Universitat Autònoma de Barcelona

ANÁLISIS DE LAS DECISIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN SU GESTIÓN DE AULA

Diego Garzón Castro

Universitat Autònoma de Barcelona

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS

Doctorat en EDUCACIÓ

ANÁLISIS DE LAS DECISIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN SU GESTIÓN DE AULA

Doctorando:

Diego Garzón Castro

Director: Dr. Josep M. Fortuny

Bellaterra, Septiembre de 2017

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación, ha supuesto avanzar en la construcción de un camino, en el cual he contado con el apoyo y colaboración de mis profesores, compañeros de estudio y trabajo. Igualmente de todos aquellos que he conocido durante mi estancia aquí en Barcelona. Asimismo, he contado con la colaboración de mis colegas en la Universidad del valle y en el Cier – Sur.

Explícitamente quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Josep Maria Fortuny por la dirección, acompañamiento y orientación a lo largo de todo mi proceso de formación doctoral. Igualmente a los profesores del departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias. Reconozco el aporte de los distintos miembros de la comisión de seguimiento, en particular, quiero agradecer a la profesora Yuly Vanegas por sus consejos, lecturas y orientaciones. A la profesora y colega Myriam Belisa Vega por toda su colaboración y apoyo en la universidad del Valle.

Además, extiendo mis agradecimientos al Dr. Salvador Llinares Ciscar y su equipo de trabajo, por acogerme en el seminario de su grupo de investigación y.por las orientaciones que recibí de su parte y la Dra. Ceneida Fernández Verdú. Durante el desarrollo de la pasantía que llevé a cabo en la Universidad de Alicante.

De manera especial, agradezco a la Universidad del Valle, por brindarme el tiempo y la financiación para desarrollar los estudios de doctorado, mediante el estímulo docente que se plasmó en la comisión de estudios. Pienso que este tipo de experiencias son adecuadas para los profesores en cualquier nivel del sistema educativo de nuestro país. A mi familia: mi mamá, hermanos e hija por su comprensión y apoyo indeclinable. A mi padre, a quien no pude acompañar en la parte final de su vida.

Me resta agradecer a mis compañeros y amigos Andrea y Claudio, por su colaboración, amistad y apoyo sincero en momentos difíciles y claves de todo este proceso. Al igual, que por todos y cada uno de los momentos compartidos. De la misma manera, a la amiga Edith Herrera por su apoyo sincero en distintos momentos de este proceso, a Sylvia Moreira por su amistad y compañerismo, a Betsy Vargas por toda su colaboración y apoyo.

Finalmente, agradezco a mis profesores y colegas que en algún momento de mi vida han aportado a mi formación académica y desarrollo personal.

RESUMEN

El trabajo doctoral “Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula” contribuye a la investigación en la Didáctica de las Matemáticas al desarrollo profesional del profesor — en lo que refiere al uso provechoso, por parte del profesor, del pensamiento matemático del estudiante— y al estudio de las competencias profesionales del profesor, es decir, identificar, interpretar y decidir cómo responder a la comprensión del estudiante en relación con momentos. Se adopta una perspectiva teórica que se apoya en la articulación de dos aproximaciones teóricas: la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante y las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. En esta tesis se desarrolla un estudio de casos múltiple, a partir de las experiencias de tres profesores de secundaria. El estudio buscó responder a las siguientes preguntas: ¿cómo un profesor identifica lo que es relevante para la enseñanza de la geometría y lo interpreta para fundamentar las *decisiones de acción*? y ¿cómo conecta las decisiones de acción con sus acciones de respuesta en momentos con oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática?

La respuesta a la primera pregunta contempló varios momentos. En el primer momento se determinó el diseño del instrumento denominado caracterización del pensamiento matemático. Este se utilizó para la elaboración de conjeturas respecto a la determinación de posibles momentos del pensamiento matemático del estudiante. En un segundo momento, se estableció la aplicación de una matriz de análisis para establecer momentos de enseñanza. Para ello, se recurrió a la aplicación de la estructura analítica que provee la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas para la construcción del pensamiento matemático del estudiante. En el tercer momento se construyeron las viñetas correspondientes a cada momento de enseñanza.

La respuesta a la segunda pregunta de investigación contempló la comparación de los momentos de enseñanza y su clasificación, lo que determinó una tipología de momentos de enseñanza que se plasma en viñetas en las cuales se determinan las decisiones de acción.

El aporte de esta investigación se refiere a la posibilidad de estudiar acciones y decisiones de acción del profesor en momentos de enseñanza en los casos de objeto de estudio. Esto a través de relacionar estas acciones con las decisiones del profesor haciendo uso del marco analítico que provee la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

ABSTRACT

The doctoral work “Mathematics teacher decisions in his classroom management analysis" contributes to mathematics didactics investigation for teacher professional development – with respect to a profitable use, by the teacher side, of student mathematics thought – and professional competences teacher study, that is to say, identify, interpret and decide how to respond to the student's understanding in connection with instances. It adopts a theoretical perspective that is based on the articulation of two theoretical approaches: Mathematics teachers’ professional noticing of students’ mathematical thinking and Mathematically significant opportunities to build on student thinking. This thesis develops a study of multiple cases, from the experiences of three secondary teachers. The research sought to answer the following questions: how does a teacher identify what is relevant to geometry teaching and interpret to support action decisions? and how does he connect action decisions with his response actions in stances with mathematically significant pedagogical opportunities?

The answer to the first question contemplated several moments. In the first moment the instrument design called mathematical thought characterization was determined. This was used for conjectures elaboration regarding possibles instances determination of student's mathematical thinking. In a second moment, it was established the application of an analysis matrix to start up teaching instances. To do this, it turned to an analytical structure application that provides the theoretical approach to significant pedagogical opportunities for the construction of student’s mathematical thinking. In the third moment the vignettes corresponding to each instance of teaching were constructed.

The answer to the second question of the inquiry contemplated the comparison of teaching instance and their classification, what determined a typology of teaching instances that is expressed in vignettes in which action decisions are determined.

The contribution of this research refers to the possibility of studying actions and teacher’s action decisions in teaching instances in object study cases. This through relating these actions to teacher decisions who makes the analytical framework that provides the approximation to significant pedagogical opportunities from mathematical perspective.

Tabla de contenido

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

La tesis doctoral Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula se sitúa en el área de investigación en Educación Matemática dentro del Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias de la Universitat Autònoma de Barcelona. El trabajo se enmarca en la línea de investigación sobre desarrollo profesional del profesorado de matemáticas y, en particular, se centra en la identificación de momentos de enseñanza. Estos últimos ilustran prácticas que aprovechan el pensamiento matemático del estudiante en la gestión de los aprendizajes en el aula.

En la formación de profesores de secundaria en servicio, se evidencia que para ellos es complejo utilizar las matemáticas de los estudiantes para mejorar el aprendizaje de los mismos. Esto se manifiesta cuando el profesor formula interrogantes como las siguientes: ¿Cómo hago para atender lo que piensan 40 estudiantes en una hora de clase?; ¿Qué situaciones propongo?; ¿Cómo organizo el trabajo en el aula?; ¿Qué tipo de recursos privilegio? No obstante, los referentes curriculares (lineamientos curriculares, estándares curriculares) enfatizan que se debe auspiciar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y en particular, por ejemplo, el pensamiento geométrico.

La tensión entre la práctica del profesor y lo que propone el currículo para la enseñanza puede abordarse desde la investigación respecto a la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo profesional (en lo referente al uso provechoso, por parte del profesor, del pensamiento matemático en la enseñanza) mediante el constructo *observación del profesor*. Este constructo se refiere al proceso que permite gestionar las manifestaciones del fenómeno generado por la gran cantidad de información y la confusión por la variedad de esa información (Sherin, Jacobs y Philipp, 2011).

En este estudio, el primer capítulo plantea la problemática y las preguntas de investigación que guían el trabajo. El segundo capítulo es el marco teórico que contiene tres partes: el sentido de la articulación de dos aproximaciones teóricas, la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante y las oportunidades pedagógicas significativas.

De igual forma, el tercer capítulo, titulado intervención y métodos, consta de tres apartados en los que se describe el contexto de la intervención, se fundamenta la aproximación metodológica y se describe la recolección y la organización de la información. El cuarto capítulo, análisis de los datos, tiene cuatro partes: en la primera, se describen los instrumentos concebidos para el análisis. Posteriormente se presenta la matriz de análisis y finalmente, los niveles de análisis.

Adicionalmente, el quinto capítulo es el de resultados y abarca tres partes: en la primera parte se presenta la tipología de los momentos y las viñetas de momentos que satisfacen las características y criterios de la estructura analítica que plasma las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. En la segunda parte se identifican las destrezas del pensamiento matemático y en la tercera parte se reportan algunos aportes al estudio de las decisiones de acción.

Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones en las que se da a conocer una síntesis de lo logrado y las respuestas a las preguntas iniciales.

1.1 Problemática del estudio

Este estudio se ubica en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas, que pone énfasis en la enseñanza fundamentada en las matemáticas de los estudiantes, que se reconoce en el campo como enseñanza ambiciosa (Kazemi, Frank y Lampert, 2009; National Research Council [NRC], 2001). En particular, se enfatiza el estudio de las prácticas del profesor en las que se hace un uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante cuando se enseña a todo el grupo en el aula. El objeto de estudio son las destrezas de identificar, interpretar y decidir cómo responder a la comprensión del estudiante (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Esta investigación se interesa en la identificación de “momentos de enseñanza”, a partir de momentos del pensamiento matemático del estudiante que se hacen públicos durante las interacciones con toda la clase.

En la enseñanza, cuando la construcción del objeto seleccionado por el profesor tiene el potencial de aprovechar la comprensión por los estudiantes de ideas matemáticas importantes, se reconoce la importancia que tienen los momentos del pensamiento matemático del estudiante para describir la práctica del profesor. Por ello, se introducen las denominadas *oportunidades pedagógicas significativas* desde la perspectiva matemática para construir el pensamiento matemático (Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest, 2015).

En la aproximación teórica, la oportunidad pedagógica significativa desde una perspectiva matemática, se asocian conceptos como el de *momento de enseñanza* que designa un segmento de enseñanza que se caracteriza por proceder de una discusión en clase que el profesor gestiona. Lo que se observa del pensamiento matemático del estudiante durante esa discusión da la posibilidad de reconocer un momento del pensamiento. Posteriormente, a ese momento, se puede dar cuenta de la construcción de significado por el estudiante a partir de la respuesta del profesor. Esta conceptualización se apoya en los aportes de investigación que han utilizado la noción de momento de enseñanza en distintos trabajos y con diferente significado (Jaworski, 1994; Davies y Walker, 2005; Schoenfeld, 2008; Thames y Ball, 2013).

Stockero y Van Zoest (2013) señalan, como resultado de un estudio exploratorio, la importancia que en la formación inicial de los profesores tiene la comprensión de las matemáticas de los estudiantes para observar el pensamiento matemático del estudiante de modo que pueda ser aprovechado junto con las acciones productivas de su uso. El estudio toma en consideración momentos en los que se interrumpe el desarrollo de una lección (denominados *momentos pivote*). Los vídeos de profesores de secundaria fueron utilizados en este trabajo para identificar y caracterizar momentos pivote en lecciones matemáticas y examinar las relaciones entre los momentos pivote y las decisiones de los profesores.

Por su parte, Sun y van Es (2015) contribuyen a la fundamentación de propuestas pedagógicas para desarrollar las competencias de observación profesional del profesor[1] en la fase inicial de la formación de futuros profesores. También Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest (2015) proponen la

---

[1] Se conceptualiza como la articulación de tres habilidades: identificar los aprendizajes del alumno, interpretar estos mismos y decidir la respuesta a la comprensión del alumno, tal como se precisa y referencia en el marco teórico.

aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática para construir el pensamiento matemático del estudiante. Esta aproximación contribuye a la investigación y al desarrollo profesional que se refiere al uso provechoso del pensamiento matemático. Lo anterior se reconoce y acepta como fundamental porque provee un lenguaje y una lente, en el sentido metafórico, que se utilizan en esta investigación para describir prácticas de profesores que tenían como intención usar el pensamiento matemático de sus estudiantes para mejorar su comprensión.

Los trabajos reseñados han desarrollado herramientas para comprender la enseñanza de las matemáticas, haciendo hincapié en el uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante para favorecer su aprendizaje.

Un punto de acuerdo entre la comunidad de investigadores en Educación Matemática, los diseñadores de política educativa y los formadores de profesores es la necesidad que se tiene en la clase de matemáticas de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante (NTCM, 2000; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007; Sowder, 2007). Esto implica que, en la enseñanza de las matemáticas, una actividad relevante sea la consideración de las ideas de los estudiantes y la respuesta a sus iniciativas (Ball, Lubienski, y Mewborn, 2001). En este sentido, esta investigación busca caracterizar las decisiones de acción que forman parte de uno de los tres componentes de la visión profesional de un profesor y que se encuentran asociadas al razonamiento del profesor para responder a las estrategias del estudiante que aborda una situación. Estas decisiones de acción se fundamentan en el concepto de visión profesional (van Es y Sherin, 2002; Fortuny y Rodríguez, 2012) y en la conceptualización de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante (Sherin, Jacobs y Philipp, 2011).

Stockero y Van Zoest (2013), apoyados en el reconocimiento de las circunstancias que posibilitan los momentos pivote para la enseñanza de las matemáticas, clasifican las decisiones del profesor en:

- Extender las matemáticas y hacer conexiones entre ideas matemáticas.

- Centrarse en el pensamiento matemático del estudiante.
- Destacar el significado de las matemáticas.

La toma de decisiones de acción en la gestión de clase es un proceso vinculado a una de las habilidades de la observación profesional del pensamiento del estudiante y se refiere a la respuesta del profesor respecto a la comprensión del alumno cuando se enfrenta a la resolución de un problema (Jacobs, Lamb, Philipp y Schappelle, 2011).

1.2 Preguntas de investigación y objetivos

Se planteó esta investigación para contribuir a los estudios sobre la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante, desde la articulación de esta aproximación teórica de la observación profesional y la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

Desde la perspectiva matemática para la construcción de pensamiento matemático, se define que las oportunidades significativas suceden en la intersección de tres características fundamentales de momentos de la clase: el pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde la perspectiva matemática y las oportunidades pedagógicas (Leatham *et al.*, 2015). Estas características se construyen una tras otra con el objetivo de comprender el uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante. Se considera que la característica fundamental de una oportunidad pedagógica significativa, desde la perspectiva matemática, es el pensamiento matemático del estudiante. Se enfatiza en sí el pensamiento del estudiante que se hace público y que es significativo desde la perspectiva matemática —esto sucede si es posible incorporar el pensamiento matemático en la lección para posibilitar el avance en la comprensión por parte de los estudiantes de ideas matemáticas importantes—. Por otra parte, existe una oportunidad pedagógica, si el pensamiento matemático del estudiante puede y se incorpora en la enseñanza en el momento que se hace público (Stockero, Leatham, Van Zoest y Peterson, 2017).

Como se ha explicado, la estructura analítica (Leatham *et al.*, 2015) incorpora tres características: el pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde el punto de vista matemático y la oportunidad pedagógica. A cada característica le corresponde una pareja de criterios. De tal manera que a la primera característica le corresponden los criterios de las matemáticas del estudiante y la perspectiva matemática; a la segunda característica le corresponden los criterios que se refieren a las matemáticas apropiadas y las matemáticas centrales; y a la tercera característica, le corresponden los criterios apertura y momento oportuno (estos criterios son desarrolladas en el marco teórico). En síntesis, si un momento del pensamiento matemático del estudiante satisface los seis criterios y plasma las tres características, se establece que se configura un momento con oportunidades pedagógicas significativas para la construcción de pensamiento matemático.

En la integración local[2] de las dos aproximaciones teóricas se plantearon las dos preguntas de investigación:

P1. ¿Cómo un profesor identifica lo que es relevante para la enseñanza de la geometría y lo interpreta para fundamentar las *decisiones de acción*?

P2. ¿Cómo conecta las decisiones de acción con sus acciones de respuesta en momentos con oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática?

En la primera pregunta se aborda la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante. Esta se configura por tres destrezas que se articulan entre sí: atender, interpretar y decidir como respuesta (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Sin desconocer la interrelación entre estas destrezas, se realza en esta investigación las decisiones de acción, las que se asocian a la gestión del profesor del pensamiento matemático del estudiante en la clase con todo el grupo y en momentos donde se orquestan discusiones de clase por parte del profesor.

---

[2] Este término, que es discutido con mayor amplitud en el marco teórico, se utiliza para designar una estrategia para conectar aproximaciones teóricas en las que se proponen preguntas teóricas locales (Geller, 2008).

La segunda pregunta se fundamenta en la estructura analítica que provee la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática y la observación profesional con la finalidad de reconocer momentos en la enseñanza que se fundamentan en el pensamiento matemático del estudiante. La comparación de momentos de enseñanza presenta mayor valor en la observación de aquellos que en su construcción soportan la comprensión de los estudiantes de sus matemáticas (reconocidas dentro de cada momento). En relación con las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, los momentos que soportan la comprensión matemática serán aquellos en los que se reconocen oportunidades pedagógicas.

Las preguntas se concretan en tres objetivos para su aplicación empírica, los cuales se organizan en una secuencia temporal que se plasma de la siguiente manera:

- O1. Evaluar una matriz de análisis para reconocer momentos de enseñanza, mediante el uso del instrumento "caracterización del pensamiento matemático".

- O2. Caracterizar la observación profesional mediante el reconocimiento y comparación de momentos de enseñanza.

- O3. Caracterizar las decisiones de acción en momentos de enseñanza con oportunidades pedagógicas significativas.

2 MARCO TEÓRICO

Este estudio sobre la enseñanza de las matemáticas articula dos aproximaciones teóricas: la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante y la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática[3].

La primera de estas aproximaciones enfatiza en la investigación respecto de las competencias profesionales del profesor: identificar evidencias en los aprendizajes del estudiante, interpretar la comprensión del estudiante y responder a la comprensión del estudiante (Jacobs *et al.*, 2010).

La segunda aproximación caracteriza la observación profesional haciendo uso de la estructura analítica que provee la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática (Leatham *et al.*, 2015). Al emplear esta estructura para la observación profesional presenta las características siguientes:

Se definió para aplicarla a cualquier tópico matemático en cualquier grado.

El análisis de lo significativo desde una perspectiva matemática permite trazar diferentes conclusiones respecto al valor de un momento que depende del contexto en cual se trabaja. En consecuencia, la estructura permite ver por qué un momento en el pensamiento matemático del estudiante puede configurarse en una clase pero en otra no.

Discriminar al comparar entre momentos de enseñanza al permitir priorizar algunos momentos del pensamiento matemático del estudiante sobre otros. Esto posibilita valorar cuándo un momento de enseñanza es mejor aprovechado para contribuir a la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes (Stockero *et al.*, 2017).

A continuación, siguen tres apartados. El primero describe elementos de la articulación de las dos aproximaciones teóricas. El segundo aborda la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas. En el tercero, se caracterizan los elementos teóricos y metodológicos que provee la aproximación teórica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

El primer apartado presenta los elementos conceptuales que cumplen el papel articulador en la integración local entre las aproximaciones teóricas: la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas y el enfoque de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

---

[3] Esta aproximación teórica se reconoce en el campo como *“Mathematically Significant Pedagogical Opportunyty to Build on Student Thinking”* (MOSTs).

El segundo apartado describe los elementos teóricos que nos permiten caracterizar la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas. Esta aproximación teórica suministra herramientas para describir el análisis de las prácticas y la toma de decisiones (cuando los estudiantes recurren a una estrategia oral o escrita).

El tercer apartado caracteriza los elementos teóricos y metodológicos que suministra la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Esta perspectiva es utilizada para describir prácticas de enseñanza que utilizan de manera provechosa el pensamiento matemático del estudiante.

La observación profesional y las oportunidades pedagógicas

La integración local de dos aproximaciones teóricas es un término que se acuña en el grupo de trabajo sobre teoría del Cerme al presentar estrategias para conectar teorías (Gellert, 2010).

Prodiger, Bikner-Ahsbahas y Arzarello (2008, p.13) como ya citó Gellert, (2010, p. 1582), describen la "integración local" como una de las estrategias para conectar teorías (en esta investigación, aproximaciones teóricas). En esta estrategia se proponen preguntas teóricas locales para dar cuenta de la integración de las dos aproximaciones teóricas.

Entre las estrategias de integración local se propone el bricolaje. Cobb (2007, p. 28) lo describe como un proceso de adaptación de instrumentos conceptuales de las grandes teorías de la psicología cognitiva, la teoría sociocultural y la cognición. Este proceso está distribuido para dar sentido a lo que acontece en el aula de clase. Destaca cómo la mediación de los principios de cada una de las teorías es pragmática y estos principios, a su vez, no son contradictorios.

Un análisis preliminar permitió poner en evidencia algunos rasgos de la integración local. En relación con la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas se incluyeron la revisión y los análisis de publicaciones que permitieran reconocer sus aspectos conceptuales y metodológicos. Respecto a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, se abarca: examinar el sentido y los alcances de las aproximaciones teóricas respecto a los momentos de enseñanza, la revisión de artículos que describen limitaciones respecto al uso del pensamiento matemático del estudiante y la caracterización de la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática que se plasma en una estructura analítica.

El resultado de la revisión y los análisis preliminares elaborados permiten reconocer la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante, las decisiones de acción, los momentos de enseñanza y las oportunidades pedagógicas como conceptos transversales y articuladores para esta investigación.

Se conceptualiza la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante como un conjunto interrelacionado de tres habilidades: identificar estrategias de los estudiantes respecto a una situación problema; interpretar las estrategias usadas por el estudiante al abordar la situación problema —en relación con sus conocimientos matemáticos y el reconocimiento de los aportes de la investigación respecto al desarrollo de pensamiento matemático—; y, por último, decidir la respuesta a las estrategias del estudiante en relación con los conocimientos matemáticos y aportes reconocidos de la investigación sobre el desarrollo de pensamiento matemático (Jacobs *et al.*, 2010)

Igualmente, Leatham *et al.* (2015) argumentan sobre cómo la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas desde una perspectiva matemática dispone de un instrumento para el análisis y el desarrollo de las tres habilidades que estructuran la observación profesional. Esto es debido a que esta aproximación teórica permite: (a) identificar casos del pensamiento matemático del estudiante que podrían ser matemáticamente destacados en una lección; (b) reconocer si un caso particular del pensamiento matemático del estudiante puede manifestarse durante una lección; (c) tomar en consideración el contexto del aula para establecer si un momento determina transformaciones que permiten mejorar la comprensión matemática.

El concepto de la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas en la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, se fundamenta en el concepto de visión profesional (van Es y Sherin, 2002) y en la conceptualización de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante. Esta última se define como el conjunto interrelacionado de tres habilidades: identificar las estrategias de los estudiantes cuando abordan una situación problemática, interpretar las comprensiones de los estudiantes y decidir qué responder a las comprensiones de los estudiantes (Sherin, Jacobs, y Philipp, 2011).

Un segundo concepto que se examina en la integración local entre las dos aproximaciones teóricas es la conceptualización de decisiones de acción, que forman parte de uno de los tres componentes de la visión profesional de un profesor. Están asociadas con el razonamiento del profesor para responder a las estrategias del estudiante que aborda una situación problemática. Estas decisiones de acción se fundamentan en el concepto de visión profesional (van Es y Sherin, 2002; Fortuny y Rodríguez, 2012)) y en la conceptualización de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante (Sherin, Jacobs y Philipp, 2011).

En la articulación de las dos aproximaciones teóricas se destaca un tercer concepto: el momento de enseñanza. Este concepto abarca aspectos específicos de situaciones en la enseñanza[4] en las que tienen lugar discusiones de clase gestionadas por el profesor, que se dan cuando manifestaciones observables del pensamiento matemático del estudiante posibilitan la creación de oportunidades pedagógicas.

De los momentos de enseñanza, se destacan características como las siguientes: tienen el potencial de contribuir al aprendizaje y la enseñanza de las

[4] Se introduce el término *situaciones en la enseñanza*, para abarcar aquellas prácticas que no necesariamente están centradas en el diseño de una tarea o en la participación activa de los estudiantes a lo largo de toda la clase. Por ejemplo, es posible dar cuenta de manifestaciones posteriores a la explicación, la ejemplificación, al intercambio de posiciones respecto a la estrategia de solución de un problema, etc., durante periodos de clase cuando se registra la discusión, lo cual no niega el papel asignado a las tareas en el aprendizaje y desarrollo de pensamiento matemático.

matemáticas y se reconocen en los documentos revisados distintos rasgos en relación con su naturaleza.

Así, por ejemplo, Jaworski (1994) hace referencia a momentos críticos en el aula cuando los estudiantes crean un momento de selección u oportunidad. Fundamentado en una conceptualización de la enseñanza que abarca una tríada de categorías que capturan elementos como la gestión del aprendizaje, la sensibilidad a los estudiantes y el desafío matemático. En este caso, la gestión del aprendizaje abarca un conjunto de estrategias usadas para crear oportunidades en las que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar.

En relación con la conceptualización propuesta, el reconocimiento de los momentos de enseñanza nos permite actuar sobre el componente de la enseñanza asociado con la gestión del aprendizaje. Esto sirve para dar cuenta de que las acciones emprendidas por el profesor favorecen el conocimiento del estudiante.

De la misma manera, según Thames y Ball (2013), el profesor toma en consideración los alcances de la respuesta del estudiante junto con el pensamiento matemático y establece si la perspectiva matemática es fundamental. Lo que aporta esta manera de conceptualizar los momentos a esta investigación tiene que ver con la importancia otorgada a la perspectiva matemática del estudiante.

No obstante, en estos ejemplos se percibe la ausencia de un lenguaje unificado respecto a los momentos de enseñanza, por lo que las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática se entienden como el instrumento diseñado para analizar el potencial matemático y pedagógico del pensamiento matemático del estudiante en relación con esos momentos de enseñanza. Además de suministrar una estructura analítica en la que se articulan características y criterios, que proveen un lenguaje tanto al investigador como al profesor. Este lenguaje permite caracterizar y comparar entre sí, los distintos momentos de enseñanza (Leatham *et al.*, 2015).

Vinculado con la aproximación de las oportunidades significativas desde una perspectiva matemática, el cuarto concepto es el de oportunidad pedagógica.

Esta se define como un momento de enseñanza, en el que la gestión por parte del profesor de las discusiones en el aula y las manifestaciones observables del pensamiento matemático del estudiante posibilitan la construcción de significados matemáticos.

2.1 La observación profesional del pensamiento matemático del estudiante

En el estudio de la enseñanza, la observación como aproximación teórica fue seleccionada en esta investigación porque se reconoce su asociación con los siguientes elementos:

- El conocimiento de contenido pedagógico, debido a que los profesores poseen conocimiento pedagógico especifico de la asignatura. Esto determina una perspectiva particular de la enseñanza y de lo que esta implica (Sherin, Jacobs, y Philipp, 2011).
- El conocimiento profesional del profesor. En la didáctica de las matemáticas se reconoce el énfasis en el estudio del conocimiento y las habilidades del profesor. En relación con este tipo de interés se configura como línea de investigación el “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT), (Ball, Thames y Phels, 2008). En el MKT se establece como propósito sistematizar los conocimientos requeridos por el profesor para la enseñanza de las matemáticas, mientras la observación profesional enfatiza el uso del conocimiento para la enseñanza (Zapatera, 2015).
- Una mirada del profesor en acción que se enfrenta con la confusión que causan la cantidad y variedad de datos sensoriales. Tal aproximación a la enseñanza posibilita nuevos paradigmas de investigación y nuevas metodologías. Esta aproximación, también determina que la observación profesional puede ser una idea transformadora en la formación de profesores.

En general, el término observación se usa en el lenguaje de la vida diaria para referirse a las observaciones que uno hace y al sentido que les da. Se acuña el término observación del profesor para designar el proceso mediante el cual se gestionan “las manifestaciones y confusiones generadas por la cantidad y variedad de datos sensoriales”.

Sherin *et al.* (2011), al discutir respecto a la observación del profesor la asocian en general con dos procesos:

- Atender eventos particulares de la enseñanza. Se reconoce la gestión compleja en el aula, ya que los profesores deben seleccionar a qué prestan atención y qué dejan de lado.
- Dar sentido a eventos en el aula de clase: Los profesores necesariamente interpretan lo que ven asociándolo con categorías abstractas y lo caracterizan al establecer relaciones con episodios de enseñanza conocidos previamente.

Estos procesos de la observación del profesor están interrelacionados y son cíclicos. Los profesores seleccionan qué atender, así como qué descartar en determinado momento, sobre la base del sentido construido. La respuesta a las estrategias de los estudiantes es el resultado del razonamiento del profesor respecto a una nueva variedad de experiencias a las cuales atiende y les da sentido.

El principio teórico que subyace en la aproximación teórica en consideración es el siguiente: en la enseñanza de las matemáticas la inclusión de aspectos como la observación del profesor, escoger y dar sentido a aspectos de la clase que son relevantes pedagógicamente (como las oportunidades pedagógicas) configuran rasgos decisivos para su posterior caracterización[5].

En la configuración de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante destacamos aportes distintos. Así, Mason (2002) hace una contribución en la investigación en la Educación Matemática. Este autor centra su atención en la observación profesional de la enseñanza como acción intencional en lugar de acción casual, al contrastar la observación que es característica de una profesión con la observación en la vida diaria.

---

[5] Este principio forma parte de un análisis preliminar que se fundamentó en los desarrollos teóricos respecto a la observación profesional en la enseñanza de las matemáticas.

