DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE ENUNCIADO VERBAL Y DE SUS PROCESOS DE RESOLUCIÓN.

Mª ÁNGELES LONJEDO VICENT

UNIVERSITAT DE VALENCIA
Servei de Publicacions
2008

Aquesta Tesi Doctoral va ser presentada a Valencia el dia 5 de Novembre de 2007 davant un tribunal format per:

- D. Salvador Llinares Ciscar
- D. José Carrillo Yáñez
- D. Ernesto Sánchez Sánchez
- D. Mª Luz Callejo de la Vega
- D. Alejandro Fernández Lajusticia

Va ser dirigida per:
D. M. Pedro Huerta Palau

Depòsit legal:
I.S.B.N.:978-84-370-7012-4
Edita: Universitat de València
Servei de Publicacions
C/ Artes Gráficas, 13 bajo
46010 València
Spain
Telèfon: 963864115

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE ENUNCIADO VERBAL Y DE SUS PROCESOS DE RESOLUCIÓN.

TESIS DOCTORAL

Presentada por Mª Ángeles Lonjedo Vicent

Dirigida por Dr. M. Pedro Huerta Palau

Valencia, Julio 2007

Agradecimientos

La elaboración de esta tesis doctoral ha sido posible gracias a un equipo grande de personas. A lo largo de mi vida, he ido adquiriendo diferentes funciones, de las que no puedo ni quiero prescindir. Estas funciones tienen que ver con mi ser persona en el mundo; el ser esposa, el ser madre, el ser hija, el ser hermana, el ser familia, el ser amiga, el ser profesora de matemáticas en un instituto, el ser compañera de trabajo. Son las personas que están implicadas en estas funciones las que, muchas veces sin saberlo, han formado parte de mi equipo. Gracias a todas estas personas que me han acompañado durante este período.

Pero sobre todo, he tenido dos grandes apoyos a lo largo de todo este tiempo y sin estos apoyos hubiera sido imposible la consecución de la tesis. Estos apoyos han sostenido, cada uno, diferentes pilares. Pedro ha estado ayudando, instruyendo, leyendo, dirigiendo y colaborando en la tarea propia de la elaboración de la investigación. Desde su conocimiento y dedicación, ha sido el director de esta construcción. Paco ha estado a mi lado ayudando, colaborando, apoyando en la tarea de vivir conmigo. Desde su entrega, ha sido el impulsor de esta construcción.

Muchas gracias a los dos. Me he sentido muy querida y muy valorada, y esto me ha dado la fuerza y la constancia para realizar esta tesis.

No quiero olvidar en este capítulo a todos los compañeros que han colaborado en el estudio de esta investigación, administrando las pruebas a sus estudiantes: Félix Erdocia y Luis Lonjedo del Colegio Nuestra Señora del Pilar, Mauricio Contreras del IES Baleares, David Arnau del Colegio Parroquial San Bartolomé, Juan Margarit del IES Malilla, Bernardo Gómez del Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València y Francisco Montes del Departament de Estadística i Investigació Operativa de la Universitat de

València. Estoy muy agradecida a todos estos compañeros y profesores, pues sin esta colaboración el estudio de esta tesis no hubiera sido posible.

Mª Ángeles Lonjedo

Septiembre 2006

Índice

0. Introducción

> *"El espíritu tiene sus ilusiones lo mismo que el sentido de la vista, y del mismo modo que el tacto corrige las de éste, la reflexión y el cálculo corrigen las de aquel" Pierre Simon de Laplace. (1985)*

La resolución de problemas, desde la observación como docente, generalmente se ha trabajado con una actitud negativa por parte del estudiante. Siempre me he preguntado el porqué de esta actitud. El estudiante prefiere los "problemas" a modo de "ejercicio y práctica" que sirven para asimilar y consolidar los conocimientos adquiridos. Pero no sólo el estudiante, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas es más fácil para el docente si lo aborda desde la presentación de recetas matemáticas que sirven para resolver determinados ejercicios, de modo que los problemas se plantean como aplicación de los conocimientos adquiridos. En el currículo de bachiller de la reforma de 1992, (ver anexo 1: Currículos de Matemáticas en Educación Secundaria en España) se plantea la enseñanza de las matemáticas desde cinco bloques en la asignatura de Matemáticas y desde cuatro bloques en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, siendo uno de éstos Resolución de problemas. En algunos centros de enseñanza, en la programación didáctica del Departamento de Matemáticas, se eliminaba este bloque concreto de Resolución de problemas. La razón de esta eliminación era que la resolución de problemas se trataba en cada uno de los bloques restantes y no se hacía necesario tratarla en un bloque concreto, es decir, siempre tratada como aplicación de los conocimientos concretos adquiridos. Sin embargo, en el currículo citado se especifica:

> *Los contenidos incluidos bajo el nombre de "Resolución de problemas", básicamente procedimentales, pretenden desarrollar para el alumno hábitos y actitudes propios del modo de hacer matemático, entendido como un proceso dinámico, mediante la ocupación activa con problemas*

> *relacionados con el resto de los contenidos; entendiendo aquí como problema una situación abierta, susceptible de enfoques variados, que permite formularse preguntas, seleccionar las estrategias heurísticas y tomar las decisiones ejecutivas pertinentes. (Suplemento BOE 253, p. 34 y p. 50)*

Por otro lado, y también como docente, hasta hace poco tiempo he evitado tratar los conceptos que tienen que ver con la probabilidad, y en particular con la probabilidad condicional. Me identificaba con la descripción típica del docente de secundaria que, siempre que hay una necesidad de recortar la programación por falta de tiempo, las unidades que desaparecen son las que tienen que ver con la probabilidad. Además, en las programaciones didácticas del Departamento de Matemáticas, estas unidades se programan habitualmente para el último trimestre, y en los libros de texto, el bloque de probabilidad siempre está situado al final del libro. Por lo que, cuando se produce un recorte por falta de tiempo, suele desaparecer de la programación el bloque de la probabilidad.

Uniendo estos dos temas, la resolución de problemas y la probabilidad, que en la tarea de docente siento problemáticos, como investigadora intentaré desde su conocimiento, trabajar para proponer soluciones. Puig y Cerdán (1988) indican que

> *Si se quiere comprender cómo se produce naturalmente el aprendizaje o cómo se puede facilitar éste en una situación de instrucción, sea preciso analizar con detalle las conductas de los sujetos mientras resuelven problemas (p. 21).*

Shaughnessy (1992) indica que enseñar probabilidad es enseñar resolución de problemas y que ambos presentan los mismos problemas, en cuanto a que son nuevos bloques incluidos en las programaciones y en los que los docentes, generalmente, no han sido preparados para su docencia, y por tanto de interés para los investigadores, para dar respuestas a lo profesores en cuánto a cómo desarrollar en el currículo la enseñanza de éstos.

Como la probabilidad condicional es un concepto que, en la enseñanza secundaria se enseña, habitualmente, en un contexto de resolución de problemas, elegimos el estudio de la resolución de problemas de probabilidad condicional en este trabajo. En esta investigación mostramos un estudio de los problemas de probabilidad condicional y de los procesos de resolución por estudiantes de diferentes niveles educativos con el fin último de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad condicional.

Empezamos este trabajo mostrando qué se conoce de los problemas de probabilidad condicional y de los procesos de resolución de éstos. El capítulo Fundamentos Teóricos presenta este estudio. A partir de este estudio nos planteamos el problema de investigación: analizar los problemas ternarios de probabilidad condicional y sus procesos de resolución, con el fin de completar el estudio de éstos, conociendo qué factores influyen el éxito en la resolución así como su influencia en los procesos de resolución, y proponer, si es posible, la organización del proceso de enseñanza de los problemas de probabilidad condicional.

Para organizar la memoria que da cuenta de los resultados de este trabajo de investigación, utilizamos los niveles de análisis de Puig (1996). Este autor presenta tres niveles de análisis de los problemas, según los personajes que entran en escena en cada momento:

- Nivel I: Los problemas
- Nivel II: Los problemas y los alumnos
- Nivel III: Los problemas, los alumnos y el profesor

Así, incorporamos estos niveles para describir la organización de la memoria que da cuenta de los resultados de este trabajo de investigación y que va incorporando personajes, problemas; problemas y alumnos; problemas, alumnos y profesor; a lo largo de la misma.

Para el análisis de los problemas escolares de probabilidad condicional, nivel I, analizamos éstos teniendo en cuenta dos de los mundos posibles: el mundo de las matemáticas, es decir la estructura formal del problema de probabilidad condicional, y el mundo de las matemáticas escolares, en el que la información nos la proporcionan los currículos y los libros de texto. El estudio inicial de los problemas de probabilidad condicional nos va a permitir mostrar una clasificación de éstos, clasificación que va a estar basada, en primer lugar, en los componentes que describen la estructura de los datos presentes en el problema y, en segundo lugar, añadiendo la pregunta del problema (capítulo 4: Resultados que dan cuenta del problema, apartado 4.1.1: Componentes que tienen que ver con la estructura de los datos y la pregunta del problema). El producto de esta clasificación en niveles, categorías y tipos, nos permitirá primero dar cuenta del uso que pueden darse a esos componentes de clasificación para el análisis de textos escolares, tanto si se piensa en la investigación sobre la resolución de esos problemas como para la enseñanza. En la resolución de los problemas de probabilidad condicional por estudiantes de diferentes niveles, existen diferentes factores que influyen a la hora de resolverlos. Uno de estos factores no es necesariamente el conocimiento de las relaciones entre probabilidades, sino, por ejemplo, el de la identificación correcta de los sucesos implicados y la de la correspondiente asignación de sus probabilidades. Previo a esto último, existen factores semióticos que influyen en los estudiantes a la hora de establecer una correcta correlación entre los datos y los sucesos (capítulo 4, apartado 4.1.2: Componentes que afectan directamente a la resolución del problema). En esta investigación nos ocupamos de identificar esos factores y determinar qué influencia tienen en el proceso de resolución del problema.

Fruto del análisis de los textos escolares seleccionamos una determinada tipología de problemas con el fin de poder abordar el estudio concreto de los problemas de esta tipología y de su resolución por los estudiantes. Seleccionamos la tipología de problemas menos presente en los libros de texto, de forma que, al mostrar cómo estudiantes de diferentes niveles escolares resuelven estos problemas, éstos pueden incluirse en los libros de texto. Y no únicamente en las lecciones de probabilidad, sino que según la naturaleza de los datos y de la pregunta del problema, se puede organizar la enseñanza de la probabilidad condicional iniciando ésta en las lecciones de razón y proporción.

En segundo lugar entra en escena el alumno, nivel II. Analizamos la resolución de los problemas escolares de probabilidad condicional de la tipología seleccionada, por estudiantes de diferentes niveles educativos, procurando describir procesos y estrategias de resolución de los problemas, identificando dificultades y describiendo y clasificando errores.

Por último, nivel III, proponemos la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad condicional, de forma que el profesor entra en escena.

El objetivo final de este estudio es contribuir con conocimientos que puedan aplicarse con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de probabilidad condicional y la resolución de problemas de probabilidad condicional.

1. Fundamentos teóricos

El objetivo de este capítulo es mostrar la base teórica en la que se fundamenta esta investigación, así como algunos resultados de investigaciones acerca de la enseñanza de la probabilidad y de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

La base teórica en la que se basa esta investigación la hemos estructurado en cuatro bloques. En el primer bloque mostramos los fundamentos teóricos acerca de los problemas de probabilidad escolar. En el segundo definimos los problemas de probabilidad condicional y concretamos los problemas de probabilidad condicional que estudiamos en este trabajo, así como presentamos una clasificación de los problemas de probabilidad condicional atendiendo a las probabilidades que presenta la parte informativa del problema. El tercero trata de la resolución de los problemas de probabilidad condicional, considerando una clasificación de estos problemas según su resolución, así como de los sistemas de representación, tablas de contingencia y diagramas de árbol, utilizados en la resolución de estos problemas de probabilidad condicional. El cuarto bloque muestra otras lecturas de los problemas de probabilidad condicional con los grafos trinomiales.

Acabamos este capítulo con un quinto bloque que presenta una revisión en el mundo de la investigación acerca de contenidos que tienen que ver con algún aspecto de esta investigación.

1.1. DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD ESCOLAR

En el contexto escolar, un problema de probabilidad escolar se corresponde con una variedad de situaciones problemáticas tales como la determinación de espacios muestrales, la determinación de sucesos, de sucesos incompatibles, la construcción de situaciones aleatorias, asignación de probabilidades, etc.

Por situar y precisar nuestro trabajo, es conveniente centrar a qué nos referimos cuando hablamos de problemas de probabilidad escolar. Utilizamos el término problema escolar de matemáticas en el sentido de Puig (1996, p. 31-32):

> *un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no se ha producido sentido.*

Así, entendemos por problema escolar de probabilidad un problema escolar de matemáticas que, situado en un contexto de azar o situación aleatoria, pregunta, de alguna de las formas tradicionales en las escuelas y en los libros de texto, por la probabilidad de un suceso[1]. Es decir, un problema de probabilidad es cualquier situación problemática en la que la respuesta requiere contestar a una cuestión del tipo: ¿qué probabilidad hay de que un suceso ocurra, vaya a ocurrir o haya ocurrido?, cuestión que puede abordar situaciones en tiempo presente, futuro (con carácter de predicción) o pasado (Huerta y Lonjedo, 2003a)

Los problemas de probabilidad pueden clasificarse de muchas maneras. La clasificación que presentamos a continuación tiene en cuenta la actuación del resolutor (Huerta 2003, Huerta y Lonjedo 2003a, 2004).

Clasificamos los problemas de probabilidad escolar en:

<u>Problemas de asignación de probabilidades</u>: Problemas de probabilidad en los que la respuesta a la pregunta "probabilidad de…" implica que el resolutor tome una decisión en términos de probabilidad sobre la ocurrencia o no de un suceso que pertenece a una situación de incertidumbre. En este tipo de problemas, el resolutor hace una lectura del problema en términos de posibilidades y razones entre número de posibilidades. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente:

[1] El término suceso lo usamos en su acepción más amplia que permite incluir otros significados además de elemento de una σ-álgebra

> Ejemplo 1.1: En un grupo de amigos hay 7 chicos y 8 chicas. Me llama por teléfono una persona de este grupo para ir al cine ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea chico?

Problemas de cálculo de probabilidades: Problemas de probabilidad que para su resolución es necesario aplicar las relaciones o las reglas de cálculo de probabilidades entre los datos del problema. Es necesario que el resolutor haga una lectura del problema en términos de sucesos y probabilidades de estos sucesos. El siguiente problema puede servirnos como ejemplo:

> Ejemplo 1.2: Si la probabilidad de ser aficionado al fútbol es 0.7, la de ser aficionado al baloncesto es 0.6 y la de ser a los dos deportes es 0.4:
>
> a) Calcula la probabilidad de no ser aficionado a ninguno de los dos deportes.
>
> b) Elegida una persona al azar de las aficionadas al fútbol, calcula la probabilidad de que sea aficionada al baloncesto.

Problemas de simulación: Simular un problema de probabilidad consiste en transformar el problema original en un nuevo problema reformulado para que pueda ser simulado, problema que probabilísticamente es equivalente al problema original y que mediante el generador de azar que simule la situación problemática original, la solución del problema simulado sea considerada solución del problema original con la ayuda de la ley de los grandes números. Entonces, llamamos problemas de simulación a aquellos problemas de probabilidad que para su resolución es necesario realizar un número n de simulaciones del mismo.

Nuestro trabajo implica los dos primeros tipos de problemas. La frontera entre una tipología de problemas y la otra no está bien definida pues, según como se tome, hay intersecciones entre ellos. Así, algunos problemas que nosotros llamamos y clasificamos como problemas de asignación, en los libros escolares, se les trata como problemas de cálculo, generalmente porque se aplica una "regla de cálculo", la regla de Laplace, cuando realmente no hay un verdadero cálculo de probabilidades sino una asignación de una probabilidad a un suceso después de alguna consideración sobre la equiprobabilidad de los casos. En consecuencia, muchos de los problemas que se clasifican como problemas de cálculo son, para nosotros, de asignación, reservando la denominación de problemas cálculo de probabilidades a aquellos problemas cuya solución implica o exige usar relaciones o reglas de cálculo "de y entre probabilidades" entre los datos del problema entendidos como sucesos y probabilidades de estos sucesos.

Por otro lado, dependiendo de la lectura que el resolutor haga del problema, un mismo problema de probabilidad puede ser un problema de cálculo de probabilidades para un resolutor y un problema de asignación de probabilidades para otro resolutor, según si la lectura del problema se ha hecho en términos de sucesos y de las probabilidades entre estos sucesos o no.

Los problemas de probabilidad condicional los vamos a ver también por el modo en que se resuelven (sin tener en cuenta el modo de resolución por simulación), preguntándonos porqué así en relación con el enunciado.

1.2. DE LOS PROBLEMAS ESCOLARES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Llamamos **problema escolar de probabilidad condicional, PPC** (Huerta y Lonjedo, 2003a, 2003b, 2004) a un problema de probabilidad, generalmente de enunciado verbal, en el que o bien en la parte informativa o bien en la parte interrogativa del problema es necesario que el resolutor considere la probabilidad condicional de un suceso. Un ejemplo de esta subclase de problemas de probabilidad puede verse con el problema que hemos citado en el apartado b del ejemplo 1.2 (p. 19)

En este trabajo, consideramos el mundo particular de los problemas de probabilidad condicional con dos sucesos A y B y todos los sucesos y probabilidades que implican. La estructura de estos problemas, en cuanto a los sucesos, las probabilidades de estos sucesos y las relaciones entre las probabilidades de estos sucesos la mostramos a continuación.

1.2.1. CANTIDADES Y RELACIONES ENTRE LAS CANTIDADES PRESENTES EN LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE ESTE ESTUDIO

Dados los sucesos A y B, con $p(B) \neq 0$, se define la probabilidad condicional del suceso A - el condicionado - dado que el suceso B - el condicionante – ha ocurrido, expresada por $p(A|B)$, por: $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Si la lectura del problema no se hace en términos de probabilidad, entonces $p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$, siendo $n(A \cap B)$ el cardinal del conjunto intersección $A \cap B$ y $n(B)$ el cardinal del conjunto B.

Considerados los sucesos A y B y sus complementarios[2] $\bar{A}$ y $\bar{B}$. Podemos establecer 8 relaciones de probabilidad condicional entre estos sucesos, con la única condición de que la probabilidad del suceso condicionante no sea cero.

Con la finalidad de ser operativos, llamamos de la siguiente forma a estas probabilidades (tomado de Yáñez, 2000): $p(A|B)$ probabilidades condicionales, o sólo condicionales; $p(A \cap B)$ probabilidades de intersección, o sólo intersecciones; $p(A)$ probabilidades marginales, o sólo marginales, también llamadas probabilidades absolutas. En consecuencia, toda la información que se puede presentar en un problema de probabilidad condicional de los que nosotros estudiamos en esta investigación, se resume en 4 marginales, 4 intersecciones y 8 condicionales. Un total de 16 probabilidades que quedan reflejadas en la tabla 1.1:

4 probabilidades marginales	$p(A)$
	$p(B)$
	$p(\bar{A})$
	$p(\bar{B})$

4 probabilidades de la intersección	$p(A \cap B)$
	$p(A \cap \bar{B})$
	$p(\bar{A} \cap B)$
	$p(\bar{A} \cap \bar{B})$

8 probabilidades condicionales	$p(A|B)$
	$p(A|\bar{B})$
	$p(\bar{A}|B)$
	$p(\bar{A}|\bar{B})$
	$p(B|A)$
	$p(B|\bar{A})$
	$P(\bar{B}|A)$
	$P(\bar{B}|\bar{A})$

Tabla 1.1. Probabilidades presentes en un problema de probabilidad condicional

[2] Existen diferentes notaciones para los sucesos complementarios. Utilizamos habitualmente $\bar{A}$ para denotar el complementario de A, pero otras posibles son A^c ó $-A$.

De forma que los problemas de probabilidad condicional de este estudio son aquellos con dos sucesos A y B, los sucesos que implican estos dos: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cap \bar{B}$ y las 16 probabilidades que presenta la tabla 1.1.

A los valores de las 16 probabilidades que aparecen en la tabla 1.1 debemos añadir el 1, que es la probabilidad del suceso seguro, $p(\Omega)$, y que se distribuye entre las otras.

Veamos la red de relaciones. Las 16+1 probabilidades se encuentran relacionadas mediante 18 relaciones ternarias. Llamamos a estas relaciones ternarias porque relacionan tres cantidades. De estas relaciones, 10 son aditivas y 8 son multiplicativas. Las 18 relaciones las describimos a continuación:

- Ocho relaciones multiplicativas:

★ $p(B) \,.\, p(A|B) = p(A \cap B)$

★ $p(A) \,.\, p(B|A) = p(A \cap B)$

★ $p(A) \,.\, p(\bar{B}|A) = p(A \cap \bar{B})$

★ $p(\bar{A}) \,.\, p(B|\bar{A}) = p(\bar{A} \cap B)$

★ $p(\bar{A}) \,.\, p(\bar{B}|\bar{A}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$

★ $p(\bar{B}) \,.\, p(A|\bar{B}) = p(A \cap \bar{B})$

★ $p(\bar{B}) \,.\, p(\bar{A}|\bar{B}) = p(\bar{A} \cap \bar{B})$

★ $p(B) \,.\, p(\bar{A}|B) = p(\bar{A} \cap B)$

- Diez relaciones aditivas, de las cuales 6 son relaciones de complementariedad (las 6 primeras):

★ $1 = p(A)+p(\bar{A})$

★ $1 = p(B) + p(\bar{B})$

★ $1 = p(A|B) + p(\bar{A}|B)$

★ $1 = p(\bar{A}|\bar{B}) + p(A|\bar{B})$

★ $1 = p(B|\bar{A}) + p(\bar{B}|\bar{A})$

★ $1 = p(B|A) + p(\bar{B}|A)$

★ $p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap \bar{B})$

★ $p(\bar{A}) = p(\bar{A}\cap B)) + p(\bar{A}\cap \bar{B})$

★ $p(B) = p(A\cap B) + p(\bar{A}\cap B)$

★ $p(\bar{B}) = p(A\cap \bar{B}) + p(\bar{A}\cap \bar{B})$

1.2.1.1. LA ESTRUCTURA DEL ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

La condición para que un problema de probabilidad condicional sea un problema es que sus datos no estén relacionados mediante una única relación, de manera que para su resolución necesitemos establecer más de una relación entre sus datos.

Por otra parte, derivado de las relaciones conocidas entre las probabilidades del tipo que hemos mencionado, dada una probabilidad en el problema es posible disponer de nuevas probabilidades que van a ser necesarias para la resolución del problema. Veamos cuál es el número mínimo de probabilidades que debe presentar un problema de probabilidad condicional para poder encontrar las demás.

Recordando las relaciones que generan las 18 relaciones que hemos mencionado antes:

★ $p(A|B) = p(A\cap B)/p(B)$ (*1*)

★ $1 = p(A)+p(\bar{A})$ (*2*)

★ $p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap \bar{B})$ (*3*)

★ $1 = p(A|B) + p(\bar{A}|B)$ (*4*)

Yañez (2000) define:

★ Dos marginales, dos intersecciones y dos condicionales que satisfacen (*2*), (*3*) y (*4*) son complementarias

★ Una marginal y una intersección (o dos) que satisfacen (*3*) son asociadas

★ Una condicional está asociada a una marginal cuando su suceso condicionante es la marginal considerada

★ Una condicional está asociada a dos intersecciones cuando éstas a su vez están asociadas y la marginal correspondiente es el suceso condicionante de la condicional

No es necesario disponer en el enunciado del problema, de todas las marginales ni de todas las condicionales, ya que sabemos que sólo con dos marginales no complementarias, por la igualdad (*2*) tendremos las cuatro, y que sólo con 4 condicionales no complementarias, por la igualdad (*4*) obtendremos las 8. Por otra parte, por la igualdad (*3*), dos marginales no complementarias y las cuatro intersecciones pueden reducirse a dos marginales no complementarias y una intersección, o a dos intersecciones y una marginal –que no estén relacionadas- o a 3 intersecciones. Siempre se puede utilizar, además, la definición de $p(A|B)$ (igualdad *1*) para relacionarla con una marginal y una intersección.

Lo que acabamos de describir, sirve para confirmar que con tres datos escogidos de forma conveniente entre las marginales y las intersecciones se puede plantear y resolver cualquier problema escolar de probabilidad condicional en el sentido en el que lo usamos aquí.

Ahora bien, no sabemos si el problema queda resuelto si sólo tenemos información acerca de las condicionales. No conocemos el número mínimo de condicionales necesario para resolver un problema de probabilidad condicional de los que estudiamos. Si la información del problema incluye marginales, intersecciones y condicionales, no sabemos cuál es el número mínimo de éstas que se requieren para resolver cualquier problema y cuáles son.

Para responder a estas preguntas, Yañez (2000) toma un grupo de elementos formado por dos marginales no complementarias, una intersección y cuatro condicionales no complementarias:

★ Dos marginales no complementarias, $p(A)=x_1$; $p(B)=x_2$

★ Una intersección, $p(A \cap B)=y$

★ Cuatro condicionales no complementarias:

$p(A|B)=z_1$; $p(A|\bar{B})=z_2$; $p(B|A)=z_3$; $p(B|\bar{A})=z_4$

Utilizando las igualdades (*1*), (*2*), (*3*) y (*4*) obtiene que estos elementos satisfacen un sistema de cuatro ecuaciones con siete incógnitas, que describimos a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} z_1 x_2 = y \\ z_2(1-x_2) = x_1 - y \\ z_3 x_1 = y \\ z_4(1-x_1) = x_2 - y \end{array}\right\}$$

El autor indica que el número mínimo de elementos necesarios y suficientes para resolver completamente un problema de probabilidad condicional se reduce a tres elementos no complementarios. Y según la elección de estos tres elementos permite realizar una clasificación de estos problemas de probabilidad condicional según el tipo de problemas que se pueden plantear, así como una clasificación de su nivel de dificultad.

Lo que Yañez (2000) llama resolver completamente un problema de probabilidad condicional, es encontrar las restantes 13+1 probabilidades que hemos mostrado antes. Estas 13+1 probabilidades son cantidades que se requieren para manejarse en el contexto de la probabilidad condicional, que conocemos lo que significan y que sabemos cómo están ligadas unas con otras a través de la red de relaciones que constituyen la estructura conceptual de la probabilidad condicional.

1.2.2 UNA CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL ATENDIENDO A LAS PROBABILIDADES PRESENTES EN LA PARTE INFORMATIVA DEL PROBLEMA

Yáñez (2000) presenta una clasificación de los problemas de probabilidad condicional atendiendo a las probabilidades presentes en la parte informativa del problema. Esta clasificación se basa en la condición de que para que un problema de probabilidad condicional tenga solución son necesarias tres cantidades explícitamente mencionadas. Por otra parte, también sabemos que estos tres datos deben estar escogidos convenientemente entre las probabilidades marginales, las probabilidades de la intersección y/o las probabilidades condicionales. Consecuente con un análisis combinatorio al tomar los datos convenientemente, Huerta (2000) perfecciona la clasificación de Yañez (2000), introduciendo un vector de tres componentes (x, y, z), en donde x representa el número de probabilidades presentes en el problema que son probabilidades marginales, y representa el número de probabilidades presentes en el problema, que son probabilidades de la intersección, y z representa el número de probabilidades presentes en el problema que son probabilidades condicionales, con la condición de que x+y+z = 3.

A continuación mostramos esta clasificación:

- Caso 1. Los datos son tres probabilidades de la intersección: (0, 3, 0)
- Caso 2. Los datos son una probabilidad marginal y dos probabilidades de la intersección: (1, 2, 0)
- Caso 3. Los datos son dos probabilidades marginales y una probabilidad de intersección: (2, 1, 0)
- Caso 4. Los datos son dos probabilidades marginales y una probabilidad condicional: (2, 0, 1)
- Caso 5. Los datos son dos probabilidades de la intersección y una probabilidad condicional: (0, 2, 1)

- Caso 6. Los datos son una probabilidad marginal, una probabilidad de la intersección y una probabilidad condicional: (1, 1, 1)
- Caso 7. Los datos son una probabilidad marginal y dos probabilidades condicionales: (1, 0, 2)
- Caso 8. Los datos son una probabilidad de la intersección y dos probabilidades condicionales: (0, 1, 2)
- Caso 9. Los datos son 3 probabilidades condicionales: (0, 0, 3)

Mostramos ejemplos de cada uno de los casos.

Caso 1: Los datos son tres probabilidades de la intersección (0, 3, 0)

Ejemplo 1.3: (Matemáticas 4t ESO, Opción B, Editorial Ecir, página 240, problema 43, 1996). Completa la següent taula de contingència:

	A	noA	Total
B	0’4	0’2	
noB	0’25		
Total			1

A partir de la taula, confecciona un diagrama d’arbre i determina P(B/A), P(noB/A), P(B/noA) i P(noB/noA).

Este ejemplo está sobredimensionado, ya que presenta 4 probabilidades. Elegimos las tres probabilidades de la intersección, ya que la probabilidad del espacio total, aunque en este problema está mencionada explícitamente, es una probabilidad evocada por el resolutor en la mayoría de los problemas de probabilidad.

Caso 2. Los datos son una probabilidad marginal y dos probabilidades de la intersección: (1, 2, 0)

Ejemplo 1.4: Para organizar un campamento de verano, hemos pedido a todos los inscritos sus aptitudes deportivas respecto el baloncesto y el tenis. Hemos encontrado que un 15% de los inscritos juegan a baloncesto y a tenis, un 50% no juegan ni a baloncesto ni a tenis y un 30% juegan a tenis.

¿Qué probabilidad hay de que elegido un inscrito al campamento, de los que sabemos que juega a tenis, juegue a baloncesto?

¿Qué probabilidad hay de que elegido un inscrito al campamento juegue a baloncesto?

Caso 3. Los datos son dos probabilidades marginales y una probabilidad de intersección: (2, 1, 0)

Ejemplo 1.5: Un estudiant fa dues proves en un mateix dia. La probabilitat que passe la primera prova és 0'6. La probabilitat que passe la segona prova és 0'8, i que passe ambdues és 0'5. Es demana:

a) Probabilitat que passe almenys una prova.

b) Probabilitat que sabent que ha passat la 1ª prova passe també la segona

c) Probabilitat que passe la segona prova en cas de no haver superat la primera. (Adaptado de 1r Batxillerat, Colera, García, Oliveira, Editorial Anaya, Matemàtiques I, 2002, pàgina 369, nº 16, 2º Bachiller, idem, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, p.258, problema 17. Se han eliminado dos cuestiones y se ha añadido la cuestión b).

Caso 4. Los datos son dos probabilidades marginales y una probabilidad condicional: (2, 0, 1)

Ejemplo 1.6: (Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron las dos asignaturas?

b) Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

Caso 5. Los datos son dos probabilidades de la intersección y una probabilidad condicional: (0, 2, 1)

Ejemplo 1.7: De todos los alumnos del instituto, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que practique baloncesto y fútbol es de 0.3, la probabilidad de que practique el baloncesto y no practique el fútbol es de 0.3, y la probabilidad de que practique fútbol, sabiendo que no practica baloncesto es de 0.4. Calcula la probabilidad de que practique fútbol.

Caso 6. Los datos son una probabilidad marginal, una probabilidad de la intersección y una probabilidad condicional: (1, 1, 1)

Ejemplo 1.8: (Proves d'accés a la Universitat, Comunitat Valenciana, Matemàtiques II COU, Juny 97) A cadascun dels 30 estudiants de COU C del centre Ximo Trinquet li demanem: ¿Has llegit la novel·la "Parc Juràsic" escrita per Michael Crichton?, ¿Has vist la pel·lícula "Parc Juràsic" dirigida per Steven Spilberg?. De les respostes dels estudiants se sap que la meitat d'ells han vist la pel·lícula, però únicament un terç d'aquestos han llegit la novel·la. A més a més, només dos dels estudiants han llegit la novel·la però no han vist la pel·lícula.

Quina és la probabilitat de que un estudiant de la classe haja llegit el llibre?, i de que haja llegit el llibre si no ha vist la pel·lícula?

Caso 7. Los datos son una probabilidad marginal y dos probabilidades condicionales: (1, 0, 2)

Ejemplo 1.9: (ALGORITMO 2001, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 2, Vizmanos J.R., Anzola, M. Problema 32, p.296, Ediciones SM: Madrid). Una cuarta parte de las participaciones en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera es un tercio. Si se elige una congresista al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que desayune té?

b) Cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

Caso 8. Los datos son una probabilidad de la intersección y dos probabilidades condicionales: (0, 1, 2)

Ejemplo 1.10: Hem fet un estudi entre els xics i les xiques de Batxiller que estan a favor i en contra de les Proves d'Accés a la Universitat. Hem tret les dades següents:

La probabilitat que un xic estiga en contra de les PAU's és de 0.44

La probabilitat que s'estiga a favor d'entre els xics és 0.2

La probabilitat que s'estiga en contra d'entre les xiques és 0.8

Hem elegit un estudiant i sabem que és xic. Calcula la probabilitat que estiga en contra. Calcula també la probabilitat de les xiques que estan a favor.

Caso 9. Los datos son 3 probabilidades condicionales: (0, 0, 3)

Ejemplo 1.11: En un grupo de individuos se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Se estudiaba la inteligencia superior y el rendimiento alto. De este estudio se sabe que, elegido un individuo:

La probabilidad de que tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento es alto es 2/3.

La probabilidad de que tenga rendimiento alto sabiendo que su inteligencia es superior es de 5/7.

La probabilidad de que no tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento no es alto es 3/5.

Calcula la probabilidad de ser inteligente y tener rendimiento alto y la probabilidad de tener rendimiento alto.

Utilizamos esta clasificación en la Memoria de Tercer Ciclo (Lonjedo, 2003), que reveló que puede ser refinada. En primer lugar, Yañez (2000) tiene en cuenta en su clasificación los datos como probabilidades, y nosotros ya la utilizamos en ese trabajo adaptándola, de forma que incluimos en esta clasificación los problemas de probabilidad condicional en los que los datos no necesariamente son probabilidades, sino datos interpretables como probabilidades. No todos los problemas de probabilidad presentan sus datos como probabilidades. Por lo que la expresión de los datos en el texto del problema es un factor a tener en cuenta en la clasificación de los problemas de probabilidad condicional según su modo de resolución, como problemas de asignación de probabilidades o como problemas de cálculo de probabilidades.

En segundo lugar, una propuesta de clasificación de los problemas de probabilidad condicional más amplia que la clasificación de Yañez (2000) tendrá en cuenta la pregunta del problema. Por ejemplo, en los problemas que pertenecen a los casos 1, 2, y 3, para que sean problemas de probabilidad condicional, necesariamente la pregunta del problema ha de ser una probabilidad condicional. En los problemas que pertenecen al resto de los casos, el problema puede preguntar, en principio, por cualquier probabilidad de entre las que aparecen en la tabla 1.1.

Por último pensamos que la semántica y la sintaxis del problema son también factores a considerar en la clasificación de los problemas de probabilidad condicional. Existen palabras que producen ambigüedad en la interpretación de los datos condicionales de los problemas. También por lo que las diferentes estructuras de las oraciones subordinadas condicionales pueden suponer en la interpretación de las cantidades interpretables como probabilidades condicionales.

En el trabajo que presentamos, analizamos la estructura de estos problemas de probabilidad condicional teniendo en cuenta los componentes que tienen que ver con la estructura de los datos y la pregunta del problema. De esta forma presentamos una nueva clasificación de los problemas de probabilidad condicional. También analizamos la estructura de los problemas de probabilidad condicional teniendo en cuenta los componentes que afectan directamente a la resolución del problema, tales como las diferentes formas de presentar los datos en estos problemas y la estructura gramatical que presentan los problemas de probabilidad condicional. (Capítulo 2, apartado 2.2.1; Capítulo 3, apartado 3.1; capítulo 4, apartado 4.1)

1.3. DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Consideramos la resolución de los problemas de probabilidad condicional desde dos puntos de vista. Por un lado, consideramos la resolución de los PPC haciendo uso de las reglas de cálculo "de y entre probabilidades" o bien del razonamiento aritmético y asignando probabilidades. Por otro, consideramos la resolución de los PPC haciendo uso de los sistemas de representación, tales como las tablas de contingencia y los diagramas de árbol.

1.3.1. LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL POR ASIGNACIÓN Y POR CÁLCULO

Un problema de probabilidad condicional puede ser considerado en el proceso de resolución como un problema aritmético de más de una etapa. Si las cantidades explícitamente mencionadas en el problema no son interpretadas como probabilidades, se ha observado (Huerta y Lonjedo 2003a, 2003b, Lonjedo 2003, Huerta y Lonjedo 2006, Lonjedo y Huerta 2005) que muchos estudiantes en el proceso de resolución del problema no utilizan las reglas de cálculo "de y entre probabilidades", utilizando la aritmética. Estos estudiantes trabajan con los datos del problema utilizando las operaciones aritméticas y asignan probabilidad al resultado. Entonces, dependiendo de la lectura que hace el resolutor del problema, en términos de sucesos y probabilidades de éstos o no, en la resolución del problema utilizará las fórmulas "de y entre probabilidades" o no, y el problema podrá ser clasificado como problema de cálculo de probabilidades o como problema de asignación de probabilidades, según las definiciones en páginas 18 y 19 de esta memoria.

En Lonjedo (2003), Huerta & Lonjedo (2003a, 2003b), se muestra como algunos problemas de probabilidad condicional son resueltos por los estudiantes como problemas de asignación. Como ejemplo de estos procesos de resolución, presentamos un problema analizado en esos trabajos.

Ejemplo 1.12. En un centre escolar hi ha 1000 alumnes repartits així:

	XICS	XIQUES
USEN ULLERES	147	135
NO USEN ULLERES	368	350

En triem un a l'atzar. Calcula la probabilitat que:

a) Sabent que és xic, no usa ulleres.

b) Siga xica sabent que usa ulleres.

Este problema presenta los siguientes datos:

★ alumnos del centro escolar, cuyo número es 1000

★ todos los datos de la tabla de contingencia

- o chicos que utilizan gafas, cuyo número es 147
- o chicos que no utilizan gafas, cuyo número es 368
- o chicas que utilizan gafas, cuyo número es 135
- o chicas que no utilizan gafas, cuyo número es 350.

Los datos numéricos, siendo frecuencias absolutas, refieren a valores de caracteríaticas. Se pregunta, utilizando diferentes expresiones, por dos probabilidades condicionales.

La figura 1.1 muestra el proceso de resolución del apartado a) del problema de un estudiante participante en este trabajo.

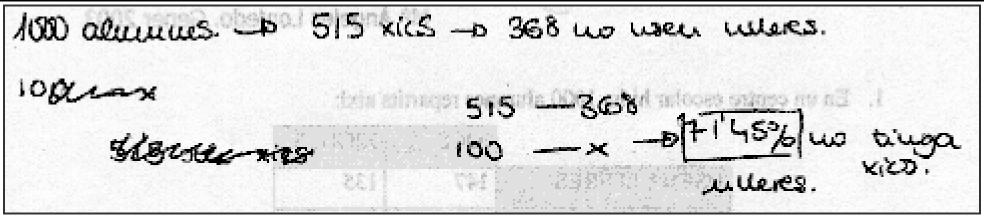


Figura 1.1. Resolución del apartado a) por un estudiante de 2º bachiller

Este estudiante, al igual que la mayoría de los estudiantes que participaron en la investigación de Lonjedo (2003), utiliza la asignación como modo de resolución del problema. El estudiante, identificando los sucesos, utiliza la tabla de contingencia para obtener el número total de chicos del instituto, 515, y establece una proporción, mediante la regla de tres para expresar el porcentaje que da cuenta de los chicos que no utilizan gafas. Asigna la probabilidad pedida expresándola en porcentaje.

Ahora bien, utilizando este mismo problema, y haciendo una lectura de éste en términos de probabilidad, transformamos las cantidades presentes en el problema a probabilidades. Para ello definimos los sucesos:

★ C el suceso "chicos del centro escolar"

★ -C el suceso "chicas del centro escolar"

★ G el suceso "estudiantes que utilizan gafas"

★ -G el suceso "estudiantes que no utilizan gafas"

Las cantidades presentes en el problema transformadas en términos de probabilidad son:

★ $p(C \cap G) = 147/1000 = 0.147$

★ $p(-C \cap G) = 135/1000 = 0.135$

★ $p(C \cap -G) = 368/1000 = 0.368$

★ $p(-C \cap -G) = 350/1000 = 0.35$

En el apartado a) se pregunta por p(-G|C). Sabemos, por la definición de probabilidad condicional, que $p(-G|C)=\dfrac{p(C\cap -G)}{p(C)}$.

Necesitamos calcular p(C). Sabemos que

$p(C) = p(C\cap G) + p(C\cap -G) = 0.147 + 0.368 = 0.515$

Además, si traducimos las cantidades de la tabla de contingencia a probabilidades y utilizamos las reglas de cálculo propias de la tabla de contingencia:

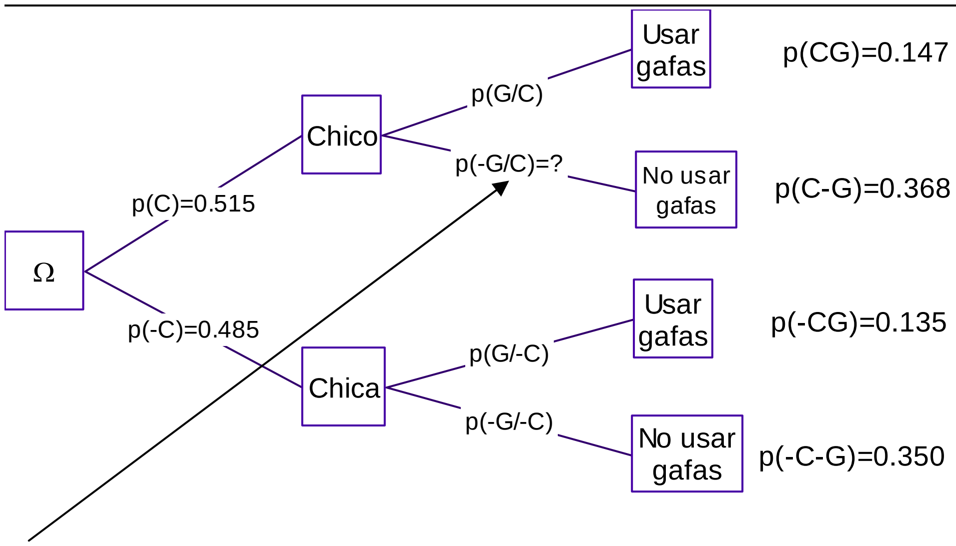
	C	-C	
G	0.147	0.135	p(G)=0.282
-G	0.368	0.350	p(-G)=0.718
	p(C)=0.515	p(-C)=0.485	1

Por lo que: $p(-G|C) = \dfrac{p(C\cap -G)}{p(C)} = \dfrac{0.368}{0.515} = 0.7145$

En el apartado b) se pregunta por p(-C|G), la resolución sería análoga.

La fórmula utilizada en la resolución del problema es una relación entre tres cantidades de la misma naturaleza, probabilidades. Mediante esta fórmula se calcula la probabilidad del suceso -G condicionada a la ocurrencia del suceso C. Este proceso de resolución clasifica el problema como un problema de cálculo de probabilidades. El resolutor utiliza los datos como probabilidades y usando las reglas de cálculo "de y entre probabilidades", resuelve el problema.

Utilizando el diagrama de árbol, utilizamos el cálculo de probabilidades como modo de resolución del problema:



[3]

La regla de cálculo en el árbol:

$$0.515 \cdot p(-G \mid C) = 0.368, \text{ por lo que } p(-G \mid C) = \frac{0.368}{0.515},$$

Los problemas de probabilidad condicional, situados en las lecciones que dan cuenta de la probabilidad condicional, así como del Teorema de Bayes y el Teorema de la Probabilidad Total, están propuestos para ser resueltos como problemas de cálculo de probabilidades. El proceso de resolución de estos problemas es similar al proceso de resolución de los problemas de cálculo de probabilidades que queda resumido en el diagrama 1.1.

[3] Representamos $p(A \cap B)$ por $p(AB)$ únicamente para simplificar la notación

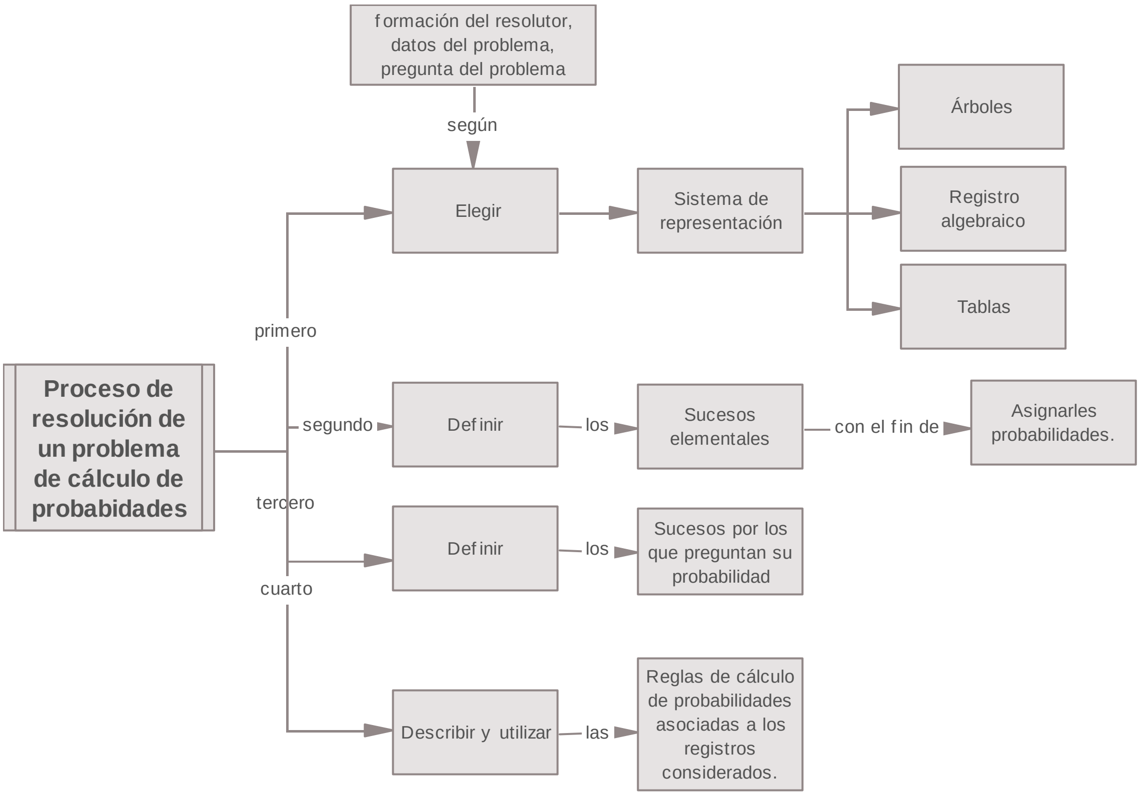


Diagrama 1.1. Resumen del proceso de resolución de un problema de cálculo de probabilidades. (Huerta, 2003)

Observamos en este diagrama que ambos procesos, el proceso de resolución de un problema de probabilidad condicional según una lectura en términos de probabilidad, y el proceso de resolución de un problema de cálculo de probabilidades están claramente identificados. En el proceso de resolución del problema que hemos utilizado de ejemplo, hemos definido los sucesos elementales, C, -C, G y -G y les hemos asignado probabilidades. Mediante la fórmula de la definición de probabilidad condicional hemos calculado la probabilidad pedida en la pregunta del problema.

Entonces un problema de probabilidad condicional según el modo de resolución del problema, puede ser considerado o un problema de asignación de probabilidades o un problema de cálculo de probabilidades, dependiendo del uso de las cantidades presentes en el problema, según la lectura que haga el resolutor del problema, así como de la formación del resolutor.

1.3.2. DE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL: TABLAS DE CONTINGENCIA Y DIAGRAMAS DE ÁRBOL

En la enseñanza de la resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional se suelen utilizar las tablas de contingencia (Shaugnessy, 1992) y los diagramas de árbol (Engel, 1975a; Parzysz, 1990). Cerdán y Huerta (en prensa) consideran las tablas de contingencia y los diagramas de árbol *como un metalenguaje cuyos signos permiten representar los resultados posibles de un proceso aleatorio como sucesos y las probabilidades de dichos sucesos*. Cada una de estas herramientas, que Yañez (2000) considera como registros de representación semiótica, posee una estructura interna para la representación de sucesos y sus probabilidades, es decir, una estructura interna para la organización de la información, y unas reglas de cálculo asociadas a cada estructura, de forma que, al utilizar dichas reglas podamos producir nuevas probabilidades. A continuación describimos las estructuras internas y las reglas de cálculo asociadas a cada una de estas herramientas.

LAS TABLAS DE CONTINGENCIA: SIGNOS Y RELACIONES ESTRE SIGNOS. SUCESOS, PROBABILIDADES Y RELACIONES.

Una tabla de contingencia para los sucesos A y B es una tabla de doble entrada como la que mostramos a continuación:

	A	-A	Marginales
B	p(AB)	p(-AB)	p(B)
-B	p(A-B)	p(-A-B)	p(-B)
Marginales	p(A)	p(-A)	1

	A	-A	
B	n(AB)	n(-AB)	n(B)
-B	n(A-B)	n(-A-B)	n(-B)
	n(A)	n(B)	Total

Tabla 1.2. Tablas de contingencia en probabilidades y en frecuencias absolutas

En cada una de las celdas de estas tablas aparecen unos signos. La primera tabla muestra los sucesos A, B y sus complementarios, así como las probabilidades de las intersecciones de estos sucesos dos a dos, las probabilidades de estos sucesos y la probabilidad del espacio muestral. La segunda tabla muestra los sucesos A, B y sus complementarios y el cardinal de las intersecciones de estos sucesos dos a dos, el cardinal de cada uno de estos sucesos así como el cardinal del conjunto total. Muestra nueve cardinales. Las seis relaciones ternarias aditivas entre estos nueve cardinales son:

★ $n(\text{total}) = n(A) + n(-A)$

★ $n(\text{total}) = n(B) + n(-B)$

★ $n(A) = n(A \cap B) + n(A \cap -B)$

★ $n(-A) = n(-A \cap B) + n(-A \cap -B)$

★ $n(B) = n(A \cap B) + n(-A \cap B)$

★ $n(-B) = n(A \cap -B) + n(-A \cap -B)$

Las probabilidades implicadas en la primera tabla son 9 y las relaciones que se establecen entre estas probabilidades son 6 relaciones ternarias aditivas:

★ $1 = p(A) + p(-A)$

★ $1 = p(B) + p(-B)$

★ $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap -B)$

★ $p(-A) = p(-A \cap B) + p(-A \cap -B)$

★ $p(B) = p(A \cap B) + p(-A \cap B)$

★ $p(-B) = p(A \cap -B) + p(-A \cap -B)$

La tabla de contingencia no contiene información referente a las probabilidades condicionales y en consecuencia, no hay relaciones entre éstas. Para obtener una probabilidad condicional, por ejemplo $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, dividimos la cantidad de la celda cruzada de A y B por la probabilidad marginal de B.

Con el fin de mostrar toda la información referente a un problema de probabilidad condicional en la tabla de contingencia, Yañez (2000) propone introducir esta nueva información que muestra el registro, añadiendo una fila y una columna a la tabla. En cada celda de la nueva fila y de la nueva columna se da cuenta de las dos probabilidades condicionales que podemos calcular haciendo uso, respectivamente, de las dos probabilidades de la intersección y la probabilidad condicional de cada una de las filas/columnas de la tabla. La tabla ampliada está representada en la tabla 1.3.

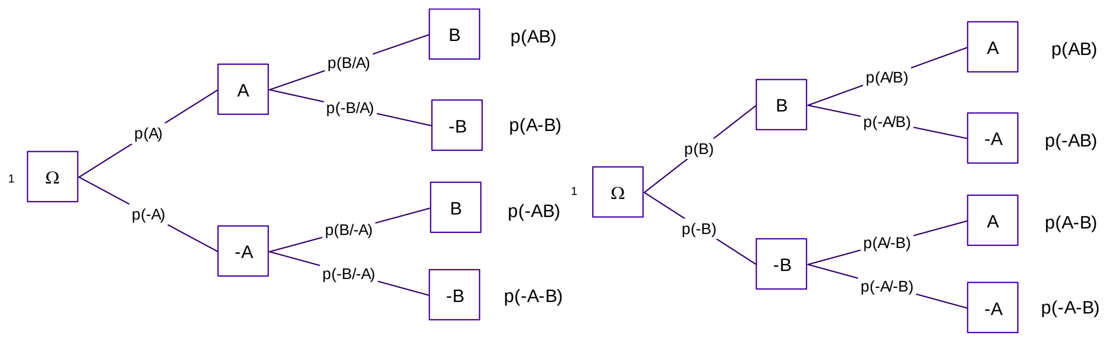
	A	-A	Marginales	Margen
B	p(AB)	p(-AB)	p(B)	p(A│B); p(-A│B)
-B	p(A-B)	p(-A-B)	p(-B)	p(A│-B); p(-A│-B)
Marginales	p(A)	p(-A)	1	
Margen	p(B│A); p(-B│A)	p(B│-A); p(-B│-A)		

Tabla 1.3. Tabla de contingencia ampliada

Ahora bien, la tabla 1.3 sólo podemos utilizarla si la información viene dada en términos de probabilidades.

LOS DIAGRAMAS DE ÁRBOL: SUCESOS, PROBABILIDADES Y RELACIONES

Existen dos diagramas de árbol que representan los sucesos A, B y sus complementarios, y las probabilidades de estos sucesos, así como las probabilidades condicionales de un problema de probabilidad condicional. Esto es debido a la distribución de la probabilidad del espacio muestral como suma de las probabilidades del suceso A y su complementario, y del suceso B y su complementario, a saber, 1=p(A)+p(-A) y 1=p(B)+p(-B). Los llamaremos primer y segundo árbol del PPC. El diagrama 1.2 muestra los dos diagramas de árbol:



Primer árbol   Segundo árbol

Diagrama 1.2. Primer y segundo diagrama de árbol de un PPC

En cada uno de estos árboles están representadas 7 probabilidades: la probabilidad del espacio muestral (Ω), dos probabilidades marginales complementarias y 4 probabilidades condicionales. La probabilidad del espacio muestral (Ω) se distribuye a lo largo de cada árbol siguiendo las reglas del producto y de la suma (Engel, 1975a). Además, el resto de las cantidades que no están representadas se pueden obtener por parte del resolutor utilizando estas reglas (Engel, 1975a).

De estas reglas se deducen las siguientes relaciones:

CUATRO RELACIONES MULTIPLICATIVAS EN CADA ÁRBOL deducibles por la regla del producto para caminos.

Relaciones multiplicativas del 1r árbol	Relaciones multiplicativas del 2º árbol
• p(A) . p(B/A) = p(AB)	• p(-B) . p(A/-B) = p(-B A)
• p(A) . p(-B/A) = p(A-B)	• p(-B) . p(-A/-B) = p(-B-A)
• p(-A) . p(B/-A) = p(-AB)	• p(B) . p(-A/B) = p(B-A)
• p(-A) . p(-B/-A) = p(-A-B)	• p(B) . p(A/B) = p(BA)

DIEZ RELACIONES ADITIVAS deducibles por la regla de la suma entre los caminos.

Dos deducibles del primer árbol:

- p(A) . p(-B/A)+ p(-A) . p(B/-A) = p(B), es decir, p(AB)+p(-AB) = p(B)
- p(A) . p(-B/A) + p(-A) p(-B/-A) = p(-B), es decir p(A-B) + p(-A-B) = p(-B)

Dos simétricas de las anteriores deducibles del segundo árbol:

- p(B) . p(A/B) + p(-B) . p(A/-B) = p(A) , es decir, p(BA) + p(-BA) = p(A)
- p(B) . p(-A/B) + p(-B)p(-A/-B) = p(-A), es decir, p(B-A) + p(-B-A) = p(-A)

Además están representadas, mediante la dicotomía de los caminos, las siguientes relaciones aditivas.

Tres relaciones aditivas (inducidas) del primer árbol.

- p(A) + p(-A) = 1
- p(B/A) + p(-B/A) = 1
- p(B/-A) + p(-B/-A) = 1

Tres relaciones simétricas (inducidas) del segundo árbol.

- p(B) + p(-B) = 1
- p(A/B) + p(-A/B) = 1
- p(A/-B) + p(-A/-B) = 1

Los diagramas de árbol pueden utilizarse como herramienta para resolver los problemas de probabilidad condicional, ya que su representación da cuenta de todas las cantidades y relaciones entre las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional. El enlace de unión entre los dos diagramas de árbol de un PPC viene dado por la conmutatividad del suceso intersección que hace que las probabilidades respectivas sean iguales. Esto permite transferir probabilidades de un árbol a otro.

Las tablas de contingencia y los diagramas de árbol son herramientas heurísticas (Fischbein, 1975) en la resolución de problemas de probabilidad condicional, importantes en la organización de la información dada en un problema de probabilidad condicional, así como en el uso de sus reglas para calcular nuevas probabilidades. El uso adecuado de estas herramientas por parte del resolutor, requiere de una enseñanza específica.

Diferentes autores, Engel (1975a), Parzysz (1990), Shaughnessy (1992), Ojeda (1995, 1996), Dupuis & Rousset-Bert (1996), Yañez (2000), Huerta (2000), proponen la utilización de diagramas de árbol y tablas de contingencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional. Concretamente, Parzysz (1990) concluye en su artículo:

> *"Que dire en conclusion? Que ce petit article n'avait aucune prétention novatrice, puisque reprenant une pratique déjà attestée (sinon courante) Qu'il n'avait d'autre but que de mettre l'accent sur un point particulier de l'enseignement des probabilités, et de signaler l'intérêt d'une utilisation plus importante et plus institutionnelle des arbres, en particulier dans les cas ò interviennent des probabilités conditionnelles, permettant ainsi, non seulement une illustration, mais surtout une approche différente de cette notion, et fournissant de plus un outil de résolution de problèmes mieux adapté à l'ensemble des élèves» (p.53).*

Ojeda (1995, 1996) indica que la utilización de diagramas de árbol favorece la argumentación de las respuestas con el uso de fórmulas "de y entre probabilidades". Concretamente dice:

> *"una enseñanza de la probabilidad condicional basada en el empleo de diagramas de árbol y en el planteamiento de problemas isomorfos favorece el hecho de la argumentación de las respuestas utilizando fórmulas y métodos enseñados". (Ojeda 1995, p. 44)*

La resolución de los problemas de probabilidad condicional nos sugiere el uso de tablas de contingencia, de diagramas de árbol o del álgebra. Este uso puede hacerse por separado o en combinación (ver apartado 4.1.1.1). El resolutor competente decide cuál o cuáles son las herramientas más adecuadas para cada problema.

Ahora bien este uso depende de la enseñanza y aprendizaje de estas herramientas. Pero, si un estudiante se enfrenta a un problema de probabilidad condicional, ¿cómo actúa? ¿qué modo de resolver utiliza? ¿cómo son sus comportamientos? ¿estos comportamientos dependen de algo? ¿qué parte de "culpa" tienen los enunciados de los problemas en ello?

1.4. DE LOS GRAFOS TRINOMIALES Y LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

El proceso de resolución de un problema de probabilidad condicional de enunciado verbal, al igual que el de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal de más de una etapa (Puig y Cerdán, 1988) es un proceso en el que pueden distinguirse varias fases. Una de las fases más importantes es la de la traducción. En ella el resolutor desea ir del lenguaje en el que está escrito el problema al lenguaje de las matemáticas. Citando el trabajo de Cerdán y Huerta (en prensa), en los problemas de probabilidad condicional, esta etapa implica:

> *una lectura que permita la identificación de sucesos y las probabilidades asignadas a estos sucesos, y la determinación de las relaciones entre los sucesos y/o entre sus probabilidades. Además, un método que dé cuenta de la organización de la disposición precisa de aquellas probabilidades de sucesos y relaciones entre probabilidades que permiten determinar la probabilidad por la que se pregunta en el problema. Esta disposición finaliza mostrando expresiones aritméticas o ecuaciones algebraicas en las que está implicada la probabilidad buscada. (pàg. 5)*

Estos autores proponen modelar los problemas ternarios de probabilidad condicional mediante los grafos trinomiales, sugeridos por Fridman (1990), para su análisis. Consideran los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal reescritos en otro texto: los grafos trinomiales, y en este nuevo texto analizan estos problemas según la estructura de cantidades y relaciones entre estas cantidades.

Cerdán y Huerta (en prensa) definen los problemas ternarios de probabilidad condicional. Consideran problemas ternarios de probabilidad condicional a aquellos problemas de probabilidad condicional que:

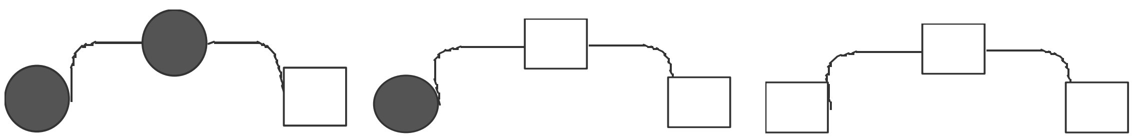
1. *Tratan con probabilidades conocidas y desconocidas. No todas las probabilidades desconocidas tienen por qué estar expresamente mencionadas en el texto del problema.*

2. *Todas las probabilidades conocidas y desconocidas están ligadas por relaciones ternarias.*
3. *Cada relación ternaria contiene, al menos, una probabilidad desconocida.*
4. *Todas las relaciones, en el caso en el que haya más de una, se encuentran ligadas entre sí por una o dos probabilidades.*
5. *El objeto del problema consiste en la determinación de una o varias probabilidades desconocidas. (p.8)*

Estas cinco condiciones delimitan los problemas de probabilidad condicional que son objeto de estudio en esta investigación.

En un grafo trinomial cada una de sus aristas relaciona tres vértices. Éstos pueden ser de dos clases diferentes: claros y oscuros. Las aristas representan las relaciones ternarias del problema y los vértices representan las cantidades. Con los vértices claros representamos las cantidades desconocidas y con los oscuros representamos los datos. Por lo que los grafos trinomiales reducen un problema a un mundo de cantidades conocidas, cantidades desconocidas y relaciones ternarias entre éstas.

Entonces, las posibles aristas de un grafo trinomial, sin tener en cuenta la disposición de las cantidades están representadas en la figura 1.2.



Arista 1 Arista 2 Arista 3

Figura 1.2. Posibles aristas en un grafo trinomial

La arista 1 tiene dos vértices oscuros y uno claro, por lo que tenemos dos datos y una cantidad desconocida. En la arista 2 observamos una cantidad conocida y dos desconocidas y en la arista 3 las tres cantidades son desconocidas.

También hacemos, en los grafos trinomiales de los problemas de probabilidad condicional, una distinción en las aristas, según representen relaciones aditivas o multiplicativas. Nosotros utilizaremos las aristas rectas para representar las relaciones aditivas y las aristas curvas para representar las relaciones multiplicativas.

En los grafos trinomiales de los problemas de probabilidad condicional existe un orden de lectura de las aristas. Observamos la arista representada en la figura 1.3.

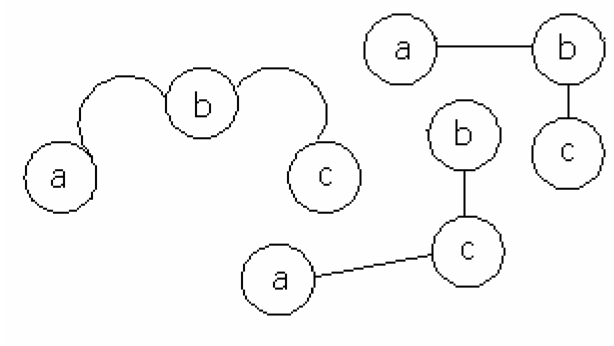


Figura 1.3. Arista curva y aristas rectas de un grafo trinomial

La orientación en la lectura de la relación dada por la arista curva es de izquierda a derecha: axb = c. La relación es multiplicativa pues se trata de una arista curva. Además la disposición de la arista curva es horizontal.

La orientación en la lectura de la relación dada por las aristas rectas es de izquierda a derecha: a= b+c. La relación es aditiva pues se trata de aristas rectas.

Las cantidades en un problema de probabilidad condicional son de naturaleza variada. Encontramos cantidades expresadas en términos de probabilidad, pero de manera muy frecuente encontramos las cantidades expresadas en frecuencias absolutas y en tantos por cien. Por esta razón, si en nuestros grafos trinomiales las aristas representan las relaciones entre las probabilidades, los vértices del grafo serán probabilidades y es necesario hacer una lectura del problema en términos de sucesos y las probabilidades de éstos. En el ejemplo siguiente sería necesaria la lectura del problema en términos de probabilidad.

EJEMPLO 1.13: De todos los alumnos del instituto, el 30% practica baloncesto y fútbol y el 30% practica baloncesto y no practica fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% practica fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

La lectura en términos de probabilidad sería

Definimos los sucesos:

Sea B el suceso "practicar baloncesto", -B es el suceso "no practicar baloncesto"

Sea F el suceso "practicar fútbol", - F el suceso "no practicar fútbol"

La lectura en términos de probabilidad de los datos del problema:

Los sucesos $B \cap F$ y $B \cap -F$, sus probabilidades: $p(B \cap F) = 0.3$; $p(B \cap -F) = 0.3$ y la probabilidad $p(F|-B) = 0.4$

Se pregunta por $p(F)$

En general, en cualquier problema ternario de probabilidad condicional, conocemos (ver apartado 1.2.1, pp 21-24) todas las posibles probabilidades y relaciones entre éstas. Existen 16+1 probabilidades, de las que hay una siempre conocida la probabilidad del espacio total, el 1; y 18 relaciones, de las que 10 son relaciones aditivas y 8 multiplicativas. Por lo que estas probabilidades y relaciones serán los vértices y las aristas del grafo trinomial respectivamente. Existen 17 vértices y 18 aristas, de las que 8 son aristas curvas y 10 rectas.

Cerdán y Huerta (en prensa) han representado todas estas probabilidades y las posibles relaciones aditivas y multiplicativas entre estas probabilidades, en un grafo trinomial (figura 1.4). Este grafo trinomial representa pues, el mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional, mundo al que pertenecen los problemas que van a utilizarse en esta investigación.

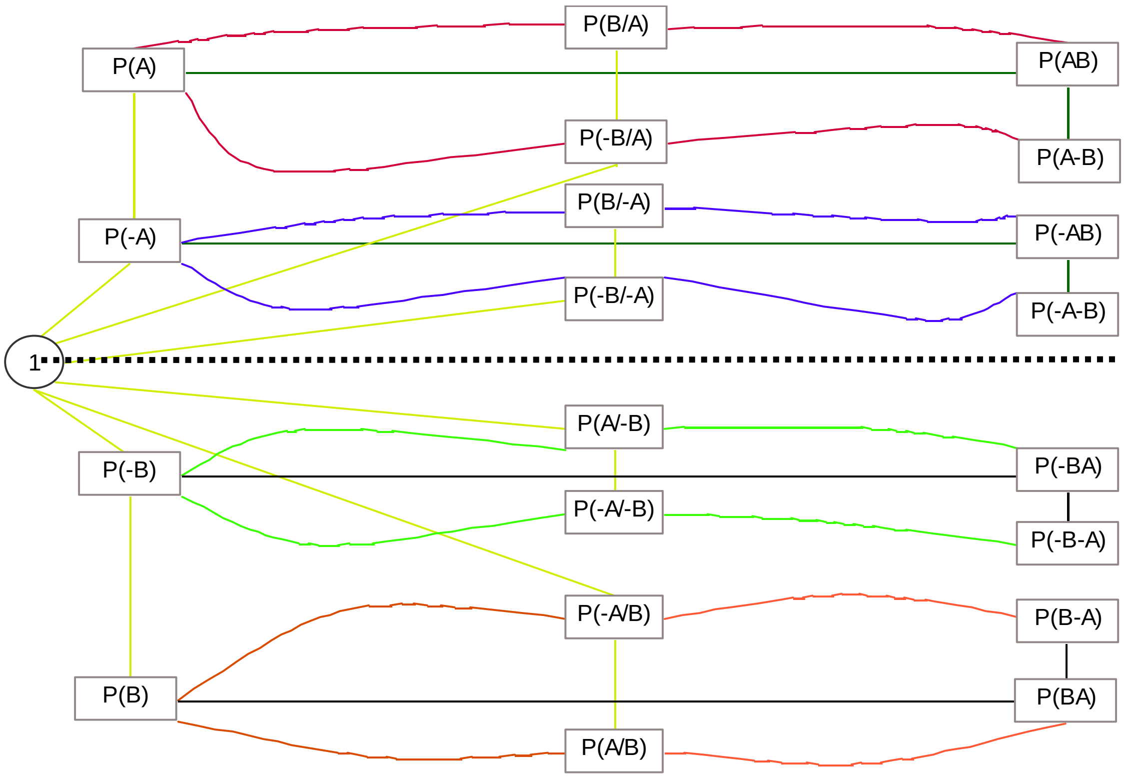


Figura 1.4. Grafo trinomial del mundo de los problemas trinomiales de probabilidad condicional. Adaptado de Cerdán y Huerta (en prensa)

Los vértices están dispuestos en cuatro columnas, de forma que la primera columna está reservada para el número 1, probabilidad del suceso seguro y dato que está implícito en cualquier problema de probabilidad; la segunda columna representa las probabilidades marginales; la tercera columna las probabilidades condicionales y la cuarta columna las probabilidades de la intersección. Además las aristas están orientadas, es decir, tienen un orden de lectura tal y como hemos explicado antes. Esta disposición no es casual, debido a la orientación de la arista que representa la relación multiplicativa.

Las relaciones unidas mediante una curva son las 8 relaciones multiplicativas:

★ Dos rojas: p(A) = p(B|A).p(AB); p(A) = p(-B|A).p(A-B)

★ Dos azules: p(-A) = p(B|-A).p(-AB); p(-A) = p(-B|-A).p(-A-B)

★ Dos verdes: p(-B) = p(A|-B).p(A-B); p(-B) = p(-A|-B).p(-A-B)

★ Dos naranjas: p(B) = p(-A|B).p(-AB); p(B) = p(A|B).p(AB)

Las relaciones unidas mediante una poligonal son las 10 relaciones aditivas:

★Seis amarillas:

1 = p(A) + p(-A)	1 = p(B│-A) + p(-B│-A)	1 = p(-A│B) + p(A│B)
1 = p(B) + p(-B)	1 = p(B│A) + p(-B│A)	1 = p(-A│-B) + p(A│-B)

★Dos verdes:

p(A) = p(A-B) + p(AB)	p(-A) = p(-A-B) + p(-AB)

★Dos negras:

p(B) = p(AB) + p(-AB)	p(-B) = p(A-B) + p(-A-B)

La disposición de las aristas que representan las relaciones aditivas es vertical.

Este grafo presenta una simetría (el eje está marcado con línea discontinua en la figura 1.4). En la mitad primera y en la segunda están representadas las mismas relaciones aditivas y multiplicativas; una aditiva que tiene que ver con la probabilidad de un suceso y la de su complementario, dos aditivas que tienen que ver con la probabilidad condicional de un suceso dado otro y la probabilidad condicional de su complementario, dos aditivas que dan cuenta de la probabilidad de un suceso como suma de las probabilidades de dos sucesos intersección disjuntos y cuatro multiplicativas que dan cuenta de la definición de probabilidad condicional.

Podemos simplificar el grafo, ya que hay vértices que representan la misma cantidad. Por conmutatividad de la intersección de conjuntos sabemos que

$A \cap B = B \cap A$ por lo que $p(A \cap B) = p(B \cap A)$

La cuarta columna de vértices, que está formada por las probabilidades de la intersección quedaría simplificada a una columna de 4 vértices, y el grafo simplificado se muestra en la figura 1.5.

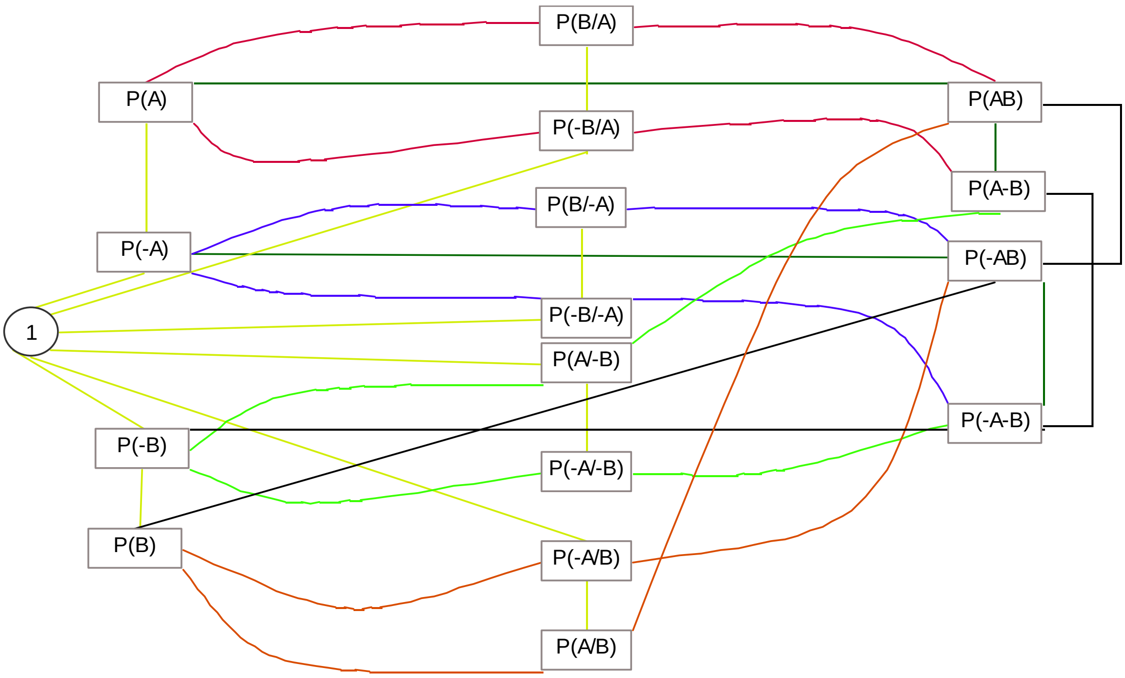


Figura 1.5. El mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional (Adaptado de Cerdán y Huerta, 2005)

Cerdán y Huerta (en prensa) llaman a este grafo: grafo de los problemas de probabilidad condicional, GPPC. Este GPPC es un modo de representar simultáneamente las 18 relaciones posibles entre las probabilidades de un problema ternario de probabilidad condicional. Esto permite, en el análisis del problema, tener presentes las relaciones que contienen probabilidades conocidas, así como la probabilidad por la que se pregunta, de forma que el GPPC permite el conocimiento de las relaciones que podemos utilizar para determinarla.

En el GPPC podemos representar cualquier problema ternario de probabilidad condicional de los que tratamos en esta investigación, oscureciendo los vértices que corresponden a las probabilidades que son datos del problema y resaltando la probabilidad por la que pregunta el problema. Una vez representado el problema en el GPPC podemos utilizar éste tanto para mostrar su estructura como para establecer rutas de resolución. Por lo que considerado un problema de probabilidad condicional ternario y de enunciado verbal, el GPPC nos sirve para hacer análisis. El método de análisis y síntesis se usa aquí para:

★ El análisis. Haciendo

- análisis de los sucesos y sus relaciones
- análisis de las probabilidades y sus relaciones

★ La síntesis. Concluyendo con la síntesis de los sucesos y sus relaciones y las probabilidades asociadas, que conducen a la solución[4], generalmente por medio de una expresión aritmética o algebraica.

Veamos algún ejemplo.

En el ejemplo 1.13 (de p. 47 nota al pie de esta memoria, del que hemos hecho una lectura en términos de probabilidad en p. 49) trasladamos las probabilidades a los vértices del GPPC, oscureciendo de azul los vértices que se corresponden con los datos del problema y señalando el vértice que da cuenta de la pregunta del problema en rojo. Este GPPC queda reflejado en la figura 1.6.

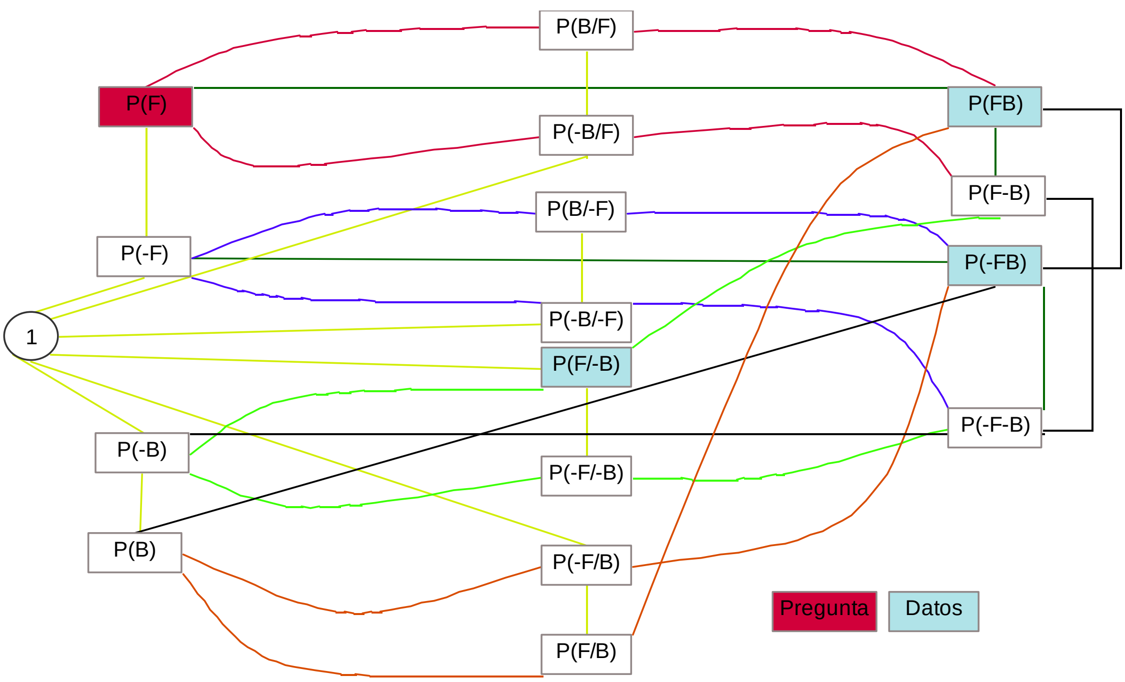


Figura 1.6. GPPC del ejemplo 1.13, en el que resaltamos los datos en color azul y la pregunta del problema en color rojo.

[4] El término *solución lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita o de la hipótesis a la conclusión* (Puig 1996, p.34)

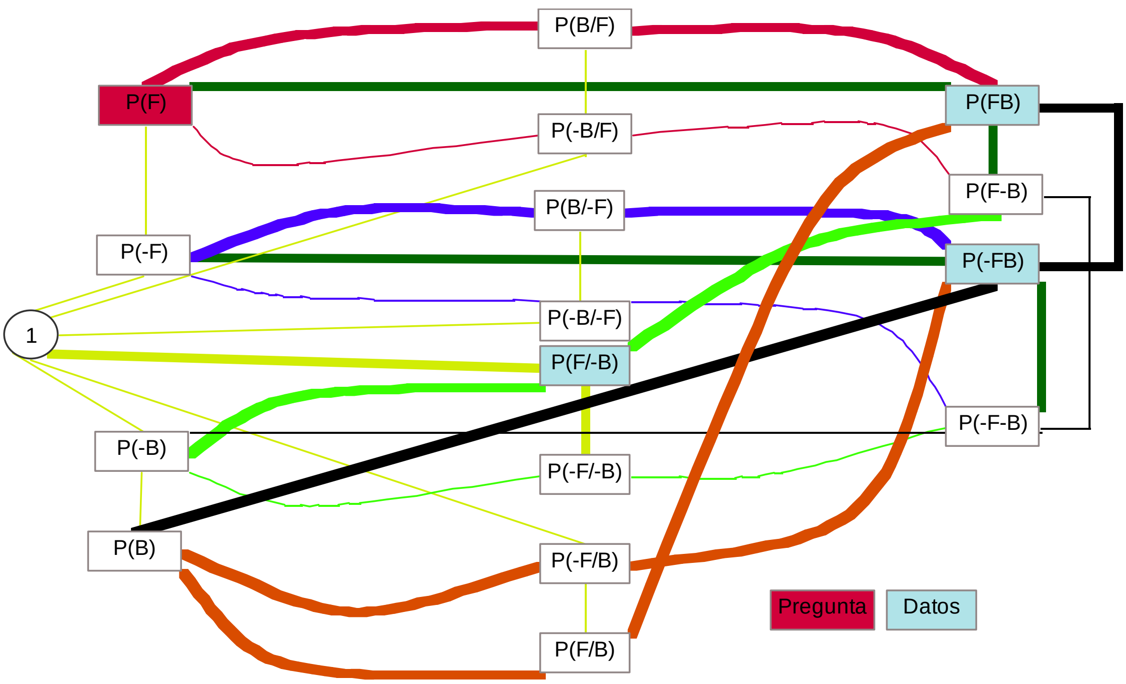


Figura 1.7. GPPC del ejemplo 1.13, en el que resaltamos las relaciones que contienen alguna probabilidad conocida

Dado el GPPC que muestra la figura 1.7, podemos hacer análisis para conocer todas las relaciones posibles entre los datos y la pregunta del problema. Por otro lado, para concluir con la síntesis y llegar a la expresión aritmética o algebraica que solucionará el problema, utilizamos el algoritmo del movimiento sobre el grafo[5]. En la figura 1.8 resaltamos una de las dos entradas al grafo, marcando la arista que la contiene con mayor grosor. Hemos elegido esta entrada pues si elegimos la otra entrada, la que contiene el vértice que representa p(F|-B), oscurecemos el vértice p(-F|-B) y al desechar esta arista no nos crea otra arista entrada (reglas 3 y 4 de la nota al pie 6 de esta página). Entonces continuaríamos el movimiento por la entrada que hemos elegido de la

[5] Fridman (1990) define el movimiento sobre el grafo con las siguientes reglas:

1. *el movimiento se puede realizar sólo en el caso en el que el grafo posea una entrada (vértice claro en una arista con dos vértices oscuros)*
2. *una vez dentro del grafo, avanzamos por la arista de entrada hasta llegar a un nodo (vértice claro en el que se ligan dos aristas) y lo "destruimos", sustituyéndolo por vértices oscuros en todas las aristas que confluyen en el nodo*
3. *la arista del grafo que, como resultado del movimiento, queda con todos sus vértices oscuros se debe desechar;*
4. *si luego de desechar una arista en el grafo queda por lo menos una entrada, se puede continuar el movimiento de acuerdo con las reglas anteriores (de 1 a 3) (p. 57)*

figura 1.8. Por esta razón empezamos el movimiento por el grafo por esta segunda entrada.

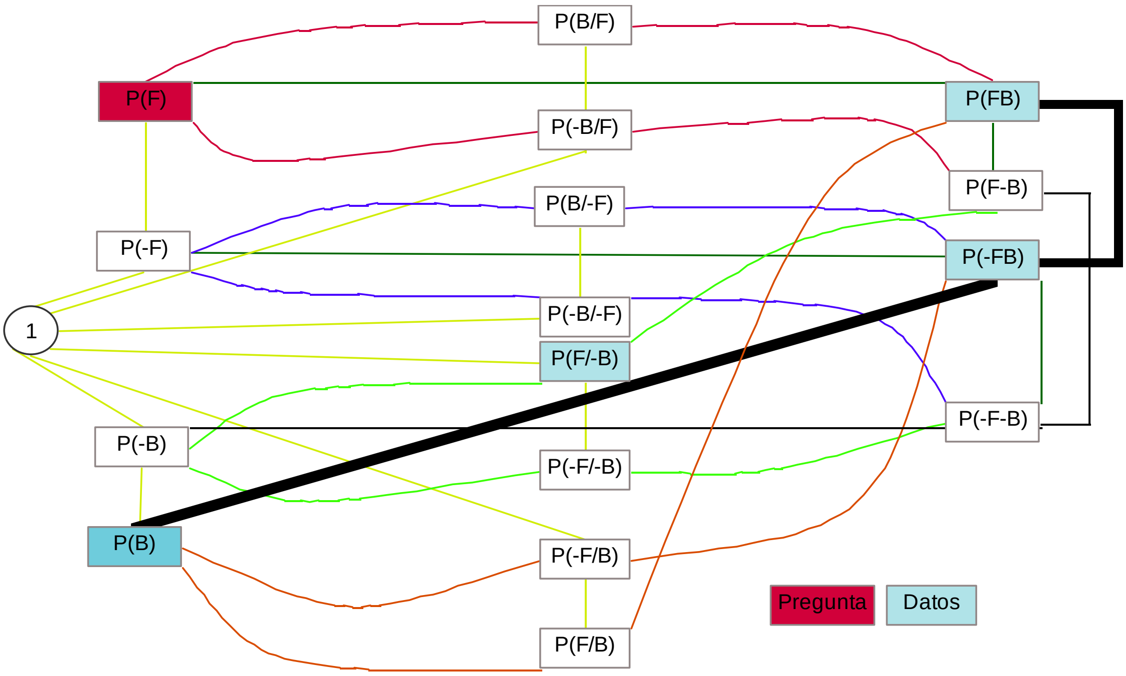


Figura 1.8. GPPC del ejemplo 1.13 en el que resaltamos la arista que contiene la entrada.

Según las reglas que definen el movimiento por el grafo, vamos oscureciendo vértices. La figura 1.9 muestra el movimiento por el GPPC paso a paso. La primera arista con entrada oscurece el vértice p(B), la segunda arista con entrada oscurece el vértice p(-B), la tercera arista con entrada oscurece el vértice p(F-B), y por último, la cuarta arista con entrada oscurece el vértice p(F), que responde la pregunta del problema.

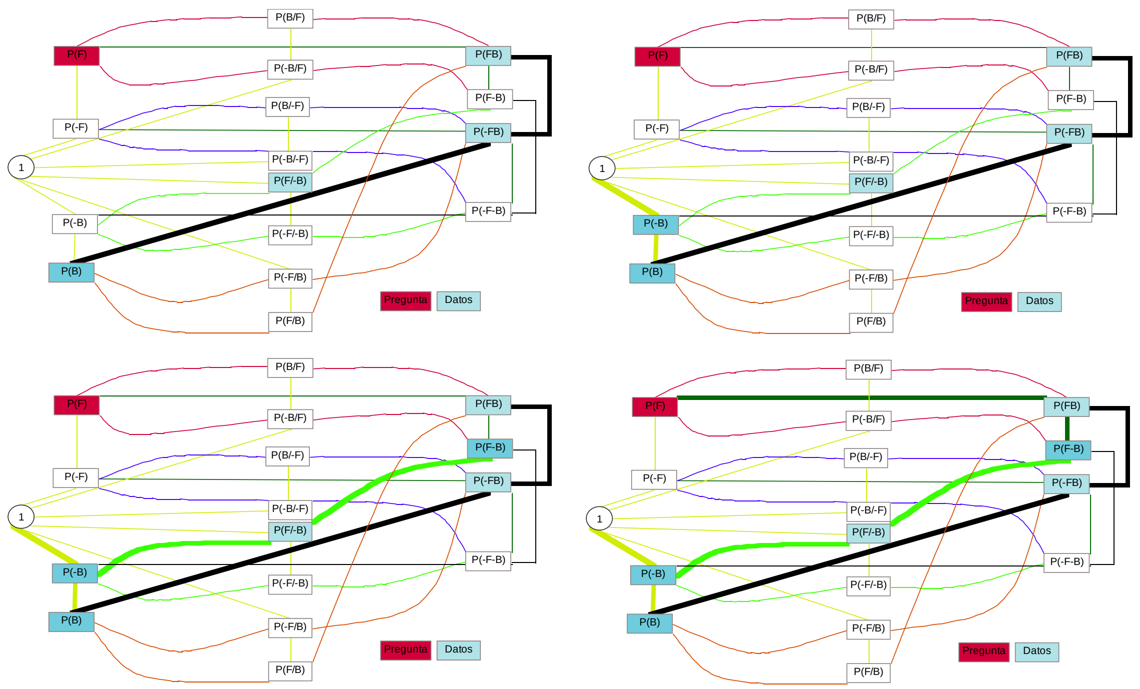


Figura 1.9. GGPPCC del ejemplo 1.13 en los que resaltamos el movimiento por el grafo.

Eliminamos del último GPPC las aristas que no hemos utilizado y obtenemos el grafo asociado al problema del ejemplo 1.13, que se observa en la figura 1.10.

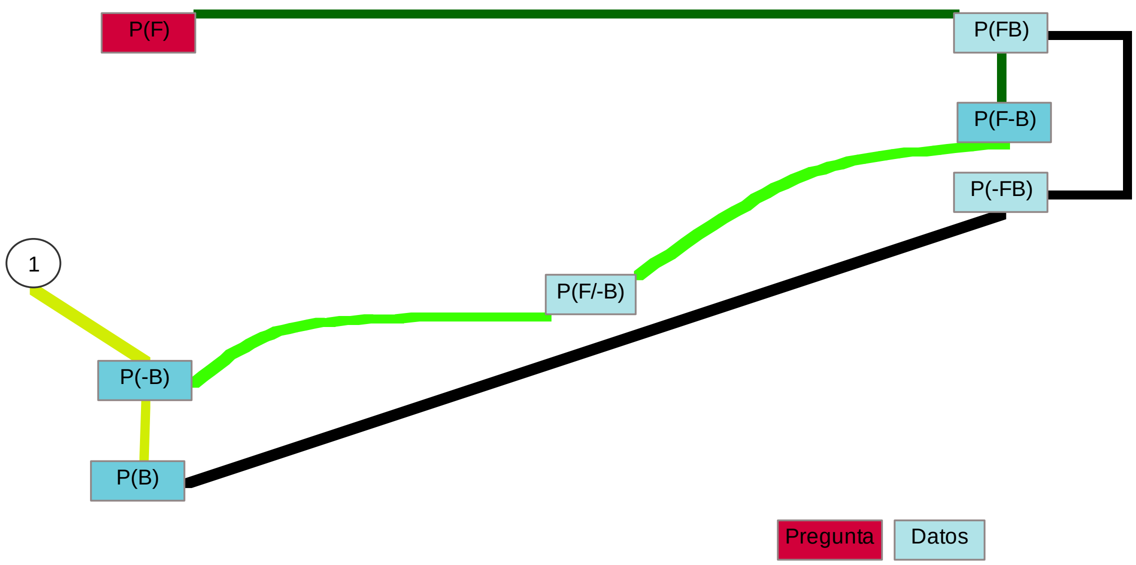


Figura 1.10. Grafo asociado al problema del ejemplo 1.13

Este grafo muestra un plan para resolver el problema:

★ Calculamos p(B) mediante la relación aditiva: p(B) = p(BF) + p(B-F)

★ Calculamos p(-B) mediante la relación aditiva p(-B) = 1 - p(B)

★ Calculamos p(F-B) mediante la relación multiplicativa

$$p(F\text{-}B) = p(\text{-}B).p(F \mid \text{-}B)$$

★ Calculamos p(F) mediante la relación aditiva p(F) = p(FB) + p(F-B)

★ El resultado del problema es una expresión aritmética que viene dada por:

$$p(F) = p(FB) + p(F - B) = p(FB) + p(F|-B).p(-B) = p(FB) + p(F|-B)[1 - p(B)] =$$
$$= p(FB) + p(F|-B)[1 - (p(BF) + p(-BF))] = 0.3 + 0.4[1 - (0.3 + 0.3)] = 0.46$$

Existen problemas de probabilidad condicional en los que el resultado es una expresión algebraica. En estos problemas de probabilidad condicional, los tres datos del problema generan la misma red de relaciones que dos de ellos. En consecuencia, se necesita introducir una incógnita para llegar a la expresión algebraica del resultado del problema. Yañez (2000) muestra, haciendo uso de las tablas de contingencia, los diagramas de árbol y el registro algebraico, cómo determinados casos de su clasificación de los problemas de probabilidad condicional son problemas en los que sólo se alcanza la solución utilizando el registro algebraico.

Cerdán y Huerta (en prensa) indican que:

no en todos los problemas de probabilidad condicional, el método de análisis-síntesis nos conduce a un grafo que permite determinar la probabilidad pedida mediante una expresión aritmética. (p.14)

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 1.14: En un grupo de individuos se ha estudiado el efecto de una vacuna contra la gripe. Se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Se estudiaba la Inteligencia superior y el rendimiento alto. De este estudio se sabe que, elegido un individuo:

La probabilidad de que tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento es alto es 2/3.

La probabilidad de que tenga rendimiento alto sabiendo que su inteligencia es superior es de 5/7.

La probabilidad de que no tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento no es alto es 3/5.

Elegido un individuo al azar, calcula la probabilidad de ser inteligente y tener rendimiento alto

Hacemos una lectura del texto del problema en términos de probabilidad, identificando los sucesos invocados en el texto y asignándoles sus probabilidades:

★ Sea A el suceso "tener rendimiento alto". Denotamos -A el suceso "no tener rendimiento alto"

★ Sea B el suceso "tener inteligencia superior". Denotamos -B el suceso "no tener inteligencia superior"

★ Los datos del problema son:

$p(B|A) = 2/3$, $p(A|B)= 5/7$ y $p(-B|-A) = 3/5$

★ El problema pregunta por $p(AB)$

Representamos en el GPPC las cantidades mencionadas en el problema y la pregunta del problema, con el fin de analizar el problema. La figura 1.11 muestra este GPPC.

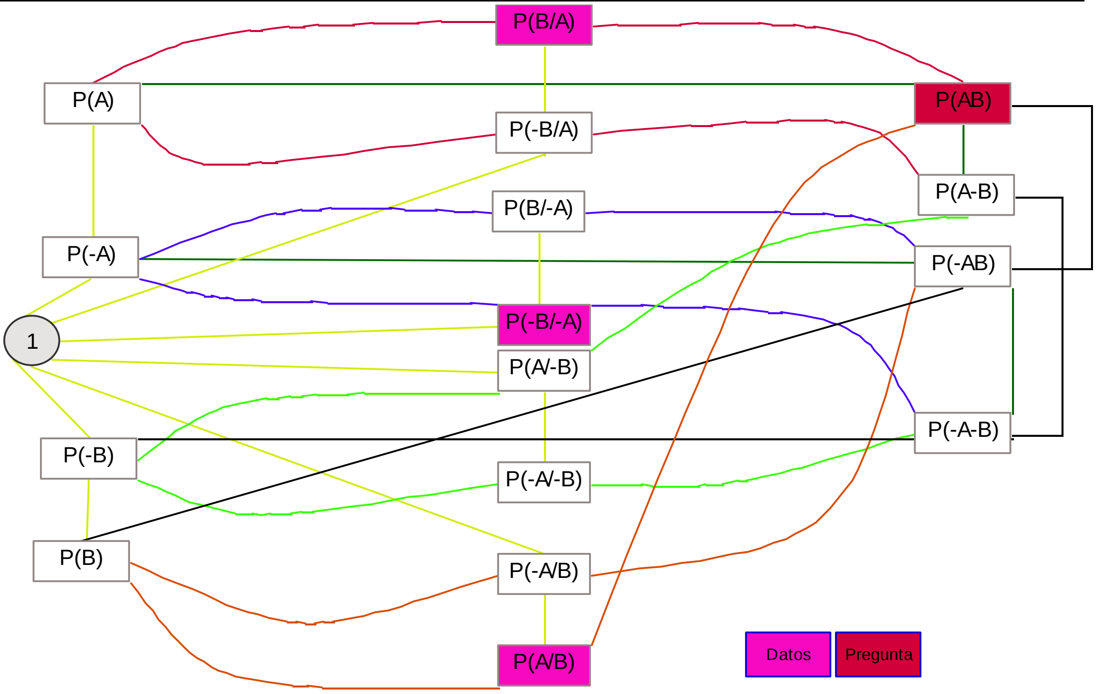


Figura 1.11. GPPC del ejemplo 1.14 que muestra las cantidades mencionadas del problema. Los datos son vértices rosas y la pregunta del problema vértice rojo.

En este GPPC tenemos tres aristas entrada, tal y como observamos en la figura 1.12.

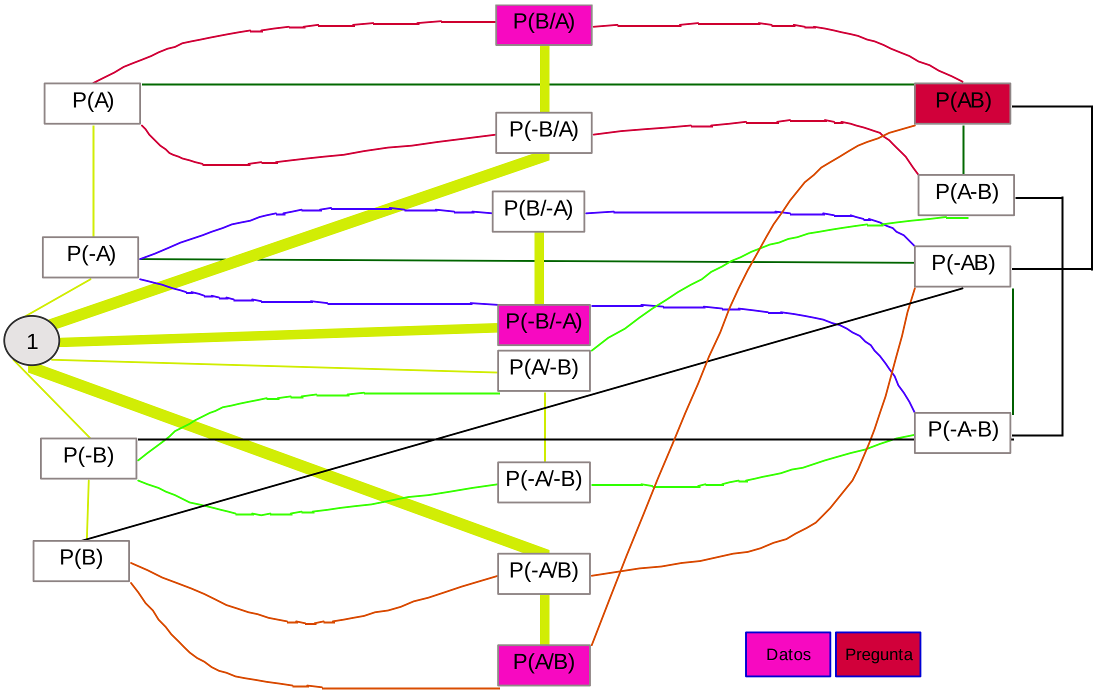


Figura 1.12. GPPC del ejemplo 1.14 que muestra las aristas entrada.

Sólo podemos oscurecer los vértices p(-A|B), p(B|-A) y p(-B|A). Una vez oscurecido estos vértices observamos que en el grafo ya no hay aristas con entrada. No podemos obtener p(AB). Tenemos un grafo mixto[6], tal y como se observa en la figura 1.12. Necesitamos oscurecer un vértice más, dando por conocida una probabilidad que en realidad no lo es. De esta forma, al oscurecer el vértice, creamos una entrada y podemos llegar a la destrucción del grafo. La figura 1.13 muestra el GPPC en donde hemos elegido p(-B) como el vértice oscuro que en realidad no lo es.

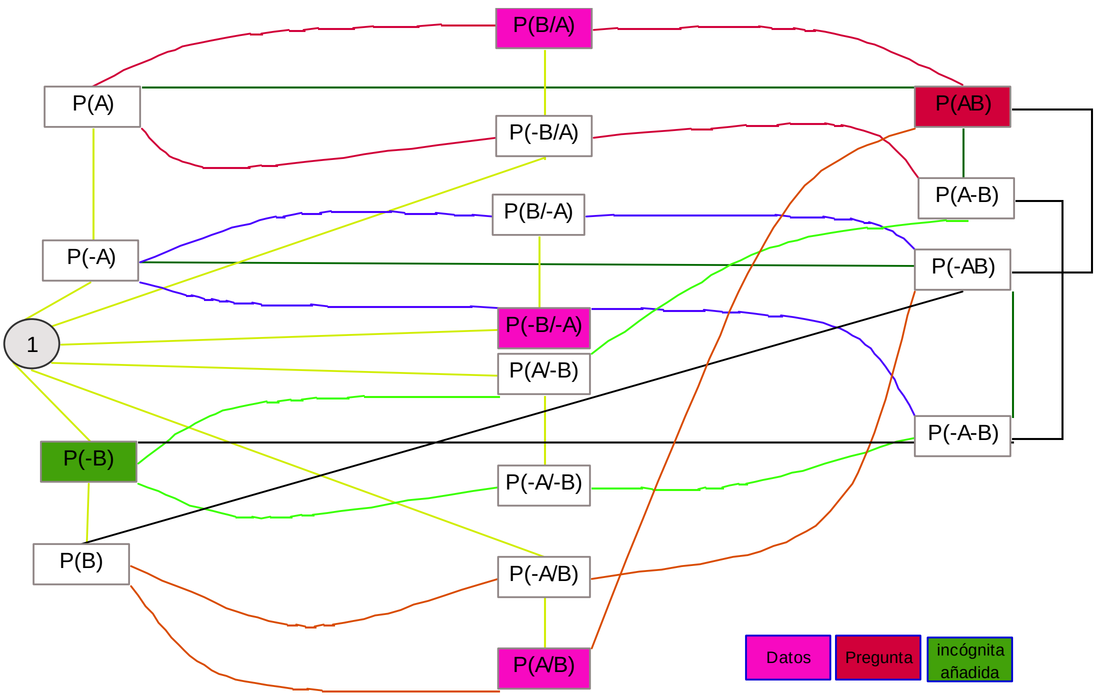


Figura 1.13. GPPC del ejemplo 1.14 elegida como incógnita x=p(-B)

Señalamos todas las aristas en las que están implicados todos los vértices que representan las probabilidades conocidas así como p(-B), tal y como se observa en la figura 1.14.

[6] *Un grafo trinomial es **cerrado** si carece de entradas y por tanto el algoritmo del movimiento no es aplicable. Un grafo trinomial es **abierto** si tiene entradas y, en consecuencia podemos aplicar el algoritmo. Los grafos abiertos se subdividen en dos clases: **encadenados**, los grafos que son destruidos como consecuencia de emplear el algoritmo y dan lugar a un grafo de primer orden (grafo en el que los vértices ligan una arista) con un vértice terminal (vértice claro que no es nodo) y **mixtos** los grafos que como resultado de aplicarles el algoritmo del movimiento, en una cierta etapa se destruyen y se obtiene un grafo cerrado. (Fridman, 1990. pp. 57-58)*

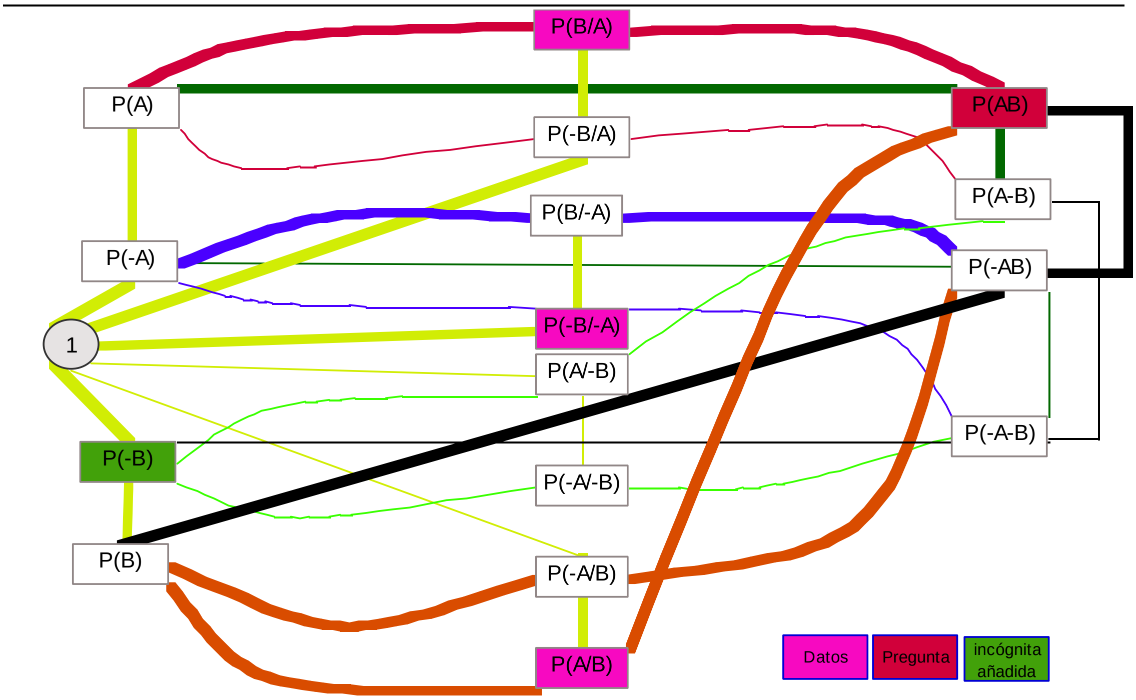


Figura 1.14. GPPC del ejemplo 1.14 en el que están resaltadas todas las aristas de los vértices que están implicados

Elegimos como entrada la arista recta que contiene a la incógnita elegida de forma que podemos destruir el grafo aplicando el algoritmo de destrucción que hemos utilizado en los ejemplos anteriores. La lectura del grafo, en todos los sentidos en los que permiten sus diferentes aristas, produce colisiones[7]. De esta forma, dos aristas que colisionan en un vértice producen una ecuación que resuelve la cantidad que hemos introducido como incógnita, y en consecuencia todas las demás.

Por ejemplo, en la figura 1.15 observamos las colisiones que se producen en el vértice p(AB).

[7] Una colisión en un vértice significa llegar a él por más de una arista de las que en él concurren.

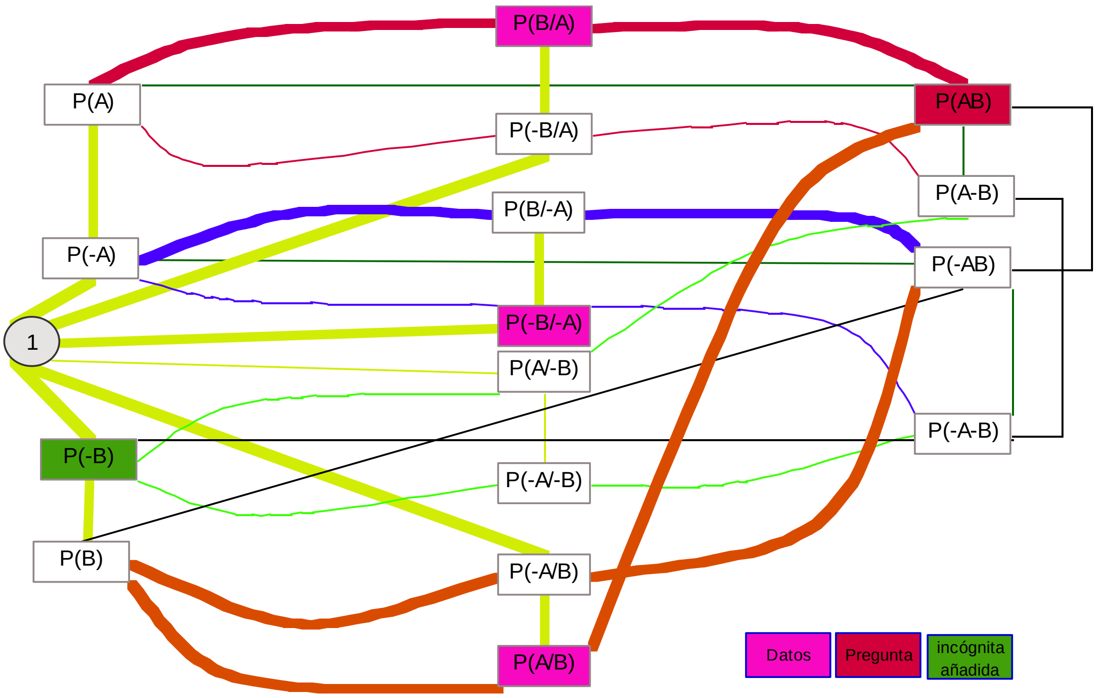


Figura 1.15. GPPC del ejemplo 1.14 en el que observamos las colisiones que se producen en p(AB)

En este vértice se producen dos expresiones, $\frac{5(1-x)}{7}$ y $\frac{2}{3}.\left(1-\frac{5(1-x)}{7}\right)$, para una misma probabilidad. De esta forma la lectura crea una ecuación que resuelve la incógnita x: $\frac{5(1-x)}{7}=\frac{2}{3}.\left(1-\frac{5(1-x)}{7}\right)$.

Si observamos las colisiones que se producen en otro vértice, por ejemplo en p(-A), obtenemos la ecuación $\frac{5}{7}(1-x)=1-\frac{15}{14}(1-x)$, equivalente a la anterior, pues tiene la misma solución.

Si elegimos otro vértice como incógnita, encontraremos otro conjunto de ecuaciones equivalentes entre ellas, pero no equivalentes a las anteriores.

La tabla 1.4 muestra la lista de ecuaciones equivalentes que resuelven el problema del ejemplo 1.14 (ver p. 57) eligiendo diferentes cantidades a las que se designa con una letra.

Incógnita	Lista de ecuaciones	Resultado del problema en función de la incógnita
p(-B)=x	$\frac{5(1-x)}{7}=\frac{2}{3}.\left(1-\frac{5(1-x)}{7}\right)$ $\frac{5}{7}(1-x)=1-\frac{15}{14}(1-x)$ $\frac{2}{7}(1-x)=\left(1-\frac{15}{14}(1-x)\right)\frac{2}{5}$ $x-\frac{5}{14}(1-x)=\frac{3}{5}\left(1-\frac{{}^{5}\!/_{7}(1-x)}{{}^{2}\!/_{3}}\right)$	$\frac{5(1-x)}{7}$
p(A)=x	$\frac{{}^{2}\!/_{3}x}{{}^{5}\!/_{7}}=\frac{2}{5}(1-x)+\frac{2}{3}x=\frac{{}^{2}\!/_{5}(1-x)}{{}^{2}\!/_{7}}$ $1-\frac{{}^{2}\!/_{3}x}{{}^{5}\!/_{7}}=\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}(1-x)=1-\frac{{}^{2}\!/_{5}(1-x)}{{}^{2}\!/_{7}}$	$\frac{2}{3}x$

Tabla 1.4. Lista de ecuaciones y resultado del problema según incógnita elegida

En este apartado se presenta un esquema del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional. Situamos el problema ternario de probabilidad condicional en el grafo con el fin de analizarlo y planear su resolución analíticamente. Así conocemos una estructura de las cantidades y de las relaciones necesarias para la resolución del problema. El grafo asociado al problema nos indica si el problema presenta resolución aritmética o algebraica, así como también nos indica todas las soluciones posibles del problema. Este hecho permite examinar las producciones de los resolutores y así identificar los éxitos, las dificultades o los errores (Cerdán y Huerta, 2005).

En esta investigación utilizaremos lo grafos trinomiales para clasificar las familias de cierto nivel de problemas ternarios de probabilidad condicional de solución aritmética. Uno de los fines de esta clasificación es el de crear problemas de solución aritmética de este nivel atendiendo, no sólo a las cantidades presentes en el problema, sino también al número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para su resolución.

1.5. DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este apartado mostramos resultados del mundo de la investigación que tienen que ver con este trabajo, tanto en su motivación como en el conocimiento de los problemas de probabilidad condicional. Lo dividimos en tres partes, dando cuenta cada una de éstas de algunas de las líneas de investigación en didáctica de la probabilidad.

Estas partes son:

1.5.1. De la enseñanza de la probabilidad y de la formación de profesores. Muestra resultados de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, en la formación de profesores y en las concepciones de los estudiantes de diferentes niveles educativos, tanto de secundaria como universitarios.

1.5.2. De la probabilidad en los libros de texto. Muestra los resultados de investigaciones que dan cuenta de la probabilidad en los libros de texto.

1.5.3. De la resolución de problemas. Muestra resultados de investigaciones en resolución de problemas, concretando ésta en la resolución de problemas de probabilidad y diferenciando la resolución mediante simulación.

1.5.1. DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD Y DE LA FORMACIÓN DE LOS PROFESORES

Es una tradición que la probabilidad sea una de las partes de las matemáticas escolares a la que se presta menos atención por parte de los profesores, tanto en la enseñanza obligatoria como en el bachiller. En los institutos y en los colegios, podemos decir que es casi un acuerdo de departamento programar las unidades de probabilidad y estadística para el final del curso, y de esta forma y como siempre hay falta de tiempo para abordar la programación didáctica de un curso escolar, es, sin duda, la probabilidad junto con la estadística lo que casi nunca se estudia. Y esto no sólo ocurre en las programaciones didácticas de los Departamentos, ya que en los libros de texto escolares son, generalmente, las últimas unidades las que se corresponden con la probabilidad y la estadística. De esta forma, si el uso del libro de texto se hace de principio a fin y el factor tiempo influye, son estas unidades las que no se trabajan.

Una de las causas de este problema que supone el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad está en la formación de maestros y profesores.

La formación acerca de la probabilidad que recibimos maestros y profesores en los estudios universitarios es una formación determinista y en algunos casos insuficiente. Los maestros, normalmente no han recibido en su formación cursos específicos de probabilidad, ya que éstos reciben una formación generalista, en la cual se pone el énfasis en otras partes de las matemáticas como la aritmética y la geometría. Por lo que la ausencia de formación específica en la mayoría de maestros y profesores de secundaria, tanto a nivel conceptual como a nivel didáctico, crea una inevitable sensación de inseguridad en el tratamiento de la probabilidad en el aula (Creer y Riston, 1993, citados en Azcárate, 1995)

En el grupo de profesores de secundaria también podemos encontrar algunos que no han recibido formación acerca de la probabilidad, y los que la han recibido, ésta ha estado planteada desde una perspectiva esencialmente formal y también aplicada, sin entrar a analizar el concepto desde su significado (Rubin y Roseberg, 1990, citados en Azcárate, 1995). Esta formación en probabilidad queda pobre siempre que nos quedemos en axiomas, definiciones, proposiciones, teoremas y corolarios. Los profesores de secundaria no podemos transmitir a los estudiantes la axiomática de la probabilidad. Lo que debemos enseñar, el concepto con sus significados y consecuentemente la asignación como precursor del concepto matemático de probabilidad, no forma parte de aquella formación matemática sino de la formación didáctica. En consecuencia, la enseñanza de la probabilidad muestra lagunas.

Shaugnessy (1992) indica que en algunos países, como Estados Unidos, la escasez de investigaciones en el nivel de secundaria es debida, al menos en parte, a la carencia de instrucción en probabilidad y estadística en este nivel. Propone investigar en este nivel para informar a los profesores y poder desarrollar el currículo. Estas investigaciones deberían indagar sobre las concepciones y actitudes de los profesores de primaria y secundaria en todo lo referente a lo estocástico

> *Necesitamos una mayor información tanto de los profesores en formación como en activo. (p. 489)*

Azcárate (1995) realiza un estudio acerca de las concepciones de maestros en formación en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad, con los objetivos de caracterizar estas concepciones y obtener información sobre las diferentes tipologías que presentan los futuros profesores de primaria a la hora de dar justificaciones explicativas delante de diferentes situaciones aleatorias.

Algunos han propuesto medios para intentar salvar estas dificultades - por ejemplo Rasfeld (2001) y también Shaugnessy (1992) - que apuntan, entre otras cosas, hacia una formación mayor y mejor del profesorado. Shaugnessy (1992) propone

> *En los profesores en formación, necesitamos desarrollar cursos en los cuales mostremos los errores y las creencias estocásticas, y sensibilizar a nuestros futuros profesores hacia los frecuentes errores que pueden esperar encontrar en sus propios estudiantes (p. 489)*

Steinbring (1988, citado en Azcárate 1995) indica que es necesario trabajar con los profesores en tres niveles de reflexión:

- ★ La estructura matemática de la probabilidad y la estadística: conceptos, métodos y diagramas de árbol o medios de representación, es decir, el propio contenido estocástico.
- ★ Los contextos de actividad y aprendizaje para los alumnos. Medios especiales de representación, sistemas de trabajos y todos los

instrumentos que permiten el aprendizaje de los alumnos por un camino significativo.

★ La perspectiva de la actividad del profesor sobre el proceso de enseñanza. Planificación, organización, desarrollo, modificación y evaluación de los procesos de aprendizaje y enseñanza del conocimiento estocástico.

Batanero (2002) sugiere también que la formación del profesorado no sólo se base en el conocimiento de la probabilidad y la estadística, sino que incluya el conocimiento didáctico del contenido, y describe los siguientes componentes básicos de este conocimiento didáctico:

- *La reflexión epistemológica sobre el significado de los conceptos, procedimientos particulares que se pretende enseñar.*
- *Análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza. Este análisis permite reflexionar sobre los diversos niveles de comprensión posibles respecto a un mismo conocimiento y valorar el nivel y forma particular en que un determinado concepto podría ser enseñado a una persona en particular.*
- *Estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permitirá orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.*
- *Análisis de los currículos, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos. Todo ello forma parte de los recursos metodológicos disponibles para mejorar la acción didáctica. (p.6)*

Por otro lado, el concepto de probabilidad es un concepto que vive con la gente, que está en la sociedad y cualquier persona tiene sus intuiciones acerca de algunas nociones asociadas a la idea de probabilidad. El estudiante llega al aula con ideas y conocimientos construidos referentes a la probabilidad, anteriores al proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto. La interacción de estos conocimientos y estas ideas con las nuevas experiencias ayudan al estudiante a construir los nuevos conocimientos, que pueden estar en coherencia con los contenidos del saber enseñado en clase, como pueden contradecirlos. Por lo que con frecuencia, las ideas probabilísticas entran en conflicto con las experiencias de los estudiantes y su visión de la realidad (Kahneman y Tversky (1982), Garfield y Ahlgren (1988)).

Shaugnessy (1992) observa que los errores en probabilidad son difíciles de eliminar a pesar de nuestros grandes esfuerzos con la instrucción. Si este concepto empezó a ser estudiado para lograr ganar en los juegos de azar, es ahora en los juegos de azar en donde mucha gente muestra esas intuiciones antes citadas. Además es habitual en la sociedad relacionar la probabilidad con los juegos de azar, así como no es del todo general relacionar la probabilidad con cualquier situación de incertidumbre.

Rouan & Pallascio (1994) presentan un estudio en donde muestran las concepciones de estudiantes de secundaria acerca de las nociones de azar y probabilidad. De este estudio resaltamos las concepciones erróneas de los estudiantes sobre las nociones de azar, indicando que el azar se encuentra principalmente en la actividad lúdica, y sobre la noción de equiprobabilidad. Estos autores muestran cuatro tipologías que dan cuenta de las concepciones erróneas de la equiprobabilidad, la equi-ignorancia, la equi-posibilidad, el modelo dicotómico y el modelo de Pascal:

- ★ La equi-ignorancia consiste en considerar que la equiprobabilidad está directamente ligada a la ignorancia que rodea a los fenómenos fortuitos, esta última distribuida igualmente sobre los diferentes resultados posibles. Como todos los resultados están rodeados de la misma parte de ignorancia, entonces esta condición se traduce al hecho de que todos los resultados son euqiprobables.

★ La equi-posibilidad consiste en la igual posibilidad de aparición de los diferentes resultados posibles. Todos los resultados tienen la posibilidad de aparecer.

★ El modelo dicotómico consiste en pensar que cada resultado puede aparecer ,50%, como no puede aparecer, 50%.

★ El modelo de Pascal se basa en el conocimiento del número de resultados posibles, y asocia a cada uno de estos resultados una probabilidad igual a uno sobre este número; si el número de resultados posibles es n, entonces cada uno de estos resultados tiene una probabilidad igual a 1/n.

Continuando con la tipología de concepciones erróneas que muestran estos autores, indican que un resultado debe ser representativo de la población que lo ha generado y que ha de seguir el proceso por el cual ha sido obtenido.

Lonjedo y Valero (2002) muestran, además de las creencias sobre el azar que indican Rouen y Pallascio (1994), cómo la creencia de que la magia forma parte de los conocimientos de los estudiantes acerca de la probabilidad. El concepto de suceso lo entienden como el resultado de un generador de azar relacionado con los juegos de azar, pero predecir el tiempo que hará mañana es demasiado "científico" para ser el resultado del azar.

Serrano, Batanero y otros (1998) describen los resultados de una evaluación del razonamiento probabilístico en dos grupos de alumnos de diferentes edades (estudiantes de 14 años sin conocimiento formal acerca de la probabilidad y estudiantes de 18 años con formación de tipo tradicional acerca de la probabilidad) con el objetivo principal de analizar el grado en que los estudiantes muestran razonamiento normativo o muestran errores y sesgos en la solución de problemas probabilísticos de juicios bajo incertidumbre. Los sesgos que estudian son la heurística de la representatividad, el sesgo de la equiprobabilidad y el enfoque en el resultado aislado, sesgos identificados por otros autores (Kahneman et al (1982), Konold (1989) citados en Serrano, Batanero y otros (1998)), que corroboran en esta investigación. Los autores observan pocas diferencias en los dos grupos de estudiantes.

Estos sesgos tienen que ver con las concepciones erróneas que hemos citado de Rouen y Pallascio (1994).

Garfield y Ahlgren (1988) citan tres cuestiones que dificultan la enseñanza efectiva de la probabilidad:

Los estudiantes parecen tener dificultades en el desarrollo de intuiciones correctas sobre ideas fundamentales de probabilidad al menos por tres razones. En primer lugar, muchos estudiantes tienen una dificultad subyacente con los conceptos de número fraccionario y razonamiento proporcional, necesarios para el cálculo, expresión e interpretación de las probabilidades (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren (1988)). Resultados recogidos por la Valoración Nacional del Progreso Educativo (NAEP) en su segunda y tercera valoraciones de matemáticas, indican que los estudiantes flojeaban en el concepto de número racional y tenían dificultades con conceptos básicos que incluían fracciones, decimales y porcentajes (Carpenter, Corbitt y Kepner, 1981; Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren (1988)). Porcentajes bajos de estudiantes obtenían respuestas correctas en ejercicios con conceptos complejos y habilidades que requerían la comprensión de los principios matemáticos subyacentes. Dificultades en la traducción verbal de los datos del problema afectan tanto al azar como al resto de tópicos matemáticos (Hansen, McCann y Myers, 1985, citados en Garfield y Ahlgren (1988)). En segundo lugar, con frecuencia las ideas probabilísticas entran en conflicto con las experiencias de los estudiantes y su visión de la realidad. En tercer lugar, muchos estudiantes han desarrollado ya una cierta aversión a la probabilidad, debido a que la han tenido que estudiar de una forma demasiado abstracta y formal. Por esta razón, Freudenthal (1973) previno contra la enseñanza de cualquier técnica de estadística matemática incluso a nivel de inicio en la universidad.

Konold (1995) se pregunta *¿Cómo determinamos si los currículos están teniendo un efecto en el pensamiento de los estudiantes?*. Este autor piensa, al igual que Shaughnessy (1992), que es difícil cambiar las concepciones de los estudiantes acerca de la probabilidad. Pero si analizáramos los resultados de los currículos deberíamos basar nuestros análisis en los diferentes libros de texto, ya que éstos son la herramienta principal utilizada por los profesores para hacer realidad el currículo. Además de la situación de las unidades de Probabilidad y Estadística en los últimos capítulos de los libros de texto, éstos muestran algunas deficiencias. Ortiz de Haro (1998) nos muestra que los libros de texto presentan diversidad de significados sobre un mismo concepto probabilístico, incluso en un mismo nivel de enseñanza.

1.5.2. DE LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO

Además del trabajo de Ortiz de Haro (1998) citado arriba, existen otros trabajos en la misma línea, Ortiz de Haro, Batanero y Serrano (1996, 2001) y Ortiz de Haro (2002), que estudian la presentación de diferentes conceptos probabilísticos y el lenguaje probabilístico utilizado en algunos libros de texto españoles del período 1975-1991.

En Ortiz de Haro, Batanero y Serrano (1996) se analiza la presentación del concepto de frecuencia relativa en algunos libros de texto de Primer Curso de Bachillerato del período citado. En el análisis de los textos consideran por un lado la definición de la frecuencia relativa y sus propiedades como elementos de significado de tipo teórico, y por otro lado la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad de modo teórico, teniendo en cuenta un conjunto de actividades problemáticas que pueden dar lugar en los estudiantes a prácticas significativas en la comprensión de la idea de convergencia estocástica. Indican que la mayoría de los libros de texto analizados incluyen la definición y las propiedades y se hace alusión a la convergencia de la frecuencia relativa hacia la probabilidad de modo teórico. Destacan que la mayoría de los libros analizados sigue el esquema teoría-práctica en la presentación de los contenidos, presentando a los alumnos las propiedades teóricas de las frecuencias relativas, pero no hay una contrapartida de situaciones problemáticas a partir de las cuales ellos pudieran construir este conocimiento, tal y como proponen los autores en su modelo teórico.

Estos mismos autores, Ortiz de Haro, Batanero y Serrano (2001) analizan el lenguaje probabilístico en dos libros de texto del mismo período que el trabajo anterior, seleccionados por ser de los más completos en cuanto al tema de probabilidad. Clasifican el lenguaje en lenguaje de lo aleatorio y lenguaje de la probabilidad. Las palabras y expresiones utilizadas para hacer referencia al concepto de experimento aleatorio las clasifican en:

- ★ Expresiones referidas a la aleatoriedad
- ★ Expresiones referidas a la idea de experimento aleatorio o sus resultados
- ★ Vocablos relacionados con los dispositivos generadores de resultados aleatorios

El vocabulario que da cuenta de la probabilidad lo dividen en tres grupos:

- ★ Concepto, interpretación, tipos de probabilidad y concepciones
- ★ La probabilidad como función y asignación de sus valores
- ★ Graduación de probabilidades

Los autores muestran la gran riqueza y diversidad de términos y la variabilidad de expresiones que con relación a la aleatoriedad y probabilidad existen en los dos libros de texto analizados. De esta forma, además de mostrar la importancia del libro de texto como recurso didáctico de los más utilizados por los profesores, queda de manifiesto el lenguaje utilizado en estas nociones. Concluyen resaltando el importante papel de los escritores de libros de texto, pues fijan y concretan lo establecido en los currículos, y el papel del profesor que es quien decide en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje qué libro de texto utilizar así como las partes de éste y los recursos para complementarlo.

Por último, resaltamos el trabajo de Ortiz de Haro (2002). El objetivo general de esta investigación es caracterizar en el nivel de enseñanza citado en los trabajos anteriores, el significado que presentan los libros de texto en diferentes conceptos probabilísticos. Las hipótesis de esta investigación son las siguientes:

> *H1: El significado de los conceptos probabilísticos elementales mostrado en los libros de texto tiene carácter complejo, debido a la interrelación entre los diferentes conceptos, lo que hace difícil la secuenciación*
>
> *H2: Hay una gran variabilidad en el significado que, para los diferentes conceptos probabilísticos, presentan los libros de texto de un mismo nivel de enseñanza.*
>
> *H3: Aunque las diversas concepciones de la probabilidad se presentan desde un punto de vista intencional, las actividades propuestas a los alumnos se orientan casi exclusivamente a la concepción laplaciana y formal de este concepto.*
>
> *H4: La fenomenología de la probabilidad presentada al alumno en los textos está sesgada hacia el campo de los juegos de azar, sin mostrar la relevancia y aplicabilidad real del tema.*
>
> *H5: Existen convenios implícitos en el vocabulario usado en la presentación del tema de probabilidad a los alumnos.*
>
> *H6: La notación empleada en el trabajo con conceptos probabilísticos no siempre es consistente con la notación empleada por los alumnos en otras ramas de las matemáticas.*
>
> *H7: En el tema de probabilidad se incluye una variedad de representaciones tabulares, gráficas e icónicas cuya interpretación requiere con frecuencia de conocimientos no específicos del tema, por parte de los alumnos. (p.52)*

El autor confirma todas estas hipótesis, salvo H3 que la confirma de forma parcial, pues en el análisis de la presentación teórica del concepto de probabilidad, han sido las concepciones clásica y frecuencial las que presentan la mayoría de los libros, y sólo en algunos textos se presenta la concepción subjetiva. Una parte importante de los libros presenta la definición axiomática de la probabilidad.

Pero nos interesa resaltar las conclusiones parciales acerca del concepto teórico de probabilidad condicional y de su presentación práctica en los libros de texto. Ortiz de Haro (2002) observa una variedad en la presentación del concepto, de forma que en los libros que lo presentan de forma explícita encuentra dos variantes. Algunos libros lo definen directamente, tal y como se observa:

> *A la probabilidad p(B|supuesto que ocurrió A) se le llama probabilidad de B condicionada a A. Se puede expresar, simplemente p(B|A)*
>
> *(Etayo, J. y Colera (1978) p. 76)*

Otros libros dedican un apartado a este concepto, y lo introducen a partir de la frecuencia relativa:

> *Mediante un proceso de abstracción y teniendo en cuenta la relación que existe entre frecuencia relativa y probabilidad, obtenemos el concepto de probabilidad del siguiente modo*
>
> *Definición: Se llama probabilidad condicionada del suceso B respecto del suceso A y denotaremos por p(B|A) al cociente:*
>
> $$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \quad p(A) \neq 0$$
>
> *Del mismo modo:* $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \quad p(B) \neq 0$
>
> *(Vizmanos, Anzola, Primo (1991) p. 418)*

Ortiz de Haro indica que en otros libros se presenta el concepto de forma implícita, bien utilizando un ejemplo particular o a partir del concepto de experimento compuesto. Y siguiendo con el concepto teórico de probabilidad condicional, muestra que son pocos los libros de texto estudiados que indican que la probabilidad del suceso condicionante debe ser no nula.

El autor muestra cómo los libros de texto son portadores de errores típicos descritos sobre la comprensión de la probabilidad condicional. Dos de estos errores son:

★ no se tiene conciencia de que $p(A|B) \neq p(B|A)$

★lo que se condiciona es una probabilidad y no un suceso.

Con respecto al primer error, sólo uno de los libros de texto estudiados por el autor, (Negro y Pérez (1986)) indica esta diferencia así como el diferente significado de las dos probabilidades. Con respecto a la confusión conceptual del suceso condicionado, indica que a veces el lenguaje ambiguo puede provocar esta confusión y muestra un texto en el que se define este suceso.

Ortiz de Haro efectúa una clasificación y análisis de los ejercicios y ejemplos de probabilidad presentados en los libros de texto seleccionados. El fin de este estudio es mostrar algunas características generales de los ejercicios y ejemplos de los libros de texto que pueden influir en el significado de la probabilidad presentado al estudiante. Nos interesa del trabajo sobre todo, las conclusiones acerca de los ejemplos y ejercicios relacionados con la probabilidad condicional, con el cálculo de probabilidades aplicando el teorema de la probabilidad total y aplicando el teorema de Bayes. El autor concluye que en general son muy escasas las actividades relacionadas con la probabilidad condicional tanto en el caso de experimentos simples como compuestos (p. 188).

Los libros de texto estudiados los trabajos citados en este apartado 1.5.2, libros de 1º Bachillerato Unificado Polivalente, que se corresponden con el período 1975-1991, reflejan el currículo oficial publicado en el Boletín Oficial del Estado del 18 de abril de 1975:

> *Combinatoria. Probabilidad. Se pretende introducir la teoría combinatoria y noción de probabilidad para el caso del universo finito; Continuar el tratamiento estadístico iniciado en la educación general básica. En la combinatoria se estudiarán las variaciones y permutaciones ordinarias y con repetición y las combinaciones (B.O.E nº 93, p.8064)*

En este currículo no se especifican los contenidos conceptuales ni procedimentales. No se hace referencia a la probabilidad condicional, y en consecuencia, la mayoría de los libros de texto solo dan cuenta del currículo publicado en el BOE.

Por otro lado, los trabajos citados que dan cuenta de los conceptos de probabilidad en los libros de texto, nos muestran cómo hay errores conceptuales que no son intrínsecos de los estudiantes que no han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad, sino que el proceso de enseñanza-aprendizaje puede haber influido en la adquisición de estos errores ya que son errores que muestran los propios libros de texto, como los que mostramos en la página anterior.

1.5.3. DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Desde hace bastantes décadas se propone el empleo de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. El trabajo de Polya (1957) hace evidente la importancia de la resolución de problemas como medio para crear conocimiento en matemáticas y sus posibilidades en el aprendizaje de esta disciplina. Schoenfeld (1985) también propone la enseñanza y la comprensión de las matemáticas desde la resolución de problemas, indicando que cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica, hay que tomar en cuenta unos factores que llama componentes del conocimiento y la conducta.

Mamona-Downs & Downs (2005) también proponen enseñar vía resolución de problemas, y sugieren investigaciones acerca de las relaciones entre los logros conceptuales y la resolución de problemas según las siguientes cuestiones: ¿cómo controlar los conceptos de los estudiantes impresos desde las actividades de la resolución de problemas?, ¿qué procesos del conocimiento conceptual permiten ser mostrados desde la resolución de problemas? y ¿cómo puede el investigador-profesor medir cuándo los conceptos que se han intentado enseñar realmente se han asimilado? (p. 398)

Utilizando esta propuesta hacemos la siguiente pregunta, ¿podemos utilizar la resolución de problemas de probabilidad condicional para el aprendizaje de la teoría de la probabilidad condicional?

En cuanto a la resolución de problemas, sabemos que existen características del mismo problema que pueden hacer variar la conducta del resolutor y de este modo influir en el logro de la solución. Puig y Cerdán (1988) llaman a estas características variables de la tarea[8]. Estos autores presentan las variables de la tarea que son de particular interés en la resolución de problemas aritmético-algebraicos de varias etapas: las variables sintácticas, las variables de contexto y las de contenido.

Definen variable sintáctica

> *como cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema (p. 31).*

Definen las variables de contenido y de contexto:

> *Las variables de contenido y de contexto dan cuenta del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo, mientras que las variables de contexto lo hacen a los significados no matemáticos (p. 33).*

En nuestra investigación, definiremos las variables de tarea que tienen interés en la resolución de problemas de probabilidad condicional, teniendo en cuenta las definiciones de Puig y Cerdán (1988).

1.5.3.1. DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Shaughnessy (1992) se pregunta ¿cuál es el papel de la metacognición en los juicios bajo incertidumbre?. Ya se ha dicho que las concepciones erróneas en probabilidad tienen dificultad para ser eliminadas, a pesar de los grandes esfuerzos en la instrucción. De la misma forma, investigaciones en resolución de problemas han determinado que la instrucción en heurísticas y en estrategias en resolución de problemas no es suficiente para mejorar las habilidades en resolución de problemas de algunos estudiantes. Los

[8] *Se entiende como variable de la tarea cualquier característica del problema que asume un valor particular dentro de un posible conjunto de valores. (p. 30)*

investigadores en resolución de problemas empezaron a investigar el papel de la metacognición. Garofalo and Lester (1985, citados en Shaughnessy, 1992) identifican dos principales aspectos de la metacognición: el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición.

> *What is the role of metacognition in decision-making under uncertainty? Research in stochastic has found that misconceptions of probability are difficult to remove (at least in some our students) despite our best efforts at instruction. Similarly, research in problem-solving has determined that instruction in problem-solving heuristics and strategies is not sufficient to improve some students' problem-solving abilities. The problem-solving researchers have begun to investigate the role of metacognition. Garofalo and Lester (1985) identify two primary aspects of metacognition: knowledge of cognition and regulation of cognition. Knowledge of cognition includes knowledge of strategies and heuristics, but also includes self knowledge, such as beliefs and attitudes. Regulation of cognition includes our monitoring and decision-making mechanisms, as we mentally step outside ourselves and reflect on the processes and progress of solving a problem. We must begin to pay explicit attention to the metacognitive aspects of thinking under uncertainty, both in our teaching and in our research in stochastics. (Shaughnessy (1992) p. 490).*

Athanassiadis, Skoumbourdi, Kalavassis (2002) indican que los famosos problemas históricos considerados como los problemas de la fundación de la teoría de la probabilidad, pueden ser utilizados como base en la enseñanza de la probabilidad, ya que pueden llevar a los niños a reinventar y redescubrir los conceptos y las dificultades reales de esta teoría. En los libros de texto escolares, las formulaciones verbales que aparecen requieren de una única respuesta. Estos autores proponen que en la resolución de problemas escolares de probabilidad (en la escuela primaria, de 5 a 11 años) se requiera de la representación del material, la experimentación y el trabajo en equipo para una mejora en los resultados. Proponen la construcción de un material de enseñanza, especialmente de actividades de problemas, que tenga en cuenta estas conclusiones, de forma que se facilite la comprensión del concepto de probabilidad en la enseñanza primaria así como se mejore la preparación de futuros profesores.

I. DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD POR SIMULACIÓN

Hacia finales del siglo XX, concretamente de finales de los 80 a mediados de los 90, se desarrollaron nuevos currículos de enseñanza primaria y secundaria, que reflejaban un cambio sobre las creencias de cómo se debe enseñar la probabilidad. Estos currículos proponían adelantar la enseñanza de la probabilidad al comienzo de la educación secundaria obligatoria e incluso a la enseñanza primaria, fruto de trabajos previos de Piaget, Inhelder, Fischbein, utilizando actividades en donde el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos, luego obtenga datos empíricos de estos experimentos para finalmente comparar las probabilidades experimentales generadas con sus predicciones originales. De esta forma se ayuda a los estudiantes a construir concepciones correctas acerca de los procesos aleatorios. Estamos en el uso de la simulación como contexto en donde desarrollar ideas sobre lo aleatorio y lo probabilístico. Ahora bien, sólo con la simulación no basta. Shaughnessy (1983) sugiere que se introduzca la probabilidad y la estadística mediante experimentos utilizando la simulación, y sólo después considerando que se ha desarrollado la intuición, hacer la presentación desde la matemática formal. Garfield (1995, citado en Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998 y en Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 2001) propone que para que esta enseñanza sea efectiva, ésta se debe apoyar sobre el conocimiento previo de las concepciones de los estudiantes.

Shaughnessy (1983) indica que una simulación de un experimento probabilístico implica:

a) *modelizar el experimento utilizando algún artefacto probabilístico (urnas, monedas, dados, números aleatorios, …)*
b) *representar el experimento muchas veces con el artefacto, así utilizando los resultados de cada representación sea posible ayudar a lograr una importante muestra.*
c) *Reunir, organizar y analizar los datos*
d) *Calcular experimentalmente probabilidades, u otros resultados experimentales (i.e. frecuencias) de los datos*
e) *Hacer inferencias o sacar conclusiones de los datos experimentales, esto es, volver hacia atrás (p. 340)*

Zaki et Pluvinage (1991) indican que la modelización probabilística es la etapa fundamental y específica de la probabilidad. Dicen que ante una situación probabilística dada, la primera tarea a realizar, y habitualmente la más difícil, es encontrar un modelo probabilístico adecuado que dé cuenta perfectamente de la situación estudiada. Una vez establecido el modelo, el tratamiento deductivo toma el relevo y permite responder a las preguntas planteadas en la situación dada. Se basan en el ejemplo histórico del Caballero De Méré, que ilustra la dificultad y la importancia de la modelización: para tres dados que no se distinguen, las probabilidades de salir suma 11 y suma 12 no son tomadas como evidentes. Pascal imagina tres dados distinguibles por el color para resolver este problema. Indican que es el orden en las tareas, primero modelización y después el tratamiento deductivo, el que confiere su particularidad a la enseñanza de la probabilidad en relación al resto de las matemáticas. Es el uso de la simulación como método de resolución. Muestran que una utilización de la simulación en la enseñanza podría contribuir a la mejora de la comprensión de la probabilidad en los estudiantes (p. 151). Estos autores concluyen que la práctica de la simulación da lugar a un balance positivo en el desarrollo del juicio probabilístico de los estudiantes. Sin embargo, los autores son más reservados en cuanto al papel didáctico que puede jugar la simulación en la enseñanza de la probabilidad: el único hecho de proceder a la realización de experiencias aleatorias no parece ser suficiente para mejorar los avances probabilísticos de los estudiantes, y todavía menos para llevarlos a desarrollar métodos inductivos. En cambio, se puede identificar por la práctica de la simulación ciertas concepciones probabilísticas erróneas, y aprovechar en esta ocasión para aportar a los estudiantes explicaciones más convincentes, donde la simulación de experiencias aleatorias va a servir de soporte de interpretación (p. 179).

Por otro lado, Huerta (2000) indica que la simulación, como método de resolución de problemas de probabilidad con potencial heurístico, puede responder a diferentes intereses que no tienen por qué estar enganchados al resolutor. Es claro que si uno entiende la probabilidad sólo empíricamente, como frecuencias relativas, la simulación es el método conveniente para la resolución de problemas de probabilidad. Pero si se entiende la probabilidad desde los diferentes enfoques sobre la naturaleza del concepto (enfoque clásico, enfoque frecuencial, enfoque subjetivista, enfoque objetivista y enfoque estructural, Huerta (2000) p. 42) entonces la simulación es uno de los métodos para la resolución de problemas de probabilidad (p. 77).

Huerta propone el siguiente mapa conceptual (ver figura 1.16) acerca de la resolución por simulación de los problemas de probabilidad.

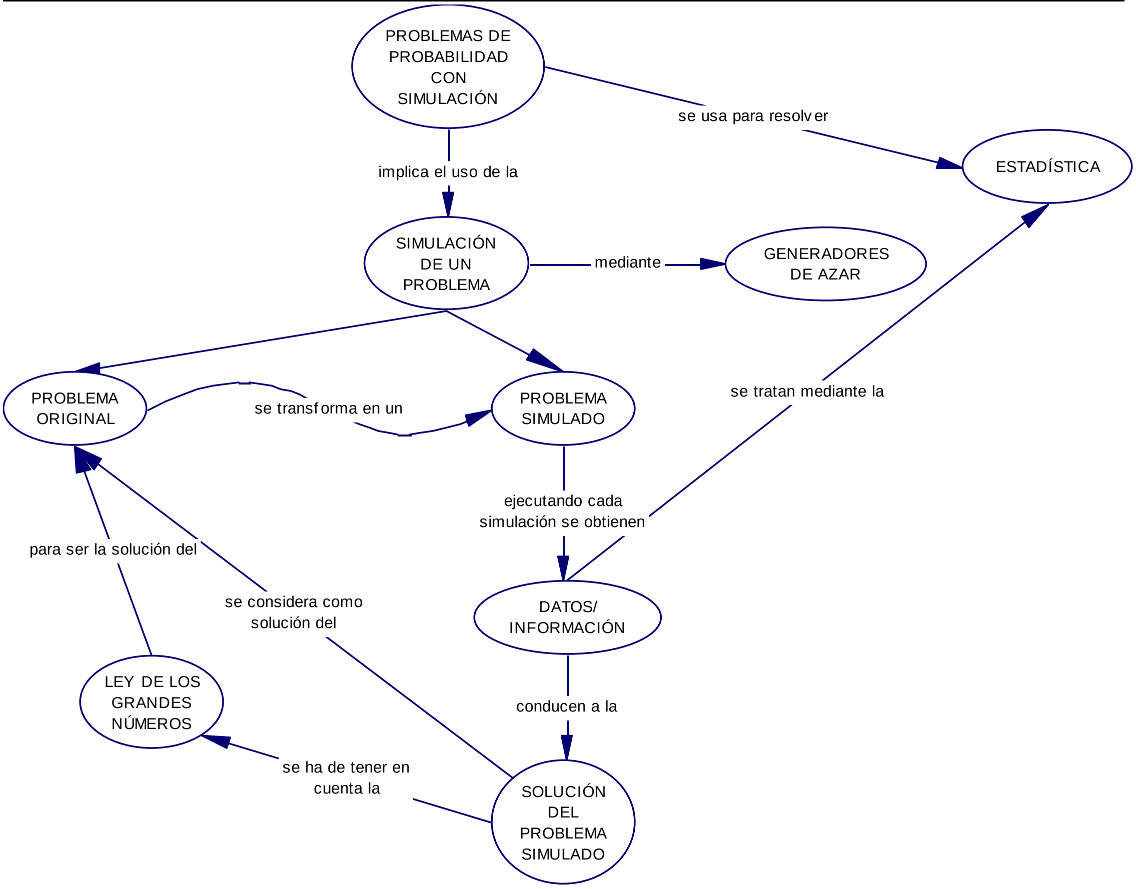


Figura 1.16. Mapa conceptual sobre la resolución por simulación de los problemas de probabilidad escolar (Huerta (2000) p.63)

La solución del problema simulado está condicionada por el número de simulaciones realizado. Estimada como aceptable cualquier solución dependiendo del número de simulaciones realizadas, la aspiración legítima de conseguir una solución próxima a una solución teórica desconocida pasa por la consideración de la Ley de los grandes números. En todo caso, ni es posible realizar un número de soluciones que tienda a infinito, por muy grande que éste sea, ni tenemos la seguridad que la solución dada sea la teórica y, todavía más, si repitiendo el proceso de solución del problema otra vez la solución sea la misma que la anterior. Una seguridad y dos estados de duda que nos remiten otra vez a la probabilidad y que, por tanto, nos conducen a considerar de esta manera la solución de un problema simulado. Para que la solución del problema simulado sea considerada solución del problema original se ha de interpretar en el contexto del problema original. (Huerta (2000) pp. 80-81)

Batanero (2001), además de mostrar el interés del uso de la simulación en la enseñanza de la probabilidad y de la estadística, muestra la importancia de la utilización del software de simulación. Indica que hay fenómenos que por sus características de espacio y tiempo, son difíciles de observar, y por medio de la simulación con el ordenador se construye un modelo simplificado del fenómeno, eliminando las variables irrelevantes a su estructura, condensado en el tiempo y manipulable por el alumno. La autora concluye que:

> *El uso de programas de simulación permite poner en manos del alumno un nuevo instrumento que hace posible la exploración y el descubrimiento de conceptos y principios que de otro modo serían mucho más abstractos, contribuyendo a paliar el problema de la falta de experiencia estocástica y a la mejora de la intuición probabilística que, en general, no se desarrollan espontáneamente (Batanero (2001) p. 9)*

Sin embargo, encuentra que esta tarea no es demasiado sencilla. Hay algunas dificultades a tener en cuenta. Cita las que muestra Countinho (2001, citado en Batanero 2001 y en Yáñez 2002), tales como el manejo del software cuando el alumno no está familiarizado, la resistencia a utilizar la simulación y la aproximación experimental para resolver un problema de probabilidad cuando es posible resolverlo mediante cálculo directo, la dificultad en aceptar datos de simulaciones que no han llevado a cabo personalmente para obtener estimaciones de la probabilidad, y la dificultad en diferenciar la estimación de la probabilidad que proporciona la simulación del verdadero valor teórico de la probabilidad. A estas dificultades Batanero añade que la simulación y el enfoque frecuencial a la probabilidad, aunque proporciona una solución al problema, no nos da la razón por la cual la solución es válida y por tanto carece de valor explicativo que sólo puede obtenerse en el enfoque clásico y el cálculo formal de probabilidades. Concluye que el paso del alumno del dominio de experiencia real al dominio pseudo-concreto (este dominio pseudo-concreto es el dominio en donde se trabaja con la simulación) cumple una función didáctica importante pues prepara al alumno para la comprensión del dominio formal en el que finalmente puede llevar a cabo una actividad matemática de formalización (p. 9).

Batanero, Biehler, Maxara, Engel and Vogel (2004) analizan el uso de la simulación para incrementar el conocimiento de los profesores y ayudarlos a hacer frente a sus conceptos estocásticos erróneos mientras al mismo tiempo estos conceptos erróneos se hacen familiares con los de los estudiantes y se les proporciona a los profesores modelos de situaciones didácticas que pueden utilizar en su propia docencia. En este artículo se sacan las mismas conclusiones acerca de la simulación que las mostradas en el artículo anterior.

Sánchez (2002) realiza una investigación con profesores, muestra qué aspectos de la simulación utilizando el software Fathom, son relevantes para los profesores y cómo planifican su enseñanza de la probabilidad. Analiza las respuestas de seis profesores de secundaria teniendo en cuenta principalmente cuatro aspectos generales:

- ★ el papel de la simulación en la enseñanza
- ★ los diferentes pasos a seguir en una simulación
- ★ la complejidad que supone comenzar la simulación
- ★ los conceptos más importantes que toman parte en las actividades de simulación

Los resultados muestran que los profesores juzgan como importantes ciertos aspectos de la simulación pero olvidan otros que son fundamentales en la enseñanza. Los profesores centran su atención en aspectos como la formulación de un modelo y su simulación pero olvidan aspectos como el análisis de los resultados y la validación.

Yáñez (2002) muestra dificultades y estrategias que los estudiantes tienen resolviendo problemas de probabilidad condicional utilizando simulación con el software Fathom. Realiza una investigación con doce estudiantes universitarios de ingeniería en una institución de la ciudad de México. Esta actividad consta de cuatro sesiones de tres horas cada una. Las dos primeras sesiones se dedican a una corta introducción de la aproximación frecuentista y a trabajar con Fathom, resolviendo algunos problemas por simulación con ordenador. La tercera y cuarta sesión se dedican a resolver tres problemas de probabilidad condicional en cada una. En la tercera el trabajo se realiza por parejas y en la cuarta de forma individual. Los problemas son los siguientes:

- ★ Un problema de urnas. Una urna con dos bolas blancas y dos bolas negras de la que se extraen dos bolas, de una en una y sin reemplazamiento, y en el que se preguntan por dos probabilidades condicionales. En la primera pregunta, suponiendo que la primera bola ha sido blanca, se pregunta por la probabilidad de que la segunda también lo sea. En la segunda pregunta, suponiendo que la segunda bola ha sido blanca, se pregunta por la probabilidad de que la primera haya sido blanca.
- ★ Un problema de maderitas. Tres maderitas de dos caras en un sombrero, una azul por las dos caras, una roja por las dos caras y la tercera con una cara roja y la otra azul. Se extrae una madera y se muestra una de sus caras y es roja. Se pregunta por la probabilidad de que la otra cara sea roja.
- ★ El problema del taxi, Shaugnhessy (1992). Un taxi tiene un accidente por la noche. Existen dos compañías de taxi en esa ciudad, una Verde y otra Azul. Se dan los datos siguientes:
    - o 75% de los taxis de esa ciudad son Verdes y el 25% son Azules.
    - o Un testigo identifica el taxi como azul. Ahora bien, en las mismas condiciones que la noche del accidente, este testigo no siempre acierta los colores de los taxis. Así, se comprueba que el testigo acierta el color en el 80% de los casos y en el 20% fracasa.

  Se pregunta por la probabilidad de que el taxi del accidente fuera de color Azul.

Yañez concluye que los estudiantes tienen dificultades en modelar el experimento aleatorio y en programar la simulación en el lenguaje adecuado. También tienen dificultad en la interpretación de los gráficos de las frecuencias relativas para estimar las probabilidades. Casi todos los estudiantes utilizan la estrategia *último valor* que identifica el último valor de la frecuencia relativa con la probabilidad requerida. Los estudiantes modelan para resolver sólo las cuestiones y no el experimento aleatorio, intentando transferir el análisis teórico al lenguaje de la simulación por ordenador.

Puede ser que los estudiantes distingan entre probabilidad teórica y probabilidad simulada, igual que piensan que hay más probabilidades que los valores generados por las frecuencias relativas. Entre el valor teórico y el valor experimental eligen el teórico, por la ausencia de confianza en el método de simulación y por la estimación por simulación basada en la lectura de la dirección en el gráfico en un proceso infinito. Para algunos estudiantes la probabilidad requerida es la moda de los valores de las frecuencias relativas generadas. Otra cosa a mencionar es la pequeña cantidad de casos generados que muestran la creencia en la ley de los grandes números y por consiguiente una ausencia de conocimiento acerca de la estimación de la probabilidad utilizando la estabilidad de las frecuencias relativas

En un trabajo posterior, Sánchez y Yáñez (2002) exploran las posibilidades de la simulación como útil para resolver problemas de estadística y de probabilidad. Citan y adoptan el punto de vista de Hawkins (1966):

> *Introducir efectivamente la tecnología supone comprender exactamente las mismas cosas sobre el aprendizaje y sobre la realización de la mejor enseñanza posible, que si debiéramos preparar otro tipo de enseñanza no basada en la tecnología*

Sánchez y Yáñez se preguntan: ¿cuál debe ser el contenido de un curso basado en la simulación? y ¿cómo debe estar organizado este contenido (particularmente al final de la enseñanza secundaria y al principio de la enseñanza superior) para ser un instrumento útil para la resolución de problemas?. Proponen diseñar un curso de probabilidad con el enfoque en simulación y utiizando el software Fathom, como caja de herramientas provechosa para construir modelos de situaciones aleatorias. Estos modelos tienen más posibilidades de ser buenos modelos didácticos en el sentido de Fischbein (1977).

Yañez (2002) propone enseñar simulación según un camino estructurado, haciendo uso de la construcción teórica llevada a cabo por von Mises (1957, citado en Sánchez y Yáñez, 2002), la cual se basa en el enfoque frecuencial de la probabilidad. El propósito básico de la simulación utilizando el software Fathom constituye una secuencia de pruebas que muestran algunos atributos y esto puede ser identificado directamente con la construcción teórica de von Mises. Las operaciones definidas por von Mises son traducidas en operaciones de secuencias en Fathom. No explican exhaustivamente esta traducción, pero aseguran que el trabajo teórico de von Mises proporciona una estructura consistente para la simulación y la caja de herramientas que supone la simulación con Fathom, adquiere mucha más fuerza y permite construir buenos modelos. Muestran un ejemplo de cómo los estudiantes pueden resolver problemas cuando empiezan a entender y utilizar las operaciones de von Mises en la simulación. Este ejemplo se refiere particularmente a la probabilidad condicional y a la operación Partición.

Una clase de problemas paradigmáticos acerca de la probabilidad condicional implica aquellos en los cuales se propone una partición del espacio muestral, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ y un suceso A. Además, las proporciones p_1, p_2, ..., p_n de la parte de A que está en cada B_i son conocidas. Los problemas consisten en determinar la probabilidad de A y las probabilidades condicionales tipo $p(B_i|A)$.

Los estudiantes muestran dificultad al construir un procedimiento resolutor para esta clase de problemas. En las situaciones simples cuando el contexto no ensombrece la naturaleza condicional del problema, entonces la construcción del espacio muestral y de los sucesos de la partición pueden producirse fácilmente.

El problema es el siguiente:

> En un colegio, el 40% de los estudiantes son varones. Asumimos que el 10% de los estudiantes varones y el 15% de las estudiantes mujeres son miopes,
>
> ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionando un estudiante al azar, el estudiante sea miope?
>
> ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionando una mujer al azar sea miope?

Al utilizar Fathom, la solución requiere usar el comando "If …". Este comando toma la estructura del problema y los estudiantes piensan que, cuando utilizan esto resuelven el problema, pues encuentran un camino para modelar una amplia clase de situaciones.

En cuanto al uso de software como Fathom, o el software que aparece en Internet, como herramienta, las preguntas que nos podemos hacer son ¿por qué, bajo qué circunstancias, con qué modelo, cómo…, usaré esta tecnología para resolver problemas de probabilidad? y ¿quién usará esta tecnología: un resolutor, un estudiante, un profesor?

El uso de la simulación se hace desde diferentes aspectos. Una línea de investigación propone la simulación como contexto donde desarrollar ideas de lo aleatorio y lo probabilístico. Otra línea de investigación utiliza la simulación como método de resolución. También encontramos una línea que propone la simulación como método de resolución con potencial heurístico. Por otro lado, se propone la simulación con un software determinado como contexto de enseñanza.

En nuestra investigación utilizamos como modos de resolución de problemas de probabilidad condicional la resolución por asignación y la resolución por cálculo de probabilidades, y no utilizamos la simulación, dejando este uso para futuras investigaciones.

II. DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD Y DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

En cuanto a la resolución de problemas de probabilidad, la revisión de la literatura nos muestra algunas variables de tarea que influyen en las conductas de los estudiantes a la hora de resolver problemas de probabilidad y nos indica que el conocimiento de estas variables por parte del docente es uno de los elementos que permitirá elegir los medios para favorecer el aprendizaje. Estos factores no necesariamente son los directamente ligados con la estructura matemática propia de la probabilidad.

Maury (1984) estudia dos variables de tarea: el contexto (variable de tarea de contexto) y el vocabulario (variable de tarea de contenido). Presenta un estudio con estudiantes de 15-16 años que han resuelto unas colecciones de problemas de cuantificación de probabilidades que se diferencian por el contexto y el vocabulario. El material está compuesto de cuatro cuadernos de seis ejercicios cada uno. De un cuaderno a otro, sólo varía el contexto y/o el vocabulario. Presenta dos tipos de contexto: bolsas de bolas de dos colores y ruletas con sectores de colores. Respecto al vocabulario hace dos distinciones: el lenguaje cotidiano y la terminología conceptual del cálculo de probabilidades. Se pregunta por juicios bajo incertidumbre. Como ejemplos mostramos algunos ejercicios de estos cuadernos, de forma que podamos ver las diferencias entre los contextos y los vocabularios que utiliza la autora:

Ejercicio 1: bolas, vocabulario técnico

Material: un saco conteniendo 5 bolas azules y 3 bolas rojas

Experiencia: se extrae al azar una bola del saco

Pregunta: ¿Cuál es el suceso más probable: "la bola extraída es roja" o bien "la bola extraída es azul"?

Ejercicio 2: Ruletas, vocabulario corriente

Material: Dibujo de dos ruletas, R1 con 5 secciones y 4 coloreadas de forma sucesiva, R2 con 4 secciones y 3 coloreadas de forma sucesiva

Experiencia: Se elige la ruleta que se quiere, se la hace girar; cuando se para se anota el color indicado por la aguja

Pregunta: ¿Qué ruleta elegirás para que la aguja marque más a menudo el color rojo?

Ejercicio 6: ruletas, vocabulario corriente

Material: dos ruletas R1 con 6 secciones y 2 coloreadas de forma alterna (blanca, blanca, blanca, color, blanca, color), R2 con 13 secciones y 4 coloreadas de forma alterna (blanca, blanca, color, color, blanca, blanca, blanca, blanca, color, blanca, blanca, blanca)

Experiencia: Se elige la ruleta que se quiere, después se hace girar y se anota el color señalado por la aguja

Pregunta: ¿Qué ruleta elegirás de forma que la aguja indique más a menudo el color rojo?

Ejercicio 6: ruletas, vocabulario técnico

Material: dos ruletas R1 con 6 secciones y 2 coloreadas de forma alterna (blanca, blanca, blanca, color, blanca, color), R2 con 13 secciones y 4 coloreadas de forma alterna (blanca, blanca, color, color, blanca, blanca, blanca, blanca, color, blanca, blanca, blanca)

Experiencia: Se elige la ruleta que se quiere, después se hace girar y se anota el color señalado por la aguja

Pregunta: ¿Qué ruleta elegirás para que el suceso "la aguja indica el color rojo" sea el más probable? (pp. 210, 211, 212, 213)

En las conclusiones, la autora muestra que los estudiantes de 15-16 años que, en teoría no deberían presentar problemas a la hora de cuantificar probabilidades pues han recibido la instrucción necesaria, presentan modelos espontáneos no válidos en cuanto a la probabilidad según el contexto del problema. La misma autora en su tesis doctoral, "Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes» (1987), presenta un estudio con 500 estudiantes franceses de diferentes niveles, alumnos de secundaria desde los 15 años hasta estudiantes de la universidad de 19 años resolviendo 8 problemas de probabilidad. La intención del estudio ha sido obtener información acerca del conocimiento conceptual que tiene que ver con los tres aspectos siguientes: cuantificación de la probabilidad, independencia estocástica y probabilidad condicional. Los 8 problemas han sido puestos en los dos contextos citados en el trabajo anterior de Maury de igual forma que el vocabulario utilizado en estos problemas. Los dos primeros problemas son para introducir el concepto, los problemas 3, 4, 5 y 6 tratan aspectos de cuantificación, el problema 7 sobre aspectos conceptuales de independencia estocástica y el problema 8 sobre aspectos de probabilidad condicional. Según la autora, la calidad de los resultados utilizados es generalmente superior según los niveles de instrucción de los estudiantes. Maury (1987, p. 315) constata que hay una diferencia fundamental en lo que tiene que ver en las pruebas relativas a la cuantificación de probabilidades y en las pruebas relativas a la independencia y a la probabilidad condicional. Concluye que la instrucción en la iniciación al cálculo de probabilidades ha sido eficiente en lo que respecta a la cuantificación, ya que los procedimientos utilizados son satisfactorios, así como el vocabulario utilizado en cualquiera de los dos contextos. Luego un gran número de estudiantes han adquirido una buena concepción acerca de la probabilidad. Pero, y siempre según la autora, en lo que tiene que ver con las nociones de probabilidad condicional y la independencia, la instrucción que han recibido estos estudiantes ha sido insuficiente, sobre todo en los estudiantes que se orientan hacia estudios literarios. Maury sugiere que para las exigencias un poco elevadas de la independencia y la probabilidad condicional es necesario introducir contextos y situaciones adicionales para la resolución de problemas. Mostramos el problema, Ejercicio 8, que trata de aspectos de la probabilidad condicional, en dos contextos, a saber, extracción de bolas y ruletas. El vocabulario elegido la autora lo define como vocabulario corriente.

Ejercicio 8:

Material: Un saco conteniendo una bola azul y dos bolas rojas

Experiencia: se extrae al azar una PRIMERA BOLA del saco, después, SIN DEVOLVERLA AL SACO, se extrae al azar una SEGUNDA BOLA

Pregunta: ¿Qué es más frecuente

- *las dos bolas extraídas son rojas*
- *la primera bola es roja y la segunda es azul?*

Ejercicio 8:

Material: una única ruleta pintada tal y como indica la figura 1.17:

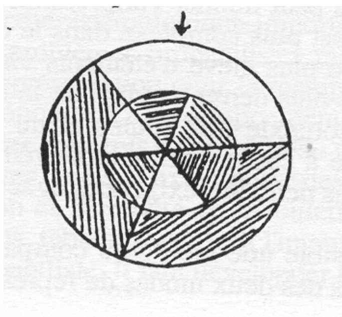


Figura 1.17

Experiencia: se hace girar la ruleta de forma que cuando se para anotamos LOS COLORES indicados por la aguja SOBRE LA CORONA Y SOBRE EL DISCO CENTRAL. Por ejemplo, en el caso de la aguja en el dibujo anterior, anotaremos: "la aguja indica el color azul sobre la corona y el color rojo sobre el disco central"

Pregunta: ¿Qué es más frecuente

- *la aguja indica el color rojo sobre la corona y el color rojo sobre el disco central*
- *la aguja indica el color rojo sobre la corona y el color azul sobre el disco central? (pp. 317, 318)*

Para Maury el uso de vocabulario técnico en sus ejercicios se limita a preguntar por lo que es más probable. Se puede consultar el anexo de las páginas 210-213 en Maury (1984)

Entonces nos preguntamos ¿existen otros contextos diferentes a los contextos del juego, ruletas, urnas etc? ¿qué tipo de lenguaje sería para Maury un problema del tipo del siguiente ejemplo?

Completa la tabla de contingencia siguiente:

A partir de la tabla, confecciona un diagrama de árbol y determina P(B/A), P(noB/A), P(B/noA) y P(noB/noA).

	A	noA	Total
B	0’4	0’2	
noB	0’25		
Total			1

Otros autores nos muestran cómo el lenguaje es un factor influyente en la resolución de problemas de probabilidad y en particular en la resolución de problemas de probabilidad condicional. El lenguaje considerado no como Maury, haciendo la distinción entre lo que ella considera lenguaje cotidiano y lenguaje propio del cálculo de las probabilidades, sino teniendo en cuenta las estructuras gramaticales en el texto del problema. Bentz y Borovnik (1985) indican que la comprensión verbal de los problemas es crucial. Algunos autores como Parzysz (1990), Ojeda (1995, 1996), Yañez (2000) simplemente recuerdan que el lenguaje puede influir en la interpretación de la probabilidad condicional con la probabilidad de la intersección.

Citamos a Parzysz y a Yañez.

> *"Cette difficulté est en partie liée au langage, et plus précisément aux formulations parfois ambiguës qui figurent dans les énoncés de problèmes…» Parzysz(1990), p.47*
>
> *«La segunda, son las razones del lenguaje y hace referencia a la gran cantidad de formas y contextos con que se pueden presentar los problemas de probabilidad condicional, lo que hace que muchas veces no*

se pueda identificar con claridad el evento condicionante o se olvide información pertinente con la resolución de un problema" Yañez (2000), p. 356

En Lonjedo (2003), Huerta y Lonjedo (2003b), Lonjedo y Huerta (2005) y Huerta y Lonjedo (2006) se muestra como el lenguaje es un factor que influye en la resolución de problemas de probabilidad condicional. Mostramos, como ejemplo, dos problemas de probabilidad condicional, parte de la investigación reflejada en Lonjedo (2003) y Huerta y Lonjedo (2003b), y los procesos de resolución de algunos estudiantes del bachiller científico-técnico que participaron en esta investigación.

PROBLEMA 1:

En un centro escolar hay 1000 alumnos repartidos así:

	Chicos	Chicas
Usan gafas	147	135
No usan gafas	368	350

Escogemos uno al azar. Calcula la probabilidad de que:

a. Sabiendo que es chico, no use gafas.

b. Sea chica sabiendo que usa gafas.

La figura 1.18 muestra la resolución de un estudiante de 1º de bachiller científico-técnico participante en esta investigación.

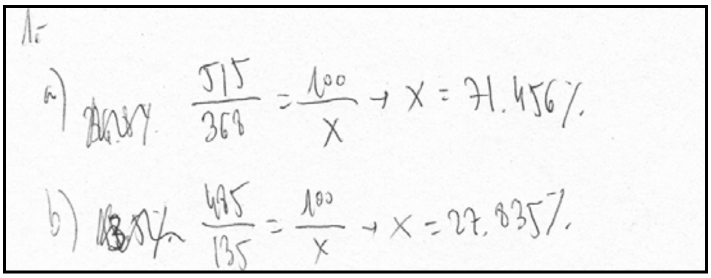


Figura 1.18. Resolución de un estudiante de 1º de bachiller científico-técnico en el problema 1

Este estudiante, en la segunda cuestión presenta una confusión en la probabilidad condicional que se pregunta. Contesta, razonando de forma análoga a la primera cuestión, la probabilidad de utilizar gafas sabiendo que es chica, cuando lo que se pregunta es la probabilidad de ser chica sabiendo que usa gafas. Esta confusión es debida a la influencia de la expresión de la primera cuestión, hecho comprobado en la entrevista clínica, en donde se presentó el mismo problema con las cuestiones en orden inverso (Lonjedo, 2003)

PROBLEMA 4:

En una ciudad se conoce que el porcentaje de ciudadanos que leen el diario A es 50% y el del que leen el diario B es 45% y el porcentaje de ciudadanos que leyendo A leen también B es 40%. Calcula la probabilidad de que sabiendo que un ciudadano lee el diario B, lea también el diario A.

Este problema es uno de los que la mayoría no llegó a la solución, sobre todo por interpretar el dato que da cuenta de la probabilidad condicional con una probabilidad de la intersección. Mostramos un ejemplo, figura 1.19, en el que observa esta interpretación.

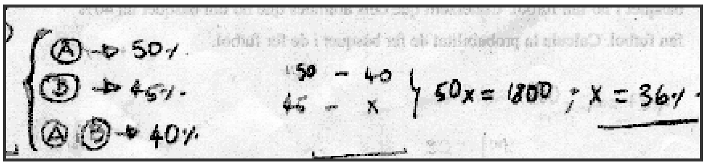


Figura 1.19. Resolución de un estudiante de 1º de bachiller científico-técnico en el problema 4

La expresión utilizada en el problema 4: *que leyendo A leen también B*, induce a la interpretación del dato condicional por una intersección, concretamente el uso del adverbio TAMBIÉN en la expresión.

Desde hace bastante tiempo, se investiga en probabilidad y estadística desde la perspectiva de la psicología y desde la perspectiva de la educación matemática (Shaughnessy, 1983). Garfield y Ahlgren (1988) recomiendan la colaboración entre psicólogos cognitivos y especialistas en educación matemática. Shaughnessy (1992) indica que es necesario que las dos disciplinas combinen sus investigaciones en probabilidad y estadística. En este sentido, encontramos estudios pertenecientes a la investigación en psicología, Einhorn & Hogart (1986) y Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb (1987), que concretan alguna estructura gramatical que puede influir directamente en la interpretación de la probabilidad condicional como una probabilidad de la intersección. Estos autores indican que algunas personas pueden tener dificultades con la sintaxis de la expresión de la probabilidad condicional ya que existen diferentes expresiones para ésta. Concretan que las expresiones que utilizan la conjunción "and" pueden ser interpretadas como una probabilidad de la intersección o como una probabilidad condicional:

> *"This is particularly the case in the interpretation of language; consider the conjunction "and", which frequently implies temporal order in everyday English. However, the word "and" is used in formal probability theory to denote a conjunction of events, irrespective of temporal order"*
>
> *Einhorn & Hogart (1986), p. 9*
>
> *"People may have difficulty with the syntax of conditional probability statements so that performance depends on the details of the wording. A number of conclusions are possible: the probability of A given B could be confused with the probability of B given A. Einhorn and Hogart (1986) found that statements employing the conjunction and could be interpreted as referring to either joint or conditional probabilities"*
>
> *Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb (1987), p. 256*

Está claro que la probabilidad condicional se expresa verbalmente mediante oraciones condicionales. Se hace necesario un estudio acerca de las oraciones condicionales en castellano, de forma que conozcamos las estructuras gramaticales que podemos utilizar para la expresión de la probabilidad condicional, evitemos el lenguaje ambiguo y así favorezcamos la interpretación deseada de la probabilidad condicional, tanto en el dato como en la pregunta.

Otro factor influyente en la resolución de los problemas de probabilidad condicional es la expresión de las cantidades presentes en el problema. Fiedler

(1988), Gigerenzer (1994), Gigerenzer & Hoffrage (1995), Hoffrage, Gigerenzer y otros (2002), Ojeda (1996) y delMas (2002) muestran que los estudiantes que resuelven problemas de probabilidad condicional con enfoque frecuencial presentan mayor porcentaje de éxito frente a los problemas que presentan sus datos en términos de probabilidades. Concretamente indican que nuestra mente está mejor preparada para resolver los problemas de probabilidad bayesianos[9] sin una instrucción de por medio, en los que la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias. Fiedler (1988) estudiando la falacia de la conjunción, encontró que reducía el número de respuestas incorrectas al pedir a los sujetos calcular frecuencias en lugar de probabilidades.

Gigerenzer (1994) habla concretamente de las frecuencias naturales. Llama frecuencias naturales cuando se presentan las frecuencias en forma secuencial. Por ejemplo, en un problema de diagnóstico médico, la lectura natural de frecuencias se daría de la siguiente forma: En 1000 adultos hay 960 sanos y 40 enfermos. Al pasarles una prueba diagnóstica, aproximadamente 120 de los 960 sujetos sanos muestran resultado positivo en la prueba. De los 40 sujetos enfermos, al pasarles la prueba 30 muestran resultado positivo.

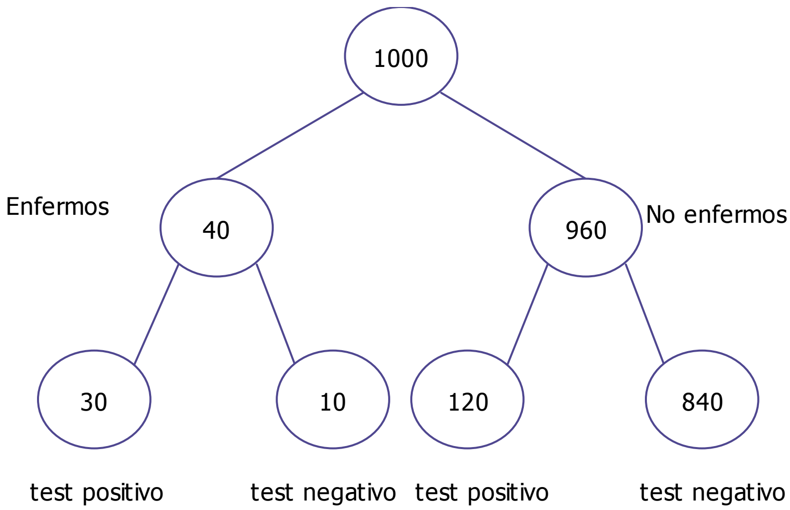


Figura 1.20. Frecuencias naturales (Adaptado de Hoffrage, Gigerenzer et al., 2002, p.345)

[9] Entendemos aquí por problemas bayesianos aquellos en los que, haciendo una lectura en términos de probabilidad, es necesario el uso del Teorema de Bayes en su resolución, tal y como muestra Gigerenzer (1994) en la página 150. Aunque sabemos que el concepto de problemas bayesianos tiene que ver, en un sentido mucho más amplio, con los problemas de la Estadística Bayesiana.

En un muestreo de una población, las frecuencias naturales son obtenidas por cálculos individuales según sus características (es decir, enfermo versus no enfermo, resultado test positivo versus resultado test negativo). Observar que un número aislado, como 30, no es por sí mismo una frecuencia natural; esto sólo se entiende como frecuencia natural porque está en relación con los otros números en el árbol.

En el razonamiento anterior, el resolutor no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes para calcular la probabilidad condicional que se pide, la probabilidad de estar enfermo sabiendo que ha dado positivo en el test, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema de Bayes se transforma en un problema simple de probabilidad. El cálculo de $p(H|D)$ siendo H "estar enfermo" y D "dar positivo en el test", con las frecuencias naturales es sencillo: $p(H|D) = \frac{a}{a+b}$. Donde a es el número de casos de toda la muestra que están enfermos y dan positivo en el test y b es el número de casos de toda la muestra que no están enfermos y dan positivo en el test.

Gigerencer (1994) dice que este cálculo es más sencillo que $p(H|D) = \frac{p(H \cap D)}{p(D)}$.

Ojeda (1996) realiza una investigación consistente en estudiar la resolución de de 16 problemas por una muestra de estudiantes dividida en dos grupos, que se diferencian en la forma en la que han recibido la instrucción acerca de la probabilidad condicional. Un grupo ha recibido una enseñanza formal y el otro grupo utilizando material didáctico. En general, los resultados de esta investigación fueron similares en ambos grupos. Los estudiantes presentan un porcentaje de éxito más alto al resolver un problema que la autora caracteriza como de lenguaje cotidiano, población distribuida en grupos de tamaño desigual (40 hombres y 60 mujeres; la mitad de los hombres y la tercera parte de las mujeres) y simultaneidad de sucesos (ser hombre y ser mujer; fumar y no fumar, entendiendo por no simultáneos, por ejemplo las extracciones de bolas). El problema es el siguiente:

> *"Cierta población es de 40 hombres y de 60 mujeres por cada 100 habitantes. La mitad de los hombres y una tercera parte de las mujeres son fumadores. Se selecciona una persona al azar. Los sucesos son: A: hombre, B: fumador. Se pide: $p(A/B)$, $p(B/A)$, $p(A \cap B)$ y $p(B)$" (p.305)*

Ojeda concluye que una de las razones del éxito conseguido en este problema puede que haya sido la simultaneidad de los sucesos. Añade que otro factor favorable ha sido que el enunciado sugiere un enfoque frecuencial de la probabilidad. Nosotros, en este caso entendemos que el lenguaje no es del todo cotidiano, pues se pregunta directamente en el problema por probabilidades expresadas utilizando el sistema de signos matemáticos propios de la teoría de la probabilidad. Por otro lado, entendemos que el enunciado puede sugerir un enfoque frecuencial, pero que los datos numéricos de este problemas están expresados en términos de frecuencias absolutas y en términos de razón o de fracción. Otra de las conclusiones del trabajo de Ojeda que queremos resaltar es que la autora contrapone la idea de Garfield y Ahlgren (1988) acerca de la necesidad de dominar la idea de proporción y las operaciones con fracciones para enfrentar ideas de probabilidad. Propone que:

> *"el estudio de conceptos probabilísticos puede ofrecer un escenario favorable para poner en juego otros conceptos matemáticos y, también mediante su uso, dotarlos de significado (p. 309)*

Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb (1987) indican que los datos expresados en porcentajes pueden inducir a error, por la posibilidad de que la expresión se lea de más de una manera:

> *"... it is possible that an expression such as "the percentage of brown-haired men who have green eyes" which statisticians would interpret as a conditional probability might be interpreted by novices as a joint probability, especially if parsed as (the percentage of) (brown-haired men who have green eyes) p. 256*

En los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en porcentaje, y concretamente cuando se expresa la probabilidad condicional de manera verbal y utilizando un porcentaje, es muy importante que la expresión utilizada carezca de palabras ambiguas que puedan influir en la interpretación de ésta como una probabilidad de la intersección.

Por otro lado, en Lonjedo y Huerta (2005) y Huerta y Lonjedo (2006) se pone de relieve que, en una muestra de estudiantes de diferentes niveles educativos, desde estudiantes de 4º ESO hasta estudiantes de la Facultad de Matemáticas, los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en términos de probabilidad son resueltos por un porcentaje de estudiantes mínimo, siempre estudiantes con conocimiento formal acerca de la probabilidad condicional, frente a los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en forma de porcentaje. Además los estudiantes presentan un porcentaje de éxito mayor al resolver los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en porcentaje que con los datos expresados en términos de probabilidad.

Todos estos resultados invitan a realizar un estudio de los problemas de probabilidad condicional teniendo en cuenta el lenguaje natural no simbólico utilizado en el texto del problema, así como las diferentes presentaciones de las cantidades mencionadas en el problema y la influencia que esto puede tener en los modos de resolver de los estudiantes y en el éxito en la resolución del problema.

El mundo de la investigación muestra que los errores conceptuales más frecuentes que presentan los estudiantes, respecto al concepto de probabilidad condicional, diferentes al clásico de la interpretación de la probabilidad condicional como la probabilidad de la intersección, son, a veces, los que vienen de asociar a la probabilidad condicional características que no son propias de ella. Además, estos errores conceptuales se prolongan hasta la Universidad. Algunas de estas concepciones vienen de considerar el orden temporal, la continuidad en el tiempo y en el espacio y la similitud de causa y efecto.

A continuación mostramos estas concepciones.

<u>Concepción cronologista</u>. Einhorn & Hogart (1986) indican que cuando el orden temporal entre los sucesos es notable es más probable el conflicto y la

confusión en los juicios probabilísticos (p. 9). Gras–Totohasina (1995a, 1995b) identifican la concepción cronologista de la probabilidad condicional $p(A|B)$, como el hecho de ligar dos sucesos A y B por una relación temporal, el suceso condicionante B es necesariamente anterior al suceso condicionado A. Para poder detectar esta concepción basta con pedir la probabilidad del suceso "pasado" conocido el suceso "futuro". Un problema que sirve como ejemplo para esta concepción es:

> "En una bolsa hay dos bolas blancas y dos negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca en primera extracción (sin reposición), si se sabe que en la segunda extracción hemos obtenido bola blanca?

DelMas (2002) también muestra que la gente tiene dificultad para entender la probabilidad condicional cuando el suceso condicionante ocurre después que el suceso condicionado.

Además, esta dificultad en el orden temporal, a veces, hace interpretar como similares $p(Y|X)$ y $p(X|Y)$. Einhorn & Hogart (1986) y delMAs (2002) citan a Eddy (1982), que muestra que el 95% de los médicos presentan esta interpretación, al considerar el caso de la mamografía y el cáncer de mama. Define como C el conjunto de mujeres con cáncer de mama y como M el conjunto de mujeres que dan positivo en la mamografía. En las mujeres que padecen cáncer de mama, la probabilidad de una mamografía positiva es 0.79 ($p(M|C)=0.79$). Eddy informa que la mayoría de los médicos interpretan erróneamente los informes acerca de los test y estiman la probabilidad de padecer cáncer dado que la mamografía es positiva como aproximadamente del 0.75 ($p(C|M)=0.75$).

> *"When asked about this, the erring physicians usually report that they assumed that the probability of cancer given that the patient has a positive X-ray … was approximately equal to the probability of a positive X-ray in a patient with cancer …. The later probability is the one measured in clinical research programs and is very familiar, but it is the former that is needed for clinical decision making. It seems that many if not most physicians confuse the two" (1982), p.254*

Concepción causalista. A la hora de cuantificar una probabilidad condicional, los estudiantes razonan mejor si lo que se pide es una estimación que requiere un razonamiento causal, es decir, una estimación del efecto dado un conocimiento de lo que se percibe como causa, (Kahneman & Tversky (1980), Bentz & Borovvnik (1985), Grass-Totohasina (1995a, 1995b)). Si lo que se pide es una estimación que requiere un razonamiento diagnóstico, estimación de la causa dado un conocimiento de lo que se percibe como efecto, los estudiantes presentan muchas dificultades (Kahneman & Tversky (1980), Bentz & Borovvnik (1985), Ojeda (1995), Grass & Totohasina (1995a, 1995b)). Es decir si se pide calcular la probabilidad de una causa conociendo una consecuencia puede parecer sin sentido al estudiante. Bentz & Borovvnik (1985) utilizan el siguiente caso particular para explicar este comportamiento.

> *"Hay dos canicas blancas y dos negras en una urna. ¿Cuál es la probabilidad de que saques una canica blanca en la segunda extracción (sin reemplazar la primera), si se sabe que primero se sacó una canica blanca, es decir, P(WII|WI)?*
>
> *Mientras que la mayoría de la gente resuelve fácilmente este problema, tiene muchas dificultades cuando se plantea la pregunta inversa p(WI|WII).*
>
> *… atribuida a la falta de influencia causal de la segunda extracción sobre el color de la primera canica extraída (,lo cual) "causa" que la gente piense en WI como estocásticamente independiente de WII, es decir, p(WI|WII)= p(WI)=1/2 en lugar de 1/3." (p. 276)*

Kahneman & Tversky, (1980), Einhorn & Hogart (1986) y Pollatsek & al. (1987) argumentan que es común asignar mayor probabilidad cuando es el suceso condicionante la causa que cuando es el suceso condicionante el efecto, es decir, p(efecto|causa) > p(causa|efecto). Citan el ejemplo de la comparación de probabilidades siguientes: una niña de ojos azules (Y) si su madre tiene ojos azules (X) frente a una madre de ojos azules si su hija tiene ojos azules.

Aunque $p(Y|X) = p(X|Y)$, haciendo X e Y igualmente informativos, algunos sujetos juzgan que $p(Y|X) > p(X|Y)$.

<u>Concepción cardinalista</u>. Gras y Totohasina (1995a, 1995b) indican que la concepción cardinalista de la probabilidad condicional se manifiesta por la representación de $p(A|B)$ por la cuantificación proporcional de $\frac{card(A \cap B)}{card(B)}$ (correcto en el caso particular de equiprobabilidad) o también por $\frac{card(A)}{card(B)}$, generalmente falso.

<u>Concepción falaz de la conjunción.</u> Es la estimación de que la probabilidad de la intersección de dos sucesos $A \cap B$ es más grande que la probabilidad de uno de los sucesos constituyentes. Este es uno de los errores más comunes causados por la heurística de la representatividad. Este error dificulta la aplicación de la definición de probabilidad condicional: $p(A|B)=\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, si $p(B)\neq 0$, ya que la probabilidad $p(A|B)$ sería mayor que uno (Tversky y Kahneman (1983), Einhorn & Hogart (1986) y Ojeda (1995)).

Tversky y Hahneman (1983) muestran en su trabajo los resultados de la elección que hicieron 142 estudiantes universitarios a los que se les pidió que indicaran cuál de las siguientes dos alternativas consideraban que era más probable, "Linda trabaja en un banco" (T) o "Linda trabaja en un banco y participa en el movimiento feminista" (T&F), una vez caracterizado el personaje. El 85% de los estudiantes eligieron como más probable la alternativa (T&F). Los autores explican que esto ocurrió pues T&F se ajustaba más a la descripción dada de Linda. Fiedler (1988) indica que si en el planteamiento de las preguntas se utiliza un enfoque frecuencial, sustituyendo la palabra "probabilidad" por "frecuencia" el porcentaje de fracaso se reduce.

En resumen, encontramos en las investigaciones acerca de la resolución de problemas de probabilidad condicional, que hay diferentes factores que pueden influir en la interpretación de las cantidades presentes en el problema, en el modo de resolución, así como en el éxito en la resolución del problema. De estos factores resaltamos el lenguaje, entendiendo como lenguaje las oraciones que utilizamos al crear un problema de probabilidad condicional de enunciado verbal, así como la forma de presentar las cantidades en un problema de probabilidad condicional. Con respecto al lenguaje, se nos ha dado alguna pista acerca de algunos términos que pueden inducir al resolutor a interpretar una probabilidad condicional por una intersección, pero no hemos encontrado una investigación completa en castellano que muestre como pueden y deben ser estas oraciones. En cuanto a las diferentes formas de presentar las cantidades en un problema de probabilidad condicional, se nos habla de las frecuencias en un determinado problema, de los porcentajes y de los términos de probabilidad. ¿De cuantas formas se pueden presentar las cantidades en un problema de probabilidad condicional? ¿Es la forma de presentación un factor influyente en el modo de resolución del problema así como en el éxito en esta resolución? ¿El hecho de estar expresada una cantidad de una determinada forma influye en la interpretación deseada de esta cantidad?

Hemos encontrado también investigaciones que nos indican las concepciones erróneas que presentan habitualmente los estudiantes acerca de determinados conceptos de probabilidad. En el trabajo que presentamos estudiamos las dificultades que pueden presentar los problemas de probabilidad condicional, de forma que estas dificultades se manifiestan en errores que producen los estudiantes en la resolución de los problemas.

2. El problema de investigación. Objetivos.

2.1. OBJETIVOS GENERALES

El concepto de probabilidad condicional, en el currículo español de Educación Secundaria, (BOE 18 febrero 2004, Real Decreto 117/2004 del 23 de enero), está situado en la secundaria no obligatoria, concretamente en 1º de Bachiller en la asignatura Matemáticas I y en la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I. En la Educación Secundaria, la probabilidad condicional es un tema que habitualmente se enseña en un contexto de resolución de problemas. Pero ¿cómo son los problemas de probabilidad condicional? ¿Qué estructura tienen en general y teniendo en cuenta algunas características? En el capítulo que da cuenta de los Fundamentos Teóricos hemos mostrado algunas características de los problemas ternarios de probabilidad condicional, como son las cantidades y las relaciones entre estas cantidades presentes en un problema ternario de probabilidad condicional. Pensamos que se puede completar el análisis de la estructura de estos problemas teniendo en cuenta otros componentes. La revisión de la investigación acerca de la resolución de problemas de probabilidad condicional muestra que si las cantidades del problema tienen un enfoque frecuencial, el porcentaje de éxito del problema crece (Fiedler (1988), Gigerenzer (1994), Gigerenzer & Hoffrage (1995), Hoffrage, Gigerenzer y otros (2002), Ojeda (1996), delMas (2002), Huerta y Lonjedo (2006), …). Se hace necesario un estudio de la naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional para poder organizar la enseñanza de estos problemas según este componente. Además, algunas investigaciones (Einhorn & Hogart (1986) y Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb (1987), Parzysz (1990), Ojeda (1995, 1996), Yañez (2000), Lonjedo (2003), Huerta y Lonjedo (2003b)) afirman que una dificultad a la hora de interpretar en el texto del problema la probabilidad condicional es el lenguaje, a veces ambiguo, en el que están escritos los enunciados de estos problemas. Se hace necesario el conocimiento semántico-sintáctico de las oraciones subordinadas condicionales en la lengua castellana.

Yañez (2000) presenta una clasificación de los problemas teniendo en cuenta el número de cantidades mencionadas en el problema que tienen que ver con probabilidades condicionales, probabilidades marginales y probabilidades de la intersección. Podemos afinar esta clasificación teniendo en cuenta la pregunta del problema, y así mostrar todas las clases posibles de los problemas ternarios de probabilidad condicional. Uno de los fines de esta clasificación es la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de los problemas de probabilidad condicional, pues el docente conocedor de esta clasificación puede organizar la enseñanza basándose en ella, para garantizar la comprensión del concepto de probabilidad condicional.

Por otra parte, necesitamos conocer y clasificar los problemas de probabilidad condicional presentes en los libros de texto. El libro de texto es una herramienta importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y del análisis de los problemas presentes en los libros de texto podemos hacernos una idea de la necesidad o no del conocimiento de la clasificación para la organización de la enseñanza de la probabilidad condicional.

Ojeda (1996) propone que *el estudio de conceptos probabilísticos puede ofrecer un escenario favorable para poner en juego otros conceptos matemáticos y, también mediante su uso, dotarlos de significado* (p. 309). Mamona-Downs & Downs (2005) proponen el empleo de la resolución de problemas en la aprendizaje de la teoría matemática. Una de sus propuestas es enseñar vía resolución de problemas. Entonces, ¿podemos adelantar la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional a la secundaria obligatoria? En caso afirmativo, ¿qué tipología de problemas de probabilidad condicional pueden ser introducidos?, ¿qué características deberán tener estos problemas?, ¿Dónde los ubicaríamos en el currículo?. Para poder responder a estas preguntas analizamos las actuaciones de estudiantes de diferentes niveles de competencia resolviendo diferentes problemas de probabilidad condicional.

En esta investigación nos planteamos, inicialmente, resolver estos puntos, con el fin de poder ofrecer una organización de la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional que mejore su enseñanza y aprendizaje. Estos puntos los podemos dividir en tres objetivos generales:

- OBJETIVO 1: Estudiar los problemas ternarios de probabilidad condicional.
- OBJETIVO 2: Estudiar la resolución de problemas de probabilidad condicional.
- OBJETIVO 3: Propósitos de mejora del proceso de enseñanza de los problemas de probabilidad condicional.

2.2. DESARROLLO DE LOS OBJETIVOS GENERALES.

2.2.1. ESTUDIAR LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

En nuestra investigación estudiamos los problemas de probabilidad condicional que implican dos sucesos, A y B, sus complementarios y sus respectivas probabilidades.

El estudio de estos problemas lo realizamos con dos objetivos particulares:

2.2.1.1. Analizar la estructura de los problemas de probabilidad condicional según:

a) componentes que tienen que ver con la estructura de los datos, así como la pregunta del problema. Llegamos a la clasificación de los problemas de probabilidad condicional en Niveles, Categorías y tipos. $N_hC_iT_j$

b) componentes que tienen que ver con la resolución del problema (o que afectan directamente a la resolución del problema). Estos componentes son de dos tipos:

   a. La naturaleza de los datos presentes en el problema de probabilidad condicional.

   b. La estructura semántica que presenta el enunciado de un problema de probabilidad condicional.

2.2.1.2. Analizar en los currículos españoles y en los libros de texto la probabilidad condicional:

a) Los currículos españoles: mostrando, desde 1934, la enseñanza de la probabilidad condicional en dichos currículos.

b) Los libros de texto: realizando una búsqueda de los problemas escolares de probabilidad condicional que muestran los libros de texto con el fin de clasificarlos y mostrar la tipología de problemas presente y ausente en algunos libros de texto escolares desde 1975 hasta el 2000. Intentamos explicar el porqué de las ausencias.

2.2.2. ESTUDIAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Los objetivos particulares de este objetivo son:

2.2.2.1. Analizar las actuaciones de estudiantes de diferentes niveles educativos resolviendo problemas de probabilidad condicional de resolución aritmética de la clase elegida N_2 (clase ausente en los libros de texto), en los que, además, se ha tenido en cuenta las siguientes variables de tarea:

a) El grado de complejidad, que contribuye a organizar la enseñanza de los problemas de probabilidad condicional

b) La naturaleza de las cantidades presentes en los problemas de probabilidad condicional.

c) La pregunta del problema (si se pregunta por una probabilidad en una situación aleatoria o si se pregunta por un porcentaje)

d) La estructura semántica de la condicionalidad.

con dos fines:

1. mostrar que los estudiantes de diferentes niveles educativos resuelven los problemas de probabilidad condicional de solución aritmética de la clase elegida.
2. mostrar la influencia de las variables de tarea citadas en el proceso de resolución del problema.

2.2.2.2. Clasificar los problemas de probabilidad condicional según el modo de resolución, como problemas de cálculo de probabilidades o como problemas de asignación de probabilidades, si el resolutor utiliza las reglas de cálculo "de y entre probabilidades" o no las utiliza.

2.2.3. PROPÓSITOS DE MEJORA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Utilizar los resultados obtenidos para contribuir con conocimientos que puedan aplicarse con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

3. Metodología

En este capítulo mostramos los métodos de investigación utilizados en el desarrollo de este trabajo. Dividimos este capítulo en cuatro apartados, los mismos en los que hemos dividido el capítulo 4 de resultados. El primer apartado tiene que ver con la creación de una nueva clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional así como del uso de los sistemas de representación en cada una de las clases de los problemas ternarios de probabilidad condicional y de ciertos factores que influyen en el proceso de resolución. El segundo apartado presenta los métodos utilizados en el análisis de la probabilidad condicional en los currículos y libros de texto en España. El tercero muestra la metodología en el análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2 (tipología de problemas ternarios de probabilidad condicional en los que sólo uno de los tres datos es una probabilidad condicional o dato interpretable como tal). Por último, el cuarto indica la metodología utilizada en el análisis de los procesos de resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2.

3.1. LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal que estudiamos pueden ser considerados como problemas aritméticos de más de una etapa. En Puig y Cerdán (1988) se exploran y analizan los problemas aritméticos de más de una etapa teniendo en cuenta el número de datos y la incógnita, las relaciones entre los datos y la incógnita y las decisiones que ha de tomar el resolutor como ¿qué operaciones?, ¿entre qué cantidades?, ¿en qué orden?. Por lo que los problemas de probabilidad condicional también pueden explorarse y analizarse teniendo en cuenta estos factores.

3.1.1. NIVEL, CATEGORÍA Y TIPO DE UN PROBLEMA TERNARIO DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Basándonos en la clasificación de Yañez (2000) y teniendo en cuenta la pregunta del problema, pues el número de relaciones necesarias entre las cantidades mencionadas en el problema y la pregunta de éste puede variar si la pregunta varía, creamos una clasificación de los problemas escolares ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal en Niveles, Categorías y Tipos. El fin de esta clasificación es mostrar todas las posibles clases de problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal, atendiendo a los datos y la pregunta del problema. Para clasificar un problema ternario de probabilidad condicional hacemos una lectura del problema en términos de probabilidad y le asignamos el vector que le corresponde según el Nivel, la Categoría y el Tipo $N_hC_iT_j$. El Nivel está determinado por el número de probabilidades condicionales (sólo condicionales) presentes en el texto, concretamente en la parte informativa del problema. Pueden reconocerse, para los problemas que se investigan, 4 niveles (Ni, i = 1, 2, 3, 4), dependiendo del número de probabilidades condicionales que hay en los datos, a saber, cero, una, dos o tres respectivamente.

La categoría está determinada por el número datos que tienen que ver con las probabilidades marginales. Las categorías dependen del nivel que consideremos, teniendo en cuenta que tres es el número de datos necesarios para la resolución de un problema de probabilidad condicional. Consideramos entonces las categorías C_i (i = 1, 2, 3), dependiendo de que los datos que tienen que ver con las probabilidades marginales sean 0, 1 o 2 respectivamente.

Por último, el tipo viene determinado por la pregunta del problema:

- ★tipo 1 (T_1), si se pregunta por una probabilidad condicional
- ★tipo 2, (T_2), si la pregunta es por una probabilidad marginal
- ★tipo 3, (T_3), si en el problema se pregunta por una probabilidad de la intersección

Podemos encontrarnos con problemas sobredimensionados, en los que el número de datos es superior a tres. Veamos uno de ellos:

Ejemplo 3.1: Grupo Cero (1982)

Se han observado 50 enfermos de la piel tratados con un nuevo antibiótico y otros 70 enfermos no tratados. Anotadas las curaciones al cabo de dos semanas, los resultados han sido:

	TRATADOS	NO TRATADOS
CURADOS	40	20
NO CURADOS	10	50

Si se emplean esos datos para asignar probabilidades,

a. ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado haya sido tratado?

b. ¿Qué probabilidad existe de que un enfermo curado no haya sido tratado? p. 170, problema 26.

Este problema está sobredimensionado, entendiendo como sobre dimensionado que tiene más de los datos necesarios para la resolución del problema. Existen seis datos numéricos, que después de hacer una lectura en términos de probabilidad del problema, son dos probabilidades marginales no complementarias y las cuatro probabilidades de la intersección. Se pregunta en las dos cuestiones por una probabilidad condicional, luego pertenece a T_1. Entonces, atendiendo a los tres datos que elijamos, este problema puede clasificarse:

★ Con las dos probabilidades marginales y una de las intersecciones: $N_1C_3T_1$

★ Con una probabilidad marginal y dos intersecciones no complementarias: $N_1C_2T_1$

★ Con tres probabilidades de la intersección: $N_1C_1T_1$

Habitualmente los problemas que están sobredimensionados son aquellos que utilizan las tablas de contingencia para presentar la información del problema. Estas tablas, lógicamente, se muestran completas, al menos en cuanto a la información que tiene que ver, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema, con las probabilidades de la intersección. Además de esta información, que generalmente se presenta en términos de frecuencias absolutas, se suele dar también el número que representa la muestra y/o las cantidades que dan cuenta de las marginales. Son problemas ternarios de probabilidad condicional de N_1 y T_1, que según la elección que hagamos de los datos se clasificarán en las diferentes categorías: C_1, C_2 o C_3. Aunque, entendemos que con la tabla completa (tal y como se muestra en el ejemplo anterior), los datos numéricos que no están en la tabla son superfluos ya que se pueden calcular a partir de ésta, por lo que el problema se describirá con N_1C_1.

Esta clasificación, fruto del trabajo de investigación que aquí presentamos, fue presentada en formato de comunicación en el VIII Simposio de la SEIEM (Lonjedo y Huerta (2004)) y en formato de póster en XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática celebrado en Castellón del 15 al 17 de septiembre de 2004.

3.1.2. LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Para seguir con los métodos de análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional utilizamos los sistemas de representación asociados a los problemas de probabilidad condicional, las tablas de contingencia y los diagramas de árbol. Estos sistemas de representación son destrezas heurísticas, importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional (Engel (1975a), Parzysz (1990), Shaugnessy (1992)…). La importancia de estos sistemas de representación tiene que ver con la organización de la información dada en el problema (Yañez, 2000), y con el uso de estos sistemas de representación como metalenguaje, cuyos signos permiten representar los resultados posibles de un proceso aleatorio como sucesos y las probabilidades de estos sucesos (Cerdán & Huerta, 2005). En 4.1.1.1 damos cuenta de la relación de estos sistemas de representación con cada uno de los vectores que clasifican los problemas ternarios de probabilidad condicional.

3.1.3. COMPONENTES DEL ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL QUE AFECTAN AL PROCESO DE RESOLUCIÓN

Por otro lado, y teniendo como base algunas investigaciones ya citadas anteriormente (ver capítulo 1: Fundamentos teóricos, apartado 1.5.3.1.II, pp. 90-105), sabemos que existen componentes que afectan directamente al proceso de resolución del problema, tales como la naturaleza de los datos presentes en el problema de probabilidad condicional y la estructura semántica-sintáctica que presenta el enunciado de un problema de probabilidad condicional. Hemos visto que el mundo de la investigación nos ofrece algunas pistas de algunos de estos componentes, pero se hace necesario un estudio teórico completo de los mismos. Por esta razón desarrollamos un estudio que muestra la diferente naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional y un estudio sobre las expresiones gramaticales en castellano, de las oraciones subordinadas condicionales. El método para desarrollar el estudio de la naturaleza de las cantidades presentes en los problemas de probabilidad condicional ha sido la observación de los datos en los problemas de probabilidad presentes en los libros de texto. Para el segundo estudio, nos hemos documentado en manuales de gramática del castellano acerca de las oraciones subordinadas condicionales, a la vez que hemos observado las estructuras gramaticales condicionales de los problemas de probabilidad condicional presentes en los libros de texto. El primero de estos dos estudios se presentó formando parte de una comunicación en el CERME4 (Huerta y Lonjedo, 2006) y en el IX Simposio de la SEIEM (Lonjedo y Huerta, 2005)

3.2. EL MÉTODO DE ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN LOS CURRÍCULOS OFICIALES DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA EN ESPAÑA Y EN LIBROS DE TEXTO.

Una vez estudiados los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal, analizamos la enseñanza de la probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria según: los currículos oficiales españoles desde 1934 y los libros de texto. Respecto a los currículos españoles desde 1934, mostramos cómo se ha ido introduciendo la enseñanza de la probabilidad condicional en la enseñanza secundaria española y la situamos en el currículo actual de Matemáticas. En el análisis de los libros de texto, realizamos una búsqueda de los problemas escolares de probabilidad condicional que muestran los libros de texto con el fin de clasificarlos y mostrar la tipología de problemas presente y ausente en algunos libros de texto escolares desde 1975 hasta el 2002. El análisis de los problemas presentes en los libros de texto lo realizamos a partir de una lectura de éstos en términos de probabilidad y de la asignación de los vectores que dan cuenta del nivel, categoría y tipo. Este capítulo ha formado parte de una comunicación en el VIII Simposio de la SEIEM (Lonjedo y Huerta, 2004)) y del póster en XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática celebrado en Castellón del 15 al 17 de septiembre de 2004. Dividimos en tres grupos los libros analizados atendiendo a: libros de texto de enseñanza secundaria de currículos antiguos (1975 a 1991), libros de texto de enseñanza secundaria de currículos actuales (1994 a 2002) y libros de texto de enseñanza superior (1972, 1975, 1982, 1983). Entendemos por currículos antiguos aquellos que dan cuenta de la enseñanza secundaria en los niveles de BUP y COU. Los currículos actuales son los que dan cuenta de la enseñanza secundaria en la ESO y en los Bachilleres. Elegimos para esta búsqueda diferentes editoriales. Para mostrar la tipología de problemas ternarios de probabilidad condicional presente en los libros de texto de currículos antiguos (BUP y COU), utilizamos un abanico amplio de editoriales, de forma que podemos generalizar los resultados obtenidos. Tenemos en cuenta que la probabilidad condicional no aparece de forma explícita en el currículo oficial de

BUP, siendo en COU donde se plantea su estudio. Por esta razón, es en este curso donde hemos intensificado la búsqueda, utilizando el mayor número de editoriales. Para mostrar la tipología en los libros de texto de los currículos actuales (ESO y Bachiller) elegimos las editoriales más utilizadas en los centros de secundaria de la Comunidad Valenciana, Anaya, SM y ECIR, editorial bastante conocida y utilizada en la Comunidad Valenciana. Las otras editoriales elegidas sirven para contrastar con las anteriores. En cuanto a los libros nivel superior, elegimos los libros utilizados en la enseñanza de la probabilidad y la estadística en estudios universitarios, así como libros emblemáticos de probabilidad y estadística, como Engel (1975). Para mostrar la tipología de problemas de probabilidad condicional que presentan estos libros hemos utilizado el siguiente método:

a) Identificar en los libros de texto los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal. Un problema de probabilidad condicional de enunciado verbal, PPCEV, es un problema de probabilidad de enunciado verbal, en el que o bien en la parte informativa o bien en la parte interrogativa del problema es necesario que el resolutor considere la probabilidad condicional de un suceso.

b) Realizar una lectura del problema en términos de probabilidad. Para realizar la lectura del problema en términos de probabilidad es necesario identificar los sucesos y las probabilidades de los sucesos. Si las cantidades presentes en el problema no son términos de probabilidad es necesaria la transformación de las cantidades presentes en el problema, expresadas en frecuencias absolutas y/o en términos de razón a términos de probabilidad.

c) Codificar el problema atendiendo al Nivel, Categoría y Tipo, tomando las decisiones pertinentes cuando el problema está sobredimensionado respecto al número mínimo de datos necesarios.

3.3. CLASES EN LAS FAMILIAS DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE NIVEL 2

El nivel N_2 de los problemas de probabilidad condicional es el menos presente en los libros de texto, junto con el nivel N_4. La ausencia de problemas de probabilidad condicional del nivel N_4 está justificada, al ser estos problemas todos de resolución algebraica (este N_4 coincide con el tipo 9 de la clasificación de Yañez (2000) donde las tres cantidades conocidas que presenta el problema son tres probabilidades condicionales). La enseñanza de resolución de problemas de probabilidad condicional de resolución algebraica no está considerada en el currículo oficial español. Pero con N_2 no encontramos una justificación general. Podemos pensar que una de las causas de la ausencia de problemas de probabilidad condicional de N_2 sea el número de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para resolver estos problemas, pero no conocemos realmente las causas de esta ausencia. Se hace necesario un estudio, en el nivel I de análisis en resolución de problemas (Puig 1996), de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, estudiando la estructura de sus datos así como la estructura de las relaciones entre los datos y la pregunta del problema. Este estudio no sólo es interesante para los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2. Sería interesante realizarlo para cada uno de los niveles de la clasificación que presentamos en esta investigación, y dejamos el resto para sucesivas investigaciones.

Para realizarlo, haciendo siempre una lectura en términos de probabilidad del problema, utilizamos los grafos trinomiales. El fin del estudio es el de clasificar las familias de problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, atendiendo al número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema. Definimos el grafo canónico de un problema como el grafo que muestra el número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema. Lo definimos con el fin de crear clases de equivalencia en cada una de las familias del N_2. Al estudiar los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2 mediante sus grafos trinomiales observamos que existen problemas de N_2 con resolución aritmética y probelmas indeterminados. Con el grafo canónico analizamos la estructura de datos y de relaciones entre los datos y la pregunta del problema, de los problemas de probabilidad condicional de N_2 con resolución aritmética, es decir, aquellos en los que sus grafos son abiertos encadenados. Realizamos el estudio de estos problemas ya que el número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para resolver el problema es fijo. Sin embargo, en los problemas indeterminados este número depende de la cantidad que introducimos como dato conocido. Una vez analizados los problemas de cada una de las familias $N_2C_iT_j$, utilizamos la relación binaria de equivalencia, $\Re$, que definimos, que tiene en cuenta el número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas entre los datos y la pregunta del problema, para dividir cada una de estas familias en las clases de equivalencia creadas por esta relación.

De esta forma clasificaremos las familias de problemas de probabilidad condicional de N_2 de resolución aritmética, atendiendo al número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para su resolución. Además en este estudio mostramos qué problemas de probabilidad condicional de N_2 son indeterminados.

3.4. EL ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE N_2

Continuamos el análisis de los problemas de probabilidad condicional de N_2 con el nivel II de análisis en resolución de problemas (Puig ,1996). El estudio de los procesos de resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, lo hemos realizado durante dos cursos escolares. Durante el primer curso elaboramos, administramos y analizamos la primera fase y durante el segundo curso hicimos lo mismo con la segunda fase. A continuación reflejamos estas fases.

3.4.1. LA PRIMERA FASE (CURSO 2003-2004)

Elaboramos la primera fase con el fin de empezar a recoger información acerca de las actuaciones de estudiantes de diferentes niveles educativos resolviendo problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, y poder diseñar una segunda fase que sirva para confirmar los resultados de la primera fase y cumplir los objetivos de la investigación.

3.4.1.1. Justificación de la primera fase

La primera fase nos sirve, de manera general, para conocer las actuaciones de estudiantes de diferentes niveles educativos, resolviendo algunos problemas de probabilidad condicional de N_2, tanto de resolución aritmética como indeterminados. El motivo de la elección de los problemas de probabilidad condicional de N_2 es el que se ha explicado anteriormente: N_2 es el nivel de problemas de probabilidad condicional menos presente en los libros de texto y, no pudiendo justificar esta ausencia, queremos mostrar si estos problemas pueden ser resueltos por estudiantes de diferentes niveles educativos. En estos problemas además, hemos tenido en cuenta diferentes variables de tarea, como la naturaleza de los datos, las estructuras condicionales del lenguaje natural no simbólico utilizadas en la expresión de la condicionalidad, tanto en el dato como en la pregunta del problema, así como el número de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema.

Ya hemos hecho notar en el capítulo 1 (ver 1.5.3.1, I. De la resolución de problemas de probabilidad y de probabilidad condicional, pp. 90-106) que existen investigaciones que indican que el porcentaje de éxito en un problema de probabilidad con enfoque frecuencial es mayor que si los datos están expresados en términos de probabilidad (Gigerenzer (1994), Gigerenzer & Hoffrage (1995), Hoffrage, Gigerenzer y otros (2002), Ojeda (1996), delMas (2002)), así como si es la pregunta del problema la que se expresa en forma de frecuencia (Fiedler 1988). Ahora bien, no disponemos de estudios suficientemente amplios que muestren claramente esta influencia. Además, algunos de éstos autores, aquellos que investigan en Psicología, trabajan en general, con un problema concreto, "el problema de la enfermedad y el test diagnóstico para la detectarla", que nosotros clasificaríamos con N_3C_2, y con unos estudiantes concretos, estudiantes de psicología y, generalmente buscan respuestas a la pregunta ¿qué es más probable…?. No se fijan en el proceso de resolución del problema.

Ojeda (1996) trabaja con otro problema concreto:

> *"Cierta población es de 40 hombres y de 60 mujeres por cada 100 habitantes. La mitad de los hombres y una tercera parte de las mujeres son fumadoras. Se selecciona una persona a l'azar. Los sucesos son: A: hombre, B: fumador. Se pide: $p(A/B)$, $p(B/A)$, $p(A \cap B)$ y $p(B)$" (p. 305)*

Este problema se describe con N_3C_2 y con todos los tipos, ya que se pregunta por cuatro probabilidades: dos condicionales, una intersección y una marginal. Para nosotros serían 4 problemas, uno para cada pregunta). Este problema presenta las cantidades de tres formas diferentes: frecuencias, términos de razón y pregunta en términos de probabilidad, utilizando el sistema de signos matemáticos propios de la teoría de la probabilidad. Analiza las actuaciones de estudiantes de dos grupos, que se diferencian por cómo han recibido instrucción acerca de la probabilidad condicional. Pensamos que las diferentes formas de expresar las cantidades presentes en este problema pueden influir de forma distinta en el proceso de resolución del problema. Además este problema necesita que el resolutor haya recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad.

En el apartado 4.1.2.1. de esta investigación, se presenta un estudio acerca de las diferentes naturalezas que pueden mostrar los datos en un problema de probabilidad condicional. Queremos conocer su influencia no sólo en el éxito en la resolución del problema, sino también en el proceso de resolución del problema de forma que, atendiendo al modo de resolución del problema, se pueda clasificar en un problema de asignación de probabilidades o en un problema de cálculo de probabilidades. Las investigaciones citadas anteriormente no muestran estudios suficientemente amplios, en cuanto a los problemas de probabilidad condicional y en cuanto a los niveles educativos de los estudiantes, que muestren esta influencia. Se hace necesaria esta primera fase, de forma que, entre otros fines muestre la influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en la resolución de un problema de probabilidad condicional por estudiantes de diferentes niveles educativos.

Conocemos que el lenguaje, a veces ambiguo, en el que está escrito el enunciado de un problema de probabilidad condicional produce dificultad a la hora de interpretar el texto del problema (Einhorn & Hogart (1986) y Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb (1987), Parzysz (1990), Ojeda (1995, 1996), Yañez (2000)). En alguno de estos estudios, se muestra que, en inglés, el uso de la conjunción *and* en la expresión de la probabilidad condicional puede hacer que el resolutor interprete la probabilidad condicional como una probabilidad de la intersección.

Lo que respecta a los trabajos de Parzysz, Ojeda y Yañez, éstos no concretan ninguna expresión en sus lenguas respectivas, únicamente recuerdan que el lenguaje ambiguo puede llevar al resolutor a interpretaciones erróneas del texto del problema. En el apartado 4.1.2.2 de esta memoria, se presenta un estudio acerca de cómo deben ser las oraciones subordinadas condicionales, en castellano, que utilizamos para dar cuenta de la condicionalidad. Los problemas de N_2 tienen un dato que es una probabilidad condicional. Con la primera fase queremos recoger de los enunciados de los problemas, expresiones del lenguaje natural no simbólico que induzcan al resolutor a interpretaciones no deseadas en los datos y en las preguntas, con el fin de poder eliminar la ambigüedad de los textos de los problemas de probabilidad condicional y mejorar el éxito de los participantes en el problema.

Al analizar las actuaciones de los estudiantes en la resolución de estos problemas, tendremos en cuenta si el número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema influye en el éxito en la resolución del problema. La forma de tener en cuenta este factor, ha sido haciendo uso de la clasificación de los problemas de las familias de N_2 en clases de equivalencia [p_{ij}], que vienen dadas por este número de relaciones aditivas (i) y multiplicativas (j) necesarias para la resolución del problema y que hemos llamado grado de complejidad estructural.

La primera fase consta de una colección amplia de problemas de N_2 y la administramos a estudiantes de diferentes niveles educativos. El análisis de la primera fase servirá para la construcción de la segunda fase, en la que se tendrán en cuenta los problemas de la primera fase que hayan ofrecido respuestas a las preguntas de nuestra investigación, así como, si es necesario otros problemas que contribuyan a completar los resultados obtenidos. A la vez, el análisis de la primera fase nos ayudará a concretar los diferentes niveles educativos de la muestra de estudiantes para la administración de la segunda fase.

3.4.1.2. Diseño de la primera fase

A partir de una colección de 18 problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, confeccionamos 5 pruebas de cuatro problemas cada una (ver Anexo 4: Las pruebas de la primera y segunda fase). Para la creación de la colección de 18 problemas hemos tenido en cuenta:

★ la naturaleza de las cantidades presentes en el problema. Los problemas de probabilidad condicional pueden tener los datos expresados en términos de frecuencias, en términos de razón y en términos de probabilidad. La probabilidad condicional se expresa en términos de probabilidad o en términos de razón. Los problemas de esta colección son problemas de N_2, luego tienen un dato condicional. Por tanto, para que todos los datos del problema se expresen de la misma forma, elegimos problemas con los datos expresados en términos de razón, concretamente en porcentajes, y problemas con los datos expresados en términos de probabilidad.

★ tener un problema de cada categoría y tipo dentro de N_2. Por lo que hemos buscado un problema de cada una de las familias (Tabla 3.1) de este nivel.

(N_2,C_1,T_1)	(N_2,C_1,T_2)	(N_2,C_1,T_3)	(N_2,C_2,T_1)	(N_2,C_2,T_2)	(N_2,C_2,T_3)	(N_2,C_3,T_1)	(N_2,C_3,T_3)

Tabla 3.1. Las ocho familias posibles en N_2. (pp. 153-157 de esta memoria)

★ las expresiones del lenguaje natural no simbólico utilizadas en la expresión de la probabilidad condicional, tanto como dato o como pregunta del problema.

Los 18 problemas de probabilidad condicional que hemos creado los podemos dividir en tres grupos. Un grupo formado por los problemas de P1 a P8 en los que los datos están expresados en porcentajes, cada uno de estos problemas pertenece a cada una de las ocho familias de N_2 y son problemas de resolución aritmética. Otro grupo formado por los problemas P9 a P16, isomorfos a los ocho problemas del primer grupo en cuanto a que pertenecen a la misma familia $N_2C_iT_j$ y clase de equivalencia $[p_{ij}]$, con los datos expresados en términos de probabilidad. El último grupo formado por los problemas P17 y P18 que son dos problemas indeterminados en los que los datos están expresados en porcentajes.

Con los 18 problemas construimos cinco pruebas, A, B, C, D y E, de 4 problemas cada una, de forma que dos de estos problemas forman parte de dos pruebas. Pensamos que 4 problemas es un número razonable, pues la administración de la prueba se hace en una sesión de aula de los estudiantes (aproximadamente de 55 minutos). Distribuimos los problemas de la siguiente forma: en cada una de las pruebas hay un problema de cada categoría, es decir, en cada prueba hay un N_2C_1, un N_2C_2 y un N_2C_3. Lo que varía en cada prueba es el tipo, es decir, la pregunta del problema. El cuarto problema de cada prueba ha sido elegido de la forma siguiente: en las pruebas A y B el cuarto problema es, respectivamente, cada uno de los problemas indeterminados que forman parte de la colección (problema 17 y problema 18 de la colección de los dieciocho problemas). En el resto de las pruebas, C, D y E, se trata de un problema del mismo nivel y categoría que uno de los tres que ya componen la prueba, de forma que es el tipo y la naturaleza de los datos lo que varía.

La tabla 3.2 recoge la descripción de los problemas que forman cada prueba atendiendo a la familia a la que pertenecen, la naturaleza de los datos y la clase de equivalencia.

Prueba	**Problemas**	**$N_2C_iT_j$**	**Naturaleza**	**[p_{ij}]**
A	P1	$N_2C_1T_2$	%	[p_{31}]
	P7	$N_2C_3T_1$	%	[p_{02}]
	P12	$N_2C_2T_3$	Probabilidades	[p_{11}]
	P18	$N_2C_2T_2$	%	Indeterm.
B	P4	$N_2C_2T_3$	%	[p_{11}]
	P8	$N_2C_3T_3$	%	[p_{31}]
	P9	$N_2C_1T_2$	Probabilidades	[p_{31}]
	P17	$N_2C_2T_1$	%	Indeterm.
C	P3	$N_2C_1T_1$	%	[p_{32}]
	P6	$N_2C_2T_1$	%	[p_{12}]
	P13	$N_2C_2T_2$	Probabilidades	[p_{11}]
	P15	$N_2C_3T_1$	Probabilidades	[p_{02}]
D	P2	$N_2C_1T_3$	%	[p_{31}]
	P5	$N_2C_2T_2$	%	[p_{11}]
	P11	$N_2C_1T_1$	Probabilidades	[p_{32}]
	P16	$N_2C_3T_3$	Probabilidades	[p_{31}]
E	P5	$N_2C_2T_2$	%	[p_{11}]
	P7	$N_2C_3T_1$	%	[p_{02}]
	P10	$N_2C_1T_3$	Probabilidades	[p_{31}]
	P14	$N_2C_2T_1$	Probabilidades	[p_{12}]

Tabla 3.2: Descripción de las pruebas que componen la primera fase

3.4.1.3. Administración de la primera fase

Administramos la primera fase a 166 estudiantes de diferentes niveles educativos de enseñanza secundaria, desde 4º ESO a 2º Bachiller, así como estudiantes universitarios de la Facultad de Matemáticas. Con esta muestra representamos además de estudiantes de todos los niveles educativos, estudiantes con niveles de aprendizaje diferentes acerca de la probabilidad condicional. Desde estudiantes que no han recibido instrucción acerca de la probabilidad condicional como estudiantes con un nivel alto de conocimiento acerca de la probabilidad condicional.

La tabla 3.3 muestra la distribución de los 166 participantes en la primera fase.

Muestra	**Descripción**	**Tamaño**
EFM	Facultad de Matemáticas	10
2BT-C	2º de bachiller tecnológico-científico	38
2BCS-H	2º de bachiller ciencias sociales-humanidades	16
1BT-C	1º de bachiller tecnológico-científico	38
1BCS-H	1º de bachiller ciencias sociales-humanidades	37
4ESO	4º educación secundaria obligatoria	27

Tabla 3.3: Distribución de los participantes en la primera fase, por niveles educativos

Como ya hemos dicho, las pruebas se administraron durante una de las sesiones de cada uno de los niveles educativos. Fueron administradas por la investigadora. Una vez repartidas las pruebas, la investigadora leyó unas instrucciones para su realización. Éstas empezaron por una presentación, explicando su fin y aclarando que dentro del aula había cinco pruebas diferentes. Una vez presentadas se rellena el encabezado:

Prueba A ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nª………..

Cada grupo debe señalar el tipo de enseñanza que está recibiendo, y si está en bachiller debe especificar la modalidad de éste. Los estudiantes de la facultad de Matemáticas deben especificar la licenciatura a la que pertenecen. Esta aclaración parece sin sentido pues los estudiantes de la facultad eran estudiantes de la licenciatura de matemáticas, cursando la asignatura de "Didáctica de la Aritmética, el Álgebra y la Resolución de Problemas", pero esta asignatura es de libre elección y había una estudiante de la facultad de psicología entre los diez estudiantes de esta asignatura que han participado en la primera fase. Todos los estudiantes anotaron el curso y su número de lista, con el fin de distinguir las pruebas.

Una vez rellenado el encabezado la investigadora explica que han de intentar resolver los cuatro problemas de forma que todos los razonamientos y las argumentaciones queden reflejados en el papel.

Aunque la descripción de los problemas de la primera fase es un aspecto metodológico, lo hemos incluido en el capítulo de resultados pues en los problemas hay aspectos que hemos desarrollado en el análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2.

3.4.1.4. Metodología de análisis de las producciones de los estudiantes en la primera fase

A partir de la información que nos proporcionan los factores que pensamos que influyen en la resolución de un problema ternario de probabilidad condicional y la lectura de las producciones de los estudiantes, confeccionamos unos descriptores de diferentes variables, que nos organizan las respuestas de los estudiantes con el objetivo de guiar el análisis.

