

**ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE
TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA (UPC)**

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

**SISTEMAS DIFUSOS DINÁMICOS
PARA EL
TRATAMIENTO DE INFORMACIÓN
TEMPORAL IMPRECISA**

Autor: Orestes Mas i Casals
Director: Joan Maria Miró Sans

Barcelona, 1997

4. Razonamiento difuso temporal

4.1 Introducción

En el capítulo precedente se ha puesto de manifiesto que el objetivo de la teoría de conjuntos difusos, tal y como se ha desarrollado hasta la fecha, ha sido primordialmente el de proporcionar una base matemática para el razonamiento aproximado. El núcleo de este razonamiento lo constituyen por una parte el conjunto de reglas difusas si-entonces que forman la base de conocimiento y por otra el proceso de inferencia difusa capaz de efectuar deducciones a partir de esas reglas y de una cierta situación presente a las entradas del sistema en un instante dado. Precisamente, una de las características más relevantes de los sistemas de inferencia actuales es que razonan solamente en base a los valores *actuales* de las entradas, sin tener en cuenta los anteriores. El resultado es que la salida de todo sistema de inferencia difusa puede considerarse como una función no lineal *algebraica* de sus entradas.

Este carácter algebraico de los sistemas difusos contrasta sin embargo con los entornos en que suelen aplicarse, como por ejemplo el control automático, en los que los sistemas que se manejan son claramente dinámicos. En estos casos, un conocimiento de los comportamientos anteriores de las entradas puede ser tan importante a la hora de tomar decisiones como el conocimiento de los valores actuales. Por ello, algunos autores han destacado recientemente el interés potencial que tendría el introducir conocimientos temporales imprecisos en las reglas difusas, para conseguir de este modo razonar de forma aproximada no sólo sobre los valores numéricos que toman ciertas variables, sino también en base a la *distribución temporal* de dichos valores.

A pesar de lo expuesto, los intentos efectuados hasta la fecha en este sentido han sido prácticamente nulos, con la sola excepción del trabajo de Qian en 1992 [Qian 1992], el cual, como se discute más adelante, presenta sólo resultados muy preliminares. La causa principal de esta escasez ha sido la ausencia, hasta fechas relativamente recientes, de un modelo coherente y bien establecido para representar de forma efectiva información temporal imprecisa, así como procesarla adecuadamente en el marco de la teoría de conjuntos difusos. Afortunadamente en los últimos años esta situación ha ido cambiando a raíz de la publicación de varios trabajos sobre este tema, algunos incluso algo anteriores al mencionado de Qian, con lo que hoy en día se dispone de una sólida

base teórica para abordar el proceso de inclusión de esa información temporal en las reglas difusas tradicionales, lo que ha de llevar a la obtención de sistemas difusos *dinámicos*, ámbito en el que esta tesis pretende ser una contribución.

En el presente capítulo se desarrollan unos algoritmos para permitir el razonamiento difuso con conceptos temporales, además de con los ya clásicos conceptos espaciales. Puesto que este trabajo se enmarca en un entorno de ingeniería electrónica, el objetivo primordial de los métodos que aquí se proponen es el de conseguir el diseño de sistemas difusos dinámicos mediante circuitos electrónicos de la forma más sencilla y económica posible. A su vez, se ha procurado que los algoritmos no modifiquen de forma sustancial el esquema de inferencia difusa tradicional, con lo que se asegura la compatibilidad con los dispositivos de inferencia difusa existentes actualmente.

La presentación que sigue se desarrollará en varias etapas: En la primera de ellas se comentan los trabajos previos en el campo de la descripción y tratamiento de la información temporal imprecisa, haciendo especial hincapié en aquellos aspectos que inciden mayoritariamente en nuestro trabajo. Seguidamente, en la sección 4.3 se presentan los tipos de conceptos temporales que se manejarán en esta tesis, a los que se aplicarán las restricciones propias de un entorno de ingeniería, como son los principios de causalidad o invarianza. A continuación, se muestra la estructura y notación que se utilizará para describir reglas difusas que lleven asociadas conceptos temporales.

La sección 4.4 expone cómo debe de modificarse el mecanismo de inferencia difusa tradicional cuando en las reglas aparecen también conceptos temporales. Se llega así a proponer cuatro algoritmos distintos, cuya aplicación dependerá del contexto particular en que se esté trabajando. Una vez establecido el nuevo mecanismo de inferencia se pasa a la sección 4.5, en la que se exploran distintas estructuras *hardware* y *software* para implementar las ecuaciones obtenidas, tanto en su versión analógica como digital. En aras de la compatibilidad se hace especial hincapié en respetar al máximo las estructuras ya existentes, aunque en cada caso se busca también minimizar la complejidad y el coste del sistema.

Finalmente, en la sección 4.6 se hace una valoración de la solución obtenida y una interpretación de los resultados obtenidos hasta ese momento.

4.2 Antecedentes históricos en la representación de conceptos temporales imprecisos

4.2.1 Lógica Temporal de Allen [Allen 1984]

Muchos de los trabajos recientes sobre tratamiento de información temporal imprecisa están directa o indirectamente influidos por este artículo de 1984. Como base de una teoría más general del tiempo y la acción, Allen propone un formalismo capaz de caracterizar y permitir razonamientos sobre distintos conceptos en los que interviene el tiempo y que pueden ser descritos mediante sentencias lingüísticas simples. Dado que en este formalismo no se modela el conocimiento temporal de forma difusa, su interés para esta tesis se reducirá a aspectos muy concretos, que se tratan a continuación.

En la lógica de Allen, las unidades fundamentales de tiempo son los intervalos, por considerar que modelan mejor nuestra percepción de eventos o procesos expresados lingüísticamente, y también para evitarse ciertos problemas semánticos. Es una lógica bivalente, puesto que los únicos valores de verdad que se manejan para las proposiciones son 0 o 1. Una vez definidos los intervalos, expone todas las relaciones posibles que pueden darse entre ellos, en un total de 13. Dichas relaciones se listan en la Tabla 4-1, en la que X e Y representan intervalos. Todas las relaciones, excepto EQUAL, tienen su respectiva inversa, que no figura en la tabla.

Estas relaciones son relaciones nítidas, en el sentido de que se acepta sólo que se cumplan o no se cumplan de forma estricta. Sin embargo dotan al sistema de cierta flexibilidad, puesto que al estar expresadas mediante términos lingüísticos permiten englobar bajo un mismo concepto multitud de situaciones distintas, acomodando de esta forma la imprecisión. El mayor defecto de que adolecen es su incapacidad para cuantificar de una forma u otra esa imprecisión: por ejemplo, conocer que el intervalo X se produce ANTES del Y no indica si el lapso de tiempo que los separa es de segundos, horas o días, cosa que confiere al sistema una ambigüedad excesiva para según qué fines.

Tabla 4-1: Relaciones entre intervalos en el modelo de Allen [Allen 1984]

Relación	Ejemplo pictórico
<i>X BEFORE Y</i>	XXX YYY

<i>X EQUAL Y</i>	XXX YYY
<i>X MEETS Y</i>	XXXYYY
<i>X OVERLAPS Y</i>	XXX YYY
<i>X DURING Y</i>	XXX YYYYYYYY
<i>X STARTS Y</i>	XXX YYYYYYY
<i>X FINISHES Y</i>	XXX YYYYYYY

Además de las relaciones de la Tabla 4-1, Allen hace una interesante clasificación del concepto de *ocurrencia*, de la que distingue tres subtipos: *Propiedades*, *procesos*, y *eventos*. La diferencia entre ellos reside básicamente en su duración. Mientras las propiedades son ciertas durante todo el intervalo en que se producen, y también en cualquier subintervalo, los eventos sólo son ciertos en intervalos puntuales; en otras palabras, ocurren en el mínimo tiempo posible. Los procesos caen en medio de las propiedades y los eventos: son ciertos durante la mayor parte del tiempo y falsos en intervalos puntuales. Un ejemplo de propiedad es la expresada mediante la sentencia “Mi coche es rojo” lo cual es cierto en todo momento hasta que deje de serlo por algún motivo. Un proceso se describe por frases como “Yo camino hacia la escuela”, que denota una acción mayoritaria -caminar- durante el intervalo en que se produce, pero que no excluye momentos puntuales de reposo. Finalmente, un evento sería una acción como la enunciada por “comí una manzana”. En palabras del propio Allen, un test útil para distinguir procesos de eventos es que “se pueden contar el número de veces que un evento sucede, pero no el número de veces que ocurre un proceso”.

Esta triple distinción pone en evidencia la diferencia semántica entre eventos que suceden en instantes puntuales y otros que toman cierto tiempo para producirse. Esto resulta de interés en esta tesis puesto que, como se verá más adelante, llevará a elegir métodos de inferencia distintos según la interpretación que se dé a los conceptos temporales que se manejen.

4.2.2 Lógica Temporal Difusa de Dutta [Dutta 1988]

En su trabajo, Dutta propone una descripción del tiempo en la que la unidad básica es también el intervalo, cuya duración puede ser variable y que por simplicidad no

se solapa con ningún otro. Sobre el universo $I=\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ formado por todos los intervalos i_i posibles, define un *evento* e como un conjunto difuso $\mu_i(e)$ (sic.), cuyo grado de pertenencia expresa la posibilidad que el evento e se produzca en el intervalo i .

Una vez definidos estos conceptos, Dutta expresa las relaciones temporales entre eventos como operaciones sobre los números difusos que representan los citados eventos. Por ejemplo, define un operador *less_than*(e_1, e_2), el cual devuelve el grado en que el evento e_1 sucede antes que el e_2 . De igual modo define los operadores *greater_than*, *overlaps* y *meets*. Con ellos cubre parte de las relaciones temporales descritas por Allen, aunque no todas. Cabe señalar que, al igual que sucede con Allen, los operadores de Dutta son nítidos, aunque devuelven resultados difusos dado que los eventos también lo son. Una posible extensión de este modelo sería, pues, la definición de relaciones difusas entre eventos, como por ejemplo la relación *mucho_mayor_que*.

Aunque la aproximación de Dutta es interesante en muchos aspectos, es poco rigurosa en otros: como señalan acertadamente Barro y colaboradores [Barro 1994], el modo de definir los eventos confunde *posibilidad* de ocurrencia con *intensidad* de ocurrencia del evento e en i . Por otro lado, en los ejemplos que presenta confunde a menudo posibilidad con probabilidad, puesto que propone distribuciones de posibilidad no-normales y cuya cardinalidad escalar es casi siempre 1. A pesar de estas inconsistencias, la originalidad del modelo de Dutta respecto al de Allen es la descripción difusa de los eventos, que permite *gradaciones* en el valor de verdad de los operadores de relación, lo que constituye una base novedosa para cuantificar la incertidumbre temporal.

4.2.3 Modelo de tratamiento de información temporal difusa de Dubois y Prade [Dubois 1989]

El modelo de Dubois y Prade representa un paso sustancial en la descripción y manejo de información temporal imprecisa, puesto que es bastante general y está bien fundado matemáticamente. Las diferencias con el modelo anterior son muchas, siendo dos las más relevantes. Primeramente, se utiliza aquí una descripción del tiempo basada en *instantes*. En segundo lugar, se utilizan relaciones *difusas* para comparar instantes o intervalos, sean o no difusos. Entrando en el contenido del trabajo con más detalle, se

aprecia que éste se estructura en dos partes. Empieza abordando las cuestiones referentes a la *representación* de conceptos temporales imprecisos, para pasar posteriormente a tratar el problema del *razonamiento* con conceptos temporales difusos. En lo que sigue se resume brevemente la primera parte, pues resulta de interés para la presente tesis.

Respecto a la representación de conceptos temporales difusos, Dubois y Prade distinguen cinco tipos diferenciados:

- a) Fechas: Una fecha está asociada con el instante en que se produce un evento dado. Puesto que este instante puede ser mal conocido, se representa una fecha a mediante una distribución de posibilidad $\pi_a(t)$ sobre el eje de tiempo, la cual restringe los valores más o menos posibles para la fecha que quiere expresarse (Figura 4.1). Esta definición permite describir fechas con distintos grados de incertidumbre, con sólo variar los valores máximo, mínimo y las pendientes de subida y bajada de la distribución de posibilidad.

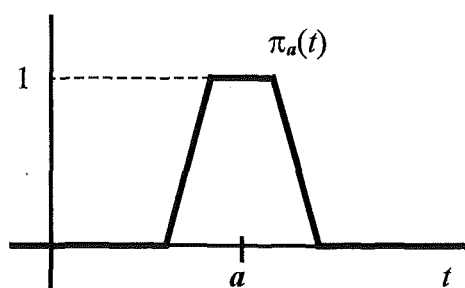


Figura 4.1: Fechas en el modelo de Dubois y Prade

Como bien señalan los autores, una fecha así definida toma *sólo un único valor*. En otras palabras, los valores del soporte de $\pi_a(t)$ son candidatos *mútuamente excluyentes* para el valor de a . Si por una causa u otra nuestro conocimiento sobre la fecha pasa a ser completo, se asignará a a un sólo valor escogido del soporte de $\pi_a(t)$. En cuanto a la *forma* que deben tomar las distribuciones de posibilidad, cabe señalar que Dubois y Prade trabajan principalmente

con distribuciones trapezoidales, aunque no se puede utilizar para ello cualquier distribución unimodal.

- b) Período de tiempo antes/después de una fecha: Partiendo del concepto anterior, se definen aquí los conjuntos difusos que agrupan aquellos instantes de tiempo que están *posiblemente/necesariamente antes/después* de una cierta fecha. Se obtienen de esta forma unos conjuntos difusos que son conceptualmente idénticos a los devueltos por los operadores de relación de Dutta, si se exceptúa la distinción que aquí se hace entre necesidad y posibilidad.
- c) Relaciones difusas de orden y similaridad entre fechas: En este punto se generalizan los operadores de relación del punto anterior, definiéndolos como difusos en lugar de nítidos. Ello da lugar a relaciones de orden *flexible*, como por ejemplo “*mucho mayor que*”, y a relaciones aproximadas de similaridad, como “*aproximadamente iguales*”.
- d) Intervalos temporales: Dadas dos fechas conocidas de forma imprecisa, *a* y *b*, podría pensarse en un principio definir el intervalo de tiempo [*a*,*b*] como el conjunto difuso de los instantes de tiempo entre esas fechas, existiendo varias maneras de encontrarlo. Sin embargo, puesto que se trabaja en el marco de la teoría de la posibilidad, Dubois y Prade definen un intervalo impreciso mediante **dos** conjuntos difusos: El conjunto de los instantes de tiempo que están *posiblemente* después de *a* y antes de *b*, y el conjunto de los instantes de tiempo que están *necesariamente* después de *a* y antes de *b*.
- e) Longitud de un intervalo: Al igual que la longitud de un intervalo clásico se encuentra restando sus respectivos extremos, la longitud de un intervalo cuyos extremos son imprecisos puede obtenerse restando sus fechas difusas final e inicial. La resta, empero, debe

realizarse utilizando aritmética difusa. Así, los valores posibles para la longitud l del intervalo $[a,b]$, cuyos extremos se conocen de forma incierta, están restringidos por la distribución de posibilidad $\pi_l(r)$ obtenida como la resta difusa de π_b y π_a dada por

$$\forall r \in \mathcal{R}, \quad \pi_l(r) = \sup_{r=s-t} \min\{\pi_b(t), \pi_a(s)\} \quad (4.1)$$

Este concepto temporal engloba también a las *duraciones*, puesto que éstas no son más que el período de tiempo transcurrido entre dos instantes determinados.

En todo este modelo volvemos a encontrar constantemente la idea de Allen, pero expresada de forma más precisa: Debemos representar los eventos (que aquí son las fechas y las longitudes) mediante distribuciones de posibilidad, puesto que modelan sucesos que se dan en un único instante de tiempo. En cambio, representaremos las propiedades o procesos (intervalos o relaciones) mediante un conjunto difuso, puesto que éste agrupa instantes de forma conjuntiva, en la que cada uno aporta su contribución al resultado final.

Dubois y Prade proponen a continuación distintos esquemas de razonamiento que manejan estas cinco formas de conocimiento temporal difuso. Estos esquemas de razonamiento incluyen el cálculo de los valores posibles para una fecha dada, los métodos de propagación de restricciones temporales difusas, distintos procedimientos para determinar el orden entre fechas y/o intervalos, etcétera, los cuales no se resumen aquí pues quedan fuera del ámbito de esta tesis.

4.2.4 Modelo y lenguaje para el tratamiento difuso del tiempo, de Barro, Marín, Mira y Patón [Barro 1994]

A pesar de la gran importancia del trabajo de Dubois y Prade en el campo del razonamiento temporal difuso, el modelo que proponen es excesivamente complejo para su implementación directa y homogénea, debido a la gran cantidad de conceptos y relaciones entre conceptos que maneja. En este sentido, resulta sumamente interesante el

trabajo de Barro y colaboradores, puesto que propone una reducción significativa del modelo de Dubois y Prade sin perder por ello excesiva capacidad de representación.

Basado también en una descripción del tiempo por instantes, los conceptos temporales que maneja este modelo son tres: **fechas**, **duraciones** (*time extents*) e **intervalos**. Los primeros y los segundos están representados mediante distribuciones de posibilidad, puesto que son conceptos *excluyentes*, es decir, representan únicamente a un cierto valor, aunque mal conocido. Cabe señalar aquí que las fechas son un concepto temporal propiamente dicho, mientras que las duraciones se utilizan para expresar *relaciones* entre conceptos. Los terceros, en cambio, se representan mediante un conjunto difuso ya que agrupan varios instantes de tiempo de forma incluyente. La descripción de un intervalo se realiza apoyándose en los dos conceptos anteriores, a saber, mediante la especificación de las fechas inicial y final del intervalo, así como su duración. Esta triple descripción permite gran flexibilidad, pero puede llevar a redundancias o inconsistencias, lo que los autores soslayan definiendo una *representación mínima* del intervalo, que consta del conjunto difuso más pequeño que verifica a la vez las tres restricciones temporales especificadas.

Una vez definidas las entidades temporales que manejan, se introducen éstas en una estructura reticular llamada *Fuzzy Temporal Constraint Satisfaction Network*, que permite de forma cómoda encontrar relaciones y efectuar razonamientos sobre los conceptos definidos. Terminan los autores proponiendo un lenguaje para expresar entidades temporales difusas complejas, como relaciones entre fechas y/o intervalos, a partir de las primitivas propuestas anteriormente.

4.2.5 Sistemas difusos dinámicos de Qian [Qian 1992]

En este artículo de 1992, Qian lanza la idea de que, en un entorno dinámico, los sistemas difusos razonarían más correctamente si pudiesen conocer las distribuciones temporales de las variables, además de las distribuciones espaciales (amplitudes). La originalidad de esta propuesta es doble: Por primera vez muestra el interés potencial que tiene introducir razonamientos temporales en las reglas difusas tradicionales. En segundo lugar, destaca que tal mezcla debe llevar a unos métodos de inferencia que satisfagan tanto las restricciones difusas numéricas como las temporales.