Además, Mason ha destacado que la disciplina de observar debe entenderse como un conjunto de técnicas para: (a) disponer la mente de manera apropiada; (b) reflexionar sobre el pasado reciente para seleccionar aquello que se quiere observar o sensibilizar; (c) estar en capacidad de actuar con mayor intención de la que se emplea en la vida cotidiana (Mason, 2011).

En relación con los usos de la disciplina de la observación profesional, estableció la diferencia entre dos componentes de la misma, “darse cuenta de” y “darse cuenta para” en una situación de clase. En el primer componente “darse cuenta de” se establece una descripción, se reconoce básicamente la acción o reacción que se quiere describir. Recalca, por tanto, la observación. El segundo componente “darse cuenta para” es posterior a la identificación del suceso en la situación de clase e indica en qué sentido se orienta la observación. En este componente adquiere sentido el inicio de la teorización, la explicación, y exige dar cuenta no solo de lo observado.

Sherin y van Es (2002) se fundamentan en el concepto de visión profesional propuesto por Goodwin (1994), el cual permite describir cómo los miembros de una comunidad profesional desarrollan estructuras que dan cuenta de situaciones complejas de manera precisa.

Estos investigadores argumentan en favor de un punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje en el cual se requiere que los profesores desarrollen otras maneras de observar e interpretar las interacciones en el aula de clase.

Ellos definen la observación profesional en términos de tres aspectos claves: (a) detectar en la situación de clase lo que es importante; (b) establecer conexiones entre los aspectos específicos de las interacciones de clase y los principios de la enseñanza y el aprendizaje que los representan; (c) razonar respecto a las interacciones en el aula sobre la base de lo que se conoce en relación con el contexto.

Además, se especifican cada uno de los aspectos que definen la observación profesional. Con respecto al primer aspecto, se reconoció que los profesores en cualquier lección atienden a lo que los estudiantes hacen y dicen. Se atiende a cómo los estudiantes piensan en relación con la materia, a las analogías y representaciones que usan para transmitir ideas importantes y a las experiencias que adquieren y los comprometen con sus aprendizajes. Los profesores no pueden atender lo que ocurre en cualquier momento en el aula de clase. Por este motivo, seleccionan y responden a elecciones efectuadas con una intencionalidad.

En el segundo aspecto, Gleser y Chi (1988) argumentan (como se cita en van Es y Sherin, 2002) sobre cómo en la investigación los profesores expertos conectan un evento específico de una situación que ellos observan con un concepto o principio que ellos comprenden, mientras los profesores novatos suministran una descripción literal de lo que ellos ven.

En el tercer aspecto, la observación profesional de las interacciones de clase está ligada al contexto específico en el cual uno enseña, que es el contexto donde tal habilidad se desarrolla. Esto es consistente con los hallazgos de investigaciones en las que individuos con más experiencia en un dominio de la investigación, se reconocen como más hábiles para darle sentido a las situaciones asociadas con este campo.

Santagata, Zannoni y Stigler (2007) proponen un análisis de las habilidades del profesor para la lección de clase, las que se comparan con las habilidades conocidas para la observación profesional de van Es y Sherin (2002). La estructura de análisis comprende: (a) el uso de las metas de aprendizaje de la lección como criterio para analizar su eficacia; (b) enfatizar la observación y el razonamiento del aprendizaje del estudiante; (c) una aproximación flexible a la enseñanza, que se basa en el análisis del pensamiento de los alumnos que están aprendiendo y los cambios en la enseñanza posterior a la reflexión.

En Jacobs, Lamb y Philipp (2010), la atención a las estrategias del alumno alude a aspectos particulares de las situaciones de enseñanza y de los conocimientos matemáticos en sus estrategias. La interpretación de las comprensiones del alumno se caracteriza por el razonamiento consistente de los profesores con respecto a lo que caracterizan sus estrategias y los aportes de la investigación sobre el desarrollo de pensamiento matemático.

La habilidad de decidir cómo responder se caracteriza por el razonamiento de los profesores al elaborar una posible respuesta a las comprensiones del estudiante. Se establece si los razonamientos del profesor son consistentes con respecto a lo específico de las estrategias del alumno y con los aportes derivados de la investigación sobre el desarrollo de pensamiento matemático. Esta habilidad se consideró articulada con las habilidades de identificar e interpretar (Jacobs *et al.*, 2010).

Fortuny y Rodríguez (2012), al proponer los aspectos claves que determinan una visión profesional, introdujeron la noción de decisiones de acción para dar cuenta del propósito del razonamiento de los profesores con respecto a las interacciones en el aula. Se fundamentaron en la conceptualización de la observación profesional (van Es y Sherin, 2002) y en la conceptualización de destreza en la observación profesional del estudiante (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010).

En esta investigación, se hace hincapié en las decisiones de acción, porque se reconoce en la Educación Matemática la importancia de la toma de decisiones en aquellas aproximaciones teóricas en las que el pensamiento del estudiante es central (Jacobs, Lamb, Philipp y Schapelle, 2011). Se recurre a estos distintos matices de la observación profesional para dar cuenta de la evolución de la observación profesional de la enseñanza en la que se hace uso del pensamiento matemático de los alumnos y su caracterización en términos de las tres habilidades que se articulan entre sí.

2.2 Oportunidades pedagógicas con significado matemático

Se ha optado por esta aproximación teórica, oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, porque, en consonancia con Leatham *et al.* (2015), aborda el vacío existente en las investigaciones respecto al uso del pensamiento matemático del alumno por parte de los profesores. Además, proporciona herramientas para el análisis y el desarrollo de las tres habilidades que, en su articulación, determinan la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante. Esta aproximación teórica, también da cuenta de las oportunidades pedagógicas en el momento de enseñanza que posibilitan la comprensión del alumno.

El principio teórico, en el que se fundamenta esta aproximación, reconoce que la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática suministra una herramienta para analizar el potencial matemático y pedagógico del pensamiento matemático del estudiante. Por ello, es posible identificar, en las prácticas de enseñanza, dentro del aula, momentos de enseñanza en los que se manifiestan las oportunidades pedagógicas.

2.2.1 **Conceptualización del momento de enseñanza**

Se reconocieron distintas aproximaciones conceptuales respecto al concepto de momento de enseñanza. De entre ellas, destacamos las que se mencionan a continuación.

Jaworski (1994), al caracterizar la enseñanza, estableció una tríada de categorías que capturan sus elementos importantes: gestión del aprendizaje, sensibilidad a los estudiantes y desafío matemático. Estas tres categorías están relacionadas. Aquí se presentan las dos últimas debido a que la primera ya fue descrita.

La sensibilidad hacia los estudiantes abarca las actitudes manifiestas de los profesores en la relación profesor—estudiante. Dichas actitudes se caracterizan por el conocimiento por parte del profesor de las experiencias dificultosas de los estudiantes y las habilidades que ellos desarrollan. Esto se manifiesta en el respeto y el cuidado del profesor hacia sus estudiantes. Se muestra a través de la evaluación, por parte del profesor, del trabajo hecho por los estudiantes y el ánimo que les da para continuar. Esta categoría no contribuye a la conceptualización elaborada del momento de enseñanza.

A partir de cómo los profesores gestionan el conocimiento matemático en sus interacciones con los estudiantes y dependiendo de las necesidades individuales y de los progresos de estos, se originan desafíos matemáticos y se establece el modo con el que el profesor posibilita conocimiento al estudiante. Esta categoría, tal como se presenta, contribuye a la conceptualización elaborada de oportunidad pedagógica, ya que enfatiza la aproximación del estudiante a las concepciones, lo que se conecta más adelante con el criterio de apertura.

Davies y Walker (2005) establecen cómo los momentos matemáticos significativos describen las trasformaciones en la capacidad del maestro. Para ello, valoran las interacciones profesor—estudiante en el aula de clase, cuando las acciones emprendidas por el profesor favorecen el conocimiento de los estudiantes en el marco de una investigación respecto a cómo los profesores construyen, representan y negocian el conocimiento en el aula. En esta aproximación conceptual se plantea el énfasis en lo significativo para el profesor, lo que configura una característica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática tal y como se precisa más adelante.

Schoenfeld (2008) establece que los momentos de decisión del profesor pueden ser modelados usando el modelo[6] estándar de las ciencias cognitivas, a partir de una estructura analítica específica (cuyos componentes son los conocimientos de los profesores, metas, creencias y el mecanismo de la toma de decisiones). Este planteamiento hace posible caracterizar en detalle el cómo y el porqué de una acción individual del profesor.

Tal aproximación a los momentos de enseñanza difiere de la aproximación efectuada en esta investigación que no se pretende modelar las decisiones del profesor. Por el contrario, lo que se intenta es caracterizar los momentos de enseñanza, a partir de la estructura analítica que articula las características y los criterios de la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, y los procesos que, articulados, configuran la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante.

Thames y Ball (2013) caracterizan un momento articulador crucial en el contexto de un episodio en el que el profesor dimensiona la respuesta del

[6] Un modelo de la conducta de un profesor en una lección particular es una caracterización analítica basada en una teoría de las acciones de los profesores que explican cómo y por qué hacen selecciones mientras enseñan.

estudiante, coordina con lo que escucha del estudiante (toma en consideración el pensamiento matemático del estudiante) y establece si la perspectiva matemática es fundamental en el momento.

En la revisión de las referencias, se observa que estos momentos tienen el potencial de contribuir al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. No obstante, sin un lenguaje claro es difícil que investigadores y profesores discutan respecto a estos. Por ello, se asume la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática como instrumento diseñado para analizar el potencial matemático y pedagógico del pensamiento matemático del estudiante (Leatham *et al.*, 2015).

2.2.2 **Prácticas de enseñanza**

En lo que se refiere a las prácticas de enseñanza, se revisaron trabajos en los que se reconoce que no se han tenido en cuenta las oportunidades para utilizar, de manera provechosa, el pensamiento matemático del estudiante. No se actuó con profesores en formación o que describen limitaciones y alcances de las intervenciones en el marco de experimentos o de un programa de formación. Esto se ilustra mediante los trabajos reseñados posteriormente.

Leatham *et al.* (2015) afirman que la investigación en la formación de profesores de matemáticas sugiere que los estudiantes se benefician de las prácticas de enseñanza que desarrollan su pensamiento matemático (Fennema *et al.*, 1996; Stein y Lane, 1996). No obstante, las prácticas que enfatizan el pensamiento matemático del estudiante como una aproximación al aprendizaje del profesor a partir de la revisión de distintas investigaciones son reportadas haciendo ostensibles sus rasgos y su complejidad (Sowder, 2007).

Cengiz, Kline, y Grant (2011) mostraron que la extensión del pensamiento matemático del estudiante en las discusiones con la clase es un desafío. Se destaca cómo los episodios de extensión registrados en este estudio se concentran en tres categorías: favorable reflexión matemática, ir más allá de los métodos de solución inicial y favorable razonamiento matemático. Se reconoció una combinación de tres diferentes tipos de acciones de enseñanza individuales que son críticas en la creación de oportunidades para extender el pensamiento matemático del estudiante: provocar, soportar y extender. Se ejemplifican como acciones de extensión invitar a los estudiantes a evaluar una solución, a proveer razonamiento para una afirmación y para comparar diferentes soluciones. Acciones de soporte son algunas como sugerir la interpretación de una observación y repetir las afirmaciones. Además, se reconoce que distintos dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), soportan la utilización por parte de los profesores de las acciones de enseñanza fundamentales, en la creación de oportunidades que extienden el pensamiento matemático del estudiante.

Peterson y Leatham (2009) exploran los obstáculos existentes para profesores en formación en los usos del pensamiento matemático del estudiante y la orquestación de las discusiones de clase. Estos autores describen el reconocimiento de un momento de enseñanza después de escuchar y comprender el pensamiento matemático del estudiante, a partir del cual se reconoce el potencial pedagógico y matemático del momento. El reconocimiento de un momento de enseñanza exige conocimiento especializado. Por este motivo, determinar el valor pedagógico y matemático de un momento de enseñanza causa dificultades en el uso del pensamiento matemático.

En esta investigación se mostró cómo el uso eficaz del pensamiento matemático del estudiante requiere que el profesor orqueste una discusión de clase para establecer conexiones entre diferentes métodos de solucionar un problema.

En los resultados de esta investigación se presentan obstáculos en los pasos del proceso establecido para usar el pensamiento matemático de los estudiantes. En los profesores se identificaron dificultades en la pedagogía de la escucha y la comprensión, así como en el reconocimiento de los momentos de enseñanza. En este último proceso, uno de los obstáculos identificados estuvo ligado con las restricciones de cómo los estudiantes piensan y aprenden matemáticas.

Los aportes de esta investigación, que provienen de Peterson y Leatham, están asociados con una concepción de lo discursivo en la cual se le otorga importancia a la orquestación de las discusiones de clase para usar el pensamiento matemático del estudiante. Esto determina el sentido dado a la orquestación de discusiones de clase en la conceptualización de los momentos de enseñanza y las oportunidades pedagógicas.

En los resultados de su investigación, Stockero y van Zoest (2013) destacan la importancia que en la formación inicial de los profesores tiene el saber reconocer las matemáticas del estudiante, observar el pensamiento matemático del estudiante y actuar de manera eficiente con ese pensamiento matemático. Esto influiría en la mejora de la capacidad del maestro para actuar de manera que se incremente la comprensión matemática de sus alumnos. También, ellos resaltan la importancia de ayudar a los profesores a mejorar su capacidad de observar y actuar en momentos pivote de la enseñanza (interrupciones en el desarrollo de una lección que proveen una oportunidad para modificar la enseñanza suministrando comprensión matemática a los estudiantes), la necesidad de investigación adicional sobre las maneras efectivas de reconocer los momentos pivote y cómo utilizarlos para construir el pensamiento matemático del estudiante.

Estos investigadores, Stockero y van Zoest (2013), reportan cinco circunstancias en las que emergen momentos pivote de la enseñanza de las matemáticas: (a) los estudiantes hacen un comentario o hicieron una pregunta que se basa en las matemáticas que el maestro planeó discutir; (b) los estudiantes trataron de dar sentido a las matemáticas de la lección; (c) los estudiantes expresaron su pensamiento matemático mediante una solución incorrecta; (d) tuvo lugar una contradicción matemática; y (e) los estudiantes expresaron su confusión matemática.

Del mismo modo, cuando se presenta un momento pivote, las decisiones de los profesores pueden ser:

- Extender las matemáticas y hacer conexiones entre las ideas matemáticas,

- Dedicar tiempo al pensamiento matemático del estudiante,
- Hacer hincapié en el significado de las matemáticas.

Para los profesores, estas decisiones proporcionan un punto de partida para aprender a utilizar el pensamiento matemático de los estudiantes, de tal forma que contribuya al desarrollo de la comprensión matemática.

Este trabajo de investigación permitió establecer conexiones entre los momentos pivote de enseñanza que han sido identificados y las decisiones del profesor en dichos momentos. Esta conexión entre momentos de enseñanza y decisiones de acción se retoma en la investigación.

Stockero (2014) caracteriza las transiciones en la observación profesional de profesores de matemáticas al inicio de su formación. Reconoce que es posible facilitar tales transiciones. Los profesores mejoraron la observación profesional de ejemplos matemáticos extraídos de registros de vídeo. En su investigación, los datos revelan transiciones en lo que respecta a centrar la mirada en el profesor y luego, en el estudiante. Además, de pasar de mirar al profesor a las interacciones profesor-estudiante. Asimismo, los profesores transitaron desde ejemplos de la observación profesional, que enfatizaron en las matemáticas de manera natural, a ejemplos de momentos matemáticos.

Las transiciones identificadas son significativas porque dan cuenta de los estudiantes y dan detalles de su pensamiento matemático, lo que es fundamental en la enseñanza centrada en el estudiante.

El trabajo de investigación descrito, aunque desarrollado con profesores en formación, permite establecer que, en profesores en servicio y con una práctica con cierto nivel de experticia es necesario reconocer su transición al dar cuenta de la observación profesional en la enseñanza.

Sun y van Es (2015), al estudiar la formación de futuros profesores en prácticas que atienden el pensamiento matemático de los estudiantes, llevan a cabo un experimento en el que compararon profesores en formación inicial que participaban en prácticas centradas en la comprensión del estudiante con otro grupo que no participó de tales prácticas. Esta investigación permite establecer cómo los profesores en formación que participaron en el curso crearon oportunidades para observar el pensamiento matemático del estudiante durante la enseñanza, atendieron este pensamiento y provocaron ideas en los estudiantes para aprender más acerca de dicho pensamiento. De igual manera, se encontró que en la exploración del pensamiento matemático del estudiante se puso énfasis en las respuestas correctas y en la fluidez procedimental.

Lo que aporta la investigación de Sun y van Es (2015), es una caracterización del estado de desarrollo de las competencias de profesores en servicio que articulan la observación profesional y que ponen de manifiesto el interés de atender el pensamiento matemático del estudiante (con una cierta destreza y experiencia en su práctica). Esto, mediante el reconocimiento de las acciones que generan los profesores para atender y provocar el pensamiento matemático del estudiante, así como a través de su respuesta en términos de las decisiones de acción, a partir de la identificación y comparación de momentos de enseñanza, que son posterior a la aplicación de la estructura analítica que proveen las oportunidades significativas desde una perspectiva matemática.

2.2.3 Estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática

Leatham *et al.* (2015), en su estructura conceptual, definen las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática en la intersección de tres características de momentos importantes en la literatura de investigación: pensamiento matemático del estudiante, lo significativo de las matemáticas y la oportunidad pedagógica, tal como se muestra en la Figura 2.1.

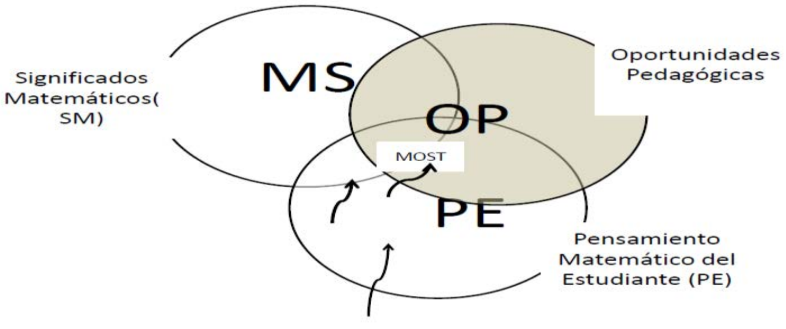

Figura 2.1 El MOST descripción de su proceso analítico. Figura extraída y traducida de Leatham *et al.* (2015, p.91)

La característica fundamental de una oportunidad significativa desde la perspectiva matemática es el pensamiento matemático del estudiante. Posteriormente, se enfoca en examinar si el pensamiento de los estudiantes desarrolla significados matemáticos. Por último, se considera si el pensamiento matemático del estudiante puede ser construido sobre la comprensión que tienen los estudiantes de los significados matemáticos en el momento en el que emerge una oportunidad pedagógica.

De la definición de las oportunidades significativas desde una perspectiva matemática se deriva un proceso analítico, que describe una trayectoria a seguir (Figura 2.1) en el análisis: pensamiento matemático del alumno (PE), significado matemático (MS) y oportunidad pedagógica (OP).

En el proceso analítico vinculado con la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas, la unidad de análisis es un momento, el cual se entiende como una acción observable del estudiante o pequeña colección de acciones conectadas (ejemplo, una expresión verbal combinada con un gesto). El momento puede ser asumido como unidad, término acuñado por Stockero (2008), que es un turno de conversación o la expresión física de un evento (por ejemplo: escribir una solución a un problema en el tablero).

Dicho análisis hace posible descomponer y articular las características y criterios que estructuran las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática (Leatham *et al.*, 2015). A continuación, se describen estos componentes.

La conceptualización de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática posibilita una manera sistemática de articular las características y criterios. Asimismo, pueden articularse los rasgos del proceso analítico, como su direccionalidad, las finalidades del proceso analítico y las consideraciones metodológicas que subyacen a las interpretaciones de la estructura analítica. Por lo que a continuación se precisa cada característica de la estructura y los criterios que le otorgan sentido al proceso analítico.

2.2.4 **Pensamiento matemático del estudiante**

En la perspectiva de Leatham *et al.* (2015), para que un momento sea una oportunidad pedagógica significativa desde la perspectiva matemática debe fundamentarse en el pensamiento matemático. Este momento debe cumplir dos criterios para caracterizarlo como portador del pensamiento matemático del estudiante: (a) la acción del estudiante suministra evidencias suficientes para hacer inferencias razonables; (b) se puede articular una idea matemática que vincula al momento con las matemáticas del estudiante. En relación con estos dos criterios, su discusión exige diferenciar entre lo observable y lo observado. Lo observable hace referencia al pensamiento matemático del estudiante que puede ser observado por el profesor, reseñado por alguien (profesor, otros estudiantes, el investigador) al presenciar el caso, ya sea por estar presente o mediante el acceso al registro de las interacciones en el aula. En tanto, lo observado, es lo que infiere el profesor de lo que los estudiantes hacen y dicen.

Un momento cumple el criterio “matemáticas del estudiante” si un observador puede inferir lo que el estudiante está expresando matemáticamente. Se reconoce la imposibilidad de acceder directamente al pensamiento del estudiante, por lo que los profesores hacen inferencias basándose en las observaciones de lo que los estudiantes hacen y dicen. Además, en el aula de clase, la evidencia se asocia con acciones del estudiante como expresiones verbales, gestos o trabajo escrito.

Para que se cumpla el criterio “matemáticas del estudiante”, quién actúa como observador debe ser capaz de inferir las matemáticas del estudiante. Esto requiere su inferencia articulada con las acciones de los estudiantes que proporcionan evidencias de su pensamiento matemático.

Después de considerar que un caso cumple el criterio “matemáticas del estudiante”, se determina si el momento se encuentra en la perspectiva matemática. Para ello, se establece la existencia de una idea matemática que está estrechamente relacionada con las matemáticas del estudiante. Esta idea matemática debe ser entendida por los estudiantes y ser expresada como una declaración concisa. Por ejemplo: “la suma y la resta son operaciones inversas”, “se pueden sumar fracciones con un denominador común añadiendo sus numeradores y manteniendo el denominador común”.

En síntesis, el pensamiento matemático del estudiante se describe en relación con los dos criterios presentados. Una mirada sistemática desde la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, incorpora las preguntas que plasman cada criterio tal como lo muestra la Figura 2.2.

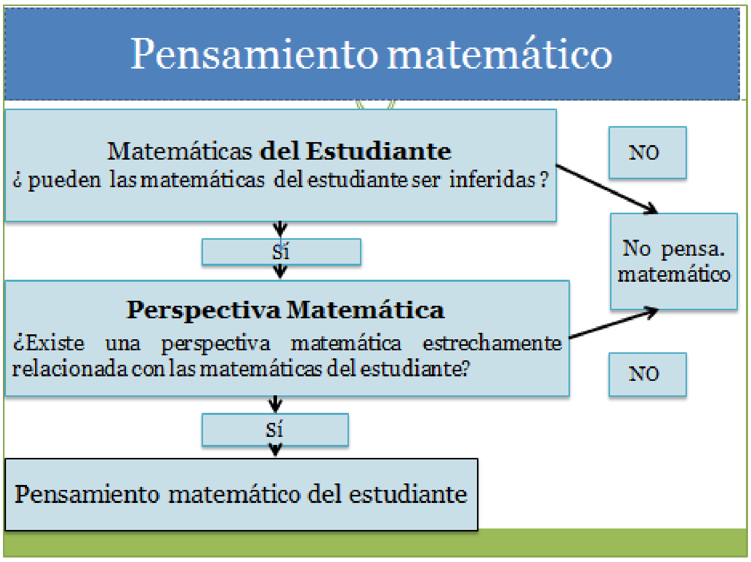

Figura 2.2 Análisis de la característica pensamiento matemático del estudiante. Figura extraída y traducida de Leatham *et al.* (2015)

2.2.4.1 Lo significativo desde una perspectiva matemática

Según Leatham *et al.* (2015), un caso es una oportunidad pedagógica significativa desde la perspectiva matemática, cuando la perspectiva matemática se relaciona con las matemáticas del estudiante. El tiempo de enseñanza es limitado y permite un determinado tipo de gestión de lo significativo de las matemáticas. Asimismo, regula el tipo de matemáticas del estudiante que se utilizan para la comprensión.

Utilizan la expresión “lo significativo de las matemáticas” para aludir a los profesores que, en una clase, participan en el aprendizaje de las matemáticas, mientras que el significado matemático designa a un grupo de estudiantes con una perspectiva particular de su desarrollo matemático.

Un momento se caracteriza por lo significativo de las matemáticas cuando cumple dos criterios: (a) la perspectiva matemática es apropiada para el nivel de desarrollo matemático de los estudiantes y, (b), la perspectiva matemática es uno de los contenidos para el aprendizaje. Cumplir con el primer criterio suscita dos condiciones. La primera es que las matemáticas deben ser accesibles a los estudiantes, esto implica que se reconozcan las experiencias matemáticas anteriores y que se considere que el conocimiento es suficiente para articularse con la perspectiva matemática. La segunda condición es que la perspectiva matemática no debe ser aquella que la mayoría de los estudiantes con su nivel matemático ya entienden.

La identificación de perspectivas matemáticas accesibles a los estudiantes se establece mediante determinados recursos tales como: los documentos curriculares y las investigaciones sobre la trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2009; Confrey, Maloney y Corley, 2014).

El segundo criterio para lo significativo de las matemáticas es que la perspectiva matemática esté relacionada con un objetivo matemático central para los estudiantes de la clase. Los objetivos matemáticos para el aprendizaje de los estudiantes podrían estar determinados por el maestro o por una fuente externa, tal como los documentos curriculares. Al analizar la perspectiva matemática en relación con el criterio “matemáticas centrales” es importante que los objetivos matemáticos: (a) se extiendan desde objetivos para una lección específica a metas amplias para el aprendizaje de las matemáticas y, (b), que abarquen el contenido matemático y las prácticas matemáticas (un ejemplo puede satisfacer el criterio de las matemáticas centrales si la perspectiva matemática está estrechamente relacionada con un objetivo de aprendizaje para los estudiantes de esa clase).

La Figura 2.3 representa el proceso de análisis y proporciona preguntas que plasman cada criterio. Al igual que en el análisis del pensamiento matemático de los estudiantes, si un criterio no se cumple, no se juzgarán significativas las matemáticas. En el análisis, si el momento es una oportunidad pedagógica significativa, es decir, cumple los criterios, decimos que la perspectiva matemática del momento es significativa desde el punto de vista de las matemáticas.

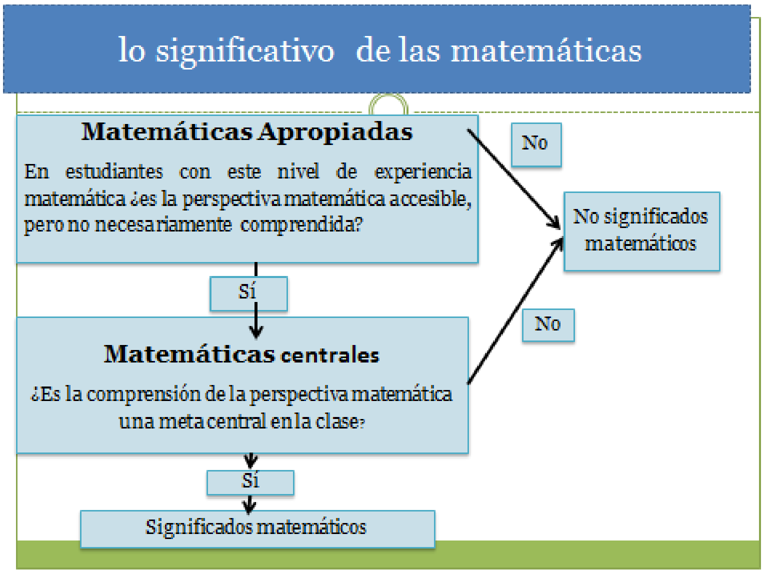

Figura 2.3 Análisis de la característica lo significativo de las matemáticas. Figura extraída y traducida de Leatham (2015, p.98).

2.2.4.2 Oportunidades pedagógicas

Leatham *et al.* (2015) definen una oportunidad pedagógica como un momento en el discurso del aula en que el pensamiento matemático del estudiante posibilita condiciones en la construcción de significado matemático. Esta definición abarca casos en los que el pensamiento matemático del estudiante proporciona posibilidades de construir un significado matemático.

La oportunidad pedagógica, tal y como se definió, proviene de los trabajos de Remillard y Geist (2002), quienes utilizaron la expresión “apertura del currículo” para hacer alusión a preguntas, observaciones y desafíos de los estudiantes, utilizadas para fomentar el aprendizaje al hacer énfasis en el sentido matemático o pedagógico de los problemas que surgieron. En este sentido, una oportunidad pedagógica se presenta cuando la apertura es creada por un momento en el que el pensamiento del estudiante, en un instante en que es oportuno, se aprovecha construyendo el objeto de discusión.

En consecuencia, un momento es un ejemplo de oportunidad pedagógica cuando se cumplen dos criterios: (a) el pensamiento del estudiante en el caso crea apertura para construir a partir del mismo la perspectiva matemática y, (b) el momento oportuno se aprovecha para tomar ventaja de la apertura. En el primer criterio, se define la apertura como un momento en el que la expresión del pensamiento matemático del estudiante crea una necesidad intelectual, que otorga sentido a las matemáticas del estudiante.

Harel (2013) argumenta que la necesidad intelectual está conectada con la noción de justificación epistemológica: necesidad de discernir entre cómo se ha realizado el aprendizaje de los alumnos y por qué se obtiene un determinado conocimiento. Se caracterizan las necesidades intelectuales como determinadas por la concepción del alumno y no por la concepción del profesor o del observador. Las necesidades intelectuales se aprenden; su correspondencia no puede ser determinada con independencia de aquello que las satisface.