La información que nos interesa la dividimos en dos grupos: uno, procesos de resolución con éxito y el otro, procesos de resolución sin éxito. Dentro de los procesos de resolución con éxito, nos interesa conocer si el resolutor ha utilizado como método de resolución la asignación o el cálculo de probabilidades. Por lo que el primer descriptor queda definido:

1. Procesos de resolución con éxito

    1.1. Resolución por asignación

    1.2 Resolución por cálculo de probabilidades

Dentro de los procesos de resolución sin éxito, nos interesa conocer las dificultades y errores que presentan los resolutores en el proceso de resolución. Los errores que encontramos en las producciones de los estudiantes vienen de interpretar de forma no deseada los datos y/o la pregunta del problema, de la utilización no adecuada de diferentes herramientas aritméticas, como por ejemplo la regla de tres y los porcentajes, del uso no adecuado de conceptos y fórmulas relativas a la teoría de la probabilidad, como por ejemplo la complementariedad de sucesos, del hecho de no entender las cantidades y/o los signos que presenta el texto del problema y por último encontramos resolutores que dejan el problema en blanco o sin información para la investigación. El descriptor Procesos de resolución sin éxito queda definido de la siguiente forma:

2. Interpretaciones no deseadas en los datos

    i. Interpretación del dato condicional por marginal

    ii. Interpretación del dato condicional por intersección

    iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal

    iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección

    v. Interpretación de la intersección por marginal

    vi. Interpretación de la intersección por condicional

vii. Otras interpretaciones de los datos

3. Interpretaciones no deseadas de la pregunta

viii. Interpretación de la condicional por intersección

ix. Interpretación de la condicional por marginal

x. Otras interpretaciones de la pregunta

4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad o de fórmulas de probabilidad
6. No se entienden las cantidades y/o los signos que presenta el texto del problema
7. Blanco

Una vez definidos los descriptores, la información que se convierte en dato es el número de producciones que verifica uno o más descriptores. Organizamos esta información en tablas de doble entrada. En estas tablas los datos se presentan en frecuencias absolutas o en porcentajes. Unas tablas tienen que ver con cada uno de los problemas, indicando la muestra relativa a cada nivel educativo así como la muestra total, de forma que la primera fila da cuenta de los diferentes niveles educativos y la primera columna da cuenta de los descriptores, tal y como muestra la tabla 3.4.

Problema nº	Nivel	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	muestra.	muestra	muestra	muestra	muestra	muestra	muestra	muestra
Desciptor								

Tabla 3.4: Tabla utilizada para la organización de datos de un problema concreto

Otras tablas muestran los datos relativos a un conjunto de problemas. Presentamos la tabla 3.5 como ejemplo de tabla que presenta los datos relativos a los problemas que tienen los datos expresados en porcentajes.

	PROBLEMAS CON LOS DATOS EN PORCENTAJES							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES								

Tabla 3.5: Tabla utilizada para la organización de datos de un conjunto de problemas

Los datos los tratamos de forma cualitativa, sin análisis estadístico. Estudiamos los datos que presentan las tablas, sacando conclusiones a partir de lo que los números nos indican.

Analizamos las actuaciones de estos estudiantes con el fin de empezar a atisbar los diferentes componentes que influyen en el proceso de resolución de un problema de probabilidad condicional y en el éxito en el proceso de resolución, así como las dificultades que presentan los estudiantes en sus actuaciones al resolver los problemas de la primera fase.

El método de análisis seguido en la primera fase ha sido el siguiente. En primer lugar, realizamos un análisis de los resultados de las actuaciones de los estudiantes organizados en cuatro apartados, a saber, de la construcción de la primera fase, de la influencia de la naturaleza de las cantidades en el éxito en la resolución del problema así como en el proceso de resolución del problema, del lenguaje natural no simbólico utilizado para expresar la condicionalidad en el texto del problema y del grado de complejidad estructural del problema. Después resaltamos en las actuaciones de los estudiantes que han alcanzado el éxito en cada uno de los problemas de resolución aritmética, los descriptores de respuestas que tienen que ver con el éxito en la resolución del problema y los que muestran las interpretaciones del dato o la pregunta. Además presentamos los problemas en parejas de problemas isomorfos, en cuanto a $N_2C_iT_j$ y en la medida de lo posible en cuanto al texto del problema. Así mostramos si los porcentajes significativos de estudiantes que muestran determinadas respuestas en cada pareja de problemas isomorfos son similares, teniendo en cuenta que los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en términos de probabilidad han sido realizados por menos estudiantes.

El análisis de la primera fase lo tomamos como base para confeccionar la segunda fase.

3.4.2. LA SEGUNDA FASE (CURSO 2004-2005)

A partir de las conclusiones de la primera fase se hace necesaria la elaboración de la segunda fase.

En la primera fase era importante trabajar un número grande de problemas, 18, con el fin de delimitar los problemas adecuados para la segunda fase.

El tamaño total de la muestra de la primera fase ha sido grande, pero al estar compuesta ésta por cinco pruebas, el tamaño de la muestra en cada una de las pruebas ha disminuido y si tenemos en cuenta la muestra atendiendo a los niveles educativos, el tamaño es pequeño. Conservamos para la segunda fase, en la medida de lo posible, los mismos niveles educativos en la muestra, pero trabajamos con una muestra de tamaño menor a la muestra total de la primera fase, a la que administramos la misma prueba. Esta prueba está formada por seis problemas ya que pensamos que es el número adecuado para resolver durante una sesión de aproximadamente 55 minutos, pues en la primera fase sobró tiempo. Cuatro de los problemas que forman parte de la segunda fase son problemas de la primera fase con unas características determinadas en cuanto a la expresión de las cantidades presentes en el problema, la estructura gramatical utilizada en la expresión del dato condicional y el grado de complejidad estructural, y los otros dos los hemos elegido de forma que guarden las características de la prueba. La información que produce esta segunda fase la organizamos mediante descriptores. Estos nuevos descriptores se basan en los descriptores de la primera fase, que hemos afinado. La forma de organizar los datos en tablas y el análisis de los datos es similar a la utilizada en la primera fase.

3.4.2.1. Justificación de la segunda fase

Los fines de esta segunda fase responden a los objetivos de la investigación y son los siguientes:

- ★ Poner de manifiesto que hay problemas de probabilidad condicional, que pueden ser clasificados de N_2 si se hace una lectura en términos de probabilidad, que pueden ser resueltos por los estudiantes aun sin conocimiento formal acerca de la probabilidad condicional.
- ★ Mostrar si existe influencia de la naturaleza de los datos presentes en el problema de probabilidad condicional, en el proceso de resolución de los problemas de probabilidad condicional así como en el éxito del problema
- ★ Mostrar si las expresiones elegidas para presentar la condicionalidad en el texto del problema, DE LOS, DE LAS, DE LOS QUE, DE LAS QUE, todas ellas equivalentes (p. 308 de esta memoria) tanto en el dato como en la pregunta del problema favorecen la interpretación deseada de esta condicionalidad, lo que supone que el dato que refiere a una probabilidad condicional se usa correctamente.
- ★ Mostrar cómo el formato de la pregunta en cada uno de los problemas, bien por un porcentaje o bien por una probabilidad en una situación de incertidumbre, tiene influencia o no en el proceso de resolución del problema o en la forma de expresar el resultado.
- ★ Mostrar si el grado de complejidad estructural (definido en el apartado 4.3 Análisis de la estructura de datos de los problemas de probabilidad condicional de nivel 2 con solución aritmética, p.216), influye en el proceso de resolución del problema.

La segunda fase nos sirve para confirmar y ampliar las conclusiones de la primera fase. Confirmar, pues tenemos en cuenta los factores de la primera fase, y ampliar, pues en la segunda fase introducimos el factor de la expresión de las cantidades de dos problemas en frecuencias absolutas. Con esto queremos mostrar si supone influencia en el éxito en la resolución del problema y en el proceso de resolución del problema.

En la primera fase, los problemas de probabilidad condicional en los que los datos son términos de probabilidad son abordados por un número menor de estudiantes, sólo algunos de los estudiantes con conocimiento formal acerca de la probabilidad. Además, el porcentaje de éxito es muy inferior. No podemos conocer a priori si los estudiantes que participan en nuestra investigación han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad. Sólo podemos asegurar que la tienen los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas. En la segunda fase, al conservar los niveles educativos, hemos eliminado los problemas con los datos expresados en términos de probabilidad, para evitar que la falta de formación de los estudiantes en este tema sea el factor de mayor peso en el abandono en la realización de estos problemas. Por otro lado, ya indicamos que en la primera fase no había problemas con las cantidades expresadas en frecuencias absolutas. Para la segunda fase pensamos que es interesante introducir estos problemas, con el fin de conocer si los datos expresados en frecuencias absolutas influyen en el proceso de resolución así como en el éxito en la resolución del problema frente a los problemas con las cantidades expresadas en porcentajes únicamente. En CERME 4 se presentó la comunicación, Huerta y Lonjedo (2006), con el estudio de la primera fase y en la puesta en común de esta comunicación se preguntó por la influencia de las cantidades cuando éstas son frecuencias absolutas. Esta sugerencia se tiene en cuenta en la segunda fase.

De todas las expresiones del lenguaje natural no simbólico con las que puede expresarse el dato y/o de la pregunta que refiere a una probabilidad condicional (ver apartado 4.1.2.2 en p. 187) elegimos una, DE LOS QUE, DE LOS, DE LAS, con el fin de saber, de manera general, si ésta es una de las construcciones favorables a la hora de presentar la condicionalidad en un problema de probabilidad condicional de enunciado verbal. La elección de la construcción DE LOS QUE es debida, sobre todo, a que en P7 (ver Anexo 4: Las pruebas de la primera y segunda fase) tenemos esta construcción en el dato condicional y la construcción condicional por excelencia, SI, en la pregunta condicional. Observando los porcentajes de estudiantes que muestran los descriptores de las actuaciones de los estudiantes que presentan las interpretaciones del dato condicional y de la pregunta condicional como una intersección (p. 261) parece más adecuada esta construcción.

Por último ordenaremos los problemas de la segunda fase teniendo en cuenta el número de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para resolver el problema, para conocer si este número, que hemos llamado grado de complejidad estructural, influye en el éxito en la resolución del problema. Si habitualmente, un resolutor inicia una prueba resolviendo los problemas según el orden de presentación, si además en este orden se ha tenido en cuenta este factor, podremos sacar conclusiones acerca de la influencia de éste en el éxito en la resolución.

3.4.2.2. Diseño de la segunda fase

Para la confección de esta segunda fase nos hemos basado en el análisis de los resultados de la primera fase.

La prueba de la segunda fase consta de seis problemas de enunciado verbal de probabilidad condicional de los que se clasifican de N_2, caracterizado, si se hace una lectura en términos de probabilidad, por tener una probabilidad condicional entre los tres datos del enunciado del problema. En la administración de la prueba de la primera fase, observamos que en una sesión los estudiantes tuvieron tiempo de sobra para resolver los cuatro problemas que componían cada prueba de la primera fase. Por esta razón ampliamos el número de problemas a seis.

Todos los problemas que componen la prueba de la segunda fase tienen la misma estructura, en cuanto a la parte informativa y la parte interrogativa. Primero se presenta la parte informativa y después la interrogativa.

Todos los problemas son de N_2, pues es el nivel estudiado a fondo en esta parte de la investigación, por la razón que ya relatamos en el apartado correspondiente (apartado 4.2.2 Los problemas de probabilidad condicional en los libros de texto. Análisis de los libros de texto, pp. 208-213). Dentro de este nivel hemos elegido problemas de las tres categorías y de los tres tipos, es decir, problemas en los que los otros dos datos son dos intersecciones, N_2C_1, una marginal y una intersección, N_2C_2 y dos marginales N_2C_3. Se pregunta por una condicional, T_1, por una marginal, T_2 o por una intersección T_3.

En la elección de los problemas de la segunda fase tenemos en cuenta, además, el grado de complejidad estructural. Elegimos seis problemas ordenados según este grado de complejidad y siempre teniendo en cuenta que la segunda fase debe presentar problemas de las tres categorías y tipos.

En los problemas de probabilidad, y en particular en los problemas de probabilidad condicional, los datos son de dos tipos:

- ★ aquellos que se refieren a los "sucesos" y a las relaciones entre ellos
- ★ las probabilidades que se asignan a estos sucesos, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema

Los cantidades que, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema son probabilidades, en los problemas de la segunda fase, o bien son porcentajes o bien son frecuencias absolutas, siempre con el dato condicional en términos de razón, ya que éste no puede ser expresado en términos de frecuencias absolutas. Ya hemos explicado el porqué de la ausencia en la segunda fase de problemas con los datos explícitamente expresados en términos de probabilidad así como la incorporación en la segunda fase de problemas con los datos expresados en frecuencias absolutas.

En cuanto a la estructura gramatical de la oración que expresa el dato condicional, y/o la pregunta condicional, hemos elegido estructuras equivalentes: DE LOS, DE LAS, DE LOS QUE, DE LAS QUE, con el fin de evaluar las interpretaciones del dato y/o la pregunta condicional con la misma estructura gramatical. La elección de estas estructuras ha sido intencionada y está explicada en este capítulo (p. 135).

Por último, la pregunta de los problemas la hemos hecho de dos formas: en tres problemas preguntamos por el porcentaje y en los otros tres por la probabilidad en una situación aleatoria. Queremos evaluar la influencia de la naturaleza de la pregunta, porcentaje o probabilidad, en la resolución del problema.

Existen problemas de la primera fase, en los que las actuaciones de los estudiantes no son significativas para nuestra investigación. Eliminamos estos problemas en la segunda fase. Las causas de la eliminación de estos problemas para la segunda fase tienen que ver con la metodología y con los objetivos de la investigación. Eliminamos los dos problemas indeterminados pues no discriminan el estudio posterior, ya que únicamente tres estudiantes participantes en la primera fase los ha resuelto con éxito, dejando constancia de que los datos eran insuficientes para la resolución del problema, incluso indicando las cantidades redundantes y los sucesos en los que se produce la falta de información. Estos tres estudiantes son estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la asignatura del área de Didáctica de la Matemática.

Hay problemas de la primera fase con ciertas características[11] que hemos elegido para esta segunda fase, haciéndoles guardar las características de ésta, en cuanto a la expresión de las cantidades y la pregunta del problema, la estructura gramatical de la condicionalidad, la eliminación de palabras que crean ambigüedad y el grado de complejidad estructural. Estos problemas, en la segunda fase, se corresponden con los problemas P1, P2, P4 y P6 (Apartado 4.4.1.4 de esta memoria).

Tenemos cuatro problemas para la prueba de la segunda fase y debemos completar con dos problemas que guarden las características de la prueba. Creamos un quinto problema de probabilidad condicional de N_2 y de $[p_{21}]$, por estar esta clase de equivalencia ausente en la colección. Para el sexto problema, elegimos un problema isomorfo a uno de los problemas elegidos de la primera fase. Estos dos problemas son isomorfos en cuanto a la estructura de las cantidades y la pregunta del problema. Son dos problemas que

[11] El porqué de la elección de estos problemas está descrito en las conclusiones del apartado que da cuenta de los resultados de la primera fase (4.4.1.4 Conclusiones de la primera fase)

pertenecen al mismo $N_2C_iT_j$, y a la misma [p_{hk}]. En este problema nuevo variaremos el contexto del problema así como la forma de presentación de los datos, con el fin de observar los procesos de resolución de los mismos estudiantes en dos problemas isomorfos en cuanto a la estructura de las cantidades y relaciones entre éstas, haciendo una lectura en términos de probabilidad, y con las cantidades expresadas de forma diferente.

De los seis problemas elegidos para la segunda fase, dos de ellos, que se corresponden con dos de los elegidos de la primera fase, presentan los datos en frecuencias absolutas y el dato condicional en términos de razón. Así podemos contrastar los resultados obtenidos y estudiar la influencia de la naturaleza de las cantidades expresadas en el problema, en el éxito de los estudiantes en la resolución del problema así como en el proceso de resolución. La elección de estos dos problemas ha sido de forma aleatoria.

Hemos tenido en cuenta en la elaboración de la segunda fase el formato en el que se pregunta por una probabilidad en el problema. En tres problemas se pide por un porcentaje y en los otros tres problemas, en una situación de incertidumbre, se pregunta directamente por una probabilidad.

En la tabla 3.6 describimos los problemas de la segunda fase, mostrando si han pertenecido a la primera fase, el vector que determina los datos y la pregunta del problema, $N_2C_iT_j$, la naturaleza de las cantidades, el formato de la pregunta del problema y el grado de complejidad.

El problema P1 de la segunda fase, se corresponde con el problema 7 de la primera fase, en el que hemos variado la expresión de los datos de porcentajes a frecuencias absolutas y el dato de la condicionalidad en porcentaje, manteniendo la expresión para los sucesos. Además hemos cambiado la expresión de la pregunta, se pregunta por un porcentaje. También hemos variado la estructura semántica que expresa la condicionalidad, tanto en el dato como en la pregunta, eliminando las palabras que creaban ambigüedad en el texto: ADEMÁS y TAMBIÉN, ya que crean ambigüedad en la interpretación del enunciado del problema, concretamente pueden confundir al resolutor a la hora de interpretar el dato y/o la pregunta condicional. Lo elegimos como primer problema de la segunda fase por el grado de complejidad estructural, [p_{02}] Elegimos cambiar la expresión de las cantidades de porcentajes a frecuencias absolutas, para poder completar el estudio de la influencia de la naturaleza de las cantidades en el éxito en la resolución del problema así como en el proceso de resolución del problema, comparando los resultados obtenidos en P7 de la primera fase y en P1 de la segunda fase.

Problemas	**Primera fase?**	$\mathbf{N_2C_iT_j}$	**Naturaleza**	**Pregunta**	**[$\mathbf{p_{ij}}$]**
P1	P7	$N_2C_3T_1$	Frecuencias absolutas	Porcentaje	[p_{02}]
P2	P4	$N_2C_2T_3$	Porcentajes	Probabilidad	[p_{11}]
P3		$N_2C_3T_3$	Porcentajes	Probabilidad	[p_{21}]
P4	P6	$N_2C_2T_1$	Frecuencias absolutas	Porcentaje	[p_{12}]
P5		$N_2C_3T_1$	Porcentajes	Probabilidad	[p_{02}]
P6	P1	$N_2C_1T_2$	Porcentajes	Porcentaje	[p_{31}]

Tabla 3.6: Descripción de problemas de la segunda fase

El problema P2 de la segunda fase, se corresponde con el problema 4 de la primera fase y tan sólo hemos cambiado la redacción, pues todos los problemas con los datos en porcentajes tienen la misma estructura en la parte informativa. Lo elegimos en segundo lugar por el grado de complejidad estructural [p_{11}].

El problema P3 lo hemos creado con el fin de completar el conjunto de los grados de complejidad así como la categoría y el nivel menos presentes en la prueba. Los problemas elegidos de la primera fase, ordenados según el grado de complejidad estructural, pertenecen a las siguientes familias y clases: P7

$N_2C_3T_1$ y [p_{02}], P4 $N_2C_2T_3$ y [p_{11}], P6 $N_2C_2T_1$ y [p_{12}], P1 $N_2C_1T_2$ y [p_{31}]. Completamos esta colección de problemas con un problema que se describe con $N_2C_3T_3$ y [p_{21}], que según el orden establecido por el grado de complejidad, ocupará el tercer lugar.

El problema P4 de la segunda fase, se corresponde con el problema 6 de la primera fase en el que hemos variado la expresión de los datos de porcentajes a frecuencias absolutas (el dato condicional en porcentaje) y además hemos cambiado la expresión de la pregunta, se pregunta por un porcentaje. Lo elegimos en cuarto lugar por el grado de complejidad estructural, [p_{12}]. Al igual que en P1, elegimos cambiar la expresión de las cantidades de porcentajes a frecuencias absolutas.

El problema P5 lo hemos creado con el fin de poder evaluar la influencia en el éxito en la resolución y en proceso de resolución del problema, de las cantidades presentadas en términos de frecuencias (P1) frente a las cantidades presentadas en porcentajes (P5), con la misma muestra de estudiantes. P1 y P5 pertenecen a $N_2C_3T_1$ y [p_{02}] La situación de este problema en el quinto lugar, nos ayudará a analizar la influencia del grado de complejidad estructural y la naturaleza de las cantidades en el éxito en la resolución del problema.

El problema P6 de la segunda fase, se corresponde con el problema 1 de la primera fase en el que hemos cambiado la estructura gramatical de la oración que presenta el dato condicional, pues decidimos que en todos los problemas ésta fuera la misma. También hemos cambiado el formato de la pregunta, se preguntaba por una probabilidad y ahora se pregunta por un porcentaje. Lo elegimos en sexto lugar por el grado de complejidad estructural [p_{31}].

Los enunciados de los problemas que forman parte de la segunda fase se pueden consultar en el anexo 4 que muestra las pruebas.

3.4.2.3. Administración de la segunda fase

Para la administración de la segunda fase, conservamos en la medida de lo posible, los mismos niveles educativos en la muestra, que en la primera fase, con el fin de tener una muestra de estudiantes que presentan diferentes niveles de aprendizaje acerca de la probabilidad condicional. Administramos la segunda fase a 80 estudiantes de diferentes niveles educativos de enseñanza secundaria, desde 4º ESO a 2º de Bachiller, así como estudiantes de la universidad, que cursan la asignatura de Cálculo de Probabilidades y Estadística de 2º curso de la licenciatura de Matemáticas.

La tabla 3.7 muestra la distribución de los participantes en la segunda fase.

Nivel	**Descripción**	**Muestra**	**Asignatura**
EFM	Facultad de Matemáticas	10	Cálculo de probabilidades y Estadística
2BCS-H	2º de bachiller ciencias sociales-humanidades	15	Matemáticas
1BT-C	1º de bachiller tecnológico-científico	24	Matemáticas
4ESO	4º educación secundaria obligatoria	31	Matemáticas

Tabla 3.7: Distribución de los participantes en la segunda fase

La prueba de la segunda fase se administró durante una de las sesiones de la asignatura mostrada en la tabla 3.7 y sólo fue administrada por la investigadora a los estudiantes de la facultad de Matemáticas. En los demás cursos fueron sus profesores de Matemáticas los que la administraron, con el fin de no romper el ambiente y la normalidad en el aula. Se les indicó a los estudiantes que al resolver el problema explicaran, en la medida de lo posible, el razonamiento utilizado en el proceso de resolución del problema. También se les propuso que escribieran su nombre con el fin de diferenciar las pruebas para su codificación y clasificación. Los estudiantes de la facultad de Matemáticas no escribieron su nombre ya que dudaron de la confidencialidad y del carácter anónimo de la segunda fase, y la investigadora les propuso un código a cada uno, desde M1 a M10.

De una manera intencionada no se explicó que los problemas de la segunda fase eran de probabilidad condicional. De esta forma, es el mismo resolutor quien decide la estrategia utilizada en el proceso de resolución del problema y no influye en asociaciones no deseadas con el tema que se explora.

A todos los grupos se les informó de que los datos de esta segunda fase serán tratados confidencialmente, asegurando su privacidad y el carácter anónimo de los participantes.

Presentamos la descripción de los problemas de la segunda fase en el capítulo de resultados, por tener esta descripción algunos aspectos desarrollados como resultados de los problemas ternarios de N_2.

3.4.2.4. Metodología de análisis de la segunda fase

Tenemos en cuenta los descriptores utilizados para organizar las respuestas de los estudiantes de la primera fase, pero al tener en cuenta también los resultados de esta primera fase afinamos estos descriptores. En primer lugar, en los procesos de resolución con éxito creamos más descriptores que puedan describir el tipo de razonamiento utilizado por el resolutor. Tenemos en cuenta nuestra experiencia en la primera fase, que nos permite afirmar que un resolutor no utiliza de forma exclusiva el razonamiento aritmético o el razonamiento probabilístico, por lo que para el análisis de los procesos de resolución con éxito parece razonable considerar nuevos descriptores. Consideramos la utilización de destrezas heurísticas, tablas de contingencia y diagramas de árbol, por parte de los estudiantes, tanto si han alcanzado el éxito en el problema como si no lo han hecho. Las tablas de contingencia y los diagramas de árbol son destrezas con potencial heurístico por tanto se pueden utilizar después de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Luego en principio, ya sabemos que el porcentaje de estudiantes que los pueden utilizar es bajo.

El descriptor Procesos de resolución con éxito queda dividido:

1. Procesos de resolución con éxito

    1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético

        1.1.1. Uso de destrezas heurísticas

    1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

        1.2.1. Uso de destrezas heurísticas

    1.3. Proceso de resolución que básicamente probabilístico

        1.3.1. Uso de destrezas heurísticas

    1.4. Proceso de resolución exclusivamente probabilístico

        1.4.1. Uso de destrezas heurísticas

Dentro de los procesos de resolución sin éxito, clasificamos los errores que provienen de las dificultades semánticas, los errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido y los errores en las interpretaciones de los sucesos. Entendemos los errores que provienen de las dificultades semánticas las interpretaciones no deseadas del dato y de la pregunta condicional. El contenido matemático necesario para la resolución de estos problemas es la proporcionalidad y/o el cálculo de probabilidades, por lo que los errores que provienen de estas dificultades los clasificamos en errores en el uso de la proporcionalidad, como números decimales, porcentajes y reglas de tres, y errores en el uso de conceptos y fórmulas de probabilidad. Por otro lado consideramos los errores en las interpretaciones de los sucesos que van apareciendo en la resolución del problema.

El descriptor de Procesos de resolución sin éxito queda determinado por:

2. Procesos de resolución sin éxito

    2.2. Errores

2.2.1. Errores que provienen de las interpretaciones del dato y/o la pregunta condicional

2.2.1.1. Interpretación del dato condicional por parte del resolutor

2.2.1.1.1. Interpretación del dato condicional por una intersección

2.2.1.1.2. Interpretación del dato condicional por una marginal

2.2.1.2. Interpretaciones de la pregunta condicional por el resolutor

2.2.1.2.1. Interpretación de la pregunta condicional por la intersección

2.2.1.2.2. Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional que presenta el problema

2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional como una marginal

2.2.2. Errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido

2.2.2.1. Errores en el uso de la proporcionalidad

2.2.2.1.1. Números decimales

2.2.2.1.2. Porcentajes

2.2.2.1.3. Reglas de tres

2.2.2.2. Errores en el uso de conceptos y fórmulas de probabilidad

2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad

2.2.2.2.2. Fórmulas de probabilidad

2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos

2.3. Uso de destrezas heurísticas.

2.3.1. Uso competente

2.3.2. Uso no adecuado

3. Otras

La metodología de análisis de los procesos de resolución, que hemos dividido en cinco apartados, ha sido la siguiente:

En el primer apartado analizamos los procesos de resolución de los estudiantes que han resuelto con éxito cada uno de los problemas. Realizamos el análisis en este apartado bajo dos puntos de vista: puntualmente, es decir problema a problema, presentando los diferentes razonamientos a la hora de resolverlos y comparando los resultados con los resultados de los problemas isomorfos de la primera fase, y de forma global, es decir, analizando los descriptores que dan cuenta de las respuestas de los estudiantes en los procesos de resolución con éxito, tal y como hemos procedido en el análisis de la primera fase.

En el segundo, analizamos los comportamientos de los estudiantes que han resuelto con éxito gran parte de los problemas. La intención de este apartado, es la de mostrar si los estudiantes que resuelven con éxito la mayoría de los problemas presentan un modo de resolución estable a lo largo de toda la segunda fase o si este modo de resolución está influido por algo.

En el tercer apartado mostramos las conclusiones del análisis del éxito.

En el cuarto mostramos el análisis de las respuestas de los estudiantes organizadas según los descriptores que dan cuenta del comportamiento de los resolutores cuyos procesos de resolución no han tenido éxito.

Por último, en el quinto apartado presentamos las conclusiones de este análisis.

4. Resultados

En este capítulo mostramos todos los resultados que hemos obtenido en este trabajo de investigación. Éstos son de tres tipos: resultados que completan el estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional, los del análisis de la resolución de problemas ternarios de probabilidad condicional en los currículos oficiales de la Enseñanza Secundaria en España y en los libros de texto y los que dan cuenta de las actuaciones de los estudiantes al resolver problemas de una tipología determinada de la clasificación de los problemas de probabilidad condicional que proponemos aquí. Los resultados responden a los objetivos marcados en el capítulo 2 (pp. 107 a 112) y están ordenados según estos objetivos.

4.1. RESULTADOS DEL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL ATENDIENDO AL ANÁLISIS GLOBAL DEL TEXTO DEL PROBLEMA

La finalidad de este apartado es dar cuenta del análisis y exploración de los problemas ternarios de probabilidad condicional teniendo en cuenta diferentes factores, con el fin de crear una clasificación de estos problemas más completa y mostrar un conjunto de factores que pueden influir en el éxito en la resolución y en el proceso de resolución de un problema ternario de probabilidad condicional.

Realizamos un estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional, teniendo en cuenta cada uno de los dos tipos de componentes siguientes:

a) Componentes que tienen que ver con la estructura de los datos y la pregunta del problema, y
b) Componentes que afectan directamente a la resolución del problema.

4.1.1. COMPONENTES QUE TIENEN QUE VER CON LA ESTRUCTURA DE LOS DATOS Y LA PREGUNTA DEL PROBLEMA. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL ATENDIENDO A LOS NIVELES, CATEGORÍAS Y TIPOS.

Basamos esta clasificación en la de Yañez (2000) que hemos presentado en el capítulo 1 apartado 1.2.2 de esta memoria. El autor presenta una clasificación de los problemas de probabilidad condicional atendiendo a las probabilidades presentes en la parte informativa del problema. En nuestra clasificación introducimos una nueva variable, la pregunta del problema. El hecho de tener en cuenta la pregunta del problema es importante por varias razones. Si el problema pertenece a los casos 1, 2 o 3 de la clasificación de Yañez, es necesario que la pregunta del problema sea una probabilidad condicional pues si no es así el problema no será de probabilidad condicional. Además, según en el problema se pregunte por una probabilidad condicional, una probabilidad marginal o una probabilidad de la intersección, el número de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema puede variar.

Los problemas ternarios de probabilidad condicional los clasificamos mediante una terna que describe el nivel (N), la categoría (C) y el tipo (T). El nivel y la categoría tienen que ver con las cantidades mencionadas en el problema, de forma que indicarán el número de probabilidades condicionales, probabilidades marginales y probabilidades de la intersección mencionadas en el problema. El tipo indica la pregunta del problema. Definimos a continuación cada uno de estos componentes:

NIVEL: Está determinado por el número de datos que son probabilidades condicionales (sólo condicionales) o interpretables como probabilidades condicionales.

Dado que el número mínimo de datos en el problema es de tres probabilidades escogidas convenientemente entre las marginales, las intersecciones y las condicionales, pueden considerarse 4 niveles de problemas, en función de si los datos del problema son 0, 1, 2, ó 3 probabilidades condicionales o cantidades interpretables como probabilidades condicionales. Así, en cada uno de los niveles N_i, para i= 1, 2, 3, 4, definimos vectores del tipo (x, y, z) en los que sus componentes representan el nº de datos interpretables como probabilidades marginales, probabilidades de la intersección y probabilidades condicionales respectivamente, y con la condición que x+y+z=3. En cada nivel tenemos:

★ Nivel 1. En los datos del problema no hay probabilidades condicionales: (x, y, 0), x+y=3.

★ Nivel 2. Hay una probabilidad condicional en los datos del problema:

(x, y, 1), x+y=2.

★ Nivel 3. Hay dos probabilidades condicionales en los datos del problema: (x,y,2), x+y=1.

★ Nivel 4: Los tres datos del problema son tres probabilidades condicionales: (0,0,3).

<u>CATEGORÍA</u>: Está determinada por el número de datos que tienen que ver con las probabilidades marginales o datos interpretables como éstas. Las categorías dependen del nivel que consideremos, teniendo en cuenta la relación aditiva que relaciona los tres componentes del vector (x, y, z).

Consideramos entonces las categorías C_i (i=1, 2, 3) dependiendo de que los datos que tienen que ver con las probabilidades marginales sean 0, 1 o 2 respectivamente.

Así, por ejemplo, en el nivel 1 y en el nivel 2 existen las tres categorías, pero en el nivel 3 sólo existen las categorías C_1 y C_2, y en el nivel 4 sólo existe la categoría C_1. La tabla 4.1 da cuenta de la relación entre el Nivel y la Categoría.

N_1 (x, y, 0), x+y=3			N_2 (x, y, 1), x+y=2			N_3 (x, y, 2), x+y=1		N_4 (0, 0, 3)
C_1(0, 3, 0)	C_2(1, 2, 0)	C_3(2, 1, 0)	C_1(0, 2, 1)	C_2(1, 1, 1)	C_3(2, 0, 1)	C_1(0, 1, 2)	C_2(1, 0, 2)	C_1 (0, 0, 3)

Tabla 4.1: Clasificación de los problemas de probabilidad condicional según Niveles y Categorías

<u>TIPO</u>: Está determinado por la pregunta del problema. Existen tres tipos:

- ★Tipo 1: la pregunta del problema es una probabilidad condicional.
- ★Tipo 2: la pregunta del problema es una probabilidad marginal.
- ★Tipo 3: la pregunta del problema es una probabilidad de la intersección.

En principio, cada nivel quedaría dividido, como máximo, en tres categorías y cada una de éstas en tres tipos. Luego podemos construir o considerar dentro de cada nivel, como máximo, nueve familias de problemas, atendiendo a las componentes que acabamos de definir. Todo esto teóricamente, después de un análisis de posibilidades.

En adelante, y es algo que consideramos importante decir, los resultados tienen un carácter simplemente teórico, fruto de un análisis de posibilidades determinadas por los datos y los preguntas. Hablaremos de familias de problemas determinados por N, C y T y, dentro de cada familia, de problemas distintos cuando los datos han sido variados entre sí y combinados con la pregunta del problema. Todo ello, con un marcado acento teórico.

Este trabajo es posible hacerlo gracias a que el mundo de los problemas investigado es cerrado y limitado en cuanto a los datos y sus relaciones.

Clasificación de los problemas atendiendo al nivel, categoría y tipo.

Nivel 1, N_1: (x, y, 0)

El vector que da cuenta de los datos tiene la forma (x, y, 0), sin condicionales en el enunciado.

Pueden considerarse tres categorías, C_i i=1, 2, 3, Necesariamente, en este nivel y en cualquiera de las tres categorías, los problemas son siempre del T_1, es decir, la pregunta es una probabilidad condicional, pues en caso contrario no consideramos el problema como problema de probabilidad condicional.

C_1 (0, 3, 0), los datos son tres intersecciones, T_1: (N_1, C_1, T_1)

Consideradas las diferentes formas de tomar las intersecciones como datos en el problema, la pregunta se corresponde con cualquiera de las 8 condicionales, T_1, lo que nos da, potencialmente 32 problemas diferentes en datos y preguntas.

Suele ocurrir que la mayoría de los problemas con las características recién descritas que podemos encontrar en los libros de texto escolares suelen presentar los datos mediante una tabla de contingencia. Mostramos dos problemas (ejemplos 4.1 y 4.2) que ilustran de esta situación:

EJEMPLO 4.1. Ramírez, Esteve, Palomero, Montesinos, (1996) Completa la següent taula de contingència:

A partir de la taula, confecciona un diagrama d'arbre i determina P(B/A), P(noB/A), P(B/noA) i P(noB/noA). (página 240, problema 43).

	A	noA	Total
B	0'4	0'2	
noB	0'25		
Total			1

EJEMPLO 4.2. Santos, D. (1988)

En un grupo de 500 individuos se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Los resultados fueron como sigue:

Test de inteligencia

	Rendimiento académico	
	Alto	Bajo
Superior	200	80
Inferior	100	120

Considerando que A es "ser superior en inteligencia» y B es «tener rendimiento alto», averiguar:

Si A Y B son independientes.

Si se selecciona al azar un alumno con rendimiento alto, ¿cuál es la probabilidad de que sea superior en inteligencia? (p.248, problema 9)

Además, el ejemplo 4.1 es el único problema que hemos encontrado en los libros de texto, en el que sólo hay tres datos que son probabilidades de la intersección, pues todos los demás problemas encontrados en los libros de texto, al presentar los datos mediante una tabla de contingencia con los datos en frecuencias absolutas, presentan la tabla de contingencia completa, como puede verse en el ejemplo 4.2.

C_2 (1, 2, 0), los datos son una marginal y dos intersecciones Tipo 1: (N_1, C_2, T_1)

En este caso pueden considerarse 24 problemas diferentes sin tener en cuenta la pregunta del problema, pero como todos han de ser T_1, entonces podemos estar hablando para esta terna de 168 problemas diferentes.

El ejemplo siguiente muestra esta situación:

EJEMPLO 4.3: Colera & otros (1988) En una empresa hi ha 200 empleats, 100 homes i 100 dones. Els fumadors són 40 homes i 35 dones. Si triem un empleat a l'atzar, calcula la probabilitat que siga home i que no fume. Si triem un empleat al atzar dels fumadors, ¿quina és la probabilitat de que siga dona? (página 232, problema 20, cambiando la pregunta para que sea un problema de probabilidad condicional).

C_3 (2, 1, 0), los datos son dos marginales y una intersección Tipo 1: (N_1, C_3, T_1)

En este caso, hablamos de 16 problemas diferentes sin tener en cuenta el tipo. Si lo consideramos, hablamos de 128 problemas.

El siguiente ejemplo da cuenta de esta situación.

EJEMPLO 4.4: Guzmán, Colera (1991)

Se sortea un viaje a Singapur entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

Si del afortunado se sabe que ya es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea mujer? (Cuestión 2, La Laguna, Tenerife, 1990, p.84)

Resumiendo, N_1 queda dividido en tres familias diferentes de problemas atendiendo a las posibles categorías, tal y como muestra la tabla 4.2.

N_1		
(N_1, C_1, T_1)	(N_1, C_2, T_1)	(N_1, C_3, T_1)

Tabla 4.2: Clasificación de los problemas de Nivel 1, según las categorías y los tipos

Nivel 2, N_2: (x, y, 1)

El vector que da cuenta de los datos tiene la forma (x, y, 1), con un dato que tiene que ver con una condicional en el enunciado. En este nivel pueden considerarse, de una parte, tres categorías C_i (i=1, 2, 3) y de otra, para cualquiera de las tres categorías, el problema puede presentar los tres tipos, es decir, la pregunta del problema puede considerar cualquiera de las tres probabilidades: marginal, intersección o una probabilidad condicional.

Veamos con detalle las tres categorías.

C_1: (0, 2, 1), los datos son dos intersecciones y una condicional: (N_2, C_1, T_1), (N_2, C_1, T_2) y (N_2, C_1, T_3)

Tenemos 6 formas de agrupar las 4 intersecciones de dos en dos, y por cada una de estas 6 formas tenemos 8 condicionales. Luego el número de problemas diferentes que pueden presentar estas restricciones en los datos es de 48.

En cada uno de estos 48 problemas no hemos tenido en cuenta el tipo. En este nivel y categoría, la pregunta del problema puede ser una probabilidad condicional, una probabilidad marginal o una probabilidad de la intersección. Es decir puede presentar cualquiera de los tres tipos. Por tanto, por cada uno de los tipos tenemos los 48 problemas.

En el análisis de los textos escolares que hemos realizado no hemos encontrado ningún problema de estas tres familias. Nosotros hemos construido el ejemplo 4.5 con tres preguntas que se corresponden con los tres tipos.

EJEMPLO 4.5: De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol.

a. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

b. Calcula la probabilidad de que elegido un alumno al azar no practique ni fútbol ni baloncesto.

c. Calcula la probabilidad de que practique baloncesto elegido un alumno que practique fútbol.

C_2 (1, 1, 1), con una marginal, una intersección y una condicional: (N_2, C_2, T_1), (N_2, C_2, T_2) y (N_2, C_2, T_3)

Tenemos por cada marginal 4 intersecciones y 8 condicionales. Como tenemos 4 marginales, el número total de problemas en este nivel y esta categoría, sin tener en cuenta los tipos, en principio es de 128. A estos 128 hemos de restar 8 que se corresponden con las 8 relaciones multiplicativas formadas por una probabilidad marginal, una probabilidad condicional y una probabilidad de la intersección, $p(A).p(B|A)=p(A\cap B)$, pues estas combinaciones de datos no darían lugar a problemas.

En cada uno de estos 120 problemas no hemos tenido en cuenta la pregunta. En este nivel la pregunta del problema puede ser una probabilidad condicional, una probabilidad marginal o una probabilidad de la intersección. Es decir puede presentar cualquiera de los tres tipos, T_1, T_2, o T_3, respectivamente.

De la búsqueda en los libros de texto no hemos encontrado ningún problema de estas tres familias. Por esta razón, hemos creado un ejemplo, el ejemplo 4.6, con tres preguntas que se corresponden con los tres tipos:

> EJEMPLO 4.6: En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula las probabilidades siguientes:
>
> a. La probabilidad de ser mujer y administrativa
>
> b. La probabilidad de realizar tareas administrativas
>
> c. La probabilidad de que eligiendo un trabajador que realice tareas administrativas, éste sea mujer.

C_3 (2, 0, 1), con dos marginales y una condicional: (N_2, C_3, T_1) y (N_2, C_3, T_3)

Tenemos 6 formas de agrupar las 4 marginales de dos en dos, pero debemos tener en cuenta que las marginales deben ser no complementarias. Por lo que tenemos 4 parejas de marginales no complementarias. Por cada una de estas 4 formas tenemos 8 condicionales. Luego el número de problemas que pueden presentar estas restricciones en los datos es 32.

En esta categoría, dentro de N_2, la pregunta del problema no puede ser una probabilidad marginal, pues ésta sería complementaria con uno de los datos. Luego estaremos en los tipos T_1 y T_3, en los que la pregunta es una probabilidad condicional y una probabilidad de la intersección respectivamente. Este nivel queda dividido así en 8 familias diferentes de problemas, de las que da cuenta la tabla 4.3.

N_2							
N_2C_1			N_2C_2			N_3C_3	
(N_2,C_1,T_1)	(N_2,C_1,T_2)	(N_2,C_1,T_3)	(N_2,C_2,T_1)	(N_2,C_2,T_2)	(N_2,C_2,T_3)	(N_2,C_3,T_1)	(N_2,C_3,T_3)

Tabla 4.3. Clasificación de los problemas de probabilidad condicional de Nivel 2, atendiendo a las categorías y los tipos

Hemos encontrado en los libros de texto escolares únicamente los dos ejemplos de problemas que mostramos a continuación (ejemplo 4.7 y ejemplo 4.8).

El primero es una muestra de (N_2, C_3, T_1):

> EJEMPLO 4.7: Vizmanos J.R., Anzola, M. (2001) El 40% de las declaraciones del impuesto sobre la renta son positivas. Un 10% de las que resultaron positivas lo fueron como consecuencia de errores aritméticos en la realización de la declaración.
>
> Si hay un 5% de las declaraciones con errores aritméticos, ¿qué porcentaje de éstas resultaron positivas? (Problema 33, p.296)

El segundo es una muestra de (N_2, C_3, T_3) en la pregunta a y la pregunta b se corresponde con (N_2, C_3, T_1):

> EJEMPLO 4.8: Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, (2002) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía.
>
> a. ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron las dos asignaturas?
>
> b. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas? (página 26, problema 1)

Nivel 3, N_3: (x, y, 2)

El vector que da cuenta de los datos tiene la forma (x, y, 2), con dos datos que tienen que ver con probabilidades condicionales.

Pueden considerarse dos categorías. La categoría C_1, en donde no hay datos que pueden ser interpretados como probabilidades marginales y, en consecuencia el tercer dato que presenta el problema es una probabilidad de la intersección o una cantidad interpretable como ésta. La categoría C_2, en donde el tercer dato que presenta el problema es un dato interpretable como una probabilidad marginal

C_1, (0, 1, 2), los datos son una intersección y dos condicionales: (N_3, C_1, T_1), (N_3, C_1, T_2) y (N_3, C_1, T_3)

Con los 8 condicionales podemos considerar 28 pares de datos, de los que eliminando los 4 pares formados por condicionales complementarias nos quedan 24 pares de datos. Por cada uno de estos 24 pares tenemos 4 intersecciones como datos posibles, por lo que dentro de este nivel y esta categoría podemos tener considerar 96 problemas diferentes.

Si ahora tenemos en cuenta la pregunta del problema, en este nivel y categoría se pueden presentar problemas con cualquiera de los tres tipos.

Tampoco en este caso, en los libros de texto revisados, hemos encontrado ningún problema con los datos referidos como una probabilidad de la intersección y dos condicionales. Hemos adaptado uno, ejemplo 4.9, como muestra de (N_3, C_1, T_1) en lo que respecta a la primera pregunta y (N_3, C_1, T_3) en la segunda pregunta.

EJEMPLO 4.9: Hemos hecho un estudio entre los chicos y las chicas de Bachiller que están a favor y en contra de las Pruebas de Acceso a la Universidad. Tenemos los datos siguientes:

★ Los chicos que están en contra de las PAU's son el 44%

★ De los chicos, los que están a favor son el 20%

★ De las chicas, las que están en contra son el 80%

Hemos elegido un estudiante y sabemos que es chico. Calcula la probabilidad de que esté en contra. Calcula también la probabilidad de las chicas que están a favor.

C_2, (1, 0, 2), con una marginal y dos condicionales: (N_3, C_2, T_1), (N_3, C_2, T_2) y (N_3, C_2, T_3)

Ya sabemos que tenemos 24 parejas de condicionales no complementarias, que con las 4 marginales hacen un total de 96 problemas en este nivel y esta categoría. Al igual que en la anterior categoría, al tener en cuenta la pregunta del problema, se pueden presentar los tres tipos.

Los problemas de este nivel y esta categoría, en cualquiera de los tres tipos: (N_3, C_2, T_1), (N_3, C_2, T_2) y (N_3, C_2, T_3), son los que, de forma general, están presentes en los libros de texto como problemas de probabilidad condicional. Por decirlo de otra manera, en la que se basan los libros de texto para la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

El siguiente ejemplo muestra una situación (N_3, C_2, T_1).

EJEMPLO 4.10: Engel (1975) La moitié des participants à un congrès sont américains. Un américain sur huit et un non américain sur quatre-vingt boivent du jus de tomate au petit déjeuner. Quelle est la probabilité pour qu'un congressiste qui boit dus jus de tomate au petit déjeuner soit américain? (problema 16, p.276)

El ejemplo que presentamos a continuación muestra la situación (N_3, C_2, T_1) en las preguntas b y c y la situación (N_3, C_2, T_2) en la pregunta a.

EJEMPLO 4.11: Vizmanos J.R., Anzola, M. (2001) Una cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera es un tercio. Si se elige una congresista al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que desayune té?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té? (Problema 32, p.296)

El ejemplo siguiente da cuenta de la situación (N_3, C_2, T_3).

EJEMPLO 4.12: Guzmán, Colera (1991) Una clase de COU está formada por 10 chicos y 10 chicas; la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han elegido Matemáticas II como asignatura optativa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y no estudie Matemáticas II? (Opción B, Ejercicio 4, León, 1990, p.97)

Este nivel queda dividido en 6 familias diferentes de problemas tal y como muestra la tabla 4.4.

N_3					
N_3C_1			N_3C_2		
(N_3, C_1, T_1)	(N_3, C_1, T_2)	(N_3, C_1, T_3)	(N_3, C_2, T_1)	(N_3, C_2, T_2)	(N_3, C_2, T_3)

Tabla 4.4. Clasificación de los problemas de probabilidad condicional de Nivel 3, atendiendo a las categorías y los tipos

Nivel 4, N_4: (0, 0, 3)

El vector que da cuenta de los datos tiene la forma (0, 0, 3), los tres datos presentes en el problema son interpretables como probabilidades condicionales. En este nivel sólo se presenta la categoría 1, pues estamos en el caso de 0 datos interpretables como probabilidades marginales. Además, en esta categoría pueden presentarse cualquiera de los tres tipos, teniendo en cuenta que en el tipo 1 la pregunta no puede ser una condicional complementaria con algún dato. Este nivel queda pues dividido en 3 familias diferentes de problemas, como muestra la tabla 4.5.

<table>
<tr><td colspan="3">N_4</td></tr>
<tr><td colspan="3">N_4C_1</td></tr>
<tr><td>(N_4, C_1, T_1)</td><td>(N_4, C_1, T_2)</td><td>(N_4, C_1, T_3)</td></tr>
</table>

Tabla 4.5. Clasificación de los problemas de probabilidad condicional de Nivel 4, atendiendo a las categorías y a los tipos

Nuevamente, los libros de texto examinados no presentan problemas descritos por este nivel.

El ejemplo siguiente es una muestra de (N_4, C_1, T_3) en cuanto a la primera pregunta y (N_4, C_1, T_2) en cuanto a la segunda.

EJEMPLO 4.13: En un grupo de individuos se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Se estudiaba la Inteligencia superior y el rendimiento alto. De este estudio se sabe que, elegido un individuo:

- La probabilidad de que tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento es alto es 2/3.
- La probabilidad de que tenga rendimiento alto sabiendo que su inteligencia es superior es de 5/7.

- La probabilidad de que no tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento no es alto es 3/5.

Calcula la probabilidad de ser inteligente y tener rendimiento alto y la probabilidad de tener rendimiento alto.

La tabla siguiente pretende ser un resumen de las diferentes familias de problemas de probabilidad condicional que pueden presentarse y que puede usarse como criterios para la clasificación de estos problemas. Presenta la clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional atendiendo a los niveles, categorías y tipos.

	N_1			**N_2**			**N_3**			**N_4**		
C_1	C_1T_1			C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3
C_2	C_2T_1			C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3	C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3			
C_3	C_3T_1			C_3T_1		C_3T_3						

Tabla 4.6: Clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional atendiendo a los niveles, categorías y tipos

En principio, cada nivel quedaría dividido en 9 familias, dependiendo de la categoría y del tipo. Pero como la categoría (datos que tienen que ver con las probabilidades marginales) depende del nivel en el que nos encontramos, y el tipo (por qué probabilidad se pregunta) tiene que ver con que el problema de probabilidad ha de ser un problema de probabilidad condicional, la tabla muestra casillas vacías que nos indican la imposibilidad de considerar problemas pertenecientes a las clases correspondientes a esas casillas.

4.1.1.1 Relación de los sistemas de representación, diagramas de árbol y tablas de contingencia, con los vectores que clasifican los problemas de probabilidad condicional

Ya hemos hablado en el capítulo 1 (pp. 39-45) de la importancia de las tablas de contingencia y los diagramas de árbol, pues son destrezas heurísticas, importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

En el dicho capítulo hemos descrito la estructura interna de estos sistemas de representación así como las reglas de cálculo asociadas para el cálculo de nuevas probabilidades.

En este apartado damos cuenta de la relación de estos sistemas de representación con cada uno de los vectores que clasifican los problemas ternarios de probabilidad condicional.

NIVEL 1

Este nivel está caracterizado por el vector (x, y, 0), con x+y=3. Los datos del problema son probabilidades marginales (x) y/o probabilidades de la intersección (y). Necesariamente la pregunta del problema es una probabilidad condicional, T_1.

$N_1C_1T_1$: El vector que describe las cantidades conocidas en los problemas de esta familia es (0, 3, 0). Las cantidades corresponden a tres probabilidades de la intersección.

$N_1C_2T_1$: El vector que describe las cantidades conocidas en los problemas de esta familia es (1, 2, 0), que corresponden a una probabilidad marginal y dos probabilidades de la intersección.

$N_1C_3T_1$: El vector que describe las cantidades conocidas en los problemas de esta familia es (2, 1, 0), que corresponden a dos probabilidades marginales y una probabilidad de la intersección.

En cualquiera de las tres familias de N_1, el resolutor puede hacer uso de la tabla de contingencia para calcular todas las probabilidades marginales y de la intersección necesarias, pero siempre se tendrá que apoyar en uno de los dos diagramas de árbol para llegar a la pregunta del problema. Las cantidades conocidas las situamos todas en la tabla de contingencia, por lo que podemos calcular cualquiera de las cantidades de dicha tabla. La pregunta del problema, al ser una probabilidad condicional necesita de una de las ramas de un diagrama de árbol para ser calculada.

Todos los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_1 son problemas de resolución aritmética.

NIVEL 2

Este nivel está caracterizado por el vector (x, y, 1), con x+y=2. Los datos del problema son, además de una probabilidad condiciona,l probabilidades marginales (x) y/o probabilidades de la intersección (y).

$N_2C_1T_1$: El vector que describe las cantidades conocidas en esta familia es (0,2,1), dos probabilidades de la intersección y una probabilidad condicional. Se pregunta por una probabilidad condicional. Los problemas de probabilidad condicional que pertenecen a esta familia necesitan para su resolución de un diagrama de árbol o de dos según la situación de las cantidades conocidas del problema y de la pregunta del problema.

$N_2C_1T_2$: El vector que describe las cantidades conocidas en esta familia de problemas es (0, 2, 1) y se pregunta por una probabilidad marginal.

$N_2C_1T_3$: El vector que describe las cantidades conocidas en esta familia de problemas es (0, 2, 1) y se pregunta por una probabilidad de la intersección.

En los problemas de estas familias las probabilidades de la intersección conocidas son las parejas:

p(AB) y p(A-B), p(AB) y p(-AB), p(AB) y p(-A-B), p(A-B) y p(-AB), p(A-B) y p(-A-B), p(-AB) y p(-A-B).

Es decir cualquiera de las seis parejas que pertenecen a las cuatro ramas de los dos árboles. Existen situaciones dentro de esta familia de problemas, que describen un problema indeterminado. Estas situaciones vienen descritas cuando las parejas de intersecciones son complementarias y la probabilidad condicional está asociada a dicha pareja (Yañez, 2000). Las parejas de intersecciones complementarias son cuatro: p(AB) y p(A-B), p(-AB) y p(-A-B), p(AB) y p(-AB), p(A-B) y p(-A-B). La condicional asociada es p(B| A) o p(-B| A), p(B| -A) o p(-B| -A), p(A| B) o p(-A| B) y p(A| -B) o p(-A| -B) respectivamente. Podemos eliminar un dato, pues todas las cantidades que se producen con los tres datos se producen igual con dos. La figura 4.1 muestra esta situación.

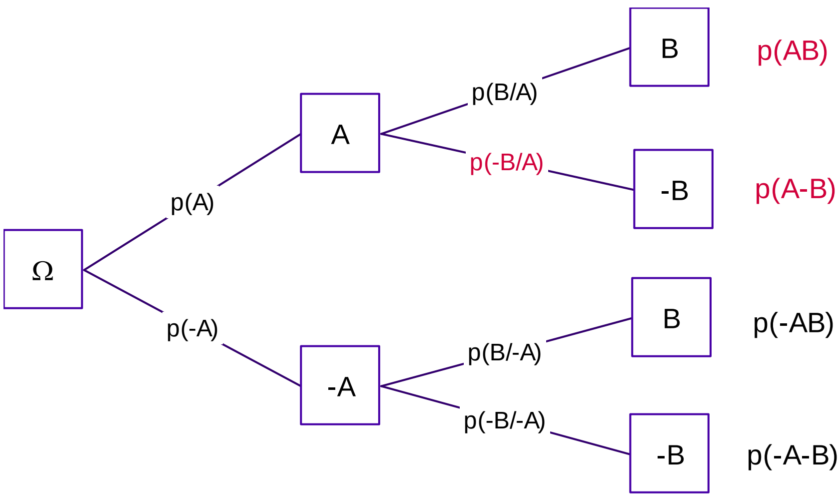


Figura 4.1: Diagrama de árbol que describe un problema de N_2C_1, indeterminado, con los datos señalados en rojo.

Suponemos que eliminamos una cantidad. El vector que describe el problema es (0, 1, 1) si eliminamos una intersección, o (0, 2, 0) si eliminamos la condicional. Introducimos una incógnita. Tenemos tres datos; si el problema se describía con (0, 1, 1) al introducir la incógnita se describe con un vector (1, 1, 1), (0, 2, 1) o (0, 1, 2) según la incógnita que introducimos sea una marginal, una intersección no complementaria y asociada a la vez con la intersección y la condicional dada respectivamente o una condicional. Si el problema se describía con (0, 2, 0) al introducir la incógnita se describe con (0, 2, 1) para que el problema sea de probabilidad condicional, de forma que la condicional que introducimos no esté asociada con la pareja de intersecciones. Cualquiera de los nuevos casos los tratamos en este apartado. Podemos adelantar que son problemas de resolución aritmética.

Los problemas en los que las probabilidades de la intersección conocidas son las mismas parejas que las que hemos citado antes, y la probabilidad condicional conocida no está asociada a dicha pareja son problemas de resolución aritmética, tal y como se muestra en la figura 4.2. Podemos calcular cualquiera de las cantidades no conocidas.

De igual forma, en cualquiera de las otras situaciones, con un árbol o con los dos, podemos calcular todas las cantidades desconocidas del problema.

Los problemas ternarios de probabilidad condicional que pertenecen a estas tres familias de problemas son de resolución aritmética, y necesitan en su resolución de un diagrama de árbol y/o de dos. En los problemas de la familia $N_2C_1T_3$ con un diagrama de árbol calcularemos la probabilidad de la intersección desconocida.

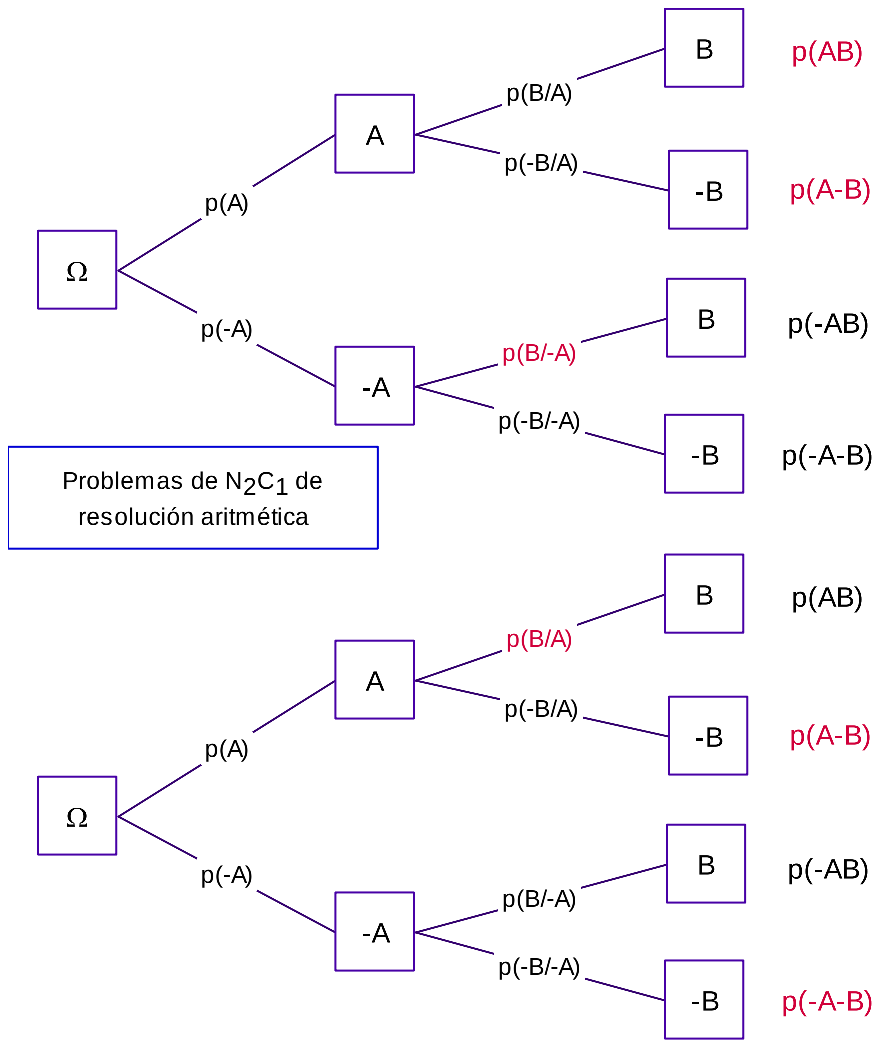


Figura 4.2: Diagramas de árbol que describen dos problemas de N_2C_1, de resolución aritmética, con los datos señalados en rojo

Pasamos a describir las familias $N_2C_2T_i$.

$N_2C_2T_1$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (1, 1, 1) y en ellos se pregunta por una condicional.

$N_2C_2T_2$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (1, 1, 1) y en ellos se pregunta por una probabilidad marginal.

$N_2C_2T_3$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (1, 1, 1) y en ellos se pregunta por una probabilidad de la intersección.

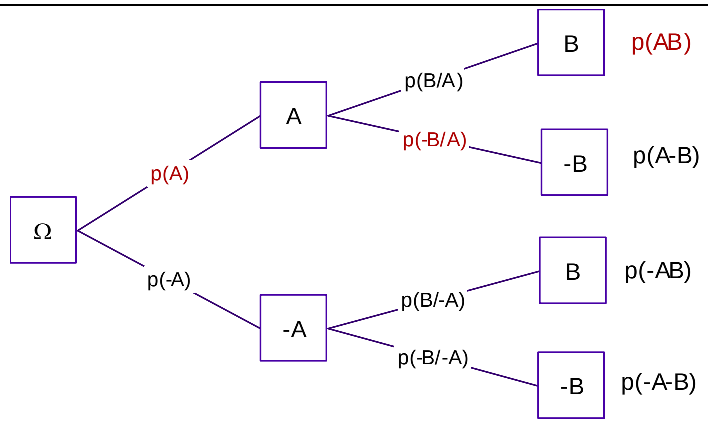


Figura 4.3: Árbol que describe una situación problemática de N_2C_2, indeterminada, con las cantidades mencionadas señaladas en rojo

Las figuras 4.3 y 4.4 muestran situaciones que presentan un problema indeterminado. En la figura 4.3 la marginal dada está asociada con la condicional y con la intersección (Yañez 2000). En la figura 4.4 la complementaria de la marginal dada está asociada con la condicional y con la intersección. Para que exista un problema en N_2C_2 se debe cumplir que la marginal dada o su complementaria no estén asociadas a la vez con la condicional y con la intersección.

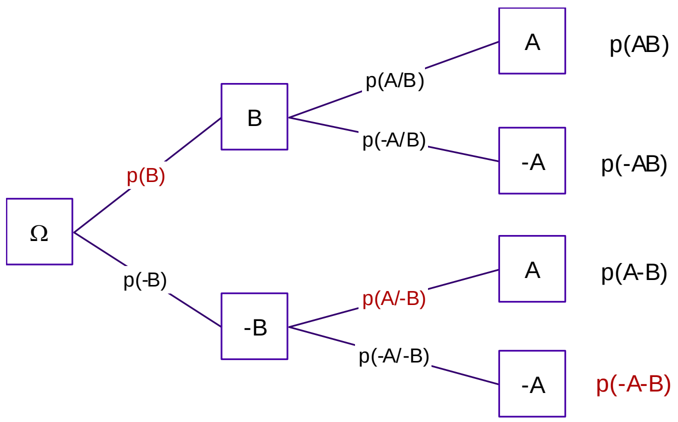


Figura 4.4: Árbol que describe un problema de N_2C_2, indeterminado, con las cantidades mencionadas señaladas en rojo

Las figuras 4.5 y 4.6 nos presentan las situaciones problemáticas.

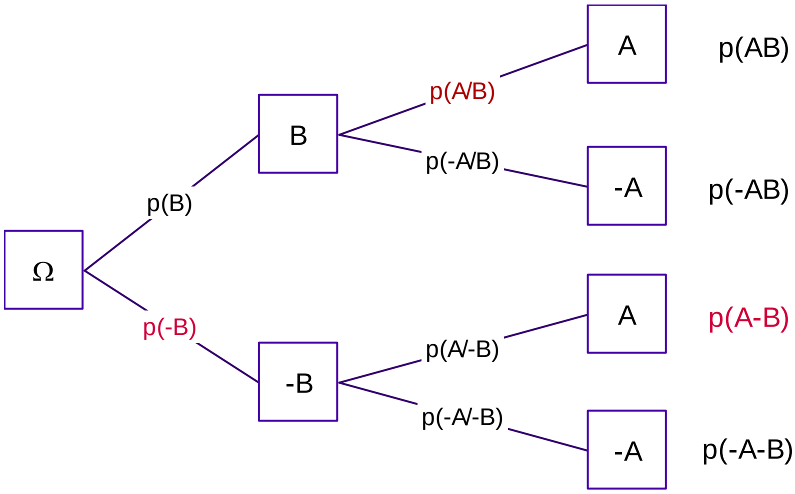


Figura 4.5: Árbol que da cuenta de un problema de N_2C_2, de resolución aritmética, con las cantidades mencionadas señaladas en rojo

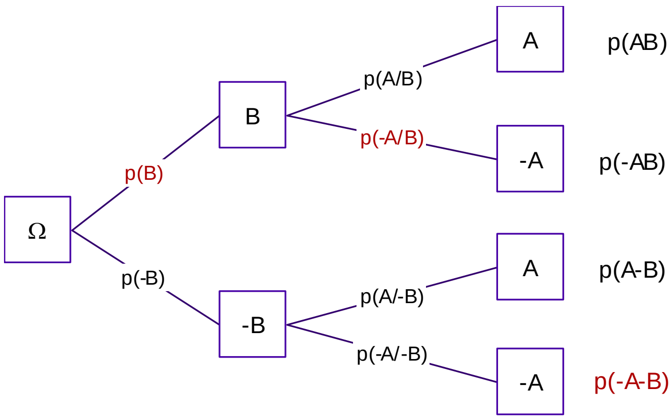


Figura 4.6: Árbol que da cuenta de un problema de N_2C_2, de resolución aritmética, con las cantidades mencionadas señaladas en rojo

En los dos casos, cualquiera que sea la pregunta el problema éste es de resolución aritmética. Observamos que las dos probabilidades que no deben estar situadas en la misma rama son la probabilidad de la intersección y la probabilidad condicional. De esta forma existirá problema y será de resolución aritmética.

Si los datos del problema están dispersos por los dos diagramas de árbol como muestra la figura 4.7 podemos encontrar todas las cantidades desconocidas apoyándonos en los dos árboles.

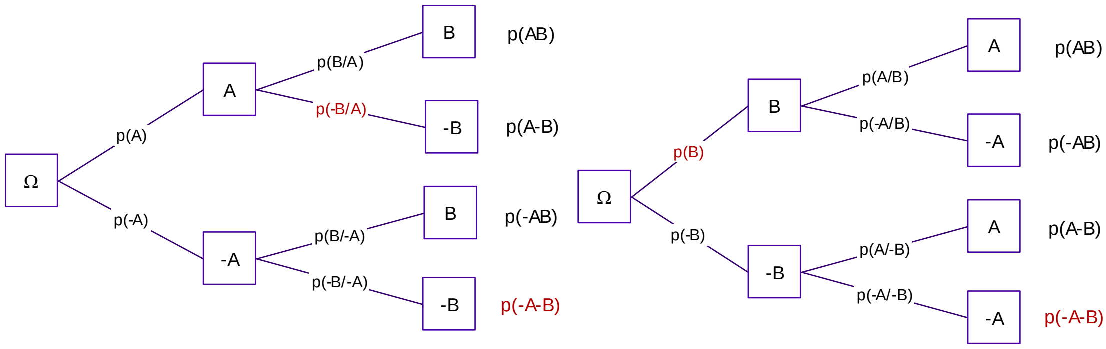


Figura 4.7: Diagramas de árbol que dan cuenta de un problema de N_2C_2, de resolución aritmética, con las cantidades mencionadas señaladas en rojo

$N_2C_3T_1$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (2, 0, 1), dos probabilidades marginales y una probabilidad condicional, y se pregunta por una probabilidad condicional.

$N_2C_3T_3$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (2, 0, 1), dos probabilidades marginales y una probabilidad condicional, y se pregunta por una probabilidad de la intersección.

La figura 4.8 da cuenta de esta situación. Los datos están ubicados en los dos árboles (las marginales son no complementarias), en uno de ellos hay una probabilidad marginal y en el otro se sitúan una probabilidad marginal y una probabilidad condicional.

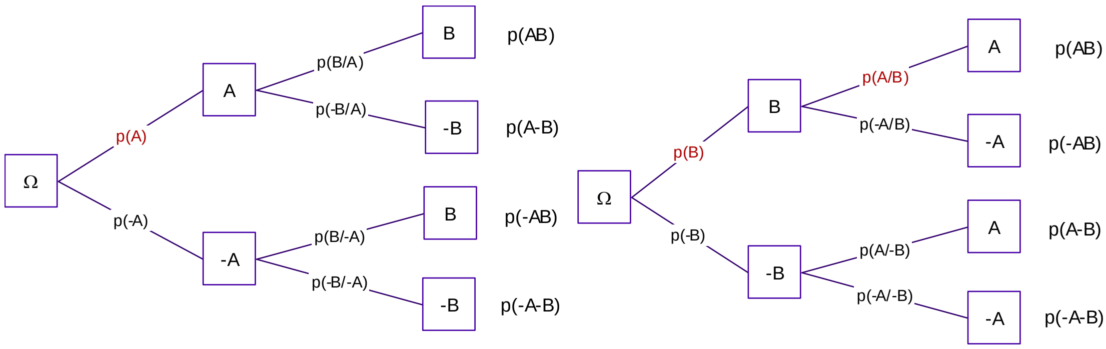


Figura 4.8: Diagramas de árbol que dan cuenta de un problema de N_2C_3, de resolución aritmética, con las cantidades mencionadas señaladas en rojo

Todos los problemas de esta familia son de resolución aritmética. La probabilidad condicional se sitúa en uno de los dos árboles. Podemos calcular cualquiera de las cantidades desconocidas haciendo uso de los dos árboles.

En este nivel no haremos uso de la tabla de contingencia, ya que sólo podremos situar dos cantidades en ella, las dos probabilidades marginales y por consiguiente tan sólo podremos calcular las complementarias a éstas y no las probabilidades de la intersección.

NIVEL 3

Este nivel está caracterizado por el vector (x, y, 2), con x+y=1. Los datos del problema son una probabilidad marginal (x) o una probabilidad de la intersección (y) y dos probabilidades condicionales.

$N_3C_1T_1$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (0, 1, 2) y se pregunta por una probabilidad condicional.

$N_3C_1T_2$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (0, 1, 2) y se pregunta por una probabilidad marginal

$N_3C_1T_3$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (0, 1, 2) y se pregunta por una probabilidad de la intersección.

Las figuras 4.9 y 4.10 dan cuenta de dos situaciones problemáticas de la familia N_3C_1.

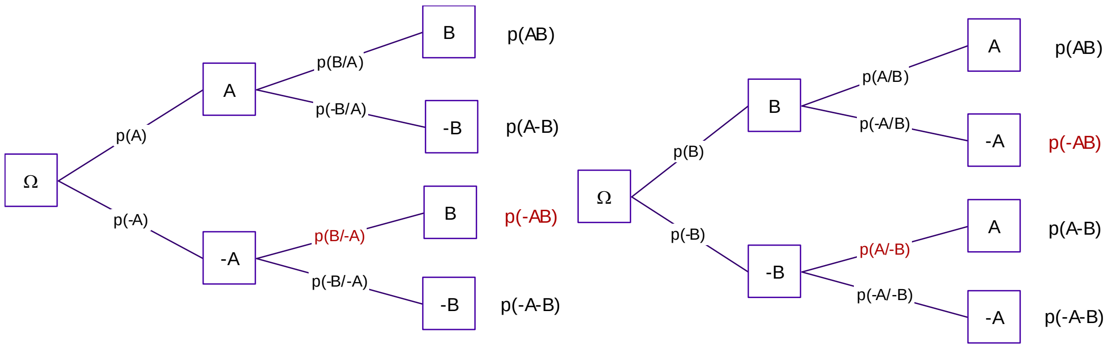


Figura 4.9: Diagramas de árbol que se corresponden con un problema N_3C_1, de resolución aritmética

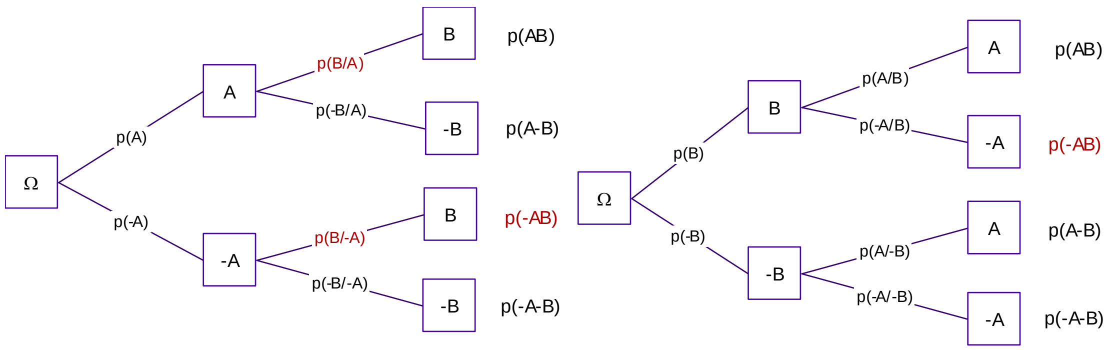


Figura 4.10: Diagramas de árbol que se corresponden con un problema N_3C_1, de resolución aritmética

En cualquiera de los dos casos podemos conocer todas las cantidades desconocidas. Estos problemas de N_3C_1 son de resolución aritmética.

La figura 4.11 presenta la situación de las cantidades conocidas de un problema de esta familia N_3C_1 de resolución algebraica. Si las probabilidades condicionales conocidas están situadas una en cada diagrama de árbol y la probabilidad de la intersección conocida está situada en una rama en la que no están situadas las dos cantidades anteriores, estamos frente a un problema de resolución algebraica. No podemos calcular ninguna cantidad desconocida (salvo las complementarias a las condicionales dadas).

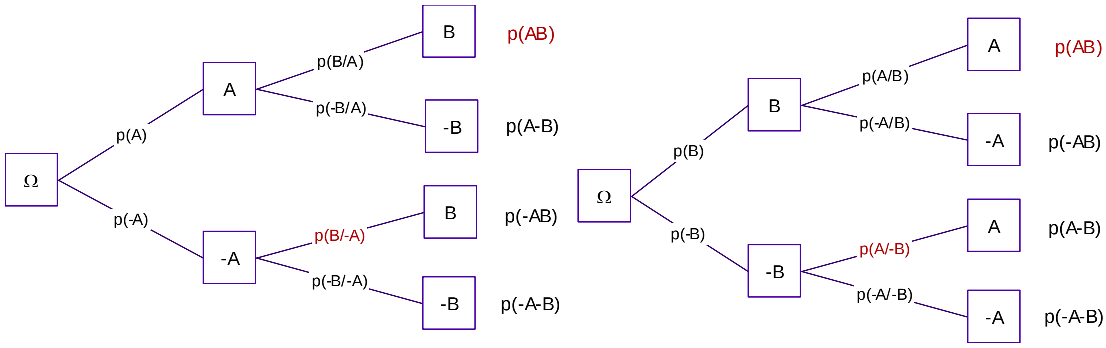


Figura 4.11: Diagramas de árbol que se corresponden con un problema N_3C_1, de resolución algebraica

$N_3C_2T_1$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (1, 0, 2), una probabilidad marginal y dos probabilidades condicionales, y se pregunta por una probabilidad condicional.

$N_3C_2T_2$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (1, 0, 2), una probabilidad marginal y dos probabilidades condicionales, y se pregunta por una probabilidad marginal.

$N_3C_2T_3$: Las cantidades conocidas en esta familia de problemas vienen representadas por el vector (1, 0, 2), una probabilidad marginal y dos probabilidades condicionales, y se pregunta por una probabilidad de la intersección.

Los problemas de este nivel, N_3, y categoría, C_2, necesitan de la representación de un diagrama de árbol o de los dos para su resolución. Las dos probabilidades condicionales conocidas pueden estar situadas en un diagrama de árbol cada una o las dos en el mismo diagrama de árbol, aunque siempre en ramas diferentes, es decir probabilidades condicionales no complementarias. La probabilidad marginal esta situada en uno de los dos diagramas de árbol. Tenemos un diagrama de árbol, al menos con dos cantidades conocidas. Por consiguiente, utilizando la regla del producto de los caminos podemos encontrar nuevas cantidades y resolver el problema utilizando los dos diagramas de árbol.

Las figuras 4.12 y 4.13 dan cuenta de dos situaciones problemáticas de N_3C_2. Las cantidades señaladas en rojo representan las cantidades mencionadas en el problema.

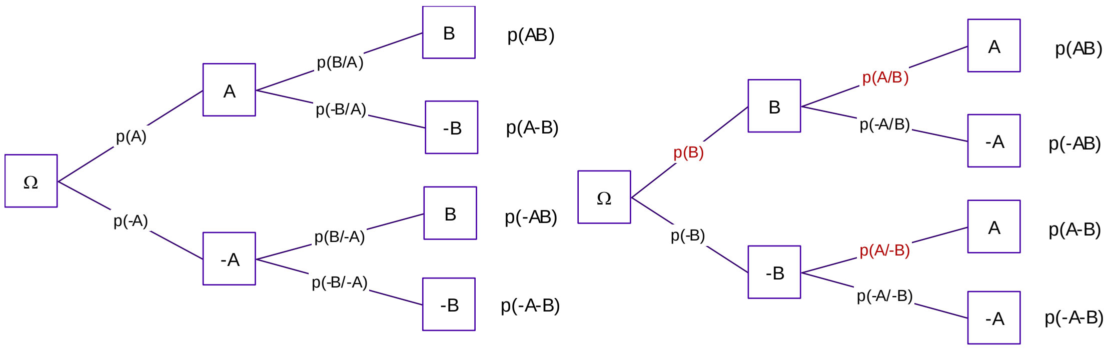


Figura 4.12. Diagramas de árbol que se corresponden con un problema N_3C_2, de resolución aritmética

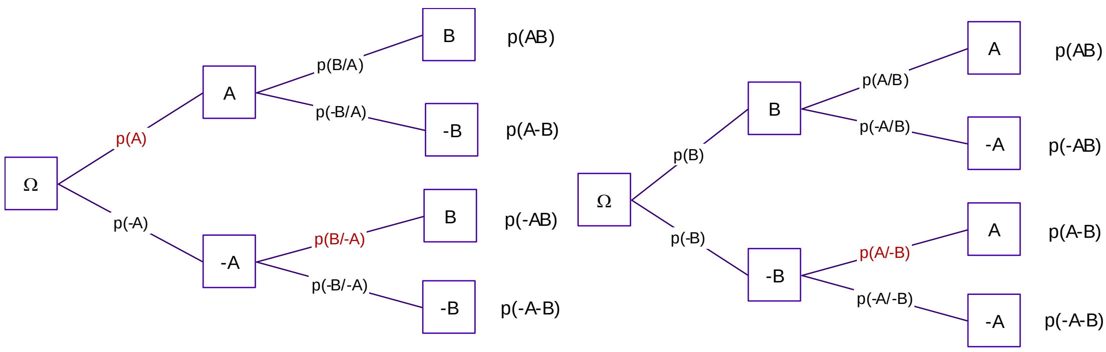


Figura 4.13: Diagramas de árbol que se corresponden con un problema N_3C_2, de resolución aritmética

En cualquiera de los dos casos podemos calcular todas las cantidades desconocidas.

La figura 4.14 da cuenta de una situación problemática de N_3C_2 de resolución algebraica. Cuando los datos que tienen que ver con la probabilidad condicional están situados en un árbol y la probabilidad marginal está situada en el otro árbol, sólo es posible calcular las probabilidades complementarias a las probabilidades conocidas.

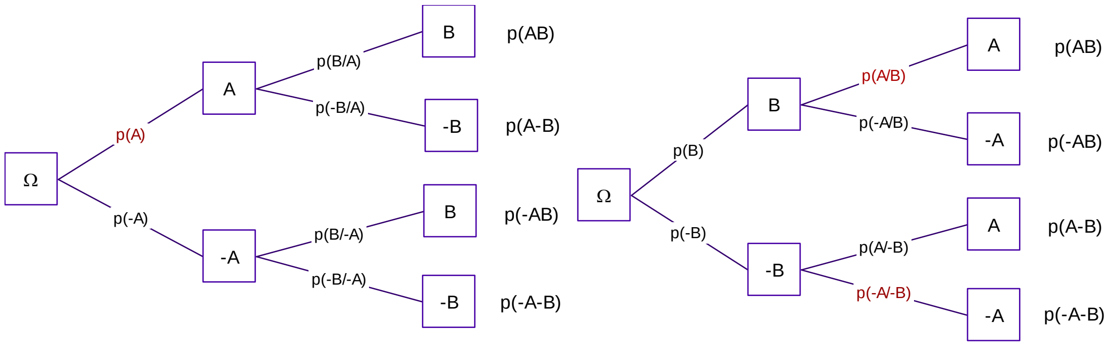


Figura 4.14: Diagramas de árbol que se corresponden con un problema N_3C_2, de resolución algebraica

En este nivel, no podemos utilizar, en principio, las tablas de contingencia pues sólo podemos situar una cantidad conocida en la tabla, o bien la intersección en el interior de la tabla si estamos en C_1, o la marginal en el margen si estamos en C_2. La figura 4.12 muestra una situación problemática en la que se puede utilizar la tabla de contingencia. Es un problema N_3C_2 en el que los tres datos están situados en el mismo diagrama de árbol. Una vez calculadas todas las cantidades de este árbol, haciendo uso de las reglas del producto de los caminos, utilizamos la tabla de contingencia para calcular las probabilidades marginales del segundo diagrama de árbol, situando todas las probabilidades de la intersección que hemos calculado con el diagrama de árbol. Con las nuevas probabilidades marginales calculadas y las probabilidades de la intersección, utilizando el segundo diagrama de árbol podemos calcular todas las probabilidades condicionales que pertenecen a este segundo diagrama de árbol.

NIVEL 4

Este nivel está caracterizado por el vector (0, 0, 3). Este nivel de problemas presenta como cantidades conocidas tres probabilidades condicionales. Estos problemas son problemas de resolución algebraica. En una tabla de contingencia no podríamos situar ninguna cantidad conocida y en los diagramas de árbol tendríamos la información situada en la parte central de los dos árboles, al ser las probabilidades condicionales de los datos no complementarias. Con esta situación no podemos utilizar las reglas del producto de los caminos para encontrar nuevas cantidades.

4.1.2. COMPONENTES QUE AFECTAN DIRECTAMENTE A LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

La revisión de la literatura nos muestra que existen determinados factores que influyen a la hora de resolver un problema, y en particular un problema ternario de probabilidad condicional. Uno de esos factores no es necesariamente el conocimiento de las relaciones entre probabilidades, sino, por ejemplo, el de la identificación correcta de los sucesos y de sus probabilidades. Previo a esto último, existen factores que influyen en los estudiantes a la hora de establecer una correcta correlación entre los datos y los sucesos. En este apartado nos ocupamos de estos factores que tienen que ver con el formato de presentación de los datos en los problemas de probabilidad condicional y con la estructura gramatical de las oraciones que presentan el dato y/o la pregunta condicional en estos problemas.

Por tanto, dividimos los componentes que afectan directamente a la resolución del problema en dos tipos:

La naturaleza de los datos presentes en el problema de probabilidad condicional.

La estructura gramatical que presenta el enunciado de un problema de probabilidad condicional.

Vamos a estudiar cada uno de estos dos componentes.

4.1.2.1. La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional

Explorando los problemas escolares de probabilidad condicional en los libros de texto, observamos que las cantidades presentes en la mayor parte de estos problemas, no están presentadas en términos de probabilidad sino que presentan naturaleza diversa.

En el capítulo 1 (pp. 97–101), ya hemos mostrado que diferentes investigadores indican que los problemas de probabilidad con enfoque frecuencial tienen mayor porcentaje de éxito frente a las probabilidades condicionales. En otros trabajos de investigación (Huerta y Lonjedo 2003; Lonjedo, 2003) confirmamos esto mismo y que, dependiendo de la presentación y la expresión de los datos en el texto de los problemas de probabilidad condicional, su resolución puede hacerse utilizando el razonamiento numérico. En muchos casos observamos como la resolución de dichos problemas implica al pensamiento aritmético y no al probabilístico, ya que los datos no son interpretados conscientemente como probabilidades y por tanto los estudiantes no necesitan utilizar las relaciones entre probabilidades para resolver el problema. Es sólo al final del proceso de resolución del problema cuando los estudiantes responden a la pregunta del problema en términos de probabilidad. Esta diferencia en la forma de abordar un problema por un estudiante cuando resuelve problemas de probabilidad condicional, utilizando el razonamiento numérico o el razonamiento probabilístico, hace que clasifiquemos así los problemas de probabilidad en problemas de asignación de probabilidades y problemas de cálculo de probabilidades, tal y como hemos mostrado en el capítulo 1. Así pues, al ser los problemas de probabilidad condicional problemas de probabilidad, esta clasificación también nos sirve.

Los problemas de probabilidad condicional con los datos no expresados en términos de probabilidad, situados en las lecciones de probabilidad de los libros de texto, inicialmente han sido pensados como problemas de cálculo de probabilidades, pero siempre que sea posible no efectuar una lectura en términos de probabilidad, son problemas de asignación de probabilidades.

Ahora bien, la tradición en la enseñanza de las probabilidades nos muestra lo contrario. Los profesores y los libros de texto no suelen partir de este hecho empírico para llegar al pensamiento probabilístico, sino que se suelen plantear problemas en los que se exige este pensamiento sin que la resolución lo exija.

Mostramos un ejemplo de un problema de probabilidad condicional (ejemplo 4.14) en donde los datos son frecuencias absolutas y tantos por cien, se pregunta por dos probabilidades, una marginal y una condicional.

EJEMPLO 4.14: (Cuadras C.M, (1983) p.55) Dos máquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:

Probabilidad de que sea defectuosa.

Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina

La figura 4.15 muestra la resolución que el libro presenta.

Solución

Indiquemos por: M_A = {la pieza procede de la máquina A}

M_B = {la pieza procede de la máquina B}

Entonces,

$$\Omega = \{300 \text{ piezas}\} = M_A + M_B$$

$$P(M_A) = \frac{1}{3} \qquad P(M_B) = \frac{2}{3}$$

1) Sea D = {la pieza es defectuosa}

$$P(D) = P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B) = (0.05)\cdot\frac{1}{3} + (0.06)\cdot\frac{2}{3} = $$
$$= 0.0567$$

2) Es la probabilidad de M_A, condicionada a la presencia de D

$$P(M_A/D) = \frac{P(D/M_A)\cdot P(M_A)}{P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B)} = \frac{(0.05)\cdot 1/3}{0.0567} = 0.2941$$

Figura 4.15: Resolución del libro de texto

El texto considera este problema como un problema de cálculo de probabilidades en concordancia con la ubicación del problema en la unidad de "Teorema de las probabilidades totales y teorema de Bayes". Sin embargo, algunos estudiantes (Lonjedo, 2003) resuelven problemas similares a éste, tanto en la estructura de los datos como en la naturaleza de los mismos, como mostramos a continuación, es decir, mediante métodos de asignación de probabilidades. Este problema que acabamos de presentar, clasificándolo como de asignación de probabilidades, lo resolveríamos de la siguiente forma:

Si tenemos 100 piezas de la máquina A y el 5% son defectuosas: tenemos 5 piezas defectuosas de las 100 de A.

Si tenemos 200 piezas de la máquina B y el 6% son defectuosas: tenemos 12 piezas defectuosas de las 200 de B.

En total, de 300 piezas de las dos máquinas, 5+12=17 son defectuosas.

Luego la probabilidad de ser defectuosa es: $\frac{17}{300} = 0.05\widehat{6}$

Para la segunda cuestión, tenemos 17 piezas defectuosas, de donde 5 vienen de la máquina primera, luego la probabilidad pedida es de: $\frac{5}{17}$ =0.2941

El análisis de una serie de libros de texto escolares nos permite clasificar los problemas atendiendo a la naturaleza de los datos en el texto del problema, considerada aquí como una de las variables de tarea de contenido[12]. Así, encontramos problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en términos de probabilidad, con los datos expresados en términos de frecuencias absolutas, con los datos expresados en términos de razón y con los datos expresados en combinación.

Datos presentados en términos de probabilidad. Si las cantidades se presentan en términos de probabilidad, nos cuantifican la probabilidad de que un suceso A se realice mediante p(A) $\in$ [0, 1]. El ejemplo 4.15 da cuenta de esta situación.

[12] *Las variables de contenido y de contexto dan cuenta, pues, del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo,* (Puig y Cerdán, 1988, p.33). Estos autores citan como variables de contenido las que *describen los elementos del problema.* (p. 34)

EJEMPLO 4.15: Ramirez, A. y otros, (1996)

Completa la següent taula de contingència:

A partir de la taula, confecciona un diagrama d'arbre i determina P(B/A), P(noB/A), P(B/noA) i P(noB/noA). , (página 240, problema 43)

	A	noA	Total
B	0.4	0.2	
noB	0.25		
Total			1

En este problema, $p(B|A)$ puede ser calculado por: $p(B|A)=\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, esto es, utilizando el razonamiento probabilístico – relaciones entre probabilidades.

Datos presentados en frecuencias absolutas. Cuando en un problema se presentan las cantidades en términos de frecuencia, éstas expresan la frecuencia con la que se produce una determinada característica. Matemáticamente es posible interpretar la frecuencia como el cardinal asociado a un conjunto que representa a los objetos que poseen dicha característica. Por tanto, los datos expresados en términos de frecuencia pueden usarse como un cardinal. En consecuencia, $p(A|B)$ puede ser obtenido comparando dos números cardinales y expresarla por ejemplo, por $p(A|B)=\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$, es decir, utilizando ahora un razonamiento aritmético.

Por otro lado, como $A|B$ no es un suceso, no podemos considerar un conjunto que lo represente. Por tanto, en los problemas de probabilidad condicional los datos que se refieren a la probabilidad condicional nunca podrán ser expresados en términos de frecuencias absolutas. Si, por el contrario, hiciésemos esto, entonces el único significado que podemos asociar a la frecuencia sería el del cardinal de un suceso intersección.

Cuando las cantidades de un problema de probabilidad condicional son frecuencias absolutas, el número mínimo de cantidades presentes en el problema es cuatro, ya que necesitamos conocer el cardinal de la muestra.

Veamos el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.16: Santos Serrano, Daniel (1988)

En un grupo de 500 individuos se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Los resultados fueron como sigue:

	Rendimiento académico	
	Alto	Bajo
Superior	200	80
Inferior	100	120

Considerando que A es "ser superior en inteligencia» y B es «tener rendimiento alto», averiguar:

a) Si A y B son independientes.

b) Si se selecciona al azar un alumno con rendimiento alto, ¿cuál es la probabilidad de que sea superior en inteligencia? (p.248, problema 9)

Este es un problema sobredimensionado, ya que tenemos cinco datos. Podemos extraer la información del número total de individuos de la tabla, y por tanto podemos decir que "500" es un dato redundante. Ahora bien, si eliminamos esta información del problema, necesitamos que la tabla esté completa, para poder calcular el total de individuos y poder hacer la lectura del problema en términos de probabilidad.

Datos presentados en términos de razón. Cuando las cantidades se expresan en términos de razón[13], indirectamente nos presentan los datos en términos de probabilidad, y es el resolutor quien decide transformar las razones a probabilidades o no. Veamos dos ejemplos, el 4.17 y el 4.18. En el primer

[13] *Una razón es una función de un par ordenado (antecedente y consecuente) de números o de valores de una magnitud* (Freudenthal, 1983). *Si queremos obtener el valor correspondiente a una razón, es decir, si la leemos como una fracción y le hacemos corresponder el valor que se obtiene al efectuar la división entre los componentes del par ordenado, la razón desaparece y se priva a ésta de lo que la hace valiosa como razón.. …. El significado de razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de comparar dos razones*. (Fernández Lajusticia, 2001, p. 33)

ejemplo los datos son dos razones normalizadas del tipo parte-todo expresadas en la forma uno de cada (*un sur*) y en el segundo los datos son tantos por cien.

> *En este caso se toma el 100 como referente, se normaliza el todo a 100 y la relación que se establece se representa –usualmente- mediante el esquema parte todo, diagrama de sectores, o mediante barras. En este caso la relación se establece entre un número y cien. (Fernández Lajusticia, 2001, p. 55)*

Veamos los ejemplos.

EJEMPLO 4.17: Engel (1975)

En Sikinie, un homme sur 12 et une femme sur 2888 sont daltoniens. Les fréquences des deux sexes sont égales. On choisit une personne au hasard et on découvre qu'elle est daltonienne. Quelle est la probabilité pour que ce sois un homme? (problema 9, p.270)

EJEMPLO 4.18: Grupo Cero (1982)

En el proceso de fabricación de circuitos impresos para radio transistores se obtiene, según demuestra la experiencia de cierto fabricante, un 5% de circuitos defectuosos. Un dispositivo para comprobar los defectuosos detecta el 90% de ellos, pero también califica como defectuosos al 2% de los correctos. ¿Cuál es la probabilidad de que sea correcto un circuito al que el dispositivo califica como defectuoso?¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso un circuito calificado de correcto? (problema 26, p. 170.)

Datos expresados en combinación. Existen problemas de probabilidad condicional en los libros de texto en los que los datos no están expresados en un único formato, como en los ejemplos que mostramos a continuación, sino que se combinan más de uno de ellos. Así, en estos problemas aparecen datos expresados en porcentajes y mediante signos formales propios de la probabilidad; en términos de probabilidad y razón; en razón y frecuencias. En el siguiente problema, ejemplo 4.19, los datos son porcentajes y probabilidades:

EJEMPLO 4.19: Santos, D. (1988)

En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 0.7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas? (p.248, problema 10)

Observamos en los ejemplos anteriores, como los datos en los problemas de probabilidad condicional no siempre se expresan de manera explícita en términos de probabilidades. Cuando esto ocurre, el resolutor tiene la capacidad de interpretarlos según que dichos datos tengan algún sentido para los sucesos a los que los asigna. En función de esto, despliega un proceso de resolución que puede implicar al pensamiento numérico o al probabilístico, dependiendo del sentido dado a los datos del problema.

4.1.2.2. Estructura semántica de los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal

El "problema" de comunicación, y por tanto de comprensión para su posterior uso en la resolución del problema, de la probabilidad condicional en los problemas ternarios de probabilidad condicional no es tanto o exclusivamente del receptor del mensaje (alumno/resolutor), que también, sino del emisor (libro de texto/profesor/investigador) del mensaje o del redactor del texto con el que se pretende comunicar una probabilidad condicional. El lenguaje académico-científico no puede estar sujeto a diferentes significados de los que se establecen formalmente. Si esto ocurre y el emisor comunica una probabilidad condicional de otra forma que $p(A|B)$[14], lo tiene que hacer de manera que el receptor del mensaje lo interprete sin otro significado que no sea el deseado por el emisor del mensaje. El receptor, por tanto, tiene que estar enseñado en los mensajes que dan lugar a una probabilidad condicional, textos que deben enriquecer de significados al texto formal menos ambiguo de todos: $p(A|B)$[15]. Cualquier otra forma de comunicación de la probabilidad condicional en mensajes no entrenados que refieran a ella, dará lugar a comprensiones equivocadas, que por ser personales puede que no coincidan con el deseado y por tanto el texto correspondiente no sea entendido como una probabilidad condicional.

El objeto de este apartado es mostrar la estructura semántica de los textos que presentan, en su enunciado, la condicionalidad en los problemas de probabilidad condicional más comunes en los libros de texto escolares, con el fin de centrar qué elementos en los enunciados de dichos problemas pueden dar lugar a la ambigüedad en la interpretación de la condicionalidad.

[14] En menor medida, $p_B(A)$.

[15] Aunque algunos estudios ponen de manifiesto que este signo se interpreta como la probabilidad de A partido por B.

LA PROBLEMÁTICA. INDICIOS

Tal y como mostramos en el capítulo 1 (pp. 90 – 97), diferentes investigadores, señalan la dificultad que tienen los estudiantes para distinguir entre probabilidad condicional y probabilidad de la intersección y la atribuyen, en parte, al lenguaje utilizado. Algunos de estos investigadores concretan alguna construcción gramatical que puede influir directamente en la interpretación de la probabilidad condicional como una probabilidad de la intersección. Éstos indican que algunas personas pueden tener dificultades con la sintaxis de la expresión de la probabilidad condicional ya que existen diferentes expresiones para ésta. Concretan que las expresiones que utilizan la conjunción AND pueden ser interpretadas como una probabilidad de la intersección o como una probabilidad condicional En un estudio más reciente (Lonjedo, 2003) se extiende esta dificultad que estos autores atribuyen al lenguaje. Así, en uno de los problemas que se utilizaron en la investigación citada con estudiantes no instruidos, la investigadora plantea la condicionalidad mediante el texto siguiente:

que leyendo A leen también B es 40% (1)

con el fin de que los estudiantes lo usen en el sentido de una probabilidad condicional, que traducido a texto formal debería ser:

$$p(B|A)=0'40 \quad (2)$$

Todos los estudiantes que participaron en este estudio menos uno, tradujeron el texto (1) en lugar del sentido deseado (2), en el sentido práctico de una probabilidad de la intersección, es decir, mediante el texto formal $p(A \cap B)=0'40$. Posiblemente el término TAMBIÉN contenido en el texto se asocia a la conjunción Y, y ésta sea la causa de la ambigüedad a la que ha dado lugar el enunciado del problema entre la investigadora y la mayoría de participantes en ella. En consecuencia, la estructura "que + gerundio" no induce a una reducción del espacio muestral formado por los casos que cumplen esta estructura. Por tanto, la interpretación deseada no se logró en la investigación. En otro problema de la misma investigación citada, por el contrario, ningún estudiante dio otro significado al texto que introduce la condicionalidad que no fuese el deseado por la investigadora. La forma de presentar esta condicionalidad en el texto del problema fue la siguiente:

conocemos que de los alumnos que no hacen baloncesto un 40% hacen fútbol (3)

Además, en la misma investigación, también se atribuye al lenguaje la confusión entre el suceso condicionante y el suceso al que condiciona su probabilidad. Así en uno de los problemas de la investigación que mencionamos, en relación con la pregunta del problema sobre sendas probabilidades condicionales, se puede leer:

Calcula la probabilidad de que:

a. Sabiendo que es chico, no use gafas.(4)

b. Sea chica sabiendo que usa gafas. (5)

El orden en la construcción del texto de cada una de las frases (4) y (5) está cambiado. En el texto (4) se pregunta por $p(\bar{B}|A)$ y en el texto (5) se pregunta por $p(\bar{A}|B)$. En la investigación se pone de manifiesto la confusión entre el suceso condicionante y el condicionado en la frase (5). Los estudiantes contestan a la frase (5) como si se les pidiera $p(B|\bar{A})$, probablemente por el peso del orden del texto en la frase (4).

En cualquiera de los casos citados, el texto está semánticamente bien construido y es el lector (receptor del mensaje) quien le da otro significado no deseado ni por el texto ni por quien elabora el texto y emite el mensaje.

Está claro que, si en un problema de probabilidad condicional o bien el dato o la pregunta que tiene que ver con la probabilidad condicional se expresan utilizando el sistema de signos matemáticos propios de la probabilidad, es decir, $p(A|B)$[16], no hay confusión siempre que el estudiante (receptor) esté enseñado tanto en esos signos como en su uso. Así el problema carecería de ambigüedad.

[16] A veces, pero menos usual en nuestro contexto educativo, se expresa también como $p_B(A)$. Este último, al menos, especifica que lo que se pide es la probabilidad de A bajo la condición dada por B. En $p(A|B)$ parece que se esté pidiendo la probabilidad de un supuesto suceso $A|B$: el valor de la condición y la condicionalidad pasan más desapercibidos.

En este sentido, algunos problemas como el que sigue son muy habituales en los libros de texto de la secundaria:

EJEMPLO 4.20 (Ramírez, Esteve y otros, (1996)

Completa la siguiente tabla de contingencia:

A partir de la tabla, confecciona un diagrama de árbol y determina P(B/A), P(noB/A), P(B/noA) i P(noB/noA). (página 240, problema 43).

	A	*noA*	*Total*
B	*0'4*	*0'2*	
noB	*0'25*		
Total			*1*

Nuestro objeto de análisis en este trabajo, no son estos problemas sino aquellos en los que la probabilidad condicional se presenta mediante un enunciado verbal.

Nos situamos en problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal, PPCEV[17], en donde no se utiliza el sistema de signos matemáticos propios de la probabilidad en su enunciado ni en sus preguntas, es decir, no se emiten textos formales para referirse a la probabilidad condicional. La probabilidad condicional se expresa entonces mediante textos escritos con una estructura determinada. Esta estructura será analizada semánticamente de manera que los significados asociados a dichos textos sean los deseados.

De la misma manera que hacen Puig y Cerdán (1988), lo que conviene es mirar al problema dejando por ahora al margen al resolutor, poniendo nuestra atención en "*aquellas características del problema mismo que pueden hacer variar la conducta del resolutor e influir de modo más o menos acusado en el logro de la solución*" *(p. 28)*.

Entre las características en las que se puede prestar atención en el análisis de los PPCEV se encuentran las que tienen que ver con su estructura gramatical/sintáctica/semántica en el análisis global del enunciado.

[17] PPCEV: En estos símbolos resumimos lo que Puig y Cerdán (1988) quieren decir con PAEV (p.42) pero en el contexto de los problemas escolares de probabilidad que se enuncian verbalmente.

En general, desde un punto de vista gramatical/sintáctico, los textos con los que se expresan probabilidades condicionales son oraciones subordinadas condicionales. La subordinación es la relación que se establece entre dos o más proposiciones en el seno de una oración compleja[18], porque una o varias de ellas, llamadas proposiciones subordinadas, dependen sintácticamente de otra proposición, la proposición principal. Existen diferentes clases de subordinación, pero la que nos interesa tener en cuenta en los PPCEV es la subordinación condicional. Las proposiciones que componen una oración subordinada condicional señalan una hipótesis, una condición de las que depende la acción expresada en el resto de la oración, es decir, se hace depender el cumplimiento de lo enunciado en la principal, de la realización de la subordinada.

Las oraciones de subordinación condicional están formadas por dos proposiciones. La proposición principal, que es la que expresa el efecto, la consecuencia, se llama APÓDOSIS, CONSECUENTE O CONDICIONADO. La subordinada, que lleva en sí la condición, se denomina PRÓTASIS, ANTECEDENTE O CONDICIONANTE. Esta proposición está inmediatamente precedida del conector[19] (Llácer y otros, 1991)

Analizamos una oración de un PPCEV:

Elegimos el ejemplo siguiente.

> EJEMPLO 4.21: Cuadras C.M. (1983). En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. **Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95**. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03. Hallar:
>
> a. La probabilidad de que habiendo funcionado la alarma, no haya habido peligro.
>
> b. Probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione.
>
> c. Probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma, haya un peligro. (problema 3. 11 página 62)

[18] Nos encontramos ante oraciones complejas cuando en la misma oración se encuentra, además del verbo principal, al menos otro verbo conjugado (con o sin complementos) o una forma no personal del verbo con complementos. Como ejemplo: Fue capaz **de subir a la cima**

[19] Llamamos conector, en el sentido gramatical, al elemento que pone en conexión diferentes partes de un texto. (Real Academia Española: Diccionario de la lengua española)

Elegimos la oración resaltada:

Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95 (6)

La frase (6) se trata de una oración compleja: tenemos dos verbos, el principal: *funcione* y el conjugado de forma personal *se produce*. Entonces la frase (6) es una oración subordinada condicional, pues la proposición subordinada, que llamamos prótasis, *Si éste se produce*, señala una condición de la que depende la acción expresada en la principal, que llamamos apódosis: *la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95.* Como vemos, a la prótasis le sigue el conector, *SI éste se produce*.

Los rasgos básicos de las oraciones subordinadas condicionales son los siguientes:

★ estructura binaria; como en la frase (6) analizado las dos proposiciones citadas.

★ asimetría de los dos miembros; también en la frase (6) vemos esta asimetría.

★ una relación de interdependencia entre los dos miembros; la probabilidad de que la alarma funcione es de 0.95, que es la acción expresada en la oración principal, depende de la condición expresada en la prótasis: *si éste se produce*. Si éste se produce, la alarma puede funcionar o no. Funciona con una probabilidad de 0.95 , es decir, la alarma funciona si hay peligro en el 95% de los casos.

A. López García (1994, citado en Llácer y otros (1991)) dice la única definición que parece convenir a las condicionales sin residuo (uno de los tipos de subordinadas condicionales) es la de que el condicionante expresa un sobreentendido del condicionado, y por eso se hace constar como algo hipotético.

Estudiando las oraciones condicionales encontramos en Llácer y otros (1991) que:

Las oraciones condicionales se emplean en el enunciado de problemas:

Si tenemos ……………… calcúlese …..

Causa supuesta *Consecuencia derivada del supuesto cumplimiento de la causa*

Reconocemos esta estructura en los textos de los problemas de probabilidad condicional que estamos analizando. Por ejemplo:

Si resulta ser figura, halla la probabilidad de que sea un 11 (7)

Hemos dicho que la prótasis es la proposición que está inmediatamente precedida del conector pero ¿qué conectores nos encontramos en las oraciones que refieren a la probabilidad condicional?.

El conector condicional por excelencia es el SI que posee un alto grado de gramaticalización.

M. L. Rivero (1977), interpreta el si introductor de las prótasis como un verbo creador de mundos posibles: "*imaginemos que*…", o "*suponemos X*"

Existen diferentes construcciones "parafraseables" por construcciones condicionales y cada una de estas construcciones tiene diferentes grados de gramaticalización. En los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal que presentan los libros de texto escolares, nos hemos encontrados las siguientes, siendo A el suceso condicionado y B el suceso condicionante:

- **De los que** están en B calcula la probabilidad de A, o de los que están en B la probabilidad de A es …, **De los de** B calcula la probabilidad de A o de los de B la probabilidad de A es …, según la probabilidad condicional sea una pregunta (calcula) o esté en los datos.

EJEMPLO 4.5: De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula las probabilidades de practicar baloncesto y de practicar fútbol.

EJEMPLO 4.22: (Grupo Erema, (2002)) (página 31, problema 2 de la autoevaluación)

El 60% de los estudiantes de un instituto son chicas, y el 75% de ellas aprueban todas las asignaturas. El 65% de los chicos también aprueban todas las asignaturas.

1. ¿Qué tanto por ciento de los alumnos del instituto aprueba todas las asignaturas?
2. **De los alumnos que** aprueban todas las asignaturas, ¿qué tanto por ciento son chicas?
3. **De los alumnos que** aprueban todas las asignaturas, ¿qué tanto por ciento son chicos?

Estudiando la preposición DE, encontramos que una de sus funciones es servir para marcar la ilación o la consecuencia: 'De lo dicho, hasta el momento' no hay nada (Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2003. © 1993-2002 Microsoft).

En el problema del ejemplo 4.5, el enunciado no refiere explícitamente a la probabilidad condicional. Nos ofrece la condicionalidad, ***de los alumnos que*** *no practican baloncesto un 40% hacen fútbol*, que puede ser o no interpretada como una probabilidad condicional. Este hecho influye en la resolución del problema de forma que, para el resolutor, el problema puede ser un problema de probabilidad condicional de cálculo o de asignación (Huerta, 2003).

En el ejemplo 4.22 se nos pregunta por el tanto por cien de un grupo concreto que ya ha situado dentro de otro grupo concreto: ***De los alumnos que*** *aprueban todas las asignaturas, ¿qué tanto por ciento son chicas?*. De la misma forma que en el ejemplo anterior, el hecho de no preguntar directamente por la probabilidad condicional, influye en la resolución del problema de forma que el problema puede ser un problema de probabilidad de cálculo o de asignación según el resolutor interprete los datos como probabilidades o no y lo resuelva aplicando las reglas de cálculo de la probabilidad o no.

- **Entre los que** están en B calcula la probabilidad de A, o **entre los de** B la probabilidad de A es…,

EJEMPLO 4.23: (Grupo Erema (2002) (página 30, problema 7)

En una población se ha determinado que la proporción fumadora **entre los que** mueren de cáncer de pulmón es del 94%. El tanto por ciento de fallecimientos por cáncer de pulmón es 1,27%, y el tanto por ciento de población fumadora es el 30%.

1. ¿Qué tanto por ciento de la población fumadora contrae cáncer de pulmón?
2. ¿Qué tanto por ciento de la población no fumadora lo contrae?
3. ¿Por cuánto se multiplica el riesgo de contraer cáncer de pulmón al adquirir el hábito de fumar?

Una de las funciones de la preposición ENTRE es enlazar los términos sujetos de una acción: 'Entre' tú y yo lo haremos. (Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2003. © 1993-2002 Microsoft)

La estructura "*de los de, de los que, entre los que, entre los de*" pone en relación a aquellos a los que se refiere el QUE o DE (descrito por B), con una nueva característica (descrita por A). El interpretante (resolutor) debe medir la característica descrita por A en B.

- **Si** B calcula la probabilidad de A o Si B la probabilidad de A es…

EJEMPLO 4.24: Vizmanos J.R., Anzola, M, (2001) (Problema 33, p.296)

El 40% de las declaraciones del impuesto sobre la renta son positivas. Un 10% de las que resultaron positivas lo fueron como consecuencia de errores aritméticos en la realización de la declaración.

Si hay un 5% de las declaraciones con errores aritméticos, ¿qué porcentaje de estas resultaron positivas?

Uso del gerundio: **Sabiendo B, habiendo** B calcula la probabilidad de A o **Sabiendo B, habiendo** B la probabilidad de A es …

EJEMPLO 4.21: (Cuadras C.M, (1983) p. 60)

En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0.95. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber habido peligro es 0.03. Hallar:

1. La probabilidad de que habiendo funcionado la alarma, no haya habido peligro.
2. Probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione.
3. Probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma, haya un peligro.

EJEMPLO 4.25: (Cuadras C.M, (1983) p.55)

Dos máquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:

1. Probabilidad de que sea defectuosa.
2. Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina

Las formas no personales del verbo, solas o unidas a otras partículas, adquieren con frecuencia significado condicional. (Llácer y otros (1991)) En nuestro caso el gerundio.

- **Uso del subjuntivo**:

EJEMPLO 4.26: Ramírez, A, y otros, (1996) pp 240-241, problema 41. Ante una epidemia de gripe se ha tratado a 80 enfermos con una nueva vacuna y a 60 enfermos con la vacuna vieja. Al cabo de 10 días, las curaciones están reflejadas en la siguiente tabla:

	Nueva	Vieja
Curados	65	38
No curados	15	22

Utiliza estos datos para calcular la probabilidad de que:

1. un enfermo curado haya sido tratado con la vacuna nueva
2. un enfermo no curado haya sido tratado con la vacuna vieja

El subjuntivo se emplea si la condición se ve más incierta: Si me ayudaras, saldría contigo; Si no trabajara mañana, iría a verte.

Las oraciones de relativo con verbo en subjuntivo equivalen, a veces, a una prótasis condicional (Llácer y otros, 1991). Mostramos el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.27: Engel, (1975) (Traducción del problema 16, p.276)

La mitad de los participantes a un congreso son americanos. Un americano sobre ocho y un no americano sobre ochenta beben jugo de tomate en el desayuno. ¿Cuál es la probabilidad de que un congresista que beba jugo de tomate en el desayuno sea americano?

- **Sabemos, Conocemos, Suponemos** que están en B. Calcula la probabilidad de A

EJEMPLO 4.28: En una universidad, la altura del 4% de los hombres y el 1% de las mujeres es mayor que 180 cm. Conocemos que el 60 % de los estudiantes son mujeres. Suponemos que la altura de un estudiante seleccionado de forma aleatoria es superior a 180 cm. Calcula la probabilidad de que el estudiante sea mujer.

En este caso no se trata de oraciones subordinadas condicionales. Nos define la condición utilizando una oración introducida por un verbo en indicativo y diferente de la oración condicionada.

Cualquiera de las construcciones que acabamos de analizar podemos transformarlas en condicionales introducidas por el SI, como ya hemos dicho anteriormente. El ejemplo 4.28 lo podemos transformar:

> En una universidad, la altura del 4% de los hombres y el 1% de las mujeres es mayor que 180 cm. Conocemos que el 60 % de los estudiantes son mujeres. **Si** seleccionado de forma aleatoria un estudiante de altura superior a 180 cm calcula la probabilidad de que el estudiante sea mujer.

Normalmente nos encontramos en las oraciones que estamos analizando la prótasis antes que la apódosis: Si el alumno ha suspendido química, ¿cual es la probabilidad de que el o ella tenga suspendidas las matemáticas?.

Pero también nos puede suceder lo contrario. Éste hecho se denomina "prótasis antepuesta" y tiene la función de especificar y restringir el significado de la principal: Calcula la probabilidad de que tenga suspendidas las matemáticas, habiendo aprobado el inglés.

En el texto de un problema de probabilidad condicional de los que estamos analizando, lo que se pretende es presentar el dato o la pregunta que tiene que ver con la probabilidad condicional. Es decir, definir la condición, que en nuestro caso es mostrar el espacio muestral reducido en donde tenemos o bien una probabilidad conocida o bien que calcular una probabilidad. El resolutor del problema puede dar un significado no deseado por el profesor/investigador/texto escolar a este texto, que aunque semánticamente está bien construido, es ambiguo (porque puede estar sujeto a interpretantes del texto).

Lonjedo (2003) muestra, en las entrevistas clínicas efectuadas a los estudiantes que presentaban interpretaciones diferentes a las de la investigadora, que si el texto de los problemas citados al principio ((1),(4) y (5)) (PP. 186, 187) se modificaba de la forma siguiente:

- que leyendo A leen también B es 40% (texto original)$\Rightarrow$ De los que leen A un 40% leen B (texto modificado)

Calcula la probabilidad de que:

a) Sabiendo que es chico, no use gafas.
b) Sea chica sabiendo que usa gafas.

Calcula la probabilidad de que:

a) Sabiendo que es chico, no use gafas.
b) Sabiendo que usa gafas sea chica.

en los dos casos citados, los estudiantes interpretaban de forma satisfactoria la condicionalidad.

Transcribimos una entrevista con un estudiante acerca del primer caso:

> **Estudiante:** *Entonces sería, el 50%...(anota su regla, figura 4.16), hay aquí una zona común, de A y B, que es el 40% de A. Esto representa el 45% del total de la población que es el 50%, y este 40% del 50% es a decir el 20%. Entonces 20 sobre 45 y es ese cociente.*

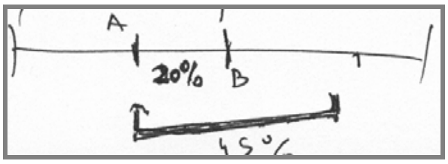


Figura 4.16: Regla utilizada por el resolutor entrevistado

La figura 4.17 muestra la parte del documento escrito de la entrevista de otro participante de la investigación:

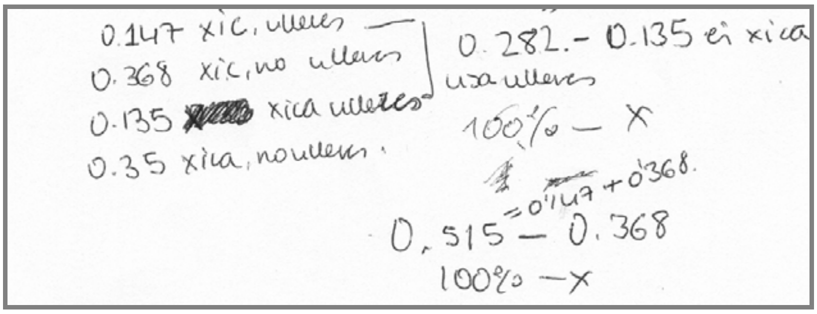


Figura 4.17: Documento escrito de un entrevistado

Traducimos: "xic ulleres" es, en castellano, chicos gafas, "xic no ulleres" es chico no gafas, "xica ulleres" es chica gafas y por último "xica no ulleres" es chica no gafas. El estudiante suma "las gafas" y de estos elige las chicas con gafas y resuelve con regla de tres para la segunda pregunta, y para la primera suma los chicos (0.147 + 0.368) y de estos elige los que no llevan gafas para plantear la regla de tres.

Entonces, ¿por qué hacerlo tan difícil? Utilícese el SI y enséñese en consecuencia. ¿Por qué no tenemos que conformarnos con enseñar todos los problemas con el SI delante? ¿Sería lo mismo que utilizar siempre $p(A|B)$? ¿Hace falta entrenar a los estudiantes con el fin de que interpreten el dato condicional y la pregunta condicional como tal? ¿Existen construcciones que inducen al resolutor a la interpretación deseada del dato/pregunta condicional?

Desde luego que construir todos los problemas de probabilidad condicional únicamente utilizando la construcción condicional por excelencia, SI, sería empobrecedor. Seguro que de las construcciones que acabamos de presentar en este apartado, existen algunas que inducen al resolutor a la interpretación deseada de la condicionalidad, siempre que la oración condicional esté bien construida, evitando la presencia de términos ambiguos. Respecto a las construcciones condicionales más difíciles de entender, podemos entrenar a los resolutores en la comprensión del texto. Esta conclusión se debe tener en cuenta en la organización de la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional.

4.2. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN LOS CURRÍCULOS OFICIALES ESPAÑOLES Y EN LOS LIBROS DE TEXTO

En este capítulo mostramos los resultados de un análisis de la probabilidad condicional, basado en las propuestas oficiales que se hacen desde los currículos oficiales de educación secundaria en la enseñanza española y los libros de texto.

4.2.1. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL

Con este apartado queremos observar cómo ha estado indicado oficialmente el proceso de enseñanza de los conceptos probabilísticos en la enseñanza secundaria desde el Ministerio de Educación, desde el siglo XX. La información que aquí analizamos se puede consultar en el anexo 1 "Los currículos de educación secundaria en España".

Hemos hecho una búsqueda de la propuesta de enseñanza de la probabilidad, en particular de la probabilidad condicional, en los currículos españoles desde la Gaceta de Madrid del 21 de octubre de 1934 hasta el Boletín Oficial del Estado del 10 de febrero de 2004. En general podemos decir que la enseñanza de la probabilidad y en particular de la probabilidad condicional no ha sido cuidada.

La primera vez que se propone el estudio del concepto de probabilidad es en quinto de bachiller (Boletín Oficial del Estado de 6 de febrero de 1954, nº 37 y Boletín Oficial del Estado de 7 de febrero de 1954, nº 38). En este currículo se propone enseñar el concepto de probabilidad (B.O. del E. Num 37, p. 710) y las orientaciones metodológicas de esta Orden de 21 de enero de 1954 indican que *este concepto es el clásico, es decir, el del cociente de números de casos favorables y el de números de casos llamados posibles. Debe procurarse que la terminología empleada no conduzca al clásico círculo vicioso que surge de la evidente relación entre los conceptos de posibilidad y probabilidad.* (B.O. del E. Num 38, p. 735).

Consultando el programa de Matemáticas en un libro de texto de la época, Textos E.P Matemáticas Quinto Curso (1957), encontramos que el programa consta de 41 lecciones. Las tres últimas, lecciones 39, 40 y 41, son las que tienen que ver con la probabilidad y la estadística. Parece, que la costumbre actual de los Departamentos de Matemáticas de dejar la enseñanza de la probabilidad y la estadística para lo último del curso y de los libros de texto de dejar las últimas unidades dedicadas a la probabilidad y la estadística, es una tradición de la que tenemos constancia, al menos desde mitad del siglo XX.

Volvemos a la lección 39 de probabilidad del libro citado. El título de la lección es *FRECUENCIA Y PROBABILIDAD*, y el índice es el siguiente:

> *Noción de frecuencia. – Noción de probabilidad. – Relación entre la probabilidad de que se realice un suceso y la de que no se realice. - Teorema de las probabilidades totales. – Ley empírica del azar. – Teorema de las probabilidades compuestas. – Esperanza matemática. – Ejercicios y problemas.*

El libro desarrolla la lección de probabilidad algo más de lo que indica el cuestionario del Ministerio de Educación. Además del "concepto" de probabilidad que define:

> *Llamamos probabilidad de un suceso a la relación por cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número total de casos posibles, siempre y cuando éstos sean igualmente posibles (p. 224)*

el texto desarrolla el "teorema" de las probabilidades totales:

> *La probabilidad de que ocurra uno de varios sucesos independientes unos de otros es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos (p. 227)*

y el "teorema" de las probabilidades compuestas:

> *Para hallar la probabilidad de que varios sucesos independientes unos de otros se realicen al mismo tiempo, se multiplican entre sí las probabilidades absolutas de cada uno de ellos (p. 227).*

Observamos que la primera inclusión del concepto de probabilidad en la enseñanza es pobre, en cuanto a que no desarrolla el concepto sino la ley de asignación de probabilidades a sucesos euqiprobables. Asimismo damos cuenta de la pobreza de los dos teoremas enunciados.

Queremos hacer notar el proceso de enseñanza de la probabilidad en el currículo que se corresponde con el bachillerato unificado polivalente (Boletín Oficial del Estado del 18 de abril de 1975, nº 93) y el curso de orientación universitaria (Boletín Oficial del Estado del 17 de marzo de 1978, nº 65). Observamos:

En curso 1º de bachillerato unificado polivalente:

> *Combinatoria. Probabilidad. Se pretende introducir la teoría combinatoria y noción de probabilidad para el caso del universo finito; Continuar el tratamiento estadístico iniciado en la educación general básica. En la combinatoria se estudiarán las variaciones y permutaciones ordinarias y con repetición y las combinaciones (B.O. del E nº 93, p.8064)*

En curso 3º de bachillerato unificado polivalente:

> *Variable aleatoria. Distribuciones binomial y normal…. En este curso se profundizan las nociones de Análisis y de Estadística. Con este fin se propone adquirir el concepto de variable aleatoria que permita la utilización de las funciones de distribución en su aplicación de las funciones de distribución en su aplicación a las ciencias biológicas, físicas y sociales. … Se definirá, mediante ejemplos sencillos, el concepto de función de distribución, valor medio y varianza de la misma. Se introducirá el concepto de variable aleatoria continua. Estos conceptos se aplicarán a las distribuciones binomial y normal, respectivamente, debiendo utilizarse las tablas correspondientes en la resolución de ejercicios de aplicación (B.O. del E nº 93, p.8065)*

En COU:

> *4. Ampliación del cálculo de probabilidades (cuatro semanas). El alumno deberá profundizar las nociones de probabilidad, estableciendo una*

axiomática de esta teoría, en conexión con el álgebra de sucesos, llegando a obtener la noción de espacio de probabilidad. Conviene llegar hasta el Teorema de Bayes, como primer ejemplo de inferencia estadística. Todo el tema deberá dar ocasión para proponer ejercicios, tanto de motivación como de aplicación de este modelo matemático, en relación con otras disciplinas y con la vida social. (p. 6450 B.O. del E nº 65)

En el currículo de BUP no aparece el concepto de probabilidad condicional, estudiándose en 1º de BUP el concepto de probabilidad y en 3º de BUP las variables aleatorias y las distribuciones bidimensional y normal, produciéndose un salto grande en el proceso de enseñanza de la probabilidad. En 1º de BUP no se especifican detalladamente ni conceptos ni procedimientos, ni se dan criterios concretos sobre la evaluación que indiquen los conocimientos específicos que se espera adquieran los estudiantes en este tema. Sin embargo, el contenido en 3º de BUP está más especificado. Se hace referencia a conceptos concretos, como los de variable aleatoria, función de distribución, media, varianza, … y también a procedimientos, como el manejo de tablas y la resolución de ejercicios de aplicación. Estos contenidos de 3º de BUP implican unos conocimientos previos, a saber: probabilidad, cálculo de probabilidades simples y compuestas, probabilidad condicional,…, que en los contenidos de 1º de BUP no están especificados. Nos preguntamos ¿es tradición enseñar únicamente el concepto de probabilidad? ¿qué hacemos con el salto que se produce en cuanto a conceptos probabilísticos de 1º de BUP a 3º de BUP? ¿ningún profesor ha sido consciente de este salto? Si consultamos los libros de texto de 1º de BUP que se corresponden con esta época todos siguen las indicaciones del currículo publicado en el BOE, menos uno, Grupo Cero, (1982), que introduce y trabaja el concepto de probabilidad condicional.

A las preguntas que nos hemos hecho en el párrafo anterior podemos contestar que el mundo educativo de ese momento, en general (pues hemos visto las propuestas del Grupo Cero en Probabilidad) no percibió este fallo en el proceso de enseñanza de la probabilidad en BUP. Las razones ya las hemos expuesto en este trabajo. Las unidades de probabilidad situadas al final de las programaciones didácticas eran generalmente las que nunca se trabajaban por ser los temarios tan extensos y no disponer de tiempo suficiente.

Ortiz de Haro (2002) indica que:

> *Creemos que es el análisis de estos prerrequisitos lo que sin duda ha marcado la concretización de los contenidos del primer curso en el tema de probabilidad. Por tanto, el contenido de este curso, aunque no explícitamente, ha estado marcado desde los documentos curriculares de una forma implícita por los contenidos asociados al tercer curso de bachillerato (p. 33).*

Sin embargo en COU parece que lo más importante del bloque 4, que hemos citado en la página 202, sea el Teorema de Bayes: *Conviene llegar hasta el Teorema de Bayes, como primer ejemplo de inferencia estadística*. Además, la mayoría de los problemas de probabilidad de esa época en las pruebas de acceso a la Universidad (en Comunidad Valenciana), son de probabilidad condicional.

Como anécdota, la autora de esta tesis, alumna de BUP y COU de esa época, da fe de no haber recibido enseñanza de la probabilidad en BUP. Y la enseñanza de la probabilidad que recibió en COU, fue una vez puestas las calificaciones y entregadas a la Universidad, en las semanas que quedan desde final de mayo hasta las pruebas de acceso, tres semanas más o menos. No estoy diciendo que la enseñanza recibida en COU fuera mala, sólo hago notar que al final de curso, y sabiendo que con tres de los cuatro bloques de que constaba la programación de Matemáticas de COU, se podía sacar una calificación de 10 en las pruebas de acceso, la mayoría de los estudiantes de COU no hacíamos caso de este bloque. Además, más adelante, también ha vivido la época como docente de BUP y COU y ha actuado de la misma forma en cuanto a la enseñanza de la probabilidad.

Más tarde, con la reforma de la asignatura de Matemáticas en COU, nace la asignatura Matemáticas II del Curso de Orientación Universitaria (Boletín Oficial del Estado del 29 de enero de 1988, resolución del 20 de enero de 1988 de las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica):

> *2. Contenidos y orientaciones pedagógicas:*
>
> *Elementos de probabilidad y estadística.*
>
> *Probabilidad:*
>
> *Azar y probabilidad. Leyes de la probabilidad. Asignación de probabilidades: Probabilidad "a priori" y "a posteriori". Experiencias compuestas. Probabilidad condicionada. Cálculo de probabilidades sencillas.....*
>
> *... El cálculo de frecuencias relativas y las observaciones referentes a su estabilidad deben ser el cauce para la noción de probabilidad. Es importante hacer resaltar la diferencia entre la probabilidad que se asigna, y que dependerá de los elementos de juicio que se posean "a priori", y la probabilidad "a posteriori" obtenida experimentalmente.*
>
> *La asignación de probabilidades debe realizarse mediante la experimentación o aplicando la regla de Laplace. El Profesor valorará la necesidad de repasar las técnicas de recuento, la combinatoria en particular, estudiadas en el primer curso (BOE nº 25, pp. 3122 y 3123).*

Parece que la enseñanza de la probabilidad empieza a hacerse necesaria. Pero ¿qué estudiantes eran los que cursaban Matemáticas II? Los estudiantes de esta asignatura eran los estudiantes que podrían tener matemáticas en sus carreras pero éstas eran "carreras de letras".

En cuanto a la enseñanza de la probabilidad en la secundaria obligatoria y en el bachiller, que se recoge en el Real Decreto 116/ 2004, de 23 de enero (BOE nº 35), por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y en el Real Decreto 117/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato (BOE nº 42), en secundaria obligatoria se estudia el concepto de probabilidad en 3º y en 4º de ESO y el concepto de probabilidad condicional se estudia en 1º de bachiller en Matemáticas I y en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, y en 2º de bachiller sólo en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Pensamos que se ha avanzado, al menos en el currículo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. Pero no podemos olvidar que sigue estando en las últimas unidades de las programaciones didácticas y que parece que es un concepto mucho más importante para el currículo de los estudiantes de Humanidades y Ciencias Sociales que para los estudiantes de Ciencias.

4.2.2. LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL EN LOS LIBROS DE TEXTO. ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO.

> *Los libros de texto guían y estructuran el proceso de enseñanza-aprendizaje al sugerir actividades, resaltando informaciones y guiando el proceso de desarrollo de una unidad. (Ortiz de Haro, 2002, p. 16)*

Utilizamos la clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional en Niveles, Categorías y Tipos (presentada en la página 161 de este capítulo) para analizar y clasificar los problemas de probabilidad condicional que aparecen en los libros de texto escolares. La intención de este apartado es la de mostrar la tipología de problemas presente y ausente en algunos libros de texto. Hemos estudiado textos desde 1975 hasta el 2002, con la única intención de explorar por una parte, cuál ha sido la presencia o ausencia de los problemas de probabilidad condicional y por otra, qué tipología de problemas está presente o ausente.

Presentamos tres tablas atendiendo a los diferentes currículos. En la tabla 4.7 mostramos la tipología presente en algunos libros de niveles superiores a la enseñanza secundaria. En la tabla 4.8 presentamos la exploración de los libros de texto escolares de currículos antiguos, desde 1975, que se corresponden con los cursos de BUP y COU. En la tabla 4.9 mostramos la tipología presente en los libros de texto escolares que tienen que ver con la ESO y el Bachiller.

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL	AÑO	N_1	N_2	N_3	N_4
Exposición intuitiva y problemas resueltos de métodos estadísticos. Fundamentos y aplicaciones.	Viedma	Ediciones del Castillo	1972			1(N_3, C_2, T_1)	
L'enseignement des probabilités et de la statistique, vol.1	Engel	France; CEDIC	1975	1 (N_1, C_2, T_1)		2 (N_3, C_2, T_1)	
Curso y ejercicios de estadística	Quesada, Isidoro, López	Alambra	1982	1 (N_1, C_1, T_1)		4(N_3, C_2, T_1) 1(N_3, C_2, T_2)	
Problemas de Probabilidades y Estadística, Vol 1: Probabilidades	Cuadras	PPU. Promociones Publicaciones Universitarias	1983			3(N_3, C_2, T_2)	

Tabla 4.7: Tipología presente en algunos libros de texto de Nivel Superior

CURSO	AUTOR	EDITORIAL	AÑO	N_1	N_2	N_3	N_4
Funciones1º BUP	Agustí, Vila	Vicens Vives	1975				
Matemáticas 1 BUP	López, otros	SM	1975				
Matemáticas 1º BUP	Lazcano, Barolo	Edelvives	1981				
Matemáticas de Bachillerato, curso 1	Grupo Cero	Teide	1982	3(N_1, C_1, T_1) 3(N_1, C_2, T_1) 3(N_1, C_3, T_1)		2(N_3, C_2, T_1)	
Matemáticas 1 BUP	Compostela, González, ...	AKAL	1987				
Matemáticas 1 BUP, 600 ejercicios con solución	Tomeo, García	Alambra Longman	1990	2(N_1, C_3, T_1)			
Matemáticas 1 BUP	Ramírez, Esteve, ...	ECIR	1991	1(N_1, C_2, T_1)			
Funciones 1. Matemáticas 1 BUP	Vizmanos, Anzola, Primo	SM	1991				
Como superar las matemáticas de 3º de BUP	Taniguchi	Edunsa	1988				
Matemáticas 3 BUP	Ramírez, Esteve, ...	ECIR	1993				
Matemáticas 3º de Bachillerato	Colera, Guzmán	Anaya	1995				
Matemáticas comunes COU	Valdés, Santos	Bruño	1975				
Matemáticas COU	García García, López Pellicer	Marfil	1979			1(N_3, C_2, T_1)	
Matemáticas COU, G2	Negro, Poncela	Alhambra	1990			1(N_3, C_2, T_1)	
Curso práctico de Matemáticas COU	González, Villanova	Eunibar	1985	1(N_1, C_3, T_1)	1(N_2, C_3, T_1)	2(N_3, C_2, T_1) 2(N_3, C_2, T_3)	
Matemáticas para COU	Pérez Carreras, Pérez Machado	MCGraw-Hill	1988			1(N_3, C_2, T_2)	
Matemáticas COU, Opciones C y D	Santos	Santillana	1988	2(N_1, C_1, T_1)	1(N_2, C_3, T_1)	2(N_3, C_2, T_1) 2(N_3, C_2, T_2)	
Matemáticas II COU. Opciones C y D	Ramírez, Esteve,...	ECIR	1988				
Matemáticas II COU. Opciones C y D	González A., González J.	AKAL	1989				
Matemáticas I COU opciones A y B	Ramírez, Esteve, …	ECIR	1989			1(N_3, C_2, T_1) 1(N_3, C_2, T_2)	
Selectividad Matemáticas II Pruebas 1990	Guzmán, Colera	Anaya	1991	1(N_1, C_3, T_1)		1(N_3, C_2, T_3)	

Tabla 4.8: Tipología presente en algunos libros de texto de currículos antiguos (BUP y COU)

CURSO / TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL	AÑO	N_1	N_2	N_3	N_4
4ºESO, opción B	Vizmanos, Anzola	SM	1994	2 (N_1, C_1, T_1)		1 (N_3, C_2, T_2)	
4ºESO, opción A	Vizmanos, Anzola	SM	1995	2 (N_1, C_1, T_1)		1 (N_3, C_2, T_2)	
4ºESO, opción B	Ramírez, Palomero, Esteve, Montesinos	ECIR	1996	2 (N_1, C_1, T_1)			
4ºESO, opción B	Colera, García, Oliveira	Anaya	1998	1 (N_1, C_1, T_1) 1 (N_1, C_2, T_1)			
4ºESO, opción B, Algoritmo	Vizmanos, Anzola	SM	2003			5 (N_3, C_2, T_2) 4 (N_3, C_2, T_3)	
4ºESO, opción B, Gauss	Vizmanos, Anzola	SM	2003	2 (N_1, C_1, T_1)		1 (N_3, C_2, T_2)	
1º Bachiller, Matemáticas I	Colera, García, Oliveira	Anaya	2002	4 (N_1, C_3, T_1)		3 (N_3, C_2, T_1)	
1º Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I	Colera, García, Oliveira	Anaya	2002				
2º Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, ALGORITMO 2001	Vizmanos, Anzola	SM	2001	2 (N_1, C_3, T_1)	1 (N_2, C_3, T_1)	1 (N_3, C_2, T_1) 2 (N_3, C_2, T_2) 2 (N_3, C_2, T_2)	
2º Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	Ramírez, Esteve, Montesinos, Deusa, Veres	ECIR	2001	3 (N_1, C_3, T_1)		2 (N_3, C_2, T_1)	
2º Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	Colera, García, Oliveira	Anaya	2002	4 (N_1, C_3, T_1)		3 (N_3, C_2, T_1)	
Bachillerato, Cuaderno 4, Estadística y Probabilidad	Grupo Erema: Martín, Rey, Reyes	Bruño	2002		2 (N_2, C_3, T_1) 1 (N_2, C_3, T_3)	2 (N_3, C_2, T_1) 3 (N_3, C_2, T_2)	

Tabla 4.9: Tipología presente en algunos libros de texto de currículos actuales (ESO y Bachiller)

No conocemos los criterios de selección de la colección de problemas que muestran los libros de texto. Estamos seguros que, uno de estos criterios se basa en la tradición. Existen problemas en los libros de texto que están basados en otros problemas de libros de texto más antiguos. Recordamos los ejemplos 4.10 y 4.11 de la página 159 de este capítulo:

EJEMPLO 4.10: Engel, (1975)

La moitié des participants à un congrès sont américains. Un américain sur huit et un non américain sur quatre-vingt boivent du jus de tomate au petit déjeuner. Quelle est la probabilité pour qu'un congressiste qui boit dus jus de tomate au petit déjeuner soit américain? (problema 16, p.276)

EJEMPLO 4.11: Vizmanos J.R., Anzola, M. (2001)

Una cuarta parte de las participaciones en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera es un tercio. Si se elige una congresista al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que desayune té?

b) Cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té? (Problema 32, p.296)

El ejemplo 4.10 ha servido de base a los autores del ejemplo 4.11.

En general, una misma editorial utiliza los mismos problemas en diferentes cursos (a veces incrementando la dificultad) así como, en diferentes ediciones. En particular, estudiando la tipología de problemas ternarios de probabilidad condicional, las editoriales más utilizadas en la actualidad en la Comunidad Valenciana, Anaya, Ecir y SM, conservan, en general, la misma tipología de problemas. Sólo una editorial, SM, en Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, ALGORITMO 2001 (2002) muestra un problema de nivel 2, nivel que no había mostrado en los libros de esta editorial explorados.

Observamos como no todos los tipos de problemas que podemos considerar han estado ni están presentes en los libros de texto escolares. Las razones de estas ausencias no las podemos saber, aunque probablemente estén relacionadas con el tipo de solución que requieran: algebraica o aritmética (Yáñez, 2000; Huerta y Lonjedo, 2003) Sabemos que los problemas de nivel 4 de nuestra clasificación, que se corresponden con el tipo 9 de la clasificación de Yañez (2000) son siempre problemas de solución algebraica. Posiblemente sea ésta la razón de la ausencia de problemas de éste nivel en los libros de texto explorados. Pero, ¿y los problemas de nivel 2?

El hecho de la ausencia de estos tipos de problemas resta efectividad a la enseñanza de la probabilidad escolar, pues priva a los estudiantes de usarla en contextos y situaciones problemáticas variadas, mostrándose el uso de ésta en situaciones repetidas en donde la estructura del problema no varía y sólo se varía el contexto y la presentación de los datos, ya sea organizada o no.

4.3 RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE DATOS DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE NIVEL 2 CON RESOLUCIÓN ARITMÉTICA

La intención de este apartado es la de organizar los problemas ternarios de probabilidad condicional de resolución aritmética de N_2 (clasificación de las páginas 153-157).

Pero, ¿por qué organizar los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2?. Es interesante la organización de todos los problemas ternarios de probabilidad condicional de resolución aritmética, de todos los niveles de la clasificación. En esta investigación empezamos este trabajo con N_2. Hemos mostrado en el apartado anterior la poca presencia, casi nula, de esta tipología de problemas en los libros de texto escolares. Las razones de esta poca presencia no las podemos saber, aunque ya hemos dicho que pensamos que estén relacionadas con que existen problemas N_2 indeterminados, y con el número de relaciones aditivas y multiplicativas entre los datos y la pregunta del problema necesarias para la resolución del problema. Entonces los estudiantes ¿resuelven problemas de probabilidad condicional de N_2?.

Para el análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional estudiaremos la estructura de los datos de cada familia de problemas de probabilidad condicional y para la lectura analítica de los problemas utilizaremos los grafos trinomiales. Concretamente utilizaremos el grafo canónico asociado al problema.

Entendemos por **familia**, $N_mC_iT_j$ ($1 \leq m \leq 4$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$), el conjunto de problemas que pertenecen a $N_mC_iT_j$. Por ejemplo, $N_2C_1T_1$ es la familia formada por todos los problemas en los que sus datos son una condicional, una marginal y una intersección y la pregunta del problema es una condicional.

Definimos **Grafo Canónico** de un problema p, $\mathcal{G}p(r_a, r_m)$, el grafo que se deriva de una lectura analítica de un problema en términos de probabilidad, relacionando los datos y la pregunta mediante el menor número de relaciones aditivas, r_a, y multiplicativas, r_m.

Diremos que dos grafos canónicos de un problema p son **similares** si tienen el mismo número de aristas rectas y de aristas curvas. Es decir, dados $\mathcal{G}p(r_a, r_m)$ y $\mathcal{G}'p(r'_a, r'_m)$, éstos son similares si $r_a = r'_a$, $r_m = r'_m$.

Dado un PPC encontramos un grafo asociado que se deriva de la lectura analítica del problema en términos de probabilidad, y una vez encontrado, vamos eliminando aristas superfluas con el fin de llegar al grafo canónico.

Veamos el problema del ejemplo 1.7 (p. 29) en donde traducimos las cantidades mencionadas en el problema a términos de probabilidad.

> En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0.3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumno de los que no practica baloncesto, que éste practique fútbol es 0.4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

Si llamamos B al suceso "los alumnos que practican baloncesto" y F al suceso "los alumnos que practican fútbol", las cantidades mencionadas en este problema son: $p(B \cap F)=0.3$; $p(B \cap \overline{F})=0.3$, $p(F|\overline{B})=0.4$. La pregunta del problema es $p(F)$.

Si en el GPPC del problema citado señalamos todas las aristas que tienen que ver con los datos del problema así como con la pregunta del problema, y eliminamos el resto de aristas y de vértices, obtenemos un grafo, como el de la figura 4.18 que puede ser el inicial del problema.

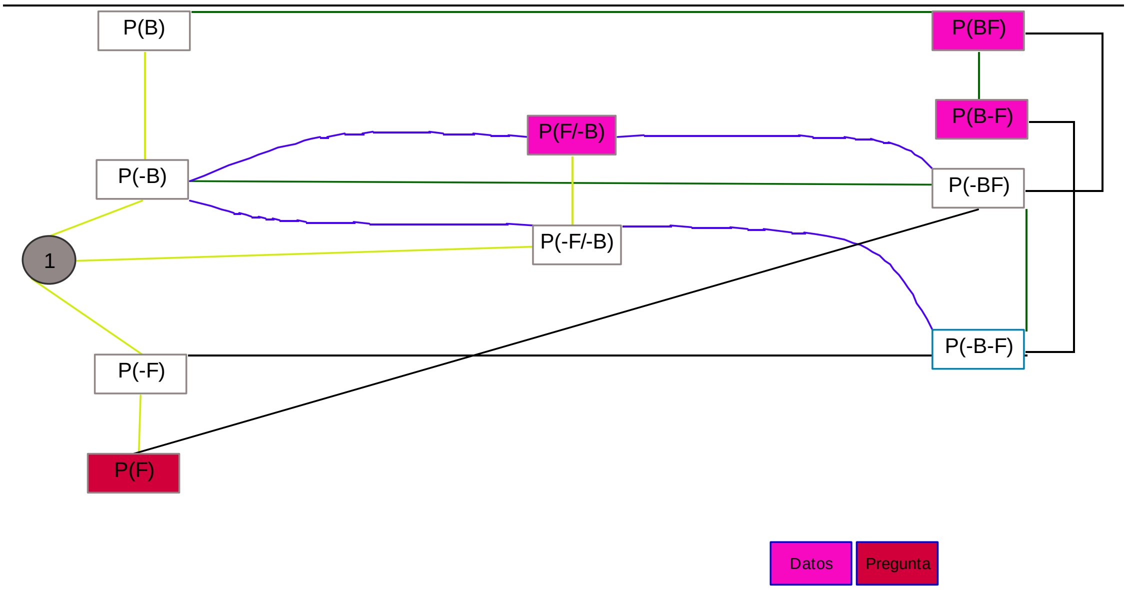


Figura 4.18: Grafo inicial del problema

En rosa hemos señalado los vértices oscuros que representan los datos del problema y en rojo el vértice que queremos llegar a oscurecer al representar la pregunta del problema. Este grafo presenta 7 relaciones aditivas y 2 multiplicativas. Para movernos por el grafo elegimos la entrada, que recordamos que es una arista con un vértice claro y dos vértices oscuros. En nuestro caso tenemos dos entradas, una de las aristas verdes y una de las aristas amarillas. Si elegimos la entrada representada por la arista amarilla, oscurecemos el vértice p(-F| -B) y éste hecho no provoca la creación de una nueva arista entrada. Elegimos la arista entrada verde en la que conocemos dos probabilidades de la intersección. Oscurecemos el vértice p(B) y a la vez nos permite seguir moviéndonos por el grafo oscureciendo p(-B). Podemos seguir el movimiento en el grafo por la siguiente entrada, situada en arista azul, que oscurece el nodo p(-BF) y llegamos a la última entrada que oscurece el vértice que se corresponde con la pregunta del problema. Eliminamos las aristas superfluas, que son aquellas que no hemos utilizado para movernos por el grafo. Nos quedamos con el número justo de aristas, tres aristas rectas que representan las tres relaciones aditivas que hemos utilizado en la resolución del problema, y una arista curva que representa la relación multiplicativa.

La figura 4.19 muestra el grafo canónico del problema.

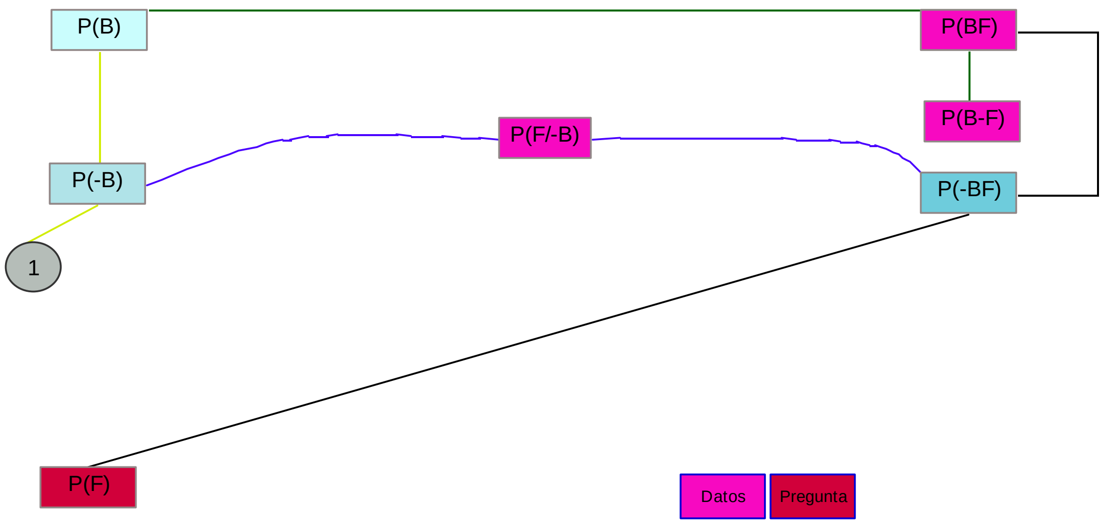


Figura 4.19: Grafo canónico del problema

En este grafo, el orden de oscurecimiento de cada uno de los nodos viene dado por el tono de azul que representan los vértices oscurecidos. Primero oscurecemos p(B), arista verde oscura que hemos utilizado de entrada. Después seguimos con la arista amarilla, oscureciendo el vértice p(-B). Continuamos con la siguiente entrada, situada en la arista curva azul, de forma que oscurecemos el vértice que se corresponde con una intersección: p(-BF). Por último, en la arista recta negra oscurecemos el vértice que responde a la pregunta del problema: p(F).

Este problema tiene asociado un grafo canónico con tres relaciones aditivas, r_a=3, y una relación multiplicativa, r_m=1.

Veamos un ejemplo ahora de grafos canónicos similares. En la figura siguiente mostramos sobre el GPPC los datos y la pregunta de un problema:

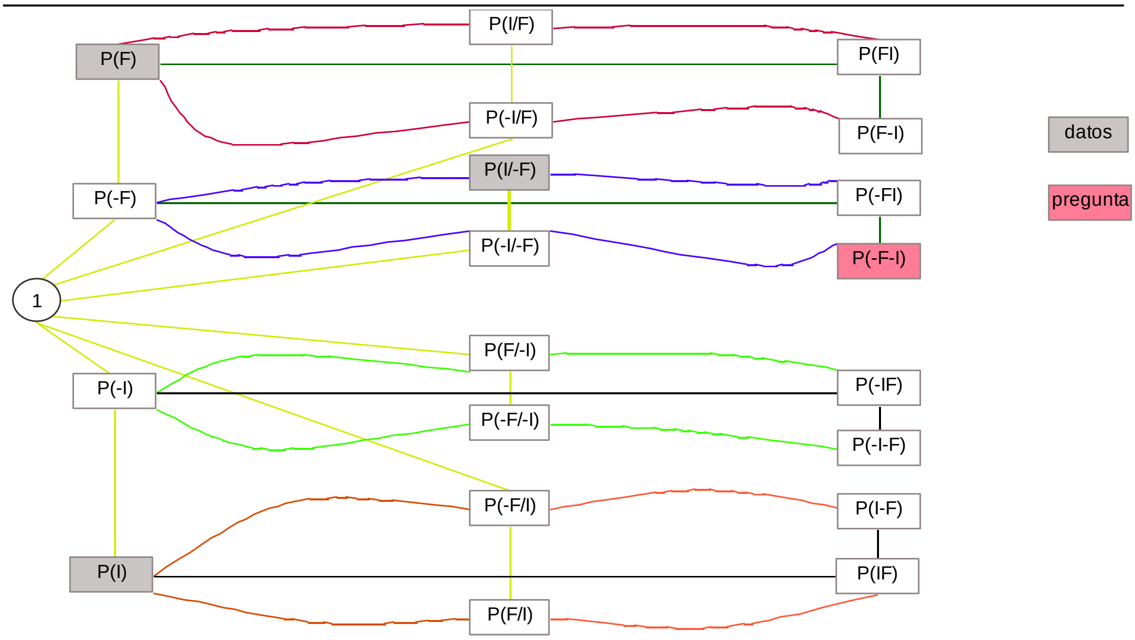


Figura 4.20: Un problema en GPPC

La figura 4.21 muestra dos grafos canónicos similares al problema anterior. El número de relaciones aditivas y multiplicativas en cada uno de los grafos es el mismo: dos relaciones aditivas y una multiplicativa.

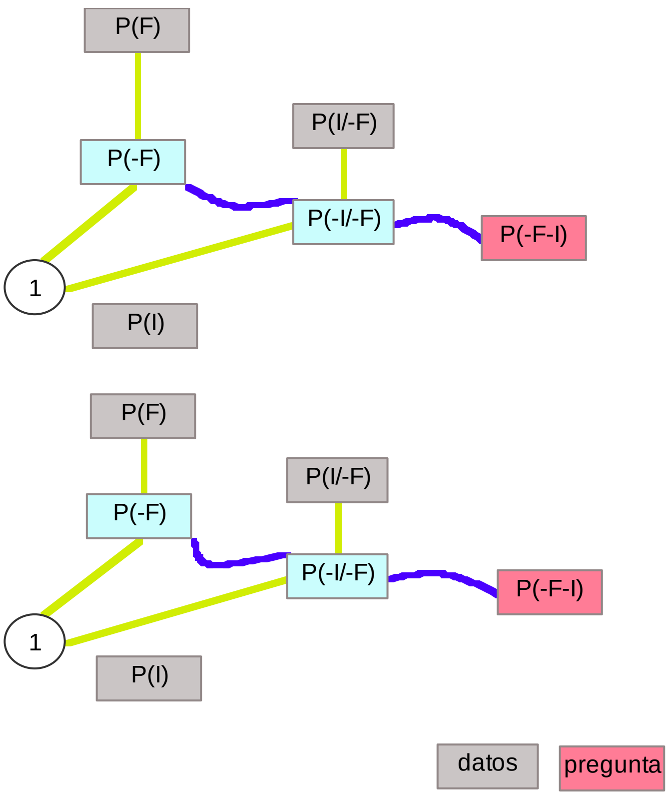


Figura 4. 21: Grafos canónicos similares

Definimos ahora la relación de equivalencia generada por los grafos canónicos.

Para cada h, i, j, tenemos una familia $N_hC_iT_j$ ($1 \leq h \leq 3$; $1 \leq i \leq 3$; $1 \leq j \leq 3$), en donde definimos la siguiente relación $\Re$:

Sean p_1, $p_2 \in N_hC_iT_j$, decimos que $p_1 \Re p_2$ si, y solo si, sus grafos canónicos presentan el mismo número de relaciones aditivas y multiplicativas. Es decir si el grafo canónico de p_1 viene dado por $\mathcal{G}p_1(r_{a1}, r_{m1})$, y el grafo canónico de p_2 viene dado por $\mathcal{G}p_2(r_{a2}, r_{m2})$, entonces $r_{a1} = r_{a2}$ y $r_{m1} = r_{m2}$.

Demostramos que $\Re$ es una relación binaria de equivalencia:

<u>$\Re$ es reflexiva</u>: $p \Re p$ pues un problema puede tener más de un grafo canónico pero éstos son similares por la definición de grafo canónico, ya que si existiera un grafo con un número menor de aristas entonces este grafo sería el canónico.

<u>$\Re$ es simétrica</u>: $p \Re p'$ entonces $p' \Re p$. Obviamente el número de relaciones aditivas y multiplicativas del grafo canónico de p′ es igual al número de relaciones aditivas y multiplicativas del grafo canónico de p

<u>$\Re$ es transitiva</u>: $\left.\begin{matrix} p \Re p' \\ p' \Re p'' \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \Re p''$. Queremos ver que el número de relaciones aditivas y multiplicativas del grafo canónico de p coincide con las del grafo canónico de p″. Sabemos que el número de relaciones aditivas y multiplicativas del grafo canónico de p coincide con las del grafo canónico de p′, y el número de relaciones aditivas y multiplicativas del grafo canónico de p′ coincide con las del grafo canónico de p″.

$$\left.\begin{matrix} r_{pa} = r_{p'a} & r_{pm} = r_{p'm} \\ r_{p'a} = r_{p''a} & r_{p'm} = r_{p''m} \end{matrix}\right\} \rightarrow r_{pa} = r_{p''a} \quad \left. r_{pm} = r_{p''m} \right\} \rightarrow p \Re p''$$

Por lo que el número de relaciones aditivas y multiplicativas del grafo canónico de p coincide con las del grafo canónico de p″.

Entonces cada familia de problemas $N_hC_iT_j$ quedará dividida en clases de equivalencia que estarán determinadas por el número de relaciones aditivas y multiplicativas de los grafos canónicos de los problemas que pertenezcan a esa familia.

El conjunto cociente: $N_hC_iT_j/\Re$, queda determinado por:

$N_hC_iT_j/\Re = [p_{ns}]$, con n el número que representa el número de relaciones aditivas del grafo canónico y s el número que representa el número de relaciones multiplicativas del grafo canónico. De forma que $p_1, p_2 \in [p_{ns}]$ si, y solo si, $r_{a1}= r_{a2}=n$ y $r_{m1}= r_{m2}=s$.

Estas clases tienen que ver con el grado de complejidad estructural del grafo, basado en el número de relaciones del grafo canónico. Es decir, conforme el número de relaciones aditivas y multiplicativas sea más grande el grafo tendrá un grado de complejidad estructural mayor. Dos problemas $p_1, p_2 \in N_hC_iT_j$ presentan el mismo grado de complejidad estructural si, y solo si, sus grafos presentan el mismo grado de complejidad estructural. Es decir, si los dos problemas pertenecen a la misma clase de equivalencia, $p_1, p_2 \in [p_{ns}]$.

Dados dos problemas P_i y P_j, con Pi $\in[p_{ht}]$ y con $P_j \in[p_{kl}]$, decimos que P_i presenta un grado de complejidad mayor que P_j, si y solo si h+t>k+l. En el caso de que h+t=k+l con h≠k y t≠l, decimos que P_i presenta un grado de complejidad mayor que P_j, si y solo si t>l.

Sabemos que si el grafo es cerrado, no podemos calcular la solución del problema, pero podemos introducir una incógnita como vértice oscuro, de forma que el grafo sea un grafo abierto encadenado y el problema tenga resolución algebraica o estemos frente a un problema indeterminado. La elección de la incógnita a introducir hace variar el número de relaciones aditivas y/o multiplicativas, de forma que para cada incógnita tendremos un grafo asociado al problema y no podremos asegurar la existencia de un único grafo canónico.

En este apartado mostraremos la existencia de problemas indeterminados en este nivel, pero por la razón que acabamos de exponer los excluiremos de la clasificación. Vamos a analizar la estructura de datos y de relaciones entre los datos y la pregunta del problema, de los problemas de probabilidad condicional de N_2 con resolución aritmética, es decir, aquellos en los que sus grafos son abiertos encadenados. La razón de esta elección es que el número de relaciones aditivas y multiplicativas de su grafo canónico, en todos los ejemplos analizados, es fijo. Una vez analizados los problemas de cada una de las familias $N_2C_iT_j$, utilizamos la relación binaria de equivalencia definida, $\Re$, para dividir cada una de estas familias en las clases de equivalencia que vienen dadas por el número de relaciones aditivas y multiplicativas entre los datos y la pregunta del problema.

De esta forma clasificaremos los problemas de probabilidad condicional de N_2 con resolución aritmética, con el fin de organizar la enseñanza de la resolución de estos problemas, crear problemas de este nivel y mostrar que pueden ser resueltos por los estudiantes y, por tanto, aparecer en los libros de texto.

Recordamos que el nivel N_2 queda caracterizado tal y como presenta la tabla 4.10. Cada terna $N_2C_iT_j$ nos proporciona una familia de problemas asociados a la descripción de datos+pregunta.

N_2		
C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3
C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3
C_3T_1		C_3T_3

Tabla 4.10: Familias de N_2

No existe la familia $N_2C_3T_2$ pues los datos, por estar en N_2C_3 son dos probabilidades marginales no complementarias y una probabilidad condicional. En consecuencia la pregunta no puede ser una probabilidad marginal pues sería una de las complementarias a las dadas y no tendríamos problema.

Analizamos los problemas de probabilidad condicional de cada una de las clases N_2C_i, con i=1, 2, 3.

La clase N_2C_1

Dentro de este nivel y de esta categoría, sin tener en cuenta el tipo, los datos se pueden presentar de 48 formas diferentes. Recordamos que los datos son una probabilidad condicional, N_2, y cero probabilidades marginales, C_1, por lo que los datos que faltan son dos probabilidades de la intersección. Según las relaciones que, en principio presentan los datos, definimos los siguientes grupos de problemas.

Grupo 1, G_1: La probabilidad condicional y una de las probabilidades de la intersección están relacionadas mediante una relación multiplicativa, y la probabilidad de la intersección que queda no está relacionada directamente ni con la condicional mediante una relación multiplicativa, ni con la otra intersección mediante una relación aditiva. En este grupo están 8 de las 48 maneras de agrupar los datos dentro de N_2C_1. Estas 8 formas vienen de las 2 parejas de intersecciones no relacionadas, y cada una de las intersecciones de estas parejas se puede relacionar mediante una multiplicativa con 4 condicionales, de donde 4x2=8.

Grupo 2, G_2: Las dos probabilidades de la intersección están relacionadas mediante una aditiva, y existe una relación multiplicativa de la complementaria de la marginal que generan las dos intersecciones con la condicional que tenemos como dato. En esta forma tenemos 8 maneras de presentar los datos, ya que tenemos 4 parejas de intersecciones que están relacionadas y éstas se relacionan indirectamente con dos condicionales: 4x2=8

Grupo 3, G_3: Las dos probabilidades de la intersección están relacionadas mediante una relación aditiva y la probabilidad marginal que generan las dos probabilidades de la intersección no está relacionada con la probabilidad condicional que tenemos como dato. En esta forma tenemos 8 maneras de presentar los datos, ya que tenemos 4 parejas de intersecciones que están relacionadas y éstas no se relacionan ni indirectamente ni directamente con dos condicionales: 4x2=8.

Grupo 4, G_4: Los datos se relacionan dos a dos de la siguiente manera: las intersecciones están relacionadas con una aditiva, y la condicional se relaciona con una de las intersecciones mediante una multiplicativa. Las probabilidades de la intersección generan una probabilidad marginal que se relaciona con la probabilidad condicional que tenemos como dato. Tenemos 8 maneras de agrupar los datos: de las 4 parejas de intersecciones relacionadas entre ellas y por cada una de estas parejas dos condicionales con una marginal: 4x2x1=8.

Para cada una de estas maneras de agrupar los datos tenemos 11 problemas diferentes, dependiendo de la pregunta. De estos problemas existen 10 indeterminados, en los que la pregunta no es la marginal complementaria a la marginal que generan la intersección y la condicional que tenemos como datos. Los grafos asociados a cada uno de estos problemas, son grafos abiertos mixtos, es decir, al aplicarles el algoritmo de la destrucción del grafo, en una cierta etapa se destruyen pero se obtiene un grafo cerrado. Aplicamos este algoritmo. Tenemos la entrada en las dos intersecciones que generan una marginal (o la intersección y la condicional también la generan). La marginal generada y la condicional dada generan cada una su complementaria. Llegamos a un grafo cerrado pues no podemos movernos por él ya que las 5 aristas carecen de nodos.

La figuras 4.20, 4.21, 4.22, 4.23 y 4.24 muestran los grafos asociados a cada uno de estos 10 problemas. Cada una de estas figuras muestra el grafo asociado a un problema de cada tipo. Así el grafo de la figura 4.18 es el grafo asociado a un problema de $N_2C_1T_1$, los grafos de las figuras 4.19 y 4.20 son los grafos asociados a problemas de $N_2C_1T_2$ y los grafos de las figuras 4.21 y 4.22 son los grafos asociados a problemas de $N_2C_1T_3$.

En el caso de problemas del tipo T_1, en el que la pregunta es una condicional, nos encontramos con 6 problemas, en donde lo que varía es cada una de las seis probabilidades condicionales por las que se puede preguntar. La figura 4.22 da cuenta de un ejemplo del grafo asociado a uno de éstos.

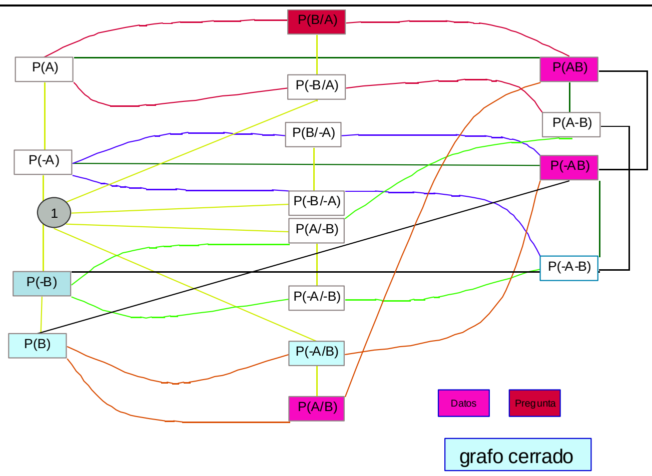


Figura 4.22: Grafo asociado a un problema $N_2C_1T_1$ de G_4 indeterminado

Las figuras 4.23 y 4.24 muestran los dos problemas indeterminados en los que la pregunta es una probabilidad marginal.

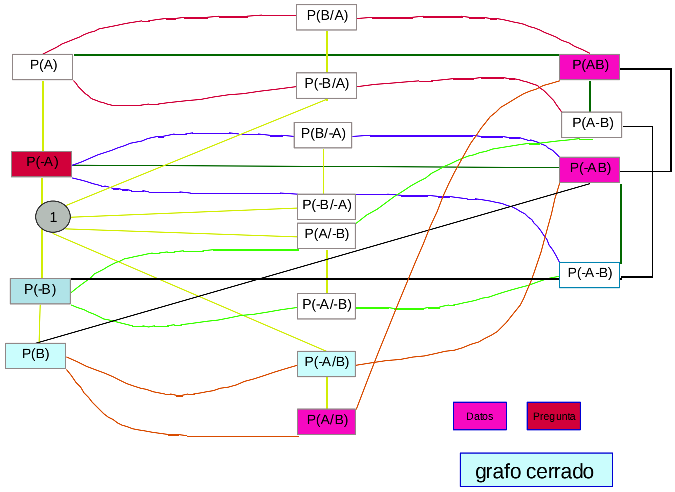


Figura 4.23: Grafo asociado a un problema $N_2C_1T_2$ de G_4 indeterminado

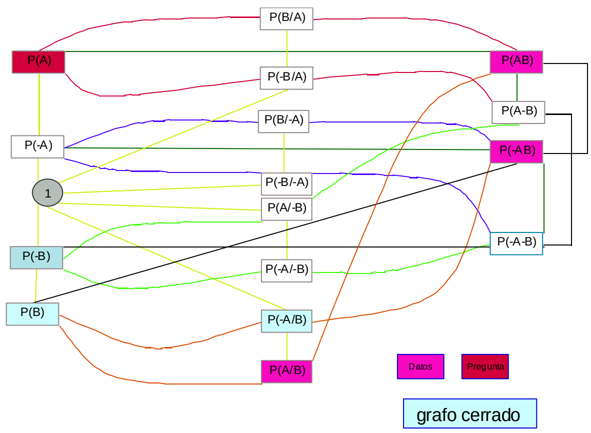


Figura 4.24: Grafo asociado a un problema $N_2C_1T_2$ de G_4 indeterminado

Las dos figuras siguientes muestran los dos problemas en los que la pregunta es una probabilidad de la intersección.

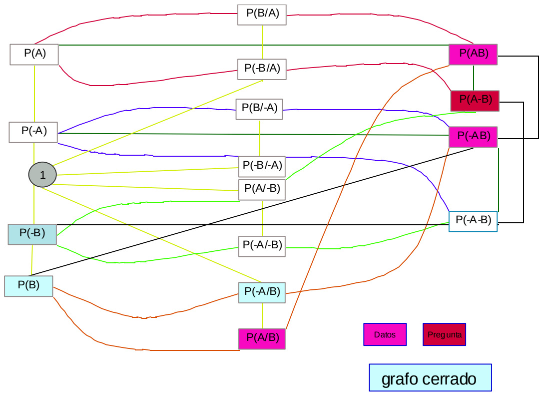


Figura 4.25: Grafo asociado a un problema $N_2C_1T_3$ de G_4 indeterminado

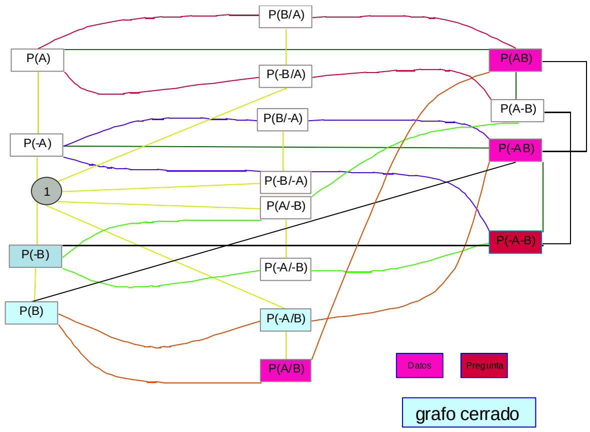


Figura 4.26: Grafo asociado a un problema $N_2C_1T_3$ de G_4 indeterminado

En este grupo, G_4, el único problema con resolución aritmética es el problema en el que se nos pregunta por la marginal complementaria a la que se genera con los datos, pues con una relación aditiva y una multiplicativa lo resolvemos. La figura 4.27 muestra el grafo canónico de estos problemas.

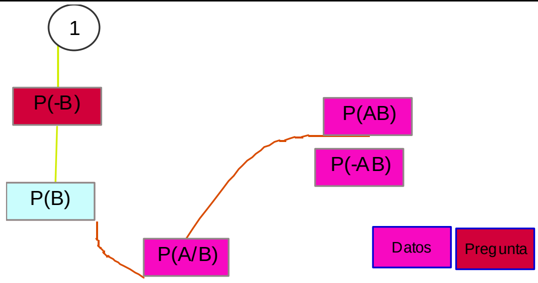


Figura 4.27: Grafo canónico asociado un problema $N_2C_1T_2$ de G_4, de resolución aritmética

Vemos en el grafo que un dato es innecesario, una probabilidad de la intersección. Elegimos este dato como innecesario, porque recordamos que nuestros problemas son problemas ternarios de probabilidad condicional, y si generamos p(B) mediante la relación aditiva que hace uso de las dos probabilidades de la intersección que tenemos como datos, el dato innecesario es el de la probabilidad condicional y para nosotros este problema dejaría de ser un problema de probabilidad condicional.

Grupo 5, G_5: Los datos se relacionan dos a dos. Las intersecciones están relacionadas con una aditiva, y la condicional se relaciona con una de las intersecciones mediante una multiplicativa. La marginal que generan las dos intersecciones no se relaciona con la probabilidad condicional dada. Así podemos presentar los datos de 8 maneras diferentes.

Grupo 6, G_6: Los datos no están relacionados ni las intersecciones entre ellas con aditivas, ni la condicional con cada una de las intersecciones con multiplicativas. Tenemos 8 maneras de presentar los datos, pues 4 parejas de intersecciones no relacionadas y por cada pareja de intersecciones dos condicionales que no se relacionan con ninguna de las intersecciones: 4x2=8.

En el anexo 2, *GPPC de grupos de N_2C_i*, presentamos ejemplos de todos los grupos.

En cada una de las familias $N_2C_1T_1$, $N_2C_1T_2$, $N_2C_1T_3$ tenemos en cuenta los grupos definidos anteriormente, aplicamos la relación binaria de equivalencia que hemos definido al principio y obtenemos las siguientes clases de equivalencia dentro de cada familia.

Las tablas 4.11, 4.12 y 4.13 muestran las clases de equivalencia dentro de cada familia $N_2C_1T_i$. Los grafos canónicos asociados a los problemas de estas familias según los grupos definidos para N_2C_1 están en el anexo 3, *Grafos canónicos asociados a los problemas de las familias $N_2C_iT_j$*.

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_1T_1$

[p_{11}]	**[p_{12}]**	**[p_{22}]**	**[p_{32}]**	**[p_{42}]**	**[p_{52}]**
2 de G_2 2 de G_3 2 de G_5	1 de G_1 1 de G_5	3 de G_1 1 de G_3 1 de G_5 1 de G_6	2 de G_1 3 de G_2 1 de G_3 1 de G_5 3 de G_6	1 de G_2 1 de G_3 1 de G_5 2 de G_6	1 de G_3

Tabla 4.11: Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_1T_1$

$N_2C_1T_1$ queda dividida en 6 clases de equivalencia, [p_{am}], según el número de relaciones aditivas, a, y multiplicativas, m, del grafo canónico del problema.

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_1T_2$

[p_{20}]	**[p_{11}]**	**[p_{21}]**	**[p_{31}]**	**[p_{41}]**
1 de G_2 1 de G_3 1 de G_5	1 de G_1 1 de G_3 1 de G_4 1 de G_5 1 de G_6	1 de G_1 1 de G_3 1 de G_6	1 de G_1 1 de G_2 1 de G_6	1 de G_2 1 de G_6

Tabla 4.12: Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_1T_2$

Los problemas de la clase [p_{20}] no son problemas de probabilidad condicional ya que el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario.

$N_2C_1T_2$ queda dividida en 4 clases de equivalencia.

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_1T_3$

[p_{11}]	**[p_{21}]**	**[p_{31}]**
1 de G_1	1 de G_1	
	1 de G_2	1 de G_2
	1 de G_3	1 de G_3
1 de G_5	1 de G_5	
	1 de G_6	1 de G_6

Tabla 4.13: Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_1T_3$

El $N_2C_1T_3$ queda dividido en 3 clases de equivalencia, tal y como muestra la tabla 4.13.

La clase N_2C_2

Dentro de este nivel y de esta categoría, sin tener en cuenta el tipo, los datos se pueden presentar de 120 formas diferentes. Recordamos que en N_2C_2 los datos son una marginal, una condicional y una intersección, entonces como hay cuatro marginales posibles, ocho condicionales y cuatro intersecciones, 4x8x4=128. A esas 128 formas tenemos que quitar ocho formas de agrupar los datos con las que no tendríamos problema, que vienen dadas por las ocho relaciones multiplicativas que tienen que ver con la definición de la probabilidad condicional: $p(B) \times p(A|B)=p(A\cap B)$.

Definimos los grupos de problemas, de forma análoga a las definiciones que hemos dado en N_2C_1, según las relaciones que presentan los datos. Los ejemplos de cada uno de estos grupos están en el anexo 2.

Grupo 1, G_1: La condicional y la marginal están relacionadas mediante una multiplicativa. La intersección generada por la marginal y la condicional está relacionada con la intersección dada mediante una aditiva. Tenemos 8 maneras de presentar los datos, ya que tenemos 4 marginales, y cada una de éstas se relaciona con 2 condicionales: 4x2=8.

Grupo 2, G_2: La condicional y la marginal están relacionadas mediante una multiplicativa, de forma que la intersección que generan NO está relacionada con la intersección dada mediante una aditiva. Tenemos 8 maneras de presentar los datos.

Grupo 3, G_3: La condicional y la intersección están relacionadas mediante una multiplicativa, y la marginal no se relaciona directamente con los dos datos citados, pero la complementaria de la marginal está relacionada con la condicional dada. Tenemos 8 maneras de presentar los datos, ya que tenemos 4 intersecciones, y cada una de éstas se relaciona con 2 condicionales: 4x2=8. Todos los problemas de N_2C_2 de todos los tipos de este grupo y esta forma son indeterminados menos uno, que se corresponde con el T_3 (recordamos que en este tipo la pregunta es una intersección).

Mostramos, en las figuras 4.28 y 4.29, los grafos asociados a los dos problemas de un trío de datos de este grupo de $N_2C_2T_2$ (la pregunta es una marginal).

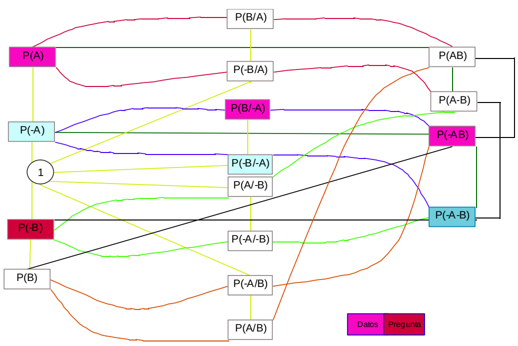


Figura 4.28 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_2$.

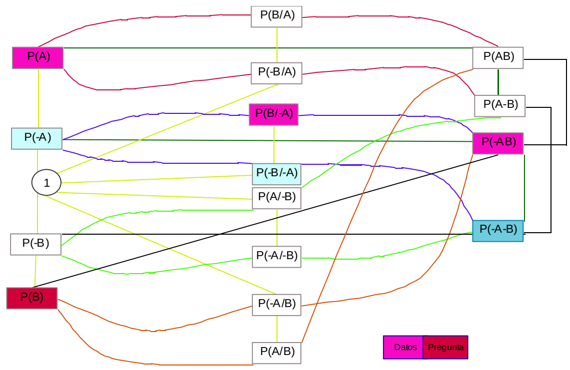


Figura 4.29 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_2$

Mostramos, en las figuras 4.30, 4.31, 4.32 y 4.33, los grafos asociados a cuatro de los 6 problemas de un trío de datos de este grupo de $N_2C_2T_1$ (la pregunta es una condicional). El resto de problemas son análogos.

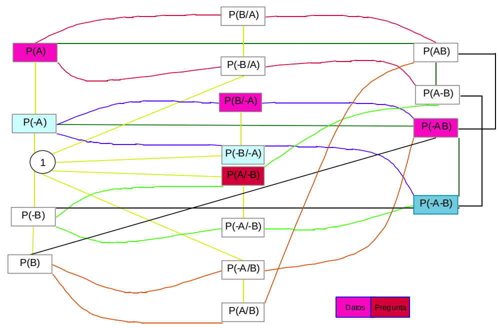


Figura 4.30 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_1$

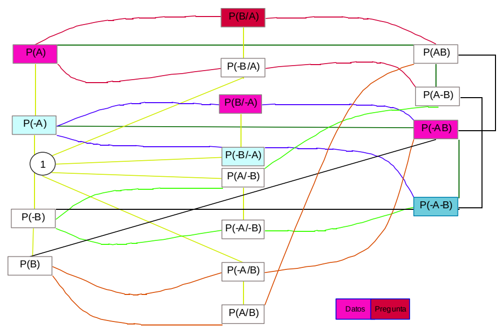


Figura 4.31 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_1$

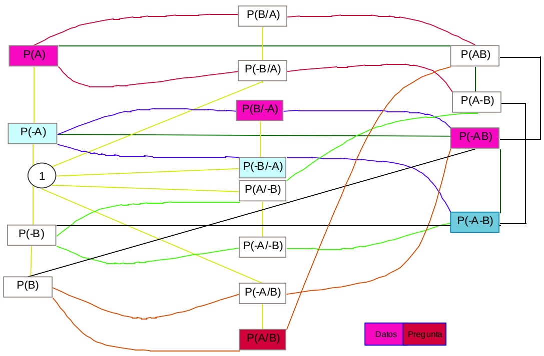


Figura 4.32 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_1$

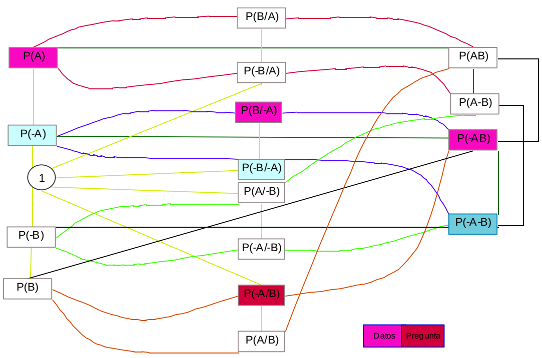


Figura 4.33 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_1$

Mostramos, en las figuras 4.34 y 4.35, los grafos asociados a los dos problemas de un trío de datos de este grupo de $N_2C_2T_3$, donde la pregunta es una intersección.

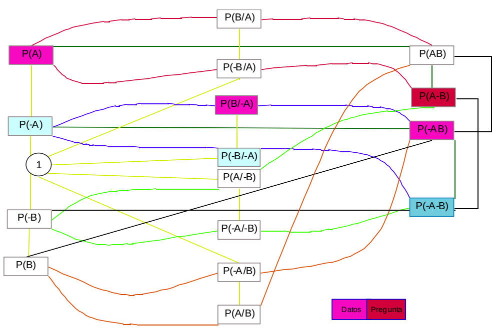


Figura 4.34 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_3$

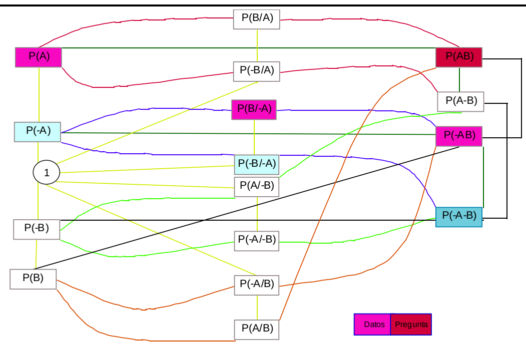


Figura 4.35 Grafo abierto mixto asociado a un problema $N_2C_2T_3$

Todos los grafos mostrados son grafos abiertos mixtos, pues en todos tenemos tres entradas, dos aristas amarillas y una arista azul, que permiten movimiento en el grafo, creando la última entrada, la arista verde aditiva, que hace que el grafo que en un principio era abierto, sea cerrado, y por tanto sus problemas son indeterminados. Además los datos están situados en la primera mitad del grafo, lo que hace imposible "pasar" a los vértices de la segunda mitad que dan cuenta de las probabilidades marginales y de las condicionales. El único vértice que se oscurece de la segunda mitad es el que se corresponde con una probabilidad de la intersección. Si recordamos el primer grafo que mostraba el mundo de los problemas de probabilidad condicional que estamos estudiando, y situamos uno de estos tríos de datos sin tener en cuenta la pregunta del problema, tal y como muestra la figura 4.36.

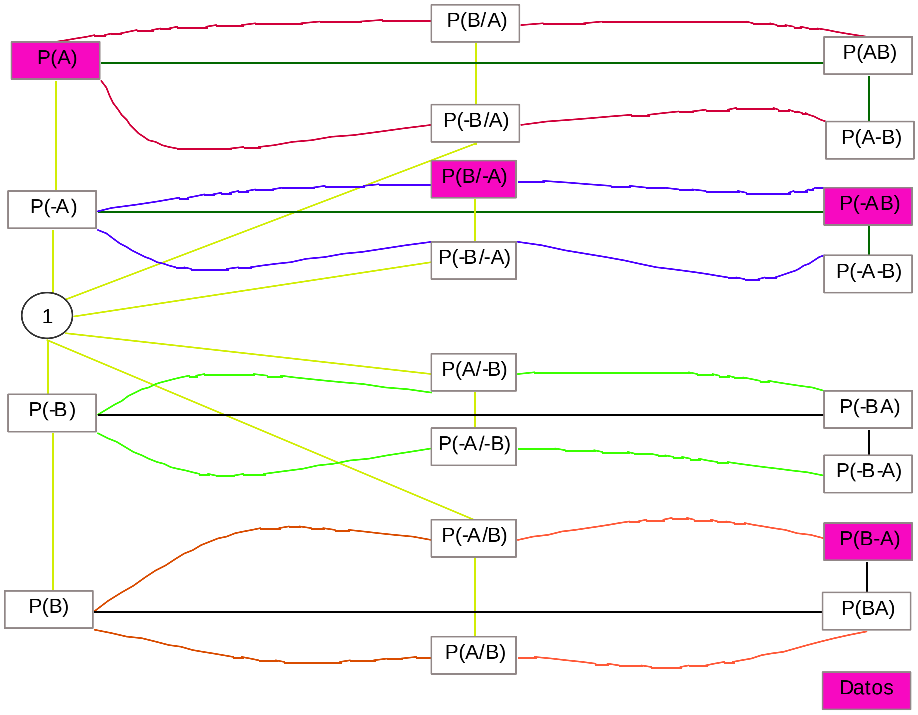


Figura 4.36: GPPC que muestra la situación de los datos de un problema de probabilidad condicional de N_2C_2 de G_3

Observamos la situación de los datos en la primera mitad (en la segunda mitad el problema sería análogo por la simetría del grafo). En este grafo sólo podemos oscurecer tres vértices de la primera mitad: p(-A), p(-B|-A) y p(-AB) (este último también pertenece a la segunda mitad). El grafo con estos nuevos vértices oscurecidos se convierte en un grafo cerrado.

La figura 4.37 muestra el grafo asociado al único problema de este grupo de $N_2C_2T_3$ con resolución aritmética.

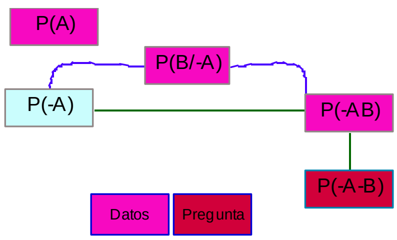


Figura 4.37: Grafo canónico asociado a la única situación problemática de resolución aritmética de $N_2C_2T_3$

Este grafo representa el grafo canónico del único tipo de problema de $N_2C_2T_3$ en G_3 con solución aritmética. Este grafo canónico presenta una relación aditiva (arista recta) y una multiplicativa (arista curva). Existe un dato innecesario (notamos que el dato innecesario en el grafo canónico en el que hemos eliminado las aristas superfluas, y en el que a la hora de elegir una arista entre dos, siempre elegiremos aquella que hace que el problema sea de probabilidad condicional, es decir, en este caso hemos eliminado la arista que da cuenta de la relación aditiva $p(A)+p(-A)=1$, pues esta entrada nos lleva a oscurecer el mismo vértice, $p(-A)$, que la entrada que hemos dejado

$p(-A) \times p(B|-A) = p(-A \cap B)$

Hemos elegido esta pues hace que el problema sea de probabilidad condicional al utilizar el dato condicional) la probabilidad marginal.

Grupo 4, G_4: La condicional y la intersección están relacionadas mediante una multiplicativa y la complementaria de la marginal dada NO está relacionada con la condicional dada. Tenemos 8 maneras de presentar los datos.

Grupo 5, G_5: La intersección y la marginal están relacionadas, y la condicional está relacionada con la complementaria de la marginal y no está relacionada con la intersección que se relaciona con la intersección dada.

Dentro de este grupo hay 8 maneras de presentar los datos: cada marginal se puede relacionar con dos intersecciones, 4x2=8, y cada una de estas parejas se relaciona con una de las dos condicionales que se relacionan con la complementaria de la marginal dada.

Grupo 6, G_6: La intersección y la marginal están relacionadas, y la condicional está relacionada con la complementaria de la marginal y está relacionada con la intersección se relaciona con la intersección dada.

Dentro de este grupo hay 8 maneras de presentar los datos: cada marginal se puede relacionar con dos intersecciones, 4x2=8, y cada una de estas parejas se relaciona con una de las dos condicionales que se relacionan con la complementaria de la marginal dada.

Grupo 7, G_7: La intersección y la marginal están relacionadas y la condicional NO está relacionada con la complementaria de la marginal. Además la condicional está relacionada con la intersección que generan la marginal y la intersección dadas.

Dentro de este grupo hay 8 maneras de presentar los datos. Cada marginal se puede relacionar con dos intersecciones, 4x2=8, y cada una de estas parejas se relaciona con la condicional que generan la marginal y la intersección dadas.

Grupo 8, G_8: La intersección y la marginal están relacionadas y la condicional no está relacionada ni con la complementaria de la marginal ni con la intersección que generan la marginal y la intersección dadas.

Dentro de este grupo hay 16 maneras de presentar los datos: cada marginal se puede relacionar con dos intersecciones, 4x2=8, y cada una de estas parejas se relaciona con las dos condicionales que no generan la marginal y la intersección dadas: 8x2=16.

Grupo 9, G_9: Los datos están relacionados dos a dos. Tenemos 8 maneras de presentar los datos; por cada marginal dos condicionales y una intersección: 4x2=8. Podemos decir que TODOS los problemas de este grupo dentro de N_2C_2 son indeterminados, pues el grafo asociado a cada uno de estos problemas es un grafo abierto mixto. Los únicos vértices que podemos oscurecer son los que forman parte de las tres entradas que tenemos en el grafo. A partir de éste, el grafo pasa a ser un grafo cerrado.

Veamos algunos de los grafos asociados a problemas de $N_2C_2T_1$ donde los datos pertenecen a este grupo.

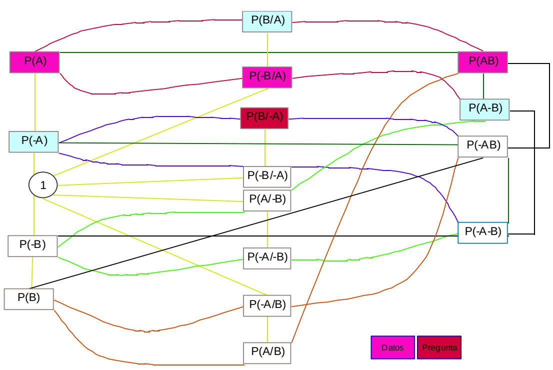


Figura 4.38: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_1$ indeterminado

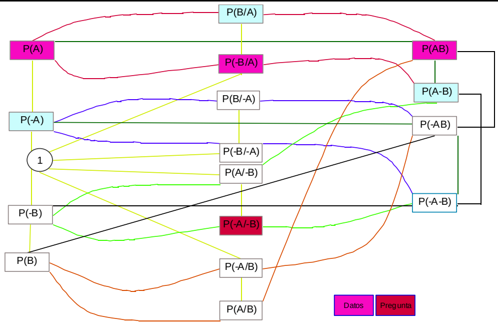


Figura 4.39: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_1$ indeterminado

Cualquiera de los grafos asociados a los 4 problemas restantes, con este trío de datos, de $N_2C_2T_1$, son iguales; lo único que varía es la pregunta del problema. Igual que los grafos asociados a problemas de $N_2C_2T_2$ y $N_2C_2T_3$ con datos que pertenezcan a este grupo. Veamos algún ejemplo más. Las figuras 4.40 y 4.41 muestran los grafos asociados a dos problemas de $N_2C_2T_2$ con dos tríos de datos de este grupo diferentes al anterior.

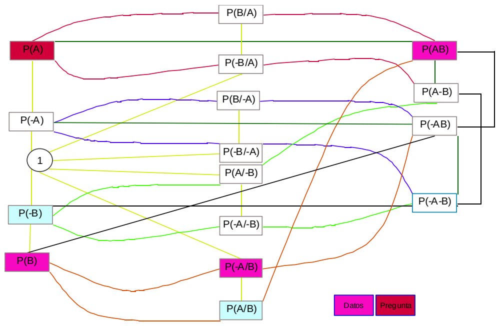


Figura 4.40: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_2$ indeterminado

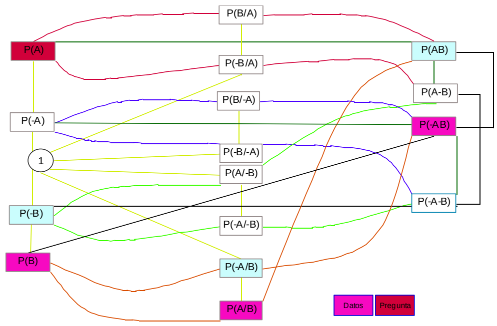


Figura 4.41: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_2$ indeterminado

Observamos que los grafos son abiertos mixtos, por lo que los problemas tienen solución algebraica.

Tal y como hemos visto en un caso anterior (figura 4.35), observamos que en este grupo los datos se encuentran en una de las mitades simétricas del grafo. Las figuras 4.42, 4.43, 4.44 y 4.45 muestran cuatro ejemplos.

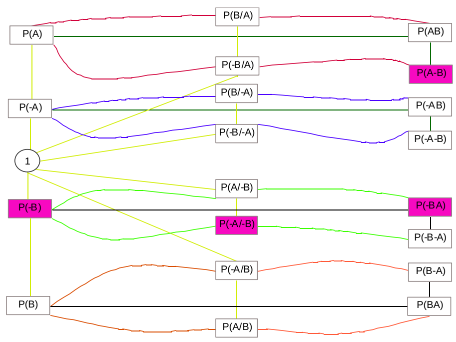


Figura 4.42: GPPC que muestra la situación de los datos de un problema de probabilidad condicional de N_2C_2 de G_9

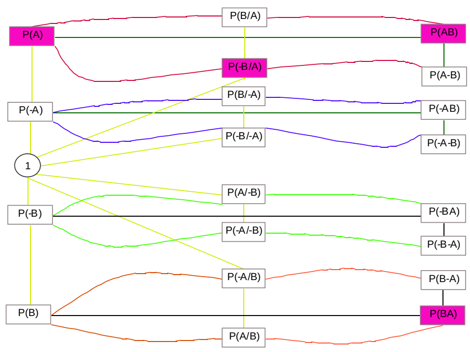


Figura 4.43: GPPC que muestra la situación de los datos de un problema de probabilidad condicional de N_2C_2 de G_9

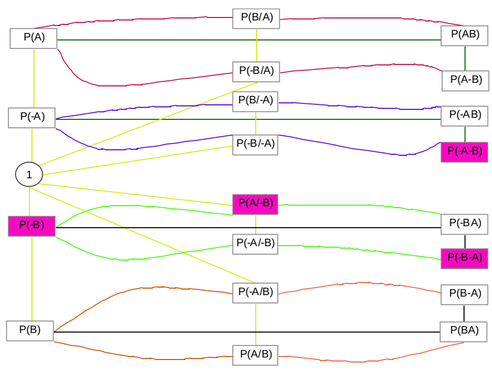


Figura 4.44: GPPC que muestra la situación de los datos de un problema de probabilidad condicional de N_2C_2 de G_9

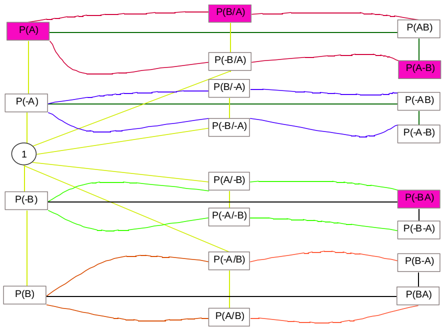


Figura 4.45: GPPC que muestra la situación de los datos de un problema de probabilidad condicional de N_2C_2 de G_9

En estos casos es imposible acceder a la otra mitad.

Grupo 10, G_{10}: Los datos no están relacionados directamente. La condicional está relacionada con la complementaria de la marginal dada. Los datos se presentas de ocho maneras: cada una de las cuatro marginales no se relacionan con dos intersecciones y cada una de estas parejas no se relaciona con una condicional que se relaciona con la complementaria de la marginal dada. En este caso los problemas son casi todos indeterminados pues el grafo asociado a estos problemas es un grafo abierto mixto. Sólo se oscurecen tres vértices que se corresponden con la marginal y la condicional complementarias a la dada y la intersección que se genera con los vértices dados y los creados. Por lo que sólo en un caso de $N_2C_2T_3$ el problema será de resolución aritmética. Mostramos cuatro casos, figuras 4.46, 4.47, 4.48 y 4.49, en los que hemos variado la pregunta del problema. En todos ellos se oscurecen los mismos vértices. Los dos primeros grafos, figuras 4.46 y 4.47, se corresponden con dos problemas en los que la pregunta es una marginal en el primero, y una condicional en el segundo.

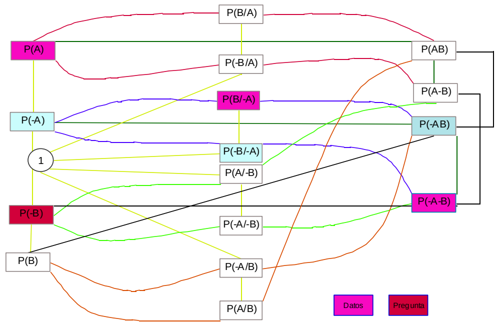


Figura 4.46: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_2$ indeterminado

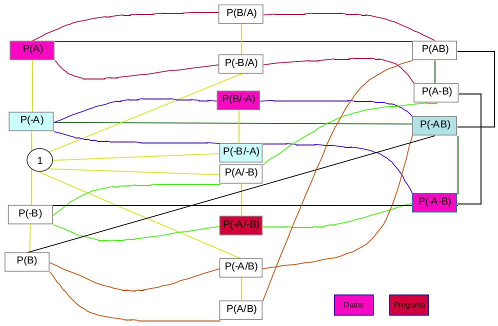


Figura 4.47: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_1$ indeterminado

Las figuras 4.48 y 4.49 representan los grafos asociados a los dos problemas de T_3 indeterminados.

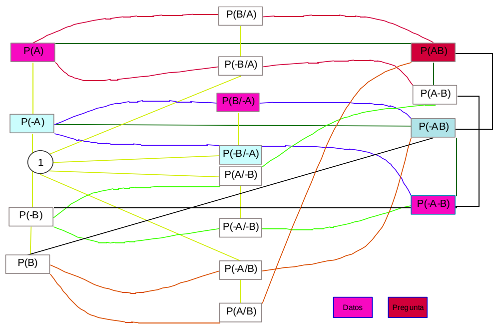


Figura 4.48: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_3$ indeterminado

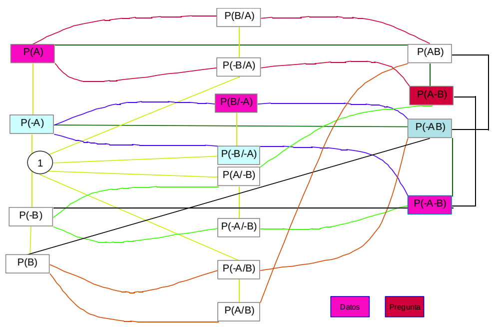


Figura 4.49: Grafo asociado a un problema $N_2C_2T_3$ indeterminado

La figura 4.50 da cuenta del grafo asociado al problema de resolución aritmética de $N_2C_2T_3$.

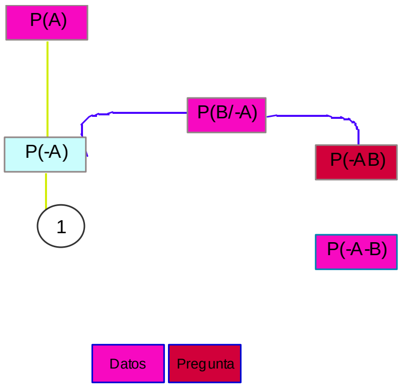


Figura 4.50: Grafo canónico asociado a un problema $N_2C_2T_3$ de resolución aritmética

Con una relación aditiva y una multiplicativa el problema queda resuelto. En este caso el dato de la intersección es un dato innecesario. Ya hemos explicado en otros casos que, al eliminar las aristas superfluas para crear el grafo canónico, elegimos las que hacen que el problema sea de probabilidad condicional.

Grupo 11, G_{11}: Los datos no están relacionados directamente. La condicional NO se relaciona con la complementaria de la marginal dada. Los datos se presentas de 24 maneras: cada una de las 4 marginales no se relacionan con 2 intersecciones y cada una de estas parejas no se relaciona con 3 condicionales que a su vez no se relacionan con la complementaria de la marginal dada: 4x2x3=24

Las tablas 4.14, 4.15 y 4.16 muestran estas clases de equivalencia dentro de cada familia $N_2C_2T_i$. Los grafos canónicos asociados a los problemas de estas familias según los grupos definidos para N_2C_2 están en el anexo correspondiente, *Grafos canónicos asociados a los problemas de las familias* $N_2C_iT_j$.

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_2T_1$

[p_{11}]	**[p_{21}]**	**[p_{12}]**	**[p_{22}]**	**[p_{32}]**	**[p_{42}]**	**[p_{52}]**
$1N_2C_2T_1G_1$ $1N_2C_2T_1G_2$ $1N_2C_2T_1G_4$ $1\ N_2C_2T_1G_5$ $1\ N_2C_2T_1G_6$ $1\ N_2C_2T_1G_7$ $1\ N_2C_2T_1G_8$ $1N_2C_2T_1G_{11}$	$1\ N_2C_2T_1G_1$ $1\ N_2C_2T_1G_2$ $1N_2C_2T_1G_4$ $1N_2C_2T_1G_{11}$	$2\ N_2C_2T_1G_1$ $1N_2C_2T_1G_4$	$2\ N_2C_2T_1G_2$ $1N_2C_2T_1G_4$ $2\ N_2C_2T_1G_6$ $2\ N_2C_2T_1G_7$ $1N_2C_2T_1G_{11}$	$1N_2C_2T_1G_1$ $2N_2C_2T_1G_2$ $2N_2C_2T_1G_4$ $3N_2C_2T_1G_5$ $1N_2C_2T_1G_7$ $1N_2C_2T_1G_8$ $1N_2C_2T_1G_{11}$	$1N_2C_2T_1G_1$ $1N_2C_2T_1G_5$ $2N_2C_2T_1G_6$ $1N_2C_2T_1G_7$ $2N_2C_2T_1G_8$ $1N_2C_2T_1G_{11}$	$1N_2C_2T_1G_8$ $1N_2C_2T_1G_{11}$

Tabla 4.14 Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_2T_1$

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_2T_2$

[p_{11}]	**[p_{21}]**	**[p_{31}]**	**[p_{41}]**
$1N_2C_2T_2G_1$ $1N_2C_2T_2G_4$ $1N_2C_2T_2G_7$	$1N_2C_2T_2G_1$ $1N_2C_2T_2G_2$ $1N_2C_2T_2G_6$ $1N_2C_2T_2G_7$ $1N_2C_2T_2G_8$ $1N_2C_2T_2G_{11}$	$1N_2C_2T_2G_2$ $1N_2C_2T_2G_5$ $1N_2C_2T_2G_6$ $1N_2C_2T_2G_8$ $1N_2C_2T_2G_{11}$	$1N_2C_2T_2G_5$

Tabla 4.15 Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_2T_2$

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_2T_3$

[p_{11}]	**[p_{21}]**	**[p_{31}]**	**[p_{41}]**
$1N_2C_2T_3G_1$			
$1N_2C_2T_3G_2$			
$1N_2C_2T_3G_3$			
$1N_2C_2T_3G_4$	$1N_2C_2T_3G_4$		
$1N_2C_2T_3G_5$	$1N_2C_2T_3G_5$		
$1N_2C_2T_3G_6$	$1N_2C_2T_3G_6$		
		$1N_2C_2T_3G_7$	$1N_2C_2T_3G_7$
	$1N_2C_2T_3G_8$		$1N_2C_2T_3G_8$
$1N_2C_2T_3G_{10}$			
		$2N_2C_2T_3G_{11}$	

Tabla 4.16 Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_2T_3$

La clase N_2C_3

Recordamos que en N_2C_3 los datos son una probabilidad condicional (N_2) y dos probabilidades marginales (C_3). Definimos los grupos dentro de este nivel y categoría:

Grupo 1, G_1: Una marginal y la condicional están relacionadas mediante una multiplicativa. La condicional y la marginal relacionadas generan una intersección que está relacionada mediante una aditiva con la marginal que resta.

Grupo 2, G_2: Una marginal y la condicional están relacionadas mediante una multiplicativa. La condicional y la marginal relacionadas generan una intersección que NO está relacionada con la marginal que resta.

Grupo 3, G_3: Los datos no están relacionados directamente entre ellos, es decir, cada una de las marginales no está relacionada con la condicional mediante una multiplicativa. Además, la condicional dada genera con la marginal complementaria a una de las marginales dadas una probabilidad de la intersección que está relacionada con la marginal restante.

Grupo 4, G_4: Los datos no están relacionados directamente entre ellos, es decir, cada una de las marginales no está relacionada con la condicional mediante una multiplicativa. Además, la condicional dada no tiene que ver con las marginales dadas, por ejemplo p(A), p(B) y p(-B│-A).

Las tablas 4.17y 4.18 muestran estas clases de equivalencia dentro de cada familia $N_2C_3T_i$. Los grafos canónicos asociados a los problemas de estas familias según los grupos definidos para N_2C_3 están en el anexo correspondiente, *Grafos canónicos asociados a los problemas de las familias $N_2C_iT_j$*.

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_3T_1$

[p_{02}]	**[p_{12}]**	**[p_{22}]**	**[p_{32}]**	**[p_{42}]**
$1N_2C_3T_1G_1$	$1N_2C_3T_1G_1$ $2N_2C_3T_1G_2$ $1N_2C_3T_1G_3$	$2N_2C_3T_1G_1$ $2N_2C_3T_1G_2$ $2N_2C_3T_1G_3$ $2N_2C_3T_1G_4$	$2N_2C_3T_1G_1$ $2N_2C_3T_1G_2$ $2N_2C_3T_1G_3$ $4N_2C_3T_1G_4$	$1N_2C_3T_1G_3$

Tabla 4.17 Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_3T_1$

$N_2C_3T_1$ queda dividida en 5 clases de equivalencia.

Clases de equivalencia en la familia $N_2C_3T_3$

[p_{11}]	**[p_{21}]**	**[p_{31}]**
$2N_2C_3T_3G_1$		$1N_2C_3T_3G_1$
$1N_2C_3T_3G_2$	$2N_2C_3T_3G_2$	
$1N_2C_3T_3G_3$	$2N_2C_3T_3G_3$	$1N_2C_3T_3G_3$
$1N_2C_3T_3G_4$	$1N_2C_3T_3G_4$	$2N_2C_3T_3G_4$

Tabla 4.18 Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_3T_3$

$N_2C_3T_3$ queda dividida en 3 clases de equivalencia.

En este apartado tenemos estudiados todos los problemas ternarios de probabilidad condicional tanto indeterminados como con resolución aritmética. Además, hemos clasificado los problemas con resolución aritmética de cada una de las familias $N_2C_iT_j$ según el número de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema, haciendo uso del grafo canónico asociado a cada uno de estos problemas. Esta clasificación nos permite crear problemas ternarios de probabilidad condicional de cada una de las familias de N_2, eligiendo el número de relaciones necesarias para su resolución. En el apartado de este capítulo que da cuenta de la tipología de problemas que presentan los libros de texto, hemos visto que el N_2 es, dentro de los problemas de resolución aritmética, el menos presente. Necesitamos crear problemas de este nivel para nuestro estudio empírico con ciertas características, y esta clasificación de las familias en clases de equivalencia que viene dada por el número de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución del problema se nos hace muy útil.

De igual forma, el conocimiento de estas clases de equivalencia por parte de los docentes o de los autores de los libros de texto organiza la enseñanza de estos problemas.

Por ejemplo, queremos crear un problema de $N_2C_3T_3$. Para ello necesitamos conocer con cuántos problemas nos podemos encontrar según el número de relaciones necesarias para su resolución, si son de resolución aritmética. Entonces, a partir de la tabla 4.18, decidimos que queremos crear un problema de [p_{31}]. Elegimos el grupo G_1, G_3 o G_4 y el grafo correspondiente del anexo *Grafos canónicos asociados a los problemas de las familias* $N_2C_iT_j$.. En este ejemplo concreto elegimos G_4 y el grafo queda reflejado en la figura 4.51.

Los datos del problema son p(-A), p(B) y p(-B|A) y la pregunta del problema es p(-AB). Sabemos que podemos llegar a la solución del problema con cuatro relaciones, tres aditivas y una multiplicativa.

Construimos un problema.

> EJEMPLO 4.29: El porcentaje de estudiantes de un colegio que no practican baloncesto es de 40% y el porcentaje de los que practican fútbol es de 60%. De los que practican baloncesto el porcentaje de los que no practican fútbol es de 15%. ¿Qué porcentaje de estudiantes practica fútbol y no baloncesto?

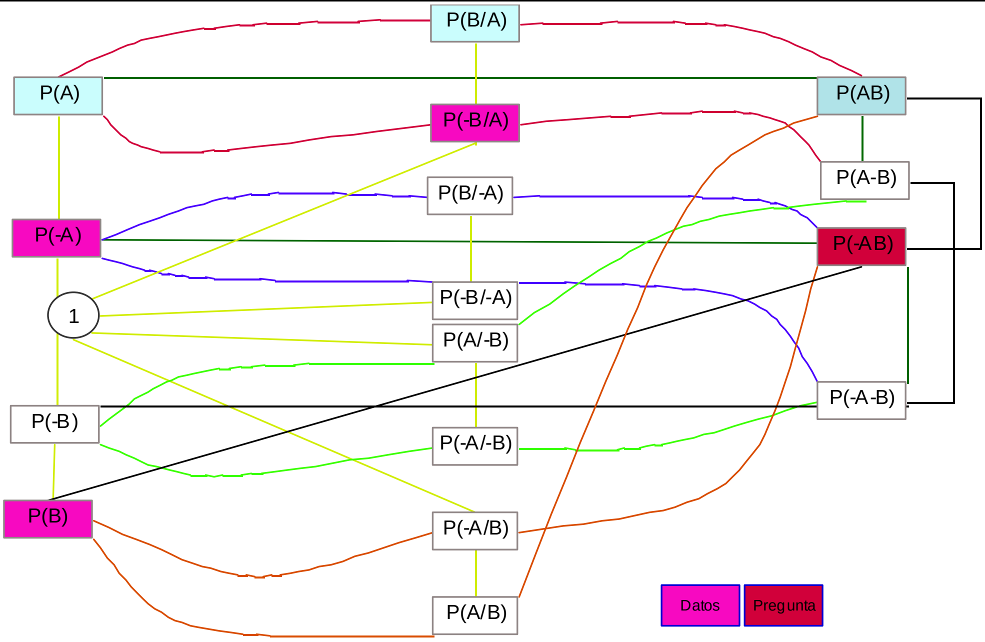


Figura 4.51: Grafo canónico de G_4 de $N_2C_3T_3$ que pertenece a [p_{31}]

Hemos clasificado los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2 con resolución aritmética. Esta clasificación la podemos utilizar para crear problemas de este nivel, y organizar la enseñanza de la resolución de estos problemas. Es interesante en futuras investigaciones hacer esta clasificación tanto en los problemas de N_1 como de N_3. En N_4 no podemos hacer la clasificación pues todos los problemas que pertenecen a ese nivel son de resolución algebraica.

4.4. RESULTADOS QUE DAN CUENTA DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

El estudio de las actuaciones de los estudiantes en esta investigación ha estado dividido en dos etapas, que llamaremos primera fase y segunda fase. Cada una de las etapas ha tenido una duración aproximada de un curso escolar. La primera fase se efectuó en el curso 2003-2004 y la segunda fase en el curso 2004-2005. Este apartado recoge ambas etapas, y en cada una de ellas describimos la preparación y elaboración de cada prueba así como el análisis de las actuaciones de los estudiantes en éstas y los resultados obtenidos de dicho análisis. Los problemas que forman parte de las pruebas de las dos etapas son siempre problemas de N_2. Uno de los fines de este estudio es conocer si los estudiantes de diferentes niveles educativos resuelven problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, que sabemos que están ausentes en los libros de texto.

4.4.1. LA PRIMERA FASE

El segundo objetivo de nuestra investigación es estudiar la resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional con dos fines concretos (pp. 110-111). Uno de los fines se basa, como ya hemos dicho, en un objetivo surgido durante la investigación, mostrar si los estudiantes de diferentes niveles educativos resuelven los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2. El otro es mostrar la influencia de determinadas variables de tarea en el proceso de resolución del problema. Estas variables de tarea son el grado de complejidad en la estructura de relaciones del problema, la naturaleza de las cantidades presentes en el problema así como la naturaleza de la pregunta del problema y la estructura semántica del problema, es decir, las expresiones del lenguaje natural no simbólico que utilizamos para la presentación de la probabilidad condicional tanto en el dato como en la pregunta del problema.

La primera fase se ha elaborado con el fin de empezar a recoger información referente a este segundo objetivo de la investigación, de las actuaciones de estudiantes de diferentes niveles educativos resolviendo problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2, y poder diseñar una segunda fase que confirme el estudio.

4.4.1.1 Descripción de los problemas de la primera fase

Procedemos ahora a la descripción de los problemas de la primera fase y de cada una de las pruebas que la componen.

Las tablas 4.4.1.1, 4.4.1.2 y 4.4.1.3 muestran la descripción de cada uno de los 18 problemas, atendiendo a diferentes factores como el número del problema, la clasificación del problema en Nivel, Categoría y Tipo, las expresiones del lenguaje natural no simbólico (o en un caso simbólico) de la probabilidad condicional, la clase de equivalencia, siempre que el problema sea de solución aritmética, la prueba a la que pertenece y el número total de estudiantes que lo ha realizado así como de su distribución por niveles educativos.

En la tabla 4.4.1.1 se describen los ocho primeros problemas en los que los datos están expresados en porcentajes, en la tabla 4.4.1.2 los problemas de P9 a P16 en los que los datos están expresados en términos de probabilidad y por último la tabla 4.4.1.3 da cuenta de los problemas indeterminados P17 y P18.

PROBLEMA	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
$N_2C_iT_j$	$N_2C_1T_2$	$N_2C_1T_3$	$N_2C_1T_1$	$N_2C_2T_3$	$N_2C_2T_2$	$N_2C_2T_1$	$N_2C_3T_1$	$N_2C_3T_3$
Semántica	Sabemos que de los…	Además conocemos que de los	Además, de los que… De que … elegido un alumno que	De las mujeres, el 20% …	De éstas el 20%	De las niñas, el 20% … De que eligiendo uno de los que	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	p(B/A) = 70 %,
$[p_{ij}]$	$[p_{31}]$	$[p_{31}]$	$[p_{32}]$	$[p_{11}]$	$[p_{11}]$	$[p_{12}]$	$[p_{02}]$	$[p_{31}]$
Prueba	A	D	C	B	D, E	C	A, E	B
Muestra (EFM, 2BT-C, 2BCS-H, 1BT-C, 1BCS-H, 4ESO)	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)	66 (4, 14, 6, 16, 14, 12)	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)	67 (4, 15, 7, 16, 14, 11)	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)

Tabla 4.4.1.1: Descripción de los problemas de P1 a P8 en los que los datos están expresados en porcentajes

PROBLEMA	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
$N_2C_iT_j$	$N_2C_1T_2$	$N_2C_1T_3$	$N_2C_1T_1$	$N_2C_2T_3$	$N_2C_2T_2$	$N_2C_2T_1$	$N_2C_3T_1$	$N_2C_3T_3$
Semántica	Sabemos …que de los que	Además conocemos … que de los	Además, …de los que… De que … elegido un alumno que …	De las mujeres, la probabilidad de …	De éstas, la probabilidad de que	De las niñas, la probabilidad de … De que eligiendo un integrante que	Además, elegido un alumno de los que… Si Juan ….	p(B/A) = 0.7
[p_{ij}]	[p_{31}]	[p_{31}]	[p_{32}]	[p_{11}]	[p_{11}]	[p_{12}]	[p_{02}]	[p_{31}]
Prueba	B	E	D	A	C	E	C	D
Muestra (EFM, 2BT-C, 2BCS-H, 1BT-C, 1BCS-H, 4ESO)	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)

Tabla 4.4.1.2: Descripción de los problemas de P9 a P16 en los que los datos están expresados en términos de probabilidad

PROBLEMA	**$N_2C_iT_j$**	**Semántica**	**Prueba**	**Muestra (EFM, 2BT-C, 2BCS-H, 1BT-C, 1BCS-H, 4ESO)**
P17	$N_2C_2T_1$	De los niños un 40%	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P18	$N_2C_2T_2$	De los que no …	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)

Tabla 4.4.1.3: Descripción de los problemas P17 y P18 indeterminados, en los que los datos están expresados en porcentajes.

Las tablas 4.4.1.4, 4.4.1.5, 4.4.1.6, 4.4.1.7 y 4.4.1.8 describen cada una de las pruebas que componen la primera fase. La primera columna indica el número del problema, la segunda su clasificación en Nivel, Categoría y Tipo, la tercera describe la naturaleza de las cantidades presentes en el problema, la cuarta muestra las expresiones del lenguaje natural no simbólico (o en un caso simbólico) de la probabilidad condicional. La quinta indica la clase de equivalencia, siempre que el problema sea de solución aritmética. La última columna muestra el grafo canónico asociado a cada problema de solución aritmética, de forma que en los problemas en los que los datos están en porcentajes, previamente hemos traducido dichos datos a términos de probabilidad.

Para la distribución de los 18 problemas en cinco pruebas, hemos tenido en cuenta la clasificación de los problemas en niveles, categorías y tipos y la naturaleza de las cantidades presentes en el problema. Cada una de las pruebas contiene problemas de todas las categorías y de casi todos los tipos. Además cada prueba está formada por al menos dos problemas con las cantidades expresadas en porcentajes y un problema con las cantidades expresadas en términos de probabilidad.

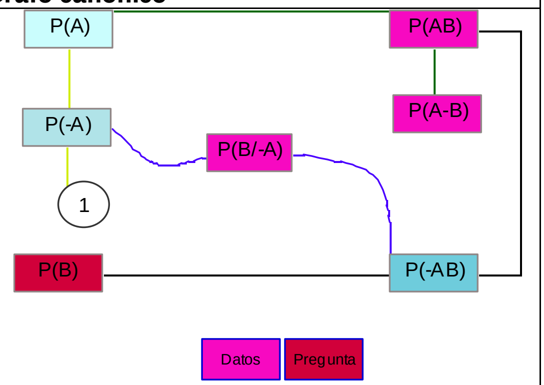
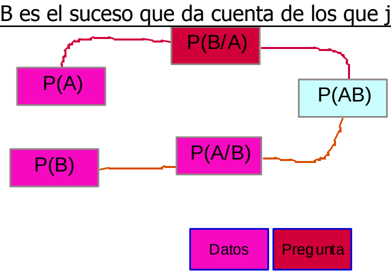
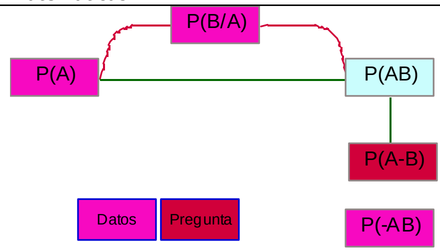
PROBLEMA	**$N_2C_iT_j$**	**Naturaleza**	**Semántica**	**$[p_{ij}]$**	**Grafo canónico**
P1	$N_2C_1T_2$	%	Sabemos que de los…	$[p_{31}]$	 A es el suceso que da cuenta de los que juegan a baloncesto B es el suceso que da cuenta de los que juegan a fútbol
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	$[p_{02}]$	 A es el suceso que da cuenta de los aprobados en filosofía B es el suceso que da cuenta de los aprobados en Matemáticas
P12	$N_2C_2T_3$	Probabilidad	De las mujeres, la probabilidad de …	$[p_{11}]$	 A suceso que da cuenta de las mujeres B da cuenta de los trabajadores que realizan tareas administrativas
P18	$N_2C_2T_2$	%	De los que no …	Indeter.	

Tabla 4.4.1.4: Descripción de los problemas de la prueba A

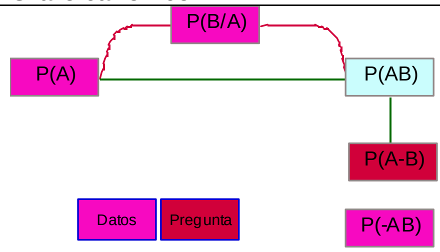
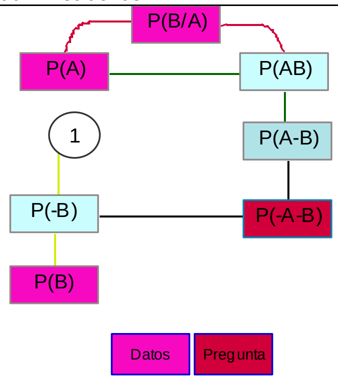
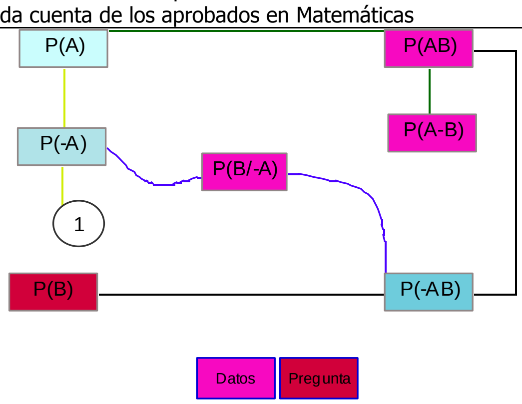
PROBLEMA	$N_2C_iT_j$	Naturaleza	Semántica	$[p_{ij}]$	Grafo canónico
P4	$N_2C_2T_3$	%	De las mujeres, el 20% …	$[p_{11}]$	 A suceso que da cuenta de las mujeres B da cuenta de los trabajadores que realizan tareas administrativas
P8	$N_2C_3T_3$	%	p(B/A) = 70 %,	$[p_{31}]$	 A da cuenta de los aprobados en Historia B da cuenta de los aprobados en Matemáticas
P9	$N_2C_1T_2$	Probabilidad	Sabemos …que de los que	$[p_{31}]$	 A es el suceso que da cuenta de los que juegan a baloncesto B es el suceso que da cuenta de los que juegan a fútbol
P17	$N_2C_2T_1$	%	De los niños un 40%	Indeter.	

