

UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Curvas en los espacios 3-dimensionales
pseudo-riemannianos de curvatura constante

D. José Antonio Ortega Yagües

2017

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mi director de tesis, Pascual Lucas Saorín, por haberme dado la oportunidad de trabajar junto a él. Por la confianza que ha depositado en mí y su incansable dedicación a lo largo de estos años. Por su inestimable ayuda y apoyo firme durante la realización de esta tesis doctoral.

También quiero mostrar mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Matemáticas que de alguna u otra forma me han apoyado a lo largo de esta etapa.

Deseo agradecer a mi familia y amigos el apoyo incondicional y la confianza que me han transmitido. También quiero agradecer a mis padres el que me enseñaran a soñar y a luchar por lo que uno quiere. Y no me olvidó de mi amigo Illán que siempre estuvo a mi lado y nunca dudó de mis posibilidades.

A Elisa y Rodrigo, por haber compartido esta odisea conmigo. No hubiera sido posible sin vosotros.

Curvas en los espacios 3-dimensionales pseudo-riemannianos de curvatura constante

Pascual Lucas Saorín, Catedrático de Universidad del Área de Geometría y Topología en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia,

AUTORIZA: La presentación de la Tesis Doctoral titulada “Curvas en los espacios 3-dimensionales pseudo-riemannianos de curvatura constante” realizada por D. José Antonio Ortega Yagües, bajo mi inmediata dirección y supervisión, en el Departamento de Matemáticas y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 19 de Abril de 2017

Fdo: Pascual Lucas Saorín

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	17
1.1. Conceptos y ecuaciones básicas	17
1.2. Espacios modelo	19
1.2.1. Producto vectorial y ángulo	20
1.2.2. Flujo geodésico	21
1.2.3. Transporte paralelo	21
1.3. La referencia de Frenet para una curva regular	22
1.4. Campos Killing	23
1.4.1. Resultados generales	23
1.4.2. Campos Killing en espacios de curvatura constante	24
1.4.3. Campos Killing a lo largo de curvas de Frenet	26
1.4.4. Campos Killing a lo largo de curvas pseudo-nulas	27
1.4.5. Campos Killing a lo largo de curvas nulas	29
1.5. Estructura cuaterniónica para \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}_1^3	30
1.6. Fibraciones de Hopf	31
1.7. Hélices generalizadas o curvas de Lancret	32
1.7.1. Construcción de hélices generalizadas no degeneradas	32
1.7.2. Construcción de hélices generalizadas degeneradas	33
2. Curvas de Bertrand	35
2.1. Curvas de Bertrand en espacios tridimensionales de curvatura constante	36
2.1.1. Propiedades de las curvas de Bertrand	36
2.1.2. Ejemplos	43
2.1.3. Curvas de Bertrand pseudo-nulas	46
2.1.4. Curvas de Bertrand nulas	47
2.2. Curvas de Bertrand como puntos críticos en $\mathbb{M}_q^3(c)$	49

2.3.	Curvas de Bertrand en espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_q^3	52
2.3.1.	Teoremas de Bioche y Burke en \mathbb{R}_q^3	53
2.3.2.	Integración geométrica de las LW-curvas	56
2.3.3.	LW-curvas y geodésicas en superficies regladas	58
3.	Curvas rectificantes	63
3.1.	Curvas rectificantes y superficies cónicas	63
3.2.	Ecuación natural de las curvas rectificantes	66
3.3.	Curvas rectificantes y superficies desarrollables	69
3.4.	Clasificación de las curvas rectificantes	72
3.5.	Curvas rectificantes como curvas extremas	76
3.6.	Curvas rectificantes y curvas de Bertrand en \mathbb{R}_q^3	81
3.6.1.	Curvas de Bertrand que son rectificantes	81
3.6.2.	Una familia de curvas de Bertrand como geodésicas en superficies	82
4.	Hélices slant	85
4.1.	Hélices slant en espacios tridimensionales de curvatura constante	86
4.1.1.	Hélices slant de Frenet	86
4.1.2.	Hélices slant pseudo-nulas	88
4.1.3.	Hélices slant nulas	89
4.2.	Hélices slant en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3	90
4.2.1.	Hélices slant y superficies hélice	92
4.2.2.	Una parametrización natural para las superficies hélice	96
4.2.3.	Métodos para construir hélices slant	101
4.3.	Superficies hélice en espacios no llanos	107
4.3.1.	Superficies hélice en \mathbb{S}^3	110
4.3.2.	Superficies hélice riemannianas en \mathbb{H}_1^3	111
4.3.3.	Superficies hélice lorentzianas en \mathbb{H}_1^3	112
4.4.	Integración geométrica de las hélices slant	114
4.4.1.	Integración geométrica de las hélices slant de Frenet	114
4.4.2.	Integración geométrica de las hélices slant pseudo-nulas	116
4.4.3.	Integración geométrica de las hélices slant nulas	119
	Bibliografía	123

Introducción

Durante los dos últimos siglos, el estudio de curvas en \mathbb{R}^3 de pendiente constante ha sido de un gran interés para muchos matemáticos dentro del campo de la geometría diferencial clásica. Se puede decir que el origen del estudio de las curvas de pendiente constante comienza con las *hélices generalizadas*. Estas curvas están definidas por la propiedad de que su campo de vectores tangente forma un ángulo constante con una dirección fija (llamada eje de la hélice) en cada punto de la curva. Un resultado clásico atribuido a M.A. Lancret (discípulo de G. Monge) en 1802, y demostrado por B. De Saint Venant en 1845 (véase [Str50, págs. 33–34]) es que una curva α parametrizada por el arco es una hélice generalizada si, y sólo si, τ/κ es constante, donde κ y τ son la curvatura y torsión de la curva α . A menudo las hélices generalizadas también son conocidas como curvas de Lancret. Tanto en el espacio de Lorentz-Minkowski como en los espacios de curvatura constante no nula tenemos un resultado análogo que relaciona las curvaturas de una hélice generalizada.

La construcción de curvas de Lancret en \mathbb{R}^3 se describe en un bonito algoritmo (véase [Str50]). Consideramos $\beta(s)$ una curva plana parametrizada por el arco y B un vector unitario normal al plano que contiene a la curva. Sea C_β el cilindro recto de sección transversal $\beta(s)$ el cual se puede parametrizar como $\phi(s,t) = \beta(s) + tB$. Entonces la geodésica de pendiente constante h es una curva de Lancret y cada curva de Lancret se puede construir de esta manera. Esta construcción de curvas de Lancret es también válida en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 (véase [BFLM01]).

En el caso de la esfera \mathbb{S}^3 , y utilizando la fibración de Hopf clásica $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(4)$, se puede obtener también una interesante construcción de las curvas de Lancret (véase [Bar97]). El autor prueba que una curva en \mathbb{S}^3 es una hélice generalizada si, y sólo si, es una geodésica de algún cilindro de Hopf. Además, también obtiene una relación análoga al teorema de Lancret para curvas en \mathbb{R}^3 : una curva no plana α en \mathbb{S}^3 es una hélice generalizada si existe una constante b tal que $\tau = b\kappa \pm 1$. En el caso lorentziano, el problema ha sido estudiado y resuelto en [BFLM01] para curvas de Frenet, es decir, curvas que no tienen ningún vector nulo en su referencia de Frenet; en este caso, la hélice generalizada se dice degenerada o no degenerada de acuerdo a que su eje sea un vector nulo o no nulo, respectivamente. Como en el caso esférico, una curva no plana α en \mathbb{H}_1^3 es una hélice generalizada si existe una constante b tal que $\tau = b\kappa \pm 1$. La hélice generalizada es degenerada si, y sólo si, $b = \pm 1$ y su vector normal es espacial. Usando la sumersión de Hopf pseudo-riemanniana $\pi_s : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow \mathbb{H}_s^2(-4)$, $s = 0, 1$, los autores prueban que una curva no

nula en \mathbb{H}_1^3 es una hélice generalizada no degenerada si, y sólo si, es una geodésica en algún cilindro de Hopf.

En la naturaleza es muy común encontrar estructuras con una configuración de tipo hélice o espiral. A menudo, los modelos matemáticos que se proponen para describir estas configuraciones helicoidales (véase, por ejemplo, [MC08, TCH08] y referencias incluídas), quizás por belleza o simplicidad, son hélices circulares. Sin embargo, una observación más detallada de las estructuras helicoidales muestra que las hélices circulares no se ajustan suficientemente bien a su configuración real. Motivados por este hecho, en [BF09], los autores se preguntan qué clase de hélices existen en la naturaleza. La respuesta está dada por un modelo con una densidad de energía que es una función lineal de la curvatura y torsión de la curva, y este modelo permite a los autores describir estructuras no cerradas incluyendo hélices elípticas, esféricas y cónicas. El espacio de configuraciones admisibles está formado por círculos, hélices y hélices generalizadas (o curvas de Lancret).

Podemos ampliar el concepto de curvas de pendiente constante al considerar también aquellas curvas tales que algún campo de su referencia de Frenet $\{T, N, B\}$ forma un ángulo constante con una dirección fija. Si consideramos el campo tangente o el campo binormal como el campo que forma un ángulo constante con una dirección fija obtenemos las hélices generalizadas. En esta memoria estudiamos la familia de las *hélices slant*, que son aquellas curvas con la propiedad de que su campo normal forma un ángulo constante con una dirección fija. El término *hélice slant* fue introducido por S. Izumiya y N. Takeuchi, [IT04], aunque se pueden encontrar ejemplos de esta clase de curvas estudiados con anterioridad (véase, por ejemplo, curvas de Salkowski, [Salk09, Mon09], curvas de precesión constante, [Sco95], o [KCC93]). Las hélices generalizadas y las hélices slant están profundamente relacionadas; basta observar que las rectas normales principales de una hélice generalizada son perpendiculares a una dirección fija, por lo que la familia de las hélices generalizadas está incluída en la de las hélices slant. Se puede ver, utilizando la definición de evoluta de una curva, que si una curva α es una hélice slant, la evoluta de α es una hélice generalizada ([Str50, págs. 39–40]). Por otra parte, tanto la indicatriz tangente como la indicatriz binormal de una hélice slant son hélices esféricas, [IT04, KY05]. Otra bonita relación entre estas dos familias de curvas aparece en [Men14], usando el concepto de transformación sucesora de curvas de Frenet: en esta transformación, el vector tangente de la primera curva toma el papel del vector normal principal de la segunda curva. Las hélices generalizadas serán, pues, las curvas sucesoras de las curvas planas, y las hélices slant las curvas sucesoras de las hélices generalizadas.

Se puede ver en [IT04] un resultado, similar al teorema de Lancret, que establece la ecuación natural para las curvaturas de las hélices slant: una condición necesaria y suficiente para que una curva α con $\kappa > 0$ sea una hélice slant es que la función

$$\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

sea constante. Observemos que el caso concreto de que $\sigma \equiv 0$ implica que α es una hélice generalizada reflejando, una vez más, que la familia de las hélices slant engloba a la familia de las hélices generalizadas.

Un tema que ha atraído el interés de muchos matemáticos en los últimos años ha sido el de superficie de pendiente constante o superficie hélice. Fueron introducidas en [DFVV07] como aquellas superficies en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ para las que el normal unitario forma un ángulo constante con la dirección tangente a \mathbb{R} . Más tarde, esta clase de superficies ha sido extendida a otros espacios ambiente (véase, por ejemplo, [DM09, MN09, DMVV11, FMV11, OY11, Ni11, DK12]). Estas superficies, además de tener un interés estrictamente matemático, han sido estudiadas en otras áreas. Por ejemplo, las aplicaciones de estas superficies en la teoría de cristales líquidos y de fluidos laminados fueron consideradas en [CS07]; también son de interés en el problema de obtener, a partir de las sombras, la forma de un objeto, véase [LRT93] (este es un clásico problema en visión por ordenador, [ZTCS02, DFS08]). Relacionado con esto, las curvas isofóticas juegan un importante papel en psicofísica visual y teoría de la visión, [KD80, Mar82]. Las curvas isofóticas en una superficie pueden ser identificadas como las curvas tales que el normal de la superficie a lo largo de la curva forma un ángulo constante con una dirección fija, [Mar86]. Por tanto, las curvas isofóticas están relacionadas con las hélices slant, [HII15]. El concepto de superficie de ángulo constante ha sido extendido a otras dimensiones en [DSRH09], donde los autores definen las subvariedades hélice como aquellas cuyo espacio tangente forma un ángulo constante con una dirección fija.

Otra familia de curvas que estudiamos en la presente memoria son las *curvas de Bertrand*. El matemático francés B. De Saint-Venant propuso en 1845, [Sain45], la cuestión de cuándo en la superficie reglada generada por los normales principales de una curva en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , puede existir una segunda curva cuyos normales principales sean los normales principales de la curva dada. Esta cuestión fue resuelta por J. Bertrand, [Bert50], en un artículo en el que mostró que una condición necesaria y suficiente para la existencia de dicha curva es que exista una relación lineal con coeficientes constantes entre la curvatura y torsión de la curva original. Desde la publicación del artículo de Bertrand, a estas dos curvas se les llama curvas de Bertrand conjugadas o, más comunmente, curvas de Bertrand. En este sentido, y desde un punto de vista algebraico, se puede considerar, teniendo en cuenta el teorema de Lancret, que las curvas de Bertrand guardan una relación con las hélices generalizadas.

Desde sus inicios, las curvas de Bertrand han motivado multitud de trabajos. En [Pea35], L.R. Pears extendió las propiedades de las curvas de Bertrand en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 a las curvas en el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n , $n > 3$. Sin embargo, en este último caso, encontró que κ_2 o κ_3 debería anularse; en otras palabras, las curvas de Bertrand en \mathbb{R}^n ($n > 3$) realmente están en algún subespacio euclídeo 3-dimensional $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^n$. El mismo resultado ha sido obtenido recientemente en [Ami00, pág. 176] y [MY03]. Como una consecuencia natural, se han propuesto algunas extensiones del concepto de curva de Bertrand (véase, por ejemplo, [GO86], [MY03], y más recientemente [CL09]).

Muchos autores han estudiado las curvas de Bertrand en otros espacios ambiente (dotados de métricas riemannianas o pseudo-riemannianas): en el espacio 3-dimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 ([EI2001], [BBE04], [BBI04]), en los espacios de Riemann-

Otsuki ([YB08]), en el espacio Galileano G_3 ([Ozt09]), en los espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_v^{n+1} ([ET2010]), etc.

La última familia de curvas que estudiamos en esta memoria es la formada por las curvas rectificantes. Es bien conocido que una curva de \mathbb{R}^3 está en un plano que contiene al origen si el vector posición de la curva está en el plano osculador para cada punto de la curva; la curva estará en una esfera centrada en el origen si su vector posición está en el plano normal para cada punto (véase, por ejemplo, [Won63, Won72]). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por el arco, B.Y. Chen propuso en [Chen03] la cuestión geométrica de qué curvas tienen siempre el vector de posición en el plano rectificante (cuestión también tratada en [KCC93]). A estas curvas las llamó, simplemente, *curvas rectificantes*. En general, una curva alabeada α en el espacio euclídeo se dice que es una curva rectificante si existe un punto p en \mathbb{R}^3 tal que

$$\alpha(s) - p = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s),$$

para algunas funciones diferenciables λ y μ .

En la ecuación anterior, se utiliza simultáneamente la doble naturaleza del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 : por una parte, como variedad diferenciable donde está inmersa la curva, y por otra parte, como el espacio tangente en cada punto de la curva. Desde el artículo de Chen, muchos autores han extendido la noción de curva rectificante a otros espacios ambiente (de dimensión $n \geq 3$), provistos de una métrica riemanniana o pseudo-riemanniana (véase, por ejemplo, [AO12, INPT03, IN07, IN08a, IN08b, OO09, GT11, GN12, IN14]). En todos los casos, la variedad y el espacio tangente pueden ser identificados, lo cual les permite un estudio análogo al realizado en [Chen03].

B.Y. Chen obtuvo una sencilla caracterización para la razón entre sus curvaturas. Una curva α en \mathbb{R}^3 , con $\kappa > 0$, es una curva rectificante si, y sólo si, la razón τ/κ es una función lineal no constante en su parámetro arco. Esta clase de curvas se llaman geodésicas cónicas en [IT04]. En una nota reciente, véase [Chen17b], el autor caracteriza las curvas rectificantes como las geodésicas de las superficies cónicas. Observamos que si el cociente τ/κ fuera constante la curva α sería una hélice generalizada. El resultado de B.Y. Chen se puede extender fácilmente para curvas no nulas en \mathbb{R}_q^3 (véase, por ejemplo, [INPT03]). Las curvas rectificantes y las hélices generalizadas tienen una caracterización común: el cociente τ/κ es una función lineal $c_1s + c_2$ ($c_1 = 0$ para las hélices generalizadas, y $c_1 \neq 0$ para las curvas rectificantes). En este sentido, las curvas rectificantes también guardan una bonita relación, desde un punto de vista algebraico, con las hélices generalizadas. En [CD05], los autores establecen una sorprendente relación entre las curvas rectificantes y la noción de centroide en mecánica (que no es más que el campo de Darboux de una curva). Los autores demuestran que una curva es rectificante si, y sólo si, o bien es el centroide de una curva con curvatura constante no nula y torsión no constante o bien es el centroide de una curva con curvatura no constante y torsión constante no nula. Por último, en trabajos recientes, B.Y. Chen introduce el concepto de subvariedad rectificante en variedades riemannianas (véase [Chen16], [Chen17], [Chen17c]).

Nuestro objetivo en esta memoria es exponer nuevos resultados obtenidos en el estudio de las curvas de Bertrand, curvas rectificantes y hélices slant en los espacios modelo tridimensionales de curvatura constante.

La memoria está organizada en cuatro capítulos. En el primer capítulo exponemos brevemente algunas generalidades y conceptos básicos para variedades y subvariedades pseudo-riemannianas. Sea $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$ el espacio de curvatura constante 3-dimensional de índice $q \in \{0, 1\}$ y curvatura constante $c \in \{-1, 0, 1\}$. En estos espacios, establecemos la noción de ángulo y de producto vectorial en cada espacio tangente. Así mismo, recordamos la parametrización de las geodésicas en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Después, en la sección 1.3, estudiamos las distintas referencias de Frenet para los tipos de curvas que existen en $\mathbb{M}_q^3(c)$, ya sean curvas de Frenet, curvas pseudo-nulas o curvas nulas. Seguimos con una interesante sección dedicada al estudio de campos Killing en espacios de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$, véase la sección 1.4. En dicha sección presentamos las ecuaciones para que un campo sea Killing a lo largo de una curva de Frenet, una curva pseudo-nula o una curva nula. Demostramos también que no existen campos Killing de longitud constante ni en \mathbb{S}_1^3 ni en \mathbb{H}_1^3 . A continuación presentamos las estructuras cuaterniónicas, así como las distintas fibraciones de Hopf, para \mathbb{S}^3 y para \mathbb{H}_1^3 . Por último, recordamos la construcción geométrica de las hélices generalizadas (tanto no degeneradas como degeneradas).

Dedicamos el segundo capítulo a estudiar las curvas de Bertrand en los espacios de curvatura constante. Presentamos una primera sección donde extendemos los conceptos y propiedades más interesantes de las curvas de Bertrand de \mathbb{R}^3 a cualquier espacio de curvatura constante. Una curva α inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *curva de Bertrand* si existe otra curva β y una correspondencia biyectiva entre α y β tal que ambas curvas tengan geodésicas normales principales comunes en puntos homólogos. Las curvas α y β se dice que son un par de curvas de Bertrand en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Desarrollando la definición y estableciendo relaciones entre los triedros de Frenet del par de curvas encontramos las primeras propiedades sobre curvas de Bertrand.

Proposición 2.1.2 *Sea α y β un par de curvas de Bertrand en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- a) *La distancia entre puntos homólogos es constante.*
- b) *El ángulo entre los vectores tangentes en puntos homólogos (considerados como vectores en \mathbb{R}_v^4) es constante.*
- c) *El ángulo entre los vectores binormales en puntos homólogos (considerados como vectores en \mathbb{R}_v^4) es constante.*

Obtenemos, también, un importante resultado que relaciona las curvaturas y torsiones de un par de curvas de Bertrand:

Teorema 2.1.4 *Sea α y β un par de curvas de Bertrand en $\mathbb{M}_q^3(c)$, y sean φ y η las funciones dadas en (2.1.9). Si α y β tienen el mismo carácter causal, entonces existen dos constantes a y θ tales que se cumplen las siguientes igualdades:*

- a) $(f(a) - \varepsilon_1 g(a) \kappa_\alpha) \eta(\theta) = \varepsilon_3 g(a) \varphi(\theta) \tau_\alpha,$
- b) $(f(a) + \varepsilon \delta_1 g(a) \kappa_\beta) \eta(\theta) = \varepsilon_3 g(a) \varphi(\theta) \tau_\beta,$
- c) $(f(a) - \varepsilon_1 g(a) \kappa_\alpha)(f(a) + \varepsilon \delta_1 g(a) \kappa_\beta) = \varepsilon_1 \delta_1 \varphi(\theta)^2,$

$$d) g(a)^2 \tau_\alpha \tau_\beta = \varepsilon_1 \delta_1 \eta(\theta)^2,$$

donde κ_α , τ_α , κ_β y τ_β denotan la curvatura y la torsión de las curvas α y β , respectivamente. Si α y β tienen distinto carácter causal, entonces se cumplen las relaciones anteriores intercambiando las funciones φ y η .

Demostremos, también, que cada curva plana de Frenet en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva de Bertrand con infinitas conjugadas Bertrand que también son planas (véase la proposición 2.1.6). Nuestro principal teorema coincide con el resultado clásico para el espacio euclídeo.

Teorema 2.1.7 *Una curva α de Frenet, no plana, en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva de Bertrand si, y sólo si, existen dos constantes $\lambda \neq 0$ y μ , con $\varepsilon_1 \mu^2 + \varepsilon_3 \lambda^2 \neq 0$, tales que $\lambda \kappa_\alpha + \mu \tau_\alpha = 1$.*

Concluimos caracterizando a las hélices como las únicas curvas alabeadas en $\mathbb{M}_q^3(c)$ que tienen infinitas curvas conjugadas de Bertrand.

A continuación abordamos el estudio de las curvas de Bertrand pseudo-nulas. El principal resultado se recoge en la proposición 2.1.15 y establece que todas las curvas pseudo-nulas de $\mathbb{M}_q^3(c)$ son curvas de Bertrand pseudo-nulas.

Por último, consideramos el estudio de las curvas de Bertrand nulas. En primer lugar demostramos que la distancia entre un par de curvas de Bertrand nulas es constante (véase la proposición 2.1.16). El principal resultado se recoge en la proposición 2.1.17 y establece que las hélices nulas de $\mathbb{M}_q^3(c)$ (es decir, las curvas nulas con torsión constante) son las únicas curvas de Bertrand nulas.

Nuestro siguiente objetivo es estudiar las curvas de Bertrand como puntos críticos de ciertos funcionales. Así, empezamos la segunda sección exponiendo las ecuaciones de Euler-Lagrange de funcionales que dependen de la función curvatura κ de una curva en los espacios tridimensionales de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$ (véase la sección 2.2). A continuación, introducimos las LW-curvas, o curvas con curvatura κ y torsión τ relacionadas linealmente, es decir, $\lambda \kappa + \mu \tau = \rho$, donde λ , μ y ρ son constantes no nulas (véase la definición 2.2.19). Esta familia está detallada en la siguiente tabla:

λ	μ	ρ	Familia de LW-curvas
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	1. Geodésicas ($\kappa = 0$)
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	2. Curvas planas ($\tau = 0$)
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	3. Curvas con curvatura constante no nula
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	4. Curvas con torsión constante no nula
$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	5. Curvas de Lancret
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	6. Curvas de Bertrand

Observamos que en ella están incluidas tanto las curvas de Bertrand como las hélices generalizadas. A continuación encontramos una clase de funcionales cuyo espacio de

trayectorias está formado por LW-curvas; estos funcionales están definidos por $f(\kappa) = m + n\kappa + a\sqrt{\kappa + b}$, donde m, n, a, b son constantes y $an = 0$.

Por último, dedicamos una sección a los espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_q^3 . Empezamos describiendo un algoritmo de construcción de curvas de Bertrand a partir de un par de curvas (una de ellas con curvatura constante no nula y otra con torsión constante no nula).

Un teorema de Bioche [Bio89] para curvas en \mathbb{R}^3 establece que si $\alpha_1(s)$ es una curva de curvatura constante no nula, $\alpha_2(\sigma)$ es una curva de torsión constante y existe una correspondencia biyectiva $s \rightarrow \sigma(s)$ entre los puntos de $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ tal que en los puntos homólogos $P_1 = \alpha_1(s)$ y $P_2 = \alpha_2(\sigma(s))$ tenemos que

(B1) los vectores tangentes T_1 de $\alpha_1(s)$ y T_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$ son paralelos, entonces la curva $\alpha(t)$ parametrizada por

$$\alpha(t) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t)), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

es una curva de Bertrand (donde t denota el parámetro longitud de arco de α).

Burke [Bur60] mostró que el resultado de Bioche es también cierto si sustituimos la condición (B1) por alguna de las siguientes:

(B2) Los vectores binormales B_1 de α_1 y B_2 de α_2 son paralelos.

(B3) El vector tangente T_1 de α_1 es paralelo al vector binormal B_2 de α_2 .

Los teoremas de Bioche y Burke se cumplen también para curvas inmersas en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 .

Teorema 2.3.20 (Teorema de Bioche-Burke en \mathbb{R}_q^3) Sean $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ dos curvas de Frenet en \mathbb{R}_q^3 tales que α_1 tiene curvatura constante no nula, α_2 tiene torsión constante no nula y existe una correspondencia biyectiva $s \in I \rightarrow \sigma(s) \in J$ entre los puntos de $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma(s))$ tales que en los homólogos puntos $P_1 = \alpha_1(s)$ y $P_2 = \alpha_2(\sigma(s))$ tengamos alguna de las siguientes condiciones:

(B1) Los vectores tangentes T_1 de $\alpha_1(s)$ y T_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$ son paralelos.

(B2) Los vectores binormales B_1 de $\alpha_1(s)$ y B_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$ son paralelos.

(B3) El vector tangente T_1 de $\alpha_1(s)$ es paralelo al vector binormal B_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$.

Entonces, dadas dos constantes a y b , la curva parametrizada por $\alpha(t) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t))$ es una curva de Bertrand.

Utilizando el resultado anterior, realizamos una primera integración geométrica para las curvas de Bertrand de \mathbb{R}_q^3 . Sea $M_\nu^2(c) \subset \mathbb{R}_q^3$ una superficie totalmente umbilical de índice $\nu \in \{0, 1\}$ y de curvatura constante $c = \pm 1$ en \mathbb{R}_q^3 . Consideramos una curva parametrizada por el arco $\gamma(t)$ en $M_\nu^2(c)$ con función curvatura $\kappa_\gamma(t)$ y referencia de Frenet $\{T_\gamma = \gamma', N_\gamma\}$. Dados dos números reales λ y μ , consideramos las siguientes curvas parametrizadas en \mathbb{R}_q^3 :

$$\alpha_1(t) = \lambda \int_{t_0}^t \gamma(u) du \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) = \mu \int_{t_0}^t N_\gamma(u) du.$$

Demostremos que la curva α_1 es de curvatura constante y la curva α_2 de torsión constante. Además cumplen la condición (B3), por lo que cada curva de Bertrand se puede obtener utilizando estas curvas y el teorema de Bioche-Burke (véase la sección 2.3.2).

Finalmente, obtenemos otra integración geométrica de las LW-curvas. Consideramos superficies regladas S_α , parametrizadas por $X(t, z) = \alpha(t) + z\tilde{D}(t)$, donde $\tilde{D}(t) = (\tau(t)/\kappa(t))T_\alpha(t) + B_\alpha(t)$. La directriz es una curva α con curvatura (o torsión) constante no nula y su dirección está generada por el campo de vectores modificado de Darboux de α . Dos curvas $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ tales que los tangentes unitarios de esas curvas tengan la misma dirección ($T_1(s) = \pm T_2(\sigma(s))$) en puntos homólogos se dice que están relacionadas mediante una transformación de Combescure. Obtenemos el siguiente resultado (véase la sección 2.3.3 para más detalles):

Teorema 2.3.24 *Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}_q^3 con curvatura constante no nula $\kappa \neq 0$ o torsión constante τ , entonces cada curva $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ de pendiente constante en S_α es una geodésica de S_α relacionada mediante una transformación de Combescure con una LW-curva de \mathbb{R}_q^3 .*

Recíprocamente, dada una LW-curva $\beta(t)$ en \mathbb{R}_q^3 , existe una curva α con curvatura constante no nula o torsión constante, y una curva de pendiente constante $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ en S_α tal que $\gamma(s)$ y $\beta(t)$ están relacionadas mediante una transformación de Combescure.

En el tercer capítulo extendemos el concepto de curva rectificante a espacios riemannianos tridimensionales de curvatura constante. En este caso, $\mathbb{M}^3(c)$ representa el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 si $c = 0$, la esfera tridimensional $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ si $c = 1$ o bien el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ si $c = -1$.

Como ya hemos dicho anteriormente, cuando consideramos una curva en el espacio \mathbb{R}^3 , éste tiene una doble interpretación geométrica, una como la variedad diferenciable donde la curva está inmersa, y otra como el espacio vectorial tangente en cualquier punto de la curva. Por tanto, para extender el concepto de curva rectificante a los espacios de curvatura constante $\mathbb{M}^3(c)$ es necesario distinguir entre dicho espacio como variedad diferenciable y su espacio tangente en cada punto. En $\mathbb{M}^3(c)$, una curva γ se dice que es una *curva rectificante* si existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$ tal que $p \notin \text{Im}(\gamma) \equiv \gamma(I)$ y las geodésicas conectando p con $\gamma(s)$ son ortogonales a las geodésicas normales principales en $\gamma(s)$, para todo s .

La superficie de $\mathbb{M}^3(c)$ formada por la unión de todas las geodésicas que conectan un punto fijo $p \in \mathbb{M}^3(c)$ (el *vértice*) y cualquier punto de una curva en $\mathbb{M}^3(c)$ que no pase por el vértice se llama una *superficie cónica* en $\mathbb{M}^3(c)$. Cada una de esas geodésicas se llaman *generatrices* de la superficie. Por tanto, una superficie cónica $M \subset \mathbb{M}^3(c)$, con vértice en el punto p , puede ser parametrizada como

$$\Psi(t, z) = \exp_p(zV(t)) = f(z)p + g(z)V(t), \quad z > 0,$$

donde $V = V(t)$ es una curva en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c) \subset \mathbb{R}_p^4$, véase la sección 3.1. A continuación probamos que una curva γ en $\mathbb{M}^3(c)$ es una curva rectificante si, y sólo si, γ es una geodésica de una superficie cónica en $\mathbb{M}^3(c)$, construida a partir de una curva $V = V(t)$

parametrizada por el arco en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$, llamada la *curva directriz esférica*. En la sección 3.2 damos la parametrización explícita de las geodésicas de tales superficies cónicas. Concretamente, si $\gamma(s) = \Psi(t(s), z(s))$ para ciertas funciones $t(s)$ y $z(s)$, entonces obtenemos:

1) En el caso euclídeo ($c = 0$)

$$t(s) = \arctan(c_1s + c_2) \quad \text{y} \quad z(s) = \sqrt{s^2 + 2Ms + N}.$$

2) En el caso no llano ($c \neq 0$)

$$t(s) = \arctan \left[\frac{-c}{\lambda} \left(AB + (A^2 - c)h(s + s_0) \right) \right] \quad \text{y}$$

$$z(s) = f^{-1} \left(Ag(s + s_0) + Bf(s + s_0) \right).$$

Además, presentamos una bonita caracterización para las curvas rectificantes en función de su parámetro arco y de sus curvaturas.

Teorema 3.2.3 *Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}^3(c)$. Entonces γ es una curva rectificante si, y sólo si, el cociente entre la torsión y la curvatura de la curva está dado por*

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}(s) = c_1 g(s + c_0) + c_2 f(s + c_0),$$

para algunas constantes c_0 , c_1 y c_2 , con $c_1^2 + c(1 + c_2^2) > 0$.

En la sección 3.3 estudiamos la superficie desarrollable rectificante de una curva γ y vemos, en el teorema 3.3.5, que dicha superficie es una superficie cónica si, y sólo si, γ es una curva rectificante en $\mathbb{M}^3(c)$.

En la sección 3.4 presentamos caracterizaciones equivalentes para curvas rectificantes en \mathbb{R}_v^4 , véase el teorema 3.4.6, y mostramos un resultado de clasificación para curvas rectificantes en espacios riemannianos de curvatura constante. Concretamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4.7 *Sea γ una curva en $\mathbb{M}^3(c)$. Entonces γ es una curva rectificante si, y sólo si, está dada, salvo reparametrizaciones, por*

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)) = f(\rho(t))p + g(\rho(t))V(t),$$

donde $p \in \mathbb{M}^3(c)$ es un punto tal que $p \notin \text{Im}(\gamma)$, $V = V(t)$ es una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$, y $\rho(t) = h^{-1}(a \sec(t + t_0))$, para algunas constantes $a \neq 0$ y t_0 , con $a^2 < 1$ en el caso $c = -1$.

En la sección 3.5 obtenemos las curvas rectificantes como extremos de una determinada función que depende de su velocidad v , su curvatura κ y de la función ρ , y que toma su valor mínimo, igual a k_V^2 , entre todas las curvas con la misma proyección esférica V . Aquí k_V denota la curvatura geodésica de V .

Teorema 3.5.8 Sea $p \in \mathbb{M}^3(c)$ y consideremos una curva parametrizada por el arco $V(t)$ en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$. Entonces para cualquier función no nula $\rho(t)$, la curvatura κ_γ y la velocidad v de la curva $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$, y la curvatura geodésica k_V de V satisfacen la inecuación

$$k_V^2 \leq \frac{v^4 \kappa_\gamma^2}{g^2(\rho)},$$

donde la igualdad se alcanza si, y sólo si, γ es una curva rectificante.

Utilizando este resultado, se establece en el corolario 3.5.9 la construcción de las curvas rectificantes de curvatura constante en espacios riemannianos de curvatura constante a partir de curvas de tipo espiral.

Corolario 3.5.9 Una curva $\gamma(s) = \exp_p(\rho(s)V(s))$ en $\mathbb{M}^3(c)$ tiene curvatura constante no nula k_0 y torsión $\tau(s) = d_1 g(s + s_0) + d_2 f(s + s_0)$, para ciertas constantes d_1 , d_2 y s_0 , con $ck_0 + d_1^2 + cd_2^2 > 0$, si, y sólo si, es congruente a una curva rectificante sobre una curva de tipo espiral unitaria $V(t)$ en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$ con curvatura geodésica $k_V(t) = c_0 (\cos^2(t + t_0) + ca^2)^{-3/2}$, para ciertas constantes a , $c_0 \neq 0$, t_0 , con $0 < a^2 < 1$ en el caso $c = -1$.

En la última sección de este capítulo se presentan distintos resultados relacionando curvas rectificantes y curvas de Bertrand en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . En primer lugar, a partir de la proposición 3.6.10, presentamos la familia de curvas que son a la vez curvas rectificantes y curvas de Bertrand construidas como geodésicas de superficies cónicas a partir de una curva esférica de curvatura geodésica

$$k_V(t) = \left(\frac{-\cos^3(t)}{\gamma} \left(\tan(t) - \frac{\delta}{\gamma} \right) \right)^{-1}.$$

A continuación probamos que esta familia, en el caso de tener curvatura no constante, es una subfamilia de las hélices cónicas generalizadas definidas en el ejemplo 2.1.13, véase la proposición 3.6.10. Después, en el apartado 3.6.2, encontramos una bonita familia de curvas de Bertrand como geodésicas de ciertas superficies construidas a partir de curvas rectificantes.

El último capítulo está dedicado a las hélices slant. Empezamos el capítulo usando el concepto de campo de vectores Killing a lo largo de una curva γ en un espacio de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$ para definir el concepto de hélice slant en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Esta extensión está inspirada por los artículos de M. Barros [Bar97], y S. Izumiya y N. Takeuchi [IT04]. Una curva regular $\gamma = \gamma(s)$ inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *hélice slant* si existe un campo de vectores Killing V a lo largo de γ de longitud constante, cuya extensión a $\mathbb{M}_q^3(c)$ es también de longitud constante, y tal que el producto $\langle V, N \rangle$ es una función constante a lo largo de γ . V se llamará un eje de la hélice slant γ , véase la sección 4.1. Ejemplos triviales de hélices slant en espacios de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$ son las hélices generalizadas. Ni en \mathbb{H}^3 ni en \mathbb{S}_1^3 existen hélices slant de Frenet, véase el corolario 4.1.3, pseudo-nulas, véase el corolario 4.1.5, o nulas, véase el corolario 4.1.7.

En la sección 4.1.1 encontraremos la ecuación natural, o ecuación que deben verificar la curvatura κ y la torsión τ , de las hélices slant.

Teorema 4.1.2 *Sea γ una curva de Frenet parametrizada por el arco inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ con curvatura no nula κ y torsión τ . La curva γ es una hélice slant si, y sólo si, la función*

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2|^3}} \left(\frac{\tau - \lambda}{\kappa} \right)'$$

es una constante m , donde $\lambda^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 c = (-1)^q c$, y siempre que $\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2$ no se anule. En este caso, un eje de la hélice slant está dado por

$$V = \frac{\mu(\tau - \lambda)}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2|}} T + (-1)^q \varepsilon_2 \delta \mu m N + \frac{\mu \kappa}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2|}} B,$$

donde las constantes δ, ε, μ están dadas por (4.1.9) y (4.1.11).

En el apartado 4.1.2 obtenemos la caracterización de las hélices slant pseudo-nulas que establece que todas las curvas pseudo-nulas son hélices slant pseudo-nulas; de hecho, son hélices generalizadas con eje $V = \mu N$, donde μ es cualquier solución no trivial de la ecuación diferencial ordinaria $y'' + 2\tau y' + (\tau' + \tau^2 + c)y = 0$. En la sección 4.1.3 estudiamos las hélices slant nulas y llegamos a un resultado que guarda un gran parecido con el obtenido en los espacios pseudo-euclídeos (véase [AL11]).

Teorema 4.1.6 *Sea γ una curva nula, parametrizada por el pseudo-arco, con torsión $\tau \neq 0$ no constante en $\mathbb{M}_1^3(c)$. La curva γ es una hélice slant nula si, y sólo si,*

$$\tau(s) = \frac{-n}{(-bs + m)^2} + \tau_0, \quad n, b, m, \tau_0 \in \mathbb{R}, \quad \tau_0^2 = -c.$$

En este caso, un eje para la hélice slant nula está dado por

$$V(s) = \frac{n}{-bs + m} T(s) + bN(s) + (-bs + m)B(s).$$

La siguiente sección está dedicada exclusivamente al espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Empezamos introduciendo el concepto de superficie hélice en \mathbb{R}^3 . Tenemos que cada superficie hélice es una superficie reglada llana. A continuación, estudiamos la relación entre hélices slant y superficies hélice obteniendo el siguiente resultado que caracteriza a las hélices slant, véase la sección 4.2.1.

Teorema 4.2.11 *Sea $\gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}^3 y supongamos que no es una hélice generalizada. Si γ es una hélice slant, entonces existe una curva plana β y un ángulo $\varphi \in (0, \pi/2)$ tal que γ es (congruente a) una geodésica de la superficie hélice $M_{\beta, \varphi}$.*

Como aplicación encontramos la familia de hélices slant que son también curvas rectificantes (véase el ejemplo 4.2.9) y una bonita caracterización de las curvas de precesión constante.

Proposición 4.2.13 *Sea $\gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}^3 . Entonces γ es una curva de precesión constante si, y sólo si, existe una epicicloide o hipocicloide β y un ángulo $\varphi \in (0, \pi/2)$, tal que γ es (congruente a) una geodésica de pendiente lineal de la superficie hélice $M_{\beta, \varphi}$.*

En la sección 4.2.2 probamos que la línea de estricción de una superficie hélice es una hélice generalizada, por lo que una superficie hélice en \mathbb{R}^3 no es más que la superficie tangente a una hélice generalizada. Como consecuencia, una curva γ en \mathbb{R}^3 es una hélice slant si, y sólo si, γ es una geodésica de la superficie tangente a una hélice generalizada (teorema 4.2.16). Terminamos la sección exponiendo un par de métodos de construcción de hélices slant en superficies hélice que nos van a permitir, por ejemplo, determinar parametrizaciones de las curvas de Salkowski (véase el ejemplo 4.2.17 y el ejemplo 4.2.18) o de las hélices slant en la superficie tangente a una hélice ordinaria (véase el ejemplo 4.2.21).

M. Barros [Bar97] obtuvo una integración geométrica para las hélices generalizadas en la esfera tridimensional. Probó que una curva inmersa en \mathbb{S}^3 es una hélice generalizada si, y sólo si, es una geodésica en algún cilindro de Hopf de \mathbb{S}^3 . Uno de los objetivos de este capítulo es proceder de una manera análoga para poder obtener la integración geométrica de las hélices slant en los espacios de curvatura constante no nula. Para ello, en la sección 4.3, introducimos el concepto de superficie hélice. Para definir las superficies hélice en $\mathbb{M}_q^3(c)$, $c \neq 0$, utilizamos el modelo de los cuaterniones y la fibración de Hopf.

Una superficie $M^2 \subset \mathbb{M}_q^3(c)$, con campo de vectores unitario η , se llama superficie hélice si existe un campo de vectores Killing de longitud constante V tal que el ángulo entre η y V es constante a lo largo de M^2 . Evidentemente, los cilindros de Hopf son un ejemplo de superficie hélice, puesto que el ángulo entre η y V es $\pi/2$. A continuación probamos que una superficie hélice M^2 en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es llana (véase la proposición 4.3.22). Nuestro siguiente paso es caracterizar las superficies hélice utilizando las construcciones de superficies llanas dadas por Kitagawa [Kit88] (ver también [Ga09, GM10]) para el caso $c = 1$ y [DN80] (versión local) y [LMP11] (versión global) para el caso $c = -1$. Para \mathbb{S}^3 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.25 *Sea $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ una superficie orientable. Entonces M^2 es una superficie hélice si, y sólo si, M^2 es una superficie llana y, de acuerdo a la representación de Kitagawa, $c_2(v)$ es una hélice generalizada en $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

En el caso del espacio hiperbólico \mathbb{H}_1^3 y si la superficie es riemanniana tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.28 *Sea $M^2 \subset \mathbb{H}_1^3$ una superficie riemanniana orientable en \mathbb{H}_1^3 . Entonces M^2 es una superficie hélice si, y sólo si, M^2 es una superficie llana y, de acuerdo a la representación local dada por el teorema 4.3.27, $c_2(v)$ es una hélice generalizada en $\mathbb{S}_1^2 \subset \mathbb{R}_1^3$.*

Si la superficie es lorentziana tenemos un resultado similar.

Teorema 4.3.30 *Sea $M_1^2 \subset \mathbb{H}_1^3$ una superficie orientable lorentziana en \mathbb{H}_1^3 . Entonces M_1^2 es una superficie hélice si, y sólo si, M_1^2 es una superficie llana y, de acuerdo a la*

representación local dada en el teorema 4.3.29, $c_2(v)$ es una hélice generalizada en $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$.

Finalmente dedicamos la última sección a obtener una integración geométrica para las hélices slant de Frenet viéndolas como geodésicas en superficies hélice.

Teorema 4.4.32 *Sea γ una curva de Frenet parametrizada por el arco en $\mathbb{M}_q^3(c)$, $c \neq 0$, y con curvatura no nula κ_γ . Entonces γ es una hélice slant si, y sólo si, γ es (congruente a) una geodésica de una superficie hélice $M_\gamma^2 \subset \mathbb{M}_q^3(c)$.*

Utilizamos cilindros nulos luminosos para obtener las hélices slant pseudo-nulas.

Teorema 4.4.33 *Una curva espacial parametrizada por el arco γ en $\mathbb{M}_1^3(c)$ es pseudo-nula (y, por tanto, una hélice slant pseudo-nula) si, y sólo si, γ es (congruente a) una curva espacial en un cilindro nulo luminoso construido sobre una geodésica espacial de $\mathbb{M}_1^3(c)$.*

Finalmente, obtenemos la integración de las hélices slant nulas a partir de los B -scroll.

Teorema 4.4.34 *Sea γ una curva nula en $\mathbb{M}_1^3(c)$ parametrizada por el pseudo-arco cuya torsión τ no se anule nunca. Entonces γ es una hélice slant si, y sólo si, γ es congruente a una curva nula $\alpha(s) = \Phi(u(s), \pm u(s))$ de un B -scroll llano M_β , donde $u(s)$ es una solución de (4.4.90) y la curvatura de β satisface (4.4.89).*

Publicaciones

Los resultados de esta tesis aparecen publicados en los siguientes artículos:

- Bertrand curves in the three-dimensional sphere, *J. Geom. Phys.* **62** (2012), 1903–1914.
[10.1016/j.geomphys.2012.04.007](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2012.04.007)
- Bertrand curves in non-flat 3-dimensional (Riemannian or Lorentzian) space forms, *Bull. Korean Math. Soc.* **50** (2013), No. 4, pp. 1109–1126.
[10.4134/BKMS.2013.50.4.1109](https://doi.org/10.4134/BKMS.2013.50.4.1109)
- A variational characterization and geometric integration for Bertrand curves, *J. Math. Phys.* **54** (2013), 043508, 12 pág.
[10.1063/1.4800767](https://doi.org/10.1063/1.4800767)
- Rectifying curves in the three-dimensional sphere, *J. Math. Anal. Appl.* **421** (2015), 1855–1868.
[10.1016/j.jmaa.2014.07.079](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.07.079)
- Rectifying curves in the three-dimensional hyperbolic space, *Mediterr. J. Math.* **13** (2016), 2199–2214.
[10.1007/s00009-015-0615-2](https://doi.org/10.1007/s00009-015-0615-2)
- Slant helices in the Euclidean 3-space revisited, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **23** (2016), 133–150.
projecteuclid.org/euclid.bbms/1457560859
- Slant helices in the three-dimensional sphere, *J. Korean Math. Soc.* (2017).
[10.4134/JKMS.j160508](https://doi.org/10.4134/JKMS.j160508).
- Helix surfaces and slant helices in the three-dimensional anti-De Sitter space, *RACSAM* (2016).
[10.1007/s13398-016-0361-8](https://doi.org/10.1007/s13398-016-0361-8).

Preliminares

Empezamos este capítulo con una primera sección en la que exponemos algunas generalidades y conceptos básicos para variedades y subvariedades pseudo-riemannianas. También introducimos los espacios de curvatura constante, que denotamos por $\mathbb{M}_q^n(c)$, véase la sección 1.2. En estos espacios fijamos la noción de ángulo y de producto vectorial en cada espacio tangente, así como la parametrización de las geodésicas. En la sección 1.3 estudiamos las distintas referencias de Frenet para los tipos de curvas que existen en $\mathbb{M}_q^3(c)$, ya sean curvas de Frenet, curvas pseudo-nulas o curvas nulas. En la sección 1.4 presentamos las ecuaciones para que un campo sea Killing a lo largo de una curva de Frenet, una curva pseudo-nula o una curva nula. Demostramos también, en esta sección, que no existen campos Killing de longitud constante ni en \mathbb{S}_1^3 ni en \mathbb{H}^3 . A continuación, en las secciones 1.5 y 1.6, exponemos una estructura cuaterniónica, así como las distintas fibraciones de Hopf, en los espacios \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}_1^3 .

1.1. Conceptos y ecuaciones básicas

Sea M una variedad pseudo-riemanniana n -dimensional con métrica g , también denotada por \langle, \rangle . Denotamos por $C^\infty(M)$ el álgebra de funciones diferenciables sobre M , por T_pM el espacio tangente a M en p , para cada punto p de M , por TM el fibrado tangente a la variedad, por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos de vectores de clase C^∞ en M y por $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de M . Seguimos como referencia a [ON83].

Si $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ son tres campos en M , la conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de M está caracterizada por la ecuación

$$\begin{aligned} 2\langle \bar{\nabla}_V W, X \rangle = & V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle \\ & - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

que se denomina *fórmula de Koszul*.

Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define el *operador curvatura* asociado a X e Y , y se denota por R_{XY} , como

$$\begin{aligned} R_{XY} : \mathfrak{X}(M) & \rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Z & \rightsquigarrow R_{XY}Z = \bar{\nabla}_{[X, Y]}Z - \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) + \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z), \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

donde $[X, Y]$ es el corchete de Lie. Para todo punto p de M , consideramos el tensor curvatura R evaluado en el punto p . Si Π es un plano no degenerado del espacio tangente $T_p M$, se define la *curvatura seccional* de Π en p , como el número real

$$K(\Pi) = \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{Q(x, y)},$$

donde $\{x, y\}$ es una base de Π y $Q(x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$. Este número es independiente de la elección de la base $\{x, y\}$ del plano Π .

Se dice que una variedad M es de *curvatura constante* si la función curvatura seccional es constante en M . Se cumple que si M tiene curvatura constante c , entonces

$$R_{XY}Z = c\{\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X\}. \quad (1.1.3)$$

Si M es completa, simplemente conexa y tiene curvatura seccional constante diremos que M es un *espacio de curvatura constante o espacio modelo*.

Supongamos que M es una subvariedad pseudo-riemanniana de N y denotemos por ∇^0 la conexión de Levi-Civita de N . Si X e Y son dos campos de vectores tangentes a M entonces tenemos la siguiente descomposición, conocida como *fórmula de Gauss*:

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y + \sigma(X, Y), \quad (1.1.4)$$

donde σ es la *segunda forma fundamental* de M en N . Una subvariedad M se dice *totalmente geodésica* siempre que su segunda forma fundamental sea nula.

Sea ξ un campo de vectores normal a M . Tenemos la siguiente descomposición:

$$\nabla_X^0 \xi = -A_\xi X + D_X \xi, \quad (1.1.5)$$

conocida como *fórmula de Weingarten*, donde A_ξ es el *endomorfismo de Weingarten* asociado a ξ y D es la conexión normal. El endomorfismo de Weingarten es un operador autoadjunto con respecto a la métrica de M , es decir, para todo par de campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle.$$

Cuando M es una hipersuperficie el endomorfismo de Weingarten asociado al campo normal unitario lo representaremos simplemente por A y se llamará *operador forma* de M . El endomorfismo de Weingarten y la segunda forma fundamental están relacionadas por la ecuación

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), \xi \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, de manera que en el caso de hipersuperficies se tiene

$$\sigma(X, Y) = \varepsilon \langle AX, Y \rangle \xi,$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ representa el signo de la hipersuperficie.

1.2. Espacios modelo

Denotamos por \mathbb{R}_v^{n+1} el espacio pseudo-euclídeo $(n+1)$ -dimensional de índice $v \geq 0$ con tensor métrico dado por

$$\langle , \rangle = - \sum_{i=1}^v dx_i^2 + \sum_{j=v+1}^{n+1} dx_j^2,$$

donde (x_1, \dots, x_{n+1}) son las coordenadas usuales de \mathbb{R}^{n+1} . Un vector $w \in \mathbb{R}_v^{n+1}$ se dice:

- espacial si $\langle w, w \rangle > 0$ o $w = 0$.
- temporal si $\langle w, w \rangle < 0$.
- nulo o luminoso si $\langle w, w \rangle = 0$ siendo $w \neq 0$.

Se define el *cono de luz* o *cono luminoso* como

$$\Lambda^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_v^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 0\},$$

el cual tiene métrica degenerada en todos sus puntos.

Los espacios modelo de curvatura constante de dimensión n se pueden ver como hipercuádricas en los espacios pseudo-euclídeos de dimensión $n+1$ y se detallan a continuación.

1. El *espacio pseudo-euclídeo de índice $q \geq 0$*

$$\mathbb{R}_q^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_q^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\},$$

que tiene curvatura constante $c = 0$.

2. La *hiperesfera de índice $q \geq 0$ y radio $r > 0$*

$$\mathbb{S}_q^n(r) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_q^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = r^2\},$$

cuyo campo normal es $(1/r)\phi$, donde $\phi : \mathbb{S}_q^n(r) \rightarrow \mathbb{R}_q^{n+1}$ es el campo posición. El operador forma está dado por $A = -(1/r)I$ y la curvatura constante es $c = 1/r^2$.

3. El *espacio hiperbólico de índice $q \geq 0$ y radio $r > 0$*

$$\mathbb{H}_q^n(-r) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_{q+1}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -r^2\},$$

cuyo campo normal es $(1/r)\phi$, donde $\phi : \mathbb{H}_q^n(-r) \rightarrow \mathbb{R}_{q+1}^{n+1}$ es el campo posición. El operador forma está dado por $A = -(1/r)I$ y la curvatura constante es $c = -1/r^2$.

A lo largo de esta memoria suponemos, por simplicidad, que $c \in \{-1, 0, 1\}$. Cuando escribimos $\mathbb{M}_q^n(c)$ nos referimos a una de las componentes conexas de estas hipercuádricas en su respectivo espacio pseudo-euclídeo \mathbb{R}_v^{n+1} . Denotamos por ∇^0 y $\bar{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita de \mathbb{R}_v^{n+1} y $\mathbb{M}_q^n(c)$, respectivamente. Si X, Y son campos de vectores tangentes a $\mathbb{M}_q^n(c)$, entonces la fórmula de Gauss nos lleva a la siguiente relación

$$\nabla_X^0 Y = \bar{\nabla}_X Y - c \langle X, Y \rangle \phi. \quad (1.2.6)$$

1.2.1. Producto vectorial y ángulo

Dados n vectores u_1, u_2, \dots, u_n en \mathbb{R}_v^{n+1} , definimos su *producto vectorial* $u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ como el único vector en \mathbb{R}_v^{n+1} tal que

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_n, w \rangle = \det(u_1, \dots, u_n, w), \quad \text{para cada } w \in \mathbb{R}_v^{n+1}. \quad (1.2.7)$$

El producto vectorial \wedge en \mathbb{R}_v^{n+1} induce otro producto vectorial \times en $\mathbb{M}_q^n(c)$ de la siguiente manera. Consideramos $c \neq 0$, ya que en el caso $c = 0$ tenemos el producto usual. Dado un punto $p \in \mathbb{M}_q^n(c)$ y $n - 1$ vectores u_1, u_2, \dots, u_{n-1} en $T_p \mathbb{M}_q^n(c) \subset \mathbb{R}_v^{n+1}$, definimos su producto vectorial $u_1 \times \dots \times u_{n-1}$ como el vector en $T_p \mathbb{M}_q^n(c)$ dado por

$$u_1 \times \dots \times u_{n-1} = p \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}.$$

Sea ω el elemento de volumen en $\mathbb{M}_q^n(c)$ definido por

$$\omega(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det[p, u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Se dice que una base de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ está positivamente orientada si su elemento volumen es $\omega(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$. Es fácil ver que la orientación usual en \mathbb{R}_v^{n+1} induce una orientación en $\mathbb{M}_q^n(c)$ de la siguiente forma: una base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de $T_p \mathbb{M}_q^n(c)$ está positivamente orientada si $\{p, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base de \mathbb{R}_v^{n+1} positivamente orientada.

Recordamos también la definición de *ángulo* en \mathbb{R}_v^{n+1} . Tomemos dos vectores no nulos $a, b \in \mathbb{R}_v^{n+1}$ que generen un plano no degenerado y consideremos una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, de forma que los vectores a y b se escriben en esta base como $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$.

Definición 1.2.1 ([BN84a], [BN84b], [NPV05])

a) Si a y b son vectores espaciales, entonces

- si generan un plano espacial, existe un único número $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que $\langle a, b \rangle = |a| |b| \cos \theta$.
- si generan un plano temporal, existe un único número $\theta \geq 0$ tal que $\langle a, b \rangle = \varepsilon |a| |b| \cosh \theta$, donde $\varepsilon = +1$ o $\varepsilon = -1$ cuando $\text{sgn}(a_2) = \text{sgn}(b_2)$ o $\text{sgn}(a_2) \neq \text{sgn}(b_2)$, respectivamente.

b) Si a y b son vectores temporales, entonces existe un único número $\theta \geq 0$ tal que $\langle a, b \rangle = \varepsilon |a| |b| \cosh \theta$, donde $\varepsilon = +1$ o $\varepsilon = -1$ cuando a y b tienen diferente o igual orientación temporal, respectivamente.

c) Finalmente, cuando a sea espacial y b sea temporal, existe un único número $\theta \geq 0$ tal que $\langle a, b \rangle = \varepsilon |a| |b| \sinh \theta$, donde $\varepsilon = +1$ o $\varepsilon = -1$ siempre que $\text{sgn}(a_2) = \text{sgn}(b_1)$ o $\text{sgn}(a_2) \neq \text{sgn}(b_1)$, respectivamente.

Dados dos vectores no nulos $a, b \in \mathbb{R}_v^{n+1}$, el correspondiente número θ determinado en los apartados anteriores se llama simplemente el *ángulo entre a y b* .

1.2.2. Flujo geodésico

A lo largo de esta memoria nos centramos en espacios tridimensionales de curvatura constante c , que denotamos por $\mathbb{M}_q^3(c)$, en espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_v^4 . Podemos suponer $q = 0, 1$. Gracias a la clasificación de los espacios tridimensionales de curvatura constante (véase, por ejemplo, [ON83, pág. 228]), $\mathbb{M}_q^3(c)$ representa \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}_1^3 para el caso $c = 0$, \mathbb{S}^3 o \mathbb{S}_1^3 para el caso $c = 1$, y \mathbb{H}^3 o \mathbb{H}_1^3 para el caso $c = -1$.

Una curva parametrizada por el arco $\beta = \beta(t)$ en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una *geodésica* de $\mathbb{M}_q^3(c)$ si $\bar{\nabla}_{\beta'}\beta' = 0$. Esta condición es equivalente a la propiedad de que el vector aceleración de β en \mathbb{R}_v^4 , $\nabla_{\beta'}^0\beta'$, sea un campo de vectores ortogonal a $\mathbb{M}_q^3(c)$ a lo largo de la curva β . Se puede consultar en [ON83, pág. 112] que las parametrizaciones de las geodésicas que parten de un punto $p \in \mathbb{M}_q^3(c)$ en la dirección de un vector $w \in T_p\mathbb{M}_q^3(c)$ son

$$\exp_p(tw) = f(t)p + g(t)w, \quad (1.2.8)$$

donde las funciones f y g están determinadas por:

$$\begin{cases} f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t, & \text{si } p \text{ y } w \text{ tienen el mismo carácter causal,} \\ f(t) = \cosh t, \quad g(t) = \sinh t, & \text{si } p \text{ y } w \text{ tienen distinto carácter causal,} \\ f(t) = 1, \quad g(t) = t, & \text{si } w \text{ es nulo o } c = 0, \end{cases}$$

donde p y w , de caracteres causales c y ε_w , se consideran como vectores en \mathbb{R}_v^4 . Se cumple que $f^2 + c\varepsilon_w g^2 = 1$, junto con $f' = -c\varepsilon_w g$ y $g' = f$.

Se define la función h como el cociente entre g y f , es decir

$$\begin{cases} h(t) = \tan t, & \text{si } p \text{ y } w \text{ tienen el mismo carácter causal,} \\ h(t) = \tanh t, & \text{si } p \text{ y } w \text{ tienen distinto carácter causal,} \\ h(t) = t, & \text{si } w \text{ es nulo o } c = 0. \end{cases}$$

1.2.3. Transporte paralelo

Una interesante propiedad del transporte paralelo (véase [DoC76, pág. 242]), y que utilizamos en diversos puntos de esta memoria, es que si dos hipersuperficies no degeneradas $S_1 \subset \mathbb{R}_v^4$ y $S_2 \subset \mathbb{R}_v^4$ son tangentes a lo largo de una curva parametrizada no nula γ y v_0 es un vector de $T_{\gamma(s_0)}S_1 = T_{\gamma(s_0)}S_2$, entonces $P(s)$ es el transporte paralelo de v_0 a lo largo de γ relativo a la hipersuperficie S_1 si, y sólo si, $P(s)$ es el transporte paralelo de v_0 a lo largo de γ relativo a la hipersuperficie S_2 . Además, la derivada covariante DP/ds de P es la misma para ambas hipersuperficies.

En concreto, usando esta propiedad, se puede demostrar que el transporte paralelo a lo largo de una geodésica $\gamma \subset \mathbb{M}_q^3(c)$ de un vector ortogonal a γ' es un campo de vectores

constante. En efecto, sea $\gamma = \gamma(s)$ una geodésica de $\mathbb{M}_q^3(c)$, entonces existe un plano $\Pi \subset \mathbb{R}_v^4$ conteniendo al origen tal que $\gamma \subset \mathbb{M}_q^3(c) \cap \Pi$. Sea v_0 el vector tangente a $\mathbb{M}_q^3(c)$ en algún punto $p = \gamma(s_0)$, y supongamos que v_0 es ortogonal a $\gamma'(s_0)$. Consideramos el hipercilindro $C = \gamma \times \Pi^\perp$ tangente a $\mathbb{M}_q^3(c)$ a lo largo de γ , entonces el campo de vectores constante $P(s) = v_0$ es el transporte paralelo de v_0 a lo largo de γ relativo al hipercilindro. Pero por la propiedad ya mencionada $P(s)$ también será el transporte paralelo de v_0 a lo largo γ relativo a $\mathbb{M}_q^3(c)$.

1.3. La referencia de Frenet para una curva regular

Dada una curva $\gamma = \gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$, existen tres familias de curvas regulares en función de los caracteres causales de $\gamma'(s)$ y $\gamma''(s)$. La fórmula de Gauss establece

$$X'(s) \equiv \nabla_{\gamma'(s)}^0 X = \bar{\nabla}_{\gamma'(s)} X - c \langle X(s), \gamma'(s) \rangle \gamma(s), \quad (1.3.9)$$

para cualquier campo de vectores diferenciable $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ a lo largo de la curva γ . El parámetro s será el parámetro longitud de arco en el caso de que γ sea una curva no nula o el parámetro pseudo-arco en el caso de que γ sea nula. Pasamos a describir brevemente las referencias de Frenet para estas tres familias, [Wal95, Lop14].

γ es una curva no nula con vector aceleración no nulo

En este caso, existe una referencia ortonormal a lo largo de γ , $\{T = \gamma', N, B\}$, satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T T &= \varepsilon_2 \kappa N, & \nabla_T^0 T &= -\varepsilon_1 c \gamma + \varepsilon_2 \kappa N, \\ \bar{\nabla}_T N &= -\varepsilon_1 \kappa T + \varepsilon_3 \tau B, & \nabla_T^0 N &= -\varepsilon_1 \kappa T + \varepsilon_3 \tau B, \\ \bar{\nabla}_T B &= -\varepsilon_2 \tau N, & \nabla_T^0 B &= -\varepsilon_2 \tau N, \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

donde $\varepsilon_1 = \langle T, T \rangle$, $\varepsilon_2 = \langle N, N \rangle$ y $\varepsilon_3 = \langle B, B \rangle$. Las funciones diferenciables κ y τ se denominan la curvatura y torsión de γ . Una curva de esta familia será llamada *curva de Frenet*.

γ es una curva espacial con vector aceleración nulo

En este caso, existe una referencia pseudo-ortonormal a lo largo de γ , $\{T = \gamma', N, B\}$, satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T T &= N, & \nabla_T^0 T &= -c \gamma + N, \\ \bar{\nabla}_T N &= \tau N, & \nabla_T^0 N &= \tau N, \\ \bar{\nabla}_T B &= T - \tau B, & \nabla_T^0 B &= T - \tau B, \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

donde τ representa la torsión (también llamada pseudo-torsión) de γ . La matriz de la métrica en esa referencia pseudo-ortonormal está dada por $\langle T, T \rangle = 1$, $\langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = 0$, $\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 0$ y $\langle N, B \rangle = -1$. Una curva de esta familia será llamada *curva pseudo-nula*, [Wal95] (o *curva 2-degenerada*, [FGL02]).

γ es una curva nula

Finalmente, para una curva de esta familia existe una referencia pseudo-ortonormal a lo largo de γ , $\{T = \gamma', N, B\}$, satisfaciendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T T &= N, & \nabla_T^0 T &= N, \\ \bar{\nabla}_T N &= \tau T + B, & \nabla_T^0 N &= \tau T + B, \\ \bar{\nabla}_T B &= \tau N, & \nabla_T^0 B &= c\gamma + \tau N, \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

donde τ representa la torsión (también llamada pseudo-torsión) de γ . La matriz de la métrica, en este caso, está dada por $\langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = 0$, $\langle T, B \rangle = -1$, $\langle N, N \rangle = 1$ y $\langle T, N \rangle = \langle N, B \rangle = 0$.

A lo largo de la memoria, todas las curvas serán consideradas curvas de Frenet, salvo que se diga que la curva es pseudo-nula o nula.

Para cada punto de una curva, independientemente de que sea una curva de Frenet, pseudo-nula o nula, con referencia de Frenet $\{T, N, B\}$, los planos generados por $\{T, N\}$, $\{T, B\}$ y $\{N, B\}$ se llaman *plano osculador*, *plano rectificante* y *plano normal*, respectivamente.

1.4. Campos Killing

1.4.1. Resultados generales

Definición 1.4.2 ([ON83]) Se dice que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(M)$ es *Killing* si la derivada de Lie del tensor métrico g se anula, es decir, $\mathcal{L}_V g = 0$.

El flujo de un campo de vectores completo V en una variedad M es la aplicación $\psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ dada por $\psi(p, t) = \alpha_p(t)$, donde $\alpha_p(t)$ es la curva integral maximal que pasa por p . Si consideramos que p se mantiene constante podemos escribir $\psi_p(t)$, que no es más que la curva integral $\alpha_p(t)$. Si consideramos que t se mantiene constante podemos escribir $\{\psi_t\}$ y describe los distintos estados del flujo. El flujo $\{\psi_t\}$ generado por un campo Killing define isometrías infinitesimales en la variedad y esta propiedad caracteriza a los campos Killing. Recogemos a continuación otras propiedades interesantes de los campos Killing.

Proposición 1.4.3 Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita en M . Entonces son equivalentes:

- 1) V es Killing.
- 2) $V \langle X, Y \rangle = \langle [V, X], Y \rangle + \langle X, [V, Y] \rangle$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- 3) $\langle \bar{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y V, X \rangle = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Además, si V y W son campos Killing, $[V, W]$ también es Killing.

Proposición 1.4.4 Sea V un campo Killing en una variedad pseudo-riemanniana M . El campo V es de longitud constante si, y sólo si, $\bar{\nabla}_V V = 0$.

Demostración. Podemos utilizar el apartado 3 de la proposición 1.4.3:

$$0 = \langle \bar{\nabla}_V V, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y V, V \rangle = \langle \bar{\nabla}_V V, Y \rangle + \frac{1}{2} \bar{\nabla}_Y \langle V, V \rangle.$$

Que el campo V sea de longitud constante es equivalente a $\langle \bar{\nabla}_V V, Y \rangle = 0$ para cualquier campo Y , de donde se deduce el resultado. \square

Recordemos que un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ se dice paralelo si $\bar{\nabla}_X V = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Teniendo en cuenta el tercer apartado de la proposición 1.4.3, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Corolario 1.4.5 Todo campo paralelo es Killing.

1.4.2. Campos Killing en espacios de curvatura constante

La proposición 1.4.4 demuestra que las curvas integrales de los campos Killing de longitud constante en espacios de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$ son geodésicas.

Proposición 1.4.6 Si $\mathbb{M}_q^3(c)$ es un espacio de curvatura constante no llano, entonces no existen campos paralelos en $\mathbb{M}_q^3(c)$.

Demostración. Supongamos que existe un campo paralelo V en una variedad $\mathbb{M}_q^3(c)$ de curvatura constante c . Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_q^3(c))$ tal que el plano $\{V, X\}$ sea no degenerado. Tenemos, por un lado,

$$R_{VX}V = \bar{\nabla}_{[V,X]}V - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_X V + \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_V V = 0,$$

pues V es paralelo y, por otro, puesto que $\mathbb{M}_q^3(c)$ es un espacio de curvatura constante c ,

$$c = K(V, X) = \frac{\langle R_{VX}V, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle V, V \rangle - \langle X, V \rangle^2} = 0,$$

de lo que se deduce el resultado. \square

Proposición 1.4.7 Sea V un campo Killing de longitud constante en un espacio de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$. Entonces existe una función diferenciable λ tal que

$$\bar{\nabla}_X V = \lambda X \times V, \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_q^3(c)).$$

Demostración. Puesto que estamos en un espacio de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$, para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_q^3(c))$ podemos considerar otro campo Y de tal forma que $\det(X, Y, V) \neq 0$. Como V es Killing y de longitud constante, utilizando el tercer apartado de la proposición 1.4.3, se verifican

$$\langle \bar{\nabla}_X V, X \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \bar{\nabla}_X V, V \rangle = 0,$$

de donde

$$\bar{\nabla}_X V = \lambda_X X \times V, \quad (1.4.13)$$

para alguna función diferenciable λ_X dependiente, en principio, del campo X . Bastará probar que $\lambda_X = \lambda_Y$ para dos campos cualesquiera. Ahora bien, utilizando de nuevo el tercer apartado de la proposición 1.4.3 obtenemos

$$0 = \langle \bar{\nabla}_X V, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y V, X \rangle = \lambda_X \det(X, V, Y) + \lambda_Y \det(Y, V, X) = (\lambda_X - \lambda_Y) \det(X, V, Y),$$

demostrando lo que queríamos. \square

Proposición 1.4.8 *Si existe un campo Killing V de longitud constante en un espacio de curvatura constante no llano $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$ entonces $(-1)^v > 0$. Además, para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_q^3(c))$ se verifica*

$$\bar{\nabla}_X V = \lambda X \times V,$$

donde $\lambda^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 c = (-1)^q c = (-1)^v$.

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 1.4.6, sea V un campo Killing, no paralelo, de longitud constante en un espacio de curvatura constante no llano $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$. Podemos considerar una base ortonormal de campos $\{E_1, E_2, E_3\} \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_q^3(c))$ de caracteres causales $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Definimos funciones a_1, a_2 y a_3 tales que, para cada punto $p \in \mathbb{M}_q^3(c)$, podamos escribir $V = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$. Como V es de longitud constante obtenemos

$$\varepsilon_1 a_1^2 + \varepsilon_2 a_2^2 + \varepsilon_3 a_3^2 = \varepsilon \quad \text{constante.}$$

Considerando el tensor curvatura tenemos

$$R_{VE_1} V = \bar{\nabla}_{[V, E_1]} V - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{E_1} V + \bar{\nabla}_{E_1} \bar{\nabla}_V V = \bar{\nabla}_{[V, E_1]} V - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{E_1} V,$$

donde hemos utilizado la proposición 1.4.4. Ahora bien, utilizando la proposición 1.4.7 y, de nuevo, la proposición 1.4.4 obtenemos

$$\begin{aligned} R_{VE_1} V &= \lambda [V, E_1] \times V - (V(\lambda) E_1 \times V + \lambda \bar{\nabla}_V E_1 \times V + \lambda E_1 \times \bar{\nabla}_V V) = \\ &= \lambda \bar{\nabla}_V E_1 \times V - \lambda \bar{\nabla}_{E_1} V \times V - (V(\lambda) E_1 \times V + \lambda \bar{\nabla}_V E_1 \times V) = \\ &= -\lambda \bar{\nabla}_{E_1} V \times V - V(\lambda) E_1 \times V. \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo la proposición 1.4.7 y la definición de producto vectorial (véase la sección 1.2.1 para más detalles), obtenemos

$$\langle R_{VE_1}V, E_1 \rangle = -\lambda^2 \langle (E_1 \times V) \times V, E_1 \rangle = \lambda^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\varepsilon_2 a_2^2 + \varepsilon_3 a_3^2).$$

Entonces la curvatura seccional del plano generado por E_1 y V está dada por:

$$K(V, E_1) = \frac{\langle R_{VE_1}V, E_1 \rangle}{\langle V, V \rangle \langle E_1, E_1 \rangle - \langle V, E_1 \rangle^2} = \frac{\lambda^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\varepsilon_2 a_2^2 + \varepsilon_3 a_3^2)}{\varepsilon \varepsilon_1 - a_1^2} = \lambda^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = (-1)^q \lambda^2.$$

Puesto que $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$ es un espacio de curvatura constante c , no llano, debe cumplirse que $\lambda^2 = (-1)^q c = (-1)^v$, de donde, utilizando una vez más la proposición 1.4.7, se deduce el resultado. \square

Corolario 1.4.9 *En los espacios \mathbb{S}_1^3 y \mathbb{H}^3 no existen campos Killing de longitud constante.*

1.4.3. Campos Killing a lo largo de curvas de Frenet

Dada una curva regular $\gamma = \gamma(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c)$, podemos considerar variaciones $\Gamma = \Gamma(t, z) : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c)$, con $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$, tales que todas las t -curvas $\gamma_z(t) = \Gamma(t, z)$ sean de la misma familia que la curva γ . Sean $V(t, z) = \frac{\partial \Gamma}{\partial z}(t, z)$ y $\bar{\Gamma}(t, z) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, z)$ los campos tangentes a las z -curvas y t -curvas, respectivamente. En particular, el campo de vectores a lo largo de γ definido por $V(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial z}(t, 0)$ se llama el campo variacional de Γ . Consideramos $T(t, z), N(t, z)$ y $B(t, z)$ el triedro de Frenet de las t -curvas y $\kappa(t, z), \tau(t, z)$ sus curvaturas. Escribimos $T(s, z), N(s, z), B(s, z), \kappa(s, z), \tau(s, z), V(s, z)$, etc. para los correspondientes elementos cuando s es el parámetro longitud de arco de la curva γ , [LS84a].

Un campo de vectores $V(s)$ se dice que es un campo Killing a lo largo de γ si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \kappa^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (1.4.14)$$

donde $v(s, z)$ representa la velocidad de las s -curvas. Estas condiciones están bien definidas en el sentido que no dependen de la V -variación de γ que elegimos para realizar las derivadas en (1.4.14). En efecto, usando [BFLM01, lema 3.1] y (1.4.14) se puede ver que V es un campo de vectores Killing a lo largo de γ si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a) \quad & \langle \bar{\nabla}_T V, T \rangle = 0, \\ b) \quad & \kappa \langle \bar{\nabla}_T^2 V + \varepsilon_1 c V, N \rangle = 0, \\ c) \quad & \tau \left\langle \frac{1}{\kappa} \bar{\nabla}_T^3 V - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \bar{\nabla}_T^2 V + \varepsilon_1 \left(\varepsilon_2 \kappa + \frac{c}{\kappa} \right) \bar{\nabla}_T V - \varepsilon_1 c \frac{\kappa'}{\kappa^2} V, B \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Teniendo en cuenta que las soluciones de (1.4.15) constituyen un espacio vectorial 6-dimensional, y que la restricción a γ de un campo Killing de $\mathbb{M}_q^3(c)$ es un campo Killing a lo largo de γ , podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 1.4.10 ([LS84a], [BFLM01]) *Sea γ una curva inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un campo Killing a lo largo de γ si, y sólo si, es la restricción a γ de un campo Killing de $\mathbb{M}_q^3(c)$.*

Corolario 1.4.11 *Sea V un campo Killing de longitud constante sobre una curva γ en un espacio de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}^4$. Sea T el campo tangente de γ , entonces existe una función λ tal que*

$$\bar{\nabla}_T V = \lambda T \times V.$$

Demostración. Teniendo en cuenta el apartado a) de (1.4.15) y los argumentos utilizados en la demostración de la proposición 1.4.7 obtenemos el resultado requerido. \square

1.4.4. Campos Killing a lo largo de curvas pseudo-nulas

Usaremos la misma notación que en el apartado 1.4.3. El vector tangente a las s -curvas está dado por

$$\bar{T}(s, z) = v(s, z)T(s, z), \quad (1.4.16)$$

y la aceleración $a(s, z)$ de las s -curvas está definida por

$$a(s, z)^2 = \left\langle \bar{\nabla}_T \bar{T}, \bar{\nabla}_T \bar{T} \right\rangle. \quad (1.4.17)$$

Observamos que aunque s sea el parámetro arco de la curva γ , esto no implica que también lo sea de las curvas variacionales. En esta familia de curvas las tres funciones que caracterizan una curva son la velocidad, la aceleración y la torsión. Por tanto, diremos que un campo de vectores $V(s)$ es un campo Killing a lo largo de γ si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial a^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (1.4.18)$$

Vamos a deducir las ecuaciones Killing para curvas pseudo-nulas.

Variación del parámetro v : Usando (1.4.16) tenemos

$$V(v^2) = V \langle \bar{T}, \bar{T} \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_V \bar{T}, \bar{T} \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_T V, \bar{T} \rangle = 2v^2 \langle \bar{\nabla}_T V, T \rangle,$$

donde hemos utilizado que $[V, \bar{T}] = 0$. Deducimos

$$V(v) = \left\langle \bar{\nabla}_T V, T \right\rangle v. \quad (1.4.19)$$

Variación de la aceleración a : Podemos escribir

$$\bar{\nabla}_T \bar{T} = v \bar{\nabla}_T (vT) = vT(v)T + v^2 \bar{\nabla}_T T. \quad (1.4.20)$$

Utilizando (1.4.17) y (1.4.20) obtenemos

$$a^2 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}, \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T} \rangle = (vT(v))^2 + 2v^3 T(v) \langle T, \bar{\nabla}_T T \rangle + v^4 \langle \bar{\nabla}_T T, \bar{\nabla}_T T \rangle. \quad (1.4.21)$$

Suponemos que las curvas de la variación $\gamma(s, z)$ son del mismo tipo que γ , es decir, curvas pseudo-nulas y, por tanto, con aceleración nula $a = 0$. Entonces, utilizando (1.3.11), la ecuación (1.4.21) queda de la siguiente forma:

$$a^2 = \langle \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}, \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T} \rangle = v^2 (T(v))^2. \quad (1.4.22)$$

Derivamos en (1.4.22) y obtenemos

$$V(a^2) = V \langle \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}, \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T} \rangle = 2vV(v)T(v)^2 + 2v^2 T(v)V(T(v)). \quad (1.4.23)$$

Utilizando que $[V, \bar{T}] = 0$ llegamos a

$$[V, T] = hT \quad \text{y, por tanto,} \quad \bar{\nabla}_V T = \bar{\nabla}_T V + hT, \quad (1.4.24)$$

donde $h = -V(v)/v$. Usando (1.4.24) en (1.4.23):

$$2 \langle \bar{\nabla}_V (\bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}), \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T} \rangle = V \langle \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}, \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T} \rangle = 2v^2 T(v)T(V(v)). \quad (1.4.25)$$

Por ser $\mathbb{M}_q^3(c)$ un espacio de curvatura constante, utilizamos (1.1.2) y (1.1.3) para obtener

$$\bar{\nabla}_V (\bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}) = vT(v)\bar{\nabla}_T V + v^2 \bar{\nabla}_T^2 V + cv^2 \{V - \langle V, T \rangle T\}. \quad (1.4.26)$$

Usando (1.4.26) y (1.4.20) en (1.4.25) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} V(a^2) = 2aV(a) = V \langle \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T}, \bar{\nabla}_{\bar{T}} \bar{T} \rangle &= 2v^4 \langle \bar{\nabla}_T^2 V, N \rangle + 2cv^4 \langle V, N \rangle + \\ &2v^3 T(v)T \langle \bar{\nabla}_T V, T \rangle + 2v^2 T(v)^2 \langle \bar{\nabla}_T V, T \rangle. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Variación de la torsión τ : Utilizando (1.3.11) podemos escribir

$$\bar{\nabla}_V (\bar{\nabla}_T N) = V(\tau)N + \tau \bar{\nabla}_V N. \quad (1.4.28)$$

Utilizamos (1.1.2), (1.1.3) y (1.4.24) para obtener

$$\bar{\nabla}_V N = \bar{\nabla}_T^2 V + 2hN + T(h)T + c\{V - \langle V, T \rangle T\}. \quad (1.4.29)$$

De nuevo (1.1.2), (1.1.3) y (1.4.29) nos llevan a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_V (\bar{\nabla}_T N) &= \bar{\nabla}_T^3 V + c\bar{\nabla}_T V + (3h\tau + 3T(h) - c\langle V, T \rangle)N + \\ &+ (T(T(h)) - cT \langle V, T \rangle - c\langle V, N \rangle)T. \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

De (1.4.28) podemos escribir

$$V(\tau) = \tau \langle \bar{\nabla}_V N, B \rangle - \langle \bar{\nabla}_V (\bar{\nabla}_T N), B \rangle. \quad (1.4.31)$$

Finalmente, usando (1.4.29) y (1.4.30) en (1.4.31) obtenemos

$$\begin{aligned} V(\tau) = & - \langle \bar{\nabla}_T^3 V, B \rangle + \tau \langle \bar{\nabla}_T^2 V, B \rangle - c \langle \bar{\nabla}_T V, B \rangle + \\ & + c\tau \langle V, B \rangle - c \langle V, T \rangle + 3T(h) + h\tau. \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

Utilizando (1.4.19), (1.4.27) y (1.4.32), está claro que las ecuaciones (1.4.18) son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{aligned} a) \quad & \langle \bar{\nabla}_T V, T \rangle = 0, \\ b) \quad & \langle \bar{\nabla}_T^2 V + cV, N \rangle = 0, \\ c) \quad & \langle -\bar{\nabla}_T^3 V + \tau \bar{\nabla}_T^2 V - c\bar{\nabla}_T V + c\tau V, B \rangle - c \langle V, T \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

Como en el caso de las curvas de Frenet, las soluciones de (1.4.33) constituyen un espacio vectorial 6-dimensional, y como la restricción a γ de un campo Killing de $\mathbb{M}_q^3(c)$ es un campo Killing a lo largo de γ , podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 1.4.12 *Sea γ una curva pseudo-nula inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un campo Killing a lo largo de γ si, y sólo si, es la restricción a γ de un campo Killing en $\mathbb{M}_q^3(c)$.*

1.4.5. Campos Killing a lo largo de curvas nulas

Finalmente, en el caso de curvas nulas, y de una manera similar a los casos anteriores, podemos escribir el vector tangente a las s -curvas como

$$\bar{T}(s, z) = \delta(s, z)T(s, z). \quad (1.4.34)$$

Diremos que un campo de vectores $V(s)$ es un campo Killing a lo largo de γ si se mantiene el carácter causal de las curvas de la variación y se cumplen las siguientes condiciones:

$$\left. \frac{\partial \delta^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (1.4.35)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a ([HL06, Gi10]):

$$\begin{aligned} a) \quad & \langle \bar{\nabla}_T V, T \rangle = 0, \\ b) \quad & \langle \bar{\nabla}_T^2 V, N \rangle = 0, \\ c) \quad & \langle -\bar{\nabla}_T^3 V + \tau \bar{\nabla}_T^2 V, B \rangle - 2c \langle V, N \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

Como en los casos precedentes, las soluciones de (1.4.36) constituyen un espacio vectorial 6-dimensional, y podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 1.4.13 *Sea γ una curva nula inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un campo Killing a lo largo de γ si, y sólo si, es la restricción a γ de un campo Killing en $\mathbb{M}_q^3(c)$.*

1.5. Estructura cuaterniónica para \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}_1^3

Una propiedad importante de algunos espacios tridimensionales de curvatura constante es que se pueden ver como grupos de Lie para los que su métrica es bi-invariante (esto es, invariante para traslaciones tanto a derecha como izquierda). A continuación presentamos una estructura cuaterniónica para \mathbb{S}^3 , visto como subespacio de \mathbb{R}^4 , y para \mathbb{H}_1^3 , visto como subespacio de \mathbb{R}_2^4 , con una notación unificada que nos va a permitir verlos como grupos de Lie. Para el caso de \mathbb{S}^3 utilizamos los cuaterniones clásicos y para \mathbb{H}_1^3 utilizamos los pseudo-cuaterniones, que fueron introducidos por James Cockle en 1849, con el nombre de co-cuaterniones, [Coc49]; otros términos utilizados han sido anti-cuaterniones y split-cuaterniones, [Ros88, p. 389]. En ambos casos nos referiremos como cuaterniones.

En general, partimos del espacio de curvatura constante no nula $\mathbb{M}_q^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$, que representa:

- $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, para $c = 1, q = v = 0$.
- $\mathbb{H}_1^3 \subset \mathbb{R}_2^4$, para $c = -1, q = 1$ y $v = 2$.

Los *cuaterniones* pueden ser definidos como un espacio vectorial real 4-dimensional con base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dotado de la siguiente operación multiplicativa ($\mathbf{1}$ es el elemento unidad):

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, & \mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j}^2 = -c\mathbf{1}, & \mathbf{k}\mathbf{j} = -c\mathbf{i}, \\ \mathbf{i}\mathbf{k} = -\mathbf{j}, & \mathbf{j}\mathbf{k} = c\mathbf{i}, & \mathbf{k}^2 = -c\mathbf{1}. \end{array}$$

Además usamos las mismas letras que para los cuaterniones usuales, aunque para $c = -1$ la estructura multiplicativa es diferente a la clásica.

Un cuaternión $\mathbf{q} = q_1\mathbf{1} + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ tiene un *conjugado* $\bar{\mathbf{q}} = q_1\mathbf{1} - q_2\mathbf{i} - q_3\mathbf{j} - q_4\mathbf{k}$, que verifica $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + cq_3^2 + cq_4^2$. A q_1 se le llama parte real de \mathbf{q} y a $q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ su parte imaginaria. Diremos que \mathbf{q} es *real* (resp. *imaginario puro*) si $q_2 = q_3 = q_4 = 0$ (resp. $q_1 = 0$).

Denotamos por $\mathbf{H}(c)$ al conjunto de los cuaterniones. La aplicación $\phi : \mathbf{H}(c) \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ definida por

$$\phi(\mathbf{1}) = \partial_{x_1}, \quad \phi(\mathbf{i}) = \partial_{x_2}, \quad \phi(\mathbf{j}) = \partial_{x_3}, \quad \phi(\mathbf{k}) = \partial_{x_4},$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales y, por tanto, \mathbb{R}_v^4 se puede identificar con el grupo de Lie $\mathbf{H}(c)$ dotado con la métrica riemanniana o pseudo-riemanniana $\phi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle)$, según sea $c = 1$ o $c = -1$. Por simplicidad, escribiremos solamente $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El espacio $\mathbb{M}_q^3(c)$ puede ser identificado con un subespacio de $\mathbf{H}(c)$ como

$$\mathbb{M}_q^3(c) \equiv \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}(c) : \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = c\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = c\}.$$

Se verifica que $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{-1}$ para $\mathbf{q} \in \mathbb{M}_q^3(c)$. La estructura de grupo de Lie inducida en $\mathbb{M}_q^3(c)$ por los cuaterniones es la estructura canónica de grupo de Lie, es decir, la única para la cual la métrica es bi-invariante:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{apb}, \mathbf{aqb} \rangle, \quad \text{para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}_q^3(c).$$

1.6. Fibraciones de Hopf

La fibración clásica de Hopf se puede representar de una manera muy elegante mediante los cuaterniones (véase [Ga09]). Una fibración similar puede definirse en \mathbb{H}_1^3 utilizando los pseudo-cuaterniones (véase [LMP11]). Utilizaremos la misma notación que en el apartado anterior.

Para cada imaginario puro unitario $\rho \in \mathbb{R}_v^4$, sea $h_\rho : \mathbb{M}_q^3(c) \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ la aplicación definida por

$$h_\rho(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\rho\bar{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{M}_q^3(c). \quad (1.6.37)$$

No es difícil ver que $h_\rho(\mathbb{M}_q^3(c)) = M_\rho^2$, donde la superficie M_ρ^2 es, para el caso $c = 1$, la esfera $\mathbb{S}^2(1)$, y para el caso $c = -1$, bien el plano de De Sitter $\mathbb{S}_1^2(1)$ si $\langle \rho, \rho \rangle = 1$, bien una componente conexa del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2(-1)$ si $\langle \rho, \rho \rangle = -1$, o bien una componente conexa del cono de luz Λ^2 si $\langle \rho, \rho \rangle = 0$. Todas las aplicaciones $h_\rho : \mathbb{M}_q^3(c) \rightarrow M_\rho^2$ son fibraciones y, puesto que su definición es similar a la definición clásica de fibración de Hopf [Pin85], se pueden seguir llamando *fibraciones de Hopf*. En el caso particular en el que $\langle \rho, \rho \rangle \in \{-1, 0, +1\}$, no es difícil ver que $h_\rho(\mathbf{p}) = h_\rho(\mathbf{q})$ si, y sólo si, $\mathbf{q} = \pm \mathbf{p} \exp(z\rho)$, para un cierto $z \in \mathbb{R}$, donde $\exp(z\rho)$ representa la exponencial en el punto $\mathbf{1} \in \mathbb{M}_q^3(c)$ en la dirección de ρ .

La base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ del espacio tangente $T_1\mathbb{M}_q^3(c)$ en el punto $\mathbf{1} \in \mathbb{M}_q^3(c)$ puede ser extendida a una referencia global ortonormal invariante por la izquierda $\{E_1, E_2, E_3\}$ en $\mathbb{M}_q^3(c)$ de la siguiente forma:

$$E_1(\mathbf{q}) = \mathbf{qi}, \quad E_2(\mathbf{q}) = \mathbf{qj}, \quad E_3(\mathbf{q}) = \mathbf{qk}, \quad \text{para todo } \mathbf{q} \in \mathbb{M}_q^3(c).$$

Estos campos de vectores se denominan campos de Hopf y son campos Killing de longitud constante ± 1 . No es difícil ver que cualquier campo de vectores Killing \tilde{V} en $\mathbb{M}_q^3(c)$ de longitud constante $\varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$ es de la forma $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\rho$ (resp. $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \rho\mathbf{q}$), para un imaginario puro fijo $\rho \in \mathbb{M}_q^3(c)$, en el caso de que sea invariante por la izquierda (resp. invariante por la derecha); véase [Wie96, teorema 1] para el caso riemanniano, y [BHTZ93], [FFS04] para el caso pseudo-riemanniano. En el caso de \mathbb{S}^3 todos los campos de Hopf serán espaciales, pero en el caso de \mathbb{H}_1^3 se puede asumir que $\tilde{V} = E_1$ cuando \tilde{V} sea temporal, $\tilde{V} = E_2$ o $\tilde{V} = E_3$ cuando \tilde{V} sea espacial, y $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 \pm E_2)$ o $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 \pm E_3)$ en el caso que \tilde{V} sea nulo.

Es fácil ver que se verifica $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{ci}$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

1.7. Hélices generalizadas o curvas de Lancret

Una curva α no nula inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *curva plana* si está contenida en una superficie totalmente geodésica $\mathbb{M}^2 \subset \mathbb{M}_q^3(c)$. Como consecuencia, su torsión ha de anularse en todos los puntos. Una curva alabeada α en $\mathbb{M}_q^3(c)$ (es decir, una curva con torsión no nula $\tau \neq 0$) se dice que es una *hélice* si su curvatura y su torsión son constantes no nulas. Generalizando aún más, una curva $\alpha = \alpha(s)$ en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *hélice generalizada* (o una curva de Lancret) si existe un campo Killing $V(s)$ de longitud constante a lo largo de α tal que el producto entre V y T_α es constante a lo largo de la curva α . El campo V es un eje de la hélice generalizada α . Se dice que la hélice generalizada es no degenerada (resp. degenerada) si el eje V es no nulo (resp. nulo). Observemos que tanto las curvas planas como las hélices son ejemplos triviales de hélices generalizadas ([Bar97], [BFLM01]).

1.7.1. Construcción de hélices generalizadas no degeneradas

La construcción de curvas de Lancret en \mathbb{R}^3 (véase [Str50, págs. 33–34]) se describe en un bonito algoritmo. Consideramos una curva plana parametrizada por el arco $\beta(s)$ y sea B un vector unitario normal al plano que contiene a la curva. Sea C_β el cilindro recto de sección transversal $\beta(s)$ el cual se puede parametrizar como $\phi(s, t) = \beta(s) + tB$. Entonces la geodésica de C_β con pendiente h , parametrizada por $\alpha_h(u) = \phi(u, hu) = \beta(u) + huB$, es una curva de Lancret. Además, cada curva de Lancret se puede construir de esta manera. Esta construcción de curvas de Lancret es también válida en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 , [BFLM01]. En ambos casos se verifica el teorema de Lancret, es decir, el cociente τ/κ es constante.

Sea $\mathbb{M}_s^2(4c)$, $s = 0, 1$, la esfera 2-dimensional $\mathbb{S}^2(4)$ o el plano hiperbólico $\mathbb{H}_s^2(-4)$, en el caso $c > 0$ o $c < 0$, respectivamente. Consideramos $\pi = \pi_{qs} : \mathbb{M}_q^3(c) \rightarrow \mathbb{M}_s^2(4c)$ la fibración de Hopf (observamos que $\pi = (1/2)h_\rho$), la cual es una sumersión pseudo-riemanniana. Para cada punto $p \in \mathbb{M}_q^3(c)$, el espacio tangente $T_p\mathbb{M}_q^3(c)$ se descompone en un plano horizontal (el cual es isométrico a $T_{\pi(p)}\mathbb{M}_s^2(4c)$) y una “línea vertical” (que es la curva tangente a la fibra que pasa por p). Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{M}_s^2(4c)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}_s^2(4c)$. Se define el cilindro de Hopf sobre β como el levantamiento total $M_\beta = \pi^{-1}(\beta)$. No es difícil ver que M_β es una superficie llana en $\mathbb{M}_q^3(c)$ que puede ser parametrizada como $X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c)$ definida por

$$X(t, z) = f(z) \bar{\beta}(t) + g(z) V(t),$$

donde $\bar{\beta}$ es un levantamiento horizontal de β y V es un campo de vectores unitario a lo largo de la fibra (las funciones f y g están dadas en la sección 1.2.2).

Observamos que las t -curvas son los levantamientos horizontales de β mientras las z -curvas se corresponden con las fibras. Ambas familias de curvas están parametrizadas por el arco y son mutuamente ortogonales; además, son geodésicas en M_β . Aún más, cada

geodésica en M_β se puede obtener como la imagen por X de una recta en el (t, z) -plano. Por tanto, si $\alpha = \alpha(s)$ es una geodésica en M_β , entonces existen constantes a_i, b_i tales que

$$\alpha(s) = X(a_1s + a_2, b_1s + b_2) = f(b_1s + b_2) \bar{\beta}(a_1s + a_2) + g(b_1s + b_2) V(a_1s + a_2).$$

Se muestra, tanto en [Bar97] como en [BFLM01], que cada hélice generalizada de \mathbb{S}^3 o hélice generalizada no degenerada en \mathbb{H}_1^3 puede ser obtenida como una geodésica en cierto cilindro de Hopf $M_\beta \subset \mathbb{M}_q^3(c)$ sobre una curva $\beta \subset \mathbb{M}_s^2(4c)$. Se verifica que existe una relación del tipo $\tau = b\kappa \pm 1$ en ambos casos.

Como comentario final, si $\alpha(s)$ es una hélice generalizada en \mathbb{S}^3 o una hélice generalizada no degenerada en \mathbb{H}_1^3 con referencia de Frenet $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$, entonces un eje para esta hélice está dado por ([Bar97], [BFLM01]):

$$f(\theta)T_\alpha(s) + g(\theta)B_\alpha(s),$$

para una cierta constante θ .

1.7.2. Construcción de hélices generalizadas degeneradas

Sabemos que una curva no nula en \mathbb{R}_1^3 es una hélice generalizada degenerada si, y sólo si, $\tau = \pm\kappa$ y su vector normal es espacial, [BFLM01]. También se puede ver que las hélices generalizadas degeneradas de \mathbb{R}_1^3 pueden ser obtenidas como geodésicas en ciertos B -scroll llanos sobre curvas nulas.

Para el espacio lorentziano no llano \mathbb{H}_1^3 tenemos una construcción bastante similar. Sabemos que una curva no nula en \mathbb{H}_1^3 es una hélice generalizada degenerada si, y sólo si, $\tau = \pm\kappa \pm 1$ y su vector normal es espacial, [BFLM01]. También se puede ver que las hélices generalizadas degeneradas en \mathbb{H}_1^3 pueden ser obtenidas como geodésicas en ciertos B -scroll llanos sobre curvas nulas.

Los detalles de la integración geométrica de las hélices degeneradas se encuentran en [BFLM01]. Debe observarse que en este artículo los autores trabajan con la referencia de Cartan para curvas nulas, mientras que en esta memoria utilizamos una referencia pseudo-ortonormal diferente.

