (1736-1813), lo consideren como el verdadero inventor del Cálculo Diferencial. Incluso su influencia es tal que, el mismo Newton (1643.1727) menciona que algunas de sus primeras ideas sobre el trazado de tangentes a curvas y el estudio de valores extremos provenían directamente de los trabajos de Fermat (Durán, 1996).

Por otra parte, durante esta época histórica Barrow (1630-1677) realiza un importante aporte al desarrollo del concepto de derivada. Específicamente, utilizando un procedimiento análogo al que usó Fermat, Barrow desarrolla un método es conocido como "Método de Barrow", en el cual en lugar de realizar un incremento (E en el Método de Fermat) introduce dos incrementos en e y a, los cuales son equivalentes a los incrementos Δx y Δy que utilizamos actualmente (Boyer, 1999). A partir de estas observaciones se cree que Barrow intuye la idea de que la tangente es el límite de las secantes al aplicar el método de Fermat a curvas dadas en forma implícita $f(x, y) = 0$, pero esto no fue así, pues Barrow seguía con la idea griega de que la tangente era la recta que cortaba a la curva en un solo punto, sin embargo, más tarde su discípulo Newton da solución a esta cuestión (Muñoz-Legana y Román-Roy, 1999).

Finalmente, Barrow señaló la relación entre los problemas de la tangente y del área, pero esto fue para casos específicos, el reconocimiento claro y explícito, en su generalidad completa, de lo que ahora llamamos "Teorema Fundamental del Cálculo" pertenece a Newton y Leibniz (1646-1716) (Kleiner, 2001).

1.1.3. Newton y Leibniz: el descubrimiento del Cálculo

Según Whiteside (1960) es bien conocido que Newton y Leibniz son considerados como los creadores del Cálculo. Sin embargo, este autor plantea que ello es una excesiva simplificación de los hechos, pues el Cálculo es el producto de una larga evolución de ideas en la cual, ciertamente, estos dos personajes desempeñaron un papel decisivo.

Newton y Leibniz, en realidad consideraron las ideas y los métodos ya existentes para el cálculo de tangentes, extremos y áreas, incorporándolos dentro de dos conceptos más generales, conceptos que actualmente conocemos como la derivada y la integral. Asimismo, establecieron una notación que haría más sencillo, o casi automático, el uso de estos conceptos generales (Grabiner, 1983).

De la misma forma que Fermat y Barrow, Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, pero rápidamente se encamina hacia una concepción geométrico-mecánica. Basándose en la idea intuitiva del movimiento continuo, introdujo los conceptos de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, denotando a estos *fluentes* con las últimas letras del alfabeto (v, x, y y z), y de *fluxión* como razón de cambio instantánea respecto al tiempo, denotando a estas *fluxiones* con las letras coronadas $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$ (Collette, 1993). Asimismo, Newton denomina "momento del *fluente*" a la cantidad infinitamente pequeña en la que varía cualquier *fluente* x, la cual denotó por $\dot{x}$o. Según Collette (1993) Newton describe su método de la siguiente forma:

> Ya que los momentos como $\dot{x}$o y $\dot{y}$o, son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades *fluentes* x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}$o e $y + \dot{y}$o. De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}$o e $y + \dot{y}$o en lugar de x e y. (p.110)

Según Bos (1984) para clarificar estos aspectos, en 1671 Newton presenta un ejemplo basándose en la ecuación $x^3 - ax^2 - axy - y^3 = 0$ él sustituye por los incrementos respectivos y obtiene que:

$$(x+\dot{x}o)^3 - a(x+\dot{x}o)^2 + a(x+\dot{x}o)(y+\dot{y}o) - (y+\dot{y}o)^3 = 0$$

Desarrollando los binomios y realizando las cancelaciones correspondientes, dividendo por *o* y finalmente despreciando los términos en los que está presente el factor *o*, llega a la expresión $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0$, de donde obtiene el cociente de *fluxiones*:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

Esta expresión en nuestros días corresponde al cociente de las derivadas parciales de la función de dos variables $f(x,y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3$. Lo que implica el cálculo de la derivada tanto para el *fluente* x como para el *fluente* y.

Con base en estas definiciones de *fluente* y *fluxión*, el interés principal de Newton se enfocó en estudiar las relaciones entre ellos, es decir, el cálculo de las *fluxiones* a partir de los *fluentes* que correspondía al Cálculo Diferencial, la obtención de los *fluentes* a partir de las *fluxiones* que correspondía al Cálculo Integral y la resolución de las ecuaciones diferenciales, o ecuaciones *fluxionales* en su terminología. De esta forma, Newton fue el primero en usar sistemáticamente los resultados de la diferenciación para obtener antiderivadas, evaluar integrales y resolver ecuaciones diferenciales (Kleiner, 2001). Esto se debe a que Newton se había percatado de las relaciones entre los conceptos de *fluentes* y *fluxiones*. Además, desarrolló un proceso en el que se podía ver la conexión entre la cuadratura de una curva y su ordenada (Edwards, 1979).

Por otra parte, al abordar los problemas sobre valores extremos, Newton llegó a la conclusión de que la derivada (*fluxión*) es nula en dicho punto. Aquí se dio cuenta de que no siempre la variable va a ser el tiempo, cosa que comenta "el tiempo se puede sustituir por otra variable (fluente) que fluya con continuidad". Asimismo, Newton además de desarrollar métodos de derivación e integración, en particular, la regla de la cadena y el método de sustitución, también trabajó sobre la propiedad de linealidad y construyó tablas de derivadas e integrales. Es importante señalar que todos los métodos y resultados establecidos por Newton son solo para funciones continuas, pues para él todas las funciones eran continuas, ya que correspondían a trayectorias de movimientos continuos, que era el concepto que en su tiempo se tenía de continuidad (Muñoz-Legana y Román-Roy, 1999).

A diferencia de Newton, el Cálculo de Leibniz tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de elementos *infinitamente pequeños*, las bases de su Cálculo Diferencial e Integral respectivamente (González, 1992). Como señala Collette (1993), la finalidad de Leibniz era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, se pudiera establecer ciertas propiedades de las curvas por medio del *cálculo de las diferencias*.

Según Kleiner (2001), Leibniz consideraba que una curva correspondía a un polígono con infinitos lados, cada uno de longitud infinitesimal. Por tanto, para él cada curva estaba definida por una secuencia infinita (discreta) de abscisas x_1, x_2, x_3,..., y una secuencia infinita de ordenadas y_1, y_2, y_3,..., donde (x_i, y_i) son las coordenadas de los puntos que la conformaban. A la diferencia entre dos valores sucesivos de x, la denominó *diferencial* de x y la denotó por dx; análogamente definió el diferencial de y como dy. Para Leibniz el diferencial dx es una cantidad fija no nula, pero infinitamente pequeña en comparación con x, es decir, que es un infinitesimal y lo mismo para dy.

Con base en los diferenciales dx y dy, Leibniz indica que cualquier curva está constituida por los lados ds del polígono, en donde ds también es un infinitesimal que corresponde a la hipotenusa del famoso y característico triángulo *diferencial* de Leibniz con lados infinitesimales dx, dy y ds, los cuales satisfacen la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (ver Figura 4). El lado ds de la curva (polígono) se toma como coincidente en el caso de la recta tangente a la curva (en el punto x). En este sentido, según Kitcher (1983) Leibniz puntualiza que:

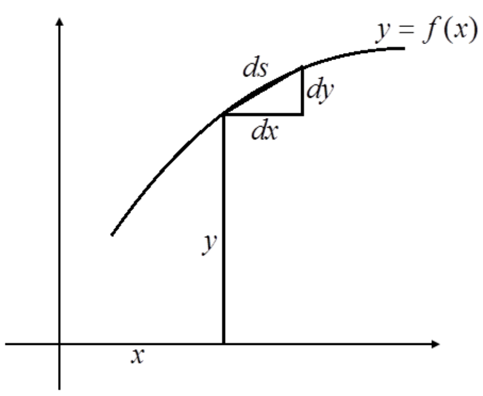


Figura 4. Triángulo *diferencial* de Leibniz

> Sólo tenemos que tener en cuenta que encontrar una tangente significa trazar una línea que conecta dos puntos de la curva a una distancia infinitamente pequeña, o el lado continuo de un polígono con un número infinito de ángulos, lo que para nosotros toma el lugar de la curva. Esta distancia infinitamente pequeña siempre puede expresarse por un *diferencial* conocida como ds. (p. 234-235)

A partir de aquí la pendiente de la tangente a la curva en el punto (x, y), es entonces $\frac{dy}{dx}$, al cual que Leibniz denominó cociente *diferencial* (Kleiner, 2001).
Leibniz trató durante algún tiempo encontrar las reglas correctas para *diferenciales* de productos y cocientes. Cuando las encontró, las "demostraciones" eran fáciles. Por ejemplo para el diferencial del producto establece que:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy - xy = x \cdot dy + y \cdot dx$$

En este desarrollo Leibniz omite el producto $dx \cdot dy$, pues hace notar que es "infinitamente pequeño en comparación con el resto" (Edwards, 1979, p.225). De esta forma, Leibniz consigue encontrar un lenguaje universal mediante el cual, por medio de sencillas manipulaciones, se obtienen fórmulas que resultan ser las verdaderas. Este es quizás, su mayor contribución al Cálculo, pues su lenguaje aún es utilizado (Muñoz-Legana y Román-Roy, 1999). En este mismo sentido Edwards expresa lo siguiente:

> El Cálculo Infinitesimal de Leibniz es el ejemplo supremo en toda la ciencia y las matemáticas, de un sistema de notación y terminología tan perfectamente acoplado con su sujeto en cuanto que reflejan fielmente las operaciones básicas lógicas y los procesos de aquel sujeto. (p. 232)

Según Gordillo y Pino-Fan (2016) Leibniz abordó situaciones problemáticas sobre valores extremos, tangentes y puntos de inflexión. Clara muestra de ello se observa en su obra titulada "Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur", en la cual se observa por primera vez el uso de la expresión "*Cálculo Diferencial"* y proporciona las fórmulas de derivación para: productos, cocientes, potencias y raíces, todas ellas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Tanto Newton como Leibniz lograron un avance sustantivo en el de generalización y sistematización, obteniendo métodos muy potentes para solucionar gran parte de los problemas planteados por sus antecesores. A pesar de ello, sus trabajos fueron fuertemente criticados por falta de rigor. Tanto Newton como Leibniz eran conscientes de los problemas de rigor en sus trabajos e intentaron dar una fundamentación rigurosa de sus métodos, pero reconocieron que la fuerza de sus trabajos en Cálculo no era su capacidad de dar respaldo lógico a sus procedimientos y algoritmos (Kleiner, 2001). En este sentido, Newton afirmó que su método de *fluxiones* estaba “brevemente explicado y escasamente demostrado” (Edwards, 1972, p.201). Por su parte, Leibniz sostuvo con respecto a la fundamentación de sus *diferenciales* que “basta con hacer uso de ellas como una herramienta que tiene ventajas para el Cálculo, del mismo modo que los algebristas conservan raíces imaginarias con gran beneficio” (Edwards, 1972, p.265). En relación con ello Kitcher (1981) hace una interesante observación:

> Hemos encontrado una situación en la cual una demanda por el rigor emerge de manera legítima. […] muestra que cierto tipo de razonamiento nos lleva a conclusiones verdaderas, sin embargo, cuando intentamos encontrar un argumento riguroso que nos muestre por qué el razonamiento nos lleva a conclusiones verdaderas, fallamos. [...] Newton y Leibniz desarrollaron una técnica para la solución de problemas. La técnica fue racionalmente aceptada porque los resultados que generaba eran bien confirmados, y porque prometía sistematización de los resultados. Pero una demanda de rigor era razonable debido a las dificultades de comprensión del por qué la técnica era exitosa. (p. 479)

1.1.4. La conceptualización y el rigor: hacia la definición del concepto de derivada

Hacia comienzo del siglo XIX, notables matemáticos tales como: Taylor (1685-1731), Euler (1707-1783), Maclaurin (1698-1746), D’Alenbert (1717-1783), Lagrange (1736-1813) y otros, habían considerado los trabajos de Newton y Leibniz con la idea de darle una estructura lógica, además, de una fundamentación rigurosa a los métodos/procedimientos de Cálculo que habían establecido. Claramente existieron avances en ese sentido, sin embargo, fue Cauchy (1789-1857), profesor de la Ècole Polytechnique de París, quien en su famoso “Cours d’analyse” (1821) construye la conceptualización del concepto de derivada a partir de la noción de límite. Cauchy define un infinitésimo como una variable cuyo límite tiende a cero y, de este modo, evita todas las confusiones y controversias que resultan de considerarlos infinitésimos como cantidades constantes menores que cualquier número positivo (Alexandrov, Kolmogorov y Laurentiev, 1973).

Según Bombal (2010) sobre la noción de límite e infinitésimo, Cauchy desarrolla los contenidos básicos de la Teoría de Funciones. Considera como pilar del desarrollo del Cálculo Diferencial la noción de derivada, definiéndola como límite del cociente de incrementos, y a partir de ella construye de forma rigurosa todo el Cálculo. Asimismo, Cauchy se plantea la necesidad de demostrar la existencia de la integral definida, entendida como área del recinto acotado por ordenadas de la función a integrar, y lo consigue al menos para funciones continuas. De esta forma, una vez establecidos, de manera independiente, la integral y la derivada, Cauchy se propuso conectar ambos conceptos consiguiéndolo mediante el establecimiento y demostración analítica, de lo que hoy conocemos como el famoso "Teorema Fundamental del Cálculo" para funciones continuas (Grabiner, 1983).

Todo este proceso de fundamentación teórica del Cálculo Diferencial culmina con el trabajo de Weierstrass (1815-1897) y su escuela, que establecen la definición de límite en los términos $\varepsilon - \delta$ tan habitual en los textos actuales y que permite construir todo el Cálculo, no solo el Diferencial sino también el Integral, en términos de las propiedades del sistema de números reales, sin ninguna mención a los infinitésimos, o cantidades infinitamente pequeñas (Bombal, 2010).

Finalmente, y tal como plantea Grabiner (1983) es importante hacer notar que:

> Si consultamos los libros de Cálculo actuales, por lo general observamos un orden usual de exposición respecto del concepto de derivada. Primero, se comienza con una definición, entonces se exploran algunos resultados y finalmente se sugieren algunas aplicaciones. (p.206)

Además, esto no solo es observable en los libros de texto, sino que también es el orden que generalmente se sigue en los procesos de enseñanza o instruccionales. Lo cual es inverso a la génesis histórica del concepto de derivada.

1.2. La comprensión de la derivada de una función como objeto de investigación

La importancia del concepto de derivada y las dificultades presentes en su comprensión han motivado el desarrollo de numerosas investigaciones que abordan distintas aristas de esta problemática desde diversos enfoques teóricos (Orton, 1983; Tall, 1989; Sfarf, 1992; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Asiala *et al.*, 1997; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Clark *et al.*, 1997; Porzio, 1997; Font, 1999; Zandieh, 2000; Baker *et al.*, 2000; Berry y Nyman, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Hähkiöniemi, 2006; Habre y Abboud, 2006; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006, 2008; Cooley *et al.*, 2007; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011; Badillo, Azcárate y Font, 2011, Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016, entre otros). Estos y otros estudios, según Sánchez-Matamoros *et al.* (2008) aportan información sobre diferentes aspectos relacionados con la comprensión del concepto de derivada. A juicio de estos autores las investigaciones realizadas se enmarcan en, a lo menos, una de las siguientes líneas:

- Errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada.
- Relación entre razón de cambio y cociente incremental.
- Los modos de representación como herramientas para pensar sobre las derivadas.
- La relación entre la derivada en un punto y la función derivada.
- El desarrollo del *esquema* de derivada.
- La aplicación del concepto (por ejemplo, el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena).

Además, se considera que los estudios realizados con posterioridad al año 2008, también pertenecen a por lo menos una de dichas categorías.

En las siguientes subsecciones se realiza una breve revisión algunos de los estudios realizados sobre el concepto de derivada, desde diversas perspectivas, enfocándonos en: las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la derivada, el uso de los modos de representación y el desarrollo de un *esquema*. Finalmente, en la última sección se presentan y describen de forma sintética algunos trabajos que utilizan el marco de la teoría APOE y el Análisis Estadístico Implicativo.

1.2.1. Las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada

Varios estudios indican que en general la construcción de la comprensión de los conceptos del Cálculo por parte de los estudiantes de diferentes niveles postsecundarios y universitarios, en distintos países, se limita a la aplicación rutinaria de las reglas algebraicas en situaciones contextos artificiales, o bien, puramente simbólicos (Orton, 1983; Tall, 1992, 1996; Artigue, 1995; White y Mitchelmore, 1996; Berry y Nyman, 2003; Habre y Abboud, 2006; entre otros). En sentido, Tall (1992) menciona que esta práctica causa un conjunto de dificultades generales que se observan en la comprensión de los conceptos de Cálculo, tales como:

- Dificultades con la conceptualización de límite y los procesos infinitos.
- Dificultades con la notación de Leibniz.

- Débil comprensión sobre funciones.
- Dificultades en la traducción de un problema del mundo real al Cálculo formal.
- Dificultades en la selección y uso de representaciones.
- Dificultades en la manipulación algebraica, o la falta de ella.
- Preferencia por los métodos algorítmicos en lugar de la comprensión conceptual.

Un ejemplo de estas dificultades se muestra en la investigación desarrollada por Orton (1983). Este autor plantea que aunque los estudiantes resuelven con éxito los problemas rutinarios sobre derivadas e integrales, tienen serias dificultades en la comprensión conceptual de estas nociones. Asimismo, Selden, Selden, Hauk, y Mason (1999) mencionan que generalmente en un curso de Cálculo tradicional, muchos buenos estudiantes no logran alcanzar un nivel satisfactorio de comprensión conceptual y, además, tienen una capacidad limitada para resolver problemas no rutinarios. Asimismo, Bingolbali y Monaghan (2008) indican que gran parte de estas dificultades son causadas por los métodos de enseñanza tradicionales. Mientras que otros autores señalan que dichas dificultades son causadas por los conceptos subyacentes al de derivada, entre ellos el concepto de límite (Cottrill *et al.*, 1996; Zandieh, 2000).

Específicamente, la investigación descriptiva de Orton (1983) se enfocó analizar la comprensión de la derivada de 110 estudiantes ingleses, de los cuales 60 eran estudiantes de una escuela secundaria y 50 profesores de matemáticas en formación. Para la recolección de datos se realizaron dos entrevistas: en la primera los estudiantes contestaban preguntas relacionadas con límites, áreas e integración, y la segunda entrevista, que constaba de 21 ítems de preguntas, se relacionaba con tareas referidas a razón de cambio, diferenciación y sus aplicaciones.

Cuando se les solicitó a los estudiantes que calcularan la tasa de cambio (tasa de variación media) de una función lineal en un punto, entre muchas otras respuestas irrelevantes, una quinta parte de ellos respondió que correspondía al valor de la función en dicho punto. Asimismo, en los ítems relacionados con la tasa de cambio de una función cuadrática en un punto, la mayor parte de los estudiantes no la contestaba, o bien, lo hacía incorrectamente.

Los resultados de Orton (1983) muestran que casi todos los estudiantes tuvieron éxito en derivar con precisión las funciones polinómicas, las cuales involucran procedimientos habituales de diferenciación. Sin embargo, los estudiantes mostraban problemas en la estimación de la pendiente de la recta tangente en un punto (derivada) de una función representada gráficamente y en el cálculo e interpretación de razones o tazas de cambio. Según Orton, estas dificultades se originan en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan al concepto de derivada.

Orton (1983) finaliza su estudio sugiriendo un enfoque informal, el cual implica iniciar con exploraciones numéricas y gráficas mediante el uso de datos de la vida real que ayuden a los estudiantes a comenzar a desarrollar una comprensión de la tasa de cambio. Este estudio fue pionero poniendo de relieve las dificultades de los estudiantes y escasa comprensión de la derivada, entre otros aspectos.

Por otra parte, Ferrini-Mundy y Graham (1994) analizaron cómo los estudiantes esbozan la derivada de una función cuando se proporciona la gráfica de esta. El propósito de su estudio fue describir la comprensión que los estudiantes de Cálculo tenían sobre función, límite, continuidad, derivada e integral, explorando la interrelación de la comprensión construida sobre estos conceptos. La investigación se llevó a cabo mediante un estudio de 6 casos, 2 con notas por debajo de la media, 2 con notas en la media, y 2 con notas por encima de la media, sin embargo, 2 de los 6 estudiantes no acabaron el curso. Cada estudiante fue entrevistado en cuatro oportunidades a lo largo del curso. Las entrevistas fueron grabadas y en cada una de ellas involucraba los conceptos en estudio. En los ítems seleccionados para las entrevistas algunas de las tareas estaban en modo de representación gráfico y otras en analítico o simbólico. En cada una de los ítems de la entrevista se incluían tareas que podían ser resueltas de forma rutinaria y eran similares a las planteadas en el libro de texto utilizado en el curso.

De análisis de las entrevistas, estos autores concluyeron que:

- Los contextos gráficos y algebraicos pueden considerarse por los estudiantes como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación, para resolver problemas.
- En muchas ocasiones existen conflictos entre los significados matemáticos tradicionales que tienen los profesores y libros de textos con los significados personales que han construido los estudiantes.
- Los estudiantes de Cálculo formularon su propia teoría, construyendo sus conexiones propias. Estos procesos parecen estar fuertemente influidos por la experiencia previa.
- Existen grandes inconsistencias entre representaciones, particularmente en ítems procedimentales y de comprensión de conceptos.

- Los estudiantes construyen una concepción en matemáticas como resultado de la instrucción experimentada.

Otra investigación que mostró dificultades en la comprensión del concepto de derivada es la desarrollada por White y Mitchelmore (1996). Estos autores examinaron la capacidad de los estudiantes de primer año de universidad para resolver problemas contextualizados que involucraban razones de cambio y derivadas. Los participantes del estudio fueron 40 estudiantes de Cálculo divididos en 4 grupos paralelos de aproximadamente 10 estudiantes. Esta división fue realizada tomando como base desempeño de estos en el curso de Álgebra del semestre anterior, sin embargo, los estudiantes no tenían información al respecto, por tanto, no eran conscientes de estas agrupaciones. Para la recolección de datos se utilizaron 4 ítems, que a su vez, tenían 4 versiones (A, B, C, D). Estos ítems trataban sobre tasas de cambio y optimización. Los ítems 1 y 2 requerían que el estudiante encontrara una tasa específica de cambio, y los ítems 3 y 4 implicaban el uso de la derivada para maximizar o minimizar una cantidad dada. Todas las versiones de estos ítems trataban sobre los mismos conceptos, incluyendo el uso de la derivada. Sin embargo, su contexto era diferente así como la información simbólica proporcionada.

Los datos fueron recolectados de forma cíclica en 4 ocasiones: antes, durante, inmediatamente después, y luego de 6 semanas después terminado del curso de Cálculo. Además, se seleccionaron 4 estudiantes por grupo antes del inicio estudio y se entrevistaron, a todos ellos, 4 días después cada uno de los ciclos de recolección de datos. El objetivo de estas entrevistas fue aclarar y ampliar las respuestas escritas de modo que el razonamiento del estudiante pudiera ser más fácilmente identificado.

White y Mitchelmore (1996) obtuvieron como resultado de que los estudiantes tuvieron más éxito en la solución de las tareas que figuran en el contexto puramente simbólico y mostraron avances importantes en ese dominio, pero fueron incapaces de resolver y desarrollar con éxito los problemas contextualizados descritos por medio de expresiones verbales. Este estudio mostró la débil comprensión de los estudiantes sobre la derivada en contextos reales. Es más, estos autores indican que los resultados de su estudio se deben al enfoque tradicional de enseñanza, el cual se basa en lo que ellos denominaron el método ABC “Abstracts concepts and procedures are taught Before Concrete examples and applications”, es decir, los conceptos y procedimientos abstractos se enseñan antes de los ejemplos y aplicaciones concretas.

En este mismo sentido, sobre los métodos de enseñanza, Kendal y Stacey (2001) investigaron cómo dos profesores (profesor A y profesor B) enseñaron diferenciación usando un Sistema de Álgebra Computacional (CAS sigla en inglés), lo que implicaba que las representaciones numéricas, gráficas y simbólicas de la derivada estaban siempre disponibles durante sus clases del grado 11 (16-17 años). Los dos profesores planearon las clases juntos, sin embargo, hicieron diferentes elecciones pedagógicas en cuanto a qué aspectos de la diferenciación serian enfatizados. El profesor A privilegió el uso de reglas y la representación simbólica, mientras que el profesor B privilegió la comprensión conceptual y la construcción de significado por parte del estudiante. Además, el profesor A enfatizó las conexiones entre las representaciones gráficas y numéricas, mientras que el profesor B privilegió las conexiones gráficas y simbólicas. Kendal y Stacey (2001) vinculan sus resultados en los ítems de diferenciación a las diferencias enfatizadas en el proceso de instruccional ejecutado por cada profesor.

En particular, Kendal y Stacey (2001) observaron que los estudiantes del profesor A, que privilegiaron las reglas, tuvieron buenos resultados en los ítems relacionados con la formulación del problema en términos de diferenciación en un punto mientras que los estudiantes del profesor B, que privilegiaban la comprensión conceptual, eran buenos en los ítems relacionados con la interpretación de la derivada. Los resultados mostraron que el desempeño de los estudiantes fue influenciado por los aspectos de la derivada que habían privilegiado sus profesores.

Por otra parte, en la enseñanza de las matemáticas existe la creencia de que la habilidad para visualizar es beneficiosa y favorece la comprensión de los conceptos. Sin embargo, Aspinwall *et al.* (1997) desarrollaron una investigación sobre las conexiones gráficas entre una función y su derivada, reportando el caso de un estudiante (Tim) cuya habilidad para pensar y visualizar un problema estaba obstaculizada por una imagen mental errónea, que entraba en conflicto con su conocimiento analítico.

Para la recolección de datos estos investigadores diseñaron 20 tareas, en su mayoría no rutinarias, las primeras 4 se elaboraron antes del estudio y las restantes se diseñaron basándose en el análisis de entrevistas de tareas previas. Para el análisis de sus datos consideraron el marco de habilidades matemáticas propuesto por Krutetskii (1976) que distingue entre tres tipos de habilidades matemáticas que él describe como analítica, geométrica y armónica. Las de tipo analítica tienen un lado lingüístico-lógico muy fuerte, pero por otro lado, una débil imagen visual y capacidad espacial. En las de tipo geométricas, las condiciones son contrarias a las analíticas, mientras que las armónicas son fuertes en todas las áreas, pero existen preferencias. Por ejemplo, un estudiante con habilidades analíticas no puede utilizar imágenes visuales en la resolución de problemas, ni siente que sea necesario, sin embargo, un estudiante con habilidades geométricas es todo lo contrario, mientras que para un estudiante con habilidades armónicas existe un equilibrio entre los dos tipos de habilidades y las combina, pero prefiere una por sobre las otras.

Aplicando el marco de Krutetskii, Aspinwall *et al.* (1997) establecieron que Tim era un experto en la aplicación de reglas y procedimientos para determinar derivadas en diversas situaciones, pero su habilidad para pensar sobre un problema fue obstaculizada por una imagen incorrecta. En particular, este estudiante construyó una imagen de una función polinómica de segundo grado como si tuviera asíntotas verticales, además, afirmó que el dominio eran todos los números reales. Esta imagen errónea le hizo esbozar una gráfica de la derivada con forma de función cúbica. Este esbozo entraba en conflicto con su conocimiento analítico de que la derivada de una función cuadrática es una recta. A pesar de ello, no fue capaz de controlar sus imágenes mentales, las cuales continuaron interfiriendo obstaculizando su comprensión del problema y, en particular, de la derivada. De esta forma, estos autores muestran como en algunas ocasiones las imágenes mentales incontroladas crean barreras para construir significados sobre los conceptos, lo cual va en contra de la postura que solo ve ventajas en el proceso de comprensión con imágenes mentales, sin embargo, no sugieren que se abandone la utilización de imágenes mentales, pero indican que los que los profesores deben estar conscientes de estas posibles dificultades.

Otra investigación que encontró dificultades asociadas a la comprensión del concepto de derivada fue la desarrollada por Asiala *et al.* (1997) bajo el marco de la teoría APOE. Estos autores estudiaron la comprensión de la relación entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada. Para el análisis de sus datos construyeron una descomposición genética que se basaba en las siguientes ideas:

- Conocer y comprender la representación gráfica de puntos de una curva en los ejes de coordenadas.
- Conocer y comprender el concepto de pendiente de una línea.
- Conocer y tener una buena comprensión del concepto de función, una imagen bien desarrollada del concepto de función.

- Para construir un *esquema* para la derivada, se deben recorrer dos caminos que están coordinados, el gráfico y el analítico.

Los participantes del estudio fueron 41 estudiantes universitarios, que habían cursado previamente dos semestres de Cálculo. De estos estudiantes, 17 habían completado un semestre en un curso C^4L (C^4L corresponde a un curso experimental de Cálculo) y 24 habían completado dos semestres de Cálculo en un curso tradicional. Durante el curso experimental, los estudiantes construyeron sus ideas matemáticas con el ordenador mediante un lenguaje de programación, investigaron los conceptos matemáticos con un Sistema informático de Álgebra Simbólica (CAS) y trabajaron en grupos de aprendizaje cooperativo en la resolución de problemas y en la discusión. El instrumento de recolección de datos correspondió a una entrevista conformada por 4 tareas relativas a la comprensión gráfica de una función y otras 4 referentes a la comprensión gráfica de su derivada. Cada investigador realizó un análisis preliminar de un conjunto aproximado de 10 a 11 entrevistas del total (41 trascripciones). Estos primeros análisis tenían como objetivo responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo comprende el estudiante la derivada de una función en un punto gráficamente?
- ¿Está esto conectado con la comprensión gráfica del estudiante del valor de una función en un punto?
- ¿Está relacionada la comprensión del estudiante con el hecho de que haya seguido el curso C^4L o un curso tradicional de Cálculo?

Los datos se analizaron en términos de las construcciones mentales propuestas por la teoría APOE tomando como base su descomposición genética preliminar. Sobre la base de estos análisis, se refinó la descomposición genética. Ambas descomposiciones genéticas, preliminar y refinada, incluyen rutas gráficas y analíticas para el desarrollo del concepto de derivada. La ruta gráfica se basó en el cálculo de las pendientes de las rectas secantes cuando los dos puntos de la gráfica acercan más, y más, hasta producir la pendiente de la tangente, como resultado del *proceso* de límite, mientras que camino analítico consistió en el cálculo de la tasa de variación media a lo largo de un intervalo cada vez más, y más pequeño, y a partir ello la tasa de variación instantánea, también como resultado del *proceso* de límite. Una vez acabado el análisis preliminar, cada uno de los investigadores analizó las 41 trascripciones de las tareas 6 y 7 de las entrevistas, teniendo en mente las preguntas que guiaron el primer análisis. En la tarea 6, se pedía calcular $f(5)$ y $f'(5)$, para ello se proporcionaba información gráfica de una función y una recta tangente a ella, de la que se daban la coordenada (5,4) de tangencia y el punto el corte con el eje y. Por su parte, en la tarea 7 se pedía esbozar la gráfica de una función, para ello se proporcionaba información analítica sobre la función y su derivada.

El análisis de los datos se enfocó en observar la coordinación del concepto de función y la necesidad de una expresión analítica en algunos estudiantes. En particular, Asiala *et al.* (1997) observaron que gran parte de los estudiantes, cuando se les proporcionaba información gráfica de la función o su derivada, no eran capaces de determinar la derivada en puntos específicos y se centraban en la obtención de expresiones algebraicas de las funciones para luego derivar. También, mencionan que la descomposición genética inicial, que describía una construcción paralela de la derivada en su definición analítica y su interpretación gráfica, debía refinarse, en sentido de incluir caminos que permitieran establecer conexiones en las representaciones analíticas y gráficas. Además, señalan que dichas dificultades de los estudiantes son causadas por la carencia de una concepción *proceso* de función.

Para finalizar su estudio, Asiala *et al.* (1997) mencionan que los estudiantes que participaron del curso experimental tuvieron una más tasa de éxito en el desarrollo de la comprensión gráfica de la derivada que los estudiantes que habían seguido los cursos tradicionales.

Por último, otra investigación que aborda la comprensión del concepto de derivada es la desarrollada por Zandieh (2000). Esta investigadora considera los elementos de la teoría de Sfard (1992) para desarrollar un marco teórico que permita estudiar la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de derivada. Según esta investigadora no es suficiente con preguntarse si un estudiante comprende el concepto o no, sino ¿qué aspectos del concepto conoce el estudiante y qué relaciones establece entre estos aspectos? El marco desarrollado por Zandieh considera que el concepto de derivada tiene dos componentes principales: las múltiples representaciones o contextos y las capas de pares *proceso-objeto*, en donde precisa que el concepto de derivada puede ser representado:

- Gráficamente, como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.
- Verbalmente, como la tasa instantánea de cambio o razón de cambio.
- Físicamente, como la velocidad o rapidez.

- Simbólicamente como el límite del cociente diferencial.

Según Sfard (1992) los conceptos matemáticos, en su comprensión, transitan desde una *concepción operacional* (*proceso*) hasta una concepción *estructural* estática, en la cual los *procesos* son operaciones sobre *objetos* construidos previamente, cada *proceso* es *reificado* en un *objeto* en el que actuarán otros *procesos*, formándose una cadena que Zandieh llama pares *proceso-objeto*. Por ejemplo, las funciones pueden ser vistas como un *proceso* que toma un elemento del dominio y al aplicar una trasformación devuelve un elemento del rango, pero también, una función puede ser vista estáticamente como un conjunto de pares ordenados. Asimismo, para un estudiante el *proceso* en el contexto gráfico podrían ser rectas secantes convirtiéndose en la tangente y el *objeto* sería la pendiente de la recta tangente a la función en un punto. En particular, para el concepto de derivada esta autora indica que si consideramos la definición formal de la derivada (límite de cociente incremental) se observa que la derivada de f, es f', que corresponde a una función cuyo valor en un punto está definido como el límite de una razón o cociente. Por tanto, esta cadena de *procesos* (función, límite, razón) determinan las capas de pares *proceso-objeto* para este caso.

Para ejemplificar la utilización de su marco, Zandieh (2000) desarrollo un estudio con 9 casos de estudiantes de Cálculo. La investigación se efectuó durante 9 meses y se tomaron notas de campo de 75 lecciones, además, de 5 entrevistas con cada estudiante. Del análisis de estos datos esta investigadora encontró que los estudiantes a menudo podían describir el límite como un *pseudo-objeto*, pero considerar el *proceso* de límite era más complejo. Además, indica que un estudiante no ha construido una comprensión completa sobre el concepto derivada, si no es capaz de reconocer y construir cada uno de los tres *proceso-objeto* (razón, límite y función) involucrados en la comprensión del concepto de derivada en algún contexto relevante.

1.2.2. El uso de los modos de representación

Goldin y Kaput (1996) categorizan las representaciones en internas y externas. Para estos autores las representaciones internas son configuraciones mentales de los individuos y las representaciones externas son visibles para otros seres humanos, tales como: palabras, símbolos e imágenes. Por su parte, Häihkiöniemi (2006) considera que las representaciones son herramientas para pensar e indica que la distinción entre representaciones internas y externas es irrelevante, pues son inseparables y ambas son muy importantes en comprensión de un concepto matemático.

En particular, en la investigación en didáctica de la matemática las representaciones o modos (sistemas) de representación tienen un papel relevante en el estudio de la comprensión de los conceptos. En este sentido, algunos autores plantean que la comprensión de un concepto matemático mejora cuando los estudiantes son capaces de usar múltiples representaciones y realizan conexiones o coordinaciones entre estas, pues cada representación tiene asociadas unas características propias del concepto, pero no todas (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; Duval, 2006).

Por ejemplo, Porzio (1997) en su estudio compara tres grupos de estudiantes universitarios, en donde cada uno de los grupos tenía un énfasis distinto en cuanto al uso de las representaciones en un curso de Cálculo Diferencial:

- El primer grupo siguió un curso cuyo trabajo se enfocó principalmente en la representación analítica.
- El segundo grupo enfatizó las representaciones gráficas, por medio del uso las opciones de una calculadora con capacidad gráfica.
- El tercer grupo trabajó con las representaciones analíticas y gráficas, utilizando un Sistema de Álgebra Computacional (CAS).

A partir, de su estudio y la comparación del primer grupo (control) con los otros dos, Porzio concluye que el conocimiento conceptual fue mucho mayor en el grupo que utilizó el CAS, lo cual favoreció las conexiones entre representaciones analíticas, gráficas y numéricas. Por su parte, el grupo que utilizó la calculadora gráfica fue particularmente bueno en el uso de representaciones gráficas, pero los estudiantes tuvieron serias dificultades para establecer conexiones entre representaciones gráficas y analíticas.

Otro trabajo que aborda la importancia de las representaciones, en particular la gráfica, es el desarrollo por Habre y Abboud (2006). Estos autores indagan la comprensión de los estudiantes sobre la función y su derivada en un curso experimental de Cálculo. El estudio se llevó a cabo durante dos semestres consecutivos, el otoño de 2001 y la primavera de 2002. Cada uno de los investigadores fue profesor durante un semestre, mientras el otro era observador. Los participantes fueron 89 estudiantes, sin embargo, solo 56 permanecieron en el curso durante ambos semestres, de los cuales 13 reprobaron.

La recolección de datos se desarrolló por medio del registro de las sesiones de clase, copias de los exámenes y lo más importante, se llevaron a cabo 2 entrevistas semiestructuradas con 10 de los estudiantes del curso que se ofrecieron a participar en el estudio. Las preguntas de la primera entrevista trataban sobre el concepto de función, no solo desde el modo de representación analítico, sino también desde el gráfico y como tabla de valores, además, de las características y diferencias entre los distintos tipos de funciones, todo esto con la idea de progresar en la comprensión de la velocidad de cambio y, en consecuencia, de la derivada de una función. En la segunda entrevista se les pidió a los estudiantes que hablaran sobre su comprensión del concepto de derivada tanto desde el punto de vista geométrico como del analítico.

Los resultados de este estudio mostraron que los estudiantes no tienen la misma comprensión de la derivada en el modo de representación gráfico que en el modo analítico. Asimismo, indican que los entrevistados mostraron una comprensión gráfica bastante completa sobre la derivada, sin embargo, muchos estudiantes (entrevistados y no entrevistados) no lograron definir geométricamente la derivada. Los autores mencionan que esto puede ser una consecuencia de las definiciones matemáticas utilizadas en el aula, pues estas son tradicionalmente analíticas, lo cual estaría creando un obstáculo en las mentes de los estudiantes.

En esta misma línea, Berry y Nyman (2003) exploran la forma en que los estudiantes conectan la gráfica de una derivada con la de la función original (antiderivada). Estos autores, parten de la premisa de que una gran parte de los estudiantes que completa un curso de Cálculo manejan un enfoque algorítmico que les permite encontrar la derivada de una función por medio de fórmulas de diferenciación o a través del Teorema Fundamental del Cálculo. Por tanto, su investigación intenta medir el grado de conexión (sensación) intuitiva que los estudiantes tienen sobre la posible gráfica de una función, dada la gráfica de su función derivada.

Para desarrollar el estudio estos investigadores adoptaron un enfoque cualitativo-etnográfico. Los participantes del estudio fueron 8 estudiantes matriculados en un curso intensivo de un mes, los cuales fueron divididos en 2 grupos de 4 integrantes. El primer grupo, designado como equipo A, constaba de 4 estudiantes que acababan de terminar su primer año de universidad: 2 de ellos habían completado 2 semestres de un curso de Cálculo tradicional para estudiantes de ciencias e ingeniería, 1 había completado un semestre y el cuarto había completado 1 curso de Pre-Cálculo y 1 semestre de Cálculo intuitivo. Por su parte, los 4 integrantes del otro grupo, equipo B, eran estudiantes de licenciatura en matemáticas: 2 acababan de terminar su segundo año de universidad, 1 el tercer año y 1 estaba tomando el último curso para terminar su licenciatura. Ambos grupos de estudiantes adoptaron diferentes estilos de trabajo, por tanto, para los propósitos del estudio solo fueron considerados los estudiantes del equipo A.

Para su experimento, los autores hicieron uso de calculadoras con capacidad gráfica y de medición de movimiento por medio de sensores. Además, presentaron a los estudiantes cuatro gráficos de una función derivada (velocidad-tiempo) con el fin de que encontraran alguno que encajara con las características de la función original (desplazamiento-tiempo). Para obtener esta función, se les solicitó a los estudiantes que caminaran con la calculadora intentando conectar uno de los cuatro gráficos presentados con el gráfico de distancia y tiempo proporcionado por la calculadora. Los estudiantes participantes completaron un par de intentos con los datos relativamente bien, pero encontraron que el proceso gráfico era más difícil que su correspondiente proceso algebraico.

Los autores encontraron en su estudio, que los estudiantes tienen predominantemente una visión simbólico-algebraica, lo cual queda de manifiesto en la utilización de las fórmulas de diferenciación como herramientas para la integración de funciones, sin embargo, afirman que las conexiones gráficas, subyacentes a esta relación, están raramente desarrolladas, a pesar de que en muchas ocasiones la expresión algebraica de la función puede no estar disponible. Según estos autores, esta sería la causa de que los estudiantes de Cálculo presenten dificultades para establecer conexiones entre la gráfica de la función derivada y la de función original. Finalmente, subrayan que la habilidad para hacer conexiones entre las representaciones es un indicador importante de la comprensión.

En este mismo sentido, Haciomeroglu, Aspinwall y Presmeg (2010) analizaron con base en el marco de Krutetskiis (1976) la forma de pensar de los estudiantes cuando asociaban la gráfica de la derivada con la gráfica de la función original, pero a diferencia del estudio de Berry y Nyman (2003), en su investigación solo la gráfica de la derivada era conocida por los 3 estudiantes que participaron del estudio.

Para la recogida de datos, se desarrollaron 16 tareas gráficas para obtener la comprensión de los procesos mentales de los 3 estudiantes y sus imágenes mentales utilizadas para crear significado desde la gráfica de la derivada. Se llevaron a cabo 13 entrevistas semanales con cada estudiante durante el semestre. La duración de cada entrevista individual fue de aproximadamente 20 minutos y se grabó tanto en audio como en video. Además, durante las entrevistas se entregaron 1 o 2 tareas y se les solicitó a los estudiantes que pensaran en voz alta mientras las estaban resolviendo para poder describir sus respuestas y estrategias, así como, para hacer inferencias sobre sus procesos mentales e imágenes.

Utilizando el marco de Krutetskii (1976) los investigadores observaron que los tres estudiantes abordaron los problemas de forma distinta. Uno de los estudiantes trabajaba analíticamente utilizando la gráfica proporcionada para obtener la expresión algebraica de la función derivada, la que luego integraba y posteriormente construía la gráfica de la función. Otro trabajó geométricamente y no se preocupaba por la expresión algebraica de la función derivada, esbozaba el gráfico de la función directamente, utilizando para ello la información gráfica proporcionada. Por último, el tercer estudiante tenía preferencia por el trabajo geométrico, sin embargo, ambas formas de pensar o habilidades fueron combinadas.

Haciomeroglu *et al.* (2010) concluyen que el pensamiento geométrico desempeña un papel significativo que no puede ser reemplazado por el pensamiento analítico. Además, constaron que los estudiantes que preferían usar el registro gráfico se encontraban con dificultades cuando las tareas presentadas exigían la utilización del registro analítico o algebraico, y viceversa, por lo que la coordinación y buena utilización de ambos registros se convierte en primordial para una comprensión adecuada y completa de la derivada.

Por su parte, Hähkiöniemi (2006) utilizó la teoría de los tres mundos de Tall (2003) para investigar las concepciones de los estudiantes sobre la derivada. Para ello desarrolló una secuencia instruccional que se implementó durante el otoño de 2003 con un grupo de estudiantes finlandeses del grado 11 (17 años) en curso de Cálculo Diferencial I. La secuencia consistió en 5 lecciones, 1 lección única y 2 lecciones dobles, sobre el concepto de derivada. Se llevó a cabo en un aula ordinaria de 14 estudiantes sin uso de ordenador, sin embargo, la mayoría de los estudiantes tenían una calculadora con capacidad gráfica. En cuanto a la estructura de la secuencia instruccional, se puede indicar que en ella se incluyeron algunas de las características principales de la derivada, tales como: la velocidad como un caso especial de la derivada, la tasa de cambio media e instantánea, la pendiente de una recta tangente, la inclinación del gráfico, la relación entre la gráfica de una función y su derivada, varios procesos límites subyacentes y el límite del cociente de diferencias o incremental. El objetivo de la instrucción fue que los estudiantes construyeran estos constructos resolviendo problemas abiertos en los que pudieran utilizar y conectar varias representaciones. El estudio se desarrolló bajo el enfoque de investigación-acción, por tanto, el investigador fue el profesor del curso durante las lecciones, las cuales grabadas en video con una cámara fija. Antes del desarrollo de la secuencia los estudiantes habían trabajado los conceptos de función, función por partes, función de valor absoluto, límite y continuidad.

Entre los resultados del estudio de Hähkiöniemi (2006) se encontró que el mundo "*Embodied*" (corporeizado o encarnado), el cual incluye representación gráfica, proporcionó fuertes herramientas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto de derivada. Además, señalan que el tratamiento de la derivada como un *objeto* ofrece a los estudiantes muchas herramientas poderosas de pensamiento, por ejemplo, los participantes del estudio usaron términos tales como "empinado" o aumento muy pronunciado de una gráfica, inclinación y tangente del gráfico cuando consideraron cualitativamente la derivada y no hicieron ningún cálculo. Esto fue acompañado por gestos que fueron una contribución importante al pensamiento, pues a través de sus propias representaciones, los estudiantes adquirieron una comprensión de conceptos tales como derivada positiva/negativa y puntos máximos/mínimos. Asimismo, indica que considerando que en el mundo "*Embodied*" una representación tiene dos componentes algo visible y algo invisible, se estableció que los gestos eran una parte visible importante de la comprensión de los estudiantes. No eran solo representaciones externas de las ideas de los estudiantes, sino que eran una parte integral de su comprensión.

Finalmente, otra investigación importante relacionada con los modos de representación es la desarrollada por Font (1999). Este autor basándose en el importante papel que las diferentes representaciones ostensivas de los *objetos* y sus traducciones tienen en la comprensión del concepto de derivada. Plantea que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$, se puede interpretar como un proceso que involucra tres subprocesos:

1) Traducciones entre distintas formas ostensivas de representar $f(x)$.

2) El paso de una forma de representación ostensiva de $f(x)$ a una forma de representación ostensiva de $f'(x)$

3) Traducciones entre las distintas formas ostensivas de representar $f'(x)$.

A partir, de esta consideración Font (1999) construye un diseño instruccional para estudiantes de 3.º B.U.P. y 1.º Bachillerato Científico Tecnológico, el cual contenía tareas en las que el estudiante podía realizar alguno de los subprocesos planteados e involucraban las representaciones ostensivas: expresión simbólica, gráfica, tabla y descripción verbal de la situación. La secuencia instruccional de Font (1999) fue aplicada en dos grupos: uno de 41 estudiantes y un grupo mixto, también de 41 estudiantes, que fue dividido en dos subgrupos de 20 y 21 estudiantes respectivamente.

A partir del análisis de los datos obtenidos del diseño instruccional, Font (1999) indica que los estudiantes tiene dificultades con contenidos que forman parte de conocimientos previos (función, traducción entre diferentes representaciones de una función, variación de una función, pendiente, tasa de variación media, velocidad, etc.). Igualmente, menciona que la definición de función derivada $f'(x)$ como el límite del cociente incremental y como pendiente de la recta tangente presentan una complejidad semiótica considerable, a diferencia de lo que ocurre con la introducción de esta por medio de una tabla de valores, la cual resulta ser más fácil de entender para los estudiantes. Asimismo, Font (1999) menciona que los tres procedimientos para definir la derivada (límite del cociente incremental, pendiente de la tangente y tabla) utilizan representaciones ostensivas distintas: expresión simbólica, gráficas y tablas, respectivamente. Por tanto, concluye que un diseño instruccional que combine los tres procedimientos posibilita la comprensión del estudiante del concepto de derivada.

1.2.3. El desarrollo de un *esquema*

La noción de *esquema* y sus niveles de desarrollo provienen de la epistemología genética de Piaget, en donde un *esquema* corresponde a “la estructura o la organización de acciones, tales como se trasfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas” (Piaget y Inherler, 1978, p. 20). Esta estructura denominada *esquema* no es estática, sino al contrario está en constante cambio y evolución. En este sentido, Piaget y García (1983) plantean que un *esquema* se desarrolla pasando por tres niveles o fases: Intra, Inter y Trans, denominado tríada, que se suceden según un orden fijo. Además, estos autores indican que dichos niveles se pueden encontrar cuando se analiza el desarrollo de un *esquema* de cualquier concepto matemático.

Según Trigueros (2005) la noción de esquema y sus niveles de desarrollo han sido adaptados a la Didáctica de la Matemática por la teoría APOE (para más detalles sobre la Teoría APOE ver el Capítulo 2) con el objeto de entregar una explicación más precisa de la manera en la que se desarrollan los conceptos matemáticos a través de los procesos de enseñanza. En esta teoría, el *esquema* de cualquier concepto matemático se define en función de sus cuatro estructuras cognitivas básicas: *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*, las cuales están conectadas en una estructura coherente que las interrelaciona de forma consciente o inconsciente, y que corresponde al *esquema* del concepto. De esta forma, ante una misma tarea, diferentes estudiantes evocan el *esquema* de un concepto y utilizan diferentes relaciones entre sus estructuras cognitivas, con lo cual es posible observar en sus producciones distintos niveles de desarrollo de dicho *esquema*.

Entre los primeros estudios sobre *esquemas* realizados bajo el marco de la teoría APOE, encontramos el trabajo de Cottrill *et al.* (1996) sobre la comprensión del *esquema* de límite, el cual es un concepto inherente a la noción de derivada. Estos autores se plantearon dos objetivos: (1) reinterpretar la literatura referente al concepto de límite y, (2) avanzar en el desarrollo de una descripción, o descomposición genética, de cómo el concepto de límite puede ser aprendido. Los participantes del estudio fueron 25 estudiantes universitarios cursaban la asignatura de Cálculo. La instrucción que recibieron los alumnos se basó principalmente en prácticas con ordenador, debates y trabajos de clase en pequeños grupos de 3 o 4 alumnos. Posteriormente, se realizaron entrevistas clínicas con el objeto de observar si las construcciones mentales declaradas en la descomposición genética preliminar habían sido logradas.

A partir del análisis de las entrevistas, estos autores señalan que es posible *interiorizar* en un *proceso* el concepto de límite, si los estudiantes son capaces de evaluar el límite en varios puntos (más o menos próximos), antes de dar el valor del límite. Por otro lado, para lograr una construcción límite a nivel de *objeto* se requiere, por ejemplo, que el estudiante piense en el límite de la suma de dos funciones como *proceso* y *coordinarlas*, para luego *encapsular* ese *proceso* en el *objeto* que corresponde al límite de la función suma. Además, para estos autores el concepto de límite no es estático y constituye un *esquema* muy complejo que no puede ser reducido a un simple *proceso*. Asimismo, señalan que la construcción del *esquema* de límite requiere la *coordinación* de *procesos* que impliquen fuertes concepciones así como la cuantificación del límite, en lugar del ε y el δ de la definición formal de límite que resulta muy difícil de alcanzar para la mayoría de los estudiantes.

Un aspecto interesante del trabajo de Cottrill *et al.* (1996) se relaciona con el análisis del desarrollo de un *esquema*, en este caso el de límite, sin el uso de la tríada (Intra-Inter-Trans), sin embargo, en estudios posteriores sobre el análisis de *esquemas* de otros conceptos matemáticos, sí se utiliza la tríada para interpretar los datos y describir sus niveles de desarrollo.

Clark *et al.* (1997) en su estudio sobre la comprensión del estudiante de la derivada de funciones compuestas, comúnmente conocida como regla de la cadena, encontraron que sus datos no podían ser explicados solo en términos de *acciones*, *procesos* y *objetos*, sino que la tríada de Piaget y García (1983) era útil para interpretar y describir los niveles de comprensión que se ponían en evidencia.

Como primer paso, Clark *et al.* (1997) diseñaron una descomposición genética preliminar que describía la forma en que los estudiantes podían llegar a construir: el *esquema* de función, el *esquema* de composición de funciones y el *esquema* de diferenciación. Asimismo, describieron cómo debían coordinarse estos *esquemas* para desarrollar el *esquema* de la regla de la cadena y cómo podían aplicar dicho *esquema* situaciones específicas. El estudio se realizó por medio de la aplicación de entrevistas a un grupo de 41 estudiantes, que al menos habían completado dos semestres de Cálculo en una Variable, de los cuales 17 pertenecían a un grupo experimental C^4L y 24 a un grupo de enseñanza tradicional. Las entrevistas estaban compuestas por 11 tareas sobre: métodos de derivación de funciones, función integral y regla de la cadena. Las preguntas de guiaron el estudio fueron:

- ¿Cómo comprenden los estudiantes la regla de la cadena?
- ¿Cuáles son los conceptos matemáticos necesarios para la comprensión de la regla de la cadena?
- ¿Cómo reconocen y aplican los estudiantes la regla de la cadena en diferentes situaciones matemáticas?

