

**Generació espontània de vents en règim
de convecció tèrmica.**

Memòria presentada per
Joana d'Arc Prat Farran
per optar al grau de Doctora en Ciències.

Directors:

Josep Maria Massaguer Navarro,
Isabel Mercader Calvo.

Universitat Politècnica de Catalunya, Juliol 1996

*A
la Ignàsia
i
el Ramon.*

Agraeixo:

- la inestimable ajuda del Dr. J.M. Massaguer i de la Dra. I. Mercader, sense la qual no hauria estat possible aquest treball. Els agraeixo també l'interès, l'atenció i les discussions que hem dut a terme, totes elles profitoses,
- a la Dra. I. Mercader pel seu constant suport al llarg del desenvolupament del treball, especialment en l'etapa final,
- al Dr. D. Crespo per solucionar problemes tècnics i per l'ajuda en l'obtenció d'algunes gràfiques,
- als Dr. J. Sánchez, , Dr. F. Marqués i a la Dra. M. Net les suggerències en alguns dels temes,
- al Dr. Alastair Rucklidge i al Dr. Mike Proctor del DAMTP de la Universitat de Cambridge la seva atenció,
- en general a la resta dels companys del departament de Física Aplicada i del departament de Matemàtica Aplicada el seu suport,
- a l'organisme del CIMNE per proporcionar-me una beca de recerca durant la qual vaig fer part del treball que presento i al Dr. J.M. Massaguer per confiar en mi durant la durada d'aquesta beca,
- a l'organisme del CESCA per proporcionar-nos temps de càlcul en les màquines del CRAY.

Índex

1	Introducció	3
1.1	Generació espontània de vents en el problema de Rayleigh-Bénard	3
1.2	Objectius. Presentació del treball	6
2	Equacions i simetries pel problema de Rayleigh-Benard 2D. Estabilitat de l'estat conductiu	9
2.1	Equacions	9
2.1.1	Velocitat mitjana i flux de massa	10
2.1.2	Equacions de treball	11
2.2	Simetries i solucions	14
2.3	Característiques de l'estabilitat lineal de l'estat conductiu i condicions de ressonància	16
2.4	Tractament numèric: Mètodes espectrals	20
2.4.1	Implementació dels mètodes espectrals a les equacions d'evolució	21
2.4.2	Implementació eficient dels mètodes espectrals	23
2.4.3	Mètode pseudoespectral: aliasing	24
2.4.4	Càlcul numèric dels valors de les derivades d'una funció a partir dels valors de la funció	25
3	Estabilitat lineal d'una parella de rolls	27
3.1	Introducció. Simetries	27
3.2	Anàlisi d'estabilitat. Separació en subproblemes	27
3.3	Càlcul d'una solució amb una parella de rolls	29
3.3.1	Càlcul del valor de ω al contorn	33
3.3.2	Sistema d'equacions discretitzat	35
3.4	Discretització del problema de valors propis	36
3.4.1	Velocitat mitjana	37
3.4.2	Invariància per trasllació de la solució estacionària	38
3.4.3	Separació en subproblemes	38
3.4.4	Sistemes de valors propis discretitzats	39
3.5	Corbes d'estabilitat marginal per a $\sigma = 10$	42
3.5.1	Errors de discretització	42
3.5.2	Corbes d'estabilitat	46
3.6	Discussió	49

4	Dinàmica d'una parella de rolls	53
4.1	Equacions d'evolució: discretització	53
4.2	Resultats per a $\sigma = 10$. Jerarquia de solucions no lineals	56
4.2.1	Cas $L = 1$	56
4.2.2	Cas $L = 2$	63
4.2.3	Cas $L = 4$	68
4.2.4	Cas de la inestabilitat que desestabilitza el vent amb perfil simètric	71
4.3	Models d'equacions d'amplitud	75
4.4	Discussió	85
5	Estabilitat lineal de n parelles de rolls	89
5.1	Introducció	89
5.2	Anàlisi d'estabilitat: Teoria de Floquet	90
5.2.1	Invariància per a τ_a . Teoria de Floquet	91
5.2.2	Invariància per a S_1 . Valors propis doblats	93
5.2.3	Uns quants exemples	94
5.2.4	Corba d'estabilitat marginal per a un clonatge amb n parelles de rolls	94
5.3	Discretització	95
5.4	Resultats per a $\sigma = 10$	98
5.4.1	Corbes d'estabilitat marginal	98
5.4.2	Solucions estacionàries i estabilitat	107
5.5	Discussió	120
6	Conclusions	123
A	Un mètode numèric alternatiu per l'anàlisi d'estabilitat	127
B	Càlcul dels termes provinents dels jacobians	133

1 Introducció

1.1 Generació espontània de vents en el problema de Rayleigh-Bénard

El problema de Rayleigh-Bénard consisteix en l'estudi d'una capa de fluid confinada entre dues superfícies horitzontals infinites, bones conductores de la calor. Les dues superfícies es mantenen a temperatura constant, i la inferior és la més calenta. L'única força externa que actua sobre el fluid és la força de la gravetat.

En sotmetre la capa plana de fluid a un gradient advers de temperatura, degut a l'expansió tèrmica, un element de fluid a la part inferior és més lleuger que a la part superior de la capa, i per tant, aquest tendeix a pujar per causa de la força d'Arquímedes. De la mateixa manera, un element de fluid fred de la part superior tendeix a baixar perquè és més pesat. El resultat és una capa de fluid potencialment inestable on el fluid tendeix a redistribuir-se. Això no obstant, aquesta tendència natural del fluid es veu inhibida pels efectes dissipatius del frenat viscos i la difusió calorífica molecular. Per tant, la diferència de temperatura a què està sotmesa la capa ha d'excedir un cert valor crític abans que aquesta inestabilitat tèrmica es pugui manifestar. Mentre la diferència de temperatures de la capa no supera aquest valor, el fluid està en repòs i el transport de calor a l'interior del fluid té lloc exclusivament per conducció. Quan el gradient de temperatura supera el valor crític, es genera en el fluid una combinació de corrents ascendents i descendents que s'organitzen en una geometria poligonal formant les anomenades cel·les convectives. A l'inici de la convecció, aquestes cel·les es distribueixen periòdicament en forma de rolls rectilinis paral·lels entre sí, l'amplada de cadascun és comparable a l'alçada de la capa de fluid. El moviment que es produeix a les cel·les és bidimensional - tota la informació es troba en un pla vertical que és transversal als eixos dels rolls. La unitat bàsica de la configuració la formen una parella de rolls adjacents, els rolls tenen sempre sentits contraris de rotació i són simètrics respecte del pla vertical que els separa (Chandrasekhar 1961, Schluter et al. 1965).

L'estabilitat lineal d'aquests rolls primaris i estacionaris davant de pertorbacions bidimensionals i tridimensionals ha estat estudiada per F.H. Busse i col·laboradors (Busse & Clever 1974, Clever & Busse 1979). Els seus resultats mostren que el rolls són inestables davant diferents tipus d'inestabilitats secundàries que han estat batejades com: *zig-zag*, *roll-creuat*, *Eckhaus*, *nus*,

oscil·latòria, *blob* i *varicosa-desviada*, que són o no dominants segons els valors dels paràmetres. De totes elles l'única que és bidimensional és la d'Eckhaus. Els límits d'estabilitat estan recollits en un diagrama que és conegut a la literatura com *Busse's balloon* i que ha estat utilitzat com a referència en la majoria de treballs relacionats amb el tema de convecció.

Malgrat la gran difusió d'aquests treballs, existeixen dos aspectes que no van ser contemplats. Un és la possibilitat que una pertorbació bidimensional amb la mateixa periodicitat fonamental que el flux primari pugui desenvolupar un flux mig, és a dir, un flux tal que el seu camp de velocitats tingui una mitjana horitzontal no nul·la. L'altre aspecte que no va ser contemplat és la possibilitat que pels mateixos valors del paràmetres existeixi més d'una solució amb les mateixes característiques que els rols primaris (Mizushima & Fujimura 1992). Aquests aspectes, incidint principalment en el primer, seran tractats en detall en aquest treball.

Hi ha evidència experimental que demostra que la convecció tèrmica en una capa de fluid escalfada per sota pot mostrar moviments al llarg de la capa del fluid (Willis & Deardorff 1970, Krishnamurti & Howard 1981). Aquests moviments donen lloc a un camp de velocitat mitjana no nul·la. Com que són fluxes a una escala més gran que l'amplada de cada roll s'anomenen *fluxes a gran escala* o *vents*. Als experiments citats, s'observa com les estructures convectives poden inclinar-se espontàniament, la qual cosa significa que s'ha desestabilitzat un moviment de cisallament. Són fluxos amb un camp de velocitat mitjana horitzontal amb un perfil antisimètric en la coordenada vertical.

En l'experiment de Willis & Deardorff (1970) - realitzat en un contenidor llarg comparat amb l'alçada de la capa i ple d'aire ($\sigma = 0.71$) - el cisallament s'inverteix periòdicament i la inclinació dels rols oscil·la de dreta a esquerra i viceversa. Krishnamurti & Howard (1981) també observen moviments a gran escala - en aquest cas en un contenidor llarg però ple d'aigua ($\sigma = 7$). Dedueixen que aquests fluxes de cisallament que apareixen espontàniament es mantenen pel transport de moment, el qual ve donat per un tensor de Reynolds no nul·la, $\tau_{xz} = \overline{v_x v_z} \neq 0$, on v_x i v_z són les components horitzontal i vertical de la velocitat respectivament i la barra significa promitjar horitzontalment. En particular, en el cas bidimensional qualsevol trencament de la simetria de reflexió de cada parella de rols pot desestabilitzar un flux mig.

Krishnamurti & Howard (1981) també van observar una circulació a gran escala en convecció turbulenta en un anell, en un sentit a la part superior de l'anell i en l'altre sentit a la part inferior, demostrant que aquests fluxes es poden produir sense cap pressió externa imposada. En un altre experiment convectiu de Howard & Krishnamurti (1986) en una cel·la Hele-Shaw el fluxe

de cisallament que es genera - a diferència dels casos anteriors - és estacionari.

Les primeres simulacions numèriques en convecció 2D en una capa plana on apareixen solucions amb rolls inclinats estan fetes per Deardorff & Willis (1965). Aquestes són solucions amb un cisallament periòdic que estan calculades per a $\sigma = 0.71$. També s'han realitzat simulacions, en aquest contexte, en convecció per un fluid compressible (Hurlburt et al. 1984, Ginet & Sudan 1987). Els càlculs s'han fet fixant la periodicitat horitzontal i per tant s'han fet sobre la unitat bàsica, la qual s'anomena contenidor o caixa. En aquests dos darrers casos, a diferència del de Deardorff & Willis (1965), les simulacions s'han realitzat en contenidors de longitud molt petita, comparada amb l'alçada de la capa, on es produeixen cisallaments molt grans. Els fluxos són dependents del temps però la velocitat mitjana no canvia de signe amb el temps. Recentment s'han dut a terme algunes simulacions numèriques en convecció 2D en un contenidor de longitud petita ple d'un fluid de Boussinesq (Finn 1993). La motivació d'aquest darrer treball prové del camp de la física de plasmes, -per ser precisos, la motivació és deguda a les inestabilitats observades a la frontera d'un tokamak on també s'han observat fluxos a gran escala-, però no hi ha hagut cap intent d'explorar la dinàmica per longituds més grans. Un altre cas on s'han trobat aquestes inestabilitats de cisallament és en convecció en presència d'un camp magnètic (Rucklidge & Matthews 1993).

Hi ha hagut alguns intents recents de modelar aquests fluxos a gran escala. En dos d'ells (Howard & Krishnamurti 1986, Massaguer et al. 1992) la dinàmica no lineal s'ha explorat considerant truncacions modals que donen una descripció convincent de la inclinació dels rolls. Les expansions són de tipus Galerkin, de manera tal que la paritat es pot trencar espontàniament tant en la coordenada x com en la z , i així es permet $\tau_{xz} \neq 0$. Ambdós articles només inclouen un mode horitzontal, i així forcen un acoblament en horitzontal. Com a conseqüència, l'acoblament pot generar un mode $n = 0$, el camp de velocitat mitjana, que bifurca del flux primari i en trenca la paritat.

Tot i que en tots els experiments i simulacions que hem citat es produeixen fluxes a gran escala en forma d'una inestabilitat de cisallament veurem com també hi ha la possibilitat d'aparició de fluxes amb una velocitat mitjana amb un perfil simètric (Armbruster 1987), i no antisimètric.

Un mecanisme diferent que pot produir fluxos a gran escala és el de la ressonància. Fins ara s'han deduït alguns models, tant usant expansions de petita amplitud com usant mètodes de teoria de grups. Si la longitud horitzontal del contenidor és tal que admet dues solucions o més, cadascuna amb diferent nombre de parelles de rolls, aquestes es poden acoblar no linealment, i per exemple, poden generar solucions amb vent. La ressonància anomenada 1:2, que

té lloc entre modes amb número d'ona fonamental α i 2α , ha estat la primera examinada en el context de l'aparició de vent (Busse & Or 1986, Armbruster 1987).

1.2 Objectius. Presentació del treball

En el treball que presentem estudiem la convecció bidimensional en una capa plana periòdica entre dues superfícies perfectament conductores sotmesa a un gradient advers de temperatura. Es pretén analitzar totes les inestabilitats secundàries del flux primari, així com la dinàmica no lineal de les solucions bifurcades i inestabilitats posteriors. Com ja hem comentat, d'entre aquestes inestabilitats hi ha les que generen vent. Les condicions de contorn que utilitzarem a les superfícies horitzontals (condicions de contorn rígides) permeten l'existència d'esforços tallants no nuls, per això considerarem no només la possibilitat d'aparició de vent, sino la possibilitat d'un flux de massa net no nul.

Plantejarem el problema en una caixa periòdica de longitud L i analitzarem totes les solucions estacionàries que hi poden cabre. És a dir, analitzarem solucions de longitud L tant amb una parella de rolls com amb més d'una parella. Aquests dos casos requereixen un estudi diferent, és per això que hem dividit la presentació del treball en dues parts que estan estructurades de la següent manera:

La primera part consta dels capítols 2, 3 i 4. Al capítol 2 presentem les equacions i simetries del sistema, la primera inestabilitat del règim conductiu i condicions de ressonància, així com els mètodes espectrals que s'usen pel càlcul numèric. En aquesta part es considera principalment contenidors amb una sola parella de rolls. Al capítol 3 es duu a terme l'anàlisi d'estabilitat de solucions amb una sola parella de rolls, el qual per causa de les simetries del sistema factoritza en quatre problemes. En aquest capítol es presenten les corbes d'estabilitat per número de Prandtl $\sigma = 10$. Al capítol 4 presentem la dinàmica no lineal de les solucions bifurcades i posteriors transicions per aquest mateix valor de σ . També presentem un model d'amplituds que justifica el caràcter de les bifurcacions secundàries que ens apareixen i que permet entendre el comportament no lineal de les solucions prop de la bifurcació.

La segona part del treball la presentem al capítol 5. Calculem totes les solucions amb més d'una parella de rolls que caben en un contenidor de longitud L i n'analitzem l'estabilitat enfront de qualsevol pertorbació periòdica que hi pugui cabre en aquest contenidor. Utilitzant la teoria de Floquet considerem les

diferents pertorbacions periòdiques i reduïm l'anàlisi d'estabilitat a un domini de longitud la periodicitat bàsica de la solució. Es calcula també per Prandtl $\sigma = 10$, quin és el rang de paràmetres on les parelles de rolls són estables enfront de qualsevol pertorbació periòdica. Veurem com i quines ressonàncies tenen un paper important en aquest diagrama d'estabilitat.

Com ja hem comentat en la introducció, també hem analitzat aquelles zones de paràmetres on apareix més d'una solució estacionària amb les mateixes característiques que els rolls primaris. Com que en variar els paràmetres aquestes solucions evolucionen cap a solucions amb diferent periodicitat fonamental, és a dir, canvia el número de parelles de rolls que caben a la caixa periòdica, hem optat per incloure'n l'estudi en el capítol 5.

Finalment al capítol 6 presentem un resum del treball presentat i les conclusions més generals. La discussió detallada dels capítols 3, 4 i 5 s'ha presentat al final de cadascun dels capítols.

2 Equacions i simetries pel problema de Rayleigh-Benard 2D. Estabilitat de l'estat conductiu

2.1 Equacions

Les equacions corresponents al problema de Rayleigh-Bénard, quan es considera un fluid en aproximació de Boussinesq, són la condició d'incompressibilitat, l'equació de Navier-Stokes i l'equació de la conservació de l'energia. Si adimensionalitzem les longituds respecte de l'alçada d de la capa, el temps en unitats de temps tèrmic d^2/κ , on κ és difusivitat tèrmica, i la temperatura respecte de la diferència de temperatures a la capa, ΔT , obtenim les següents equacions

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\sigma^{-1}(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + Ra (T - T_0) \mathbf{k} + \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (1.3)$$

on $\mathbf{v}$ és la velocitat del fluid, T és la temperatura del fluid, T_0 és la temperatura a la superfície de dalt, p és la pressió total, exepte el terme hidrostàtic, i $\mathbf{k}$ és el vector unitari vertical.

Els números adimensionals de Rayleigh Ra i de Prandtl σ estan definits per

$$Ra = \frac{g\alpha}{\kappa\nu} \Delta T d^3, \quad \sigma = \frac{\nu}{\kappa},$$

on g és l'acceleració deguda a la gravetat, α és el coeficient d'expansió tèrmica i ν és la viscositat dinàmica.

El número de Rayleigh i el número de Prandtl formen, junt amb la periodicitat del contenidor, el conjunt de paràmetres de control del problema. El número de Rayleigh constitueix una mesura de la diferència de temperatura a la qual es mantenen les superfícies, i el número de Prandtl és característic de cada fluid.

Tractarem el problema bidimensional amb condicions de contorn periòdiques en la direcció horitzontal x , amb periodicitat L , i superfícies adherents i perfectament conductores, en direcció vertical z :

$$v_x = v_z = 0, \quad z = \pm \frac{1}{2},$$

$$T(z = -\frac{1}{2}) = T_0 + 1, \quad T(z = +\frac{1}{2}) = T_0.$$

2.1.1 Velocitat mitjana i flux de massa

Per satisfer la condició d'incompressibilitat (1.1) expressem el camp de velocitats en termes de la funció de corrent χ :

$$\begin{cases} v_x = -\partial_z \chi, \\ v_z = \partial_x \chi. \end{cases}$$

Fent la mitjana horitzontalment de $v_z = \partial_x \chi$ i tenint en compte la periodicitat horitzontal s'obté

$$\overline{v_z} = 0.$$

Anomenarem *velocitat mitjana* o *vent* la mitjana horitzontal de v_x i la notarem per

$$U := \overline{v_x} = \frac{1}{L} \int_0^L v_x dx,$$

que només pot dependre de la component vertical i del temps.

Anomenarem *flux de massa* F la integral de la component horitzontal de la velocitat sobre una secció vertical. En termes de la funció de corrent es pot posar com:

$$F = \int_{-1/2}^{1/2} v_x dz = - \left[\chi(x, z = \frac{1}{2}) - \chi(x, z = -\frac{1}{2}) \right].$$

Les condicions de contorn $v_x = v_z = 0$ a $z = \pm 1/2$ impliquen que $\partial_z \chi = 0$ a $z = \pm 1/2$ i que la funció de corrent sigui constant a les tapes, de fet com que χ està definida llevat de constant podem prendre una funció de corrent tal que

$$\chi(x, z = \frac{1}{2}) = C, \quad \chi(x, z = -\frac{1}{2}) = 0.$$

Ha sigut freqüent en l'estudi d'aquest problema prendre la funció de corrent igual a zero a les tapes (Clever & Busse 1987), amb la qual cosa s'imposa que el flux de massa sigui zero.

Com que volem ocupar-nos de la convecció tèrmica bidimensional en dominis periòdics sota les condicions més generals possibles, formularem el problema de forma tal que pugui aparèixer un flux de massa net al llarg del contenidor. Per això separem la velocitat entre la seva mitjana horitzontal i la seva desviació:

$$\begin{cases} v_x = -\partial_z \chi = U - \partial_z \chi', \\ v_z = \partial_x \chi = \partial_x \chi'. \end{cases} \quad (2)$$

La condició de contorn $v_z = 0$ a $z = \pm 1/2$ implica $\chi'(x, z = \frac{1}{2}) = C'$, $\chi'(x, z = -\frac{1}{2}) = 0$ fent un raonament anàleg al que hem fet abans. D'altra banda la definició $U := \overline{v_x}$ implica $\partial_z \overline{\chi'} = 0$, i això vol dir que $\overline{\chi'}$ és una funció que no depen de z i per tant considerant les condicions de contorn per χ' es compleix $\overline{\chi'} = C' = 0$. Imposem, doncs, les condicions

$$\overline{\chi'} = 0,$$

$$\chi' = \partial_z \chi' = U = 0, \quad z = \pm \frac{1}{2}.$$

I el flux de massa net ve donat per

$$F = \int_{-1/2}^{1/2} v_x dz = \int_{-1/2}^{1/2} U(z, t) dz,$$

el qual només pot dependre de t .

2.1.2 Equacions de treball

Formularem el problema de Rayleigh-Benard bidimensional en un domini $(x, z) \in [0, L] \times [-1/2, 1/2]$ en termes de la velocitat mitjana, la desviació de la vorticitat i la desviació de la temperatura respecte de la de l'estat conductiu. Ho farem als apartats (A), (B) i (C) respectivament. A l'apartat (D) resumirem les equacions corresponents.

A. Equació per la velocitat mitjana

Per obtenir l'equació per la velocitat mitjana prenem la component x de l'equació de Navier-Stokes (1.2) i en fem la mitjana horitzontalment sobre el domini periòdic $[0, L]$:

$$\overline{\partial_t v_x} + \overline{\mathbf{v} \cdot \nabla v_x} = -\overline{\partial_x p} + \sigma \overline{\nabla^2 v_x}. \quad (3)$$

Com que ∂_t commuta amb el promig horitzontal, $\overline{\partial_t v_x} = \partial_t \overline{v_x}$. Alhora, per causa de la periodicitat horitzontal, es compleix $\overline{\partial_x p} = 0$ i $\overline{\partial_{xx}^2 v_x} = 0$. Si a més usem que ∂_z també commuta amb la mitjana horitzontal, el terme de (3) que prové del laplacà del qual s'ha fet la mitjana és

$$\overline{\nabla^2 v_x} = \partial_{zz}^2 \overline{v_x}.$$

Per causa de la condició d'incompressibilitat, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, es compleix: $\mathbf{v} \cdot \nabla v_x = \nabla \cdot (v_x \mathbf{v})$ i el terme no lineal de (3) es pot escriure com:

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \nabla v_x} = \overline{\nabla \cdot (v_x \mathbf{v})} = \overline{\partial_x (v_x^2)} + \overline{\partial_z (v_x v_z)} = \partial_z \overline{v_x v_z}.$$

A més, com que separem $\mathbf{v}$ entre la mitjana horitzontal i la seva desviació com (2) amb $\overline{\chi'} = 0$, i on $U := \overline{v_x}$, es compleix

$$\overline{v_x v_z} = \overline{(U - \partial_z \chi') \partial_x \chi'} = \overline{U \partial_x \chi'} - \overline{\partial_x \chi' \partial_z \chi'} = U \overline{\partial_x \chi'} - \overline{\partial_x \chi' \partial_z \chi'} = -\overline{\partial_x \chi' \partial_z \chi'}.$$

Finalment l'equació per la velocitat mitjana U ve descrita per:

$$\partial_t U - \partial_z \left(\overline{\partial_x \chi' \partial_z \chi'} \right) = \sigma \partial_{zz}^2 U.$$

B. Equació per la desviació de la vorticitat respecte de la seva mitjana horitzontal

Prenem el rotacional a l'equació de Navier-Stokes (1.2). Si usem la condició d'incompressibilitat obtenim la següent equació:

$$\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = -Ra \sigma \partial_x T + \sigma \nabla^2 \omega, \quad (4)$$

on ω és per definició la component y de la vorticitat $\nabla \times \mathbf{v} = (0, \partial_z v_x - \partial_x v_z, 0)^T$. Com abans, expremem la velocitat en funció de U i χ' . Amb aquesta separació

$$\omega = -\nabla^2 \chi = -\nabla^2 \chi' + \partial_z U,$$

i com que $\overline{\omega} = \partial_z U$, aleshores $\omega' := \omega - \overline{\omega} = -\nabla^2 \chi'$ que anomenem la desviació de la vorticitat. Es compleix per tant

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \omega = J(\chi, \omega) = J(\chi', \omega') + U \partial_x \omega' + \partial_x \chi' \partial_{zz}^2 U,$$

on J és el jacobià definit per

$$J(f, g) := \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}.$$

Si restem a l'equació (4) la mateixa equació de la qual s'ha fet la mitjana horitzontal, obtenim l'equació per la desviació de la vorticitat:

$$(\partial_t + U \partial_x - \sigma \nabla^2) \omega' + Ra \sigma \partial_x T + \partial_{zz}^2 U \partial_x \chi' + J(\chi', \omega') - \overline{J(\chi', \omega')} = 0.$$

C. Equació per la desviació de la temperatura respecte de la del règim conductiu

Si separem la temperatura com $T = T' + \frac{1}{2} - z + T_0$, on T' és la desviació de la temperatura respecte de la de l'estat conductiu, l'equació de la calor (1.3) en termes de T' és

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)T' = v_z + \nabla^2 T'.$$

Si expressem la velocitat en termes de la funció de corrent i separem la velocitat mitja obtenim

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T' = J(\chi, T') = J(\chi', T') + U \partial_x T',$$

aleshores l'equació de la conservació de l'energia s'expressa

$$(\partial_t + U \partial_x - \nabla^2)T' + \partial_x \chi' + J(\chi', T') = 0.$$

D. Equacions d'evolució

Resumint les equacions amb les quals treballarem, per la velocitat mitjana, la desviació de la funció de corrent i la desviació de la temperatura respecte la de l'estat conductiu són:

$$(\partial_t - \sigma \partial_{zz}^2)U - \partial_z(\overline{\partial_z \chi' \partial_x \chi'}) = 0, \quad (5.1)$$

$$(\partial_t + U \partial_x - \sigma \nabla^2)\omega' + Ra \sigma \partial_x T' + \partial_{zz}^2 U \partial_x \chi' + J(\chi', \omega') - \overline{J(\chi', \omega')} = 0, \quad (5.2)$$

$$(\partial_t + U \partial_x - \nabla^2)T' + \partial_x \chi' + J(\chi', T') = 0, \quad (5.3)$$

on $\omega' = -\nabla^2 \chi'$ i $\overline{\chi'} = 0$. Les condicions de contorn en vertical són

$$U = \chi' = \partial_z \chi' = T' = 0 \quad z = \pm \frac{1}{2}. \quad (5.4)$$

Un altre número adimensional important d'aquest problema, a part del número de Rayleigh Ra i el número de Prandtl σ , és el número de Nusselt Nu que és una mesura del flux de calor transportat verticalment. Fent la mitjana horitzontal de (1.3) tenim:

$$\partial_t \overline{T} + \partial_z \overline{C} = 0,$$

on $\overline{C} = \overline{v_z T} - \partial_z \overline{T}$ és la mitjana horitzontal del flux de calor. El número de Nusselt és una mesura adimensional d'aquest flux. Definint-lo com el flux de calor en una de les tapes, on $v_z = 0$, tenim

$$Nu = -\partial_z \overline{T}|_{z=\frac{1}{2}} = 1 - \partial_z \overline{T'}|_{z=\frac{1}{2}}.$$

Cal remarcar que el transport de calor per conducció, val $\overline{C} = 1$.

2.2 Simetries i solucions

Estudiem el conjunt de transformacions per les quals el sistema d'equacions (5) és invariant, que anomenem també simetries del sistema.

En primer lloc, el sistema (5) és invariant per a trasllacions contínues espacials,

$$\tau_a : (x, z, t) \rightarrow (x + a, z, t), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (U, \chi', T').$$

És a dir, si $(U(z), \chi'(x, z), T'(x, z))$ és solució de (5), aleshores $(U(z), \chi'(x + a, z), T'(x + a, z))$ també n'és solució, i per qualsevol a , perquè χ' i T' són funcions que sempre apareixen derivades en les equacions. El sistema (5) és també invariant per a trasllacions contínues temporals, i es defineixen de manera anàloga.

A més de les simetries contínues per trasllació, les equacions també admeten simetries finites. Les simetries finites de (5) són:

(a) La simetria de reflexió

$$S_1 : (x, z, t) \rightarrow (-x, z, t), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (-U, -\chi', T'). \quad (6)$$

El sistema d'equacions és invariant per a S_1 , o té la simetria S_1 , quan es compleix: si $(U(z), \chi'(x, z), T'(x, z))$ és solució de (5) aleshores $(-U(z), -\chi'(-x, z), T'(-x, z))$ també n'és solució.

(b) La simetria respecte de l'origen

$$S_2 : (x, z, t) \rightarrow (-x, -z, t), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (-U, \chi', -T'). \quad (7)$$

El sistema d'equacions és invariant per a S_2 si $(U(z), \chi'(x, z), T'(x, z))$ és solució de (5) aleshores $(-U(-z), \chi'(-x, -z), -T'(-x, -z))$ també n'és solució.

En dominis periòdics de periodicitat L , a més de les trasllacions contínues, les trasllacions finites de la meitat de la longitud L tindran un paper important en el problema que estudiem. Per això introduïm la trasllació finita

$$S_3 : (x, z, t) \rightarrow (x + \frac{L}{2}, z, t), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (U, \chi', T'). \quad (8)$$

El conjunt de les transformacions $\{S_1, S_2, S_3\}$ juntament amb els seus productes defineixen un grup commutatiu G^* de simetries finites estacionàries de (5). El quadrat de cadascuna d'aquestes simetries és la identitat i cada transformació és la seva pròpia inversa.

Ahora es pot considerar simetries per a les solucions del sistema (5). Una solució es diu que té una certa simetria quan és invariant per la corresponent transformació. El significat de *simetries d'un sistema d'equacions* és diferent que el de *simetries de les solucions* d'aquest sistema, una solució de (5) té, per exemple, la simetria S_1 quan

$$U(z) = -U(z), \quad \chi'(x, z) = -\chi'(-x, z), \quad T'(x, z) = T'(-x, z).$$

És ben conegut que, independentment del Prandtl σ , si considerem el número de Rayleigh com el paràmetre del problema, existeix un valor del Rayleigh a partir del qual la solució més simètrica, el règim conductiu ($\mathbf{v} = 0$, $T = 0$), deixa de ser estable i bifurca amb trencament de la invariància per trasllació a una solució estacionària periòdica amb $\mathbf{v}$ i T diferents de zero i $U = 0$. Si aquesta solució periòdica té longitud d'ona fonamental L , és a dir, no és invariant per a cap trasllació de longitud menor, aleshores és invariant per al següent subgrup de simetries G de G^* :

$$G := \{I, S_1, S_2 \times S_3, S_1 \times S_2 \times S_3\}, \quad (9)$$

on I és la identitat. Usant (6), (7) i (8) les simetries $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$ són

$$S_2 \times S_3 : (x, z, t) \rightarrow \left(\frac{L}{2} - x, -z, t\right), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (-U, \chi', -T'), \quad (10)$$

$$S_1 \times S_2 \times S_3 : (x, z, t) \rightarrow \left(x - \frac{L}{2}, -z, t\right), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (U, -\chi', -T'). \quad (11)$$

La solució estable que bifurca del valor crític $(L_c, Ra_c) \simeq (2.016, 1707.762)$ apareix en forma d'una parella de rolls i es caracteritza per ser invariant per al grup de simetries G .

Les solucions invariants per a G poden bifurcar també via trencament de simetries a solucions invariants per a subgrups de G . De fet, veurem que una parella de rolls pot bifurcar de quatre maneres diferents via trencament de simetries, variant Ra , σ o L . Com que el grup G conté tres subgrups invariants de simetries, cadascun dels quals trenca dues de les simetries no trivials, però és invariant per a la tercera simetria (producte de les altres dues), i com que la intersecció d'aquests tres subgrups és el grup complet G , una parella de rolls pot bifurcar a:

(i) Solucions invariants només per a S_1 , les quals per causa de (6) no tenen velocitat mitjana, $U(z, t) = -U(z, t) = 0$.

(ii) Solucions invariants només per a $S_2 \times S_3$, en aquest cas si tenen velocitat mitjana el seu perfil ha de ser antisimètric per causa de (10), $U(z, t) = -U(-z, t)$. A més el flux de massa és zero.

(iii) Solucions invariants per a $S_1 \times S_2 \times S_3$, que si tenen velocitat mitjana aquesta ha de tenir el perfil simètric per causa de (11), $U(z, t) = U(-z, t)$.

(iv) Solucions que tenen totes les simetries de G , per exemple quan es trenca la invariància en el temps. Són solucions sense velocitat mitjana.

D'aquests quatre tipus de solucions les que tenen vent $U \neq 0$, (ii) i (iii), estan lligades al trencament de la simetria S_1 de les solucions bàsiques. Les úniques solucions que tenen la simetria S_1 són (i) i (iv) i cap de les dues no té velocitat mitjana. Les solucions que poden tenir flux de massa diferent de zero, (iii), són les que tenen velocitat mitjana amb un perfil simètric.

Si es trenca la invariància temporal, es pot definir una nova simetria finita quan la solució que bifurca és periòdica en el temps de període τ . Usant arguments similars als que hem usat per introduir (8), definirem la següent simetria finita

$$S_4 : (x, z, t) \rightarrow (x, z, t + \frac{\tau}{2}), \quad (U, \chi', T') \rightarrow (U, \chi', T').$$

Aquesta és la simetria que ens ajudarà a descriure les simetries d'algunes solucions que bifurquen dels rolls, al capítol 4.

Com i quan bifurquen els rolls a aquestes altres solucions és del que ens ocuparem en detall al pròxim capítol. De la seva dinàmica no lineal ens n'ocuparem al capítol 4. A la pròxima secció ens ocupem amb més detall de la inestabilitat primària que genera convecció així com de les condicions de ressonància.

2.3 Característiques de l'estabilitat lineal de l'estat conductiu i condicions de ressonància

L'estabilitat lineal de l'estat conductiu en el problema de Rayleigh-Benard ha estat investigada per Low (1929), Pellew & Sothwell (1940), Reid & Harris (1958). La transició d'estabilitat a inestabilitat es produeix via una bifurcació estacionària supercrítica. La pertorbació $(U = 0, \chi', T')$ més inestable té estructura espacial que és simètrica respecte el pla mig $z = 0$, i periòdica en direcció horitzontal amb longitud d'ona fonamental L . Són pertorbacions proporcionals a

$$q(z)e^{i\alpha x}e^{\lambda t},$$

amb $q(z)$ parell i on $\alpha = 2\pi/L$ és el nombre d'ona fonamental de la pertorbació. Són els *estats de modes purs* o *estats purs*. Els valors de (α, Ra) pels quals es troba una funció pròpia $q(z) \neq 0$ amb valor propi $\lambda = 0$ ens donen la corba d'estabilitat marginal convectiva i és on es produeix la inestabilitat primària del règim conductiu. La corba marginal resultant no depen del número de Prandtl. A la figura 1 representem el número de Rayleigh pel qual una pertorbació amb nombre d'ona fonamental α esdevé inestable. El valor mínim de la corba, que és el valor crític, ve donat per $(\alpha_c, Ra_c) \simeq (3.1163236, 1707.762)$, la longitud d'ona corresponent és $L_c \simeq 2.016$. Tot i que la funció pròpia sobre la corba d'estabilitat marginal té estructura vertical parell, quan s'augmenta el valor del Rayleigh la solució que es genera no linealment ja no és parell en z . Per sobre $n = 1$ les solucions periòdiques amb nombre d'ona fonamental α que bifurquen de l'estat conductiu són invariants per al grup de simetries G on $L = 2\pi/\alpha$.

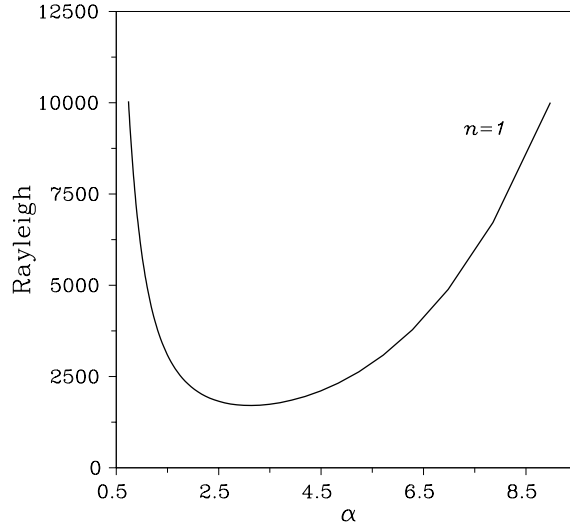


Figura 1: Corba d'estabilitat marginal de l'estat conductiu.

En fixar la periodicitat horitzontal, el valor del Rayleigh pel qual l'estat conductiu bifurca a una solució amb longitud d'ona fonamental L , en particular de periodicitat L , és el mateix pel qual l'estat conductiu bifurca a la mateixa solució considerant-la de periodicitat $2L$, i en general nL . A la figura 2 representem número de Rayleigh en funció de la periodicitat, la corba $n = 1$ es desdobra per cada n , reescalant L per nL . Fixada la periodicitat L , direm que $n = 1$ desestabilitza una parella de rols de periodicitat L , $n = 2$ desestabilitza una caixa de periodicitat L amb dues parelles de rols idèntiques, i així successivament.

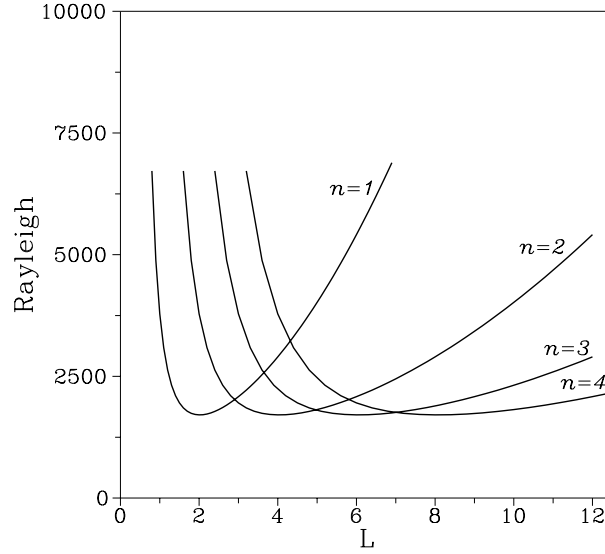


Figura 2: Corbes marginals de l'estat conductiu. Número de Rayleigh en funció de la periodicitat L del contenidor. Les corbes etiquetades amb n corresponen a la inestabilitat de l'estat conductiu a n parelles de rolls idèntiques.

Fixada la longitud del contenidor en L , existeixen valors del Rayleigh pels quals coexisteixen més d'una solució estacionària, amb una, dues o més parelles de rolls. Per aquests valors es poden produir fenòmens ressonants per causa de la interacció no lineal de les diferents solucions. En particular, sobre les corbes d'estabilitat marginal de la figura 2, en tots els punts d'intersecció de les diferents corbes es produeix una bifurcació múltiple de dos estats purs. Direm que en aquests punts es produeix una ressonància exacta entre els dos estats purs estacionaris. Segons la definició de Fujimura (1992), fixada la periodicitat L i per un mateix valor del Rayleigh, si tenim dos estats purs proporcionals a

$$q_1(z)e^{i\alpha_1 x}e^{\lambda_1 t}, \quad q_2(z)e^{i\alpha_2 x}e^{\lambda_2 t},$$

amb q_1 i q_2 funcions parells i $\alpha_2 > \alpha_1$ tenim una *ressonància* entre aquests dos estats purs de raó $m : m'$ amb $m < m'$ quan

$$m'\alpha_1 = m\alpha_2, \tag{12.1}$$

$$m'\alpha_1\lambda_1 = m\alpha_2\lambda_2. \tag{12.2}$$

La condició (12.2) es compleix fàcilment si es consideren dos estats purs sobre la corba marginal (on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) i la condició (12.1) es compleix quan es

consideren estats purs sobre les interseccions entre les diferents corbes n de la figura 2. De fet en aquest cas la ressonància és deguda a una bifurcació múltiple de dos estats purs estacionaris amb nombres d'ona fonamental α_1 i α_2 .

Si cadascun dels estats purs es representa per una amplitud, es poden trobar equacions acoblades per les amplituds que descriuen la dinàmica no lineal deguda a la interacció entre els dos estats, prop d'on es produeix la ressonància exacta. Pel problema que tractem ha estat estudiada per exemple la ressonància 1:3 (Mizushima & Fujimura 1992), és a dir, la interacció lineal dels dos estats purs amb nombres d'ona fonamental α i 3α a la intersecció de $n = 1$ amb $n = 3$. Les solucions d'aquestes equacions d'amplitud, degudes a les interaccions no lineals entre aquests dos estats purs, són molt variades: estats híbrids, ones estacionàries, viatgeres, modulades,..., segons els valors dels paràmetres.

Al capítol 5, secció 4 veurem com en el treball que estudiem són importants les ressonàncies 1:3 (intersecció entre $n = 1$ i $n = 3$), 1:5 (intersecció entre $n = 1$ i $n = 5$), i en general 1: n si n és senar, i com són també importants les ressonàncies $n:n+1$ entre estats purs estacionaris (Knobloch & Guckenheimer 1983).

2.4 Tractament numèric: Mètodes espectrals

Els mètodes espectrals poden ser considerats com un desenvolupament extrem de la classe d'esquemes de discretització per equacions diferencials anomenats genèricament "method of weighed residuals" (MWR) (Finlayson & Scriven 1966). Els elements clau són les funcions d'expansió o aproximatives i les funcions test. Les funcions d'expansió són les funcions base d'un desenvolupament en sèrie truncada de la solució. Les funcions test s'usen per assegurar que l'equació diferencial es satisfà tan bé com es pot per l'expansió en sèrie truncada. Això es satisfà minimitzant el residu, és a dir, l'error produït en l'equació diferencial quan s'utilitza una expansió truncada en comptes de la solució exacta, respecte d'una norma adequada. Una condició equivalent és demanar que el residu compleixi una condició d'ortogonalitat respecte de cadascuna de les funcions test. També s'anomena fer una projecció ortogonal del residu.