Existen cinco tipos de necesidad intelectual:

- La necesidad de certeza, que es la necesidad de probar para eliminar dudas.
- La necesidad de causalidad, que es la necesidad de explicar para determinar la causa de un fenómeno.
- La necesidad de cálculo, que incluye la necesidad de cuantificar valores de las cantidades y las relaciones entre ellas por medio del algebra simbólica.
- La necesidad de comunicación, que abarca la necesidad de formulación (transformar cadenas del lenguaje hablado en expresiones algebraicas) y la necesidad de formalización (necesidad de exteriorizar el significado exacto de las ideas, conceptos y la justificación lógica de los argumentos).
- La necesidad de una estructura lógica, que incluye la necesidad de reorganizar el conocimiento aprendido en esa estructura lógica.
- Estas cinco necesidades están arraigadas en todos los aspectos de la práctica matemática como, por ejemplo, formular hipótesis, demostrar y explicar pruebas, establecer interpretaciones comunes mediante

definiciones, notaciones, convenciones al describir ideas matemáticas sin ambigüedades.

- Un momento que posibilita la oportunidad de manifestar el pensamiento matemático del estudiante (PE) como necesidad intelectual del alumno incluye: (a) respuestas correctas que involucran un nuevo razonamiento, (b) una respuesta que contiene una concepción del alumno o el uso de un concepto matemático, (c) una contradicción matemática, (d) un razonamiento incompleto o incorrecto y (e) preguntas sobre las causas o generalización de preguntas.
- El segundo criterio para determinar si un momento es una oportunidad pedagógica, es el momento oportuno. Por definición, la elección del momento oportuno es un elemento de cualquier oportunidad, que no es solo una apertura, pero que permite aprovechar las ventajas de la apertura, por lo que es probable una mayor comprensión desde el punto de vista de los significados matemáticos del caso.
- La elección del momento oportuno involucra el plan general de la lección, la preparación de otros miembros de la clase que en el momento se comprometen con la idea planteada y el contexto en el que la apertura se manifiesta.
- Un momento de enseñanza que plasma las oportunidades pedagógicas cumple los dos criterios: el de apertura y el del momento oportuno. Su proceso de análisis requiere examinar componentes de las características previas, como las matemáticas del estudiante y los dos criterios y de hecho la linealidad. Ver Figura 2.4.
- La conceptualización que subyace a la aproximación teórica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, se cristaliza en términos de una estructura analítica sobre la cual se fundamenta la identificación de episodios de enseñanza en los cuales se manifiesta el pensamiento matemático del estudiante. A continuación, se presenta la estructura analítica.
- Un momento de enseñanza es una oportunidad pedagógica significativa desde la perspectiva matemática, si en su análisis sistemático satisface las tres características: pensamiento matemático del estudiante, lo

significativo de las matemáticas y las oportunidades pedagógicas. La estructura analítica se sintetiza mediante un diagrama de flujo (Figura 2.5), en el cual se ponen en relación las tres características con sus criterios asociados.

- Al describir la funcionalidad de esta estructura, las características y sus criterios asociados se analizan linealmente. Además, el análisis de lo significativo de las matemáticas tiene lugar, una vez que la característica del pensamiento matemático del estudiante se hace patente en el momento de enseñanza. Por su parte, el análisis de la oportunidad pedagógica se hace visible cuando en el momento de enseñanza satisface lo significativo de las matemáticas.
- Las características y los criterios que determinan la estructura con la que uno presenta un momento para la potencial construcción de un momento de enseñanza se distingue por no ser determinista.

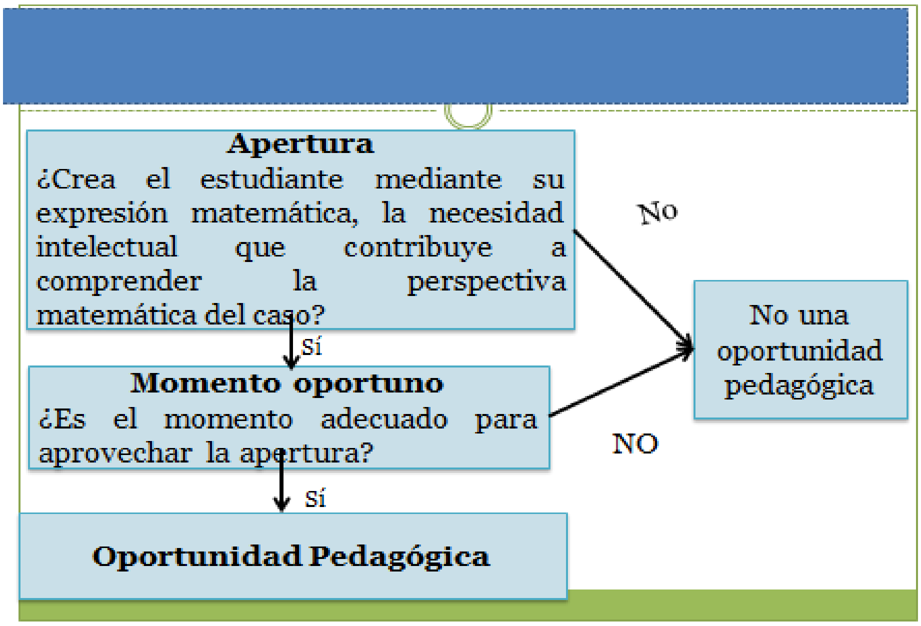

Figura 2.4 Análisis de la característica oportunidad pedagógica. Figura extraída y traducida de Leatham *et al.* (2015, p.102)

En el análisis de un momento de enseñanza, los individuos con formación didáctica y experiencia reconocida podrán elaborar diferentes inferencias con respecto a las matemáticas de los estudiantes, analizar diferentes perspectivas matemáticas, priorizar diferentes aspectos de las matemáticas como centrales en una determinada área de estudio y juzgar de manera diferente la creación de la necesidad intelectual.

Las variaciones en la naturaleza de los análisis se atribuyen a diferencias en la formación y la experiencia. No obstante, la contribución de las mismas está asociada con el reconocimiento de los momentos de enseñanza en los que se manifiestan oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática para la discusión acerca de ideas matemáticas importantes.

La estructura de análisis aquí presentada se utiliza en una fase posterior en el diseño del instrumento, como parte del procedimiento establecido para reconocer los momentos de enseñanza.

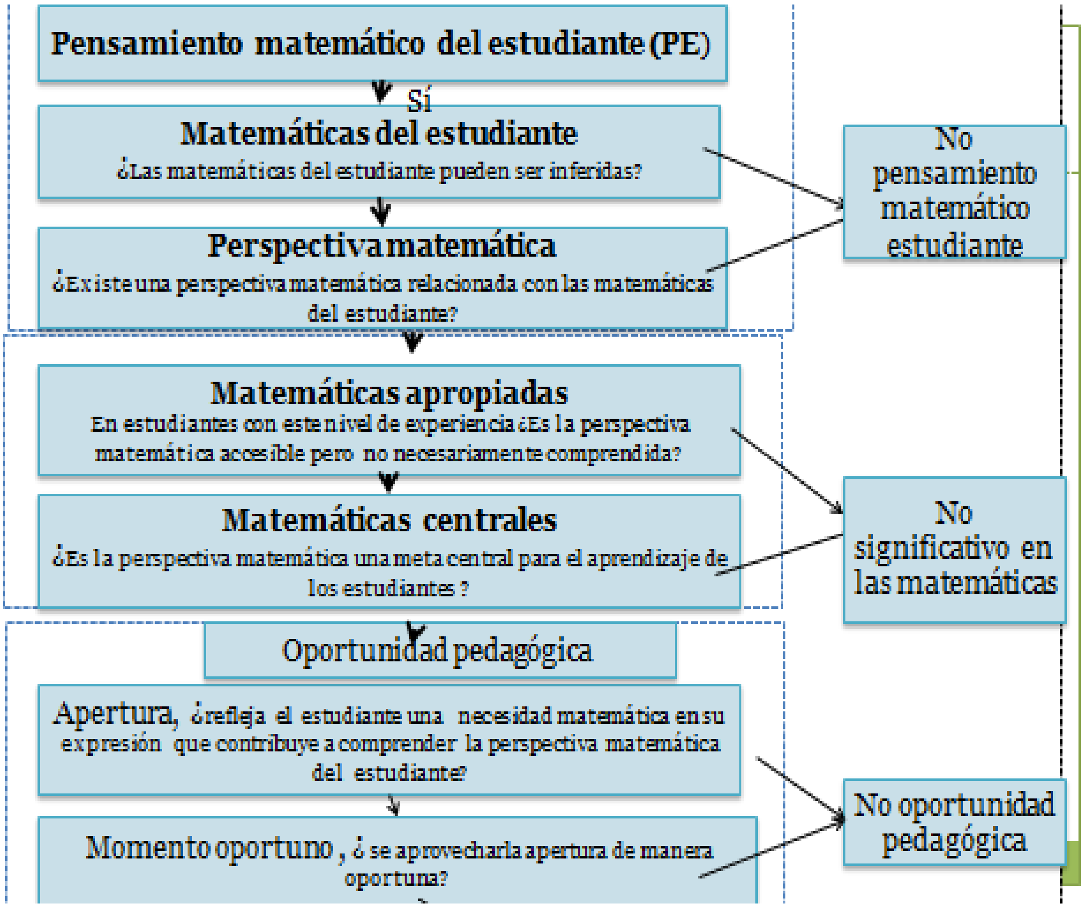

Figura 2.5 Estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas. Figura extraida y traducida de Leatham *et al.* (2015, p.103)

3 INTERVENCIÓN Y MÉTODOS

Como se mencionó en el Capítulo 1, esta tesis pretende aportar a la cuestión de investigación: Cómo un profesor identifica lo que es relevante para el aprendizaje de la geometría de los alumnos y cómo lo interpreta para fundamentar las decisiones de acción. Es decir, cómo conecta las decisiones de acción con sus acciones de respuesta en momentos con oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Para esto, se establecieron los objetivos de investigación:

- Evaluar una matriz de análisis para reconocer momentos de enseñanza mediante el uso del instrumento “caracterización del pensamiento matemático”.
- Caracterizar la observación profesional del profesor mediante el reconocimiento y comparación de momentos de enseñanza.
- Caracterizar las decisiones de acción en momentos de enseñanza con oportunidades pedagógicas significativas.

En este capítulo se presenta el diseño metodológico de esta investigación. Se inició describiendo el contexto de la intervención y se fundamentaron las selecciones efectuadas (sección 3.1). Posteriormente, se presentó la organización y recolección de los datos que se enmarcan en un método y se reconocen las fases de la investigación (sección 3.2). En la parte final, se presentan las estrategias de análisis, la obtención de los episodios de referencia, los momentos de enseñanza y la identificación de las oportunidades pedagógicas (secciones 3.5 y 3.6).

3.1.1.1 Contexto de la intervención

Las grabaciones de las clases de tres profesores de Secundaria, Eva, Andrés y Carlos, suministraron la información requerida para el estudio. Los profesores cumplieron con los siguientes criterios: necesidad de continuar con su formación profesional, enseñanza centrada en el aprendizaje (proponer problemas abiertos, tareas y ejercicios para la discusión en grupo) y promover la interacción entre profesor y estudiantes (favorecen el intercambio mediante el diálogo, la discusión grupal y el desarrollo de sesiones plenarias); experiencia mínima de 5 años como profesor de matemáticas en secundaria,y ser participantes de los programas de formación de profesores de la Universidad.

Los vídeos fueron utilizados como fuente de información primaria. Los datos se obtuvieron a partir de la transcripción de cada sesión de clase. La información obtenida de las grabaciones de clase se complementó, en la segunda fase de la recolección de información, con una entrevista inicial y dos entrevistas posteriores para el seguimiento de la secuencia de enseñanza aplicada por cada profesor. Igualmente, se hicieron observaciones de clase.

En la Tabla 3.1 se presenta información de los tres profesores participantes con el propósito de esbozar un perfil de estos profesores. Este perfil incluye el nivel de enseñanza y la información disponible de las distintas fuentes: los vídeos, las entrevistas y la observación.

Tabla 3.1 Resumen de los profesores participantes de la investigación

Profesor	Nivel en el que enseñan	Nº sesiones de clase Video grabadas	Otras fuentes de información
Eva	grado séptimo (estudian tes de 12 a 14 años).	3 sesiones de noventa y media cada una.	Una encuesta y una entrevista con información final sobre el proceso
Andrés	grado octavo (estudiantes 13 a 15 años)	4 sesiones de 45 Minutos	Una encuesta y una Entrevista
Carlos	grado séptimo (estudian tes de 12 a 14 años)	4 sesiones de 90 Minutos	Entrevista inicial y dos entrevistas posteriores de seguimiento

3.2 Fundamentos de la selección y aproximación metodológica

El motivo de seleccionar profesores en servicio (con un mínimo de cinco años de experiencia, tras haber cursado un programa de formación profesional e iniciar un programa de postgrado), se debe a que su vínculo con programas de formación de una institución educativa como una Universidad permite obtener información para describir el estado del desarrollo de sus competencias profesionales[7]. De este modo, se logra una “instantánea” que se vincula con su formación profesional y permite dar cuenta del uso eficiente del pensamiento matemático en la enseñanza. Los datos obtenidos se interpretan y analizan en un contexto institucional y asociado con la práctica profesional de profesores en ejercicio.

La selección de los profesores en esta investigación es coherente con los rasgos de la aproximación metodológica establecida. Se reconocieron investigaciones elaboradas desde aproximaciones cualitativas en la Educación Matemática, en particular las que se ocupan del uso eficiente del pensamiento matemático del estudiante en la enseñanza, introduciendo como elementos en su aproximación momentos de enseñanza. Esto permite reconocerlas como antecedentes de esta investigación (David y Lopes, 2002; Peterson y Leatham, 2009). Considerando lo anterior, la aproximación metodológica de esta investigación es cualitativa. Según Creswell (2007), se define como una actividad situada que ubica al observador en el mundo. De este tipo de investigación, se destaca el hecho de que involucra una aproximación interpretativa y naturalista del mundo. Esta manera de entender la investigación cualitativa abarca dos tensiones. Por un lado, lo interpretativo y el sentido crítico. Por otro lado, lo humanístico y la concepción naturalista de la experiencia humana (Denzin y Lincoln, 1994).

Se adoptó entre las aproximaciones cualitativas la investigación etnográfica, para lo que se propuso un estudio de casos múltiple, etnográfico e ilustrativo (Angrosino, 2007). Las clases de tres profesores en servicio (Eva, Andrés y Carlos) fueron observadas y grabadas para estudiar sus interacciones en prácticas de enseñanza.

---

[7] En esta investigación las competencias del profesor están asociadas con tres habilidades interconectadas entre si: identificar aprendizajes del estudiante, interpretar las comprensiones del estudiante y decidir en relación con las repuestas de los estudiantes. El estado de estas competencias es uno de los elementos que potencialmente permite caracterizar una trayectoria hipotética de formación (entendida como el dispositivo estructurado por una red de metas, constructos, procedimientos, normas y prácticas durante la formación que se develan en estudios empíricos para explicar cómo el profesor transforma su enseñanza desde posiciones ingenuas hacia concepciones fundamentadas en los desarrollos investigativos en la Educación Matemática).

De acuerdo con Angrosino (2007), la etnografía es el arte y la ciencia de describir un grupo humano. Esta posibilita el estudio de instituciones, conductas interpersonales, producciones materiales y creencias. Los etnógrafos coleccionan datos en torno a la experiencia de la vida humana, con el fin de discernir patrones predecibles más que describir ejemplos de interacción o producción.

Para abordar el problema de la investigación se retomó como estrategia el estudio de casos múltiples, etnográfico e ilustrativo. Este enfoque se utilizó como instrumento para documentar y caracterizar tanto los procesos que estructuran la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante como para documentar los usos efectivos del pensamiento matemático en la configuración de momentos mediante la aplicación de la estructura analítica que provee la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

Para fundamentar la aproximación metodológica de este estudio, se reconoce en la Educación Matemática la estrecha conexión entre teoría y método (Schoenfeld, 2007). Lo que se interpretó como a cada aproximación teórica le corresponde una aproximación en lo metodológico. Es así como a la conceptualización de la observación profesional del profesor de Jacobs, Lamb y Philipp (2010) y Jacobs, Lamb, Philipp y Schapelle (2011) descrita en la perspectiva amplia, abarca la atención y la interpretación de las actividades de clase. También, abarca los planes para responder a tal actividad. Los tres procesos de atender, interpretar y decidir están conectados entre sí temporal y conceptualmente. La aproximación metodológica que se corresponde con esta conceptualización se caracteriza porque permite al investigador explorar haciendo inferencias de vídeos de enseñanza. Se apoya así, en que las acciones visibles de un profesor pueden proporcionar evidencia para la observación profesional. Por ejemplo, la acción de un profesor en respuesta a un evento específico constituye evidencia de que este respondió al evento (Sherin, Russ y Colestock ; 2011).

Este tipo de aproximación metodológica ha sido usada para evidenciar en qué grado los profesores prestan atención al pensamiento de los estudiantes

(Levin, Hammer y Coffey, 2009; Pierson, 2008). Se reconoce que este tipo de aproximación ha recibido una atención limitada en el estudio de la observación profesional; no obstante ha sido usada con más frecuencia para investigar otros aspectos de la experticia de los profesores que incluyen el contenido y el conocimiento de contenido pedagógico (Putnam, 1992; Rowland, Huckstep, y Thwaites, 2005).

La aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática en consonancia con Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest (2015) proporciona herramientas para el análisis y el desarrollo de las tres habilidades que, en su articulación, estructuran la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante. Esta aproximación, también, da cuenta de las oportunidades pedagógicas en el momento de enseñanza que posibilitan la comprensión del alumno.

En relación con perspectivas reconocidas en el campo de la educación matemática (como la propuesta por Schoenfeld [2008] al establecer que la toma de decisiones puede ser objeto de modelación mediante los instrumentos que proveen las ciencias cognitivas), la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática provee la estructura analítica mediante la cual es factible establecer si un momento es una oportunidad pedagógica significativa. Esto sucede si al efectuar su análisis satisface las tres características: Pensamiento matemático del estudiante, lo significativo de las matemáticas y la oportunidad pedagógica. La estructura analítica se sintetiza mediante un diagrama de flujo que articula las tres características con sus respectivos criterios, que a su vez abarcan preguntas que orientan la ejecución del análisis. Estos análisis permiten reconocer momentos que satisfacen la estructura de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, establecer su taxonomía y caracterizar las decisiones de acción.

Además, se establecen comparaciones entre la estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática y el TRU-MATH. La estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática es entendida como dispositivo que permite el análisis sistemático de momentos de enseñanza en relación con tres características: pensamiento matemático del estudiante, lo significativo de las matemáticas y las oportunidades pedagógicas [Leatham *et al.*, 2015]). Mientras que el TRU-MATH, según Schoenfeld (2015), se conceptualiza como estructura teórica y de análisis que abarca cuatro dimensiones: La primera dimensión son las interacciones entre los estudiantes y los profesores. La segunda dimensión (demanda cognitiva) abarca las oportunidades para comprometerse productivamente con las matemáticas. La tercera dimensión corresponde a la definición de “clase poderosa” (la cual se adjetiva de esta manera si provee experiencias significativas a todos los estudiantes). La cuarta dimensión es la de “matemáticas poderosas” en el sentido de que son los estudiantes quienes tienen disposiciones matemáticas productivas y quienes construyen identidades matemáticas positivas.

El análisis comparativo de ambas estructuras permite establecer como estas configuran instrumentos cuya utilidad no son los usos administrativos ni evaluar a los profesores sino que son instrumentos para la investigación. La aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática permite dar cuenta de las decisiones del momento y del pensamiento matemático del estudiante. Mientras que el TRU-Math, se aplica para caracterizar la riqueza matemática de una clase y las matemáticas producidas en la clase por estudiantes “poderosos matemáticamente”. Adicionalmente, el TRU-Math dispone de un instrumento de análisis que se plasma en una rúbrica para caracterizar cinco dimensiones y las oportunidades pedagógicas significativas se plasman en una estructura de análisis que articula criterios y preguntas para analizar las tres características mencionadas.

3.3 Recolección y organización de los datos

En esta investigación se caracterizan las decisiones de acción (van Es y Sherin, 2002; Jacobs *et al.*, 2010; Fortuny y Rodríguez, 2012), los profesores en la gestión de la enseñanza y el aprendizaje de momentos en los que emergen oportunidades pedagógicas significativas. Con base en el marco teórico, que incluyó las categorías que se derivan de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante (Jacobs *et al.*, 2010; Jacobs, Lamb, Philipp y Shapelle, 2011) y la estructura analítica derivada de la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática (Leatham *et al.*, 2015). Apoyados en este marco teórico se generaron líneas de interpretación que permitieron el desarrollo de un análisis inductivo y orientar los análisis mediante el método de comparación constante que fue aplicado parcialmente a las acciones del profesor y las acciones de los estudiantes.

Fases del proceso de recolección. Se propuso un estudio que constó de dos fases. La primera fase centrada en la caracterización de un aspecto de las prácticas de enseñanza de Eva y Andrés, el correspondiente a la gestión del profesor del pensamiento geométrico de los estudiantes. Los datos se obtuvieron de la transcripción de los vídeos de cada una de las clases desarrolladas por cada uno de los profesores y en una menor proporción, de la entrevista final de ambos profesores. Igualmente, de la información suministrada sobre los recursos utilizados como libros de texto, ambos profesores con la totalidad de los estudiantes en clase de geometría en los grados 7 y 8 respectivamente, donde resuelven problemas de construcción geométrica. Las herramientas en la construcción son una regla no graduada y compás en el grupo a cargo de Eva mientras que doblado de papel en el caso de Andrés y un software de geometría dinámica en el caso de Carlos. Los datos se derivaron de la transcripción y análisis de la relación entre el profesor y los estudiantes en los vídeos de clase que correspondían a cada profesor.

En la primera fase cada una de las aproximaciones que configuran el marco teórico tuvo un papel importante en el procesamiento y análisis de los datos. Así, en la identificación de los episodios de clase y los momentos de enseñanza, se utilizó la estructura analítica que provee la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Mientras que la aproximación a la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante se utilizó para efectuar los análisis mediante comparación constante.

En la segunda fase se llevaron a cabo tres entrevistas, las cuales permitieron dar cuenta de la práctica y de los avances de la secuencia desarrollada por cada profesor, tanto la correspondiente a aspectos de la planeación como lo referente a dar cuenta de la gestión del pensamiento matemático del estudiante. Igualmente, se incorporó la observación participante, entendida como una técnica para la recolección de datos en la cual el investigador está inserto en el aula de clase. Esta técnica se aplicó a los dos profesores ya estudiados en la fase I, al igual Carlos y Víctor, de los cuales solo se incorpora a los registros y análisis los datos de uno de ellos. Igualmente, como en la primera fase, se utilizaron los vídeos de sesiones de clase. El dato se configuró con las transcripciones de los vídeos.

Los vídeos usados en este estudio fueron grabados con dos cámaras. Una de ellas capturó las interacciones entre el profesor y el estudiante, las cuales fueron transcritas. La otra cámara se desplazó para dar cuenta de las interacciones del profesor con pequeños grupos. Las distintas variaciones en la posición de la cámara permitieron: la visibilidad del profesor a través de la clase, la visibilidad del profesor cuando trabaja con individuos y grupos pequeños y seguir las interacciones de los estudiantes en pequeños grupos (estudiantes-recursos).

Además, en esta investigación se utilizaron como líneas de acción cada una de las aproximaciones teóricas y los objetivos, sin reducir elementos de una aproximación a la otra. Esto para establecer los grados y niveles de integración entre las aproximaciones en juego a partir de los datos. Se partió de la hipótesis de que los posibles niveles de integración local entre las dos aproximaciones enfatizan en cuatro conceptos que operan como líneas de orientación en la comparación constante: la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante, las decisiones de acción, los momentos de enseñanza y la oportunidad pedagógica.

La identificación en los registros de vídeo de segmentos de enseñanza en los que se hacían manifiestas las discusiones de clase entre profesor y estudiante fue el objeto de revisión de las grabaciones. El objetivo fue identificar y transcribir registros de vídeo en los que es posible reconocer manifestaciones de las interacciones de Eva, Andrés y Carlos con los estudiantes.

Los instrumentos para la recogida de datos tuvieron el doble propósito de servir a la investigación y refinar la información para caracterizar las decisiones de acción en momentos de enseñanza en los que se manifiestan oportunidades pedagógicas. Los instrumentos utilizados en la fase I se complementaron y actualizaron con respecto a una primera fase en la que se recurrió a un análisis mediante teoría fundamentada. Los datos fueron obtenidos en dos fases.

3.3.1 **Instrumentos**

Con el objeto de responder a la pregunta de investigación y garantizar la fiabilidad de los análisis y resultados, se utilizaron distintos instrumentos en las dos fases consideradas para la recolección de la información. La segunda fase se elaboró para contrastar mejor las distintas fuentes.

De manera coherente con el enfoque de investigación cualitativa, los instrumentos utilizados para la recogida de datos tuvieron una estructura flexible. De tal manera que, con los instrumentos concebidos para la segunda fase se buscó mejorar los alcances para contrastar y complementar la información, actuando con mayor nivel de intencionalidad en relación con la formulación del problema. Por esta razón, en la primera fase de la recolección de la información, el instrumento privilegiado lo configuran vídeos de clase, un cuestionario previo a la recolección de la información y una entrevista al final del proceso de las videograbaciones de clase.

La encuesta recogió información de los profesores que tenía que ver con su identificación, información básica del ámbito laboral y su formación. Igualmente algunos elementos asociados con la planificación de la clase a nivel de participación individual con otros profesores del área, tiempo dedicado a la enseñanza de la geometría, recursos disponibles y privilegiados.

Los vídeos fueron hechas con dos cámaras, una fija que registra al profesor, el estudiante o estudiantes que promueven la interacción cuando se sitúan delante del tablero. La otra cámara describe las interacciones y el intercambio entre estudiantes y el profesor cuando este circula en el aula e interactúa con los grupos de estudiantes que abordan una situación de enseñanza.

Además, se hicieron observaciones de clase que se utilizaron para identificar y formular conjeturas, respecto al papel que el profesor otorgaba a la atención de la evolución del aprendizaje de los estudiantes en relación con el uso de instrumentos.

Las entrevistas fueron desarrolladas al culminar las observaciones y filmaciones de clase. Para ejemplificar, las preguntas de las entrevistas, en la Tabla 3.2., se presentan los interrogantes que se le plantearon al profesor Andrés.

Durante la segunda fase para la recolección de información, se recogieron datos correspondientes a dos profesores de educación secundaria, Carlos y Víctor. Se reportaron solo los datos de Carlos. Los instrumentos empleados fueron los siguientes: Observaciones de clase, vídeos, entrevista inicial, entrevista intermedia, entrevista final.

Tabla 3.2 Entrevista semiestructurada a Andrés

Preguntas	Subpreguntas	Qué?
¿La selección de las temáticas de la secuencia de clase en que fuentes la soporta y cuáles fueron las selecciones?	¿Qué libros de texto?, ¿fuera de los textos mencionados que otros materiales o enlaces?	Planificación
¿Cómo decide otorgar un papel a los recursos para el aprendizaje de la geometría ?	¿por qué el doblado de papel?, ¿Por qué el énfasis en la geometría que enfatiza la axiomática del origami?	Gestión de la clase
¿Qué cursos y experiencias previas de los estudiantes con el conocimiento geométrico?	¿articula su intervención con las experiencias previas de los estudiantes en cursos anteriores?	Planificación y gestión de los aprendizajes en la clase
¿Qué papel ha otorgado a los referentes curriculares en las selecciones que estructuran la secuencia?	¿Es coherente su selección con el proyecto curricular de área o tiene libertad en su selección? ¿Qué obtuvo en la caracterización de los aprendizajes de los estudiantes?	Planificación de clase
¿por qué la selección del papel y su tamaño reducido para efectuar operaciones de doblado?	Para describir la operación de doblado del papel, se utilizaron de manera reiterada los términos lado del papel y lado de la figura ¿por qué ocurrió esto?	Gestión de los aprendizajes
¿Cuál es el papel otorgado a los recursos en el aprendizaje en la secuencia propuesta?		Gestión de los aprendizajes de los estudiantes.

Las observaciones se hicieron paralelas a las filmaciones de clase y se desarrollaron en relación con las siguientes preguntas de referencia, que se reconoció que deberían ser limitadas y asociadas con atributos observables relacionados con el pensamiento matemático del estudiante para que así pudieran ser significativas en el proceso de observación. Estas son las preguntas:

- ¿Cuáles son las acciones del profesor en la identificación de aprendizajes de los estudiantes durante discusiones de clase?
- ¿Qué acciones del profesor revelan rasgos de sus interpretaciones de la comprensión de los estudiantes en relación con los objetivos propuestos, los lineamientos curriculares y su fundamentación matemática y didáctica?
- ¿Qué posibles decisiones de acción se toman como respuesta a la comprensión del estudiante? (Consideré como referencia las existentes sobre los momentos pivote: acciones encaminadas a extender el pensamiento matemático del estudiante en un momento específico de la clase por identificación de acciones recurrentes o por lo contrario).