A partir del análisis de las entrevistas estos autores concluyen que existen conocimientos muy débiles sobre la regla de la cadena en sí misma, y la causa estaría asociada con la escasa, o más bien nula, comprensión de la composición de funciones. Además, remarcan que para el desarrollo del *esquema* de regla de la cadena, es necesario contar con un *esquema* de función que incluya, a lo menos, una concepción *proceso* de: función y composición/descomposición de funciones. En donde, el *esquema* de función, a su vez, incluya las reglas de diferenciación al mismo nivel de concepción. Finalmente, con base en sus resultados estos autores refinan su descomposición genética y describen los niveles de desarrollo del *esquema* de regla de la cadena de la siguiente forma:

- Intra-regla de la cadena: los estudiantes tienen una colección de reglas para encontrar derivadas incluyendo algunos casos especiales e incluso la fórmula general, pero no han establecido relaciones entre ellas.
- Inter-regla de la cadena: este nivel está caracterizado por la habilidad del estudiante para ver todos los casos diferentes, y reconocer que en algunos de ellos están relacionados. En este nivel se están formando una colección de elementos que constituyen el *esquema* de regla de la cadena. A esta colección se le denomina pre-*esquema*.
- Trans-regla de la cadena: el estudiante debe construir la estructura subyacente al esquema de la regla de la cadena, vinculando la composición o descomposición de funciones a la diferenciación. Los elementos en el *esquema* deben pasar de ser descripciones esencialmente por una lista, a su descripción por una sola regla.

Una investigación que está más estrechamente relacionada con el *esquema* de derivada, fue la realizada Baker *et al.* (2000). Es más, en esta investigación, como ejemplo de desarrollo de un *esquema*, se describen los niveles de desarrollo del *esquema* de derivada de la siguiente forma (Baker *et al.*, 2000, p.559):

- Intra-derivada: el estudiante puede interpretar una condición aislada y relacionarla con la propiedad gráfica de una función. Es característico de este nivel que un estudiante utilice solamente la condición de la primera derivada y a menudo sea consciente de otras propiedades, pero no puede coordinarlas representando la gráfica de la función. Si dos propiedades se solapan, el estudiante describe el comportamiento de la gráfica usando solamente una de ellas. Si él o ella intentan utilizar más de una propiedad, el estudiante no puede completar su descripción y recurre al uso de una propiedad solamente.

- Inter-derivada: el estudiante empieza a coordinar de forma simultánea dos o más condiciones. Sin embargo, esta coordinación no se aplica a lo largo de todo el solapamiento de condiciones.

- Trans-derivada: el estudiante puede coordinar todas las condiciones analíticas de las propiedades gráficas de una función en un intervalo. En este punto, el estudiante expresa o demuestra su coherencia del *esquema*. Es decir, el estudiante reconoce que comportamientos de la función pueden ser incluidos en la representación gráfica, y cuáles no.

Sin embargo, estas autoras centraron su foco de atención en el *esquema* de cálculo gráfico, desarrollando una investigación por medio del análisis de las producciones orales y escritas, obtenidas de las entrevistas realizadas a 41 estudiantes con instrucción previa en Cálculo (a lo menos dos semestres). La tarea que se les presentó a los estudiantes durante la entrevista (ver Figura 5) corresponde a un problema gráfico no rutinario, a pesar de que a simple vista no lo parece. Se les pidió a los estudiantes que esbozaran la gráfica de una función, conociendo algunas propiedades proporcionadas en términos de: la continuidad, la primera derivada, la segunda derivada y algunos límites, en intervalos específicos de su dominio.

Dibuja la gráfica de una función que satisface las siguientes condiciones:

h es continua
$h(0) = 2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$ y $\lim_{x \to 0} h'(x) = \infty$
$h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y cuando $-2 < x < 0$ y cuando $0 < x < 3$
$h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y cuando $x > 3$
$h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, cuando $-4 < x < -2$ y cuando $0 < x < 5$
$h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y cuando $x > 5$
$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} h(x) = -2$

¿Es la función que encontraste la única que cumple con las condiciones dadas por el problema? ¿Qué sucede con la gráfica de esta función si quitamos la condición de continuidad?

Figura 5. Tarea presentada por Baker *et al.* (2000) (tomada de Trigueros, 2005, p. 19)

Las preguntas que guiaron el estudio fueron:

- ¿Los estudiantes pueden trabajar con la representación gráfica de la función sin disponer de la expresión analítica de f ?
- ¿Pueden los estudiantes visualizar las características gráficas de monotonía y concavidad de una función sin que les sean mostradas estas?
- ¿Para los estudiantes es igual de relevante la primera derivada que la segunda?
- ¿Cómo coordinan los estudiantes las diferentes características de una gráfica en un mismo intervalo?

Los datos de las entrevistas fueron analizados en dos grupos: (1) tres de ellas se analizaron con la descomposición genética preliminar y sus resultados permitieron refinarla y, (2) las restantes 38 entrevistas fueron analizadas con base en la de composición genética refinada. Los datos de cada entrevista fueron analizados de manera independiente por, al menos, dos de las investigadoras y contrastados para su verificación.

Los resultados de los análisis de las 38 entrevistas mostraron que los estudiantes tienen dificultades: para coordinar las propiedades de la primera y segunda derivada en los intervalos, para establecer conexiones entre dos gráficas cóncavas, para interpretar el límite infinito de la función derivada en $x = 0$ y para establecer relaciones entre derivabilidad y continuidad, entre otras. A partir de estas observaciones las autoras plantean que el *esquema* de cálculo gráfico está conformado por la interacción de dos *esquemas* a los que denominaron "*esquema* de propiedad" y "*esquema* de intervalo". El "*esquema* de propiedad" implica entender cómo los estudiantes coordinan las condiciones analíticas de una función (primera derivada, segunda derivada, límites de la función, relación derivabilidad-continuidad) y las relacionan con una propiedad gráfica de esta. Por otro lado, el "*esquema* de intervalo" implica comprender la notación de los intervalos, la unión de intervalos contiguos y la coordinación de intervalos superpuestos. A partir de estas consideraciones, las autoras describen los niveles de desarrollo del *esquema* de cálculo gráfico utilizando una doble tríada, lo cual implica la existencia de 9 niveles de desarrollo, que se corresponden con los tres niveles de cada uno de los *esquemas* que están interactuando.

Baker *et al.* (2000) finalizan su estudio señalando varios aspectos que causaron dificultades constantemente a los estudiantes como son: el punto cúspide, la tangente vertical (punto de inflexión), y la supresión de la condición de continuidad (que correspondía a una de las preguntas de la entrevista).

Tomado esta última idea, aprovechamos la instancia para aclarar que en esta investigación a los puntos de no derivabilidad los denominamos puntos conflictivos y corresponden a puntos del dominio de una función que poseen; una tangente vertical, un punto cúspide, o bien un punto anguloso (Giaquinta y Modica, 2012). Aclaramos que la etiqueta 'conflictivo' debe entenderse en el sentido que causa conflicto cognitivo en el estudiante. Este conflicto puede emerger en la resolución de tareas que requieren el uso de la relación entre continuidad y derivabilidad de la función en estos puntos, pues se trata de puntos en los cuales la función es continua, pero no es derivable. Asimismo, resaltamos que a nuestro entender un punto de inflexión se corresponde con la definición establecida en libros de texto clásicos (Tomas y Finney, 1998; Leithold, 1998) que indican que una función f tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$ si se cumplen dos condiciones: (1) f tiene una recta tangente en $x = a$; y, (2) f cambia de curvatura en $(a, f(a))$. De esta forma, si la función f solo cumple la condición (2), entonces se trata de un cambio de curvatura y, no de un punto de inflexión, como puede ocurrir en algunos casos de puntos angulosos. Además, si se analiza la condición (1), se observa que la derivada puede ser infinita como es el caso de la tangente vertical.

En la Tabla 1, se presentan las definiciones de puntos conflictivos y las características inducidas por dichos puntos sobre la función y sus derivadas sucesivas.

Tabla 1. Puntos conflictivos y sus características

Punto conflictivo	Característica que induce en la función y en sus derivadas sucesivas
Tangente vertical Una función f posee un tangente vertical en $a \in Dom(f)$ si se verifica que: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$ o $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$	La función f es estrictamente decreciente/creciente en el entorno de $x = a$, por tanto, f' es negativa/postiva en dicho entorno. La función f' cambia de monotonía en $x = a$, es decir, que f'' cambia de signo en $x = a$, por tanto, f posee un punto de inflexión en $(a, f(a))$. Todas las derivadas sucesivas de f tienen una asíntota vertical de ecuación $x = a$. Las funciones derivadas de orden impar $(f', f''', f^{(5)}, \dots)$, si existen, poseen un comportamiento análogo entre si en el entorno de $x = a$, lo mismo ocurre con las funciones derivadas de orden par $(f'', f^{(4)}, f^{(6)}, \dots)$.
Punto cúspide Una función f posee un punto cúspide en $a \in Dom(f)$ si se verifica una de las siguientes condiciones: a) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$ y $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ b) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ y $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\infty$	La función f cambia de monotonía en $x = a$, por tanto, f' cambia de signo en el entorno de $x = a$, luego f tiene un valor extremo igual a $f(a)$. La función f' es estrictamente decreciente/creciente en el entorno de $x = a$, es decir, que f'' es negativa/positiva en dicho entorno. Todas las derivadas sucesivas de f tienen una asíntota vertical de ecuación $x = a$. Las funciones derivadas de orden impar $(f', f''', f^{(5)}, \dots)$, si existen, poseen un comportamiento análogo entre si en el entorno de $x = a$, lo mismo ocurre con las funciones derivadas de orden par $(f'', f^{(4)}, f^{(6)}, \dots)$.
Punto anguloso Una función f posee un punto anguloso en $a \in Dom(f)$ si se verifica una de las siguientes condiciones: a) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ y $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k$ b) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k$ y $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$ c) $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k_1$ y $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k_2$ donde $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ con $k_1 \neq k_2$	Considerando la definición de punto anguloso y analizando los posibles casos (16 en total), se puede establecer que no existe regularidad que permita asociar dicho punto con un valor extremo o punto de inflexión. Es más, en algunos casos; se tratará de un valor extremo, en otros un cambio de curvatura (sin ser punto de inflexión) y, en otros, puede ser solo un punto crítico de la función. También podría darse el caso en que dicho punto presente una dualidad en su naturaleza; es decir, que sea un valor extremo y un cambio de curvatura al mismo tiempo.

Hacemos esta aclaración debido a la confusión y poca claridad existente tanto en documentos de investigación (artículos y libros) como en libros de texto de Cálculo.

Siguiendo con la revisión de las investigaciones realizadas bajo el marco de la teoría APOE y la noción de *esquema*. Cabe destacar la investigación realizada por Badillo (2003) en la cual realiza un análisis de la comprensión del concepto de derivada de un grupo de 5 profesores de matemáticas y física de Colombia, en su investigación, utilizó la idea de coordinación de *esquemas*, considerando que el *esquema* de la derivada estaba conformado por el "*esquema* algebraico" y el "*esquema* gráfico". La investigación se llevó a cabo bajo el diseño de un estudio de casos múltiples. Para la recolección de datos se utilizó un cuestionario indirecto y una entrevista, además, de los documentos elaborados (programación, unidad didáctica y evaluación) por cada uno de los 5 profesores participantes. El análisis de los datos obtenidos se basó en la organización de estos en redes sistémicas, definiendo categorías que fueron consideradas pertinentes para la comprensión del concepto de derivada, tales como:

- los conceptos estructurales.
- la relación entre los *objetos* pendiente de la recta y razón de cambio en la construcción del *macro-objeto* (función derivada en un punto).
- la relación (tanto gráfica como algebraica) entre los *macro-objetos* y (función derivada en un punto y función derivada).

Los resultados de Badillo mostraron que la mayoría de los profesores tenían dificultad en la comprensión gráfica de los *macro-objetos* $f(x)$, $f'(\mathrm{a})$ y $f'(x)$, e incluso algunos reprodujeron inconsistencias con relación a estos *macro-objetos*, tales como:

- la confusión de los *macro-objetos* $f'(\mathrm{a})$ y $f'(x)$
- la reducción de la expresión simbólica del *macro-objeto* $f'(x)$ a la ecuación de la recta tangente y la gráfica del *macro-objeto* $f'(x)$ a la gráfica de la recta tangente
- la no justificación del uso de las técnicas de derivación directa e indirecta (definición en término de límite y las reglas de derivación).

Asimismo, Badillo señala que comprender la idea de función derivada en un punto, $f'(\mathrm{a})$, no implicaba comprender la idea de función derivada $f'(x)$. Sin embargo, aquellos profesores que comprendían la idea de función derivada, $f'(x)$, parecía que entendían la de derivada de la función en un punto $f'(\mathrm{a})$. Entre los aportes más importantes de este estudio se encuentra la elaboración de una nueva propuesta de descomposición genética para el concepto de derivada, elaborada a partir de modificación y ampliación de la propuesta de Asiala *et al.* (1997). Dicha descomposición genética incorpora, por un lado, la necesidad de integrar los significados asociados a los *objetos* derivada en un punto ($f'(\mathrm{a})$, aspecto local) y la función derivada ($f'(x)$, aspecto global) en diferentes contextos tales como: la velocidad, la pendiente de una recta y la tasa de variación (media e instantánea).

Otro estudio que adopta la idea de *esquema* de la Teoría APOE es el realizado por Sánchez-Matamoros (2004). Esta investigadora adopta la noción de *esquema* y los niveles de desarrollo para investigar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato y primer año de universidad. En su estudio participaron 150 estudiantes: 50 de primero de Bachillerato en Ciencias, 50 de segundo de Bachillerato Tecnológico y 50 del grado de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, estos últimos ya habían cursado el curso de Elementos de Análisis Matemático. Cada uno de los tres grupos respondió a un cuestionario diseñado específicamente para su nivel. A partir de los resultados del cuestionario, se seleccionaron 69 estudiantes a los que se les realizó una entrevista clínica semiestructurada sobre el concepto de derivada, con el objetivo de obtener mayor información y aclarar dudas sobre los protocolos de resolución.

El análisis tanto de los cuestionarios como de las entrevistas, se realizó en función de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas (ver Tabla 2) que se establecen entre ellos, a la hora de resolver un problema. En donde estas relaciones fueron entendidas como "coordinación entre operaciones".

Tabla 2. Relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada Sánchez-Matamoros (2004)

Relación lógica	Descripción
Conjunción lógica (y lógica)	Es la relación que se produce entre elementos matemáticos cuando se usan conjuntamente para hacer inferencias.
Contrarrecíproco	Es la relación que se establece en un condicional directo y su contrarrecíproco $\left[(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)\right]$.
Equivalencia lógica (o doble implicación):	Es la relación que se establece en un bicondicional y la conjunción de los condicionales $\lfloor (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \rfloor$.

A partir de la identificación de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, esta investigadora menciona que existe una construcción progresiva del *esquema* de la derivada y, que además, el desarrollo de este no está necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto de derivada, sino que este se caracteriza por medio del establecimiento de relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que lo conforman. En particular, los estudiantes de primero de Licenciatura en Matemáticas conocían más elementos matemáticos del concepto de derivada que los de Bachillerato, sin embargo, un gran número de ellos solo eran capaces de usar los elementos de forma aislada, o bien, solo podían relacionar un número limitado de elementos matemáticos con el fin de obtener información pertinente del problema que tenían que resolver.

Sánchez-Matamoros (2004) señala que en general los elementos matemáticos que mayoritariamente eran recordados se relacionaban con la primera derivada. En cuanto a las relaciones lógicas, la que presenta mayor dificultad en su establecimiento fue la equivalencia lógica. Asimismo, esta investigadora menciona que al establecer algunas relacionas lógicas entre elementos matemáticos, en determinadas situaciones, existía cierta influencia de los modos de representación.

El tipo de relaciones lógicas que eran posibles establecer en cada momento fueron utilizadas como indicadores para describir el comportamiento de los estudiantes en cada nivel de desarrollo así como para el paso de un nivel al siguiente. En particular, en cuanto a los niveles de desarrollo del *esquema* de derivada Sánchez-Matamoros indica que:

- Intra-derivada: en este nivel, los alumnos no recuerdan gran parte de los elementos matemáticos necesarios para la resolución de la tarea y con respecto, a aquellos elementos que recuerdan, no son capaces de establecer relaciones lógicas o bien, las establecen pero de forma errónea, lo cual no les permite responder a la tarea favorablemente. Un estudiante perteneciente al nivel Intra-derivada muestra dificultades al intentar coordinar los elementos matemáticos que relacionan f con f' y f con f''.
- Inter-derivada: los alumnos, pertenecientes a este nivel, recuerdan un mayor número de elementos matemáticos y son capaces de establecer algunas relaciones lógicas entre los elementos, generalmente de forma correcta. Las relaciones lógicas que se presentan con mayor frecuencia son la conjunción y el contrarrecíproco, mientras que al intentar relacionar los elementos matemáticos a través de la equivalencia, aún muestran algunas dificultades. En este nivel, los estudiantes, aún no poseen síntesis en los modos de representación gráfico y analítico, por este motivo, las relaciones que establece se dan en un mismo modo de representación. Un estudiante asignado al nivel Inter-derivada evidencia un tratamiento distinto de los mismos elementos matemáticos y las relaciones lógicas entre estos elementos, dependiendo del modo de representación en el cual se entreguen en la tarea.
- Trans-derivada: un estudiante asignado a este nivel es capaz de establecer cualquiera de las relaciones lógicas descritas entre los elementos matemáticos, independiente

del modo de representación en el cual estén dados dichos elementos, lo cual le permite realizar inferencias con respecto a propiedades implícitas que facilitan la resolución de la tarea de forma satisfactoria.

Por último, se han realizado dos estudios que han ampliado la investigación sobre *esquema* desde el punto de vista de la teoría APOE, indagando en aspectos relacionados con su *tematización*, la cual, según Asiala *et al.* (1997) se alcanza cuando un individuo es capaz de reflexionar sobre la comprensión misma del *esquema*, viéndolo como un todo y puede realizar *acciones*/*procesos* sobre él. Al igual que cuando un *proceso* es *encapsulado* para formar un *objeto*, cuando un *esquema* es *tematizado* se crea otra clase de *objeto* (de nivel superior), que puede ser también *desencapsulado* (*destematizado*) para obtener las estructuras cognitivas originales que lo componen.

El primero de estos dos trabajos fue desarrollado por Cooley *et al.* (2007). Estas autoras analizan el *esquema* gráfico de cálculo en busca de elementos que puedan caracterizar su *tematización*. Asimismo, mencionan que aun cuando existen investigaciones en Didáctica de la Matemática cuyas problemáticas involucran el desarrollo de *esquemas* de conceptos matemáticos, solo un número muy reducido de ellos se hace referencia a la *tematización* de un *esquema* y, además, dichos estudios no se han enfocado en esta temática en particular. Por tanto, uno de los objetivos más importantes de este estudio fue desarrollar las bases teóricas necesarias para realizar dicho análisis.

El propósito principal de este estudio fue mostrar que la *tematización* del *esquema* gráfico de Cálculo era posible y, además, caracterizarla. Por lo tanto, se decidió entrevistar a los estudiantes que habían completado al menos un curso Cálculo Diferencial e Integral. Los 28 estudiantes universitarios entrevistados fueron considerados como exitosos por sus profesores en sus cursos previos de Cálculo Diferencial e Integral. Además, la mitad de ellos también habían completado el curso Cálculo Multivariado. El objetivo subyacente a la elección de este tipo de estudiantes se relacionó con la necesidad de encontrar evidencia sobre la *tematización* del *esquema* de cálculo gráfico.

Para la recolección de datos los estudiantes respondieron a la entrevista que constaba de 9 problemas. Los primeros 8 trataban sobre las implicaciones gráficas de la primera y segunda derivada, la continuidad, el valor de los límites y las relaciones entre estos conceptos. El objetivo de estos problemas era que los estudiantes examinaran las respuestas y técnicas desde diferentes perspectivas, utilizando diferentes representaciones (gráficas y analíticas), así como, prepararlos para el último problema que era más complejo. Por su parte, el problema 9 tenía como objetivo proporcionar evidencia de la coherencia del *esquema* y su *tematización*. Este último problema involucraba la eliminación de condiciones (derivadas, continuidad), solo fue resuelto por aquellos estudiantes que respondieron exitosamente a los primeros 8 problemas. Los estudiantes respondieron a los problemas durante las entrevistas clínicas semiestructuradas, las cuales fueron grabadas en audio y tuvieron una duración de entre 30 a 60 minutos.

Para el análisis de las entrevistas estos investigadores examinaron la forma en que los estudiantes relacionaban los conceptos para formar estructuras (agrupaciones) matemáticas mentales dentro de sus *esquemas*, su capacidad de acceder a partes que componen el *esquema* cuando esto era necesario para resolver el problema y, si demostraban, consciencia de qué partes del *esquema* debían utilizar y cuáles no.

Los resultados de este estudio muestran que la eliminación de las condiciones referentes a la primera derivada, la segunda derivada y las condiciones de continuidad en el problema 9, proporcionó una herramienta competente para observar la madurez y estabilidad del *esquema*, así como para observar la capacidad de los estudiantes para seleccionar y utilizar algunas de sus componentes que eran necesarias en una situación específica, actuando sobre el *esquema* como un *objeto* y utilizándolo apropiadamente en la nueva situación, demostrando así la *tematización*. Asimismo, indican que lograr *tematizar* el *esquema* de cálculo gráfico es muy complejo, pues solo 1 estudiante de los 28 lo logró, mostrando que era capaz de describir consistentemente los cambios gráficos implicados por las condiciones nuevas en el problema 9.

Un segundo trabajo que ahonda en la *tematización* de un *esquema* y en particular el de derivada, es el desarrollado por García *et al.* (2011). Estos investigadores estudian la *tematización* del *esquema* con la idea de encontrar y caracterizar las estructuras subyacentes que lo conforman.

Para conseguir su objetivo estos investigadores analizaron las respuestas de tres estudiantes del primer curso del grado de matemáticas en una universidad española. Los estudiantes respondieron a un cuestionario que constaba de 4 problemas que incluían diferentes distintos modos de representación (gráfico y analítico), además, de características locales y globales del concepto de derivada. En este trabajo, solo se centraron en el análisis del primer y cuarto problema Además, de los protocolos de resolución de estos problemas los investigadores llevaron a cabo una entrevista clínica semiestructurada.

A partir del análisis conjunto de ambos instrumentos, estos investigadores mencionan que el uso consciente del concepto de derivada puede observase cuando un estudiante es capaz de trasladar los significados y relaciones entre elementos matemáticos que conectan una función con su derivada, correspondiente al par (f, f'), a un segundo nivel correspondiente a la primera derivada y segunda derivada, es decir, al par (f', f''), en distintos modos de representación. Para lograr lo anterior es necesario el estudiante tome consciencia de que la primera derivada corresponde a una función que puede ser derivada nuevamente, y así sucesivamente (operador derivada), lo cual, podría observarse cuando el estudiante considera los límites de la validez de las propiedades, por ejemplo, en la interpretación de puntos de cúspide, el comportamiento de tangentes y el análisis de la segunda derivada con respecto a la primera derivada y la función f.

Finalmente, estos autores mencionan que la *tematización* puede observarse cuando el estudiante es capaz de trasferir todas las relaciones e implicaciones que han construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f''), es decir, cuando considera tanto a f' como a f'' $((f')' = f'')$ como funciones, tomando consciencia de que el operador derivada es una trasformación que se puede generalizar.

1.3. Algunas investigaciones que utilizan la teoría APOE y el Análisis Estadístico Implicativo

A partir la revisión de la literatura hemos podido constatar que existen muy pocas investigaciones, bajo el marco de la teoría APOE, que utilicen como uno de sus métodos de análisis la Estadística Implicativa. En particular, solo hemos encontrado tres: Trigueros y Escandón (2008), Bodi (2009) y Pons (2014). Específicamente, el trabajo de Trigueros y Escandón (2008) utiliza la Estadística Implicativa como único método de análisis (árbol de similitud, grafo implicativo y árbol cohesivo) y permite confirmar algunas conclusiones de estudios cualitativos previos. Por su parte, Bodi (2009) solo utiliza el árbol de similitud y el grafo implicativo, mientras que Pons (2014) lo utiliza método confirmatorio del análisis cualitativo realizado previamente, pero solo construye un árbol de similitud general (para todas las variables) y otros parciales (centrados en algunas variables). Dado el interés de nuestro estudio solo describimos, en profundidad, el estudio realizado por Trigueros y Escandón (2008) y, posteriormente, presentamos una tabla comparativa de los trabajos realizados por Bodi (2009) y Pons (2014).

Trigueros y Escandón (2008) investigaron cuáles son los elementos relevantes para la graficación de funciones. En el desarrollo de su estudio tomaron como marco la teoría APOE y como método de análisis la Estadística Implicativa.

Este estudio correspondía a una ampliación de los trabajos desarrollados por Cortés (2004) y Cooley *et al.* (2007), los cuales se centraron en las dificultades de los estudiantes y en la posible *tematización* del *esquema*. Sin, embargo, para este caso las preguntas que guiaron la investigación fueron:

- ¿Cuáles conceptos, de entre los que se utilizan en la graficación de funciones resultan ser clave para que los estudiantes puedan establecer las relaciones que se requieren para resolver exitosamente este tipo de problemas?
- ¿Existe alguna estructura que tenga un papel dominante en la solución de los problemas?
- ¿Qué tipo de situaciones problemáticas pueden revelar las distintas concepciones de los estudiantes?

Para dar respuesta a estas preguntas, los investigadores utilizaron un cuestionario de preguntas abiertas que debían ser justificadas y, que había sido utilizado en investigaciones previas (Cortés, 2004; Cooley *et al.*, 2007). El cuestionario contenía 10 preguntas relacionadas con la graficación de funciones utilizando los conceptos del Cálculo Diferencial y que, paulatinamente, incrementan su nivel de dificultad. El cuestionario se aplicó a 40 alumnos de una universidad privada que habían aprobado el curso de Cálculo Diferencial y tardó aproximadamente 90 minutos.

Después de la aplicación del cuestionario, los autores indican que utilizaron los resultados de Cortés (2004) en cuyo estudio identificó 23 categorías (variables) que permitían describir en detalle el uso que los estudiantes hacen de los conceptos incluidos en el cuestionario. Dichas categorías son observables en varias preguntas, por lo es posible establecer criterios de calificación numéricos que describan el dominio de un estudiante en cada una de ellas. Estas categorías incluyen, por una parte, a las propiedades de las funciones y, por otra, al manejo de los intervalos del dominio de la función al sobreponer propiedades definidas mediante distintas condiciones. Las 23 categorías son las listadas a continuación:

A. Comprensión del significado de máximos y mínimos de una función.
B. Comprensión del significado de los puntos de inflexión de una función.
C. Comprensión del significado de la concavidad de una función.
D. Comprensión del significado del crecimiento de una función.
E. Comprensión del significado de la posibilidad de unicidad de una función relativa a sus propiedades.
F. Comprensión del significado de la continuidad de una función.
G. Comprensión de las implicaciones del signo de la primera derivada sobre las propiedades de la función.
H. Comprensión de las implicaciones del signo de la segunda derivada sobre las propiedades de la función.
I. Comprensión de las implicaciones de un límite infinito sobre la derivada de una función en un punto.
J. Comprensión de las implicaciones de que la derivada de una función no esté definida en un punto.
K. Capacidad de graficar una función a partir del conocimiento de sus propiedades.
L. Capacidad de graficar una función a partir del conocimiento de la regla de la función.
M. Capacidad de reconocer en la gráfica los intervalos donde la función crece o decrece.
N. Capacidad de reconocer en la gráfica los intervalos donde la función tiene distintas concavidades.
O. Capacidad de reconocer en la gráfica los intervalos donde la derivada de la función tiene signos distintos o es igual a cero.
P. Capacidad de reconocer en la gráfica los intervalos donde la derivada de la función no está definida.
Q. Capacidad de reconocer en la gráfica los intervalos donde la segunda derivada de la función tiene signos diferentes o es igual a cero.
R. Capacidad de interpretar la gráfica de la función en general.
S. Capacidad de trabajar con distintos intervalos del dominio de la función a partir de su definición.
T. Capacidad de dividir una gráfica en distintos intervalos del dominio de la función según los crecimientos o concavidades de la función.
U. Capacidad de definir distintos intervalos del dominio de la función según sus crecimientos y concavidades.
V. Capacidad de definir distintos intervalos en el dominio de la función según los crecimientos o concavidades de la misma cuando sus propiedades están dadas.

W. Capacidad de reconocer la existencia de un punto en el dominio de la función que no comparte una propiedad dada con sus vecinos. (Trigueros y Escandón, 2008, p. 71-72)

Trigueros señala que con estas categorías o variables se construyeron 40 vectores binarios, uno para cada estudiante, en donde se asignaba el valor 1 cuando se observaba la categoría y 0 en el caso contrario (comunicación personal). El análisis de las respuestas y construcción de los vectores se identificó a los estudiantes por número para evitar sesgos innecesarios.

Posteriormente, una vez construidos los vectores para cada estudiante, se realizó el análisis de los resultados de la clasificación de las respuestas a las preguntas en las distintas categorías (variables), para ello se utilizaron tres herramientas que ofrece la Estadística Implicativa, el árboles de similitud, el árbol cohesivo y el grafo implicativo (para más información ver Capitulo 3). Para la construcción de los gráficos se utilizó la aplicación CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive).

En su estudio Trigueros y Escandón, obtienen los gráficos de la Figura 6 como resultado de los tres tipos de análisis.

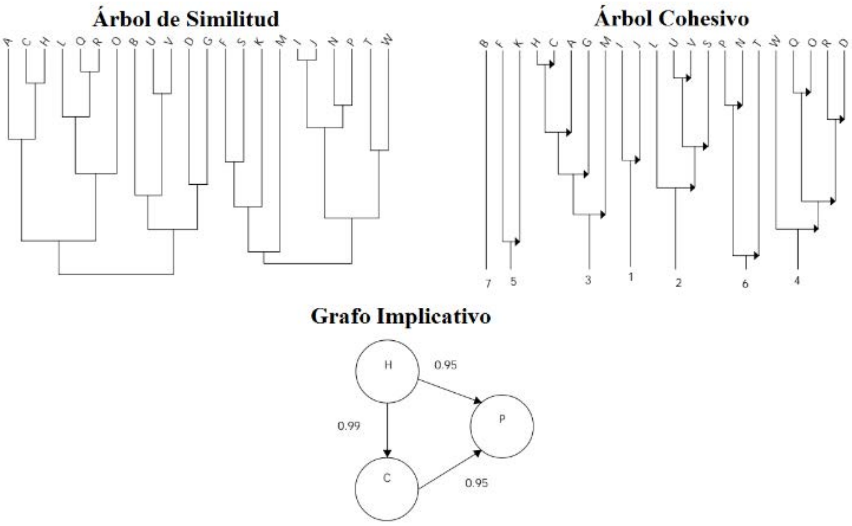


Figura 6. Gráficos obtenidos por medio del Análisis Estadístico Implicativo (Trigueros y Escandón, 2008)

A partir de estas gráficas los investigadores lograron observar las relaciones entre categorías (variables) e identificar la estructura subyacente al *esquema* gráfico de cálculo. Concluyendo, que los conceptos claves para establecer las relaciones necesarias que se requieren para resolver con éxito los problemas de graficación, utilizando las herramientas del Cálculo Diferencial son: los relacionados con la segunda derivada de la función, en particular los puntos de inflexión, la relación de la continuidad con la primera derivada y la comprensión de la subdivisión del dominio de la función en intervalos determinados por la interrelación de las propiedades de la primera y segunda derivada. En este sentido, indican que para lograr la comprensión de estas relaciones:

> [...] es necesario plantear preguntas y situaciones problemáticas en las que la identificación de los puntos de inflexión, particularmente aquellos en donde la tangente a la curva es vertical, y de los puntos en los que la función es continua pero no derivable tomen un papel primordial. Estas son, asimismo, las propiedades que hacen que la subdivisión del dominio de la función en los intervalos pertinentes sea relevante para la solución del problema. (Trigueros y Escandón, 2008, p.81)

Asimismo, mencionan que los resultados de este trabajo y la estructura subyacente encontrada permiten refinar la descomposición genética y diseñar procesos de instrucción.

Por otra parte, en cuanto al método de análisis estos autores indican que durante mucho tiempo los métodos estadísticos multivariados han sido cuestionados por su, supuesta, generalidad y falta de profundidad en la descripción de las problemáticas relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, mencionan que en este estudio el Análisis Estadístico Implicativo, es útil y pertinente, además, los resultados obtenidos son consistentes con los logrados por medio del análisis cualitativo, como por ejemplo el estudio de Baker *et al.* (2000).

A continuación, presentamos la Tabla 3 que muestra una comparativa entre los estudios de Bodi (2009) y Pons (2014), ambos estudios al igual que el de Trigueros y Escandón (2008) adoptan el marco teórico proporcionado por APOE para estudiar el desarrollo de *esquemas*, sin embargo, no utilizan por completo el Análisis Estadístico Implicativo y, además, no explicitan cuales son las variables que permitieron realizarlo.

Tabla 3. Tabla comparativa de los trabajos de Bodi (2009) y Pons (2014)

	Bodi (2009)	Pons (2014)
Objetivo de estudio	(a) estudiar las formas de conocer la divisibilidad en el conjunto de los números naturales y los mecanismos que utilizan estos los alumnos, usando el marco teórico constructivista APOS, y (b) caracterizar los niveles de desarrollo del *esquema* de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.	(a) caracterizar los niveles de desarrollo del *esquema* de límite de una función en un punto (b) Caracterizar cómo se da el paso de un nivel de desarrollo al siguiente (c) Establecer qué papel desempeña la coordinación de los *procesos* de aproximación en el dominio y en el rango en la construcción de la relación entre la concepción dinámica y métrica del límite

		(d) Identificar cómo influyen las distintas representaciones en la comprensión de la concepción dinámica de límite de una función (e) Identificar cómo caracterizar los diferentes momentos de la *tematización* del *esquema* de límite de una función
Participantes	371 estudiantes (120 estudiantes de 1.º de ESO, 137 de 4.º de ESO y 114 de 1.º de Bachillerato)	129 estudiantes de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud (66 de 1.º Bachillerato y 63 de 2.º de Bachillerato)
Instrumento utilizado para el Análisis Estadístico Implicativo	Cuestionario 10 preguntas y un total de 40 ítems	Cuestionario 10 tareas, no se especifica el número de ítems, aunque pudiera inferirse que son 38
Cantidad de variables	40, una por cada ítem	30, elimina las tareas relacionas con la *tematización*, por tanto, elimina ítems que conformarían variables
Se explicitan las variables en estudio	No, pero podrían corresponder a los ítems	No, pero podrían corresponder a los ítems
Codificación de las variables	Dicotómica (no se especifica claramente, pero al parecer es 0 si es correcta y, 1 si es incorrecta)	Dicotómica (1 respuesta correcta, 0 respuesta incorrecta para cada ítem)
Tipo de análisis desarrollado	Árbol de similitudy grafo implicativo	Solo árboles de similitud
Objetivo de análisis	Método principal de la investigación	Método confirmatorio de análisis cualitativo

1.4. El problema de investigación

En la revisión de la literatura citada anteriormente, se observa que el concepto de derivada es indispensable en el desarrollo del Cálculo y que su comprensión, como sus métodos de enseñanza, necesitan ser continuamente investigados. Asimismo, se observa que los estudiantes de niveles postsecundarios como universitarios tienen dificultades en la comprensión del concepto de derivada y de otras nociones matemáticas subyacentes a él, tales como los conceptos de función, límite y continuidad (Orton, 1983; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Aspinwall *et al.*, 1997; Asiala *et al.*, 1997). Asimismo, estos estudios remarcan que algunas de las causas de estas dificultades presentes en la comprensión del concepto de derivada, por parte de los estudiantes, se debe a los métodos de enseñanza tradicionales que en muchos casos solo enfatizan la construcción del concepto en un único modo de representación (White y Mitchelmore, 1996; Kendal y Stacey, 2001; Zandieh, 2000).

Igualmente, existen estudios enfatizan la importancia de uso de diversas representaciones y la coordinación entre ellas, como un elemento estructurante y clave en la construcción de una compresión más completa del concepto de este concepto (Porzio, 1997; Berry y Nyman, 2003; Hähkiöniemi, 2006; Habre y Abboud, 2006; Haciomeroglu *et al*., 2010; Font, 1999).

Por otra parte, se han realizado diversas investigaciones del desarrollo de *esquemas* bajo marco de la Teoría APOE para distintos conceptos matemáticos y otras relacionadas, específicamente, con el concepto de derivada (Cottrill *et al.*, 1996; Clark, 1997; Baker *et al.*, 2000; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004). Sin embargo, la investigación sobre la *tematización* de *esquemas*, de conceptos matemáticos y sus subniveles de desarrollo, no ha sido abordada en muchos estudios y mucho menos, sobre el concepto de derivada (Sánchez-Matamoros, 2004; Cooley *et al.*, 2007, García *et al.*, 2011). Así también, el análisis del desarrollo de *esquemas* desde el marco de la Teoría APOE, se ha llevado a cabo principalmente con técnicas de análisis cualitativo, observándose una cantidad ínfima de trabajos que utilizan métodos puramente cuantitativos o mixtos. Un ejemplo de estos trabajos son los realizados utilizando Estadística Implicativa (Trigueros y Escandón, 2008; Bodi, 2007; Pons, 2014).

Finalmente, los resultados de todas estas investigaciones, sin duda, han tenido implicaciones directas en el desarrollo del currículo y los métodos de enseñanza de Cálculo, y específicamente sobre el concepto de derivada, sin embargo, los investigadores en Didáctica de la Matemática, aún siguen reportando los mismos problemas y dificultades asociadas a la comprensión del concepto. Es por ello, que se hace necesario profundizar en la investigación sobre la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes. Desde este contexto, nos enfocamos en el análisis del *esquema* de la derivada que exhiben los estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial y para ello nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivo general

- Analizar el *esquema* de la derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial.

Objetivos específicos

- Identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada.
- Analizar y caracterizar la *tematización* del *esquema* de la derivada.

Capítulo 2. Marco Teórico

Este capítulo se ha estructurado en tres secciones. En la primera se exponen algunos elementos claves que permiten situar esta investigación en el ámbito de didáctica de la matemática y, específicamente, en la línea de investigación denominada Pensamiento Matemático Avanzado. En la segunda sección se presenta de manera sintética algunos modelos cognitivos utilizados tradicionalmente en los estudios enmarcados en esta línea de investigación. Aquí, se muestra su visión de cómo se construye el conocimiento matemático y de qué estructuras y/o mecanismos subyacen en dicha construcción.

Finalmente, en última sección se presentan las herramientas teóricas y analíticas que proporciona la teoría APOE, la cual ha sido utilizada como marco en el desarrollo de esta investigación y ha permitido interpretar el análisis de los datos.

2.1. El Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

El Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) desde el punto de vista de la investigación corresponde al campo de estudio en didáctica de la matemática orientado a los procesos cognitivos de orden superior. Azcárate y Camacho-Machín (2015) mencionan que:

> Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar (p. 20).

En este mismo sentido, Tall (1991) indica que desde el punto de vista del desarrollo cognitivo, el PMA corresponde a una transición significativa en la que “se pasa de describir a definir y de convencer a demostrar de una manera lógica a partir de esas definiciones” (p.20).

Esta transición la sitúa en la etapa correspondiente a la educación postsecundaria y/o primeros años de universidad. Por su parte, Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) mencionan que el PMA "es el pensamiento que requiere razonamiento riguroso y deductivo de las nociones matemáticas y no es completamente accesible a través de los cinco sentidos" (p.1); es decir, que el PMA depende básicamente del razonamiento deductivo riguroso propio de las matemáticas y no de la percepción sensorial.

Para llegar a esta conceptualización de lo que es el PMA, se han requerido a lo menos un par de décadas de trabajo. A principios de los años 80 existía, en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME), un grupo cuyo foco principal de trabajo era el Pensamiento Matemático Elemental (PME). Algunos miembros de la 17st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME17) manifestaron, durante el congreso, la falta de atención que existía del parte del IGPME por las matemáticas correspondientes a los niveles postsecundario y universitario, o a aquellas que requerían procesos de pensamiento más complejos. Como resultado de esta inquietud, a mediados de la década del 80 se constituyó en el seno del IGPME, el grupo de trabajo denominado "Pensamiento Matemático Avanzado" que se reunió por primera vez en el año 1986. Las problemáticas iniciales de este grupo se concentraron en las dificultades cognitivas asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados principalmente con el Cálculo Infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall, 1991). Específicamente, se pretendía identificar los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas en los niveles avanzados e investigar las relaciones de dichos procesos con los que intervienen en los niveles elementales para así comprender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los contenidos matemáticos avanzados (Artigue, Batanero y Kent, 2007).

Como primer producto de este grupo de trabajo se escribió el libro de nombre homónimo "*Advanced Mathematical Thinking*" editado por David Tall y publicado en 1991. El libro es un referente de la educación matemática a nivel superior y es el fruto de cinco años de colaboración de dieciséis de las más grandes figuras que se encontraban investigando los procesos de enseñanza y aprendizaje en los niveles de postsecundaria y/o universitaria por ese entonces (Mason, 1996). Asimismo, la creación del grupo de PMA en el IGPME sentó las bases de una línea de investigación de enorme importancia que ha producido variadas publicaciones enfocadas en delimitar las características del PMA y el campo de problemas que aborda desde sus distintas perspectivas (Harel, Selden, y Selden, 2006; Tall, 1991). Además, dada su relevancia, se crearon grupos de trabajo con la denominación PMA (AMT en inglés) en los congresos más importantes del área de didáctica de la matemática, tales como el CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) y el PME (Azcárate y Camacho-Machín, 2015).

Sin embargo, a pesar de ser un gran aporte para la comunidad de didáctica de la matemática, el libro "*Advanced Mathematical Thinking*" también abrió interrogantes en cuanto a la definición y naturaleza del PMA. Por ejemplo, en uno de los capítulos Robert y Schwarzenberger, señalan la complejidad inherente a la transición entre las matemáticas elementales y las avanzadas, además, proporcionan algunos rasgos que podrían caracterizar el PMA:

> los conceptos a menudo implican más que una generalización, sino también una abstracción y una formalización […] El estudiante se ve obligado a absorber de forma rápida conceptos formalizados, los cuales históricamente evolucionaron más lentamente a partir de diversas soluciones particulares que muchos matemáticos dieron a problemas específicos […] Al mismo tiempo, se espera que el estudiante adopte nuevos, y a menudo extraños, estándares de demostraciones rigurosas […] Esta formalización conlleva abstraer propiedades específicas que se aplican no solo a los objetos de donde fueron extraídas sino a cualquier objeto que obedezca a esas propiedades. Esto implica la construcción de un nuevo objeto mental que es diferente de los viejos objetos y que seguramente entrará en conflicto con ellos. Lo cual ocasiona que los estudiantes en su primer año de universidad se enfrenten a un largo periodo de confusión, causando una barrera importante para el pensamiento matemático avanzado formal. A su vez, da lugar a una discontinuidad fundamental en la difícil transición desde las matemáticas elementales a las matemáticas avanzadas (Robert y Schwarzenberger, 1991, p.128)

Siguiendo esta idea, Selden y Selden (2005) mencionan que la expresión "Pensamiento Matemático Avanzado" presenta cierta ambigüedad que dio lugar, desde sus orígenes, a dos perspectivas desde las que se abordó su estudio, dependiendo de dónde el término "avanzado" pusiera el énfasis. Una de estas perspectivas está centrada en las matemáticas y es identificada en inglés con las siglas A-MT y la otra, se encuentra enfocada hacia el pensamiento matemático, denotada AM-T (Zazkis y Applebaum, 2007).

Por su parte, Harel y Sowder (2005) plantean que el pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico, lo cual incluye las características del correspondiente concepto matemático. Brousseau (1998) enumera dichas condiciones para que cierta parte del conocimiento pueda ser considerada como un obstáculo epistemológico: que se pueda localizar en la historia de las matemáticas; que no sea fruto de una falta de comprensión o un conocimiento erróneo sino causado por un conocimiento que es válido en un contexto particular que genera respuestas incorrectas en otros contextos; que sea resistente. Además, Harel y Sowder (2005) indican que el nivel de adquisición de una forma de pensamiento, por parte de un individuo, está determinado por la manera en que el individuo ha superado dichos obstáculos epistemológicos. Esta es una discusión que se retoma cada cierto tiempo y que aún no está resuelta, pero que ha dado lugar a la publicación de diversos avances en artículos que abordan el tema (Camacho-Machín, 2011).

Otro de los conflictos suscitados, a raíz del establecimiento del grupo de PMA y de los trabajos realizados bajo los modelos cognitivos en que se sustenta, se relaciona con la transición y/o delimitación entre el PME y PMA (Tall, 1992; Azcárate, Camacho-Machín y Sierra, 1999; Zaskis y Applebaum, 2007; Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005; Azcárate y Camacho-Machín, 2015). Tall (1985; 1991) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Asimismo, menciona que el lugar donde el PME se convierte en PMA no se ha definido con precisión. Sin embargo, se reconoce la existencia de una diferencia o discontinuidad entre ambos pensamientos, especialmente en cuanto a las características de su enseñanza y evaluación (Tall, 1996).

2.2. Modelos Cognitivos

Los estudios al interior de la línea de investigación del PMA han adaptado y elaborado una variedad de modelos teóricos, desde los que se intenta describir y modelar la forma en que los estudiantes aprenden los conceptos matemáticos, sobre todo, los propios del PMA.

Los primeros constructos y modelos teóricos utilizados en la investigación del PMA se basan en las ideas planteadas por Tall y Vinner (1981) que permiten establecer la distinción entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos. De esta forma, es posible identificar los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de un individuo y la definición formal del mismo (Azcárate y Camacho-Machín, 2015). Para establecer esta diferenciación Tall y Vinner (1981) definen los constructos teóricos *concept image* y *concept definition*. Así, distinguen entre la imagen de un concepto que tiene un individuo y su definición formal; obstáculo epistemológico, introducido para analizar los errores de los estudiantes y, la dualidad entre proceso y objeto. En particular, Tall y Vinner (1981) indican que el *concept definition* de un concepto matemático cualquiera, corresponde a una secuencia de palabras o a una definición verbal del concepto, producto de su evolución histórica. Asimismo, distinguen entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad matemática en un momento histórico específico, las cuales comúnmente se encuentran en los libros de texto y las definiciones personales propias de cada individuo (profesores, estudiantes, matemáticos) que son el producto de su interpretación, construcción y/o reconstrucción de la definición formal. Asimismo, mencionan que el *concept image* que tiene una persona, asociado a un concepto matemático especifico, se relaciona con “la estructura cognitiva completa asociada con el concepto, incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados. Se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, variando a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y madura.” (Tall y Vinner, 1981, p. 152). Es importante señalar, tal y como mencionan Azcárate y Camacho-Machín (2015), que dado que el *concept image* engloba todas la imágenes mentales entonces todas las asociadas al concepto (gráfica, numérica, simbólica, etc.) también están incluidas en él.

La noción de *concept image* y *concept definition* se han utilizado como herramienta analítica para examinar el razonamiento del estudiante, en los niveles postsecundario y universitario, en una serie de áreas de curriculares en las que se ha observado una gran complejidad asociada al desarrollo de conceptos propios del PMA. Esta dificultad es causada porque dichos conceptos pueden jugar, de manera simultánea, el papel de procesos y de objetos, según el contexto en el que aparezcan y el nivel de conceptualización del estudiante (Azcárate y Camacho-Machín, 2003).

Para Tall (1995) esto se asocia con la existencia de dos secuencias de desarrollo cognitivo, distintas y simultaneas, la primera que comienza con la percepción de objetos y la segunda, con la acción sobre ellos. La acción sobre objetos matemáticos implica un tipo de desarrollo cognitivo distinto relacionado con la dualidad *proceso-objeto* y la noción de lo que se denomina *procept* elemental, el cual corresponde a “la unión de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático, y un símbolo que se utiliza para representar tanto al proceso como al objeto. Un *procept* consiste en una colección de *procepts* elementales correspondientes al mismo objeto” (Gray y Tall, 1994, p. 6)

Las distintas visiones en la forma de abordar la dualidad *proceso-objeto* para distintos conceptos matemáticos relacionados con el PMA, han permitido el desarrollo de diferentes marcos y posturas teóricas. En los siguientes párrafos, se exponen brevemente algunas de ellas, las cuales no fueron consideradas para el desarrollo de esta investigación:

- Concepciones operacionales y estructurales. Sfard (1991) consideró que los conceptos matemáticos se pueden comportar como objetos y procesos según el nivel cognitivo del estudiante y la situación en la que se enmarcan. Asimismo, denominó concepciones operacionales a toda acción, algoritmo o proceso dinámico e indicó como estructural, a la abstracción y trasformación de las concepciones operacionales en estructuras. Si bien, ambas concepciones son complementarias, la concepción operacional ha de preceder siempre a la estructural. Según Sfard (1991) existen tres etapas en el aprendizaje, *interiorización*, *condensación*, *reificación*. Las etapas de *interiorización* y de *condensación* son procesos graduales y cuantitativos más que cualitativos mientras que la *reificación* es instantánea, se puede entender como un salto cualitativo. El esquema de la Figura 7 representa el modelo propuesto por Sfard (1992).

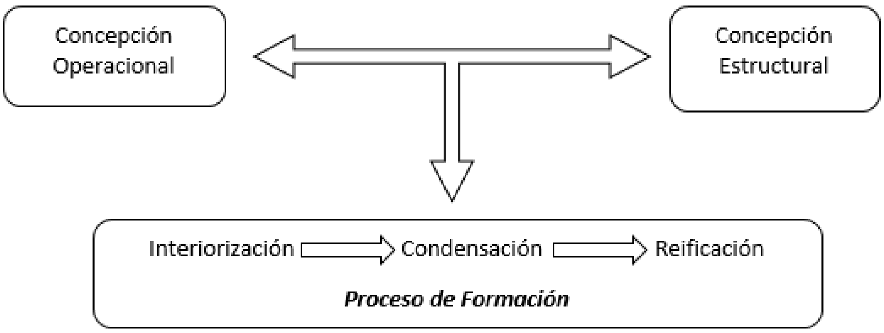


Figura 7. Proceso de comprensión según Sfard

- Los tres mundos. Tall (2004) identifica tres mundos diferentes para el desarrollo cognitivo del pensamiento matemático del ser humano, mundos que no son ni jerárquicos ni obligatorios y diferentes individuos pueden recorrer diferentes caminos entre ellos. Uno de ellos es el *Embodied* o *Mundo Corporeizado*. En él se observan y describen las propiedades que se consiguen percibir y sentir de un objeto. El *Mundo Corporeizado* crece no solo de nuestras percepciones de los objetos reales, sino también de nuestras concepciones e imágenes mentales. El segundo mundo corresponde al *Mundo Simbólico Proceptual*, o simplemente *Mundo Simbólico*, donde los símbolos se utilizan no solo para representar y realizar acciones, tal como señalar y contar, sino que también para representar el producto que es el resultado de esas acciones. Según Tall (2004), el *Mundo Simbólico* está compuesto por símbolos matemáticos que representan acciones y percepciones del mundo. Finalmente, existe el *Mundo Axiomático Formal*, o simplemente *Mundo Formal*, que es el mundo de las definiciones, teoremas, axiomas y demostraciones, que constituyen el sistema axiomático de las matemáticas. Para Tall (2004), la presencia simultánea de estos tres mundos garantizará una imagen de concepto suficientemente rica para que se pueda afirmar que hubo aprendizaje. Tall (2007) asocia los dos primeros mundos con las matemáticas elementales y el tercer mundo con las matemáticas propias del PMA. En la Figura 8 se presentan los tres mundos de Tall, sus relaciones e intersecciones.

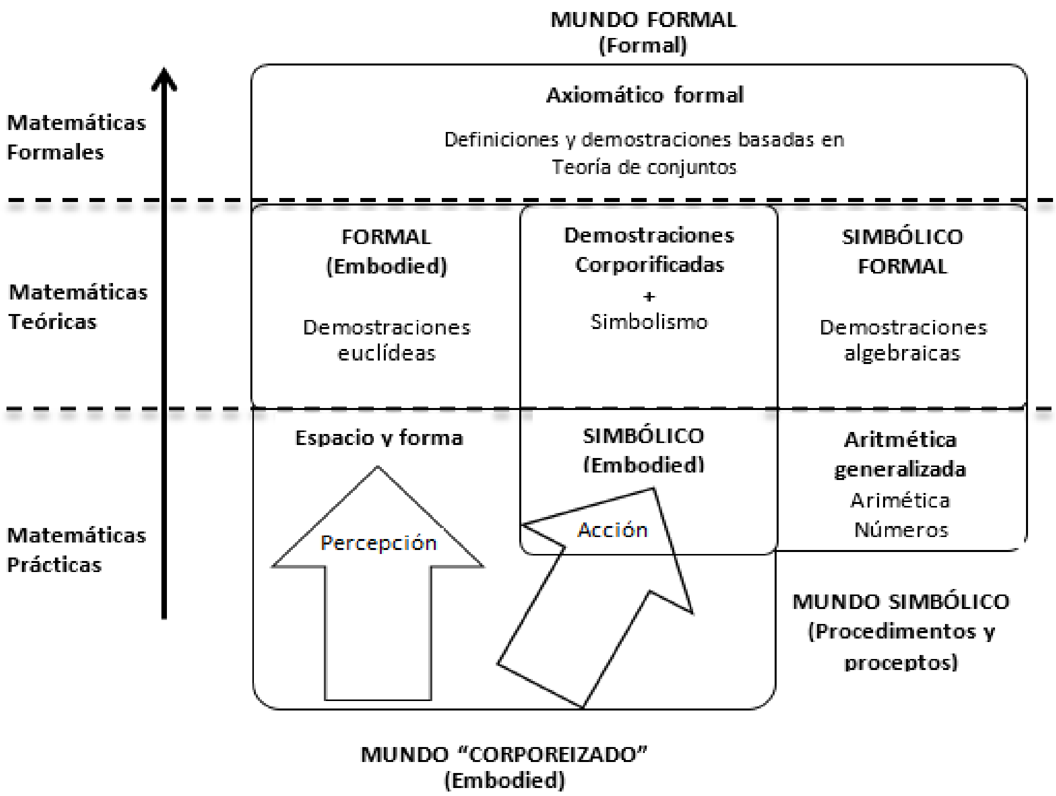


Figura 8. Los tres mundos de Tall

Existen otros que han sido desarrollados y/o adaptados a partir de teorías psicológicas y socioculturales. Sin embargo, para el desarrollo de esta investigación, se ha considerado un modelo cognitivo que, al igual que los expuestos anteriormente, considera el aprendizaje de un concepto matemático como un proceso gradual de construcción y establecimiento de relaciones entre estructuras cognitivas.