En el modelo de representación temporal que propone en su artículo, Qian distingue 2 tipos distintos de “descriptorios temporales”: puntos e intervalos difusos. Cada uno de ellos está asociado a una proposición difusa clásica, y su misión es restringir el rango de instantes para los que la proposición es válida. La notación que utiliza es la siguiente

$$AT\left(P, \int_T \frac{\mu(t)}{t}, unit\right) \quad \text{para los descriptorios de punto}$$

$$AT\left(P, \int_T \frac{\mu_1(t)}{t}, \int_T \frac{\mu_2(t)}{t}, unit\right) \quad \text{para los descriptorios de intervalo}$$

en la que P denota la proposición difusa clásica, $unit$ es la unidad de tiempo utilizada, $\int_T \frac{\mu(t)}{t}$ es un número difuso sobre el universo de todos los instantes T , que describe el instante en que la proposición P sucede, y $\int_T \frac{\mu_1(t)}{t}$, $\int_T \frac{\mu_2(t)}{t}$ son también números difusos que describen los instantes de aparición y desaparición del evento P .

A partir de estos descriptorios, Qian distingue tres formas de referencias temporales: *absolutas*, cuando los instantes de tiempo se dan en base a una referencia fija en el tiempo como es un reloj de tiempo real; *relativas*, cuando los instantes de tiempo se dan con respecto a otros instantes; y finalmente *descripciones antes/después*, que a nuestro parecer no son sino un tipo particular de descripciones relativas. También utiliza los dos descriptorios anteriores, convenientemente modificados, para expresar algunas de las posibles relaciones temporales entre proposiciones, como “antes”, “contiene” y “solapado”, aunque en estos casos los números difusos definidos en los descriptorios dejan de representar puntos o intervalos y adquieren significados particulares para cada caso.

Con el modelo temporal propuesto, Qian destaca a continuación que para satisfacer una regla difusa que lleve asociado un cierto concepto temporal deben satisfacerse tanto las restricciones numéricas como las temporales. En otras palabras, para que el grado de activación de una regla cuyo antecedente es “ x es Bajo de 7 a 8 de la mañana” sea elevado, el valor de x deberá tomar valores numéricos considerados

pequeños, pero deberá tomarlos durante el intervalo de tiempo especificado. El hecho de que una de las dos restricciones pueda no satisfacerse, lleva a Qian a desarrollar un complejo método de evaluación, en el que distingue algoritmos especiales para *priorizar* la satisfacción de restricciones numéricas, temporales, o ambas, y cada uno de ellos particularizados para los casos de descripciones temporales absolutas, relativas y antes/después.

A pesar del indudable interés del trabajo de Qian, el método de razonamiento que propone adolece de varios problemas que dificultan su puesta en práctica. En primer lugar, el procesamiento que efectúa de las señales de entrada requiere, por un lado, trabajar obligatoriamente en el dominio discreto, y por otro disponer de la secuencia de entrada almacenada completamente en memoria. Lo primero impide realizar sus algoritmos de forma analógica, y lo segundo introduce un retardo inevitable a la salida.

Por otra parte, los conceptos temporales difusos que utiliza en las reglas pueden dar lugar con facilidad a sistemas de inferencia no causales, es decir, en los que se necesite conocer los valores futuros de las entradas para calcular la salida en un instante dado. De hecho, Qian no parece preocuparse de la causalidad, y ya en todos sus ejemplos utiliza la metodología por él propuesta para desentrañar, de forma *off-line*, relaciones ocultas en un conjunto de datos, más que calcular en tiempo real una salida en función de las entradas.

Además, los algoritmos que utiliza son totalmente heurísticos, y la casuística que propone excesiva, con lo cual el procedimiento de encontrar el consecuente de las reglas resulta casi artesanal. Consciente de ello, él mismo anima a seguir ésta línea de investigación en sus conclusiones al final del artículo:

“...comparado con aquellos modelos estrictos de lógica temporal, la representación temporal y la estrategia de razonamiento que aquí se propone está basada en un análisis impreciso y empírico. El cómo desarrollar un modelo temporal difuso estricto que sea aplicable en un entorno dinámico requiere aún más estudio, ...”

4.3 Conceptos temporales difusos en ingeniería

4.3.1 Hipótesis básicas en un entorno de ingeniería

En los apartados anteriores se han visto con cierto detalle los esquemas de representación temporal que han adoptado otros autores en trabajos anteriores. Hecho esto, es el momento de adentrarnos en el estudio de las condiciones propias del entorno de ingeniería, que es al fin y al cabo el ámbito de esta tesis, para ver si éstas influyen en la definición de los conceptos temporales difusos y efectuar las particularizaciones adecuadas, si procede.

Considerando, pues, la problemática específica de este entorno, se exponen a continuación 3 presunciones básicas que pueden efectuarse sobre los sistemas que en él se desarrollan, y seguidamente se exploran punto por punto sus consecuencias sobre el modelo que aquí se presenta.

- 1. Los sistemas reciben en sus entradas funciones nítidas del tiempo, y deben devolver a sus salidas señales de este mismo tipo.** Esto es así porque un sistema concreto generalmente forma parte de un sistema más complejo en el que las señales que se procesan suelen ser magnitudes físicas concretas (tensiones, corrientes...) variables con el tiempo.
- 2. Interesa que los sistemas sean causales.** Esto es una exigencia básica en ingeniería, que puede descomponerse en dos restricciones. La primera de ellas es que *ningún sistema podrá actuar sobre el pasado*. La segunda, *ningún sistema podrá conocer anticipadamente el futuro*.
- 3. Interesará principalmente trabajar con sistemas invariantes con el tiempo.** Si diseñamos un sistema que dé una determinada salida en respuesta a unas excitaciones concretas, razonablemente nos interesará obtener la misma salida cuando las excitaciones y el estado del sistema sean idénticas a las del caso anterior. Evidentemente, existe una categoría de sistemas variantes que es

muy interesante, a saber: los sistemas adaptativos. Pero la variabilidad que presentan está en este caso controlada por el usuario del sistema con una cierta finalidad, normalmente la de llegar a una solución óptima. Quizá entonces deberíamos decir en este apartado que nos interesará trabajar con sistemas que sean inicialmente invariantes, pero que puedan modificarse a voluntad del diseñador para permitir su entrenamiento.

La primera hipótesis va a exigir que los sistemas difusos que se construyan estén dotados de etapas fuzzificadora y desfuzzificadora. De otro modo no podrían incorporarse como parte integrante de otros sistemas ingenieriles clásicos. Esto no va a suponer mayor problema, puesto que la mayor parte de sistemas de inferencia difusa actuales prevén la inclusión de estas etapas en su estructura interna, tanto si se han implementado por *software* o por *hardware*.

Por otra parte, como ha puesto de manifiesto el análisis de los antecedentes efectuado en la sección 4.2, en lo concerniente a la representación del tiempo se han utilizado históricamente dos técnicas distintas: En la primera de ellas la unidad de tiempo básica es el *instante*, mientras que en la segunda es el *intervalo*. Cada una de ellas presenta ventajas frente a la otra según cual sea el tipo de problema a tratar. Dado que un intervalo queda completamente definido mediante sus valores extremos, una descripción del tiempo por intervalos requiere, en general, mucha menos memoria para almacenarse que una descripción por instantes, lo cual es adecuado por ejemplo en sistemas de bases de datos en los que se almacena y procesa gran cantidad de información temporal. Además, por su estructura, el intervalo parece modelar de forma natural la imprecisión en el conocimiento de una cierta cantidad.

Por otra parte, representar el tiempo mediante instantes será la elección natural en problemas en donde intervengan señales en tiempo real, puesto que éstas provienen generalmente de sensores que entregan una magnitud variable con el tiempo instante a instante. Asimismo, las estructuras construidas entorno a esta descripción del tiempo gozan de indudables ventajas de representación, y una larga tradición de uso en todas las disciplinas científicas.

Estas dos representaciones del tiempo son formalmente equivalentes [Dutta 1988], puesto que puede representarse un instante mediante un intervalo arbitrariamente corto, y viceversa, un intervalo no es más que el conjunto formado por todos los instantes que contiene. Por lo tanto, ambas representaciones del tiempo permiten abordar los mismos problemas. Sin embargo puesto que se utiliza con mucha mayor frecuencia la descripción por instantes que por intervalos, ésta última no tendría mayor interés a no ser porque fué utilizada como base en algunos de los primeros trabajos sobre manejo de información temporal imprecisa. Como exponentes de esta tendencia podemos señalar, aparte de los ya citados Allen [Allen 1984] y Dutta [Dutta 1988], a Dean y McDermott [Dean 1987] y Dechter *et al.* [Dechter 1991].

Puesto que en el presente trabajo se manejan constantemente señales en tiempo real, se ha optado por una descripción del tiempo basada en **instantes**. Además, como se ha puesto de manifiesto en la sección 4.2, esta descripción ha sido la elegida en los trabajos más recientes sobre procesado de información temporal imprecisa, como los de Dubois y Prade [Dubois 1989], Qian [Qian 1992] y Barro *et al.* [Barro 1994], lo que denota un progresivo abandono de la descripción interválica por parte de los investigadores.

La exigencia de causalidad es mucho más fuerte, y va a revelarse como un concepto clave en las definiciones que seguirán. La consecuencia más inmediata es la de obligar al uso de operadores de implicación “ingenieriles”, en el sentido definido por Mendel [Mendel 1995]. Como se vio en la sección 3.5, esto restringirá en la práctica los operadores de implicación a los de Mamdani o Larsen, esto es, el *mínimo* o *producto*. Puesto que estas implicaciones son en realidad t-normas, parece lógico exigir, en aras de la homogeneidad, que el resto de los operadores de intersección que se utilicen en las expresiones sean también los mismos. Así pues, en lo que sigue se utilizarán exclusivamente como operadores de intersección el mínimo y el producto.

Pero las consecuencias más relevantes de la adopción del principio de causalidad en los sistemas difusos que se manejan en esta tesis se encuentran en las restricciones que éste impone a los conceptos temporales difusos que aparecen en las reglas. En efecto, el hecho de que no pueda actuarse sobre el pasado impedirá la presencia de conceptos temporales pasados en el consecuente de las reglas. De modo parecido, la imposibilidad

de conocer el futuro conlleva la prohibición de aparición de conceptos temporales futuros en el antecedente de las reglas. Quizá la única cosa que puede hacerse con los valores futuros de cualquier variable es intentar *predecirlos* en base a sus valores actuales y pasados, mediante un estimador, la salida del cual podría usarse como una entrada más para nuestro sistema. La causalidad quedaría así preservada porque se razonaría en el instante actual en base a un futuro predecido, pero no conocido.

Un tema aparte es el hecho de actuar sobre el futuro. Aunque obviamente no se puede modificar en el instante actual el valor futuro de una salida, sí es posible decidir qué se hará con ella más tarde. Esta decisión debe de tomarse más como una declaración de intenciones, o un deseo, que como una decisión firme, puesto que es probable que llegado el momento de asignarle el valor previsto se haya cambiado de idea en vista de las nuevas condiciones presentes a la entrada. Se concluye, pues, que no puede descartarse de entrada la presencia de conceptos futuros en el consecuente de las reglas.

Sin embargo, el razonamiento que sigue mostrará que no es necesario complicar el modelo temporal con la adopción de conceptos futuros en el consecuente, al menos en un entorno de ingeniería. En efecto, considérese en primer lugar un concepto temporal futuro *nitido* como, por ejemplo, “dentro de cinco minutos”. Si se incluye tal concepto en el consecuente de una regla, se obtendrá una expresión de la forma:

“Si (determinada situación de las entradas) entonces hacer Salida=**B**
dentro de cinco minutos”

en donde **B** es un valor difuso cualquiera. Es evidente que esta situación, representada en la Figura 4.2, es equivalente a actuar sobre la salida en el instante actual, en función de unas entradas 5 minutos anteriores a las que se tenían, tal y como se muestra en la Figura 4.3:

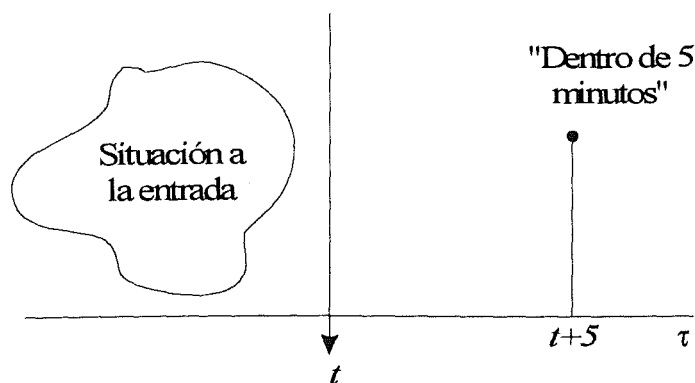


Figura 4.2: Concepto temporal nítido futuro a la salida

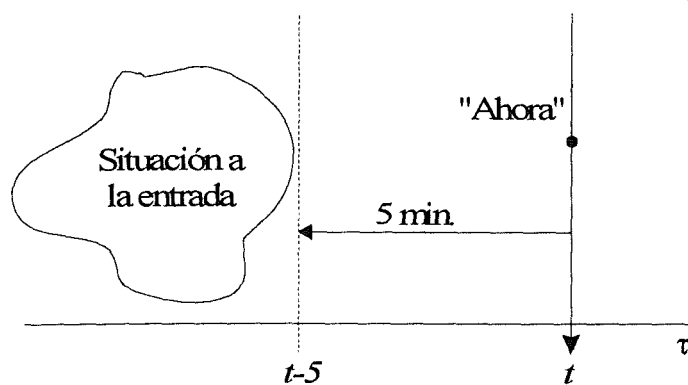


Figura 4.3: Situación equivalente a la de la Figura 4.2

Por lo tanto, en este caso es innecesario considerar el concepto temporal difuso en el consecuente. Otra situación distinta y más compleja es el caso en que el concepto futuro no sea nítido sino difuso, y que por tanto cubra una cierta extensión temporal. Sería el caso en que la regla anterior se modificase para rezar como sigue:

“Si (determinada situación de las entradas) entonces hacer Salida=**B** dentro de *unos* cinco minutos”

Como se aprecia en la Figura 4.4, la extensión no nula del concepto hace que en este caso no pueda aplicarse el razonamiento anterior. Por añadidura, el problema es aquí más complejo, pues si la regla que se está considerando tiene en el instante actual t un cierto grado de verdad, es de suponer que en el instante $t+dt$ tendrá otro distinto, y así sucesivamente. Esto conlleva que en cada instante se tomarán decisiones distintas respecto a la amplitud **B** de la salida futura, cada una ligeramente decalada respecto a la anterior, pero que al tener el concepto temporal futuro una cierta anchura se solaparán unas con otras. El resultado final de todo ello es que el valor de la salida en cada

momento debería ser de alguna manera una ponderación de todas las salidas previstas en *todos* los instantes anteriores para el actual.

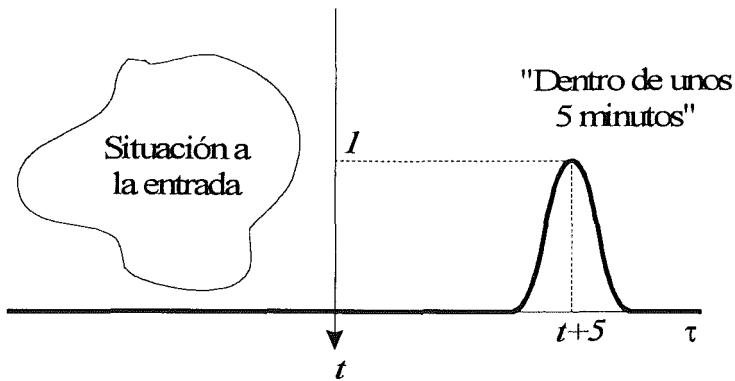


Figura 4.4: Concepto temporal difuso futuro a la salida

Lo que acaba de describirse plantearía cuestiones sobre la mejor manera de realizar la mencionada ponderación, y cómo implementarla físicamente. Aunque es posible proponer sistemas que realicen de forma automática cierto tipo de ponderaciones como las descritas (como, por ejemplo, un circuito lineal), consideramos que el interés del tema en sí es reducido, porque normalmente, con la situación de las entradas en el instante actual y en todos los anteriores se tienen suficientes elementos para decidir la salida actual, sin necesidad de hacer previsiones para el futuro. Además, como se ha visto, ésta es precisamente la operación que terminaría haciendo de hecho un sistema que operase con conceptos difusos futuros.

Debido a todo ello, en la presente tesis no se han considerado conceptos futuros en el consecuente, por lo que sólo modificaremos la salida en el instante actual.

Por lo que respecta al tercer punto, es de destacar que la exigencia de invarianza se desdobra en dos restricciones: En primer lugar va a suponer que la estructura interna de nuestros sistemas no cambia con el tiempo. En segundo lugar, y esto es más relevante para nosotros, va a impedir la utilización de conceptos temporales *absolutos*. En efecto, un sistema que razone en base a conceptos absolutos no puede producir, en momentos distintos, salidas idénticas para dos excitaciones iguales. A modo de ejemplo, considérese un sistema formado por un interruptor-temporizador que conecta una carga a un cierto generador de tensión. La salida del sistema la consideramos la tensión en la carga, V_c , mientras que la entrada es la tensión V_g de la fuente. Es evidente que si el temporizador

está programado para activarse en un instante *absoluto* de tiempo, por ejemplo las 17:00 horas de cada día, la tensión V_c que se obtendrá en la carga (salida) no será la misma si conectamos el generador a las 16:00 que si lo hacemos a las 18:00.

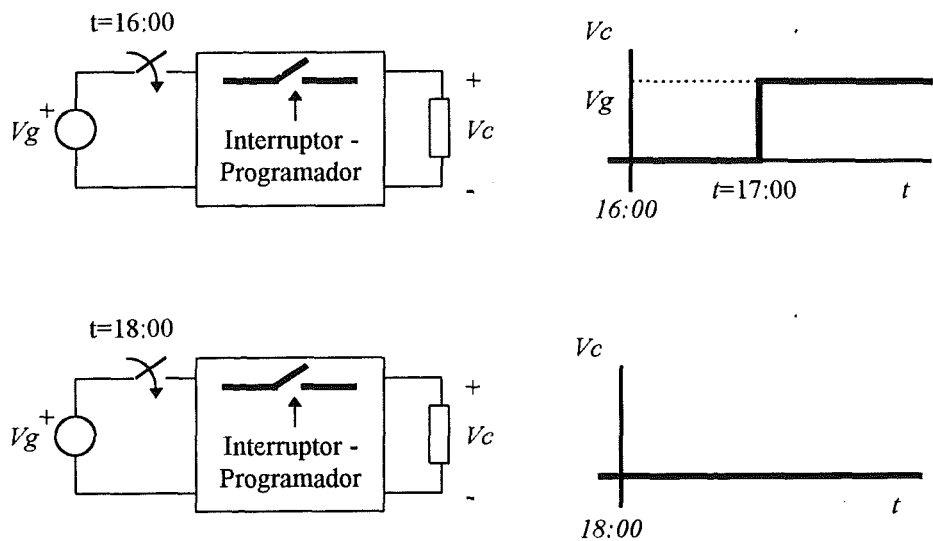


Figura 4.5: Sistema variante con el tiempo

Por lo tanto, hacer nuestros sistemas difusos invariantes con el tiempo va a exigir que todos los conceptos temporales que se utilicen en las reglas sean conceptos **relativos respecto al instante actual**. En otras palabras, en el ámbito de la ingeniería y similares va a ser extraño el caso en que se necesite construir un sistema de inferencia difusa que contenga reglas como “SI la Temperatura del reactor era Grande *el 26 de Mayo de 1994*, ENTONCES...”. En cambio, serán habituales reglas del tipo “SI la Temperatura del reactor era Grande *hace una hora*, ENTONCES...”. Con esto no se está minimizando la importancia que puedan tener los conceptos temporales difusos absolutos, pero su uso será mucho más adecuado en campos como la inteligencia artificial, manipulación de bases de datos con información temporal, sistemas expertos, etc., en los que la lógica difusa ha encontrado también importantes aplicaciones y en los que no se requiere adoptar el principio de invarianza.