Tabla 4.4.1.5: Descripción de los problemas de la prueba B

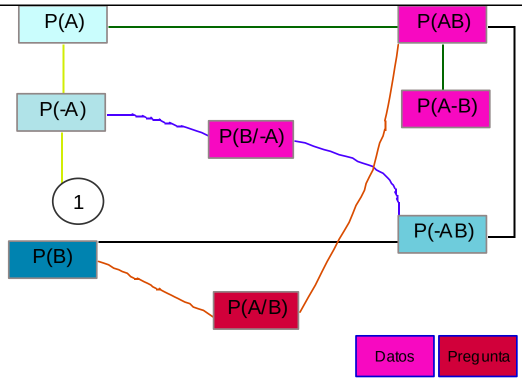
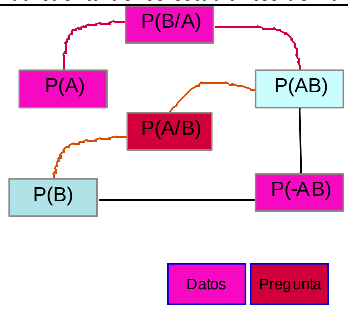
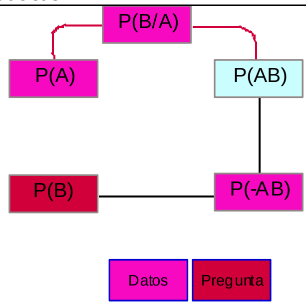
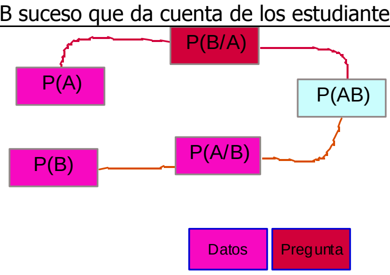
PROBLEMA	$N_2C_iT_j$	Naturaleza	Semántica	$[p_{ij}]$	Grafo canónico
P3	$N_2C_1T_1$	%	Además, de los que… De que … elegido un alumno que …	$[p_{32}]$	 A es el suceso que da cuenta de los estudiantes de inglés B da cuenta de los estudiantes de francés
P6	$N_2C_2T_1$	%	De las niñas, el 20% … De que eligiendo uno de los que	$[p_{12}]$	 A da cuenta de las niñas B da cuenta de los integrantes que realizan actividades acuáticas
P13	$N_2C_2T_2$	Probabilidad	De éstas, la probabilidad de que	$[p_{11}]$	 A suceso que da cuenta de las mujeres B suceso que da cuenta de los estudiantes de letras
P15	$N_2C_3T_1$	Probabilidad	Además, elegido un alumno de los que… Si Juan ….	$[p_{02}]$	 A da cuenta de los aprobados en filosofía B da cuenta de los aprobados en Matemáticas

Tabla 4.4.1.6: Descripción de los problemas de la prueba C

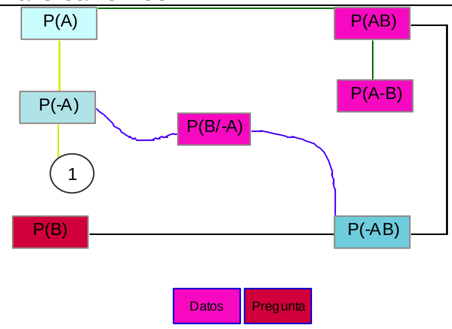
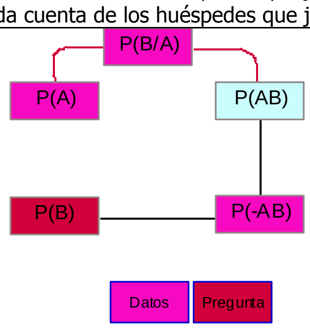
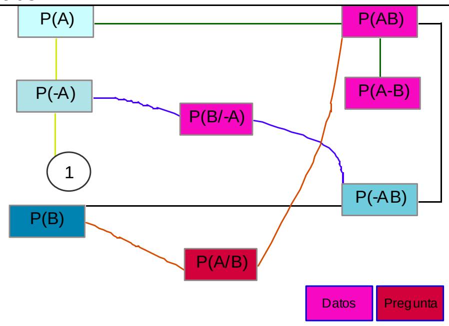
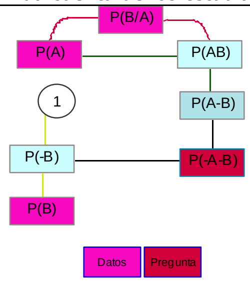
PROBLEMA	$N_2C_iT_j$	Naturaleza	Semántica	[p_{ij}]	Grafo canónico
P2	$N_2C_1T_3$	%	Además conocemos que de los	[p_{31}]	 A da cuenta de los huéspedes que juegan a tenis B da cuenta de los huéspedes que juegan a golf
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	[p_{11}]	 A suceso que da cuenta de las mujeres B suceso que da cuenta de los estudiantes de letras
P11	$N_2C_1T_1$	Probabilidad	Además, ...de los que... De que ... elegido un alumno que ...	[p_{32}]	 A da cuenta de los estudiantes de inglés B da cuenta de los estudiantes de francés
P16	$N_2C_3T_3$	Probabilidad	p(B/A) = 0.7,	[p_{31}]	 A da cuenta de los aprobados en Historia B da cuenta de los aprobados en Matemáticas

Tabla 4.4.1.7: Descripción de los problemas de la prueba D

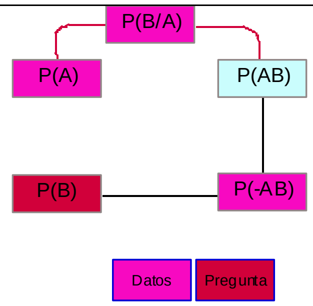
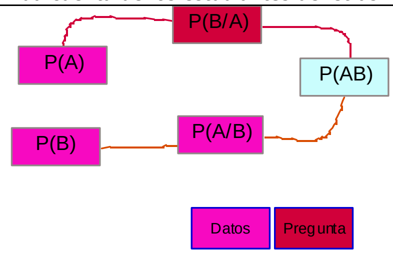
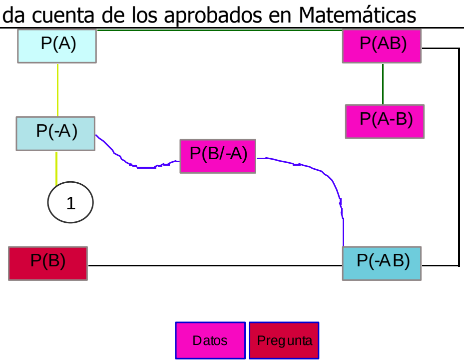
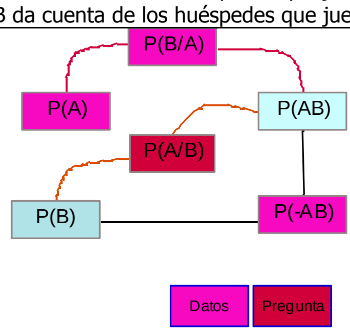
PROBLEMA	**$N_2C_iT_j$**	**Naturaleza**	**Semántica**	**$[p_{ij}]$**	**Grafo canónico**
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	$[p_{11}]$	 A suceso que da cuenta de las mujeres B da cuenta de los estudiantes de letras
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que... Si Juan	$[p_{02}]$	 A es el suceso que da cuenta de los aprobados en Filosofía B da cuenta de los aprobados en Matemáticas
P10	$N_2C_1T_3$	Probabilidad	Además conocemos ... que de los	$[p_{31}]$	 A da cuenta de los huéspedes que juegan a tenis B da cuenta de los huéspedes que juegan a golf
P14	$N_2C_2T_1$	Probabilidad	De las niñas, la probabilidad de ... De que eligiendo un integrante que	$[p_{12}]$	 A da cuenta de las niñas B da cuenta de los integrantes que realizan actividades acuáticas

Tabla 4.4.1.8: Descripción de los problemas de la prueba E

4.4.1.2. Resultados de las actuaciones de los estudiantes

Para organizar los resultados obtenidos del análisis de las actuaciones de los estudiantes, consideramos una serie de descriptores que refieren las respuestas de los estudiantes. Estos descriptores los hemos creado teniendo en cuenta una primera lectura de las actuaciones de los estudiantes en las pruebas, así como los factores que queremos estudiar.

Podemos clasificar las respuestas de los estudiantes en dos grandes grupos: procesos de resolución con éxito y procesos de resolución sin éxito. En el primero reflejamos el comportamiento de los estudiantes que han llegado al resultado correcto del problema. En el segundo tenemos en cuenta las diferentes dificultades y errores que han tenido los resolutores. Dividimos a su vez este segundo grupo en seis descriptores.

Estos son los siguientes.

Interpretaciones no deseadas en los datos

En este descriptor englobamos las respuestas de los estudiantes que no han interpretado los datos como se esperaba. En principio, en nuestra investigación nos interesan principalmente las interpretaciones no deseadas del dato que tiene que ver con la probabilidad condicional. Pero también nos parece interesante distinguir las interpretaciones no deseadas de otros datos, pues pueden añadir información a esta investigación. Algunas de estas interpretaciones son concretas de algunos problemas, como por ejemplo las que dan cuenta de las interpretaciones del "dato 2ª intersección por una marginal" y del "dato condicional por marginal o por intersección". Las interpretaciones que hemos considerado son:

- ★ Interpretación del dato condicional por marginal
- ★ Interpretación del dato condicional por intersección
- ★ Interpretación de la 2ª intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal

- ★ Interpretación de la 2ª intersección por una marginal y del dato condicional por intersección
- ★ Interpretación de la intersección por marginal
- ★ Interpretación de la intersección por condicional
- ★ Otras interpretaciones de los datos

Interpretaciones no deseadas en las preguntas

De la misma manera que hemos explicado en el descriptor anterior, aunque en nuestra investigación estudiamos las interpretaciones no deseadas cuando se pregunta por la probabilidad condicional, consideramos las interpretaciones no deseadas de otra pregunta por si nos pueden sugerir otro tipo de información. Las interpretaciones no deseadas de la pregunta que vamos a considerar son:

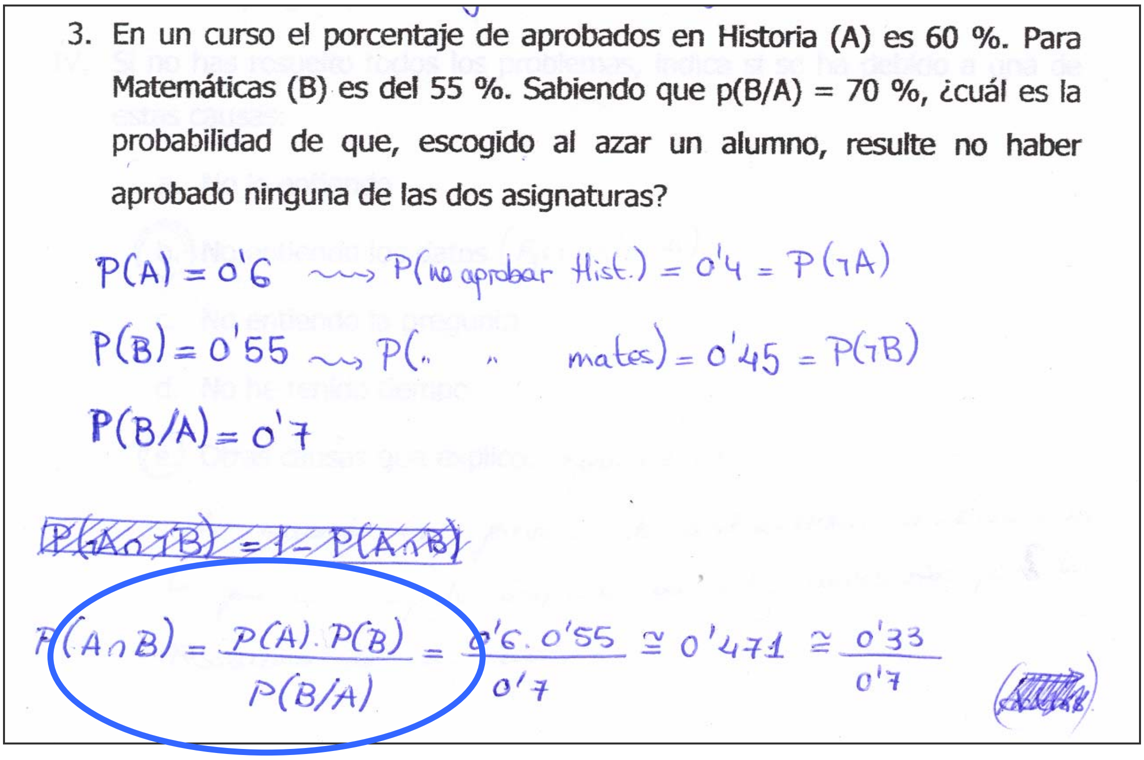
- ★ Interpretación de la condicional por intersección
- ★ Interpretación de la condicional por marginal
- ★ Otras interpretaciones de la pregunta

Uso no adecuado de herramientas aritméticas

Los estudiantes cometen errores en el proceso de resolución del problema al no utilizar de manera satisfactoria los porcentajes, las reglas de tres, etc. Garfield y Ahlgren (1988) indican que "*muchos estudiantes tienen una dificultad subyacente con los conceptos de número fraccionario y razonamiento proporcional, necesarios para el cálculo, expresión e interpretación de las probabilidades (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren (1988)). Resultados recogidos por la Valoración Nacional del Progreso Educativo (NAEP) en su segunda y tercera valoraciones de matemáticas, indican que los estudiantes flojeaban en el concepto de número racional y tenían dificultades con conceptos básicos que incluían fracciones, decimales y porcentajes* (Carpenter, Corbitt y Kepner, 1981; Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren (1988)).

Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad

Los estudiantes cometen errores al utilizar conceptos de probabilidad como complementariedad, independencia y/o fórmulas de probabilidad. Existen estudiantes que, por ejemplo, muestran que el suceso complementario del suceso estudiar francés es el suceso estudiar inglés. De igual forma existen estudiantes que crean sus propias fórmulas de probabilidad, como por ejemplo la que se muestra en la resolución 4.4.1.1. El estudiante de la Facultad de Matemáticas crea su propia fórmula.



3. En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

$P(A) = 0'6 \rightsquigarrow P(\text{no aprobar Hist.}) = 0'4 = P(\neg A)$

$P(B) = 0'55 \rightsquigarrow P(\text{" " mates}) = 0'45 = P(\neg B)$

$P(B/A) = 0'7$

$\cancel{P(\neg A \cap \neg B) = 1 - P(A \cap B)}$

$P(A \cap B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B/A)} = \frac{0'6 . 0'55}{0'7} \cong 0'471 \cong \frac{0'33}{0'7}$

Resolución 4.4.1.1: Actuación de un estudiante de EFM en P8 (es el problema tercero de la prueba B)

No se entienden las cantidades y/o los signos que presenta el texto del problema

Consideramos este descriptor pues algunos estudiantes han hecho notar que no entendían qué quería decir que la probabilidad de un determinado suceso es una cierta cantidad. Por ejemplo no entendían "la probabilidad de ser mujer es 0.55", o que no sabían qué quería decir "$p(B|A)=70\%$".

Blanco

En este descriptor englobamos tanto las respuestas en blanco de los estudiantes como aquellas que no aportan nada en esta investigación.

En resumen, los descriptores elegidos en la primera fase que dan cuenta de las respuestas de los estudiantes son:

1. Procesos de resolución con éxito
2. Interpretaciones no deseadas en los datos:
    i. Interpretación del dato condicional por marginal
    ii. Interpretación del dato condicional por intersección
    iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal
    iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección
    v. Interpretación de la intersección por marginal
    vi. Interpretación de la intersección por condicional
    vii. Otras interpretaciones de los datos
3. Interpretaciones no deseadas de la pregunta
    i. Interpretación de la condicional por intersección

   ii. Interpretación de la condicional por marginal

   iii. Otras interpretaciones de la pregunta

4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.
6. No se entienden las cantidades y/o los signos que presenta el texto del problema
7. Blanco

La tabla 4.4.1.9 nos servirá para mostrar el número de estudiantes de toda la muestra y su distribución por niveles escolares, cuyas respuestas a un problema determinado, se corresponden con los descriptores cuantificables que acabamos de presentar. Esta tabla nos sirve para organizar las observaciones del análisis de las respuestas de los estudiantes. La primera fila da cuenta de los diferentes niveles escolares y la primera columna da cuenta de los descriptores.

Problema N	Nivel	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	muestra.							
1. Procesos de resolución con éxito.								
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal								
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección								
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal								
2.iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección								
2.v. Interpretación de la intersección por marginal								
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional								
2.vii. Otras interpretaciones de los datos								
3.i. Interpretación de la condicional por intersección								
3.ii. Interpretación de la condicional por una marginal.								
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.								
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas								
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad o de fórmulas de probabilidad.								
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema								
7. Blanco								

Tabla 4.4.1.9: Tabla que da cuenta de los descriptores elegidos para organizar las respuestas de los estudiantes distribuidos por niveles educativos

En el anexo 5 se encuentran las tablas correspondientes a cada uno de los problemas de la primera fase.

Las tablas 4.4.1.10 y 4.4.1.11 muestran los porcentajes de los estudiantes cuyas respuestas a los problemas de solución aritmética, quedan reflejadas en los descriptores definidos en este apartado. Hemos añadido en descriptor nuevo, 1', que da cuenta del porcentaje de estudiantes que muestran un proceso de resolución sin éxito. Este dato lo añadimos pues los porcentajes de estudiantes que se corresponden con los descriptores 2i, 2ii, 2iii, 2iv, 2v, 2vi, 2vii, 3i, 3ii, 3iii, 4, 5, y 6 los calculamos sobre el número de estudiantes que presentan el proceso de resolución sin éxito.

		PROBLEMAS CON LOS DATOS EN PORCENTAJES							
		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	11.76	18.18	3.03	23.53	42.42	6.06	5.97	0
	1'. No éxito	55.88	42.43	78.79	58.82	30.31	69.7	58.21	73.53
	2.i. Condicional por marginal (datos)	5.26	0	7.69	0	0	0	0	0
	2.ii Condicional por intersección	63.16	57.14	42.31	38.46	55.26	26.09	38.46	60
	2.iii. Intersección por marginal y condicional por marginal	0	28.57	38.46	0	0	0	0	0
	2.iv. Intersección por marginal y condicional por intersección	0	0	3.85	5	0	8.7	0	0
	2.v. Intersección por marginal	10.53	0	3.85	0	2.63	0	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	10.53	0	0	0	2.63	0	0	0
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	0	0	0	0	0	0	2.56	0
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	0	0	0	34.78	56.41	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0	0	0	0	0	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	7.14	0	10	2.63	0	7.69	0
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0	0	20	7.9	17.39	0	4
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	10.53	7.14	3.85	5	2.63	13.04	0	72
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	0	0	0	0	20
	7. Blanco	32.36	39.39	18.18	17.64	27.27	24.24	35.82	26.47

Tabla 4.4.1.10: Porcentajes de los estudiantes en los ocho primeros problemas según descriptores definidos

		PROBLEMAS CON LOS DATOS EN TÉRMINOS DE PROBABILIDAD							
		P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	0	6.06	0	17.64	9.09	6.06	6.06	0
	1'. No éxito	61.76	78.79	57.58	38.24	54.55	57.58	30.3	54.55
	2.i. Condicional por marginal (datos)	0	0	5.26	0	0	0	10	0
	2.ii Condicional por intersección	47.62	61.54	26.32	25	55.56	26.32	40	50
	2.iii. 2ª intersección por marginal y condicional por marginal	19.05	38.46	21.05	0	0	0	0	0
	2.iv. 2ª intersección por marginal y condicional por intersección	0	0	5.26	0	11.11	0	0	0
	2.v. Intersección por marginal	4.76	0	10.53	0	0	0	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	0	0	0	15.38	0	5.26	0	0
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	4.76	0	0	0	0	0	0	5.56
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	21.05	0	0	36.84	40	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0	0	0	0	10.53	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	0	0	7.69	0	5.26	0	0
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0	0	0	22.22	5.26	20	0
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	4.76	0	5.26	7.69	5.56	5.26	0	61.11
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	19.05	0	5.26	0	5.56	5.26	10	33.33
	7. Blanco	38.24	15.15	42.42	44.12	36.36	36.36	63.64	45.45

Tabla 4.4.1.11: Porcentajes de los estudiantes en los problemas de P9 a P16 según descriptores definidos

La tabla 4.4.1.12 da cuenta de los porcentajes de los estudiantes en los problemas indeterminados, P17 y P18, según los descriptores elegidos.

		P17	P18
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	5.88	2.94
	1'. No éxito	52.94	67.65
	2.i. Condicional por marginal (datos)	2.94	2.94
	2.ii Condicional por intersección	2.94	0
	2.iii. Intersección por marginal y condicional por marginal	0	0
	2.iv. Intersección por marginal y condicional por intersección	0	0
	2.v. Intersección por marginal	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	0	17.65
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	2.94	8.82
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	9
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	0	0
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	32.35	8.82
	7. Blanco	41.18	29.41

Tabla 4.4.1.12: Porcentajes de los estudiantes en los problemas indeterminados P17 y P18 según descriptores definidos

4.4.1.3. Análisis de los resultados de las actuaciones de los estudiantes

Organizamos el análisis de los resultados de las actuaciones de los estudiantes en cuatro subapartados. Éstos son:

a. de los resultados que dan cuenta de la construcción de la primera fase para la construcción de la segunda fase
b. de la influencia de la naturaleza de las cantidades en el éxito en la resolución del problema así como en el proceso de resolución del problema
c. del lenguaje natural no simbólico utilizado para expresar la condicionalidad en el texto del problema
d. del grado de complejidad estructural del problema.

a. Análisis de los resultados que dan cuenta de la construcción de la primera fase para la construcción de la segunda fase

En primer lugar analizamos la construcción de la primera fase. Al observar los resultados de la primera fase nos surgen cuatro ideas a tener en cuenta en la construcción de la segunda fase:

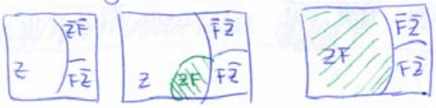
★ No incluir problemas indeterminados en la segunda fase, ya que añaden dificultad a la prueba y no aportan información a la investigación (Observar la tabla 4.4.1.12 del apartado anterior). La resolución 4.4.1.2 da cuenta de la dificultad que presentan los estudiantes al resolver problemas indeterminados en los que no han sido instruidos. Las resoluciones 4.4.1.3 y 4.4.1.4 muestran las actuaciones de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la asignatura del área de Didàctica de la Matemàtica, instruidos en resolución de problemas.

4. En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un 40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación.

60 niñas
40 niños
~~40~~ 24
16
16 ~ 40%
No tiene sentido

Resolución 4.4.1.2. Actuación de un estudiante de 1BT-C en el P17

El problema no está determinado, la cantidad de franceses que desayuna zumo puede oscilar entre el 0% y el 60%



sin alterar los otros datos, pues en todos los casos, se tiene $Z \to 60\%$, $\bar{Z}F \to 24\%$, y $F\bar{Z} \to 16\%$. Lo más que puedo afirmar es que la probabilidad de ser francés es $\geq 0'16$.

Resolución 4.4.1.3. Actuación de un estudiante de EFM en el P17

Colegio → 60% niñas
→ 40% niños → 40% natación → 0'4 · 0'4 = 0'16 niños p. natación

Colegio → 16% niños practican natación.

Observo que con los datos que nos dan no puedo contestar a la pregunta puesto que con ellos puedo obtener toda la información de los niños pero de las niñas sólo puedo saber que son 60% ~~del~~ del colegio.
También creo que hay datos innecesarios y redundantes puesto que si el 60% son niñas sé que el 40% son niños y al decirme que el 40% de los niños practican natación sé y no hace falta que me lo digan que el 16% del colegio son niños que practican natación.

Resolución 4.4.1.4. Actuación de un estudiante de EFM en el P18

★ Ordenar los problemas de la segunda fase según el grado de complejidad estructural, con el fin de validar la influencia de esta variable en el éxito en el proceso de resolución del problema. En la primera fase hemos tenido en cuenta este grado de complejidad estructural, pero no hemos ordenado los problemas según este factor.

★ En la primera fase no se han estudiado los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en frecuencias absolutas. La razón de no tenerlos en cuenta ha sido la de presentar todos los datos del problema de la misma forma. Como uno de los datos es una condicional sólo la podremos expresar en porcentajes o en términos de probabilidad. Completamos el estudio de la influencia de las cantidades presentes en un problema de probabilidad con problemas que presenten los datos de esta forma.

★ Elegir una colección de problemas para una única prueba. De esta manera todos los estudiantes participantes en este estudio realizarán los mismos problemas. En la primera fase el tamaño total de la muestra es de 166 estudiantes, pero al distribuir la colección de 18 problemas en cinco pruebas, el tamaño de la muestra a la que se administra cada una de las pruebas es diferente.

b. Influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en el problema

Uno de los objetivos de esta investigación es el de mostrar la influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en el problema tanto en el éxito en la resolución del problema como en el proceso de resolución del mismo.

Queremos saber qué forma de presentar los datos de un problema de probabilidad condicional hace que el porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito el problema crezca. En investigaciones anteriores (Lonjedo 2003; Huerta y Lonjedo 2003a, 2003b), se muestra cómo los problemas de probabilidad condicional con los datos en porcentajes y en frecuencias absolutas inducen al resolutor a utilizar la aritmética y a asignar probabilidad al final clasificando el problema en problema de asignación de probabilidades. Por esta razón presentamos los resultados de las actuaciones de los estudiantes que han resuelto el problema con éxito según las estrategias utilizadas en su resolución.

Además en este análisis tenemos en cuenta el tamaño de la muestra, los resultados de las actuaciones de los estudiantes que muestran el número de estudiantes que han resuelto con éxito el problema así como su distribución en niveles educativos, el número de estudiantes que han dejado en blanco el problema o similar y el número de estudiantes que ha seguido una estrategia determinada clasificando el problema de probabilidad condicional en problemas de asignación de probabilidades o en problema de cálculo de probabilidades.

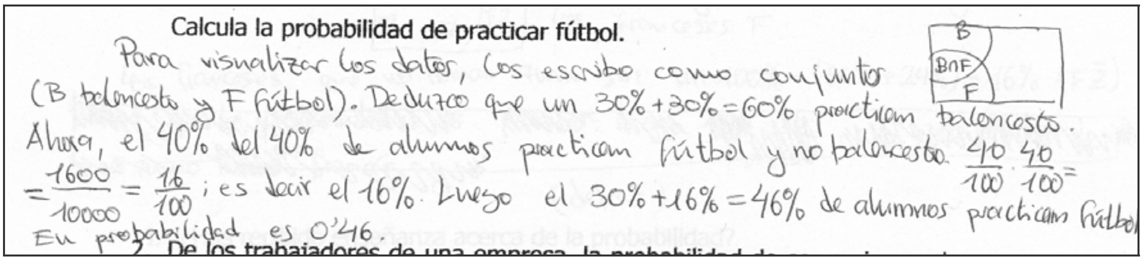
Los problemas de P1 a P16 son isomorfos dos a dos, con la única diferencia en la naturaleza de los datos. Así P_i es isomorfo a P_{i+8} para i= 1, ..., 8. Los ocho primeros tienen los datos en tantos por cien y los siguientes en términos de probabilidad.

Notamos que en el problema P8

> *En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?" (Santos, D. 1988)*

aunque tiene los datos expresados en tanto por cien, la probabilidad condicional está expresada utilizando el lenguaje formal que describe la probabilidad: $p(B|A) = 70\%$. Aunque no es del todo incorrecto, no estamos demasiado de acuerdo con esta forma de expresar la probabilidad condicional. Pensamos que si queremos utilizar el lenguaje formal propio de la probabilidad entonces debemos escribir: $p(B|A)=0.7$ y si queremos expresar el dato en tanto por cien lo escribiremos utilizando una oración subordinada condicional. Pero este P8 concretamente es uno de los pocos problemas de N_2 que ofrecen los libros de texto, y hemos querido respetar el enunciado tal y como aparece.

A continuación mostramos las actuaciones de diferentes estudiantes en diferentes problemas que han resuelto con éxito, siguiendo el orden numérico de los problemas.

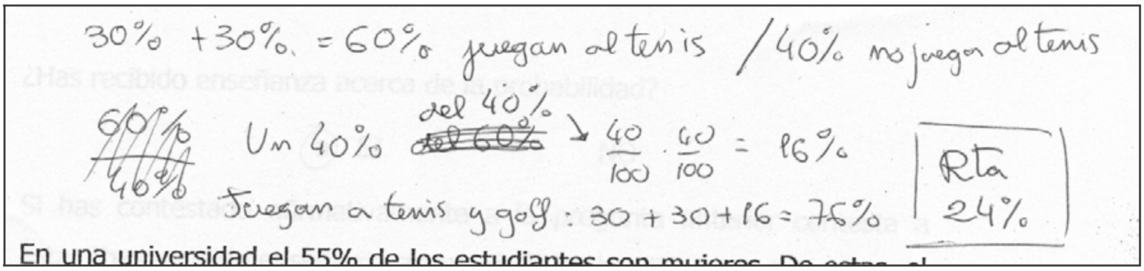

Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

Para visualizar los datos, los escribo como conjuntos (B baloncesto y F fútbol). Deduzco que un 30% + 30% = 60% practican baloncesto. Ahora, el 40% del 40% de alumnos practican fútbol y no baloncesto. $\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{1600}{10000} = \frac{16}{100}$; es decir el 16%. Luego el 30% + 16% = 46% de alumnos practican fútbol

En probabilidad es 0'46.

Resolución 4.4.1.5. Actuación de un EFM en P1

Este estudiante de la Facultad de Matemáticas reconoce los sucesos y sus probabilidades expresadas en porcentajes, razona utilizando la aritmética y al final asigna probabilidad al suceso pedido. Utiliza tres relaciones aditivas, una de ellas la suponemos (el 40% no hace baloncesto viene del complementario del 60% hace baloncesto) y una relación multiplicativa.


30% + 30% = 60% juegan al tenis / 40% no juegan al tenis

~~60%~~ 46% Un 40% del 40% ~~del 60%~~ → $\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = 16\%$

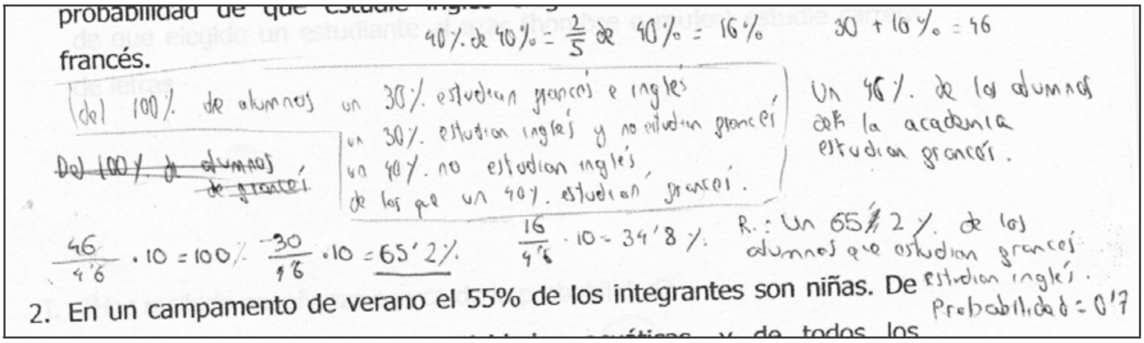
Juegan a tenis y golf: 30 + 30 + 16 = 76%

$\boxed{\text{Rta } 24\%}$

En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el

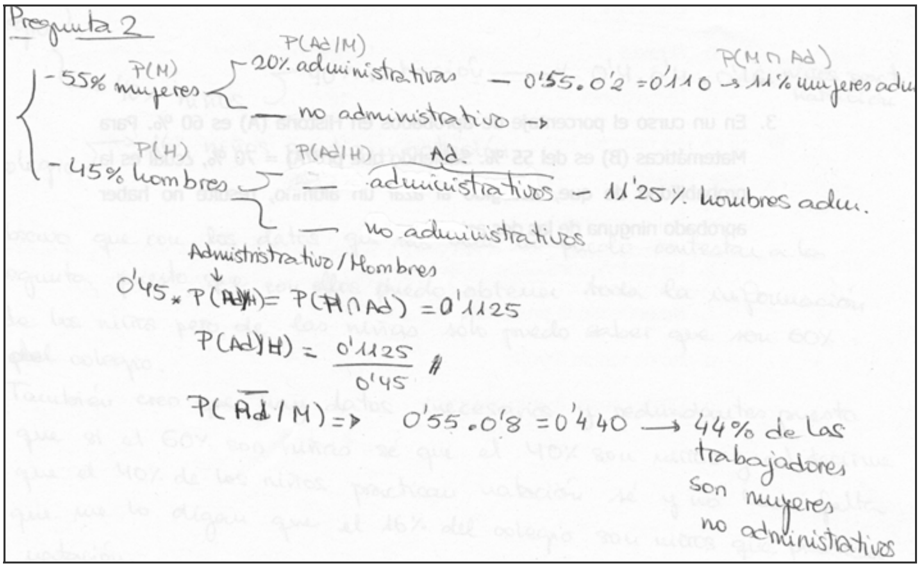
Resolución 4.4.1.6. Actuación de un 2BT-C en P2

La resolución 4.4.1.6 muestra la actuación de un estudiante de 2BT-C en P2. Apreciamos la utilización de la aritmética en el razonamiento. Ha utilizado 4 relaciones aditivas (dos en la primera línea y dos en la última) y una relación multiplicativa. El resultado está expresado en porcentajes.


probabilidad de que estudie inglés
francés.
40% de 40% = 2/5 de 40% = 16%   30 + 16% = 46
del 100% de alumnos un 30% estudian francés e inglés
un 30% estudian inglés y no estudian francés
un 40% no estudian inglés,
de los que un 40% estudian francés.
~~Del 100% de alumnos de francés~~
Un 46% de los alumnos de la academia estudian francés.
46/4'6 · 10 = 100%   30/4'6 · 10 = 65'2%   16/4'6 · 10 = 34'8%
R.: Un 65'2% de los alumnos que estudian francés estudian inglés.
Probabilidad = 0'7
2. En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De

Resolución 4.4.1.7 Actuación de un 1BT-C en P3

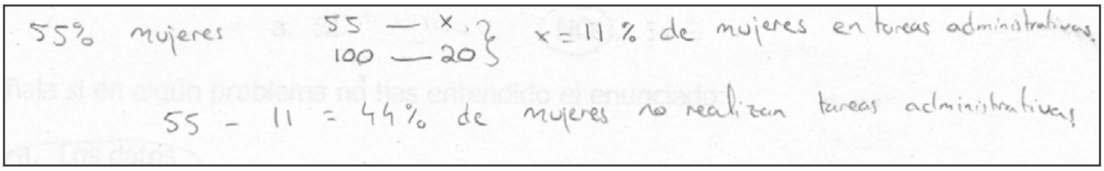
La resolución 4.4.1.7 da cuenta del proceso de resolución de un estudiante de 1BT-C en P3. Utiliza el razonamiento aritmético y deja el resultado en tanto por cien y en término de probabilidad. Este estudiante escribe en la prueba que no ha recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad.


Pregunta 2
- 55% mujeres P(M) — 20% administrativas P(Ad/M) — 0'55 · 0'2 = 0'110 → 11% mujeres adm. P(M ∩ Ad)
— no administrativo →
- 45% hombres P(H) — administrativos Ad. P(Ad/H) — 11'25% hombres adm.
— no administrativos
Administrativo/Hombres
0'45 * P(Ad/H) = P(H ∩ Ad) = 0'1125
P(Ad/H) = 0'1125/0'45 #
P($\overline{Ad}$/M) => 0'55 · 0'8 = 0'440 → 44% de las trabajadoras son mujeres no administrativas

Resolución 4.4.1.9. Actuación de un EFM en P4

El único estudiante que resuelve el problema P4 utilizando el cálculo de probabilidades es el de la facultad de Matemáticas. Éste organiza las cantidades con una herramienta que tiene que ver con el árbol de contingencia, utiliza las reglas de cálculo "de y entre probabilidades" y el resultado lo expresa en porcentajes, traduciendo la cantidad expresada en términos de probabilidad, tal y como podemos observar en la resolución 4.4.1.9.

Los estudiantes de 1BT-C razonan todos de forma análoga al ejemplo que mostramos en la resolución 4.4.1.10: se reconocen los sucesos y las cantidades asignadas a dichos sucesos, en el proceso de resolución se utiliza una regla de tres y una relación aditiva, dejando el resultado en porcentajes.


55% mujeres $\left.\begin{array}{l} 55 — x \\ 100 — 20 \end{array}\right\}$ $x = 11$ % de mujeres en tareas administrativas

55 − 11 = 44% de mujeres no realizan tareas administrativas

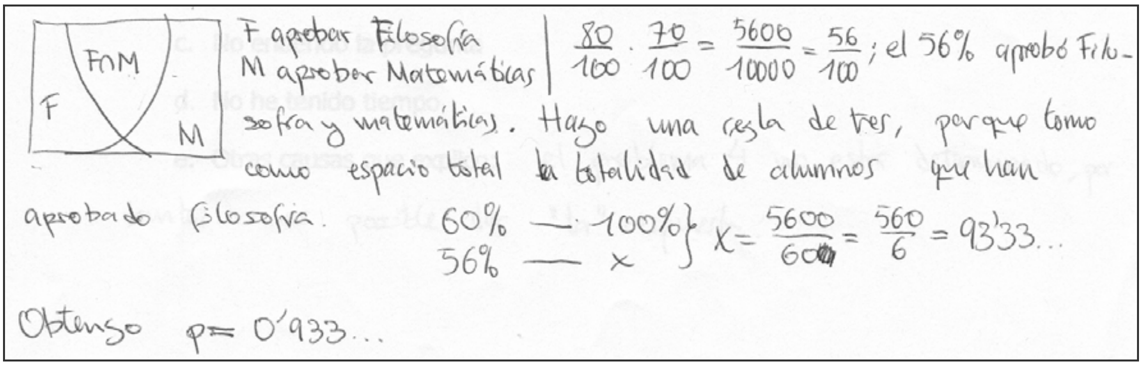
Resolución 4.4.1.10 Estrategia seguida por estudiantes de 1BT-C en P4

En relación con P5 todos los estudiantes que han resuelto el problema con éxito han seguido una estrategia similar. Han utilizado la aritmética en su razonamiento, calculando el 11% de las mujeres y estudiantes de letras y luego sumando esta cantidad a la de hombres y estudiantes de letras:

$$11 + 11.25 = 22.25.$$

En relación con P6 los dos estudiantes que han realizado bien el problema son estudiantes de la facultad de matemáticas. Uno de ellos directamente ha utilizado el teorema de Bayes, indicando que es éste el teorema utilizado. El otro ha utilizado la definición de probabilidad condicional, usando una tabla de contingencia para calcular la intersección y la marginal necesarias para calcular la condicional pedida.

En relación con P7 cuatro estudiantes han realizado bien el problema, todos de la facultad de matemáticas. Tres de ellos han traducido todos los datos a términos de probabilidad y mediante dos relaciones multiplicativas utilizando las reglas "de y entre probabilidades" han calculado la probabilidad pedida. La resolución 4.4.1.11 muestra el razonamiento del estudiante que no ha utilizado las reglas "de y entre probabilidades".



Resolución 4.4.1.11: Actuación de un EFM en P7

Éste reconoce los sucesos y los cardinales de los conjuntos asociados a ellos, utiliza la aritmética y asigna al final la probabilidad pedida.

En relación con P10 dos estudiantes han realizado bien el problema. Han utilizado las reglas de cálculo de la probabilidad para resolverlo. Mediante una relación aditiva calculan la marginal del tenis. Utilizando una aditiva y una multiplicativa calculan la intersección de golf y no tenis. Y por último, la intersección pedida como 1 menos la suma de las tres intersecciones conocidas.

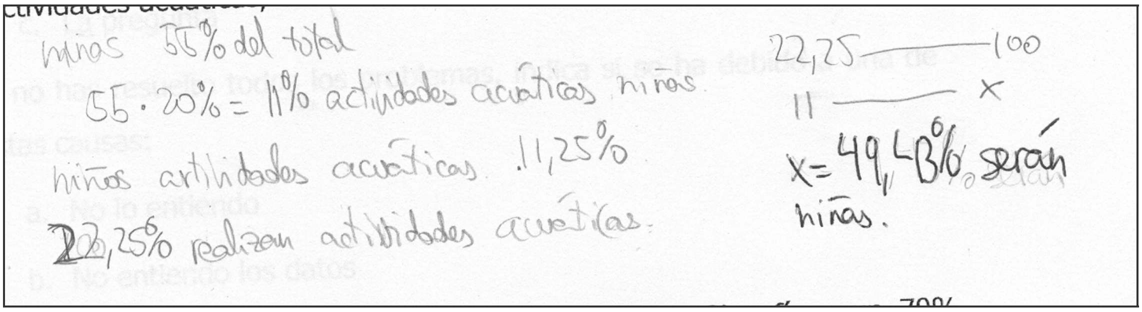
En relación con P12 los dos estudiantes de la facultad de matemáticas que resuelven con éxito, utilizan las reglas de cálculo de la probabilidad, uno calculando primero con una relación multiplicativa la intersección mujer y realizar tareas administrativas, usando después una relación aditiva para calcular la intersección pedida, y el otro calculando primero, mediante la relación aditiva, la condicional complementaria a la dada y mediante una relación multiplicativa calcula la intersección pedida. Los demás estudiantes de 2BT-C, 2BCC-H, 1BCC-H y de 4ESO razonan de forma análoga a este último. Únicamente el de 1BCC-H traduce los datos a porcentajes, utilizando relaciones similares.

En relación con P13 el estudiante de la facultad de matemáticas que resuelve con éxito el problema, utiliza la tabla de contingencia para calcular la marginal pedida, y antes mediante una relación multiplicativa ha calculado la intersección necesaria.

Los estudiantes de 2BT-C razonan de la misma forma pero sin usar la tabla de contingencia.

En relación con P14 el estudiante de la facultad de matemáticas que realiza bien el problema, utiliza las reglas de cálculo "de y entre probabilidades". Mediante una relación multiplicativa calcula una intersección, *niñas y actividades acuáticas*, mediante una aditiva calcula la marginal *actividades acuáticas*, y por último, utilizando la definición de probabilidad condicional, (relación multiplicativa), calcula la condicional pedida.

El estudiante de 1BT-C que ha resuelto con éxito, pasa los datos a porcentajes, razona utilizando la aritmética y deja el resultado en porcentajes, tal y como se observa en la resolución 4.4.1.12.



Resolución 4.4.1.12: Actuación de un 1BT-C en P14

En relación con P15 son dos estudiantes de la facultad de matemáticas los que presentan el proceso de resolución con éxito. Ambos han razonado de forma análoga, utilizado las reglas de cálculo "de y entre probabilidades". Mediante una relación multiplicativa han calculado la intersección necesaria para calcular la condicional pedida utilizando la definición de probabilidad condicional (otra relación multiplicativa).

Las tablas 4.4.1.13 y 4.4.1.14 muestran los resultados, la primera en frecuencias absolutas y la segunda en porcentajes, de las actuaciones de los estudiantes que dan cuenta de los descriptores 1 y 7, así como la distribución de los estudiantes que han tenido éxito por niveles educativos y las estrategias utilizadas en el proceso de resolución, clasificando cada uno de los problemas en problemas de asignación de probabilidades o en problema de cálculo de probabilidades.

		Problemas con datos en porcentajes								Problemas con datos en probabilidad							
	Problema	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
	Muestra	34	33	33	34	66	33	67	34	34	33	33	34	33	33	33	33
	1. Éxito	4	6	1	8	28	2	4	0	0	2	0	6	3	2	2	0
Nivel	EFM	1	0	0	2	2	2	4	0	0	1	0	2	1	1	2	0
	2BT-C	0	3	0	2	8	0	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0
	2BCS-H	0	0	0	3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	1BT-C	1	1	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	1BCS-H	2	2	1	1	8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	4ESO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	7. Blanco	11	13	6	6	18	8	24	9	13	5	14	15	12	12	21	15
Estrategia	Asignación	4	6	1	7	28	0	1*	0	0	0	0	1	0	1	0	0
	Cálculo	0	0	0	1*	0	2*	3*	0	0	2	0	5	3	1*	2*	0

Tabla 4.4.1.13 Número de estudiantes que han tenido éxito en la resolución de cada problema por niveles escolares, que lo han dejado en blanco, concretando la estrategia utilizada en los problemas resueltos con éxito– * EFM

	%	Problemas con datos en porcentajes								Problemas con datos en probabilidad							
	Problema	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
	1. Éxito	12	18	3	24	42	6	6	0	0	6	0	18	9	6	6	0
	7. Blanco	32	39	18	18	27	24	36	26	38	15	42	44	36	36	64	45
Estrategia	Asignación	100	100	100	87	100	0	25	0	0	0	0	16.7	0	50	0	0
	Cálculo	0	0	0	13*	0	100	75	0	0	100	0	83.3	100	50*	100	0

Tabla 4.4.1.14 Porcentajes de estudiantes que han resuelto con éxito, en blanco y tipo de razonamiento utilizado en los problemas resueltos con éxito – * EFM

Lo primero que observamos es que, en general, los problemas con los datos en porcentajes han sido resueltos con éxito por más estudiantes que los problemas con los datos expresados en términos de probabilidad. Además en estos ocho primeros problemas la estrategia seguida por la mayoría de los estudiantes que han resuelto con éxito cada problema ha sido la utilización de la aritmética y la asignación de probabilidades al final.

Observando estos resultados, parece evidente que la naturaleza de los datos influye, tanto en el éxito en la resolución del problema, como en el proceso de resolución del problema.

La influencia de la naturaleza de las cantidades en el éxito en la resolución del problema la deducimos de los resultados que tienen que ver con los descriptores 1 y 7, que dan cuenta del éxito y del problema blanco o similar, respectivamente. En los problemas del 9 al 16, en los que los datos están en términos de probabilidad, el porcentaje de éxito en la resolución del problema es inferior al de los 8 primeros. Además resaltamos que los problemas en los que los datos son términos de probabilidad, han sido realizados y/o intentados por menos estudiantes, pues vemos que el porcentaje de estudiantes que muestra el descriptor blanco o similar es superior en estos últimos ocho problemas, menos en el problema 2, en el que llama la atención el alto porcentaje de estudiantes que han dejado el problema en blanco.

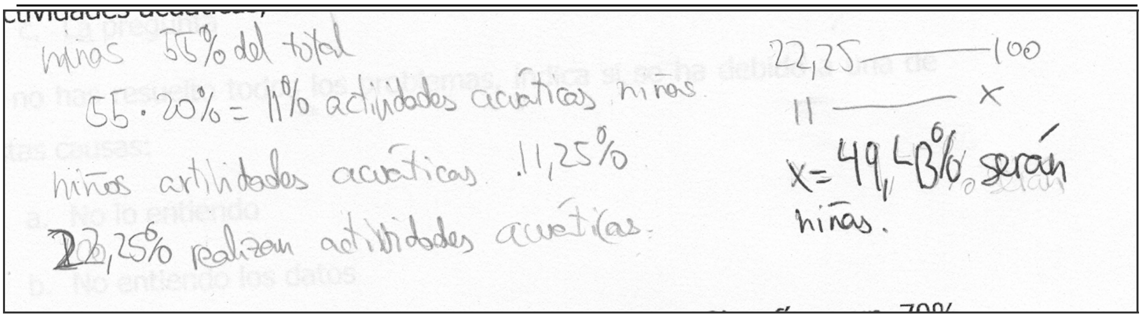
Observando los resultados, que muestran las estrategias utilizadas por los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas, podemos concluir que la naturaleza de las cantidades tiene influencia en el proceso de resolución. La naturaleza de los datos influye en el proceso de resolución del problema, clasificando el problema según el modo de resolución. Así clasificamos el problema como de asignación, en general, cuando los datos están en porcentajes o de cálculo de probabilidades, cuando los datos están en términos de probabilidad. Observamos la tabla 4.4.1.15, que da cuenta de los porcentajes de estudiantes que han resuelto con éxito el problema utilizando una determinada estrategia.

	%	Problemas con datos en porcentajes								Problemas con datos en probabilidad							
	Problema	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
Estrategia	Asignación	100	100	100	87	100	0	25*	0	0	0	0	16.7	0	50	0	0
	Cálculo	0	0	0	13*	0	100*	75*	0	0	100	0	83.3	100	50*	100*	0

Tabla 4.4.1.15: Porcentajes de estudiantes que dan cuenta de los tipos de solución para los problemas resueltos con éxito – * EFM

Una de las características de la tabla 4.4.1.15 es que en algunos casos, se contradice la conclusión (Lonjedo 2003; Huerta y Lonjedo 2003a, 2003b) de que los datos en tantos por cien favorecen la resolución del problema utilizando la aritmética y asignando probabilidad al final. Hacemos notar el resultado del problema 6 y el resultado del problema 7. La mayoría de los estudiantes que han resuelto bien estos problemas lo han hecho utilizando el cálculo "de y entre probabilidades". Todos ellos son estudiantes de la Facultad de Matemáticas, competentes en la teoría de la probabilidad.

De la misma manera observamos que, en problemas con datos en términos de probabilidad, algunos estudiantes traducen dichos términos a porcentajes y resuelven el problema utilizando la aritmética y asignando probabilidad al final del proceso de resolución. Éste es el caso de un resolutor del problema 12. Hay un estudiante de 1º de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales que traduce los datos del problema expresados en términos de probabilidad a porcentajes y resuelve el problema utilizando la aritmética. En relación con el problema 14, un estudiante de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico es el que realiza el mismo proceso de traducción y resuelve utilizando la aritmética. La resolución 4.4.1.13 muestra este proceso.



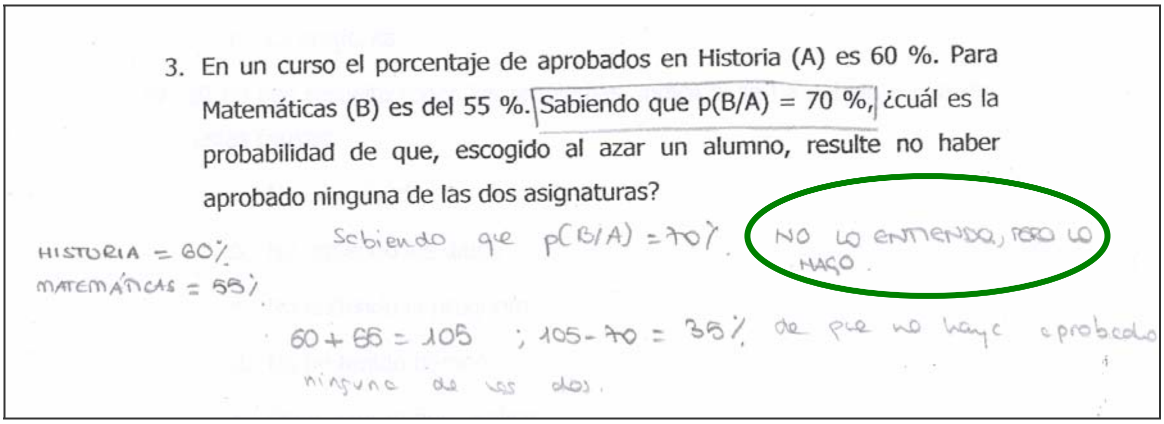
Resolución 4.4.1.13: Actuación de un 1BT-C en P14

La tabla 4.4.1.16 muestra los resultados en porcentajes de los estudiantes que han resuelto con éxito y ha dejado en blanco o similar los 8 problemas con los datos en porcentajes.

%	Problemas con datos en porcentajes							
Problema	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Éxito	12	18	3	24	42	6	6	0
Blanco	32	39	18	18	27	24	36	26

Tabla 4.4.1.16: Porcentajes de los estudiantes han resuelto con éxito o que han dejado en blanco o similar los problemas con datos en porcentajes

Los resultados del problema 8 son coherentes con el enunciado del problema y el nivel de competencia de los estudiantes. Este problema presenta una de las cantidades utilizando el lenguaje formal de la probabilidad: $p(B|A) = 70\%$. Esta forma de presentar el dato hace que los estudiantes no conocedores de la teoría de probabilidad condicional no puedan resolver el problema o hagan una mala interpretación de esta cantidad, ya que es imposible para ellos entender este sistema de signos. Ningún estudiante resuelve el problema con éxito. Los dos estudiantes de la Facultad de Matemáticas que participan en la resolución de este problema, utilizan fórmulas erróneas de teoría de probabilidad en el proceso de resolución. La resolución 4.4.1.14 nos muestra la situación de incomprensión en este problema.



3. En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. $\boxed{\text{Sabiendo que } p(B/A) = 70\ \%,}$ ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

HISTORIA = 60%
MATEMÁTICAS = 55%

Sabiendo que p(B/A) = 70%. NO LO ENTIENDO, PERO LO HAGO.

60 + 55 = 105 ; 105 - 70 = 35% de que no haya aprobado ninguna de los dos.

Resolución 4.4.1.14: Actuación de un 1BC-H en P8

En relación al problema P2 con un porcentaje de estudiantes que presentan éxito en la resolución del problema no de los más bajos, tiene un alto porcentaje de respuestas en blanco o similares, 39%. No entendemos por qué se produce, ya que el enunciado de P2 es similar al de los problemas P1 y P3 en cuanto a la estructura de cantidades. Los tres problemas presentan las mismas cantidades, se describen con N_2C_1. Éstas están expresadas en porcentajes y lo que varía es el contexto así como la pregunta del problema. En P1 este porcentaje es también alto: 32%. En P3 no es tan elevado. Además si observamos los resultados del problema isomorfo a P2 en términos de probabilidad, P10, el porcentaje de problema en blanco es del 15%. Este porcentaje es mucho más bajo cuando lo lógico, al añadir la dificultad de las cantidades expresadas en términos de probabilidad, el porcentaje debería haber crecido.

c. Lenguaje no simbólico utilizado en la expresión de la condicionalidad en el texto del problema

La intención de este subapartado es presentar un estudio acerca de la influencia del lenguaje no simbólico en el proceso de resolución del problema, concretamente en la interpretación de la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional. Conocemos las construcciones condicionales del castellano (apartado 4.1.2.2: Estructura semántica de los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal, p. 187) y nos gustaría conocer cuáles, de estas construcciones, favorecen la interpretación deseada del dato condicional y de la pregunta condicional por parte del resolutor. Este conocimiento se hace, de momento, un poco difícil en su totalidad por el tiempo, pero nuestra intención es empezar a confeccionar una lista con estas construcciones.

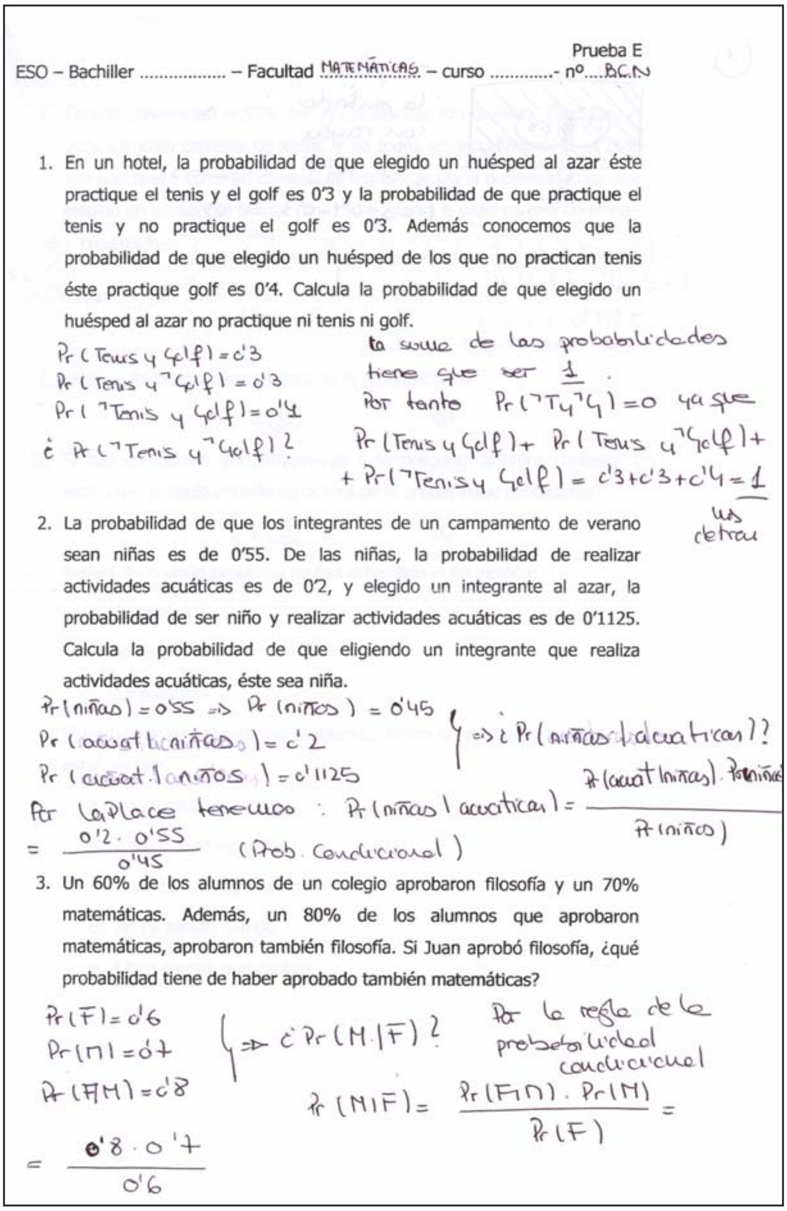
El análisis de estos resultados nos servirá para elegir una construcción gramatical para todos los problemas de la segunda fase, con el fin de comprobar la influencia de esta construcción en la interpretación deseada del dato y/o la pregunta condicional. En principio, las normas de gramática indican que la construcción SI, es la construcción condicional por excelencia, pero no tenemos conocimiento de ningún estudio que muestre construcciones condicionales favorables a la interpretación de la condicionalidad en el texto del problema, en la resolución de problemas de probabilidad condicional. Nosotros hemos presentado en esta memoria las diferentes construcciones gramaticales que aparecen en los problemas de probabilidad condicional de los libros de texto, y que gramaticalmente son parafraseables como construcciones gramaticales condicionales. (pp. 184-197)

Dividimos este análisis en dos partes. Primero analizamos las actuaciones de un estudiante concreto en cada una de los problemas de la prueba, con el fin de averiguar si existe alguna estructura gramatical que favorece la interpretación deseada de la probabilidad. En segundo lugar, analizamos cada uno de los problemas de la primera fase resaltando los descriptores que tienen que ver con el éxito en la resolución del problema y los que dan cuenta de las interpretaciones del dato o la pregunta. Además presentamos los problemas en parejas, tal y como hemos descrito en el apartado anterior, ya que estas parejas representan problemas isomorfos, en cuanto a $N_2C_iT_j$ y en la medida de lo posible en cuanto al texto del problema. Así mostramos que los porcentajes significativos de estudiantes que muestran determinadas respuestas en cada pareja de problemas isomorfos son similares, teniendo en cuenta que los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en términos de probabilidad han sido realizados por menos estudiantes. De este análisis no podemos asegurar que sea, únicamente, una determinada estructura gramatical de la expresión de la probabilidad condicional (o dato interpretable como ésta) en el texto del problema, la que induzca al resolutor a la interpretación no deseada de ésta. Ahora bien, de todas las estructuras utilizadas en esta colección de problemas elegiremos la que, teniendo en cuenta los resultados, cause una interpretación de la condicional como intersección con menor porcentaje de estudiantes. Podemos asegurar que el lenguaje natural no simbólico utilizado en la expresión de la condicionalidad no es el único factor que influya en la interpretación de ésta, pero sí que es un factor de peso, sobre todo si el texto está redactado de forma ambigua.

Pasamos a mostrar la primera parte. Elegimos en primer lugar el nivel educativo superior: la Facultad de Matemáticas, ya que nos aseguramos que estos estudiantes tienen conocimiento formal acerca de la teoría de la probabilidad. Desde luego que encontramos estudiantes que interpretan los datos y la pregunta del problema siempre de la forma esperada, pero a la vez encontramos estudiantes en los que su comportamiento a la hora de interpretar los datos no es regular. Elegimos uno de estos estudiantes de EFM. Las resoluciones 4.4.1.15, 4.4.1.16 y 4.4.1.17 muestran de la actuación de este estudiante en la prueba E. En el primer problema de esta prueba, P10, el estudiante interpreta la condicional como una intersección. ¿A qué es debido? Realmente no podemos contestar a la pregunta con toda seguridad. Encontramos diferentes factores que pueden influir en esta interpretación, como la estructura gramatical utilizada en la expresión de la probabilidad condicional, el adverbio ADEMÁS utilizado en el comienzo de esta estructura, y también podemos pensar, que el hecho de que esta cantidad condicional sea la tercera cantidad que presenta el problema, siendo las dos primeras dos probabilidades de la intersección también ha podido influir en esta interpretación. En el proceso de resolución del segundo problema, P14, observamos que el estudiante interpreta la tercera cantidad como una condicional cuando es una intersección. ¿Es la construcción? ¿Es la posición de esta tercera cantidad presentada en el texto del problema detrás de la condicional? En el tercer problema de la prueba, P7, este estudiante interpreta perfectamente las cantidades. En este tercer problema también se utiliza el ADEMÁS, y no ha causado problemas y podemos decir que la frase que da cuenta de la condicional tanto en el dato como en la pregunta es, en ambos casos una frase ambigua, por el uso del TAMBIÉN[20]. La estructura utilizada en la expresión del dato interpretable como una probabilidad condicional es DE LOS QUE, similar a la utilizada en el problema anterior.

[20] **también.** adv. m. para indicar la igualdad, semejanza, conformidad o relación de una cosa con otra ya nombrada.

Son sinónimos de TAMBIÉN: Así, igualmente, todavía, además, aún, hasta, de igual modo, de la misma manera, asimismo. (Pey y Ruiz, 1967)



Prueba E

ESO – Bachiller .... – Facultad MATEMÁTICAS – curso ....- nº....BCN

1. En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

Pr (Tenis y Golf) = o'3
Pr (Tenis y ¬Golf) = o'3
Pr (¬Tenis y Golf) = o'4
¿ Pr (¬Tenis y ¬Golf) ?

La suma de las probabilidades tiene que ser 1.
Por tanto Pr(¬T y ¬G) = 0 ya que
Pr (Tenis y Golf) + Pr (Tenis y ¬Golf) + + Pr(¬Tenis y Golf) = o'3+o'3+o'4 = 1
las detrás

2. La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

Pr (niñas) = o'55 ⇒ Pr (niños) = o'45
Pr (acuat | niñas) = o'2
Pr (acuat | niños) = o'1125
⇒ ¿ Pr (niñas | acuaticas) ?

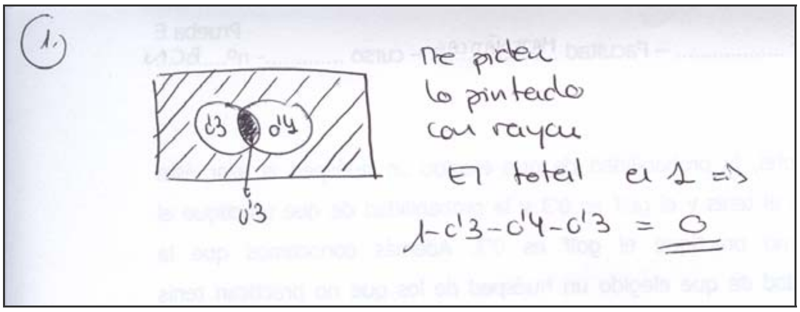
Por LaPlace tenemos: Pr (niñas | acuaticas) = $\frac{Pr(acuat \mid niñas) \cdot Pr(niñas)}{Pr(niños)}$
$= \frac{o'2 \cdot o'55}{o'45}$ (Prob. Condicional)

3. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

Pr (F) = o'6
Pr (M) = o'7
Pr (F|M) = o'8
⇒ ¿ Pr (M|F) ?

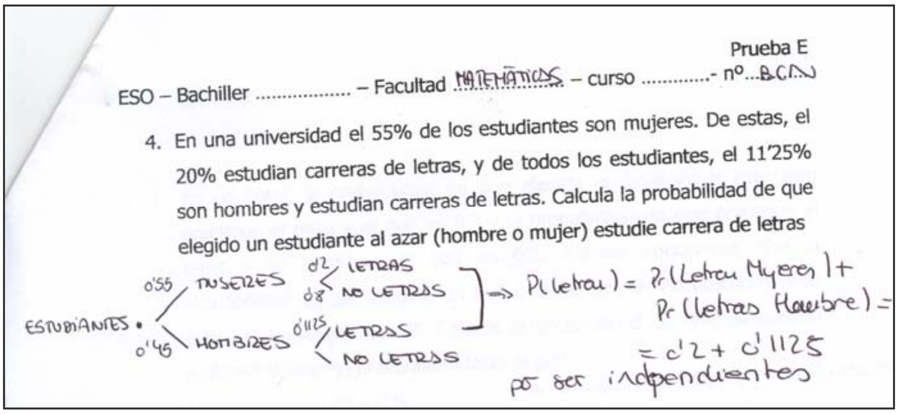
Por la regla de la probabilidad condicional
Pr (M|F) = $\frac{Pr(F \mid M) \cdot Pr(M)}{Pr(F)}$ =
$= \frac{o'8 \cdot o'7}{o'6}$

Resolución 4.4.1.15: La prueba E por un estudiante de EFM



Resolución 4.4.1.16: Continuación del problema 1 de la prueba E por un estudiante de EFM

En el cuarto problema, P5, este estudiante interpreta el dato condicional como una intersección y actúa en consecuencia, sumando las dos probabilidades de la intersección para calcular la marginal pedida. Al presentar las cantidades en una especie de árbol, parece que haya interpretado la condicional correctamente y la intersección como una condicional, pero al hacer los cálculos vemos que no. Observamos que la construcción utilizada en la expresión de este dato es otra vez la que presenta la reducción del espacio muestral utilizando la preposición DE. Y esta vez el estudiante no la ha interpretado correctamente. Además escribe que los cálculos los hace por ser independientes, también idea errónea.



Prueba E

ESO – Bachiller .... – Facultad MATEMÁTICAS – curso ....- nº...BCN

4. En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

ESTUDIANTES • 0'55 MUJERES 0'2 LETRAS 0'8 NO LETRAS; 0'45 HOMBRES 0'1125 LETRAS NO LETRAS

→ Pr(letras) = Pr(Letras Mujeres) + Pr(letras Hombre) =
= 0'2 + 0'1125
por ser independientes

Resolución 4.4.1.17: Último problema de la prueba E de un estudiante de EFM

Realizamos el mismo estudio con un estudiante de 4º ESO, del que sabemos que ha recibido instrucción acerca de la probabilidad, pero no de la probabilidad condicional. Las resoluciones 4.4.1.18, 4.4.1.19 y 4.4.1.20 dan cuenta de la actuación de este estudiante resolviendo los problemas de la prueba E. En el primer problema se comporta igual que el estudiante de EFM, pero el estudiante de 4ESO ha traducido las cantidades a porcentajes. Interpreta la condicional como una intersección y actúa en consecuencia. Como las tres intersecciones que tiene ya suman 100, el porcentaje que se corresponde con la intersección pedida es cero.

En el segundo problema, en el que también traduce las cantidades a porcentajes, pensamos que ha interpretado la condicional como una intersección, pues a 55, que sería el número de niñas sobre 100, le resta el número de niñas que realizan actividades acuáticas, 20. El proceso de resolución no lo entendemos a partir de este paso. En el problema se pregunta por una condicional, que este estudiante podría haber interpretado por una intersección, pero a la cantidad calculada, 35, que sería el número de niñas que no realizan actividades acuáticas sobre 100, le resta el número de niños que realizan actividades acuáticas, cantidades que no tienen que ver.

En el tercer problema interpreta la condicional del dato como una intersección y a la vez interpreta la condicional de la pregunta, condicional inversa a la condicional del dato, como la misma intersección. En este problema cada una de las condicionales está expresada utilizando una estructura condicional diferente. Ahora bien, en ambas construcciones se utiliza el adverbio TAMBIÉN, que como indica su definición produce ambigüedad en el texto, ya que induce a la confusión de la condicional con la intersección.

Prueba E

ESO – Bachiller .... – Facultad .... – curso 4º - nº M.M.

1. En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

tenis y golf → 30%
tenis pero no golf → 30%
no tenis pero si golf → 40%

30+30+40 = 100

- No hay persona que no practique alguno de estos deportes, porque el 100% practica o los dos o uno de estos.

2. La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

niñas → 55% → 20% act. acuáticas
niños y realice act. acuática → 11'25%

55% − 20% = 35% | 35% − 11'25% = 23'75 %

R.- 23'75% de que sea niña y realice act. acuáticas

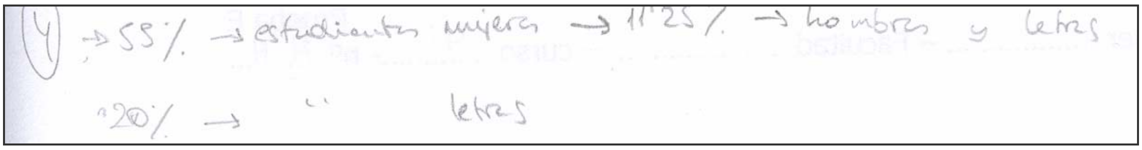
3. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

60% → apr. Fil.
70% → Mat.
80% Mat. y Fil.

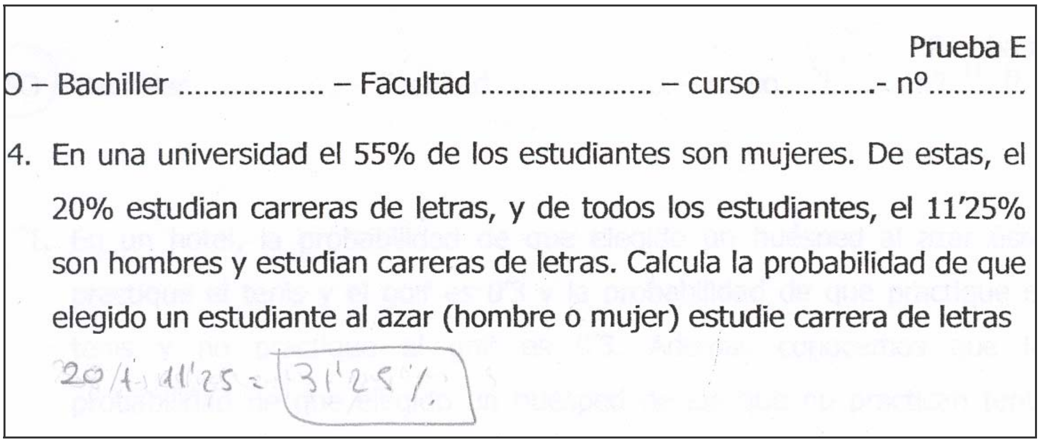
Tiene el 80% (0'8) de aprobar también matemáticas

Resolución 4.4.1.18: La prueba E por un estudiante de 4ESO

Por último las resoluciones 4.4.1.19 y 4.4.1.20 muestran la actuación de este estudiante en el último problema de la prueba. Interpreta la condicional como una intersección y actúa en consecuencia, suma las dos intersecciones para calcular la marginal pedida.


(4) → 55% → estudiantes mujeres → 11'25% → hombres y letras
20% → " letras

Resolución 4.4.1.19: La presentación de las cantidades del cuarto problema de la prueba E por un estudiante de 4ESO


Prueba E
O – Bachiller .... – Facultad .... – curso ....- nº...........

4. En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

20 + 11'25 = 31'25%

Resolución 4.4.1.20: Último problema de la prueba E de un estudiante de 4ESO

Podemos asegurar que el comportamiento de un estudiante en cada uno de los problemas de la prueba, habitualmente es similar.

Pasamos ahora a la segunda parte de este análisis.

La primera pareja de problemas la forman el problema P1 y el problema P9. La tabla 4.4.1.17 muestra ambos problemas.

PROBLEMA P1	PROBLEMA P9:
De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. **Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol**. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0.3. **Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumno de los que no practica baloncesto, éste practique fútbol es 0'4**. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

Tabla 4.4.1.17: Problemas P1 y P9

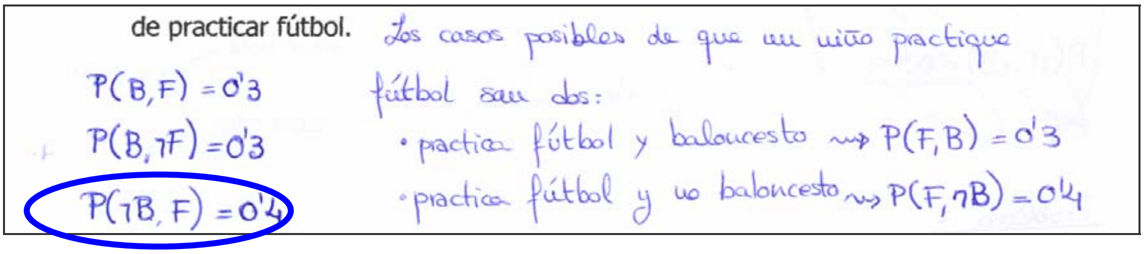
La tabla 4.4.1.18 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P1 y P9, así como el número de estudiantes participantes en la resolución de cada uno de los problemas.

	P1	P9
Muestra	34	34
1 Éxito	11.76%	0%
2i Condicional por marginal (datos)	2.94%	0%
2ii Condicional por intersección	35.29%	29.41%
2iii 2ª intersección por marginal y condicional por marginal	0%	11.76%
2v Intersección por marginal	5.88%	2.94%
2vi Intersección por condicional	5.88%	0%
2vii Otras interpretaciones de datos	0%	2.94%

Tabla 4.4.1.18: Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P1 y P9, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

De los 34 estudiantes a los que se les ha propuesto P1, 17 han interpretado los datos de forma no deseada, el 50% del total, y de los 34 estudiantes a los que se les ha propuesto P9, 16 presentan interpretaciones no deseadas de los datos, casi el 50%. Observamos que, en ambos problemas, la mayoría de los estudiantes que presentan interpretaciones no deseadas son en la interpretación del dato condicional por una intersección. En P1 utilizamos la construcción: SABEMOS QUE DE LOS ALUMNOS QUE NO PRACTICAN BALONCESTO, UN 40% HACEN FÚTBOL, y en P9 la construcción gramatical es similar: SABEMOS QUE LA PROBABILIDAD DE QUE ELEGIDO UN ALUMNO DE LOS QUE NO PRACTICA BALONCESTO, ÉSTE PRACTIQUE FÚTBOL ES 0.4. Se define la condición utilizando una oración introducida por un verbo en indicativo, SABEMOS, y diferente de la oración condicionada. Además de observar la estructura de la oración que presenta el dato condicional, tenemos en cuenta el orden de presentación de los datos. El dato condicional ocupa el tercer lugar, después de dos datos intersección. Quizás este hecho induce al resolutor a la interpretación del dato condicional por la intersección. No podemos concretar si la interpretación de la condicional por una intersección es debida al lenguaje no simbólico utilizado para expresar la condicional, o además, el hecho de ser el tercer dato después de dos intersecciones contribuye a esta interpretación.

Del resto de interpretaciones de los datos, no podemos saber a qué han sido debidas. Si observamos el texto de cualquiera de los dos problemas, la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional, está entre comas, UN 40% HACE FÚTBOL en P1 y ÉSTE PRACTIQUE FÚTBOL ES 0.4, en P9. Este hecho puede haber influido en la interpretación de la probabilidad condicional por una probabilidad marginal, pero no podemos asegurarlo.


de practicar fútbol.

$P(B,F) = 0'3$

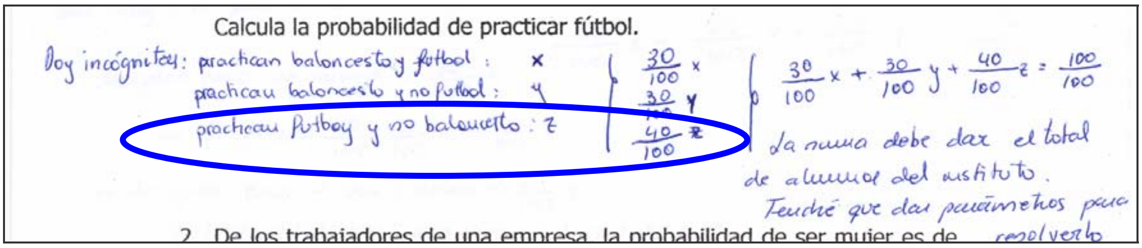
$P(B,\neg F) = 0'3$

$P(\neg B,F) = 0'4$

Los casos posibles de que un niño practique fútbol son dos:

- practica fútbol y baloncesto $\rightsquigarrow P(F,B) = 0'3$
- practica fútbol y no baloncesto $\rightsquigarrow P(F,\neg B) = 0'4$

Resolución 4.4.1.21: Actuación de un estudiante de EFM e P1


Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

Hay incógnitas: practican baloncesto y fútbol : x

practican baloncesto y no fútbol : y

practican fútbol y no baloncesto : z

$\frac{30}{100}x$, $\frac{30}{100}y$, $\frac{40}{100}z$

$\frac{30}{100}x + \frac{30}{100}y + \frac{40}{100}z = \frac{100}{100}$

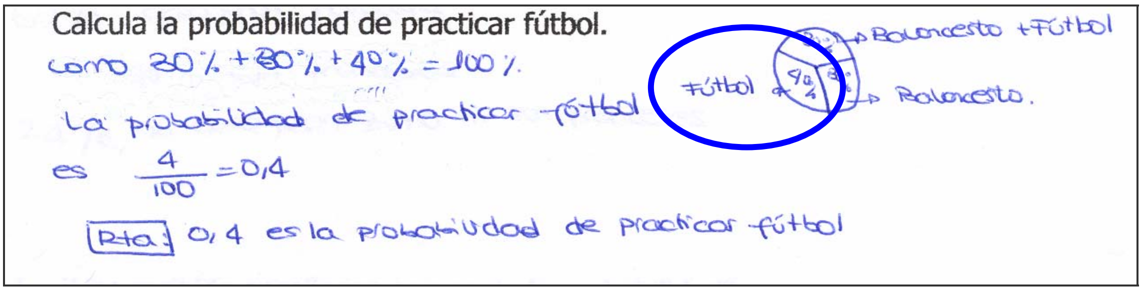
La suma debe dar el total de alumnos del instituto.

Tendré que dar parámetros para resolverlo

2. De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de

Resolución 4.4.1.22: Actuación de un estudiante de 2 BTC en P1

En las resoluciones 4.4.1.21 y 4.4.1.22 se muestran las actuaciones de dos estudiantes en P1. En 4.4.1.21 es un estudiante de EFM y en 4.4.1.22 es un estudiante de 2 BTC. Observamos claramente que han interpretado el dato condicional como una intersección.


Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

como 30% + 30% + 40% = 100%.

La probabilidad de practicar fútbol es $\frac{4}{100} = 0{,}4$

$\boxed{\text{Rta:}}$ 0,4 es la probabilidad de practicar fútbol

Resolución 4.4.1.23: Actuación de un estudiante de 2 BCT en P1

En la resolución 4.4.1.23 observamos la actuación de un estudiante de 2 BTC en P1. Este estudiante ha interpretado la condicional como una marginal, además de presentar otros errores.

La siguiente pareja de problemas isomorfos, que se describen con $N_2C_1T_3$, está formada por el problema P2 y el problema P10. La tabla 4.4.1.19 nos muestra estos dos problemas.

PROBLEMA 2	PROBLEMA 10
Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. **Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis, un 40% practican golf.** Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. **Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4.** Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

Tabla 4.4.1.19 Problemas P2 y P10

La tabla 4.4.1.20 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, así como la muestra de estudiantes que han realizado cada problema cada uno de los problemas P2 y P10.

	P2	P10
Muestra	33	33
1 Éxito	18.18%	6.06%
2ii Condicional por intersección	24.24%	48.48%
2iii Intersección por marginal y condicional por marginal	12.12%	30.3%
3iii Otras interpretaciones de la pregunta	3.03%	0%

Tabla 4.4.1.20 Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P2 y P10, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional i en la pregunta.

En esta tabla observamos que, de los 33 estudiantes a los que se les ha propuesto P2, el 39.39% presentan interpretaciones no deseadas de las cantidades y de los 33 estudiantes a los que se les ha propuesto P10, el 78.78% presentan interpretaciones no deseadas de los datos. La construcción gramatical de la oración que presenta la probabilidad condicional es similar a la de la pareja anterior, pero se inicia la frase con el adverbio además: ADEMÁS CONOCEMOS QUE DE LOS HUÉSPEDES QUE NO PRACTICAN TENIS UN 40% PRACTICAN GOLF, en P2 y ADEMÁS CONOCEMOS QUE LA PROBABILIDAD DE QUE ELEGIDO UN HUÉSPED DE LOS QUE NO PRACTICAN TENIS ÉSTE PRACTIQUE GOLF ES 0’4 en P10. El adverbio ADEMÁS[21], por su significado, puede ser una de las causas de la interpretación de la condicional por una intersección. El porcentaje de estudiantes que interpretan

[21] Además: adv. c. A más de esto o aquello. Diccionario de la Lengua Española, Real Academia Española.

el dato condicional como una intersección es elevado en ambos problemas, el 24.24% en P2 y el 49.49% en P10. Ahora bien, no podemos saber si únicamente es el adverbio la causa de las interpretaciones no deseadas, o es junto con la construcción de la oración subordinada condicional que se utiliza en el enunciado del problema para presentar la probabilidad condicional. Lo que observamos es que el resolutor interpreta el dato condicional como una intersección o como una marginal.

Por otro lado se produce la interpretación de la segunda probabilidad de la intersección como una probabilidad marginal y la probabilidad condicional con otra probabilidad marginal (descriptor 2iii), al igual que en los dos problemas P1 y P9, aunque el porcentaje de estudiantes que lo realiza no sea significativo. En los cuatro problemas la estructura gramatical es similar y esta interpretación podría ser debida a una lectura rápida del problema. En todas las oraciones en las que se presenta el dato condicional, la cantidad está situada al lado del suceso condicionado. Una lectura rápida del problema hace que el resolutor se quede con la parte final de la oración compuesta: UN 40% HACEN FÚTBOL e interprete la cantidad condicional como una probabilidad marginal. No tenemos pruebas de que estas interpretaciones hayan sido por este motivo.

La pareja siguiente está formada por los problemas P3 y P11, que se describen con $N_2C_1T_1$. La tabla 4.4.1.21 muestra estos dos problemas.

PROBLEMA 3	PROBLEMA 11
En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian ingles y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. **Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.**	En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie ingles y francés es 0'3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0'3. **Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0'4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.**

Tabla 4.4.1.21 Problemas P3 y P11

La tabla 4.4.1.22 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P3 y P11, así como el número de estudiantes que han participado en la resolución de estos problemas.

	P3	P11
Muestra	33	33
1 Éxito	3.03%	0%
2i Condicional por marginal (datos)	6.06%	3.03%
2ii Condicional por intersección	33.33%	15.15%
2iii Intersección por marginal y condicional por marginal	30.3%	12.12%
2iv Intersección por marginal y condicional por intersección	3.03%	3.03%
2v Intersección por marginal	3.03%	6.06%
3i Condicional por intersección (pregunta)	0%	12.12%

Tabla 4.4.1.22. Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P3 y P11, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

De los 33 estudiantes que han realizado P3, el 76% del total presenta interpretaciones no deseadas de las cantidades del problema. En la resolución de P11 el porcentaje de estudiantes es del 46%.

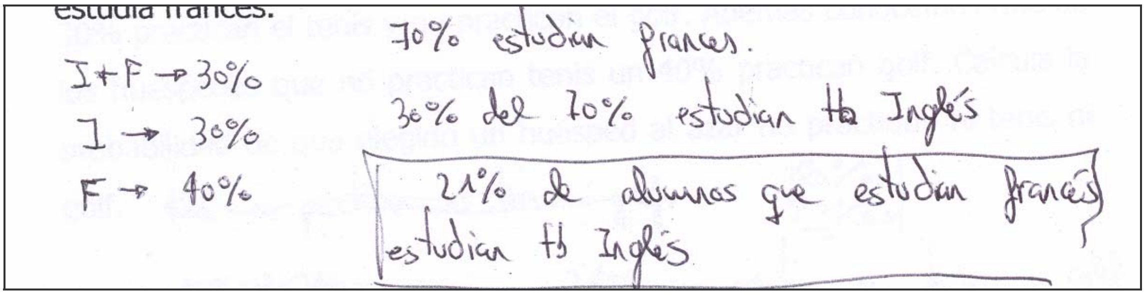
¿Qué características presenta el enunciado de estos dos problemas en la parte informativa?

Estos dos problemas, junto con los problemas de las dos parejas anteriores presentan la misma parte informativa. Los seis se describen con N_2C_1 y las cantidades son exactamente las mismas. En estas tres parejas los datos son dos intersecciones y una condicional, y están presentadas en el mismo orden:

intersección, intersección y condicional. Observamos que en los seis problemas hay un porcentaje significativo de interpretaciones de la 2ª intersección como una marginal y de la condicional como una marginal. Pensamos que la lectura rápida del problema, en la que el resolutor se queda sólo con los cantidades que presenta el problema, es la causa de esta interpretación, pero la ausencia de entrevistas clínicas hace que esto sea una suposición.

En cuanto a la estructura gramatical, las dos últimas parejas, P2 y P10, P3 y P11, presentan una estructural similar. La estructura gramatical de la oración que introduce el dato condicional en los problemas es similar, se inicia la oración con el adverbio ADEMÁS y se utiliza la preposición DE en la oración subordinada condicional. Los resultados nos indican que esta estructura favorece la interpretación del dato condicional como una marginal.

La estructura gramatical de la pregunta en ambos problemas es la misma: "Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés", "Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés". Nos encontramos con la apódosis antes que la prótasis, hecho que se denomina "prótasis antepuesta" y tiene la función de especificar y restringir el significado de la oración principal. Del análisis de las respuestas de los dos problemas, el porcentaje de estudiantes que muestran la interpretación no deseada de la condicional de la pregunta es muy bajo. Sólo en el problema 11 hay 4 estudiantes, 12% del total, que confunden la condicional pedida con una intersección. Podemos decir que la forma de presentar la pregunta ha sido bien interpretada por los estudiantes, tal y como muestra las resoluciones 4.4.1.24 y 4.4.1.25. La resolución 4.4.1.24 muestra un estudiante de 1 BTC resolviendo P11, que presenta interpretaciones no deseadas de los datos, errores en los cálculos, pero contesta a la pregunta como una condicional, que es lo que pide. La resolución 4.4.1.26 presenta la misma situación con un estudiante de 2BTC resolviendo P3:



estudia francés.

I+F → 30%

I → 30%

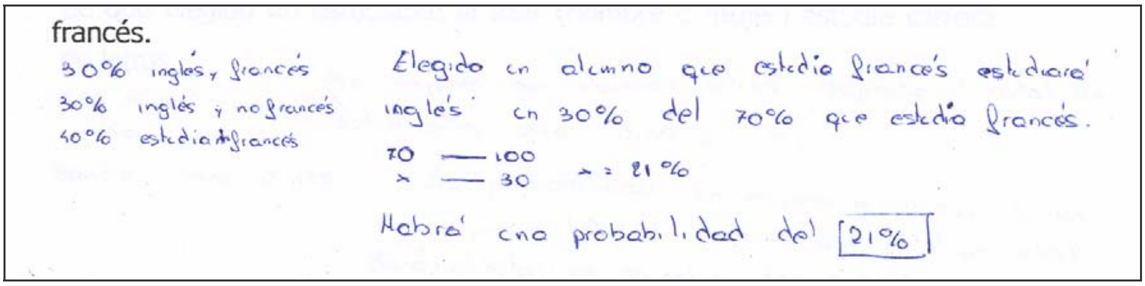
F → 40%

70% estudian frances.

30% del 70% estudian tb Inglés

$\boxed{\text{21\% de alumnos que estudian francés estudian tb Inglés}}$

Resolución 4.4.1.24: P11 por un estudiante de 1BTC



francés.

30% inglés, francés

30% inglés y no francés

40% estudia francés

Elegido un alumno que estudia francés estudiará inglés en 30% del 70% que estudia francés.

70 — 100

x — 30

x = 21%

Habrá una probabilidad del $\boxed{21\%}$

Resolución 4.4.1.25: P3 por un estudiante de 2BTC

La pareja de problemas P4 y P12 se describen con $N_2C_2T_3$. La tabla 4.4.1.23 muestra esta pareja de problemas.

PROBLEMA 4	PROBLEMA 12
En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. **De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas**, y de todos los trabajadores, el 11’25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas	De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0’55. **De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0’2**, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0’1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.

Tabla 4.4.1.23 Problemas P4 y P12

La tabla 4.4.1.24 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P4 y P12, así como el número de estudiantes que han participado en la resolución de cada problema.

	P4	P12
Muestra	34	34
1 Éxito	23.53%	17.65%
2ii Condicional por intersección	29.41%	20.58%
2iv Intersección por marginal y condicional por intersección	2.94%	0%
2vi Intersección por condicional	0%	5.88%
3iii Otras interpretaciones de la pregunta	5.88%	2.94%

Tabla 4.4.1.24 Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P4 y P12, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

En esta pareja de problemas resaltamos los porcentajes de estudiantes que han resuelto con éxito el problema, que muestran la interpretación de la condicional como una intersección. El porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito, es el más alto en cada uno de los dos bloques en los que hemos dividido los problemas. P4 presenta el segundo porcentaje de estudiantes mayor que han resuelto el problema con éxito de los 8 problemas con los datos expresados en porcentajes y con P11 ocurre lo mismo en los 8 problemas que presentan los datos en términos de probabilidad. El porcentaje de estudiantes que presentan la interpretación de la condicional como intersección es significativo. La estructura gramatical en los dos problemas es similar. Utilizando la preposición DE se introduce la condición: DE LAS MUJERES, EL 20% SE DEDICAN A LAS TAREAS ADMINISTRATIVAS (P4), DE LAS MUJERES, LA PROBABILIDAD DE DEDICARSE A LAS TAREAS ADMINISTRATIVAS ES DE 0'2, (P12). El texto no presenta palabras que creen ambigüedad en la interpretación de la condicional. Teniendo en cuenta a la vez estos dos porcentajes, pensamos que esta estructura condicional es de las que posiblemente elegiremos para la segunda fase.

Además, en ambos problemas los estudiantes de la facultad de matemáticas interpretan los datos tal y como se espera. Podemos decir que el texto del problema ha sido claro para los estudiantes que presentan el nivel de aprendizaje superior.

La pareja de problemas P5 y P13 viene dada en la tabla 4.4.1.25. Estos problemas se describen con $N_2C_2T_2$:

PROBLEMA 5	PROBLEMA 13
En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. **De éstas, el 20% estudian carreras de letras**, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras	En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer es 0'55. **De éstas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0'2**, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras.

Tabla 4.4.1.25 Problemas P5 y P13

La tabla 4.4.1.26 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P5 y P13, así como el número de estudiantes que han participado en la resolución de cada problema.

	P5	P13
Muestra	66	33
1 Éxito	42.42%	9.09%
2ii Condicional por intersección	31.82%	30.3%
2iv intersección por marginal y condicional por intersección	0%	6.06%
2v Intersección por marginal	1.51%	0%
2vi Intersección por condicional	1.51%	0%
3iii Otras interpretaciones de la pregunta	1.51%	0%

Tabla 4.4.1.26 Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P5 y P13, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

El problema P5 presenta el porcentaje más alto de estudiantes que han resuelto con éxito el problema. En los dos problemas, P5 y P13, observamos que el porcentaje más alto de estudiantes que presentan interpretaciones no deseadas se corresponde con la interpretación del dato condicional como una intersección. La estructura gramatical de la frase condicional es: DE ÉSTAS, EL 20% ESTUDIAN CARRERAS DE LETRAS en el P5 y DE ÉSTAS, LA PROBABILIDAD DE QUE ESTUDIEN CARRERAS DE LETRAS ES DE 0'2 en el P13. Entonces, esta estructura gramatical induce al resolutor a interpretar la condicional como una intersección más que las estructuras anteriores. La diferenciamos de la estructura gramatical de la pareja de problemas anterior DE LAS MUJERES en que la restricción la marca un pronombre personal cuyo referente hay que buscar en el texto del problema.

La pareja siguiente la forman los problemas P6 y P14, que se describen con $N_2C_2T_1$. La tabla 4.4.1.27 muestra los dos problemas.

PROBLEMA 6	PROBLEMA 14
En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. **De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas**, y de todos los integrantes, el 11'25% son niños y realizan actividades acuáticas. **Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.**	La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55**. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2**, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. **Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.**

Tabla 4.4.1.27 Problemas P6 y P14

La tabla 4.4.1.28 presenta porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P6 y P14, así como el número de estudiantes participantes en la resolución de cada problema.

	P6	P14
Muestra	33	33
1 Éxito	6.06%	6.06%
2ii Condicional por intersección	18.18%	15.15%
2iv intersección por marginal y condicional por intersección	6.06%	0%
2vi Intersección por condicional	0%	3.03%
3i Condicional por intersección (pregunta)	24.24%	21.21%
3ii Condicional por marginal (pregunta)	0%	6.06%
3iii Otras interpretaciones de la pregunta	0%	3.03%

Tabla 4.4.1.28 Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P6 y P14, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

Resaltamos los porcentajes de estudiantes que dan cuenta de la interpretación del dato condicional como una intersección y de la pregunta, condicional también, como una intersección. Además este último porcentaje es un poco más alto. Las estructuras gramaticales utilizadas en la parte informativa del problema y en la parte interrogativa para presentar la condicional son diferentes. En la parte informativa seguimos con el uso de la preposición DE para introducir la condición, y en la pregunta se utiliza la construcción del gerundio para introducir la condicionalidad. Esta segunda estructura induce al resolutor a la interpretación de la condicional como intersección más que la estructura que utiliza la preposición DE.

Las parejas de problemas, 4-12, 5-13 y 6-14 presentan estructuras gramaticales similares en sus enunciados a la hora de presentar los datos. Sólo cambia el contexto. Con estructuras similares en cuanto al uso de la preposición DE:

- ★ De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas en el problema 4
- ★ De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0’2 en el problema 12
- ★ De éstas, el 20% estudian carreras de letras en el problema 5
- ★ De éstas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0’2 en el problema 13
- ★ De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas en el problema 6
- ★ De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0’2 en el problema 14

Se mantiene el porcentaje de estudiantes que interpretan el dato condicional como una intersección. En P5 este porcentaje es un poco más grande. La estructura gramatical de P5 se diferencia de la estructura gramatical de P4 y de P6 en que después de la preposición DE no se utiliza un sustantivo sino un pronombre.

La siguiente pareja la forman los problemas P7 y P15, caracterizados por $N_2C_3T_1$. La tabla 4.4.1.29 muestra estos problemas.

PROBLEMA 7	PROBLEMA 15
(Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1, cambiado y preparado para la prueba) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. **Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?**	En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0'6 y la de aprobar matemáticas es de 0'7. **Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0'8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?**

Tabla 4.4.1.29 Problemas P7 y P15

La tabla 4.4.1.30 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P7 y P15., así como el número de estudiantes que han participado en la resolución de cada problema.

	P7	P15
Muestra	67	33
1 Éxito	5.97%	6.06%
2i Condicional por marginal (datos)	0%	3.03%
2ii Condicional por intersección	19.4%	12.12%
3i Condicional por intersección (pregunta)	32.83%	12.12%
3iii Otras interpretaciones de la pregunta	4.48%	0%

Tabla 4.4.1.30 Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P7 y P15, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

En ambos problemas los porcentajes de estudiantes más significativos son los que dan cuenta de la interpretación de la condicional como una intersección, tanto en el dato como en la pregunta. Las estructuras gramaticales utilizadas en la parte informativa y en la parte interrogativa son diferentes. En la parte informativa utilizamos la estructura: DE LO ALUMNOS QUE, y en la parte interrogativa utilizamos la construcción condicional por excelencia: SI. Fijándonos únicamente en los porcentajes de estudiantes que dan cuenta de las interpretaciones de la condicional como una intersección en el dato y en la pregunta, observamos que el porcentaje es superior en la segunda. Podemos concluir que la estructura gramatical utilizada en la parte interrogativa provoca más interpretaciones de la condicional como una intersección. Pero debemos tener en cuenta que en ambas frases, la que da cuenta de la parte informativa y la que da cuenta de la parte interrogativa, se utilizan adverbios que producen ambigüedad en la interpretación del texto. Estos adverbios son: ADEMÁS y TAMBIÉN en la parte informativa de P6, ADEMÁS en la parte informativa de P15 y TAMBIÉN en la parte interrogativa de ambos. Ya hemos comentado antes que la presencia de ADEMÁS en la oración que introduce el dato condicional, induce al resolutor a la interpretación del dato condicional como una intersección. El adverbio TAMBIÉN según el diccionario[22] se utiliza para indicar la igualdad, semejanza, conformidad o relación de una cosa con otra ya nombrada. Es decir, la presencia del también en cualquiera de las dos estructuras invita al resolutor a la interpretación de la condicional como una intersección. Luego, el uso de estas palabras crea ambigüedad en la interpretación del texto del problema, y además de tener en cuenta las estructuras gramaticales que utilizamos para la expresión de la condicionalidad, debemos tener en cuenta el no usar estas palabras.

En la construcción de los problemas de la segunda fase tendremos en cuenta la no utilización de palabras, como TAMBIÉN y ADEMÁS, que aporten significados ambiguos a la condicionalidad.

[22] Diccionario de la Lengua Española, Real Academia Española

La última pareja de problemas isomorfos la forman el problema P8 y el problema P16, que se describen con $N_2C_3T_3$. La tabla 4.4.1.31 nos muestra estos problemas.

PROBLEMA 8	PROBLEMA 16
Santos, D., (1988), Matemáticas COU, Opciones C y D, Madrid: Santillana. p.248, problema 10, cambiado y preparado para la prueba) En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. **Sabiendo que $p(B\mid A)$ = 70 %,** ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0'6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0'5. **Sabiendo que $p(B\mid A)$ = 0'7**, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

Tabla 4.4.1.31 Problemas P8 y P16

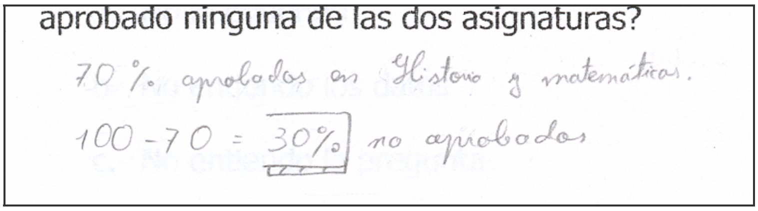
La tabla 4.4.1.32 presenta el porcentaje de estudiantes que muestran determinadas respuestas organizadas por los descriptores considerados, respecto a cada uno de los problemas P8 y P16, así como el número de estudiantes que han participado en la resolución de cada problema.

	P8	P16
Muestra	33	33
1 Éxito	0%	0%
2ii Condicional por intersección	45.45%	27.27%
2vii Otras interpretaciones de datos	0%	3.03%

Tabla 4.4.1.32 Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P8 y P16, así como el porcentaje de éstos que presentan interpretaciones no deseadas en el dato condicional.

En estos problemas tenemos en cuenta que no nos pueden ofrecer información acerca de las estructuras gramaticales que introducen el dato condicional, ya que en ambos problemas se utiliza el sistema simbólico formal propio de la probabilidad: SABIENDO QUE P(B/A) = 70%, en el P8 y SABIENDO QUE P(B/A) = 0.7 en P16. Esta forma de presentar la probabilidad condicional, necesita que el resolutor haya recibido formación en probabilidad condicional para poder interpretar el dato con éxito. Además es una forma que carece de ambigüedad.

El alto porcentaje de estudiantes que interpretan la probabilidad condicional como una intersección es debido, sobre todo, a la falta de conocimiento forma acerca de la probabilidad condicional. Las resoluciones 4.4.1.26 y 4.4.1.27 dan cuenta de esta reflexión.

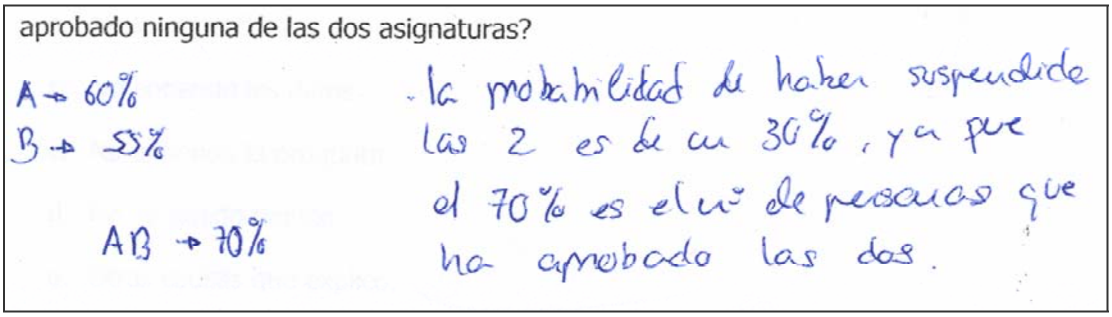


aprobado ninguna de las dos asignaturas?

70 % aprobados en Historia y matemáticas.

100 - 70 = $\boxed{30\%}$ no aprobados

Resolución 4.4.1.26: Actuación de un estudiante de 4ESO en P8



aprobado ninguna de las dos asignaturas?

A → 60%
B → 55%

AB → 70%

la probabilidad de haber suspendido las 2 es de un 30%, ya que el 70% es el nº de personas que ha aprobado las dos.

Resolución 4.4.1.27: Actuación de un estudiante de 1BTC en P8

Ambos estudiantes han decidido que p(B|A) representa la probabilidad de aprobar las dos asignaturas. Además, los dos estudiantes utilizan de forma errónea el concepto de complementariedad.

Resumiendo los resultados que hemos mostrado en este subapartado, notamos que la interpretación no deseada más común del dato condicional es la interpretación de éste como una intersección. No podemos, de momento, decidir qué estructura gramatical induce al resolutor a la interpretación deseada de la condicionalidad, pero sabemos que estas estructuras no deben presentar palabras que creen ambigüedad en la interpretación del texto. Pensamos también, que en la interpretación del dato condicional puede influir, además del lenguaje, el orden de presentación de los datos y éstos mismos.

En los problemas P1, P2, P3, P9, P10 y P11, en los que los datos son dos intersecciones y una condicional, y están presentados en este orden, intersección, intersección y condicional, el porcentaje de estudiantes que interpretan el dato condicional como intersección es superior que en los otros problemas. Lo podemos observar en las tablas 4.4.1.33 y 4.4.1.34. También podemos observar que P5 y su isomorfo P13, tienen un porcentaje de estudiantes alto que interpretan el dato condicional como una intersección. Recordamos que en estos dos problemas la estructura gramatical hacía uso de la preposición DE pero seguida de un pronombre personal, DE ÉSTAS, de forma que el resolutor debía buscar en el texto del problema el referente del pronombre.

	PROBLEMAS CON LOS DATOS EN PORCENTAJES							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
2.ii Condicional por intersección	63.16	57.14	42.31	38.46	55.26	26.09	38.46	60
3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	0	0	0	34.78	56.41	0

Tabla 4.4.1.33: Porcentaje de estudiantes que interpretan el dato condicional como una intersección y la pregunta condicional como una intersección, en los problemas con los datos en porcentajes

	PROBLEMAS CON LOS DATOS EN TÉRMINOS DE PROBABILIDAD							
	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
2.ii Condicional por intersección	47.62	61.54	26.32	25	55.56	26.32	40	50
3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	21.05	0	0	36.84	40	0

Tabla 4.4.1.34: Porcentaje de estudiantes que interpretan el dato condicional como una intersección y la pregunta condicional como una intersección, en los problemas con los datos en términos de probabilidad

En P8 se utiliza la forma más clara, siempre que se conozca, de presentar la probabilidad condicional, haciendo uso del lenguaje simbólico propio de ésta. El porcentaje de estudiantes que interpretan la condicional como intersección es elevado, pues muchos estudiantes, desconocedores de la teoría de la probabilidad, han decidido que $p(A|B)$ da cuenta del porcentaje de estudiantes que realizan A y B, tal y como hemos mostrado en la resoluciones 4.4.1.26 y 4.4.1.27.

En los problemas en los que se pregunta por una condicional: P3, P6 y P7, y sus isomorfos: P11, P14 y P15, sobre todo en P6 y P7, P14 y P15, el porcentaje que da cuenta de la interpretación de la pregunta condicional como una intersección es elevado. En estos dos problemas, P6 y P7, se presenta como dato $p(A|B)$ y se pregunta por $p(B|A)$, hecho que en P3 no se da. Además, algunos estudiantes de los que interpretan la pregunta condicional como una intersección, a la vez interpretan el dato condicional como la intersección y, en coherencia, ambas son iguales. P7 y P15 presentan el porcentaje mayor de estudiantes que interpretan la pregunta condicional como una intersección. La estructura gramatical utilizada en la expresión de la pregunta condicional es la estructura condicional por excelencia: SI. Podemos decir que esta estructura es la que peor han interpretado los estudiantes, pero debemos tener en cuenta que en esta construcción se ha utilizado el adverbio TAMBIÉN que ha creado ambigüedad en la interpretación del texto.

d. Grado de complejidad estructural del problema

Cerdán (comunicación personal) define la complejidad de un problema basándose en el grafo mínimo del problema (en nuestro caso el grafo canónico) y atendiendo al número de aristas rectas y curvas, que se corresponden con el número de relaciones aditivas y multiplicativas entre los datos y la pregunta del problema necesarias para su resolución.

Procedemos en este apartado recordando la pertenencia de cada uno de los problemas de la primera fase a una clase de equivalencia.

Recordamos que los grafos canónicos asociados a cada problema los realizamos en los problemas haciendo una lectura en términos de probabilidad.

La tabla 4.4.1.35 da cuenta de la clasificación de los problemas en Niveles, Categorías y Tipos, de la clase de equivalencia de cada uno de ellos, así como del porcentaje de la resolución con éxito.

Problemas	P4	P12	P5	P13	P7	P15	P6	P14	P1	P9	P2	P10	P8	P16	P3	P11
$N_iC_jT_h$	$N_2C_2T_3$		$N_2C_2T_2$		$N_2C_3T_1$		$N_2C_2T_1$		$N_2C_1T_2$		$N_2C_1T_3$		$N_2C_3T_3$		$N_2C_1T_1$	
Clases de equivalencia	$[p_{11}]$		$[p_{11}]$		$[p_{02}]$		$[p_{12}]$		$[p_{31}]$		$[p_{31}]$		$[p_{31}]$		$[p_{32}]$	
Éxito	23.53	17.64	42.42	9.09	5.97	6.06	6.06	6.06	11.76	0	18.18	6.06	0	0	3.03	0

Tabla 4.4.1.35: Clasificación de las parejas de problemas isomorfos en NiCjTh, en clases de equivalencia y porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito

Pensamos que el grado de complejidad no es un factor demasiado influyente en el proceso de resolución con éxito. P2 que presenta un grado de complejidad mayor que P7 y que P6, por ejemplo, muestra un porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito mayor que el que presentan esos dos problemas. Sin embargo, P4 y P5 son dos de los problemas que presentan un grado de complejidad estructural menor y el porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito estos problemas es el más alto.

Ya que en la elaboración de la primera fase no tuvimos en cuenta el grado de complejidad de los problemas a la hora de ordenar los problemas de cada una de las pruebas de la primera fase, y pensamos que no tenemos información suficiente para sacar conclusiones, el orden de los problemas de la segunda fase estará establecido por el grado de complejidad estructural de los mismos.

4.4.1.4 Conclusiones de la primera fase

En los problemas de probabilidad condicional existes diferentes factores que influyen en el proceso de resolución así como en el éxito en dicho proceso. Uno de estos factores es la naturaleza de las cantidades presentes en estos problemas. En esta primera fase hemos visto como los problemas en los que las cantidades son términos de probabilidad son trabajados por menos estudiantes que los que presentan sus cantidades en porcentajes. En la segunda fase no habrá problemas en los que las cantidades estén expresadas en términos de probabilidad por dos razones. Una de ellas es la que viene de los resultados obtenidos en la primera fase. Son problemas trabajados por pocos estudiantes, que presentan un porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito mucho más bajo que los otros y un porcentaje de estudiantes que dejan el problema en blanco más alto, según se observa en las tablas 4.4.1.36 y 4.4.1.37.

	PROBLEMAS CON LOS DATOS EN PORCENTAJES							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
1. Éxito	11.76	18.18	3.03	23.53	42.42	6.06	5.97	0
7. Blanco	32.36	39.39	18.18	17.64	27.27	24.24	35.82	26.47

Tabla 4.4.1.36: Resultados en porcentajes de los estudiantes que han resuelto con éxito y que han dejado en blanco los problemas de la primera fase con los datos expresados en porcentajes

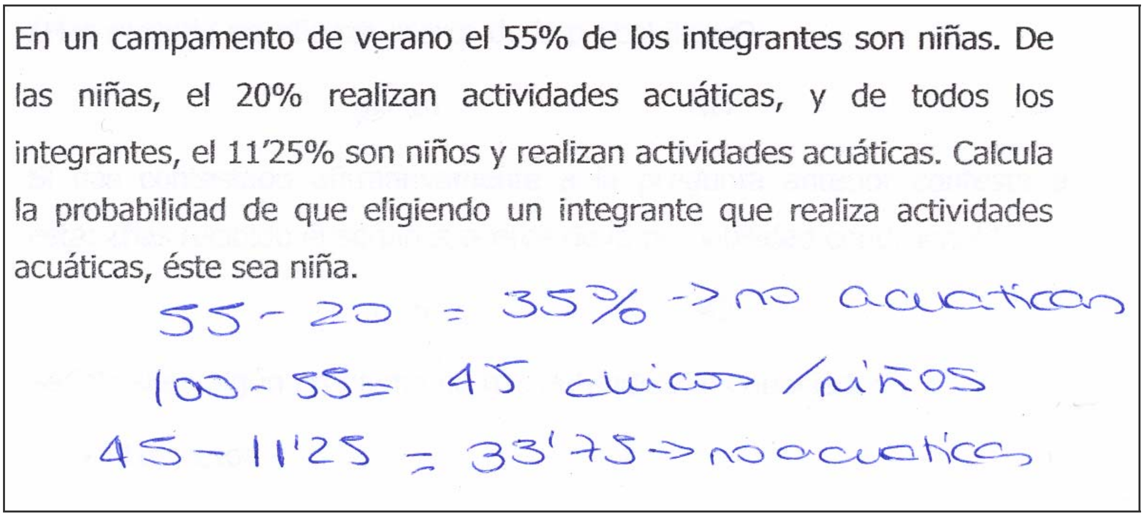
	PROBLEMAS CON LOS DATOS EN TÉRMINOS DE PROBABILIDAD							
	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
1. Éxito	0	6.06	0	17.64	9.09	6.06	6.06	0
7. Blanco	38.24	15.15	42.42	44.12	36.36	36.36	63.64	45.45

Tabla 4.4.1.37: Resultados en porcentajes de los estudiantes que han resuelto con éxito y que han dejado en blanco los problemas de la primera fase con los datos expresados en términos de probabilidad

La otra es que por el currículo, podemos conocer qué estudiantes han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad condicional, pero no podemos saber nada sobre niveles de aprendizaje.

Por estas razones, como en general no conocemos concretamente el nivel de aprendizaje de teoría de la probabilidad de los estudiantes participantes en la segunda fase, los problemas de esta segunda fase no tendrán los datos en términos de probabilidad, para evitar que esta forma de presentar los datos influya negativamente en el proceso de resolución del problema, induciendo al resolutor a abandonar la resolución.

Las cantidades expresadas en porcentajes adquieren significado para los estudiantes y favorecen la creación de nuevas cantidades relevantes en la resolución del problema que facilitan el proceso de resolución. La resolución 4.4.1.28 da cuenta de esta afirmación.



En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11’25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

55 - 20 = 35% -> no acuaticas
100 - 55 = 45 chicos /niños
45 - 11'25 = 33'75 -> no acuaticas

Resolución 4.4.1.28: Actuación de un estudiante de 1 BCS-H en P6

En esta fase no se ha tenido en cuenta los problemas que presentan las cantidades en frecuencias absolutas, por la razón de presentar todas las cantidades del problema de la misma forma. Vemos la necesidad de que la segunda fase contenga algunos problemas con las cantidades expresadas en frecuencias absolutas, salvo la cantidad que da cuenta de la condicional, con el fin de completar el estudio de la influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en el enunciado del problema en el proceso de resolución del problema así como en el éxito en la resolución.

Las estructuras gramaticales de las oraciones condicionales que hemos utilizado en los problemas de la primera fase han sido variadas y en algunas aparecían términos que aumentaban la dificultad a la hora de la interpretación del dato y/o la pregunta condicional. Pensamos que en la segunda fase todos los problemas deben tener la misma construcción gramatical en las oraciones condicionales, eliminando los términos ambiguos que hemos detectado en esta primera fase, porque nos interesa conocer las estructuras gramaticales que favorecen la interpretación deseada del texto del problema. Es difícil hacer una elección de la estructura adecuada, ya que en estos problemas se han presentado de diferentes formas. Escogemos la estructura DE LOS QUE, DE LOS, DE LAS QUE, DE LAS[23] pues en P7 tenemos esta construcción en el dato condicional y la construcción condicional por excelencia SI en la pregunta condicional. Observando los porcentajes que dan cuenta de las interpretaciones del dato condicional y de la pregunta condicional como una intersección, 38.4% y 56.41% respectivamente, parece más adecuada esta construcción. De esta forma podremos empezar la lista de estructuras gramaticales utilizadas en la expresión de la condicional que favorecen o no favorecen la interpretación deseada de ésta.

[23] Estas estructuras son equivalentes, según consulta a la RAE (Real Academia de la Lengua Española) del día 13 de febrero de 2006:
Tal y como usted sugiere en su consulta, las secuencias *de los* y *de los que* son equivalentes en cuanto a que sirven como introductor del conjunto al que pertenece el elemento que se va a considerar en el problema: *un alumno* ***de los que*** *asegunda fasen matemáticas; una persona* ***de las que*** *son seguidoras de un equipo de fútbol.* Efectivamente, la única diferencia entre ellos es que la conjunción *que* introduce una oración subordinada; no es necesario que aparezca esta conjunción si el «descriptor» del conjunto es nominal y no oracional: u*n alumno* ***de los*** *aprobados en matemáticas; una persona* ***de las*** *seguidoras de un equipo de fútbol.* Desde el punto de vista pragmático o referencial, se trata de estructuras perfectamente equivalentes.

Reciba un cordial saludo.

Departamento de Español al día
RAE

Para ordenar los problemas de la segunda fase tendremos en cuenta el grado de complejidad estructural, de forma que podamos completar el estudio de la influencia de este factor en el éxito en la resolución del problema.

Para la construcción de la segunda fase tenemos en cuenta los problemas de la primera que hayan ofrecido información interesante en nuestra investigación, así como, otros problemas que contribuyan a completar los resultados obtenidos. Podemos hacer cuatro grupos con los ocho primeros problemas de la primera fase, según la parte informativa. El primer grupo lo forman P1, P2 y P3, P4, P5 y P6 forman el segundo, P7 el tercero y P8 el cuarto grupo. Del primer grupo elegimos P1 para la segunda fase, porque el porcentaje de estudiantes que han interpretado el dato condicional como una intersección es el más elevado y porque existen estudiantes que han realizado este problema que interpretan el dato condicional como una marginal. Del segundo grupo elegimos P4 y P6. Elegimos P6 pues presenta un porcentaje de éxito bajo, 6.06%, el porcentaje que da cuenta de la interpretación del dato condicional como una intersección y de la pregunta condicional como una intersección es significativo, 26.09% y 34.78% respectivamente (ver tabla 4.4.1.10). Elegimos P4 por presentar un porcentaje alto de estudiantes que resuelven con éxito y por la pregunta del problema, se pregunta por una intersección. Por último elegimos P7 eliminando las palabras que producen ambigüedades, para comprobar si con la eliminación de estas palabras las interpretaciones no deseadas del dato condicional y de la pregunta condicional disminuyen. Además es un problema con un porcentaje de éxito bajo, 5.97% (tabla 4.4.1.10).

La tabla 4.4.1.38 muestra los cuatro problemas elegidos para la prueba de segunda fase, que se completará con dos problemas más.

PROBLEMA 1 $N_2C_1T_2$ De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto, un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	PROBLEMA 4 $N_2C_2T_3$ En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas	PROBLEMA 6 $N_2C_2T_1$ En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11'25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	PROBLEMA 7' $N_2C_3T_1$ Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado matemáticas?

Tabla 4.4.1.38: Problemas de la primera fase elegidos para la segunda fase.

A la vez, el análisis de la primera fase nos ayuda a determinar, si es posible, la muestra de estudiantes para la administración de la segunda fase. Decidimos conservar, en la medida de lo posible, los niveles educativos en los que hemos administrado la primera fase. Queremos administrar la segunda fase en los niveles escolares de 4º ESO, 1º Bachiller, 2º Bachiller y en la Facultad de Matemáticas. En 4º ESO los estudiantes no han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad condicional. En 1º Bachiller podemos encontrarnos con estudiantes formados y con estudiantes que no han trabajado la probabilidad. En 2º Bachiller, en teoría y según el currículo, deberían ser estudiantes con conocimiento formal acerca de la teoría de la probabilidad. Finalmente elegimos estudiantes de la Facultad de Matemáticas que cursen la asignatura de Cálculo de Probabilidades y Estadística de 2º curso, para asegurarnos un grupo de estudiantes expertos en Teoría de la Probabilidad.

4.4.2. LA SEGUNDA FASE

A partir de las conclusiones de la primera fase (ver 4.4.1.4, p. 305) se hace necesaria la segunda fase por diferentes razones. Por un lado, los estudiantes que participaron en la primera fase no realizaron todos los mismos problemas, por lo que el tamaño de la muestra de cada una de las pruebas que componían esta experiencia disminuyó. Por otro, todas las pruebas que componían la primera fase tenían dos problemas con los datos en términos de probabilidad y al haber estudiantes en la muestra que no habían recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad, este hecho privó a estos estudiantes de realizar estos problemas, pues su dificultad se basaba en el desconocimiento de los datos del problema. En esta segunda fase no habrá problemas con los datos expresados en términos de probabilidad.

A lo largo de este apartado mostraremos la descripción de los problemas de la segunda fase, la resolución de dichos problemas atendiendo al análisis de las relaciones entre las cantidades y a sus procesos de resolución, así como la recogida de resultados y análisis de los mismos.

4.4.2.1 Descripción de los problemas de la segunda fase

Los problemas de la segunda fase son problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal, y para su descripción, definimos las variables independientes, al igual que Puig y Cerdán (1988) analizan los problemas aritméticos escolares de enunciado verbal.

Las variables independientes son las que pueden medirse antes de la ejecución de la tarea. Las variables independientes que nosotros vamos a considerar son las que tienen que ver con la tarea: las variables sintácticas, las variables de contexto y las variables de contenido.

> *Se entiende por variable sintáctica cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema (Puig y Cerdán, 1988, p.31).*

Definimos nuestras variables sintácticas teniendo en cuenta los objetivos de la investigación:

La complejidad gramatical. Por el tipo de oraciones utilizadas al presentar la condicionalidad: en N_2 y en T_1. En los problemas de N_2 hay un dato que tiene que ver con una probabilidad condicional y en los problemas de T_1 la pregunta del problema tiene que ver con la probabilidad condicional.

La presentación de los datos. Los problemas de esta segunda fase presentan los datos mediante números y mediante palabras.

La estructura del problema. Todos los problemas presentan la misma estructura. Primero presentan la parte informativa y después de un punto y seguido se presenta la parte interrogativa.

La resolución de un problema empieza por su lectura. Una vez leído, reconocido como un trozo normal de castellano y como el tipo de texto que es un problema, el resolutor se interesa por su significado. Las variables de contenido y de contexto dan cuenta del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo, mientras que las variables de contexto lo hacen a los significados no matemáticos (Cerdán y Puig, 1988, p.33).

Definimos nuestras variables de contenido:

Contenido matemático. Conceptos relacionados con la probabilidad, con la probabilidad condicional, con la razón y la proporción.

Contenido semántico. Se considera el vocabulario matemático. Es decir, las palabras clave que presenta el texto del problema que podemos considerar pertenecientes al vocabulario matemático. En nuestro caso las palabras clave utilizadas únicamente son dos, probabilidad y porcentaje. El término probabilidad aparece en la parte interrogativa de tres problemas y el término porcentaje aparece tanto en la parte informativa como en la parte interrogativa de algunos problemas.

Variables que describen los elementos del problema. Cerdán y Puig (1988) indican que los criterios que acabamos de definir se pueden aplicar a cualquier texto matemático aunque no sea un problema, pero este criterio distingue el problema.

> *Este criterio pretende tomar en consideración los elementos distintivos del tipo de texto que es un problema de matemáticas y no otro texto matemático cualquiera. (Cerdán y Puig 1988, p. 34)*

Nosotros tenemos en cuenta el análisis de la parte informativa del problema que permite hablar de datos suficientes, redundantes, pertinentes, etc. También tenemos en cuenta la naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional la tenemos estudiada en el apartado correspondiente (ver 4.1.2.1 p. 176). En esta segunda fase los problemas presentan sus cantidades en frecuencias absolutas y en términos de razón, tanto en porcentajes como en razones del tipo "la mitad de…"

Algunos problemas de probabilidad que presentan los libros de texto se presentan de modo simbólico, de modo verbal o en combinación de estos dos modos utilizando, a veces, tablas u otros artefactos didácticos para presentar los datos. Todos los problemas de la segunda fase se presentan de modo verbal.

Describimos cada uno de los seis problemas que componen la segunda fase, teniendo en cuenta las variables que acabamos de definir. Analizamos la parte informativa y la parte interrogativa, mostramos la familia a la que pertenecen, la clase de equivalencia y el grafo canónico asociado al problema, siempre desde una lectura de éste en términos de probabilidad.

PROBLEMA 1
En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Desde un punto de vista estructural, en cuanto a los datos y la pregunta del problema, describimos este problema mediante $N_2C_3T_1$. Lo que corresponde a N_i y a C_j tiene que ver con la parte informativa del problema. Por ser de N_2 uno de los datos es una probabilidad condicional o es una cantidad interpretable como ésta. Por ser de C_3 los otros dos datos son probabilidades marginales o cantidades interpretables como éstas. Lo que tiene que ver con T_i nos informa de la parte interrogativa. Por ser de T_1 la pregunta es una probabilidad condicional o puede ser interpretada como tal.

Volvemos al análisis de la parte informativa. Los datos de este problema son frecuencias absolutas para los sucesos que dan cuenta del número de aprobados en matemáticas y en filosofía y para el espacio muestral, y un porcentaje para la probabilidad condicional.

En la parte interrogativa se pide por un porcentaje.

En cuanto a la expresión de la condicionalidad, tanto en el dato como en la pregunta, utilizamos la estructura semántica DE LOS QUE.

Teniendo en cuenta las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, éste es un representante de la clase de problemas [p_{02}]. Esto implica que, haciendo una lectura del problema en términos de probabilidad, en su resolución basta con dos relaciones multiplicativas. La figura 4.4.2.1. muestra el grafo canónico del problema y en él podemos observar el plan para resolver el problema.

Hacemos la lectura en términos de probabilidad del problema.

Sea F el suceso "estudiantes que aprueban filosofía" y M el suceso "estudiantes que aprueban matemáticas". Transformamos las cantidades a términos de probabilidad: p(M) = 0.7; p(F) =0.6, p(F|M) = 0.8, y la pregunta es p(M|F)

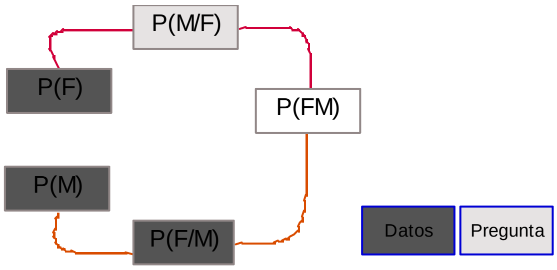


Figura 4.4.2.1: Grafo canónico asociado P1

Ya hemos dicho que este problema lo hemos elegido basándonos en el problema 7 de la primera fase. La tabla 4.4.2.1 da cuenta de los dos problemas, P7 de la primera fase y P1 de la segunda fase. En negrita hemos resaltado términos que no hemos utilizado en P1.

P7 Primera fase	P1 Segunda fase
Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. **Además**, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron **también** filosofía. **Si** Juan aprobó filosofía, ¿qué **probabilidad** tiene de haber aprobado **también** matemáticas?	En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Tabla 4.4.2.1: El problema P7 de la primera fase y el problema P1 de la segunda fase

PROBLEMA 2

En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

Desde un punto de vista estructural, en cuanto a los datos y la pregunta del problema, describimos este problema mediante $N_2C_2T_3$. Por ser de N_2 uno de los datos es una probabilidad condicional o es una cantidad interpretable como ésta. Por ser de C_2 un dato es una marginal y el otro es una intersección. Por ser de T_3 la pregunta es una intersección.

Para terminar de analizar la parte informativa describimos la naturaleza de las cantidades presentes en este problema. Los datos de este problema son todos porcentajes.

En la parte interrogativa se pide por una probabilidad.

En cuanto a la expresión de la condicionalidad utilizamos la estructura semántica DE LAS.

Si tenemos en cuenta las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, éste es un representante de la clase de problemas [p_{11}]. Es decir, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema, para su resolución basta con una relación aditiva y una multiplicativa, como muestra la figura 4.4.2.2. que da cuenta de su grafo canónico.

Hacemos una lectura en términos de probabilidad:

Sea M el suceso "mujeres" y T "trabajadores que realizan tareas administrativas". El problema presenta los sucesos M y $-M\cap T$. Transformamos las cantidades a términos de probabilidad: $p(M) = 0.55$; $p(-M\cap T) = 0.1125$, $p(T|M) = 0.2$, y se pregunta por $p(M\cap -T)$.

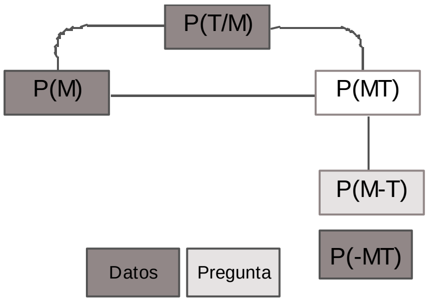


Figura 4.4.2.2: Grafo canónico asociado a P2

Una lectura del problema utilizando el grafo de la figura 4.4.2.2, permite clasificar el dato p(-MT) como dato no necesario en el proceso de resolución del problema. El proceso de resolución de un problema de probabilidad condicional no es único. El grafo canónico muestra el número mínimo de relaciones necesarias para llegar a la solución del problema. La figura 4.4.2.3. da cuenta de un grafo asociado a P2 en donde las aristas que están más gruesas nos muestran otro plan para resolver P2, en donde se utilizan todas las cantidades presentes en el problema.

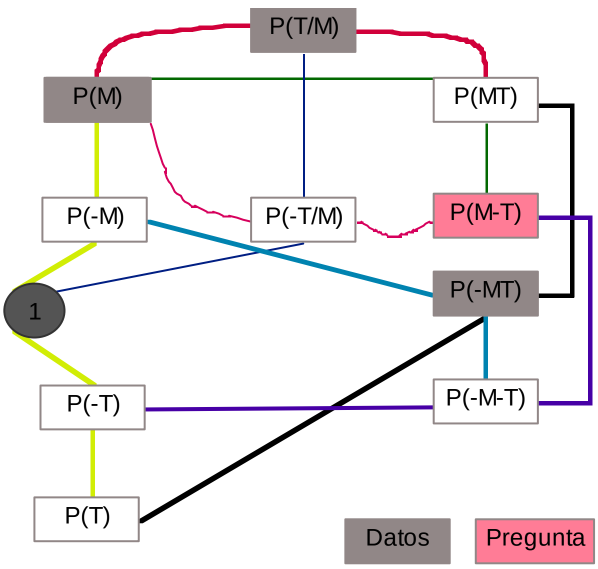


Figura 4.4.2.3: Grafo asociado a P2

Entramos en el grafo por la arista que contiene el vértice entrada (arista curva roja). Vamos oscureciendo vértices y creando a la vez otras aristas con entrada que nos llevan a oscurecer el vértice que da cuenta de la pregunta del problema. El plan que propone este grafo para resolver P2 consta de seis relaciones, una multiplicativa y cinco aditivas.

Este problema lo hemos elegido basándonos en el problema P4 de la primera fase. La tabla 4.4.2.2 muestra los dos problemas, el problema P4 en la primera fase y el problema P2 de la segunda fase. Resaltamos en negrita los términos que hemos variado.

P4 Primera fase	P2 Segunda fase
En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, **el 11'25% son hombres y administrativos.** Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.	En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

Tabla 4.4.2.2: El problema P4 de la primera fase y el problema P2 de la segunda fase

PROBLEMA 3

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.

Desde un punto de vista estructural, en cuanto a los datos y la pregunta del problema, describimos este problema mediante $N_2C_3T_3$. N_2C_3 da cuenta de la parte informativa. Por ser de N_2, al hacer una lectura en términos de probabilidad del problema, uno de los datos es una probabilidad condicional, y por ser de C_3 los otros dos datos son marginales. T_3 da cuenta de la parte interrogativa. Por ser de T_3 la pregunta es una intersección.

Acabamos de analizar la parte informativa con el análisis de la naturaleza de las cantidades presentes en este problema. Todos los datos son porcentajes.

En la parte interrogativa se pide por una probabilidad.

En cuanto a la expresión de la condicionalidad utilizamos la estructura semántica DE LOS QUE.

Si tenemos en cuenta las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, éste es un representante de la clase [p_{21}]. Es decir, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema, para su resolución basta con dos relaciones aditivas y una multiplicativa, como muestra la figura 4.4.2.4. que da cuenta de su grafo canónico.

Hacemos una lectura en términos de probabilidad.

Sea I el suceso "estudiantes que hablan inglés" y F el suceso "estudiantes que hablan francés". Las cantidades en términos de probabilidad son:

$p(F) = 0.6$, $p(I) = 0.7$, $p(I|-F) = 0.35$ y la pregunta es $p(-F-I)$.

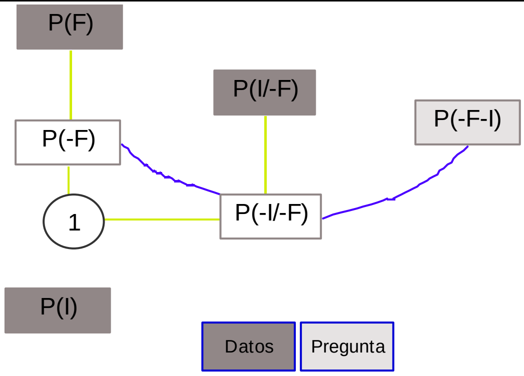


Figura 4.4.2.4: Grafo canónico asociado a P3

Una lectura del problema, utilizando el grafo de la resolución 4.4.2.32, permite clasificar el dato p(I) como dato no necesario en el proceso de resolución del problema. La figura 4.4.2.5. muestra un grafo asociado a P3 en el que se propone un plan para resolver este problema en el que se utilizan todos los datos del problema. Resaltamos las aristas que conducen a la solución del problema.

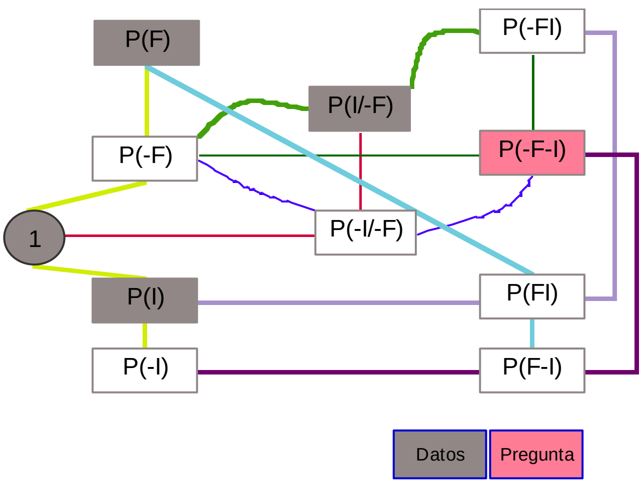


Figura 4.4.2.5: Grafo asociado a P3

PROBLEMA 4

De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

Describimos este problema mediante $N_2C_2T_1$. Al hacer una lectura en términos de probabilidad, N_2C_2 implica que uno de los datos es una probabilidad condicional, otro dato es una marginal y el tercero es una intersección. Por ser de T_1 la pregunta es una condicional.

Las cantidades presentes en este problema son frecuencias absolutas y un porcentaje.

En la parte interrogativa se pide por un porcentaje.

En cuanto a la expresión de la condicionalidad utilizamos las estructuras semánticas equivalentes DE LAS y DE LOS QUE.

Si tenemos en cuenta las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, éste es un representante de la clase $[p_{12}]$. Es decir, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema, para su resolución basta con una relación aditiva y dos multiplicativas, como muestra la figura 4.4.2.6. que da cuenta de su grafo canónico.

Sea N el suceso "ser niña" y A el suceso "realiza actividades acuáticas", el problema presenta los sucesos N y $(-N \cap A)$. Transformando las cantidades a términos de probabilidad: $p(N) = 0.55$, $p(A|N) = 0.2$; $p(-N \cap A) = 0.0025$ y la pregunta es $p(N|A)$.

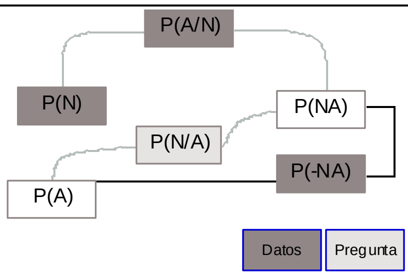


Figura 4.4.2.6: Grafo canónico asociado a P4

Este problema lo hemos elegido basándonos en el problema P6 de la primera fase. La tabla 4.4.2.3 muestra los dos problemas. En negrita hemos resaltado los términos que hemos cambiado en la segunda fase:

P6 Primera fase	P4 Segunda fase
En un campamento de verano el **55%** de los integrantes son niñas. De las niñas, **el 20%** realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el **11'25%** son niños y realizan actividades acuáticas. **Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.**	De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

Tabla 4.4.2.3: El problema P6 de la primera fase y el problema P4 de la segunda fase

PROBLEMA 5

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

Describimos este problema mediante $N_2C_3T_1$. Al hacer una lectura en términos de probabilidad, el ser descrito por N_2C_3 implica que uno de los datos es una probabilidad condicional y los dos datos restantes son dos marginales. Por ser de T_1 la pregunta es una condicional.

En este problema las cantidades son porcentajes.

En la parte interrogativa se pide por una probabilidad condicional.

En cuanto a la expresión de la condicionalidad utilizamos la estructura semántica DE LOS.

Si tenemos en cuenta las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, éste es un representante de la clase [p_{02}]. Es decir, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema, para su resolución basta con dos relaciones multiplicativas.

Este problema es isomorfo al problema 1 de esta fase. Lo único que varía es la naturaleza de los datos y la naturaleza de la pregunta del problema. El grafo canónico de este problema (figura 4.4.2.7) es isomorfo al grafo canónico del problema 1. Hacemos una lectura del problema en términos de probabilidad:

Sea A el suceso "seguidores del club de fútbol A" y B el suceso "seguidores del club de fútbol B". Las probabilidades que generan los datos del problema son: $p(A) = 0.46$, $p(B) = 0.6$ y $p(A|B) = 0.5$. La pregunta es $p(B|A)$.

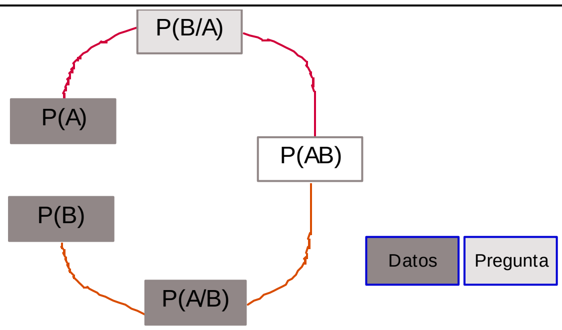


Figura 4.4.2.7: Grafo canónico asociado a P5

Con este problema comprobaremos qué naturaleza de cantidades favorece más la resolución con éxito del problema, las frecuencias absolutas o los porcentajes. La primera fase ya nos proporcionó la información de que los porcentajes favorecen la resolución del problema frente a los términos de probabilidad.

PROBLEMA 6

De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?

Describimos este problema mediante $N_2C_1T_2$. Al hacer una lectura en términos de probabilidad del problema, por ser de N_2 uno de los datos es una probabilidad condicional. Por ser de C_1 no hay datos que tengan que ver con marginales, o sea, los dos datos restantes son intersecciones. Por ser de T_2 la pregunta es una marginal.

Las cantidades presentes en la parte informativa de este problema son porcentajes.

En la parte interrogativa se pide por un porcentaje.

En cuanto a la expresión de la condicionalidad utilizamos la estructura semántica DE LOS QUE.

Si tenemos en cuenta las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, éste es un representante de la clase [p_{31}]. Es decir, haciendo una lectura en términos de probabilidad del problema, para su resolución basta con tres relaciones aditivas y una multiplicativa, como muestra la figura 4.4.2.8 que da cuenta de su grafo canónico.

Para ello realizamos la lectura del problema en términos de probabilidad.

Sea B el suceso "practicar baloncesto" y sea F el suceso "practicar fútbol". El problema muestra el suceso $B \cap F$, así como el suceso $B \cap -F$, y sus probabilidades: $p(B \cap F) = 0.3$; $p(B \cap -F) = 0.3$.

También muestra que $p(F| -B) = 0.4$. La pregunta es $p(F)$.

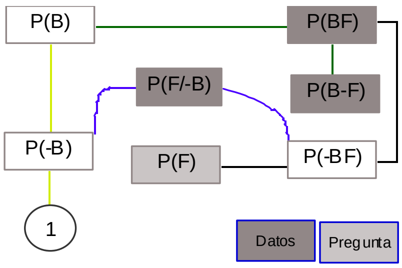


Figura 4.4.2.8: Grafo canónico asociado a P6

Este problema se basa en el problema 1 de la primera fase. La tabla 4.4.2.4 muestra los dos problemas. En negrita resaltamos los cambios:

P1 Primera fase	P6 Segunda fase
De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. **Sabemos que** de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. **Calcula la probabilidad de practicar fútbol**.	De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?

Tabla 4.4.2.4: El problema P1 de la primera fase y el problema P6 de la segunda fase

Presentamos una tabla resumen (tabla 4.4.2.5) con la descripción de cada problema de la segunda fase. La primera columna muestra el enunciado del problema, la segunda columna indica a qué familia $N_2C_iT_j$ pertenece, la tercera columna muestra la clase de equivalencia a la que pertenece el problema, la cuarta nos indica de qué forma están expresadas las cantidades, y la última columna nos indica de qué forma se pregunta.

ENUNCIADO	**$N_2C_iT_j$**	**$[p_{hk}]$**	**Naturaleza datos**	**Pregunta: suceso y expresión de la probabilidad**
PROBLEMA 1: En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?	$N_2C_3T_1$	$[p_{02}]$	Frecuencias y porcentajes	porcentaje
PROBLEMA 2: En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.	$N_2C_2T_3$	$[p_{11}]$	Porcentajes	probabilidad
PROBLEMA 3: El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.	$N_2C_3T_3$	$[p_{21}]$	Porcentajes	Probabilidad
PROBLEMA 4: De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?	$N_2C_2T_1$	$[p_{12}]$	Frecuencia y Porcentajes	Porcentaje
PROBLEMA 5: El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?	$N_2C_3T_1$	$[p_{02}]$	Razones, dos de ellas en porcentajes	Probabilidad
PROBLEMA 6: De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?	$N_2C_1T_2$	$[p_{31}]$	Porcentajes	Porcentaje

Tabla 4.4.2.5: Descripción de cada uno de los problemas de la segunda fase

4.4.2.2. La resolución de los problemas de probabilidad condicional de la segunda fase: análisis de las relaciones entre cantidades. Los procesos de resolución

El análisis de los problemas que vamos a hacer en este apartado, al igual que en Huerta (2002), tiene en cuenta los siguientes elementos:

> *a. el mundo de la resolución de problemas que contempla éstos en relación con los sistemas matemáticos de signos (Puig, 1997) con el que se resuelven (Puig, 1996)*
>
> *b. el nivel de análisis con el que se estudia el proceso de resolución y que en este caso considera el nivel macroscópico junto con la introspección –tomando en consideración la figura del resolutor ideal (Puig y Cerdán, 1988)*
>
> *c. Las destrezas heurísticas (Puig, 1996) para la resolución de problemas de probabilidad condicional (Fischbein, 1977, Engel, 1975a, 1975b, Parzysz, 1990)*
>
> *d. Los procesos de resolución y los conceptos matemáticos implicados (Huerta, 2000)*
>
> *(Huerta 2002, p. 76)*

Hemos escrito que analizamos los problemas desde el mundo de la resolución de problemas que mira a éstos desde los sistemas matemáticos de signos que los resuelven. Utilizamos el concepto de sistema matemático de signos, SMS, que define Puig (1997)

> *"la combinación de todos los signos que se usan -ya sean signos matemáticos o un sistema de signos matemáticos, el lenguaje vernáculo y otros medios de representación, quizás- constituyen un sistema matemático de signos" (p. 68)*

En Puig (2003) encontramos:

"… cuando se resuelve un problema, ineludiblemente, se realiza, por rápido y fugaz que sea esto, un análisis consciente o inconsciente lógico inicial -que llamaremos "esbozo lógico-semiótico" del problema- que pretende bosquejar la solución, esto es, apuntar el camino que necesita seguirse en la resolución del problema de acuerdo con algún texto matemático producido con el uso de algún SMS.

Un usuario competente que realiza tal esbozo lógico-semiótico usa mecanismos cognitivos que le permiten anticipar las relaciones clave del problema y decidir entre varios SMS, o estratos de un SMS, cuál de ellos, más abstracto o más concreto, va a usar para esbozar los pasos del proceso de resolución. Sólo entonces desarrolla un proceso de análisis y síntesis que le permite descodificar la situación problemática" (pp. 11, 12)

De la misma forma que Huerta (2002) hace con el problema de la cueva, consideramos el sistema matemático de signos que permite resolver cada uno de los problemas de la segunda fase,

formado por los diferentes estratos que determinan niveles de abstracción, tanto en el uso de los signos como en la significación que el uso de esos signos dota a los conceptos de probabilidad implicados en la resolución del problema (p. 77)

Los estratos que consideramos son tres:

★ El estrato más abstracto del SMS. El uso de este estrato necesita la determinación del espacio muestral, de los sucesos implicados y sus relaciones en la σ-álgebra que pueden construirse, de las probabilidades de los sucesos implicados y de las reglas de probabilidad.

★ El estrato intermedio del SMS. Consideramos el estrato intermedio del SMS el que usa como signos los propios de los sistemas de representación, los árboles y las tablas de contingencia, y las reglas de cálculo asociadas al sistema de representación. En este caso la estructura de los conceptos está representada por la estructura de los artefactos didácticos: árboles y tablas.

★ El estrato menos abstracto del SMS. Consideramos el estrato menos abstracto el que lee los datos como frecuencias de una determinada característica (que no suceso) en una población dada (que no espacio muestral) Las relaciones entre datos son debidas a las relaciones entre las características aritméticas que caracterizan a esa población.

Relaciones de los problemas atendiendo a los estratos del sistema matemático de signos: diferentes modos de resolución

PROBLEMA 1
En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Este problema presenta, en frecuencias absolutas, el número de estudiantes, el número de aprobados en filosofía y el número de aprobados en matemáticas, es decir, el cardinal de la muestra (N) y los cardinales de 2 marginales. Expresa el porcentaje de aprobados en filosofía de los que aprobaron matemáticas, es decir, el dato condicional está expresado en porcentajes. Pregunta por el porcentaje de aprobados en matemáticas de los que aprobaron filosofía, la pregunta es una condicional. Ya hemos dicho que se describe mediante $N_2C_3T_1$.

Transformación del problema, tal y como hemos hecho en la página 313:

Llamamos:

★ F: estudiantes que aprueban filosofía

★ -F: estudiantes que no aprueban filosofía

★M: estudiantes que aprueban matemáticas

★-M: estudiantes que no aprueban matemáticas

Sabemos que N = 100, n(F) = 60, n(M) = 70 y que de %(F|M) = 80.

Modo de resolución por cálculo de probabilidades, utilizando el estrato más abstracto del SMS

Transformación de las cantidades en frecuencias a probabilidades:

p(F) = 0.6; p(M) = 0.7 y p(F|M) = 0.8

La pregunta es p(M|F). $p(M|F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \frac{p(F|M).p(M)}{p(F)} = \frac{0.8x0.7}{0.6} = 0.9\hat{3}$

El grafo asociado a este problema queda reflejado en la figura 4.4.2.9, en la que se observa las cantidades y relaciones entre las cantidades asociadas a P1.

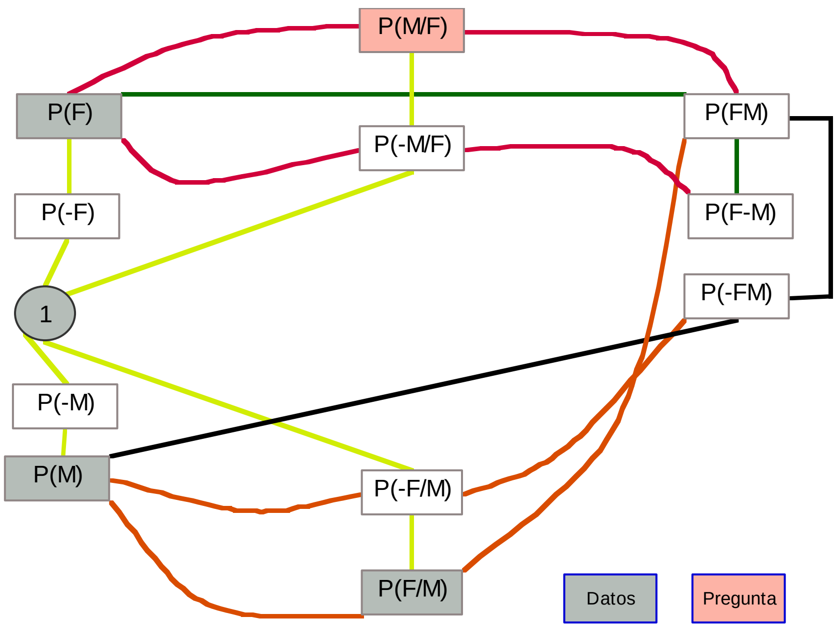


Figura 4.4.2.9: Grafo asociado a P1

Este grafo muestra las relaciones entre las cantidades del problema. La arista entrada relaciona p(M), p(F|M) y oscurece el vértice p(MF). La siguiente arista entrada relaciona p(MF) y p(F) y oscurece el vértice que da cuenta de la pregunta del problema. Este proceso queda reflejado en la figura 4.4.2.10 y muestra el plan para resolver el problema que está expuesto en la página anterior:

$$p(M|F) = \frac{p(M \cap F)(\text{primera entrada})}{p(F)} = \frac{0.8x0.7}{p(F)}(\text{segunda entrada}) = \frac{0.8x0.7}{0.6} = 0.9\hat{3}$$

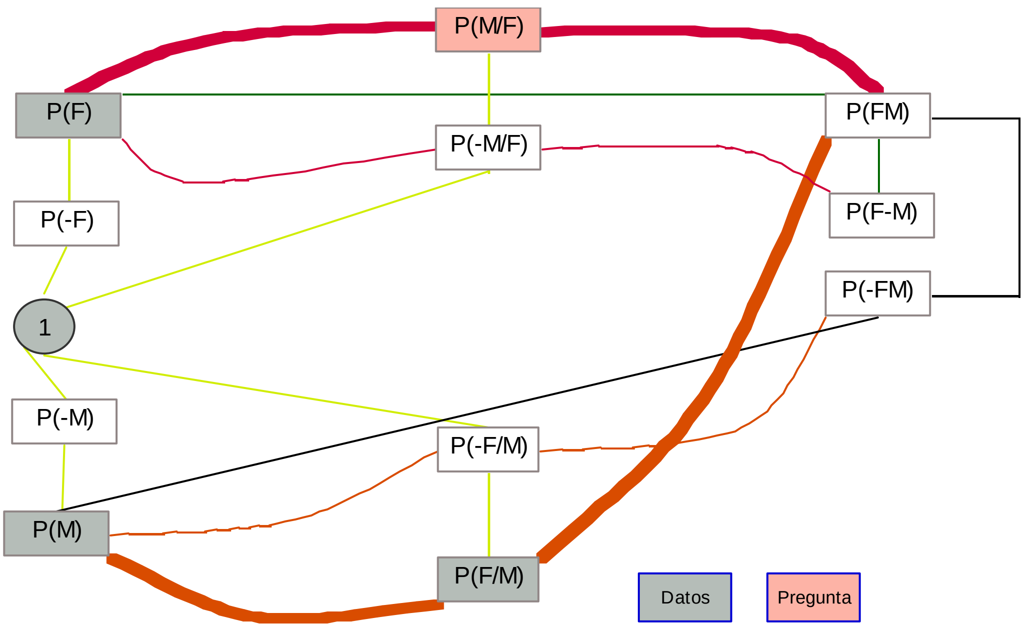


Figura 4.4.2.10: Proceso de resolución de P1 utilizando grafos trinomiales

Modo de resolución mediante sistemas de representación, utilizando el estrato intermedio del SMS

La figura 4.4.2.11 muestra la resolución mediante los árboles de contingencia.

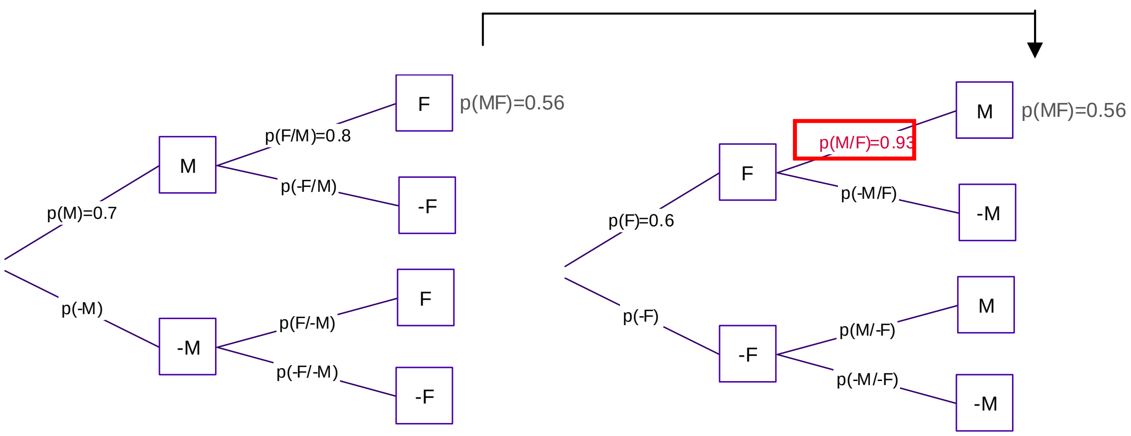


Figura 4.4.2.11: Diagramas de árbol utilizados en el proceso de resolución de P1

Considerar la rama del primer árbol para obtener la probabilidad de la intersección, p(M∩F), mediante la regla del producto (cantidad reflejada en gris en el árbol). Esta probabilidad la situamos en el segundo árbol, por la conmutatividad de la intersección MF=FM, luego p(MF)=p(FM). Utilizando la regla del producto para caminos de este segundo árbol calculamos la probabilidad pedida (cantidad reflejada en rojo, es el número que hay que multiplicar a 0.6 para obtener 0.56)

Modo de resolución por asignación, mediante el estrato menos abstracto del SMS, lectura aritmética

100 alumnos distribuidos de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\text{60 aprueban filosofía n(F)}\\ \text{70 aprueban matemáticas n(M)}\\ \text{De los que aprueban matemáticas el 80\% aprueba filosofía}\end{array}\right\}\quad \text{cantidades conocidas}$$

Al considerar los alumnos por las características se producen cuatro más dos grupos:

- ★Aprobados en cada asignatura (dos grupos)
- ★Aprobados en las dos asignaturas
- ★Aprobados en una de las dos (dos grupos)
- ★No aprobados en ninguna de las dos

$$\text{Cada uno de estos seis grupos con sus cardinales: }\left\{\begin{array}{c}n(M)\text{ y }n(F)\\ n(MyF)\\ n(-MyF)\text{ y }n(My-F)\\ n(-My-F)\end{array}\right.$$

De estos datos son conocidos n(F) y n(M). El tercer dato debe ser leído en términos de estos datos. Leído correctamente, proporciona nuevos datos: n(MyF) y n(My-F)

Por tanto:

★ Se calcula cuántos estudiantes aprobaron filosofía de los que aprobaron matemáticas: el 80% de 70 es 56. Luego 56 estudiantes aprobaron matemáticas y filosofía

★ De los 60 estudiantes que aprobaron filosofía, se sabe que 56 aprobaron matemáticas y filosofía. Luego 56 de 60. Como $\frac{56}{60} = 0.9\hat{3}$, entonces $93.\hat{3}$ de 100 $\Rightarrow$ 93.3% de los que aprobaron filosofía aprobaron matemáticas

El grafo asociado a P1, manteniendo la lectura aritmética del problema queda reflejado en la figura 4.4.2.12.

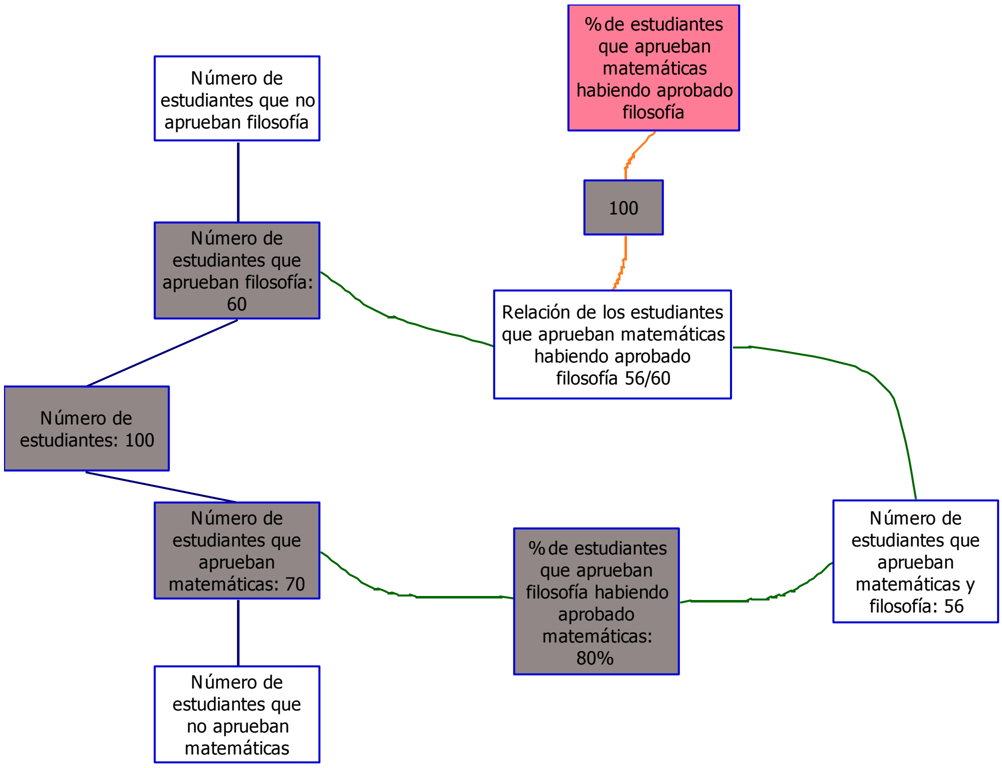


Figura 4.4.2.12: Grafo asociado a P1 manteniendo la lectura aritmética del problema

Este grafo muestra todas las cantidades del problema y relaciones entre éstas. La arista entrada relaciona el número de estudiantes que aprueban matemáticas con el porcentaje de estudiantes que aprueban filosofía habiendo aprobado matemáticas. Con esta arista se oscurece el vértice que representa el número de estudiantes que aprueban filosofía y matemáticas. Con este vértice oscurecido se obtiene una nueva arista entrada que oscurece el vértice que representa la relación entre los estudiantes que aprueban matemáticas y filosofía y los estudiantes que aprueban filosofía. Por último, se llega a la solución del problema oscureciendo el vértice que representa el porcentaje de estudiantes que aprueban matemáticas habiendo aprobado filosofía.

PROBLEMA 2

En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

Este problema presenta como datos el porcentaje de mujeres, el porcentaje de hombres y trabajadores en tareas administrativas y el porcentaje de trabajadores en tareas administrativas de las mujeres, es decir, una marginal, una condicional y una intersección. Se pregunta por la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas, es decir, por una intersección. Se describe mediante $N_2C_2T_3$.

Al traducir el problema se llama:

★ M mujeres

★ -M hombres

★ T trabajadores que realizan tareas administrativas

★ -T trabajadores que no realizan tareas administrativas

Se conoce que:

★ el porcentaje de mujeres es 55%

★ El porcentaje de hombres que realizan tareas administrativas es11.25%

★ De las mujeres, el porcentaje de las que realizan tareas administrativas es 20%

★ Se pregunta por p (M-T)

Modo de resolución por cálculo de probabilidades, utilizando el estrato más abstracto del SMS

Al hacer una lectura del problema en términos de probabilidad:

$p(M) = 0.55$, $p(-M \cap T) = 0.1125$ y $p(T|M) = 0.2$

Se pregunta por $p(M \cap -T)$.

$P(M \cap -T) = p(-T|M).p(M) = (1- p(T|M))p(M) = 0.8x0.55 = 0.44$

La figura 4.4.2.13 muestra el grafo asociado a este problema.

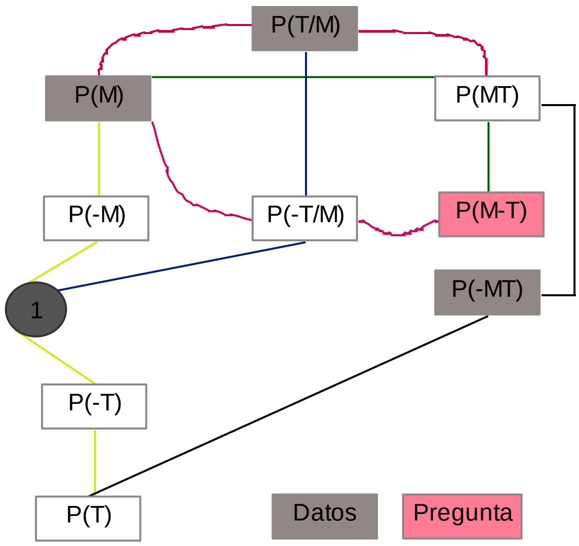


Figura 4.4.2.13: Grafo asociado a P2

Este grafo muestra las cantidades y relaciones entre éstas presentes en el problema. Los datos en el problema están representadas por los vértices de color gris y la pregunta del problema por el vértice de color rosa. Este grafo muestra tres aristas entrada.

Se elige la arista entrada que relaciona p(M) y p(T|M) y oscurece el vértice p(MT), que es una arista curva. Con este vértice oscurecido, mediante la arista entrada que relaciona p(MT) y p(M) y oscurece el vértice que da cuenta de la pregunta del problema.

También se puede elegir la entrada que oscurece el vértice que representa p(-T|M), arista recta. Con este vértice oscurecido, se obtiene una nueva arista entrada, que relaciona p(M), p(-T|M) y el vértice que representa la pregunta del problema p(M-T), arista curva.

En cualquiera de los dos casos, con una relación aditiva y una relación multiplicativa se oscurece el vértice que representa la pregunta del problema.

Estos procesos quedan reflejados en las figuras 4.4.2.14 y 4.4.2.15.

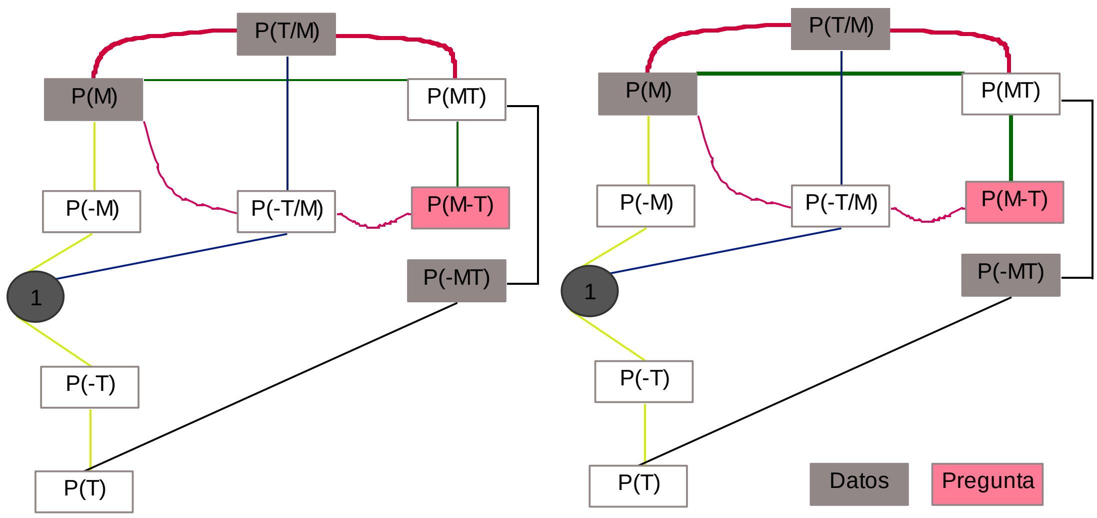


Figura 4.4.2.14: Proceso de resolución utilizando grafos trinomiales del P2

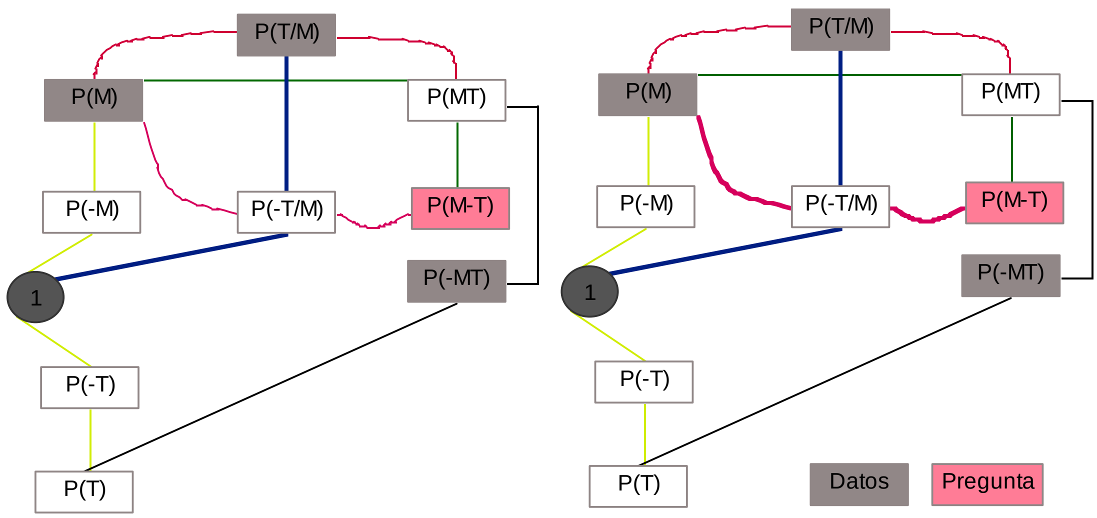


Figura 4.4.2.15: Proceso de resolución utilizando grafos trinomiales del P2

La figura 4.4.2.15 da cuenta del plan para resolver P2 propuesto en la resolución por cálculo de probabilidades:

Segunda entrada

$$P(M \cap -T) = p(-T|M).p(M) = (1-p(T|M))p(M) = 0.8x0.55 = 0.44$$

Primera entrada

Modo de resolución mediante sistemas de representación, utilizando el estrato intermedio del SMS

La figura 4.4.2.16 muestra el proceso de resolución del problema mediante el árbol de contingencia:

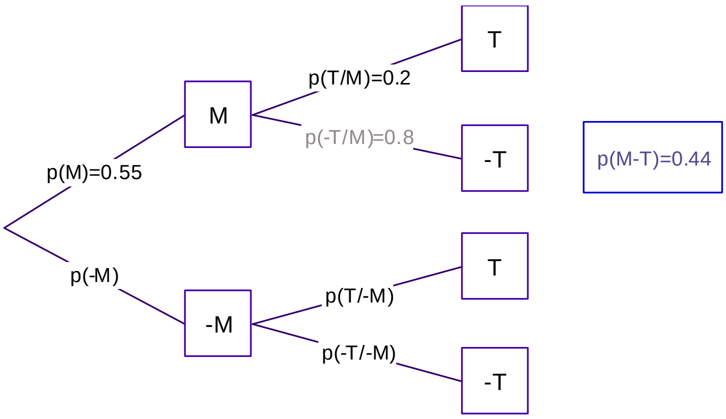


Figura 4.4.2.16: Diagrama de árbol asociado a P2

Por complementariedad de las dos primeras ramas calculamos p(-T|M) (cantidad reflejada en gris) Utilizando el segundo camino del diagrama de árbol, que da cuenta de p(M) y p(-T|M), mediante la regla del producto para caminos calculamos la probabilidad pedida.

Este problema tiene asociado un solo diagrama de árbol pues, observando los grafos que dan cuenta del número mínimo de relaciones necesarias para la resolución del problema, éstos tiene todas las aristas situadas en una de las dos mitades del grafo.

Modo de resolución por asignación, mediante el estrato menos abstracto del SMS

El problema presenta tres tantos por cien. Se hace una lectura del problema en términos de frecuencias. Para ello se considera una muestra y se aplica sobre ella los porcentajes que contienen la parte informativa del problema. Si se considera el tamaño de la muestra de 100, se obtiene una cantidad, 11,25 son hombres y realizan tareas administrativas. Esta cantidad no puede describir este conjunto, pues lo que se pretende es utilizar cantidades con sentido. Se considera una muestra de tamaño 400.

La empresa tiene 400 trabajadores de los cuales:

- ★220 son mujeres
- ★45 son hombres y realizan tareas administrativas
- ★el 20% de las mujeres realiza tareas administrativas

Se pregunta por, elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.

Si el 20% de las mujeres realiza tareas administrativas, el 80% de las mujeres no realiza tareas administrativas (100-20=80). El 80% de 220 es 176. Se calcula el porcentaje que da cuenta de 176 de 400, que es 44%. Luego el 44% de los trabajadores son mujeres y no realizan tareas administrativas. La probabilidad correspondiente es del 0.44.

El grafo asociado a P2 manteniendo la lectura aritmética del problema queda reflejado en la figura 4.4.2.17:

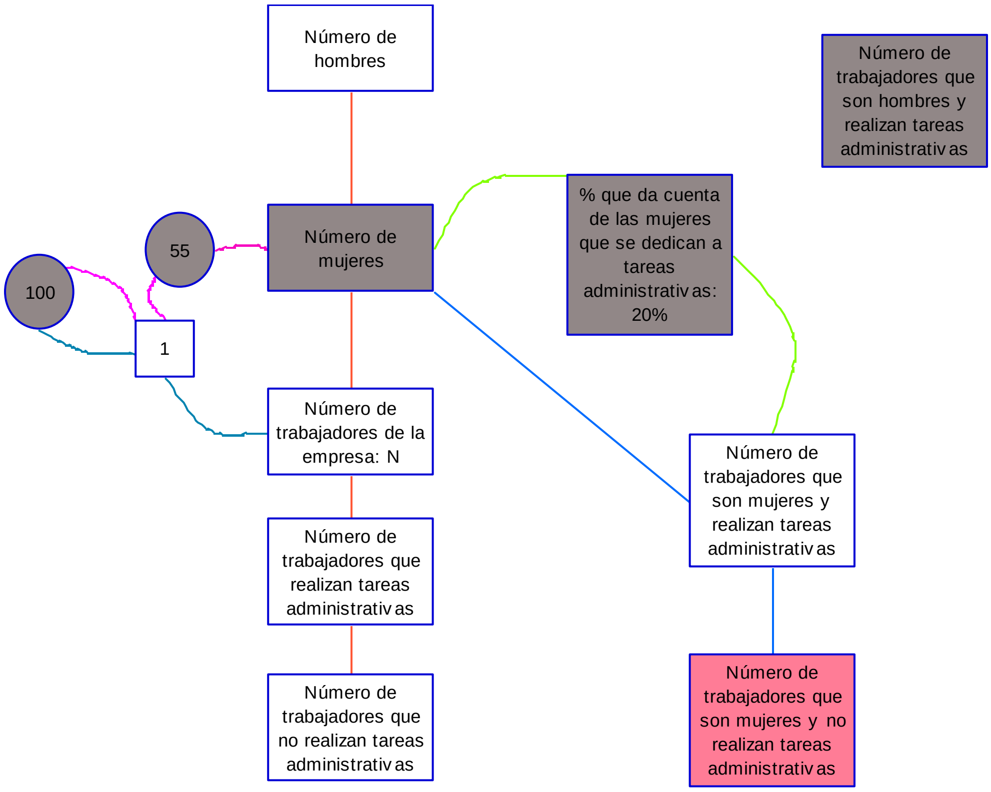


Figura 4.4.2.17: Grafo asociado a P2 manteniendo la lectura aritmética del problema

PROBLEMA 3

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.

Este problema presenta el porcentaje de los estudiantes que hablan francés, el porcentaje de estudiantes que habla inglés y el porcentaje de estudiantes que habla inglés de los que no hablan francés, es decir, 2 marginales y una condicional. Se pregunta por la probabilidad de no hablar ninguno de los dos idiomas, es decir una intersección. Este problema se describe con $N_2C_3T_3$.

Las cantidades presentes en el problema son:

- 60% estudiantes habla francés
- 70% estudiantes habla inglés
- De los que no hablan francés el 35% habla inglés

Para la transformación del problema se define:

★F = estudiantes que hablan francés

★-F = estudiantes que no hablan francés

★I = estudiantes que hablan inglés

★- I = estudiantes que no hablan inglés

La pregunta del problema es p(-I-F)

Modo de resolución por cálculo de probabilidades, utilizando el estrato más abstracto del SMS

Se hace una lectura en términos de probabilidades: p(F)=0.6; p(I)=0.7 (cantidad no necesaria) y p(I│-F)=0.35. Se pregunta por p(-F∩-I).

p(-F∩-I)= p(-I|-F).p(-F)=(1- p(I|-F)).(1-p(F))=0.65.0.4=0.26

La figura 4.4.2.18 da cuenta del grafo asociado a este problema:

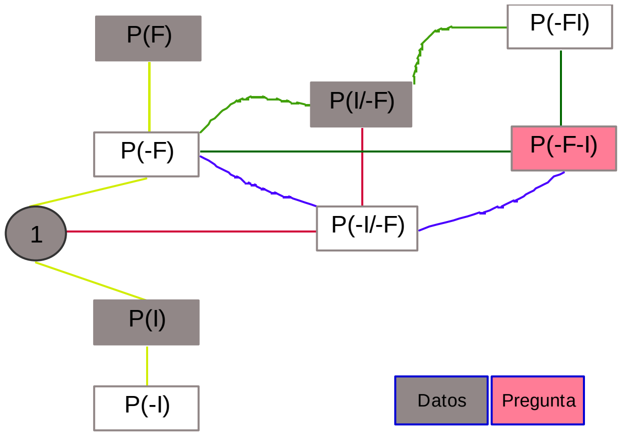


Figura 4.4.2.18: Grafo asociado a P3

El grafo que muestra la figura 4.4.2.18 da cuenta de las cantidades y las relaciones entre las cantidades del problema. Este grafo presenta tres aristas con entrada, pero sólo dos de ellas llevan a oscurecer el vértice que da cuenta de la pregunta del problema. Se presentan dos procesos de resolución con el mismo número de relaciones aditivas y multiplicativas; en los dos son necesarias dos relaciones aditivas y una multiplicativa para llegar a la solución del problema. En uno de estos procesos se actúa de la siguiente forma: la entrada relaciona los vértices que dan cuenta de las marginales complementarias p(F) y p(-F), oscureciendo el nodo que da cuenta de esta última cantidad. Esto da lugar a una nueva entrada que relaciona los vértices que dan cuenta de p(-F), p(I|-F) y p(-FI), oscureciendo el vértice que representa esta última cantidad. Así se llega a la última entrada del grafo que lleva a oscurecer el vértice que da cuenta de la pregunta del problema, p(-F-I). La figura 4.4.2.19 muestra este proceso.

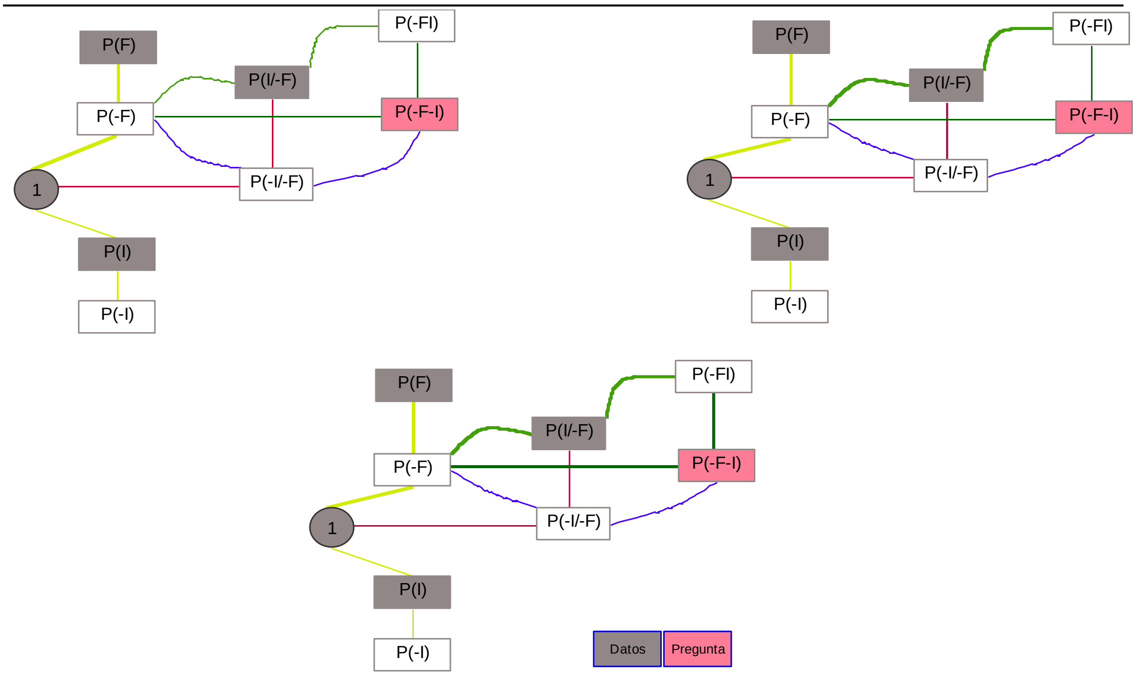


Figura 4.4.2.19: Proceso de resolución de P3 utilizando grafos trinomiales

En el otro proceso además de tener en cuenta la entrada resaltada en el proceso anterior, también se tiene en cuenta otra de las entradas del grafo de la figura 4.4.2.12, que relaciona p(I│-F) con su complementaria. Cada una de estas entradas oscurecen un vértice que forma parte de la entrada que utilizamos para oscurecer la pregunta del problema. La figura 4.4.2.20 da cuenta de este proceso:

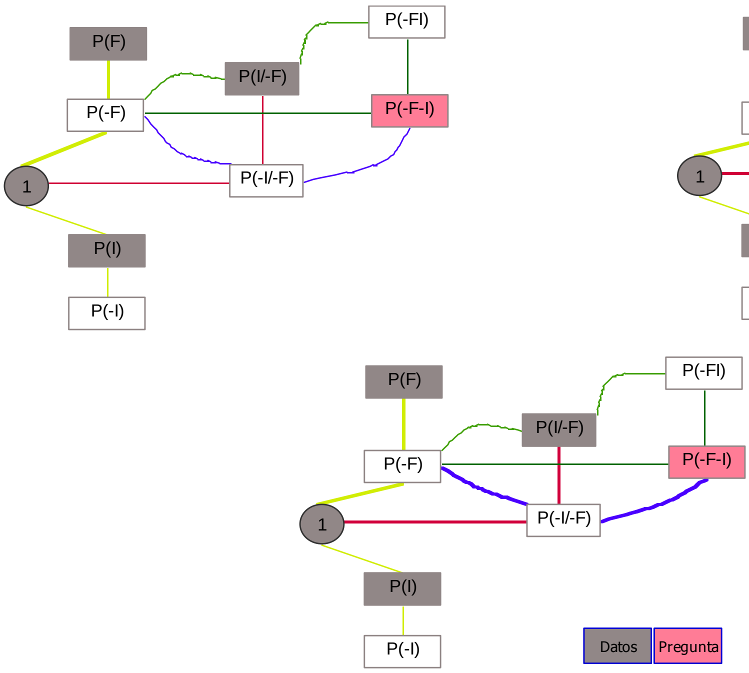


Figura 4.4.2.20: Segundo proceso de resolución de P3 utilizando grafos trinomiales

Este grafo muestra el plan para la resolución del problema que hemos expuesto en la resolución por cálculo de probabilidades:

Tercera entrada

$$p(-F\cap -I)= p(-I\,|\,-F).p(-F)=(1- p(I\,|\,-F)).(1-p(F))=0.65.0.4=0.26$$

Primera entrada

Segunda entrada

Modo de resolución mediante sistemas de representación, utilizando el estrato intermedio del SMS

La figura 4.4.2.21 muestra el proceso de resolución del problema mediante el árbol de contingencia:

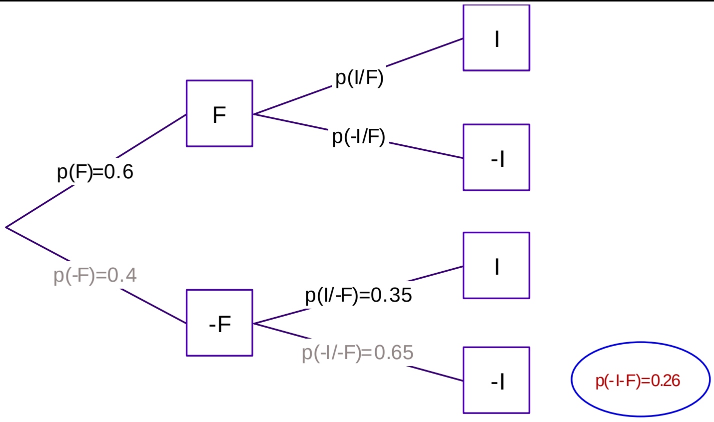


Figura 4.4.2.21: Diagrama de árbol asociado a P3

Por la dicotomía de las dos ramas del diagrama de árbol, calculamos p(-F) (cantidad reflejada en gris en la figura 4.4.2.21) Por la dicotomía de las dos ramas de la segunda rama, calculamos p(-I│-F) (cantidad reflejada en gris en la figura 4.4.2.21), y por la regla del producto para caminos, calculamos la probabilidad pedida (cantidad reflejada en rojo en la figura 4.4.2.21).

Si se observa el grafo asociado al problema con el que se muestran todas las cantidades posibles y relaciones entre estas, y resaltamos las aristas que dan cuenta del plan para la resolución del problema, éste muestra que estas aristas quedan situadas en una de las mitades del grafo tal y como muestra la figura 4.4.2.22. Este hecho indica que con el diagrama de árbol que representa esta mitad llegamos a la solución del problema.

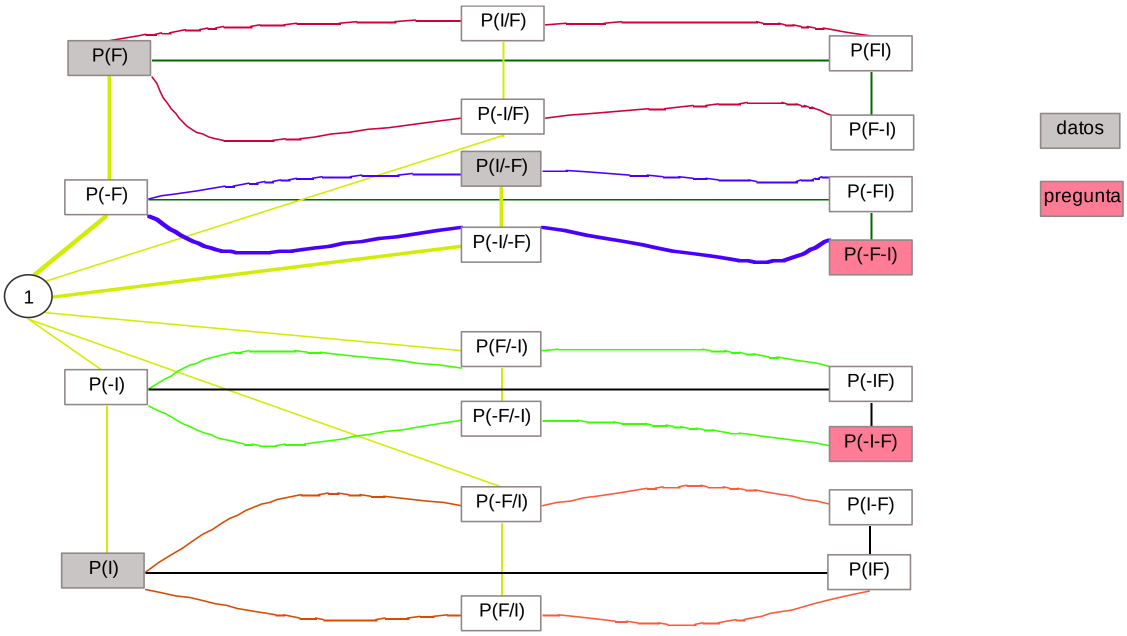


Figura 4.4.2.22: Grafo asociado a P3, con el que se muestra todas las cantidades y relaciones posibles en P3 y resalta las relaciones que dan cuenta del plan para resolver P3

Modo de resolución por asignación, mediante el estrato menos abstracto del SMS

El problema presenta tres datos en porcentajes. En este modo de resolución se requiere una lectura del problema en términos de frecuencias y al final se asigna una probabilidad a la solución del problema. Por esta razón, se considera una muestra y se aplica sobre ésta los porcentajes que presenta la parte informativa del problema. Se consideran las siguientes cantidades:

El centro escolar consta de 100 estudiantes. Estos 100 estudiantes considerados según las características, estudiar francés, estudiar ingles, quedan distribuidos en 6 grupos:

★Estudiar uno de los dos idiomas: estudiar francés F, estudiar inglés I

★Estudiar los dos idiomas: estudiar francés e inglés FI

★Estudiar sólo un idioma F-I, -FI

★ No estudiar ninguno de los dos idiomas –F-I

Estos seis grupos tienen sus cardinales: $\begin{cases} n(F) \\ n(I) \\ n(FI) \\ n(-FI) \\ n(F-I) \\ n(-F-I) \end{cases}$

De estos cardinales se conocen

★ 60 estudiantes hablan francés: n(F)=60

★ 70 estudiantes hablan inglés: n(I)=70

★ El tercer dato, *De los que no hablan francés el 35% habla inglés*, no proporciona directamente ninguno de estos cardinales, pero leído correctamente proporciona nuevos datos: n(-FI) y n(-F-I)

El plan para calcular la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas es:

★ De los 100 alumnos, 60 hablan francés, luego 40 no hablan francés

★ De los que no hablan francés el 35% habla inglés, luego de los que no hablan francés el 65% no habla inglés

★ De los 40 estudiantes que no hablan francés, el 65% no habla inglés, el 65% de 40 es 26, luego hay 26 estudiantes que no hablan ninguno de los dos idiomas

★ En términos de probabilidad es 26 de 100, 26/100 ó 0.26

El grafo asociado a P3 manteniendo la lectura aritmética del problema queda reflejado en la figura 4.4.2.23:

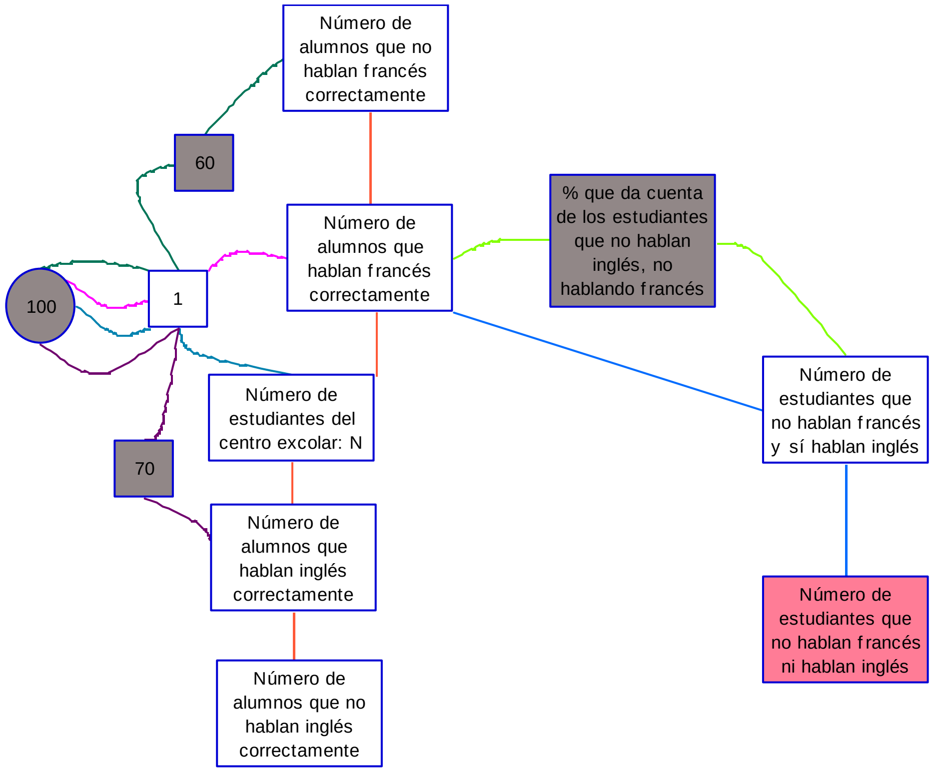


Figura 4.4.2.23: Grafo asociado a P3 manteniendo la lectura aritmética del problema

PROBLEMA 4

De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

Este problema presenta, en frecuencias absolutas, el número de integrantes del campamento, el número de niñas y el número de niños que realizan actividades acuáticas, es decir, el cardinal de la muestra (N) y los cardinales de una marginal y de una intersección. Expresa el porcentaje de los que realizan actividades acuáticas de las niñas, es decir, el dato condicional está expresado en porcentajes. Pregunta por el porcentaje de niñas de los que realizan actividades acuáticas, la pregunta es una condicional. Se describe mediante $N_2C_2T_1$.

Las cantidades presentes en el problema son:
- 400 integrantes
- 220 niñas
- De las niñas el 20% act. acuátic.
- 45 niños que realizan actividades acuáticas

Al traducir el problema se define:

★N = niñas

★-N = niños

★A = integrantes que realizan actividades acuáticas

★- A = integrantes que no realizan actividades acuáticas

Se pregunta por $p(N|A)$ expresada en porcentaje.

Modo de resolución por cálculo de probabilidades, utilizando el estrato más abstracto del SMS

Al hacer la lectura en términos de probabilidades: p(N)=0.55; p(-N∩A)=0.1125 y p(A|N)=0.2. Se pregunta por p(N|A).

$$p(N|A)=p(N\cap A)/p(A)= \frac{p(A|N).p(N)}{p(-N \cap A)+p(A|N).p(N)} = \frac{0.55.x.2}{0.1125+0.55x0.2} = 0.4943$$

El grafo asociado al problema queda reflejado en la figura 4.4.2.24:

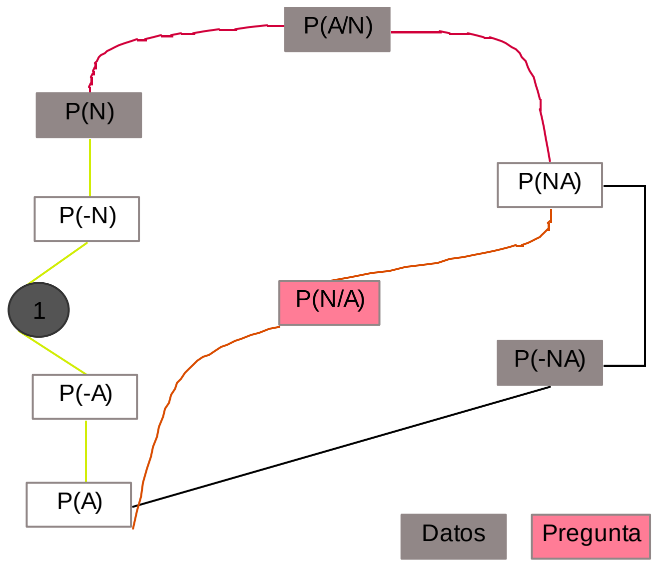


Figura 4.4.2.24: Grafo canónico asociado a P4

El grafo de la figura 4.4.2.24 muestra las probabilidades y las relaciones entre éstas presentes en el proceso de resolución del problema. Para llegar a oscurecer el vértice que representa la pregunta del problema se procede de la siguiente manera. Se elige la entrada curva que relaciona p(N), p(A|N) y p(NA), y que oscurece este último vértice que es nodo. Esta entrada se autodestruye y se obtiene otra entrada, arista recta, que relaciona los vértices que representan p(NA), p(-NA) y p(A), siendo este último vértice nodo. Esta entrada se autodestruye y se llega a la última entrada del problema, arista curva, que oscurece el vértice que representa la pregunta del problema. La figura 4.4.2.25 muestra este proceso:

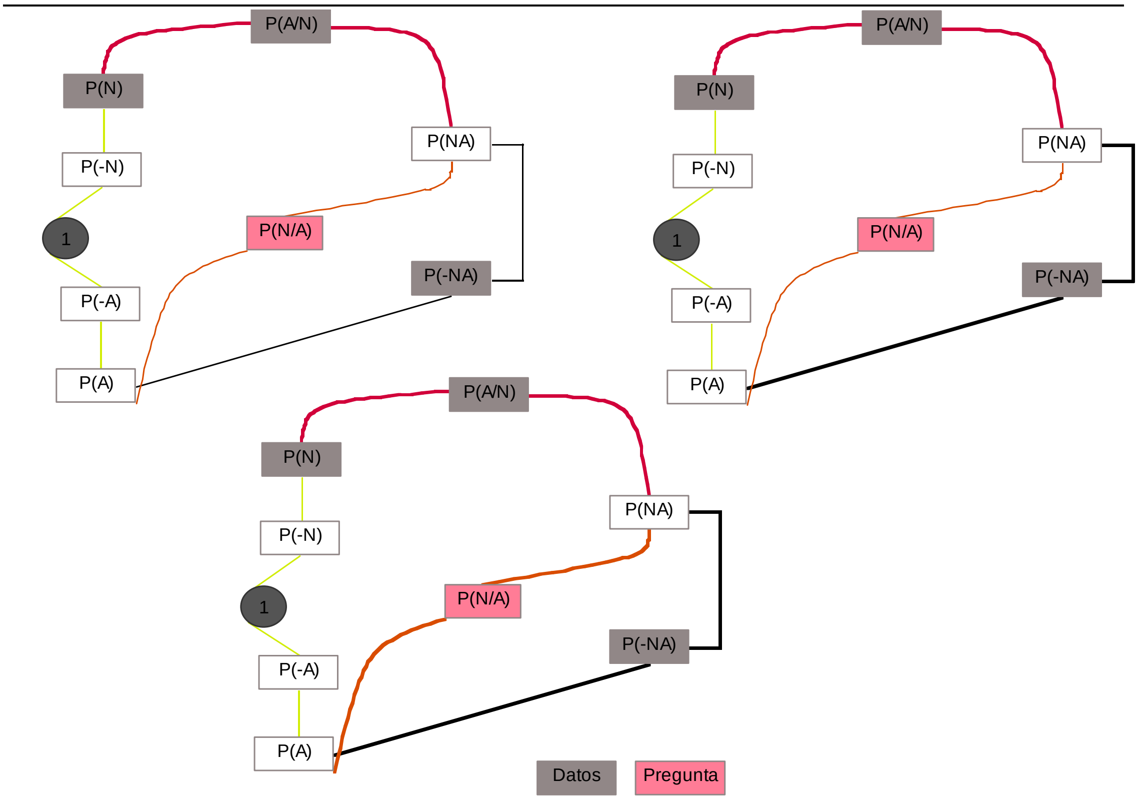


Figura 4.4.2.25: Proceso de resolución de P4 utilizando los grafos trinomiales

Este grafo proporciona un plan para resolver el problema, el plan que se expone en la resolución mediante el cálculo de probabilidades:

Primera entrada

Tercera entrada

$$p(N|A)=\frac{p(N\cap A)}{p(A)}=\frac{p(A|N).p(N)}{p(-N\cap A)+p(N\cap A)}=\frac{p(A|N).p(N)}{p(-N\cap A)+p(A|N).p(N)}$$

$$=\frac{0.55.0.2}{0.1125+0.55.0.2}=0.4943$$

Segunda entrada

Modo de resolución mediante sistemas de representación, utilizando el estrato intermedio del SMS

La figura 4.4.2.26 muestra el proceso de resolución del problema mediante los árboles de contingencia:

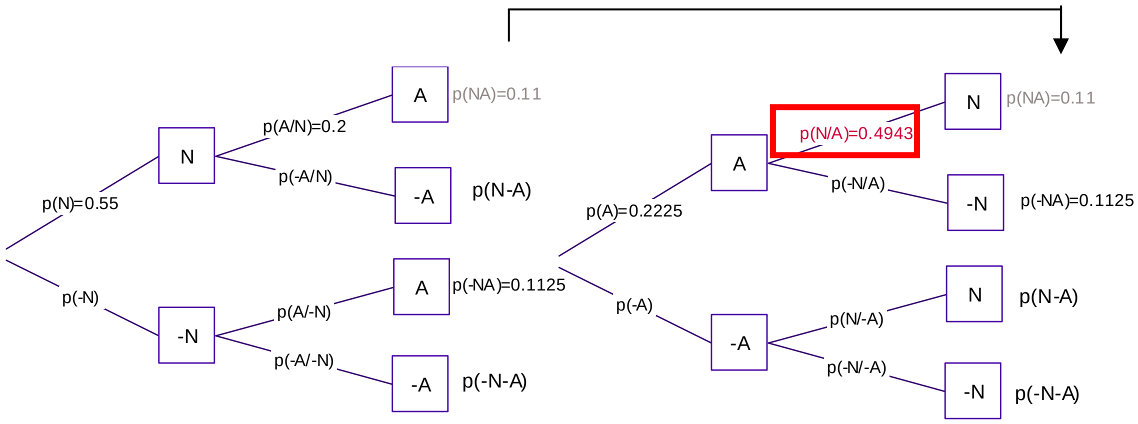


Figura 4.4.2.26: Diagramas de árbol asociados a P4

Por el primer camino del primer árbol, mediante la regla del producto para caminos, se calcula p(NA). Se traslada esta cantidad al segundo árbol, teniendo en cuenta que como N∩A=A∩N, entonces p(N∩A)=p(A∩N). Se calcula la marginal p(A), haciendo uso de la distribución de esta cantidad por los dos caminos: p(A) =p(NA)+p(-NA). Por último mediante el primer camino del segundo árbol, utilizando la regla del producto para caminos, calculamos la probabilidad pedida (reflejada en rojo)

Se utilizan los dos diagramas de árbol, pues si observamos los grafos que indican el plan para resolver el problema, los vértices y las aristas implicadas pertenecen a las dos mitades en las que podemos dividir este grafo (siempre que se sitúa este grafo en el grafo que da cuenta del mundo de los problemas trinomiales de probabilidad condicional)

Modo de resolución por asignación, mediante el estrato menos abstracto del SMS

Hay 400 integrantes del campamento distribuidos de la siguiente forma:

★ 220 niñas

★ De las niñas el 20% realizan actividades acuáticas

★ 45 niños realizan actividades acuáticas

Por tanto:

★ Calculamos el 20% de 220 y obtenemos 44 niñas realizan actividades acuáticas

★ Sumamos las niñas que realizan actividades acuáticas con los niños que realizan actividades acuáticas: 44+45=89, que es el total de integrantes del campamento que realizan actividades acuáticas

★ Sabemos que el integrante elegido realiza actividades acuáticas, está entre los 89 que realizan actividades acuáticas. Si queremos saber si es niña, como hay 44 niñas, la probabilidad de que el realizador de actividades acuáticas sea niña es la relación entre niña realizadora de actividades acuáticas e integrante realizador de actividades acuáticas, relación que podemos expresar en términos de razón, 44 de 89; de fracción o de tanto por 1, $\frac{44}{89}$; de tanto por cien: $\frac{44}{89}$%

El grafo asociado a P4 manteniendo la lectura aritmética del problema queda reflejado en la figura 4.4.2.27:

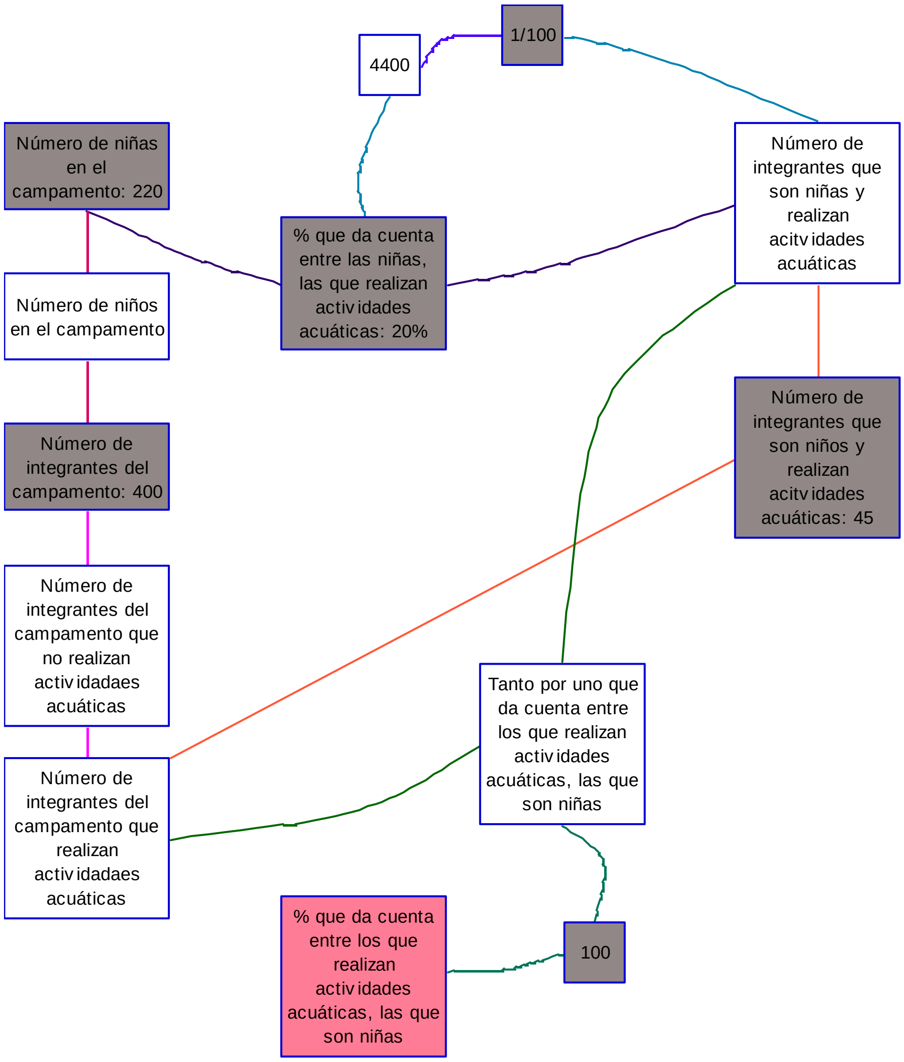


Figura 4.4.2.27: Grafo asociado a P4 manteniendo la lectura aritmética del problema

PROBLEMA 5

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

Este problema presenta el porcentaje de habitantes que son seguidores del club A, el porcentaje de habitantes seguidores del club B y el porcentaje de habitantes de seguidores del club A de los seguidores del club B. Es decir, los porcentajes que dan cuenta de dos marginales y una condicional. Pregunta por la probabilidad de ser seguidor de B siendo seguidor de A. Es decir, se pregunta por una probabilidad condicional. El problema se describe mediante $N_2C_3T_1$.

Para la traducción del problema se define:

- ★A: habitantes seguidores del club A
- ★- A: no seguidores del club A
- ★B: habitantes seguidores del club B
- ★- A: habitantes no seguidores del club B

Sabemos que, n(A) = 46, n(B) = 60 y que la mitad de los seguidores de B lo son de A.

Se pregunta por $p(B|A)$

Modo de resolución por cálculo de probabilidades, utilizando el estrato más abstracto del SMS

Al hacer la lectura en términos de probabilidades: p(A) = 0.46; p(B) = 0.6 y $p(A|B) = 0.5$

Se pregunta por p(B|A)

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A|B).p(B)}{p(A)} = \frac{0.5x0.6}{0.46} = 0.6522$$

La figura 4.4.2.28 muestra el grafo asociado a este problema.

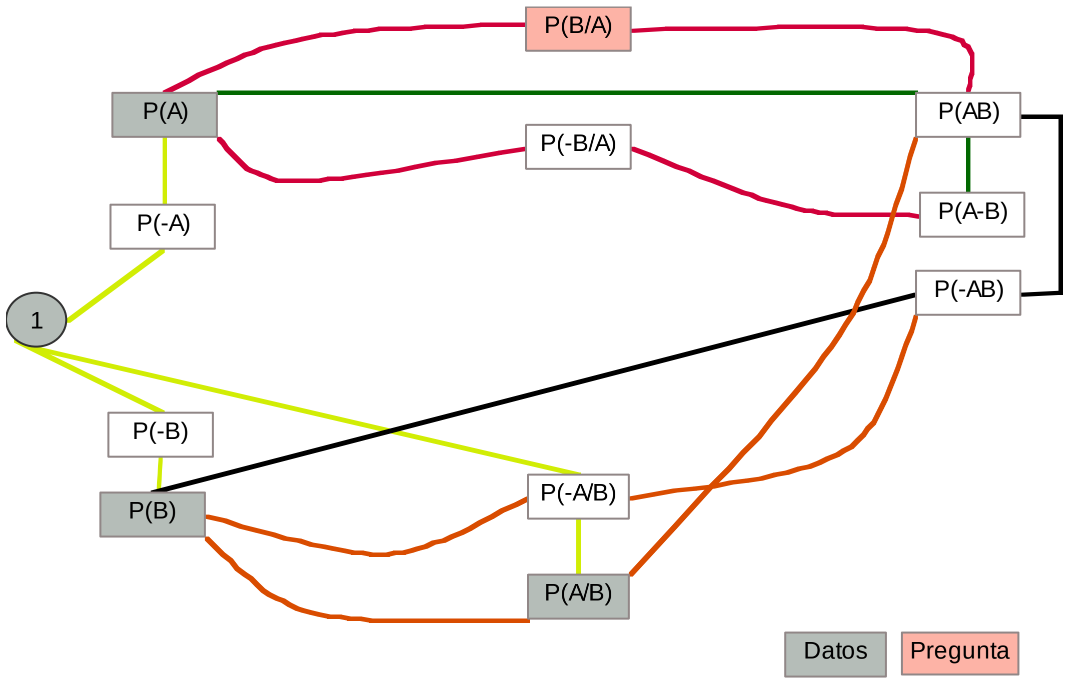


Figura 4.4.2.28: Grafo trinomial asociado a P5

Este grafo muestra las probabilidades y las posibles relaciones entre éstas necesarias para la resolución del problema. Para llegar a oscurecer el vértice que da cuenta de la pregunta del problema se elige la entrada, arista curva, que relaciona los vértices que dan cuenta de las probabilidades p(B), p(A|B) y p(AB), siendo este último vértice nodo. Esta arista se autodestruye. Se presenta una nueva entrada, arista curva, que oscurece el vértice que da cuenta de la pregunta del problema.

En la figura 4.4.2.29 se observa este proceso.

Este grafo indica el plan para la resolución del problema que se presenta en el modo de resolución por cálculo de probabilidades.

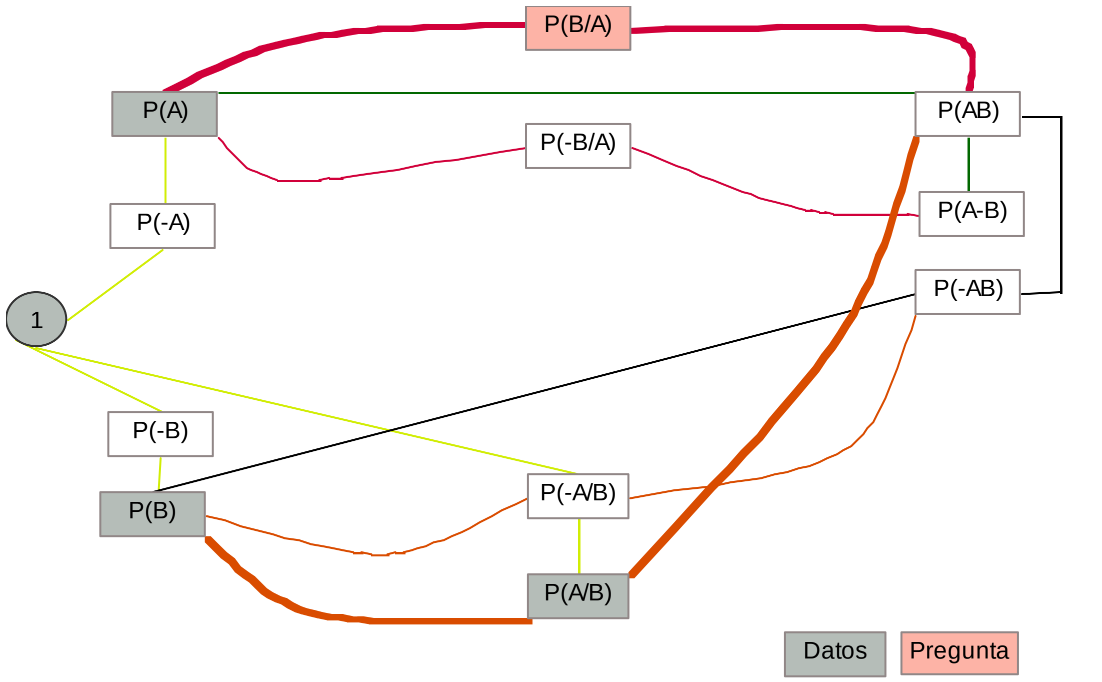


Figura 4.4.2.29: Proceso de resolución de P5 utilizando grafos trinomiales

Modo de resolución mediante sistemas de representación, utilizando el estrato intermedio del SMS

La figura 4.4.2.30 muestra el proceso de resolución del problema mediante árboles de contingencia.

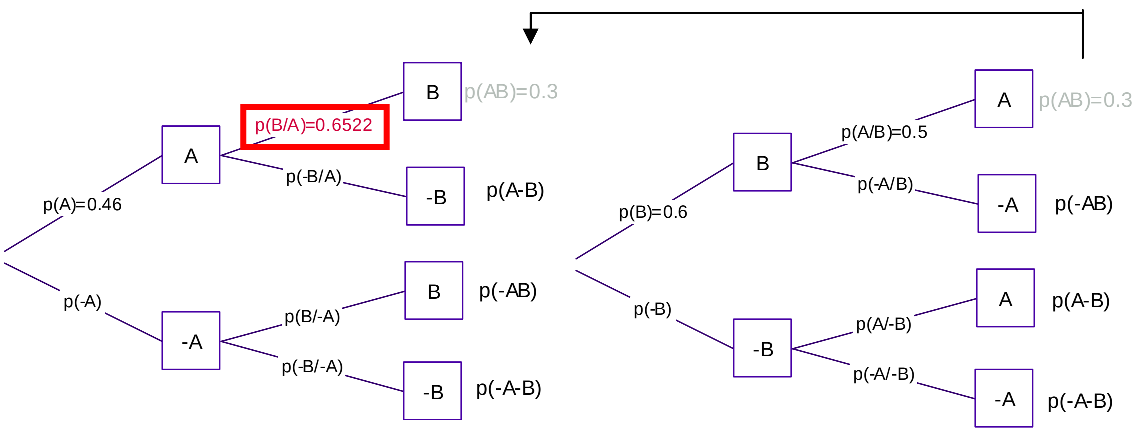


Figura 4.4.2.30: Diagramas de árbol asociados a P5

Por el primer camino del segundo árbol, utilizando la regla del producto para caminos, se calcula p(A∩B). Por la conmutatividad de la intersección, como A∩B=B∩A, entonces p(A∩B)=p(B∩A), se sitúa esta cantidad en el primer árbol y mediante la regla del producto para caminos se calcula la probabilidad pedida.

Modo de resolución por asignación, mediante el estrato menos abstracto del SMS

Los datos del problema son tres razones, dos de ellas expresadas en porcentajes. Se requiere que los datos se lean en frecuencias. Para ello se considera una muestra y se aplica sobre ella las razones contenidas en la parte informativa del problema. Se considera una muestra de tamaño 100 y de ella:

★46 son seguidores del club A

★60 son seguidores del club B

★La mitad de los seguidores del club B lo es del club A

La respuesta a la pregunta del problema, al escoger una persona al azar de los seguidores del club A qué probabilidad hay de que sea del club B, se puede calcular de la siguiente forma:

★La mitad de los seguidores del club B lo son del club A. Como hay 60 seguidores del club B, entonces la mitad, 30, son seguidores de A y B

★Si hay 46 seguidores de A y de éstos 30 son de A y B, entonces contestamos a la pregunta con la relación entre seguidores de A y B, 30 y seguidores de A, 46, es decir 30 de 46; 30/46, o 30/46x100

El grafo asociado a P5 manteniendo la lectura aritmética del problema queda reflejado en la figura 4.4.2.31.

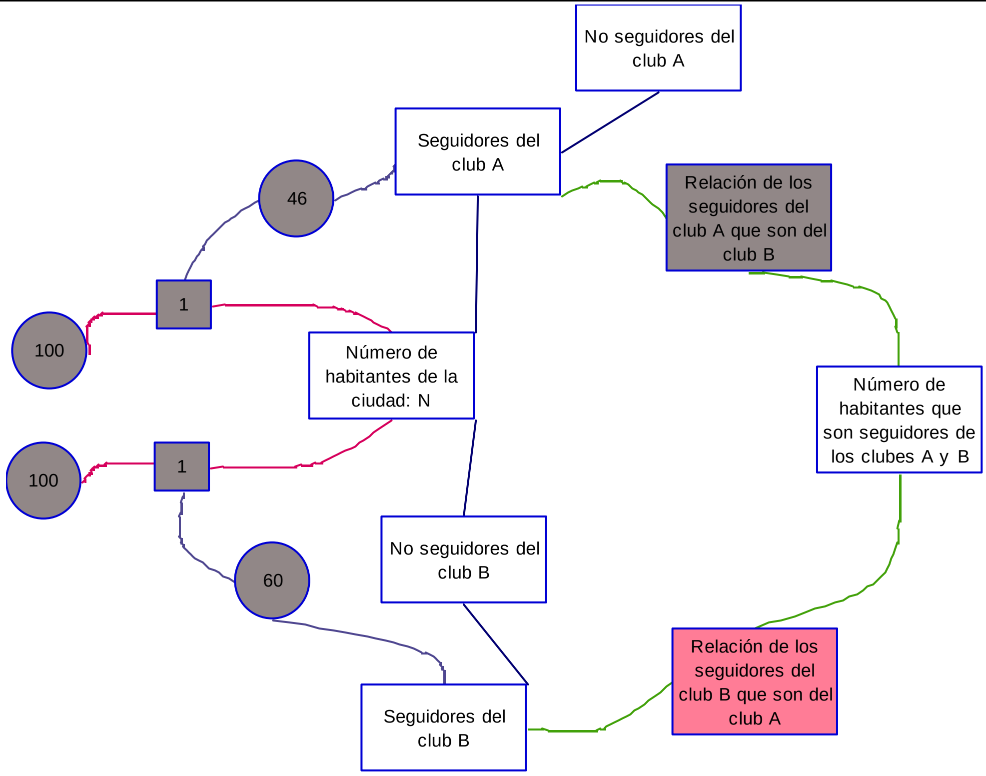


Figura 4.4.2.31: Grafo asociado a P5 manteniendo la lectura aritmética del problema

PROBLEMA 6

De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?

Este problema presenta el porcentaje de estudiantes que practica baloncesto y fútbol, el porcentaje de estudiantes que practica baloncesto y no practica fútbol y el porcentaje de estudiantes que practica fútbol de los que no practican baloncesto. Es decir, los porcentajes que dan cuenta de dos intersecciones y una condicional. Pregunta por el porcentaje de practicar fútbol, por una marginal. El problema se describe mediante $N_2C_1T_2$.

Para la traducción del problema se define:

★ B: estudiantes que practican baloncesto

★ - B: estudiantes que no practican baloncesto

★ F: estudiantes que practican fútbol

★ - F: estudiantes que no practican fútbol

Sabemos que:

★ el porcentaje de los que practican baloncesto y fútbol es 30%

★ el porcentaje de los que practican baloncesto y no practican fútbol es 30%

★ De los que no practican baloncesto el porcentaje de los que practican fútbol es 40%

Se pregunta por el porcentaje de hacer fútbol.

Modo de resolución por cálculo de probabilidades, utilizando el estrato más abstracto del SMS

Al hacer la lectura en términos de probabilidades obtenemos que

$p(B \cap F) = 0.3$, $p(B \cap -F) = 0.3$ y que $p(F|-B) = 0.4$.

Se pregunta por p(F).

$P(F) = p(F \cap -B)+p(B \cap F) = p(F|-B)\ p(-B)+p(B \cap F) = p(F|-B)\ [1-p(B)]+p(B \cap F) = p(F|-B)\ [1-p(B \cap F) - p(B \cap -F)]+p(B \cap F) = 0.4.[1 - 0.6] + 0.3 = 0.4x0.4+0.3 = 0.16 + 0.3 = 0.46.$

El grafo asociado al problema queda reflejado en la figura 4.4.2.32

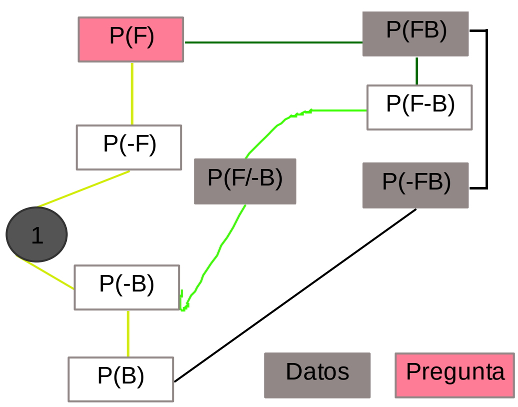


Figura 4.4.2.32: Grafo trinomial asociado a P6

El grafo está formado por cinco aristas. Sólo una de las aristas, arista recta, tiene dos cantidades conocidas, por lo que es la que contiene la entrada al grafo. Esta entrada oscurece el nodo que da cuenta de p(B). La entrada se autodestruye, dando lugar a otra entrada, arista recta, que oscurece el vértice que da cuenta de p(-B). Esta nueva entrada también se autodestruye dando lugar a la entrada, arista curva, que oscurece el vértice que da cuenta de p(F-B) Esta arista se autodestruye, dando lugar a la última entrada del grafo, arista recta, que oscurece el vértice que da cuenta de la pregunta del problema.

La figura 4.4.2.33 muestra la sucesión de cada una de las estradas.

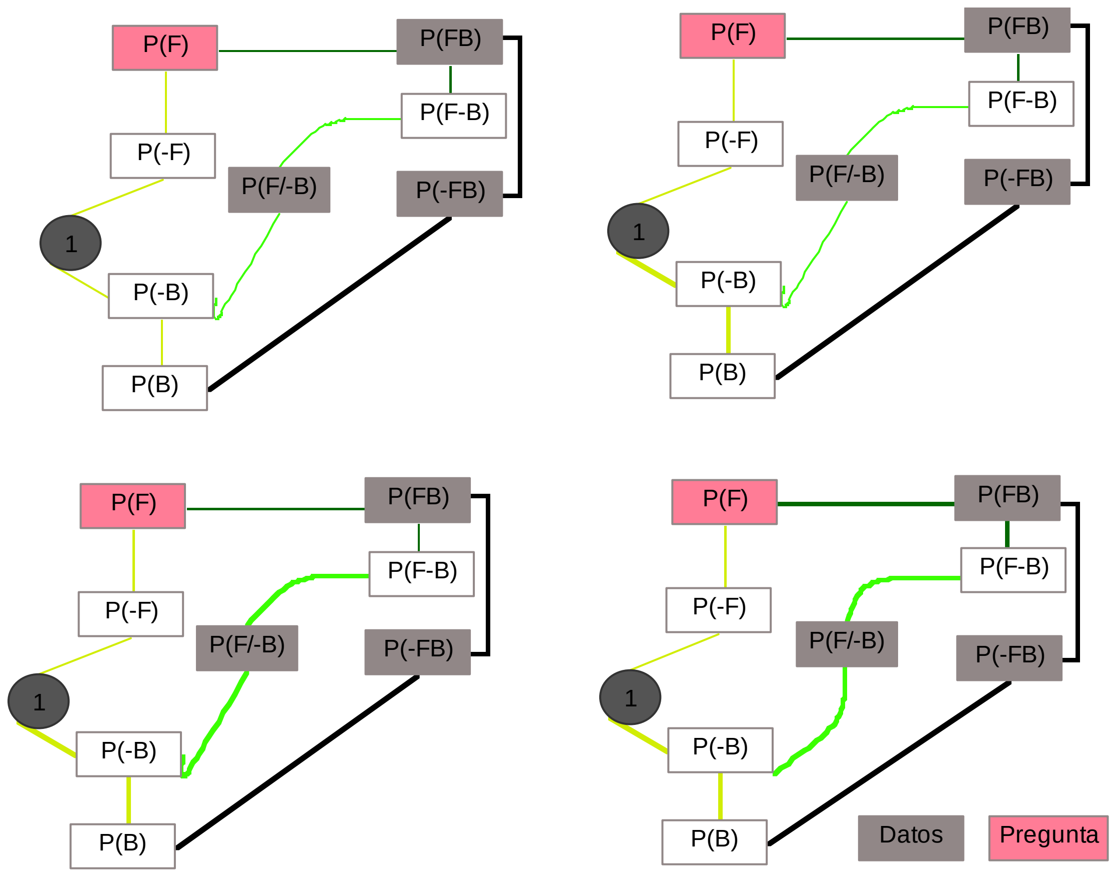


Figura 4.4.2.33: Grafos asociados a P6, resaltando en cada uno de ellos las entradas de forma progresiva, hasta llegar a oscurecer el vértice que da cuenta de la solución del problema

Este grafo da cuenta del plan para la resolución del problema que se presenta en el modo de resolución por cálculo de probabilidades:

$P(F)=p(F\cap -B)+p(B\cap F)=\ p(F|-B)p(-B)\ )+p(B\cap F)=\ p(F|-B)[1-p(B)]+p(B\cap F)\ =$

$p(F|-B)\ [1-(p(B\cap F)+p(B\cap -F))]+p(B\cap F)\ =\ 0.4.[1-0.6]+0.3\ =\ 0.4.0.4+0.3\ =$

Cuarta entrada: p(F)

Tercera entrada: p(F-B)

$0.16+0.3\ =\ 0.46.$

Primera entrada: p(B)

Segunda entrada: p(-B)

Modo de resolución mediante sistemas de representación, utilizando el estrato intermedio del SMS

La tabla 4.4.2.6 y la figura 4.4.2.34 dan cuenta del proceso de resolución del problema mediante la tabla de contingencia y el árbol.

	B	-B	Marginales
F	p(B∩F) = 0.3	p(-B∩F) = 0.16	$\boxed{\text{p(F) = 0.46}}$
-F	p(B∩-F) = 0.3	p(-B∩-F)	p(-F)
Marginales	p(B) = 0.6	p(-B) = 0.4	1

Tabla 4.4.2.6: Tabla de contingencia asociada a P6

El árbol asociado está reflejado en la figura 4.4.2.34.

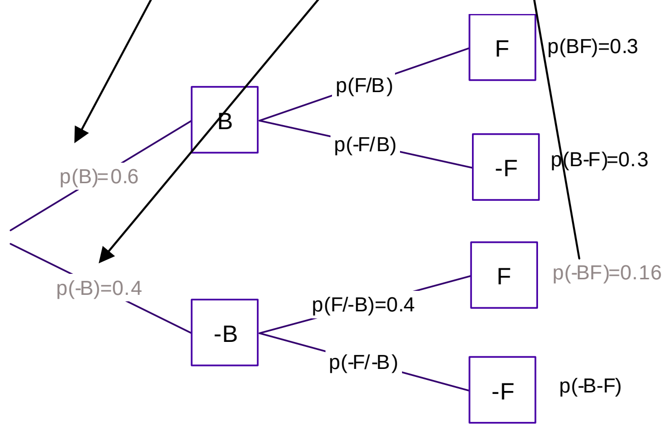


Figura 4.4.2.34: Diagrama de árbol asociado a P6

Los datos del problema los presentamos en negro, tanto en la tabla como en el árbol. Las cantidades en rojo en la tabla y en gris en el árbol son las nuevas cantidades.

Con la tabla calculamos, con relaciones aditivas las probabilidades marginales complementarias de practicar baloncesto y de no practicarlo. Con el árbol calculamos la probabilidad de la intersección de practicar fútbol y no practicar baloncesto. Y por último, volviendo a la tabla calculamos la marginal pedida.

Este problema se resuelve mediante un árbol y una tabla de contingencia, transfiriendo datos de la tabla al árbol y del árbol a la tabla.

Modo de resolución por asignación, mediante el estrato menos abstracto del SMS

El problema presenta tres datos interpretables en términos de probabilidad. Si no es el caso, los tantos por cien que presenta muestran cantidades relativas a 100. El modo de resolución por asignación requiere que los datos se lean en frecuencias y al final asignar una probabilidad a la solución del problema. Por lo que se considera una muestra de tamaño N y sobre ésta se aplica los porcentajes que presenta la parte informativa del problema. En este caso se considera la muestra de tamaño 100 y se obtienen las siguientes cantidades:

- ★ $\left.\begin{array}{l}\text{30 practican baloncesto y fútbol}\\ \text{30 practican baloncesto y no practican fútbol}\end{array}\right\}$ Por lo que 60 estudiantes practican baloncesto. Luego 40 estudiantes no practican baloncesto
- ★ De los 40 que no practican baloncesto, el 40% practica fútbol. Como el 40% de 40 es 16, tenemos 16 estudiantes que juegan a fútbol y no juegan a baloncesto
- ★ Los que juegan a fútbol son: 16 que juegan a fútbol y no a baloncesto más 30 que juegan a fútbol y baloncesto. Por lo que juegan a fútbol 46
- ★ Se pide por el porcentaje de los que juegan a fútbol. La razón 46 de 100 queda expresada como porcentaje 46%

El grafo asociado a P6 manteniendo la lectura aritmética del problema queda reflejado en la figura 4.4.2.35.