2.3. Teoría APOE

Tomando como marco de referencia epistemológico las ideas de Piaget, Dubinsky y un grupo de investigadores "Research on Undergraduate Mathematics Education" (RUMEC), han desarrollado un marco teórico denominado teoría APOE (*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*). Este marco, es el resultado de la interpretación de las ideas piagetianas referentes a la *abstracción reflexiva*, aplicado a la investigación del PMA e intenta estudiar y modelar la forma en que un estudiante aprende matemáticas, pero también, cómo estas se pueden enseñar de forma efectiva (Trigueros y Oktaç, 2005).

Para la comprensión de la teoría APOE, es importante tener en cuenta que el principio de *abstracción reflexiva* era considerado por Piaget como el principal mecanismo para realizar toda construcción mental, y también como el mecanismo mediante el cual toda estructura lógica-matemática puede desarrollarse en la mente de un individuo (Arnon *et al.*, 2014). De acuerdo con Piaget, este principio consta de dos partes:

> La primera parte involucra reflexión, en el sentido de conciencia y pensamiento contemplativo, sobre lo que Piaget llamó contenido y operaciones sobre ese contenido, y en el sentido de reflexionar el contenido y las operaciones de un nivel cognitivo inferior a uno más alto […]. La segunda parte consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y las operaciones en la etapa superior, que da lugar a operaciones sobre sí mismas que se convierten en contenido al que nuevas operaciones pueden ser aplicadas (Piaget, 1973; citado en Arnon *et al.*, 2014, p. 6)

A partir de esta premisa, APOE se plantea como objetivo describir tanto el camino como la construcción, de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas, realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En donde para lograr la comprensión de un determinado concepto matemático, un individuo debe transitar por las construcciones mentales de *Acción*, *Proceso*, *Objeto* y *Esquema* (de aquí el acrónimo APOE), por medio de los mecanismos de *interiorización*, *encapsulación*, *desencapsulación*, *reversión*, *coordinación*, *generalización*, *tematización* y *destematización* (Arnon *et al.*, 2014).

Asimismo, recientes estudios relacionados con fracciones y procesos infinitos subrayan la posible existencia de una nueva estructura (Dubinsky, Arnon y Weller, 2013; Chanakya y Zazkis, 2016), la cual se ubicaría entre las construcciones mentales de *proceso* y *objeto*. Esta nueva estructura ha sido denominada *totalidad* (*totality* en inglés) y el mecanismo que permitiría el paso desde una concepción de *proceso* a una de *totalidad*, sería la *detemporalización* (Dubinsky *et al.*, 2013).

2.3.1. Las estructuras y mecanismos mentales

Si bien en esta investigación, el foco principal no está en el análisis de la respuesta de los estudiantes frente a las tareas en términos de *acciones*, *procesos*, *objetos y esquemas*, creemos que es necesario tener presente, a qué construcciones mentales corresponden y cuáles son los mecanismos asociados a dicha construcción, para cada caso.

En la teoría APOE, las *acciones*, los *procesos*, los *objetos* y los *esquemas*, son las estructuras mentales que, según este marco, un sujeto construye a la hora de aprender un determinado concepto matemático, el paso por estas etapas no es necesariamente secuencial (Trigueros, 2005). El mecanismo para pasar de un estado de construcción de conocimiento matemático a otro, en esta teoría, es la *abstracción reflexiva*. La *abstracción reflexiva* es una herramienta mental, o dispositivo del que se hace uso en los procesos de construcción del conocimiento, que permite al individuo, a partir de las *acciones* sobre los *objetos*, inferir sus propiedades o las relaciones entre *objetos* de un mismo nivel de pensamiento. Esto implica, entre otras cosas, la organización de la información en un marco intelectual organizado a nivel superior (Dubinsky, 1991).

Una de las hipótesis sobre la cual se sustenta la teoría APOE es que la construcción de un nuevo concepto se apoya en la trasformación de conceptos previos; por tal motivo estos deben percibirse previamente por el individuo como *objetos*. Por lo tanto, una *acción* es una trasformación de *objetos* (previamente construidos), percibida por el individuo como externa, en el sentido de que cada paso de la trasformación requiere realizarse de forma explícita y, además, es necesario de un estímulo externo para poder ejecutarlos (Arnon *et al.*, 2014). La estructura de *acción* es considerada como la más simple dentro de la teoría APOE, pero esto no le resta importancia, ya que es fundamental en la construcción de cualquier concepto matemático. Por otra parte, un *proceso* es considerado como una *acción* internalizada, es decir, "interna"; en la que el individuo es consciente y tiene control sobre la trasformación producida por la *acción*. Esto es caracterizado por la habilidad de imaginar, saltar o revertir los pasos involucrados en la trasformación, sin la necesidad de un estímulo externo. La *interiorización* es el mecanismo que permite el cambio de estructura, desde *acción* a *proceso*, el cual es logrado mediante la repetición y reflexión sobre las *acciones* (Arnon *et al.*, 2014). Los *procesos* no solo pueden ser generados por medio de la *interiorización* de *acciones*, sino que también estos pueden ser construidos a partir de la *generalización* de un *proceso* previamente construido, o bien, mediante el mecanismo de *coordinación* o *reversión* de *procesos*. La Figura 9 ilustra estos mecanismos que permiten generar *procesos* según la teoría APOE.

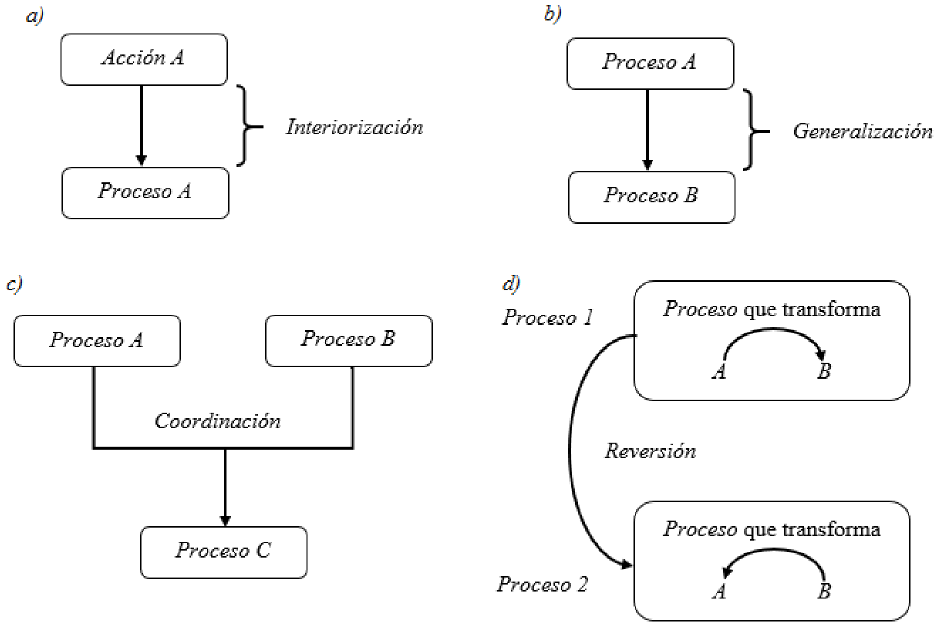


Figura 9. Mecanismos que permiten generar *procesos*

Siguiendo con la construcción gradual la comprensión de una noción matemática, APOE plantea que cuando un individuo toma conciencia sobre el *proceso* y es capaz de concebirlo como un todo que puede ser trasformado, mediante la aplicación de *acciones* o *procesos*, se dice entonces que el proceso ha sido *encapsulado* en un *objeto* cognitivo (Asiala *et al.*, 1996). El mecanismo asociado a este cambio de estado sobre el *proceso* se denomina *encapsulación*. Sin embargo, algunos estudios realizados bajo el marco de la teoría APOE han mostrado que lograr la *encapsulación* de *procesos* como *objetos* a menudo resulta muy compleja para los estudiantes, pues se requiere de un gran cambio cognitivo y de toma de conciencia para percibir algo dinámico, como es un *proceso*, como un ente estático, en este caso un *objeto* al que es posible manipular y trasformar. Una vez *encapsulado* un *proceso* en un *objeto*, si el individuo requiere regresar al *proceso* que le dio origen al *objeto*, es posible hacer esto mediante el mecanismo de *desencapsulación*.

Finalmente, la última estructura cognitiva propuesta por la teoría APOE se denomina *esquema*. Un *esquema*, de un concepto matemático en específico, es una colección coherente de *acciones*, *procesos*, *objetos* e incluso de otros *esquemas* y sus interrelaciones, agrupados de forma consciente o inconsciente en la mente de un individuo, los cuales se pueden emplear en la solución de una situación o problema matemático que involucre el concepto en cuestión. La coherencia del esquema es referida como la habilidad del individuo para reconocer en qué situaciones el *esquema* es aplicable y en cuáles no (Trigueros, 2005).

El *esquema* es considerado como una estructura cognitiva dinámica y compleja que está en constante desarrollo y evolución conforme el individuo va aprendiendo. Aunque, a veces tiende a pensarse que esta estructura recién comienza a formarse una vez construidos los *objetos* (debido a la progresión *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*), es posible que su construcción se inicie incluso desde que el individuo realiza *acciones*.

Si bien no se pueden observar directamente las estructuras mentales (*acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*) de un individuo durante su proceso de aprendizaje, estas estructuras pueden ser inferidas a partir de la observación sobre lo que el individuo puede hacer, o no, al enfrentarse a una determinada situación o problema matemático (Dubinsky, 1991). De esta forma, por medio de la observación y análisis se puede caracterizar en qué fase de construcción, de algún concepto matemático específico, se encuentra un individuo. En la Figura 10 se muestra la relación existente entre los mecanismos y estructuras mentales, anteriormente mencionadas.

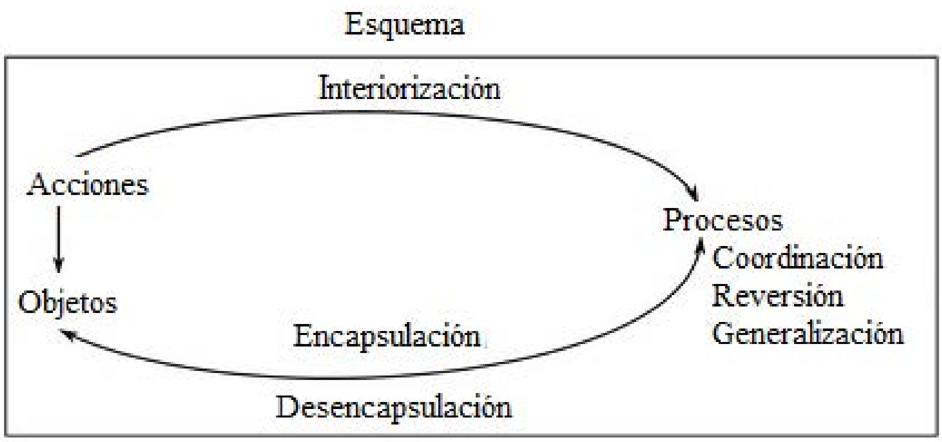


Figura 10. Estructuras y mecanismos mentales involucrados en la comprensión de un concepto matemático (basado en Arnon *et al.*, 2014, p. 18; Asiala *et al.*, 1996, p. 9)

2.3.2. Niveles de desarrollo de un *esquema*

Trigueros (2005) indica que cuando un estudiante se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas evoca un *esquema* para abordar su resolución. Al evocarlo pone en juego aquellas estructuras construidas y las relaciones que dispone en ese momento. Ante una misma tarea, diferentes estudiantes pueden utilizar distintas estructuras y diferentes relaciones entre ellas. De esta forma, cuando se consideran las relaciones que se establecen entre las estructuras construidas, es posible identificar en las respuestas de los estudiantes que resuelven una misma tarea, o un conjunto de tareas, diferentes niveles de desarrollo del *esquema*. Para abordar y caracterizar estas diferencias en el desarrollo, además, del propio dinamismo del *esquema*, la teoría APOE propone el estudio del desarrollo de un *esquema* por medio del uso de la tríada Intra, Inter y Trans, propuesta por Piaget y García (1983), que lo clasifica en alguna de estas etapas según el nivel de relaciones que un individuo puede establecer entre los componentes del *esquema* y otras estructuras cognitivas. Siguiendo esta idea, Piaget y García (1983) definen los niveles de desarrollo de un *esquema* de la siguiente forma:

> Intra: lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse (p. 163).
>
> Inter: una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas trasformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos (p.165).
>
> Trans: es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las trasformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras" (p.167).

A partir de esta definición de la tríada del nivel de desarrollo de un *esquema*, en las últimas décadas, se han elaborado diversos estudios referentes al concepto de la derivada. Por ejemplo, la investigación de Baker *et al*. (2000) analizó el *esquema* gráfico de Cálculo a través de la resolución, de los estudiantes, de un problema gráfico no rutinario, en el que no se presentaba la expresión de la función sino un conjunto de condiciones analíticas sobre ella. En su estudio plantearon que el *esquema* gráfico de Cálculo estaba conformado por la interacción de dos *esquemas* a los que denominaron "*esquema* de propiedad" y "*esquema* de intervalo". Para el análisis de sus datos utilizaron una doble tríada que les permitió caracterizar el *esquema* gráfico de Cálculo en nueve niveles de desarrollo, los cuales se corresponden con las combinaciones de cada uno de los niveles de desarrollo correspondientes al *esquema* de propiedad y al *esquema* de intervalo. En la Tabla 4 se muestra la descripción de cada uno de estos nueves niveles de desarrollo del *esquema* de gráfico de Cálculo establecidos por Baker *et al*. (2000).

Tabla 4. Niveles de desarrollo del *esquema* gráfico de Cálculo (basado en Baker *et al.*, 2000, p. 566-571)

	Intra-propiedad	Inter-propiedad	Trans-propiedad
Intra-intervalo	El estudiante interpreta solo una condición analítica, a la vez, en términos de la implicación de esta sobre la gráfica de la función en un solo intervalo.	El estudiante comienza a *coordinar* dos o más *procesos* asociados a las condiciones analíticas en términos de las implicaciones de estas sobre la gráfica de la función en un solo intervalo.	El estudiante muestra la capacidad para *coordinar* todos los *procesos* asociados a las condiciones analíticas en términos de las implicaciones de estas sobre la función en un solo intervalo.
Inter-intervalo	El estudiante interpreta solo una condición analítica, a la vez, en términos de la implicación de esta sobre la gráfica de la función en intervalos contiguos, pero no sobre todo el dominio.	El estudiante comienza a *coordinar* dos o más *procesos* asociados a las condiciones analíticas en términos de las implicaciones de estas sobre la gráfica de la función en intervalos contiguos, pero no sobre todo el dominio.	El estudiante muestra la capacidad para *coordinar* todos los *procesos* asociados a las condiciones analíticas en términos de las implicaciones de estas sobre la función en intervalos contiguos, pero no sobre todo el dominio.
Trans-intervalo	El estudiante interpreta solo una condición analítica, a la vez, en términos de la implicación de esta sobre la gráfica de la función en todos los intervalos de su dominio.	El estudiante comienza a *coordinar* dos o más *procesos* asociados a las condiciones analíticas en términos de las implicaciones de estas sobre la gráfica de la función en todos los intervalos de su dominio.	El estudiante muestra la capacidad para *coordinar* todos los *procesos* asociados a las condiciones analíticas en términos de las implicaciones de estas sobre la función en todos los intervalos de su dominio.

Otros aspectos que Baker *et al*. (2000) destacan en su estudio y que se ha considerado para el desarrollo de esta investigación, se relacionan con las dificultades observadas en los estudiantes a la hora de enfrentarse al punto cúspide, a la tangente vertical o a la eliminación de la condición de continuidad, que eran parte medular del problema planteado. Finalmente, puntualizan que un número significativo de estudiantes muestra una comprensión muy limitada de la segunda derivada. Posteriormente, estas mismas autoras, en un nuevo estudio, ampliaron su trabajo considerando un número mayor de tareas en sus instrumentos de investigación y enfocándose en la t*ematización* del *esquema* gráfico de Cálculo (Cooley *et al*., 2007).

Por su parte, Badillo (2003) utiliza una idea similar a la planteada por Baker *et al*. (2000) para realizar un análisis de la comprensión del concepto de la derivada en un grupo de cinco profesores de matemáticas y física de Colombia. En su investigación, ella utilizó la idea de coordinación de *esquemas*, considerando que el *esquema* de la derivada estaba conformado por la coordinación del "*esquema* algebraico" y el "*esquema* gráfico". En su investigación, Badillo (2003) muestra que para una buena construcción del *esquema* de la derivada se requiere de la coordinación de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$. Es decir, que se requiere tanto la comprensión local de la variación de la función (punto a punto) como la variación global de la función (coordinación en cada punto, en cada intervalo, o bien en todo el dominio de la función) teniendo en cuenta la complejidad de los *objetos* que organizan y de los *procesos* cognitivos que intervienen. Es importante destacar que esta investigadora utiliza la palabra coordinación para referirse al establecimiento de conexiones entre ambos *esquemas* y macro *objetos*, y no como el mecanismo mental que conecta dos o más *procesos*. Considerando estos aspectos, Badillo (2003) define, de forma análoga al estudio de Baker *et al*. (2000), nueve niveles de desarrollo del *esquema* de la derivada conformados por la combinación de los niveles (Intra, Inter y Trans) del *esquema* algebraico y del *esquema* gráfico.

Para el caso específico de este estudio, se tomó como referencia el trabajo realizado por Sánchez-Matamoros (2004), en el que se realiza un análisis del *esquema* de la derivada en términos de la relaciones lógicas (conjunción, contrarrecíproco y equivalencia) que los estudiantes establecen entre los distintos elementos matemáticos a la hora de resolver problemas.

En consonancia con el estudio de Sánchez-Matamoros (2004), se entenderá que un elemento matemático es "el producto de una disociación o de una segregación del concepto vinculada al concepto y a sus propiedades" (Piaget, 1963, p. 72). A partir de esta definición, es posible indicar que el concepto de la derivada posee elementos estructurantes de distinta naturaleza, caracterizados por los modos de representación y el carácter de dichos elementos. Con respecto, a los modos de representación, este trabajo considera que el concepto de la derivada está conformado por 2 tipos de elementos: los analíticos y los gráficos. Asimismo, en relación con el carácter o naturaleza, considera elementos de tipo puntual, si estos elementos hacen referencia a una propiedad específica en un punto, o global, si corresponde a una propiedad correspondiente a un intervalo. De esta forma, se entenderá que un *esquema* corresponde a la estructura matemática formada por los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se establecen entre ellos y que puede ser evocado, para la resolución de un problema (Sánchez-Matamoros, 2004). A partir de la identificación de los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, Sánchez-Matamoros (2004) definió los niveles de desarrollo del *esquema* de la derivada de la siguiente forma:

- Nivel Intra. No se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos (ya sean gráficos o analíticos, puntuales o globales), y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) entre ellos se realizarán con errores. Uso de elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).
- Nivel Inter. Se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos utilizados, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica y solo relacionan elementos matemáticos puntuales o/y globales que se encuentren en el mismo modo de representación analítico o gráfico. Se usan más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.
- Nivel Trans. Aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas (y lógica, contrarrecíproco, equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos. En este nivel se produce la "síntesis" de los modos de representación. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática. (p. 73-74)

En relación con la síntesis que forma parte de la descripción de los niveles de desarrollo, esta se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información gráfica y analítica, es decir, usar información procedente de ambos sistemas de representación para considerarla conjuntamente y obtener una "cosa" que no se conocía. "Considerar la información conjuntamente" significa establecer algún tipo de relación lógica entre los elementos matemáticos para tomar una decisión relativa a la situación en la que se encuentra (Sánchez-Matamoros, 2004). En este trabajo se consideraron los descriptores para cada nivel de desarrollo basados en los elementos matemáticos y las relaciones lógicas para definir las variables de estudio que se presentan en el Capítulo 3 (Diseño Metodológico).

Asimismo, otro aspecto importante en cuanto al desarrollo de *esquemas,* se relaciona con lo planteado por Piaget y García (1983) sobre el crecimiento gradual del *esquema* y a la naturaleza de la tríada. En particular, estos autores puntualizan que:

> La naturaleza de los elementos de la tríada es funcional y no estructural. Obedecen, por consiguiente, a un orden necesario, puesto que la elaboración del Trans, en tanto sistema de las trasformaciones reunidas en una totalidad con propiedades nuevas, supone la formación de algunas

> de estas trasformaciones en el Inter, y que estas últimas implican el conocimiento de los caracteres analizados en el Intra. (p. 171)

Además, Piaget y García (1983) mencionan que al realizar las descripciones del desarrollo de un *esquema* en términos de la tríada (Intra, Inter y Trans), estas descripciones estarán vinculadas a cuestiones de escalas y que hay que ser consciente de que cada una de estas grandes etapas o niveles encierra subetapas o subniveles, las cuales siguen un mismo orden y que solo se puede pasar a otro nivel cuando se ha alcanzado el previo. Por tanto, la idea de desarrollo de un *esquema* no solo indica una progresión gradual del *esquema* sino que, también, indica una cualidad fractal de este desarrollo en cuanto a que en cada nivel pueden encontrase subniveles de desarrollo que siguen esta misma progresión. La idea anterior es la que da sentido al planteamiento del primer objetivo específico relacionado con la identificación de los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada y su caracterización.

Tabla 5. Subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada (Sánchez-Matamoros, 2004, p. 217-218)

Nivel	Características
Intra 1	• No establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. • Recuerda solo algún elemento matemático a lo largo de todo el cuestionario, vinculado solo a un modo de representación analítico o gráfico. • Recuerda elementos matemáticos con errores.
Intra	• Dificultades en establecer relaciones lógicas (y lógica) entre los elementos matemáticos. (Intento de relación "y lógica"). • Recuerda algunos elementos matemáticos de forma aislada. • No tiene sintetizados los modos de representación.
Inter 1	• Usa la conjunción lógica ("y lógica") de manera correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo modo de representación. • Recuerda algunos elementos matemáticos analíticos y/o gráficos (puntuales y/o globales). • Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico.
Inter	• Usa diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta salvo alguna excepción (generalmente en el mismo modo). • Recuerda los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea en ambos modos de representación (analítico o gráfico). • Esbozos de síntesis de los modos de representación (analítico y gráfico). • Dificultades en trasladar las relaciones entre f y f' a las relaciones entre f' y f'' (indicativo de la consideración de f' como función).
Trans	• Usa diferentes relaciones lógicas ("y lógica", contrarrecíproco, equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos de forma correcta. • Recuerda los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea, usando los significados implícitos para tomar decisiones. • Síntesis de los modos de representación (analítico y gráfico). • Traslación de las relaciones entre f' y f'' de manera puntual

Igualmente, es importante destacar que existen estudios que dan cuenta de esta cualidad fractal en el desarrollo de un *esquema* (Sánchez-Matamoros, 2004; Aldana, 2011). En particular, en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004), sobre el desarrollo del *esquema* de la derivada, se plantea la existencia de 2 subniveles de desarrollo para los niveles Intra e Inter respectivamente. Según esta investigadora dichos subniveles surgen de la observación de una progresión en el desarrollo del *esquema*, la cual está caracterizada en términos de la incorporación de un mayor número de elementos matemáticos y relaciones, así como, de la paulatina síntesis de los modos de representación analítico y gráfico (ver Tabla 5).

Finalmente, una observación importante y que justifica el planteamiento del segundo objetivo específico de investigación se relaciona con lo propuesto por Piaget y García (1983) en cuanto a que una vez formado/construido el *esquema*, este puede ser t*ematizado*.

2.3.3. La *tematización* de un *esquema*

La finalidad de todo proceso de instrucción es lograr el aprendizaje "consciente" por parte de los estudiantes del o los conceptos para los cuales se ha llevado a cabo. En términos de la teoría APOE, lo anterior, se alcanza a cabalidad cuando un estudiante logra *tematizar* el *esquema* de un concepto.

Piaget y García (1983) fueron los primeros en introducir el término *tematización* relacionándolo con el aprendizaje de conceptos matemáticos. En particular, estos autores indican que:

> En efecto, las nociones abstractas de las matemáticas no fueron utilizadas, en un comienzo, sino en forma instrumental, sin que dieran lugar a una reflexión sobre su significación general, y sin siquiera tomar conciencia del hecho mismo de estarlas utilizando. A esto último se llega luego de un proceso más o menos prolongado a cuyo término la noción particular (que ya ha sido utilizada en numerosos casos de aplicación) se torna objeto de reflexión para constituirse en concepto. Este pasaje del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización, constituye lo que hemos convenido en llamar *tematización*. (p. 105)

Sin embargo, la *tematización* como mecanismo mental ha sido utilizada bajo el marco de la teoría APOE para dar cuenta de cómo un *esquema* (estructura dinámica de relaciones e interrelaciones) se trasforma en un *objeto* (estructura estática) sobre el cual es posible aplicar nuevas *acciones* y *procesos* (Arnon *et al.*, 2014). La *tematización* de un *esquema*, según Cooley *et al*. (2007), implica coherencia de la estructura cognitiva construida por el estudiante, es decir, la posibilidad de que reconozca las relaciones que están incluidas en el *esquema* y que sea capaz de decidir qué tareas pueden abordarse utilizando el *esquema* y cuáles no. En particular, Asiala *et al*. (1996) mencionan que solo un individuo con un nivel de desarrollo Trans de un *esquema* está en condiciones de poder *tematizarlo*.

Por otra parte, Arnon *et al*. (2014) consideran que es igualmente importante *tematizar* el *esquema* de un concepto como el mecanismo inverso de *destematizarlo* porque esto es lo que permite utilizar los elementos constitutivos del *esquema* (*acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*) en la resolución de tareas que requieran de la utilización de dicho concepto. En la Figura 11 se presenta un diagrama de la teoría APOE que incluye el mecanismo de *tematización* y su mecanismo inverso.

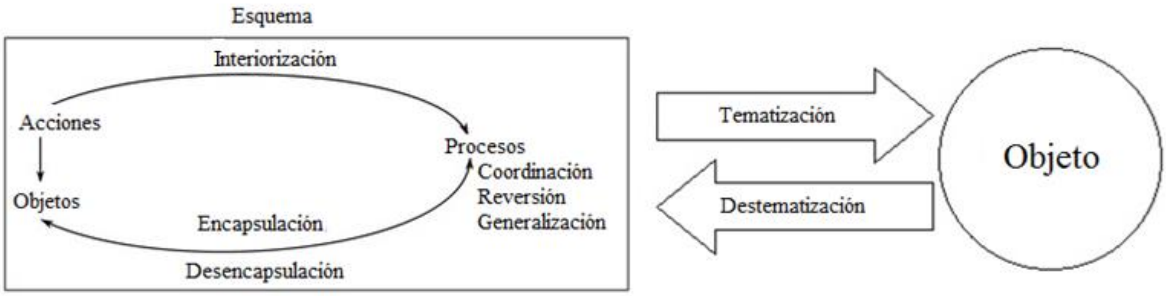


Figura 11. Construcciones mentales y mecanismos involucrados en la *tematización* (basado en Arnon *et al.*, 2014; Asiala *et al.*, 1996)

Algunos estudios que utilizan el enfoque de la teoría APOE, han aportado significativos avances en la comprensión, tanto del desarrollo del *esquema* de la derivada (Asiala *et al.*, 1997; Baker *et al.*, 2000; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004) como de la *tematización* del mismo por parte de los estudiantes (Sánchez-Matamoros, 2004; Cooley *et al.*, 2007; García *et al.*, 2011). Estos trabajos han puesto de manifiesto que existen dificultades que se refieren a que no se consideran a las derivadas como funciones y aspectos característicos de ellas, tales como: la existencia de puntos de no derivabilidad; cambios en las condiciones de continuidad; y, niveles de comprensión de la segunda derivada.

Cooley *et al*. (2007) examinaron si era posible lograr la *tematización* observando cómo los estudiantes clasificados en el nivel de desarrollo Trans-Trans (Trans-propiedad, Trans-intervalo) del *esquema* gráfico de Cálculo, según la caracterización de Baker *et al*. (2000), construyeron relaciones entre las propiedades de las funciones tales como la primera derivada, la segunda derivada segunda, límites y continuidad, y cómo relacionaban estas propiedades con la gráfica de la función. El análisis de sus datos se centró en la *coordinación* que los estudiantes hacían de los *procesos* asociados a las diferentes propiedades e intervalos para describir posibles estructuras mentales que conformaban su *esquema* y para determinar su capacidad de acceder dichas estructuras cuando era necesario. El problema utilizado en la entrevista realizada para analizar la posible *tematización* del *esquema* gráfico de Cálculo era el mismo del estudio de Baker *et al*. (2000), sin embargo, se habían modificado varias condiciones. Por tanto, los estudiantes tenían que *destematizar* su *esquema* con el objetivo de utilizar y coordinar las componentes necesarias para resolverlo. En la Figura 12 se muestran los elementos que debían ser coordinados para solucionar el problema modificado.

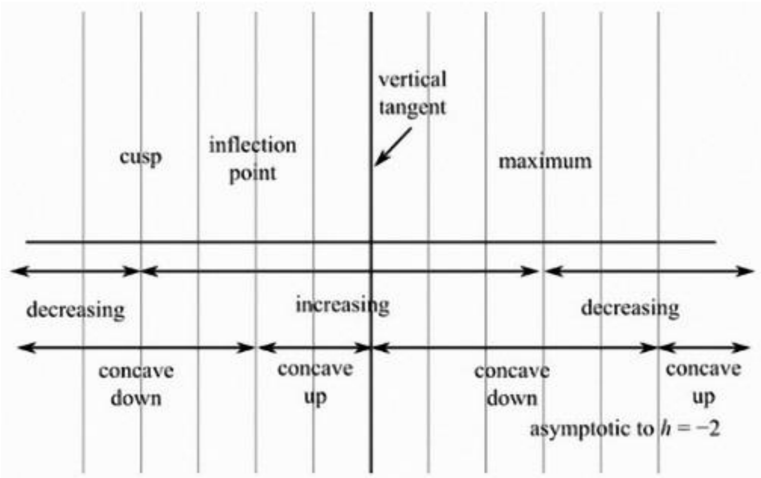


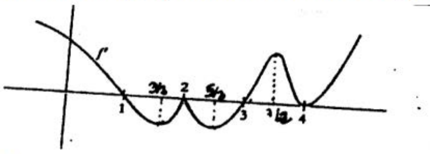
Figura 12. Elementos a coordinar para solucionar el problema propuesto en la entrevista (basado en Cooley *et al.*, 2006, p. 378)

En su análisis, Cooley *et al*. (2007) enfocaron su atención en las habilidades de los estudiantes para realizar coordinaciones y determinar qué propiedades gráficas cambiaban, y cuáles permanecían invariantes. Según estas autoras, esta habilidad de los estudiantes para realizar coordinaciones a pesar de los cambios realizados en las propiedades de la función demostró la conservación de la estructura de su comprensión. Con base en dichas observaciones Cooley *et al*. (2007) concluyen que un estudiante que ha *tematizado* el *esquema* gráfico de Cálculo debe dar evidencia de haber coordinado todas las propiedades dadas a través de todos los intervalos de la función, mostrando consciencia y flexibilidad en el uso de su *esquema*, además, de adaptarse y actuar sobre el *esquema* mientras responde a las demandas específicas del problema modificado. Asimismo, mencionan que la *tematización* del *esquema* indica la capacidad del estudiante para descomponerlo (*destematizarlo*) en sus partes que lo conforman con el objeto de observar las relaciones entre ellas y discernir cuáles son pertinentes para la solución de un problema.

Por su parte, Sánchez-Matamoros (2004) y García *et al*. (2011) estudiaron la *tematización* de un grupo de tres estudiantes universitarios de Cálculo con un nivel de desarrollo Trans del *esquema* de la derivada, según la caracterización de Sánchez-Matamoros (2004). Estos estudiantes habían respondido previamente un cuestionario y durante la entrevista se les preguntó sobre su proceso de resolución de las Tareas 1 y 4, que se muestran en la Figura 13.

TAREA 1

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ', esboza las posibles gráficas de f.



TAREA 4

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

- f es continua - $f(-1)=0$ - $f'(1)=f'(3)=f'(5)=0$ - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$

- $f'(x)<0$ cuando $1<x<5$ y cuando $x>7$ - $f'(x)>0$ cuando $-2<x<1$ y cuando $5<x<7$

- $f''(x)<0$ cuando $-2<x<3$ - $f''(x)>0$ cuando $3<x<7$ y cuando $x>7$

Figura 13. Tareas utilizadas para identificar las estructuras subyacentes asociadas a la *tematización* del *esquema* de la derivada (Sánchez-Matamoros, 2004, p. 132)

El análisis de los datos se centró en las justificaciones de los estudiantes asociadas a la relación entre el signo de la primera derivada y la concavidad de la función en un contexto gráfico, además de la justificación de la relación entre el signo de la segunda derivada de f (f'') y la concavidad de la función en un contexto analítico. Asimismo, se identificaron los elementos matemáticos gráficos y analíticos que los estudiantes utilizan, las propiedades locales y/o globales que ponen en juego y las relaciones que usan para inferir nueva información necesaria para resolver cada problema. Con base en este análisis, García *et al*. (2011) concluyen que un estudiante ha *tematizado* el *esquema* de la derivada cuando es capaz de trasferir todas las relaciones e implicaciones que han construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f''), además, considera a f' como totalidad al igual que $(f')' = f''$, es decir, entiende el operador derivada como una trasformación. Según estos investigadores, lo anterior significa que el *esquema* derivada es un *objeto* que puede ser utilizado sin "vínculos" al contexto inicial desde el cual comenzó a ser construido (la primera derivada). De esta forma, el operador derivada es considerado por el estudiante como una trasformación que puede ser generalizada y por lo tanto, aplicable a $(f')' = f''$, $(f'')' = f'''$, y así sucesivamente, lo cual sería la estructura subyacente al *esquema* de la derivada *tematizado*.

Finalmente, considerando los estudios de Sánchez-Matamoros (2004), Cooley *et al*. (2007) y García *et al*. (2011), en esta investigación se pretende caracterizar la *tematización* del *es-*

quema de la derivada mediante la observación de cómo el estudiante: (1) responde correctamente a modificaciones de las condiciones de las tareas propuestas, o bien, a otras planteadas durante la entrevista; y (2) trasfiere todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par $f - f'$ al par $f' - f''$, y así sucesivamente, independientemente del modo de representación en el cual se ha planteado la tarea y/o la pregunta.

2.3.4. Descomposición genética

El principal objetivo de la teoría APOE es explicar cómo es que un individuo construye en su mente el conocimiento matemático, así como entender las posibles dificultades en su proceso de construcción. La forma en que se describe, dentro de la teoría, el aprendizaje de un concepto matemático en un individuo, es mediante una *descomposición genética* (DG), la cual, es un modelo hipotético que describe por medio del uso de estructuras mentales (*acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*) y mecanismos (*interiorización*, *encapsulación*, *desencapsulación*, *generalización*, *reversión*, *coordinación*, *tematización y destematización*) el camino cognitivo que un individuo podría seguir para construir dicho concepto. Una DG es referida como preliminar hasta que se obtienen datos empíricos que permiten su validación.

El diseño de una DG preliminar, para algún concepto en particular, puede basarse en los siguientes recursos (Arnon *et al.*, 2014):

- La experiencia del investigador como profesor y/o estudiante en relación con la comprensión del concepto matemático.
- Investigaciones previas en Didáctica de la Matemática, sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del concepto.
- Observaciones de cursos. El análisis de las observaciones, del trabajo de estudiantes que aprenden el concepto, permite identificar elementos de una descripción cognitiva del concepto, que posteriormente puede verificarse empíricamente.
- Desarrollo histórico del concepto. Un estudio de este tipo puede señalar las construcciones mentales que un individuo puede realizar, de acuerdo con el desarrollo histórico del concepto.
- Materiales de texto. El enfoque didáctico empleado en este tipo de materiales puede ayudar al investigador a detectar algunas consideraciones en el aprendizaje del concepto matemático en cuestión.

- Análisis de datos empíricos (trascripciones de entrevistas). La comparación de extractos de entrevista, como un estudio piloto, permite evidenciar las diferencias en el desempeño de los estudiantes ante tareas específicas; estas diferencias pueden señalar la presencia o ausencia de alguna estructura mental. Las construcciones mentales implicadas por este tipo de análisis pueden constituir parte de una DG.

Mediante la consideración de uno o varios de los factores anteriormente mencionados, una DG preliminar, o simplemente DG, puede diseñarse para describir las estructuras y mecanismos mentales que, a consideración del investigador, son viables para el aprendizaje de un determinado concepto matemático.

Otro aspecto importante que debe tomarse en cuenta, en el diseño de una DG, son las estructuras previas que un individuo requiere haber construido para poder iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, ya que, a menudo, "un nuevo concepto […] surge como la trasformación de un concepto existente" (Arnon *et al.*, 2014, p. 28). En este sentido, una DG describe las *acciones* (cognitivas) que son necesarias realizar sobre *objetos* previos, las cuales se *interiorizan* en *procesos* y estos, a su vez, se *encapsulan* en *objetos*; además, puede incluir una descripción de cómo estas estructuras se relacionan y organizan en un *esquema*.

Es importante aclarar que una DG no es una descripción matemática del concepto en estudio sino que es un modelo epistemológico y cognitivo del concepto (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010), ya que considera la naturaleza matemática del concepto y su posible desarrollo en la mente del individuo. Otro aspecto que se resalta es que una DG, para algún concepto en específico, no es única, pues depende de las consideraciones que haya tomado el investigador para su diseño así como también de las estructuras previas que posea el individuo o individuos que aprenden. Lo importante es que la DG permita explicar, en término de construcciones mentales, los aciertos y dificultades del individuo al aprender dicho concepto.

En esta investigación no se ha construido ninguna DG del concepto de la derivada, sin embargo, tanto las tareas del cuestionario como las preguntas utilizadas en la entrevista se basan en las DGs planteadas por Asiala *et al*. (1997) y Font *et al*. (2016). En particular, Asiala *et al*. (1997) proponen DG preliminar del concepto de la derivada como punto de partida para analizar la comprensión gráfica que tienen un grupo de 41 estudiantes universitarios sobre el concepto de la derivada en un punto. Esta DG luego, de desarrollado su estudio, fue refinada con el objeto de incorporar tanto las estructuras como los mecanismos que no habían sido considerados y que fueron evidenciados en las respuestas de los estudiantes a la entrevista realizada. Dicha DG se presentan a continuación:

Revisión de la descomposición genética del concepto derivada:

1. Conocimiento prerrequisito

A. Representación gráfica de objetos matemáticos.

i. Representación gráfica de un punto.

ii. Representación gráfica de una línea incluyendo el concepto de pendiente.

B. Coordinación de representaciones de punto con una función.

i. Interpretación gráfica de (x, y), cuando y es dada por $f(x)$.

ii. Superar la necesidad de tener una fórmula para una función.

2. Caminos gráficos y analíticos hacia la derivada

1a. Gráfico: la *acción* de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante a través de los dos puntos junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos.

1b. Analítico: la *acción* de calcular la tasa media de variación a través de calcular el cociente incremental en el punto.

2a. Gráfico: *interiorización* de las *acciones* del punto 1a en un *proceso* único a medida que los dos puntos del gráfico se aproximan más y más.

2b. Analítico: *interiorización* de las *acciones* en el punto 1b en un *proceso* único a medida que la diferencia entre los intervalos de tiempo se hacen más y más pequeños, esto es a medida que la longitud del intervalo de tiempo se acerca más y más a cero.

3a. Gráfico: *encapsulación* del *proceso* del punto 2a para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función.

3b. Analítico: *encapsulación* del *proceso* del punto 2b para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra.

4. *Interiorización* de los *procesos* de los puntos 2a y 2b en general para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en ese punto.

3. Interpretación gráfica de la derivada

C. Interpretación gráfica de la derivada en un punto.

i. Superar la necesidad de diferenciar una formula.

ii. *Coordinar* con el punto A para ver $f'(a)$ como la pendiente de la recta tangente.

iii. *Coordinar* varias interpretaciones de $f'(a)$.

D. Interpretación gráfica de la derivada como una función.

i. Ver la derivada como la función que va de x a la tangente en $(x, f(x))$.

ii. Identificar f' con la recta tangente en un punto.

4. Uso del concepto derivada

E. Varias coordinaciones para obtener el gráfico de f.

i. Interpretación gráfica de $f'(x)$ para un determinado x.

ii. Interpretación de $f'(x)$ para un determinado x como la pendiente.

iii. *Proceso* de mover x a través de un intervalo.

a. Monotonía de la función y signo de la derivada.

b. Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita.

c. Concavidad de la función y signo de la segunda derivada.

iv. Dibujar un gráfico completo o representativo. (Asiala *et al.*, 1997; p. 426-427).

Por su parte, la DG planteada por Font *et al*. (2016) es un refinamiento de la DG utilizada por Badillo (2003) para estudiar el desarrollo del *esquema* de la derivada en un grupo de profesores colombianos, la cual, a su vez, también corresponde a un refinamiento de la DG revisada por Asiala *et al*. (1997). Concretamente, Font *et al*. (2016) indican que después de analizar y comparar las DGs de Badillo (2003) y Asiala *et al*. (1997) decidieron diseñar una nueva, teniendo en cuenta aquellas construcciones que consideraron importantes y que aparecían en ambas DGs. Además, añadieron nuevas construcciones que no fueron consideradas explícitamente en ninguna de las dos DGs. Asimismo, estos autores mencionan que la decisión de plantear una nueva DG es coherente con la metodología de la teoría APOE porque no se supone que una DG para un concepto sea única, por el contrario, es posible refinarla como resultado de la validación experimental, los resultados de la investigación sobre el aprendizaje de un concepto y/o una decisión triangulada de expertos, entre otras opciones. La DG planteada por Font *et al*. (2016) se presenta en los siguientes párrafos:

1a. Las *acciones* de (a) conectar dos puntos en una curva definida por una función para obtener un cuerda, es decir, una proción de una línea secante a la curva, pasando que pasa por esos dos puntos, y (b) calcular la pendiente de la línea secante que pasa por dichos puntos.

1b. La *acción* de calcular la tasa media de variación entre un punto dado y un punto que está "cerca" de él $\left(m = \overline{V} = TVM = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \right)$.

2a. *Interiorización* de las *acciones* de la parte 1a en un proceso, por medio de la reflexión de los resultados de su repetición cuando los dos puntos considerados en la construcción de la secante se acercan.

2b. *Interiorización* las *acciones* de la parte 1b en el *proceso* de cálculo de la tasa media de variación, cuando la diferencia de las componentes x de un punto general a uno dado se hace cada vez más pequeña ($b \to a$).

3a. *Encapsulación* del *proceso* de la parte 2a en (a) el *objeto* recta tangente como resultado de la posición límite de las secantes, y (b) el *objeto* pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función como resultado del límite de las pendientes de las secantes.

3b. *Encapsulación* del *proceso* de la parte 2b, en el *objeto* tasa de variación instantánea de la variable dependiente en relación con la variable independiente $\left(\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)\right)$.

3c. *Coordinación* de los *procesos* de las partes 2a y 2b en un nuevo *proceso* donde la tasa de variación instantánea en un punto se considera como el mismo *objeto* independientemente de la representación utilizada.

3d. *Interiorización* de las *acciones* de la parte 1b en un *proceso*, donde es posible considerar la construcción gráfica de la tasa de variación media en términos del cociente de los incrementos verticales y horizontales cuando estos incrementos se hacen cada vez más pequeños ($h \to 0$).

3e. *Interiorización* de las *acciones* de la parte 1b en un *proceso* analítico que involucra la construcción de la tasa de variación media en términos de los cocientes de incrementos de las variables dependientes e independientes cuando estos incrementos se hacen cada vez más pequeños ($h \to 0$).

3f. *Coordinación* de *procesos* descritos en las partes 3d y 3e en un nuevo *proceso* donde es posible considerar ambos *procesos* como los mismos independientemente de la representación utilizada.

3g. *Encapsulación* del proceso descrito en la parte 3f en el *objeto* tasa de variación instantánea en cualquier punto de una función considerándola como el límite de los cocientes $\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\right)$.

4a. *Acciones* de (a) conectar dos puntos diferentes pero cercanos en un gráfico, relacionar dos magnitudes covariantes mediante un segmento de línea y calcular su pendiente o (b) usar dos puntos consecutivos de una tabla que relaciona dos magnitudes covariantes para calcular la tasa de variación media.

4b. *Interiorizar* las *acciones* descritas en la parte 4a en *procesos* para obtener la tasa de variación media como una aproximación razonable de la tasa instantánea de cambio en un punto dado.

4c. *Encapsulación* de los *procesos* de la parte 4b en *objetos* que son equivalentes a la razón de cambio instantánea en un punto, en un contexto numérico o gráfico $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$(En el caso de la velocidad esto significaría $\left(\frac{\Delta d}{\Delta t}=\overline{V}\right)$)

4d. Coordinación de los procesos descritos en la parte 4b y la parte 3d en un nuevo proceso en el que la tasa de variación instantánea puede obtenerse de un gráfico o de conjuntos de datos mediante una aproximación lineal.

4e. *Encapsulación* del *proceso* de la parte 4d en el *objeto* tasa de variación instantánea en un punto, como el límite de las tasas de variación media en un punto $\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

5. Establecer relaciones entre los *objetos* resultantes de las *encapsulaciones* en las partes 3b, 3g y 4e para construir un *esquema* para la derivada en un punto.

6. *Tematización* de este *esquema* en el *objeto* derivada de una función en un punto. $\left(m_{\tan}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\right)$

7. *Interiorización* de la *acción* de calcular la derivada en un punto en el proceso para calcular la derivada en cualquier punto de una función.

8. *Encapsulación* del *proceso* descrito en la parte 7 en el *objeto* función derivada.

8a. *Acciones* sobre la derivada como un *objeto* para encontrar la derivada de funciones que son el resultado de operaciones con otras funciones.

8b. *Interiorización* de las *acciones* de la parte 8a en los *procesos* implicados en el cálculo de la derivada de las funciones obtenidas de las operaciones, es decir, la obtención de las reglas de derivación.

8c. *Encapsulación* de los *procesos* de la parte 8b en *objetos* relacionados con reglas de derivación. Por ejemplo, *acciones* aplicadas a la regla del producto de las derivadas en la integración por partes.

9. Establecer relaciones entre *procesos* u *objetos* construidos en 6 y 8 en un *esquema* de la derivada que permita encontrar las propiedades de cualquier función por medio de su derivada y las propiedades de la derivada de una posible función (monotonía, concavidad, descripción y construcción de gráficos, optimización, etc.).

10. *Tematización* del *esquema* de la derivada cuando las *acciones* necesitan ser aplicadas al *esquema* a considerar. Por ejemplo, la integral de una función derivada en cualquier representación. (Font *et al.*, 2016, p. 113-115)

2.3.5. Ciclo de investigación

Una investigación basada en el marco teórico APOE tiene tres componentes: análisis teórico; diseño e implementación de enseñanza; y análisis y verificación de datos. Estos se ilustran en la Figura 14 junto con sus relaciones.

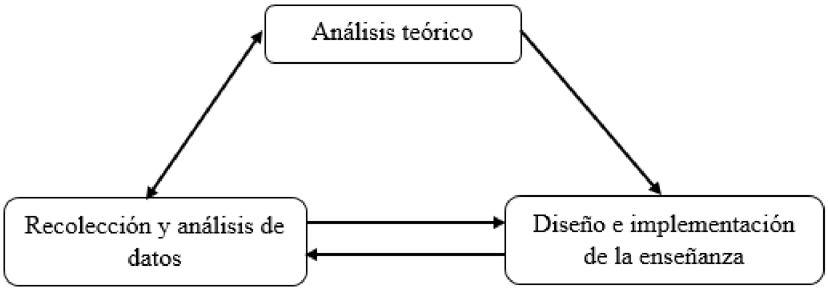


Figura 14. Ciclo de investigación de APOE (basado en Arnon *et al.*, 2014, p. 94)

- *Análisis teórico*. La investigación, bajo el paradigma APOE, se inicia con el análisis teórico del concepto a estudiar, es decir, con el diseño de una DG (preliminar). Como ya se mencionó, una DG es un modelo compuesto de estructuras y mecanismos mentales que un individuo requiere construir para lograr el aprendizaje de un determinado concepto. Esta puede diseñarse teniendo en cuenta los factores descritos anteriormente. Asiala *et al*. (1996) señalan dos cuestionamientos que deben guiar el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿Cómo esa comprensión puede ser lograda por un estudiante?

- *Diseño e implementación de enseñanza*. Una vez diseñada una DG, se puede implementar en el aula mediante el ciclo de enseñanza ACE que integra: Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios (ACE, por sus siglas en inglés). Dicho ciclo de enseñanza tiene como propósito apoyar el desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la DG (Arnon *et al.*, 2014, p. 57). Asimismo, esta componente del ciclo de investigación permite generar los datos empíricos que serán analizados en la tercera componente.

- *Recolección y análisis de datos*. Esta parte del ciclo de investigación permite la validación de la DG a través del análisis de los datos obtenidos en la etapa anterior. Las preguntas que guían este análisis son: ¿Los estudiantes desarrollaron las construcciones mentales previstas por el análisis teórico?, ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático? (Arnon *et al.*, 2014). A partir de las respuestas obtenidas para estos cuestionamientos, el investigador puede hacer modificaciones a la primera o segunda componente del ciclo de investigación con el fin de incluir aquellos elementos que no habían sido considerados en el análisis teórico o en la implementación de la enseñanza. Una vez realizadas las modificaciones, si es que las hubo, se vuelve a iterar el ciclo completo hasta que se pueda responder satisfactoriamente a los dos cuestionamientos planteados; de esta forma, se obtiene una DG validada.

Desde el punto de vista planteado por el paradigma de investigación basado en la teoría APOE, el presente trabajo forma parte de la primera componente de este ciclo de investigación. Si bien es cierto que la intención de esta investigación no es proponer una DG para el concepto de la derivada, sí intenta ejemplificar un posible camino para identificar relaciones entre estructuras mentales y a partir de ello, proponer o complementar alguna de las DGs ya establecidas, como por ejemplo, la planteada por Font *et al*. (2016) en el apartado referente a la *tematización* del *esquema*.

Finalmente, se destaca lo planteado por Cooley *et al*. (2007) en el sentido de que la investigación, en torno al desarrollo de un *esquema* es un proceso de visualización externo, en el que solo están disponibles las percepciones de los investigadores sobre respuestas disponibles para evaluar la comprensión. Asimismo, la noción preconcebida de estas etapas de desarrollo se basa en una DG del concepto dado. Sin embargo, existe la limitación de que la DG es una herramienta estática en cualquier momento, mientras que un *esquema* es dinámico y está siendo reconstruido constantemente. De hecho, decir que se está reconstruyendo el conocimiento en la etapa Trans se limita a lo que ha sido descrito por los investigadores y no a las descripciones de los mecanismos y estructuras establecidos en una DG. En este mismo sentido, Cooley *et al*. (2007) también mencionan que el análisis de la *tematización* de un *esquema* requiere de problemas que involucran un alto grado de complejidad, la cual implica, a su vez, la dependencia de una variedad de construcciones mentales en términos de *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas*, para coordinar toda la información. Por tanto, no es posible determinar el origen de todas las construcciones mentales. El análisis solo se limita a lo que los investigadores observan en función de la *coordinación* de los procesos involucrados en la resolución del problema.

2.3.6. Hacia la caracterización de una nueva estructura: "la *totalidad*"

La concepción *objeto* que un individuo posee sobre un concepto o noción en la teoría APOE, ha sido relacionada con dos características principales: (1) el individuo puede ver un *proceso* como un todo y, (2) el individuo puede realizar *acciones* sobre ese todo. Con base en estas consideraciones en Arnon *et al*. (2014) se describe la posible existencia de una nueva estructura cognitiva, la cual han denominado *totalidad*. Esta posible nueva estructura podría ser producto de la dificultad en la transición de una concepción de *proceso* a una concepción de *objeto*. Sfard (1991) sugirió que este fenómeno "parece inherentemente tan difícil y que en ciertos niveles puede permanecer prácticamente fuera del alcance de ciertos estudiantes" (p.1). Por otra parte, Dubinsky *et al*. (2013) señalaron que “la dificultad con esta progresión [de proceso a objeto] puede ser particularmente fuerte para procesos infinitos” (p.251). Centrándose en esta dificultad, Dubinsky *et al*. (2013) consideraron la posible existencia de una nueva etapa en el marco de la teoría APOE, la cual denominaron como *totalidad* y que corresponde a una estructura mental que se ubica entre *proceso* y *objeto*. En su estudio, ellos propusieron el mecanismo *detemporalización*, por medio del cual un individuo pasa de pensar en un *proceso* como una secuencia de pasos continuos a ser capaz de imaginar estos pasos a la vez, para progresar del *proceso* a la *totalidad*.

La *totalidad* ha sido identificada en estudios sobre fracciones (Arnon, 1998) y en investigaciones sobre el decimal infinito periódico $0,\overline{9}$ y su relación con 1 (Weller, Arnon y Dubinsky, 2009, 2011; Dubinsky *et al.*, 2013). Además, recientemente ha sido observada en el análisis de problemas que involucran *procesos* infinitos asociados a la paradoja de la “Lampara de Thomson” y a una variación de esta, en donde surgen concepciones asociadas al infinito (Chanakya y Zazkis, 2016).