Resumiendo todas las consideraciones que acaban de hacerse, se exponen a continuación en la Tabla 4-2 la lista de restricciones que se aplicarán al modelo que se presenta en esta tesis:

Tabla 4-2: Restricciones aplicables en un entorno de ingeniería

◆ Las entradas y salidas de los sistemas difusos que se aquí se manejan son funciones nítidas del tiempo, continuas o discretas.
◆ Debido a lo anterior, los sistemas difusos incorporarán etapas fuzzificadora y desfuzzificadora.
◆ Se adoptará una descripción del tiempo basada en instantes.
◆ Las funciones de implicación utilizadas serán las de Mamdani o Larsen (mínimo o producto).
◆ Por homogeneidad con lo anterior, las únicas intersecciones difusas que se manejarán serán también el mínimo o el producto.
◆ Los conceptos temporales que se definan serán siempre relativos al instante actual.
◆ El antecedente de las reglas difusas sólo podrá contener conceptos temporales presentes y pasados.
◆ En el consecuente de las reglas no figurarán conceptos temporales. En otras palabras, en el consecuente sólo se establecerá el nuevo valor para la salida en el <i>instante actual</i> .

A la vista de esta tabla se concluye que el entorno de ingeniería acota notablemente el tipo de conceptos temporales que en él se manejan, afectando de forma sensible a la definición del modelo de representación temporal que debe utilizarse en esta tesis. Dado que los modelos precedentes están concebidos para resolver otra clase de problemas, no va a ser posible adoptar ninguno de ellos de forma directa, y habrá que proponer uno propio. Sin embargo, tampoco es deseable ignorarlos totalmente, puesto que algunos de ellos constituyen una plataforma bien fundamentada para el tratamiento difuso del tiempo. En consecuencia, el criterio que aquí se ha seguido es el de escoger entre todos ellos el más próximo a nuestras necesidades, y aplicarle las restricciones de la Tabla 4-2.

Del estudio de las propuestas precedentes en cuanto a la descripción difusa del tiempo, cabe señalar que la mayoría de autores destacan de una forma u otra dos ideas importantes:

1. Cabe distinguir dos tipos básicos de conceptos temporales: *fechas* e *intervalos*. Los primeros se caracterizan por agrupar una serie de valores temporales de forma exclusiva, mientras que los segundos lo hacen de forma inclusiva.
2. Debe establecerse un método adecuado para representar las posibles *relaciones* entre conceptos temporales, en un marco compatible con los conceptos del punto anterior.

Descartados de entrada los modelos basados en una descripción del tiempo por intervalos, deben considerarse básicamente tres: el de Dubois y Prade, el de Qian y el de Barro, Marín, Mira y Patón. El primero de ellos es muy completo y riguroso, pero a nuestro juicio resulta excesivamente complejo, lo que dificulta su implementación. Es un modelo pensado más bien para efectuar razonamientos sobre el papel o como mucho para su realización *software*. Por el contrario, la propuesta de Qian es mucho más simple en su concepción, por lo que podría ser un punto de partida interesante. Sin embargo, adolece del inconveniente de no tratar todas las relaciones temporales desde un punto de vista homogéneo.

Finalmente, creemos que el modelo de Barro, Marín, Mira y Patón presenta ventajas indudables frente a los dos anteriores. Constituye una notable simplificación de la propuesta de Dubois y Prade, sin perder por ello los aspectos clave que resultan de interés para nosotros. Distingue correctamente los conceptos exclusivos de los inclusivos, y trata las relaciones entre conceptos de forma homogénea mediante el uso del concepto de *distancia* temporal (time extent). Al estar todo él construido sobre la teoría de la posibilidad, permite utilizar todas las herramientas de cálculo que ésta ofrece para manipular los conceptos temporales, si ello fuese necesario.

Considerando lo expuesto, se introducen seguidamente los conceptos básicos que conforman el modelo de representación del tiempo adoptado en esta tesis. Estos son el *eje de tiempo*, los conceptos temporales *exclusivos*, los *inclusivos*, las *distancias*

temporales y las *relaciones* entre conceptos. Básicamente, este modelo recoge la propuesta de Barro y colaboradores [Barro 1994], con algunas variaciones significativas que se destacarán en su momento, siendo una de las principales el hecho de que se trabajará únicamente con conceptos temporales difusos *relativos*, tomando siempre como instante de referencia el *instante actual*.

4.3.2 Métodos de descripción del tiempo.

Se considerará en lo sucesivo que el tiempo se proyecta en el conjunto universal T (tau mayúscula), formado por todos los instantes posibles. La naturaleza del problema bajo estudio puede inclinar a enfocar su solución desde el punto de vista continuo o discreto, por lo que deben diferenciarse adecuadamente estos dos dominios en la notación. Si se trabaja en el dominio continuo, se denotará por τ a un elemento genérico de T , reservando el símbolo t para señalar explícitamente al **instante actual**. En el dominio discreto se sustituirán estos símbolos por k y n , respectivamente. En este último caso, se asumirá que la discretización del eje de tiempo es regular, aunque distinta para cada aplicación concreta, en función de las necesidades de representación que se tengan y al contenido frecuencial de las señales de entrada.

4.3.3 Conceptos temporales difusos exclusivos

Por conceptos exclusivos entendemos aquellos conceptos temporales mal conocidos, representados por un conjunto de posibles candidatos mutuamente excluyentes. Este tipo de conceptos se corresponden básicamente con las *fechas* de Barro *et al.* [Barro 1994], o Dubois y Prade [Dubois 1989]. Siguiendo pues a estos autores, se define una *fecha* como un cierto instante de tiempo a mal conocido, representado por una cierta distribución de posibilidad π_a sobre τ . Para cada valor de τ , la ordenada de la citada distribución indicará la posibilidad que la fecha a sea precisamente τ . La diferencia básica con los modelos anteriores, sin embargo, es que en este caso deben aplicarse las restricciones de la tabla Tabla 4-2, lo cual redundará en restricciones sobre la distribución de posibilidad, las cuales se discuten a continuación.

En primer lugar, el hecho de que la fecha a deba ser relativa al instante actual t provoca que la distribución $\pi_a(\tau)$ no sea únicamente función de τ , sino también de t , es

decir, $\pi_a = \pi_a(\tau, t)$. Más concretamente, puesto que el valor concreto de posibilidad depende únicamente de la posición relativa del instante de evaluación τ con respecto al actual, la distribución es una función de la *diferencia* entre ambos, resultando $\pi_a = \pi_a(t - \tau)$. En segundo lugar, puesto que de momento no se considerarán conceptos temporales futuros, la posibilidad de que una fecha dada caiga en el futuro debe de ser nula, con lo que se tiene $\pi_a(t - \tau) = 0 \quad \forall \tau > t$.

Aun con estas restricciones, la variedad de conceptos temporales que pueden describirse es elevada, puesto que la descripción de una fecha como distribución de posibilidad nos permite englobar en un conjunto homogéneo todos aquellos casos particulares de fechas conocidas de forma exacta o no, y distinguir para este último caso distintos niveles de incertidumbre.

Figura 4.6 se muestran distintas situaciones en la representación de una fecha, las cuales se distinguen entre ellas por la cantidad y la cualidad de la incertidumbre presente en la descripción. Nótese que en todos estos casos se ha usado una representación continua del tiempo, pero que se pueden definir el mismo tipo de conceptos en el dominio discreto.

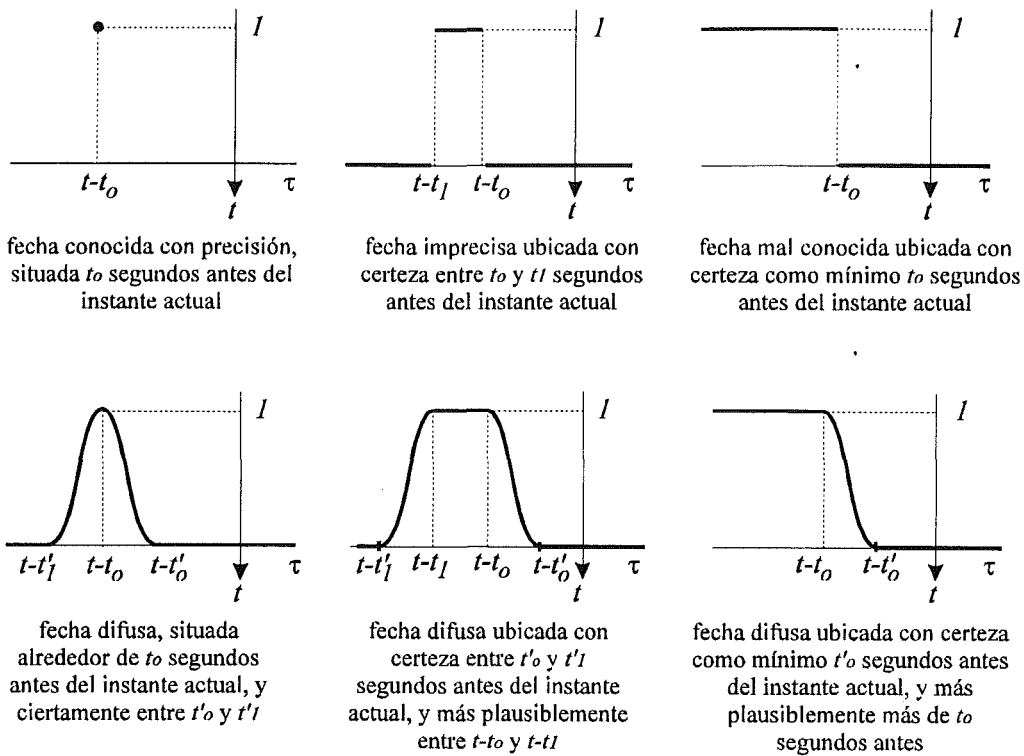


Figura 4.6: Representación de fechas mal conocidas

4.3.4 Conceptos temporales difusos inclusivos

Por conceptos inclusivos entendemos aquellos conceptos temporales que representan un *intervalo* de tiempo mal conocido. A diferencia de las fechas, que modelan de forma difusa una *posición* (relativa) en el eje de tiempos, los intervalos describen además una *duración o extensión*. Por ello, un intervalo genérico I no se representará mediante una distribución de posibilidad, sino por un conjunto difuso $\mu_I(t-\tau)$, el cual agrupa instantes de tiempo mutuamente incluyentes. La similitud entre un conjunto difuso y una distribución de posibilidad no debe llevar a confundir fechas con intervalos, pues su distinción será de vital importancia más adelante para decidir el algoritmo que debe aplicarse en cada caso para realizar la inferencia difusa.

En una aplicación concreta, la forma de la función de pertenencia que describe un intervalo puede venir prefijada, o puede ser necesario encontrarla a partir de sus fechas límite. A modo de ejemplo, considérese un par de fechas difusas a y b , cuyos valores están restringidos por las distribuciones de posibilidad π_a y π_b . Puede definirse entonces el intervalo $[A,B]$ que contiene todos los instantes de tiempo que están *posiblemente*

después de a y antes de b mediante el conjunto difuso cuya función de pertenencia está dada por la ecuación

$$\forall \tau \in T, \quad \mu_{[A,B]}(t-\tau) = \sup_{s \leq \tau \leq s'} \min\{\pi_a(t-s), \pi_b(t-s')\} \quad (4.2)$$

y cuyo resultado gráfico se muestra en la Figura 4.7

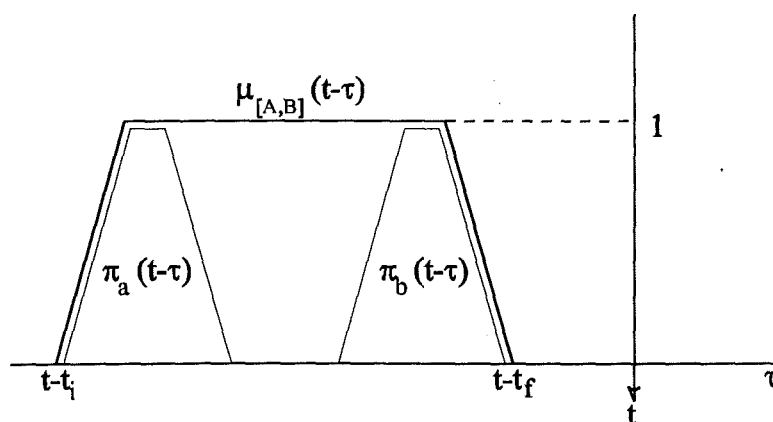


Figura 4.7: Cálculo de un intervalo a partir de sus fechas extremas

4.3.5 Distancias o longitudes temporales

Tanto Dubois y Prade como Barro *et al.* distinguen otro concepto temporal dentro de la categoría de los exclusivos: las *distancias o longitudes temporales*, que son simplemente números mal conocidos que expresan cantidades de tiempo como, por ejemplo, “aproximadamente 3 minutos”. Estas cantidades tienen como función principal la de permitir encontrar una fecha y/o intervalo desconocido a partir del conocimiento de una fecha y/o intervalo inicial y de la distancia temporal que los separa, por lo que su existencia carece de sentido si no están asociados a una fecha o intervalo.

Ya en el artículo de Barro *et al.* se precisa que este tipo de conceptos no pueden representarse en el mismo marco que las fechas o intervalos. Ello es así puesto que ni son relativos a ningún instante actual, ni describen instantes de tiempo, sino, como se ha dicho, sólo magnitudes temporales. Por ello, el punto de vista que se ha adoptado en esta tesis respecto a las duraciones es el de utilizarlas previamente para encontrar las fechas o intervalos que de ellas derivan, y trabajar siempre con estos últimos conceptos. Por ejemplo, de las frases “X sucede en la fecha a ” y “Y sucede aproximadamente 3 días

después de X ” puede encontrarse fácilmente la fecha b en la que sucede Y como suma difusa de la fecha a con la duración difusa “aproximadamente 3 días”. Una vez conocidas a y b , podrá desecharse la duración y trabajar sólo con las fechas.

4.3.6 Relaciones entre conceptos temporales

En el modelo de representación temporal que se utilizará en esta tesis, el único tipo de conceptos temporales que se implementaran finalmente en forma de circuito electrónico serán los conceptos exclusivos e inclusivos. Sin embargo, éstos no son los únicos conceptos temporales existentes, puesto que pueden definirse también *relaciones* entre ellos, las cuales restringen la ubicación relativa entre dos conceptos a un rango de instantes especificado. Desde luego, existen infinidad de relaciones posibles entre dos conceptos temporales dados, pero los estudios precedentes sobre este tema muestran que éstas pueden clasificarse en las categorías mostradas en la Tabla 4-3, que se representan gráficamente en la Figura 4.8:

Tabla 4-3: Relaciones entre conceptos temporales

Relaciones de <i>precedencia</i> :	a)	A antes B
	b)	A después B
	c)	A sigue B
Relaciones mixtas:	d)	A solapado B
Relaciones de <i>coincidencia</i> :	e)	A igual B
	f)	A mientras B
	g)	A contiene B
	h)	A empieza B
	i)	A acaba B

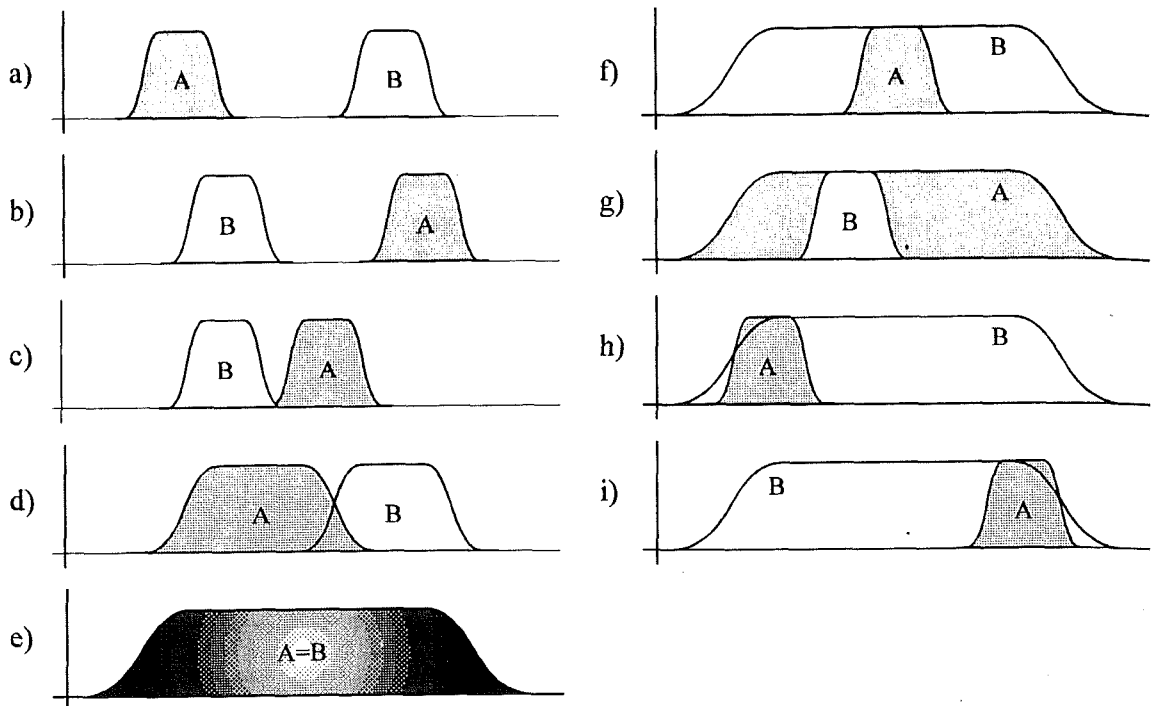


Figura 4.8: Representación gráfica de las relaciones de la Tabla 4-3

En lo que sigue se pondrá de manifiesto que las relaciones temporales que aquí se muestran pueden traducirse de una forma u otra a conceptos temporales exclusivos o inclusivos. Para ello, la técnica utilizada se basa en general en escoger el concepto más “moderno” de todos cuantos aparecen en la relación y considerarlo como el concepto difuso relativo “Ahora”. El resto de conceptos se distribuyen a su izquierda -en el pasado- en el eje de tiempos en la ubicación que especifique la relación. Para poner esto en evidencia, se comentan detalladamente todos los casos de la Figura 4.8:

La relación a) especifica que el concepto temporal A se produce *antes* que el B. Evidentemente, en cualquier aplicación práctica deberá especificarse el significado exacto del vocablo “Antes”, el cual tomará entonces un valor concreto, aunque difuso. Para detectar esta situación en tiempo real, bastará entonces construir la regla difusa temporal “**Ahora se produce B y (AND lógico) Antes se había producido A**”, en donde *ahora* y *antes* son dos conceptos temporales difusos exclusivos y/o inclusivos, según sea necesario. Nótese que el vocablo “antes” especificado en la relación constituye una distancia temporal, mientras que el “antes” de la regla difusa es un concepto temporal relativo al instante actual. También resulta evidente que las demás relaciones de

precedencia b) y c) pueden tratarse de la misma forma con sólo cambiar el orden de los operandos o la distancia temporal que los separa.