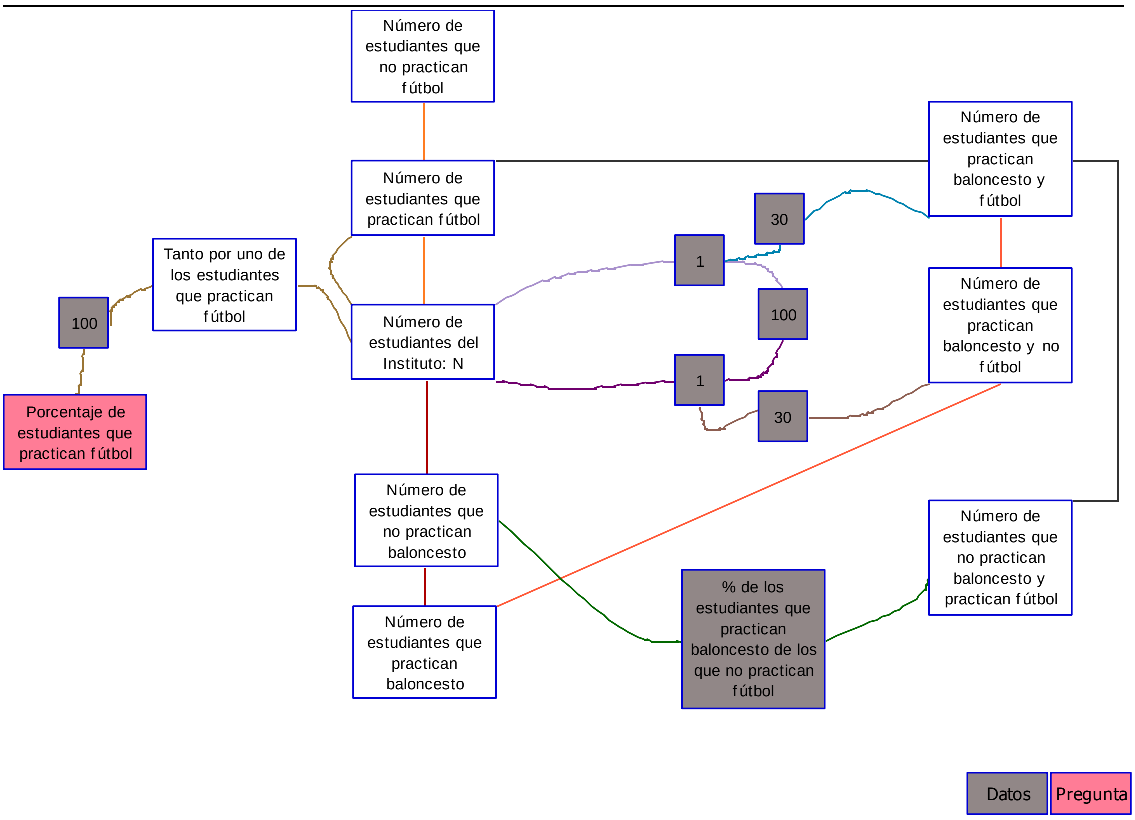


Figura 4.4.2.35: Grafo asociado a P6 manteniendo la lectura aritmética del problema

4.4.2.3 Resultados de las actuaciones de los estudiantes

El fin de este apartado es el de recoger, organizar y describir todas las actuaciones de los estudiantes participantes en esta segunda fase. Con este objetivo creamos los descriptores que organizan los resultados de la producción de los estudiantes. Para esto, hemos tenido en cuenta los descriptores de la primera fase, así como una primera lectura de las actuaciones de los estudiantes en la segunda fase. Clasificamos los descriptores en tres grupos: el primero da cuenta de los procesos de resolución con éxito, el segundo muestra los procesos de resolución sin éxito y en el tercero englobamos las respuestas que no pertenecen a los dos grupos anteriores.

En el primer grupo de descriptores estudiamos los modos de resolver de los estudiantes que han producido una respuesta correcta. En el segundo grupo, estudiamos los modos de resolución de los que han producido alguna respuesta, aunque no sea la correcta.

1. Procesos de resolución con éxito.

El primer descriptor: "Procesos de resolución con éxito", refleja la actuación de los estudiantes que han llegado al resultado correcto del problema. Utilizamos el término resultado para indicar lo que contesta a la pregunta del problema (Puig, 1996, p.34).

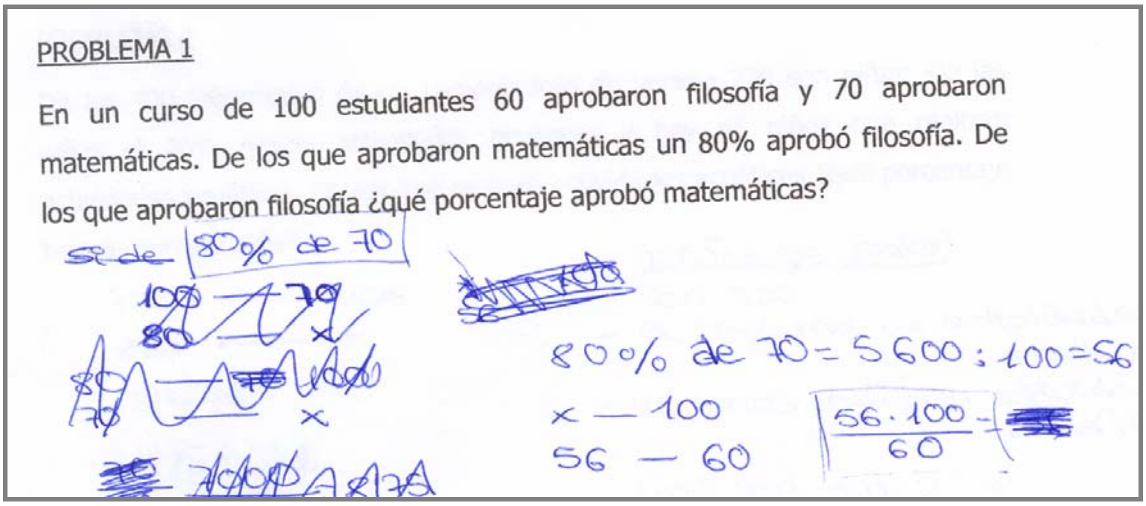
Estudiamos el razonamiento utilizado en el modo de resolver. En otras investigaciones anteriores (Lonjedo 2203; Huerta y Lonjedo 2003a, 2003b, 2006, Lonjedo y Huerta, 2005), incluso en el estudio de la primera fase, dividíamos los procesos de resolución con éxito en dos grupos: procesos de resolución que incluyen una forma de pensamiento aritmético, es decir, en los que se utiliza la aritmética y se asigna probabilidad al resultado del problema, y los procesos de resolución que utilizan las reglas de cálculo "de y entre probabilidades", es decir, los que usan los sucesos, las probabilidades de esos sucesos y las relaciones entre probabilidades, para la resolución del problema.

Nuestra experiencia, como docentes y como investigadores nos permite afirmar que un resolutor no utiliza de forma exclusiva uno de estos tipos de razonamiento, por lo que para el análisis de los procesos de resolución con éxito parece razonable considerar nuevos descriptores.

Los descriptores que vamos a considerar son: el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento exclusivamente aritmético, el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético, el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento básicamente probabilístico, el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento exclusivamente probabilístico. Definimos estos descriptores.

1.1. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento exclusivamente aritmético

El resolutor razona sobre las cantidades, sin asignar características a estas cantidades, utilizando la aritmética. La resolución 4.4.2.1 muestra la actuación de un estudiante de 4º ESO en P1, que incluye una forma de pensamiento exclusivamente aritmético. Trabaja con las cantidades, utilizando la aritmética, pero sin reconocer explícitamente los sucesos.


PROBLEMA 1

En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

80% de 70

80% de 70 = 5600 : 100 = 56

x — 100

56 — 60

$\frac{56 \cdot 100}{60}$

Resolución 4.4.2.1: Actuación de un estudiante de 4º ESO en P1 de la segunda fase

1.1.1. Uso de destrezas heurísticas

Utilizamos este término, destrezas heurísticas, en el sentido de Puig (1996). Indicamos si los estudiantes han utilizado artefactos didácticos como dibujos, diagramas, tablas, etc. A éstos los llamamos a veces destrezas propias pues ayudan a los estudiantes a la resolución del problema.

1.2. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético

El estudiante utiliza los números pero hay un reconocimiento explícito de los sucesos y de sus frecuencias o porcentajes.

1.2.1. Uso de destrezas heurísticas

En cada modo de proceso de resolución consideramos la utilización de destrezas heurísticas propias de ese proceso de resolución.

1.3. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento básicamente probabilístico

En la actuación del estudiante hay un reconocimiento de los sucesos y asignación de sus probabilidades. Utiliza la aritmética en la resolución, es decir el resolutor trabaja con cantidades tales como frecuencias, porcentajes, aunque reconoce los sucesos y asigna probabilidades.

1.3.1. Uso de destrezas heurísticas

Consideramos el uso de las destrezas heurísticas propias de este modo de resolución.

1.4. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento exclusivamente probabilístico

Hay un reconocimiento de sucesos y asignación de probabilidades a esos sucesos para utilizar las reglas de cálculo "de y entre probabilidades" en la resolución.

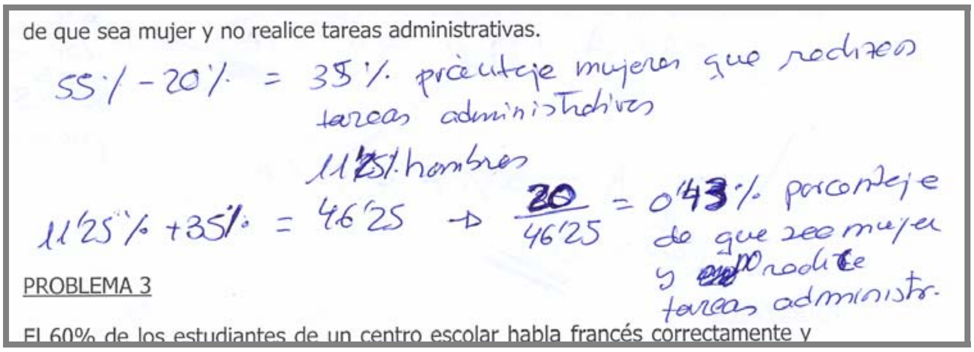
1.4.1. Uso de destrezas heurísticas

Consideramos el uso de las destrezas heurísticas propias de este modo de resolución.

2. Procesos de resolución sin éxito

En este segundo grupo mostramos, en primer lugar, los procesos de resolución de los estudiantes que no han alcanzado el resultado correcto del problema, pero han producido una solución. Después definiremos los descriptores que dan cuenta de las dificultades y los errores de los estudiantes en la resolución de los problemas. También queremos mostrar el uso competente y no adecuado de destrezas heurísticas por los estudiantes.

A la hora de cuantificar las respuestas de los estudiantes que pertenecen a cada uno de los descriptores de este segundo grupo, encontramos que la cantidad que da cuenta del descriptor global "procesos de resolución sin éxito" no siempre es la suma de los descriptores que incluimos en él. Un mismo estudiante puede encontrarse con dificultades y cometer diferentes errores en la resolución de un mismo problema. En el siguiente ejemplo, resolución 4.4.2.2, se observa la situación que acabamos de describir. Esta resolución muestra la actuación sin éxito de un estudiante en la resolución del problema P2 de la segunda fase, en el que observamos diferentes dificultades y errores: Dificultades en la interpretación de la probabilidad condicional expresada en el problema por DE LAS MUJERES EL 20% REALIZA TAREAS ADMINISTRATIVAS, que hace que el estudiante cometa el error de interpretarla como una intersección (incluso podemos afinar más, el 20% para este resolutor representa el porcentaje de mujeres que no realiza tareas administrativas) y la respuesta a la pregunta del problema la da como una probabilidad condicional y no como la intersección que se pide. El estudiante presenta errores en el cálculo con porcentajes: 55% - 20% =35%, y 11.25% + 35% = 46.25%. Además presenta un error en el uso de los números decimales: escribe 0.43%, cuando realmente sería el 43% según sus cálculos.


de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

55% - 20% = 35% porcentaje mujeres que realizan tareas administrativas

11'25% hombres

11'25% + 35% = 46'25 → $\frac{20}{46'25}$ = 0'43% porcentaje de que sea mujer y no realice tareas administr.

PROBLEMA 3

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y

Resolución 4.4.2.2: Actuación de un estudiante en P2 de la segunda fase

2.1. Dificultades

Puig y Cerdán (1988) muestran estudios de las dificultades que presentan los problemas aritméticos escolares de enunciado verbal, en función de las variables sintácticas del enunciado y dificultades de orden semántico. Como dificultades sintácticas citan: el formato de presentación del problema, la longitud del enunciado, la posición de la pregunta, el tamaño de los números, la presencia de símbolos en vez de números concretos y la relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema.

Nosotros adaptamos este estudio a los problemas de probabilidad condicional. Estudiamos las dificultades que los resolutores tienen en función de la complejidad del problema, de las variables de carácter semántico, de las variables de contenido y en función de las variables sintácticas.

Podríamos encontrar dificultades de variables sintácticas como el formato de presentación de los datos (datos expresados mediante tablas de contingencia, datos expresados utilizando los signos propios de la teoría de probabilidades, etc.) pero nuestros problemas presentan siempre el mismo formato: no hay tablas, las cantidades no se expresan utilizando el SMS de la teoría de la probabilidad, y siempre presentan la misma estructura en el texto, se presenta la parte informativa y separada utilizando un punto y seguido, se presenta la parte interrogativa.

2.1.1. Complejidad

Estudiamos la complejidad del problema desde dos puntos de vista: la complejidad estructural y la complejidad gramatical. La complejidad estructural viene dada por la estructura de los datos y las relaciones entre los datos y la pregunta del problema (grado de complejidad estructural definido en el apartado 4.3) y la complejidad gramatical del problema viene dada en función de las dificultades que presenta de tipo sintáctico.

En cuanto a la complejidad que presenta por la estructura de los datos y las relaciones entre los datos y la pregunta del problema, todos los problemas de esta segunda fase son N_2, es decir, de los tres datos del problema sólo uno tiene que ver con una probabilidad condicional y los problemas los hemos presentado atendiendo al grado de complejidad estructural (ver apartados 3.4.2.1 3.4.2.2 y 3.4.2.3 Justificación, diseño y administración de la segunda fase). Recordamos que dados dos problemas P_i y P_j, con Pi $\in[p_{ht}]$ y con P_j $\in[p_{kl}]$, decimos que P_i presenta un grado de complejidad mayor que P_j, si y solo si $h+t>k+l$. En el caso de que $h+t=k+l$ con $h\neq k$ y $t\neq l$, decimos que P_i presenta un grado de complejidad mayor que P_j, si y solo si $t>l$.

En cuanto a la complejidad que tiene el problema en función de las dificultades que presenta, es una complejidad gramatical.

2.1.2. Dificultades de las variables de contenido

Como dificultades que provienen de las variables de contenido en los problemas de la segunda fase citamos aquellas que provienen del tema matemático, de la naturaleza de las cantidades, del vocabulario utilizado en el texto del problema, el uso de la palabra probabilidad en la pregunta del problema. Presentamos dos tipos de dificultades:

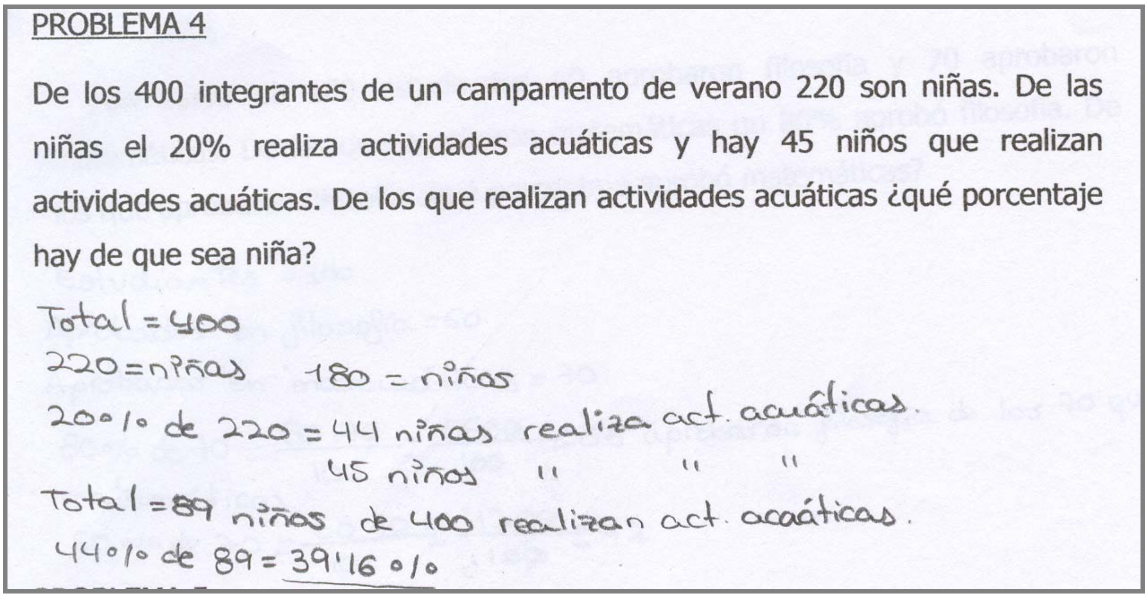
2.1.2.1. Datos expresados en porcentajes. Los problemas en los que los datos son porcentajes pueden dificultar el proceso de resolución por el concepto de porcentaje. Garfield y Ahlgren (1988) indican que los estudiantes parecen tener dificultades en el desarrollo de intuiciones correctas sobre ideas fundamentales de probabilidad porque tienen dificultades con conceptos básicos del razonamiento proporcional, que incluyen fracciones, decimales y porcentajes.

2.1.2.2. La pregunta es una probabilidad

La pregunta en nuestros problemas es un porcentaje o una probabilidad. Puede que el hecho de preguntar por una probabilidad dificulte la resolución del problema.

2.2. Errores

Los errores provienen de las dificultades que presenta el problema cuando el resolutor quiere llegar a la solución del problema. El efecto principal de estos errores es la no producción de la respuesta correcta. La resolución 4.4.2.3 muestra la actuación de un estudiante de 4º ESO en P4. Podemos observar que el error cometido por este estudiante, tiene que ver con el concepto de porcentaje. Entiende que hay 44 niñas que realizan actividades acuáticas y que son 89 los integrantes del campamento que realizan actividades acuáticas pero no ha sabido asignar a 44 el porcentaje correspondiente. La estructura del proceso de resolución es buena, el error ha estado en el cálculo del porcentaje.


PROBLEMA 4

De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje hay de que sea niña?

Total = 400
220 = niñas   180 = niños
20% de 220 = 44 niñas realiza act. acuáticas.
45 niños " " "
Total = 89 niños de 400 realizan act. acuáticas.
44% de 89 = 39'16 %

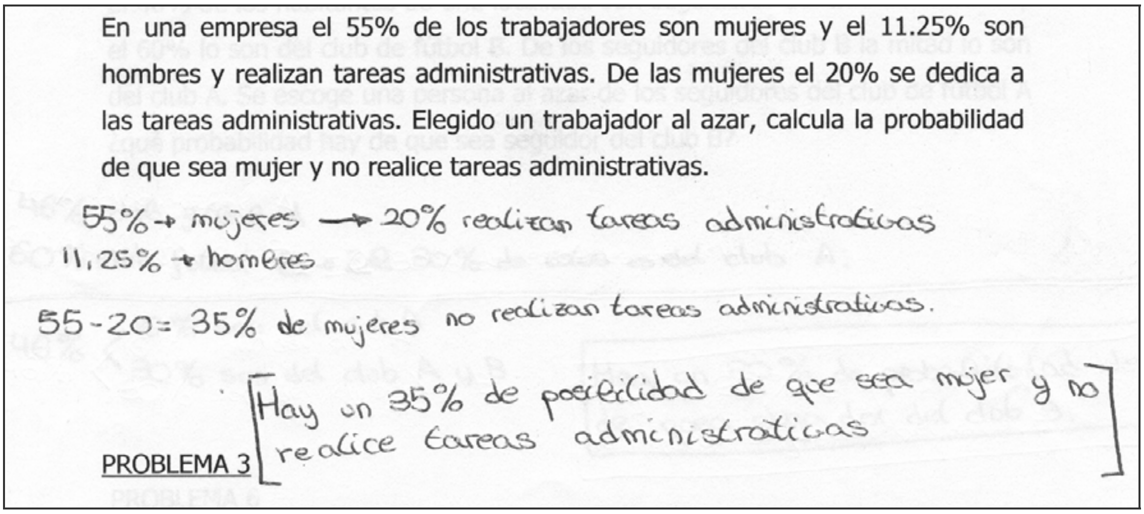
Resolución 4.4.2.3: Actuación de un estudiante de 4º ESO en P4 de la segunda fase

Nos encontramos con errores de diferente naturaleza, según dan cuenta de las dificultades definidas.

2.2.1. Errores que provienen de las interpretaciones del dato y/o la pregunta condicional

Estos errores son debidos a las interpretaciones no deseadas que el resolutor presenta de las cantidades que aparecen en el problema, al hacer la traducción del lenguaje vernáculo, así como de la pregunta del problema. Muchas veces, la resolución del problema es coherente con la interpretación del resolutor. Estos errores no sólo aparecen en el proceso de traducción del problema, sino también se presentan errores en el reconocimiento de sucesos y en la asignación de probabilidades.

La resolución 4 4.2.4 muestra la actuación de un estudiante que interpreta el dato condicional como una intersección y resuelve el problema en coherencia a su interpretación, pues a 55 mujeres le resta 20 que interpreta que son las mujeres que realizan tareas administrativas, y el resultado es el número de mujeres que no realizan tareas administrativas, que "expresa" en porcentaje.


En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

55% → mujeres → 20% realizan tareas administrativas
11,25% → hombres

55-20= 35% de mujeres no realizan tareas administrativas.

Hay un 35% de posibilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas

PROBLEMA 3

Resolución 4.4.2.4: Actuación de un estudiante de 4ESO en P2 de la segunda fase

2.2.1.1. Interpretación errónea del dato condicional por parte del resolutor

Estudiamos las diferentes interpretaciones del dato condicional que puede presentar un resolutor.

2.2.1.1.1. Interpretación del dato condicional como una intersección

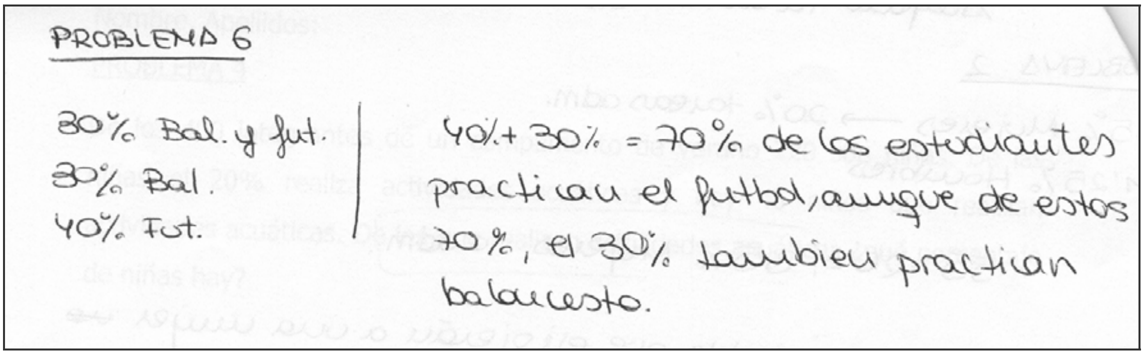
(Einhorn & Hogart (1986) y Pollatsek, Well, Konold, Hardiman & Cobb (1987), Parzysz (1990), Ojeda (1995, 1996), Yañez (2000)) Es la interpretación común del dato condicional. Consiste en utilizar la intersección cuando realmente se presenta una condicional.

2.2.1.1.2. Interpretación del dato condicional como una marginal

El resolutor al traducir el dato condicional lo interpreta como una marginal. Algunos estudiantes en el P6 de la segunda fase.

> " … De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?"

no tienen en cuenta la información que reduce el espacio muestral al suceso condicionante, "De los estudiantes que no practican el baloncesto", usando el dato para toda la muestra. La resolución 4.4.2.5 muestra la actuación de un estudiante que, entre otras cosas, realiza esta interpretación.


PROBLEMA 6

30% Bal. y fut.
30% Bal.
40% Fut.

40% + 30% = 70% de los estudiantes practican el futbol, aunque de estos 70%, el 30% tambien practican balancesto.

Resolución 4.4.2.5: Actuación de un estudiante de 1BTC en P6 de la segunda fase

2.2.1.2. Interpretaciones erróneas de la pregunta condicional por el resolutor

En los problemas en los que se pregunta por una condicional nos encontramos con diferentes interpretaciones de ésta.

2.2.1.2.1. Interpretación de la pregunta condicional por la intersección

El resolutor contesta a la condicional de la pregunta con una intersección.

2.2.1.2.2. Interpretación de la pegunta condicional por el dato condicional que presenta el problema

El resolutor interpreta las dos condicionales del problema, dato y pregunta, como la misma condicional. Por ejemplo, el P1 de la segunda fase dice:

> "…. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?"

Hay estudiantes que interpretan que el 80% de los que aprobaron filosofía aprobaron matemáticas. Encontramos este tipo de interpretación en los problemas P1, P4 y P5 de la segunda fase, en donde se pregunta por una condicional que es la "inversa[24]" de la condicional que se presenta como cantidad conocida.

2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional como una marginal

El resolutor contesta a la condicional de la pregunta con una marginal.

2.2.2. Errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido

Los errores que dan cuenta de las dificultades de las variables de contenido son: errores en el uso de la proporcionalidad, en el uso de los números

[24] Entendemos por probabilidades condicionales inversas $p(A|B)$ y $p(B|A)$.

decimales, en el uso de la regla de tres y en el uso de conceptos y fórmulas de probabilidad. Los desarrollamos a continuación.

2.2.2.1. Errores en el uso de la proporcionalidad

Los errores que comenten los estudiantes en el uso de la proporcionalidad los clasificamos en: errores en la utilización de los números decimales, errores el uso de los porcentajes y errores en el uso y planteamiento de la regla de tres.

2.2.2.1.1. En el uso de los números decimales

Al expresar el porcentaje de una cantidad algunos estudiantes muestran errores con los decimales. Por ejemplo encontramos un estudiante que escribe

> *el 35% de 40 es 0.14%*

2.2.2.1.2 En el uso de los porcentajes

Hay algunos estudiantes que contestan a P3 escribiendo que:

> *todos los estudiantes hablarán algún idioma pues el 60% habla francés y el 70% habla inglés y 60+70=130 que es más que cien*

Aquí tenemos un ejemplo de un error con porcentajes, que podemos además concretar que es un error de conteo.

2.2.2.1.3. En el uso de la regla de tres

Un gran número de estudiantes utiliza, como estrategia de resolución de problemas, la regla de tres para calcular la expresión del porcentaje que representa la solución del problema. Los estudiantes cometen errores en el uso de la regla de tres, por ejemplo, al plantear una regla de tres con cantidades que no tienen por qué ser proporcionales, tal y como muestra la resolución 4.4.2.6.

PROBLEMA 1

En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

100 estudiantes < 60 aprovaron filosofia — x% aprovó Matemáticas
70 aprovaron Matemáticas — 80% aprovó Filosofia

70 personas apr. Mate ——— 80% aprov. Filosofia.
60 personas apro. Filos ——— x% aprov Mate

$$x = \frac{60 \cdot 80}{70} = \frac{4800}{70} = 68{,}57\%$$

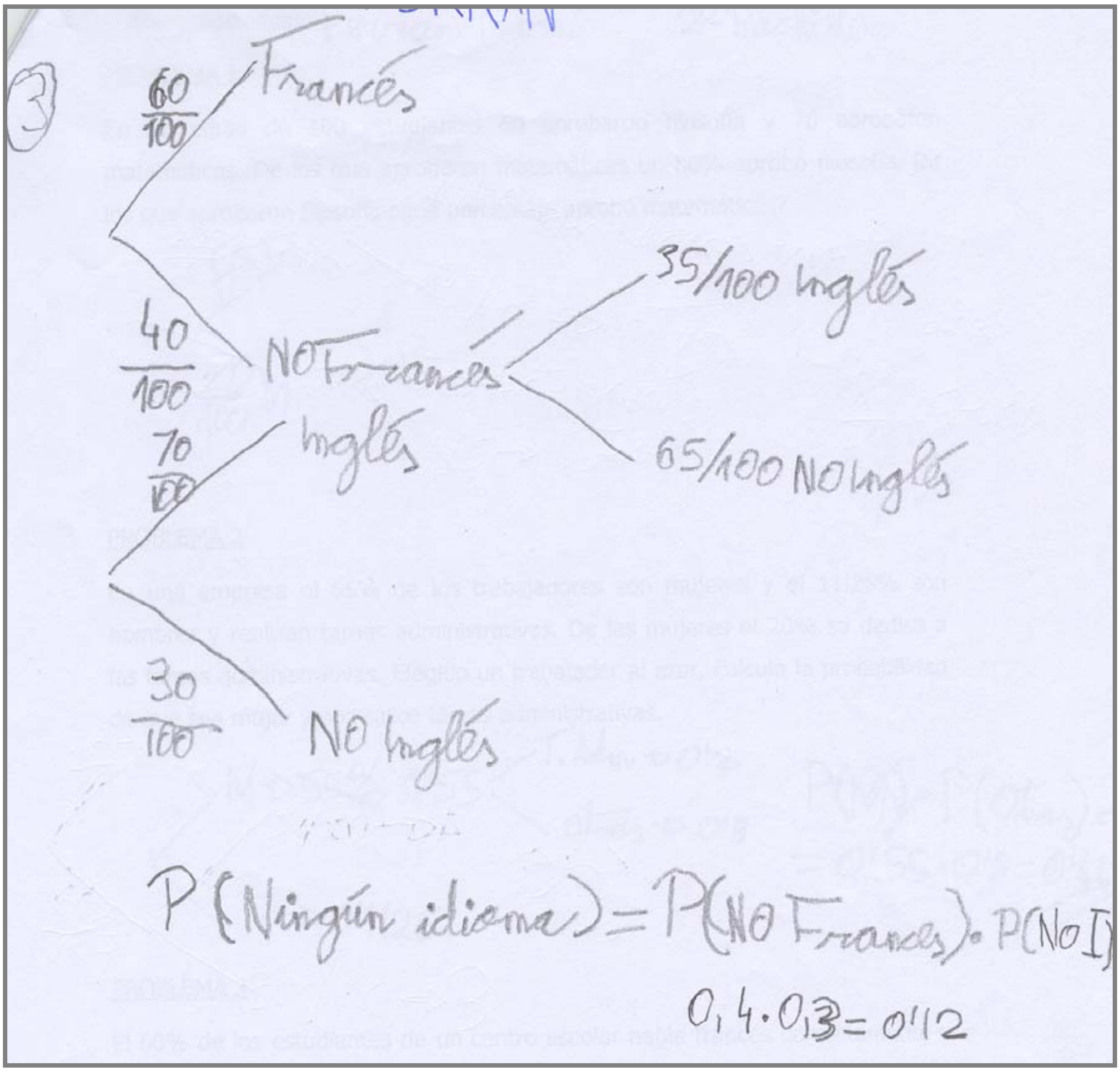
$$\boxed{x = 68{,}57\%}$$

Resolución 4.4.2.6: Actuación de un estudiante de 1º BC en P1 de la segunda fase

2.2.2.2 Errores en el uso de conceptos y fórmulas de probabilidad

2.2.2.2.1. En el uso de los conceptos de probabilidad

A veces los resolutores utilizan diferentes conceptos de probabilidad como equiprobabilidad, independencia y complementariedad en situaciones donde estos conceptos no se pueden utilizar. Por ejemplo, en P3 de la segunda fase, algunos estudiantes utilizan el concepto de independencia de sucesos cuando los sucesos no son independientes. La resolución 4.4.2.7 muestra la actuación de un estudiante de 2BCCSS que supone que el suceso "no hablar francés" y el suceso "no hablar inglés" son sucesos independientes, pues la probabilidad de no hablar ninguno de los dos idiomas la calcula mediante el producto de las probabilidades de no hablar francés y de no hablar inglés:

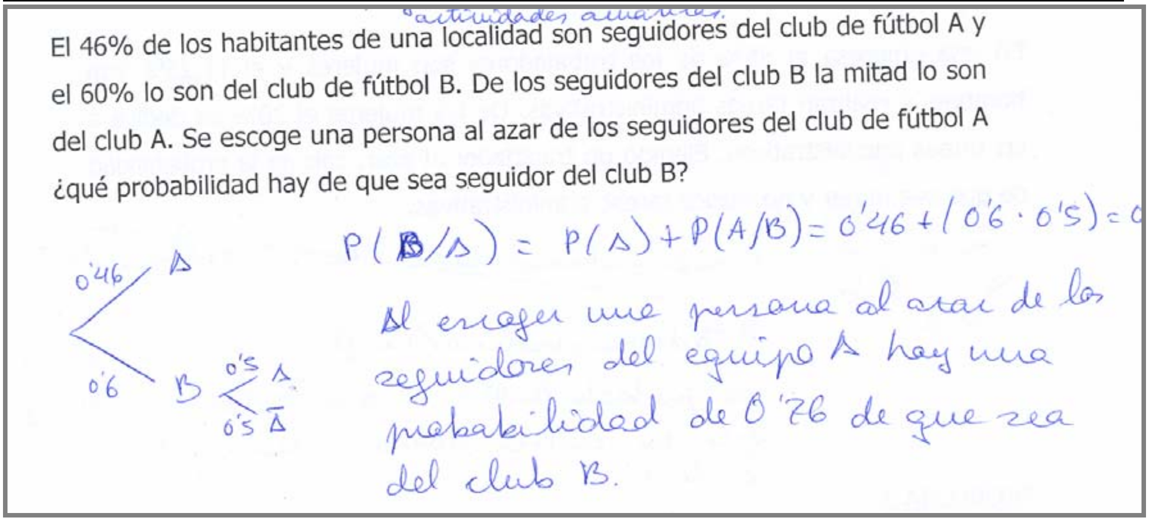


Resolución 4.4.2.7: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P3 de la segunda fase

2.2.2.2.2. En el uso de las fórmulas de probabilidad

De igual forma, los resolutores utilizan fórmulas relativas a la probabilidad que no son correctas. La resolución 4.4.2.8 da cuenta de esta situación. El estudiante de 2BCCSS utiliza la siguiente fórmula de probabilidad:

$$p(B/A) = p(A)+p(A/B)$$


El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

$P(B/A) = P(A) + P(A/B) = 0'46 + (0'6 \cdot 0'5) = 0$

Al escoger una persona al azar de los seguidores del equipo A hay una probabilidad de 0'76 de que sea del club B.

Resolución 4.4.2.8: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P5 de la segunda fase

2.2.3 Errores en las interpretaciones de los sucesos

En el proceso de resolución de algunos problemas encontramos cantidades nuevas bien calculadas pero mal interpretadas. Por ejemplo, en P1 de la segunda fase, hay algún estudiante que al calcular el 80% de 70 escribe: "*56 estudiantes aprobaron filosofía*" cuando realmente el 56 representa el número de estudiantes que han aprobado filosofía y matemáticas. Es decir, ha calculado una cantidad correcta y la utiliza para un suceso que no se corresponde.

2.3. Uso de destrezas heurísticas

Con este descriptor reflejamos a los estudiantes que, aunque no han realizado el problema con éxito, han utilizado destrezas heurísticas (Puig, 1996) para resolverlo. Y diferenciaremos, en el caso de utilizarlas, si este uso es o no es un uso adecuado debido al problema o a la estructura de la destreza.

2.3.1. Uso competente

Con este descriptor reflejamos la competencia del resolutor en la utilización, pues conoce su estructura y sus reglas.

2.3.2. Uso no adecuado

Los resolutores cometen errores por no conocer la estructura de la destreza heurística que están utilizando o las reglas de de cálculo propias de esa destreza heurística. Por ejemplo, los estudiantes de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales utilizan los árboles de contingencia, sobre todo, para mostrar las cantidades presentes en el problema y sin utilizar las propiedades de cálculo propias de éstos. Hay muchos estudiantes que estos artefactos didácticos, que podemos llamar "árboles mostradores de datos" los realizan perfectamente, aunque luego no realizan con éxito el problema pues no utilizan las propiedades de los árboles.

3. Otras

En este descriptor reflejamos las actuaciones que no se pueden clasificar en ninguno de los grupos anteriores. Incluimos todas las respuestas que no aportan información a la investigación, como los estudiantes que han dejado el problema en blanco, que simplemente han copiado los datos sin reflejar ningún razonamiento.

Mostramos el resumen de los descriptores de las respuestas de los estudiantes que consideramos en este trabajo, con el fin de analizar la producción de los estudiantes:

1. Procesos de resolución con éxito

    1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético.

        1.1.1. Uso de destrezas heurísticas

    1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético.

        1.2.1. Uso de destrezas heurísticas

    1.3. Proceso de resolución que básicamente probabilístico.

        1.3.1. Uso de destrezas heurísticas

    1.4. Proceso de resolución exclusivamente probabilístico.

        1.4.1. Uso de destrezas heurísticas

2. Procesos de resolución sin éxito

    2.1. Dificultades

2.1.1. Complejidad

2.1.2. Dificultades de variables de contenido

2.1.2.1. Datos en porcentajes

2.1.2.2. La pregunta es una probabilidad

2.2. Errores

2.2.1. Errores que provienen de la interpretación del dato y/o la pregunta condicional

2.2.1.1. Interpretación errónea del dato condicional por parte del resolutor

2.2.1.1.1. Interpretación del dato condicional por una intersección

2.2.1.1.2. Interpretación del dato condicional por una marginal

2.2.1.2. Interpretaciones erróneas de la pregunta condicional por el resolutor

2.2.1.2.1. Interpretación de la pregunta condicional por la intersección

2.2.1.2.2. Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional que presenta el problema

2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional como una marginal

2.2.2. Errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido

2.2.2.1. Errores en el uso de la proporcionalidad

2.2.2.1.1. En el uso de los números decimales

2.2.2.1.2. En el uso de los porcentajes

2.2.2.1.3. En el uso de la regla de tres

2.2.2.2. Errores en el uso de conceptos y fórmulas de probabilidad

2.2.2.2.1. En el uso de los conceptos de probabilidad

2.2.2.2.2. En el uso de las fórmulas de probabilidad

2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos

2.3. Uso de destrezas heurísticas.

2.3.1. Uso competente

2.3.2. Uso no adecuado

3.Otras.

A continuación la tabla 4.4.2.8 nos servirá para mostrar el número de estudiantes de un determinado nivel, cuyas respuestas se corresponden con los descriptores cuantificables que acabamos de definir. La primera fila da cuenta de los problemas y la primera columna da cuenta de los descriptores.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito						
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético						
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas						
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético						
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas						
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico						
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas						
1.4. Proceso de resolución probabilístico						
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas						
2. Proceso de resolución sin éxito						
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección						
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal						
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección						
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato						
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal						
2.2.2.1.1. Errores en el uso de números decimales						
2.2.2.1.2. Errores en el uso de porcentajes						
2.2.2.1.3. Errores en el uso de regla de tres						
2.2.2.2.1. Errores en el uso de conceptos de probabilidad						
2.2.2.2.2.. Errores en el uso de fórmulas de probabilidad						
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos						
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas						
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas						
3. Otras						

Tabla 4.4.2.8: Tabla que da cuenta de los descriptores elegidos para organizar las respuestas de los estudiantes en cada uno de los problemas de la segunda fase

Organizados los datos de esta forma, vamos a analizar los procesos de resolución de los estudiantes en los diferentes problemas, tanto por niveles educativos como teniendo en cuenta toda la muestra. Dividimos el análisis de las actuaciones en dos partes: una, los procesos de resolución con éxito y la otra, los procesos de resolución sin éxito. En cada una de estas partes queremos estudiar, sobre todo, la influencia del grado de complejidad estructural, de la naturaleza de las cantidades presentes el problema (datos y pregunta) y la estructura semántica de la condicionalidad en el proceso de resolución del problema. También con el análisis de los procesos de resolución con éxito, queremos clasificar los problemas de probabilidad condicional como problemas de cálculo de probabilidades o como problemas de asignación de probabilidades.

Resultados globales de los problemas resueltos por estudiantes y por niveles

Presentamos en el anexo 5: *Tablas de resultados de la primera y segunda fase*, los resultados globales de las respuestas de los estudiantes por niveles y globalmente. Mostramos en la tabla 4.4.2.9 el porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito	36.25	16.25	7.5	47.5	11.25	12.5
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	24.13	0	0	10.53	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	65.52	30.77	16.67	86.84	55.55	90
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	16.7	0	0	9.09	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	30.77	50	2.63	33.33	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	25	33.33	100	33.33	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	10.34	38.46	33.33	0	11.11	10
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	60	50	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	42.5	47.5	52.5	33.75	41.25	55
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	2.94	71.05	59.52	0	9.1	81.81
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	2.27
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	17.65	0	0	7.41	24.24	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	5.88	0	0	14.81	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	14.71	0	0	0	15.15	0
2.2.2.1.1. Errores en el uso de números decimales	0	0	4.76	0	15.15	0
2.2.2.1.2. Errores en el uso de porcentajes	17.65	47.37	59.52	66.67	51.51	81.81
2.2.2.1.3. Errores en el uso de regla de tres	5.88	0	2.38	14.81	3.03	0
2.2.2.2.1. En el uso de conceptos de probabilidad	2.94	5.26	12.5	0	6.06	0
2.2.2.2.2.. En el uso de fórmulas de probabilidad	2.94	2.63	2.38	0	3.03	6.82
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	47.06	47.37	23.81	7.41	9.1	4.55
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	7.89	4.76	3.7	6.06	2.27
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	5.88	2.63	2.38	3.7	3.03	0
3. Otras	21.25	36.25	40	18.75	47.5	32.5

Tabla 4.4.2.9: Porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

4.4.2.4. Análisis de los resultados de las actuaciones de los estudiantes

Dividimos este apartado en cinco partes.

I. Análisis de los procesos de resolución con éxito en cada uno de los problemas

II. Análisis de los comportamientos de los estudiantes que han resuelto con éxito gran parte de los problemas

III. Conclusiones del análisis del éxito

IV. Análisis de las actuaciones sin éxito. Errores. Mostramos el análisis de las respuestas de los estudiantes organizadas según los descriptores que dan cuenta del comportamiento de los resolutores cuyos procesos de resolución no han tenido éxito

V. Conclusiones del análisis de los descriptores que dan cuenta del comportamiento de los resolutores cuyos procesos de resolución no han tenido éxito

A continuación desarrollamos cada una de estas partes.

I. Análisis de los procesos de resolución con éxito en cada uno de los problemas

En esta parte realizamos el análisis bajo dos puntos de vista. Uno puntualmente, es decir, problema a problema, presentando los diferentes razonamientos a la hora de resolverlos y comparando los resultados con los resultados de los problemas isomorfos de la primera fase. El otro de forma global, es decir, analizando los descriptores que dan cuenta de las respuestas de los estudiantes en los procesos de resolución con éxito, tal y como hemos procedido en el análisis de la primera fase.

Descripción y análisis de los procesos de resolución del problema P1

La tabla 4.4.2.10 muestra los resultados del descriptor 1, éxito en el proceso de resolución, distribuidos por nivel escolar, tanto en frecuencias absolutas como en porcentajes.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	Muestra
Nº Estudiantes	13	4	4	8	29
Porcentaje	41.94	16.7	26.7	80	36.25

Tabla 4.4.2.10: Números y porcentajes de estudiantes distribuidos por nivel educativo que muestran el proceso de resolución de P1 con éxito.

Observamos la diferencia que hay en el porcentaje de estudiantes de 4º ESO que resuelven con éxito frente al porcentaje de estudiantes de 1º de Bachiller de Ciencias y de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales. El porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito P1 es mayor en 4º ESO que en 1º de BC y que en 2º de BCCSS. ¿A qué es debido esto? ¿Qué tiene este problema para los estudiantes de 4º ESO que no tiene para los estudiantes de 1º y 2º de bachiller? Basamos esta diferencia en que los estudiantes de 4ºESO han recibido instrucción reciente en razón y proporción.

En el diagrama 4.4.2.1 observamos el diagrama de barras que da cuenta del porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P1 en esta segunda fase y de su isomorfo en la primera fase.

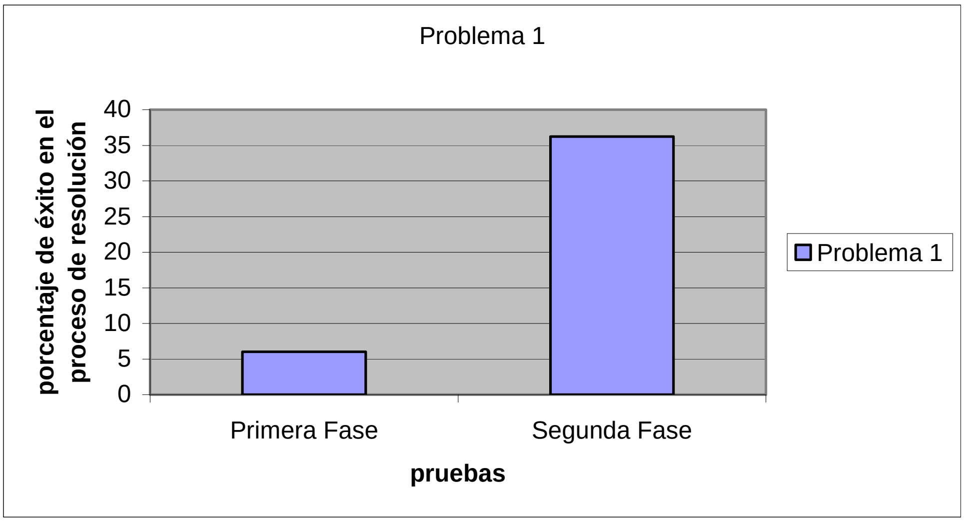


Diagrama 4.4.2.1: Diagrama de barras que da cuenta del porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P1 de la segunda fase frente al problema isomorfo de la primera fase

En la primera fase únicamente los cuatro estudiantes de EFM realizaron el problema con éxito.

Las modificaciones que se han efectuado al problema de la primera fase han influido en el éxito en la resolución del problema, en los estudiantes de todos los niveles educativos. Para saber cuál de estas modificaciones ha influido más en el éxito en la resolución del problema, buscamos en la tabla 4.4.2.9 los resultados de otros descriptores. El porcentaje de estudiantes que interpretan la probabilidad condicional del dato como una intersección es muy pequeño, un 2.94% que se corresponde con un estudiante de 2º BCCSS (Ver la tabla correspondiente en anexo 5). El porcentaje de estudiantes que englobamos en este mismo descriptor de este problema en la primera fase es de 22.39%. Ahora bien, en la pregunta del problema no hay tan gran diferencia, aunque si que disminuye el porcentaje de estudiantes que interpretan la pregunta como una intersección. Concluimos que el eliminar los términos ambiguos, el utilizar la estructura condicional DE LOS QUE y el preguntar por un porcentaje han influido en el éxito en la resolución del problema. Pero el factor más influyente ha sido la expresión de las cantidades presentes en el problema. Éstas están expresadas en términos de frecuencias y la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional está expresada en porcentaje.

La tabla 4.4.2.11 muestra el número de estudiantes distribuidos según los descriptores que dan cuenta de los procesos de resolución con éxito así como de los porcentajes de estudiantes correspondientes a estos descriptores.

P1	1. Éxito	1.1 Exclu. Aritmético	1.1.1 Destr. heuríst.	1.2 Mayori. aritmético	1.2.1 Destr. heuríst.	1.3 Básica. probabilístico	1.3.1 Destr. Heuríst.	1.4 Probabilístico	1.4.1 Destr. Heuríst.
Número	29	7	0	19	3	0	0	3	0
Porcentaje	36.25	24.13	0	65.52	16.7	0	0	10.34	0

Tabla 4.4.2.11: Número y porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P1, distribuidos según los descriptores que dan cuenta del éxito

Al observar la tabla 4.4.2.11 de manera general, y antes de pasar a analizar los diferentes procesos de resolución de los estudiantes organizados según los descriptores que dan cuenta del proceso de resolución con éxito, apreciamos que la mayoría de los estudiantes que han resuelto con éxito P1 presentan un proceso de resolución mayoritariamente aritmético, reconociendo explícitamente los sucesos y las relaciones entre estos sucesos (descriptor 1.2). Los datos expresados en frecuencias absolutas invitan al resolutor a razonar de esta forma. Por lo que podemos clasificar este problema como problema de asignación de probabilidades.

Descriptor 1.1: Proceso de resolución exclusivamente aritmético

Los siete estudiantes que hemos incluido en este descriptor son de 4º ESO.

Éstos razonan sobre cantidades, sin reconocer explícitamente los sucesos que caracterizan a esas cantidades y muestran el mismo proceso de resolución. Calculan el 80% de 70 y a esta nueva cantidad le asignan el porcentaje correspondiente sobre 60. Presentan diferentes formas de calcular el número de estudiantes que se corresponde con el 80% de 70 (regla de tres y porcentajes) y en la asignación del porcentaje resultado (regla de tres, porcentajes y proporciones). La tabla 4.4.2.12 da cuenta de los porcentajes de los estudiantes en las diferentes estrategias utilizadas en el proceso de resolución.

Porcentajes	14.29	28.57	42.85	14.29
Estrategias utilizadas en el razonamiento	Reglas de tres	Porcentajes y Reglas de tres	Porcentajes y proporciones	Porcentajes
	$\left.\begin{array}{l}100 \Rightarrow 70\\ 80 \Rightarrow x\end{array}\right\} x = \frac{80.70}{100} = 56$ $\left.\begin{array}{l}60 \Rightarrow 100\\ 56 \Rightarrow x\end{array}\right\} x = \frac{56.100}{60} = 93.3\%$	*El 80% de 70 ⇒ 5600:100=56* $\left.\begin{array}{l}60 \Rightarrow 100\\ 56 \Rightarrow x\end{array}\right\}$ $x = \frac{56.100}{60} = 93.3\%$	*El 80% de 70 = 5600:100=56* $\frac{60}{56} = \frac{100}{x} \Rightarrow$ $x = \frac{5600}{60} = 93.\hat{3}\%$	*El 80% de 70 = 5600:100=56* *56 /70 . 100 = 93.3%*

Tabla 4.4.2.12: Porcentajes de estudiantes según las diferentes estrategias utilizadas en el proceso de resolución exclusivamente aritmético

Descriptor 1.2: Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Encontramos diecinueve estudiantes que muestran el proceso de resolución del problema P1 mayoritariamente aritmético. Razonan sobre sucesos y los cardinales de estos sucesos, utilizando estrategias de resolución aritméticas. La tabla 4.4.2.13 muestra la distribución de los estudiantes según niveles educativos.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	TOTAL
número estudiantes	6	4	4	5	19

Tabla 4.4.2.13: Número de estudiantes distribuidos por niveles educativos que muestran un proceso de resolución de P1 mayoritariamente aritmético

Los procesos de resolución de los estudiantes se diferencian en las estrategias utilizadas. La tabla 4.4.2.14 muestra los porcentajes de estudiantes que han utilizado las diferentes estrategias.

Porcentajes	15.79	47.37	36.85
Estrategias utilizadas en el razonamiento	Reglas de tres *100 estudiantes; 60 estudiantes aprobaron filosofía* *70 estudiantes aprobaron matemáticas* $\rightarrow$ *80% de 70 = 56 aprobaron matemáticas y filosofía.* $\left.\begin{matrix} 70 \rightarrow 100 \\ x \rightarrow 80 \end{matrix}\right\} x = 56$ $\left.\begin{matrix} 60 \text{ aptos} \rightarrow 100 \\ 56 \rightarrow x \end{matrix}\right\} x = 93.\hat{3}\%$ $\rightarrow$ *93.3% aprobaron matemáticas de los que aprobaron filosofía.*	Porcentajes y reglas de tres *80% de 70 = 80.70/100 = 56 y utilizando la última regla de tres que hemos mostrado en el proceso anterior, llega a la solución del problema.*	Porcentajes *el 80% de 70 es* $\frac{80}{100} 70 =$ *= 56 estudiantes aprobaron filosofía y matemáticas* *el x% de 60 es 56* $56 = \frac{x}{100} 60 \Rightarrow x = 93.3\%$ *el 93.3% de los que aprobaron filosofía aprobaron matemáticas* *"El número de estudiantes que aprobaron filosofía y matemáticas fue 80.70/100=56. Luego de los 60 que aprobaron filosofía 56 también matemáticas, es decir,* $\frac{56}{60}100\%$ *"*

Tabla 4.4.2.14: Porcentajes de estudiantes según las diferentes estrategias utilizadas en el proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Uno de los estudiantes de la facultad de Matemáticas utiliza el diagrama de Venn que mostramos en la figura 4.4.2.36 para representar los conjuntos, las relaciones y los cardinales de éstos.

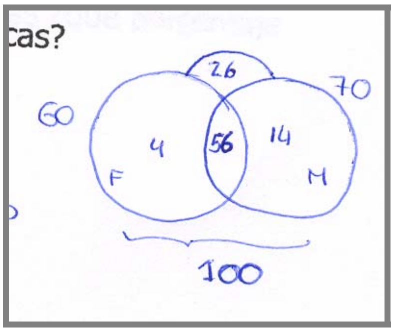


Figura 4.4.2.36: Diagrama de Venn utilizado por un estudiante de EFM en el proceso de resolución mayoritariamente aritmético de P1

Descriptor 1.2.1: Uso de destrezas heurísticas en el proceso de resolución básicamente aritmético.

Tres estudiantes de 2º BCCSS utilizan un esquema, aplicando las reglas de cálculo de una rama del árbol. Este esquema presenta la siguiente estructura:

$$100 \text{ estudiantes} \left\langle \begin{array}{l} 60 \text{ filosofía} \\ 70 \text{ matemáticas} \rightarrow 80\% \text{ filosofía} \rightarrow 70.0.8 = 56 \text{ matemáticas y filosofía} \end{array} \right.$$

Descriptor 1.3: Proceso de resolución básicamente probabilístico

No hay ninguna respuesta de los estudiantes que la podamos incluir en este descriptor.

Descriptor 1.4: Proceso de resolución probabilístico

Tres estudiantes de la facultad de matemáticas utilizan las fórmulas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución del problema de la siguiente forma.

100 estudiantes, p(F)=0.6, p(M)=0.7, $p(F/M)=0.8$

$p(M|F) = \frac{p(M).p(F|M)}{p(F)} = \frac{0.8x0.7}{0.6} = \frac{0.56}{0.6} = 0.933 \Rightarrow 93.3\%$ *de los que aprobaron filosofía aprobó matemáticas*

Estos estudiantes no definen los sucesos F y M, aunque están implícitamente definidos en el texto del problema.

Descripción y análisis de los procesos de resolución del P2

La tabla 4.4.2.15 muestra los resultados del descriptor 1, procesos de resolución con éxito, distribuidos por nivel escolar, tanto en frecuencias absolutas como en porcentajes.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	Muestra
NÚMERO Estudiantes	2	3	4	4	13
Porcentaje	6.45	12.5	26.7	40	16.25

Tabla 4.4.2.15: Número y porcentajes de estudiantes distribuidos por nivel educativo que muestran el proceso de resolución de P2 con éxito.

Observamos que el porcentaje de éxito en la resolución de P2 crece conforme el nivel educativo es superior. Los datos en porcentajes frente a los datos en frecuencias absolutas hacen que los estudiantes tengan menos éxito y sobre todo que este éxito sea menor en los cursos inferiores. Además de presentar los datos en porcentajes, en este problema se pregunta por una probabilidad, añadiendo así dificultad al problema, sobre todo para los estudiantes de 4ºESO.

El diagrama de barras correspondiente al diagrama 4.4.2.2 muestra, como el porcentaje de éxito ha descendido de manera no significativa, del 23.53% de éxito en la primera fase a 16.25% en la segunda fase. Esta diferencia da cuenta de la pequeña variación que pueden presentar los resultados dependiendo de la muestra de estudiantes.

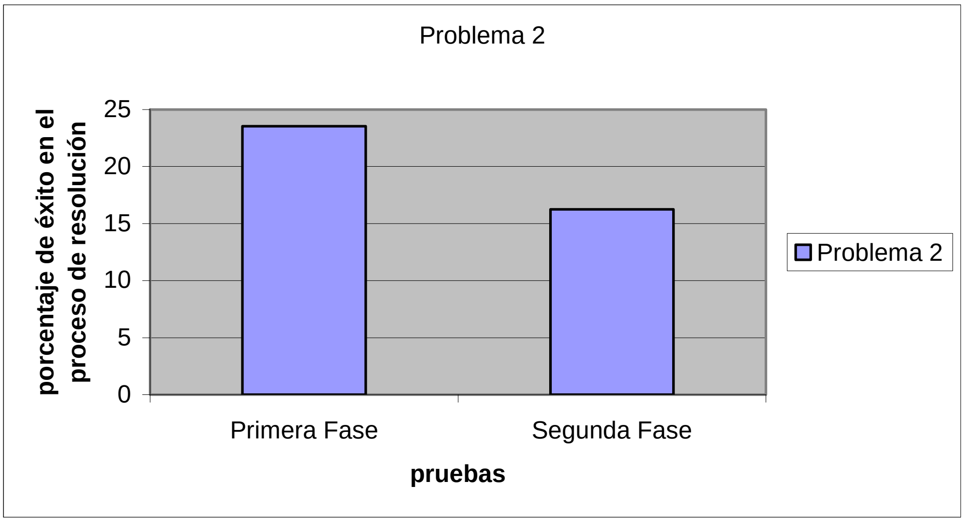


Diagrama 4.4.2.2: Diagrama de barras que da cuenta del porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P2 de la segunda fase frente al problema isomorfo de la primera fase

La tabla 4.4.2.16 muestra el número de estudiantes distribuidos según los descriptores que dan cuenta de los procesos de resolución con éxito así como de los porcentajes correspondientes.

P2	1. Éxito	1.1 Exclu. Aritmético	1.1.1 Destr. heuríst.	1.2 Mayori. aritmético	1.2.1 Destr. heuríst.	1.3 Básica. probabilístico	1.3.1 Destr. Heuríst.	1.4 Probabilístico	1.4.1 Destr. Heuríst.
Número	13	0	0	4	0	4	1	5	3
Porcentaje	16.25	0	0	30.77	0	30.77	25	38.46	60

Tabla 4.4.2.16: Número de estudiantes que han resuelto con éxito P2 distribuidos según los descriptores que dan cuenta del éxito, y el porcentaje correspondiente

A la vista de la tabla 4.4.2.16 podemos clasificar P2 como problema de asignación de probabilidades, aunque el porcentaje de estudiantes que han utilizado las reglas “de y entre probabilidades”, el 38.46%, es bastante más alto que en P1. Recordamos que en este problema se pregunta por una probabilidad, y quizás esta forma de preguntar induce al resolutor, competente en probabilidad, a utilizar las reglas de cálculo “de y entre probabilidades”.

Mostramos las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes en el proceso de resolución de este problema, organizadas según los descriptores del proceso de resolución con éxito.

Descriptor 1.1: Proceso de resolución exclusivamente aritmético

Ningún estudiante razona únicamente sobre cantidades.

Descriptor 1.2: Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Cuatro estudiantes presentan un proceso de resolución que implica un razonamiento mayoritariamente aritmético. Es decir, razonan sobre sucesos y cardinales utilizando como estrategia de resolución aritmética los porcentajes, expresados tal y como se muestra en la tabla 4.4.2.17.

Estrategias utilizadas en el razonamiento	Porcentajes
	El 20% de las mujeres realizan tareas administrativas⇒ luego el 80% no realizan tareas administrativas. El 80% de 55 es 80/100.55=44. El 44% son mujeres y no realizan tareas administrativas.

Tabla 4.4.2.17: Estrategia utilizada en el proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Los estudiantes, a partir de la probabilidad que presenta el problema: el 20% de las mujeres realiza tareas administrativas, crean una nueva cantidad: de las mujeres el 80% no realiza tareas administrativas. Sobre una muestra de 100 trabajadores, 55 de éstos son mujeres. A partir de la probabilidad calculada expresada en porcentaje, calculan el 80% de 55 y obtienen que el número de mujeres que no realizan tareas administrativas es 44, y le asignan el porcentaje correspondiente sobre la muestra: el 44% son mujeres y no realizan tareas administrativas.

La distribución de los estudiantes por niveles escolares queda reflejada en la tabla 4.4.2.18.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	TOTAL
Nº estudiantes	2	1	0	1	4

Tabla 4.4.2.18: Estudiantes que presentan un proceso de resolución con éxito mayoritariamente aritmético, distribuidos por niveles educativos.

Descriptor 1.3: Proceso de resolución básicamente probabilístico

Hay cuatro estudiantes que razonan sobre sucesos y asignan probabilidades a los sucesos utilizando estrategias de resolución aritméticas. La tabla 4.4.2.19 muestra la distribución de estos estudiantes por niveles educativos.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	TOTAL
número estudiantes	0	2	1	1	4

Tabla 4.4.2.19: Distribución de los estudiantes por niveles educativos, que presentan un proceso de resolución con éxito básicamente probabilístico.

Las estrategias utilizadas las presentamos a continuación.

Estrategia 1

El estudiante de la Facultad de Matemáticas utiliza una tabla de contingencia y contesta a la pregunta del problema en términos de probabilidad. En la tabla de contingencia utiliza frecuencias normalizadas a 100. El cálculo de la cantidad 11 mujeres que realizan tareas administrativas no está reflejado de forma explícita.

	M	*H*	
A	*11*	*11.25*	*22.25*
Ā	*44*		*77.5*
	55	*45*	*100*

M mujeres; H hombres, A administrativas, Ā no administrativas

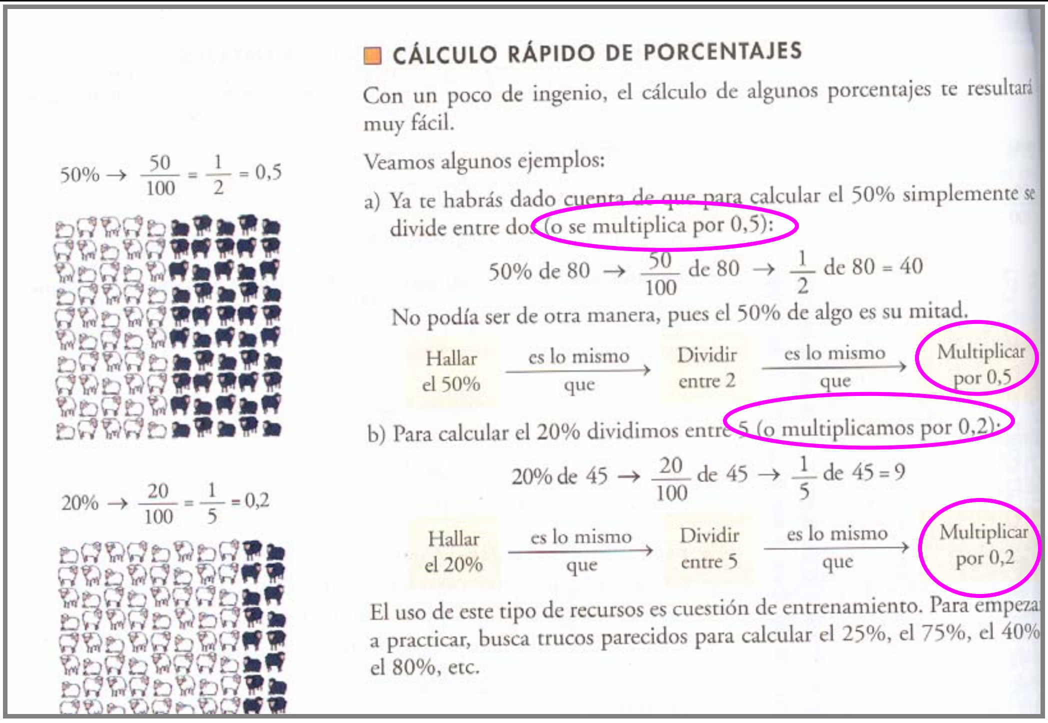
La solución es el 44%. La probabilidad es 0.44

Estrategia 2

Un estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales y los dos estudiantes de 1º de Bachiller de Ciencias (éstos no expresan el resultado en términos de probabilidad) presentan el siguiente proceso de resolución:

0.55 . 0.2 = 0.11⇒ 11% mujer administrativa ⇒ 55-11 = 44% mujer no administrativa ⇒ p(mujer no administrativa) = 0.44

Entendemos que los resolutores utilizan la aritmética para calcular tanto el "20% del 55%" como el "80% del 55%" pues en los libros de texto escolares, en las unidades de razón y proporción encontramos las siguientes recomendaciones para calcular porcentajes.



■ CÁLCULO RÁPIDO DE PORCENTAJES

Con un poco de ingenio, el cálculo de algunos porcentajes te resultará muy fácil.

Veamos algunos ejemplos:

a) Ya te habrás dado cuenta de que para calcular el 50% simplemente se divide entre dos (o se multiplica por 0,5):

$$50\% \text{ de } 80 \to \frac{50}{100} \text{ de } 80 \to \frac{1}{2} \text{ de } 80 = 40$$

No podía ser de otra manera, pues el 50% de algo es su mitad.

Hallar el 50% $\xrightarrow{\text{es lo mismo que}}$ Dividir entre 2 $\xrightarrow{\text{es lo mismo que}}$ Multiplicar por 0,5

b) Para calcular el 20% dividimos entre 5 (o multiplicamos por 0,2):

$$20\% \text{ de } 45 \to \frac{20}{100} \text{ de } 45 \to \frac{1}{5} \text{ de } 45 = 9$$

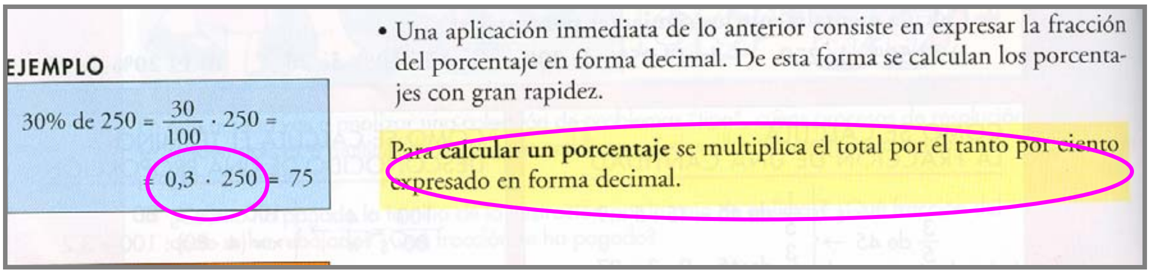
Hallar el 20% $\xrightarrow{\text{es lo mismo que}}$ Dividir entre 5 $\xrightarrow{\text{es lo mismo que}}$ Multiplicar por 0,2

El uso de este tipo de recursos es cuestión de entrenamiento. Para empezar a practicar, busca trucos parecidos para calcular el 25%, el 75%, el 40% el 80%, etc.

$50\% \to \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$20\% \to \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Figura 4.4.2.37: Recomendación de un libro de texto de matemáticas de 1ºESO para calcular un porcentaje. (Colera, Gaztelu, 2003)



EJEMPLO

$30\% \text{ de } 250 = \frac{30}{100} \cdot 250 = 0{,}3 \cdot 250 = 75$

• Una aplicación inmediata de lo anterior consiste en expresar la fracción del porcentaje en forma decimal. De esta forma se calculan los porcentajes con gran rapidez.

Para **calcular un porcentaje** se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

Figura 4.4.2.38: Recomendación de un libro de texto de matemáticas de 2ºESO para calcular un porcentaje. (Colera, Gaztelu, 2003)

Por esta razón consideramos las estrategias 1 y 2 como procesos de resolución en los que se reconocen los sucesos y las probabilidades pero se utiliza la aritmética. Los resolutores expresan el resultado en términos de probabilidad: 0.44.

Descriptor 1.4: Proceso de resolución probabilístico

Cinco estudiantes reconocen los sucesos y sus probabilidades y utilizan las fórmulas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución de este problema. La distribución por niveles escolares y las estrategias utilizadas quedan reflejadas en la tabla 4.4.2.20.

	2º BCCSS	EFM
NÚMERO estudiantes	3	2
Estrategias	*M0.55* $\left\langle \begin{array}{l} \textit{T.Ad } 0.2 \\ \textit{NoTadm } 0.8 \rightarrow p(\textit{MynoTadm}) = 0.5.0.55 = 0.44 \end{array} \right.$ *55% mujeres* ↗ *20% realizan tareas administrativas* *55% mujeres* ↘ *80% no realiza tareas administrativas* $\Rightarrow$*0.8.0.55=0.44*$\Rightarrow$*un 44% hay de que salga mujer sin que realice tareas administrativas* Resuelven utilizando las fórmulas de probabilidades, pero sólo escriben la relación multiplicativa, la relación aditiva no la muestran. Utilizan como destreza heurística el diagrama de árbol haciendo uso de la regla del producto para caminos. Dos de estos estudiantes explicitan la fórmula utilizada.	Traducen los datos del problema, sin definir explícitamente M y A: $p(M)=0.55$; $p(A\mid M)0.2$; $p(H\cap A)=0.1125$ $p(\bar{A}\mid M)=1-0.2=0.8$ $p(\bar{A}\cap M)=p(\bar{A}\mid M).p(M)=0.8 . 0.55=0.44$

Tabla 4.4.2.20: Distribución por niveles educativos, así como estrategias utilizadas por los estudiantes que han resuelto con éxito P2 utilizando un proceso de resolución probabilístico

Los cinco estudiantes presentan el mismo proceso de resolución.

Descripción y análisis de los procesos de resolución del P3

La tabla 4.4.2.21 muestra los resultados del descriptor 1, procesos de resolución con éxito, distribuidos por nivel escolar, tanto en frecuencias absolutas como en porcentajes.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	Muestra
Nº estudiantes	0	1	2	3	6
Porcentaje	0	4.2	13.3	30	7.5

Tabla 4.4.2.21: Números y porcentajes de estudiantes distribuidos por nivel educativo que muestran el proceso de resolución de P3 con éxito.

Este problema ha sido el problema con menor porcentaje de éxito de los seis problemas de la segunda fase.

La tabla 4.4.2.22 muestra el número de estudiantes distribuidos según los descriptores que dan cuenta de los procesos de resolución con éxito así como de los porcentajes correspondientes.

P3	1. Éxito	1.1 Exclu. Aritmético	1.1.1 Destr. heuríst.	1.2 Mayori. aritmético	1.2.1 Destr. heuríst.	1.3 Básica. probabilístico	1.3.1 Destr. Heuríst.	1.4 Probabilístico	1.4.1 Destr. Heuríst.
Número	6	0	0	1	0	3	1	2	1
Porcentaje	7.5	0	0	16.67	0	50	33.33	33.33	50

Tabla 4.4.2.22: Número de estudiantes que han resuelto con éxito P3 distribuidos según los descriptores que dan cuenta del éxito y el porcentaje correspondiente

Mostramos las diferentes estrategias de resolución de los estudiantes a la hora de resolver este problema, organizadas según los descriptores que dan cuenta del proceso de resolución con éxito:

Descriptor 1.1: Proceso de resolución exclusivamente aritmético

Ningún estudiante razona únicamente sobre cantidades.

Descriptor 1.2: Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

De los seis estudiantes que han llegado a la solución del problema, sólo uno de 1º Bachiller de Ciencias, muestra un proceso de resolución que implica un razonamiento básicamente aritmético. Razona sobre sucesos y cardinales utilizando como estrategia de resolución aritmética los porcentajes.

> *Si el 60% habla francés, entonces el 40% no lo habla⇒ el 35% de 40 es 14 ⇒ el 14% habla inglés pero no francés ⇒ los que no hablan ningún idioma: 40-14=26%*

Descriptor 1.3: Proceso de resolución básicamente probabilístico

Tres estudiantes razonan sobre sucesos y asignan probabilidades, utilizando el razonamiento aritmético en el proceso de resolución del problema. La distribución de estos estudiantes queda reflejada en la tabla 4.4.2.23, así como las estrategias utilizadas en el proceso de resolución.

	2º BCCSS	EFM
número estudiantes	1	2
estrategias	40% no habla francés 0.4 . 0.35 = 0.14 → 14% habla inglés pero no francés 40%-14% = 26% no habla ni francés ni inglés p(no hable ni francés ni inglés) = 0.26	Uno de ellos escribe: Si el 35% de los que no hablan francés habla inglés ⇒ el 65% de los que no hablan francés no hablan inglés:el 65% de 40 (si el 60% habla francés entonces el 40% no habla francés) ⇒ 65/100.0.4=0.26 ⇒ 26% no habla ninguno de los dos idiomas. El otro utiliza una tabla para resolver el problema, sin mostrar las operaciones que hace para obtener las cantidades nuevas, como 14% que no puede obtenerse con las operaciones propias de la tabla. Expresa la solución de la siguiente manera: *La solución es 26%, la probabilidad es 0,26.*

Tabla 4.4.2.23: Distribución por niveles educativos, así como estrategias utilizadas por los estudiantes que han resuelto con éxito P3 utilizando un proceso de resolución básicamente probabilístico

Descriptor 1.3.1: Uso de destrezas heurísticas

Un estudiante de la Facultad de Matemáticas utiliza la siguiente tabla de contingencia.

	F	$\overline{F}$	
I		*14%*	*70%*
$\overline{I}$		*26%*	*30%*
	60%	*40%*	*100%*

Descriptor 1.4: Proceso de resolución probabilístico

Dos estudiantes utilizan las fórmulas "de y entre probabilidades" como estrategia de resolución del problema. La distribución de estos estudiantes así como las estrategias utilizadas quedan reflejadas en la tabla 4.4.2.24.

	2º BCCSS	EFM
número estudiantes	1	1
estrategias	$0.6F$ $0.4\overline{F}$ $\begin{cases} 0.35I \\ 0.65\overline{I} \rightarrow p(\overline{F}\overline{I}) = 0.4.0.65 = 0.26 \end{cases}$ La probabilidad de que no hable ninguno de los dos idiomas es 0.256	$p(\overline{I}\|\overline{F}) = 0.65 \quad p(\overline{I} \cap \overline{F}) =$ $p(\overline{F}).p(\overline{I}\|\overline{F}) = 0.4.0.65 = 0.26$ La probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas es de 0,26.

Tabla 4.4.2.24: Distribución por niveles educativos, así como estrategias utilizadas por los estudiantes que han resuelto con éxito P3 utilizando un proceso de resolución probabilístico

El estudiante de la facultad de matemáticas utiliza un diagrama de Venn para representar los sucesos como conjuntos, los cardinales de éstos y las relaciones entre los cardinales de P3, tal y como muestra la figura 4.4.2.39.

Figura 4.4.2.39: Diagrama de Venn utilizado por un estudiante de EFM en el proceso de resolución de P3

Descriptor 1.4.1: Uso de destrezas heurísticas

El estudiante de 2º de bachiller plantea el problema utilizando un árbol, tal y como se muestra en la tabla 4.4.2.24.

Descripción y análisis de los procesos de resolución del problema P4

La tabla 4.4.2.25 muestra los resultados del descriptor 1, procesos de resolución con éxito, distribuidos por nivel escolar, tanto en frecuencias absolutas como en porcentajes.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	Muestra
NÚMERO Estudiantes	13	12	6	7	38
Porcentaje	41.94	50	40	70	47.5

Tabla 4.4.2.25: Número y porcentajes de estudiantes distribuidos por nivel educativo que muestran el proceso de resolución de P4 con éxito.

El porcentaje de estudiantes que ha resuelto con éxito este problema se ha mantenido en los niveles educativos de secundaria. Éste ha sido el problema que ha presentado un mayor porcentaje de estudiantes que lo han resuelto con éxito.

En el diagrama 4.4.2.3 observamos el diagrama de barras que da cuenta el crecimiento del porcentaje de estudiantes que muestran éxito en la resolución de este problema en la primera fase y en la segunda fase.

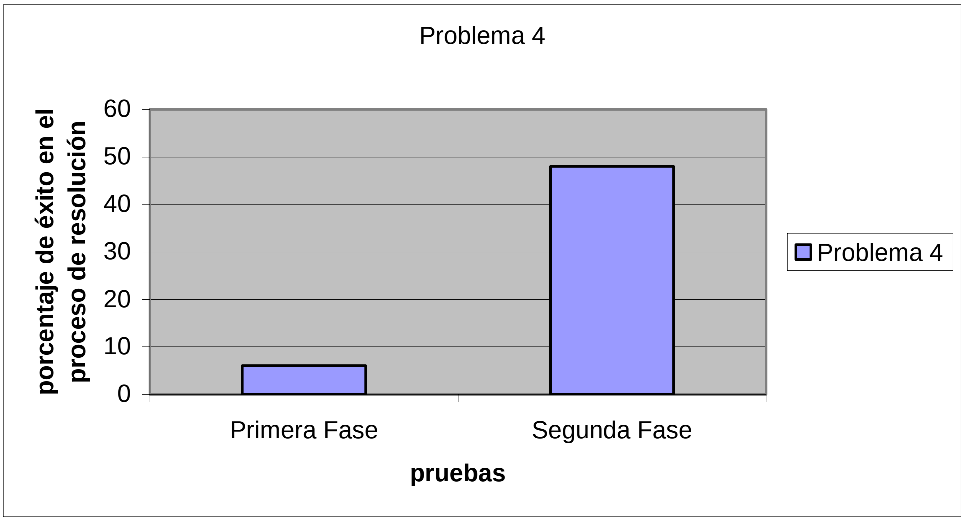


Diagrama 4.4.2.3: Diagrama de barras que da cuenta del porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P4 de la segunda fase frente al problema isomorfo de la primera fase

Al igual que en P1, todos los cambios han influido en el éxito en la resolución de P4 en esta fase. Nos fijamos en los resultados que muestra la tabla 4.4.2.9 (en el anexo 5 también podemos consultar esta tabla con los datos en frecuencias, p. 32, y con los datos en porcentajes, p.33). Ningún estudiante interpreta el dato condicional como una intersección, y tampoco se producen otras interpretaciones en los datos. Estos resultados muestran como la naturaleza de los datos es un factor influyente en el proceso de resolución de un problema. En concreto, los datos expresados en frecuencias absolutas favorecen el éxito en la resolución del problema. La naturaleza de los datos es uno de los factores con más peso para organizar el proceso de enseñanza de problemas de probabilidad condicional.

A veces hemos podido pensar que el hecho de preguntar por una condicional añadiría dificultad al problema, pero no es así. Tanto en P1 como en este P4 se pregunta por una condicional y son los problemas con mayor porcentaje de éxito.

Ya hemos mostrado que en los libros de texto no encontramos problemas de N_2 sin saber demasiado bien a qué se debe esta ausencia. Si volvemos a analizar los datos de P1 (dos marginales y una condicional) y de P4 (una marginal, una intersección y una condicional) encontramos que la estructura de los datos no es un factor de los más influyentes en el éxito en la resolución del problema.

La tabla 4.4.2.26 muestra el número de estudiantes distribuidos según los descriptores que dan cuenta de los procesos de resolución con éxito así como de los porcentajes correspondientes.

P4	1. Éxito	1.1 Exclu. Aritmético	1.1.1 Destr. heuríst.	1.2 Mayori. aritmético	1.2.1 Destr. heuríst.	1.3 Básica. probabilístico	1.3.1 Destr. Heuríst.	1.4 Probabilístico	1.4.1 Destr. Heuríst.
Número	38	4	0	33	3	1	1	0	0
Porcentaje	47.5	10.53	0	86.84	9.09	2.63	100	0	0

Tabla 4.4.2.26: Número de estudiantes que han resuelto con éxito P4 distribuidos según los descriptores que dan cuenta del éxito, y el porcentaje correspondiente

Los datos expresados en frecuencias absolutas inducen al resolutor a utilizar la aritmética en el proceso de resolución, reconociendo los sucesos y los cardinales de los conjuntos que representan. Sólo un estudiante, de los que alcanzan el éxito en el problema, lo resuelve utilizando la regla de Laplace. El resto utiliza la aritmética en el proceso de resolución. Este es un problema de asignación de probabilidades.

Mostramos las diferentes estrategias de resolución de los estudiantes a la hora de resolver este problema, organizadas según los descriptores que dan cuenta del proceso de resolución con éxito.

Descriptor 1.1: Proceso de resolución exclusivamente aritmético

Cuatro estudiantes de 4º ESO han razonado sobre cantidades de la siguiente manera: obtienen la cantidad que da cuenta del número de chicas (aplicando el 20%), calculan el total sumando el número de chicos y comparan expresando la comparación en porcentaje. Estos estudiantes no reconocen explícitamente los sucesos. En este proceso han utilizado diferentes estrategias que mostramos en la tabla 4.4.2.27.

porcentajes	25	50	25
estrategias	Reglas de tres $\left.\begin{array}{l}100 \rightarrow 220 \\ 20 \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x=44$ 44+45 = 89 $\left.\begin{array}{l}89 \rightarrow 100 \\ 44 \rightarrow x\end{array}\right\} \rightarrow x = 49.43\%$	porcentajes y proporciones 20% de 220 = 44; 44+45 = 89; 89/100 = 44/x x = 49.43%	porcentajes 20% de 220 = 44 44+45 = 89; 44 de 89 $= \frac{44.100}{89} = 49.43\%$

Tabla 4.4.2.27: Porcentajes de estudiantes según las diferentes estrategias utilizadas en el proceso de resolución exclusivamente aritmético en P4

Descriptor 1.2: Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Treinta y tres estudiantes han razonado con sucesos y cardinales utilizando en el proceso de resolución del problema diferentes estrategias aritméticas. La tabla 4.4.2.28 muestra la distribución por niveles escolares de estos estudiantes.

	4ºESO	1ºBC	2ºBCCSS	EFM
número estudiantes	9	12	6	6

Tabla 4.4.2.28: Distribución por niveles educativos de los estudiantes que han resuelto con éxito P4, mostrando un proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Todos los estudiantes han realizado el mismo proceso de resolución:

★ obtienen el número de niñas que realizan actividades acuáticas aplicando el 20%,

★ calculan el total de integrantes del campamento que realizan actividades acuáticas, sumando el número de niños que realizan actividades acuáticas y

★ comparan expresando la comparación en porcentaje.

La forma de comparar es la que varía. La tabla 4.4.2.29 da cuenta de las diferentes comparaciones así como del porcentaje de estudiantes que las han utilizado.

Porcentajes	**Comparaciones**
6.06	44/89=49.44% de los que realizan actividades acuáticas son niñas (1)
9.09	44= $\frac{x}{100}$ 89 $\rightarrow$ $\frac{4400}{89}$ =x; x=49.43% de los que realizan actividades acuáticas son niñas (2)
9.09	x% de 89 = 44 $\rightarrow$ $\frac{89.x}{100}$ =44 $\rightarrow$ x= 49.3% de los que realizan actividades acuáticas son niñas. (3)
9.09	$\frac{89}{44} = \frac{100}{x} \rightarrow x = \frac{100.44}{89} =$ =49.43% de los que realizan actividades acuáticas son niñas. (4)
66.67	$\left.\begin{matrix} 89 & \rightarrow & 100 \\ 44 & \rightarrow & x \end{matrix}\right\} x = \frac{44.100}{89} \approx 49 \rightarrow$ De los que practican actividades acuáticas hay un 49% de niñas (5)

Tabla 4.4.2.29: Porcentajes de estudiantes según las diferentes estrategias, comparaciones, utilizadas en el proceso de resolución mayoritariamente aritmético en P4

Vemos que el porcentaje más alto se corresponde con la estrategia de la regla de tres para comparar las cantidades y asignar el porcentaje pedido.

Este es un ejemplo de un problema donde las cantidades adquieren un significado para el resolutor. El resolutor obtiene, con significado, el número de niñas que realizan actividades acuáticas y el número de integrantes que realizan actividades acuáticas para luego comparar. Traducido a probabilidades: $p(N \cap A)$ y $p(A)$[25]. Los resolutores plantean:

- ★ En (2) y en (3): 44 es un tanto por cien de 89. Si transformamos las cantidades a probabilidades el resolutor estaría utilizando la relación: $p(N \cap A)=p(N \mid A).p(A)$
- ★ En (4) el resolutor estaría utilizando la relación: $\frac{p(A)}{p(N \cap A)} = \frac{1}{p(N|A)}$.

Si observamos el grafo asociado a este problema, la estrategia utilizada por el resolutor, en cualquiera de los casos, la identificamos transitando por la misma arista. La figura 4.4.2.40 muestra este grafo. La forma de transitar es la siguiente:

- ★ entramos al grafo por la arista que tiene dos vértices oscuros, arista curva
- ★ esta arista nos oscurece el vértice que se corresponde con $p(N \cap A)$
- ★ la siguiente entrada, arista recta, oscurece el vértice que da cuenta de $p(A)$
- ★ por último, transitamos por la arista curva que nos hace llegar a oscurecer el vértice que da cuenta de la pegunta del problema

[25] N es el suceso “integrantes niñas” y A el suceso “integrantes que realizan actividades acuáticas”.

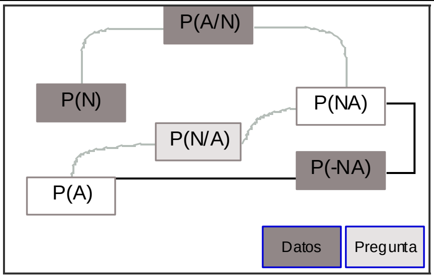
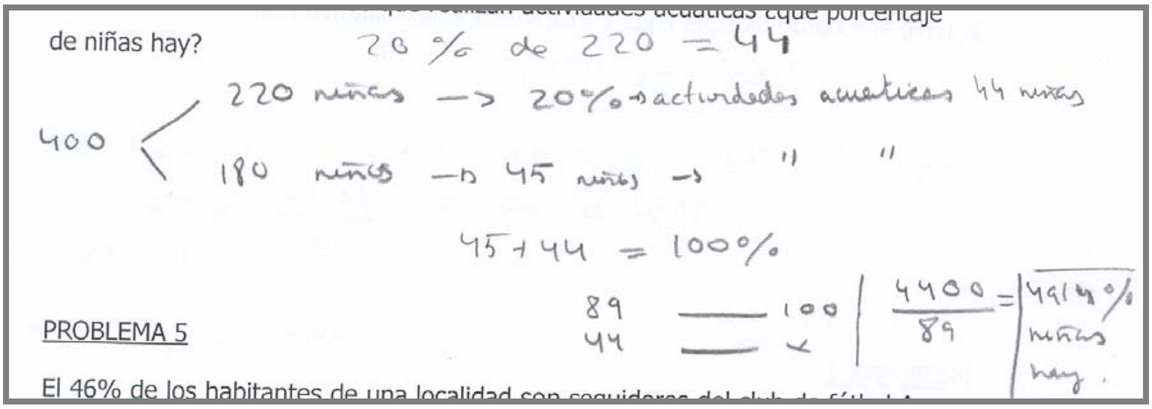


Figura 4.4.2.40: Grafo asociado a P4

Descriptor 1.2.1: Uso de destrezas heurísticas

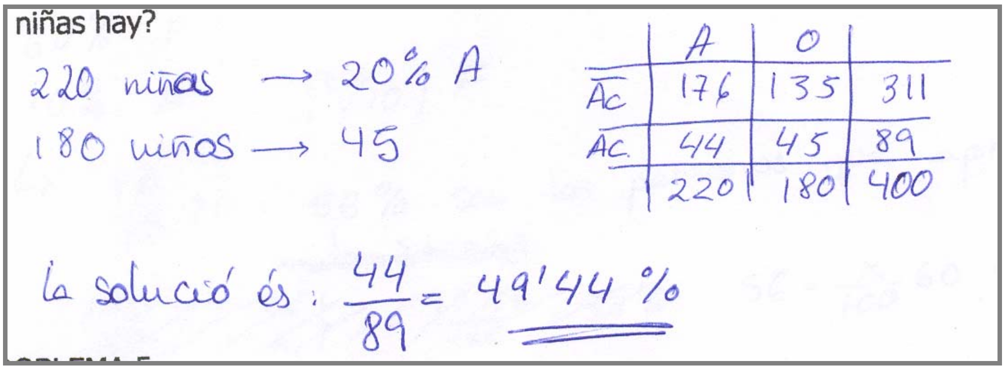
Tres estudiantes de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales usan un esquema, como caso particular de una rama de un árbol, utilizando la regla del producto para caminos (traducida a su esquema particular). La resolución 4.4.2.9 muestra este proceso.



Resolución 4.4.2.9: Proceso de resolución de un estudiante de 2BCCSS en P4

Descriptor 1.3: Proceso de resolución básicamente probabilístico

Un estudiante de 2BCCSS utiliza la fórmula de Laplace para asignar probabilidad: 44/89 y expresa el resultado en porcentaje, tal y como se observa en la resolución 4.4.2.10.



Resolución 4.4.2.10: Proceso de resolución de un estudiante de EFM en P4

Descriptor 1.3.1: Uso de destrezas heurísticas

Un estudiante de la facultad de matemáticas utiliza una tabla de contingencia y calcula la condicional pedida comparando las cantidades mediante una fracción tal y como muestra la resolución 4.4.2.10.

Descriptor 1.4: Proceso de resolución probabilístico

Ningún estudiante ha utilizado las fórmulas "de y entre probabilidades" para resolver el problema de una manera explícita.

Descripción y análisis de los procesos de resolución del problema P5

La tabla 4.4.2.30 muestra los resultados del descriptor 1, procesos de resolución con éxito, distribuidos por nivel escolar, tanto en frecuencias absolutas como en porcentajes.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	Muestra
NÚMERO Estudiantes	2	2	0	5	9
Porcentaje	6.45	8.33	0	50	11.25

Tabla 4.4.2.30: Número y porcentajes de estudiantes distribuidos por nivel educativo que muestran el proceso de resolución de P5 con éxito.

Este problema presenta un porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito muy bajo, en los niveles que se corresponden con la secundaria obligatoria y el bachiller.

Comparamos los resultados obtenidos en el proceso de resolución con éxito de este problema y de P1 de esta segunda fase, ya que son problemas isomorfos en cuanto a que se describen con $N_2C_3T_1$ y [p_{02}]. Varía la naturaleza de los datos y el contexto. El problema P1 presenta las cantidades en frecuencias, salvo la cantidad condicional, que la expresamos en porcentajes, y en este problema todas las cantidades son porcentajes.

El diagrama 4.4.2.4 muestra los porcentajes de estudiantes que resuelven con éxito los problemas P1 y P5, distribuidos por niveles educativos.

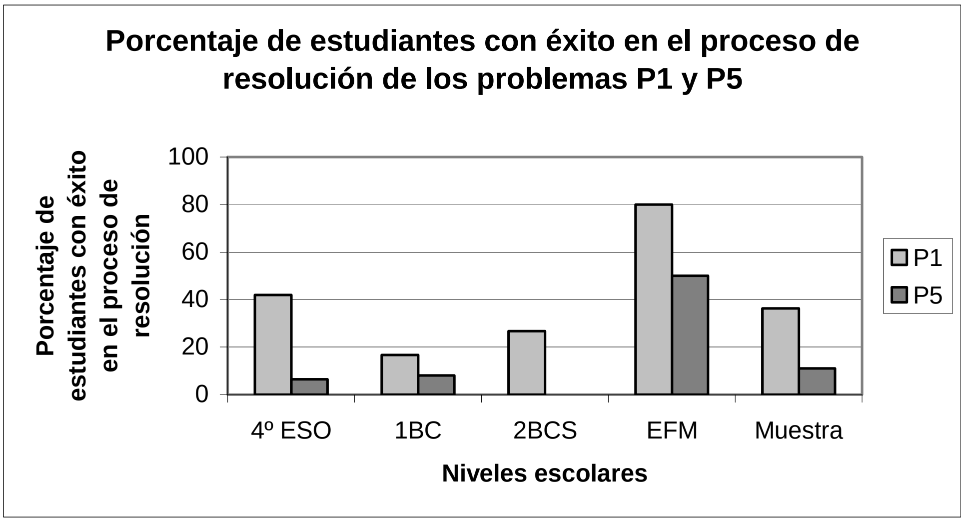


Diagrama 4.4.2.4: Diagrama de barras que da cuenta de los porcentajes de estudiantes que resuelven con éxito P1 y P5 distribuidos por niveles educativos

En P1 el porcentaje de éxito es superior, con diferencia, en todos los niveles. Este resultado nos muestra, una vez más, la influencia positiva en el proceso de resolución con éxito de las cantidades presentadas en frecuencias absolutas frente a las cantidades presentadas en porcentajes.

La tabla 4.4.2.31 muestra el número de estudiantes distribuidos según los descriptores que dan cuenta de los procesos de resolución con éxito así como de los porcentajes correspondientes.

P5	1. Éxito	1.1 Exclu. Aritmético	1.1.1 Destr. heuríst.	1.2 Mayori. aritmético	1.2.1 Destr. heuríst.	1.3 Básica. probabilístico	1.3.1 Destr. Heuríst.	1.4 Probabilístico	1.4.1 Destr. Heuríst.
Número	9	0	0	5	0	3	1	1	0
Porcentaje	11.25	0	0	55.55	0	33.33	33.33	11.11	0

Tabla 4.4.2.31: Número de estudiantes que han resuelto con éxito P5 distribuidos según los descriptores que dan cuenta del éxito, y el porcentaje correspondiente

La mayoría de los estudiantes que llegan a la solución del problema presentan un proceso de resolución mayoritariamente aritmético.

Mostramos las diferentes estrategias de resolución de los estudiantes a la hora de resolver este problema, organizadas según los descriptores que dan cuenta del proceso de resolución con éxito.

Descriptor 1.1: Proceso de resolución exclusivamente aritmético

Ningún estudiante razona únicamente sobre cantidades

Descriptor 1.2: Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Seis estudiantes razonan sobre sucesos y cardinales utilizando estrategias del razonamiento aritmético en el proceso de resolución. La distribución de estos estudiantes queda reflejada en la tabla 4.4.2.32.

	4º ESO	1º BC	EFM
NÚMERO estudiantes	4	2	1

Tabla 4.4.2.32: Distribución de los estudiantes que muestran un proceso de resolución con éxito mayoritariamente aritmético en P5

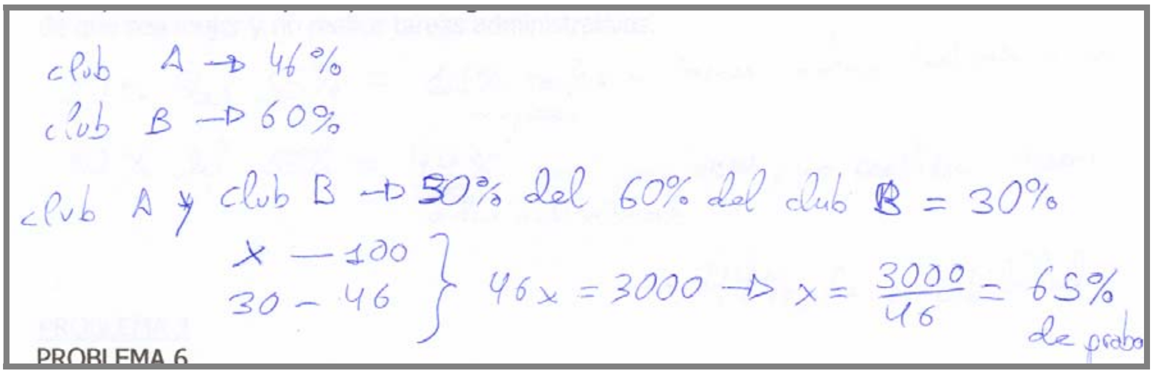
El proceso de resolución es el mismo: calculan la cantidad que da cuenta de los seguidores de los dos clubes y luego comparan para expresar la probabilidad pedida. La estrategia utilizada en la comparación varía. La tabla 4.4.2.33 presenta las diferentes estrategias así como el porcentaje de estudiantes que las han utilizado.

Porcentajes	14.29	57.14
Estrategias	$x=\frac{30.100}{46}=$ 65.21%	$\left.\begin{array}{l}46 \rightarrow 100\\30 \rightarrow x\end{array}\right\} x = 65.21\%$ de los seguidores de A son de B

Tabla 4.4.2.33: Porcentajes de estudiantes según las diferentes estrategias utilizadas en el proceso de resolución mayoritariamente aritmético en P5

La mayoría de los estudiantes, una vez calculada la cantidad que da cuenta de los seguidores de los dos clubes, utilizan la regla de tres para asignar un porcentaje a la probabilidad pedida.

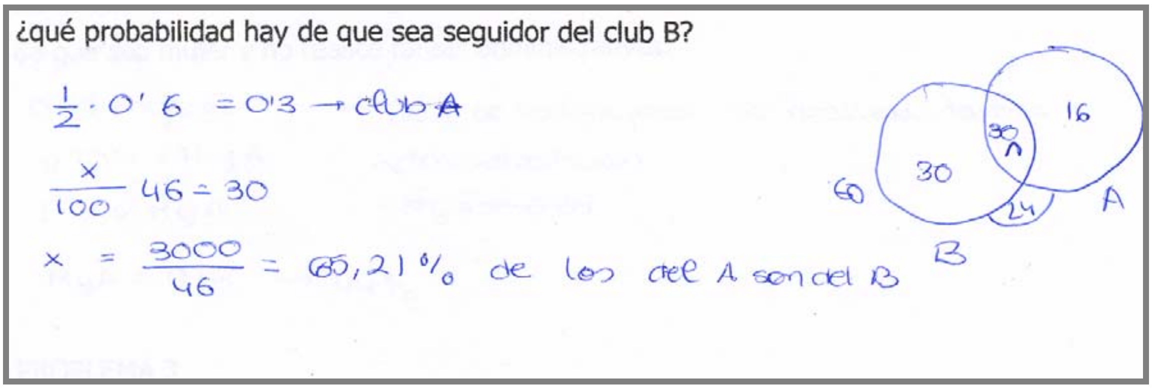
La resolución 4.4.2.11 muestra el proceso de resolución de un estudiante de 4ESO en P5. Este es el proceso de resolución que muestran la mayoría de los estudiantes.


club A → 46%
club B → 60%
club A y club B → 50% del 60% del club B = 30%
$\left.\begin{array}{l}x - 100\\30 - 46\end{array}\right\} 46x = 3000 \rightarrow x = \frac{3000}{46} = 65\%$ de prob
PROBLEMA 6

Resolución 4.4.2.11: Actuación de un estudiante de 4ESO es P5

Descriptor 1.3: Proceso de resolución básicamente probabilístico

Dos estudiantes de la Facultad de Matemáticas razonan sobre sucesos y asignan probabilidades a algunos de estos sucesos, aunque utilizan estrategias del razonamiento aritmético en su resolución. Uno de ellos utiliza el diagrama de Venn para mostrar los sucesos como conjuntos, los cardinales de éstos y las relaciones entre ellos, tal y como se observa en la resolución 4.4.2.12.



¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

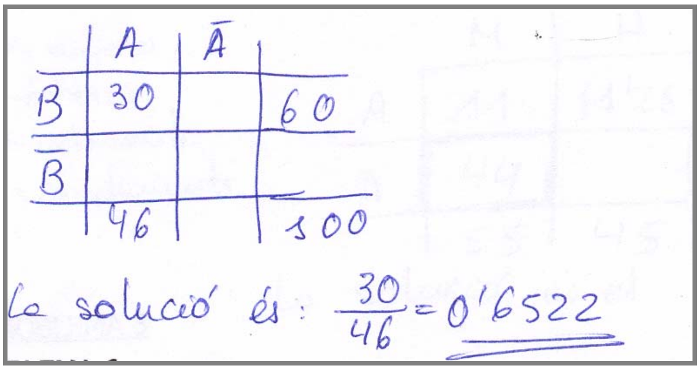
$\frac{1}{2} \cdot 0'6 = 0'3 \rightarrow$ club A

$\frac{x}{100} \, 46 = 30$

$x = \frac{3000}{46} = 65,21\%$ de los del A son del B

Resolución 4.4.2.12: Actuación de un estudiante de EFM en P5

El otro estudiante utiliza la tabla de contingencia y calcula la cantidad pedida comparando las cantidades mediante la Regla de Laplace.



	A	$\bar{A}$	
B	30		60
$\bar{B}$			
	46		100

La solució és: $\frac{30}{46} = 0'6522$

Resolución 4.4.2.13: Actuación de un estudiante de EFM en P5

Descriptor 1.3.1: Uso de destrezas heurísticas

El estudiante de la facultad de Matemáticas utiliza la tabla de contingencia tal y como se observa en la resolución 4.4.2.13.

Descriptor 1.4: Proceso de resolución probabilístico

Un estudiante de la Facultad de Matemáticas utiliza las fórmulas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución del problema, sin definir explícitamente los sucesos A y B (éstos quedan definidos de forma implícita en el texto del problema):

$$p(A) = 0.46,\ p(B) = 0.6;\ p(A/B) = 1/2;\ p(B|A) = \frac{p(A|B).p(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2}.0.6}{0.46}$$

Descripción y análisis de los procesos de resolución del problema P6

La tabla 4.4.2.34 muestra el número de estudiantes así como el porcentaje de éstos que presentan un proceso de resolución con éxito en P6, distribuidos según el nivel educativo.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM	Muestra
Nº Estudiantes	3	2	3	2	10
Porcentaje	9.68	8.33	20	20	12.5

Tabla 4.4.2.34: Número y porcentajes de estudiantes distribuidos por nivel educativo que muestran el proceso de resolución de P6 con éxito.

El porcentaje de estudiantes que llegan a la solución del problema en P6 ha sido bajo en todos los niveles educativos. Concretamente, los estudiantes de la Facultad de Matemáticas presentan el porcentaje más bajo de los seis problemas.

El diagrama 4.4.2.5 presenta, en un diagrama de barras, el porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito P6, así como el porcentaje de estudiantes que resuelven con éxito el problema isomorfo a P6 en la primera fase. Este éxito se mantiene, pues la diferencia es mínima, el 0.5%. Estos dos problemas presentan únicamente una diferencia: la forma de expresar la condicionalidad. Como en todos los problemas de la segunda fase se ha utilizado la estructura DE LOS QUE ... El problema en la primera fase decía: *Sabemos que de los alumnos que…*; y en la segunda fase eliminamos el SABEMOS y escribimos: *De los estudiantes que…*. La variación ha sido mínima, por lo que el resultado que muestra el diagrama 4.4.2.5 es lógico.

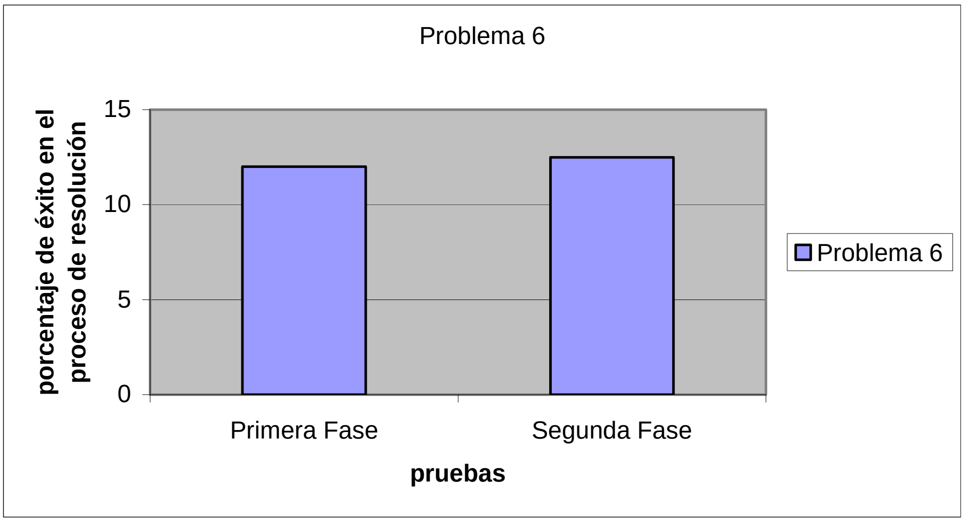


Diagrama 4.4.2.5: Diagrama de barras que da cuenta de los porcentajes de estudiantes que resuelven con éxito P6 y su isomorfo en la primera fase.

La tabla 4.4.2.35 muestra el número de estudiantes distribuidos según los descriptores que dan cuenta de los procesos de resolución con éxito así como de los porcentajes correspondientes.

P6	1. Éxito	1.1 Exclu. Aritmético	1.1.1 Destr. heuríst.	1.2 Mayori. aritmético	1.2.1 Destr. heuríst.	1.3 Básica. probabilístico	1.3.1 Destr. Heuríst.	1.4 Probabilístico	1.4.1 Destr. Heuríst.
Número	10	0	0	9	0	0	0	1	0
Porcentaje	12.5	0	0	90	0	0	0	10	0

Tabla 4.4.2.35: Número de estudiantes que han resuelto con éxito P6 distribuidos según los descriptores que dan cuenta del éxito, y el porcentaje correspondiente

La mayoría de los estudiantes que han alcanzado la solución del problema han utilizado estrategias del razonamiento aritmético en el proceso de resolución.

Mostramos las diferentes estrategias de resolución de los estudiantes a la hora de resolver este problema, organizadas por los descriptores que dan cuenta del proceso de resolución con éxito.

Descriptor 1.1: Proceso de resolución aritmético

Ningún estudiante razona únicamente sobre cantidades.

Descriptor 1.2: Proceso de resolución mayoritariamente aritmético

Nueve estudiantes razonan sobre sucesos y cardinales utilizando diferentes estrategias de razonamiento aritmético en el proceso de resolución del problema. La distribución de estos estudiantes queda reflejada en la tabla 4.4.2.36.

	4º ESO	1º BC	2º BCCSS	EFM
Nº estudiantes	3	2	3	1

Tabla 4.4.2.36: Número de estudiantes distribuidos por niveles educativos que presentan un proceso de resolución con éxito mayoritariamente aritmético

Todos los estudiantes presentan el mismo proceso de resolución:

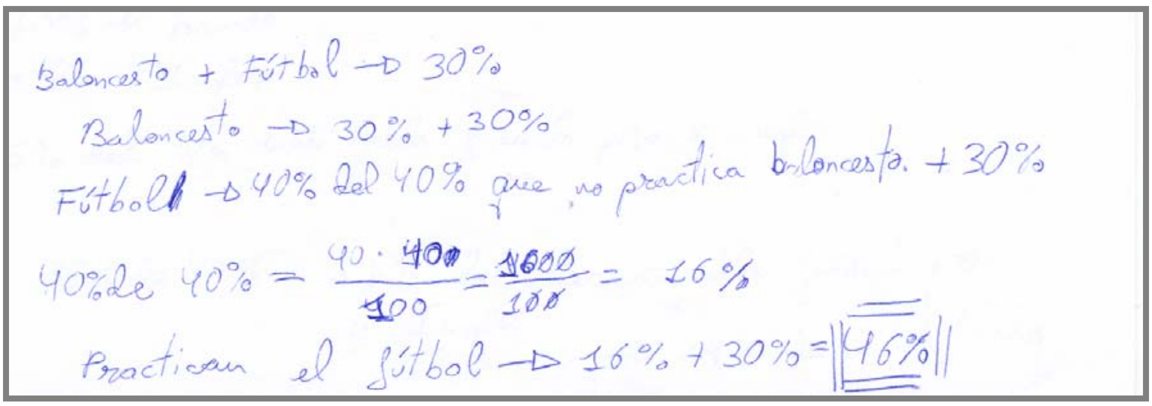
- ★ calculan la cantidad que da cuenta del porcentaje de estudiantes que practica baloncesto
- ★ calculan el complementario, es decir, la cantidad que se corresponde con el porcentaje de estudiantes que no practica baloncesto
- ★ con el dato del 40% calculan la cantidad del porcentaje de los que practican fútbol y no baloncesto
- ★ por último mediante una suma calculan el porcentaje pedido.

Las únicas diferencias que encontramos son las estrategias utilizadas para calcular la cantidad que se corresponde con el porcentaje de los que practican fútbol y no baloncesto. Unos pocos estudiantes, 11.11%, utilizan una regla de tres y la mayoría de estudiantes utilizan los porcentajes. La tabla 4.4.2.37 muestra estas estrategias así como el porcentaje de estudiantes que las han utilizado.

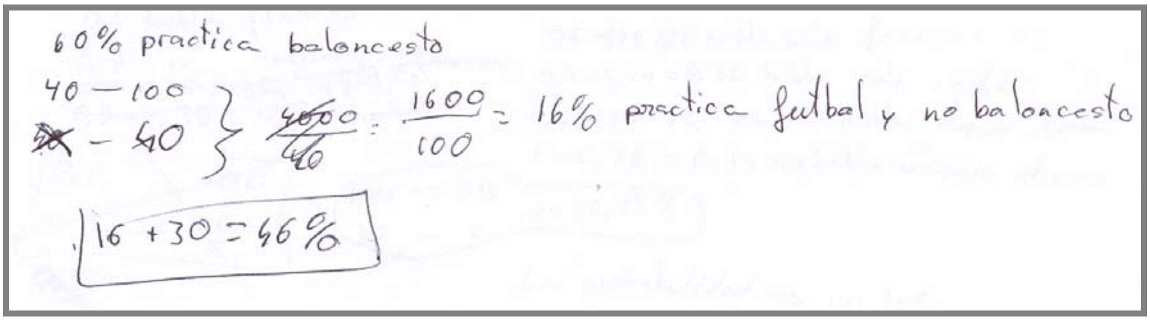
Porcentaje	11.11	88.89
Estrategias	$\left.\begin{array}{lll} 40 & \rightarrow & 100 \\ x & \rightarrow & 40 \end{array}\right\}$ $x = \dfrac{1600}{100} = 16\%$ practica fútbol y no baloncesto	El 40% de 40 ⇒40/100 de 40=16% practica el fútbol y no el baloncesto

Tabla 4.4.2.37: Porcentajes de estudiantes según las diferentes estrategias utilizadas en el proceso de resolución mayoritariamente aritmético en P6

Las resoluciones 4.4.2.14 y 4.4.2.15 muestran estos procesos de resolución. La mayoría de los estudiantes presentan el proceso de resolución que presenta la resolución 4.4.2.14. Únicamente un estudiante utiliza la regla de tres como estrategia para asignar el porcentaje que representa los estudiantes que hacen fútbol y no baloncesto, y es un estudiante de 4ESO. Su proceso de resolución queda reflejado en la resolución 4.4.2.15.


Baloncesto + Fútbol → 30%
Baloncesto → 30% + 30%
Fútbol → 40% del 40% que no practica baloncesto. + 30%
40% de 40% = $\dfrac{40 \cdot 40}{100} = \dfrac{1600}{100} = 16\%$
Practican el fútbol → 16% + 30% = $\boxed{46\%}$

Resolución 4.4.2.14: Actuación de un estudiante de 4ESO en P6



Resolución 4.4.2.15: Actuación de un estudiante de 4ESO en P6

Descriptor 1.3: Proceso de resolución básicamente probabilístico

Ningún estudiante razona sobre sucesos y sus probabilidades utilizando la aritmética en el proceso de resolución.

Descriptor 1.4: Proceso de resolución probabilístico

Un estudiante de la Facultad de Matemáticas razona sobre sucesos y les asigna probabilidades y utiliza las fórmulas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución.

$0.3 = p(B \cap F)$,

$0.3 = p(B \cap \bar{F})$, $\rightarrow$ 0.6 practica el baloncesto

$\bar{B}$.40% es $F \cap \bar{B}$ $\rightarrow$ $0.4 \times 0.4 = 0.16 = p(F \cap \bar{B})$

$0.16+0.3 = 0.46 \Rightarrow$ 46% practica fútbol

Reflexiones del análisis de los procesos de resolución con éxito

La tabla 4.4.2.38 muestra los resultados de los descriptores que dan cuenta del éxito en la resolución de los problemas de la segunda fase.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito	29	13	6	38	9	10
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	7	0	0	4	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	19	4	1	33	5	9
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	3	0	0	3	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	4	3	1	3	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	1	1	1	1	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	3	5	2	0	1	1
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	3	1	0	0	0

Tabla 4.4.2.38: Resultados de las respuestas de los estudiantes que dan cuenta del éxito, clasificadas según los descriptores correspondientes.

Las cantidades expresadas en frecuencias absolutas influyen en el éxito en la resolución de los problemas de probabilidad condicional. En la tabla 4.4.2.38 observamos que los problemas P1 y P4 han sido los que han tenido mayor éxito. La característica común de ambos problemas que les diferencia del resto de los problemas de la segunda fase, es la expresión de los datos en frecuencias absolutas, el dato que muestra la probabilidad condicional expresado en porcentaje y la expresión de la pregunta, se pregunta por un porcentaje. Por lo que es este factor el que más ha influido en el éxito en la resolución de los dos problemas.

Por otro lado, la mayoría de los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas de la segunda fase, no han utilizado las reglas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución del problema. Podemos observar este resultado en la tabla 4.4.2.38. El descriptor que da cuenta de la utilización de las reglas “de y entre probabilidades” en el proceso de resolución del problema, es el descriptor 1.4. Cuando las cantidades de los problemas de probabilidad condicional están expresadas en frecuencias absolutas y/o en porcentajes, hace que el problema de probabilidad condicional sea un problema de asignación de probabilidades. Y si en la pregunta del problema se pide por un porcentaje (problemas P1, P4 y P6), la mayoría de los estudiantes resuelven reconociendo los sucesos, utilizando estrategias de la aritmética y sin asignar probabilidades a los sucesos.

II. Análisis de los comportamientos de los estudiantes que han resuelto con éxito gran parte de los problemas

En esta parte queremos mostrar si los estudiantes que resuelven con éxito la mayoría de los problemas presentan un modo de resolución estable a lo largo de toda la prueba o si este modo de resolución está influido por algo. Observando la resolución de las pruebas por niveles escolares, encontramos sólo un estudiante de cada nivel que resuelve con éxito 5 de los 6 problemas de la segunda fase. Además en el grupo de estudiantes de la Facultad de Matemáticas hay un estudiante que resuelve con éxito los seis problemas.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
EFM_3	1.2	1.4	1.4	1.2	1.3	1.4
EFM_1	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	Interpretación del dato condicional como intersección
2BCCSS	1.2	1.3	1.3	1.2	Blanco	1.2
1BCT	1.2	1.2	Diferentes errores	1.2	1.2	1.2
4ESO	1.2	1.2	Interpretación de la pregunta: porcentaje de no hablar francés y hablar inglés	1.2	1.2	1.2

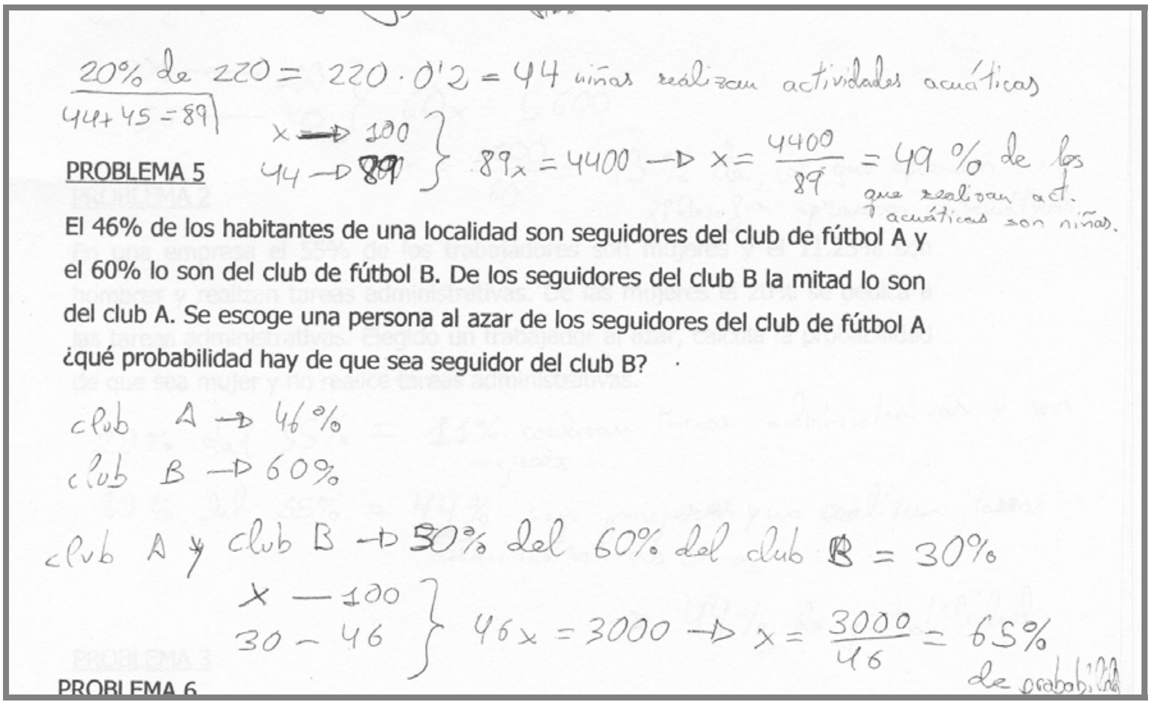
Tabla 4.4.2.39: Procesos de resolución de los estudiantes que han llegado a la solución en casi todos los problemas

La tabla 4.4.2.39 muestra los diferentes modos de resolución de estos cinco estudiantes, así como el error cometido en el problema en el que no se ha llegado a la solución correcta. Recordamos que el descriptor 1.1 da cuenta del modo de resolución básicamente aritmético, el descriptor 1.2 representa el modo de resolución mayoritariamente aritmético, 1.3 representa el modo de resolución básicamente probabilístico y el descriptor 1.4 el modo de resolución probabilístico.

El proceso de resolución de los estudiantes de 4ESO y de 1BCT no puede ser probabilístico, pues ya hemos dicho que estos estudiantes no han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad. Para los estudiantes de estos cursos las cantidades de los problemas adquieren significado, como características de conjuntos determinados, razonan sobre estos conjuntos y sobre las relaciones de estos conjuntos, utilizando estrategias del razonamiento proporcional.

Estudiante de 4ESO

El estudiante de 4ESO utiliza los porcentajes y/o la regla de tres en el proceso de resolución de estos problemas. La regla de tres la utiliza para asignar porcentaje al cardinal del conjunto pedido sobre el espacio muestral reducido. O sea, en los tres problemas en los que se pregunta por una condicional, este estudiante utiliza la regla de tres para calcular la probabilidad condicional pedida. En P3 interpreta de forma no deseada la pregunta y contesta con el 14% que representa el porcentaje del suceso “no hablar francés y sí inglés”. La resolución 4.4.2.16 muestra el uso de la regla de tres en los problemas P4 y P5, así como el uso de porcentajes, tanto en el problema P4 en el que los datos son frecuencias absolutas, como en P5 en el que los datos son razones.



20% de 220 = 220 · 0'2 = 44 niñas realizan actividades acuáticas

44+45 = 89

PROBLEMA 5

$x \rightarrow 100$
$44 \rightarrow 89$ } $89x = 4400 \rightarrow x = \frac{4400}{89} = 49\%$ de los que realizan act. acuáticas son niñas.

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

club A → 46%
club B → 60%

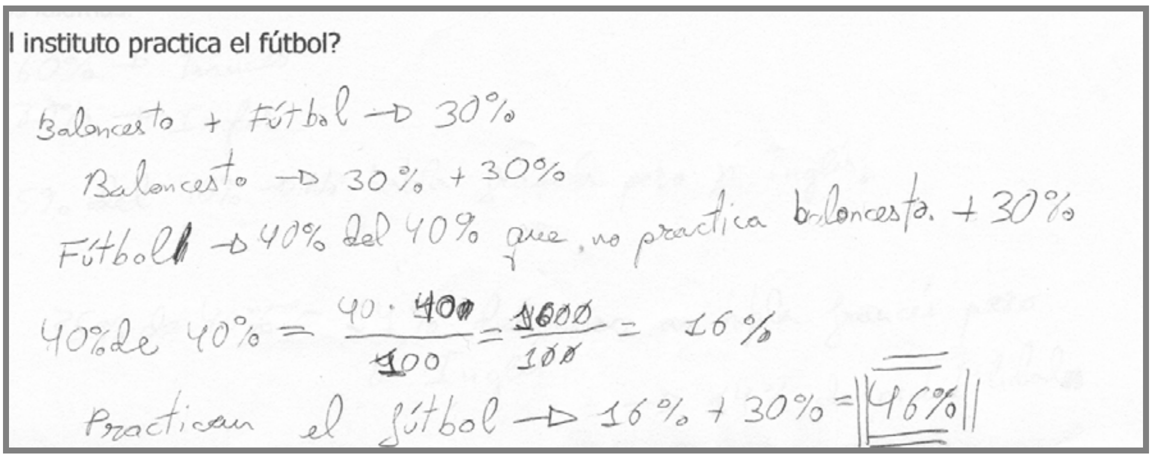
club A y club B → 50% del 60% del club B = 30%

$x - 100$
$30 - 46$ } $46x = 3000 \rightarrow x = \frac{3000}{46} = 65\%$ de probabilidad

PROBLEMA 6

Resolución 4.4.2.16: Actuación del estudiante de 4ESO en P4 y P5

La resolución 4.4.2.17 muestra el proceso de resolución de este estudiante 4ESO en P6, como ejemplo del uso de los porcentajes en los tres problemas en los que no se pregunta por una condicional. El cálculo de los porcentajes no siempre lo realiza de la misma manera. En P6 para calcular el 40% de 40 realiza la operación utilizando las fracciones.



l instituto practica el fútbol?

Baloncesto + Fútbol → 30%

Baloncesto → 30% + 30%

Fútbol → 40% del 40% que no practica baloncesto. + 30%

40% de $40\% = \frac{40 \cdot 40}{100} = \frac{1600}{100} = 16\%$

Practican el fútbol → 16% + 30% = $\boxed{46\%}$

Resolución 4.4.2.17: Actuación del estudiante de 4ESO en P6

En P1 para calcular el 80% de 70 utiliza los números decimales:

el 80% de 70 = 70 x 0.8 = 56,

En P4 también utiliza este procedimiento, tal y como se observa en la resolución 4.4.2.16

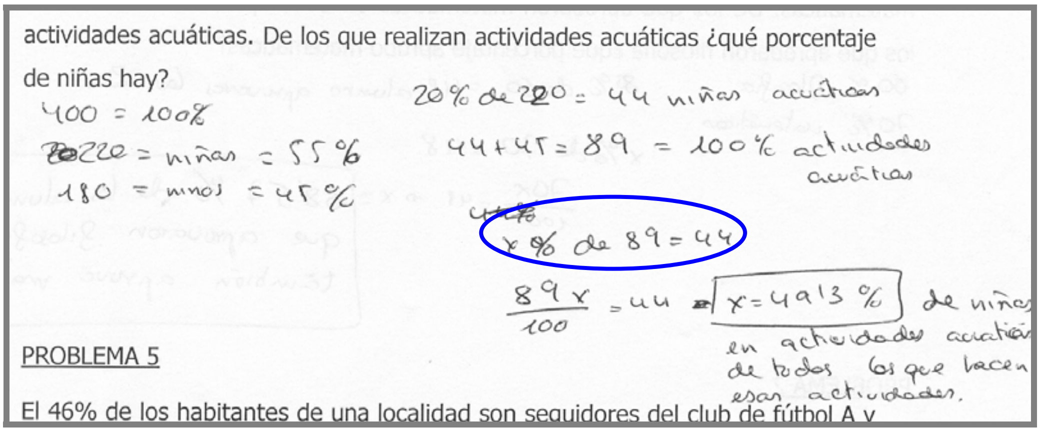
En los otros problemas no indica el cálculo y escribe directamente el resultado:

el 20% del 55% = 11%

En la resolución 4.4.2.16 también podemos observar esto en la resolución de P5.

Estudiante de 1BCCSS

El estudiante de 1º de Bachiller de Ciencias utiliza los porcentajes en el proceso de resolución del problema. En los tres problemas en los que se pregunta por una condicional siempre realiza la misma operación, una vez calculada la cantidad que representa el cardinal del conjunto pedido sobre el espacio muestral reducido escribe: el x% de (cardinal de espacio muestral reducido) es (cardinal del conjunto), tal y como resaltamos en la resolución 4.4.2.18.


actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

400 = 100%

~~20~~220 = niñas = 55%

180 = niños = 45%

20% de 220 = 44 niñas acuáticas

44+45 = 89 = 100% actividades acuáticas

~~44%~~

x% de 89 = 44

$\frac{89x}{100} = 44$ → $\boxed{x = 49'3\ \%}$ de niñas en actividades acuáticas de todos los que hacen esas actividades.

PROBLEMA 5

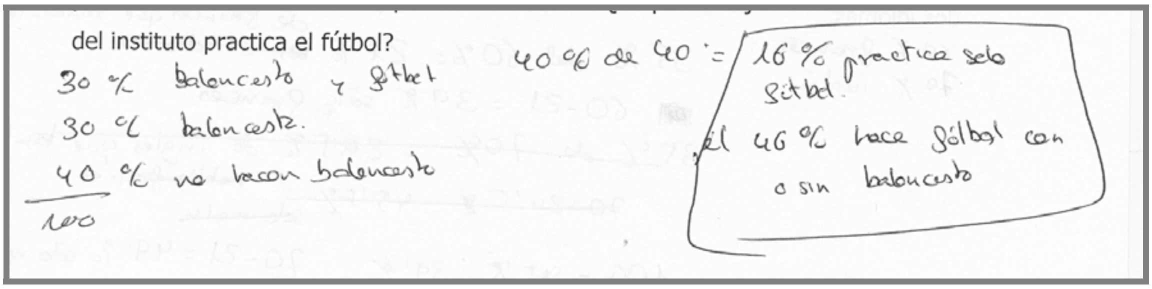
El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y

Resolución 4.4.2.18: Actuación del estudiante de 1BCT en P4

Para calcular los porcentajes de cantidades conocidas siempre indica lo mismo sin hacer el cálculo de forma explícita. Por ejemplo *el 20% de 220 = 44 niñas acuáticas*

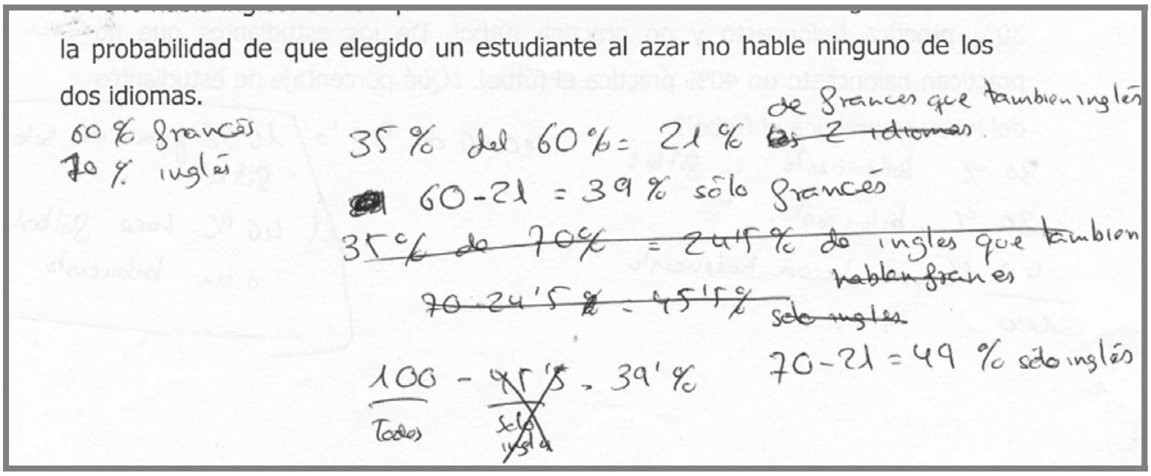
tal y como vemos en la resolución 4.4.2.18.

En la resolución 4.4.2.19 mostramos otro ejemplo de estos cálculos.


del instituto practica el fútbol?
30 % baloncesto y fútbol
30 % baloncesto.
40 % no hacen baloncesto
100
40 % de 40 = 16 % practica sólo fútbol.
el 46 % hace fútbol con o sin baloncesto

Resolución 4.4.2.19: Actuación del estudiante de 1BCT en P6

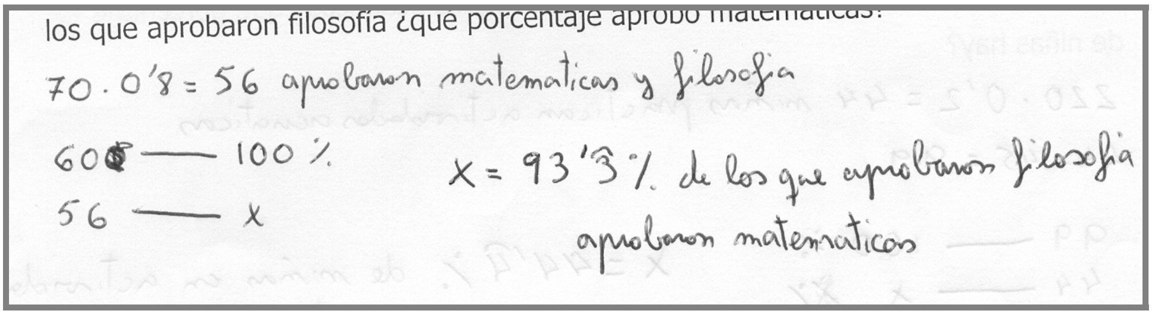
En P3 este estudiante ha cometido diferentes errores, tal y como se observa en la resolución 4.4.2.20. Interpreta que el 35% de los que hablan francés habla inglés, en lugar del 35% de los que NO hablan francés habla inglés e interpreta la pregunta como los que hablan sólo inglés y los que hablan sólo francés.


la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.
60 % francés
70 % inglés
35 % del 60 % = 21 % de frances que tambien inglés ~~los 2 idiomas~~
60 - 21 = 39 % sólo frances
~~35 % de 70 % = 24'5 % de ingles que tambien hablan frances~~
~~70 - 24'5 % = 45'5 % solo ingles~~
70 - 21 = 49 % sólo inglés
100 - ~~45'5~~ = 39'%
Todos sólo inglés

Resolución 4.4.2.20: Actuación del estudiante de 1BCT en P3

Estudiante de 2BCCSS

El estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales resuelve con éxito 5 problemas y deja uno en blanco: el P5. Presenta un modo de resolución estable en toda la prueba. Utiliza el razonamiento proporcional en todos los problemas, expresando la solución del problema en términos de probabilidad en los problemas en los que se pregunta por una probabilidad: P2, P3. Trabaja con los porcentajes en forma decimal siempre que utiliza una relación multiplicativa. En P1 y en P4, para contestar a la pregunta del problema, una condicional, utiliza la regla de tres. Las resoluciones 4.4.2.21 y 4.4.2.22 muestran las actuaciones de este estudiante en P1 y en P3.



los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

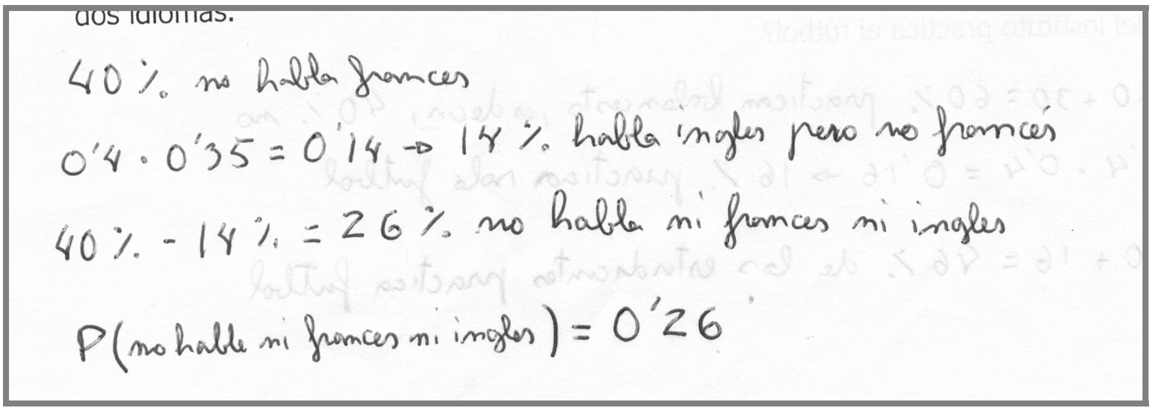
70 · 0'8 = 56 aprobaron matematicas y filosofia

60 —— 100 %

56 —— x

x = 93'3 % de los que aprobaron filosofia aprobaron matematicas

Resolución 4.4.2.21: Actuación de 2BCCSS en P1



dos idiomas.

40 % no habla frances

0'4 · 0'35 = 0'14 → 14 % habla ingles pero no frances

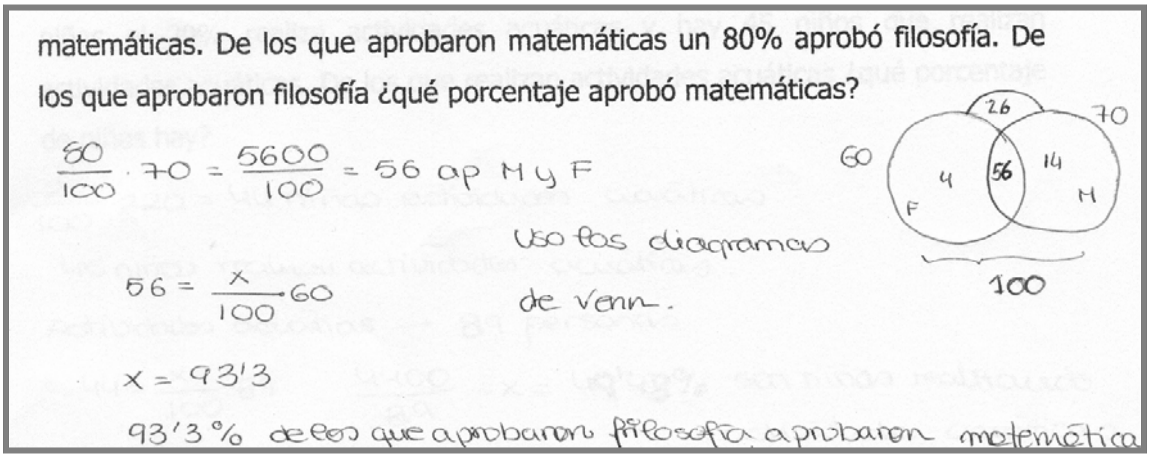
40 % − 14 % = 26 % no habla ni frances ni ingles

P(no hable ni frances ni ingles) = 0'26

Resolución 4.4.2.22: Actuación de 2BCCSS en P3

Estudiante EFM_3

El estudiante de la Facultad de Matemáticas que resuelve con éxito los seis problemas, manifiesta diferentes modos de resolución. En los problemas P1 y P4 las cantidades adquieren significado, el del cardinal del conjunto que representan, y trabaja sobre estos conjuntos y las relaciones entre ellos (descriptor 1.2). En estas relaciones utiliza el razonamiento proporcional, los porcentajes, siempre de la misma forma, tal y como muestran las resoluciones 4.4.2.23 y 4.4.2.24. En P1 utiliza los diagramas de Venn para mostrar todas las cantidades del problema así como las relaciones entre estas cantidades. En P4 hay una operación, la suma entre 44 y 45, que no está expresada de forma explícita. Estos dos problemas son los únicos que presentan los datos en frecuencias absolutas. Esta forma de presentar los datos influye también en el proceso de resolución del problema, invitando al resolutor a utilizar la aritmética.


matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

$\frac{80}{100} \cdot 70 = \frac{5600}{100} = 56$ ap M y F

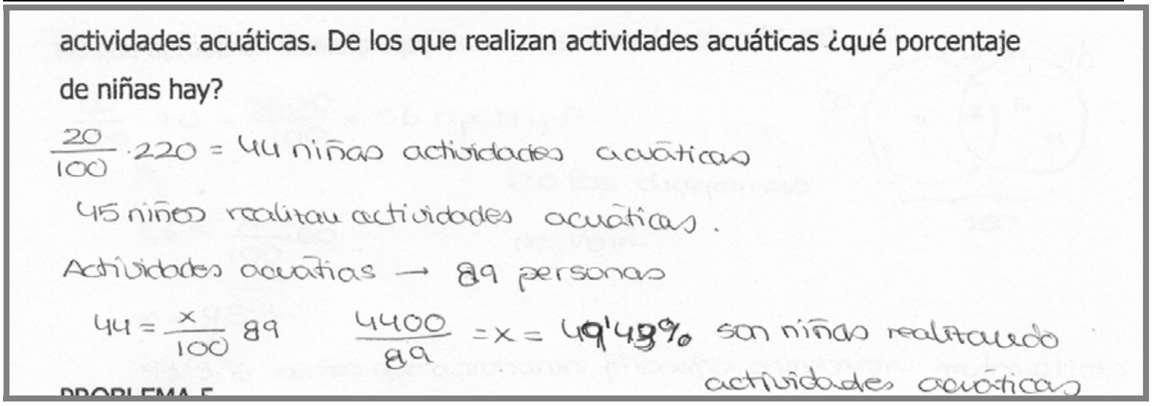
$56 = \frac{x}{100} \cdot 60$

$x = 93'3$

93'3 % de los que aprobaron filosofía aprobaron matemática

Uso los diagramas de Venn.

Resolución 4.4.2.23: Actuación de EFM_3 en P1


actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

$\frac{20}{100} \cdot 220 = 44$ niñas actividades acuáticas

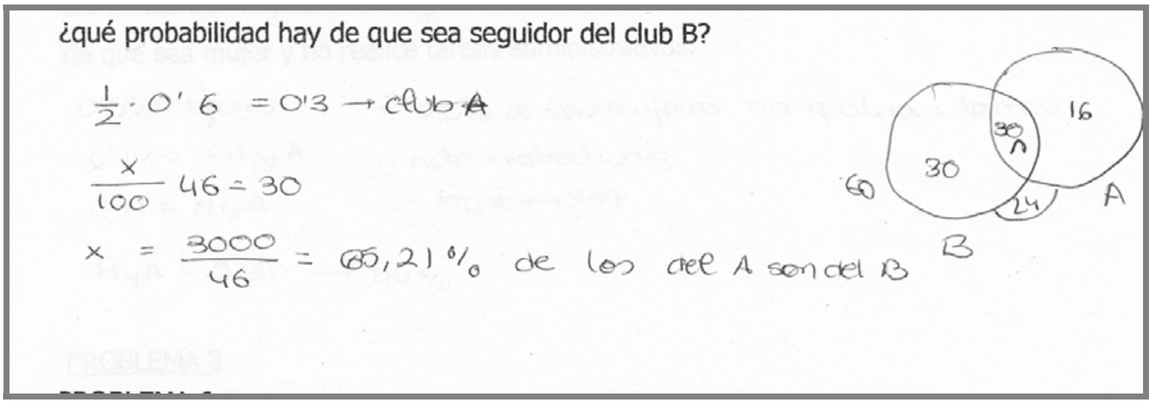
45 niños realizan actividades acuáticas.

Actividades acuáticas → 89 personas

$44 = \frac{x}{100} 89 \quad \frac{4400}{89} = x = 49'43\%$ son niñas realizando actividades acuáticas

Resolución 4.4.2.24: Actuación de EFM_3 en P4

En P5 sigue utilizando el razonamiento proporcional de la misma forma que en P1 y P4, pero reconoce sucesos y asigna probabilidades a algunos de esos sucesos (descriptor 1.3). La resolución 4.4.2.25 da cuenta de esta actuación. Observamos como reconoce la probabilidad de ser seguidor de B y calcula la probabilidad de ser seguidor de A y B, aunque escribe *0.3 club A*, pero en el diagrama de Venn asigna el cardinal 30 al conjunto intersección A∩B. Este problema es el único que presenta la condicionalidad mediante una razón expresada de forma verbal: LA MITAD DE. Los otros datos son porcentajes.


¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

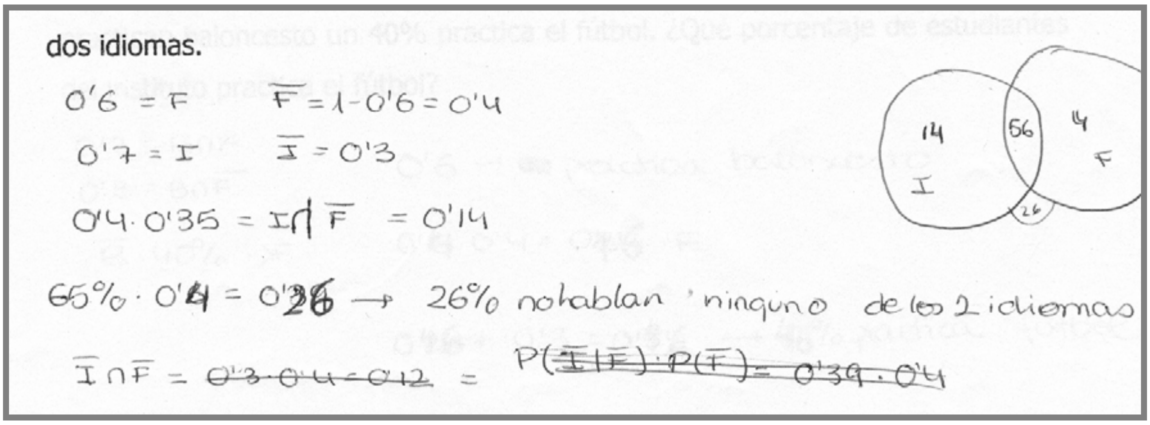
$\frac{1}{2} \cdot 0'6 = 0'3 \rightarrow$ club A

$\frac{x}{100} 46 = 30$

$x = \frac{3000}{46} = 65,21\%$ de los del A son del B

Resolución 4.4.2.25: Actuación de EFM_3 en P5

En P2, P3 y P6 reconoce los sucesos asignándoles probabilidades y utiliza las fórmulas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución del problema (descriptor 1.4), aunque estas fórmulas no las expresa explícitamente. Estos problemas presentan todos los datos en porcentajes. Esta forma de presentar los datos, en resolutores conocedores de la teoría de la probabilidad, invita a la resolución del problema utilizando términos de probabilidad. La resolución 4.4.2.26 muestra la actuación de este estudiante en P3, como ejemplo del modo de resolución que acabamos de expresar. Las fórmulas "de y entre probabilidades" no están explicitadas, pero nos fijamos que en el tachón hay una de éstas fórmulas. También observamos que escribe la probabilidad del suceso de forma particular, escribe por ejemplo $\bar{I}$=0'3, cuando debería haber escrito p($\bar{I}$)=0'3. Una vez más utiliza los diagramas de Venn para mostrar los conjuntos, los cardinales de estos conjuntos y las relaciones entre estos conjuntos.



Resolución 4.4.2.26: Actuación de EFM_3 en P3

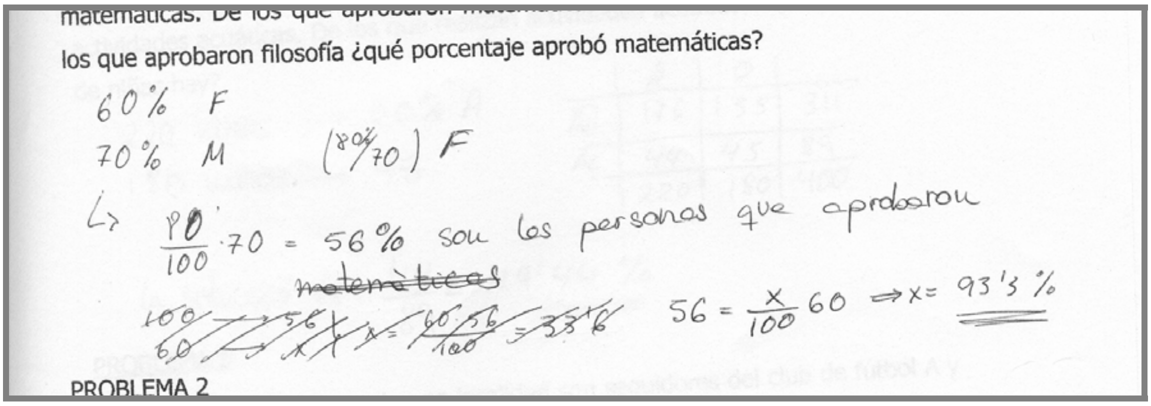
Este estudiante siempre expresa el resultado en porcentaje, sin tener en cuenta si se pregunta por una probabilidad o por un porcentaje.

Estudiante EFM_1

El estudiante EFM_1 resuelve con éxito 5 de los seis problemas. El problema en el que no alcanza la solución correcta es P6. En este problema, interpreta la condicional del dato con una intersección, utilizando todos los datos en una tabla de contingencia. Resuelve en coherencia con su interpretación. Este hecho, la interpretación del dato condicional como una intersección, es interesante, pues todos los problemas presentan un dato condicional expresado de la misma forma y siempre ha sabido interpretarlo. ¿Qué podemos encontrar en P6 que provoque la interpretación del dato condicional como una intersección? Encontramos una variable que tiene que ver con el orden de presentación de los datos. En este problema el dato condicional es el tercero en el orden de presentación siendo los dos datos anteriores intersecciones. Esto no pasa en los problemas N_2C_3[26] , por ejemplo P3 y P5. Si la confusión histórica del dato condicional es por una intersección y sabemos que el lenguaje es un factor de mucho peso en esta confusión, cuando el lenguaje es el adecuado debemos tener en cuenta este hecho. Y nos preguntamos ¿qué pasaría si se hubiera presentado el dato condicional el primero? ¿habría disminuido el número de interpretaciones de este dato por una intersección?

En P1 reconoce los sucesos y sus cardinales y utiliza el razonamiento proporcional en la resolución (descriptor 1.2). Recordamos que en la administración de esta segunda fase no se indicó que se trataba de una prueba de resolución de problemas de probabilidad condicional, sino simplemente que se trataba de una investigación en resolución de problemas, con el fin de que fuera el resolutor, sin ninguna incitación, quien decidiera el modo de resolución del problema. Este es el primer problema de la prueba, y en él no se pregunta por una probabilidad. Un resolutor que empieza a resolver esta prueba aborda este problema como un problema de razonamiento proporcional. Nuestro resolutor utiliza los porcentajes como una fracción. La resolución 4.4.2.27 muestra la actuación de este estudiante en P1.

[26] N_2C_3 los datos son dos marginales y una condicional



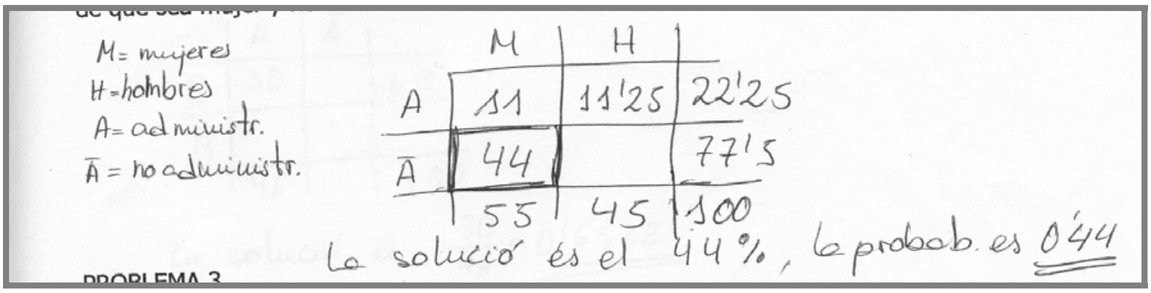
matemáticas. De los que aprobaron ...
los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

60% F
70% M (80%/70) F
↳ $\frac{80}{100} \cdot 70 = 56\%$ son las personas que aprobaron ~~matemáticas~~
$56 = \frac{x}{100} 60 \Rightarrow x = 93'3\%$

PROBLEMA 2

Resolución 4.4.2.27: Actuación de EFM_1 en P1

Ahora bien, en P2 ya se pregunta por una probabilidad, por lo que el resolutor hace uso de los artefactos didácticos y las estrategias que ha aprendido relacionadas con la probabilidad. Los procesos de resolución utilizados por este estudiante en el resto de problemas, se pueden describir de forma similar. Calcula a partir del dato condicional la cantidad que da cuenta de la intersección correspondiente. Utiliza las tablas de contingencia para calcular las cantidades necesarias para llegar a la solución del problema y en los problemas que se pregunta por una condicional utiliza una fracción, que la podemos interpretar como la fórmula de Laplace $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$, o como la fórmula que da cuenta de la probabilidad condicional $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, pues el resolutor no la manifiesta explícitamente. En P5 utiliza la tabla de contingencia como mostradora de las cantidades. Las resoluciones 4.4.2.28 y 4.4.2.29 muestran estos modos de resolución.



M= mujeres
H= hombres
A= administr.
$\bar{A}$ = no administr.

	M	H	
A	11	11'25	22'25
$\bar{A}$	$\boxed{44}$		77'5
	55	45	100

La solució és el 44%, la probab. es 0'44

PROBLEMA 3

Resolución 4.4.2.28: Actuación de EFM_1 en P2 de niñas hay?

220 niñas → 20% A

180 niños → 45

	A	O	
$\bar{A}c$	176	135	311
Ac.	44	45	89
	220	180	400

La solució és: $\frac{44}{89} = 49'44\ \%$

PROBLEMA 5

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

	A	$\bar{A}$	
B	30		60
B			
	46		100

La solució és: $\frac{30}{46} = 0'6522$

PROBLEMA 6

Resolución 4.4.2.29: Actuación de EFM_1 en P4

Observamos que estos estudiantes, en general, resuelven los problemas manteniendo un modo de resolución estable en la prueba. Reconocen los conjuntos, sus cardinales y las relaciones entre estos conjuntos, mostrando un razonamiento proporcional en éstas.

En los problemas en los que los datos son frecuencias absolutas utilizan los porcentajes en forma de fracción o en forma de número decimal. Para calcular la condicional pedida algunos utilizan la regla de tres y otros utilizan los porcentajes en forma de fracción. Un estudiante de la facultad de Matemáticas, habiendo utilizado los porcentajes en forma de fracción en P1, utiliza la comparación de cantidades para calcular la condicional pedida en P4 y P5.

Estos problemas con los datos expresados en forma de frecuencias absolutas, inducen al resolutor, tanto si éste presenta un aprendizaje de la probabilidad formal como si no lo presenta, a utilizar la aritmética en el proceso de resolución del problema. De igual forma podemos decir que, independientemente del aprendizaje del resolutor, en el cálculo de la probabilidad condicional se utiliza o la regla de tres (4ESO, 2BCCSS) o los porcentajes en forma de fracción (1BCT, EFM).

Los problemas con los datos en porcentajes o/y la pregunta del problema es una probabilidad, influyen en estudiantes que han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad, en que expresen la probabilidad pedida en términos de probabilidad, asignen probabilidad a algún suceso en términos de probabilidad o incluso utilicen alguna fórmula "de y entre probabilidades".

Por lo que la forma de presentación de las cantidades del problema, tanto en la parte informativa como en la interrogativa, influye, tanto en el éxito como en el modo de resolución del problema. Y añadimos un nuevo factor: el orden de presentación de los datos en los problemas N_2C_1, que influye en la interpretación del dato condicional como una intersección, factor a tener en cuenta en el análisis de los procesos de resolución sin éxito.

III. Conclusiones del análisis del éxito

Una conclusión del análisis del éxito de los estudiantes en la resolución de los problemas de la segunda fase, es que los estudiantes de diferentes niveles educativos resuelven problemas de probabilidad condicional de N_2 de solución aritmética. Además, los estudiantes participantes en la segunda fase han resuelto los problemas, principalmente, utilizando estrategias aritméticas del razonamiento proporcional y asignando probabilidades o porcentajes a la pregunta del problema. De los 80 estudiantes que han participado en esta investigación podemos asegurar que 25 han recibido enseñanza acerca de la probabilidad condicional. Estos estudiantes son los 10 estudiantes de la Facultad de Matemáticas y los 15 estudiantes de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales. Luego, podríamos pensar que, en coherencia con la enseñanza recibida, la mayoría de los estudiantes sólo pueden utilizar la aritmética para resolver los problemas. Ahora bien, la tabla 4.4.2.40 presenta los porcentajes de estudiantes que han llegado a la solución del problema y los porcentajes de estos estudiantes que muestran un determinado modo de resolución del problema. Esta tabla la hemos dividido en dos partes. Cada una de ellas muestra los resultados según dos muestras: la primera formada por los estudiantes de 2BCCSS y de EFM y la segunda la muestra sobre la que hemos realizado este estudio. Observamos, que salvo en P2, la mayoría de estudiantes de 2BCCSS y de EFM utilizan estrategias aritméticas del razonamiento proporcional en el proceso de resolución. Por lo que los problemas de probabilidad en los que los datos no están expresado en términos de probabilidad son resueltos por los estudiantes, independientemente del nivel de conocimiento de la teoría de la probabilidad, reconociendo los conjuntos, los cardinales de estos conjuntos así como las relaciones entre éstos y utilizando estrategias del razonamiento proporcional en la resolución.

Podemos dar una explicación al alto porcentaje de estudiantes de 2BCCSS y EFM que resuelven con éxito P2 e incluso P3. En estos dos problemas se pregunta por una probabilidad, a diferencia de P1 que se pide un porcentaje. A este grupo de estudiantes al ser conocedores de la teoría de la probabilidad, el hecho de que se pregunte por primera vez por una probabilidad y tener los datos expresados en términos de porcentajes, les induce a utilizar las fórmulas "de y entre probabilidades".

	Muestra: 25 estudiantes de 2BCCSS+EFM						Muestra del estudio					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito	48	32	20	52	20	20	36.25	16.25	7.5	47.5	11.25	12.5
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0	24.38	0	0	10.53	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	75	12.5	0	92.3	20	80	65.52	30.77	16.67	86.84	55.55	90
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	33.33	0	0	25	0	0	16.7	0	0	9.09	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	25	60	7.7	60	0	0	30.77	50	2.63	33.33	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	50	33.33	100	33.33	0	0	25	33.33	100	33.33	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	25	62.5	40	0	20	20	10.34	38.46	33.33	0	11.11	10
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	60	50	0	0	0	0	60	50	0	0	0

Tabla 4.4.2.40: Porcentaje de estudiantes que dan cuenta del éxito y porcentaje de estudiantes que presentan un determinado modo de resolución en los seis problemas, según dos muestras

Los porcentajes de éxito más altos se corresponden a los problemas P1 y P4. Ya hemos indicado antes que la característica notable que diferencia estos dos problemas del resto de los problemas de la segunda fase, es que los datos en estos dos problemas son frecuencias absolutas y el dato condicional está expresado en porcentaje. Además hay una diferencia de porcentaje notable con el siguiente problema que resuelven con éxito, P2, con 16.25%. Siempre es P4 el que más éxito tiene y después P1, hecho que se produce en todos los niveles educativos (consultar tablas en anexo 5). Únicamente en el grupo de los estudiantes de la facultad de Matemáticas esto ocurre al revés, P1 lo resuelve con éxito el 80% y P4 lo resuelve con éxito el 70%.

Estos resultados muestran como la naturaleza de los datos es un factor influyente en el éxito en la resolución del problema. Los datos expresados en frecuencias absolutas provocan un éxito mayor en la resolución del problema que cuando los datos están expresados en porcentajes. Para completar esta conclusión, observamos los resultados de los problemas P1 y P5. Estos problemas son problemas isomorfos en cuanto a que los dos problemas se describen con $N_2C_3T_1$ y $[p_{02}]$. Ahora bien, las cantidades presentes en estos dos problemas están expresadas de forma diferente; en P1 frecuencias absolutas y la pregunta un porcentaje y en P5 las cantidades son razones y la pregunta es una probabilidad. El porcentaje de estudiantes que han llegado a la solución del problema también ha sido diferente. En P1 éste ha sido del 36.25% y en P5 del 11.25%.

Con todo esto reafirmamos y completamos los resultados de Fiedler (1988), Gigerenzer (1994), Gigerenzer & Hoffrage (1995), Hoffrage, Gigerenzer y otros (2002), Ojeda (1996), delMas (2002), que ya hemos citado anteriormente. Y completamos estos resultados, añadiendo la conclusión de la primera fase que daba cuenta de los datos expresados en porcentajes frente a los datos expresados en términos de probabilidad. Podemos empezar a organizar el proceso de enseñanza de los problemas de probabilidad y en particular de los problemas de probabilidad condicional, atendiendo a la naturaleza de las cantidades presentes en estos problemas.

Por otro lado, y siguiendo la observación de la resolución con éxito y la influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en el problema, en los problemas P2, P3, P5 y P6 con cantidades en porcentajes, la mayoría de estudiantes resuelven utilizando como estrategia aritmética los porcentajes expresados tanto en forma de número decimal como en forma de fracción en las relaciones multiplicativas y utilizan los porcentajes como frecuencias normalizadas en las relaciones aditivas. Algunos de los estudiantes de los niveles educativos más bajos, 4ESO y 1BCT, son los que resuelven estos problemas utilizando la regla de tres y los porcentajes. En P1 y P4, donde los datos son frecuencias absolutas y el dato condicional es un porcentaje, los estudiantes, en general, resuelven utilizando como estrategias aritméticas la regla de tres o en combinación con los porcentajes expresados tal y como acabamos de decir. Al igual que en los problemas P2, P3, P5 y P6, los estudiantes que presentan la resolución del problema utilizando únicamente la regla de tres son algunos estudiantes de los niveles educativos más bajos. Además, cuando la pregunta del problema es una condicional, los estudiantes de todos los niveles educativos utilizan tanto la regla de tres como los porcentajes expresados en forma de fracción para alcanzar la solución del problema.

En esta segunda reflexión reafirmamos y ampliamos una conclusión de trabajos anteriores (Huerta y Lonjedo 2003a, 2003b, 2005; Lonjedo 2003; Lonjedo y Huerta 2005): la naturaleza de los datos es un factor influyente en la utilización de estrategias en el proceso de resolución del problema, independientemente del nivel de instrucción del resolutor. Los problemas en los que los datos no están expresados en términos de probabilidad son resueltos por los estudiantes utilizando estrategias de resolución del razonamiento proporcional. Y además, si el problema se describe con T_1, el resolutor, independientemente del nivel educativo, utiliza tanto la regla de tres como los porcentajes expresados en forma de fracción para llegar a la solución del problema.

Este factor, la naturaleza de las cantidades presentes en el problema, influye en el proceso de resolución del problema. En esta segunda fase, la mayoría de los estudiantes resuelven los problemas reconociendo los sucesos y los cardinales, utilizando la aritmética y asignando probabilidad al final, siempre que se pregunta por una probabilidad, es decir, la mayoría de los estudiantes de esta segunda fase muestran un modo de resolución descrito por 1.2 o 1.3. Por lo que, los problemas de probabilidad condicional de esta segunda fase los podemos clasificar y utilizar como problemas de asignación de probabilidades. También completamos esta conclusión con su correspondiente de la primera fase, y las tenemos en cuenta en la organización del proceso de enseñanza de los problemas de probabilidad y de probabilidad condicional.

Un factor que no influye, en cuanto apenas, en la resolución de los problemas de esta segunda fase es el grado de complejidad estructural. Ordenamos los problemas con respecto al éxito obtenido y obtenemos:

P4, P1, P2, P6, P5, P3

El grado de complejidad estructural de cada uno de estos problemas es:

$P4 \in [p_{12}]$, $P1 \in [p_{02}]$, $P2 \in [p_{11}]$, $P6 \in [p_{31}]$, $P5 \in [p_{02}]$, $P3 \in [p_{21}]$

Además de comprobar que este orden no coincide con el orden de los problemas según su grado de complejidad estructural, podemos comparar los resultados de los dos problemas isomorfos en cuanto a la estructura de datos y en cuanto al grado de complejidad estructural, P1 y P5, y observamos que este factor no ha sido influyente en el proceso de resolución con éxito. Podemos afirmar que el número de relaciones necesarias para llegar a la solución del problema no ha sido un factor influyente en el proceso de resolución del problema.

El proceso de enseñanza de los problemas de probabilidad y, en particular, de los problemas de probabilidad condicional que sugerimos es el siguiente: Introduciremos algunos problemas de probabilidad y de probabilidad condicional en las unidades de razón y proporción, en la enseñanza secundaria obligatoria. Estos problemas tendrán las cantidades expresadas en frecuencias absolutas y en porcentajes y se preguntará siempre por un porcentaje. De esta forma entrenamos a los estudiantes en los conceptos de razón y proporción y en las estructuras gramaticales que tienen que ver con la probabilidad condicional. Los estudiantes estarán trabajando problemas de razón y proporción. En las unidades de probabilidad de los últimos cursos de la enseñanza obligatoria, 3º y 4º ESO, podemos introducir los problemas con las mismas características, pero preguntando por una probabilidad. Estaremos trabajando siempre con problemas de asignación de probabilidades. Los problemas de probabilidad condicional con las cantidades expresadas en términos de probabilidad se introducirán en las unidades correspondientes a la probabilidad condicional, trabajando así los problemas como problemas de cálculo de probabilidades.

IV. Análisis de las resoluciones sin éxito. errores

Observamos en la tabla 4.4.2.41 el porcentaje de estudiantes que no han tenido éxito en el proceso de resolución y el porcentaje de estudiantes que hemos clasificado con el descriptor 3. Recordamos que en este descriptor recogemos las respuestas de los estudiantes que han dejado el problema en blanco o que simplemente han copiado los datos sin reflejar ningún razonamiento (p. 380 de esta memoria)

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2.No éxito	42.5	47.5	52.5	33.75	41.25	55
3. Otras	21.25	36.25	40	18.75	47.5	32.5

Tabla 4.4.2.41: Porcentaje de estudiantes que no han resuelto con éxito los problemas y porcentaje de estudiantes descritos por 3.

Con el fin de interpretar las cantidades de esta tabla, para conocer cuáles han sido los problemas que han presentado mayor dificultad a los estudiantes, ordenamos los problemas según los porcentajes de estudiantes que representan estos descriptores, de mayor a menor:

Descriptor 2: P6, P3, P2, P1, P5, P4

Descriptor 3: P5, P3, P2, P6, P1, P4

Si observamos sólo la fila que da cuenta del descriptor 2, es destacable que P5 es uno de los problemas en los que el porcentaje en el proceso de resolución sin éxito ha sido más bajo, 41.25%. Es necesario hacer la lectura del descriptor 2 con el descriptor 3, ya que P5 ha sido el problema menos trabajado por los estudiantes, hecho reflejado por el porcentaje más alto del descriptor 3, 47.5%.

Por lo que los problemas que han obtenido mayor fracaso, entendiendo por fracaso el hecho de no llegar a la solución del mismo han sido, por este orden: P3, P6, P5, P2, P1 y P4. Los problemas con los datos en porcentajes, y los que se pregunta por una probabilidad, P3, P5 y P2 están a la cabeza, aunque nos fijamos que P6 ocupa el segundo lugar. P6 es el problema que presenta un alto porcentaje de estudiantes que interpretan el dato condicional como una intersección, 81.81%. Esta interpretación tan alta no puede ser debida al lenguaje utilizado en la expresión de la probabilidad condicional, pues la estructura gramatical utilizada ha sido la misma en todos los problemas de la segunda fase. Ya hemos observado que el factor que ha influido en esta interpretación ha sido el orden de presentación de los datos, al estar el dato condicional presentado como el tercer dato después de dos intersecciones.

Esta parte la vamos a dividir en cuatro que dan cuenta de los tipos de errores así como del uso de las tablas de contingencia y los diagramas de árbol, a saber:

a. Análisis de los errores que provienen de las interpretaciones del dato y/o la pregunta condicional
b. Análisis de los errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido
c. Errores en la interpretación de los sucesos
d. Uso competente y no adecuado de las tablas de contingencia y los diagramas de árbol.

A continuación las desarrollamos.

a. Análisis de los errores que provienen de la interpretación del dato y/o la pregunta condicional.

Sabemos que el lenguaje es un factor influyente en la interpretación de la probabilidad condicional. En general, en los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal, uno de los errores más comunes que cometen los resolutores es el de interpretar la probabilidad condicional como una probabilidad de la intersección. Por esta razón y en este trabajo de investigación, presentamos un estudio de las oraciones subordinadas condicionales en castellano. A este estudio teórico, añadimos los resultados de la primera fase, en la que en los problemas la condicionalidad estaba expresada con diferentes estructuras gramaticales. Del conocimiento de la teoría de las oraciones subordinadas condicionales y del análisis de la primera fase, decidimos presentar la condicionalidad en los problemas de la segunda fase manteniendo una misma estructura DE LOS QUE ..., con el fin de añadir o no a la forma condicional por excelencia SI, otra forma de expresar la condicionalidad y estudiar posibles cambios en la interpretación de los datos y por tanto la influencia en los modos de resolver.

Todos los problemas presentan un dato condicional y en todos ellos la presentación de este dato se ha hecho de la misma forma: DE LOS QUE cumplen una determinada condición referida a la muestra, un porcentaje dado cumplen también una segunda condición. En P5 el dato condicional está expresado utilizando una razón expresada como: LA MITAD DE. (ver anexo 4).

Además en tres problemas, P1, P4 y P5, se pregunta por una condicional, manteniendo también la misma estructura: DE LOS QUE cumplen una determinada condición ¿qué porcentaje cumplen otra 2ª condición?. Y en uno de estos tres problemas, P5, en lugar de preguntar por un porcentaje se pregunta por una probabilidad (Ver anexo 4).

La tabla 4.4.2.42 muestra los porcentajes de estudiantes que muestran en sus respuestas los errores que provienen de la interpretación del dato y/o la pregunta condicional, englobadas en los descriptores definidos.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	2.94	71.05	59.52	0	9.1	81.81
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	2.27
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	17.65	0	0	7.41	24.24	0
2.2.1.2.2. Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	5.88	0	0	14.81	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	14.71	0	0	0	15.15	0

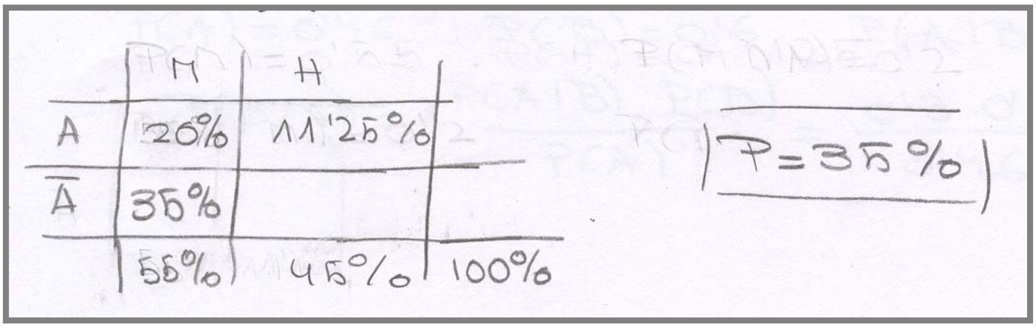
Tabla 4.4.2.42: Porcentaje de estudiantes que manifiestan errores en la interpretación del dato y/o la pregunta condicional

Estudiamos las diferentes interpretaciones del dato condicional. El descriptor 2.2.1.1.1 da cuenta de las respuestas de los estudiantes que interpretan el dato condicional como una intersección y el descriptor 2.2.1.1.2 muestra la interpretación del dato condicional como una marginal. Observamos en la tabla 4.4.2.42 que esta segunda interpretación no es nada habitual, casi es inapreciable. Las interpretaciones del dato condicional como una intersección han sido las más significativas con diferencia. Observamos que estas interpretaciones son más frecuentes en los problemas P6, P3 y P2. En P1 y en P5 es casi inapreciable y en P4 nadie presenta este tipo de error. Está claro que la influencia de la estructura gramatical utilizada para expresar el dato y/o la pregunta condicional, en esta segunda fase es adecuada, pues en P4 nadie ha presentado este error y en los problemas P1 y P5 el porcentaje es muy bajo.

Si buscamos un rasgo común a los problemas P2, P3 y P6 y diferenciador de los problemas P1, P4 y P5, encontramos que es la forma de presentar las cantidades en el problema. Los problemas P2, P3 y P6 presentan todas las cantidades en porcentajes y los problemas P1, P4 y P5 no. En P1 y P4 las cantidades son frecuencias absolutas y el dato condicional está expresado en porcentaje y en P5 los datos son porcentajes y la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional está expresada mediante una razón expresada de la forma: LA MITAD DE LOS QUE. Es decir, en estos tres problemas el dato condicional está presentado de forma diferente a los otros dos datos. Luego, en un problema de probabilidad condicional de N_2, el hecho de expresar la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional de forma diferente a los otros dos datos, favorece la resolución del problema evitando la interpretación de ésta por una intersección.

Veamos algunos ejemplos de las diferentes interpretaciones del dato condicional por una intersección en los problemas P2, P3 y P5.

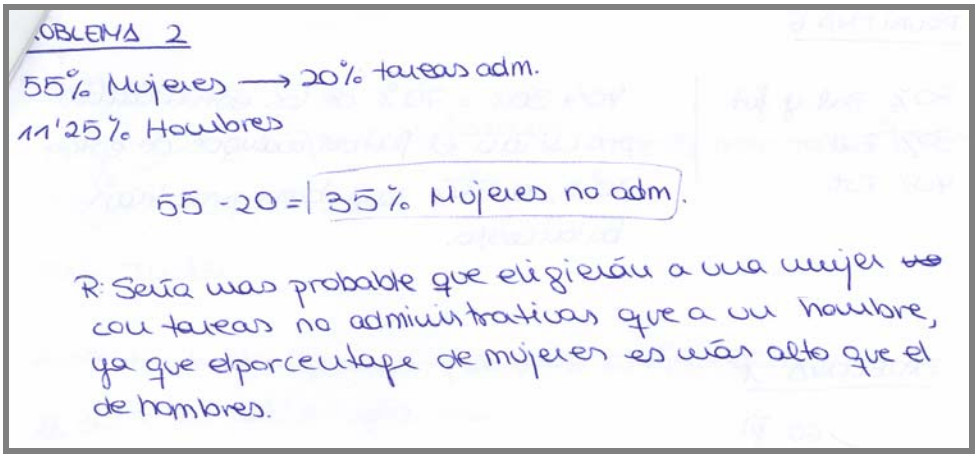
En P2 los estudiantes interpretan la cantidad condicional como una intersección y muchos resuelven en coherencia con esta interpretación. Las resoluciones 4.4.2.30 y 4.4.2.31 muestran los procesos de resolución de diferentes estudiantes en P2.



Resolución 4.4.2.30: Actuación de un estudiante de EFM en P2

La resolución 4.4.2.30 se corresponde con la resolución de un estudiante de la facultad de matemáticas quien apoyándose en la tabla, intenta resolver el problema. Asigna a las casillas correspondientes de la tabla las dos probabilidades de la intersección, el 11.25% del suceso “son hombres y realizan tareas administrativas” e interpreta “de las mujeres el 20% realizan tareas administrativas", como una intersección. También asigna las casillas que se corresponden con las marginales conocidas. Obtiene, por complementariedad la probabilidad del suceso intersección. Contesta a la pregunta del problema en coherencia con la interpretación que ha hecho del dato condicional por una intersección.

La resolución 4.4.2.31 muestra la actuación de un estudiante de 1º de Bachiller que utiliza los números de la misma forma que en el proceso de resolución mostrado en la resolución 4.4.2.30.


OBLEMA 2

55% Mujeres ⟶ 20% tareas adm.

11'25% Hombres

55 - 20 = 35% Mujeres no adm.

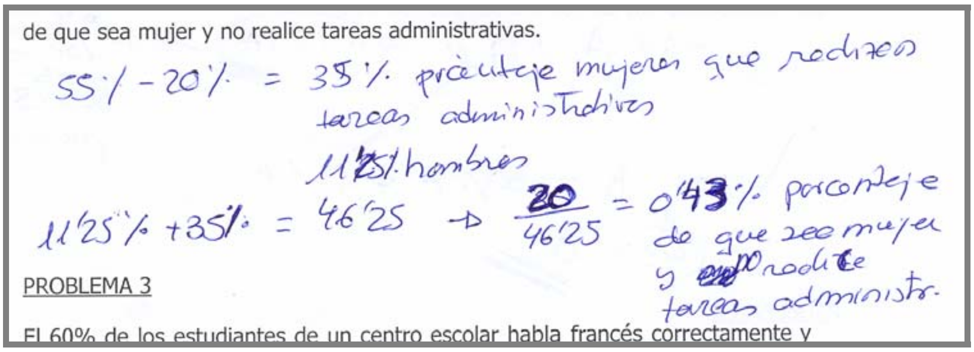
R: Sería más probable que eligieran a una mujer ~~no~~ con tareas no administrativas que a un hombre, ya que elporcentaje de mujeres es más alto que el de hombres.

Resolución 4.4.2.31: Actuación de un estudiante de 1BC en P2

En el modo de resolución de este estudiante los sucesos están descritos por los cardinales de los conjuntos que representan. De esta forma: si el 55% son mujeres y el 20% realizan tareas administrativas, la diferencia son mujeres que no realizan tareas administrativas. El razonamiento es coherente con el uso de los números. El resolutor hace una lectura inapropiada del espacio muestral cuando usa 20% relativo a 100 y no a 55, interpretando de esta forma el dato condicional como una intersección. Resaltamos que este estudiante compara el resultado obtenido con el dato del problema que no ha utilizado en la resolución.

Este proceso de resolución, que muestra la resolución 4.4.2.31, es que generalmente presentan la mayoría de los estudiantes en los que se observa este error.

La resolución 4.4.2.32 muestra la actuación de un estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales en P2. En esta resolución aparecen diferentes errores, en las operaciones con porcentajes, en la interpretación del dato condicional como una intersección, en interpretación de sucesos, con los números decimales y contesta (según su razonamiento) a la pregunta con una condicional y no con una intersección que es lo que se pide.


de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

55% - 20% = 35% prcentaje mujeres que realizan tareas administrativas

11'25% hombres

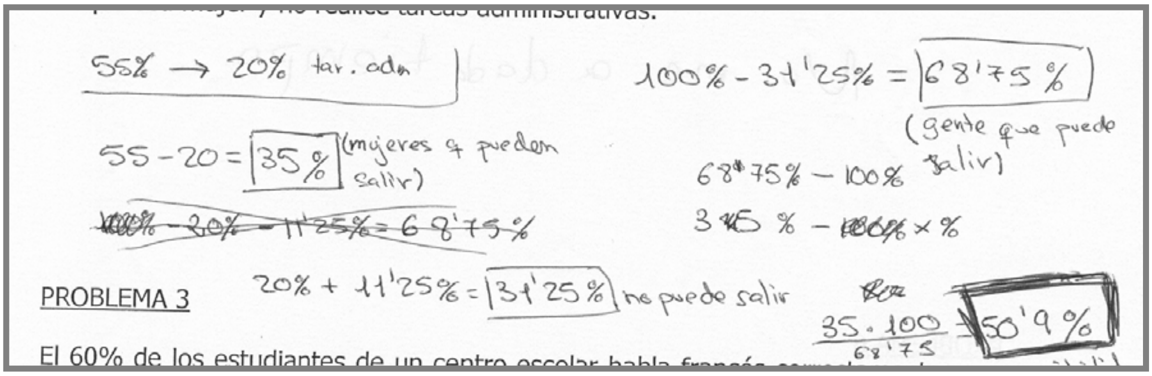
11'25% + 35% = 46'25 → $\frac{20}{46'25}$ = 0'43% porcentaje de que sea mujer y no realice tareas administr.

PROBLEMA 3

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y

Resolución 4.4.2.32: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P2

En la resolución 4.4.2.33 observamos la actuación de un estudiante de 1º de Bachiller de Ciencias en P2. Es una muestra de cómo el razonamiento que utiliza es coherente con la interpretación de la condicional dada como una intersección y con la interpretación de la pregunta como una condicional (sin tener en cuenta las operaciones con los porcentajes).



55% → 20% tar. adm

55 − 20 = $\boxed{35\%}$ (mujeres q pueden salir)

~~100% − 20% − 11'25% = 68'75%~~

PROBLEMA 3

20% + 11'25% = $\boxed{31'25\%}$ no puede salir

100% − 31'25% = $\boxed{68'75\%}$ (gente que puede salir)

68'75% — 100%

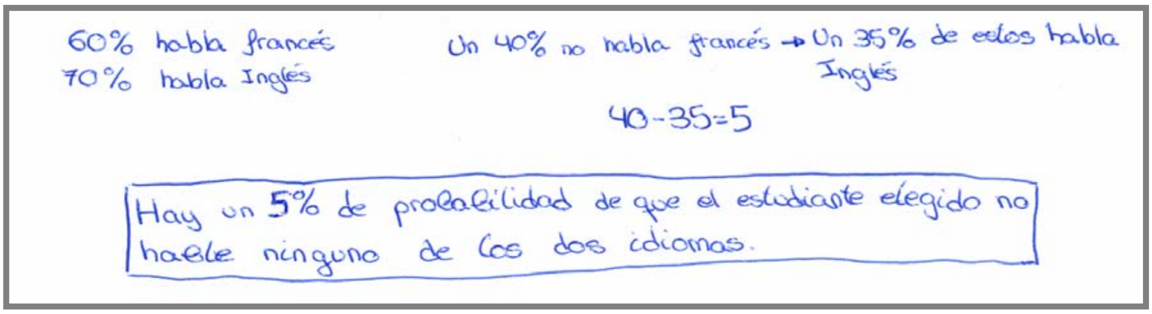
35 % — x %

$\frac{35 \cdot 100}{68'75}$ = $\boxed{50'9\%}$

Resolución 4.4.2.33: Actuación de un estudiante de 1BC en P2

En esta resolución los sucesos están descritos por los cardinales de los conjuntos que representan. Utiliza los porcentajes como frecuencias normalizadas .Por lo que si 55 son mujeres y 20 realizan tareas administrativas, la diferencia son mujeres que no realizan tareas administrativas. Además si 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas, la suma con las mujeres que realizan tareas administrativas son "los que no pueden salir". Por complementariedad con 100, la diferencia son "la gente que puede salir". Mediante una regla de tres calcula el porcentaje que se corresponde con las mujeres entre los trabajadores que realizan tareas administrativas.

En P3 encontramos razonamientos similares a los que acabamos de exponer para P2. La resolución 4.4.2.34 da cuenta de esto.



60% habla francés
70% habla Inglés

Un 40% no habla francés → Un 35% de estos habla Inglés

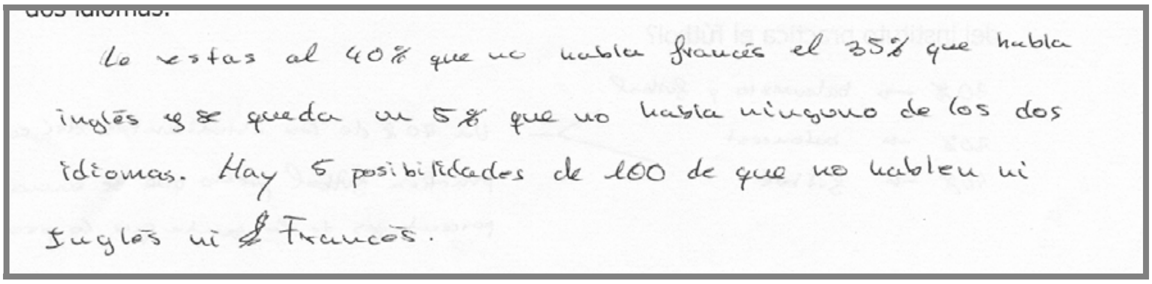
40 − 35 = 5

Hay un 5% de probabilidad de que el estudiante elegido no hable ninguno de los dos idiomas.

Resolución 4.4.2.34: Actuación de un estudiante de 4ESO en P3

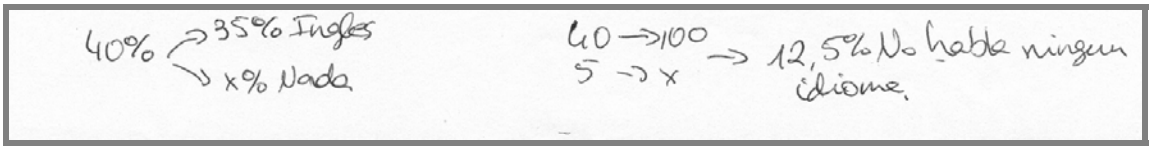
Este modo de resolución de P3 de la resolución 4.4.2.34, corresponde a un estudiante de 4ºESO. Anota: *un 35% de estos* (refiriéndose a los que no hablan francés) *habla inglés*, pero interpreta que el 35 % no habla francés y habla inglés, por la diferencia que plantea: 40 – 35 = 5. Este es el modo de resolución general de los estudiantes que presentan este error en este problema. De nuevo la interpretación del dato condicional por una intersección viene de considerar el porcentaje dado sobre el espacio muestral, en lugar de considerarlo sobre el espacio muestral reducido.

La resolución 4.4.2.35 presenta la actuación de un estudiante de 1º de Bachiller de Ciencias en P3 que es similar a la anterior.


dos idiomas.
Lo restas al 40% que no habla francés el 35% que habla inglés y se queda un 5% que no habla ninguno de los dos idiomas. Hay 5 posibilidades de 100 de que no hablen ni Inglés ni Francés.

Resolución 4.4.2.35: Actuación de un estudiante de 1BC en P3

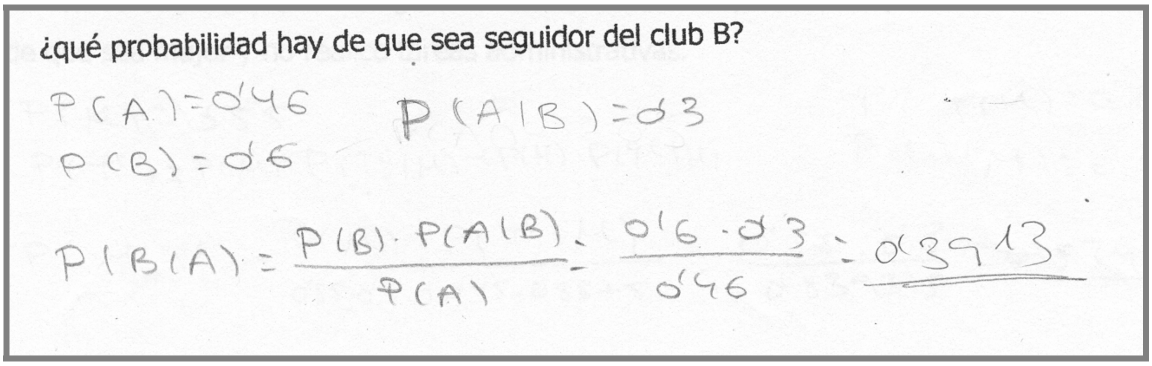
En P3 encontramos un estudiante de 1º BC que presenta el proceso de resolución que muestra la resolución 4.4.2.36.


40% → 35% Inglés
→ x% Nada
40 → 100
5 → x → 12,5% No habla ningun idioma.

Resolución 4.4.2.36: Actuación de un estudiante de 1BC en P3

Interpreta la condicional como una intersección, ya que el 5 es la diferencia entre 40 y 35. Entiende que 5 es el número de personas que no hablan ningún idioma de las 40 que no hablan francés. Le asigna a esta cantidad el porcentaje correspondiente, mediante una regla de tres. Contesta a la pregunta del problema como si se tratara de calcular una condicional.

En P5 los tres estudiantes de la Facultad de Matemáticas que interpretan la condicional como una intersección, hacen lo mismo. Escriben $p(A|B)=0.3$, cuando realmente el problema presenta el dato: p(A|B)=0.5, y es el suceso intersección A∩B el que tiene probabilidad 0.3. La condicionalidad expresada verbalmente en forma de razón: DE LOS SEGUIDORES DEL CLUB B LA MITAD LO SON DEL CLUB A produce este tipo de error, en el que el resolutor interpreta la probabilidad de la intersección como la probabilidad condicional. El resolutor llega a la solución del problema de forma coherente con la interpretación que ha hecho del dato condicional. La resolución 4.4.2.37 muestra esta situación.



¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

$P(A) = 0'46$ $P(A|B) = 0'3$

$P(B) = 0'6$

$$P(B|A) = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{0'6 \cdot 0'3}{0'46} = 0'3913$$

Resolución 4.4.2.37: Actuación de un estudiante de EFM en P5

En P6 encontramos el porcentaje más alto de interpretaciones de la condicional con la intersección. Ya hemos visto que el estudiante de EFM que resuelve con éxito todos los problemas de la segunda fase menos éste, interpreta el dato condicional como una intersección cuando en el resto de problemas ha interpretado adecuadamente todos los datos. Nos preguntamos qué rasgo diferenciador tiene este problema con respecto al resto de problemas de la segunda fase, que haya influido en la interpretación del dato condicional como una intersección. Ya hemos hecho notar que en este problema el dato condicional es el tercero en cuanto a la presentación de los datos del problema, y los dos datos anteriores son dos intersecciones. Esta presentación de los datos induce al resolutor, cuando la lectura del problema es superficial, a la interpretación del dato condicional como intersección.

El proceso de resolución que presentan los estudiantes de todos los niveles escolares que han cometido este error en P6 y que han utilizado los porcentajes como frecuencias normalizadas es el siguiente:

30 (cantidad que representa el porcentaje de estudiantes que hacen baloncesto y fútbol) + 40 (cantidad que interpretan como el porcentaje de estudiantes que hacen fútbol y no baloncesto) = 70 → 70% hacen fútbol

Estudiamos ahora las diferentes interpretaciones de la pregunta condicional. Sólo hay tres problemas, P1, P4 y P5, en los que se pregunta por una condicional. La tabla 4.4.2.43 muestra los porcentajes de estudiantes en los que las respuestas las hemos clasificado en estos descriptores. Hemos eliminado las columnas que se correspondían con los problemas en los que no se preguntaba por la condicional.

	P1	P4	P5
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	17.65	7.41	24.24
2.2.1.2.2. Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	5.88	14.81	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	14.71	0	15.15

Tabla 4.4.2.43: Porcentaje de estudiantes que manifiestan errores que provienen de la interpretación de la pregunta condicional

Estos porcentajes no son demasiado significativos. Las cantidades están calculadas sobre el número de estudiantes que no han llegado a la solución correcta del problema, y no sobre el total de la muestra. De todas formas, manifiestan que la interpretación más común de la pregunta condicional que presentan los resolutores, es la de contestar con una intersección. Mostramos la respuesta de algunos estudiantes en P1:

56% aprobaron matemáticas y filosofía.

En P5 es donde mayor es este porcentaje. Mostramos la respuesta de un estudiante de 1BCT:

> *La probabilidad sería de un 30% puesto que esta cantidad de gente es seguidora del club B y del A.*

Respecto a los porcentajes de estudiantes que responden a la probabilidad condicional pedida con la condicional que presentada en los datos (descriptor 2.2.1.2.2) no son demasiado elevados y en P5 nadie comete este error. Las respuestas encontradas son generalmente del tipo que mostramos a continuación en P4:

> *De los que realizan actividades acuáticas el porcentaje de niñas es el 20%.*

En P1 y en P5 hay algunos estudiantes que contestan a la probabilidad condicional pedida con una marginal. Sin embargo este error no se comete en P4.

La única diferencia en la expresión de la pregunta de los tres problemas es que en P5 se pregunta por una probabilidad.

REFLEXIONES

La naturaleza de los datos es un factor muy influyente en la interpretación de la probabilidad condicional como probabilidad de la intersección en los datos. El expresar la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional de forma diferente al resto de datos induce al resolutor a la interpretación deseada del dato condicional. Más aún, el expresar la cantidad que da cuenta del dato condicional en porcentajes y el resto de datos en frecuencias absolutas, favorece el éxito en la resolución del problema evitando la interpretación de ésta por una intersección, tal y como se observa en la tabla 4.4.2.44.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito	36.25	16.25	7.5	47.5	11.25	12.5
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	2.94	71.05	59.52	0	9.1	81.81

Tabla 4.4.2.44: Porcentaje de estudiantes que han llegado a la solución del problema y de los que no han llegado, los que manifiestan la interpretación del dato condicional como una intersección.

La estructura gramatical utilizada en todos los problemas de esta segunda fase para presentar la probabilidad condicional, DE LOS QUE, DE LAS QUE, DE LOS, DE LAS, es una estructura que favorece la interpretación deseada del dato condicional, ya que encontramos problemas en los que el porcentaje estudiantes que manifiestan estas interpretaciones no deseadas de la probabilidad condicional es muy bajo o cero. Por lo que la razón de la interpretación de la condicional por una intersección está, en estos problemas, en otro factor. Por ejemplo, en el orden en la presentación del dato condicional como tercer dato después de dos intersecciones o en la expresión de todos los datos del problema en porcentajes, de forma que el error está en la lectura inapropiada del dato condicional expresado en forma de porcentaje, sobre el espacio muestral y no sobre el espacio muestral reducido.

b. Análisis de los errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido

Las dificultades de las variables de contenido que hemos considerado son aquellas que vienen de la presentación de los datos y de la pregunta. Los datos expresados en forma de porcentaje pueden inducir al resolutor a cometer diferentes errores en la utilización de conceptos básicos del razonamiento proporcional, que incluyen, entre otros, números decimales, porcentajes y reglas de tres (Carpenter, Corbitt y Kepner, 1981; Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren 1988) La expresión de algún dato en porcentaje y/o la expresión de la pregunta en términos de probabilidad, en estudiantes conocedores de la teoría de la probabilidad, puede provocar errores en el uso de conceptos y fórmulas propios de la probabilidad.

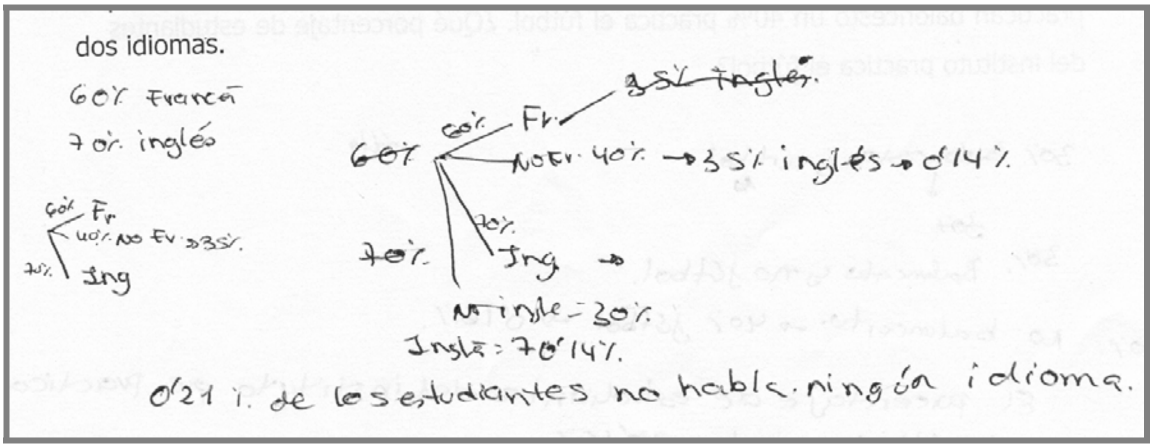
La tabla 4.4.2.45 da cuenta de los errores que provienen de las dificultades de contenido.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	4.76	0	15.15	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	17.65	47.37	59.52	66.67	51.51	81.81
2.2.2.1.3. Reglas de tres	5.88	0	2.38	14.81	3.03	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	2.94	5.26	12.5	0	6.06	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	2.94	2.63	2.38	0	3.03	6.82

Tabla 4.4.2.45: Porcentaje de estudiantes que manifiestan errores que provienen de las dificultades de las variables de contenido, recogidos en los descriptores seleccionados

Los tres primeros descriptores reflejan los errores en el uso de la proporcionalidad y los dos últimos muestran los errores en el uso de los conceptos y las fórmulas de probabilidad.

La primera fila de la tabla 4.4.2.45 se corresponde con el descriptor que da cuenta de los errores cometidos por el uso de números decimales para expresar los porcentajes. No es un error demasiado común en los estudiantes participantes de esta segunda fase. La resolución 4.4.2.38 muestra la actuación de un estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales en P3.

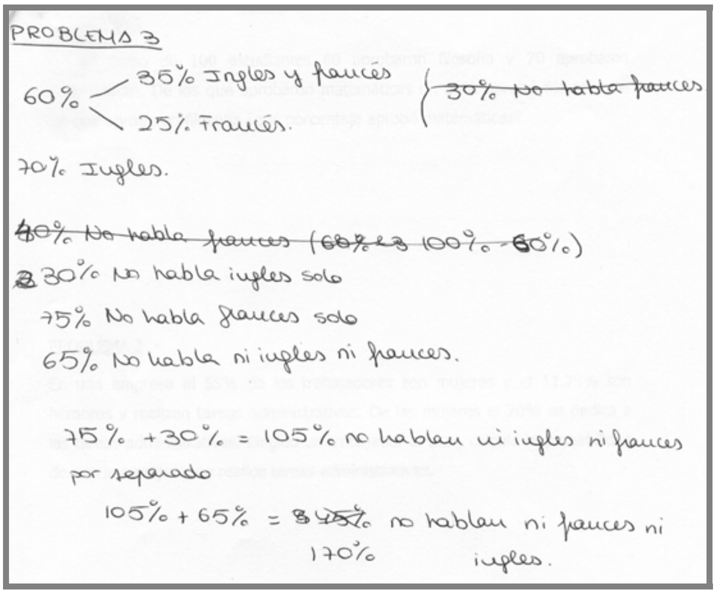


Resolución 4.4.2.38: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P3

Calcula el 35% de 40 y escribe 0.14%, cuando debería escribir o bien 14% o bien la probabilidad es 0.14. Hace algunos cálculos más que no expresa y contesta que 0.21% de estudiantes no habla ningún idioma. Este 0.21% en realidad sería el 21% ya que este 21 es el complementario de 14 respecto 35. También podría interpretarse como una probabilidad de 0.21, calculada como complementaria de 0.14 respecto de 0.35. Notamos confusión en cuanto a los números decimales al expresar la probabilidad y el porcentaje.

Observamos en la tabla 4.4.2.45 que la fila que presenta los porcentajes de estudiantes más altos se corresponde con el descriptor 2.2.2.1.2, que se corresponde con los errores en la utilización de los porcentajes. Al analizar las resoluciones a veces nos encontramos que los estudiantes no saben asignar un porcentaje.

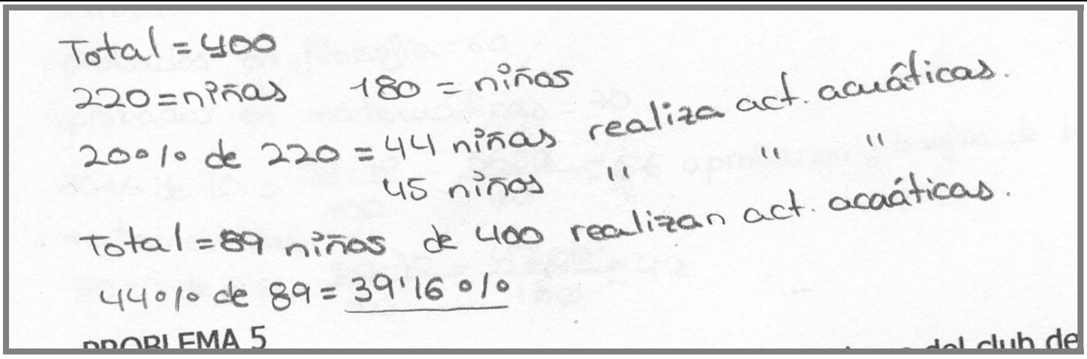
La resolución 4.4.2.39 muestra un ejemplo de un error de conteo con los porcentajes.



Resolución 4.4.2.39: Actuación de un estudiante de 1BC en P3

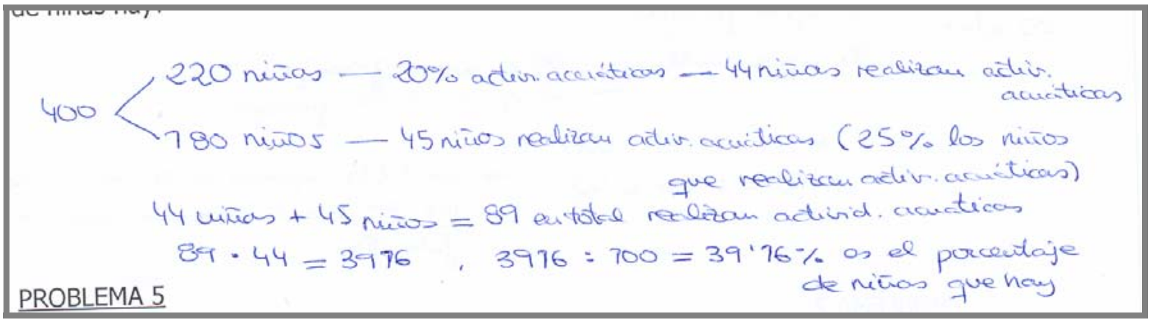
Dejando de lado las interpretaciones de los datos (la condicional interpretada como una intersección), este estudiante de 1º de Bachiller de Ciencias hace una lectura del problema en la que los datos son leídos desde los sucesos y las relaciones entre estos sucesos: "Inglés y Francés", "Francés", "Inglés", "No habla inglés sólo", etc. Con esta lectura trata de resolver, obteniendo los que no hablan ni inglés ni francés "por separado" y así finalmente calcular los que no hablan ni francés ni inglés. Son errores de conteo con los porcentajes.

Las resoluciones 4.4.2.40 y 4.4.2.41 muestran como el resolutor, cada uno de un nivel educativo, no ha sabido calcular el porcentaje pedido en P4.



Total = 400
220 = niñas   180 = niños
20% de 220 = 44 niñas realiza act. acuáticas.
45 niños " "
Total = 89 niños de 400 realizan act. acuáticas.
44% de 89 = 39'16 %
PROBLEMA 5

Resolución 4.4.2.40: Actuación de un estudiante de 4ESO en P4

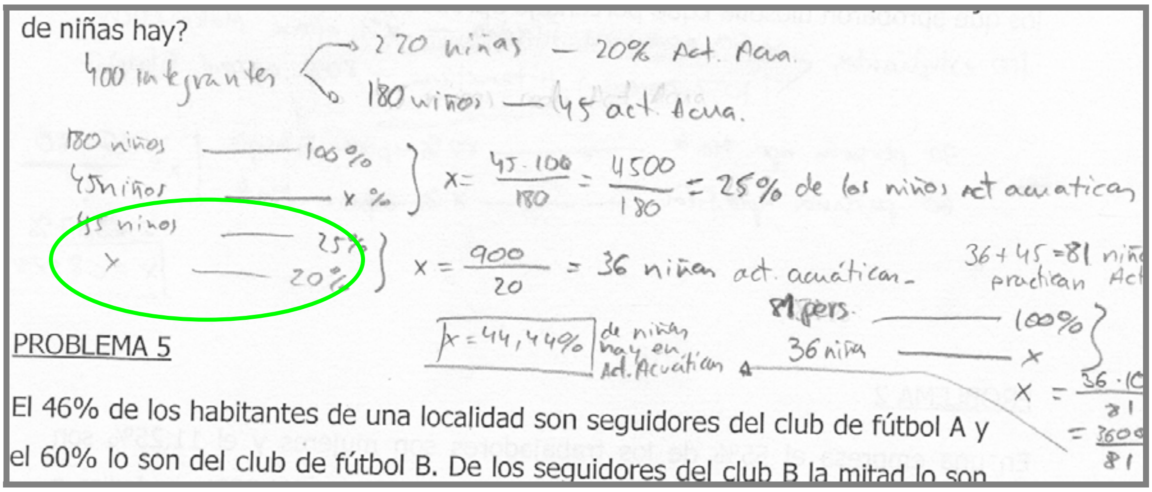


400 < 220 niñas — 20% activ. acuáticas — 44 niñas realizan activ. acuáticas
180 niños — 45 niños realizan activ. acuáticas (25% los niños que realizan activ. acuáticas)
44 niñas + 45 niños = 89 en total realizan activid. acuáticas
89 · 44 = 3916 , 3916 : 100 = 39'16% es el porcentaje de niñas que hay
PROBLEMA 5

Resolución 4.4.2.41: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P4

El estudiante de 4º ESO de la resolución 4.4.2.40, no ha sabido asignar el porcentaje que se pide en la pregunta. Sabe que tiene que calcular el porcentaje que se corresponde con la razón 44 de 89, pero se equivoca. Este error, no saber cómo asignar el porcentaje que corresponde a 44 de 89, es muy común, sobre todo en 4º ESO. Al estudiante de 2BCCSS le pasa lo mismo.

Los errores mostrados en los usos de la regla de tres son debidos, sobre todo, a dos causas: la primera, el no saber plantearlas bien, y la segunda, el plantearlas sin más. Esto se debe a que hay algunos estudiantes que piensan que las cantidades con las que están trabajando deben ser proporcionales. La resolución 4.4.2.42 muestra un ejemplo de este uso.



de niñas hay?

400 integrantes → 220 niñas — 20% Act. Acua.
→ 180 niños — 45 act. Acua.

180 niños — 100%
45 niños — x % } x = 45·100 / 180 = 4500 / 180 = 25% de los niños act acuaticas

45 niños — 25%
x — 20% } x = 900 / 20 = 36 niñas act. acuáticas.

36 + 45 = 81 niñ
practican Act

81 pers. — 100%
36 niñas — x
x = 36·10 / 81 = 3600 / 81

$\boxed{x = 44,44\%}$ de niñas hay en Act. Acuáticas

PROBLEMA 5

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son

Resolución 4.4.2.42: Actuación de un estudiante de 4ESO en P4

El estudiante de esta resolución utiliza la regla de tres (resaltada) para calcular el número de niñas que realizan actividades acuáticas, como si el porcentaje que da cuenta del número de niñas que realizan actividades acuáticas y el porcentaje que da cuenta del número de niños que realizan actividades acuáticas estuvieran calculados sobre la misma cantidad, el número de niños. Si este estudiante hubiera hecho bien el cálculo de la cantidad de las niñas que realizan actividades acuáticas hubiera llegado a la solución del problema.

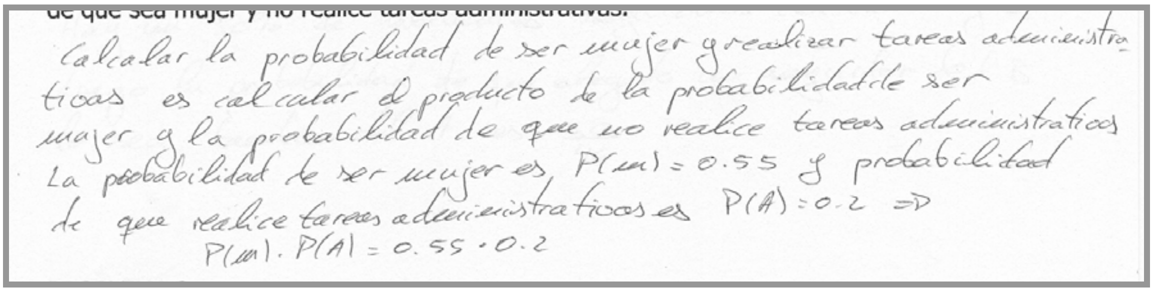
Son, sobre todo, los estudiantes de 4º ESO y 1º de Bachiller los que presentan más errores en su uso (Consultar tablas concretas del nivel educativo en el anexo 5)

Analizamos ahora los errores en la utilización de conceptos y fórmulas "de y entre probabilidades", que se corresponden con los descriptores 2.2.2.2.1 y 2.2.2.2.2 respectivamente. Los porcentajes que dan cuenta de estos descriptores no son demasiado altos. Esto es debido a que sólo 25 estudiantes de los 80 de que consta la muestra (los estudiantes de 2º de Bachiller y los estudiantes de la Facultad de Matemáticas) son conocedores de la teoría de la probabilidad. Por lo que, calculando los porcentajes sobre los 25 estudiantes y no sobre el total, obtenemos los resultados que muestra la tabla 4.4.2.46.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	11.11	15.38	33.33	0	22.22	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	11.11	7.69	8.33	0	11.11	30

Tabla 4.4.2.46: Porcentaje de estudiantes que manifiestan errores en los conceptos de probabilidad y en las fórmulas de probabilidad, relativos a los 25 estudiantes.

Veamos algunos ejemplos de estos errores, sobre todo de los conceptuales, que suelen ser de independencia de sucesos y de complementariedad.



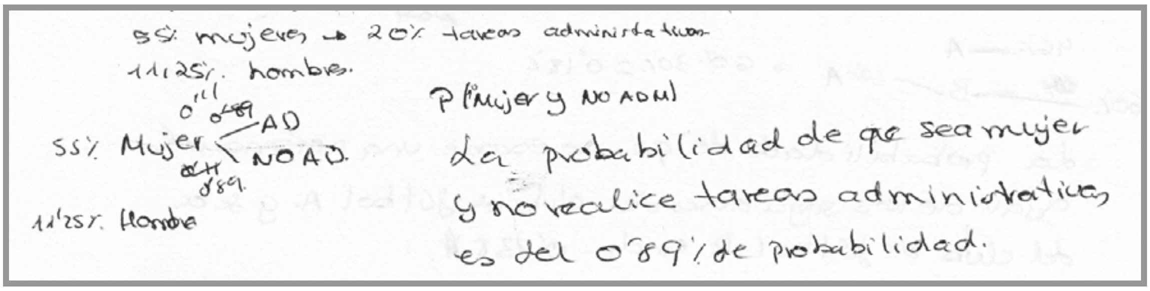
de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

Calcular la probabilidad de ser mujer y realizar tareas administrativas es calcular el producto de la probabilidad de ser mujer y la probabilidad de que no realice tareas administrativas
La probabilidad de ser mujer es $P(m) = 0.55$ y probabilidad de que realice tareas administrativas es $P(A) = 0.2 \Rightarrow$
$P(m) \cdot P(A) = 0.55 \cdot 0.2$

Resolución 4.4.2.43: Actuación de un estudiante de EFM en P2

En la resolución 4.4.2.43, el resolutor hace una lectura de los datos en términos de probabilidad. Expresa que la probabilidad de la intersección pedida es el producto de probabilidades, utilizando el concepto de independencia de sucesos en sucesos no independientes Interpreta la probabilidad condicional, $p(A|M)=0.2$, como una probabilidad marginal, $p(A) = 0.2$. Además confunde la intersección pedida, "ser mujer y no realizar tareas administrativas", con otra intersección, "ser mujer y realizar tareas administrativas".

La resolución 4.4.2.44 es un ejemplo del uso no adecuado de la complementariedad.



55% mujeres → 20% tareas administrativas
11,25% hombres.

P(Mujer y NO ADM)

55% Mujer
0'11 AD
0'89 NO AD.

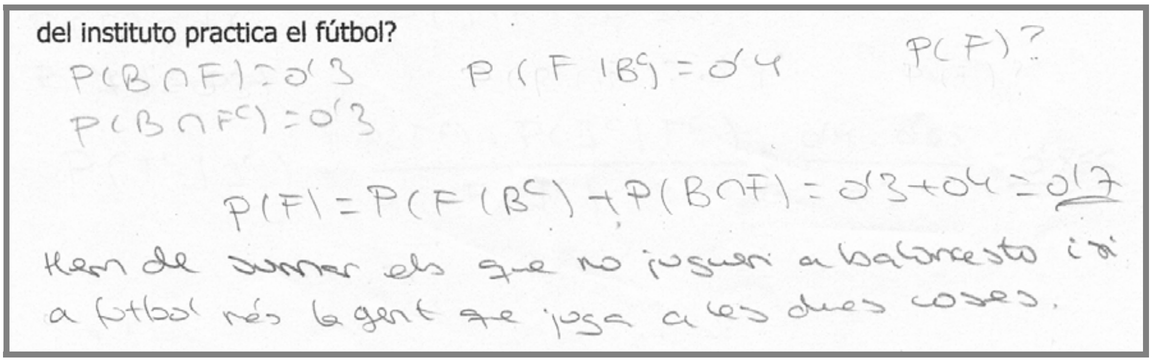
11'25% Hombre

La probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas es del 0'89% de probabilidad.

Resolución 4.4.2.44: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P2

El estudiante de esta resolución de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales, interpreta la complementariedad de la siguiente forma: piensa que "ser mujer y no realizar tareas administrativas" es complementario a "ser mujer y realizar tareas administrativas" en el espacio muestral. Por esta razón, una vez calculado el 0.11 que se corresponde con la probabilidad de "ser mujer y realizar tareas administrativas" resuelve el problema contestando que la probabilidad de "ser mujer y no realizar tareas administrativas" es 0.89, complementario a 0.11. Entiende que estas intersecciones son complementarias respecto al espacio muestral. La complementariedad existe si consideramos el espacio muestral reducido formado por el suceso "ser mujer".

La resolución 4.4.2.45 muestra un ejemplo de los errores en el uso de las fórmulas "de y entre probabilidades".



del instituto practica el fútbol?

$P(B \cap F) = 0'3$ $\quad P(F | B^c) = 0'4$ $\quad P(F)?$

$P(B \cap F^c) = 0'3$

$P(F) = P(F | B^c) + P(B \cap F) = 0'3 + 0'4 = 0'7$

Hem de sumar els que no juguen a baloncesto i sí a futbol més la gent que juga a les dues coses.

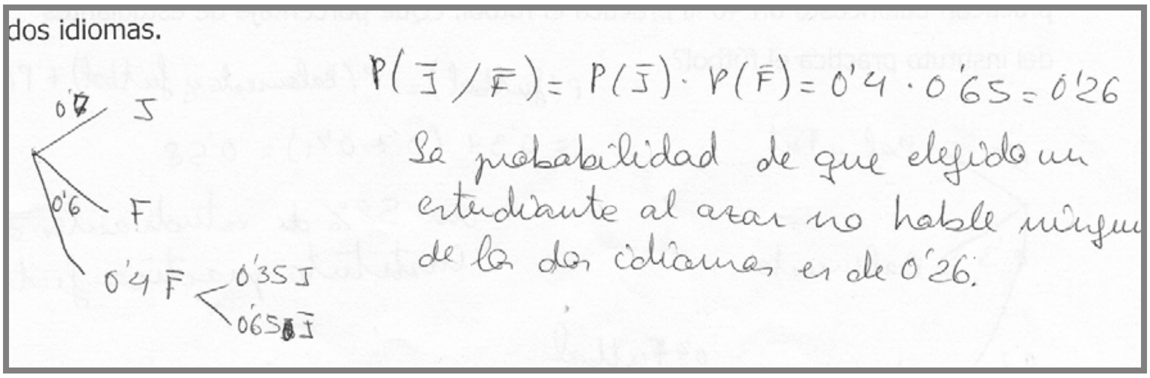
Resolución 4.4.2.45: Actuación de un estudiante de EFM en P6

El estudiante de la Facultad de Matemáticas que desarrolla esta resolución, hace un mal uso de una fórmula para resolver el problema P6:

$$p(F) = p(F|B^c) + p(B \cap F)\text{, cuando realmente la fórmula es}$$

$$p(F) = p(F \cap B^c) + p(B \cap F).$$

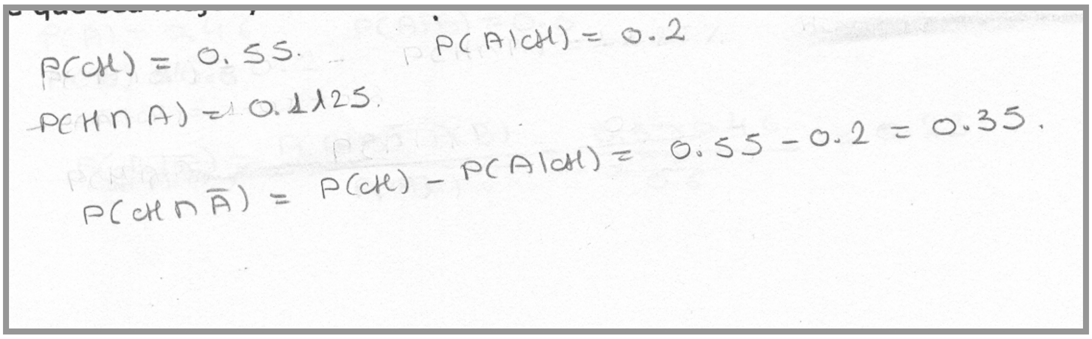
La resolución 4.4.2.46 muestra la actuación de un estudiante de 2BCCSS en P3, en la que hace un mal uso de una fórmula para resolverlo.



Resolución 4.4.2.46: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P3

El estudiante confunde $p(\bar{I}|\bar{F}) = p(\bar{I}).\ p(\bar{F})$ con $p(\bar{I} \cap \bar{F}) = p(\bar{I}).\ p(\bar{F})$.

La resolución 4.4.2.47 presenta la actuación de un estudiante de la Facultad de Matemáticas que ha creado una fórmula de probabilidad para resolver P2.



Resolución 4.4.2.47: Actuación de un estudiante de EFM en P2

El estudiante confunde $p(H \cap \bar{A}) = P(H) - p(A|H)$ con $p(H \cap \bar{A}) = P(H) - p(A \cap H)$

REFLEXIONES

Recordamos la cita de Garfield y Ahlgren (1988):

> *Muchos estudiantes tienen una dificultad subyacente con los conceptos de número fraccionario y razonamiento proporcional, necesarios para el cálculo, expresión e interpretación de las probabilidades (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren (1988)). Resultados recogidos por la Valoración Nacional del Progreso Educativo (NAEP) en su segunda y tercera valoraciones de matemáticas, indican que los estudiantes flojeaban en el concepto de número racional y tenían dificultades con conceptos básicos que incluían fracciones, decimales y porcentajes (Carpenter, Corbitt y Kepner, 1981; Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983, citados en Garfield y Ahlgren (1988)). Porcentajes bajos de estudiantes obtenían respuestas correctas en ejercicios con conceptos complejos y habilidades que requerían la comprensión de los principios matemáticos subyacentes. Dificultades en la traducción verbal de los datos del problema afectan tanto al azar como al resto de tópicos matemáticos (Hansen, McCann y Myers, 1985, citados en Garfield y Ahlgren (1988)).*

Los resultados de nuestro estudio confirman la tesis de Garfield y Ahlgren (1988) de que algunos estudiantes presentan una dificultad subyacente con el razonamiento proporcional. Aún más, podemos concretar que en el razonamiento proporcional la dificultad está en la utilización y el cálculo de los porcentajes.

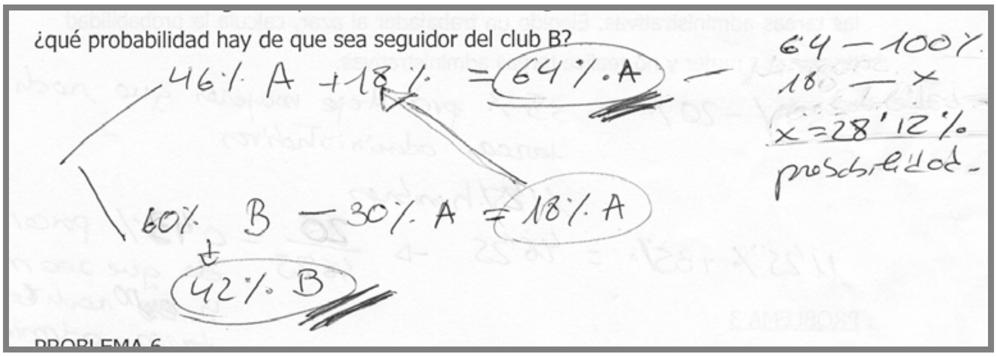
Utilizando la propuesta de Ojeda (1996):

> *el estudio de conceptos probabilísticos puede ofrecer un escenario favorable para poner en juego otros conceptos matemáticos y, también mediante su uso, dotarlos de significado (p. 309)*

proponemos que estos problemas sean incluidos, tal y como llevamos exponiendo en las reflexiones de cada apartado, en las unidades de razón y proporción, para reforzar el trabajo con los porcentajes e iniciar el estudio de los conceptos probabilísticos.

c. Errores en la interpretación de los sucesos

La resolución 4.4.2.48 muestra la actuación de estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales en P5.



Resolución 4.4.2.48: Actuación de un estudiante de 2BCCS en P5

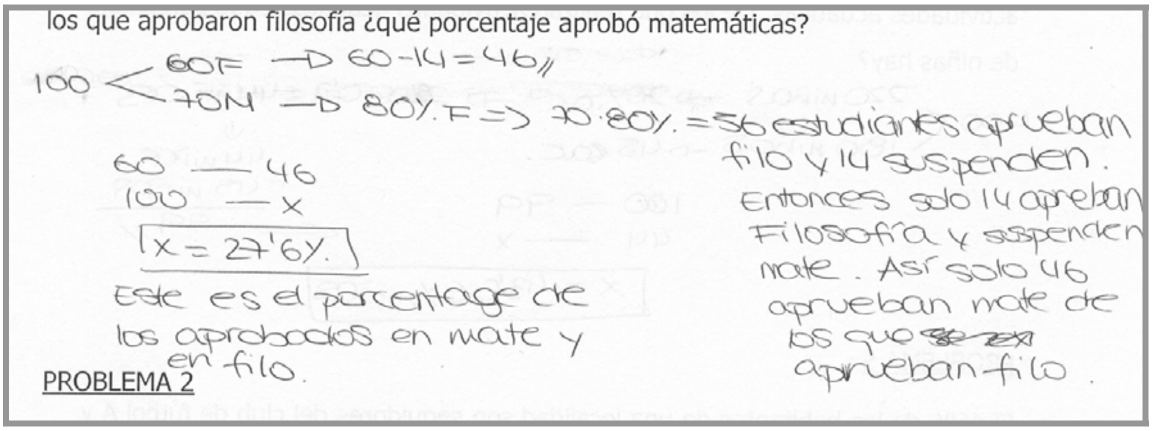
El estudiante calcula con la condicional dada, la mitad de los seguidores de B lo son de A, el 30%. Este 30% que se corresponde con el porcentaje de seguidores del club A y del club B, parece que lo interpreta como que el 30% son de A. Pero este 30% lo vuelve a interpretar como una condicional: el 30% de los de B son de A, pues calcula el 30% de 60 y obtiene 18% seguidores de A y B, que escribe 18% A. Este 18% el resolutor lo interpreta como el porcentaje de seguidores del club A y B, pues observamos en la actuación un 42% B, cantidad calculada mediante la diferencia del 60% de los seguidores de B y del 18% de los seguidores de A y B. Además piensa que el porcentaje de seguidores de A y B que acaba de hallar, no está contabilizado en el 46% que representa el porcentaje de seguidores de A, porque hace una suma de estas dos cantidades para obtener, según él, el porcentaje de seguidores de A. Entonces con las dos cantidades calculadas, el porcentaje de seguidores de A y B y el porcentaje de seguidores de A, mediante una regla de tres calcula la probabilidad condicional pedida. Este estudiante en este problema presenta dificultad en la interpretación de las cantidades nuevas que ha creado. Con este ejemplo introducimos el estudio del descriptor 2.2.3 que se corresponde con otras interpretaciones de los sucesos. Los resultados de este descriptor están presentados en la tabla 4.4.2.47.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	47.06	47.37	23.81	7.41	9.1	4.55

Tabla 4.4.2.47: Porcentaje de estudiantes que manifiestan errores en otras interpretaciones de los sucesos

Observamos que ha sido en los dos primeros problemas en donde los estudiantes han cometido más este tipo de error. Veamos algunos ejemplos que muestran este tipo de error.

En P1, al calcular la cantidad que da cuenta de los estudiantes que han aprobado filosofía y matemáticas 56, algunos estudiantes interpretan esta cantidad, representante de una intersección, como representante de una marginal. La resolución 4.4.2.49 da cuenta de la actuación de un estudiante en P1.


los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

100 < 60F → 60-14=46
70M → 80% F => 70·80% = 56 estudiantes aprueban filo y 14 suspenden.

60 — 46
100 — x
x = 27'6%

Este es el porcentage de los aprobados en mate y en filo.

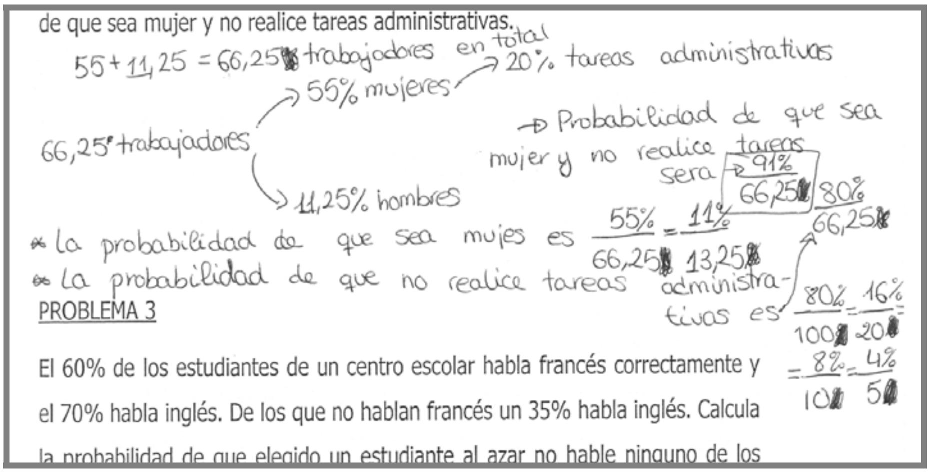
Entonces solo 14 aprueban Filosofía y suspenden mate. Así solo 46 aprueban mate de los que ~~se ex~~ aprueban filo.

PROBLEMA 2

Resolución 4.4.2.49: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P1

Esta resolución presenta la actuación de un estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales. Este estudiante realiza una lectura del problema distribuyendo los 100 entre 60 aprobados en F y 70 aprobados en M. Esto implica que los sucesos se han identificado con F y M, aunque también como "*mate*" y "*filo*" … Realiza la operación para calcular "*aprobados en mate y filo*", M∩F, el 80% de 70, 56 y observamos que lo interpreta como *los que aprueban filosofía y 14 suspenden*. Este 14 es la diferencia entre 70 y 56, por lo que entendemos que con este *14 suspenden* el resolutor indica el número de estudiantes que aprueban matemáticas y suspenden filosofía. Si seguimos leyendo podemos entender que *14 aprueban filosofía y suspenden matemáticas*. Interpretación no adecuada de 14, ya que representa la cantidad de estudiantes que aprueban matemáticas y suspenden filosofía. En coherencia con esta interpretación de 14, calcula el número de estudiantes que aprueban filosofía y matemáticas, 46, mediante la diferencia entre el número de estudiantes que aprueba filosofía, 60, y el número de estudiantes que según el resolutor aprueba filosofía y suspende matemáticas, 14. Con esta nueva cantidad utiliza una regla de tres para asignar el porcentaje correspondiente a la condicional pedida.