L'elecció de la funció aproximativa és una de les característiques que distingeixen els mètodes espectrals dels elements finits i dels mètodes en diferències finites. Per un mètode spectral les funcions d'expansió són funcions globals infinitament diferenciables. Les més freqüents són els polinomis trigonomètrics, els polinomis de Chebyshev i els polinomis de Legendre.

L'elecció de la funció test dona lloc als tres esquemes espectrals més comuns anomenats Galerkin, col·locació i Tau.

En les aproximacions de *Galerkin* les funcions test són les mateixes que les funcions aproximatives. Són a més funcions infinitament diferenciables i cadascuna satisfà les condicions de contorn. Es força l'equació diferencial imposant que la integral del residu per cada funció test sigui zero.

En l'esquema de *col·locació* les funcions test són funcions delta de Dirac centrades en els anomenats punts de col·locació. Aquesta aproximació requereix que l'equació diferencial es compleixi exactament en els punts de col·locació. Aquest mètode és atractiu per causa de la facilitat amb què es pot aplicar a problemes no lineals.

L'aproximació de *Tau* és molt semblant al mètode de Galerkin, però en aquest cas les funcions test no han de complir les condicions de contorn.

En el treball que presentem usem un mètode combinat de col·locació i Galerkin, per això només explicarem, molt breument, com funcionen aquests dos mètodes.

2.4.1 Implementació dels mètodes espectrals a les equacions d'evolució

Donada una equació d'evolució per $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, la podem escriure com

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{M}\mathbf{u} + \mathcal{N}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega,$$

on $\mathcal{N}$ és un operador no lineal, $\mathcal{M}$ és un operador lineal, $\mathcal{B}$ és un operador lineal de contorn i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és el domini espacial amb contorn $\partial\Omega$.

Per cada t , suposem que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ pertany a un espai de Hilbert amb un producte escalar i una norma, de manera que per cada instant la solució pertanyi al subespai de funcions que verifiquen el contorn.

El procés de discretització consisteix a definir un espai de funcions d'aproximació X^N , un espai de funcions test Y^N , un operador Q^N de projecció ortogonal d'un espai de Hilbert que contingui X^N a l'espai Y^N . Sigui $\mathbf{u}^N$ una funció aproximativa de $\mathbf{u}$ desenvolupada en sèrie per les funcions aproximatives de X^N . Aleshores el problema discretitzat s'expressa:

$$Q^N(\partial_t \mathbf{u}^N + \mathcal{M}\mathbf{u}^N + \mathcal{N}(\mathbf{u}^N)) = 0, \quad \mathbf{u}^N \in X^N,$$

$$Q^N \mathcal{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^N = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, 0) = Q^N g(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega.$$

Mètode de Fourier-Galerkin

Si $u(x)$ és una funció periòdica, aquest serà el nostre cas, definida a $[0, 2\pi)$, s'acostuma a prendre com a funcions d'expansió a les funcions trigonomètriques e^{inx} , i la funció aproximada es representa com:

$$u^N = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_n e^{inx}.$$

Per minimitzar el residu, Galerkin pren com a operador de projecció la integral sobre tot el domini periòdic amb funcions test $\frac{1}{2\pi}e^{-inx}$, aleshores demanem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_t u^N + \mathcal{M}u^N + \mathcal{N}(u^N)) e^{-inx} dx = 0$$

per cada $n = -N/2 + 1, \dots, N/2$.

Mètode de col.locació

El mètode de col.locació pren com a funcions test les funcions delta de Dirac $\delta(x - x_j)$ en els punts de col.locació x_j , $j = 0 \div M$. Si

$$u^M(x) = \sum_{m=0}^M \hat{u}_m \phi_m(x),$$

és una aproximació de u tal que $u^M(x_j) = u(x_j)$, $j = 0 \div M$, aquest mètode demana que l'equació es compleixi en els punts de col.locació:

$$\partial_t u^M + \mathcal{M}u^M + \mathcal{N}(u^M)|_{x=x_i} = 0.$$

Les condicions de contorn determinaran en quins punts de col.locació s'ha d'imposar l'equació.

Quan s'utilitza aquest mètode segons quines siguin les funcions aproximatives escollirem convenientment els punts de col.locació. Els casos més típics de funcions aproximatives són els polinomis de Fourier i els de Chebyshev:

- *Sèries de Fourier.*

Quan aproximem la funció en sèries de Fourier una elecció usual dels punts de col.locació són punts equidistants:

$$x_j = \frac{2\pi}{N}j, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

en aquest cas la funció aproximada en aquests punts pren la forma

$$u^N(x_j) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_n e^{in \frac{2\pi}{N}j},$$

i s'anomena la transformada discreta de Fourier (TDF).

- *Sèries de Chebyshev.*

Si prenem els polinomis de Chebyshev $T_m(x) = \cos(m \arccos(x))$ per $m = 0 \div M$ i $x \in (-1, 1)$, els punts de col.locació que considerem són els punts de Gauss-Lobatto:

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi}{M}j\right), \quad j = 0, \dots, M.$$

Amb aquesta elecció obtenim aproximacions molt bones i a més econòmiques perquè $\mathcal{T}_m(x_j) = \cos(\frac{\pi j}{M}m)$, i per tant la funció aproximada i discretitzada pren la forma d'una suma en cosinus, la qual cosa permet utilitzar transformades ràpides.

2.4.2 Implementació eficient dels mètodes espectrals

És bàsic en qualsevol mètode espectral l'elecció de les funcions d'aproximació perquè influeixen decisivament en la seva convergència i eficàcia. El més freqüent és, com hem vist, utilitzar sèries de Fourier, si les condicions de contorn són periòdiques, i sèries de Chebyshev en cas contrari, de manera que en ambdós casos es pot implementar els mètodes de transformada ràpida de Fourier (FFT), a més de donar bones propietats de discretització. Els mètodes espectrals aprofiten la facilitat per calcular derivades i altres variant lineals i no lineals amb l'ajuda de la FFT.

Transformada ràpida de Fourier

La FFT és un algoritme recursiu per avaluar la transformada discreta i la seva inversa

$$u^N(x_j) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_n e^{in\frac{2\pi}{N}j}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

$$\hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u^N(x_j) e^{-in\frac{2\pi}{N}j}, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1,$$

economitzant el nombre d'operacions; d'aquesta manera es necessiten menys càlculs i s'obtenen menys errors d'arrodoniment.

L'algoritme de Cooley-Tukey permet sumar amb $5N \log_2 N$ operacions reals quan N és una potència de 2, mentre que el nombre d'operacions necessàries si fem la suma completa és de $8N^2$. En el treball que presentem s'implementen unes rutines (Canuto et al. 1987) que per funcions reals necessiten $\frac{5}{2}N \log_2 N$ operacions, amb N parell amb factors primers 2 i 3.

Per una sèrie de Chebyshev també es pot implementar el mètode de la FFT ja que són sumes de cosinus.

2.4.3 Mètode pseudoespectral: aliasing

Considerem el tractament de Fourier Galerkin del terme quadràtic

$$w(x) = u(x)v(x). \quad (1)$$

En el cas d'un desenvolupament en sèries infinites tenim

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{u}_m e^{imx}, \\ v(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_n e^{inx}, \\ \hat{w}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

d'on

$$\hat{w}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n. \quad (2)$$

Quan u, v, w s'aproximen per les respectives sèries de Fourier truncades de grau $N/2$, aleshores

$$\hat{w}_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n, \quad (3)$$

on $k \leq N/2$. Aquesta suma necessita $O(N^2)$ operacions, això és extremament car si es considera que el mètode de les diferències finites per un terme no lineal en necessita $O(N)$. Malgrat tot, mitjançant mètodes de transformades (Orszag 1970) es pot avaluar amb $O(N \log_2 N)$ operacions.

L'aproximació que s'usa per avaluar (3) amb el mètode de la transformada és: en primer lloc es transforma $\hat{u}_m$ i $\hat{v}_n$ a l'espai físic usant la transformada discreta de Fourier (TDF), seguit d'una multiplicació a l'espai físic, com (1), i finalment es determina $\hat{w}_k$ usant la inversa de la TDF. Però s'ha de fer amb compte. Per il·lustrar el punt subtil introduïm les transformades discretes

$$U_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx_j},$$

$$V_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{v}_k e^{ikx_j},$$

i definim

$$W_j = U_j V_j, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

i

$$\widehat{W}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} W_j e^{-ikx_j}, \quad k = -N/2, \dots, N/2-1,$$

on $x_j = 2\pi j/N$. Es pot veure que

$$\widehat{W}_k = \sum_{m+n=k} \widehat{u}_m \widehat{v}_n + \sum_{m+n=k \pm N} \widehat{u}_m \widehat{v}_n = \widehat{w}_k + \sum_{m+n=k \pm N} \widehat{u}_m \widehat{v}_n.$$

El segon terme de la dreta és l'error d'aliasing. Quan els coeficients $\widehat{u}_m, \widehat{v}_n$ amb $|m|, |n| > N/4$ són $O(\epsilon)$ aleshores l'error d'aliasing és com a molt d'aquest ordre. Agafant N suficientment gran podem fer que aquest error sigui petit.

Amb aquest mètode avaluar (3) costa 3FFTs i N multiplicacions, en total $\frac{15}{2}N \log_2 N$ multiplicacions.

2.4.4 Càlcul numèric dels valors de les derivades d'una funció a partir dels valors de la funció

Sigui $f(z) = \sum_{m=0}^M \widehat{a}_m \mathcal{T}_m(z)$.

Suposem que coneixem f en els punts de col·locació de Gauss-Lobatto $\{z_j\}_{j=0}^M$. Mitjançant transformades ràpides amb cosinus s'obtenen els coeficients $\{\widehat{a}_m\}_{m=0}^M$, aleshores operant convenientment amb aquests coeficients i antitransformant podem calcular les derivades de f en $\{z_j\}_{j=0}^M$.

Direm que a partir de

$$(f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_M)),$$

i transformant obtenim

$$(Df(z_0), Df(z_1), \dots, Df(z_M)).$$

Però algunes vegades és més convenient posar la derivada en funció dels valors de la funció de forma matricial. Per exemple, suposem que tenim dues condicions de contorn per la f i que són combinació lineal dels valors de f a l'interior,

$$f(z_0) = \sum_{j=1}^{M-1} a_j f(z_j),$$

$$f(z_M) = \sum_{j=1}^{M-1} b_j f(z_j).$$

En aquest cas ens quedarà l'expressió matricial

$$\begin{pmatrix} Df(z_0) \\ \vdots \\ Df(z_M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{Df}_{01} & \cdots & \widetilde{Df}_{0M-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{Df}_{M1} & \cdots & \widetilde{Df}_{MM-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z_1) \\ \vdots \\ f(z_{M-1}) \end{pmatrix}.$$

Per calcular $\{\widetilde{Df}_{ij}\}_{i,j}$ transformem per cada $j = 1, \dots, M-1$:

$$(a_j, 0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0, b_j),$$

i obtenim

$$(\widetilde{Df}_{0j}, \widetilde{Df}_{1j}, \dots, \widetilde{Df}_{Mj}).$$

Les condicions de contorn homogènies, $f(z_0) = 0$, $f(z_M) = 0$, és un cas particular d'aquest.

3 Estabilitat lineal d'una parella de rolls

3.1 Introducció. Simetries

En aquest capítol ens centrarem en l'anàlisi d'estabilitat d'una solució estacionària de periodicitat L formada per una sola parella de rolls convectius, enfront de pertorbacions amb la mateixa periodicitat. Les pertorbacions que no tenen la simetria de reflexió S_1 poden desestabilitzar-la linealment a una solució amb vent no nul. La implicació immediata és que el conjunt de pertorbacions es pot separar en dos subconjunts, un d'ells conté les pertorbacions que són invariants per a S_1 , i per tant mantenen la simetria de reflexió de la solució bàsica, i l'altre conté les que no tenen simetria S_1 les quals en trenquen la simetria de reflexió i donen lloc a l'aparició de velocitat mitjana. Com que el problema que estudiem també admet simetries on intervé a més la component vertical - són les simetries $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$ - veurem com cadascun dels dos subconjunts es pot separar en dos.

Com a conseqüència, el problema d'estabilitat d'una parella de rolls es separa en quatre subproblemes, i dóna lloc a quatre tipus diferents de pertorbacions. Aquestes són les pertorbacions que poden desestabilitzar la parella de rolls als quatre tipus de solucions que s'han introduït en el capítol anterior. Calcularem numèricament, utilitzant mètodes espectrals, les solucions estacionàries i la seva estabilitat aprofitant la separació en subproblemes. Presentarem les diferents corbes d'estabilitat marginal per a $\sigma = 10$ i finalment discutirem els resultats.

3.2 Anàlisi d'estabilitat. Separació en subproblemes

Reescrivim les equacions d'evolució del problema que volem resoldre, descrites en el capítol 2, com:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathcal{F}(\mathbf{v}, \mu, \partial_x, \partial_z) = 0, \quad (1)$$

amb $\mu = (Ra, \sigma)$ i $\mathbf{v} = (U, \chi', T')$.

Sigui $\mathbf{v}^0 = (0, \chi^0, T^0)$ una solució estacionària de (1) tal que és invariant

per al grup de simetries G , definit al capítol anterior, i és periòdica:

$$\mathbf{v}^0(x, z) = \mathbf{v}^0(x + L, z),$$

on L és la longitud d'ona fonamental, és a dir $\mathbf{v}^0$ no és invariant per cap trasllació de longitud menor que L . Aquestes solucions es poden trobar per sobre la corba d'estabilitat marginal $n = 1$ de la figura 4.

Volem estudiar l'estabilitat de $\mathbf{v}^0$ enfront de pertorbacions $\mathbf{v}'$. Linealitzem (1) al voltant de $\mathbf{v}^0$ i l'equació per a les pertorbacions es pot escriure com

$$\partial_t \mathbf{v}' = \mathcal{L}(\mathbf{v}^0, \mu, \partial_x, \partial_z) \mathbf{v}',$$

amb $\mathcal{L}(\mathbf{v}^0, \mu, \partial_x, \partial_z)$ un operador lineal, per simplificar el notarem $\mathcal{L}_\mu$, que es pot expressar en funció de $\mathcal{F}$ si separem la part corresponent a la derivada de Frechet en el zero ($\mathcal{F}(\mathbf{v}, \mu) = D\mathcal{F}(0)\mathbf{v} + \mathcal{N}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$):

$$\mathcal{L}_\mu = D\mathcal{F}(0) + \mathcal{N}(\mathbf{v}^0, \cdot) + \mathcal{N}(\cdot, \mathbf{v}^0),$$

on $\mathcal{N}(0, 0) = 0$.

Com que l'equació per les pertorbacions no depèn explícitament de t i la dependència en x és periòdica, la solució general pot posar-se com una suma de solucions que depenen exponencialment de x i t per una funció de x i z amb la mateixa periodicitat que la solució estacionària (*Teorema de Floquet*):

$$\mathbf{v}'(x, z, t) = \mathbf{u}(x, z) e^{\lambda t} e^{id\alpha x},$$

amb $d \in [0, 1)$ i $\alpha = 2\pi/L$ el nombre d'ona fonamental. Com que la periodicitat horitzontal del problema està fixada i considerem pertorbacions amb la mateixa periodicitat que la solució estacionària, l'anàlisi es fa prenent $d = 0$. La inestabilitat davant de pertorbacions amb $d \neq 0$ és un cas a part que estudiem més endavant, al capítol 5.

Si existeix una pertorbació amb dependència temporal creixent direm que $\mathbf{v}^0$ és inestable, altrament és estable.

Podem, doncs, eliminar el temps i obtenim el següent problema de valors propis:

$$\lambda \mathbf{u} = \mathcal{L}_\mu \mathbf{u}, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}(x + L, z), \tag{2.2}$$

i en aquest cas la inestabilitat es tradueix a trobar quan el valor propi de part real més gran creua l'eix real i té part real positiva.

Com que el sistema d'equacions (1) i la solució estacionària $\mathbf{v}_0$ són invariants per al grup de simetries G , el sistema linealitzat (2) també és invariant per a G .

És a dir, si $(\lambda, \mathbf{u})$ és solució de (2), $(\lambda, \Sigma \mathbf{u})$ també és solució de (2) per qualsevol $\Sigma \in G$. En conseqüència transformant (2) per $\Sigma \in G$ hem d'obtenir

$$\lambda \Sigma \mathbf{u} = \mathcal{L}_\mu \Sigma \mathbf{u},$$

i el conjunt de pertorbacions que tenen simetria Σ és un subconjunt invariant del conjunt total de pertorbacions. Es diu també que l'operador $\mathcal{L}_\mu$ *commuta* amb cada un dels elements de G , és a dir,

$$\Sigma \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu \Sigma.$$

En el cas que ens ocupa els subespais invariants de G tenen intersecció no nul·la, la intersecció ve donada pel grup complet de simetries G . Com a conseqüència, l'espai de pertorbacions es separa en quatre subespais: tres dels quals són invariants per a un dels elements no trivials de G , i el quart és invariant per al grup complet. La implicació és que el problema lineal factoritza en quatre problemes lineals, cadascun actuant sobre un d'aquest subespais invariants:

(1) Dos d'aquests subespais no tenen simetria S_1 , i admeten pertorbacions amb vent: un d'ells admet vent amb perfil simètric i l'altre admet vent amb perfil antisimètric. Són pertorbacions invariants per a $S_1 \times S_2 \times S_3$ i $S_2 \times S_3$ respectivament.

(2) Els altres dos subespais corresponen a pertorbacions invariants per a G i a pertorbacions invariants només per a S_1 .

D'aquesta manera són possibles quatre rutes diferents d'inestabilitat d'una parella de rolls, tres de les quals trenquen dues simetries no trivials a la vegada. La quarta preserva cada una de les simetries espacials.

3.3 Càlcul d'una solució amb una parella de rolls

Com que volem solucions amb periodicitat en una direcció, és molt còmode usar desenvolupaments espectrals (veure capítol 2). A més els mètodes espectrals han estat àmpliament aplicats a equacions de la mecànica de fluids amb bons resultats (Mercader et al. 1991, Gottlieb 1977, Canuto et al. 1987).

Buscarem solucions estacionàries invariants per al grup de simetries G , és a dir, per a S_1 i per $S_2 \times S_3$ (la simetria $S_1 \times S_2 \times S_3$ ja es compleix automàticament per ser el producte de les altres dues).

Una solució estacionària, $(U = 0, \chi, T)$ - χ és la funció de corrent, T és la desviació de la temperatura-, de

$$\sigma \nabla^2 \omega - Ra \sigma \partial_x T - J(\chi, \omega) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 T + \partial_x \chi - J(\chi, T) = 0, \quad (1.2)$$

on $\omega = -\nabla^2 \chi$, de periodicitat L (o longitud d'ona $\alpha = 2\pi/L$) que tingui simetria S_1 admet un desenvolupament del tipus

$$\chi(x, z) = \sum_{n=1}^N \chi_n(z) \sin n\alpha x, \quad (2.1)$$

$$T(x, z) = \sum_{n=0}^N T_n(z) \cos n\alpha x, \quad (2.2)$$

de manera que la parella de rolls queda centrada en el contenidor. Per tal que tingui la simetria $S_2 \times S_3$ les funcions han de complir una certa condició de paritat en z :

$$\chi(-x + \frac{L}{2}, -z) = \chi(x, z),$$

$$T(-x + \frac{L}{2}, -z) = -T(x, z),$$

i per tant per cada coeficient n es compleix

$$\chi_n(-z) \sin(-n\alpha x + n\pi) = \chi_n(z) \sin(n\alpha x),$$

$$T_n(-z) \cos(-n\alpha x + n\pi) = -T_n(z) \cos(n\alpha x),$$

és a dir,

$$(-1)^{n+1} \chi_n(-z) = \chi_n(z),$$

$$(-1)^{n+1} T_n(-z) = T_n(z).$$

Això vol dir que si n és parell, el corresponent coeficient és senar en z i si n és senar, el coeficient és parell en z .

Usem un mètode de Galerkin en la direcció x , projectem (1.1) sobre les funcions test $\{\sin n\alpha x\}_{n=1}^N$, projectem (1.2) sobre $\{\cos n\alpha x\}_{n=0}^N$, on projectar $f(x)$ sobre $\phi(x)$ significa

$$\langle f(x), \phi(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \phi(x) dx.$$

Si notem D la derivada respecte z aleshores obtenim el següent sistema d'equacions per als coeficients de Fourier del desenvolupament de χ i T :

$$\begin{cases} \sigma(-\alpha^2 n^2 + D^2) \omega_n + Ra \sigma n \alpha T_n - \alpha J_n(\chi, \omega) &= 0, \\ (-\alpha^2 n^2 + D^2) T_n + n \alpha \chi_n - \alpha J_n(\chi, T) &= 0, \end{cases} \quad n=1, \dots, N \quad (3.1)$$

$$D^2 T_0 - \alpha J_0(\chi, T) = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{on } \omega_n = -(-\alpha^2 n^2 + D^2)\chi_n, \quad \text{i}$$

$$\alpha J_n(\chi, \omega) := \langle J(\chi, \omega), \sin n\alpha x \rangle, \quad (4.1)$$

$$\alpha J_n(\chi, T) := \langle J(\chi, T), \cos n\alpha x \rangle. \quad (4.2)$$

Calculem ara en detall (4.1) i (4.2).

$$\begin{aligned} J(\chi, \omega) &= \partial_x \chi \partial_z \omega - \partial_z \chi \partial_x \omega \\ &= \alpha \sum_{\substack{k, m=1 \\ k \neq m}}^N \cos m\alpha x \sin k\alpha x (m\chi_m D\omega_k - D\chi_k m\omega_m), \\ J(\chi, T) &= \partial_x \chi \partial_z T - \partial_z \chi \partial_x T \\ &= \alpha \sum_{\substack{k, m=1 \\ k \neq m}}^N \cos m\alpha x \cos k\alpha x (m\chi_m DT_k) \\ &\quad + \alpha \sum_{\substack{k, m=1 \\ k \neq m}}^N \sin m\alpha x \sin k\alpha x (-D\chi_m(-k)T_k) \\ &\quad + \alpha \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^N \cos^2 n\alpha x (n\chi_n DT_n) + \sin^2 n\alpha x (D\chi_n nT_n) \\ &\quad + \alpha \sum_{n=1}^N \cos n\alpha x (n\chi_n DT_0), \end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned} 2J(\chi, \omega) &= \alpha \sum_{\substack{k, m=1 \\ k \neq m}}^N (\sin(k+m)\alpha x + \sin(k-m)\alpha x) (m\chi_m D\omega_k - D\chi_k m\omega_m), \\ 2J(\chi, T) &= \alpha \sum_{\substack{k, m=1 \\ k \neq m}}^N (\cos(k+m)\alpha x + \cos(k-m)\alpha x) (m\chi_m DT_k) \\ &\quad + \alpha \sum_{\substack{k, m=1 \\ k \neq m}}^N (-\cos(k+m)\alpha x + \cos(k-m)\alpha x) (D\chi_m kT_k) \\ &\quad + \alpha \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^N \cos^2 n\alpha x (n\chi_n DT_n) + \sin^2 n\alpha x (D\chi_n nT_n) \\ &\quad + \alpha \sum_{n=1}^N \cos n\alpha x (n\chi_n DT_0). \end{aligned}$$

Projectant obtenim:

$$\begin{cases} 2J_n(\chi, \omega) = \left(\sum_{m+k=n} + \sum_{k-m=n} - \sum_{m-k=n} \right) (m\chi_m D\omega_k - D\chi_k m\omega_m), \\ 2J_n(\chi, T) = 2n\chi_n DT_0 + \sum_{m+k=n} (m\chi_m DT_k - D\chi_m kT_k) \\ + \sum_{|k-m|=n} (m\chi_m DT_k + D\chi_m kT_k), \end{cases} \quad (5.1)$$

$$2J_0(\chi, T) = \sum_{n=1}^N (n\chi_n DT_n + D\chi_n nT_n), \quad (5.2)$$

amb $k, m, n = 1 \div N$. Els sumatoris els substituïm per:

$$\begin{aligned} \sum_{k+m=n} a_k b_m &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}, \\ \sum_{|k-m|=n} a_k b_m &= \begin{cases} \sum_{k=n+1}^N a_k b_{k-n} & \text{si } k-m > 0, \\ \sum_{k=1}^{N-n} a_k b_{k+n} & \text{si } k-m < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Per a la variable z desenvolupem en sèries de Chebyshev

$$\chi_n(z) = \sum_{m=0}^M \hat{\chi}_{nm} T_m(2z),$$

$$T_n(z) = \sum_{m=0}^M \hat{T}_{nm} T_m(2z),$$

i imposem el sistema d'equacions (3) en els punts de col·locació de Gauss-Lobatto:

$$2z_i = \cos \pi \frac{i}{M}, \quad i = 1, \dots, M-1.$$

D'aquesta manera $T_m(2z_i) = \cos m\pi i/M$ i obtenim desenvolupaments en sèries de cosinus amb la qual cosa és fàcil i econòmic passar de l'espai físic a l'espai de coeficients mitjançant transformades ràpides per cosinus.

Prenem com a variables del problema els coeficients de Fourier de ω i T avaluats en els punts de col·locació z_i :

$$\omega_n(z_i), T_n(z_i), \quad i = 1, \dots, M-1,$$

que notarem $\omega_{n,i}$ i $T_{n,i}$ respectivament.

Les condicions de contorn que tenim per a z són:

$$\begin{aligned} \chi(x, \pm \frac{1}{2}) &= 0, \\ \partial_z \chi(x, \pm \frac{1}{2}) &= 0, \\ T(x, \pm \frac{1}{2}) &= 0, \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_n(\pm \frac{1}{2}) = 0, \\ D\chi_n(\pm \frac{1}{2}) = 0, \\ \{T_n(\pm \frac{1}{2}) = 0, \end{cases}_{n=1, \dots, N} \quad \begin{cases} \\ \\ \end{cases}_{n=0, \dots, N}$$

Per poder transformar i calcular les corresponents derivades cal conèixer la funció en tots els punts, inclosos els de la frontera ($i = 0, M$). Per ω no hi ha condicions de contorn, és a dir, cal calcular $\{\omega_n(\pm \frac{1}{2})\}_n$, i això ho farem a partir dels valors de ω_n a dins, que sí es coneixen. Existeixen diverses maneres de calcular les condicions de contorn de ω_n , la que usem en aquesta secció és anàloga a la que s'explica en Mercader et al. (1991).

3.3.1 Càlcul del valor de ω al contorn

Per a cada n , considerem les equacions d'evolució per a $\omega_{n,1} \div \omega_{n,M-1}$. En aquest cas tenim (pels comptes menysprearem les variables corresponents a la temperatura):

$M - 1$ equacions d'evolució (per les $\dot{\omega}_{n,i}$),

$M + 1$ equacions corresponents a $\omega = -\nabla^2 \chi$ (imposada a $z_i, i = 0, \dots, M$),

4 condicions de contorn ($\chi_{n,0} = \chi_{n,M} = D\chi_{n,0} = D\chi_{n,M} = 0$),

que suma un total de $2M + 4$ equacions. Però, en canvi, tenim $2M + 2$ variables:

$$\omega_{n,0}, \dots, \omega_{n,M}, \chi_{n,0}, \dots, \chi_{n,M}.$$

Si haguéssim imposat les equacions d'evolució per la $\omega_{n,i}$ en $i = 2 \div M - 2$ en comptes de $i = 1 \div M - 1$ obtindriem un sistema amb tantes equacions com incògnites i a partir d'aquest podríem trobar, en particular, ω al contorn.

Per resoldre aquest problema considerarem com a variable la derivada de χ , que la notarem χ^* , i afegirem al sistema

$$\chi_{n,i}^* = D\chi_{n,i}, \quad i = 1, \dots, M - 1,$$

obtenint un total de $(2M + 4) + M - 1 = 3M + 3$ equacions. En aquest cas el número d'equacions i variables coincideix al afegir com a variables a $\chi_{n,i}^*, i = 0 \div M$: $(2M + 2) + M + 1 = 3M + 3$

A la pràctica conegut $\omega_{n,i}, i = 1 \div M - 1$ (de les equacions diferencials) calcularem $\chi_{n,i}, D\chi_{n,i}, i = 1 \div M - 1$ i $\omega_{n,0}, \omega_{n,M}$.

Usant Galerkin i col.locació sobre l'equació $\omega = -\nabla^2 \chi$, per a cada coeficient del desenvolupament de Fourier avaluat en el punt de col.locació es compleix

$$\omega_{n,i} = -(-n^2 \alpha^2 + D^2) \chi_{n,i}.$$

D'aquesta manera resoldrem el sistema

$$\begin{cases} \omega_{n,i} = n^2 \alpha^2 \chi_{n,i} - D \chi_{n,i}^* & i = 0, \dots, M \\ \chi_{n,i}^* = D \chi_{n,i} & i = 1, \dots, M-1 \end{cases}, \quad (6)$$

sabent que $\chi_{n,0} = \chi_{n,M} = \chi_{n,0}^* = \chi_{n,M}^* = 0$. El sistema (6) es pot posar com:

$$A_n \begin{pmatrix} \chi_{n,1} \\ \vdots \\ \chi_{n,M-1} \\ \chi_{n,1}^* \\ \vdots \\ \chi_{n,M-1}^* \\ \omega_{n,0} \\ \omega_{n,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{n,1} \\ \vdots \\ \omega_{n,M-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcular la matriu A_n necessitem tenir expressades les derivades en funció dels valors de la funció a l'interior (veure capítol 2). Aleshores només cal invertir A_n i obtenim χ_n i la seva derivada en funció dels valors de ω_n als punts interiors que notarem

$$\chi_{n,i} := \chi_n(z_i) = \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{\chi}_{nij} \omega_{n,j}, \quad D \chi_{n,i} := D \chi_n(z_i) = \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{D \chi}_{nij} \omega_{n,j}. \quad (7.1)$$

També s'obté, és clar, ω_n en el contorn, i ja es pot procedir a calcular les derivades de ω_n .

Com que ja coneixem les funcions $T_n(z)$ i $\omega_n(z)$ al contorn, podem posar els valors de les seves derivades en funció de les funcions respectives avaluades en els punts de dins:

$$\begin{aligned} D \omega_{n,i} &= \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{D \omega}_{nij} \omega_{n,j}, & D T_{n,i} &= \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{D T}_{nij} T_{n,j}, \\ D^2 \omega_{n,i} &= \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{D^2 \omega}_{nij} \omega_{n,j}, & D^2 T_{n,i} &= \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{D^2 T}_{nij} T_{n,j}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

on $D \omega_{n,i} := D \omega_n(z_i)$, $D^2 \omega_{n,i} := D^2 \omega_n(z_i)$, $D T_{n,i} := D T_n(z_i)$ i $D^2 T_{n,i} := D^2 T_n(z_i)$.

3.3.2 Sistema d'equacions discretitzat

Finalment si imposem el sistema d'equacions (3) en els punts de col·locació i usem (5) i (7), el sistema d'equacions que s'ha de resoldre per calcular la solució estacionària és

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \sum_{j=1}^{M-1} (-\delta_{ij} \alpha^2 n^2 + \widetilde{D^2 \omega_{nij}}) \omega_{n,j} + \sigma Ra \alpha n T_{n,i} \\ - \frac{\alpha}{2} \sum_{j,l=1}^{M-1} \left(\sum_{m+k=n} + \sum_{k-m=n} - \sum_{m-k=n} \right) (m \widetilde{\chi_{mil}} \widetilde{D \omega_{kij}} - \delta_{il} \delta_{nm} \widetilde{D \chi_{kij}} m) \omega_{k,j} \omega_{m,l} \\ \sum_{j=1}^{M-1} (-\delta_{ij} \alpha^2 n^2 + \widetilde{D^2 T_{nij}}) T_{n,j} + \sum_{j=1}^{M-1} \alpha n \widetilde{\chi_{nij}} \omega_{n,j} \\ - \frac{\alpha}{2} \sum_{j,l=1}^{M-1} \left(\sum_{m+k=n} (m \widetilde{\chi_{mil}} \widetilde{D T_{kij}} - \delta_{ij} \delta_{nk} \widetilde{D \chi_{mil}} k) \omega_{m,l} T_{k,j} \right. \\ \left. + \sum_{|k-m|=n} (m \widetilde{\chi_{mil}} \widetilde{D T_{kij}} + \delta_{ij} \delta_{nk} \widetilde{D \chi_{mil}} k) \omega_{m,l} T_{k,j} + 2 \sum_m m \widetilde{\chi_{mil}} \widetilde{D T_{0ij}} \omega_{m,l} T_{0,j} \right) = 0, \\ \sum_{j=1}^{M-1} \widetilde{D^2 T_{0ij}} T_{0,j} - \frac{\alpha}{2} \sum_{j,l=1}^{M-1} \sum_m (m \widetilde{\chi_{mil}} \widetilde{D T_{mij}} + \delta_{ij} \widetilde{D \chi_{mil}} m) \omega_{m,l} T_{m,j} = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\text{on } n, k, m = 1 \div N \quad \text{i} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

El sistema (8) és un sistema d'equacions no lineal del tipus $F(Y) = 0$ amb

$$Y = (\omega_{1,1}, \dots, \omega_{1,M-1}, \overset{(N)}{\dots}, \omega_{N,1}, \dots, \omega_{N,M-1},$$

$$T_{0,1}, \dots, T_{0,M-1}, T_{1,1}, \dots, T_{1,M-1}, \overset{(N)}{\dots}, T_{N,1}, \dots, T_{N,M-1}),$$

un vector de dimensió $(2N + 1)(M - 1)$. Aquest sistema l'hem resolt usant una variant del mètode híbrid de Powell: a cada pas es tria la correcció com una combinació convexa de la correcció del mètode de Newton i de la direcció del gradient. Sota condicions raonables això garanteix convergència global per punts que inicialment són lluny de la solució i garanteix una convergència més ràpida. Per al Jacobià s'usa un mètode de Broyder; al principi es calcula però no es torna a calcular fins que el mètode no progressa adequadament (Powell 1970, More).

En aquest mètode es necessita conèixer la funció i la matriu jacobiana a cada punt. Per calcular la matriu jacobiana s'ha procedit a partir de (8); en canvi, per al càlcul de la funció no és tan complicat si es fa directament a partir del sistema (3) avaluat en els punts de col·locació.

3.4 Discretització del problema de valors propis

Una vegada s'ha obtingut la solució estacionària $(0, \chi^0, T^0)$, podem aplicar l'anàlisi lineal d'estabilitat. Escrivim les solucions pertorbades com:

$$U = \tilde{U}(z, t), \quad (1.1)$$

$$\chi' = \chi^0(x, z) + \tilde{\chi}(x, z, t), \quad (1.2)$$

$$T = T^0(x, z) + \tilde{T}(x, z, t). \quad (1.3)$$

Substituïm (1) a les equacions, linealitzem al voltant de la solució estacionària i obtenim les equacions per les pertorbacions

$$\partial_t \tilde{U} = \sigma \partial_{zz}^2 \tilde{U} + \partial_z (\overline{\partial_z \chi^0 \partial_x \tilde{\chi}} + \partial_z \tilde{\chi} \partial_x \chi^0), \quad (2.1)$$

$$\partial_t \tilde{\omega} = \sigma \nabla^2 \tilde{\omega} - Ra \sigma \partial_x \tilde{T} - (J(\chi^0, \tilde{\omega}) + J(\tilde{\chi}, \omega^0) + \tilde{U} \partial_x \omega^0 + \partial_{zz}^2 \tilde{U} \partial_x \chi^0), \quad (2.2)$$

$$\partial_t \tilde{T} = \nabla^2 \tilde{T} + \partial_x \tilde{\chi} - (J(\chi^0, \tilde{T}) + J(\tilde{\chi}, T^0) + \tilde{U} \partial_x T^0), \quad (2.3)$$

amb $\tilde{\omega} = -\nabla^2 \tilde{\chi}$ i $\overline{\tilde{\chi}} = 0$.

Com que les pertorbacions les prenem amb la mateixa periodicitat que la solució bàsica, podem expressar-les:

$$\tilde{U}(z, t) = \tilde{U}(z) e^{\lambda t}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\chi}(x, z, t) = \left(\sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N-1} \tilde{\chi}_n(z) e^{in\alpha x} \right) e^{\lambda t}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{T}(x, z, t) = \left(\sum_{n=-N}^{N-1} \tilde{T}_n(z) e^{in\alpha x} \right) e^{\lambda t}. \quad (3.3)$$

La dependència en z es tracta desenvolupant en sèries de Chebyshev, com hem fet en la secció anterior.

La secció 1 d'aquest capítol ens suggereix que podem separar les pertorbacions en quatre subconjunts segons que siguin invariants per a les simetries de G . De fet, sempre podem separar amb la part parell i senar respecte de x :

$$\begin{aligned}\tilde{\chi} &= (\chi^C + \chi^S)e^{\lambda t}, \\ \tilde{T} &= (\bar{T}^C + T^C + T^S)e^{\lambda t},\end{aligned}\tag{4}$$

amb

$$\begin{aligned}\chi^C(x) &= \sum_{n=1}^N \chi_n^C \cos n\alpha x, & T^C(x) &= \sum_{n=1}^N T_n^C \cos n\alpha x, \\ \chi^S(x) &= \sum_{n=1}^N \chi_n^S \sin n\alpha x, & T^S(x) &= \sum_{n=1}^N T_n^S \sin n\alpha x,\end{aligned}\tag{5}$$

i $\chi_n^C = \tilde{\chi}_n + \tilde{\chi}_{-n}$, $\chi_n^S = i(\tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{-n})$, $T_n^C = \tilde{T}_n + \tilde{T}_{-n}$, $T_n^S = i(\tilde{T}_n - \tilde{T}_{-n})$. Per $\tilde{T}$ de (4) hem separat el seu promig horitzontal, que notem $\bar{T}^C$, de la seva desviació $T^C + T^S$. Usant (4) i (5), les pertorbacions solució del sistema (2) es poden separar en dos subconjunts diferents que separen paritats en x , les que compleixen

$$\begin{cases} \lambda \tilde{U} = \sigma D^2 \tilde{U} + D(\partial_z \chi^0 \partial_x \chi^C + \partial_z \chi^C \partial_x \chi^0), \\ \lambda \omega^C = \sigma \nabla^2 \omega^C - Ra \sigma \partial_x T^S - (J(\chi^0, \omega^C) + J(\chi^C, \omega^0) \\ \quad + \tilde{U} \partial_x \omega^0 + D^2 \tilde{U} \partial_x \chi^0), \\ \lambda T^S = \nabla^2 T^S + \partial_x \chi^C - (J(\chi^0, T^S) + J(\chi^C, T^0) + \tilde{U} \partial_x T^0), \end{cases}\tag{6.1}$$

i les que compleixen

$$\begin{cases} \lambda \bar{T}^C = D^2 \bar{T}^C - (J(\chi^0, T^C) + J(\chi^S, T^0)), \\ \lambda \omega^S = \sigma \nabla^2 \omega^S - Ra \sigma \partial_x T^C - (J(\chi^0, \omega^S) + J(\chi^S, \omega^0)), \\ \lambda T^C = \nabla^2 T^C + \partial_x \chi^S - (J(\chi^0, T^C) + J(\chi^S, T^0) + \partial_x \chi^0 D \bar{T}^C). \end{cases}\tag{6.2}$$

3.4.1 Velocitat mitjana

Observem a l'equació (2.1) com el vent està generat per la derivada de la mitjana horitzontal del terme

$$\partial_z \chi^0 \partial_x \tilde{\chi} + \partial_z \tilde{\chi} \partial_x \chi^0,$$

el qual es pot separar, en horitzontal, entre la part senar $\partial_z \chi^0 \partial_x \chi^S + \partial_z \chi^S \partial_x \chi^0$, que, com que és una funció antisimètrica, té una mitjana igual a zero, i la part parell $\partial_z \chi^0 \partial_x \chi^C + \partial_z \chi^C \partial_x \chi^0$, que és la que realment pot generar vent. Per tant, el vent està contingut en el subconjunt de pertorbacions que contenen χ^C amb paritat parell en horitzontal tal com es pot veure a l'equació (6.1).

3.4.2 Invariància per trasllació de la solució estacionària

Ara veurem que el problema de valors propis (6.1) té sempre com a solució un valor propi nul que té vector propi associat la derivada respecte x de la solució estacionària de la qual busquem l'estabilitat. Per això direm que aquest sistema sempre té un valor propi nul associat a la invariància per trasllació de la solució estacionària, el qual no ens aporta cap informació adicional.

Veurem que si $(0, \chi^0, T^0)$ és una solució estacionària del problema (1), aleshores $(0, \partial_x \chi^0, \partial_x T^0)$ és funció pròpia de valor propi $\lambda = 0$ pel problema d'estabilitat (6.1) de la solució $(0, \chi^0, T^0)$.

Per demostrar-ho notem el problema (1) com

$$\partial_t \mathbf{v} = \mathcal{M}(\mathbf{v}) + \mathcal{N}(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

on $\mathcal{M} = D\mathcal{F}(0)$ i $\mathcal{N}(0, 0) = 0$. Si $\mathbf{v}^0(x) = (0, \chi^0(x), T^0(x))$ és solució estacionària, aleshores $\mathbf{v}^0(x + \Delta x) = (0, \chi^0(x + \Delta x), T^0(x + \Delta x))$ també és una solució estacionària per la invariància per trasllació. Si prenem Δx prou petit i desenvolupem per Taylor tenim

$$\mathbf{v}^0(x + \Delta x) = \mathbf{v}^0(x) + \partial_x \mathbf{v}^0(x) \Delta x + O((\Delta x)^2).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}^0(x + \Delta x) &= \mathcal{M}(\mathbf{v}^0(x + \Delta x)) + \mathcal{N}(\mathbf{v}^0(x + \Delta x), \mathbf{v}^0(x + \Delta x)), \\ 0 &= \mathcal{M}(\mathbf{v}^0(x)) + \mathcal{M}(\partial_x \mathbf{v}^0(x) \Delta x) + \mathcal{N}(\mathbf{v}^0(x), \mathbf{v}^0(x)) \\ &\quad + \mathcal{N}(\mathbf{v}^0, \partial_x \mathbf{v}^0(x) \Delta x) + \mathcal{N}(\partial_x \mathbf{v}^0(x) \Delta x, \mathbf{v}^0) + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

com que $\mathbf{v}^0$ és una solució estacionària, $\mathcal{M}(\mathbf{v}^0(x)) + \mathcal{N}(\mathbf{v}^0(x), \mathbf{v}^0(x)) = 0$, i per tant menyspreant els termes d'ordre 2 obtenim

$$0 = \mathcal{M}(\partial_x \mathbf{v}^0(x)) + \mathcal{N}(\mathbf{v}^0, \partial_x \mathbf{v}^0(x)) + \mathcal{N}(\partial_x \mathbf{v}^0(x), \mathbf{v}^0).$$

La part de la dreta de la igualtat és exactament la matriu d'estabilitat de $\mathbf{v}^0$ pel vector $\partial_x \mathbf{v}^0(x)$, i correspon a la matriu d'estabilitat del problema (6.1) perquè $\partial_x \mathbf{v}^0(x)$ té la paritat en x contrària a la que té la solució estacionària $\mathbf{v}^0$ i per tant queda demostrat.