CAPÍTULO 2

Curvas de Bertrand

Una curva α en \mathbb{R}^3 se dice que es una curva de Bertrand si existe otra curva β y una correspondencia biyectiva entre dichas curvas tal que ambas curvas tienen geodésicas normales principales comunes en puntos homólogos. Nuestro objetivo, en este capítulo, es estudiar las curvas de Bertrand en los espacios de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$. Presentamos una primera sección donde extendemos los conceptos y propiedades más interesantes de las curvas de Bertrand de \mathbb{R}^3 a cualquier espacio de curvatura constante, véase la sección 2.1.1. Así, vemos en la proposición 2.1.2 y en el teorema 2.1.4 distintas propiedades y relaciones entre las curvaturas y los triedros del par de curvas de Bertrand.

Demostramos, también, que cada curva plana de Frenet en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva de Bertrand con infinitas Bertrand conjugadas que también son planas (véase la proposición 2.1.6). Nuestro principal teorema coincide con el resultado clásico para el espacio euclídeo y establece que una curva es de Bertrand si existe una relación lineal entre sus curvaturas, véase el teorema 2.1.7. Concluimos el apartado caracterizando a las hélices como las únicas curvas alabeadas en $\mathbb{M}_q^3(c)$ que tienen infinitas conjugadas Bertrand.

A continuación abordamos el estudio de las curvas de Bertrand pseudo-nulas y las curvas de Bertrand nulas. Los principales resultados se recogen en la proposición 2.1.15 y la proposición 2.1.17, respectivamente.

Nuestro siguiente objetivo es estudiar las curvas de Bertrand como puntos críticos de ciertos funcionales. Introducimos las LW-curvas como aquellas curvas que tienen una relación lineal entre su curvatura y su torsión (véase la definición 2.2.19). A continuación encontramos una clase de funcionales cuyo espacio de puntos críticos está formado por LW-curvas (véase la sección 2.2).

Por último, dedicamos una sección a los espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_q^3 . En primer lugar extendemos los teoremas de Bioche y Burke al espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 , véase el teorema 2.3.20. Este teorema nos sirve para obtener una integración geométrica de las curvas de Bertrand a partir de una curva en una superficie totalmente geodésica de \mathbb{R}_1^3 , véase la sección 2.3.2. Terminamos el capítulo con el teorema 2.3.24, en el que relacionamos las LW-curvas con geodésicas de superficies regladas construidas a partir de una curva con curvatura (o torsión) constante no nula y cuya dirección está generada por el campo de vectores modificado de Darboux de dicha curva.

Los resultados de este capítulo aparecen publicados en [LO12], [LO13a] y [LO13b].

2.1. Curvas de Bertrand en espacios tridimensionales de curvatura constante

Empezamos este capítulo extendiendo la definición clásica de curva de Bertrand en \mathbb{R}^3 . Para ello tenemos en cuenta los distintos tipos de curvas que nos podemos encontrar en los espacios tridimensionales de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$ y que se discutieron en la subsección 1.3. Decimos que dos curvas son del mismo tipo si las dos curvas son de Frenet (es decir, curvas con vector velocidad y vector aceleración no nulos), pseudo-nulas (es decir, curvas con vector tangente no nulo pero vector aceleración nulo) o nulas (es decir, curvas con vector tangente nulo), respectivamente. En este caso, utilizamos el término curva de Bertrand (en el caso de que la curva sea de Frenet), curva de Bertrand pseudo-nula o curva de Bertrand nula, respectivamente. Empezamos la sección definiendo las curvas de Bertrand para los tres tipos de curvas de una manera única.

Definición 2.1.1 ([LO12], [LO13a]) Una curva $\alpha = \alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c)$, con curvatura no nula, se dice *curva de Bertrand*, *curva de Bertrand pseudo-nula* o *curva de Bertrand nula* si existe otra curva del mismo tipo, $\beta = \beta(\sigma) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c)$, $\alpha \neq \pm\beta$, y una correspondencia biyectiva entre α y β (es decir, $s \in I \rightarrow \sigma(s) \in J$), tal que ambas curvas tengan geodésicas normales comunes en puntos homólogos. Diremos que β es una curva de Bertrand compañera (o Bertrand conjugada) de α . También se dirá que las curvas α y β son un par de curvas de Bertrand.

2.1.1. Propiedades de las curvas de Bertrand

Consideramos $\alpha(s)$ y $\beta(\sigma)$ un par de curvas de Bertrand, es decir, curvas no nulas con vector aceleración no nulo. Sea $\gamma_s^\alpha(t)$ la geodésica que parte de $\alpha(s)$ en la dirección de $N_\alpha(s)$ y que está dada por

$$\gamma_s^\alpha(t) = f(t)\alpha(s) + g(t)N_\alpha(s), \quad (2.1.1)$$

donde las funciones f y g son las determinadas por el flujo geodésico (véase la sección 1.2.2). Entonces existirá una función diferenciable $a(s)$ tal que

$$\beta(\sigma(s)) = f(a(s))\alpha(s) + g(a(s))N_\alpha(s), \quad (2.1.2)$$

donde $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ y $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ denotan la referencia de Frenet sobre α y sus caracteres causales. $\beta(\sigma(s))$ es el punto de β correspondiente a $\alpha(s)$. Como α y β comparten geodésicas normales en puntos homólogos tenemos que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a(s)} \gamma_s^\alpha(t) = \varepsilon N_\beta(\sigma(s)), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Puesto que $f' = -\varepsilon_2 c g$ y $g' = f$, obtenemos que

$$N_\beta(\sigma(s)) = -\varepsilon \varepsilon_2 c g(a(s))\alpha(s) + \varepsilon f(a(s))N_\alpha(s), \quad (2.1.3)$$

donde $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ denota la referencia de Frenet sobre β , con caracteres causales dados por $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Proposición 2.1.2 ([LO12], [LO13a]) *Sea α y β un par de curvas de Bertrand en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- a) *La función $a(s)$ es constante.*
- b) *El ángulo entre los vectores tangentes en puntos homólogos (considerados como vectores en \mathbb{R}_v^4) es constante.*
- c) *El ángulo entre los vectores binormales en puntos homólogos (considerados como vectores en \mathbb{R}_v^4) es constante.*

Demostración. a) Utilizando (2.1.2) y las ecuaciones de Frenet (1.3.10), el vector tangente a β se puede conseguir a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\beta(\sigma) &= a'(s)f'(a(s))\alpha(s) + (f(a(s)) - \varepsilon_1\kappa_\alpha(s)g(a(s)))T_\alpha(s) \\ &\quad + a'(s)g'(a(s))N_\alpha(s) + \varepsilon_3\tau_\alpha(s)g(a(s))B_\alpha(s). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Pero $\frac{d}{ds}\beta(\sigma) = \sigma'(s)T_\beta(\sigma(s))$ y, por tanto, utilizando (2.1.3) tenemos

$$0 = \left\langle \frac{d}{ds}\beta(\sigma), N_\beta(\sigma) \right\rangle (s) = \varepsilon a'(s)(\varepsilon_2 f(a(s))^2 + c g(a(s))^2) = \varepsilon \varepsilon_2 a'(s),$$

terminando la prueba.

b) Un cálculo directo muestra

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle T_\alpha(s), T_\beta(\sigma(s)) \rangle &= \langle -\varepsilon_1 c \alpha(s) + \varepsilon_2 \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s), T_\beta(\sigma(s)) \rangle \\ &\quad + \sigma'(s) \langle T_\alpha(s), -\delta_1 c \beta(\sigma(s)) + \delta_2 \kappa_\beta(\sigma(s)) N_\beta(\sigma(s)) \rangle. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Por otra parte, utilizando (2.1.4), junto con el hecho de que $a(s)$ es constante, obtenemos

$$T_\beta(\sigma(s)) = \frac{1}{\sigma'(s)} ((f(a) - \varepsilon_1 \kappa_\alpha(s)g(a))T_\alpha(s) + \varepsilon_3 \tau_\alpha(s)g(a) B_\alpha(s)), \quad (2.1.6)$$

que junto con (2.1.2), (2.1.3) y (2.1.5) nos lleva a

$$\frac{d}{ds} \langle T_\alpha(s), T_\beta(\sigma(s)) \rangle = 0,$$

mostrando el resultado deseado.

c) Sea θ el ángulo constante que hay entre $T_\alpha(s)$ y $T_\beta(\sigma(s))$, entonces escribimos

$$T_\beta(\sigma(s)) = \varphi(\theta) T_\alpha(s) + \eta(\theta) B_\alpha(s) \quad \text{o} \quad (2.1.7)$$

$$T_\beta(\sigma(s)) = \eta(\theta) T_\alpha(s) + \varphi(\theta) B_\alpha(s), \quad (2.1.8)$$

si los tangentes tienen igual o distinto carácter causal, respectivamente. Las funciones φ y η satisfacen:

$$\varphi^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \eta^2 = 1, \quad \text{con} \quad \varphi' = -\varepsilon_1 \varepsilon_3 \eta \quad \text{y} \quad \eta' = \varphi. \quad (2.1.9)$$

Supongamos que los tangentes tienen el mismo carácter causal. El otro caso es análogo y sólo hay que intercambiar las funciones φ y η . Usando el producto vectorial de \mathbb{R}_ν^4 , véase la sección 1.2.1 para más detalles, podemos obtener el vector binormal B_α de la curva α mediante

$$B_\alpha(s) = \varepsilon_3 \alpha(s) \wedge T_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s).$$

A partir de esta fórmula no es difícil ver que

$$B_\beta(\sigma(s)) = \varepsilon \delta_3 (-\varepsilon_1 \eta(\theta) T_\alpha(s) + \varepsilon_3 \varphi(\theta) B_\alpha(s)), \quad (2.1.10)$$

y deducimos finalmente

$$\langle B_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s)) \rangle = \varepsilon \delta_3 \varphi(\theta),$$

que es constante como queríamos. \square

Aunque en los espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_q^3 es una obviedad, en los espacios de curvatura constante no nula $\mathbb{M}_q^3(c)$ los apartados b) y c) de la proposición 2.1.2 se pueden reescribir utilizando el transporte paralelo. Recordando (2.1.1), sabemos por la proposición 2.1.2 que $\gamma_s^\alpha(0) = \alpha(s)$ y $\gamma_s^\alpha(a) = \beta(\sigma(s))$. Teniendo en cuenta la propiedad desarrollada en la sección 1.2.3, y puesto que tanto $T_\beta(\sigma(s))$ como $B_\beta(\sigma(s))$ son ortogonales a la dirección de la geodésica, si $P_a^0(\gamma_s^\alpha)$ denota el transporte paralelo a lo largo de la geodésica $\gamma_s^\alpha(t)$ desde $\beta(\sigma(s))$ hasta $\alpha(s)$, tenemos

$$(PT_\beta)(s) = P_a^0(\gamma_s^\alpha)(T_\beta(\sigma(s))) = T_\beta(\sigma(s)) \quad \text{y} \quad (2.1.11)$$

$$(PB_\beta)(s) = P_a^0(\gamma_s^\alpha)(B_\beta(\sigma(s))) = B_\beta(\sigma(s)). \quad (2.1.12)$$

Podemos escribir el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3 ([LO12], [LO13a]) *Sea α y β un par de curvas de Bertrand en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Entonces:*

- a) *El ángulo entre T_α y PT_β es constante.*
- b) *El ángulo entre B_α y PB_β es constante.*

El siguiente teorema es una extensión de un resultado obtenido por H.F. Lai [HonF67] para curvas de Bertrand en el espacio euclídeo 3-dimensional.

Teorema 2.1.4 ([LO12], [LO13a]) *Sea α y β un par de curvas de Bertrand en $\mathbb{M}_q^3(c)$, y sean φ y η las funciones dadas en (2.1.9). Si α y β tienen el mismo carácter causal, entonces existen dos constantes a y θ tales que se cumplen las siguientes igualdades:*

- a) $(f(a) - \varepsilon_1 g(a) \kappa_\alpha) \eta(\theta) = \varepsilon_3 g(a) \varphi(\theta) \tau_\alpha,$
- b) $(f(a) + \varepsilon \delta_1 g(a) \kappa_\beta) \eta(\theta) = \varepsilon_3 g(a) \varphi(\theta) \tau_\beta,$
- c) $(f(a) - \varepsilon_1 g(a) \kappa_\alpha)(f(a) + \varepsilon \delta_1 g(a) \kappa_\beta) = \varepsilon_1 \delta_1 \varphi(\theta)^2,$
- d) $g(a)^2 \tau_\alpha \tau_\beta = \varepsilon_1 \delta_1 \eta(\theta)^2,$

donde κ_α , τ_α , κ_β y τ_β denotan la curvatura y la torsión de las curvas α y β , respectivamente. Si α y β tienen distinto carácter causal, entonces se cumplen las relaciones anteriores intercambiando las funciones φ y η .

Demostración. Supongamos que α y β tienen el mismo carácter causal. En caso contrario basta intercambiar las funciones φ y η .

a) Consideramos la derivada covariante en (2.1.2) y usamos (2.1.7). Tenemos por un lado que

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = \sigma'(s)\varphi(\theta)T_\alpha(s) + \sigma'(s)\eta(\theta)B_\alpha(s).$$

Por otro lado, usando las ecuaciones de Frenet (1.3.10) conseguimos

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = (f(a) - \varepsilon_1 g(a)\kappa_\alpha(s))T_\alpha(s) + \varepsilon_3 g(a)\tau_\alpha(s)B_\alpha(s),$$

donde hemos usado que $a(s) = a$ es constante. Estas últimas dos ecuaciones nos llevan a

$$\sigma'(s)\varphi(\theta) = f(a) - \varepsilon_1 g(a)\kappa_\alpha(s), \tag{2.1.13}$$

$$\sigma'(s)\eta(\theta) = \varepsilon_3 g(a)\tau_\alpha(s), \tag{2.1.14}$$

de donde deducimos a).

b) Ahora necesitamos escribir la referencia de Frenet de α en términos de la referencia de Frenet de β :

$$\begin{aligned} \alpha(s(\sigma)) &= f(a)\beta(\sigma) - \varepsilon g(a)N_\beta(\sigma), \\ T_\alpha(s(\sigma)) &= \varepsilon_1 \delta_1 \varphi(\theta)T_\beta(\sigma) - \varepsilon \eta(\theta)B_\beta(\sigma), \\ N_\alpha(s(\sigma)) &= \varepsilon_2 c g(a)\beta(\sigma) + \varepsilon f(a)N_\beta(\sigma), \\ B_\alpha(s(\sigma)) &= \delta_1 \varepsilon_3 \eta(\theta)T_\beta(\sigma) + \varepsilon \varphi(\theta)B_\beta(\sigma). \end{aligned}$$

Razonando como en el caso anterior a) deducimos

$$\varepsilon_1 \delta_1 s'(\sigma)\varphi(\theta) = f(a) + \varepsilon \delta_1 g(a)\kappa_\beta(\sigma), \tag{2.1.15}$$

$$\varepsilon_1 \delta_1 s'(\sigma)\eta(\theta) = \varepsilon_3 g(a)\tau_\beta(\sigma), \tag{2.1.16}$$

de donde se deduce b).

c) Es una consecuencia de las ecuaciones (2.1.13) y (2.1.15).

d) Es una consecuencia de las ecuaciones (2.1.14) y (2.1.16). □

Observación 2.1.5 Para ver la importancia del producto $\varepsilon_1 \delta_1$, observamos que si α y β son curvas de Bertrand con igual carácter causal en $\mathbb{M}_q^3(c)$, el apartado d) del teorema anterior implica que el producto de sus torsiones en puntos homólogos es constante y no negativo. Esto es una generalización del clásico teorema de Schell's para curvas en \mathbb{R}^3 [Wea27, págs. 35–36]). En el caso de que α y β tengan distinto carácter causal tendremos que el producto de las torsiones es constante y no positivo, lo que representa una significativa diferencia entre los ambientes riemannianos y lorentzianos.

Proposición 2.1.6 (Curvas de Bertrand planas) ([LO12], [LO13a])

- a) Cada curva plana en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva de Bertrand y tiene infinitas curvas de Bertrand conjugadas planas.
- b) Si una curva de Bertrand α en $\mathbb{M}_q^3(c)$ tiene una Bertrand conjugada β plana, entonces α es una curva plana en la misma superficie \mathbb{M}^2 totalmente geodésica.

Demostración. a) Sea α una curva plana en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Se puede escoger un ε , suficientemente pequeño, para que las curvas β_a en $\mathbb{M}_q^3(c)$ definidas de la siguiente forma

$$\beta_a(s) = f(a)\alpha(s) + g(a)N_\alpha(s) \quad (2.1.17)$$

existan y sean diferenciables para cada número real $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Veamos que β_a es una Bertrand conjugada. Considerando la derivada covariante en (2.1.17), y usando las ecuaciones de Frenet (1.3.10), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$T_{\beta_a}(\sigma(s)) = T_\alpha(s), \quad (2.1.18)$$

$$\sigma'(s) = f(a) - \varepsilon_1 g(a) \kappa_\alpha(s), \quad (2.1.19)$$

donde $\sigma = \sigma(s)$ denota el parámetro longitud de arco de β_a . Utilizando, de nuevo, la derivada covariante en (2.1.18), y las ecuaciones de Frenet (1.3.10), fácilmente obtenemos

$$N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -\varepsilon_2 c g(a) \alpha(s) + f(a) N_\alpha(s), \quad (2.1.20)$$

$$\kappa_{\beta_a}(\sigma(s)) = \frac{\varepsilon_1 c g(a) + \varepsilon_2 f(a) \kappa_\alpha(s)}{f(a) - \varepsilon_1 g(a) \kappa_\alpha(s)}. \quad (2.1.21)$$

Entonces la geodésica normal principal que empieza en el punto $\beta_a(\sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$, es, utilizando propiedades trigonométricas,

$$\gamma(t) = f(t)\beta_a(\sigma_0) + g(t)N_{\beta_a}(\sigma_0) = f(t+a)\alpha(s_0) + g(t+a)N_\alpha(s_0),$$

que no es otra cosa que una reparametrización de la geodésica normal principal que empieza en $\alpha(s_0)$.

Derivando ahora en (2.1.20), y usando las ecuaciones de Frenet (1.3.10), tenemos

$$\sigma'(s) \frac{d}{d\sigma} N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -(\varepsilon_2 c g(a) + \varepsilon_1 f(a) \kappa_\alpha(s)) T_\alpha(s),$$

que, junto a (2.1.18), demuestra que $\tau_{\beta_a} = 0$, esto es, β_a es también una curva plana en $\mathbb{M}_q^3(c)$.

b) Puesto que $\tau_\beta = 0$, del teorema 2.1.4 (d) tenemos $\eta(\theta) = 0$ (y, por tanto, $\varphi(\theta)^2 = 1$). Utilizando ahora el teorema 2.1.4 (a) deducimos que $g(a)\tau_\alpha = 0$. Si $g(a) = 0$ entonces $f(a)^2 = 1$ y $\alpha = \pm\beta$ lo que sería una contradicción con la definición 2.1.1. Entonces α es plana. \square

Teorema 2.1.7 ([LO12], [LO13a]) *Una curva α de Frenet, no plana, en $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva de Bertrand si, y sólo si, existen dos constantes $\lambda \neq 0$ y μ , con $\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon_3\lambda^2 \neq 0$, tales que $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$.*

Demostración. Sea α una curva de Bertrand no plana ($\tau_\alpha \neq 0$). Entonces existe una curva de Bertrand conjugada $\beta(\sigma(s))$ y se verifica (2.1.2). Teniendo en cuenta la definición 2.1.1 y el hecho de que la función $a(s)$ es constante, podemos asumir que las constantes $f(a)$ y $g(a)$ no se anulan. Puesto que α no es plana, como consecuencia del teorema 2.1.4 (a) tenemos que $\eta \neq 0$ y que $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$, para las constantes

$$\lambda = \varepsilon_1 \frac{g(a)}{f(a)} \quad \text{y} \quad \mu = \varepsilon_3 \frac{g(a)\varphi(\theta)}{f(a)\eta(\theta)}.$$

En el caso lorentziano, si N_α es espacial y se cumple $\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon_3\lambda^2 = 0$ tenemos que β es nula, contradiciendo la definición 2.1.1.

Supongamos ahora que $\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$ para ciertas constantes $\lambda \neq 0$ y μ (con $\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon_3\lambda^2 \neq 0$). Sea β la curva de $\mathbb{M}_q^3(c)$ definida por

$$\beta(s) = f(a)\alpha(s) + g(a)N_\alpha(s), \tag{2.1.22}$$

donde a es el número que satisface $\lambda f(a) - \varepsilon_1 g(a) = 0$. Veamos que $\beta(\sigma)$ es una curva de Bertrand conjugada, donde $\sigma = \sigma(s)$ denota el parámetro longitud de arco de β . Utilizando la derivada covariante en (2.1.22), y usando las ecuaciones de Frenet (1.3.10), obtenemos

$$T_\beta(\sigma(s)) = \frac{\mu}{|\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon_3\lambda^2|^{1/2}} T_\alpha(s) + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_3\lambda}{|\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon_3\lambda^2|^{1/2}} B_\alpha(s).$$

Observamos que el carácter causal de β está dado por $\delta_1 = (\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon_3\lambda^2)$. Derivando otra vez obtenemos

$$N_\beta(\sigma(s)) = -\varepsilon\varepsilon_2cg(a)\alpha(s) + \varepsilon f(a)N_\alpha(s), \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{2.1.23}$$

Entonces la geodésica normal principal que empieza en el punto $\beta(\sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$, es, utilizando propiedades trigonométricas,

$$\gamma(t) = f(t)\beta(\sigma_0) + g(t)N_\beta(\sigma_0) = f(t + \varepsilon a)\alpha(s_0) + g(t + \varepsilon a)N_\alpha(s_0),$$

que no es otra cosa que una reparametrización de la geodésica normal principal que empieza en $\alpha(s_0)$. Esto demuestra el resultado. \square

En [Bar97], M. Barros extendió el teorema de Lancret a la esfera 3-dimensional: una curva no nula α en \mathbb{S}^3 es una hélice generalizada si existe una constante b tal que $\tau = b\kappa \pm 1$. En el caso lorentziano, el problema fue estudiado, y resuelto, en [BFLM01]; en este caso, la hélice generalizada se dice degenerada o no degenerada en el caso que su eje sea un vector nulo o no nulo, respectivamente. Como en el caso esférico, una curva no nula α en \mathbb{H}_1^3 es una hélice generalizada si existe una constante b tal que $\tau = b\kappa \pm 1$. La hélice

generalizada es degenerada si, y sólo si, $b = \pm 1$ y su vector normal es espacial. Tanto en \mathbb{H}^3 como en \mathbb{S}_1^3 las hélices generalizadas son o hélices ordinarias o curvas con torsión nula. En ambos trabajos la clave de la integración geométrica de las hélices generalizadas son las fibraciones de Hopf en \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 . Recordamos que, en el contexto de las fibraciones de Hopf, una curva se dice un levantamiento horizontal si está en la distribución horizontal del espacio tangente a \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 . Estas curvas tienen su campo binormal en la dirección de la fibra (dirección vertical) y su torsión vale ± 1 . Para más detalles véase la sección 1.7.1.

Corolario 2.1.8 Sea $\mathbb{M}_q^3(c)$ un espacio tridimensional de curvatura constante no llano.

- Las hélices ordinarias son curvas de Bertrand.
- Las curvas de Lancret, que no sean un levantamiento horizontal, son curvas de Bertrand.

Proposición 2.1.9 ([LO12], [LO13a]) Sea α una curva de Bertrand no plana en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- α es una hélice.
- α tiene infinitas curvas de Bertrand conjugadas.
- α tiene dos curvas de Bertrand conjugadas.

Demostración. a) \Rightarrow b) Asumamos que κ_α y τ_α son constantes no nulas. Entonces es obvio que existen infinitos pares de constantes (λ, μ) tales que $\lambda \kappa_\alpha + \mu \tau_\alpha = 1$; pero, por el teorema 2.1.7, para cada relación lineal diferente podemos construir curvas de Bertrand conjugadas, las cuales, por el teorema 2.1.4, también serán hélices.

b) \Rightarrow c) No hay nada que probar.

c) \Rightarrow a) Si α tiene dos curvas de Bertrand conjugadas β_1 y β_2 distintas entonces podemos encontrar, teniendo en cuenta la proposición 2.1.2 y el teorema 2.1.7, cuatro constantes $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \theta_1$ y θ_2 , que dependen de cada compañera, tales que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{g(a_1)}{f(a_1)} \kappa_\alpha(s) + \varepsilon_3 \frac{g(a_1)\varphi(\theta_1)}{f(a_1)\eta(\theta_1)} \tau_\alpha(s) &= 1, \\ \varepsilon_1 \frac{g(a_2)}{f(a_2)} \kappa_\alpha(s) + \varepsilon_3 \frac{g(a_2)\varphi(\theta_2)}{f(a_2)\eta(\theta_2)} \tau_\alpha(s) &= 1, \end{aligned}$$

donde $a_1 \neq a_2$ puesto que β_1 y β_2 son dos curvas de Bertrand conjugadas distintas. Tomando derivadas covariantes en esas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \kappa'_\alpha(s) + \varepsilon_3 \frac{\varphi(\theta_1)}{\eta(\theta_1)} \tau'_\alpha(s) &= 0, \\ \varepsilon_1 \kappa'_\alpha(s) + \varepsilon_3 \frac{\varphi(\theta_2)}{\eta(\theta_2)} \tau'_\alpha(s) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\kappa'_\alpha(s) = \tau'_\alpha(s) = 0$, esto es, α tiene curvatura y torsión constantes, concluyendo la prueba. \square

Otra consecuencia del teorema 2.1.7 es el siguiente resultado sobre curvas de curvatura constante.

Corolario 2.1.10 *Las curvas de curvatura constante en $\mathbb{M}_q^3(c)$ son curvas de Bertrand. Además, su curva de Bertrand conjugada también es de curvatura constante.*

Hasta ahora hemos visto que las curvas planas, las hélices ordinarias y las curvas de curvatura constante son curvas de Bertrand (véanse las proposiciones 2.1.6 y 2.1.9 y el corolario 2.1.10). También hemos visto (corolario 2.1.8) que, en $\mathbb{M}_q^3(c)$ con $c \neq 0$, las hélices generalizadas que no sean un levantamiento horizontal son curvas de Bertrand. Presentamos a continuación más ejemplos.

2.1.2. Ejemplos

Ejemplo 2.1.11 (Espirales de Euler o clotoides) Las espirales de Euler (también conocidas como espirales de Cornu o clotoides) son curvas planas cuya curvatura evoluciona linealmente a lo largo de la curva. La clotoide parece haber sido descubierta en varios contextos completamente distintos. En primer lugar, por Leonhard Euler, que resolvió el problema planteado por Jacques Bernoulli [Bern44], en el marco de la teoría de la elasticidad, de hallar las ecuaciones de la curva en la que la longitud de arco y la curvatura estuvieran en relación lineal. También por los franceses Augustin Fresnel [Fres19], para calcular la difracción de la luz, y Alfred Marie Cornu, que utilizó esta curva en el diseño de un aparato para medir la intensidad de la luz. En 1890, el ingeniero estadounidense Arthur Talbot [Tal99] la propuso como la forma ideal de la curva de transición que conecta dos tramos de vía de curvaturas dadas en un ferrocarril. El que la curvatura aumente con la distancia recorrida hace que la clotoide tenga forma espiral, por lo que también es conocida como espiral de Euler o espiral de Cornu (para más detalles históricos se puede consultar [Lev08]).

Vamos a presentar una familia 4-paramétrica de curvas de Bertrand con curvatura no constante y torsión no constante (se puede consultar [HT10] y referencias incluidas). Una curva $\alpha = \alpha(s)$ en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una espiral de Euler (o clotoide o espiral de Cornu) si tanto su curvatura como su torsión evolucionan linealmente a lo largo de la curva. Por tanto, existen constantes $\kappa_0, \tau_0, \gamma, \delta$ tales que

$$\kappa(s) = \kappa_0 + \gamma s, \quad \tau(s) = \tau_0 + \delta s.$$

Es fácil ver que las espirales de Euler son curvas de Bertrand siempre y cuando $\kappa_0\delta - \tau_0\gamma \neq 0$. Un ejemplo en \mathbb{R}^3 se puede ver en la figura 2.1.

Ejemplo 2.1.12 (n -clotoides) Podemos considerar una generalización de la clotoide clásica. Definimos la n -clotoide (o clotoide de grado n) en $\mathbb{M}_q^3(c)$ como aquella curva con curvatura y torsión de la forma

$$\kappa(s) = \kappa_0 + \gamma s^n, \quad \tau(s) = \tau_0 + \delta s^n,$$

donde κ_0, τ_0, γ y δ son constantes (se puede consultar [Gray97, págs. 53–54] para más detalles). Al igual que antes, es fácil comprobar que las n -clotoides son curvas de Bertrand siempre y cuando $\kappa_0\delta - \tau_0\gamma \neq 0$.

Un par de ejemplos en \mathbb{R}^3 se pueden ver en la figura 2.2.

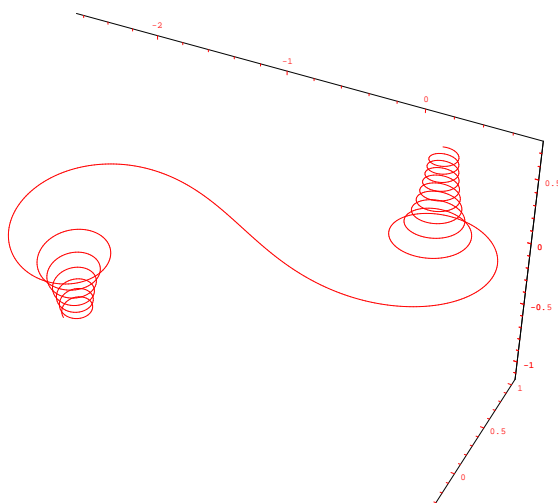
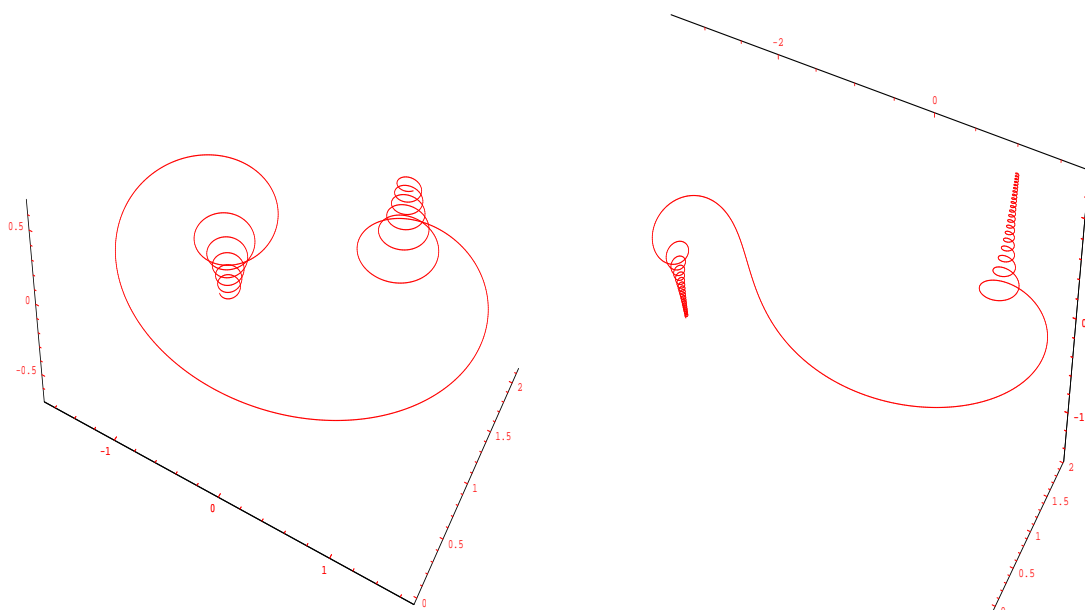


Figura 2.1: Clotoide con $\kappa(s) = s + 1$ y $\tau(s) = 0,1 s$

Ejemplo 2.1.13 (Hélices cónicas generalizadas) Una curva $\alpha = \alpha(s)$ en $\mathbb{M}_q^3(c)$ con curvatura y torsión no constantes se dice que es una *hélice cónica* si tanto el radio de curvatura $1/\kappa$ como el radio de torsión $1/\tau$ evolucionan linealmente a lo largo de la curva. Por



2-clotoide
 $\kappa(s) = 0,5 + 0,1 s^2$, $\tau(s) = 0,01 s^2$

3-clotoide
 $\kappa(s) = -0,5 + 0,05 s^3$, $\tau(s) = 0,01 s^3$

Figura 2.2: Clotoides de grado 2 y 3

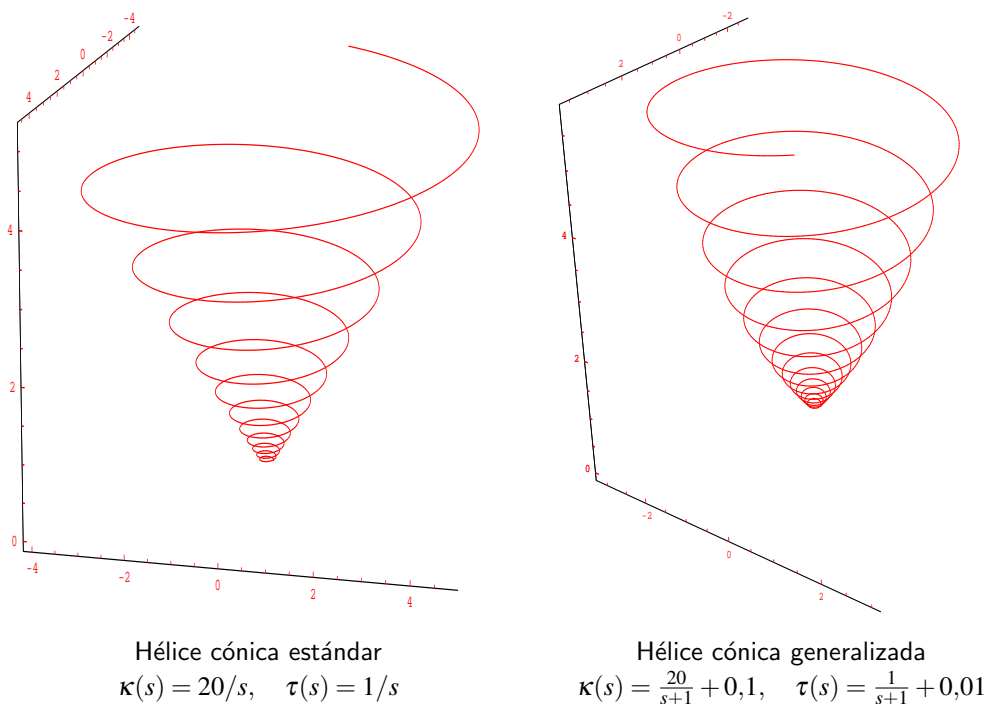


Figura 2.3: Hélices cónicas

tanto, existen constantes $r_0, r_1, \gamma \neq 0$ y $\delta \neq 0$, tales que

$$\kappa(s) = \frac{\gamma}{s + r_0}, \quad \tau(s) = \frac{\delta}{s + r_1}.$$

En el caso particular en el que tanto r_0 como r_1 se anulan, la curva se llama hélice cónica estándar. En \mathbb{R}^3 , una curva es una hélice cónica estándar si está contenida en un cono y corta a las rectas del cono bajo un ángulo constante. Se pueden ver algunos ejemplos en el espacio euclídeo 3-dimensional en la figura 2.3. Podemos generalizar un poco esta definición. Una curva no plana $\alpha = \alpha(s)$ en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *hélice cónica generalizada* si existen constantes $r_0, r_1, \gamma \neq 0, \gamma_0, \delta \neq 0$ y δ_0 , tales que

$$\kappa(s) = \frac{\gamma}{s + r_0} + \gamma_0, \quad \tau(s) = \frac{\delta}{s + r_1} + \delta_0.$$

Es fácil ver que α es una curva de Bertrand siempre que $r_0 = r_1$ y $\delta\gamma_0 - \gamma\delta_0 \neq 0$.

Ejemplo 2.1.14 (Curvas cúbicas tangenciales) Siguiendo la notación de [PH05], y en el caso particular de una variedad M de dimensión uno, una curva se dice que es una *cúbica tangencial* si

$$\langle \alpha^{(4)}, \alpha' \rangle = 0.$$

Asumamos que $\alpha = \alpha(s) \subset \mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ parametrizada por la longitud de arco. Por las ecuaciones de Frenet (1.3.10) obtenemos las siguientes ecuacio-

nes:

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \varepsilon_2 \kappa N - \varepsilon_1 c \alpha, \\ \alpha''' &= -\varepsilon_1 (c + \varepsilon_2 \kappa^2) T + \varepsilon_2 \kappa' N + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa \tau B, \\ \alpha^{(4)} &= c(c + \varepsilon_2 \kappa^2) \alpha - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa \kappa' T + (\varepsilon_2 \kappa'' - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa (c + \varepsilon_2 \kappa^2) - \varepsilon_3 \kappa \tau^2) N + \\ &\quad + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (2\kappa' \tau + \kappa \tau') B.\end{aligned}$$

Como consecuencia, α es una curva cúbica tangencial si, y sólo si, tiene curvatura constante κ (se puede comparar con la proposición 8 de [PH05]). Por tanto, cada curva cúbica tangencial parametrizada por el arco en un espacio de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$ es una curva de Bertrand.

2.1.3. Curvas de Bertrand pseudo-nulas

Sea $\alpha(s)$ y $\beta(\sigma)$ un par de curvas de Bertrand pseudo-nulas, entonces existe una función diferenciable $a(s)$ tal que

$$\beta(\sigma(s)) = \gamma_s^\alpha(a(s)) = \alpha(s) + a(s)N_\alpha(s), \quad (2.1.24)$$

donde $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ es la referencia de Frenet a lo largo de α y $\beta(\sigma(s))$ es el punto de β correspondiente a $\alpha(s)$. Aquí $\gamma_s^\alpha(t) = \alpha(s) + tN_\alpha(s)$ representa la geodésica que parte de $\alpha(s)$ en la dirección de $N_\alpha(s)$.

Puesto que α y β comparten geodésicas normales comunes en puntos homólogos, tenemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a(s)} \gamma_s^\alpha(t) = \varepsilon N_\beta(\sigma(s)), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Obtenemos, por tanto,

$$\varepsilon N_\alpha(s) = N_\beta(\sigma(s)), \quad (2.1.25)$$

donde $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ denota la referencia de Frenet a lo largo de $\beta(\sigma)$. Por otra parte, utilizando ahora las ecuaciones de Frenet (1.3.11), el vector tangente a β está dado por

$$\frac{d}{ds} \beta(\sigma(s)) = \sigma'(s) T_\beta(\sigma(s)) = T_\alpha(s) + a'(s) N_\alpha(s) + a(s) \tau_\alpha(s) N_\alpha(s). \quad (2.1.26)$$

Derivamos en (2.1.25) para darnos cuenta que

$$\varepsilon \tau_\alpha(s) N_\alpha = \sigma'(s) \tau_\beta(\sigma(s)) N_\beta(\sigma(s)),$$

deduciendo que

$$\tau_\alpha(s) = \sigma'(s) \tau_\beta(\sigma(s)).$$

Tomando módulos en (2.1.26) tenemos que $\sigma'(s)^2 = 1$. Salvo orientación, podemos suponer $\sigma'(s) = 1$. Podemos escribir, por tanto,

$$T_\beta(\sigma(s)) = T_\alpha(s) + (a'(s) + a(s) \tau_\alpha(s)) N_\alpha(s).$$

Derivando con la conexión euclídea, obtenemos

$$-c\beta(\sigma(s)) + N_\beta(\sigma(s)) = -c\alpha(s) + N_\alpha(s) + (a'(s) + a(s)\tau_\alpha(s))'N_\alpha(s) + (a'(s) + a(s)\tau_\alpha(s))\tau_\alpha N_\alpha(s),$$

de donde deducimos

$$N_\beta(\sigma(s)) = \left(ca(s) + 1 + (a'(s) + a(s)\tau_\alpha(s))' + (a'(s) + a(s)\tau_\alpha(s))\tau_\alpha(s) \right) N_\alpha(s),$$

por lo que

$$a''(s) + 2\tau_\alpha(s)a'(s) + (\tau'_\alpha(s) + \tau_\alpha^2(s) + c)a(s) = \varepsilon - 1, \quad \text{para } \varepsilon = \pm 1. \quad (2.1.27)$$

Tenemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición 2.1.15 *Todas las curvas pseudo-nulas α en $\mathbb{M}_1^3(c)$ son curvas de Bertrand pseudo-nulas. Además, estas serán de la forma (2.1.24) para una cierta función diferenciable $a(s)$ que verifique (2.1.27).*

2.1.4. Curvas de Bertrand nulas

Sea $\alpha(s)$ y $\beta(\sigma)$ un par de curvas de Bertrand nulas, entonces existe una función diferenciable $a(s)$ tal que

$$\beta(\sigma(s)) = \gamma_s^\alpha(a(s)) = f(a(s))\alpha(s) + g(a(s))N_\alpha(s), \quad (2.1.28)$$

donde $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ es la referencia de Frenet a lo largo de α y $\beta(\sigma(s))$ es el punto de β correspondiente a $\alpha(s)$.

Proposición 2.1.16 ([LO13a]) *Sea α y β un par de curvas de Bertrand nulas en $\mathbb{M}_1^3(c)$. Entonces la función $a(s)$ es una constante no nula.*

Demostración. Puesto que α y β comparten geodésicas normales comunes en puntos homólogos, tenemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a(s)} \gamma_s^\alpha(t) = \varepsilon N_\beta(\sigma(s)), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Usando que $f' = -cg$ y $g' = f$, obtenemos

$$N_\beta(\sigma(s)) = -\varepsilon cg(a(s))\alpha(s) + \varepsilon f(a(s))N_\alpha(s), \quad (2.1.29)$$

donde $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ denota la referencia de Frenet a lo largo de $\beta(\sigma)$. Por otra parte, utilizando ahora las ecuaciones de Frenet (1.3.12), el vector tangente a β está dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) &= a'(s)f'(a(s))\alpha(s) + (f(a(s)) + g(a(s))\tau_\alpha(s))T_\alpha(s) \\ &\quad + a'(s)g'(a(s))N_\alpha(s) + g(a(s))B_\alpha(s). \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Pero $\frac{d}{ds}\beta(\sigma) = \sigma'(s)T_\beta(\sigma(s))$, entonces de (2.1.29) y (2.1.30) tenemos

$$0 = \left\langle \frac{d}{ds}\beta(\sigma), N_\beta(\sigma) \right\rangle = \varepsilon a'(s)(f(a)^2 + cg(a)^2) = \varepsilon a'(s),$$

terminando la prueba. \square

Vamos a caracterizar las curvas de Bertrand nulas en $\mathbb{M}_1^3(c)$. Sean $\alpha = \alpha(s)$ y $\beta = \beta(\sigma)$ un par de curvas de Bertrand nulas en $\mathbb{M}_1^3(c)$. Puesto que a es constante, de (2.1.30) deducimos

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) = (f(a) + g(a)\tau_\alpha(s))T_\alpha(s) + g(a)B_\alpha(s), \quad (2.1.31)$$

y entonces

$$0 = \left\langle \frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)), \frac{d}{ds}\beta(\sigma(s)) \right\rangle = -2(f(a) + g(a)\tau_\alpha(s))g(a).$$

Puesto que $g(a)$ no es cero, deducimos que $\tau_\alpha(s) = -f(a)/g(a)$ es constante. De aquí y (2.1.31) conseguimos $\sigma'(s)T_\beta(\sigma(s)) = g(a)B_\alpha(s)$ y, por tanto, existe una función no nula $b(s)$ tal que

$$T_\beta(\sigma(s)) = b(s)B_\alpha(s), \quad b(s) = \frac{g(a)}{\sigma'(s)}; \quad (2.1.32)$$

por tanto,

$$B_\beta(\sigma(s)) = \frac{1}{b(s)}T_\alpha(s). \quad (2.1.33)$$

Puesto que las referencias $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ y $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ están positivamente orientadas, de las relaciones (2.1.29), (2.1.32) y (2.1.33) deducimos $\varepsilon = -1$. Tomando derivadas en (2.1.29) obtenemos

$$\frac{d}{ds}N_\beta(\sigma(s)) = (cg(a) - f(a)\tau_\alpha(s))T_\alpha(s) - f(a)B_\alpha(s), \quad (2.1.34)$$

y tenemos también

$$\frac{d}{ds}N_\beta(\sigma(s)) = \sigma'(s)\frac{d}{d\sigma}N_\beta(\sigma(s)) = \sigma'(s)\tau_\beta(\sigma(s))T_\beta(\sigma(s)) + \sigma'(s)B_\beta(\sigma(s)). \quad (2.1.35)$$

Combinando las ecuaciones desde (2.1.32) a (2.1.35) deducimos

$$\sigma'(s) = (cg(a) - f(a)\tau_\alpha(s))b(s), \quad (2.1.36)$$

$$\sigma'(s)\tau_\beta(\sigma(s))b(s) = -f(a). \quad (2.1.37)$$

Puesto que $b(s)\sigma'(s) = g(a)$, de (2.1.37) obtenemos

$$\tau_\beta(\sigma(s)) = -\frac{f(a)}{g(a)} = \tau_\alpha(s).$$

Proposición 2.1.17 ([LO13a]) *Sea α una curva nula en $\mathbb{M}_1^3(c)$. Entonces α es una curva de Bertrand nula si, y sólo si, tiene curvatura constante y, por tanto, es una hélice.*

Demostración. Sólo necesitamos probar la implicación inversa. Supongamos que α tiene torsión τ_α constante no nula. Sea a la constante no nula tal que $f(a) + \tau_\alpha g(a) = 0$ y consideramos cualquier constante no nula b . Definamos σ por la ecuación

$$\sigma(s) = \frac{g(a)}{b}(s - s_0).$$

Sea $\beta = \beta(\sigma)$ la curva nula definida por

$$\beta(\sigma(s)) = f(a)\alpha(s) + g(a)N_\alpha(s). \quad (2.1.38)$$

Vamos a probar que la curva β es una curva de Bertrand conjugada. Tomando la derivada covariante en (2.1.38) y usando las ecuaciones de Frenet (1.3.12) obtenemos

$$T_\beta(\sigma(s)) = bB_\alpha(s).$$

Tomando de nuevo derivadas llegamos a

$$\frac{g(a)}{b}N_\beta(\sigma(s)) = bc\alpha(s) + b\tau_\alpha N_\alpha(s).$$

Tomando módulos, esta ecuación implica

$$\varepsilon = \frac{b}{g(a)}, \quad \text{con } \varepsilon = \pm 1, \quad (2.1.39)$$

$$N_\beta(\sigma(s)) = cg(a)\alpha(s) - f(a)N_\alpha(s), \quad (2.1.40)$$

$$B_\beta(\sigma(s)) = \frac{1}{b}T_\alpha(s). \quad (2.1.41)$$

Entonces, de (2.1.38) y (2.1.40), la geodésica normal principal que empieza en el punto $\beta(\sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$, estará dada por

$$\gamma_{\sigma_0}^\beta(t) = f(t)\beta(\sigma_0) + g(t)N_\beta(\sigma_0) = f(t-a)\alpha(s_0) + g(t-a)N_\alpha(s_0) = \gamma_{s_0}^\alpha(t-a),$$

demostrando que las curvas nulas α y β comparten geodésicas normales principales comunes y, por tanto, son curvas de Bertrand conjugadas, concluyendo la prueba. \square

2.2. Curvas de Bertrand como puntos críticos en $\mathbb{M}_q^3(c)$

En esta sección consideramos curvas de Frenet. El teorema fundamental para curvas afirma que tanto el parámetro arco como las curvaturas $\{\kappa, \tau\}$ determinan completamente, salvo isometrías, una curva en $\mathbb{M}_q^3(c)$. Entonces cualquier función definida sobre las curvas de Frenet, que dependa de la geometría de éstas, siempre se puede expresar como función de sus curvaturas y las derivadas de éstas. Por el principio de mínima energía, las estructuras unidimensionales admisibles en la Naturaleza deberían ser extremos de

un determinado funcional de energía. Entonces tiene sentido elegir un funcional que sea función del parámetro arco, de la curvatura, de la torsión, y de sus derivadas.

Consideramos el funcional $\mathcal{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_{\gamma} f(\kappa) ds,$$

donde Λ es el espacio de las curvas que cumplen determinadas condiciones de frontera de primer orden.