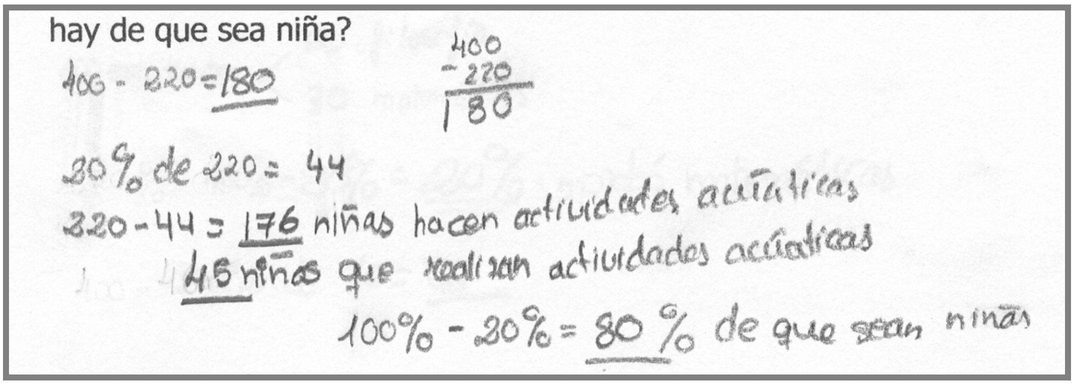
La resolución 4.4.2.50 presenta un ejemplo de este error en P2.



Resolución 4.4.2.50: Actuación de un estudiante de 1BC en P2

Esta resolución se corresponde con la actuación de un estudiante de 1º de Bachiller de Ciencias en P2. Este estudiante, además de utilizar los porcentajes como frecuencias absolutas, interpreta la cantidad "11.25% de hombres que realizan tareas administrativas" como "11.25% de *hombres"* y el "*55% de mujeres*". Calcula *55+11.25=66.25 trabajadores en total*. En este problema este tipo de error es muy común.

La resolución 4.4.2.51 presenta otro ejemplo de error en la interpretación de los sucesos en P4.


hay de que sea niña?

400 - 220 = 180

$$\begin{array}{r} 400 \\ -220 \\ \hline 180 \end{array}$$

20% de 220 = 44

220-44 = 176 niñas hacen actividades acuáticas

45 niños que realizan actividades acuáticas

100% - 20% = 80 % de que sean niñas

Resolución 4.4.2.51: Actuación de un estudiante de 4ESO en P4

El resolutor hace la lectura del problema distribuyendo los 400 integrantes del campamento en 220 niñas y 180 niños, aunque no expresa de forma explícita los sucesos. Observamos que calcula el 20% de 220 = 44, pero que al hacer la resta de 220-44=176 escribe que son *las niñas que hacen actividades acuáticas*, cuando realmente el 176 representa las niñas que no hacen actividades acuáticas. Reconoce que 45 son niños que realizan actividades acuáticas. No hace uso de estas cantidades para expresar la solución del problema. El problema lo resuelve mediante una diferencia entre porcentajes. Escribe *100% - 20% = 80%* de que sean niñas, cuando este 80% representa el porcentaje entre las niñas, las que no realizan actividades acuáticas. Las cantidades 180, 45 y 80 son producto de la lectura del problema y 44 y 176 son producto de la resolución del problema.

REFLEXIONES

Algunos estudiantes al calcular nuevas cantidades, asocian a éstas características que no les corresponden, cardinales de conjuntos equivocados. Al no realizar entrevistas clínicas no sabemos el porqué de estas asociaciones, incluso no podemos asociar este tipo de error a un tipo de problema determinado, ya que observando la tabla 4.4.2.47, el porcentaje de estudiantes que comenten este tipo de error es mayor en P1 y P2, en P3 disminuye bastante y en P4, P5 y P6 no llega al 10% de los estudiantes que no han tenido éxito en la resolución del problema.

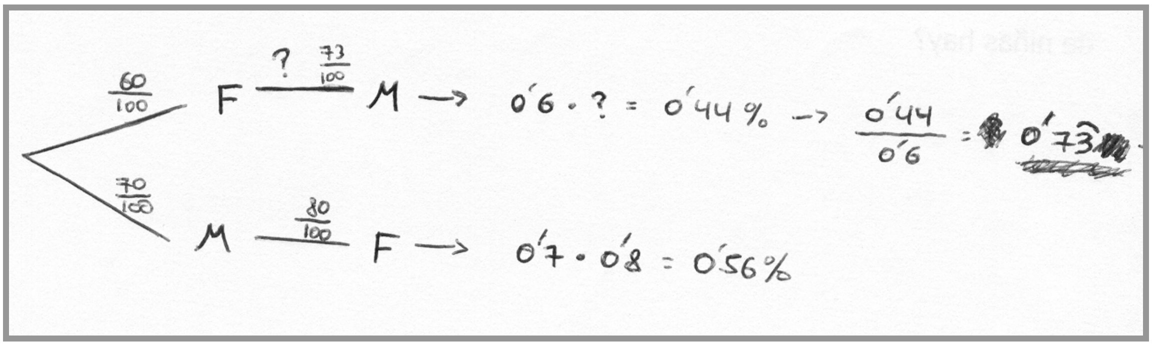
d. Uso competente y no adecuado de las tablas de contingencia y los diagramas de árbol

Los descriptores 2.3.1 y 2.3.2 dan cuenta del uso competente y no adecuado de las destrezas heurísticas, respectivamente, en la resolución de los problemas que no han tenido éxito. La tabla 4.4.2.48 muestra los resultados.

	Toda la muestra						Estudiantes de 2BCCSS y EFM					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
2.3.1.Uso competente de destrezas heurísticas	0	7.89	4.76	3.7	6.06	2.27	0	23.08	16.67	16.67	22.22	10
2.3.2. Uso no adecuado de destrezas heurística	5.88	2.63	2.38	3.7	3.03	0	22.22	7.7	8.33	16.67	11.11	0

Tabla 4.4.2.48: Porcentaje de estudiantes que manifiestan la utilización competente y no adecuada de tablas de contingencia o diagramas de árbol, según dos muestras

Los porcentajes de estudiantes que muestra esta tabla no son demasiado altos, cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, tanto en los libros de texto como los profesores, contextualizan la enseñanza de la probabilidad con estos artefactos didácticos. En coherencia con la enseñanza recibida, los grupos de estudiantes que han utilizado las tablas de contingencia o los diagramas de árbol en la resolución de los problemas, han sido el grupo de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales y el grupo de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas. Por esta razón hemos calculado los porcentajes de estudiantes que muestran el uso de estos artefactos didácticos en la resolución del problema sobre la muestra de los 25 estudiantes de estos dos grupos. Queremos hacer notar que algunos estudiantes de 2BCCSS se apoyan en los árboles de contingencia (o esquemas derivados de estos árboles) en la resolución de los problemas y algunos estudiantes de EFM utilizan las tablas de contingencia. En la resolución 4.4.2.52 observamos un ejemplo.

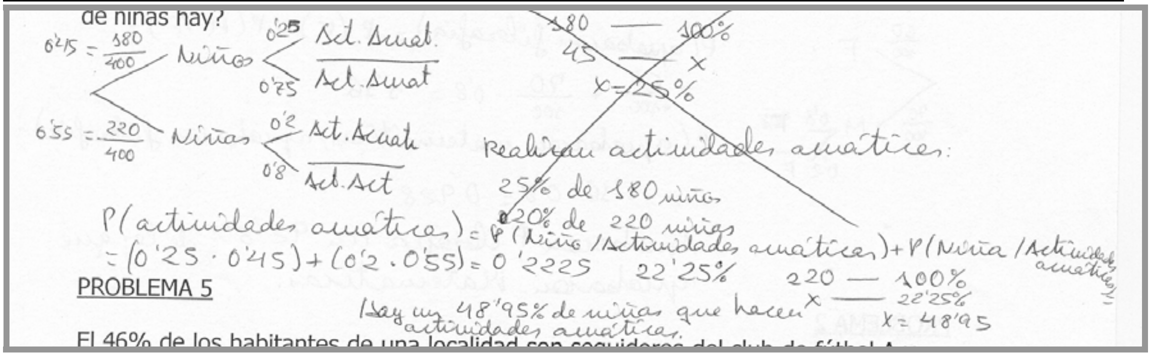


Resolución 4.4.2.52: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P1

Este estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales utiliza un esquema que se basa en el uso de una rama de cada árbol de contingencia, y hace un mal uso, ya que utiliza al calcular p(F∩M) = 0.56, utiliza la complementariedad de las ramas como si éstas fueran del mismo árbol. 1 - 0.56=0.44, cuando realmente son ramas que pertenecen cada una a un diagrama de árbol y que llegan a la misma cantidad, por lo que debería haber calculado: 0.6 . ¿=0.56.

La resolución 4.4.2.30 (p. 449), la hemos utilizado antes para mostrar como un estudiante de la Facultad de Matemáticas, utilizando de forma competente la tabla de contingencia, comete el error de interpretar el porcentaje condicional del problema como una intersección.

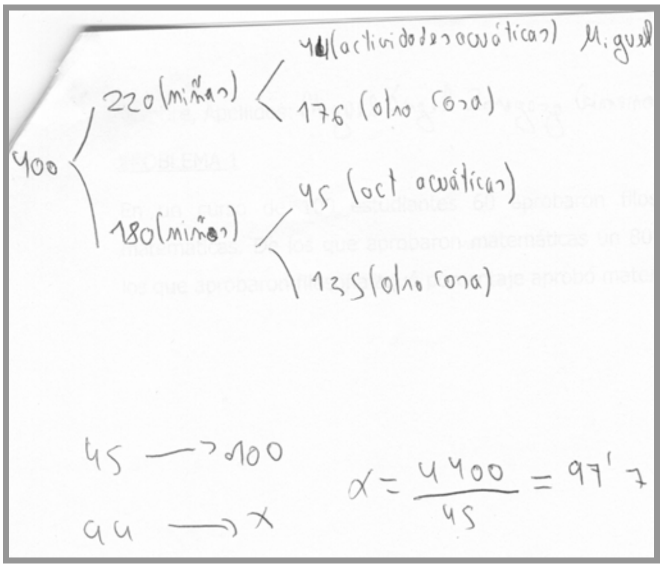
La resolución 4.4.2.53 presenta la resolución de un estudiante de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales con uso competente del árbol, aunque su error ha estado al utilizar la regla de tres para el cálculo de la probabilidad de la intersección en lugar de calcular la probabilidad condicional pedida.



Resolución 4.4.2.53: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P4

Este estudiante utiliza el diagrama de árbol para realizar una lectura del problema, haciendo un análisis de posibilidades mediante el árbol para asignar después probabilidades, distribuyendo toda la probabilidad, 1, por sus ramas en probabilidades marginales y condicionales. Aplica el teorema de la probabilidad total utilizando la regla del producto en el árbol, para calcular la probabilidad de realizar actividades acuáticas. Para calcular la condicional pedida utiliza la regla de tres, y en ella sitúa cantidades que no son proporcionales, el número de niñas y el porcentaje que da cuenta de los que realizan actividades acuáticas.

La resolución 4.4.2.54 da cuenta de los árboles mostradores de cantidades que utilizan algunos estudiantes de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales. Esta resolución muestra la actuación de un estudiante de este curso en P4:



Resolución 4.4.2.54: Actuación de un estudiante de 2BCCSS en P4

El estudiante distribuye la cantidad inicial 400 en dos cantidades 220 y 180 que representan el número de niñas y de niños respectivamente. Trata de dar sentido a las cantidades que va produciendo. Así, la cantidad de niñas la distribuye en 44 que realiza actividades acuáticas y 176 que realiza otra cosa, y con la cantidad de niños hace lo mismo, 45 realizan actividades acuáticas y 125 otra cosa. No hay probabilidad en las ramas pues el estudiante le da otro uso al árbol, de hecho no hay reglas de cálculo asociadas El estudiante comete el error en el planteamiento de la regla de tres, al asignar la cantidad 45 al cardinal del conjunto que da cuenta del espacio muestral reducido, cuando esta cantidad es de 44+45=89.

REFLEXIONES

Algunos estudiantes de 2BCCSS y de EFM son los que utilizan las destrezas heurísticas en la actuación de los problemas. Éstos son los estudiantes que han recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad condicional y en consecuencia, saben de la existencia de las tablas de contingencia y de los diagramas de árbol.

La utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol por parte de los resolutores ha tenido un uso adecuado y uno no adecuado. Algunos de los estudiantes de 2BCCSS que han utilizado los diagramas de árbol en el proceso de resolución del problema, lo han hecho de forma no competente. Estos estudiantes han utilizado un artefacto "a modo de diagrama de árbol" en el que han mezclado propiedades y arquitectura de los diagramas de árbol y en este uso, han cometido los errores.

V. Conclusiones del análisis de los descriptores que dan cuenta del comportamiento de los resolutores cuyos procesos de resolución no han tenido éxito

Ya sabemos que la naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional es un factor influyente en el éxito en la resolución de estos problemas y en el proceso de resolución del problema, clasificando el problema de probabilidad condicional en problema de cálculo de probabilidades o en problema de asignación de probabilidades.

Siguiendo con este factor, ya hemos dicho que el expresar la cantidad que presenta la probabilidad condicional de forma diferente al resto de datos induce al resolutor a la interpretación deseada del dato condicional. Más aún, el expresar la cantidad que presenta el dato condicional en porcentajes y el resto de datos en frecuencias absolutas, no sólo favorece el éxito en la resolución del problema sino que evita la interpretación de ésta por una intersección. Por esta razón, también hemos expresado anteriormente que pensamos que estos conocimientos pueden contribuir a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, sin afectar al currículo de Matemáticas de la enseñanza secundaria. Proponemos trabajar estos problemas los primeros, siempre expresando la pregunta del problema en porcentajes, incluyéndolos en unidades de razón y proporción de cursos de la enseñanza secundaria obligatoria.

Además, cuando los datos del problema están todos expresados en forma de porcentaje, algunos resolutores leen el porcentaje que da cuenta de la probabilidad condicional sobre el espacio muestral y no sobre el espacio muestral reducido.

También debemos tener en cuenta que el expresar la condicional en forma de razón tal y como se presenta en P5: DE LOS SEGUIDORES DEL CLUB B LA MITAD LO SON DEL CLUB A, provoca que algunos resolutores interpreten el dato condicional como una intersección, cuando éstos hacen una lectura del problema en términos de probabilidad. Quizás por ser LA MITAD DE una razón especial que se asocia con 0.5.

La estructura gramatical elegida para presentar la probabilidad condicional en todos los problemas de esta segunda fase, tanto en el dato como en la pregunta del problema, DE LOS QUE, DE LAS QUE, DE LOS, DE LAS, es una estructura que favorece la interpretación deseada del dato condicional, ya que encontramos problemas en los que el porcentaje estudiantes que manifiestan estas interpretaciones no deseadas de la probabilidad condicional es cero. La añadimos a la estructura condicional por excelencia, de forma que contribuimos a elaborar la lista de estructuras gramaticales para la interpretación adecuada del dato y/o la pregunta condicional. Pero no podemos olvidar que a la hora de crear el enunciado de un problema de probabilidad condicional, debemos eliminar todas las palabras que presenten ambigüedad en el texto del problema.

Por otro lado, hemos encontrado que en la interpretación del dato condicional como una intersección influye otro factor diferente al lenguaje y a la forma de presentación de los datos: el orden de presentación de los datos cuando éstos son dos probabilidades de la intersección y una probabilidad condicional. Esto es cuando el problema se describe con N_2C_1. En este caso, si el dato condicional se presenta en tercer lugar, el porcentaje de estudiantes que interpretan éste como una condicional crece.

Garfield y Ahlgren (1988) recuerdan que algunos estudiantes flojean en el concepto de número racional y tienen dificultades en conceptos básicos que incluyen fracciones, decimales y porcentajes. Los resultados de nuestro estudio confirman esta tesis, pues los errores cometidos por los participantes en nuestra investigación están, sobre todo, en la utilización y el cálculo de porcentajes. Este factor, la dificultad en los conceptos básicos de fracción, decimal y porcentaje, se debe tener en cuenta también en la propuesta de enseñanza. El incluir estos problemas en las unidades de razón y proporción, nos ayudará a reforzar el trabajo con los porcentajes además de iniciar el estudio de los conceptos probabilísticos.

4.4.2.6 Tres versiones de dos problemas

En este apartado presentamos el análisis de dos problemas en tres versiones. La construcción de la segunda fase la basamos principalmente en las conclusiones de la primera fase. Decidimos no elegir problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en términos de probabilidad ni problemas de probabilidad condicional indeterminados. De los ocho problemas restantes de la primera fase elegimos algunos para la segunda fase. En estos problemas cambiamos la redacción del texto según las conclusiones de la primera fase así como la estructura gramatical de la expresión del dato y/o la pregunta condicional. Dos de estos problemas elegidos, los presentamos en la segunda fase con las cantidades expresadas en frecuencias absolutas. Por lo que tenemos resultados que dan cuenta del proceso de resolución de dos problemas presentados en tres versiones diferentes. Estas versiones están marcadas, sobretodo, por la expresión de los datos del problema: sólo probabilidades, sólo porcentajes y combinando frecuencias y porcentajes. Estos problemas de la segunda fase son P1 y P4.

Tres versiones de P1 de la segunda fase

La pareja de problemas isomorfos a P1 en la primera fase, P7 y P15, presenta un porcentaje de resolución con éxito muy bajo. Los estudiantes que resuelven con éxito esta pareja de problemas, son estudiantes de la facultad de Matemáticas y no hay ningún estudiante de Secundaria que presente un proceso de resolución con éxito. Al crear P1 para la segunda fase, hemos expresado las cantidades en frecuencias absolutas y cambiado la redacción del enunciado del problema, tal y como hemos mostrado en el apartado correspondiente (ver apartado 3.4.2.2. Diseño de la segunda fase). Hemos eliminado dificultades tales como la estructura gramatical del texto y la unicidad en cuanto a la expresión de la condicional, así como dificultades de contenido, como la presentación de los datos en frecuencias absolutas.

La tabla 4.4.2.49 muestra los tres problemas estructuralmente isomorfos y su situación.

PRIMERA FASE	PROBLEMA 7. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?
PRIMERA FASE	PROBLEMA 15. En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0'6 y la de aprobar matemáticas es de 0'7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0'8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?
SEGUNDA FASE	PROBLEMA 1. En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Tabla 4.4.2.49: Los problemas isomorfos P7 y P15 (1ªF)[27] y P1(2ªF).

Una misma lectura matemática, a la vez y simultánea, de los tres problemas es posible realizarla con sólo traducirlos del lenguaje natural, en el que se expresan los enunciados al lenguaje simbólico de las probabilidades, para lo cual todas las cantidades (conocidas y desconocidas) son leídas con sentido probabilístico.

Sea F el conjunto de referencia para las expresiones: *estudiantes de un instituto aprueban Filosofía* (P7), *aprobar Filosofía* (P15), …(estudiantes que) *aprobaron Filosofía* (P1). Sea ahora M el conjunto de referencia para expresiones similares a las que contiene F, sólo cambiando Filosofía por

[27] Utilizamos (1ªF) para denotar los problemas de la primera fase y (2ªF) para los de la segunda fase.

Matemáticas. Consideremos F y M como sucesos. Sean p(F) y p(M) las probabilidades de los sucesos F y M definidos anteriormente. Una lectura de los datos numéricos de cada problema con sentido probabilístico nos proporcionan las siguientes probabilidades: p(F) =60/100=0.6 (P7 y P15), leyendo igual la razón 60 de 100 en P1; análogamente P(M)=70/100=0.7 (P7 y P15 y la razón 70 de 100).

Sea $p(F|M)=0.8$ la forma en la que leemos el dato sobre la probabilidad condicional en cada uno de los problemas: *un 80% de los estudiantes que aprobaron Matemáticas también aprobaron Filosofía* (P7), *escogido un estudiante al azar entre los que aprobaron Matemáticas la probabilidad de que aprobara también Filosofía es 0.8* (P15) y *De los que aprobaron Matemáticas, un 80% aprobaron también Filosofía* (P1). Finalmente, sea $p(M|F)$ la forma en la que leemos las preguntas de los tres problemas. En los problemas P7 y P15 introduciendo la condición con el condicional *Si.* En P1, manteniendo la misma estructura gramatical que el dato sobre la probabilidad condicional, *De los que…*

Así que hay una misma lectura posible de los tres problemas en el lenguaje simbólico: Dados p(F), p(M) y $p(F|M)$ halla $p(M|F)$. Los tres problemas son así isomorfos.

La isomorfía sólo es estructural, tanto para los datos (sucesos y probabilidades) como para las relaciones entre los datos que conducen a la solución de los problemas. Cualquier otra lectura que se haga de esos problemas, incluso desde los propios problemas, los hace no isomorfos, diferentes, aunque el contexto en el que se establecen es el mismo para los tres. Números, cantidades relativas, expresiones de sucesos y probabilidades son también diferentes. Entonces, desde este punto de vista, solo las resoluciones que traduzcan los tres problemas en problemas isomorfos serán, en principio, idénticas, es decir, será posible reconocer comportamientos idénticos en sus resoluciones. Cualquier otra lectura producirá, razonablemente, comportamientos diferenciados.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes hemos considerado los descriptores que definimos para el análisis de las respuestas de la segunda fase (ver apartado 4.4.2.3, pp 366-382)

RESULTADOS COMPARADOS

La tabla 4.4.2.50 muestra los resultados y la naturaleza de los datos y de la pregunta de cada uno de los problemas.

En esta tabla hemos resaltado (en gris) cuatro filas que dan cuenta respectivamente, del éxito en el proceso de resolución, de la interpretación del dato condicional como una intersección, de la interpretación de la pregunta condicional como una intersección y del problema dejado en blanco o sin información para la investigación[28].

La primera fila resaltada da cuenta del porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito los problemas. Este porcentaje ha crecido considerablemente en P1. Además, los estudiantes que resuelven con éxito P1 son estudiantes de todos los niveles educativos, cosa que no ocurre en P7 y P15. En estos dos problemas los estudiantes que resuelven con éxito son estudiantes de la Facultad de Matemáticas (consultar anexo 5).

También el proceso de resolución de los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas ha cambiado (Descriptores 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 de la tabla 4.4.2.50). Los estudiantes que han resuelto problemas P7 y P15 lo han hecho, en general, mediante un proceso de resolución probabilístico. Es decir, utilizando las fórmulas "de y entre probabilidades". Los estudiantes que han resuelto con éxito P1, muestran, en general, un proceso de resolución mayoritariamente aritmético. Hacen una lectura del problema reconociendo los sucesos y las relaciones entre éstos, asignando los cardinales a los conjuntos que representa estos sucesos, pero trabajan estas relaciones utilizando

[28] Los descriptores de la segunda fase están creados mejorando los descriptores de la primera fase. En este estudio hemos adaptado los resultados de los descriptores de la primera fase a los descriptores de la segunda fase. En el descriptor 3 de 2ªF englobamos los descriptores 6 y 7 de 1ª F.

estrategias aritméticas. Por lo que, según los resolutores, P7 y P15 estarían clasificados como problemas de cálculo de probabilidades y P1 como un problema de asignación de probabilidades.

Problema	P7(1ªF)	P15(1ªF)	P1(2ªF)
Naturaleza de los datos	Porcentaje	Probabilidad	Frecuencias y %
Naturaleza de la pregunta	Probabilidad	Probabilidad	Porcentaje
1. Éxito	5.97	6.06	36.25
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	24.13
1.2 Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	0	0	65.52
1.3 Proceso de resolución básicamente probabilístico	25	0	0
1.4 Proceso de resolución probabilístico	75	100	10.34
2 No éxito	58.21	27.27	42.5
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	38.46	44.44	2.94
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	11.11	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	56.41	22.22	17.65
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	7.69	0	5.88
3 Otras	35.82	66.67	21.25

Tabla 4.4.2.50: Porcentajes de estudiantes que muestran determinadas respuestas en P7 y P15 (1ªF) y P1(2ªF), clasificadas según los descriptores elegidos

Observando las cuatro filas resaltadas concluimos que todos los cambios que hemos hecho en la construcción de P1 han influido positivamente en el proceso de resolución de este problema. Los cambios, en lo que respecta a la redacción del problema, han supuesto una mejora considerable en cuanto al éxito en la resolución del problema, en cuanto a la interpretación del dato condicional y de la pregunta condicional y en cuanto a que ha sido un problema trabajado por más estudiantes.

La estructura condicional DE LOS QUE es una estructura que podemos utilizar con los estudiantes noveles en resolución de problemas de probabilidad condicional, ya que no provoca en éstos la interpretación del dato condicional y la pregunta condicional como una intersección.

El porcentaje de interpretaciones no deseadas de la condicionalidad disminuye drásticamente en el caso del problema P1. De los estudiantes que no resuelven el problema P1 con éxito, un porcentaje poco apreciable de ellos se debe a una mala interpretación del dato condicional como un suceso intersección, 2.94%, mientras que en el caso de sus problemas isomorfos estos porcentajes son mucho más significativos, lo mismo que trasladar esta interpretación no deseada del dato a la pregunta, apreciándose un porcentaje mayor en el caso del problema P7 que en el problema P15.

El porcentaje de estudiantes que responden en P1, según el descriptor que da cuenta de la interpretación del dato condicional como una intersección, es bajo: Comparando estos datos en los otros dos problemas, este porcentaje ha bajado considerablemente. El hecho de presentar el dato condicional de forma diferente al resto de los datos del problema es uno de los factores que más ha influido en esta mejora, siempre sin olvidar que los problemas con enfoque frecuencial tienen mayor porcentaje de éxito frente a las probabilidades condicionales.

REFLEXIONES

El hecho de poder comparar los resultados de estos tres problemas estructuralmente isomorfos hace que podamos corroborar algunas conclusiones que ya hemos hecho notar en este trabajo. El crecimiento del porcentaje de estudiantes que muestran un proceso de resolución con éxito es debido, fundamentalmente a dos factores: la eliminación de las palabras que producían ambigüedad en el texto y la presentación de las cantidades en frecuencias absolutas. La redacción del texto del problema tiene que ver con el éxito en la resolución de los problemas por los alumnos. Se ha realizado una mejora al eliminar las palabras, Y, TAMBIÉN, que producían ambigüedad en el texto, induciendo al resolutor a la interpretación de la condicional por intersección. La expresión DE LOS QUE para presentar la condicional tanto en el dato como en la pregunta es una expresión adecuada.

Las cantidades expresadas en frecuencias absolutas y la condicionalidad en porcentaje favorecen la resolución con éxito del problema. Confirmamos la tesis de Gigerenzer (1994, 1995) y otros, los problemas de probabilidad condicional con enfoque frecuencial tienen mayor porcentaje de éxito frente a los problemas en los que las cantidades son términos de probabilidad. Añadimos a ésta otra que hemos ido mostrando a lo largo de esta investigación: si el problema es de probabilidad condicional y en la parte informativa una dato es una probabilidad condicional, entonces, el hecho de tener los datos en frecuencias absolutas y la probabilidad condicional en porcentaje hace que ésta se diferencie del resto de datos e induce al resolutor a la interpretación deseada de este dato. Además las cantidades expresadas en frecuencias absolutas y/o en porcentajes influyen en el proceso de resolución del problema. De los estudiantes que presentan un proceso de resolución con éxito, la mayoría presenta un proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético; resuelven utilizando estrategias de la aritmética pero muestran un reconocimiento de los sucesos y de las frecuencias o porcentajes que los representan.

Este estudio tiene implicaciones en la enseñanza ya que propone una mejora en la organización de la enseñanza de la probabilidad condicional haciendo uso de las unidades de razón y proporción como precursores del concepto de probabilidad. Proponemos que el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional comience con problemas cuya estructura y formato de datos sea como la del problema P1 y en contextos variados, como un paso previo para abordar problemas como los P7 y finalizar con problemas como P15. La razón es que así introducimos a los estudiantes a la probabilidad condicional mediante razones y proporciones, es decir, razonando de una manera exclusivamente aritmética, siguiendo con un el uso de los porcentajes con un cierto sentido probabilístico y finalizando con el uso de las probabilidades. Esto debería tomar el tiempo que fuera necesario desde los niveles educativos más bajos hasta los más altos, con el fin de mejorar las competencias de nuestros estudiantes en probabilidad en todos los niveles educativos.

Tres versiones del P4 de la segunda fase

La pareja de problemas de la primera fase estructuralmente isomorfos[29] a P4 es P6 y P14. Esta pareja presenta un porcentaje de resolución con éxito muy bajo. Al igual que ocurre con la pareja P7 y P15 de 1ª F, los estudiantes que resuelven con éxito estos dos problemas, P6 y P14, son estudiantes de la facultad de Matemáticas y no hay ningún estudiante de Secundaria que presente un proceso de resolución con éxito.

La tabla 4.4.2.51 muestra los tres problemas isomorfos y su situación.

PRIMERA FASE	PROBLEMA 6. En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11’25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.
PRIMERA FASE	PROBLEMA 14. La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0’55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0’2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0’1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.
SEGUNDA FASE	PROBLEMA 4. De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

Tabla 4.4.2.51: Los problemas isomorfos P6 y P14 (1ªF) y P4 (2ªF).

[29] Razonando de forma análoga a como hemos hecho en las páginas 480 y 481 de esta memoria

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes hemos considerado los descriptores que definimos para el análisis de las respuestas de la segunda fase.

RESULTADOS COMPARADOS

La tabla 4.4.2.52 muestra los resultados y la naturaleza de los datos y de la pregunta de cada uno de los problemas.

Hemos resaltado (en gris) cinco filas de esta tabla que nos parecen interesantes.

La primera fila que hemos resaltado da cuenta del porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito los problemas. Este porcentaje ha crecido considerablemente en P4. Al igual que ocurre en P1 de la segunda fase, los estudiantes que resuelven con éxito P4 son estudiantes de todos los niveles educativos, cosa que no ocurre en P6 y P14. En estos dos problemas los estudiantes que resuelven con éxito son estudiantes de la Facultad de Matemáticas (consultar el anexo 5).

De la misma forma, el proceso de resolución de los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas ha cambiado (Descriptores 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 de la tabla 4.4.2.52). Los estudiantes que han resuelto problemas P6 y P14 lo han hecho mostrando un modo de resolución probabilístico. Es decir, utilizando las fórmulas "de y entre probabilidades". En P6, aunque los datos están expresados en porcentajes, la pregunta del problema está expresada en términos de probabilidad, induciendo de esta forma a los resolutores conocedores de la teoría de la probabilidad a utilizar las fórmulas "de y entre probabilidades" en la resolución del problema. La mayoría de los estudiantes que han resuelto con éxito P4 muestran un proceso de resolución mayoritariamente aritmético. Reconocen los sucesos y los cardinales de los conjuntos que representan estos sucesos, pero utilizan estrategias de la aritmética para mostrar las relaciones entre estos conjuntos. Por lo que, según los resolutores, P6 y P14 serían problemas de cálculo de probabilidades y P4 sería un problema de asignación de probabilidades.

Problema	P6(1ªF)	P14(1ªF)	P4(2ªF)
Naturaleza de los datos	Porcentaje	Probabilidad	Frecuencias y %
Naturaleza de la pregunta	Probabilidad	Probabilidad	Porcentaje
1. Éxito	6.06	6.06	47.5
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	10.53
1.2 Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	0	0	86.84
1.3 Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	0	2.63
1.4 Proceso de resolución probabilístico	100	100	0
2 No éxito	67	58	33.75
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	27	26	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	36	37	7.41
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	5	14.81
3 Otras	33	39	18.75

Tabla 4.4.2.52: Porcentajes de estudiantes que muestran determinadas respuestas en P6, P14 y P4, clasificadas según los descriptores elegidos

Los cambios que ha tenido P4, en relación con los problemas de la primera fase son dos. Uno, la expresión de las cantidades en frecuencias absolutas dejando la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional expresada en forma de porcentaje. El otro, la estructura gramatical utilizada en la expresión de la pregunta del problema.

De las otras cuatro filas resaltadas, tres tienen que ver con proceso de resolución de los estudiantes que no han alcanzado el éxito y la cuarta da cuenta de los estudiantes en los que la respuesta no incluimos en ninguna categoría porque no aporta nada a la investigación. Los porcentajes relativos a P4 han descendido notablemente. Además, en P4 ningún resolutor interpreta el dato condicional como una intersección. Ya hemos comentado en bastantes ocasiones, que este hecho es debido, no sólo a la estructura gramatical utilizada en la expresión del dato condicional, sino también a que la expresión de la cantidad que da cuenta del dato condicional es diferente a las expresiones del resto de cantidades presentes en el problema.

El porcentaje de estudiantes que interpretan la pregunta condicional como una intersección también ha descendido mucho en P4, en relación con P6 y P15. Hay algunos estudiantes, concretamente dos estudiantes de 1BC, que presentan esta interpretación. Podemos asegurar que la estructura gramatical de la pregunta del problema, estructura utilizada en todos los problemas de la segunda fase para expresar el dato y/o la pregunta condicional, es adecuada.

Acabamos este estudio preguntándonos ¿en qué fallan los resolutores de P4? El porcentaje de estudiantes que interpretan el dato condicional de forma no esperada es nulo, el porcentaje de estudiantes que interpretan la pregunta condicional como una intersección es inapreciable y hay un pequeño porcentaje de estudiantes que interpretan la pregunta condicional como el dato condicional. Los errores que, generalmente han cometido los estudiantes que han resuelto P4 están en el uso y el cálculo de porcentajes (consultar anexo 5), errores ya considerados en otros estudios, tal y como muestran Garfield y Ahlgren (1988).

REFLEXIONES

El crecimiento del porcentaje de resolución con éxito es debido fundamentalmente a la presentación de las cantidades en frecuencias absolutas y a la presentación de la cantidad que da cuenta del dato condicional de forma diferente, en este caso en porcentaje. Las cantidades expresadas en frecuencias absolutas y la condicionalidad en porcentaje favorecen la resolución con éxito del problema. Ya hemos comentado en las conclusiones de las tres versiones de P1 (2ªF) que, además de confirmar la tesis de Gigerenzer y otros, añadimos que, si el problema es de probabilidad condicional y en la parte informativa una dato es una probabilidad condicional, entonces, el hecho de tener los datos expresados en frecuencias absolutas y en la probabilidad condicional en porcentaje hace que ésta se diferencie del resto de datos e induce al resolutor a la interpretación deseada de este dato.

También queremos remarcar que la naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad también influye en el proceso de resolución del problema, clasificando éste en un problema de cálculo de probabilidades o de asignación de probabilidades según éstas estén expresadas en términos de probabilidad o no.

Somos conscientes de que, en la resolución de problemas de probabilidad condicional existen dificultades que no tienen que ver, en principio, con conceptos de probabilidad, sino con conceptos básicos de número racional y razonamiento proporcional. Garfield y Ahlgren (1988) así lo indican y a lo largo de este trabajo de investigación lo hemos corroborado.

Estos tres problemas P4, P6 y P15 nos proponen una secuencia de enseñanza de la misma forma que indicamos en las tres versiones de P1 (2ªF).

4.4.2.7 Conclusiones del análisis de la segunda fase

Recogiendo todas las reflexiones que hemos ido mostrando a lo largo de este apartado elaboramos ahora las conclusiones de la segunda fase.

Un factor influyente en el éxito en la resolución de los problemas de probabilidad condicional es la naturaleza de las cantidades presentes en el problema. Completamos la tesis de investigaciones anteriores teniendo en cuenta las diferentes formas de expresar los datos en un problema de probabilidad. Los datos expresados en frecuencias absolutas provocan un éxito mayor en la resolución del problema que cuando los datos están expresados en porcentajes. Los dos problemas de la segunda fase, P1 y P4, que tienen como rasgo diferenciador del resto de los problemas de ésta la expresión de los datos en frecuencias absolutas y el dato que da cuenta de la probabilidad condicional expresado en porcentaje al igual que la expresión de la pregunta, han sido los que han tenido mayor éxito. Por lo que es este factor, los datos expresados en frecuencias y la condicional en porcentaje, el que más ha influido en el éxito en la resolución de los dos problemas. Para completar esta conclusión, observamos los resultados con respecto al éxito que dan cuenta de los problemas P1 y P5. El porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito P1 ha sido del 36.25% y P5 del 11.25%. Estos problemas son problemas isomorfos en cuanto a que los dos problemas se describen con $N_2C_3T_1$ y $[p_{02}]$. Ahora bien, la naturaleza de las cantidades presentes en estos problemas es diferente. En P1 los datos se expresan en frecuencias absolutas salvo la probabilidad condicional que se expresa con un porcentaje y se pregunta por porcentaje. En P5 las cantidades presentes en el problema son razones y la pregunta es una probabilidad.

La naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional, no sólo es un factor influyente en el éxito en la resolución del problema, sino que también influye en el proceso de resolución. La mayoría de los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas de la segunda fase, no han utilizado las reglas "de y entre probabilidades" en el proceso de resolución del problema. Cuando las cantidades de los problemas de probabilidad condicional están expresadas en frecuencias absolutas y/o en porcentajes hacen que el resolutor clasifique el problema de probabilidad condicional en un problema de asignación de probabilidades, por el modo de resolución. Y si en la pregunta del problema se pide por un porcentaje, P1, P4 y P6, la mayoría de los estudiantes resuelven reconociendo los sucesos y los cardinales de los conjuntos que representan estos sucesos, utilizando estrategias de la aritmética y sin asignar probabilidades a los sucesos. Los estudiantes participantes en la segunda fase han resuelto los problemas, principalmente, utilizando estrategias aritméticas y asignando probabilidades o porcentajes a la pregunta del problema. De los 80 estudiantes que han participado en esta investigación podemos asegurar que 25 han recibido enseñanza acerca de la probabilidad condicional. Estos estudiantes son los 10 estudiantes de la Facultad de Matemáticas y los 15 estudiantes de 2º de Bachiller de Ciencias Sociales. Luego, podríamos concluir que, en coherencia con la enseñanza recibida, la mayoría de los estudiantes sólo pueden utilizar la aritmética para resolver los problemas. Pero si observamos las tablas correspondientes a los niveles educativos de 2BCCSS y EFM (consultar anexo 5) notamos que estos estudiantes también resuelven utilizando estrategias aritméticas y asignando probabilidades. Por lo que, independientemente de los conocimientos adquiridos, los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en frecuencias absolutas y/o en porcentajes son problemas de asignación de probabilidades.

Con todo esto reafirmamos y completamos los resultados de las investigaciones citadas anteriormente. Añadimos a la conclusión del mayor éxito en los problemas de probabilidad con enfoque frecuencial, un orden en lo que respecta a la influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad. Una de las conclusiones de la primera fase, daba cuenta del éxito en los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en porcentajes frente a los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en términos de probabilidad. En la segunda fase encontramos que hay mayor éxito en los problemas con los términos expresados en frecuencias absolutas frente a los problemas con los términos expresados en porcentaje, independientemente de los conocimientos de los resolutores. A partir de estos conocimientos, proponemos una mejora en la organización del proceso de enseñanza de los problemas de probabilidad y en particular de los problemas de probabilidad condicional, atendiendo a la naturaleza de las cantidades presentes en estos problemas. Para empezar la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional, empezaremos con problemas con los datos expresados en frecuencias absolutas, después continuaremos con problemas con los datos expresados en porcentajes, y por último trabajaremos los problemas de probabilidad con los datos expresados en términos de probabilidad.

Por otro lado, y siguiendo la observación de la resolución con éxito y la influencia de la naturaleza de las cantidades presentes en el problema, en los problemas P2, P3, P5 y P6 con cantidades en porcentajes, la mayoría de estudiantes resuelven utilizando como estrategia aritmética los porcentajes. En P1 y P4 donde los datos son frecuencias absolutas y el dato condicional es un porcentaje, los estudiantes, en general, resuelven utilizando como estrategias aritméticas la regla de tres o en combinación con los porcentajes.

Así reafirmamos y ampliamos una conclusión de trabajos anteriores (Huerta y Lonjedo 2003a, 2003b, 2006; Lonjedo 2003; Lonjedo y Huerta 2005): la naturaleza de los datos es un factor influyente en la utilización de estrategias en el proceso de resolución del problema. Los problemas en los que los datos no son términos de probabilidad son resueltos por los estudiantes utilizando estrategias de resolución del razonamiento proporcional. Y además, dependiendo de la pregunta del problema, si la pregunta es una probabilidad condicional los estudiantes utilizan tanto la regla de tres como los porcentajes expresados en forma de fracción para calcular la probabilidad condicional pedida.

Los estudiantes de la facultad de matemáticas abandonan el uso de la regla de tres en la resolución de los problemas P2, P3, P5 y P6. La mayoría resuelven utilizando los porcentajes expresados en forma de fracción. En P1 y P4 estos estudiantes utilizan la regla de tres para calcular la probabilidad condicional pedida expresada en porcentajes.

Pero siguiendo con la naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional, el expresar la cantidad que da cuenta de la probabilidad condicional de forma diferente al resto de datos induce al resolutor a la interpretación deseada del dato condicional. Más aún, el expresar la cantidad que presenta el dato condicional en porcentajes y el resto de datos en frecuencias absolutas, favorece el éxito en la resolución del problema evitando la interpretación de ésta por una intersección. Esta conclusión la afianzamos con el estudio de las tres versiones de dos problemas de la segunda fase, P1 y P4. Sabemos que los problemas de probabilidad condicional con enfoque frecuencial tienen mayor porcentaje de éxito frente a los problemas en los que las cantidades son términos de probabilidad, confirmamos esta tesis y añadimos que, si el problema es de probabilidad condicional y en la parte informativa una dato es una condicional, entonces, el hecho de tener los datos en frecuencias absolutas y la condicional en porcentaje hace que ésta se diferencie del resto de datos e induce al resolutor a la interpretación deseada de este dato. Ya hemos escrito que en una propuesta de enseñanza en el currículo de Matemáticas de la enseñanza secundaria, estos problemas serán los primeros que trabajaremos, siempre expresando la pregunta del problema en porcentajes, incluyéndolos en unidades de razón y proporción de cursos de la enseñanza secundaria obligatoria, en los que el currículo oficial actual no incluye el concepto de probabilidad condicional.

Un factor que no influye en la resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional es el grado de complejidad estructural. Ordenamos los problemas de la segunda fase teniendo en cuenta el grado de complejidad estructural, y podemos afirmar que éste no ha sido un factor influyente en el proceso de resolución del problema, por cuanto el éxito en la resolución de estos problemas no ha seguido el orden que proponía el grado de complejidad estructural de cada problema.

En cuanto a la utilización de destrezas heurísticas en el proceso de resolución por los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas, algunos estudiantes de la facultad de matemáticas y algunos estudiantes de 2BCCSS son los que las utilizan. Los estudiantes de 2º de Bachiller utilizan los diagramas de árbol, aunque algunos de estos estudiantes utilizan un esquema con la estructura parecida a la de un diagrama un árbol y utilizan en el esquema las reglas de cálculo propias del árbol. Dos estudiantes de la Facultad de Matemáticas utilizan las tablas de contingencia en la resolución de algunos problemas.

La estructura gramatical elegida para presentar la probabilidad condicional en todos los problemas de esta segunda fase, tanto en el dato como en la pregunta del problema, DE LOS QUE, DE LAS QUE, DE LOS, DE LAS, es una estructura que favorece la interpretación deseada del dato condicional, ya que encontramos problemas en los que el porcentaje estudiantes que manifiestan estas interpretaciones no deseadas de la probabilidad condicional es cero. Por tanto es una construcción a tener en cuenta en la creación de problemas de probabilidad condicional.

Hemos visto que en el estudio comparado de las tres versiones de P1, la redacción del texto del problema ha tenido que ver en el éxito de los alumnos. El crecimiento del porcentaje de estudiantes que presentan una resolución con éxito en P1, frente a las otras versiones, es debido fundamentalmente a dos factores: la eliminación de las palabras que producían ambigüedad en el texto y la presentación de las cantidades en frecuencias absolutas. Se ha realizado una mejora al eliminar las palabras, Y, TAMBIÉN, que producían ambigüedad en el texto, induciendo al resolutor a la interpretación de la condicional por intersección.

Somos conscientes de que, en la resolución de problemas de probabilidad condicional existen dificultades que no tienen que ver, en principio, con conceptos de probabilidad, sino con conceptos básicos de número racional y razonamiento proporcional. Garfield y Ahlgren (1988) así lo indican, y en este trabajo de investigación lo hemos corroborado, ya que los estudiantes participantes en nuestra investigación cometen errores, sobre todo, en la utilización y el cálculo de porcentajes. Este factor, la dificultad en los conceptos básicos de fracción, número decimal y porcentaje, se debe tener en cuenta también en la propuesta de enseñanza. El incluir estos problemas en las unidades de razón y proporción, nos ayudará a reforzar el trabajo con los porcentajes además de iniciar el estudio de los conceptos probabilísticos.

Este estudio presenta implicaciones en la enseñanza al proponer una nueva organización de la enseñanza de la probabilidad condicional, haciendo uso de las unidades de razón y proporción como precursores en este concepto.

5. Conclusiones. Implicaciones en la enseñanza.

La estructura de este capítulo viene dada según los objetivos de la investigación. Por tanto dividimos este capítulo en tres partes que tienen que ver con los tres objetivos generales. Presentamos estas partes ordenadas de la siguiente manera:

5.1. Conclusiones del estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal

5.2. Conclusiones del estudio de la resolución de problemas de probabilidad condicional. Mostramos las conclusiones de la influencia de ciertos factores en los procesos de resolución de ciertos problemas ternarios de probabilidad condicional.

5.3. Implicaciones en la enseñanza. Proponemos una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas de probabilidad condicional.

5.1. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE ENUNCIADO VERBAL

En esta investigación hemos presentado un estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal analizando la estructura de los mismos y analizando también la probabilidad condicional en los currículos oficiales españoles y en los libros de texto.

Conclusiones del análisis de la estructura de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal

El análisis de la estructura de los problemas de probabilidad condicional y su correspondiente clasificación lo hemos realizado atendiendo a dos componentes:

★ componentes que tienen que ver con la estructura de los datos, así como la pregunta del problema.

★ componentes que tienen que ver con la resolución del problema, como la naturaleza de los datos y de la pregunta presentes en el problema y la estructura semántica que implica tanto a la forma de expresión de sucesos y probabilidades y a sus significados.

COMPONENTES QUE TIENE QUE VER CON LA ESTRUCTURA DE LOS DATOS

Para estudiar los problemas de probabilidad condicional atendiendo a estos componentes, clasificamos los problemas ternarios de probabilidad condicional en Niveles, Categorías y Tipos. El Nivel y la Categoría tienen que ver con los datos del problema y el Tipo con la pregunta del problema. Después de hacer una lectura en términos de probabilidad, el Nivel, N_i i=1, 2, 3, 4, da cuenta del número de probabilidades condicionales que presenta el problema, a saber, 0, 1, 2, 3. La Categoría, C_i, i=1, 2, 3, tiene que ver con el número de probabilidades marginales que presenta el problema, 0, 1 y 2 respectivamente. Por último, el Tipo da cuenta de la pregunta del problema. Así T_1 indica que en el problema se pregunta por una probabilidad condicional, T_2 indica que la pregunta del problema es una probabilidad marginal y T_3 nos dice que el problema nos pide calcular una probabilidad de la intersección.

En la tabla 4.6 recogemos esta clasificación. Recordamos esta tabla.

	N_1			**N_2**			**N_3**			**N_4**		
C_1	C_1T_1			C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3
C_2	C_2T_1			C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3	C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3			
C_3	C_3T_1			C_3T_1		C_3T_3						

Tabla 4.6: Clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional atendiendo al Nivel, Categoría y Tipo

Las celdas vacías indican que no podemos encontrar ni crear problemas de probabilidad condicional que cumplan las condiciones de dichas celdas. Por ejemplo, la celda que se corresponde con $N_1C_3T_3$ está vacía ya que N_1C_3 indica que el problema presenta tres datos que son probabilidades de la intersección, por lo que no puede preguntar por una intersección ya que no tendríamos problema de probabilidad condicional. La familia de problemas que pertenecen a cada celda queda descrita con el vector $N_iC_jT_h$, con $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 3$, y $1 \leq h \leq 3$.

El hecho de crear esta clasificación de problemas ternarios de probabilidad condicional, no implica que pensemos que sea necesario que el resolutor trabaje todas las clases de problemas que presentamos. Pensamos que esta clasificación es una herramienta para que el docente, desde su conocimiento, organice la enseñanza de la probabilidad condicional y así favorezca el aprendizaje de este concepto, por ejemplo completando la colección de problemas ternarios de probabilidad condicional que presenta el libro de texto, según quiera hacer hincapié en el trabajo de la probabilidad condicional en los datos o/y en la pregunta del problema.

Estudiamos la relación de los diagramas de árbol y las tablas de contingencia con los vectores que identifican los problemas ternarios de probabilidad condicional. En general podemos pensar que para resolver un problema ternario de probabilidad condicional nos basta con utilizar los diagramas de árbol, pero podemos afinar el uso de diagramas de árbol y tablas de contingencia según el vector con el que se describe el problema. En este estudio comprobamos además qué tipología de problemas ternarios de probabilidad condicional son problemas de resolución algebraica y problemas indeterminados, según la ubicación de los datos en los diagramas de árbol. Los problemas indeterminados se encuentran dentro de algunas familias de N_2, concretamente algunos problemas de N_2C_1, de N_2C_2 y los problemas de resolución algebraica se encuentran dentro de algunas familias de N_3, de N_3C_1 y de N_3C_2 y todos los problemas de N_4. Si pensamos en la arquitectura de un diagrama de árbol, y por ejemplo tenemos un problema que se describe con N_2C_2, si los datos del problema están situados en la misma rama del árbol no podremos calcular otras cantidades que no sean las que pertenecen a esa rama, por lo que, independientemente del tipo, T_h $1 \leq h \leq 3$, todos los problemas con estas características serán indeterminados.

COMPONENTES QUE TIENE QUE VER CON LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En el proceso de resolución de los problemas de probabilidad condicional, existen diferentes factores, variables de tarea, que influyen en las conductas de los estudiantes a la hora de resolverlos. Sabemos que el conocimiento de estas variables por parte del docente es uno de los elementos que permitirá elegir los medios para favorecer el aprendizaje. Uno de estos factores es el de la identificación correcta de los sucesos implicados y la correspondiente asignación de sus probabilidades. Previo a esto, existen factores que influyen en los estudiantes a la hora de establecer una correcta correlación entre los datos y los sucesos. Uno de estos factores es la naturaleza de las cantidades presentes en el problema. Otro de estos factores es la estructura gramatical de las oraciones condicionales que presentan el dato y/o la pregunta condicional del problema.

LA NATURALEZA DE LAS CANTIDADES PRESENTES EN EL PROBLEMA

Con respecto a la naturaleza de las cantidades presentes en los problemas de probabilidad condicional, encontramos cuatro grupos:

★ Los datos expresados en términos de probabilidad

Si las cantidades se presentan en términos de probabilidad, entonces cuantifican la probabilidad de que un suceso A se realice mediante $p(A) \in [0, 1]$

★ Los datos expresados en términos de frecuencias absolutas

La cantidad dada en términos de frecuencia tiene significado, el del cardinal del conjunto que representa. Como $A|B$ no es formalmente un suceso, no podemos considerar un conjunto que lo represente. Luego en un problema de probabilidad condicional los datos que se refieren a una probabilidad condicional no pueden ser expresados en frecuencias absolutas. Por otro lado, cuando en un problema ternario de probabilidad condicional los datos están expresados en frecuencias absolutas, no podemos resolver el problema con tres datos. Necesitamos un cuarto dato, habitualmente el tamaño de la muestra, para poder llegar a la solución del problema.

★ Los datos expresados en términos de razón

Cuando las cantidades se expresan en términos de razón, implícitamente se presentan en términos de probabilidad, y es el resolutor quien decide transformar o usar las razones como probabilidades o no. Encontramos razones expresadas tanto verbalmente como numéricamente.

★ Los datos expresados en combinación

Existen problemas de probabilidad condicional en los libros de texto en los que los datos no están expresados en un único formato.

Es importante tener un conocimiento de las posibles naturalezas de las cantidades de un problema ternario de probabilidad condicional porque es un factor influyente en el proceso de resolución de los problemas ternarios de probabilidad condicional. El conocimiento por parte del docente y/o de los autores de los libros de texto de estas posibles naturalezas así como de su influencia en el proceso de resolución de los problemas puede ayudar a la organización y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas ternarios de probabilidad condicional, tal y como sugerimos al final de este capítulo.

LA ESTRUCTURA GRAMATICAL DE LAS ORACIONES CONDICIONALES

Con respecto a la estructura gramatical de las oraciones condicionales que presentan el dato y/o la pregunta condicional del problema, presentamos un estudio de las posibles estructuras gramaticales en castellano que podemos utilizar para expresar el dato y/o la pregunta condicional en el enunciado del problema. En este estudio se presenta la estructura SI como estructura condicional por excelencia, pero a la vez muestra diferentes construcciones condicionales y otras parafraseables por construcciones condicionales. A la hora de crear un problema de enunciado verbal es importante crear un texto que no presente ambigüedades. Encontramos problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal en los libros de texto que presentan ambigüedades en la expresión de la probabilidad condicional, utilizando palabras como TAMBIÉN, Y, ADEMÁS, que invitan al resolutor a la interpretación clásica de la probabilidad condicional por la probabilidad de la intersección. Éstas no deben utilizarse en la expresión escrita de la probabilidad condicional. Por otro lado, es importante conocer las estructuras gramaticales de la lengua castellana que podemos utilizar para expresar la condicionalidad, de forma que el receptor-resolutor la interprete de forma conveniente. El conjunto de estructuras que presentamos es amplio y sería interesante en trabajos posteriores investigar la resolución de problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal haciendo uso de las diferentes estructuras, con el fin de poder crear una colección de éstas que favorezcan la interpretación deseada de la condicionalidad.

Conclusiones del análisis de la probabilidad condicional en los currículos de la enseñanza secundaria en España y en libros de texto

Realizamos el análisis de la resolución de los problemas de probabilidad condicional atendiendo a los currículos españoles y a los libros de texto.

LOS CURRÍCULOS ESPAÑOLES

El análisis de los currículos españoles lo realizamos para mostrar cómo se ha querido que fuera la enseñanza de la probabilidad condicional en nuestro país desde 1934. A la vista de éstos observamos que se ha producido un avance en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad desde lo que se propone en los currículos actuales.

LOS LIBROS DE TEXTO

Utilizamos la clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional en Niveles, Categorías y Tipos, para el análisis de los problemas de probabilidad condicional que presentan los libros de texto. Así, derivado de dicho análisis, hemos estudiado textos escolares desde 1975 hasta el 2002, con la única intención de explorar cuál ha sido la presencia o ausencia de los problemas de probabilidad condicional y qué tipología de problemas está presente o ausente. La tipología presente en los libros de texto por excelencia es $N_3C_2T_1$ y $N_3C_2T_2$, es decir, la mayoría de los problemas de probabilidad condicional presentes en los libros de texto muestran dos cantidades que son probabilidades condicionales o datos interpretables como éstos y una probabilidad marginal, y la pregunta es o una probabilidad condicional o una probabilidad marginal. Los problemas de N_1, en los que en los datos no hay probabilidades condicionales, también suelen aparecer, utilizando las tablas de contingencia para mostrar sus datos, generalmente en frecuencias absolutas.

Observamos como no todos los tipos de problemas que podemos considerar han estado ni están presentes en los libros de texto escolares. Las razones de estas ausencias no las podemos saber, aunque probablemente estén relacionadas con el tipo de solución que requieran: algebraica o aritmética (Yáñez, 2000; Huerta y Lonjedo, 2003). El hecho de la ausencia de estos tipos de problemas resta efectividad a la enseñanza de la probabilidad escolar, pues priva a los estudiantes de usarla en contextos y situaciones problemáticas variadas, mostrándose el uso de ésta en situaciones repetidas en donde la estructura del problema no varía y sólo se varía el contexto y la presentación de los datos, ya sea organizada o no. Actualmente, como implicación directa de este trabajo, en el Departament de Didàctica de les Matemàtiques de la Universitat de València se está realizando una investigación acerca de los diferentes contextos y situaciones problemáticas que presentan los problemas de probabilidad condicional utilizados por los estudiantes en las distintas titulaciones de la Universitat de València. Es interesante conocer qué tipo de datos y proposiciones abordan las aplicaciones de la probabilidad condicional, cuáles son los usos reales más comunes de situaciones de probabilidad condicional, qué niveles, categorías y tipos se muestran, realmente, en las aplicaciones y situaciones del mundo real. Con este nuevo estudio se complementará esta investigación, de forma que sabiendo los usos de la probabilidad condicional podamos mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El producto del análisis de los libros de texto nos permite seleccionar, de las dos tipologías ausentes, N_2 y N_4, una de ellas, N_2, con el fin de poder abordar el estudio de esta tipología a fondo y de su resolución por los estudiantes. El porqué de esta elección es debido a que los problemas pertenecientes a N_4 son problemas de resolución algebraica, y en el currículo de Matemáticas del Estado Español no se propone trabajar en resolución de problemas aquellos que presentan solución algebraica.

ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE NIVEL 2

En el estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2 de resolución aritmética, analizamos la estructura de los datos utilizando los grafos trinomiales con el fin de clasificar las familias de problemas de este nivel, teniendo en cuenta el número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas (grado de complejidad estructural) necesarias para alcanzar la solución del problema. Es importante a la hora de crear un problema de probabilidad condicional esta clasificación, ya que permite conocer el número mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para la resolución de un problema según los datos y la pregunta del problema. Estas clasificaciones las hemos utilizado para crear algunos de los problemas de las pruebas que hemos utilizado en esta investigación.

5.2. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

De igual forma elegimos N_2 para estudiar el proceso de resolución de los problemas de probabilidad condicional de solución aritmética, por ser el nivel de problemas de nuestra clasificación que tenemos estudiado. En esta investigación mostramos cómo estudiantes de diferentes niveles escolares, resuelven problemas de probabilidad condicional de este nivel ausente en los libros de texto y cómo existen factores que influyen tanto en el éxito en la resolución del problema como en el proceso de resolución.

La naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional es un factor muy influyente en el éxito en el proceso de resolución del problema y en el mismo proceso de resolución. Se alcanza un porcentaje de estudiantes superior en el proceso de resolución con éxito, cuando las cantidades de los problemas están expresadas en frecuencias absolutas y el dato condicional en porcentaje frente a los problemas que presentan sus cantidades expresadas en porcentajes. Además el hecho de presentar el dato condicional de forma diferente al resto de los datos influye positivamente en la interpretación de este dato, no solo cuando los datos son frecuencias absolutas y el dato condicional un porcentaje, sino también cuando los datos son porcentajes y el dato condicional está expresado verbalmente en forma de razón. En estos problemas, el porcentaje de estudiantes que presentan la interpretación del dato condicional como una intersección es más bajo, e incluso nulo. Con esta medida ya podemos empezar a romper con la interpretación tradicional de la probabilidad condicional con una intersección.

Si las cantidades presentes en el problema están expresadas en términos de probabilidad el porcentaje de éxito disminuye frente a los problemas de probabilidad condicional con los datos expresados en porcentajes. Esto ocurre en todos los niveles educativos investigados.

La naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional, no sólo es un factor influyente en el éxito en la resolución del problema, sino que también influye en el proceso de resolución. Si las cantidades del problema están expresadas en términos de probabilidad, los estudiantes que resuelven mayoritariamente estos problemas, son en coherencia, estudiantes conocedores de la teoría elemental de la probabilidad y, en el proceso de resolución de dichos problemas utilizan, generalmente, las relaciones de y entre probabilidades. Aunque algunos estudiantes, muy pocos, traducen los términos de probabilidad a porcentajes y utilizan la aritmética (regla de tres, porcentajes, proporciones) en el proceso de resolución.

Ahora bien, si las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional son frecuencias absolutas y/o porcentajes, la mayoría de los estudiantes, independientemente de la instrucción recibida, utilizan en el proceso de resolución del problema una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético, es decir, hacen una lectura del problema reconociendo los sucesos, los cardinales de los conjuntos que representan estos sucesos y utilizan la aritmética en la resolución del problema. Los datos numéricos presentes en los problemas de probabilidad que hemos considerado, adquieren significado para los estudiantes cuando están expresados en porcentajes y sobre todo en frecuencias absolutas. Así, cuando las cantidades tienen cierto significado para los estudiantes, pueden producir nuevas cantidades que sean relevantes para la resolución del problema y facilitan el proceso de resolución. En consecuencia, no decimos nada nuevo y confirmamos otros estudios, Fiedler (1988), Gigerenzer (1994), Gigerenzer & Hoffrage (1995), Hoffrage, Gigerenzer y otros (2002), Ojeda (1996), delMas (2002), si seguimos apostando por la resolución de problemas de probabilidad en los que los datos sugieran un enfoque frecuencial de la probabilidad, antes de que ésta se muestre de una manera formal.

Además, el éxito en el proceso de resolución de los problemas de probabilidad condicional no se acentúa cuando el número de relaciones necesarias para resolver el problema decrece. En este estudio hemos observado que el grado de complejidad estructural no ha sido un factor influyente en el proceso de resolución con éxito del problema.

En una probabilidad condicional, el suceso condicionante presenta una reducción del espacio muestral. Por lo que, en cuanto a la estructura semántica de las oraciones condicionales que presentan el dato y/o la pregunta condicional, ésta debe inducir al resolutor a la reducción del espacio muestral al formado por los casos que cumplan la condición. Desde luego, un resolutor entrenado no tiene dificultad a la hora de interpretar la probabilidad condicional en el dato y/o en la pregunta del problema. Entonces para los resolutores noveles ¿utilizamos siempre la misma construcción condicional? Este hecho contribuiría al empobrecimiento del lenguaje utilizado en la resolución de problemas de probabilidad condicional. En la búsqueda de construcciones condicionales adecuadas en la interpretación deseada de la probabilidad condicional presentada en un problema, podemos asegurar que las utilizadas en la prueba: DE LOS QUE, DE LAS QUE, DE LOS, DE LAS, construcciones isomorfas, favorecen esta interpretación de la condicionalidad. Por tanto, añadimos a la construcción condicional por excelencia, SI, estas construcciones, y así empezamos a crear una lista de construcciones favorables.

Por otro lado, a la hora de plantear un problema de enunciado verbal debemos tener en cuenta el vocabulario elegido y eliminar las palabras que producen ambigüedad en el texto. En el análisis de la primera fase observamos que en algunos problemas aparecían palabras como Y, TAMBIÉN, ADEMÁS, que en las oraciones subordinadas condicionales que utilizamos para introducir el dato condicional provocan la interpretación de éste como una intersección.

Además sabemos que el lenguaje utilizado en los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal no es el único factor que influye en la interpretación adecuada del dato y/o la pregunta condicional. Un estudiante de la Facultad de Matemáticas presenta procesos de resolución con éxito en los cinco primeros problemas de la prueba y en P6 interpreta el dato condicional como una intersección y resuelve en coherencia con esta interpretación. Este estudiante ha interpretado adecuadamente el dato y/o la pregunta condicional en todos los problemas menos en P6 y la estructura semántica de estos datos ha sido siempre la misma. Buscamos un rasgo diferenciador de P6 y encontramos que el dato condicional en P6 es el tercer dato después de dos datos intersección. Por lo que una lectura superficial del problema induce al resolutor a esta interpretación. Si observamos el porcentaje de estudiantes que producen esta interpretación en este problema es el más elevado: 81.81% (consultar anexo 5). Luego, no sólo el lenguaje es un factor influyente en la interpretación del dato condicional como una intersección. El orden en la presentación de los datos en un problema de probabilidad condicional descrito por N_2C_1, también influye en esta interpretación, cuando el dato condicional se presenta el tercero después de dos intersecciones.

Observamos diferentes factores que influyen en la interpretación de la probabilidad condicional de forma no deseada. Al conjunto de factores que ya hemos citado, añadimos otro factor influyente: determinada forma de presentar los datos. Cuando todos los datos de un problema de probabilidad condicional están expresados en porcentajes, algunos resolutores interpretan el porcentaje que da cuenta de la probabilidad condicional sobre el espacio muestral y no sobre el espacio muestral reducido.

5.3. IMPLICACIONES EN LA ENSEÑANZA

Estas conclusiones nos permiten preparar y organizar la enseñanza de la probabilidad condicional. Garfiel y Ahlgren (1988) piensan que es necesario dominar la idea de proporción y las operaciones con fracciones para enfrentar ideas de probabilidad. En este estudio hemos observado que, en la resolución de problemas de probabilidad condicional existen dificultades que no tienen que ver, en principio, con conceptos de probabilidad, sino con conceptos básicos de número racional y razonamiento proporcional. Los estudiantes participantes en nuestra investigación cometen errores, sobre todo, en la utilización y el cálculo de porcentajes.

Ojeda (1996) indica que podemos aprovechar el estudio de los conceptos probabilísticos como escenario para poner en juego otros conceptos matemáticos y así mediante su uso, dotarlos de significado. Desde hace décadas se propone el empleo de la resolución de problemas en la aprendizaje de la teoría matemática. Teniendo en cuenta estas ideas y los resultados obtenidos en nuestra investigación, proponemos una mejora en la organización de la enseñanza de la probabilidad condicional, haciendo uso de las unidades de razón y proporción como precursores en este concepto. Nuestra propuesta consiste en introducir la resolución de los problemas de probabilidad condicional en las unidades que se corresponden con Razón y Proporción de los dos últimos cursos de secundaria obligatoria, 3º ESO y 4º ESO, en los que en el currículo no está el concepto de probabilidad condicional. Esta propuesta de enseñanza no supone un cambio en el currículo, sino una introducción de unos problemas en unidades ya definidas del currículo. Introduciremos los problemas primero con datos en frecuencias absolutas y después con datos en porcentajes, y siempre preguntando por un porcentaje. En los problemas con los datos en frecuencias absolutas, se trabaja el reconocimiento de conjuntos, la asignación de cardinales a conjuntos con una determinada propiedad, además de la aritmética necesaria para resolver el problema y el uso de porcentajes para responder a la pregunta del problema. En los problemas con los datos en porcentajes, de forma implícita se trabaja el reconocimiento de sucesos y la medida que se asigna a estos sucesos, el porcentaje correspondiente. En la unidad de Probabilidad de estos cursos también podemos trabajar la resolución de estos problemas, de forma que la pregunta se haga en términos de probabilidad, para que, además del reconocimiento explícito de los sucesos, el proceso de resolución del problema finalice asignando la probabilidad al suceso correspondiente. En esta unidad trabajaremos estos problemas con cantidades en frecuencias absolutas y/o en términos de razón. En los libros de texto, en las unidades de introducción a la probabilidad, la mayoría de los problemas no son problemas en el sentido en el que nosotros los utilizamos. Son ejercicios de asignar probabilidades en fenómenos aleatorios, generalmente de juegos de azar y no hay ningún problema de este tipo. Al final de la unidad suelen haber algunos problemas propuestos para practicar la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos no incompatibles. No aparecen problemas verbales con la estructura de los que hemos presentado en este trabajo que pueden ubicarse en esta unidad, ya que en el proceso de resolución de los mismos los únicos conceptos probabilísticos necesarios son el concepto de probabilidad y la Ley de Laplace. Nuestra propuesta no es únicamente la de trabajar problemas de probabilidad condicional. Proponemos tener en cuenta problemas de probabilidad en los que la naturaleza de las cantidades presentes sea frecuencias y/o porcentajes, y se pregunte por una probabilidad.

Utilizamos en estos dos primeros escalones los problemas de probabilidad condicional como problemas de asignación de probabilidades. En este proceso de enseñanza ya se puede ir variando la estructura semántica de los problemas de probabilidad condicional con el fin de ir entrenando a los estudiantes en el conocimiento de las diferentes estructuras gramaticales posibles en la expresión de la condicionalidad.

Por último, trabajamos los problemas de probabilidad condicional en la unidad de Probabilidad Condicional, situada en los cursos de Bachiller, donde el resolutor se puede encontrar con problemas en los que las cantidades están expresadas de diferente forma, y es el resolutor el que decide si el problema de probabilidad condicional es un problema de asignación de probabilidades o de cálculo de probabilidades, según la lectura que haga del problema y apoyándose en las tablas de contingencia y en los diagrama de árbol.

Un objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas de probabilidad condicional, debe ser que, el resolutor, ante un PPC, sea capaz de decidir entre los diferentes estratos del SMS cuál de ellos, más abstracto o más concreto, va a utilizar en el proceso de resolución del problema.

En este estudio mostramos que los problemas de probabilidad condicional de solución aritmética de N_2 son resueltos por estudiantes de diferentes niveles escolares, con y sin conocimiento formal acerca de la teoría de la probabilidad. Proponemos su inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional, de forma que este proceso contenga contextos y situaciones problemáticas variadas.

En este proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas de probabilidad condicional, el docente-encargado de planificarlo, debería tener en cuenta tanto la clasificación en Niveles, Categorías y Tipos, como el estudio y clasificación posterior de las familias de los problemas de probabilidad condicional por niveles. Este estudio no está completo pues esta investigación presenta el de N_2. Se deja para futuras investigaciones el estudio de los niveles N_1, N_3 y N_4. Haciendo uso de los estudios que disponemos y que presentamos, indicamos cómo se puede hacer uso de estas herramientas, tal y como nosotros las hemos utilizado en el diseño de la prueba. Hemos visto que dentro del nivel, N_2, nos encontramos con diferentes familias que vienen dadas por las celdas de la tabla 4.10 que recordamos a continuación.

	N_2		
C_1	C_1T_1	C_1T_2	C_1T_3
C_2	C_2T_1	C_2T_2	C_2T_3
C_3	C_3T_1		C_3T_3

Tabla 4.10: Clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2

Tenemos 8 familias dentro de este nivel. En cada una de estas familias tenemos una clasificación según el grado de complejidad. Nosotros para completar la prueba de la segunda fase necesitábamos un problema de grado de complejidad estructural [p_{21}] y a la vez de T_3. Buscamos en las clasificaciones de las respectivas familias descritas por T_3 los problemas de la clase [p_{21}].

$N_2C_1T_3$

[p_{21}]	1 $N_2C_1T_3G_1$ 1 $N_2C_1T_3G_2$ 1 $N_2C_1T_3$ G_3 1 $N_2C_1T_3G_5$ 1 $N_2C_1T_3G_6$

Tabla 5.1: Clase de equivalencia [p_{21}] de la familia $N_2C_1T_3$

$N_2C_2T_3$

[p_{21}]	$1N_2C_2T_3G_4$ $1N_2C_2T_3G_5$ $1N_2C_2T_3G_6$ $1N_2C_2T_3G_8$

Tabla 5.2 Clase de equivalencia [p_{21}] de la familia $N_2C_2T_3$

$N_2C_3T_3$

[p_{21}]	$2N_2C_3T_3G_2$ $2N_2C_3T_3G_3$ $1N_2C_3T_3G_4$

Tabla 5.3 Clase de equivalencia [p_{21}] de la familia $N_2C_3T_3$

En cada una de las familias hemos realizado una clasificación por grupos, según la ubicación de los datos del problema en el GPPC. Los grupos de las diferentes familias no se corresponden y están definidos en el apartado correspondiente (ver en apartado 4.3, pp 217-242). Por ejemplo, G_3 en N_2C_1 está definido:

Las dos probabilidades de la intersección están relacionadas mediante una relación aditiva y la probabilidad marginal que generan las dos probabilidades de la intersección no está relacionada con la probabilidad condicional que tenemos como dato. (ver capítulo 4, p.218)

Como ejemplo tenemos este GPPC:

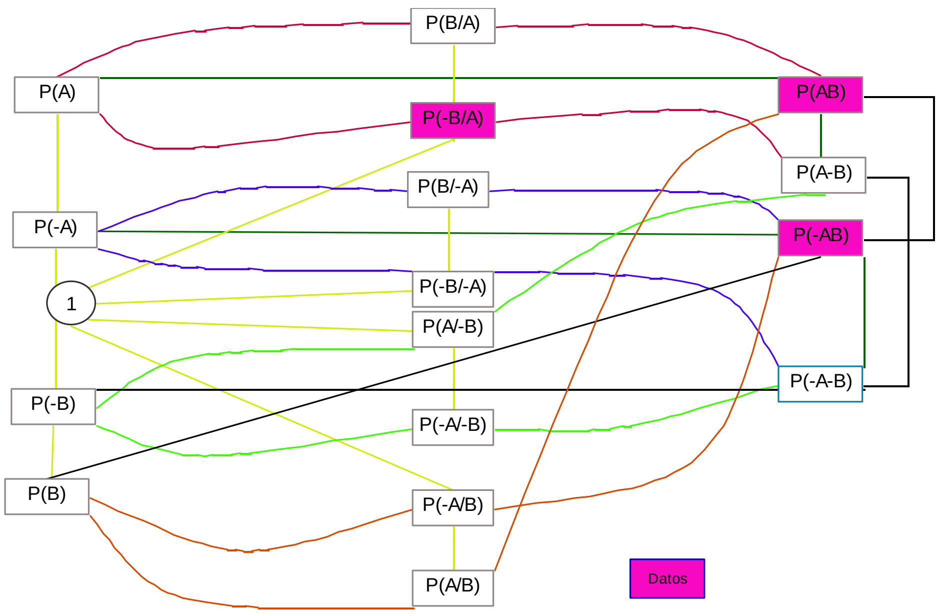


Figura 5.1: GPPC de G_3 en N_2C_1.

G_3 en N_2C_3 queda definido:

Los datos no están relacionados directamente entre ellos, es decir, cada una de las marginales no está relacionada con la condicional mediante *una multiplicativa. Además, la condicional dada genera con la marginal complementaria a una de las marginales dadas una probabilidad de la intersección que está relacionada con la marginal restante. (ver capítulo 4, p.239)*

Como ejemplo:

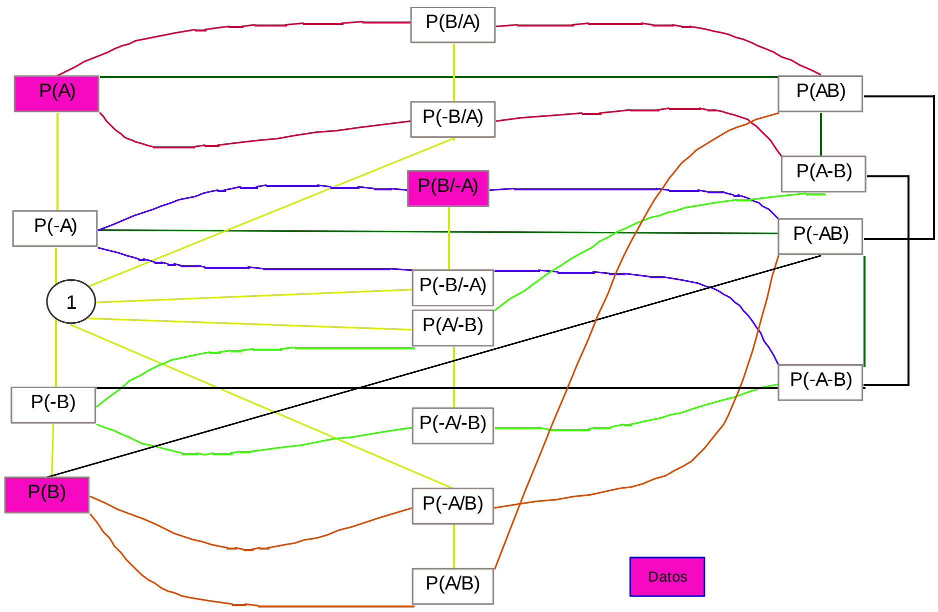


Figura 5.2: GPPC de G_3 en N_2C_3.

Para la prueba de la segunda fase elegimos un problema de este último grupo y creamos el enunciado:

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas. (ver capítulo 4, p. 317)

El diseño de un proceso de enseñanza-aprendizaje no debería ser tarea rápida, si queremos tener en cuenta los diferentes factores que pueden influir. Como no tenemos el estudio completo de todas las familias de los diferentes niveles, en principio se puede empezar a construir una colección de problemas sin tener en cuenta el grado de complejidad, y haciendo uso de los problemas que muestran los libros de texto en cuanto a los niveles N_1 y N_3 y del estudio de N_2 que presentamos en esta investigación.

6. Referencias Bibliográficas

Agustí, J.M y Vila, A. (1975). *Funciones 1º BUP* . Barcelona: Vicens Vives.

Athanassiadis, E.; Skoumbourdi, C.; and Kalavassis, F. (2002). Didactical classification of probability problems linked with their formulation, consultada en htpp://www.math.uoc.gr/~ictm2/proceedings/pap197.pdf el 15/04/2003.

Azcárate Goded, P. (1995). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad.* Granada: Comares.

Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, Modelización, Simulación. En *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 119-130) Zaragoza:ICE.

Batanero, C. (2002). Estadística y didáctica de la matemática: Relaciones, problemas y aportaciones mutuas. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls, (Eds), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 95-120) Universidad de Alicante.

Batanero, C.; Biehler, R.; Maxara, C.; Engel, J. and Vogel, V. (2004). Using Simulation to bridge teachers' content and pedagogical knowledge in probability, Paper presented at the ICMI Study 15. Aguas de Lindoia, Brazil.

Bentz H.J and Borotvcnik, M.G. (1985). On "Representativeness" –A Fundamental Statistical Strategy. In Bell, A; Low, B; Kilpatrick, J. (Eds), *Theory, Research and Practice in Mathematical Education* Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, UK.

Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® (2003) © 1993-2002 Microsoft.

Cerdán, F. Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos. Comunicación personal.

Cerdán, F.; Huerta, M. P. (en prensa). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática.*

Colera, J. y Gaztelu, I. (2002). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Anaya.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2003). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Anaya.

Colera, J. y Guzmán, M. (1995). *Matemáticas 3º de Bachillerato*. Madrid: Anaya.

Colera, J.; García, R. y Oliveira, M.J. (1998). *Matemáticas 4º ESO, opción* B. Madrid: Anaya.

Colera, J.; García, R. y Oliveira, M.J. (2002). *1º Bachiller Matemáticas* I. Madrid: Anaya.

Colera, J.; García, R. y Oliveira, M.J. (2002). *2º Bachiller Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Anaya.

Colera, J.; García, R. y Oliveira, M.J., (2002). *1º Bachiller Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Anaya.

Compostela, B.; González, A.; González, J.; Laborda, M.; y Menéndez, R. (1987). *Matemáticas 1º BUP*, Proyecto Ariadna. Madrid: Akal.

Cuadras, C.M. (1983). *Problemas de Probabilidades y Estadística, vol.1: Probabilidades*. Barcelona: Promociones Publicaciones Universitarias.

delMas, Robert C. (2002). A Review of the Literature on Learning and Understanding Probability, paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, April 1-5, 2002, consultada en http://www.gen.umn.edu/faculty_staff/delmas/area2002_rev_of_prob_lit.html#CONDITIONAL el 17/10/2005.

Dupuis, C. and Rousset-Bert, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilité: analyse en termes de registres de representation. *Repères – IREM*, 22, pp. 51-72.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 249-267) New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H.J. and Hogarth, R.M. (1986). Judging probable cause, *Psychological Bulletin*, 99, pp 3-19.

Engel A. (1975a). *L'enseignement des probabilités et de la statistique*, volumen 1. Paris: CEDIC.

Engel A. (1975b). The probabilistic abacus. *Educational Studies in Mathematics*, 6, pp. 1-22.

Etayo, J y Colera, J. (1978). *Matemáticas 1º*. Salamanca: Anaya.

Fernández Lajusticia, A. (2001) *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the Conjunction Fallacy on Subtle Linguistic Factors. *Psychological Research*, 50, pp.123-129.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8(2) pp. 153-165.

Freudhental, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, Traducción, notas e introducción de Luis Puig. 2001. Méjico: Cinvestav I.P.N.

Fridman, L. (1990). Los Grafos Trinomiales como Metalenguaje de los Problemas, Matemáticas. *Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, números 17 y 18, pp. 51-59.

García García, J. y López Pellicer, M. (1979). *Matemáticas COU*. Valencia: Marfil

Garfield, J and Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics. Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), pp. 254-267.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction betwenn single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). In G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161) Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. and Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review*, 102, pp. 684-704.

González, A. González, J. (1989). *Matemáticas II COU Opciones C y D*, Proyecto Ariadna. Madrid: Akal.

González, F. y Villanova, J. (1985). *Curso práctico de Matemáticas COU*. Barcelona: Eunibar.

Grass R. et Totohasina A. (1995a). Chronologie et casualité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionelle, *Recherches en didactique des Mathematiques*, 15(1) pp. 49-95.

Grass R. et Totohasina A. (1995b). Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionelle révélées par une méthode d'analyse des données: Implication-Similarité-Correlation, *Educational Studies in Mathematics,* 28, pp. 337-363.

Grupo Cero, (1982). *Matemáticas de Bachillerato curso 1*. Barcelona: Teide.

Grupo Erema: Martín M.A., Rey J.M. y Reyes M. (2002). *Estadística y Probabilidad*, Bachillerato, Cuaderno 4. Madrid: Bruño.

Guzmán, M. y Colera, J., (1991). *Selectividad Matemáticas II. Pruebas 1990*. Madrid: Anaya.

Hoffrage, U.; Gigerenzer, G.; Krauss, S. and Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not, *Cognition* 84, pp. 343-352.

Huerta, M. P. (2000). *Didáctica de la Probabilitat i l'estadística*. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València (documento interno).

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (1), pp. 75-86.

Huerta, M. P. y Lonjedo, M.A. (2003a). Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria, en *Encuentros Educativos. XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (XI JAEM) Edita: Consejeria de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias, Febrero 2005.

Huerta, M. P. y Lonjedo, M.A. (2003b). La resolución de problemas de probabilidad condicional. En Castro, Flores at alli… (eds), 2003, *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada.

Huerta, M.P y Lonjedo, M.A. (2006). The Nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem solving behaviour. In M.Bosch (ed.)(2006) *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 528-538. San Feliu de Guíxols, Spain.

Kahneman, D. and Tversky, A. (1972/1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (pp. 32-47) Cambridge: Cambridge University Press.

Kahneman, D. and Tversky, A. (1974/1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (pp. 3-20) Cambridge: Cambridge University Press.

Kahneman, D. and Tversky, A. (1980/1982). Casual schemas in judgments under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, (pp. 117-128) Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, pp 59-98.

Konold, C. (1995). Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics, *Journal of Statistics Educations* v.3, n.*1*, consultada en http://www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html el 17/10/2005.

Laplace, P.S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial.

Lazcano, I. y Barolo, P. (1981). *Matemáticas 1º BUP*. Madrid: Edelvives.

Llácer, I.; López, A. y otros (1991). *Lengua COU*. Valencia: ECIR.

Lonjedo M.A. (2003). *La resolució de problemes de probabilitat condicional: Un estudi exploratori amb estudiants de batxiller*, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València (Memoria de Tercer Ciclo no publicada)

Lonjedo M.A. y Huerta, M.P. (2004). Póster: Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. En *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*, Castellón del 15 al 17 de septiembre de 2004.

Lonjedo, M.A y Huerta, M. P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, de la Torre (eds), 2004, *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp 229-238, Universidade da Coruña.

Lonjedo, M.A. y Huerta, M.P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En Maz, Gómez y Torralbo (eds), 2005, *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Córdoba.

Lonjedo, M.A. y Valero, R. (2002). Una exploración del concepto de probabilidad con mapas conceptuales en estudiantes de bachillerato.

Implicaciones en la enseñanza. En *Actes de V Jornades d'educació matemàtica de la Comunitat Valenciana*, Setembre 2002.

López, V. y Sánchez Martín, J.L. (1975). *Matemáticas 1º BUP*. Madrid: SM.

Mamona-Downs, J. and Downs, M. (2005). The identity of problem solving, *Journal of Mathematical Behavior* 24, pp 385-401.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des arguments utilises par les élèves de classe de seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.5, nº 2, pp.187-214.

Maury, S. (1987). Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problemes, Information de la thèse d'Etat. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.8, nº 3, pp.313-322.

Negro, A. y Pérez, S. (1986). *Matemáticas 1º BUP* (Reimpresión 1986), Madrid: Alambra.

Negro, A. y Poncela, J.M. (1990). *Matemáticas COU, G2*. Madrid: Alambra.

Ojeda Salazar, A.M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional, *UNO*, 5, pp. 37-44.

Ojeda Salazar, A.M. (1996). Contextos, Representaciones y la idea de Probabilidad Condicional, *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 291-310) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ortiz De Haro, J.J, Batanero, C y Serrano, L. (1996). Las frecuencias relativas y sus propiedades en los textos españoles de bachillerato, *EMA*, 2(1), pp. 29-48.

Ortiz De Haro, J.J, Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto, *Suma* 38, pp.5-13.

Ortiz De Haro, J.J. (1998). Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los libros de texto de bachilerato. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Bases de Datos de Tesis Docotrales consultada en http://www.mcu.es/egi-bin/TESEO/BRSCGI?CMD=VERDOCandBASE=TSEOandDO el 08/06/2003.

Ortiz De Haro, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Parzysz, B. (1990). Un outil Sous-estimé: l'Arbre Probabiliste. *Bulletin APMEP* 372, fèvrier 1990, Francia, pp. 47-54.

Pérez Carreras, P. y Pérez Machado, A. (1988). *Matemáticas para COU*. Madrid: McGraw-Hill.

Pey, S. y Ruiz Calonja, J. (1967) *Diccionario de sinónimos, ideas afines y contrarios*. Barcelona: Teide.

Pollatsek, A.; Well, A.D.; Konold, C.; Hardiman, P. and Cobb, G. (1987). Understanding conditional probabilities, *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 40, pp. 255-269.

Polya, G. (1957). *How to Solve It* (2ª ed.) (Princeton, NJ: Princeton University Press) (Trad. Castellana, *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1965)

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Cuadernos de formación del profesorado, 12. ICE Universitat de Barcelona (pp 61-94) Barcelona: Horsori.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En Filloy, E. (Ed.) *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual.* Fondo de Cultura Económica, CINVESTAD. México DF, pp. 174-186

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid.

Quesada, V., Isidoro, A. y López, L.A. (1982). *Curso y ejercicios de Estadística*. Madrid: Alambra.

Ramírez, A.;Esteve, R. otros, (1989). *Matemáticas I COU. Opciones A y B*. Valencia: Ecir.

Ramírez, A.;Esteve, R. Palomero, Montesinos, (1996a). *Matemáticas 4º ESO, Opción B*. Valencia: Ecir.

Ramírez, A.;Esteve, R. y otros (1991). *Matemáticas 1º BUP*. Valencia: Ecir.

Ramírez, A.;Esteve, R. y otros (1993). *Matemáticas 3º BUP*. Valencia: Ecir.

Ramírez, A.;Esteve, R. y otros (1996b). *Matemàtiques 4t ESO, Opciò B*. Valencia: Ecir.

Ramírez, A.;Esteve, R. y otros, (1988). *Matemáticas II COU. Opciones C y D*. Valencia: Ecir.

Ramírez, A.;Esteve, R. y otros, (2001). *2º Bachiller Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Valencia: Ecir.

Rasfeld, P. (2001). The role of statistics in school mathematics teaching today, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, consultada en http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl el 17/09/2001

Real Academia Española, (2001). *Diccionario de la Lengua Española*, Vigésimo segunda edición. Madrid: Espasa Calpe.

Rivero, M.L. (1977). *Estudios de gramática generativa del español* (pp 87-110). Madrid: Cátedra.

Rouan, O. et Pallascio, R. (1994). Conceptions probabilistes d'élèves marocains du secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, nº 42, vol 14/3, pp. 393-428.

Sanchez, E. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software FATHOM for developing probability concepts in statistics classroom. In B. Philips (ED.) *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 6). Cap Town: International Statistical Institute.

Sanchez, E. and Yáñez, G. (2002). Computational Simulation and Conditional Probability Problem Solving, *Hipótesis Alternativa*, 6

Santos, D. (1988). *Matemáticas COU, Opciones C y D*. Madrid: Santillana.

Schoenfeld, A. H. (1985) *Mathematical problem Solving*. Orlando, FL.: Academic Press.

Serrano, L.; Batanero, C.; Ortiz, J.J. y Cañizares, M.J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria, *Educación Matemática*, 10 (1), pp. 7-25.

Serrano, L.; Batanero, C.; Ortiz, J.J. y Cañizares, M.J. (2001). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios, *SUMA* 36, pp. 23-32.

Shaughnessy, J.M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? In R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325-350) Amsterdam: North Holland.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. In Grouws, D. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494) Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Taniguchi, P. (1988). *Cómo superar las matemáticas de 3º de BUP*. Barcelona: Edunsa.

Textos E.P, (1957). *Matemáticas Quinto Curso*. Madrid: Compañía Bibliográfica Española, S. A.

Tomeo Perucha, V. y García Contreras, C. (1990). *Matemáticas 1 BUP 600 ejercicios resueltos*. Madrid: Alhambra Longman.

Tversky, A and Kahneman, D (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review, 90*, pp 293-315.

Valdés, J. y Santos, J.J. (1975). *Matemáticas comunes COU*. Madrid: Bruño.

Viedma, J.A. (1972). *Exposición intuitiva y problemas resueltos de métodos estadísticos. Fundamentos y aplicaciones*. Madrid: Ediciones del Castillo.

Vizmanos J. R. y Anzola M. (1994). *Matemáticas 4º secundaria*, *Opción B*. Madrid: SM.

Vizmanos J. R. y Anzola M. (1995). *Matemáticas 4º secundaria, Opción A*. Madrid: SM.

Vizmanos J.R y Anzola M. (2003). *4º ESO opción B Gauss*. Madrid: SM.

Vizmanos J.R. y Anzola M. (2001). *2º Bachiller, Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*, *Algoritmo 2001*. Madrid: SM.

Vizmanos J.R. y Anzola M. (2003). *4º ESO opción B Algoritmo*. Madrid: SM.

Vizmanos, J.R.; Anzola, M y Primo, A. (1991). *Funciones 1. Matemáticas 1º BUP*. Madrid: SM.

Yañez, G. (2000). El Álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional. En Gómez, P., y Rico, L. (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 355-371) Granada: Editorial Universidad de Granada.

Yañez, G. (2002). Students' difficulties and strategies in solving conditional probability problems with computational simulation. In B. Philips (ED.) *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 6). Cap Town: International Statistical Institute.

Zaki, M. et Pluvinage, F. (1991). Démarches de résolution et de simulation face au problème de la ruine d'un joueur, *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 149-181.

Índice

En este anexo mostramos las diferentes situaciones de los datos en cada uno de los grupos en los que dividimos cada N_2C_i.

N_2C_1

Grupo 1, G_1

Las figuras 1, 2, 3y 4 dan cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

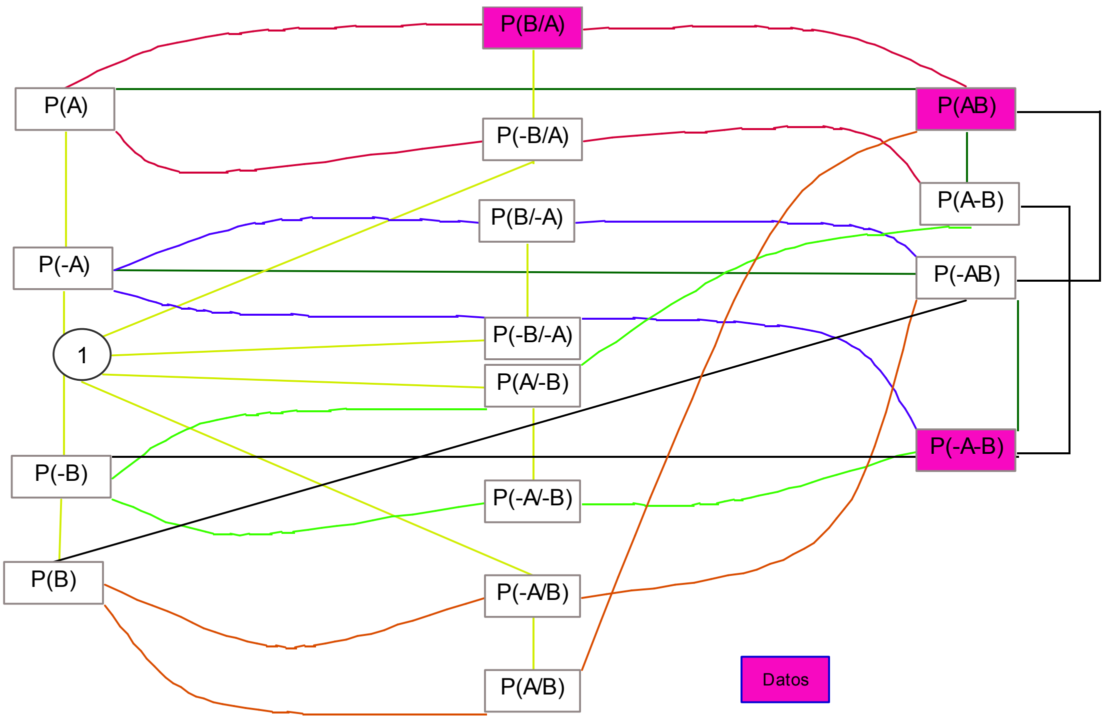


Figura 1

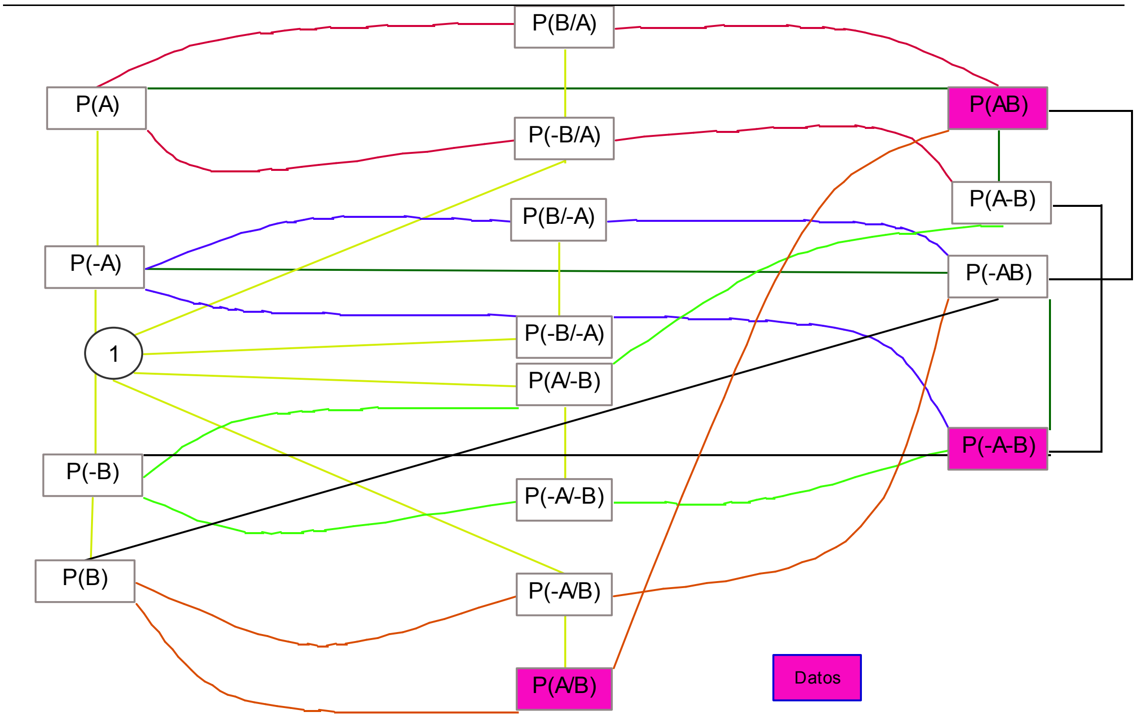


Figura 2

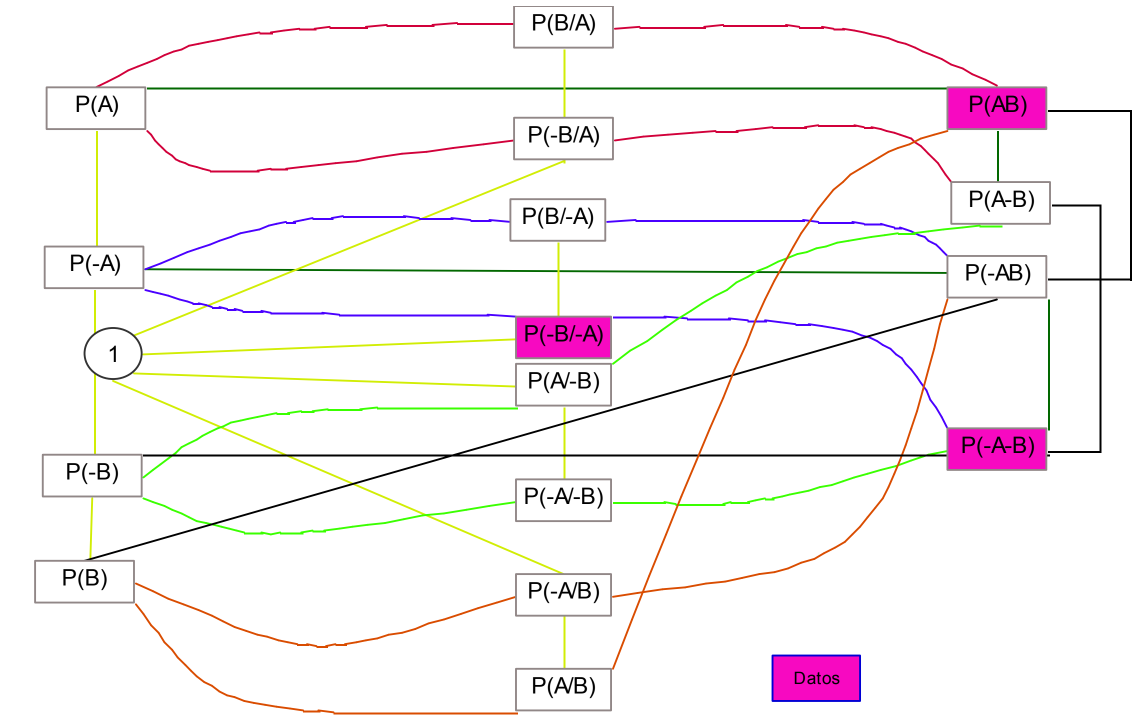


Figura 3

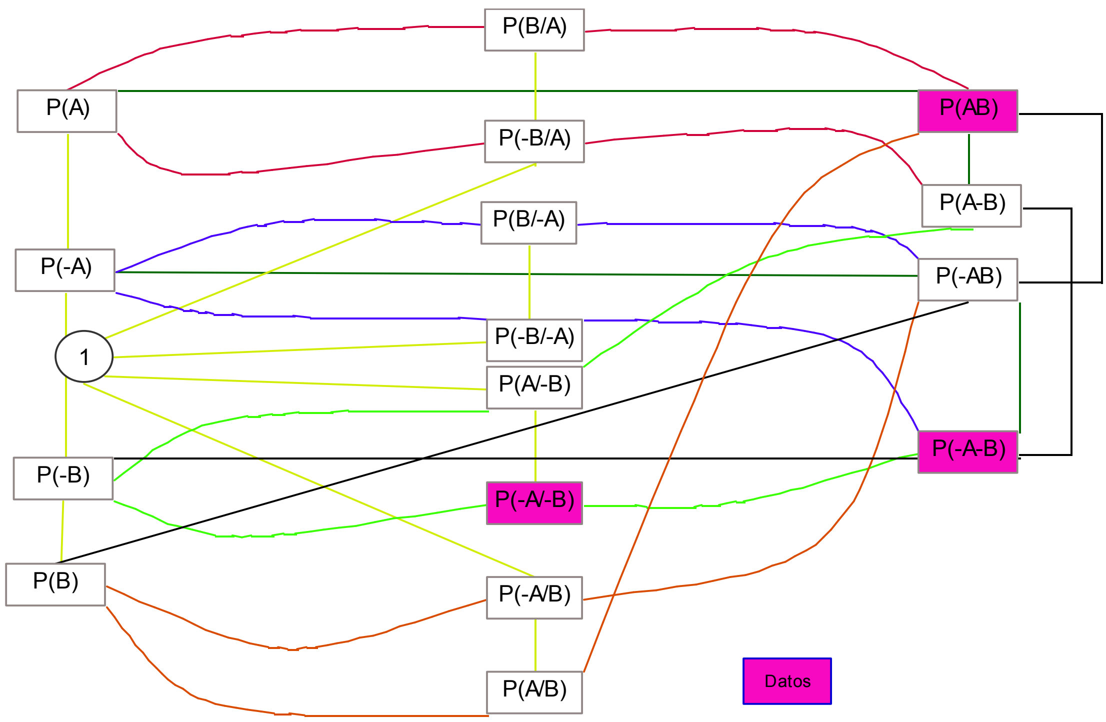


Figura 4

Grupo 2, G_2: figura 5 y 6

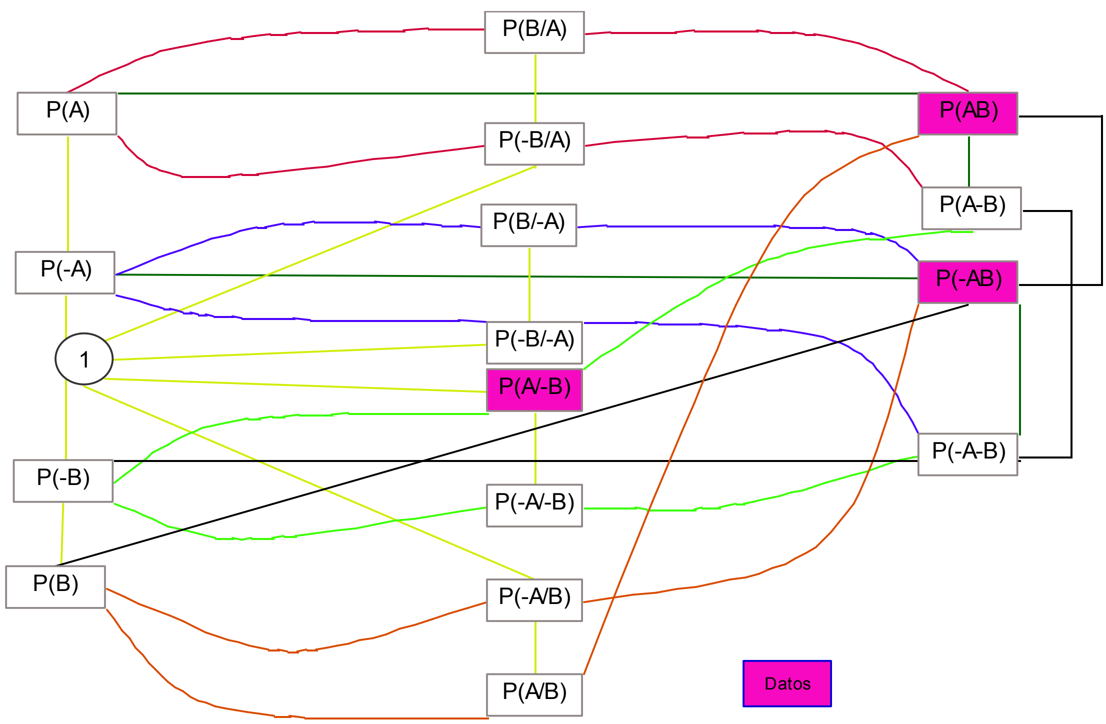


Figura 5

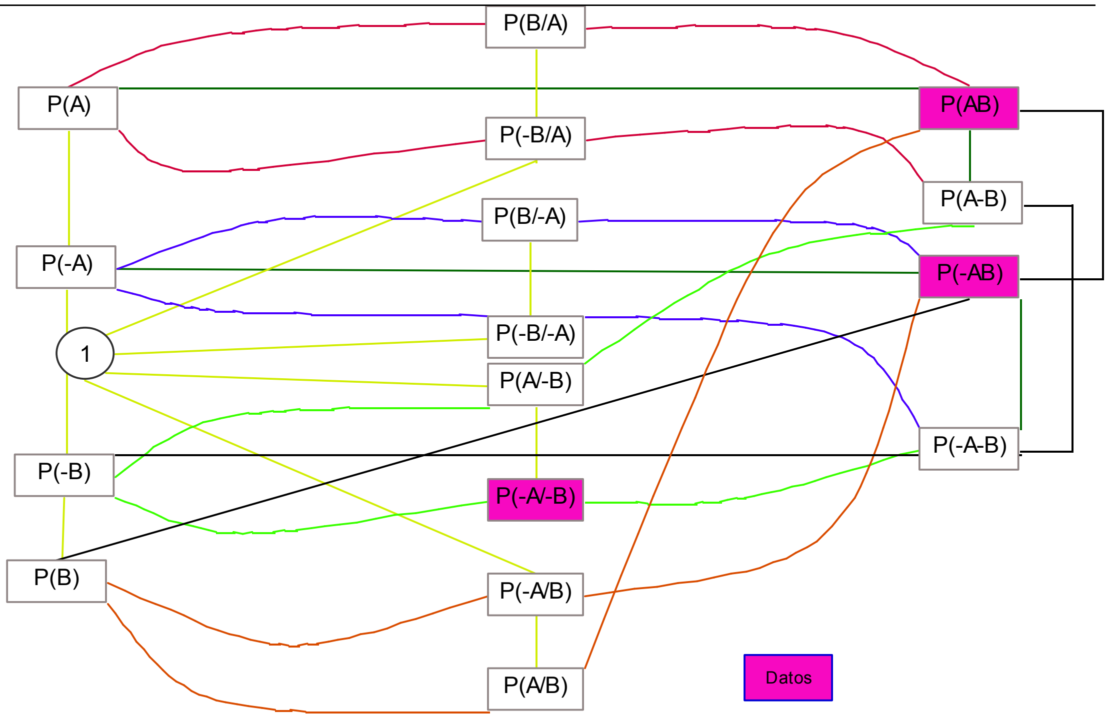


Figura 6

Grupo 3, G_3: las figuras 7 y 8 dan cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

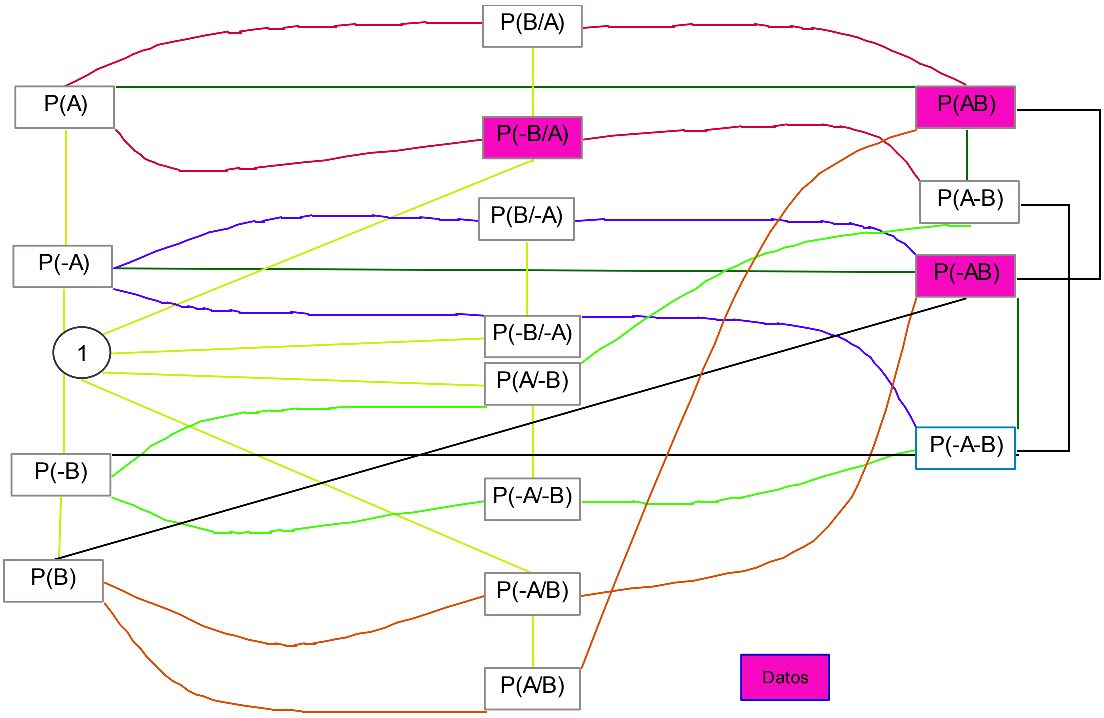


Figura 7

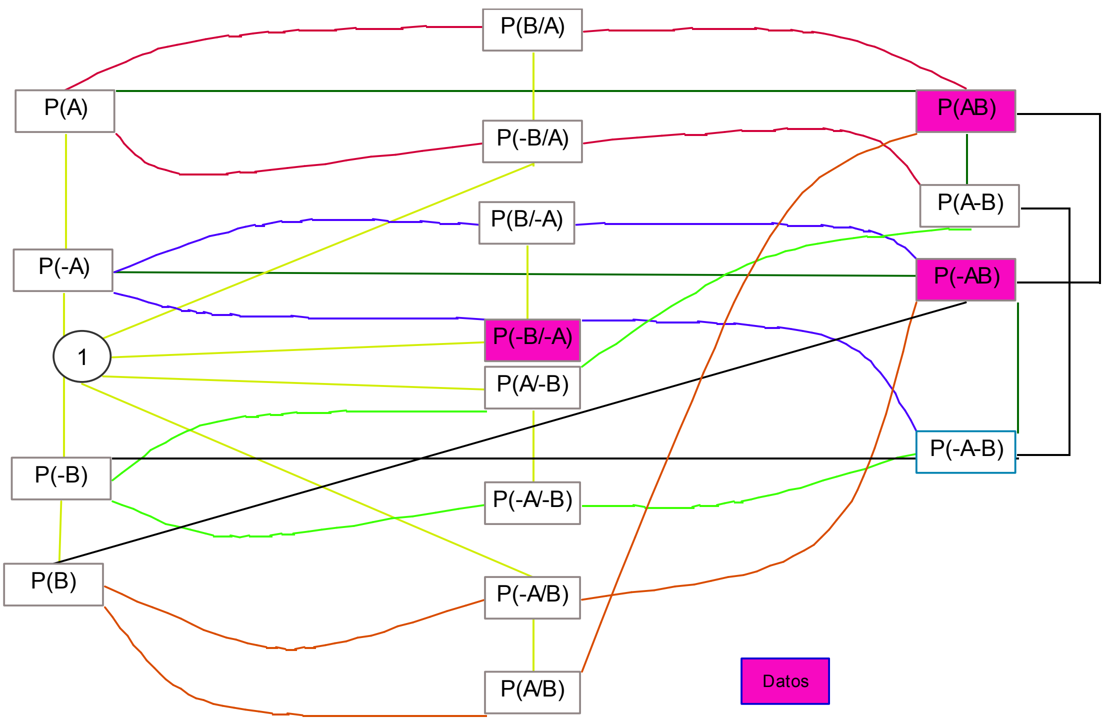


Figura 8

Grupo 4, G_4 Las figuras 9 y 10 dan cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

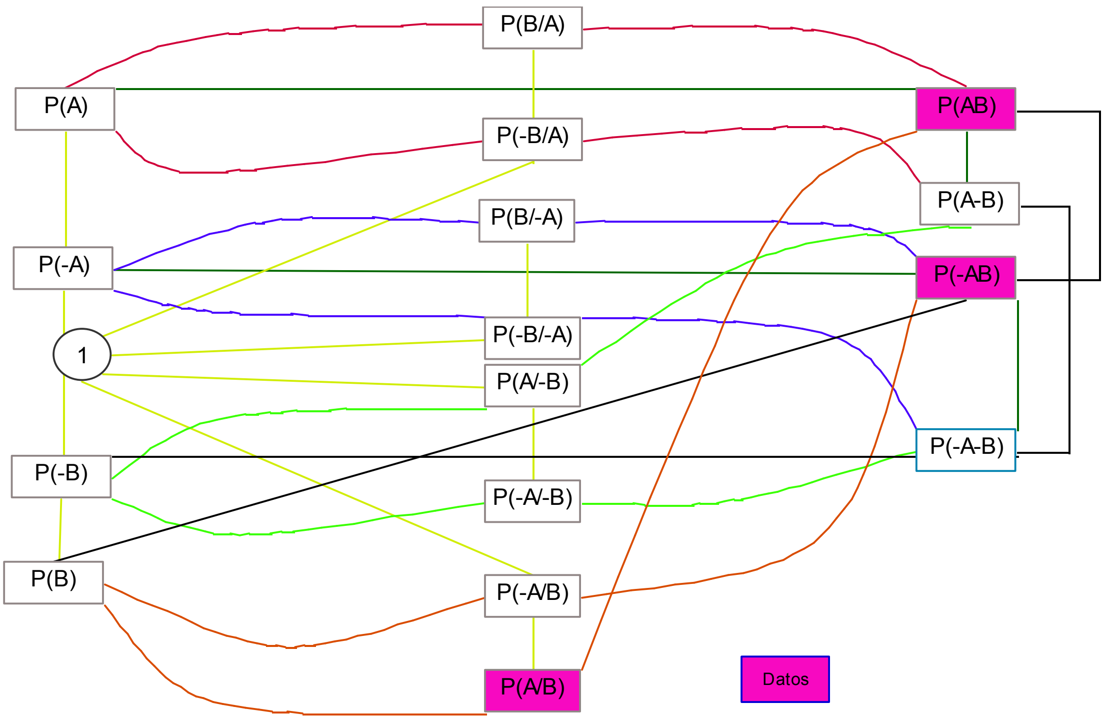


Figura 9

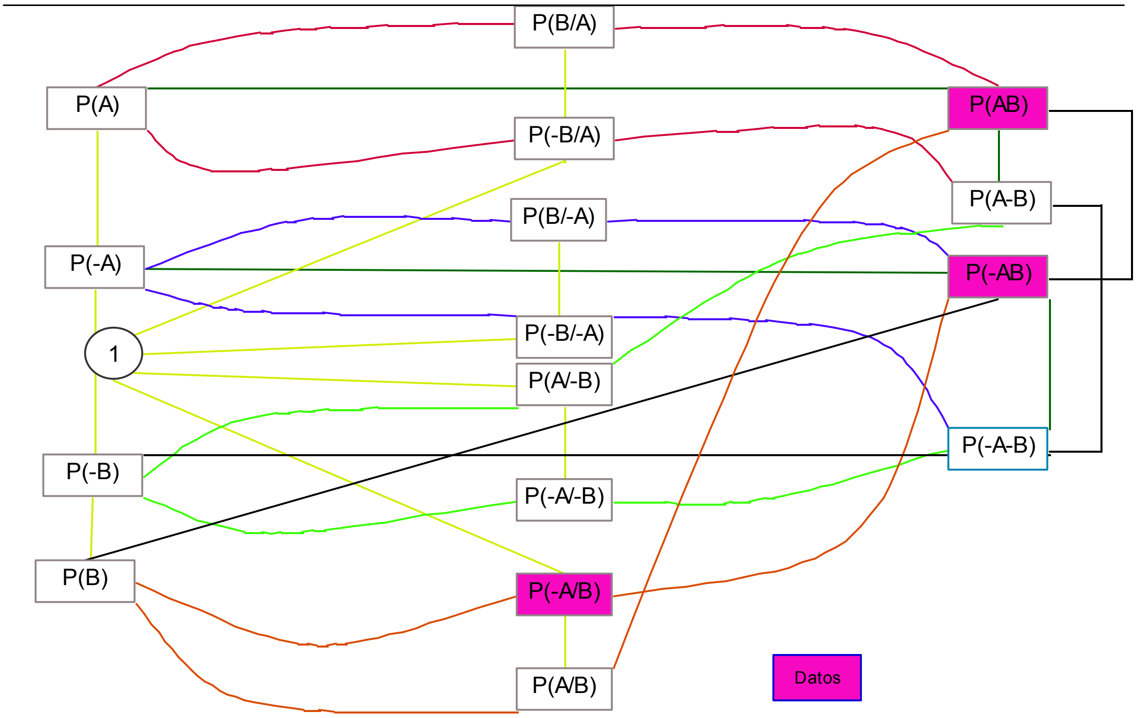


Figura 10

Grupo 5, G_5 Las figuras 11 y 12 dan cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

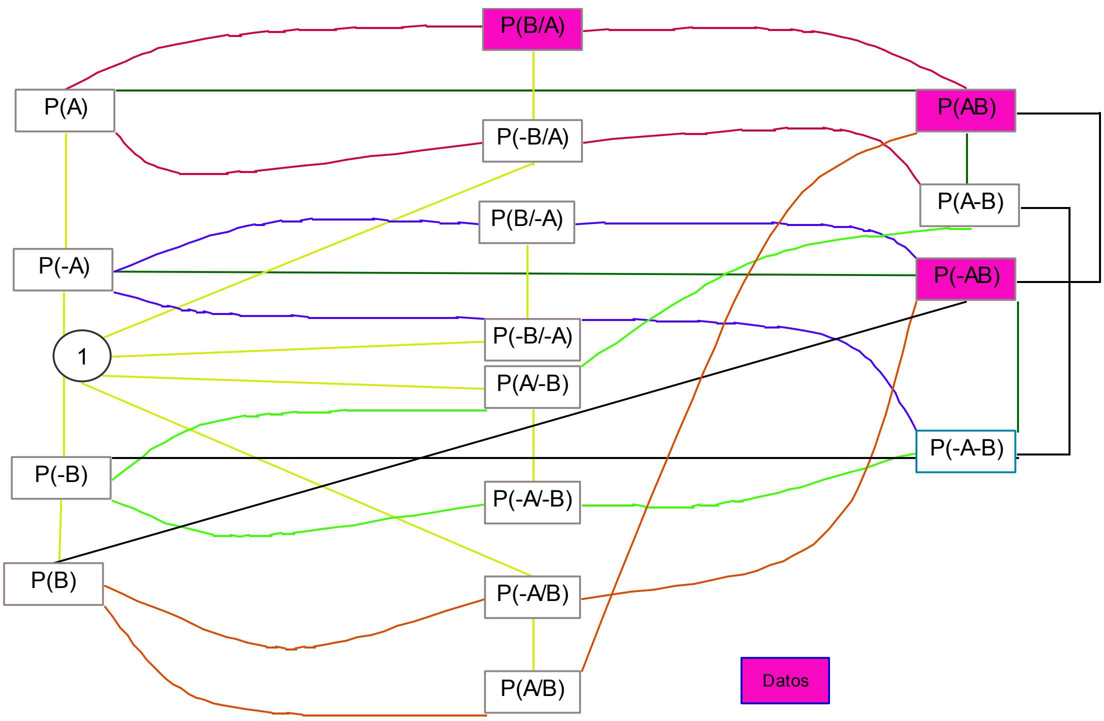


Figura 11

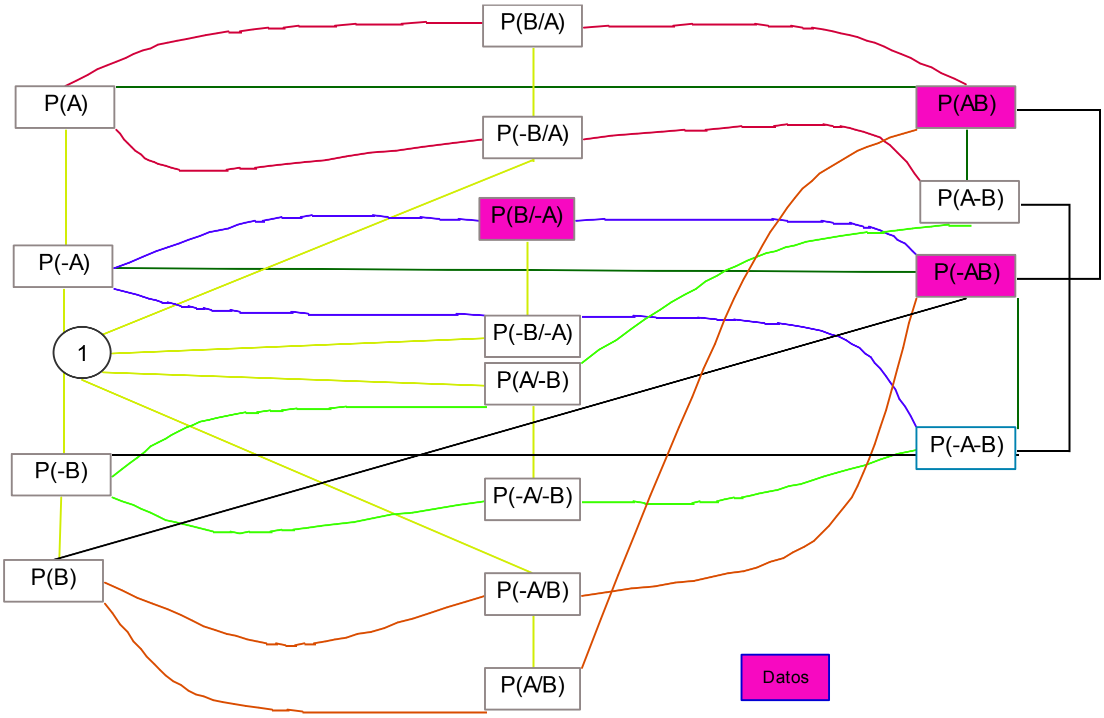


Figura 12

Grupo 6, G_6 Las figuras 13 da cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

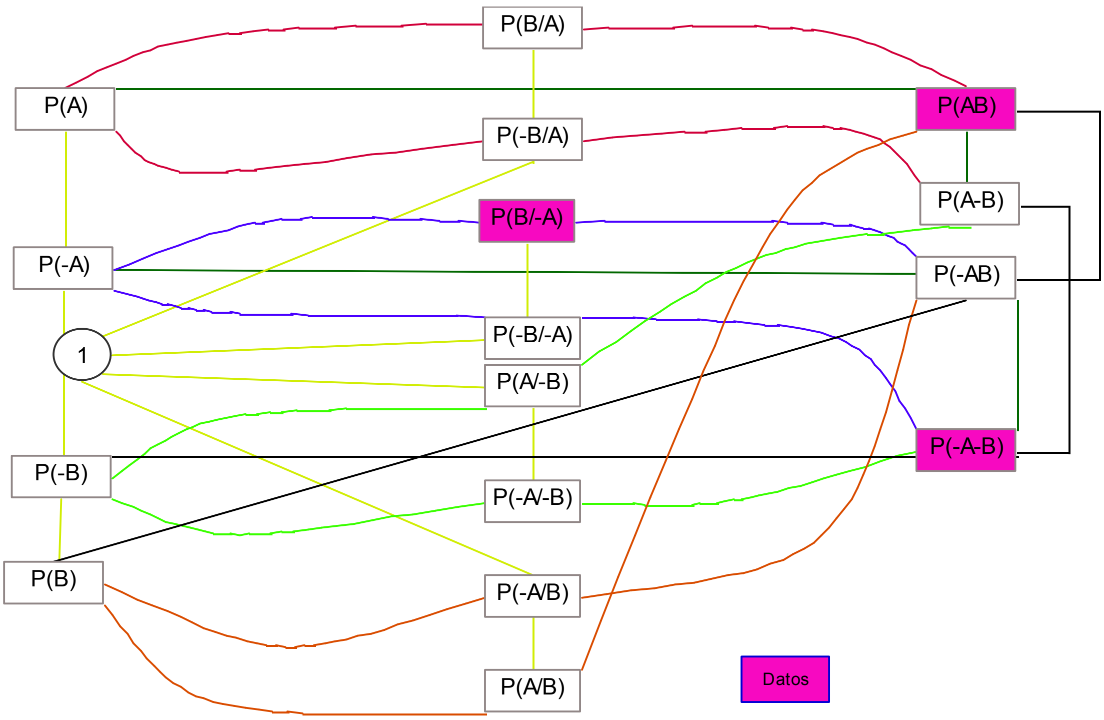


Figura 13

N_2C_2

Grupo 1, G_1

La figura 14 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

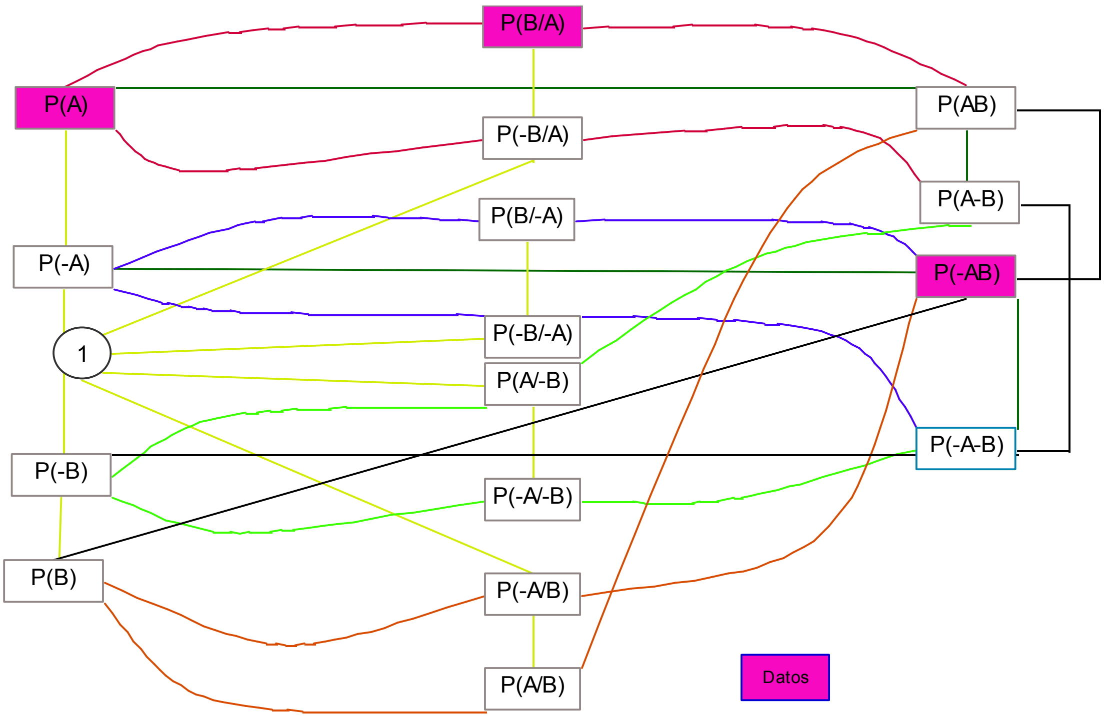


Figura 14

Grupo 2, G_2

La figura 15 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

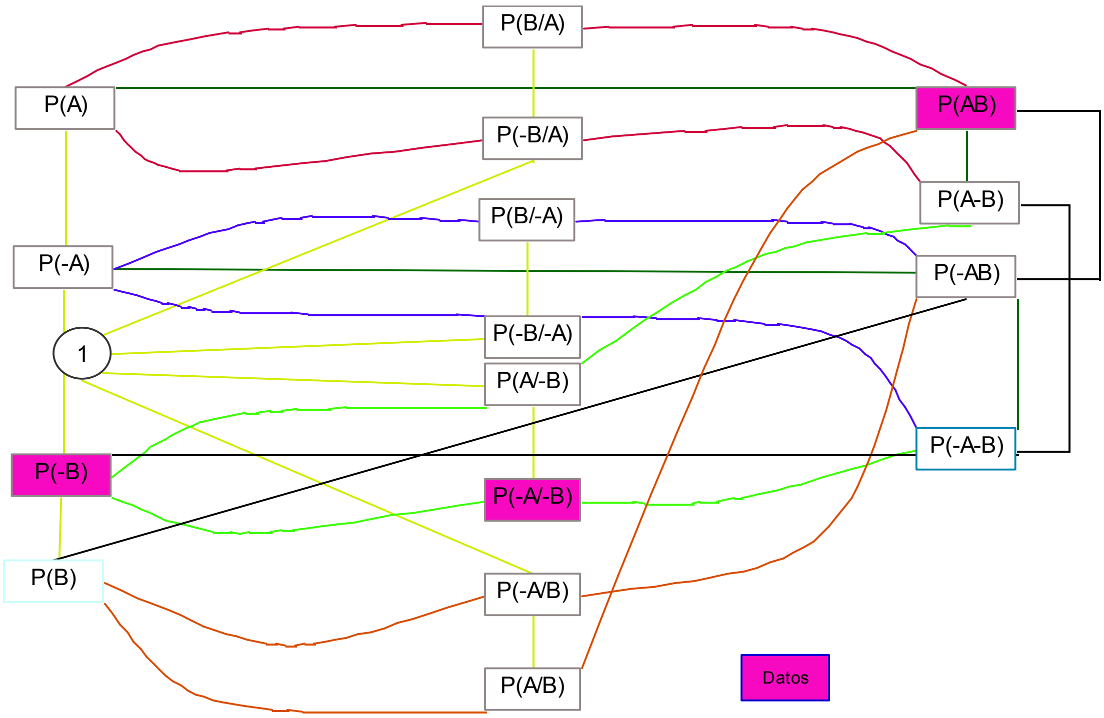


Figura 15

Grupo 4, G_4

Las figuras 16 y 17 dan cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

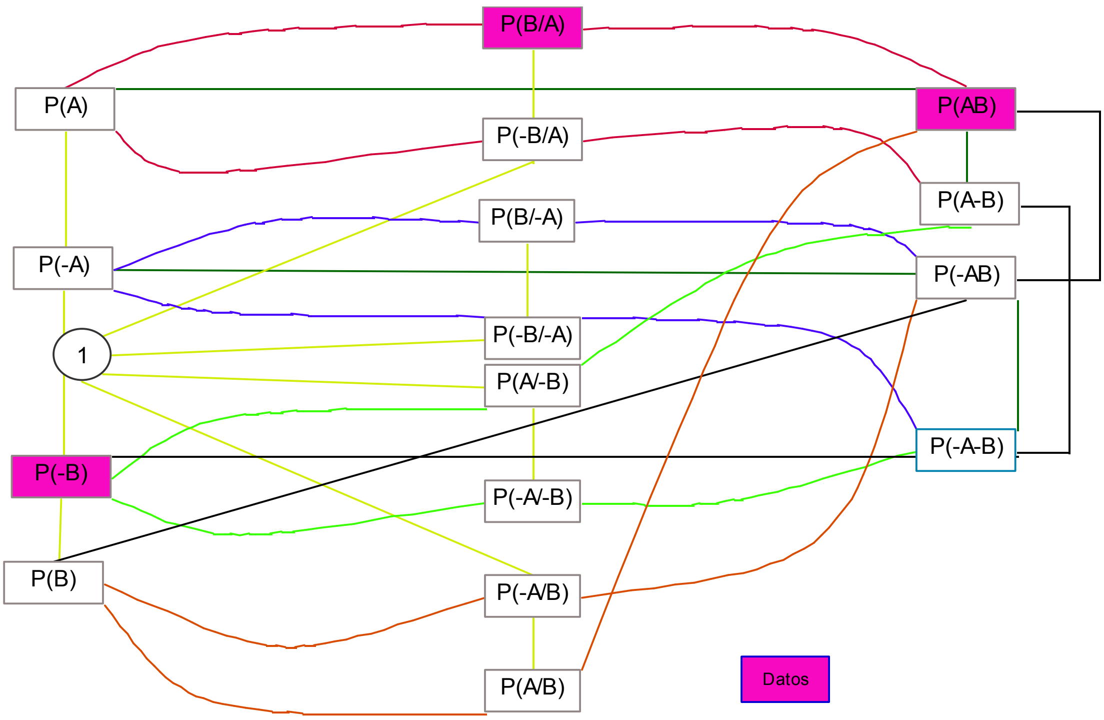


Figura 16

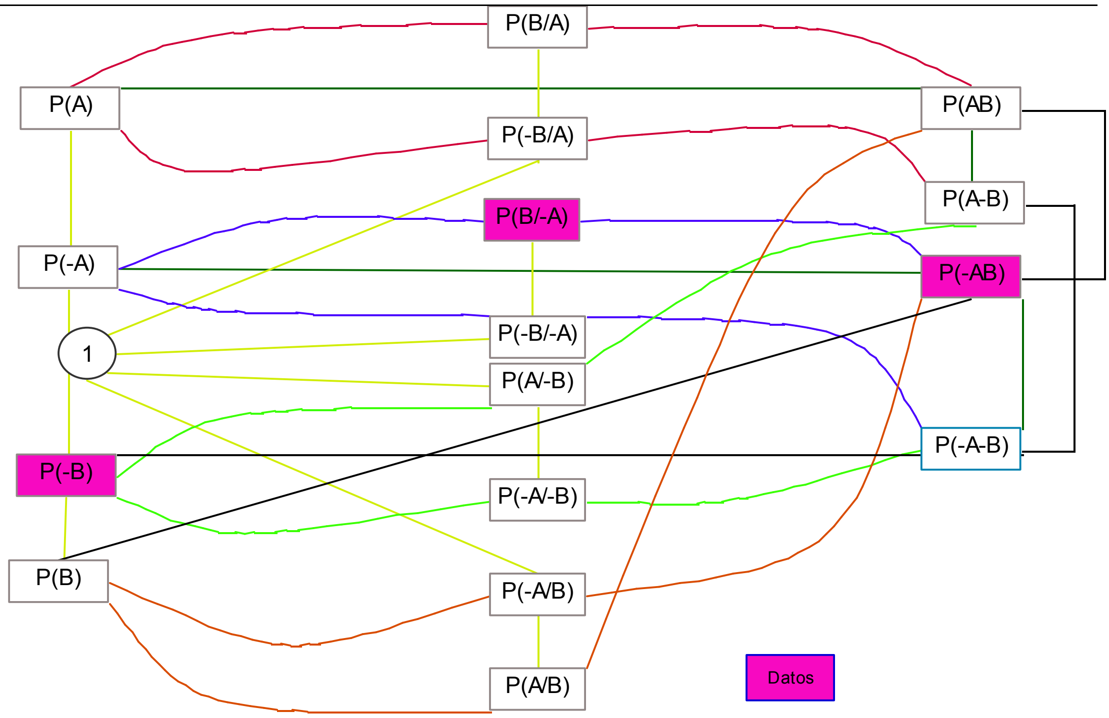


Figura 17

Grupo 5, G_5

La figura 18 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

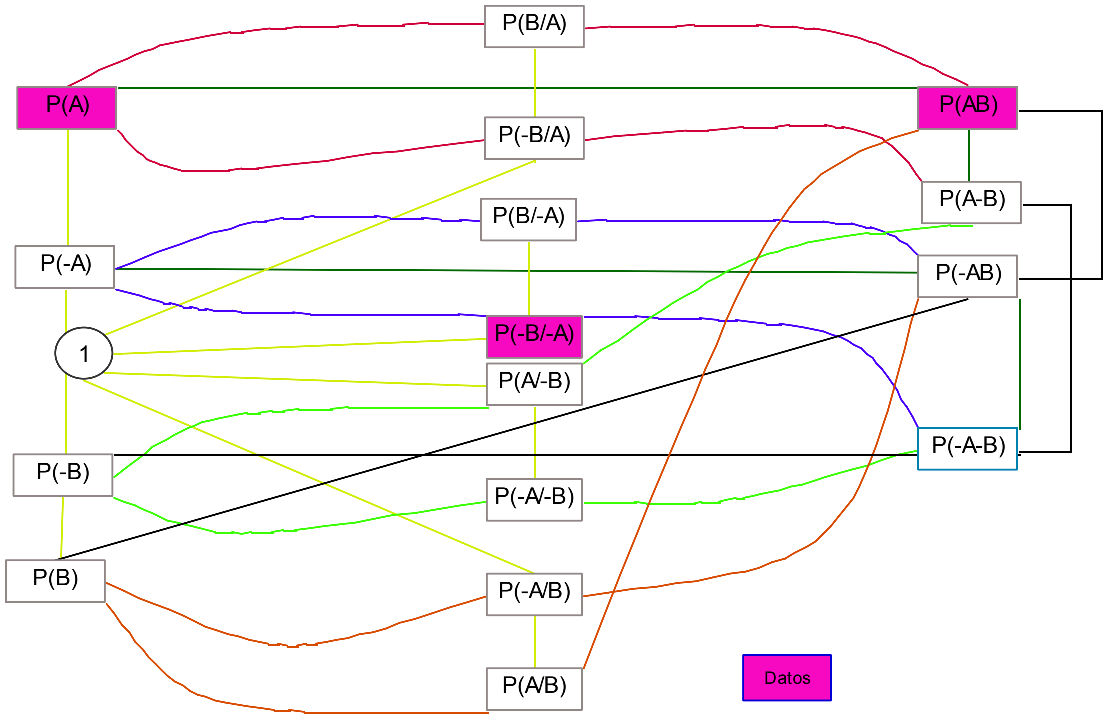


Figura 18

Grupo 6, G_6

La figura 19 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

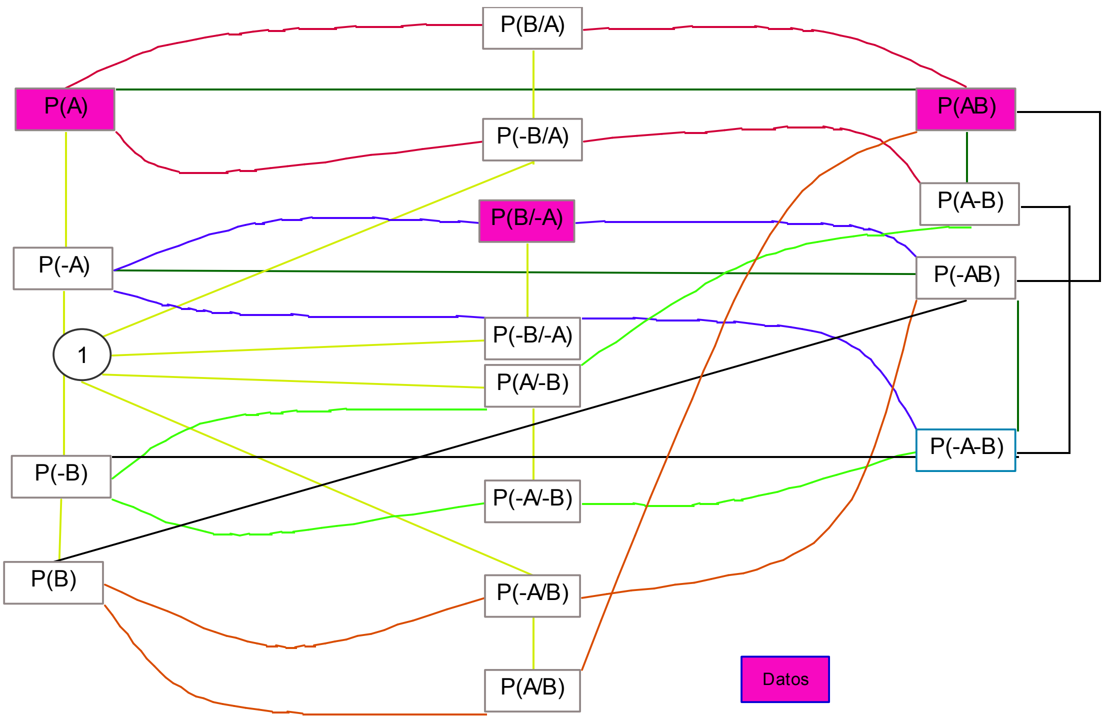


Figura 19

Grupo 7, G_7

La figura 20 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

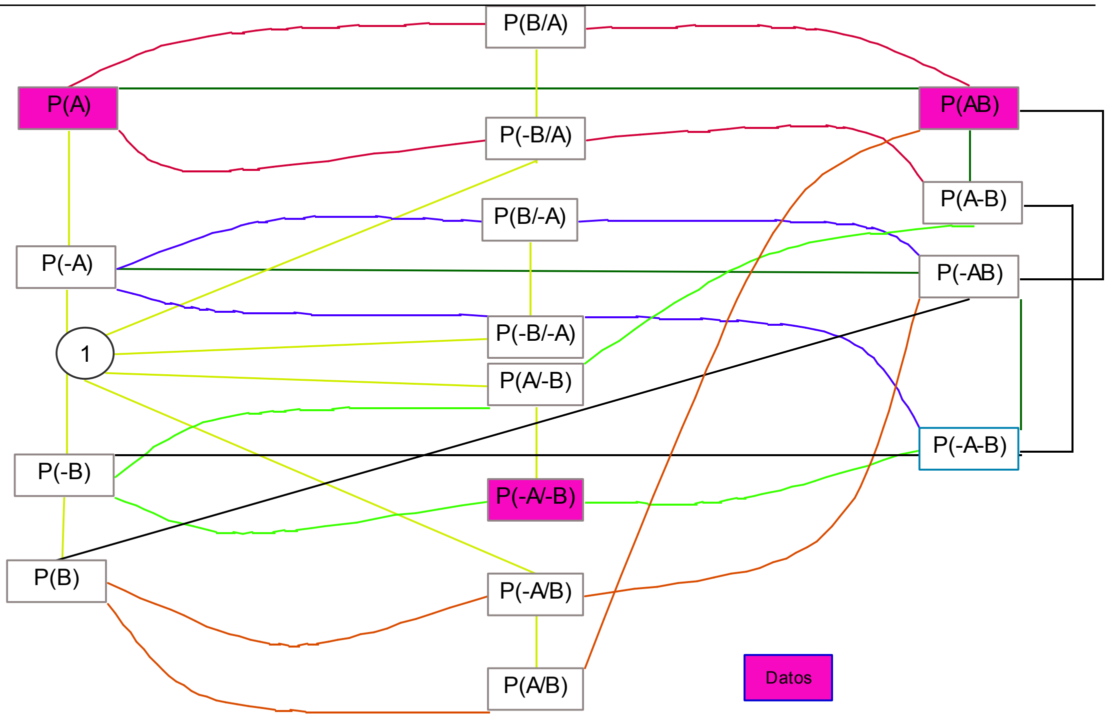


Figura 20

Grupo 8, G_8

La figura 21 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

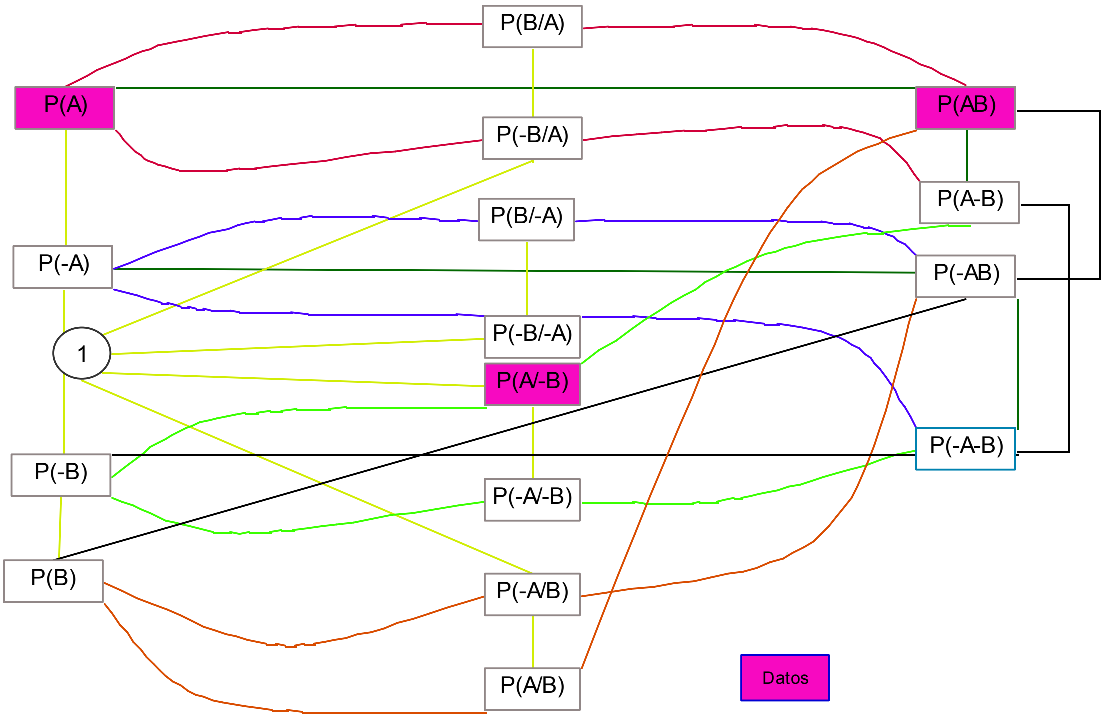


Figura 21

Grupo 11, G_{11}

La figura 22 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

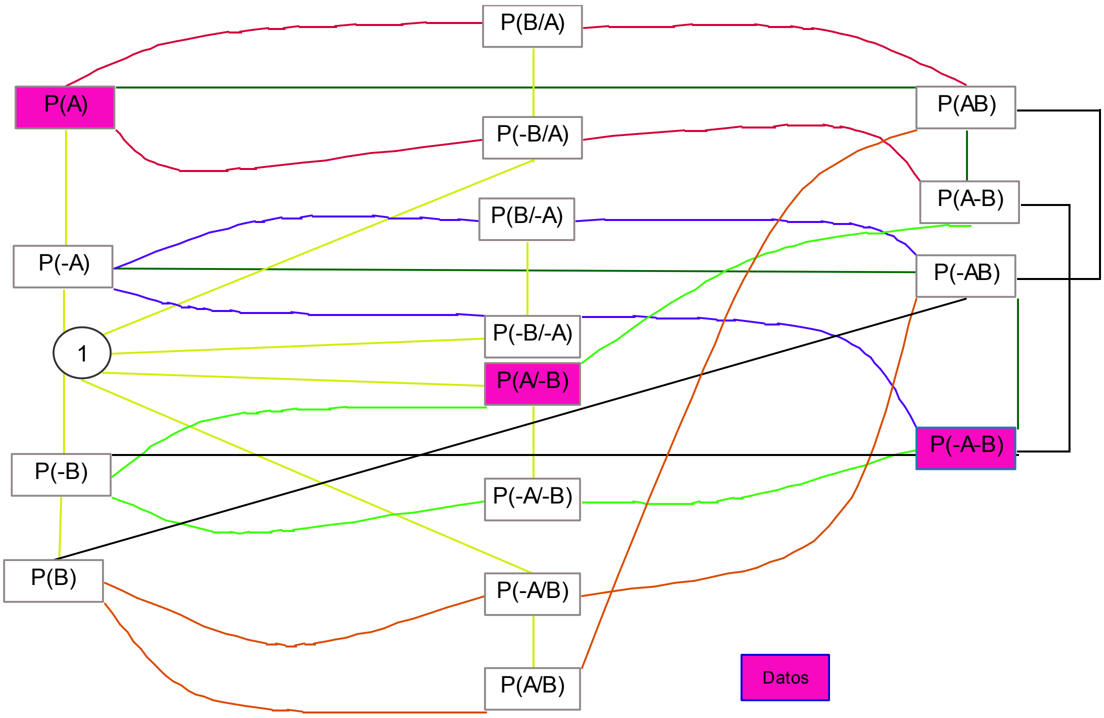


Figura 22

N_2C_3

Grupo 1, G_1

La figura 23 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

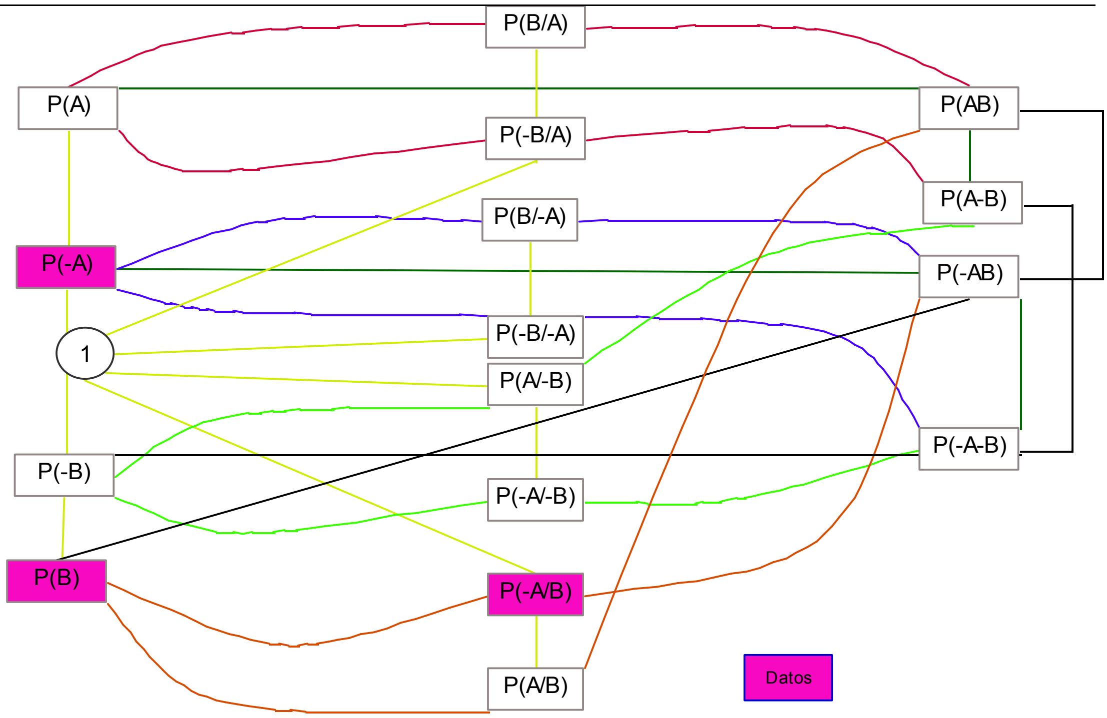


Figura 23

Grupo 2, G_2

La figura 24 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

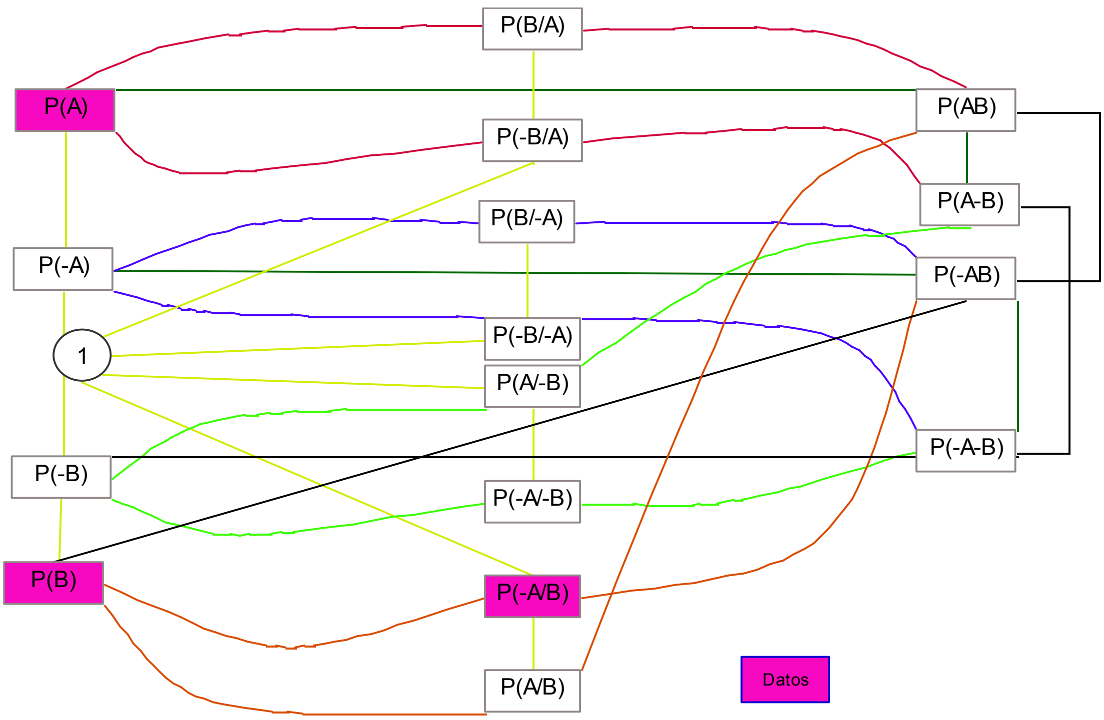


Figura 24

Grupo 3, G_3

La figura 25 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

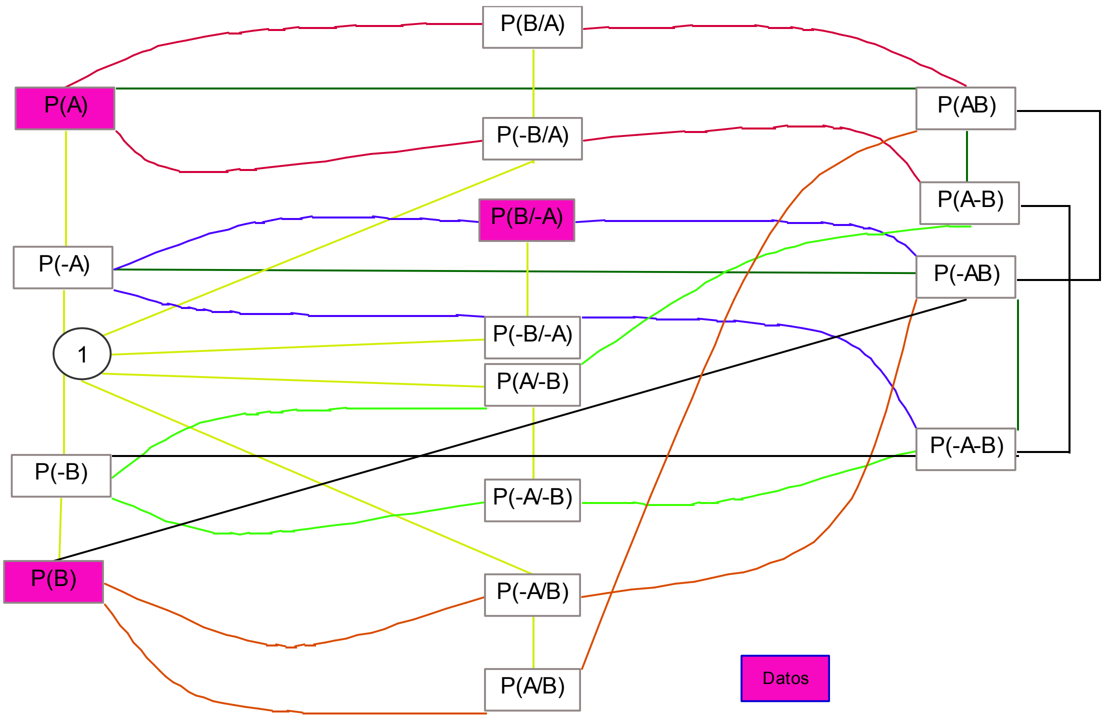


Figura 25

Grupo 4, G_4

La figura 26 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

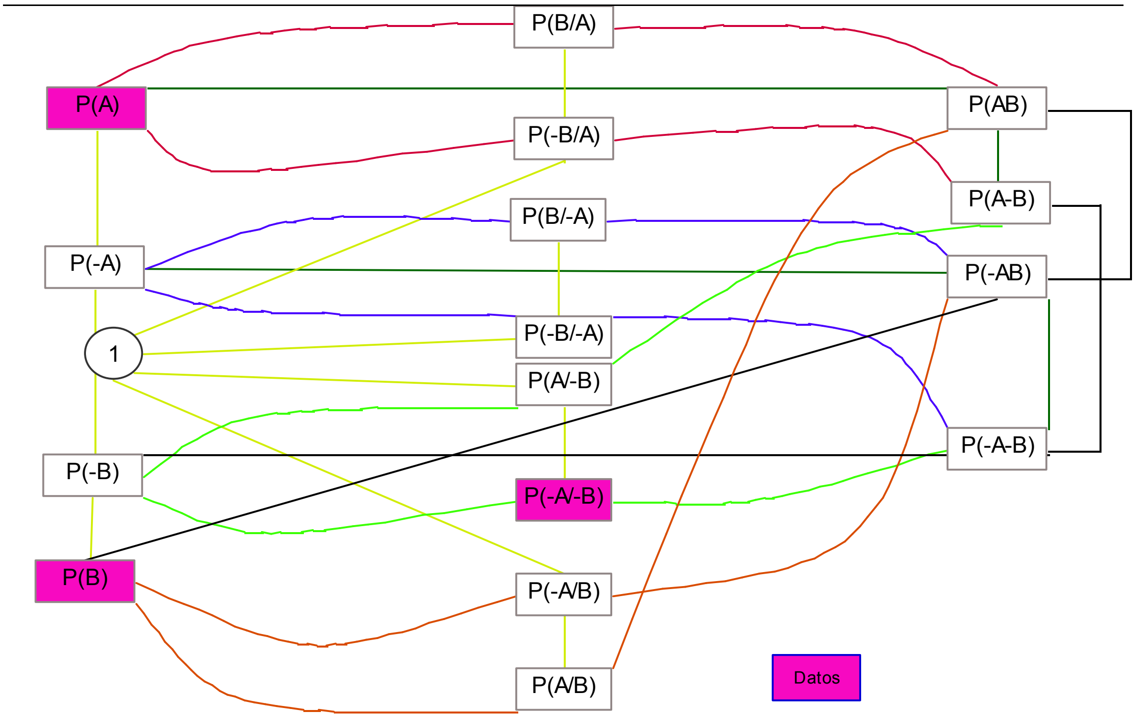

P(B/A)
P(A)
P(AB)
P(-B/A)
P(A-B)
P(B/-A)
P(-A)
P(-AB)
1
P(-B/-A)
P(A/-B)
P(-A-B)
P(-B)
P(-A/-B)
P(B)
P(-A/B)
P(A/B)
Datos

Figura 26

GRAFOS CANÓNICOS ASOCIADOS A LOS PROBLEMAS DE LAS FAMILIAS $N_2C_IT_J$.

ÍNDICE:

III.2 Grafos canónicos que dan cuenta de las Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_3T_3$, que se corresponden con los resultados de la tabla 4.18 página 141

I. N_2C_1

I.1. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_1T_1$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.11

$N_2C_1T_1G_1$

En este grupo mostramos los grafos canónicos de tres grupos de problemas en los que lo que varía dentro de cada grupo es la pregunta del problema. La figura 1 a la figura 6 muestran los grafos canónicos asociados a seis problemas de $N_2C_1T_1G_1$ que se diferencian por la pregunta del problema. Son los seis problemas que se pueden crear de T_1 con tres datos distribuidos según N_2C_1 y G_1. Las figuras de la 7 a la 12 muestran lo mismo pero con otro trío de datos al igual que las figuras 13 a la 18.

En cualquiera de los tres tríos de datos encontramos 1 problema de [p_{12}], 3 problemas de [p_{22}] y 2 problema2 de [p_{32}]

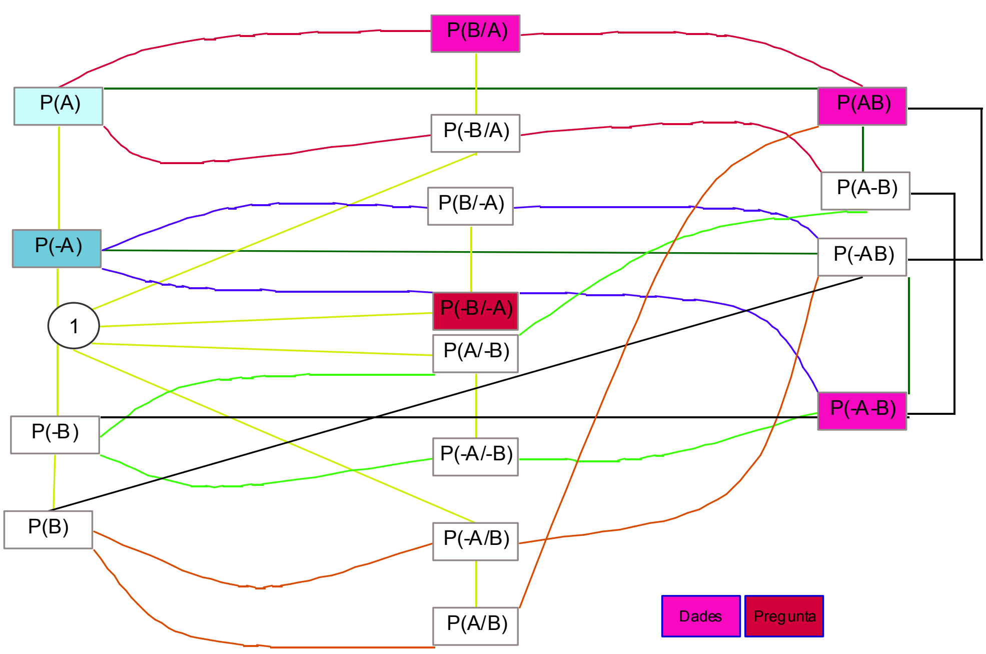


Figura 1: Grafo canónico de [p_{12}]

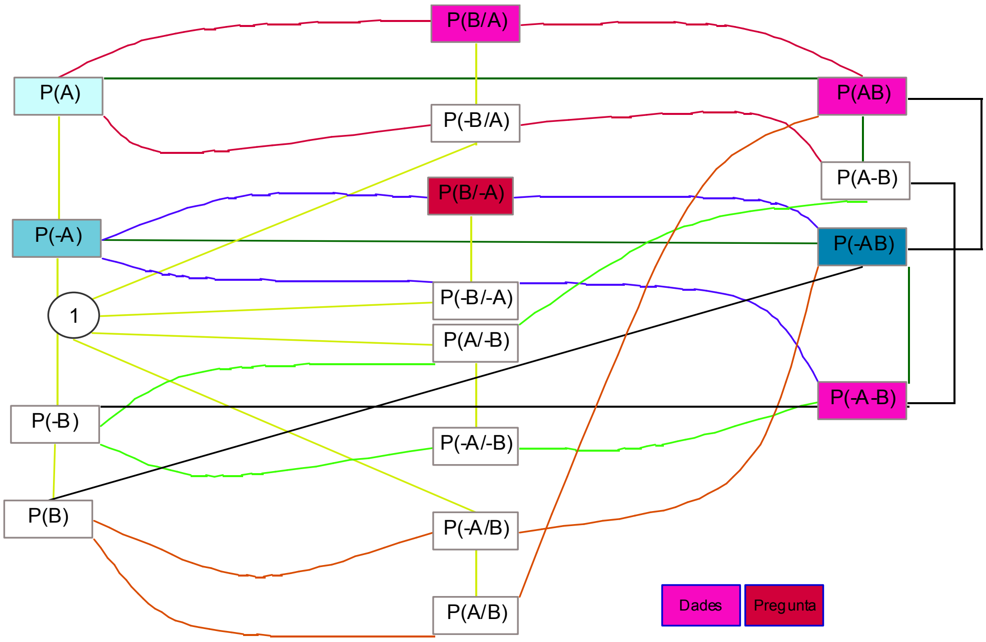


Figura 2 Grafo canónico de [p_{22}]

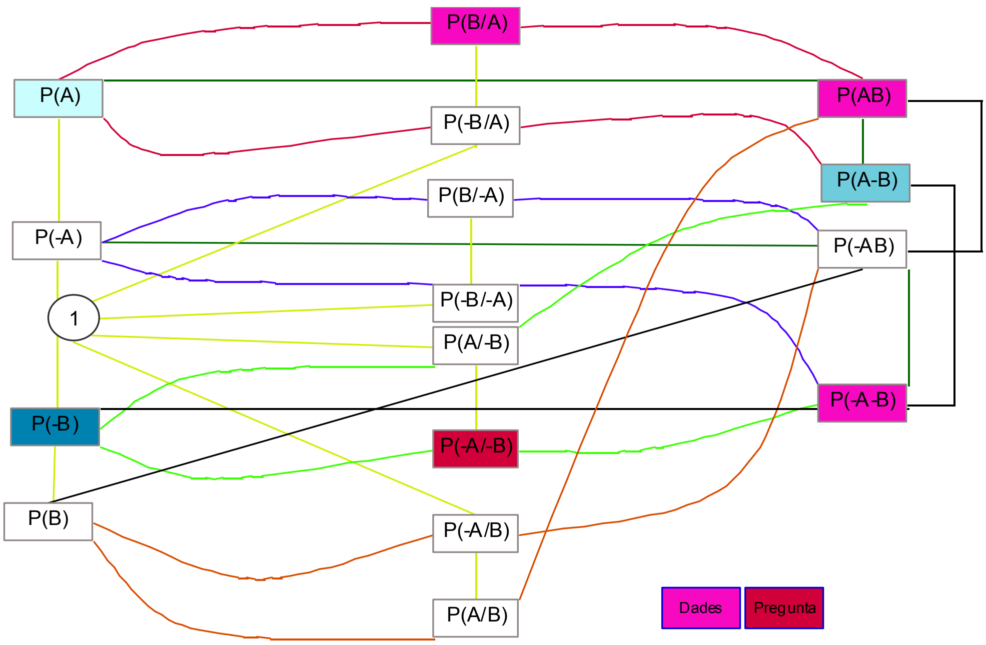


Figura 3 Grafo canónico de [p_{22}]

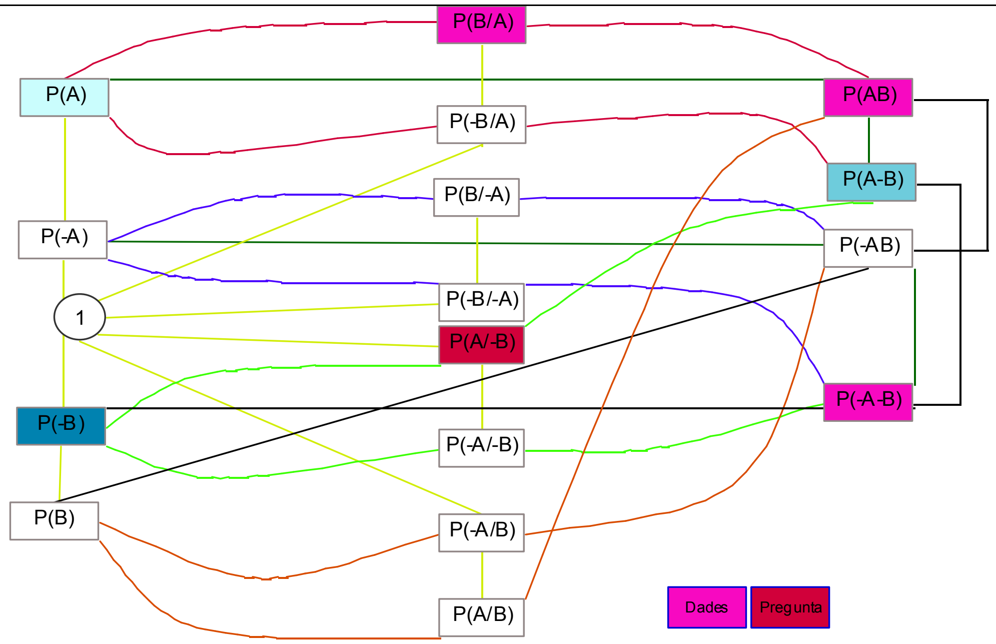


Figura 4 Grafo canónico de [p22]

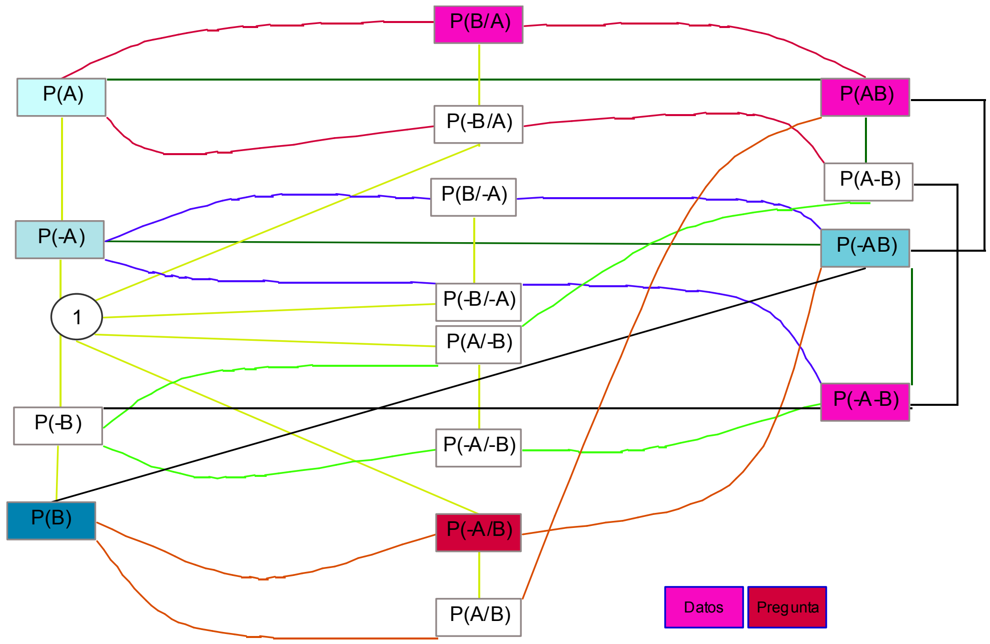


Figura 5 Grafo canónico de [p32]

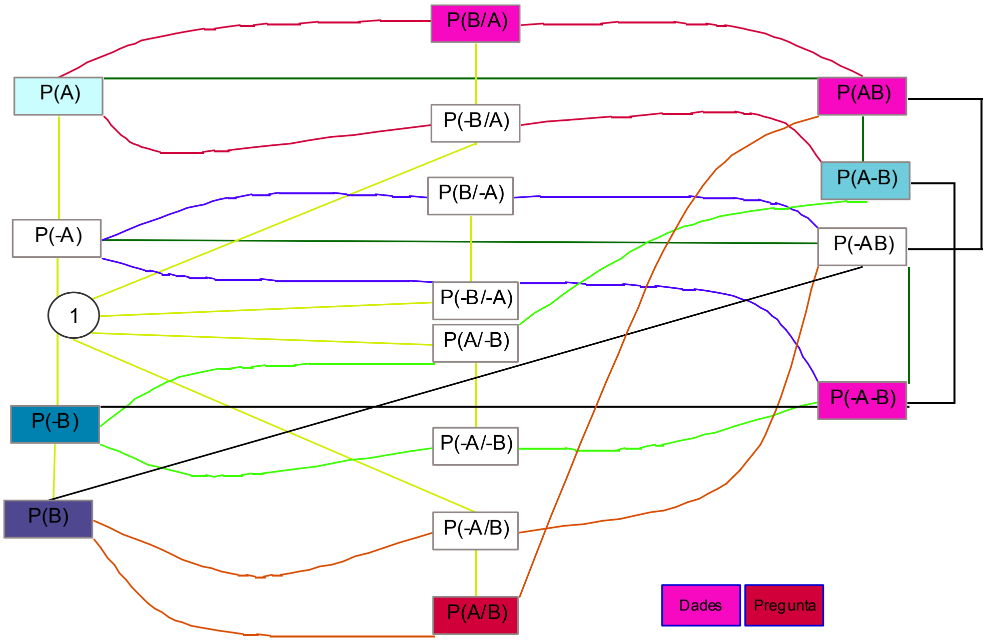


Figura 6 Grafo canónico de [p_{32}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

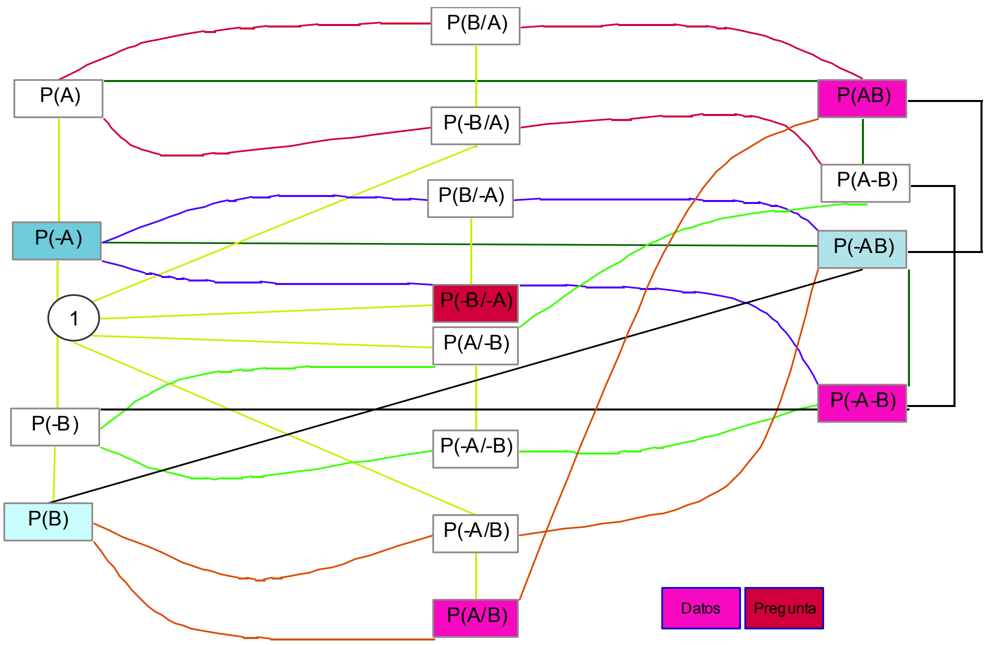


Figura 7 Grafo canónico de [p_{22}]

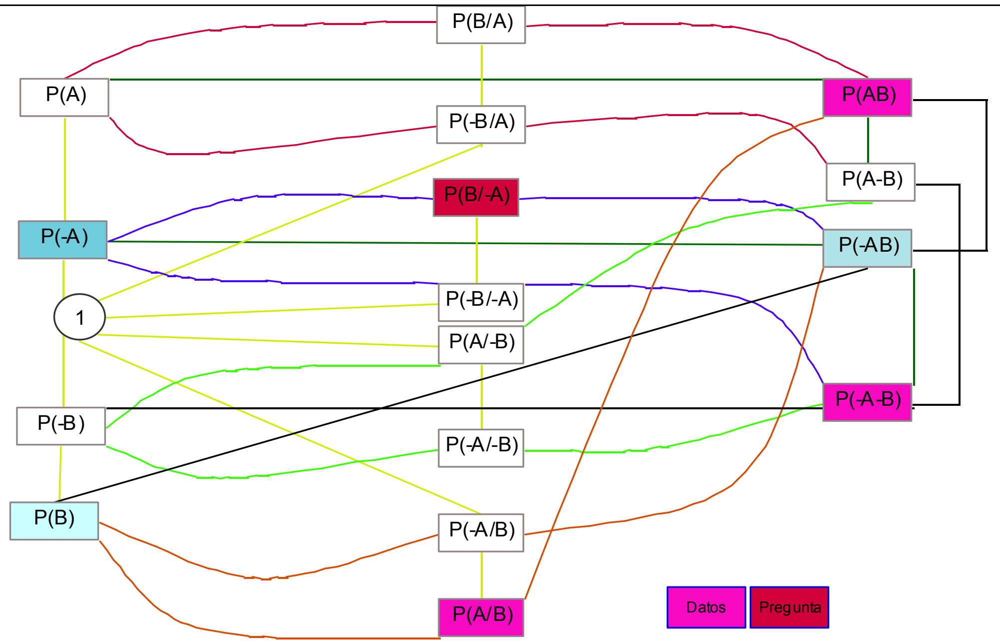


Figura 8 Grafo canónico de [p_{22}]

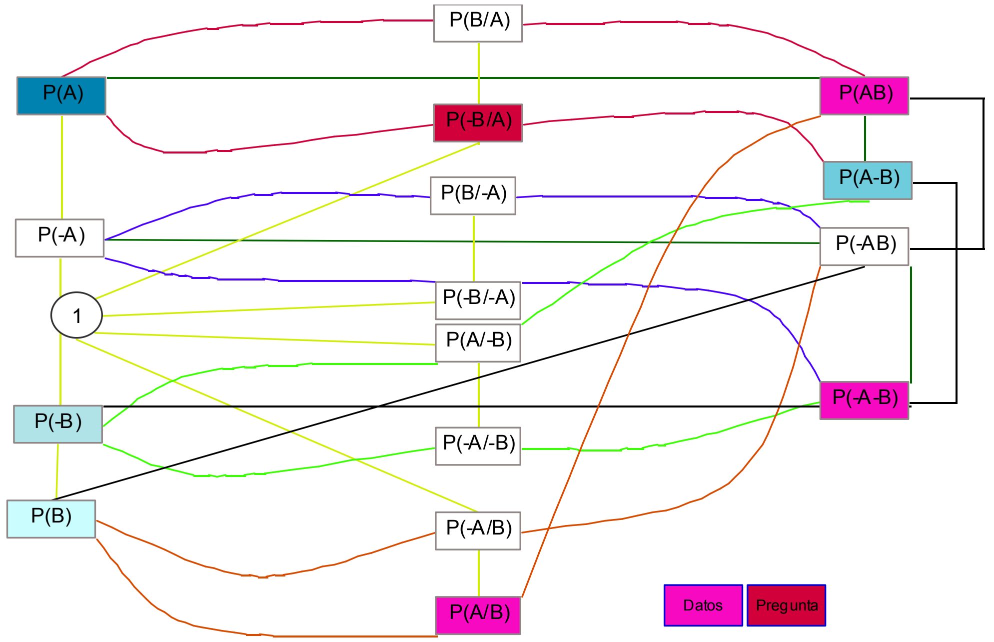


Figura 9 Grafo canónico de [p_{32}]

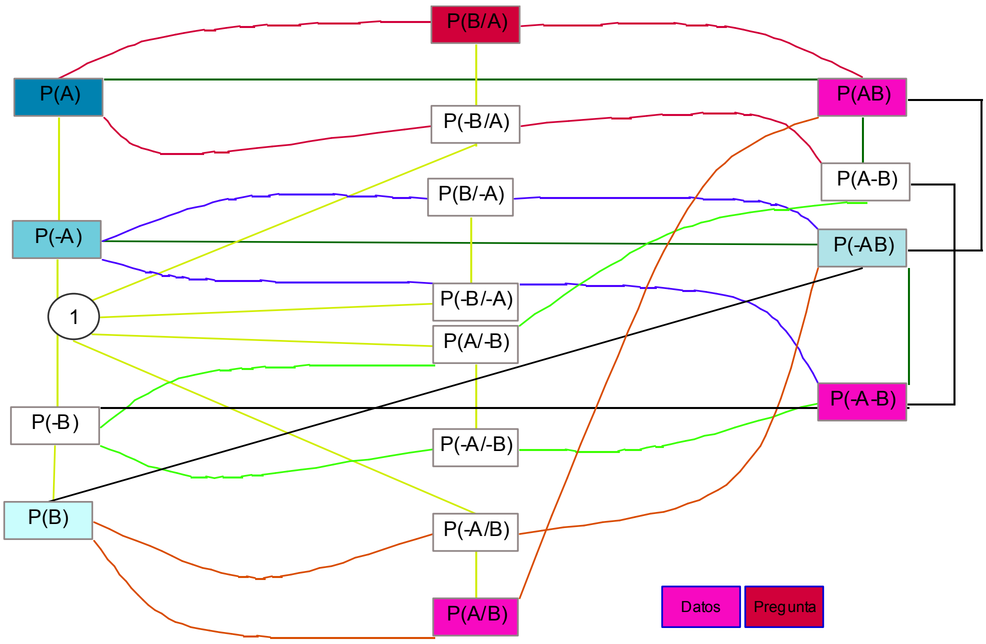


Figura 10 Grafo canónico de [p_{32}]

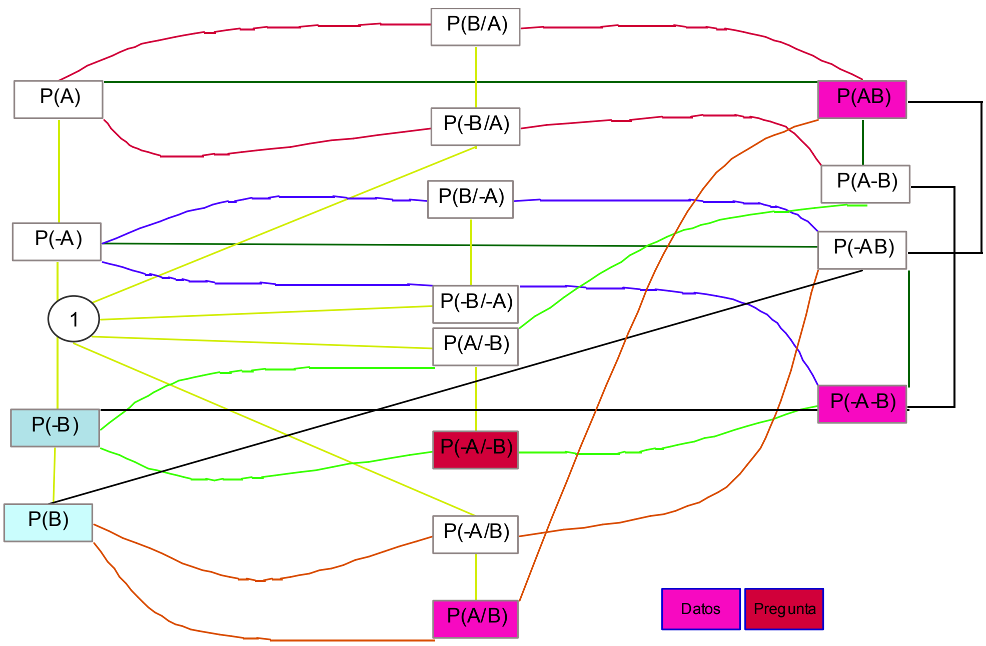


Figura 11 Grafo canónico de [p_{12}]

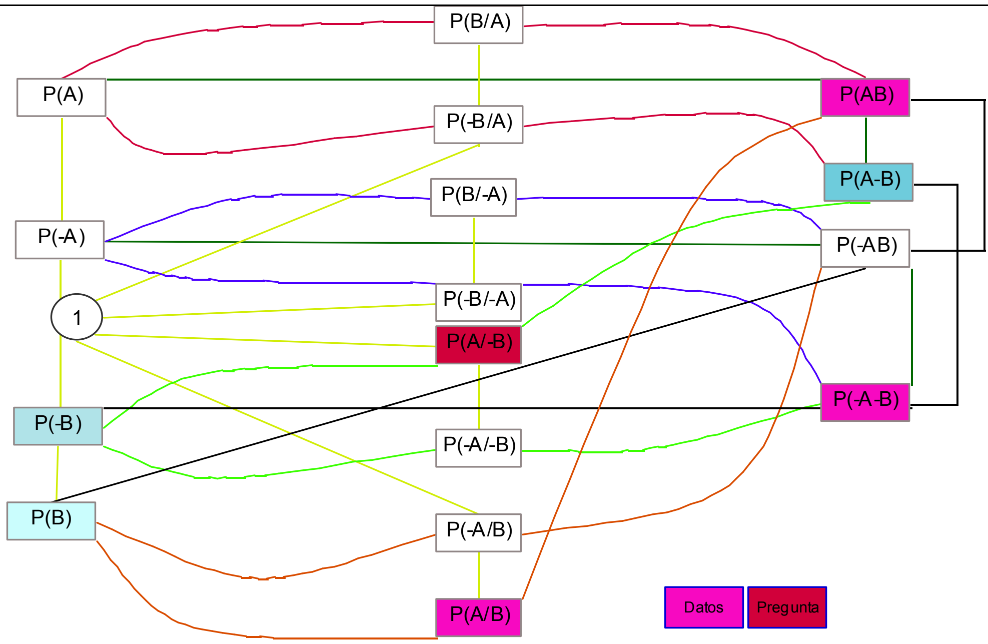


Figura 12 Grafo canónico de [p_{22}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

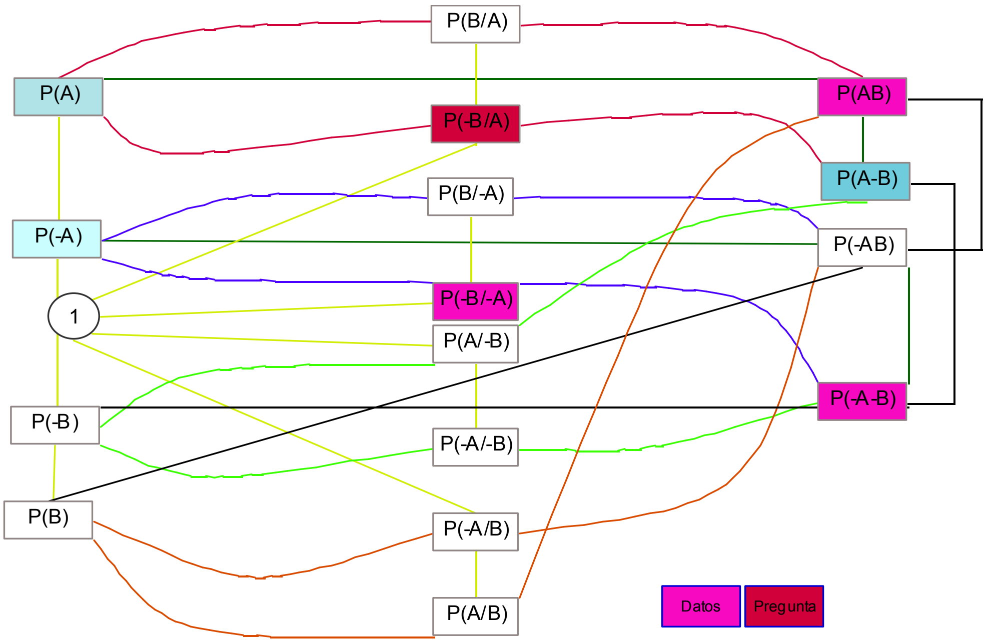


Figura 13 Grafo canónico de [p_{22}]

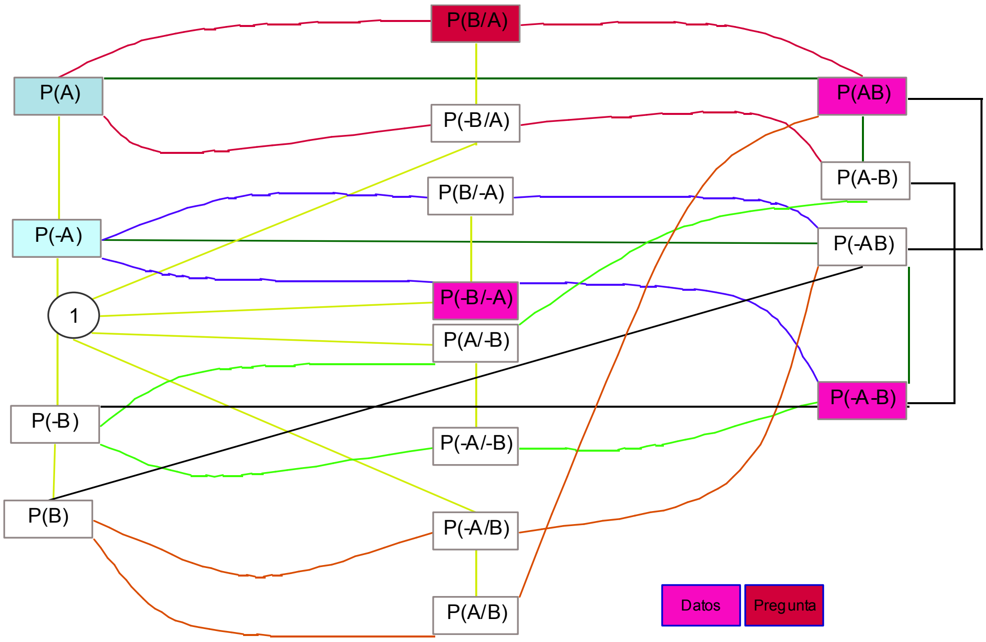


Figura 14 Grafo canónico de [p_{12}]

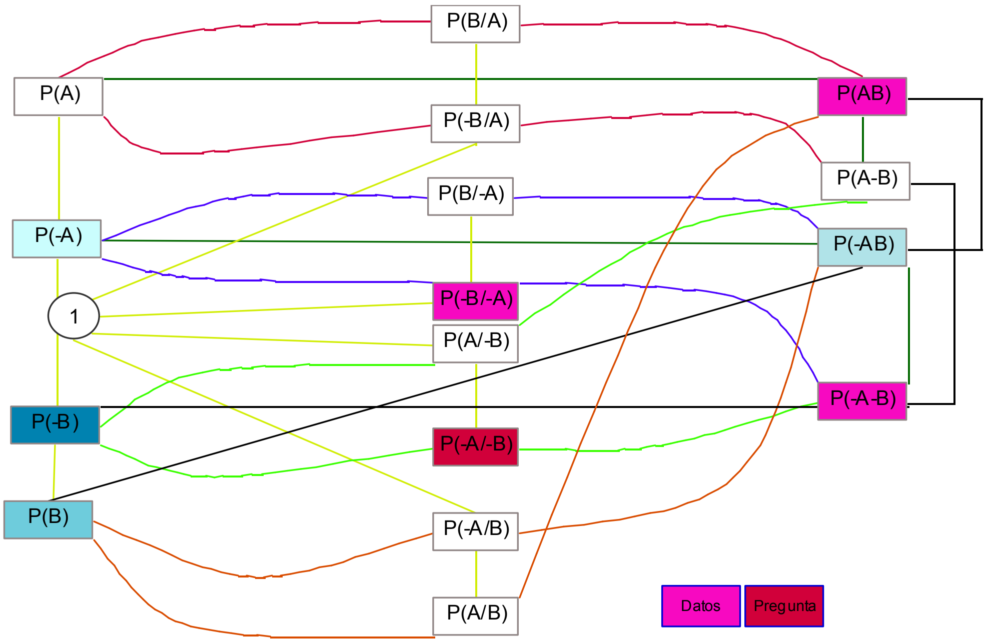


Figura 15 Grafo canónico de [p_{32}]

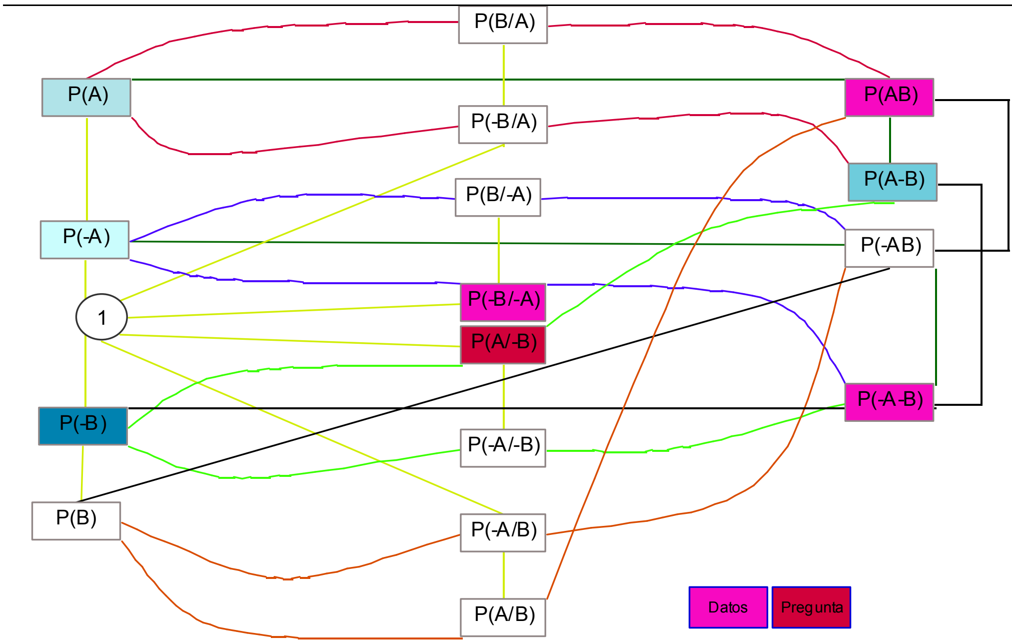


Figura 16 Grafo canónico de [p_{32}]

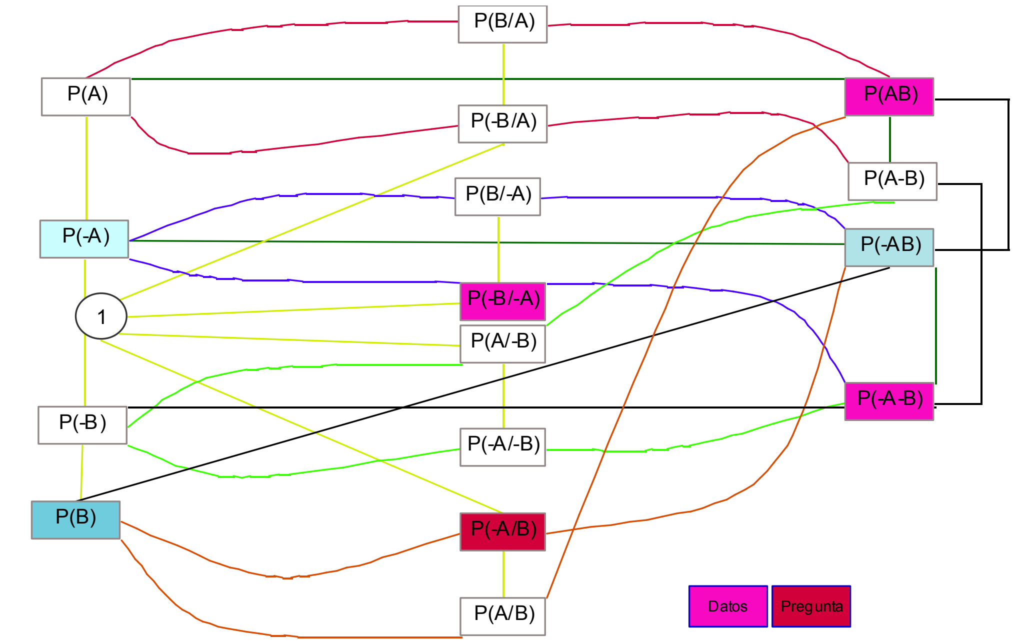


Figura 17 Grafo canónico de [p_{22}]

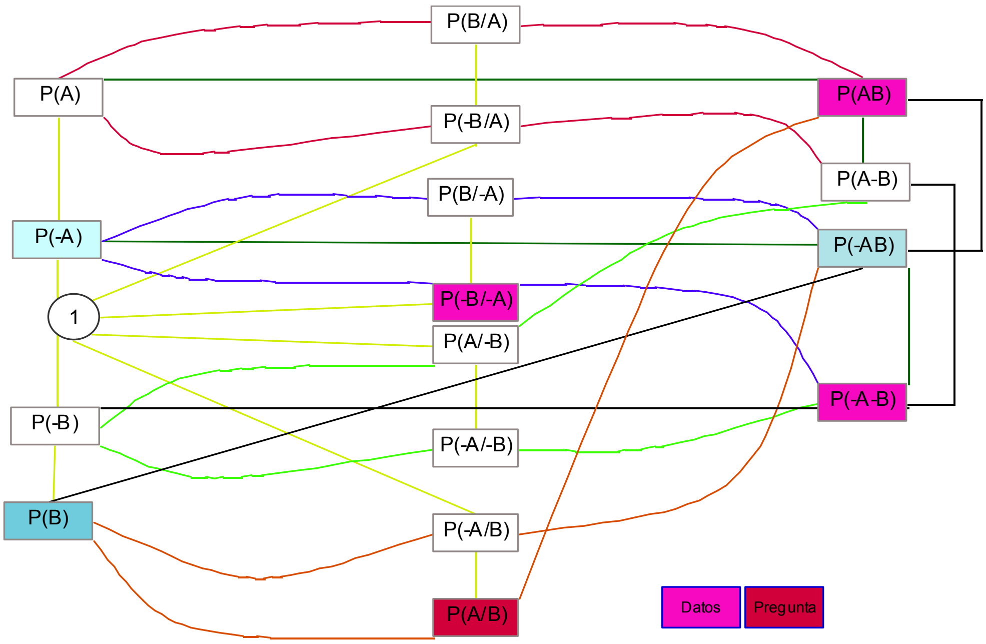


Figura 18 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_1T_1G_2$

Con estos problemas procedemos de la misma forma que con $N_2C_1T_1G_1$

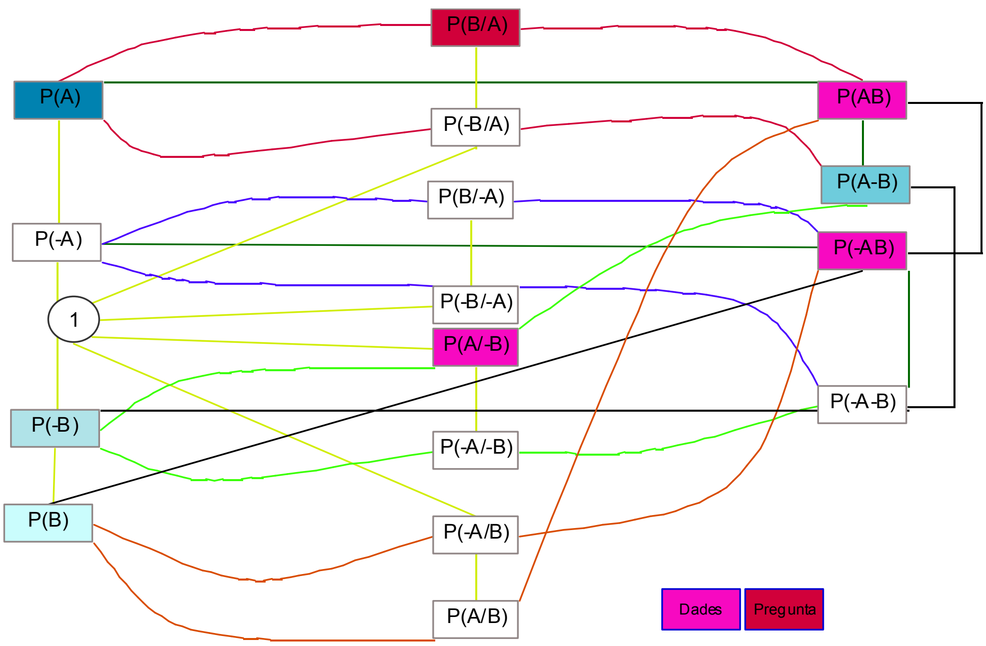


Figura 19 Grafo canónico de [p_{32}]

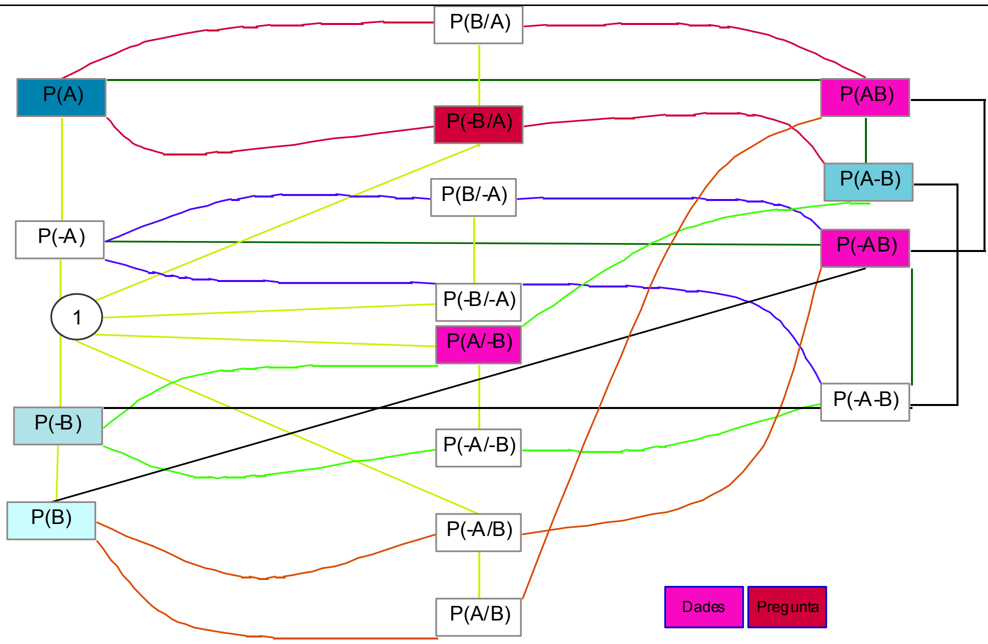


Figura 20 Grafo canónico de [p_{32}]

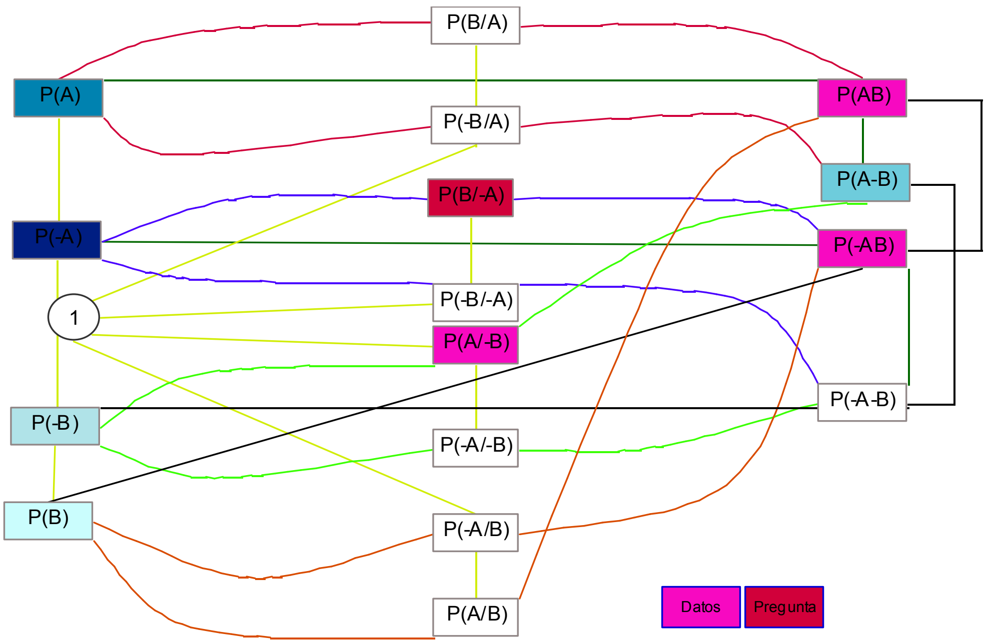


Figura 21 Grafo canónico de [p_{42}]

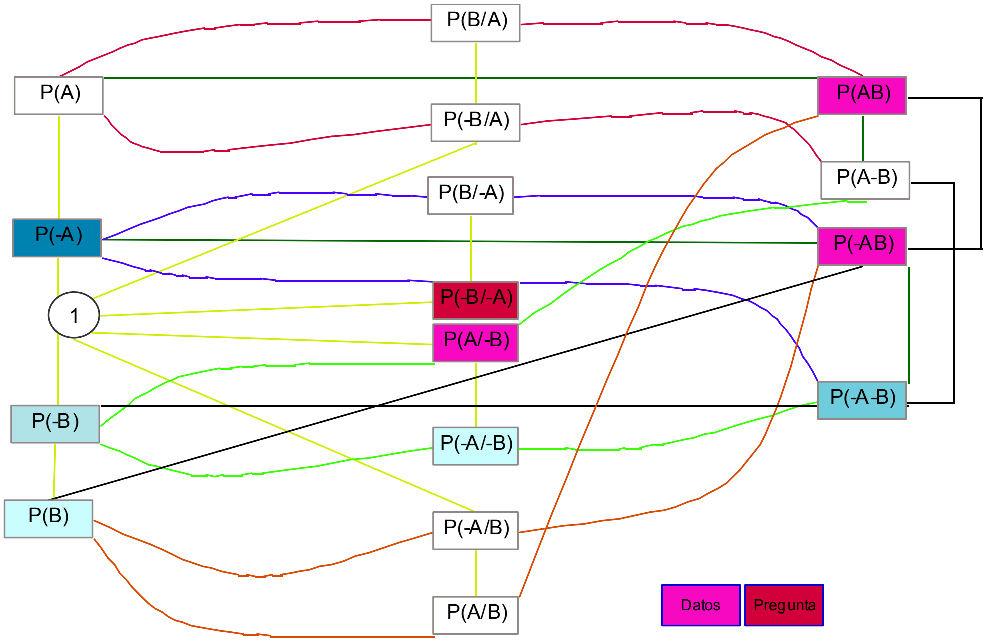


Figura 22 Grafo canónico de [p_{32}]

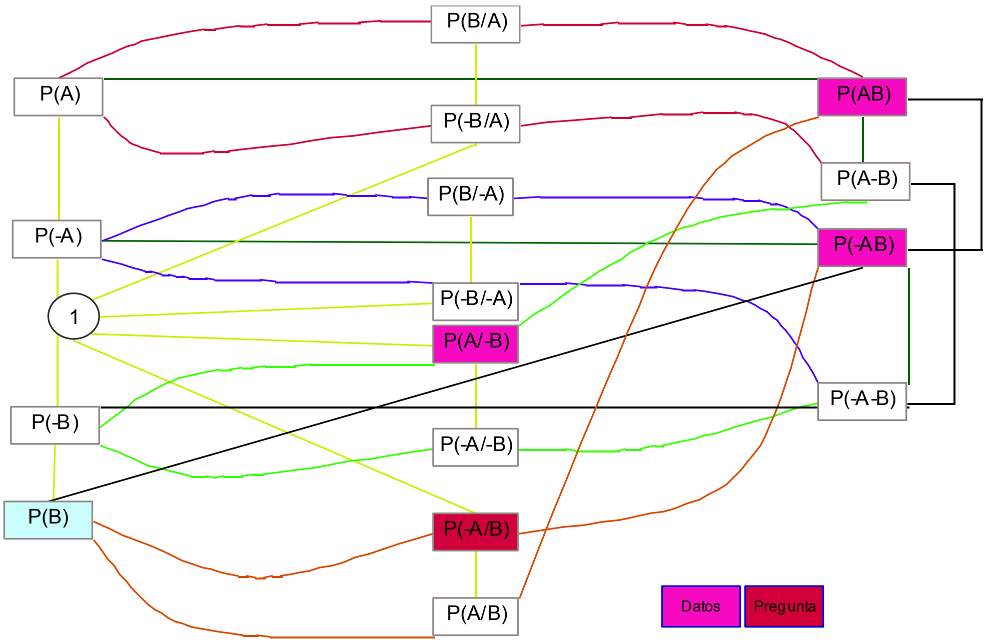


Figura 23 Grafo canónico de [p_{11}]

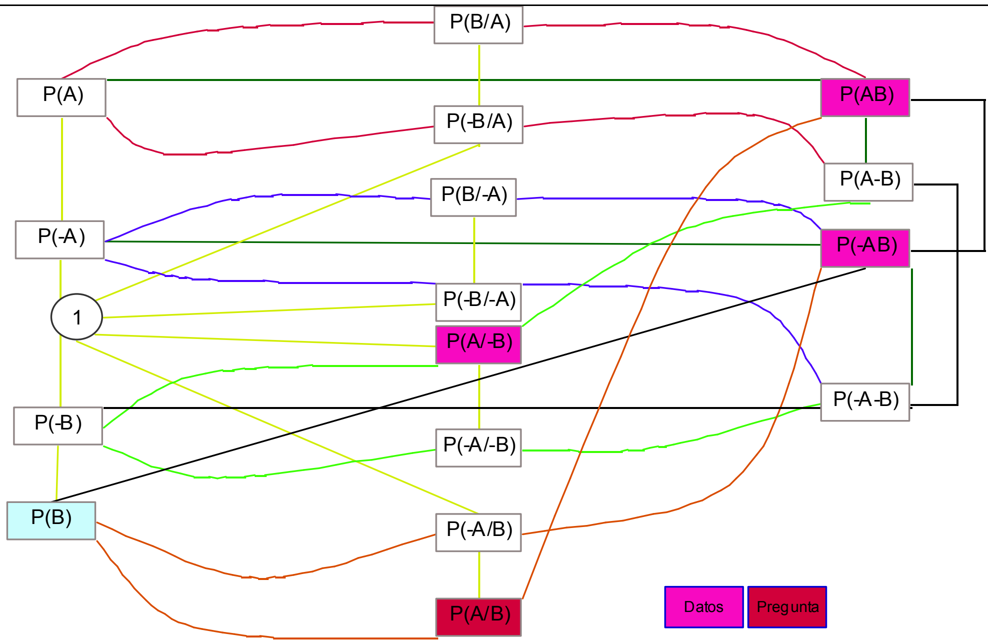


Figura 24 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

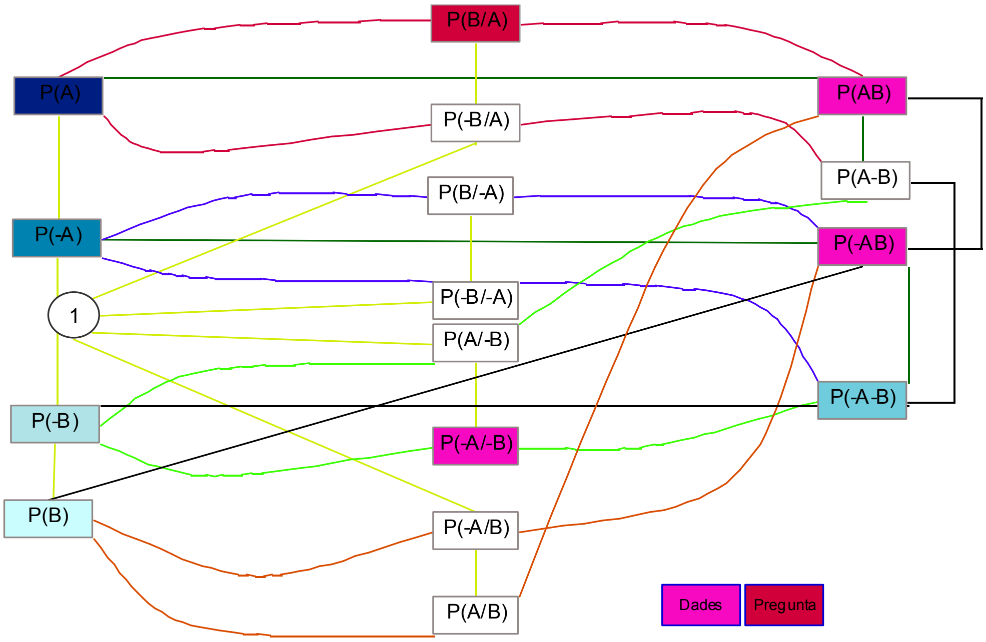


Figura 25 Grafo canónico de [p_{42}]

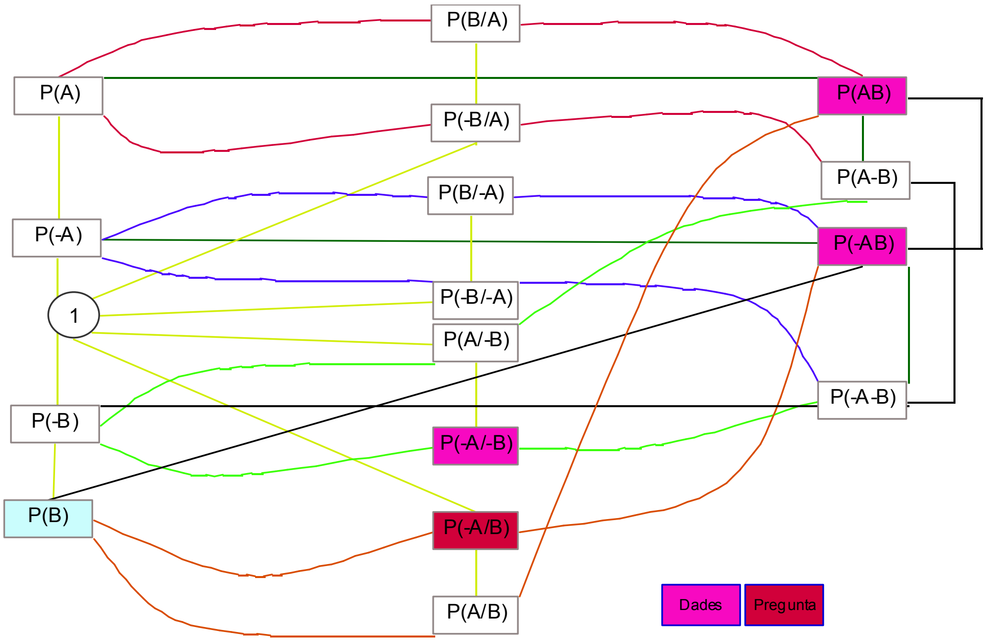


Figura 26 Grafo canónico de [p_{11}]

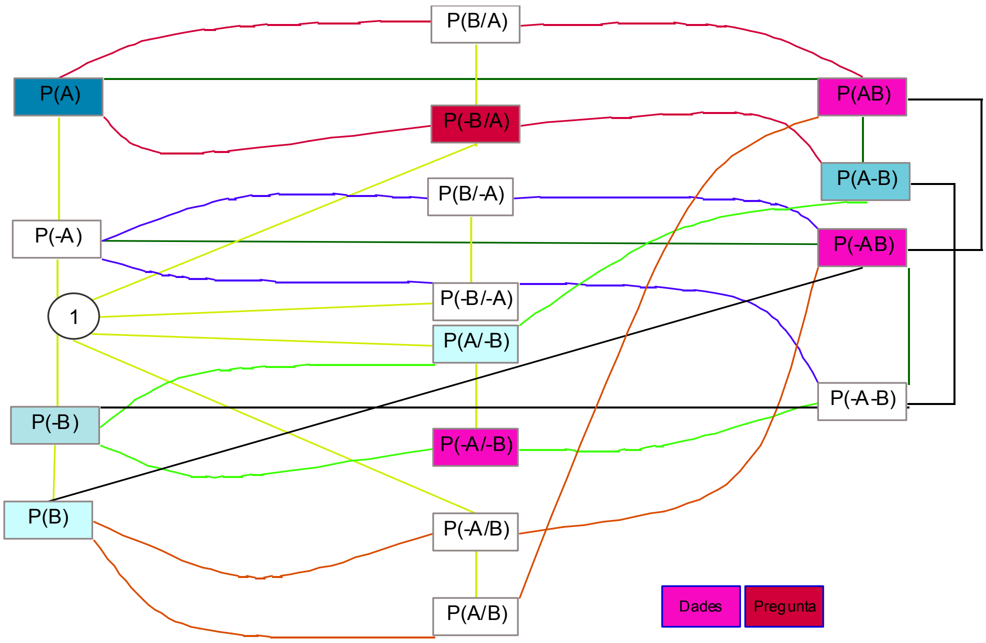


Figura 27 Grafo canónico de [p_{32}]

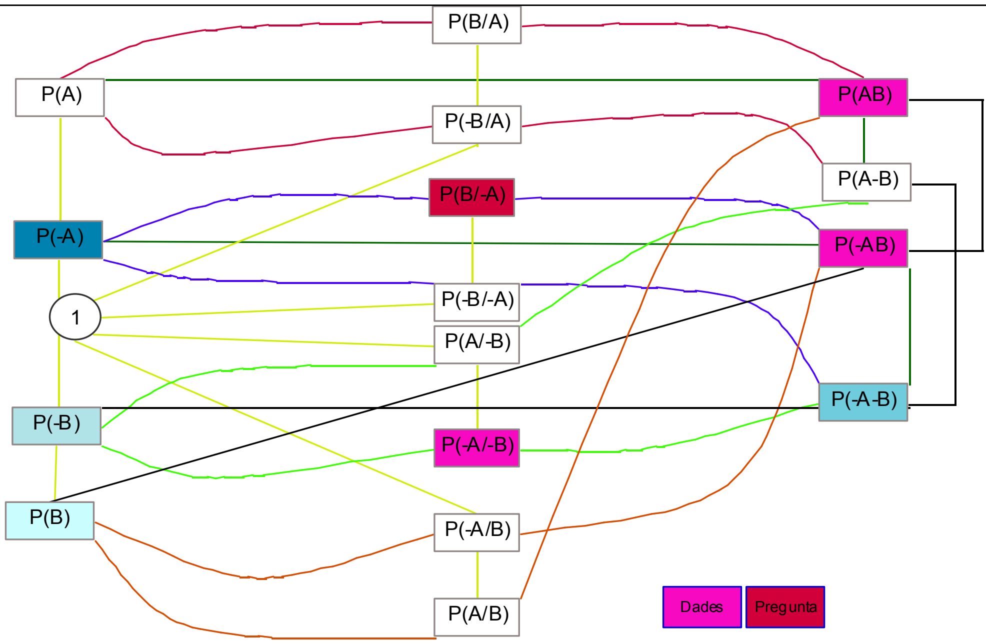


Figura 28 Grafo canónico de [p_{32}]

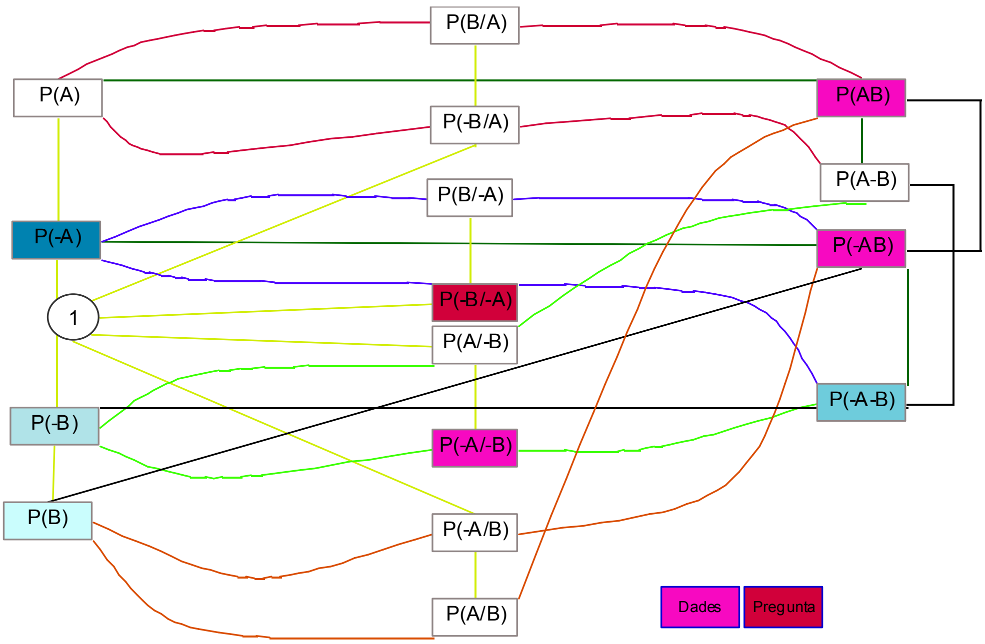


Figura 29 Grafo canónico de [p_{32}]

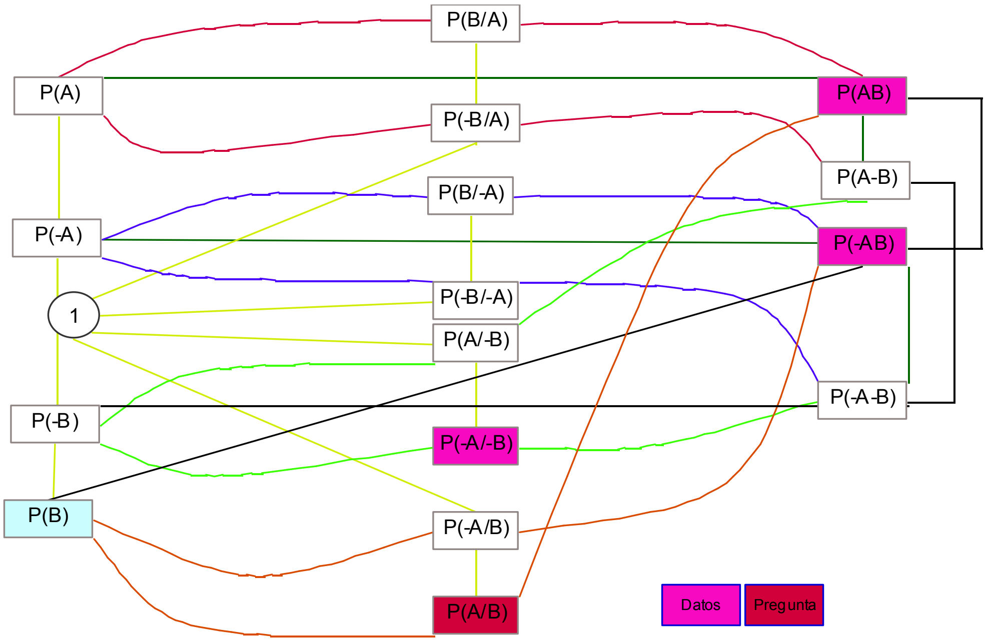


Figura 30 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_1G_3$

Con estos problemas procedemos de la misma forma que con $N_2C_1T_1G_1$

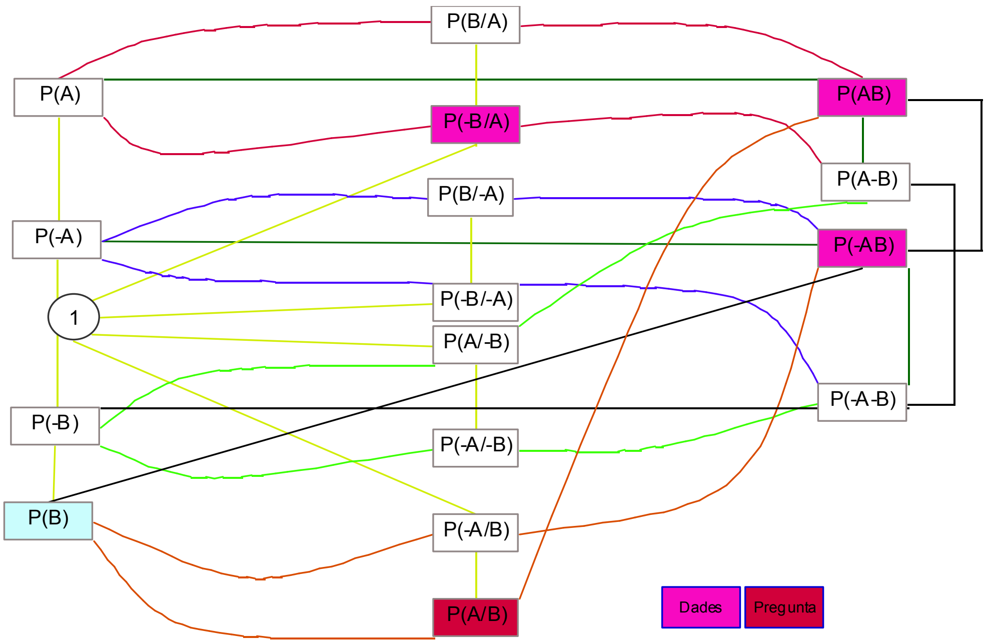


Figura 31 Grafo canónico de [p_{11}]