En el caso d), se entiende que quiere detectarse un *grado* de solapamiento entre los conceptos A y B. Para ello, debe definirse qué se entiende por solapamiento máximo (grado 1) mediante dos conceptos A y B adecuados. Luego, en tiempo real, un solapamiento inferior al máximo devolverá grados de verdad inferiores a la unidad, con lo que se tendrá el efecto buscado. Esta situación, pues, acaba convirtiéndose en un caso c) o e), según se quiera.

Por lo que respecta al caso e), se detectará mediante una regla del tipo “**Ahora se produce A y Ahora se produce B**”, que es equivalente a la regla “**Ahora se produce (A y B)**”. Al igual que para los casos a)-c), el concepto “Ahora” puede definirse exclusivo o inclusivo.

Los casos f) y g) son un poco más complejos de tratar. Sin embargo, sólo es necesario tratar el primero, pues el otro se obtiene mediante simple permutación entre A y B. Nótese que el hecho de detectar que se produce A mientras se está produciendo B es equivalente a detectar únicamente la producción de A y, cuando ocurra, mirar si se está produciendo B. Es decir, la situación puede detectarse mediante la regla “**Ahora₁ se produce A y Ahora₂ se produce B**” en la que “Ahora₂” es *exclusivo* y “Ahora₁” puede ser de cualquiera de los dos tipos.

Finalmente en el caso h) se especifica que el evento A debe de suceder en el momento en que se inicia B. Para detectar esta situación, basta primero con convertir el inicio de B en un evento C, es decir, $C \equiv$ “se inicia B”. Luego, se utiliza la regla “**Ahora se produce C y Ahora se produce A**”. El caso i) se obtiene de forma similar.

Estos razonamientos muestran que cualquier tipo de relación temporal que aparezca en las reglas difusas manejadas puede convertirse sin mucho esfuerzo a conceptos temporales estándar, del tipo exclusivo o inclusivo. Esta propiedad será muy interesante, puesto que permitirá simplificar notablemente la variedad de conceptos temporales difusos a tratar. Como se ha mostrado, sólo dos conceptos temporales se han utilizado en las conversiones precedentes: unos tipo “Antes” y otros del tipo “Ahora”.

Además, estos dos conceptos son básicamente el mismo, variando únicamente su ubicación en el eje de tiempos.

Recapitulando lo expuesto hasta el momento, puede decirse que el modelo de descripción difusa del tiempo que se presenta en esta tesis se fundamenta en dos tipos distintos de conceptos temporales: exclusivos e inclusivos. La diferencia básica entre ambos es que si se asocia un determinado evento a cada uno de ellos, los exclusivos expresan que el citado evento puede producirse en *cualquier* instante del soporte del concepto, mientras que los inclusivos exigen que el evento se produzca *en todos ellos*. Para distinguirlos se representan los primeros mediante una distribución de posibilidad y los segundos con un conjunto difuso, aunque la equivalencia funcional entre estas dos entidades matemáticas permite confundirlas en las expresiones, siempre que se tenga claro el significado del concepto temporal difuso subyacente. **En lo sucesivo, por comodidad, se utilizará casi exclusivamente la letra griega mu (μ) para designar ambos tipos de conceptos, indistintamente, siempre y cuando no exista ambigüedad.**

También es necesario insistir en el hecho de que, aunque los conceptos temporales exclusivos e inclusivos no son los únicos integrantes del modelo, sí son los más importantes, puesto que son los que finalmente van a implementarse. El resto de conceptos se utilizarán sólo en las fases previas de diseño para encontrar la representación en forma de fecha o intervalo de cualquier conocimiento temporal que venga expresado en una forma distinta.

4.3.7 Reglas temporales difusas

En este apartado se discuten brevemente cómo debe modificarse la estructura de las reglas difusas si-entonces, cuando en éstas se incorporan conceptos temporales difusos. Para ello se partirá del examen de una regla difusa tradicional, como

Si X es A entonces Y es B

en la que X es la variable difusa de entrada, Y es la variable difusa de salida, y A y B son respectivamente los valores difusos de la entrada y la salida que la regla pone en relación. “ X es A ” forma la proposición del antecedente, mientras que “ Y es B ”, la del consecuente. Debe observarse que tanto A como B establecen restricciones flexibles en cuanto a los valores numéricos que pueden tomar X e Y , pero no en cuanto a su ubicación y/o duración temporal, puesto que los sistemas difusos tradicionales son, como se ha puesto de manifiesto en anteriores ocasiones, algebraicos.

El propósito de introducir conceptos temporales en este tipo de reglas es, pues, permitir restringir las localizaciones temporales para las proposiciones de la regla. No se trata, por lo tanto, de obtener reglas que nos permitan razonar de forma *explícita* con los citados conceptos, sino de utilizar éstos de forma *implícita* en las reglas, acompañando a las restricciones numéricas. En otras palabras, se trata de construir un sistema difuso, capaz de razonar no sólo con eventos cuya distribución temporal puede ser incierta, sino también con aquellos cuyas *intensidades* lo sean también.

Para ello, se modificarán las reglas difusas actuales para asociar un concepto temporal a cada proposición, el cual marcará sus límites temporales de validez. Dado que en la sección 4.3.1 se ha establecido que el consecuente de las reglas no deberá llevar asociado concepto temporal alguno, sólo se modificará el antecedente. El esquema general de una de estas reglas será pues

$$\text{Si } X \text{ es } A \text{ en CT entonces } Y \text{ es } B \quad (4.3)$$

en la que $p \equiv$ “ X es A ” es la proposición del antecedente, $q \equiv$ “ Y es B ” la del consecuente, y CT simboliza el concepto temporal difuso asociado a la proposición p . Expandida convenientemente, esta regla resulta

Si [variable difusa del antecedente] es [concepto difuso numérico 1] en
[concepto temporal difuso] entonces [variable difusa del consecuente] es
[concepto difuso numérico 2]

Puesto que en este tipo de reglas los conceptos temporales nunca aparecen solos, sino ligados siempre a conceptos espaciales, llamaremos *implícitos* a estos conceptos temporales, en contraste con los *explícitos* que se manipulan en, por ejemplo, los trabajos de Dubois o Barro [Dubois 1989], [Barro 1994].

En la sección 3.6 se ha mostrado que en el caso de tener reglas difusas con más de un antecedente y/o consecuente, éstas pueden descomponerse en un conjunto de reglas simples como las descritas, agrupadas mediante conectivas OR o AND -según convenga-. Por ello, el definir las reglas en la forma en que aquí se hace no quita generalidad al modelo.

4.4 Inferencia en presencia de conceptos temporales difusos

4.4.1 Preliminares

Una vez establecidos y descritos matemáticamente los conceptos temporales difusos a tratar, en esta sección se desarrollan los métodos para razonar en presencia de los mencionados conceptos. Para abreviar, en adelante se denominarán *reglas temporales* a aquellas reglas difusas en las que aparezcan conceptos temporales de forma implícita, en el sentido definido en la sección 4.3.7, reservando el término *reglas* para designar las reglas difusas clásicas. Dado que cualquier regla difusa que posea un antecedente y/o consecuente compuestos admite su descomposición en un conjunto de reglas difusas con antecedente y consecuente simples, la discusión se efectuará para este último caso, sin pérdida alguna de generalidad.

El entorno en el que se trabajará en lo sucesivo está restringido a los sistemas de inferencia difusa que verifiquen los requisitos expuestos en las secciones 4.3.1 y 4.3.7, tanto a lo que respecta a su estructura interna como al tipo de conceptos y reglas temporales que manejarán. Además de estas restricciones, se asumirá por simplicidad que el sistema de inferencia tiene sólo una entrada y una salida, y se trabajará en el dominio discreto. Con estas condiciones, la estructura de que se parte es la de la Figura 4.9:

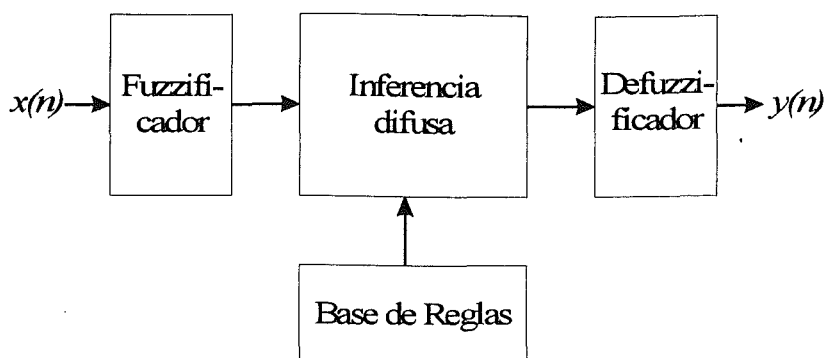


Figura 4.9: Sistema de inferencia difusa bajo estudio

Considérese en primer lugar el caso de que un sistema de inferencia difusa tradicional (no temporal), cuyas secuencias de entrada y salida sean $x(n)$ e $y(n)$, respectivamente. El proceso que se sigue para encontrar el valor que debe presentarse en cada instante a la salida es el clásico, gobernado por la regla composicional de inferencia. Si las reglas que contiene el sistema difuso en su base de conocimiento se expresan en la forma “si X es A entonces Y es B ”, éste algoritmo puede resumirse en los siguientes puntos:

- a) El fuzzificador convierte el valor actual de la entrada, $x(n)$, en el conjunto difuso A^* , que es generalmente -aunque no necesariamente- un *singleton* normal centrado en el elemento x . Con esto se obtiene la premisa “ X es A^* ”.
- b) Con la premisa anterior y la regla “si X es A entonces Y es B ”, puede inferirse el consecuente B^* utilizando el *modus ponens* generalizado.
- c) El proceso se repite para cada regla de la base de conocimiento, agregándose todos los B^* así obtenidos.
- d) El conjunto B^* resultante se entrega al defuzzificador, el cual devuelve la salida $y(n)$.

Para desentrañar aún más los entresijos del proceso de inferencia, partiremos de la expresión (3.101), la cual se reproduce a continuación para no romper el hilo de la exposición:

$$\mu_{B^*}(y) = \bigvee_x (\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_{A \rightarrow B}(x, y)) \quad (4.4)$$

Recuérdese que, en esta expresión, el símbolo \wedge denota cualquier t-norma y \bigvee_x indica en general la proyección de la relación resultante sobre la variable Y . Asignando distintas t-normas y operadores de proyección a la expresión (4.4) se obtienen las distintas posibilidades para la regla composicional de inferencia que se comentan en la sección 3.5.

Se ha establecido en la sección 4.3 que los únicos operadores de implicación permitidos en un entorno de ingeniería son los de Mamdani y Larsen, es decir, las funciones mínimo y producto. Estas operaciones son, de hecho, conjunciones o t-normas. Su introducción en la ecuación (4.4) la convierte en la expresión

$$\mu_{B^*}(y) = \bigvee_x (\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (4.5)$$

en la que ahora el operador \wedge sólo puede ser el mínimo o el producto. Puesto que el operador \bigvee_x sólo agrupa los valores en x , se tiene

$$\begin{aligned} \mu_{B^*}(y) &= \bigvee_x (\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \\ &= \bigvee_x (\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_A(x)) \wedge \mu_B(y) \\ &= w \wedge \mu_B(y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

en donde

$$w = \bigvee_x (\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_A(x)). \quad (4.7)$$

La ecuación (4.6) sugiere que la parte más importante del proceso de inferencia es precisamente el determinar w , el cual es un número entre 0 y 1 que puede interpretarse como el *grado de compatibilidad* o de consistencia entre el antecedente previsto, A , y el real A^* [Dubois 1980]. La cantidad w suele denominarse también en algunos textos grado de activación de la regla, o grado de verdad del antecedente. Con el razonamiento subyacente a este esquema de inferencia, el conjunto de salida B^* que se obtiene es el

conjunto original B previsto en la regla de implicación, pero truncado al valor w si se usa la t-norma de Mamdani o multiplicado por w si se usa la de Larsen. La Figura 4.10 muestra esquemáticamente los dos procesos de inferencia.

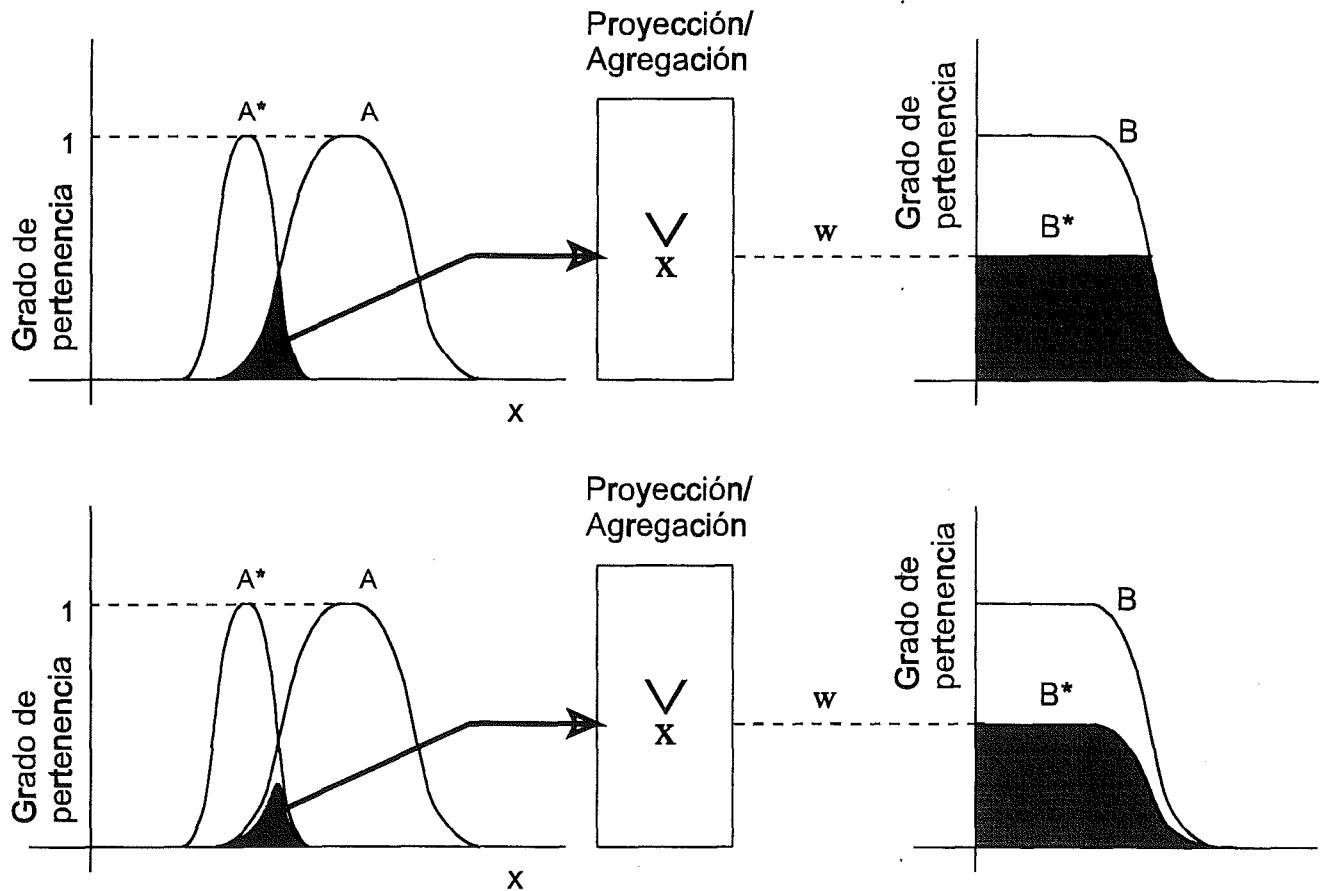


Figura 4.10: Esquemas de inferencia de Mamdani y Larsen

Una vez visto cómo realizar el proceso de inferencia para una regla difusa estándar, se lleva a cabo a continuación una discusión paralela para el caso de una regla difusa temporal. Como se estableció en la sección 4.3.7, la estructura general de una de estas reglas es

$$\text{Si } X \text{ es } A \text{ en CT entonces } Y \text{ es } B \quad (4.8)$$

en donde X e Y son las variables difusas del antecedente y consecuente, respectivamente, A y B son valores difusos, y CT es el concepto temporal difuso asociado al antecedente. Como pone de manifiesto la ecuación (4.6), inferir el consecuente B^* a partir de una cierta situación de las entradas pasa primero por la determinación del grado de verdad del antecedente, w , por lo que nos centraremos únicamente en éste para la discusión que

sigue. Sea, pues, el antecedente de la regla temporal anterior, “ X es A en CT ”. Para dotar de mayor claridad a la exposición, se particularizarán los conceptos A y CT a casos concretos. Por ejemplo, si $A=$ ”Grande” y $CT=$ ”Antes”, el antecedente de la expresión (4.8) se convierte en la proposición difusa

X es Grande en Antes

o, como se expresaría en lenguaje natural

X Antes era Grande (4.9)

Para encontrar el grado de verdad de esta proposición cuando a la entrada se tiene la secuencia $x(n)$ no puede utilizarse el proceso de inferencia en su forma habitual, debido a que la presencia del concepto temporal modifica el significado de la expresión. Sin embargo, parece lógico pensar que el grado de verdad de la proposición (4.9) deberá ser elevado si la secuencia de entrada ha tomado valores considerados “Grandes” en el lapso de tiempo definido por el concepto “Antes”, y bajo en cualquier otro caso.