Los vídeos de la clase de Carlos se desarrollaron en cuatro sesiones de clase. Las grabaciones fueron acompañadas de la grabación del audio mediante una grabadora portátil. A continuación se presenta la Tabla 3.3, en la que se relacionan periodos en los que se llevaron a cabo vídeos:

Tabla 3.3 Registros de videos de clase

	Contenido	Procesos del desarrollo de pensamiento
09-feb- 17	Introducción al geogebra, uso de la circunferencia como compás, construcción del triángulo equilátero dado uno de los lados.	Previó a la actividad se propusieron situaciones de clasificación para reconocer el triángulo. Como variantes a la formulación del problema: se propone exploración y reconocimiento de las propiedades del triángulo, énfasis en la exploración de las propiedades de los objetos geométricos y su simbolización.(punto, recta, segmento, semirrecta, congruencia de segmentos), El problema se propone en términos de dos variables: completar un procedimiento de construcción, en términos de un procedimiento de construcción, en el que se explora mediante el software usando las propiedades que debe cumplir. Se reconocen rasgos de la práctica asociados con la planificación como los objetivos y aspectos de la gestión de los aprendizajes.
14-feb-17	construcción de la mediatriz, reconocimiento de las propiedades de la	Reconocimiento del procedimiento para trasladar longitudes, recursividad geométrica (retomar el procedimiento de construir un triángulo equilátero), se

	mediatriz, construir un triángulo rectángulo cuya base sea 8cm y altura 6cm. Usando geogebra	exploran y reconocen las propiedades que satisface la mediatriz.
21-feb-17	Institucionalización de procedimientos y propiedades estudiadas, tematiza el reconocimiento de propiedades del triángulo rectángulo. Uso de geogebra.	Reconocimiento del procedimiento para trasladar longitudes, recursividad geométrica (uso del procedimiento para trazar la mediatriz), usar propiedades asociadas con el triángulo rectángulo.
15-mar-17	construcción de la perpendicular a un segmento por uno de sus extremos, construcción de un cuadrado, exploración de las propiedades del cuadradado con R y C.	Recursividad con los procedimientos para trazar la perpendicular, procedimiento para trasladar longitudes, se reconocen propiedades como la perpendicularidad, congruencia de ángulos, congruencia de lados.

Esta información fue procesada utilizando la matriz de análisis para formular conjeturas respecto a potenciales momentos del pensamiento matemático, reconocidos como tal una vez se cumplen la totalidad de las características que forman parte de la estructura analítica que plasma las oportunidades pedagógicas significativas. En esta investigación, características y criterios de la estructura analítica se cristalizan en el instrumento caracterización del pensamiento matemático del estudiante.

Las entrevistas formuladas a Carlos, intermedia y final, se presentan en la Tabla 3.4. La entrevista intermedia se efectuó, posteriormente, a la segunda clase. En lo que se refiere a la información respecto a su práctica[8] se describió con datos sobre su planificación y su gestión de la enseñanza y los aprendizajes en clase. Se presentan a continuación las preguntas y subpreguntas.

Tabla 3.4 Entrevista a profundidad intermedia (marzo 9/17)

Preguntas	Subpreguntas	Qué?
¿La configuración de la secuencia de situaciones propuesta a que aprendizajes de los estudiantes responde?	¿En la planificación institucional del área de matemáticas como estaba contemplada la secuencia?	Planificación de la secuencia. de enseñanza y aprendizajes.

[8] Retomando a Llinares (2000), Schoenfeld (1998), Simon y Tzur (1999), quienes reconocen dos fases o momentos clave para describir la práctica: momento de la planificación y momento de la gestión de la enseñanza y el aprendizaje.

	E: ¿Qué competencias esperadas de los estudiantes con la secuencia de situaciones propuesta?	"La idea organizadora era que los estudiantes fueran reconociendo propiedades de los triángulos". iniciar a los estudiantes para que ellos se aproximen a la argumentación y justificación (fueron interpretados y registrados en las metas generales).
E: ¿Cuáles decisiones valora adecuadas o pertinentes para el desarrollo de la secuencia?	E: En los momentos en los que no encontraste la respuesta que esperabas de los estudiantes, identifique dos variantes. La primera de ellas, se recurrió a responder el problema u optaste por explicar. ¿Tiene sentido esta observación?	Gestión de la enseñanza y el aprendizaje
E: ¿Qué caracterización de las matemáticas requeridas por el estudiante para ingresar a la secuencia de actividades propuesta y cuales para su desarrollo?	E: En los momentos en que no encontró la respuesta esperada de los estudiantes, identifique dos variantes en el desarrollo de la clase: la primera de ellas, se recurrió a resolver el problema y, la segunda, optas por explicar. ¿Tiene sentido esta observación? E: se introduce la medida al resolver problemas con regla no graduada y compás ¿qué sentido tiene esto? E: ¿Qué tanto aprovecho aquel momento en el cual A12, al examinar el concepto de hipotenusa en un triángulo rectángulo, preguntó si la hipotenusa del triángulo cambia cuando este modifica su posición?.	Gestión de la enseñanza y el aprendizaje
E: ¿Es posible reconocer la transversalidad de algunas de las competencias determinadas para la secuencia clase?		Gestión de la enseñanza y el aprendizaje.

Se ilustra a continuación el procesamiento dado a cada entrevista, para lo que se retoma la entrevista intermedia, que fue inicialmente transcrita y codificada desde un archivo de audio. Se pretendió mediante la codificación identificar las temáticas que aborda y remitir siempre a los datos. Se ilustra mediante la Tabla 3.5, el procesamiento de la entrevista intermedia:

Tabla 3.5 Ilustración procesamiento de la entrevista intermedia (Carlos II)

Temática	Descripción	Número de línea
Preconcepto1	“desconocían las clases de triángulos y los nombres específicos “(confunden el nombre del ángulo con el nombre del triángulo)	10 y 11; 12 y 13.
Lenguaje geométrico	Uso adecuado	18
Simbología	“no utilizan adecuadamente la simbología para denotar recta, semirrecta, segmento, la notación de ángulo recto”	24 y 25.
Definiciones	“Preciso las definiciones de ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo llano. Diferenciar entre el ángulo y su medida”.	26 y 27
Contenido	“Propiedad fundamental del triángulo”	31 y 32
Contenido(planeado)	“La exploración del teorema de Pitágoras”	57 y 58
Principio organizativo	“La idea organizadora era que los estudiantes fueran reconociendo propiedades de los triángulos”.	58, 59 y 60.
Contenido para iniciar	“Triángulo y su clasificación”.	61
Objetivo inicial	“reforzar lo que es la parte conceptual respecto a los tipos de triángulo (se interpreta como caracterizar los triángulos acorde con su clasificación)”.	64 y 65
Objetivo	iniciar a los estudiantes para que ellos se aproximen a la argumentación y justificación (fueron interpretados y registrados en las metas generales).	65 y 66
Objetivo	El reconocimiento de algunas nociones o conceptos (perpendicularidad, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo llano), el reconocimiento de símbolos, el uso de figuras prototípicas comenzar a generar en los estudiantes ese lenguaje específico.	92-94
Acción del profesor	cambiar la pregunta	116
Acción del profesor	Resolver el problema	
Acción del profesor	Explicar	
Momento significativo I	“el momento que correspondió a la definición de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Explica que logro una definición mediante el análisis de las características visuales”	123, 124 y 125.
Momento con menor significación	“Lo cual no ocurrió con la definición de perpendicularidad y congruencia (manifiesta la existencia de una brecha en el currículo para abordar estos temas la congruencia en grado octavo y la semejanza en grado noveno”	125-129
Momento significativo	“Les propuso dibujar un triángulo rectángulo isósceles y lo hicieron, posteriormente propuso que dibujaran si era posible un triángulo equilátero rectángulo. Se discutió varias conjeturas una estudiante empezó dibujando el equilátero y trato de que fuera rectángulo, no obstante razonó que los ángulos deberán ser de 60º al aplicar la propiedad fundamental de los triángulos. Otro estudiante razonó dibujando primero el isósceles al intentar que el tercer lado debería tener la misma longitud que los dos iniciales fue imposible”	203-211

La denominada entrevista final se presenta en la Tabla 3.6. Esta fue codificada para identificar las temáticas. Cumplió con el propósito de dar información respecto a los dos componentes de la práctica, la planificación y la gestión de los aprendizajes en el aula.

Tabla 3.6 Reporte entrevista final

Preguntas	Subpreguntas	¿Qué?
E: ¿Cuáles fueron los objetivos abordados en la secuencia de enseñanza desarrollada?	¿Qué caracteriza la secuenciación de los contenidos? ¿Tú examinaste con anterioridad los posibles procedimientos de solución de cada problema propuesto?	Planificación
E: ¿En la última actividad de construir el cuadrado que pretendías evaluar?	¿Cómo ingresan las construcciones geométricas en relación con las competencias de los estudiantes? E: ¿Qué papel se le otorgó a la recursividad?, ¿Cómo se examinó en la recursividad? E: ¿la variante de formular el problema de construcción indicando parcialmente los pasos del procedimiento de construcción que fundamentación tiene?	Gestión de la enseñanza y el aprendizaje

4 ANÁLISIS

En este capítulo del estudio se plantean a continuación las preguntas de la investigación y los análisis descritos en orden a la consecución de los objetivos. Los resultados se organizan en cuatro apartados, cumpliendo con el orden establecido en la descripción del capítulo anterior (ver esquemas de análisis 1 y 2). En lo correspondiente al primer nivel de análisis, se presenta informe de la gestión de clase por cada profesor. En el segundo nivel de análisis, fase I, para cada clase de los profesores se reconocen y describen los episodios de referencia. La fase II de este mismo nivel de análisis incluyó el reconocimiento de momentos en que se manifiesta el pensamiento matemático mediante la aplicación de la estructura analítica que provee la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Se construyen los momentos de enseñanza como viñetas. En el tercer nivel de análisis, los momentos de enseñanza son comparados entre sí con el fin de caracterizar la gestión del pensamiento matemático de los estudiantes.

Se caracterizan los momentos de enseñanza al compararlos entre sí para configurar una clasificación de dichos momentos. Se pretende perfilar los momentos de enseñanza en una misma clase y en clases distintas de un mismo profesor, así como su triangulación al comparar entre sí los momentos de enseñanza que satisfacen la estructura analítica que plasma la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas. La comparación entre momentos de enseñanza se efectúa en relación con: la meta asociada, las condiciones que determinan el momento en que se manifiesta el pensamiento matemático del estudiante y las manifestaciones de la oportunidad pedagógica[9].

---

[9] La comparación entre momentos de enseñanza (momentos que satisfacen las características que provee la estructura analítica MOST) se efectúa entre características que no incluyen lo significativo desde la perspectiva matemáticas, que permite establecer la conexión de cada momento de enseñanza con el contexto.

4.1 Análisis de los datos

Se expone el camino trazado para avanzar hacia la consecución de los resultados que se presentan en el capítulo siguiente (Capítulo 5). La trayectoria descrita para avanzar, no es lineal y abarcó la prueba de distintas rutas para el análisis, lo que exigió retomar las preguntas de la investigación y el marco teórico.

En la reducción de la información se procedió a diseñar y evaluar un instrumento de análisis que se fundamenta en el marco analítico que provee la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. El instrumento de análisis permite reconocer un aspecto de la práctica de un profesor en el que se registran contingencias en segmentos de enseñanza en los que se hace manifiesto el momento del pensamiento matemático del estudiante. Posteriormente, reconocido el momento del pensamiento matemático del estudiante, se posibilitó el análisis de las características de dicho pensamiento, lo significativo desde la perspectiva matemática y las oportunidades pedagógicas.

4.1.1 Diseño del instrumento: caracterización del pensamiento matemático

El instrumento para la caracterización del pensamiento matemático se diseñó para el análisis de los datos. Se fundamentó en las características que provee la estructura analítica que permite la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática: pensamiento matemático del estudiante (PE), lo significativo de las matemáticas (MS) y las oportunidades pedagógicas (OP). Además, integró los criterios y preguntas que configuran la estructura analítica (Leatham *et al.*, 2015). En esta investigación, la estructura analítica es adaptada para caracterizar las interacciones a partir de los cambios y transformaciones en los patrones de acción del profesor y de los estudiantes[10]. Por lo que, se conservan las características, se ajusta su

---

[10] La adopción de este principio toma en consideración que los patrones que se pueden ver emergen de una relación dialéctica entre las cosas materiales (vídeo) y las experiencias que lleva el investigador al análisis. En consecuencia, surge la necesidad de profundizar y focalizar el análisis. Esto se plasma mediante un arreglo en el que se relacionan las transcripciones con los comentarios analíticos con la intención de construir los resultados.

descripción y las preguntas con las que se articulan cuando se parte del reconocimiento de un momento del pensamiento matemático del estudiante.

El investigador reconoce la característica del pensamiento matemático del estudiante, si al examinar identifica un momento que corresponda al pensamiento matemático del estudiante (una acción observable del estudiante o acciones conectadas). Se cumplen dos criterios: la acción del estudiante suministra evidencias para efectuar inferencias respecto de lo que el estudiante dice y se reconoce la idea matemática articulada con sus matemáticas (Leatham *et al.*, 2015).

El primer criterio, según Leatham *et al.* (2015), se cumple si el investigador establece que las matemáticas del estudiante se pueden inferir. Con posterioridad a examinar y categorizar las acciones del estudiante mediante el análisis comparado, se utiliza como referente para describir "transformaciones" en la acción del estudiante. Simultáneamente, como parte de un sistema asimétrico, se establecen categorizaciones en la acción del profesor para luego describir transformaciones en la acción del profesor. Por ejemplo, las acciones dominantes del profesor reconocidas para esta clase son: preguntar, proveer instrucciones, explicar o ejemplificar. Las preguntas articuladas con el criterio son: ¿Las matemáticas del estudiante se pueden inferir a partir de las acciones del estudiante? ¿Qué acciones del estudiante posibilitan describir rasgos de sus prácticas matemáticas? ¿Qué contenidos matemáticos y procesos están asociados con las prácticas matemáticas de los estudiantes?

El segundo criterio es aplicado una vez que se pueden inferir las matemáticas del estudiante. Se reconocen en las acciones del estudiante ideas (representaciones, imágenes, concepciones, procedimientos erróneos) que están vinculadas con las matemáticas de este (Leatham et al, 2015). La pregunta representativa para direccionar los análisis es ¿qué ideas subyacen en las acciones de los estudiantes relacionadas con las matemáticas de los estudiantes? Como preguntas complementarias de este criterio se encuentran: ¿Qué acciones del profesor responden a las ideas de los estudiantes y permiten progresar en los aprendizajes?, ¿Cuándo ocurre esto?

Tras la fase del análisis, que permitió caracterizar el pensamiento matemático del estudiante, se analizan las acciones de los estudiantes, las acciones del profesor y el pensamiento matemático del estudiante para construir comentarios analíticos. Esto último, se logra cuando el investigador examina cambios en las acciones del estudiante y de las matemáticas de este con relación a la perspectiva matemática. Estos cambios se plasman en un arreglo rectangular de dos columnas que contiene la transcripción de los episodios de referencia.

Los comentarios analíticos permiten establecer la posición del investigador, la fijación de la orientación de los análisis y la formulación de conjeturas respecto a contingencias que tienen lugar en la interacción e identificación de cambios en las acciones tanto del profesor como el estudiante. Asimismo, admiten la formulación de hipótesis sobre contingencias que después posibilitan reconocer momentos del pensamiento matemático que satisfacen la estructura analítica con oportunidades pedagógicas significativas desde la perspectiva matemática.

El investigador, para reconocer las contingencias con relación a la acción de los estudiantes, las vincula con criterios como los siguientes: el reconocimiento de acciones en las que se manifiestan obstáculos, concepciones, procedimientos del estudiante vinculados con su perspectiva matemática; las preguntas del estudiante encaminadas a aclarar alguna duda; los interrogantes del estudiante que amplían el sentido dado a un concepto y la introducción de procedimientos de solución que le dan sentido a una conceptualización.

De la misma manera, para reconocer contingencias con relación al profesor, se examina si: él cambia el contexto de referencia de la pregunta y modifica la formulación de ésta; él provee instrucciones que enfatizan en el sentido dado a un concepto; él en la explicación moviliza la extensión del sentido dado a un concepto.

Las características que restan por describir amplifican el análisis vinculado a aquellos momentos en los cuales se manifiesta la contingencia (manifestaciones del pensamiento matemático del estudiante) para reconocer momentos, a partir del análisis inductivo que satisfacen la estructura con sus adaptaciones de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

El investigador, para reconocer lo significativo desde el punto de vista matemático, examina dos criterios después de conjeturar el reconocimiento de un momento del pensamiento contingente en un episodio de referencia y de caracterizar el pensamiento matemático del estudiante.

En el primer criterio, examina cómo las acciones del profesor, que permitieron reconocer la perspectiva matemática del estudiante, tienen nexos con los referentes curriculares y las progresiones de aprendizaje[11]. De esta manera se establece si las matemáticas son accesibles a los estudiantes y se reconocen las experiencias matemáticas anteriores (Leatham *et al.*, 2015). La pregunta representativa para examinar si el momento de la contingencia que se conjetura es una oportunidad pedagógica significativa desde una perspectiva matemática es: Las acciones del profesor en respuesta a las ideas matemáticas del estudiante (momento), ¿se articulan con los referentes curriculares y progresiones de aprendizaje?

En el segundo criterio se establece si, en las prácticas matemáticas de los estudiantes, se reconocen aspectos de la perspectiva matemática relacionados con los objetivos de aprendizaje de la sesión de clase (Leatham *et al.*, 2015). Este criterio incorpora elementos vinculados con lo institucional porque considera los referentes curriculares y la planeación de clase. La pregunta asociada a este criterio es: ¿Qué acciones del profesor contribuyen a que los estudiantes alcancen el objetivo propuesto?

---

[11] Según la NRC (2007, p. 220) las progresiones de aprendizaje hacen hincapié en ideas núcleo, que articulan conocimientos conceptuales y conocimientos procedimentales. Se organiza el conocimiento alrededor de las ideas núcleo. Este concepto se relaciona con conceptos como el de trayectoria de aprendizaje. Según Battista (2011), esta se define como una descripción detallada de la secuencia de pensamientos, modos de razonamiento y estrategias que emplean los estudiantes cuando se involucran en el aprendizaje de un tópico, que incluye especificar cómo el estudiante aborda las situaciones de enseñanza y las interacciones sociales dispuestas en la secuencia.

La tercera característica de la estructura analítica que plasma las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática es la oportunidad pedagógica. En esta, el investigador establece el cumplimiento de dos criterios una vez determina que las matemáticas son significativas (Leatham *et al.*, 2015). En el primer criterio, establece que un momento es una oportunidad pedagógica (cumple el criterio de la apertura), si es posible reconocer en las matemáticas del estudiante (asociadas con acciones, por ejemplo: preguntar, explicar y expresar) el tipo de necesidad intelectual que otorga sentido a las practicas matemáticas del estudiante. El investigador utiliza las preguntas que se articulan con el criterio de apertura: ¿Qué tipo de necesidad intelectual se reconoce en la expresión de las matemáticas del estudiante que favorecen la construcción de significados en las matemáticas del estudiante? ¿Qué acciones del profesor permiten amplificar la construcción de significados matemáticos por el estudiante? ¿De qué manera las acciones del profesor —como preguntar, proveer instrucciones, explicar y justificar— son relevantes en la construcción de significado matemático?

Con el segundo criterio, el investigador determina que un momento del pensamiento matemático es una oportunidad pedagógica (si cumple la condición del momento oportuno) si el profesor saca ventaja de la apertura y se amplifican los significados matemáticos construidos por los estudiantes.

4.1.1 **Matriz de análisis**

El instrumento "caracterización del pensamiento matemático" tuvo como propósito aplicar la estructura analítica que provee la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas, para reconocer en los episodios de referencia momentos de enseñanza que ilustran el pensamiento matemático del estudiante. Se diseñó una matriz que incluye las características y criterios componentes del instrumento para caracterizar el pensamiento matemático del estudiante. En esta matriz, las columnas corresponden a las siguientes denominaciones: turno, transcripción de las interacciones, acciones del profesor, acciones del estudiante y comentarios analíticos.

Desplazándose desde la parte izquierda, se describe en la primera columna quién inicia la acción en las interacciones profesor-estudiante (turno) y se transcriben estas en la segunda columna. En la tercera columna se mencionan las acciones del profesor, en donde se interpreta lo que dice y hace en respuesta a las acciones del estudiante. En la cuarta columna se muestran las acciones del estudiante, en las que se interpreta lo que dice y hace. Posteriormente, se inicia la incorporación de las características que forman parte de la estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática: el pensamiento matemático del estudiante (en la quinta columna) y los comentarios analíticos (en la sexta columna). Estos se utilizan en la identificación de cambios en las interacciones. Una vez caracterizadas las matemáticas del estudiante y la perspectiva matemática en torno al momento del pensamiento matemático, se aplica lo significativo desde el punto de vista matemático que amplifica la mirada sobre las matemáticas y produce el mismo efecto amplificador al examinar si se cumplen las oportunidades pedagógicas. En la matriz corresponden a las columnas 7 y 8, respectivamente.

Para describir, interpretar y analizar los datos que provenían de los vídeos, durante la aplicación del instrumento para caracterizar el pensamiento matemático del estudiante, se utilizaron para cada componente los criterios que se detallan a continuación:

En el componente del instrumento "acciones del profesor", el criterio consistió en describir lo que el profesor dice o hace para responder al estudiante en relación con las acciones del estudiante en el momento en que se manifiesta el pensamiento matemático de este. La información obtenida corresponde a la descripción de las acciones de respuesta a las acciones del estudiante para construir pensamiento matemático.

En el componente del instrumento "acciones y formulaciones del estudiante", el criterio consistió en describir lo que alumno dice o hace. La información obtenida corresponde a la descripción de las acciones, enunciaciones y representaciones del alumno.

En el componente "pensamiento matemático del estudiante", los criterios aplicados incluyeron: la caracterización de las matemáticas del estudiante en la resolución de problemas de construcción geométrica. La información obtenida corresponde a la descripción de las matemáticas del estudiante. Además, se incluye la formulación de la perspectiva matemática.

En el componente “lo significativo de las matemáticas”, los criterios aplicados fueron: las matemáticas apropiadas (las acciones del profesor que permiten reconocer la perspectiva matemática y describir las matemáticas del estudiante, ¿se articulan con los referentes curriculares y progresiones de aprendizaje?); las matemáticas centrales (¿qué acciones del profesor contribuyen a que los estudiantes alcancen el objetivo propuesto?). Con la pregunta plasmada en el instrumento “para caracterizar el pensamiento matemático de los estudiantes”, la información obtenida permite interpretar si la perspectiva matemática es accesible a las matemáticas del estudiante.

En el componente “oportunidad pedagógica”, los criterios aplicados fueron: la apertura, el momento oportuno (ver marco teórico) y las preguntas del instrumento para caracterizar el pensamiento matemático. La información obtenida tiene que ver con el reconocimiento de las necesidades intelectuales del estudiante en las prácticas matemáticas.

El instrumento “caracterización del pensamiento matemático” fue aplicado para analizar cada turno de la intervención de los profesores (Eva, Andrés y Carlos) o de los estudiantes. Para ello, algunos segmentos de enseñanza de los vídeos fueron seleccionados y transcritos. Posteriormente, se efectuó la descripción de las acciones y afirmaciones de los profesores. Al examinar el cumplimiento de los criterios y buscar la explicación y evidencia en los episodios de referencia, se generó un segundo nivel de análisis con el objetivo de reconocer momentos que satisfacen la estructura analítica que plasma la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Dicho nivel de análisis se efectuó aplicando en un primer momento las características del pensamiento matemático del estudiante.

Utilizamos las lecturas en los sentidos horizontal y vertical de la matriz que permitió describir los componentes del instrumento. En el sentido horizontal, a partir de las categorías provenientes de la estructura analítica que plasma las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, se describieron las matemáticas del estudiante y se enunció la perspectiva matemática para caracterizar el pensamiento matemático del mismo. Además, se interpretaron los rasgos de lo significativo desde el punto de vista matemático (MS) y se constató, la posible manifestación de oportunidades pedagógicas. En el sentido vertical, analizamos: los cambios y desarrollo en los patrones de acción del profesor y del estudiante; lo significativo de las matemáticas en los rasgos del PE; las oportunidades pedagógicas; las metas que determinan los alcances y el sentido de cada episodio de referencia. La componente de observaciones del instrumento para la caracterización del pensamiento matemático permitió efectuar los primeros análisis para caracterizar los episodios de referencia (esto se ilustra en la Tabla 4.1)

Tabla 4.1 Relación transcripción y comentarios analíticos

	Transcripción	Comentarios analíticos
10	Carlos 2 A2 está en lo cierto ¿cómo podemos definir un radio?, si eso que esta dibujado es un radio que sería un radio	pregunta para adentrarse en la definición
11	A2 el radio es una línea recta que une dos puntos.	se reconoce la perspectiva matemática.
12	Carlos2 ¿Cuáles puntos?, o sea ¿cualquier segmento sería un radio?	aquí es posible una oportunidad de aprendizaje
13	Los estudiantes responden no en voz alta	se continúan evidenciando rasgos de la PM
14	Carlos 2 ¿Qué tiene de especial ese segmento?, ¿de dónde a dónde va?	
15	A2 responde del punto A al punto B	manifestación de la PM
16	Carlos 2 si fuera otro segmento XY.	
17	A3 el radio que va del centro al lado, otro responde del centro a la izquierda.	Expresión de las matemáticas del estudiante (MS), cercanas de la perspectiva matemática (PM).
18	Carlos 2 vamos a ver qué pasa si dibujo un nuevo segmento que une el centro con la circunferencia (lo dibuje en otro sector de la circunferencia). Este refiriéndose al dibujo ¿es un radio?-ilustrar fotograma	Esta actividad permite movilizar las MS
19	Algunos estudiantes (colectivo) responden no-	Este matiz de las Ms, permite establecer la PM

Fases del análisis

En general, el método es inductivo. Se lleva a cabo un análisis microgenético[12] mediante el cual se monitorea el desarrollo y el cambio en los patrones de acción de los profesores y estudiantes en clase. Se recurrió a este tipo de análisis porque posibilita desarrollar y comprender los resultados de la interacción (Roth, 2005). Se efectúa el seguimiento de un aspecto de la práctica que corresponde a la gestión del pensamiento matemático del estudiante a tres niveles: a) el despliegue de las acciones de enseñanza por parte del profesor en respuesta a las acciones del estudiante, dando cuenta del reconocimiento de "patrones" y posibles momentos del contingencia en relación con las acciones del estudiante en segmentos de enseñanza; (b) la consideración de la trayectoria que sigue cada profesor en sus acciones de enseñanza, en discusiones de clase con todo el grupo, en momentos de enseñanza de cada clase y en clases distintas; y (c) la comparación de momentos de enseñanza correspondientes a tres profesores.

Para la reducción de los datos desde los vídeos y las entrevistas, se lleva a cabo un análisis que constó de tres fases:

Fase I. Elementos de la planificación. Se caracteriza por ser descriptiva. La unidad de análisis es la clase. Los datos en los que se fundamenta son las transcripciones de las entrevistas, los recursos y registros utilizados por el profesor durante la planificación. Los objetos del análisis se focalizan en un aspecto de la práctica del profesor, como determinar los objetivos, la selección, la formulación de las tareas y su secuenciación (ver Figura 4.1).

Fase II. Reconocimiento de episodios de referencia y momentos. Se caracteriza por ser inferencial y estar compuesta de dos subfases. Su propósito es identificar momentos que satisfacen la estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

[12] Esta perspectiva de análisis se deriva de la cognición situada. En ella, los fenómenos objeto de estudio pueden caracterizarse por las interacciones de los individuos que se corporeizan en prácticas.

En la primera subfase “identificación episodios de referencia”, se identificaron episodios de referencia. Se reconocen como segmentos de enseñanza, que en el sentido de Escudero (2003) se caracterizan en relación con los objetivos que propone el profesor. En la segunda subfase “momentos de enseñanza”, para cada episodio de referencia, se identificaron momentos en los que se construye el pensamiento matemático del estudiante, mediante la aplicación de la matriz de análisis que integra el instrumento para la caracterización del pensamiento matemático. Los momentos de enseñanza identificados en este nivel de análisis se plasman en una viñeta (ver Figura 4.2).

En la perspectiva de Gavilán, Garcia y Llinares (2007), la viñeta, en el sentido restringido del término, es un informe de la práctica del profesor que señala el momento cronológico en el que sucede la acción del profesor y se compone, esencialmente, de los datos utilizados (procedentes de diferentes fuentes) y de la inferencia realizada por los investigadores a partir de una aproximación teórica. La validez de la viñeta se realizó mediante la validación de expertos.

Fase III. Comparación de momentos de enseñanza. Tuvo como propósito la caracterización de los momentos con oportunidades pedagógicas significativas desde la perspectiva matemática, para inferir los principios que fundamentan la gestión del profesor en momentos de enseñanza en los que emergen oportunidades pedagógicas. La comparación de los momentos que satisfacen la estructura analítica de las oportunidades significativas desde la perspectiva matemática, en una misma clase, en clases distintas de un mismo profesor o entre tres profesores, permite caracterizar la gestión del pensamiento matemático del estudiante.

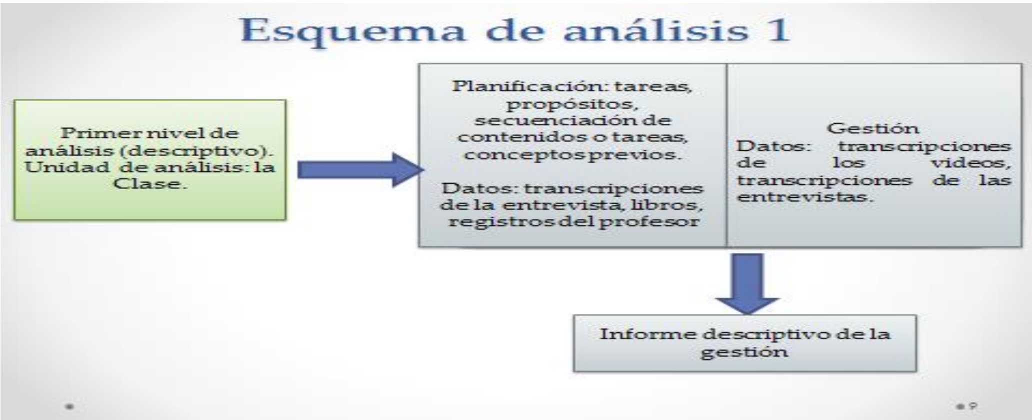

Figura 4.1: Esquema del primer nivel de análisis.