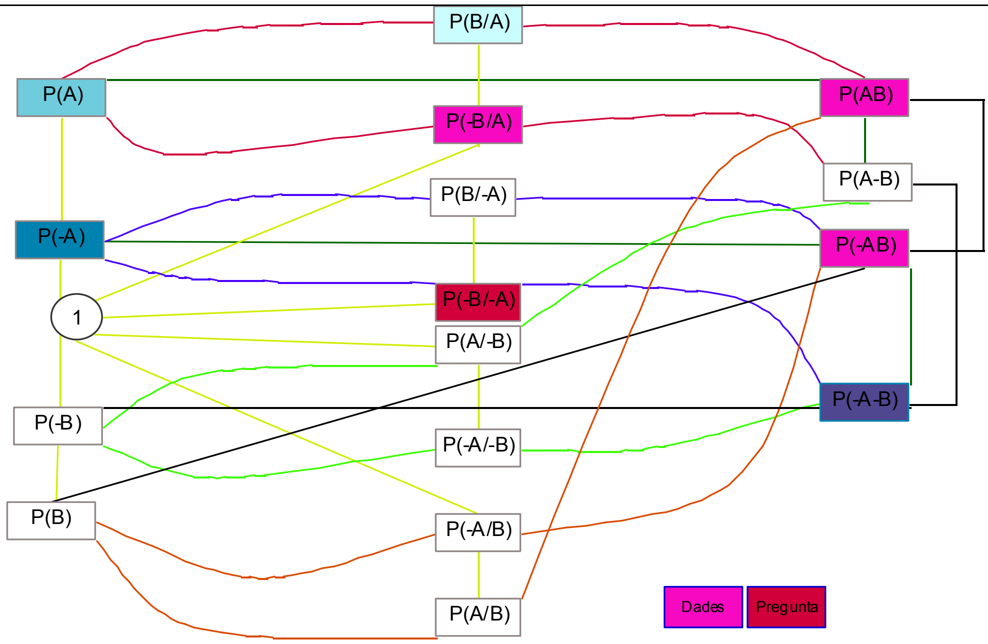


Figura 32 Grafo canónico de [p_{32}]

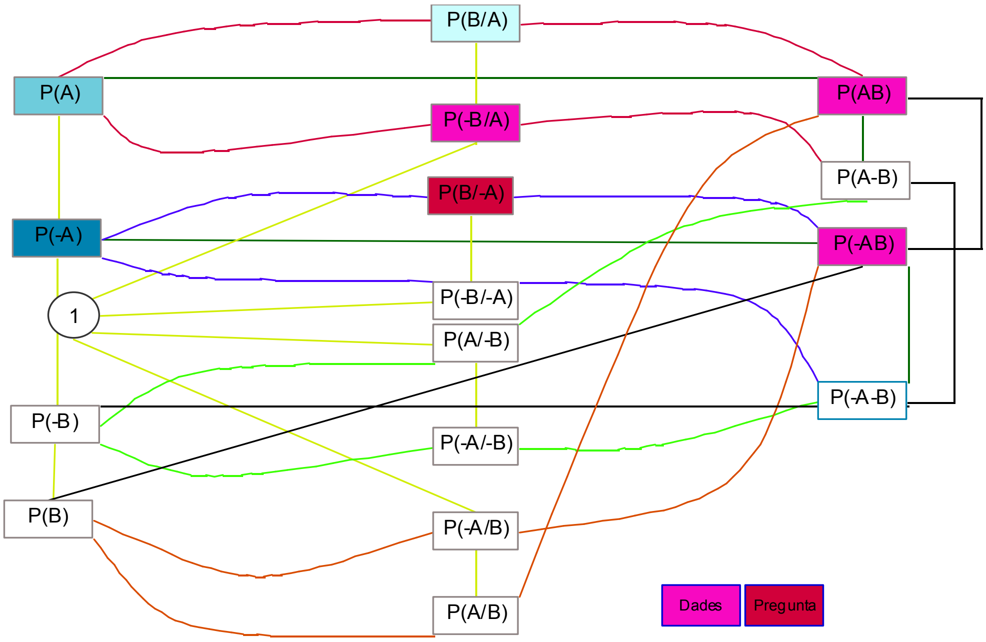


Figura 33 Grafo canónico de [p_{22}]

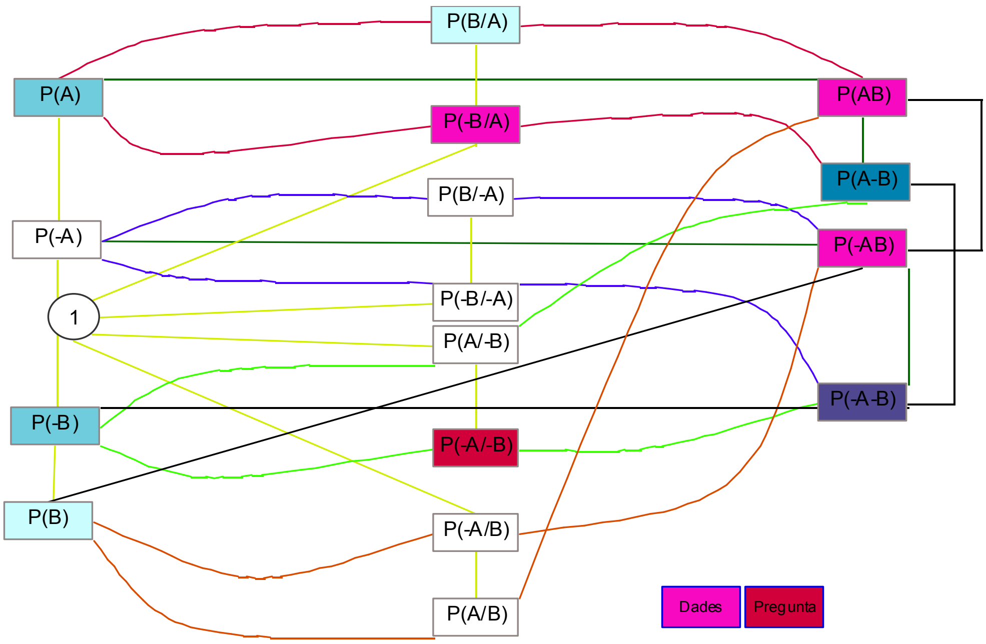


Figura 34 Grafo canónico de [p_{52}]

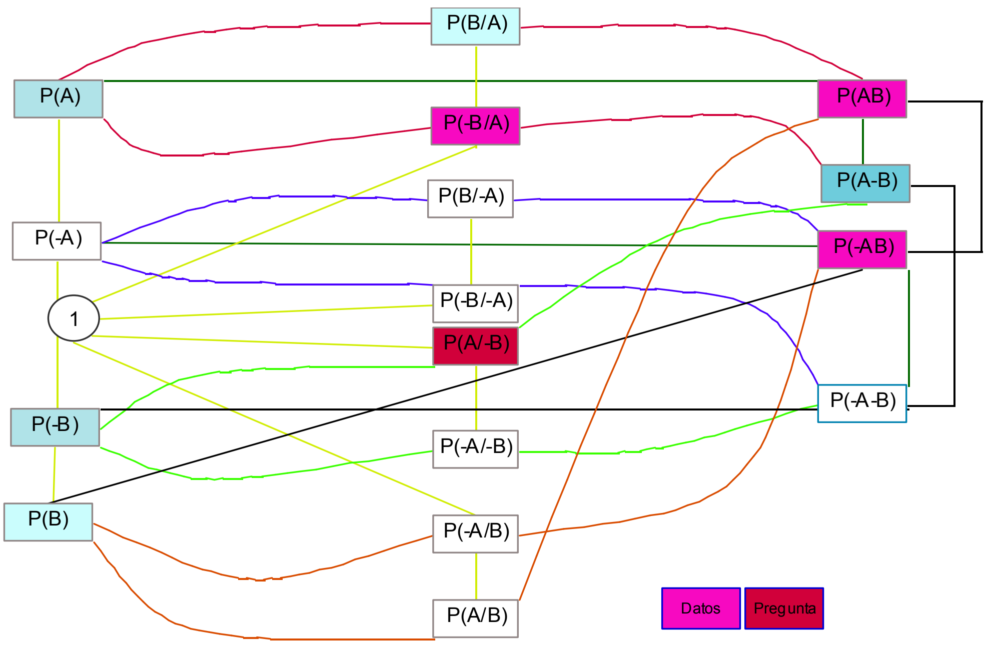


Figura 35 Grafo canónico de [p_{42}]

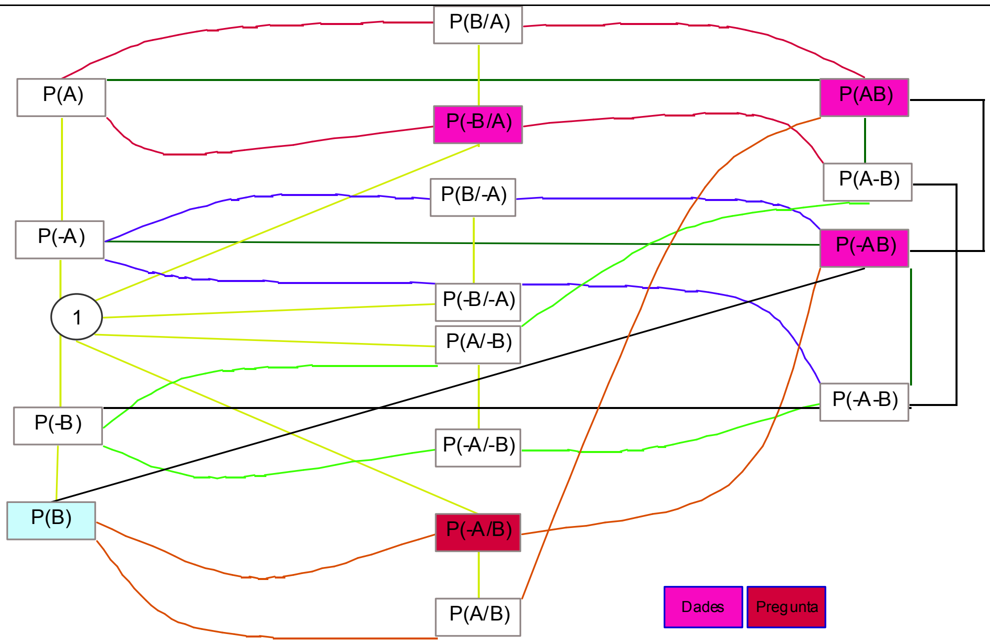


Figura 36 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

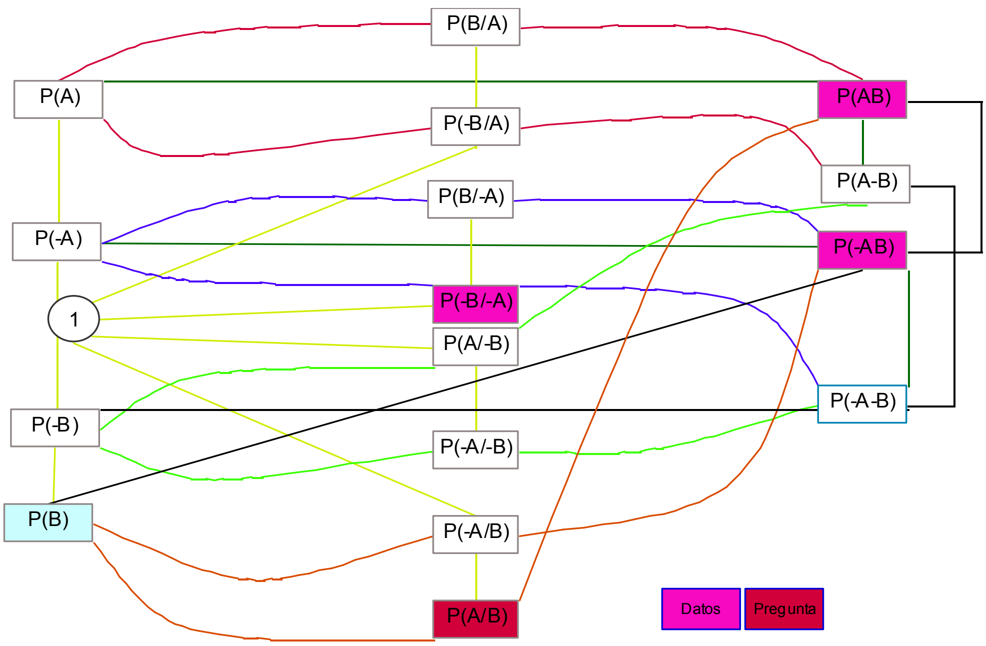


Figura 37 Grafo canónico de [p_{11}]

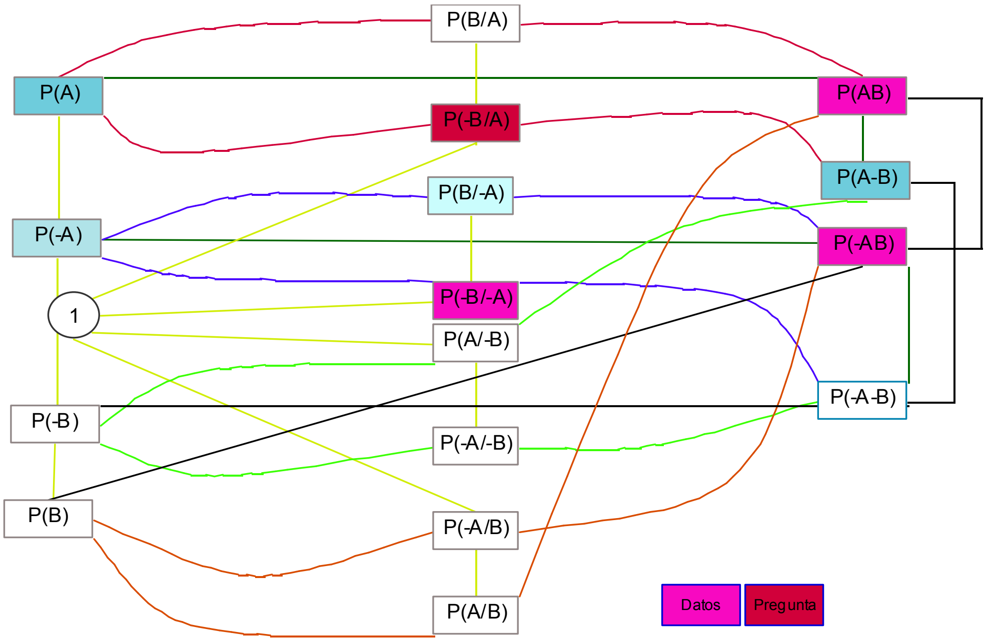


Figura 38 Grafo canónico de [p_{32}]

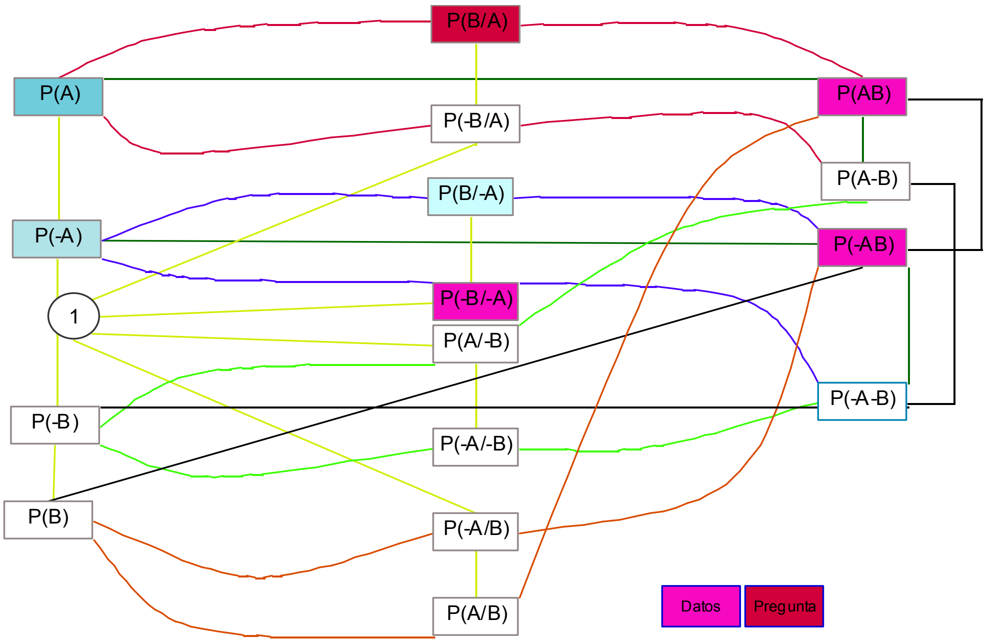


Figura 39 Grafo canónico de [p_{22}]

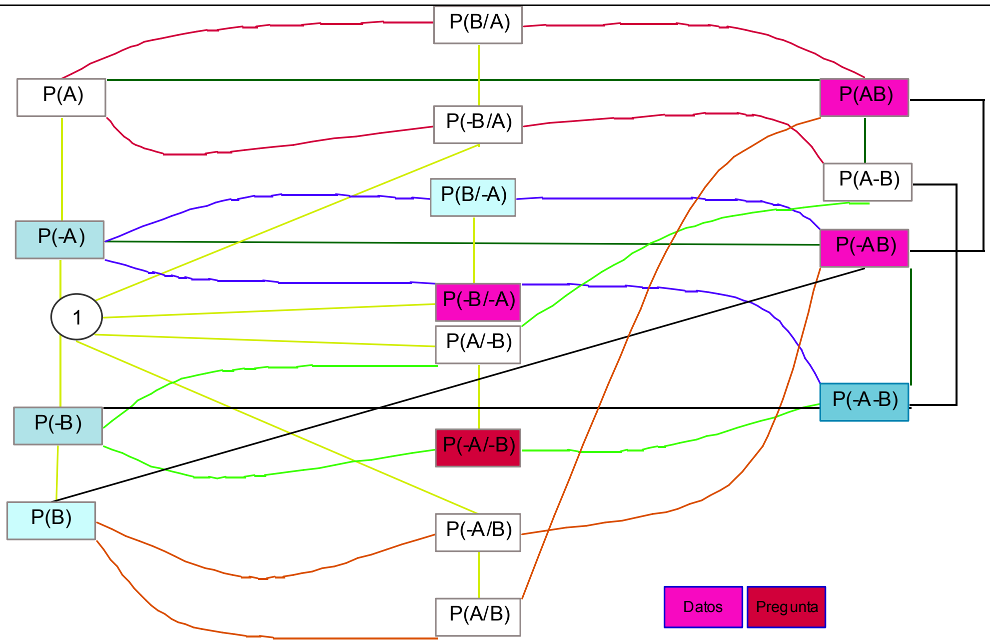


Figura 40 Grafo canónico de [p_{42}]

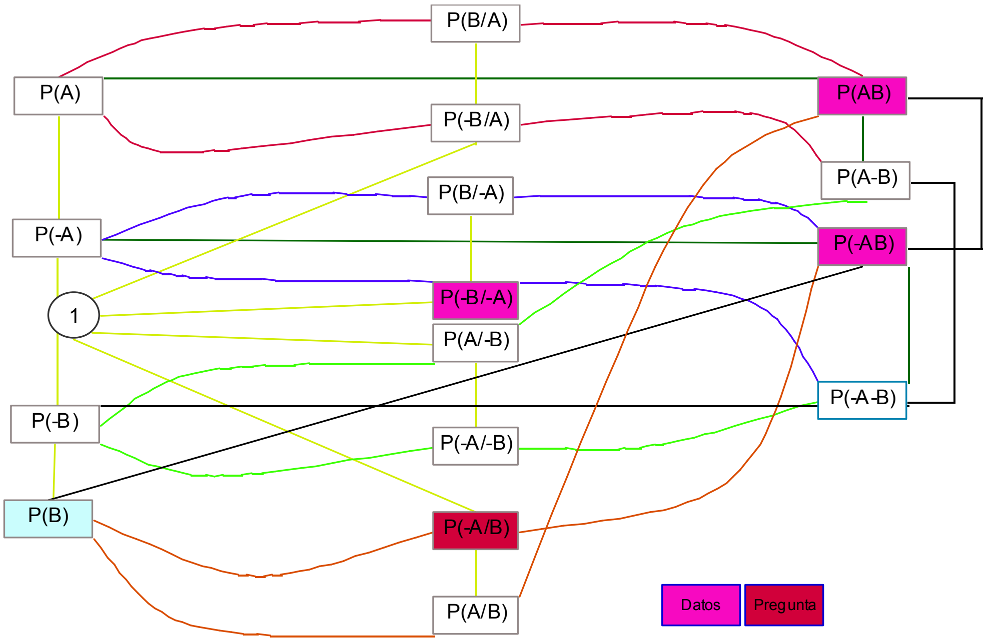


Figura 41 Grafo canónico de [p_{11}]

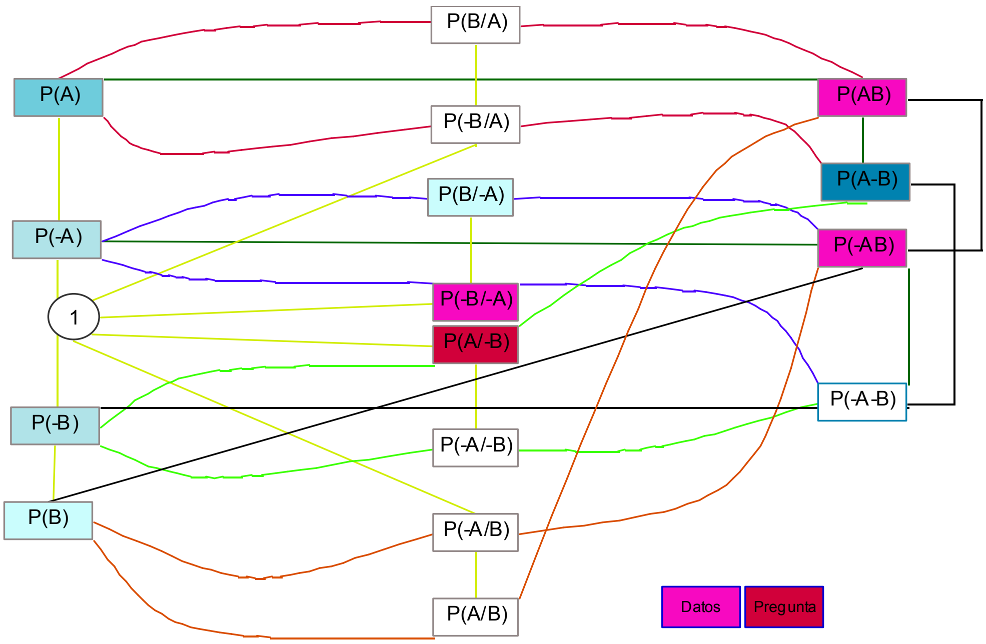


Figura 42 Grafo canónico de [p_{52}]

$N_2C_1T_1G_5$

Seguimos procediendo de la misma forma

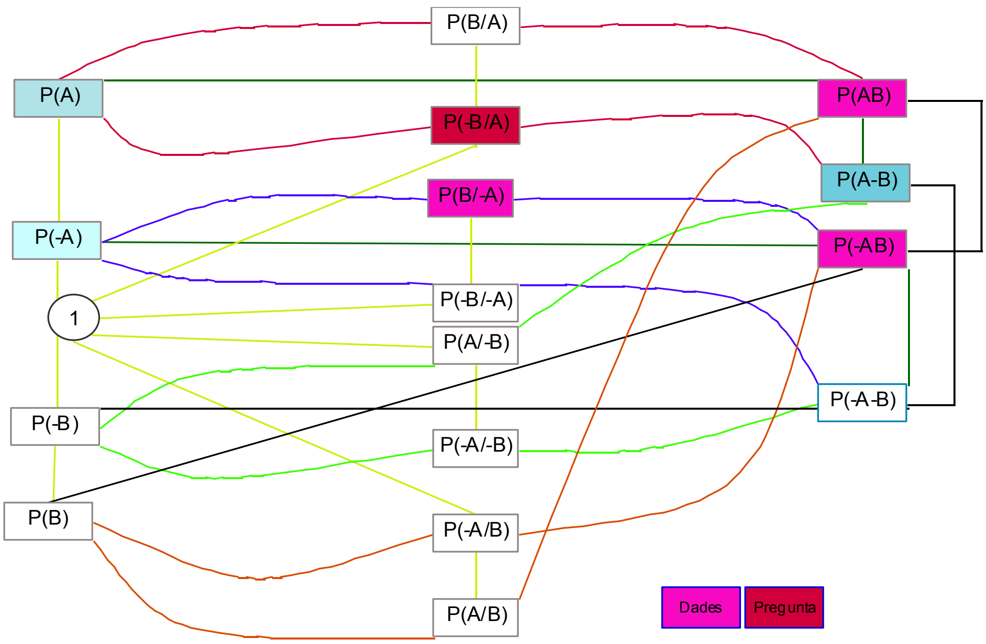


Figura 43 Grafo canónico de [p_{22}]

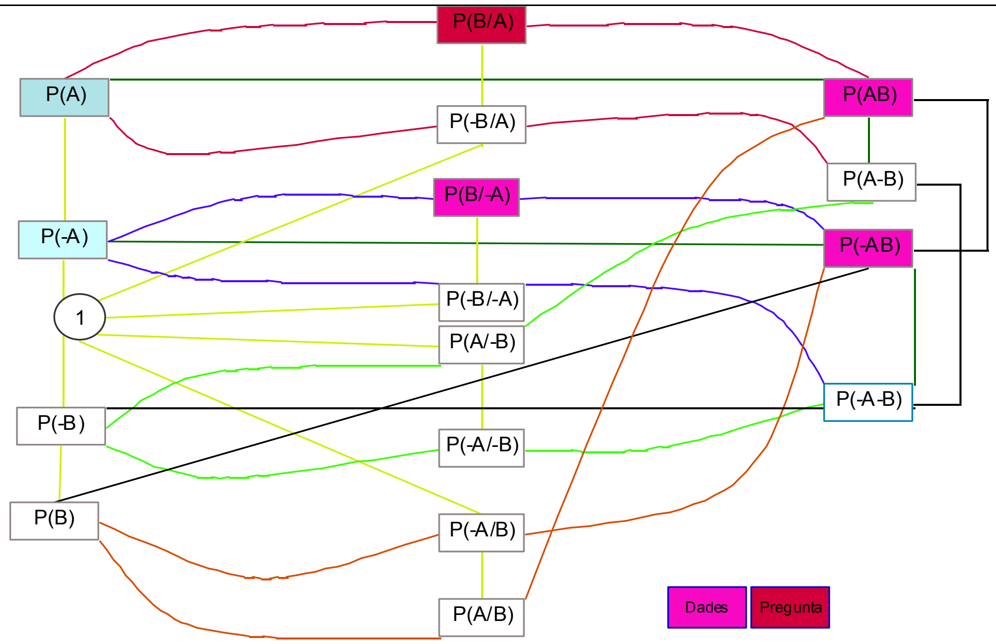


Figura 44 Grafo canónico de [p_{12}]

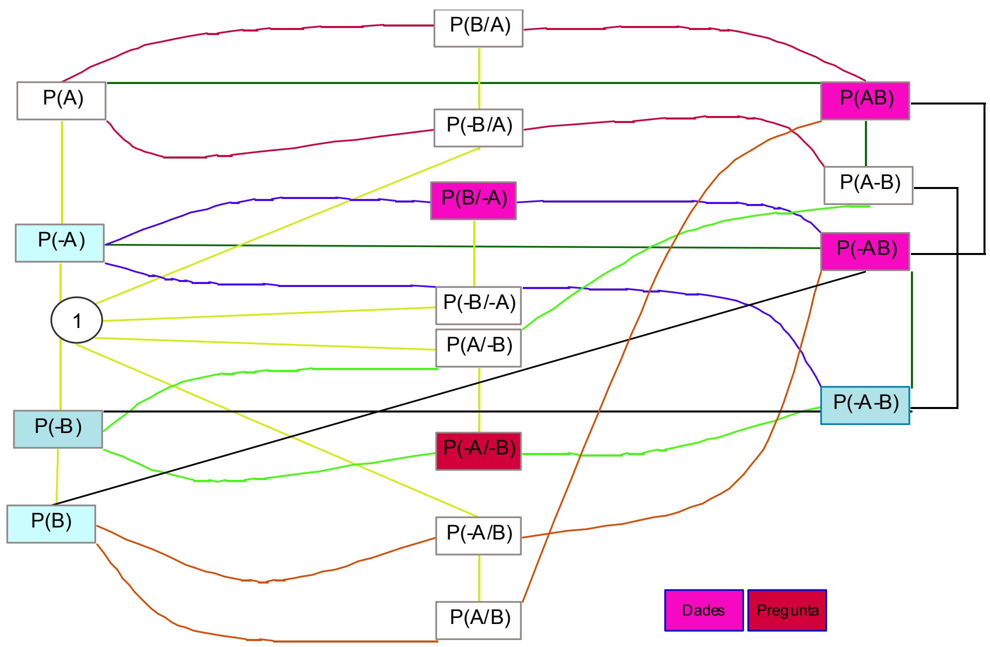


Figura 45 Grafo canónico de [p_{32}]

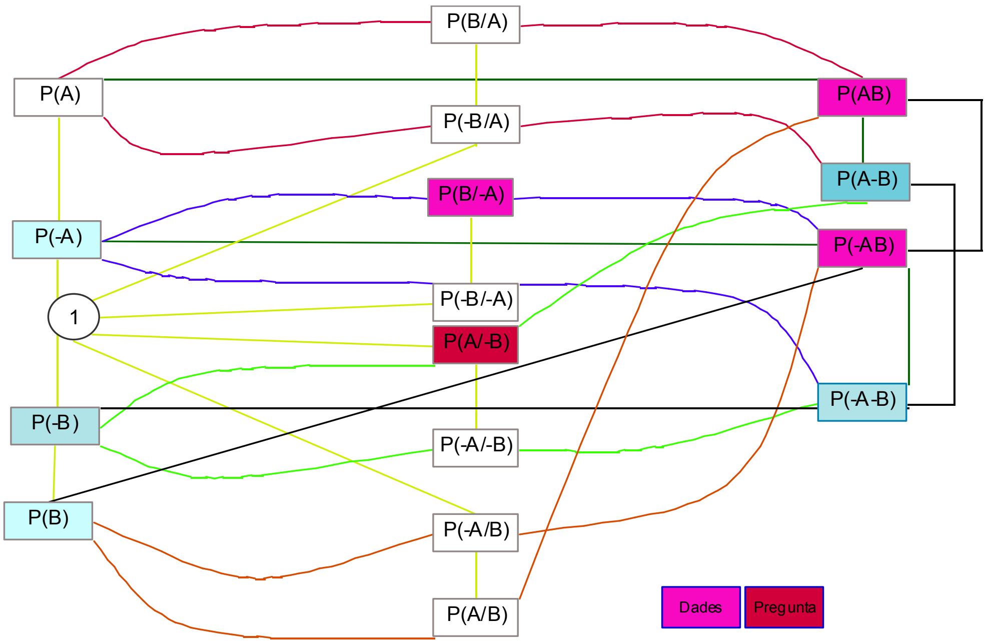


Figura 46 Grafo canónico de [p42]

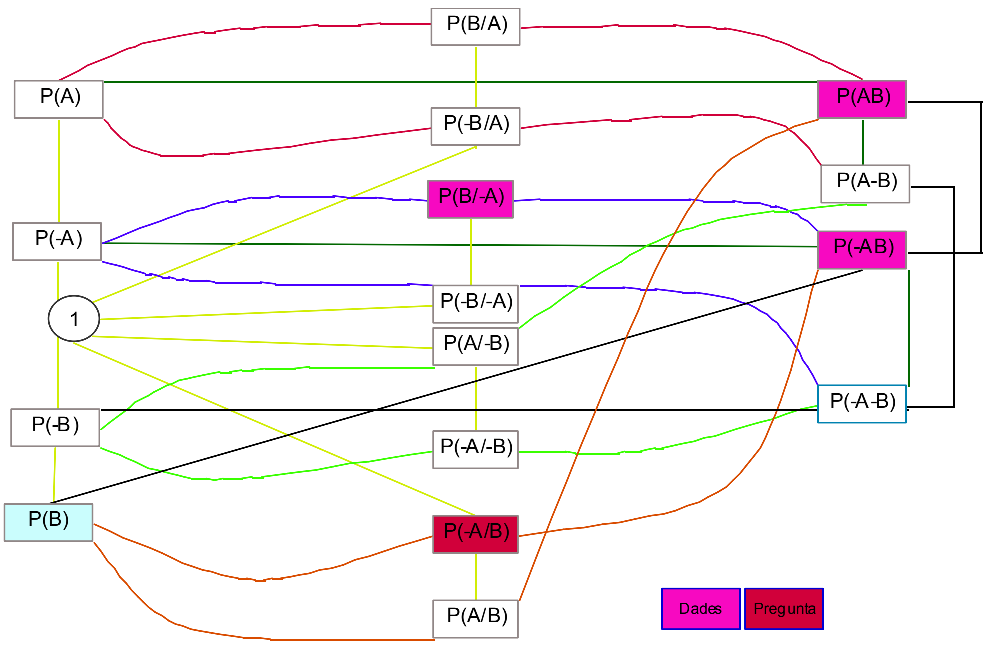


Figura 47 Grafo canónico de [p_{11}]

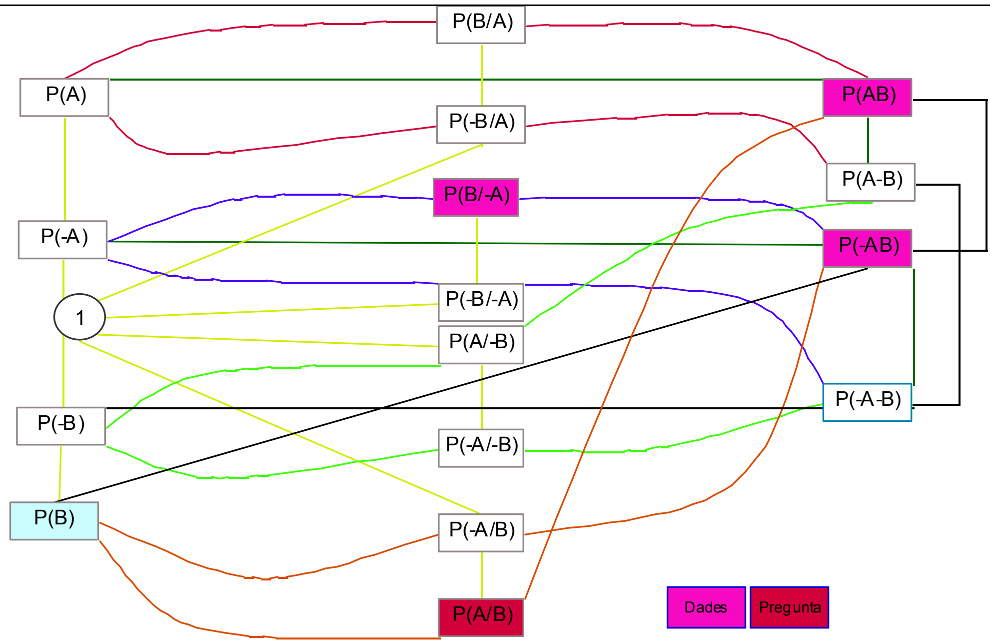


Figura 48 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

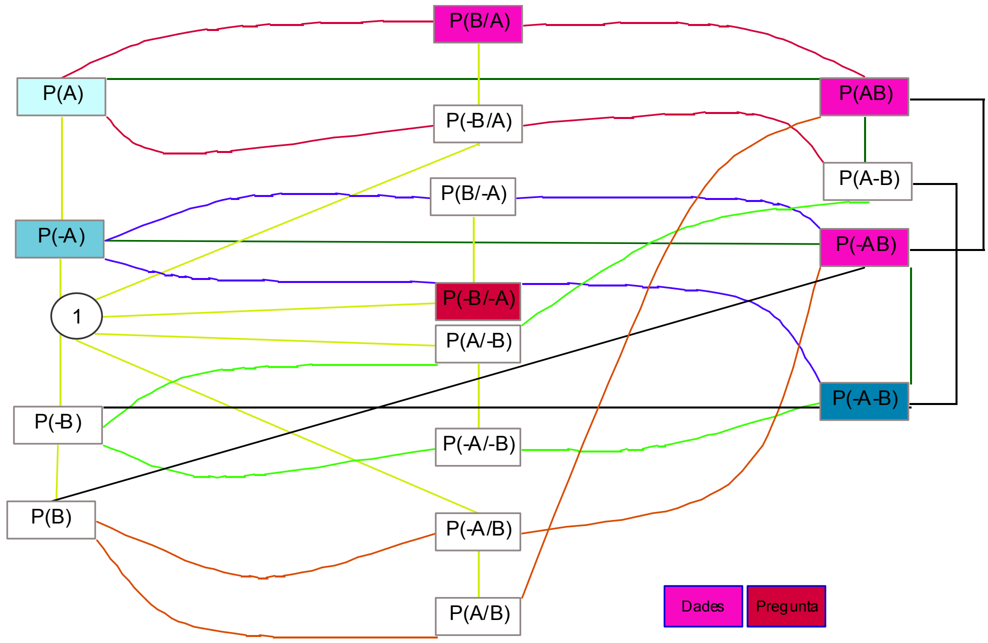


Figura 49 Grafo canónico de [p_{22}]

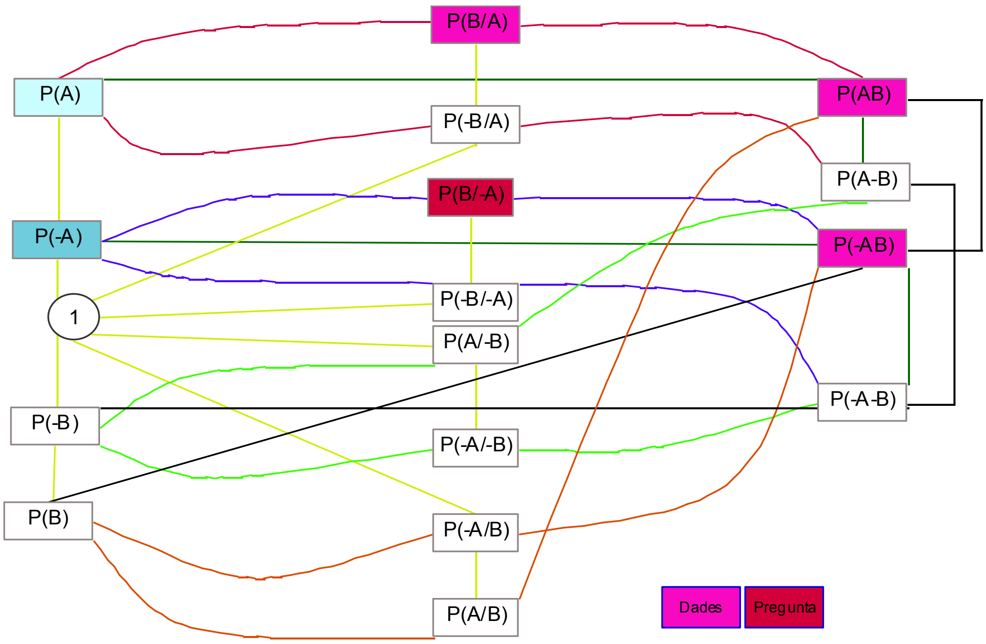


Figura 50 Grafo canónico de [p12]

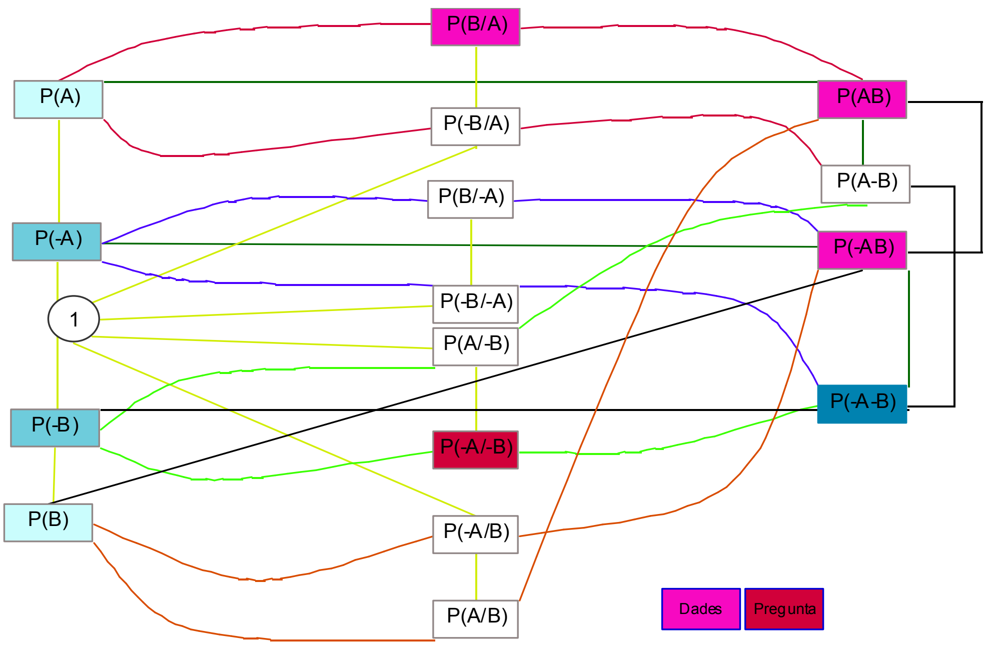


Figura 51 Grafo canónico de [p_{42}]

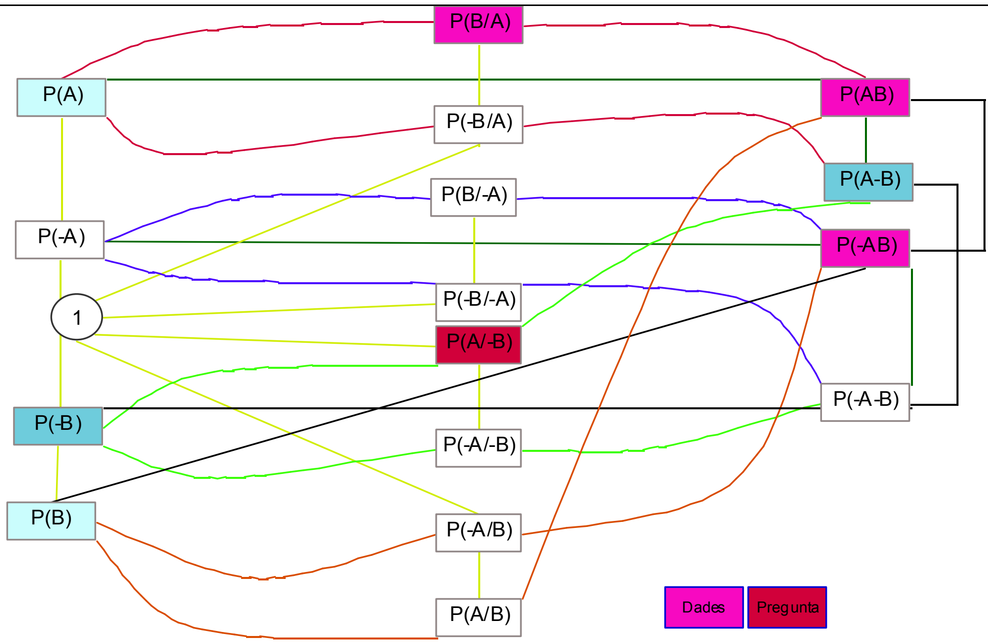


Figura 52 Grafo canónico de [p_{32}]

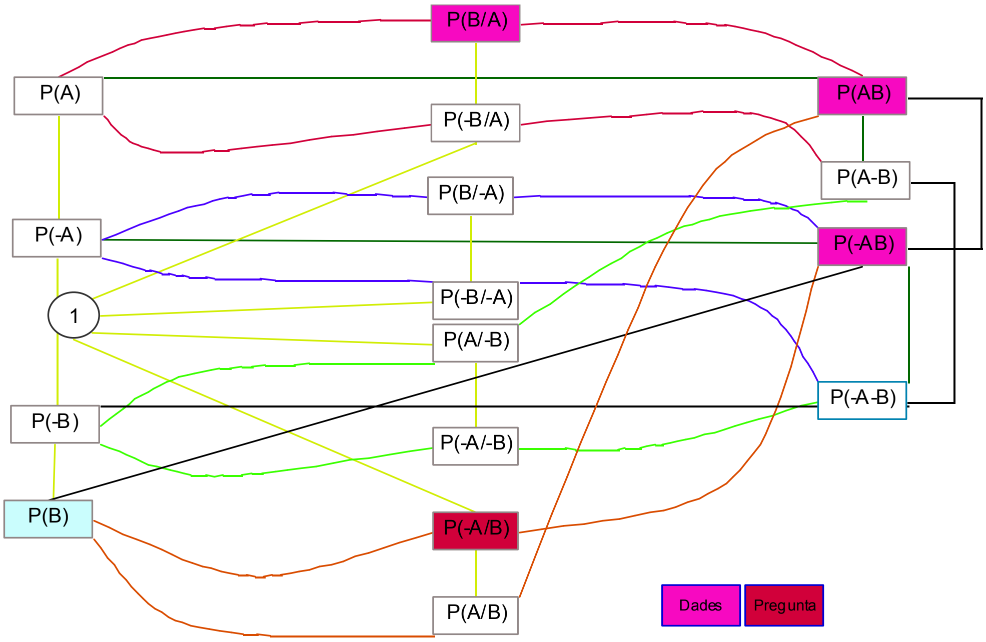


Figura 53 Grafo canónico de [p_{11}]

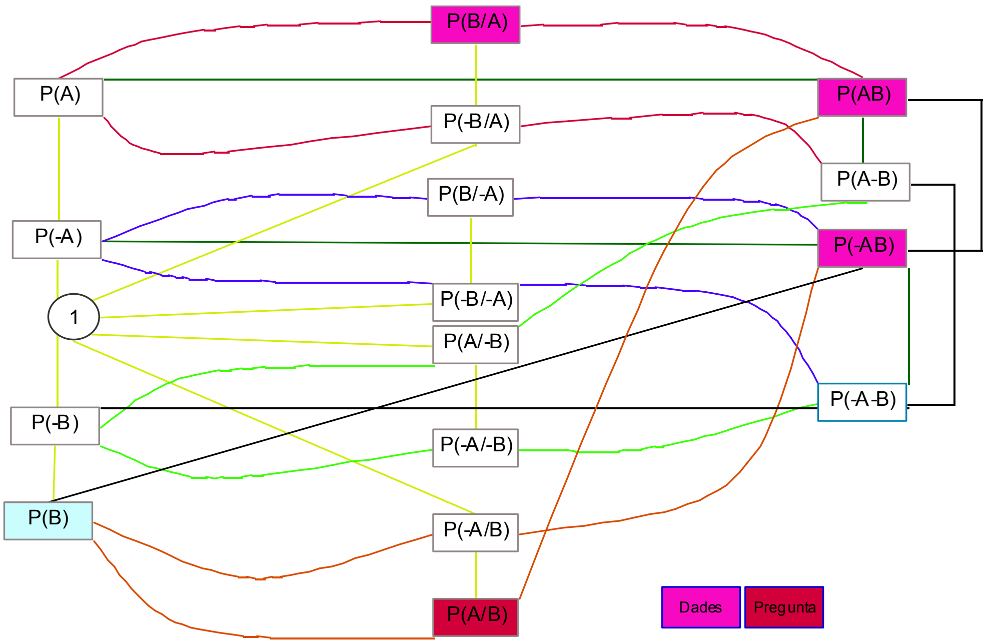


Figura 54 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_1G_6$

Procedemos de la misma forma

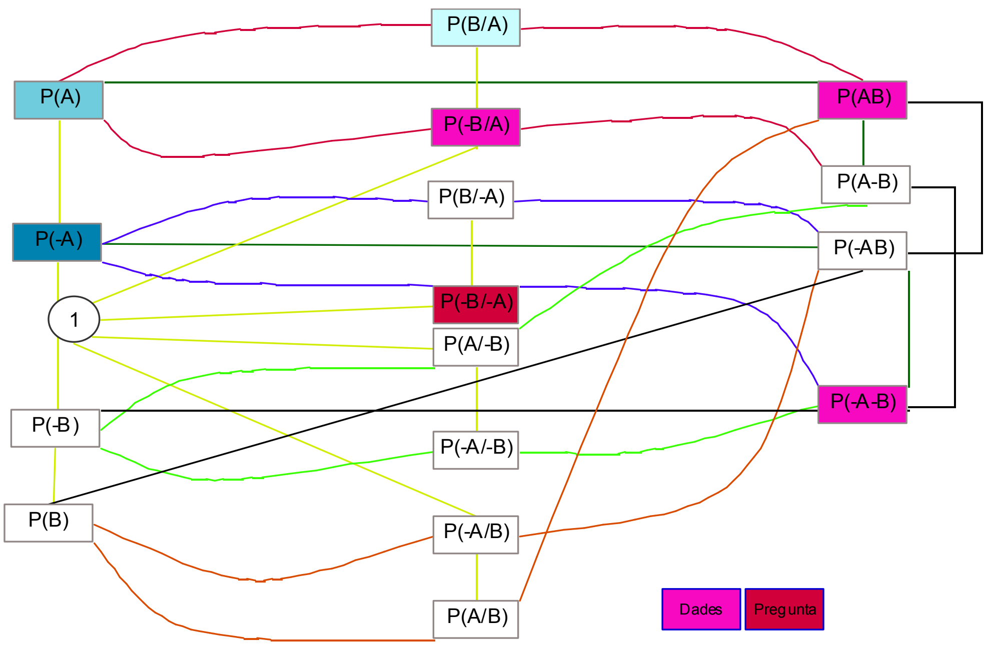


Figura 55 Grafo canónico de [p_{22}]

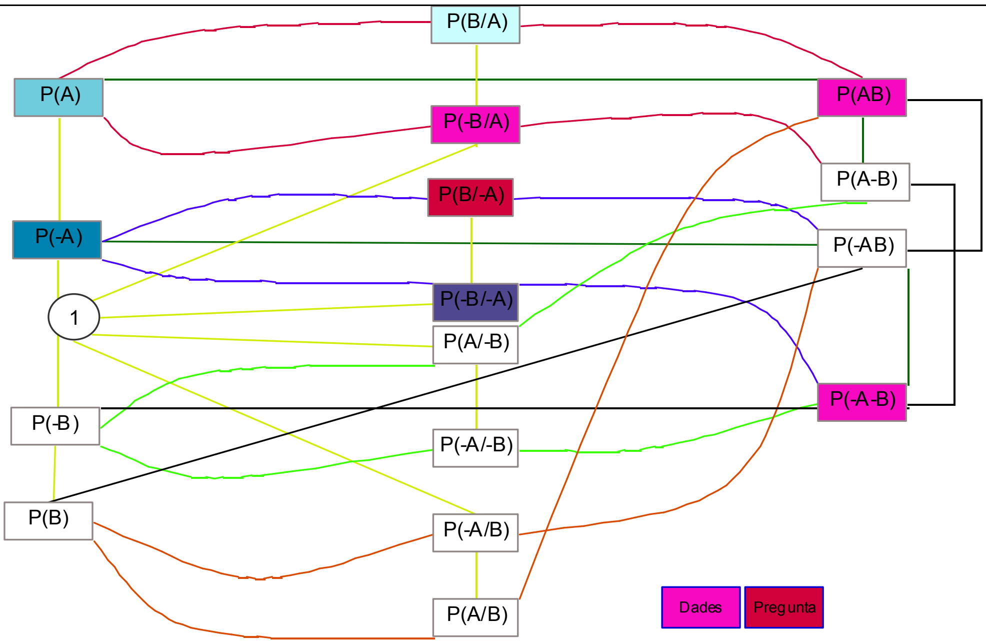


Figura 56 Grafo canónico de [p_{32}]

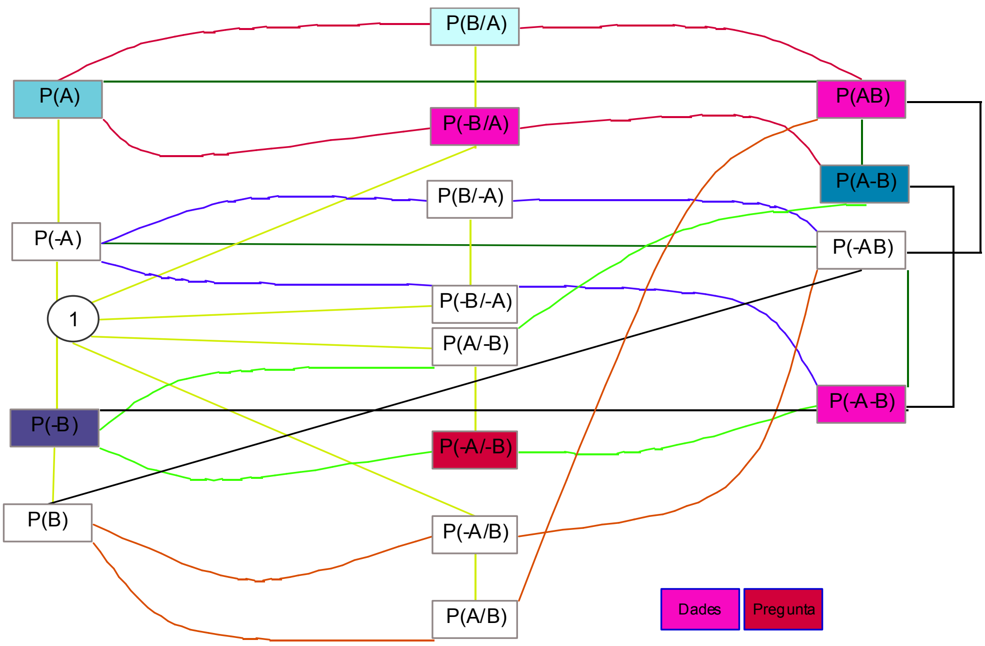


Figura 57 Grafo canónico de [p_{32}]

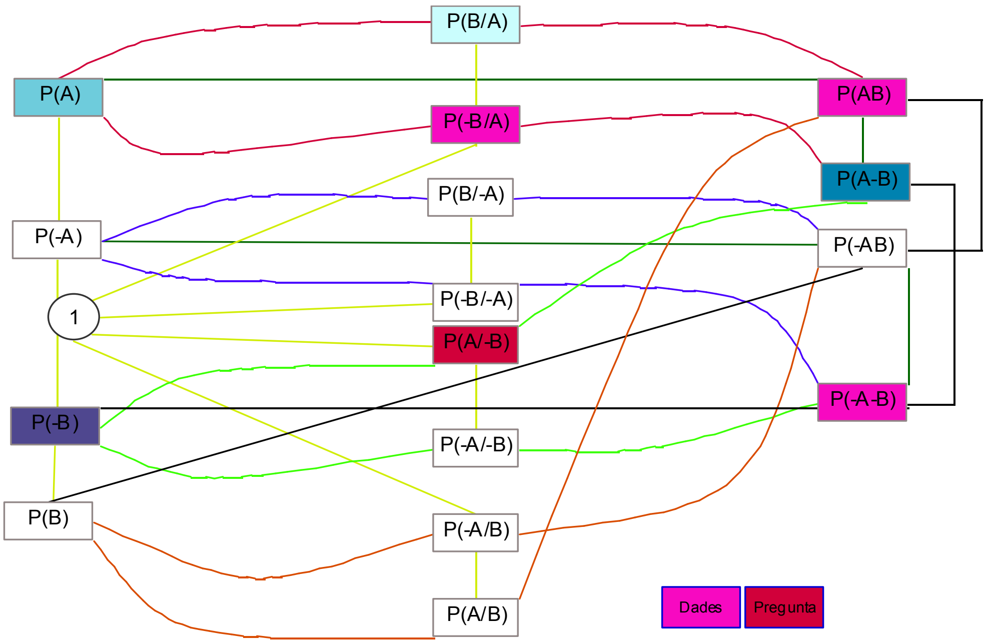


Figura 58 Grafo canónico de [p_{32}]

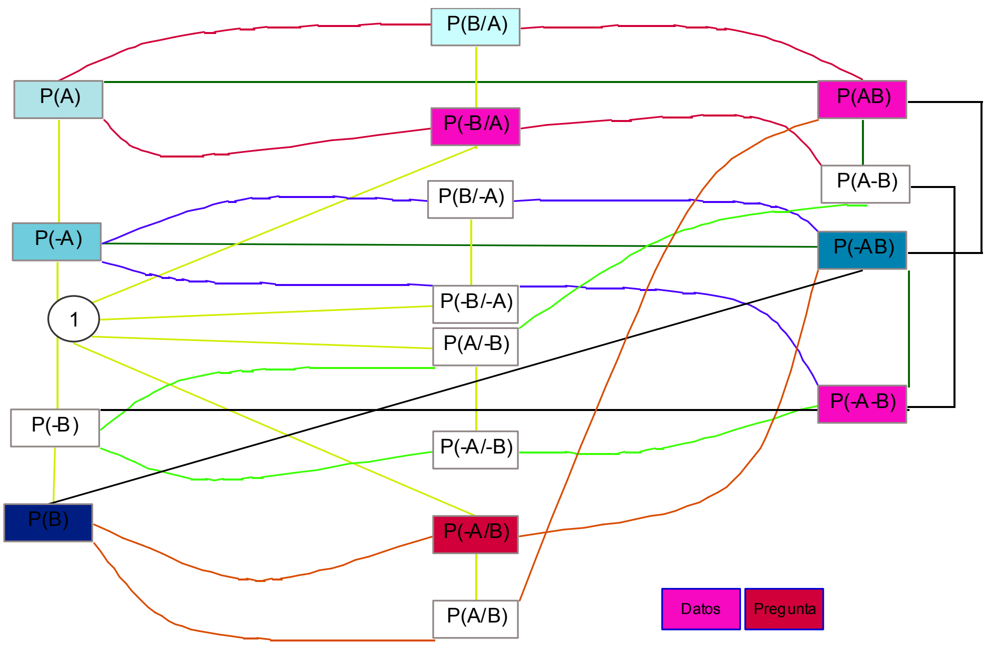


Figura 59 Grafo canónico de [p_{42}]

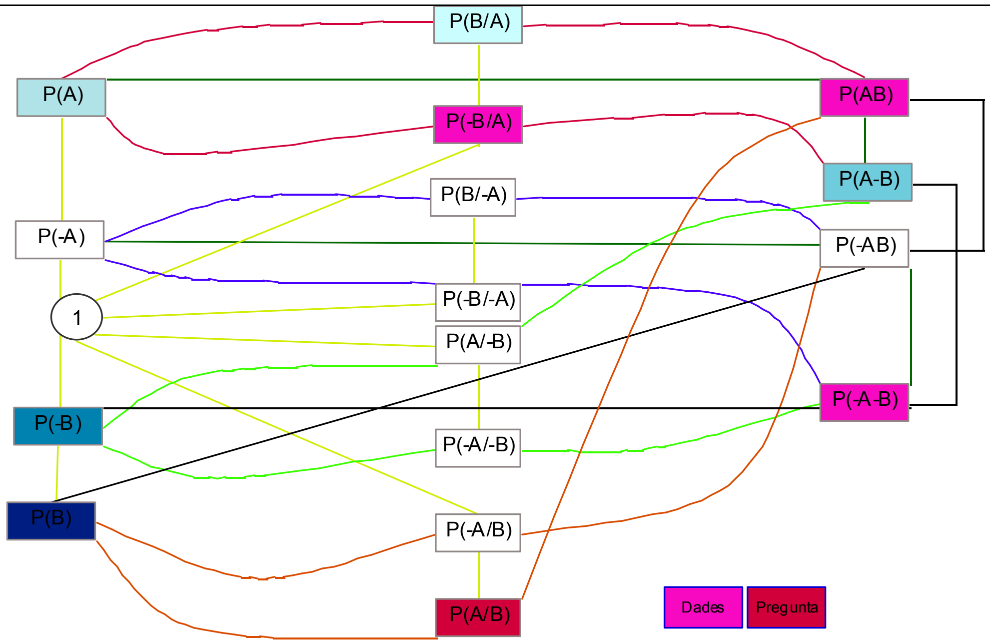


Figura 60 Grafo canónico de [p_{42}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

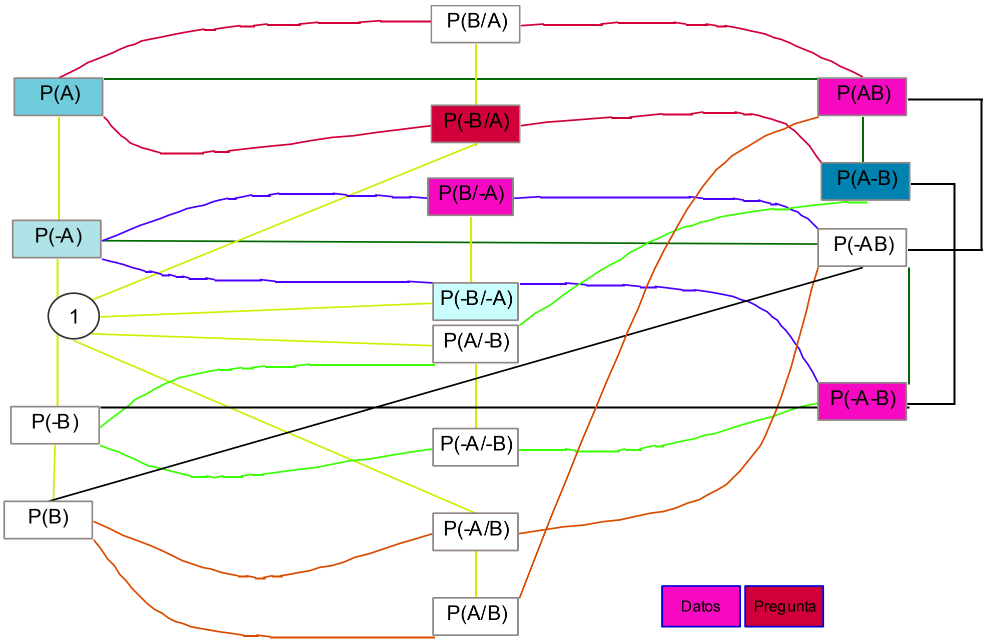


Figura 61 Grafo canónico de [p_{32}]

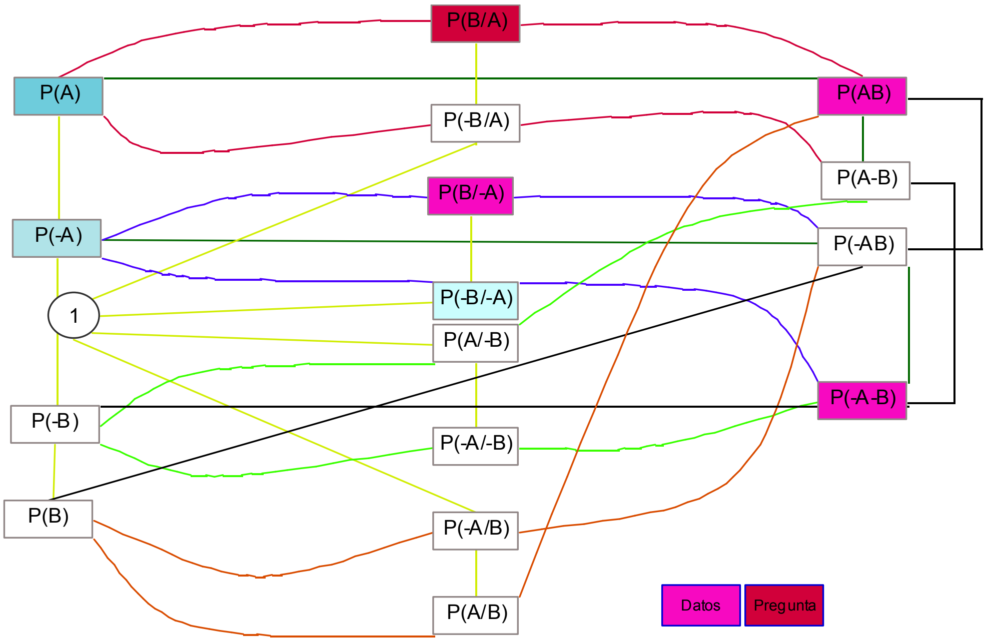


Figura 62 Grafo canónico de [p_{22}]

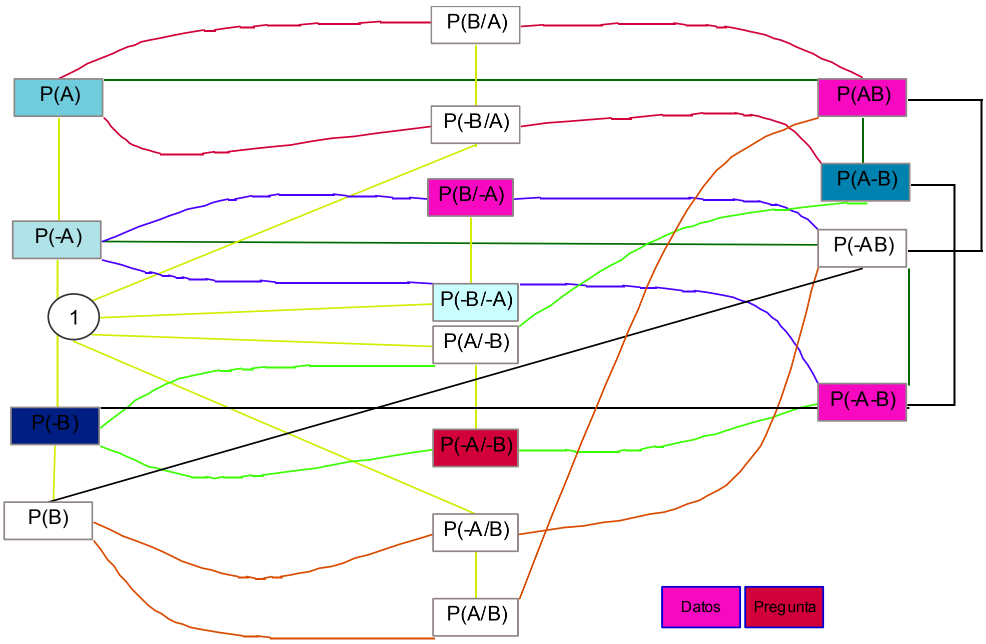


Figura 63 Grafo canónico de [p_{42}]

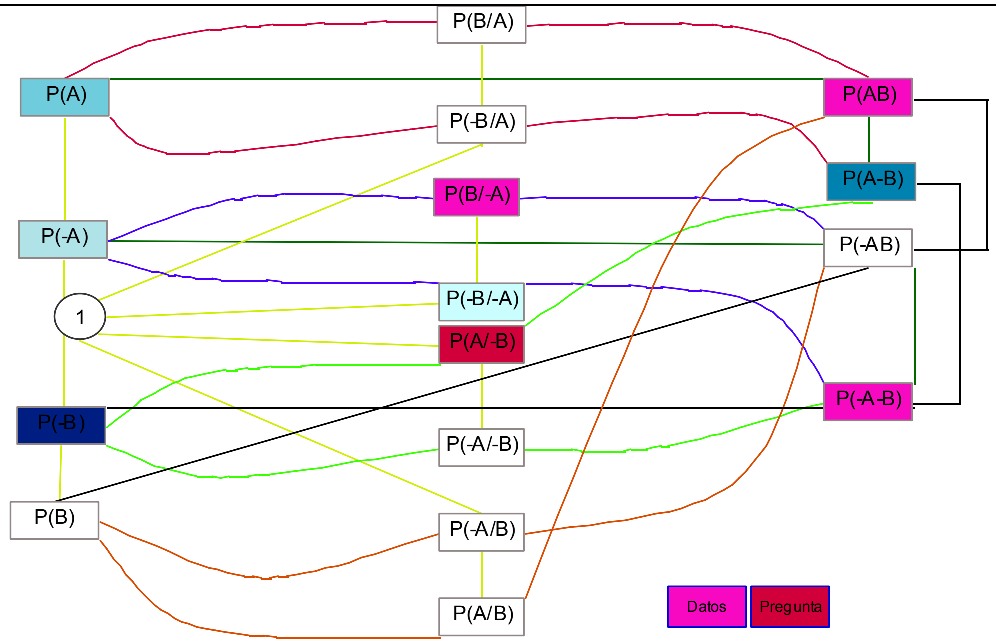


Figura 64 Grafo canónico de [p_{42}]

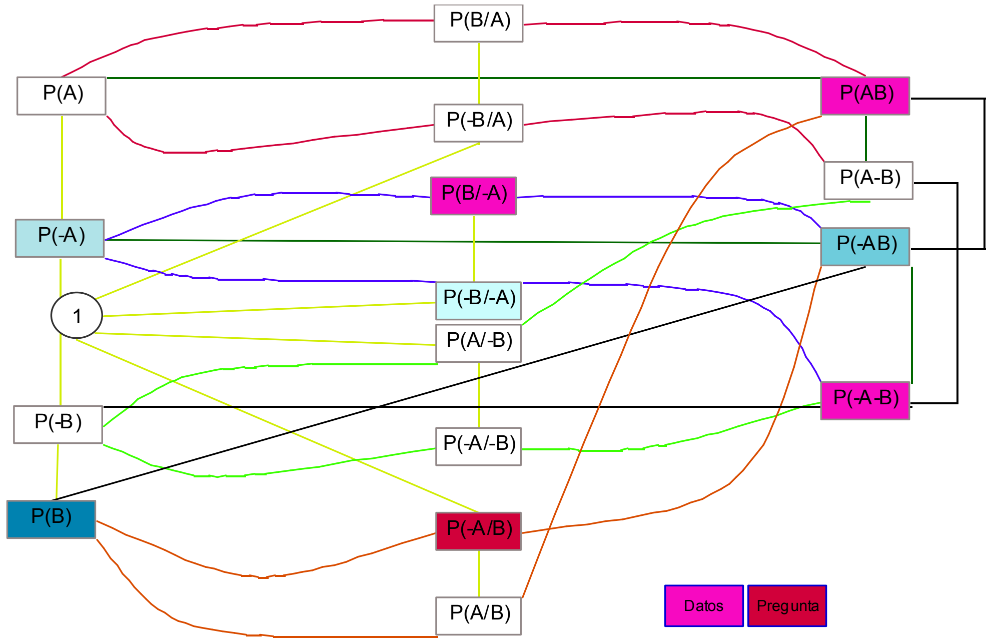


Figura 65 Grafo canónico de [p_{32}]

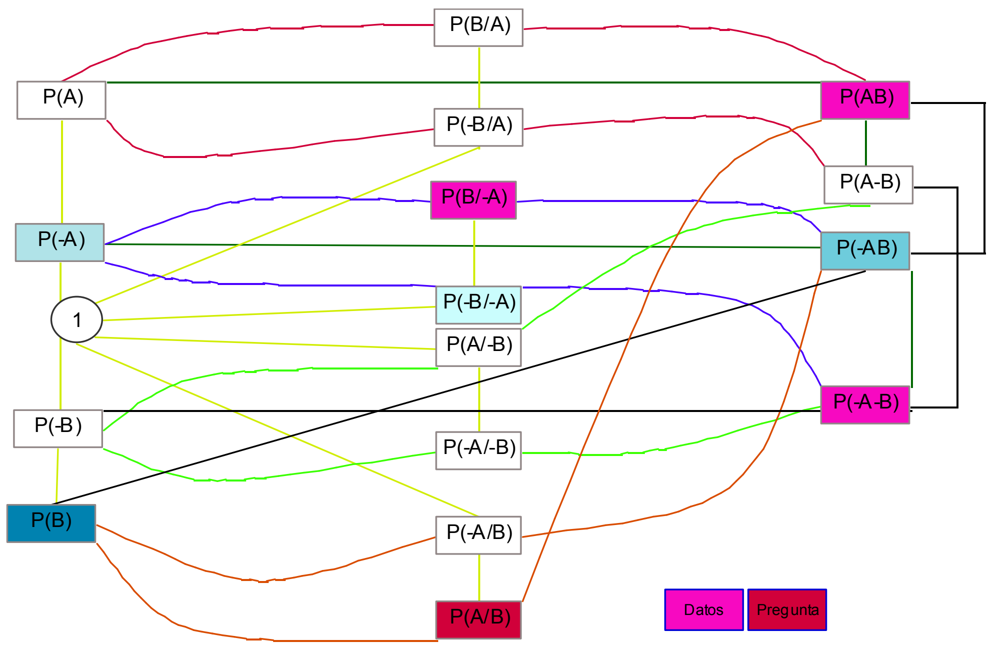


Figura 66 Grafo canónico de [p_{32}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

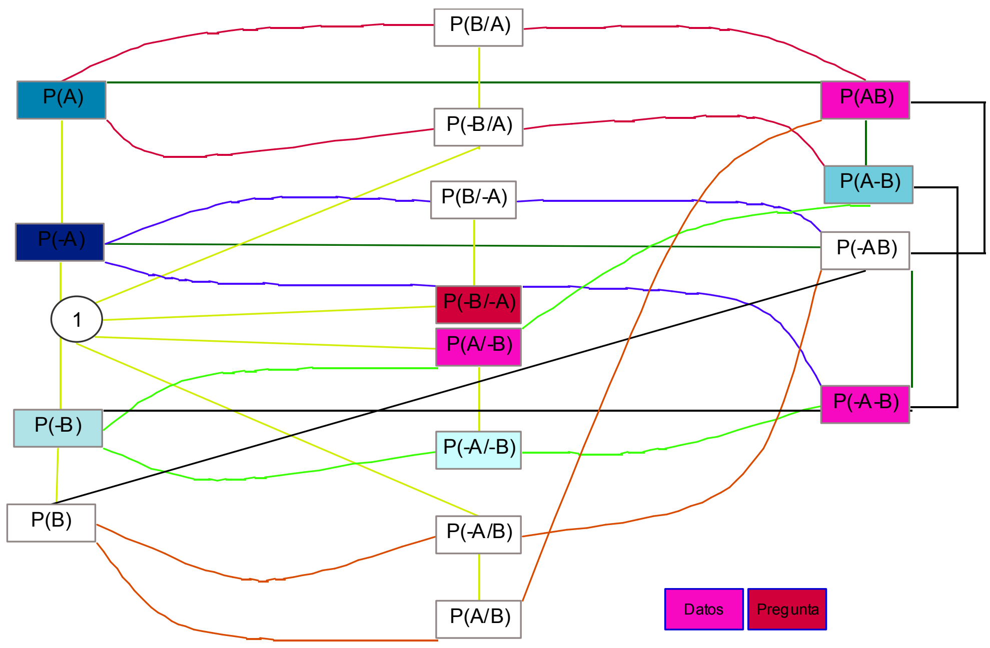


Figura 67 Grafo canónico de [p_{42}]

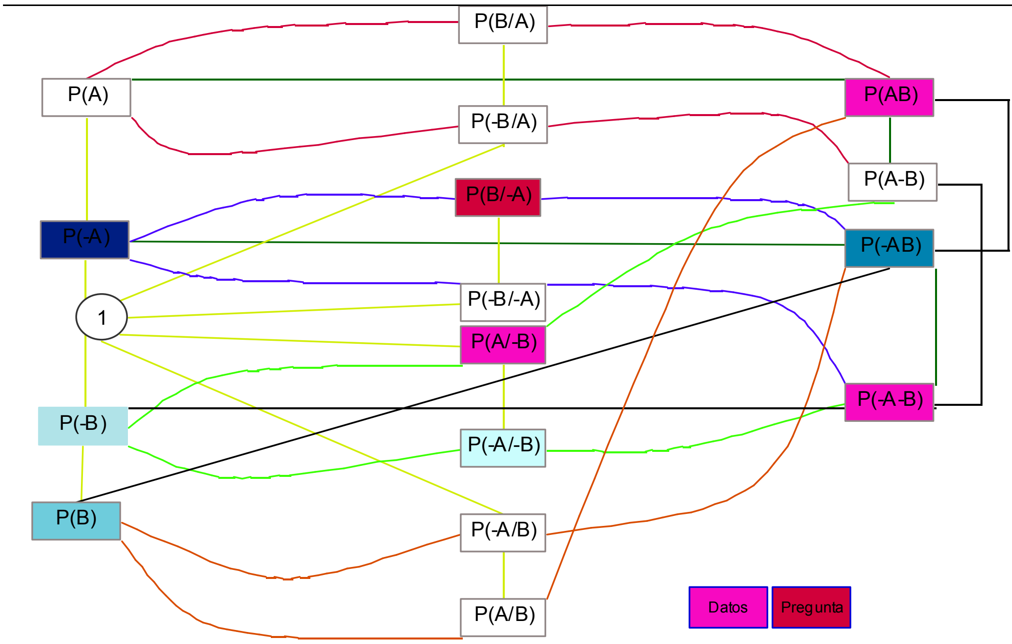


Figura 68 Grafo canónico de [p_{42}]

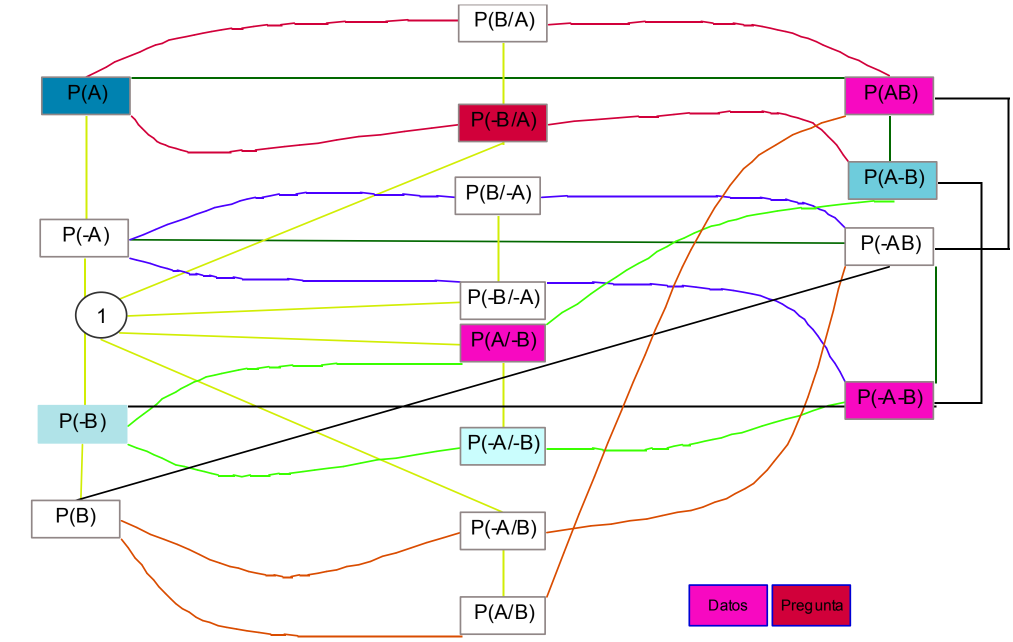


Figura 69 Grafo canónico de [p_{32}]

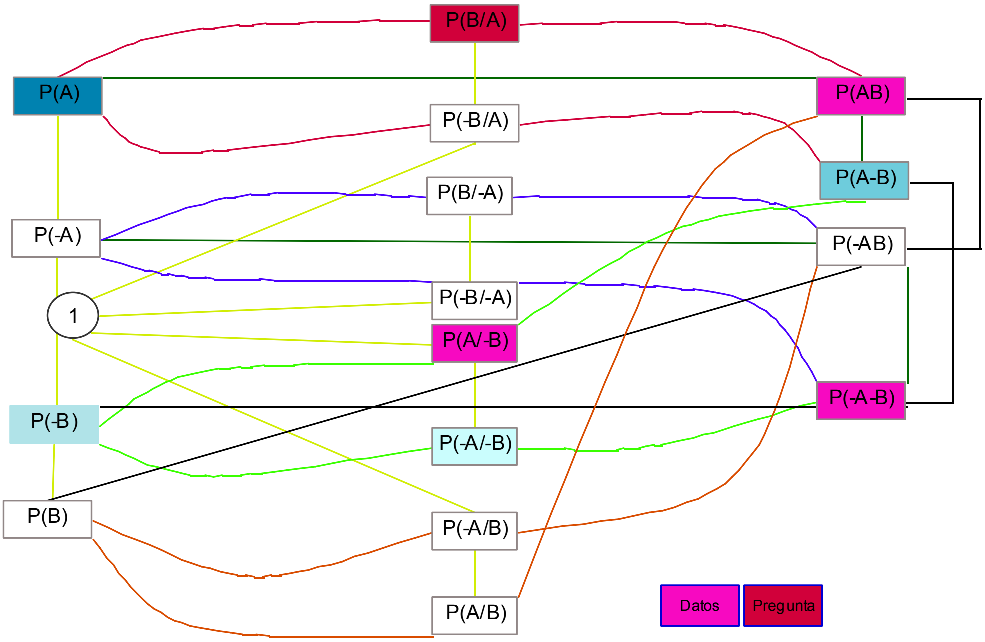


Figura 70 Grafo canónico de [p_{32}]

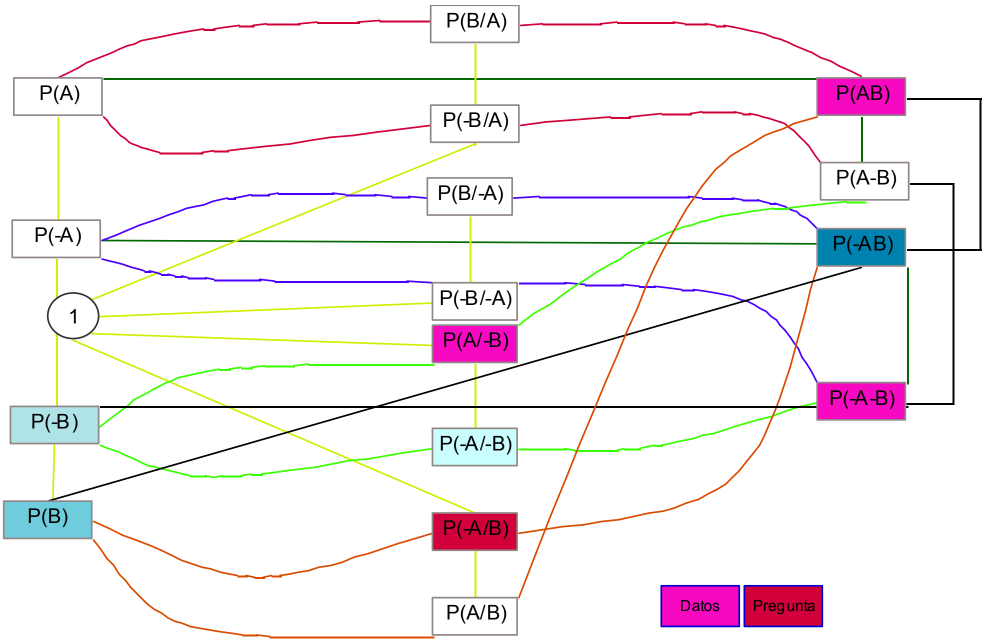


Figura 71 Grafo canónico de [p_{32}]

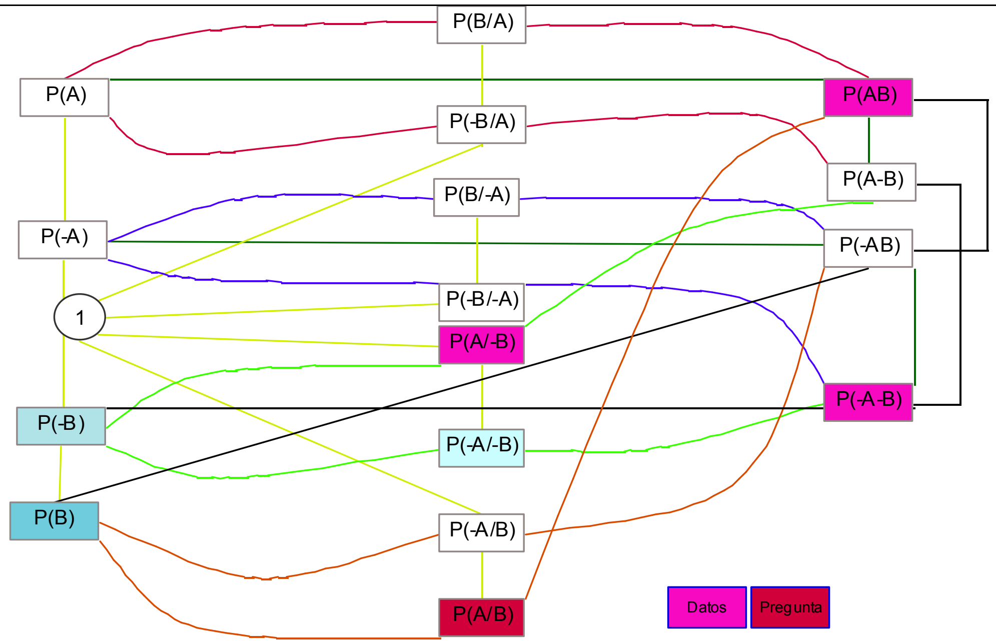


Figura 72 Grafo canónico de [p_{22}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

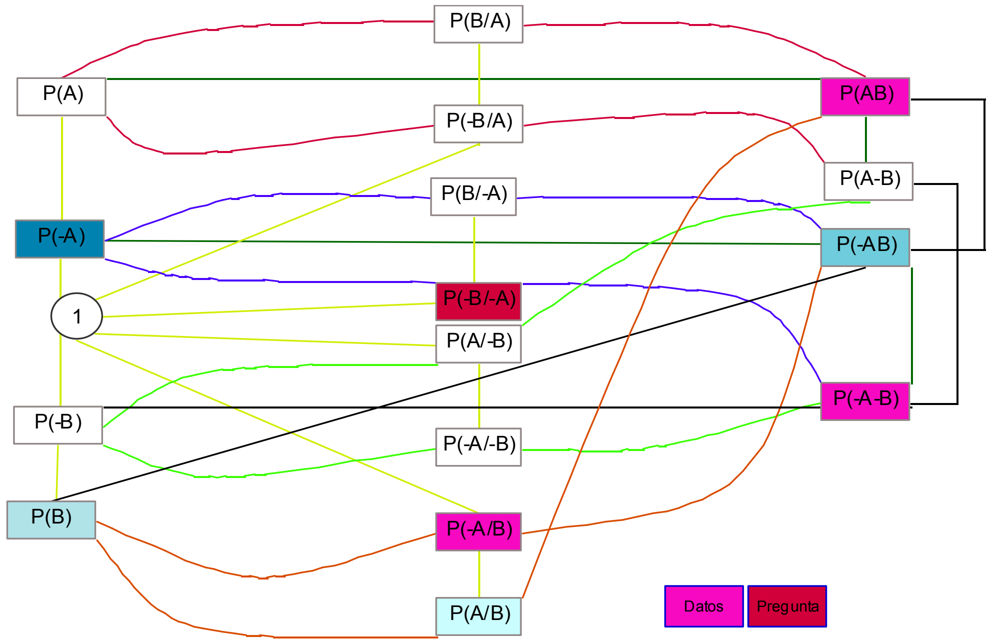


Figura 73 Grafo canónico de [p_{32}]

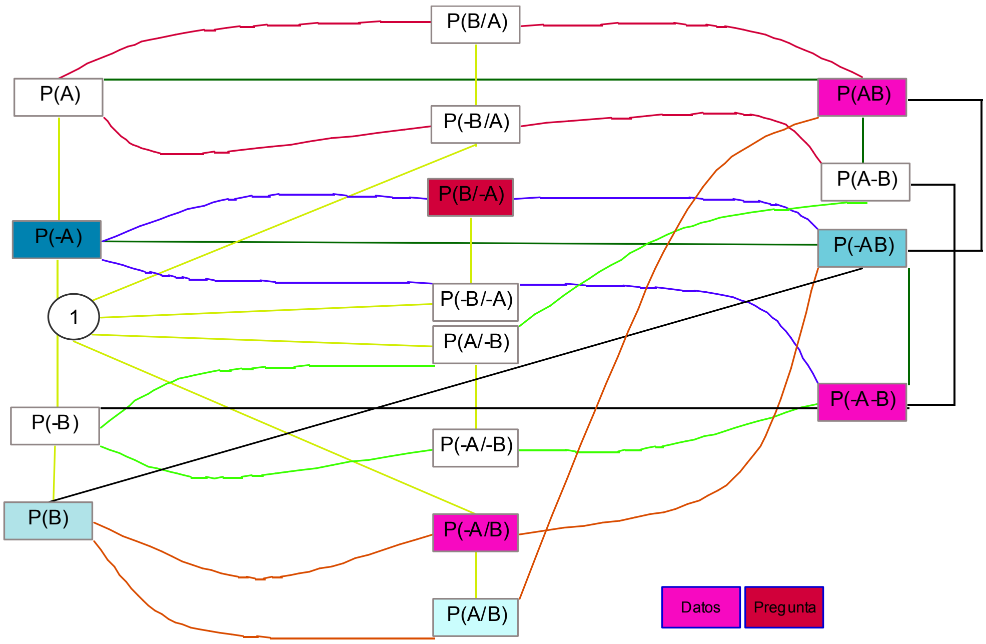


Figura 74 Grafo canónico de [p_{32}]

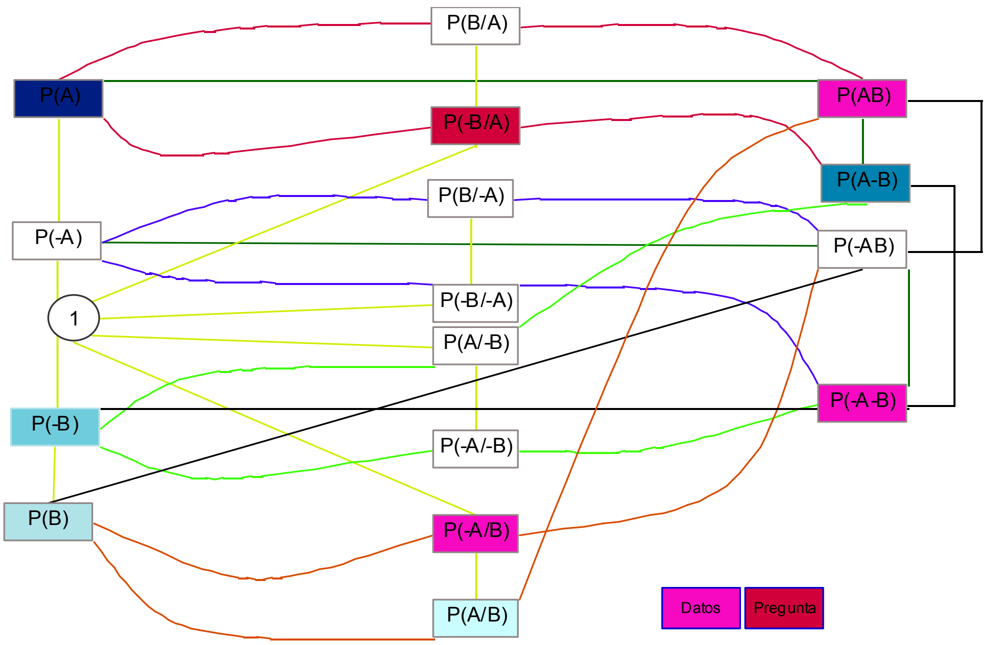


Figura 75 Grafo canónico de [p_{42}]

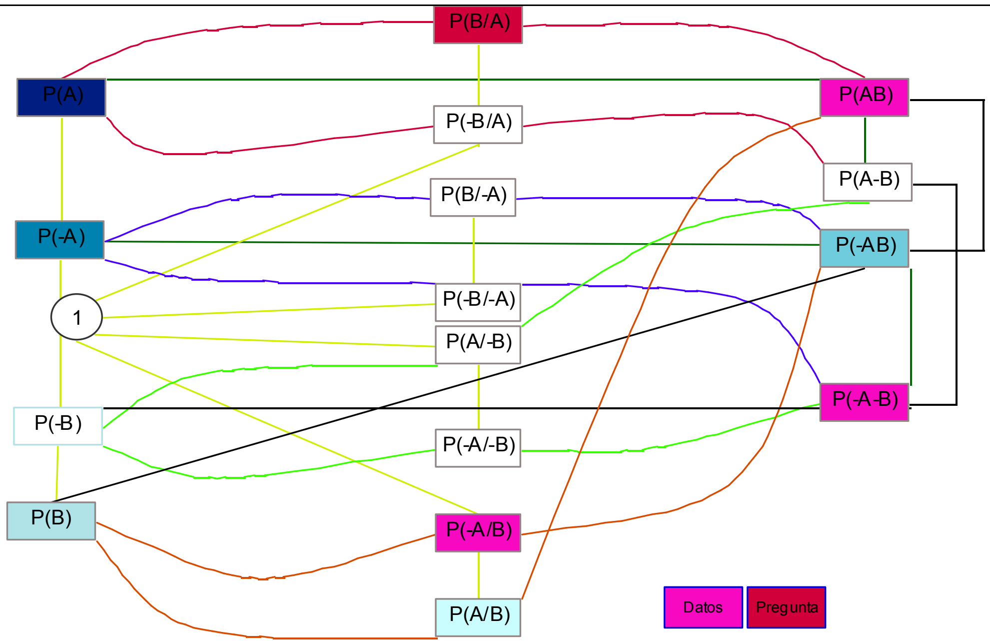


Figura 76 Grafo canónico de [p_{42}]

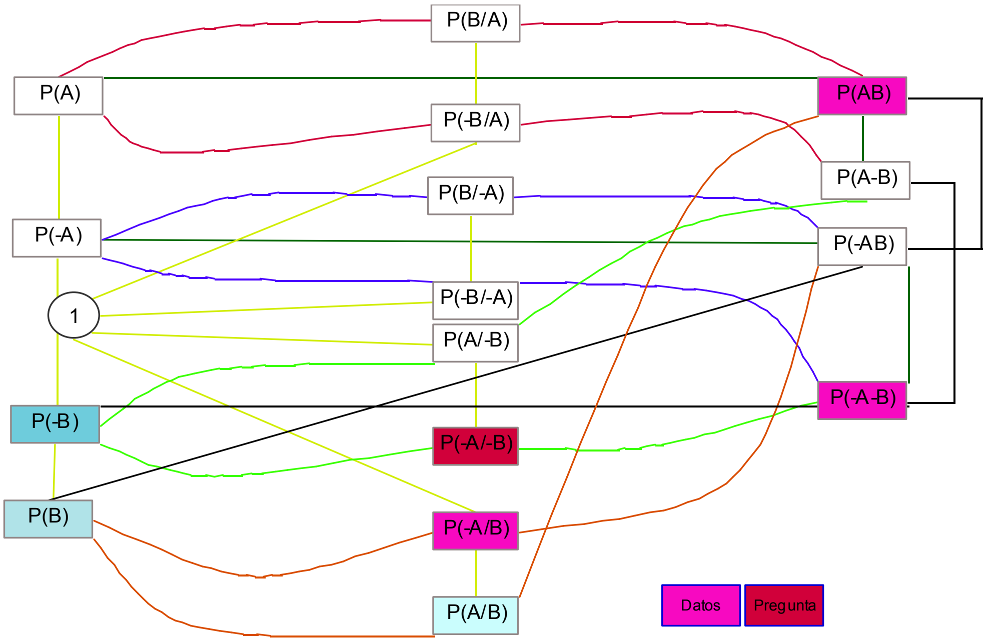


Figura 77 Grafo canónico de [p_{22}]

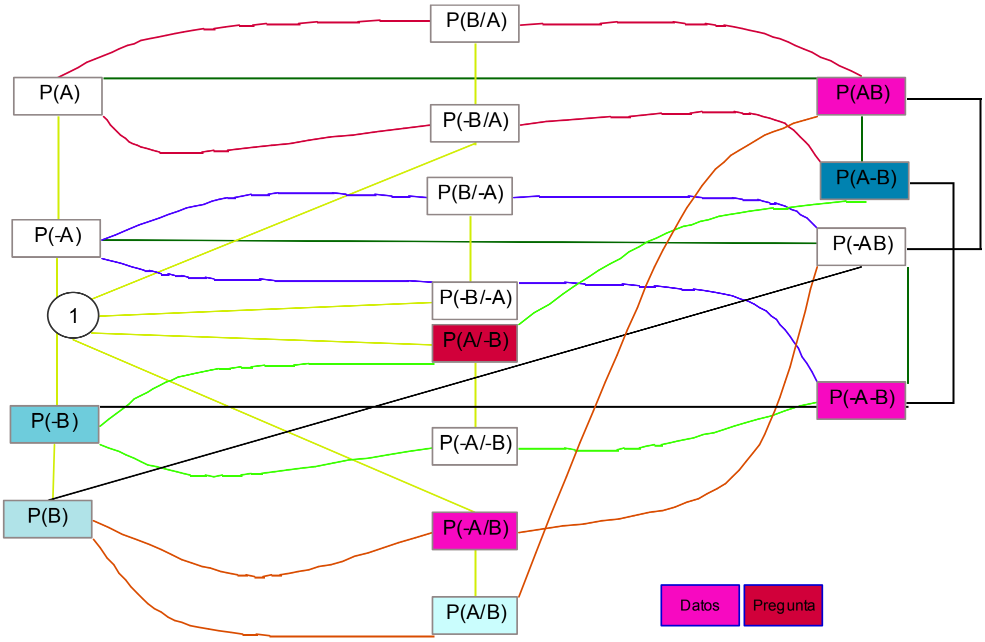


Figura 78 Grafo canónico de [p_{32}]

I. 2. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_1T_2$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.12

$N_2C_1T_2G_1$

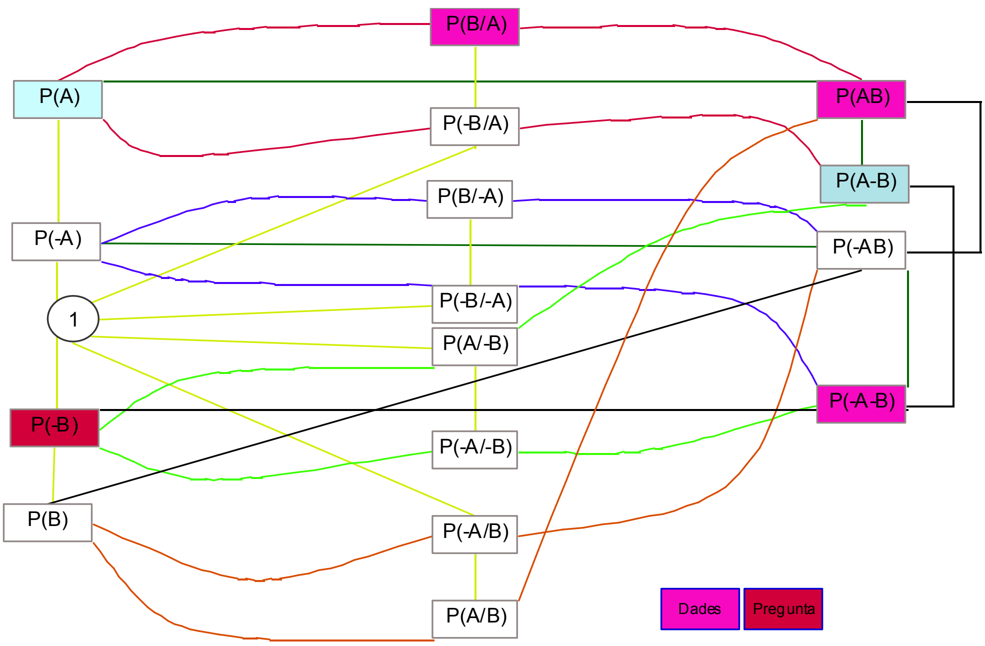


Figura 79 Grafo canónico de [p_{21}]

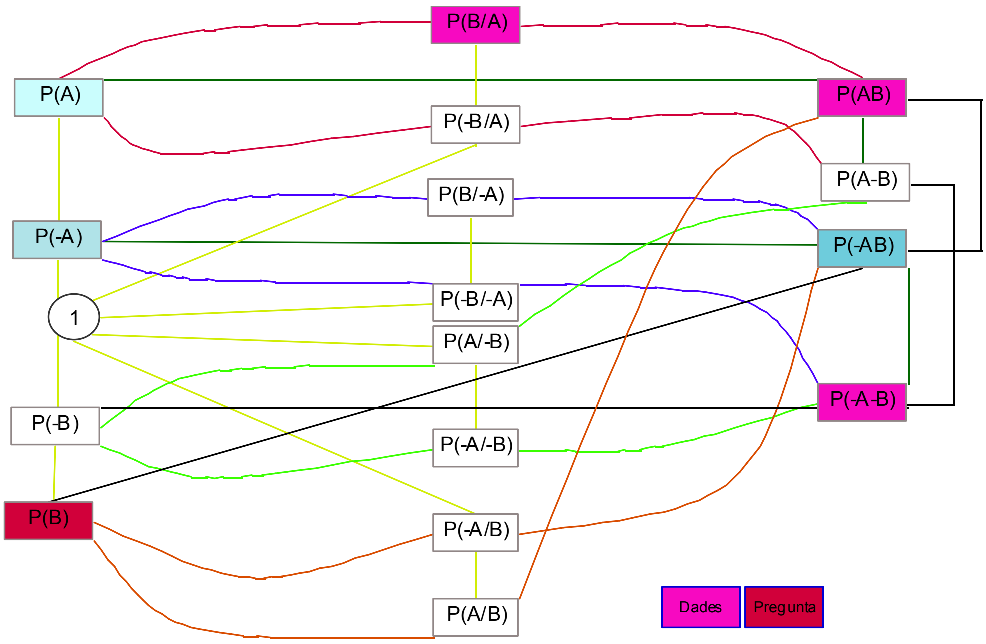


Figura 80 Grafo canónico de [p_{31}]

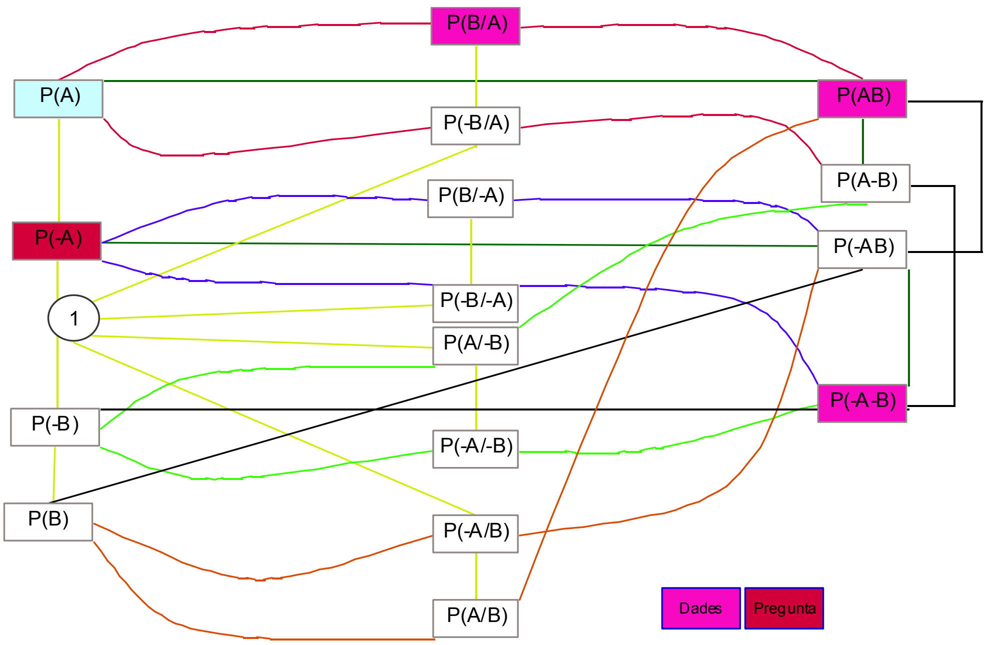


Figura 81 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

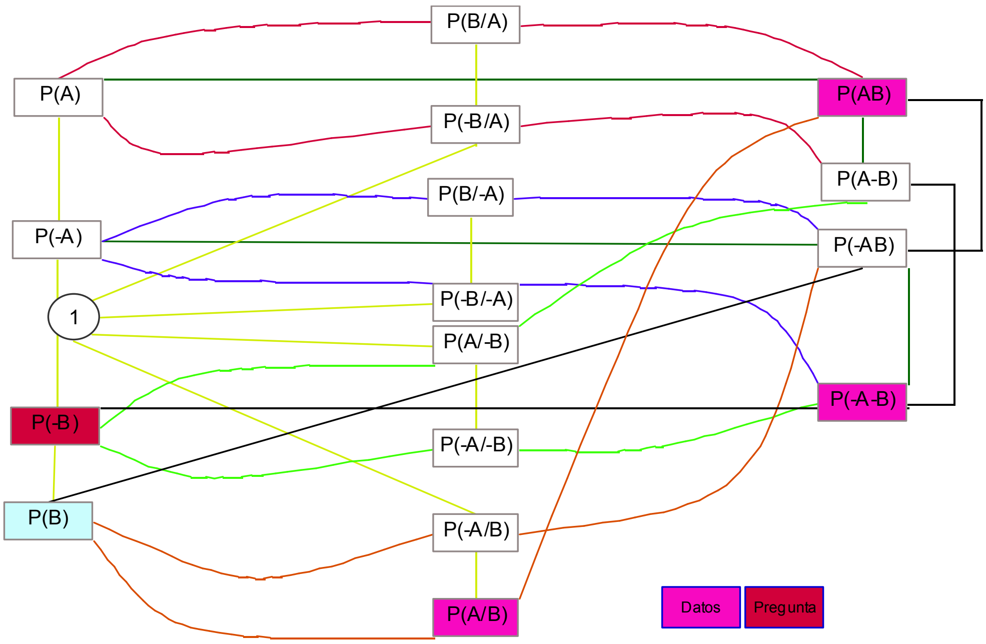


Figura 82 Grafo canónico de [p_{11}]

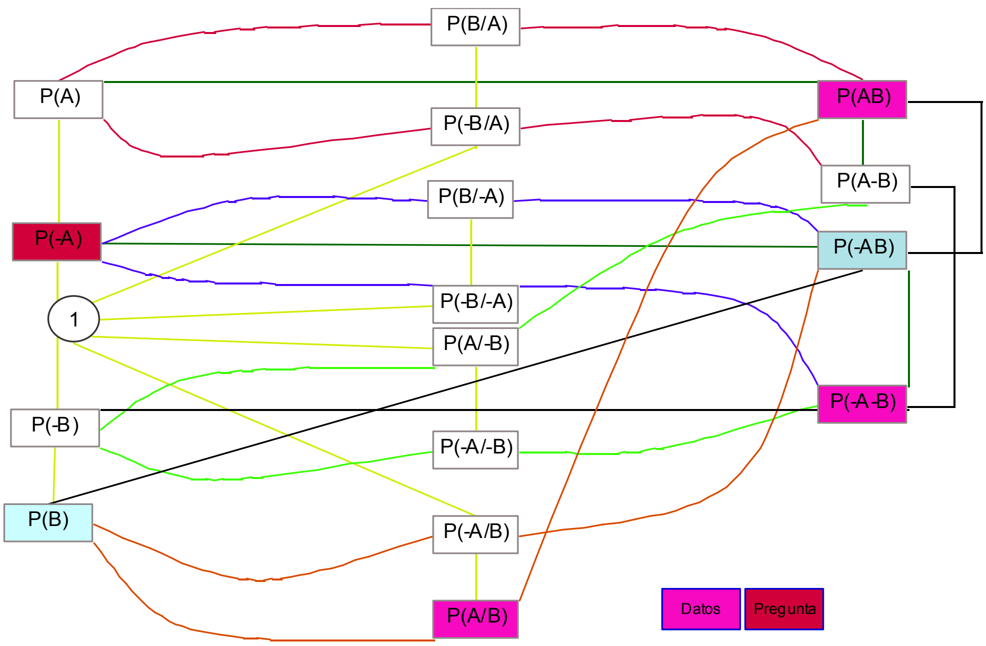


Figura 83 Grafo canónico de [p_{21}]

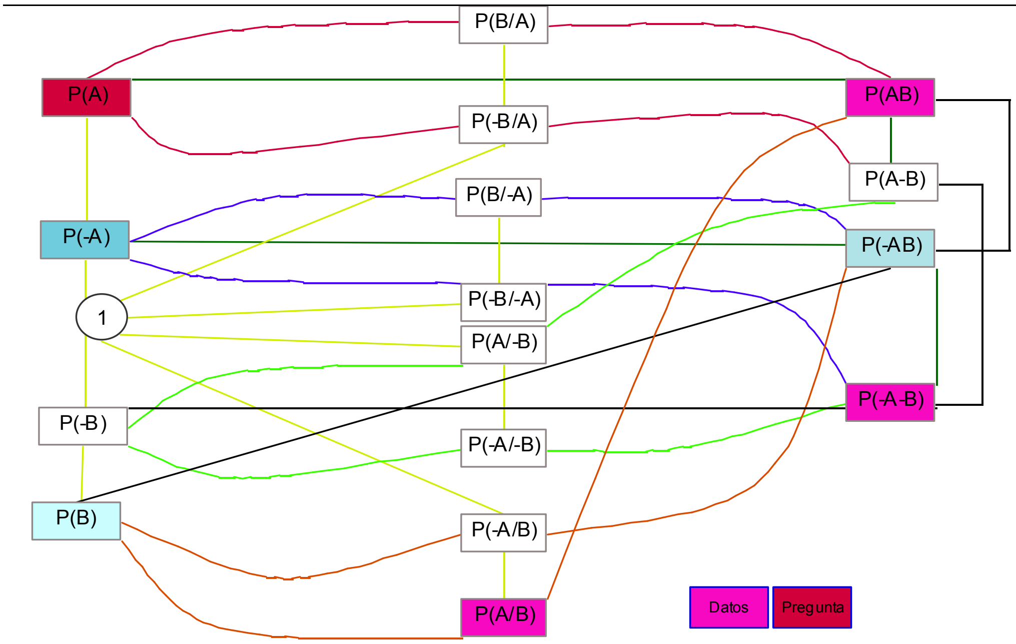


Figura 84 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

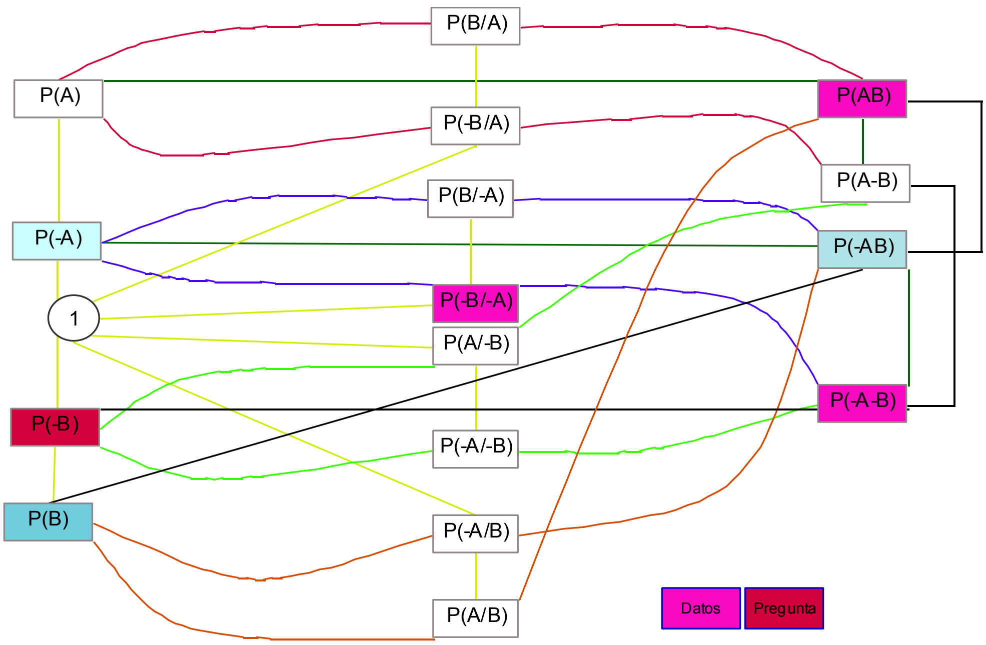


Figura 85 Grafo canónico de [p_{31}]

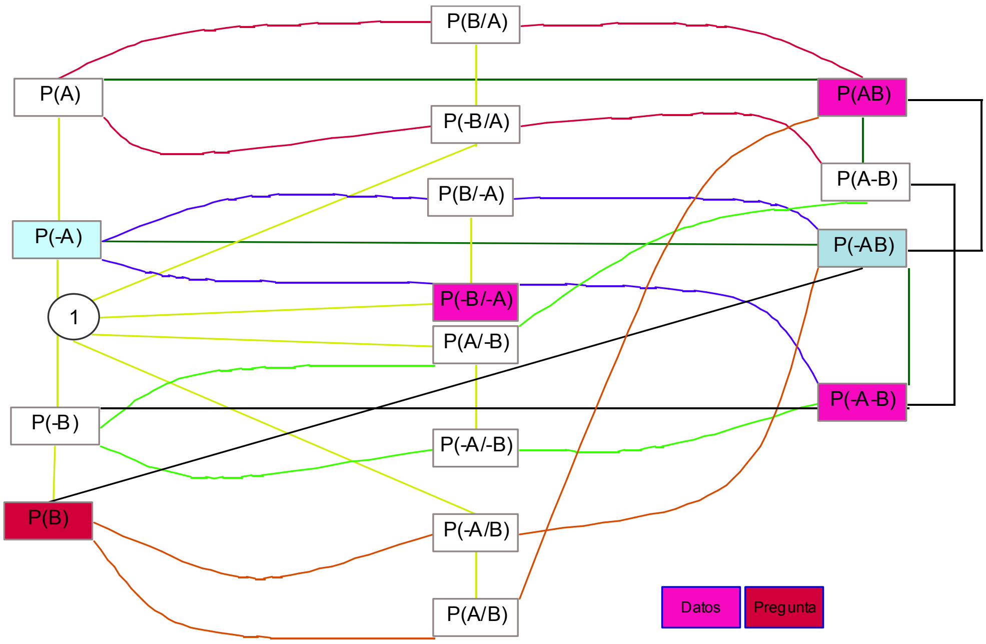


Figura 86 Grafo canónico de [p_{21}]

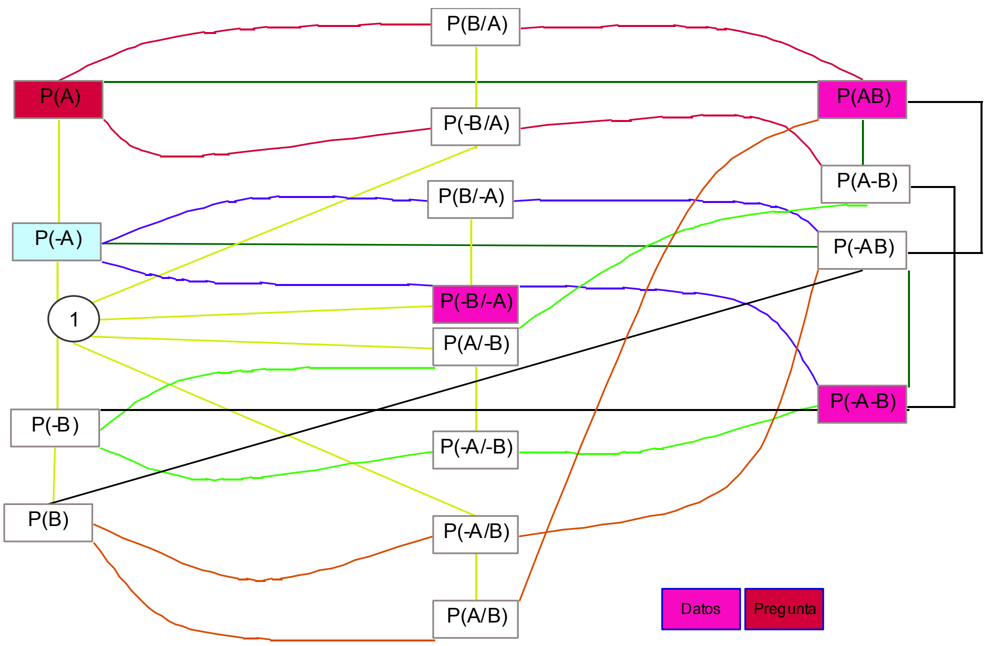


Figura 87 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

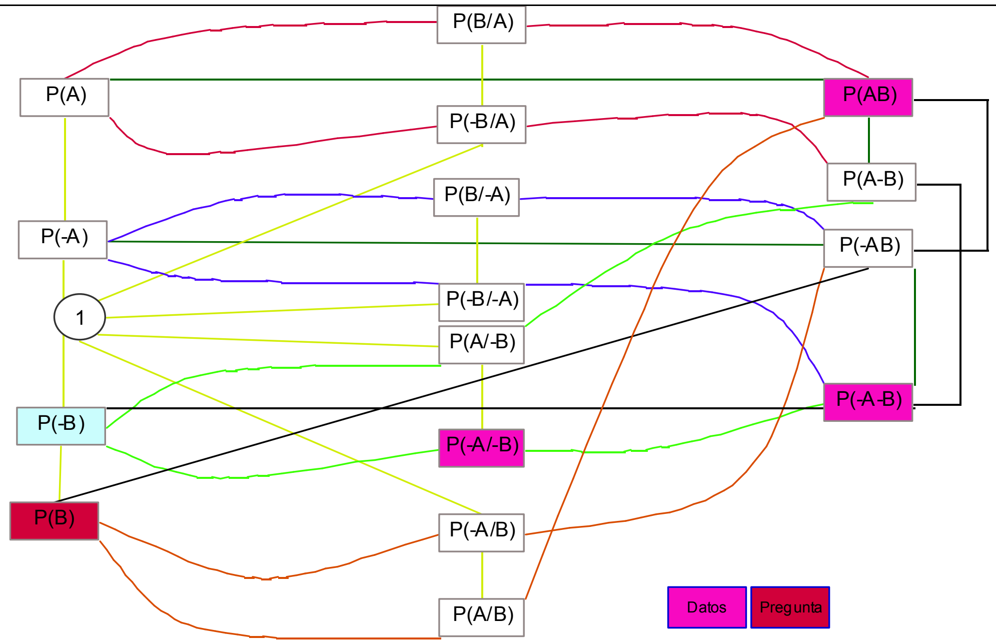


Figura 88 Grafo canónico de [p_{11}]

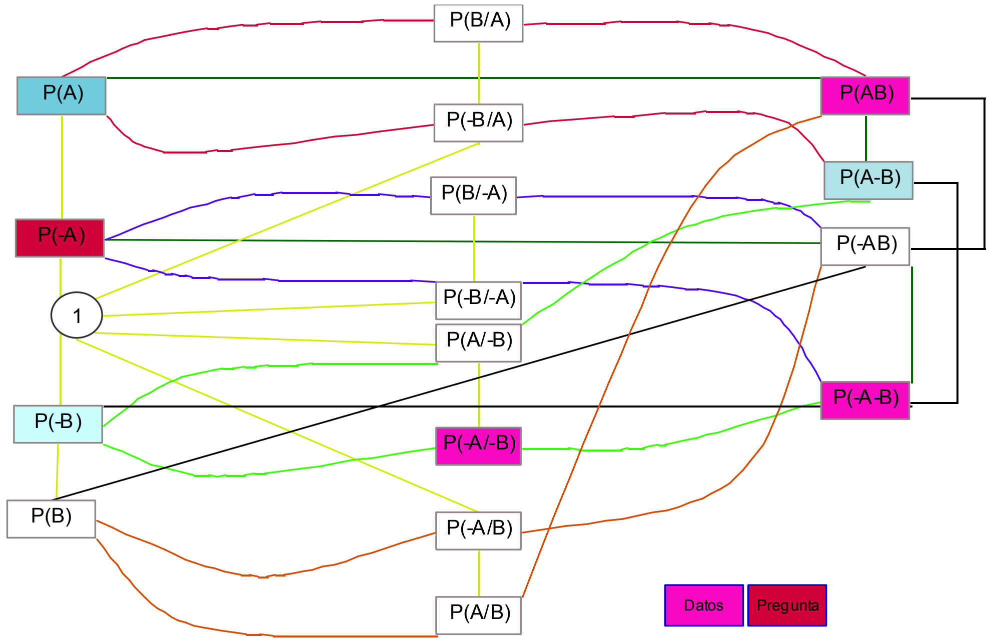


Figura 89 Grafo canónico de [p_{31}]

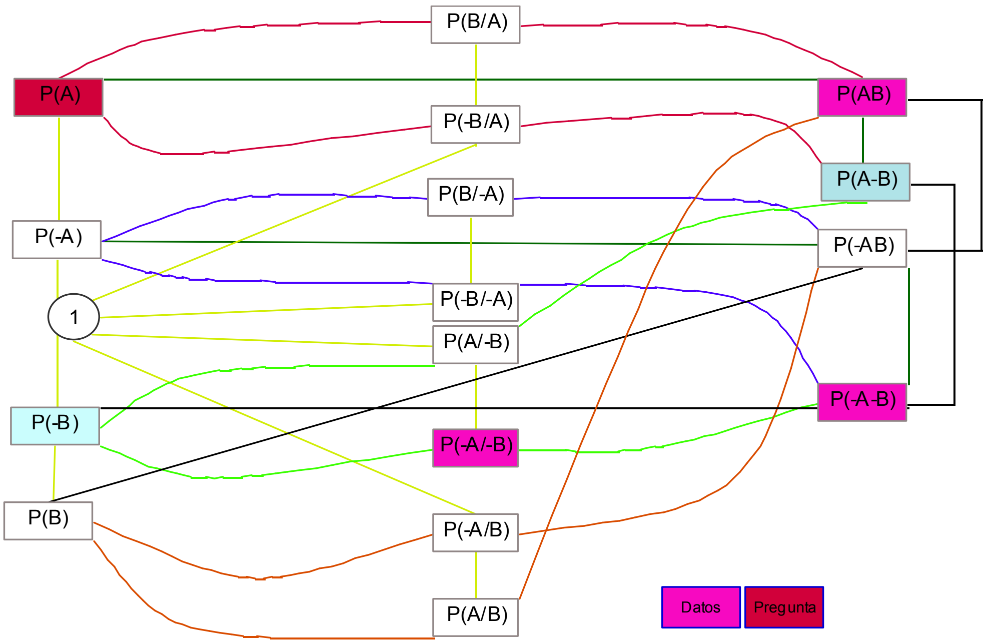


Figura 90 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_2G_2$

Solo se puede preguntar por tres probabilidades marginales, pues la 4ª no es problema

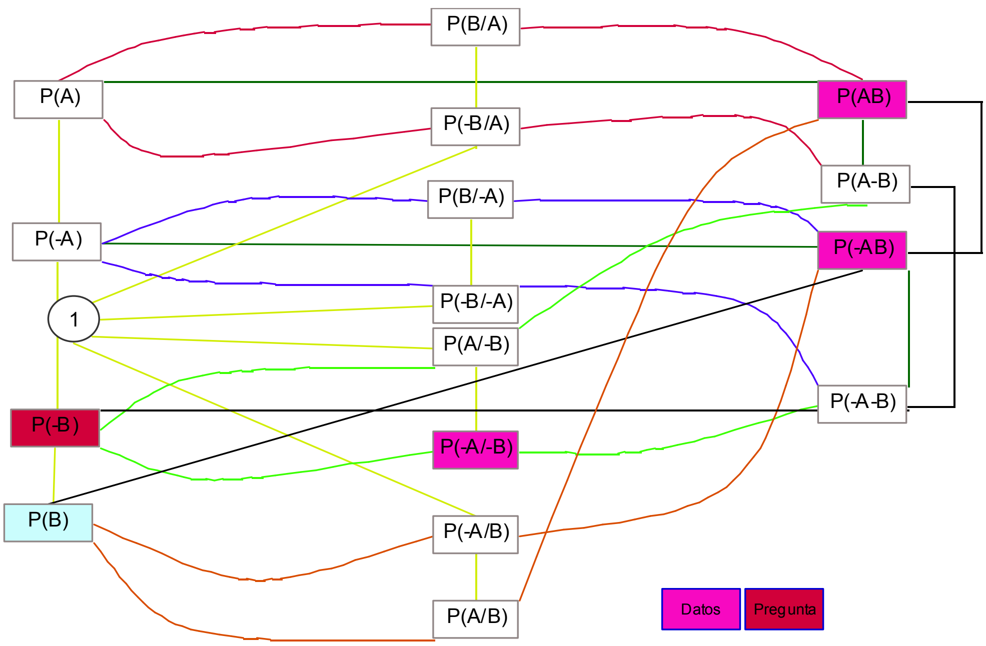


Figura 91 Grafo canónico de [p_{20}]. No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

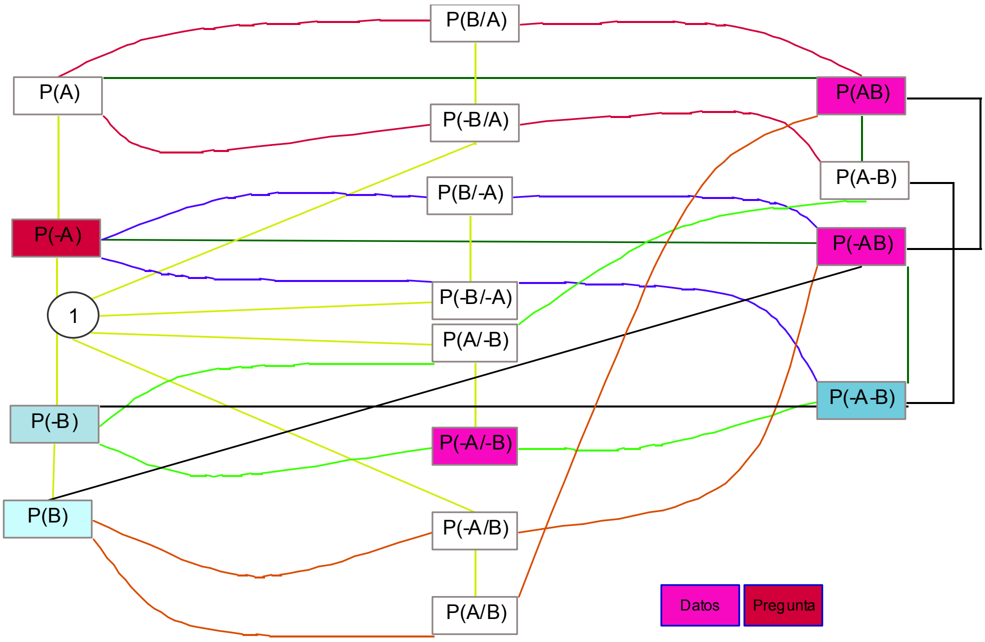


Figura 92 Grafo canónico de [p_{31}]

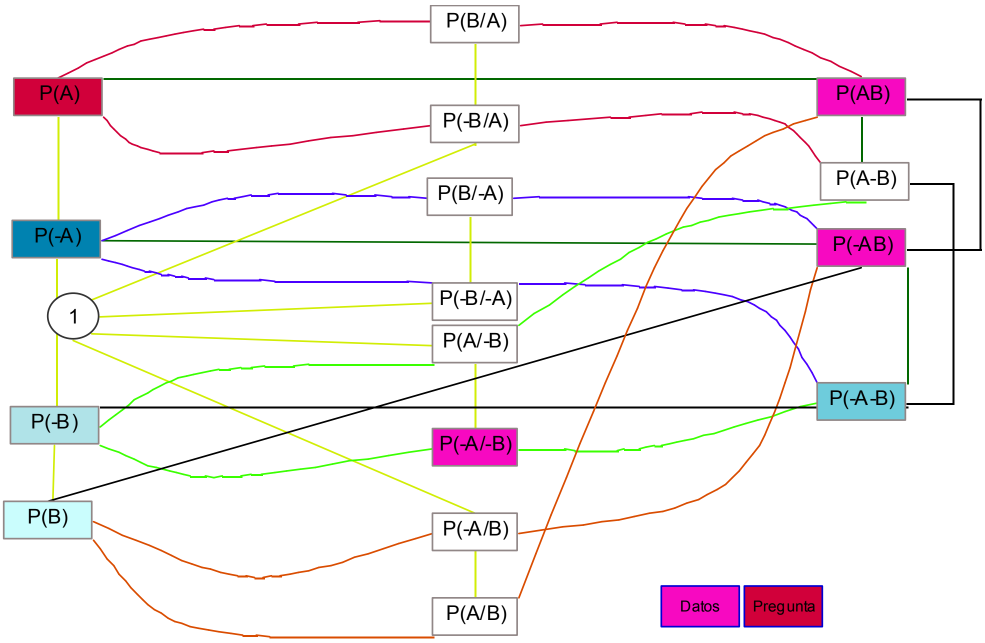


Figura 93 Grafo canónico de [p_{41}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de problemas

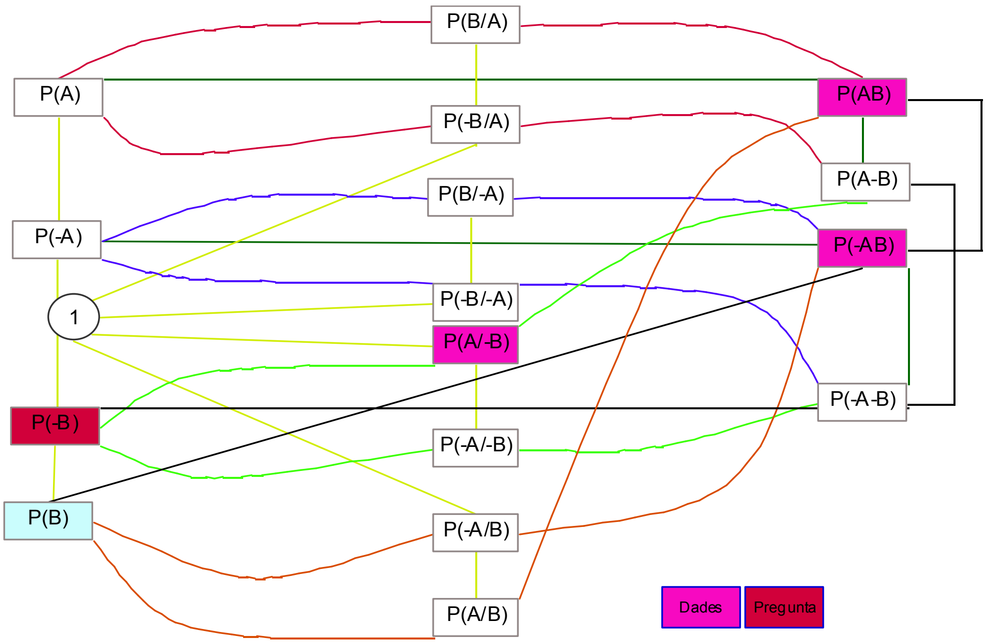


Figura 94 Grafo canónico de [p_{20}]. No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

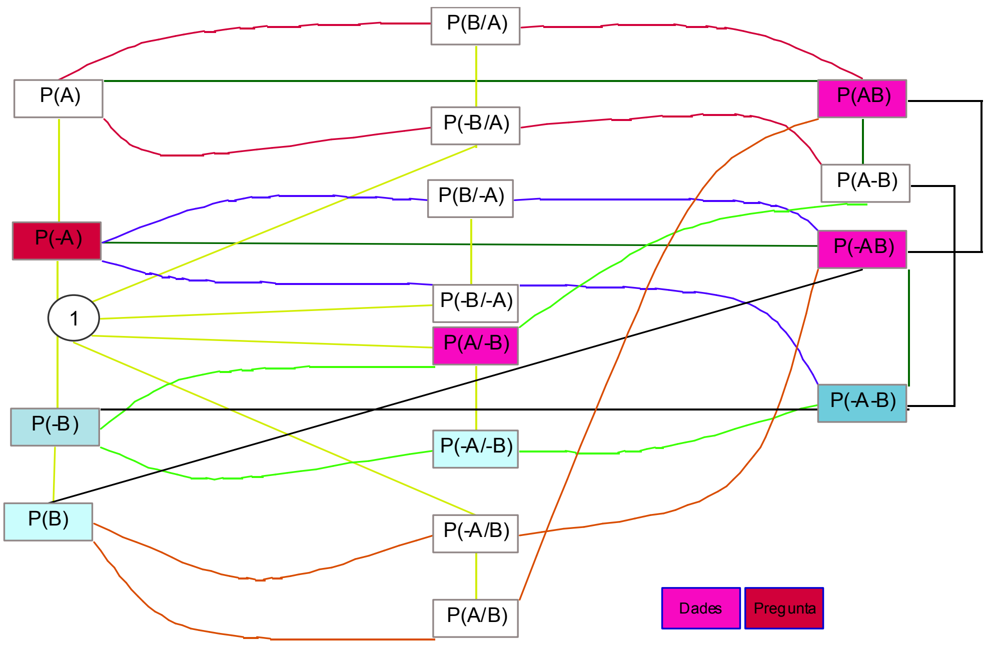


Figura 95 Grafo canónico de [p_{41}]

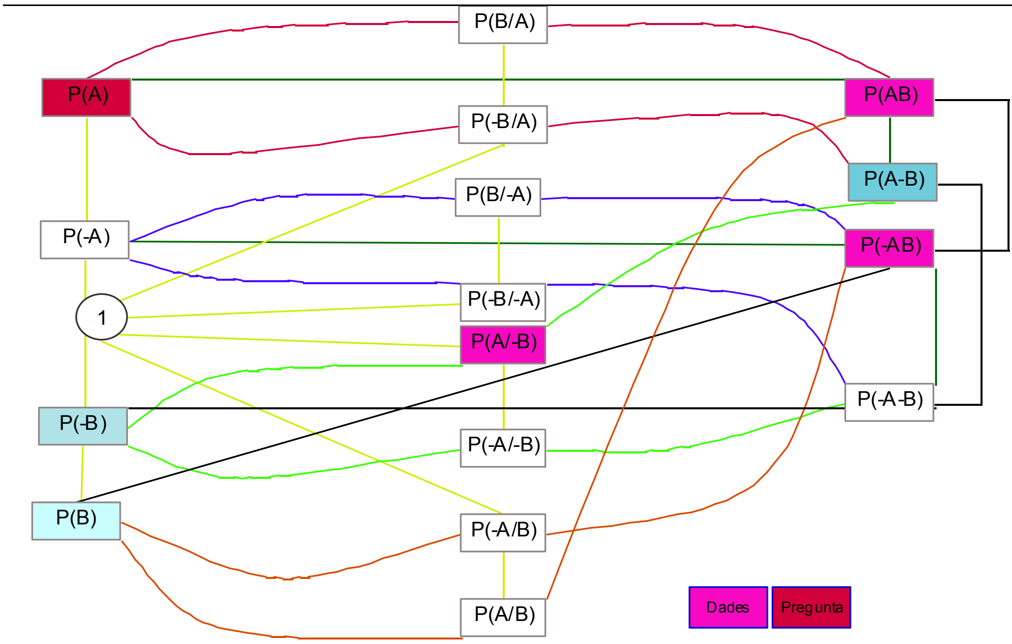


Figura 96 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_1T_2G_3$

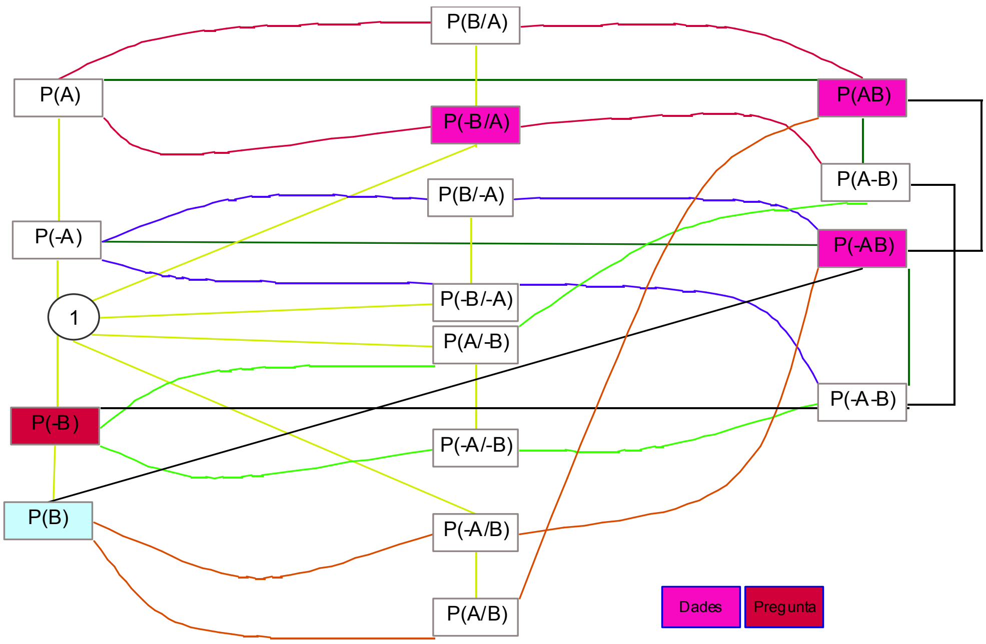


Figura 97 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

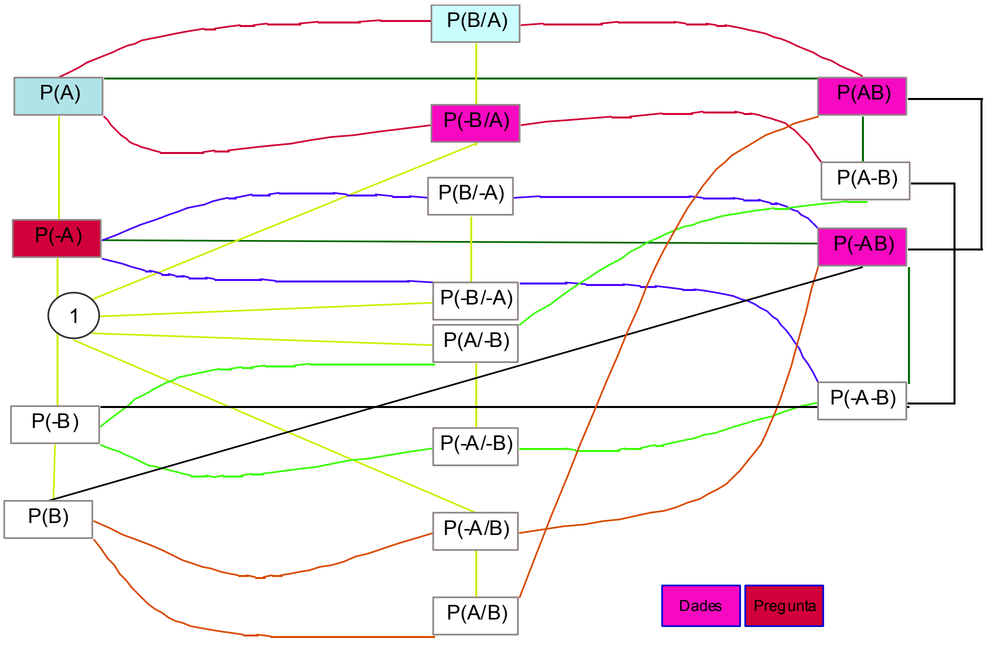


Figura 98 Grafo canónico de [p_{21}]

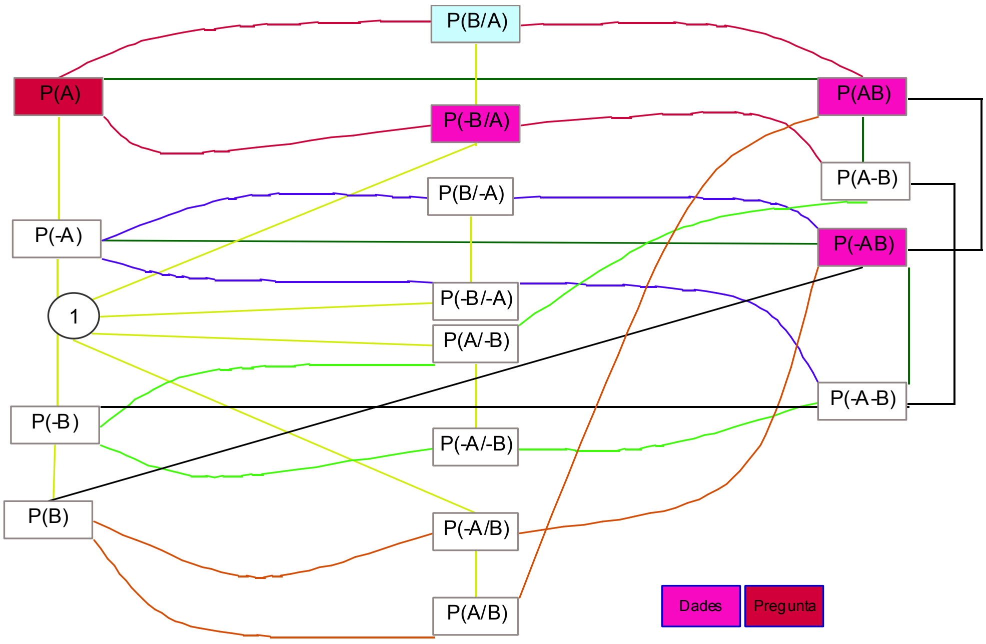


Figura 99 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

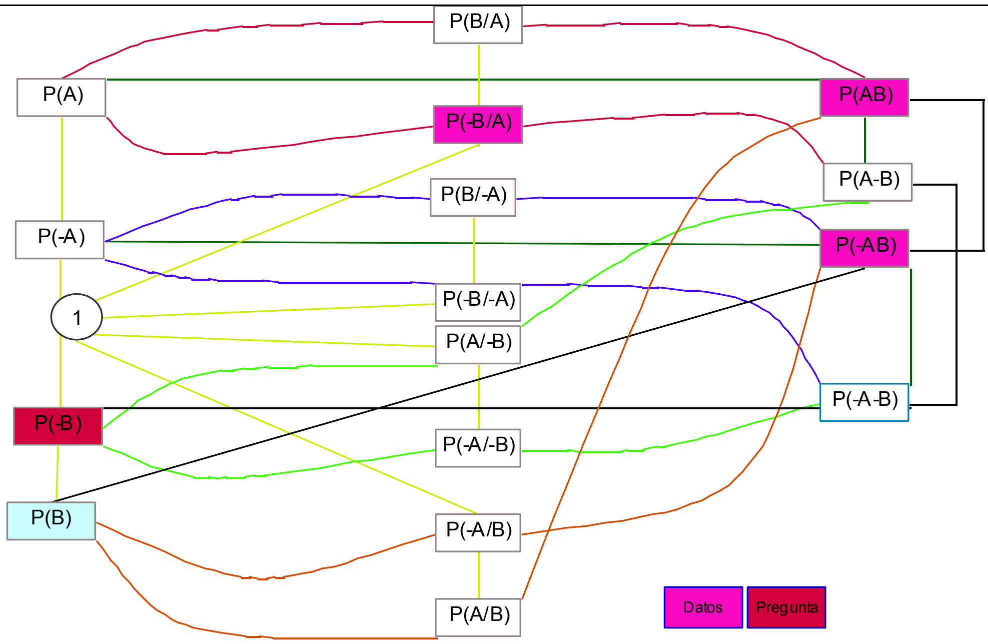


Figura 100 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

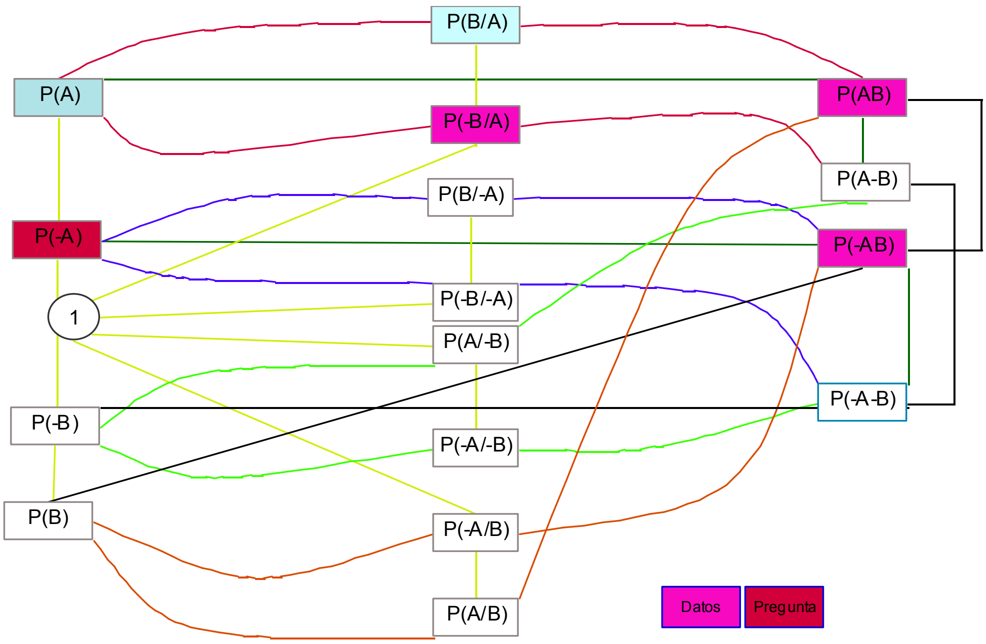


Figura 101 Grafo canónico de [p_{21}]

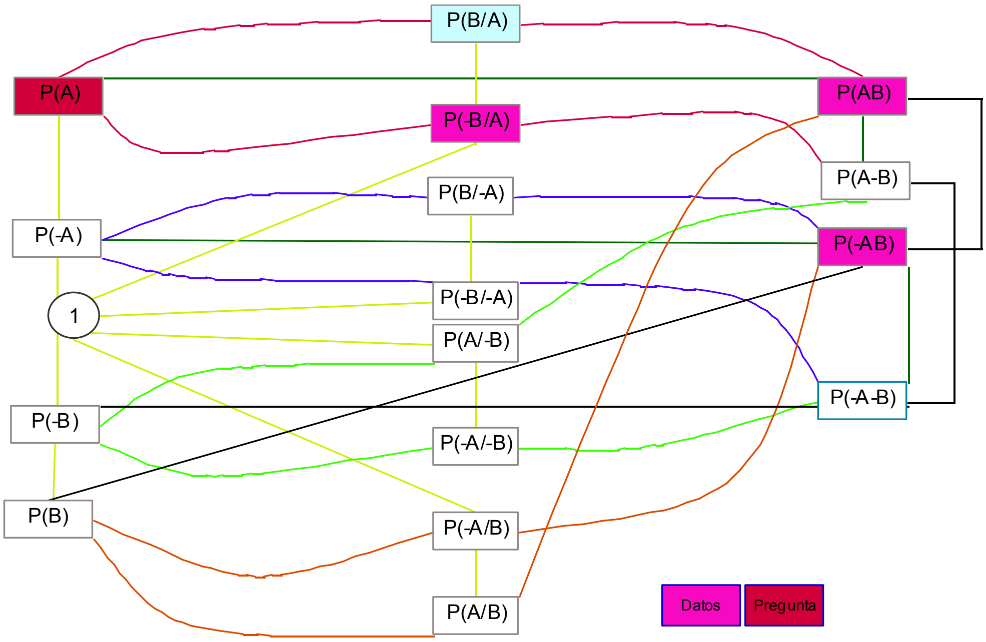


Figura 102 Grafo canónico de $[p_{11}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

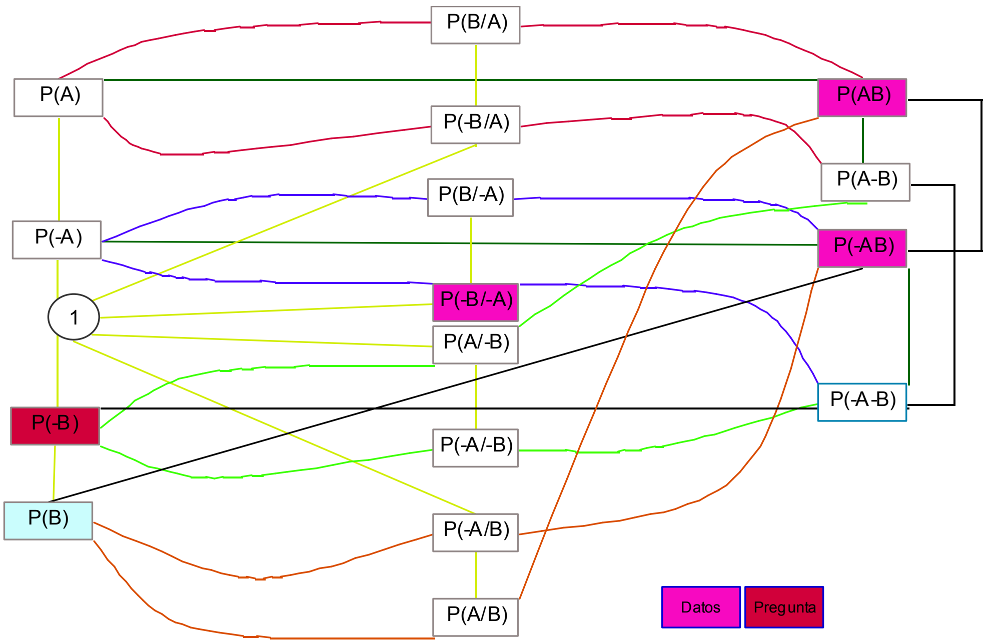


Figura 103 Grafo canónico de $[p_{20}]$ No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

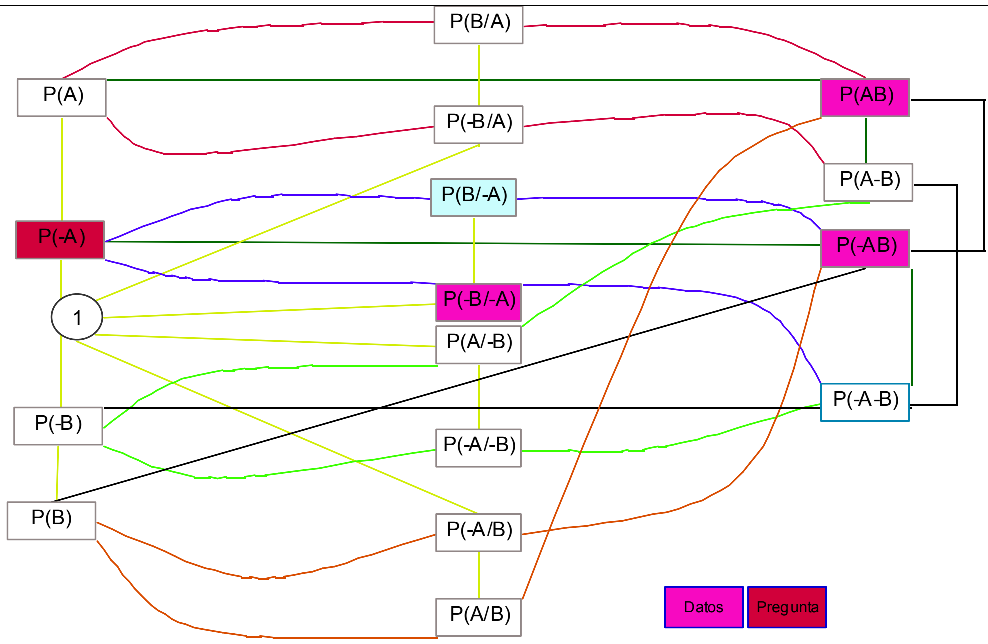


Figura 104 Grafo canónico de [p_{11}]

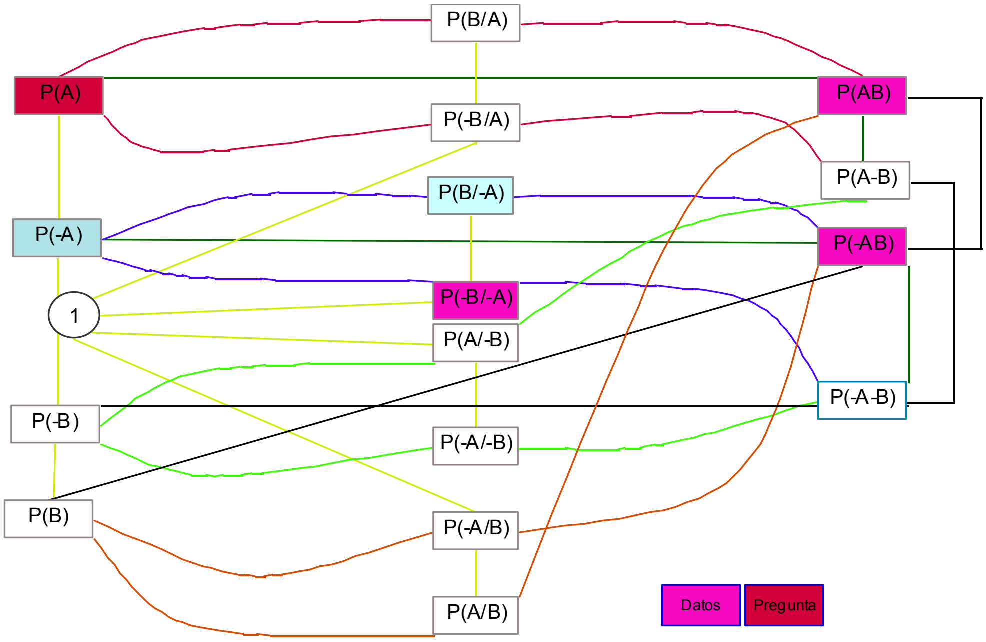


Figura 105 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_2G_5$

Sólo nos podemos preguntar por dos marginales, pues las otras dos no son problema. Además uno de éstos no es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

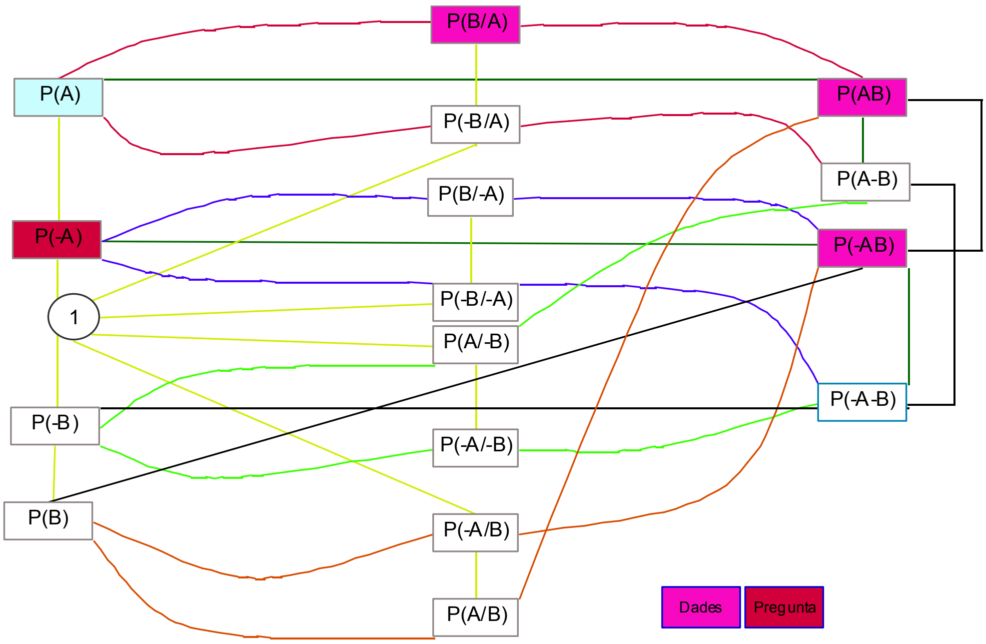


Figura 106 Grafo canónico de [p_{11}]

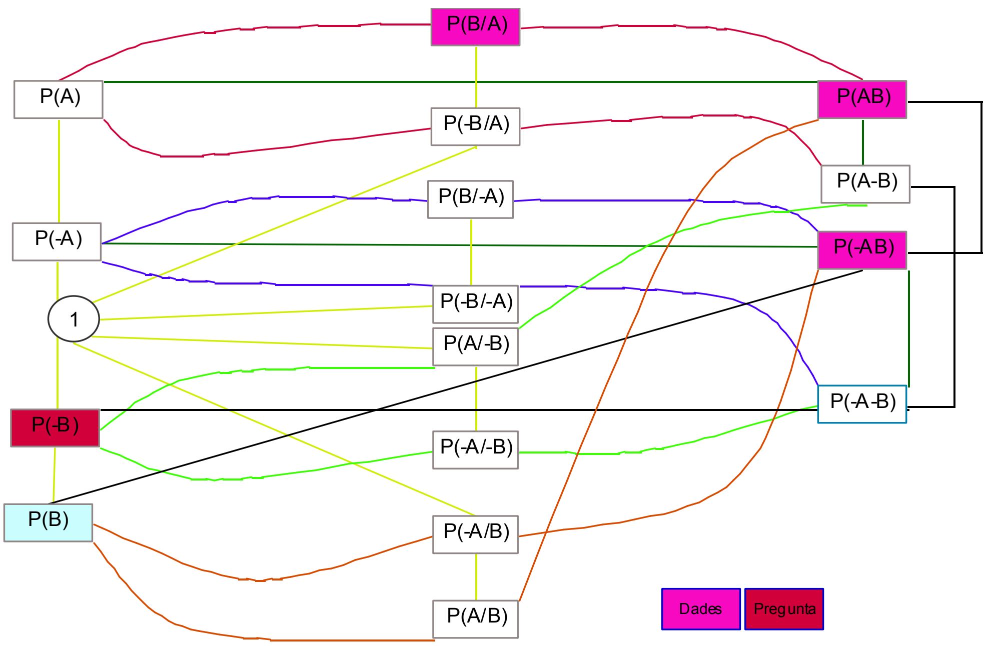


Figura 107 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

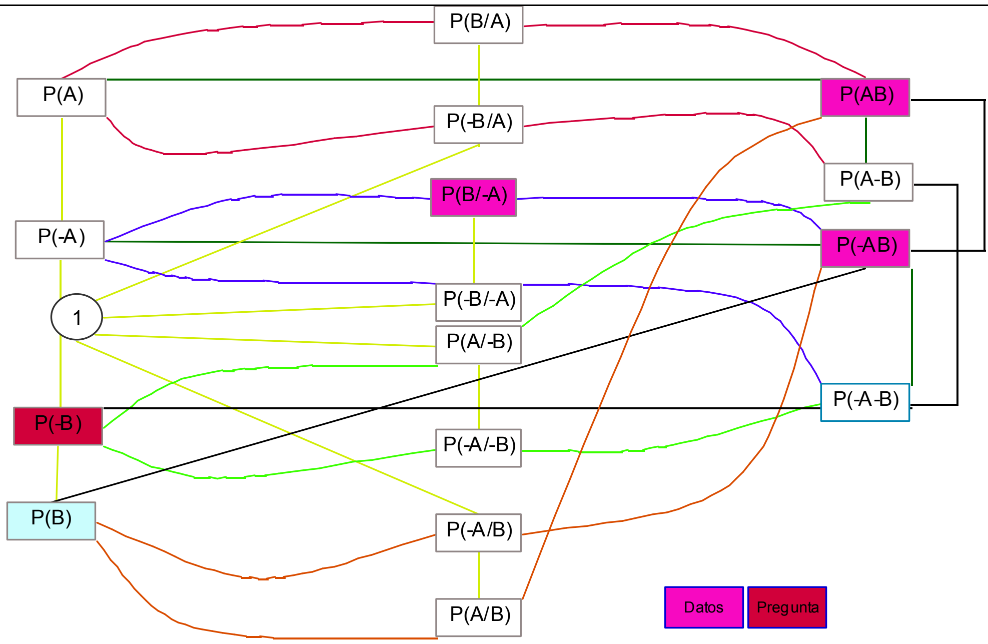


Figura 108 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

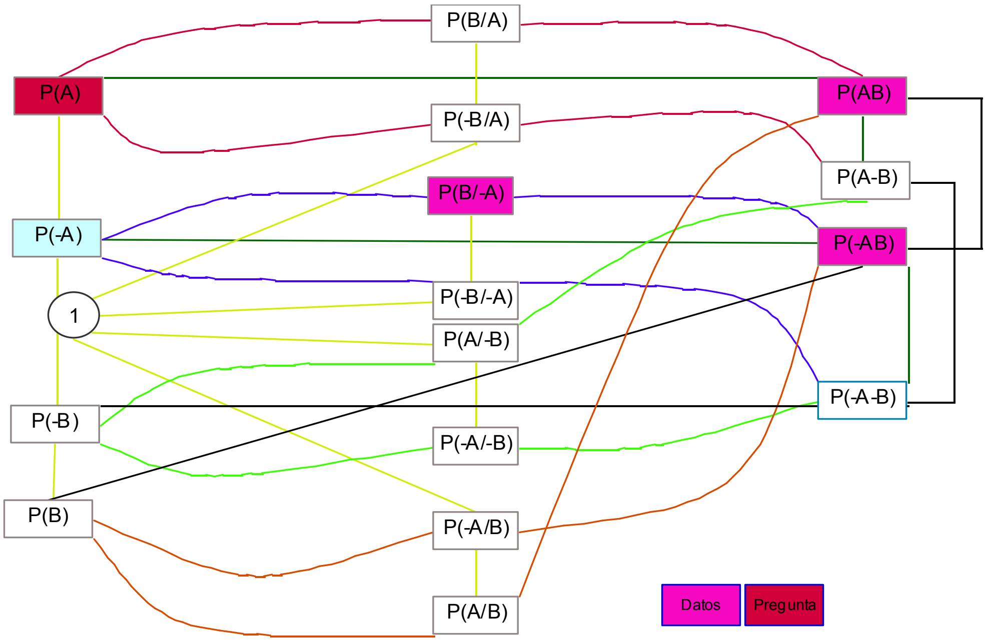


Figura 109 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_2G_6$

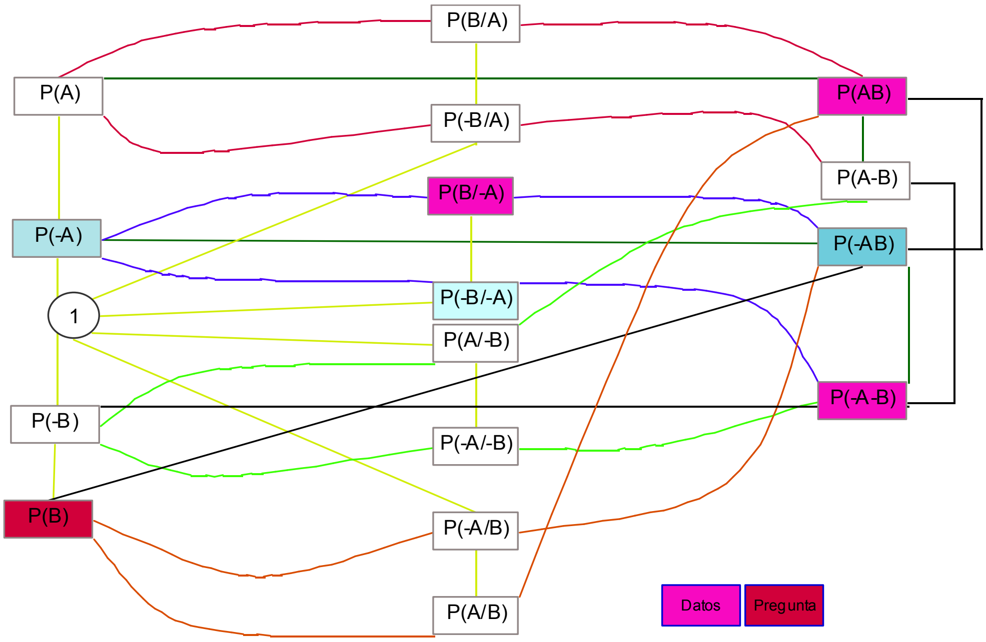


Figura 110 Grafo canónico de [p_{31}]

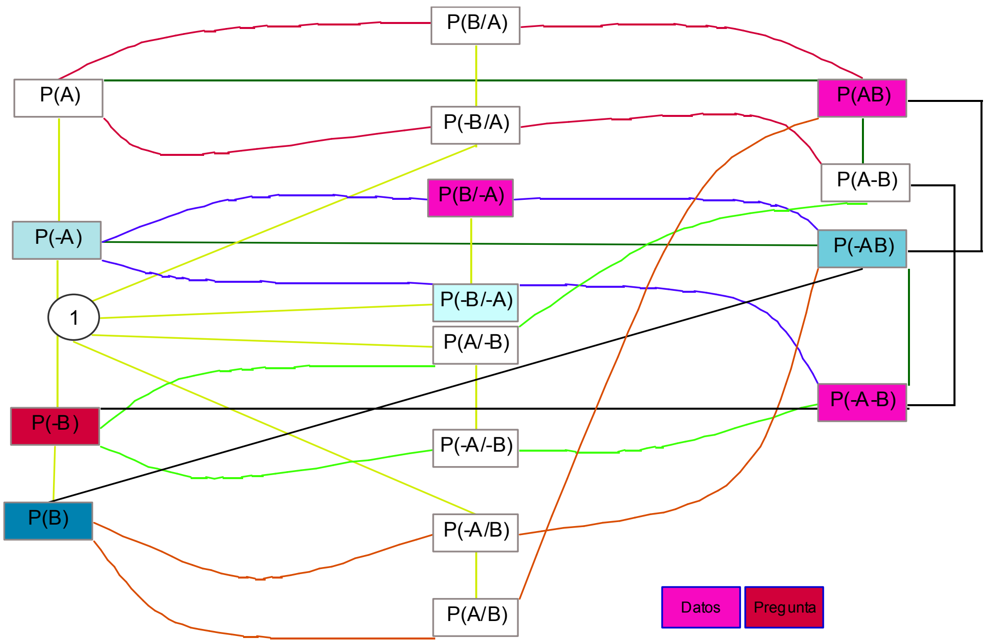


Figura 111 Grafo canónico de [p_{41}]

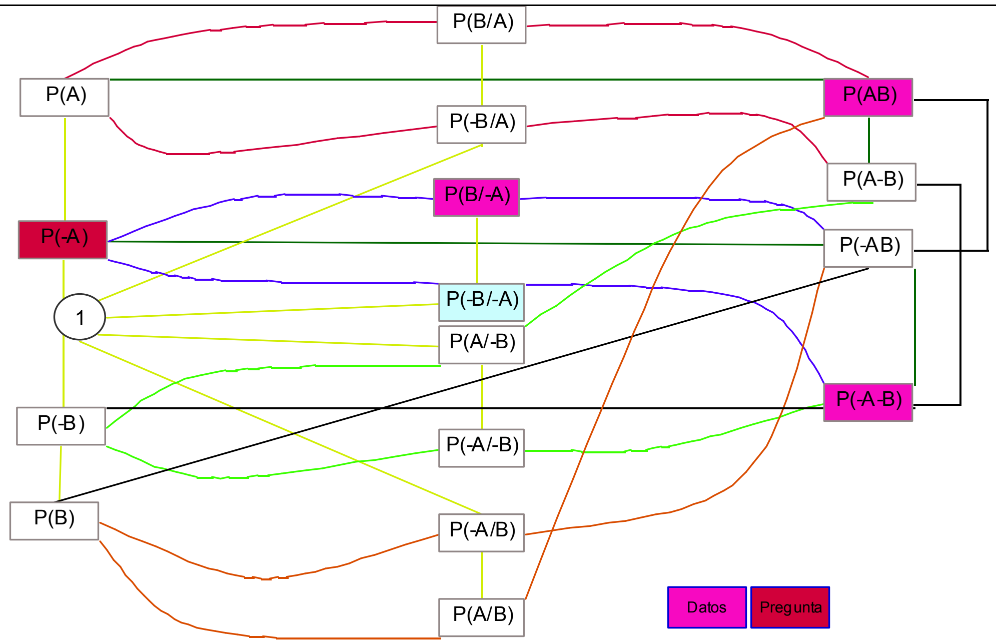


Figura 112 Grafo canónico de [p_{11}]

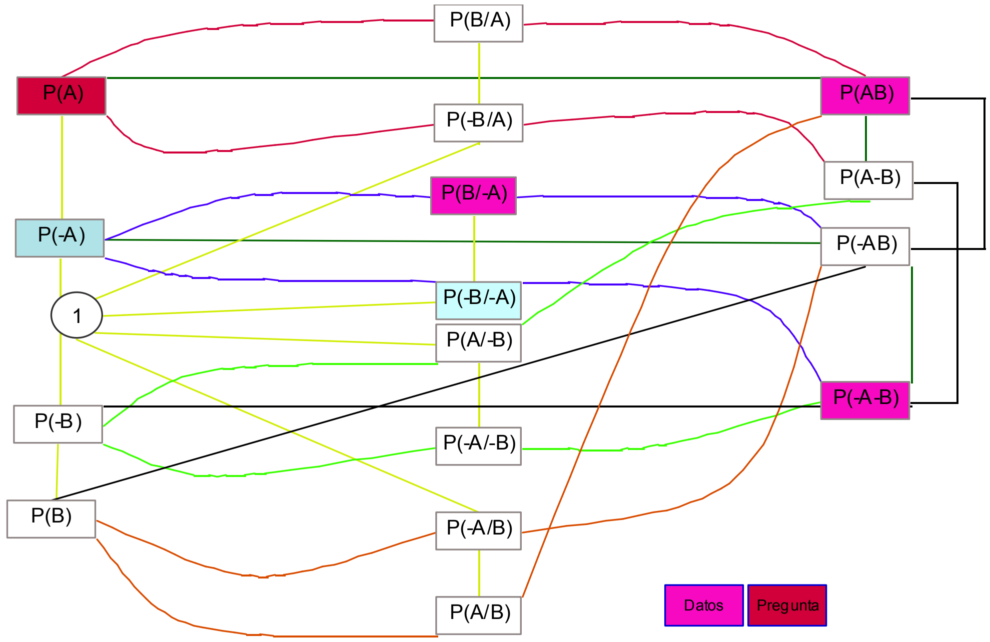


Figura 113 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

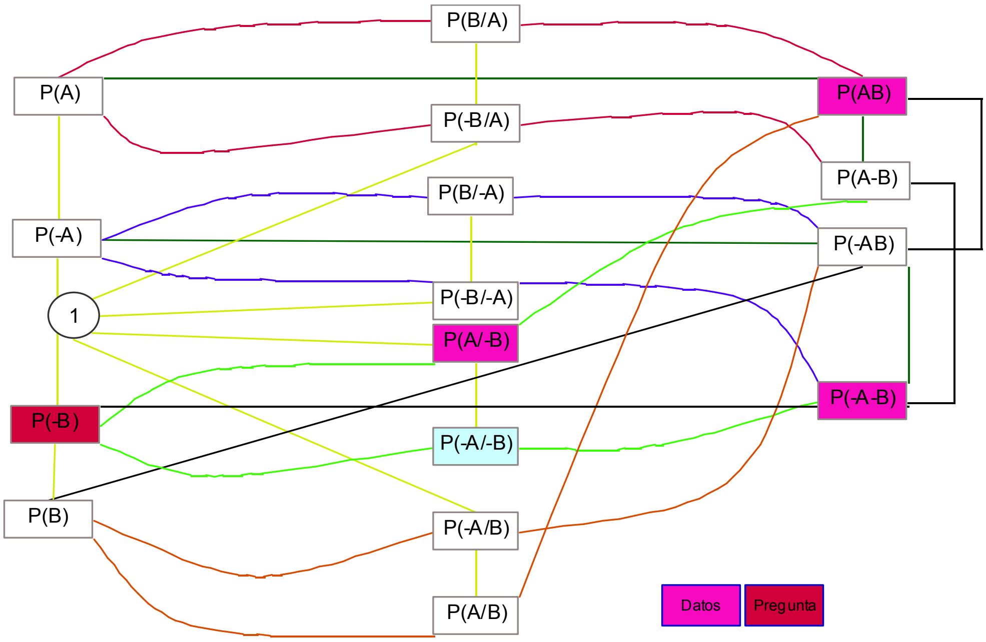


Figura 114 Grafo canónico de [p_{11}]

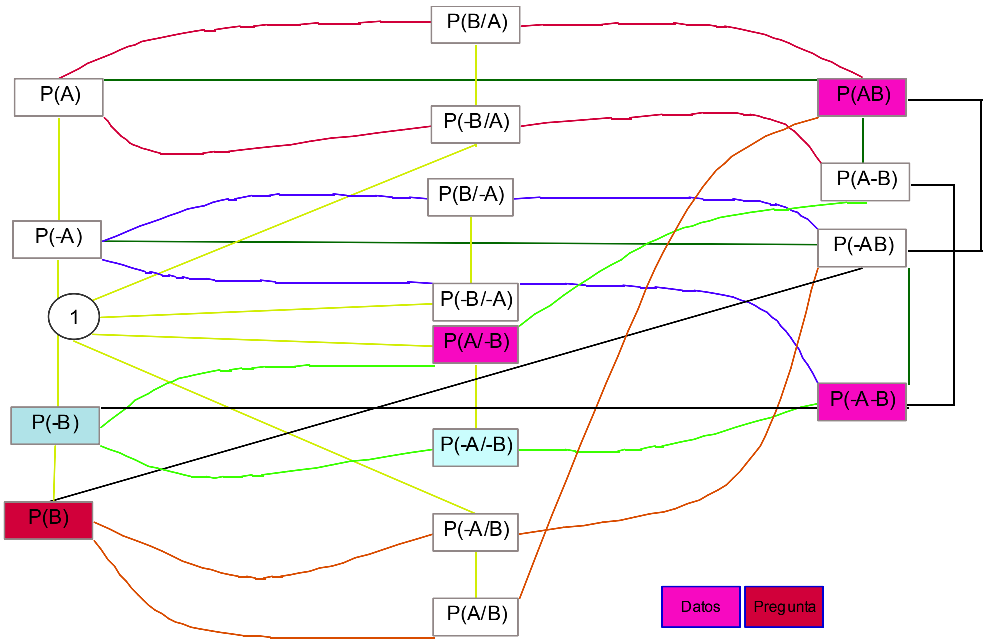


Figura 115 Grafo canónico de [p_{21}]

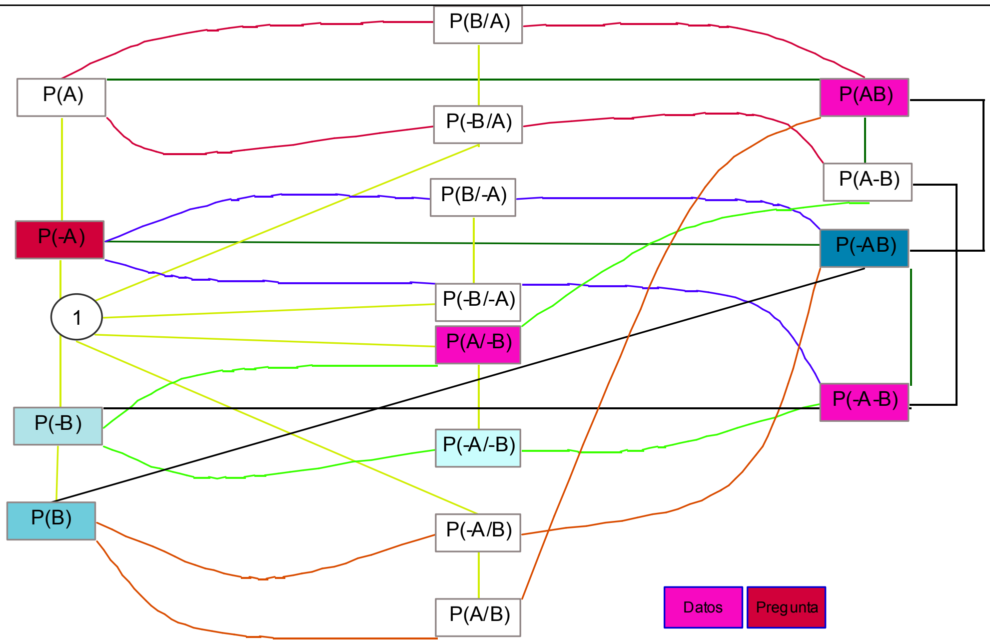


Figura 116 Grafo canónico de [p_{41}]

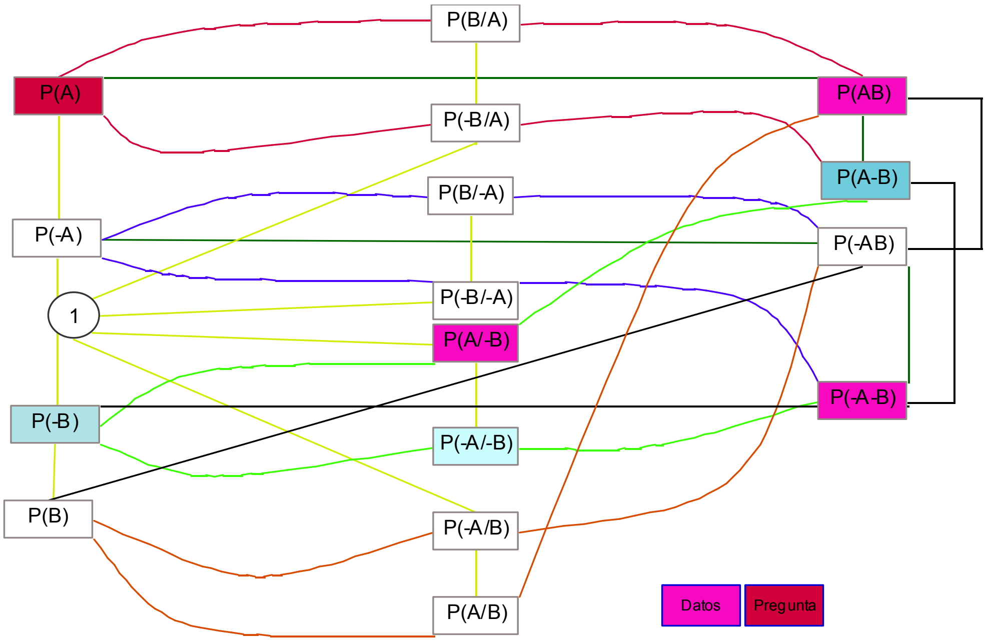


Figura 117 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

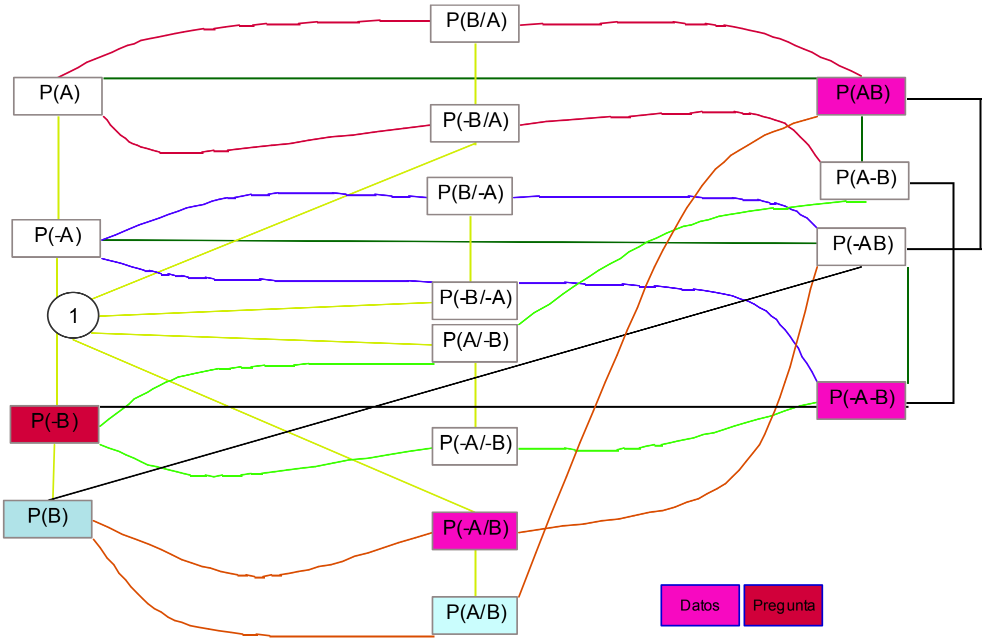


Figura 118 Grafo canónico de [p_{21}]

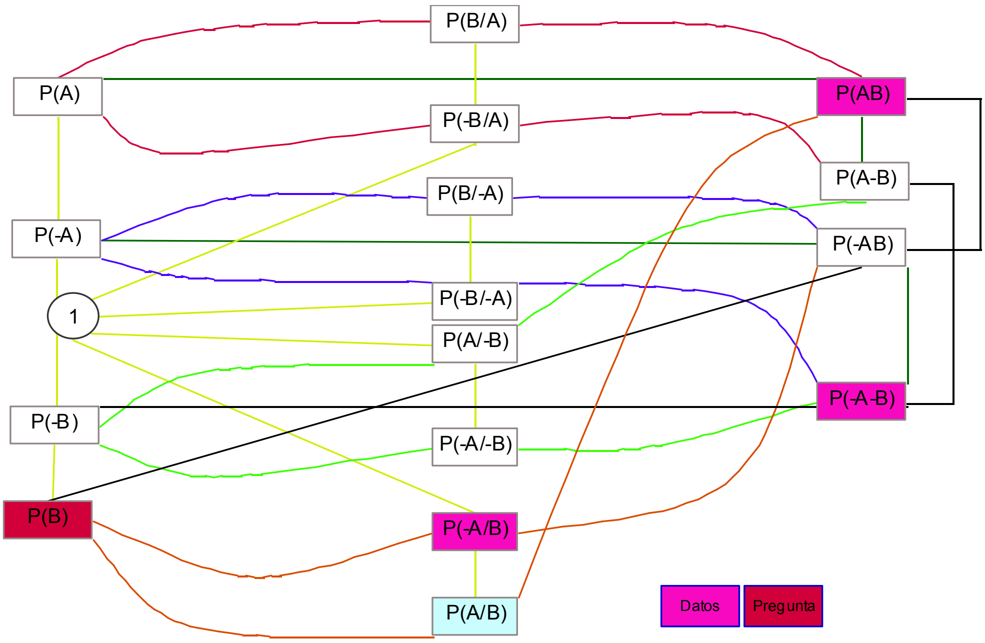


Figura 119 Grafo canónico de [p_{11}]

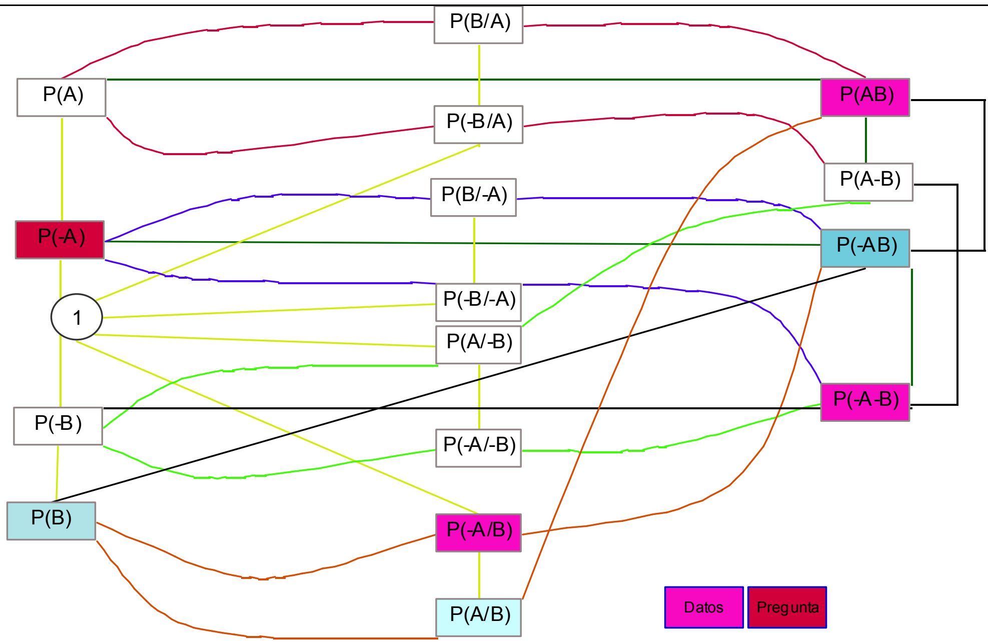


Figura 120 Grafo canónico de [p_{31}]

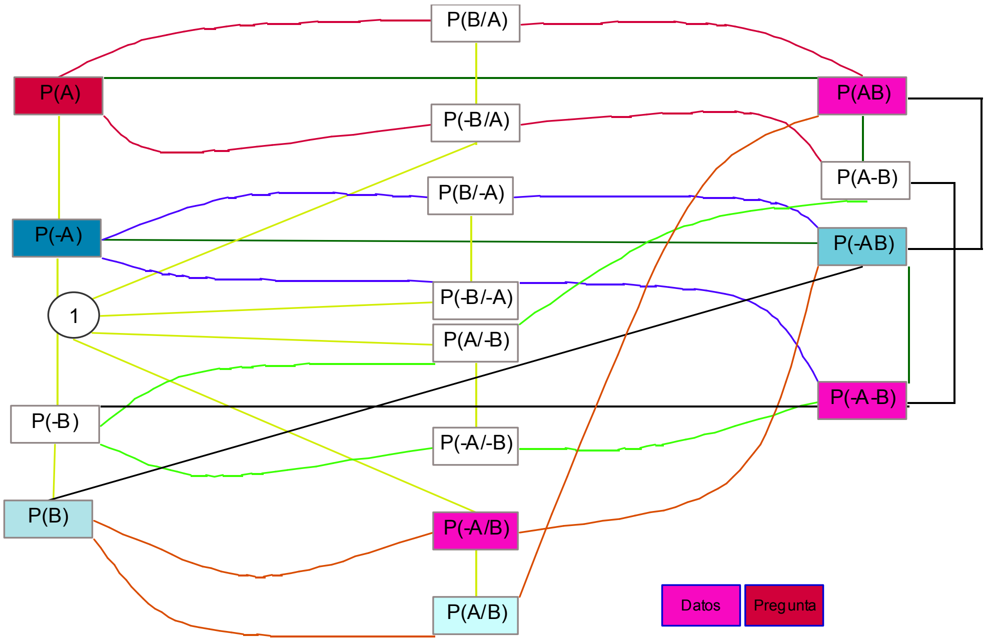


Figura 121 Grafo canónico de [p_{41}]

Grafos canónicos asociados otro trío de datos

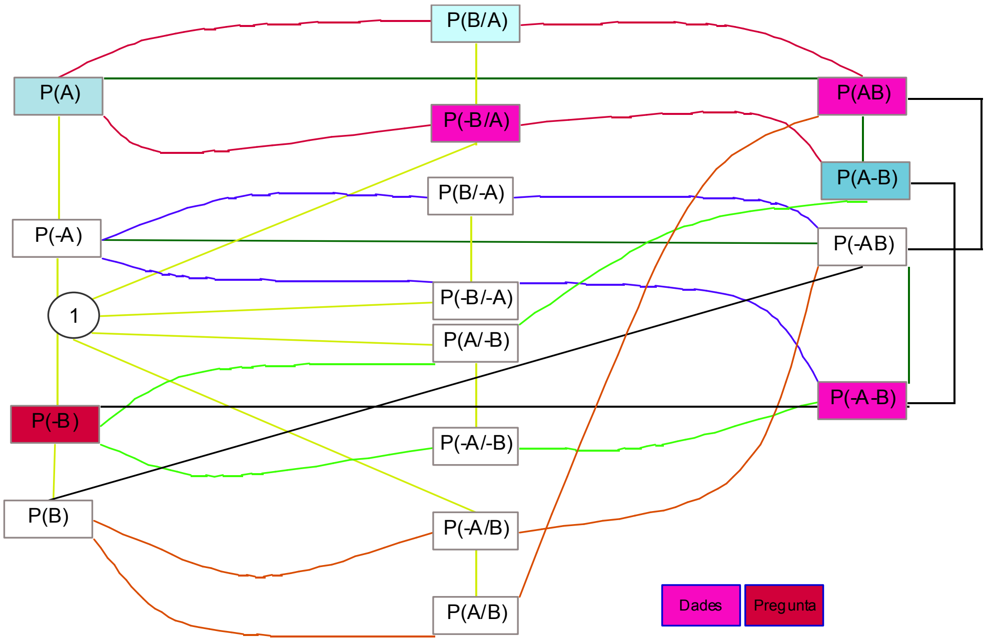


Figura 122 Grafo canónico de [p_{31}]

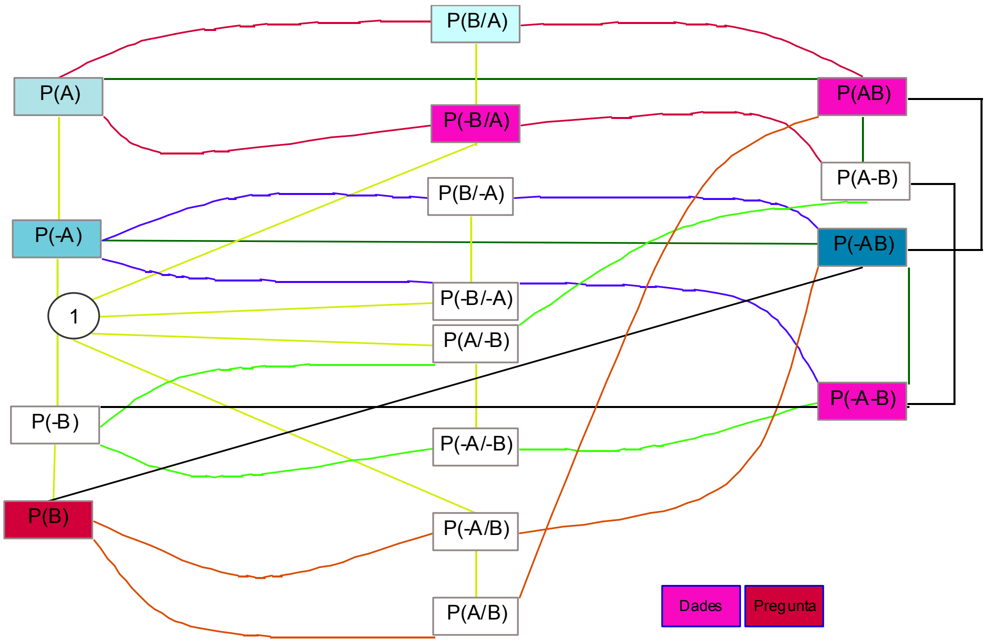


Figura 123 Grafo canónico de [p_{41}]

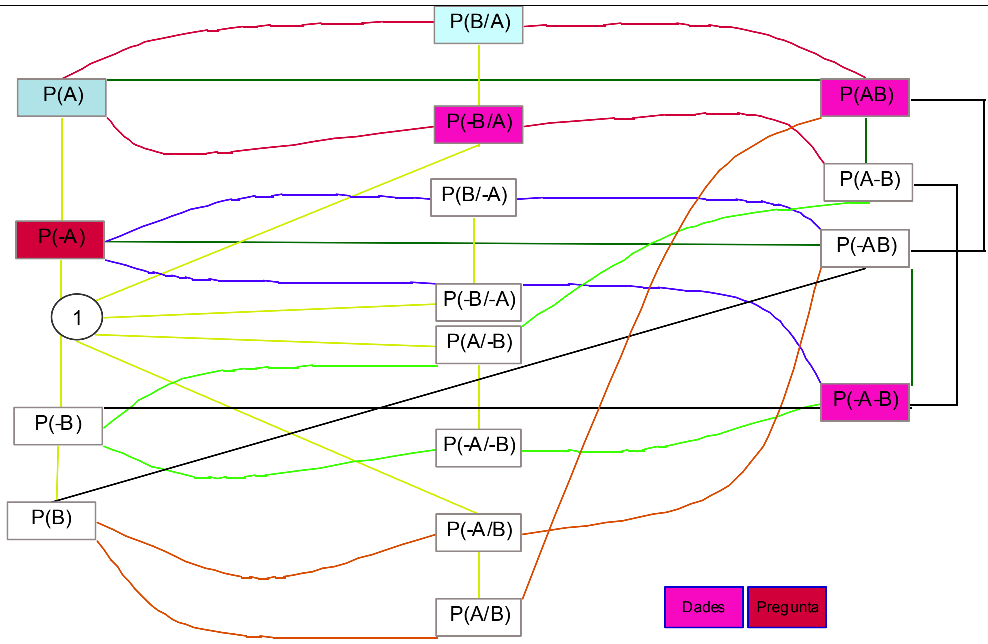


Figura 124 Grafo canónico de [p_{21}]

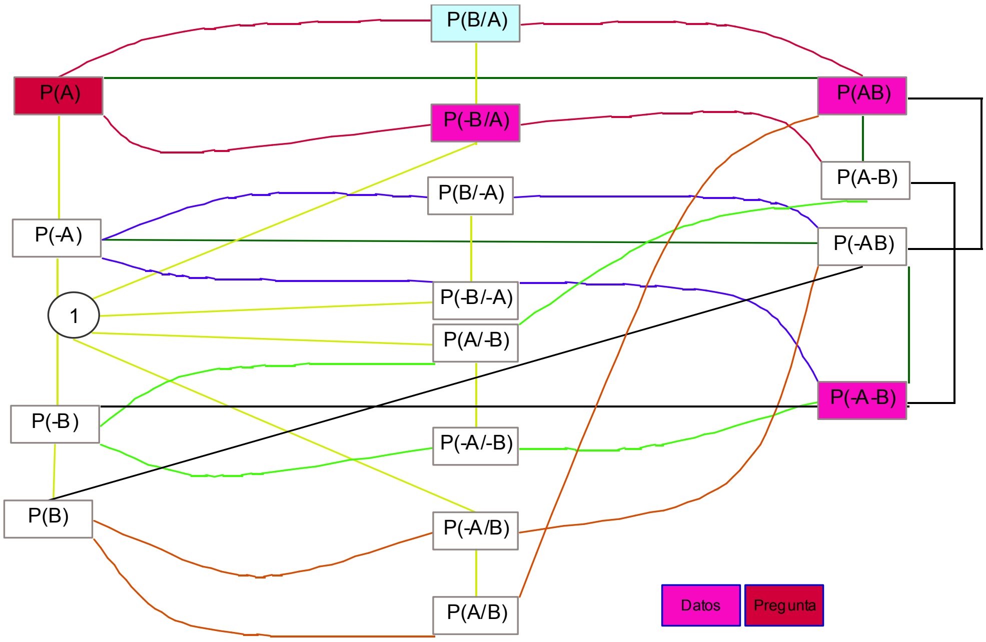


Figura 125 Grafo canónico de [p_{11}]

I.3. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_1T_3$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.13

$N_2C_1T_3G_1$

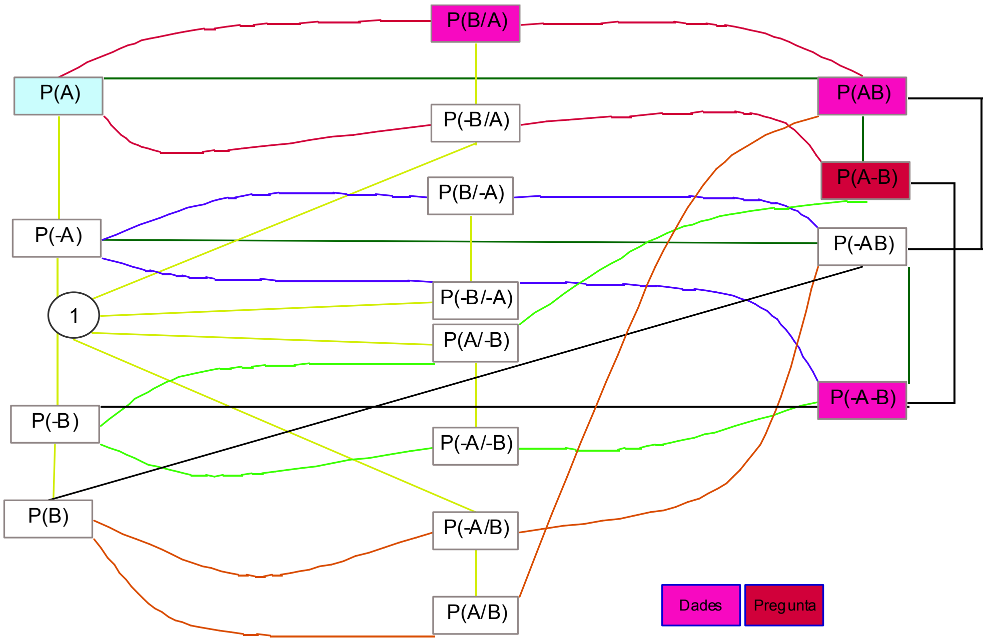


Figura 126 Grafo canónico de $[p_{11}]$

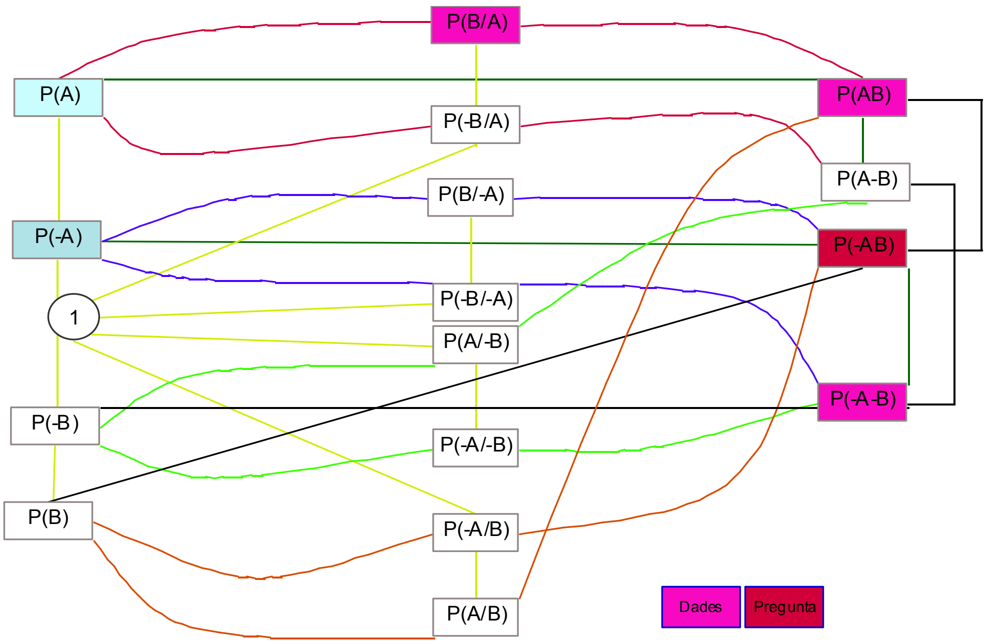


Figura 127 Grafo canónico de $[p_{21}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

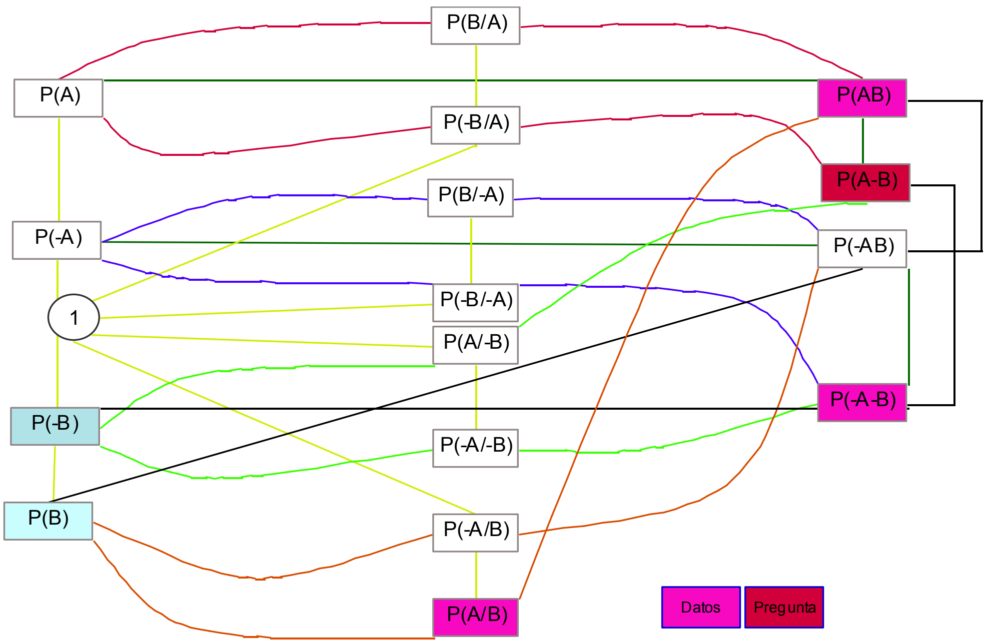


Figura 128 Grafo canónico de [p_{21}]

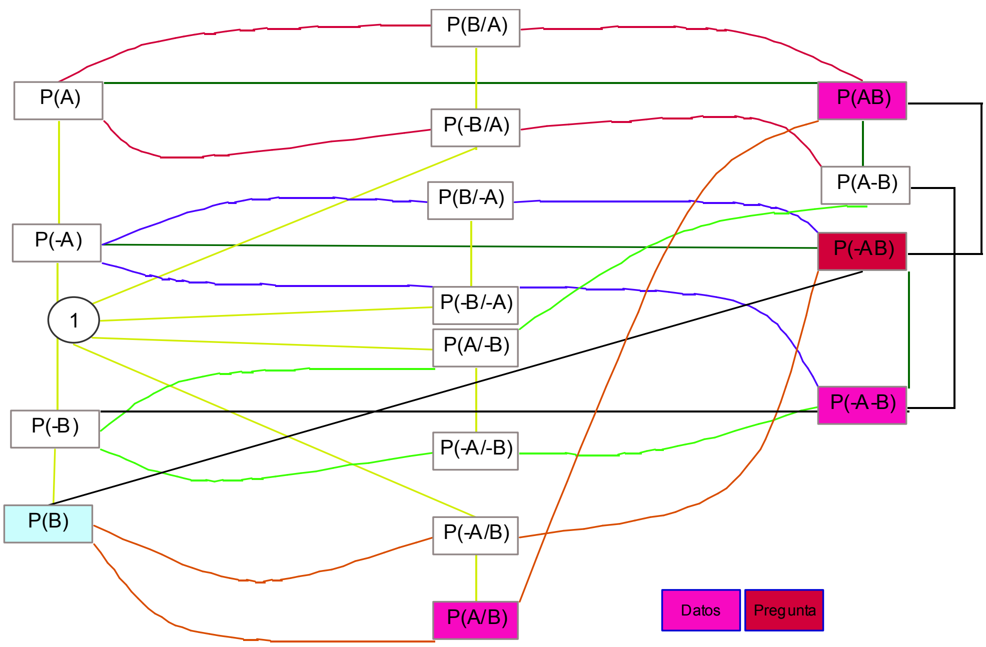


Figura 129 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

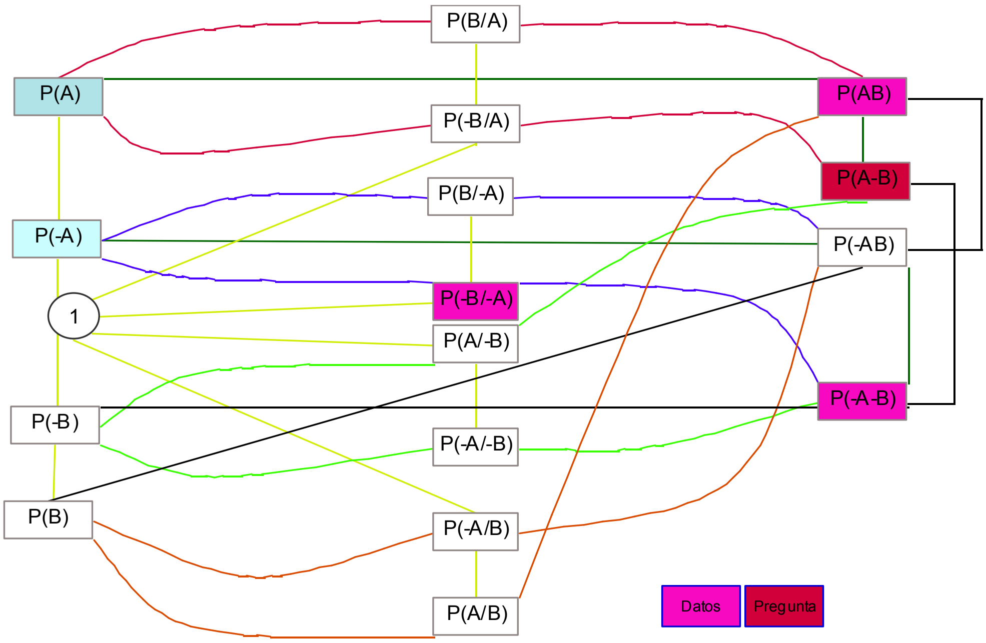


Figura 130 Grafo canónico de [p_{21}]

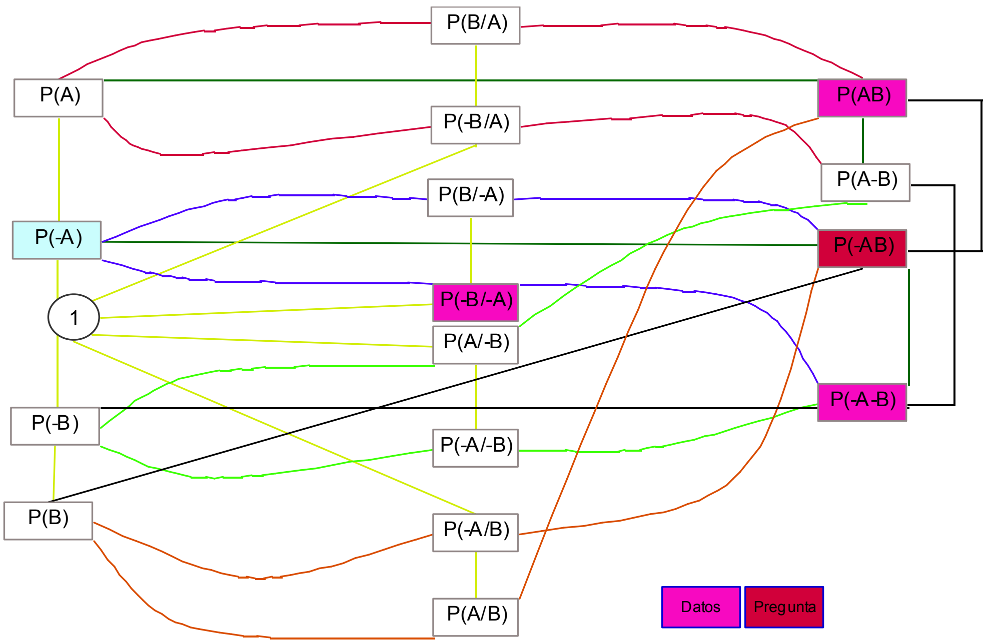


Figura 131 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

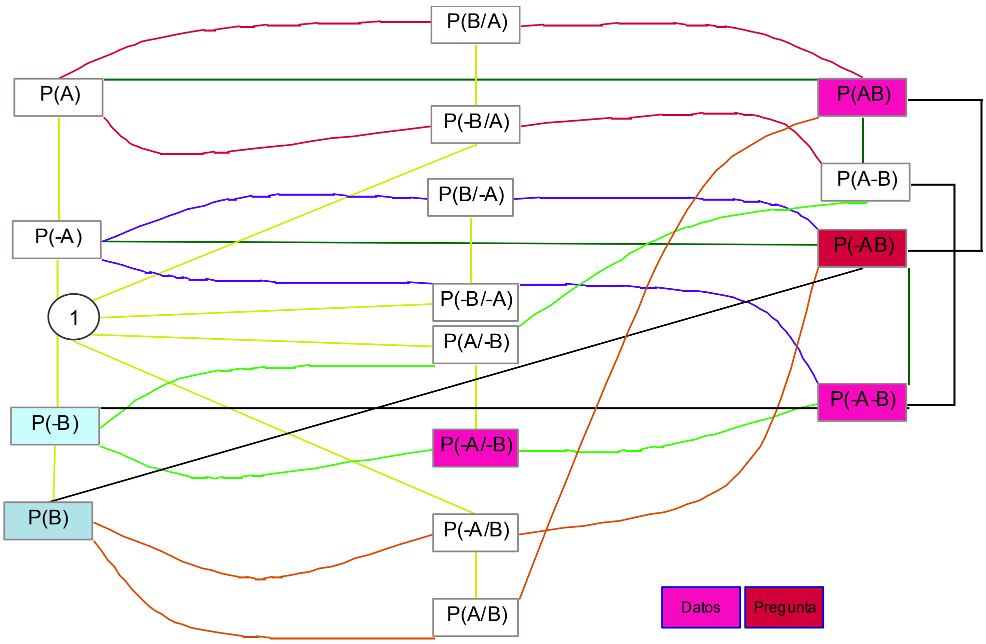


Figura 132 Grafo canónico de [p_{21}]

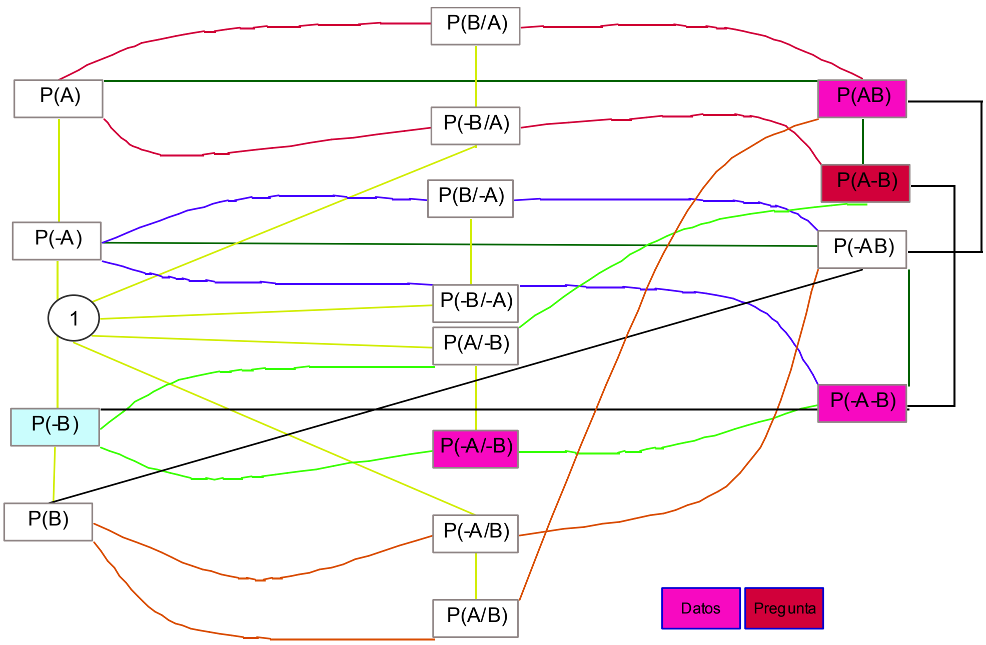


Figura 133 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_3G_2$

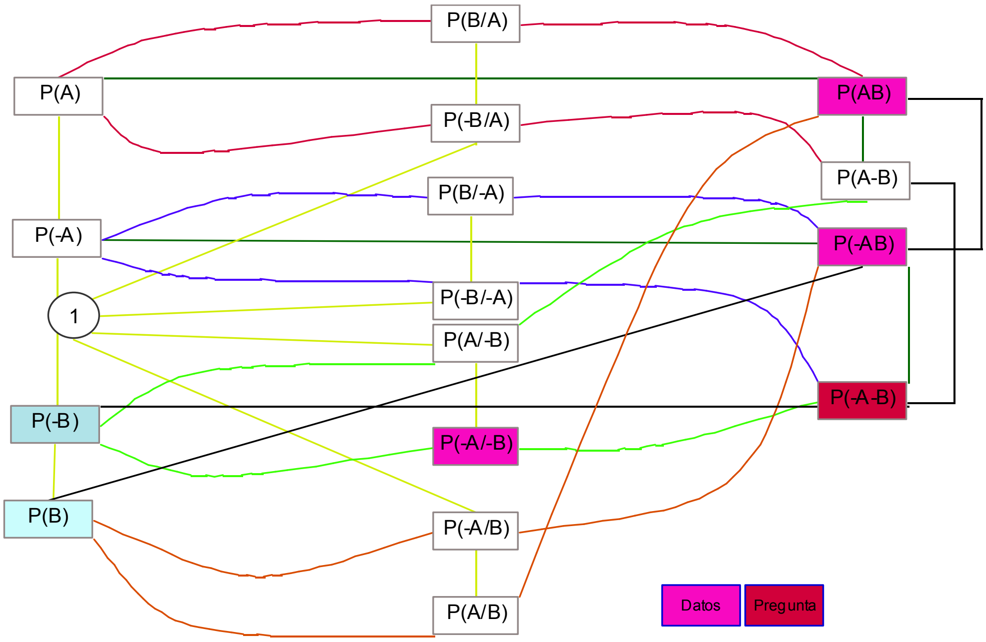


Figura 134 Grafo canónico de $[p_{21}]$

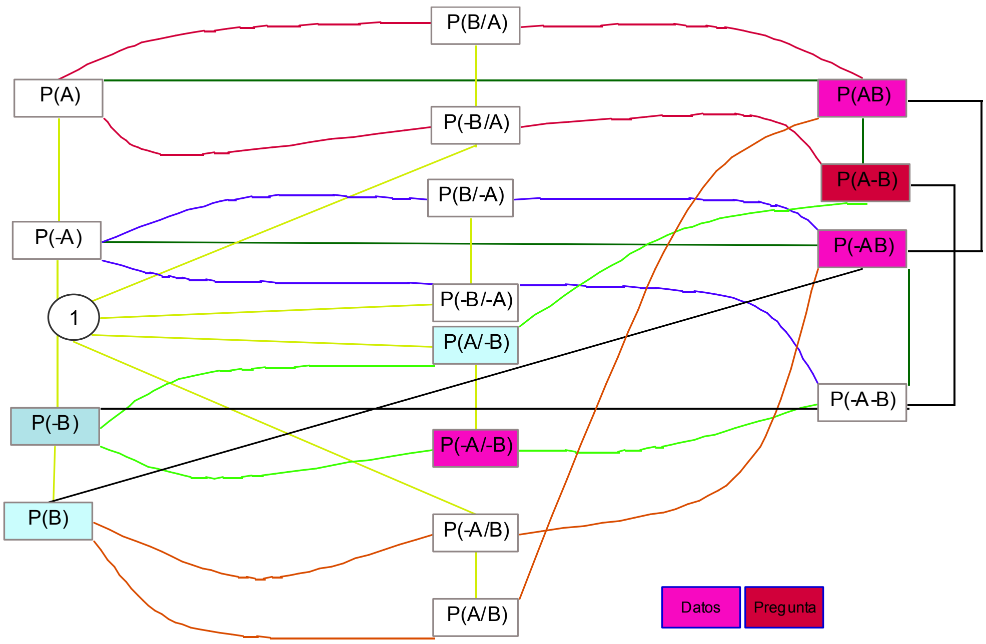


Figura 135 Grafo canónico de $[p_{31}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

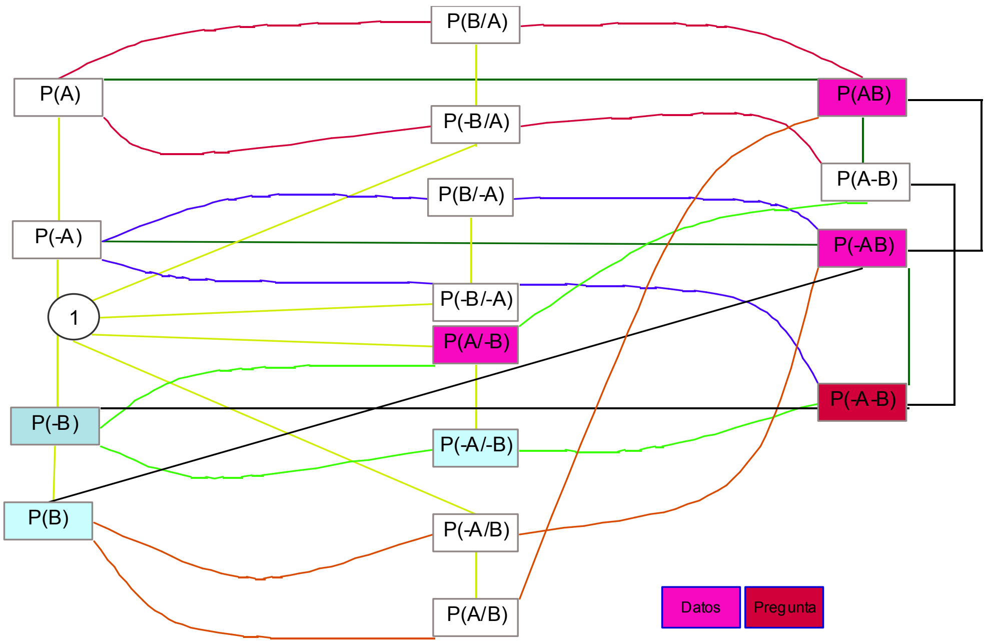


Figura 136 Grafo canónico de [p_{31}]

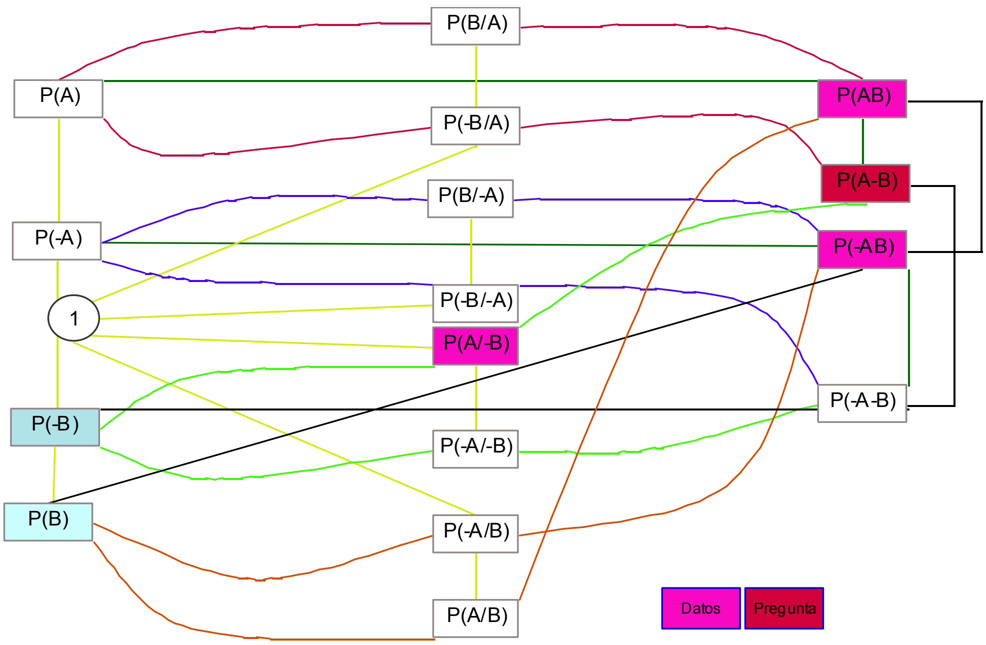


Figura 137 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_3G_3$

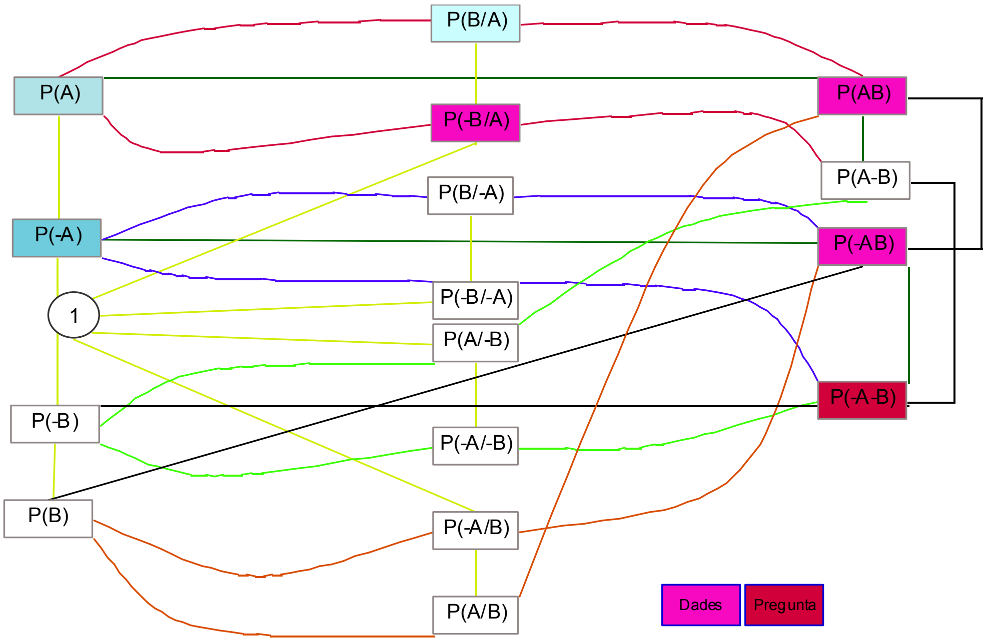


Figura 138 Grafo canónico de [p_{31}]