Igualmente, se destaca que aunque Dubinsky *et al.* (2013) plantearon la existencia de esta nueva etapa y del mecanismo que hace posible el paso de *proceso* a *totalidad*, ellos no hacen mención al mecanismo inverso que permitiría descomponer la *totalidad* en el o los *procesos* que le dieron origen. Cabe señalar que la idea de *totalidad* ya había sido tratada en estudios anteriores (Dubinsky, 1984, 1987; Cornu y Dubinsky, 1989; Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger, 2004, Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005a, 2005b; Brown, McDonald y Weller, 2010), sin embargo, en estos trabajos la *totalidad* parece estar incluida como una parte de la concepción de *objeto* y no como una construcción mental separada. Por ejemplo, Dubinsky *et al*. (2005b) mencionan que:

> Si uno se da cuenta de un *proceso* como una *totalidad*, percibe que trasformaciones pueden actuar sobre esa *totalidad* y realmente puede construir tales trasformaciones (explícitamente o en su imaginación), entonces decimos que el individuo ha *encapsulado* el *proceso* en un *objeto* cognitivo. (p. 256)

En este mismo sentido Brown *et al*. (2010) hacen alusión a la *totalidad* como un paso preliminar para realizar la *encapsulación*, pero no consideraron que esta fuera una etapa o construcción mental distinta. En la Figura 15 se presenta la relación existente entre los mecanismos y estructuras mentales de la teoría APOE, incluyendo la estructura de *totalidad* y el mecanismo de *detemporalización*.

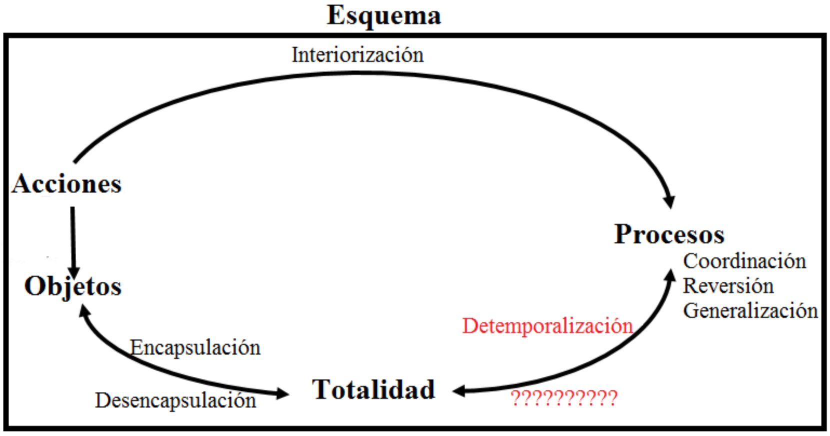


Figura 15. Estructuras y mecanismos mentales de la teoría APOE con la nueva estructura *totalidad* y el mecanismo detemporalización (basado en Arnon *et al.*, 2014; Dubinsky *et al.*, 2013)

La distinción de la *totalidad* como etapa separada surge del análisis de las construcciones mentales desarrolladas por estudiantes al enfrentarse a un contexto que involucra *procesos* infinitos. En la investigación de Dubinsky *et al.* (2013) la ecuación que se le pidió resolver a los estudiantes involucraba tanto al *objeto,* como al *proceso* que lo originó ($0{,}999...+x=1$). La doble naturaleza del *proceso* infinito (dinámica) y del *objeto* (estática), hacen que algunos individuos no puedan realizar las *acciones* aunque hayan aceptado previamente la *totalidad* del *proceso* como un ente estático. O sea, aunque un individuo pueda construir una concepción *proceso* de un *proceso* infinito y ver este *proceso* como un todo, no necesariamente puede realizar *acciones* sobre la totalidad del *proceso*.

La *totalidad* como estructura cognitiva y su mecanismo de construcción aún no han sido incorporados al marco de la Teoría APOE, pues solo se ha observado en una pequeña cantidad de estudios que involucran fracciones, decimales infinitos periódicos y procesos infinitos. Por tanto, como señala Arnon *et al*. (2014) es tarea de las futuras investigaciones determinar si existe, o no, la *totalidad* como una estructura cognitiva distinta. Además, se podría estudiar la naturaleza del mecanismo mental que permite su construcción. Para ello, se hace imprescindible el desarrollo de investigaciones en distintos contextos (*procesos* finitos e infinitos) y niveles (secundaria, bachillerato, universidad) que muestren la existencia de esta estructura.

Finalmente, se puntualiza que en este estudio se ha identificado en la *tematización* del *esquema* de la derivada una construcción mental de similares características a la *totalidad*, como se verá en la subsección 4.5.2 del Capítulo 4, la cual permite relacionar pares de la derivadas sucesivas por medio del establecimiento de una recurrencia entre funciones derivadas.

Capítulo 3. Diseño Metodológico

En este capítulo se presenta el diseño metodológico de la investigación, la cual se ha dividido en cinco secciones. En la primera se describe el paradigma y el enfoque de investigación. En la segunda sección se describe brevemente el diseño de este estudio. En la tercera sección se describen los participantes y el contexto de la investigación. En la cuarta se presentan y describen los dos instrumentos de recogida de datos utilizados en esta investigación. Finalmente, en la quinta sección se presentan y describen los métodos de análisis utilizados en el desarrollo de este trabajo.

3.1. Paradigma y enfoque

La complejidad de la realidad educativa determina la existencia de múltiples perspectivas para abordar científicamente la tarea de aproximarse al objeto de estudio (Alzina, 2004; Martínez, 2011). Desde el punto de vista práctico, esta diversidad se concreta en una variedad de modelos de investigación que trasforman a la educación en un campo multiparadigmático (Bericat, 1998). Estos paradigmas, permiten situarnos ante la realidad educativa, interpretándola y entregando soluciones a los problemas que en ella se presentan (González, 2003).

Existen dos paradigmas dominantes en la investigación científica, el cualitativo y el cuantitativo. Muchos teóricos e investigadores plantean que el abordaje de los problemas desde una sola de estas perspectivas no es suficiente e indican que es necesaria una complementariedad de enfoques para responder y dar solución a las problemáticas de un mundo cada vez más inestable, complejo y diverso (Díaz, 2014). Sin embargo, esta idea de complementariedad de enfoques cualitativos y cuantitativos, en un mismo estudio, también tiene detractores que argumentan que ambos difieren epistemológicamente como ontológicamente y por lo tanto, no pueden combinarse (Hunt, 1991).

En este estudio no se entra en este debate de la complementariedad, pues desde nuestro punto de vista ambos enfoques poseen fortalezas y debilidades, por esa razón esta investigación se enmarca en los denominados métodos mixtos. Estos, según Johnson y Onwuegbuzie (2004) corresponden a estudios en donde el investigador mezcla o combina técnicas cualitativas y cuantitativas en una misma investigación. Asimismo, Hernández, Fernández y Baptista (2003) indican que los métodos mixtos añaden complejidad al diseño de la investigación debido a la planificación de su integración o combinación, la que se presenta en todo el proceso de investigación, o en algunas de sus etapas, aunque, contempla todas de las ventajas de cada uno de los enfoques.

Existen variadas propuestas de clasificación sobre las investigaciones con enfoque mixtos de acuerdo con la forma e instancia en la cual se combinan ambos enfoques durante proceso de investigación. En particular, Rocco, Bliss, Gallagher y Pérez-Prado (2003) proponen una clasificación que diferencia entre diseños de método mixto y diseños con modelo mixto (Ver Tabla 6).

Tabla 6. Clasificación de investigaciones con enfoques mixtos (basado en Rocco *et al.*, 2003, p. 23)

Diseño	Tipo	Características de la investigación
Con método mixto	I	Investigación confirmatoria, con datos cualitativos y análisis estadístico.
	II	Investigación confirmatoria, con datos cualitativos y análisis cualitativo.
	III	Investigación exploratoria, con datos cuantitativos y análisis estadísticos.
	IV	Investigación exploratoria, con datos cualitativos y análisis estadístico.
	V	Investigación confirmatoria, con datos cuantitativos y análisis cualitativo
	VI	Investigación exploratoria, con datos cuantitativos y análisis cualitativo.
Con modelo mixto	VII	Simultáneo, investigación confirmatoria o exploratoria. Datos cuantitativos y cualitativos con análisis cualitativos y cuantitativos.
	VIII	Secuencial, por etapas. Una etapa un enfoque, la siguiente el otro. Cada etapa fortalece la anterior.

Con base en la Tabla 6 se puede indicar que esta investigación se enmarca en el modelo mixto de tipo VII. Estas investigaciones están caracterizadas por tener un perfil exploratorio o confirmatorio y, además, utilizan tanto datos como análisis cualitativos y cuantitativos.

3.2. Diseño de la investigación

Nuestra investigación incorpora dos tipos de datos: protocolos de resolución de cuestionarios y trascripciones de entrevistas clínicas semiestructuradas. Cada tipo de datos tiene asociada una estrategia de análisis.

En primer lugar, para el análisis de los protocolos de resolución de los cuestionarios se identificaron 27 variables. Estas variables son observables en los 103 protocolos, lo cual permitió discretizarlos y obtener un vector asociado para cada uno de ellos. Con estos vectores se realizó un análisis de clúster o conglomerados que permitió obtener algunos subniveles (subgrupos) de desarrollo del *esquema* de la derivada. Adicionalmente, dada las características de los datos, se realizó un Análisis Estadístico Implicativo, que permitió observar las relaciones entre variables y, de esta forma, caracterizar mejor los subniveles obtenidos del análisis clúster, identificando las estructuras subyacentes a cada uno de ellos.

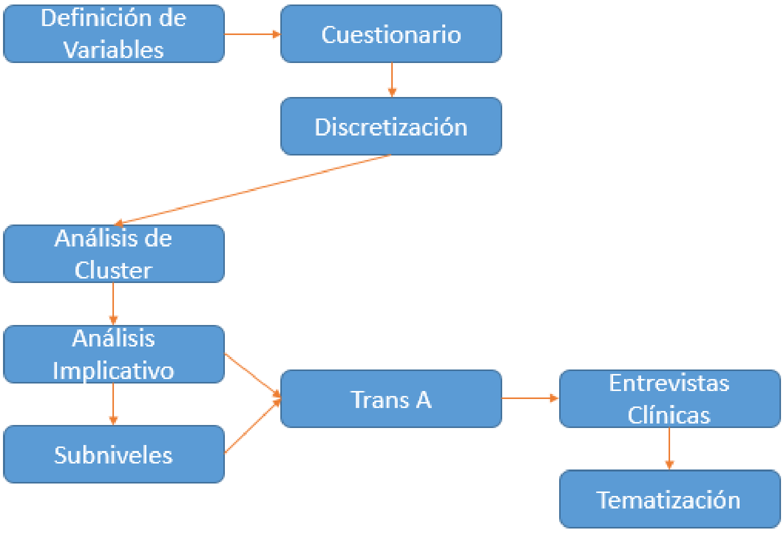


Figura 16. Diseño del proceso de investigación

Posteriormente, solo se consideró a los estudiantes clasificados en el subnivel Trans más avanzado (Trans A) y se les aplicó una entrevista clínica a algunos de ellos. Estas entrevistas aportaron información referente a las características de la *tematización* del *esquema* de la derivada. La Figura 16 ilustra a grandes rasgos el diseño de esta investigación.

3.3. Participantes y contexto

Los participantes de esta investigación fueron 103 estudiantes universitarios de los cursos académicos 2014/2015 y 2015/2016, de la Licenciatura doble de Matemáticas y Física de una universidad pública de la provincia de Barcelona. Todos los estudiantes habían cursado y aprobado como mínimo una asignatura que incluía los tópicos de Cálculo Diferencial. La opción de escoger estudiantes que ya habían cursado una o más asignaturas de Cálculo Diferencial es intencional y está fundamentada en dos aspectos: (1) nuestro interés por observar los subniveles de desarrollo, del *esquema* de derivada, alcanzado por los estudiantes universitarios con posterioridad al proceso de instrucción y, (2) la dificultad asociada a los mecanismos *encapsulación* de *procesos* y de *tematización* del *esquema* de derivada, puesta de manifiesto en investigaciones anteriores (Sánchez-Matamoros, 2004; Cooley *et al.*, 2007; García *et al*., 2011; Font *et al.*, 2016; Fuentealba *et al.*, 2017).

Con relación a las características de los participantes, se puede mencionar que no existe gran variabilidad en cuanto a su rango etario, formación previa y nivel académico. Además, como ya se mencionó todos los estudiantes habían aprobado por lo menos un curso que contenía los tópicos de Cálculo Diferencial, específicamente el curso en cuestión era “Funciones de Variable Real” y en él se trabajan los contenidos que se presentan en la Tabla 7. En particular, la forma de abordar los contenidos en este curso es de corte tradicional centrándose principalmente en el cálculo de derivadas, análisis y representación de funciones y sus derivadas, cálculo de valores extremos, cálculo de puntos de inflexión y en algunas aplicaciones de la derivada como lo son los problemas de optimización y la Regla de l'Hôpital.

Tabla 7. Contenido del curso de Funciones de Variable Real asociados al concepto de derivada (Guía Docente de la UAB código 100087)

Contenidos sobre Cálculo Diferencial
_Derivada de una función en un punto como tasa instantánea de variación.
_Interpretación geométrica.
_La función derivada.
_Caracterización de funciones.
_Propiedades algebraicas de la derivada.
_Regla de la cadena.
_Derivación de la función inversa.
_Extremos absolutos y relativos de una función.
_Puntos de Inflexión.
_Teorema de Rolle.
_Teorema del valor medio.
_Aproximación de ceros de funciones.
_Obtención de desigualdades.
_Problemas de optimización.
_Regla de l'Hôpital.

3.4. Instrumentos de recogida de datos

Esta sección se ha estructurado en dos subsecciones en los que se describen los instrumentos de recolección de datos utilizados en nuestra investigación. En primer lugar, se describe el cuestionario escrito y, a continuación, las entrevistas clínicas que se llevaron a cabo con algunos de los estudiantes situados en el nivel Trans A.

3.4.1. El cuestionario

Este primer instrumento se construyó con base en la selección y/o adaptación de tres tareas (ver Figura 17) utilizadas en investigaciones previas sobre el concepto de derivada (Baker *et al.*, 2000; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006; Cooley *et al.*, 2007; García *et al.*, 2011). Este cuestionario fue aplicado a los 103 participantes de esta investigación y su duración fue aproximadamente de 90 minutos.

Tarea 1

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua en su dominio

b) $f(2)=0$

c) $f'(3)=f'(5)=0$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$

e) $\lim_{x\to 8^-} f(x)=-\infty$

f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$

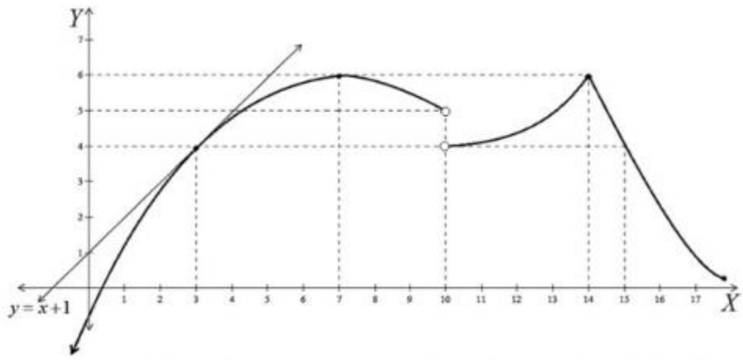
g) $f'(x)\geq 0$ cuando $x<5$

h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$

i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$

Tarea 2

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de $f'(3), f'(7), f'(10), f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo lo has obtenido.

Tarea 3

La gráfica corresponde a la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.

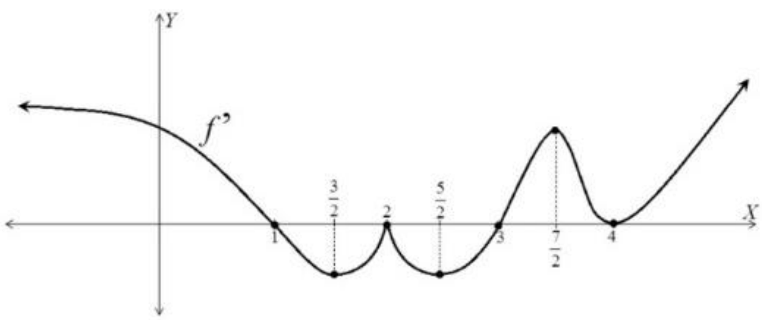


Figura 17. Tareas del cuestionario aplicado a los estudiantes

La resolución de estas tareas involucraba el uso de los elementos matemáticos (ver Tabla 8) tanto puntuales como globales que configuran el concepto de derivada en ambos modos de representación (analítico y gráfico). Las tres tareas del cuestionario fueron tomadas de la investigación de Sánchez-Matamoros (2004).

A continuación, se describen brevemente los objetivos que perseguían cada una de las tareas propuestas en el cuestionario. Igualmente, se muestran las “posibles relaciones” entre los elementos matemáticos (Ver Tabla 8) que los estudiantes podían establecer al resolver las tareas propuestas.

Tabla 8. Elementos matemáticos utilizados en la resolución de las tareas del cuestionario

Elemento matemático	Tarea
1. Si $f'(a)=0$, entonces en $x=a$ existe un máximo, un mínimo o un punto de inflexión de f.	1,2 y 3
2. Si f' es continua en $x=a$, y f tiene un cambio de curvatura en el punto de abscisa $x=a$ entonces en $(a, f(a))$ existe un punto de inflexión de f.	1, 2 y 3
3. $f'>0$ en un intervalo I, si y solo si f es estrictamente creciente en I.	1, 2 y 3
4. $f'<0$ en un intervalo I, si y solo si f es estrictamente decreciente en I.	1, 2 y 3
5. $f''>0$ en un intervalo I, si y solo si f es convexa en I.	1, 2 y 3
6. $f''<0$ en un intervalo I, si y solo si f es cóncava en I.	1, 2 y 3
7. $f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=a$.	2
8. $f'(a)$ es igual al límite del cociente incremental de f en la vecindad del punto de abscisa $x=a$.	2
9. Si $f'_-(a)\neq f'_+(a)$ y f es continua, entonces f posee un punto cúspide o anguloso en $x=a$.	2 y 3
10. Si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$ (directa).	3
11. Si f no es continua en $x=a$, entonces f no es continua en $x=a$ (contrarrecíproco).	2
12. f es una parábola, entonces f' es una recta.	2

3.4.1.1. Tarea 1

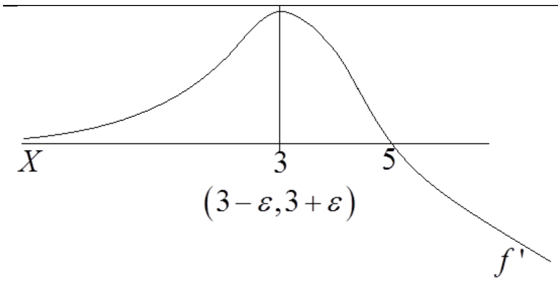
Esta tarea se basó en las que utilizaron en las investigaciones de Asiala *et al*. (1997) y Baker *et al*. (2000) e incluyó una contradicción en las condiciones analíticas proporcionadas. Esto con el objeto de observar la capacidad de los estudiantes para establecer relaciones entre la primera y segunda derivada.

La Tarea 1 (Figura 17) proporciona información analítica de la función f en términos de f, f' y f''. Con dichas condiciones se pide esbozar la gráfica de la función f. Los objetivos de esta tarea son, por un lado, observar si los estudiantes son capaces de establecer las relaciones entre las *acciones* y los *procesos*, tanto puntuales como globales, que asocian el signo de f' en un intervalo con el *proceso* que permite inferir de ellos el comportamiento de la razón de cambio de f en dicho intervalo; el *proceso* asociado al signo de f'' en un intervalo con el *proceso* que permite determinar la concavidad de f; y, el *proceso* que asocia el cambio de signo de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Y por otro lado, observar si el estudiante es capaz de identificar las contradicciones entre las condiciones analíticas del enunciado que proporcionarían evidencias sobre la construcción de relaciones entre los elementos que constituyen el *esquema*.

Para esbozar la gráfica de f un estudiante debe *coordinar* los *procesos* correspondientes a la interpretación de la información analítica proporcionada por las condiciones del enunciado y los relativos a su conversión al modo gráfico en un *proceso* de representación gráfica que sea coherente con toda la información. El considerar la condición *c)* referente a los ceros de f' permite al estudiante *coordinar* los *procesos* de cambio en el comportamiento de la razón de cambio con aquellos que relacionan dicho comportamiento con los posibles valores extremos o puntos de inflexión de la función. La *coordinación* de los *procesos* asociados a la interpretación de las condiciones *c), f)* y *g)* del enunciado, hace posible que el estudiante pueda establecer que la gráfica de f posee un máximo absoluto. Además, la *coordinación* de las condiciones *b), d)* y *e)*, respectivamente, le permite determinar el cero y las asíntotas de la gráfica de f. Sin embargo, el *proceso* de esbozar con precisión la gráfica de f requiere que el estudiante *coordine* los *procesos* asociados al signo de f'' con aquellos que los relacionan la curvatura de f. Finalmente, el estudiante puede *coordinar* el cambio de curvatura de las condiciones *h)* e *i)* como *proceso* con el *proceso* asociado a la condición puntual *c)* $f'(3)=0$ para inferir que en $x=3$ existe un punto de inflexión.

Lo anterior podría ser una posible solución, sin embargo, existe una contradicción en el enunciado, y específicamente en las condiciones (*c*, *f*, *g*, *h* e *i*). La percepción de dicha contradicción está asociada a la construcción de f'' cómo el *proceso* de derivada de f' considerada como función y la construcción de relaciones entre ellas. En este caso las condiciones *g)* e *i)* indican que f' es positiva y creciente cuando $x<3$ y, por otro lado, las condiciones *g)* y *h)* indican que f' es positiva y estrictamente decreciente cuando $x>3$. Por tanto, en $x=3$ se tiene que f' alcanza un máximo que se encuentra sobre el eje x que hace imposible que $f'(3)=0$.

La Figura 18a es una posible gráfica de f' en un entorno de $x=3$. Finalmente, si se considera la condición $f'(3)=0$ y se asume que f' es continua entonces necesariamente debe existir un cambio de monotonía de f' en un entorno de $x=3$, lo que produciría dos nuevos cambios de signos de f'' que se corresponderían con dos puntos de inflexión de f, no descritos en las condiciones analíticas de la tarea. La Figura 18b es una posible gráfica de f', para el caso descrito anteriormente.



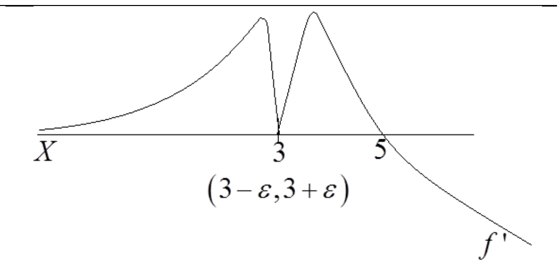


Figura 18a. Gráfica de f' con $f'(3) \neq 0$ ***Figura 18b.*** Gráfica de f' con $f'(3) = 0$

Figura 18. Contradicción de las condiciones del enunciado de la Tarea 1

De todo lo anterior, el estudiante debía llegar a la conclusión de que no podía esbozar la gráfica de una función f que cumpliera todas las condiciones del enunciado, ya que la gráfica de la Figura 18a se correspondería con una función que verificaría todas las condiciones excepto una: $f'(3) = 0$. Esto llevaría al estudiante a concluir que la tarea propuesta no tiene solución.

3.4.1.2. Tarea 2

Esta tarea fue utilizada en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004), pero originalmente, formaba parte de la prueba de selectividad de Andalucía LOGSE de 1997, correspondiente al de 2.º de Bachillerato de Ciencias Sociales, y fue modificada por esta investigadora a su versión actual, la cual es la utilizada en nuestro cuestionario.

La tarea (Tarea 2, Figura 17) presentada en modo gráfico, tiene dos partes, la primera se centraba en el comportamiento local de la función y se les solicitó a los estudiantes calcular la derivada en puntos específicos de f. El objetivo de esta primera parte, es observar si los estudiantes eran capaces de hacer las *acciones* o *procesos* necesarios para calcular la derivada en puntos en los que la función tiene distintos comportamientos. En la segunda parte, se les solicitó esbozar el gráfico de f' a partir del gráfico de f. En este apartado, se pretendía observar si los estudiantes habían construido la función derivada como un *objeto*, y si podían establecer la *coordinación* de los *procesos* involucrados en el manejo de la información, local y global, en un contexto analítico, con aquellos correspondientes al manejo de la información, en el contexto gráfico. Es importante destacar que en esta tarea surgen implicaciones contrarias (*reversión* de los *procesos*) a las que se utilizan en la Tarea 1, es decir, las relaciones entre monotonía y signo de la primera derivada (f estrictamente creciente

$\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$) y, además, las relaciones entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$).

3.4.1.3. Tarea 3

Tarea 3 fue tomada del libro "Calculus" de Spivak (1974, p. 289), sin embargo, fue modificada en el sentido de construir la gráfica (primitiva) de la función, ya que en su formulación original solo se pedía la determinación de los valores extremos locales de la función.

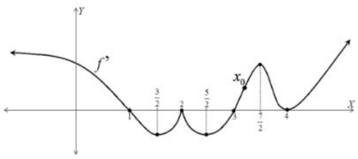
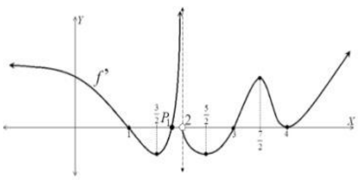
En esta tarea (Tarea 3, Figura 17), se les proporcionaba a los estudiantes la gráfica de la función f', la cual contemplaba varios cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. La tarea consistía en esbozar una gráfica para la función f y tenía como objetivo valorar si los estudiantes podían *coordinar* los *procesos* globales y puntuales asociados a los valores extremos y puntos de inflexión de f. De igual manera, se pretendía observar si los estudiantes podían *coordinar* los *procesos* asociados con el signo de f' con aquellos relacionados con la monotonía de f; y, finalmente, si también *coordinaban* los *procesos* relativos al crecimiento de f' con los *procesos* relacionados con la convexidad de f.

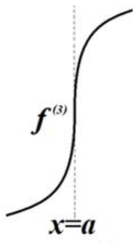
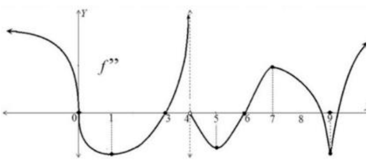
3.4.2. Las entrevistas clínicas

Las entrevistas clínicas fueron semiestructuradas. Se elaboró un guion previo (Goldin, 2000) y en todo momento se intentó crear un clima de confianza entre el investigador y los estudiantes (Hunting, 1997) de modo que percibieran la entrevista como un medio a través del cual pudieran explicar cómo y porqué habían contestado de determinada forma a las distintas tareas que conformaban el cuestionario. En esta entrevista, también se agregaron interrogantes nuevas.

Los objetivos de la entrevista fueron dos: (1) profundizar en el proceso de resolución de las tareas propuestas a los estudiantes seleccionados e, (2) indagar en la *tematización* del *esquema* de la derivada. Consecuentemente con los objetivos descritos, la entrevista clínica semiestructurada constaba de dos partes. En la primera parte se realizaron preguntas para aclarar su proceso de resolución de las tareas del cuestionario y, en la segunda parte se efectuaron nuevas preguntas y algunas modificaciones a cada una de las tareas con el propósito de observar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos ante una situación diferente. Adicionalmente, se realizaron otras preguntas que involucraban la traslación de relaciones entre elementos matemáticos a pares de derivadas sucesivas. En la Tabla 9 se muestran algunos ejemplos del tipo de modificaciones y preguntas que se realizaron.

Tabla 9. Algunas interrogantes planteadas en la entrevista a los estudiantes

Interrogantes	¿A qué corresponde?	Objetivo
¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de f si eliminamos la condición c?	Modificación de la Tarea 1	Esta modificación tenía como objetivo observar las justificaciones entregadas por los estudiantes referentes a la contradicción presente en las condiciones analíticas proporcionadas en la Tarea 1. Además, se pretendía buscar evidencia de que los estudiantes eran capaces de establecer relaciones entre f' y f''.
Si la gráfica corresponde a f' ¿Qué sucedería con la gráfica de f en los puntos de abscisas $x=7$ y $x=14$?	Modificación de la Tarea 2	Esta modificación implica el tratamiento de dos puntos de inflexión en f uno en $x=7$ (suave) y otro en $x=7$ (brusco). El objetivo es observar si el estudiante es capaz de *destematizar* su *esquema* y, realizar *acciones* y *procesos* sobre los elementos globales y puntuales de f' que le permitan la existencia de estos dos puntos de inflexión.
¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas f', f'' y f''' en $x=1$, $x=3$ y x_0? Si x_0 corresponde a un punto de inflexión de f'. 	Modificación de la Tarea 3	Esta modificación conlleva el tratamiento de dos ceros de la primera derivada y de otro punto que fue entendido como punto de inflexión f'. Para determinar el comportamiento en los tres puntos es necesario *destematizar* el *esquema* para *coordinar* los *procesos* globales y puntuales que permiten establecer el comportamiento en las vecindades de los puntos en cada derivada.
¿Qué sucedería con la gráfica de f en $x=2$, si sabemos que f es continua? 	Modificación de la Tarea 3	Esta modificación implica el tratamiento de un punto anguloso. El objetivo es observar si el estudiante es capaz de adaptarse a una nueva situación (*destematizar* su *esquema*) y, realizar *acciones* y *procesos* sobre los elementos globales y puntuales de f' que le permitan establecer que en $x=2$ existe un máximo local de f (punto anguloso).

Si consideramos la gráfica de la derivada de orden 3 de una función f en el entorno del punto $x = a$, como la que se muestra en la siguiente figura  ¿Qué sucede con las derivadas f'' y $f^{(4)}$ en el entorno de $x = a$?	Nueva pregunta	Esta nueva tarea involucra el tratamiento de un punto que posee una tangente vertical en una función derivada de orden 3. El objetivo de esta modificación es observar si el estudiante que ha *tematizado* el *esquema* puede *destematizarlo* y *coordinar* los *procesos* globales y puntuales asociados al *objeto* f''', del cual no conocen una expresión analítica, que les permita transitar y conectar los elementos matemáticos, puntuales y globales, asociados a las derivadas sucesivas de distintos órdenes, en este caso f'' y $f^{(4)}$. Para poder aplicar las *acciones* y/o *procesos* sobre el *objeto* f''' se debe ser consciente que las relaciones entre los elementos matemáticos que vinculan una derivada de orden $f^{(n)}$ con una de orden $f^{(n+1)}$, son invariantes para cualquier de valor de $n \in \mathbb{N}_0$.
La figura que se muestra corresponde a la segunda derivada de f, esboza las posibles gráficas de f' y f'''. 	Nueva pregunta	Esta nueva tarea tenía el mismo objetivo que la anterior, sin embargo, posee una dificultad mayor pues involucra el tratamiento de los tres tipos de puntos conflictivos: una tangente vertical en $x = 0$, un punto anguloso $x = 4$ y un punto cúspide en $x = 9$, en una función derivada de orden 2. Para dar respuesta a la pregunta es necesario *destematizar* el *esquema* y, *coordinar* los *procesos* vinculados al *objeto* f'', de esta forma, es posible conectar los elementos matemáticos puntuales y globales para cada uno de los distintos casos de puntos conflictivos.

3.4.2.1. Selección de los estudiantes para las entrevistas

Tras la aplicación del cuestionario a los participantes y la realización del análisis de clúster para determinar los subniveles del desarrollo del *esquema*, se llevó a cabo la entrevista clínica. La selección de los estudiantes para esta se realizó atendiendo a los siguientes criterios y siguiendo un orden estricto:

a) A la clasificación de estudiante en el subnivel de desarrollo Trans A del *esquema* de derivada.

b) A sus respuestas al cuestionario. Se seleccionó a los estudiantes que mostraban el establecimiento de relaciones entre elementos matemáticos en un segundo nivel, es decir, entre la primera y segunda derivada.

c) A su disponibilidad para participar en la entrevista.

Se entrevistaron a 5 estudiantes de los 103 que participaron en la investigación. Las entrevistas clínicas tuvieron una duración aproximada de 35 minutos.

3.5. Métodos de análisis

En esta sección se describe el establecimiento de las variables y el proceso discretización de cada uno de los protocolos de resolución de los estudiantes. Asimismo, se exponen los métodos de análisis tanto cuantitativos como cualitativos aplicados a nuestros datos.

3.5.1. Establecimiento de variables y discretización de los cuestionarios

Para discretizar los protocolos de resolución y obtener un vector asociado a cada uno de ellos, se definieron 27 variables (ver Tabla 10) que son el resultado de la descomposición de los elementos matemáticos (Tabla 8) en ambos modos de representación (analítico y gráfico), la utilización de relaciones lógicas y de otros estudios previos (Trigueros y Escandón, 2008; Fuentealba *et al.*, 2017). Cabe señalar que los elementos matemáticos de la Tabla 7 no coinciden exactamente con los de la primera columna de la Tabla 9. Lo anterior porque se han separado algunos de esos elementos y unidos otros, a fin de definir las variables de estudio. Por ejemplo, el elemento matemático que relaciona, por medio de la "equivalencia lógica", el signo positivo de la primera derivada con el crecimiento de la función (elemento matemático número 3 de la Tabla 8) fue separado en dos implicaciones, lo cual dio origen a las variables V_{11} (si $f' > 0 \rightarrow f$ es creciente) y V_{12} (f es creciente $\rightarrow f' > 0$). Del mismo modo, se establecieron otras variables y se construyeron otras que corresponden a descomposición de algunos de los elementos en ambos modos de representación (analítico y gráfico).

Tabla 10. Variables utilizadas para discretizar los protocolos de resolución de cada uno de los cuestionarios

Elemento matemático	Variable a observar
1. Derivada en un punto $f'(a)$	V_1. Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x=a$. V_2. Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x=a$.
2. Función derivada $f'(x)$	V_3. Usa correctamente el significado de función derivada.

	V_4. Usa correctamente el significado del operador derivada.
3. Valor extremo de f	V_5. Usa correctamente el significado de máximo local geométricamente. V_6. Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente. V_7. Usa correctamente el significado de mínimo local geométricamente. V_8. Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente.
4. Punto de inflexión de f	V_9. Usa correctamente el significado de punto de inflexión geométricamente. V_{10}. Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente.
5. Relación de equivalencia lógica entre el signo de f' en un intervalo I y, la monotonía de f en dicho intervalo	V_{11}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f' en un intervalo I y el crecimiento estricto de f en dicho intervalo. V_{12}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo positivo de f' en dicho intervalo. V_{13}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo f' en un intervalo I y el decrecimiento estricto de f en dicho intervalo. V_{14}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo negativo de f' en dicho intervalo.
6. Relación de equivalencia lógica entre el signo de f'' en un intervalo I y, la curvatura de f en dicho intervalo	V_{15}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f'' en un intervalo I y la convexidad de f en dicho intervalo. V_{16}. Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de f en un intervalo I y el signo positivo de f'' en dicho intervalo. V_{17}. Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de f'' en un intervalo I y la concavidad de f en dicho intervalo. V_{18}. Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de f en un intervalo I y el signo negativo de f'' en dicho intervalo.
7. Puntos de no derivabilidad de f	V_{19}. Usa correctamente las derivadas laterales. V_{20}. Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos).
8. Continuidad y derivabilidad de f	V_{21}. Usa correctamente la relación directa: si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$. V_{22}. Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si f no es continua en $x=a$, entonces f no es derivable en $x=a$.
Otras variables generales observables	V_{23}. Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura).

	V_{24}. Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signo y ceros). V_{25}. Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas. V_{26}. Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas. V_{27}. Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada.

En el proceso de discretización se evaluó cada una de las 27 variables, en función de los argumentos precisados en los protocolos de resolución de los estudiantes. Las variables fueron medidas utilizando una escala de tipo dicotómica. La valoración de cada una de las variables se realizó utilizando los criterios que se especifican en la Tabla 11 y se basó en el tipo de justificaciones entregadas por los estudiantes

Tabla 11. Escala utilizada para medir las variables en los protocolos de resolución de los estudiantes

Puntuación	Descripción
0	No se observa explícitamente la variable y no es posible inferir su uso en el protocolo de resolución del estudiante.
1	Se observa la variable o es posible inferir su uso correcto, además, existe o se infiere un proceso de justificación claro.

Considerando que la Tabla 9 puede resultar demasiado general para medir las variables en los protocolos de resolución de los estudiantes, se establecieron algunos descriptores específicos para cada una de ellas (ver Tabla 12). Dichos descriptores están redactados en términos positivos, es decir, cuando el valor de la variable asociada es 1.

Tabla 12. Descriptores utilizados para discretizar cada una de las variables definidas

Variable	Descriptor
V_1	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada en un punto corresponde a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.
V_2	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada en un punto corresponde al límite del cociente incremental en la vecindad del punto, o bien, aproxima el valor de la derivada utilizando la tasa de variación media.
V_3	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada de una función es otra función.
V_4	El estudiante menciona, explícita o implícitamente, que la derivada es una función que puede ser “derivada nuevamente”, es decir, que considera a la derivada como un operador que trasforma a una función (si la función es una parábola entonces su derivada es una recta).
V_5	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, la existencia de un máximo local a partir de información gráfica.
V_6	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, la existencia de un máximo local a partir de información analítica.
V_7	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, la existencia de un mínimo local a partir de información gráfica.

V_8	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, la existencia de un mínimo local a partir de información analítica.
V_9	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, la existencia de un punto de inflexión a partir de información gráfica.
V_{10}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, la existencia de un punto de inflexión a partir de información analítica.
V_{11}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f' es positiva en un intervalo I, entonces f es estrictamente creciente en dicho intervalo.
V_{12}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f es estrictamente creciente en un intervalo I, entonces f' es positiva en dicho intervalo.
V_{13}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f' es negativa en un intervalo I, entonces f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.
V_{14}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f es estrictamente decreciente en un intervalo I, entonces f' es negativa en dicho intervalo.
V_{15}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f'' es positiva en un intervalo I, entonces f es convexa en dicho intervalo.
V_{16}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f es convexa en un intervalo I, entonces f'' es positiva en dicho intervalo.
V_{17}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f'' es negativa en un intervalo I, entonces f es cóncava en dicho intervalo.
V_{18}	El estudiante es capaz de determinar, explícita o implícitamente, que sí f es cóncava en un intervalo I, entonces f'' es negativa en dicho intervalo.
V_{19}	El estudiante utiliza, explícita o implícitamente, derivadas laterales en puntos de no derivabilidad (puntos conflictivos o discontinuidades).
V_{20}	El estudiante es analizar sin dificultades, explícita o implícitamente, con puntos en los cuales la función es continua pero no derivable.
V_{21}	El estudiante utiliza, explícita o implícitamente, la relación directa (si f es derivable en $x=a$, entonces f es continua en $x=a$).
V_{22}	El estudiante utiliza, explícita o implícitamente, la relación contrarrecíproca (si f no es continua en $x=a$, entonces f no es derivable en $x=a$).
V_{23}	El estudiante es capaz de dividir el dominio de la función en intervalos basándose en los elementos gráficos proporcionados en el enunciado.
V_{24}	El estudiante es capaz de dividir el dominio de la función en intervalos basándose en los elementos analíticos proporcionados.
V_{25}	El estudiante es capaz de graficar una función a partir de los elementos gráficos proporcionados.
V_{26}	El estudiante es capaz de graficar una función a partir de los elementos analíticos proporcionados.
V_{27}	El estudiante es capaz, explícita o implícitamente, de establecer relaciones entre la primera y segunda derivada.

Para ejemplificar el proceso de discretización de un cuestionario en los siguientes párrafos se muestra la construcción de un vector con las 27 variables definidas. Para este caso, se seleccionó el cuestionario del estudiante E_4 que muestra la utilización correcta e incorrecta (ausencia) de algunas variables.

Variable V_1: *"Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x = a$"*

En la Figura 19 se observa que el estudiante E_4 hace mención explícita, en la Tarea 2, a que la derivada corresponde a la pendiente de la recta tangente, en este caso en $x = 3$ indica que $m = 1$. Por tanto, a la variable V_1 se le asignó el valor 1.

Para $f'(3)$ solo es necesario ver que la derivada es el pendiente de la recta tangente

como $y = x + 1$, $m = 1$.

Figura 19. Utilización correcta y explícita de la variable V_1 por el estudiante E_4

Variable V_2: *"Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x = a$"*

Como se observa en la Figura 20 el estudiante E_4 en la Tarea 2 utiliza implícitamente la tasa de variación media para aproximar el valor de la derivada de la función en $x = 15$. Lo cual da evidencia de que este estudiante comprende que la derivada corresponde al límite del cociente incremental. Por tanto, a la variable V_2 se le asignó el valor 1.

$$f'(15) \simeq \frac{-6}{3,3} = \frac{-18}{10} = -9/5$$

Figura 20. Utilización correcta no explícita de la variable V_2 por el estudiante E_4

Variable V_3: *"Usa correctamente el significado de función derivada"*

No observa evidencia explícita ni implícita de que este estudiante considere a la derivada como una función, a pesar de que pudo haberlo indicado en cualquiera de las tareas del cuestionario. Por tanto, a la variable V_3 se le asignó el valor 0.

Variable V_4: *"Usa correctamente el significado del operador derivada"*

No observa evidencia explícita ni implícita de que este estudiante considere a la derivada como un operador, lo cual era muy sencillo de observar en la Tarea 2 en la cual se indicaba que la función estaba formada por tramos de parábolas. Por tanto, a la variable V_4 se le asignó el valor 0.

Variable V_5: *"Usa correctamente el significado de máximo local geométricamente"*

En la Figura 21 se observa que el estudiante utiliza la información gráfica de la derivada, proporcionada en la Tarea 3, extrayendo desde ahí información general de la función que le permite afirmar que en $x=1$ existe una recta tangente de tipo horizontal y, además, dado que hay un cambio de signo en el entorno (de positivo a negativo) entonces dice que en $x=1$ existe un máximo. Por tanto, a la variable V_5 se le asignó el valor 1.

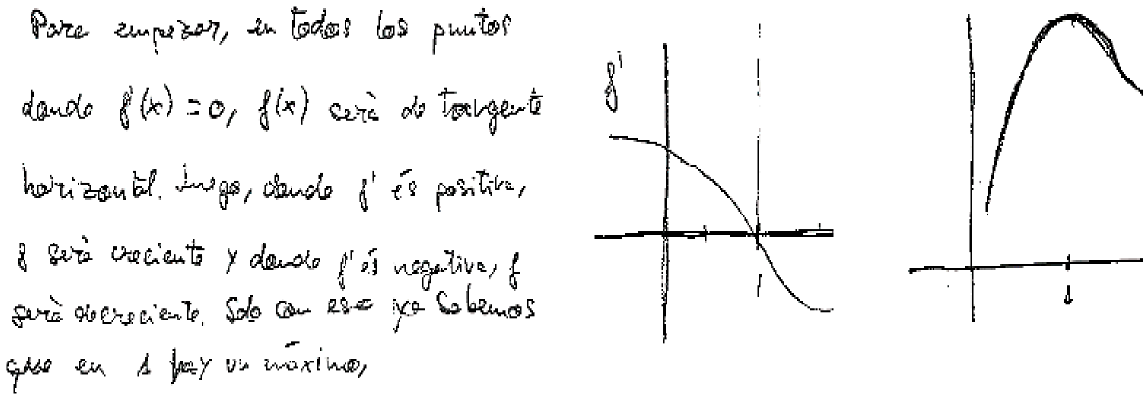


Figura 21. Utilización correcta y explícita de la variable V_5 por el estudiante E_4

Variable V_6: *"Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente"*

Como se observa en la Figura 22 el estudiante utiliza la información analítica de la derivada proporcionada en la Tarea 1 para determinar que en el punto $x=5$ existe un máximo local de la función. Por tanto, a la variable V_6 se le asignó el valor 1.

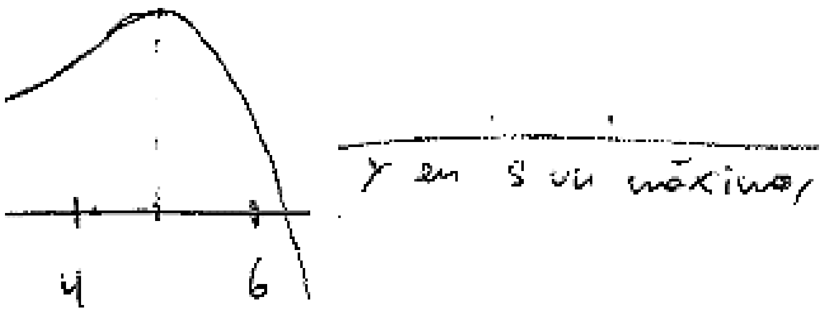


Figura 22. Utilización correcta y explícita de la variable V_6 por el estudiante E_4

Variable V_7: *"Usa correctamente el significado de mínimo local geométricamente"*

Como se observa en la Figura 23 el estudiante utiliza la misma argumentación utilizada para la variable V5 para indicar explícitamente que en la Tarea 3 existe un mínimo local en $x=3$. Por tanto, a la variable V_7 se le asignó el valor 1.

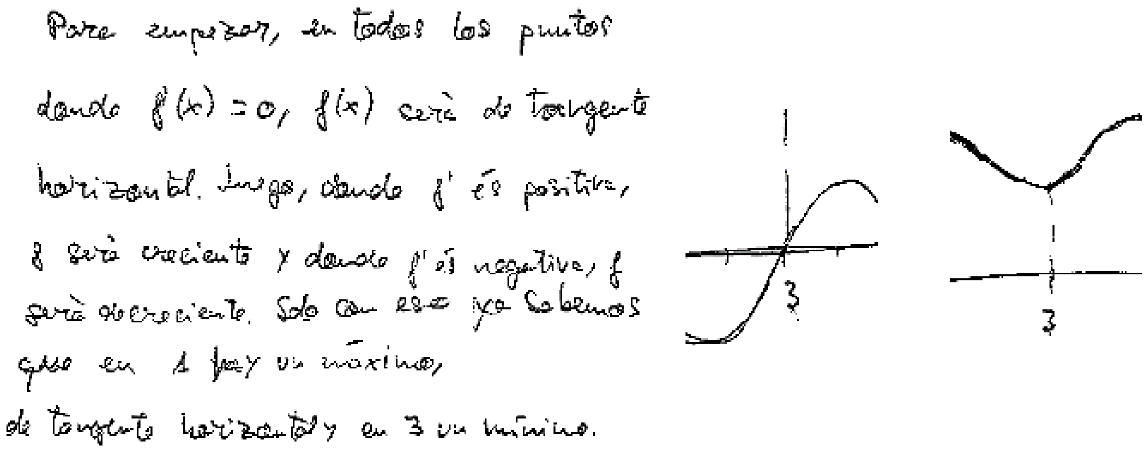


Figura 23. Utilización correcta y explícita de la variable V_7 por el estudiante E_4

Variable V_8: *"Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente"*

Aun cuando esta variable no se observó directamente en el protocolo de resolución del estudiante E_4 se infiere que si la utiliza correctamente como puede verse en el argumento que expone en la Figura 23. Por tanto, a la variable V_8 se le asignó el valor 1.

Variable V_9: *"Usa correctamente el significado de punto de inflexión geométricamente"*

En la Figura 24 se observa como el estudiante argumenta que, en la Tarea 3, la función tendrá varios puntos de inflexión y, en particular, destaca que en los puntos $x = 3/2$, $x = 5/2$ y $x = 7/2$ la función tendrá puntos de inflexión con tangente horizontal. Por tanto, a la variable V_9 se le asignó el valor 1.

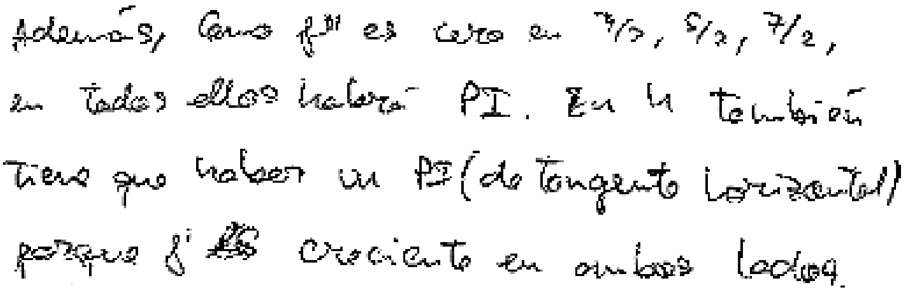


Figura 24. Utilización correcta y explícita de la variable V_9 por el estudiante E_4

Variable V_{10}: *"Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente"*

Como se observa en la Figura 25 el estudiante utiliza la información analítica tanto de la primera como de la segunda derivadas para establecer que en $x = 3$ existe un punto de inflexión de tangente horizontal, lo cual queda en evidencia en la gráfica que propone aun cuando esta muestra las incongruencias de las condiciones proporcionadas en el enunciado, sin embargo, permite observar que el estudiante usa correctamente el significado analítico del punto de inflexión. Por tanto, a la variable V_{10} se le asignó el valor 1.

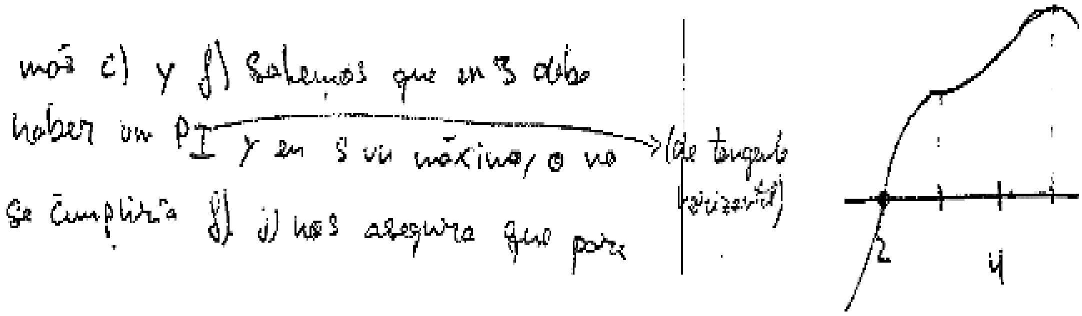


Figura 25. Utilización correcta y explícita de la variable V_{10} por el estudiante E_4

Variable V_{11}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f' en un intervalo I y el crecimiento estricto de f en dicho intervalo"*

En la Figura 26 se observa que el estudiante establece correctamente que si la derivada es positiva en un intervalo entonces la función es estrictamente creciente. Por tanto, a la variable V_{11} se le asignó el valor 1.

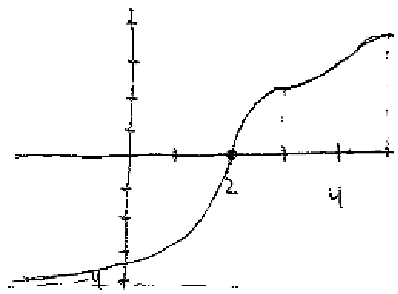


Figura 26. Utilización correcta y explícita de la variable V_{11} por el estudiante E_4

Variable V_{12}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo positivo de f' en dicho intervalo"*

No se observa el uso implícito ni explícito de esta relación que corresponde a la implicación contraria a la asociada a la variable V_{11}. Por tanto, a la variable V_{12} se le asignó el valor 0.

Variable V_{13}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo f' en un intervalo I y el decrecimiento estricto de f en dicho intervalo"*

En la Figura 27 se observa que el estudiante establece correctamente que si la derivada es negativa en un intervalo entonces la función es estrictamente decreciente. Por tanto, a la variable V_{13} se le asignó el valor 1.

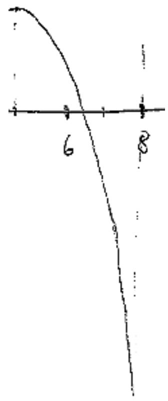


Figura 27. Utilización correcta y explícita de la variable V_{13} por el estudiante E_4

Variable V_{14}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo negativo de f' en dicho intervalo"*

No se observa el uso implícito ni explícito de esta relación que corresponde a la implicación contraria a la asociada a la variable V_{13}. Por tanto, a la variable V_{14} se le asignó el valor 0.

Variable V_{15}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f' en un intervalo I y la convexidad de f en dicho intervalo"*

En la Figura 28 se observa que el estudiante establece correctamente que si la segunda derivada es positiva en un intervalo entonces la función es cóncava en dicho intervalo. Por tanto, a la variable V_{15} se le asignó el valor 1.

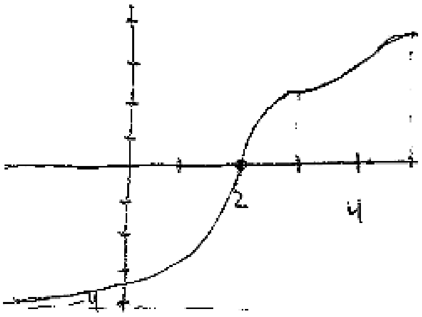


Figura 28. Utilización correcta y explícita de la variable V_{15} por el estudiante E_4

Variable V_{16}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de f en un intervalo I y el signo positivo de f'' en dicho intervalo"*

No se observa el uso implícito ni explícito de esta relación que corresponde a la implicación contraria a la asociada a la variable V_{15}. Por tanto, a la variable V_{16} se le asignó el valor 0.