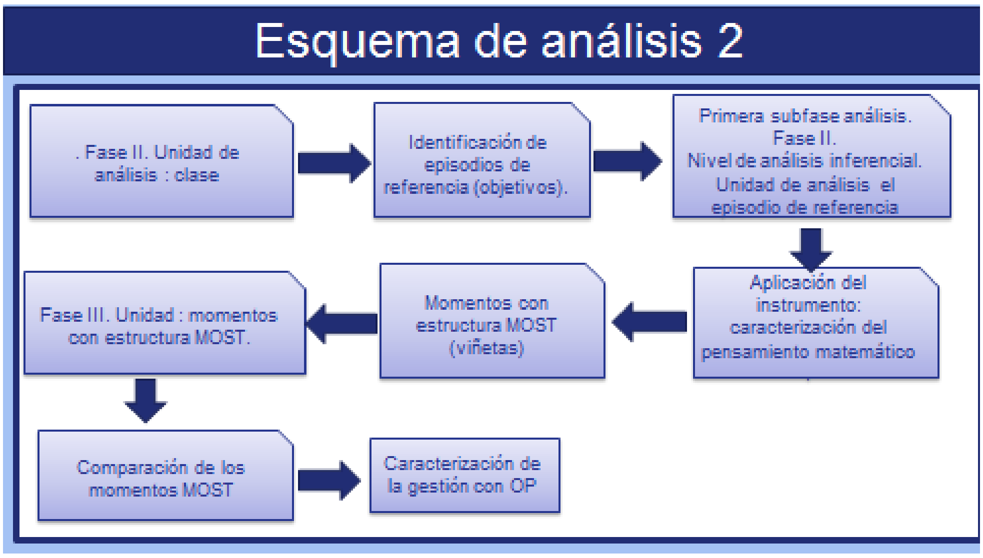

Figura 4.2: Niveles de análisis.

4.2.1 Fase I. Elementos de planificación

Primera clase de Carlos

Carlos, con respecto a la planificación de la secuencia de enseñanza en la segunda entrevista, manifestó cuál era su intención: “la idea organizadora era que los estudiantes fueran reconociendo propiedades de los triángulos”. Igualmente reconoció que la secuencia de enseñanza a desarrollar tenía como propósito reconocer características de figuras geométricas obtenidas mediante un proceso de construcción.

Carlos estableció como metas específicas en la planificación de la primera sesión de clase: a) usar el compás en Geogebra (una circunferencia) para trasladar longitudes en el plano; (b) explorar el procedimiento de construcción para completar la construcción del triángulo equilátero y (c) construir el triángulo equilátero.

Carlos organizó la sesión de clase en relación con el problema de construcción del triángulo equilátero y abordó de manera inicial la definición de radio. El problema se formuló en dos momentos. En el primer momento, como exploración de una conjetura, en términos de completar un procedimiento de construcción usando Geogebra: construya un segmento AB de longitud de 5 cm; construya un segmento AC de longitud de 5 cm; grafique el segmento BC, de tal manera que también tenga 5 cm.

En el segundo momento, se reformuló así: Dado un segmento AB de longitud de 5 cm, ¿dónde se ubica C de tal manera que la distancia de A a C y de B a C sean iguales? Encuentre C usando el compás (se construye el triángulo equilátero).

En la primera sesión de la clase de Carlos se reconocieron tres episodios de referencia. El primero de ellos, se destacó por hacer hincapié en explicar e ilustrar el uso de las funciones del Geogebra, de la ventana de geometría básica seleccionada. Se interpreta que explora los esquemas iniciales de los estudiantes que usan por primera vez el programa. Esta fase, aunque notoria en el primer episodio, está presente en el resto de episodios que configuran la clase.

El segundo episodio de referencia se centró en el dominio de las propiedades que permiten definir el radio, reiterándose como objetivo el uso de la circunferencia como compás en un ambiente de geometría dinámica.

Carlos, en el tercer episodio de referencia, hizo énfasis en el objetivo de construir un triángulo equilátero. En el proceso de construcción se registraron dos momentos. El primer momento se centró en explorar un procedimiento de construcción a partir de una heurística en la que los estudiantes exploran tres pasos dados por el profesor. El segundo momento, enfatizó el uso reiterado de la circunferencia para trasladar las longitudes.

Tercera Clase de Carlos

En la planificación de la tercera clase, Carlos ratifica el objetivo establecido para la secuencia de enseñanza que propuso. Así, lo reitera en la segunda entrevista de seguimiento de la secuencia, en la que afirma que el objetivo consistió en “establecer las propiedades que permiten reconocer triángulos a partir de sus construcciones”. Lo desarrolla en relación con el eje temático que se configura alrededor de los problemas de construcción geométrica. De esta forma, presentó la construcción de la mediatriz de un segmento y exploró la construcción del triángulo rectángulo. Se centró en las propiedades que permiten definir la mediatriz, punto medio de un segmento y perpendicularidad. Carlos puso énfasis en propiedades como la congruencia de segmentos, la noción de ángulo recto y las rectas perpendiculares. A continuación, Carlos presentó el procedimiento de construcción: trazar un segmento AB de longitud 7cm; 2; usar el compás para determinar dos puntos C y D, de tal manera que las distancias a los puntos A y B sean iguales (sugerencia: recordar el proceso de construcción del triángulo equilátero); trazar el segmento CD y nombrar el punto de intersección entre AC y BD con la letra M; y contestar a las preguntas ¿cómo son los segmentos AM Y MB? y ¿Qué ángulo forman los segmentos CD y AB en el punto M?, ¿Qué nombre reciben el punto M y la línea CD? (investigar por fuera de clase). Enfatizó en las propiedades, una vez se trazó la mediatriz.

El otro problema en el que los estudiantes iniciaron la exploración fue el siguiente: Construir un triángulo rectángulo cuya base sea de 6 cm y tenga altura de 8 cm. Ellos establecieron los pasos del procedimiento de construcción.

4.2.2 Fase II. Episodios de referencia y momentos de enseñanza

Reconocimiento de episodios de referencia

Primera clase de Carlos.

En esta sesión de clase de Carlos se reconocieron tres episodios de referencia. El primero de ellos, se destacó por insistir en explicar e ilustrar el uso de las funciones del Geogebra, de la ventana de geometría básica seleccionada. Se interpreta que explora los esquemas iniciales de los estudiantes que usan por primera vez el programa. Los elementos de esta fase, presentes en el primer episodio, se manifiestan en el resto de episodios que configuran la clase, aunque en menor proporción. El segundo episodio de referencia, se centró en el dominio de las propiedades que permiten definir el radio; se atendió al objetivo de usar la circunferencia como compás para trasladar longitudes en un ambiente de geometría dinámica. Finalmente, en el tercer episodio de referencia, el objetivo era construir un triángulo equilátero. En el proceso de construcción se destacan dos momentos: el primero aborda un procedimiento centrado en una heurística en la que los estudiantes exploran tres pasos; el segundo centrado en la construcción que enfatiza en iterar con el procedimiento de utilizar la circunferencia para trasladar longitudes. Los momentos de discusión se ven reducidos en relación con la explicación.

Tercera clase de Carlos

En el segmento de enseñanza que corresponde a la tercera clase, se reconocieron dos episodios de referencia. El primero de ellos se interpretó que tuvo como propósito reconocer las propiedades de la mediatriz (lo que se ratifica en la segunda entrevista de seguimiento de Carlos). En relación con la conceptualización de mediatriz, se exploraron conceptos como el de congruencia de segmentos y punto medio. Igualmente, se exploraron la noción de ángulo recto y la relación de perpendicularidad entre rectas. En tanto, el segundo episodio de referencia se interpreta que tuvo como objetivo reconocer las propiedades del triángulo rectángulo. Se enfatizó el reconocimiento de la hipotenusa y los lados perpendiculares entre sí. Igualmente se procuró la exploración de una heurística que permite establecer el sentido de las relaciones entre las longitudes de los lados en el triángulo rectángulo.

Reconocimiento de momentos de enseñanza

Los momentos que satisfacen las características y criterios, que suministra la estructura analítica que se plasma en las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática, dan cuenta de las tres habilidades que en su articulación determinan la observación profesional (atender, interpretar y decidir) (Jacobs *et al.*, 2010). Esto es útil para dar cuenta de las prácticas en las que se hace uso fructífero del pensamiento matemático del estudiante para mejorar su comprensión, como se estableció en el marco teórico. Los análisis formulados se elaboran en relación con un episodio de referencia. En ellos se hace uso de la matriz de análisis (la que incorpora solo una de las características, el pensamiento matemático del estudiante) en un primer instante.

Posteriormente, la matriz de análisis se reduce de tal manera que solo la componen dos columnas. Una, aquella en la que se localizan las transcripciones y otra, la que corresponde a los comentarios analíticos. En este instante, en los análisis adquiere importancia la habilidad para ir hacia adelante y hacia atrás posibilitando identificar patrones en los comentarios analíticos referidos a los siguientes elementos: acciones de enseñanza, acciones del estudiante y matemáticas del estudiante en relación con la perspectiva matemática.

También se hace necesario examinar las transformaciones de acciones y posibles invariantes, es decir, cómo se conjetura un momento contingente, en qué se manifiesta la construcción de pensamiento matemático del estudiante. Lo anterior, como resultado de examinar si el momento contingente satisface las dos características restantes de la estructura analítica: cómo se reconoce y delimita el momento de enseñanza.

Dar cuenta de la observación profesional en relación con la identificación de momentos de enseñanza permite describir la práctica de cada profesor al gestionar la construcción de pensamiento matemático, lo que se plasma mediante una narrativa en la que se elaboran viñetas. Asimismo, abarca la comparación entre momentos de enseñanza. Se configuran, de esta manera, dos niveles de la observación profesional, uno el que tiene lugar dentro del episodio de referencia y el otro, que surge al efectuar la comparación entre momentos de enseñanza (Stockero, Lentham, Van zoest y Peterson, 2017).

Primera clase

4.2.3 Fase 3. Comparación de momentos de enseñanza

Clases diferentes de Carlos

Los momentos de enseñanza cuando se relacionan entre sí y están contenidos en el mismo episodio de referencia entonces comparten el objetivo o los objetivos propuestos para la clase.

Los momentos de enseñanza cuando se relacionan entre sí, por comparación, y pertenecen a episodios de referencia distintos, potencialmente pueden ser clasificados comparando los elementos que forman parte de su estructura:

- El agente (actor) que protagoniza el momento contingente. Las posibles categorías son: el profesor, el estudiante y la clase.
- El tipo de acción que desencadena el momento del pensamiento matemático contingente. Por ejemplo, por parte del profesor, potencialmente podrían ser acciones dominantes: preguntar, proveer

instrucciones, explicar (las que se obtienen mediante el análisis comparado). De igual manera, cuando el momento de contingencia es determinado por acciones del estudiante en interacción con el profesor, son dominantes acciones como reconocer, explicar y preguntar.

- Las matemáticas que se infieren de las observaciones del pensamiento matemático del estudiante y la perspectiva matemática que forma parte de estas matemáticas. Se examina el tipo de relación que se puede establecer entre la comprensión matemática en la que insiste el profesor para responder a un momento del pensamiento matemático del estudiante (Peterson, Van Zoest y Rougée, 2017). Esta podría clasificarse como una idea núcleo, la que es importante por su potencialidad en relación con la perspectiva matemática. La otra opción es que sea una idea secundaria en la configuración de la estructura matemática que subyace a la secuencia de enseñanza desarrollada por el profesor.
- Las oportunidades pedagógicas que abarcan el tipo de necesidad matemática del estudiante, a la que responde el profesor, en un momento del pensamiento matemático como las opciones de acción del profesor para aprovechar la apertura en dicho momento[13].

Cada uno de los momentos de enseñanza, reconocidos en la Fase II del análisis, fue elaborado con base en la comparación de los elementos que dan forma a los de la Fase III. Los análisis son plasmados en la Tabla 4.1, que se presenta a continuación.

[13] La identificación de las opciones de respuesta para el aprovechamiento de la apertura nos permite identificar las decisiones de acción. Lo que adquiere sentido cuando los momentos de enseñanza pertenecen a profesores distintos.

Tabla 4.2 Características para comparar momentos con oportunidades pedagógicas significativas

Tipo del momento	Objetivo	Agente	Tipo de acción	Matemáticas y Oportunidades Pedagógicas
De conceptualización	Utilizar la circunferencia como compás	Carlos	Pregunta para poner en conflicto a A2.	MS- se reconoce que el radio no es un segmento cualquiera. La PM esta asociada con las concepciones de radio. Para aprovechar se genera en A1 la necesidad de explicar. Carlos aprovecha la apertura mediante la introducción de un contraejemplo- suministra una familia de imágenes partir de un dibujo dinámico en el ambiente de geometría dinámica. Las matemáticas se apoyan en una idea secundaria... Apertura: -pregunta conceptual que generó conflicto cognitivo; acercamiento desde lo visual a imágenes asociadas con la conceptualización ,del radio Oportuno- aprovechó la apertura, en la línea 18, adiciona un contraejemplo
De conceptualización a partir de una representación prototípica		Carlos -No aprovecha la apertura-	Explica y pregunta para confrontar ideas matemáticas.	Las matemáticas una concepción del radio como segmento, uno de cuyos extremos es el centro el otro sin delimitar, para avanzar las matemáticas del estudiante se apoyan en una idea

				auxiliar. La apertura esta asociada con avances en la PM, por la necesidad de explicar de A4 y el esfuerzo mediante preguntas para clarificar.. El profesor impone su propósito.
De reconocimiento de una propiedad invariante		Los estudiantes	Los estudiantes (grupo) reconocen como propiedad invariante la medida del radio en el AGD,	SM están determinadas por el reconocimiento de la invariancia de la longitud del radio en un AGD: La PM abarca distintas ideas del radio. La idea que sustenta las matemáticas es una idea núcleo. La apertura – los estudiantes responden a la necesidad de explicar respecto a un hecho visual usando el arrastre y la medida en un AGD. La idea que sustenta las matemáticas es una idea núcleo. Lo oportuno-* preguntó para establecer relaciones entre el tamaño de la circunferencia y el radio. *uso de la clarificación mediante la explicación para establecer que la longitud no cambia

Del proceso de construcción	construir un triángulo equilátero	-pareja de estudiantes. -Carlos no aprovecha la apertura impone su significado.	Los estudiantes reconocen la invariancia de la longitud del radio.	Carlos transita desde la explicación, hacia las preguntas y provee instrucciones. Mientras los estudiantes hacia la respuesta a unas pocas preguntas. La idea que sustenta las matemáticas es auxiliar. Apertura -reformula el problema en función de un procedimiento que se caracteriza por la posibilidad de iterar Momento oportuno:- decarta la opción de aprovechar la apertura..
Del proceso de construcción	Construir un triángulo equilátero.	estudiantes A10 y A11,	Validación de la construcción elaborada por A10 y A11 mediante prueba de arrastre en un AGD (suministrada por Carlos).	MS- el reconocimiento de la validez de un dibujo dinámico del triángulo equilátero construido con propiedades. PM- uso de la circunferencia para trasladar longitudes en un AGD. La idea matemática es una idea núcleo. La apertura: esta a Suministro un procedimiento de validación del proceso de construcción elaborado Momento oportuno- Carlos pregunta para precisar los pasos que configuran el proceso de la construcción elaborada _

De definición	Describir propiedades del triángulo rectángulo	Estudiante A11.La apertura no se aprovecha la apertura en .	Formula pregunta para introducir otro tipo de representación.	MS- se reconoce parcialmente los segmentos que forman parte de la configuración determinada por la mediatriz y el segmento. PM- Carlos con su respuesta (línea 12) no genera condiciones para aprovechar la apertura que propicia la respuesta del grupo de estudiantes. No se aprovecha la apertura.
De conceptualización	Conceptualización de la mediatriz	Estudiantes	su imagen de la mediatriz como rectas que forman un ángulo recto	MS- reconocimiento parcial de las propiedades para definir la mediatriz. PM- concepciones respecto a la mediatriz OP-. Carlos interviene aclarando para precisar los alcances de la definición Momento oportuno: El aprovechamiento de la apertura por los interrogantes formulados.
de conceptualización en la exploración visual	Reconocer propiedades de los triángulos	La estudiante A11	Pregunta formulada por A11. Visualización del triángulo rectángulo cuando varia su posición y examina las propiedades de la hipotenusa.	ME- reconocimiento de las propiedades de la hipotenusa, PM- distintas imágenes de la hipotenusa .Por ejemplo el lado de mayor longitud. OP-La pregunta de A11 generó apertura; pero no fue aprovechada. Desarrollo un tratamiento verbal y no incluyó variables visuales en el acercamiento.

del proceso de construcción a partir de una conjetura	Construir un triángulo congruente a un triángulo dado	Estudiante A1,	A1 examina el proceso de construcción, a partir de la conjetura: para construir un triángulo congruente a uno dado basta con trasladar dos de los lados y completar el tercer lado del triángulo.”	MS- Estan asociadas con la extensión de la congruencia de segmentos a la congruencia de triángulos. La PM se conecta con la idea: los lados de triángulos congruentes son congruentes entre sí. OP- En A1 al asumir la necesidad de comprender porque su conjetura es falsa e introducir nuevos elementos a su argumentación. Eva aprovecha permitiendo que A1 desarrolla la conjetura, introduce el conflicto y conecta reformulando el problema para construir una alternativa en su argumentación.

Hay momentos del pensamiento a los que se aplicó la estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática y resultaron reconocidos como momentos que no los cumplen en su totalidad. A estos momentos, cuando son parte de una misma clase en episodios de referencia distintos, se les reconoció su importancia en el análisis comparativo entre momentos de enseñanza porque permiten reconocer la importancia de los criterios que determinan la oportunidad pedagógica para valorar qué tan significativos resultan ser los momentos del pensamiento dentro de una lección o unidad.

.

5 Resultados

En este capítulo se presentan tres resultados: (1) identificación de momentos de enseñanza y su tipología, (2) la identificación de destrezas del pensamiento matemático y (3) las decisiones de acción en el momento en el que emergen oportunidades pedagógicas.

En el primer resultado se encontraron cinco tipos de momentos que aluden a procesos asociados con el razonamiento y la construcción de sentido geométrico. La tipología de los momentos incluyó los siguientes tipos de momento: de conceptualización, representación prototípica, de reconocimiento de una propiedad invariante, del proceso de construcción y conjetura.

En lo que se refiere al segundo resultado, se describe cómo se utiliza la aproximación teórica de las oportunidades pedagógicas con significado matemático para dar cuenta de las tres destrezas que configuran la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante.

Finalmente, respecto al tercer resultado, se describen las decisiones de acción que corresponden a cada tipo de momento de enseñanza.

5.1.1 5.1 Momentos de enseñanza identificados

Los momentos de enseñanza reconocidos se obtuvieron acorde a lo planteado en la subfase II "Identificación de momentos de enseñanza", que forma parte de la Fase II "Identificación de episodios de referencia y momentos de enseñanza". Estos cumplen las características y criterios que se cristalizan en la estructura analítica de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Además, cumplen las condiciones establecidas en la matriz de análisis.

5.1.2 Momento de conceptualización

Carlos, en sus intercambios con A2, A3 y los demás estudiantes de la clase durante el segundo episodio de referencia, aborda como actividad el reconocimiento de propiedades del radio, su representación y definición "el radio es una línea recta que une dos puntos" (línea 11): los estudiantes responden no en voz alta (línea 13); A2 responde "del punto A al punto B" (línea 15) y A3 dice “el radio que va del centro al lado, otro responde del centro a la izquierda” (línea 17).

Los contenidos matemáticos abordados se inscriben en el dominio de la circunferencia y la definición del radio, en particular, en términos de la invariancia de su longitud. Las matemáticas de A2 están asociadas con: reconocer el radio y su representación, el procedimiento de utilizar la circunferencia para trasladar las longitudes (acción que se reitera en las estrategias de solución de problemas de construcción en un ambiente de geometría dinámica), la relación entre el radio y el tamaño de la circunferencia.

Carlos, en la línea 12, preguntó si cualquier segmento sería un radio. Aquí se detectó un momento contingente del pensamiento matemático que se presenta en las interacciones entre el profesor y A2. Las matemáticas del estudiante están asociadas con las concepciones sobre el radio de una circunferencia por parte de A2 y otros estudiantes. Reconocen el radio como un segmento, pero no logran determinar completamente las propiedades de sus dos extremos. El momento en torno a la contingencia se ilustra en las siguientes líneas:

Tabla 5.1 Momento de conceptualización

Turno		
		Momento de conceptualización
11	A2:	el radio es una línea recta que une dos puntos.
12	Carlos:	¿Cuáles puntos?, o sea ¿cualquier segmento sería un radio?
13	Los estudiantes	responden no en voz alta
14	Carlos:	¿Qué tiene de especial ese segmento?, ¿de dónde a dónde va?
15	A2:	responde del punto A al punto B
16	Carlos	si fuera otro segmento XY
17	A3:	el radio que va del centro al lado, otro responde del centro a la izquierda.
18	Carlos	vamos a ver qué pasa si dibujo un nuevo segmento que une el centro con la circunferencia [lo dibuje en otro sector de la circunferencia]. Este refiriéndose al dibujo ¿es un radio? - ilustrar fotograma

.

La perspectiva matemática se relacionó con las matemáticas del estudiante, lo que se precisa al considerar las siguientes ideas: A2: “el radio es una línea recta que une dos puntos”; A2: “el radio parte del punto A al punto B”; A3: “el radio va del centro al lado”. En cualquiera de estas ideas, el radio se asume aislado de la circunferencia, es decir, como un segmento cualquiera.

Se entiende que la perspectiva matemática es accesible a estudiantes en las mismas condiciones debido a que ellos, en este nivel y conforme a lo estipulado en los referentes curriculares, construyen y describen figuras geométricas (Common Core State Standards Initiative, 2011; MEN, 2007). La perspectiva matemática es central porque guarda conexión con el objetivo propuesto para esta sesión de clase porque las acciones de Carlos tienen como derrotero conceptualizar el radio para utilizar la circunferencia como compás en el ambiente de geometría dinámica. En consecuencia, el momento de enseñanza que se reconoce a partir de la contingencia es significativo.

Carlos formuló una pregunta conceptual “¿Cuáles puntos? O sea, ¿cualquier segmento sería un radio?” (Línea 12), que generó conflicto cognitivo y la necesidad intelectual de explicar a A2. Además, posibilitó el desarrollo de la discusión al proporcionar un acercamiento desde lo visual a imágenes asociadas con la conceptualización del radio. Luego, se interpreta que se produce la apertura.

Carlos aprovechó la apertura, en la línea 18, al reconocer la dificultad, por parte de A3, para expresar la invariancia de la longitud del radio y para ello, introdujo un contraejemplo al dibujar en la misma circunferencia, otro radio para compararlo con el radio inicial. El dibujo dinámico del radio, al ser arrastrado[14] desde uno de sus extremos sobre la circunferencia, suministró una familia de imágenes del radio. Se concluye que el momento del pensamiento matemático cumple las características determinadas en la matriz de análisis por lo que es un momento de enseñanza.

---

[14] El arrastre se conceptualiza como uno de los instrumentos de un ambiente de geometría dinámica, que posibilita al profesor y a los estudiantes seleccionar uno o más objetos y moverlos de manera continua sobre la pantalla. Tal acción cambia el aspecto de la figura en construcción, pero no lo conceptual. Esta dualidad no está presente en el ambiente lápiz-papel.

5.1.3 **Momento representación prototipo**

Carlos reacciona a la conducta de los estudiantes, a los que se les presenta dificultad para reconocer la invariancia de la longitud del radio en un ambiente de geometría dinámica. Lo hace dibujando la circunferencia y una representación prototipo del radio. Después, en la misma circunferencia, dibuja otro radio en posición diferente.

En la línea 20, del segundo episodio de referencia, se reconoce un momento contingente del pensamiento matemático cuando confronta varias ideas de los estudiantes respecto al radio, por lo que introduce un dibujo dinámico del radio como contraejemplo. Esto posibilita tomar en consideración, la discusión ideas como la de A2, en la que manifiesta que el radio es un segmento que va del centro a un lado. Tal como se ilustra con las líneas del episodio de referencia que se presentan en la Tabla 5.2, a continuación:

Tabla 5.2 Momento de representación prototipo

	Turno	
		Momento de representación prototipo
19	Estudiantes:	algunos estudiantes responden no
20	Carlos:	algunos dijeron que un radio es un segmento que va del centro a la derecha, yo hice otro. Les estoy preguntando si este es un radio. Manipula el radio con la función arrastre desplazando uno de sus extremos sobre la circunferencia [describiendo la trayectoria circular]. ¿Es un radio?, ¿si es o no un radio? ¿Por qué este si [señala el segmento dibujado inicialmente]? y ¿por qué el otro no?
21	Carlos	sigamos a un consenso porque de pronto lo olvidaron, A2 fue quien estuvo más cerca de la noción de radio, el radio no es un segmento que va del centro a la derecha, del centro a la izquierda, del centro a un lado. El radio es un segmento que va desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia. Es decir, que el radio es lo que realmente define la circunferencia. Si no tuviéramos el radio sería imposible determinar la circunferencia. En una circunferencia el radio permanece constante. Si no tuviéramos el radio esa circunferencia sería una espiral, sería otra cosa. El radio se mantiene.
22	Carlos:	¿cómo se mantiene la longitud del radio?
23	A4	el radio no se mueve, se queda ahí quieto.
24	Carlos:	se queda quieto, yo lo estaba viendo en movimiento.
25	A4:	expresa lo que se “queda quieto”, no el radio y extiende las manos hacia los lados
26	Carlos:	yo lo estoy viendo en movimiento [arrastra el segundo radio

sobre la circunferencia] Este es un radio, el que estoy moviendo. Las manecillas de un reloj podrían tomarse como un radio

Carlos explica y pregunta, como se evidenció al expresar: “Algunos dijeron que un radio es un segmento que va del centro a la derecha, yo hice otro. Les estoy preguntando si este es un radio. [Manipula el radio con la función arrastre desplazando uno de sus extremos sobre la circunferencia describiendo la trayectoria circular]. ¿Es un radio?, ¿si es o no un radio? ¿Por qué este sí [señala el segmento dibujado inicialmente]? Y, ¿por qué el otro no?” (Línea 20). Luego, señaló “A2 fue quien estuvo más cerca de la noción de radio, el radio no es un segmento que va del centro a la derecha, del centro a la izquierda, del centro a un lado. El radio es un segmento que va desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia…” (línea 21). Así, se evidencias que las intervenciones del profesor son dominantes.

A pesar de ello, A4 avanzó con relación a la perspectiva matemática, desde la idea de radio que cuestiona Carlos hacia una idea del radio en la que se alude a la invariancia de su longitud. Se reconoce que estas matemáticas son accesibles a A4. Esto se puede evidenciar en los referentes curriculares, en los que se hace explicito cómo los estudiantes en este nivel describen y construyen figuras geométricas (Common Core State Standards Initiative, 2011; MEN, 2007). Se considera que la perspectiva matemática es central porque guarda conexión con el objetivo propuesto para la sesión de clase.

Carlos, al reconocer la dificultad de los estudiantes para expresar la invariancia de la longitud del radio, procedió a preguntar por qué uno de los segmentos es radio y el otro no. La apertura se presentó en el momento referido en la línea 20. Igualmente, cuando se suministró el ambiente de geometría dinámica, construyó familias de radios comparables con la representación prototipo al integrar el arrastre. Como se evidencia, esta introducción de dibujos dinámicos se hace manifiesta en otros matices de la perspectiva matemática. No obstante, el momento de apertura no se aprovechó por Carlos, quien por limitaciones de tiempo cierra la discusión, según lo expresado en la línea 21, y procede a suministrar la definición del radio. Esta imagen del radio no coincide con la de los estudiantes que continúan sin expresar la invariancia de la longitud del radio: “¿Cómo se mantiene la longitud del radio?”, (línea 22), “se queda quieto, yo lo estaba viendo en movimiento” (línea 24). Se establece que el momento del pensamiento matemático no satisface las condiciones establecidas en la matriz de análisis para ser reconocido como momento de enseñanza, pues no cumple la segunda condición que satisface una oportunidad pedagógica de que el momento sea oportuno.

5.1.4 **Momento reconocimiento de una propiedad invariante**

Carlos en el segundo episodio de referencia interactúa con los estudiantes, se reconoce el momento contingente del pensamiento matemático en la línea 30. Por lo que, para ilustrar el apartado en torno a este momento se retoman las líneas 29 a 39:

Tabla 5.3 Momento reconocimiento de una propiedad invariante

Turno		
		Momento de reconocimiento de una propiedad invariante
29	Carlos:	ahora veamos con esta herramienta que dice distancia o longitud. La tocamos y aparece esto, aparece el número 4.38 es la medida del centro al punto sobre la circunferencia. Usando el arrastre, si desplaza el radio sobre la circunferencia ¿cambia la medida?
30	Los estudiantes	expresan que la medida no cambia
31	Carlos:	Si arrastra de tal manera que se modifica el tamaño de la circunferencia: ¿cambia la longitud del radio?, ¿por qué creen que cambia?
32	Los estudiantes	al unísono responden cambia porque aumenta o disminuye el tamaño de la circunferencia.
33	Carlos	pero en realidad estoy cambiando el tamaño ¿de qué?
34	Los estudiantes	responden en coro el tamaño del radio
35	A6	un radio es un segmento que va desde el centro a cualquier punto de la circunferencia.
36	Carlos:	¿qué pasa con el radio?, ¿qué propiedad especial tiene el radio?, ¿Se mantiene qué?
37	Carlos	[aplicando el arrastre al extremo del radio sobre la circunferencia] cuando yo lo mueve aquí la distancia es la misma. Cualquiera de los radios siempre va a ser constate la longitud.
38	Carlos	damos nombres a ver. Destaca la medida de CQ es 4.69, la medida de CP es lo misma [fotograma]. O sea que todos los radios miden igual.
39	Carlos	esto que estamos viendo son las propiedades que ustedes tienen que aprender respecto al círculo, y el uso del compás. Como dijimos, que este va a ser nuestro compás, estoy haciendo esta introducción para que ustedes entiendan como usamos el compás o un círculo para poder trasladar longitudes [medidas].