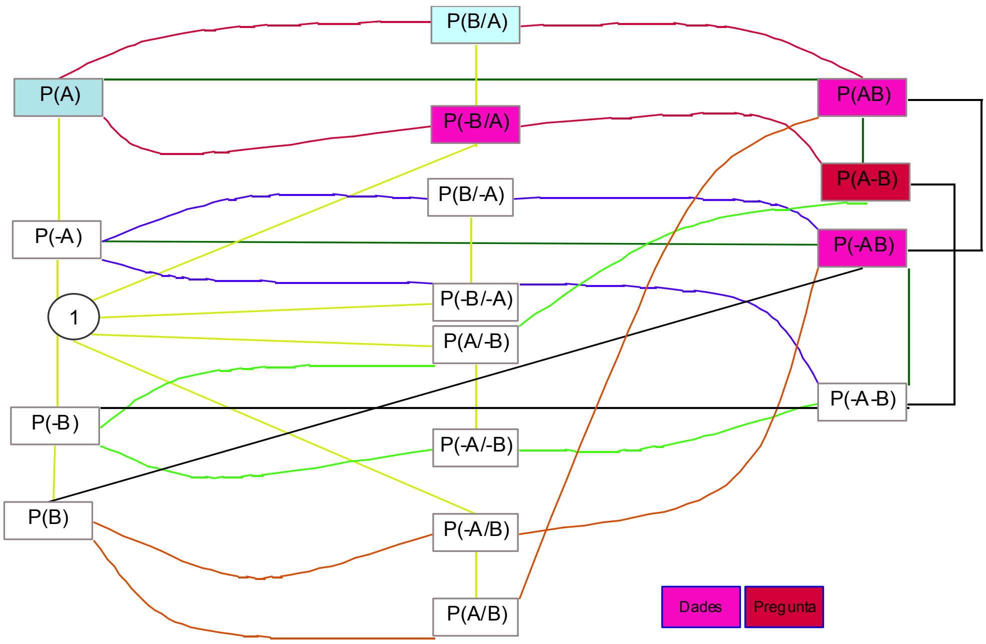


Figura 139 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

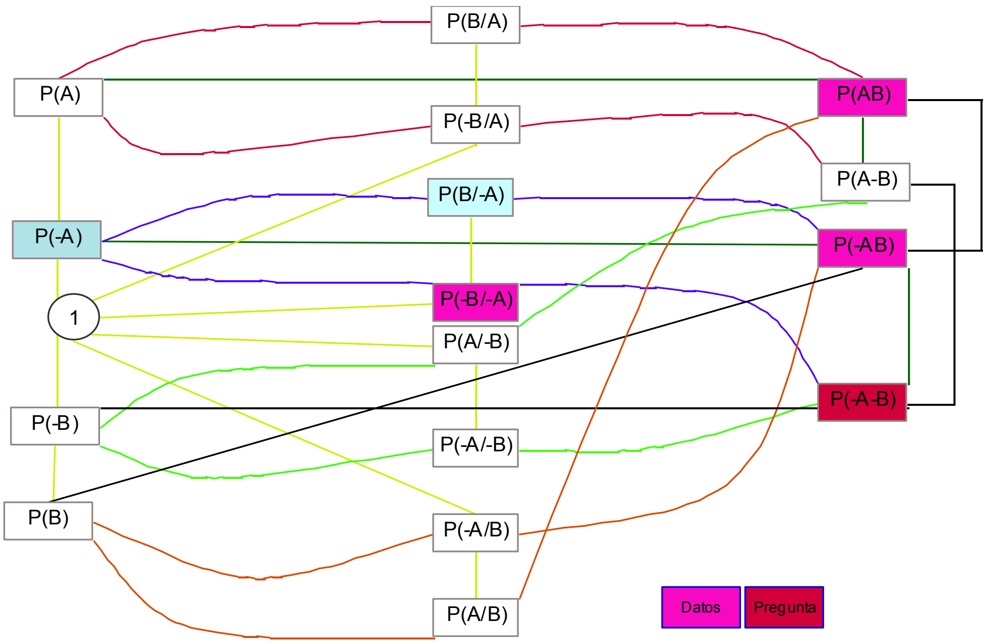


Figura 140 Grafo canónico de [p_{21}]

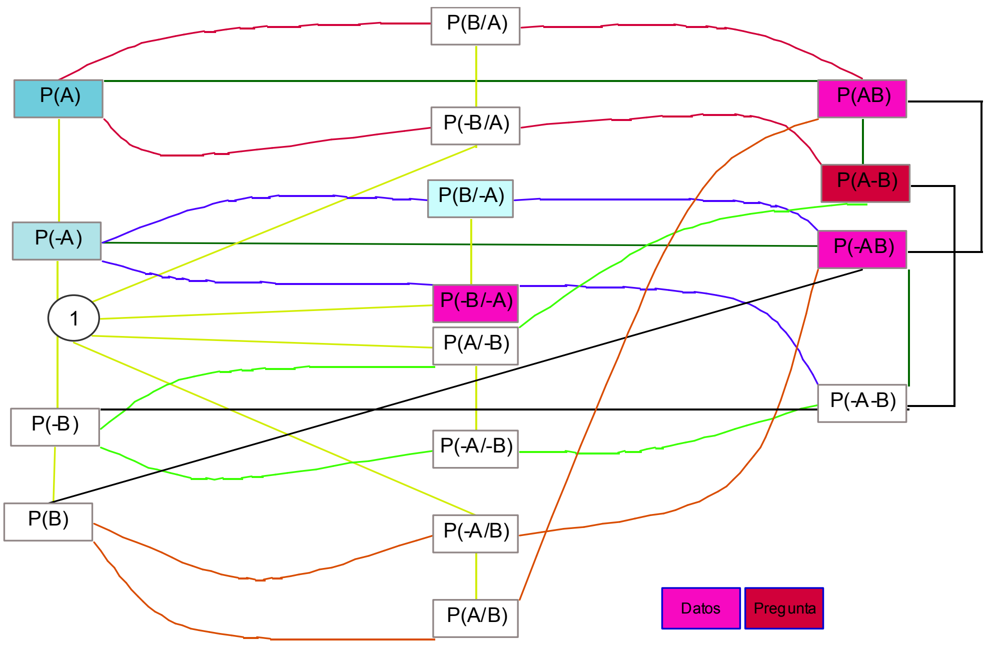


Figura 141 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_1T_3G_5$

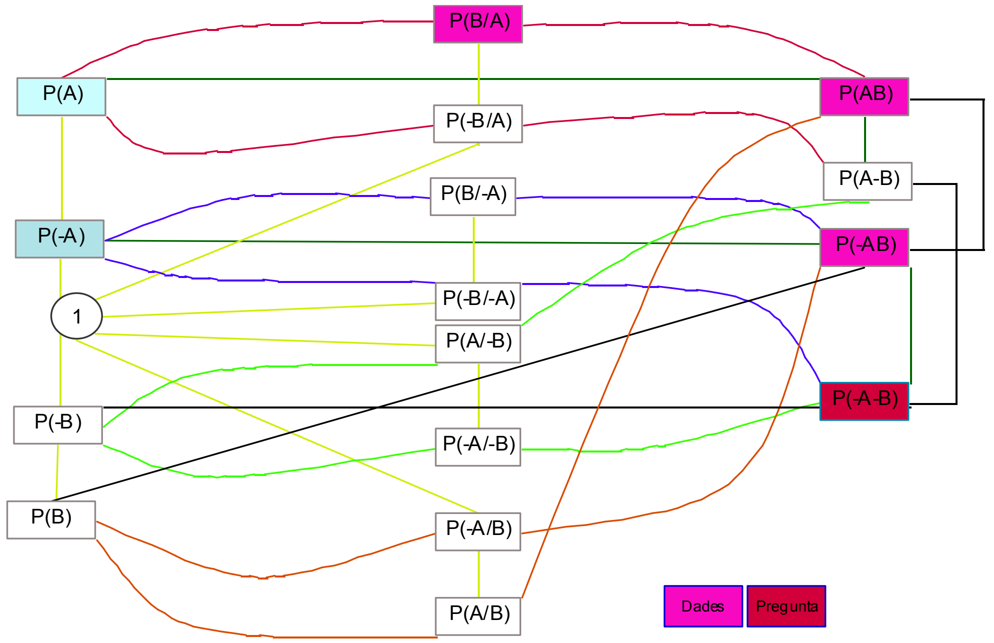


Figura 142 Grafo canónico de [p_{21}]

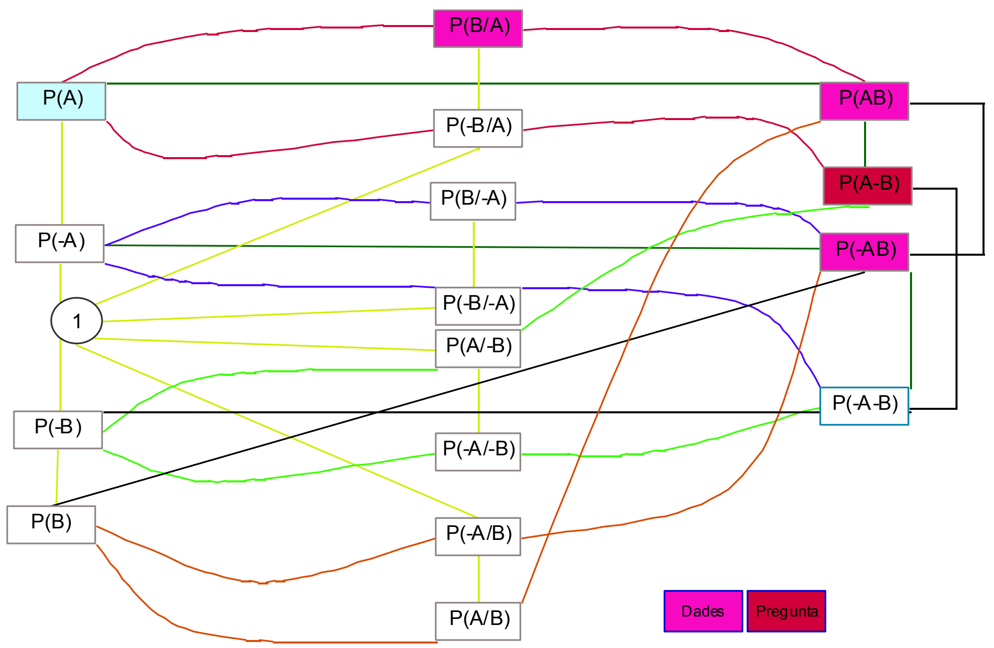


Figura 143 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

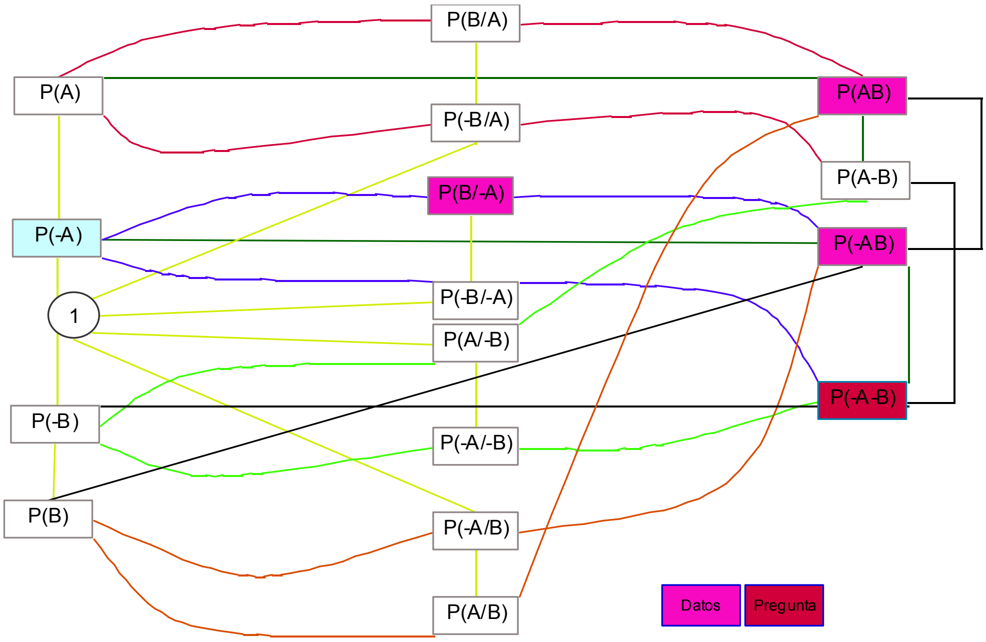


Figura 144 Grafo canónico de [p_{11}]

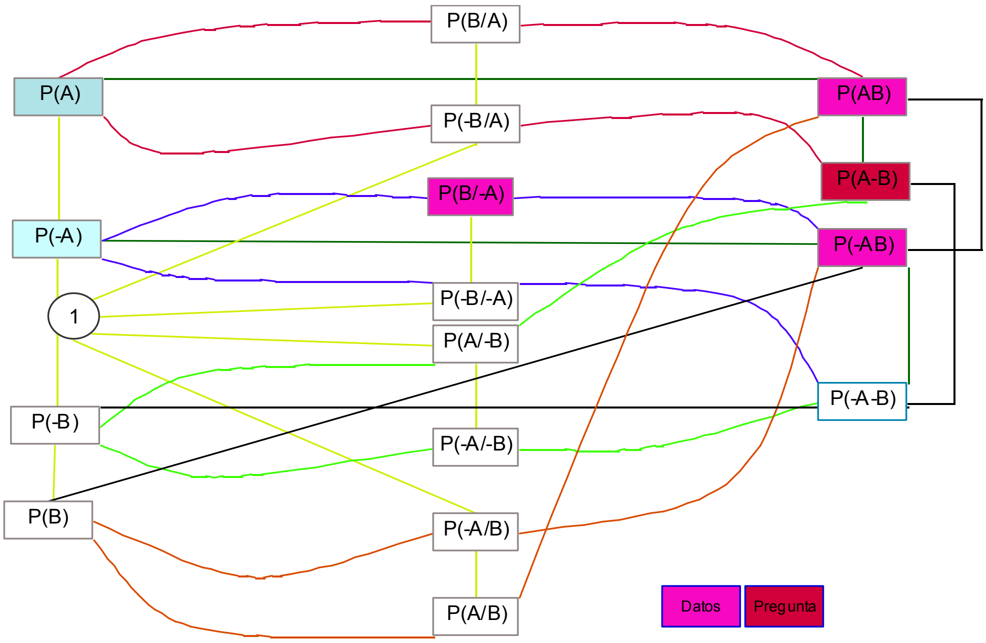


Figura 145 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_3G_6$

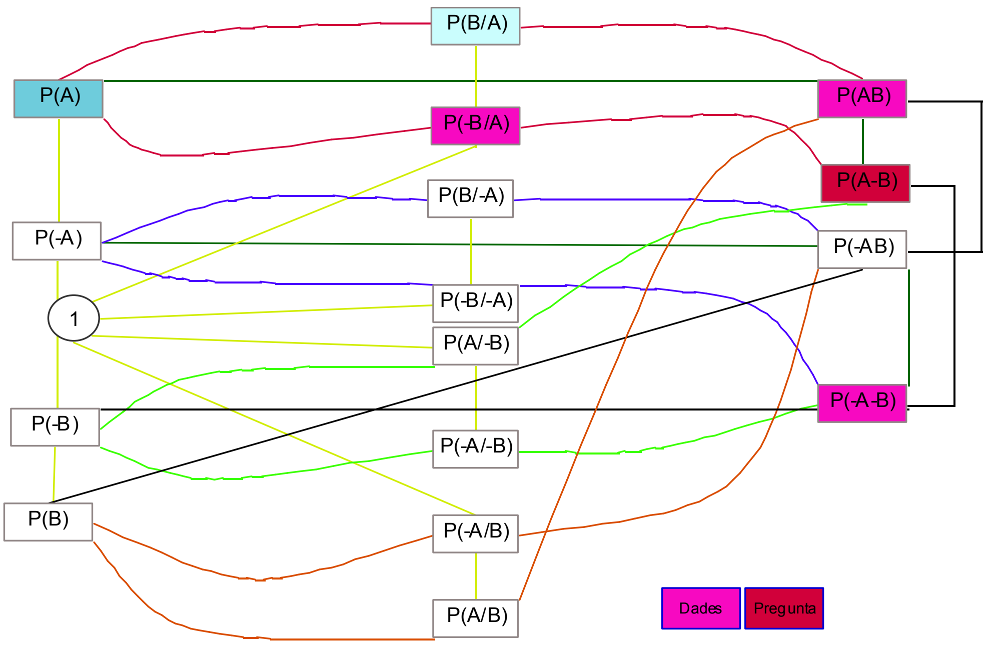


Figura 146 Grafo canónico de [p_{21}]

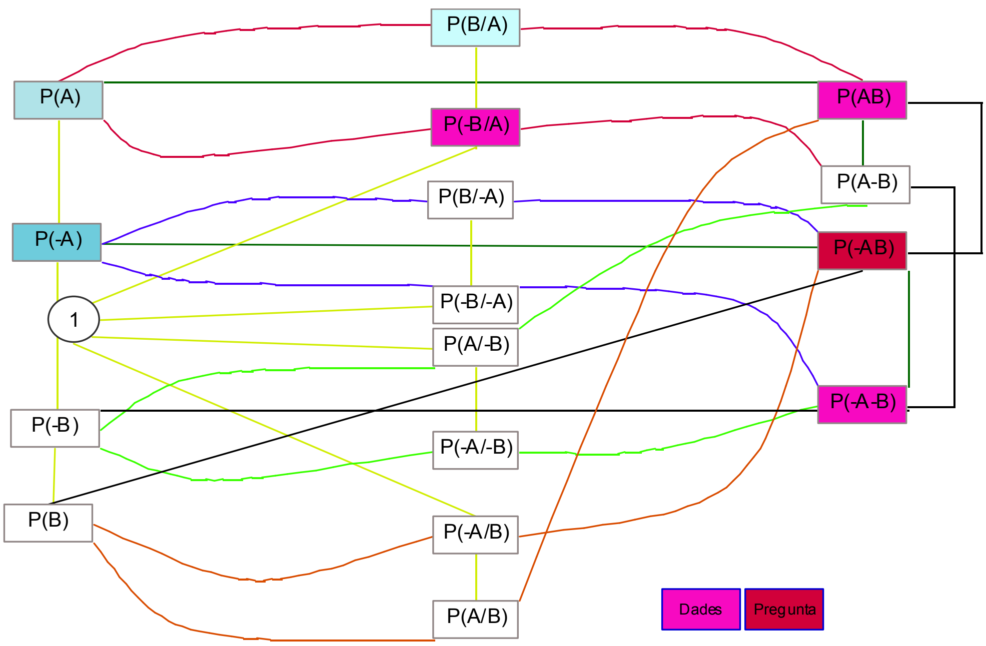


Figura 147 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

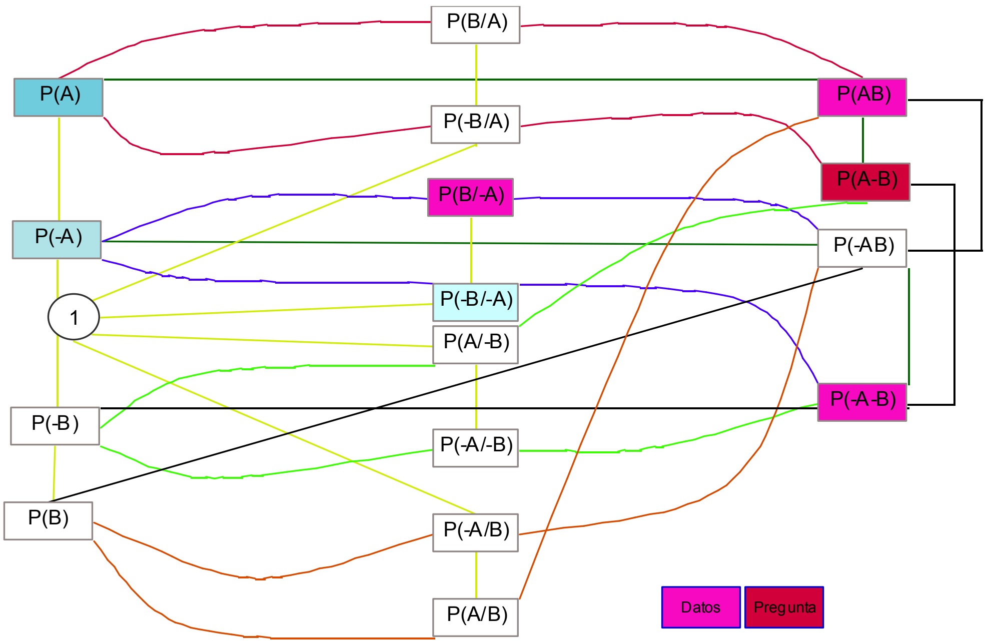


Figura 148 Grafo canónico de [p_{31}]

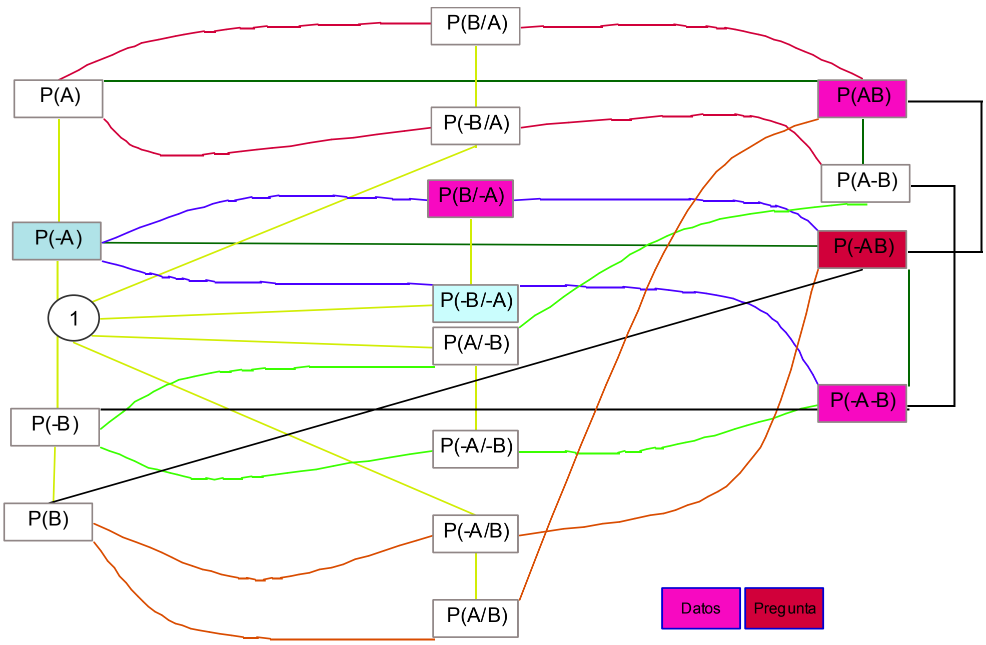


Figura 149 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

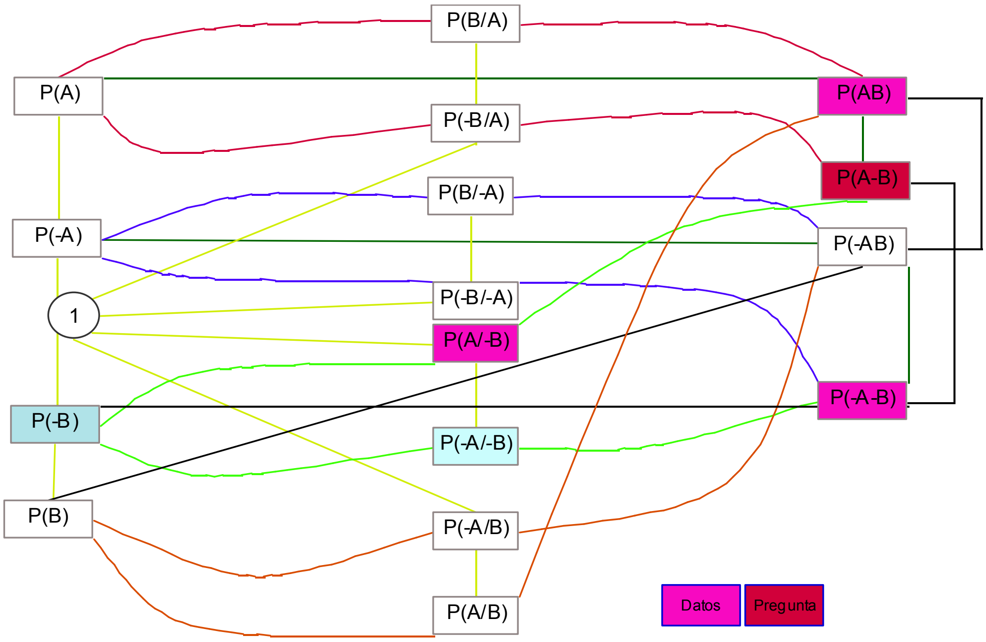


Figura 150 Grafo canónico de [p_{21}]

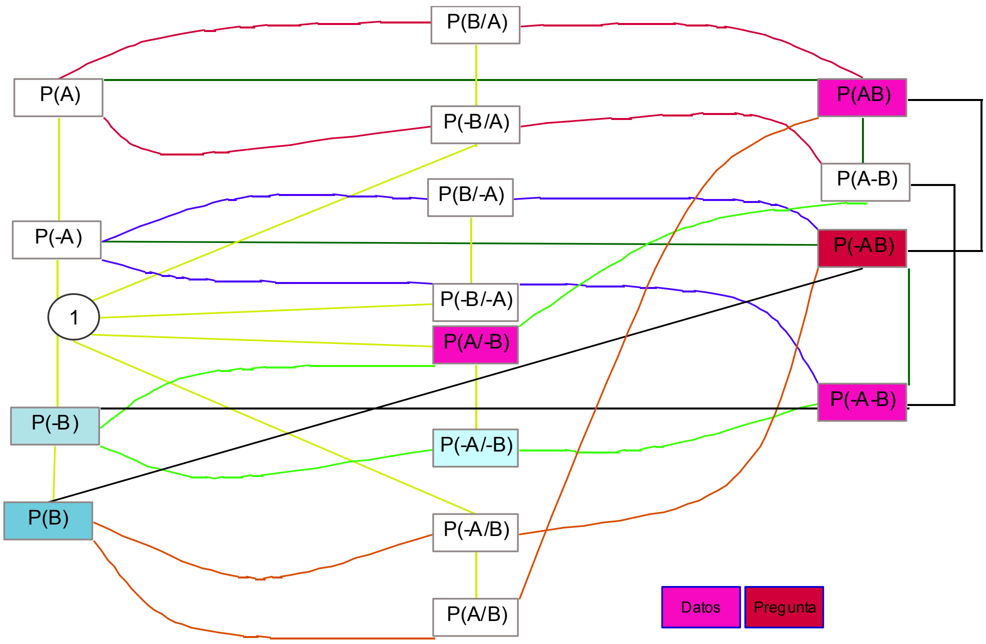


Figura 151 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

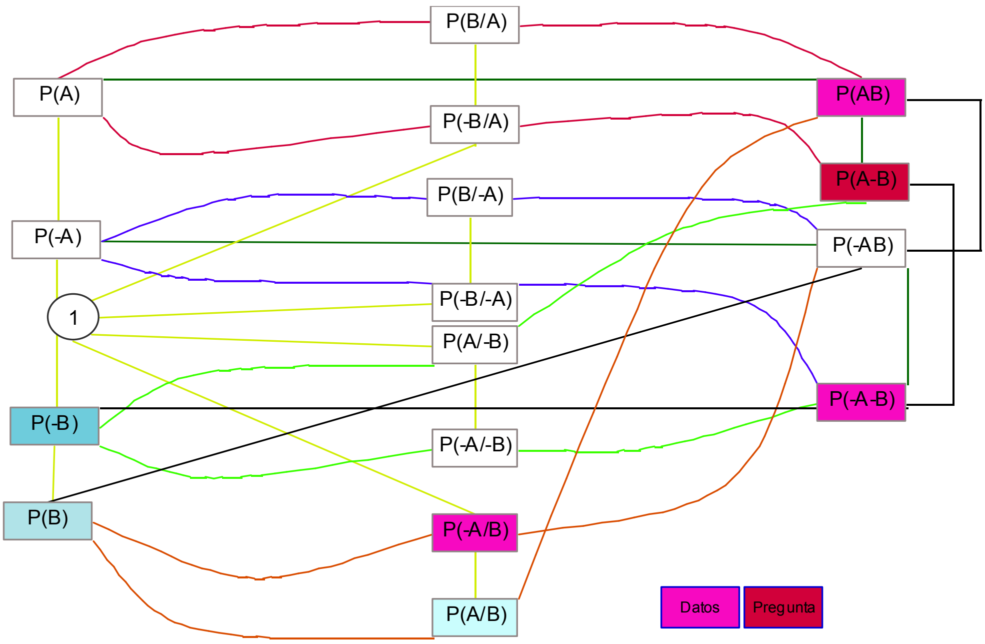


Figura 152 Grafo canónico de [p_{31}]

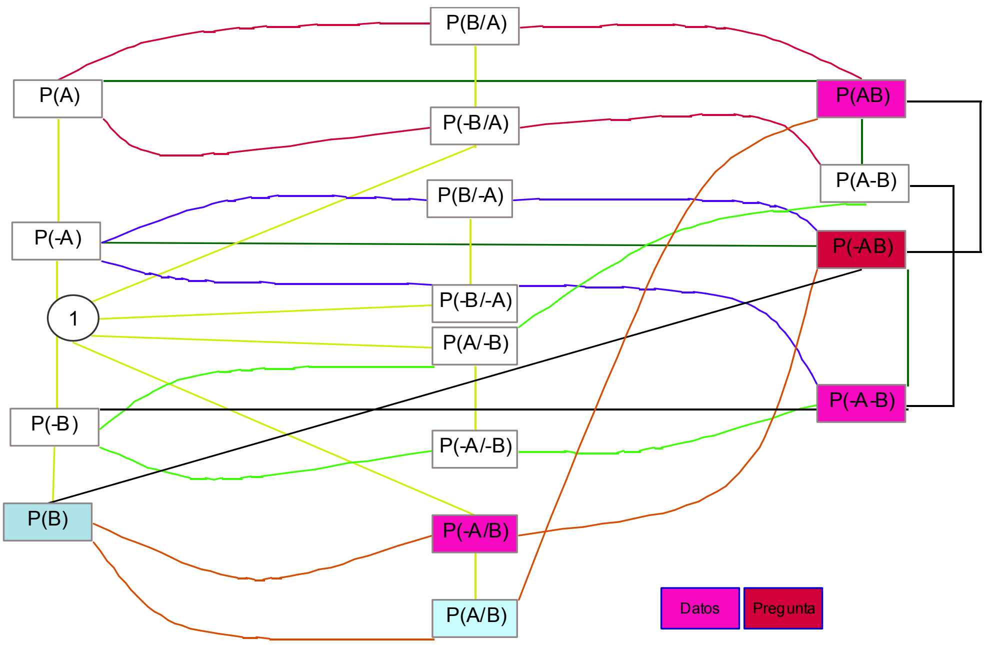


Figura 153 Grafo canónico de [p_{21}]

II. N_2C_2

II.1. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_2T_1$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.14

$N_2C_2T_1G_1$

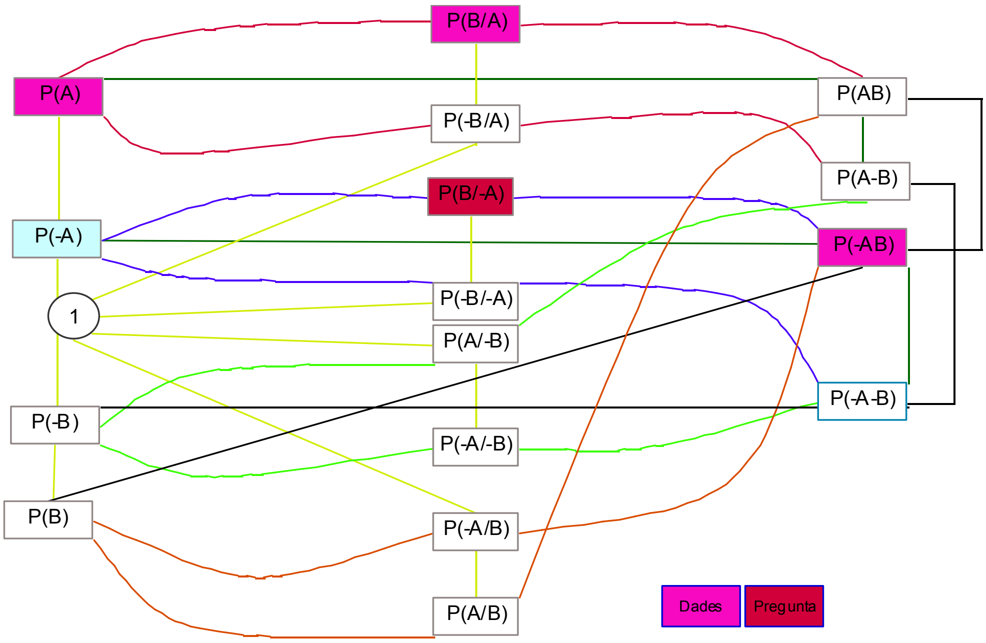


Figura 154 Grafo canónico de [p_{11}]

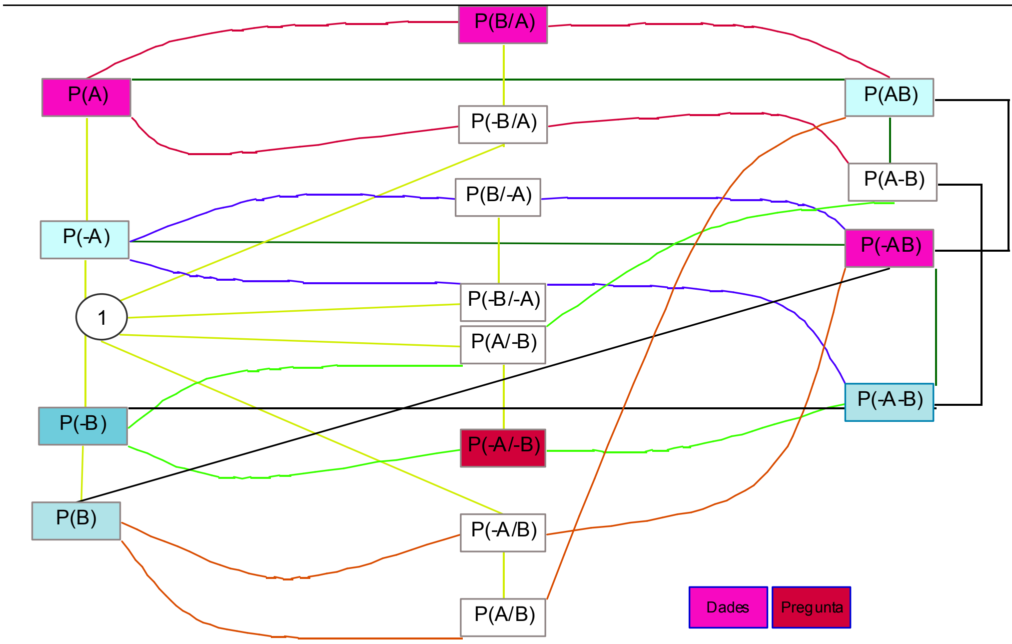


Figura 155 Grafo canónico de [p_{41}]

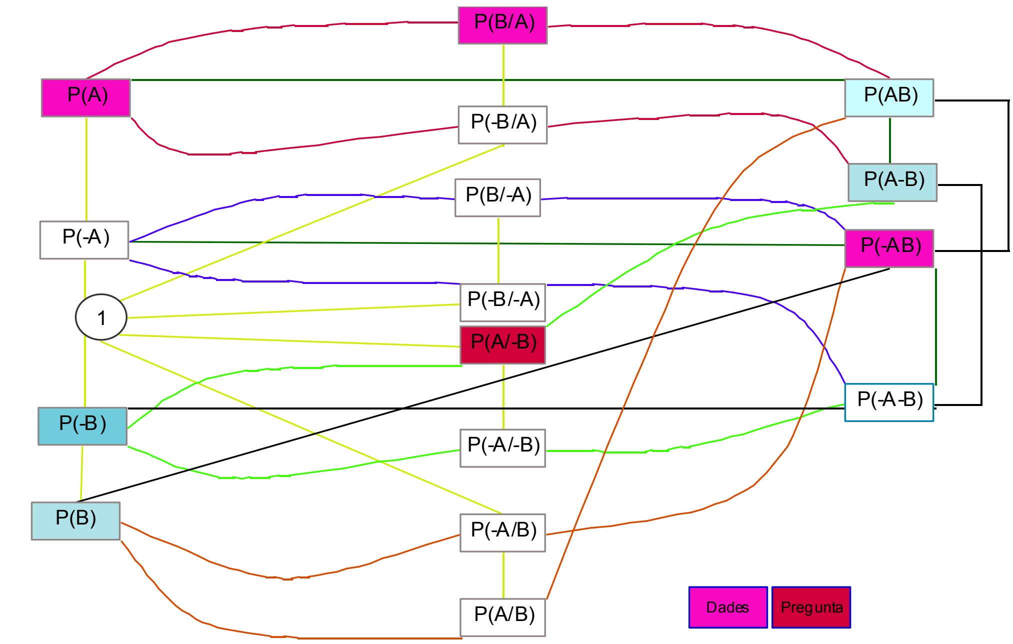


Figura 156 Grafo canónico de [p_{32}]

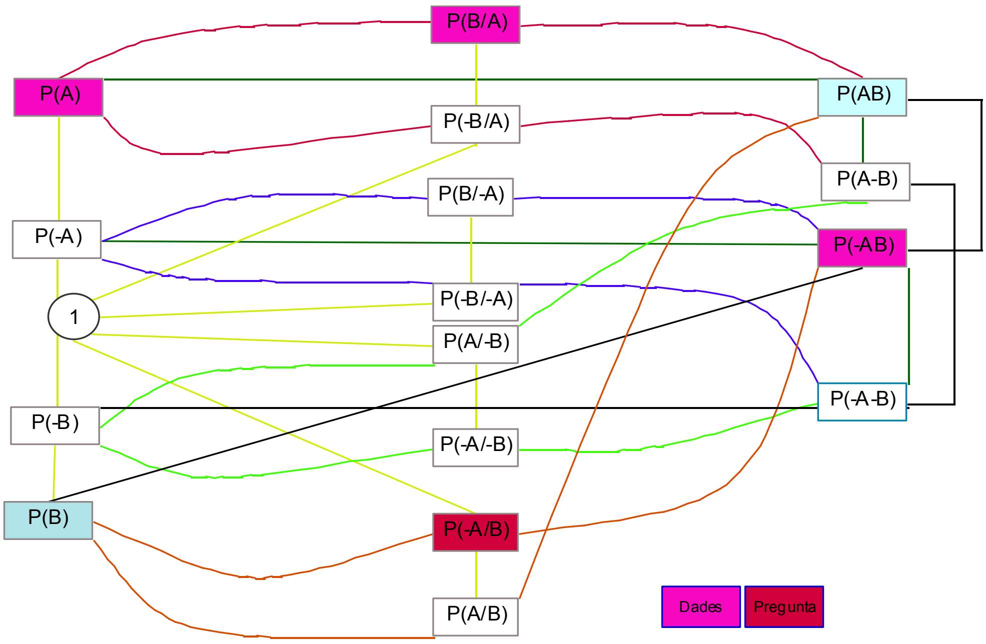


Figura 157 Grafo canónico de [p_{12}]

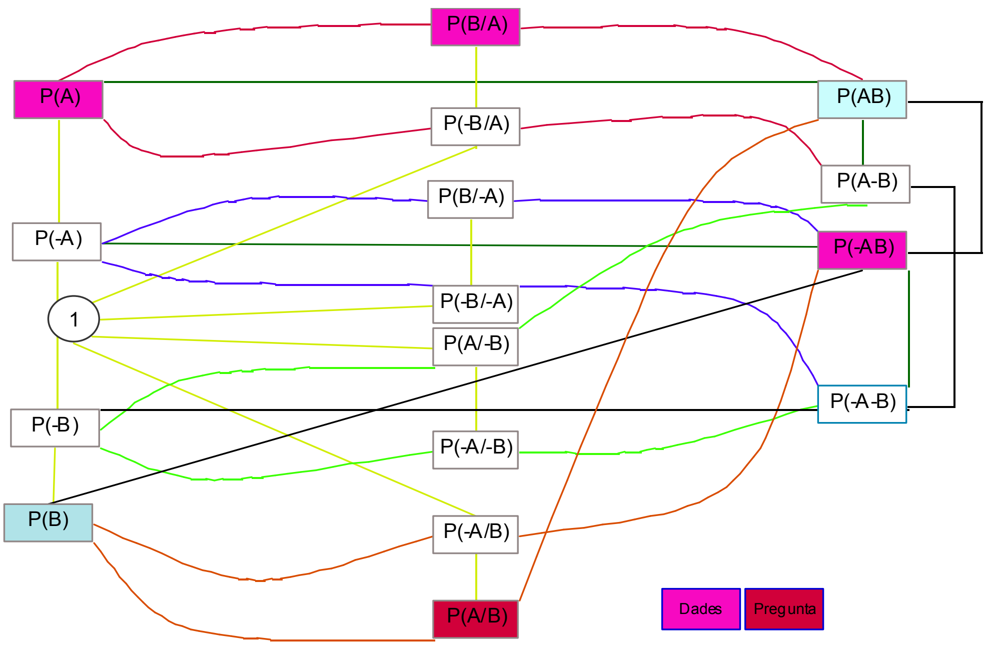


Figura 158 Grafo canónico de [p_{12}]

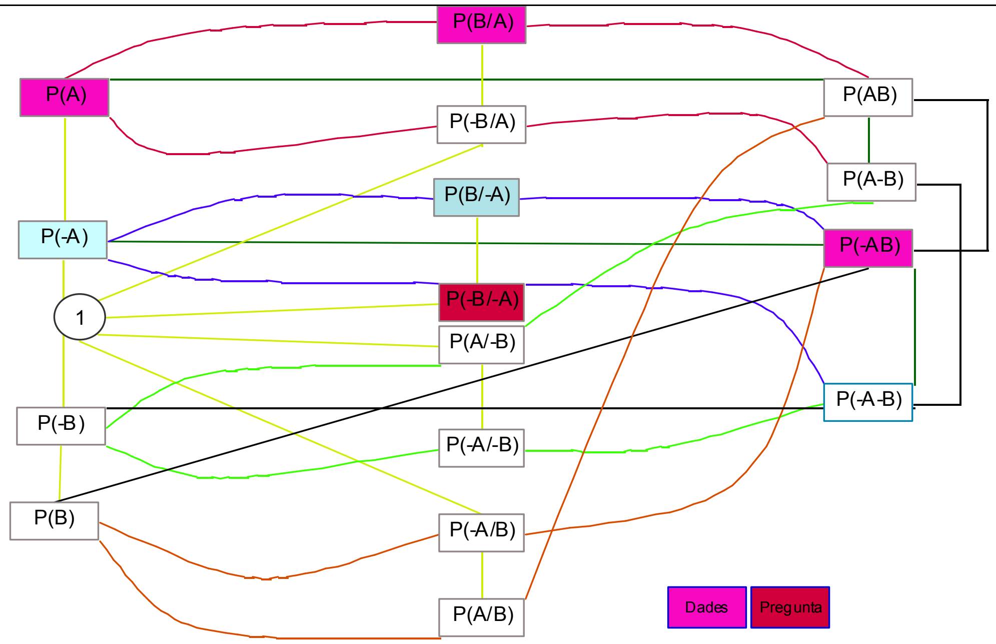


Figura 159 Grafo canónico de [p_{21}]

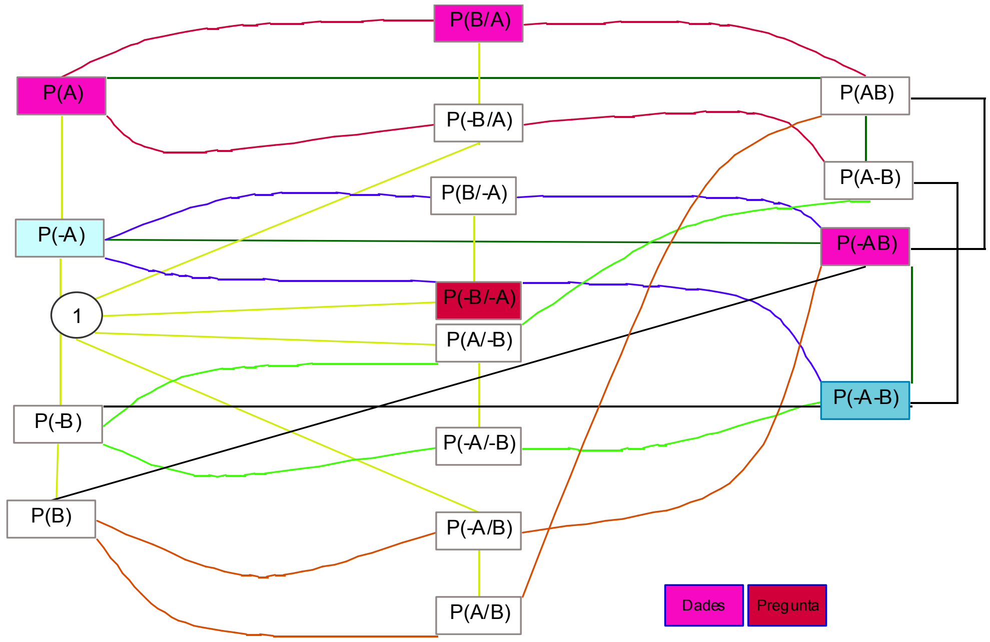


Figura 160 Grafo canónico de [p_{21}]. Este grafo representa el mismo problema que el de la figura 159, en el que hemos utilizado aristas diferentes pero de la misma naturaleza, dos rectas y una curva.

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

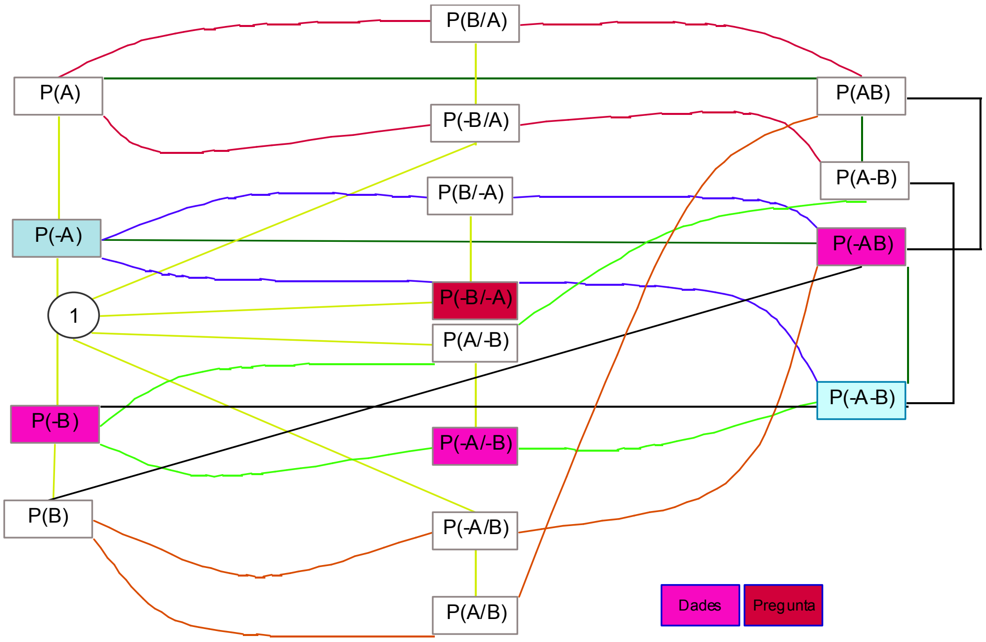


Figura 161 Grafo canónico de [p_{12}]

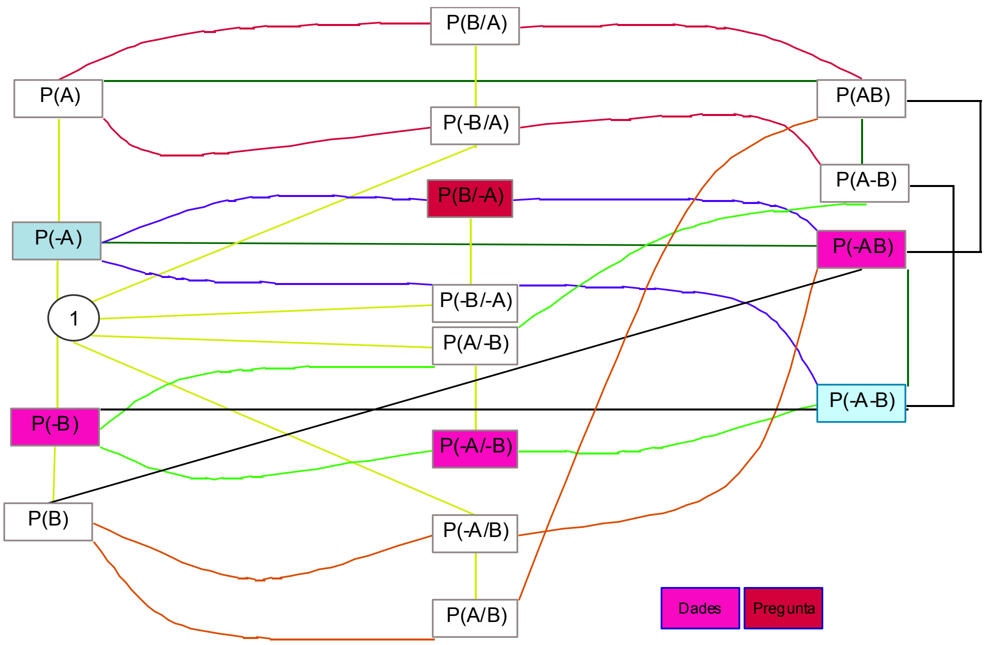


Figura 162 Grafo canónico de [p_{12}]

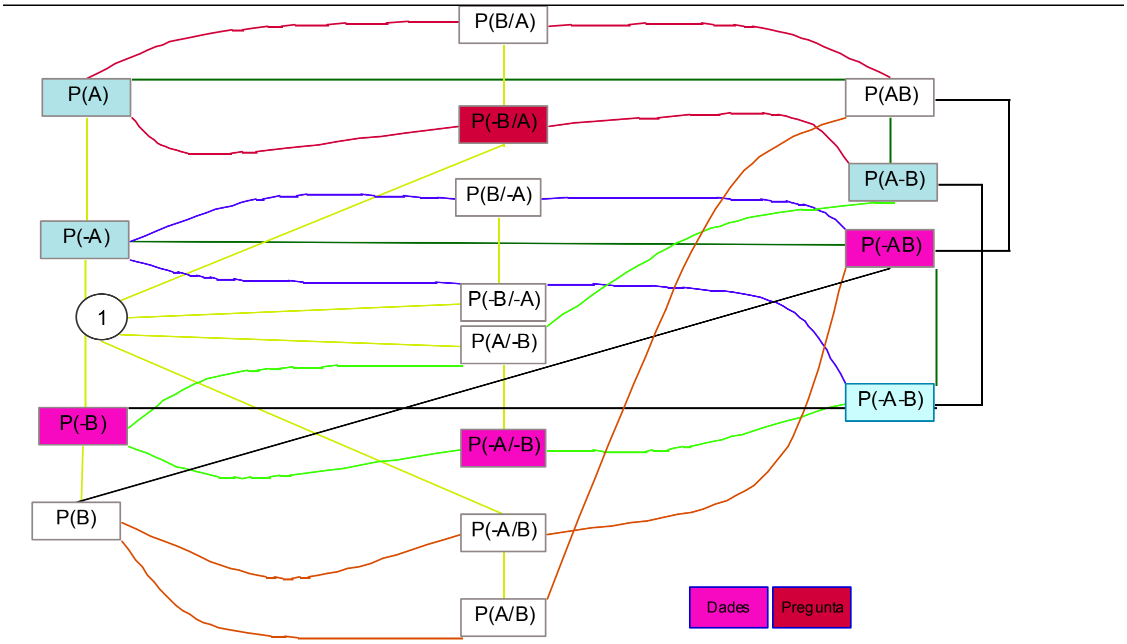


Figura 163 Grafo canónico de [p_{32}]

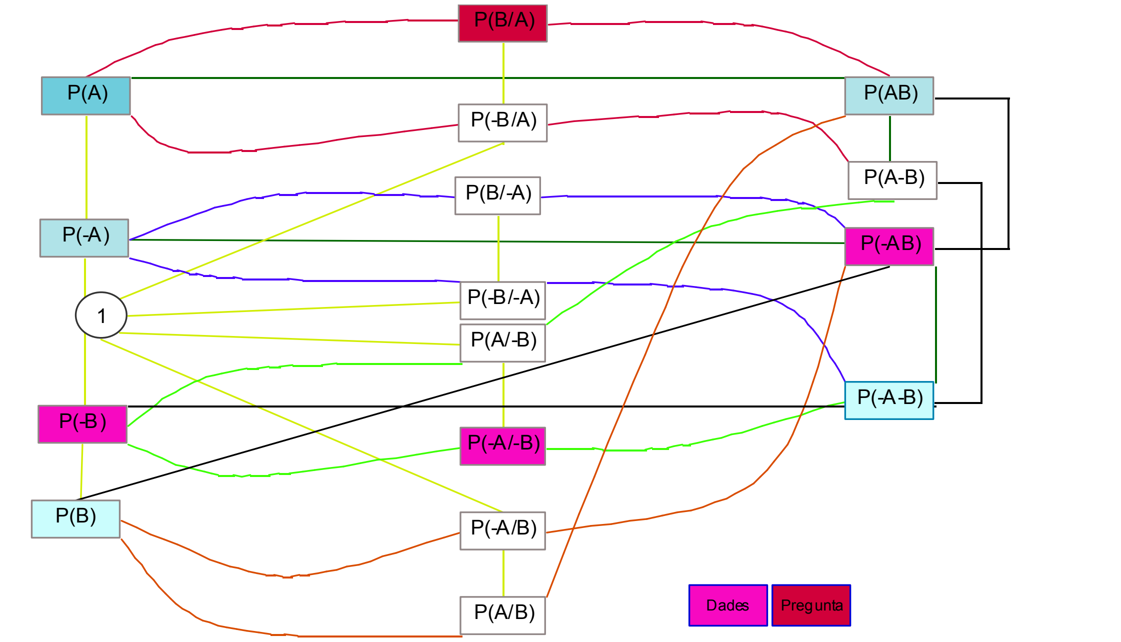


Figura 165 Grafo canónico de [p_{42}]

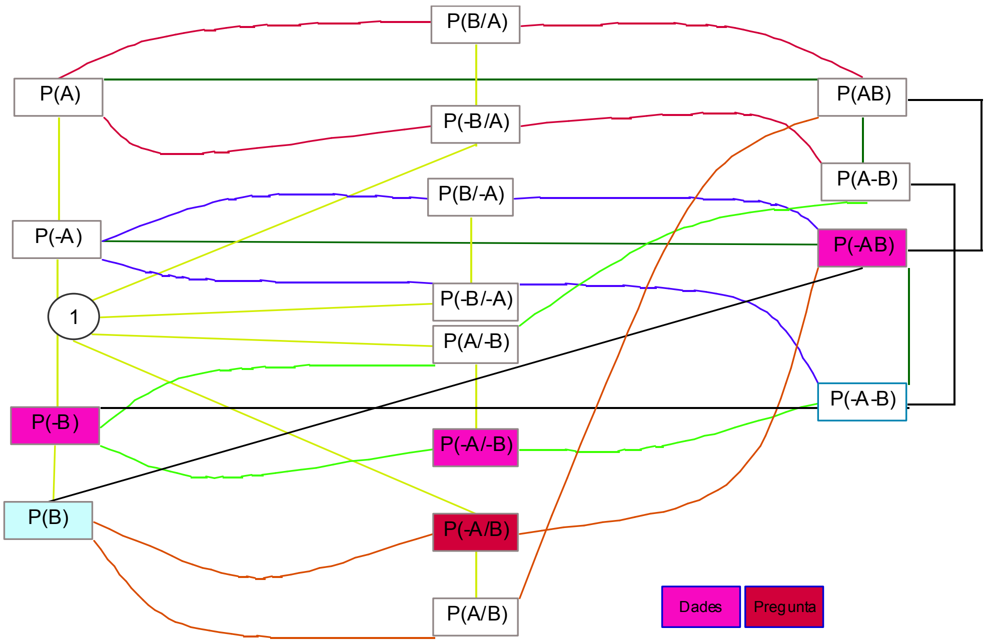


Figura 166 Grafo canónico de [p_{11}]

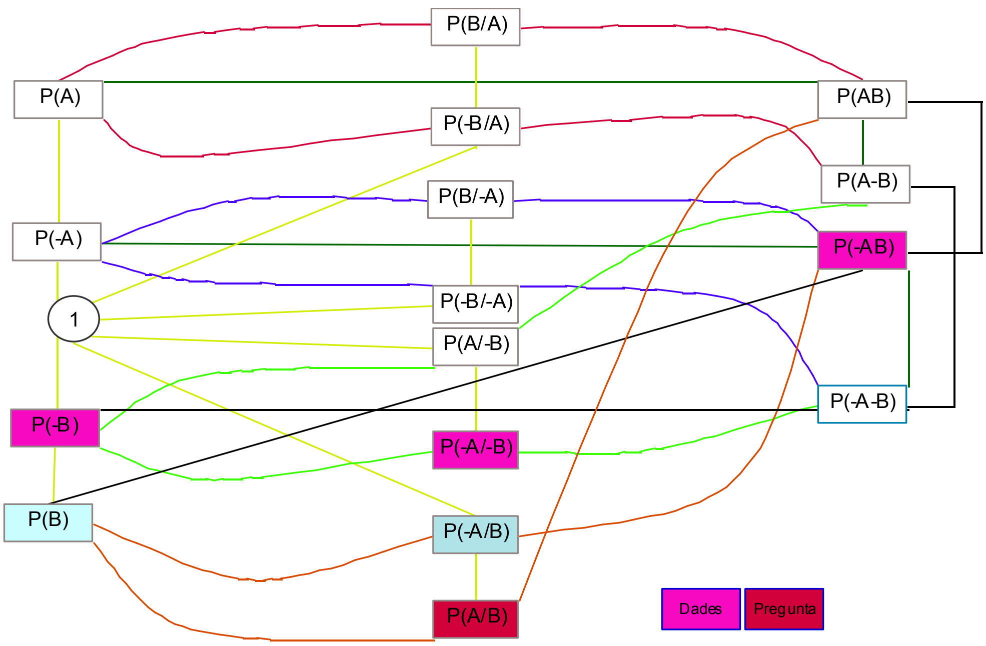


Figura 167 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_1G_2$

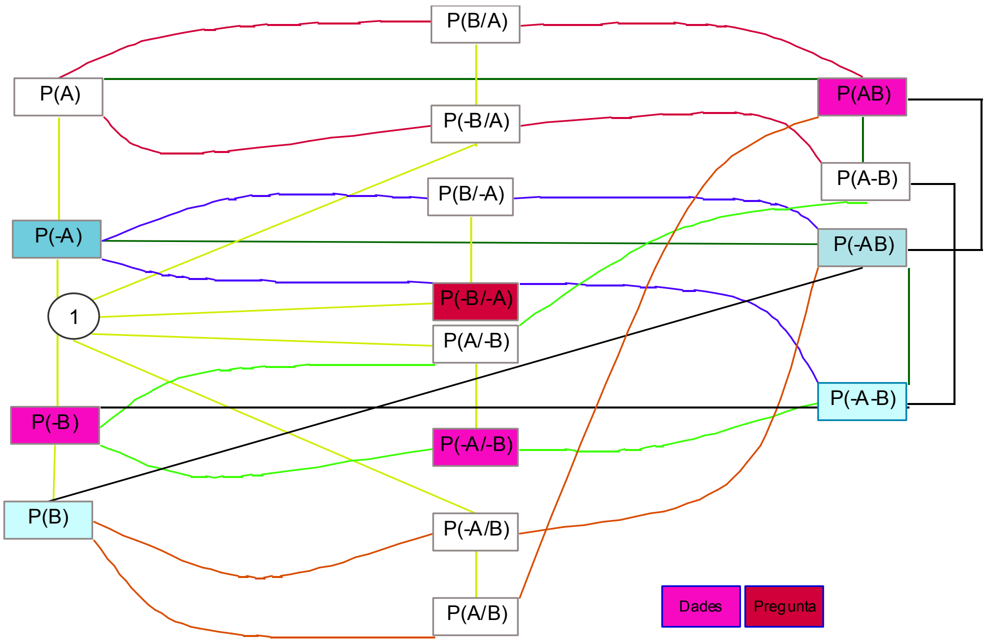


Figura 168 Grafo canónico de [p32]

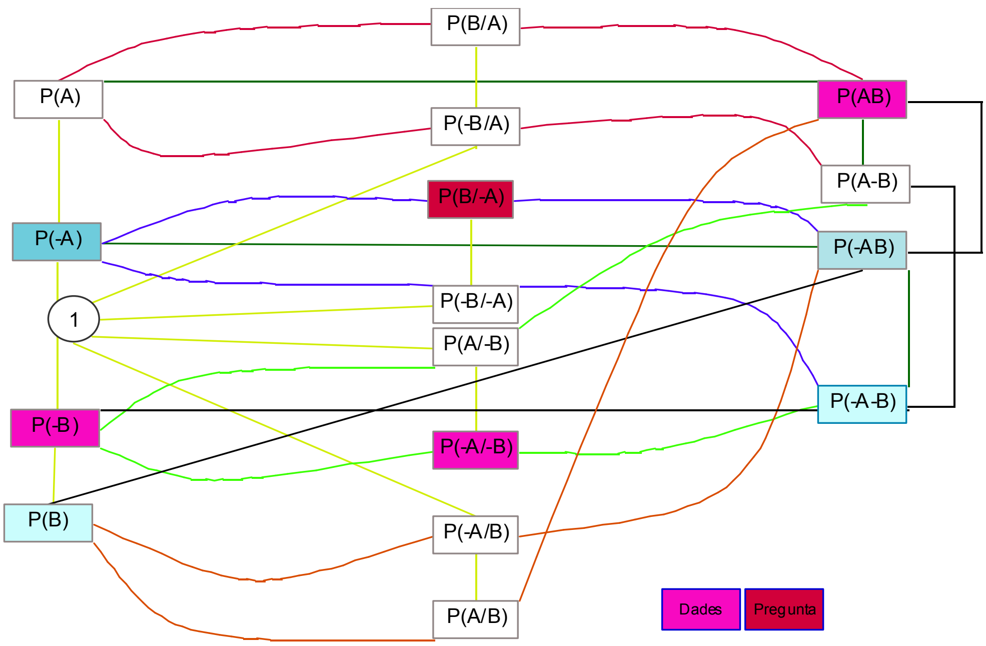


Figura 169 Grafo canónico de [p32]

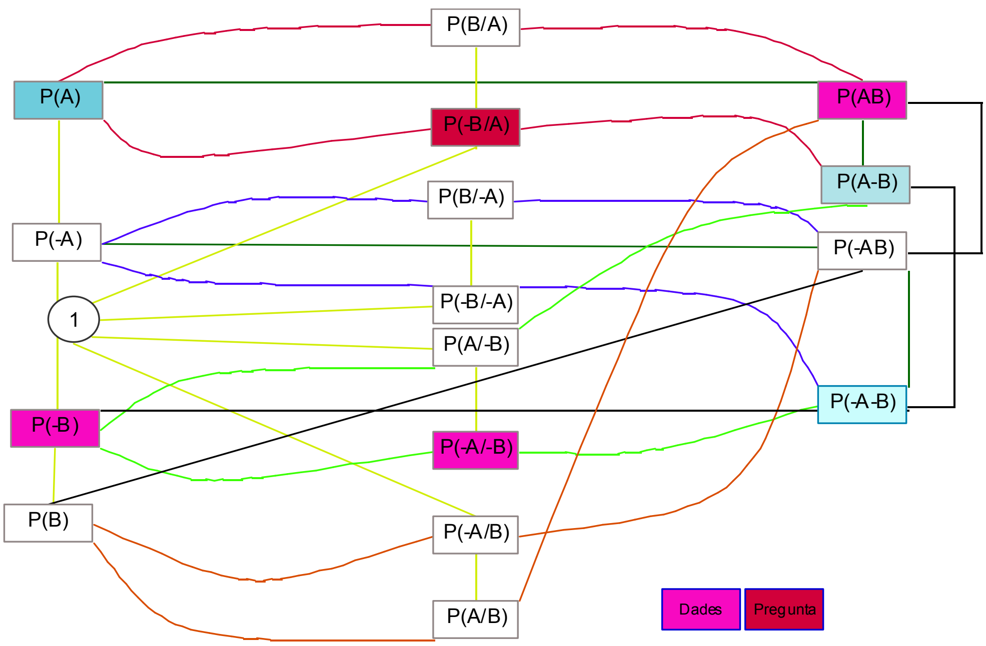


Figura 170 Grafo canónico de [p_{22}]

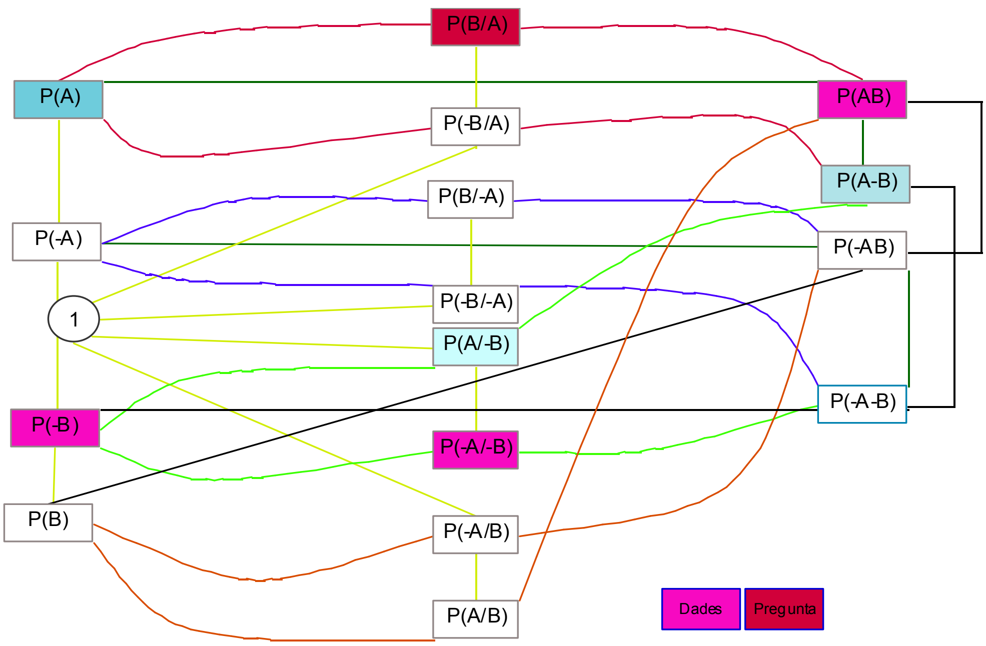


Figura 171 Grafo canónico de [p_{22}]

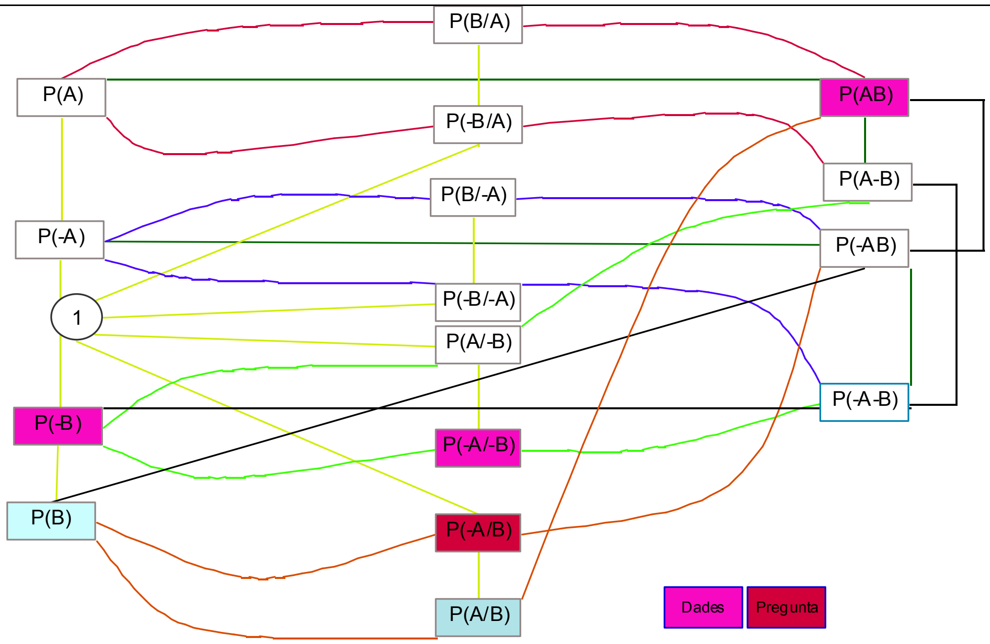


Figura 172 Grafo canónico de [p_{21}]

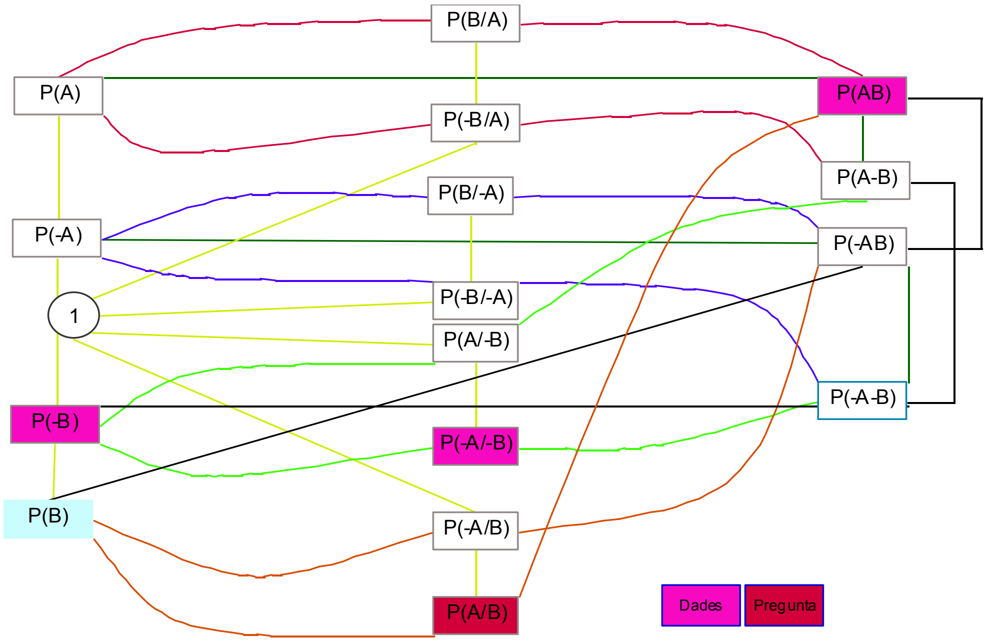


Figura 173 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_1G_4$

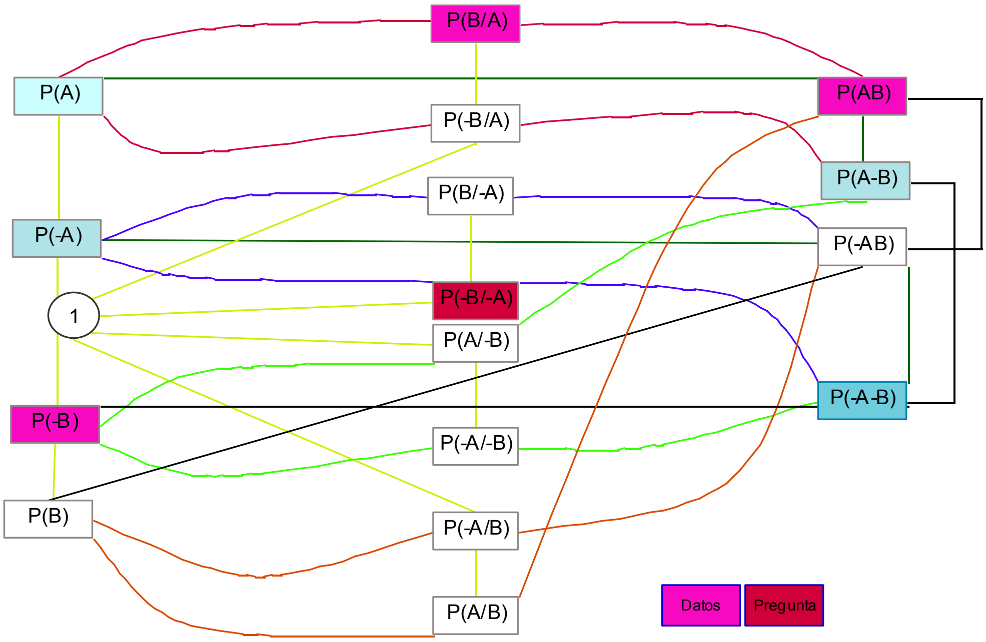


Figura 174 Grafo canónico de [p_{32}]

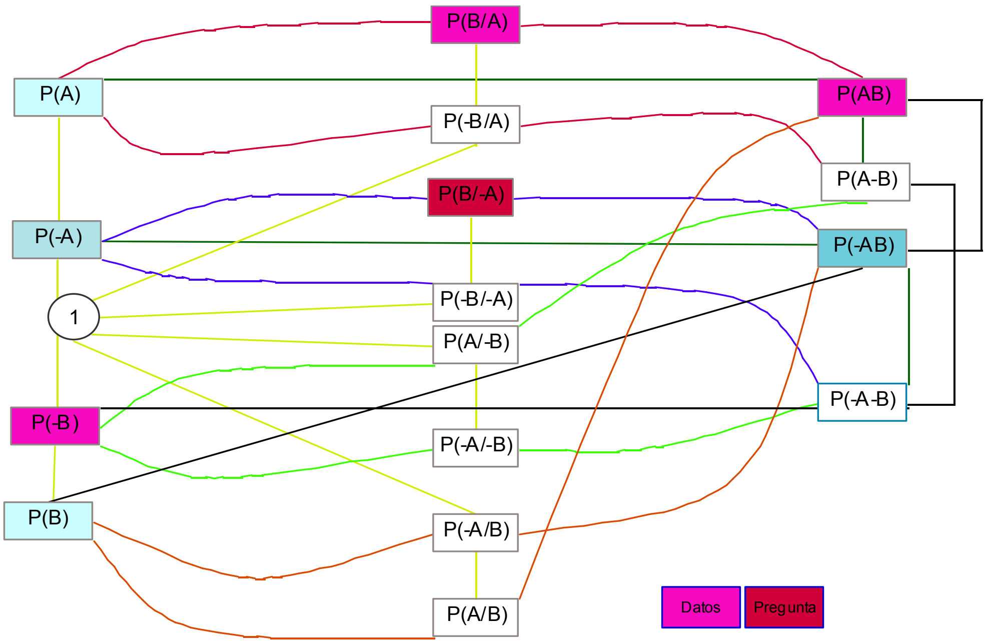


Figura 175 Grafo canónico de [p_{32}]

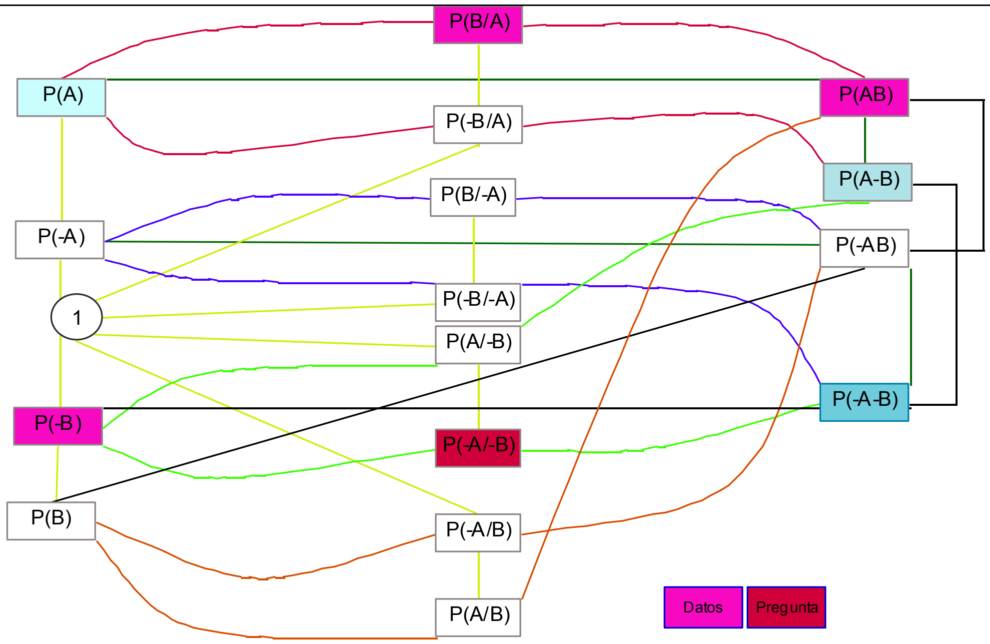


Figura 176 Grafo canónico de [p_{22}]

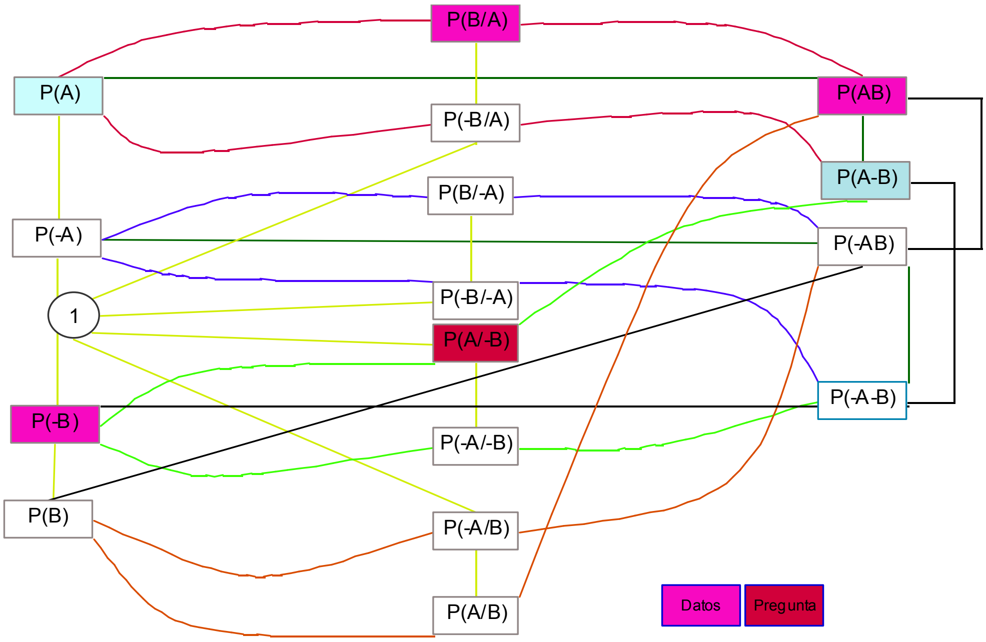


Figura 177 Grafo canónico de [p_{12}]

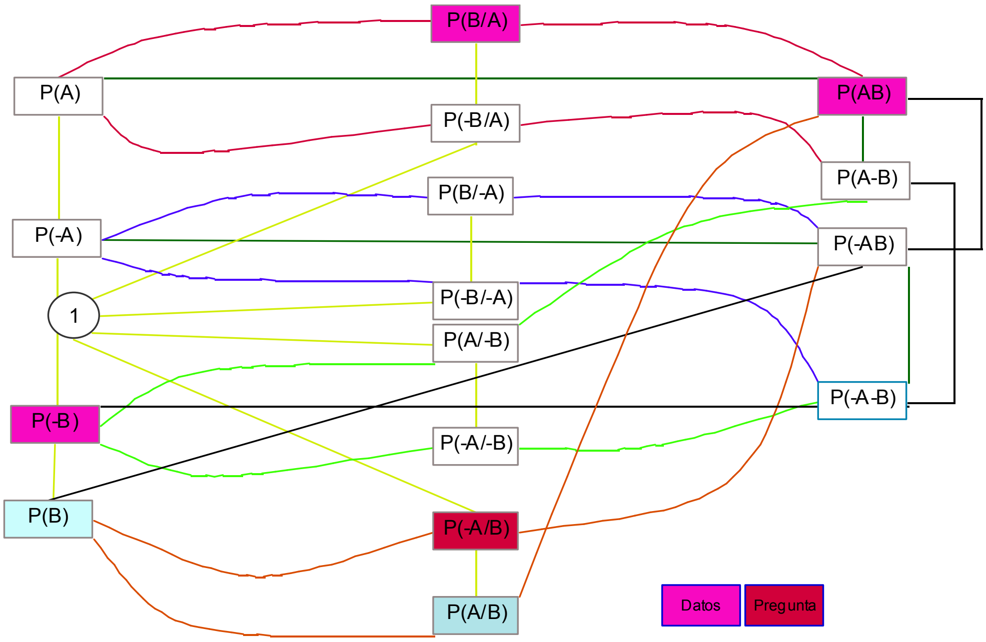


Figura 178 Grafo canónico de $[p_{21}]$

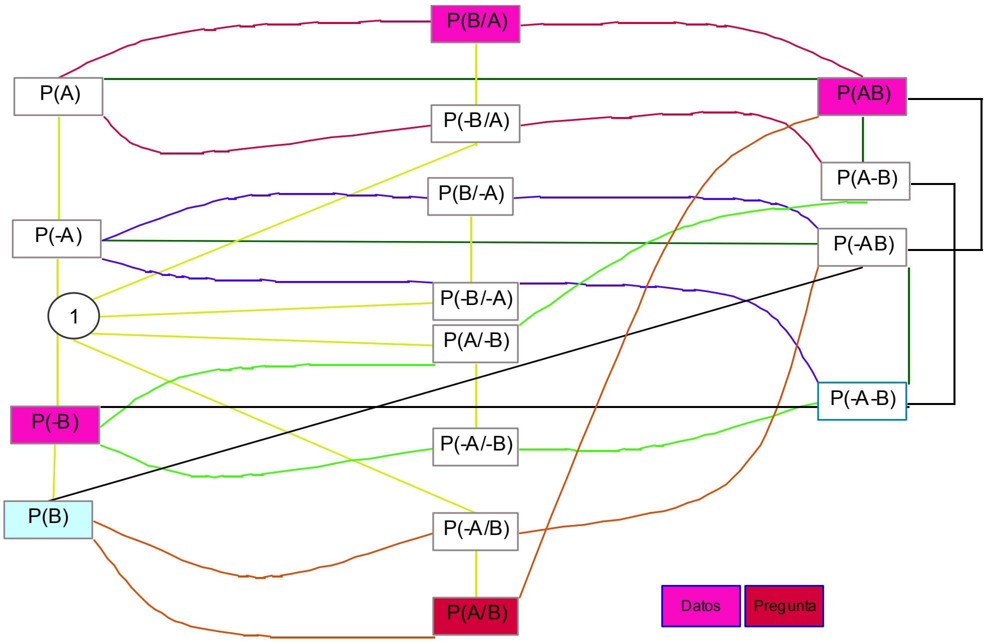


Figura 179 Grafo canónico de $[p_{11}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

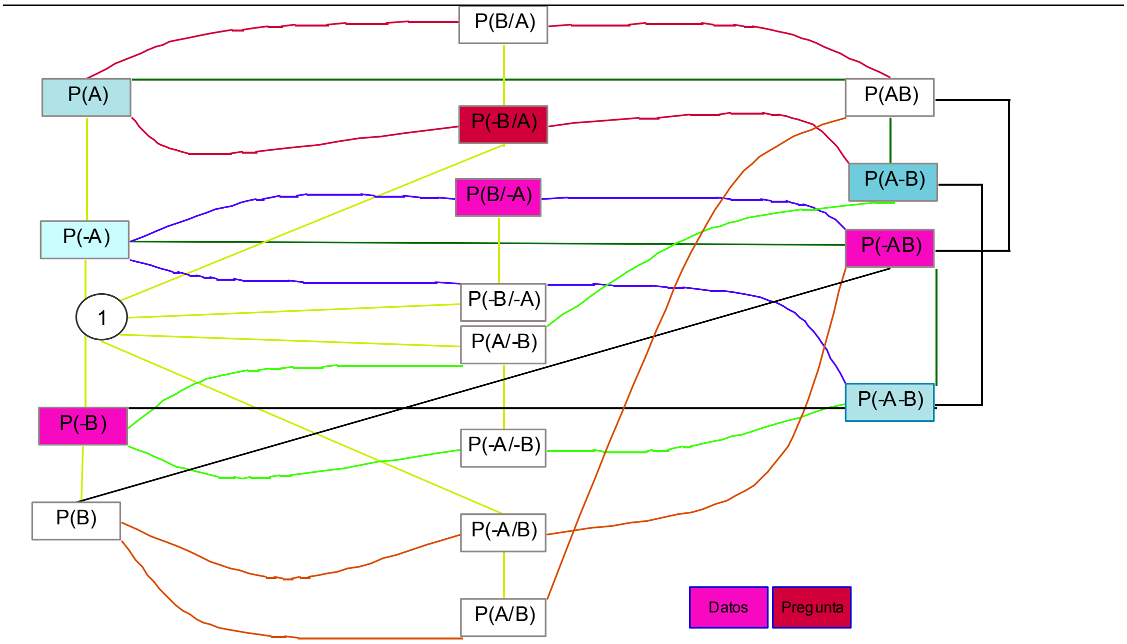


Figura 180 Grafo canónico de [p_{32}]

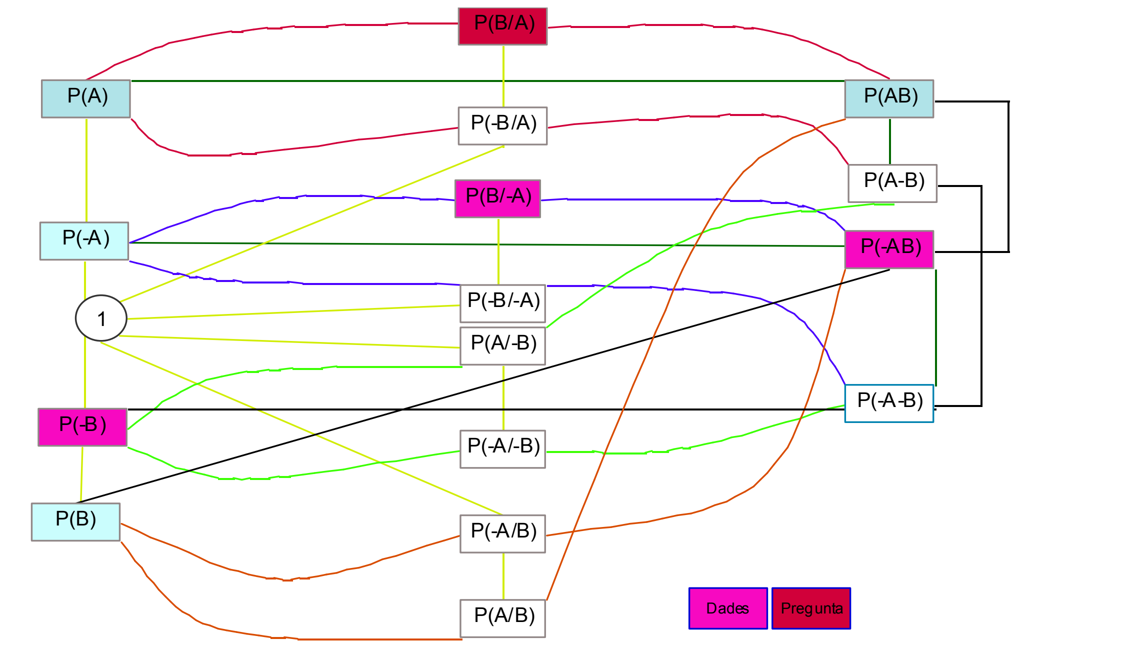


Figura 181 Grafo canónico de [p_{32}]

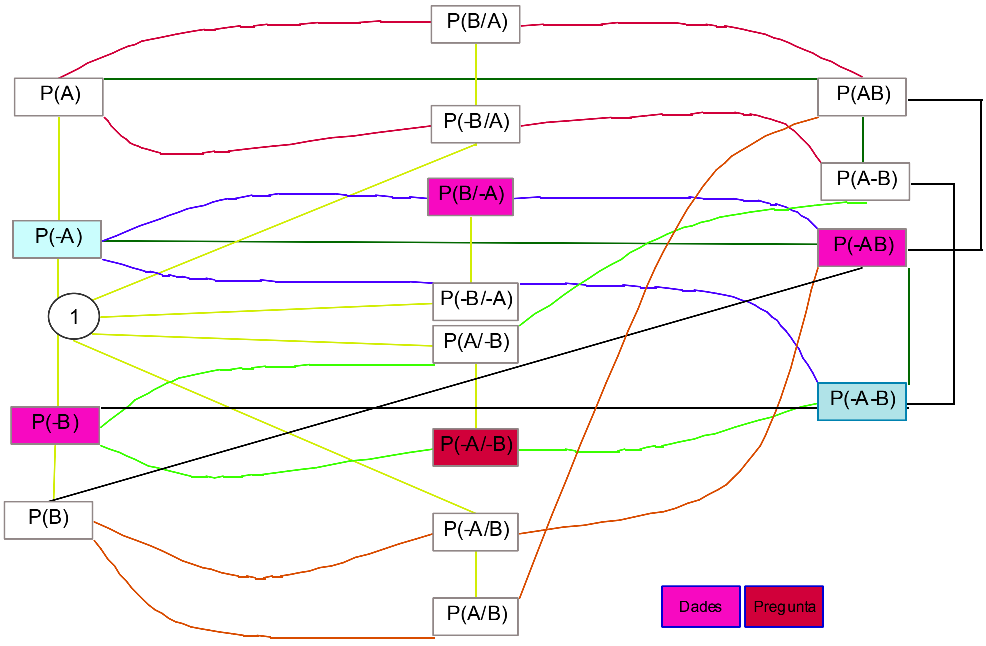


Figura 182 Grafo canónico de [p_{12}]

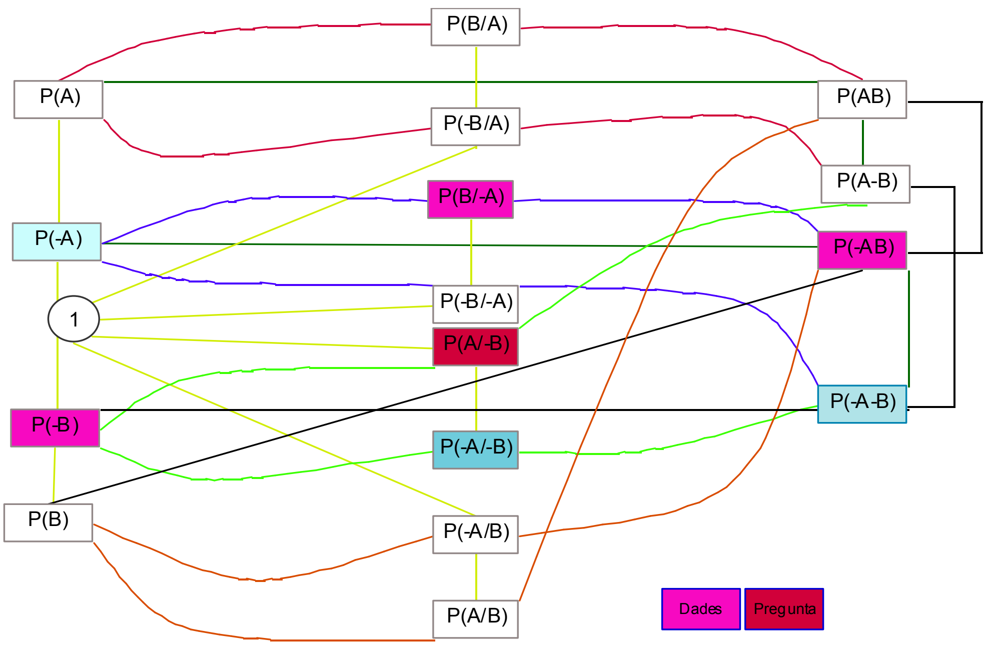


Figura 183 Grafo canónico de [p_{22}]

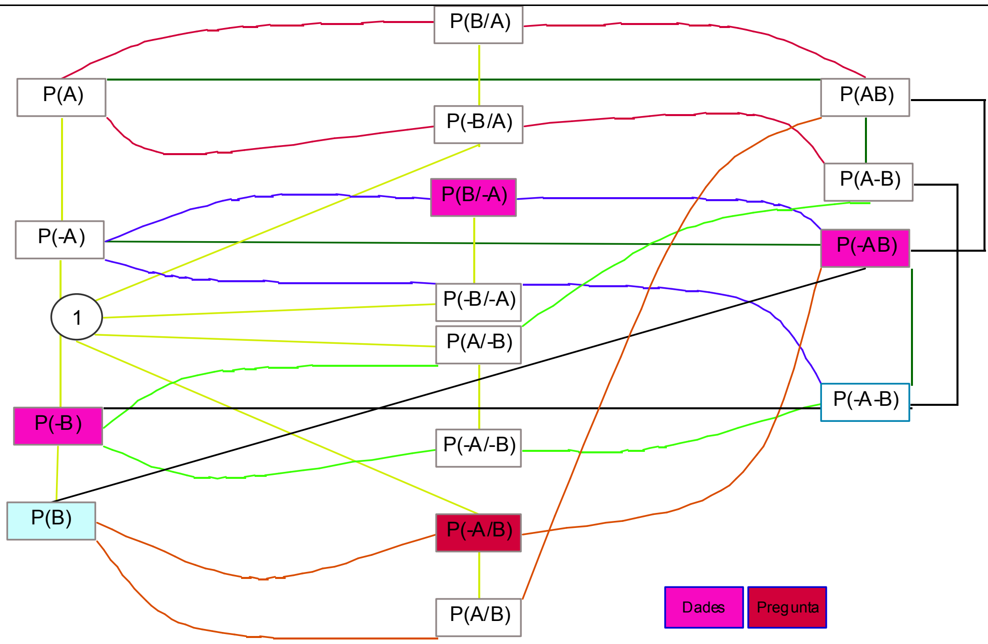


Figura 184 Grafo canónico de [p_{11}]

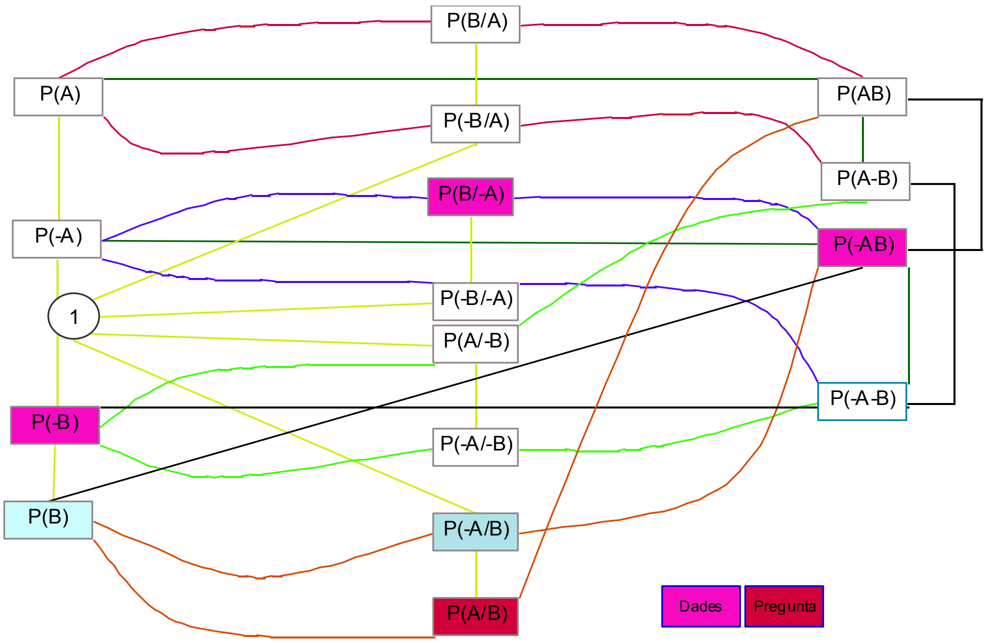


Figura 185 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_1G_5$

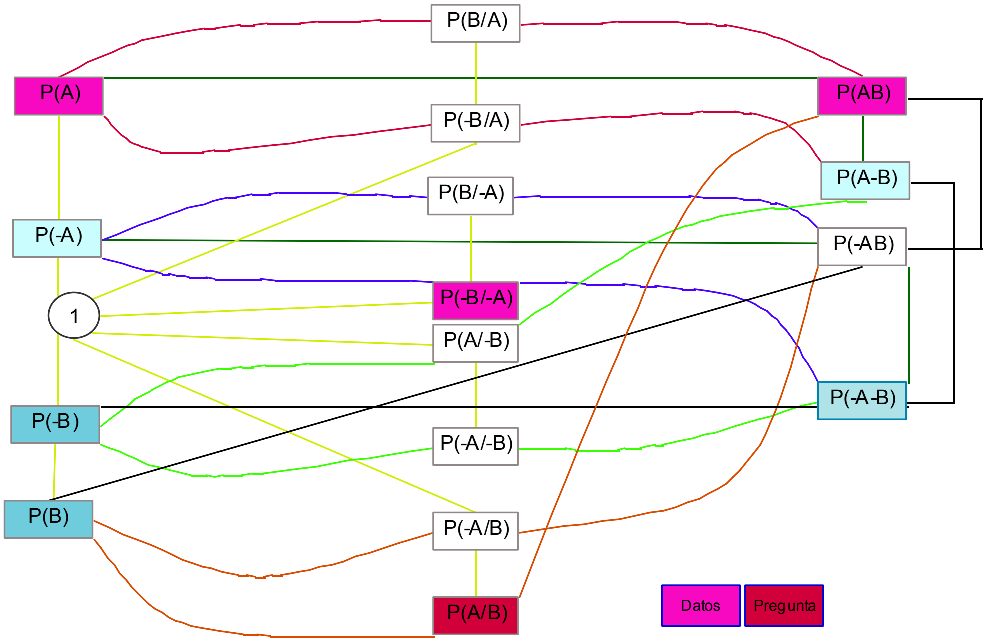


Figura 186 Grafo canónico de [p_{42}]

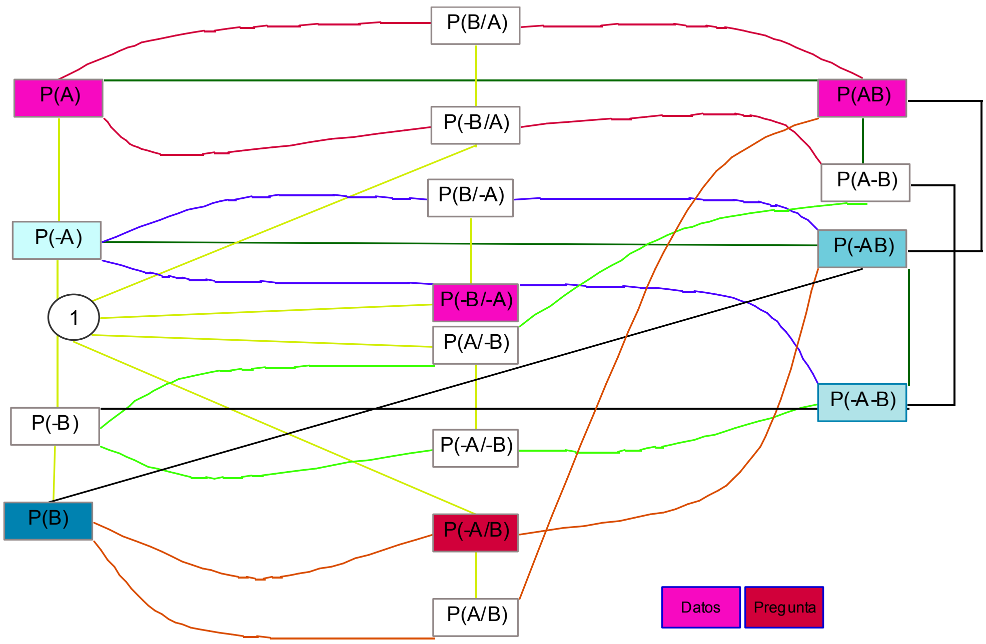


Figura 187 Grafo canónico de [p_{32}]

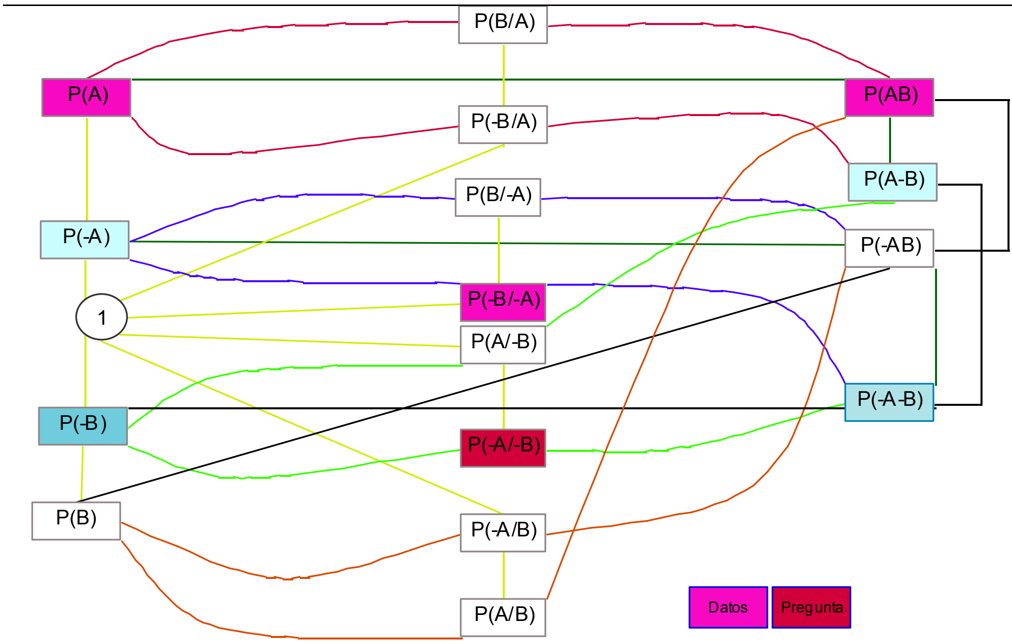


Figura 188 Grafo canónico de [p_{32}]

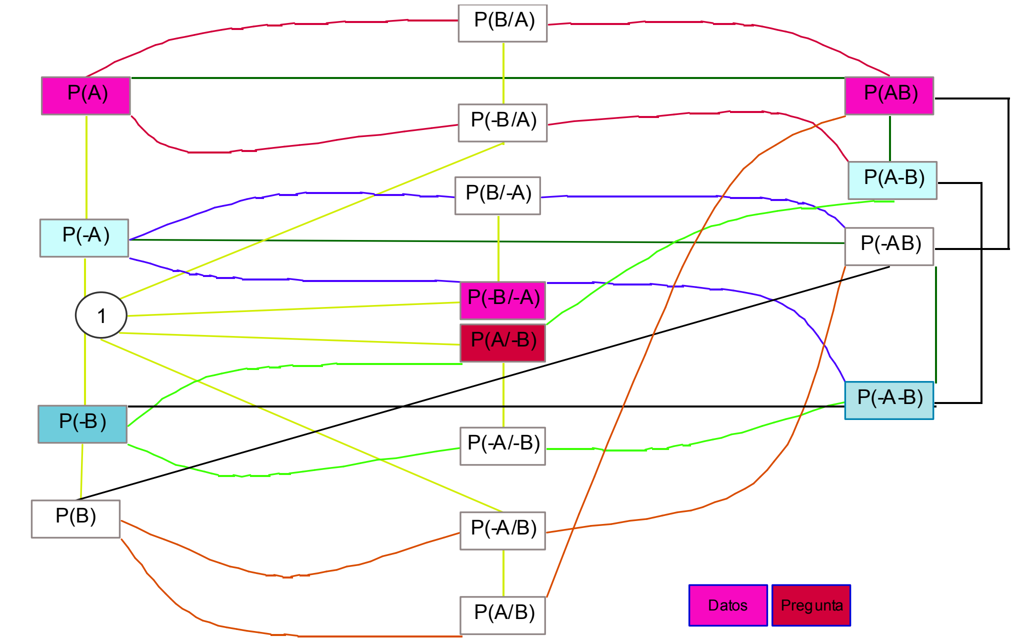


Figura 189 Grafo canónico de [p_{32}]

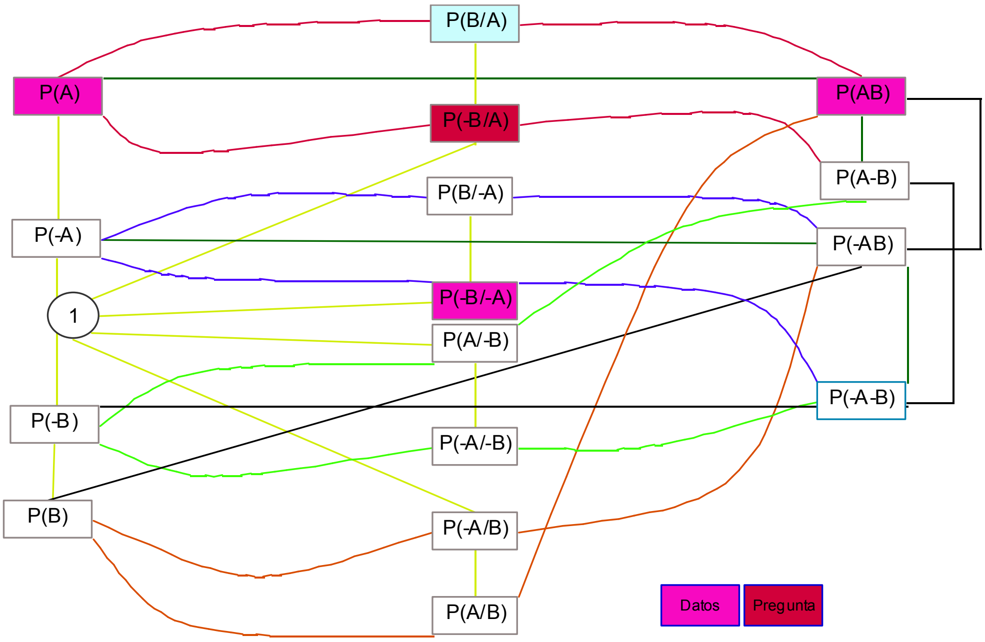


Figura 190 Grafo canónico de $[p_{11}]$

$N_2C_2T_1G_6$

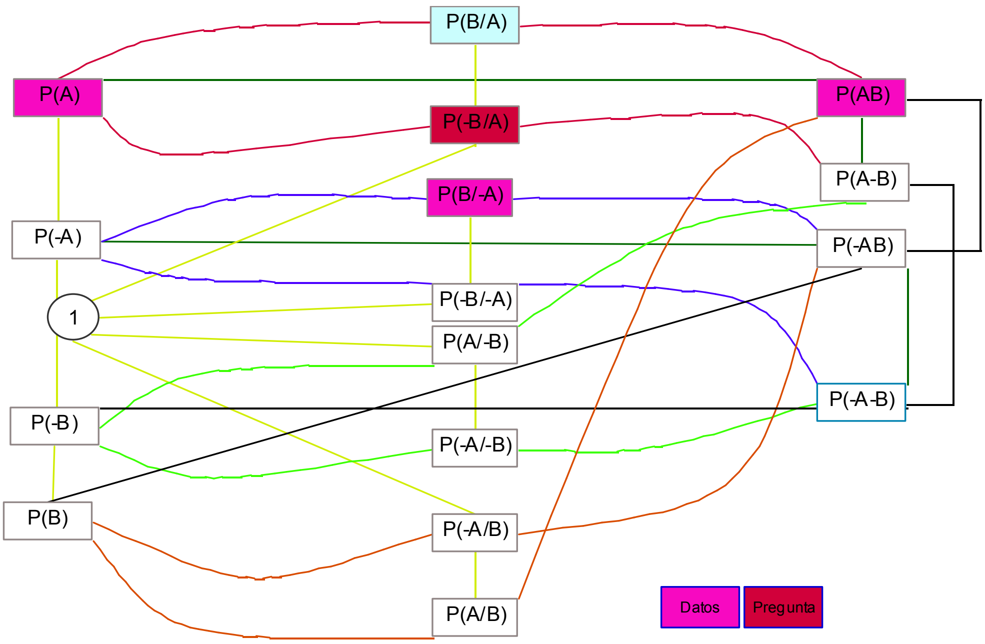


Figura 191 Grafo canónico de $[p_{11}]$

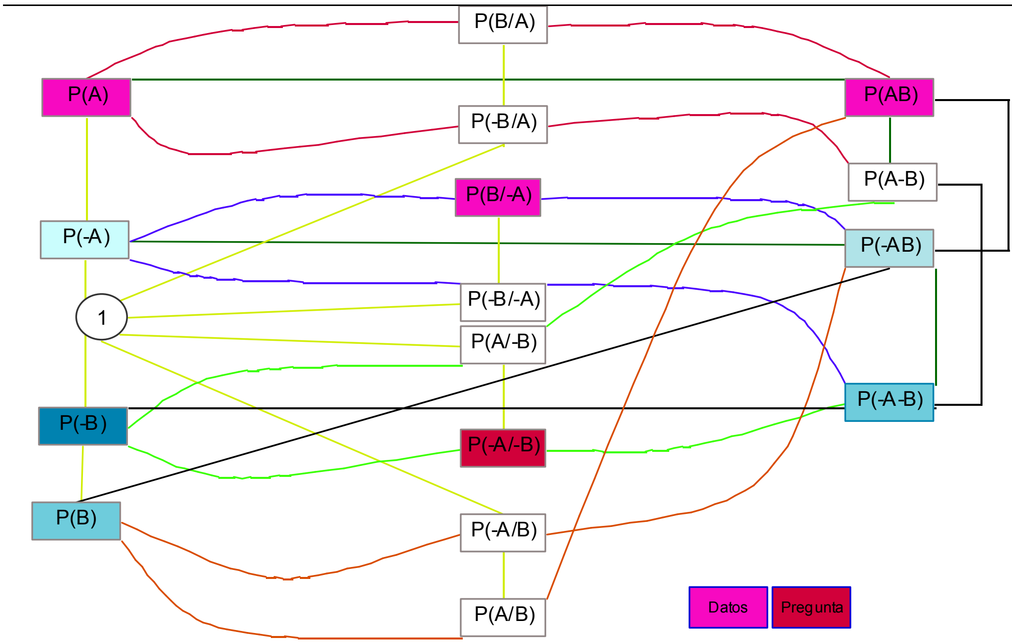


Figura 192 Grafo canónico de [p_{42}]

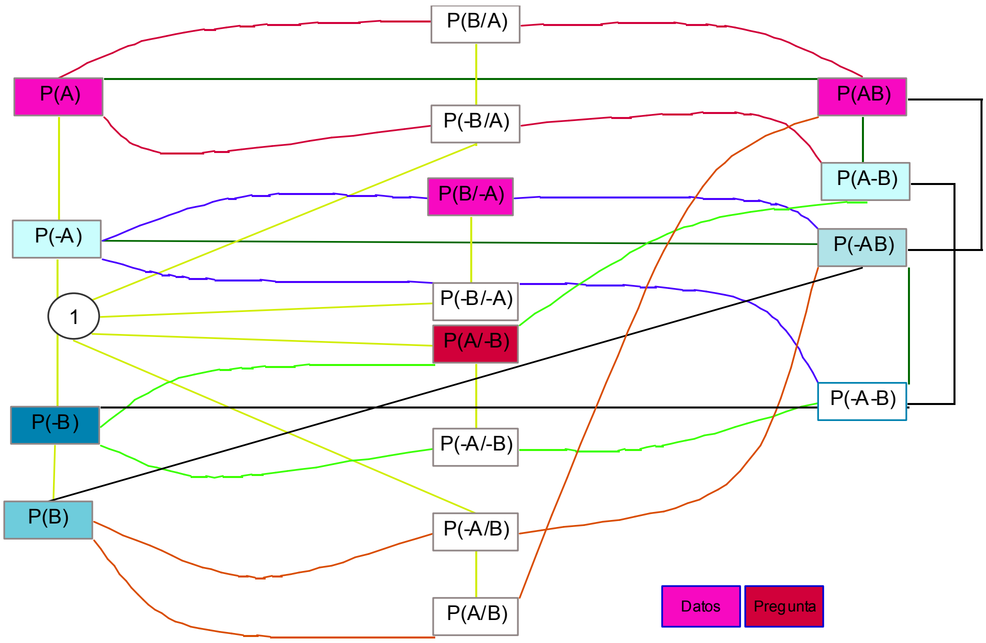


Figura 193 Grafo canónico de [p_{42}]

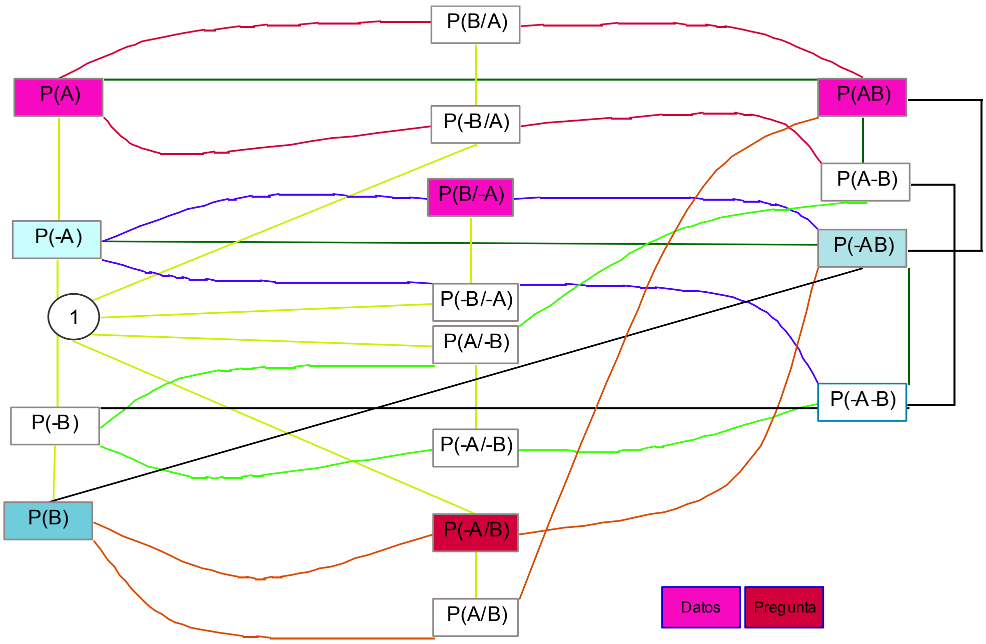


Figura 194 Grafo canónico de [p22]

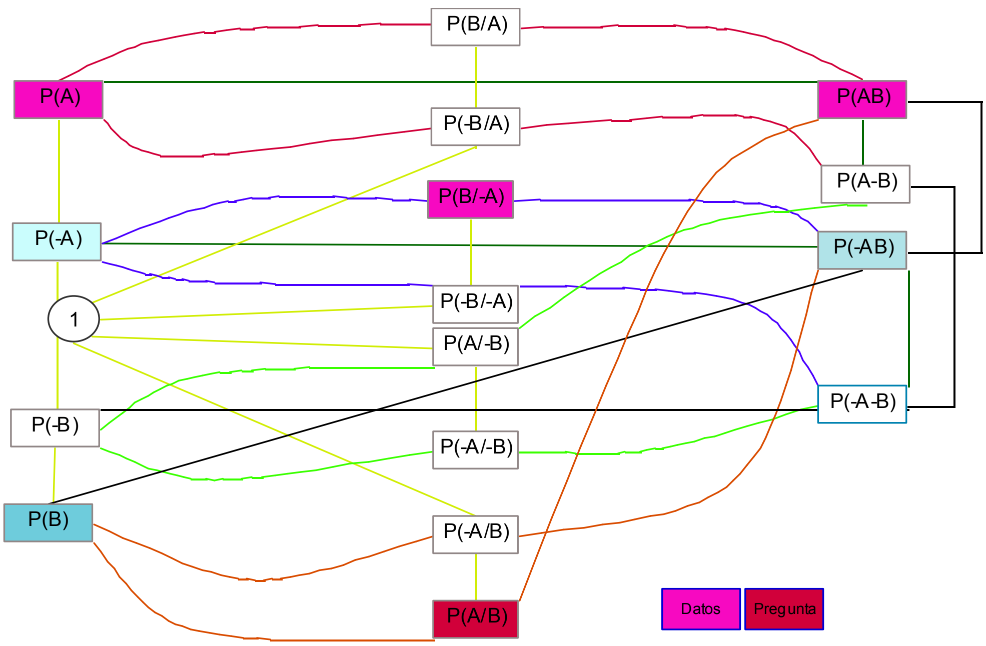


Figura 195 Grafo canónico de [p22]

$N_2C_2T_1G_7$

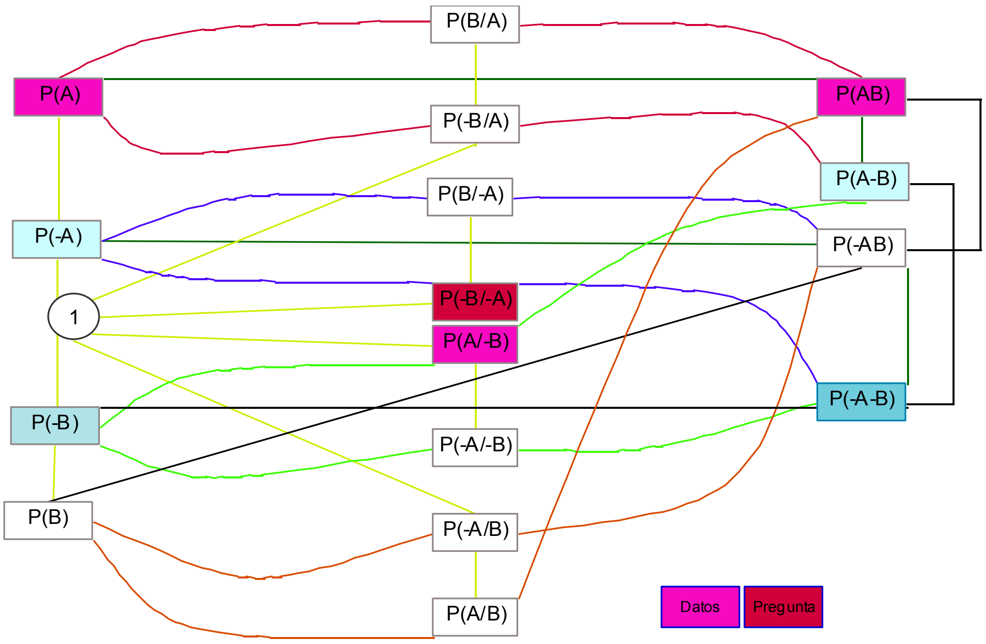


Figura 196 Grafo canónico de [p_{32}]

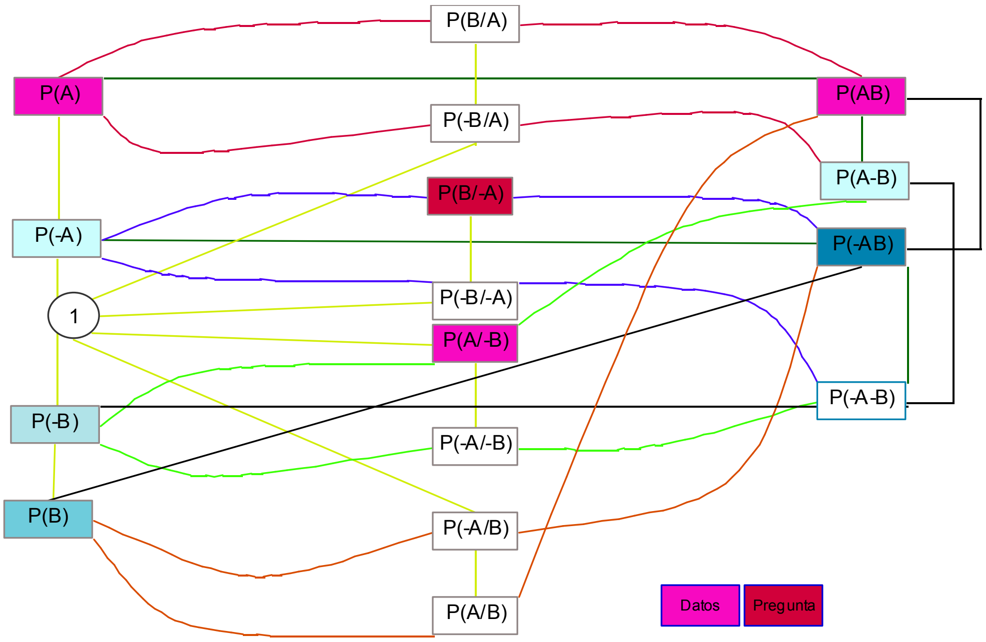


Figura 197 Grafo canónico de [p_{42}]

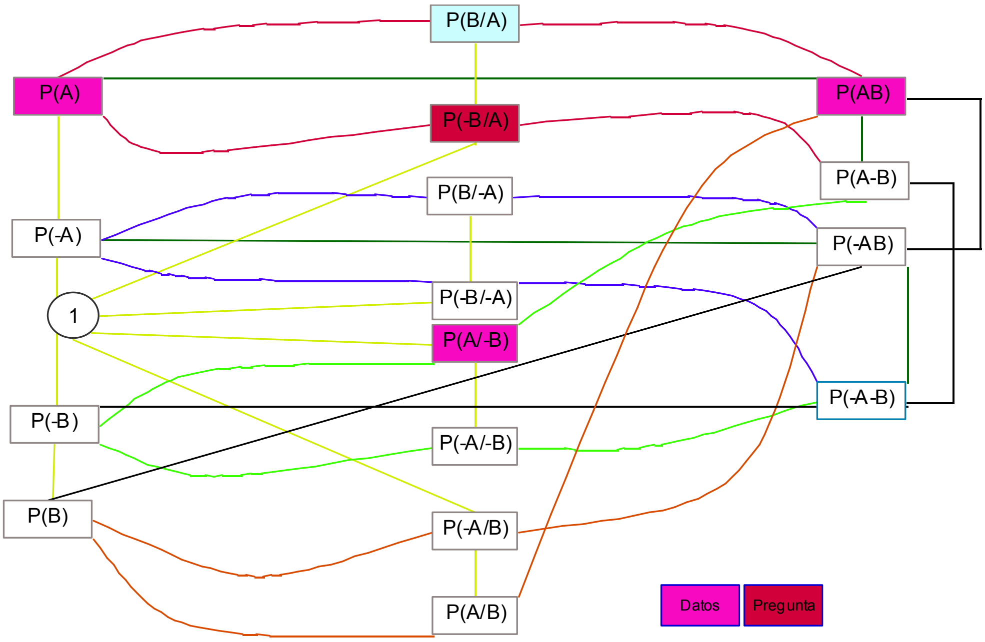


Figura 198 Grafo canónico de [p_{11}]

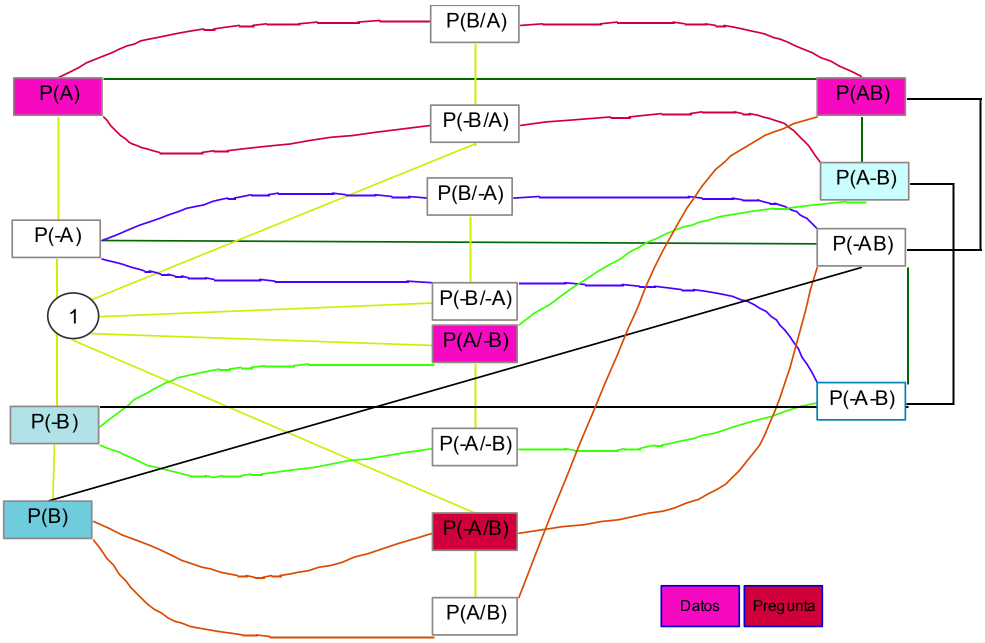


Figura 199 Grafo canónico de [p_{22}]

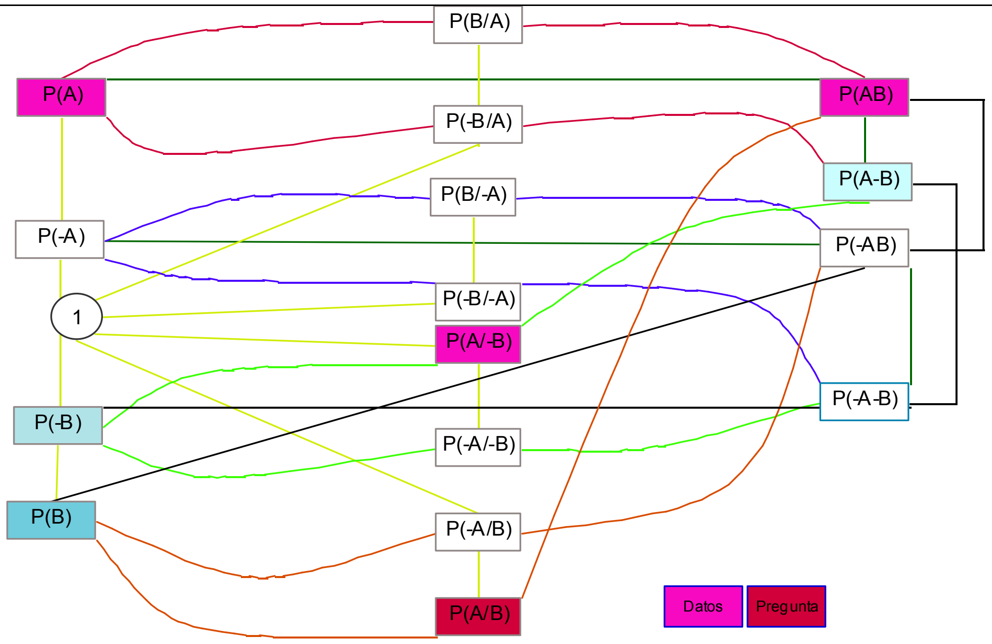


Figura 200 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_2T_1G_8$

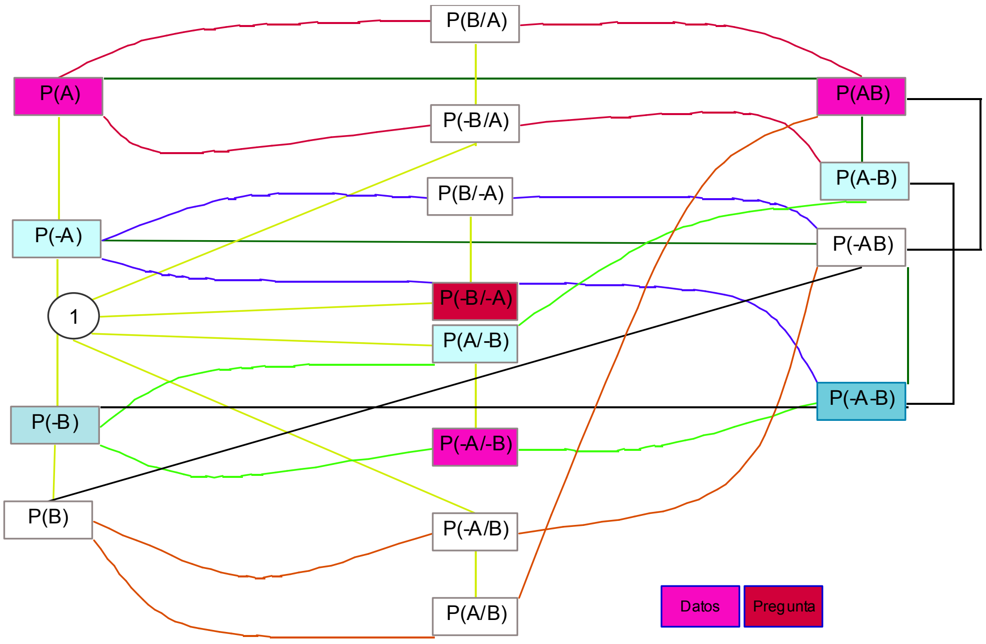


Figura 201 Grafo canónico de [p_{42}]

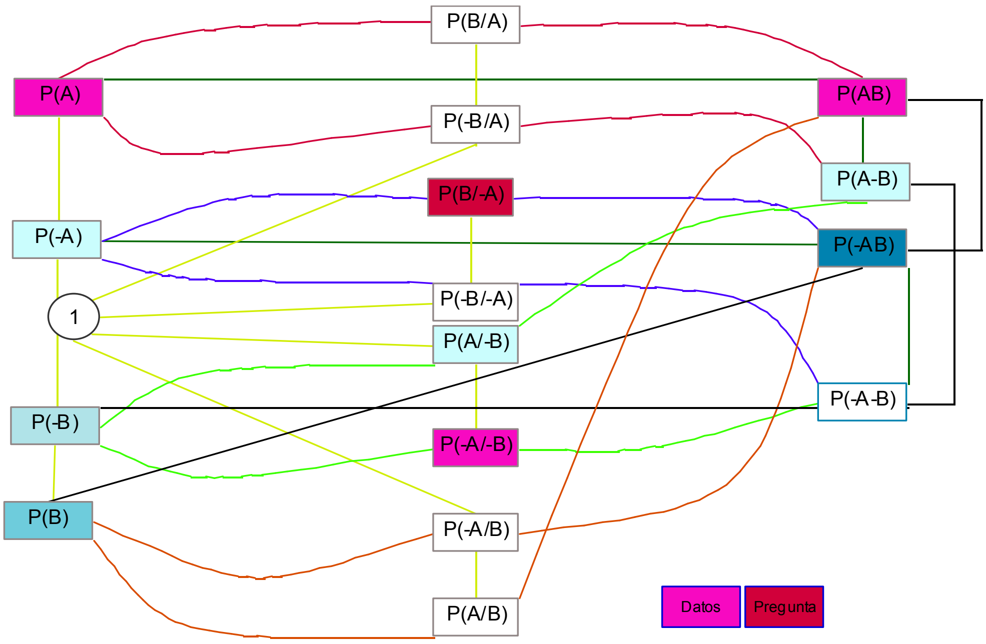


Figura 202 Grafo canónico de [p_{52}]

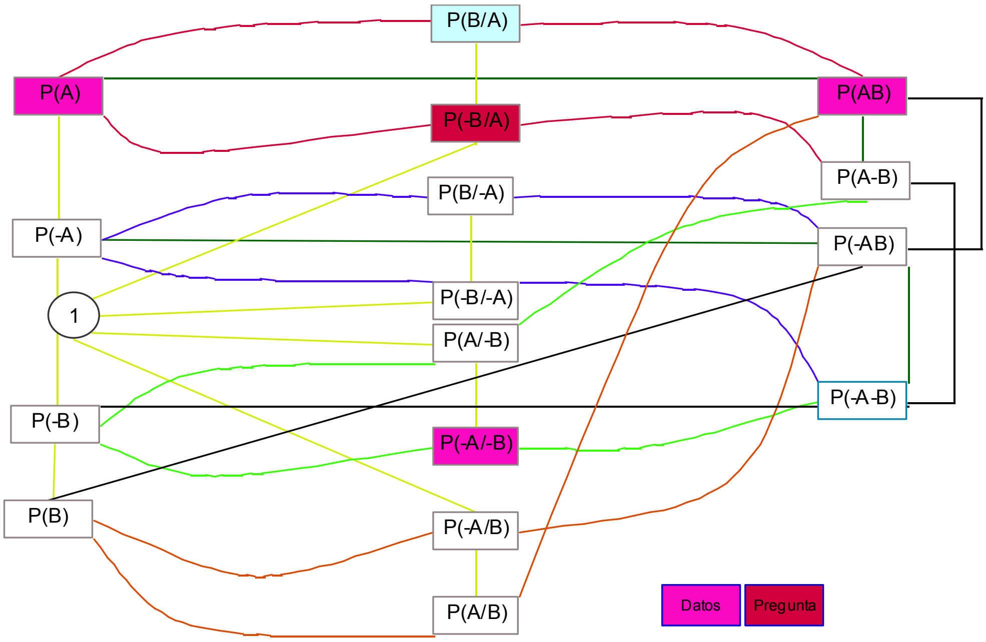


Figura 203 Grafo canónico de [p_{11}]

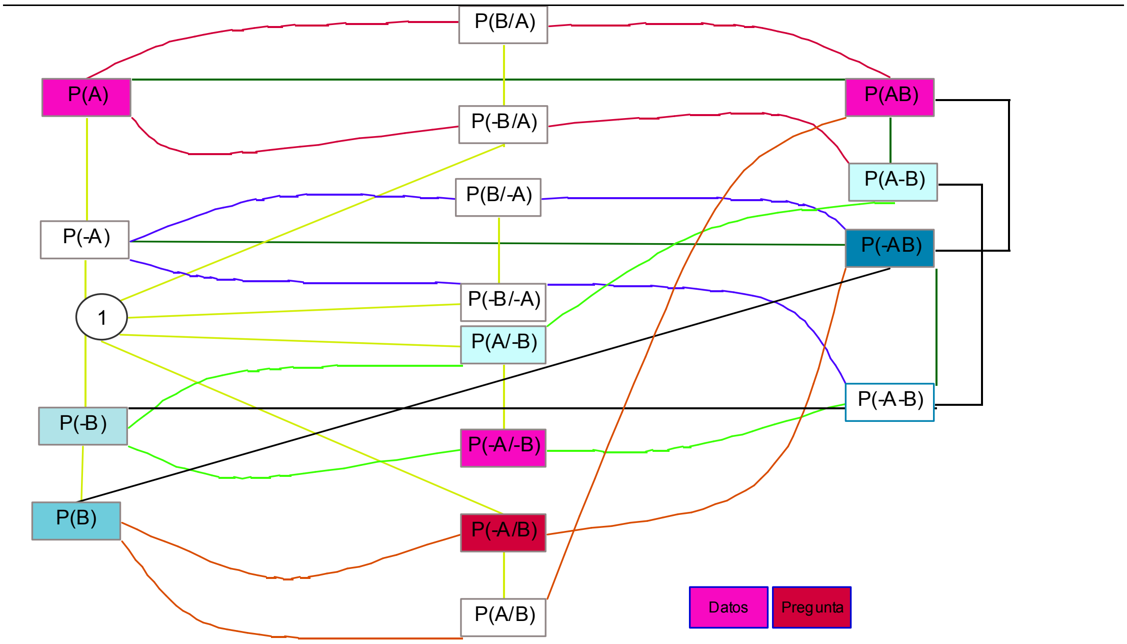


Figura 204 Grafo canónico de [p_{42}]

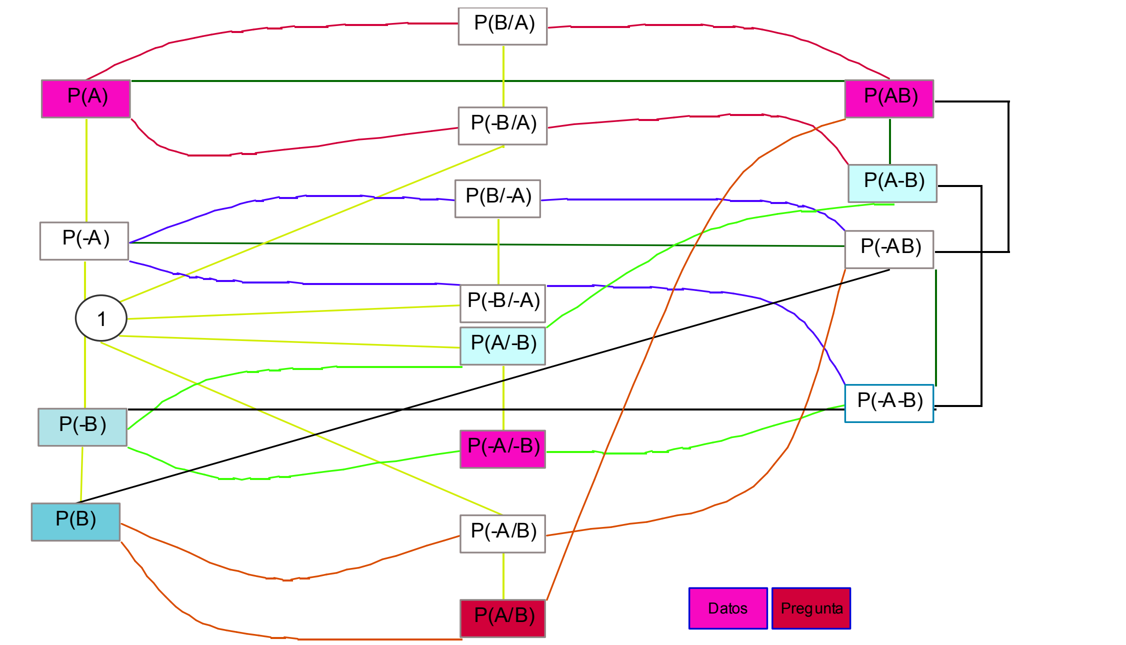


Figura 205 Grafo canónico de [p_{32}]

$N_2C_2T_1G_{11}$

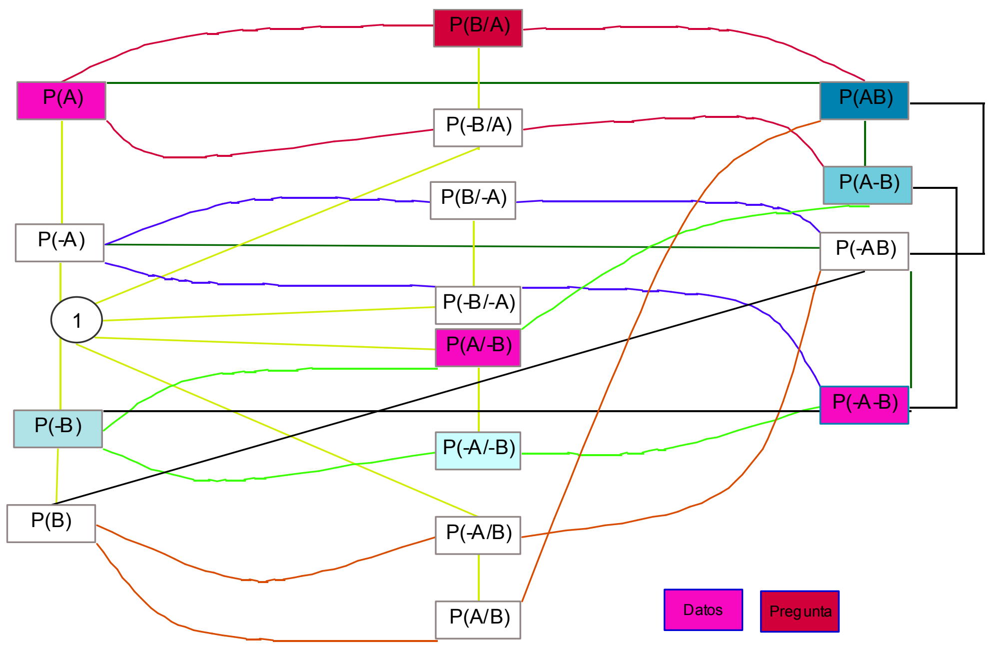


Figura 206 Grafo canónico de [p_{32}]

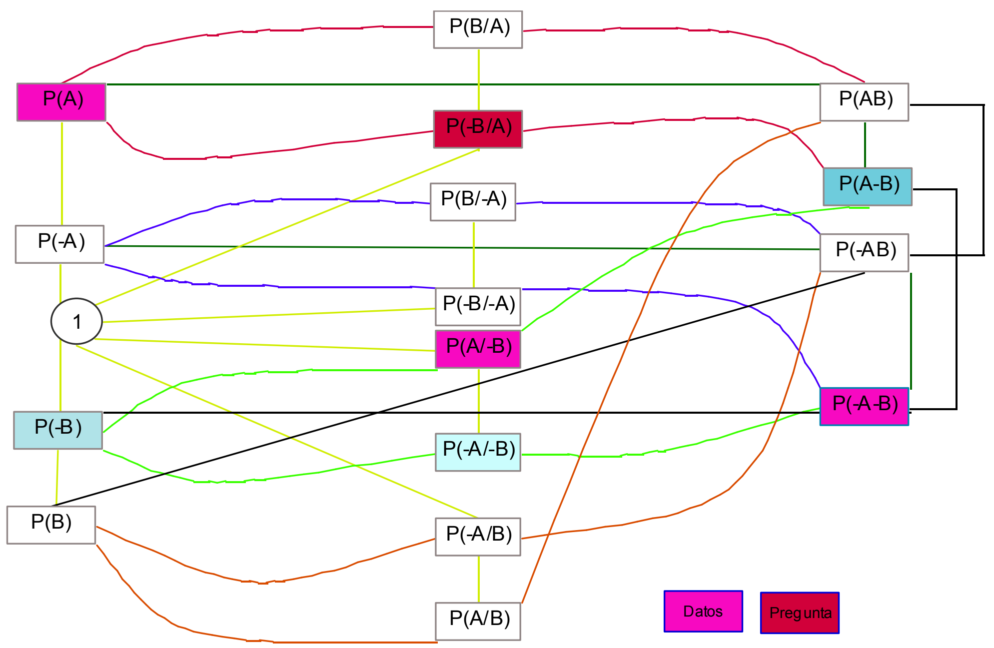


Figura 207 Grafo canónico de [p_{22}]

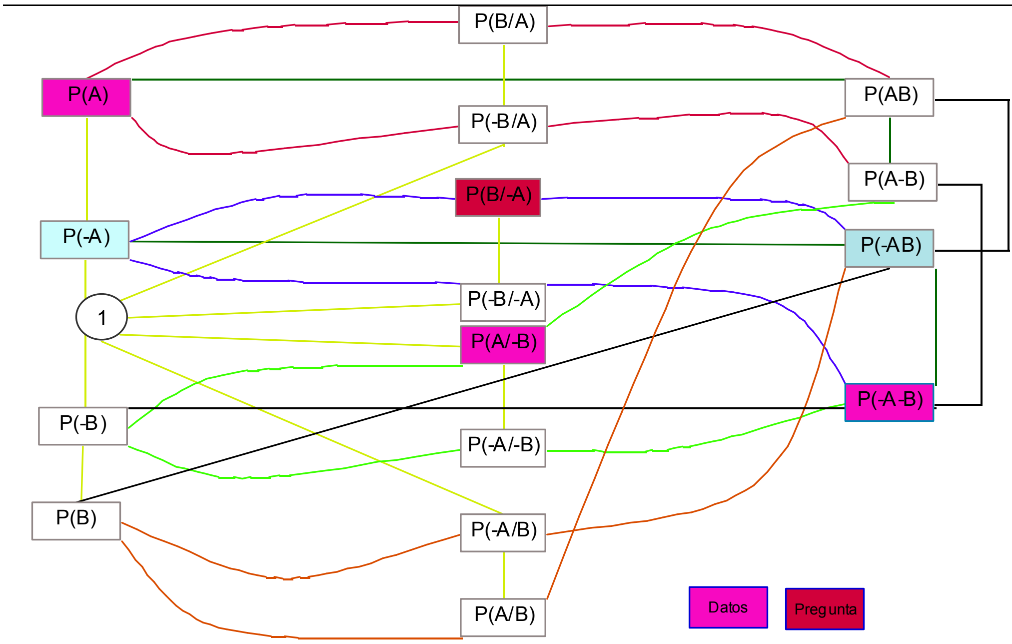


Figura 208 Grafo canónico de [p_{21}]

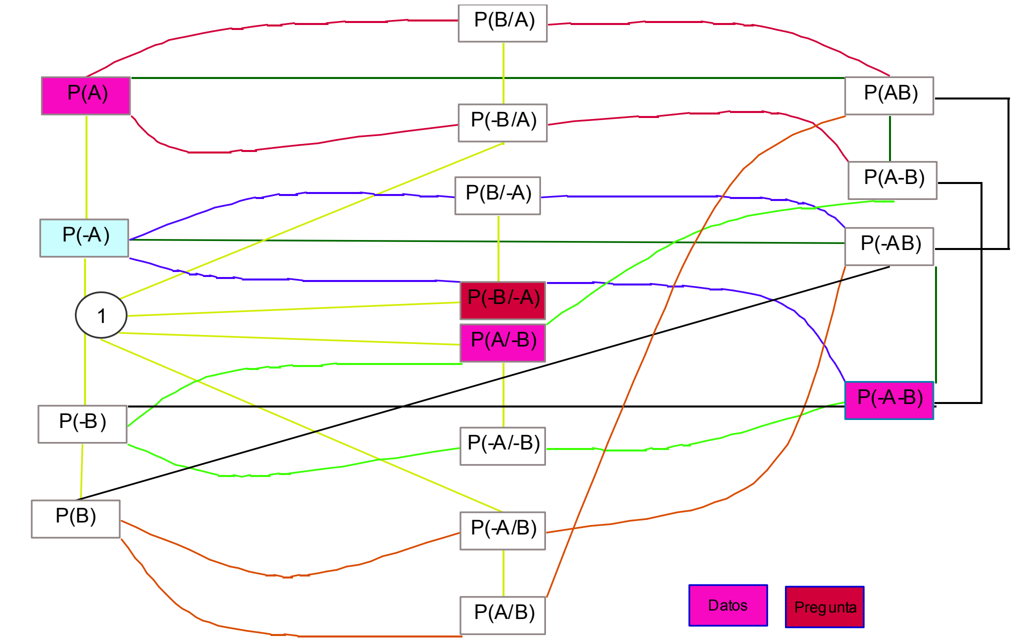


Figura 209 Grafo canónico de [p_{11}]

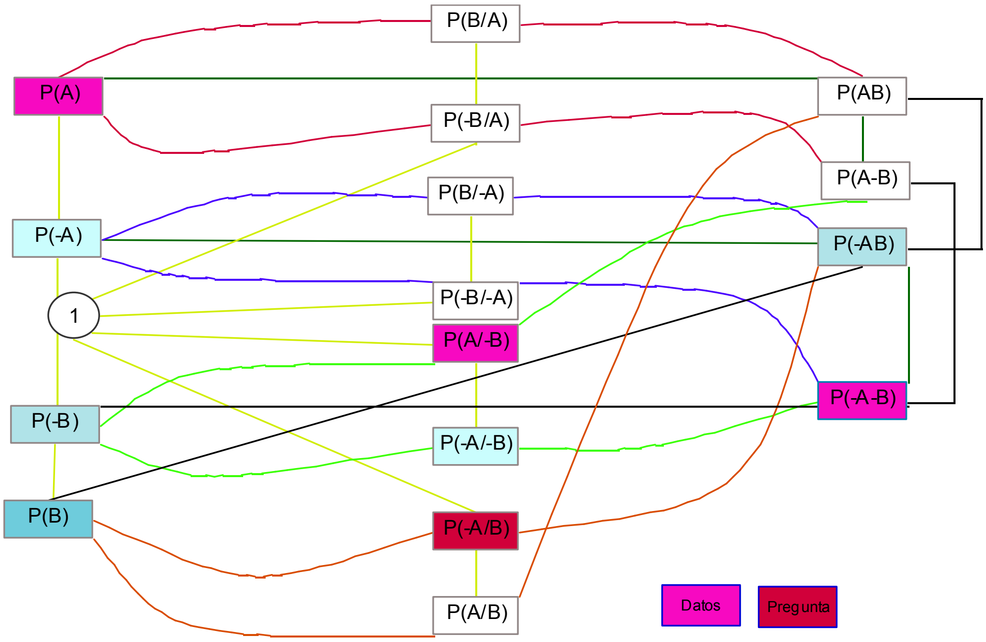


Figura 210 Grafo canónico de [p_{42}]

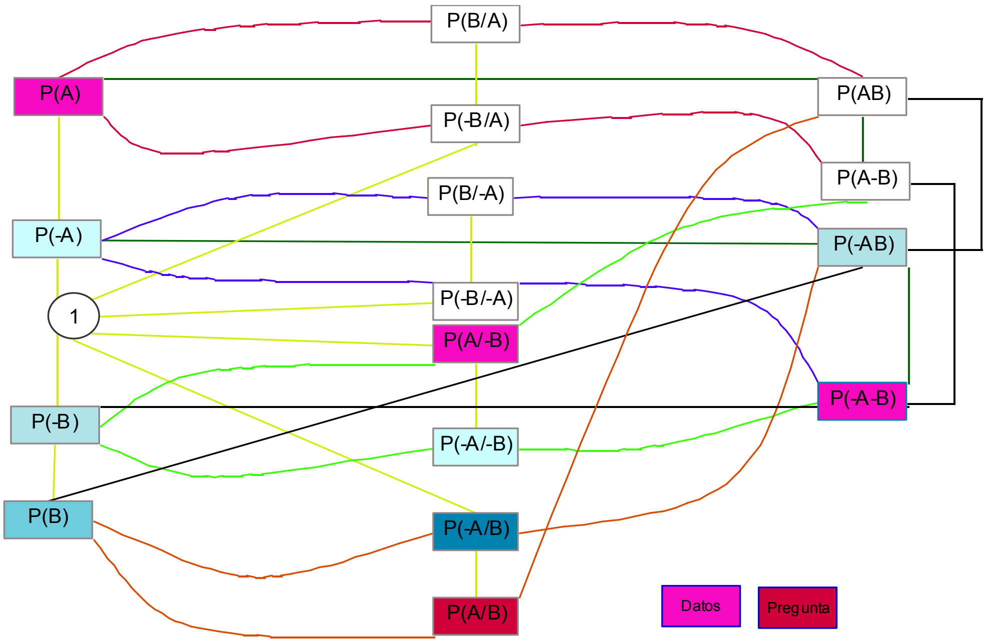


Figura 211 Grafo canónico de [p_{52}]

II.2. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_2T_2$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.15

$N_2C_2T_2G_1$

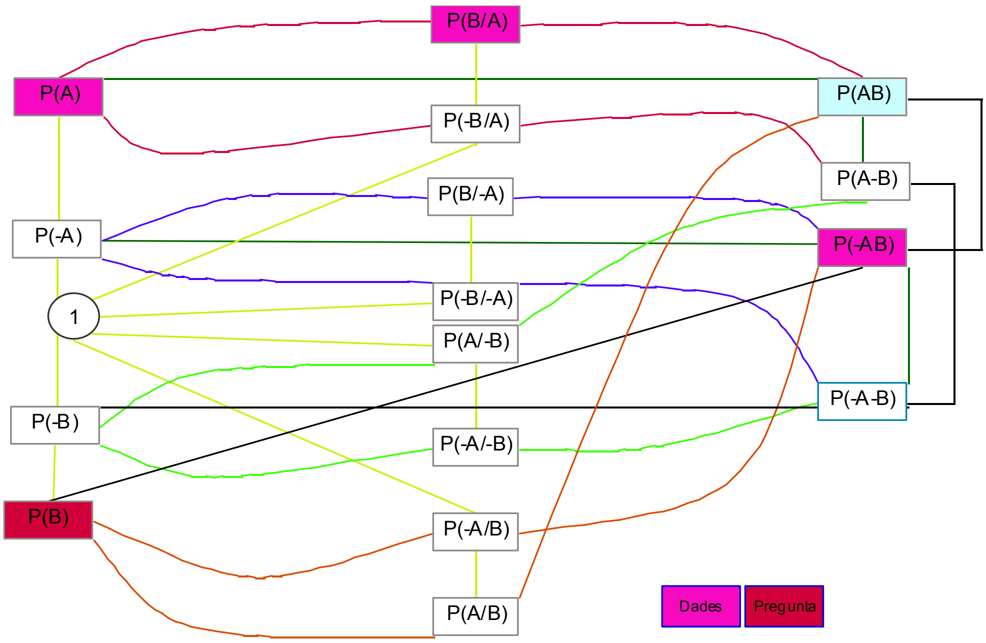


Figura 212 Grafo canónico de [p_{11}]

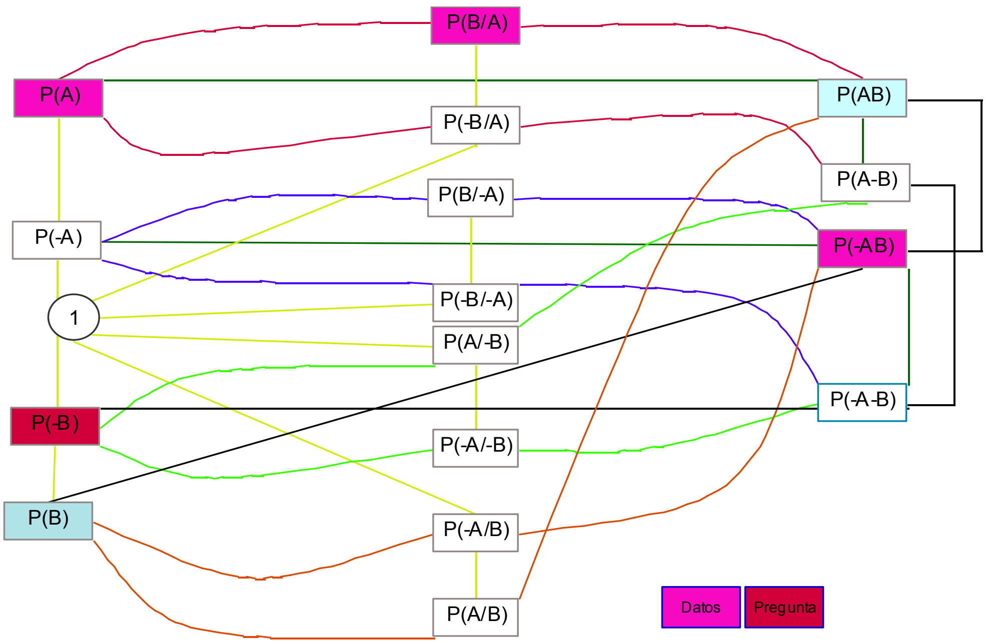


Figura 213 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_2G_2$

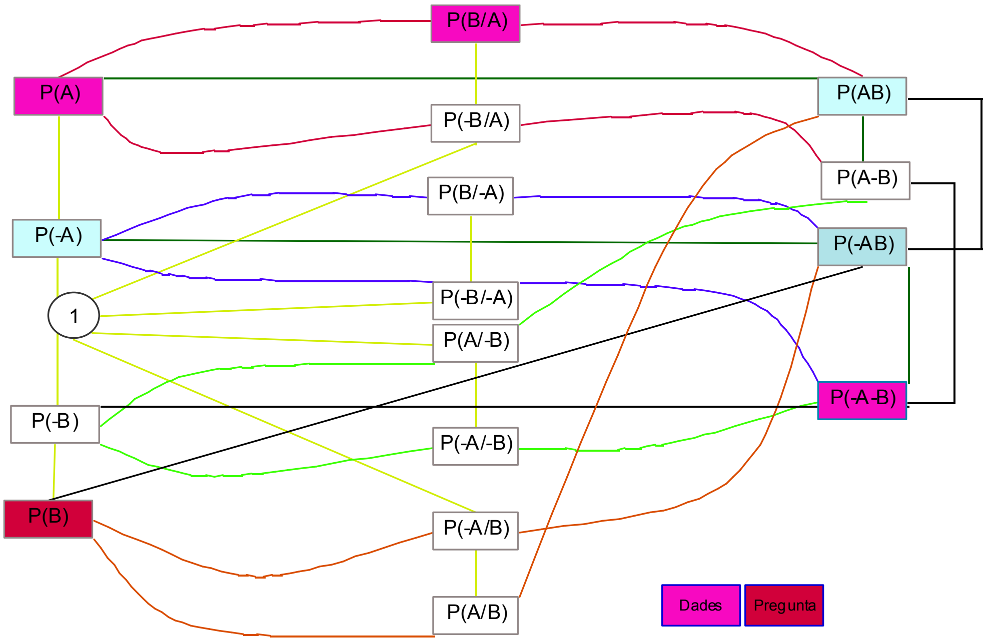


Figura 214 Grafo canónico de [p_{31}]

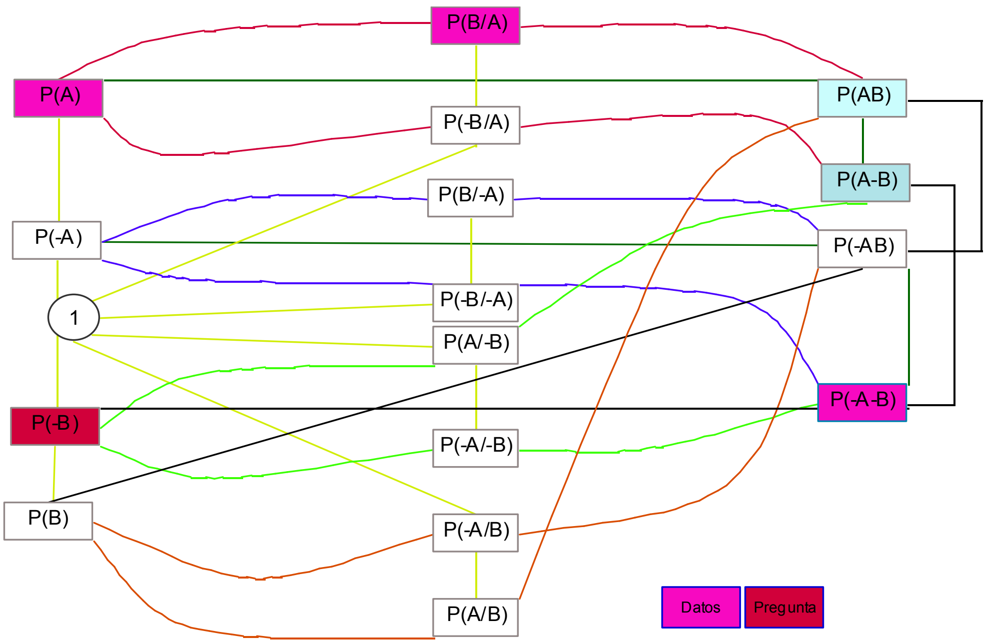


Figura 215 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_2G_4$

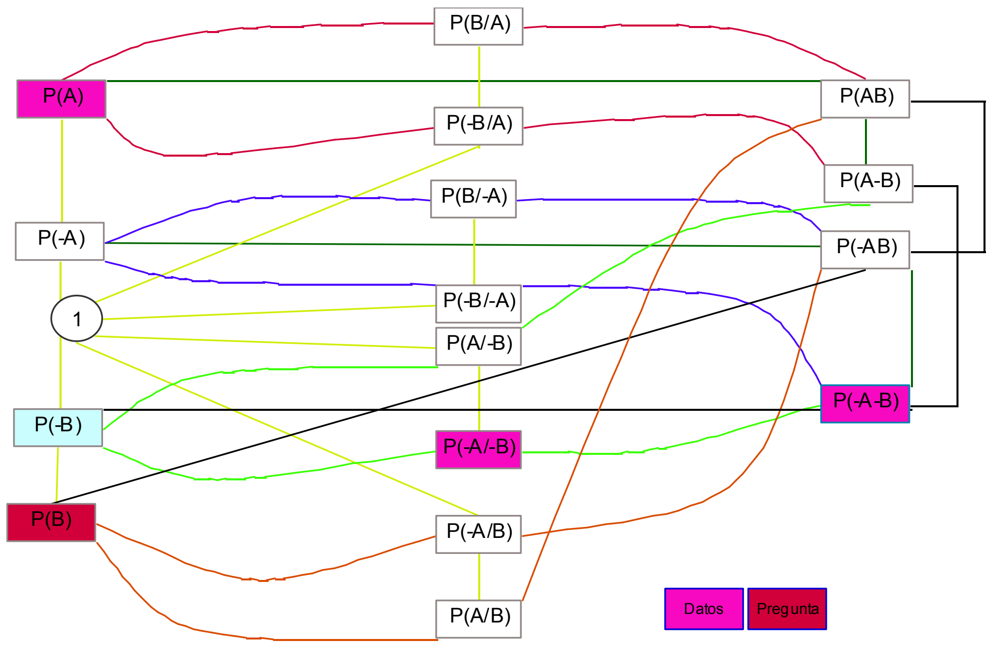


Figura 216 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_2G_5$

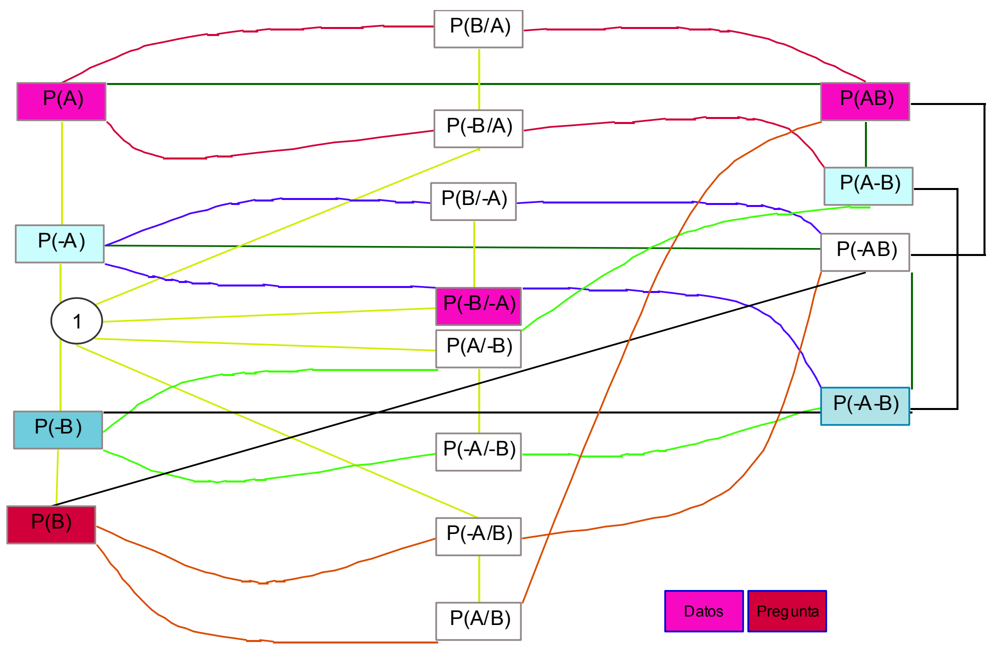


Figura 217 Grafo canónico de [p_{41}]

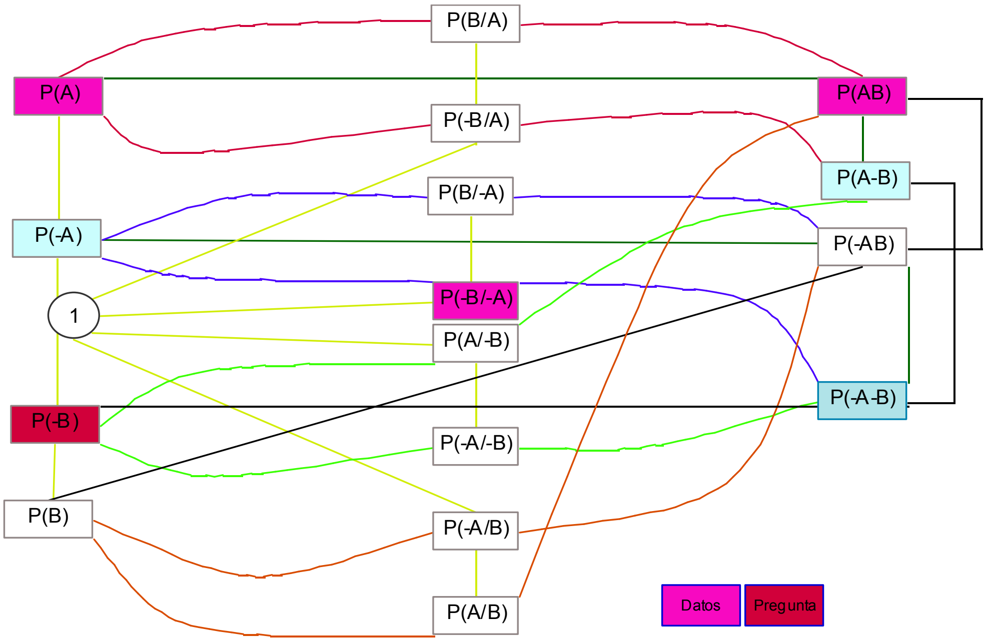


Figura 218 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_2T_2G_6$

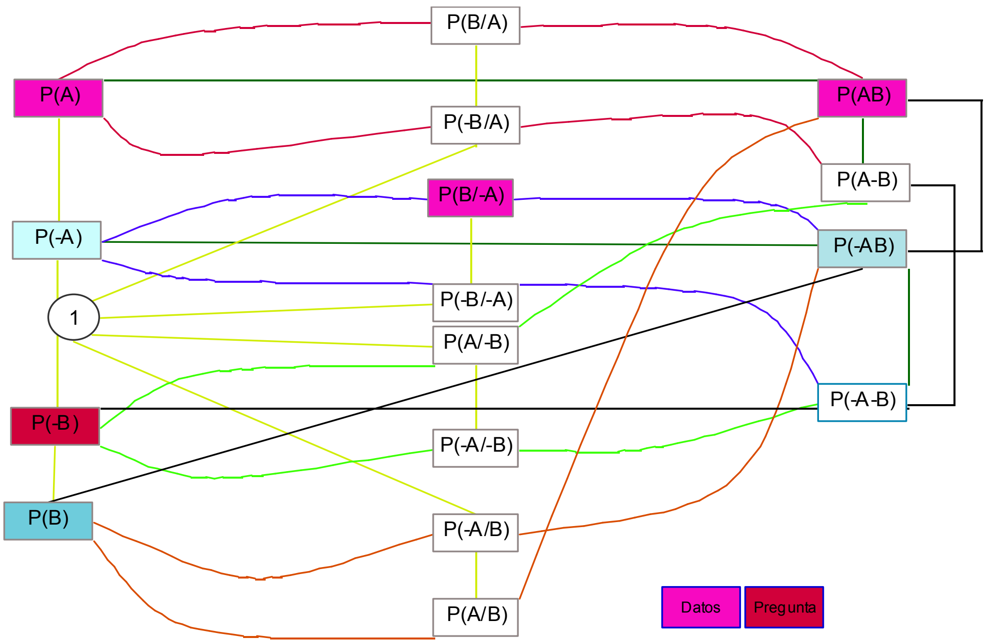


Figura 219 Grafo canónico de [p_{31}]

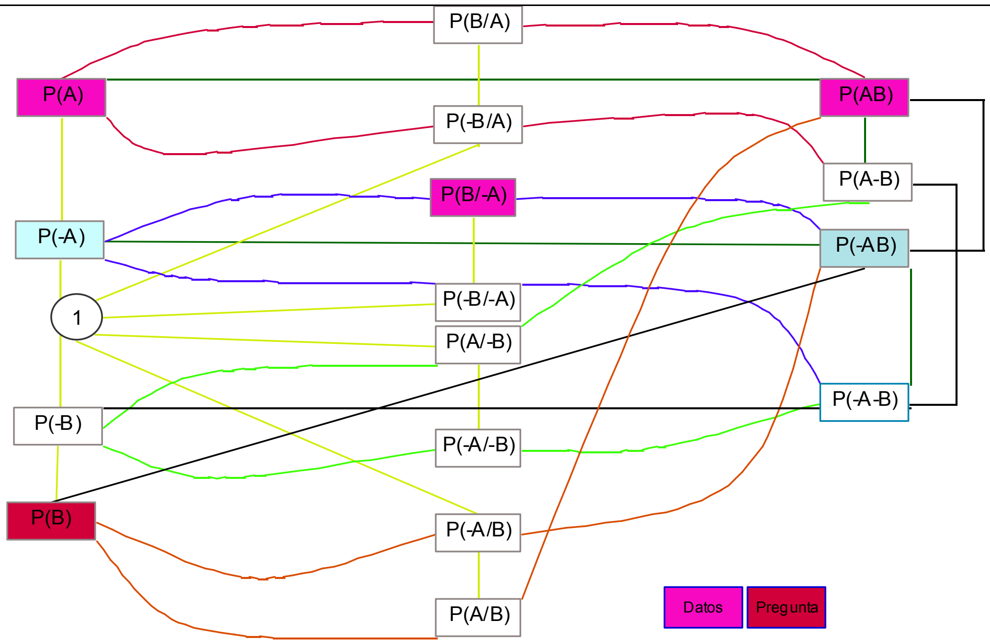


Figura 220 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_2G_7$

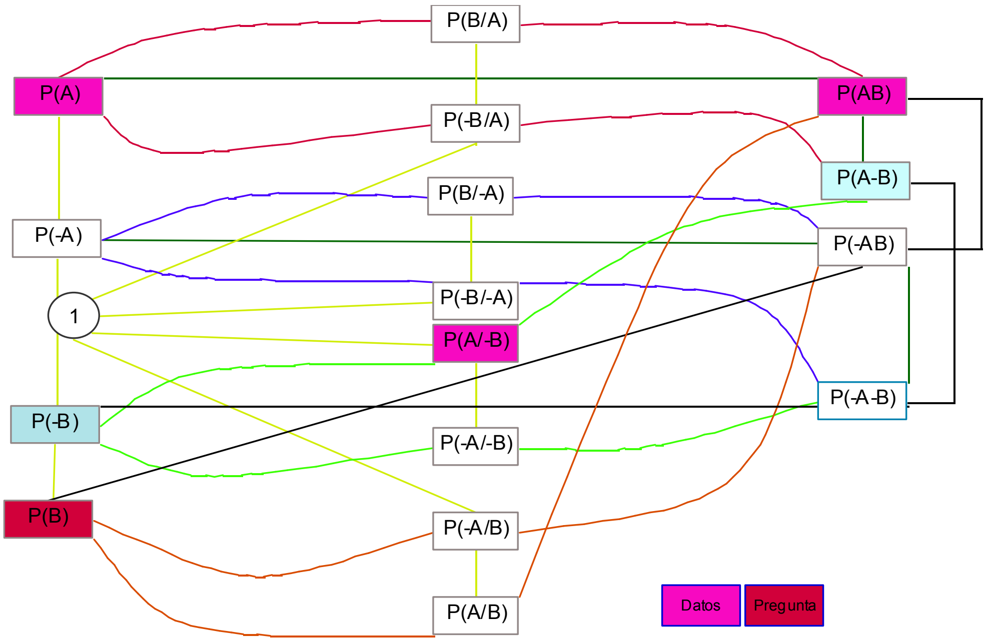


Figura 221 Grafo canónico de [p_{21}]

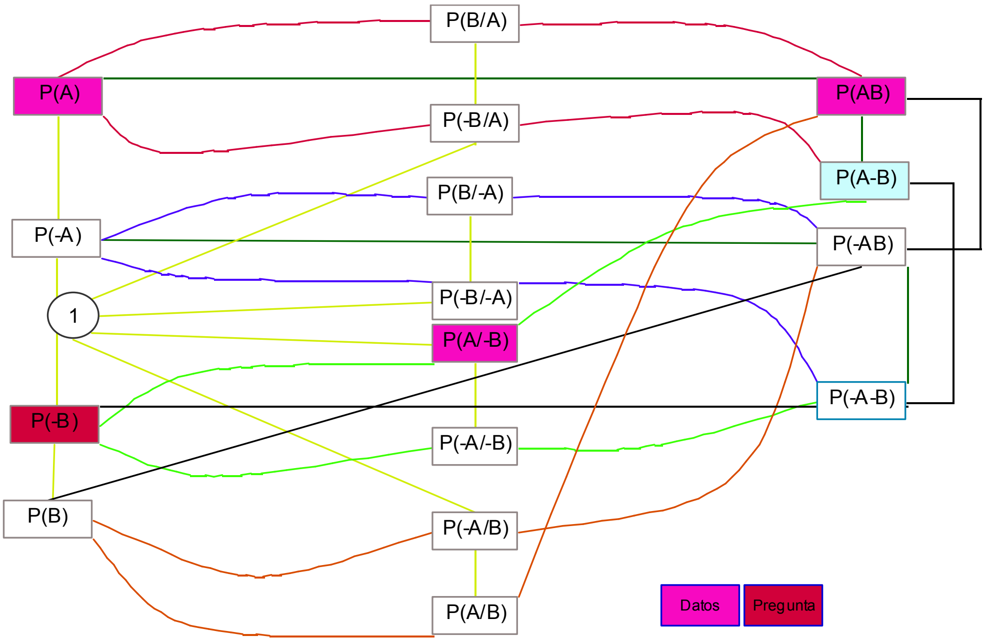


Figura 222 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_2G_8$

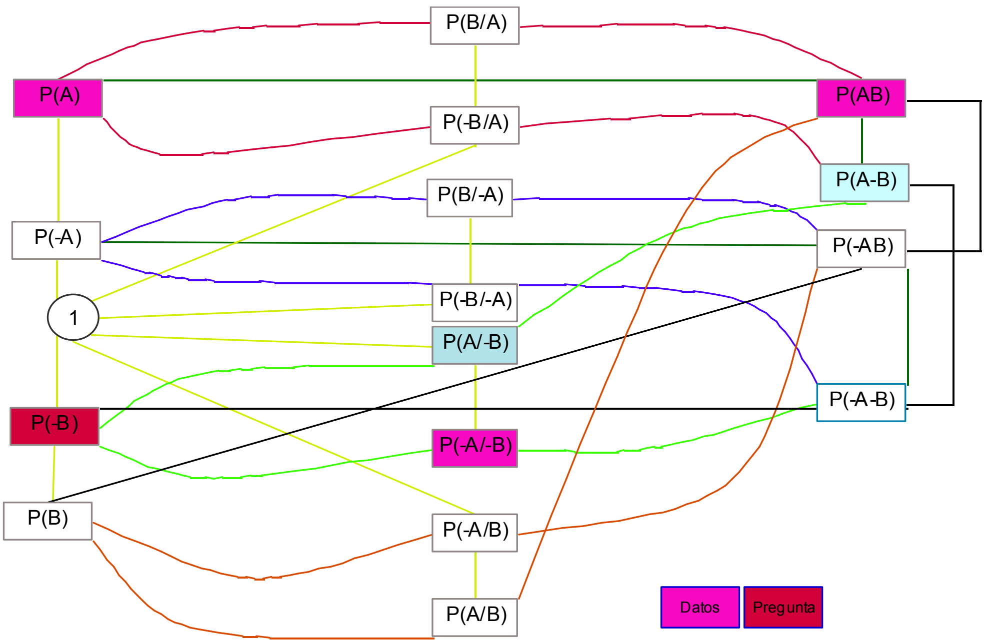


Figura 223 Grafo canónico de [p_{21}]

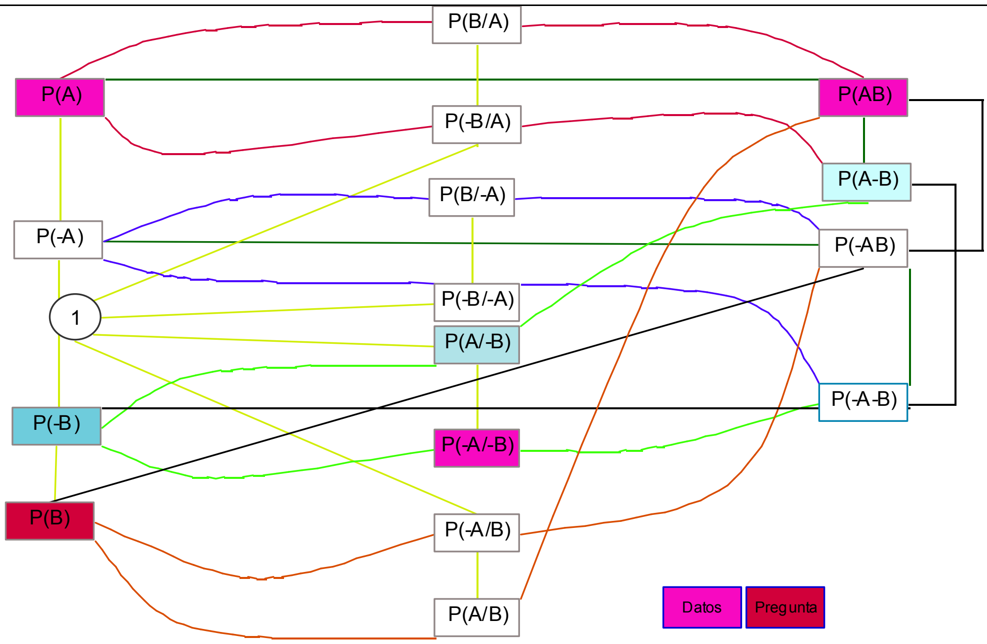


Figura 224 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_2T_2G_{11}$

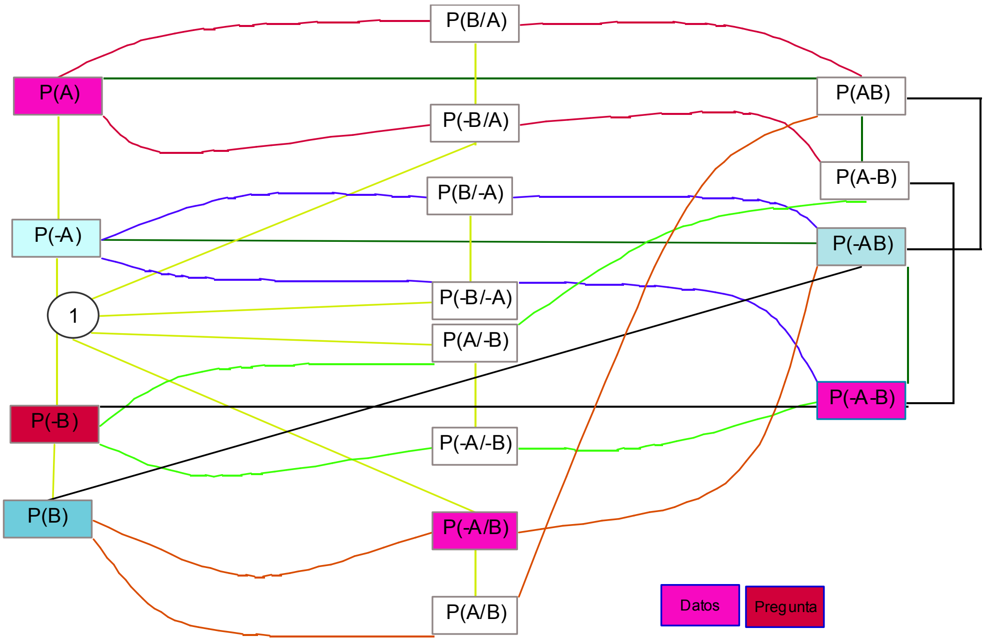


Figura 225 Grafo canónico de [p_{31}]

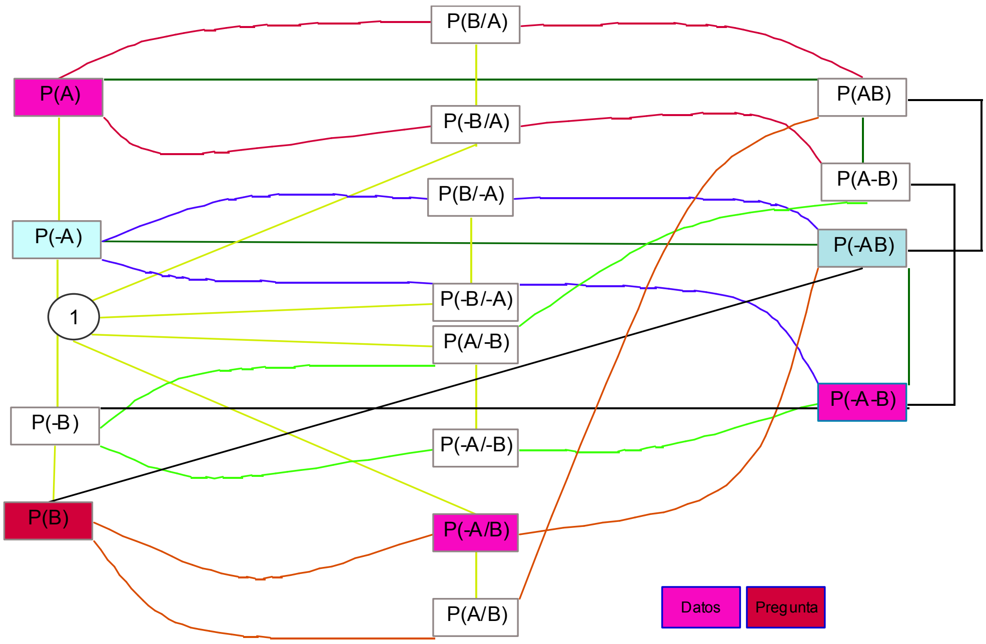


Figura 226 Grafo canónico de [p_{21}]

II.3. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_2T_3$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.16

$N_2C_2T_3G_1$

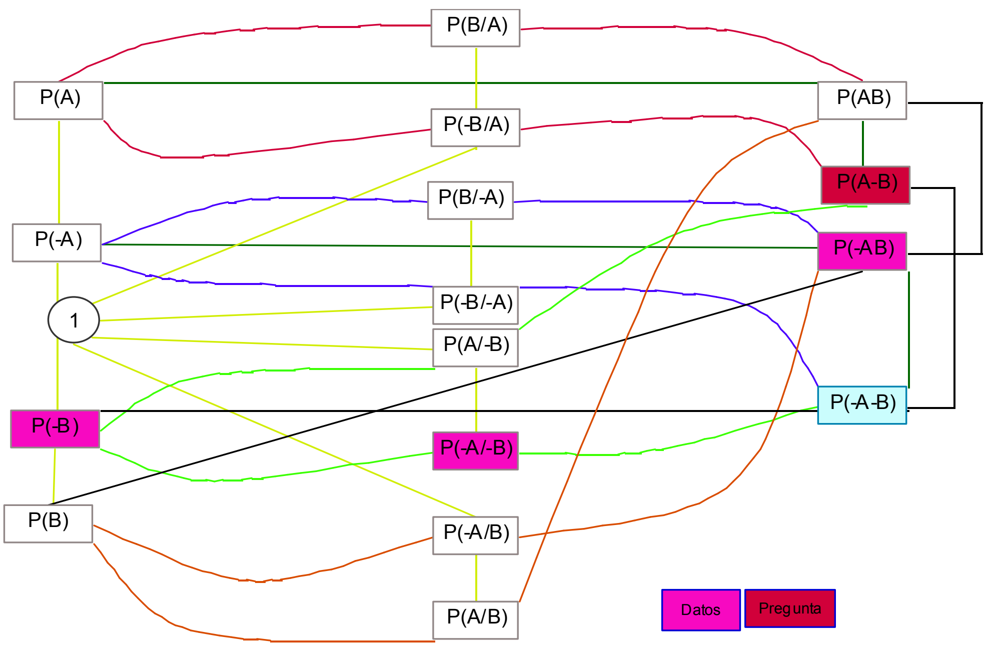


Figura 227 Grafo canónico de [p_{11}]

El siguiente problema no sería de probabilidad condicional:

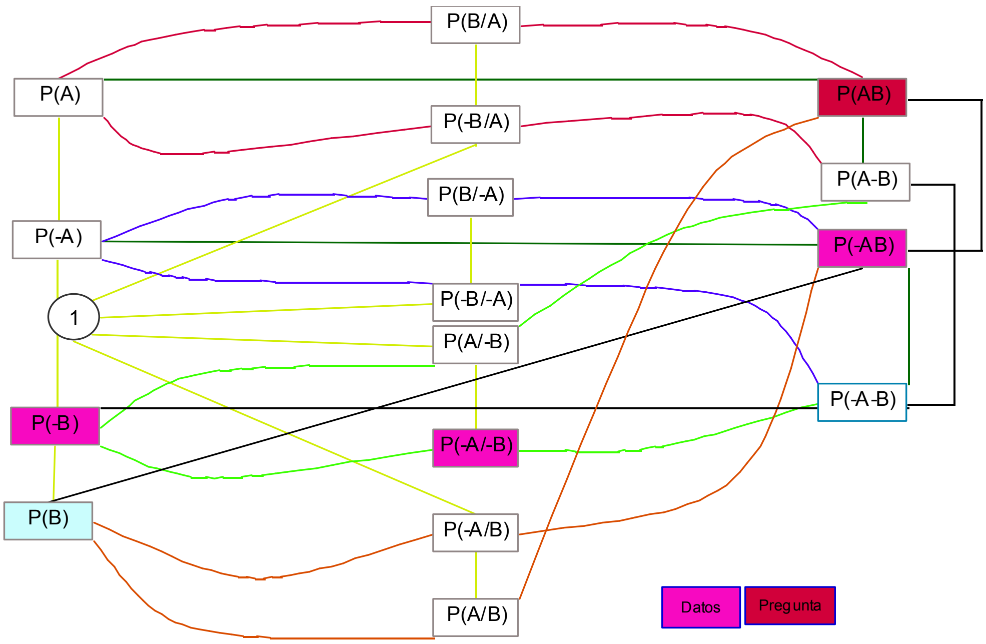


Figura 228 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

El siguiente problema no sería de probabilidad condicional:

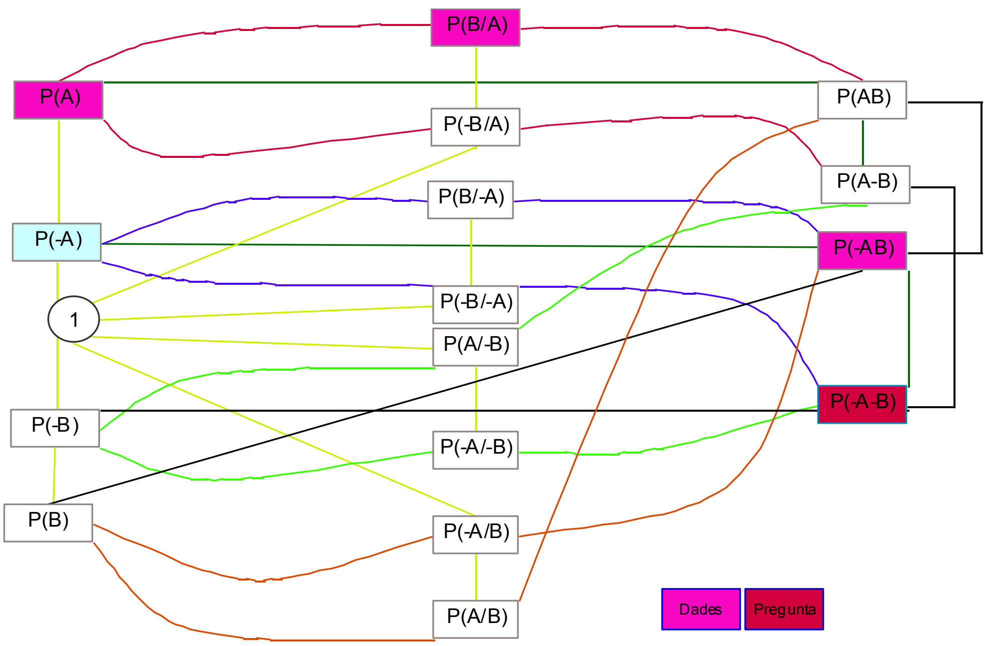


Figura 229 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

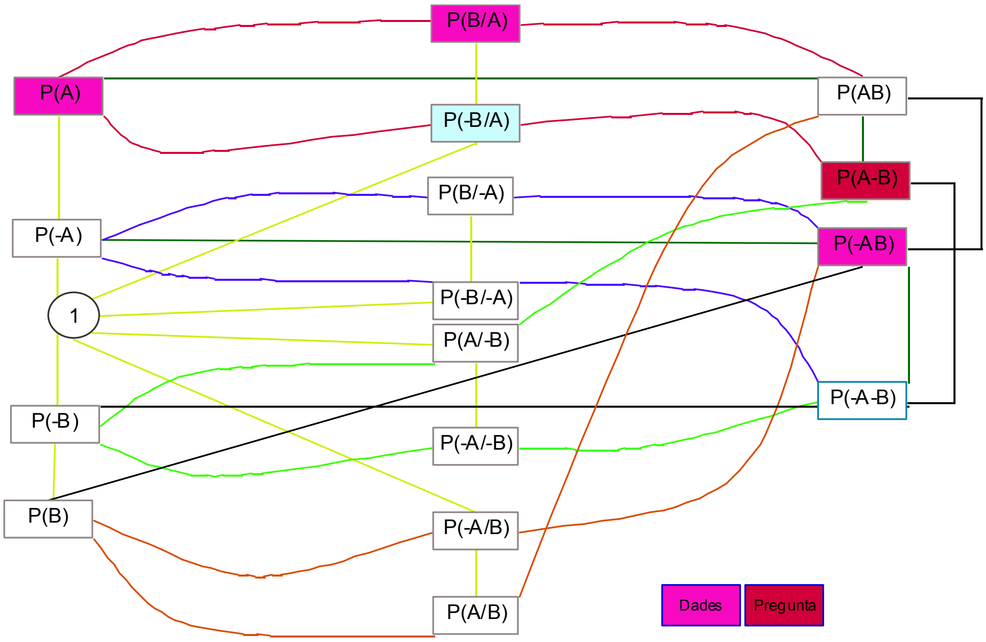


Figura 230 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_3G_2$

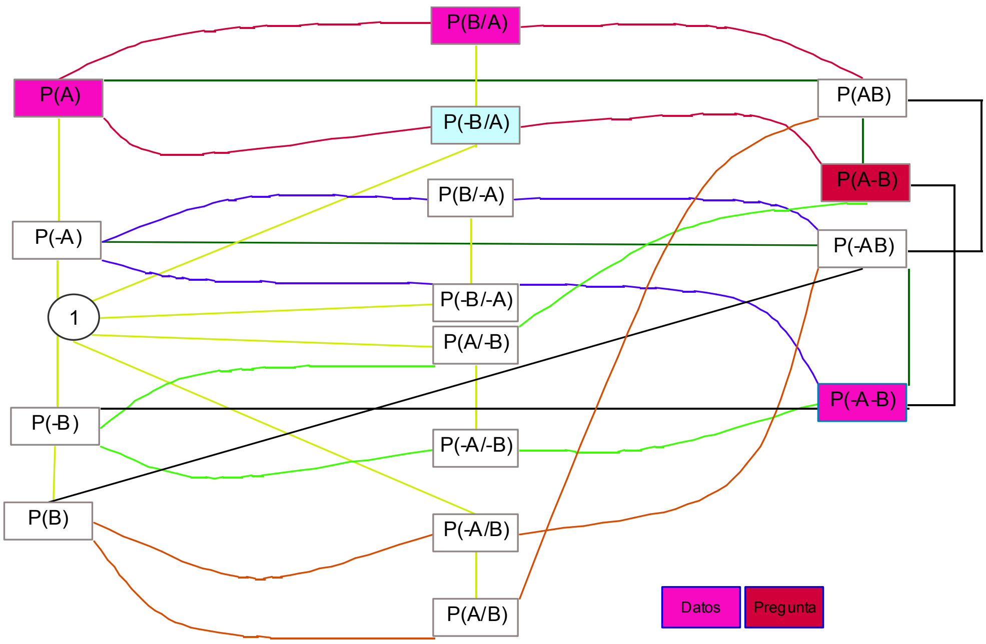


Figura 231 Grafo canónico de [p_{11}]

El siguiente problema no sería de probabilidad condicional:

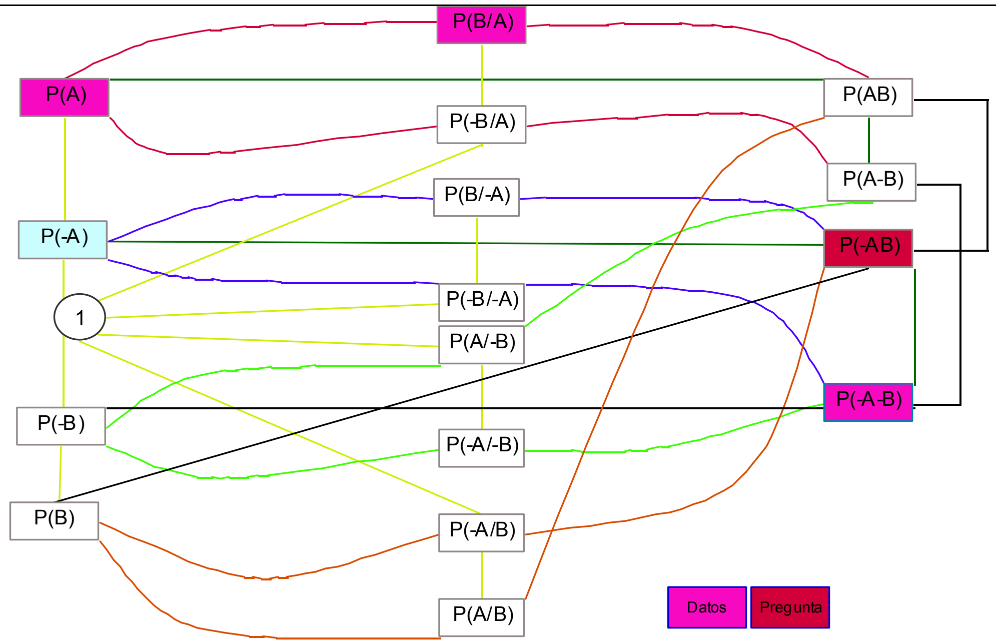


Figura 232 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

$N_2C_2T_3G_4$

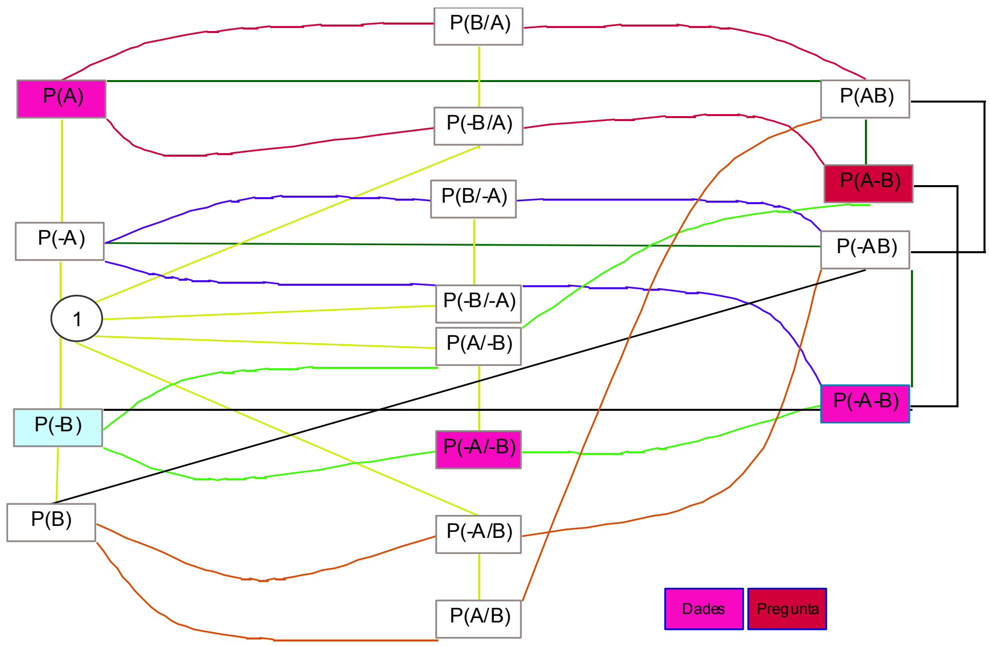


Figura 233 Grafo canónico de [p_{11}]

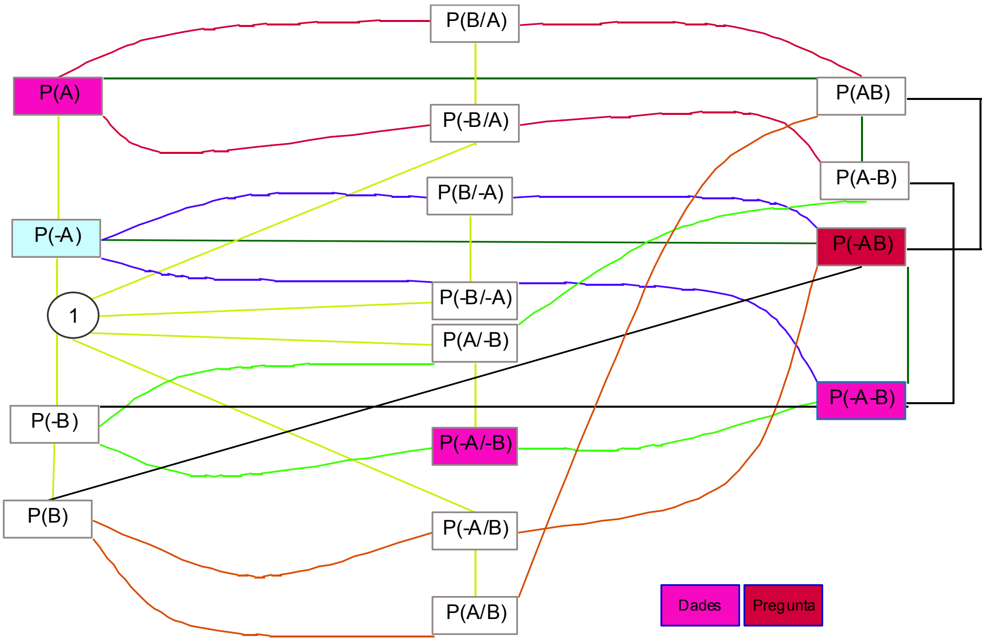


Figura 234 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

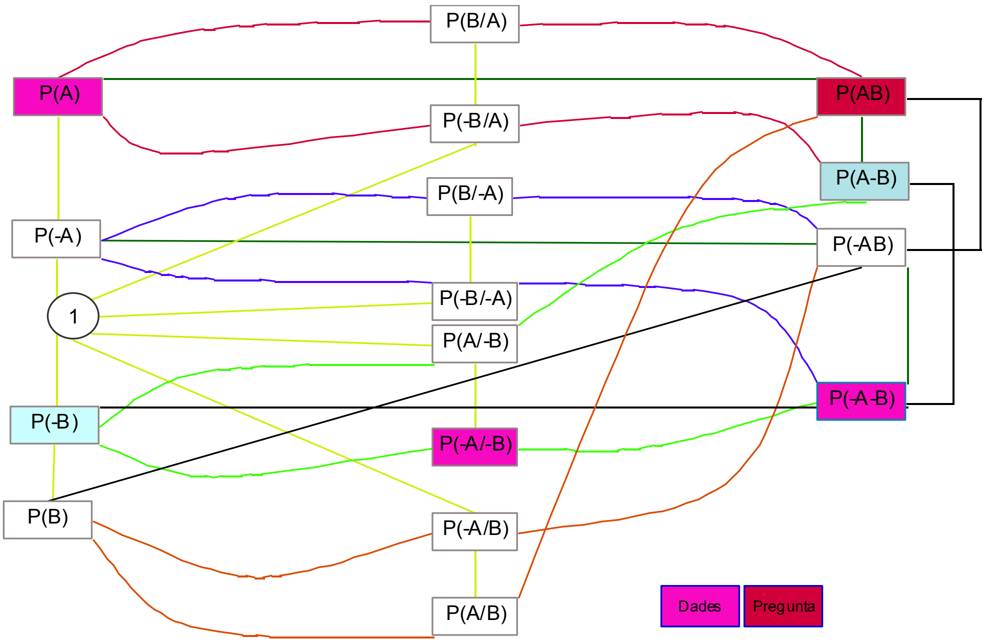


Figura 235 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_3G_5$

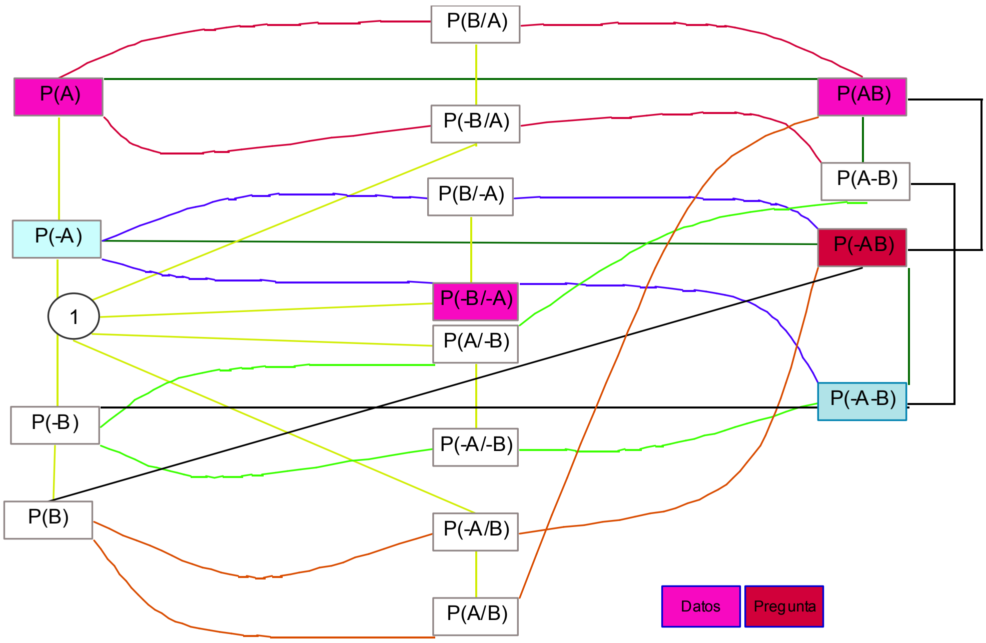


Figura 236 Grafo canónico de $[p_{21}]$

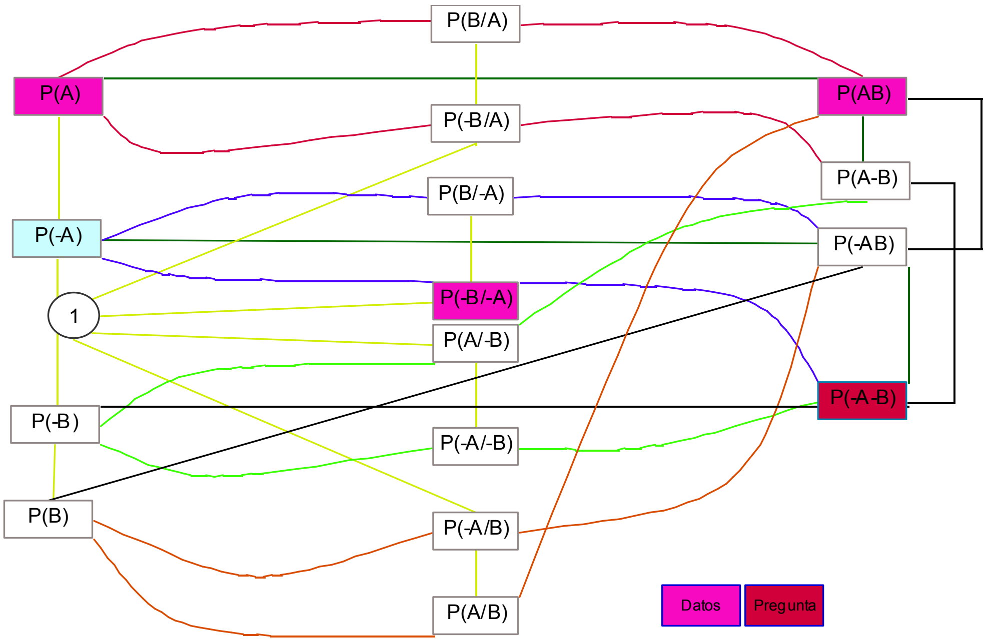


Figura 237 Grafo canónico de $[p_{11}]$

$N_2C_2T_3G_6$

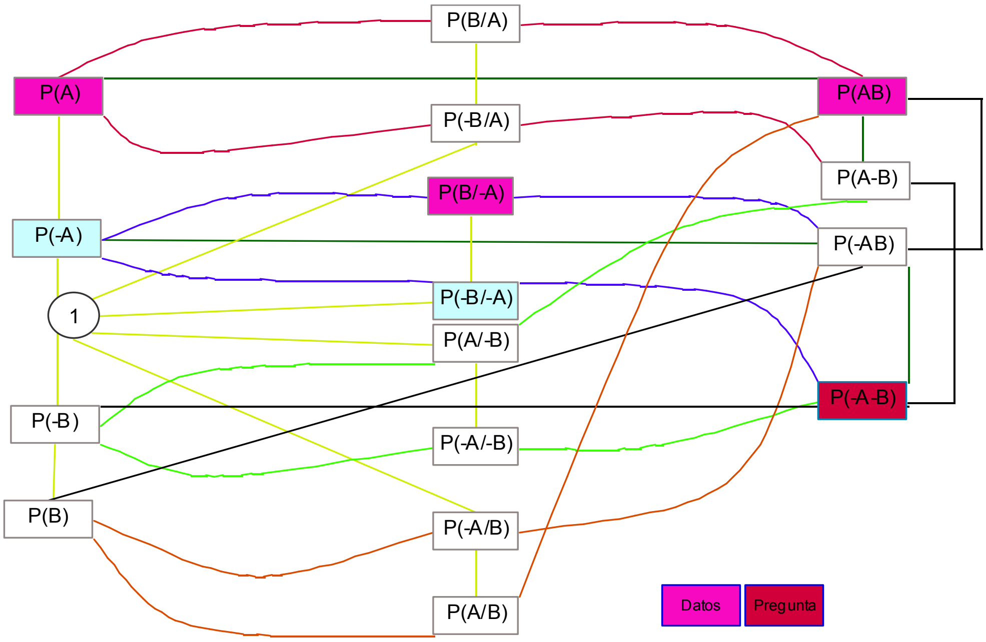


Figura 238 Grafo canónico de [p_{21}]

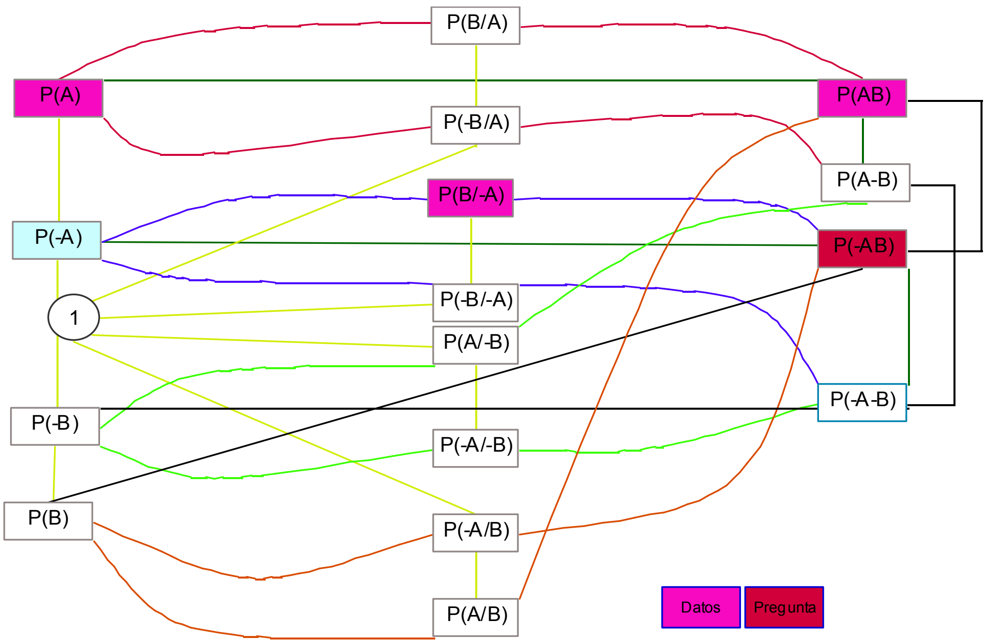


Figura 239 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_3G_7$

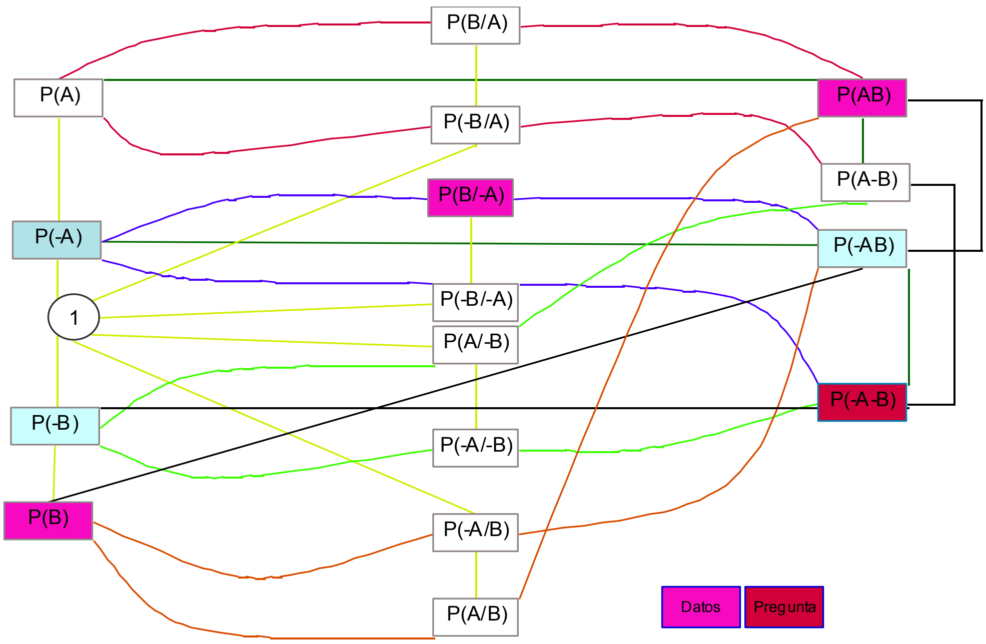


Figura 240 Grafo canónico de $[p_{31}]$

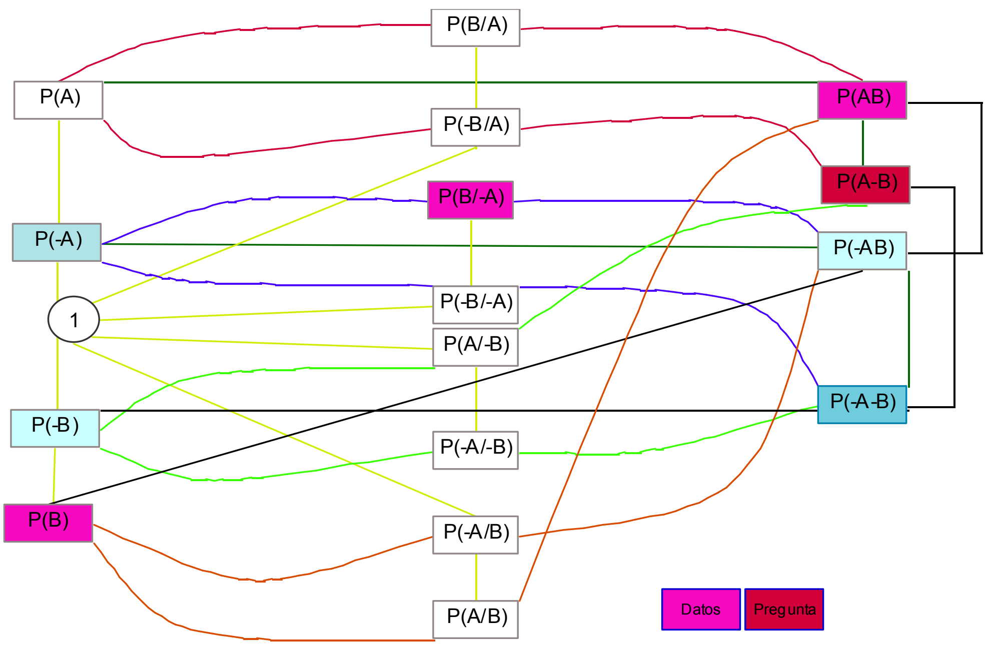


Figura 241 Grafo canónico de $[p_{41}]$

$N_2C_2T_3G_8$

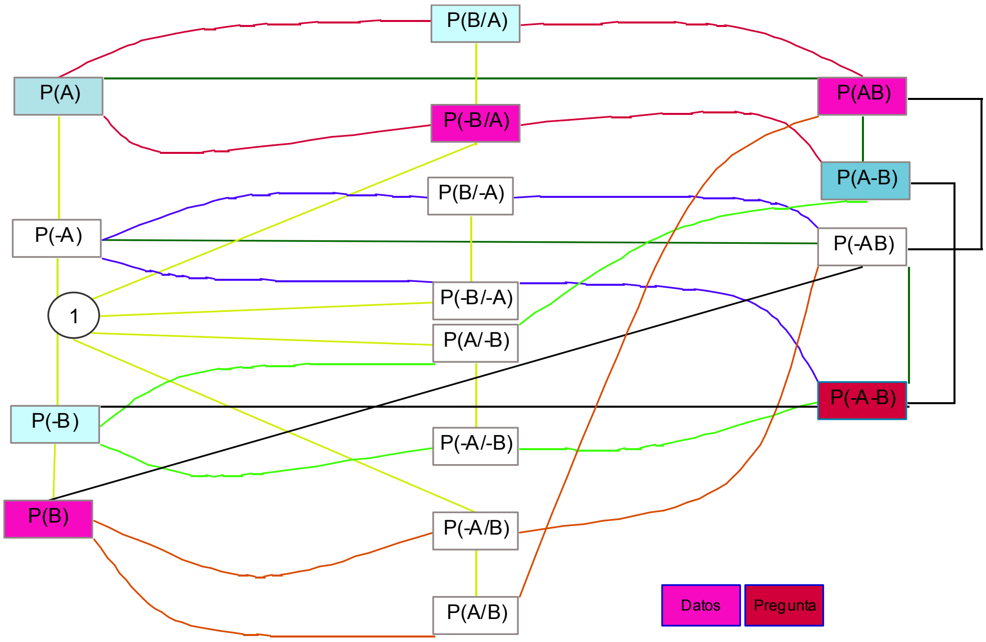


Figura 242 Grafo canónico de [p_{41}]

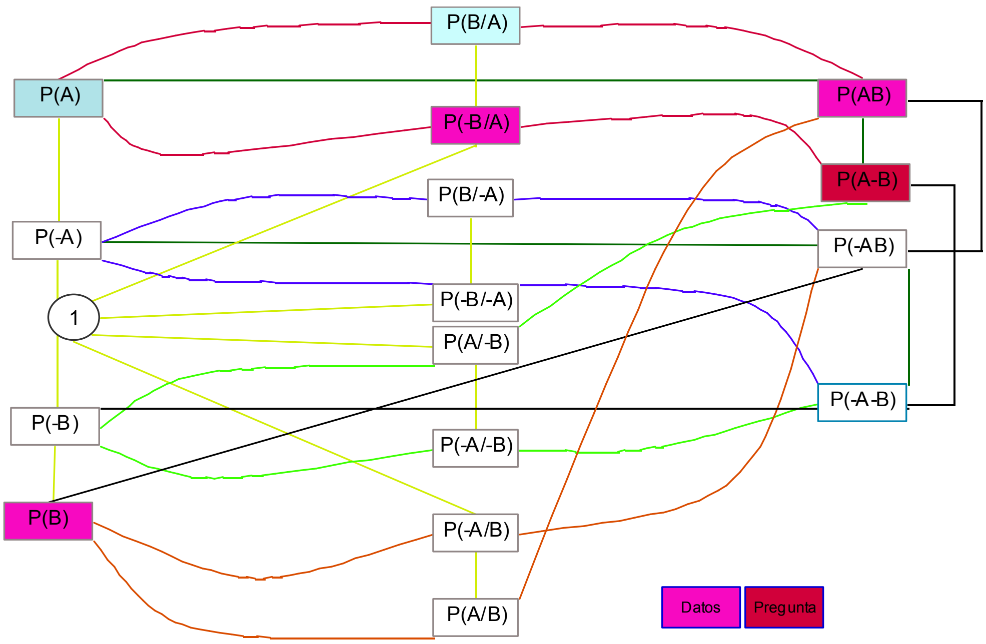


Figura 243 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_3G_{11}$

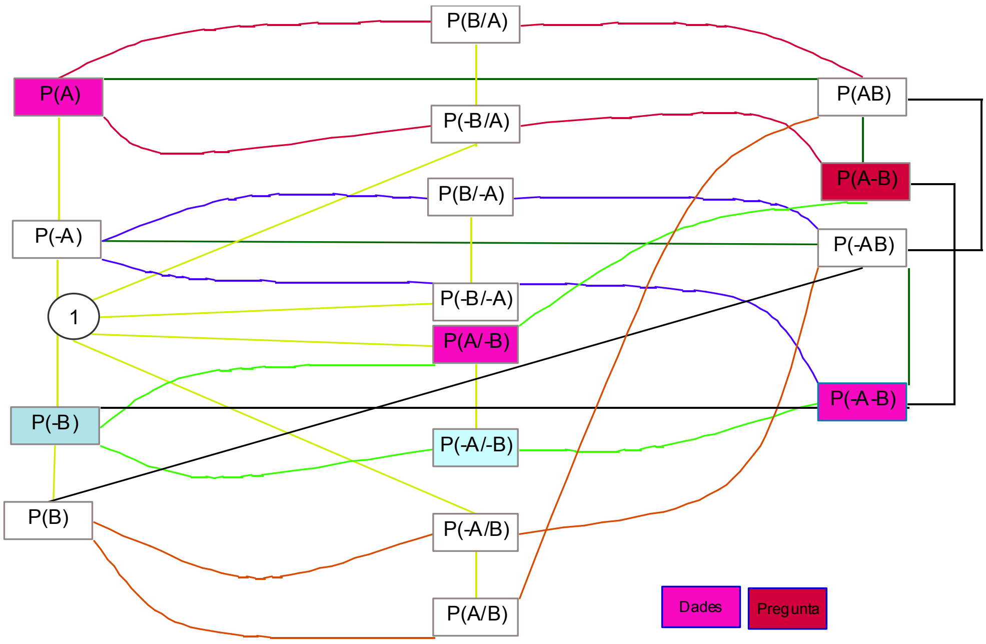


Figura 244 Grafo canónico de $[p_{21}]$

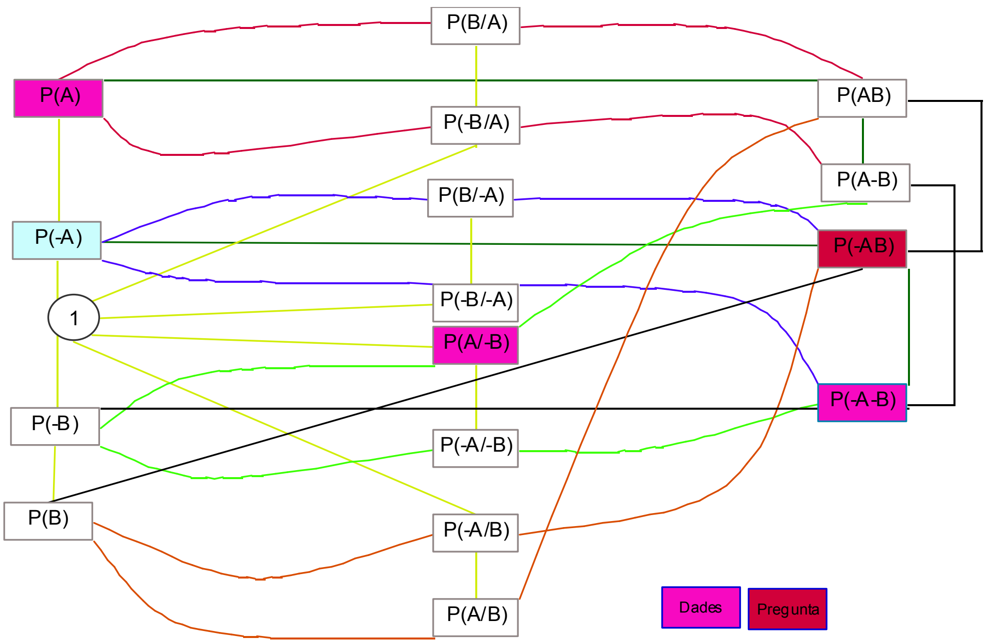


Figura 245 Grafo canónico de $[p_{11}]$ de un problema que no es de probabilidad condicional