Profundizando un poco más, si el concepto “Antes” fuese nítido y, por ejemplo, equivalente a “hace exactamente 5 segundos”, el grado de verdad de la expresión (4.9) se obtendría fácilmente encontrando cómo era de grande el valor de x hace 5 segundos. Para ello debería encontrarse primero el número N de muestras que han transcurrido desde ese instante, mediante la expresión $N=5/T_m$, en la que T_m denota el período de muestreo. En segundo lugar se tomaría el valor de la muestra en ese instante, o sea $x(\text{Antes})=x(n-N)$ y finalmente se compararía con el conjunto difuso “Grande” previo paso por un fuzzificador. Si el fuzzificador fuese por singleton, el grado de verdad deseado resultaría ser el que expresa matemáticamente la ecuación (4.10) y que se ilustra en la Figura 4.11:

$$w = \mu_{Grande}(x(\text{Antes})) = \mu_{Grande}(x(n - N)). \quad (4.10)$$

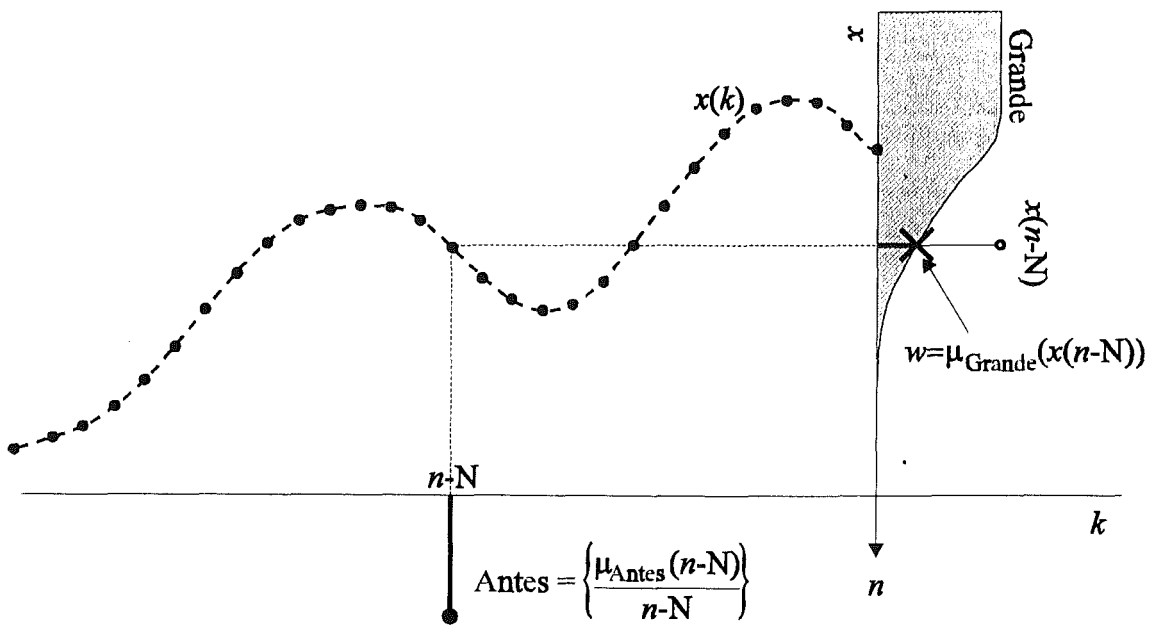


Figura 4.11: Grado de verdad w para el caso nítido

Es de destacar que para que el grado de verdad sea elevado deben cumplirse *simultáneamente* las 2 condiciones

- ◆ La secuencia x toma un valor “Grande”
- ◆ Este valor lo ha tomado hace 5 segundos

Si una de las dos, o ambas, no se cumple, w será bajo.

Supóngase ahora que el concepto “Antes” es difuso, describiéndolo mediante una función de pertenencia que asigna a cada instante de tiempo k su grado de pertenencia al concepto, es decir $\mu_{Antes}(n-k)$, con $k \in (-\infty, n]$. En notación de Zadeh,

$$\begin{aligned}
 \text{"Antes"} &= \left\{ \dots + \frac{\mu_{Antes}(m)}{n-m} + \frac{\mu_{Antes}(m-1)}{n-m+1} + \dots + \frac{\mu_{Antes}(1)}{n-1} + \frac{\mu_{Antes}(0)}{n} \right\} \\
 &= \left\{ \sum \frac{\mu_{Antes}(n-k)}{k} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

la gráfica de esta función de pertenencia se muestra en la Figura 4.12

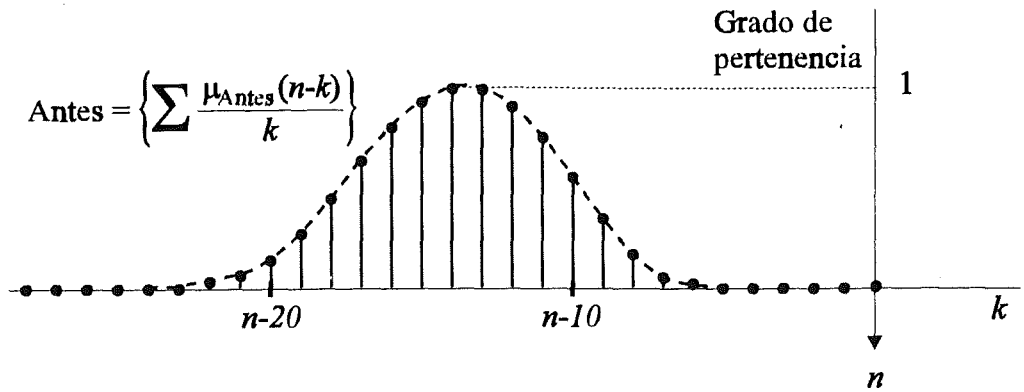


Figura 4.12: Función de pertenencia para el concepto "Antes"

Razonando del mismo modo que en el caso anterior, lo primero que debe hacerse es encontrar el valor de la secuencia en el instante "Antes", $x(\text{Antes})$. El problema que aquí se presenta es que el concepto "Antes" viene expresado mediante un conjunto difuso o distribución de posibilidad en T , que engloba más de un instante. Aún así, la expresión $x(\text{Antes})$ tiene sentido, porque expresa la imagen del conjunto difuso "Antes" a través de la función $x(n)$. En la sección 2.6.2 se vio que dicha imagen puede calcularse mediante el principio de extensión de Zadeh expresado por la ecuación (2.68), el resultado de la cual es a su vez un conjunto difuso en el universo X , al que llamaremos "X Anterior" (o "XA" para abreviar). Su función de pertenencia, $\mu_{xA}(x)$, se encuentra particularizando el principio de extensión para las funciones que aquí se manejan, con lo que resulta

$$\mu_{xA}(x) = \max_{k|k=f^{-1}(x)} \{ \mu_{Antes}(n-k) \} \quad (4.12)$$

asociada al conjunto difuso en x , que en notación de Zadeh se expresa como

$$\begin{aligned} \text{"XAnterior"} &= \left\{ \sum \frac{\mu_{xA}(x)}{x} \right\} \\ &= \left\{ \sum \frac{\max_{k|k=f^{-1}(x)} \{ \mu_{Antes}(n-k) \}}{x(k)} \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

es decir, el conjunto difuso imagen, "XA", contiene todos aquellos elementos de X que son imagen de algún $k \in \text{"Antes"}$ a través de la función $x(k)$. El grado de pertenencia de un elemento cualquiera $x \equiv x(k)$ al conjunto "XA" es el mismo que el grado de pertenencia del elemento k al conjunto "Antes", con la salvedad de que si dos o más k distintas tienen

la misma imagen, se toma el grado de pertenencia mayor. Todo el proceso se ilustra en la Figura 4.13.

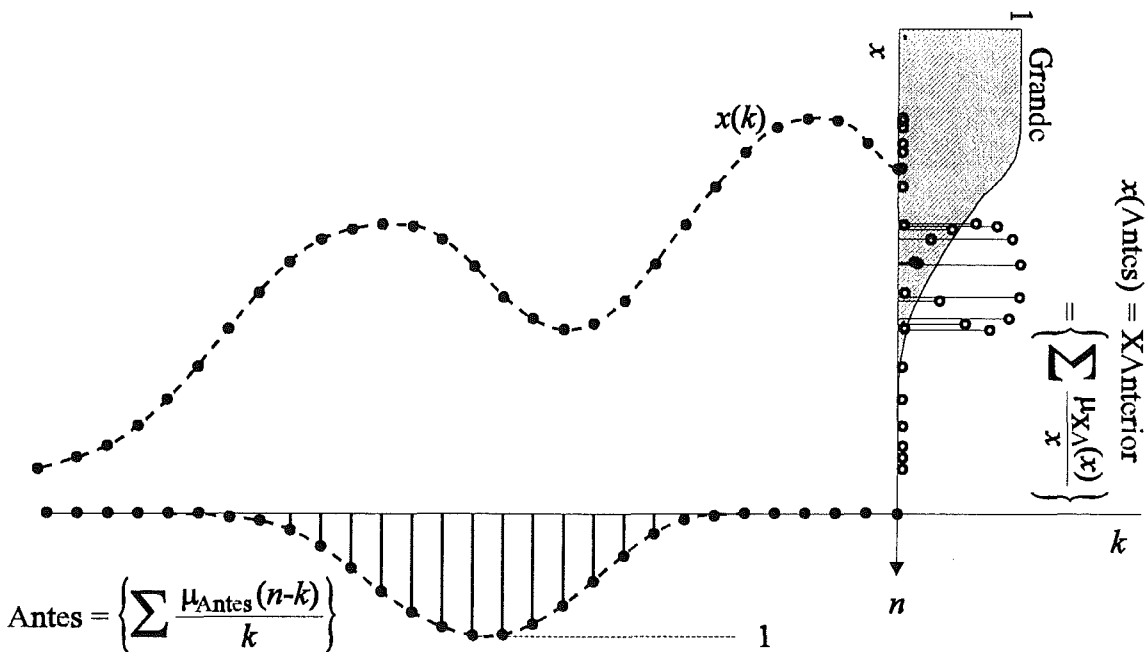


Figura 4.13: Aplicación del principio de extensión al conjunto "Antes".

En el conjunto "XA" obtenido de esta forma confluyen pues todos los valores que toma la función $x(n)$, ponderados por un factor que resulta ser tanto más pequeño cuanto más alejado esté el instante en que el citado valor se produce del concepto "Antes".

Llegados a este punto puede apreciarse que encontrar el grado de verdad de la expresión (4.9) es equivalente a encontrar el grado de verdad de la expresión

$$X_{\text{Anterior}} \text{ es Grande} \quad (4.14)$$

que se reduce a encontrar el grado de compatibilidad w entre los conjuntos difusos "Grande" y "XAnterior", situación que se muestra de forma gráfica en la Figura 4.14. Adviértase que **no** se trata de comparar la *forma* de los dos conjuntos difusos. En efecto, en el supuesto de que la función $x(k)$ fuese constante e igual a un valor que considerásemos "Grande", la imagen por x de cualquier conjunto difuso temporal sería un *singleton* en X , ubicado dentro del conjunto "Grande". En esta situación, deberíamos concluir que el valor de $x(k)$ ha sido grande en todo momento, con lo que el grado de verdad de (4.9) debería ser 1 aunque, de hecho, los conjuntos "XA" y "Grande" sean muy distintos.

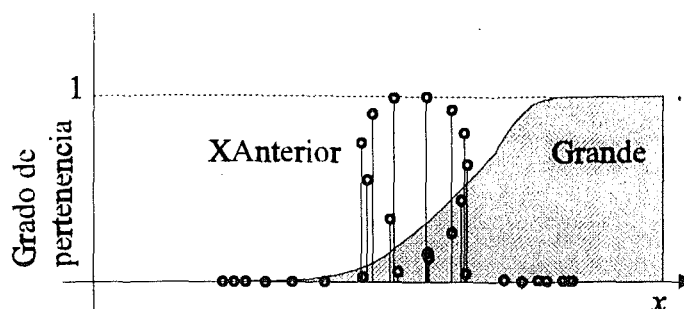


Figura 4.14: Ejemplo de compatibilidad entre los conjuntos "XAnterior" y "Grande".

Para encontrar el grado de compatibilidad w deseado, se utilizará la expresión (4.7), particularizando adecuadamente los operadores \wedge y \vee_x . La elección usual para estos operadores en los sistemas de inferencia tradicionales es, como ya se ha comentado con anterioridad, el *mínimo* y el *máximo sobre x* , respectivamente. Sin embargo con esta elección el resultado final w depende sólo de un único elemento de "XA" y, por tanto, de un único elemento del conjunto "Antes". El resto de elementos de "Antes" no tienen influencia en w .

Esta situación puede ser perfectamente aceptable, incluso deliberada, en aquellos casos en que el concepto temporal difuso manejado modele una *fecha*, que al no conocerse con precisión se representa mediante una cierta distribución de posibilidad en el eje de tiempo. Esta distribución de posibilidad agrupa valores temporales que son candidatos *mutuamente excluyentes* para la fecha dada.

En cambio, si el concepto temporal representa a un intervalo, quizá interesaría más que el valor final de w reflejase las contribuciones de **todos** los instantes englobados por el concepto "Antes". Por ejemplo, podría querer saberse si x ha sido grande durante todo el período definido por "Antes". En estas condiciones, convendría utilizar una medida del grado de compatibilidad que fuese una combinación de **todos** los valores del soporte de los conjuntos "XA" y "Grande", en sentido incluyente y no excluyente. Por ello, los operadores \wedge y \vee_x no pueden ser los mismos que los del caso anterior, y se tendrán que buscar alternativas válidas.

Estas dos interpretaciones semánticas distintas de los conceptos temporales difusos que se manejan, dan lugar a distintos grados de compatibilidad y, en consecuencia, a distintos algoritmos para realizar la inferencia.

A continuación se proponen dos métodos distintos para encontrar el grado de compatibilidad entre dos conjuntos, en función del contexto en que se trabaje en un momento dado. En el primero de ellos el grado de compatibilidad se interpreta como el *grado de solapamiento* entre los dos conjuntos, y deberá usarse cuando el concepto temporal difuso asociado al antecedente agrupe instantes mutuamente excluyentes. El segundo método se basa en tomar el *grado de inclusión* de un conjunto en otro, y puesto que tiene en cuenta todos los elementos del soporte de los conjuntos, se utilizará cuando el concepto temporal agrupe valores mutuamente incluyentes.

4.4.2 Grado de compatibilidad como grado de solapamiento

Desde este punto de vista el valor de w se obtiene tomando $\wedge = \text{mínimo}$ y $\vee = \text{máximo sobre } x$ en la expresión (4.7), con lo que el grado de verdad de la proposición (4.9) resulta

$$w_s = \max_{x \in X} \left\{ \min(\mu_{XA}(x), \mu_{Grande}(x)) \right\} \quad (4.15)$$

en la que el subíndice s de w_s recuerda que w se obtiene a partir del grado de solapamiento. Definimos pues este grado de solapamiento entre dos conjuntos difusos como el mayor grado de pertenencia de todos los elementos de la intersección de los dos conjuntos. Puesto que la expresión (4.12) permite poner $\mu_{XA}(x)$ en función de $\mu_{Antes}(n-k)$, si se hace esta sustitución en la expresión anterior se obtiene

$$w_s = \max_{x \in X} \left\{ \min \left(\max_{k|k=f^{-1}(x)} \left\{ \mu_{Antes}(n-k) \right\}, \mu_{Grande}(x) \right) \right\} \quad (4.16)$$

y dado que x es, de hecho, una función del tiempo k , el máximo sobre x puede realizarse en la variable k y agruparlo con el otro, obteniendo

$$w_s(n) = \max_{k \in [-\infty, n]} \left\{ \min(\mu_{Antes}(n-k), \mu_{Grande}(x(k))) \right\} \quad (4.17)$$

en donde el intervalo de aplicación del máximo se ha puesto considerando que el concepto difuso “Antes” es cero para $k > n$, para preservar la causalidad. Obsérvese que el resultado w es una función del tiempo n puesto que el intervalo sobre el que se calcula el máximo aumenta con n . Para el caso continuo, la expresión (4.17) es prácticamente idéntica, sustituyendo simplemente el máximo por el supremo, resultando también una función del tiempo dada por

$$w_s(t) = \sup_{\tau \in [-\infty, t]} \left\{ \min(\mu_{\text{Antes}}(t - \tau), \mu_{\text{Grande}}(x(\tau))) \right\} \quad (4.18)$$

De estos dos resultados, la expresión (4.17) es un resultado de extraordinario interés, puesto que va a permitir realizar el cálculo de w_s en tiempo real, mediante el uso de una estructura equivalente a la de un filtro digital. La implementación de la ecuación (4.18), por el contrario, va a resultar mucho más compleja, pues requiere construir un circuito analógico dinámico y no lineal. Ambos puntos se analizarán detalladamente cuando se comenten las distintas implementaciones de los algoritmos, en la sección 4.5.

4.4.3 Grado de compatibilidad como grado de inclusión

El grado de inclusión de un conjunto B en otro A es un índice perfectamente válido para encontrar el grado de compatibilidad de dos conjuntos, cuando se desea que a ese grado contribuyan todos los elementos del soporte de A y B. Ello es así porque la expresión del grado de inclusión efectúa un sumatorio en lugar de una operación máximo. La expresión para el grado de inclusión se ha demostrado en la sección 2.3.2, al tratar los subconjuntos difusos, llegándose a la ecuación (2.12). Particularizando esta ecuación para los conjuntos que se desea comparar, se obtiene que el grado de verdad de la expresión (4.14) es

$$\begin{aligned} w_i = S(XA, \text{Grande}) &= \frac{|XA \cap \text{Grande}|}{|XA|} \\ &= \frac{\sum_{x \in X} \mu_{XA}(x) \wedge \mu_{\text{Grande}}(x)}{\sum_{x \in X} \mu_{XA}(x)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

En donde el subíndice i de w_i distingue este grado de verdad, obtenido como grado de inclusión, de w_s . De forma similar a lo que se ha efectuado en la determinación de w_s , los

sumatorios de la expresión anterior se traspasan a la variable k , puesto que x es, de hecho, una función del tiempo k . Además, se pone $\mu_{XA}(x)$ en función de $\mu_{Antes}(n-k)$. Se obtiene entonces

$$w_i = \frac{\sum_{k \in K} \left(\max_{k|k=f^{-1}(x)} \{ \mu_{Antes}(n-k) \} \wedge \mu_{Grande}(x(k)) \right)}{\sum_{k \in K} \max_{k|k=f^{-1}(x)} \{ \mu_{Antes}(n-k) \}} \quad (4.20)$$

En la ecuación (4.20) el máximo debe de tomarse entre todos los grados de pertenencia $\mu_{Antes}(n-k)$ correspondientes a aquellas k que tengan la misma imagen $x(k)$. Sin embargo cabe señalar que esta situación, aunque posible en teoría, no se dará nunca en la realidad debido a que es prácticamente imposible que una función tome *exactamente* el mismo valor en dos muestras distintas. Aún en el caso extremo de una secuencia $x(k)$ constante, bastarán variaciones infinitesimales (debidas al ruido u otras causas) en el valor de $x(k)$ para poder considerar que cada k tiene una imagen distinta. De todo ello se deduce que podemos obviar las funciones máximo en la ecuación (4.20), con lo que ésta se convierte en la ecuación (4.21), en la que los índices del sumatorio se han puesto teniendo en cuenta que cualquier concepto temporal difuso es cero para $k > n$

$$w_i = \frac{\sum_{k=-\infty}^n (\mu_{Antes}(n-k) \wedge \mu_{Grande}(x(k)))}{\sum_{k=-\infty}^n \mu_{Antes}(n-k)} \quad (4.21)$$

Este resultado tiene validez general, y admite su implementación directa. Hay que notar, sin embargo, que si bien en el numerador de la expresión (4.21) debe usarse el *mínimo* como t-norma difusa, el uso de otras t-normas arrojará resultados parecidos, algunos de los cuales pueden ser de interés desde el punto de vista teórico y/o de la realización.