Variable V_{17}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de f'' en un intervalo I y la concavidad de f en dicho intervalo"*

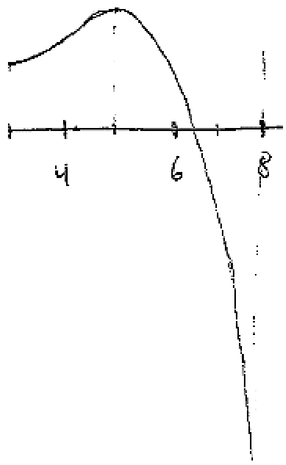


Figura 29. Utilización correcta y explícita de la variable V_{17} por el estudiante E_4

En la Figura 29 se observa que el estudiante establece correctamente que si la segunda derivada es negativa en un intervalo entonces la función es convexa en dicho intervalo. Por tanto, a la variable V_{17} se le asignó el valor 1.

Variable V_{18}: *"Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de f en un intervalo I y el signo negativo de f'' en dicho intervalo"*

No se observa el uso implícito ni explícito de esta relación que corresponde a la implicación contraria a la asociada a la variable V_{17}. Por tanto, a la variable V_{18} se le asignó el valor 0.

Variable V_{19}: *"Usa correctamente las derivadas laterales"*

No se observa el uso implícito ni explícito de las derivadas laterales. Por tanto, a la variable V_{19} se le asignó el valor 0.

Variable V_{20}: *"Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos)"*

Sí bien el estudiante E_4 de forma correcta la variable V_{21} (implícitamente), que involucra el tratamiento de un punto anguloso, no se puede asegurar que siempre lo haga siempre pues no se tiene información respecto a la Tarea 2 en la cual también debía enfrentarse al tratamiento de un punto conflictivo. Por tanto, a la variable V_{20} se le asignó el valor 0.

Variable $\mathbf{V_{21}}$: *"Usa correctamente la relación directa: si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$"*

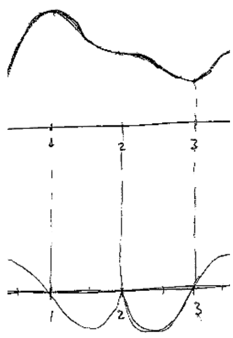


Figura 30. Utilización correcta y explícita de la variable V_{21} por el estudiante E_4

En la Figura 30 se observa que el estudiante establece implícitamente que si la función es derivable $x=2$ entonces la función es continua en dicho punto. Por tanto, a la variable V_{21} se le asignó el valor 1.

Variable $\mathbf{V_{22}}$: *"Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si f no es continua en $x = a$, entonces f no es derivable en $x = a$"*

No se observa pues el estudiante no resuelve la Tarea 2 del cuestionario. Por tanto, a la variable V_{22} se le asignó el valor 0.

Variable $\mathbf{V_{23}}$: *"Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura)"*

En la Figura 31 se observa que el estudiante establece correctamente los intervalos a partir de la información gráfica. Por tanto, a la variable V_{23} se le asignó el valor 1.

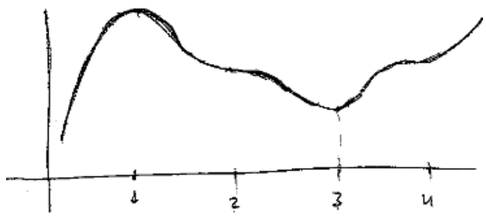


Figura 31. Utilización correcta y explícita de la variable V_{23} por el estudiante E_4

Variable $\mathbf{V_{24}}$: *"Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signo y ceros)"*

Como se observa en la Figura 32 el estudiante establece correctamente los intervalos a partir de la información analítica. Por tanto, a la variable V_{24} se le asignó el valor 1.

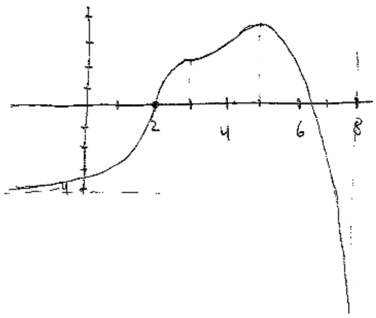


Figura 32. Utilización correcta y explícita de la variable V_{24} por el estudiante E_4

Variable V25:*"Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas"*

En la Figura 33 se observa que el estudiante establece correctamente los intervalos a partir de la información gráfica y esboza una función que satisface todas las condiciones. Por tanto, a la variable V_{25} se le asignó el valor 1.

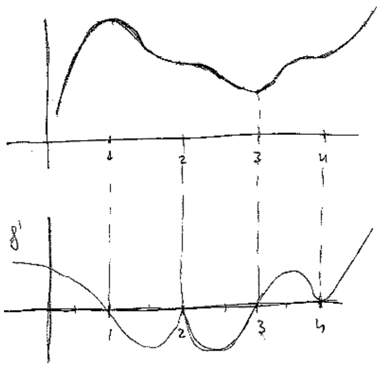


Figura 33. Utilización correcta y explícita de la variable V_{25} por el estudiante E_4

Variable V_{26}:*"Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas"*

Como se observa en la Figura 33 el estudiante establece correctamente los intervalos a partir de la información analítica, sin embargo, no es capaz de observar la contradicción entre las condiciones proporcionadas y construye una gráfica errónea para la Tarea 1. Por tanto, a la variable V_{27} se le asignó el valor 0.

Variable V_{27}:*"Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada"*

No se observa el uso explícito ni implícito de la variable. Lo cual queda de manifiesto en que el estudiante E_4 no se percata de las contradicciones presentes en el enunciado de la Tarea 1, además, no resuelve la Tarea 2. Por tanto, a la variable V_{27} se le asignó el valor 0.

Para cada uno de los 103 protocolos de resolución se realizó el mismo análisis en función de las variables definidas (ver Tabla 10) y los descriptores establecidos (ver Tabla 12). Así, se obtuvieron 103 vectores uno para cada protocolo de resolución.

3.5.2. Análisis de clúster

El análisis clúster, denominado también análisis de conglomerados, es un método estadístico multivariado. Este método es principalmente utilizado para realizar una partición de un conjunto de objetos en grupos homogéneos. A cada uno de estos grupos se les denomina clúster o conglomerado. El objetivo de este tipo de análisis es encontrar agrupaciones cuyos objetos sean lo más homogéneos entre sí (se quiere minimizar la variabilidad interna) y los objetos de clústeres diferentes lo más heterogéneos posible (Johnson, 1998).

Matemáticamente el análisis de clúster pretende crear una partición óptima de un conjunto C en distintos subconjuntos C_i con $i \in \mathbb{N}$ de tal forma que:

a) $C_i \neq \{\varnothing\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$

b) $C_i \cap C_k = \{\varnothing\}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$

c) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i = C$

Al conjunto de todas las particiones de C se le denota $P(C)$ y el problema fundamental corresponde a la optimización de la función $J(A)$ que calcula la calidad de la partición, donde $A \in P(C)$. La optimización de la función $J(A)$ requiere de la necesaria utilización de los espacios métricos o distancias, en donde una distancia en un conjunto X corresponde a una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que a cada par de puntos $x, y \in X$ le asocia un número real $d(x, y)$, que cumple las siguientes propiedades:

a) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$

Estas definiciones son las que dan el soporte matemático al análisis de clúster y permiten su desarrollo e implementación computacional en la aplicación Infostat.

Para llevar a cabo el análisis de clúster en la aplicación Infostat es necesario definir el método de aglomeración y la distancia o índice de similitud apropiado, los cuales dependen principalmente de la naturaleza de los datos y de los objetivos del estudio. Los índices de similitud, conocidos como distancias, están basadas en planos euclidianos n-dimensionales (Lindgren, 1968) y entre las más utilizadas se encuentran: la euclídea, la euclídea al cuadrado y la de mahalanobis. Con respecto a los métodos de aglomeración, existen los jerárquicos y los no jerárquicos. Estos últimos se diferencian de los primeros en cuanto a la aplicación del método, pues es estrictamente necesario conocer la cantidad de grupos desde el inicio y, además, se forman grupos homogéneos sin establecer relaciones entre ellos, en cambio, en los jerárquicos los grupos se van subdividiendo sucesivamente, siguiendo una jerarquía y decreciendo en homogeneidad conforme las ramas se hacen más amplias.

Como medida de poca distorsión de la estructura de los datos, Infostat calcula el coeficiente de correlación cofenética propuesto por Sokal y Rohlf (1962) que calcula la correlación entre las distancias iniciales, determinadas a partir de los datos originales y, las distancias finales con las cuales los individuos se han unido durante el desarrollo del método aglomerativo. El coeficiente cofenético toma valores entre 0 y 1. Los valores altos de este coeficiente indican que durante el proceso no ha ocurrido una gran perturbación en lo referente a la estructura original de los datos.

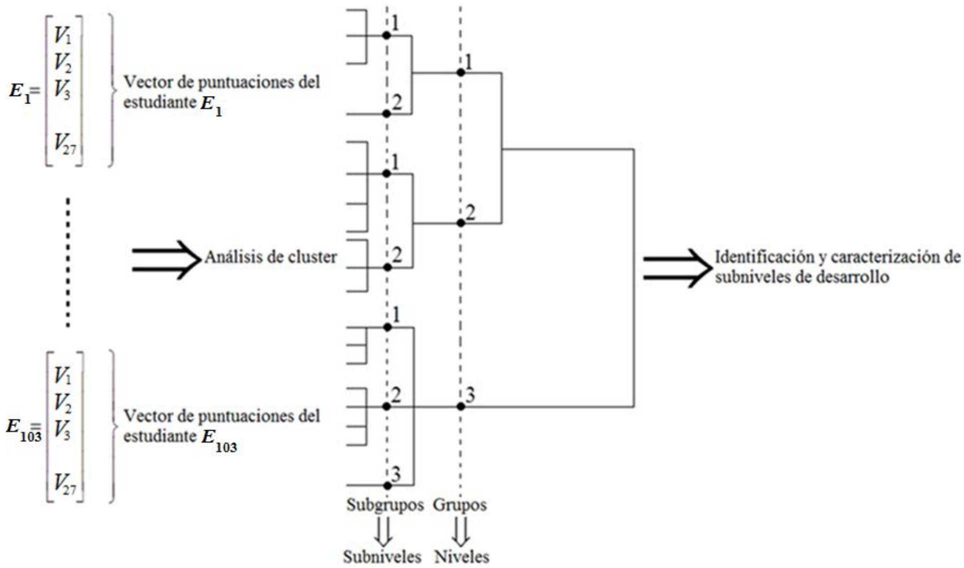


Figura 34. Esquema del análisis de clúster

En este estudio se pretendía identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del *esquema* de derivada en términos de las 27 variables que se habían definido. Para ello, se consideró cada uno de los 103 vectores asociados a cada protocolo de resolución, los cuales son de la forma $\left(V_1,V_2,...,V_{27}\right)$ y permitían realizar el análisis de clúster en la aplicación Infostat (ver Figura 34).

3.5.3. Análisis Estadístico Implicativo

Posteriormente, una vez determinadas las submatrices de datos por medio de análisis de clúster, se efectuó un análisis de frecuencias porcentuales en términos del uso correcto, o no, de las variables. Sin embargo, este tipo de análisis no indica qué variables son las más importantes al interior de cada subnivel de desarrollo y tampoco permite ver las relaciones entre ellas. Por tanto, para lograr observar las estructuras subyacentes del grupo de variables, en cada uno de los subniveles, se llevó a cabo un Análisis Estadístico Implicativo (Analyse Statistique Implicative, ASI, en Francés) que corresponde a un método de análisis de datos que permite, a partir de un conjunto de datos que interrelaciona una población de sujetos u objetos con un conjunto de variables, la extracción y estructuración del conocimiento en forma de normas y reglas generalizadas (Zamora, Gregori y Orús, 2009). Este tipo de análisis es efectivo para caracterizar las relaciones existentes en un grupo de variables y en este sentido, Bailleul (2000) sostiene que "el Análisis Estadístico Implicativo es una herramienta particularmente efectiva para estudiar representaciones y revelar sus estructuras organizacionales" (p. 189).

El Análisis Estadístico Implicativo es un método de minería de datos, no simétricos, que permite modelizar estadísticamente la cuasi-implicación, es decir, intenta cuantificar qué tan probable es que suceda la variable *b* si se ha observado la variable *a* en la población (Gras, Lerman y Rostam, 1981). Para evaluar estas cuasi-implicaciones se utiliza un conjunto de datos que interrelaciona una población (sujetos u objetos) con un conjunto de variables medidas en ella, desde las cuales se extrae la estructura de los datos expresada en términos de normas y reglas generalizadas y, a partir de la contingencia de estas reglas, la explicación y en consecuencia una determinada previsión o "predicción".

A diferencia de los métodos de análisis de datos simétricos basados, por ejemplo, en una distancia o en una correlación, los conjuntos de reglas obtenidas por medio del Análisis Implicativo pueden conducir a hipótesis de causalidad (Zamora *et al.*, 2009).

A pesar de su denominación, el Análisis Estadístico Implicativo en realidad engloba tres procedimientos distintos e independientes entre sí (Valls, 2014):

- Análisis de similitudes o clasificatorio. Corresponde a un análisis de clúster con una forma original de medir distancias las similitudes de Lerman (Lerman, 1981), en el cual se forma un árbol jerárquico similar a un dendograma. Para construir este árbol, se utilizó la aplicación CHIC 6.0, Classification Hierarchical, Implicative et Cohesive (Couturier y Gras, 2005) que realiza el estudio de aglomeración utilizando dichas similitudes y suponiendo una distribución binomial para cada una de las variables. Para la construcción del árbol, la aplicación considera que dadas dos variables aleatorias dicotómicas cualesquiera a y b medidas en una población E de cardinalidad n, en dónde los subconjuntos A y B corresponden a aquellos que verifican las variables a y b respectivamente, el índice de similitud ∂ está dado por (Lerman, 1981):

$$\partial(a,b)=\frac{card(A,B)-\dfrac{card(A)\cdot card(A,B)}{n}}{\sqrt{\dfrac{card(A)\cdot card(A,B)}{n}}}$$

  El índice de similitud ∂ indica que un par de variables a y b tienen mayor similitud cuando el número de estudiantes que verifican ambas variables es mayor que la frecuencia esperada bajo el supuesto de independencia.

  Finalmente, a partir de los índices de similitud calculados para cada par de variables a y b, la aplicación calcula una similitud interclases para A y B, y luego, determina la aglomeración jerárquica, la cual se construye teniendo en cuenta la mayor proximidad entre los elementos de una clase y la mayor distancia entre clases separadas. Se debe tener en cuenta que un árbol de similitud en el que se observan variables que no se relacionan con ninguna otra, sería un indicador de que los estudiantes tienen dificultades con esa variable, o bien, que no se presentan ningún problema con ella. Para verificarlo, es necesario contrastar el árbol con los datos.

- Análisis Implicativo. Genera una matriz con todas las implicaciones $a \Rightarrow b$ encontradas en los datos y forma un grafo implicativo con flechas relacionando las variables con las implicaciones más fuertes en distintos niveles e intensidades (80 %, 85 %, 90 % y 95 %). Para este caso, la aplicación CHIC 6.0, a diferencia del análisis de similitudes, considera una medida de asociación no simétrica entre las variables, es decir, trata de ver si la utilización correcta la variable a implica la utilización correcta de la variable b (donde la utilización correcta de la variable b puede, o puede que no, implique la utilización correcta de la variable a). Para la construcción del grafo implicativo, la aplicación considera que dadas dos variables aleatorias dicotómicas cualesquiera a y b medidas en una población E de cardinalidad n, en donde los subconjuntos A y B corresponden a aquellos que verifican las variables a y b respectivamente, el índice de implicación q de Gras (Gras, 1993; Gras 1996; Gras y Ratsima-Rajohn, 1996), está dado por:

$$q\left(a,\bar{b}\right)=\frac{card(A\cap\bar{B})-\dfrac{card\left(A\right)\cdot card\left(\bar{B}\right)}{n}}{\sqrt{\dfrac{card\left(A\right)\cdot card\left(\bar{B}\right)}{n}}}$$

En este caso, a y b representan dos variables mientras que A y B, los conjuntos de estudiantes que utilizan correctamente las variables a y b, respectivamente, $\bar{B}$ el conjunto de estudiantes que utiliza incorrectamente o no utiliza la variable b. Adicionalmente, la aplicación también entrega el valor φ de significancia estadística del índice, que sigue una distribución normal estándar $N(0,1)$, el cual está definido por la expresión:

$$\varphi\left(a,\bar{b}\right)=1-\alpha\Leftrightarrow P\left\lfloor card\left(X\cap\bar{Y}\right)\leq card\left(A\cap\bar{B}\right)\right\rfloor\leq\alpha$$

En donde X e $\bar{Y}$ corresponden a variables aleatorias independientes y dicotómicas, que tienen la misma cardinalidad que A y $\bar{B}$, respectivamente (Lerman, Gras y Rostan, 1981). Para nuestro estudio, las variables aleatorias corresponden a la utilización correcta o incorrecta (no utilización) de las variables por lo que la aplicación calcula un total de $\binom{27}{2}$ índices de implicación de los cuales solo muestra en el grafo implicativo, aquellas que se encuentran como mínimo por sobre el 80 % de significación según la elección del usuario.

- Análisis de cohesiones. Construye un árbol jerárquico, muy similar al árbol de similitudes, en el que se marcan de nuevo las variables con implicaciones más fuertes mediante flechas de color rojo. Para el análisis de cohesiones, CHIC 6.0 considera dos variables cualesquiera a y b, a partir de las cuales determina el valor

$p = máx\left(\varphi\left(a,\bar{b}\right),\varphi\left(b,\bar{a}\right)\right)$ que es necesario para el cálculo de la entropía H, pues permite dar cuenta del desorden entre las variables y calcular el grado de cohesión c entre ellas. Se encuentra dado por la expresión $c(a,b)=\sqrt{1-H^2}$ que tiene un rango de variación entre 0 y 1. El grado de cohesión mide el desequilibrio de las frecuencias de los casos $\bar{a}\wedge b$ y $a\wedge\bar{b}$ a favor del primero.

La cohesión de la clase ordenada de variables $\underline{A}=\left(a_1,\ldots,a_r\right)$ se calcula en cada paso con la siguiente expresión (Gras, Kuntz y Briand, 2001):

$$C\left(\underline{A}\right)=\left[\prod_{j\in\{2,\ldots,r\},\, j>i}^{i\in\{1,\ldots,r-1\}} c(a_i,a_j)\right]^{\frac{2}{r(r-1)}}$$

A partir de esta última expresión y dados los conjuntos de variables $\underline{A}=\left(a_1,\ldots,a_r\right)$ y $\underline{B}=\left(a_1,\ldots,a_s\right)$ con índices de cohesión $C\left(\underline{A}\right)$ y $C\left(\underline{B}\right)$ respectivamente, la intensidad de la implicación ψ de la clase $\underline{A}$ sobre la clase $\underline{B}$ se define por (Couturier, 2001):

$$\psi\left(\underline{A},\underline{B}\right)=\left\lfloor \sup_{i\in\{1,\ldots,r\}\; j\in\{1,\ldots,s\}} \varphi\left(a_i,\bar{b}_j\right)\right\rfloor\cdot\left[C\left(\underline{A}\right)\cdot C\left(\underline{B}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente, el árbol cohesivo, obtenido como resultado de efectuar los cálculos de los índices de cohesión implicativa entre las clases de variables, solo toma sentido bajo el supuesto de que dentro de cada clase de variables, cuya relación se examina con otras, exista cierta “cohesión” entre las variables constituyentes (Gras *et al.*, 2001). Al igual que en el análisis de similitud, es posible observar variables que no se relacionan con ninguna otra, por tanto, es necesario contrastar el árbol cohesivo con los datos.

Para el análisis de nuestros datos solo se utilizaron los arboles de similitud y los grafos implicativos, ya que los objetivos de esta investigación están enfocados en la caracterización de los subniveles de desarrollo en función de las relaciones y las estructuras subyacentes de los grupos de variables.

3.5.4. Análisis cualitativo de las entrevistas

Para realizar el análisis de las entrevistas clínicas se establecieron unidades de análisis, las cuales, dados los propósitos de nuestra investigación, estaban conformadas por fragmentos de las trascripciones de las entrevistas en donde se observaba que: (1) los estudiantes hacían uso de derivadas de orden superior, o relaciones entre ellas y/o, (2) los estudiantes se enfrentaban al tratamiento de puntos conflictivos. Por tanto, el análisis de las unidades seleccionadas se enfocó principalmente en comparar y describir las respuestas de los estudiantes de forma que fuera posible aproximarse a uno de los objetivos específicos del estudio relacionado con la *tematización* del *esquema* de derivada.

En particular, una vez realizadas las entrevistas clínicas se procedió a trascribirlas. Durante la trascripción se realizaron algunos comentarios que permiten aclarar lo que el estudiante estaba argumentando en cada pregunta. Esta primera etapa, permitió realizar un análisis preliminar en términos de las similitudes, o no, de las respuestas y argumentaciones de los estudiantes. Asimismo, permitió familiarizarnos con la totalidad de nuestros datos de una forma más holística.

Después de trascribir y familiarizarse con los datos, el foco se centró en identificar en qué fragmentos de las entrevistas se observaban nuestras unidades de análisis. Específicamente, se observó cómo los estudiantes vinculaban pares de derivadas sucesivas, o bien, cómo se enfrentaban al tratamiento de puntos conflictivos. En la Figura 35 se presenta un esquema en el cual se están identificando unidades de análisis relacionadas con el establecimiento de vínculos entre derivadas sucesivas. En este caso, corresponden a relaciones entre f', f'' y f'''.

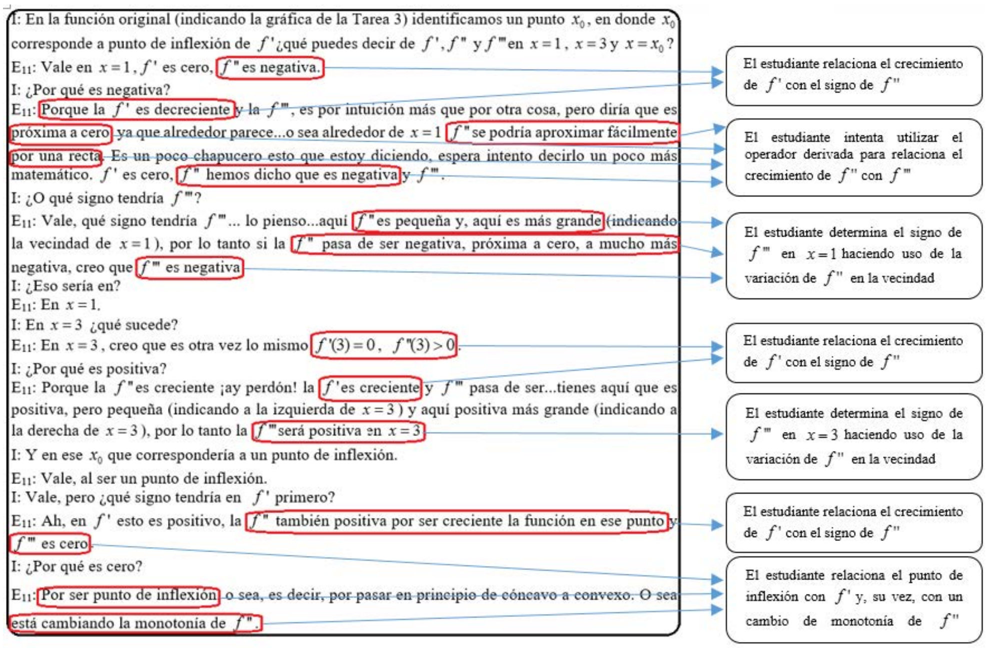


Figura 35. Ejemplo de identificación de unidades de análisis correspondiente a relaciones entre derivadas sucesivas

Capítulo 4. Análisis y Resultados

En este capítulo se presenta el análisis de datos que se ha dividido en cuatro secciones. En la primera sección se realiza un análisis descriptivo de las 27 variables definidas para el estudio de los 103 cuestionarios. En la segunda sección se describe el análisis de clúster realizado con las 27 variables para identificar subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada. En la tercera sección se detallan los resultados obtenidos de los Análisis Descriptivos e Implicativos para los subniveles de desarrollo Inter y Trans del *esquema* de la derivada. Finalmente, en la última sección se muestra el análisis realizado de las entrevistas clínicas en términos de los puntos conflictivos y las derivadas sucesivas identificando los elementos que permitieron caracterizar la *tematización* del *esquema* y sus matices.

4.1. Análisis descriptivo de las variables

Como ya se mencionó en el Capítulo 3 (Sección 3.5), cada uno de los protocolos de resolución de los 103 estudiantes ha sido discretizado en términos dicotómicos, es decir, con base en la identificación del uso correcto, o no, de cada una de las 27 variables (0 o 1 para cada variable), lo cual proporcionó como producto una matriz de datos de 103*x*27.

Para conocer la estructura general de los datos, como primer paso, se realizó un análisis descriptivo de las frecuencias porcentuales de uso correcto, o no, de las 27 variables. Dada la naturaleza de nuestras variables no es correcto aplicar un Análisis de Correlación, pues las relaciones entre ellas no son de tipo simétrico. En la Figura 36 se muestra las frecuencias porcentuales de cada una de variables en estudio, en donde la porción azul de la barra indica el porcentaje de observación de uso correcto y la porción roja, el porcentaje de no observación o uso incorrecto.

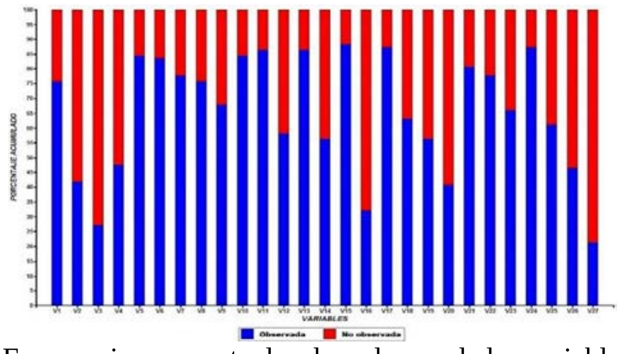


Figura 36. Frecuencias porcentuales de cada una de las variables en estudio

Como se observa en la Figura 36, las variables V_3, V_{16} y V_{27} tienen porcentajes de uso correcto que son menores al 35 %. Puntualmente, las variables V_3 y V_{27} están asociadas a considerar a la derivada como función (V_3, 27 %) y al establecimiento de relaciones (*coordinaciones*) en un segundo nivel (V_{27}, 21 %), es decir, entre f' y f''. Por su parte, la variable V_{16} describe la relación de implicación entre la convexidad de una función y el signo positivo de la segunda derivada (V16, 31 %). Estas variables son importantes y como se verá más adelante, conforman parte de la estructura subyacente de los subniveles Trans del *esquema* de la derivada que es donde son utilizadas con mayor frecuencia.

Igualmente, en la Figura 36 se observa que las variables V_{11}, V_{13}, V_{15} y V_{17} tienen un porcentaje de uso correcto que está por sobre el 85 %. En particular, las variables V_{11} y V_{13} asocian el signo de la primera derivada con la monotonía de la función ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente) y, las variables V_{15} y V_{17} asocian el signo de la segunda derivada con la curvatura de la función ($f''>0 \rightarrow f$ es convexa y $f''<0 \rightarrow f$ es cóncava). Estas variables son utilizadas frecuentemente en las tareas que se les proponen a los estudiantes en los cursos de Cálculo y posiblemente, esta sea una de las causas del alto porcentaje de uso correcto de ellas.

Para simplificar el análisis descriptivo de las otras variables, en la Tabla 13 se presentan los porcentajes de uso correcto de ellas agrupados por tipo de elemento al que hacen referencia. Además, se agregó el descriptor asociado a cada una de ellas.

Con relación a las variables asociadas al significado puntual de la derivada se observa que la utilización correcta del concepto de derivada como pendiente de la recta tangente (V_1, 78 %) es superior a su uso correcto como límite del cociente incremental (V_2, 42 %). Por su parte, el uso correcto de la noción de derivada como operador lineal (V_4, 48 %) se observa aproximadamente en la mitad de los estudiantes.

En cuanto a las variables asociadas a la determinación de valores extremos en ambos modos de representación, el porcentaje de uso correcto es mayor al 75 % en todos los casos (V_5, V_6, V_7 y V_8). En particular, los porcentajes de uso correcto de las variables que permiten determinar geométricamente un máximo local (V_5) y un mínimo local (V_7) son 84 % y 78 %, respectivamente. Por su parte, los porcentajes de uso correcto de las variables que permiten determinar analíticamente un máximo local (V_6) y un mínimo local (V_7) son 83 % y 76 % respectivamente. Se destaca que el uso correcto de estas variables implica la *coordinación* de *procesos* globales y puntuales en cada modo de representación, es decir, que permite relacionar el comportamiento de la derivada en intervalos contiguos a la vecindad de un punto.

Tabla 13. Frecuencias de uso correcto de las variables por elemento matemático y criterio que define cada variable

Elementos	Criterio	Porcentaje
1. Derivada en un punto $f'(a)$.	V_1: Significado geométrico.	76 %
	V_2: Significado analítico.	42 %
2. Función derivada $f'(x)$.	V_3: Derivada como función.	27 %
	V_4: Derivada como operador.	48 %
3. Valor extremo de f.	V_5: Máximo local geométricamente.	84 %
	V_6: Máximo local analíticamente.	83 %
	V_7: Mínimo local geométricamente.	78 %
	V_8: Mínimo local analíticamente.	76 %
4. Punto de inflexión de f.	V_9: Punto de inflexión geométricamente.	68 %
	V_{10}: Punto de inflexión analíticamente.	84 %
5. Relación de equivalencia ilógica entre el signo de f' en un intervalo I y, la monotonía de f en dicho intervalo.	V_{11}: $f'>0 \to f$ estrictamente creciente.	86 %
	V_{12}: f estrictamente creciente $\to f'>0$.	58 %
	V_{13}: $f'<0 \to f$ estrictamente decreciente.	86 %
	V_{14}: f estrictamente decreciente $\to f'<0$.	56 %
6. Relación de equivalencia ilógica entre el signo de f'' en un intervalo I y, la curvatura de f en dicho intervalo.	V_{15}: $f''>0 \to f$ convexa.	88 %
	V_{16}: f convexa $\to f''>0$.	31 %
	V_{17}: $f''<0 \to f$ cóncava.	87 %
	V_{18}: f cóncava $\to f''<0$.	63 %
7. Puntos de no derivabilidad de f.	V_{19}: Derivadas laterales.	56 %
	V_{20}: Puntos conflictivos.	41 %
8. Continuidad y derivabilidad de f.	V_{21}: Si f es derivable en $x=a \to f$ es continua en $x=a$.	81 %
	V_{22}: f no es continua en $x=a \to f$ no es derivable en $x=a$.	78 %
Otras variables generales observables.	V_{23}: Determinar intervalos para esbozar una función a partir de información gráfica.	66 %
	V_{24}: Determinar intervalos para esbozar una función a partir de información analítica.	98 %
	V_{25}: Esbozar una función a partir de sus propiedades gráficas.	61 %
	V_{26}: Esbozar una función a partir de sus propiedades analíticas.	47 %
Conexiones entre el par $f'-f''$.	V_{27}: Relaciones entre f' y f''.	21 %

En los siguientes párrafos se presentan todas las descripciones de las variables que se basan en la Tabla 13.

Por otra parte, en relación con las variables asociadas a la determinación de los puntos de inflexión, se observa que existe una diferencia significativa entre el uso correcto del punto de inflexión desde el modo de representación analítico (V_{10}, 84 %) por sobre el gráfico (V_9, 64 %). Lo anterior, puede ser consecuencia del tipo de enseñanza que han recibido los estudiantes durante su trayectoria académica, la cual tiene una fuerte tendencia hacia el uso del modo de representación analítico y al aprendizaje de técnicas o procedimientos en este modo.

De la misma forma, en la Tabla 13 se observan los porcentajes de uso correcto de las variables asociadas con la relación entre el signo de la primera derivada y la monotonía de la función (V_{11}, V_{12}, V_{13} y V_{14}). Se observa que las variables V_{11} y V_{13}, que relacionan el signo de la derivada con la monotonía de la función en sentido directo ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente), poseen porcentajes altos e iguales de uso correcto (86 %), sin embargo, las variables V_{12} y V_{14}, que corresponden a las implicaciones contrarias (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$) tienen porcentajes de uso correcto significativamente inferiores, pero superiores al 50 %. Este mismo fenómeno también se observa con las variables asociadas a la relación entre el signo de la segunda derivada y la curvatura de la función (V_{15}, V_{16}, V_{17} y V_{18}). En particular, los porcentajes de uso correcto de las variables V_{15} y V_{17}, que relacionan el signo de la segunda derivada con la curvatura de la función en sentido directo ($f''>0 \rightarrow f$ es convexa y $f''<0 \rightarrow f$ es cóncava), son prácticamente iguales (88 % y 87 % respectivamente), sin embargo, para las variables V_{16} y V_{18}, que corresponden a las implicaciones contrarias (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$), los porcentajes de uso correcto son inferiores, específicamente, la variable V_{18}(f es cóncava $\rightarrow f''<0$) alcanza el 63 % mientras que la variable V_{16} (f es convexa $\rightarrow f''>0$) solo alcanza el 32 %. Este fenómeno vinculado con las dificultades para establecer las implicaciones contrarias es importante, ya que por un lado, indica que los estudiantes tienen problemas para establecer relaciones del tipo "equivalencia lógica" y, por otro, aún no logran la síntesis de los modos de representación, pues la utilización correcta de las variables V_{12}, V_{14}, V_{16} y V_{18} implica, implícitamente, una conversión de información gráfica en analítica. Estas últimas características definirán la pertenencia de un estudiante al subnivel de desarrollo Trans B, como se verá más adelante.

Con respecto a los porcentajes de uso correcto de las variables asociadas a la utilización de las derivadas laterales (V_{19}, 56 %) y al tratamiento correcto de puntos de no derivabilidad 'puntos conflictivos' (V_{20}, 41 %), se observa que en ambos casos es próximo al 50 %.

Por otra parte, en relación con las variables asociadas a la relación entre derivabilidad y continuidad (V_{21} y V_{22}), se observa que ambas poseen porcentajes de uso correcto que no difieren significativamente, 81 % para la variable V_{21} y 78 % para la variable V_{22}. Sin embargo, se observa un uso correcto levemente mayor de la variable V_{21} que relaciona directamente la derivabilidad en un punto con la continuidad (sí f derivable en $x = a$ entonces f continua en $x = a$) por sobre el uso de la variable V_{21} que corresponden a la relación contrarrecíproca (sí f no es continua en $x = a$ entonces f no es derivable en $x = a$).

Finalmente, en la Tabla 13 se presentan los porcentajes de uso correcto de las restantes variables asociadas a la resolución de las tareas del cuestionario. En particular, las variables V_{23} y V_{25} que están relacionadas con la interpretación de la información gráfica proporcionada para determinar intervalos (V_{23}) y esbozar una gráfica correcta a partir de esta información (V_{25}), poseen porcentajes de uso correcto que no difieren significativamente y son superiores al 60 %, específicamente, es 63 % para la variable V_{23} y 61 % para la V_{25}. Por otra parte, las variables V_{24} y V_{26} que se relacionan con la interpretación de la información analítica para determinar intervalos (V_{24}) y esbozar una gráfica correcta a partir de esta información (V_{26}), poseen porcentajes de uso correcto que difieren significativamente, es más, la variable V_{24} (87 %), supera en un 40 % a la variable V_{26} (47 %). Esto indica que un gran número de estudiantes pueden determinar los intervalos para graficar a partir de la información analítica, aunque, no son capaces de esbozar la gráfica correctamente. Lo anterior, quizás sea consecuencia de la contradicción presente en la Tarea 1. Por último, en relación con la variables V_{27} que implican el establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada, se observa que su uso correcto es muy poco frecuente y solo lo logra, aproximadamente, un quinto de los estudiantes (21 %). Esta última variable es importante en la estructura implicativa de los datos, además, como se observará más adelante esta determina la estructura subyacente del *esquema*, así como la del nivel de desarrollo Trans y subnivel Trans A.

4.2. Análisis de clúster

Como se mencionó la Sección 3.5.2, el análisis de clúster no presenta una solución única, sino que el resultado de este análisis depende de las características del procedimiento empleado, es decir, de la distancia utilizada y del método de agrupamiento o aglomerativo. Si bien en este estudio se pretende identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada, se asumió, lo que indica la teoría APOE en cuanto a que los niveles de desarrollo de un *esquema* de cualquier concepto matemático son tres y que según este marco corresponden a la triada Intra, Inter y Trans (Piaget y García, 1983; Arnon *et al.*, 2014). Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se construyó con la aplicación Infostat, 6 clústeres distintos combinando las distancias (euclídea, euclídea al cuadrado y mahalanobis) y los métodos de agrupamiento (encadenamiento simple y completo). Los valores de las correlaciones cofenéticas para cada uno de los 6 clústeres jerárquicos obtenidos se presentan en la Tabla 14.

Tabla 14. Clústeres jerárquicos obtenidos variando la distancia y el tipo de agrupamiento seleccionados

Distancia	Tipo de agrupamiento	Correlación cofenética
Euclídea al cuadrado.	Encadenamiento completo.	0,859
Euclídea.	Encadenamiento completo.	0,747
Manhattan (Mahalanobis).	Encadenamiento completo.	0,660
Euclídea al cuadrado.	Encadenamiento simple.	0,723
Euclídea.	Encadenamiento simple.	0,775
Manhattan (Mahalanobis).	Encadenamiento simple.	0,723

Considerando los resultados obtenidos de los 6 clústeres construidos y sus correspondientes correlaciones cofenéticas se seleccionó aquel que tuvo un coeficiente de correlación cofenética más alto, el cual correspondió a 0,859. La justificación de esta decisión se basó en lo planteado por Sokal y Rohlf (1962) quienes indican que este coeficiente asegura una buena clasificación cuando su valor es próximo a 1.

Como resultado del análisis de clúster con distancia euclídea al cuadrado y método de aglomerativo de encadenamiento completo, se obtuvo el dendograma que se muestra en la Figura 37.

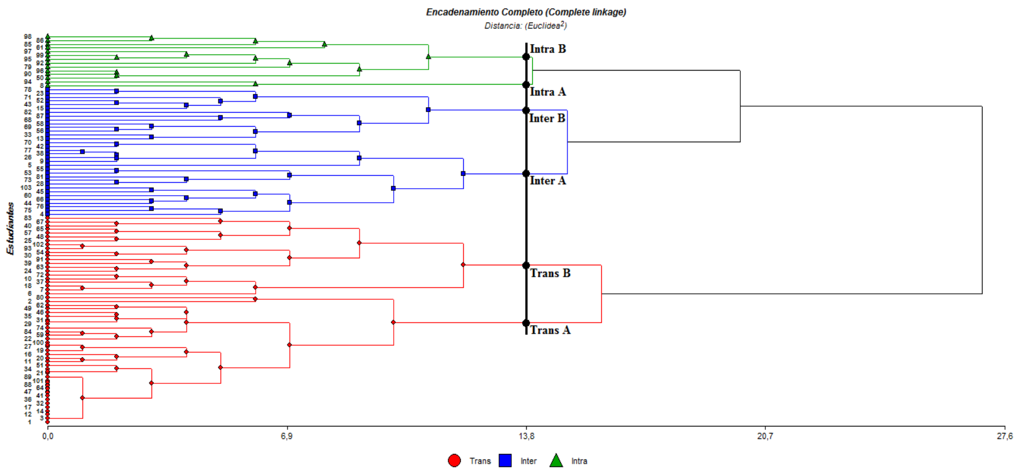


Figura 37. Dendograma completo obtenido con distancia euclídea al cuadrado y método de agrupamiento de encadenamiento completo

Como puede observarse, el análisis de clúster determinó los tres niveles de desarrollo del *esquema* de la derivada Intra-derivada, Inter-derivada y Trans-derivada (condición dada), mediante tres anidamientos diferenciados por medio de los colores verde, azul y rojo, respectivamente. Para cada uno de estos anidamientos se identificaron dos subgrupos que se corresponden con subniveles de desarrollo del *esquema* asociados a cada uno de los niveles. Como criterio de selección de los subniveles (subgrupos) se seleccionó el punto medio de la distancia máxima del dendograma, pues como indican Balzarini *et al*. (2008) "es un criterio frecuentemente utilizado trazar la línea de referencia a una distancia igual al 50 % de la distancia máxima" (p. 175). En cada caso, se denominó a estos subniveles A y B, lo cual implica una jerarquía en cuanto a la cantidad de elementos utilizados y las relaciones que se establecen en cada uno de ellos. Por tanto, de aquí en adelante se habla de los subniveles de desarrollo Intra A, Intra B, Inter A, Inter B, Trans A y Trans B.

Para facilitar el análisis y la visualización de los subniveles obtenidos se dividió el dendograma de la Figura 37 para cada nivel de desarrollo del *esquema* de la derivada. En la Figura 38 se muestra la porción de dendograma correspondiente al nivel de desarrollo Intra-derivada.

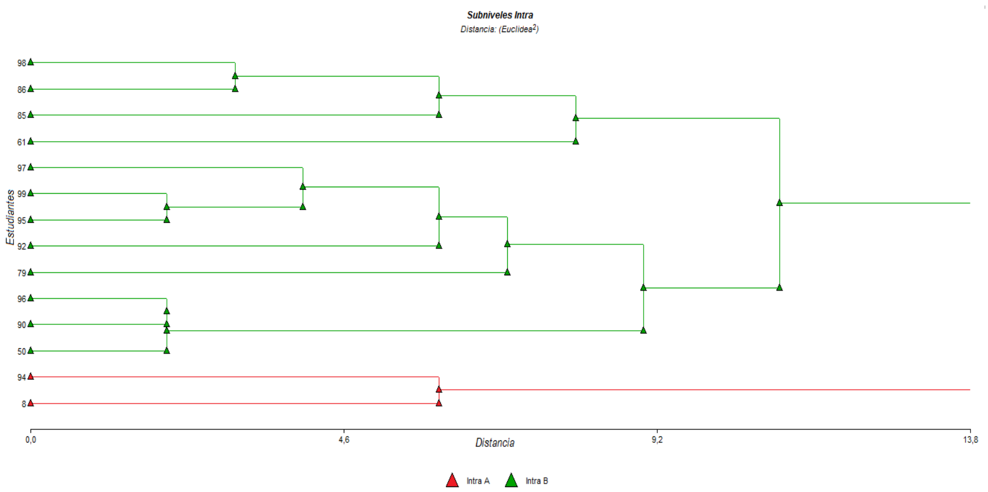


Figura 38. Dendograma correspondiente a los subniveles Intra-derivada

En la Figura 38, el color rojo corresponde al subnivel de desarrollo Intra A y el subgrupo de color azul, al subnivel de desarrollo Intra B. Los estudiantes asignados a cada uno de los subniveles de desarrollo Intra-derivada se muestran en la Tabla 15.

Tabla 15. Estudiantes asignados a los subniveles de desarrollo Intra A e Intra B

	Nivel de desarrollo Intra-derivada	
Subnivel	Intra A	Intra B
Estudiantes.	E8, E98.	E50, E61, E79, E85, E86, E90, E92, E94, E95, E96, E97, E99.
Total.	2	12

En relación con los subniveles de desarrollo Intra-derivada, el clúster ha determinado que existe un número reducido de estudiantes pertenecientes a estos dos subniveles de desarrollo. Lo anterior, puede estar condicionado por las características propias de la muestra, ya que estos estudiantes eran de distintos cursos del grado doble de Matemáticas y Física, además, habían superado al menos una asignatura de Cálculo o Análisis Matemático, por tanto, era de esperar que tuvieran cierto dominio de los elementos matemáticos involucrados en la resolución de las tareas del cuestionario.

Por su parte, en la Figura 39 se muestra un zum del dendograma correspondiente al nivel de desarrollo Inter-derivada y sus correspondientes subniveles Inter A e Inter B. En donde el color rojo corresponde al subnivel de desarrollo Inter A y el subgrupo de color azul, al sub-nivel de desarrollo Inter B.

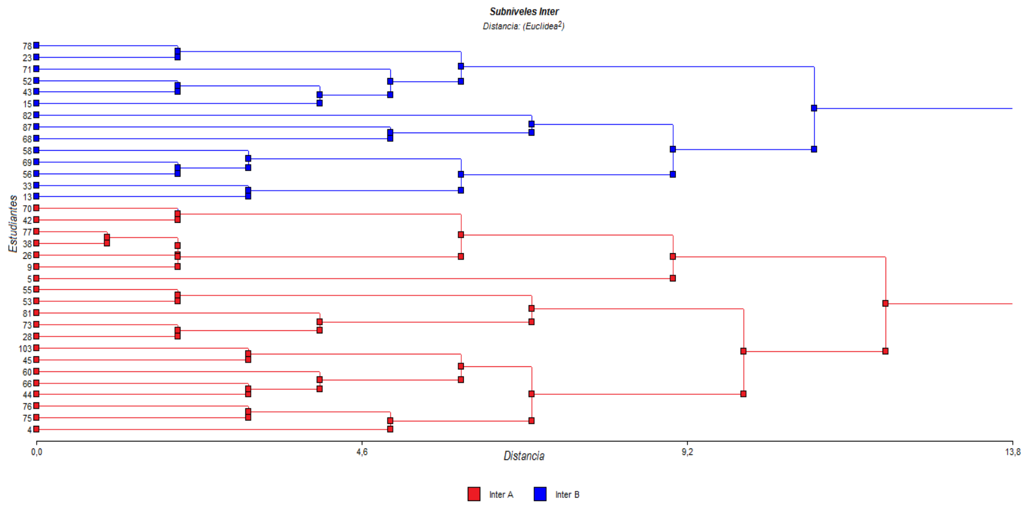


Figura 39. Dendograma correspondiente a los subniveles Inter-derivada

Los estudiantes asignados por el clúster a estos subniveles de desarrollo se presentan en la Tabla 16. Asimismo, se observa que la cantidad de estudiantes asignados a los subniveles Inter es muy superior a la de los estudiantes clasificados en los subniveles de desarrollo Intra.

Tabla 16. Estudiantes asignados a los subniveles de desarrollo Inter A e Inter B

	Nivel de desarrollo Inter-derivada	
Subnivel	Inter A	Inter B
Estudiantes.	E4, E5, E9, E26, E28, E38, E42, E44, E45, E53, E55, E60, E66, E70, E73, E75, E76, E77, E81, E103.	E13, E15, E23, E33, E43, E52, E56, E58, E68, E69, E71, E78, E82, E87.
Total.	20	14

Del mismo modo, en la Figura 40 se presenta la porción final del clúster correspondiente al nivel de desarrollo Trans-derivada.

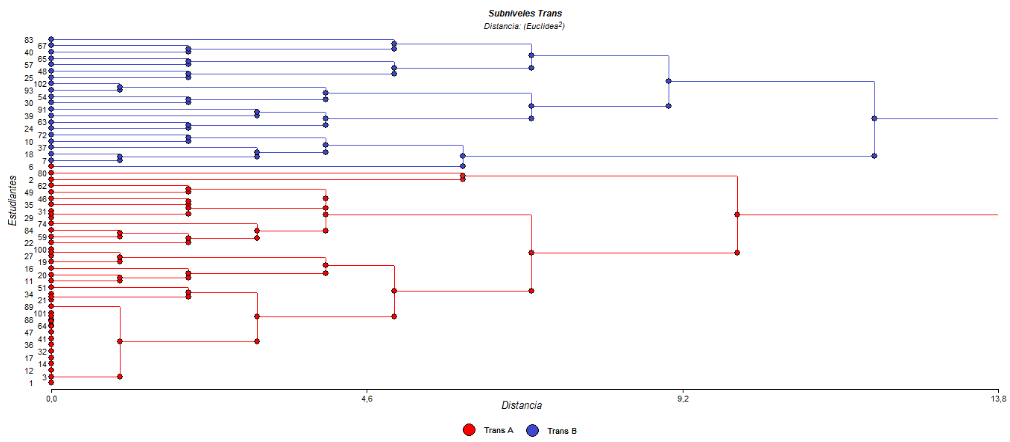


Figura 40. Dendograma correspondiente a los subniveles Trans-derivada

En la Figura 40, el subgrupo anidado de color rojo corresponde al subnivel de desarrollo Trans A y el subgrupo de color azul, al subnivel de desarrollo Trans B. Los estudiantes asignados por el clúster a estos subniveles de desarrollo se presentan en la Tabla 17.

Tabla 17. Estudiantes asignados a los subniveles de desarrollo Trans A y Trans B

	Nivel de desarrollo Trans-derivada	
Subnivel	Trans A	Trans B
Estudiantes.	E1, E2, E3, E11, E12, E14, E16, E17, E19, E20, E21, E22, E27, E29, E31, E32, E35, E36, E40, E41, E46, E47, E49, E51, E59, E62, E64, E74, E80, E84, E88, E89, E100, E101.	E6, E7, E10, E18, E24, E25, E30, E34, E37, E39, E48, E54, E57, E63, E65, E67, E72, E83, E91, E93, E102.
Total.	34	21

Como se observa la cantidad de estudiantes asignados a los subniveles Trans es mayor a la de los estudiantes clasificados en los subniveles de desarrollo Intra. Lo anterior, como ya se mencionó, puede justificarse por la naturaleza de nuestra muestra.

Finalmente, el análisis de clúster proporcionó una partición de los datos en 6 submatrices que permiten ahondar en la caracterización de cada uno de los subniveles de desarrollo. Sin embargo, dado que la cantidad de estudiantes asignados a los subniveles de desarrollo Intra-derivada es muy baja, solo se consideraron las submatrices asociadas a los subniveles Inter-derivada y Trans-derivada para realizar el Análisis Estadístico Descriptivo y el Análisis Estadístico Implicativo con el fin de caracterizar cada uno de estos subniveles.

4.3. Análisis Estadístico Descriptivo e Implicativo para los subniveles de desarrollo Inter-derivada y Trans-derivada

En las siguientes subsecciones 4.3.1, 4.3.2, 4.3.4 y 4.35 se desarrolla la misma estructura de análisis para cada uno de los subniveles de desarrollo Inter y Trans. Se inicia con el análisis estadístico descriptivo de las 27 variables para cada uno de los subniveles. Posteriormente, se realiza un análisis de similitud para determinar la estructura de los datos en cada uno de ellos y se completa el análisis con un grafo implicativo para cada caso. Además, se complementan estos análisis con la construcción de grafos implicativos parciales determinados por los grupos de similitud de cada subnivel. Finalmente, se interpretan y comparan los resultados de los distintos análisis para los subniveles Inter y Trans en términos de la teoría APOE.

Es importante indicar que el Análisis Implicativo, que aquí se realiza, está enfocado en encontrar las variables más importantes de cada subnivel de desarrollo y que constituyen la estructura subyacente que los sustenta.

4.3.1. Subnivel Inter B

El primer análisis es descriptivo y está basado en el uso correcto e incorrecto de las 27 variables. En la Figura 41 se muestran estos porcentajes para el caso del subnivel de desarrollo Inter B. Al igual que en el caso del análisis descriptivo general, la porción azul de la barra indica en porcentaje de uso correcto de la variable, mientras la porción roja indica el no uso, o bien, el uso incorrecto de ellas.

Como se observa en la Figura 41, los estudiantes pertenecientes a este subnivel de desarrollo muestran dificultades en la utilización correcta de gran parte de las variables asociadas a la resolución de las tareas del cuestionario. En particular, en 15 de estas variables el porcentaje de uso correcto es menor al 50 % y 5 de las 27 no son utilizadas correctamente por ninguno de los estudiantes, o bien, no fueron observadas en sus protocolos de resolución.

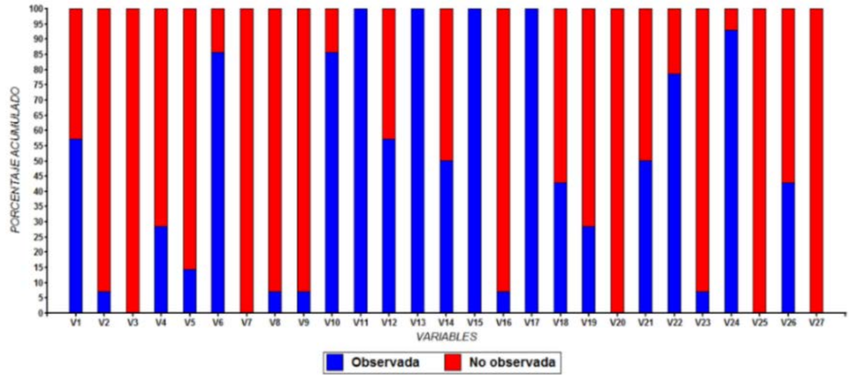


Figura 41. Frecuencias porcentuales de uso correcto e incorrecto de las variables para el subnivel de desarrollo Inter B

Las variables cuyo porcentaje de uso correcto es 0 % corresponden a V_3, V_7, V_{20}, V_{25} y V_{27}. En donde la variable V_3 está vinculada a la consideración de la derivada como función, V_7 a la determinación de un valor mínimo local a partir de información gráfica, V_{20} al tratamiento correcto de puntos conflictivos, V_{25} a la capacidad para determinar intervalos a partir de la información gráfica proporcionada y V_{27} al establecimiento de relaciones entre la primera y la segunda derivada.

Por otra parte, se destaca que los estudiantes del subnivel Inter B, en general, no presentan dificultades para establecer las relaciones entre el signo de la primera derivada y la monotonía, lo cual corresponde al uso correcto de las variables V_{11} y V_{13} ($f' > 0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f' < 0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente). Del mismo modo, también establecen, sin mayores dificultades, relaciones entre el signo de la segunda derivada y la curvatura de la función, lo cual corresponde al uso correcto de las variables V_{15} y V_{17} ($f'' > 0 \rightarrow f$ es convexa y $f'' < 0 \rightarrow f$ es cóncava). Además, son capaces de determinar los intervalos para esbozar la gráfica de una función a partir de la información analítica proporcionada (V_{24}) y pueden determinar máximos locales y puntos de inflexión utilizando este mismo tipo de información (V_6, V_{10}).