3.4.3 Separació en subproblemes

Bàsicament amb aquesta separació el que hem fet és separar el conjunt de pertorbacions que poden generar vent, el sistema (6.1), del que no, el sistema

(6.2). El primer conté les pertorbacions que trenquen la simetria S_1 de la solució estacionària mentre que el segon conjunt de pertorbacions manté invariant la simetria S_1 .

A la secció 1 d'aquest capítol hem demostrat que les pertorbacions es poden separar en quatre tipus diferents. El sistema (6.1) en conté dos, són les pertorbacions invariants per a $S_2 \times S_3$ i les invariants per a $S_1 \times S_2 \times S_3$. El sistema (6.2) en conté els altres dos, són les pertorbacions invariants per a S_1 i les que són invariants per al grup complet de simetries G .

Per separar (6.1) i (6.2) en dos subproblemes bastaria que ens fixéssim en la paritat en la direcció vertical: els coeficients que compleixen per a n parell funció senar en z , per a n senar funció parell en z es poden separar dels que compleixen per a n parell funció parell en z , per a n senar funció senar en z .

El que conté els primers l'anomenarem, per raons òbvies si desenvolupem en la direcció z en polinomis de Chebyshev ($\omega_n(z) = \sum_m \hat{\omega}_{n,m} \mathcal{T}_m(z)$ on $\mathcal{T}_m$ parell si m parell i $\mathcal{T}_m$ senar si m senar), subproblema amb $n+m$ senar, i anomenarem subproblema amb $n+m$ parell el que conté els darrers.

Aleshores el sistema (6.1) es separa entre les pertorbacions amb coeficients amb

1) $n+m$ senar, les que poden donar un vent simètric (invariants per a la simetria $S_1 \times S_2 \times S_3$),

2) $n+m$ parell, les que poden donar un vent antisimètric (invariants per a la simetria $S_2 \times S_3$),

i el sistema (6.2) es separa amb les pertorbacions amb coeficients amb

3) $n+m$ senar, les que mantenen totes les simetries de la solució estacionària (invariants per a tot el grup G),

4) $n+m$ parell, les que només mantenen la simetria S_1 de la solució estacionària.

Per a aquest estudi, per simplicitat, només separem amb (6.1) i (6.2), cosa que permet aprofitar els resultats per al capítol 5, quan tractem caixes periòdiques de longitud $L = na$ on a és la longitud d'ona fonamental.

3.4.4 Sistemes de valors propis discretitzats

Per resoldre (6), procedim discretitzant com en la secció anterior. Necessitem calcular les respectives matrius d'estabilitat dels problemes projectats. La matriu d'estabilitat corresponent al problema (6.2) és exactament la matriu jacobiana, avaluada en $(0, \omega^0, T^0)$, calculada en la secció anterior per trobar la solució estacionària, i per tant, aquesta és coneguda i només cal calcular de nou la matriu d'estabilitat corresponent al problema (6.1).

Si projectem l'equació de la vorticitat de (6.1) sobre $\{\cos n\alpha x\}_n$ i l'equació del calor de (6.1) sobre $\{\sin n\alpha x\}_n$, obtenim

$$\lambda \tilde{U} = \sigma D^2 \tilde{U} - \alpha \sum_{n=1}^N \frac{n}{2} (\chi_n^0 \omega_n^C - \omega_n^0 \chi_n^C), \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \lambda \omega_n^C = \sigma(-n^2 \alpha^2 + D^2) \omega_n^C - Ra \sigma n T_n^S \\ \quad - \alpha (J_n(\chi^0, \omega^C) + J_n(\chi^C, \omega^0) + \tilde{U} n \omega_n^0 + D^2 \tilde{U} n \chi_n^0), \\ \lambda T_n^S = (-n^2 \alpha^2 + D^2) T_n^S - n \alpha \chi_n^C \\ \quad - \alpha (J_n(\chi^0, T^S) + J_n(\chi^C, T^0) + \tilde{U} n T_n^0), \end{cases} \quad n=1, \dots, N \quad (7.2)$$

amb

$$2J_n(\chi^0, \omega^C) = \sum_{m,k=1}^N (D\omega_k^C m\chi_m^0) \cos k\alpha x \cos m\alpha x - (D\chi_m^0 (-k)\omega_k^C) \sin k\alpha x \sin m\alpha x,$$

$$2J_n(\chi^C, \omega^0) = \sum_{m,k=1}^N (-k\chi_k^C D\omega_m^0) \sin k\alpha x \sin m\alpha x - (D\chi_k^C m\omega_m^0) \cos k\alpha x \cos m\alpha x,$$

$$2J_n(\chi^0, T^S) = \sum_{m,k=1}^N (m\chi_m^0 D T_k^S) \cos m\alpha x \sin k\alpha x - (D\chi_m^0 k T_k^S) \sin m\alpha x \cos k\alpha x,$$

$$2J_n(\chi^C, T^0) = \sum_{m,k=1}^N (-k\chi_k^C D T_m^0) \sin k\alpha x \cos m\alpha x - (D\chi_k^C (-m) T_m^0) \cos k\alpha x \sin m\alpha x,$$

és a dir,

$$\begin{aligned} & 2(J_n(\chi^0, \omega^C) + J_n(\chi^C, \omega^0)) \\ &= \sum_{m+k=n} \left(D\omega_k^C m\chi_m^0 - k\chi_k^C D\omega_m^0 \right) - \left(D\chi_m^0 k\omega_k^C - D\chi_k^C m\omega_m^0 \right) \\ &+ \sum_{|k-m|=n} \left(D\omega_k^C m\chi_m^0 - k\chi_k^C D\omega_m^0 \right) + \left(D\chi_m^0 k\omega_k^C - D\chi_k^C m\omega_m^0 \right), \\ & 2(J_n(\chi^0, T^S) + J_n(\chi^C, T^0)) \\ &= \sum_{m+k=n} \left(m\chi_m^0 D T_k^C - k\chi_k^C D T_m^0 \right) - \left(D\chi_m^0 k T_k^C - D\chi_k^C m T_m^0 \right) \\ &+ \left(\sum_{k-m=n} - \sum_{m-k=n} \right) \left(m\chi_m^0 D T_k^C - k\chi_k^C D T_m^0 \right) + \left(D\chi_m^0 k T_k^C - D\chi_k^C m T_m^0 \right). \end{aligned}$$

Deduïm el terme $-\alpha \sum_{n=1}^N \frac{n}{2} (\chi_n^0 \omega_n^C - \omega_n^0 \chi_n^C)$ de l'equació (7.1), que és el que prové de la part no lineal de l'equació del vent, és a dir, de

$$D(\overline{\partial_z \chi^0 \partial_z \chi^C + \partial_z \chi^C \partial_x \chi^0}).$$

En general es compleix que

$$\overline{\sum_{n=1}^N A_n \sin n\alpha x \cdot \sum_{n=1}^N B_n \sin n\alpha x} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n B_n,$$

$$\overline{\sum_{n=0}^N A_n \cos n\alpha x \cdot \sum_{n=0}^N B_n \cos n\alpha x} = A_0 B_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n B_n.$$

Aleshores

$$\overline{\partial_z \chi^0 \partial_z \chi^C + \partial_z \chi^C \partial_x \chi^0} = \overline{\partial_z \chi^0 \partial_z \chi^C} + \overline{\partial_z \chi^C \partial_x \chi^0} = \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^N (-n \chi_n^C D \chi_n^0 + n \chi_n^0 D \chi_n^C)$$

i

$$\begin{aligned} & D(\overline{\partial_z \chi^0 \partial_z \chi^C + \partial_z \chi^C \partial_x \chi^0}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^N (-n D \chi_n^C D \chi_n^0 - n \chi_n^C D^2 \chi_n^0 + n D \chi_n^0 D \chi_n^C + n \chi_n^0 D^2 \chi_n^C). \end{aligned}$$

Usant $\omega_n = -D^2 \chi_n + \alpha^2 n^2 \chi_n$, finalment obtenim

$$\begin{aligned} & D(\overline{\partial_z \chi^0 \partial_z \chi^C + \partial_z \chi^C \partial_x \chi^0}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^N (-n \chi_n^C (-\omega_n^0 + \alpha^2 n^2 \chi_n^0) + n \chi_n^0 (-\omega_n^C + \alpha^2 n^2 \chi_n^C)) = \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^N (n \chi_n^C \omega_n^0 - n \chi_n^0 \omega_n^C). \end{aligned}$$

En l'apèndix presentem un altre mètode per resoldre l'anàlisi d'estabilitat usant també tècniques espectrals. A diferència del que hem usat en aquest capítol utilitza unes funcions base que compleixen el contorn i es prenen com a variables del problema la funció de corrent i la desviació de la temperatura, sobre les quals hi ha condicions de contorn. Ha servit de test per al mètode que hem presentat en aquest capítol i per calcular alguns dels resultats que presentem al capítol 5 de càlculs de solucions estacionàries.

3.5 Corbes d'estabilitat marginal per a $\sigma = 10$

3.5.1 Errors de discretització

En primer lloc estudiarem quants coeficients de Fourier N i quants punts de col·locació de Gauss-Lobatto M hem d'agafar per donar les corbes d'estabilitat per a $\sigma = 10$, amb una precisió raonable.

Per això ens fixem en els valors del Rayleigh crític Ra . Fixat N i M considerarem crític un valor de Rayleigh quan la part real del valor propi que creua l'eix sigui en valor absolut $\leq 10^{-8}$ i quan el Rayleigh tingui tres decimals exactes. Les solucions estacionàries de les quals busquem l'estabilitat s'han trobat amb una tolerància de 10^{-6} .

En principi s'ha considerat un mostreig per $L \in [1, 2]$, $L = 1, 1.4, 1.6$ i 2 , i per a cadascun d'aquests valors s'ha aplicat l'anàlisi d'estabilitat, variant $N = 8, 9, 12, 16$ i $M = 16, 18, 24$.

Els Ra crítics per cada caixa es troben a la taula 1. Les tres primeres columnes corresponen a l'anàlisi d'estabilitat prenent pertorbacions que generen vent (sense simetria S_1), i les tres darreres columnes corresponen a pertorbacions que no donen vent (amb simetria S_1). A aquesta taula es pot observar com per a $L = 1$ les tres darreres columnes estan buides, en aquest cas significa que els valors del número de Rayleigh crític són extremadament grans en comparació amb les tres primeres, i per tant, té poc interès representar-los.

Per avaluar els errors no considerarem l'anàlisi de $L = 1.4$ amb pertorbacions amb simetria S_1 perquè el Rayleigh crític també és molt gran en comparació amb el que dona l'anàlisi amb pertorbacions sense la simetria S_1 .

Si fixem N , a la taula 1 es pot veure que si prenem $M = 18$ el Ra crític canvia amb menys que el 0.4 %, a excepció del cas $L = 1.6$, $N = 8$ i $N = 9$ amb pertorbacions amb simetria S_1 el qual varia amb menys que el 2 %.

Fixat $M = 18$, que és la resolució vertical estàndard que prendrem, el nombre de coeficients de Fourier més raonable és $N = 16$ (quan passem de $N = 12$ a $N = 16$ el Ra canvia amb menys d'un 5 %). A més amb aquesta resolució les corbes d'estabilitat són qualitativament correctes. Per exemple, quan $L = 1.6$, per $N \geq 9$ no domina la inestabilitat que dona vent (simètric) mentre que per $N = 8$ sí.

Totes les bifurcacions són tipus Hopf, és a dir, sobre les corbes els valors propis són complexos conjugats amb part real nul·la, $\lambda = \pm i\omega$ on $\omega \neq 0$ és la freqüència angular. Les freqüències corresponents a la taula 1 es troben a

$L = 1$						
sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	11.6	11.6	11.6			
9	11.4	11.4				
12	11.5	11.5	11.5			
16		11.5				

$L = 1.4$						
sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	12.30			26.1		
9	9.03	9.03		35.2	34.5	
12	9.57	9.57	9.57	46.6	51.3	43.1
16		9.54			42.9	

$L = 1.6$						
sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	15.14	15.35	15.3	14.3	14.1	
9	8.58	8.58		16.9	16.7	
12	10.01	10.01	10.0	18.4	17.5	17.5
16		9.81			17.0	

$L = 2$						
sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	7.96	7.98	7.97	5.50	5.50	
9	7.57	7.59		5.81	5.82	
12	9.89	9.90		5.81	5.82	5.82
16		10.38			5.80	

Taula 1: Rayleigh crític Ra per diferents mides de caixa $L = 1, 1.4, 1.6$ i 2 variant el nombre de coeficients de Fourier (N) i el nombre de punts de col·locació en direcció vertical (M). Presentem $Ra \times 10^{-4}$. Les tres primeres columnes corresponen a pertorbacions que trenquen la simetria S_1 i les darreres tres columnes són pertorbacions invariants per a la simetria S_1 . Fixant qualsevol N , el Ra ve donat amb una resolució vertical, per $M = 18$, amb un error menor que el 0.4%. Fixant $M = 18$, al canviar de $N = 12$ a $N = 16$ el Ra canvia amb menys d'un 5%.

$$L = 1$$

sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	2.18	2.18	2.18			
9	2.16	2.16				
12	2.16	2.16	2.16			
16		2.16				

$$L = 1.4$$

sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	2.25			10.0		
9	1.92	1.92		12.7	12.3	
12	1.98	1.98	1.98	14.1	14.7	13.3
16		1.97			13.5	

$$L = 1.6$$

sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	5.86	5.89	5.88	6.90	6.83	
9	1.65	1.66		7.88	7.80	
12	1.76	1.77	1.77	8.10	7.85	7.85
16		1.75			7.75	

$$L = 2$$

sense simetria S_1				amb simetria S_1		
N	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$	$M = 16$	$M = 18$	$M = 24$
8	3.59	3.59	3.59	3.63	3.63	
9	3.58	3.58		3.80	3.81	
12	3.83	3.83		3.78	3.79	3.79
16		3.89			3.78	

Taula 2: Freqüència de Hopf ω corresponent al Rayleigh crític de la taula 1. Presentem $\omega \times 10^{-2}$.

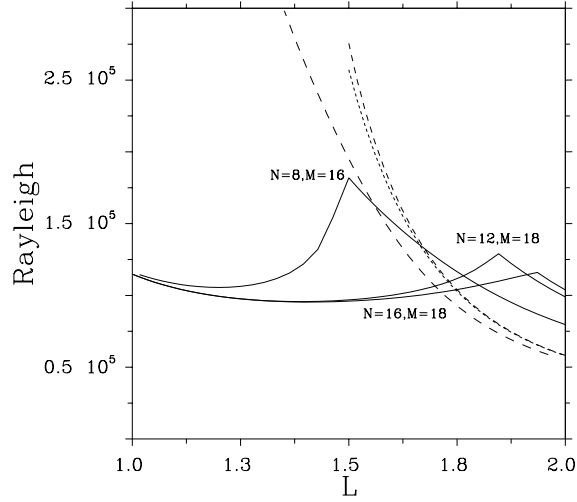


Figura 3: Corbes d'estabilitat marginal per a $\sigma = 10$ i per $L \in [1, 2]$ quan $N \times M = 8 \times 16$, $N \times M = 12 \times 18$ i $N \times M = 16 \times 18$. Les que generen vent, amb línia contínua; les que no, amb línia discontinua. Les corresponents a $N \times M = 8 \times 16$ (la línia contínua i la discontinua amb ratlles més grans) no són qualitativament correctes.

la taula 2. Al variar la resolució, les freqüències varien una mica menys que el que ho feia els valors del número de Rayleigh però en comparació els errors són del mateix ordre. Fixat $M = 18$, quan canviem de $N = 12$ a $N = 16$ les freqüències varien amb menys que el 1.5 %.

A la figura 3 hem representat les corbes marginals per $L \in [1, 2]$ calculades amb $N \times M = 8 \times 16$, $N \times M = 12 \times 18$ i $N \times M = 16 \times 18$. Les inestabilitats que generen vent les representem amb línia contínua i les que no, amb línia discontinua. És immediat veure que per a valors de L intermedis és on l'anàlisi és més sensible al nombre de coeficients N . Ja hem vist que les corbes corresponents a $N \times M = 8 \times 16$ no són qualitativament correctes per a $L \simeq 1.5$. Al voltant de $L \simeq 1.85$ és on hi ha més diferència entre la corba amb $N \times M = 12 \times 18$ i la corba amb $N \times M = 16 \times 18$, però la diferència és principalment entre les corbes que donen vent (traçat continu) i per a aquests valors no són dominants aquestes inestabilitats.

Per mides de caixa més grans, $L = 3, 4, 5$ i 5.5 , fixat $M = 18$, a la taula 3 donem els Ra crítics, variant N . Al augmentar L semblaria que es necessita més resolució horitzontal que per $L \in [1, 2]$ i en canvi es pot observar que els

$M = 18$				
	sense simetria S_1		amb simetria S_1	
L	$N = 12$	$N = 16$	$N = 12$	$N = 16$
3	4.51	4.39	2.82	2.81
4	3.04	3.00	2.35	2.36
5	2.44	2.45	2.00	2.02
5.5	2.06	2.13	1.83	1.86

Taula 3: Fixat el nombre de punts de col·locació $M = 18$, $Ra \times 10^{-4}$ crític per a diferents mides de caixa, $L = 1, 1.4, 1.6$ i 2 i variant N .

valors crítics varien poc en canviar $N = 12$ per $N = 16$, amb menys que un 3 %. Com que per L grans no és tan sensible al número de modes, a la taula 3 presentem el Rayleigh per només quatre valors de $L \in [3, 5.5]$. També es pot observar com els valors del Rayleigh crític de l'anàlisi amb pertorbacions amb la simetria S_1 i de l'anàlisi amb pertorbacions sense aquesta simetria s'apropen quan el valor de L augmenta.

3.5.2 Corbes d'estabilitat

Examinarem, doncs, les corbes d'estabilitat pels diferents trencaments de simetria prenent $N = 16$ i $M = 18$.

A la figura 4 hem representat el número de Rayleigh en funció de la periodicitat L del contenidor per les corbes d'estabilitat marginal d'una sola parella de rolls, i la inestabilitat primària en traçat gruixut. La inestabilitat primària i la corba que li neix -amb punts- presenten una bifurcació estacionària mentre que la resta de corbes presenten una bifurcació de Hopf. Les freqüències corresponents s'han representat a la figura 5. La corba que neix de la primera inestabilitat serà discutida més endavant.

Totes aquestes corbes s'han calculat suposant que una única parella de rolls omple el domini complet, i cada salt en freqüència correspon a un canvi del valor propi que creua l'eix real.

Per longituds d'ona més petites que $L \simeq 1.75$ la inestabilitat secundària que apareix conserva la invariància per $S_2 \times S_3$. Per tant, es trenca la simetria S_1 i la solució bifurcada té vent no nul antisimètric. La corba d'estabilitat marginal corresponent s'ha representat a la figura 4 amb una línia puntejada. Per valors de L més grans la bifurcació dominant és invariant per a S_1 , per

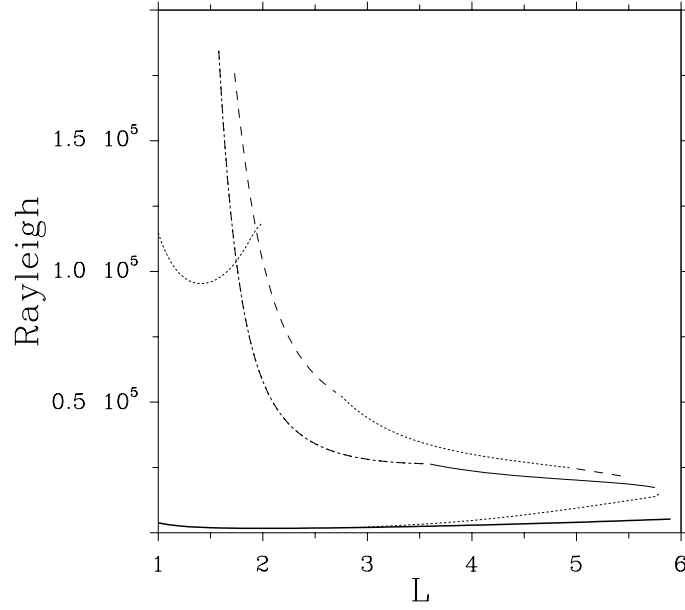


Figura 4: Rayleigh en funció de la longitud L del contenidor per diferents estats de l'estabilitat marginal. (i) La línia puntejada correspon a una bifurcació que manté $S_2 \times S_3$ (el vent és antisimètric) (ii) La línia amb ratlles correspon a una ruptura de simetria que manté la simetria $S_1 \times S_2 \times S_3$ (el vent és simètric). (iii) La línia amb punts i ratlles correspon a una bifurcació que manté S_1 però trenca les altres dues simetries ($U = 0$). (iv) La línia contínua correspon a una bifurcació de Hopf que manté totes les simetries ($U=0$). La branca que neix de la primera inestabilitat correspon a una bifurcació estacionària que manté $S_2 \times S_3$. La inestabilitat primària, amb línia gruixuda.

tant, s'obtenen solucions bifurcades sense velocitat mitjana. Malgrat tot, per $L \simeq 3.5$ es produeix un canvi important, tal com es pot comprovar en el salt de freqüència de la figura 5. Per valors de longitud d'ona $1.75 \lesssim L \lesssim 3.5$ -línia amb punts i ratlles- la solució bifurcada manté la simetria S_1 però trenca les altres dues simetries de G . En contrast, per $L \gtrsim 3.5$ -línia contínua- el vector propi és invariant per al grup complet de simetries, i així manté les mateixes simetries espacials que la solució no pertorbada.

La discussió anterior ens mostra que, per a $\sigma = 10$, només tres tipus diferents de solucions, dels quatre que n'hi ha, poden bifurcar d'una única parella de rolls. En el capítol 4, de cada un d'aquests tres tipus s'han pres com a prototipus les

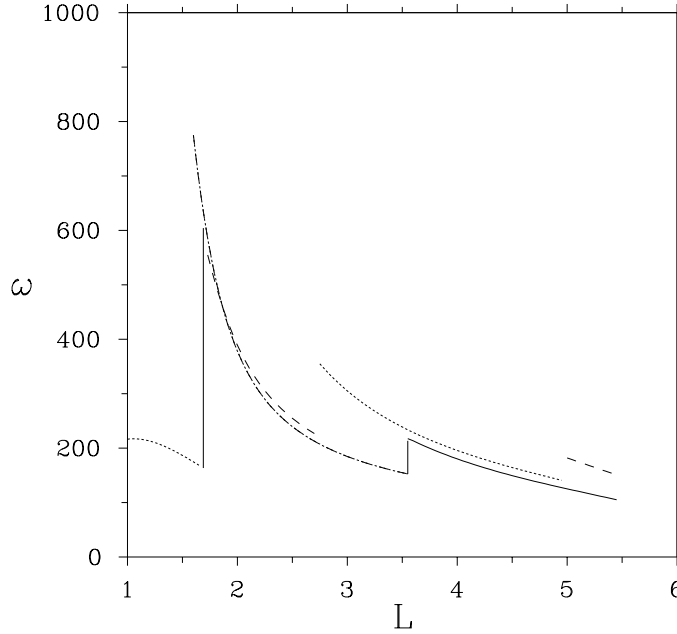


Figura 5: Freqüències angulars en funció de L corresponents a la figura 4.

caixes $L = 1, 2, 4$, i per a aquestes caixes s'ha estudiat la dinàmica no lineal i següents bifurcacions per valors de Ra superiors.

Hi ha, a més, solucions que tenen vent amb perfil simètric, la bifurcació que és invariant per a la simetria $S_1 \times S_2 \times S_3$ i trenca les altres dues línia amb ratlles. Aquestes solucions no s'han trobat dominants en lloc, com es pot comprovar a la figura 4. Malgrat no ser dominants, a partir de l'anàlisi d'estabilitat lineal es pot donar una descripció de la seva geometria i dinàmica a prop de la bifurcació. Això ho veurem en el capítol 4, quan estudiem el comportament no lineal de les solucions bifurcades.

La branca d'inestabilitats que neix de la corba $n = 1$, representada amb una línia amb punts a la figura 4, correspon a una bifurcació estacionària i sobre ella el vector propi té simetria $S_2 \times S_3$ amb vent U antisimètric quatre ordres de magnitud més petit que la resta de variables. Aquesta corba amb vent neix exactament de $(L, Ra) \simeq (2.92, 2055)$ (representada a la figura 6), que correspon a la intersecció de $n = 1$ i $n = 2$, corbes que donen la inestabilitat primària d'una i dues parelles de rols respectivament. Les solucions a les quals s'ha aplicat l'anàlisi són estables per sobre la corba i per sota, inestables. En

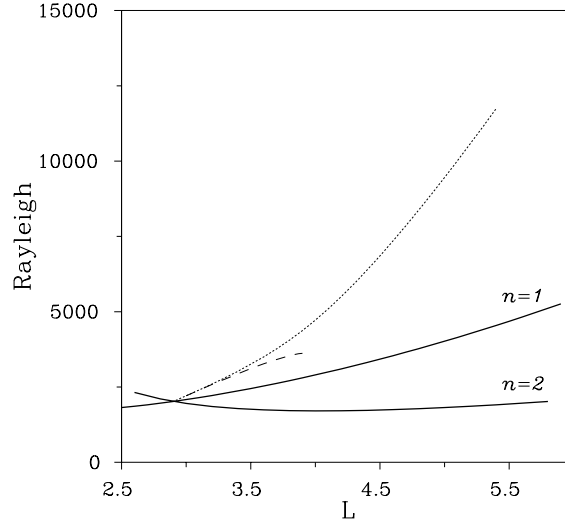


Figura 6: Ra en funció de L per les branques d'estabilitat marginal que neixen de la intersecció de $n = 1$ i $n = 2$. Corresponen a una bifurcació estacionària. La corba amb punts manté $S_2 \times S_3$ i la corba amb ratlles manté $S_1 \times S_2 \times S_3$.

aquesta intersecció també neix una corba tal que sobre ella el vector propi és invariant per a $S_1 \times S_2 \times S_3$ amb vent U amb un perfil simètric, representada amb ratlles a la figura 6. Però aquesta corba queda per sota de l'altra i no és mai dominant. En aquesta intersecció es produeix a més una ressonància 1:2 de dos estats purs, tal com hem definit al capítol 2.

El diagrama d'estabilitat que presentem a les figures 4 i 5 no es pot allargar per mides de caixa més grans que $L \gtrsim 6$ pel fet que en aquesta zona no podem trobar solucions estacionàries invariants per a G que siguin estables.

3.6 Discussió

Hem vist que per a $\sigma = 10$, per mides de caixa relativament petites $L \lesssim 1.75$ i per valors de Rayleigh grans una parella de rolls presenta una inestabilitat secundària deguda a pertorbacions que contenen velocitat mitjana no nul·la amb un perfil antisimètric (però mai simètric). La transició d'una parella de rolls a una solució amb vent es produeix via una bifurcació de Hopf. Al treball

en convecció 2D amb condicions de contorn lliures de Howard & Krishnamurti (1986) - que notem H&K86 - es dedueix un model d'equacions d'amplitud que admet solucions amb vent amb perfil antisimètric. La bifurcació que s'obté és estacionària. Malgrat tenir condicions de contorn diferents quan refem els càlculs amb un coeficient de Fourier - per tal de comparar amb el model de H&K86 - obtenim una bifurcació estacionària i no de Hopf. Al capítol 4, secció 3, deduïm un model ampliat del de H&K86 que dóna suport a la bifurcació de Hopf que obtenim.

S'ha trobat una branca d'estabilitat també invariant per a la simetria $S_2 \times S_3$ amb vent no nul a prop del valor crític (L_c, Ra_c) . Aquesta branca presenta una bifurcació estacionària. La velocitat mitjana del vector propi és quatre ordres de magnitud més petita que la resta de variables a diferència de la velocitat mitjana del vector propi sobre la branca d'estabilitat per valors del Rayleigh superiors, la qual és un o dos ordres de magnitud més petita. És una corba que neix exactament de $(L, Ra) \simeq (2.92, 2055)$, la intersecció entre $n = 1$ i $n = 2$ (inestabilitat primària d'una i dues parelles de rolls respectivament). Per sota aquesta branca una parella de rolls és inestable, per sobre és estable.

Els càlculs no lineals que hem fet prop d'aquesta branca donen suport a pensar que la bifurcació que trobem és subcrítica. Els càlculs s'han dut a terme mitjançant el codi numèric que expliquem al següent capítol. Ens hem situat a prop de la corba marginal, hem partit de la solució estacionària amb una parella de rolls pertorbada amb el vector propi que dóna la inestabilitat. Per valors del temps suficientment grans la velocitat mitjana es fa zero i el sistema evoluciona a una solució estacionària amb més d'una parella de rolls idèntiques. Hem provat per a un contenidor de longitud $L = 3.5$ i $Ra = 3250$, per a aquesta L la bifurcació es produeix a $Ra = 3251.7$, i per a un contenidor de longitud $L = 3.8$ i $Ra = 4000$, i en aquest cas el valor sobre corba crítica és per a $Ra = 4056.7$. En tots dos casos la solució pertorbada evoluciona a una solució estacionària amb dues parelles de rolls idèntiques.

Una corba com aquesta també ha estat trobada en convecció en un medi porós amb condicions de contorn lliures (de la Torre & Busse 1994). L'anomenen inestabilitat monotònica amb $d = 0$ i està relacionada amb una ressonància 1:3. Els càlculs que han dut a terme prop d'aquesta corba mostren com una parella de rolls evoluciona a tres parelles de rolls.

Resultats similars també han estat trobats als treballs de Busse & Or (1986), Armbruster (1987) on dedueixen un model d'equacions d'amplitud que estudia la ressonància 1:2 en convecció 2D amb condicions de contorn lliures: fixada $L \gtrsim 2.92$, per causa de la interacció no lineal dels dos estats purs amb nombres d'ona α i 2α existeix un número de Rayleigh pel qual apareixen solucions híbrides amb

$U \neq 0$ amb un perfil simètric. Són solucions que apareixen via una bifurcació subcrítica, i per tant, són inestables.

El diagrama d'estabilitat no es pot continuar per a $L \gtrsim 6$ perquè cap solució estacionària invariant per a G és estable en aquesta zona (veure capítol 5, secció 4). És una situació similar a la que es dona al treball Clever & Busse (1979) en convecció bidimensional amb idèntiques condicions de contorn ja que no els és possible calcular una solució estacionària estable amb una parella de rolls; el mètode convergeix a tres parelles de rolls quan fixen la periodicitat.

Al treball de Mizushima & Fujimura (1992) justifiquen aquest comportament mitjançant les ressonàncies, en aquest cas, a una ressonància 1:3. Usant un model d'amplituds que acobla les amplituds dels estats purs a_1 i a_3 amb nombres d'ona α i 3α respectivament, troben zones de l'espai de paràmetres on a_1 és inestable però a_3 és estable, i en dedueixen que en aquesta mateixa regió una parella de rolls és inestable però tres parelles de rolls són estables. Demostrarem al capítol 5, secció 4, que sí que es dona una situació similar, en el sentit que hi ha zones on una parella de rolls és inestable i en canvi tres parelles de rolls són estables, però el límit d'estabilitat dels rolls no ve donat exactament pel model d'amplituds de Mizushima & Fujimura (1992).

Al treball de Nagata & Busse (1983) en convecció en un pla inclinat, la fenomenologia és similar, per $L \gtrsim 3.6$ no poden trobar cap solució estacionària estable amb una parella de rolls però sí, en canvi, una solució que en conté dues.

4 Dinàmica d'una parella de rolls

4.1 Equacions d'evolució: discretització

Usem la tècnica de Galerkin Fourier per discretitzar espacialment les equacions d'evolució tal com està descrita en el capítol 3, secció 3. En aquest cas, a diferència del capítol anterior, usarem un mètode pseudoespectral per a tractar numèricament els termes no lineals. El mètode de Galerkin Fourier pseudoespectral per a calcular termes quadràtics del tipus $w(x) = u(x)v(x)$ utilitza bàsicament la transformada discreta de Fourier (TDF): a partir dels coeficients de Fourier de u i v es calculen els corresponents valors reals mitjançant la TDF, d'on es calcula w en l'espai físic i una altra vegada mitjançant la TDF inversa es troben per w els coeficients de Fourier.

Sigui (U, χ', T') una solució de periodicitat L . Considerem per a U, χ' i T' els desenvolupaments discretitzats més generals possibles:

$$U(z, t) = \sum_{m=0}^M \hat{u}_m(t) \mathcal{T}_m(2z),$$

$$\chi'(x, z, t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \chi_n(z, t) e^{in\alpha x} = \sum_{\substack{n=-N/2 \\ n \neq 0}}^{N/2-1} \sum_{m=0}^M \hat{\chi}_{n,m}(t) \mathcal{T}_m(2z) e^{in\alpha x},$$

$$T'(x, z, t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} i T_n(z, t) e^{in\alpha x} = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=0}^M i \hat{T}_{n,m}(t) \mathcal{T}_m(2z) e^{in\alpha x},$$

on $\alpha = 2\pi/L$ és el nombre d'ona.

Prenem els coeficients de Fourier de $n = -N/2$ fins a $n = N/2-1$ i no fins a $n = N/2$ per a poder implementar bé les rutines que calculen la TDF mitjançant Transformades ràpides de Fourier (FFT).

Com que χ' i T' són funcions reals, es compleix la següent relació per als corresponents coeficients de Fourier $\chi_n = \chi_{-n}^*$ i $T_n = T_{-n}^*$, on $*$ significa conjuguar. Per això, només cal treballar amb la meitat dels coeficients. Prenem $n = 0 \div N/2 - 1$, i el que queda desaparellat, $n = -N/2$, l'imposem igual a zero. En el desenvolupament per a la temperatura hem posat una unitat imaginària i per poder separar fàcilment la part real de la imaginària del problema discretitzat.

Usant, a més, el mètode de col·locació en els punts $2z_j = \cos(\pi j/M)$ amb $j = 0 \div M$, tractant les condicions de contorn per a ω com en el capítol anterior i usant la tècnica pseudoespectral per a calcular els termes no lineals s'obté un sistema d'equacions diferencials no lineal del tipus

$$\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}),$$

amb $\mathbf{y}(t)$ un vector real de dimensió $2(N-1)(M-1)$ que conté les parts reals i imaginàries dels coeficients de Fourier. En el nostre cas, si $U_j(t) := U(z_j, t)$, $\omega_{n,j}(t) := \omega_n(z_j, t) = \omega_{n,j}^R + i\omega_{n,j}^I$ i $T_{n,j}(t) := T_n(z_j, t) = T_{n,j}^R + iT_{n,j}^I$, hem ordenat $\mathbf{y}(t)$ com

$$\mathbf{y}(t) = (U_1, \dots, U_{M-1}, T_{0,1}^R, \dots, T_{0,M-1}^R,$$

$$\dots, \omega_{n,1}^R, \dots, \omega_{n,M-1}^R, T_{n,1}^I, \dots, T_{n,M-1}^I, \omega_{n,1}^I, \dots, \omega_{n,M-1}^I, T_{n,1}^R, \dots, T_{n,M-1}^R, \dots)^{(n)},$$

amb $n = 1 \div N/2 - 1$.

Per a aquests tipus de sistemes que provenen d'equacions de difusió-advecció és convenient separar de $f(\mathbf{y})$ la part lineal de la no lineal (Canuto et al. 1987). Posem el sistema d'equacions que integrem com

$$\dot{\mathbf{y}} = L\mathbf{y} + F(\mathbf{y}),$$

amb $L = Df(0)$, i $F(0) = 0$. El terme lineal o de difusió acostuma a donar caràcter stiff a les equacions i, per tant, és convenient resoldre'l implícitament, en el nostre cas hem usat el mètode d'Euler implícit. Per al terme no lineal o advection és suficient amb un mètode explícit, i en aquest cas hem escollit el mètode d'Addams-Bashforth. De la combinació de tots dos en resulta el següent esquema d'integració:

$$\mathbf{y}^{i+1} = \mathbf{y}^i + \Delta t L \mathbf{y}^{i+1} + \frac{\Delta t}{2}(3F(\mathbf{y}^i) - F(\mathbf{y}^{i-1})),$$

on Δt és el pas de temps i $\mathbf{y}^i := \mathbf{y}(i\Delta t)$.

Conegut $\mathbf{y}^i, F(\mathbf{y}^{i-1})$ calculem $\mathbf{y}^{i+1}$ resolent en forma triangular el sistema d'equacions

$$(I - \Delta t L)\mathbf{y}^{i+1} = \mathbf{y}^i + \frac{\Delta t}{2}(3F(\mathbf{y}^i) - F(\mathbf{y}^{i-1})).$$

Només cal descomposar $(I - \Delta t L)$ en forma LU una sola vegada abans de començar la integració. Aquesta matriu és diagonal per blocs perquè així ho és L , un bloc per a cada n de dimensió $4(M-1)$, i per tant, només cal descomposar en forma LU cadascun d'aquests blocs. Això fa que resoldre el sistema

Ra	C & B (1974)	M & F (1992)	
2000	1.214	1.21292	1.21292
2500	1.478	1.47502	1.47502
3000	1.667	1.66250	1.66251
5000	2.112	2.10299	2.10298
10000	2.618	2.60790	2.60805
20000	3.119	3.10686	3.10697
30000	3.440	3.42016	3.41941
50000	3.894	3.85185	3.84929

Taula 4: El número de Nusselt per diferents Ra .

Ra	$N = 12$	$N = 24$	$N = 32$
2000	1.21292	1.21292	1.21292
5000	2.10305	2.10300	2.10298

Taula 5: El número de Nusselt per diferents Ra i N .

d'equacions sigui més fàcil; s'integra per separat per cada n i un cop calculats tots els coeficients de Fourier es calcula $\mathbf{y}^{i+1}$ i els termes no lineals $F(\mathbf{y}^{i+1})$, i s'itera.

Per a la descomposició usem el mètode de Crout com un esquema compacte de l'eliminació Gaussiana, de manera que no és necessari guardar càlculs de passos intermedis. Primer calcula la primera fila de la matriu triangular superior i la primera columna de matriu triangular inferior i seguidament la segona fila de la superior i la segona columna de la inferior i així successivament.

Abans de mostrar els resultats compararem els nostres resultats numèrics amb els de Clever & Busse (1974) i Mizushima & Fujimura (1992), que notarem C&B(74) i M&F(92). A la taula 4 comparem els valors del número de Nusselt per $\sigma = 7$ (aigua) al número d'ona crític $\alpha_c = 3.117$. En els dos treballs calculen les solucions estacionàries directament usant un mètode de càlcul de zeros. Els nostres resultats (la darrera columna) s'han obtingut a partir de solucions calculades amb el codi numèric que integra i que acabem d'explicar. Hem considerat Δt tals que el Nu tingui cinc decimals exactes. Hem calculat amb $N = 32$ i $M = 18$. Els resultats de M&F(92) són per a $N = 12$ i $M = 30$.

A la taula 5 comparem els nostres resultats per a diferents resolucions, $M = 18$, $N = 12, 24$ i 32 .

Pel que fa als càlculs que presentem en la següent secció, el criteri per escollir N i M es basa en el número de Nusselt Nu . Fixant $M = 18$ o 24 , escollim

$N = 16, 24$ o 32 (tots potències de 2 i 3 per tal d'implementar les FFT) de manera que el Nu variï amb menys d'un 0.1% . El pas de temps Δt s'ha escollit independentment de N i M de manera que refent els càlculs amb $\Delta t/2$ el Nu no canviï amb més d'un 0.5% .

Quan la solució té dependència temporal, el número de Nusselt que calculem per a aquesta solució és una mitjana d'una seqüència temporal $Nu(t)$ suficientment llarga. La mitjana es calcula a partir de la FFT de la seqüència prenent el coeficient de Fourier $n = 0$ d'aquesta transformada. Han estat suficients seqüències amb $t = 2$ o 4 unitats de temps.

4.2 Resultats per a $\sigma = 10$. Jerarquia de solucions no lineals

Fixat el número de Prandtl $\sigma = 10$, l'anàlisi lineal que hem presentat en el capítol anterior ens mostra com, per exemple, per a

- $L = 1$, una parella de rols s'instabilitza en una solució amb la simetria $S_2 \times S_3$, i en conseqüència, amb velocitat mitjana amb perfil antisimètric,
- $L = 2$, una parella de rols s'instabilitza en una solució amb la simetria S_1 i, per tant, sense velocitat mitjana,
- $L = 4$, una parella de rols s'instabilitza en una solució que té totes les simetries de G i, per tant, sense velocitat mitjana.

Totes aquestes inestabilitats es produeixen via una bifurcació de Hopf. En aquesta secció estudiarem la jerarquia de solucions no lineals que apareixen augmentant el número de Rayleigh. Ho farem per a aquestes tres mides de la caixa periòdica, $L = 1, 2, 4$, que són representatives de la dinàmica no lineal per a aquest número de Prandtl.

Tot i que no és dominant cap inestabilitat amb velocitat mitjana amb un perfil simètric, a partir de l'anàlisi lineal mostrarem també com seria la dinàmica d'una solució a prop d'aquesta bifurcació.

4.2.1 Cas $L = 1$

Hem calculat les solucions amb una resolució estàndard de $N \times M = 16 \times 24$ i $\Delta t = 10^{-4}/2$.

Començarem per una caixa periòdica de longitud $L = 1$. La figura 7 ens resumeix el comportament de les solucions augmentant el número de Rayleigh.

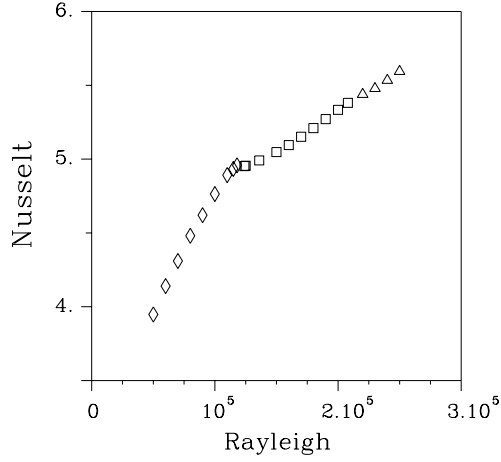


Figura 7: Número de Nusselt en funció del Rayleigh per a solucions amb $L = 1$.