Profundizando un poco más en esta cuestión, puede pensarse incluso que la función mínimo es aún demasiado restrictiva de cara a la consideración de **todos** los elementos del soporte, puesto que de cada par de valores (μ_{Antes} , μ_{Grande}) escoge sólo uno. Puesto que las condiciones listadas en la Tabla 4-2 restringen las t-normas aplicables al mínimo y el producto, sólo podemos tomar en consideración esta última opción. La utilización del producto en lugar del mínimo es una opción más bien conservadora,

puesto que dados dos valores $a, b \in [0, 1]$ se tiene siempre que $ab < \min(a, b)$, con lo cual el grado de inclusión calculado con el producto siempre será algo menor que el calculado con el mínimo. Por lo demás, los resultados obtenidos no variarán significativamente respecto de los devueltos por (4.21). Tomando, pues, el *producto* como t-norma difusa, esta última ecuación se convierte en

$$w_i = \frac{\sum_{k=-\infty}^n \mu_{\text{Antes}}(n-k) \cdot \mu_{\text{Grande}}(x(k))}{\sum_{k=-\infty}^n \mu_{\text{Antes}}(n-k)} \quad (4.22)$$

Llegados a este punto, puede definirse $\tilde{\mu}_{\text{Antes}}(n-k) \equiv \frac{\mu_{\text{Antes}}(n-k)}{\sum_{k=-\infty}^n \mu_{\text{Antes}}(n-k)}$ como la función

de pertenencia $\mu_{\text{Antes}}(n-k)$ normalizada a **área unidad**. Incorporándola en la expresión (4.22), ésta resulta

$$w_i(n) = \sum_{k=-\infty}^n \tilde{\mu}_{\text{Antes}}(n-k) \cdot \mu_{\text{Grande}}(x(k)) \quad (4.23)$$

De forma parecida a lo que se comentó para el grado de solapamiento, el resultado de la expresión (4.22) es una función del tiempo n , puesto que el rango de valores para el que se calcula el sumatorio aumenta constantemente. De hecho esta expresión no es más que la **convolución discreta** entre las funciones $\mu_{\text{Grande}}(x(k))$ y $\mu_{\text{Antes}}(k)$ normalizada a área unidad. Por razones obvias, este resultado reviste un interés extraordinario, y va a permitir fácilmente su realización física. Todo ello se comenta en la sección 4.5.

Esta expresión puede trasladarse al caso continuo de forma inmediata, tomando simplemente el equivalente continuo de la convolución. Sin embargo, existe un punto que debe tomarse en consideración antes de hacer esto: dado que una función continua pasa por todos los puntos intermedios entre dos valores dados, la eliminación del máximo en la ecuación (4.20) no puede hacerse en este caso. Esto representa un problema, puesto que entonces la expresión resultante pierde su estructura de convolución.

Se resolverá esta dificultad simplemente eliminando el operador máximo y obviando el problema de las repeticiones. Dado que el algoritmo de cálculo de w efectúa

la suma para toda k , aquellos valores de x que tengan dos o más antiimágenes distintas se contabilizarán dos o más veces, cada uno ponderado por un factor distinto. Sin embargo creemos que esto no constituye un inconveniente especial, y que incluso puede ser deseable porque de este modo se tienen en cuenta de forma real **todos** los elementos del soporte del concepto temporal difuso. El resultado final, pues, será distinto al del caso discreto, aunque el valor devuelto por la expresión continua reflejará igual de bien el grado de compatibilidad deseado.

Según lo que acaba de exponerse, la expresión equivalente a (4.23) para el caso continuo es

$$w_i(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{\mu}_{\text{Antes}}(t - \tau) \cdot \mu_{\text{Grande}}(x(\tau)) \cdot d\tau \quad (4.24)$$

De la estructura de las ecuaciones (4.23) y (4.24) se infiere que su implementación va a resultar inmediata mediante el diseño de un circuito lineal adecuado, ya sea digital o analógico, lo cual se comenta detalladamente en la sección siguiente.

4.5 Implementaciones de los algoritmos

4.5.1 Preliminares

Hasta ahora se han propuesto dos algoritmos para calcular el grado de verdad del antecedente de reglas temporales difusas, que difieren en la interpretación semántica que asocian al concepto temporal. De cada algoritmo se han deducido expresiones para el caso discreto y continuo, dando lugar de este modo a cuatro formas distintas de obtener el valor w deseado.

Definidos pues los algoritmos en el plano matemático, es necesario diseñar estructuras físicas que los realicen en tiempo real, pues éste es una de las exigencias con que se planteó este trabajo. Y es precisamente en este punto en donde las expresiones obtenidas revelan su mayor potencial. En efecto, las expresiones (4.23) y (4.24) no son sino una suma y una integral de convolución, con lo que su implementación puede llevarse a cabo con facilidad mediante un circuito digital o analógico, ambos lineales. Esto abre interesantes perspectivas a la presente tesis, pues permite utilizar la teoría de sistemas lineales en el proceso de diseño de estos circuitos.

Por otra parte, las expresiones del grado de solapamiento no son lineales, puesto que contienen operadores máximo y mínimo. En consecuencia, no puede utilizarse un circuito lineal para realizarlas. Sin embargo, observando detenidamente la ecuación (4.17) puede verse que su estructura es muy similar a la de un filtro discreto lineal, pero intercambiando la operación producto por el mínimo y la suma por el máximo. Ello sugiere inmediatamente implementar la citada ecuación mediante una estructura modificada de filtro digital. En cuanto a la última expresión bajo consideración, la (4.18), cabe decir que será ésta la que planteará las principales dificultades, pues deberá realizarse mediante un circuito dinámico no lineal, para el cual no existirán métodos eficaces de diseño, como se comenta más adelante.

Seguidamente se profundiza en lo que acaba de comentarse, y se presentan las estructuras que realizan las expresiones para cada caso. Para dar generalidad a las expresiones, se sustituirán los conjuntos difusos “Antes” y “Grande” con los que se trabajó en la sección anterior por los más genéricos “CT” y “A”, respectivamente, que aparecen en la expresión (4.8), que se repite a continuación para comodidad del lector

$$\text{si } X \text{ es A en CT entonces } Y \text{ es B} \quad (4.8)$$

4.5.2 Determinación del grado de inclusión

Se empezará por la mecanización de las expresiones correspondientes al grado de inclusión puesto que, al ser más conocidas, las estructuras que las realizan son inmediatas. Considérese en primer lugar la expresión (4.23), que da el grado de verdad del antecedente de la regla (4.9). Sustituyendo los conjuntos “Antes” y “Grande” por “CT” y “A” se obtiene

$$w_i(n) = \sum_{k=-\infty}^n \tilde{\mu}_{CT}(n-k) \cdot \mu_A(x(k)) \quad (4.25)$$

La expresión (4.26) da la respuesta $y(n)$ de un filtro digital lineal y de respuesta impulsional finita (FIR), a una secuencia de entrada $x(n)$.

$$y(n) = \sum_{k=n-N}^n h(n-k) \cdot x(k) \quad (4.26)$$

en la que $h(n)$ es la respuesta al impulso del sistema, que se supone finita y de longitud N muestras.

El paralelismo entre (4.25) y (4.26) es evidente, exceptuando el hecho de que el sumatorio de la primera ecuación se realiza desde $-\infty$. Esto se debe a que el concepto temporal "CT" con que se trabaja puede extenderse hasta el pasado remoto. Sin embargo, esta situación, aunque posible, no será la habitual y en la práctica podrá trabajarse siempre con conceptos temporales cuya extensión hacia el pasado sea como mucho de N muestras, con lo que la expresión (4.25) puede escribirse como

$$w_i(n) = \sum_{k=n-N}^n \tilde{\mu}_{CT}(n-k) \cdot \mu_A(x(k)) \quad (4.27)$$

de estructura muy similar a (4.26). Esta equivalencia sugiere encontrar la secuencia $w_i(n)$ como la salida de un filtro FIR cuya respuesta al impulso sea la función $\tilde{\mu}_{CT}(n)$ -dada

por $\tilde{\mu}_{CT}(n) \equiv \frac{\mu_{CT}(n)}{\sum_{k=0}^N \mu_{CT}(k)}$, es decir, por la función de pertenencia normalizada a área

unidad- y a cuya entrada se suministre la secuencia $\mu_A(x(n))$, que no es más que el resultado de hacer pasar $x(n)$ a través de un fuzzificador cuya función de pertenencia sea $\mu_A(x)$. Todo el proceso se ilustra en la Figura 4.15.

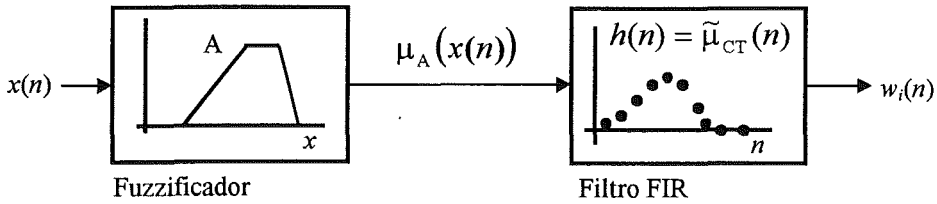


Figura 4.15: Diagrama de bloques para la obtención de (4.25)

Este diagrama de bloques puede llevarse a la práctica tanto con un programa como con un sistema digital. Ambas soluciones se muestran a continuación. La Figura 4.16 contiene el listado de un programa, realizado en lenguaje PASCAL, que implementa el algoritmo de cálculo de $w_i(n)$ a partir de la entrada $x(n)$, el conjunto A y los coeficientes de la respuesta al impulso del circuito, que caracterizan al concepto temporal deseado.

Se empieza con una inicialización de las variables internas, efectuado por el procedimiento *Inicializa*, que deberá escribirse para cada entorno particular. Una de las misiones de la citada rutina es la de llenar la matriz h con los coeficientes de la respuesta al impulso deseada, es decir, $\tilde{\mu}_{CT}(n)$. A continuación empieza el bucle de cálculo propiamente dicho, que se ejecutará para cada muestra indefinidamente, o hasta que el operador del proceso desee detenerlo. El proceso para cada muestra es sumamente simple:

```

program inclusion;

const
  N=10;           {Orden del circuito. Sustituir
adecuadamente}

var
  xn,wn,mu: Real; {muestras actuales de la entrada y
la salida, y salida del fuzzificador}
  h: array[0..N] of real; {Coeficientes de la
respuesta al impulso}
  m: array[0..N] of real; {Memoria para los retardos.
Por comodidad se usan N+1 valores}
  k: integer;      {contador para el bucle de
suma}

begin
{Se borra la memoria y se llena la matriz h con los coef.
de la respuesta al impulso}
  Inicializa;

  while true do {Bucle infinito de filtrado}
  begin
    xn := Nueva_Muestra; {Se pide un nuevo valor al
muestreador}
    mu := Fuzzifica(xn); {Se encuentra el grado de
pertenencia de xn al conjunto A}
    Shift_mem(mu); {se desplaza en 1 la matriz
de retardos y se introduce mu}
    wn := 0; {Se inicializa la variable
acumuladora}
    for k := 0 to N do {Se realiza la convolución
con un bucle suma-producto}
      wn := wn + h[k]*m[k]; {El valor final de wn
contiene el resultado}
    Nueva_Salida(wn); {Se da salida a un nuevo
valor}
  end;
end.

```

Figura 4.16: Implementación software del cálculo de $w_i(n)$ en (4.27)

- a) Se pide un nuevo valor al sistema de muestreo, generalmente un conversor A/D.
- b) Se pasa este valor por un fuzzificador, para obtener $\mu_A(x(n))$. Este número se introduce en la cadena de retardos, desplazando al resto de valores y descartando el más antiguo.
- c) Con la salida del fuzzificador se procede a efectuar la convolución. Para ello se inicializa la variable acumuladora a cero y se efectúa el bucle de suma descrito por (4.27).
- d) El resultado final se suministra a un procedimiento de salida para que lo entregue al siguiente módulo (Cálculo de B^* a partir de B y $w_i(n)$)

La Figura 4.17 muestra el diseño esquemático de un circuito digital que realiza el mismo algoritmo pero de forma *hardware*.

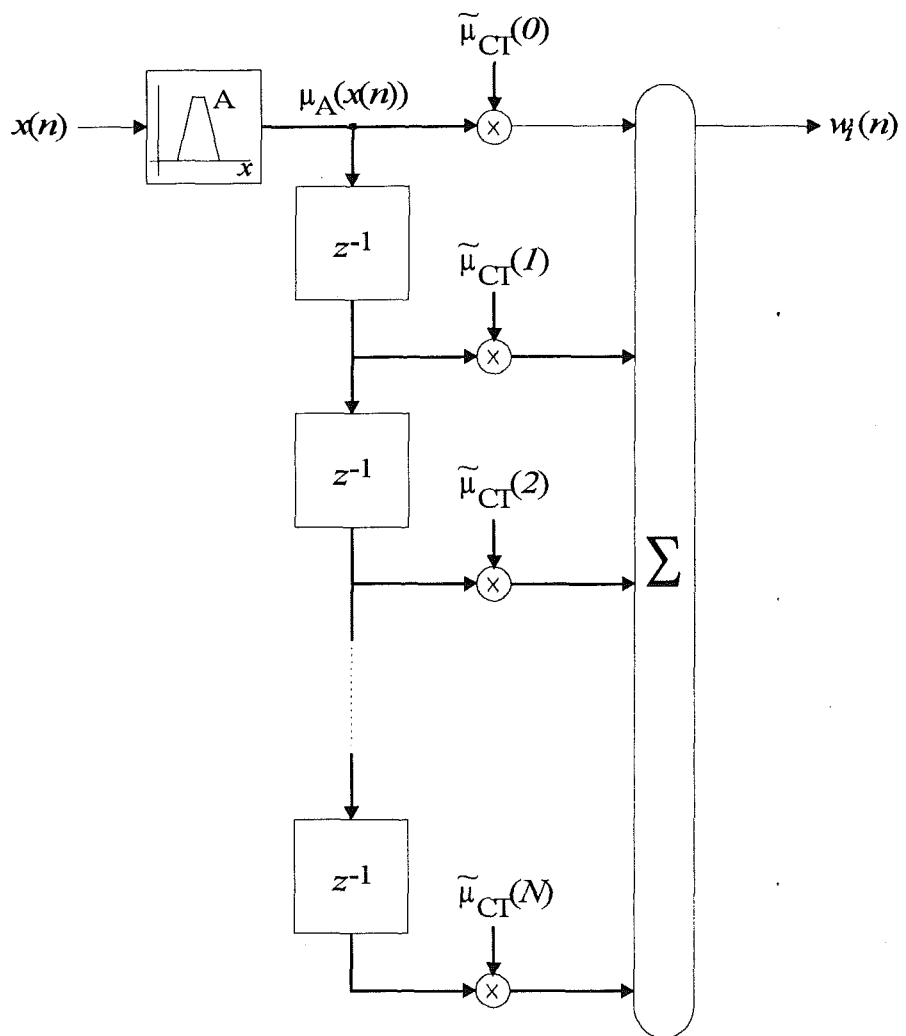


Figura 4.17: Estructura hardware que realiza (4.27)

Si el hecho de tener limitada la longitud del concepto temporal a un número finito de muestras constituye un problema en alguna aplicación, nada impide sustituir el circuito FIR por un IIR, cuya respuesta al impulso tiene duración infinita y permitiría representar adecuadamente los conceptos temporales menos convencionales. Lo que ocurre entonces es que la estructura interna del circuito varía ligeramente, puesto que existen caminos de retroacción y además los coeficientes del circuito no son directamente las muestras de la respuesta al impulso, sino que son los coeficientes del numerador y denominador de la transformada Z. Además, la forma de la respuesta al impulso no puede en este caso controlarse a voluntad, como sucede en un FIR, y debe recurrirse a técnicas como la teoría de la aproximación o la optimización para diseñar el circuito.

Una vez discutida la implementación de la versión discreta del grado de inclusión, se aborda a continuación el diseño de la versión continua, a saber, la expresión (4.24). Su generalización a los conjuntos genéricos A y CT está dada por

$$w_i(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{\mu}_{CT}(t - \tau) \cdot \mu_A(x(\tau)) \cdot d\tau \quad (4.28)$$

Al igual que se dedujo en el caso discreto, dicha expresión no es más que la convolución continua entre las señales $\tilde{\mu}_{CT}(t)$ y $\mu_A(x(t))$, es decir, $w_i(t) = \tilde{\mu}_{CT}(t) * \mu_A(x(t))$, en donde el símbolo $*$ representa la convolución. Esta operación la realiza de forma automática cualquier circuito lineal, y en particular el resultado deseado en (4.28) se obtendrá siempre a la salida de un sistema lineal cuya respuesta al impulso esté dada por la función $\tilde{\mu}_{CT}(t)$, y a cuya entrada se le suministre $\mu_A(x(t))$, obteniéndose esta última señal como la salida de un fuzzificador asociado al conjunto difuso A, con una entrada igual a $x(n)$. El diagrama de bloques de todo el proceso se ilustra en la Figura 4.18, que es idéntico a la Figura 4.15 pero en el dominio continuo en lugar del discreto.

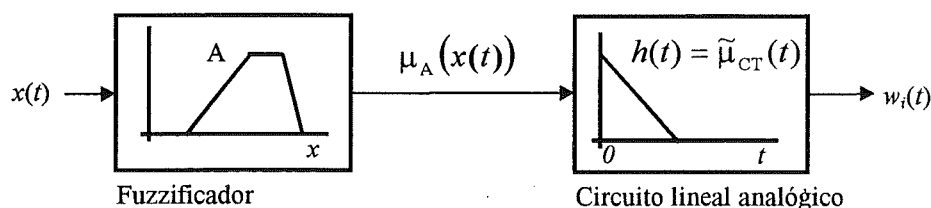


Figura 4.18: Diagrama de bloques para la obtención de (4.28)

A modo de ejemplo, considérese el problema de determinar el grado de verdad de la proposición “X Ahora es Pequeño”, que podría ser perfectamente el antecedente de cualquier regla temporal difusa. En esta expresión, tanto el concepto “Pequeño” como el “Ahora” son difusos, representándose este último por la curva de la Figura 4.19 a).