Ecuaciones de Euler-Lagrange ([FGJL06]) *Dados dos puntos $p_1, p_2 \in \mathbb{M}_q^3(c)$ y $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$ vectores ortonormales en $T_{p_1}\mathbb{M}_q^3(c)$ y $T_{p_2}\mathbb{M}_q^3(c)$, respectivamente, definimos:*

$$\Lambda = \{\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{M}_q^3(c) \mid \gamma(t_i) = p_i, T(t_i) = x_i, N(t_i) = y_i, 1 \leq i \leq 2\}.$$

Entonces los puntos críticos del funcional $\mathcal{F} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ están caracterizados por las ecuaciones de Euler-Lagrange siguientes:

$$\varepsilon \kappa f + (\varepsilon_2 \tau^2 - \varepsilon \kappa^2) f_{\kappa} - \varepsilon \varepsilon_2 c f_{\kappa} = \varepsilon_3 f_{\kappa}'' \tag{2.2.42}$$

$$2\tau f'_{\kappa} + \tau' f_{\kappa} = 0, \tag{2.2.43}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = (-1)^q$.

Considerando el funcional lineal $f(\kappa) = m + n\kappa$, las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas anteriormente nos llevan fácilmente a que:

$$\varepsilon m \kappa + \varepsilon_2 \tau^2 n = \varepsilon \varepsilon_2 n c \quad \text{y} \quad \tau = p \quad (\text{para } p \in \mathbb{R}).$$

En el caso $n = 0$ obtenemos que los puntos críticos son geodésicas. Considerando $n \neq 0$, si $m = 0$ obtenemos $\tau^2 = \varepsilon c = (-1)^v$ y si $m \neq 0$ obtenemos $\kappa = \frac{\varepsilon \varepsilon_2 n}{m} (\varepsilon c - \tau^2)$. Resumiendo:

- En \mathbb{R}_q^3 los puntos críticos son geodésicas, curvas planas y hélices con torsión arbitraria τ y curvatura $\kappa = -(\varepsilon \varepsilon_2 n / m) \tau^2$.
- En \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 se verifica $\varepsilon c = 1$, por lo que los puntos críticos son geodésicas, curvas con curvatura κ arbitraria y torsión $\tau = \pm 1$ (levantamientos horizontales por la fibrición de Hopf) y hélices con torsión arbitraria τ y curvatura $\kappa = \frac{\varepsilon \varepsilon_2 n}{m} (1 - \tau^2)$.
- En \mathbb{S}_1^3 o \mathbb{H}^3 se verifica $\varepsilon c = -1$, por lo que los puntos críticos son geodésicas y hélices con torsión arbitraria τ y curvatura $\kappa = \frac{-\varepsilon \varepsilon_2 n}{m} (1 + \tau^2)$.

Observación 2.2.18 Los resultados para \mathbb{R}^3 se pueden comparar con [FNS05]. La acción más sencilla que describe el movimiento de una partícula la podemos obtener cuando f es constante y, por tanto, proporcional a su parámetro. En este caso, las estructuras modeladas por esta acción son exactamente las geodésicas del espacio ambiente. En [FNS05], y teniendo en mente las proteínas helicoidales, los autores intentaron especificar la función $f(\kappa)$ de tal forma que los extremos del funcional \mathcal{F} fueran únicamente las hélices. La respuesta resultó ser que el funcional debería ser una función lineal en la curvatura: $f(\kappa) = m + n\kappa$, donde m y n son constantes específicas del modelo.

En [BF09] los autores presentan un modelo más preciso con un funcional lineal tanto en la curvatura como en la torsión, $f(\kappa, \tau) = m + n\kappa + p\tau$. En este caso, el espacio de los puntos críticos es el de las curvas de Lancret. Nos proponemos encontrar un modelo para el cual las curvas de Bertrand sean sus puntos críticos. Es obvio que el funcional debería ser más complicado que una función lineal en sus curvaturas. Pero nos gustaría que el funcional fuera lo más sencillo posible y, por tanto, que sólo dependa de su curvatura κ .

Definición 2.2.19 Una curva de Frenet γ inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se llama *LW-curva* si existen tres números reales λ, μ, ρ tales que

$$\lambda \kappa + \mu \tau = \rho,$$

con $\lambda^2 + \mu^2 > 0$, siendo κ y τ la curvatura y torsión de la curva γ , respectivamente.

La siguiente tabla muestra los diferentes ejemplos de LW-curvas en función de los parámetros λ, μ, ρ .

λ	μ	ρ	Familia de LW-curvas
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	1. Geodésicas ($\kappa = 0$)
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	2. Curvas planas ($\tau = 0$)
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	3. Curvas con curvatura constante no nula
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	4. Curvas con torsión constante no nula
$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	5. Curvas de Lancret
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	6. Curvas de Bertrand

Tabla: Ejemplos de LW-curvas

Podemos asumir que $f(\kappa)$ no es una función lineal de la curvatura κ . Entonces podemos integrar las ecuaciones (2.2.42) y (2.2.43) para obtener

$$\varepsilon_1(f - \kappa f_\kappa)^2 + \varepsilon_2(f'_\kappa)^2 + \varepsilon_3 \frac{e^2}{f_\kappa^2} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 c f_\kappa^2 = d, \tag{2.2.44}$$

$$\tau f_\kappa^2 = e, \tag{2.2.45}$$

para ciertas constantes d y e (véase [FGJL06]).

Si una LW-curva γ con curvatura y torsión no constantes es un punto crítico del funcional \mathcal{F} , entonces podemos escribir $\tau = \alpha \kappa + \beta$, $\alpha \neq 0$. Usando (2.2.45) obtenemos que f debería satisfacer la siguiente ecuación

$$f_\kappa(\kappa) = \pm \frac{2\sqrt{e}}{\alpha} (\sqrt{\alpha \kappa + \beta})_\kappa, \tag{2.2.46}$$

que podemos integrar fácilmente para obtener

$$f(\kappa) = a\sqrt{\kappa + b} + m, \tag{2.2.47}$$

para ciertas constantes $a \neq 0, b, m$. El siguiente objetivo es encontrar todos los extremos del funcional \mathcal{F} cuya densidad $f(\kappa)$ está dada por (2.2.47). De (2.2.45) deducimos

$$\tau = \frac{e}{f_\kappa(\kappa)^2} = \alpha\kappa + \beta,$$

donde las constantes α y β están dadas por

$$\alpha = \frac{4e}{a^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{4eb}{a^2}.$$

Esto muestra que γ es una LW-curva. Además, debe verificarse (2.2.44), por lo que

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 a^4 (\kappa')^2 = & -4\varepsilon_1 a^4 (\kappa + b)^2 (\kappa + 2b)^2 - 64\varepsilon_3 \varepsilon^2 (\kappa + b)^4 + \\ & + 16da^2 (\kappa + b)^3 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 ca^4 (\kappa + b)^2, \end{aligned}$$

de donde deducimos,

$$\kappa' = \frac{1}{a^2} \sqrt{A\kappa^4 + B\kappa^3 + C\kappa^2 + D\kappa + E}$$

para ciertas constantes A, B, C, D y E . Esto muestra que no todas las LW-curvas pueden ser puntos críticos de funcionales cuyo conjunto de puntos críticos conste únicamente de LW-curvas.

Para que el conjunto de puntos críticos conste únicamente de LW-curvas, y teniendo en cuenta los puntos críticos del funcional \mathcal{F} en los casos $f(\kappa) = m + n\kappa$ o $f(\kappa) = a\sqrt{\kappa + b} + m$, podemos decir que el funcional debe ser una función lineal bien de su curvatura o bien de la raíz cuadrada de la curvatura:

$$f(\kappa) = m + n\kappa + a\sqrt{\kappa + b},$$

donde $an = 0$.

2.3. Curvas de Bertrand en espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_q^3

En el caso de los espacios pseudo-euclídeos \mathbb{R}_q^3 se puede profundizar en el estudio sobre la integración de las curvas de Bertrand. Para empezar, extenderemos a \mathbb{R}_1^3 un par de resultados de \mathbb{R}^3 , el teorema de Bioche (véase [Bio89]) y el teorema de Burke (véase [Bur60]). Después utilizaremos estos resultados para realizar una integración geométrica a partir de curvas de una superficie totalmente umbilical de \mathbb{R}_1^3 . Terminaremos estudiando una correspondencia de tipo Combescure entre geodésicas de ciertas superficies regladas y las LW-curvas. Consideraremos en esta sección solamente curvas de Frenet.

2.3.1. Teoremas de Bioche y Burke en \mathbb{R}_q^3

Vamos a describir un algoritmo de construcción de curvas de Bertrand, análogo al de curvas de Lancret dado en [Bar97, BFLM01], a partir de un par de curvas (una de ellas con curvatura constante no nula y otra con torsión constante no nula). Un teorema de Bioche [Bio89] para curvas en \mathbb{R}^3 establece que si $\alpha_1(s)$ ($s \in I$) es una curva de curvatura constante no nula, $\alpha_2(\sigma)$ ($\sigma \in J$) es una curva de torsión constante y existe una correspondencia biyectiva $s \in I \rightarrow \sigma(s) \in J$ entre los puntos de $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ tal que en los puntos homólogos $P_1 = \alpha_1(s)$ y $P_2 = \alpha_2(\sigma(s))$ tenemos que

(B1) los vectores tangentes T_1 de $\alpha_1(s)$ y T_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$ son paralelos, entonces la curva $\alpha(t)$ parametrizada por

$$\alpha(t) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t)), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.3.48)$$

es una curva de Bertrand (donde t denota el parámetro longitud de arco de α). A partir de este teorema obtenemos una familia biparamétrica de curvas de Bertrand $\gamma_{ab}(t) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t))$; en este caso hemos usado LW-curvas de tipo 3 (curvatura constante no nula) y de tipo 4 (torsión constante no nula) para construir LW-curvas de tipo 6.

No es difícil ver que este teorema se puede extender para curvas de Frenet inmersas en \mathbb{R}_1^3 . Podemos derivar en (2.3.48) y usar (B1) para escribir, sin pérdida de generalidad, que

$$T(t) = T_1(s(t)) = T_2(\sigma(t)) \quad \text{y} \quad 1 = as'(t) + b\sigma'(t). \quad (2.3.49)$$

Derivando en la primera ecuación de (2.3.49) fácilmente obtenemos

$$N(t) = N_1(s(t)) = N_2(\sigma(t)) \quad \text{y} \quad \kappa(t) = s'(t)\kappa_1(s(t)) = \sigma'(t)\kappa_2(\sigma(t)), \quad (2.3.50)$$

y, por tanto,

$$B(t) = B_1(s(t)) = B_2(\sigma(t)) \quad \text{y} \quad \tau(t) = s'(t)\tau_1(s(t)) = \sigma'(t)\tau_2(\sigma(t)). \quad (2.3.51)$$

Finalmente, de (2.3.49), (2.3.50) y (2.3.51) deducimos que $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$, con $\lambda = a/\kappa_1$ y $\mu = b/\tau_2$, demostrando que α es una curva de Bertrand.

Dos curvas $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ satisfaciendo la condición (B1) (es decir, que exista una correspondencia biyectiva $s \rightarrow \sigma(s)$ tal que los vectores tangentes unitarios de esas curvas en puntos homólogos tengan la misma dirección: $T_1(s) = \pm T_2(\sigma(s))$) se dice que están relacionadas mediante una transformación de Combescure (véase, por ejemplo, [Gra17]).

Burke [Bur60] mostró que el resultado de Bioche es también cierto si sustituimos la condición (B1) por alguna de las siguientes:

(B2) Los vectores binormales B_1 de α_1 y B_2 de α_2 son paralelos.

(B3) El vector tangente T_1 de α_1 es paralelo al vector binormal B_2 de α_2 .

Al igual que antes, no es difícil ver que el teorema de Burke se cumple también para curvas inmersas en el espacio de Lorentz-Minkowski \mathbb{R}_1^3 . La prueba para el caso (B3) (el caso (B2) es una fácil consecuencia del teorema de Bioche) es la siguiente.

Derivando en (2.3.48) y teniendo en cuenta la condición

$$T_1(s(t)) = B_2(\sigma(t)), \quad (2.3.52)$$

deducimos

$$T(t) = as'(t)T_1(s(t)) + b\sigma'(t)T_2(\sigma(t)), \quad (2.3.53)$$

$$\xi_1 = \varepsilon_1 a^2 s'(t)^2 + \eta_1 b^2 \sigma'(t)^2, \quad (2.3.54)$$

donde $\xi_1 = \langle T, T \rangle$, $\varepsilon_1 = \langle T_1, T_1 \rangle$ y $\eta_1 = \langle T_2, T_2 \rangle$. Derivando ahora en (2.3.52) podemos deducir, sin pérdida de generalidad, que

$$N_1(s(t)) = N_2(\sigma(t)), \quad (2.3.55)$$

$$s'(t)\kappa_1(s(t)) = -\sigma'(t)\tau_2(\sigma(t)). \quad (2.3.56)$$

Derivando otra vez en (2.3.53) obtenemos

$$N(t) = N_1(s(t)) = N_2(\sigma(t)), \quad (2.3.57)$$

$$\kappa(t) = as'(t)^2\kappa_1(s(t)) + b\sigma'(t)^2\kappa_2(\sigma(t)), \quad (2.3.58)$$

que junto con (2.3.53) implica

$$B(t) = \xi_3(\eta_1 as'(t)B_1(s(t)) + \varepsilon_1 b\sigma'(t)B_2(\sigma(t))), \quad (2.3.59)$$

$$\tau(t) = \xi_3(\eta_1 as'(t)^2\tau_1(s(t)) + \varepsilon_1 b\sigma'(t)^2\tau_2(\sigma(t))). \quad (2.3.60)$$

De (2.3.55) y (2.3.52) deducimos

$$s'(t)\tau_1(s(t)) = \sigma'(t)\kappa_2(\sigma(t)).$$

De (2.3.54) y (2.3.56) obtenemos que $s'(t)$ y $\sigma'(t)$ son constantes. Entonces podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones, con incógnitas λ y μ :

$$as'(t)^2\kappa_1\lambda + \xi_3\varepsilon_1 b\sigma'(t)^2\tau_2\mu = 1, \quad (2.3.61)$$

$$b\sigma'(t)\lambda + \xi_3\eta_1 as'(t)\mu = 0. \quad (2.3.62)$$

Utilizando de nuevo (2.3.54) y (2.3.56), podemos asegurar que el sistema es compatible determinado. Por último, un razonamiento directo a partir de (2.3.58) y (2.3.60), y las soluciones del sistema formado por (2.3.61) y (2.3.62), nos lleva a la relación $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$.

Teorema 2.3.20 (Teorema de Bioche-Burke en \mathbb{R}_q^3)

Sean $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ dos curvas de Frenet en \mathbb{R}_q^3 tales que α_1 tiene curvatura constante no nula, α_2 tiene torsión constante no nula y existe una correspondencia biyectiva $s \in I \rightarrow \sigma(s) \in J$ entre los puntos de $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma(s))$ tales que en los homólogos puntos $P_1 = \alpha_1(s)$ y $P_2 = \alpha_2(\sigma(s))$ tengamos alguna de las siguientes condiciones:

(B1) Los vectores tangentes T_1 de $\alpha_1(s)$ y T_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$ son paralelos.

(B2) Los vectores binormales B_1 de $\alpha_1(s)$ y B_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$ son paralelos.

(B3) El vector tangente T_1 de $\alpha_1(s)$ es paralelo al vector binormal B_2 de $\alpha_2(\sigma(s))$.

Entonces, dadas dos constantes a y b , la curva parametrizada por $\alpha(t) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t))$ es una curva de Bertrand.

Una consecuencia de este teorema es la siguiente. Consideremos dos curvas $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ como antes, y para cada $a \in \mathbb{R}$ la superficie M_a parametrizada de la siguiente forma:

$$\Psi_a(s, z) = a\alpha_1(s) + \frac{z}{s}\alpha_2(\sigma(s)), \quad (2.3.63)$$

donde $\alpha_2(\sigma(s))$ es el punto de α_2 correspondiente a $\alpha_1(s)$. Entonces las curvas de la superficie dadas por $\beta_b(s) = \Psi_a(s, bs)$, $b \in \mathbb{R}$, son curvas de Bertrand. En otras palabras, la superficie M_a , construida a partir de dos curvas, una de curvatura constante y otra de torsión constante, está formada por curvas de Bertrand. Este resultado es análogo al que ocurría para curvas de Lancret, donde a partir de dos curvas, una de curvatura nula (LW-curva de tipo 1, recta) y otra de torsión nula (LW-curva de tipo 2, plana), se obtenía la parametrización de un cilindro generalizado sobre una curva plana $\alpha(s)$ de la forma $\phi(s, t) = \alpha(s) + tB$. Este cilindro estaba formado por curvas de Lancret $\gamma_h(u) = \phi(u, hu)$.

Ahora podemos preguntarnos si podemos ampliar, a partir de esta última observación, la hipótesis del teorema de que κ_1 y τ_2 son constantes no nulas. Dicho de otro modo, ¿qué pasaría en el teorema si $\kappa_1 = 0$ y/o $\tau_2 = 0$?

(i) $\kappa_1 = 0$, $\tau_2 \neq 0$. En este caso α_1 es una recta y el único vector que está bien definido es el tangente T_1 . Entonces podemos estudiar sólo las condiciones (B1) y (B3). En ambos casos obtenemos, usando las ecuaciones de Frenet, que $\tau_2 = 0$, lo que supone una contradicción.

(ii) $\kappa_1 \neq 0$, $\tau_2 = 0$. Ahora α_2 es una curva plana. En los casos (B1) y (B2) obtenemos que α_1 también es plana y, por tanto, la curva $\alpha(t) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t))$ es también plana. Para el caso (B3) obtenemos, usando las ecuaciones de Frenet, que $\kappa_1 = 0$, lo que supone una contradicción.

(iii) $\kappa_1 = 0$, $\tau_2 = 0$. Por tanto, α_1 es una línea recta (y sólomente T_1 está bien definido) y α_2 es una curva plana. Podemos distinguir dos subcasos:

- $\kappa_2 = 0$. Entonces α_2 debe ser una recta con $T_1 = T_2$ y, por tanto, α es una recta también con $T = T_1 = T_2$.
- $\kappa_2 \neq 0$. En el caso (B1) obtenemos que $\kappa_2 = 0$, contradicción; y en el caso (B3) obtenemos que α es una curva de Lancret, con eje T_1 y satisfaciendo $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{a}{b}$.

A partir de todas estas observaciones, podemos concluir que el teorema de Bioche-Burke (permitiendo que κ_1 y τ_2 puedan ser nulas) nos da un método para construir LW-curvas, es decir, curvas de Bertrand y curvas de Lancret.

Está claro que un inconveniente de este método es encontrar una familia de curvas de curvatura constante y una familia de curvas de torsión constante verificando el teorema de

Bioche-Burke. Aunque se pueden encontrar ejemplos concretos (las curvas de Salkowski y de anti-Salkowski verifican (B3), véase [Mon09]), en la sección siguiente presentamos un método a partir de una curva en una superficie totalmente umbilical que nos va a permitir la integración geométrica de las LW-curvas.

2.3.2. Integración geométrica de las LW-curvas

Sea $M_v^2(c) \subset \mathbb{R}_q^3$ una superficie totalmente umbilical de índice $v \in \{0, 1\}$ y de curvatura constante $c = \pm 1$ en \mathbb{R}_q^3 . Consideramos una curva parametrizada por el arco $\gamma(t)$ en $M_v^2(c)$ con función curvatura $\kappa_\gamma(t)$ y referencia de Frenet $\{T_\gamma = \gamma', N_\gamma\}$, entonces las ecuaciones de Frenet para γ en $M_v^2(c)$ se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma &= -\delta_1 c \gamma + \delta_2 \kappa_\gamma N_\gamma, \\ \bar{\nabla}_{T_\gamma} N_\gamma &= -\delta_1 \kappa_\gamma T_\gamma, \quad \delta_1 \delta_2 = (-1)^v,\end{aligned}$$

donde $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}_q^3 . Dados dos números reales λ y μ , consideramos las siguientes curvas parametrizadas en \mathbb{R}_q^3 :

$$\alpha_1(t) = \lambda \int_{t_0}^t \gamma(u) du \quad \text{y} \quad \alpha_2(t) = \mu \int_{t_0}^t N_\gamma(u) du, \quad (2.3.64)$$

cuyos parámetros arco s y σ están dados por

$$s(t) = \lambda t + \lambda_0 \quad \text{y} \quad \sigma(t) = \mu t + \mu_0,$$

donde λ_0 y μ_0 son constantes. Si $\{T_1(s), N_1(s), B_1(s)\}$ y $\{T_2(\sigma), N_2(\sigma), B_2(\sigma)\}$ denotan las referencias de Frenet de $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ (con caracteres causales $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ y $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, respectivamente), no es difícil llegar a las siguientes relaciones:

$$T_1(s) = \gamma(t(s)), \quad N_1(s) = \delta_1 T_\gamma(t(s)), \quad B_1(s) = \delta_1 N_\gamma(t(s)), \quad (2.3.65)$$

$$T_2(\sigma) = N_\gamma(t(\sigma)), \quad N_2(\sigma) = -T_\gamma(t(\sigma)), \quad B_2(\sigma) = \gamma(t(\sigma)). \quad (2.3.66)$$

Además, sus funciones curvatura y torsión están dadas por

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{\lambda}, \quad \tau_1(s) = \frac{1}{\lambda} \kappa_\gamma(t(s)), \quad (2.3.67)$$

$$\kappa_2(\sigma) = \frac{1}{\mu} \kappa_\gamma(t(\sigma)), \quad \tau_2(\sigma) = \frac{\delta_1}{\mu}. \quad (2.3.68)$$

Para las curvas $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ existe una transformación $s \rightarrow \sigma(s)$ tal que $T_1(s) = B_2(\sigma(s))$ y, por el teorema de Burke, la curva parametrizada por el arco $\beta(u) = a \alpha_1(s(u)) + b \alpha_2(\sigma(u))$ es una curva de Bertrand en \mathbb{R}_q^3 . Teniendo en cuenta las relaciones (2.3.65)–(2.3.68), calculamos la referencia de Frenet de β :

$$\begin{aligned}T_\beta(u) &= a s'(u) T_1(s(u)) + b \sigma'(u) T_2(\sigma(u)), \\ N_\beta(u) &= -\delta_1 N_1(s(u)) = N_2(\sigma(u)), \\ B_\beta(u) &= \xi_3 (-\delta_1 \eta_1 a s'(u) B_1(s(u)) + \eta_3 b \sigma'(u) B_2(\sigma(u))).\end{aligned}$$

Un cálculo directo nos lleva a las siguientes ecuaciones para las funciones curvatura κ_β y torsión τ_β de la curva β :

$$\kappa_\beta(u) = -\delta_1 a s'(u)^2 \kappa_1(s(u)) + b \sigma'(u)^2 \kappa_2(\sigma(u)), \quad (2.3.69)$$

$$\tau_\beta(u) = a \eta_1 \xi_3 s'(u)^2 \tau_1(s(u)) + b \eta_3 \xi_3 \sigma'(u)^2 \tau_2(\sigma(u)), \quad (2.3.70)$$

donde $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ son los caracteres causales de $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$, respectivamente, con $\xi_1 = ca^2 \lambda^2 + \delta_2 b^2 \mu^2$. A continuación veremos que cada curva de Bertrand se puede construir de esta manera.

Sea $\alpha(u)$ una curva de Bertrand parametrizada por el arco en \mathbb{R}_q^3 con curvatura $\kappa_\alpha \neq 0$ y torsión τ_α , y sean λ_α y μ_α dos constantes no nulas tales que $\lambda_\alpha \kappa_\alpha + \mu_\alpha \tau_\alpha = 1$. Sean $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ los caracteres causales de $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ y consideramos la constante no nula $r = \xi_1 \lambda_\alpha^2 + \xi_3 \mu_\alpha^2$ (observamos que $r \neq 0$ puesto que $\lambda_\alpha T_\alpha - \mu_\alpha B_\alpha$ es un campo de vectores no nulo y paralelo al binormal de su compañera Bertrand; véase, por ejemplo, [Sch03, teorema 1]). Distinguiamos dos casos.

Caso 1: $|r| = 1$. Definimos las constantes $\{c, \delta_1, v, a, b\}$ de la siguiente forma:

$$c = r, \quad \delta_1 = \xi_2, \quad (-1)^v = (-1)^q c, \quad a = -\xi_1 \xi_2 c, \quad b = \xi_2.$$

Sea γ la curva parametrizada en $M_v^2(c)$ con carácter causal δ_1 y curvatura κ_γ dada por

$$\kappa_\gamma(u) = \frac{\xi_2}{\mu_\alpha} (\kappa_\alpha(u) - c \xi_1 \lambda_\alpha).$$

Sean $\alpha_1(s)$ y $\alpha_2(\sigma)$ las curvas de \mathbb{R}_q^3 definidas en (2.3.64), con $\lambda = \lambda_\alpha$ y $\mu = \mu_\alpha$, y consideramos la curva parametrizada por el arco $\beta(u) = a \alpha_1(s(u)) + b \alpha_2(\sigma(u))$, cuya curvatura κ_β y torsión τ_β están dadas por (2.3.69) y (2.3.70). Basta tener en cuenta estas consideraciones y las relaciones (2.3.67) y (2.3.68) para obtener que $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$ y $\tau_\beta = \tau_\alpha$, por lo que las curvas α y β son congruentes, mostrando que nuestra curva de Bertrand α puede ser construida a partir de un par de curvas α_1 y α_2 , una de ellas de curvatura constante y la otra de torsión constante.

Caso 2: $|r| \neq 1$. Consideramos las constantes:

$$R = |r|^{1/2}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda_\alpha}{R}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu_\alpha}{R}.$$

Entonces la curva $\tilde{\alpha}(u) = \frac{1}{R} \alpha(Ru)$, de curvatura $\kappa_{\tilde{\alpha}} = R \kappa_\alpha$ y torsión $\tau_{\tilde{\alpha}} = R \tau_\alpha$, es una curva de Bertrand parametrizada por el arco satisfaciendo $\tilde{\lambda} \kappa_{\tilde{\alpha}} + \tilde{\mu} \tau_{\tilde{\alpha}} = 1$, con $|\xi_1 \tilde{\lambda}^2 + \xi_3 \tilde{\mu}^2| = 1$. Del caso 1 deducimos que

$$\tilde{\alpha}(u) = a \alpha_1(s(u)) + b \alpha_2(\sigma(u)),$$

y, por tanto,

$$\alpha(u) = R \tilde{\alpha}\left(\frac{u}{R}\right) = a R \alpha_1\left(s\left(\frac{u}{R}\right)\right) + b R \alpha_2\left(\sigma\left(\frac{u}{R}\right)\right),$$

mostrando, de nuevo, que α puede ser construida a partir de un par de curvas α_1 y α_2 , una de ellas de curvatura constante y la otra de torsión constante.

Finalmente, y teniendo en cuenta (2.3.63), queremos destacar que, al igual que pasa para las curvas de Lancret, deducimos que α se puede identificar con alguna curva de pendiente constante \tilde{b} en la superficie M_a . Así, las LW-curvas se pueden obtener como imágenes de líneas rectas en superficies regladas $\Psi_a(s, z)$. En el caso de las curvas de Lancret, son además geodésicas.

2.3.3. LW-curvas y geodésicas en superficies regladas

Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}_q^3 con curvatura no nula $\kappa(t) \neq 0$ y torsión $\tau(t)$, y consideramos $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ su referencia de Frenet, con caracteres causales $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Denotamos por $\tilde{D}(t)$ al campo de vectores de Darboux modificado sobre α , definido por

$$\tilde{D}(t) = \frac{\tau}{\kappa}(t)T_\alpha(t) + B_\alpha(t),$$

y consideramos la superficie reglada S_α parametrizada por $X(t, z) = \alpha(t) + z\tilde{D}(t)$. Puesto que el plano tangente está generado por los vectores

$$\begin{aligned} X_t(t, z) &= \left[1 + z \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'(t) \right] T_\alpha(t), \\ X_z(t, z) &= \frac{\tau}{\kappa}(t)T_\alpha(t) + B_\alpha(t), \end{aligned}$$

deducimos, sin pérdida de generalidad, que el vector normal unitario en cada punto $X(t, z)$ está dado por $N(t, z) = N_\alpha(t)$, y entonces el operador de Weingarten A satisface

$$\begin{aligned} A(X_t(t, z)) &= \varepsilon_1 \kappa(t)T_\alpha(t) - \varepsilon_3 \tau(t)B_\alpha(t), \\ A(X_z(t, z)) &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que S_α es una superficie llana.

Sea $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ una curva parametrizada por el arco en S_α que no sea una recta. Si $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$ es su referencia de Frenet, con caracteres causales $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, es fácil ver que su vector tangente es

$$T_\gamma(s) = \frac{d}{ds} \left(t(s) + z(s) \frac{\tau}{\kappa}(t(s)) \right) T_\alpha(t(s)) + z'(s)B_\alpha(t(s)).$$

Si $z'(s)$ es constante entonces $\langle T_\gamma(s), T_\alpha(t(s)) \rangle$ es también constante; en este caso diremos que la curva γ es una curva de pendiente constante en S_α (observamos que $t'(s) \neq 0$). Para dicha curva γ , sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales tales que

$$T_\gamma(s) = aT_\alpha(t(s)) + bB_\alpha(t(s)).$$

Derivando en la expresión anterior,

$$\delta_2 \kappa_\gamma(s) N_\gamma(s) = a \varepsilon_2 \kappa(t(s)) t'(s) N_\alpha(t(s)) - b \varepsilon_2 \tau(t(s)) t'(s) N_\alpha(t(s)). \quad (2.3.71)$$

A partir de aquí deducimos que $N_\gamma(s) = N_\alpha(t(s)) = N(t(s), z(s))$ y, por tanto, γ será una geodésica de S_α . Por otra parte, utilizando el producto vectorial, está claro que el binormal será

$$B_\gamma(s) = \delta_3(-\varepsilon_1 b T_\alpha(t(s)) + \varepsilon_3 a B_\alpha(t(s))).$$

A partir de (2.3.71) y derivando el binormal vemos que la curvatura κ_γ y la torsión τ_γ de la curva γ están dadas por

$$\kappa_\gamma(s) = (a \kappa(t(s)) - b \tau(t(s))) t'(s), \quad (2.3.72)$$

$$\tau_\gamma(s) = \delta_3(\varepsilon_1 b \kappa(t(s)) + \varepsilon_3 a \tau(t(s))) t'(s), \quad (2.3.73)$$

de lo cual deducimos

$$\varepsilon_1 \delta_3 b \kappa_\gamma(s) - a \tau_\gamma(s) = -t'(s) \tau(t(s)), \quad (2.3.74)$$

$$\varepsilon_3 \delta_3 a \kappa_\gamma(s) + b \tau_\gamma(s) = t'(s) \kappa(t(s)). \quad (2.3.75)$$

Si α es una curva plana, entonces (2.3.74) implica que γ es una curva de Lancret en \mathbb{R}_q^3 .

Resumiendo, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.3.21 ([LO13b]) *Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}_q^3 con curvatura no nula $\kappa \neq 0$ y torsión τ , y sea $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ una curva en S_α . Entonces γ es una geodésica en S_α si, y sólo si, γ es una curva de pendiente constante en S_α . Si γ es una curva de pendiente constante y o bien $A = t'(s) \tau(t(s))$ o bien $B = t'(s) \kappa(t(s))$ es constante, entonces γ es una LW-curva.*

Corolario 2.3.22 *En las condiciones del teorema 2.3.21, se cumple:*

- a) *Si $\tau = 0$, entonces γ es una curva de Lancret en \mathbb{R}_q^3 .*
- b) *Si A o B es una constante no nula, entonces γ es una curva de Bertrand en \mathbb{R}_q^3 .*

A partir de ahora, sea $\alpha(t)$ una curva en \mathbb{R}_q^3 con curvatura constante no nula κ o torsión constante τ , y consideramos $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ una curva de pendiente constante en S_α . Definimos una curva parametrizada por el arco $\beta(t)$ de la siguiente forma:

$$\beta(t) = \int_{t_0}^t T_\gamma(s(v)) dv,$$

y escribimos $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ para su referencia de Frenet con caracteres causales $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Está claro que derivando conseguimos $T_\beta(t) = T_\gamma(s(t))$, demostrando que $\beta(t)$ está relacionada con $\gamma(s)$ mediante una transformación de Combescure, véase la página 53. Usando las ecuaciones de Frenet obtenemos, sin pérdida de generalidad, que $N_\beta(t) = N_\gamma(s(t))$ y $B_\beta(t) = B_\gamma(s(t))$. Además, utilizando (2.3.72) y (2.3.73) obtenemos que la curvatura y la torsión de β están dadas por

$$\kappa_\beta(t) = a \kappa(t) - b \tau(t), \quad (2.3.76)$$

$$\tau_\beta(t) = \xi_3(\varepsilon_1 b \kappa(t) + \varepsilon_3 a \tau(t)). \quad (2.3.77)$$

Como consecuencia, deducimos

$$\varepsilon_3 \xi_3 a \kappa_\beta(t) + b \tau_\beta(t) = \kappa(t) \neq 0, \quad (2.3.78)$$

$$\varepsilon_1 \xi_3 b \kappa_\beta(t) - a \tau_\beta(t) = -\tau(t), \quad (2.3.79)$$

demostrando que $\beta(t)$ es una LW-curva.

La implicación inversa también es cierta. Para verlo, sea $\beta(t)$ una LW-curva con curvatura κ_β y torsión τ_β . Se cumple, por tanto, que han de existir tres constantes reales λ, μ, ρ tales que $\lambda \kappa_\beta + \mu \tau_\beta = \rho$. En primer lugar, observemos que $U = \lambda T_\beta - \mu B_\beta$ es un campo de vectores no nulo y, por tanto, tenemos que $r = \xi_1 \lambda^2 + \xi_3 \mu^2$ nunca se anula, donde $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ son los caracteres causales de la referencia de Frenet de la curva β . Si $\rho = 0$ entonces β es una hélice generalizada y U es paralelo a su eje (véase, por ejemplo, [One66, pág. 73]). Si $\rho \neq 0$ entonces β es una curva de Bertrand y U es paralelo al vector binormal de la curva de Bertrand conjugada (véase, por ejemplo, [Sch03, teorema 1]). Consideramos los siguientes números reales:

$$\varepsilon = r|r|^{-1}, \quad \varepsilon_1 = \xi_1 \xi_3 \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \xi_2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon, \quad a = -\mu|r|^{-1/2}, \quad b = \varepsilon_1 \xi_3 \lambda|r|^{-1/2}.$$

Sea ahora $\alpha(t)$ la curva parametrizada por el arco tal que:

- las constantes $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ son los caracteres causales de su referencia de Frenet;
- su torsión está dada por $\tau = -\rho|r|^{-1/2}$;
- su curvatura está dada por la ecuación (2.3.78).

Si $t(s)$ es una solución de la ecuación

$$t(s) + bs \frac{\tau}{\kappa}(t(s)) = as,$$

entonces la curva $\gamma(s) = X(t(s), bs)$ es una curva de pendiente constante en S_α relacionada mediante una transformación de Combescure con una LW-curva $\tilde{\beta}(t)$ definida por

$$\tilde{\beta}(t) = \int_{t_0}^t T_\gamma(s(v)) dv.$$

Usando las ecuaciones (2.3.76)–(2.3.79) concluimos que $\tilde{\beta}(t)$ es una curva congruente a $\beta(t)$ y, por tanto, $\gamma(s)$ y $\beta(t)$ están relacionadas mediante una transformación de Combescure.

Observación 2.3.23 En el caso $\rho \neq 0$ podemos considerar alternativamente la curva $\alpha(t)$ con curvatura constante no nula $\kappa = \rho|r|^{-1/2}$ y torsión dada por la ecuación (2.3.79), donde las constantes $\{\varepsilon_1, \varepsilon_3, a, b\}$ están definidas mediante

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad a = \varepsilon_3 \xi_3 \lambda|r|^{-1/2}, \quad \varepsilon_3 = \xi_1 \xi_3 \varepsilon, \quad b = \mu|r|^{-1/2}.$$

Resumiendo, tenemos probado el siguiente resultado.

Teorema 2.3.24 ([LO13b]) *Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}_q^3 con curvatura constante no nula $\kappa \neq 0$ o torsión constante τ , entonces cada curva $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ de pendiente constante en S_α es una geodésica de S_α relacionada mediante una transformación de Combescure con una LW-curva de \mathbb{R}_q^3 .*

Recíprocamente, dada una LW-curva $\beta(t)$ en \mathbb{R}_q^3 , existe una curva α con curvatura constante no nula o torsión constante, y una curva de pendiente constante $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ en S_α tal que $\gamma(s)$ y $\beta(t)$ están relacionadas mediante una transformación de Combescure.

CAPÍTULO 3

Curvas rectificantes

El objetivo de este capítulo es extender el concepto de curva rectificante, introducido por B.Y. Chen en [Chen03], a los espacios riemannianos de curvatura constante. Comenzamos el capítulo, con la sección 3.1, introduciendo tanto la definición de curva rectificante como el concepto de superficie cónica. Además, en el teorema 3.1.2, caracterizamos las curvas rectificantes como las geodésicas de una superficie cónica.

Un análisis de las superficies cónicas nos lleva a deducir las funciones curvatura de las geodésicas, véase la sección 3.2. A continuación, en el teorema 3.2.3, obtenemos la ecuación natural de una curva rectificante en función de sus curvaturas y su parámetro arco.

En la sección 3.3 introducimos las superficies desarrollables rectificantes y vemos que son superficies cónicas si, y sólo si, la curva que genera dicha superficie es rectificante, véase el teorema 3.3.5.

Cuando estudiamos las curvas rectificantes de $\mathbb{M}^3(c)$, considerado en su espacio ambiente \mathbb{R}_v^4 , se pueden deducir distintas caracterizaciones, véase el teorema 3.4.6. A continuación obtenemos el teorema principal que nos proporciona la parametrización de todas las curvas rectificantes a partir de una curva esférica, véase el teorema 3.4.7.

En la sección 3.5 se obtienen las curvas rectificantes como extremos de una determinada función, véase el teorema 3.5.8. Caracterizamos, además, aquellas curvas rectificantes que son de curvatura constante, véase el corolario 3.5.9.

Acabamos el capítulo con la sección 3.6 dedicada a relacionar las curvas rectificantes y las curvas de Bertrand en \mathbb{R}_q^3 . Encontramos una bonita relación entre la familia de curvas que son a la vez curvas de Bertrand y rectificantes, y la familia de hélices cónicas generalizadas, véase la proposición 3.6.10.

Los resultados de este capítulo aparecen publicados en [LO14] y [LO15].

3.1. Curvas rectificantes y superficies cónicas

Consideramos $\mathbb{M}^3(c)$ el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 , si $c = 0$, la esfera \mathbb{S}^3 , si $c = 1$, o el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , si $c = -1$.

Definición 3.1.1 Una curva parametrizada por el arco $\gamma = \gamma(s)$ ($s \in I$) en $\mathbb{M}^3(c)$, con $\kappa_\gamma > 0$, se dice que es una *curva rectificante* si existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$ tal que $p \notin \text{Im}(\gamma) \equiv \gamma(I)$ y las geodésicas conectando p con $\gamma(s)$ son ortogonales a las geodésicas normales principales en $\gamma(s)$, para todo s .

Entendemos por geodésicas normales principales a aquellas geodésicas de $\mathbb{M}^3(c)$ que salen de $\gamma(s)$ en la dirección de $N_\gamma(s)$, véase la sección 1.2.2. Notamos que esta definición es equivalente a decir que las geodésicas conectando p con $\gamma(s)$ son tangentes a los planos rectificantes de γ , es decir, los planos generados por $\{T_\gamma(s), B_\gamma(s)\}$. En el caso del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 consideramos, por simplicidad, que el punto p es el origen de coordenadas.

La superficie de $\mathbb{M}^3(c)$ formada por la unión de todas las geodésicas que conectan un punto fijo $p \in \mathbb{M}^3(c)$ (el *vértice*) y cualquier punto de una curva en $\mathbb{M}^3(c)$ que no pase por el vértice se llama una *superficie cónica* en $\mathbb{M}^3(c)$. Cada una de esas geodésicas se llaman *generatrices* de la superficie. Por tanto, una superficie cónica $M \subset \mathbb{M}^3(c)$, con vértice en el punto p , puede ser parametrizada como

$$\Psi(t, z) = \exp_p(zV(t)) = f(z)p + g(z)V(t), \quad z > 0, \quad (3.1.1)$$

donde $V = V(t)$ es una curva en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c) \subset \mathbb{R}^4$, que llamamos *curva directriz esférica*, con referencia de Frenet $\{T_V(t), N_V(t)\}$. A veces, a $V(t)$ se le suele llamar la proyección esférica en p (véase, por ejemplo, [CD05]). Las funciones f y g son las funciones del flujo geodésico en $\mathbb{M}^3(c)$ y están dadas en la sección 1.2.2. Recordamos que estas funciones cumplen

$$f^2 + cg^2 = 1. \quad (3.1.2)$$

Las generatrices o geodésicas que conectan p y $\gamma(s)$ están dadas por $\beta_s(u) = \Psi(t(s), u)$, y la condición de ser rectificante implica

$$\langle T_{\beta_s}(z(s)), N_\gamma(s) \rangle = 0, \quad (3.1.3)$$

donde T_{β_s} denota el campo de vectores unitario tangente a β_s .

El plano tangente en el punto $\Psi(t, z)$ es el plano generado por los vectores

$$\Psi_t(t, z) = g(z)T_V(t), \quad (3.1.4)$$

$$\Psi_z(t, z) = -cg(z)p + f(z)V(t), \quad (3.1.5)$$

donde T_V denota el campo de vectores unitario tangente a V .

El campo de vectores normal unitario $N(t, z)$ se puede calcular como

$$N(t, z) = \frac{\Psi_t \times \Psi_z}{\|\Psi_t \times \Psi_z\|}(t, z) = -N_V(t), \quad (3.1.6)$$

donde $N_V(t) = V(t) \times T_V(t)$ es un campo de vectores unitario tangente a $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$.

Un cálculo directo, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.1.4) y (3.1.5), nos lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\bar{\nabla}_{\Psi_t} \Psi_t = -g(z)f(z)\Psi_z - k_V(t)g(z)N, \quad (3.1.7)$$

$$\bar{\nabla}_{\Psi_z} \Psi_t = \bar{\nabla}_{\Psi_t} \Psi_z = \frac{1}{h(z)} \Psi_t, \quad (3.1.8)$$

$$\bar{\nabla}_{\Psi_z} \Psi_z = 0, \quad (3.1.9)$$

donde k_V es la curvatura geodésica de V como curva en $\mathbb{S}^2(1)$ y la función h está determinada por el flujo geodésico (véase la sección 1.2.2).

De la ecuación (3.1.6) podemos calcular el operador forma A de la superficie cónica M de la siguiente forma:

$$A(\Psi_t) = -\bar{\nabla}_{\Psi_t} N = \frac{-k_V(t)}{g(z)} \Psi_t, \quad A(\Psi_z) = -\bar{\nabla}_{\Psi_z} N = 0.$$

Por tanto, la curvatura de Gauss y la curvatura media de la superficie cónica están dadas, respectivamente, por

$$K = c + \det(A) = c \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{2} \text{tr}(A) = \frac{-k_V(t)}{2g(z)}.$$

Nuestra primera caracterización para curvas rectificantes en los espacios riemannianos de curvatura constante se puede enunciar de la siguiente forma.

Teorema 3.1.2 ([LO14], [LO15]) *Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}^3(c)$. Entonces γ es una curva rectificante si, y sólo si, existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, con $p \notin \text{Im}(\gamma)$, y una curva parametrizada por el arco $V = V(t)$ en la esfera 2-dimensional unitaria $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p \mathbb{M}^3(c)$ tal que γ es una geodésica de la superficie cónica M con vértice p y curva directriz V .*

Demostración. Sea γ una curva rectificante en $\mathbb{M}^3(c)$. Entonces existe un punto p y un campo de vectores unitario $V(t)$ tal que, para cada punto de la curva, podemos escribir $\gamma(s) = \exp_p(z(s)V(t(s)))$, para algunas funciones $t(s)$ y $z(s)$. Si definimos la superficie cónica M determinada por p y V parametrizada como en (3.1.1), podemos escribir $\gamma(s) = \Psi(t(s), z(s))$.

El plano tangente a Ψ en cada punto está generado por los vectores tangentes a las generatrices y a la directriz a través de dicho punto. En nuestro caso, $T_{\gamma(s)}M$ está generado por $\{T_{\beta_s}(z(s)), T_\gamma(s)\}$. Consideramos la generatriz $\beta_s(u) = \Psi(t(s), u)$ que conecta p y $\gamma(s)$. La condición de ser rectificante implica

$$\langle T_{\beta_s}(z(s)), N_\gamma(s) \rangle = 0, \quad (3.1.10)$$

donde T_{β_s} denota el campo de vectores unitario tangente a β_s . Podemos deducir que $N_\gamma(s)$ es ortogonal a M y, por tanto, $\bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma$ es ortogonal a la superficie cónica, es decir, γ es una geodésica de M .

Recíprocamente, sea M una superficie cónica parametrizada como en (3.1.1) y supongamos que $\gamma(s) = \Psi(t(s), z(s))$ es una geodésica parametrizada por el arco s . Entonces $N_\gamma(s)$ es paralelo al vector normal unitario $N(t(s), z(s))$. Esto implica (3.1.10), donde β_s es la generatriz, parametrizada por el arco, conectando $p = \beta_s(0)$ y $\gamma(s) = \beta_s(z(s))$. Por tanto, γ es una curva rectificante. \square

3.2. Ecuación natural de las curvas rectificantes

B.Y. Chen encontró una bonita conexión entre las hélices generalizadas (o curvas de Lancret) y las curvas rectificantes de \mathbb{R}^3 , véase [Chen03]. En efecto, ambas familias de curvas están caracterizadas por la condición de que el cociente entre la torsión y la curvatura de la curva es una función lineal de su parámetro arco s , es decir, $(\tau/\kappa)(s) = c_1s + c_2$, para algunas constantes c_1 y c_2 . Si $c_1 = 0$ obtenemos las hélices generalizadas y, en caso contrario, las curvas rectificantes.

A continuación vamos a encontrar una caracterización similar para curvas rectificantes en $\mathbb{M}^3(c)$ en términos de su curvatura y torsión.

Sea γ una curva, parametrizada por el arco, en una superficie cónica M parametrizada por (3.1.1). Supongamos que $\gamma(s)$ es rectificante y, por tanto, geodésica de la superficie cónica. Entonces $\gamma(s) = \Psi(t(s), z(s))$ para ciertas funciones $t(s)$ y $z(s)$, y, por tanto, $T_\gamma = t'\Psi_t + z'\Psi_z$. A partir de (3.1.4) y (3.1.5) es fácil ver que

$$1 = \langle T_\gamma, T_\gamma \rangle = (t')^2 g^2(z) + (z')^2. \quad (3.2.11)$$

Usando las ecuaciones (3.1.7)–(3.1.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{T_\gamma} T_\gamma &= \left[t'' + 2t'z' \frac{1}{h(z)} \right] \Psi_t \\ &\quad + [z'' - (t')^2 g(z) f(z)] \Psi_z \\ &\quad - (t')^2 k_V g(z) N. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Como γ es una geodésica en M , las funciones t y z satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$t'' + 2t'z' \frac{1}{h(z)} = 0, \quad (3.2.13)$$

$$z'' - (t')^2 g(z) f(z) = 0, \quad (3.2.14)$$

$$-(t')^2 k_V g(z) = \pm \kappa_\gamma \neq 0. \quad (3.2.15)$$

Como $N_\gamma(s)$ es paralelo a $N(t(s), z(s))$, podemos escribir, sin pérdida de generalidad, que

$$B_\gamma(s) = a(s)\Psi_t(t(s), z(s)) + b(s)\Psi_z(t(s), z(s)),$$

donde las funciones a y b están dadas por $-z'/\sqrt{E}$ y $t'\sqrt{E}$, respectivamente. Un cálculo directo establece

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} B_\gamma = a'\Psi_t + b'\Psi_z + at'\bar{\nabla}_{\Psi_t}\Psi_t + (az' + bt')\bar{\nabla}_{\Psi_t}\Psi_z.$$

Usando, ahora, las ecuaciones de Frenet (1.3.10), junto con (3.1.7) y (3.1.8), conseguimos que, salvo el signo, la torsión está dada por

$$\tau_\gamma(s) = -t'(s)z'(s)k_V(t(s)).$$

Esta ecuación, y (3.2.15), nos conduce a

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}(s) = \frac{z'(s)}{t'(s)g(z(s))}. \quad (3.2.16)$$

Nos proponemos ahora encontrar las funciones $t(s)$ y $z(s)$. Multiplicando la ecuación (3.2.14) por $g(z)$ y, utilizando (3.2.11), no es difícil ver que

$$\left(z'(s)g(z(s))\right)' = f(z(s)). \quad (3.2.17)$$

Ahora, multiplicando la ecuación (3.2.13) por $g(z)^2$ conseguimos

$$t''g(z)^2 + 2t'z'f(z)g(z) = 0,$$

y entonces

$$t'(s)g^2(z(s)) = \lambda, \quad (3.2.18)$$

para una constante real no nula λ . En este punto dividamos el razonamiento en dos casos.