Hem representat el número de Nusselt en funció del Ra , i podem veure que es troben tres tipus de solucions.

El flux és estacionari invariant per a G fins a $Ra \simeq 1.15 \times 10^5$ (rombes) on bifurca a un règim oscil·latori amb velocitat mitjana diferent de zero. És una bifurcació de Hopf amb freqüència angular $\omega = 216$, que es correspon amb els resultats obtinguts en el capítol 3, secció 4. Les solucions bifurcades (quadrats) trenquen les simetries S_1 i $S_1 \times S_2 \times S_3$ però encara mantenen la invariància per $S_2 \times S_3$.

Un exemple d'aquesta nova solució es pot trobar a la figura 8, per a $Ra = 2 \times 10^5$, on s'han representat les línies de corrent de quatre solucions separades un quart de període. La inclinació de les funcions de corrent oscil·la amb un període de $\tau = 3.3 \times 10^{-2}$ - $f = \tau^{-1} = \omega/2\pi$ és la freqüència i ω és la freqüència angular i val $\omega = 190$ a l'hora que s'aprimen i enxamplen. Els corresponents perfils de velocitat mitjana també els hem representat a la figura 8. Tenen un perfil antisimètic, consistent amb el fet que les solucions són invariants per a $S_2 \times S_3$, i canvien de signe comprimint-se i expandint-se. En aquest cas el número de Reynolds, definit com $Re = U_{max}/\sigma$, és $Re \simeq 4$ (figura 8), demostrant una gran activitat. Aquestes són solucions que han perdut la invariància per S_1 i $S_1 \times S_2 \times S_3$ però són invariants per a $S_1 \times S_4$ i $S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$, on recordem que la simetria S_4 és la que trasllada en el temps la meitat del període. La solució no té la simetria de reflexió i en canvi sí que la té quan la comparem amb la traslladada la meitat del període. Així doncs, les solucions que hem senyalat amb un quadrat a la figura 7 són solucions invariants per a $S_2 \times S_3$, $S_1 \times S_4$ i

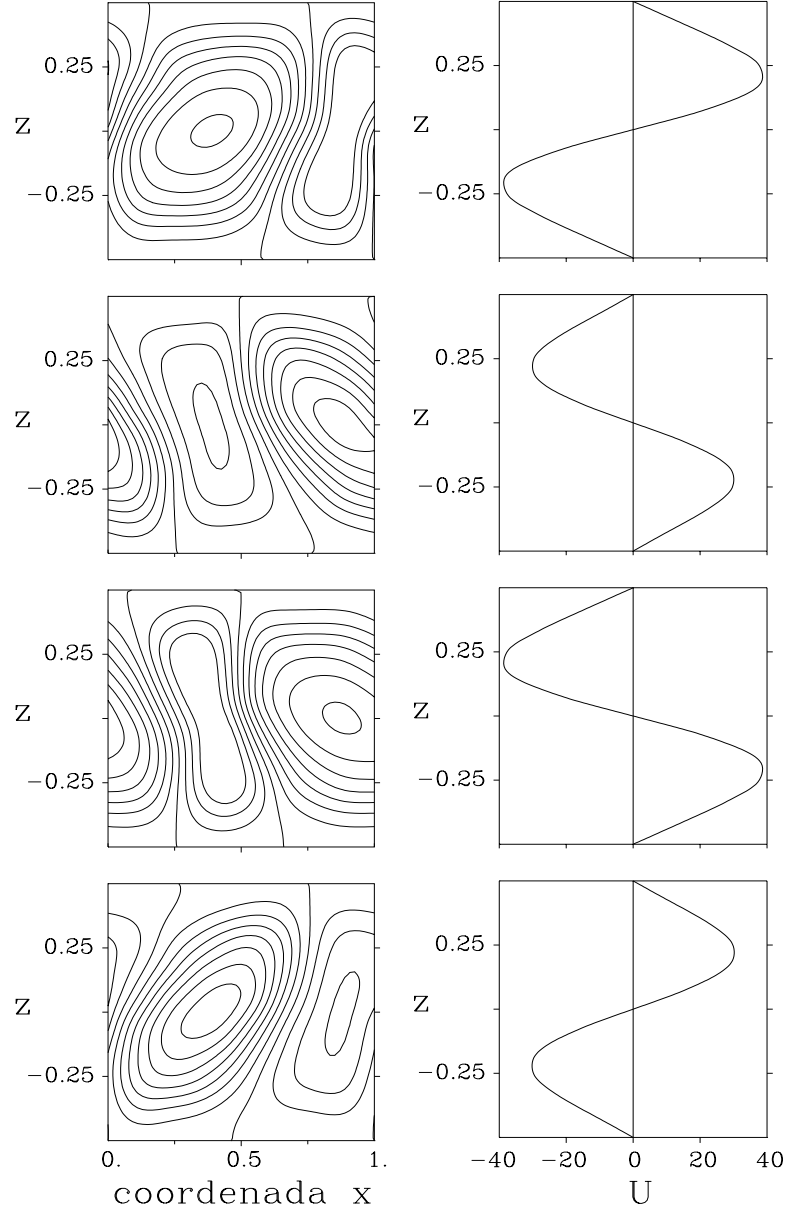


Figura 8: Una solució amb $L = 1$ i $Ra = 2 \times 10^5$. (a) Línies de corrent corresponents a quatre instantànies separades un quart de període cadascuna. El període és $\tau = 3.3 \times 10^{-2}$. (b) Els corresponents perfils antisimètrics de la velocitat mitjana.

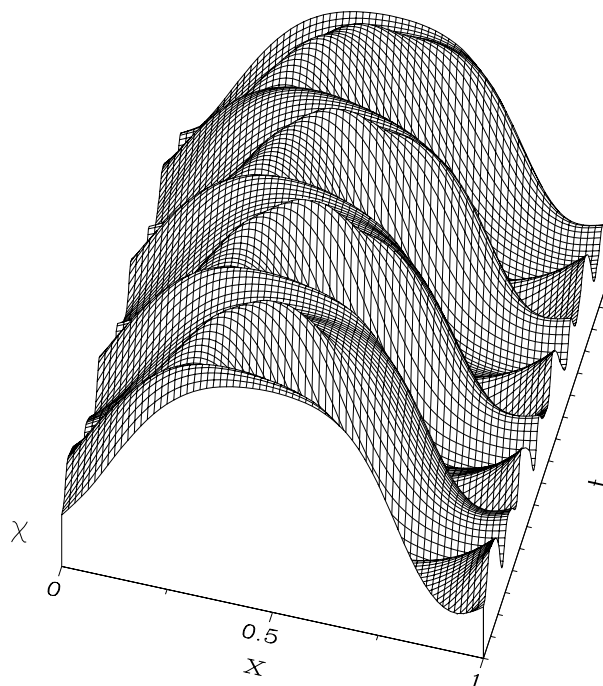


Figura 9: La funció de corrent $\chi(x, z = 1/4, t)$ corresponent a la solució representada a la figura 8.

per $S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$.

La dinàmica d'aquesta ona es pot entendre millor a partir de la figura 9, on hem representat una secció horitzontal a $z = 1/4$ de la funció de corrent en funció del temps, $\chi(x, z = 1/4, t)$, en una superfície 3D. A primera vista pot ser confús de decidir si és una ona estacionària o és una ona viatgera, perquè no hi ha cap canal permanent ni cap línia de crestes. La superfície 3D mostra clarament com les crestes deriven d'un costat a l'altre el temps, la qual cosa podria suggerir que és una ona viatgera que canvia de sentit (en anglès "reversing traveling wave", Landsberg & Knobloch 1991). No obstant, la velocitat de fase no canvia de signe per a totes les x a la vegada, com correspondria. La simetria de reflexió s'ha trencat, però no és suficient per decidir sobre la naturalesa de l'ona.

Hem analitzat amb més detall l'evolució temporal d'aquesta solució, ens hem fixat en el comportament de cadascun dels coeficients de Fourier. L'evolució de

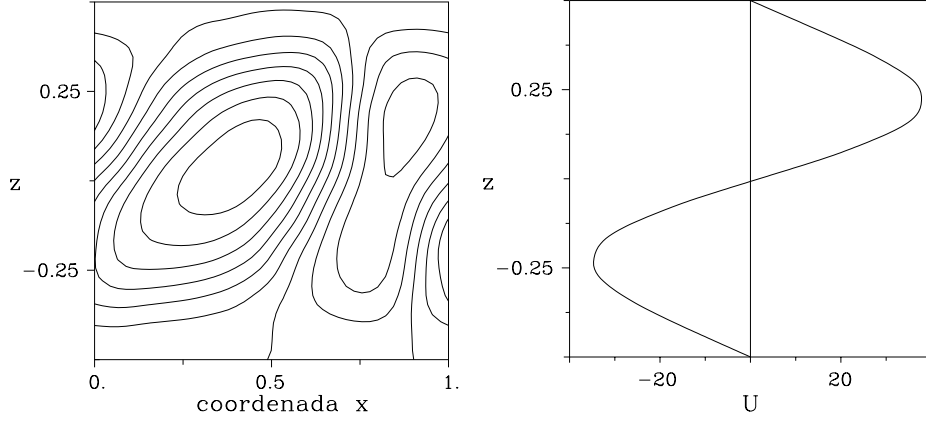


Figura 10: Una solució amb $L = 1$ i $Ra = 2.2 \times 10^5$ en un instant donat. (a) Línies de corrent χ . (b) Perfil de la velocitat mitjana.

U, χ', T' ve donada per:

$$U = \sum_{lm} a_{lm} e^{i(2l+1)\omega t} T_{2m+1}(z),$$

$$\chi' = \sum_{\substack{lnm \\ n+m \neq 2}} c_{lnm} e^{i(2l)\omega t} \sin n\alpha x T_m(z) + \sum_{\substack{lnm \\ n+m=2}} b_{lnm} e^{i(2l+1)\omega t} \cos n\alpha x T_m(z),$$

$$T' = \sum_{\substack{lnm \\ n+m \neq 2}} f_{lnm} e^{i(2l)\omega t} \cos n\alpha x T_m(z) + \sum_{\substack{lnm \\ n+m=2}} d_{lnm} e^{i(2l+1)\omega t} \sin n\alpha x T_m(z).$$

La desviació de la temperatura, per exemple, també es pot expressar com:

$$\begin{aligned} T'(x, z, t) = & \\ & + \left[\sum_l C_{l1}(z) e^{i(2l)\omega t} \right] \cos \alpha x + \left[\sum_l S_{l1}(z) e^{i(2l+1)\omega t} \right] \sin \alpha x \\ & + \left[\sum_l S_{l2}(z) e^{i(2l)\omega t} \right] \cos 2\alpha x + \left[\sum_l C_{l2}(z) e^{i(2l+1)\omega t} \right] \sin 2\alpha x + \dots, \quad (1) \end{aligned}$$

on C_{li}, S_{li} són funcions simètriques i antisimètriques respectivament. A la pròxima secció estudiarem el caràcter d'aquesta ona amb més detall.

Per a $Ra \geq 2.07 \times 10^5$ el sistema trenca la simetria restant $S_2 \times S_3$ (triangles a la figura 7). Com a conseqüència, la velocitat mitjana ja no és antisimètrica,

$Ra \times 10^{-5}$	f_1	f_2	ω_1	ω_2
1.80	31.3		197	
2.00	30.9		194	
2.05	30.8		194	
2.07	32.1	5.8	202	36
2.10	32.4	7.0	204	44
2.15	32.8	9.3	206	58
2.20	34.8	11.5	219	72

Taula 6: Freqüències ω i $f = \omega/2\pi$ per a diferents Ra .

algunes línies de corrent són obertes i té un flux de massa no nul, $F(t) = \int_{-1/2}^{1/2} U(z, t) dz \neq 0$. A la figura 10 representem les línies de corrent en un instant qualsevol per a la solució amb $Ra = 2.2 \times 10^5$, de la qual ens podem adonar que hi ha algunes línies que no tanquen. També hem representat a la figura 10 el corresponent perfil de la velocitat mitjana. Fàcilment es pot veure una lleugera asimetria i com a resultat aquesta solució té un flux de massa net.

En aquesta transició apareix una nova freqüència i com que és incommensurable amb la del règim periòdic ens dona una indicació que s'obté un règim quasi-periòdic. Per a $Ra = 2.07 \times 10^5$ la freqüència angular fonamental d'una solució no pertorbada és $\omega_1 = 202$, i bifurca donant lloc a una nova freqüència $\omega_2 = 36$. Ambdues freqüències s'han mesurat per U . A la Taula 6 presentem les freqüències angulars ω i les freqüències $f = \omega/2\pi$ per diferents valors del Ra ; f_1 és la freqüència principal i f_2 la nova freqüència. La freqüència principal disminueix quan el Ra augmenta, mentre que després de la bifurcació augmenta.

A la figura 11 hem representat dues de les solucions obtingudes augmentant el número de Rayleigh des de la bifurcació de Hopf. Hem representat una seqüència temporal per a la velocitat mitjana a $z = 1/4$ i el corresponent espectre de Fourier per a $Ra = 2.00 \times 10^5$ i per a $Ra = 2.20 \times 10^5$. La freqüència està mesurada com $f = \omega/2\pi$. Per a $Ra = 2.20 \times 10^5$ la freqüència principal és $f_1 = 34.8$ i s'aprecia clarament la nova freqüència $f_2 = 11.5$. En la seqüència temporal es pot observar una modulació per causa de l'aparició de f_2 . A la figura 12 hem representat una seqüència temporal i l'espectre de Fourier del flux de massa per a una solució amb $Ra = 2.50 \times 10^5$. Es pot apreciar com aquesta solució presenta ja una dinàmica més complicada.

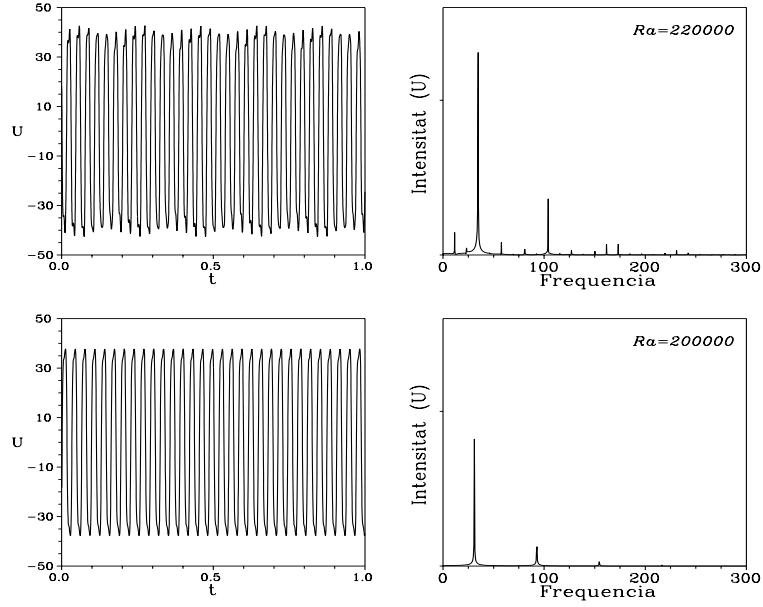


Figura 11: Seqüències temporals de $U(z = 1/4, t)$ i els corresponents espectres de Fourier per a $Ra = 2.00 \times 10^5$ i $Ra = 2.20 \times 10^5$.

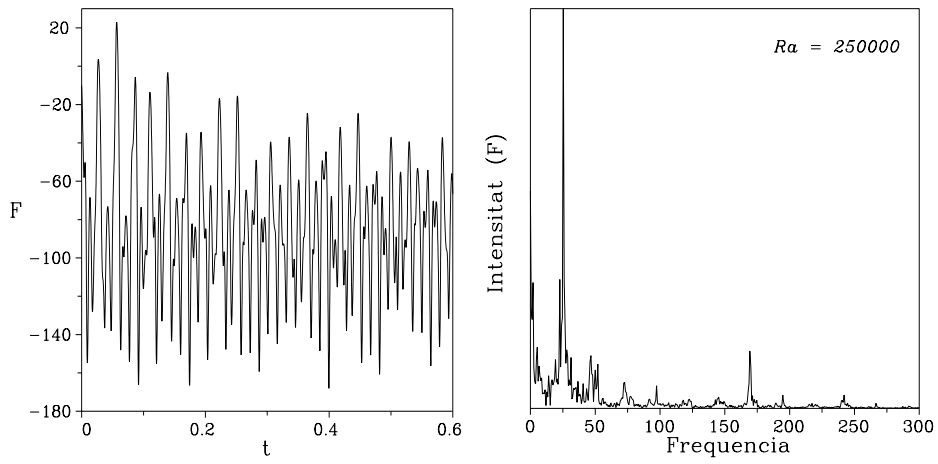


Figura 12: Una seqüència temporal i l'espectre de Fourier del flux de massa per a $Ra = 2.50 \times 10^5$.

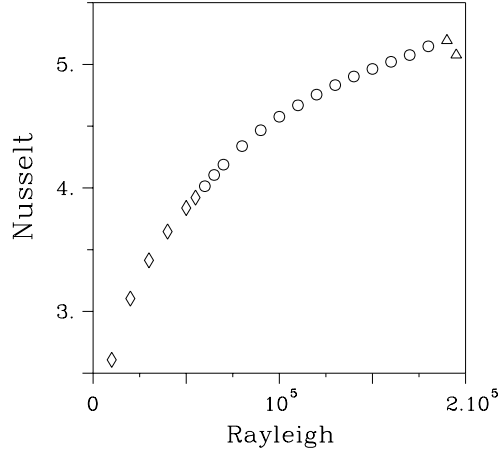


Figura 13: Número de Nusselt en funció del Rayleigh de solucions amb $L = 2$.

4.2.2 Cas $L = 2$

Hem calculat les solucions amb una resolució de $N \times M = 24 \times 24$ i $\Delta t = 10^{-5}$.

A la figura 13 hem representat el número de Nusselt en funció del número de Rayleigh, com un resum de les solucions que hem trobat per a longitud de caixa $L = 2$.

Al principi les solucions que apareixen són estacionàries, amb totes les simetries del grup G , les representem amb rombes. Per a $Ra \simeq 5.8 \times 10^4$ el sistema presenta una bifurcació de Hopf amb freqüència angular $\omega = 379$. Aquestes noves solucions, representades amb cercles, trenquen les simetries $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$, però continuen essent invariants per a S_1 .

Una seqüència temporal d'aquestes solucions periòdiques, cadascuna separada un quart de període, la representem a la figura 14. Correspon a $Ra = 8 \times 10^4$ i representem les línies de corrent. El centre del roll oscil·la periòdicament entre les parets laterals i el pla mitjà, però preserva la simetria de reflexió. Les simetries que s'han trencat, $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$, es substitueixen per simetries espàcio-temporals: $S_2 \times S_3 \times S_4$ i $S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$. El període per a aquestes solucions és $\tau = 2.88 \times 10^{-2}$ i la freqüència angular corresponent és $\omega = 218$. Per tant, cadascuna de les solucions de la figura 13 que estan representades per cercles són invariants per a S_1 , $S_2 \times S_3 \times S_4$ i $S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$.

La dinàmica d'aquesta solució es pot entendre millor a partir de la figura 15, on hem representat una superfície 3D de la funció de corrent $\chi(x, z = 1/4, t)$. La figura representa un interval de temps de quatre períodes i presenta

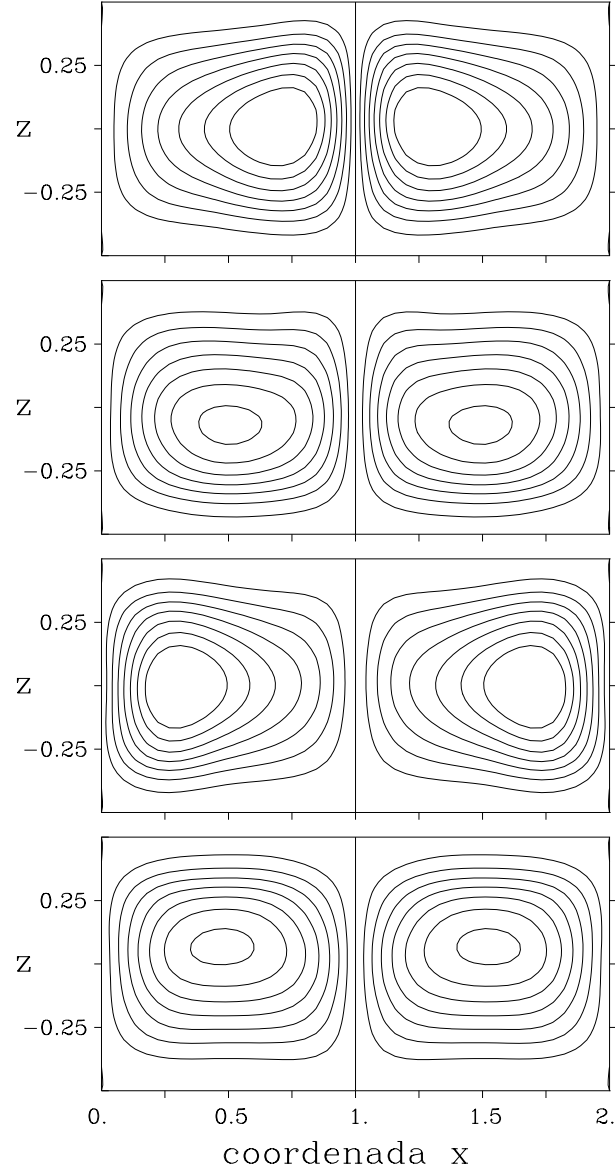


Figura 14: Línies de corrent corresponents a quatre instantànies d'una solució de longitud $L = 2$ i $Ra = 8 \times 10^4$ separades un quart de període cadascuna. El període és $\tau = 2.88 \times 10^{-2}$ i $U = 0$.

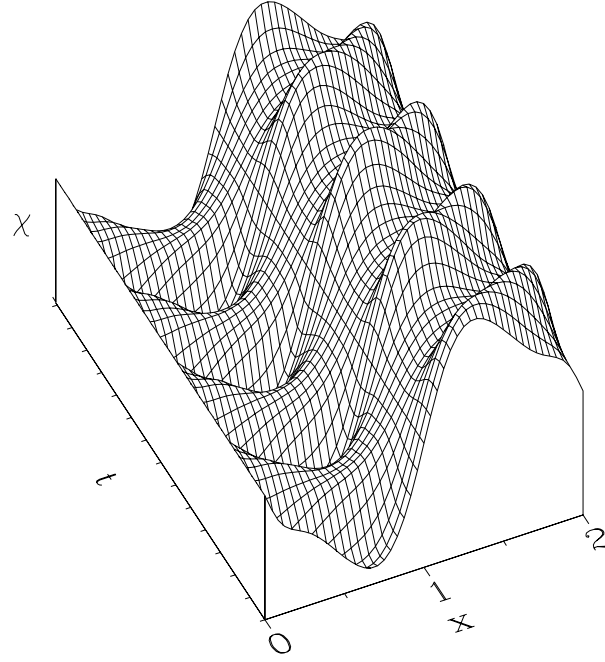


Figura 15: La funció de corrent $\chi(x, z = 1/4, t)$ corresponent a la solució representada a la figura 14.

la dinàmica d'una ona estacionària. La línia recta per a $x = 1$ mostra l'absència de propagació.

En aquest cas també hem analitzat l'evolució temporal de cadascun dels coeficients de Fourier. L'evolució de χ, T' ve donada per:

$$\chi = \sum_{\substack{lnm \\ n+m=2}} b_{lnm} e^{i(2l+1)\omega t} \sin n\alpha x T_m(z) + \sum_{\substack{lnm \\ n+m \neq 2}} c_{lnm} e^{i(2l)\omega t} \sin n\alpha x T_m(z),$$

$$T' = \sum_{\substack{lnm \\ n+m=2}} d_{lnm} e^{i(2l+1)\omega t} \cos n\alpha x T_m(z) + \sum_{\substack{lnm \\ n+m \neq 2}} f_{lnm} e^{i(2l)\omega t} \cos n\alpha x T_m(z).$$

La desviació de la temperatura, per exemple, també es pot expressar com:

$$T'(x, z, t) = \\ + \left[\sum_l C_{1l}(z) e^{i(2l)\omega t} + \sum_l S_{1l}(z) e^{i(2l+1)\omega t} \right] \cos \alpha x$$

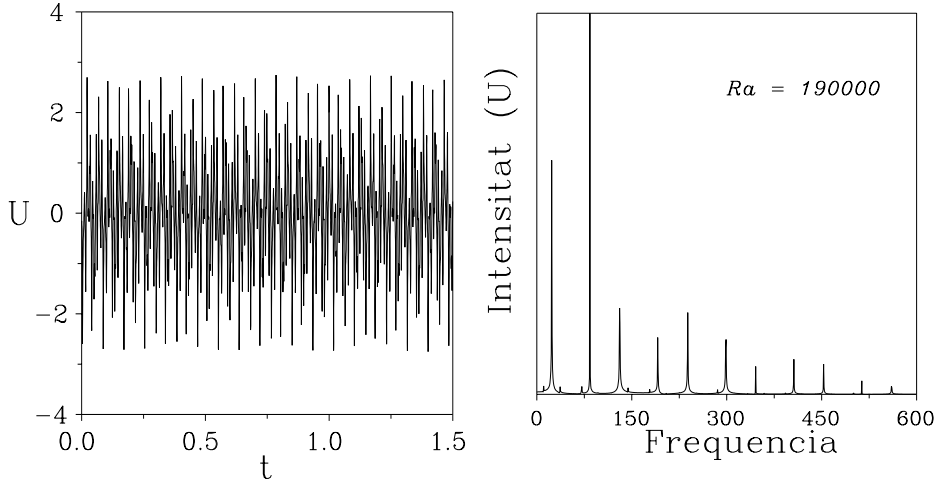


Figura 16: Una seqüència temporal i l'espectre de Fourier de $U(z = 1/4, t)$ d'una solució amb $Ra = 1.90 \times 10^5$.

$$+ \left[\sum_l S_{l2}(z) e^{i(2l)\omega t} + \sum_l C_{l2}(z) e^{i(2l+1)\omega t} \right] \cos 2\alpha x + \dots,$$

on C_{li}, S_{li} són simètriques i antisimètriques respectivament.

Per a $Ra \simeq 1.90 \times 10^5$ apareix una nova bifurcació, en aquest cas es trenca la simetria restant, S_1 , i com a conseqüència es genera vent. Com que prèviament s'han trencat les simetries $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$, la velocitat mitjana no té cap simetria vertical definida. Aquesta nova família de solucions bifurcades la representem a la figura 13 en triangles. Per aquestes solucions, sense cap simetria definida, el número de Nusselt ha disminuït.

Com en el cas anterior, a la transició també s'obté una nova freqüència incommensurable, la qual cosa dóna indicacions que variant el Rayleigh s'obtindrà caos via un règim quasi-periòdic.

Presentem a la taula 7 les freqüències angulars per a alguns valors del Rayleigh. Per a $Ra = 1.90 \times 10^5$ les freqüències principals són $\omega_1 = 336$ i $\omega_2 = 148$ per a la component no pertorbada i la bifurcada respectivament. A la taula 7 només hem representat les dues freqüències per a aquest valor del Rayleigh perquè a diferència del cas anterior – per a $L = 1$ – per a valors del Rayleigh lleugerament superiors ($Ra = 1.91 \times 10^5$) la solució ja presenta un comportament molt complex. A la figura 16, per a una solució amb $Ra = 1.90 \times 10^5$, hem representat una seqüència temporal i l'espectre de Fourier de la velocitat mitjana $U(z = 0.25, t)$. La freqüència està mesurada com $\omega/2\pi$.

Per a una altra d'aquestes solucions, la corresponent a $Ra = 1.92 \times 10^5$,

$Ra \times 10^{-4}$	8	15	18	19
ω_1	218	304	330	336
ω_2				148

Taula 7: Freqüències angulars ω per diferents Ra .

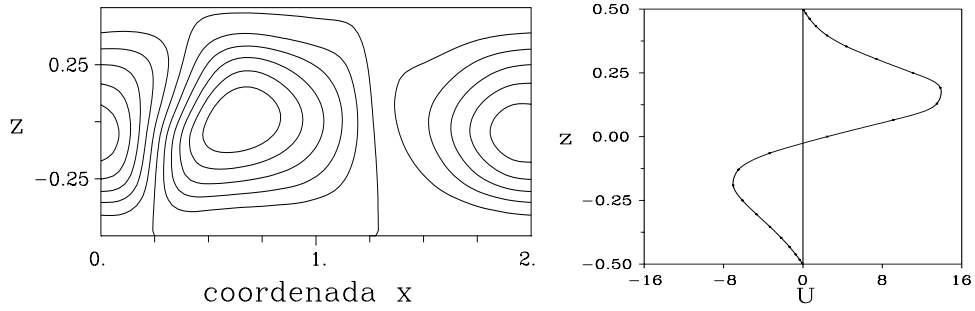


Figura 17: Una solució amb $L = 2$ i $Ra = 1.92 \times 10^5$ en un instant donat. (a) Les línies de corrent χ . Hi ha una línia de corrent oberta, i així mostra un flux de massa net. (b) El corresponent perfil de velocitat mitjana.

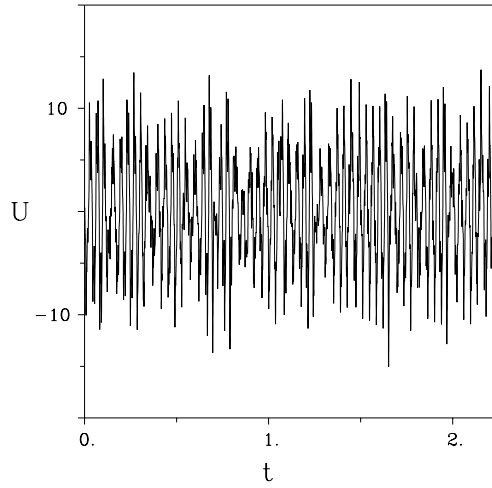


Figura 18: Velocitat mitjana $U(z = 1/4, t)$ en funció del temps d'una solució amb $L = 2$ i $Ra = 1.92 \times 10^5$.

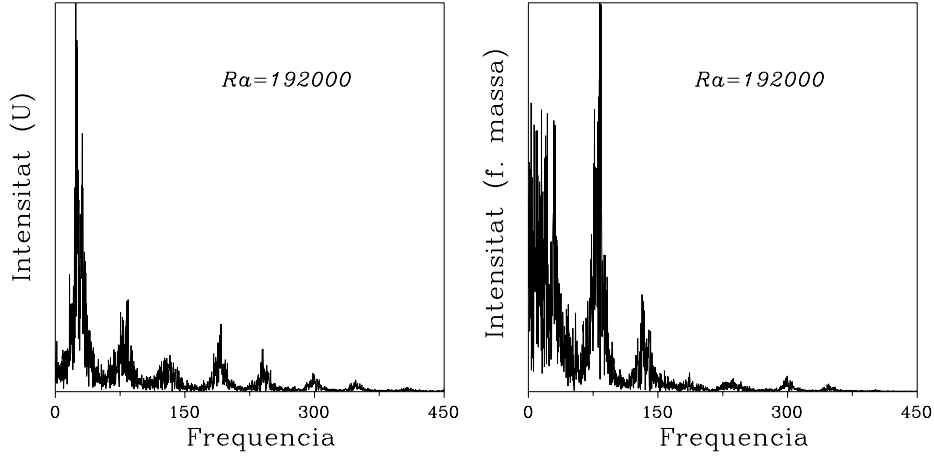


Figura 19: Espectres de Fourier de la velocitat mitjana $U(z = 1/4, t)$ i del flux de massa $F(t)$ corresponent a la solució representada a la figura 18.

representem a la figura 17 les línies de corrent i el corresponent perfil de velocitat mitjana en un instant. Es pot veure com no totes les línies de corrent són tancades, i per això el flux de massa és no nul. Aquest resultat és consistent amb el fet que la velocitat mitjana no té en particular la simetria $S_2 \times S_3$.

Una seqüència temporal de la velocitat mitjana a $z = 1/4$, també per a $Ra = 1.92 \times 10^5$, la representem a la figura 18, mostrant els canvis de signe de U . El número de Reynolds és aproximadament 1 i així demostra una gran activitat. Els espectres de Fourier per a $U(z = 1/4, t)$ i $F(t)$ s'han representat a la figura 19.

4.2.3 Cas $L = 4$

Hem calculat les solucions amb una resolució de $N \times M = 32 \times 18$ i $\Delta t = 10^{-4}/2$.

Per a aquest valor també representem el número de Nusselt en funció del Ra , a la figura 20.

Per a $Ra \simeq 2.3 \times 10^4$ les solucions (rombes) bifurquen a noves solucions (triangles plens) que també són invariants per al grup G via una bifurcació de Hopf. La freqüència angular corresponent és $\omega = 180$.

Un exemple d'aquesta nova família de solucions, per a $Ra = 2.4 \times 10^4$, l'hem representat a la figura 21. Una seqüència de les línies de corrent, separades un quart de període, ens mostra com es preserven totes les simetries. La diferència geomètrica amb els rols no pertorbats és aparent. Les línies de corrent per a

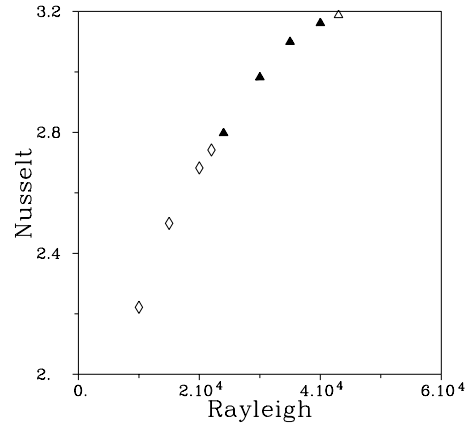


Figura 20: Número de Nusselt en funció de Ra de solucions amb $L = 4$.

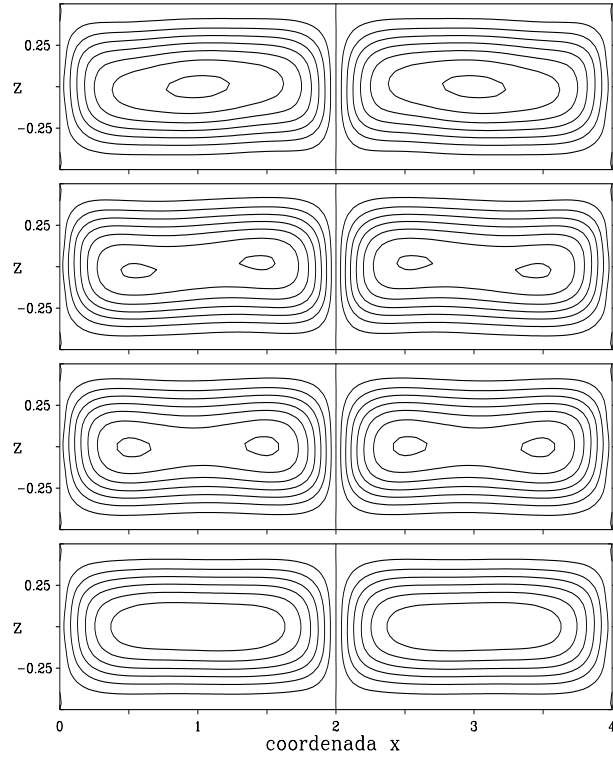


Figura 21: Línies de corrent corresponents a quatre instantànies d'una solució de longitud $L = 4$ i $Ra = 2.4 \times 10^4$ separades un quart de període cadascuna. El període és $\tau = 3.4 \times 10^{-2}$ i $U = 0$.

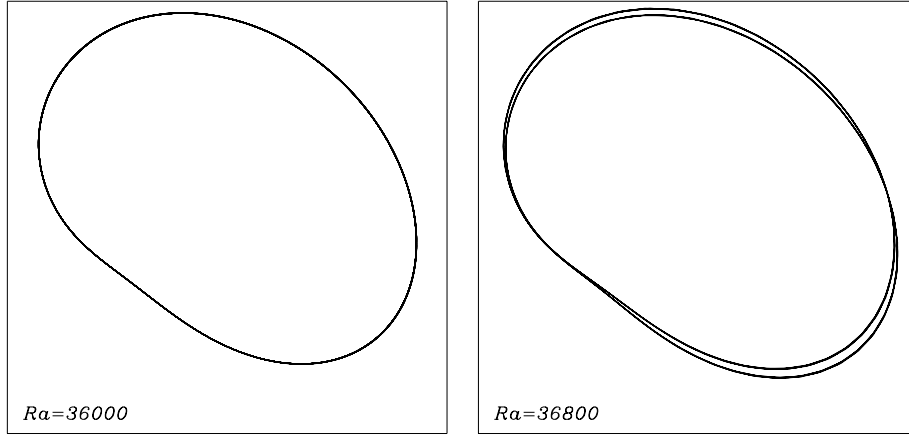


Figura 22: Projeccions de les òrbites de dues solucions amb $Ra = 36000$ i $Ra = 36800$.

les dues seqüències centrals mostren la presència de quatre extrems a la línia mitjana horitzontal. Les solucions són invariants per al grup G , en particular per S_1 i, per tant, la velocitat mitjana és zero.

Per a $Ra \simeq 36100$ hem trobat un doblament del període de la solució, les freqüències principals són $f_1 = 18, f_2 = 36$. A la figura 22 hem representat dues projeccions bidimensionals de les òrbites corresponents a les solucions periòdiques: una abans del doblament del període, per a $Ra = 36000$, i una altra després, per a $Ra = 36800$. Les solucions amb $Ra = 40000$ i $Ra = 42000$ continuen tenint el període doblat amb freqüències principals aproximadament iguals a $f_1 = 19$, i $f_2 = 38$.

Malgrat tot, com en els dos casos anteriors, quan augmentem el número de Rayleigh el flux perd totes les simetries; la invariància per S_1 es trenca i apareix d'aquesta manera un camp de velocitat mitjana diferent de zero. El flux de massa també esdevé diferent de zero. La bifurcació es produeix per a $Ra \simeq 4.3 \times 10^4$. Al trobar per a $Ra \simeq 36100$ un doblament de període sembla que la transició a caos, en aquest cas, s'hagués de produir via una cascada subharmònica de doblaments de període, però no ens ha estat possible trobar cap més doblament de període per a valors del número de Rayleigh superiors. Hem disminuït el pas de temps, hem augmentat el número de Rayleigh i sempre quan hi ha un canvi de l'estat de la solució aquesta esdevé caòtica.

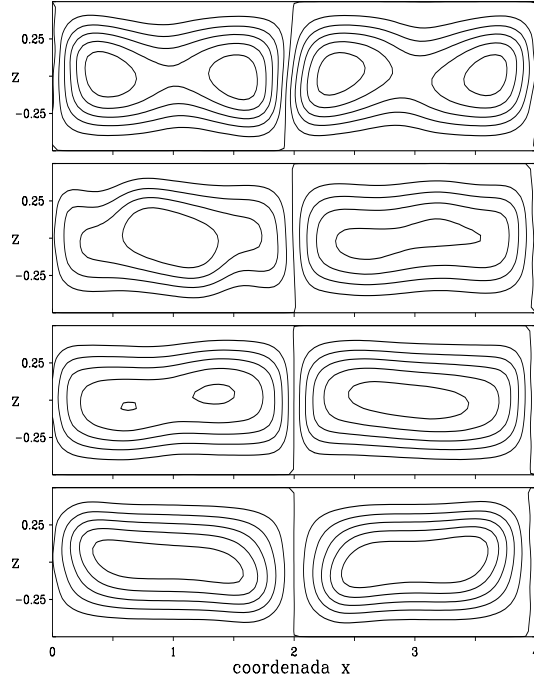


Figura 23: Línies de corrent de quatre instantànies d'una solució amb $L = 4$ i $Ra = 4.5 \times 10^4$, cadascuna separada un interval de temps de 0.01.

Hem representat a la figura 23 les corresponents línies de corrent de quatre instants separades igualment en el temps d'una solució caòtica amb $Ra = 4.5 \times 10^4$. Com esperàvem, la solució no té cap de les simetries del grup G .

4.2.4 Cas de la inestabilitat que desestabilitza el vent amb perfil simètric

Per a $\sigma = 10$, les inestabilitats secundàries que resulten dominants són tres de les quatre possibles que sabem que poden aparèixer, per causa de l'anàlisi lineal que s'ha fet en el capítol 3. Fins ara hem estudiat el comportament no lineal per a tres casos, cadascun representatiu d'aquestes tres inestabilitats secundàries dominants. També, però, es pot estudiar a prop de la bifurcació com hauria de ser la geometria i el comportament de la inestabilitat restant. És la inestabilitat que és invariant per a $S_1 \times S_2 \times S_3$ i, per tant, la que pot generar vent amb un perfil simètric. Tot i que aquesta quarta inestabilitat no és dominant, pot ser dominant per a altres valors del número de Prandtl i, per tant, el seu estudi

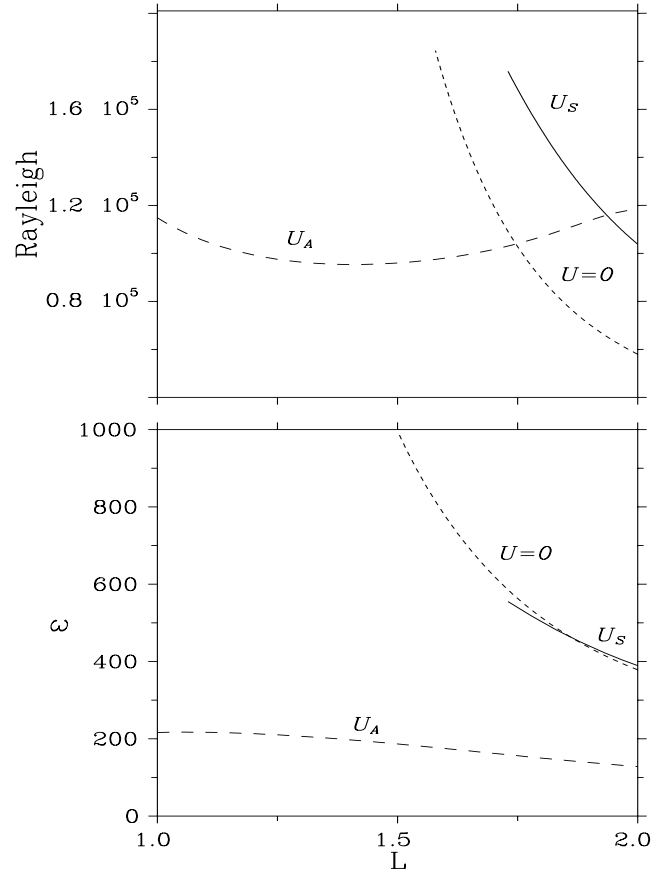


Figura 24: Corbes marginals per a $L \in [1, 2]$. (a) Ra en funció de L per a les inestabilitats secundàries. (b) Les corresponents freqüències angulars ω . Les bifurcacions estan etiquetades com: U_A i U_S per a la velocitat mitjana amb perfil antisimètric i simètric respectivament, $U = 0$ per a les solucions amb simetria S_1 .