Las matemáticas del estudiante se caracterizan por el contenido abordado que se ubica en el dominio asociado con el reconocimiento de una propiedad, la invariancia de la longitud del radio y su conceptualización. Esto se manifiesta cuando los estudiantes de la clase visualizan que, al desplazar Carlos el radio sobre la circunferencia, la medida no cambia. La perspectiva matemática se asoció con la idea de que la medida del radio de la circunferencia no cambia y el referente es la visualización de la medida.

Carlos manifiesta: "Ahora veamos con esta herramienta que dice distancia o longitud. La tocamos y aparece esto, aparece el número 4,38 es la medida del centro al punto sobre la circunferencia. Usando el arrastre, si desplaza el radio sobre la circunferencia ¿cambia la medida?" (línea 29). Introduce dos instrumentos del ambiente de geometría dinámica: el arrastre y la medida[15]. "Porque siempre tenía la misma medida", lo que se alude a las interacciones entre el profesor, los estudiantes y el ambiente de geometría dinámica. El profesor reseña: "[…] que la medida no cambia" (línea 30) y se genera apertura cuando un grupo de estudiantes reconoció que la medida de los radios no cambia una vez que se somete al arrastre el extremo dibujado sobre la circunferencia y se mide su longitud. Esto fue en respuesta a la acción del

---

[15] Según Sinclair y Robutti (2013) la medida es un instrumento de un ambiente de geometría dinámica. Esta requiere de una interpretación y gestión apropiada. Los estudiantes, en las tareas que emplean un ambiente de geometría dinámica, usan la medida asignándole diferentes roles. Asimismo, los usos de la medida se articulan con el tipo de arrastre. De acuerdo con las características del arrastre es posible establecer si las acciones del estudiante en la tarea están concentradas en el campo espacio gráfico (asociado con la percepción del dibujo) o en el espacio teórico al poner énfasis en las propiedades de la figura.

De acuerdo a los usos de la medida, los estudiantes pueden construir significados matemáticos, formular conjeturas o usarla para construir una demostración. Se distinguen distinto tipos de usos de la medida, por ejemplo: Vadcard (1999) distingue ente la medida exploratoria —usada como instrumento heurístico— y la medida probatoria —usada como instrumento de chequeo— (como se cita en Sinclair y Robutti, 2013, p. 582). La medida exploratoria relaciona lo relativo al espacio gráfico con el espacio teórico y puede dividirse en diferentes modalidades. La medida errante *(wandering)* explora la situación aleatoriamente. Usan el arrastre errante *(wandering)*, para identificar relaciones entre cantidades. La medida guiada tiene lugar cuando los estudiantes guían la exploración de la configuración. Examinando casos particulares uno tras otro, las medidas son usadas para obtener una figura particular de una configuración geométrica. El tercer caso es la medida perceptual, cuando los estudiantes usan la medida como medio para chequear la validez de una percepción y transforman una relación cuantitativa en una relación cualitativa y en el campo del espacio grafico. Los estudiantes pueden adentrase en el campo teórico transformando la percepción en conjetura.

No obstante en este caso los esquemas de uso se sitúan en una fase de exploración del Geogebra, lo que se examina es la intencionalidad del profesor

profesor en la línea 29. Así se posibilitó que los estudiantes hablaran de la invariancia de la medida del radio. Se contribuye, de esta manera, a la necesidad de explicar un comportamiento.

Carlos preguntó para establecer relaciones entre el tamaño de la circunferencia y el radio, según se precisa en las formulaciones: aplicando el arrastre al extremo del radio sobre la circunferencia (“cuando yo lo mueve aquí la distancia es la misma”). Cualquiera de los radios siempre va a ser constante la longitud (línea 37) y “damos nombres a ver. Destaca la medida de CQ es 4.69, la medida de CP es lo mismo. O sea que todos los radios miden igual” (línea 38). Hizo uso de la clarificación mediante la explicación para establecer que la longitud no cambia cuando el radio se somete al arrastre; a la vez que compara las medidas de los radios, se da cuenta de la longitud como invariante.

Dichas acciones se vertebraron con el propósito de usar la circunferencia como compás. Por tanto, la apertura fue aprovechada en el momento adecuado, lo que permite establecer que se cumple el segundo criterio que satisface una oportunidad pedagógica. En síntesis, el momento del pensamiento matemático satisface los criterios establecidos en la matriz de análisis, por lo que se concluye que es un momento de enseñanza.

5.1.5 **Momento exploración de un proceso de construcción**

Carlos, en este apartado del tercer episodio de referencia, desarrolló una actividad dominante al preguntar: “A2, ¿el triángulo que se está obteniendo es equilátero?” (línea 66), “hablamos de la circunferencia y del radio” (línea 68), “¿qué garantiza el radio? (línea 69), y, “¿cuál sería el radio que usted quiere reproducir varias veces?” (línea 74). Para el desarrollo de esta actividad, Carlos va desde la exposición encaminada a sintetizar elementos de una discusión, hacia las preguntas y, en menor proporción, a proveer instrucciones: “Piensen entonces cómo usarían la herramienta circunferencia. Por algo, la explicamos al principio”, (línea 73); y “el original cierto y lo resalta en el dibujo del triángulo”, (línea 75). Para ilustrar, en la Tabla 5.4 se presentan a continuación, lo que corresponde a este episodio de referencia.

Tabla 5.4 Momento de exploración de un proceso de construcción

	Turno	
		Momento de exploración de un proceso de construcción
65	Carlos:	hasta el momento la mayoría de ustedes debe tener algo así, dibuja los punto A y B alineados y el punto C externo a la recta que determinan estos dos puntos, traza los segmentos AB y AC respectivamente. Traza punteado el segmento BC para que cada lado mida 5 va a ser una tarea ardua. Se le salta de un centímetro, en un milímetro. ¿Qué más pasa?
66	Carlos:	¿A2 el triángulo que se esta obteniendo es equilátero?
67	Carlos:	¿por dónde empezamos la clase hoy?, ¿A qué nos referimos al principio?
68	Los estudiantes	hablamos de la circunferencia y del radio
69	Carlos:	¿qué garantiza el radio?
70	Una pareja de estudiantes	que siempre tenía la misma medida
71	Carlos:	¿qué les estoy pidiendo ahora?
72	Carlos	que halla tres segmentos que tengan igual medida
73	Carlos:	piensen entonces como usarían la herramienta circunferencia. Por algo, la explicamos al principio.
74	Carlos:	¿cuál sería el radio que usted quiere reproducir varias veces?
75	Carlos	el original cierto y lo resalta en el dibujo del triángulo del fotograma 2.

Carlos, en su práctica, experimenta una transición, cuando va desde la formulación de preguntas conceptuales que expresa "¿cuál sería el radio que usted quiere reproducir varias veces?" (línea 74), hacia proveer instrucciones: "Piensen cómo usarían la herramienta circunferencia. Por algo la explicamos al principio" (línea 75), "el original cierto", y lo resalta en el dibujo del triángulo (línea 73).

Se produce un momento de contingencia del pensamiento matemático. Carlos pregunta: "¿Qué garantiza el radio?" (línea 69), cuando interviene una pareja de estudiantes. Las matemáticas del estudiante, se infieren del reconocimiento de la propiedad de la longitud del radio como invariante. Como en los anteriores momentos, la perspectiva matemática está asociada con distintas ideas del radio.

La respuesta del profesor tiene como finalidad apoyar a los estudiantes para iterar con el procedimiento mediante el que se trasladan longitudes. Igualmente, se destacan elementos que permiten caracterizar las matemáticas de A2. Mientras, las acciones de los estudiantes están encaminadas a reconocer algunos elementos articulados que permiten inferir sus matemáticas. Específicamente, se pretende que describan cómo utilizan la circunferencia como herramienta en un ambiente de geometría dinámica como parte de la solución del problema, por ejemplo, al establecer qué circunferencias trazar para determinar un punto de intersección. Se reconoce que la perspectiva matemática está determinada por el punto de vista que subyace a la respuesta "el radio siempre tiene la misma medida".

En cuanto a las matemáticas del estudiante, están articuladas con referentes curriculares y se evidencia en los estándares comunes en los que construir figuras geométricas es parte importante de la práctica del estudiante (Common Core State Standards Initiative, 2011). Lo mismo sucede con los estándares curriculares (MEN, 2007).

La respuesta de los estudiantes en la línea 69 genera apertura. Carlos, la aprovecha en el momento adecuado al reformular el problema en función de un procedimiento que se caracteriza por la posibilidad de iterar: "¿cuál sería el radio que usted quiere reproducir varias veces?" (línea 74). Esto con el fin de construir sentido en el proceso de solución del problema. Sin embargo, Carlos de inmediato responde describiendo la aproximación correcta cuando enuncia "el original cierto" y lo resalta en el dibujo del triángulo del fotograma 2 (línea 75).

En consecuencia, el momento del pensamiento matemático satisface los criterios que forman parte de la matriz de análisis y la estructura analítica. El momento del pensamiento es un momento de enseñanza.

5.1.6 **Momento de exploración que parte de una heurística**

Carlos propicia la exploración de una heurística para construir el triángulo equilátero. Establece uno a uno los pasos del procedimiento de construcción. En este segmento del tercer episodio de referencia, Carlos cambia de la explicación a la actividad centrada en la pregunta. Los estudiantes han plasmado su procedimiento de solución en pantalla y el profesor accede a revisarlo.

Carlos preguntó: “¿Dónde tomaron el centro?” (línea 83); “¿Cómo se llama el intercepto?” (línea 85) Se infiere que los contenidos abordados por los estudiantes están asociadas con el traslado de los lados, como lo expresan A10 y A11, que “en A; Luego de B hasta A” (línea 84), al utilizar como compás solo radios de la circunferencia, la intersección de las circunferencias, el reconocimiento del triángulo como polígono cerrado A10 y A11 afirman que “siguen siendo equiláteros, con diferentes medidas” (línea 88).

En los comentarios analíticos, se destaca el reconocimiento de las manifestaciones de las matemáticas del estudiante en relación con preguntas conceptuales formuladas por Carlos: “¿Dónde tomaron el centro?” (línea 83); “¿Cómo se llama el intercepto?” (línea 85), “Si yo muevo esto y el triángulo permanece equilátero está perfecto. Si yo lo muevo y se deforma hay que volverlo a hacer. ¿Qué pasa?, ¿Estoy moviendo el radio los lados siguen siendo iguales en longitud?” (línea 87). A10 y A11 expresaron: “Siguen siendo equiláteros, con diferentes medidas” (línea 88), en respuesta a Carlos reconocen el triángulo equilátero mientras él lo somete al arrastre.

El momento contingente del pensamiento matemático se presenta cuando los estudiantes A10 y A11 expresan: “siguen siendo equiláteros, con diferentes medidas”, (línea 88). Es presentado, posterior a la aplicación del arrastre al dibujo dinámico construido por A10 y A11 usando propiedades. Las matemáticas del estudiante están determinadas por el reconocimiento del triángulo equilátero a partir de su visualización posterior al reconocimiento de las propiedades para su construcción (la cual es una idea núcleo en la secuencia propuesta). Las líneas que se presentan en la Tabla 5.5 se organizan en torno al momento del pensamiento matemático.

Tabla 5.5 Momento de un proceso de construcción

	Turno	
		Momento de un proceso de construcción
82	A10 y A11:	Llamaron al profesor para mostrar su estrategia de solución. La cual se ilustra mediante el fotograma 4.
83	Carlos:	¿dónde tomaron el centro?
84	A10 y A11:	expresan que en A: Luego de B hasta A.
85	Carlos	¿Cómo se llama el intercepto?
86	A10 y A11:	a ese vértice póngale C.
87	Carlos:	Si yo muevo esto y el triángulo permanece equilátero esta perfecto. Si yo lo muevo y se deforma hay que volverlo a hacer. ¿Qué pasa?, ¿estoy moviendo el radio los lados siguen siendo iguales en longitud?
88	A10 y A11	siguen siendo equiláteros, con diferentes medidas
89	Carlos:	al fin que, ¿con diferentes medidas?
90	A11	Con medida diferente de 5cm
91	Carlos	arrastrando el triángulo, ¿sigue siendo equilátero?, ¿usted construyo un triángulo equilátero?
92	A10 y A11	responden si

Carlos, con su intervención, cuando reseña: “Si yo muevo esto y el triángulo permanece equilátero esta perfecto. Si yo lo muevo y se deforma hay que volverlo a hacer. ¿Qué pasa? ¿Estoy moviendo el radio los lados siguen siendo iguales en longitud?” (línea 87), desencadena una respuesta en A10 y A11. En esta se manifiesta la necesidad de explicar y precisar para clarificar su procedimiento de construcción y el dibujo dinámico elaborado por A11 “con medida diferente de 5 cm” (línea 90). Por lo tanto, la intervención de Carlos, en la línea 87, generó apertura, es decir, suministró un procedimiento de validación del proceso de construcción elaborado.

En esta situación, la apertura es aprovechada de manera oportuna por Carlos, cuando manifiesta “al fin que, ¿con diferentes medidas?” (línea 89) y “arrastrando el triángulo ¿sigue siendo equilátero? ¿Usted construyó un triángulo equilátero?” (línea 91). Carlos pregunta para precisar los pasos que configuran el proceso de la construcción elaborada por A10 y A11, por lo que se reconoce un momento de enseñanza en el que se construye pensamiento matemático del estudiante.

Tercera clase

5.1.7 **Momento de definición**

Carlos es quien interviene en este segmento de enseñanza del primer episodio de referencia y la tercera clase. La secuencia de enseñanza en la que se inscribe este episodio tuvo el objetivo de clasificar triángulos acordes con sus propiedades. El contenido abordado incluye la definición de la mediatriz obtenida a partir del proceso de construcción de un triángulo equilátero, proceso que describe al comienzo de la clase. Carlos elabora una síntesis de los conceptos, propiedades y procedimientos abordados en las dos clases previas (línea 1). Posteriormente, promueve la discusión encaminada a establecer que es la mediatriz.

Carlos dibuja sobre la pizarra (ver Figura 5.1) para ilustrar y proporcionar información sobre los triángulos equiláteros ABC y ABD, respectivamente (primer paso de la construcción), obtenido dado el segmento AB. En dicha Figura 5.1, se destaca su punto medio M. Finalmente, la recta que contiene el segmento CD.

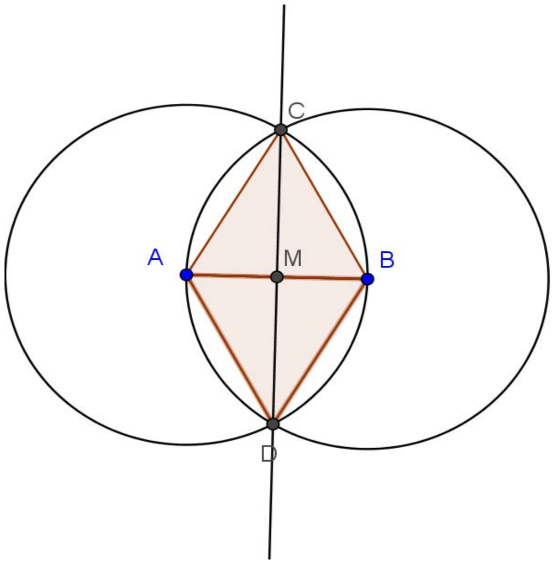

Figura 5.1 Dibujo obtenido del proceso de construcción de la mediatriz

En este segmento de enseñanza, las interacciones entre Carlos y los estudiantes están caracterizadas por el tipo de acciones. Para ilustrar estas, se reseñan varias líneas extraídas del primer episodio de referencia en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6 Momento de definición

	Turno	
		Momento de definición
9	A3:	usa la notación de segmento escribe AB y CD
10	Carlos	designa el punto medio del segmento AB con M ¿cuántos segmentos ve?
11	Los estudiantes	respuesta colectiva cuatro
12	Carlos:	si incluye los dos de mayor longitud serian seis. Los segmentos a incluir son: AM, BM, CM, DM y los dos mencionados inicialmente AB y CD. [examina las posibles configuraciones geométricas]. En una de las preguntas se trataba de establecer como eran MA y MB. ¿Cómo eran?
13	Los estudiantes	responden en coro que son congruentes
14	Carlos:	¿qué significa que son congruentes?
15	Los estudiantes	a varias voces expresan que miden lo mismo.
16	Carlos	contradigo eso porque yo les dije que los segmentos congruentes tienen la misma medida y hay que contradecirlo. Supongamos que dan un segmento de recta (dibujado en la pizarra). Supongamos que tengo una piola, la superpone sobre el arco circular, la mido con una regla y luego con una regla mido el segmento casualmente las dos miden lo mismo, será que ¿son congruentes?

Carlos interviene con acciones como preguntar para precisar elementos de la definición: “Si incluye los dos de mayor longitud serian seis. Los segmentos a incluir son: AM, BM, CM, DM y los dos mencionados inicialmente AB y CD”. [Examina las posibles configuraciones geométricas]. En una de las preguntas se trataba de establecer cómo eran MA y MB. “¿Cómo eran?” (línea 12); identificar el sentido dado a un concepto geométrico: “¿Qué significa que son congruentes?” (línea 14); reconocer la representación del objeto geométrico: “designa el punto medio del segmento AB con M ¿cuántos segmentos ve?” (línea 10). En menor proporción, se evidencia la explicación para ampliar el sentido dado a la congruencia: "Contradecimos eso porque yo les dije que los segmentos congruentes tienen la misma medida y hay que contradecirlo. Supongamos que dan un segmento de recta (dibujado en la pizarra) y un segmento de arco (dibujado sobre la pizarra). Supongamos que tengo una piola, la superpongo sobre el arco circular, la mido con una regla y luego con una regla mido el segmento casualmente las dos miden lo mismo, ¿será que son congruentes?” (línea 16). Las explicaciones se amplifican en su duración en el tiempo.

Mientras las acciones de los estudiantes están encaminadas con mayor frecuencia a reconocer los conceptos geométricos que permiten definir un objeto geométrico, ellos responden a coro que “son congruentes” (línea 13) y a varias voces expresan que “miden lo mismo” (línea15); la representación de un objeto, “usa la notación de segmento escribe AB y CD” (línea 9) y respuesta colectiva: “cuatro” (línea 11). Otro tipo de acción es expresar qué incluyen las propiedades que definen un objeto.

Carlos, en su interacción con los estudiantes, regula los contenidos de matemáticas abordados, los que se asocian con el reconocimiento de las propiedades que definen la mediatriz. Así, reconoce parcialmente los segmentos de recta que definen la mediatriz, usa la notación simbólica para designarlos, establece que el punto por el cual pasa la mediatriz es punto medio, los segmentos determinados a partir del punto medio son congruentes por tener la misma medida y usa la notación para designar segmentos congruentes línea 9 “usa la notación de segmento escribe AB y CD, responden a coro que son congruentes” (línea 13) y “a varias voces expresan que miden lo mismo” (línea 15).

El momento de contingencia del pensamiento del estudiante se reconoce en la línea 11, después de retomar el procedimiento de construcción de la mediatriz, a partir de su trazo y el de la recta que contiene el segmento y su intersección, solo se reconocen cuatro segmentos (en la reconfiguración no visualiza a AB Y CD como segmentos como se observa en la Figura 5.1).

En los estudiantes, la perspectiva matemática se hace manifiesta en formulaciones como las siguientes: “A2 asocia la mediatriz con ángulo” (línea 4). Se reconocen parcialmente los segmentos que forman parte de la configuración determinada por la mediatriz y el segmento.

La respuesta de Carlos se centra en adicionar los segmentos restantes. La perspectiva matemática es importante a este nivel, ya que los estudiantes construyen, describen figuras geométricas y establecen relaciones entre ellas para formular su definición (Common Core State Standards Initiative, 2011; MEN, 2007). La perspectiva matemática es central porque guarda conexión con el objetivo propuesto para esta sesión de clase. En consecuencia, el momento contingente es significativo desde lo matemático.

Carlos, con su respuesta de la línea 12, no genera condiciones para aprovechar la apertura que propicia la respuesta del grupo de estudiantes. En concreto, abandona la necesidad de complementar las preguntas mediante situaciones de enseñanza que movilizan un acercamiento desde lo visual que posibilite una mayor variedad de ejemplos y contraejemplos para identificar diferencias significativas (Gutiérrez y Jaime, 2012). Por lo que esta apertura no se aprovecha en el momento oportuno, lo que sería el segundo criterio que ha de cumplir una oportunidad pedagógica. En consecuencia, el momento del pensamiento matemático no satisface los criterios establecidos para su análisis por lo que no configura un momento de enseñanza. Una posible explicación a lo sucedido se deriva de una concepción formalista de la definición por parte del profesor en donde para cada concepto corresponde una única definición.

5.1.8 **Momento de conceptualización**

Carlos, en el apartado de este primer episodio de referencia, continúa la discusión respecto a la definición de mediatriz. El objetivo asociado a este episodio era conceptualizar la mediatriz.

Carlos, en su práctica, incluye como acción dominante, preguntar con distintas finalidades: “Entonces ¿qué significa mediatriz? Hablemos de las dos cosas, ¿forma un ángulo?” (línea 31); y “¿por dónde pasa?” (línea 33). En una menor frecuencia, provee instrucciones: “Entonces A1 defina lo que es una mediatriz” (línea 35); y aclaraciones: “Dos rectas no, una recta, ¿qué pasa por dónde?” (línea 37). Las acciones se desplazan desde preguntar hacia proveer instrucciones y aclaraciones. Como parte de un sistema asimétrico, se consideran como acciones de los estudiantes: responder en colectivo con distinta finalidad, por ejemplo, responden a coro que “forman un ángulo recto” (línea32); expresar propiedades “Pasa por el punto medio del segmento” (línea 38); y reconocer propiedades “La mediatriz es una línea recta” (línea 27). Como se evidencia, se transita desde responder hacia el reconocimiento de propiedades.

Carlos, en su interacción con la clase, abordó contenidos matemáticos asociados con las propiedades de la mediatriz. Se conjetura un momento del pensamiento matemático contingente, cuando los estudiantes expresan su imagen de la mediatriz como rectas que forman un ángulo recto. Responden a coro que "forman un ángulo recto" (línea 32) y Carlos insiste en preguntar para precisar la definición de mediatriz cuando formula: "Entonces ¿qué significa mediatriz? hablemos de las dos cosas ¿forma un ángulo? ¿Por dónde pasa? (línea 31). "¿Por dónde pasa?" (línea 33) y "Entonces, A1 defina lo que es una mediatriz" (línea 35). En torno al momento, se reconocen las líneas que están consignadas en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7 Momento de conceptualización

	Turno	
		Momento de conceptualización
27	A1	La mediatriz es una línea recta
28	Carlos	esta recta con respecto a la otra ¿es qué?
29	A8	las líneas tienen el mismo ángulo
30	Los estudiantes	murmuran "las rectas forman un ángulo de 90º"
31	Carlos	entonces ¿qué significa mediatriz? hablemos de las dos cosas ¿forma un ángulo?
32	Los estudiantes	responden en coro forman un ángulo recto.
33	Carlos	¿por dónde pasa?
34	Los estudiantes	responden en coro por el punto medio
35	Carlos	entonces A1 defina lo que es una mediatriz
36	A1	dos rectas que pasan por el punto medio
37	Carlos	dos rectas no, una recta ¿qué pasa por dónde?
38	A1	pasa por el punto medio del segmento

Las matemáticas del estudiante se infiere que están asociadas con la definición de la mediatriz, la perpendicularidad entre la recta (mediatriz) y la recta que contiene el segmento de recta. Asimismo, se reconocieron rasgos de la perspectiva matemática de tal manera que se toma en consideración la idea del estudiante de asociar la mediatriz con un ángulo y además, se considera que la mediatriz no es única: "Dos rectas que pasan por el punto medio" (línea 36). Se reconoce cómo se privilegian unas imágenes de un concepto y se dejan de lado otras imágenes.

Dado que el objetivo de referencia es común por pertenecer al mismo episodio de referencia, es posible interpretar que las matemáticas son accesibles a los estudiantes, ya que se justifica de la misma manera el nexo entre la perspectiva matemática y los referentes curriculares. En relación con el segundo criterio (lo significativo de las matemáticas), se reconocen en las acciones de los estudiantes aspectos de la perspectiva matemática relacionadas con los objetivos matemáticos formulados para esta secuencia de enseñanza. Por tanto, se considera que las matemáticas son significativas desde el punto de vista matemático.

La intervención del grupo de estudiantes en la línea 29 genera apertura, ya que Carlos interviene aclarando para precisar los alcances de la definición de mediatriz como respuesta. Carlos aprovecha la apertura, en el momento adecuado tal como se evidencia en las formulaciones: "Entonces, ¿qué significa mediatriz? Hablemos de las dos cosas, ¿forma un ángulo?" (línea 31); y "Dos rectas no, una recta, ¿qué pasa por dónde?" (línea 37).

5.1.9 **Momento de exploración visual**

Este segmento de enseñanza de Carlos, del segundo episodio de referencia que se recoge en esta viñeta, corresponde a la tercera clase. El objetivo es reconocer características de figuras geométricas obtenidas mediante un proceso de construcción. En la segunda entrevista, Carlos manifestó su intención con respecto a la secuencia de enseñanza: "La idea organizadora era que los estudiantes fueran reconociendo propiedades de los triángulos". Para ello, recuerda el procedimiento de construcción de un triángulo rectángulo de 8 cm de base y de 6 cm de altura, usando la construcción de la mediatriz y pregunta cuál es la hipotenusa en el triángulo dibujado. La Figura 5.2 corresponde a lo dibujado por Carlos y proporciona la información sobre las longitudes de los lados y el ángulo.

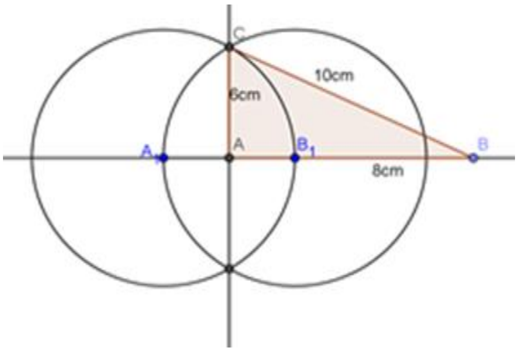

Figura 5.2 Carlos: Ilustración del triángulo rectángulo, tercera clase

Carlos, en este apartado del episodio de referencia en sus interacciones con los estudiantes, aborda contenidos asociados con las propiedades del triángulo rectángulo examinadas desde la visual interpretación de la frase “Hablemos de manera perceptiva” (línea 50) y criterios derivados de la clasificación de los triángulos junto con sus definiciones. Esto sucede en un momento de clase en el cual es relevante la explicación del profesor en cuanto a la extensión y a las preguntas reiteradas para precisar propiedades de la hipotenusa. Como se ilustra mediante las líneas del episodio de referencia que se presentan en la Tabla 5.8.

Tabla 5.8. Momento de conceptualización en la exploración visual

	Turno	
		Momento de conceptualización en la exploración visual
51	A10	responde expresando que es la que vale 10 [lado de mayor longitud en la ilustración].
52	Carlos	¿qué característica tiene aquel con medida 10? o ¿qué diferencia tiene respecto a los otros dos lados?, ¿qué tiene de especial?
53	A10	expresa son diferentes es la hipotenusa
54	Carlos	¿qué tiene de especial?
55	A1	es más largo que las otras dos
56	Carlos	empecemos a mirar características de la hipotenusa. Precisa que las características son geométricas en este caso las longitudes, la posición, y relacionada con otras cosas. Hay muchas cosas que usted puede observar en una figura. ¿Qué otras características?
57	A9	aparece en posición diagonal
58	A11	¿la figura puede hacerse en cualquier parte?
59	Carlos	el dibujo del triángulo sobre la pizarra, yo podía hacerlo de cualquier otra forma: ubicando su posición hacia abajo, ubicando su posición hacia cualquiera de los lados, hacia arriba. Muy bien, ¿qué pueden decirme sobre la hipotenusa?
60	Algunos estudiantes	responden en la parte de arriba, diagonal
61	Carlos 2	Con respecto al ángulo ¿dónde está?

Carlos formula dos preguntas ambiguas: “¿Qué característica tiene aquel con medida 10? O ¿qué diferencia tiene respecto a los otros dos lados? ¿Qué tiene de especial?” (línea 52); y, “¿Qué tiene de especial?” (línea 54). Ambas preguntas tenían la intención de precisar rasgos de la hipotenusa. Posterior a estos eventos, se presenta el momento de contingencia del pensamiento matemático: “¿La figura puede hacerse en cualquier parte?” (línea 58). Él sugiere ver el triángulo rectángulo en relación con los lados restantes, los ángulos y su posición en el plano. La estudiante A11 pregunta si la figura puede hacerse en cualquier parte, lo que se interpreta como posibilitar imágenes del triángulo cuando varía su posición y compararlas entre sí con el fin de examinar el comportamiento de la hipotenusa.