Caso $c \neq 0$: No es difícil ver que la ecuación (3.2.17) es una ecuación del tipo $y''(s) + cy(s) = 0$ para $y(s) = f(z(s))$, con solución

$$z(s) = f^{-1}\left(Ag(s+s_0) + Bf(s+s_0)\right), \quad (3.2.19)$$

para algunas constantes A , B y s_0 . Multiplicamos la ecuación (3.2.11) por $g(z)^2$ y usamos las relaciones (3.2.18) y (3.1.2). Utilizando posteriormente (3.2.19), obtenemos la siguiente relación entre las constantes A , B y λ ,

$$A^2 + cB^2 + \lambda^2 = c. \quad (3.2.20)$$

Un cálculo directo, utilizando (3.2.19), (3.2.16) y (3.2.18), nos lleva a

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}(s) = c_1g(s+s_0) + c_2f(s+s_0), \quad (3.2.21)$$

donde las constantes c_1 y c_2 están dadas por

$$c_1 = \frac{B}{\lambda} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{-cA}{\lambda}.$$

Notamos que la ecuación (3.2.20) implica $1 + cc_1^2 + c_2^2 = c/\lambda^2$.

Caso $c = 0$: No es difícil ver que la solución de la ecuación (3.2.17) es

$$z(s) = \sqrt{s^2 + 2Ms + N}, \quad (3.2.22)$$

para algunas constantes M y N . Utilizando esta vez la ecuación (3.2.18), junto a (3.2.11) y (3.2.22), obtenemos una relación para las constantes M , N y λ :

$$M^2 - N + \lambda^2 = 0. \quad (3.2.23)$$

Utilizando (3.2.22), (3.2.16) y (3.2.18), obtenemos

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}(s) = c_1s + c_2, \quad (3.2.24)$$

para ciertas constantes c_1 y c_2 dadas por

$$c_1 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{M}{\lambda}.$$

Por tanto, hemos visto que una geodésica parametrizada por el arco $\gamma = \gamma(s)$ en una superficie cónica Ψ con curvatura κ_γ y torsión τ_γ verifica, en el caso $c \neq 0$, la ecuación (3.2.21), para algunas constantes c_1 y c_2 tales que $c(1 + cc_1^2 + c_2^2) > 0$ o, en el caso $c = 0$, la ecuación (3.2.24) para algunas constantes $c_1 \neq 0$ y c_2 . Veamos que también se cumple el recíproco.

Caso $c \neq 0$: Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva, parametrizada por el arco, en $\mathbb{M}^3(c)$ con curvatura y torsión satisfaciendo (3.2.21), para algunas constantes c_1 y c_2 tales que $c(1 + cc_1^2 + c_2^2) > 0$. Sea λ una constante no nula tal que

$$\lambda^2 = \frac{c}{(1 + cc_1^2 + c_2^2)},$$

y definimos dos constantes $A = -c\lambda c_2$ y $B = \lambda c_1$. Sea $z(s)$ la función dada por (3.2.19) y consideramos una solución $t(s)$ de la ecuación (3.2.18), la cual está dada por

$$t(s) = \arctan \left[\frac{-c}{\lambda} \left(AB + (A^2 - c)h(s + s_0) \right) \right].$$

Caso $c = 0$: Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva, parametrizada por el arco, en \mathbb{R}^3 con curvatura y torsión satisfaciendo (3.2.24), para algunas constantes $c_1 \neq 0$ y c_2 . Definimos las constantes

$$\lambda = \frac{1}{c_1}, \quad M = \frac{c_2}{c_1} \quad \text{y} \quad N = \frac{1 + c_2^2}{c_1^2}.$$

Sea $z(s)$ la función dada por (3.2.22) y consideramos una solución $t(s)$ de la ecuación (3.2.18), la cual está dada por

$$t(s) = \arctan(c_1s + c_2).$$

En ambos casos, definamos la función k_V mediante la ecuación (3.2.15). Sea p un punto en $\mathbb{M}^3(c)$ tal que $p \notin \text{Im}(\gamma)$, y consideremos $V = V(t)$ una curva, parametrizada por el arco, en la esfera $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$ cuya curvatura geodésica sea k_V . Sea M la superficie cónica determinada por p y V , la cual está parametrizada por (3.1.1), y consideremos la curva $\tilde{\gamma}$ definida por $\tilde{\gamma}(s) = \Psi(t(s), z(s))$. Está claro que una curva $\tilde{\gamma}$, así construida, es una geodésica de M , con curvatura $\kappa_{\tilde{\gamma}} = \kappa_\gamma$ y torsión $\tau_{\tilde{\gamma}} = \tau_\gamma$. Por tanto, γ es congruente a una geodésica en una superficie cónica.

Resumiendo, tenemos probado que la ecuación (3.2.21) en el caso $c \neq 0$, y la ecuación (3.2.24) en el caso $c = 0$, caracterizan las curvas en $\mathbb{M}^3(c)$ que son geodésicas en una superficie cónica, la cual está parametrizada por $\Psi(t(s), z(s))$. Teniendo ahora en cuenta el teorema 3.1.2, tenemos la siguiente caracterización para las curvas rectificantes.

Teorema 3.2.3 ([LO14], [LO15]) *Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}^3(c)$. Entonces γ es una curva rectificante si, y sólo si, el cociente entre la torsión y la curvatura de la curva está dado por*

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}(s) = c_1 g(s + c_0) + c_2 f(s + c_0),$$

para algunas constantes c_0, c_1 y c_2 , con $c_1^2 + c(1 + c_2^2) > 0$.

3.3. Curvas rectificantes y superficies desarrollables

Para una curva parametrizada por el arco x en \mathbb{R}^3 con curvatura $\kappa \neq 0$, el campo definido por $D = \tau T + \kappa B$ se llama el *campo de Darboux* de x . La dirección que determina el campo de Darboux es la dirección del eje instantáneo de rotación de la curva, y su módulo $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ se llama velocidad angular (véase, por ejemplo, [Lau65, pág. 12]). Las ecuaciones de Frenet se pueden expresar en función del campo de Darboux de la siguiente forma:

$$T' = D \times T, \quad N' = D \times N, \quad B' = D \times B.$$

En [IT04], los autores definen el campo de vectores $\tilde{D} = (\tau/\kappa)T + B = (1/\kappa)D$ y lo llaman el *campo de Darboux modificado* a lo largo de x . La superficie reglada cuya curva base es x y su dirección está dada por el campo \tilde{D} se llama la *desarrollable rectificante* de x , y está parametrizada como $F_{(x, \tilde{D})}(s, u) = x(s) + u\tilde{D}(s)$; $F_{(x, \tilde{D})}$ es la envolvente de los planos rectificantes de la curva x . Los autores demuestran (véase la proposición 3.1 de [IT04]) que $F_{(x, \tilde{D})}$ es una superficie cónica si, y sólo si, x es una curva geodésica cónica (que sabemos que es una curva rectificante).

El objetivo de esta sección es extender el resultado de Izumiya y Takeuchi a curvas en espacios riemannianos de curvatura constante $\mathbb{M}^3(c)$. Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}^3(c)$, con $\kappa_\gamma > 0$, y consideramos la superficie reglada generada por γ y $\tilde{D}_\gamma = (\tau_\gamma/\kappa_\gamma)T_\gamma + B_\gamma$:

$$\Psi(s, u) = \exp_{\gamma(s)}(u\tilde{D}_\gamma(s)) = f\left(u|\tilde{D}_\gamma(s)|\right)\gamma(s) + \frac{1}{|\tilde{D}_\gamma(s)|}g\left(u|\tilde{D}_\gamma(s)|\right)\tilde{D}_\gamma(s).$$

Llamaremos a esta superficie como en \mathbb{R}^3 , la desarrollable rectificante de la curva γ .

Para simplificar los siguientes cálculos, escribimos $\lambda = \tau_\gamma/\kappa_\gamma$ y $\rho = |\tilde{D}_\gamma| = \sqrt{\lambda^2 + 1}$. Como $\rho^2 = \lambda^2 + 1$ obtenemos

$$\rho\rho' = \lambda\lambda'. \quad (3.3.25)$$

Los campos de vectores tangentes a la superficie están generados por

$$\begin{aligned} \Psi_s = & -c\left[u\rho' + \frac{\lambda}{\rho}\right]g(u\rho)\gamma + \left[f(u\rho) + \frac{\lambda'}{\rho}g(u\rho)\right]T_\gamma \\ & + \frac{\rho'}{\rho}\left[uf(u\rho) - \frac{1}{\rho}g(u\rho)\right]\tilde{D}_\gamma, \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

$$\Psi_u = -c\rho g(u\rho)\gamma + f(u\rho)\tilde{D}_\gamma. \quad (3.3.27)$$

A partir de (3.3.26), (3.3.27), (3.3.25) y (3.1.2) obtenemos los coeficientes de la primera forma fundamental. En primer lugar

$$\langle \Psi_u, \Psi_u \rangle = \rho^2 = \lambda^2 + 1. \quad (3.3.28)$$

El segundo coeficiente será

$$\begin{aligned} \langle \Psi_s, \Psi_u \rangle &= cg^2\rho\left(u\rho' + \frac{\lambda}{\rho}\right) + \lambda f\left(f + g\frac{\lambda'}{\rho}\right) + f\rho^2\frac{\rho'}{\rho}\left(uf - \frac{g}{\rho}\right) = \\ &= cu\rho\rho'g^2 + cg^2\lambda + f^2\lambda + fg\lambda\frac{\lambda'}{\rho} + uf^2\rho\rho' - fg\rho' = \\ &= (u\rho\rho' + \lambda)(f^2 + cg^2) = \lambda + u\lambda\lambda' = \lambda(1 + u\lambda'). \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Por último, calculamos el producto $\langle \Psi_s, \Psi_s \rangle$:

$$c\left[u\rho' + \frac{\lambda}{\rho}\right]^2 g^2 + \left[f + \frac{\lambda'}{\rho}g\right]^2 + \rho'^2\left[uf - \frac{g}{\rho}\right]^2 + 2\left[f + \frac{\lambda'}{\rho}g\right]\frac{\rho'}{\rho}\left[uf - \frac{g}{\rho}\right]\lambda. \quad (3.3.30)$$

Desarrollando cuadrados en (3.3.30) obtenemos

$$\begin{aligned} c\frac{\lambda^2}{\rho^2}\left[u\lambda' + 1\right]^2 g^2 + f^2 + \frac{(\lambda')^2}{\rho^2}g^2 + 2\frac{\lambda'}{\rho}fg + (\rho')^2u^2f^2 - 2(\rho')^2uf\frac{g}{\rho} + \\ (\rho')^2\frac{g^2}{\rho^2} + 2\lambda\frac{\rho'}{\rho}\left(uf^2 - f\frac{g}{\rho} + ufg\frac{\lambda'}{\rho} - \lambda'\frac{g^2}{\rho^2}\right). \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Agrupando términos en (3.3.31) tenemos

$$\begin{aligned} g^2\left(c\frac{\lambda^2}{\rho^2}(1 + u\lambda')^2 + \frac{(\lambda')^2}{\rho^2} + \frac{(\rho')^2}{\rho^2} - 2\frac{(\rho')^2}{\rho^2}\right) + f^2\left(1 + u^2(\rho')^2 + 2u\lambda\frac{\rho'}{\rho}\right) + \\ + 2fg\left(\frac{\lambda'}{\rho} - u\frac{(\rho')^2}{\rho} - \lambda\frac{\rho'}{\rho^2} + u\rho'\lambda\frac{\lambda'}{\rho^2}\right). \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

En este punto hacemos un par de cálculos:

$$\begin{aligned}(\lambda')^2 - (\rho')^2 &= \frac{\rho^2(\lambda')^2 - \lambda^2(\lambda')^2}{\rho^2} = \frac{(\lambda')^2}{\rho^2}. \\ \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)' &= \frac{\lambda'\rho - \lambda\rho'}{\rho^2} = \frac{\lambda'\rho^2 - \lambda^2\lambda'}{\rho^3} = \frac{\lambda'}{\rho^3}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones en (3.3.32) tenemos

$$\begin{aligned}g^2 \left(c(1 + u\lambda')^2 \frac{\lambda^2}{\rho^2} + \frac{(\lambda')^2}{\rho^4} \right) + f^2 \left(\frac{\rho^2 + u^2\lambda^2(\lambda')^2 + 2u\lambda^2\lambda' + \lambda^2 - \lambda^2}{\rho^2} \right) + \\ + 2fg \left(\frac{\lambda'}{\rho} - \frac{u(\rho')^2}{\rho} - \frac{\lambda\rho'}{\rho^2} + \frac{u(\rho')^2}{\rho} \right).\end{aligned}\quad (3.3.33)$$

Por tanto, utilizando (3.3.30)–(3.3.33), llegamos a la expresión para el tercer coeficiente de la primera forma fundamental:

$$\langle \Psi_s, \Psi_s \rangle = \frac{\lambda^2}{\rho^2} (1 + u\lambda')^2 + \frac{1}{\rho^2} f^2 + \frac{(\lambda')^2}{\rho^4} g^2 + 2 \left(\frac{\lambda}{\rho} \right)' fg. \quad (3.3.34)$$

Utilizando las expresiones (3.3.28), (3.3.29) y (3.3.34), llegamos a la expresión para el determinante Δ de la métrica inducida:

$$\Delta(s, u) = \left[f(u\rho) + \frac{\lambda'}{\rho} g(u\rho) \right]^2.$$

Como consecuencia, teniendo en cuenta los valores que verifican $\Delta(s_0, u_0) = 0$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4 ([LO14], [LO15]) *Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}^3(c)$, con curvatura $\kappa_\gamma > 0$. Entonces (s_0, u_0) es un punto singular de la desarrollable rectificante de γ si, y sólo si, ocurre alguno de los siguientes casos:*

- $\lambda'(s_0) = 0$ y $u_0 = \pm \frac{\pi}{2\rho(s_0)}$ (sólo en el caso $c = 1$).
- $\lambda'(s_0) \neq 0$ y $u_0 = \frac{1}{\rho(s_0)} h^{-1} \left(-\frac{\rho(s_0)}{\lambda'(s_0)} \right)$, en cualquier caso.

Sea σ el lugar geométrico de los puntos singulares de la desarrollable rectificante de γ , que podemos parametrizar como $\sigma(s) = \Psi(s, u(s)) = \exp_{\gamma(s)}(u(s)\tilde{D}(s))$, donde la función $u(s)$ satisface la siguiente ecuación:

$$f(u\rho) + \frac{\lambda'}{\rho} g(u\rho) = 0. \quad (3.3.35)$$

Observamos que $g(u\rho) \neq 0$; pues de otra manera, la ecuación previa implicaría $f(u\rho) = 0$, lo que nos lleva a una contradicción.

La desarrollable rectificante es una superficie cónica si existe un punto p que está en cada geodésica con condiciones iniciales $(\gamma(s), \tilde{D}\gamma(s))$. Por tanto, $\sigma(s) \equiv p$. En este caso, definimos $W(s) = \exp_p^{-1}(u(s)\tilde{D}\gamma(s))$, $z(s) = |W(s)|$ y $V(s) = W(s)/z(s)$. Entonces tendremos $\gamma(s) = \exp_p(z(s)V(s))$, y la desarrollable rectificante se podrá parametrizar como $F(s, z) = \exp_p(zV(s))$, y, por tanto, será una superficie cónica con vértice en p .

Tomando derivadas en (3.3.35) y usando que $g(u\rho) \neq 0$, y (3.3.35) de nuevo, deducimos

$$(u\rho)' = \frac{\rho^2}{c\rho^2 + (\lambda')^2} \left(\frac{\lambda'}{\rho} \right)'. \quad (3.3.36)$$

Observemos que (3.3.35) implica $c\rho^2 + (\lambda')^2 > 0$.

Por otra parte, podemos utilizar (3.3.35) para reescribir las ecuaciones (3.3.26) y (3.3.27) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Psi_s &= -c \left(u\rho' + \frac{\lambda}{\rho} \right) g(u\rho)\gamma - \frac{\rho'}{\rho^2} (1 + u\lambda') g(u\rho)\tilde{D}\gamma, \\ \Psi_u &= -c\rho g(u\rho)\gamma - \frac{\lambda'}{\rho} g(u\rho)\tilde{D}\gamma. \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, deducimos que $\sigma'(s) = \Psi_s(s, u(s)) + u'(s)\Psi_u(s, u(s)) \equiv 0$ si, y sólo si, $(u\rho)' = -\lambda/\rho$. Esta ecuación, junto con (3.3.36), nos conduce a $\lambda''(s) + c\lambda(s) = 0$, y, por tanto, deducimos que

$$\lambda(s) = \frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma}(s) = d_1 g(s + d_0) + d_2 f(s + d_0),$$

para algunas constantes d_0 , d_1 y d_2 . Observamos que $d_1^2 + c(d_2^2 + 1) = c\rho^2 + (\lambda')^2 > 0$. Teniendo en cuenta el teorema 3.2.3 hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5 ([LO14], [LO15]) *Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}^3(c)$, con curvatura $\kappa_\gamma > 0$. Entonces la desarrollable rectificante de γ es una superficie cónica si, y sólo si, γ es una curva rectificante.*

3.4. Clasificación de las curvas rectificantes

Empezaremos esta sección presentando un resultado con varias caracterizaciones de las curvas rectificantes en espacios riemannianos de curvatura constante $\mathbb{M}^3(c) \subset \mathbb{R}_v^4$, $c \neq 0$.

Teorema 3.4.6 ([LO14], [LO15]) *Sea $\gamma = \gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco y no plana en $\mathbb{M}^3(c)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) γ es una curva rectificante.

(II) Existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, con $p \notin \text{Im}(\gamma)$, tal que

$$\langle p, T_\gamma(s) \rangle = b_1 g(s + s_0) + b_2 f(s + s_0) \quad \text{y} \quad |p^\perp|^2 = b^2,$$

para algunas constantes b_1, b_2, b y s_0 , con $cb_1^2 + b_2^2 + b^2 = c$. Denotamos por p^\perp la componente de p ortogonal a T_γ en $\mathbb{M}^3(c)$.

(III) Existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, con $p \notin \text{Im}(\gamma)$, tal que $\langle p, N_\gamma(s) \rangle = 0$.

(IV) Existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, con $p \notin \text{Im}(\gamma)$, tal que $\langle p, B_\gamma(s) \rangle = a$, para alguna constante a .

(V) Existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, con $p \notin \text{Im}(\gamma)$, tal que

$$\langle p, \gamma(s) \rangle = a_1 g(s + s_0) + a_2 f(s + s_0),$$

para algunas constantes a_1, a_2 y s_0 , con $a_1^2 + ca_2^2 \leq c$.

(VI) Existe un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, con $p \notin \text{Im}(\gamma)$, tal que la función distancia en $\mathbb{M}^3(c)$ entre p y $\gamma(s)$, $\rho(s) = d(p, \gamma(s))$, satisface

$$f(\rho(s)) = d_1 g(s + s_0) + d_2 f(s + s_0),$$

para ciertas constantes d_1, d_2 y s_0 , con $d_1^2 + cd_2^2 \leq c$.

Demostración. (I) \Rightarrow (V) Supongamos que γ es una curva rectificante. Teniendo en cuenta el teorema 3.1.2, sabemos que γ es una geodésica de alguna superficie cónica M parametrizada por (3.1.1), y, por tanto, podemos escribir $\gamma(s) = \Psi(t(s), z(s))$, donde $t(s)$ y $z(s)$ son dos funciones satisfaciendo (3.2.13)–(3.2.15). Entonces se verifica $\langle p, \gamma(s) \rangle = cf(z(s))$, y utilizando (3.2.19) obtenemos el apartado (V).

(V) \Rightarrow (III) Suponiendo ahora que se verifica el apartado (V) y utilizando las ecuaciones de Frenet (1.3.10), podemos escribir

$$\frac{d}{ds} \langle p, T_\gamma \rangle = \langle p, \nabla_{T_\gamma}^0 T_\gamma \rangle = \kappa_\gamma \langle p, N_\gamma \rangle - c \langle p, \gamma \rangle. \quad (3.4.37)$$

Por otra parte,

$$\langle p, T_\gamma \rangle = \frac{d}{ds} \langle p, \gamma \rangle = a_1 f(s + s_0) - ca_2 g(s + s_0),$$

de modo que

$$\frac{d}{ds} \langle p, T_\gamma \rangle = -ca_1 g(s + s_0) - ca_2 f(s + s_0) = -c \langle p, \gamma \rangle.$$

Utilizando esta expresión en (3.4.37) encontramos que $\kappa_\gamma \langle p, N_\gamma \rangle = 0$. Como hemos asumido que $\kappa_\gamma \neq 0$ obtenemos el apartado (III).

(III) \Rightarrow (I) Supongamos cierto el apartado (III). Sea $\beta_s(u)$ el arco de geodésica que conecta $p = \beta_s(0)$ y $\gamma(s) = \beta_s(u(s))$, para alguna función $u(s)$. Está claro que $\beta'_s(u) = a(u)p + b(u)\gamma(s)$, para ciertas funciones $a(u)$ y $b(u)$. Entonces

$$\langle \beta'_s(u(s)), N_\gamma(s) \rangle = a(u(s)) \langle p, N_\gamma(s) \rangle + b(u(s)) \langle \gamma(s), N_\gamma(s) \rangle = 0,$$

y, por tanto, γ es, por definición, una curva rectificante. Hemos probado, entonces, que los apartados (I), (III) y (V) son equivalentes.

(III) \Leftrightarrow (IV) Usando las ecuaciones de Frenet tenemos

$$\frac{d}{ds} \langle p, B_\gamma \rangle = \langle p, \nabla_{T_\gamma}^0 B_\gamma \rangle = -\tau_\gamma \langle p, N_\gamma \rangle.$$

Puesto que hemos asumido que la curva γ no es plana, es decir, $\tau_\gamma \neq 0$, la ecuación anterior implica que los apartados (III) y (IV) son equivalentes.

(V) \Leftrightarrow (VI) Dados dos puntos q_1 y q_2 en $\mathbb{M}^3(c)$, se sabe que la distancia entre ellos en $\mathbb{M}^3(c)$ está dada por

$$d(q_1, q_2) = f^{-1}(\langle q_1, q_2 \rangle).$$

Esto demuestra que los apartados (V) y (VI) son equivalentes.

(I) \Rightarrow (II) Si γ es una curva rectificante, los apartados (III), (IV) y (V) se cumplen. Tomando derivadas en (V) tenemos

$$\langle p, T_\gamma(s) \rangle = -ca_2g(s+s_0) + a_1f(s+s_0),$$

lo que implica la primera ecuación del apartado (II). Además, los apartados (III) y (IV) implican

$$|p^\perp|^2 = \langle p, N_\gamma \rangle^2 + \langle p, B_\gamma \rangle^2 = a^2,$$

lo que nos lleva a verificar la segunda ecuación del apartado (II). Observamos que

$$c = \langle p, p \rangle = \langle p, T_\gamma \rangle^2 + |p^\perp|^2 + c \langle p, \gamma \rangle^2 = (a_1)^2 + c(a_2)^2 + a^2.$$

(II) \Rightarrow (I) Para terminar la prueba, supongamos que se verifica el apartado (II). Integrando la primera ecuación conseguimos

$$\langle p, \gamma \rangle = -cb_1f(s+s_0) + b_2g(s+s_0) + s_1, \quad (3.4.38)$$

para cierta constante s_1 . De la segunda ecuación del apartado (II) tenemos

$$\langle p, T_\gamma \rangle^2 + c \langle p, \gamma \rangle^2 = c - b^2. \quad (3.4.39)$$

Combinando (3.4.38), (3.4.39) y la primera ecuación de (II) obtenemos, fácilmente, que la constante s_1 debe ser nula, de donde deducimos el apartado (V). Esto implica que γ es una curva rectificante y, por tanto, la prueba concluye. \square

Presentamos, ahora, el principal resultado de esta sección, el cual proporciona una parametrización para todas las curvas rectificantes en los espacios riemannianos de curvatura constante $\mathbb{M}^3(c)$. El caso euclídeo, $c = 0$, está demostrado en [Chen03].

Teorema 3.4.7 ([LO14], [LO15]) *Sea γ una curva en $\mathbb{M}^3(c)$. Entonces γ es una curva rectificante si, y sólo si, está dada, salvo reparametrizaciones, por*

$$\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)) = f(\rho(t))p + g(\rho(t))V(t), \quad (3.4.40)$$

donde $p \in \mathbb{M}^3(c)$ es un punto tal que $p \notin \text{Im}(\gamma)$, $V = V(t)$ es una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$, y $\rho(t) = h^{-1}(a \sec(t+t_0))$, para algunas constantes $a \neq 0$ y t_0 , con $a^2 < 1$ en el caso $c = -1$.

Demostración. Consideremos un punto $p \in \mathbb{M}^3(c)$, una curva parametrizada por el arco $V = V(t)$ en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$ y una función positiva $\rho = \rho(t)$. Definamos $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$. En el caso de que $c = 0$ consideraremos el punto p como el origen de coordenadas. Entonces tenemos

$$\gamma' = -c\rho'g(\rho)p + \rho'f(\rho)V + g(\rho)T_V,$$

y

$$v^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = (\rho')^2 + g^2(\rho). \quad (3.4.41)$$

El campo de vectores unitario tangente T_γ está dado por

$$T_\gamma = \frac{1}{v}\gamma' = -c\frac{\rho'}{v}g(\rho)p + \frac{\rho'}{v}f(\rho)V + \frac{1}{v}g(\rho)T_V. \quad (3.4.42)$$

Sea $s = s(t)$ el parámetro arco de γ , por tanto, $v(t) = s'(t)$. De las ecuaciones de Frenet (1.3.10) tenemos $(\kappa_\gamma N_\gamma)(s) = ((1/v)T'_\gamma + c\gamma)(t)$ y, por tanto, el campo de vectores unitario normal N_γ de γ es paralelo al campo de vectores dado por $(1/v)T'_\gamma + c\gamma$.

Por otra parte, para la curva V tenemos

$$V'' = T'_V = -V + k_V N_V, \quad (3.4.43)$$

donde $N_V = V \times T_V$ es tangente a $\mathbb{S}^2(1)$, pero normal a V y p , y k_V es la curvatura geodésica de V .

En este punto dividamos el razonamiento en dos casos.

Caso $c = 0$: De las ecuaciones (3.4.42) y (3.4.40) tenemos

$$\left\langle \gamma, \frac{1}{v}T'_\gamma \right\rangle = \left[\left(\frac{\rho'}{v} \right)' - \frac{\rho}{v} \right] \frac{\rho}{v}.$$

Recordamos que en \mathbb{R}^3 una curva rectificante γ es perpendicular a N_γ , de donde se deduce

$$\left(\frac{\rho'}{v} \right)' - \frac{\rho}{v} = 0.$$

Un cálculo directo muestra que esta ecuación es equivalente a

$$\rho\rho'' - 2(\rho')^2 - \rho^2 = 0. \quad (3.4.44)$$

Las soluciones no triviales de esta ecuación diferencial son $\rho(t) = a \sec(t + t_0)$. Por tanto, concluimos que $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t)) = \rho(t)V(t)$ es una curva rectificante si, y sólo si, $\rho(t) = a \sec(t + t_0)$, para algunas constantes $a \neq 0$ y t_0 .

Caso $c \neq 0$: De las ecuaciones (3.4.42) y (3.4.40) tenemos

$$\left\langle p, \frac{1}{v}T'_\gamma + c\gamma \right\rangle = -\frac{1}{v} \left[\frac{\rho'}{v}g(\rho) \right]' + f(\rho).$$

Por el teorema 3.4.6 sabemos que γ es una curva rectificante si, y sólo si, $\langle p, N_\gamma \rangle = 0$, lo que es equivalente, ya que N_γ es paralelo a $(1/v)T'_\gamma + c\gamma$, a la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{v} \left[\frac{\rho'}{v} g(\rho) \right]' + f(\rho) = 0.$$

Un cálculo directo, desarrollando las derivadas de esta ecuación y utilizando la expresión (3.4.41), nos muestra que esta ecuación es equivalente a

$$g(\rho)\rho'' - 2f(\rho)(\rho')^2 - f(\rho)g^2(\rho) = 0. \quad (3.4.45)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, sea $\phi = \phi(t)$ la función $\phi(t) = h(\rho(t))$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\phi'}{1 + c\phi^2}, \\ \rho'' &= \frac{(1 + c\phi^2)\phi'' - 2c\phi(\phi')^2}{(1 + c\phi^2)^2}, \\ g(\rho) &= \frac{\phi}{\sqrt{1 + c\phi^2}}, \\ f(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{1 + c\phi^2}}. \end{aligned}$$

Poniendo estas ecuaciones en (3.4.45) obtenemos

$$\frac{1}{(1 + c\phi^2)^{3/2}} (\phi\phi'' - 2(\phi')^2 - \phi^2) = 0. \quad (3.4.46)$$

Las soluciones no triviales de esta ecuación diferencial son $\phi(t) = a \sec(t + t_0)$ con $a \neq 0$.

Por tanto, concluimos que $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$ es una curva rectificante si, y sólo si, $\rho(t) = h^{-1}(a \sec(t + t_0))$, para algunas constantes $a \neq 0$ y t_0 . Obviamente, puesto que $1 + c\phi^2$ debe ser no negativo, en el caso $c < 0$ se debe cumplir $a^2 < 1$. \square

3.5. Curvas rectificantes como curvas extremas

En el siguiente resultado veremos que una curva rectificante $\gamma = \exp_p(\rho(t)V(t))$ en $\mathbb{M}^3(c)$ está caracterizada por la propiedad de que una cierta función (que depende de v , κ_γ y ρ) alcanza su valor mínimo, igual a k_V^2 , entre las curvas con la misma proyección esférica V . Un resultado similar para curvas en \mathbb{R}^3 fue obtenido por Chen y Dillen en [CD05].

Teorema 3.5.8 ([LO15]) *Sea $p \in \mathbb{M}^3(c)$ y consideremos una curva parametrizada por el arco $V(t)$ en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$. Entonces para cualquier función no nula $\rho(t)$, la curvatura κ_γ y la velocidad v de la curva $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$, y la curvatura geodésica k_V de V satisfacen la inecuación*

$$k_V^2 \leq \frac{v^4 \kappa_\gamma^2}{g^2(\rho)}, \quad (3.5.47)$$

donde la igualdad se alcanza si, y sólo si, γ es una curva rectificante.

Demostración. Supongamos que una curva γ está dada por $\gamma(t) = \exp_p(\rho(t)V(t))$, donde ρ es una función no nula y V es una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$. De las relaciones (3.4.40) y (3.4.42), y teniendo en cuenta que N_V es un vector ortogonal al espacio vectorial generado por $\{p, V, T_V\}$, deducimos que N_V es ortogonal tanto a γ como a T_γ . Entonces

$$N_V = V \times T_V = \cos \alpha N_\gamma + \sen \alpha B_\gamma, \quad (3.5.48)$$

donde $\alpha = \alpha(t)$ es una función determinada.

Derivando en (3.5.48) y usando las ecuaciones de Frenet (1.3.10) se deduce

$$k_V T_V = v\kappa_\gamma \cos \alpha T_\gamma + (\alpha' + v\tau_\gamma) [\sen \alpha N_\gamma - \cos \alpha B_\gamma], \quad (3.5.49)$$

donde $v = \|\gamma'\|$ es la velocidad de γ , que está dada por (3.4.41). Tomando el producto vectorial con N_V obtenemos también

$$k_V V = (\alpha' + v\tau_\gamma) T_\gamma - v\kappa_\gamma \cos \alpha [\sen \alpha N_\gamma - \cos \alpha B_\gamma]. \quad (3.5.50)$$

De (3.5.49) y (3.5.50) tenemos

$$k_V^2 = (v\kappa_\gamma \cos \alpha)^2 + (\alpha' + v\tau_\gamma)^2. \quad (3.5.51)$$

Dividamos la prueba en dos casos.

Caso $c = 0$: Puesto que, en este caso, $\gamma = \gamma(t) = \rho(t)V(t)$, está claro que $\langle \gamma, \gamma \rangle = \rho^2$, y derivando

$$\langle \gamma, T_\gamma \rangle = \frac{\rho\rho'}{v} \quad \text{y, por tanto,} \quad \langle V, T_\gamma \rangle = \frac{\rho'}{v}.$$

Teniendo en cuenta esta relación, junto con la ecuación (3.5.50), obtenemos

$$k_V \frac{\rho'}{v} = (\alpha' + v\tau_\gamma).$$

Esta ecuación, junto con (3.5.51) y (3.4.41) conduce a

$$k_V^2 = \frac{v^4 \kappa_\gamma^2 \cos^2 \alpha}{\rho^2}. \quad (3.5.52)$$

Esta relación implica la inecuación (3.5.47). Obviamente, la igualdad se alcanza si, y sólo si, se anula $\sen \alpha$. Esta condición, utilizando (3.5.48), es equivalente a la condición $N_V = \pm N_\gamma$. Pero N_V es paralelo a N_γ si, y sólo si, γ es una geodésica de la superficie cónica $\Psi(t, z) = \exp_p(zV(t))$, es decir, γ es una curva rectificante (véase el teorema 3.1.2). Consecuentemente, la igualdad de (3.5.47) se alcanzará si, y sólo si, γ es una curva rectificante.

Caso $c \neq 0$: Vamos a expresar el punto p en términos de la referencia ortonormal $\{\gamma, T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$ de \mathbb{R}_v^4 . Necesitamos hacer varios cálculos. De (3.4.40) obtenemos

$$\langle p, \gamma \rangle = cf(\rho), \quad (3.5.53)$$

y derivando deducimos

$$\langle p, T_\gamma \rangle = -\frac{\rho'}{v}g(\rho). \quad (3.5.54)$$

Para simplificar los cálculos, escribimos la ecuación (3.5.49) como

$$T_V = aT_\gamma + b[\sin \alpha N_\gamma - \cos \alpha B_\gamma],$$

donde

$$a = \frac{v\kappa_\gamma \cos \alpha}{k_V} \quad \text{y} \quad b = \frac{\alpha' + v\tau_\gamma}{k_V}.$$

De las condiciones $\langle p, N_V \rangle = 0$ y $\langle p, T_V \rangle = 0$ conseguimos un sistema lineal de dos ecuaciones en $\langle p, N_\gamma \rangle$ y $\langle p, B_\gamma \rangle$ cuya solución, teniendo en cuenta (3.5.54), está dada por

$$\langle p, N_\gamma \rangle = \frac{a\rho' \sin \alpha}{bv}g(\rho), \quad (3.5.55)$$

$$\langle p, B_\gamma \rangle = -\frac{a\rho' \cos \alpha}{bv}g(\rho). \quad (3.5.56)$$

Utilizando las ecuaciones (3.5.53)–(3.5.56) obtenemos

$$p = f(\rho)\gamma - \frac{\rho'}{v}g(\rho)T_\gamma + \frac{a\rho'}{bv}g(\rho)[\sin \alpha N_\gamma - \cos \alpha B_\gamma],$$

y entonces

$$c = \langle p, p \rangle = cf^2(\rho) + \frac{(\rho')^2}{v^2} \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) g^2(\rho).$$

Pero esta ecuación implica necesariamente que

$$\frac{(\rho')^2}{v^2} \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) = 1,$$

lo que nos lleva, teniendo en cuenta las definiciones de a y b , a la siguiente expresión:

$$(\alpha' + v\tau_\gamma)^2 = \frac{(\rho')^2}{v^2 - (\rho')^2} (v\kappa_\gamma \cos \alpha)^2. \quad (3.5.57)$$

Sustituyendo (3.5.57) en la ecuación (3.5.51), y teniendo en cuenta (3.4.41), obtenemos

$$k_V^2 = \frac{v^4 \kappa_\gamma^2 \cos^2 \alpha}{g^2(\rho)}. \quad (3.5.58)$$

Esta relación implica la inequación (3.5.47). Razonando como en el caso anterior, la igualdad de (3.5.47) se alcanzará si, y sólo si, γ es una curva rectificante. \square

Como una consecuencia del teorema 3.5.8 obtenemos la siguiente caracterización de curvas, en espacios riemannianos de curvatura constante $\mathbb{M}^3(c)$, con curvatura constante no nula y torsión lineal en las funciones del flujo geodésico, f y g , en términos de curvas rectificantes de tipo espiral. Este resultado extiende el corolario 1 en [CD05].

Corolario 3.5.9 ([LO15]) *Una curva $\gamma(s) = \exp_p(\rho(s)V(s))$ en $\mathbb{M}^3(c)$ tiene curvatura constante no nula k_0 y torsión $\tau(s) = d_1g(s+s_0) + d_2f(s+s_0)$, para ciertas constantes d_1 , d_2 y s_0 , con $ck_0 + d_1^2 + cd_2^2 > 0$, si, y sólo si, es congruente a una curva rectificante sobre una curva de tipo espiral unitaria $V(t)$ en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$ con curvatura geodésica $k_V(t) = c_0(\cos^2(t+t_0) + ca^2)^{-3/2}$, para ciertas constantes a , $c_0 \neq 0$, t_0 , con $0 < a^2 < 1$ en el caso $c = -1$.*

Demostración. Si una curva $\gamma = \exp_p(\rho V)$ en $\mathbb{M}^3(c)$ tiene curvatura constante k_0 y torsión lineal en las funciones del flujo geodésico, es decir, $\tau(s) = d_1g(s+s_0) + d_2f(s+s_0)$, para ciertas constantes d_1 , d_2 y s_0 , con $ck_0 + d_1^2 + cd_2^2 > 0$, entonces el teorema 3.2.3 implica que γ es (congruente a) una curva rectificante. Entonces por el teorema 3.4.7 podemos asumir que $\rho(t) = h^{-1}(a \sec(t+t_0))$, para ciertas constantes a y t_0 , con $0 < a^2 < 1$ en el caso $c = -1$. Tenemos

$$g(\rho) = \frac{a}{\sqrt{\cos^2(t+t_0) + ca^2}}, \quad (3.5.59)$$

$$\rho' = \frac{a \operatorname{sen}(t+t_0)}{\cos^2(t+t_0) + ca^2}. \quad (3.5.60)$$

Utilizando (3.4.41) tenemos

$$v^2 = \frac{a^2(1+ca^2)}{(\cos^2(t+t_0) + ca^2)^3}. \quad (3.5.61)$$

Como en el teorema 3.5.8 alcanzamos la igualdad, de (3.5.59), (3.5.60) y (3.5.61), obtenemos $k_V(t) = c_0(\cos^2(t+t_0) + ca^2)^{-3/2}$, donde $c_0 = \pm a(1+ca^2)k_0$ no se anula.

Recíprocamente, si $\gamma = \exp_p(\rho V)$ es una curva rectificante en $\mathbb{M}^3(c)$ sobre una curva parametrizada por el arco $V = V(t)$ en $\mathbb{S}^2(1) \subset T_p\mathbb{M}^3(c)$ con curvatura geodésica $k_V(t) = c_0(\cos^2(t+t_0) + ca^2)^{-3/2}$, $c_0 \neq 0$, entonces por el teorema 3.4.7 tenemos $\rho(t) = h^{-1}(a \sec(t+t_0))$, para ciertas constantes a y t_0 , con $0 < a^2 < 1$ en el caso $c = -1$. Así encontramos

$$\frac{v^4}{g^2(\rho)} = a^2(1+ca^2)^2(\cos^2(t+t_0) + ca^2)^{-3}.$$

Como γ es una curva rectificante, el teorema 3.5.8 implica

$$k_V^2 = \frac{v^4 \kappa_\gamma^2}{g^2(\rho)}.$$

Por tanto, obtenemos

$$\kappa_\gamma^2 = \frac{c_0^2}{a^2(1+ca^2)^2},$$

que es una constante no nula. Teniendo en cuenta el teorema 3.2.3, la prueba está terminada. \square

Para terminar la sección e ilustrar el corolario 3.5.9, mostramos en las figuras 3.1 y 3.2 las gráficas de varias proyecciones esféricas en $\mathbb{S}^2(1)$ de curvas rectificantes en $\mathbb{S}^3(1)$ y $\mathbb{H}^3(-1)$, respectivamente.

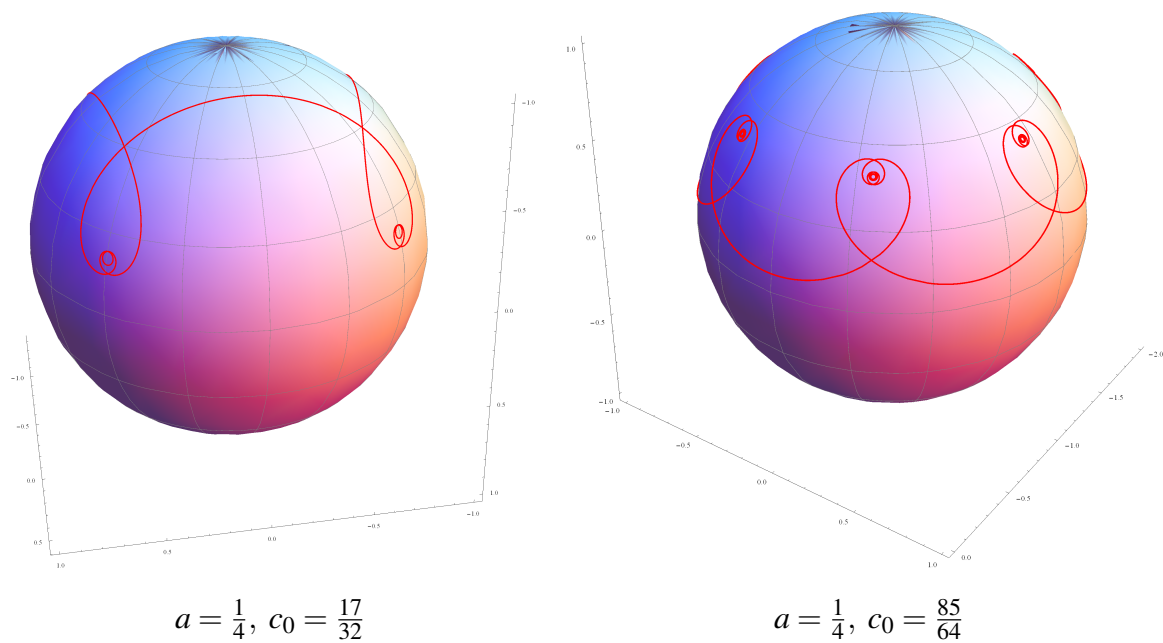


Figura 3.1: Proyecciones esféricas V de las curvas rectificantes en $\mathbb{S}^3(1)$ con curvatura geodésica $k_V(t) = c_0(\cos^2(t) + a^2)^{-3/2}$.

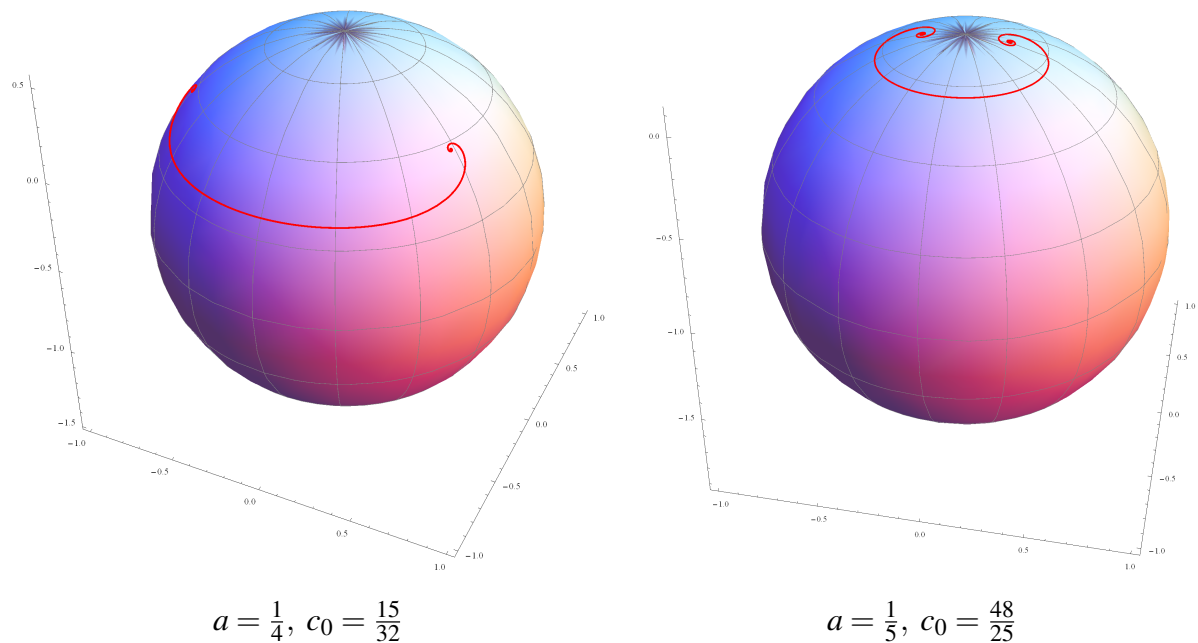


Figura 3.2: Proyecciones esféricas V de las curvas rectificantes en $\mathbb{H}^3(-1)$ con curvatura geodésica $k_V(t) = c_0(\cos^2(t) - a^2)^{-3/2}$.

3.6. Curvas rectificantes y curvas de Bertrand en \mathbb{R}_q^3

El corolario 3.5.9 nos proporciona una manera de construir la familia de curvas rectificantes con curvatura constante en los espacios riemannianos de curvatura constante $\mathbb{M}^3(c)$. Puesto que estas últimas son curvas de Bertrand, nos proponemos en esta sección estudiar aquellas curvas, de curvatura no constante, que además de ser curvas rectificantes son también curvas de Bertrand.

3.6.1. Curvas de Bertrand que son rectificantes

Supongamos que $\alpha(s)$ es una curva, de curvatura no constante, en $\mathbb{M}^3(c)$, parametrizada por el arco, que es a la vez curva rectificante y curva de Bertrand. Por ser curva rectificante, utilizando el teorema 3.2.3 tenemos

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}(s) = d_1 g(s + d_0) + d_2 f(s + d_0),$$

para algunas constantes d_0, d_1 y d_2 , con $d_1^2 + c(1 + d_2^2) > 0$, donde f y g las funciones del flujo geodésico (véase la sección 1.2.2). Por ser curva de Bertrand, utilizando el teorema 2.1.7 tenemos la relación

$$\lambda \kappa_\alpha(s) + \mu \tau_\alpha(s) = 1,$$

donde $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$ son constantes reales. Se verifica entonces que

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{1}{\lambda + \mu(d_1 g(s + d_0) + d_2 f(s + d_0))}$$

y

$$\tau_\alpha(s) = \frac{d_1 g(s + d_0) + d_2 f(s + d_0)}{\lambda + \mu(d_1 g(s + d_0) + d_2 f(s + d_0))}.$$

En concreto, para \mathbb{R}_q^3 tenemos la siguiente expresión:

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\gamma}{s + r_0} \quad \text{y} \quad \tau_\alpha(s) = \frac{\delta}{s + r_0} + \delta_0,$$

donde hemos considerado, por simplicidad, $d_0 = 0$ y las constantes r_0, γ, δ y δ_0 están dadas por

$$r_0 = \frac{d_2}{d_1} + \frac{\lambda}{\mu d_1}, \quad \gamma = \frac{1}{\mu d_1}, \quad \delta = \frac{-\lambda}{\mu^2 d_1} \quad \text{y} \quad \delta_0 = \frac{1}{\mu}.$$

Observamos que el resultado de B.Y. Chen para curvas rectificantes se puede extender fácilmente para curvas no nulas en \mathbb{R}_q^3 (véase, por ejemplo, [INPT03]). Por tanto, teniendo en cuenta el ejemplo 2.1.13, las curvas, de curvatura no constante, que son a la vez curvas rectificantes y curvas de Bertrand son hélices cónicas generalizadas (con $\gamma_0 = 0, r_0 = r_1$ y $\delta_0 \neq 0$).