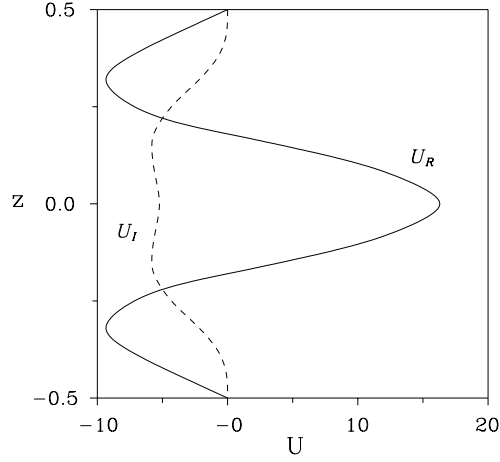


Figura 25: Parts real U_R i imaginària U_I del vector propi per a la velocitat mitjana per a $L = 2$ sobre la corba etiquetada amb U_A a la figura 24(a).

té interès. Aquest estudi el durem a terme a partir dels resultats de l'anàlisi d'estabilitat lineal.

A la figura 24 (a) representem un detall de les corbes d'estabilitat de la figura 4, per a valors de $L \in [1, 2]$. A la figura 24 (b) representem les corresponents freqüències angulars ω —la part imaginària del valor propi que creua l'eix real— de la bifurcació de Hopf en funció de L . Per a longituds d'ona més grans que $L = 1.94$ la bifurcació a una solució amb vent amb un perfil simètric U_S (línia contínua) es produeix per números de Rayleigh menors que la bifurcació a una solució amb vent antisimètric U_A (línia discontinua) . Malgrat tot, no és una bifurcació dominant i domina la inestabilitat que manté la simetria de reflexió S_1 ($U = 0$, línia puntejada).

Descriurem el comportament no lineal dels vectors propis amb velocitat mitjana amb perfil simètric. Prendrem $L = 2$, $Ra = 9.898 \times 10^4$ amb freqüència angular $\omega = 383.2$.

A la figura 25 hem representat amb línia contínua la part real de la velocitat mitjana, $U_R(z)$, i amb línia discontinua la part imaginària $U_I(z)$. Aleshores la dependència temporal de la velocitat mitjana a prop de la bifurcació ve donada per

$$U(z, t) = 2(U_R(z) \cos \omega t - U_I(z) \sin \omega t),$$

de manera que la velocitat mitjana serà simètrica en z i oscil·lant endavant i enrere en el temps.

A prop de la bifurcació podem aproximar la funció de corrent, $\chi = \chi' -$

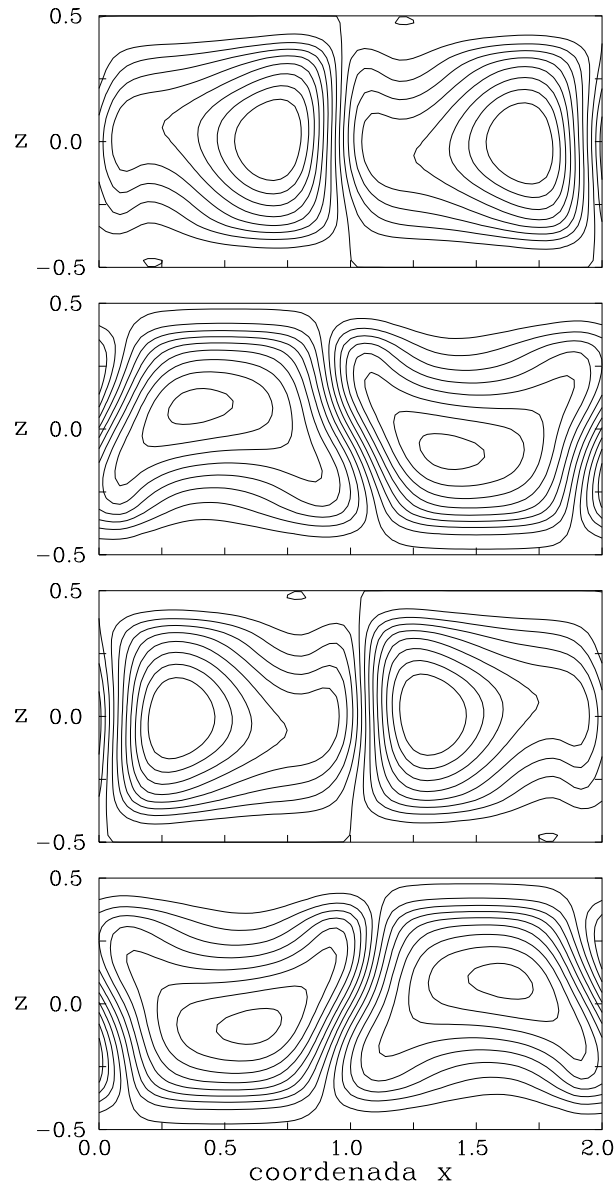


Figura 26: Línies de corrent corresponents a quatre instantànies separades un quart de període cadascuna d'una solució amb $L = 2$ i $Ra = 9.89 \times 10^4$,

$\int_{-1/2}^z U(z)dz$, combinant la solució estacionària $-\chi^0$ - amb les components del vector propi $U = U_R \pm iU_I$, i $\chi' = \chi'_R \pm i\chi'_I$:

$$\chi(x, z, t) = \chi^0(x, z) + 2\varepsilon \left((\chi'_R(x, z) - \int_{-1/2}^z U_R(z)dz) \cos \omega t - (\chi'_I(x, z) - \int_{-1/2}^z U_I(z)dz) \sin \omega t \right), \quad (1)$$

on ε és l'amplitud de la pertorbació.

A la figura 26 representem per a la funció de corrent χ una seqüència de quatre corbes de nivell cada quart de període. Aquesta solució s'ha obtingut combinant convenientment el vector propi resultant de l'estabilitat lineal amb la solució no pertorbada. El vector propi s'ha calculat sobre la corba U_S de la figura 24(a). L'amplitud de la pertorbació s'ha escollit de manera que les simetries del sistema es detectin. Tal com s'esperava, cada corba de nivell és invariant per a $S_1 \times S_2 \times S_3$. A més les simetries que s'han perdut, S_1 i $S_2 \times S_3$, han estat substituïdes per $S_1 \times S_4$ i $S_2 \times S_3 \times S_4$, les quals inclouen simetria temporal.

Si definim el grup de simetries $G_1 = \{I, S_1 \times S_2 \times S_3, S_1 \times S_4, S_2 \times S_3 \times S_4\}$, aquesta nova solució és invariant per a G_1 a prop de la inestabilitat, però és d'esperar que s'hi mantindrà fins a la següent bifurcació, de manera similar al comportament de les solucions amb $L = 1$ i $L = 2$.

4.3 Models d'equacions d'amplitud

La inclinació dels rolls que obtenim per a $L = 1$ és consistent amb la que obtenen en el model d'equacions de Howard & Krishnamurti (1986). En aquest model, la velocitat mitjana s'obté a partir de la interacció de dos modes amb idèntic nombre d'ona fonamental i acoblats verticalment, és a dir, amb paritats diferents. A diferència dels resultats que nosaltres obtenim, Howard & Krishnamurti obtenen una bifurcació a vent que és estacionària. Aquest model l'estudiarem en aquesta secció en l'apartat A.

La inclinació dels rolls també pot ser deguda a les ressonàncies, en particular, a la ressonància 1:2 de dos estats purs (Busse & Or 1986), és a dir, a la interacció de dos modes amb nombres d'ona α i 2α amb la mateixa paritat vertical. Les solucions amb vent que es generen apareixen via una bifurcació estacionària. Aquest model també el revisarem en aquesta secció, a l'apartat B.

Aquests són dos models diferents que generen velocitat mitjana.

A l'apartat C deduirem formalment un altre model, que també genera velocitat mitjana, amb una tècnica semblant a la de Crawford & Knobloch (1991) i Knobloch & Guckenheimer (1983). Encara que el model es deduirà usant una tècnica que – estrictament parlant – és només vàlida en el límit de petites amplituds, demostrarà ser extremament útil per tal d'entendre la dinàmica. Les equacions que deduirem estan pensades per modelar la dinàmica del sistema físic de manera que reproduïxin els resultats de les nostres simulacions numèriques, en particular, que permetin obtenir vent via una bifurcació de Hopf. El punt de partida serà l'anàlisi d'estabilitat fet en el capítol 3. Per simplicitat, referirem tota la discussió a la desviació de la temperatura T' de la de l'estat conductiu perquè és un escalar, al contrari de la funció de corrent que és pseudoescalar – és a dir, el signe canvia sota la reflexió del sistema de coordenades. Les equacions que deduirem es poden obtenir a partir d'ambdues variables, però la formulació és més senzilla per T' .

A. Dos modes amb acoblament vertical

Comencem prenent la següent expansió per la desviació de la temperatura, que generalitza el model deduït per Howard & Krishnamurti (1986):

$$T' = [A_1 e^{i\alpha x} C(z) + A_2 e^{i\alpha x} S(z)] + c.c. + \dots, \quad (1)$$

on A_j $j = 1, 2$ són amplituds complexes, α és el nombre d'ona fonamental, *c.c.* és el complex conjugat, $C(z)$ i $S(z)$ són els vectors propis simètrics i antisimètrics pel problema de convecció linealitzat i els termes d'ordre més elevat es generen no linealment per una tècnica de pertorbacions de petita amplitud. Suposarem (1) sense demostració i procedirem formalment, sense cap derivació explícita dels coeficients de les equacions d'amplitud.

Les amplituds de (1) han de complir un sistema d'equacions diferencial $\dot{A}_j = f_j(A_1, A_2)$, $j = 1, 2$, on $\{f_j\}$ són funcions complexes analítiques. Aquest sistema ha de ser invariant per a trasllacions contínues i per al grup G . L'acció d'aquestes transformacions sobre les amplituds és com segueix. Una trasllació donarà lloc a l'acció

$$\tau_a : A_j e^{i\alpha x} \rightarrow A_j e^{i\alpha(x+a)}, \quad j = 1, 2$$

d'on

$$\tau_a : (A_1, A_2) \rightarrow (A_1 e^{i\alpha a}, A_2 e^{i\alpha a}), \quad (2.1)$$

mentre que les simetries S_1 i $S_2 \times S_3$ donen lloc a les accions:

$$S_1 : (A_1, A_2) \rightarrow (A_1^*, A_2^*), \quad (2.2)$$

$$S_2 \times S_3 : (A_1, A_2) \rightarrow (A_1^*, -A_2^*), \quad (2.3)$$

$$S_1 \times S_2 \times S_3 : (A_1, A_2) \rightarrow (A_1, -A_2). \quad (2.4)$$

El sistema més general invariant per a les transformacions (2) és

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 A_1^* A_2^2 + O(|A|^4), \\ \dot{A}_2 = \alpha_2 A_2 + \beta_2 A_1^2 A_2^* + O(|A|^4), \end{cases} \quad (3)$$

amb $\alpha_j = \alpha_{j0} + \alpha_{j1}|A_1|^2 + \alpha_{j2}|A_2|^2$, $\alpha_{10} > 0$, $\alpha_{11} < 0$ i tots els coeficients de (3) reals.

Sigui $A_1 = A_0, A_2 = 0$ una solució estacionària que bifurca de l'estat conductiu. Aleshores $\alpha_{10} + \alpha_{11}|A_0|^2 = 0$. Si linealitzem (3) al voltant d'aquesta solució obtenim el següent sistema d'equacions diferencials per a les pertorbacions

$$\begin{cases} \dot{A}_1' = \alpha_{11} A_0 (A_0 A_1'^* + A_0^* A_1'), \\ \dot{A}_2' = (\alpha_{20} + \alpha_{21}|A_0|^2) A_2' + \beta_2 A_0^2 A_2'^*, \end{cases}$$

que es pot posar en termes dels invariants per a trasllació $v_1 = A_1' A_0^*, v_2 = A_2' A_0^*$ i s'obté

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \alpha_{11}|A_0|^2(v_1 + v_1^*), \\ \dot{v}_2 = (\alpha_{20} + \alpha_{21}|A_0|^2)v_2' + \beta_2|A_0|^2 v_2^*, \end{cases} \quad (4)$$

L'estabilitat d'aquestes equacions es separa en dues equacions, una per a cada amplitud. Prenent $v_j = x_j + iy_j$ a (4) amb x i y reals, és fàcil provar que el problema de valors propis és simètric, els valors propis són reals i la bifurcació és sempre estacionària. Per tant, (3) no pot descriure cap de les bifurcacions de Hopf que hem trobat numèricament. Com un test complementari, hem fet càlculs numèrics explícits usant un sol mode de Fourier en les equacions del capítol 3 i la bifurcació s'ha trobat estacionària, mentre que quan prenem més modes es converteix en Hopf. Tot i que el model de Howard & Krishnamurti (1986) és per a unes altres condicions de contorn que les que nosaltres estudiem, no sembla pas que aquesta sigui la causa de la diferència en el caràcter de la bifurcació.

B. Ressonància 1:2

El segon candidat conegut que desestabilitza vents és una ressonància 1:2 d'estats purs. Prendrem per T' l'expansió

$$T' = [A_1 e^{i\alpha x} C(z) + A_2 e^{2i\alpha x} C(z)] + c.c. + \dots, \quad (5)$$

on A_j $j = 1, 2$ són amplituds complexes i $C(z)$ és el vector propi simètric pel problema de convecció linealitzat.

De (5) una trasllació contínua dona lloc a l'acció

$$\tau_a : (A_1, A_2) \rightarrow (A_1 e^{i\alpha a}, A_2 e^{2i\alpha a}), \quad (6)$$

i l'acció de les simetries finites S_1 i $S_2 \times S_3$ ve donada per (2.2) i (2.3).

El sistema més general invariant per a les transformacions (6), (2.2) i (2.3) és

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 (A_1^*)^3 A_2^2 + O(|A|^6), \\ \dot{A}_2 = \alpha_2 A_2 + \beta_2 A_1^4 A_2^* + O(|A|^6), \end{cases} \quad (7)$$

amb $\alpha_j = \alpha_{j0} + \alpha_{j1}|A_1|^2 + \alpha_{j2}|A_2|^2$, i $\alpha_{j,i}$ constants. Aquest sistema va ser deduït per primera vegada quan s'analitzava la ressonància 1:2 a Armbruster (1987).

El sistema linealitzat de (7) es pot posar en termes dels invariants per a trasllació $v_1 = A_1' A_0^*$, $v_2 = A_2' (A_0^*)^2$:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \alpha_{11}|A_0|^2(v_1 + v_1^*), \\ \dot{v}_2 = (\alpha_{20} + \alpha_{11}|A_0|^2)v_2 + \beta_2|A_0|^4 v_2^*, \end{cases}$$

Com en l'apartat A es pot veure fàcilment que $A_1 = A_0$, $A_2 = 0$ no pot admetre una bifurcació de Hopf.

C. Un model d'equacions més general

Cap dels dos models anteriors no pot donar una bifurcació de Hopf, tal com esperem dels nostres resultats numèrics. La implicació és que cap dels models anteriors no pot descriure les nostres corbes d'estabilitat. Per tant, desenvolupem T' de manera tal que es permeti cadascun del trencaments de simetries:

$$T = \left[A_1 e^{i\alpha x} C_1(z) + A_2 e^{i\alpha x} S_1(z) + A_3 e^{2i\alpha x} C_2(z) + A_4 e^{2i\alpha x} S_2(z) \right] + c.c. + \dots, \quad (8)$$

on $\{C_j\}$ i $\{S_j\}$ són funcions simètriques i antisimètriques respectivament, les quals compleixen les condicions de contorn.

L'expansió (8) inclou les tres components diferents de (1) i (5), A_1 , A_2 , i A_3 , a més d'una quarta component, A_4 , que s'inclou per consistència. Veurem més endavant que aquest és el mínim conjunt d'amplituds que es necessita per descriure les quatre inestabilitats secundàries que ens apareixen en l'anàlisi d'estabilitat. L'esperança, recolzada pels càlculs numèrics, és que qualsevol altre terme inclòs a (8) pot ser generat no linealment. La guia per a aquesta elecció ha estat el fet de saber que l'operador lineal que dona l'estabilitat pot

factoritzar en quatre, tal com expliquem en el capítol 3, tres d'ells invariants per a cadascun dels elements no trivials de G i el quart invariant per a tot el grup G .

L'acció de cada simetria pot deduir-se com en els casos anteriors, i obtenim:

$$\tau_a : (A_1, A_2, A_3, A_4) \rightarrow (A_1 e^{i\alpha a}, A_2 e^{i\alpha a}, A_3 e^{2i\alpha a}, A_4 e^{2i\alpha a}), \quad (9.1)$$

$$S_1 : (A_1, A_2, A_3, A_4) \rightarrow (A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*), \quad (9.2)$$

$$S_2 \times S_3 : (A_1, A_2, A_3, A_4) \rightarrow (A_1^*, -A_2^*, -A_3^*, A_4^*), \quad (9.3)$$

$$S_1 \times S_2 \times S_3 : (A_1, A_2, A_3, A_4) \rightarrow (A_1, -A_2, -A_3, A_4). \quad (9.4)$$

Escrivim els invariants fonamentals per trasllació per tal de deduir l'equació d'evolució. Són

$$\begin{aligned} u_j &= |A_j|^2, \quad j = 1, \dots, 4, & \tilde{u}_2 &= A_3 A_4^*, \\ u_5 &= A_1^2 A_4^*, & \tilde{u}_3 &= A_1^2 A_3^*, \\ u_6 &= A_2^2 A_4^*, & \tilde{u}_4 &= A_2^2 A_3^*, \\ u_7 &= A_1 A_2 A_3^*, & \tilde{u}_5 &= A_1 A_2 A_4^*, \\ \tilde{u}_1 &= A_1 A_2^*, \end{aligned}$$

i els seus complexs conjugats $\{u_j^*, \quad j = 1 \div 7\}$ i $\{\tilde{u}_j^*, \quad j = 1 \div 5\}$, on hem indicat amb una tilde els invariants que canvien el signe per a la simetria (9.4). I el sistema més general invariant per a trasllacions i pree al grup de simetries G pot escriure's com

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 A_4 A_1^* + \gamma_1 A_3 A_2^* + \tilde{\alpha}_1 A_2 + \tilde{\beta}_1 A_3 A_1^* + \tilde{\gamma}_1 A_4 A_2^* + O(|A|^6), \\ \dot{A}_2 = \alpha_2 A_2 + \beta_2 A_4 A_2^* + \gamma_2 A_3 A_1^* + \tilde{\alpha}_2 A_1 + \tilde{\beta}_2 A_3 A_2^* + \tilde{\gamma}_2 A_4 A_1^* + O(|A|^6), \\ \dot{A}_3 = \alpha_3 A_3 + \beta_3 A_1 A_2 + \tilde{\alpha}_3 A_4 + \tilde{\beta}_3 A_1^2 + \tilde{\gamma}_3 A_2^2 + O(|A|^6), \\ \dot{A}_4 = \alpha_4 A_4 + \beta_4 A_1^2 + \gamma_4 A_2^2 + \tilde{\alpha}_4 A_3 + \tilde{\beta}_4 A_1 A_2 + O(|A|^6), \end{cases} \quad (10)$$

on els coeficients $\{\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \quad j = 1 \div 4\}$ són funcions dels invariants, els quals són parells per la transformació (9.4). Els coeficients $\{\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j, \tilde{\gamma}_j, \quad j = 1 \div 4\}$ són també funcions dels invariants, però són senars per la transformació (9.4). La simetria (9.1) també s'ha d'imposar, aleshores els coeficients en l'expressió final seran constants.

C1. Estabilitat

El sistema (10) admet una solució estacionària $A_1 = A_0, A_j = 0, j = 2, 3, 4$. Linealitzem al voltant d'aquesta solució amb pertorbacions $A_j', j = 1 \div 4$. A partir de (10), tenint en compte els invariants fonamentals, l'equació linealitzada per

- $\dot{A}'_1$ conté els termes $A'_1, A_0^2 A_1'^*, A_0^* A'_1$ i $A_0^3 A_4'^*$,
- $\dot{A}'_2$ conté els termes $A'_2, A_0^2 A_2'^*, A_0^* A'_2$ i $A_0^3 A_3'^*$,
- $\dot{A}'_3$ conté els termes $A'_3, A_0^4 A_3'^*, A_0 A'_2$ i $A_0^3 A_2'^*$,
- $\dot{A}'_4$ conté els termes $A'_4, A_0^4 A_4'^*, A_0 A'_1$ i $A_0^3 A_1'^*$.

El problema lineal resultant s'escriu millor en termes dels invariants per a trasllació $\{v_j = A'_j A_0^*, \quad j = 1, 2\}$ i $\{v_j = A'_j (A_0^*)^2, \quad j = 3, 4\}$. El sistema es separa en dos sistemes diferents. El primer és

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = a_1 v_1 + b_1 |A_0|^2 v_1^* + c_1 v_4 + d_1 |A_0|^2 v_4^*, \\ \dot{v}_4 = a_4 |A_0|^2 v_1 + b_4 |A_0|^4 v_1^* + c_4 v_4 + d_4 |A_0|^4 v_4^*, \end{cases} \quad (11.1)$$

i el segon és

$$\begin{cases} \dot{v}_2 = a_2 v_2 + b_2 |A_0|^2 v_2^* + c_2 v_3 + d_2 |A_0|^2 v_3^*, \\ \dot{v}_3 = a_3 |A_0|^2 v_2 + b_3 |A_0|^4 v_2^* + c_3 v_3 + d_3 |A_0|^4 v_3^*. \end{cases} \quad (11.2)$$

Cada coeficient és ara una constant real. La separació entre (11.1) i (11.2) és una conseqüència òbvia de la simetria (9.4).

El problema de valors propis per (11) pot resoldre's millor separant $v_j = x_j + iy_j$. Aquesta separació entre la part real i la imaginària separa els sistemes (11) en un total de quatre subproblemes lineals independents per $\{x_1, x_4\}$, $\{y_1, y_4\}$, $\{x_2, x_3\}$ i $\{y_2, y_3\}$. Les equacions característiques factoritzen. Com a conseqüència, obtenim un conjunt de quatre equacions característiques

$$\lambda^2 - \Gamma_j \lambda + \Omega_j = 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Quan $\Gamma_j = 0$ obtenim les corbes marginals per les bifurcacions de Hopf i les freqüències vénen donades per $\omega_j^2 = \Omega_j > 0$. El sistema pot tenir també una bifurcació estacionària, sobre les corbes $\Omega_j = 0$.

Per tant, com que el sistema factoritza, existeixen quatre famílies diferents de vectors propis de (11), cadascun associat a una corba d'estabilitat marginal diferent:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x_1, x_4; x_2 = x_3 = 0, y_j = 0 \quad 1, \dots, 4\}, \\ C_2 &= \{y_1, y_4; y_2 = y_3 = 0, x_j = 0 \quad 1, \dots, 4\}, \\ C_3 &= \{x_2, x_3; x_1 = x_4 = 0, y_j = 0 \quad 1, \dots, 4\}, \\ C_4 &= \{y_2, y_3; y_1 = y_4 = 0, x_j = 0 \quad 1, \dots, 4\}. \end{aligned}$$

A partir de (9) podem veure que:

- C_1 preserva tot el grup de simetries G ,
- C_2 és invariant per a $S_1 \times S_2 \times S_3$,
- C_3 és exclusivament invariant per a S_1
- C_4 és invariant per a $S_2 \times S_3$.

Ara queda clar que el conjunt d'amplituds (8) és minimal. Es necessiten totes aquestes amplituds per tal de separar en aquests quatre subespais. Però, a més, aquest anàlisi ens mostra que cadascun d'ells acobla dues amplituds diferents, una amb nombre d'ona α i l'altra amb nombre d'ona 2α , totes dues acoblades verticalment.

Anem a estudiar ara el comportament no lineal del roll després de la bifurcació, a partir dels termes no lineals de (10).

C2. Dinàmica no lineal

Considerarem a $A_0(t) = |A_0|e^{i\xi_0(t)}$ una aproximació de l'amplitud dels rolls. Veurem el comportament de la fase de A_1 per a la solució bifurcada, la qual es pot obtenir a partir dels termes no lineals de la primera equació de (10). Per a fer-ho, observem que donada qualsevol amplitud $A(t) = |A(t)|e^{i\xi(t)}$ aleshores

$$2|A|^2\dot{\xi} = (-i)(A^*\dot{A} - A\dot{A}^*). \quad (12)$$

Per simplicitat separarem el problema en dos.

Part I

Quan $A'_1 = A'_4 = 0$, aleshores

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A_0(t) = |A_0|e^{i\xi_0(t)}, \\ A_2(t) &= A'_2(t), \\ A_3(t) &= A'_3(t), \end{aligned}$$

on $\xi_0(t)$ és la fase de A_1 per a la solució bifurcada. Podem escriure a partir de (10) l'equació per a A_0 com

$$\dot{A}_0 = \alpha A_0 + \beta A_3 A_2^* + \gamma A_0^* A_2^2 + \nu A_2 A_3 (A_0^*)^2 + \tau A_0^2 A_2 A_3^* + \mu A_2^3 A_3^* + O(|A|^5), \quad (13)$$

on els coeficients són reals i són funció dels invariants $|A_j|^2$, $j = 0, 2, 3$. Hem truncat l'equació a cinquè ordre en les amplituds només per a mostrar els termes importants del desenvolupament.

Aleshores de (13) i usant (12),

$$2|A_0|^2 \dot{\xi}_0 = (-i)[(\beta(A_0^* A_3 A_2^* - c.c.) + \gamma((A_0^*)^2 A_2^2 - c.c.) + \nu(A_2 A_3 (A_0^*)^3 - c.c.) + \tau(|A_0|^2 A_0 A_2 A_3^* - c.c.) + \dots)],$$

que es pot posar en funció dels invariants

$$v_2 = A_2 A_0^*, \quad v_3 = A_3 (A_0^*)^2,$$

i obtenim

$$2|A_0|^2 \dot{\xi}_0 = (-i)[(\beta|A_0|^{-2} - \tau)(v_3 v_2^* - c.c.) + \nu(v_2 v_3 - c.c.) + \gamma(v_2^2 - c.c.) + \dots].$$

Per tant, tant si $\{v_2, v_3\}$ són reals o imaginàris purs, $\dot{\xi}_0 = 0$. Com a conseqüència, sobre C_3 i C_4 no existiran ones viatgeres i els rolls no podran derivar.

Part II

En l'espai complementari $A_2' = A_3' = 0$ i

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + A_1' = |A_1(t)|e^{i\xi(t)} = |A_0|e^{i\xi_0(t)} + |A_1'(t)|e^{i\xi_1(t)}, \\ A_4 &= A_4' = |A_4'(t)|e^{i\xi_4(t)}, \end{aligned}$$

i podem escriure l'equació per $\dot{A}_1$ de (10) com

$$\dot{A}_1 = \alpha A_1 + \beta A_4 A_1^* + \gamma A_1^3 A_4^* + O(|A|^5), \quad (13)$$

on els coeficients α, β, γ són reals i funció dels invariants $|A_j|^2$, $j = 1, 4$. De (12) i (13) deduïm

$$2|A_1|^2 \dot{\xi} = (-i)[(\beta - \gamma|A_1|^2)(A_4(A_1^*)^2 - c.c.) + \dots], \quad (14)$$

Usant els invariants $v_1 = A_1' A_0^*$, $v_4 = A_4' (A_0^*)^2$, aleshores

$$A_4(A_1^*)^2 = \frac{v_4(A_0 A_1^*)^2}{|A_0|^4}, \quad (15)$$

però $A_1 = A_0 + A_1'$, d'on $A_0^* A_1 = |A_0|^2 + A_1' A_0^* = |A_0|^2 + v_1$, i per tant, (15) es pot expressar com

$$A_4(A_1^*)^2 = \frac{v_4(|A_0|^2 + v_1^*)^2}{|A_0|^4}. \quad (16)$$

Segons en quin subespai estiguin v_1 i v_4 , s'anularà o no $\dot{\xi}$ de (14). Per tant, els subespais C_1 i C_2 s'han de tractar per separat.

(a) Sobre C_1 els invariants v_1 i v_4 són reals, aleshores (16) és real i com a conseqüència de (14) trobem per a la velocitat de fase la condició $\dot{\xi} = 0$ i no és possible la propagació.

(b) Sobre C_2 els invariants v_1 i v_4 són imaginaris purs. En particular es compleix $\xi_1 = \xi_0 + \pi/2$, i $\xi_4 = 2\xi_0 + \pi/2$.

Si $v = i v^I$ és imaginari pur definim la funció signe $sgn(v) = +1$ si $v^I \geq 0$, $sgn(v) = -1$ si $v^I < 0$, aleshores $v_1 = i|v_1|sgn(v_1)$, $v_4 = i|v_4|sgn(v_4)$ i substituint a (16) obtenim

$$A_4(A_1^*)^2 - c.c. = -2i sgn(v_4) \frac{|v_4|(|A_0|^4 - |v_1|^2)}{|A_0|^4}. \quad (17)$$

Si usem (17), l'equació (14) per a la fase és

$$\dot{\xi} = sgn(v_4)|v_4|(1 - \frac{|v_1|^2}{|A_0|^4})(\gamma - \frac{\beta}{|A_1|^2}) + \dots \quad (18)$$

Si desenvolupem per Taylor en termes de v_1 al voltant del zero obtenim

$$\frac{1}{|A_1|^2} = \frac{|A_0|^2}{|v_1|^2 + |A_0|^4} = \frac{1}{|A_0|^2} + O(|v_1|^2), \quad (19)$$

on suposem $|A_0|^2$ constant. De (18) i (19) juntament amb les expressions $\beta = \beta_0 + \beta_1|A_1|^2 + \beta_2|A_4|^2$, $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1|A_1|^2 + \gamma_2|A_4|^2$, obtenim la següent equació per a la fase $\xi(t)$

$$\dot{\xi} = sgn(v_4)(\gamma - \beta_1 - \frac{\beta_0}{|A_0|^2})|v_4| + O(|v|^3), \quad (20)$$

on $\beta_0, \beta_1, \gamma_0$ són reals. La implicació de (20) és que $\dot{\xi} \neq 0$ i en aquest cas sí que és possible que apareguin ones viatgeres.

El segon membre de (20) és una funció de les amplituds, que, si desestabilitzen via una bifurcació de Hopf, donen lloc a una velocitat de fase oscil·lant. Per tant, la inestabilitat invariant per a $S_1 \times S_2 \times S_3$ és la única que pot desestabilitzar ones viatgeres que canvien de signe (Landsberg & Knobloch 1991).

La fase $\xi(t)$ de la solució pertorbada es pot calcular a prop de la bifurcació prenent $v_4 = i v_{40} \cos \omega t$, integrant (20), $\xi(t) = B \sin \omega t$, amb $B = -\omega^{-1}(\gamma - \beta_1 - \frac{\beta_0}{|A_0|^2})v_{40}$, donant així una fase oscil·latòria a la solució. A més, com que $A_1 = |A_1(t)|e^{i\xi(t)} = (|A_0| + i|A_1'(t)|)e^{i\xi_0(t)}$, es compleix

$$\xi(t) = -\arctg \frac{|v_1|}{|A_0|^2} + \xi_0(t) \simeq -\frac{|v_1|}{|A_0|^2} + \xi_0(t).$$

Si la bifurcació és de Hopf es compleix $|v_1| = v_{10} \cos \omega t$, i per tant, $\xi_0(t) = -\frac{v_{10}}{|A_0|^2} \cos \omega t + B \sin \omega t = B_0 \sin(\omega t + \theta)$. El flux bàsic té, doncs, una fase ξ_0 oscil·lant.

Ara escriurem a partir de (8) una expressió aproximada per a T' per a les solucions que són invariants per a $S_1 \times S_2 \times S_3$:

$$\begin{aligned} T' \simeq & T_0 C_0(z) \cos[\alpha x + \xi_0(t)] + T_1 C_1(z) \cos \omega t \sin[\alpha x + \xi_0(t)] \\ & + T_4 S_2(z) \cos \omega t \sin 2[\alpha x + \xi_0(t)] + \dots, \end{aligned} \quad (21.1)$$

que és una ona viatgera amb una velocitat de fase oscil·latòria $c = B \sin \omega t$.

Les solucions invariants per a S_1 es poden escriure com:

$$\begin{aligned} T' \simeq & T_0 C_0(z) \cos \alpha x + T_2 \cos \omega t S_1(z) \cos \alpha x \\ & + T_3 \cos \omega t C_2(z) \cos 2\alpha x + \dots, \end{aligned} \quad (21.2)$$

el qual correspon a una ona estacionària.

Les solucions invariants per a $S_2 \times S_3$ es poden escriure com:

$$\begin{aligned} T' \simeq & T_0 C_0(z) \cos \alpha x + T_2 \cos \omega t S_1(z) \sin \alpha x \\ & + T_3 \cos \omega t C_2(z) \sin 2\alpha x + \dots, \end{aligned} \quad (21.3)$$

que és una ona estacionària sobreposada a la parella de rolls estacionària.

L'estructura de les solucions invariants per al grup G es poden escriure com:

$$\begin{aligned} T' \simeq & T_0 C_0(z) \cos \alpha x + T_1 \cos \omega t C_1(z) \cos \alpha x \\ & + T_4 \cos \omega t S_2(z) \cos 2\alpha x + \dots, \end{aligned} \quad (21.4)$$

que és una ona estacionària sobre la parella de rolls estacionària.

El mode del roll, $T_0 C_0(z) \cos kx$, modela el flux primari i hauria d'incloure la resta d'amplituds. És per això que (10) és un model i no un sistema asimptòticament vàlid. Per tal de validar el model hem comprovat que les simetries de les solucions bifurcades (21) siguin del mateix tipus que en els càlculs que hem fet. A més podem comparar les solucions del model truncat amb les del sistema complet d'equacions en derivades parcials, les quals les hem calculat en aquest mateix capítol. Com era d'esperar, les ones estacionàries corresponents a (21.2) i (21.3) són un cas particular de les solucions (2) i (1) respectivament, presentades a la secció anterior. Les ones viatgeres (21.1) no s'han pogut trobar per a $\sigma = 10$, perquè no és mai dominant la bifurcació que dona solucions invariants per a $S_1 \times S_2 \times S_3$.

4.4 Discussió

Hem vist que es poden desestabilitzar fluxos a gran escala de diverses maneres. Hem examinat l'estabilitat i la dinàmica d'una sola parella de rolls en un domini periòdic. Al principi el flux pot trencar la simetria de reflexió S_1 o bé donant una inclinació al roll que s'inverteix periòdicament, la qual cosa dóna lloc a un flux a gran escala amb un perfil de la velocitat mitjana antisimètric, o bé deformant el roll de manera que apareix un perfil de la velocitat mitjana simètric, també amb caràcter periòdic, encara que aquest darrer cas no l'hem trobat mai dominant. Dels rolls també poden bifurcar fluxos que mantinguin la simetria S_1 , a partir d'una bifurcació de Hopf.

En qualsevol cas, augmentant el número de Rayleigh es van trencant totes les simetries del flux fins que la solució perd totes les simetries i es desestabilitza un flux a gran escala. Aquests règims estan associats amb un flux de massa net, i això és important perquè poden no haver-se trobat si es força que el flux de massa sigui igual a zero, la qual cosa acostuma a passar quan s'utilitza la formulació en termes de la funció de corrent i es considera la funció de corrent igual a zero en les superfícies (Clever & Busse 1987).

Hem calculat la seqüència de bifurcacions que trenquen les simetries per una parella de rolls en un domini periòdic. Pel número de Prandtl examinat, $\sigma = 10$, d'una parella de rolls bifurca un flux a gran escala inclinant els rolls, però només en contenidors de longitud petita. Si la longitud és intermèdia, els fluxos a gran escala apareixen via una bifurcació terciària com un règim caòtic en el temps, sense cap simetria espacial ni temporal.

Hem concentrat els nostres esforços en la simulació de la convecció en tres longituds del contenidor no gaire grans. Si la dinàmica d'un sistema format per n parelles de rolls es pogués obtenir replicant n vegades un sistema format per una sola parella de rolls, els tres exemples que hem estudiat descriurien la dinàmica de qualsevol sistema amb $\sigma = 10$. Però, com veurem en el següent capítol, tenen un paper important altres simetries.

La dinàmica d'un sistema amb una parella de rolls també s'ha examinat usant un model d'ordre baix deduït usant una tècnica formal de teoria de grups. Aquest model demostra que cadascuna de les bifurcacions que hem trobat numèricament poden ser de tipus Hopf, com és en el nostre cas, i que estan associades a l'acoblament no lineal de modes amb nombres d'ona fonamental α i 2α , tots dos acoblats verticalment, explicant així perquè els models truncats prèviament estudiats no descriuen aquesta dinàmica. També prova que cap de les bifurcacions dominants generen ones viatgeres, llevat de les que

desestabilitzen la velocitat mitjana amb un perfil simètric. Per ser precisos, són ones amb una fase oscil·latòria, i així canvien periòdicament el sentit de la propagació. Aquesta dinàmica oscil·latòria per patrons amb rolls s'ha pogut observar en Massaguer (1994) usant una dinàmica de fases no lineal. Així, la deriva de rolls podria aparèixer en la convecció bidimensional per un rang de paràmetres convenient. La migració de rolls s'ha observat en experiments en fluids amb número de Prandtl baix (Willis & Deardorff 1970).

El sistema que estem descrivint en aquest treball pertany a una família de problemes que darrerament ha rebut molta atenció. Per a molts d'aquests problemes, el trencament de la simetria de reflexió S_1 en una bifurcació de Hopf és una condició suficient per a generar ones viatgeres (Landsberg & Knobloch 1991, Proctor & Weiss 1993). Aquest és el cas, per exemple, de la convecció compressible o de la magnetoconvecció (Matthews, Proctor & Rucklidge 1993), però com hem vist en la secció anterior apartat C, el trencament de la simetria de reflexió pot no ser suficient per desestabilitzar ones viatgeres en sistemes 2D. A una conclusió similar s'arriba en Knobloch (1993). En el nostre cas, per causa de les condicions de contorn existeix paritat vertical, condició per a la invariància de la simetria puntual $S_2 \times S_3$, i aquesta invariància restringeix més que no pas la de reflexió, S_1 . Podem veure en la secció anterior en l'apartat C, part I, com la simetria puntual imposa un valor constant en la fase de trasllació, i per tant, impedeix qualsevol ona viatgera. Seguint la notació de Rucklidge & Matthews (1996), quan en una bifurcació de Hopf es trenca la simetria de reflexió, s'anomenen "pulsating waves" quan descrivim oscil·lacions en les quals els rolls tenen la simetria puntual, de manera que aquests no viatgen (figura 8) i s'anomenen "direction-reversing travelling waves" quan descrivim oscil·lacions en les quals els rolls trenquen la simetria puntual i per tant viatgen endavant i enrera (figura 21).

La geometria i dinàmica trobades per longituds de contenidor menors, $L = 1$, és consistent amb alguns resultats obtinguts amb condicions de contorn lliure i número de Prandtl petit, $\sigma \simeq 1$, (Finn 1993), convecció compressible i magnetoconvecció (Rucklidge & Matthews 1995). Es diferencien en el fet que la segona bifurcació és estacionària, seguida d'una tercera de tipus Hopf.

La inclinació periòdica dels rolls observada en els experiments de Willis & Deardorff (1970) amb caixes de longitud gran i $\sigma \simeq 1$, fa confiar en els nostres resultats. Però la bifurcació que es troba en els experiments de Howard & Krishnamurti (1986) és estacionària, malgrat que té el número de Prandtl similar al nostre. El fet que aquest darrer experiment es produeix en un contenidor amb contorn a dalt i a baix diferent, i que així trenca la paritat vertical, no ajuda a comparar. Però cal remarcar que en cap de les simulacions numèriques

de convecció en fluids compressibles, és a dir, amb trencament de la paritat vertical, no s'hi han trobat canvis de signe de la velocitat mitjana (Hurlburt, Toomre & Massaguer 1984, Ginet & Sudan 1987), i per tant, les bifurcacions no són de tipus Hopf. Si el sistema només té la simetria S_1 , aquesta no és una restricció suficient per forçar les ressonàncies que generen el nostre sistema.

5 Estabilitat lineal de n parelles de rolls

5.1 Introducció

En els capítols anteriors ens hem centrat en l'estudi dels rolls convectius amb longitud d'ona fonamental a sotmesos a pertorbacions d'identica periodicitat. Hem resolt el problema considerant un contenidor de longitud $L = a$, hem calculat solucions estacionàries que contenen una sola parella de rolls i n'hem analitzat l'estabilitat lineal (capítol 3) i la dinàmica no lineal (capítol 4). De manera anàloga es poden estudiar els rolls amb longitud d'ona fonamental a sotmesos a pertorbacions de periodicitat na . Això és equivalent a considerar el problema en un contenidor de longitud $L = na$ i analitzar la dinàmica de les solucions que contenen n parelles de rolls idèntiques, cadascuna de longitud a .

En aquest capítol analitzarem l'estabilitat lineal d'aquestes solucions enfront de pertorbacions de periodicitat na . Direm que estudiem l'estabilitat d'un clonatge format per n parelles de rolls idèntiques de longitud d'ona fonamental a .

L'anàlisi d'estabilitat de n parelles de rolls necessita d'un nou estudi perquè admet més simetries de les que admet el problema amb una sola parella de rolls. En aquest cas, les solucions periòdiques formades per n parelles de rolls idèntiques són solucions tals que cada parella és invariant pel grup de simetries G (definit en el capítol 2, prenent $L = a$). I a més, per tal de garantir el clonatge, són solucions invariants per trasllacions en direcció horitzontal de longitud a , τ_a .