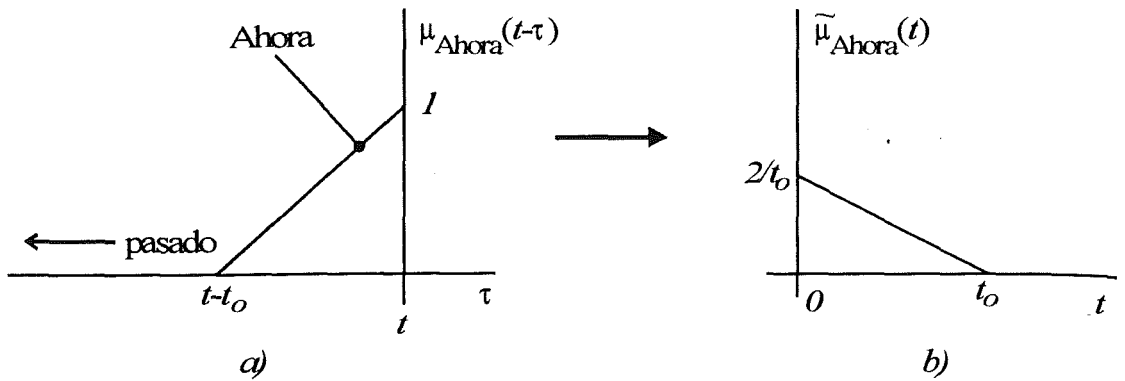


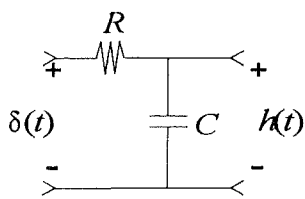
Figura 4.19: Concepto temporal difuso "Ahora"

Esta curva pretende expresar el hecho intuitivo de que el vocablo "Ahora" denota no sólo al instante actual, sino también el conjunto de instantes inmediatamente anteriores, con un grado de pertenencia que disminuye progresivamente hasta hacerse cero t_0 segundos antes. Para implementar este concepto, se necesita un circuito cuya respuesta al impulso sea la de la Figura 4.19 b). No obstante, es fácil ver que no existe ningún sistema lineal con un comportamiento como el requerido, puesto que todo sistema de estas características presenta siempre una respuesta impulsional de duración infinita. Ello significa que deberá recurrirse a una *aproximación* adecuada para poder diseñar el circuito.

En el caso que nos ocupa se ha procedido a aproximar esta respuesta mediante una exponencial del tipo $h(t) = \tilde{\mu}_{\text{Ahora}}(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$. Como muestra la Figura 4.20, es fácil ver que el área bajo esta función vale 1 y que su forma no difiere demasiado del prototipo deseado, cumpliendo así los requisitos matemáticos y semánticos exigibles. Esta función tiene como transformada de Laplace

$$L\{\tilde{\mu}_{\text{Ahora}}(t)\} = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad (4.29)$$

que presenta un polo real simple en $s = -\alpha$, al igual que el circuito RC mostrado en la Figura 4.20 haciendo $\alpha = 1/RC$, con lo que la realización de este concepto concreto se convierte en extraordinariamente simple.



Ejemplo:
 $R=200\text{k}\Omega$
 $C=1\mu\text{F}$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

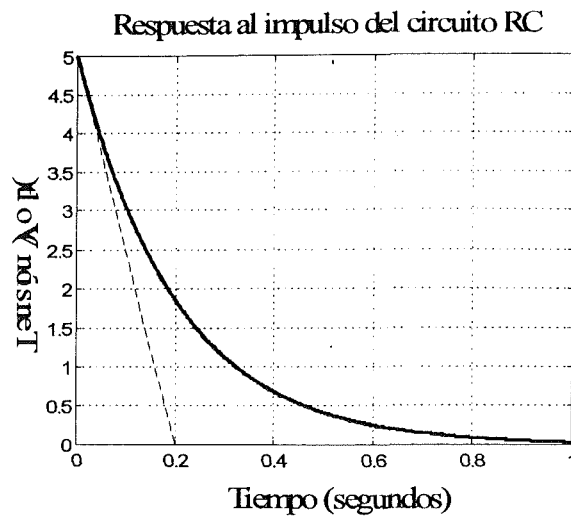


Figura 4.20: Circuito para la realización del concepto “Ahora”

Como ejemplo adicional se procede a continuación a realizar el concepto temporal “Antes”, cuya plantilla se da en la Figura 4.21 a). El circuito que implementa este concepto tiene una respuesta al impulso que, normalizada a área unidad, se muestra en la Figura 4.21 b). Como en el caso anterior, no existe ningún circuito analógico lineal realizable que presente esta respuesta, pues es de duración finita. En estas circunstancias debe elegirse otra función que sí sea realizable y que se aproxime lo más posible a la deseada. Buscando un compromiso adecuado entre exactitud y sencillez, una posible candidata para el concepto “Ahora” es la función $h(t) = \tilde{\mu}_{\text{Antes}}(t) = \alpha^2 \cdot t \cdot e^{-\alpha t} \cdot u(t)$, cuya forma se muestra en la Figura 4.22 y que tiene como transformada de Laplace la función

$$L\{\tilde{\mu}_{\text{Antes}}(t)\} = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2} = \frac{\alpha}{s+\alpha} \cdot \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad (4.30)$$

lo que sugiere su realización mediante la conexión en cascada a través de una etapa separadora de dos células RC idénticas a las del ejemplo anterior, conformando un circuito de segundo orden con un polo real doble situado en $s = -\alpha = -1/RC$. También en este caso, pues, el concepto temporal presentado puede implementarse de forma relativamente simple.

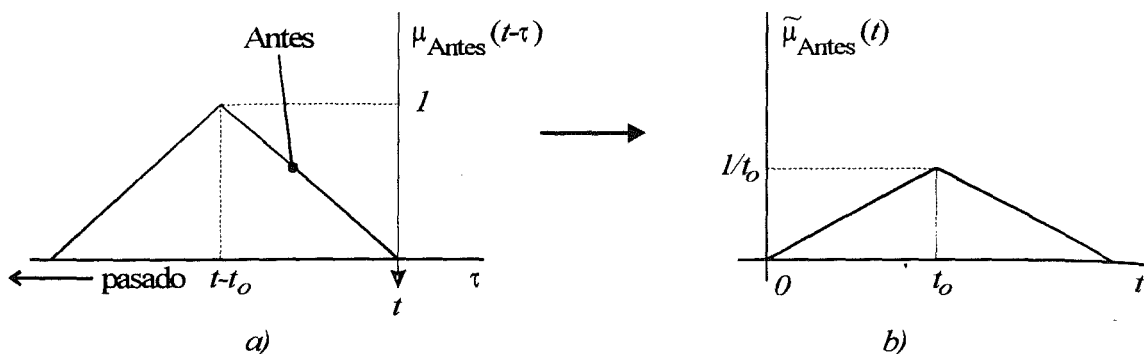
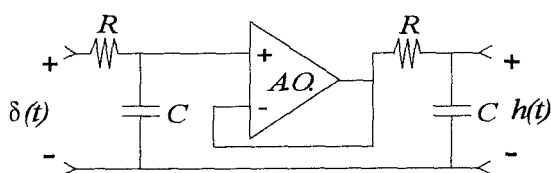


Figura 4.21: Concepto temporal difuso "Antes"



Ejemplo:
 $R=200k\Omega$
 $C=1\mu F$

$$h(t) = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 e^{-t/RC} u(t)$$

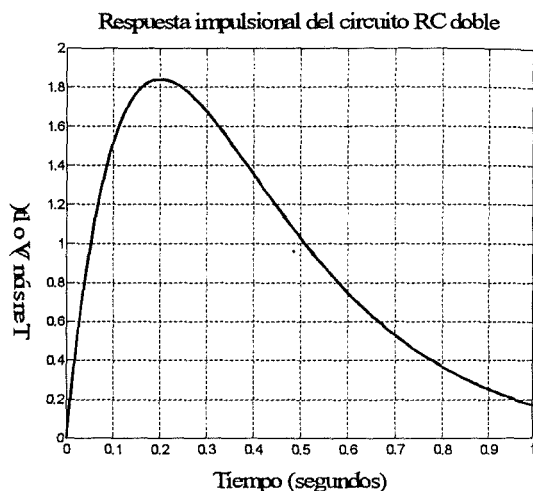


Figura 4.22: Circuito para la realización del concepto "Antes"

Para un concepto temporal mas genérico, o si el resultado final no es totalmente satisfactorio, deberá procederse a encontrar mejores aproximaciones que las presentadas. El problema que surge en este caso es que la teoría de la aproximación para filtros lineales está muy desarrollada en el dominio de la frecuencia, pero mucho menos en el dominio del tiempo, por lo que la tarea de acometer el diseño de tales sistemas puede llegar a ser ardua. Para subsanar en parte estas limitaciones y dotar a los algoritmos expuestos de herramientas propias de diseño, en el capítulo 5 se desarrolla un método, basado en los aproximantes de Padé y en técnicas de optimización en el dominio temporal, para encontrar el circuito que mejor aproxime una respuesta al impulso dada. De esta forma es posible implementar, con las limitaciones que allí se indican, todo tipo de conceptos temporales difusos continuos.

4.5.3 Determinación del grado de solapamiento

Se procederá a continuación a tratar la cuestión de determinar la mejor realización *hardware* para las expresiones (4.17) y (4.18). La primera de ellas, reescrita para los conceptos difusos genéricos "A" y "CT", permite encontrar el grado de compatibilidad del antecedente, en el dominio discreto, como

$$w_s(n) = \max_{k \in [n-N, n]} \{ \min(\mu_{CT}(n-k), \mu_A(x(k))) \} \quad (4.31)$$

ecuación en la que, al igual que se justificó para el grado de inclusión discreto, se ha truncado el rango de valores sobre los que opera la función *máximo* hasta N, suponiendo de este modo que los conceptos temporales que se manejen no tendrán una longitud mayor.

La expresión resultante, (4.31), es no lineal, por lo que no puede utilizarse una estructura de filtro digital clásico para realizarla. Sin embargo, la similitud estructural con la expresión lineal sugiere designarla con el nombre de **convolución difusa discreta**, y llevar a cabo su implementación mediante la misma estructura de filtro discreto, pero sustituyendo los productos por *mínimos* y el sumatorio por un *máximo*. Ello da lugar a una estructura muy eficiente, pues desde el punto de vista del cálculo es mucho más rápido realizar máximos y mínimos que sumas y -sobre todo- productos, puesto que las dos primeras operaciones sólo son en el fondo *comparaciones*, cuya ejecución requiere generalmente una única instrucción, si se realiza sobre un microprocesador, o un único ciclo de reloj, si se implementa sobre un circuito digital.

```

program solapamiento;

const
    N=10;                                {Orden del circuito. Sustituir
adecuadamente}

var
    xn,wn,mu: Real;    {muestras actuales de la entrada y
la salida, y salida del fuzzificador}
    h: array[0..N] of real;    {Coeficientes de la
respuesta al impulso}
    m: array[0..N] of real;    {Memoria para los retardos.
Por comodidad se usan N+1 valores}
    k: integer;                {contador para el bucle de
suma}

begin
    {Se borra la memoria y se llena la matriz h con los coef.
de la respuesta al impulso}
    Inicializa;

    while true do    {Bucle infinito de filtrado}
    begin
        xn := Nueva_Muestra;    {Se pide un nuevo valor al
muestreador}
        mu := Fuzzifica(xn);    {Se encuentra el grado de
pertenencia de xn al conjunto A}
        Shift_mem(mu);    {se desplaza en 1 la matriz
de retardos y se introduce mu}
        wn := 0;    {Se inicializa la variable
acumuladora}
        for k := 0 to N do    {Se realiza la convolución
difusa con un bucle max-min}
            wn := max(wn, min(h[k],m[k]) );    {El valor
final de wn contiene el resultado}
        Nueva_Salida(wn);    {Se da salida a un nuevo
valor}
    end;
end.

```

Figura 4.23: Implementación software del cálculo de $w(n)$ en (4.31)

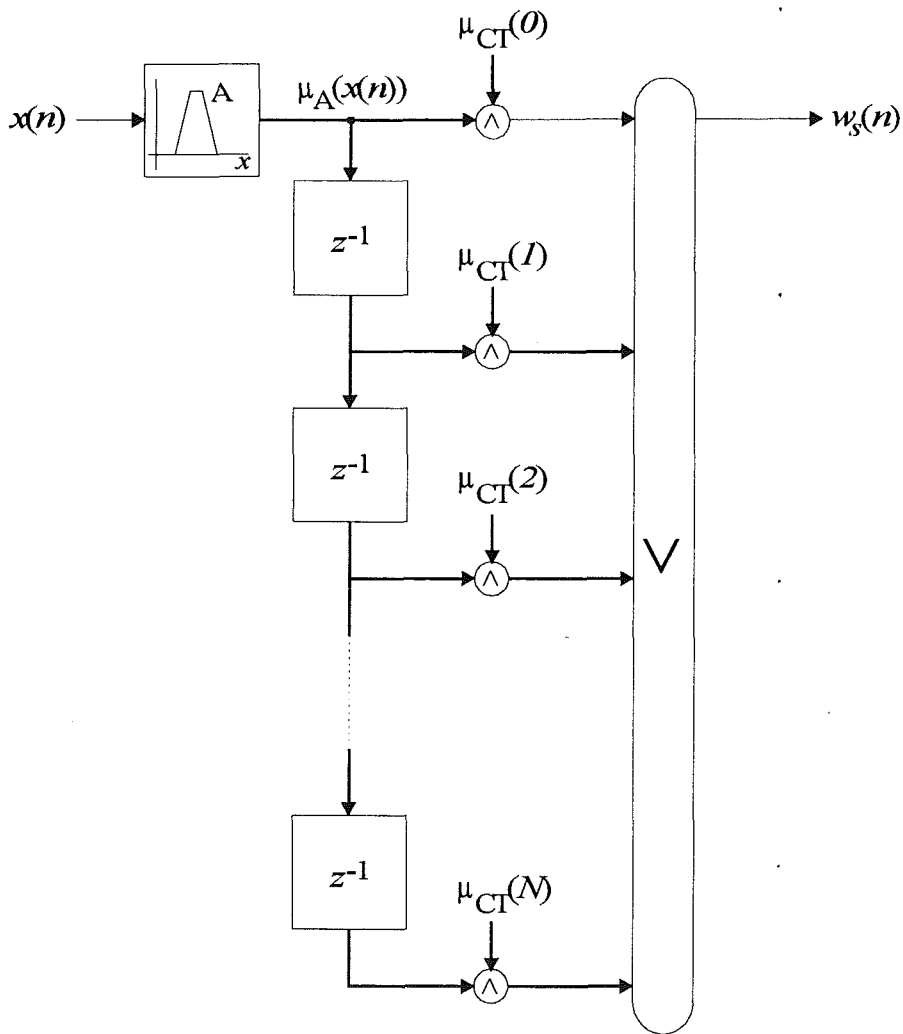


Figura 4.24: Estructura hardware que realiza (4.31)

Por último resta considerar la expresión (4.18), que genéricamente es

$$w_s(t) = \sup_{\tau \in [-\infty, t]} \{ \min(\mu_{CT}(t - \tau), \mu_A(x(\tau))) \} \quad (4.32)$$

y a la que por similitud con la anterior llamaremos **convolución difusa continua**.

El algoritmo para obtener en este caso el grado $w_s(t)$ sería el siguiente: Se tomaría en primer lugar la entrada $x(t)$ y se pasaría a través de un fuzzificador que devolviese $\mu_A(x(t))$. A continuación esta función debería entrar en una línea de retardo en la que se efectuase el mínimo del valor de la tensión instante a instante con una cierta curva dada por $\mu_{CT}(t)$. La salida debería consistir en el máximo de todos los mínimos

mencionados. Evidentemente, una estructura que se comporte de este modo es imposible de diseñar mediante este razonamiento. Lamentablemente, tampoco parece existir una alternativa a la formulación anterior que aporte luz alguna sobre cómo proceder al diseño de tales sistemas, por lo que para implementar el grado de verdad como solapamiento podremos recurrir únicamente a la versión discreta del algoritmo.

Hasta el momento se han presentado las distintas estructuras *hardware* y *software* que permiten encontrar el grado de verdad del antecedente, $w(t)$, a partir de la entrada en cada instante. Sin embargo, la obtención de w no completa todo el proceso de inferencia, pues resta aún el modificar mediante este valor el conjunto inicial del consecuente, según lo estipulado en la ecuación (4.6). La realización de esta último proceso no presenta mayores problemas, pues es idéntica a la que se tiene para el caso difuso clásico. Las expresiones finales que permiten obtener el conjunto modificado del consecuente, B^* , a partir del consecuente original B y del grado de verdad del antecedente, calculado para los cuatro casos bajo estudio, se muestran en la Tabla 4-4

Tabla 4-4: Expresiones finales para la inferencia temporal difusa

<i>Opción</i>		<i>Expresión</i>	
Grado de solapamiento	discreto	$\mu_{B^*}(y, n) = \min\{w_s(n), \mu_B(y)\}$	(4.33)
	continuo	$\mu_{B^*}(y, t) = \inf\{w_s(t), \mu_B(y)\}$	(4.34)
Grado de inclusión	discreto	$\mu_{B^*}(y, n) = w_i(n) \cdot \mu_B(y)$	(4.35)
	continuo	$\mu_{B^*}(y, t) = w_i(t) \cdot \mu_B(y)$	(4.36)

Para ilustrar todo el proceso con un ejemplo, considérese la realización de la regla difusa (4.8), y que se repite a continuación para la comodidad del lector

$$\text{Si } X \text{ es } A \text{ en CT entonces } Y \text{ es } B \quad (4.37)$$

En ella, A y B son los valores numéricos difusos asociados al antecedente y consecuente de la regla, respectivamente, y CT designa al concepto temporal difuso asociado al antecedente. En tales condiciones, el diagrama de bloques del sistema que realiza esta regla difusa en el dominio discreto se muestra en la Figura 4.25, en la que se distinguen

los casos en que el concepto temporal sintetizado sea exclusivo (caso a) o inclusivo (caso b).

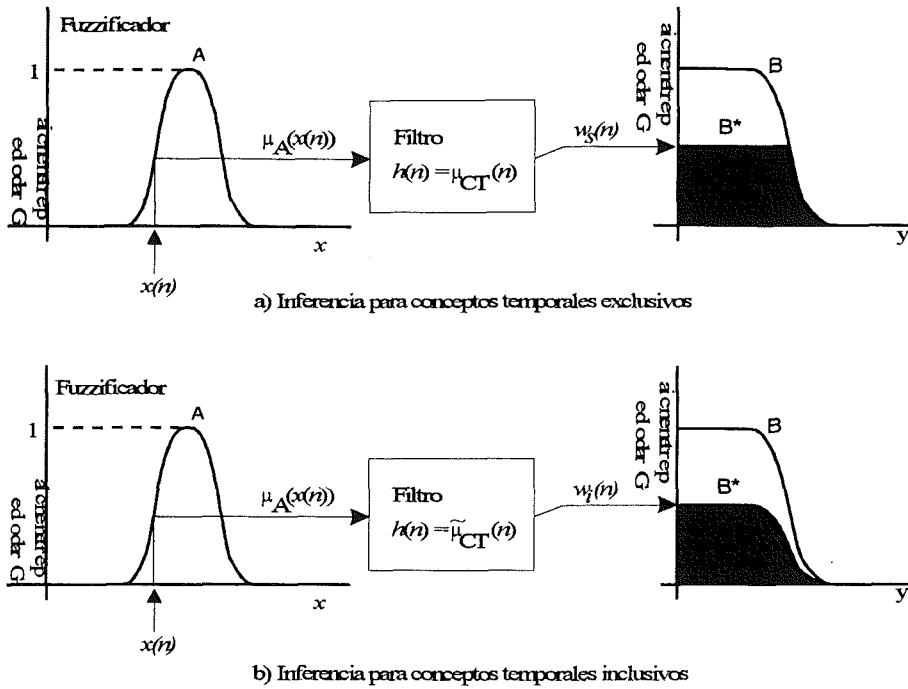


Figura 4.25: Esquema de inferencia para la regla "Si X es A en CT entonces Y es B"

Con esto se completa la descripción del proceso de inferencia para una regla temporal difusa simple, con sólo una proposición en el antecedente y otra en el consecuente. Como ya se comentó en la sección 4.3.7, en el caso de tener reglas más complejas se procederá a su descomposición previa en múltiples antecedentes y/o consecuentes, los cuales se realizarán por separado según el esquema aquí propuesto, para luego combinarse entre sí mediante operadores AND o OR difusos.