Recíprocamente, consideremos $\alpha(s)$ una hélice cónica generalizada con $\gamma_0 = 0$, $r_0 = r_1$ y $\delta_0 \neq 0$. Su curvatura y torsión estarán expresadas de la siguiente forma:

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\gamma}{s+r_0} \quad \text{y} \quad \tau_\alpha(s) = \frac{\delta}{s+r_0} + \delta_0.$$

Consideramos la curva $V(t) \in \mathbb{S}^2$, parametrizada por el arco, con curvatura geodésica

$$k_V(t) = \left(\frac{-\cos^3(t)}{\gamma} \left(\tan(t) - \frac{\delta}{\gamma} \right) \right)^{-1}. \quad (3.6.62)$$

Sobre esta curva consideramos la superficie cónica $\Psi(t, z) = zV(t)$, para $z > 0$. En esta superficie, teniendo en cuenta el teorema 3.2.3 y sus razonamientos previos, consideramos las geodésicas $\alpha(s) = \Psi(t(s), z(s))$ determinadas por las funciones

$$t(s) = \arctan(d_1 s + d_2), \quad (3.6.63)$$

$$z(s) = \frac{1}{d_1} \sqrt{1 + (d_1 s + d_2)^2}, \quad (3.6.64)$$

para dos constantes arbitrarias d_1 y d_2 . No es complicado verificar

$$\frac{-\delta}{d_1 \gamma^2} \kappa_\alpha(s) + \frac{1}{d_1 \gamma} \tau_\alpha(s) = 1.$$

Si consideramos $d_1 = \delta_0/\gamma$ y $d_2 = (r_0 \delta_0 + \delta)/\gamma$ obtenemos la hélice cónica requerida. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.6.10 *Sea α una curva de curvatura no constante en un espacio pseudo-euclídeo \mathbb{R}_q^3 . La curva α es a la vez curva rectificante y curva de Bertrand si, y sólo si, es una hélice cónica generalizada con $\gamma_0 = 0$, $r_0 = r_1$ y $\delta_0 \neq 0$.*

Además, esta familia de curvas está caracterizada por ser la familia de geodésicas de la superficie cónica $\Psi(t, z) = zV(t)$, donde $V(t) \in \mathbb{S}^2$ es una curva, parametrizada por el arco, con curvatura geodésica dada por (3.6.62).

3.6.2. Una familia de curvas de Bertrand como geodésicas en superficies

Sea $M_v^2(c) \subset \mathbb{R}_q^3$ una superficie totalmente umbilical de índice $v \in \{0, 1\}$ y de curvatura constante $c = \pm 1$ en \mathbb{R}_q^3 . Sea $\gamma(t)$ una curva parametrizada por la longitud de arco en $M_v^2(c)$ con curvatura

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{d_1 t + d_2},$$

para constantes d_1 y d_2 . Es fácil comprobar que la curva α_2 dada en (2.3.64) es una curva rectificante, puesto que

$$\frac{\tau_2}{\kappa_2}(\sigma) = \frac{\delta_1}{\kappa_\gamma(t(\sigma))} = c_1 \sigma + c_2,$$

para algunas constantes c_1 y c_2 (véase [Chen03] y [INPT03]). Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$\alpha_2(\sigma) = \left(\sigma + \frac{c_2}{c_1}\right)T_2(\sigma) + \frac{1}{c_1}B_2(\sigma).$$

Igualmente, consideramos la curva α_1 dada en (2.3.64). Se verifica entonces que el plano tangente a la superficie M_a parametrizada por $\Psi_a(t, z) = a\alpha_1(s(t)) + (z/t)\alpha_2(\sigma(t))$ está generado por los vectores $\{T_2(\sigma(t)), B_2(\sigma(t))\}$, ya que $T_1(s(t)) = B_2(\sigma(t))$. Esto implica que el vector normal unitario a la superficie $N(t, z)$ es paralelo a $N_1(s(t))$ y $N_2(\sigma(t))$. Usando finalmente el teorema 2.3.20 obtenemos que

$$\gamma_b(t) = \Psi_a(t, bt) = a\alpha_1(s(t)) + b\alpha_2(\sigma(t)),$$

para cualquier constante b , es una curva de Bertrand en \mathbb{R}_q^3 que también será geodésica de M_a . En otras palabras, las superficies M_a , para cualquier $a \in \mathbb{R}$, están formadas por geodésicas que también son curvas de Bertrand.

Hélices slant

Nos proponemos en este último capítulo extender la definición clásica de las hélices slant de \mathbb{R}^3 a los espacios tridimensionales de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$. Teniendo en cuenta los distintos tipos de curvas que nos podemos encontrar en los espacios tridimensionales de curvatura constante (véase la subsección 1.3) vamos a utilizar el término hélice slant (en el caso de que la curva sea una curva de Frenet), hélice slant pseudo-nula o hélice slant nula, respectivamente.

En la sección 4.1 introducimos la definición de hélice slant (véase la definición 4.1.1). En el teorema 4.1.2 damos la caracterización de las hélices slant en función de sus curvaturas. Vemos también, en el corolario 4.1.3, que no existen hélices slant ni en \mathbb{H}^3 ni en \mathbb{S}_1^3 . En las secciones 4.1.2 y 4.1.3, presentamos resultados de caracterización para hélices slant pseudo-nulas y slant nulas, véanse los teoremas 4.1.4 y 4.1.6, respectivamente. Vemos también que no existen ni hélices slant pseudo-nulas ni hélices slant nulas en \mathbb{S}_1^3 , véanse el corolario 4.1.5 y el corolario 4.1.7, respectivamente.

Dedicamos la sección 4.2 a diversos resultados en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . En primer lugar, utilizamos las superficies hélice para caracterizar las hélices slant (véase el teorema 4.2.11). En la proposición 4.2.13 caracterizamos las curvas de precesión constante como geodésicas en superficies hélice construidas a partir de epicicloides o hipocicloides. En la sección 4.2.2 introducimos una parametrización para las superficies hélice y demostramos, en el teorema 4.2.16, que las hélices slant son congruentes a las geodésicas de la superficie tangente a una hélice generalizada. Gracias a este punto de vista llegamos a un par de métodos de construcción de hélices slant en \mathbb{R}^3 , véase la sección 4.2.3.

Comenzamos la sección 4.3 definiendo las superficies hélice en espacios de curvatura constante no nula como aquellas superficies cuyo campo de vectores normal tiene un producto escalar constante con algún campo Killing en $\mathbb{M}_q^3(c)$ de longitud constante a lo largo de la superficie. Vemos, en la proposición 4.3.22, que las superficies hélice han de ser necesariamente llanas y las determinamos tanto en \mathbb{S}^3 como en \mathbb{H}_1^3 (véanse los teoremas 4.3.25, 4.3.28 y 4.3.30). Dedicamos la sección 4.4 a la integración geométrica de las hélices slant de Frenet, pseudo-nulas y nulas, viéndolas como geodésicas, o ciertas curvas especiales, en superficies hélice (véanse los teoremas 4.4.32, 4.4.33 y 4.4.34, respectivamente).

Los resultados de este capítulo aparecen publicados en [LO16a], [LO16b] y [LO17].

4.1. Hélices slant en espacios tridimensionales de curvatura constante

Empezamos extendiendo la definición clásica de hélice slant en \mathbb{R}^3 a espacios de curvatura constante $\mathbb{M}_q^3(c)$.

Definición 4.1.1 ([LO17], [LO16b]) Una curva regular $\gamma = \gamma(s)$ inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *hélice slant* si existe un campo de vectores Killing V a lo largo de γ de longitud constante, cuya extensión a $\mathbb{M}_q^3(c)$ es también de longitud constante, y tal que el producto $\langle V, N \rangle$ es una función constante a lo largo de γ . V se llamará un *eje de la hélice slant* γ .

Teniendo en cuenta la proposición 1.4.10, el campo Killing V ha de ser la restricción de un campo Killing de $\mathbb{M}_q^3(c)$. Observamos que el hecho de ser un campo Killing de longitud constante sobre γ no implica necesariamente que sea la restricción de un campo Killing de longitud constante de $\mathbb{M}_q^3(c)$; de hecho, hemos visto en la proposición 1.4.8 que tanto en \mathbb{S}_1^3 como en \mathbb{H}^3 no existen campos Killing de longitud constante, ni paralelos (véase la proposición 1.4.6). En este capítulo analizamos el caso en que el campo Killing de longitud constante V a lo largo de una curva es la restricción de un campo Killing de longitud constante de $\mathbb{M}_q^3(c)$. El caso complementario se estudiará en futuros trabajos.

4.1.1. Hélices slant de Frenet

Sea $\gamma(s)$ una curva regular con vectores velocidad y aceleración no nulos. Si sus caracteres causales son ε_i se cumple $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = (-1)^q$. Supongamos que $\gamma(s)$ es una hélice slant con eje $V(s)$. Esto significa, teniendo en cuenta la proposición 1.4.8, que $\mathbb{M}_q^3(c)$ representa \mathbb{R}_q^3 , \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 . Además, en el caso \mathbb{R}_q^3 el campo Killing V es constante. Si $\{T, N, B\}$ es la referencia ortonormal de Frenet para γ en $\mathbb{M}_q^3(c)$, podemos escribir

$$V(s) = x(s)T(s) + bN(s) + z(s)B(s), \quad (4.1.1)$$

donde x y z son funciones diferenciables y b es una constante. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $b \neq 0$; de otro modo, $\gamma(s)$ sería una hélice generalizada (se puede consultar [BFLM01]). Por ser el campo de vectores V de longitud constante, de la relación (4.1.1) es fácil observar que

$$\varepsilon_1 x(s)^2 + \varepsilon_2 b^2 + \varepsilon_3 z(s)^2 = \varepsilon \quad (4.1.2)$$

siendo ε una constante y, por tanto,

$$\varepsilon_1 x(s)x'(s) + \varepsilon_3 z(s)z'(s) = 0. \quad (4.1.3)$$

De las ecuaciones de Frenet (1.3.10) y de la ecuación Killing (1.4.15a), obtenemos

$$\kappa = \varepsilon_1 \frac{x'}{b}, \quad (4.1.4)$$

y utilizando (4.1.3) y (4.1.4),

$$\bar{\nabla}_T V = \frac{\varepsilon_3}{b} (z' + \varepsilon_3 b \tau) (-\varepsilon_2 z N + \varepsilon_3 b B) = \lambda T \times V, \quad (4.1.5)$$

donde $\lambda = \frac{\varepsilon_3}{b} (z' + \varepsilon_3 b \tau)$. Entonces podemos escribir

$$\tau - \lambda = -\varepsilon_3 \frac{z'}{b}. \quad (4.1.6)$$

Utilizamos ahora las relaciones (4.1.3), (4.1.4) y (4.1.6) para obtener

$$\frac{\tau - \lambda}{\kappa} = \frac{x}{z}. \quad (4.1.7)$$

Un cálculo directo, usando las relaciones (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.6) y (4.1.7), muestra que

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2|^3}} \left(\frac{\tau - \lambda}{\kappa} \right)' = m, \quad (4.1.8)$$

para una cierta constante real m , siempre que $\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2$ no se anule. Observemos que $m \neq 0$; puesto que de otra manera γ sería una hélice generalizada. Si $\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2$ se anulara para todo valor entonces γ sería también una hélice generalizada (véase [BFLM01, teorema 7]). Teniendo en cuenta la proposición 1.4.8 también podemos afirmar que $\lambda^2 = (-1)^q c$.

Probaremos ahora el recíproco, es decir, que una curva regular de Frenet $\gamma(s)$ satisfaciendo (4.1.8) es una hélice slant. Sea

$$\delta = \text{sgn}(\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2) = \pm 1, \quad \varepsilon = \text{sgn}(\delta + \varepsilon_2 m^2) \in \{-1, 0, +1\}, \quad (4.1.9)$$

donde sgn denota la función signo y $\lambda^2 = (-1)^q c$. Consideramos $V(s)$ el campo vectorial a lo largo de γ dado por (4.1.1) donde $x(s)$, b y $z(s)$ están definidos por

$$x(s) = \frac{\mu(\tau - \lambda)}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2|}}, \quad b = (-1)^q \varepsilon_2 \delta \mu m, \quad z(s) = \frac{\mu \kappa}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1 (\tau - \lambda)^2|}}, \quad (4.1.10)$$

con

$$\begin{cases} \mu = \frac{-\varepsilon_2 \delta}{\sqrt{\varepsilon(\delta + \varepsilon_2 m^2)}}, & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ \mu \neq 0 \text{ es una constante arbitraria,} & \text{si } \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Es fácil ver que $\langle V, V \rangle$ y $\langle V, N \rangle$ son constantes. A partir de la definición de $z(s)$, y utilizando (4.1.8), es fácil ver que se verifica (4.1.6) y de aquí, utilizando (4.1.3) y una vez más (4.1.8) obtenemos (4.1.4). Probaremos que V es un campo de vectores Killing a

lo largo de γ . Un cálculo largo, pero directo, nos lleva a las siguientes ecuaciones:

$$\bar{\nabla}_T V = \lambda(-\varepsilon_2 z N + \varepsilon_3 b B), \quad (4.1.12)$$

$$\bar{\nabla}_T^2 V = (-1)^q \lambda(\varepsilon_3 z \kappa T - \varepsilon_1 b \lambda N - \varepsilon_1 z \tau B), \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T^3 V = & (-1)^q \lambda(-b \kappa(\tau - 2\lambda) + \varepsilon_3 z \kappa') T + \lambda(\varepsilon_1 \kappa^2 + \varepsilon_3 \tau^2) z N + \\ & + \lambda(\varepsilon_2 b \tau(\tau - 2\lambda) - (-1)^q \varepsilon_1 z \tau') B. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

A partir de estas ecuaciones no es difícil ver que V satisface las ecuaciones Killing (1.4.15). Por tanto, hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 4.1.2 ([LO17], [LO16b]) *Sea γ una curva de Frenet parametrizada por el arco inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ con curvatura no nula κ y torsión τ . La curva γ es una hélice slant si, y sólo si, la función*

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1(\tau - \lambda)^2|^3}} \left(\frac{\tau - \lambda}{\kappa} \right)'$$

es una constante m , donde $\lambda^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 c = (-1)^q c$, y siempre que $\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1(\tau - \lambda)^2$ no se anule. En este caso, un eje de la hélice slant está dado por

$$V = \frac{\mu(\tau - \lambda)}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1(\tau - \lambda)^2|}} T + (-1)^q \varepsilon_2 \delta \mu m N + \frac{\mu \kappa}{\sqrt{|\varepsilon_3 \kappa^2 + \varepsilon_1(\tau - \lambda)^2|}} B,$$

donde las constantes δ, ε, μ están dadas por (4.1.9) y (4.1.11).

En el caso llano ($c = 0$) todo campo Killing de longitud constante es paralelo, necesariamente esto implica que $\lambda = 0$ y, por tanto, este resultado coincide con el resultado clásico de caracterización de hélices slant en espacios pseudo-euclídeos (véase [IT04] y [AL11]).

Teniendo en cuenta la definición 4.1.1 y los comentarios posteriores podemos añadir el siguiente resultado.

Corolario 4.1.3 *No hay hélices slant de Frenet ni en \mathbb{H}^3 ni en \mathbb{S}_1^3 .*

Observamos que en [Bar97] y en [BFLM01] se habla de hélices generalizadas tanto en \mathbb{H}^3 como en \mathbb{S}_1^3 , respectivamente. Sin embargo, hay que resaltar que en dichos trabajos el campo Killing no es la restricción de un campo Killing de longitud constante en \mathbb{H}^3 o en \mathbb{S}_1^3 , respectivamente.

4.1.2. Hélices slant pseudo-nulas

Teniendo en cuenta la definición 4.1.1, y las consideraciones posteriores, el espacio $\mathbb{M}_1^3(c)$ representa \mathbb{R}_1^3 o \mathbb{H}_1^3 . Probaremos que cualquier curva pseudo-nula γ inmersa en $\mathbb{M}_1^3(c)$ es una hélice slant; de hecho, también es una hélice generalizada. Para comprobar esta afirmación, consideramos el campo vectorial a lo largo de γ dado por $V = \mu N$, donde

N es el normal principal de γ y μ es cualquier solución no trivial de la ecuación diferencial ordinaria dada por

$$y'' + 2\tau y' + (\tau' + \tau^2 + c)y = 0. \quad (4.1.15)$$

Puesto que $\langle V, V \rangle = \langle V, N \rangle = 0$, sólo necesitamos ver que V es un campo de vectores Killing a lo largo de γ . Un sencillo cálculo muestra que

$$\bar{\nabla}_T V = (\mu' + \tau\mu)N = \mathcal{D}(\mu)N, \quad (4.1.16)$$

$$\bar{\nabla}_T^2 V = \mathcal{D}^2(\mu)N, \quad (4.1.17)$$

$$\bar{\nabla}_T^3 V = \mathcal{D}^3(\mu)N, \quad (4.1.18)$$

donde \mathcal{D} denota el operador diferencial $\frac{\partial}{\partial s} + \tau I$. No es difícil ver que V satisface las ecuaciones Killing (1.4.33) y, por tanto, γ es una hélice generalizada y una hélice slant. Observamos que las ecuaciones (1.4.33a) y (1.4.33b) son ciertas para cualquier función μ , y la condición (1.4.33c) es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{D}^2(\mu) + c\mu) = 0. \quad (4.1.19)$$

Por tanto, si μ es una solución no trivial de la ecuación diferencial ordinaria (4.1.15) entonces $V = \mu N$ es un campo de vectores Killing a lo largo de γ . Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.1.4 ([LO16b]) *Sea γ una curva pseudo-nula inmersa en $\mathbb{M}_1^3(c)$ con pseudo-torsión τ . Entonces γ es una hélice slant (y una hélice generalizada) con eje $V = \mu N$, donde μ es cualquier solución no trivial de la ecuación diferencial dada por (4.1.15).*

Corolario 4.1.5 *No hay hélices slant pseudo-nulas en \mathbb{S}_1^3 .*

4.1.3. Hélices slant nulas

Al igual que en la sección anterior el espacio $\mathbb{M}_1^3(c)$ representa a \mathbb{R}_1^3 o \mathbb{H}_1^3 . Sea $\gamma(s)$ una hélice slant nula con eje $V(s)$ y referencia pseudo-ortonormal $\{T, N, B\}$ en $\mathbb{M}_1^3(c)$. Escribamos

$$V = x(s)T + bN + z(s)B, \quad (4.1.20)$$

donde $x(s), z(s)$ son funciones diferenciables y $b \in \mathbb{R}$ es una constante. Asumamos que γ no es una hélice general; por tanto, τ no es constante y $b \neq 0$. De (4.1.20) y las ecuaciones de Frenet (1.3.12) podemos escribir

$$\bar{\nabla}_T V = (x' + b\tau)T + (x + z\tau)N + (z' + b)B. \quad (4.1.21)$$

Utilizando la ecuación Killing (1.4.36a) obtenemos

$$z(s) = -bs + m, \quad m \in \mathbb{R}. \quad (4.1.22)$$

Escribiendo que $\langle V, V \rangle = \varepsilon$ obtenemos la relación $xz = \frac{1}{2}(b^2 - \varepsilon) \equiv n$ para algún valor n constante, y entonces

$$x(s) = \frac{n}{-bs + m}. \quad (4.1.23)$$

Tomando la derivada covariante en (4.1.21) y usando (1.4.36b) conseguimos $\tau' = -2x'/z$, y deducimos

$$\tau(s) = \frac{-n}{(-bs + m)^2} + \tau_0, \quad \tau_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.1.24)$$

Por otra parte, utilizando la tercera ecuación Killing (1.4.36c) obtenemos $b(\tau_0^2 + c) = 0$, y, por tanto, $c \leq 0$ y $\tau_0 = \pm\sqrt{-c}$. Veamos, ahora, que la ecuación anterior caracteriza a las hélices slant nulas. Sea γ una curva nula satisfaciendo (4.1.24) para ciertas constantes n, b, m, τ_0 , con $\tau_0 = \pm\sqrt{-c}$ para $c \leq 0$. Consideramos el siguiente campo de vectores a lo largo de γ :

$$V(s) = \frac{n}{-bs + m}T(s) + bN(s) + (-bs + m)B(s). \quad (4.1.25)$$

Es fácil comprobar las ecuaciones (1.4.36), por lo que V es un campo de vectores Killing a lo largo de γ de longitud constante $\langle V, V \rangle = b^2 - 2n$ y con función producto $\langle V, N \rangle$ constante. Entonces, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.1.6 ([LO16b]) *Sea γ una curva nula, parametrizada por el pseudo-arco, con torsión $\tau \neq 0$ no constante en $\mathbb{M}_1^3(c)$. La curva γ es una hélice slant nula si, y sólo si,*

$$\tau(s) = \frac{-n}{(-bs + m)^2} + \tau_0, \quad n, b, m, \tau_0 \in \mathbb{R}, \quad \tau_0^2 = -c.$$

En este caso, un eje para la hélice slant nula está dado por

$$V(s) = \frac{n}{-bs + m}T(s) + bN(s) + (-bs + m)B(s).$$

Corolario 4.1.7 *No hay hélices slant nulas en \mathbb{S}_1^3 .*

4.2. Hélices slant en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3

Una subvariedad M del espacio euclídeo \mathbb{R}^n se dice que es una *subvariedad hélice* si existe una dirección fija $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que el espacio tangente de la subvariedad forma un ángulo constante con \mathbf{u} , [DSRH09]. En el caso de hipersuperficies con vector normal unitario η , esta definición es equivalente a que el ángulo φ entre η y \mathbf{u} sea una función constante a lo largo de M . A una hipersuperficie hélice $M \subset \mathbb{R}^n$ de ángulo φ la denotamos por M_φ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $\varphi \in [0, \pi/2]$.

En [DSRH09] también se puede encontrar la construcción de las hipersuperficies hélice en los espacios euclídeos. Sea $H \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ una hipersuperficie orientable y sea η el campo de vectores normal unitario. Sea $\mathbf{u} = (0, \dots, 0, 1)$ y definimos el campo de vectores

$$T(x) = \cos \varphi \eta(x) + \sin \varphi \mathbf{u},$$

donde $x \in H$ y $\varphi \in \mathbb{R}$ es constante. Para un ε suficientemente pequeño, definimos una inmersión $f_\varphi : M = H \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante

$$f_\varphi(x, z) = x + zT(x).$$

Entonces tenemos el siguiente resultado (teoremas 2.4 y 2.7 de [DSRH09]): *La hipersuperficie inmersa $f_\varphi(M)$ es una hipersuperficie hélice de ángulo φ , y cada hipersuperficie hélice $M_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ se puede obtener localmente de esta forma.*

En el caso tridimensional, consideremos una curva plana, parametrizada por el arco, $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura $\kappa_\beta(t)$ y referencia de Frenet $\{T_\beta(t), N_\beta(t)\}$. Entonces tenemos las siguientes ecuaciones de Frenet para β :

$$\begin{aligned} T'_\beta(t) &= \kappa_\beta(t) N_\beta(t), \\ N'_\beta(t) &= -\kappa_\beta(t) T_\beta(t). \end{aligned}$$

La superficie hélice $M = M_\varphi$ construida sobre la curva β está parametrizada por

$$X(t, z) = \beta(t) + z(\cos \varphi N_\beta(t) + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}).$$

Para enfatizar la dependencia tanto del ángulo φ , como de la curva β , utilizaremos, a veces, la notación $M_{\beta, \varphi}$.

La referencia tangente está formada por

$$\begin{aligned} X_t(t, z) &= (1 - \cos \varphi \kappa_\beta(t) z) T_\beta(t), \\ X_z(t, z) &= \cos \varphi N_\beta(t) + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}, \end{aligned}$$

y, por tanto, el campo de vectores normal unitario puede obtenerse como

$$N(t, z) = \frac{X_t \times X_z}{\|X_t \times X_z\|} = -\operatorname{sen} \varphi N_\beta(t) + \cos \varphi \mathbf{u}. \quad (4.2.26)$$

El operador forma $A(t, z) = -dN(t, z)$ en el punto $X(t, z)$ es

$$A(t, z) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen} \varphi \kappa_\beta(t)}{1 - \cos \varphi \kappa_\beta(t) z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos, pues, que la curvatura de Gauss K y la curvatura media H de la superficie hélice están dadas por

$$K = 0 \quad \text{y} \quad H = \frac{\operatorname{sen} \varphi \kappa_\beta(t)}{2(1 - \cos \varphi \kappa_\beta(t) z)}.$$

4.2.1. Hélices slant y superficies hélice

En esta sección estudiaremos las geodésicas $\gamma(s)$ de una superficie hélice M_φ . Hemos distinguido dos casos especiales en función del ángulo φ :

- (i) $\varphi = 0$. Entonces M_φ es un plano (o una porción de plano), y γ es una línea recta.
- (ii) $\varphi = \pi/2$. Entonces M_φ es un cilindro generalizado, y γ es una hélice generalizada.

Sin pérdida de generalidad, de ahora en adelante asumiremos que $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Sea $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ una geodésica, parametrizada por el arco, en M_φ , con $\kappa_\gamma > 0$. Entonces el tangente unitario está dado por

$$T_\gamma(s) = t'(s)(1 - \cos \varphi \kappa_\beta(t(s)) z(s)) T_\beta(t(s)) + z'(s)(\cos \varphi N_\beta(t(s)) + \text{sen } \varphi \mathbf{u}).$$

Por tanto, existe una función diferenciable $\theta(s)$ tal que

$$\begin{aligned} t'(s)(1 - \cos \varphi \kappa_\beta(t(s)) z(s)) &= \text{sen } \theta(s), \\ z'(s) &= \cos \theta(s). \end{aligned}$$

La función $\theta(s)$, llamada la función pendiente de la geodésica, no es nada más que la función ángulo entre la geodésica y el vector director en $\gamma(s)$. De las ecuaciones de Frenet de γ , (1.3.10), deducimos

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(s) N_\gamma(s) &= \cos \theta(s) (\theta'(s) - \cos \varphi t'(s) \kappa_\beta(t(s))) T_\beta(t(s)) \\ &\quad + \text{sen } \theta(s) (t'(s) \kappa_\beta(t(s)) - \cos \varphi \theta'(s)) N_\beta(t(s)) \\ &\quad - \text{sen } \varphi \theta'(s) \text{sen } \theta(s) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Puesto que $\gamma(s)$ es una geodésica, tenemos que $N_\gamma(s)$ es ortogonal a la superficie M_φ , por lo que podemos asumir

$$N_\gamma(s) = N(t(s), z(s)). \quad (4.2.28)$$

(El caso $N_\gamma(s) = -N(t(s), z(s))$ es similar). De las ecuaciones (4.2.26) y (4.2.27) conseguimos

$$\cos \theta(s) (\theta'(s) - \cos \varphi t'(s) \kappa_\beta(t(s))) = 0, \quad (4.2.29)$$

$$\text{sen } \theta(s) (t'(s) \kappa_\beta(t(s)) - \cos \varphi \theta'(s)) = -\text{sen } \varphi \kappa_\gamma(s), \quad (4.2.30)$$

$$-\text{sen } \varphi \theta'(s) \text{sen } \theta(s) = \cos \varphi \kappa_\gamma(s). \quad (4.2.31)$$

De (4.2.29) deducimos

$$\theta'(s) - \cos \varphi t'(s) \kappa_\beta(t(s)) = 0, \quad (4.2.32)$$

pues, de otra manera, $\cos \theta(s) = 0$ y entonces la función $\theta(s)$ sería constante. Por tanto (4.2.31) nos llevaría a $\cos \varphi \kappa_\gamma(s) = 0$, una contradicción.

Es fácil ver que el vector binormal $B_\gamma(s)$ está dado por

$$\begin{aligned} B_\gamma(s) &= T_\gamma(s) \times N_\gamma(s) = \\ &= \cos \theta(s) T_\beta(t(s)) - \cos \varphi \text{sen } \theta(s) N_\beta(t(s)) - \text{sen } \varphi \text{sen } \theta(s) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Utilizando la derivada covariante en (4.2.28) obtenemos

$$N'_\gamma(s) = \text{sen } \varphi t'(s) \kappa_\beta(t(s)) T_\beta(t(s)). \quad (4.2.34)$$

Usando de nuevo las ecuaciones de Frenet de γ , y teniendo en cuenta (4.2.33), obtenemos

$$\begin{aligned} N'_\gamma(s) &= -\kappa_\gamma(s) T_\gamma(s) + \tau_\gamma(s) B_\gamma(s) \\ &= (-\kappa_\gamma(s) \text{sen } \theta(s) + \tau_\gamma(s) \cos \theta(s)) T_\beta(t(s)) \\ &\quad - \cos \varphi (\kappa_\gamma(s) \cos \theta(s) + \tau_\gamma(s) \text{sen } \theta(s)) N_\beta(t(s)) \\ &\quad - \text{sen } \varphi (\kappa_\gamma(s) \cos \theta(s) + \tau_\gamma(s) \text{sen } \theta(s)) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

De (4.2.34) y (4.2.35) tenemos

$$-\kappa_\gamma(s) \text{sen } \theta(s) + \tau_\gamma(s) \cos \theta(s) = \text{sen } \varphi t'(s) \kappa_\beta(t(s)), \quad (4.2.36)$$

$$\kappa_\gamma(s) \cos \theta(s) + \tau_\gamma(s) \text{sen } \theta(s) = 0. \quad (4.2.37)$$

Finalmente, de (4.2.31), (4.2.32) y (4.2.37) deducimos que la curvatura y la torsión de la geodésica $\gamma(s)$ se pueden expresar como

$$\kappa_\gamma(s) = -t'(s) \text{sen } \varphi \text{sen } \theta(s) \kappa_\beta(t(s)) = -\tan \varphi \theta'(s) \text{sen } \theta(s), \quad (4.2.38)$$

$$\tau_\gamma(s) = t'(s) \text{sen } \varphi \cos \theta(s) \kappa_\beta(t(s)) = \tan \varphi \theta'(s) \cos \theta(s). \quad (4.2.39)$$

Hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 4.2.8 *Una curva en M_φ parametrizada por el arco $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$, con curvatura $\kappa_\gamma > 0$, es una geodésica de la superficie hélice si, y sólo si, existe una función diferenciable $\theta(s)$ tal que*

$$t'(s)(1 - \cos \varphi \kappa_\beta(t(s)) z(s)) = \text{sen } \theta(s), \quad (4.2.40)$$

$$z'(s) = \cos \theta(s), \quad (4.2.41)$$

$$\cos \varphi t'(s) \kappa_\beta(t(s)) = \theta'(s). \quad (4.2.42)$$

Además, la curvatura y la torsión de γ están dadas por (4.2.38) y (4.2.39), respectivamente.

Ejemplo 4.2.9 (Geodésicas de un cono circular) Si $\kappa_\beta(t)$ es una constante no nula κ_0 , entonces β es una circunferencia de radio $1/\kappa_0$, M_φ es un cono circular, y las geodésicas γ de M_φ son curvas rectificantes, [Chen03, IT04]. Podemos obtener las parametrizaciones exactas de estas curvas utilizando la proposición 4.2.8.

Una circunferencia de radio $1/\kappa_0$ se puede parametrizar como

$$\beta(t) = \frac{1}{\kappa_0} (\cos(\kappa_0 t), \text{sen}(\kappa_0 t), 0),$$

la parametrización del cono M_φ está dada por

$$X(t, z) = \left(\left(\frac{1}{\kappa_0} - z \cos \varphi \right) \cos(\kappa_0 t), \left(\frac{1}{\kappa_0} - z \cos \varphi \right) \sin(\kappa_0 t), z \sin \varphi \right).$$

Usando la proposición 4.2.8, $\gamma(s) = X(t(s), z(s))$ es una geodésica del cono M_φ si, y sólo si, se cumple

$$t(s) = \frac{1}{\kappa_0 \cos \varphi} (\operatorname{arccot}(as + b) - t_0),$$

$$z(s) = \frac{1}{a} \sqrt{(as + b)^2 + 1} + \frac{1}{\kappa_0 \cos \varphi},$$

donde a , b y t_0 son constantes. Por tanto, las funciones coordenadas de la curva $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$ están dadas por

$$\gamma_1(s) = -\frac{1}{a} \cos \varphi \sqrt{(as + b)^2 + 1} \cos(\sec \varphi (\operatorname{arccot}(as + b) - t_0)),$$

$$\gamma_2(s) = -\frac{1}{a} \cos \varphi \sqrt{(as + b)^2 + 1} \sin(\sec \varphi (\operatorname{arccot}(as + b) - t_0)),$$

$$\gamma_3(s) = \frac{1}{a} \sin \varphi \sqrt{(as + b)^2 + 1} + \frac{\tan \varphi}{\kappa_0}.$$

De (4.2.38) y (4.2.39), la curvatura y torsión de γ son

$$\kappa_\gamma(s) = a \tan \varphi ((as + b)^2 + 1)^{-3/2},$$

$$\tau_\gamma(s) = -a \tan \varphi (as + b) ((as + b)^2 + 1)^{-3/2},$$

y, por tanto, $\tau_\gamma / \kappa_\gamma = -(as + b)$, es decir, $\gamma(s)$ es una curva rectificante.

La curvatura y la torsión de una hélice slant (que no sea hélice generalizada) se pueden describir de una bonita manera.

Proposición 4.2.10 ([Men14]) *Sea $\gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}^3 y supongamos que no es una hélice generalizada. Entonces γ es una hélice slant si, y sólo si, salvo simetrías, existe una constante no nula λ y una función diferenciable no constante $\theta(s)$ tal que*

$$\kappa_\gamma(s) = -\lambda \theta'(s) \sin \theta(s),$$

$$\tau_\gamma(s) = \lambda \theta'(s) \cos \theta(s).$$

Es conocido que las geodésicas $\gamma(s)$ de M_φ son hélices slant, [OY11]. En efecto, de (4.2.28) y (4.2.26) obtenemos que $\langle N_\gamma(s), \mathbf{u} \rangle = \cos \varphi$ es una constante no nula, donde \mathbf{u} es un vector normal unitario al plano que contiene β . Esto demuestra que γ es una hélice slant. El ejemplo 4.2.9 nos proporciona ejemplos de geodésicas en un cono circular, que son a la vez curvas rectificantes y hélices slant.

Probaremos el recíproco.

Teorema 4.2.11 ([LO16a]) Sea $\gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}^3 y supongamos que no es una hélice generalizada. Si γ es una hélice slant, entonces existe una curva plana β y un ángulo $\varphi \in (0, \pi/2)$ tal que γ es (congruente a) una geodésica de la superficie hélice $M_{\beta, \varphi}$.

Demostración. Sea $\gamma(s)$ una hélice slant parametrizada por el arco (que no sea una hélice generalizada), con $\kappa_\gamma > 0$. Sea λ y $\theta(s)$ la constante no nula y la función diferenciable no constante dadas en la proposición 4.2.10. Definimos $\varphi = \arctan(\lambda)$ y sea $z(s)$ una solución de (4.2.41). Distinguimos dos casos:

Caso 1: $\theta' z + \text{sen } \theta = 0$. Usando (4.2.41) deducimos

$$\theta'' \text{sen } \theta - 2\theta'^2 \cos \theta = 0,$$

y entonces $\theta(s) = -\text{arccot}(a(s+b))$, para ciertas constantes a y b . Esto implica que $\tau_\gamma/\kappa_\gamma$ es una función lineal en su parámetro arco s , es decir, γ es una geodésica de un cono (véase el ejemplo 4.2.9).

Caso 2: $\theta' z + \text{sen } \theta \neq 0$. Sea $t(s)$ una solución de la ecuación diferencial

$$t'(s) = \theta'(s) z(s) + \text{sen } \theta(s) \neq 0.$$

Definimos la función

$$\kappa(u) = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\theta'}{t'}(t^{-1}(u)) \right),$$

y consideramos una curva plana β con curvatura κ . Podemos construir una superficie hélice $M_{\beta, \varphi}$ parametrizada por $X(t, z) = \beta(t) + z(\cos \varphi N_\beta(t) + \text{sen } \varphi \mathbf{u})$. Un cálculo directo muestra que la curva $\tilde{\gamma}(s) = X(t(s), z(s))$ es una geodésica en $M_{\beta, \varphi}$ cuya curvatura y torsión son precisamente $\kappa_\gamma(s)$ y $\tau_\gamma(s)$, demostrando que γ y $\tilde{\gamma}$ son congruentes. \square

Ejemplo 4.2.12 (Curvas de precesión constante) Sea $\beta(u) = (x(u), y(u))$ la curva de \mathbb{R}^2 definida por

$$x(u) = (a+b) \cos u - b \cos \left(\frac{a+b}{b} u \right),$$

$$y(u) = (a+b) \text{sen } u - b \text{sen} \left(\frac{a+b}{b} u \right),$$

para dos constantes no nulas a y b , [Str50, págs. 27–28]. Si $ab > 0$, entonces β es una epicloide; en caso contrario, β es una hipocicloide. La curva es cerrada cuando a/b es racional.

El parámetro longitud de arco t está dado por

$$t = t(u) = \frac{4b(a+b)}{a} \cos \left(\frac{au}{2b} \right),$$

y la curvatura de β se puede expresar como

$$\kappa_\beta(t) = \frac{a+2b}{4b(a+b)} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{at}{4b(a+b)} \right)^2}}.$$

Para encontrar geodésicas $\gamma(s)$ en la superficie hélice $M_{\beta,\varphi}$ (y, por tanto, hélices slant) necesitamos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales dado en la proposición 4.2.8. No es difícil comprobar que si definimos

$$\mu = \frac{a}{2b(a+b)} \quad \text{y} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{a}{a+2b}\right),$$

una solución de (4.2.40)–(4.2.42) está dada por las siguientes funciones:

$$\theta(s) = \mu s, \quad t(s) = -\frac{2}{\mu} \cos(\mu s), \quad z(s) = \frac{1}{\mu} \sin(\mu s). \quad (4.2.43)$$

En este caso, la curvatura y la torsión de esas hélices slant se pueden calcular usando (4.2.38) y (4.2.39):

$$\kappa_\gamma(s) = -\mu \tan(\varphi) \sin(\mu s), \quad \tau_\gamma(s) = \mu \tan(\varphi) \cos(\mu s).$$

Por tanto, $\gamma(s)$ es una curva de precesión constante, [Sco95]. Véase la figura 4.1.

Recíprocamente, cada curva de precesión constante es una geodésica de una superficie hélice $M_{\beta,\varphi}$, donde β es una epicicloide o hipocicloide. En efecto, sea $\gamma(s)$ una curva de precesión constante; entonces existen dos constantes no nulas ω y μ tales que $\kappa_\gamma(s) = -\omega \sin(\mu s)$ y $\tau_\gamma(s) = \omega \cos(\mu s)$, [Sco95]. Consideramos $\varphi = \arctan(\omega/\mu)$ y definimos a y b por

$$a = \frac{2}{\mu} \cot^2(\varphi), \quad b = \frac{\cos \varphi}{\mu(1 + \cos \varphi)}.$$

Sea β la correspondiente epicicloide o hipocicloide, según el signo de ab . Se puede comprobar de una manera directa que $\gamma(s)$ es congruente a la geodésica de la superficie $M_{\beta,\varphi}$ determinada por (4.2.43). Por tanto, hemos probado la siguiente caracterización de las curvas de precesión constante.

Proposición 4.2.13 ([LO16a]) *Sea $\gamma(s)$ una curva parametrizada por el arco en \mathbb{R}^3 . Entonces γ es una curva de precesión constante si, y sólo si, existe una epicicloide o hipocicloide β y un ángulo $\varphi \in (0, \pi/2)$, tal que γ es (congruente a) una geodésica de pendiente lineal de la superficie hélice $M_{\beta,\varphi}$.*

4.2.2. Una parametrización natural para las superficies hélice

Cuando una superficie reglada es no cilíndrica (es decir, sus rectas cambian siempre de dirección), se puede encontrar una parametrización natural:

$$Y(u, v) = \alpha(u) + v\mathbf{d}(u),$$

donde $\mathbf{d} \times \mathbf{d}' \neq 0$, $\|\mathbf{d}\| = 1$ y $\langle \alpha', \mathbf{d}' \rangle = 0$. La curva α se llama la curva de estricción. Vamos a encontrar la parametrización natural para una superficie hélice $M_{\beta,\varphi}$.

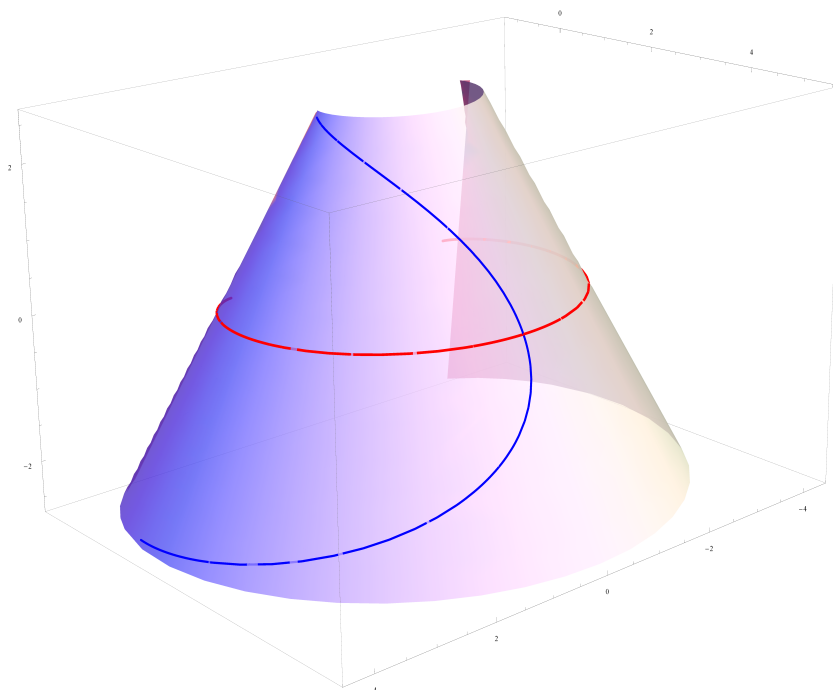


Figura 4.1: La superficie hélice de ángulo $\varphi = \pi/3$, construida a partir de la epicicloide de radios $a = 2, b = 1$ (rojo), y la curva de precesión constante con $\omega = \sqrt{3}/3$ y $\mu = 1/3$ (azul) como geodésica de M_φ .

Consideramos una curva plana, parametrizada por el arco, $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, un ángulo $\varphi \in (0, \pi/2)$, y consideramos la superficie reglada $M = M_{\beta, \varphi}$ parametrizada por

$$X(t, z) = \beta(t) + z(\cos \varphi N_\beta(t) + \text{sen } \varphi \mathbf{u}).$$

Cuando κ_β es constante (es decir, β es una circunferencia), M es un cono y su línea de estricción se reduce a un sólo punto (el vértice del cono). En este caso, como hemos visto con anterioridad, las geodésicas de M son geodésicas cónicas o curvas rectificantes, y también hélices slant (véase [Chen03], [IT04] y, el ejemplo 4.2.9). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\kappa'_\beta \neq 0$.

Un cálculo directo nos conduce a que la línea de estricción de $M_{\beta, \varphi}$ está dada por

$$\alpha(t) = \beta(t) + \frac{1}{\cos \varphi \kappa_\beta(t)} (\cos \varphi N_\beta(t) + \text{sen } \varphi \mathbf{u}),$$

con vector velocidad

$$\alpha'(t) = -\frac{\kappa'_\beta(t)}{\cos \varphi \kappa_\beta^2(t)} (\cos \varphi N_\beta(t) + \text{sen } \varphi \mathbf{u}).$$

Por tanto, el parámetro arco de α es $u(t) = 1/(\cos \varphi \kappa_\beta(t))$ y el vector unitario tangente es $T_\alpha(t) = \cos \varphi N_\beta(t) + \text{sen } \varphi \mathbf{u}$. Entonces $\langle T_\alpha(t), \mathbf{u} \rangle = \text{sen } \varphi$ es constante, y esto demuestra

que $\alpha(t)$ es una hélice generalizada con eje \mathbf{u} y $\tau_\alpha/\kappa_\alpha = \lambda$, para una constante no nula λ . Por tanto, la parametrización natural de M es

$$Y(u, v) = \alpha(u) + vT_\alpha(u), \quad v \neq 0,$$

lo que significa que $M_{\beta, \varphi}$ es la superficie tangente a una hélice generalizada α (también llamada la desarrollable tangencial), [Str50, pág. 64]. A veces es más conveniente una parametrización alternativa, aunque equivalente, de la superficie tangente. Escribimos

$$\tilde{Y}(u, v) = \alpha(u) + (v - u)T_\alpha(u), \quad v \neq u.$$

Hemos visto en el teorema 4.2.11 que las hélices slant son geodésicas en superficies hélice.

Sea $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$ una geodésica, parametrizada por el arco, de la superficie reglada M . Entonces

$$T_\gamma(s) = u'(s)(v(s) - u(s))\kappa_\alpha(u(s))N_\alpha(u(s)) + v'(s)T_\alpha(u(s)),$$

por lo que existe una función diferenciable $\omega(s)$ tal que

$$\begin{aligned} u'(s)(v(s) - u(s))\kappa_\alpha(u(s)) &= \text{sen } \omega(s), \\ v'(s) &= \text{cos } \omega(s). \end{aligned}$$

La función $\omega(s)$ representa el ángulo entre la geodésica γ y la curva base α . Teniendo en cuenta las ecuaciones de Frenet (1.3.10) de γ , obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(s)N_\gamma(s) &= -\text{sen } \omega(s)(u'(s)\kappa_\alpha(u(s)) + \omega'(s)T_\alpha(u(s))) \\ &\quad + \text{cos } \omega(s)(\omega'(s) + u'(s)\kappa_\alpha(u(s))N_\alpha(u(s))) \\ &\quad + \text{sen } \omega(s)u'(s)\tau_\alpha(u(s))B_\alpha(u(s)), \end{aligned}$$

y usando, sin pérdida de generalidad, que $N_\gamma(s) = N(u(s), v(s)) = -B_\alpha(u(s))$, deducimos que

$$\omega'(s) = -u'(s)\kappa_\alpha(u(s)).$$

Esto nos lleva a las siguientes ecuaciones para la curvatura y torsión de la geodésica:

$$\kappa_\gamma(s) = -\text{sen } \omega(s)u'(s)\tau_\alpha(u(s)) = \lambda\omega'(s)\text{sen } \omega(s), \quad (4.2.44)$$

$$\tau_\gamma(s) = \text{cos } \omega(s)u'(s)\tau_\alpha(u(s)) = -\lambda\omega'(s)\text{cos } \omega(s). \quad (4.2.45)$$

Tenemos, por tanto, demostrado el siguiente resultado.

Proposición 4.2.14 ([LO16a]) *Una curva parametrizada por el arco $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$, con $\kappa_\gamma > 0$, es una geodésica de M si, y sólo si, existe una función diferenciable $\omega(s)$ tal que*

$$u'(s)(v(s) - u(s))\kappa_\alpha(u(s)) = \text{sen } \omega(s), \quad (4.2.46)$$

$$v'(s) = \text{cos } \omega(s), \quad (4.2.47)$$

$$u'(s)\kappa_\alpha(u(s)) = -\omega'(s). \quad (4.2.48)$$

Además, la curvatura y torsión de γ están dadas por (4.2.44) y (4.2.45), respectivamente.

Eliminando la función $\omega(s)$ en las ecuaciones (4.2.46)–(4.2.48), la proposición 4.2.14 se puede reescribir de la siguiente forma.

Proposición 4.2.15 ([LO16a]) *Sea $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$, con $\kappa_\gamma > 0$, una curva parametrizada por el arco en la superficie tangente M , y supongamos que no es una hélice generalizada ni una curva rectificante. Entonces γ es una geodésica de M si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} a) \quad u(s) &= \frac{(v^2)''(s) - 2}{2v''(s)}, \\ b) \quad |v'(s)| &< 1, \\ c) \quad \frac{v'(s)}{\sqrt{1 - v'(s)^2}} &\text{ no es una función lineal,} \\ d) \quad \kappa_\alpha(t) &= \frac{v''}{u'\sqrt{1 - v'^2}}(u^{-1}(t)). \end{aligned}$$

En [IT04], los autores demuestran que si S es una superficie desarrollable y $\gamma \subset S$ es una hélice slant y geodésica transversal a las líneas de la superficie, que no sea una hélice generalizada ni una geodésica cónica (curva rectificante), entonces necesariamente S es la superficie tangente de una hélice generalizada. El siguiente resultado establece que todas las hélices slant, excepto las hélices generalizadas y las curvas rectificantes, pueden ser obtenidas de esta manera.