El momento de contingencia que surge en la interacción cualifica el pensamiento matemático del estudiante, ya que se evidencian avances en relación con la perspectiva matemática: “La hipotenusa es más larga que los otros dos lados” (línea 55). Su importancia se debe a que en este nivel los estudiantes construyen y describen figuras geométricas, pero además, establecen relaciones entre estas para definirlas con precisión (Common Core State Standards Initiative, 2011; MEN, 2007). La perspectiva matemática es central porque guarda conexión con el objetivo propuesto para esta sesión de clase. En consecuencia, el momento del pensamiento matemático es significativo desde lo matemático.

Carlos, cuando responde la pregunta de A11, pone énfasis en que el triángulo rectángulo puede ser dibujado en cualquier otra forma y reitera preguntar a los estudiantes sobre lo que pueden decirle acerca de la hipotenusa: “El dibujo del triángulo sobre la pizarra, yo podía hacerlo de cualquier otra forma: ubicando su posición hacia abajo, ubicando su posición hacia cualquiera de los lados, hacia arriba. Muy bien, ¿qué pueden decirme sobre la hipotenusa?” (línea 59). La respuesta no genera condiciones para aprovechar la apertura que genera la petición de A11. Posiblemente, poco responde a la necesidad de clarificar la explicación, después de proveer situaciones orientadas a enriquecer el tratamiento desde lo visual, para posteriormente expresar características usadas en las definiciones (Gutiérrez y Jaime, 2012). Se infiere que esta apertura no se aprovecha en el momento oportuno, por lo que no se cumple el segundo criterio que cumple una oportunidad pedagógica. En consecuencia, el momento del pensamiento matemático no configura un momento de enseñanza porque no cumple con las características que se mencionan en la matriz de análisis.

Tercera clase de Eva

5.1.10 **Momento de conjetura**

En esta clase, Eva explora las propiedades de la congruencia de ángulos y segmentos mediante la resolución de problemas de construcción geométrica. El momento se presenta, en el tercer episodio de referencia.

Eva formuló la situación que propone a los estudiantes, mediante el enunciado y el dibujo que se presentan a continuación: ¿Cómo construir un triángulo congruente al triángulo ABC dado?

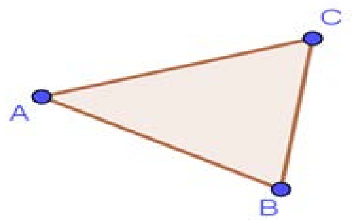

Figura 5.3: Triángulo equilátero.

En la interacción con los estudiantes durante la clase, Eva desarrolló como acción de enseñanza dominante preguntar con distintas finalidades. Esta acción consiste en preguntas encaminadas a la selección de instrumentos en formulaciones como: “Mide los segmentos AC y su correspondiente A’C’ y determina si son congruentes. ¿Con qué lo vas a medir?” (línea1); a preguntas por los procedimientos: “¿Qué pasó que no le dieron iguales? ¿Será que al construir dos lados congruentes, el tercero también lo será?” (línea 6); y “¿Quién le puede ayudar a A1? [Él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes]. ¿Qué se puede hacer para que el tercero también le dé congruente?” (línea 8). Las acciones del estudiante A1 se caracterizan porque la acción explicar. En este tipo de acción, se registran cambios en el segmento de enseñanza que van desde la selección del instrumento (para medir longitudes) a explicar el procedimiento de construcción.

Las acciones de enseñanza de Eva, las acciones de A1 y los conocimientos en juego respecto a la congruencia, conforman un sistema en el que las acciones tanto de Eva como de A1 resultan asimétricas. Los contenidos matemáticos abordados por el estudiante se caracterizan por la iteración con el uso del compás para transportar longitudes: “¿Si los dos triángulos fueran congruentes, cómo deberían ser sus lados?” (línea 3); extiende la definición de congruencia de segmentos a congruencia de triángulos “Deberían ser iguales” (línea 5); y la formulación de la conjetura mediante la que se establece que es posible construir un triángulo congruente al dado, trasladando solo dos de sus lados y completando luego el tercer lado.

A1 fue quién protagonizo el momento contingente del pensamiento matemático cuando después de trasladar dos de las longitudes de los lados de un triángulo e intentar completarlo, el lado obtenido no resultó congruente con su correspondiente del triángulo dado: “Compara los lados correspondientes a AC y AB (respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida), mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida” (línea 4). Las matemáticas del estudiante que se infieren insisten en la conjetura que formuló para construir el triángulo. En torno a este momento del tercer episodio de referencia, se reconoce el segmento de enseñanza que se presenta en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9. Momento de conjetura

	Turno	
		Momento de conjetura
1	Eva	…midió los segmentos AC y su correspondiente A’C’ y determina si son congruentes. ¿Con qué lo vas a medir
2	Varios estudiantes	responden en voz alta con el compás
3	Eva	¿Si los dos triángulos fueran congruentes, cómo deberían ser sus lados?
4	A1	Compara los lados correspondientes a AC y AB [respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida], mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida.
5	A1	deberían ser iguales
6	A1	¿Qué pasó que no le dieron iguales?,¿Será que al construir dos lados congruentes, el tercero también lo será?

7	A1	intenta explicar revisando de nuevo los trazos que efectuó.
8	Eva:	¿Quién le puede ayudar a A1? [él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes]. ¿Qué se puede hacer para que el tercero también le dé congruente?
9	Eva	Te están diciendo que de nuevo lo mías
10		

Se infiere que la perspectiva matemática subyace a la formulación contenida respecto a las propiedades de los lados en triángulos que son congruentes: si los triángulos son congruentes, “los lados deben ser iguales” [lo entrecomillado es la expresión del estudiante A1] (línea5).

En A1 se caracterizó su práctica matemática. Igualmente, se reconoció cómo a algunas de sus acciones subyace la perspectiva matemática: “¿Si los dos triángulos fueran congruentes, cómo deberían ser sus lados?” (línea 3). También en: “Intenta explicar revisando de nuevo los trazos que efectuó” (línea 7). Asimismo, se reconoció que la actividad de dibujar y construir figuras (Common Core State Estándar, 2011) y los problemas de construcción geométrica permiten estudiar las propiedades y la congruencia de figuras bidimensionales (Ministerio de Educación Nacional, 2007), por lo que se expresa que la perspectiva matemática es accesible a A1.

De la misma forma, se infiere que la perspectiva matemática es central porque guarda conexión con el objetivo propuesto por Eva. Por lo que se establece que el momento cumple la característica de ser significativo desde un punto de vista matemático.

Las acciones como preguntar, ya descritas, permiten gestionar el pensamiento matemático. Esta acción se ha valorado como importante para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante (Franke, Webb, Chan, Ing, Freund y Battey, 2009). A1 posibilitó que se generara apertura al asumir la necesidad intelectual de reconocer por qué su conjetura es falsa y asumir otra perspectiva en la argumentación al formular: “Compara los lados correspondientes a AC y AB (respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida), mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida” (línea 4). Finalmente, Eva aprovechó la apertura debido a que posibilitó la exploración de la conjetura de A1 y a través del uso de preguntas, modificó la formulación del problema y preguntó para posibilitar la participación de otros estudiantes. Se concluye que el momento del pensamiento matemático cumple con las características determinadas en la aproximación teórica sobre las oportunidades pedagógicas con significado matemático. Estas se plasman en la matriz de análisis (ver 4.3.2), por lo que se reconoce el momento de enseñanza.

5.2 Tipología de momentos con oportunidades pedagógicas significativas

Los momentos de enseñanza fueron clasificados usando los datos analizados y los análisis que se estructuran en la narrativa de viñetas. Se obtuvieron tipos de momento de: (a) conceptualización, (b) representación prototípica, (c) reconocimiento de una propiedad invariante, (d) el proceso de construcción y (e) conjetura. Se efectuó una caracterización de la clasificación de los momentos de enseñanza (ver Tabla 4.2). Esta clasificación se fundamenta en los resultados obtenidos en el segundo nivel de análisis (fase II), en el que se obtuvieron momentos de enseñanza y otros que no pueden catalogarse como tal por no cumplir con todas las características que conforman la estructura analítica. Los momentos comparados corresponden a dos clases de Carlos y una de Eva.

En la comparación de los momentos de enseñanza se retomaron elementos que estructuran cada una de las viñetas. Se comparan según los elementos que se mencionan en la sesión 4.4.

Momento de conceptualización

El protagonista del momento del pensamiento matemático puede ser el profesor o el estudiante. En el primer caso, el momento de contingencia del pensamiento se asocia con una pregunta que genera conflicto en los estudiantes. Esto se ilustra cuando Carlos en la exposición preguntó “si cualquier segmento sería un radio” (línea 12, corresponde a la Tabla 5.1.1: Momento de conceptualización). Se detectó un momento contingente del pensamiento matemático que se presenta en las interacciones entre el profesor y A2. En el segundo caso, se conjetura un momento del pensamiento matemático contingente, cuando algunos estudiantes expresan su imagen de la mediatriz como rectas (“… forman un ángulo recto”) y Carlos se centra en preguntar con la finalidad de precisar la definición cuando señala: “Entonces ¿qué significa mediatriz?” (línea 31); “¿Por dónde pasa?” (línea 33). “Entonces, A1 defina lo que es una mediatriz” (línea 35). Estas líneas, corresponden al momento de enseñanza de conceptualización que se plasma en la Tabla 5.1.7.

En el primer caso, las matemáticas del estudiante se caracterizan porque un estudiante reconoce parcialmente las propiedades del objeto geométrico (radio, mediatriz), la perpendicularidad entre la recta (mediatriz) y la recta que contiene el segmento de recta. En el otro caso, de las matemáticas del estudiante se infiere que están asociadas con la definición de la mediatriz, la perpendicularidad entre la recta (mediatriz) y la recta que contiene el segmento de recta.

En el primer caso, la perspectiva matemática se relacionó con las matemáticas del estudiante, al considerar como ideas las expresiones de los estudiantes: “el radio es una línea recta que une dos puntos” (A2); “El radio parte del punto A al punto B” (A2); “El radio va del centro al lado” (A3). En cualquiera de estas ideas, el radio se asume aislado de la circunferencia, es decir, como un segmento cualquiera. La idea matemática es cercana a la perspectiva matemática. Las matemáticas del estudiante se apoyan en una idea secundaria.

En el segundo caso, se reconocieron rasgos de la perspectiva matemática de tal manera que se toma en consideración las ideas del estudiante de asociar la mediatriz con el ángulo y de que esta no es única. Esto se observa cuando A8 señala que “las líneas tienen el mismo ángulo” (línea 29) y además, cuando A1 indica que “dos rectas que pasan por el punto medio” (línea 36). Estas líneas forman parte de la Tabla 5.1.7: Momento de conceptualización.

La apertura se genera a partir de la pregunta conceptual que genera conflicto en el estudiante o por la formulación de preguntas. El momento oportuno transcurre en el momento en que el profesor introduce un contraejemplo o plantea preguntas que permiten expansión del momento del pensamiento matemático.

En el segundo caso, Carlos aprovechó la apertura en el momento adecuado tal como se evidencia en las siguientes formulaciones de preguntas que él hizo: “Entonces, ¿qué significa mediatriz? Hablemos de las dos cosas, ¿forma un ángulo?” (línea 31); “¿Por dónde pasa?” (línea 33); o “dos rectas, no una recta, ¿qué pasa por dónde?” (línea 37). Estas líneas están plasmadas en la Tabla 5.1.7: Momento de conceptualización.

Carlos pregunta para clarificar el sentido de distintas ideas (imágenes) de un concepto: “¿Qué tiene de especial ese segmento? ¿De dónde a dónde va?” (línea 14) y “responde del punto A al punto B” (línea 15). Las preguntas evolucionan, el profesor desarrolla una pregunta para provocar una expansión a partir del momento de pensamiento. Luego, él introduce un dibujo dinámico y aplica el instrumento de arrastre. Esto se evidencia cuando el profesor señala: “Vamos a ver qué pasa si dibujo un nuevo segmento que une el centro con la circunferencia [lo dibujé en otro sector de la circunferencia]. Este (refiriéndose al dibujo) ¿es un radio?” (línea 18). Los registros de las líneas corresponden a la tabla 5.1.1: Momento de conceptualización.

En el momento de enseñanza que corresponde al primer caso, el profesor decidió explicar (aclarar) al suministrar una interpretación y preguntar para reconocer los significados de los estudiantes. Este es el tipo de decisión dominante posterior al momento de pensamiento, como se ve cuando dice: “si fuera otro segmento XY” (línea 16).

La otra decisión se destaca por sus alcances posteriores al momento de pensamiento. Mediante esta decisión desarrolla una explicación y pregunta para expandir el momento de pensamiento, como se evidencia en lo que dice Carlos: “Vamos a ver qué pasa si dibujo un nuevo segmento que une el centro con la circunferencia [lo dibujé en otro sector de la circunferencia]. Este (refiriéndose al dibujo) ¿es un radio?” (línea 18). En este momento de enseñanza, el profesor decidió explicar (aclarar) al suministrar una interpretación y preguntar para reconocer los significados de los estudiantes. Este es el tipo de decisión dominante después del momento de pensamiento.

Momento de representación prototípica

El protagonista es el profesor. El momento del pensamiento matemático contingente se conjetura con respecto a lo que manifestó Carlos: “[…] un radio es un segmento que va del centro a la derecha, yo hice otro. Les estoy preguntando si este es un radio. [Manipula el radio con la función arrastre desplazando uno de sus extremos sobre la circunferencia, describiendo la trayectoria circular]. ¿Es un radio? ¿Sí es o no un radio? ¿Por qué este sí [señala el segmento dibujado inicialmente] y ¿por qué el otro no?" (línea 20). Estas líneas están contenidas en la Tabla 5.1.2: Momento de representación prototipo. En este momento, Carlos trata de que los estudiantes pongan en relación su imagen del radio con las que suscita su dibujo dinámico, al ser sometido al arrastre y compararlo con la representación prototípica.

Las matemáticas del estudiante están asociadas con ideas (imágenes) del objeto geométrico (el radio como segmento, uno de cuyos extremos es el centro el otro extremo sin delimitar con claridad), tal como se evidencia en la línea 20. Las matemáticas del estudiante se apoyan en una idea secundaria cuando se examina en relación con la perspectiva matemática. La idea de referencia para determinar la perspectiva matemática es una concepción.

La apertura se asocia con acciones del profesor, posteriores al momento del pensamiento matemático contingente y se produce por la necesidad de explicar de A4 y el esfuerzo del profesor, de clarificar mediante la formulación de preguntas. Carlos lleva a cabo acciones como corregir: "El radio no es un segmento que va del centro a la derecha, del centro a la izquierda, del centro a un lado. El radio es un segmento que va desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia. Es decir, que el radio es lo que realmente define la circunferencia" (línea 21); clarificar: "¿Cómo se mantiene la longitud del radio?" (línea 22); registrar: "se queda quieto, y yo lo estaba viendo en movimiento" (línea 24) y proceder a tratar de conectar distintas representaciones del radio, cuando reseña: "yo lo estoy viendo en movimiento [arrastra el segundo radio sobre la circunferencia]. Este es un radio, el que estoy moviendo. Las manecillas de un reloj podrían tomarse como un radio" (línea 26). Las líneas mencionadas son tomadas de la Tabla 5.1.2.

Carlos respondió al momento del pensamiento matemático cuando corrige lo expresado por el estudiante A2: "El radio es un segmento que va del centro a un lado" y procede a definirlo: "El radio es un segmento que va desde el centro a un punto cualquiera de la circunferencia". Posteriormente, aparecen como acciones preguntas para clarificar la propiedad central del radio (la invariancia de la longitud en relación con el arrastre), cuando expresa: "¿Cómo se mantiene la longitud del radio?". Finalmente, constata un hecho geométrico al afirmar: "Yo lo estoy viendo en movimiento", y conecta con otras representaciones de la experiencia al expresar: "Este es un radio, el que estoy moviendo. Las manecillas de un reloj podrían tomarse como un radio".

La secuencialidad en la que transcurren las acciones permiten interpretar que no se aprovechó oportunamente el momento del pensamiento matemático. La acción de corregir, haciendo uso de la definición, genera ambigüedad en relación con acciones posteriores como aclarar mediante la formulación de preguntas y conectar distintas representaciones.

Las decisiones de acción están asociadas con las transformaciones que sufren las acciones del profesor con posterioridad al reconocimiento del momento del pensamiento matemático del estudiante. No obstante, Carlos, de la acción de corregir pasó a la acción de aclarar mediante la formulación de preguntas, y de esta acción a conectar eventos. En el momento de respuesta al proceso, eligió descartar las ideas previas y dio la definición, menguando así, las acciones que tienen lugar posteriormente, como clarificar y formular preguntas.

Momento de reconocimiento de una propiedad invariante

Quienes protagonizan el momento de contingencia del pensamiento matemático son un grupo de estudiantes de la clase. Este preciso momento del pensamiento matemático quedó determinado cuando los estudiantes responden a Carlos que si se desplaza el radio en una circunferencia "la medida no cambia" (línea 30), extraída de la Tabla 5.1.3.

Las matemáticas del estudiante se caracterizan porque el contenido abordado se ubica en el dominio asociado con el reconocimiento de una propiedad invariante: la longitud del radio. Lo que se manifiesta cuando los estudiantes de la clase visualizan que al desplazar Carlos el radio sobre la circunferencia "la medida no cambia" (línea 30). La perspectiva matemática se asoció con la idea que expresan los estudiantes: "la medida del radio de la circunferencia no cambia".

La oportunidad pedagógica se presenta cuando los estudiantes reconocen la invariancia de la longitud del radio. Esto sucede cuando Carlos suministró una familia de representaciones comparables con la representación prototipo mediante el uso de dos instrumentos del ambiente de geometría dinámica del software Geogebra, el arrastre y la medida. Esto permite responder a la necesidad del estudiante de reconocer la invariancia del radio en un ambiente de geometría dinámica.

La apertura se aprovecha cuando se evidencian acciones del profesor posteriores al momento del pensamiento matemático que permiten avanzar en el desarrollo de la perspectiva matemática. Carlos llevó a cabo acciones como explicar (aclarar), cuando reseña: “Si arrastra de tal manera que se modifica el tamaño de la circunferencia: ¿cambia la longitud del radio? ¿Por qué creen que cambia?” (línea 31); “Pero en realidad estoy cambiando el tamaño ¿de qué?” (línea 33). Estas líneas forman parte de la Tabla 5.1.3: Momento de reconocimiento de una propiedad invariante.

Carlos recopiló cuando dijo que: “Un radio es un segmento que va desde el centro a cualquier punto de la circunferencia” (línea 35); “Damos nombres a ver”. “Destaca la medida de CQ es 4,69, la medida de CP es la misma. O sea que todos los radios miden igual” (línea 38). Están líneas están integradas a la Tabla 5.1.3.

Carlos corrigió cuando dijo que: “Esto que estamos viendo son las propiedades que ustedes tienen que aprender respecto al círculo y el uso del compás. Como dijimos que este va a ser nuestro compás, estoy haciendo esta introducción para que ustedes entiendan cómo usamos el compás o un círculo para poder trasladar longitudes [medidas]”. Como se puede interpretar se reconocen distintas y variadas acciones posteriores al momento contingente del pensamiento matemático del estudiante. En consecuencia, el momento se aprovechó oportunamente.

Las acciones del profesor, posteriores al momento del pensamiento matemático, que se destacan son: la acción de explicar (aclarar), luego, la acción de recopilar y por último, la acción de corregir. La trasformación de las acciones en su dinámica, se caracteriza porque se desplazan de explicar (aclarar) a recopilar y de recopilar a corregir.

Las decisiones de acción se conectan con las transformaciones que sufre la acción del profesor con posterioridad al momento del pensamiento matemático del estudiante. Estas transformaciones demarcan muchas posibles trayectorias para llegar de un estado a otro y se describen, en términos de un estado inicial y un estado final. Siendo el estado final la meta que le otorga sentido y permite describir la decisión.

Se identificaron dos tipos de decisiones de acción para este tipo de momento, que responden al momento del pensamiento matemático, es decir, cuando el profesor modifica sus acciones en respuesta al momento del pensamiento. Estos dos tipos son: (1) proveer ideas adicionales que contribuyen a dar sentido al momento; (2) describir una aproximación correcta, que permite la reflexión respecto al momento.

Momento del proceso de construcción

Los protagonistas en el momento de contingencia del pensamiento pueden ser parejas de estudiantes distintas. Las acciones del estudiante que determinan el momento del pensamiento ocurren cuando se expresa una pareja de estudiantes respecto a los radios en una circunferencia: "Responden que siempre tiene la misma medida" (línea 70); "Siguen siendo equiláteros, con diferentes medidas" (línea 87). Estos momentos del pensamiento matemático, se asocian con el cumplimiento de una propiedad y corresponden a momentos que forman parte de un mismo episodio (tercer episodio de la primera clase). Las líneas referenciadas forman parte de la Tabla 5.1.4: Momento exploración de un proceso de construcción.

Las matemáticas del estudiante que se infieren, se asocian con el reconocimiento de una propiedad geométrica. Cuando los estudiantes manifiestan "los radios en una circunferencia tienen la misma medida", se reconoce el triángulo equilátero como invariante cuando se somete al arrastre. Posteriormente, a la utilización de propiedades geométricas por los estudiantes para su construcción, la perspectiva matemática se asocia con el reconocimiento de la invariancia de la longitud del radio y las propiedades que permiten construir el triángulo equilátero.

En relación con una de las respuestas de los estudiantes, en la línea 70, se genera apertura y Carlos hace énfasis en acciones de respuesta posteriores al pensamiento matemático del estudiante, como explicar (aclarar), tal como acontece cuando expresa “al fin que, ¿con diferentes medidas?” (línea 89). En menor proporción, se reseña la acción de conectar estrategias de solución como sucede cuando expresa: “Piensen entonces cómo usarían la herramienta circunferencia. Por algo, la explicamos al principio” (línea73). Las líneas mencionadas forman parte de la Tabla 5.1.4.

Carlos aprovecha la apertura en el momento adecuado al reformular el problema en función de un procedimiento que se caracteriza por la posibilidad de iterar: “¿Cuál sería el radio que usted quiere reproducir varias veces?” (línea 74). Esto con el fin de construir sentido en el proceso de solución del problema. Luego, procede a explicar (aclarar) cuando reseña: “El original cierto y lo resalta en el dibujo del triángulo” (línea 75). Las líneas referenciadas forman parte de la Tabla 5.1.4.

Carlos, con su intervención cuando reseña: “Si yo muevo esto y el triángulo permanece equilátero está perfecto. Si yo lo muevo y se deforma hay que volverlo a hacer. ¿Qué pasa?,¿Estoy moviendo el radio los lados siguen siendo iguales en longitud?” (línea 87), desencadena una respuesta en A10 y A11. En esta respuesta, se manifiesta la necesidad de explicar y precisar para clarificar su procedimiento de construcción y el dibujo dinámico elaborado: “A11 con medida diferente de 5 cm” (línea 90). Por lo que la intervención mediante la formulación en la línea 87 generó apertura (al suministrar un procedimiento de validación del proceso de construcción elaborado). Estas líneas forman parte de la Tabla 5.1.6: Momento de definición.

Las trasformación de las acciones se caracterizan porque se desplazan de explicar (aclarar) a conectar y de conectar a explicar. Las decisiones de acción se conectan con las transformaciones que sufre la acción del profesor con posterioridad al momento del pensamiento matemático del estudiante.

Se identificaron dos tipos de decisiones de acción para este tipo de momento, que responden al momento del pensamiento matemático del estudiante. Estas son: (1) conectar estrategias de solución que están integradas con el momento;

(2) interpretar y conectar para orientar los significados construidos por el estudiante.

La tipología de momentos de enseñanza se construyó mediante la comparación de momentos de enseñanza. Este proceso se hizo factible usando solo dos de las características de la estructura analítica, el pensamiento matemático y las oportunidades pedagógicas. No se incluyó información relativa a lo significativo desde el punto de vista matemático porque a través de esta característica se provee información del contexto.

Entre los trabajos previos referidos a momentos de enseñanza, se retoman los aportes de Stockero y Van Zoest (2013), que determinan las características de momentos pivote para la enseñanza de las matemáticas al ampliar la intervención que se presenta cuando el estudiante formula una pregunta o comentario apoyado en las matemáticas planeadas o discutidas por el profesor.

Stockero y Van Zoest (2013) aportan una caracterización de los momentos pivote, de los que reconocen cinco tipos: ampliación se presenta cuando los estudiantes hacen comentarios o preguntas, fundamentados en las matemáticas que el profesor planea; matemáticas incorrectas se presenta cuando una solución incorrecta se hace pública; construir sentido los estudiantes tratan de construir sentido de las matemáticas de una lección; contradicción matemática se presenta cuando dos respuestas diferentes a un problema tienen lugar, respecto a un problema que debería tener una única respuesta; confusión matemática la expresión de la confusión matemática de los estudiantes en la clase.

La tipología de los momentos pivote comparada con la tipología de los momentos de enseñanza se articulan parcialmente. Esto es debido a que se reconocieron momentos de enseñanza que cumplen con las características de los momentos pivote. Ningún momento de enseñanza cumple las condiciones de los momentos cuando hay contradicción

Ponte, Mata-Pereira y Quaresma (2013) establecen la distinción entre acciones del profesor vinculadas a tópicos matemáticos, procesos y la gestión de aprendizaje. Su estudio guarda relación con esta investigación porque permite explicar el papel de la acción de preguntar, que se manifiesta en los momentos de enseñanza de conceptualización, conjetura y representación prototipo.

Peterson *et al.* (2017) proponen un esquema de codificación de respuesta del profesor para momentos del pensamiento matemático del estudiante. En este, se reconocen las categorías: actor, que es quien se compromete en la respuesta del pensamiento matemático del estudiante, identificación que alude a que tanto la contribución del estudiante al pensamiento matemático es reconocida como idea matemática, matemáticas documenta la relación entre la comprensión matemática en la que enfatiza el profesor en respuesta a un momento del pensamiento matemático y la perspectiva matemática del momento. El cambio o transformación que el actor hace o pregunta en relación con el momento del pensamiento matemático del estudiante.

Finalmente, los dos criterios que determinan las oportunidades pedagógicas están asociados a las transformaciones que se registran en las acciones del profesor como respuesta a las acciones de los estudiantes. Estos dos criterios se utilizan como referentes integrados al contexto.

En la tipología de los momentos de enseñanza, se destaca cómo los tipos de momento identificados (ver Tabla 5.1) a partir de los datos, están asociados con cuatro procesos que se asocian con el desarrollo de pensamiento geométrico: conceptualización, reconocimiento de una propiedad, proceso de construcción y definición. Estos cuatro procesos se pueden enmarcar en dos de los cuatro procesos claves que componen el razonamiento y el sentido geométrico (McCrone, King, Orihulea y Robinson, 2010): conjeturar respecto a los objetos geométricos (analizar configuraciones y razonamiento inductivo acerca de las relaciones para formular conjeturas); construir y evaluar argumentos geométricos (desarrollar y evaluar argumentos deductivos acerca de las figuras y sus propiedades —tanto formales como informales— para ayudar a darle sentido a situaciones geométricas).

Momento de conjetura

A1 fue quién protagonizó el momento contingente del pensamiento matemático, cuando después de trasladar dos de las longitudes de los lados de un triángulo e intentar completarlo, el lado obtenido no resultó congruente con su correspondiente del triángulo dado. “Compara los lados correspondientes a AC y AB (respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida), mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida” (línea 4). Las matemáticas del estudiante que se infieren, enfatizan en la conjetura que formuló para construir el triángulo. En torno a este momento del tercer episodio de referencia, se reconoció el segmento de enseñanza plasmado en la Tabla 1. Se infiere que la perspectiva matemática subyace a la formulación respecto a las propiedades de los lados en triángulos que son congruentes, cuando A1 reseña: “Si los triángulos son congruentes los lados deben ser iguales” (línea5).

A1 posibilitó que se generara apertura al asumir la necesidad intelectual de reconocer que la conjetura es falsa y cambiar su perspectiva en la argumentación: “Compara los lados correspondientes a AC y AB (respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida), mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida” (línea 4).

Las acciones de Eva, posteriores al momento del pensamiento matemático del estudiante sufren transformaciones, en respuesta a la instancia del pensamiento matemático. Tal como acontece cuando Eva preguntó: “¿Qué pasó que no le dieron iguales? ¿Será que al construir dos lados congruentes, el tercero también lo será?” (línea 6, Tabla5.9). Mediante estas preguntas desarrolla la expansión del momento de pensamiento al conectar distintas estrategias de solución tal como lo expresa: “¿Quién le puede ayudar a A1? [Él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes]. ¿Qué se puede hacer para que el tercero también le dé congruente?” (línea 8, Tabla 5.9). Posteriormente, pasa de conectar distintas estrategias a retomar el momento de pensamiento por sugerencia de otros estudiantes: “Te están diciendo que de nuevo lo midas” (línea 9).

Eva aprovechó la apertura debido a que permitió la exploración de la conjetura de A1 y a través del uso de preguntas, modificó la formulación del problema y preguntó para posibilitar la participación de otros estudiantes, tal como se puede evidenciar con las transformaciones que sufre su acción. Se concluye que el momento del pensamiento matemático cumple con las características determinadas en la aproximación teórica sobre las oportunidades pedagógicas con significado matemático. Estas se plasman en la matriz de análisis (ver 4.3.2), por lo que se reconoce el momento de enseñanza.