Para observar, la estructura general de similitud presente en la submatriz de datos correspondiente al subnivel de desarrollo Inter B, se construyó el árbol de similitud que se presenta en la Figura 42.

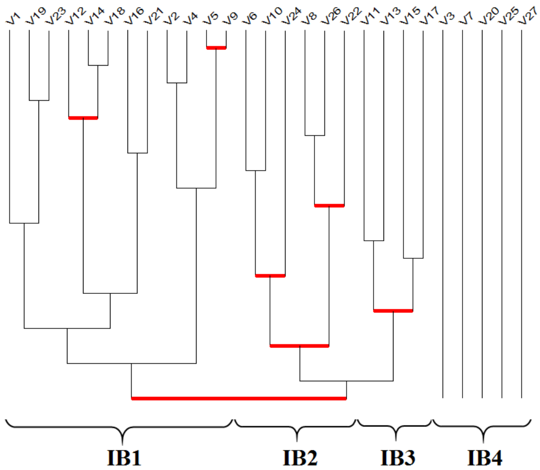


Figura 42. Árbol de similitud Inter B

A partir del árbol se identificaron cuatro grupos distintos de similitud que fueron etiquetados como IB1, IB2, IB3 e IB4:

- Grupo IB1. Este grupo presenta dos conexiones de similitud altamente significativas. Una ubicada en el primer nivel que conecta las variables asociadas con la determinación de máximos y puntos de inflexión a partir de información geométrica que corresponden a las variables V_5 y V_9, respectivamente. La segunda de estas conexiones significativas se produce en el nivel cinco de similitud. Además, al interior de este grupo se encuentran las variables que conectan la monotonía y curvatura de una función, es decir, las variables V_{12} y V_{14} (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$). Asimismo, también se observan las variables que conectan la curvatura de la función con el signo de la segunda derivada, es decir, las variables V_{16} y V_{18} (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$). Igualmente, se observa que en este grupo se encuentran las variables asociadas a la comprensión puntual de la derivada como pendiente de la recta tangente V_1 y como límite del cociente incremental V_2.

- Grupo IB2. En este grupo hay tres conexiones de similitud altamente significativas, sin embargo, sus valores son bajos, pues están ubicadas en niveles superiores al nueve. Al interior de este grupo se observa la variable V_6 asociada a la determinación correcta de un máximo local a partir de información analítica, la variable V_8 asociada a la determinación correcta de un mínimo local a partir del mismo tipo de información y la variable V_{10} vinculada a la determinación correcta de un punto de inflexión, igualmente, a partir de la información analítica. Asimismo, se observan las variables asociadas a la interpretación de la información analítica para determinar intervalos (V_{24}) y la capacidad de esbozar una gráfica a partir de ella (V_{26}). También, está en este grupo, la variable asociada con la relación directa entre derivabilidad y continuidad (V_{22}).
- Grupo IB3. Este grupo de similitud presenta una conexión de similitud altamente significativa y está conformado por las variables que indican relaciones directas/contrarias entre el signo de la primera derivada y la monotonía de la función. Específicamente, se encuentran las variables V_{11} y V_{13} que conectan el signo de la primera derivada con la monotonía de la función ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente), y las variables que se relacionan con las implicaciones contrarias, es decir, V_{15} y V_{17} que conectan la monotonía de la función con el signo de la primera derivada (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$).
- Grupo IB4. Este grupo de variables está conformado por aquellas que no fueron utilizadas, o bien, por las que se usaron incorrectamente. Lo anterior, solo puede confirmarse al contrastar la submatriz de datos del subnivel con las frecuencias de uso

correcto proporcionadas por la Figura 41. Por tanto, estas variables proporcionan información respecto a las dificultades inherentes de los estudiantes de este subnivel de desarrollo.

Con el objeto de ver las relaciones entre las variables y no solo su comportamiento en términos de su similitud, en la Figura 43 se presenta el grafo implicativo general para este subnivel de desarrollo.

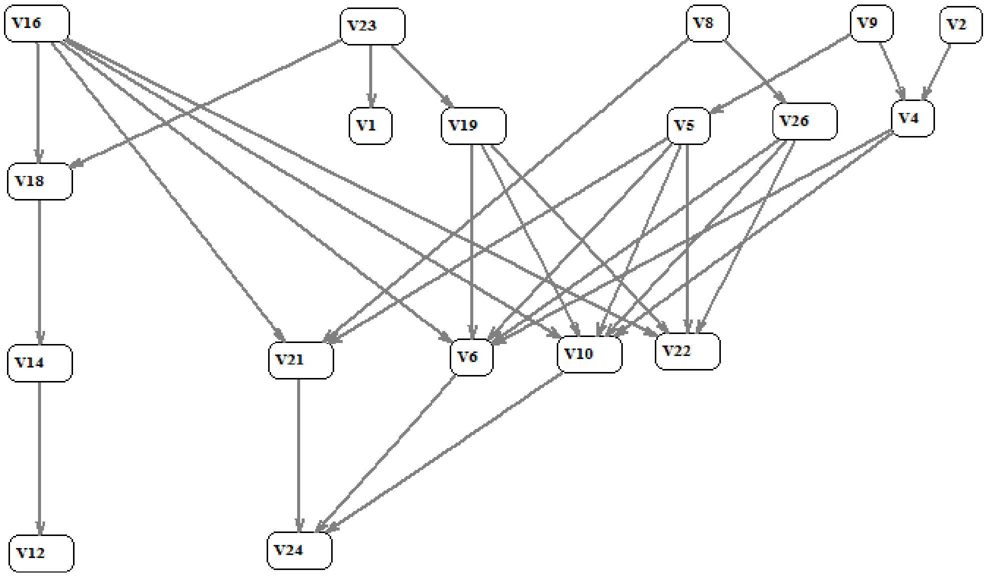


Figura 43. Grafo implicativo completo al 85 % para el subnivel de desarrollo Inter B

El grafo de implicativo del subnivel Inter B tiene tres niveles de implicaciones y la variable más importante es la V_{16}, asociada a la conexión entre la convexidad en un intervalo y el signo positivo de f'' en dicho intervalo, de donde surgen cinco cadenas de implicaciones. Además, en el primer nivel de implicación se observa que la variable más importante es la V_5, la que está asociada a la determinación de máximos locales a partir de la información analítica, pues desde ella nacen cuatro cadenas de implicaciones.

Para perfilar de mejor forma la estructura subyacente a este subnivel de desarrollo se construyeron grafos implicativos parciales para los grupos IB1 e IB2, los cuales se muestran en la Figura 44. Es importante puntualizar que el grafo implicativo para el subgrupo de similitud IB3 no fue construido por la aplicación (CHIC 6.0). Esto se debe a que las relaciones implicativas al interior de este grupo de similitud eran menores al 50 %, valor que corresponde a la cota inferior permitida para la construcción de los grafos. Además, dado que no todas las variables utilizadas en la investigación se visualizan en las relaciones implicativas superiores al 85 % (color gris). Se decidió utilizar una de las opciones de software (CHIC 6.0) para modificar la cota inferior de visualización en algunos casos.

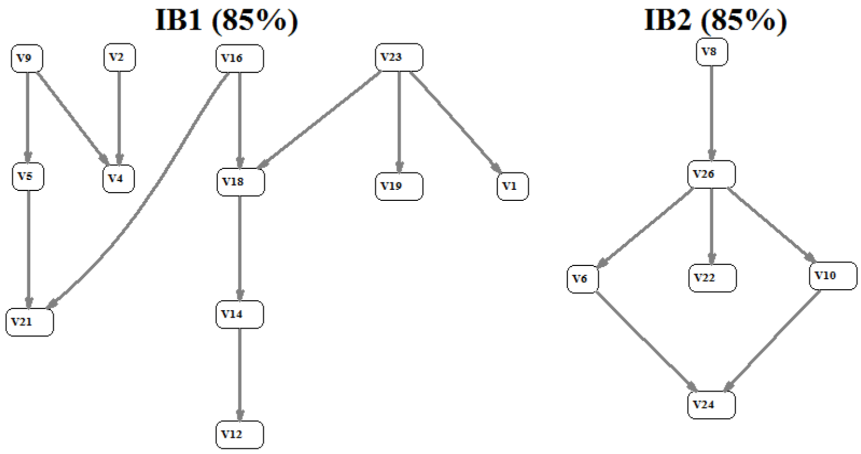


Figura 44. Grafos implicativos parciales para los grupos de similitud IB1 e IB2 del subnivel de desarrollo Inter B

Los grafos implicativos de los subgrupos IB1 e IB2, muestran que las variables más importantes en la generación de cadenas implicativas son:

- la variable V_{23} que indica la capacidad de determinar intervalos para esbozar una función a partir de la información gráfica.
- la variable V_8 que indica la determinación de mínimos locales a partir de información analítica. Aquí, es importante recordar que en ninguna de las tareas del cuestionario se solicitaba la determinación de un mínimo local a partir de información analítica. Por tanto, se infirió su uso correcto a partir del trabajo realizado por cada estudiante en la determinación del mínimo de la Tarea 3, que implicaba un cambio de modo representación.
- la variable V_9 que indica la capacidad para determinar puntos de inflexión a partir de la información gráfica proporcionada.

Para finalizar el análisis del subnivel Inter B de desarrollo en la Tabla 18 se muestra un resumen con las principales características y variables subyacentes a este subnivel de desarrollo.

Tabla 18. Características y variables subyacentes del subnivel de desarrollo Inter B

Subnivel Inter B	
Características principales	Variables subyacentes a su estructura
Pueden *coordinar* algunos *procesos* globales, sin embargo, presentan dificultades para *coordinar* estos *procesos* con *procesos* puntuales. Por tanto, solo en algunos casos pueden determinar valores extremos o puntos de inflexión. Presentan graves dificultades para construir las *reversiones* de las *coordinaciones* de *procesos* que vinculan la monotonía y curvatura	La variable V_{23} asociada a la determinación de intervalos a partir de la información gráfica proporcionada. La variable V_8 asociada a la determinación de un mínimo local a partir de la información analítica (el uso correcto de esta variable fue inferido a partir de la variable V7).

de una función con los signos de la primera y segunda derivada. Por tanto, tienen problemas para interpretar la información proporcionada en un contexto gráfico. No utilizan correctamente las derivadas laterales, lo cual provoca que tengan dificultades con los puntos conflictivos. Además, no consideran a la derivada como función. Aún se presentan algunas dificultades para utilizar correctamente la relación entre derivabilidad y continuidad (directa y contrarrecíproca). No pueden esbozar correctamente una función a partir de la información gráfica proporcionada. Lo cual se debe a que no construyen las *reversiones* de los *procesos* globales que relacionan la información gráfica con la analítica. No establecen relaciones entre la primera y segunda derivada. No han logrado la síntesis de los modos de representación.	La variable V_9 asociada a la determinación de un punto de inflexión a partir de información geométrica.

4.3.2. Subnivel Inter A

Al igual que como se realizó el análisis y caracterización del subnivel Inter B determinado por el clúster. En los siguientes párrafos se desarrolla la misma estructura de análisis para perfilar la caracterización del subnivel de desarrollo Inter A.

Se comienza con el análisis descriptivo del subnivel Inter A en términos de las frecuencias de uso correcto e incorrecto de cada una de las variables, las cuales pueden observarse en la Figura 45.

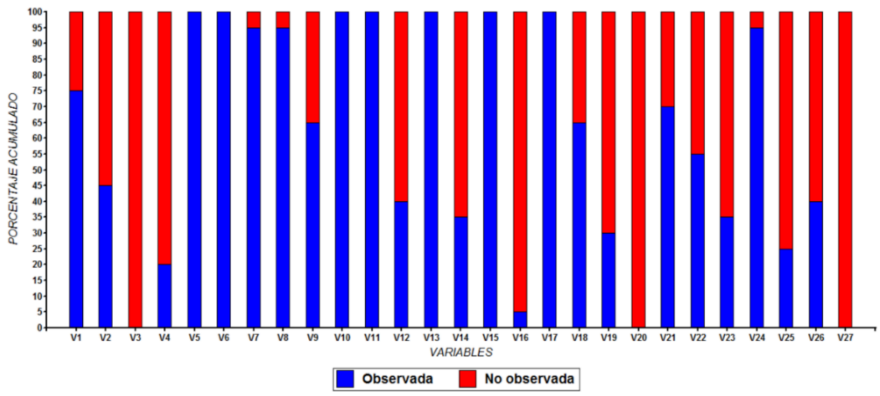


Figura 45. Frecuencias porcentuales de uso correcto e incorrecto de las variables para el subnivel de desarrollo Inter A

En la Figura 45 se observa que entre las características más importantes de este subnivel de desarrollo se encuentra el uso incorrecto o la no utilización de tres variables V_3, V_{20} y V_{27}. En donde V_3 está asociada con la consideración de la derivada como función, V_{20} con el tratamiento correcto de los puntos conflictivos y V_{27} con el establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada. Asimismo, se observa que los estudiantes pertenecientes a este subnivel, en general, no presentan dificultades en la determinación de valores extremos y puntos de inflexión (V_5, V_6, V_7, V_8, V_9 y V_{10}). Específicamente, no tienen dificultades para determinar correctamente un máximo local a partir de información geométrica (V_5) y tampoco para determinarlo a partir de información analítica (V_6), y lo mismo ocurre para el caso de la determinación correcta de un mínimo local (V_7 y V_8) y para el caso de establecimiento de la existencia de un punto de inflexión (V_9 y V_{10}). Igualmente, la Figura 45 muestra que los estudiantes de este subnivel establecen relaciones, tanto directas como contrarias, entre la monotonía de la función y el signo de la primera derivada (V_{11}, V_{13}, V_{15} y V_{17}), del mismo modo que lo hacían los estudiantes del subnivel de desarrollo Inter B, es decir, que establecen relaciones entre el signo de la primera derivada ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente) y, asimismo, establecen relaciones entre el signo de la segunda derivada y la curvatura de la función ($f''>0 \rightarrow f$ es convexa y $f''<0 \rightarrow f$ es cóncava). Además, se observa que tienen dificultades para relacionar la monotonía de la función con el signo de la primera derivada, es decir, que tienen porcentajes bajos de uso correcto en las variables V_{12} y V_{14} (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$), y lo mismo ocurre con las variables que conectan la curvatura de la función con el signo de la segunda derivada, que corresponden a las variables V_{16} y V_{18} (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$).

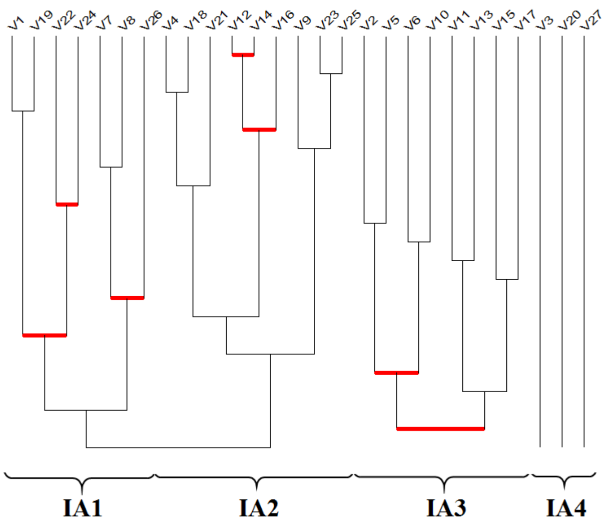


Figura 46. Árbol de similitud Inter A

Para refinar la primera caracterización realizada, en términos de las frecuencias porcentuales de uso correcto de algunas de las variables, al igual que el caso del subnivel de desarrollo Inter B, se llevó a cabo un análisis de similitud general (ver Figura 46) para observar el agrupamiento natural de las variables.

El árbol de similitud Inter A determina la existencia de cuatro grupos de variables.

- Grupo IA1. Este grupo presentan tres conexiones significativas de similitud. Además, en él se observan algunas variables asociadas a la determinación de valores extremos (V_7 y V_8). Específicamente, se encuentra la variable que indica la determinación correcta de un mínimo local a partir de información geométrica (V_7) y la variable asociada a la determinación de este, a partir de información analítica (V_8). Es importante recordar que el uso correcto de la variable V_8 se infirió a partir del uso correcto de la variable V_7. Igualmente, al interior de este grupo se conectan las variables asociadas con la interpretación de la información analítica para determinar intervalos (V_{24}) y capacidad para esbozar una gráfica a partir de esta información (V_{26}). Asimismo, se observa la variable asociada al uso de derivadas laterales (V_{19}) y la variable relacionada con la relación contrarrecíproca entre derivabilidad y continuidad (V_{22}).
- Grupo IA2. En este grupo se destaca que existen dos conexiones de similitud altamente significativas. Además, en el grupo se encuentran las variables que relacionan la monotonía de la función con el signo de la primera derivada, es decir, las variables V_{12} y V_{14} (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$). Asimismo, también están las variables que conectan la curvatura de una función en un intervalo con el signo de la segunda derivada en dicho intervalo, es decir, las variables V_{16} y V_{18} (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$). También, al interior de grupo de similitud se encuentran las variables que indican la capacidad de interpretar la información gráfica para determinar intervalos (V_{23}) y esbozar una función a partir de esta información (V_{25}).
- Grupo IA3. Este grupo presenta dos conexiones de similitud significativas, pero en niveles demasiado altos. Además, se puede mencionar que aquí se agrupan las variables relacionadas con el establecimiento de vínculos entre el signo de la primera derivada y la monotonía de la función en ambos sentidos. Específicamente, se encuentran las variables que asocian el signo de la primera derivada con la monotonía de la

función, es decir, las variables V_{11} y V_{13} ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente). Asimismo, se observan las variables que asocian la monotonía de la función en un intervalo con el signo de la primera derivada en dicho intervalos, es decir, las variables V_{15} y V_{17} (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$).

- Grupo IA4. Este grupo está conformado por las variables que fueron incorrectamente usadas, o bien, no fueron utilizadas por los estudiantes.

Para establecer el orden entre las relaciones de subordinación de las variables e identificar la estructura general de los datos se construyó un grafo implicativo general (ver Figura 47).

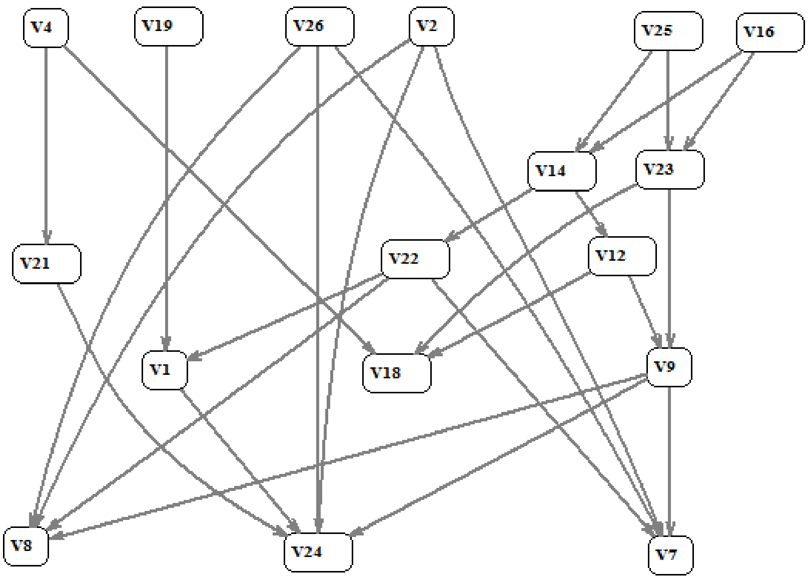


Figura 47. Grafo implicativo completo al 85 % para el subnivel de desarrollo Inter A

El grafo asociado a este subnivel de desarrollo presenta cuatro niveles de implicación. Sin embargo, las variables más importantes son la V_{26} que se relaciona con la capacidad de esbozar una gráfica a partir de la información analítica proporciona y la variable V_2 que implica la comprensión de la derivada como límite del cociente incremental. Estas dos variables indican dominio de modo de representación analítico y desde ellas se originan tres cadenas de implicaciones respectivamente. Además, también tienen un papel importante las variables V_4, V_{25} y V_{16}, pues de cada una de ellas nacen dos cadenas de implicaciones. En particular, la variable V_4 está asociada a uso de la derivada como operador, la variable V_{25} se relaciona con la capacidad de esbozar correctamente una gráfica a partir de información analítica y la variable, por su parte la variable V_{16} vincula la convexidad de la función en un intervalo con el signo de la segunda derivada en él.

Otra variable a destacar es la V_{22} que se encuentra en el segundo nivel de implicación y está asociada al uso de la relación contrarrecíproca entre continuidad y derivabilidad. Esta variable genera tres cadenas de implicaciones.

Con el objeto de identificar mejor la importancia de las variables y su influencia en la estructura subyacente que caracteriza a este subnivel de desarrollo, se construyeron diagramas implicativos parciales (ver Figura 48) para los grupos IA1, IA2 e IA3.

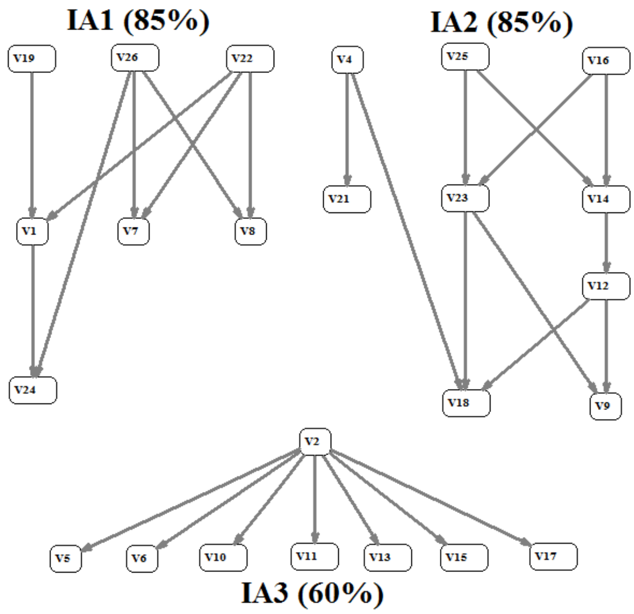


Figura 48. Grafos implicativos parciales para los grupos de similitud IA1, IA2 e IA3 del subnivel de desarrollo Inter A

A partir de los grafos implicativos de la Figura 48, se puede indicar que las variables más importantes y que configuran la estructura subyacente del subnivel de desarrollo Inter A son:

- la variable V_{26} que indica la capacidad de esbozar correctamente una gráfica a partir de la información analítica.
- la variable V_{22} que implica el establecimiento de la relación contrarrecíproca entre la continuidad y la derivabilidad.
- la variable V_{25} que indica la capacidad de esbozar correctamente una gráfica a partir de la información gráfica.
- la variable V_{16} que implica el uso correcto de la relación entre la convexidad de una función y el signo positivo de la segunda derivada.

Con relación al grafo implicativo parcial del grupo IA3, se puede mencionar que la variable V_2, asociada a la comprensión analítica puntual de la derivada, es la más importante. Sin embargo, es necesario tener presente que el nivel de implicación de esta variable con las otras solo alcanza el 60 %.

Para finalizar el análisis del subnivel Inter A de desarrollo en la Tabla 19 se presenta un resumen con las principales características y variables subyacentes a este subnivel de desarrollo.

Tabla 19. Características y variables subyacentes del subnivel de desarrollo Inter A

Subnivel Inter A	
Características principales	Variables subyacentes a su estructura
Pueden construir *coordinaciones* entre *procesos* globales y puntuales. Esto le permite determinar casi sin dificultades valores extremos y puntos de inflexión. Presentan dificultades en la construcción de la *reversión* de la *coordinación* de *procesos* que asocian la monotonía y curvatura de la función con el signo de la primera y la segunda derivada. Tienen dificultades con el tratamiento de los puntos conflictivos y no consideran a la derivada como función. Tienen dificultades para utilizar correctamente la relación entre derivabilidad y continuidad (directa y contrarrecíproca). Tienen algunas dificultades para esbozar correctamente una función a partir de la información gráfica proporcionada. Lo cual se debe a que no construyen correctamente las *reversiones* de los *procesos* globales que relacionan la información gráfica con la analítica. No establecen relaciones entre la primera y segunda derivada. No ha logrado la síntesis de los modos de representación.	La variable V_{26} asociada la habilidad para esbozar correctamente la gráfica de una función a partir de la información analítica proporcionada. La variable V_{22} asociada al uso correcto de la relación contrarrecíproca entre derivabilidad y continuidad. La variable V_{25} asociada la habilidad para esbozar correctamente la gráfica de una función a partir de la información gráfica proporcionada. La variable V_{16} asociada a la relación entre la convexidad de una función en un intervalo y el signo de la segunda derivada de la función en dicho intervalo.

4.4.3. Contrastando los subniveles Inter

En los subniveles de desarrollo Inter, se observa que los estudiantes son capaces de *coordinar* el *proceso* que asocia el signo de la primera derivada en un intervalo con el *proceso* que determina la monotonía de la función en dicho intervalo, es decir, utilizan correctamente las variables V_{11} y V_{13} ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente). Sin embargo, los estudiantes de los dos subniveles presentan dificultades para establecer la *reversión* de la *coordinación* de estos *procesos*, que corresponden a las variables V_{12} y V_{14} (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$). Del mismo modo, estos estudiantes *coordinan* el *proceso* que conecta el signo de la segunda derivada con el *proceso* que define la curvatura de la función, es decir, que utilizan generalmente de forma correcta las variables V_{15} y V_{17} ($f''>0 \to f$ es convexa y $f''<0 \to f$ es cóncava), pero presentan dificultades en construir la *reversión* correspondiente a estos *procesos*, que corresponden a las variables V_{16} y V_{17} (f es convexa $\to f''>0$ y f es cóncava $\to f''<0$).

Por otra parte, los estudiantes de estos subniveles de desarrollo no han *encapsulado* la *coordinación* de *procesos* puntuales/globales que conectan la función con su primera y segunda derivada (relaciones entre el par $f-f'$ y el par $f-f''$), lo cual influye en que no puedan establecer relaciones entre este par de derivadas (V_{27}), no vean a la derivada como función (V_3) y, como consecuencia, no consideren que la diferenciación es un operador generalizable (V_4). Además, los estudiantes de ambos subniveles tienen problemas cuando se enfrentan al tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}). Esto indica que tienen dificultades para *coordinar* los *procesos* globales y puntuales asociados a las propiedades de la función en ambos modos de representación, pues el tratamiento de estos puntos requiere de la *coordinación* de elementos globales en el entorno del punto, además, del uso correcto de las relaciones entre derivabilidad y continuidad.

Esta dificultad asociada a la *coordinación* de *procesos* es muy evidente en el subnivel Inter B, en donde los estudiantes no pueden *coordinar* correctamente los *procesos* globales que conectan la monotonía (V_{11}, V_{12}, V_{13} y V_{14}, variables asociadas al elemento matemático 5 de la Tabla 13) y la curvatura de la función, con los *procesos* puntuales asociados a la comprensión del concepto de derivada en un punto (V_1 y V_2, variables asociadas al elemento matemático 1 de la Tabla 13). Esto causa que ellos no sean capaces de determinar correctamente los valores extremos (V_5 y V_7) y puntos de inflexión (V_9) cuando la información es proporcionada gráficamente. Todo lo anterior, repercute en que los estudiantes de este subnivel de desarrollo no puedan esbozar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas (V_{25}). Del mismo modo, los estudiantes subnivel de desarrollo Inter A también presentan dificultades en la *coordinación* de estos *procesos*, pero estas son menos recurrentes. Los estudiantes del subnivel Intra A, en general, sí pueden *coordinar* los *procesos* globales y puntuales que permiten determinar valores extremos y puntos de inflexión (V_5, V_6, V_7, V_8, V_9 y V_{10}, variables asociadas a los elementos matemáticos 3 y 4 de la Tabla 13) en ambos modos de representación.

Los estudiantes de ambos subniveles Inter A e Inter B aún no logran la síntesis entre los modos de representación analítico y gráfico.

Con relación a las variables que determinan la estructura subyacente del subnivel de desarrollo Inter A, se puede indicar que las más importantes son la V_{26} y la V_2, ambas variables están asociadas al modo de representación analítico y desde ellas surgen la mayor cantidad de cadenas implicativas. En particular, la variable V_{26} está asociada a esbozar correctamente la gráfica de una función a partir de información analítica y la variable V_2 está asociada a la comprensión de la derivada como límite del cociente incremental. También, la variable V_{16}, asociada con la relación entre la convexidad de una función y el signo de su segunda derivada, y la variable V_{25}, asociada con la capacidad de esbozar una gráfica a partir de información gráfica, son importantes en el sentido que ambas implican implícitamente la conversión de información desde el modo de representación gráfico al analítico.

Por otra parte, la variable subyacente más importante que conforma la estructura del subnivel de desarrollo Inter B es la V_{23}, que se relaciona con la capacidad de determinar los intervalos para esbozar una función a partir de la información gráfica proporcionada. Asimismo, otras variables importantes son la V_9, asociada a la capacidad para establecer puntos de inflexión a partir de información gráfica, y la V_8 vinculada a la determinación de un mínimo local a partir de la información analítica. Se debe recordar que el uso correcto de la variable V_8 fue inferido a partir del uso de la información gráfica por medio de la variable V_7, asociada a la determinación de un mínimo local a partir de la información gráfica.

4.3.4. Subnivel Trans B

Al igual que para los dos subniveles de desarrollo Inter. Se inicia el análisis del subnivel Trans B mostrando los porcentajes de uso correcto e incorrecto de cada una de las 27 variables. Estos porcentajes de uso correcto e incorrecto se presentan en la Figura 49.

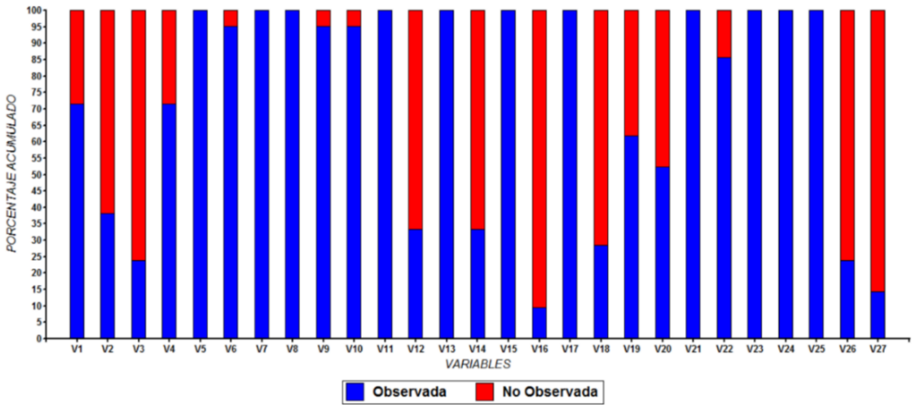


Figura 49. Frecuencias porcentuales de uso correcto e incorrecto de las variables para el subnivel de desarrollo Trans B

En particular, en la Figura 49 se observa que los menores porcentajes de uso correcto de las variables están en:

- la variable V_3 asociada a la consideración de la derivada como función.
- la variable V_{27} asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y la segunda derivada
- la variable V_{26} que indica la capacidad de graficar correctamente al partir de uso de información analítica.
- las variables V_{16} y V_{18} que asocian la curvatura de la función con el signo de la segunda derivada (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$).
- la variable V_{19} que implica el tratamiento correcto de puntos conflictivos.
- la variable V_{20} asociada al uso de derivadas laterales.

Igualmente, se destaca que los estudiantes del subnivel de desarrollo Trans B no presentan mayores dificultades para determinar valores extremos (V_5, V_6, V_7 y V_8 asociadas al elemento matemático 3 de la Tabla 13) y puntos de inflexión (V_9 y V_{10} asociadas al elemento matemático 5 de la Tabla 13). Asimismo, no tienen problemas con el establecimiento de relaciones directas entre derivabilidad y continuidad (V_{21}), y tampoco, con el uso de la relación contrarrecíproca (V_{22}). También, se observa que no presentan dificultades en establecer intervalos para esbozar gráficas independiente del modo de representación de la información proporcionada (V_{23} y V_{24}). Sin embargo, la gran mayoría de ellos solo logran graficar correctamente a partir de información gráfica (V_{25}) y presentan dificultades para esbozar una gráfica a partir de información analítica (V_{26}). Esto último, puede ser consecuencia de las contradicciones presentes en la Tarea 1 que era la única en que se presentaban las propiedades de la función, por medio de las condiciones analíticas.

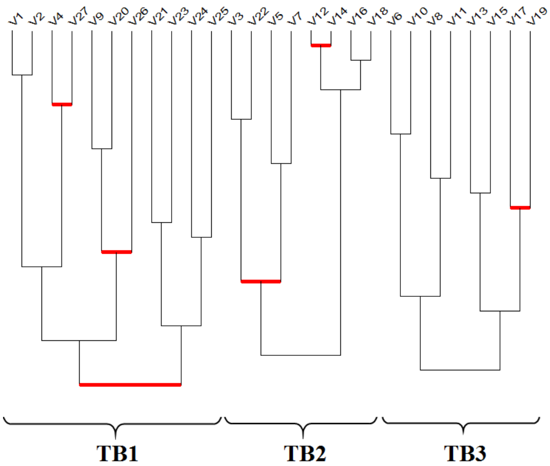


Figura 50. Árbol de similitud Trans B

Para ahondar en la caracterización de este subnivel de desarrollo se construyó el árbol de similitud (ver Figura 50).

El árbol de similitud del subnivel de desarrollo Trans B presenta tres grupos:

- El grupo TB1. Este grupo tiene tres conexiones de similitud altamente significativos, pero solo uno de ellos se ubica en los primeros niveles. En particular, se destaca que la conexión más importante de este grupo se produce en el quinto nivel, en donde se conecta la variable asociada con la consideración de la derivada como operador (V_4) con las variable que indica el establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada (V_{27}). Asimismo, se observa que las variables asociadas a la comprensión puntual de la derivada (V_1 y V_2) poseen un valor alto de similitud y se conectan en el tercer nivel. También, al interior de este grupo se encuentran las variables asociadas a tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}) y la variable asociada a la relación directa entre derivabilidad y continuidad (V_{21}). Igualmente, se observan las variables que indican la capacidad de graficar a partir de información proporcionada en ambos modos de representación (V_{25} y V_{26}).

- El grupo TB2. Este grupo presenta dos conexiones de similitud altamente significativas, además, se observa que en su interior se encuentra la conexión más importante y significativa de este subnivel de desarrollo, la cual se produce en el primer nivel conectando las variables V_{12} y V_{14} que están asociadas a la relación entre la monotonía de una función y el signo de la primera derivada (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$). Además, en este contiene a las variables V_{16} y V_{18} que asocian la curvatura de una función con el signo de la segunda derivada (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$). Igualmente, se observa que en este grupo se asocian las variables relacionadas con el establecimiento de valores extremos en el modo de representación gráfico (V_5 y V_7).

- El grupo TB3. Este grupo no contiene niveles de similitud significativos. Sin embargo, se destaca que en su interior están conectadas las variables asociadas a las implicaciones contrarias a las contenidas en el grupo TB2. Específicamente, se encuentran las variables V_{11} y V_{13} que asocian el signo de la primera derivada con la monotonía de la función ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente), y las variables V15 y V17 que conectan el signo de la segunda derivada con la curvatura de las función ($f''>0 \rightarrow f$ es convexa y $f''<0 \rightarrow f$ es cóncava). Además, se observan las variables relacionadas con la determinación de valores extremos en el modo de representación analítico (V_6 y V_8).

Por otra parte, para observar las relaciones implicativas entre las variables al interior de este subnivel de desarrollo, se construyó el grafo implicativo general que se muestra en la Figura 51.

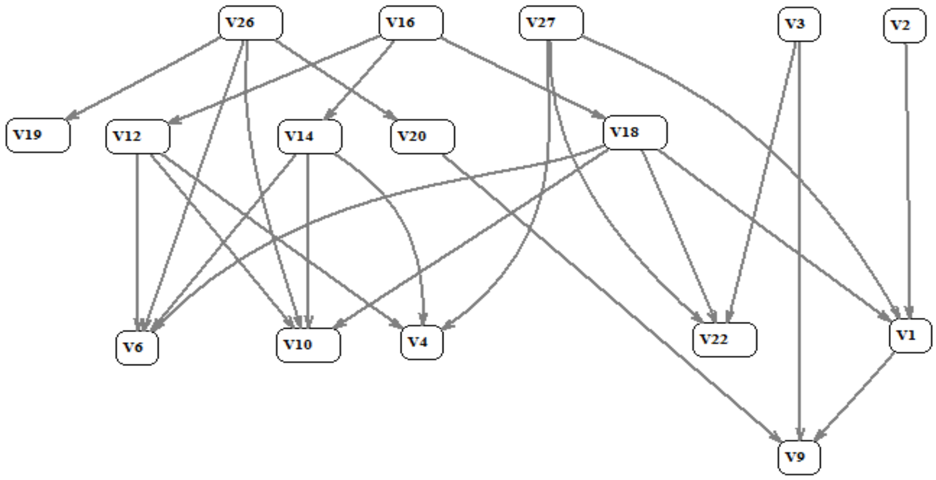


Figura 51. Grafo implicativo completo al 85 % para el subnivel de desarrollo Trans B

El grafo implicativo del subnivel de desarrollo Trans B tiene tres niveles de implicación. La variable más importante es la estructura implicativa es la V_{16} asociada a la relación entre la convexidad de una función en un intervalo y el signo de la segunda derivada. Asimismo, en el primer nivel de implicaciones aparece la variable V_{18} asociada a la relación entre la concavidad de la función y el signo de la segunda derivada. Tanto la variable V_{16} como la V_{18} son las variables en donde más cadenas de implicaciones se generan. Además, ambas variables están asociadas con el establecimiento de la relación entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada. También, se destaca la variable asociada a esbozar la gráfica de una función a partir de sus propiedades (V_{26}), la cual genera dos cadenas de implicaciones en el primer y en el segundo nivel. Asimismo, la variable asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada (V_{27}) desempeña un papel importante, pues a partir de ella se generan tres cadenas de implicaciones. Otras variables importantes en el primer nivel de implicación, son las variables V_{12} y V_{14} asociadas al establecimiento de relaciones entre la monotonía de la función y el signo de la primera derivada (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$), de las que se generan tres cadenas de implicaciones respectivamente.

Por otra parte, para observar la estructura subyacente de este subnivel de desarrollo determinada por sus grupos de similitud (TB1, TB2 y TB3), se elaboraron diagramas implicativos parciales para cada uno de ellos. Estos diagramas se muestran la Figura 52.

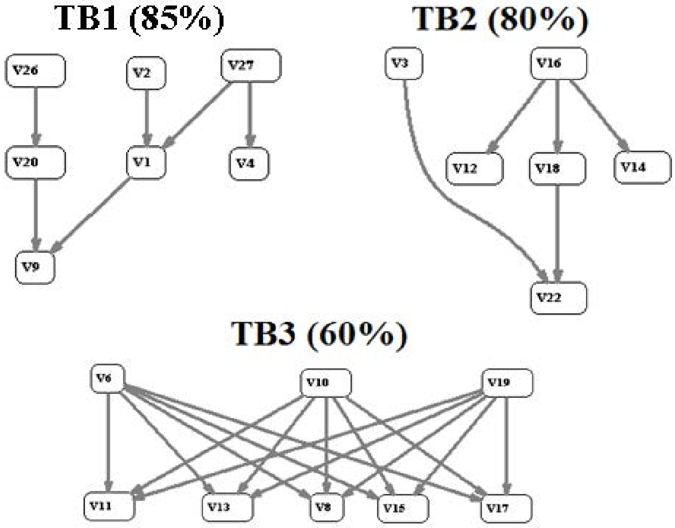


Figura 52. Grafos implicativos parciales para cada uno de los grupos de similitud del subnivel de desarrollo Trans B

Los grafos implicativos de los grupos de similitud del subnivel de desarrollo Trans B permiten indicar que las variables más importantes en la estructura subyacente de este subnivel son:

- la variable V_{27} asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada.
- la variable V_{16} que asocia la convexidad de una función con el signo positivo de la segunda derivada.

También, en el grafo implicativo del grupo TB3 se observan tres variables (V_6, V_{10} y V_{19}) que forma 5 cadenas de implicaciones cada una. Sin embargo, dichas implicaciones no son altamente significativas y solo alcanzan el 60 %.

Para finalizar el análisis del subnivel Trans B de desarrollo, en la Tabla 20 se muestra un resumen con las principales características y variables subyacentes a este subnivel de desarrollo.

Tabla 20. Características y variables subyacentes del subnivel de desarrollo Trans B

Subnivel Trans B	
Características principales	Variables subyacentes a su estructura
Pueden construir *coordinaciones* entre *procesos* globales y puntuales. Por tanto, puede determinar sin dificultad valores extremos y puntos de inflexión.	La variable V_{27} asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada. La V_{16} asociada a la relación entre la convexidad de una función en un intervalo y el signo

Tienen algunas dificultades en la construcción de la *reversión* de las *coordinaciones* entre la monotonía y curvatura de la función con el signo de la primera y la segunda derivada. Utilizan sin problemas las relaciones (directa y contrarrecíproca) entre derivabilidad y continuidad. Tienen dificultades para conectar la primera derivada con la segunda. No consideran la derivada como una función. Se muestran esbozos de síntesis de los modos de representación, pero aún se observan dificultades asociadas a la interpretación de la información gráfica.	de la segunda derivada de la función en dicho intervalo.

4.3.5. Subnivel Trans A

Del mismo modo que con el subnivel Trans B, para conocer la estructura general del subnivel Trans A y perfilar los primeros indicios de una posible caracterización se realizó un análisis descriptivo de las variables en términos de las frecuencias de uso correcto e incorrecto observadas que se muestran en la Figura 53.

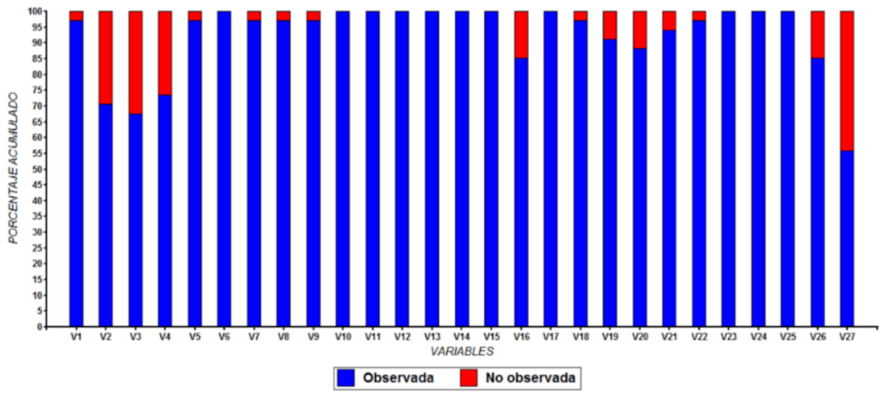


Figura 53. Frecuencias porcentuales de uso correcto e incorrecto de las variables para el subnivel de desarrollo Trans A

Como se observa en la Figura 53 los estudiantes pertenecientes al subnivel de desarrollo Trans A presentan un uso correcto de las variables superior al 85 % en 23 de las 27 variables, y solo se observan 4 de las 27 variables cuyos porcentajes de uso correcto son menores a este valor, pero superiores al 55 %. Por tanto, se infirió que los estudiantes del subnivel de desarrollo Trans A no presentaron mayores dificultades al momento de responder a la tareas del cuestionario. Sin embargo, se observaron algunos casos excepcionales, de estos estudiantes, que aún podrían presentar pequeñas dificultades para ver la derivada como: función (V_3), operador (V_4) y límite del cociente incremental (V_2). Asimismo, algunos de ellos tienen dificultades para establecer relaciones entre la primera y la segunda derivada (V_{27}).

Para ahondar en la caracterización de este subnivel de desarrollo, al igual que con los demás subniveles, se realizó un análisis de similitud de todas las variables (ver Figura 54) con el objeto de observar las agrupaciones naturales que se presentan en la estructura de los datos.

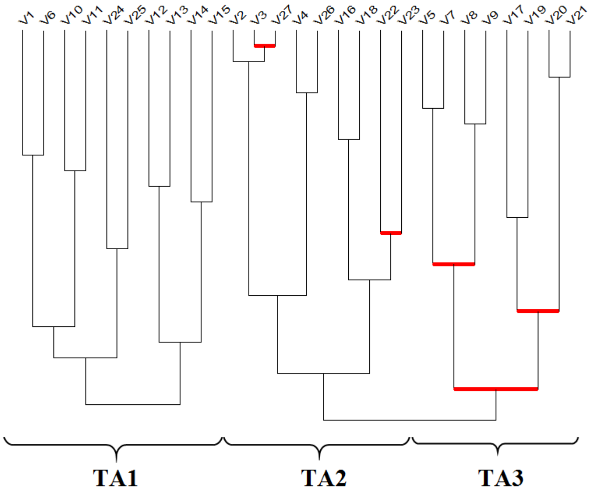


Figura 54. Árbol de similitud Trans A

El árbol de similitud obtenido para el subnivel de desarrollo Trans A muestra tres grupos o clases claramente definidos:

- El grupo TA1. Este grupo no presenta conexiones de similitud altamente significativas en ninguno de sus niveles. Sin embargo, se destaca que en este grupo se conectan las variables V_{11} y V_{13} que relacionan el signo de la primera derivada con la monotonía de la función ($f' > 0 \to f$ estrictamente creciente y $f' < 0 \to f$ estrictamente decreciente). Asimismo, se conectan las variables V_{12} y V_{13} que corresponden a las implicaciones contrarias y que conectan la monotonía de la función con el signo de la primera derivada (f estrictamente creciente $\to f' > 0$ y f estrictamente decreciente $\to f' < 0$). Además, se observa que en este grupo existe una subagrupación donde se conectan las variables asociadas al establecimiento de intervalos sobre la gráfica de una función a partir de información analítica (V_{24}) y la capacidad de esbozar una la función a partir de información gráfica (V_{25}).

- El grupo TA2. Este grupo presenta dos conexiones de similitud altamente significativas, además, en él se encuentra la variable V_{27} asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada, la cual corresponde a la de mayor importancia conectándose en un primer nivel con la variable V_3 asociada a la consideración de la derivada como función. Otra conexión significativa y que probablemente podría establecerse *a priori*, es la que conecta en el nivel 13 la variable V_{23} asociada con la relación contrarrecíproca entre derivabilidad/continuidad con la variable V_{23} que indica la determinación de intervalos a partir de la información gráfica proporcionada. Además, se destacan dos agrupaciones, una que conecta el uso del significado del operador derivada (V_4) con el esbozo de la gráfica de una función a partir de información analítica (V_{26}), y otra que conecta las variables V_{16} y V_{18} asociadas a la relación entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada (f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$).

- El grupo TA3. Este grupo presenta tres conexiones de similitud significativas, pero todas se encuentran en niveles superiores al trece. Sin embargo, es importante puntualizar que en este grupo se conectan la variables V_5, V_7 y V_9 que se relacionan con la determinación correcta de valores extremos y puntos de inflexión a partir de la información gráfica, además, también se observa la variable V_8 asociada a la determinación de un mínimo local a partir de la información analítica, pero como ya ser mencionó su uso correcto fue inferido a partir de uso de la variable V_7. Además, se observan las variables relacionadas con la relación directa entre derivabilidad y continuidad (V_{21}), tales como el uso de derivadas laterales (V_{19}) y el tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}).

Como ya se mencionó, el análisis de similitud solo proporciona información sobre qué tan parecida fue la utilización de las variables, por parte de los estudiantes, en la resolución del cuestionario. Por tanto, para poder perfilar, adecuadamente, las características de este subnivel es necesario construir grafos de implicación, tanto completos como parciales, que permitan determinar la subordinación e importancia de cada una de las variables en la estructura subyacente de este subnivel. En la Figura 55 se presenta el grafo implicativo completo correspondiente a este subnivel de desarrollo.

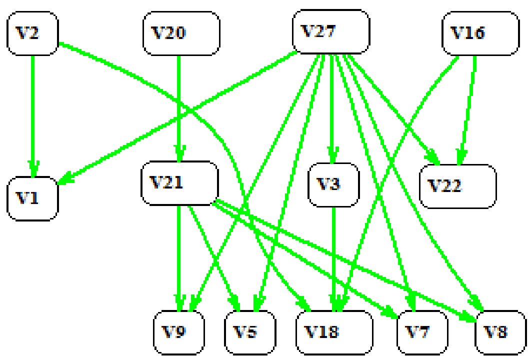


Figura 55. Grafo implicativo completo al 90 % para el subnivel de desarrollo Trans A

Como se observa en el grafo implicativo completo del subnivel Trans A, al igual que como sucedió con otros grafos implicativos, no aparecen todas las variables. Esto se debe a que se seleccionó en la aplicación (CHIC 6.0), la opción de mostrar solo implicaciones cuyo porcentaje mínimo fuese del 90 % que corresponden a las variables más importantes y que conforman la estructura de los datos de este subnivel de desarrollo.

El grafo implicativo de este subnivel posee solo dos niveles de implicación, además, se puede observar que la variable más importante en la generación de implicaciones es la asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y segunda derivada (V_{27}), pues desde ella surgen siete cadenas de implicaciones. Por su parte, en el primer nivel de implicación la variable más influyente en la estructura de implicaciones es la asociada con el establecimiento de la relación directa entre derivabilidad y la continuidad (V_{21}), pues desde esta variable se originan cuatro cadenas de implicaciones. Además, es importante destacar que esta variable está implicada por la variable asociada al tratamiento correcto de los puntos conflictivos (V_{20}).

Para facilitar la interpretación de las cadenas de implicaciones, al igual que como se hizo con el análisis de los demás subniveles de desarrollo, se seleccionaron los grupos proporcionados por el análisis de similitud para obtener grafos implicativos parciales. Sin embargo, dado que no todas las variables utilizadas se visualizaban, se decidió utilizar una de las opciones de la aplicación (CHIC 6.0) y modificar la cota inferior de visualización en algunos casos. De esta forma, se pudo observar otras cadenas de implicaciones que no se visualizan en el grafo implicativo completo, como se observa en la Figura 56.

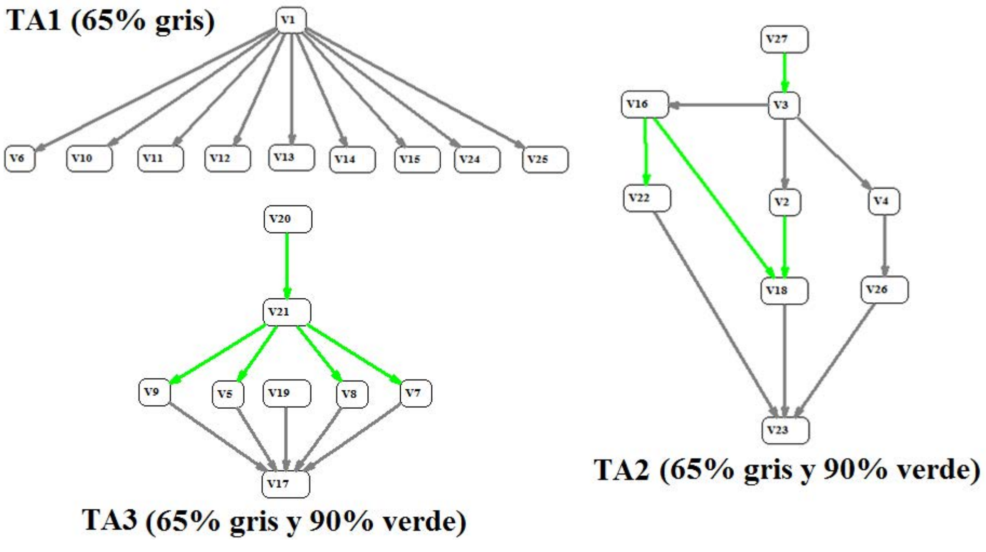


Figura 56. Grafos implicativos parciales para cada uno de los grupos de similitud del subnivel de desarrollo Trans A

Los grafos implicativos de cada uno de los grupos de similitud (TA1, TA2, y TA3) permiten determinar que las variables más importantes, por su nivel de significancia estadística, en las estructuras subyacentes del subnivel de desarrollo Trans A, son dos:

- la variable V_{27} relacionada con el establecimiento de conexiones entre la primera y segunda derivada.
- la variable V_{20} asociada con el tratamiento correcto de los puntos conflictivos.

También, se podría indicar que la variable asociada la interpretación geométrica puntual de la derivada (V_2) desempeña un papel importante, sin embargo, las implicaciones son mucho más débiles que las que surgen de las variables V_{27} y V_{20}.

Para finalizar el análisis del subnivel Trans A de desarrollo en la Tabla 21 se presenta un resumen con las principales características y variables subyacentes a este subnivel de desarrollo.

Tabla 21. Características y variables subyacentes del subnivel de desarrollo Trans A

Subnivel Trans A	
Características principales	Variables subyacentes a su estructura
Pueden establecer *coordinaciones* entre los *procesos* globales y puntuales que conectan la primera con la segunda derivada. Pueden construir la *coordinación* de dos o más *procesos* y también su correspondiente *reversión.* Han logrado la síntesis de los modos de representación. Pueden conectar la primera derivada con la segunda. Utilizan correctamente las relaciones que vinculan la derivabilidad con la continuidad.	La variable V_{27} asociada al establecimiento de relaciones entre la primera y la segunda derivada. La variable V_{20} asociada al tratamiento correcto de puntos conflictivos.