4.6 Valoración e interpretaciones de los métodos desarrollados

En el apartado anterior se han obtenido cuatro expresiones para encontrar el grado de verdad del antecedente de reglas temporales difusas, para los casos en que los conceptos temporales sean exclusivos o inclusivos, y distinguiendo las situaciones discretas de las continuas. Para tres de las expresiones se han obtenido realizaciones físicas sencillas, mientras que la cuarta, correspondiente al caso continuo inclusivo, requerirá un estudio más profundo para lograr un método sistemático de diseño. No

obstante, las tres soluciones obtenidas presentan ciertas características que las hacen especialmente interesantes:

En primer lugar, la estructura necesaria para realizar la inferencia difusa en presencia de conceptos temporales difiere muy poco de la estructura de un sistema difuso tradicional, puesto que únicamente es necesario sintetizar el concepto temporal deseado mediante un circuito -lineal o no- que se sitúa a la salida de un fuzzificador. Ello permite incorporar razonamientos temporales difusos de forma casi inmediata en los sistemas de inferencia existentes actualmente. Por otra parte, los algoritmos que se han obtenido separan completamente la fuzzificación de la amplitud de la fuzzificación del tiempo, por lo que permiten mezclar en un mismo sistema de inferencia reglas difusas estándar con reglas difusas temporales sin ningún tipo de problema. Gracias a esta propiedad, la complejidad del sistema final es proporcional al número de conceptos temporales implementados, resultando, pues, *escalable* a voluntad del diseñador.

En cuanto a la realización de los conceptos temporales en sí, debemos distinguir dos casos: el discreto y el continuo. Para el primero, el concepto temporal se expresa como la respuesta al impulso de un circuito FIR, tanto en su versión lineal como en la no lineal (max-min). Esto permite conseguir *cualquier* concepto temporal que se desee, puesto que en este tipo de filtros se tiene un control total sobre la ubicación y la forma de la respuesta impulsional. Por otra parte, el conseguir diseñar sistemas continuos con una respuesta al impulso arbitraria será en general imposible, debiéndose recurrir en la mayoría de los casos a encontrar una buena aproximación de la misma. Para conseguirla pueden utilizarse distintos métodos, entre los que destacan técnicas analíticas en el dominio del tiempo o bien métodos de optimización, como se desarrollará en el capítulo 5. En cualquier caso, la elección de uno u otro dependerá de las condiciones específicas de cada problema.

Cabe señalar que los conceptos temporales en el dominio discreto también se pueden sintetizar mediante un circuito IIR en lugar de un FIR, aunque en este caso se pierde transparencia y flexibilidad, puesto que los coeficientes del circuito no son ya directamente las muestras de la respuesta al impulso. Ello conlleva que el diseño del circuito deje de ser inmediato y también deba recurrirse a técnicas de aproximación parecidas a las mencionadas para el caso continuo.

En otro orden de cosas, se procede a continuación a mostrar una interesante interpretación de la operación de calcular el grado de verdad del antecedente, que realizan las ecuaciones (4.25), (4.28), (4.31) y (4.32). Para ello considérese la implementación de una regla difusa temporal cuyo antecedente sea

$$\text{Si } X \text{ Antes era Pequeño entonces...} \quad (4.38)$$

en donde "Antes" y "Pequeño" son conjuntos difusos en los universos $T=[0..20]$ y $X=[0..100]$, respectivamente, y cuyas gráficas se muestran en la Figura 4.26. Sin pérdida de generalidad, se tomará el concepto temporal "Antes" como exclusivo.

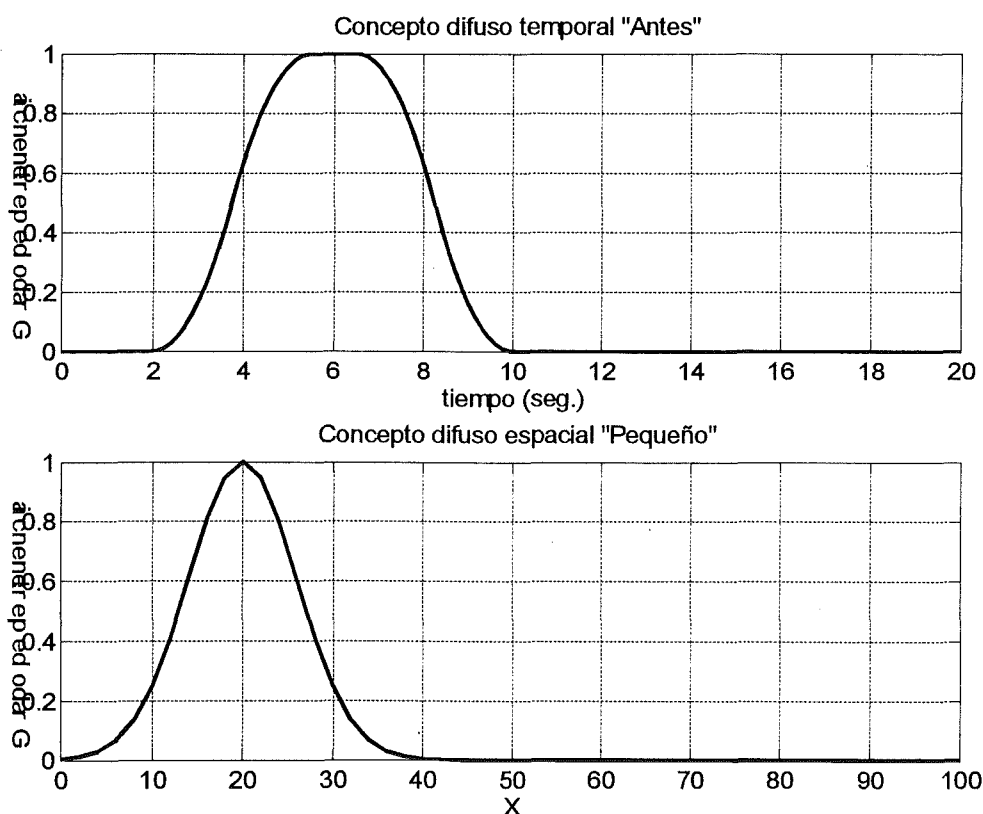


Figura 4.26: Conjuntos "Antes" y "Pequeño" de la expresión (4.38)

Considérese a continuación el problema de determinar en tiempo real el grado de verdad w_s de este antecedente en el dominio discreto (aunque el mismo razonamiento sirve para el caso continuo). Para ello se utilizará la expresión (4.31), adecuadamente particularizada con los conjuntos difusos que se utilizan en este caso concreto. El núcleo de esta expresión es una combinación mediante la función mínimo entre $\mu_{CT}(n-k)$ y $\mu_A(x)$, que para el caso que nos ocupa es

$$\min\{\mu_{\text{Antes}}(n-k), \mu_{\text{Pequeño}}(x)\} \quad (4.39)$$

Si no se interpreta x como una función de k , el resultado de (4.39) es una función bidimensional de k y x , que si se representa de forma relativa al instante actual, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 4.27

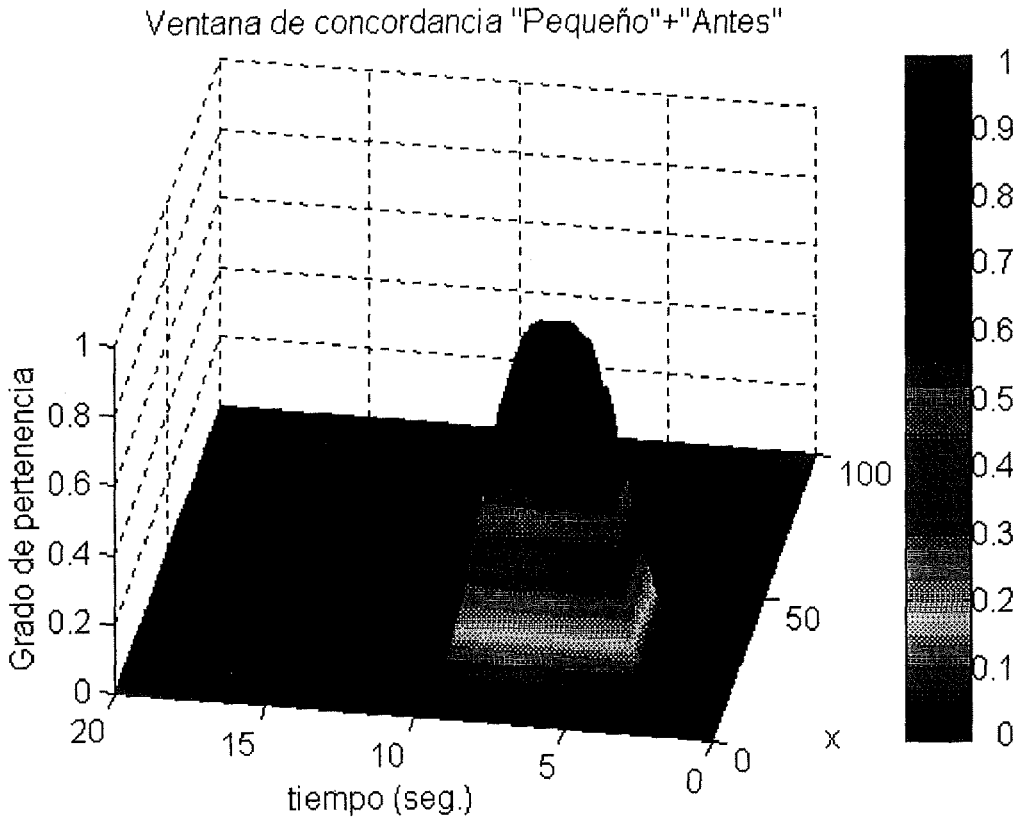


Figura 4.27: Grado de verdad de (4.38) para entradas impulsionales de distintas amplitudes

La superficie campaniforme mostrada en la figura agrupa todos los valores de tiempo y amplitud que, en el instante actual, son compatibles a la vez con el concepto “Antes” y el concepto “Pequeño”. Por lo tanto, esta superficie puede interpretarse como la *ventana de concordancia* entre la regla (4.38) y cualquier señal de entrada $x(n)$. De este modo, en cada instante la salida $w_s(n)$ será el resultado de agregar mediante la función máximo los valores de la entrada situados bajo la campana, previamente recortados a la altura de la misma.

Para poner de manifiesto esta propiedad de una forma gráfica, se ha calculado la función grado de verdad $w_s(n)$ de la regla (4.38) para una secuencia de entrada concreta $x(n)$, que se muestra en la Figura 4.28. Obsérvese que los rangos de valores considerados “Pequeños” según el conjunto difuso de la Figura 4.26 b), se dan básicamente en dos zonas de la entrada, situadas de forma aproximada entre 4 y 6 segundos y entre 16 y 18 segundos desde el instante inicial.

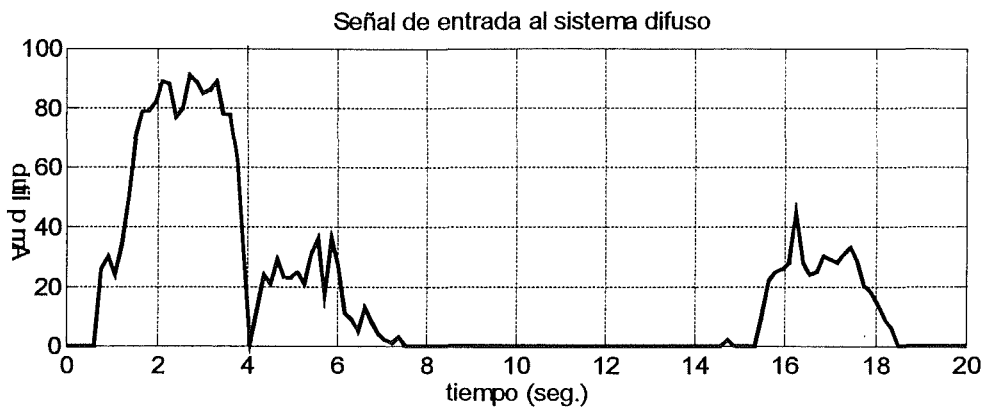


Figura 4.28: Señal de entrada al sistema

Una vez se ha introducido toda la señal de entrada en el sistema de inferencia, es decir, una vez transcurridos 20 segundos, la superposición de las gráficas de la señal de entrada y de la ventana de concordancia es la que se muestra en la Figura 4.29, en vista superior.

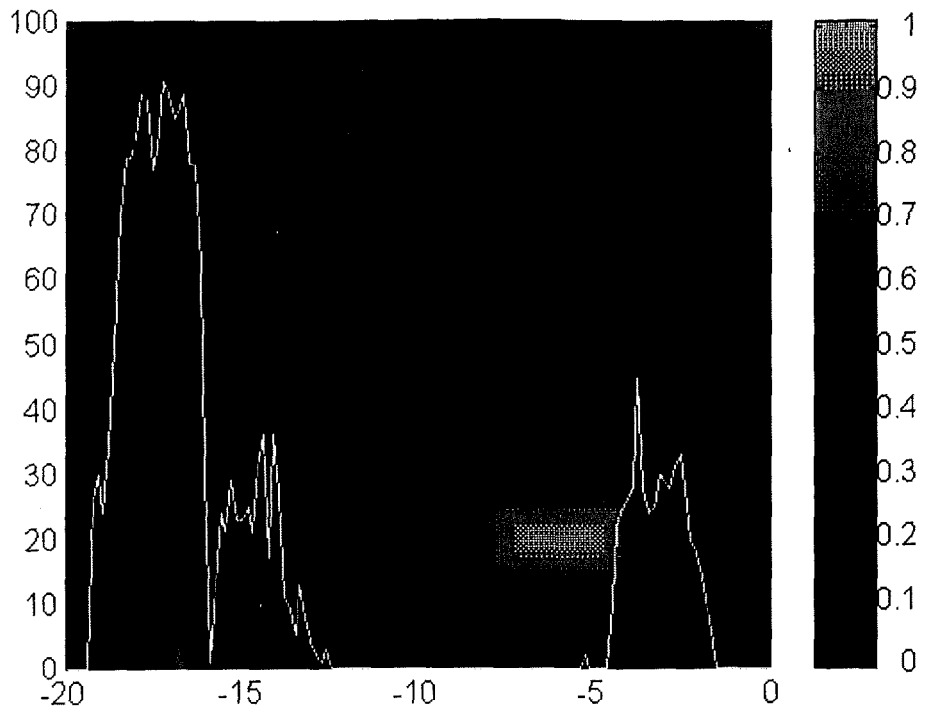


Figura 4.29: Concordancia entre la regla y la señal de entrada

En esta situación, el valor actual de la salida $w_s(n)$ se puede obtener gráficamente como el máximo valor de la intersección entre la gráfica de la curva $x(k)$ y la campana, para lo cual se asume que el grado de pertenencia de los puntos de la función es siempre 1 (pues se trata de una función nítida) y que se utiliza el mínimo como intersección. En la práctica esta operación se reduce a encontrar el punto de la función más próximo al valor máximo de la campana, y obtener el grado de pertenencia de ese punto. Para esta disposición concreta de las curvas, se desprende que ese valor es aproximadamente 0.8.

La comprobación de este resultado se tiene en la Figura 4.30, la cual representa la evolución de $w_s(n)$ desde el instante inicial, calculado mediante la expresión (4.31). En ella se observa que el valor del grado de verdad del antecedente para el instante actual ($t=20$) es, efectivamente, próximo a 0.8, y está creciendo debido a que la ventana de concordancia asociada a la regla está “entrando” en una zona en la que la señal de entrada adquirió valores considerados “Pequeños” alrededor de 6 segundos antes del instante actual (entre $t=11$ y $t=17$, aprox.). Estos 6 segundos son precisamente el retardo introducido por el concepto “Antes”

El resto de valores de $w_s(n)$ proceden de situaciones ya acaecidas, cuando la ventana de concordancia estaba situada sobre tramos anteriores de la señal de entrada. Por ejemplo la elevada salida entre $t=10$ y $t=12$ se dio cuando la ventana de concordancia estaba situada 6 segundos antes, entre $t=4$ y $t=6$, encima de una zona de la señal de entrada cuyos valores pertenecen también fuertemente al conjunto “Pequeño”.

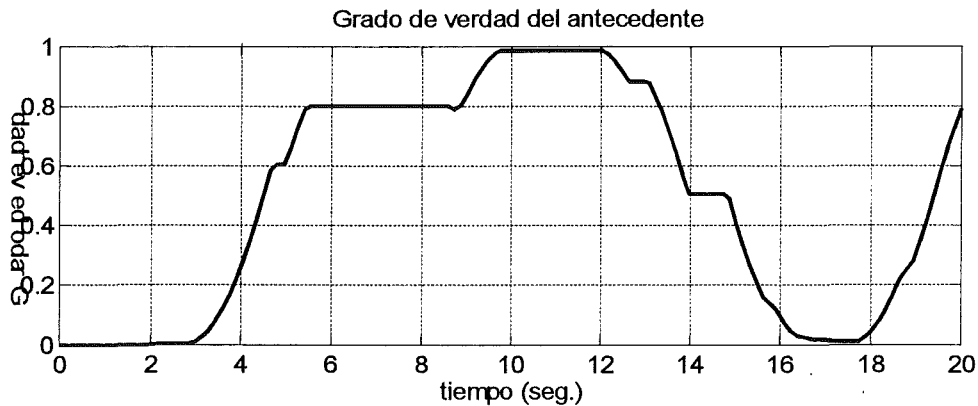


Figura 4.30: Grado de verdad de la regla (4.38) en función del tiempo

La interpretación de las convoluciones (4.25), (4.28), (4.31) y (4.32) como el grado de compatibilidad, instante a instante, entre la función de entrada x y una ventana de concordancia que se desplaza constituye un punto de vista extraordinariamente útil desde el punto de vista del diseño de sistemas de inferencia difusa temporal. Efectivamente, este punto de vista permite construir las reglas y los conjuntos difusos que las acompañan con sólo especificar una cierta disposición de ventanas de concordancia en la retícula espacio-temporal, a razón de una ventana por proposición temporal difusa simple. Este patrón de ventanas actuará como si fuese una “tarjeta perforada”, que devolverá un grado de verdad elevado cuando la señal de entrada adopte, en un instante dado, una forma compatible con *todas* las ventanas (si las reglas se unen mediante AND), con cualquiera de ellas (si se unen mediante OR), o una mezcla de ambas.