Teorema 4.2.16 ([LO16a]) *Sea $\gamma(s)$ una curva, parametrizada por el arco, en \mathbb{R}^3 , y supongamos que no es una hélice generalizada ni una curva rectificante. Entonces γ es una hélice slant si, y sólo si, existe una hélice generalizada α tal que γ es (congruente a) una geodésica de la superficie tangente a α .*

Este resultado fue obtenido por Salkowski [Salk09] para una clase especial de hélices slant. En el siguiente ejemplo mostramos esta familia.

Ejemplo 4.2.17 (Las curvas de Salkowski) Salkowski introdujo en [Salk09, pág. 538] una familia especial de curvas, con curvatura constante pero torsión no constante. Recientemente, Monterde [Mon09] ha demostrado que tales curvas están caracterizadas como las únicas hélices slant con curvatura constante y torsión no constante. La familia de curvas de Salkowski se puede describir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma_m(t) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \operatorname{sen}((1+2n)t) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \operatorname{sen}((1-2n)t) - \frac{1}{2} \operatorname{sent}, \right. \\ \left. \frac{1-n}{4(1+2n)} \operatorname{cos}((1+2n)t) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \operatorname{cos}((1-2n)t) + \frac{1}{2} \operatorname{cost}, \right. \\ \left. \frac{1}{4m} \operatorname{cos}(2nt) \right), \end{aligned}$$

para $m \neq 0, \pm\sqrt{3}/3$, y $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, $n \neq 0, \pm 1/2$. Salkowski demostró que tales curvas son geodésicas de superficies tangentes a hélices generalizadas, [Salk09, pág. 539]:

$$\alpha_m(u) = \frac{3n}{4\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{\text{sen}(1+2n)u}{1+2n} - \frac{\text{sen}(1-2n)u}{1-2n}, \right. \\ \left. - \frac{\text{cos}(1+2n)u}{1+2n} + \frac{\text{cos}(1-2n)u}{1-2n}, \right. \\ \left. \frac{\text{cos} 2nu}{mn} + \frac{2}{3mn} \right).$$

Estas hélices generalizadas están caracterizadas por la ecuación $\kappa = m\tau$. Podemos fijarnos que la proyección de α_m en el plano xy es una epicicloide o hipocicloide (véase el ejemplo 4.2.12), de acuerdo con las constantes a y b dadas por

$$a = \frac{3n^2\sqrt{1-n^2}}{1-4n^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{3n\sqrt{1-n^2}}{4(1+2n)}.$$

Notemos que para obtener exactamente la curva definida en el ejemplo 4.2.12 es necesario, después de proyectar la hélice generalizada α_m en el plano xy , hacer una rotación positiva de ángulo $\pi/2$.

Salkowski observó además que las curvas $\gamma_m(t)$ están en una superficie cuadrática $Q_1(n)$ dada por

$$A(x^2 + y^2) - C(z + D)^2 = B,$$

donde las constantes A, B, C, D están definidas por

$$A = 1 + m^2 > 0, \quad B = \frac{27n^4}{4(1-n^2)(1-4n^2)^2} > 0,$$

$$C = \frac{4n^2}{(1-4n^2)(1-n^2)}, \quad D = \frac{1+2n^2}{4n} > 0,$$

y las hélices generalizadas $\alpha_m(u)$ también están en otra superficie cuadrática $Q_2(n)$ definida por

$$\tilde{A}(x^2 + y^2) - \tilde{C}(z + \tilde{D})^2 = \tilde{B},$$

donde las constantes $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ están dadas por

$$\tilde{A} = \frac{16(1+m^2)}{9n^2} > 0, \quad \tilde{B} = \frac{4}{(1-4n^2)^2} > 0, \quad \tilde{C} = -\frac{64m^2(1+m^2)}{9(1-4n^2)}, \quad \tilde{D} = -\frac{1-n^2}{2n} < 0.$$

Cuando $n < 1/2$, entonces $Q_1(n)$ es un hiperboloide y $Q_2(n)$ es un elipsoide; en caso contrario, es decir, cuando $n > 1/2$, $Q_1(n)$ es un elipsoide y $Q_2(n)$ es un hiperboloide.

4.2.3. Métodos para construir hélices slant

Primer método

Presentamos a continuación un método para construir hélices slant γ como geodésicas de superficies hélice, basado en la proposición 4.2.15.

Sea $v(s)$, $s \in I$, una función diferenciable tal que

$$|v'(s)| < 1 \quad \text{y} \quad \frac{v'(s)}{\sqrt{1-v'(s)^2}} \quad \text{no sea una función lineal.}$$

Definimos las siguientes funciones

$$u(s) = \frac{(v^2)''(s) - 2}{2v''(s)} = \frac{v(s)v''(s) + v'(s)^2 - 1}{v''(s)},$$

$$\kappa(t) = \frac{v''}{u'\sqrt{1-v'^2}}(u^{-1}(t)).$$

Dada una constante no nula λ , sea α la hélice generalizada de curvatura κ y torsión $\lambda\kappa$, y consideremos la superficie tangente de α , parametrizada por $\tilde{Y}(u, v)$. Un sencillo cálculo muestra que las ecuaciones de la proposición 4.2.15 se satisfacen y, por tanto, $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$ es una hélice slant con curvatura y torsión dadas por (4.2.44) y (4.2.45), respectivamente.

Ahora expondremos varios ejemplos donde hemos utilizado este método para encontrar hélices slant.

Ejemplo 4.2.18 Sea v la función definida por $v(s) = cs^2 + \frac{1}{8c}$, $c \neq 0$, que consideramos definida en el intervalo $I = (-\frac{1}{2|c|}, \frac{1}{2|c|})$. Siguiendo el método anterior, definimos las funciones

$$u(s) = 3cs^2 - \frac{3}{8c},$$

$$\kappa(t) = \frac{4c}{3} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{8ct}{3})^2}}.$$

Sea α una hélice generalizada con curvatura κ y torsión $\lambda\kappa$, donde λ es una constante no nula, y consideremos la superficie tangente de α , parametrizada por $\tilde{Y}(u, v)$. Entonces $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$ es una hélice slant cuya curvatura y torsión están dadas por

$$\kappa_\gamma(s) = -2c\lambda \quad \text{y} \quad \tau_\gamma(s) = \frac{4c^2\lambda s}{\sqrt{1-4c^2s^2}}.$$

Notemos que γ es una curva con curvatura constante pero torsión no constante. En particular, si elegimos $\lambda = -1/(2c)$, entonces γ es congruente a la curva de Salkowski γ_m ,

con $m = 2c$. La hélice generalizada α se proyecta en una epicicloide o hipocicloide de acuerdo a los siguientes valores de a y b (véase el ejemplo 4.2.17):

$$a = \frac{3}{2c} \frac{1}{(\lambda^2 - 3)\sqrt{\lambda^2 + 1}} \quad y \quad b = \frac{3}{8c} \frac{1}{\lambda^2 + 1 + 2\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

En la figura 4.2 se muestran algunos gráficos para distintos valores del parámetro c .

Ejemplo 4.2.19 Sea v la función $v(s) = a\sqrt{s}$, $a \neq 0$, que consideramos definida en el intervalo $I = (\frac{a^2}{4}, +\infty)$. Siguiendo el método anterior, definimos las funciones

$$u(s) = \frac{4}{a}s^{3/2},$$

$$\kappa(t) = \frac{-a}{3t\sqrt{(2at)^{2/3} - a^2}}.$$

Sea α una hélice generalizada con curvatura κ y torsión $\lambda\kappa$, donde λ es una constante no nula, y consideramos la superficie tangente de α , parametrizada por $\tilde{Y}(u, v)$. Entonces $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$ es una hélice slant con curvatura y torsión dadas por

$$\kappa_\gamma(s) = \frac{a\lambda}{4s^{3/2}} \quad y \quad \tau_\gamma(s) = -\frac{a^2\lambda}{4s^{3/2}\sqrt{4s - a^2}}.$$

En la figura 4.3 se pueden ver algunas gráficas para $a = 1$ y diferentes valores del parámetro λ .

Ejemplo 4.2.20 Sea v la función $v(s) = be^{as}$, con $a, b > 0$, que consideramos definida en el intervalo $I = (-\infty, -\ln(ab)/a)$. Definimos las siguientes funciones:

$$u(s) = 2be^{as} - \frac{1}{a^2b}e^{-as},$$

$$\kappa(t) = \frac{2ah(t)}{(8+h(t))\sqrt{16-h(t)}}, \quad \text{donde } h(t) = (at + \sqrt{a^2t^2 + 8})^2.$$

Sea α la hélice generalizada con curvatura κ y torsión $\lambda\kappa$, donde λ es una constante no nula, y consideramos la superficie tangente de α , parametrizada por $\tilde{Y}(u, v)$. Entonces $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$ es una hélice slant cuya curvatura y torsión están dadas por

$$\kappa_\gamma(s) = -\lambda a^2 b e^{as},$$

$$\tau_\gamma(s) = \frac{\lambda a^3 b^2 e^{2as}}{\sqrt{1 - a^2 b^2 e^{2as}}}.$$

En la figura 4.4 se muestran algunos gráficos para $a = b = 1$ y distintos valores del parámetro λ .

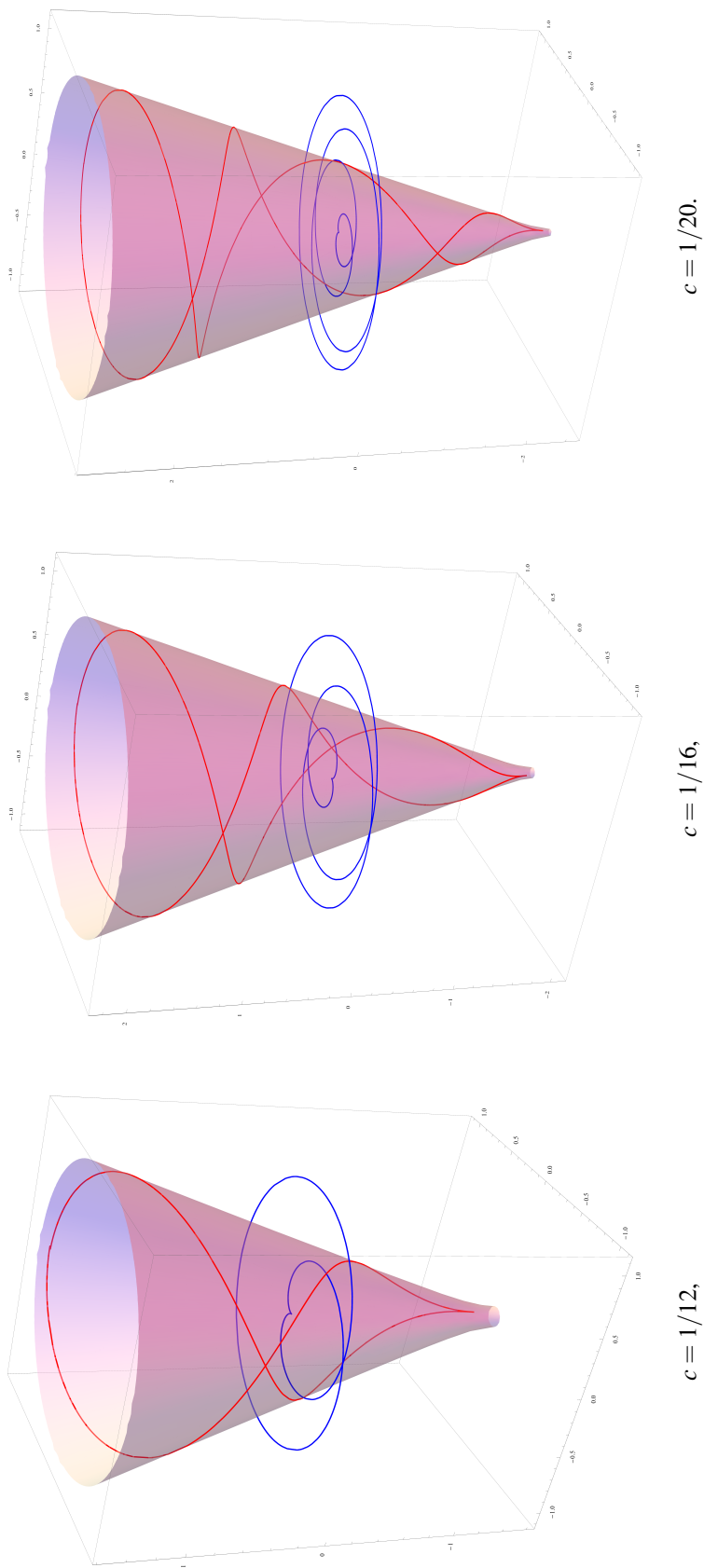


Figura 4.2: Algunas hélices slant (rojo) para $v(s) = cs^2 + \frac{1}{8c}$. Las curvas azules son las epicicloides proyectadas en el plano xy . Las superficies son las superficies cuadráticas donde están las hélices slant (véase el ejemplo 4.2.17)

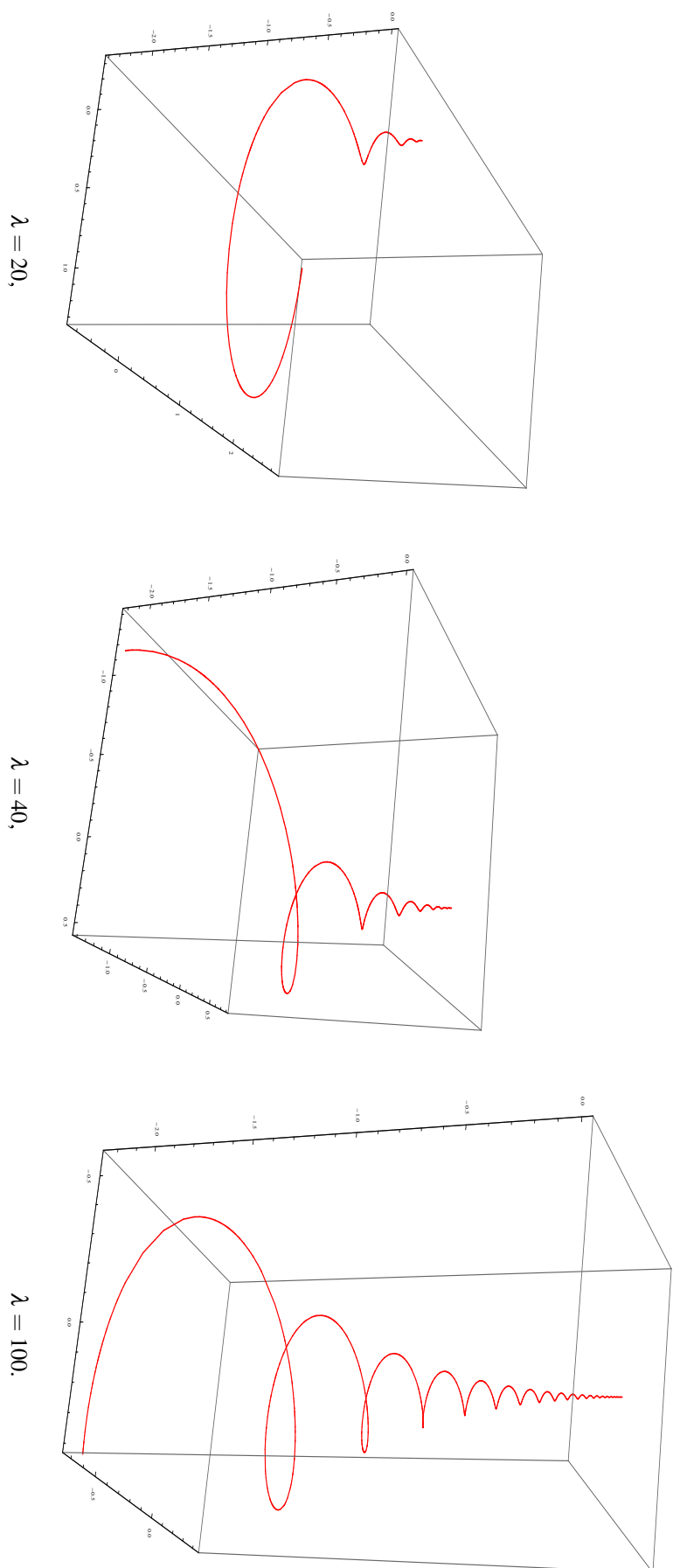


Figura 4.3: Algunas hélices slant para $r(s) = \sqrt{s}$

Segundo método

Presentamos otro método para construir hélices slant γ contenidas en la superficie tangente a una hélice generalizada.

Sea $\alpha = \alpha(u)$ una hélice generalizada con función curvatura $\kappa_\alpha(u)$, y definimos una función g de la siguiente forma:

$$g(x) = - \int_{x_0}^x \kappa_\alpha(u) du, \quad (4.2.49)$$

donde x_0 es una constante. Por la proposición 4.2.14 podemos deducir fácilmente que $\gamma(s) = \tilde{Y}(u(s), v(s))$, con $\kappa_\gamma > 0$, es una geodésica de la superficie hélice M si, y sólo si, la función $u(s)$ es una solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$u'(s) - \left(\frac{\text{sen } g(u(s))}{u'(s) g'(u(s))} \right)' = \cos g(u(s)),$$

la cual es equivalente a

$$u'(s) \text{sen } g(u(s)) = \left(\frac{\text{sen}^2 g(u(s))}{u'(s) g'(u(s))} \right)'. \quad (4.2.50)$$

Dada una solución $u(s)$ de esta ecuación diferencial encontramos que

$$v(s) = u(s) - \frac{\text{sen } g(u(s))}{u'(s) g'(u(s))} + c,$$

siendo c una constante. Ilustraremos este método en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.21 (Hélices slant en la superficie tangente de una hélice circular)

Sea $\alpha(u)$ una hélice circular de radio r y paso $2\pi h$, parametrizada por

$$\alpha(u) = \left(r \cos \left(\frac{u}{R} \right), r \text{sen} \left(\frac{u}{R} \right), \frac{hu}{R} \right), \quad R = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

La curvatura y torsión están dadas por

$$\kappa_\alpha = \frac{r}{R^2} \quad \text{y} \quad \tau_\alpha = \frac{h}{R^2}.$$

Entonces la función g , definida en (4.2.49), será de la forma $g(x) = -\kappa_\alpha x + a$, siendo a una constante. Un cálculo directo muestra que la solución de (4.2.50) está dada por

$$u(s) = \frac{R^2}{r} \left(a - \text{arc cos} \left(\frac{b \pm a(s + s_0) \sqrt{a^2(s + s_0)^2 + b^2 - 1}}{a^2(s + s_0)^2 + b^2} \right) \right),$$

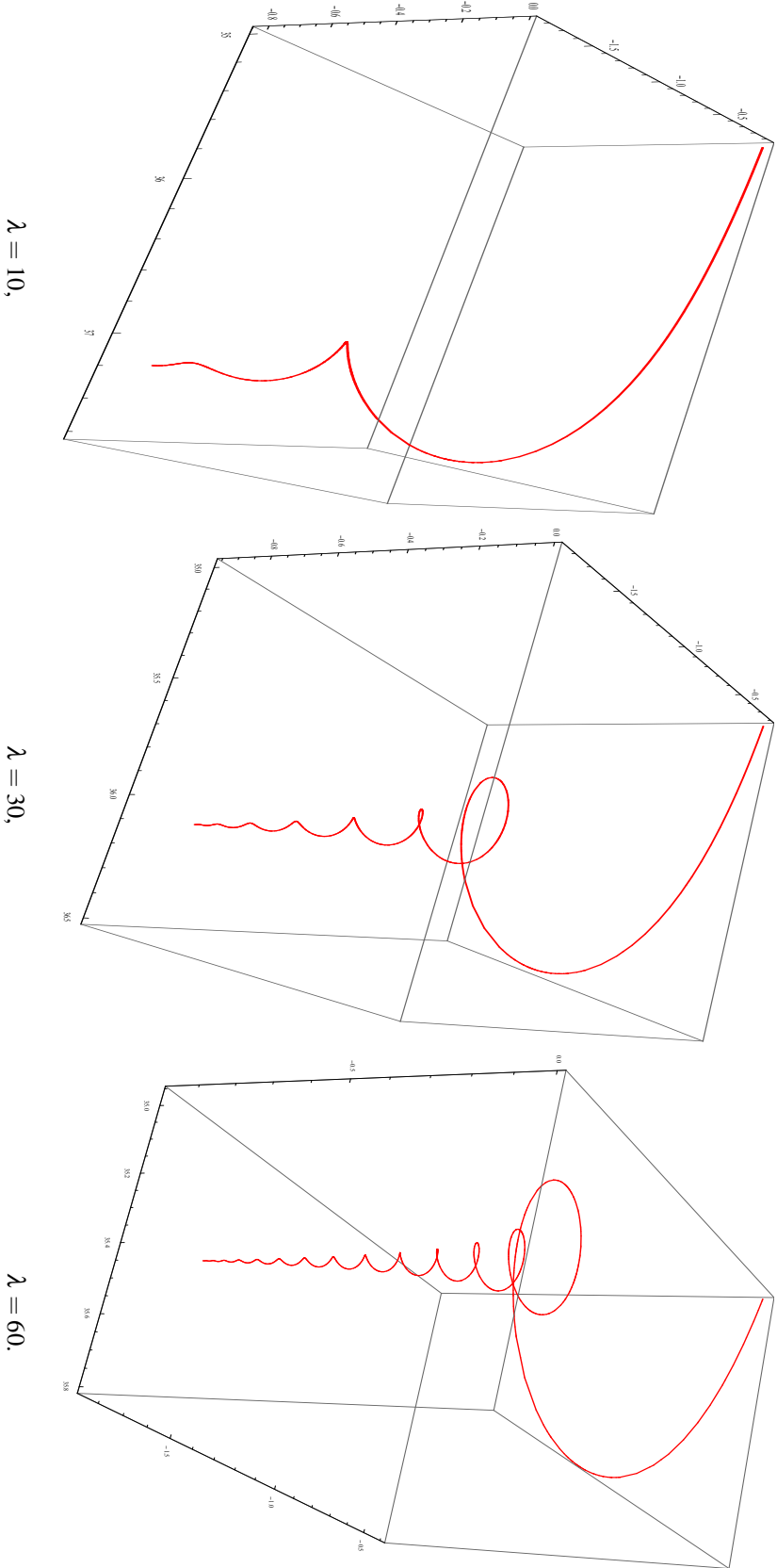


Figura 4.4: Algunas hélices slant para $r(s) = b e^{ks}$.

siendo b y s_0 constantes, y, por tanto, la función $v(s)$ está dada por

$$v(s) = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2(s+s_0)^2 + b^2 - 1} + \frac{R^2}{r} \left(a - \arccos \left(\frac{b \pm a(s+s_0) \sqrt{a^2(s+s_0)^2 + b^2 - 1}}{a^2(s+s_0)^2 + b^2} \right) \right) + c.$$

La superficie tangente de α puede ser parametrizada por

$$\tilde{Y}(u, v) = \left(r \cos \left(\frac{u}{R} \right) - \frac{r(v-u)}{R} \sin \left(\frac{u}{R} \right), r \sin \left(\frac{u}{R} \right) + \frac{r(v-u)}{R} \cos \left(\frac{u}{R} \right), \frac{hv}{R} \right).$$

Usando las funciones $u(s)$ y $v(s)$, calculadas anteriormente, obtenemos parametrizaciones explícitas $\tilde{Y}(u(s), v(s))$ de las hélices slant $\gamma(s)$ de la superficie tangente a una hélice circular, donde las constantes a , b , c y s_0 dependen de las condiciones iniciales de la geodésica γ .

El intervalo I , donde la curva γ está definida, depende de la constante b . Si $b^2 > 1$ entonces $I = \mathbb{R}$; de otro modo, $I = (-\infty, -s_0 - \sqrt{(1-b^2)/a^2}) \cup (-s_0 + \sqrt{(1-b^2)/a^2}, +\infty)$, por lo que γ tiene dos ramas.

En la figura 4.5 se muestran algunas gráficas para diferentes valores de los parámetros a y b .

4.3. Superficies hélice en espacios no llanos

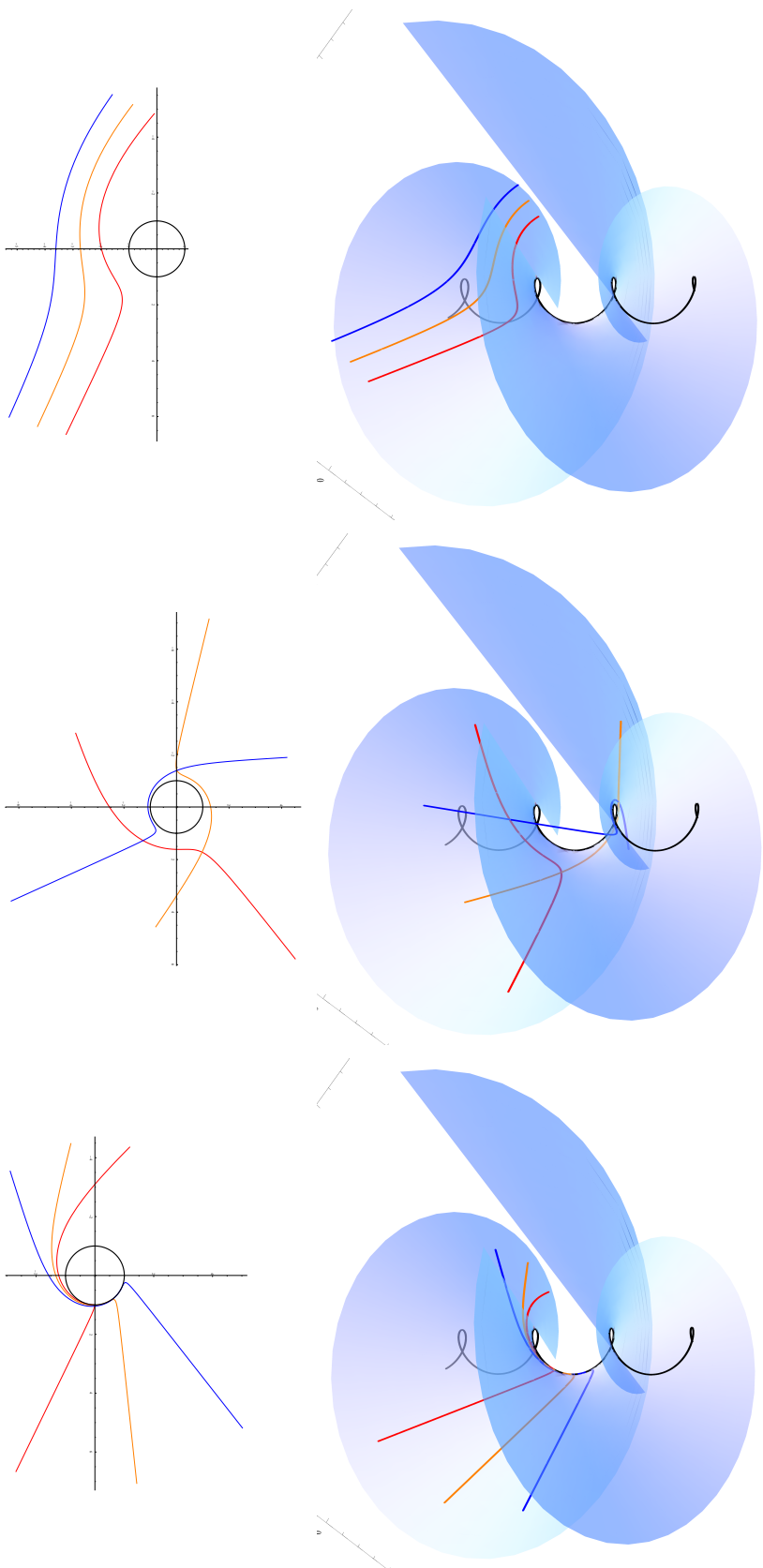
Nos centramos en esta sección en los espacios no llanos de curvatura constante. Una superficie no degenerada M_V^2 inmersa en $\mathbb{M}_q^3(c)$ se dice que es una *superficie hélice* si existe un campo de vectores Killing \tilde{V} en $\mathbb{M}_q^3(c)$ de longitud constante tal que el producto escalar $\langle \tilde{V}, \eta \rangle = b$ es una función constante sobre M_V^2 , donde η denota al campo de vectores normal unitario de M_V^2 en $\mathbb{M}_q^3(c)$ (véase, por ejemplo, [MO14]). Como \tilde{V} es un campo de vectores Killing en $\mathbb{M}_q^3(c)$ de longitud constante, teniendo en cuenta la proposición 1.4.8, $\mathbb{M}_q^3(c)$ representa \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 , es decir, a aquellos espacios de curvatura constante con estructura cuaterniónica (véanse las secciones 1.5 y 1.6). No existen superficies hélice ni en \mathbb{H}^3 ni en \mathbb{S}_1^3 . \tilde{V} se llama un eje de la superficie hélice y podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que \tilde{V} es un campo de vectores invariante por la izquierda con $\langle \tilde{V}, \tilde{V} \rangle = \varepsilon \in \{-1, 0, +1\}$.

Sea M_V^2 una superficie hélice con eje \tilde{V} . Entonces, a lo largo de M_V^2 , podemos escribir

$$\tilde{V} = \tilde{V}^\top + \varepsilon_\eta b \eta, \quad (4.3.51)$$

donde \tilde{V}^\top es la componente tangencial de \tilde{V} y ε_η denota el carácter causal de η . Para cualquier campo vectorial tangente $X \in \mathfrak{X}(M_V^2)$, de (4.3.51), junto con la fórmula de Gauss (1.1.4) y la ecuación de Weingarten (1.1.5), obtenemos

$$\bar{\nabla}_X \tilde{V} = (\nabla_X \tilde{V}^\top - \varepsilon_\eta b A_\eta X) + \varepsilon_\eta \langle A_\eta \tilde{V}^\top, X \rangle \eta, \quad (4.3.52)$$



$b = 2$ (roja), 3 (naranja), 4 (azul); $y a = 1$

$a = 2$ (roja), 4 (naranja), 6 (azul); $y b = 3$

$a = 1$ (roja), 1,5 (naranja), 2 (azul); $y b = 0,5$

Figura 4.5: En la primera fila se muestran hélices slant en la superficie tangente a una hélice circular de radio $r = 1$ y paso $h = 0,5$. En la segunda fila se muestran las curvas proyectadas en el plano xy . En la última fila tenemos los correspondientes valores de los parámetros a y b ($c = s_0 = 0$ para todos los casos).

donde ∇ denota la conexión pseudo-riemanniana de M_V^2 y A_η el operador forma de la superficie en $\mathbb{M}_q^3(c)$.

Por otra parte, puesto que \tilde{V} es un campo de vectores invariante por la izquierda en $\mathbb{M}_q^3(c)$, podemos asumir $\bar{\nabla}_X \tilde{V} = X \times \tilde{V}$ (véase [Kit88] y [LMP11] para \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}_1^3 , respectivamente). La relación (4.3.51) implica

$$\bar{\nabla}_X \tilde{V} = X \times \tilde{V}^\top + \varepsilon_\eta b X \times \eta. \quad (4.3.53)$$

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\tilde{V}^\top \neq 0$. De otro modo, de las relaciones (4.3.52) y (4.3.53) conseguiríamos

$$A_\eta X = -X \times \eta. \quad (4.3.54)$$

Pero esto es una contradicción, puesto que A_η es un operador simétrico, pero la aplicación $X \rightarrow -X \times \eta$ es antisimétrica.

Distinguimos ahora dos casos.

Caso 1: $\tilde{V}^\top \neq 0$ es un vector no nulo. De las ecuaciones (4.3.52) y (4.3.53) obtenemos

$$A_\eta \tilde{V}^\top = \tilde{V}^\top \times \eta. \quad (4.3.55)$$

Sea $\{E_1, E_2\}$ una referencia ortonormal tangente con E_1 colineal a \tilde{V}^\top y $E_1 \times E_2 = \varepsilon_\eta \eta$. De la relación (4.3.55) tenemos

$$\begin{aligned} A_\eta E_1 &= -\varepsilon_2 E_2, \\ A_\eta E_2 &= -\varepsilon_1 E_1 + f E_2, \end{aligned}$$

para una cierta función diferenciable f , donde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$. De aquí, y utilizando la ecuación de Gauss, calculamos la curvatura de Gauss K de M_V^2 como sigue:

$$K = c + \varepsilon_\eta \det(A_\eta) = c - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_\eta = 0.$$

Caso 2: $\tilde{V}^\top \neq 0$ es un vector nulo. En este caso, sea $\{V_1, V_2\}$ una referencia pseudo-ortonormal tangente de vectores nulos, con V_1 colineal a \tilde{V}^\top , $\langle V_1, V_2 \rangle = -1$ y $V_1 \times V_2 = \eta$. Como en el caso previo, de (4.3.55) obtenemos

$$\begin{aligned} A_\eta V_1 &= V_1, \\ A_\eta V_2 &= f V_1 + V_2, \end{aligned}$$

para una función diferenciable f . Por tanto, deducimos de nuevo que M_V^2 es una superficie llana.

Tenemos probado el siguiente resultado.

Proposición 4.3.22 ([LO17], [LO16b]) *Una superficie hélice M_V^2 en \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 es una superficie llana.*

El próximo paso es encontrar las superficies llanas de $\mathbb{M}_q^3(c)$ que también sean superficies hélice. La construcción de superficies llanas en la esfera \mathbb{S}^3 está dada en [Kit88] y [GM10]. La construcción de superficies llanas lorentzianas en \mathbb{H}_1^3 está dada en [DN80] (la versión local) y en [LMP11] (la versión global). En el caso pseudo-riemanniano, y teniendo en cuenta el principio general de correspondencia de operadores forma (véase [DN80, Proposition 0]), la construcción de superficies llanas riemannianas en \mathbb{H}_1^3 se puede hacer de una manera similar a las superficies llanas en \mathbb{S}^3 . Para nuestros intereses, sólo necesitamos las versiones locales de los resultados. Recordemos brevemente la construcción en estos casos.

4.3.1. Superficies hélice en \mathbb{S}^3

Consideramos US^2 el fibrado tangente de \mathbb{S}^2 , dado por

$$US^2 = \{(p, q) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : \langle p, q \rangle = 0\}.$$

Teorema 4.3.23 (Representación de Kitagawa) Sean $c_1(u)$, $c_2(v)$ dos curvas regulares en \mathbb{S}^2 , con $c_i(0) = \mathbf{i}$, $c'_i(0) = \rho$, para algún $\rho \in \mathbb{S}^3$ ortogonal a $\mathbf{1}$ e \mathbf{i} , y tal que $k_1(u) \neq k_2(v)$ para todo u, v , donde k_i denota la curvatura geodésica de c_i , $i = 1, 2$. Sea $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow US^2$ el doble cubrimiento dado por

$$\pi(\mathbf{q}) = (h_i(\mathbf{q}), h_\rho(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}\mathbf{i}\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}\rho\bar{\mathbf{q}}).$$

Consideramos $a_1(u)$, $a_2(v)$ dos curvas en \mathbb{S}^3 parametrizadas por la longitud de arco y satisfaciendo $\pi(a_i) = (c_i, c'_i/||c'_i||)$, y definimos

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\bar{a}_2(v),$$

$$\eta(u, v) = a_1(u)\rho\bar{a}_2(v),$$

en un rectángulo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Entonces $\Phi(\Omega)$ es una superficie llana y simplemente conexa en \mathbb{S}^3 con normal unitario η . Recíprocamente, cada superficie llana en \mathbb{S}^3 puede ser localmente construida de esta forma para algún ρ .

Observación 4.3.24 Si la superficie llana es analítica, o completa con curvatura media acotada, entonces la construcción dada en el teorema 4.3.23 es global, [Ga09].

El siguiente paso es determinar cuáles de estas superficies llanas de \mathbb{S}^3 son superficies hélice. Tomemos una parametrización local $\Phi(u, v)$ de una superficie llana, con campo de vectores normal unitario $\eta(u, v)$, para algún ρ . Sea $\mathbf{q} \in \mathbb{S}^2$ y consideremos un campo de vectores de Hopf \tilde{V} dado por $\tilde{V}(x) = x\mathbf{q}$, $x \in \mathbb{S}^3$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}, \eta \rangle |_{\Phi(u, v)} &= \langle a_1(u)\bar{a}_2(v)\mathbf{q}, a_1(u)\rho\bar{a}_2(v) \rangle \\ &= \langle \bar{a}_2(v)\mathbf{q}, \rho\bar{a}_2(v) \rangle = \langle \mathbf{q}, a_2(v)\rho\bar{a}_2(v) \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}, T_{c_2}(v) \rangle, \end{aligned}$$

donde $T_{c_2}(v)$ denota el vector unitario tangente a la curva c_2 . Esta ecuación nos lleva al siguiente resultado (comparar con [MO14, teorema 3.1]).

Teorema 4.3.25 ([LO17]) *Sea $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ una superficie orientable. Entonces M^2 es una superficie hélice si, y sólo si, M^2 es una superficie llana y, de acuerdo a la representación de Kitagawa, $c_2(v)$ es una hélice generalizada en $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

Ejemplo 4.3.26 (Hélices generalizadas esféricas) Struik mostró que las hélices esféricas, que forman un ángulo θ con su eje, se proyectan, en un plano perpendicular a su eje, en un arco de epicicloide con un radio fijo $a = \cos \theta$ y radio de rodadura $b = \sin^2(\theta/2)$, [Str50, pág. 35]. Sea $c_2(v)$ una hélice en \mathbb{S}^2 de ángulo θ con eje \mathbf{k} . Entonces, una parametrización de $c_2(v) = x(v)\mathbf{i} + y(v)\mathbf{j} + z(v)\mathbf{k}$ está dada por (véase, por ejemplo, [Sco95]),

$$\begin{aligned} x(v) &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos(v + v_0 + \alpha) - \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos\left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}(v + v_0) + \alpha\right), \\ y(v) &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin(v + v_0 + \alpha) - \frac{1 - \cos \theta}{2} \sin\left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}(v + v_0) + \alpha\right), \\ z(v) &= \sin \theta \cos\left(\frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}(v + v_0)\right), \end{aligned}$$

donde α y v_0 son constantes; el ángulo α representa una rotación alrededor del eje \mathbf{k} . Estas constantes se pueden elegir de manera que $c_2(0) = \mathbf{i}$:

$$v_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \quad \text{y} \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta}.$$

El parámetro arco s y el radio de curvatura $R = 1/\kappa$ de la epicicloide $(x(v), y(v))$ están dados por [Str50, pág. 27]

$$s(v) = \frac{4b(a+b)}{a} \cos\left(\frac{av}{2b}\right) \quad \text{y} \quad R(v) = \frac{4b(a+b)}{a+2b} \sin\left(\frac{av}{2b}\right).$$

4.3.2. Superficies hélice riemannianas en \mathbb{H}_1^3

Consideremos $TU^{-}\mathbb{S}_1^2$ el fibrado tangente temporal unitario de \mathbb{S}_1^2 , que puede ser identificado con

$$TU^{-}\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{H}^2 : \langle x, y \rangle = 0\},$$

donde estamos identificando $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}_1^3 \cap \{x_1 = 0\}$, $\mathbb{S}_1^2 = \mathbb{S}_2^3 \cap \{x_1 = 0\}$ y

$$\mathbb{S}_2^3 \equiv \{\mathbf{q} \in \mathbf{H} : \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = -\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = 1\}. \quad (4.3.56)$$

Sea $\rho \in \mathbb{H}_1^3$ un pseudo-cuaternión ortogonal a $\mathbf{1}$ e \mathbf{i} , y consideramos $\pi_0 : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow TU^{-}\mathbb{S}_1^2$ el doble cubrimiento dado por

$$\pi_0(\mathbf{q}) = (h_\rho(\mathbf{q}), h_{\mathbf{i}}(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}\rho\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}\mathbf{i}\bar{\mathbf{q}}).$$

Sea $c(u)$ una curva regular temporal en \mathbb{S}_1^2 y consideramos $\tilde{c}(u)$ la curva en $TU^{-}\mathbb{S}_1^2$ dada por $\tilde{c}(u) = (c(u), c'(u)/\|c'(u)\|)$. Entonces existe una curva regular $a(u)$ en \mathbb{H}_1^3 (única

salvo alguna constante inicial), parametrizada por el parámetro arco, tal que $\pi_0(a) = \bar{c}$. En particular, $h_\rho(a) = c$ y $h_i(a) = c'/\|c'\|$. No es difícil ver que

$$\langle a', ai \rangle = \langle \bar{a}a', i \rangle = 0.$$

Por otra parte, como $\langle a, a \rangle = -1$, tenemos

$$\langle a', a \rangle = \langle \bar{a}a', \mathbf{1} \rangle = 0.$$

Por tanto, $\bar{a}a'$ es ortogonal a $\mathbf{1}$ e i , por lo que a es una curva espacial. El resultado de clasificación se puede redactar de la siguiente forma.

Teorema 4.3.27 Sean $c_1(u), c_2(v)$ dos curvas regulares temporales de \mathbb{S}_1^2 , con $c_i(0) = \rho$, $c_i'(0) = i$, y tales que $k_1(u) \neq k_2(v)$ para todos u, v , donde k_i es la curvatura geodésica de c_i , $i = 1, 2$. Consideramos $a_1(u), a_2(v)$ dos curvas regulares espaciales de \mathbb{H}_1^3 , parametrizadas por el arco, satisfaciendo $\pi_0(a_i) = (c_i, c_i'/\|c_i'\|)$. Definimos

$$\Phi(u, v) = a_1(u)\overline{a_2(v)},$$

$$\eta(u, v) = a_1(u)\overline{ia_2(v)},$$

en un rectángulo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Entonces $\Phi(\Omega)$ es una superficie llana riemanniana de \mathbb{H}_1^3 con normal unitario η . Recíprocamente, cada superficie llana riemanniana de \mathbb{H}_1^3 se puede construir localmente de esta manera.

Sea $M^2 \subset \mathbb{H}_1^3$ una superficie llana riemanniana y consideramos $\mathbf{q} \in \mathbb{S}_1^2$. Tomamos el campo de vectores Killing invariante por la izquierda \tilde{V} en \mathbb{H}_1^3 definido por $\tilde{V}(x) = x\mathbf{q}$, $x \in \mathbb{H}_1^3$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{V}, \eta \rangle|_{\Phi(u,v)} &= \langle a_1(u)\overline{a_2(v)}\mathbf{q}, a_1(u)\overline{ia_2(v)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}, a_2(v)\overline{ia_2(v)} \rangle = \langle \mathbf{q}, T_{c_2}(v) \rangle, \end{aligned}$$

donde $T_{c_2}(v)$ denota el vector tangente unitario a la curva c_2 . Como consecuencia, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.3.28 ([LO16b]) Sea $M^2 \subset \mathbb{H}_1^3$ una superficie riemanniana orientable en \mathbb{H}_1^3 . Entonces M^2 es una superficie hélice si, y sólo si, M^2 es una superficie llana y, de acuerdo a la representación local dada por el teorema 4.3.27, $c_2(v)$ es una hélice generalizada en $\mathbb{S}_1^2 \subset \mathbb{R}^3$.

4.3.3. Superficies hélice lorentzianas en \mathbb{H}_1^3

Consideramos $TU\mathbb{H}^2$ el fibrado tangente unitario de \mathbb{H}^2 , que podemos identificar con

$$TU\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}_1^2 : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Sea $\rho \in \mathbb{H}_1^3$ un pseudo-cuaternión ortogonal a $\mathbf{1}$ e \mathbf{i} , y consideramos $\pi_1 : \mathbb{H}_1^3 \rightarrow TU\mathbb{H}^2$ el doble cubrimiento dado por

$$\pi_1(\mathbf{q}) = (h_{\mathbf{i}}(\mathbf{q}), h_{\rho}(\mathbf{q})) = (\mathbf{q}\mathbf{i}\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}\rho\bar{\mathbf{q}}).$$

Sea $c(u)$ una curva regular en \mathbb{H}^2 y consideramos $\tilde{c}(u)$ la curva en $TU\mathbb{H}^2$ dada por $\tilde{c}(u) = (c(u), c'(u)/\|c'(u)\|)$. Entonces existe una curva regular $a(u)$ en \mathbb{H}_1^3 (única salvo constantes iniciales), parametrizada por la longitud de arco o por el parámetro pseudo-arco (de acuerdo al carácter causal de a), tal que $\pi_1(a) = \tilde{c}$. En particular, $h_{\rho}(a) = c$ y $h_{\mathbf{i}}(a) = c'/\|c'\|$. Es fácil ver que

$$\langle a', a\rho \rangle = \langle \bar{a}a', \rho \rangle = 0.$$

Por otra parte, como $\langle a, a \rangle = -1$, tenemos

$$\langle a', a \rangle = \langle \bar{a}a', \mathbf{1} \rangle = 0.$$

Por tanto, $\bar{a}a'$ es ortogonal a $\mathbf{1}$ y ρ , por lo que a puede ser espacial, temporal o nula. El resultado de clasificación se puede expresar de la siguiente forma.

Teorema 4.3.29 Sean $c_1(u), c_2(v)$ dos curvas regulares en \mathbb{H}^2 , con $c_i(0) = \mathbf{i}$, $c'_i(0) = \rho$, y tal que $k_1(u) \neq k_2(v)$ para todos u, v , donde k_i es la curvatura geodésica de c_i , $i = 1, 2$. Consideremos $a_1(u), a_2(v)$ dos curvas regulares en \mathbb{H}_1^3 , parametrizadas por la longitud de arco o el parámetro pseudo-arco, satisfaciendo $\pi_1(a_i) = (c_i, c'_i/\|c'_i\|)$. Definimos

$$\begin{aligned}\Phi(u, v) &= a_1(u)\overline{a_2(v)}, \\ \eta(u, v) &= a_1(u)\overline{\rho a_2(v)},\end{aligned}$$

en un rectángulo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Entonces $\Phi(\Omega)$ es una superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 con normal unitario η . Recíprocamente, cada superficie llana lorentziana en \mathbb{H}_1^3 se puede construir localmente de esta manera.

Sea $M_1^2 \subset \mathbb{H}_1^3$ una superficie llana lorentziana y consideramos $\mathbf{q} \in \mathbb{H}^2$. Tomamos un campo de vectores Killing invariante por la izquierda \tilde{V} en \mathbb{H}_1^3 definido por $\tilde{V}(x) = x\mathbf{q}$, $x \in \mathbb{H}_1^3$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \tilde{V}, \eta \rangle|_{\Phi(u, v)} &= \langle a_1(u)\overline{a_2(v)}\mathbf{q}, a_1(u)\overline{\rho a_2(v)} \rangle \\ &= \langle \mathbf{q}, a_2(v)\overline{\rho a_2(v)} \rangle = \langle \mathbf{q}, T_{c_2}(v) \rangle,\end{aligned}$$

donde $T_{c_2}(v)$ denota el vector tangente unitario a la curva c_2 . Por tanto, tenemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.3.30 ([LO16b]) Sea $M_1^2 \subset \mathbb{H}_1^3$ una superficie orientable lorentziana en \mathbb{H}_1^3 . Entonces M_1^2 es una superficie hélice si, y sólo si, M_1^2 es una superficie llana y, de acuerdo a la representación local dada en el teorema 4.3.29, $c_2(v)$ es una hélice generalizada en $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

4.4. Integración geométrica de las hélices slant

Nuestro primer objetivo en esta sección es probar que las hélices slant de Frenet en $\mathbb{M}_q^3(c)$, $c \neq 0$, pueden ser caracterizadas como geodésicas en superficies llanas de $\mathbb{M}_q^3(c)$. Sabemos que no hay hélices slant ni en \mathbb{S}_1^3 ni en \mathbb{H}^3 , véase el corolario 4.1.3. Para la integración geométrica de las hélices slant de Frenet, $\mathbb{M}_q^3(c)$ representa \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}_1^3 y utilizaremos las parametrizaciones de las superficies hélice tratadas en la sección 4.3. Posteriormente realizaremos la integración geométrica de hélices slant pseudo-nulas y hélices slant nulas en \mathbb{R}_1^3 y \mathbb{H}_1^3 caracterizándolas como ciertas curvas especiales en superficies llanas.