Por tanto, las decisiones de acción se vinculan con las transformaciones que sufre la acción del profesor, posteriormente, al momento de pensamiento matemático. Las trayectorias que pueden sufrir estas transformaciones se enmarcan en el sentido que ellas adquieren. Estas decisiones de acción son: conectar distinto tipo de estrategias de solución relacionadas con el momento de pensamiento y retomar el momento de pensamiento con la participación de otros estudiantes.

5.3 Saber identificar destrezas del pensamiento matemático del estudiante

Los resultados que corresponden al segundo nivel de análisis, fase II, ponen en evidencia que es posible reconocer momentos de enseñanza en los que se construye pensamiento matemático del estudiante durante discusiones de clase con todo el grupo. Esto se configura como un aporte a los estudios sobre las competencias profesionales. Se reconoce que la incorporación de momentos del pensamiento matemático del estudiante ha sido objeto de estudio en la Didáctica de las Matemáticas, pero su potencial ha sido poco explotado, puesto que respecto a los momentos del pensamiento matemático y su uso en la enseñanza, se reconoce la ausencia de un lenguaje claro. Esto dificulta discutir sobre ellos, tanto por parte de los investigadores como por parte de los profesores y causa el vacío en la investigación respecto al uso de pensamiento matemático (Leatham *et al.*, 2015).

Las destrezas identificar, interpretar y decidir, que en su articulación configuran la observación profesional del pensamiento matemático (Jacobs *et al.*, 2011), subyacen a la aplicación de las características del pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde el punto de vista matemático y las oportunidades pedagógicas y los criterios componentes de estas características (Leatham *et al.*, 2015), para identificar momentos de enseñanza en los que se construye pensamiento. La destreza de atender en relación con la estructura analítica se asocia con el énfasis de esta en el pensamiento matemático del estudiante. Este tiene como contexto los episodios de referencia, que son reconocidos en relación con los objetivos propuestos por el profesor y la clase misma.

Para caracterizar el pensamiento matemático del estudiante, se examinan las transformaciones en las acciones del estudiante y las acciones de enseñanza de respuesta del profesor durante discusiones de clase. Posteriormente, se conjetura sobre la identificación del posible momento "contingente" del pensamiento matemático del estudiante. A partir de este momento, se infieren las matemáticas del estudiante, que se articulan a su vez con la idea matemática que determina la perspectiva matemática.

El momento y su entorno son analizados desde lo significativo de la perspectiva matemática. Se examina si la perspectiva matemática es apropiada y central a los estudiantes en el momento de pensamiento "contingente". Este tipo de análisis permite reconocer características contextuales del momento mediante las que es posible discriminar si un momento potencialmente puede encausar la comprensión matemática del estudiante en un episodio de referencia. En síntesis, el análisis de la destreza de interpretar permite valorar por qué un momento del pensamiento matemático que se hace público, puede construirse en una clase y en otra no, dando cuenta de las potencialidades de las ideas matemáticas en relación con progresiones del aprendizaje articuladas a una secuencia de enseñanza desde las metas del profesor.

El momento "contingente" del pensamiento matemático que cumple la condición de ser significativo desde las matemáticas se analiza pedagógicamente para establecer qué nivel de apertura puede construir el pensamiento matemático del estudiante y determinar si el tiempo es aprovechado oportunamente por el profesor para generar cambios que permiten el avance a partir de la perspectiva matemática del estudiante. La oportunidad pedagógica, como componente de la estructura analítica, está contenida en la destreza de decidir de la observación profesional (Stockero *et al.*, 2017). En consecuencia, los criterios, la apertura y el momento oportuno, permiten establecer el sentido de un momento del pensamiento matemático así como su valor en una clase específica.

En la perspectiva de Stockero *et al.* (2017), las tres actividades de la observación profesional (atender, interpretar y decidir) requieren de una combinación compleja de la observación dentro de y entre instancias del pensamiento. Por ejemplo, en la destreza atender se vislumbra como una actividad entre instancias del pensamiento. No obstante, inferir las matemáticas del estudiante incluye elementos de la observación dentro de esas instancias del pensamiento. Interpretar se visualiza de entrada como una actividad dentro de dichas instancias.

La comparación entre momentos de enseñanza (momentos que satisfacen la estructura analítica) es un aspecto contemplado en el tercer nivel de análisis. Puede visualizarse como una extensión de la observación profesional entre instancias del pensamiento, lo que posibilita la clasificación de los momentos de enseñanza (en relación con lo expresado en el numeral). Los momentos son clasificados en relación con sus atributos, los que son reconocibles al agrupar clases de momentos respecto a un atributo en un mismo episodio o episodios de referencia distintos.

Los momentos de enseñanza se caracterizan en relación con una estructura analítica que abarca las características del pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde un punto de vista matemático y las oportunidades pedagógicas. En esta investigación, la comparación de los momentos de enseñanza se centra en solo dos de estas características, el pensamiento matemático del estudiante y las oportunidades pedagógicas.

El componente oportunidades pedagógicas en la estructura analítica está contenido en el componente decisiones de la observación profesional. La decisión es la etapa en la que se usa el resultado de la observación dentro de instancias del pensamiento para influenciar la observación entre instancias (Stockero *et al.*, 2017). Así, podemos ver el análisis del momento del pensamiento matemático “Compara los lados correspondientes a AC y AB [respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida], mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida” (línea 4). En este momento, subyace la idea por parte del estudiante de comparar entre sí, las longitudes de los lados correspondientes, después de trasladar dos de las longitudes de los lados y completar el tercer lado completando la figura.

Este momento de enseñanza tiene como contexto el tercer episodio de referencia de la tercera clase. Es posible inferir, entre otros potenciales momentos del pensamiento matemático formulaciones como: “Varios estudiantes responden con el compás” (línea 2); “A1 intenta explicar revisando de nuevo los trazos que efectuó” (línea 7); y “¿Quién le puede ayudar a A1? [Él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes]. ¿Qué se puede hacer para que el tercero también le dé congruente?” (línea 8). Las líneas referenciadas forman parte de la Tabla 5.1.9: Momento de conjetura. Entre los momentos de pensamiento, se selecciona el que tiene mayor sentido para construir pensamiento.

Así, el análisis del momento del pensamiento matemático “Compara los lados correspondientes a AC y AB [respectivamente A’C’ y A’B’. Obtuvo que los AC y A’C’, AB y A’B’ tienen igual medida], mientras que los lados denotados como BC y B’C’ no tienen igual medida” (línea 4), al que subyace la idea por parte del estudiante de comparar entre sí las longitudes de los lados correspondientes, después de trasladar dos de las longitudes de los lados y completar el tercer lado completando la figura. Este momento de enseñanza tiene como contexto el tercer episodio de referencia de la tercera clase. Es posible inferir, entre otros potenciales, momentos del pensamiento matemático cuando los estudiantes manifiestan: “varios estudiantes responden con el compás”, (línea 2), “A1 intenta explicar revisando de nuevo los trazos que efectuó” y “¿Quién le puede ayudar a A1? [Él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes]. ¿Qué se puede hacer para que el tercero también le dé congruente?” (línea 8), entre estos momentos se selecciona el que tiene mayor potencial para construir pensamiento. Las líneas se encuentran en la Tabla 5.1.9.

5.4 Decisiones de acción

Las decisiones de acción presentan distintas características. Se reconocen para cada uno de los tipos de momentos de enseñanza que configuran la tipología y se asocian con componentes de los momentos de enseñanza. El elemento de los momentos de enseñanza, lo determinan los dos criterios que permiten determinar desde la aproximación teórica de las oportunidades pedagógicas con significado matemático. Se recurre a la clasificación obtenida de los momentos de enseñanza para fundamentar los análisis. Las decisiones de acción se asocian con componentes de los momentos de enseñanza que incluyen los dos criterios que permiten determinar si un momento del pensamiento matemático es una oportunidad pedagógica: la apertura y el momento oportuno. Estos dos criterios están contenidos en la destreza de decidir de la observación profesional del profesor.

El reconocimiento de las decisiones de acción fue determinado a partir de las transformaciones (cambios) que sufre la acción del profesor, posteriormente, al momento del pensamiento matemático del estudiante. Igualmente, es pertinente para determinar hasta qué punto se cumple el segundo criterio.

Las transformaciones en la acción del profesor admiten distintas opciones de trayectoria a seguir, pero identificar patrones, repeticiones o cambios lleva a asumir una direccionalidad del cambio o la transformación. Esto ha exigido categorizar las acciones del profesor apoyándose en el esquema de codificación que forma parte de investigaciones previas (Peterson *et al.*, 2017).

Para cada tipo de momento se identificaron algunas decisiones de acción. Así, para el momento de conceptualización se identificaron dos tipos de decisiones. El profesor decide explicar (aclarar), para lo que suministró una interpretación y posteriormente, una explicación. El segundo tipo de decisión consiste en que el profesor extiende el momento del pensamiento para lo que procede a explicar y luego, formula una pregunta.

Para el momento de representación prototípica se identifican como decisiones de acción, explicar (aclarar), posteriormente, a proponer una interpretación y preguntar para dar significado a lo expresado. La otra decisión es cuando el profesor articula distintas imágenes de un concepto a partir de preguntas. El profesor descarta el considerar la primera decisión e introduce ambigüedad al dar respuesta después del momento del pensamiento matemático descartando la decisión que tomó inicialmente.

6 Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación y se aportan reflexiones extraídas del estudio acerca de la observación profesional. En el primer y segundo apartado, se responden a las dos preguntas de investigación. En los apartados restantes, se abordan reflexiones más generales.

6.1 Observación profesional y estructura MOST

Con los resultados de este estudio, se pretende contribuir en la formación de profesores al mejoramiento de las competencias profesionales de los profesores de secundaria. El aporte consistió en el reconocimiento de momentos de enseñanza que permiten ilustrar prácticas de profesores en las que se hace uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante. Igualmente, adquiere importancia la tipología de estos momentos que permite caracterizar las decisiones de acción. No obstante, las tensiones reconocidas de la investigación respecto al uso del pensamiento matemático en la enseñanza, se reconoce que la comunidad de educadores matemáticos ha incentivado el uso del pensamiento matemático en la enseñanza (Leatham *et al.* 2015). El pensamiento matemático del estudiante carece del mismo potencial para fundamentar el aprendizaje del estudiante (Leatham, Van Zoest, Stockero y Peterson, 2014).

La observación profesional abarca las destrezas que se articulan entre sí: identificar, interpretar y decidir (Jacobs *et al.*, 2010). Estas se integran con las componentes de la estructura analítica para dar cuenta de la observación profesional. La destreza identificar se asocia con la caracterización del pensamiento matemático a partir del reconocimiento de una instancia del pensamiento en un episodio de referencia. De aquí se infieren las matemáticas del estudiante y su perspectiva matemática. La destreza interpretar contempla un análisis de lo significativo de la instancia de pensamiento, en relación con la adecuación de las ideas matemáticas al nivel de desarrollo del estudiante e igualmente, con los objetivos definidos para la lección, la unidad. Su análisis permite explicar el valor de una instancia en un episodio de referencia. Las decisiones están contenidas en los componentes de la oportunidad pedagógica utilizada. Estas permiten valorar la importancia de una instancia con respecto a otra en un episodio de referencia por el sentido construido en relación con la perspectiva matemática. Además de valorar hasta qué punto el profesor responde en la construcción de significados.

La observación profesional y la estructura analítica, dos aproximaciones teóricas que se articulan para reconocer momentos de enseñanza en los que se hace uso provechoso del pensamiento matemático, logran determinar el sentido que tiene la observación profesional para responder al interrogante ¿cómo un profesor identifica lo que es relevante para la enseñanza de la geometría para los alumnos y lo interpreta para fundamentar la toma de "decisiones de acción"?

En esta aproximación, lo que es relevante para la enseñanza de la geometría es la identificación de momentos de enseñanza reportados en la Fase II del análisis. Momentos de enseñanza que ilustran el uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante. Igualmente, se reconocieron momentos que no son de enseñanza que no satisfacen la totalidad de las características que incluye la estructura analítica, aunque permitieron inferir las matemáticas del estudiante.

Las decisiones de acción se obtienen a partir de la tipología, de la comparación de momentos de enseñanza de una misma clase y de clases diferentes de un mismo profesor, comparando el componente correspondiente a las oportunidades pedagógicas y de esta forma, se caracterizan las decisiones de acción.

6.2 Las decisiones de acción cuando emergen las oportunidades pedagógicas

Esta investigación se centró en las decisiones de acción porque se reconoce en la Educación Matemática la importancia de la toma de decisiones en aquellas aproximaciones teóricas en las que el pensamiento del estudiante es central (Jacobs, Lamb, Philipp y Schapelle, 2011).

En un primer acercamiento a las decisiones de acción, se ve que forman parte de uno de los tres componentes de la visión profesional de un profesor y se encuentran asociadas al razonamiento del profesor para responder a las estrategias del estudiante que aborda una situación (van Es y Sherin, 2002;

Fortuny y Rodríguez, 2012; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). La conceptualización de las decisiones de acción es consistente cuando se examina en relación con las destrezas identificar, interpretar y decidir (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010).

En la articulación de la observación profesional del pensamiento matemático de los estudiantes y la aproximación a las oportunidades pedagógicas desde la perspectiva matemática, la destreza decidir abarca el componente de la estructura analítica que cristaliza las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. El componente de oportunidades pedagógicas en las decisiones de acción abarcó dos criterios a examinar. El primero de ellos, es la apertura determinada al examinar en qué grado la expresión de las matemáticas del estudiante crean una necesidad intelectual. El segundo criterio, es el aprovechamiento del momento oportuno, el examinar si el profesor efectivamente toma ventaja de la apertura. Este segundo criterio determina potenciales opciones de trayectoria del profesor para dar respuesta al estudiante, con posterioridad al instante en el cual se identifica el momento del pensamiento matemático del estudiante. Si se cumplen ambos criterios podemos hablar de las decisiones de acción.

En este estudio las decisiones de acción se analizan en momentos de enseñanza a los que se aplicó la estructura analítica derivada de la aproximación a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática. Precisamente, se enfatiza en el proceso de comparación de estos momentos y se plasma mediante viñetas en relación con momentos de: conceptualización, representación prototípica, reconocimiento de una propiedad invariante y construcción. Estos momentos están asociados con el desarrollo del sentido geométrico.

Por cada momento, es posible identificar decisiones de acción. La direccionalidad de la trayectoria seguida por el profesor se estableció a partir del análisis comparado de las acciones del profesor en respuesta al momento de pensamiento matemático del estudiante. Por este motivo, las viñetas que describen los tipos de momentos incluyen quién protagoniza el momento de pensamiento, el pensamiento matemático del estudiante y los criterios que configuran las oportunidades pedagógicas. El análisis comparado de la respuesta del profesor al pensamiento matemático de los estudiantes, posteriormente, a la identificación del momento de pensamiento matemático, facilitó identificar los cambios o transformaciones en la acción del profesor. Asimismo, permitió determinar la dirección de tal transformación. Se utilizó un componente del esquema de codificación de respuesta de los profesores al pensamiento matemático de los estudiantes. Este componente es el correspondiente a las transformaciones, que reconoció 14 transformaciones.

Para cada tipo de momento, se establecieron las decisiones de acción, originadas en las acciones del profesor en momentos de enseñanza específicos, como por ejemplo, explicar (aclarar) para proveer interpretación y preguntar para la expansión del momento de pensamiento; y desarrollar la explicación y preguntar para auspiciar la expansión del momento. Aunque, la decisión dominante es explicar (aclarar) mediante la interpretación y preguntar para reconocer significados de los estudiantes. Esto se registra en el momento de conceptualización.

En el momento de representación prototípica, el profesor eligió descartar ideas previas y suministra su definición, lo que distorsiona acciones posteriores asociadas como clarificar y formular preguntas. En el momento de reconocimiento de una propiedad invariante, se reconocieron como decisiones de acción la de proveer ideas adicionales que contribuyen a dar sentido al momento y describir procedimientos correctos para reflexionar respecto al momento. En el momento del proceso de construcción las decisiones de acción están asociadas con el hecho de concretar estrategias de solución que están integradas con el momento de proveer interpretación y preguntar para orientar los significados construidos por el estudiante. En el momento de conjetura, las decisiones de acción son conectar distintos tipos de estrategias de solución relacionadas con el momento de pensamiento y retomar el momento de pensamiento con la participación de otros estudiantes.

6.3 Limitaciones y alcances

Se reconocen limitaciones asociadas con el dispositivo utilizado para medir la observación profesional. Dicho dispositivo se configuró en esta investigación mediante las observaciones de clase, la transcripción de los vídeos y las entrevistas para examinar aspectos de la práctica de profesores de secundaria en servicio. Estos aspectos examinados tienen que ver con la planificación y la gestión en la clase de matemáticas (aspectos que corresponden a una segunda fase del trabajo de campo). La limitación la determina la calidad de la información respecto a la planificación y las entrevistas posteriores del seguimiento de la secuencia de enseñanza desarrollada por los profesores respecto a un contenido geométrico en un periodo de tres o cuatro sesiones de clase.

Un trabajo de depuración del instrumento exige cualificar la información respecto a la planificación y la determinación de objetivos a distinto nivel, no solo en torno a una temática, si no en torno a la selección y secuenciación de las tareas en un periodo más amplio del que se ha dispuesto por limitaciones de tiempo y recursos. Lo mismo sucede respecto a la entrevista con mayor frecuencia en relación con el desarrollo de la secuencia y sobre posibles momentos del pensamiento matemático identificados en las transcripciones y observaciones de clase.

En esta investigación, en la construcción de los momentos de enseñanza, apoyada en la estructura analítica, posteriormente, al momento de inferir las matemáticas del estudiante al efectuar el análisis de lo significativo, se registran limitaciones para establecer el sentido y los alcances de la idea matemática en relación con estructuras del pensamiento matemático o trayectorias de aprendizaje. Se puso énfasis en los análisis, al usar los referentes curriculares como los estándares y trabajos de investigación en didáctica de la geometría sobre la enseñanza de la geometría referidos a procesos. Según Nickerson, Lamb y La Rochelle (2017), se reconoce que estudiar la observación profesional en la secundaria constituye un desafío metodológico.

En los desarrollos investigativos, se reconoce que estudiar la observación profesional del profesor en la educación secundaria constituye un desafío metodológico. Este se manifiesta en que existen pocas estructuras del pensamiento matemático del estudiante y de las trayectorias de aprendizaje en el nivel de la escuela secundaria (Nickerson, Lamb y LaRochelle, 2017).

Como estudio exploratorio, esta investigación respondió al interés en estudiar características de la práctica que permitieran dar cuenta de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante, en particular, poniendo énfasis en las decisiones de acción.

Los momentos de enseñanza que se construyeron en la Fase II satisfacen las características y criterios de la estructura analítica. Por tanto, dicha estructura analítica fue útil para construir momentos que son ilustrativos de prácticas de enseñanza en las que se hace uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante. Por lo que no se hizo notorio el desafío metodológico que plantea la disponibilidad de artefactos —vídeo y trabajo de los estudiantes—, para ser usados en medidas que ponen en evidencia ideas matemáticas de los estudiantes (Nickerson, Lamb y LaRochelle, 2017).

6.3 Perspectivas

Varias perspectivas podrían examinarse a partir de estudios que se centran en la articulación de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante y la estructura analítica. Con los mismos datos, se podría profundizar en el estudio de la observación profesional en las interacciones entre profesor, estudiante y recursos. Otra posibilidad, es estudiar la observación en relación con el uso de los materiales curriculares.

El estudio de la observación profesional que posibilita la construcción de momentos de enseñanza que ilustran el uso provechoso del pensamiento matemático del estudiante en la formación de futuros profesores, sirve de fuente para examinar el sentido y los alcances de diseños experimentales pertinentes. Estos diseños se emplean en la estructuración de trayectorias hipotéticas de aprendizaje utilizadas en la formación de profesores en una comunidad específica. Igualmente, se plantea la necesidad de investigar respecto a trayectorias de aprendizaje a nivel de la educación secundaria y de estructuras respecto al pensamiento matemático para este nivel de la escolaridad. Por ejemplo, en el caso de la enseñanza de la geometría de teorías didácticas que articulen el estudio de la práctica de los profesores y distintos tipos de fenómenos asociados con la construcción del pensamiento geométrico, como la naturaleza del saber geométrico, la representación, el discurso y los recursos.

6.4 Implicaciones formativas

En el diseño de lineamientos para la formación de futuros profesores y profesores en servicio en unidades académicas que forman profesores, los resultados del estudio evidencian el estado en el que se encuentran dichos profesores en el momento de la práctica en relación con el uso eficiente del pensamiento matemático en la enseñanza. Este estudio contribuye solo como punto de partida porque se vincularon profesores que pertenecen a una misma promoción de graduados y que se formaron en un programa de estudios de hace 14 años. Otros estudios, integrarán profesores de promociones más recientes para tener una trayectoria mejor delineada de los alcances y limitaciones de la formación ofrecida en los programas de formación. De este modo, estos resultados permitirán cualificar la toma de decisiones respecto a la formación de futuros profesores, así como la orientación de los programas de formación de profesores en servicio tomando en consideración los desarrollos investigativos de la didáctica de las matemáticas.

El contexto al cual se alude es de profesores con experiencia por encima de los 10 años y un proceso curricular, posterior al año 2002 que promueve, en el área de matemáticas, el desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes. Se requiere precisar que los resultados no permiten configurar un modelo de la práctica del profesor ni tampoco evalúan a los profesores. Dichos resultados configuran un instrumento para la investigación que permite dar cuenta de un momento de la práctica.

7 Referencias bibliográficas

Angrosino, M. (2007). *Doing ethnographic and observational research*. Sage.

Ball, D. L., Lubienski, S., y Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4a.ed.) (pp. 433-456). Washington, D.C.: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of teacher education*, *59*, 389-407.

Battista, M.T. (2011). Conceptualizations and Issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 507-570.

Cengiz, N., Kline, K. y Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of mathematics teacher education*, *14*(5), 355-374.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.3–38). Greenwich: Information Age.

Confrey, J., Maloney, A. P., y Corley, A. K. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *ZDM*, *46*(5), 719-733.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among ive approaches*. Usa: Sage.

David, M. M. y Lopes, M.P. (2002). Students teacher interactions and the development of student's mathematical thinking. En Goodchild, S., y English, L. D. (Eds.).*Researching mathematics classrooms: a critical examination of methodology* (pp. 11-38). Greenwood Publishing Group.

Davies, N., y Walker, K. (2005). Learning to notice: One aspect of teachers' content knowl-edge in the numeracy classrooms. En P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce y A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice—Proceedings of the 28th Annual Conference of the mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 273–280). Sydney, Australia.

Denzin, N., y Lincoln, Y. (1994). Part V: The art of interpretation, evaluation, and presenration. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), Handbooi of qualitative reseilrrh (pp. 479-483). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Escudero, I. (2003). *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, España.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., y Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, *27*(4), 403-434

Fortuny, J.M. y Rodriguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula*. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 23-32.

Franke, M. L., Webb N.M., Chan A. G., Ing M, Freund D. y Battey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education*, *60*(4), 380-392.

Gavilán, G.M., Garcia M. y Llinares, S. (2007). La modelación de una descomposición genética de una noción. Explicando la práctica desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática*, 19, 5-39.

Gellert, U. (2010). Integrating different perspectives to see the front and the back: The case of explicitness. *CERME 6–WORKING GROUP 9*, 1575.

Glaser, R., y Chi, M. T. H. (1988). Overview. En M. T. H. Chi, R. Glaser, y M. J. Farr (Eds.), The nature of expertise (pp. 15-28). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goodwin, C. (1994). Professional vision. American anthropologist, *96*(3), 606-633.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecne, Episiteme y Didaxis:* TED. Nº 32, 55-70.

Harel, G. (2013). Intelectual need. En K. R. Leatham (Ed), *vital directions for mathematics education research* (pp.119-153). New York, NY: springer.

Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L., y Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp R. A. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education*, *41*(2), 169-200.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (2011). Deciding how to respond on the basis of children’s understandings. In M.G. Sherin,. V.R Jacobs, y R.A. Philipp (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher’ eyes* (pp.97-116). New York: Routledge.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London: Falmer.

Kazemi, E., Franke, M. L., y Lampert, M. (2009). Developing pedagogies in teacher education to support novice teachers' ability to enact ambitious instruction. Paper preentado en annual meeting of the

Mathematics Education Research Group of Australia. Wellington, New Zealand.

Leatham, K. R., Peterson B. E., Stockero, S. L. y Van Zoest L. R. (2015). Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. *Journal for reseach in mathematics education, 46*(1), 88-124.

Levin, D. M., Hammer, D., y Coffey, J. E. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. Ponte y L. Sarrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Sección de- Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/Sociedad de Educación y Matemática.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing. London:* Routledge- Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing roots and branches. En M. G: Shering, V. R: Jacobs y R. A, Philipp (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher' eyes* (pp. 35-50). New York: Routledge.

McCrone S. H., King, J., Orihulea, Y., Robinson, E. (2010). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in geometry*.Reston: The national council of teachers of mathematics.

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas (Ministerio de Educación Nacional). Recuperado de: htpp://www.mineducacion.gov.co

National Research Council. (2001). Knowing what students know: The science and design of educational assessment. Committee on the Foundations of Assessment. Pelligrino, J., Chudowsky, N., and Glaser, R., editors. Board on Testing and Assessment, Center for Education.

Division of Behavioral and Social Sciences and Education.Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School mathematics*. Reston, VA: Author.

National Governors Association Centrer for Best Practices & Council of Chief State officers. (2010). Common core state standars for mathematics. Washington,DC: Authors.

Nickerson, S. D, Lamb, L. y LaRochelle, R. (2017). Challenges in measuring secondary mathematics teachers' professional noticing of students'. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds.). *Teacher noticing: bridging and broadening mathemati perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 381-398). Research in mathematics education. Springer International Publishing.

Peterson, B.E., y Leatham, K.R. (2009).Learning to use students' mathematical thinking to orchestrate a class discussion. En L. Knott (Ed.), *The role of mathematics discourse in producing leaders of discourse* (pp.99-128). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Peterson, B.E., Van Zoest, L.R., Rougeé, A. O. T., Free, B., Stockero, S. L., y Leatham, K. R. (2017). Beyond the "move": a scheme for coding teacher's responses to the students mathematical thinking. En Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., y Choy, B.H. (Eds.), *Proceedings of the 41 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 17-24). Singapore: PME.

Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (2011). Deciding how to respond on the basis of children's understandings. En M.G. Sherin,. V.R Jacobs, y R.A. Philipp (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher' eyes* (pp.97-116). New York: Routledge.

Pierson, J. L. (2008). *The relationship between patterns of classroom discourse and mathematics learning*. Tesis doctoral. University of Texas at Austin, USA.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55–81.

Putnam, H. (1992). *Realism with a human face*. Harvard University Press.

Remillard, J. T., y Geist, P.K. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(1), 7-34.

Roth, W.M. (2005). *Doing qualitative research: Praxis of method*. Rotterdam. Sense Publishers

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Santagata, R., Zannoni, C.,y Stigler, J.W.(2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of mathematics teacher education, 10*(2), 123-140.

Clements, D. H.,y Sarama, J.(2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Schoenfeld, A.H. (1998).Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*, *4*(1), 1-94.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. En F. K. Lester(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.69-111). Charlotte, NC: Information age.

Schoenfeld, A. H. (2008). On modeling teachers' in-the-moment decision-making. En A. H. Schoenfeld (Ed.), A study of teaching:Multiple lenses, multiple views. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Number X. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (2015). Thoughts on scale. *ZDM Mathematics education, 47*(1), 161-169.

Sherin, M.G., Jacobs V:R y Philipp R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs and R.A. Philipp (eds).*Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher' eyes* (pp. 3-13). New York: Routledge

Sherin, M.G., Russ, R.S., y Colestock A. A. (2011). Accesing mathematics teachers' in the moment noticing. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs y Philipp, R. A. (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher' eyes* (pp. 79-95.) New York: Routledge.

Sinclair, N. y Robutti O. (2013). Technology and the role of proof : The case of dynamic geometry. En M. Clements; A. Bishop; K. Keitel, J. Kilpatrick, y K. Leung (Eds.). *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571-596). NY: Springer.

Simon, M.A. y Tzur, R. (1999). Explicating the teachers' perspective from the researchers' perspectives: generating accounts of mathematics a teachers' practice. *Journal for research in Mathematics Education*, *30*(3), 252-264..

Sowder, J.(2007). The mathematics education and development of teachers. E F. K. Lester(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.157-223). Charlotte, NC: Information age.

Stein, M. K., y Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, *2*(1), 50-80.

Stockero, S. L. y Van Zoest L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 125-142.

Stockero, S. L. (2014). Transitions in propective mathematics teacher noticing. En J. J. Lo, K.R. Leatham y L.R. Van Zoest (Eds.). *Research*

Trends in Mathematics Teacher Education. Springer Interntional Publishing Switzerland.

Stockero, S. L., Leatham, K.R., Van Zoest, L. R., y Peterson, B. L. (2017). Noticing distinctions among and within instances of student matethematical thinking. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds.).*Teacher Noticing: Bridging and Broadening perspectives, contexts and frameworks*, Research in mathematics education (pp. 467-480). Springer Interntional Publishing Switzerland.

Sun, J. y.van Es, E. A. (2015). An exploratory study of the influence that analyzing teaching has on preservice teachers` classroom practice. *Journal of teacher education*, *66*(3), 201-214.

Thames, M. H., y Ball, D. L. (2013). Making progress in U.S. mathematics education: Lessons learned— past, present and future. En K. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 15–44). New York, NY: Springer.

Van Es, E. y Sherin, M. E: (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroon interactions. *Journal of tecnolology and teacher education*, *10*(4), 575-596.

Zapatera, A. (2015). *La competencia "mirar con sentido" de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante. España.