Podem classificar les pertorbacions en dos tipus diferents: les que mantenen el clonatge i les que el trenquen. Les primeres són invariants per la simetria τ_a i, per tant, són pertorbacions periòdiques de periodicitat a . En aquest cas, les corbes d'estabilitat per a una solució amb n parelles de rolls idèntiques, cadascuna de longitud a , es poden recuperar a partir de les corbes d'estabilitat per a una sola parella de rolls de longitud $L = a$. Per tant, analitzar l'estabilitat de n parelles de rolls considerant pertorbacions que mantenen el clonatge és equivalent a resoldre l'anàlisi d'estabilitat per a una parella de rolls, el qual ja està resolt en el capítol 3. Veurem que aquestes són les úniques pertorbacions que poden generar velocitat mitjana.

En aquest capítol, fixem un domini periòdic de longitud $L = na$ i ens centrem en l'anàlisi d'estabilitat de les solucions formades per n parelles de rolls

idèntiques enfront de pertorbacions de periodicitat L que trenquen aquest clonatge. Segons la teoria de Floquet i tenint en compte les simetries del sistema, veurem com l'anàlisi d'estabilitat podrà factoritzar en $n/2$ problemes definits en un domini periòdic de longitud a .

L'anàlisi numèrica es duu a terme mitjançant tècniques espectrals i es presenten les corbes d'estabilitat pel número de Prandtl $\sigma = 10$ i per a diferents clonatges.

Veurem, a més, com fer una anàlisi més general dels rols convectius, és a dir, considerar qualsevol pertorbació periòdica, es pot entendre com obtenir l'envolvent d'unes bandes d'inestabilitats, on cada inestabilitat desestabilitza els rols a solucions periòdiques que o bé mantenen la periodicitat del roll o bé la canvien a una amb periodicitat més gran. Hem trobat dues zones on apareixen aquestes bandes d'inestabilitats, una per valors de Rayleigh grans i l'altra prop del valor crític. Aquesta última és una banda d'inestabilitats d'Eckhaus, que discutirem en detall.

Finalment, calcularem en funció del número de Rayleigh i de la longitud del contenidor totes les possibles solucions estacionàries i n'estudiarem l'estabilitat. Ho farem: en primer lloc, fixant el Rayleigh en funció de L i en segon lloc fixant la periodicitat L i variant el Rayleigh. Veurem quin paper tenen les resonàncies de modes d'estats purs a l'hora de decidir l'estabilitat de les solucions estacionàries i a l'hora de generar solucions híbrides.

5.2 Anàlisi d'estabilitat: Teoria de Floquet

Reescrivim les equacions fonamentals com:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathcal{F}(\mathbf{v}, \mu, \partial_x, \partial_z) = 0, \quad (1)$$

amb $\mu = (Ra, \sigma)$ i $\mathbf{v} = (U, \chi', T')$.

A partir d'ara ometrem la variable z sempre que això no indueixi a confusió.

Sigui $\mathbf{v}^0 = (0, \chi^0, T^0)$ una solució estacionària de (1) tal que és invariant pel grup de simetries G definit en el capítol 2, amb periodicitat a :

$$\mathbf{v}^0(x) = \mathbf{v}^0(x + a),$$

on a és la longitud d'ona fonamental, és a dir, $\mathbf{v}^0$ no és invariant per cap trasllació de longitud menor que a .

L'estabilitat de $\mathbf{v}^0$ enfront de pertorbacions $\mathbf{v}'$ amb la mateixa longitud d'ona fonamental, $\mathbf{v}'(x+a) = \mathbf{v}'(x)$, ja l'hem estudiada en el capítol 3. L'objectiu d'aquest capítol és pertorbar $\mathbf{v}^0$ amb pertorbacions de periodicitat na , $\mathbf{v}'(x+na) = \mathbf{v}'(x)$, amb $n \neq 1$. D'aquesta manera l'estat pertorbat mantindrà sempre estructura na -periòdica. És evident que aquest és l'anàlisi d'estabilitat d'un clonatge format per n parelles de rols de longitud d'ona fonamental a .

Si es linealitzava (1) respecte de $\mathbf{v}^0$, l'equació per a les pertorbacions es pot escriure com

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v}' &= \mathcal{L}_\mu \mathbf{v}', \\ \mathbf{v}'(x) &= \mathbf{v}'(x+na),\end{aligned}$$

amb $n \neq 1$, i on $\mathcal{L}_\mu$ és l'operador lineal descrit a la secció 1 del capítol 3. $\mathcal{L}_\mu$ commuta amb el grup de simetries $G = \{I, S_1, S_2 \times S_3, S_1 \times S_2 \times S_3\}$ si es pren $L = a$. En particular commuta amb la simetria de reflexió S_1 , és a dir,

$$S_1 \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu S_1. \quad (2.1)$$

A més, per causa de la forma de $\mathcal{F}$ i de la periodicitat a de $\mathbf{v}^0$, l'operador $\mathcal{L}_\mu$ commuta també amb la simetria τ_a , trasllació en horitzontal de longitud a , és a dir,

$$\tau_a \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu \tau_a. \quad (2.2)$$

Si expressem $\mathbf{v}'(x, t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(x)$, podem eliminar el temps i obtenim el següent problema de valors propis:

$$\lambda \mathbf{u} = \mathcal{L}_\mu \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(x+na). \quad (3.2)$$

5.2.1 Invariància per a τ_a . Teoria de Floquet

La condició (2.2) implica que el sistema linealitzat (3) és invariant per la simetria τ_a . És a dir, si $(\lambda, \mathbf{u}(x))$ és solució de (3), aleshores $(\lambda, \mathbf{u}(x+a))$ també és solució de (3). Per demostrar-ho basta transformar (3.1) per τ_a

$$\lambda \tau_a \mathbf{u}(x) = \tau_a \mathcal{L}_\mu \mathbf{u}(x),$$

utilitzar (2.2), i usar que $\mathbf{u}(x+a) = \tau_a \mathbf{u}(x)$.

Per tant, fixat μ , si volem que una solució $(\lambda, \mathbf{u}(x))$ de (3) sigui única, ha d'existir una constant Γ tal que:

$$\mathbf{u}(x+a) = \Gamma \mathbf{u}(x), \quad (4)$$

aleshores es compleix que $\mathbf{u}(x + 2a) = \Gamma^2 \mathbf{u}(x), \dots, \mathbf{u}(x + na) = \Gamma^n \mathbf{u}(x)$.

Però com que s'ha de satisfer (3.2), $\Gamma^n = 1$, els possibles valors de Γ són les arrels n -èsimes de la unitat:

$$\Gamma_m = e^{\frac{2\pi im}{n}} \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Aleshores es pot descomposar l'anàlisi d'estabilitat del problema de valors propis (3) en els n següents subproblemes:

$$\lambda_m \mathbf{u}_m = \mathcal{L}_\mu \mathbf{u}_m, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u}_m(x + a) = \Gamma_m \mathbf{u}_m(x), \quad (5.2)$$

amb $\Gamma_m = e^{\frac{2\pi im}{n}}$ i $m = 0 \div n-1$.

El cas $m = 0$ correspon a $\Gamma_0 = 1$, són les pertorbacions invariants per τ_a , les que mantenen el clonatge. En aquest cas el problema d'estabilitat coincideix amb l'anàlisi d'una parella de rolls (quan $n = 1$), que ja hem presentat en el capítol 3.

Podem simplificar (5) si es defineix, per cada m , el canvi:

$$\xi_m(x) = \mathbf{u}_m(x) e^{-id_m \alpha x}, \quad (6)$$

on $d_m = m/n$ i $\alpha = 2\pi/a$. La funció $\xi_m(x)$ és periòdica de periodicitat a :

$$\begin{aligned} \xi_m(x + a) &= \mathbf{u}_m(x + a) e^{-id_m \alpha (x + a)} = \mathbf{u}_m(x + a) e^{-id_m \alpha a} e^{-id_m \alpha x} \\ &= \mathbf{u}_m(x + a) \Gamma_m^{-1} e^{-id_m \alpha x} = \mathbf{u}_m(x) e^{-id_m \alpha x} = \xi_m(x). \end{aligned}$$

Amb el canvi (6), el conjunt format pels n problemes de valors propis (5) es pot escriure en termes de la funció ξ_m com

$$\lambda_m \xi_m(x) e^{id_m \alpha x} = \mathcal{L}_\mu \left[\xi_m(x) e^{id_m \alpha x} \right], \quad (7.1)$$

$$\xi_m(x + a) = \xi_m(x). \quad (7.2)$$

La teoria de Floquet ens ha permès reduir el domini periòdic de longitud $L = na$, on analitzem l'estabilitat de n parelles de rolls idèntiques, a un domini periòdic de longitud a . Per tant, d'acord amb la teoria de Floquet, quan s'analitza l'estabilitat d'una solució estacionària $\mathbf{v}_0$ periòdica, amb longitud d'ona fonamental a (o número d'ona fonamental $\alpha = 2\pi/a$) en un domini periòdic de longitud $L = na$, la forma més general de la pertorbació és

$$\mathbf{v}'(x, t) = \xi(x) e^{id_m \alpha x} e^{\lambda t}, \quad (8)$$

amb $d_m = \frac{m}{n}$, $m = 0 \div n-1$ i $\xi(x)$ funció periòdica de periodicitat a .

5.2.2 Invariància per a S_1 . Valors propis doblats

Fins ara només hem considerat que l'operador $\mathcal{L}_\mu$ commuta amb τ_a , però també commuta amb S_1 . Com a conseqüència, les equacions (5) (o (7)) són invariants per a S_1 i veurem com el problema amb $d_m = \frac{m}{n}$ i el problema amb $d_{n-m} = \frac{n-m}{n} = 1 - d_m$ un és transformat de l'altre per la simetria S_1 . Si $(\lambda_m, \xi_m(x)e^{id_m\alpha x})$ i $(\lambda_{n-m}, \xi_{n-m}(x)e^{id_{n-m}\alpha x})$ són solucions de (7) amb $m \neq 0$ aleshores es compleix:

$$(\lambda_{n-m}, \xi_{n-m}(x)e^{id_{n-m}\alpha x}) = (\lambda_m, S_1(\xi_m(x)e^{id_m\alpha x})). \quad (9)$$

Per demostrar (9), considerem $\xi_m(x)e^{id_m\alpha x}$ funció pròpia de valor propi λ_m de (7). Per causa de la invariància de les equacions per S_1 , la transformada per S_1 també és funció pròpia de valor propi λ_m , és a dir, si $(\lambda_m, \xi_m(x)e^{id_m\alpha x})$ és solució de (7) aleshores $(\lambda_m, S_1(\xi_m(x)e^{id_m\alpha x}))$ també és solució de (7.1). La condició (7.2) és immediata en aquest cas perquè tant $\xi_m(x)$ com $e^{id_m\alpha x}$ són funcions periòdiques de periodicitat a . A més, la funció pròpia es pot posar com

$$\begin{aligned} S_1(\xi_m(x)e^{id_m\alpha x}) &= S_1(\xi_m(x))e^{-id_m\alpha x} \\ &= S_1(\xi_m(x))e^{-i\alpha x}e^{i(1-d_m)\alpha x} = S_1(\xi_m(x)e^{i\alpha x})e^{id_{n-m}\alpha x}, \end{aligned}$$

que és exactament la funció pròpia amb valor propi λ_m pel problema amb d_{n-m} . Per tant,

$$\xi_{n-m}(x) = S_1(\xi_m(x)e^{i\alpha x}), \quad \lambda_m = \lambda_{n-m}$$

i queda demostrat (9).

De fet, les solucions $(\lambda_m, \mathbf{u}_m)$ i $(\lambda_{n-m}, \mathbf{u}_{n-m})$ de (5) verifiquen

$$(\lambda_{n-m}, \mathbf{u}_{n-m}) = (\lambda_m, S_1 \mathbf{u}_m), \quad (10)$$

perquè

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n-m} &= \xi_{n-m}(x)e^{id_{n-m}\alpha x} = S_1(\xi_m(x)e^{i\alpha x})e^{id_{n-m}\alpha x} \\ &= S_1(\xi_m(x))e^{-i\alpha x}e^{i(1-d_m)\alpha x} = S_1(\xi_m(x))e^{-id_m\alpha x} \\ &= S_1(\xi_m(x)e^{id_m\alpha x}) = S_1(\mathbf{u}_m). \end{aligned}$$

Així doncs, com que les equacions (5) (o (7)) són invariants per S_1 , no cal resoldre tots els n subproblemes, basta resoldre'n $n/2 + 1$, basta fer-ho per $m = 0 \div n/2$.

Quan $m = n/2$ i n és parell, és a dir, quan $d = 1/2$, és el cas límit en què coincideixen d_m i $d_{n-m} = 1 - d_m$, per tant el mateix problema tant admet com a solució $(\lambda, \mathbf{u})$ com la transformada per S_1 , i com a conseqüència els valors propis estan doblats. En particular, el cas $n = 2$ presenta el mateix comportament.

Utilitzant que $\mathcal{L}_\mu$ commuta amb els altres elements de G , $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$, els quals inclouen a més dependència en z , es pot separar cadascun dels $n/2$ paquets en dos, de manera similar a com es fa en el capítol 3.

5.2.3 Uns quants exemples

Estudiem, per exemple, el cas $n = 4$, és a dir, pertorbem la solució estacionària $\mathbf{v}_0$ de període a amb pertorbacions $\mathbf{v}'(x, t) = \mathbf{u}(x)e^{\lambda t}$, on $\mathbf{u}(x)$ és tal que $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(x + 4a)$. En aquest cas $\Gamma_m = \{1, i, -1, -i\}$, i el conjunt total de pertorbacions $\mathbf{u}$ es pot separar en quatre subconjunts, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, que compleixen: $\mathbf{u}_0(x + a) = \mathbf{u}_0(x)$, $\mathbf{u}_1(x + a) = i\mathbf{u}_1(x)$, $\mathbf{u}_2(x + a) = -\mathbf{u}_2(x)$, $\mathbf{u}_3(x + a) = -i\mathbf{u}_3(x)$, i que són solució de $\lambda \mathbf{u} = \mathcal{L}_\mu \mathbf{u}$.

La pertorbació $\mathbf{u}_3$ serà la transformada de $\mathbf{u}_1$ per S_1 . A més, $\mathbf{u}_0$ correspon a pertorbacions amb $n = 1$, i $\mathbf{u}_2$ correspon al subconjunt de pertorbacions que tenen periodicitat $2a$: $\mathbf{u}_2(x + 2a) = \Gamma_2^2 \mathbf{u}_2(x) = \mathbf{u}_2(x)$, i són exactament les del paquet $m = 1$ pel cas $n = 2$. En aquest cas, s'analitza l'estabilitat de $\mathbf{v}_0$ resolent (7) només per $d_m = m/4$ amb $m = 0, 1$ i 2 .

De la mateixa manera es poden estudiar successivament, per a diferents valors de n , els subconjunts de pertorbacions que apareixen.

Si es calculen les corbes d'estabilitat per a succesius clonatges, $n = 2, 3, 4, \dots$, es repeteixen algunes anàlisis d'estabilitat. Per exemple, per al cas $n = 5$ les pertorbacions són amb $d_m = 0, \frac{1}{5}$ i $\frac{2}{5}$, i per al cas $n = 10$ ho són amb $d_m = 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$ i $\frac{5}{10}$, dels quals $\frac{2}{10}$ i $\frac{4}{10}$ coincideixen amb les dues pertorbacions que es prenen per al cas $n = 5$, i $\frac{5}{10}$ coincideix amb la que es prenen quan es resol $n = 2$.

5.2.4 Corba d'estabilitat marginal per a un clonatge amb n parelles de rolls

Fixat σ i a , a partir de (7) i dels càlculs fets en el capítol 3, calcularem per a cada $m = 0, 1 \div n/2$ quin és el Rayleigh tal que $\Re(\lambda_m) = 0$, i de tots ells prendrem quin és el que ens dóna la segona inestabilitat d'un clonatge amb n parelles de rolls de longitud d'ona fonamental a respecte d'aquestes pertorbacions. Totes són pertorbacions que mantenen l'estructura na -periòdica. La pertorbació $m = 0$

manté el clonatge i pot desestabilitzar vent. Quan $m \neq 0$ es trenca el clonatge de la solució bàsica i no apareix vent com a solució del problema lineal, però sí que pot aparèixer no linealment. En variar a , obtindrem la corba d'estabilitat marginal corresponent a n parelles de rolls idèntiques, cada parella de longitud a .

5.3 Discretització

El mètode que seguirem per discretitzar el problema és el mateix que hem seguit en el capítol 3, secció 2. Calcular una solució estacionària de periodicitat a , o amb número d'ona fonamental $\alpha = 2\pi/a$

$$\chi^0(x, z) = \sum_{l=1}^L \chi_l^0(z) \sin l\alpha x, \quad (1.1)$$

$$T^0(x, z) = \sum_{l=0}^L T_l^0(z) \cos l\alpha x, \quad (1.2)$$

usant el mètode de Newton-Raphson.

Una vegada calculada podem aplicar l'anàlisi lineal d'estabilitat. Considerarem pertorbacions que trenquen el clonatge de n parelles de rolls, amb $d_m \neq 0$. Fixat n , per a cada $m = 1 \div n/2$, escriurem les solucions pertorbades com:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi^0 + \chi' e^{\lambda t} = \chi^0 + \chi^* e^{i d_m \alpha x} e^{\lambda t}, \\ T &= T^0 + T' e^{\lambda t} = T^0 + T^* e^{i d_m \alpha x} e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

on $d_m = m/n$ i χ^* i T^* són funcions periòdiques en x de periodicitat a . Aleshores podem expressar

$$\chi'(x, z) = \chi^*(x, z) e^{i d_m \alpha x} = \sum_{l=-L}^{L-1} \chi_l(z) e^{i(l + d_m)\alpha x}, \quad (2.1)$$

$$T'(x, z) = T^*(x, z) e^{i d_m \alpha x} = \sum_{l=-L}^{L-1} i T_l(z) e^{i(l + d_m)\alpha x}, \quad (2.2)$$

i les equacions linealitzades per les pertorbacions seran:

$$\lambda \omega' = \sigma \Delta \omega' - Ra \sigma \partial_x T' - (J(\chi^0, \omega') + J(\chi', \omega^0)), \quad (3.1)$$

$$\lambda T' = \Delta T' + \partial_x \chi' - (J(\chi^0, T') + J(\chi', T^0)), \quad (3.2)$$

on $\omega' = -\Delta \chi'$.

Les pertorbacions (2) no poden tenir velocitat mitjana diferent de zero. En efecte, es compleix

$$\begin{aligned} U(z) &= -\partial_z \overline{\chi'} = -\partial_z \left(\frac{1}{na} \int_0^{na} \sum_{l=-L}^L \chi_l(z) e^{i(l+d_m)\alpha x} dx \right) \\ &= -\partial_z \left(\sum_{l=-L}^L \chi_l(z) \frac{1}{na} \int_0^{na} e^{i(l+d_m)\alpha x} dx \right) = 0, \end{aligned}$$

per $m = 1 \div n/2$, perquè s'anula $\frac{1}{na} \int_0^{na} e^{i(l+d_m)\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(ln+m)x} dx$, on $ln + m \neq 0$.

En derivar una o més vegades (2.1) i (2.2), respecte de x o de z , es pot continuar expressant de la mateixa forma, una funció a -periòdica per un terme $e^{id_m \alpha x}$. Per tant, si substituïm (1) i (2) en (3), a ambdós costats de les equacions (3) s'obté el factor $e^{id_m \alpha x}$ multiplicant, que es pot eliminar, i la resta està desenvolupat en sèries de Fourier per a $e^{il\alpha x}$.

Per a x usem, doncs, un mètode de Galerkin Fourier. Projectem (1) sobre les funcions $e^{il\alpha x}$ i obtenim per a cada $l = -L \div L$ les següents equacions:

$$\lambda \omega_l = \sigma(-\alpha^2(l+d_m)^2 + D^2)\omega_l + Ra \sigma(l+d_m)\alpha T_l - \alpha N L_l^1, \quad (4.1)$$

$$\lambda T_l = (-\alpha^2(l+d_m)^2 + D^2)T_l + (l+d_m)\alpha \chi_l - \alpha N L_l^2, \quad (4.2)$$

on

$$\alpha N L_l^1 := \langle (J(\chi^0, \omega') + J(\chi', \omega^0)) e^{-id_m \alpha x}, e^{il\alpha x} \rangle,$$

$$i\alpha N L_l^2 := \langle (J(\chi^0, T') + J(\chi', T^0)) e^{-id_m \alpha x}, e^{il\alpha x} \rangle.$$

Els termes $N L_l^1$ i $N L_l^2$ estan calculats en detall en l'apèndix.

Per a la variable z usem un mètode de col·locació Chebyshev en els punts $2z_j = \cos(\pi j/M)$ per $j = 0 \div M$. Aleshores obtenim un problema de valors propis per als coeficients de Fourier l en els punts de col·locació $j = 1 \div M-1$ que es pot expressar com

$$\lambda \mathbf{v} = A_m \mathbf{v}, \quad m = 1, \dots, \frac{n}{2}, \quad (5)$$

on A_m és una matriu real i $\mathbf{v}$ és un vector de dimensió $2(2L+1)(M-1)$. En el codi numèric que s'ha creat, els coeficients s'han ordenat

$$\mathbf{v}^T = (\omega_{-L,1}, \dots, \omega_{-L,M-1}, \dots, \omega_{L,1}, \dots, \omega_{L,M-1},$$

$$T_{-L,1}, \dots, T_{-L,M-1}, \dots, T_{L,1}, \dots, T_{L,M-1}).$$

Amb aquesta ordenació $\omega_{l,j} := \omega_l(z_j)$ es troba fàcilment en la posició $(L+l)(M-1) + j$ i $T_{l,j} := T_l(z_j)$ en la posició $(2L+1)(M-1) + (L+l)(M-1) + j$.

Per al càlcul dels valors i vectors propis s'ha resolt (5) usant el mètode QR (Wilkinson 1971), reduint la matriu A_m a una matriu Hessenberg superior.

Aquesta anàlisi d'estabilitat es pot contrastar calculant directament l'estabilitat de n parelles de rols idèntiques. Per a calcular una solució estacionària n -clonada que tingui longitud d'ona fonamental a només cal col·locar els coeficients de Fourier calculats per a una parella de rols de periodicitat a en les posicions múltiples de n .

Sigui

$$\omega^0 = \omega_1^0 \sin \alpha x + \omega_2^0 \sin 2\alpha x + \omega_3^0 \sin 3\alpha x + \dots + \omega_L^0 \sin L\alpha x,$$

una discretització d'una solució estacionària de periodicitat a i número d'ona fonamental $\alpha = 2\pi/a$ (per simplificar només considerem la vorticitat i ometem la temperatura), que representarem esquemàticament amb cada coeficient de Fourier a la seva posició com

$$\boxed{\omega_1^0} \boxed{\omega_2^0} \boxed{\omega_3^0} \boxed{\dots} \boxed{\omega_L^0}$$

Un clonatge de $n = 2$ rols de longitud d'ona fonamental a es pot representar com

$$\boxed{0} \boxed{\omega_1^0} \boxed{0} \boxed{\omega_2^0} \boxed{0} \boxed{\omega_3^0} \boxed{\dots} \boxed{\omega_L^0}$$

és a dir,

$$\omega^0 = \omega_1^0 \sin 2\hat{\alpha}x + \omega_2^0 \sin 4\hat{\alpha}x + \omega_3^0 \sin 6\hat{\alpha}x + \dots + \omega_L^0 \sin 2L\hat{\alpha}x,$$

per $\hat{\alpha} = \alpha/2$. D'aquesta manera ω^0 continua tenint longitud d'ona fonamental a .

Un clonatge de $n = 3$ rols es pot representar com

$$\boxed{0} \boxed{0} \boxed{\omega_1^0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{\omega_2^0} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{\omega_3^0} \boxed{\dots} \boxed{\omega_L^0}$$

és a dir,

$$\omega^0 = \omega_1^0 \sin 3\hat{\alpha}x + \omega_2^0 \sin 6\hat{\alpha}x + \omega_3^0 \sin 9\hat{\alpha}x + \dots + \omega_L^0 \sin 3L\hat{\alpha}x,$$

per $\hat{\alpha} = \alpha/3$. I així successivament.

Observem que de tots els coeficients, $l = 0 \div nL$, només caldria guardar-ne L , que són els diferents de zero.

En canvi, per al jacobià o matriu d'estabilitat necessitaríem treballar amb $2nL$ coeficients. Es desenvoluparia cada variable, per exemple ω' , com

$$\omega' = \sum_{l=-nL}^{nL-1} \omega_l e^{il\hat{\alpha}x},$$

on $\hat{\alpha} = \alpha/n$ és el número d'ona i na la periodicitat. Però reordenant ω'

$$\omega' = \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \sum_{l=-L}^{L-1} \omega_{nl+m} e^{i(nl+m)\hat{\alpha}x} \right\}$$

es pot veure com es pot posar com una suma amb pertorbacions amb $m = 0$ i $m \neq 0$. Les primeres (són les que mantenen el clonatge), tenen els coeficients de Fourier zero a tot arreu llevat de les posicions múltiples de n , i les darreres tenen coeficients iguals a zero en les posicions múltiples de n i són les que trenquen el clonatge i corresponen als $n - 1$ paquets que es troben mitjançant la teoria de Floquet i que ja sabem que estan doblats.

5.4 Resultats per a $\sigma = 10$

5.4.1 Corbes d'estabilitat marginal

Presentem les corbes d'estabilitat de solucions periòdiques que contenen n parelles de rols idèntiques en funció del seu número d'ona fonamental α prenent pertorbacions periòdiques que tenen número d'ona $\hat{\alpha} = \alpha/n$. Hem demostrat com aquestes pertorbacions es poden separar en $n/2 + 1$ subconjunts, les quals es poden expressar com (8) de la secció 2 d'aquest capítol. Ens referim a les diferents pertorbacions per $d_m = m/n$ o simplement per m , amb $m = 0, 1 \div n/2$. De les possibles solucions estacionàries només calculem l'estabilitat de les que són estables. Els resultats que presentem són per número de Prandtl $\sigma = 10$. S'ha considerat una resolució numèrica de $N \times M = 12 \times 18$: les solucions estacionàries s'han calculat amb N coeficients de Fourier i l'anàlisi de Floquet amb $2N + 1$ coeficients i en tots dos casos $M + 1$ punts de col·locació en z .

A la figura 27 presentem les diferents corbes d'estabilitat que trenquen el clonatge de $n = 10$ parelles de rols - línia discontinua-, així com la inestabilitat

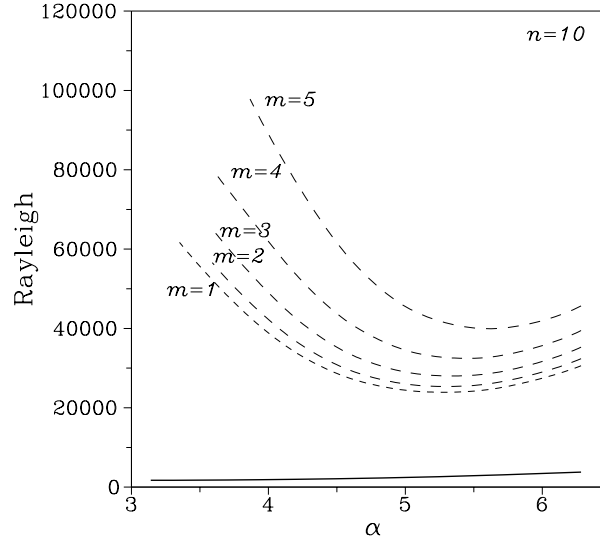


Figura 27: Les diferents corbes d'estabilitat que trenquen un clonatge de $n = 10$ parelles de rolls. En línia contínua la inestabilitat primària.

primària del règim conductiu -línies contínues. Cada corba correspon a l'anàlisi amb pertorbacions amb $d_m = m/10$ per $m = 1, 2, 3, 4$ i 5 respectivament. Com ja s'ha vist en la secció 2, per causa de la invariància de les equacions per S_1 , la corba $m = 6$ coincideix amb la $m = 4$, la $m = 7$ amb $m = 3$, $m = 8$ amb $m = 2$ i $m = 9$ amb $m = 1$. Per a cada $m \neq 0$, representem el número de Rayleigh tal que $\Re(\lambda_m) = 0$ en funció del número d'ona fonamental del clonatge. Les bifurcacions són totes estacionàries.

La corba d'estabilitat marginal per a $n = 10$ parelles és l'envolvent de totes les corbes, $m = 1 \div 5$ i $m = 0$. La corba corresponent a $m = 0$, no apareix a la figura 27 perquè apareix per a valors de Rayleigh superiors, és la que representem a la figura 28 etiquetada per $n = 1$. Per als α que es representen a la figura 27 l'envolvent resulta ser la corba $m = 1$, és a dir, la pertorbació que inestabilitza aquest clonatge es pot expressar com $\xi(x)e^{id\alpha x}$ amb $d = 1/10$ i $\xi(x)$ funció periòdica amb número d'ona fonamental α . I la solució pertorbada té número d'ona fonamental $\hat{\alpha} = \alpha/10$. Direm també que per als α que representem a la figura 27 domina $m = 1$, i $m = 1$ és la inestabilitat secundària o corba d'estabilitat marginal d'un clonatge format per $n = 10$ parelles de rolls.

Per a cada n procedim de manera anàloga al cas $n = 10$. Com que representem el Rayleigh en funció del número d'ona fonamental del clonatge, podem

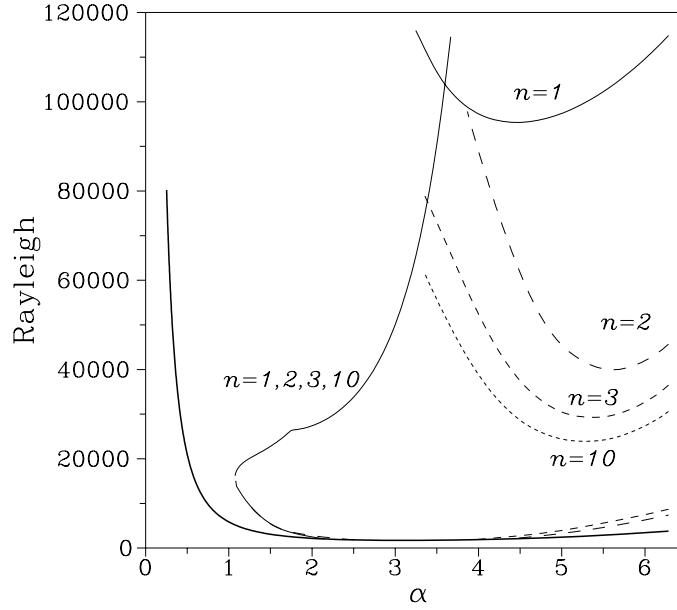


Figura 28: Les corbes d'estabilitat marginal de clonatges formats per $n = 1, 2, 3$ i 10 parelles de rolls. Representem el Rayleigh que desestabilitza la solució formada per un clonatge amb n parelles de rolls amb número d'ona fonamental α : en línia discontinua, les inestabilitats que trenquen el clonatge de la solució bàsica; en línia contínua, les que mantenen el clonatge.

representar en una mateixa gràfica les inestabilitats secundàries per diferents clonatges, variant n . A la figura 28 representem el número de Rayleigh en funció del número d'ona fonamental α del clonatge que donen les inestabilitats secundàries de clonatges amb $n = 1, 2, 3$ i 10 parelles de rolls. En línia contínua són les que mantenen el clonatge, ja estudiades i calculades en el capítol 3, és la corba amb $n = 1$ (o equivalentment $m = 0$ per cada n). I en línia discontinua són les que trenquen el clonatge ($m \neq 0$).

Sobre les corbes que trenquen el clonatge format per $n = 2, 3$ i 10 parelles de rolls, l'estat bàsic, que té número d'ona fonamental α , bifurca a un estat pertorbat amb número d'ona fonamental $\hat{\alpha} = \alpha/n$, perquè en tots els casos domina la pertorbació $m = 1$. Per exemple, per a $n = 10$ la corba que representem puntejada ($\alpha \gtrsim 3.5$) correspon a l'envolvent de les corbes d'estabilitat per a cada $m = 0, 1 \div 5$ de la figura 27, que coincideix amb la $m = 1$.

Per a valors de Rayleigh grans es poden distingir clarament dues zones. Per a $\alpha \gtrsim 3.5$, les inestabilitats per a diferents clonatges s'acumulen formant una

banda. És una zona on domina, per a qualsevol n , la inestabilitat que trenca el clonatge ($m \neq 0$). Però, en canvi, per a $\alpha \lesssim 3.5$ i per a cada clonatge domina sempre la inestabilitat $m = 0$. Tot i que no ho representem, també s'acumula una banda d'inestabilitats per sobre $n = 1$, i a prop d'aquesta, són les corresponents als diferents $m \neq 0$. En aquesta zona, per qualsevol clonatge, cadascuna de les parelles de rolls s'inestabilitza linealment via una bifurcació de Hopf a un estat pertorbat mantenint la simetria de reflexió S_1 de cada parella, tal com descrivim en el capítol 3. Per a $\alpha \simeq 1.7$ és on la corba $n = 1$, per a valors de Rayleigh grans, presenta una discontinuïtat en la derivada, i és on hi ha un canvi d'estabilitat. Per a $1 \lesssim \alpha \lesssim 1.7$ l'estat pertorbat manté totes les simetries de cada parella de rolls, i per a $1.7 \lesssim \alpha \lesssim 3.5$ l'estat pertorbat només manté la simetria S_1 de cadascuna de les parelles.

En qualsevol cas, per a $\sigma = 10$, els clonatges poden desestabilitzar mantenint o trencant el clonatge, però en cap cas no es genera vent no nul linealment. Mentre que les bifurcacions secundàries que mantenen el clonatge són de tipus Hopf, les que el trenquen resulten estacionàries.

Hi ha, a més, una banda d'inestabilitats per valors de Rayleigh a prop del valor crític $(\alpha_c, Ra_c) \approx (3.711, 1707.8)$. La majoria d'aquestes inestabilitats trenquen el clonatge. De les que trenquen el clonatge en representem a la figura 28 només les corresponents a dues i tres parelles de rolls (línies discontinües). La que manté el clonatge (línia contínua) apareix per valors de $\alpha < \alpha_c$. Dins la regió compresa entre la corba n i la inestabilitat primària, el clonatge format per n parelles de rolls amb número d'ona fonamental α és inestable.

Per a una millor descripció, representem a la figura 29 una ampliació d'aquesta zona. Representem les corbes d'estabilitat marginal per $n = 1, 2, 3$ i 4 parelles de rolls en funció del seu número d'ona fonamental. Per a cada n calculem les corbes $m = 0$ i $m = 1$, i a més per a $n = 4$, la $m = 2$, que de fet és la que correspon a prendre $d = 1/2$ i és la $m = 1$ per $n = 2$ parelles. La inestabilitat corresponent a $n = 1$ la notem per 1:2 -en línia contínua- manté el clonatge i presenta una bifurcació subcrítica amb $U \neq 0$ amb un perfil anti-simètric. A la figura 28 també hi està representada, és la que representem en línia contínua i neix de la corba marginal per a $\alpha \simeq 2.2$. Aquesta és la corba corresponent a la figura 6 que hem analitzat en el capítol 3.

Entre la corba 1:2 i la primera inestabilitat una parella de rolls amb número d'ona fonamental α és inestable. Aquesta serà la pertorbació $m = 0$ per a qualsevol clonatge. De les $m \neq 0$ domina la $m = 1$, per a qualsevol n . D'aquestes notem 2:1 i 2:3 a les quals desestabilitzen $n = 2$ parelles de rolls, 3:2 i 3:4 a les quals desestabilitzen $n = 3$ parelles i 4:3 una de les dues que desestabilitza $n = 4$ parelles. El criteri que hem seguit per batejar aquestes corbes ens el

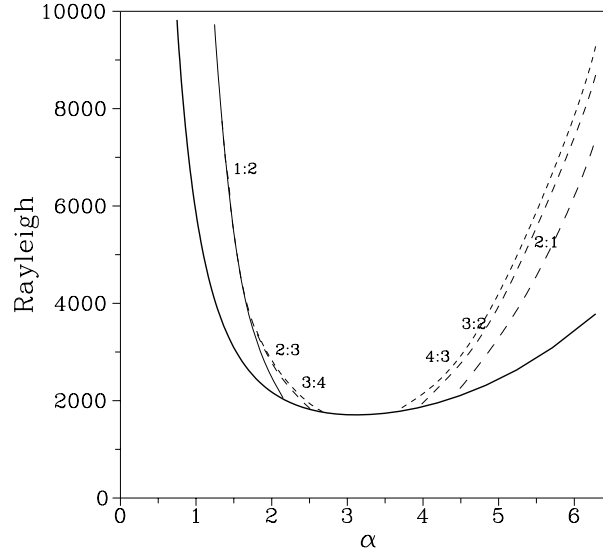


Figura 29: Corbes d'estabilitat marginal de solucions clonades formades per $n = 1, 2, 3$ i 4 parelles de rolls prop del valor crític (α_c, Ra_c) .

donen els valors de (α, Ra) sobre la corba marginal dels quals neixen aquestes corbes i que explicarem amb detall més endavant.

Per a $\alpha > \alpha_c$, qualsevol d'aquests clonatges amb $n = 2, 3$ i 4 parelles de rolls és inestable per pertorbacions $m = 1$. Per a $\alpha < \alpha_c$, s'ha de calcular l'envolent de les corbes $m = 0$ i $m = 1$ i segons els valors del número de Rayleigh domina una o l'altra.

No és clar quina és l'envolent de $m = 0$ (1:2) i $m = 1$ (2:3) per a $n = 2$ parelles de rolls i l'envolent de $m = 0$ (1:2) i $m = 1$ (3:4) per a $n = 3$ parelles de rolls. Presentarem els valors del número de Rayleigh crític per a $n = 1, 2, 3, 4$ i 5 parelles de rolls amb números d'ona fonamental $\alpha = 2.1, 1.8, 1.6, 1.4, 1.3$ i 1.1. En principi, la resolució en què s'han calculat totes les corbes és $N \times M = 12 \times 18$, aquesta resolució és suficient per a $\alpha \geq 1.4$. Per a $\alpha = 1.3$ i 1.1 es necessita més resolució per tal de comparar els diferents valors crítics entre $d = 0$ i $d = 1/n$.

A les taules 8 i 9 presentem el Rayleigh crític quan s'analitzen parelles de rolls amb número d'ona fonamental α , i la corresponent longitud d'ona fonamental a , enfront de pertorbacions amb $d = 0, 1/2$ i $d = 1/3$. A la taula 9 també es consideren pertorbacions amb $d = 1/4$ i $d = 1/5$. A la taula 8, per a cada α (o a), presentem els valors crítics del Rayleigh calculats amb una resolució de $N \times M = 12 \times 18$ a la primera fila, de $N \times M = 16 \times 18$ a la segona

α	a	$d = 0$	$d = 1/2$	$d = 1/3$
1.4	4.5	6854	6852	6853
		6854	6852	6853
		6854	6852	6853
1.3	5	9455.4	9457.0	9456.0
		9456.3	9455.7	9456.0
		9456.3	9455.6	9456.0
1.1	5.5	12343	12358	12348.9
		12354.0	12355.0	12354.4
		12354.2	12354.3	12354.2

Taula 8: Per a cada α (i a) el Rayleigh crític amb resolució $N \times M = 12 \times 18$, $N \times M = 16 \times 18$ i $N \times M = 18 \times 18$.

α	a	$d = 0$	$d = 1/2$	$d = 1/3$	$d = 1/4$	$d = 1/5$
2.1	3	2.21	2.55	2.61		
1.8	3.5	3.25	3.42	3.45		
1.6	4.	4.721	4.728	4.731	4.732	4.733
1.4	4.5	6.854	6.852	6.853	6.8532	6.8534
1.3	5.	9.4563	9.4556	9.5460	9.4561	9.4562
1.1	5.5	12.3542	12.3543	12.3542	12.3542	12.3542

Taula 9: Rayleigh crític ($Ra \times 10^{-3}$) per diferents mides de caixa i diferents pertorbacions. La primera columna, amb pertorbacions amb $d = 0$; les altres columnes, amb pertorbacions $m = 1$ per a $n = 2, 3, 4$ i $n = 5$ parelles de rolls de longitud $L = na$, respectivament.

fila i de $N \times M = 18 \times 18$ a la tercera fila. A la taula 9 per a cada α (o a) presentem els valors crítics del Rayleigh amb resolució $N \times M = 18 \times 18$. Per a $\alpha \geq 1.6$ domina clarament $m = 1$ sobre $m = 0$, tant per a $n = 2$ com per a $n = 3, 4$ i 5 parelles de rolls amb aquesta longitud d'ona fonamental. Per a $\alpha = 1.4$ i 1.3 domina $m = 0$ sobre $m = 1$ tot i que estan molt properes. A més, per a cada α , quan augmentem n la diferència entre els dos valors del Rayleigh de $m = 0$ i $m = 1$ és menor. En particular per a $\alpha = 1.1$ pràcticament no es poden distingir per a cap n .

Les corbes que hem representat a la figura 29, per a valors grans de n tendeixen a néixer prop del valor crític $(\alpha_c, Ra_c) \approx (3.711, 1707.8)$.