4.3.6. Contrastando los subniveles Trans

Combinando la información proporcionada por las frecuencias de uso correcto e incorrecto de cada una de las variables, los árboles de similitud y los grafos implicativos tanto globales como parciales, se puede establecer algunas similitudes y diferencias entre ambos subniveles de desarrollo Trans en términos de la teoría APOE. Por ejemplo, los estudiantes de ambos subniveles de desarrollo son capaces de *coordinar* el *proceso* que asocia el signo de la primera derivada en un intervalo con el *proceso* que determina la monotonía de la función en dicho intervalo, es decir, que utilizan correctamente las variables V_{11} y V_{13} ($f' > 0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f' < 0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente). Sin embargo, solo los estudiantes del subnivel Trans A son capaces de establecer, sin dificultades, la *reversión* de esta *coordinación*, es decir, que los estudiantes del subnivel Trans B tienen dificultades con las variables V_{12} y V_{14} (f estrictamente creciente $\rightarrow f' > 0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f' < 0$). Del mismo modo, los estudiantes de ambos subniveles *coordinan* el *proceso* que conecta el signo de la segunda derivada con el *proceso* que define la curvatura de la función, es decir, que utilizan correctamente las variables V_{15} y V_{17} ($f'' > 0 \rightarrow f$ es convexa y $f'' < 0 \rightarrow f$ es cóncava), pero igual que en el caso de la *coordinación* de *procesos* anterior, solo los estudiantes del subnivel Trans A no presentan dificultades al realizar la *reversión* de dicha *coordinación*, por tanto, los estudiantes del subnivel Trans B cometen errores al utilizar las variables V_{16} y V_{18} (f es convexa $\rightarrow f'' > 0$ y f es cóncava $\rightarrow f'' < 0$). Lo anterior causa que algunos de los estudiantes del subnivel Trans B presenten dificultades en el tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}), pues para enfrentarse a su análisis es necesario *coordinar procesos* globales y puntuales, asociados con derivadas laterales (V_{19}) y con la relación entre derivabilidad y continuidad (V_{21} y V_{22}) en el entorno del punto.

Igualmente, los estudiantes de ambos subniveles *coordinan* los *procesos* globales asociados a las variables V_{11}, V_{12}, V_{13} y V_{14} (variables asociadas al elemento matemático 5 de la Tabla 13), con los *procesos* puntuales vinculados a las variables V_1 y V_2 (variables asociadas al elementos matemático 1 de la Tabla 13), de esta forma, pueden determinar valores extremos y puntos de inflexión de las funciones en ambos modos de representación (V_5, V_6, V_7, V_8, V_9 y V_{10}, variables asociadas a los elementos matemáticos 3 y 4 de la Tabla 13).

Por otra parte, los estudiantes del subnivel Trans A han *encapsulado* en un *objeto* la *coordinación* de *procesos* puntuales/globales que conectan la función y con su primera derivada, lo cual indica que consideran a la derivada como una función (V_3). Además, son conscientes de que esta *coordinación* también puede establecerse en un segundo nivel, es decir, entre la primera y segunda derivada (V_{27}). De esta forma, estos estudiantes dan indicios de que consideran a la derivada como un operador lineal que podría ser generalizado (V_4). Además, esta *coordinación* entre los *procesos* globales y puntuales, les permite a los estudiantes del subnivel Trans A enfrentarse, sin dificultades, al tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}) y les facilita establecer las conexiones, tanto directa como contrarrecíproca, entre derivabilidad y continuidad (V_{21} y V_{22}), lo cual no ocurre con los estudiantes del subnivel Trans B.

Con relación al subnivel de desarrollo Trans A, se puede indicar que el elemento más importante en la estructura subyacente de este subnivel, obtenido directamente del análisis implicativo general, es la variable V_{27} que se relaciona con las conexiones entre la primera y segunda derivada. Además, en dicha estructura están anidadas otras variables, muy importantes, como son el tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}) y el establecimiento de relaciones directas entre derivabilidad y continuidad (V_{21}).

Por su parte, en el subnivel de desarrollo Trans B su estructura subyacente también está determinada por la variable V_{27}, sin embargo, no es la de mayor importancia, pues en este caso, ese puesto corresponde a la estructura formada V_{16}, la que es a su vez sustentada por otras variables anidadas como V_{12}, V_{14} y V_{18}, todas ellas asociadas a la implicaciones que conectan la monotonía y la curvatura de la función con los signos de las correspondientes derivadas (f estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y f estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$; f es convexa $\rightarrow f''>0$ y f es cóncava $\rightarrow f''<0$). Esta cuaterna de variables indica que los estudiantes que hacen uso correcto de ellas, harán uso correcto de todas las demás, asimismo, la conexión de estas variables reafirma la dificultad de estos estudiantes para construir la *reversión* de la *coordinación* de los *procesos* que vinculan la monotonía y curvatura de la función con los correspondientes signos de la primera y la segunda derivada.

4.4. La *tematización* del *esquema* de la derivada

Con el objeto de caracterizar la *tematización* del *esquema* de la derivada, se realizaron cinco entrevistas clínicas con la idea de profundizar en el proceso de resolución de las tareas resueltas por los estudiantes seleccionados e indagar en sus respuestas a las modificaciones planteadas y a las nuevas preguntas realizadas (Tabla 9).

Los cinco estudiantes entrevistados se encontraban en el subnivel Trans A del desarrollo del *esquema*. Por tanto, estos estudiantes según Asiala *et al*. (1996) podían haber *tematizado* el *esquema* de la derivada. Los estudiantes que participaron en las entrevistas fueron etiquetados como E_1, E_2, E_3, E_{11} y E_{17} con el objeto de mantener en el anonimato y sus identidades. Estas etiquetas también se corresponden con las asignadas a cada uno de los protocolos de resolución del cuestionario. Asimismo, las intervenciones del entrevistador fueron simbolizadas con la letra I.

Como primer paso, se analizaron los protocolos de resolución de los 5 estudiantes observando si ellos eran capaces de: (1) establecer relaciones entre la primera y segunda derivada, lo cual, según Sánchez-Matamoros (2004) y García *et al*. (2011) es un indicador de la *tematización* del *esquema,* o bien, (2) coordinar todas las propiedades de la función a través de todos los intervalos, lo cual, según Cooley *et al*. (2007) corresponde a una evidencia de la *tematización*. Para ilustrar que los estudiantes asignados al subnivel de desarrollo Trans A, pueden establecer este tipo de relaciones y, por tanto, podrían haber *tematizado* el *esquema*, en los siguientes párrafos se ejemplifica dicha utilización, con base en las relaciones establecidas por el estudiante E_1 en su protocolo de resolución del cuestionario y en algunas de sus respuestas a la entrevista.

En un primer momento, las respuestas del estudiante E_1 se centran en la contradicción presente en la Tarea 1 entre las propiedades analíticas proporcionadas en el enunciado (condiciones *c*, *f*, *g*, *h* e *i* analizado en la subsección 3.4.1.1 del Capítulo 3). Para poder observar dicha incongruencia, era necesario *desencapsular* la *coordinación* de los *procesos* (desempaquetar *objetos* en sus *procesos* que son el resultado de la *coordinación* previa de los *procesos* globales que asocian el signo de la segunda derivada con la monotonía de la primera derivada) que relacionan el par $f' - f''$. Específicamente, la contradicción se evidenciaba al comparar (aplicar la *acción* de comparar) los *procesos* obtenidos del *desencapsulamiento* de la *coordinación* del *proceso* asociado al signo de f'' con el *proceso* asociado al crecimiento de f'. No todos los estudiantes son capaces de *encapsular procesos* en un *objeto*, y mucho menos son capaces de *desencapsular* dichos *objetos* en los *procesos* o *coordinación* de *procesos* que le dieron origen. En la Figura 57 se presenta la argumentación de la contradicción del estudiante E_1.

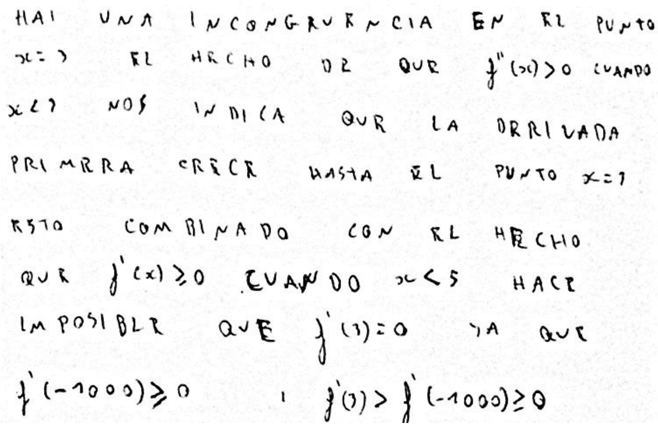

HAI UNA INCONGRUENCIA EN EL PUNTO $x=3$ EL HECHO DE QUE $f''(x)>0$ CUANDO $x<3$ NOS INDICA QUE LA DERIVADA PRIMERA CRECE HASTA EL PUNTO $x=3$ ESTO COMBINADO CON EL HECHO QUE $f'(x)\geq 0$ CUANDO $x<5$ HACE IMPOSIBLE QUE $f'(3)=0$ YA QUE $f'(-1000)\geq 0$, $f'(3) > f'(-1000) \geq 0$

Figura 57. Primer fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 1

Como se observa el estudiante E_1 *coordina* los *procesos* globales y puntuales necesarios para la resolución de la Tarea 1 (Figura 17). Específicamente, este estudiante *coordina* los *procesos* globales que relacionan el signo de la segunda derivada con la monotonía de la primera derivada en el entorno del punto $x=3$. Lo anterior le permitió apreciar la contradicción presente en las condiciones analíticas de la tarea.

Continuando con su proceso de resolución, el estudiante toma una decisión en relación con el punto que le causaba conflicto con las demás condiciones y establece que $f'(3) \neq 0$. Dicha decisión se muestra en la Figura 58.

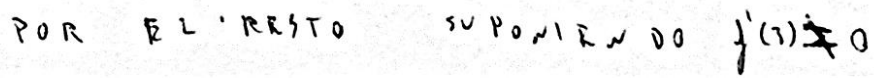
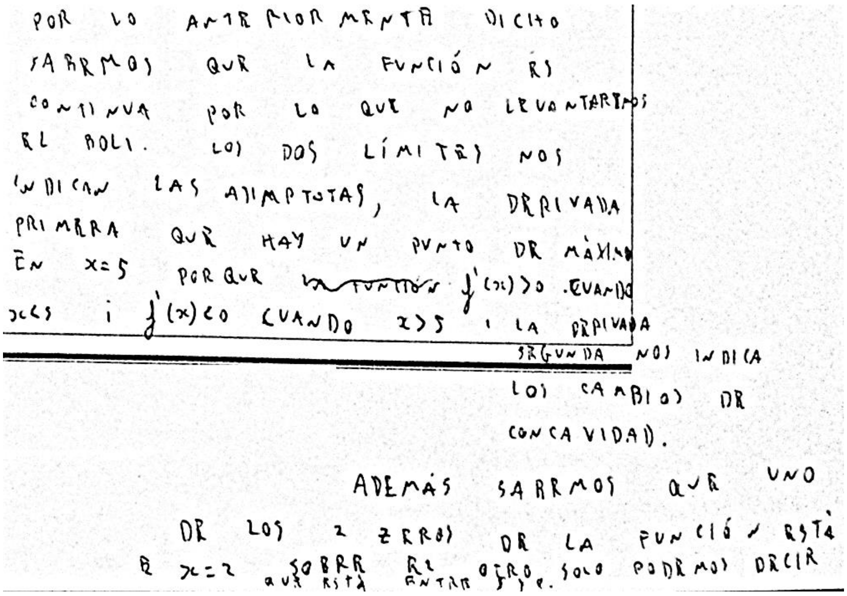

POR EL RESTO SUPONIENDO $f'(3) \neq 0$

Figura 58. Segundo fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 1

Está decisión del estudiante E_1 muestra su consciencia sobre la *coordinación* de los *procesos* globales y puntuales en general. Asimismo, permite ver que el *esquema* que ha construido es flexible, pues es capaz de redefinir las propiedades de la función con el objeto de que todos los elementos (condiciones analíticas proporcionadas) se relacionen correctamente.

A partir de decisión adoptada por el estudiante E_1 de que $f'(3) \neq 0$, él continúa con el desarrollo de la tarea *coordinando* todos los *procesos* globales y puntuales asociados a las condiciones restantes presentadas en el enunciado. Su proceso de resolución se presenta en la Figura 59.


POR LO ANTERIORMENTE DICHO SABEMOS QUE LA FUNCIÓN ES CONTINUA POR LO QUE NO LEVANTAREMOS EL BOLI. LOS DOS LÍMITES NOS INDICAN LAS ASIMPTOTAS, LA DERIVADA PRIMERA QUE HAY UN PUNTO DE MÁXIMO EN $x=5$ PORQUE $f'(x)>0$ CUANDO $x<5$ i $f'(x)<0$ CUANDO $x>5$ i LA DERIVADA SEGUNDA NOS INDICA LOS CAMBIOS DE CONCAVIDAD.

ADEMÁS SABEMOS QUE UNO DE LOS 2 ZEROS DE LA FUNCIÓN ESTÁ EN $x=2$ SOBRE EL OTRO, SOLO PODREMOS DECIR QUE ESTÁ ENTRE ...

Figura 59. Tercer fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 1

Como es posible apreciar, el estudiante E_1 *coordina* los *procesos* globales asociados al cambio de monotonía de la función con el *proceso* puntual relacionado con cero de la función derivada para establecer que en el punto de abscisa $x = 5$ se alcanza un máximo para la función f. Con respecto a la *coordinación* de *procesos* que vinculan el signo de f'' con la convexidad/concavidad de f, solo indica que la segunda derivada entrega los cambios de concavidad, quizás no se atrevió a decir que en $(3, f(3))$ existe un punto de inflexión debido a que justificó la contradicción que dicho punto producía con las demás condiciones de la tarea.

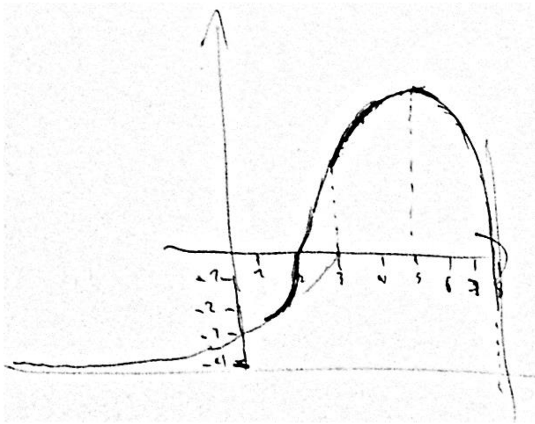


Figura 60. Gráfica del estudiante E_1 en la Tarea 1

Finalmente, con respecto a la gráfica de f (Figura 60), el estudiante realiza un esbozo correcto que muestra todos los elementos esenciales, una vez que estableció que $f'(3) \neq 0$. Por lo tanto, se puede indicar que el estudiante E_1 es capaz de trasladar las condiciones analíticas entregadas al modo de representación gráfico. Asimismo, a partir de su representación gráfica se infiere que hace uso correcto de la *coordinación* de *procesos* que asocian el signo de la primera derivada con la monotonía de la función y de la *coordinación* de *procesos* que asocia el signo de la segunda derivada con la curvatura de la función.

Con respecto a la segunda tarea del cuestionario, el estudiante muestra un dominio de algunos de los elementos matemáticos involucrados en la tarea, ya que no los utiliza todos, dado que algunos aportan la misma información redundante, si se consideran algunas condiciones entregadas. En la Figura 61 se muestra el valor estimado de la derivada establecido por el estudiante en los puntos de abscisas $x = 3$ y $x = 7$.

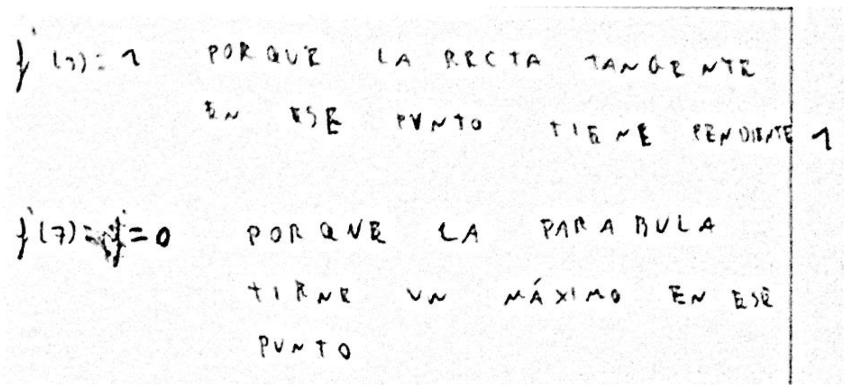
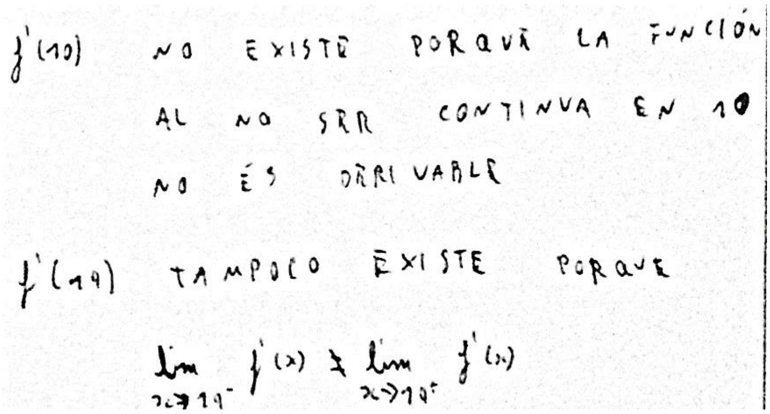


Figura 61. Primer fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 2

Como se observa, en el fragmento presentado en la Figura 61, el estudiante evidencia que maneja la interpretación geométrica de la derivada de forma puntual justificando claramente sus cálculos, estableciendo la relación entre la derivada en punto y la pendiente de recta tangente en dicho punto.

En el fragmento presentado en la Figura 62, se observa la argumentación del estudiante E_1 respecto a la no existencia de la derivada en los puntos de abscisas $x = 10$ y $x = 14$.

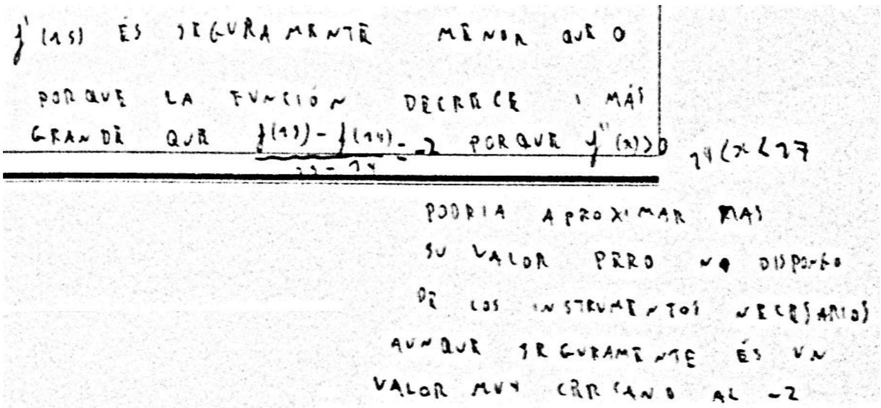

f'(10) no existe porque la función al no ser continua en 10 no es derivable

f'(14) tampoco existe porque $\lim_{x \to 14^-} f'(x) \neq \lim_{x \to 14^+} f'(x)$

Figura 62. Segundo fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 2

El estudiante utiliza la relación contrarrecíproca para vincular la derivabilidad con la continuidad y así justificar que $f'(10)$ no existe. Por otro lado, hace uso de los limites laterales de f' en $x = 14$ para establecer que la función no es derivable en dicho punto (anguloso). De esta forma, manifiesta que tiene la idea de derivada como límite de cociente incremental.

Continuando con su resolución, el estudiante estima un valor para la derivada de la función en el punto de abscisa $x = 15$, como se observa en la Figura 63.


f'(15) es seguramente menor que 0 porque la función decrece y más grande que $\frac{f(15)-f(14)}{15-14} = -2$ porque $f''(x) > 0$ $14 < x < 17$

podría aproximar más su valor pero no dispongo de los instrumentos necesarios aunque seguramente es un valor muy cercano al -2

Figura 63. Tercer fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 2

Al estimar el valor de la derivada en $x = 15$, el estudiante pone de manifiesto que tiene construidos los significados de la derivada como pendiente de la recta tangente en el punto (geométrico) al estimar que es menor que cero y como límite del cociente incremental (analítico), al aproximar un valor para la derivada, a partir de la tasa de variación media. Lo anterior, es un primer indicio de síntesis de los modos de representación para la derivada en un punto.

Continuando con el apartado “b” de la tarea, en el cual se solicitaba construir la gráfica f', a partir de la información proporcionada por la gráfica de f, el estudiante simplifica el problema, al darse cuenta de que las ramas de la función corresponden a parábolas como se muestra en la Figura 64.

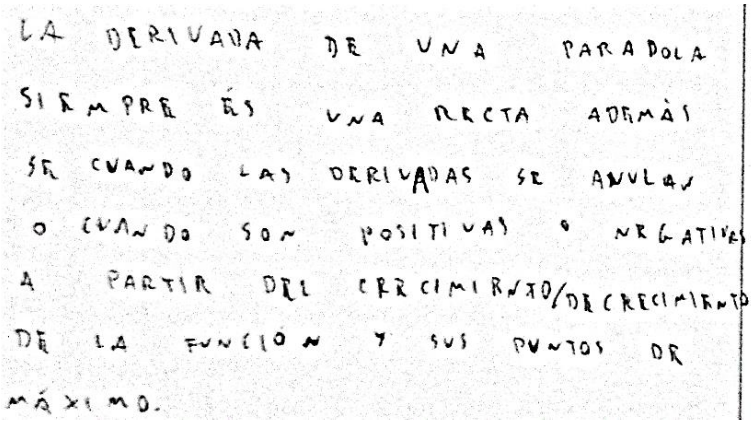

LA DERIVADA DE UNA PARABOLA
SIEMPRE ÉS UNA RECTA ADEMÁS
SE CUANDO LAS DERIVADAS SE ANULAN
O CUANDO SON POSITIVAS O NEGATIVAS
A PARTIR DEL CRECIMIENTO/DECRECIMIENTO
DE LA FUNCION Y SUS PUNTOS DE
MÁXIMO.

Figura 64. Cuarto fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 2

Como se observa, el estudiante establece que la derivada de una parábola es una recta, por lo cual la gráfica de f' debe estar formada por rectas. Por otro lado, es posible apreciar que establece *coordinaciones* entre los *procesos* que *asocian* el signo de f' con el crecimiento/decrecimiento de la función y el máximo de f con el punto de corte de f' con el eje x. De esta forma, se puede establecer que el estudiante E_1 tiene construidas algunas de las *reversiones* de los *procesos* de la primera tarea, lo que es un indicio de que tiene construidas algunas relaciones del tipo “equivalencia lógica” entre los elementos que vinculan f con f', tanto a nivel global como puntual. Asimismo, lo anterior es un indicio de síntesis de los modos de representación, ya que, ambas tareas estaban presentadas en distintos modos.

Finalmente, para la construcción del gráfico, el estudiante utiliza la *coordinación* del *proceso* que asocia la derivada de una parábola con una recta, además, *coordina* esto con los elementos puntuales obtenidos en el apartado “a”, de esta forma, logra construir un gráfico correcto de f', en él que además, se puede inferir la utilización de la *coordinación* de *procesos* que vinculan la convexidad/concavidad de f con el crecimiento/decrecimiento de f', por lo cual, se puede establecer que el estudiante tiene construidas las *coordinaciones* de *procesos* globales que vinculan f con f''. La gráfica del estudiante E_1 se muestra en la Figura 65.

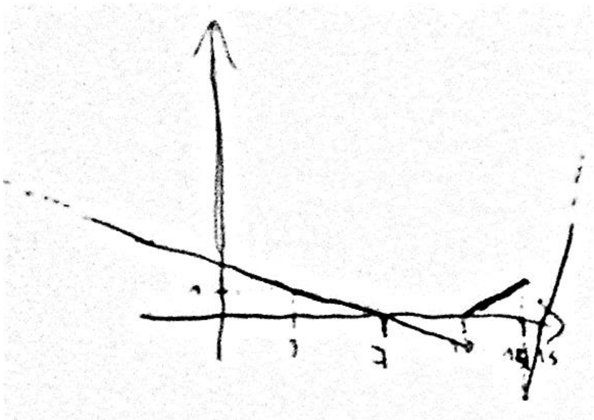


Figura 65. Gráfica del estudiante E_1 en la Tarea 2

Con respecto a la tercera tarea, el estudiante hace uso de variadas *coordinaciones* entre *procesos* asociados a los elementos matemáticos involucrados en la resolución, como se observa en la Figura 66.

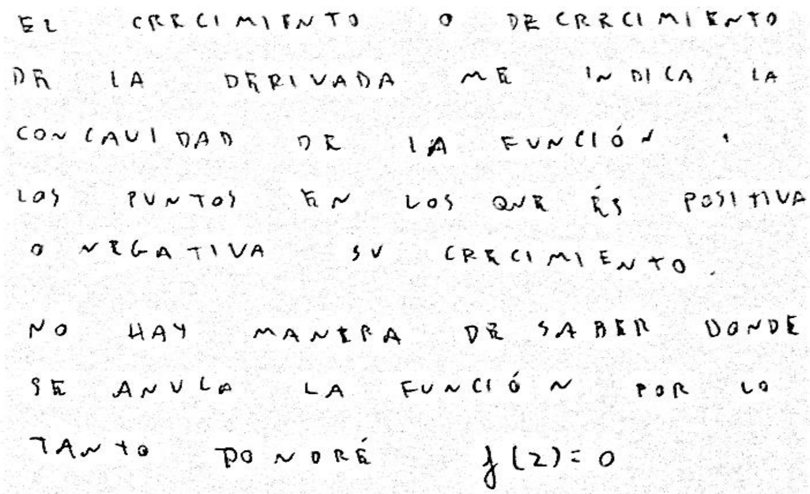


Figura 66. Primer fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 3

En particular, el estudiante E_1 indica "*el crecimiento o decrecimiento de la derivada me indica la concavidad de la función*", esto es un indicador de que *coordina* los *procesos* asociados a la monotonía de f' con los *procesos* vinculados a la curvatura de f. Además, esto último indica que el estudiante considera a f' como función y f'' como su derivada. Por otro lado, establece *coordinaciones* entre los *procesos* que vinculan el signo de f' con los *procesos* asociados a la monotonía de f. Asimismo, es importante destacar que el estudiante E_1 reconoce implícitamente que existen infinitas funciones que satisfacen las condiciones proporcionadas, por este motivo, se autoasigna una imagen particular de f para esbozar la función.

Con respecto a los valores extremos y puntos de inflexión, el estudiante no hace ningún comentario, sin embargo, logra establecerlos con claridad al construir la gráfica de la función correctamente, *coordinando* todos los *procesos* globales puntuales a través de los distintos intervalos como puede observarse en la tabla que construye bajo su gráfica en la Figura 67.

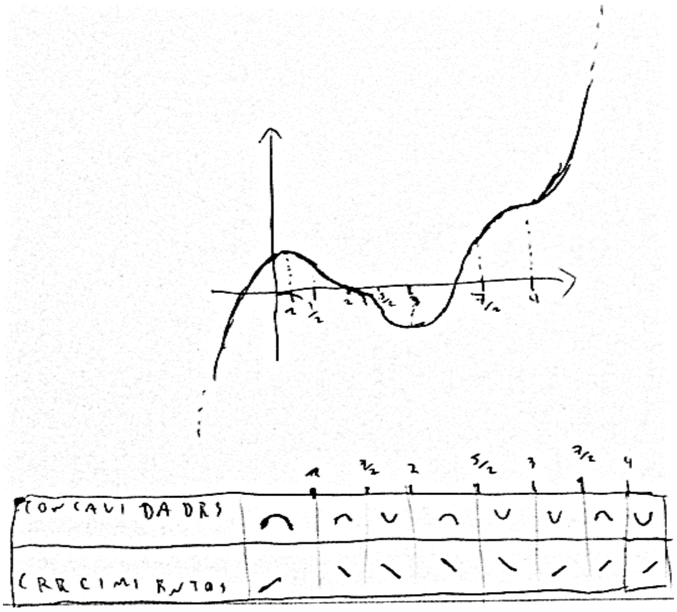


Figura 67. Segundo fragmento del protocolo de resolución del estudiante E_1 en la Tarea 3

A partir de análisis de protocolo de resolución del estudiante E_1 se observa que él puede construir *coordinaciones* y *reversiones* de todos los *procesos* globales y puntuales que asocian f, f' y f''.

Posteriormente, durante las entrevistas clínicas se realizaron algunas preguntas a los estudiantes que permitieron ratificar que ellos sí eran capaces de establecer relaciones entre f, f' y f'', y por tanto, podían *coordinar* los *procesos* que relacionan f con f', f con f'' y f' con f''. Por ejemplo, retomando el desarrollo realizado por el estudiante E_1, en la Tarea 1, se observa que él muestra explícitamente la construcción de *coordinaciones* de *procesos* asociados al par $f' - f''$, como puede observarse en el siguiente extracto de entrevista.

I: ¿Qué es creciente para $x<3$?

E_1: La derivada primera. Es creciente para $x<3$ porque la derivada segunda es estrictamente positiva. Es estrictamente creciente. Es positiva por aquí (indicando a la izquierda de $x=3$) tiene un máximo en el tres, que estará por aquí (indicando en $x=3$)

I: ¿Quién tiene un máximo en el punto de abscisa $x=3$?

E_1: La derivada primera tiene un máximo en $x=3$.

I: Ah, vale.

E_1: Porque la derivada segunda cambia de signo, de positivo a negativo. Por lo tanto, pasa de crecer a decrecer.

I: ¿Y este es el argumento que tú utilizas para decir que no puede ser cero la derivada en tres?

E_1: Sí porque, por aquí es positiva y va creciendo (indicando a la izquierda de tres). Por lo tanto, no puede cortar aquí, o sea, no es posible.

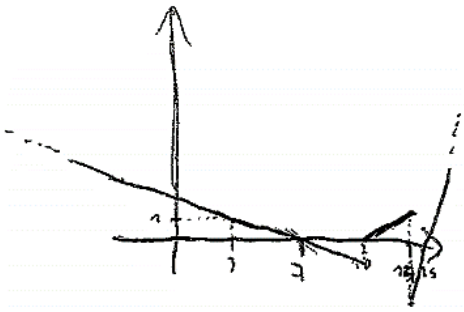
En particular, el estudiante para deducir el crecimiento de f' se fija en el signo de f'' proporcionado por la condición *i)*: *"La derivada primera. Es creciente por $x < 3$ porque la derivada segunda es estrictamente positiva"*. Esto le permite concluir que $f'(3) \neq 0$ y, por tanto, es imposible que $f'(3) = 0$, condición proporcionada en *c*): *"Es positiva por aquí (indicando a la izquierda de $x = 3$) tiene un máximo en el tres"*.

Otra evidencia de que el estudiante E_1 realiza este tipo de *coordinaciones*, puede observarse en la respuesta de este estudiante al consultarle en relación con su proceso de resolución de la Tarea 2:

I: ¿Y cómo determinaste el crecimiento y decrecimiento de f'?

E_1: ¿Crecimiento y decrecimiento de...?

I: ¿Cómo determinaste esto? (indicando la gráfica construida)



E_1: Ah, sí, a partir de la concavidad de la parábola.

I: ¿A partir de la concavidad de la parábola?

E_1: De la concavidad de la parábola, la concavidad de la parábola me determina la derivada segunda. Si la parábola tiene concavidad hacia arriba, o sea, es convexa entonces la derivada segunda es positiva. Si la derivada segunda es positiva entonces la derivada primera es creciente. Porque la derivada segunda es la derivada de la derivada primera.

El estudiante E_1 muestra claramente que considera f' como una función y f'' como su derivada, al *coordinar* el *proceso* asociado a la monotonía de f' con el *proceso* asociado a la curvatura de f (signo de f''): *"Si la derivada segunda es positiva entonces la derivada primera es creciente. Porque la derivada segunda es la derivada de la derivada primera"*.

Un aspecto relevante para ahondar en la *tematización* del *esquema* manifestado por el estudiante E_1 es el tratamiento de los puntos angulosos de la función por las relaciones que se establecen entre las estructuras que configuran el *esquema*. Un ejemplo de ello, se pone de manifiesto en la respuesta del estudiante a la modificación de la Tarea 3 (Tabla 9). En la entrevista al preguntar al estudiante E_1 por la gráfica de la función en $x=2$, considera que hay un máximo local de la función f e indica que es un punto anguloso por tratarse de un punto donde la función f no es derivable al tener f' una asíntota vertical izquierda: *"habría un punto de no derivabilidad, en el punto $x=2$. O sea, habría un punto de máximo en el punto $x=2$ (...) Yo le decía punto anguloso… O sea, que por la izquierda llegaría como línea recta (indicando recta tangente vertical) y por la derecha bajaría (indicando tangente horizontal)".* Se destaca que el estudiante al argumentar la existencia de un punto anguloso en $x=2$ considera que f es continua pero no derivable. La tendencia es que los estudiantes hagan uso incorrecto de esta relación de contrarrecíproco al considerar que si f no es derivable en punto de abscisa $x=2$ entonces f no es continua en dicho punto. Igualmente, de forma implícita, el estudiante considera que la gráfica de f tiene un máximo local en $x=2$ con un cambio de curvatura, al referirse a las pendientes de las rectas tangentes en el entorno del punto puntualizando que "*O sea que por la izquierda llegaría como línea recta (indicando recta tangente vertical) y por la derecha bajaría*".

I: Esta gráfica la cambiamos y ahora es está que está aquí, y te preguntamos: ¿qué sucedería con la gráfica de la función f ?... en $x=2$ que es ese que está ahí (indicando la gráfica f'), si sabemos que la función es continua.

E_1: Vale espera,… Él $x=2$ lo tengo que meditar un segundo.
(…)

E_1: … Entonces la función no es derivable en $x=2$, y ahora un segundo que me lo pienso como funciona en $x=2$. ¿Aquí tiende a infinito no? (indicando en $x=2$ por la izquierda)

I: Sí, tiende a infinito.

E_1: Y la función no es derivable en $x=2$, ah, vale... pues sería... creo que tendríamos uno por aquí... bueno... subiría casi, casi hasta volverse una recta vertical y luego, en el punto $x=2$ bajaría, habría un punto de no derivabilidad, en el punto $x=2$. O sea, habría un punto de máximo en el punto $x=2$. Sería...

I: ¿Un punto de que...?

E_1: De no derivabilidad.

I: Pero dijiste algo más.

E_1: Es máximo.

I: ¿Y cómo sería la función en ese punto máximo?

E_1: Yo le decía punto anguloso...

I: ¿Anguloso?

E_1: O sea, que por la izquierda llegaría como línea recta (indicando recta tangente vertical) y por la derecha bajaría (indicando tangente horizontal).

De todo lo descrito anteriormente, es decir, del análisis del protocolo de resolución y sus respuestas en la entrevista, se deduce que el estudiante E_1 situado en el subnivel Trans A, puede establecer *coordinaciones* de *procesos* para vincular f, f' y f'', y en particular, puede relacionar f' y f'', por tanto, según Sánchez-Matamoros (2004), Cooley *et al*. (2007) y García *et al*. (2011) este estudiante ha *tematizado* el *esquema* de la derivada.

Posteriormente, a estos estudiantes que habían mostrado evidencia de haber *encapsulado* las *coordinaciones* de los *procesos* que configuran el par $f'-f''$, se les realizaron las preguntas (ver Tabla 9) asociadas al tratamiento de puntos conflictivos (tangente vertical, punto anguloso y punto cúspide) en derivadas de distintos órdenes, lo cual permitió profundizar en la *tematización* del *esquema* por medio de la observación de la capacidad de estos estudiantes para generalizar la *coordinación* de estos *procesos*.

La información obtenida a partir de las entrevistas clínicas mostró que los estudiantes del subnivel de desarrollo Trans A muestran, generalmente, consistencia y flexibilidad a la hora de responder a las preguntas planteadas en el cuestionario y pudieron, casi en todos los casos, discutir correctamente los cambios en las condiciones de las tareas, así como, responder a las nuevas interrogantes. Sin embargo, se aprecian diferencias en sus repuestas a las preguntas que incluyen el análisis de puntos característicos de una función en derivadas de orden superior a dos. Estas diferencias han permitido inferir tres tipos relaciones entre derivadas sucesivas y de ahí, poder considerar diferentes matices en la *tematización* del *esquema* de la derivada. Dos de estas tres relaciones, las que se han etiquetado en términos de estructuras propias de la teoría APOE, debido a la cualidad fractal de esta (Meel, 2003). En la Tabla 21 se presentan el tipo de relaciones entre derivadas sucesivas identificadas en el análisis de las entrevistas.

Tabla 21. Relaciones entre derivadas sucesivas de una función

Relación	Descripción	Estudiante
Inicial	Establece relaciones entre f, f' y f''.	E_2
Totalidad	Establece relaciones entre f, f', f'' y es capaz de extrapolar estas relaciones a cualquier par de derivadas sucesivas $f^{(n-1)}$ - $f^{(n)}$ utilizando funciones auxiliares.	E_3
Objeto	Establece relaciones directas entre f, f', f'', f''',..., $f^{(n-1)}$ y $f^{(n)}$.	E_1, E_{11}, E_{17}

En las subsecciones 4.5.1, 4.5.2 y 4.5.3 se describen cada uno de estos tipos de relaciones enfatizando como los estudiantes coordinan los pares de derivadas sucesivas.

4.5.1. Relación inicial

El estudiante E_2 establece relaciones iniciales pues de forma explícita es capaz de *coordinar* todos los *procesos* globales y puntuales que relacionan f, f' y f''. Un ejemplo de estas *coordinaciones* puede observarse en el análisis gráfico que este estudiante hace en la Tarea 3 del cuestionario, como puede observarse en la Figura 68.

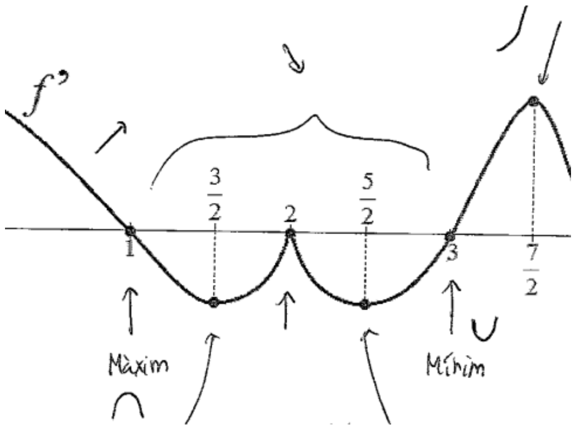


Figura 68. Análisis gráfico realizado por el estudiante E_2 en la Tarea 3

En la Figura 68, se observa que el estudiante E_2 *coordina* el *proceso* asociado a la *monotonía* de f' con el *proceso* vinculado a la curvatura de la función f, en el entorno de los puntos $x=1$ y $x=3$. El establecimiento de esta *coordinación* implica, a su vez, la *coordinación* del *proceso* asociado con la monotonía de la función f' con el *proceso* vinculado al signo de f'', lo cual, pone de manifiesto que este estudiante establece relaciones de relaciones entre f, f' y f''. Sin embargo, estas *coordinaciones* no las traslada, explícitamente a f''' ni a derivadas de otros órdenes. El estudiante E_2, en la entrevista, muestra dudas cuando en la modificación de la Tarea 3 se le pregunta por el punto de abscisa x_0, punto de inflexión de f'. Al referirse a la tercera derivada con un cambio de signo producido por el cambio de curvatura: *"primero es cóncava después convexa, cambia de sentido, cambia de... no sé cuánto, no estoy muy segura de esto, tercera derivada... está muy lejos*". Esta evidencia pone de manifiesto que el estudiante aunque logra relacionar el punto de inflexión x_0 de f' con f''', no explicita en sus argumentos, cuál es el comportamiento de f''' en el entorno de x_0. Asimismo, muestra que este estudiante no logra trasladar la *coordinación* de *procesos* que conectan la existencia de un punto de inflexión de una función con el cambio signo de su segunda derivada. Lo anterior, es un indicador que este estudiante no es capaz de generalizar la *coordinación* entre los *procesos* globales y puntuales que conectan la función con sus dos primeras derivadas.

I: El signo o el valor numérico, si puedes establecerlo.
E_2: A ver, en uno, la primera derivada es cero claramente, la segunda derivada va ser un valor negativo porque es como la pendiente de esta función y no lo sé, para saberlo...
I: Bueno pero ¿qué signo tendría la segunda derivada en uno?
E_2: Negativo

I: ¿Por qué?
E_2: Decrece entonces es negativo.
I: ¿Y la tercera derivada en uno?
E_2: Tercera derivada en uno, a ver si mi punto de inflexión está en el uno, entonces claro aquí hay un cambio de pasar de creciente a decreciente con lo que la tercera será cero, supongo. Tenemos un cambio de sentido de la segunda (indicando cambio de signo).
I: ¿Y en tres?
E_2: En el tres pasa lo mismo, porque tenemos un..., primero es cóncava después convexa, cambia de sentido, cambia de... no sé cuánto, no estoy muy segura de esto, tercera derivada... está muy lejos.

La *coordinación* de todos los *procesos* globales y puntuales, así como la toma de consciencia de que estas *coordinaciones* son *reversibles* y pueden generalizarse, son aspectos característicos de los estudiantes del subnivel de desarrollo Trans A.

Los datos de las entrevistas muestran que solo algunos estudiantes, que se muestran en las dos subsecciones 4.5.2 y 4.5.3, del subnivel Trans A de desarrollo del *esquema* de la derivada pueden extrapolar dichas *coordinaciones* para relacionar otros pares de derivadas sucesivas.

4.5.2. *Tematización* como *totalidad*

Un ejemplo de estudiante que puede extrapolar la *coordinación* de *procesos* globales y puntuales a cualquier par de derivadas sucesivas es el estudiante E_3 que logra establecer las relaciones entre f', f'' y otras derivadas sucesivas considerando una nueva función F. Esto indica que este estudiante para poder hacer uso de las *coordinaciones* de *procesos* que configuran el par $f''-f'''$ ha necesitado utilizar una función auxiliar F que se corresponda con f'. En efecto, considera que F'' se corresponde con f''' y, por tanto, el análisis del punto de inflexión de f' lo realiza a través de F'', no resuelve el problema directamente, sino solo por medio de esta relación de recurrencia entre derivadas. Esta evidencia corresponde a una manifestación de una estructura similar a la *Totalidad* (Arnon *et al*., 2014; Dubinsky *et al*., 2013), que en este caso, se manifiesta por medio de la capacidad del estudiante para generalizar las *coordinaciones* entre los *procesos* que conectan las derivadas, utilizando para ello una comparación de dichas derivadas por medio de una igualdad. Esta *acción* de comparación, indica que el *esquema* de la derivada ha sido *tematizado*, pues el estudiante considera a las derivadas como *objetos* (funciones derivadas) siendo capaz de relacionarlas y utilizando la información inferida, a partir de esta comparación, para solucionar una nueva tarea. Este estudiante, apoyándose en la función auxiliar, puede dar argumentos para afirmar que el valor de f''' en x_0 es cero. A continuación, se muestra el extracto de entrevista de este estudiante donde se evidencia este hecho:

I: Ese punto x_0 que está ahí que correspondería a punto de inflexión de la primera derivada, porque estaría cambiando de concavidad, no es cierto ¿Qué cosas podrías decir sobre este punto x_0 con respecto a la segunda derivada o la tercera derivada?

E3: Ah, sí cogemos la función esta como la función normal digamos…

I: O sea ¿cómo es eso de la función normal? Estás tomando que esta…

E3: Sí eso es F ya no es f', le llamo F.

I: La estás llamando F, ok.

E3: Porque puedo llamarla así, básicamente. Con lo cual ahora, yo estoy hablando de un punto de inflexión normal, en la función primitiva, simplemente es un punto de inflexión. Me indica que la segunda derivada será cero.

I: ¿Pero tú segunda derivada sería…?

E3: La tercera derivada.

I: ¿Sería la tercera derivada?

E3: Sí, si yo digo que F, digamos f' la llamo F, con lo cual $f^{(n)} = F^{(n-1)}$, me voy ahí, y yo trabajo con la función que estoy acostumbrado y no cambio funciones, me es más fácil así.

Del mismo modo que en el extracto de entrevista anterior, el estudiante E3 pone de manifiesto, nuevamente, el uso de esta estructura de recurrencia para conectar la *coordinación* de *procesos* globales y puntuales que vinculan f, f' y f'', en otros pares de derivadas sucesivas. En particular, al preguntarle por el comportamiento de f'' y $f^{(4)}$ en $x = a$, cuando se le ha proporcionado la gráfica de f''' en el entorno de este punto de tangencia vertical (Tabla 9), el estudiante menciona: "*Haciendo lo mismo que antes, ahora $f^{(n)} = F^{(n-2)}$, entonces mi tercera derivada en $x = a$ sería la primera derivada de F, por tanto, la segunda sería la función y la cuarta la segunda derivada y, luego trabajo con lo que yo sé*". Esta evidencia pone de manifiesto que el estudiante es capaz de establecer sin dificultades este tipo de relaciones de recurrencia entre funciones derivadas.

I: Si consideramos la gráfica de la derivada de orden 3 de una función f en el entorno del punto $x = a$ como la que se muestra en la siguiente figura (indicando la figura) ¿Qué sucede con las derivadas f'' y $f^{(4)}$ en el entorno de $x = a$?

E3: Haciendo lo mismo que antes, ahora $f^{(n)} = F^{(n-2)}$, entonces mi tercera derivada en $x = a$ sería la primera derivada de F, por tanto, la segunda sería la función y la cuarta la segunda derivada y, luego trabajo con lo que yo sé.

I: Entonces ¿qué sucedería f'' y $f^{(4)}$ en el entorno de $x = a$?

E3: Pues F' tiene una tangente vertical allí, además, podría ser cero y cambiar de signo ¿el eje de coordenadas corta en el punto de tangencia?

I: No necesariamente.

E3: Ah, vale, o sea, no se puede determinar porque dependerá de la posición de esta porción de gráfica, pero en el caso más sencillo, o sea… si corta en punto de tangencia habrá un mínimo local en la función.

I: ¿En qué función?
E_3: De mi función F, que en este caso sería la f''.

Es importante destacar que este estudiante logra *destematizar* su *esquema* para utilizar las componentes asociadas y las interrelaciones que lo conforman, principalmente en términos de *coordinación* de *procesos* globales y puntuales. Específicamente, este estudiante *coordina* los *procesos* que relacionan el signo de la derivada F' (F' que se corresponde con f''') con la monotonía de la función F (F que se corresponde con f'') suponiendo que la tangente vertical esta en $x=0$, es decir, que $F'(0)=0$ de esta forma, determina que F tendrá un mínimo local en $x=0$. Asimismo, se puede inferir que el *esquema tematizado,* por el estudiante E_3, está conformado por todas las estructuras mentales (*acciones*, *procesos, objetos* y *esquemas*) que vinculan a f, f' y f''. Por tanto, para responder a las interrogantes que involucran otras derivadas sucesivas él hace uso de estas relaciones de recurrencia (igualdades de derivadas), las cuales le permiten utilizar las componentes de su *esquema* de la derivada *tematizado*.

4.5.2. *Tematización* como *objeto*

Por último, el resto de estudiantes entrevistados (E_1, E_{11} y E_{17}) muestran consistencia y flexibilidad al responder a todas las preguntas relativas tratamiento de puntos conflictivos (tangente vertical, punto cúspide y punto anguloso) y otras interrogantes, en derivadas sucesivas, y no necesitan utilizar funciones auxiliares para vincular las derivadas.

Por ejemplo, el estudiante E_{11}, en el caso concreto de justificar que el valor de f''' en x_0 es cero, explícitamente argumenta que f''' se anula porque hay un punto de cambio de concavidad en f'. Con esta argumentación, el estudiante manifiesta que directamente traslada las *coordinaciones* de *procesos* globales y puntuales que vinculan f, f' y f'', a otras derivadas de orden superior a dos.

I: Y en ese x_0 que correspondería a un punto de inflexión
E_{11}: Vale, al ser un punto de inflexión
I: Vale, pero ¿qué signo tendría en f' primero?
E_{11}: Ah, en f' esto es positivo, f'' también positiva por ser creciente la función en ese punto y f''' es cero
I: ¿Por qué es cero?
E_{11}: Por ser punto de inflexión, o sea, es decir, por pasar en principio de cóncavo a convexo. O sea, está cambiando la monotonía de f''.

Específicamente, el estudiante E_{11} *coordina* el *proceso* que asocia la existencia de un punto inflexión en f' con el *proceso* asociado al cambio de signo de f''', lo cual implica una traslación directa de las relaciones entre f y f'' al siguiente nivel.

Por otra parte, el estudiante E_{17} pone de manifiesto la consistencia y flexibilidad al trasladar directamente las *coordinaciones* de *procesos* globales y puntuales que vinculan f, f' y f'' a otras derivadas de orden superior al responder a todas las preguntas relativas a tangentes de tipo vertical. Un ejemplo de ello, se observa en la respuesta de este estudiante, E_{17}, al consultarle en relación con el comportamiento de la segunda y cuarta derivada, referente a la tercera que posee una tangente de tipo vertical, mostrando un claro dominio de las relaciones e implicaciones que conectan estos pares de derivadas sucesivas desde el punto de vista geométrico como puede observarse en el siguiente extracto de entrevista.

I:	Si consideramos la gráfica de la derivada de orden 3, esto es f''' de una función f en el entorno de $x=a$ ¿qué sucede con la segunda derivada y la cuarta derivada en el entorno de este punto?
E_{17}:	Vale, en la cuarta..., empezamos con la cuarta que es más fácil, tiene una asíntota hacia más infinito.
I:	¿Por qué?
E_{17}:	Porqué la recta tangente aquí es vertical.
I:	¿Y por qué es hacia más infinito?
E_{17}:	Porqué es creciente. Y la segunda, bueno depende si esto es positivo o negativo. O sea, depende de qué valor tiene aquí la función esta, o sea, si tiene un valor positivo será creciente, si tiene un valor negativo será decreciente.
I:	O sea ¿depende del signo? Si esto está...
E_{17}:	Encima o debajo.
I:	¿Si está sobre el eje o bajo el eje x?
E_{17}.	Exacto.

El estudiante E_{17} establece correctamente relaciones entre f''' y $f^{(4)}$ ($f''' \to f^{(4)}$), además, indica que es más fácil, lo cual se debe a que tradicionalmente en la enseñanza universitaria tiende a trabajarse con relaciones directas entre derivadas sucesivas $f \to f' \to f'' \to f''' \to f^{(4)} \to \ldots$ y, principalmente, solo se establecen relaciones entre una función y sus dos primeras derivadas. Además, E_{17} muestra que ha *encapsulado* el *proceso* que relaciona la derivabilidad con la continuidad de una función, lo cual le permite establecer que $f^{(4)}$ es discontinua en $x=a$ y que tendrá una asíntota vertical hacia más infinito en dicho punto. Para llegar a esto, el estudiante *coordina* el *proceso* asociado al crecimiento de f''' en el entorno de $x=a$ con el *proceso* asociado la existencia de una derivada infinita, de esta forma, establece que $f^{(4)}$ tendrá una asíntota hacia más infinito en $x=a$. Asimismo, con respecto al valor de f'' en $x=a$, argumenta que existen varios casos, lo que es un indicador de coherencia de su *esquema*. Por otra parte, al analizar el comportamiento de la segunda derivada, el estudiante *destematiza* su *esquema* para establecer relaciones entre los *procesos* que asocian f''' con f''. Sin embargo, indica que se trata de un problema abierto argumentando que dependerá de la posición relativa de la función f''' con respecto al eje x en el entorno de $x=a$. Por tanto, solo se atreve a entregar una respuesta parcial para los dos casos más sencillos. Para ello, *coordina* el *proceso* que asocia el signo de f''' con el *proceso* correspondiente a la monotonía de f'', así establece que f'' es creciente en el entorno de $x=a$ si f''' está sobre el eje x (f''' es positiva) y viceversa.

Análogamente a los estudiantes E_1 y E_{17}, el estudiante E_{11} no presenta dificultades para establecer conexiones entre las derivadas sucesivas de una función. En particular, muestra la coherencia y flexibilidad de su *esquema* para tratar los tres puntos conflictivos involucrados en la resolución de la última interrogante de la entrevista (ver Tabla 9), como puede verse en el siguiente fragmento de entrevista.

I: ¿Qué sucede en f' y f''' en los puntos $x=0$, $x=4$ y $x=9$? piénsalo con tranquilidad.

E_{11}: En $x=0$, la segunda derivada es cero por lo tanto tenemos o un máximo, o un mínimo, o un punto de inflexión y, como pasa de positivo a negativo es un máximo (…)

E_{11}: Sí, y la tercera derivada es negativa y muy negativa, yo creo que es asíntota... seguro que es negativa y, además, hace una asíntota, no sé sí hace una asíntota, pero lo parece, pero bueno en todo caso es negativa seguro.

I: En este punto $x=0$ estamos suponiendo que hay una recta tangente vertical.

E_{11}: Ah, vale, entonces es asíntota hacia el menos infinito.
(…)

I: ¿Y en $x=4$?

E_{11}: Si la primera derivada tiende a infinito, lo que le pasa... además, a $+\infty$, la función tiene un, o sea... lo mismo que le pasa en el $x=0$ a la segunda le pasa a esta en la primera, es decir, que tiene una recta tangente vertical, pero además al ser discontinua lo que le pasa es que aquí hay un punto de estos de pincho y luego decrece la función porque la segunda derivada es negativa
(…)

I: Y en el último punto $x=9$.

E_{11}: La tercera derivada no está definida.

I: ¿Por qué no está definida?