4.4.1. Integración geométrica de las hélices slant de Frenet

Sea $M_V^2 \subset \mathbb{M}_q^3(c)$, $c \neq 0$, una superficie hélice y consideramos dos funciones $u(s)$ y $v(s)$ tales que $\gamma(s) = \Phi(u(s), v(s))$ es una geodésica parametrizada por el arco con referencia de Frenet $\{T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma\}$, donde la parametrización Φ está dada por los teoremas 4.3.23, 4.3.27 o 4.3.29 teniendo en cuenta el espacio $\mathbb{M}_q^3(c)$ y si la superficie es riemanniana o lorentziana. Entonces el campo de vectores normal unitario η de la superficie y el campo de vectores normal principal N_γ de la geodésica son colineales; asumamos, sin pérdida de generalidad, $\eta = N_\gamma$ a lo largo de la geodésica. Si $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_q^3(c))$ es un eje de M_V^2 , entonces la restricción $V = \tilde{V}|_\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es un campo de vectores Killing a lo largo de γ de longitud constante y tal que $\langle V, N_\gamma \rangle$ es constante; por tanto, la curva γ es una hélice slant con eje V .

Para probar el recíproco, nuestra primera tarea es calcular el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que caracterizan las curvas geodésicas de M_V^2 . Usando los teoremas de representación 4.3.23, 4.3.27 o 4.3.29, no es difícil ver que la primera y segunda formas fundamentales de M_V^2 están dadas por

$$I = \varepsilon_1 du^2 + 2F dudv + \delta_1 dv^2, \quad (4.4.57)$$

$$II = 2fdudv, \quad (4.4.58)$$

donde $F \equiv F(u, v)$ y $f \equiv f(u, v)$ son funciones diferenciables tales que

$$F^2 + c\varepsilon_\eta f^2 = \varepsilon_1 \delta_1; \quad (4.4.59)$$

aquí, ε_1 (resp. δ_1) es el carácter causal de la curva $a_1(u)$ (resp. $a_2(v)$). Entonces, existe una función diferenciable $\omega \equiv \omega(u, v) = \omega_1(u) + \omega_2(v)$, con $\omega'_1(u) = \pm\kappa_1(u)$ y $\omega'_2(v) = \pm\kappa_2(v)$, y tal que F y f están dadas en términos de ω de la siguiente forma. En el caso $c = 1$ las funciones F y f no son más que las funciones $\cos \omega$ y $\sin \omega$, respectivamente. En el caso $c = -1$ las funciones F y f están dadas por

$$F = \begin{cases} \cos \omega & \text{si } \varepsilon_1 = \delta_1 = c\varepsilon_\eta = 1 \\ \cosh \omega & \text{si } \varepsilon_1 \delta_1 = \varepsilon_\eta = 1 \\ \sinh \omega & \text{si } \varepsilon_1 \delta_1 = -\varepsilon_\eta = -1 \end{cases} \quad f = \begin{cases} \sin \omega & \text{si } \varepsilon_1 = \delta_1 = c\varepsilon_\eta = 1 \\ \sinh \omega & \text{si } \varepsilon_1 \delta_1 = \varepsilon_\eta = 1 \\ \cosh \omega & \text{si } \varepsilon_1 \delta_1 = -\varepsilon_\eta = -1 \end{cases} \quad (4.4.60)$$

Sea $\gamma(s) = \Phi(u(s), v(s))$ una geodésica parametrizada por el arco, entonces el vector tangente unitario está dado por

$$T_\gamma(s) = u'(s)\Phi_u(u(s), v(s)) + v'(s)\Phi_v(u(s), v(s)); \quad (4.4.61)$$

por tanto,

$$\varepsilon_1 u'(s)^2 + \delta_1 v'(s)^2 + 2u'(s)v'(s)F(u(s), v(s)) = \varepsilon_T, \quad (4.4.62)$$

donde ε_T es el carácter causal de γ .

Tomando la derivada covariante en (4.4.61), y usando las ecuaciones de Frenet, llegamos a

$$\begin{aligned} -\varepsilon_T c \gamma(s) + \varepsilon_N \kappa_\gamma(s) N_\gamma(s) &= u''(s)\Phi_u(u(s), v(s)) + v''(s)\Phi_v(u(s), v(s)) \\ &\quad + u'(s)^2 \Phi_{uu}(u(s), v(s)) + v'(s)^2 \Phi_{vv}(u(s), v(s)) \\ &\quad + 2u'(s)v'(s)\Phi_{uv}(u(s), v(s)), \end{aligned} \quad (4.4.63)$$

donde κ_γ es la curvatura de γ y $\varepsilon_N = \langle N_\gamma, N_\gamma \rangle$. Por otra parte, no es difícil ver que

$$\begin{aligned} \Phi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \Phi_u + \Gamma_{11}^2 \Phi_v - c\varepsilon_1 \Phi, \\ \Phi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \Phi_u + \Gamma_{22}^2 \Phi_v - c\delta_1 \Phi, \\ \Phi_{uv} &= \varepsilon_\eta f \eta - cF\Phi, \end{aligned} \quad (4.4.64)$$

donde

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{FF_u}{F^2 - \varepsilon_1 \delta_1}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-\varepsilon_1 F_u}{F^2 - \varepsilon_1 \delta_1}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-\delta_1 F_v}{F^2 - \varepsilon_1 \delta_1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{FF_v}{F^2 - \varepsilon_1 \delta_1}.$$

Usando que Φ está representada de la forma $\Phi(u, v) = a_1(u)\overline{a_2(v)}$ conseguimos

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{uu}, \Phi_{uu} \rangle(u, v) &= \langle a_1''(u), a_1''(u) \rangle = c + \varepsilon_2 \kappa_1(u)^2, \\ \langle \Phi_{vv}, \Phi_{vv} \rangle(u, v) &= \langle a_2''(v), a_2''(v) \rangle = c + \delta_2 \kappa_2(v)^2, \end{aligned}$$

donde ε_2 (resp. δ_2) es el carácter causal del normal principal unitario de a_1 (resp. a_2). Por otra parte, podemos calcular los productos escalares usando (4.4.64). Igualando ambas fórmulas, obtenemos que F_u y F_v están dadas (salvo el signo) por

$$F_u(u, v) = \kappa_1(u)f(u, v) \quad \text{y} \quad F_v(u, v) = \kappa_2(v)f(u, v). \quad (4.4.65)$$

De (4.4.63), (4.4.64) y (4.4.65) obtenemos que las funciones componentes de la geodésica $\gamma(s)$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} a) \quad & 0 = \varepsilon_1 u''(s) + F(u(s), v(s))v''(s) + \kappa_2(v(s))f(u(s), v(s))v'(s)^2, \\ b) \quad & 0 = u''(s)F(u(s), v(s)) + \delta_1 v''(s) + \kappa_1(u(s))f(u(s), v(s))u'(s)^2, \\ c) \quad & \kappa_\gamma(s) = 2f(u(s), v(s))u'(s)v'(s). \end{aligned} \quad (4.4.66)$$

No es difícil ver que el campo de vectores binormal de γ está dado (salvo el signo) por

$$B_\gamma(s) = \frac{\delta_1 v'(s) + F(u(s), v(s))u'(s)}{f(u(s), v(s))} \Phi_u(u(s), v(s)) - \frac{\varepsilon_1 u'(s) + F(u(s), v(s))v'(s)}{f(u(s), v(s))} \Phi_v(u(s), v(s)). \quad (4.4.67)$$

Utilizando la derivada covariante, y las ecuaciones de Frenet, llegamos a

$$\tau_\gamma(s) = \varepsilon_1 u'(s)^2 - \delta_1 v'(s)^2, \quad (4.4.68)$$

donde τ_γ representa la torsión de γ . Por tanto, tenemos probado el siguiente resultado.

Proposición 4.4.31 ([LO17], [LO16b]) *Sea $M_V^2 \subset \mathbb{M}_q^3(c)$, para $c \neq 0$, una superficie hélice parametrizada localmente por $\Phi(u, v)$. Una curva $\gamma(s) = \Phi(u(s), v(s))$ es una geodésica, parametrizada por el arco, de M_V^2 si, y sólo si, se satisfacen las ecuaciones (4.4.62), (4.4.66) y (4.4.68).*

Para finalizar esta sección, sea $\alpha(s)$ una hélice slant en $\mathbb{M}_q^3(c)$, parametrizada por el arco, con curvatura κ_α y torsión τ_α . Si $V(s)$ es un eje de γ , entonces $\langle V, N_\alpha \rangle = b$ para cierta constante real b , donde N_α denota el campo de vectores normal principal de α . En el caso de que α esté en \mathbb{S}^3 , consideramos $c_2(v)$ una hélice generalizada en \mathbb{S}^2 . En el caso de que α esté en \mathbb{H}_1^3 , la curva $c_2(v)$ será una hélice generalizada en \mathbb{H}^2 (respectivamente \mathbb{S}_1^2) si N_α es temporal (respectivamente N_α espacial). Veremos que la curva $c_1(u)$ puede ser determinada de forma que la correspondiente superficie llana M_V^2 sea una superficie hélice con una geodésica congruente a la hélice slant α . De (4.4.62) conseguimos

$$2u'(s)v'(s)F(u(s), v(s)) = \varepsilon_T - (\varepsilon_1 u'(s)^2 + \delta_1 v'(s)^2). \quad (4.4.69)$$

Un cálculo directo, usando (4.4.66c), (4.4.69) y (4.4.68), nos lleva a que

$$v'(s)^2 = \frac{\varepsilon_T \delta_1}{4} ((\varepsilon_T - \tau_\alpha(s))^2 - \varepsilon_\eta \kappa_\alpha(s)^2), \quad (4.4.70)$$

lo cual determina, salvo una constante, la función $v(s)$. Entonces la función $u(s)$ se puede calcular, salvo una constante, de (4.4.68). Finalmente, la curvatura geodésica $k_1(u)$ de $c_1(u)$ se puede determinar de (4.4.69), (4.4.59) y (4.4.66b). Concluyendo, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.4.32 ([LO17], [LO16b]) *Sea γ una curva de Frenet parametrizada por el arco en $\mathbb{M}_q^3(c)$, con $c \neq 0$, y con curvatura no nula κ_γ . Entonces γ es una hélice slant si, y sólo si, γ es (congruente a) una geodésica de una superficie hélice $M_V^2 \subset \mathbb{M}_q^3(c)$.*

4.4.2. Integración geométrica de las hélices slant pseudo-nulas

Teniendo en cuenta el corolario 4.1.5, el espacio $\mathbb{M}_1^3(c)$ representa \mathbb{R}_1^3 o \mathbb{H}_1^3 . Nuestro objetivo es la integración geométrica de las hélices slant pseudo-nulas en $\mathbb{M}_1^3(c)$, y

para ello necesitamos usar superficies luminosas en $\mathbb{M}_1^3(c)$. Puesto que la geometría de variedades luminosas es muy diferente de la geometría no degenerada, repasaremos algunas definiciones y resultados básicos. Las siguientes consideraciones están extraídas de [DB96], y adaptadas al espacio ambiente $\mathbb{M}_1^3(c)$. Sea M una superficie de $\mathbb{M}_1^3(c)$, y para cada $p \in M$ consideremos el subespacio radical

$$\text{Rad}(T_pM) = T_pM \cap (T_pM)^\perp. \quad (4.4.71)$$

M se dice una *superficie luminosa (degenerada)* de $\mathbb{M}_1^3(c)$ si $\text{Rad}(T_pM) \neq \{0\}$ para cualquier punto $p \in M$. Sea g la métrica degenerada inducida en M . Existe un fibrado vectorial complementario $S(TM)$ de TM^\perp en TM , es decir, $TM = S(TM) \perp TM^\perp$; $S(TM)$ se llama la *distribución screen* de M . Puesto que $S(TM)$ es una distribución no degenerada sobre M (en efecto, la métrica inducida en $S(TM)$ es definida positiva), tenemos la siguiente descomposición

$$T\mathbb{M}_1^3(c)|_M = S(TM) \perp S(TM)^\perp, \quad (4.4.72)$$

donde $S(TM)^\perp$ es el fibrado vectorial complementario ortogonal a $S(TM)$ en $T\mathbb{M}_1^3(c)|_M$. Por [DB96, teorema 1.1, pág. 79], existe un único fibrado vectorial luminoso $tr(TM)$ de rango uno sobre M tal que

$$T\mathbb{M}_1^3(c)|_M = S(TM) \perp (TM^\perp \oplus tr(TM)) = TM \oplus tr(TM). \quad (4.4.73)$$

$tr(TM)$ se llama el *fibrado vectorial transversal luminoso* de M con respecto a $S(TM)$. Usando la segunda forma fundamental de la descomposición (4.4.73) obtenemos

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (4.4.74)$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^t V, \quad (4.4.75)$$

para cualquier $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $V \in \Gamma(tr(TM))$, donde $\nabla_X Y$ y $A_V X$ pertenecen a $\Gamma(TM)$ mientras $h(X, Y)$ y $\nabla_X^t Y$ pertenecen a $\Gamma(tr(TM))$. ∇ y ∇^t son llamadas las *conexiones inducidas* en M y $tr(TM)$, respectivamente; h y A_V se llaman la *segunda forma fundamental* y el *operador forma*, respectivamente, de la inmersión $M \subset \mathbb{M}_1^3(c)$. Las ecuaciones (4.4.74) y (4.4.75) son llamadas las *fórmulas de Gauss y Weingarten*, respectivamente.

Sea $(M, g, S(TM))$ una superficie luminosa de $\mathbb{M}_1^3(c)$. Entonces una curva integral de cualquier sección no trivial $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ es una geodésica nula tanto de M como de $\mathbb{M}_1^3(c)$, con respecto a las conexiones ∇ y $\bar{\nabla}$, respectivamente, [DB96, proposición 2.5, pág. 86]. Por tanto, la superficie luminosa M es una superficie reglada en $\mathbb{M}_1^3(c)$ con rectas nulas.

Una manera fácil de construir estas superficies es la siguiente. Sea $\beta(t)$ una curva espacial, parametrizada por el arco, en $\mathbb{M}_1^3(c)$ y consideramos $\xi \in \mathfrak{X}(\beta)$ un campo de vectores nulo a lo largo de β con $\langle \beta', \xi \rangle = 0$ para todo t . Entonces

$$\Phi(t, z) = \beta(t) + z\xi(t)$$

es una superficie luminosa, cuya métrica degenerada está dada por $g = E dt^2$, para cierta función diferenciable $E \equiv E(t, z)$. No es difícil ver que cualquier superficie luminosa en

$\mathbb{M}_1^3(c)$ se puede describir mediante este método. En este sentido, M se puede llamar un *scroll nulo luminoso*. En el caso de que $\xi(t)$ sea un campo de vectores paralelo, M se llamará un *cilindro nulo luminoso sobre β* .

Sea $p \in \mathbb{M}_1^3(c)$ y $w \in T_p\mathbb{M}_1^3(c)$ un vector nulo. Si $\Pi \subset T_p\mathbb{M}_1^3(c)$ es un plano nulo con $w \in \Pi$, la *curvatura seccional nula* de Π con respecto a w , $\bar{K}_w(\Pi)$, se define por [Har82, BEE96]

$$\bar{K}_w(\Pi) = \frac{\langle \bar{R}(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}, \quad (4.4.76)$$

donde v es cualquier vector espacial en Π y \bar{R} representa el tensor curvatura de $\mathbb{M}_1^3(c)$. Esta definición es claramente independiente de la elección de v , pero depende cuadráticamente del vector nulo w .

Sea $(M, g, S(TM))$ una superficie luminosa de $\mathbb{M}_1^3(c)$, por tanto, T_pM es un plano nulo para todo $p \in M$. Similarmente a (4.4.76), si $\xi_p \in T_pM$ es un vector nulo tangente, la *curvatura seccional nula* de M en p con respecto a ξ_p , $K_{\xi_p}(p)$, está definida por [DB96]

$$K_{\xi_p}(p) = \frac{g(R(v, \xi_p)v, \xi_p)}{g(v, v)}, \quad (4.4.77)$$

donde v es cualquier vector espacial no nulo en T_pM y R es el tensor curvatura de M . Puesto que $\mathbb{M}_1^3(c)$ tiene curvatura constante c , $K_{\xi_p}(p) = \bar{K}_{\xi_p}(T_pM) = 0$ para cualquier punto $p \in M$ y vector nulo $\xi_p \in T_pM$, [DB96, proposición 3.3, pág. 95].

Ya podemos comenzar con la integración geométrica de las hélices slant pseudo-nulas. Sea $\beta(t)$ una geodésica espacial parametrizada por el arco en $\mathbb{M}_1^3(c)$, entonces

$$\beta(t) = f(t) p + g(t) v, \quad (4.4.78)$$

donde $p \in \mathbb{M}_1^3(c)$, $v \in T_p\mathbb{M}_1^3(c)$ es un vector espacial unitario y las funciones f y g son las funciones del flujo geodésico definidas en la sección 1.2.2. Consideramos $\xi_0 \in T_p\mathbb{M}_1^3(c)$ un vector nulo con $\langle v, \xi_0 \rangle = 0$ y definimos el campo de vectores constante a lo largo de β dado por $\xi(t) = \xi_0$. Es fácil ver que la superficie M parametrizada por

$$\Phi(t, z) = \beta(t) + z\xi(t)$$

es un *cilindro nulo luminoso sobre β* . Consideramos la curva $\gamma(s) = \Phi(s, z(s))$, donde $z(s)$ es una función diferenciable con $(z'' + cz)(s) \neq 0$ para todo s . Teniendo en cuenta

$$\gamma'(s) = -cg(s) p + f(s) v + z'(s)\xi_0, \quad (4.4.79)$$

vemos que $\gamma(s)$ es una curva espacial parametrizada por el arco. Utilizando la ecuación de Gauss (1.3.9), el campo de vectores aceleración es

$$\gamma''(s) = \bar{\nabla}_{\gamma'(s)}\gamma' - c\gamma(s). \quad (4.4.80)$$

Por otra parte, tomando derivada en (4.4.79) obtenemos

$$\gamma''(s) = -c\gamma(s) + (z'' + cz)(s)\xi_0. \quad (4.4.81)$$

Las últimas dos ecuaciones nos conducen a

$$\bar{\nabla}_{\gamma'(s)} \gamma' = (z'' + cz)(s) \xi_0, \quad (4.4.82)$$

demostrando que γ es una curva pseudo-nula. Entonces sabemos por el teorema 4.1.4 que γ es una hélice slant pseudo-nula. Utilizando la derivada covariante en (4.4.82) obtenemos también que la torsión τ_γ de la curva γ está dada por

$$\tau_\gamma = \frac{d}{ds} \ln |z'' + cz|. \quad (4.4.83)$$

Recíprocamente, sea $\gamma(s)$, $s \in I$, una hélice slant pseudo-nula parametrizada por el arco con eje $V(s)$. Fijando $s_0 \in I$, consideramos $p = \gamma(s_0)$, $v = \gamma'(s_0)$ y $\xi_0 = V(s_0)$. Sea β una geodésica espacial, parametrizada por el arco, definida como $\beta(t) = \exp_p(tv)$ y consideramos la curva $\alpha(s) = \Phi(s, z(s))$ en el cilindro nulo luminoso generado por β y ξ_0 , donde $z = z(s)$ es cualquier solución no trivial de la siguiente ecuación diferencial,

$$y''' - \tau_\gamma y'' + cy' - c\tau_\gamma y = 0, \quad (y'' + cy)(s_0) \neq 0. \quad (4.4.84)$$

Un fácil cálculo a partir de (4.4.83) muestra que α es una curva pseudo-nula, parametrizada por el arco, con pseudo-torsión $\tau_\alpha = \tau_\gamma$. Entonces γ y α son curvas congruentes, [Lop14, teorema 2.8].

Tenemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.4.33 ([LO16b]) *Una curva espacial parametrizada por el arco γ en $\mathbb{M}_1^3(c)$ es pseudo-nula (y, por tanto, una hélice slant pseudo-nula) si, y sólo si, γ es (congruente a) una curva espacial en un cilindro nulo luminoso construido sobre una geodésica espacial de $\mathbb{M}_1^3(c)$.*

4.4.3. Integración geométrica de las hélices slant nulas

Al igual que en la sección anterior, teniendo en cuenta el corolario 4.1.7, el espacio $\mathbb{M}_1^3(c)$ representa a \mathbb{R}_1^3 o \mathbb{H}_1^3 .

Una familia especial de superficies llanas lorentzianas en $\mathbb{M}_1^3(c)$ es la familia formada por los B -scrolls. Esencialmente, un B -scroll llano es una superficie reglada lorentziana cuya curva directriz es una curva con torsión ± 1 en \mathbb{H}_1^3 o con torsión nula en \mathbb{R}_1^3 y cuyas generatrices son las geodésicas generadas por el campo de vectores binormal de la curva, [BFLM01, DN80]. Concretamente, sea $\beta(u)$ una curva en $\mathbb{M}_1^3(c)$ con referencia de Frenet $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ y torsión $\tau_\beta^2 = -c$; y asumimos que el vector normal principal N_β es un vector espacial. El B -scroll sobre β es la superficie M_β parametrizada por

$$\Phi(u, v) = \exp_{\beta(u)}(vB_\beta(u)) = f(v)\beta(u) + g(v)B_\beta(u), \quad (4.4.85)$$

donde las funciones f y g están dadas en la sección 1.2.2. Recordamos que si ε_β denota el carácter causal de la curva β se cumple

$$f^2 - \varepsilon_\beta c g^2 = 1 \quad \text{junto con} \quad f' = \varepsilon_\beta c g, \text{ y } g' = f.$$

Tenemos

$$\begin{cases} \Phi_u(u, v) = f(v)T_\beta(u) - \tau_\beta g(v)N_\beta(u), \\ \Phi_v(u, v) = \varepsilon_\beta c g(v)\beta(u) + f(v)B_\beta(u). \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que el campo de vectores normal unitario de M_β en $\mathbb{M}_1^3(c)$ está dado por

$$\eta(u, v) = \varepsilon_\beta \tau_\beta g(v)T_\beta(u) + f(v)N_\beta(u).$$

Por tanto, la matriz del operador forma A_η , con respecto a la referencia tangente $\{\Phi_u, \Phi_v\}$, tiene la siguiente expresión

$$A_\eta = \begin{pmatrix} \varepsilon_\beta \kappa_\beta & -\varepsilon_\beta \tau_\beta \\ \varepsilon_\beta \tau_\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, M_β es una superficie llana.

Veremos ahora cuáles de las curvas nulas de ciertos B -scrolls M_β se pueden parametrizar para que sean hélices slant nulas. Sea $\gamma(s) = \Phi(u(s), v(s))$ una curva nula, entonces

$$0 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \varepsilon_\beta (u'(s)^2 - v'(s)^2), \quad (4.4.86)$$

por lo que $v'(s) = \delta_1 u'(s)$, con $\delta_1 = \pm 1$.

Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \Phi_{uu} &= \kappa_\beta \eta - \varepsilon_\beta c \Phi, \\ \Phi_{uv} &= -\tau_\beta \eta, \\ \Phi_{vv} &= \varepsilon_\beta c \Phi. \end{aligned} \quad (4.4.87)$$

De aquí, el campo de vectores aceleración de γ está dado por

$$\gamma''(s) = u''(s)\Phi_u + \delta_1 u''(s)\Phi_v + u'(s)^2(\kappa_\beta(u(s)) - 2\delta_1 \tau_\beta)\eta. \quad (4.4.88)$$

Puesto que s es el parámetro pseudo-arco de γ , tenemos que

$$u'(s)^2(\kappa_\beta(u(s)) - 2\delta_1 \tau_\beta) = \delta_2 = \pm 1. \quad (4.4.89)$$

Entonces la referencia de Frenet para γ está dada por

$$\begin{aligned} T_\gamma(s) &= u'(s)\Phi_u + \delta_1 u'(s)\Phi_v, \\ N_\gamma(s) &= u''(s)\Phi_u + \delta_1 u''(s)\Phi_v + \delta_2 \eta, \\ B_\gamma(s) &= \frac{u''(s)^2 - \varepsilon_\beta}{2u'(s)}\Phi_u + \frac{\delta_1(u''(s)^2 + \varepsilon_\beta)}{2u'(s)}\Phi_v + \frac{\delta_2 u''(s)}{u'(s)}\eta. \end{aligned}$$

Utilizando la relación (4.4.89) podemos calcular

$$\bar{\nabla}_{T_\gamma} N_\gamma = \left(u'''(s) - \delta_1 \delta_2 \varepsilon_\beta \tau_\beta u'(s) - \frac{\varepsilon_\beta}{u'(s)} \right) \Phi_u + (\delta_1 u'''(s) - \delta_2 \varepsilon_\beta \tau_\beta u'(s)) \Phi_v + \delta_2 \frac{u''(s)}{u'(s)} \eta.$$

La torsión de γ se puede calcular como

$$\tau_\gamma = - \left\langle \overline{\nabla}_{T_\gamma} N_\gamma, B_\gamma \right\rangle = \frac{2u'''u' - u''^2 - \varepsilon_\beta}{2u'^2} - \delta_1 \delta_2 \varepsilon_\beta \tau_\beta.$$

Tomando $\tau_0 = -\delta_1 \delta_2 \varepsilon_\beta \tau_\beta$ se cumple $\tau_0^2 = -c$ y, por tanto, la ecuación anterior demuestra, utilizando el teorema 4.1.6, que γ es una hélice slant nula si, y sólo si, $u = u(s)$ es una solución de la siguiente ecuación diferencial,

$$(2u'''u' - u''^2 - \varepsilon_\beta)(-bs + m)^2 + 2nu'^2 = 0, \quad (4.4.90)$$

para ciertas constantes b, m, n .

Recíprocamente, consideramos $\gamma(s)$ una hélice slant nula en $\mathbb{M}_1^3(c)$; probaremos que $\gamma(s)$ es una curva nula en un B -scroll llano con una conveniente parametrización. Del teorema 4.1.6 sabemos que la torsión de γ está dada por

$$\tau_\gamma(s) = \frac{-n}{(-bs + m)^2} + \tau_0, \quad b, m, n, \tau_0 \in \mathbb{R}, \quad \tau_0^2 = -c.$$

Fijamos $\varepsilon = \text{sgn}(2n - b^2)$. En el caso que $\varepsilon \neq 0$ (el eje V es no nulo) consideraremos $\varepsilon_\beta = \varepsilon$; en el caso $\varepsilon = 0$ (el eje V es nulo), consideramos $\varepsilon_\beta = 1$ (o $\varepsilon_\beta = -1$). Sea u una solución no constante de (4.4.90); entonces (4.4.89), con $\delta_1 \delta_2 \varepsilon_\beta \tau_\beta = -\tau_0$, nos determina una función diferenciable $\kappa_\beta(u)$. Consideramos $\beta(u)$ una curva parametrizada por el arco en $\mathbb{M}_1^3(c)$ con carácter causal ε_β , cuyo campo de vectores normal principal sea espacial, teniendo torsión $\tau_\beta^2 = -c$ y curvatura $\kappa_\beta(u)$. Si $\Phi(u, v)$ es la parametrización del B -scroll M_β , no es difícil ver que la curva nula $\alpha(s) = \Phi(u(s), \delta_1 u(s))$ está parametrizada por el pseudo-arco y tiene torsión $\tau_\alpha = \tau_\gamma$, por lo que las curvas α y γ son congruentes.

Entonces, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.4.34 ([LO16b]) *Sea γ una curva nula en $\mathbb{M}_1^3(c)$ parametrizada por el pseudo-arco cuya torsión τ no se anule nunca. Entonces γ es una hélice slant si, y sólo si, γ es (congruente a) una curva nula $\alpha(s) = \Phi(u(s), \pm u(s))$ de un B -scroll llano M_β , donde $u(s)$ es una solución de (4.4.90) y la curvatura de β satisface (4.4.89).*

Como consecuencia del teorema 4.4.34, para el caso $b = 0$, se obtiene el siguiente resultado de integración geométrica para hélices generalizadas nulas.

Corolario 4.4.35 *Sea γ una curva nula en $\mathbb{M}_1^3(c)$ parametrizada por el pseudo-arco cuya torsión τ no se anule nunca. Entonces γ es una hélice generalizada si, y sólo si, γ es (congruente a) una curva nula $\alpha(s) = \Phi(u(s), \pm u(s))$ de un B -scroll llano M_β , donde $u(s)$ es una solución de (4.4.90) para $b = 0$ y la curvatura de β satisface (4.4.89).*

Observación 4.4.36 Una solución particular de (4.4.90), en el caso $2n - b^2 \neq 0$ (es decir, cuando el eje de la hélice slant es no nulo), está dado por

$$u(s) = \lambda_0 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2,$$

donde las constantes λ_i están determinadas por

$$\lambda_0^2 = \frac{\varepsilon_\beta b^2}{4(2n - b^2)} \quad y \quad \lambda_1 = -\frac{bm(4\lambda_0^2 + \varepsilon_\beta)}{4n\lambda_0}.$$

En este caso, de la condición (4.4.89), la curvatura de β está dada por

$$\kappa_\beta(u) = \frac{\delta_2}{4\lambda_0 u + (\lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2)} + 2\delta_1\tau_\beta.$$

Observación 4.4.37 El orden de la ecuación diferencial (4.4.90) se puede reducir de la siguiente forma. Sea y la función definida por

$$u(s) = \int_{s_0}^s y^2(t) dt,$$

entonces (4.4.90) se transforma en

$$y''(s) - \frac{\varepsilon_\beta}{4}y^{-3}(s) + \frac{n}{2}(-bs + m)^{-2}y(s) = 0. \quad (4.4.91)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir (salvo reparametrizaciones) que $m = 0$, y entonces (4.4.91) se puede escribir como

$$y''(s) = A_1 y(s)^{-3} + A_2 s^{-2} y(s), \quad A_1 = \frac{\varepsilon_\beta}{4}, \quad A_2 = -\frac{n}{2b^2}. \quad (4.4.92)$$

La solución general de esta ecuación diferencial se puede obtener en forma paramétrica consultando [PZ03, 2.4.2.3]:

$$s(t) = C_1^2 \exp \left[\int \left(C_2 + \left(\frac{1}{4} + A_2 \right) t^2 - A_1 t^{-2} \right)^{-1/2} dt \right],$$

$$y(t) = C_1 t \exp \left[\frac{1}{2} \int \left(C_2 + \left(\frac{1}{4} + A_2 \right) t^2 - A_1 t^{-2} \right)^{-1/2} dt \right],$$

donde $C_1 \neq 0$ y C_2 son constantes reales.

En el caso particular en el que $2n - b^2 = 0$ (es decir, cuando el eje de la hélice slant es nulo), se cumple $A_2 = -1/4$ y entonces podemos obtener explícitamente $y(s)$:

$$y(s) = \sqrt{\frac{A_1}{C_2} s + C_2 s \left(C_3 + \ln \left(\frac{s}{C_1^2} \right) \right)^2}, \quad \text{si } C_2 \neq 0,$$

$$y(s) = \sqrt{C_3 s + s \ln \left(\frac{s}{C_1^2} \right)}, \quad \text{si } C_2 = 0,$$

donde C_3 es una constante real. Ahora, es fácil obtener la función u :

$$u(s) = \frac{2A_1 + C_2^2(2C_3^2 - 2C_3 + 1)}{4C_2} s^2 + \frac{C_2(2C_3 - 1)}{2} s^2 \ln \left(\frac{s}{C_1^2} \right) + \frac{C_2}{2} s^2 \ln^2 \left(\frac{s}{C_1^2} \right) + C_4,$$

si $C_2 \neq 0$,

$$u(s) = \frac{2C_3 - 1}{4} s^2 + \frac{1}{2} s^2 \ln \left(\frac{s}{C_1^2} \right) + C_4, \quad \text{si } C_2 = 0,$$

donde C_4 es una constante real.

Bibliografía

- [AL11] A.T. Ali y R. López. Slant helices in Minkowski space E_1^3 . *J. Korean Math. Soc.* **48** (2011), 159–167.
- [Ami00] Y.A. Aminov. *Differential Geometry and Topology of Curves*. Gordon and Breach Science Publishers, Singapore, 2000.
- [AO12] A.T. Ali y M.A. Onder. Some characterizations of space-like rectifying curves in the Minkowski space-time. *GJSFR-F Mathematics & Decision Sciences* **12**:1 (2012), 9 pp.
- [Bar97] M. Barros. General helices and a theorem of Lancret. *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 1503–1509.
- [BBE04] H. Balgetir, M. Bektas y M. Ergut. Bertrand curves for nonnull curves in 3-dimensional Lorentzian space. *Hadronic Journal* **27** (2004), 229–236.
- [BBI04] H. Balgetir, M. Bektas y J.-I. Inoguchi. Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations. *Note di Matematica* **23** (2004), 7–13.
- [BEE96] J.K. Beem, P.E. Ehrlich y K.L. Easley. *Global Lorentzian Geometry* (2nd edition). Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.
- [Bern44] J. Bernoulli. *Jacobi Bernoulli, Basiliensis, Opera* Volumes 1 and 2, Cramer & Philibert, Geneva, 1744.
- [Bert50] J. Bertrand. Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. *Comptes Rendus* **36** (1850) y *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **15** (1850), 332–350.
- [BF09] M. Barros y A. Ferrández. A conformal variational approach for helices in Nature. *J. Math. Phys.* **50** (2009), 103529.
- [BFLM99] M. Barros, A. Ferrández, P. Lucas y M.A. Meroño. Solutions of the Betchov-Da Rios soliton equation: A Lorentzian approach. *J. Geom. Phys.* **31** (1999), 217–228.
- [BFLM01] M. Barros, A. Ferrández, P. Lucas y M.A. Meroño. General helices in the 3-dimensional Lorentzian space forms. *Rocky Mountain J. Math.* **31** (2001), 373–388.
- [BHTZ93] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli. Geometry of 2 + 1 black hole. *Phys. Rev. D* **48** (1993), 1506. Erratum *Phys. Rev. D* **88** (2013), 069902.
- [Bio89] Ch. Bioche. Sur les courbes de M. Bertrand. *Bull. Soc. Math. Fr.* **17** (1889), 109–112.

- [BN84a] G.S. Birman y K. Nomizu. Trigonometry in Lorentzian geometry. *Amer. Math. Monthly* **91** (9) (1984), 543–549.
- [BN84b] G.S. Birman y K. Nomizu. The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional space-times. *Michigan Math. J.* **31** (1984), 77–81.
- [Bur60] J.F. Burke. Bertrand curves associated with a pair of curves. *Mathematics Magazine* **34** (1960), 60–62.
- [Chen03] B.Y. Chen. When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? *Amer. Math. Monthly* **110** (2003), 147–152.
- [Chen16] B.Y. Chen. Differential geometry of rectifying submanifolds. *Int. Electron. J. Geom.* **9** (2016), n.2, 1–8.
- [Chen17] B.Y. Chen. Rectifying submanifolds of Riemannian manifolds and torqued vector fields. *Kragujevac J. Math.* **41**(1) (2017), 93–103.
- [Chen17b] B.Y. Chen. Rectifying curves and geodesics on a cone in the Euclidean 3-space. *Tamkang J. Math.* **48** (2017).
- [Chen17c] B.Y. Chen. Topics in differential geometry associated with position vector fields on Euclidean submanifolds. *Arab. J. Math. Sci.*, **23** (2017), 1–17.
- [CD05] B.Y. Chen y F. Dillen. Rectifying curves as centrodes and extremal curves. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **33** (2005), 77–90.
- [CL09] Y.-M. Cheng y C.-C. Lin. On the generalized Bertrand curves in Euclidean N -spaces. *Note Mat.* **29** (2009), n. 2, 33–39.
- [Coc49] J. Cockle. On systems of algebra involving more than one imaginary; and on equations of the fifth degree. *Philosophical Magazine and Journal of Science* **35** (1849), 434–437.
- [CS07] P. Cermelli y A.J. Di Scala. Constant-angle surfaces in liquid crystals. *Philosophical Magazine* **87** (2007), 1871–1888.
- [DB96] K.L. Duggal y A. Bejancu. *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*. Series *Mathematics and its Applications*, vol. 364. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1996.
- [DFS08] J.D. Durou, M. Falcone y M. Sagona. Numerical methods for shape-from-shading: A new survey with benchmarks. *Computer Vision and Image Understanding* **109** (2008), 22–43.
- [DFVV07] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken y L. Vrancken. Constant angle surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. *Monatsh. Math.* **152** (2007), 89–96.
- [DK12] F. Dillen y D. Kowalczyk. Constant angle surfaces in product spaces. *J. Geom. Phys.* **62** (2012), 1414–1432.
- [DM09] F. Dillen y M.I. Munteanu. Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc.* **40** (2009), 85–97.
- [DMVV11] F. Dillen, M.I. Munteanu, J. Van der Veken y L. Vrancken. Classification of constant angle surfaces in a warped product. *Balkan J. Geom. Appl.* **16** (2011), 35–47.

- [DN80] M. Dajczer y K. Nomizu. On flat surfaces in S_1^3 and H_1^3 . En *Manifolds and Lie groups* (Notre Dame, Ind., 1980), Progr. Math., 14, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981, pp. 71–180.
- [DoC92] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [DoC76] M.P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hal, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [DSRH09] A.J. Di Scala y G. Ruiz-Hernández. Helix submanifolds of Euclidean spaces. *Monasth Math.* **157** (2009), 205–215.
- [EI2001] N. Ekmekci y K. Ilarslan. On Bertrand curves and their characterization. *Differential Geometry-Dynamical Systems* **3** (2001), 17–24.
- [ET2010] S. Ersoy y M. Tosun. Timelike Bertrand curves in semi-Euclidean space. *arXiv: 1003.1220v1 [math.DG]* .
- [FFS04] J. Figueroa-O’Farrill y J. Simson. Supersymmetric Kaluza-Klein reductions of AdS backgrounds. *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2004), n. 2, 217–317.
- [FGJL06] A. Ferrández, J. Guerrero, M.A. Javaloyes y P. Lucas. Particles with curvature and torsion in 3-dimensional pseudo-Riemannian space forms. *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 1666–1687.
- [FGL02] A. Ferrández, A. Giménez y P. Lucas. s -Degenerate curves in Lorentzian space forms. *J. Geom. Phys.* **45** (2003), 116–129.
- [FMV11] J. Fastenakels, M.I. Munteanu y J. Van der Veken. Constant angle surfaces in the Heisenberg group. *Acta Math. Sinica, Engl. Series* **27** (2011), 747–756.
- [FNS05] A. Feoli, V.V. Nesterenko y G. Scarpetta. Functionals linear in curvature and statistics of helical proteins. *Nucl. Phys. B* **705** (2005), 577–592.
- [Fres19] A.J. Fresnel. Mémoire sur la diffraction de la lumière. *Annales de Chimie et de Physique*, t.x. (1819) 288.
- [Ga09] J.A. Gálvez. Surfaces of constant curvature in 3-dimensional space forms. *Matemática Contemporânea* **37** (2009), 1–42.
- [Gi10] A. Giménez. Relativistic particles along null curves in 3D Lorentzian space forms. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **20** (2010), 2851–2859.
- [GM10] J.A. Gálvez y P. Mira. Isometric immersions of \mathbb{R}^2 into \mathbb{R}^4 and perturbation of Hopf tori. *Math. Z.* **266** (2010), 207–227.
- [GN12] M. Grbovic y E. Nesovic. Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space. *Math. Commun.* **17** (2012), 655–664.
- [GO86] A. Gorgulu y E. Ozdamar. A generalization of the Bertrand curves as general inclined curves in E^n . *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank., Series A* **35** (1986), 53–60.
- [Gra17] W.C. Graustein. On two related transformations of space curves. *Amer. J. Math.* **39** (1917), 233–240.
- [Gray97] A. Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2nd edition, 1997.

- [GT11] M.A. Gungor y M. Tosun. Some characterizations of quaternionic rectifying curves. *DGDS Differ. Geom. Dyn. Syst. Monogr.* **13** (2011), 89–100.
- [Har82] S.G. Harris. A triangle comparison theorem for Lorentz manifolds. *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982) 289–308.
- [HII15] S. Hananoi, N. Ito y S. Izumiya. Spherical Darboux images of curves on surfaces. *Beitr. Algebra Geom.* **56**:2 (2015), 575–585.
- [HL06] R. Huang y C. Liao. Geometrical particle models on 3D lightlike curves. *Modern Phys. Let. A* **21**:40 (2006), 3039–3048.
- [HonF67] H.F. Lai. Weakened Bertrand curves. *Tôhoku Math. J.* **19** (1967), 141–155.
- [HT10] G. Harary y A. Tal. 3D Euler spirals for 3D curve completion. En *Proceedings of the 2010 Annual Symposium on Computational Geometry SoCG'10* (2010), 393–402. ISBN: 978-1-4503-0016-2.
- [INPT03] K. Ilarslan, E. Nesovic y M. Petrovic-Torgasev. Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad J. Math.* **33**:2 (2003), 23–32.
- [IN07] K. Ilarslan y E. Nesovic. On rectifying curves as centrodes and extremal curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad. J. Math.* **37**:1 (2007), 53–64.
- [IN08a] K. Ilarslan y E. Nesovic. Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4 . *Turk. J. Math.* **32**:1 (2008), 21–30.
- [IN08b] K. Ilarslan y E. Nesovic. Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time. *Taiwanese J. Math.* **12**:5 (2008), 1035–1044.
- [IN14] K. Ilarslan y E. Nesovic. Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time. *Int. Electron. J. Geom.* **7**:1 (2014), 26–35.
- [IT04] S. Izumiya y N. Takeuchi. New special curves and developable surfaces. *Turk. J. Math.* **28** (2004), 153–163.
- [KCC93] D.S. Kim, H.S. Chung y K.H. Cho. Space curves satisfying $\tau/\kappa = as + b$. *Honan Mathematical J.* **15** (1993) 5–9.
- [KD80] J.J. Koenderink y A.J. van Doorn. Photometric invariants related to solid shape. *J. Mod. Opt.* **27** (1980), 981–996.
- [Kit88] Y. Kitagawa. Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3 . *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988), 457–476.
- [KY05] L. Kula y Y. Yayli. On slant helix and its spherical indicatrix. *Appl. Math. Comput.* **169** (2005), 600–607.
- [Lau65] D. Laugwitz. *Differential and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1965.
- [Lev08] R. Levien. The Euler spiral: a mathematical history. Technical Report UCB/EECS-2008-111, EECS Department, University of California, Berkeley, 2008.
- [LMP11] M.A. León-Guzmán, P. Mira y J.A. Pastor. The space of Lorentzian flat tori in anti-De Sitter 3-space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 6549–6573.

- [LO12] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Bertrand curves in the three-dimensional sphere. *J. Geom. Phys.* **62** (2012), 1903–1914.
- [LO13a] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Bertrand curves in non-flat 3-dimensional (Riemannian or Lorentzian) space forms. *Bull. Korean Math. Soc.* **50** (2013), 1109–1126.
- [LO13b] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. A variational characterization and geometric integration for Bertrand curves. *J. Math. Phys.* **54** (2013), 043508, 12 pág.
- [LO14] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Rectifying curves in the three-dimensional sphere. *J. Math. Anal. Appl.* **421** (2015), 1855–1868.
- [LO15] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Rectifying curves in the three-dimensional hyperbolic space. *Mediterr. J. Math.* **13** (2016), 2199–2214.
- [LO16a] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Slant helices in the Euclidean 3-space revisited. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **23** (2016), 133–150.
- [LO17] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Slant helices in the three-dimensional sphere. *J. Korean Math. Soc.* (2017). [10.4134/JKMS.j160508](https://doi.org/10.4134/JKMS.j160508).
- [LO16b] P. Lucas y J.A. Ortega-Yagües. Helix surfaces and slant helices in the three-dimensional anti-De Sitter space. *RACSAM* (2016). [10.1007/s13398-016-0361-8](https://doi.org/10.1007/s13398-016-0361-8).
- [Lop14] R. López. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *Int. Electron. J. Geom.* **7** (2014), 44–107.
- [LRT93] P.L. Lions, E. Rouy y A. Tourin. Shape-from-shading, viscosity solutions and edges. *Numer. Math.* **64** (1993), 323353.
- [LS84a] J. Langer y D.A. Singer. The total squared curvature of closed curves. *J. Differential Geom.* **20** (1984), 1–22.
- [Mar82] D. Marr. *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. W.H. Freeman and Company, New York, 1982; MIT Press Scholarship, 2010.
- [Mar86] H. Martini. Parallelbeleuchtung konvexer Körper mit glatten Rändern. *Beitr. Algebra Geom.* **21** (1986), 109–124.
- [MC08] J.A. McCoy. Helices for mathematical modelling of proteins, nucleid acids and polymers. *J. Math. Anal. Appl.* **347** (2008), 255–265.
- [Men14] A. Menninger. Characterization of the slant helix as successor curve of the general helix. *Int. Electron. J. Geom.* **7** (2014), 84–91.
- [MN09] M.I. Munteanu y A.I. Nistor. A new approach on constant angle surfaces in \mathbb{E}^3 . *Turk. J. Math.* **33** (2009), 169–178.
- [MO14] S. Montaldo y I.I. Onnis. Helix surfaces in the Berger sphere. *Israel J. Math.* **201** (2014), 949–966.
- [Mon09] J. Monterde. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. *Comput. Aided Geomet. Design* **26** (2009), 271–278.
- [MY03] H. Matsuda y S. Yorozu. Notes on Bertrand curves. *Yokohama Math. J.* **50** (2003), 41–58.

- [Ni11] A.I. Nistor. Certain constant angle surfaces constructed on curves. *Int. Electron. J. Geom.* **4** (2011), 79–87.
- [NPV05] E. Nessoovic, M. Petrovic-Torgasev y L. Verstraelen. Curves in Lorentzian spaces. *Bollettino U. M. I.* **8** 8-B (2005), 685–696.
- [One66] B. O’Neill. *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York, London, 1966.
- [ON83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press Inc., New York, 1983.
- [OO09] E. Ozbey y M. Oral. A study on rectifying curves in the dual Lorentzian space. *Bull. Korean Math. Soc.* **46**:5 (2009), 967–978.
- [OY11] S. Ozkaldi e Y. Yayli. Constant angle surfaces and curves in E^3 . *Int. Electron. J. Geom.* **4** (2011), 70–78.
- [Ozt09] H.B. Oztekin. Weakened Bertrand curves in the Galilean space G_3 . *J. Adv. Math. Studies* **2** (2009), 69–76.
- [Pea35] L.R. Pears. Bertrand curves in Riemannian space. *J. London Math. Soc.* (1935) s1-10 (3), 180–183.
- [PZ03] A.D. Polyanin y V.F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2003.
- [Pin85] U. Pinkall. Hopf tori in S^3 . *Invent. Math.* **81** (1985), 379–386.
- [PH05] H. Pottmann y M. Hofer. A variational approach to spline curves on surfaces. *Computer Aided Geometric Design* **22** (2005), 693–709.
- [Ros88] B.A. Rosenfeld. *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. Springer-Verlag, New York Inc, 1988. Traducido por A. Shenitzer de la edición rusa original: *Istoriya Neevklidovol Geometrii: Razvitie ponyatiya o geometricheskom prostranstve*, Nauka, Moscow, 1976.
- [Sain45] J.C. Saint-Venant. Mémoire sur les lignes courbes non planes. *Journal d’Ecole Polytechnique* **30** (1845), 1–76.
- [Salk09] E. Salkowski. Zur Transformation von Raumkurven. *Math. Ann.* **66** (1909), 517–557.
- [Sco95] P.D. Scofield. Curves of constant precession. *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 531–537.
- [Sch03] W.K. Schief. On the integrability of Bertrand curves and Razzaboni surfaces. *J. Differential Geom.* **45** (2003), 130–150.
- [Str50] D.J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, New York, 1950.
- [Tal99] A.N. Talbot. *The Railway Transition Spiral*. Univ. Illinois, 1899.
- [TCH08] N. Thamwattana, J.A. McCoy y J.M. Hill. Energy density functions for protein structures. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **61** (2008), 431–451.
- [Wal95] J. Walrave. *Curves and Surfaces in Minkowski Space*. Thesis (Ph.D.), Katholieke Universiteit Leuven (Belgium), 1995.

- [Wea27] C.E. Weatherburn. *Differential Geometry of Three Dimensions*. Univ. Cambridge, 1927.
- [Wie96] G. Wiegink. Total bending of vector fields on the sphere S^3 . *Diff. Geom. & Appl.* **6** (1996), 219–236.
- [Won63] Y.C. Wong. A global formulation of the condition for a curve to lie in a sphere. *Monatshefte für Mathematik* **67** (1963), 363–365.
- [Won72] Y.C. Wong. On a explicit characterization of spherical curves. *Proc. Amer. Math. Soc.* **34** (1972), 239–242.
- [YB08] M.Y. Yilmaz y M. Bektas. General properties of Bertrand curves in Riemann-Otsuki space. *Nonlinear Analysis* **69** (2008) 3225–3231.
- [ZTCS02] R. Zhang, P.S. Tsai, J.E. Cryer y M. Shah. Shape-from-shading: a survey. *The IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **21** (8) (2002), 690–706.