Analitzarem l'estabilitat en aquesta zona quan, en comptes del Rayleigh en funció del número d'ona fonamental del clonatge, representem el Rayleigh

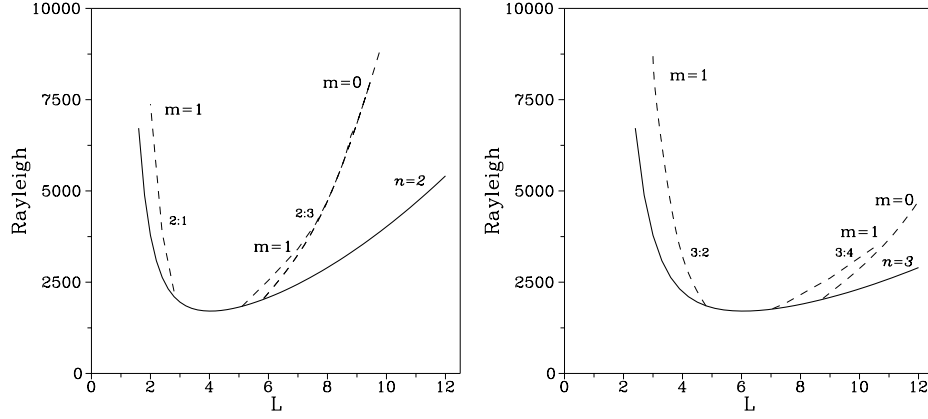


Figura 30: (a) Totes les inestabilitats secundàries de $n = 2$ parelles de rolls. A la zona compresa entre $n = 2$ i l'envolent de les corbes $m = 1$ (2:1 i 2:3) i $m = 0$, les solucions amb dues parelles de rolls són inestables. (b) Anàlogament però per clonats formats per $n = 3$ parelles de rolls.

en funció de la longitud L del clonatge o longitud del contenidor periòdic. La longitud L del clonatge per al nostre problema és exactament la longitud d'ona o periodicitat de les pertorbacions que considerem, i diem que el contenidor té longitud L . El règim conductiu desestabilitza a un clonatge format per n parelles de rolls de longitud d'ona fonamental a (que té longitud $L = na$) per a un valor de Rayleigh que coincideix amb el que desestabilitza l'estat conductiu a una parella de rolls de longitud $L = a$. Per representar per a cada n la corba marginal de les inestabilitats primàries en una gràfica número de Rayleigh en funció de la longitud L del contenidor, només cal fer rèpliques de la inestabilitat primària corresponent a una parella de rolls, reescalant L amb nL (veure figura 2). Notem amb una n la inestabilitat primària quan les pertorbacions que afegim a l'estat conductiu tenen periodicitat L , però longitud d'ona fonamental $a = L/n$. L'estat pertorbat (de longitud L) és un clonatge format per n parelles de rolls de longitud d'ona fonamental a . D'aquesta manera per sobre la corba n -representada amb traçat gruixut- s'obtenen solucions periòdiques de periodicitat L que contenen n parelles de rolls idèntiques.

A la figura 30 (a) representem totes les inestabilitats secundàries de solucions formades per dues parelles de rolls. Les corbes 2:1 i 2:3 corresponen a pertorbacions amb $m = 1$. La inestabilitat $m = 0$ és la corba 1:2. La regió inestable per dues parelles de rolls es troba a la regió compresa entre $n = 2$ i l'envolent de $m = 1$ i la $m = 0$. Anàlogament representem a la figura 30 (b) totes les inestabilitats secundàries de solucions formades per tres parelles

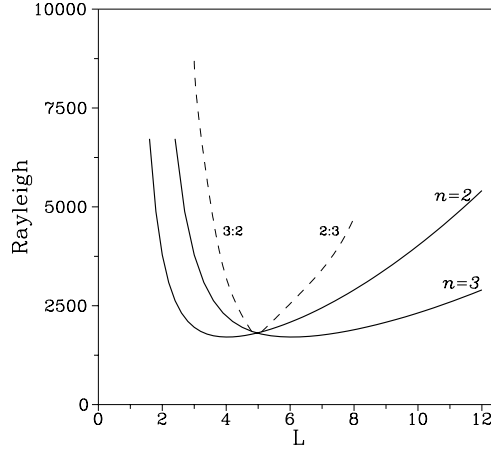


Figura 31: Inestabilitats secundàries que neixen a prop de la intersecció entre $n = 2$ i $n = 3$.

de rolls. La regió inestable per tres parelles de rolls està compresa entre $n = 3$ i l'envolent de les corbes $m = 1$ (3:2, 3:4) i $m = 0$. Totes les corbes s'han representat a partir de les de la figura 29 reescalant-les, a la figura 30 (a) canviant $L = 2\pi/\alpha$ per $2L$ i a la figura 30 (b) canviant $L = 2\pi/\alpha$ per $3L$.

La notació de les diferents corbes per 2:1, 2:3, 3:2, 4:3, 3:2, 2:1 és deguda al fet que, si representem el número de Rayleigh crític en funció de longitud real del clonatge (no longitud d'ona fonamental), aquestes neixen de les interseccions entre corbes que donen la inestabilitat primària de l'estat conductiu a diferents clonatges. Les inestabilitats secundàries dels clonatges degudes a pertorbacions de periodicitat L estan etiquetades per 1:2 o 2:1 perquè neixen a prop de la intersecció entre $n = 1$ i $n = 2$, en particular la 1:2 neix exactament de la intersecció, etiquetades per 3:2 o 2:3 perquè neixen a prop de la intersecció entre $n = 2$ i $n = 3$, etiquetades per 4:3 o 3:4 perquè neixen a prop de la intersecció entre $n = 3$ i $n = 4$. Per exemple, quan representem una ampliació de la zona d'intersecció entre $n = 2$ i $n = 3$, a la figura 31, hi ha dues inestabilitats que neixen a prop de la intersecció en forma d'uns bigotis, la 3:2 (pertorbació $m = 1$ d'un clonatge de longitud L amb tres parelles de rolls) i la 2:3 (pertorbació $m = 1$ d'un clonatge de longitud L amb dues parelles de rolls).

Podem representar a la vegada totes les inestabilitats de les solucions clonades amb $n = 1, 2, 3$ i 4 parelles de rolls. A la figura 32 representem el Rayleigh en funció de la longitud L de cada clonatge. La inestabilitat primària del règim conductiu (línia gruixuda) es desdobla quan representem el Rayleigh en funció de L . Per a n parelles de rolls li correspon l'etiquetada amb n . Les inestabilitats

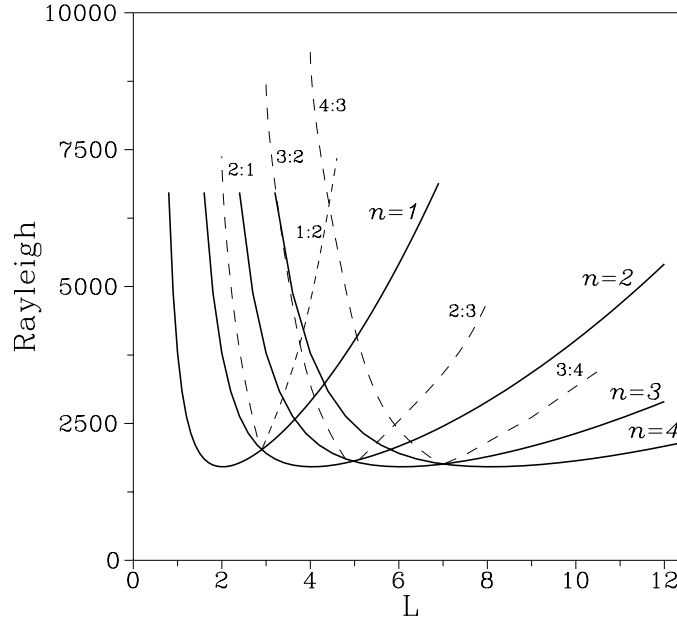


Figura 32: Corbes d'estabilitat marginal de solucions clonades formades per $n = 1, 2, 3$ i 4 parelles de rolls a prop d'on es produeix la inestabilitat primària. Representem el Rayleigh en funció de la longitud L del clonatge.

secundàries dels clonatges, degudes a pertorbacions de periodicitat L , estan etiquetades per 1:2, 2:3, 3:4,... i són les mateixes que les representades a la figura 29. La 1:2 correspon a una pertorbació amb $m = 0$ i la resta a pertorbacions $m = 1$. Per no complicar més la gràfica, per als clonatges amb $n = 2, 3, 4$ parelles només representem inestabilitats amb $m = 1$, faltaria sobreposar-hi la $m = 0$, que es calcula replicant la 1:2 reescalant L per nL . Per a cada n , el clonatge amb n parelles és inestable a la zona compresa entre la corba n i l'envolvent de les inestabilitats secundàries corresponents. Per a $n = 2$ i $n = 3$ ho hem representat a les figures 30 (a) i (b).

5.4.2 Solucions estacionàries i estabilitat

En aquest capítol hem analitzat l'estabilitat de solucions amb diverses parelles de rols. Sabem, a més, que coexisteixen solucions diferents amb una sola parella de rols (Mizushima & Fujimura 1992) i que per alguns valors dels paràmetres una parella de rols es pot desestabilitzar cap a una solució amb més d'una parella de rols (Clever & Busse 1979, Nagata & Busse 1983, de la Torre & Busse 1994, Tuckerman & Barkley 1995).

En aquest apartat calcularem totes les solucions estacionàries amb una parella de rols. Les solucions amb més d'una parella de rols idèntiques són rèpliques de la família de solucions $n = 1$. L'estabilitat, però, no es pot replicar; quan n augmenta, el nombre d'instabilitats possibles també augmenta i, per tant, els límits d'estabilitat poden variar. De fet, varien i vénen donats per les diferents corbes de la figura 28 que s'han trobat amb l'anàlisi de Floquet. Per tant, per a totes les solucions coneixem l'estabilitat.

Aquest estudi el durem a terme en primer lloc fixant alguns valors del Rayleigh i variant L i en segon lloc fixant alguns valors de la longitud L del contenidor i variant Ra .

A. Fixat el número de Rayleigh

Calcularem per a $Ra = 3000$ i $Ra = 6000$ totes les solucions estacionàries amb $n = 1, 2, 3, \dots$ parelles de rols en funció de la longitud L del contenidor i n'analitzarem l'estabilitat.

Un treball relevant en el qual troben resultats similars als que presentarem en aquest apartat és el de Mizushima & Fujimura (1992). En el treball de Mizushima & Fujimura (1992) es calculen les solucions estacionàries -només amb una parella de rols- per a diferents valors del número de Rayleigh, en particular per a $Ra = 3000$ i $Ra = 6000$. Per a $Ra = 3000$ les solucions estacionàries coincideixen amb les que presentem, en canvi, per a $Ra = 6000$ difereixen. Per a calcular-ne l'estabilitat dedueixen un model d'equacions d'amplitud i extrapolen els límits d'estabilitat del model a les solucions amb rols. Contrastant amb els nostres resultats veurem que no es poden generalitzar els resultats d'estabilitat del model al de l'estabilitat del problema complet. Dels resultats que presentem també podrem deduir quines resonàncies són importants en aquest problema.

Per ajudar a descriure els resultats introduïm l'*índex d'instabilitat* d'una solució estacionària que es defineix com el nombre de valors propis positius, que dona el seu anàlisi d'estabilitat (Tuckerman & Barkley 1990).

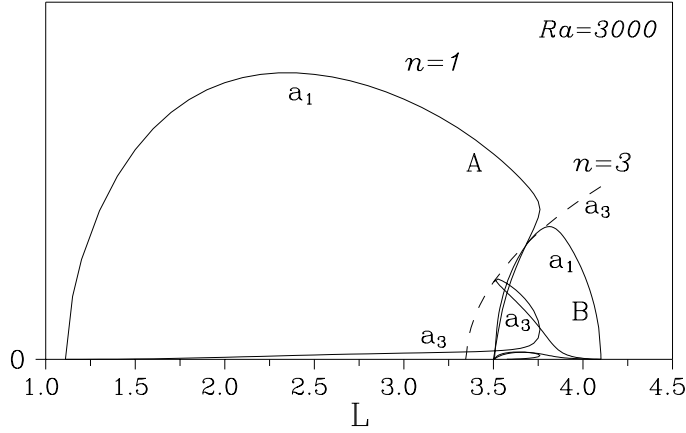


Figura 33: Fixat $Ra = 3000$, representem $|\chi_l(z = 0.25)|$, $l = 1, 2, 3$ en funció de L per a cadascuna de les solucions estacionàries.

Cas $Ra = 3000$

Per a aquest valor, representem a la figura 33 els tres primers coeficients de Fourier de la funció de corrent en valor absolut $a_l = |\chi_l(z = 0.25)|$, $l = 1, 2, 3$, en funció de la longitud L del contenidor, per a cadascuna de les solucions estacionàries. Aquests coeficients són més grans que no pas la resta de la corresponent sèrie de Fourier. Per a aquest valor de Rayleigh representem tres famílies de solucions. Dues d'elles són solucions de periodicitat L que contenen una sola parella de rolls, la A i la B , les notem per $n = 1$ i les representem amb línia contínua. L'altra família de solucions, amb línia discontinua, corresponen a solucions periòdiques de longitud L que contenen tres parelles de rolls, la $n = 3$. Aquesta es calcula reescalant la $n = 1$, canviant la L de la corba $n = 1$ per $3L$.

Variant L d'esquerra a dreta: la solució amb una parella de rolls que bifurca del règim conductiu és de la família A . Al principi bàsicament domina el primer coeficient de Fourier a_1 sobre la resta. Si seguim aquesta solució $n = 1$, per a $L \gtrsim 3.7$, el tercer coeficient de Fourier a_3 es fa important i junt amb el primer a_1 dominen sobre la resta. Aproximadament per aquest valor la família de solucions A retrocedeix (disminuint L), a_1 i a_2 tendeixen a zero mentre que a_3 augmenta. La família de solucions empalma amb una amb $n = 3$ parelles de rolls. Si seguim a_1 de les solucions $n = 1$, A , començant per l'esquerra, la família de solucions abans del punt de retrocés direm que és del tipus A_1 , després d'aquest direm que és del tipus A_2 .

Variant L de dreta a esquerra: la solució que bifurca de l'estat conductiu

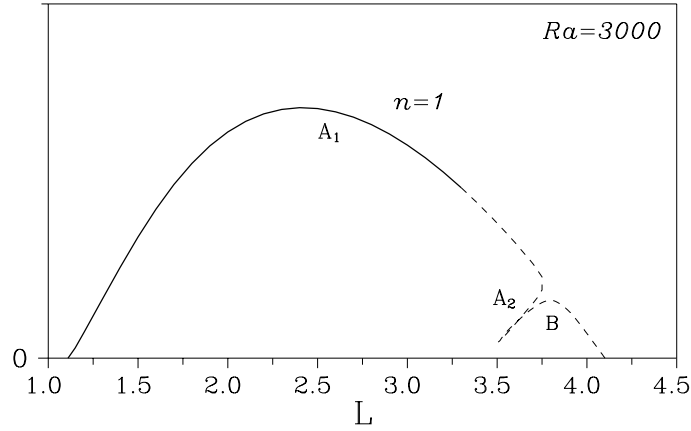


Figura 34: Fixat el $Ra = 3000$ representem una amplitud en funció de L per a una solució amb una parella de rolls. Amb línia contínua quan són estables i amb línia discontinua quan no ho són.

amb una parella de rolls és de la família B . Al principi bàsicament domina a_1 però ràpidament a_3 es fa important mentre que a_1 i a_2 (aquesta darrera hi està representada, tot i que no la notem) tendeixen a zero. Aquestes solucions variant L també tendeixen a una amb $n = 3$ parelles de rolls, la qual els primers coeficients de Fourier que té no nuls són $a_3, a_6, a_9, \dots$

Les solucions que bifurquen de l'estat conductiu amb una i tres parelles de rolls al principi es comporten com un estat pur - $q_1(z)e^{i\alpha x}$, i $q_3(z)e^{i3\alpha x}$ respectivament on $\alpha = 2\pi/L$ amb q_1 i q_3 funcions parells. Quan conviuen les dues solucions, a prop d'on neix $n = 3$, apareixen solucions que anomenarem híbrides i són tals que els dominen bàsicament el primer i el tercer coeficient de Fourier (i tots els múltiples de tres). Corresponen a les famílies de solucions B i A_2 . Aquest fet que ens suggereix que aquestes solucions híbrides són producte de la interacció no lineal de solucions amb $n = 1$ i $n = 3$ parelles de rolls. Com que són solucions en la zona d'influència de la ressonància exacta 1:3 entre dos estats purs, direm que aquestes noves solucions apareixen per causa d'una ressonància 1:3.

Per tal d'entendre l'estabilitat representem a les figures 34 i 35 una amplitud, $\frac{1}{2}\overline{v_x^2}(z = 0.25)$, en funció de la longitud L del contenidor. Amb línia contínua les solucions que són estables, i amb línia discontinua, les que són inestables. L'estabilitat s'ha analitzat enfront de qualsevol pertorbació de periodicitat L .

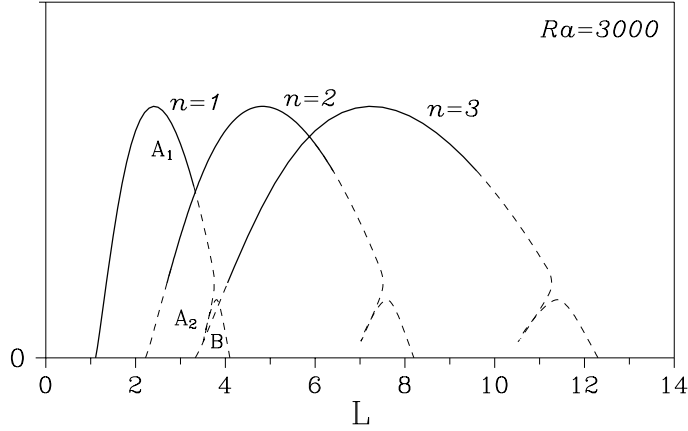


Figura 35: Fixat $Ra = 3000$ representem una amplitud per a cadascuna de les solucions estacionàries en funció de L . Amb línia contínua representem les solucions que són estables i amb línia discontinua les que són inestables.

Si a la figura 34 variem L d'esquerra a dreta, observem que la $n = 1$, A_1 és estable fins $L \simeq 3.4$, on s'inestabilitza via una bifurcació subcrítica amb $U \neq 0$ antisimètric, donada per la corba 1:2 de la figura 29 (faltaria representar la solució estacionària inestable amb vent que hi bifurca). Per L lleugerament superiors, abans del punt de retrocés, creua l'eix real un altre valor propi corresponent a les pertorbacions que mantenen la simetria S_1 . La A_1 en el punt de retrocés augmenta en un més el seu índex d'inestabilitat, per causa de la pertorbació que manté totes les simetries. La família de solucions A_2 és inestable per a totes les pertorbacions, de les quatre que hi ha, excepte la pertorbació amb vent simètric. La $n = 1$, B és sempre inestable per a qualsevol pertorbació.

A la figura 35 hem representat les tres primeres solucions que bifurquen del règim conductiu quan variem L d'esquerra a dreta. La primera de bifurcar és la $n = 1$, és la que hem representat a la figura 34. La segona solució que bifurca és la $n = 2$, la qual al principi és inestable. L'estabilitat de la $n = 2$ està limitada per dues corbes que corresponen a pertorbacions $m = 1$, calculades en la secció anterior; en aquest cas, la corba 2:1 i la corba 2:3 de la figura 30(a) o de la figura 29. Així, $n = 2$ parelles de rolls són estables per a $2.6 \lesssim L \lesssim 6.5$.

La tercera de bifurcar de l'estat conductiu és la $n = 3$, la qual és inestable amb dos valors propis positius. Augmentant el valor de L sobre aquesta solució es produeix una bifurcació i apareix la solució híbrida B , l'índex d'inestabilitat disminueix en un però la solució no esdevé estable fins a un valor de L superior, valor que ens dona la corba 3:2 ($m = 1$) de la figura 30(b) o de la figura

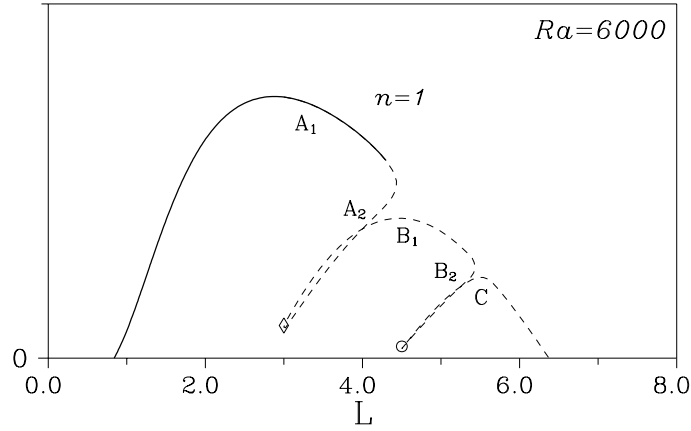


Figura 36: Fixat el $Ra = 6000$ representem una amplitud en funció de L per a una solució amb una parella de rolls. Amb línia contínua quan són estables i amb línia discontinua quan no ho són.

29. Per l'altre costat la solució s'inestabilitza també trencant el clonatge a una solució amb longitud d'ona fonamental L i aquest valor ve donat per la corba 3:4 ($m = 1$). Així $n = 3$ parelles de rolls són estables per a $4.1 \lesssim L \lesssim 9.7$.

Cas $Ra = 6000$

Per a aquest valor representem a les figures 36 i 37 l'amplitud $\frac{1}{2}\overline{v_x^2}(z = 0.25)$ en funció de la longitud L del contenidor per a cadascuna de les solucions estacionàries. La família de solucions estacionàries $n = 1$ la representem a la figura 36. A la figura 37 representem les cinc primeres solucions que bifurquen del règim conductiu, variant L d'esquerra a dreta, tal com hem fet en el cas anterior, en representem l'estabilitat: línia contínua per a les estables, altrament per a les inestables. En particular per a $Ra = 6000$ existeixen tres famílies de solucions amb $n = 1$ parella de rolls, la A , la B i la C . Les solucions híbrides B_1 i A_2 són degudes a una ressonància 1:3, mentre que les solucions híbrides C i B_2 són degudes a una ressonància 1:5. Existeixen, a més, solucions amb dues, tres, quatre i cinc parelles de rolls, la $n = 2, 3, 4$ i $n = 5$ respectivament, totes elles calculades reescalant la $n = 1$. De les solucions $n = 2$ i $n = 4$ només representem on són estables per no complicar més la gràfica.

Com en el cas anterior, la branca de solucions A_1 amb una parella de rolls per a $L \simeq 4.32$ s'inestabilitza via una bifurcació subcrítica amb $m = 0$. Al punt de retrocés de A augmenta en un l'índex d'inestabilitat per causa de les pertorbacions que mantenen totes les simetries. Les famílies de solucions B i

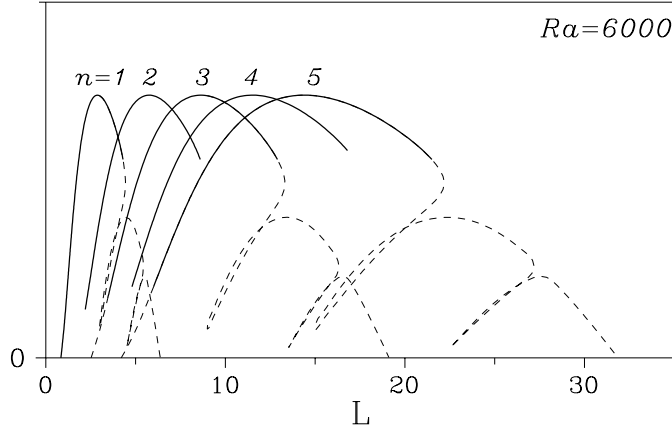


Figura 37: Fixat $Ra = 6000$ representem una amplitud per a cadascuna de les solucions estacionàries en funció de L . Amb línia contínua representem les solucions que són estables i amb línia discontinüa, les que són inestables.

C són sempre inestables i per a qualsevol inestabilitat. Els límits d'estabilitat de $n = 2, 3, 4$ i $n = 5$ vénen donats per l'anàlisi de Floquet. Són estables $n = 2$ parelles si $2.16 \lesssim L \lesssim 8.62$, $n = 3$ parelles si $3.42 \lesssim L \lesssim 12.9$, $n = 4$ parelles si $4.57 \lesssim L \lesssim 17.2$ i $n = 5$ parelles si $5.76 \lesssim L \lesssim 21.5$.

Representem a la figura 38 els punts on bifurquen solucions híbrides (rombes/cerques), per a $Ra = 3000, 4000, 5000$ i $Ra = 6000$ on representem: amb un rombe els punts on bifurca de $n = 3$ la família de solucions B i amb un cercle els punts on bifurca de $n = 5$ la família de solucions C . En qualsevol cas sobre ells es produeix una bifurcació reestabilitzant, perquè disminueix en un l'índex d'inestabilitat, però la solució encara és inestable. Per tal de situar aquests valors representem les inestabilitats primàries de $n = 1, 3$ i 5 parelles de rolls. Els punts P_{13} i P_{15} són les interseccions de $n = 1$ amb $n = 3$ i de $n = 1$ amb $n = 5$, és a dir, on es produeixen les ressonàncies exactes 1:3 i 1:5 respectivament.

Alhora de generar solucions híbrides són importants les ressonàncies 1:2n+1 i no les 1:2n, ja que interaccionen dos modes que tenen la mateixa paritat que els que tenen les solucions formades per una sola parella de rolls; els coeficients de Fourier en la posició $2n + 1$ són parells en z (mentre que els $2n$ són senars en z) tal com ho són les pertorbacions que desestabilitzen el règim conductiu.

Els rombes/cerques es disposen en forma d'uns bigotis que neixen a prop de P_{13} i P_{15} respectivament. Són valors pels quals de $n = 3$ i $n = 5$ parelles de

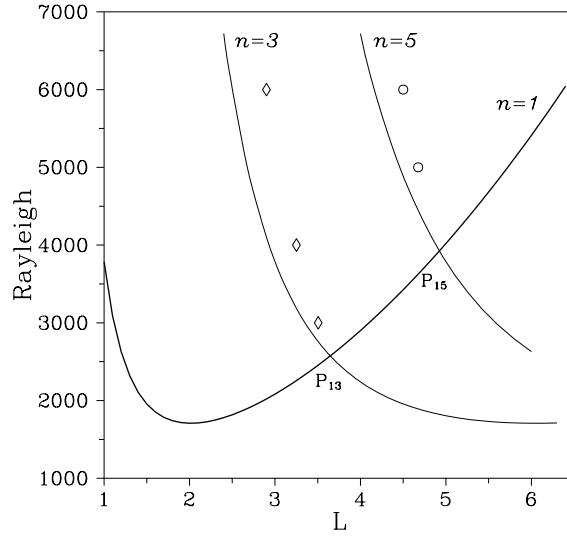


Figura 38: Rayleigh en funció de L per a les inestabilitats primàries de $n = 1, 3$ i 5 parelles de rolls. Bifurcacions de $n = 3$ parelles de rolls a solucions tipus B (rombes), i de $n = 5$ parelles a solucions tipus C (cercles).

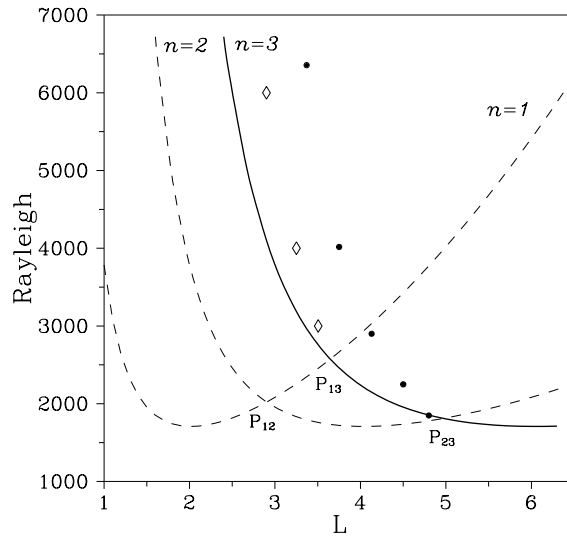


Figura 39: Representem la figura 38, centrant-nos en les solucions formades per $n = 3$ parelles de rolls, afegint per un costat el límit d'estabilitat: és la corba 3:2 de la figura 30 (b) que neix a prop de P_{13} (punts grossos).

rolls en bifurca una solució híbrida. En particular, la corba que neix a prop de P_{13} (en rombes) presenta una bifurcació subcrítica d'una solució clonada amb $n = 3$ parelles de rolls a una solució híbrida (la B). A priori, pot semblar que ha d'haver un canvi d'estabilitat— de fet, en aquest punt l'índex d'inestabilitat disminueix en un — però la solució encara és inestable. Si només es considera la interacció d'un sol coeficient de Fourier a_3 representant tres parelles de rolls amb un altre coeficient a_1 representant una parella de rolls, en aquest punt (rombes) l'estat pur a_3 canvia d'inestable a estable (d'esquerra a dreta) per causa de les pertorbacions a_1 . Aquest és el model estudiat per Mizushima & Fujimura (1992) mitjançant equacions d'amplitud al voltant de la ressonància exacta 1:3; les solucions estacionàries que troben són coherents amb les que trobem, però el resultat de la seva anàlisi d'estabilitat no és el més general, en particular falta considerar la interacció de l'estat pur a_2 , el que desestabilitza dues parelles de rolls, que, on es produeix la ressonància 1:3, P_{13} , és un estat pur que ja és inestable.

La corba que neix a prop de P_{15} (cercles) presenta una bifurcació subcrítica d'una solució clonada amb $n = 5$ parelles de rolls a una solució híbrida de la família de solucions C . Quant a l'estabilitat es pot fer un raonament anàleg al que acabem de fer, de manera que aquesta corba no dona un canvi d'estabilitat de $n = 5$ parelles de rolls.

A la figura 39 representem part de la figura 38, centrant-nos en les solucions formades per $n = 3$ parelles de rolls, afegint per un costat el límit d'estabilitat real, quan es considera la interacció no lineal de tots els coeficients de Fourier (en punts grossos). Aquest límit ve donat per la teoria de Floquet, és la corba que notàvem "3:2" que neix a prop de P_{23} , on es produeix una ressonància exacta 2:3.

Aquestes figures ens suggereixen que les ressonàncies 2:3, 3:4, en general $n:n+1$ són les que manen alhora de decidir l'estabilitat de les solucions clonades formades per $n+1$ parelles. Mentre que les ressonàncies 1:3, 1:5, i en general 1: n amb n senar, produeixen noves solucions híbrides entre una parella de rolls i n parelles de rolls, les quals al principi de la bifurcació tenen els coeficients de Fourier 1 i n dominants sobre la resta, i són solucions sempre inestables per qualsevol pertorbació.

Fixat un valor del número de Rayleigh - almenys més gran que el que dona la ressonància 1:3 - de la part dreta de la corba $n = 1$, sobre la qual existeixen solucions invariants per al grup de simetries G , sempre neixeran solucions tipus B , C ,... degudes a les ressonàncies 1:2n+1. Pels casos que hem examinat són inestables en front de qualsevol pertorbació i això fa pensar que ho siguin per a qualsevol valor del número de Rayleigh. En aquest cas es podria justificar

perquè el diagrama d'estabilitat, per a $\sigma = 10$ (4), no es pot allargar per la dreta fins a la corba $n = 1$, en particular, perquè no es pot allargar per $L \gtrsim 6$.

B. Fixada la periodicitat L

Hem vist com pot coexistir més d'una solució estacionària amb una parella de rolls per sobre la corba d'estabilitat marginal. Per $Ra = 2500$ hi ha unicitat de solucions, però, per exemple, per $Ra = 3000$ coexisteixen tres solucions estacionàries amb una parella de rolls al voltant de $L = 2\pi/1.7 \simeq 3.7$ i $Ra \simeq 2600$, que és aproximadament on es creuen les corbes d'estabilitat marginal per a $n = 1$ i $n = 3$ parelles de rolls. Són la A_1 , la A_2 i la B . Aquesta varietat de solucions la causa un mecanisme de ressonància, en aquest cas una ressonància 1:3. Per a valors de Rayleigh més gran, segons per a quin valor de L , poden coexistir també tres solucions amb una parella de rolls, però que poden ser degudes a altres ressonàncies 1:5, 1:7,...

En fixar el valor de L també es pot calcular el diagrama d'estabilitat de les solucions estacionàries. En aquest cas, L és la longitud del contenidor, és a dir, de les solucions estacionàries i també és la periodicitat de les pertorbacions. En fixar L , no ens limitem només prop del valor crític, considerem també les inestabilitats secundàries per a valors de Rayleigh grans.

Per a $L \lesssim 2.92$ una parella de rolls bifurca de l'estat conductiu i es manté estable augmentant el Rayleigh fins que es produeix una bifurcació de Hopf (veure figura 32).

Per a $L = 3$ i $L = 3.8$ presentarem les tres primeres famílies de solucions que bifurquen del règim conductiu, augmentant el número de Rayleigh.

Cas $L = 3$

A la figura 40 representem per a cada solució el número de Nusselt en funció del Rayleigh. Només representem solucions que contenen $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$ parelles de rolls idèntiques, així com la seva estabilitat. En augmentar el Rayleigh poden aparèixer solucions amb més rolls. La línia contínua significa que la solució és linealment estable; altrament, és inestable.

En aquest cas, augmentant el número de Rayleigh, la primera família de solucions estacionàries que bifurca de l'estat conductiu conté dues parelles de rolls. És estable, fins que s'inestabilitza per a $Ra = 77671$, per causa d'una pertorbació amb $d = 1/2$ (veure figura 28 per a $\alpha = 2 \times 2\pi/3 \simeq 4.2$).

La segona família de solucions que bifurca de l'estat conductiu conté una sola parella de rolls tipus A_1 amb índex d'inestabilitat positiu. Aquestes solucions són estables per a valors de Rayleigh continguts entre les dues ban-

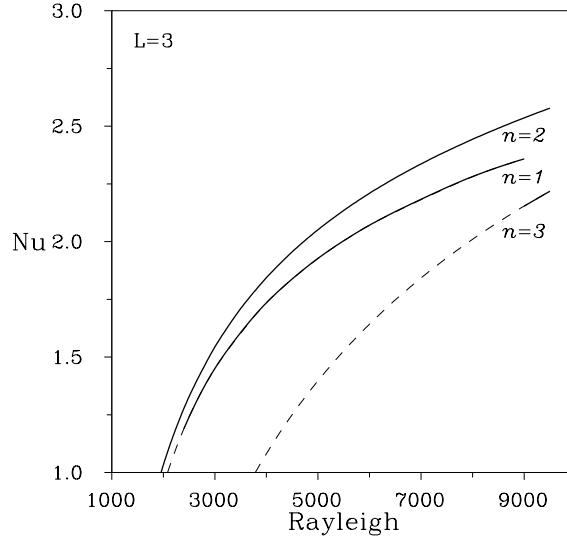


Figura 40: Per a $L = 3$ representem el número de Nusselt de les solucions estacionàries amb $n = 1, 2$ i 3 parelles de rolls, en funció del Rayleigh. Amb línia contínua les solucions són estables; altrament, són inestables.

des d'inestabilitats, per a $2207 \lesssim Ra \lesssim 28125$ (veure la figura 28 per a $\alpha = 2\pi/3 \simeq 2.1$). Per a $Ra \gtrsim 28125$ ja sabem que bifurca a una solució que manté la simetria S_1 i trenca les altres dues, $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$ (veure figura 4 del capítol 3 per a $L = 3$). I per a $Ra \lesssim 2207$ el roll és inestable per causa d'una bifurcació subcrítica amb $d = 0$ (la corba 1:2).

La tercera família de solucions que bifurca de l'estat conductiu conté tres parelles de rolls, també amb índex d'inestabilitat positiu. Són solucions estables per a $8693 \lesssim Ra \lesssim 36510$. Els límits d'estabilitat es calculen aplicant la teoria de Floquet (figura 28), tots dos per causa d'una pertorbació amb $d = 1/3$, el mínim està sobre la branca 3:2 de la figura 30 i el màxim es pot veure a la figura 28 per a $\alpha = 3 \times 2\pi/3 \simeq 6.3$.

Per a $L = 3.5$ per exemple, el comportament també és el mateix.

Cas $L = 3.8$

En canvi per $L \gtrsim 3.8$, la situació és diferent, és d'esperar que per sobre la intersecció de les corbes $n = 1$ i $n = 3$ coexisteixin més d'una solució estacionària amb una sola parella de rolls. Presentarem també el número de Nusselt per les tres primeres famílies de solucions que bifurquen de l'estat conductiu, augmentant el número de Rayleigh, així com una família de solucions amb una

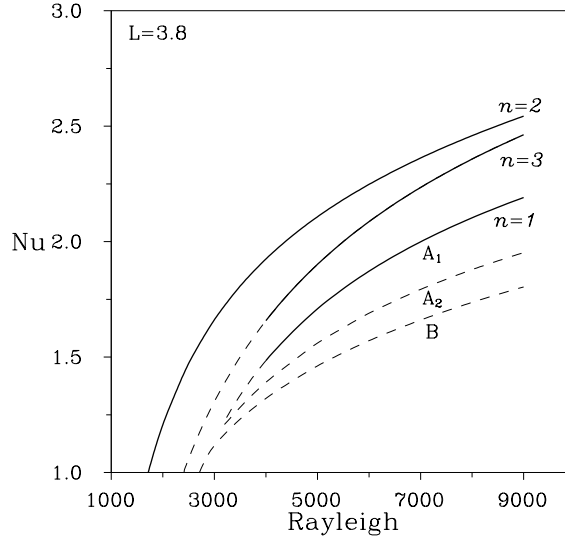


Figura 41: Per a $L = 3.8$ representem el número de Nusselt de les solucions estacionàries amb $n = 1, 2$ i 3 parelles de rolls, en funció del Rayleigh. Amb línia contínua les solucions són estables; altrament, són inestables.

parella de rolls que no bifurca de l'estat conductiu, i apareix per un valor de Rayleigh superior.

A la figura 41 representem el número de Nusselt en funció del Rayleigh per cadascuna de les solucions. La línia contínua significa que la solució és linealment estable; altrament, és inestable.

La primera família de solucions estacionàries que bifurca del règim conductiu també conté dues parelles de rolls, és estable fins al límit d'estabilitat determinat per una pertorbació $m = 0$, per a $Ra \gtrsim 69650$ (veure figura 28 per a $\alpha \simeq 2 \times 2\pi/3.8 \simeq 3.3$ i veure figura 4 del capítol 3 per a $L = 3.8/2 = 1.9$). L'estat pertorbat és periòdic en el temps, manté la simetria S_1 i trenca les altres dues simetries $S_2 \times S_3$ i $S_1 \times S_2 \times S_3$, de cadascuna de les dues parelles.

La segona família de solucions que bifurca de l'estat conductiu conté tres parelles de rolls, amb índex d'inestabilitat positiu. Les solucions són estables per a $4017 \lesssim Ra \lesssim 31864$, (veure figura 28 per $\alpha \simeq 3 \times 2\pi/3.8 \simeq 5.0$ pel límit superior i la corba 3:2 de la figura 30 per a $L = 3.8$ pel límit inferior).

La tercera família de solucions que bifurca de l'estat conductiu conté una parella de rolls tipus B , la qual per qualsevol Ra i per qualsevol pertorbació és inestable. Per a $Ra \gtrsim 3175$ (per sobre el creuament de $n = 1$ i $n = 3$) apareixen a més dues solucions isolades amb una parella de rolls, de la família

Figura 42: Imatges que corresponen a les tres solucions estacionàries que coexisteixen per a longitud de caixa $L = 3.8$ i $Ra = 6000$. En horitzontal, els coeficients de Fourier; en vertical, la component z i la intensitat màxima (negre) correspon a màxim valor absolut de la funció. Corresponen a les solucions A_1 , A_2 i B , representades a (a), (b) i (c) respectivament.

de solucions A , una d'elles sempre inestable, del tipus A_2 , i l'altra del tipus A_1 . La del tipus A_1 és estable per a $4057 \lesssim Ra \lesssim 24842$. Per a $Ra \gtrsim 24842$ la parella de rols bifurca via Hopf a una solució que manté totes les simetries de G (veure figura 4 del capítol 3 per a $L = 3.8$). Per a $Ra \lesssim 4057$ es desestabilitza per la bifurcació subcrítica amb $d = 0$.

Compararem les tres solucions $n = 1$ que coexisteixen per a $L = 3.8$, per a $Ra = 6000$. A la figura 42 representem una transformada discreta de Fourier bidimensional dels coeficients $F(l, z_j) = |\omega_l(z_j)|$, $l = 1 \div N - 1$, $j = 1 \div M - 1$, els extrems no els considerem. Per tal de visualitzar aquesta superfície representem $D(l, z) = \log(1 + kF(l, z))$, cada punt amb una intensitat, la k és una constant arbitrària que permet que hi hagi més o menys gradació d'intensitat. En horitzontal els coeficients de Fourier, en vertical la component z . La intensitat màxima (negre) correspon a màxim valor absolut de la funció. Corresponen a les solucions estacionàries tipus A_1 , A_2 i B , representades a (a), (b) i (c) respectivament.

Compararem també les tres solucions $n = 1$ que coexisteixen per a $L = 3.8$, però per a un valor de Rayleigh gran, per a $Ra = 24000$ que és on aproximadament es produeix la inestabilitat secundària. A la figura 43 representem les imatges corresponents a les solucions estacionàries tipus A_1 , A_2 i B , representades a (a), (b) i (c) respectivament. La imatge 43 (a) és representativa dels rols als quals hem aplicat l'anàlisi d'estabilitat per a qualsevol L , són del tipus A_1 . Observem com el primer harmònic domina sobre els altres per a qualsevol

Figura 43: Imatges que corresponen a les tres solucions estacionàries que co-existeixen per a longitud de caixa $L = 3.8$ i $Ra = 24000$. En horitzontal, els coeficients de Fourier; en vertical, la component z i la intensitat màxima (negre) correspon a màxim valor absolut de la funció. Corresponen a les solucions A_1 , A_2 i B , representades a (a), (b) i (c) respectivament.

z , però els senars també són importants, el 3,5,7... Representem a més a les figures 43 (b) i 43 (c) uns espectres discrets per a les altres dues solucions estacionàries inestables. La figura 43 (b) correspon a la solució del tipus A_2 i la figura 43 (c) a la solució del tipus B , la qual bifurca de l'estat conductiu. En cap de les dues no hi domina netament el primer harmònic per a tot z sobre la resta. A més les imatges són clarament diferents.

5.5 Discussió

La *inestabilitat d'Eckhaus* apareix quan s'analitza l'estabilitat de patrons periòdics enfront de variacions de la longitud d'ona fonamental (Eckhaus 1965). En el problema que analitzem, és una inestabilitat bidimensional i és la responsable que per a certs nombres d'ona α els rolls que bifurquen de l'estat conductiu no siguin estables: en un diagrama (α, Ra) s'obté per sobre la corba de la inestabilitat primària una regió on els rolls són inestables, que s'anomena *banda d'inestabilitats d'Eckhaus*.

Aquesta inestabilitat és fàcil de detectar experimentalment, així, per exemple, Croquette (1983) i Pocheau (1985) usen un anell estret de manera que fixen la periodicitat; forcen un estat amb número d'ona α per un valor del Rayleigh $Ra > Ra_c$ pel qual aquest estat és estable. En disminuir el número de Rayleigh, quan l'estat cau dins la banda d'inestabilitats d'Eckhaus, els rolls són massa estrets o massa amples i el sistema guanya o perd un o més rolls, i així canvia el valor de α .