E_{11}: Pues porque en este punto pasan infinitas rectas tangentes y en la primera derivada, vale eh..., la primera derivada es negativa... no...O sea, tiene recta tangente negativa por lo tanto es decreciente y seguirá siendo decreciente (indicando en la vecindad del $x=9$), por lo tanto, es un punto de inflexión (…)

Los argumentos expuestos por el estudiante E_{11} dan evidencia de que *coordina* el *proceso* asociado al signo de f'' con el *proceso* correspondiente a la monotonía de f' en el entorno de $x=0$, logrando establecer que f' posee un máximo local en dicho punto. Del mismo modo, al considerar que f' continua en $x=4$, menciona que se tratará de un máximo local, pues cambia la monotonía de decreciente a decreciente, sin especificar que se trata de un punto anguloso de f' sino que dice que es un “pincho”. Asimismo, con relación al análisis del entorno del punto de abscisa $x=9$, el estudiante argumenta correctamente el comportamiento en la vecindad del punto para las funciones f' y f'''. Para ello utiliza el hecho de que f''' es la primera derivada de f''. De esta forma, *coordina* el *proceso* asociado al signo de las aproximaciones de las derivadas laterales con el *proceso* asociado a la monotonía de f''' determinando así, que f''' posee una discontinuidad de salto finito en $x=9$. En relación con el comportamiento de f' en $x=9$, el estudiante indica que existe un cambio de curvatura (convexidad/concavidad), indicando que se trata de un punto de inflexión. Para ello, *coordina* el *proceso* asociado al signo de f'' con el *proceso* asociado a la monotonía de f''' (cambio de signo f''' indica cambio de curvatura en f').

Finalmente, todas las argumentaciones de estos tres estudiantes permiten indicar que han *tematizado* el *esquema* de la derivada, es decir, que es un *objeto* cognitivo en su estructura mental, lo cual les permite desempaquetarlo por medio del mecanismo de *destematización* para operar con las estructuras que lo componen, como por ejemplo las *coordinaciones* de los *procesos* puntuales/globales que relacionan f, f' y f''. Sin embargo, se destaca que la característica más importante de estos estudiantes es su capacidad para identificar que los vínculos entre una función y sus derivadas, son invariantes, es decir, que estas relaciones se presentan en cualquier par de derivadas sucesivas, independiente de su orden.

Capítulo 5. Discusión y Conclusiones

En este quinto y último capítulo de la memoria de tesis doctoral, se ha organizado en 6 secciones. Las dos primeras secciones están alineadas en términos de los objetivos específicos planteados de esta investigación, es decir, se comenta sobre *tematización* del *esquema* de la derivada alcanzada por algunos estudiantes del subniveles de desarrollo Trans A. A continuación, se desarrolla una subsección en relación con los diferentes subniveles de desarrollo del esquema de derivada. En la tercera sección, se discute sobre la elección del diseño metodológico, específicamente el análisis del clúster, como posible camino para investigar el desarrollo de *esquemas* y la *tematización* de distintos conceptos matemáticos. Posteriormente, en la cuarta sección, se plantea una modificación en la construcción número diez de la DG de Font *et al*. (2016) referente a la *tematización* del *esquema* de la derivada. Luego, en la quinta sección, se reflexiona sobre las limitaciones de esta investigación y las posibles rutas que se abren para el desarrollo de futuros trabajos. Finalmente, en la sexta sección, se listan algunos trabajos derivados de la realización de esta tesis doctoral.

5.1. La *tematización* del *esquema* de la derivada

Se destaca que diversos estudios señalan que existe una gran dificultad asociada a la comprensión del concepto de derivada, la cual, según estas investigaciones que toman como marco de referencia la teoría APOE, se relaciona con la complejidad asociada a los mecanismos de *encapsulación* y *tematización* (Asiala *et al.*, 1997; Sánchez-Matamoros, 2004; Cooley *et al.*, 2007; García *et al.*, 2011; Font *et al.*, 2016).

Con relación a la *tematización* del esquema de la derivada, algunas investigaciones que indagan sobre ello (Sánchez-Matamoros, 2004; Cooley *et al.*, 2007; García *et al.*, 2011) indican que la *tematización* del *esquema*, por parte de un estudiante, se evidencia en el uso flexible y coherente de las estructuras matemáticas que componen el *esquema* y de las relaciones entre ellas. Este hecho ha sido corroborado en nuestra investigación, pues se ha observado que los estudiantes que muestran haber *tematizado* el *esquema* son capaces de *coordinar* los *procesos* puntuales y globales que conectan la función con la primera y segunda derivada como *objetos*, tanto en las relaciones directas como contrarias y, además, pueden utilizar la estructura subyacente a estas *coordinaciones* para conectar pares de derivadas de orden superior a dos.

Asimismo, el hecho de incluir modificaciones y nuevas tareas que implicaban, el uso de derivadas sucesivas (*coordinaciones* de *procesos* que vinculan f, f', f'', f''' y $f^{(4)}$) y puntos conflictivos han permitido observar que los estudiantes que han *tematizado* el *esquema* de derivada muestran diferencias en la forma en que se pone de manifiesto la construcción de dichas *coordinaciones*. Por un lado, existe un estudiante que requiere de funciones auxiliares que le permiten establecer relaciones de recurrencias entre derivadas sucesivas, con lo cual es capaz de trasladar el problema, o tarea, a una situación más cómoda y conocida para él, como es la construcción de *coordinaciones* entre los *procesos* globales y puntuales que vinculan f, f' y f''. De esta forma, resuelve los problemas estableciendo las *coordinaciones* entre f, f' y f'', y luego por medio de la recurrencia construida traslada sus respuestas a la situación original. Esto puede ser una evidencia de la existencia, dentro de la estructura del *esquema tematizado*, de un estado intermedio entre las estructuras mentales de *proceso* y *objeto*. Dubinsky *et al.* (2013) y Arnon *et al.* (2014) han denominado a esta estructura intermedia como *totalidad*, considerándola como una estructura distinta y, no como un nivel dentro de la estructura *objeto*, porque se aprecia en él un cambio en el pensamiento del estudiante sobre un concepto matemático viéndolo como un todo, pero con la limitación de no poder realizar *acciones* y *procesos* directamente sobre ese todo. Estos autores señalan que esta construcción se pone de manifiesto por la dificultad que exhiben los estudiantes en la progresión desde una estructura de *proceso* a la estructura *objeto*. En este caso, el estudiante que usa funciones auxiliares podría ser una evidencia de que su construcción puede caracterizarse como una *totalidad* (*totality* en inglés) porque para hacer uso del *objeto* función derivada requiere siempre de una función auxiliar (F) sobre la que puede aplicar *acciones* y *coordinaciones* entre los *procesos* que vinculan sus derivadas sucesivas.

Por otro lado, hay estudiantes que construyen y reconstruyen directamente las relaciones entre f, f', f'', f''' y $f^{(4)}$. Según Arnon *et al.* (2014), estos estudiantes ponen de manifiesto que poseen una estructura mental de *objeto* de la derivada, es decir, que han *tematizado* el *esquema*, pues pueden aplicar directamente *acciones* y *procesos* sobre los elementos matemáticos globales y puntuales que conectan las derivadas sucesivas.

Además, hay estudiantes que muestran no haber *tematizado* el *esquema,* pues solo establecen las relaciones hasta la segunda derivada, lo que les permite encontrar la contradicción de la Tarea 1 y resolver correctamente todas las tareas del cuestionario. Sin embargo, al no ser capaz de justificar las modificaciones de tareas y no responder a las nuevas preguntas, durante la entrevista, permite inferir que lo único que puede hacer son *coordinaciones* entre *procesos* globales y puntuales, pero el conjunto de estas *coordinaciones* aún no ha sido *encapsulada* y por tanto, no ha alcanzado la *tematización* del *esquema* (Arnon *et al.*, 2014).

Igualmente, se puntualiza que en esta investigación no se obtuvo evidencia sobre la hipótesis planteada en la investigación de Cooley *et al.*, (2007), la cual indica que un estudiante que ha *tematizado* el *esquema* muestra coherencia y flexibilidad, siendo capaz de *coordinar* todas las propiedades de la función en todos los intervalos. Sin embargo, en nuestro estudio observamos a un estudiante que era capaz de hacer todas estas *coordinaciones* para relacionar f, f' y f'', pero al preguntársele por derivadas de orden superior a dos no fue capaz de trasladar dichas *coordinaciones* a las nuevas situaciones, mostrando así que su *esquema* no era flexible. Asimismo, el análisis de los datos muestra que el establecimiento correcto de las *coordinaciones* entre *procesos* que vinculan f' y f'', no es suficiente para indicar que el *esquema* de derivada ha sido *tematizado,* pues como se mencionó, existen estudiantes que vinculan correctamente este par de derivadas, pero no son capaces de generalizar estas *coordinaciones* a otros pares de derivadas sucesivas. Lo anterior, es un elemento que refuta la hipótesis planteada por Sánchez-Matamoros (2004) y García *et al.* (2011) quienes indican que un estudiante que logra establecer todas las relaciones entre f' y f'' ha *tematizado* el *esquema* de derivada, y además es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que han construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f''), y así, sucesivamente.

Otro aspecto asociado a la *tematización* del *esquema* de derivada se relaciona con la *encapsulación* de la *coordinación* de los *procesos* que relacionan la continuidad y la derivabilidad. Esto es un elemento primordial en el análisis de los puntos conflictivos, pues es necesario que los estudiantes puedan establecer que la continuidad de una función en punto es una condición necesaria para la existencia de la derivada. Sin embargo, no es una condición suficiente, pues la derivada existirá dependiendo de comportamiento en el entorno del punto (derivadas laterales). Por otra parte, establecer relaciones entre una función y sus distintas derivadas supone un reto y, requiere como mínimo de un nivel de desarrollo Trans del *esquema* (para las dos primeras derivadas), o bien, de un esquema *tematizado* del concepto de derivada (para todos los pares de derivadas). Esto queda de manifiesto, especialmente, cuando se trata de tareas que involucran el uso del modo de representación gráfico, pues comúnmente el currículo de Cálculo tiende a centrarse en el trabajo desde el modo de representación analítico, que es como tradicionalmente se definen los conceptos en matemáticas. Dar prioridad a este trabajo analítico, limita a los estudiantes y los lleva a una comprensión parcial e instrumental del concepto de derivada, operando mecánicamente, sin ser muy conscientes de lo que hacen. El uso de la representación gráfica, no solo de funciones, sino que también de sus funciones derivadas, puede favorecer la *tematización* del *esquema*.

Con el análisis realizado de cada uno de los puntos conflictivos y de la evidencia recogida de los estudiantes que han *tematizado* el *esquema*, es posible establecer algunas características generales que pueden facilitar la construcción de tareas, por parte de los profesores, que involucren el tratamiento de este tipo de puntos y favorezcan así la *tematización*. En particular, coincidimos con González (1998), Valero (2000), Baker *et al*. (2000) y Sánchez-Matamoros *et al*. (2008) que indican que para favorecer la compresión del concepto de derivada es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones que favorezcan el tránsito entre derivadas de distintos órdenes utilizando elementos matemáticos como: valores extremos y puntos de inflexión. Complementamos esta idea y proponemos la utilización del análisis de puntos conflictivos, trabajados en esta investigación, como vehículo para el tránsito entre derivadas sucesivas, especialmente, desde el modo de representación geométrico, pues para su tratamiento se requiere de la comparación de *objetos* obtenidos como resultado de la *encapsulación* de una *coordinación* de *procesos* asociados a elementos matemáticos tanto puntuales como globales, tanto en el sentido directo, que tradicionalmente son utilizados en el aula ($f \rightarrow f' \rightarrow f'' \rightarrow f''' \ldots \rightarrow f^{(n)}$), como en el sentido inverso ($f \leftarrow f' \leftarrow f'' \leftarrow f''' \ldots \leftarrow f^{(n)}$), cuya utilización es mucho menos frecuente.

Finalmente, queremos indicar que cuando un estudiante *tematiza* el *esquema* de un concepto en un *objeto* puede realizar *acciones* y *procesos* sobre él, pero también sobre los elementos matemáticos que configuran el *esquema* gracias a *destematización* del mismo. Lo anterior, es observable claramente en los argumentos que proporcionan los estudiantes entrevistados a la hora de responder a las modificaciones y las nuevas preguntas. Además, se observa que son conscientes de sus respuestas y muestran coherencia en sus argumentaciones. Asimismo, para ellos la derivada no solo es una expresión analítica o una representación geométrica, sino que corresponde a un *objeto* (función derivada) que se puede transformar/relacionar con otros *objetos* de naturaleza similar (derivadas de órdenes superiores) y, que además, están vinculados entre sí por relaciones invariantes entre elementos matemáticos, como sucede en el caso de pares de derivadas sucesivas.

5.2. Sobre los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada

Con el propósito de determinar los subniveles de desarrollo del esquema de la derivada, consideramos los planteamientos de Piaget y García (1983) en cuanto a que en el interior de cada nivel de desarrollo (Intra, Inter y Trans) coexisten 3 subniveles, los cuales siguen el mismo orden y que solo se puede pasar a otro subnivel cuando se ha alcanzado el previo. Esta idea, ya había sido abordada en el trabajo de Sánchez-Matamoros (2004) en el cual se identificaron 2 subniveles de desarrollo tanto para el nivel Intra como para Inter. Además, esta investigadora concluye que existe una progresión, entre estos subniveles, la cual está caracterizada por la incorporación de un mayor número de elementos matemáticos y relaciones, así como, una paulatina síntesis de los modos de representación.

Nuestros datos confirman lo planteado por Sánchez-Matamoros (2004) en cuanto a la existencia de subniveles de desarrollo anidados en los diferentes niveles de desarrollo del esquema (Intra, Inter y Tras). Asimismo, coincidimos en que el paso de un subnivel de desarrollo a otro, para los subniveles, está caracterizado por el uso de un mayor número de elementos matemáticos, sus relaciones (*coordinación* de *procesos* globales y puntuales) y la coordinación de los dos modos de representación involucrados en las tareas propuestas.

Por otra parte, se destaca que dada las características de los estudiantes participantes en esta investigación, no fue posible caracterizar los 2 subniveles de desarrollo Intra identificados por el análisis de clúster. Sin embargo, sí aportamos una caracterización para los 3 subniveles de desarrollo Trans, de los que en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004), solo se había descrito el nivel Trans y la *tematización* observada en dicho nivel.

En particular, la investigación de Sánchez-Matamoros (2004), concluye que en el nivel de desarrollo Trans, los estudiantes pueden establecer relaciones de diferentes tipos conjunción lógica, contrarrecíproco y "equivalencia lógica" y, además, han logrado la síntesis de los modos de representación. Los datos de esta investigación dan indicios que solo los estudiantes asignados por el clúster al subnivel de desarrollo Trans A muestran este tipo de características, pues ellos logran establecer todas las *coordinaciones* de *procesos* globales y puntuales, independiente del modo de representación en el cual se ha proporcionado la información (tarea). Además, estos estudiantes logran establecer *coordinaciones*, sin dificultades, entre los *procesos* globales y puntuales que asocian la primera derivada con la segunda derivada, es decir, que establecen relaciones entre f' y f''. Es más, esta capacidad para relacionar f' con f'', es uno de los elementos característicos de este subnivel de desarrollo, lo cual, les permitió a los estudiantes identificar la contradicción entre las condiciones analíticas proporcionadas en la Tarea 1.

Igualmente, otro aspecto característico de este subnivel de desarrollo Trans A, es el tratamiento correcto de los puntos angulosos presentes en las Tareas 2 (en $x=14$) y 3 (en $x=2$). Esto último, pone de manifiesto la capacidad de los estudiantes, de este subnivel, para coordinar *procesos* globales (comportamiento en la vecindad del punto y derivadas laterales) con *procesos* puntuales (relación entre derivabilidad y continuidad en un punto) (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006). La generalización de esta capacidad para *coordinar* este tipo de *procesos* en puntos conflictivos, es justamente, la que pusimos a prueba en la entrevista con el objeto de observar la posible *tematización* del *esquema* (Baker *et al.*, 2000; García *et al.*, 2011; Sánchez-Matamoros, 2004), en términos de la habilidad de estos estudiantes para trasladar este tipo de *coordinaciones* a pares de derivadas de orden superior.

Por su parte, el análisis de la *tematización* del *esquema* de la derivada permitió establecer 2 manifestaciones o matices distintos de esta. Por tanto, con base en estos matices es posible inferir la existencia de 2 subniveles claramente diferenciados al interior del subnivel de desarrollo Trans A. El primero correspondería al subnivel asociado a la *tematización* del *esquema* como una *totalidad* y el segundo, a la *tematización* del *esquema* como un *objeto*. De esta forma, esta investigación da cuenta de la existencia de 3 subniveles de desarrollo asociados al nivel Trans, los cuales, finalmente, se han caracterizado como Trans C (relación inicial de la Tabla 21, etiquetado anteriormente como Trans A), Trans B (asociado con la *tematización* como *totalidad*) y finalmente Trans A (asociado a la *tematización* como *objeto*).

Por otro lado, los estudiantes del subnivel de desarrollo Trans B, aún presentan algunas dificultades para establecer las *coordinaciones* contrarias (la *reversión* de los *procesos*) que relacionan el signo de la primera derivada son la monotonía de la función (si f es estrictamente creciente $\rightarrow f'>0$ y sí f es estrictamente decreciente $\rightarrow f'<0$). Este mismo fenómeno se observa al construir la *reversión* de los *procesos* globales que asocian el signo de la segunda derivada con la curvatura de la función (si f es convexa $\rightarrow f''>0$ y si f es cóncava $\rightarrow f''<0$). Lo anterior, por un parte muestra que los estudiantes de este subnivel de desarrollo aún no son capaces de establecer relaciones del tipo "equivalencia lógica" y, por otra, confirma que ellos aún están construyendo la síntesis de los modos de representación (Sánchez-Matamoros, 2004), pues la construcción de ambas *reversiones* de *procesos* globales implica una conversión de información geométrica a analítica. Además, estás dificultades asociadas a la construcción de las *reversiones* de estos *procesos* provocan que los estudiantes de este subnivel de desarrollo, a diferencia de los del subnivel Trans A, aún presenten algunos problemas en el tratamiento de puntos conflictivos, ya que el análisis de este tipo de puntos requiere, como ya se mencionó, de la *coordinación* de *procesos* globales y puntuales en su entorno, pero además, necesita del correcto uso de la relación entre derivabilidad y continuidad, lo cual sí logran hacer.

Asimismo, se observa que la caracterización realizada, en esta investigación, para el subnivel de desarrollo Trans B es equivalente a la del subnivel Inter (Inter de la Tabla 5) descrita en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004), pero a diferencia de esta última en este trabajo se añade, a dicha caracterización, la capacidad de los estudiantes del subnivel Trans B para usar correctamente las relaciones entre derivabilidad y continuidad (relaciones directa y contrarrecíproca), y no solo al contrarrecíproco como se puntualizaba en el trabajo mencionado. Por tanto, el subnivel Trans B, aquí descrito, puede ser caracterizado como un subnivel Inter Avanzando que se encuentra en transición hacia el Trans C (descrito anteriormente y que correspondía al Trans A del clúster). Este subnivel Inter Avanzado se ha denominado como subnivel Inter A y su caracterización es equivalente a la de Sánchez-Matamoros (2004), pero se añade a dicha caracterización el uso correcto de la relación directa entre derivabilidad y continuidad.

En cuanto a los subniveles de desarrollo Inter, la investigación de Sánchez-Matamoros (2004) reportó la existencia de 2 subniveles de desarrollo, los cuales fueron nombrados como 'Inter 1' e 'Inter', pero como ya se mencionó el subnivel denominado Trans B en el análisis clúster de esta investigación se corresponde con el Inter avanzado de la investigación de Sánchez-matamoros y hemos pasado a denominarlo Inter A. Por tanto, los 2 subniveles que el clúster identificó como pertenecientes al nivel de desarrollo Inter, nombrados inicialmente como Inter A e Inter B, realmente corresponderían a los otros 2 subniveles del nivel Inter, Inter B e Inter C respectivamente. Por tanto, estos dos subniveles y unidos al subnivel Inter A (inicialmente nombrado como Trans B en el clúster) forman los 3 subniveles de desarrollo del nivel Inter que, según Piaget y García (1983) deben existir en interior de cada nivel. Es más, la caracterización del subnivel de desarrollo Inter B de esta investigación es equivalente a la planteada por Sánchez-Matamoros (2004) para el subnivel de desarrollo denominado Inter 1 en dicho estudio.

En particular, Sánchez- Matamoros (2004) caracterizó el subnivel Inter 1 en términos de la capacidad de los estudiantes para establecer relaciones del tipo “y lógica” entre elementos matemáticos analíticos o gráficos, puntuales o globales, en donde estas relaciones, se establecían, generalmente, en un modo de representación. El análisis de nuestros datos confirma esta afirmación para el caso del subnivel de desarrollo Inter B, pues lo estudiantes de este subnivel pueden establecer *coordinaciones* entre los *procesos* globales que asocian el signo de la primera derivada con la monotonía de la función ($f'>0 \rightarrow f$ estrictamente creciente y $f'<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente) y, del mismo modo, entre los *procesos* globales que asocian el signo de la segunda derivada con la curvatura de la función ($f''>0 \rightarrow f$ es convexa y $f''<0 \rightarrow f$ es cóncava). Sin embargo, tienen problemas para *coordinar* estos *procesos* con la información puntual, lo cual repercute en que presenten dificultades a la hora de determinar valores extremos y puntos de inflexión, especialmente cuando la información es proporcionada de forma gráfica. Esto último, es un indicador de que el establecimiento de relaciones del tipo “y lógica” (Sánchez-Matamoros, 2004), que a pesar de ser posibles de establecer, aún no son relaciones que se observen con regularidad en este subnivel desarrollo, lo cual, también es observable en la dificultad de estos estudiantes para combinar toda la información y esbozar correctamente una función a partir de la información gráfica proporcionada. Lo que lleva a considerar, el subnivel Inter 1 de la Investigación de Sánchez-matamoros (2004), como un primer subnivel Inter C (nombrado inicialmente como Inter B) de esta investigación.

Por tanto, a partir de lo descrito en los párrafos anteriores, se puede indicar que la presente investigación también ha contribuido a encontrar los 3 subniveles de desarrollo asociados al nivel de desarrollo Inter y ha refinado la caracterización de los subniveles Inter planteados en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004). Además, el análisis cualitativo realizado a las entrevistas que se le hicieron a los estudiantes situados en el nivel Trans A, ha permitido determinar los tres subniveles asociados al nivel Trans. Este hecho nos corrobora la potencialidad de las metodologías mixtas en este tipo de investigaciones. En la Tabla 22 se muestra la caracterización final de los 3 subniveles de desarrollo Inter y Trans determinados en esta investigación.

Tabla 22. Caracterización final de los subniveles de desarrollo Inter y Trans

	Inter	Trans
C	Pueden *coordinar* algunos *procesos* globales, sin embargo, presentan dificultades para *coordinar* estos *procesos* con *procesos* puntuales. Por tanto, solo en algunos casos pueden determinar valores extremos o puntos de inflexión. Presentan graves dificultades para construir las *reversiones* de las *coordinaciones* de *procesos* que vinculan la monotonía y curvatura de una función con los signos de la primera y segunda derivada. Por tanto, tienen problemas para interpretar la información proporcionada en un contexto gráfico. No utilizan correctamente las derivadas laterales, lo cual provoca que tengan dificultades con los puntos conflictivos. Además, no consideran a la derivada como función. Aún se presentan algunas dificultades para utilizar correctamente la relación entre derivabilidad y continuidad (directa y contrarrecíproca). No pueden esbozar correctamente una función a partir de la información gráfica proporcionada. Lo cual se debe a que no construyen las *reversiones* de los *procesos* globales que relacionan la información gráfica con la analítica. No establecen relaciones entre la primera y segunda derivada. No han logrado la síntesis de los modos de representación.	Pueden establecer *coordinaciones* entre los *procesos* globales y puntuales que conectan la primera con la segunda derivada. Pueden construir la *coordinación* de dos o más *procesos* y también su correspondiente *reversión*. Utilizan correctamente las relaciones que vinculan la derivabilidad con la continuidad. Se enfrentan sin dificultades a los puntos conflictivos. Han logrado la síntesis de los modos de representación.
B	Pueden construir *coordinaciones* entre *procesos* globales y puntuales. Esto le permite determinar casi sin dificultades valores extremos y puntos de inflexión. Presentan dificultades en la construcción de la *reversión* de la *coordinación* de *procesos* que asocian la monotonía y curvatura de la función con el signo de la primera y la segunda derivada. Tienen dificultades con el tratamiento de los puntos conflictivos y no consideran a la derivada como función. Presentan dificultades para utilizar correctamente la relación entre derivabilidad y continuidad (directa y contrarrecíproca). Aún se observan algunas dificultades para esbozar correctamente una función a partir de la información gráfica proporcionada. Lo cual se debe a que no construyen correctamente las reversiones de los procesos globales que relacionan la información gráfica con la analítica. No establecen relaciones entre la primera y segunda derivada. No ha logrado la síntesis de los modos de representación.	Las mismas características que el Trans C, pero *tematizan* el *esquema* con una *totalidad*.

A	Pueden construir *coordinaciones* entre *procesos* globales y puntuales. Por tanto, puede determinar sin dificultad valores extremos y puntos de inflexión. Tienen algunas dificultades en la construcción de la *reversión* de las *coordinaciones* entre la monotonía y curvatura de la función con el signo de la primera y la segunda derivada. Utilizan sin problemas las relaciones (directa y contrarrecíproca) entre derivabilidad y continuidad. Tienen dificultades para conectar la primera derivada con la segunda. No consideran la derivada como una función. Se muestran esbozos de síntesis de los modos de representación, pero aún se observan dificultades asociadas a la interpretación de la información gráfica.	Las mismas características que el Trans C, pero *tematizan* el *esquema* con un *objeto*.

Otro aspecto importante, observable en la caracterización de los subniveles de desarrollo presentada en la Tabla 22, se relaciona con la progresión de un subnivel a otro, en cuanto al tipo y número de relaciones que se establecen. Esto ya había sido descrito en el trabajo de Sánchez-Matamoros (2004) y en el libro de Piaget y García (1983). Igualmente, se puntualiza que el trabajo de Sánchez-Matamoros (2004) se basa en identificación y caracterización del desarrollo del *esquema* de derivada en términos de 3 tipos de las relaciones lógicas "y lógica", "contrarrecíproco" y "equivalencia lógica" (que conlleva la doble implicación), que los estudiantes establecen entre los elementos matemáticos analíticos o gráficos, puntuales o globales, a la hora de resolver tareas. En la investigación de Sánchez-Matamoros (2004) se considera que la relación contrarrecíproca entre derivabilidad y continuidad es un indicador del desarrollo del esquema de derivada en estudiantes del nivel Inter y Trans. En esta investigación hemos podido corroborar esto, observando que el uso de este tipo de relación comienza en los subniveles Inter y se concreta en los subniveles Trans, sin embargo, se observó que la relación directa (sí f derivable en $x=a$ entonces f continua en $x=a$) también es importante, especialmente cuando el estudiante debe enfrentarse al tratamiento de puntos conflictivos que requieren de la *encapsulación* de esta relación entre derivabilidad y continuidad.

Finalmente, se destaca que coincidimos con Sánchez-Matamoros (2004) en cuanto a que la estructura subyacente más importante que configura en *esquema* de derivada es aquella que contiene todas las relaciones que pueden establecerse en f' y f'', tal y como lo muestra el grafo implicativo general correspondiente al subnivel de desarrollo Trans A (Figura 55), pues es a partir de la construcción de este tipo de relaciones y su posterior generalización que es posible *tematizar* el *esquema*, en un principio como una *totalidad* y posteriormente, como un *objeto*.

5.3. La elección del diseño metodológico

Si bien en los objetivos de investigación, no se plantea desarrollar una metodología para abordar la identificación de los subniveles de desarrollo del *esquema* de la derivada. Las circunstancias que se presentaron, durante su desarrollo nos llevaron a generar una.

En particular, la recolección de datos fue dificultosa pues solo se logró obtener una cantidad significativa de cuestionarios, luego de 2 cursos académicos (2014/2015 y 2015/2016). Además, solo 5 estudiantes de los 103 estudiantes accedieron a participar de la entrevista clínica. Una vez que se tuvieron a disposición todos los datos surgió la necesidad de establecer un diseño que nos permitiera la consecución de los objetivos de investigación. Se realizó una revisión de la literatura, en busca de estrategias que dieran luces sobre un posible camino a seguir, sin embargo, en todos los trabajos que abordaban el desarrollo de *esquemas* desde el marco de la teoría APOE, siempre se dispuso de una cantidad suficiente de entrevistas para caracterizar los niveles de desarrollo del concepto en estudio. Por tanto, dado que el primer objetivo específico buscaba la identificación y la posterior caracterización de los subniveles de desarrollo del *esquema* de derivada, se observó que el primer y principal problema era la identificación de subniveles. Una vez identificada la limitación, se pensó que una posible solución era la utilización de clúster o conglomerados, pero para realizar un análisis de este tipo se requiere de vectores y solo se disponía de los protocolos de resolución de los cuestionarios y algunas entrevistas clínicas.

A partir, de ese panorama surgió la idea de discretizar los protocolos de resolución de los estudiantes con el objeto de construir un vector para cada cuestionario (estudiante). Sin embargo, se requería de variables, las cuales, se obtuvieron de estudios previos (Sánchez-Matamoros, 2004; Trigueros y Escandón, 2008) y se describieron en función de los elementos matemáticos, y los modos de representación presentes en las tareas del cuestionario (Tabla 10). Con estos vectores, se realizó el análisis de clúster que permitió, por una parte, identificar los subniveles de desarrollo del *esquema* de derivada y, por otra, dividir la matriz generada, a partir de los vectores, con el objeto de realizar análisis estadísticos tanto descriptivos como implicativos para caracterizar los subniveles. El desarrollo de esta metodología puede observarse en las secciones 3.5.1 y 3.5.2 del Capítulo 3, y su aplicación en la sección 4.2 del Capítulo 4.

Asimismo, es importante señalar que existen trabajos que abordan el estudio del desarrollo de un *esquema* utilizando la teoría APOE y el Análisis Estadístico Implicativo (Trigueros y Escandón, 2008; Bodi, 2009; Pons, 2014). Sin embargo, en estos estudios no se aborda la partición de la matriz de datos, por medio de un Análisis de Clúster, en niveles y mucho menos en subniveles, por tanto, enfocan principalmente su análisis en los árboles de similaridad y grafos implicativos obtenidos del Análisis Implicativo para la totalidad de su muestra.

Finalmente, se puntualiza que la estrategia metodológica desarrollada y aplicada en esta investigación para dividir la matriz de datos por medio del Análisis de Clúster, puede ser de utilidad en futuros estudios que tengan entre uno de sus objetivos identificar y caracterizar, tanto niveles como subniveles de desarrollo de distintos conceptos matemáticos bajo el marco de la teoría APOE, o bien, para dividir la matriz de datos con otros fines.

5.4. Complementando una descomposición genética

La investigación que se desarrolló, tampoco tenía como objetivo el planteamiento de una nueva DG para el concepto de derivada. Sin embargo, la revisión de la literatura y la caracterización que se ha obtenido para la *tematización* del *esquema* y los subniveles permite plantear algunas modificaciones a la DG propuesta por Font *et al.* (2016). En particular, las modificaciones que se sugieren deben realizarse en las construcciones 3c y 10 de la DG de Font *et al.* (2016), las cuales indican:

> [...] **3c.** *Coordinación* de los *procesos* de las partes 2a y 2b en un nuevo *proceso* donde la tasa de variación instantánea en un punto se considera como el mismo *objeto* independientemente de la representación utilizada. [...]
>
> [...] **10.** *Tematización* del *esquema* de derivada cuando las *acciones* necesitan ser aplicadas al *esquema* a considerar. Por ejemplo, la integral de una función derivada en cualquier representación. (Font *et al.*, 2016, p.115)

La modificación de la construcción 3c se debe a una incongruencia en su enunciado referente a la construcción "*objeto*" utilizada en lugar de "*proceso*" en la redacción, por tanto, la construcción 3c queda establecida de la siguiente forma:

> [...] **3c.** *Coordinación* de los *procesos* de las partes 2a y 2b en un nuevo *proceso* donde la tasa de variación instantánea en un punto se considera como el mismo *proceso* independientemente de la representación utilizada. [...]

Por otra parte, en esta investigación se identificaron 2 manifestaciones distintas de *tematización* del *esquema* de derivada, una como una *totalidad* y otra como *objeto*. Por tanto, se cree que ambas manifestaciones deben estar incluidas en el punto número diez de la DG de Font *et al*. (2016). Es por ello, que se propone la siguiente división de la construcción 10 en las 2 partes que se describen a continuación:

10. *Tematización* del *esquema* de la derivada:

10a. *Coordinar procesos* para conectar funciones derivadas sucesivas por medio de la utilización de funciones auxiliares y sus ecuaciones de recurrencia correspondientes (*tematización* como *totalidad*).

10b. *Encapsular* la *coordinación* de *procesos* descritos en la parte 10a para lograr el establecimiento de relaciones directas pares de derivadas sucesivas de cualquier orden (*tematización* como *objeto*).

Las nuevas construcciones descritas al interior de la *tematización* se basan en lo que se ha observado en los datos, en donde la construcción 10b correspondería a la *tematización* como una *totalidad* y la 10b a lo que hemos denominado *tematización* como *objeto*. Es importante, aclarar aquí que cuando un *esquema* se *tematiza* se transforma en un nuevo *objeto* cognitivo, es decir, que pueden volver aplicarse todos los mecanismos mentales de la teoría APOE sobre él. En este sentido, Meel (2003) indica que el desarrollo de un *esquema* y su *tematización* es lo que dota a la teoría APOE de su cualidad fractal, pues los *esquemas* por medio de la *tematización* pueden ser tratados como nuevos *objetos* que entran a ser parte de otros *esquemas* permitiendo hacer múltiples conexiones entre los elementos previos y los nuevos conceptos que un individuo busca integrar a sus estructuras. Tomando en cuenta lo planteado por Meel (2003), quizás los 2 matices de *tematización* que describimos en esta investigación correspondan a construcciones mentales pertenecientes a otros *esquemas* más complejos que el de la derivada y que podría ser, por ejemplo, el *esquema* del operador derivada generalizado.

Finalmente, se plantea una posible modificación a la construcción 4 de la DG de Asiala *et al.* (1997), la cual indica:

> **4.** *Interiorización* de los *procesos* de los puntos 2a y 2b en general para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en ese punto. (Asiala *et al.*, 1997; p. 426-427).

La modificación sugerida para la construcción 4, se debe a una incongruencia en su enunciado referente al mecanismo “*interiorización*” utilizado en lugar de “*coordinación*”, por tanto, la construcción 4 queda establecida de la siguiente forma:

> **4.** *Coordinación* de los *procesos* de los puntos 2a y 2b en general para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en ese punto.

5.5. Limitaciones de la investigación y posibles rutas a seguir

Existe consciencia de que la investigación que se ha llevado a cabo, sobre el desarrollo del *esquema* de la derivada, ha contribuido confirmando algunas conclusiones de estudios previos (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2004; García *et al.*, 2011). Además, ha permitido complementar y contrastar otros aspectos que no habían sido abordados, o bien, no se habían considerado anteriormente como, por ejemplo, la existencia de matices en la *tematización* de un *esquema.* Asimismo, la problemática presente en la recolección de datos, llevó a desarrollar, una parte del diseño metodológico de forma novedosa y diferente, en comparación con los trabajos previos realizados bajo el marco de la teoría APOE, los cuales, si bien han utilizado métodos cuantitativos como el Análisis Estadístico Implicativo (Trigueros y Escandón, 2008, Bodi, 2009, Pons, 2014), no habían utilizado clústeres para dividir su análisis en subniveles de desarrollo como se realizó en esta investigación. Aún quedan algunas cuestiones abiertas que podrían dar pie al desarrollo de nuevas investigaciones o la continuidad de este estudio:

- En este estudio se realizó un análisis de los subniveles de desarrollo y la posible *tematización* del *esquema* de la derivada en términos de las construcciones mentales propuestas por la teoría APOE, basándose principalmente en las *coordinaciones* entre *procesos* globales y puntuales que permiten conectar pares de derivadas. Esta idea se desarrolló considerando el *esquema* de la derivada como un todo. Lo anterior, lleva a preguntarse ¿Cómo se puede desarrollar una investigación de similares características que involucre la interacción del *esquema* de derivada con otros *esquemas*, como por ejemplo, el de integral? o ¿cómo se pueden caracterizar de los subniveles de desarrollo cuándo existe evidencia de esta interacción de 2 o más *esquemas*?
- Este trabajo identificó, por medio del análisis de clúster, 2 subniveles de desarrollo asociados a cada nivel (Intra, Inter y Trans), sin embargo, dadas las características de la muestra, no se pudo caracterizar los subniveles de desarrollo Intra. Además, se infirió a partir de las entrevistas clínicas y los matices de *tematización*, la existencia

de 2 subniveles asociados al nivel de desarrollo Trans del *esquema*. Asimismo, se pudo asociar el subnivel de desarrollo Trans A con un subnivel Inter Avanzado (Inter A), por tanto, se logró identificar los 3 subniveles de desarrollo para los niveles Inter y Trans, los cuales, según Piaget y García (1983) deben existir. Lo anterior, lleva a preguntarse ¿Qué características debe tener la muestra (participantes) de la investigación para obtener directamente los 3 subniveles de desarrollo por medio del análisis de clúster?, ¿cómo debe ser la muestra para identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo Intra?, ¿existe otra metodología que pueda ayudar a la identificación de los subniveles (subgrupos) cuando no se cuenta con las entrevistas suficientes para realizar el análisis en términos cualitativos?

- El análisis de los datos se realizó considerando veintisiete variables, las cuales por su gran número, en algunos momentos, dificultaron la caracterización de los subniveles de desarrollo. Considerando que las relaciones entre las variables en estudio no son simétricas, es decir, que no es posible utilizar correlaciones o estadísticos de prueba como el chi-cuadrado ¿Cómo se puede reducir el número de variables en estudio sin perder información?, ¿será posible disminuir el número de variables *a priori* con base en la experiencia de los investigadores?
- La discretización de los protocolos de resolución de este estudio se efectuó por medio de una escala de tipo dicotómica (1: uso correcto, 0: no se observa o uso incorrecto). Lo anterior, lleva a preguntarse ¿Será la escala utilizada la más adecuada para el logro de los objetivos?, ¿cómo se modificaría la caracterización de los subniveles de desarrollo si se utiliza otra escala, por ejemplo una métrica de tipo fuzzy, o bien, una escala con valores intermedios?, ¿la elección de otro de tipo de escala para la discretización de los protocolos de resolución permitiría determinar los 3 subniveles de desarrollo para cada nivel?
- Esta investigación determinó la existencia de matices en la *tematización* de *esquema* de la derivada por medio de la modificación de tareas y la realización de nuevas preguntas durante las entrevistas clínicas. Esto lleva a preguntarse ¿Existen matices en la tematización de *esquemas* de otros conceptos matemáticos? o ¿la metodología utilizada para analizar la posible *tematización* del esquema es aplicable a otros estudios?

5.5. Trabajos y aportaciones derivadas de la tesis

En la última sección, de esta memoria de tesis doctoral, se presentan los trabajos derivados del desarrollo de ella, los cuales constituyen el aporte que se ha realizado hasta ahora al área de investigación en Didáctica de la Matemática. A continuación, se presentan cada uno de estos trabajos por tipo de aporte y en orden cronológico descendente:

Artículos

- **Fuentealba, C.**, Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 374-392. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508
- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., y Sánchez-Matamoros, G. (2017). Los puntos de no derivabilidad de una función y su importancia en la comprensión del concepto de derivada. *Educação e Pesquisa*. En revisión.
- **Fuentealba, C.**, Sánchez-Matamoros, G., y Badillo, E. (2016). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, *71*, 72-78. ISSN 1133-9853

Capítulo de libro

- **Fuentealba, C.,** Badillo, E., y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función: un estudio exploratorio sobre la existencia de matices en la tematización del esquema de la derivada. En A. Rosas (Ed.). *Avances en Matemática Educativa Teorías y* Enfoques N°3 (pp. 47-59). Ciudad de México, México: Editorial Lectorum S. A. ISBN: 978-607-457-580-4.

Trabajos en congresos nacionales e internacionales

- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., y Trigueros, M. (2017). Identification and characterization of the sub-levels of development of derivative schema: an exploratory approach using cluster analysis. En B. Kaur, W. K., Ho, T.L., Toh y B. H. Choy (Eds.). *Proceedings of the 41st Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 193). Singapur, Singapur: PME-41.

- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., y Sánchez-Matamoros, G. (2017). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Libro de resúmenes VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (p. 352). Madrid, España.
- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., y Trigueros, M. (2016). The derivative in university math: Tasks that allow observation of high levels of understanding. En G. Kaiser (Ed.). *Proceedings 13th International Congress on Mathematical Education* (Topic Study Groups ICME-13). Hamburg, Germany.
- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., y Sánchez-Matamoros, G. (2015). Matices en la tematización del esquema de la derivada. En M. Parraguez, H. Rivas, C. Vásquez, N. Pincheira, H. Solar, F. Rojas y E. Chandía (Eds.). *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 440-444). Villarrica, Chile.
- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., y Sánchez-Matamoros, G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: Comprensión en alumnos universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.). *Actas del XIX Simposio de la SEIEM* (pp. 259-268). Alicante, España.
- **Fuentealba, C.**, Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. (2015). El esquema de la derivada y su tematización. *Libro de resúmenes del XXII Congreso Internacional de Educación y Aprendizaje* (p. 74). Madrid, España.

REFERENCIAS

Aldanda, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría APOE*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Alexandrov, A.; Kolmogorov, A; Laurentiev, M. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. España: Editorial La Muralla.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer, Berlin.

Arnon, I. (1998). *En the mind's eye: How children develop mathematical concepts-Extending Piaget's theory*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Haifa, Israel.

Artigue, M., Batanero, C., y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at postsecondary level. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., Y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior*, *16* (4), 399-430.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. Y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., y Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 301-317.

Azcárate, C. y Camacho-Machín, M. (2015). El Pensamiento Matemático Avanzado como marco de referencia. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M.T. González y M. Moreno (Eds.). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 17-30). La Laguna, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-149.

Azcárate, C., Camacho M. y Sierra M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En T. Ortega del Rincón (Ed.). *Actas del III Simposio de la SEIEM*. Valladolid.

Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Badillo, E.; Azcárate, C. Y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Bailleul, M. (2000). Mise en évidence de réseaux orientés de représentations dans deux études concernant des enseignants stagiaires en IUFM. En R. Gras y M. Bailleul (Ed.). *Actes des journées sur la fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative* (pp. 189-208). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for research in mathematics education, 31* (5), 557–578.

Balzarini M.G., Gonzalez L., Tablada M., Casanoves F., Di Rienzo J.A., y Robledo C.W. (2008). *Manual del Usuario*. Córdoba, Argentina: Editorial Brujas.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 217-235.

Bericat, E. (1998). *Integración de los métodos cuantitativo y cualitativo en la investigación social*. Barcelona; Ariel.

Berry, J., y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495.

Bingolbali, E., y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Bodi, S., Valls, J. y Llinares, S. (2009). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones delAnálisis Estadístico Implicativo* (pp. 215–233). Castellón, España: Innovació Digital Castelló.

Bombal, F. (2010). Rigor y demostración en matemáticas. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *104*(1), 61-79.

Bos, H. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En I. Grattan-Guinness (Ed.). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brown, A., McDonald, M., y Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. En F. Hitt, D. Holton, y P. Thompson (Eds.). *Research in collegiate mathematics VII* (pp. 115–142). Providence, RI: American Mathematical Society.

Bruen, A., Fisher, J., y Wilker, J. (1983). Apollonius by inversion. *Mathematics Magazine*, *56*(2), 97-103.

Camacho, M. (2011). Investigación en Didácticas de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros años de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). Ciudad Real: SEIEM.

Clark, J., Cordero, F., Cotrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructin a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (4), 345–364.

Collette, J. (1993). *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo XXI.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schema tematization: A framework and a exemple. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (4), 370–392.

Coolidge, J. (1951). The story of tangents. *The American Mathematical Monthly*, *58*(7), 449-462.

Couturier, R. (2001). Traitement d l'analyse statistique dans CHIC. *Actes des Journées sur la Fouille dans les données par la méthode d'analyse implicative* (pp. 33-50). Université de Caen Normandie, Francia.

Couturier, R. y Gras, R. (2005). CHIC: Traitement de données avec l'analyse implicative. En G. Ritschard y C. Djeraba (Eds.), *Journées d'extraction et gestion des connaissances , II* (pp. 679-684). Universidad de Lille, Francia.

Coutuier, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 51–63). Castellón, España: Innovacio Digital Castelló.

Cornu, B., y Dubinsky, E. (1989). Using a cognitive theory to design educational software. *Education and Computing*, *5*(1-2), 73-80.

Cortés, M. (2004). *Integración de conceptos en la solución de problemas de cálculo diferencial. T*esis de licenciatura en Matemáticas Aplicadas no publicada. Instituto Tecnológico Autónomo de México, México.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Dawkins, P., y Epperson, J. (2014). The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(6), 839-862.

Díaz, S. M. (2014). Los Métodos Mixtos de Investigación: Presupuestos generales y aporte a la evaluación educativa. *Revista Portuguesa de Pedagogía*, *48*(1), 7-23.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds.). *Mathematics and cognition* (pp. 113-133). Cambridge: Cambridge University Press.

Dubinsky, E., Arnon, I., y Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of and 1. *Canadian Journal of science, mathematics and Technology education*, *13*(3), 232-258.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M., y Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational studies in mathematics*, *58*(3), 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., y Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253-266.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.

Durán, A. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la Educación Matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Edwards, B., Dubinsky, E., y McDonald, M. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Edwards, C. (1979). *The Arithmetic of the Infinite. En The Historical Development of the Calculus* (pp. 166-188). New York: Springer.

Ferrante, J. (2009). *Una Introducción al Concepto de Límite (dos mil años en un renglón).* Buenos Aires: Editorial de la UTN.

Ferrini-Mundy, J., y Lauten, D. (1994). Learning about calculus learning. *The Mathematics Teacher*, *87*(2), 115-121.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: understanding limits, derivates and integrals. En E. Dubinsky, y J. Kaput (Eds.), *Research Issues in*

Undergraduate Mathematics Learning, MAA Notes 33, (pp. 31-45). Washington DC: Mathematical Association of America.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 374-392.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Giaquinta, M., y Modica, G. (2012). *Mathematical analysis: functions of one variable.* Springer Science y Business Media.

González, A. (2003). Los paradigmas de investigación en las ciencias sociales. *Islas*, *45*(138), 125-135.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A.Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Erlbaum, Mahwah, NJ.

Goldin, G., y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, y B. Greer (Eds.). *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Publisher: Erlbaum.

González, R. (1998). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Gordillo, W., y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535-558.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., y Spagnolo, F. (Eds.). (2008). *Statistical implicative analysis: Theory and applications*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Gras, R., Kuntz P. y Briand, H. (2001). Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille de données. *Mathématiques et Sciences Humaines*, *154-155*, 9-29.

Gras, R. (1996). *L'implication statistique: nouvelle méthode exploratoire de données applications a la didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gras, R. y Ratsima-Rajohn, H. (1996). L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données. *RAIRO Recherche Opérationnelle, 30*(3), 217-232.

Gras, R. (1993). Une méthode de classification non symétrique: L'implication statistique. Bulletin de la Société. *Française de Classification*, 1.

Grabiner, J. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Gray, E., y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, *25*(2), 116-140.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., y Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 152-176.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. Tesis doctoral no publicada, University of Jyväskylä, Finland.

Habre, S. y Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 57-72.

Harel, G., Selden, A., y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*, 147-172.

Harel, G., y Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical thinking and learning*, *7*(1), 27-50.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hunt, S. D. (1991). *Modern marketing theory: Critical issues in the philosophy of marketing science*. Cincinnati, USA: SouthWestern Publishing.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Johnson, D. (1998). *Applied multivariate methods for data analysts*. Duxbury Resource Center.

Kendal, M., y Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(2), 143-165.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). Adding it up. Washington, DC: National Academy Press.

Kitcher, P. (1983). Kant's Philosophy of Science. *Midwest Studies in Philosophy*, *8*(1), 387-407.

Kitcher, P. (1981). Explanatory unification. *Philosophy of science*, *48*(4), 507-531.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 134–174.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*, (pp. 452-515). Madrid: Alianza Editorial.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Leithold, L. (1996). The Calculus 7 Edition. New York, United States: HarperCollins College Publishing.

Lerman, I. (1981). Classification et Analyse Ordinale des Donnees. Paris: Dunod.

Lerman, I., Gras, R., y Rostam, H. (1981). Élaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires. 2. *Mathématiques et sciences humaines*, *75*, 5-47.

Lindgren, B.W. (1968). Statistical Theory 2 Edition. New York, Usa: McMillanCompany.

Martínez, F. (2009). La recta tangente, notas históricas y actividades para el aula. *SUMA*, *61*, 7-15.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismos de investigación*, *8*(1), 1-43.

Mason, J. (1996). El futuro de la arimética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *3*(9), 7-21.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6*(3), 221-278.

Muñoz-Lecanda, M.C., y Román-Roy, N. (1999). Origen y desarrollo histórico del cálculo infinitesimal. Barcelona, España: Universidad Politécnica de Cataluña.

Ortega, I., y Ortega, T. (2004). Los diez problemas de Apolonio. *Suma*, *46*, 59-70.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Piaget J., y Inhelder B. (1978). Psicología del niño. Madrid, 8ª edición: Ediciones Morata.

Piaget J. (1963). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En La colección Psicología y Educación. *La enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-28). Madrid: Editorial Aguilar.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Pino-Fan, L., Godino, J., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de Bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Alicante, España.

Porzio, D. T. (1997). Effects of different instructional approaches on calculus student's understanding of the relationship between slope, rate of change and the first derivate. En J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie y A. Dossey (Eds.). *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, II,*(pp. 37–44). Bloomington–Normal, Chicago, Illinois: Illinois State University.

Pyzdrowski, L., Sun, Y., Curtis, R., Miller, D., Winn, G., y Hensel, R. (2013). Readiness and attitudes as indicators for success in college calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(3), 529-554.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(1), 89-112.

Robert, A., ySchwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced lever. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Rocco, T., Bliss, L., Gallagher, S., y Pérez-Prado, A. (2003). Taking the next step: Mixed methods research in organizational systems. *Information Technology, Learning, and Performance Journal*, *21*(1), 19.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión de los alumnos de bachillerato y primer curso de la universidad sobre la noción matemática de derivada. (Desarrollo del concepto).* Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, España.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85–98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *RELIME*, *11*(2), 267-296.

Selden, A., y Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

Selden, A., Selden, J., Hauk, S., y Mason, A. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems. Tennessee Technical University Department of Mathematics. Technical Report.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification-the case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.). *The Concept Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, XXV* (pp. 59-84). Washinton D.C.: Mathematical Association of America, Notes Series.

Sokal, R., y Rohlf, F. (1962). The comparison of dendrograms by objective methods. *Taxon*, *11*(2), 33-40.

Spivak M. (1974). *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. Barcelona-Bogotá- Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro: Editoral Reverté, S.A.

Tall, D. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. Plenary paper at 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, February 22-27, 2007, San Diego, California, USA.

Tall, D. (2004). The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *23*(*3*), 29–33.

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. *Historia e tecnologia no Ensino da Matemática, 1*, 1-28.

Tall, D. (1997). Informatie technologie en Wiskunde Onderwijs, Niewe Wiskrant Functions and Calculus. En A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde

(Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 289–325). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. Plenary lecture. En I. Meira y D. Carraher (Eds.). *Proceedings of the 19th PME International Conference, I*, 61-75.

Tall, D., y Bakar, M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *23*(1), 39-50.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D.Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the learning of mathematics*, *9*(3), 37-42.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 110*, 49–53.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thomas, G., y Finney, R. (1998). Cálculo con Geometría Analítica-9ª edición. México: Addison-Wesley.

Trigueros, M., y Okta ç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'Algèbre Linéaire. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques, *X* (pp. 157–176). IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur.

Trigueros, M. y Escandon, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 13* (36), 59–85.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación enmatemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17* (1), 5–31.

Valero, S. (2000). *La derivada como organización de las derivadas sucesivas. 2000.* Tesis de Maestría, Universidad Virtual del ITESM, México.

Valls, X. (2014). Diseñoo de un paquete R para el Análisis Estadístico Implicativo. Trabajo final de máster no publicado, Universitat Jaume I, España.

Vera, F. (1970). Científicos griegos, 1, Pitágoras, Hipócrates, Demócrito, platón, Aristóteles, Teofrasto, Eudemo de rodas, Euclides, aristarco. Madrid: Aguilar.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, *28*(48), 449-468.

Weller, K., Arnon, I., y Dubinsky, E. (2011). Preservice teachers' understandings of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(2), 129-159.

Weller, K., Arnon, I., y Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *9*(1), 5-28.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M., y Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the AMS*, *51*(7), 741-750.

Wijeratne, C., y Zazkis, R. (2016). Exploring conceptions of infinity via super-tasks: A case of Thomson's Lamp and Green Alien. *Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 127-134.

Whiteside, D. (1960). Wren the Mathematician. *Notes and Records of the Royal Society, XV* (pp. 107-111). London: The Royal Society.

White, P., y Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 79–95.

Wren, F. L., y Garrett, J. A. (1933). The development of the fundamental concepts of infinitesimal analysis. *The American Mathematical Monthly*, *40*(5), 269-281.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV* (pp. 103-127). Washington, DC: American Mathematical Society y Mathematical Association of America.

Zamora, L., Gregori, P., y Orús, P. (2009). Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC. *Contribuciones al ASI*, *4*, 65-101.

Zazkis, R. y Applebaum, M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2389-2397). Larnaca: Chipre.