Les anàlisis teòriques i numèriques en un domini infinit donen el rang de (α, Ra) pels quals els rolls convectius són inestables. És una regió parabòlica limitada per sota per la corba d'estabilitat marginal de l'estat conductiu i per sobre per una corba en forma de paràbola amb vèrtex el valor crític i, per tant, aquest és l'únic valor del qual el règim conductiu bifurca a convecció bidimensional amb el corresponent nombre d'ona.

Quan el domini és periòdic, com és en el nostre cas, el rang de paràmetres pel qual els rolls convectius són inestables sembla que està limitat (Tuckerman & Barkley 1990) per dalt també per una corba en forma de paràbola però amb el vèrtex lleugerament per sota de (α_c, Ra_c) , amb la qual cosa s'obté un rang de valors al voltant del valor crític pel qual l'estat conductiu bifurca a rolls estables amb el nombre d'ona donat per l'anàlisi d'estabilitat lineal del règim conductiu.

Això no obstant, dels resultats que hem obtingut per a $\sigma = 10$ deduïm que l'anàlisi d'estabilitat dels rolls enfront de pertorbacions periòdiques dóna lloc a dues bandes d'inestabilitat que modifiquen el número d'ona fonamental. Una d'elles es troba prop del valor crític (α_c, Ra_c) . L'altra es troba per valors de Rayleigh superiors. La figura 29 conté una banda d'inestabilitats prop del valor crític, cadascuna és una inestabilitat d'un clonatge amb n parelles de rolls. Per raons òbvies aquesta banda l'anomenarem banda d'inestabilitats d'Eckhaus. Per calcular exactament el límit d'inestabilitat d'Eckhaus hauríem de fer tendir n a infinit.

Al treball de Tuckerman & Barkley (1990) es presenta un estudi detallat d'aquesta inestabilitat en condicions de contorn lliures. Tot i que consideren condicions de contorn diferents de les nostres i que l'estudi es basa en un model simplificat a base d'estats purs, $q(z)e^{i\alpha x}$ amb $q(z)$ parell, mentre que en el nostre treball considerem el problema complet amb solucions que inclouen també els harmònics, els resultats que obtenen i els que obtenim en aquesta zona són molt semblants. La figura 29 és molt similar a la figura 4 del treball de Tuckerman & Barkley (1990), cada inestabilitat que trenca el clonatge (amb $m \neq 0$) correspon a una bifurcació subcrítica que en el treball que hem mencionat l'anomenen reestabilitzant, perquè disminueix en un l'índex d'inestabilitat.

Una diferència important és que en el nostre treball considerem la possibilitat de pertorbacions $m = 0$, tot i que per a valors de n grans i per als valors de Rayleigh on podria dominar $m = 0$ no es distingeix pràcticament de les altres pertorbacions. Una altra diferència és que fixant L obtenim bifurcacions imperfectes, com és el cas de $L = 3.8$, on trobem una família de solucions isolada, la A, amb una parella de rolls, mentre que en el treball mencionat són totes subcrítiques o supercrítiques.

Per tal d'aclarir el comportament a prop del valor crític analitzarem els diagrames d'estabilitat de les solucions estacionàries que hem trobat.

Per a $Ra = 3000$, variant la longitud L del contenidor es produeix un cicle d'histèresi: fixem-nos en la figura 35, si ens movem sobre $n = 1$ augmentant L fins que una parella de rolls s'inestabilitza i la solució salta a una amb dues parelles de rolls perquè és la única que és estable. Si disminuïm L , les dues parelles de rolls s'inestabilitzen i apareix una altra vegada una solució amb una parella de rolls, i tanca el cicle d'histèresi.

Disminuint L , si ens situem sobre $n = 3$, aquesta solució salta a una altra amb dues parelles de rolls perquè són les úniques estables. Tot i que són $n = 1$ i $n = 3$ les que estan connectades via una solució inestable (la B), no es produeix un salt d'una a l'altra.

Per a $Ra = 6000$, es complica bastant més tal com es pot veure a la figura 37. Fixat un valor de L conviuen més d'una solució estacionària estable i a priori no es pot decidir a on tendirà una solució donada. Quan, per exemple, $n = 1$ s'inestabilitza augmentant el valor de L , tant pot saltar a una solució amb dues parelles de rolls com a una solució amb tres parelles. Per tant, en aquesta zona és clar que partint d'una solució es pot saltar a una altra amb número d'ona fonamental diferent segons la longitud de la caixa.

Tant per a $Ra = 3000$ com per a $Ra = 6000$ la solució amb $n = 1, A_1$, s'inestabilitza per una pertorbació amb $m = 0$. En el primer cas és clar que partint d'una solució estacionària amb una parella s'estabilitza a una amb dues

parelles perquè, quan es produeix la bifurcació és l'única solució estable. Aquest resultat és coherent amb els que comentem al final del capítol 3, alguns càlculs que hem fet fins $Ra = 4000$ quan estudiem la dinàmica no lineal d'aquestes solucions. En el segon cas, per $Ra = 6000$, conviuen solucions estables amb dues i tres parelles de rolls i, per tant, a priori no es pot assegurar a quina de les dues saltarà. Per tant, no és clar que es pugui generalitzar que per qualsevol valor del número de Rayleigh les solucions $n = 1, A_1$ es desestabilitzin i saltin a solucions amb $n = 2$ parelles de rolls (per causa d'una pertorbació amb $m = 0$), com sostenen alguns autors (Torre de la & Busse 1992).

Tot i que $n = 1$ amb $n = 3$ i $n = 1$ amb $n = 5$ són solucions que estan connectades via una solució híbrida (la B i la C respectivament), l'anàlisi d'estabilitat no ens assegura que d'una es salti a l'altra quan s'inestabilitzen. És més, variant L d'una parella de rolls podem obtenir una solució estable amb tres parelles de rolls via una solució estable amb dues parelles de rolls.

Hem vist també com, segons la longitud de la caixa, les solucions amb una parella de rolls a les quals s'ha aplicat l'estabilitat poden ser solucions que bifurquen de l'estat conductiu o no. Quan no bifurquen de l'estat conductiu obtenim solucions isolades. Hem vist també com, quan coexisteix més d'una solució amb una parella de rolls, la forma dels seus espectres discrets de Fourier són sensiblement diferents. Per exemple, per a les solucions que poden ser estables sempre domina per qualsevol z el primer harmònic sobre la resta, però els senars també són importants, el tercer harmònic, seguit del cinquè, etc.

6 Conclusions

Com un resum del treball que hem presentat podem dir que:

(1) Hem analitzat l'estabilitat bidimensional més general possible dels rolls convectius mantenint sempre una estructura horitzontal periòdica. En aquest cas, les inestabilitats bidimensionals dels rolls – segons la teoria de Floquet – estan provocades per pertorbacions periòdiques que es poden expressar com un producte d'una funció periòdica, amb el mateix període que els rolls, per un terme $e^{id\alpha x}$ amb d racional, $d \in [0, 1/2]$ i α el nombre d'ona fonamental dels rolls. Les pertorbacions amb $1-d \in [1/2, 1]$, $d \neq 0$, són les transformades per la simetria de reflexió S_1 de les pertorbacions amb d , i, per tant, no cal considerar-les. L'anàlisi d'estabilitat amb $d = 0$ s'ha de tractar per separat de l'anàlisi amb $d \neq 0$ perquè, en particular, és l'únic cas que pot generar linealment una velocitat mitjana.

En aquest problema, les pertorbacions amb $d = 0$, que inclouen vent, no havien estat mai considerades abans. En aquest cas, els rolls desestabilitzen mantenint la periodicitat bàsica i poden fer-ho en quatre tipus diferents de solucions, totes elles descrites en detall als capítols 3 i 4. Totes excepte una bifurquen trencant algunes simetries espacials. Les dues que trenquen la simetria de reflexió S_1 de la parella de rolls donen lloc a solucions amb vent; una d'elles amb un perfil simètric i l'altra amb un d'antisimètric. De les altres dues, una d'elles manté totes les simetries de la solució bàsica i l'altra només manté la simetria de reflexió, trencant, en particular, la simetria respecte del centre de cadascun dels rolls.

Quan $d \neq 0$, racional, les solucions periòdiques formades per rolls desestabilitzen linealment a una solució amb periodicitat més gran. Si $d = m/n$ amb $0 < m \leq n/2$ i m, n nombres naturals, aleshores els rolls amb longitud d'ona fonamental a desestabilitzen a un altre patró periòdic de periodicitat $L = na$. Aquest és el mecanisme que hem anomenat trencament del clonatge de n parelles de rolls de longitud d'ona fonamental a i ha estat objecte d'estudi del capítol 5.

Fixat el número de Prandtl σ , per a cada n s'obtenen els nombres d'ona fonamentals i els valors del número de Rayleigh, (α, Ra) , per als quals una solució periòdica amb n parelles de rolls és estable.

Fixat $\sigma = 10$, els nombres d'ona fonamentals i valors del número de Rayleigh per als quals els rolls són estables es troben en una regió limitada per dues bandes d'inestabilitats (veure figura 28). Una d'elles prop del valor crític

$(\alpha_c, Ra_c) \approx (3.711, 1707.8)$ i l'altra per valors de Rayleigh grans.

En la banda d'inestabilitats que apareix per valors de Rayleigh grans s'hi poden distingir dues regions. En una d'elles, per $\alpha \lesssim 3.5$, els rolls s'inestabilitzen via una bifurcació de Hopf a causa de les pertorbacions amb $d = 0$ que mantenen la simetria de reflexió de cada parella de rolls. I per tant, en aquesta zona l'estat pertorbat té la periodicitat bàsica i no té velocitat mitjana. En canvi, els rolls amb $\alpha \gtrsim 3.5$ s'inestabilitzen via una bifurcació estacionària a causa de pertorbacions amb $d \neq 0$, les quals trenquen la periodicitat bàsica. En aquesta zona, les inestabilitats corresponents a diferents n s'acumulen quan n augmenta formant una banda, de manera que com més gran és n menors són els valors de Rayleigh que donen la transició. En cap cas, però, no pot aparèixer linealment una velocitat mitjana.

La banda d'inestabilitats que es troba prop del valor crític és una banda d'inestabilitats d'Eckhaus i apareix en forma d'uns bigotis que neixen al voltant d'aquest valor (veure figura 29). Aquesta banda – a diferència de l'altra – ha estat estudiada en alguns casos. És una banda semblant a la que troben Tuckerman & Barkley (1990) quan modelen la convecció bidimensional amb condicions de contorn lliures, també en un domini periòdic. En el nostre cas, una de les inestabilitats d'aquesta banda és per a $d = 0$; malgrat considerada-se a la literatura com a inestabilitat d'Eckhaus, no modifica el diagrama general d'estabilitat dels rolls en aquesta zona perquè per valors de n grans es confon amb la resta d'inestabilitats. Inestabilitats amb $d = 0$ en aquesta regió han estat trobades, per exemple, en convecció en un medi poròs (de la Torre & Busse 1994) i en convecció amb condicions de contorn lliures mitjançant un model truncat (Busse & Or 1986).

(2) Hem vist com i quines ressonàncies d'estats purs tenen un paper important en el problema que hem estudiat (capítol 5).

- De la ressonància 1:2 neix una corba d'estabilitat amb $d = 0$ i vent amb un perfil antisimètric. És a dir, a causa de la interacció no lineal dels estats purs amb nombres d'ona fonamentals α i 2α , d'una parella de rolls bifurca una solució amb vent antisimètric. La bifurcació és subcrítica i estacionària.

- A prop de les ressonàncies $n:n+1$, amb $n > 1$, neixen les bandes d'inestabilitats d'Eckhaus amb $d \neq 0$. Són ressonàncies que dominen l'estabilitat dels clonats amb $n + 1$ parelles de rolls sobre la banda d'inestabilitats d'Eckhaus (veure figura 39).

- A prop de les ressonàncies $1 : 2n+1$ es generen solucions periòdiques que són híbrides d'una i de $2n+1$ parelles de rolls. Aquestes són solucions sempre inestables. Són les ressonàncies causants del fet que coexisteix, per a certs valors dels paràmetres, més d'una solució estacionària amb una sola parella de

rolls (Mizushima & Fujimura 1992).

(3) També hem estudiat la dinàmica no lineal dels rolls en un domini periòdic de longitud la periodicitat bàsica dels rolls. És a dir, ens hem restringit a considerar l'evolució dels rolls enfront de pertorbacions amb $d = 0$ i hem restringit la periodicitat de l'estat pertorbat a la de la solució bàsica. En el capítol 4 hem presentat per a $\sigma = 10$ la dinàmica de rolls per a tres longituds de la caixa periòdica significatius de la dinàmica per a aquest valor de σ . En tots els casos augmentant el número de Rayleigh apareixen fluxos a gran escala que bifurquen o no del flux bàsic. Com a etapa final sempre es generen solucions amb un flux de massa net, aquestes són solucions que han perdut qualsevol simetria.

(4) S'ha trobat un sistema d'equacions d'amplitud que modela la dinàmica del sistema. Ens ha permès justificar que s'obtingui una solució amb vent antisimètric via una bifurcació de Hopf. També ens ha permès demostrar com les ones que apareixen després de la transició són totes ones estacionàries, encara que es tractin de solucions que trenquen la simetria de reflexió S_1 . En l'únic cas que es podria generar una ona viatgera és quan es desestabilitza vent amb un perfil simètric, és a dir, quan es trenca a més la simetria $S_2 \times S_3$, però per a aquest número de Prandtl, $\sigma = 10$, no és mai una inestabilitat dominant.

Tot i només presentar resultats per un valor del número de Prandtl fixat, $\sigma = 10$, el problema que hem tractat queda ben estructurat, de manera que repetint els passos que hem fet per a aquest valor es pot obtenir un estudi rigorós i sistemàtic per a altres valors del número de Prandtl. De la mateixa manera que es pot generalitzar l'anàlisi d'estabilitat dut a terme en el capítol 5 per a caixes periòdiques enfront de pertorbacions tridimensionals.

El codi numèric que s'ha creat per a descriure la dinàmica no lineal de les solucions del problema permet també analitzar la dinàmica dels clonats formats per n parelles de rolls, en particular, permet analitzar la dinàmica dels rolls en dominis de longitud gran comparat amb la periodicitat bàsica.

La projecció immediata d'aquest treball és analitzar σ petit i la dinàmica no lineal de les solucions clonades. De fet, aquest és un treball que està en progrés: alguns càlculs preliminars per $\sigma = 1$ donen una inestabilitat secundària, també via una bifurcació de Hopf, que dona vent amb un perfil antisimètric el qual és dominant sobre les pertorbacions amb $d \neq 0$, com en el treball de Willis & Deardorff (1970). També està en progrés un model adequat per a valors de σ tendint a zero, similar al de Howard & Krishnamurti (1986) el qual s'està fent en col·laboració amb M.R. Proctor i A. Rucklidge del DAMTP de Cambridge.

A Un mètode numèric alternatiu per l'anàlisi d'estabilitat

En aquest apartat descriurem un altre mètode numèric per a fer l'anàlisi d'estabilitat d'una parella de rols, que utilitza unes bases que compleixen el contorn. És un mètode lleugerament diferent del que s'usa en el capítol 3; ens permetrà reduir el nombre de variables i per tant podrem augmentar la precisió quan sigui necessari sense que això signifiqui un gran esforç de càlcul.

La idea és prendre desenvolupaments del tipus

$$f(x, z) = \sum_{n=-N}^N \sum_l \hat{f}_{n,l} \phi_l^{(n)}(z) e^{in\alpha x},$$

tal que les funcions base $\phi_l^{(n)}(z)$ compleixen les condicions de contorn per a z , de manera similar a com es fa en el treball de J. Sánchez (1994).

En aquest cas considerarem com a variables del problema a la funció de corrent i a la desviació de la temperatura, sobre les quals hi ha condicions de contorn fixades.

La solució estacionària ha de tenir la simetria S_1 , per això només cal desenvolupar en una sèria de Fourier amb sinus per a la funció de corrent χ i en una sèria amb cosinus per a la desviació de la temperatura T' . La simetria $S_2 \times S_3$ és també una simetria obligada, cal que es compleixi $n + l$ senar, això vol dir que: pel coeficient de Fourier amb n parell, la funció en z ha de ser senar i pel coeficient amb n senar, la funció en z ha de ser parell. Només cal fer, doncs, un desenvolupament del següent tipus:

$$\chi = \sum_{n=\dot{2}}^{\overline{M}-2} \sum_{l=1}^{\overline{M}-2} \hat{\chi}_{nl} \phi_l^{(n)}(z) \sin n\alpha x + \sum_{n \neq \dot{2}}^{\overline{M}-1} \sum_{l=1}^{\overline{M}-1} \hat{\chi}_{nl} \phi_l^{(n)}(z) \sin n\alpha x, \quad (1.1)$$

$$T' = \sum_{n=\dot{2}}^{\overline{M}-1} \sum_{l=1}^{\overline{M}-1} \hat{T}_{nl} \psi_l^{(n)}(z) \cos n\alpha x + \sum_{n \neq \dot{2}}^{\overline{M}} \sum_{l=1}^{\overline{M}} \hat{T}_{nl} \psi_l^{(n)}(z) \cos n\alpha x, \quad (1.2)$$

amb

$$\phi_l^{(n)}(z) = \begin{cases} (-1 - \frac{1-(2l+3)^2}{8})\mathcal{T}_1(2z) + (\frac{1-(2l+3)^2}{8})\mathcal{T}_3(2z) + \mathcal{T}_{2l+3}(2z), & n = \dot{2}, \\ (-1 + \frac{(2l+2)^2}{4})\mathcal{T}_0(2z) - (\frac{(2l+2)^2}{4})\mathcal{T}_2(2z) + \mathcal{T}_{2l+2}(2z), & n \neq \dot{2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\psi_l^{(n)}(z) = \begin{cases} -\mathcal{T}_1(2z) + \mathcal{T}_{2l+1}(2z), & n = \dot{2}, \\ -\mathcal{T}_0(2z) + \mathcal{T}_{2l+1}(2z), & n \neq \dot{2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Les funcions base (2) són tals que compleixen les condicions de contorn:

$$\phi_l^{(n)}(\pm \frac{1}{2}) = \partial_z \phi_l^{(n)}(\pm \frac{1}{2}) = \psi_l^{(n)}(\pm \frac{1}{2}) = 0,$$

on $D = \partial_z$. En la coordenada z prenem $M + 1$ punts de col·locació de Gauss-Lobatto, amb $M = 2\overline{M}$, $2z_i = \cos \pi i / M$, $i = 0 \div M$.

Com que per cada l sabem quina paritat en z han de tenir les funcions base, només caldrà guardar els seus valors en la meitat de punts o menys. Per exemple,

si n és senar, $\psi_l^{(n)}$ és una funció simètrica, aleshores només cal guardar

$$\psi_l^{(n)}(z_1), \dots, \psi_l^{(n)}(z_{\overline{M}}),$$

si n és parell, $\psi_l^{(n)}$ és una funció antisimètrica per tant $\psi_l^{(n)}(z_{\overline{M}}) = 0$, i en aquest cas només cal guardar

$$\psi_l^{(n)}(z_1), \dots, \psi_l^{(n)}(z_{\overline{M}-1}).$$

Per a les funcions base $\phi_l^{(n)}$ es procedeix de manera similar, però es guardaran en un punt menys perquè tenen una condició de contorn adicional: per a n senar guardarem en $z_2, \dots, z_{\overline{M}-1}$, per a n parell guardarem en $z_2, \dots, z_{\overline{M}}$.

En x es projecta de manera usual i en z prenem els punts de col·locació que acabem d'explicar segons sigui l'equació de la vorticitat o la de la temperatura. La tècnica és la mateixa descrita en el capítol 3, la diferència és que les variables que prendrem no són els coeficients de Fourier en els punts de col·locació sinó els coeficients $\{\hat{\chi}_{nl}, \hat{T}_{nl}\}_{n,l}$.

Notem per a simplificar $\phi_{l,i}^{(n)} := \phi_l^{(n)}(z_i)$ $\psi_{l,i}^{(n)} := \psi_l^{(n)}(z_i)$ i de manera similar per a les derivades. Notarem a més $\omega_{l,i}^{(n)} := -(-\alpha^2 n^2 \psi_{l,i}^{(n)} + D^2 \psi_{l,i}^{(n)})$, en aquest cas

$$\nabla^2 \omega(z_i) = \sum_{n,l} \left(-\alpha^2 n^2 \omega_{l,i}^{(n)} + D^2 \omega_{l,i}^{(n)} \right) \hat{\chi}_{nl}.$$

El sistema d'equacions que s'ha de resoldre per a trobar la solució estacionària

és

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \sum_l \left(-\alpha^2 n^2 \omega_{l,i}^{(n)} + D^2 \omega_{l,i}^{(n)} \right) \hat{\chi}_{nl} + \sigma R n \alpha \sum_l \psi_{l,i}^{(n)} \hat{T}_{nl} \\ - \frac{\alpha}{2} \sum_{l,j} \left(\sum_{m+k=n} + \sum_{k-m=n} - \sum_{m-k=n} \right) \left(m \phi_{l,i}^{(m)} \omega_{j,i}^{(k)} - D \phi_{j,i}^{(k)} m \omega_{l,i}^{(m)} \right) \hat{\chi}_{ml} \hat{\chi}_{kj} = 0, \\ \sum_l \left(-\alpha^2 n^2 \psi_{l,i}^{(n)} + D^2 \psi_{l,i}^{(n)} \right) \hat{T}_{nl} + n \alpha \sum_l \phi_{l,i}^{(n)} \hat{\chi}_{nl} \\ - \frac{\alpha}{2} \sum_{l,j} \left(\sum_{m+k=n} \left(m \phi_{l,i}^{(m)} D \psi_{j,i}^{(k)} - D \phi_{l,i}^{(m)} k \psi_{j,i}^{(k)} \right) \hat{\chi}_{ml} \hat{T}_{kj} \right. \\ \left. + \sum_{|k-m|=n} \left(m \phi_{l,i}^{(m)} D \psi_{j,i}^{(k)} + D \phi_{l,i}^{(m)} k \psi_{j,i}^{(k)} \right) \hat{\chi}_{ml} \hat{T}_{kj} + 2n \phi_{l,i}^{(n)} D \psi_{j,i}^{(0)} \hat{\chi}_{nl} \hat{T}_{0j} \right) = 0, \\ \sum_l D^2 \psi_{l,i}^{(0)} \hat{T}_{0l} - \frac{\alpha}{2} \sum_{l,j} \left(\sum_m \left(m \phi_{l,i}^{(m)} D \psi_{j,i}^{(m)} + D \phi_{l,i}^{(m)} m \psi_{j,i}^{(m)} \right) \right) \hat{\chi}_{ml} \hat{T}_{mj} = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

per a $n = 1 \div N$. Si n és parell, l'equació per a la vorticitat s'imposa en $i = 2 \div \overline{M}$ i l'equació per a la temperatura s'imposa en $i = 1 \div \overline{M} - 1$.

Si n és senar, l'equació per a la vorticitat s'imposa en $i = 2 \div \overline{M} - 1$ i la de la temperatura en $i = 1 \div \overline{M}$.

El sistema (3) l'expressem com $F(Y) = 0$ amb

$$Y = (\hat{\chi}_{11}, \dots, \hat{\chi}_{1\overline{M}-1}, \hat{\chi}_{21}, \dots, \hat{\chi}_{2\overline{M}-2}, \hat{\chi}_{31}, \dots, \hat{\chi}_{3\overline{M}-1}, \dots, \\ \hat{T}_{01}, \dots, \hat{T}_{0\overline{M}-1}, \hat{T}_{11}, \dots, \hat{T}_{1\overline{M}}, \hat{T}_{21}, \dots, \hat{T}_{2\overline{M}-1}, \dots)$$

un vector de dimensió $N_1 = \frac{N+1}{2}(\overline{M}-1+\overline{M}-2) - (\overline{M}-1) + \frac{N+1}{2}(\overline{M}-1+\overline{M}) - \overline{M} + \overline{M} = (N+1)(2\overline{M}-2) - (\overline{M}-1) = (N+1)(M-2) - (\overline{M}-1)$. Si fem el mateix amb $n+l$ parell s'obté un vector de dimensió $N_2 = \frac{N}{2}(\overline{M}-1+\overline{M}-2) - (\overline{M}-2) + \frac{N}{2}(\overline{M}-1+\overline{M}) - (\overline{M}-1) + (\overline{M}-1) = (N+1)(2\overline{M}-2) - (\overline{M}-2) = (N+1)(M-2) - (\overline{M}-2)$. Si ajuntem els dos casos ($n+l$ parell amb $n+l$ senar) obtenim un problema amb dimensió

$$N_1 + N_2 = (N+1)(M-2) - (\overline{M}-1) + (N+1)(M-2) - (\overline{M}-2) \\ = (2N+1)(M-1) - 2N.$$

El mètode usat en el capítol 3, secció 2, té dimensió $(2N+1)(M-1)$. Així doncs, el mètode de les bases per al mateix problema utilitza $2N$ variables menys. Aquestes $2N$ variables corresponen als dos punts del contorn que utilitzem de

més, en el capítol 3, per a cada coeficient de Fourier de ω , per causa del mètode que usem per a tractar el contorn d'aquesta variable.

Un cop calculada la solució estacionària en podem calcular la seva estabilitat. Les pertorbacions es poden separar en quatre subconjunts. Un d'ells conté pertorbacions invariants pel grup de simetries G (definit al capítol 2) i són les que tenen les mateixes simetries que la solució estacionària i, per tant, s'expressaran com (1), aquestes pertorbacions compleixen la condició de $n + l$ senar. Un altre conjunt, el que només manté la simetria S_1 , amb $n + l$ parell, conté, per tant, pertorbacions que s'expressen

$$\chi = \sum_{n=2} \sum_{l=1}^{\overline{M}-1} \hat{\chi}_{nl} \phi_l^{(n)}(z) \sin n\alpha x + \sum_{n \neq 2} \sum_{l=1}^{\overline{M}-2} \hat{\chi}_{nl} \phi_l^{(n)}(z) \sin n\alpha x, \quad (4.1)$$

$$T' = \sum_{n=2} \sum_{l=1}^{\overline{M}} \hat{T}_{nl} \psi_l^{(n)}(z) \cos n\alpha x + \sum_{n \neq 2} \sum_{l=1}^{\overline{M}-1} \hat{T}_{nl} \psi_l^{(n)}(z) \cos n\alpha x. \quad (4.2)$$

Els altres dos conjunts, els que trenquen la simetria S_1 , són els que poden generar vent. Un d'ells, amb $n + l$ senar, és invariant per a la simetria $S_1 \times S_2 \times S_3$, dóna vent simètric i les pertorbacions es poden expressar com (1) però canviant sinus per cosinus i viceversa. L'altre, amb $n + l$ parell, és invariant per la simetria $S_1 \times S_2$, dóna vent antisimètric, i les pertorbacions es poden posar com (4) però també intercanviant els sinus i cosinus.

El problema d'estabilitat que utilitza aquest mètode és molt semblant a com s'ha fet al capítol 3, secció 3, però hi ha alguna subtilesa que cal remarcar. Posem pel cas que volem l'estabilitat amb pertorbacions del tipus (1), aleshores la projecció per a n parell, per exemple per a l'equació de la temperatura, és de la forma

$$\lambda \sum_{l=1}^{\overline{M}} \hat{T}_{nl} \psi_{l,i}^{(n)} = L_{n,i}^T(Y), \quad i = 1, \dots, \overline{M},$$

és a dir,

$$\lambda \begin{pmatrix} \psi_1^{(n)}(z_1) & \cdots & \psi_{\overline{M}}^{(n)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n)}(z_{\overline{M}}) & \cdots & \psi_{\overline{M}}^{(n)}(z_{\overline{M}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{n1} \\ \vdots \\ \hat{T}_{n\overline{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,1}^T(Y) \\ \vdots \\ L_{n,\overline{M}}^T(Y) \end{pmatrix},$$

on $L_{n,i}^T$ és un operador lineal.

Si fem el mateix per a l'equació de la vorticitat, per exemple per n senar, obtenim

$$\lambda \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}(z_2) & \cdots & \omega_{\overline{M}-2}^{(n)}(z_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{(n)}(z_{\overline{M}}) & \cdots & \omega_{\overline{M}-2}^{(n)}(z_{\overline{M}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\chi}_{n1} \\ \vdots \\ \hat{\chi}_{n\overline{M}-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,1}^\omega(Y) \\ \vdots \\ L_{n,\overline{M}-2}^\omega(Y) \end{pmatrix},$$

on $L_{n,i}^\omega$ és un operador lineal. Aleshores l'estabilitat es redueix a estudiar un problema de valors propis del tipus

$$\lambda AY = BY,$$

amb A matriu diagonal per blocs, cada bloc conté d'alguna manera les funcions base avaluades en els punts de col·locació, i B una matriu que en aquest cas és la matriu jacobiana del sistema (3) avaluada en la solució estacionària. La matriu A no apareixia quan no usavem el mètode de les bases. Com que A és una matriu diagonal per blocs és fàcil calcular el producte $A^{-1}B$ i per tant resollem el problema de valors propis $\lambda Y = A^{-1}BY$.

Podem procedir de la mateixa manera per als altres tres subconjunts de pertorbacions, si ens fixem en imposar les equacions en les punts de col·locació que toquin i en imposar la paritat $n + l$ corresponent. És un mètode més pesat a l'hora de programar però, de fet, és més senzill. Fixem-nos que qualsevol derivada d'un coeficient de Fourier es pot posar en termes dels coeficients que prenem com a variables, basta que coneguem les funcions base i les seves derivades a cada punt de col·locació (i això només cal fer-ho una sola vegada), per exemple per calcular la derivada del coeficient de Fourier n de χ , basta conèixer $D\phi_l^{(n)}(z_i)$, que només depen de si n és parell o senar:

$$D\chi_n(z_i) = \sum_l \hat{\chi}_{nl} D\phi_l^{(n)}(z_i).$$

A més les condicions de contorn per ω es compleixen automàticament perquè ja ens n'hem ocupat al principi: hem trobat funcions base que compleixen el contorn.

B Càlcul dels termes provinents dels jacobians

Càlcul dels termes provinents dels jacobians de la matriu d'estabilitat d'un clonatge amb n parelles rols enfront de pertorbacions que trenquen el clonatge:

$$\begin{aligned}
NL^1 &:= J(\chi^0, \omega') + J(\chi', \omega^0) = \partial_x \chi^0 \partial_z \omega' - \partial_z \chi^0 \partial_x \omega' + \partial_x \chi' \partial_z \omega^0 - \partial_z \chi' \partial_x \omega^0 \\
&= \alpha \sum_{m=1}^L \sum_{k=-L}^{L-1} e^{i(k+d)\alpha x} \left(m \chi_m^0 \partial_z \omega_k \cos m\alpha x - \partial_z \chi_m^0 (k+d) \omega_k i \sin m\alpha x \right) \\
&\quad + \alpha \sum_{m=1}^L \sum_{k=-L}^{L-1} e^{i(k+d)\alpha x} \left(\partial_z \omega_m^0 (k+d) \chi_k i \sin m\alpha x - m \omega_m^0 \partial_z \chi_k \cos m\alpha x \right), \\
NL^2 &:= J(\chi^0, T') + J(\chi', T^0) = \partial_x \chi^0 \partial_z T' - \partial_z \chi^0 \partial_x T' + \partial_x \chi' \partial_z T^0 - \partial_z \chi' \partial_x T^0 \\
&= \alpha i \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^{L-1} e^{i(k+d)\alpha x} \left(m \chi_m^0 \partial_z T_k \cos m\alpha x - \partial_z \chi_m^0 (k+d) T_k i \sin m\alpha x \right) \\
&\quad + \alpha i \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^{L-1} e^{i(k+d)\alpha x} \left(\partial_z T_m^0 (k+d) \chi_k \cos m\alpha x - m T_m^0 \partial_z \chi_k i \sin m\alpha x \right).
\end{aligned}$$

Si expressem

$$\begin{aligned}
2 \cos m\alpha x e^{i(k+d)\alpha x} &= e^{i(k+m+d)\alpha x} + e^{i(k-m+d)\alpha x}, \\
2i \sin m\alpha x e^{i(k+d)\alpha x} &= e^{i(k+m+d)\alpha x} - e^{i(k-m+d)\alpha x},
\end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned}
2NL^1 &= \alpha \sum_{m=1}^L \sum_{k=-L}^{L-1} (e^{i(k+m+d)\alpha x} + e^{i(k-m+d)\alpha x}) (m \chi_m^0 \partial_z \omega_k - m \omega_m^0 \partial_z \chi_k) \\
&\quad + (e^{i(k+m+d)\alpha x} - e^{i(k-m+d)\alpha x}) (-\partial_z \chi_m^0 (k+d) \omega_k + \partial_z \omega_m^0 (k+d) \chi_k), \\
2NL^2 &= \alpha i \sum_{m=0}^L \sum_{k=-L}^{L-1} (e^{i(k+m+d)\alpha x} + e^{i(k-m+d)\alpha x}) (m \chi_m^0 \partial_z T_k + \partial_z T_m^0 (k+d) \chi_k) \\
&\quad + (e^{i(k+m+d)\alpha x} - e^{i(k-m+d)\alpha x}) (-\partial_z \chi_m^0 (k+d) T_k - m T_m^0 \partial_z \chi_k).
\end{aligned}$$

El terme NL_l^1 es calcula com:

$$1/2 \sum_{|k+m|=|l|} (m \chi_m^0 \partial_z \omega_k - m \omega_m^0 \partial_z \chi_k) + (-\partial_z \chi_m^0 (k+d) \omega_k + \partial_z \omega_m^0 (k+d) \chi_k)$$

$$+1/2 \sum_{|k-m|=|l|} (m\chi_m^0 \partial_z \omega_k - m\omega_m^0 \partial_z \chi_k) - (-\partial_z \chi_m^0(k+d)\omega_k + \partial_z \omega_m^0(k+d)\chi_k),$$

i el terme NL_l^2 :

$$\begin{aligned} & 1/2 \sum_{|k+m|=|l|} (m\chi_m^0 \partial_z T_k + \partial_z T_m^0(k+d)\chi_k) + (-\partial_z \chi_m^0(k+d)T_k - mT_m^0 \partial_z \chi_k) \\ & +1/2 \sum_{|k-m|=|l|} (m\chi_m^0 \partial_z T_k + \partial_z T_m^0(k+d)\chi_k) - (-\partial_z \chi_m^0(k+d)T_k - mT_m^0 \partial_z \chi_k) \\ & \quad + \partial_z T_0^0(l+d)\chi_l, \end{aligned}$$

per a $k = -L \div L - 1$ i $m = 1 \div L$.

I finalment substituim els sumatoris per:

$$\begin{aligned} \sum_{|k+m|=|l|} a_k b_m &= \begin{cases} \sum_{k=-L+l}^{l-1} a_k b_{l-k} & l \geq 0, \\ \sum_{k=-L}^{l-1} a_k b_{l-k} & l < 0, \end{cases} \\ \sum_{|k-m|=|l|} a_k b_m &= \begin{cases} \sum_{k=l+1}^{L-1} a_k b_{k-l} & l \geq 0, \\ \sum_{k=l+1}^{L-1+l} a_k b_{k-l} & l < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Referències

- [1] Armbruster, D. 1987. $O(2)$ -Symmetric bifurcation theory for convection rolls. *Physica D* **27**, 433.
- [2] Busse, F.H. 1971. Stability regions of cellular fluid flow. Proc. IUTAM-Sym., Herrenalb, 1969: Instability of Continuous Systems. (Ed. H. Leipholz) 41-47. Springer.
- [3] Busse, F.H. 1978. Non-linear properties of thermal convection. *Reports on Progress in Physics*. **41**, 1929-1967.
- [4] Busse, F.H., Clever, R.M. 1974. Transition to time-dependent convection. *J. Fluid Mech.* **65**, (4), 625-645.
- [5] Busse, F.H., Or, A.C. 1986. Subharmonic and asymmetric convection rolls. *J. Appl. Math. Phys.* **37**, 608.
- [6] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A.. 1987. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag.
- [7] Chandrasekhar, S. 1961. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Dover.
- [8] Clever, R.M., Busse, F.H. 1979. Transition to time-dependent convection. *J. Fluid Mech.* **65**, (4), 625-645.
- [9] Clever, R.M., Busse, F.H. 1987. Nonlinear Oscillatory convection. *J. Fluid Mech.* **176**, 403-417.
- [10] Crawford, J.D. and Knobloch, E. 1991. Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 341.
- [11] Croquette, V. 1986. *Thesis*. Université Pierre et Marie Curie.
- [12] Deardorff, J.W. and Willis G.E. 1965. The effect of two-dimensionality on the suppression of thermal turbulence. *J. Fluid Mech.* **23**, 337-353.
- [13] Eckhaus, W. 1965. Studies in Nonlinear Stability Theory. Springer.
- [14] Finn, J.M. 1993. Non-linear interaction of Rayleigh-Taylor and shear instabilities. *Phys. Fluids B*. **5**, 415.

- [15] Fujimura, K. 1992. Higher harmonic resonances in free convection between vertical parallel plates. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **340**, 95-130.
- [16] Ginot, G.P. and Sudan, R.N. 1987. Numerical observations of dynamic behavior in two-dimensional compressible convection. *Phys. Fluids*. **30**, 1667.
- [17] Gottlieb, D., Orszag, S.A. 1977. Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia, Pennsylvania. 19103.
- [18] Howard, L.N. and Krishnamurti, R. 1986. Large-scale flow in turbulent convection: a mathematical model. *J. Fluid Mech.* **170**, 385-410.
- [19] Hurlburt, N.E., Toomre, J. and Massaguer, J.M. 1984. Two-dimensional compressible convection extending over multiple scale heights. *Astrophys. J.* **282**, 557.
- [20] Knobloch, E. 1993. Bifurcations in rotating systems. *Theory of solar and stellar dynamos: Introductory lectures*. Ed. M. Proctor and A. Gilbert (Cambridge University Press, Cambridge), Chap 11.
- [21] Knobloch, E. and Guckenheimer, J. 1983. Convective transitions induced by a varying aspect ratio. *Phys. Rev.* **27**, 408.
- [22] Krishnamurti, R. and Howard, L.N. 1981. Large-scale flow generation in turbulent convection. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **78**, 1981-1985.
- [23] Landberg, A.S. and Knobloch, E. 1991. Direction-reversing travelling waves. *Phys. Lett. A* **159**, 17.
- [24] Low, A.R. 1929. On the criterion for stability of a layer of viscous fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc. (london) A* **125**, 180-195.
- [25] Massaguer, J.M. 1991. Shear type instabilities in the Benard problem. *The Global Geometry of Turbulence*. Advanced Nato Series, ed. by J.Jimenez (Plenum, New York).**247**.
- [26] Massaguer, J.M. 1994. Large-scale flow and pattern drift in finite amplitude convection. *Phys. Fluids* **7**, 2304.

- [27] Massaguer, J.M., Spiegel, E.A. and Zahn, J.P. 1992. Convection-induced shears for general planforms. *Phys. Fluids A*. **4**, 1333-1335
- [28] Matthews, P.C., Proctor, M.R.E. and Rucklidge, A.M. 1993. Pulsating waves in non-linear magnetoconvection. *Phys. Lett. A* **183**, 69.
- [29] Mercader, I., Net, M., Falques, A. 1991. Spectral methods for high order equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **91**, 1245.
- [30] Mizushima, J., Fujimura, K. 1992. Higher harmonic resonance of two-dimensional disturbances in Rayleigh-Benard convection. *J. Fluid Mech.* **234**, 651-667.
- [31] More, J.J., Garbow, B.S. and Hillstrom, K.E. User Guide for MINPACK-1. ANL-80-74, Argonne National Laboratory.
- [32] Nagata, M., Busse, F.H. 1983. Three-dimensional tertiary motions in a plane shear layer. *J. Fluid Mech.* **135**, 1-26.
- [33] Orsag, S.A. 1970. Transform method for calculation of vector coupled sums: Application to the spectral form of the vorticity equation. *J. Atmosph. Sci.*, **27** 890-895.
- [34] Pellew, A., Sothwell, R.V. 1940. On maintained convective motion on a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc. (london) A* **176**, 312-343.
- [35] Pocheau, A. 1983. *Thesis*. Université Pierre et Marie Curie.
- [36] Powell, M.J.D. 1970. A hybrid method for nonlinear algebraic equations. In *Numerical methods for Nonlinear Algebraic Equations*. Ed. Rabinowitz, P., Gordon and Breach.
- [37] Prat, J., Massaguer, J. M. and Mercader, I. 1993. Mean flow in 2-D thermal convection, in *Mixing in Geophysical Flow*, eds. J.M. Redondo & O. Metais (Diseño Gráfico).
- [38] Prat, J., Massaguer, J. M. and Mercader, I. 1995. Large-Scale Flows and Resonances in 2-D Thermal Convection. *Phys. Fluids*. **7** (1), 121-134.
- [39] Prat, J., Mercader, I. and Massaguer, J. M. 1994. Symmetric Large-Scale Velocity Fields in Two-Dimensional Thermal Convection. *Int. Journal of Bif. and chaos*. **4**, (5), 1369-1374.

- [40] roctor, M.R.E. and Weiss, N.O. 1993. Symmetries of time dependent magnetoconvection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **70**, 137-160.
- [41] Reid, W.H., Harris, D.L. 1958. Some further results on the Bénard problem. *Phys. Fluids*, **1**, 102-110.
- [42] Rucklidge, A.M., Matthews, P.C. 1993. Shearing instabilities in magnetoconvection. *Solar and Planetary dynamos*, Ed. Proctor, Matthews and Rucklidge (Cambridge University Press), 257-264.
- [43] Rucklidge, A.M., Matthews, P.C. 1996. Analysis of the shearing instability in nonlinear convection and magnetoconvection. *Nonlinearity*, **9**, 311-351.
- [44] Sánchez, J. 1994. Simulación numérica en flujos confinados: estructuras preturbulentas. *Tesis Doctoral*, Universitat de Barcelona.
- [45] Schlüter, A., Lortz, D., Busse, F. 1965. On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **23**, (1), 129-144.
- [46] Torre, M. de la, Busse, F.H. 1994. Stability of two-dimensional convection in a fluid saturated porous medium. *J. Fluid Mech.*, **11**, 1-000.
- [47] Tuckerman, L.S. and Barkley, D. 1990. Bifurcation analysis of the Eckhaus instability. *Physica D*, **46**, 57-86.
- [48] Wilkinson, J.H., Reinsch, C. 1971. Handbook for Automatic Computation. (Vol. II, Linear Algebra) Springer-Verlag, 339-358, 372-395.
- [49] Willis, G.E., Deardorff, J.W. 1970. The oscillatory motions of Rayleigh convection. *J. Fluid Mech.* **44**, 661.