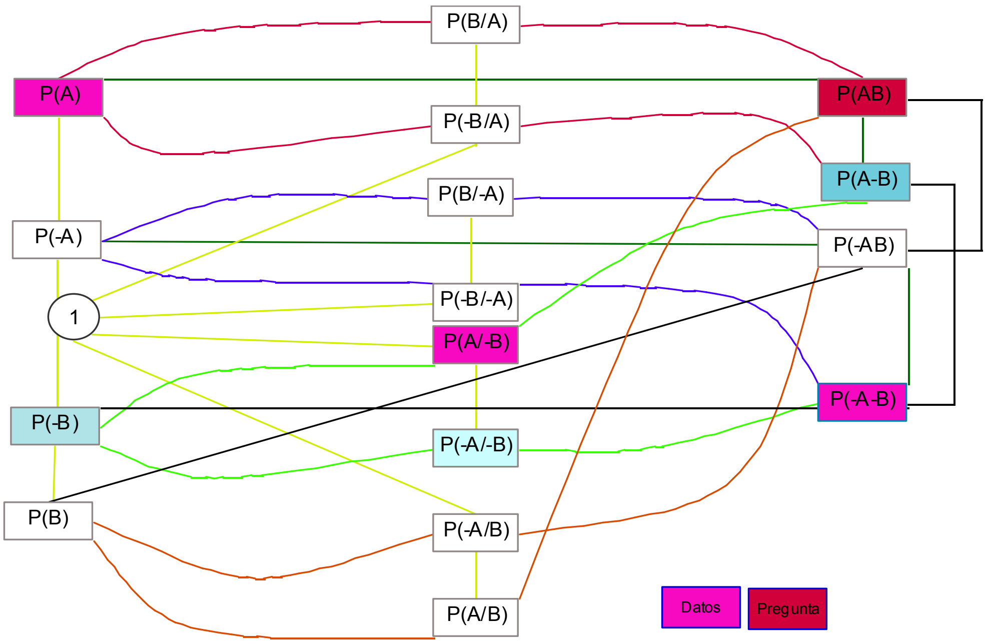


Figura 246 Grafo canónico de [p_{31}]

III. N_2C_3

III.1. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_3T_1$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.17

$N_2C_3T_1G_1$

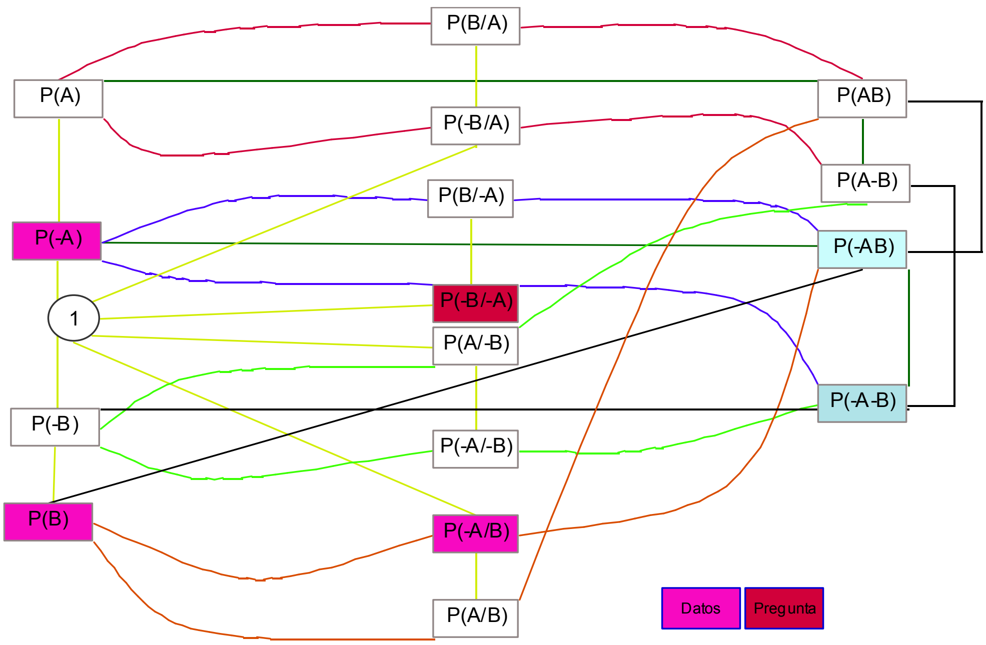


Figura 247 Grafo canónico de [p_{12}]

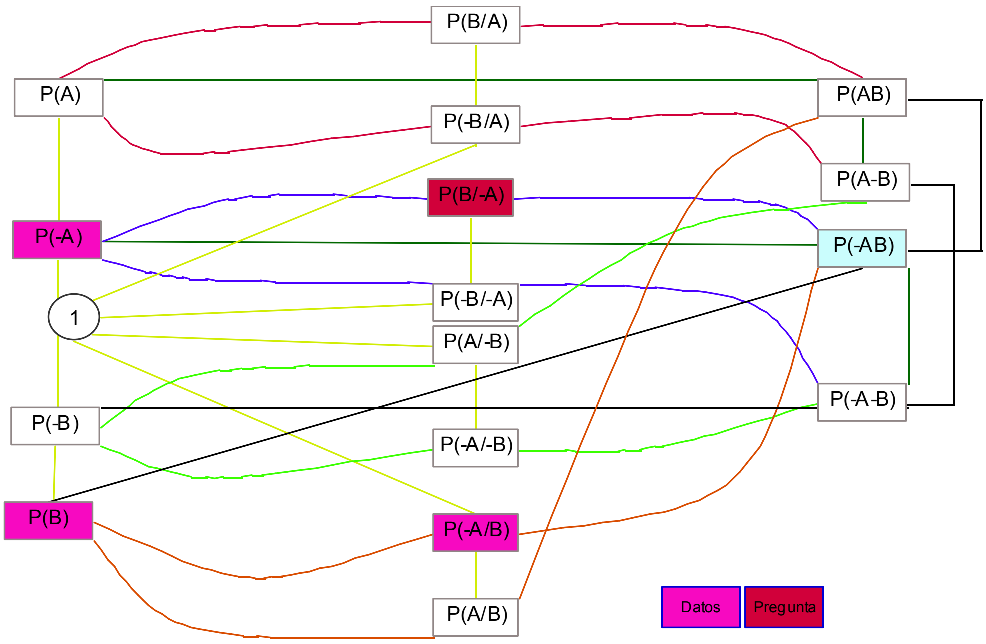


Figura 248 Grafo canónico de [p_{02}]

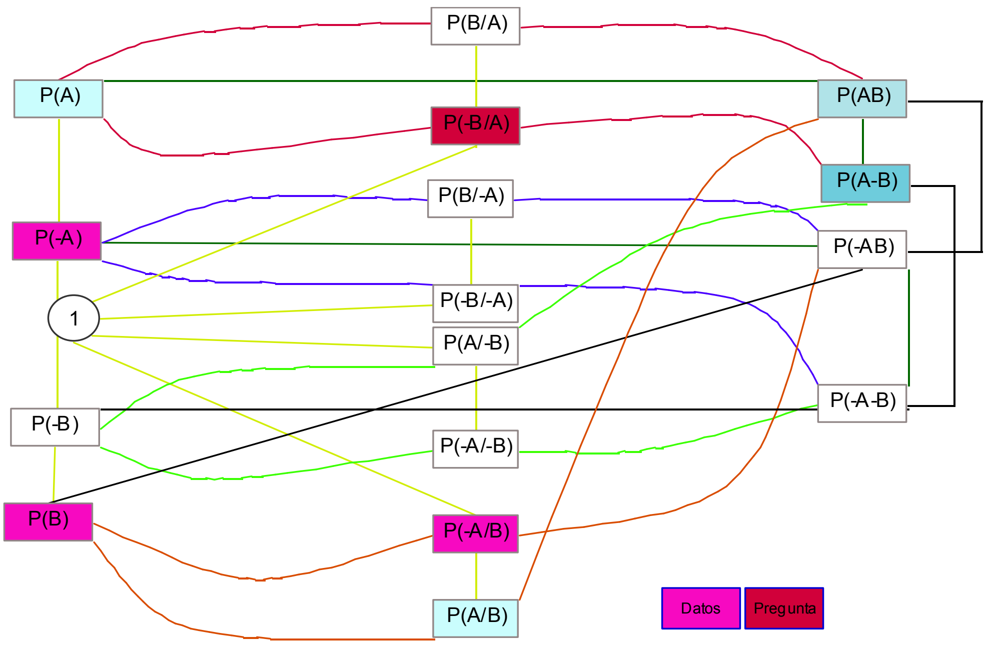


Figura 249 Grafo canónico de [p_{32}]

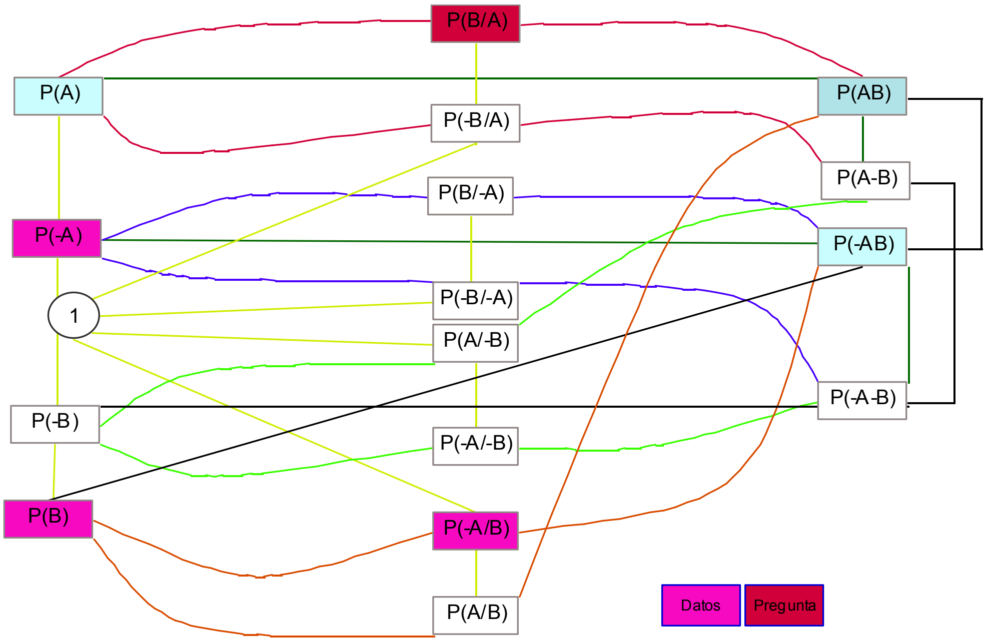


Figura 250 Grafo canónico de $[p_{22}]$

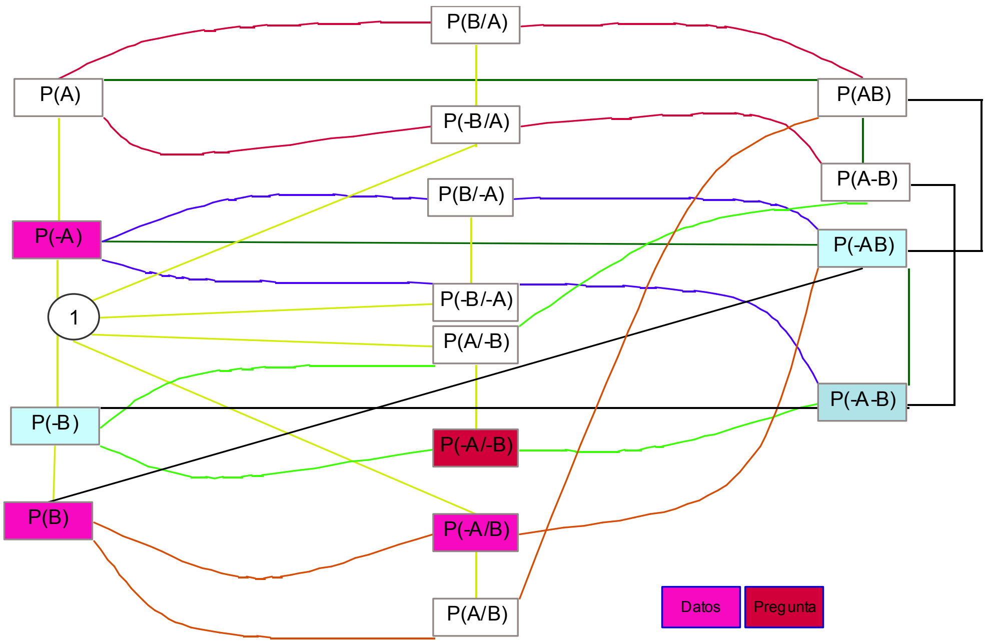


Figura 251 Grafo canónico de $[p_{22}]$

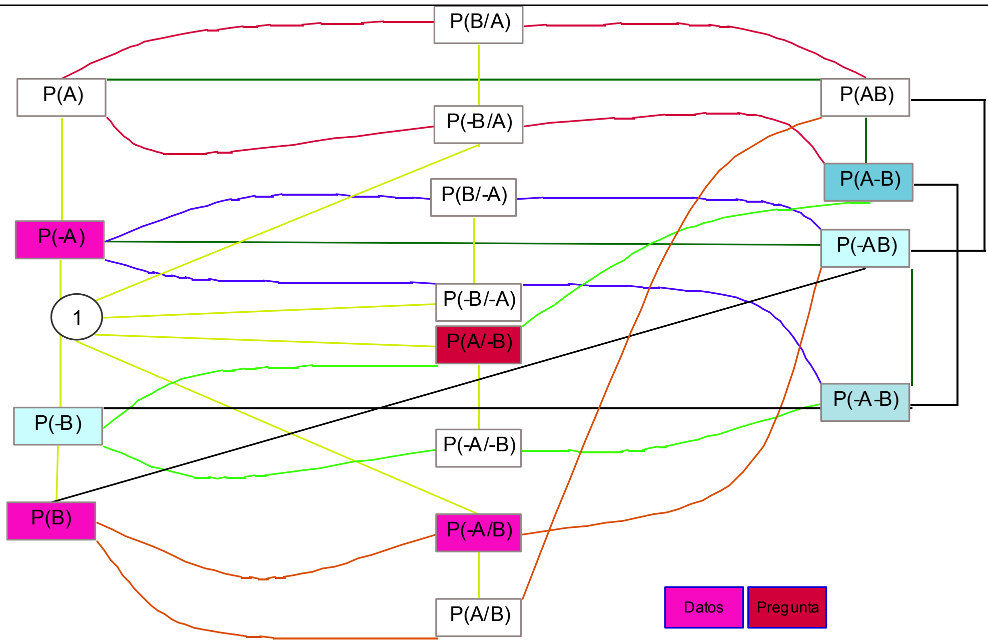


Figura 252 Grafo canónico de [p_{32}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

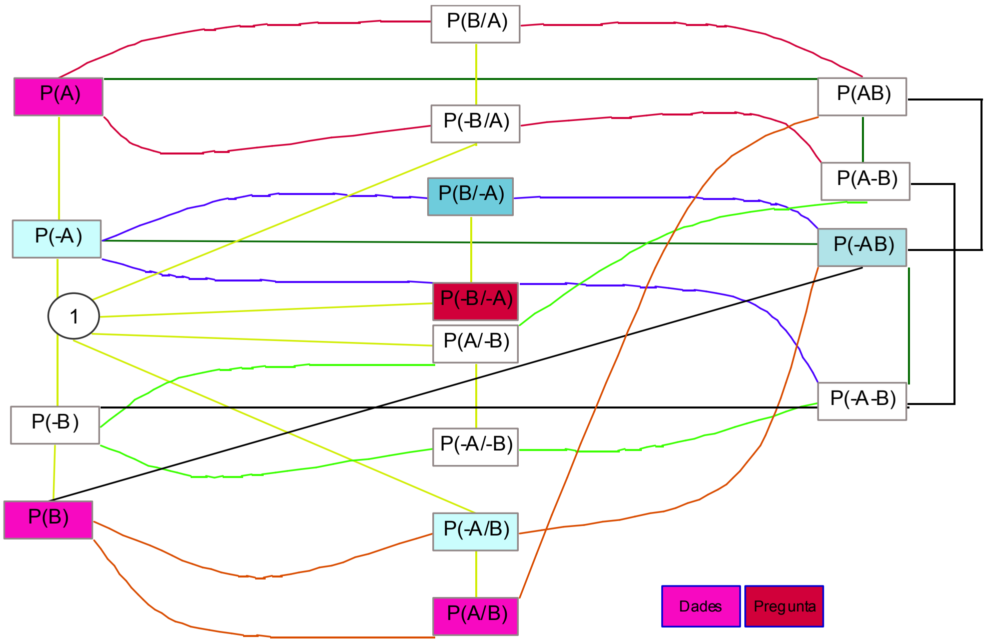


Figura 253 Grafo canónico de [p_{32}]

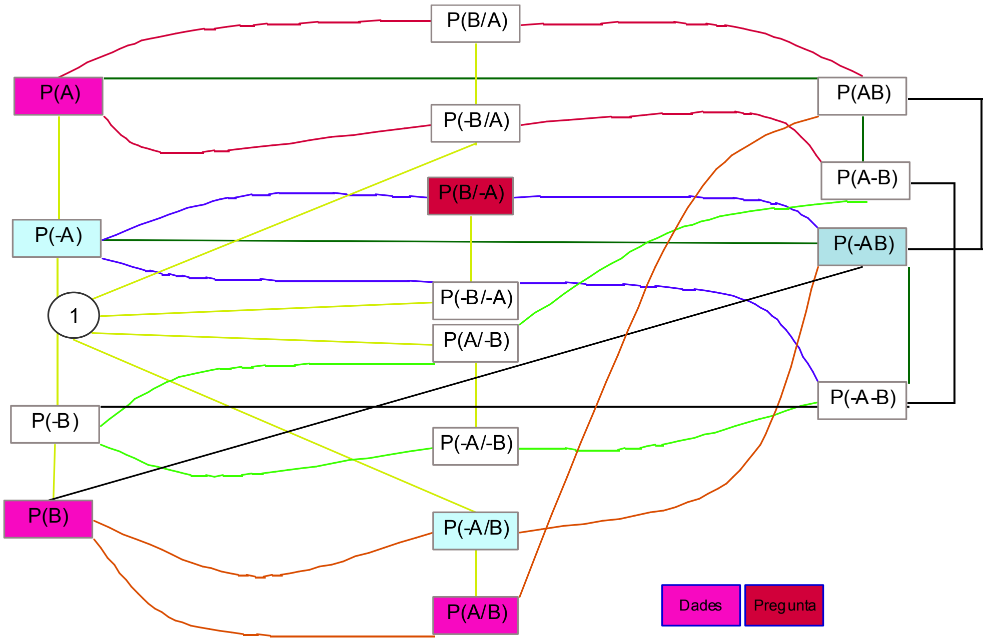


Figura 254 Grafo canónico de [p_{22}]

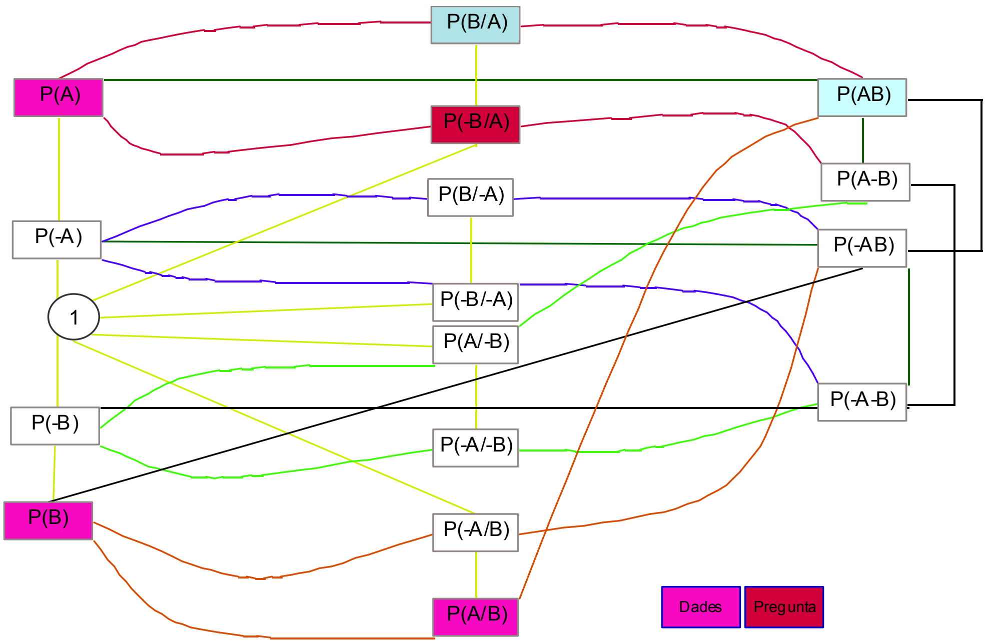


Figura 255 Grafo canónico de [p_{12}]

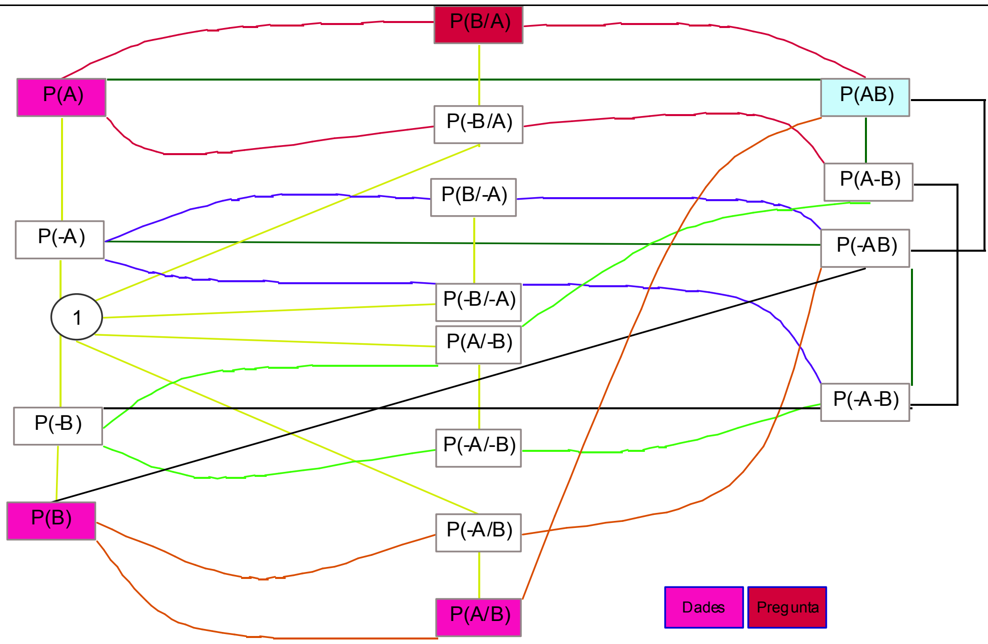


Figura 256 Grafo canónico de [p_{02}]

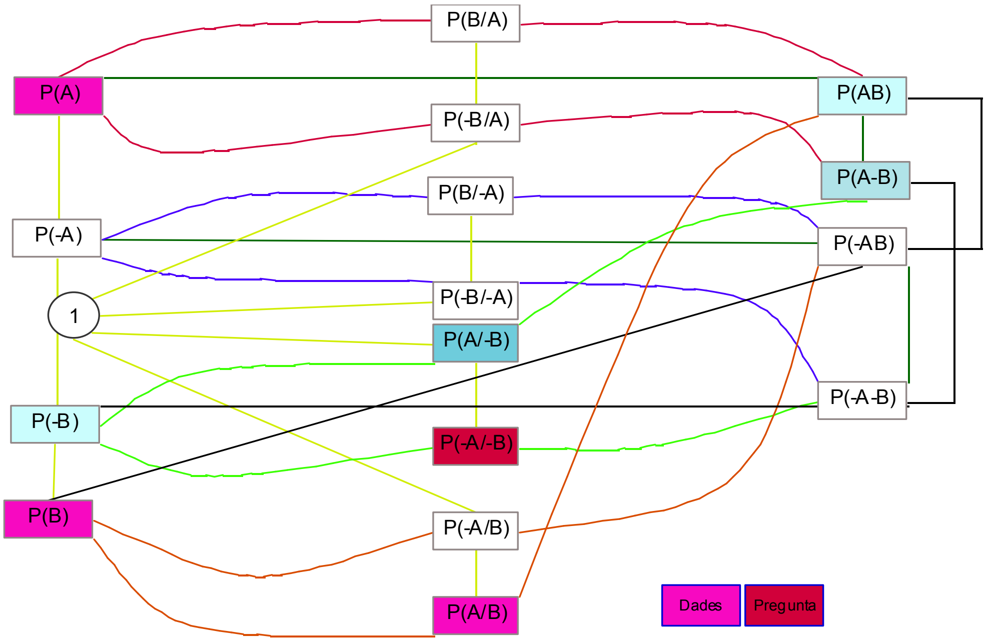


Figura 257 Grafo canónico de [p_{32}]

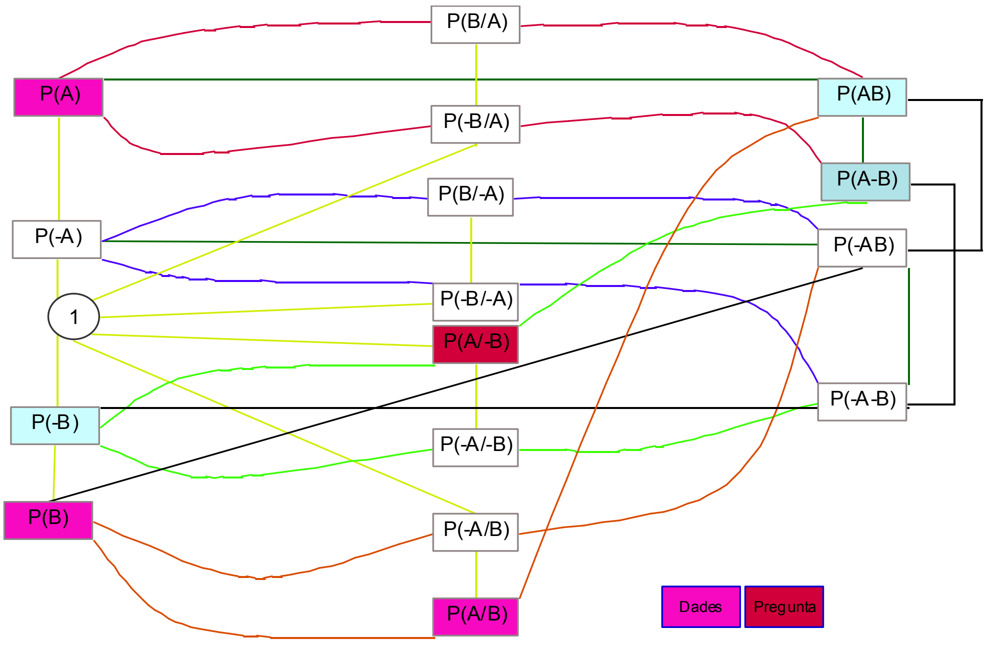


Figura 258 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_3T_1G_2$

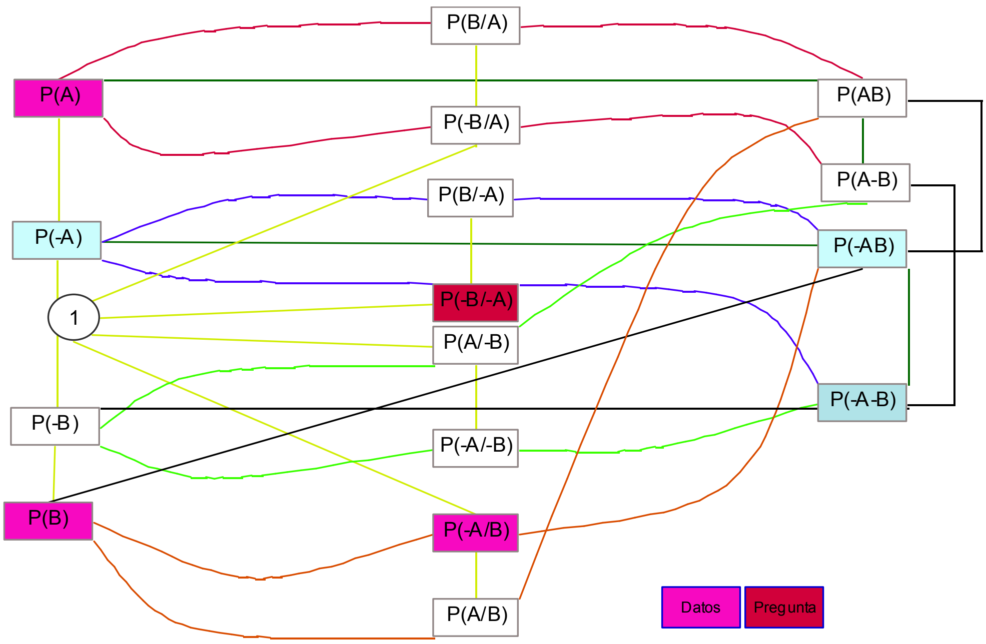


Figura 259 Grafo canónico de [p_{22}]

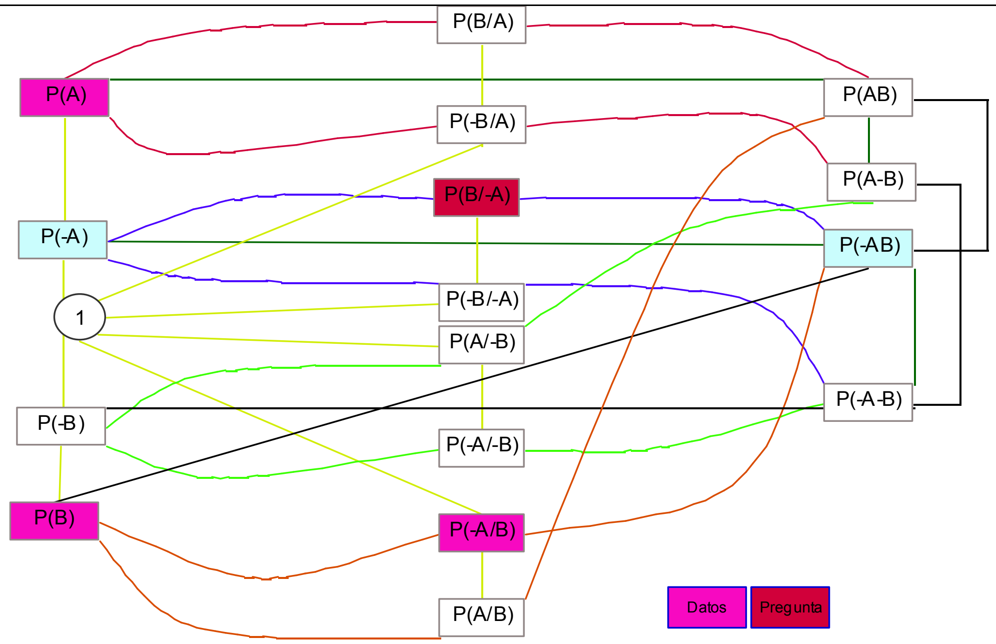


Figura 260 Grafo canónico de [p_{12}]

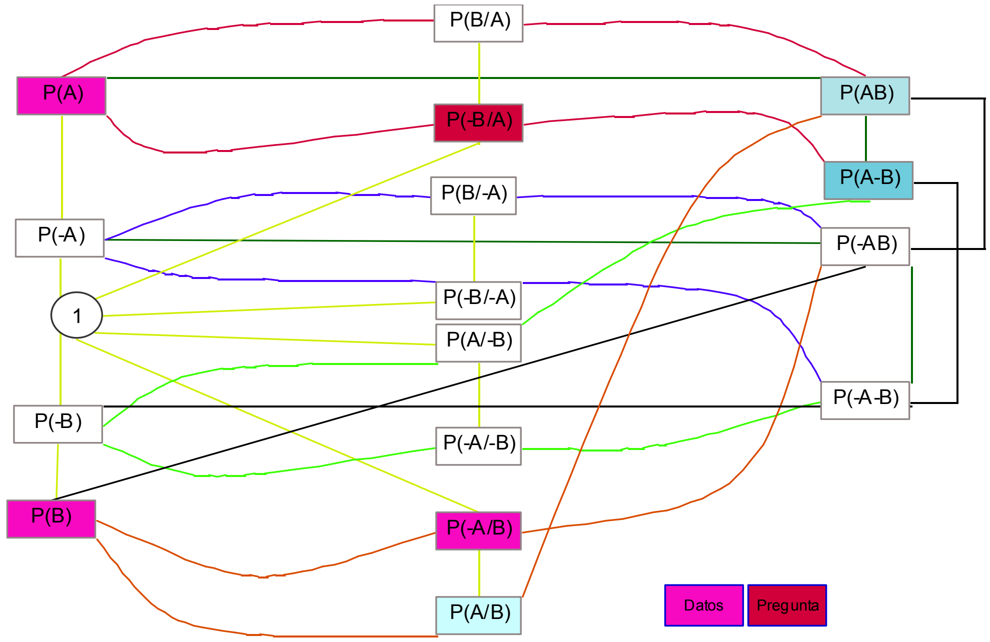


Figura 261 Grafo canónico de [p_{22}]

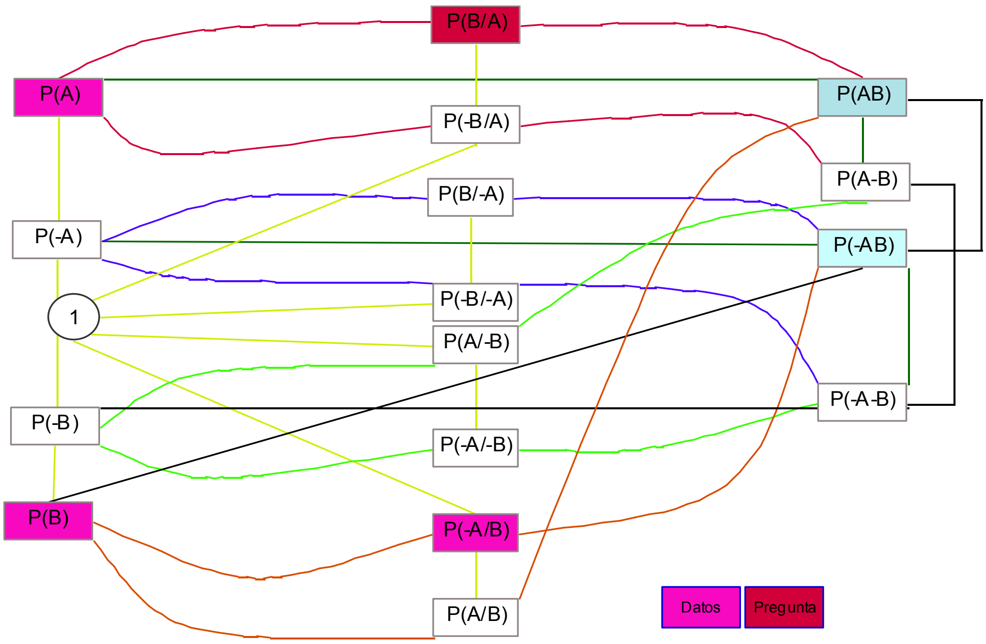


Figura 262 Grafo canónico de [p_{12}]

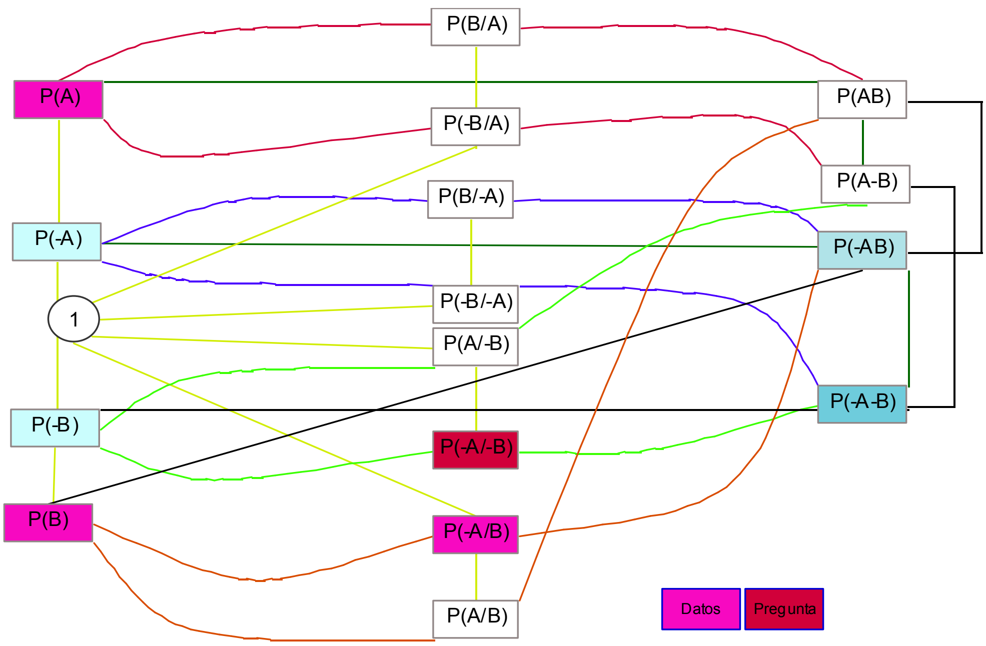


Figura 263 Grafo canónico de [p_{32}]

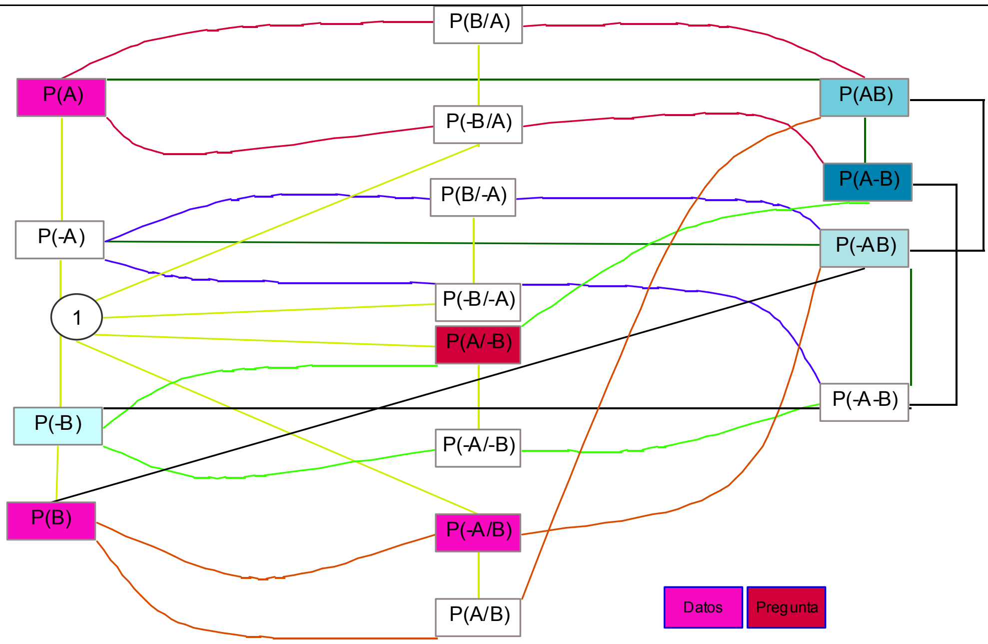


Figura 264 Grafo canónico de [p_{32}]

$N_2C_3T_1G_3$

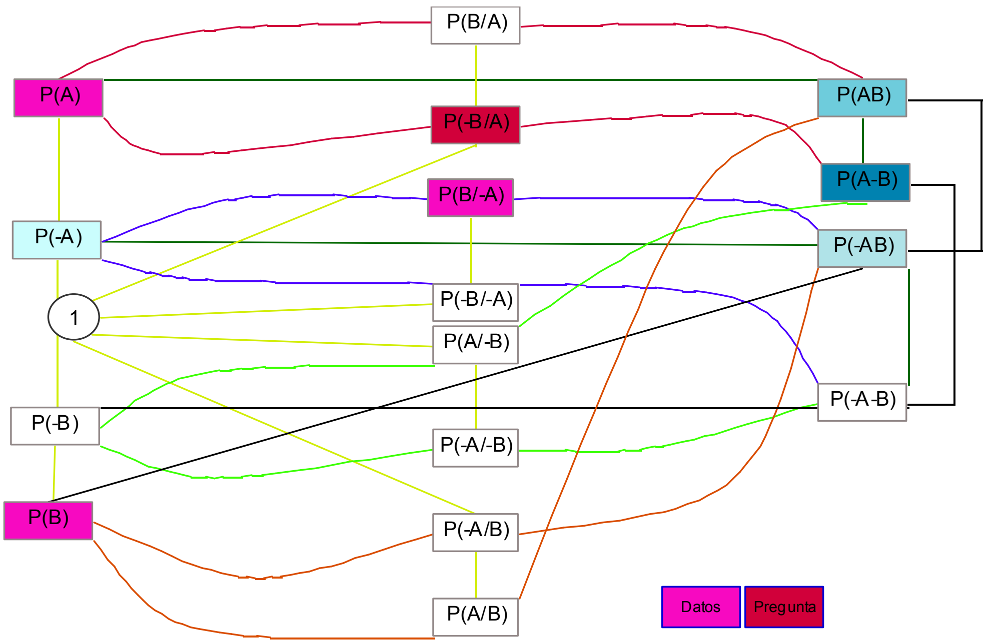


Figura 265 Grafo canónico de [p_{32}]

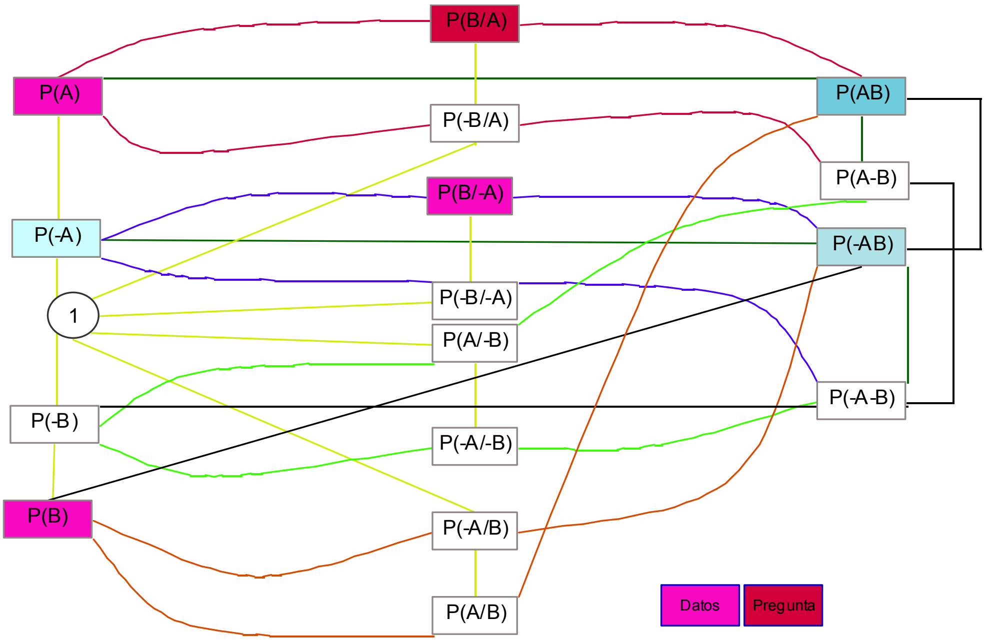


Figura 266 Grafo canónico de [p_{22}]

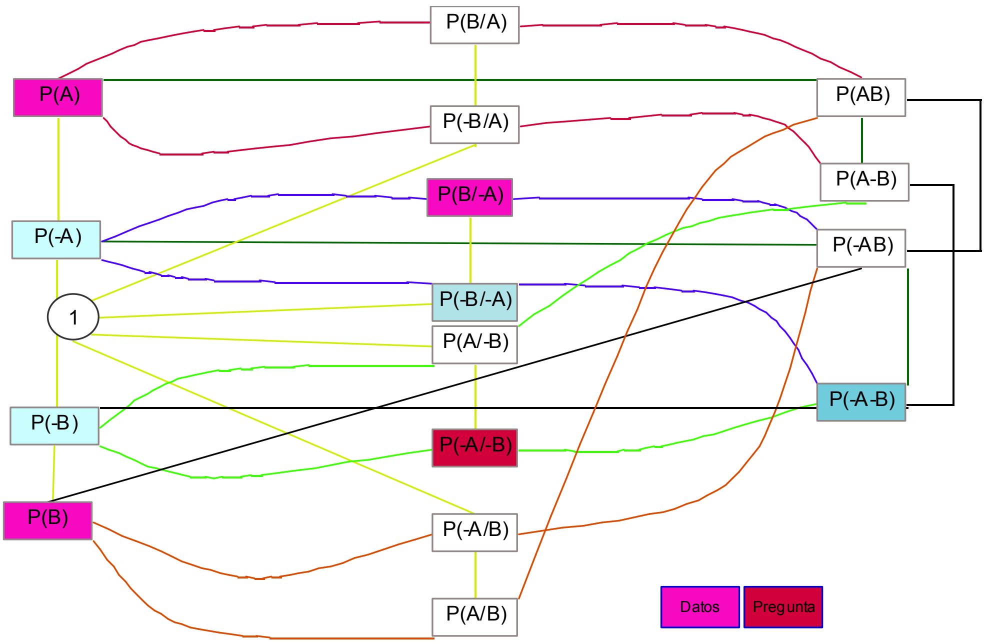


Figura 267 Grafo canónico de [p_{32}]

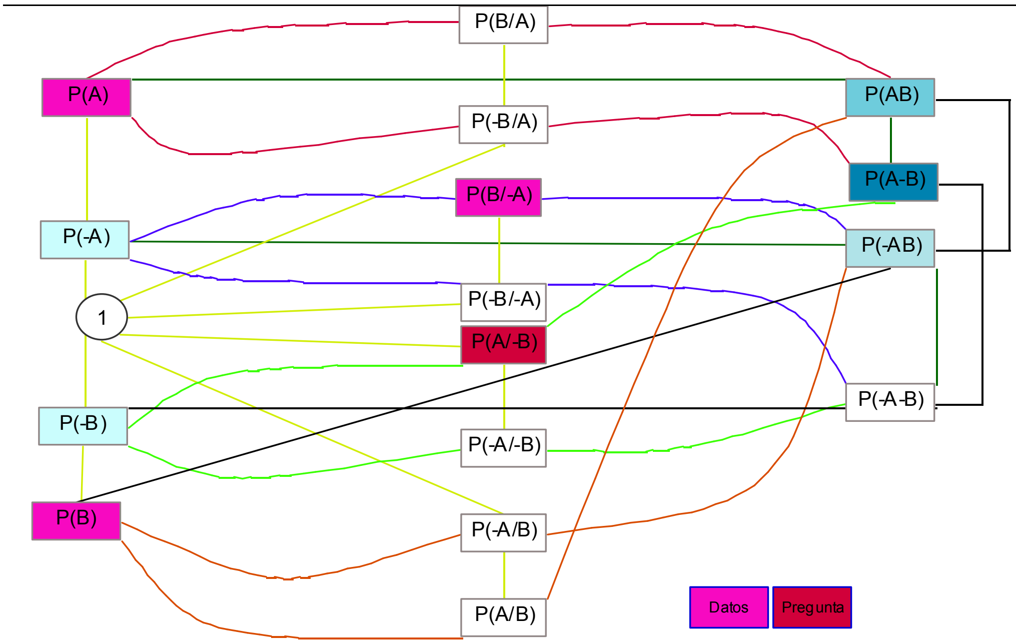


Figura 268 Grafo canónico de [p_{42}]

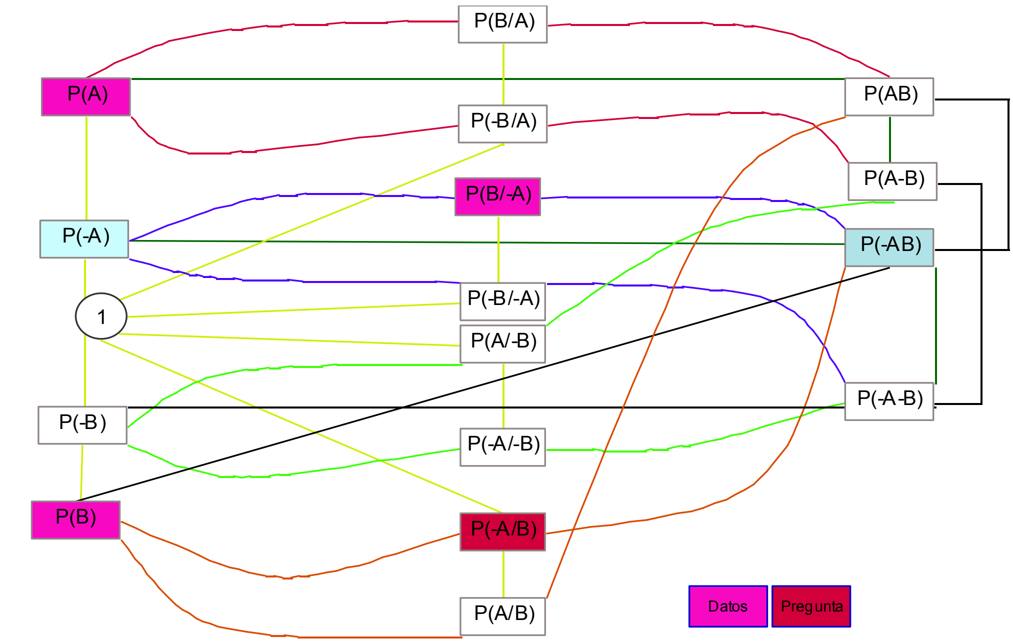


Figura 269 Grafo canónico de [p_{12}]

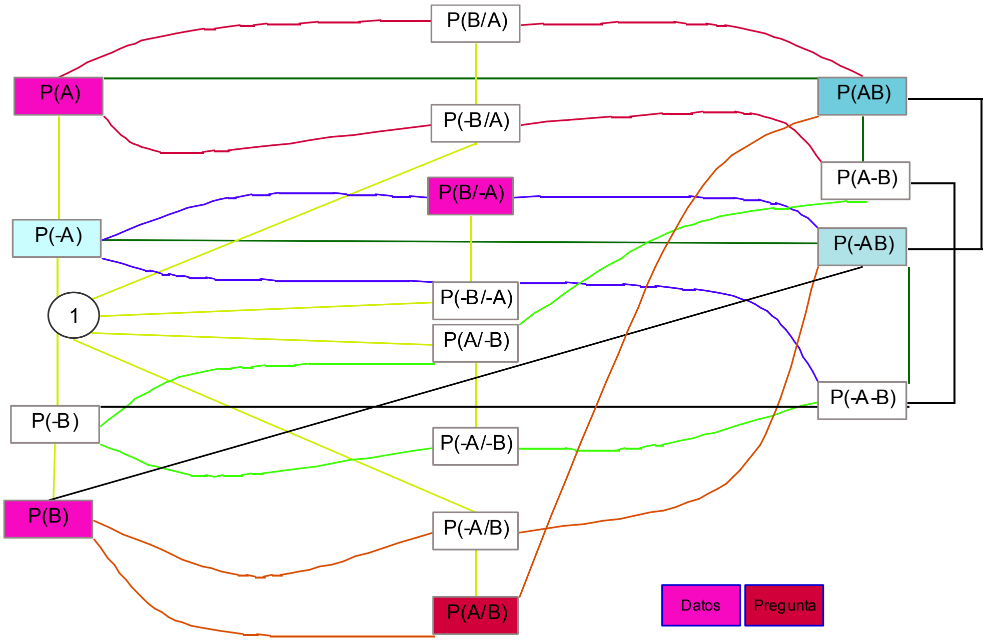


Figura 270 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_3T_1G_4$

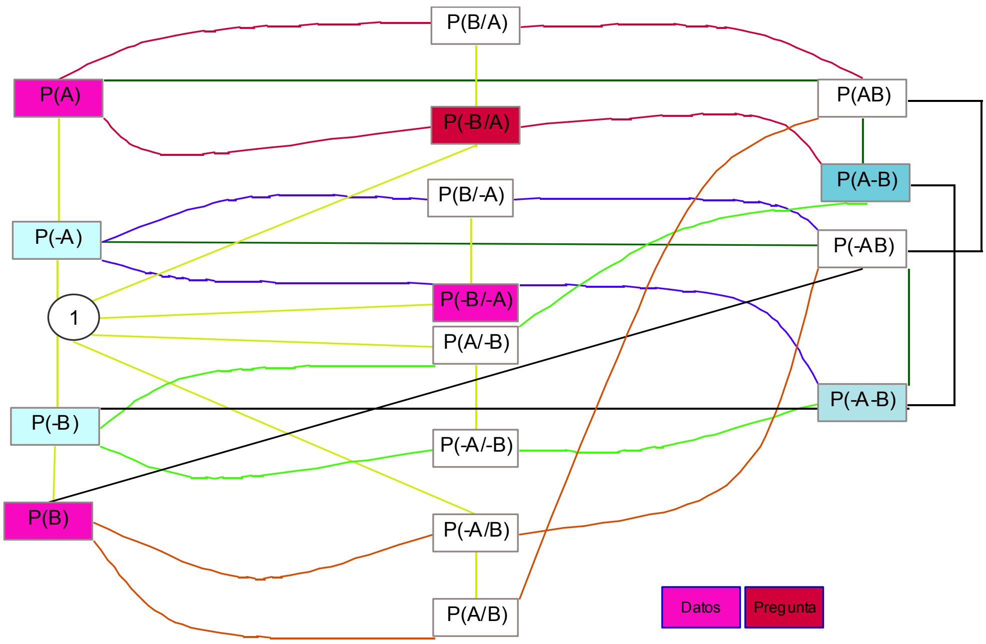


Figura 271 Grafo canónico de [p_{32}]

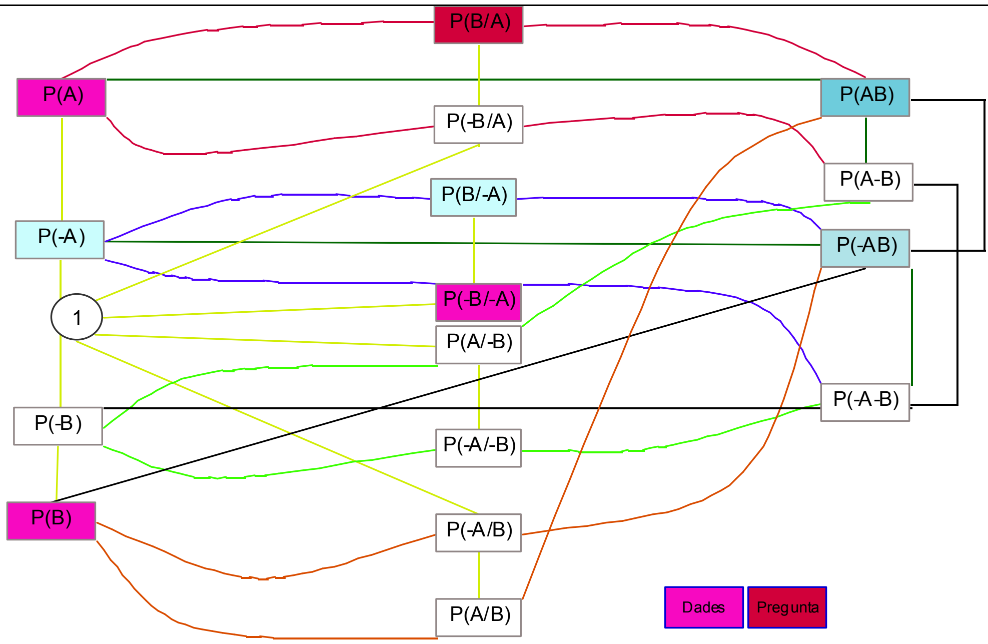


Figura 272 Grafo canónico de [p_{32}]

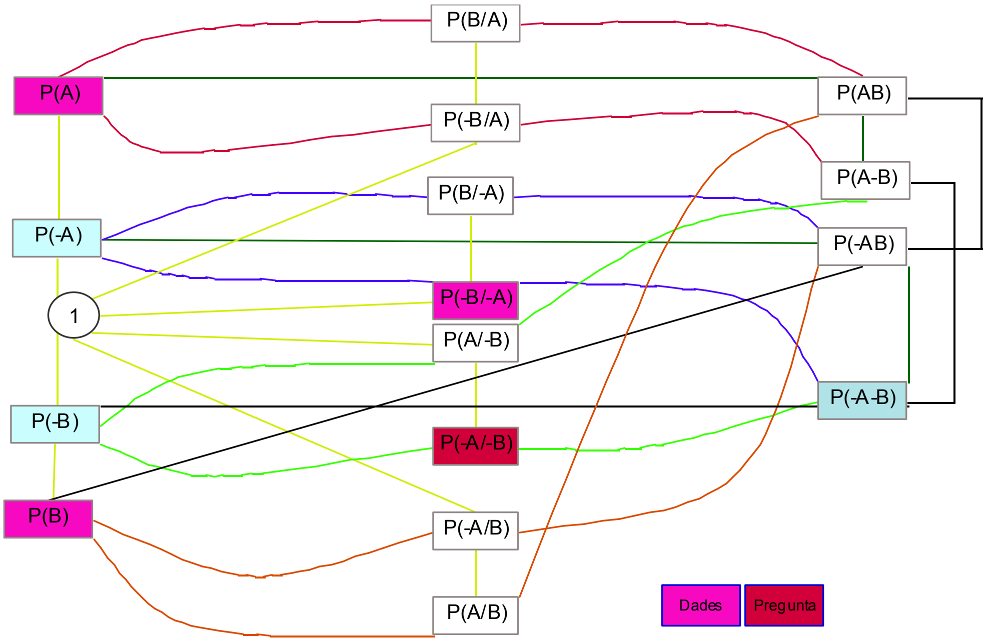


Figura 273 Grafo canónico de [p_{22}]

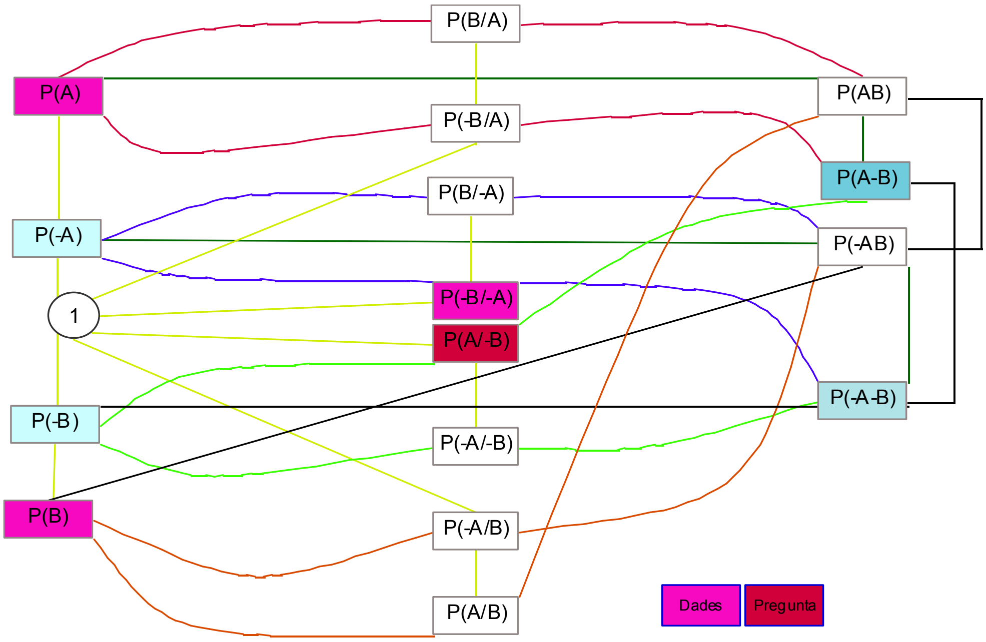


Figura 274 Grafo canónico de [p_{32}]

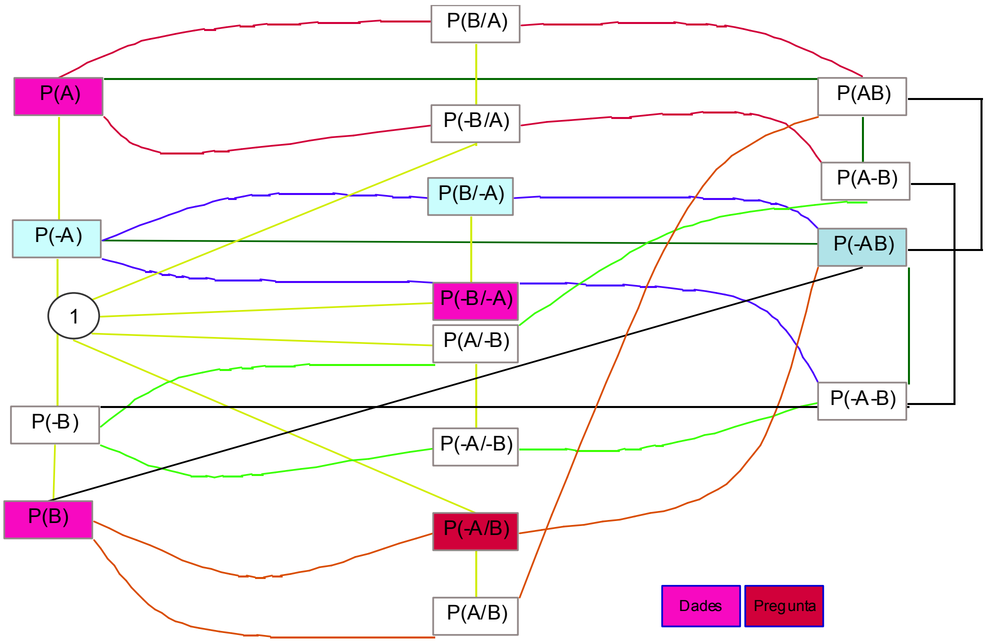


Figura 275 Grafo canónico de [p_{22}]

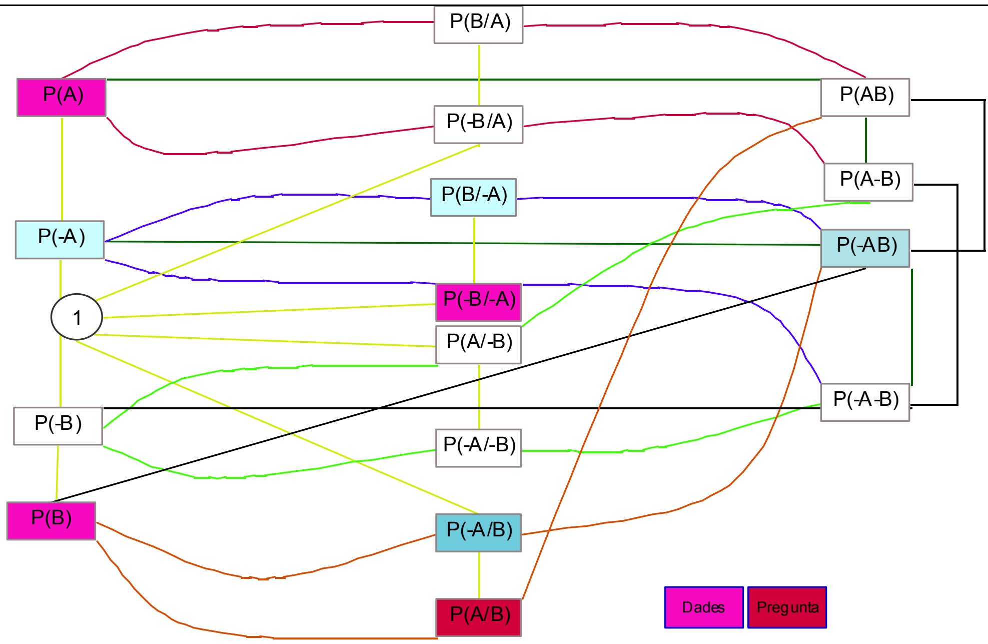


Figura 276 Grafo canónico de [p_{32}]

III.2. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_3T_3$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.17

$N_2C_3T_3G_1$

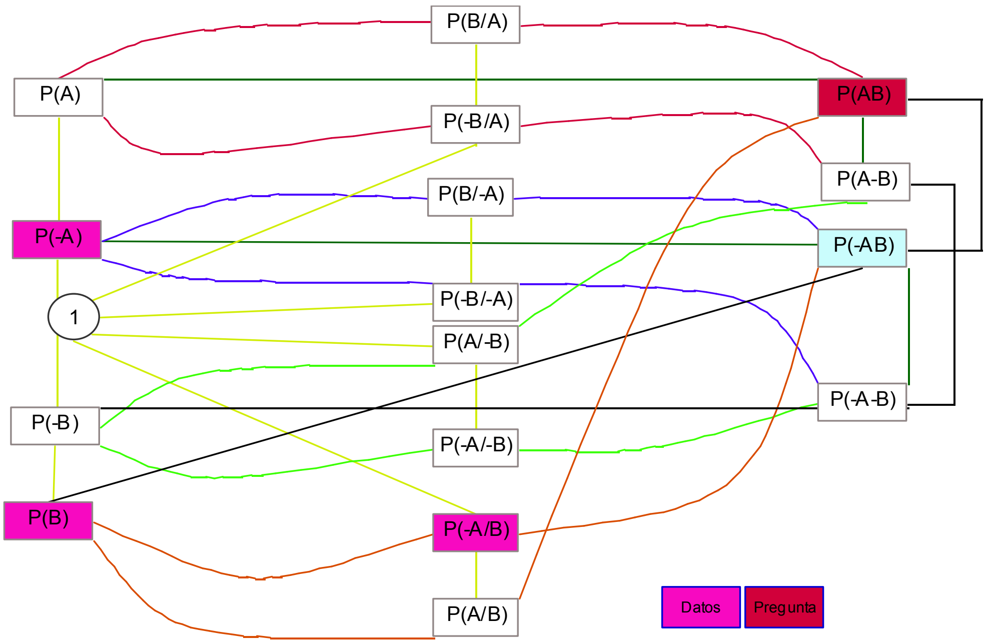


Figura 277 Grafo canónico de [p_{11}]

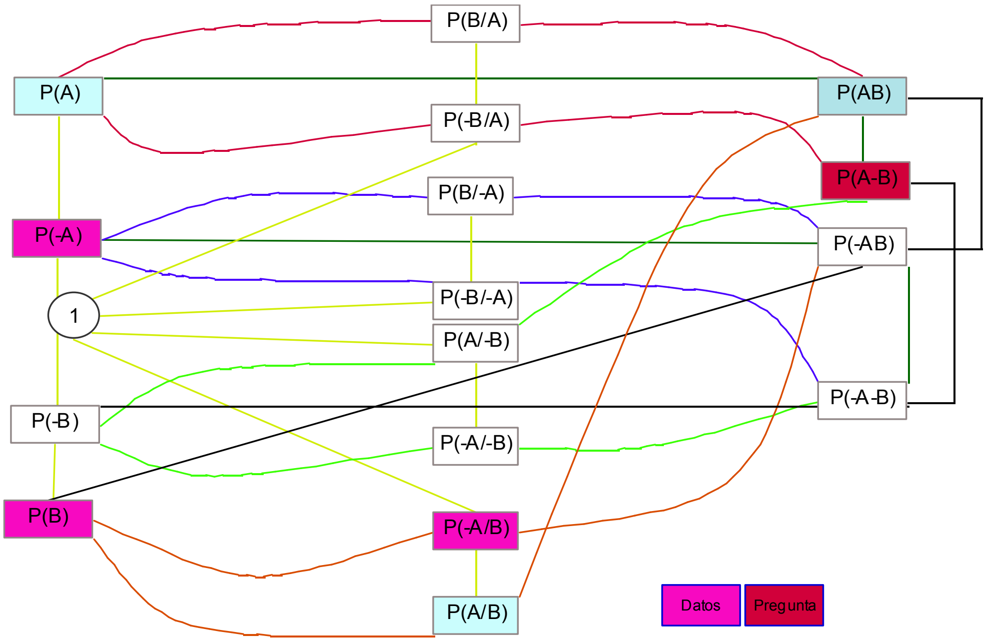


Figura 278 Grafo canónico de [p31]

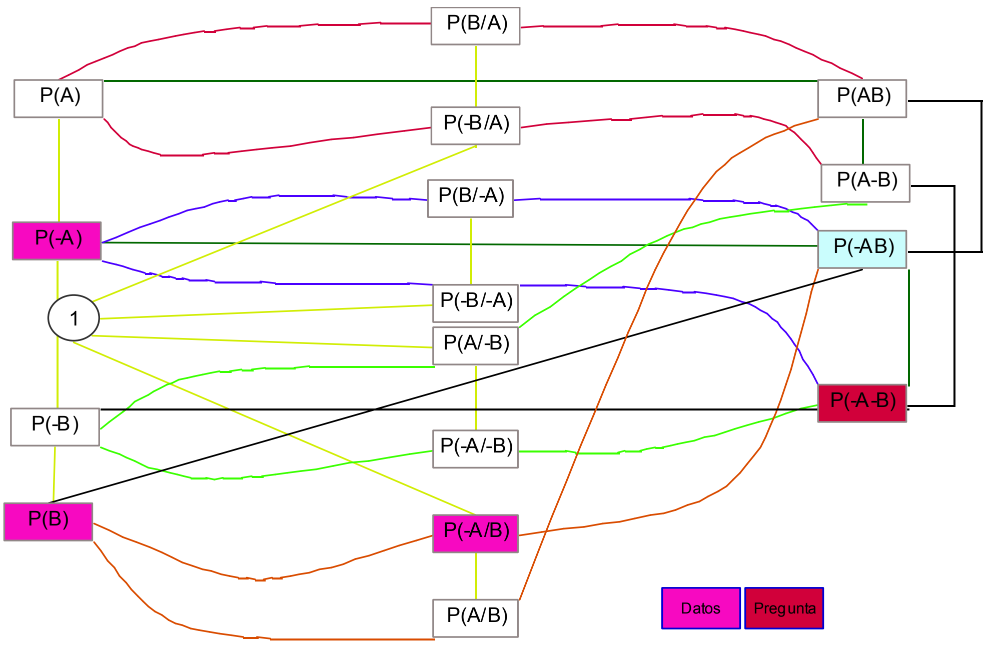


Figura 279 Grafo canónico de [p11]

Grafos asociados a otro trío de datos

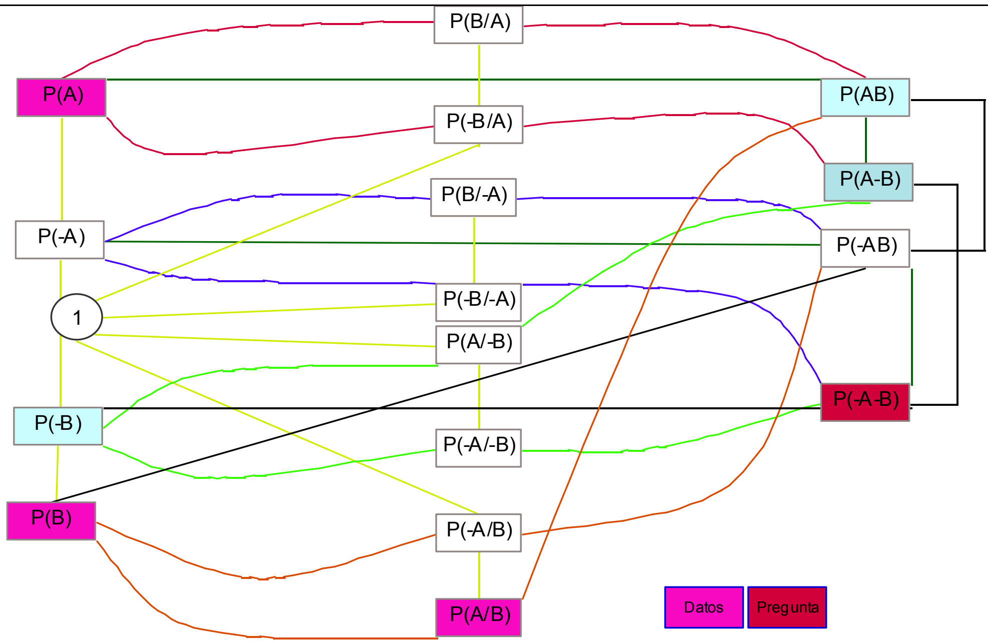


Figura 280 Grafo canónico de [p31]

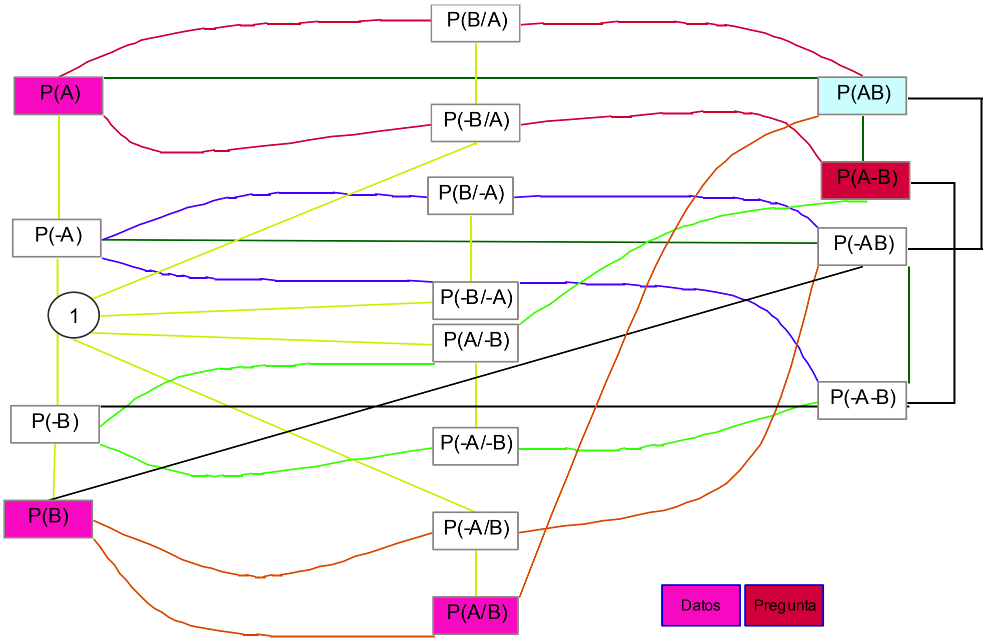


Figura 281 Grafo canónico de [p11]

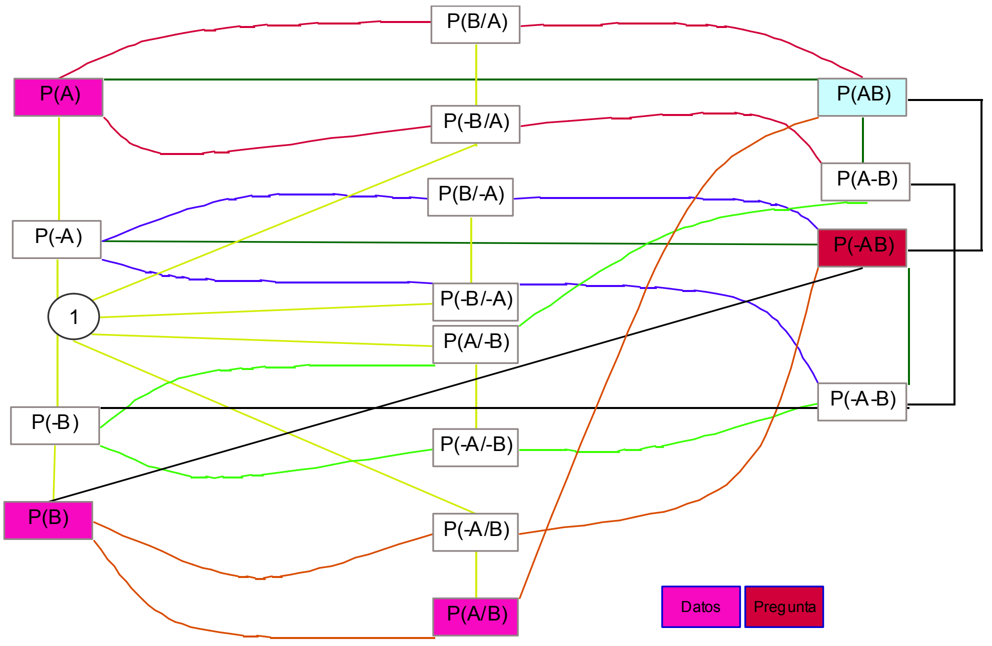


Figura 282 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_3T_3G_2$

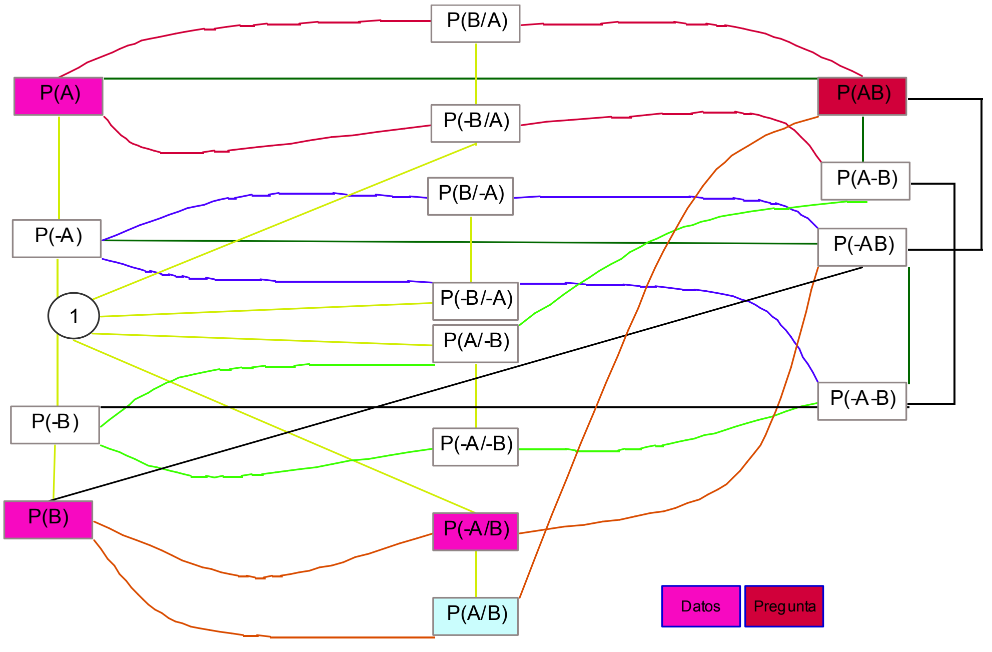


Figura 283 Grafo canónico de [p_{11}]

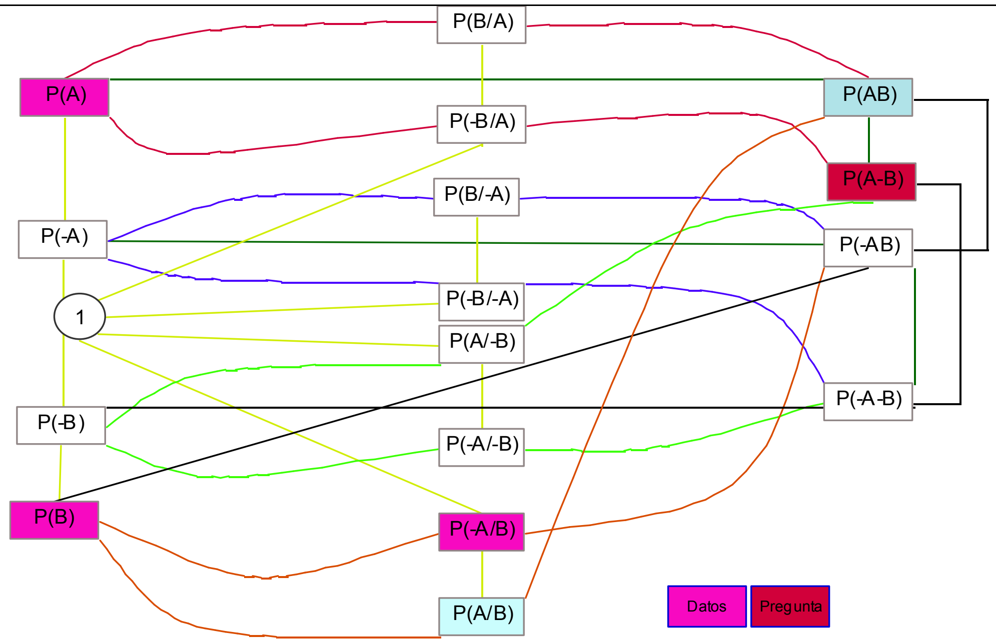


Figura 284 Grafo canónico de [p_{21}]

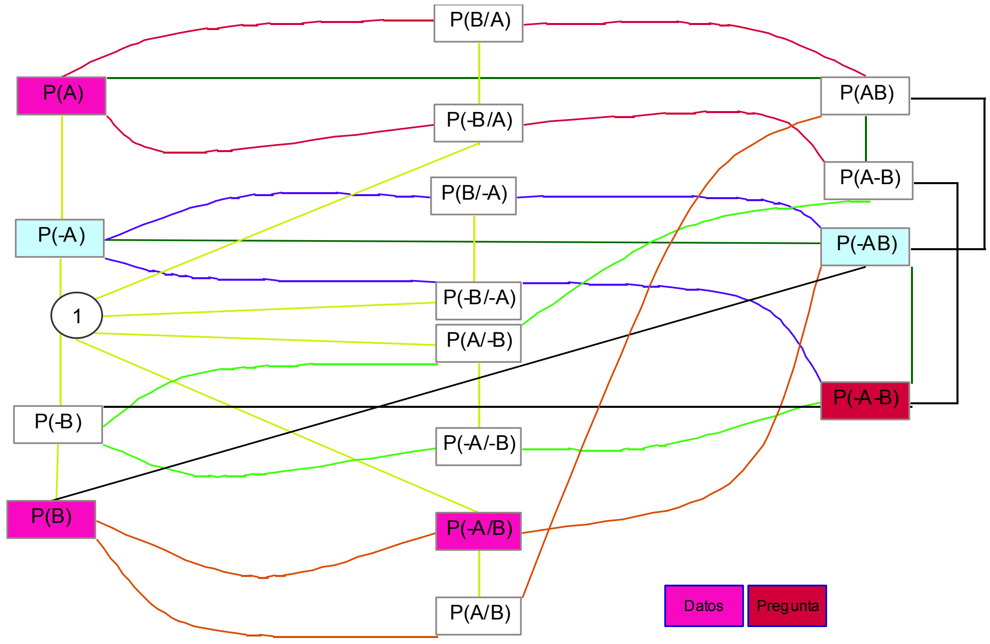


Figura 285 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_3T_3G_3$

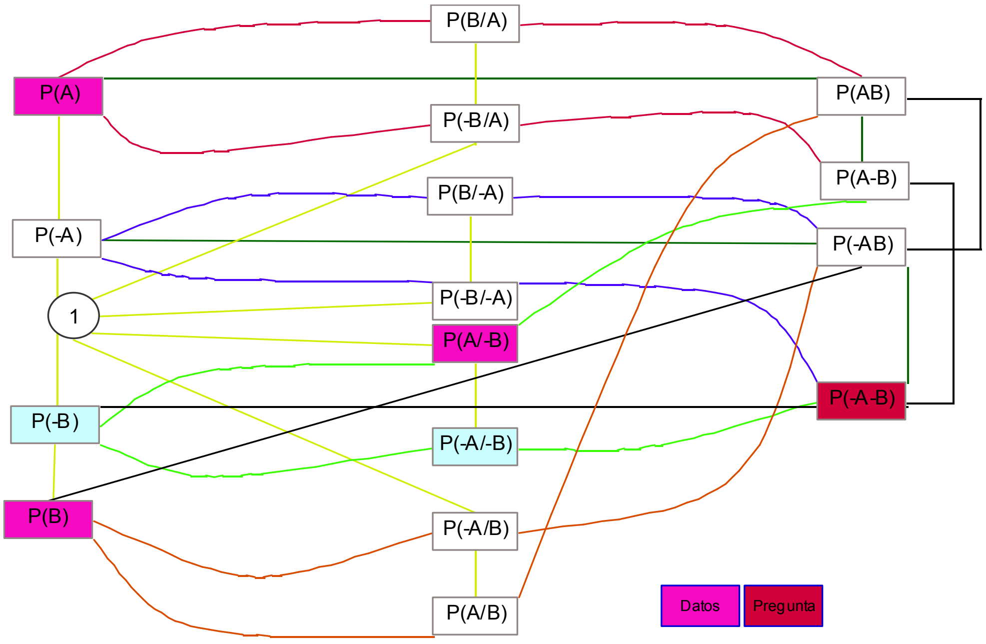


Figura 286 Grafo canónico de [p_{21}]

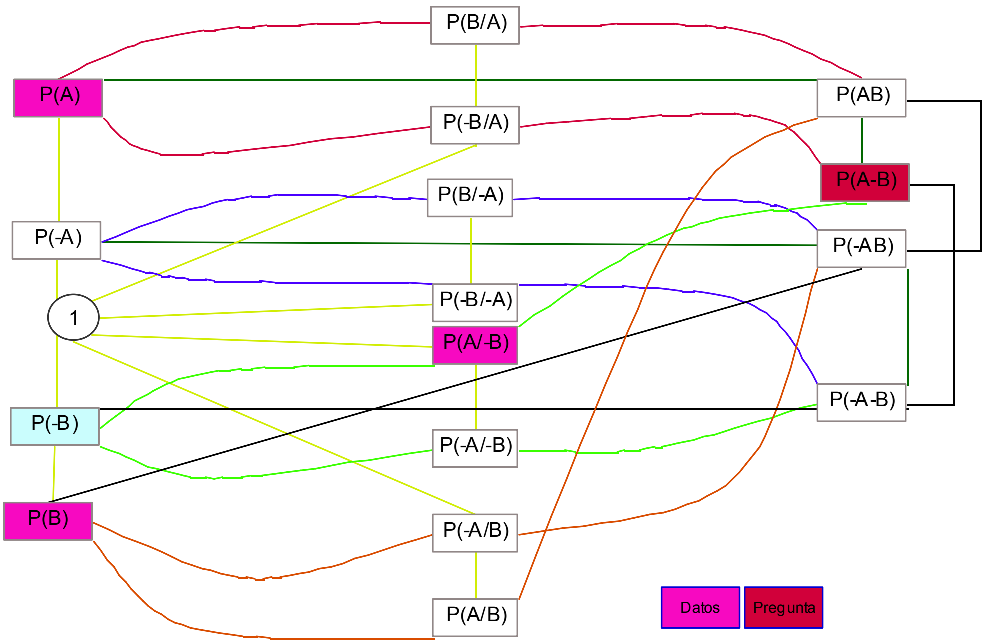


Figura 287 Grafo canónico de [p_{11}]

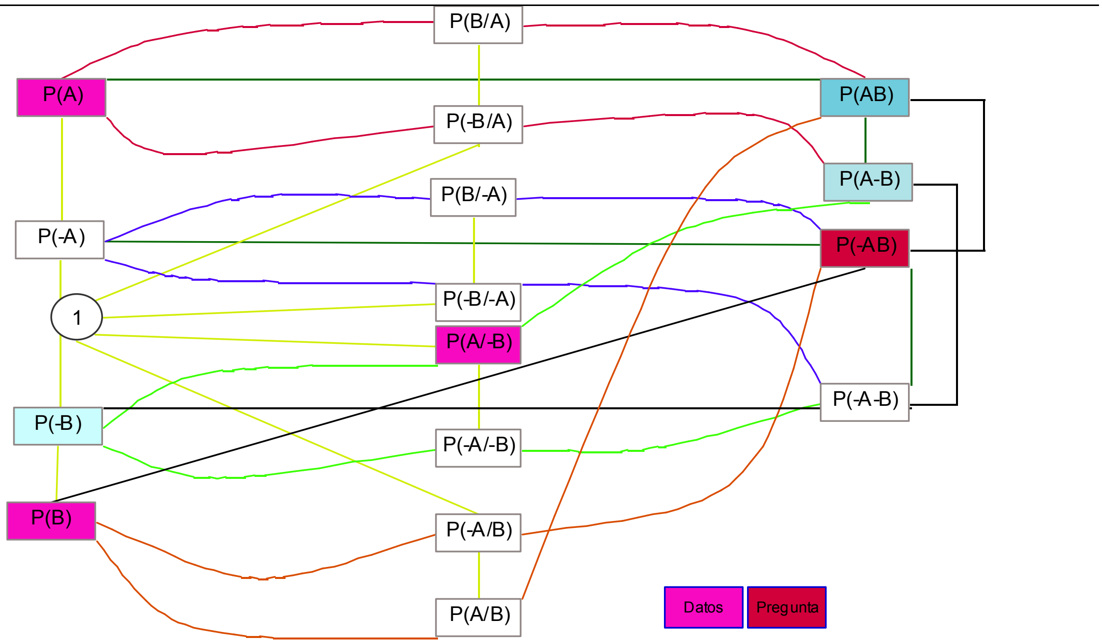


Figura 288 Grafo canónico de [p_{31}]

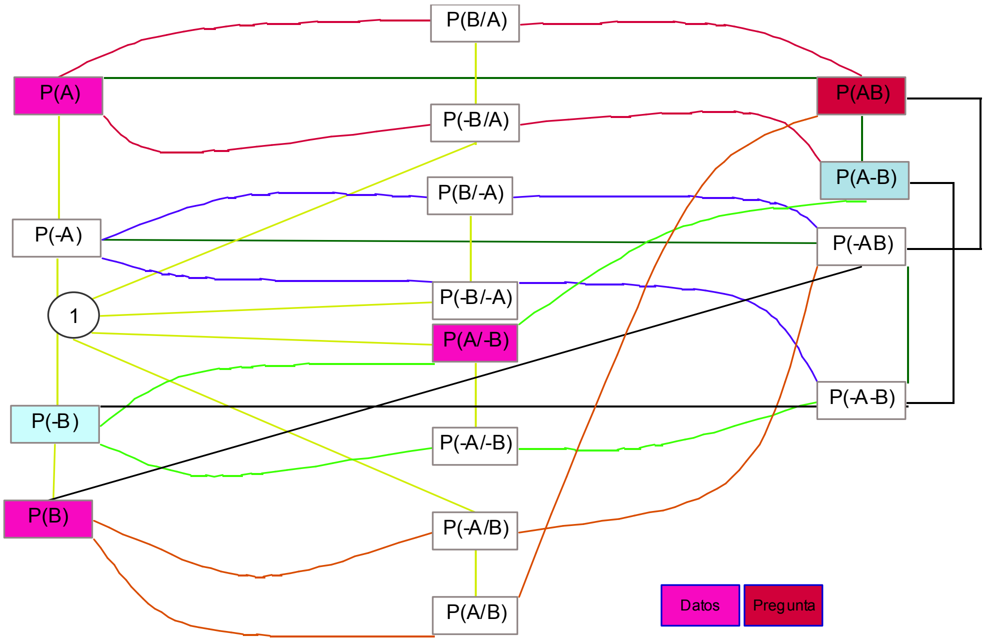


Figura 289 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

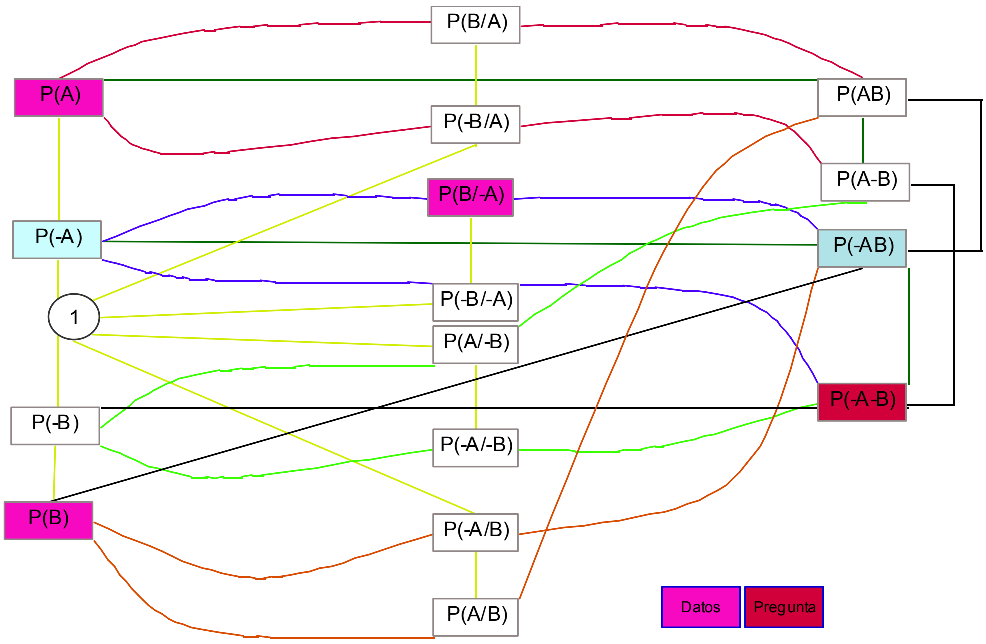


Figura 290 Grafo canónico de [p_{21}]

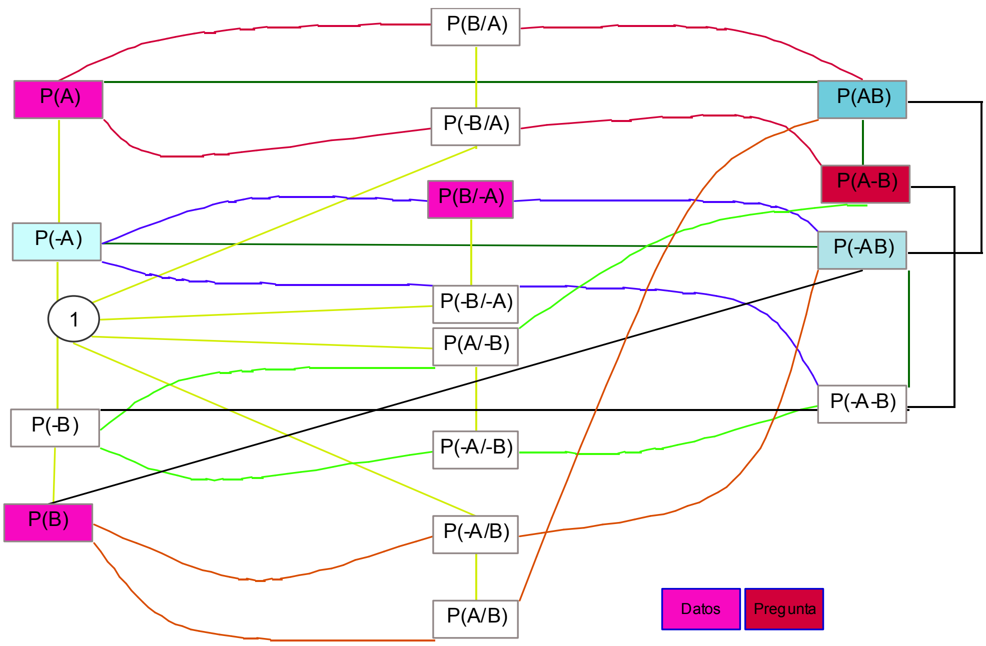


Figura 291 Grafo canónico de [p_{31}]

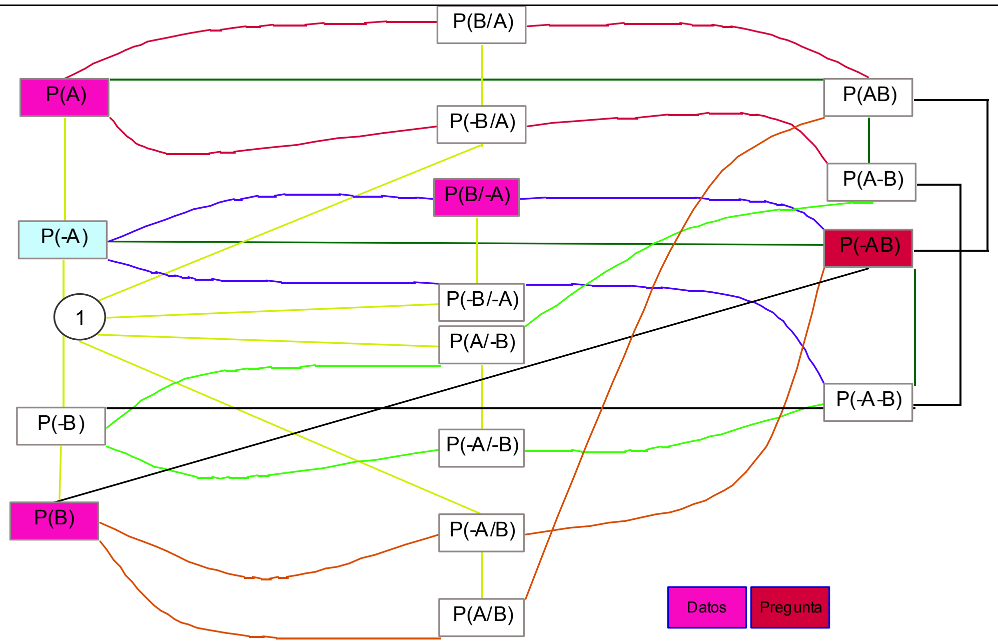


Figura 292 Grafo canónico de [p_{11}]

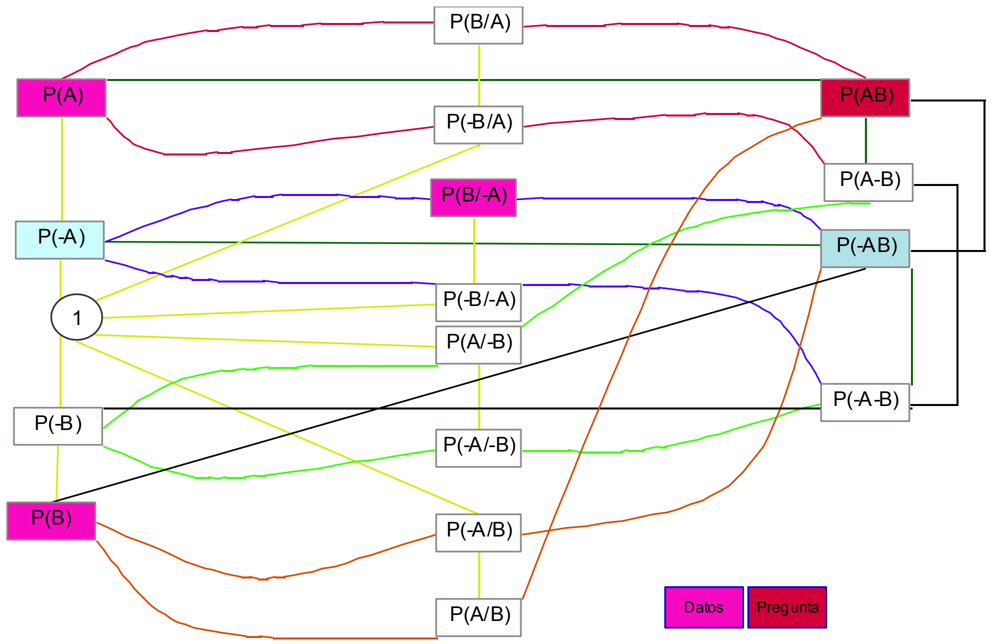


Figura 293 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_3T_3G_4$

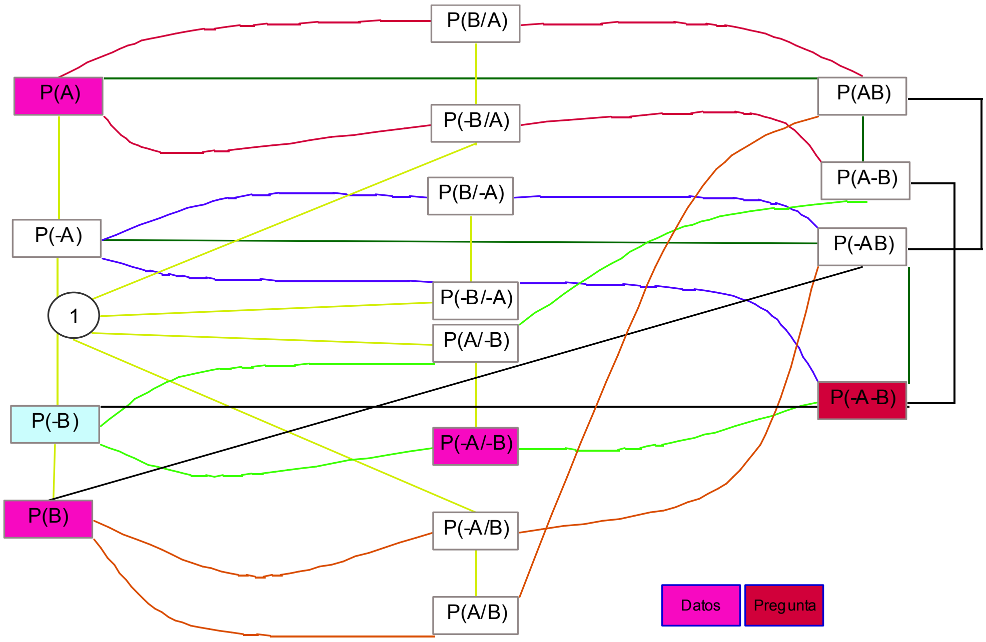


Figura 294 Grafo canónico de [p_{11}]

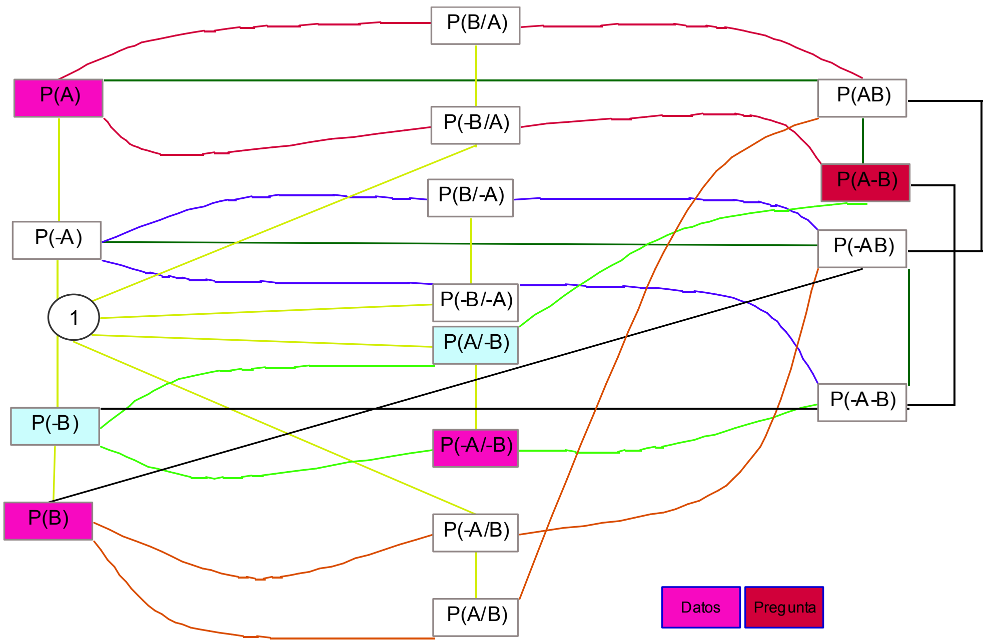


Figura 295 Grafo canónico de [p_{21}]

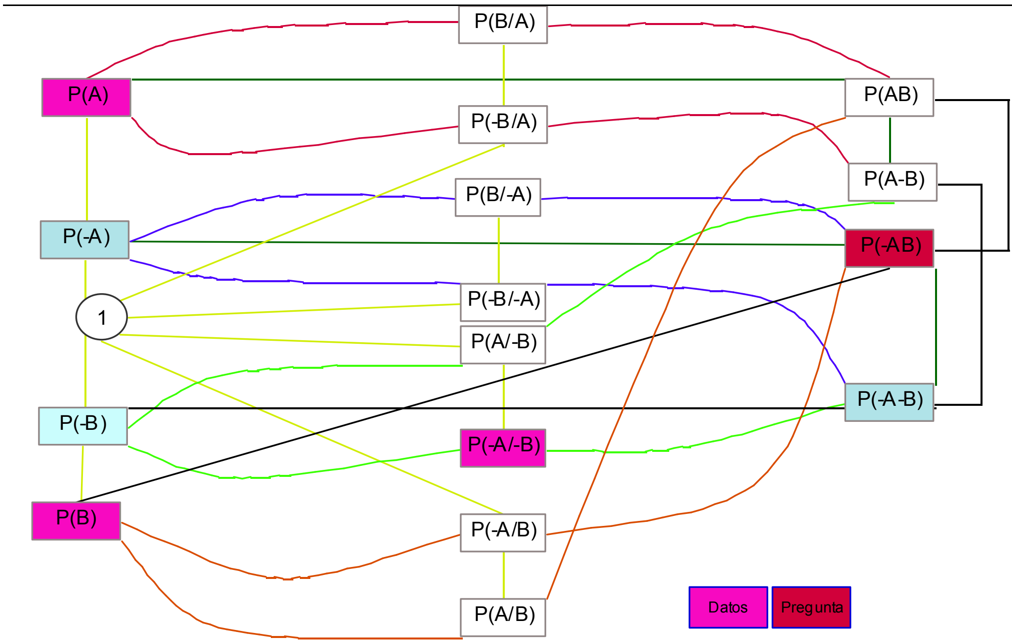


Figura 296 Grafo canónico de [p_{31}]

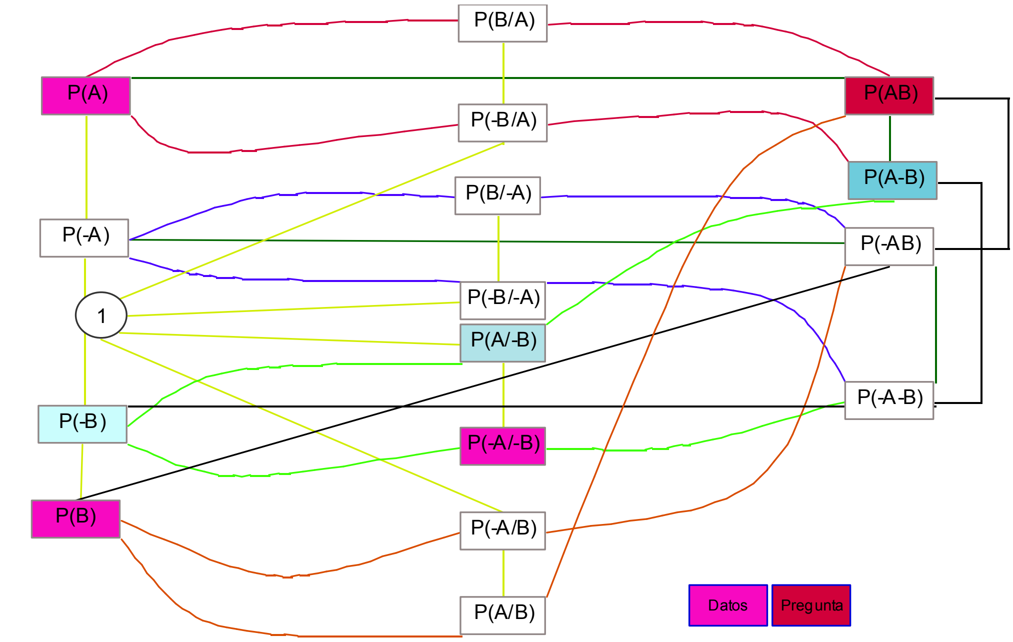


Figura 297 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

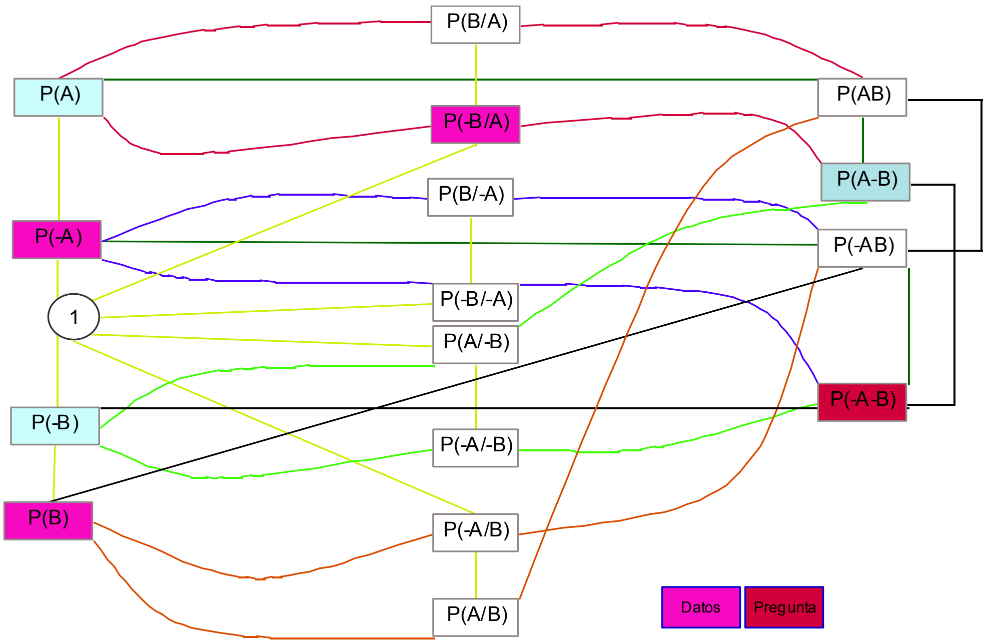


Figura 298 Grafo canónico de [p_{31}]

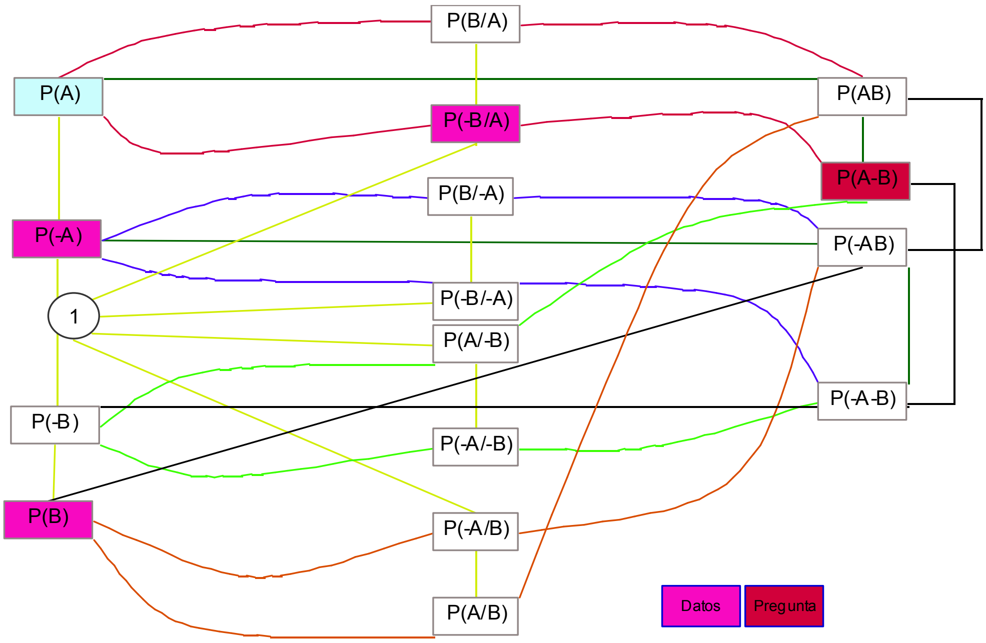


Figura 299 Grafo canónico de [p_{11}]

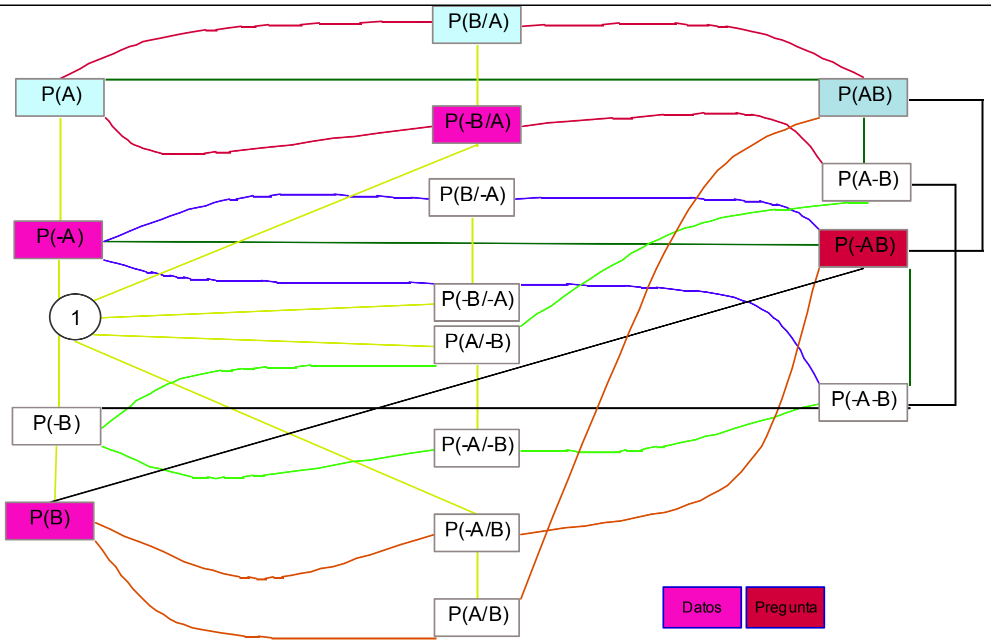


Figura 300 Grafo canónico de [p_{31}]

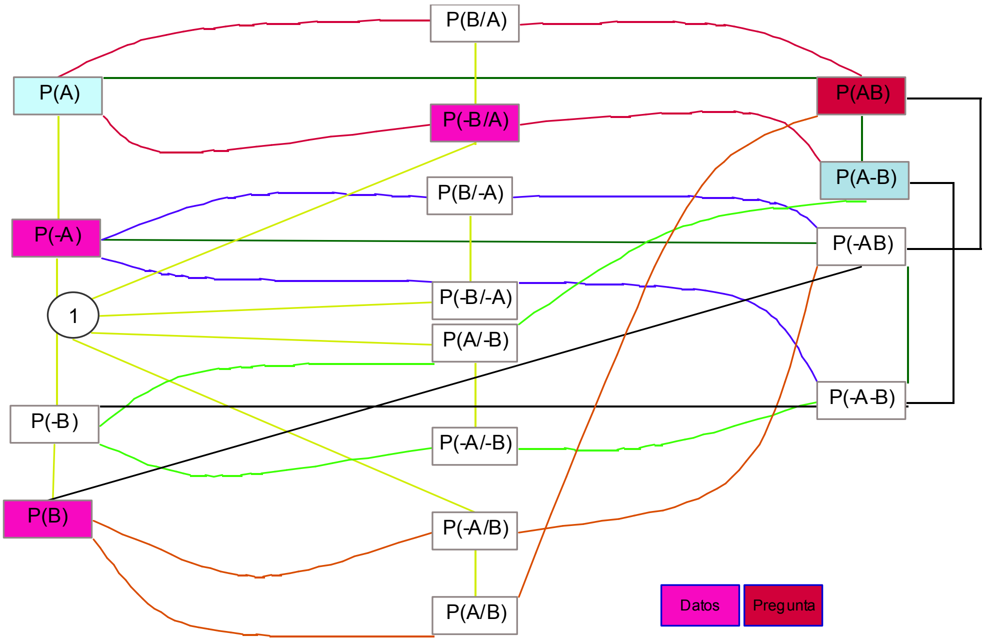


Figura 301 Grafo canónico de [p_{21}]

ÍNDICE

COLECCIÓN DE PROBLEMAS DE LA PRIMERA FASE

PROBLEMA 1 De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	PROBLEMA 9 En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0.3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumno de los que no practica baloncesto, éste practique fútbol es 0.4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.
PROBLEMA 2 Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis un 40% practican golf. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	PROBLEMA 10 En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0.3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0.3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0.4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.
PROBLEMA 3 En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian inglés y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.	PROBLEMA 11 En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie inglés y francés es 0.3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0.3. Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0.4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.
PROBLEMA 4 En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas	PROBLEMA 12 De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0.55. De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0.2, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0.1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.
PROBLEMA 5 En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De éstas, el	PROBLEMA 13 En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer

20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras	es 0.55. De éstas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0.2, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0.1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras .
PROBLEMA 6 En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11'25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	PROBLEMA 14 La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0.55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0.2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0.1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.
PROBLEMA 7 (Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1, cambiado y preparado para la prueba) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?	PROBLEMA 15 En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0.6 y la de aprobar matemáticas es de 0.7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0.8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?
PROBLEMA 8 Santos, D., (1988), Matemáticas COU, Opciones C y D, Madrid: Santillana. p.248, problema 10, cambiado y preparado para la prueba) En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	PROBLEMA 16 En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0.6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0.5. Sabiendo que p(B/A) = 0.7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?
PROBLEMA 17 El 60% de los asistentes a un congreso desayunan zumo de naranja. De los que no desayunan zumo de naranja, un 40%	PROBLEMA 18 En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un

son franceses y un 24% no desayuna zumo de naranja ni es francés. Calcula la probabilidad de ser francés	40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación

Prueba A

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

2. De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0'55. De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0'2, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0'1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas

3. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

4. El 60% de los asistentes a un congreso desayunan zumo de naranja. De los que no desayunan zumo de naranja, un 40% son franceses y un 24% no desayuna zumo de naranja ni es francés. Calcula la probabilidad de ser francés.

Prueba B

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0'3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumnos de los que no practica baloncesto éste practique fútbol es 0'4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

2. En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas

3. En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

4. En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un 40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación.

Prueba C

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian ingles y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.

2. En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11'25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

3. En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0'6 y la de aprobar matemáticas es de 0'7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0'8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

4. En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer es 0'55. De estas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0'2, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

Prueba D

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis un 40% practican golf. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

2. En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

3. En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0'6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0'5. Sabiendo que p(B/A) = 0'7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

4. En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie ingles y francés es 0'3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0'3. Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0'4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.

Prueba E

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

2. La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

3. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

4. En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

Descripción de cada problema de la primera fase

PROB.	$N_2C_iT_j$	Natur.	Semántica	$[p_{ij}]$	Prueba	Nº Estudiantes (EFM, 2BT-C, 2BCS-H, 1BT-C, 1BCS-H, 4ESO)
P1	$N_2C_1T_2$	%	Sabemos que de los…	$[p_{31}]$	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)
P2	$N_2C_1T_3$	%	Además conocemos que de los	$[p_{31}]$	D	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P3	$N_2C_1T_1$	%	Además, de los que… De que … elegido un alumno que …	$[p_{32}]$	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)
P4	$N_2C_2T_3$	%	De las mujeres, el 20% …	$[p_{11}]$	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	$[p_{11}]$	D, E	66 (4, 14, 6, 16, 14, 12)
P6	$N_2C_2T_1$	%	De las niñas, el 20% … De que eligiendo uno de los que	$[p_{12}]$	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	$[p_{02}]$	A, E	67 (4, 15, 7, 16, 14, 11)
P8	$N_2C_3T_3$	%	p(B/A) = 70 %,	$[p_{31}]$	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P9	$N_2C_1T_2$	Probab.	Sabemos …que de los que	$[p_{31}]$	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P10	$N_2C_1T_3$	Probab.	Además conocemos … que de los	$[p_{31}]$	E	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P11	$N_2C_1T_1$	Probab.	Además, …de los que… De que … elegido un alumno que …	$[p_{32}]$	D	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P12	$N_2C_2T_3$	Probab.	De las mujeres, la probabilidad de …	$[p_{11}]$	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)
P13	$N_2C_2T_2$	Probab.	De éstas, la probabilidad de que	$[p_{11}]$	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)
P14	$N_2C_2T_1$	Probab.	De las niñas, la probabilidad de … De que eligiendo un integrante que	$[p_{12}]$	E	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P15	$N_2C_3T_1$	Probab.	Además, elegido un alumno de los que…	$[p_{02}]$	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)

			Si Juan ….			
P16	$N_2C_3T_3$	Probab.	p(B/A) = 0.7,	[p_{31}]	D	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P17	$N_2C_2T_1$	%	De los niños un 40%	Sol. Algeb.	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P18	$N_2C_2T_2$	%	De los que no …	Sol. Algeb.	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)

Tabla 1: Descripción de cada problema de la primera fase

Descripción de los problemas de cada una de las pruebas de la primera fase:

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P1	$N_2C_1T_2$	%	Sabemos que de los…	[p_{31}]
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	[p_{02}]
P12	$N_2C_2T_3$	Probab.	De las mujeres, la probabilidad de …	[p_{11}]
P18	$N_2C_2T_2$	%	De los que no …	Sol. Algeb.

Tabla 2: Descripción de la prueba A

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P4	$N_2C_2T_3$	%	De las mujeres, el 20% …	[p_{11}]
P8	$N_2C_3T_3$	%	p(B/A) = 70 %,	[p_{31}]
P9	$N_2C_1T_2$	Probab.	Sabemos …que de los que	[p_{31}]
P17	$N_2C_2T_1$	%	De los niños un 40%	Sol. Algeb.

Tabla 3: Descripción de la prueba B

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P3	$N_2C_1T_1$	%	Además, de los que… De que … elegido un alumno que …	[p_{32}]
P6	$N_2C_2T_1$	%	De las niñas, el 20% … De que eligiendo uno de los que	[p_{12}]

P13	$N_2C_2T_2$	Probab.	De éstas, la probabilidad de que	[p_{11}]
P15	$N_2C_3T_1$	Probab.	Además, elegido un alumno de los que… Si Juan ….	[p_{02}]

Tabla 4: Descripción de la prueba C

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P2	$N_2C_1T_3$	%	Además conocemos que de los	[p_{31}]
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	[p_{11}]
P11	$N_2C_1T_1$	Probab.	Además, …de los que… De que … elegido un alumno que …	[p_{32}]
P16	$N_2C_3T_3$	Probab.	p(B/A) = 0.7,	[p_{31}]

Tabla 5: Descripción de la prueba D

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	[p_{11}]
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	[p_{02}]
P10	$N_2C_1T_3$	Probab.	Además conocemos … que de los	[p_{31}]
P14	$N_2C_2T_1$	Probab.	De las niñas, la probabilidad de … De que eligiendo un integrante que	[p_{12}]

Tabla 6: Descripción de la prueba E

Nombre, Apellidos:

PROBLEMA 1

En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

PROBLEMA 2

En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

PROBLEMA 3

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.

PROBLEMA 4

De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

PROBLEMA 5

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

PROBLEMA 6

De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?

ÍNDICE

A continuación mostramos las tablas (de tabla 1 a tabla 18) correspondientes a cada uno de los problemas de la primera fase.

Problema 1 De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	4	8	7	5	34
1. Procesos de resolución con éxito.	1	0	0	1	2	0	4
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	0	0	1	0	0	1
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	3	2	3	1	3	12
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	1	0	0	1	0	2
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	2	0	0	0	0	2
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	1	0	0	2
7. Blanco	0	4	0	2	3	2	11

Tabla 1: Número de estudiantes cuyas respuestas a P1 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 2 Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis un 40% practican golf. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	EFM 2	2BT-C 7	2BCS-H 3	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 6	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	3	0	1	2	0	6
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	1	2	2	0	3	8
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	0	0	2	0	4
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	1	0	0	0	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
7. Blanco	1	0	1	5	3	3	13

Tabla 2: Número de estudiantes cuyas respuestas a P2 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 3 En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian inglés y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	5	33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	1	0	1
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	2	0	0	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	4	0	1	4	1	11
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	1	1	4	3	1	10
2.iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección	0	0	1	0	0	0	1
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	1	0	0	0	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
7. Blanco	0	0	1	2	0	3	6

Tabla 3: Número de estudiantes cuyas respuestas a P3 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 4 En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 6	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	2	2	0	3	0	1	8
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	1	2	1	6	2	10
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	1	0	0	0	0	1
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	1	0	0	1	2
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	1	0	1	0	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
7. Blanco	0	1	0	2	2	1	6

Tabla 4: Número de estudiantes cuyas respuestas a P4 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 5 En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	4	14	6	16	14	12	66
1. Procesos de resolución con éxito.	2	8	3	7	8	0	28
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	2	4	3	1	3	8	21
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	0	0	0	0	1	1
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	0	0	0	1	0	1
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	0	0	1	0	1
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	0	1	0	0	3
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
7. Blanco	0	2	1	6	6	3	18

Tabla 5: Número de estudiantes cuyas respuestas a P5 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 6 En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11’25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	5	33
1. Procesos de resolución con éxito.	2	0	0	0	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	1	3	2	6
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	0	1	0	1	0	2
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	3	2	1	1	1	8
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	0	2	0	0	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	2	0	3
7. Blanco	0	2	0	3	1	2	8

Tabla 6: Número de estudiantes cuyas respuestas a P6 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 7 (Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1, cambiado y preparado para la segunda fase) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	4	15	7	16	14	11	67
1. Procesos de resolución con éxito.	4	0	0	0	0	0	4
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	3	1	1	4	6	15
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	0	1	0	0	0	1
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	6	3	8	3	2	22
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	2	0	1	0	3
7. Blanco	0	6	1	7	6	4	24

Tabla 7: Número de estudiantes cuyas respuestas a P7 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 8 Santos, D., (1988), Matemáticas COU, Opciones C y D, Madrid: Santillana. p.248, problema 10, cambiado y preparado para la segunda fase) En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 6	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	6	1	0	4	4	15
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	0	0	0	1	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	2	6	2	0	4	4	18
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	3	1	1	0	5
7. Blanco		2	2	1	2	2	9

Tabla 8: Número de estudiantes cuyas respuestas a P8 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 9 En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0'3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumno de los que no practica baloncesto éste practique fútbol es 0'4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	6	34
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	2	1	2	2	2	10
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	1	0	1	0	4
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	0	0	1	0	0	1
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	0	0	0	0	1	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	3	1	0	4
7. Blanco		4	1	1	4	3	13

Tabla 9: Número de estudiantes cuyas respuestas a P9 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 10 En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
1. Procesos de resolución con éxito.	1	1	0	0	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	3	1	3	5	3	16
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	1	4	1	2	10
7. Blanco	0	1	1	1	1	1	5

Tabla 10: Número de estudiantes cuyas respuestas a P10 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 11 En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie ingles y francés es 0'3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0'3. Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0'4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	7	3	8	7	6	33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	1	0	0	0	0	1
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	1	2	0	1	0	5
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	0	2	0	0	4
2.iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección	0	0	0	0	0	1	1
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	1	0	0	1	0	2
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	0	0	0	0	4	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco		2	1	5	4	2	14

Tabla 11: Número de estudiantes cuyas respuestas a P11 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 12 De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0’55. De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0’2, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0’1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 4	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 5	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	2	1	1	0	1	1	6
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	2	0	0	2	3	7
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	0	2	0	0	0	2
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	1	0	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco		3		3	8	1	15

Tabla 12: Número de estudiantes cuyas respuestas a P12 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 13 En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer es 0'55. De estas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0'2, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	5	33
1. Procesos de resolución con éxito.	1	2	0	0	0	0	3
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	1	2	2	2	3	10
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	1	1	0	0	0	0	2
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	0	1	1	0	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco	0	1	1	3	5	2	12

Tabla 13: Número de estudiantes cuyas respuestas a P13 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 14 La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	EFM 2	2BT-C 7	2BCS-H 3	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 6	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	1	0	0	1	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	1	2	2	5
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	1	0	0	0	0	1
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	3	3	0	1	0	7
3.ii. Interpretación de la condicional por una marginal.	0	1	0	1	0	0	2
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	0	0	0	1	1
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	0	0	1	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco	0	2	0	3	4	3	12

Tabla 14: Número de estudiantes cuyas respuestas a P14 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 15 En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0'6 y la de aprobar matemáticas es de 0'7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0'8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 5	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	2	0	0	0	0	0	2
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	0	0	0	0	1	1
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	0	3	1	4
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	1	0	0	2	1	4
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	1	0	1	0	0	2
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco	0	6	3	5	5	2	21

Tabla 15: Número de estudiantes cuyas respuestas a P15 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 16 En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0'6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0'5. Sabiendo que p(B/A) = 0'7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	7	3	8	7	6	33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	1	0	1	3	3	9
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	0	0	0	1	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	2	1	1	1	3	3	11
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	2	0	3	1	0	6
7. Blanco		4	2	4	2	3	15

Queremos resaltar que en este problema, al igual que en P8, los estudiantes que interpretan que p(B|A) representa la probabilidad de los aprobados en las dos asignaturas, es decir, interpretan p(B|A) como la probabilidad de la intersección, a la vez interpretan que el complementario de esta intersección es la probabilidad de no aprobar ninguna asignatura. De aquí el número elevado que se corresponde con el descriptor 5.

Tabla 16: Número de estudiantes cuyas respuestas a P16 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 17: En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un 40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	6	34
1. Procesos de resolución con éxito.	2	0	0	0	0	0	2
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	1	0	0	0	0	1
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	0	1	0	1
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	1	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	4	4	3	11
7. Blanco	0	3	3	3	3	2	14

Tabla 17: Número de estudiantes cuyas respuestas a P17 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 18: El 60% de los asistentes a un congreso desayunan zumo de naranja. De los que no desayunan zumo de naranja, un 40% son franceses y un 24% no desayuna zumo de naranja ni es francés. Calcula la probabilidad de ser francés.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	4	8	7	5	34
1. Procesos de resolución con éxito.	1	0	0	0	0	0	1
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	1	0	0	0	0	1
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	3	1	0	0	2	6
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	1	1	0	0	0	1	3
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	0	2	1	0	3
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	1	0	2	0	3
7. Blanco	0	2	1	3	2	2	10

Tabla 18: Número de estudiantes cuyas respuestas a P18 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Las tablas siguientes, 19 y 20, muestran los porcentajes de estudiantes según los descriptores definidos, en los problemas con los datos en porcentajes y en los problemas con los datos en términos de probabilidad respectivamente.

		PROBLEMAS CON LOS DATOS EN PORCENTAJES							
		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	11.76	18.18	3.03	23.53	42.42	6.06	5.97	0
	1'. No éxito	55.88	42.43	78.79	58.82	30.31	69.7	58.21	73.53
	2.i. Condicional por marginal (datos)	5.26	0	7.69	0	0	0	0	0
	2.ii Condicional por intersección	63.16	57.14	42.31	38.46	55.26	26.09	38.46	60
	2.iii. Intersección por marginal y condicional por marginal	0	28.57	38.46	0	0	0	0	0
	2.iv. Intersección por marginal y condicional por intersección	0	0	3.85	5	0	8.7	0	0
	2.v. Intersección por marginal	10.53	0	3.85	0	2.63	0	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	10.53	0	0	0	2.63	0	0	0
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	0	0	0	0	0	0	2.56	0
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	0	0	0	34.78	56.41	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0	0	0	0	0	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	7.14	0	10	2.63	0	7.69	0
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0	0	20	7.9	17.39	0	4
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	10.53	7.14	3.85	5	2.63	13.04	0	72
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	0	0	0	0	20
	7. Blanco	32.36	39.39	18.18	17.64	27.27	24.24	35.82	26.47

Tabla 19: Porcentajes de los estudiantes en los ocho primeros problemas según descriptores definidos

		PROBLEMAS CON LOS DATOS EN TÉRMINOS DE PROBABILIDAD							
		P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	0	6.06	0	17.64	9.09	6.06	6.06	0
	1'. No éxito	61.76	78.79	57.58	38.24	54.55	57.58	30.3	54.55
	2.i. Condicional por marginal (datos)	0	0	5.26	0	0	0	10	0
	2.ii Condicional por intersección	47.62	61.54	26.32	25	55.56	26.32	40	50
	2.iii. 2ª intersección por marginal y condicional por marginal	19.05	38.46	21.05	0	0	0	0	0
	2.iv. 2ª intersección por marginal y condicional por intersección	0	0	5.26	0	11.11	0	0	0
	2.v. Intersección por marginal	4.76	0	10.53	0	0	0	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	0	0	0	15.38	0	5.26	0	0
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	4.76	0	0	0	0	0	0	5.56
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	21.05	0	0	36.84	40	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0	0	0	0	10.53	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	0	0	7.69	0	5.26	0	0
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0	0	0	22.22	5.26	20	0
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	4.76	0	5.26	7.69	5.56	5.26	0	61.11
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	19.05	0	5.26	0	5.56	5.26	10	33.33
	7. Blanco	38.24	15.15	42.42	44.12	36.36	36.36	63.64	45.45

Tabla 20: Porcentajes de los estudiantes en los problemas de P9 a P16 según descriptores definidos

La tabla 21 da cuenta de los porcentajes de los estudiantes en los problemas indeterminados, P17 y P18, según los descriptores elegidos.

		P17	P18
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	5.88	2.94
	1'. No éxito	53.92	67.65
	2.i. Condicional por marginal (datos)	2.94	2.94
	2.ii Condicional por intersección	2.94	0
	2.iii. 2ª intersección por marginal y condicional por marginal	0	0
	2.iv. 2ª intersección por marginal y condicional por intersección	0	0
	2.v. Intersección por marginal	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	0	17.65
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	2.94	8.82
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	8.82
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	0	0
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	32.35	8.82
	7. Blanco	41.18	29.41

Tabla 21: Porcentajes de los estudiantes en los problemas indeterminados P17 y P18 según descriptores definidos

Las tablas siguientes (22 a 25) muestran el número de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase, según el nivel educativo:

4º ESO	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	13	2	0	13	2	3
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	7	0	0	4	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	6	2	0	9	2	3
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	10	12	16	12	13	20
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	10	11	0	0	19
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	5	0	0	0	4	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	2	0	0	0	1	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	1	1	9	11	10	20
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	1	1	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	5	9	3	1	1	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	8	17	15	6	16	8

Tabla 22: Número de estudiantes de 4º ESO que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

1º BCN	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	4	3	1	12	2	2
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	4	1	1	12	2	2
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	2	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	15	13	14	9	11	14
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	10	10	0	0	10
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	1
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	1	0	0	2	3	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	1	0	0	2	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	2	0	0	0	1	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	1	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	5	12	11	4	7	12
2.2.2.1.3. Reglas de tres	2	0	0	2	1	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	5	3	4	0	0	1
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	5	8	9	3	11	8

Tabla 23: Número de estudiantes de 1º BCN que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

2º BCCSS	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	4	4	2	6	0	3
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	4	0	0	6	0	3
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	3	0	0	3	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	1	1	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	3	1	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	3	1	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	8	7	7	6	6	5
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	1	4	2	0	0	4
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	1	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	1	0	0	2	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	1	0	0	0	3	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	2	0	4	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	5	4	3	0	4
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	1	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	1	1	3	0	2	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	1	0	0	0	1	1
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	5	5	2	1	2	1
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	1	2	1	2	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	2	1	1	1	1	0
3. Otras	3	4	6	3	9	7

Tabla 24: Número de estudiantes de 2º BCCSS que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

EFM	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	8	4	3	7	5	2
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	5	1	0	6	1	1
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	1	2	1	3	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	1	1	1	1	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	3	2	1	0	1	1
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	1	6	5	0	3	5
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	3	2	0	3	3
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	0	1	0	0	0
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	1	1	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	1	1	0	0	2
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	1	1	1	0	0	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	2	0	0	0	1
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	1	0	2	3	2	3

Tabla 25: Número de estudiantes de EFM que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Las tablas siguientes (26 a 29) muestran el porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase, según el nivel educativo:

4º ESO	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	41.94	6.45	0	41.94	6.45	9.68
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	53.85	0	0	30.77	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	46.15	50	0	69.23	100	100
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	32.26	38.70	51.61	38.71	41.94	64.52
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	53.33	68.75	0	0	95
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	50	0	0	0	30.77	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	20	0	0	0	7.69	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	10	8.33	56.25	91.67	76.92	100
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	6.25	8.33	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	50	75	18.75	8.33	7.69	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	25.8	54.84	48.39	19.35	51.61	25.8

Tabla 26: Porcentaje de estudiantes de 4º ESO que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

1º BCN	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	16.67	12.5	4.17	50	8.33	8.33
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	100	33.33	100	100	100	100
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	66.67	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	62.5	54.17	58.33	37.5	45.84	58.34
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	76.92	71.43	0	0	71.43
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	7.14
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	6.67	0	0	22.22	27.27	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	6.67	0	0	22.22	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	13.33	0	0	0	9.1	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	9.1	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	33.33	92.31	78.57	44.44	63.64	85.71
2.2.2.1.3. Reglas de tres	13.33	0	0	22.22	9.1	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	33.33	23.08	28.57	0	0	7.14
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	20.83	33.33	37.5	12.5	45.83	33.33

Tabla 27: Porcentaje de estudiantes de 1º BCN que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

2º BCCSS	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito	26.67	26.67	13.33	40	0	20
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	100	0	0	100	0	100
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	75	0	0	50	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	25	50	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	75	50	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	100	100	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	53.33	53.33	46.67	40	40	33
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	12.5	57.14	28.57	0	0	80
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	16.67	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	12.5	0	0	33.33	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	12.5	0	0	0	50	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	28.57	0	66.67	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	71.43	57.14	50	0	80
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	16.67	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	12.5	14.28	42.86	0	33.33	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	12.5	0	0	0	16.67	20
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	62.5	71.43	28.57	16.67	33.33	20
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	14.28	28.57	16.67	33.33	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	25	14.28	14.29	16.67	16.67	0
3. Otras	20	26.67	40	20	60	46.67

Tabla 28: Porcentaje de estudiantes de 2º BCCSS que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

EFM	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	80	40	30	70	50	20
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	62.5	25	0	85.71	20	50
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	25	66.67	14.28	60	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	100	50	100	33.33	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	37.5	50	33.33	0	20	50
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	10	60	50	0	30	50
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	30	40	0	100	60
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	0	20	0	0	0
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	16.67	20	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	16.67	20	0	0	40
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	100	16.67	20	0	0	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	33.33	0	0	0	20
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	10	0	20	30	20	30

Tabla 29: Porcentaje de estudiantes de EFM que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Las tablas 30 y 31 muestran, respectivamente, el número de estudiantes y el porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase de toda la muestra

Toda la muestra	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	29	13	6	38	9	10
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	7	0	0	4	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	19	4	1	33	5	9
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	3	0	0	3	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	4	3	1	3	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	1	1	1	1	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	3	5	2	0	1	1
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	3	1	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	34	38	42	27	33	44
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	1	27	25	0	3	36
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	1
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	6	0	0	2	8	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	2	0	0	4	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	5	0	0	0	5	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	2	0	5	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	6	18	25	18	17	36
2.2.2.1.3. Reglas de tres	2	0	1	4	1	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	1	2	4	0	2	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	1	1	1	0	1	3
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	16	18	10	2	3	2
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	3	2	1	2	1
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	2	1	1	1	1	0
3. Otras	17	29	32	15	38	26

Tabla 30: Número de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Toda la muestra	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	36.25	16.25	7.5	47.5	11.25	12.5
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	24.13	0	0	10.53	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	65.52	30.77	16.67	86.84	55.55	90
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	16.7	0	0	9.09	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	30.77	50	2.63	33.33	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	25	33.33	100	33.33	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	10.34	38.46	33.33	0	11.11	10
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	60	50	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	42.5	47.5	52.5	33.75	41.25	55
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	2.94	71.05	59.52	0	9.1	81.81
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	2.27
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	17.65	0	0	7.41	24.24	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	5.88	0	0	14.81	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	14.71	0	0	0	15.15	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	4.76	0	15.15	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	17.65	47.37	59.52	66.67	51.51	81.81
2.2.2.1.3. Reglas de tres	5.88	0	2.38	14.81	3.03	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	2.94	5.26	12.5	0	6.06	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	2.94	2.63	2.38	0	3.03	6.82
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	47.06	47.37	23.81	7.41	9.1	4.55
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	7.89	4.76	3.7	6.06	2.27
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	5.88	2.63	2.38	3.7	3.03	0
3. Otras	21.25	36.25	40	18.75	47.5	32.5

Tabla 31: Porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Índice

En este anexo mostramos las diferentes situaciones de los datos en cada uno de los grupos en los que dividimos cada N_2C_i.

N_2C_1

Grupo 1, G_1

Las figuras 1, 2, 3y 4 dan cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

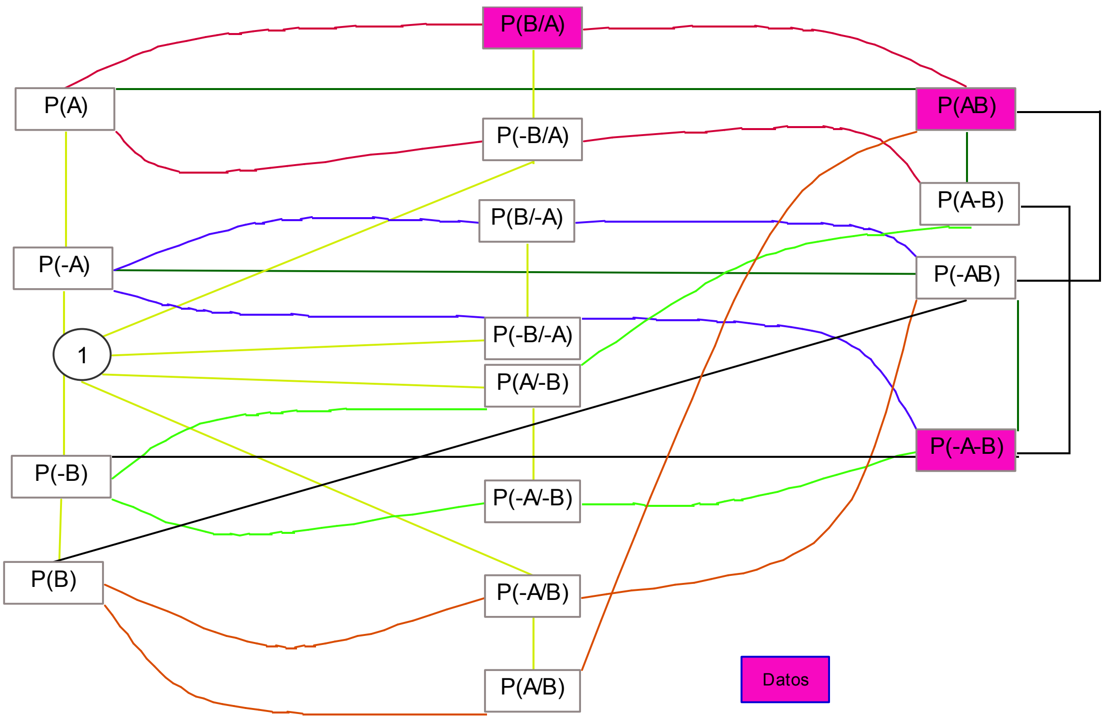


Figura 1

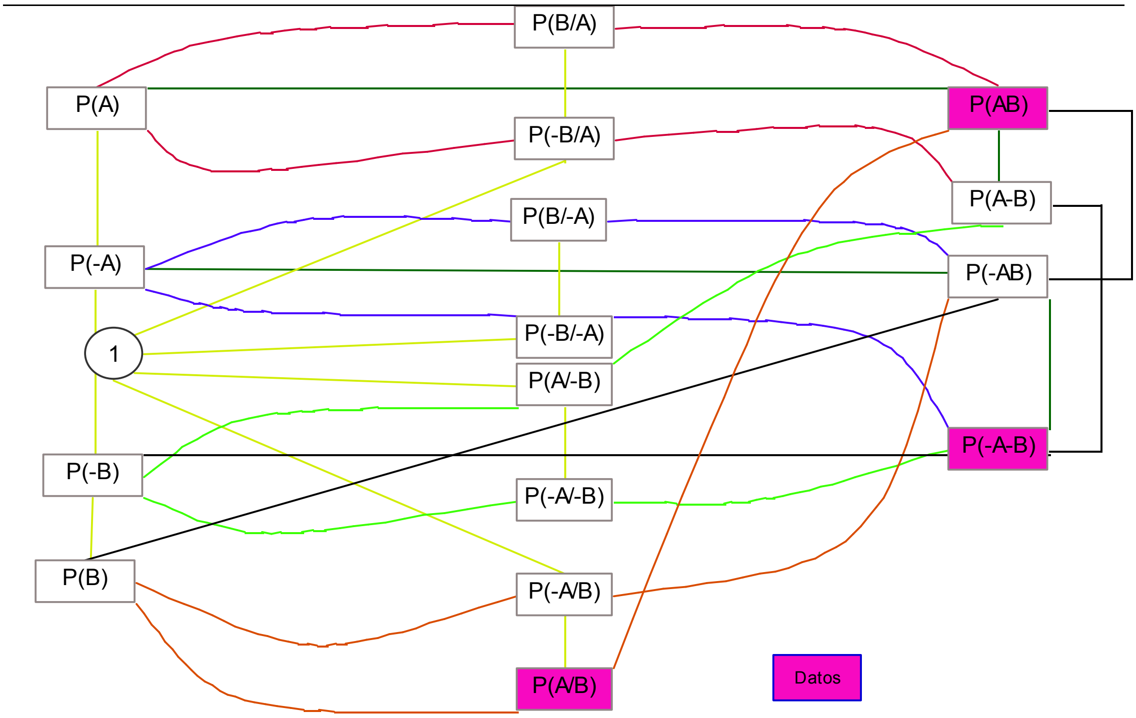


Figura 2

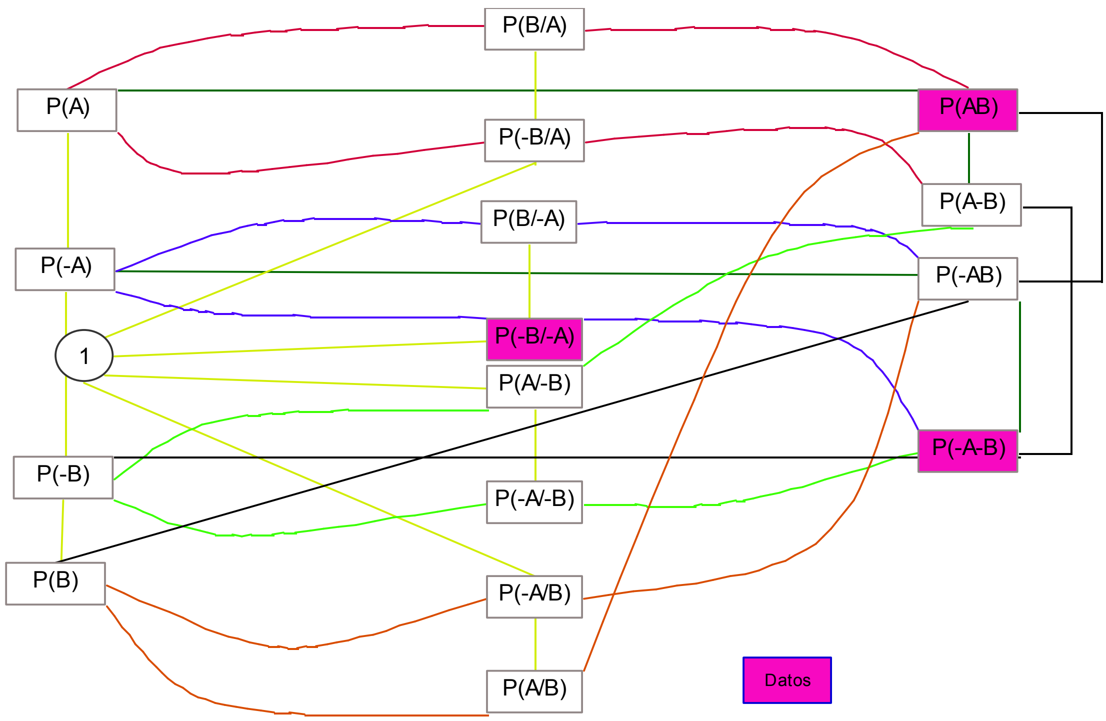


Figura 3

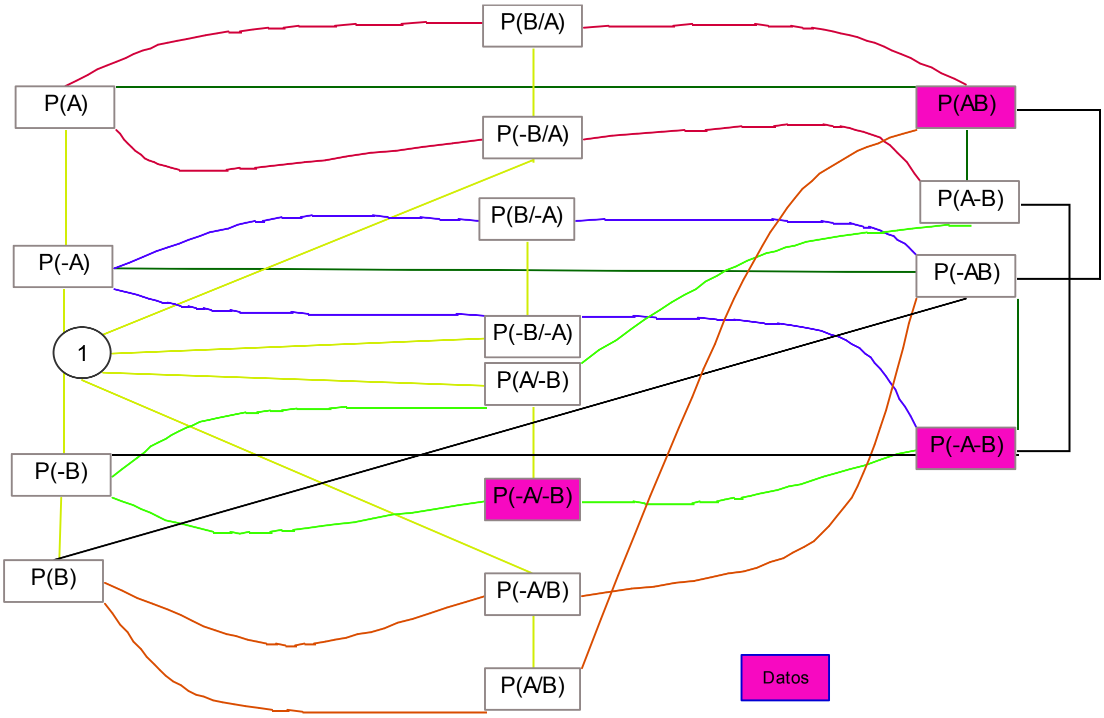


Figura 4

Grupo 2, G_2: figura 5 y 6

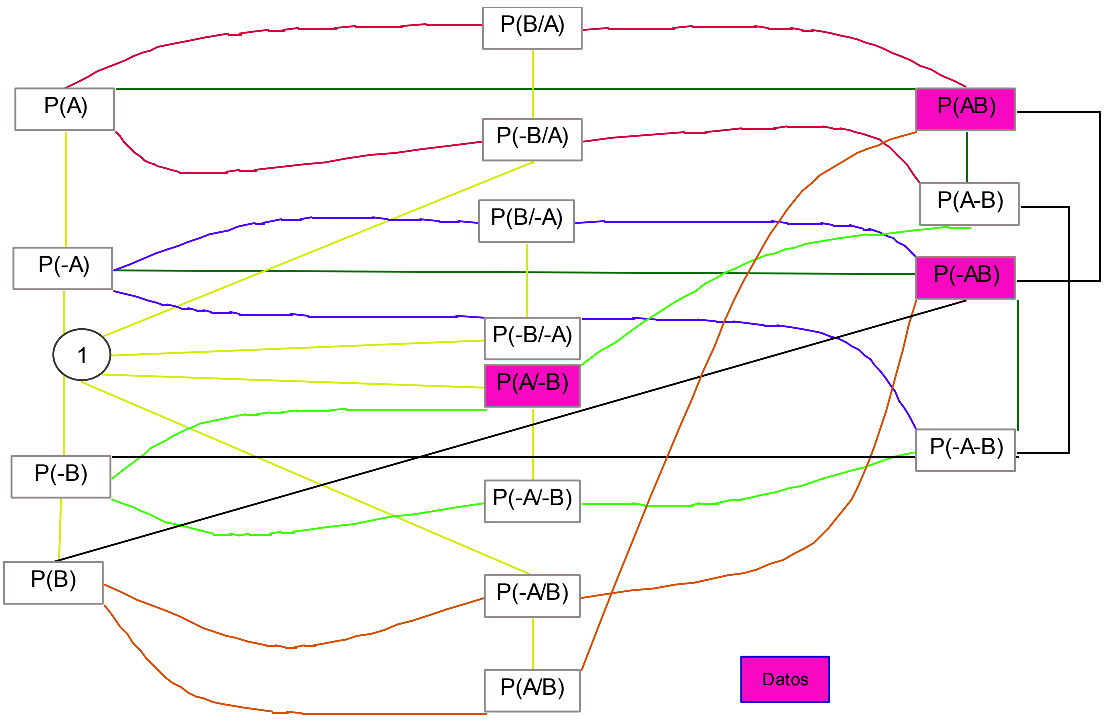


Figura 5

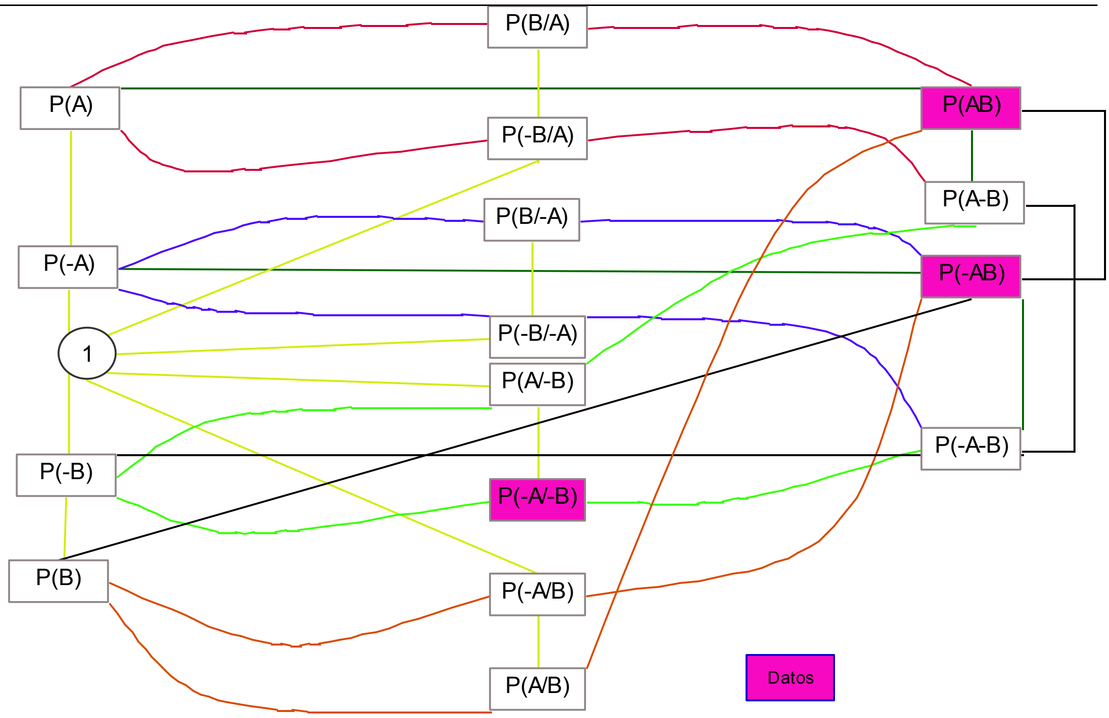


Figura 6

Grupo 3, G_3: las figuras 7 y 8 dan cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

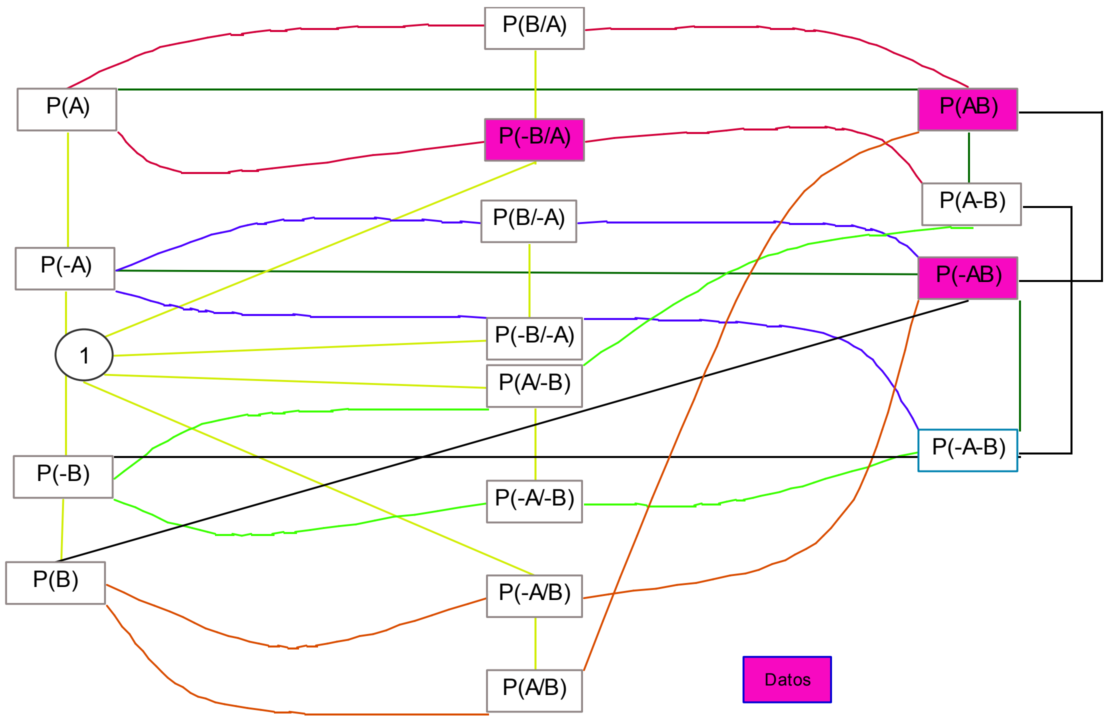


Figura 7

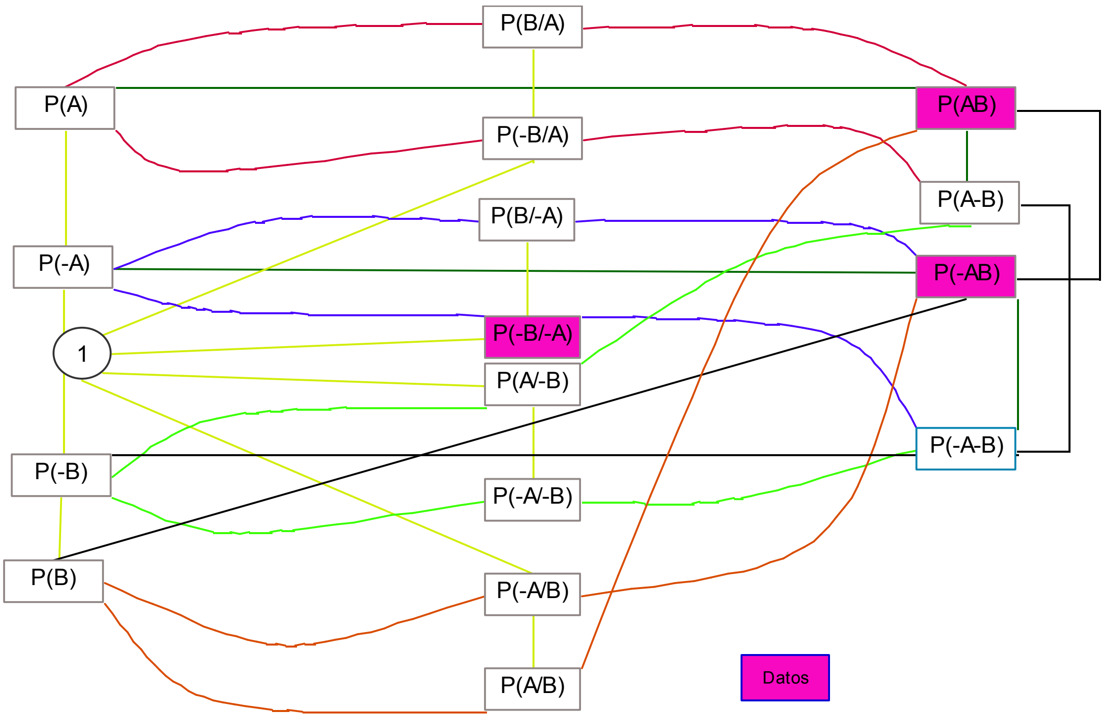


Figura 8

Grupo 4, G_4 Las figuras 9 y 10 dan cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

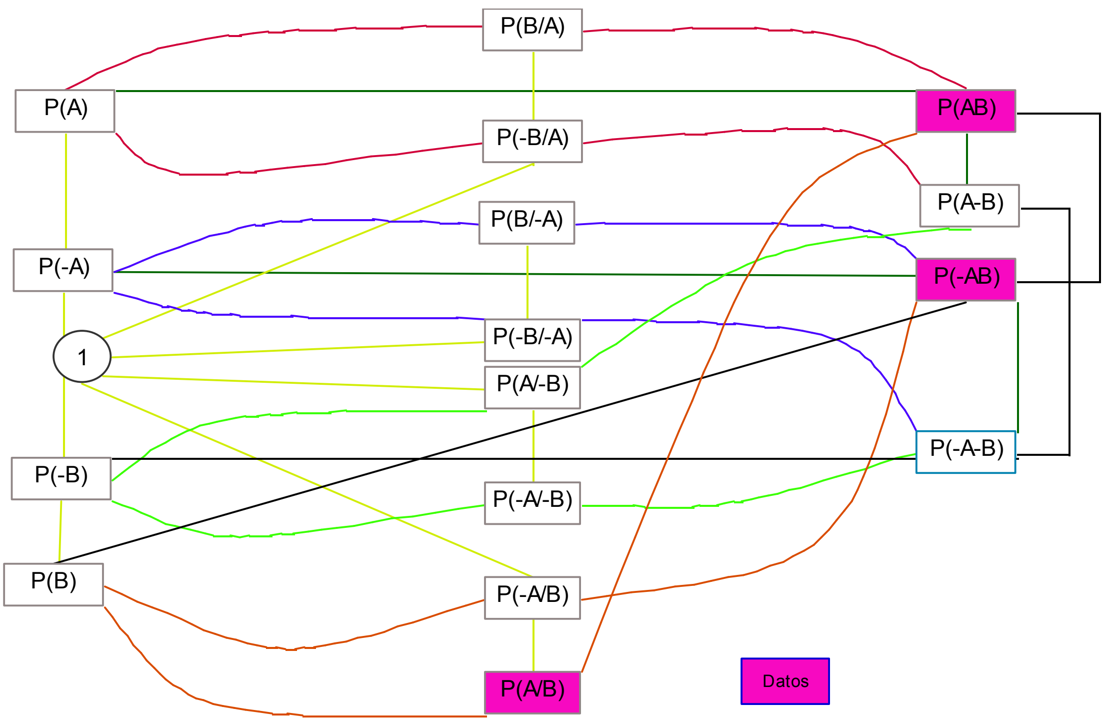


Figura 9

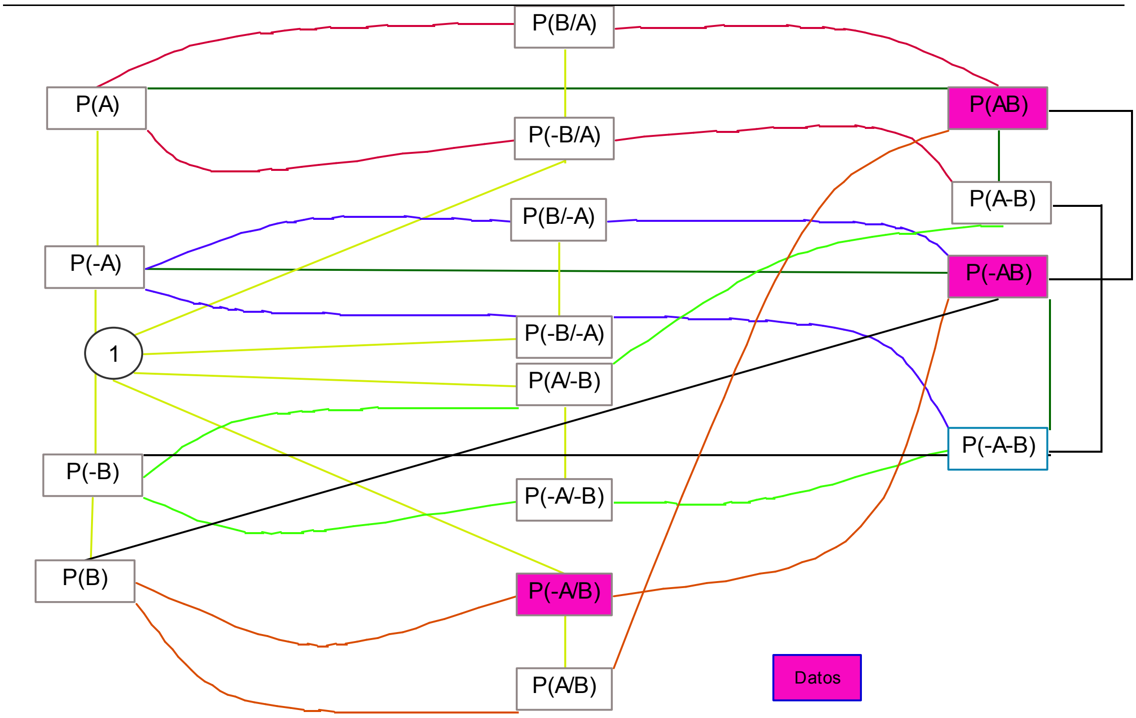


Figura 10

Grupo 5, G_5 Las figuras 11 y 12 dan cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

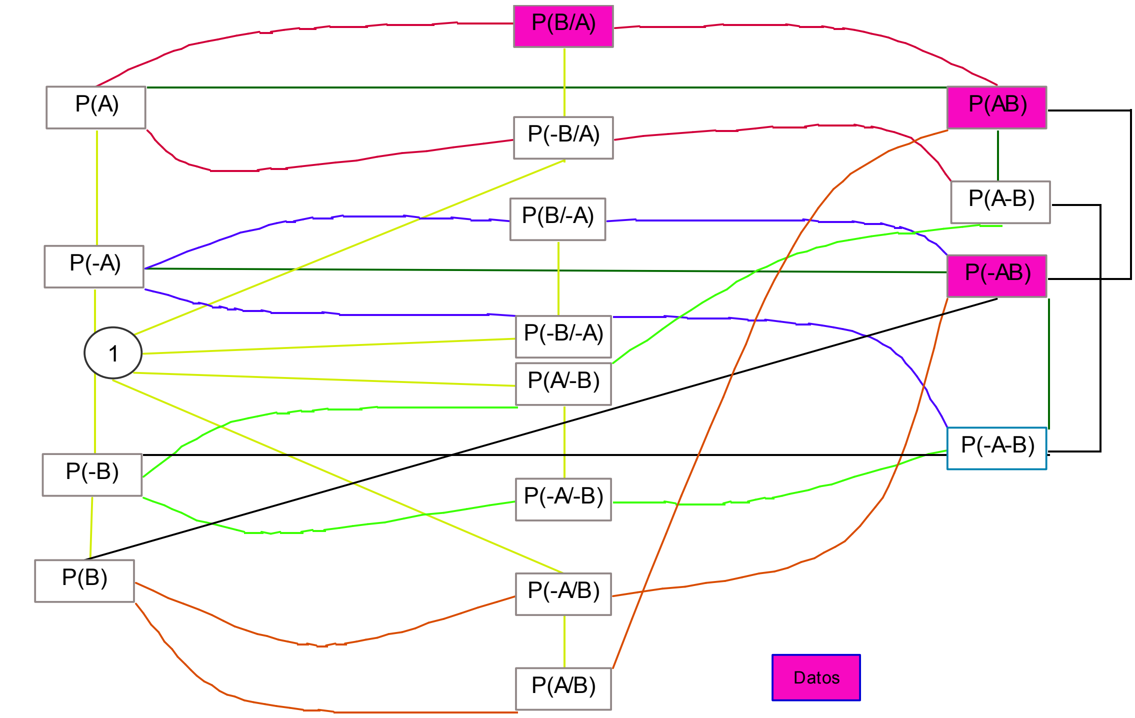


Figura 11

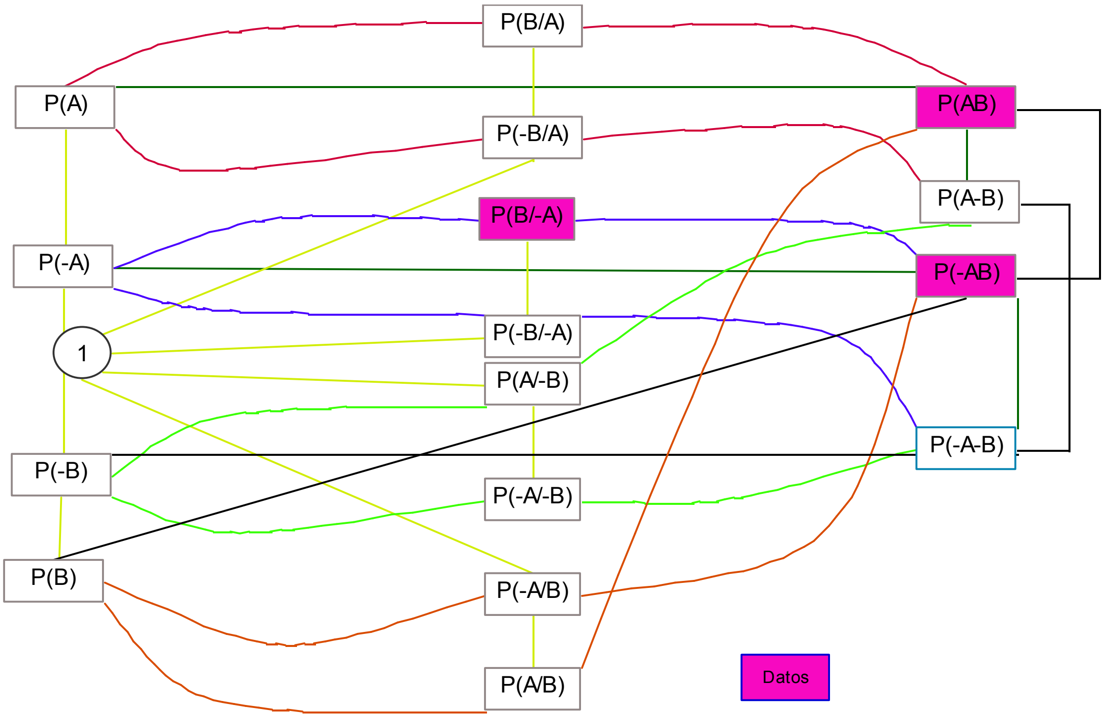


Figura 12

Grupo 6, G_6 Las figuras 13 da cuenta de las situaciones de los datos en este grupo

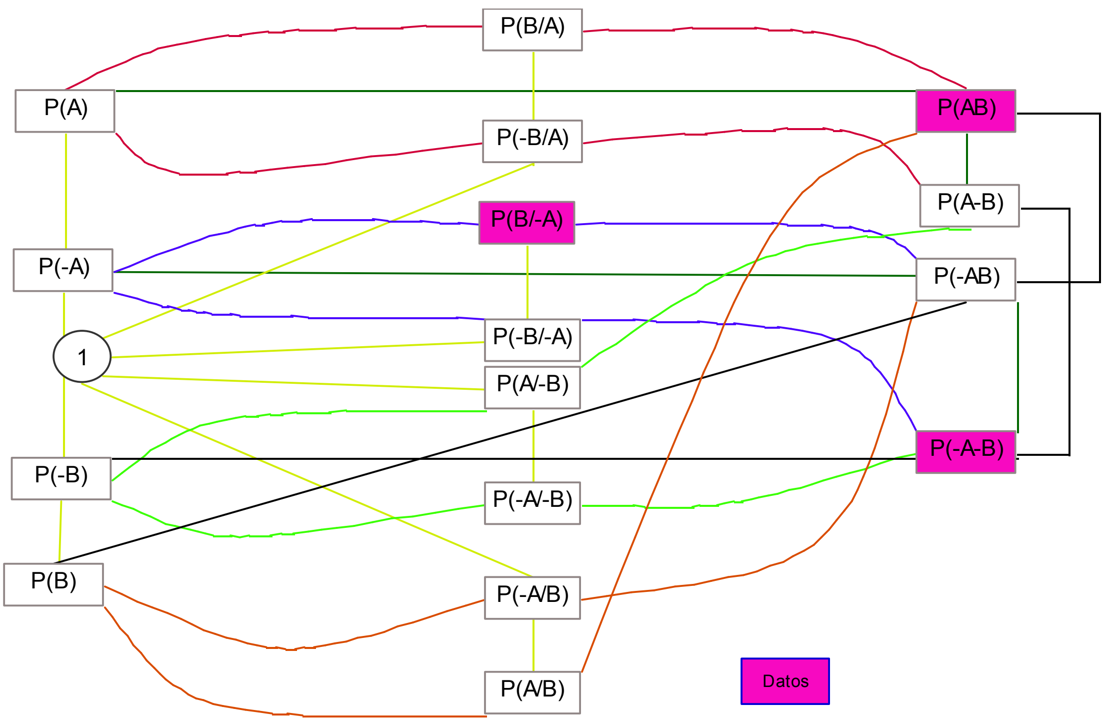


Figura 13

N_2C_2

Grupo 1, G_1

La figura 14 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

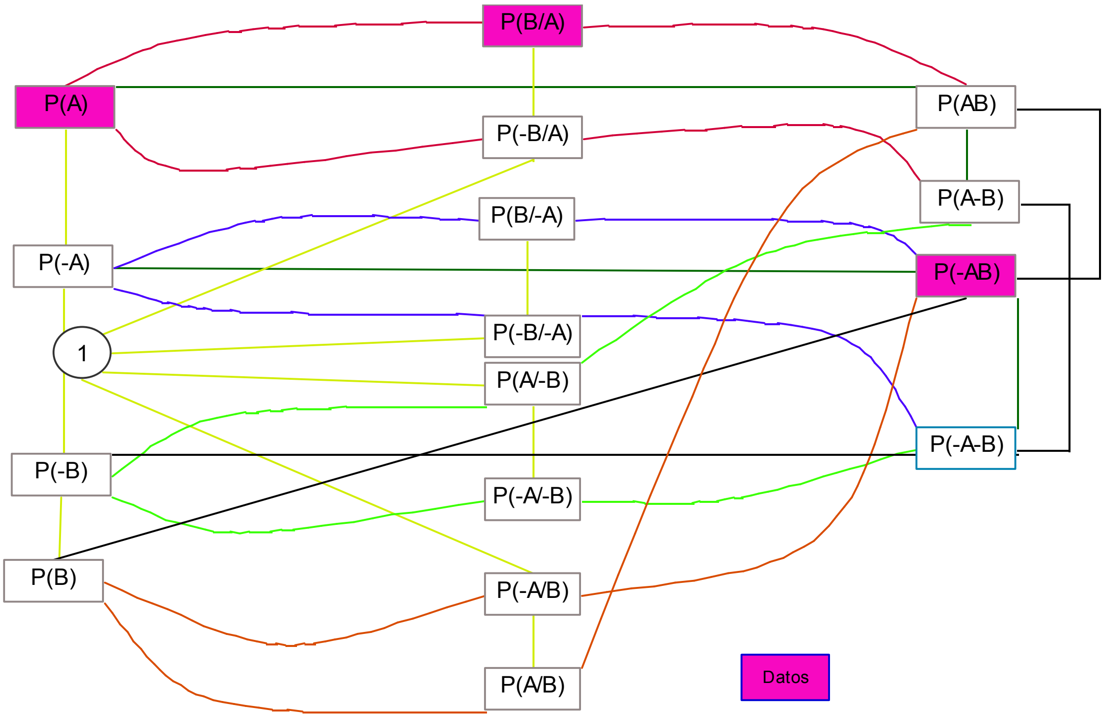


Figura 14

Grupo 2, G_2

La figura 15 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

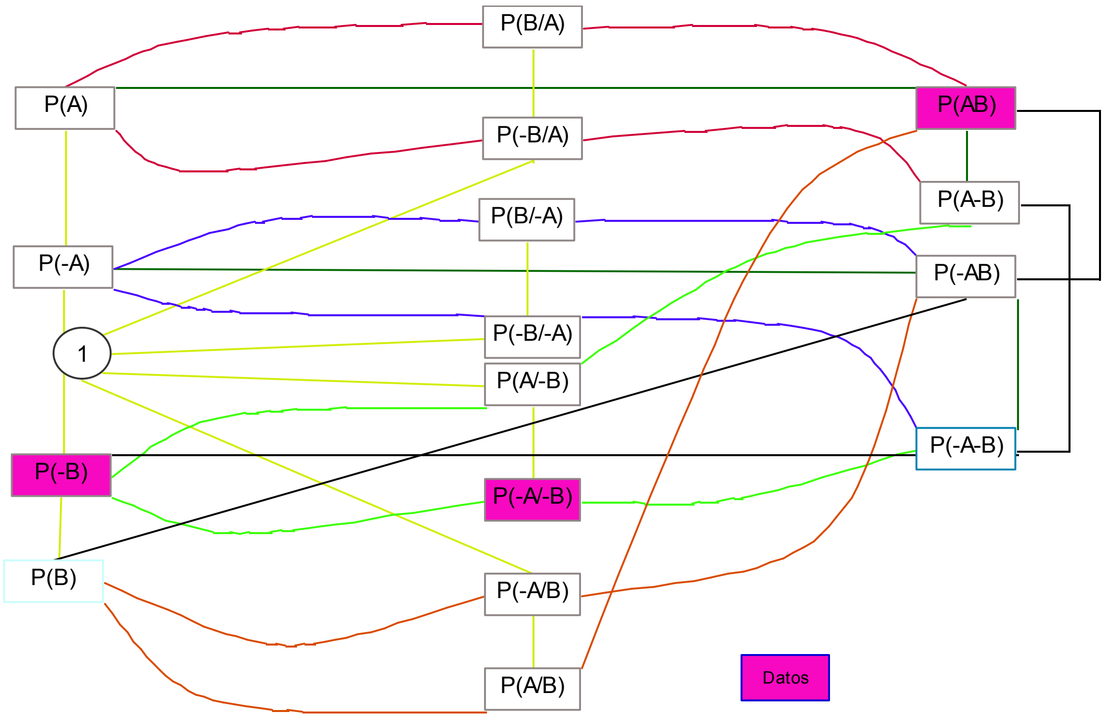


Figura 15

Grupo 4, G_4

Las figuras 16 y 17 dan cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

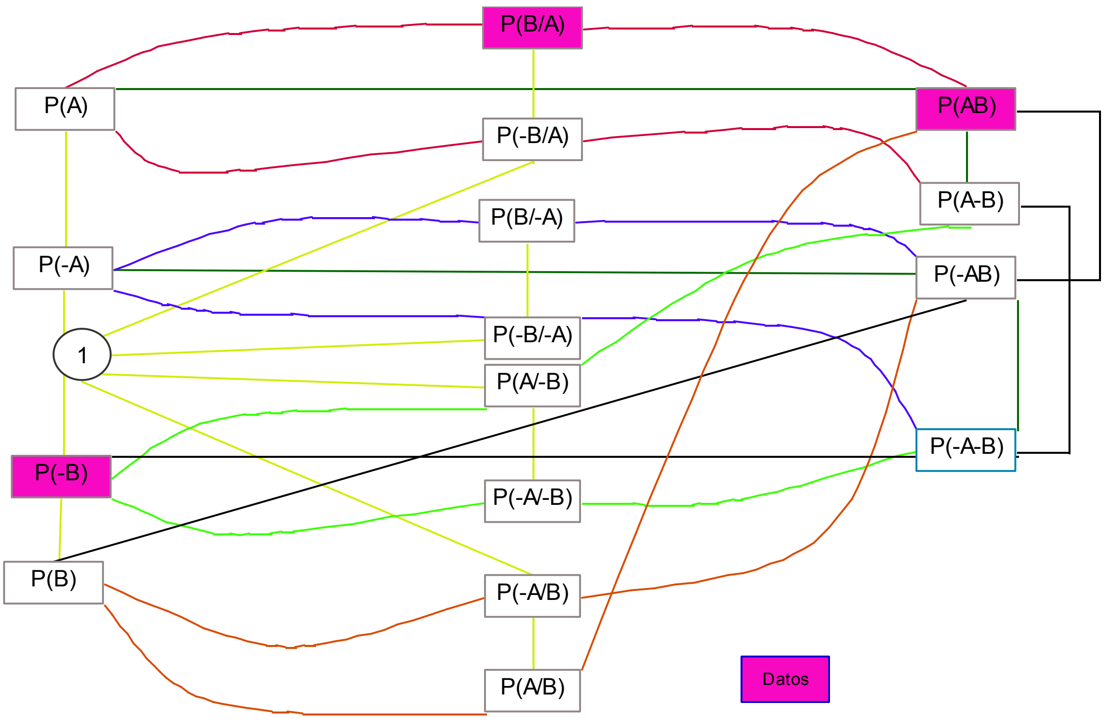


Figura 16

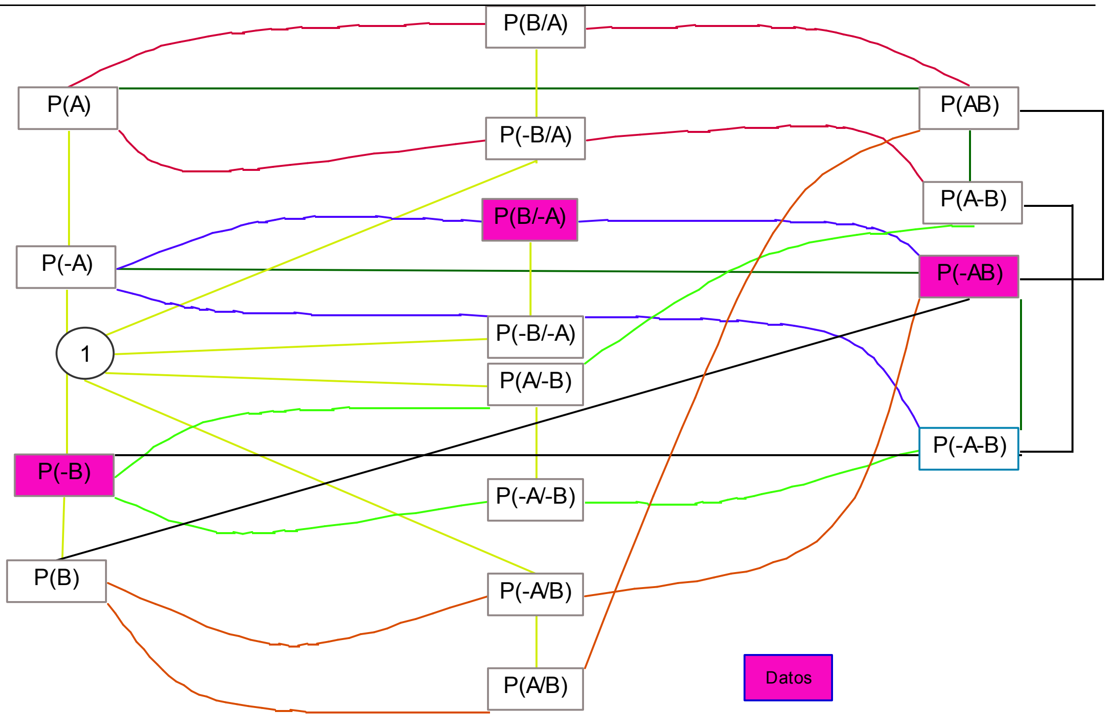


Figura 17

Grupo 5, G_5

La figura 18 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

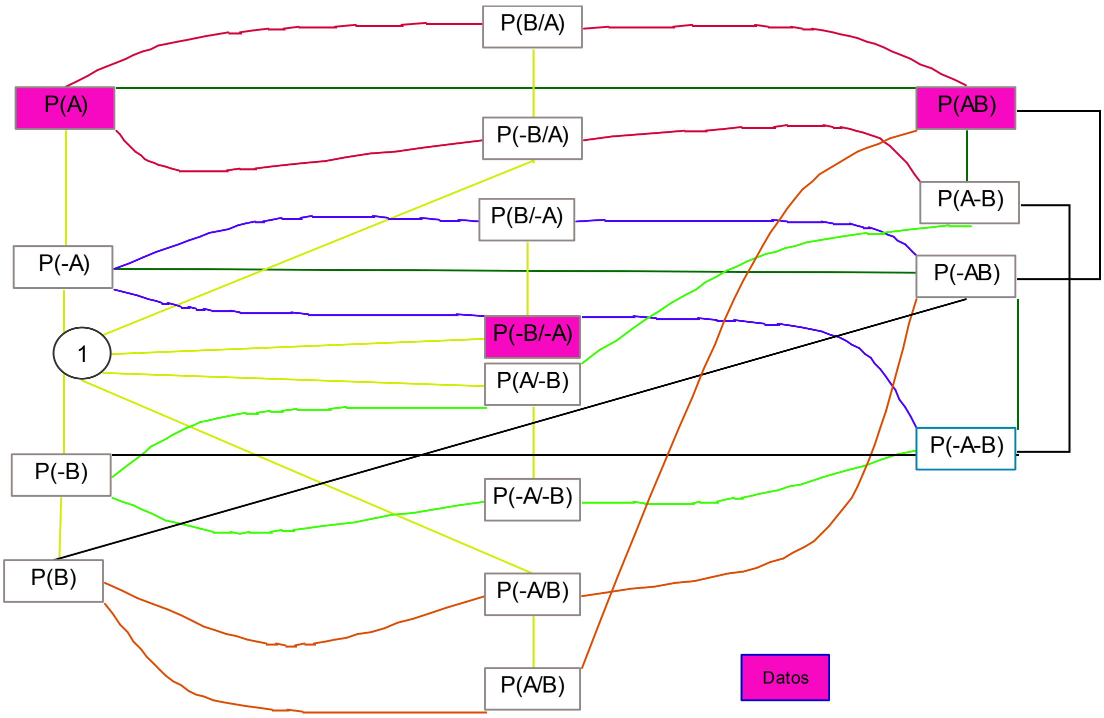


Figura 18

Grupo 6, G_6

La figura 19 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

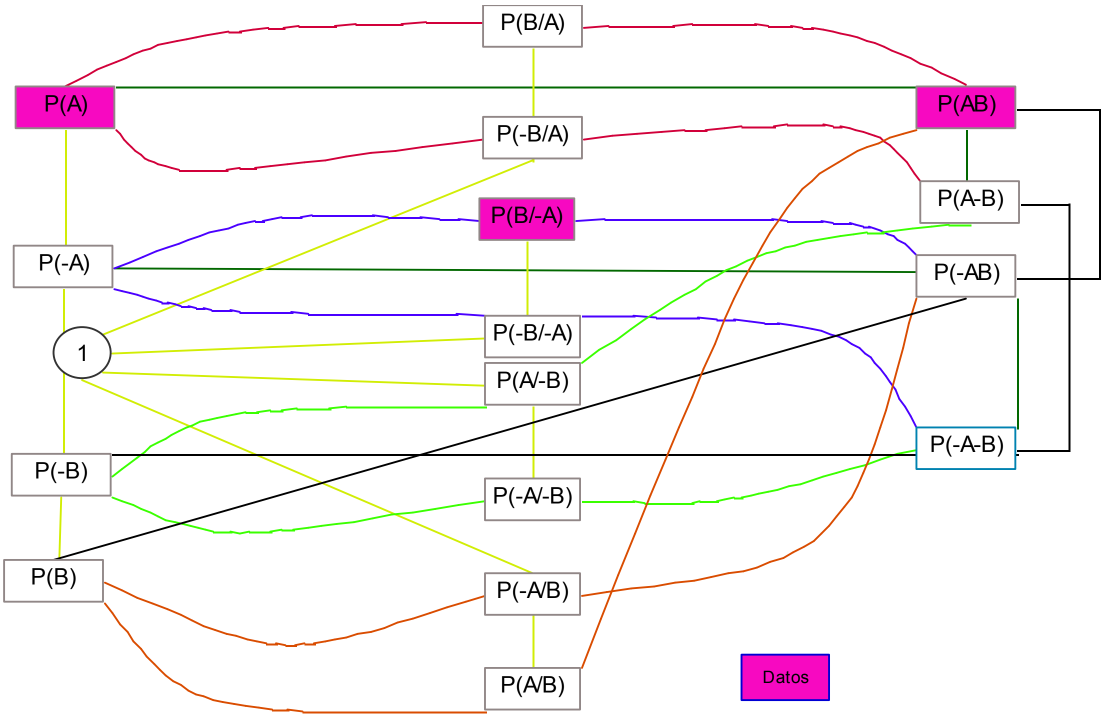


Figura 19

Grupo 7, G_7

La figura 20 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

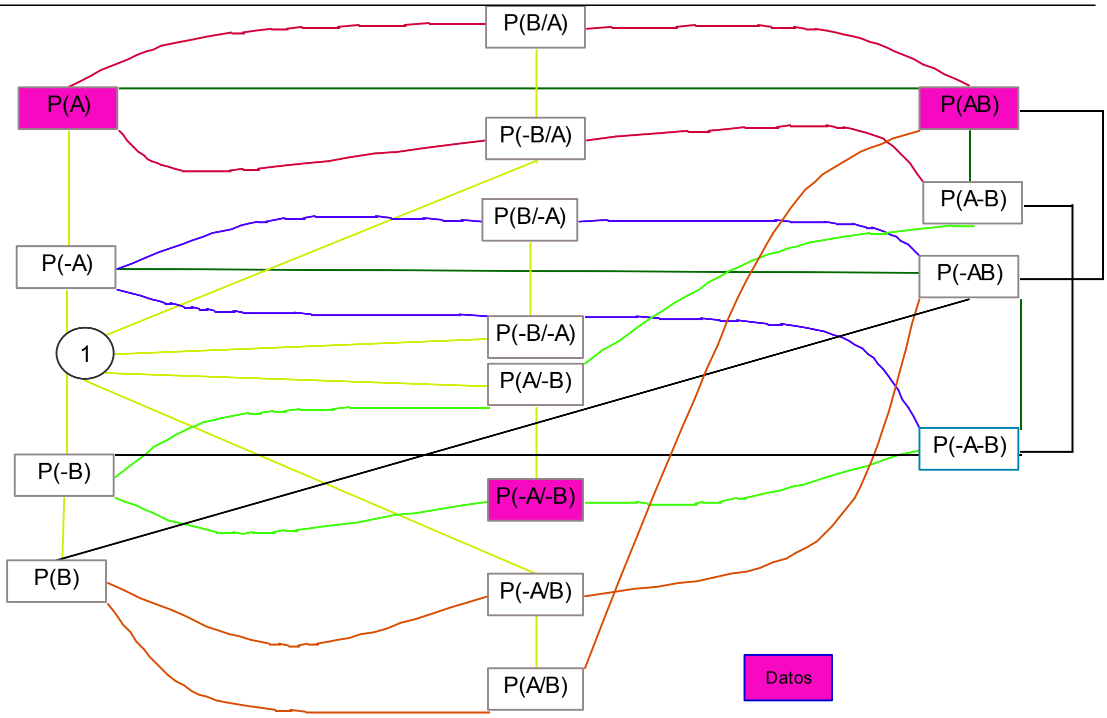


Figura 20

Grupo 8, G_8

La figura 21 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

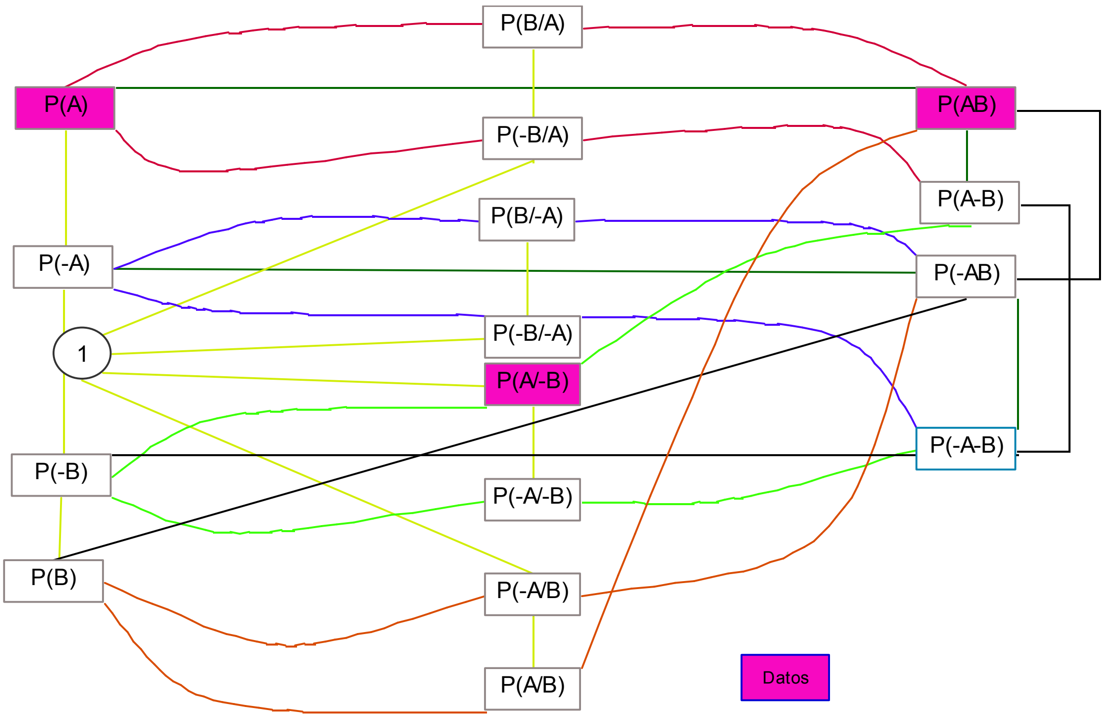


Figura 21

Grupo 11, G_{11}

La figura 22 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

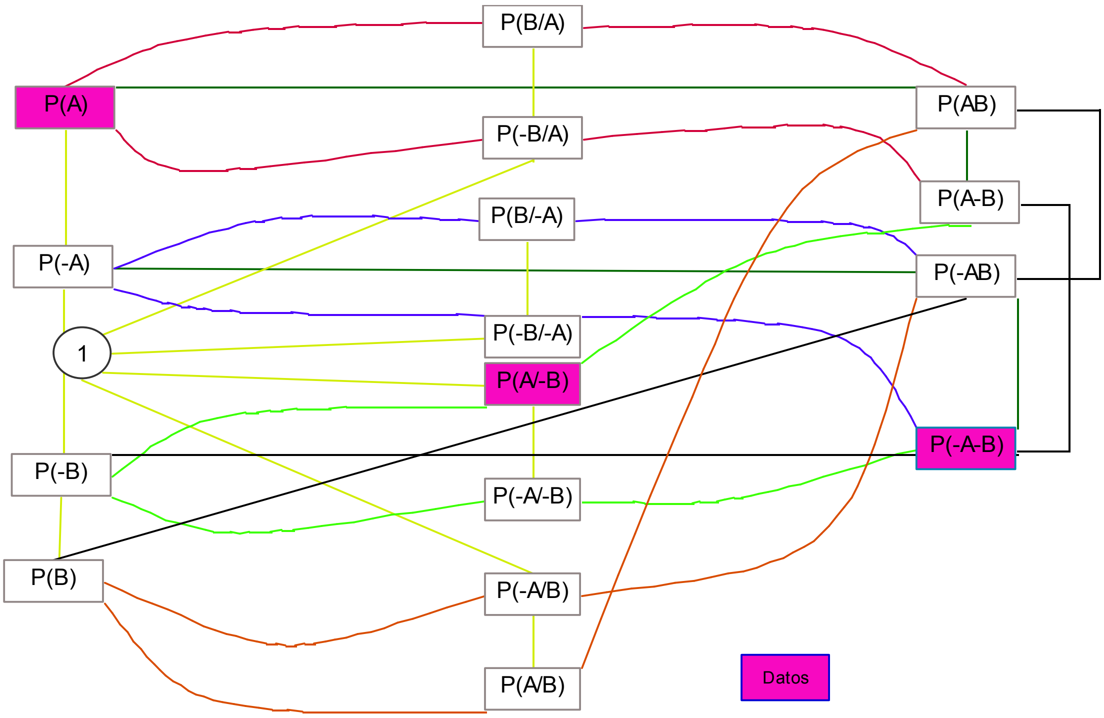


Figura 22

N_2C_3

Grupo 1, G_1

La figura 23 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

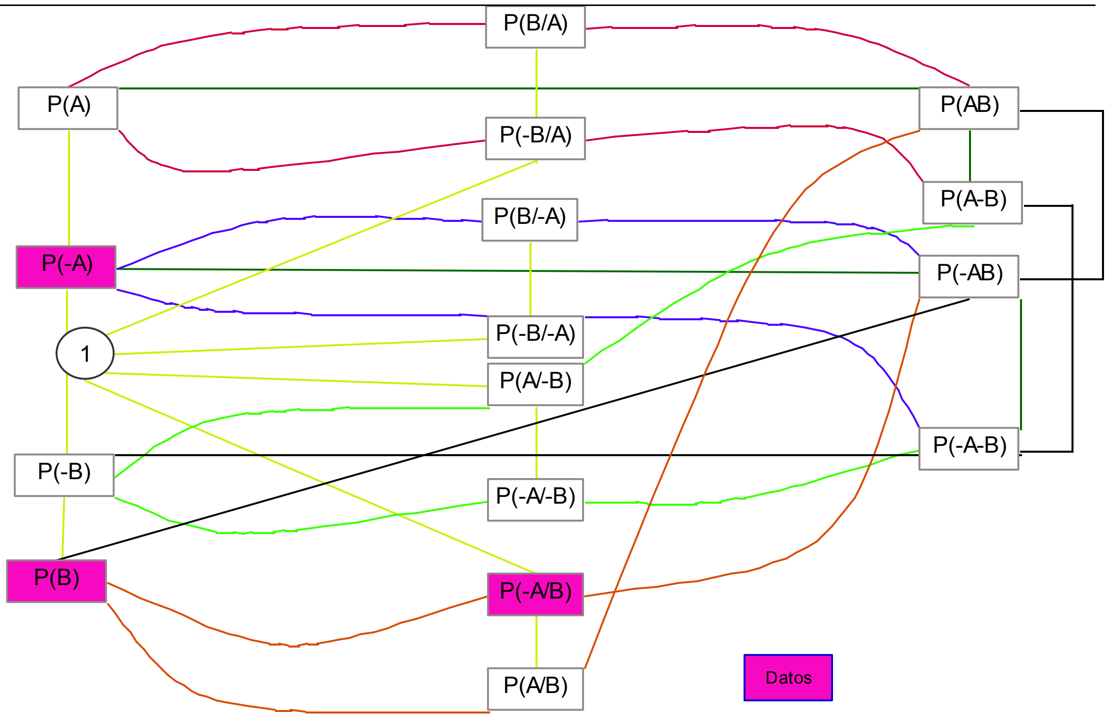


Figura 23

Grupo 2, G_2

La figura 24 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

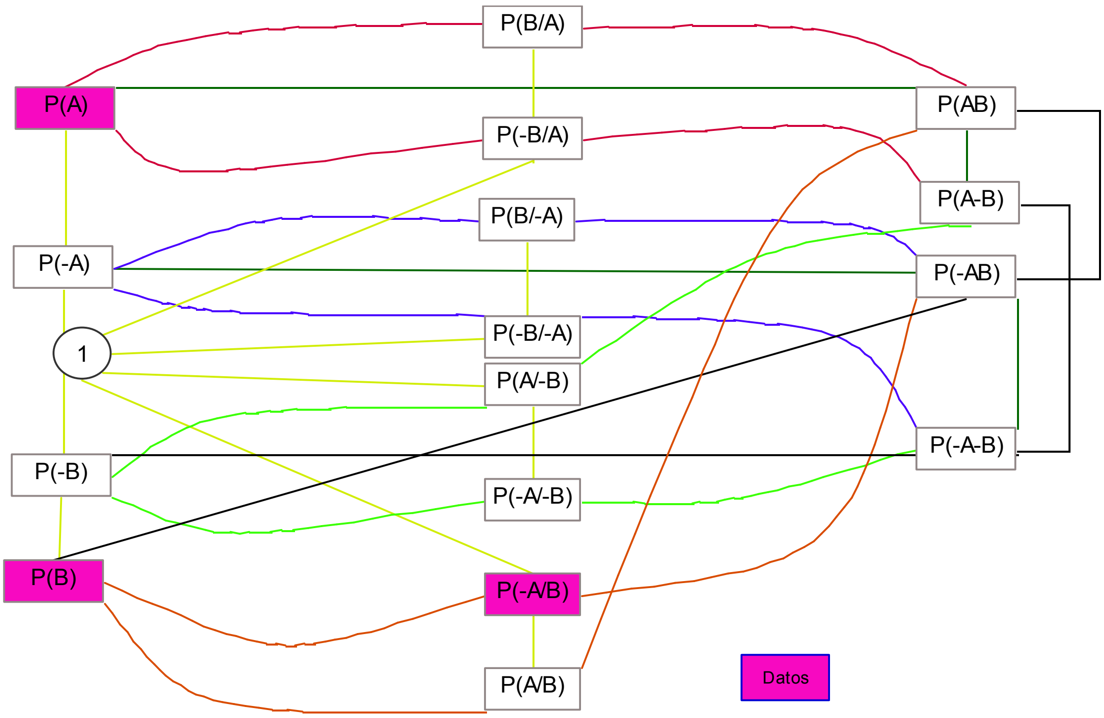


Figura 24

Grupo 3, G_3

La figura 25 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

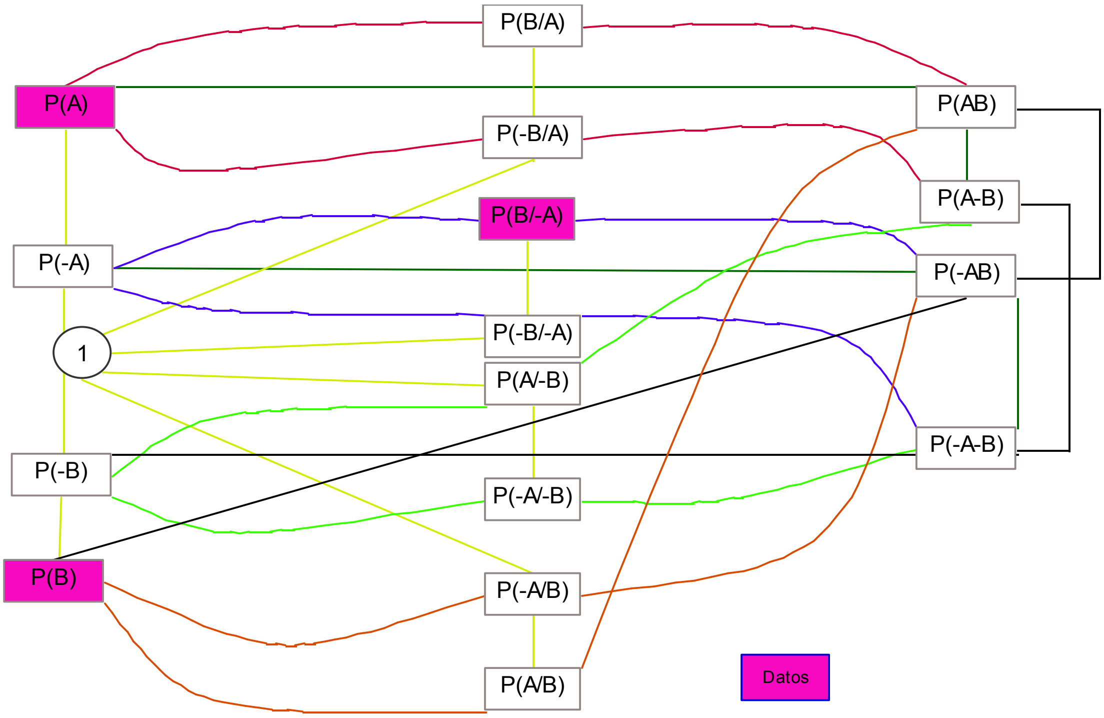


Figura 25

Grupo 4, G_4

La figura 26 da cuenta de la situación de datos en el GPPC en este grupo:

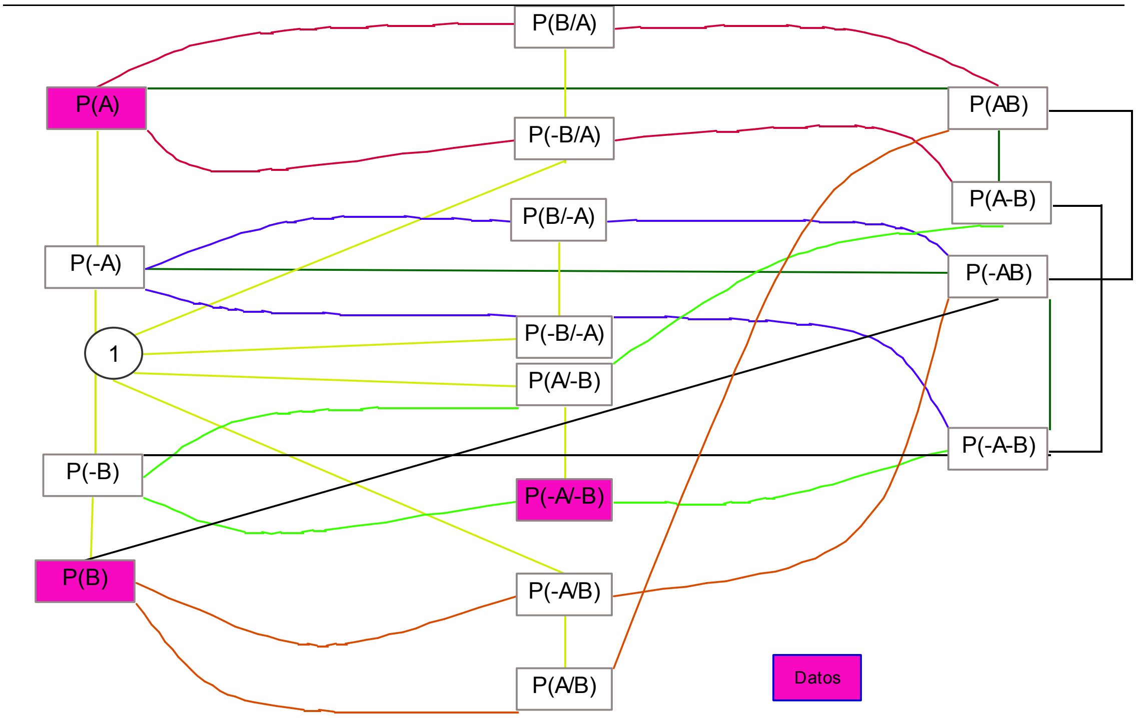

P(B/A)
P(A)
P(AB)
P(-B/A)
P(A-B)
P(B/-A)
P(-A)
P(-AB)
1
P(-B/-A)
P(A/-B)
P(-B)
P(-A-B)
P(-A/-B)
P(B)
P(-A/B)
P(A/B)
Datos

Figura 26

GRAFOS CANÓNICOS ASOCIADOS A LOS PROBLEMAS DE LAS FAMILIAS $N_2C_IT_J$.

ÍNDICE:

III.2 Grafos canónicos que dan cuenta de las Clases de equivalencia en la que queda dividida la familia $N_2C_3T_3$, que se corresponden con los resultados de la tabla 4.18 página 141

I. N_2C_1

I.1. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_1T_1$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.11

$N_2C_1T_1G_1$

En este grupo mostramos los grafos canónicos de tres grupos de problemas en los que lo que varía dentro de cada grupo es la pregunta del problema. La figura 1 a la figura 6 muestran los grafos canónicos asociados a seis problemas de $N_2C_1T_1G_1$ que se diferencian por la pregunta del problema. Son los seis problemas que se pueden crear de T_1 con tres datos distribuidos según N_2C_1 y G_1. Las figuras de la 7 a la 12 muestran lo mismo pero con otro trío de datos al igual que las figuras 13 a la 18.

En cualquiera de los tres tríos de datos encontramos 1 problema de [p_{12}], 3 problemas de [p_{22}] y 2 problema2 de [p_{32}]

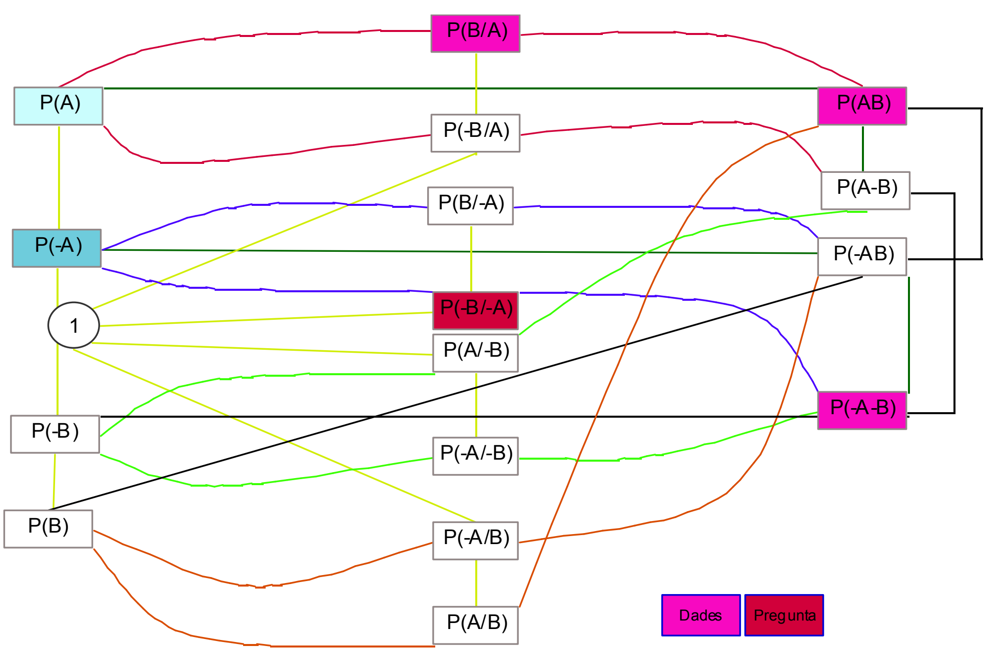


Figura 1: Grafo canónico de [p_{12}]

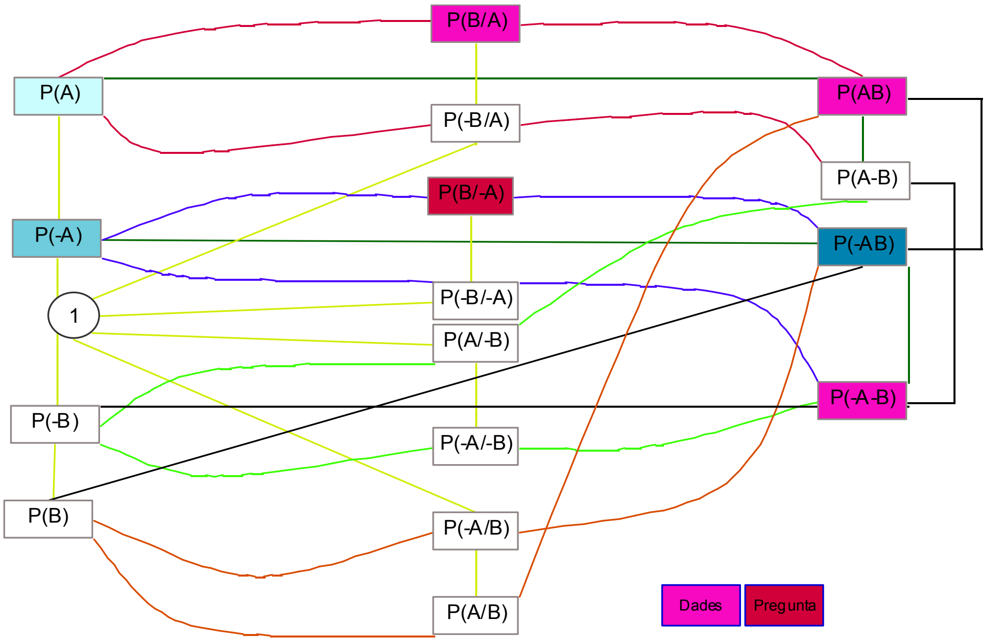


Figura 2 Grafo canónico de $[p_{22}]$

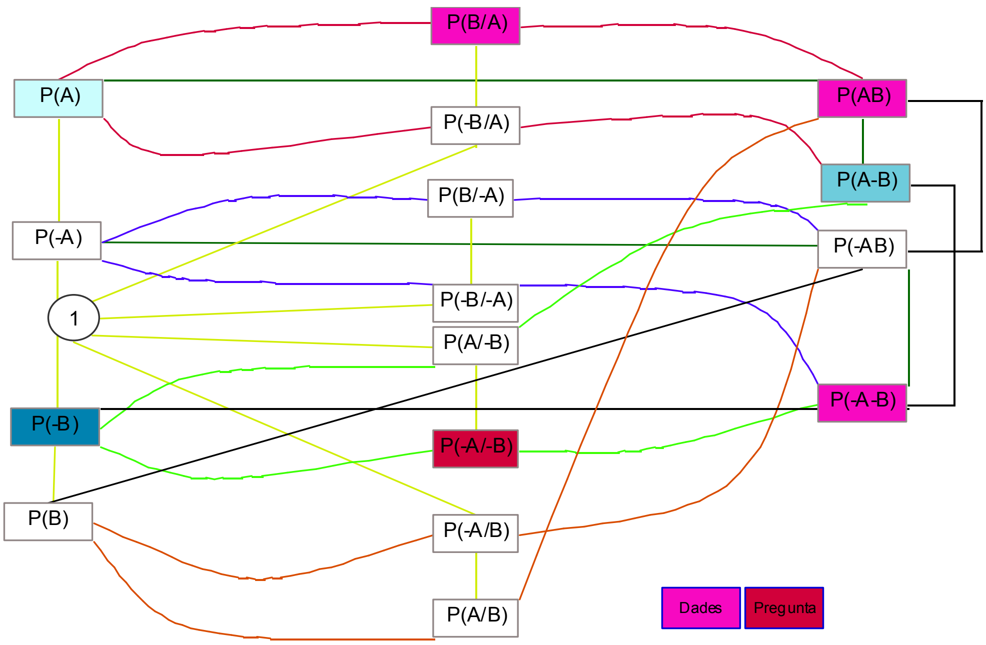


Figura 3 Grafo canónico de $[p_{22}]$

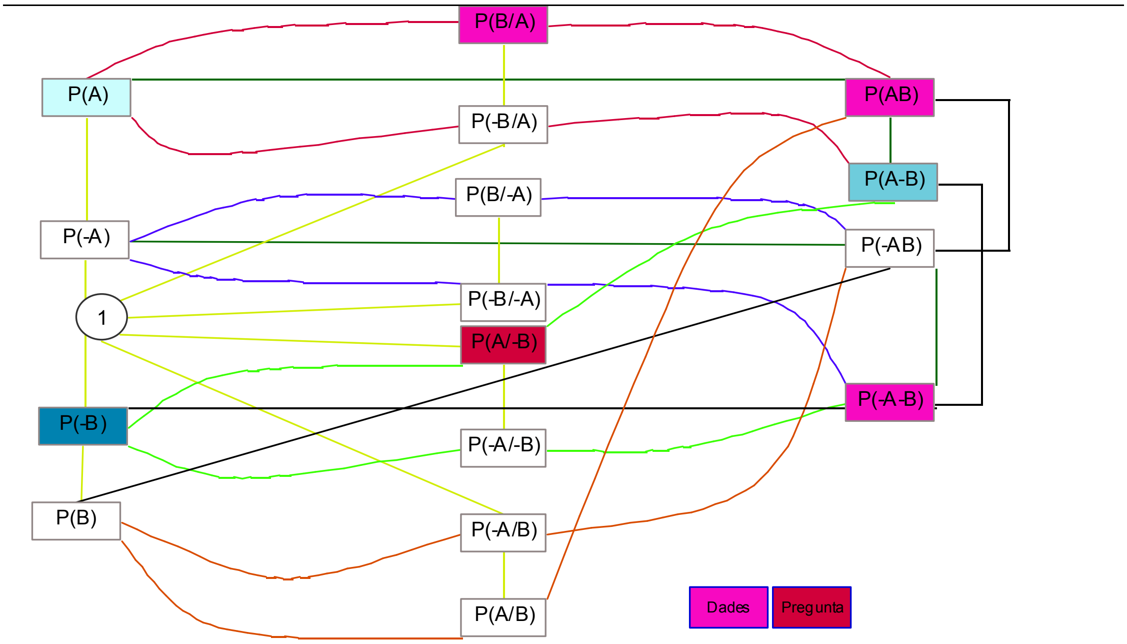


Figura 4 Grafo canónico de [p_{22}]

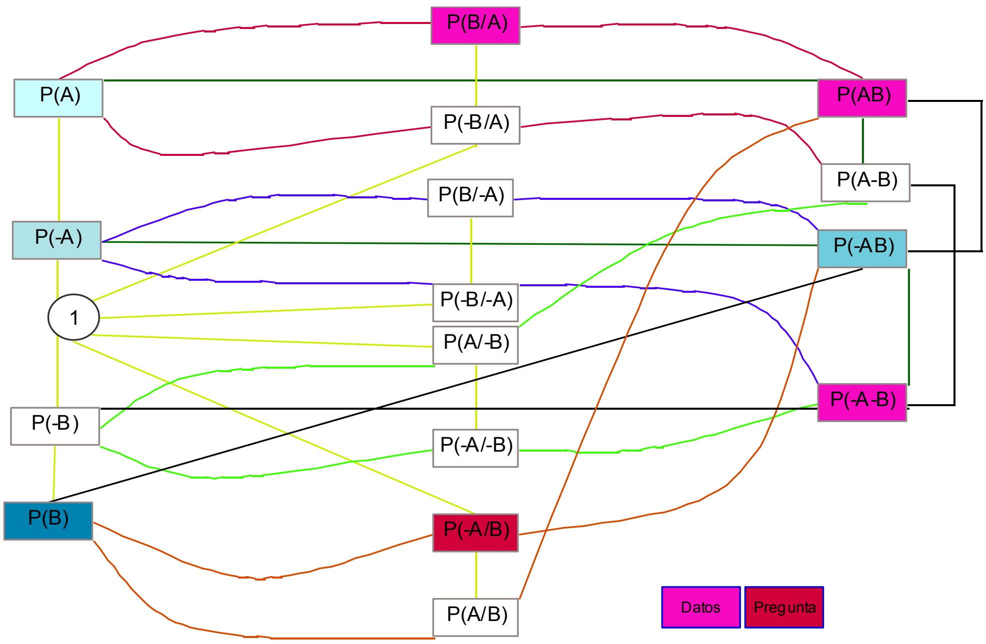


Figura 5 Grafo canónico de [p_{32}]

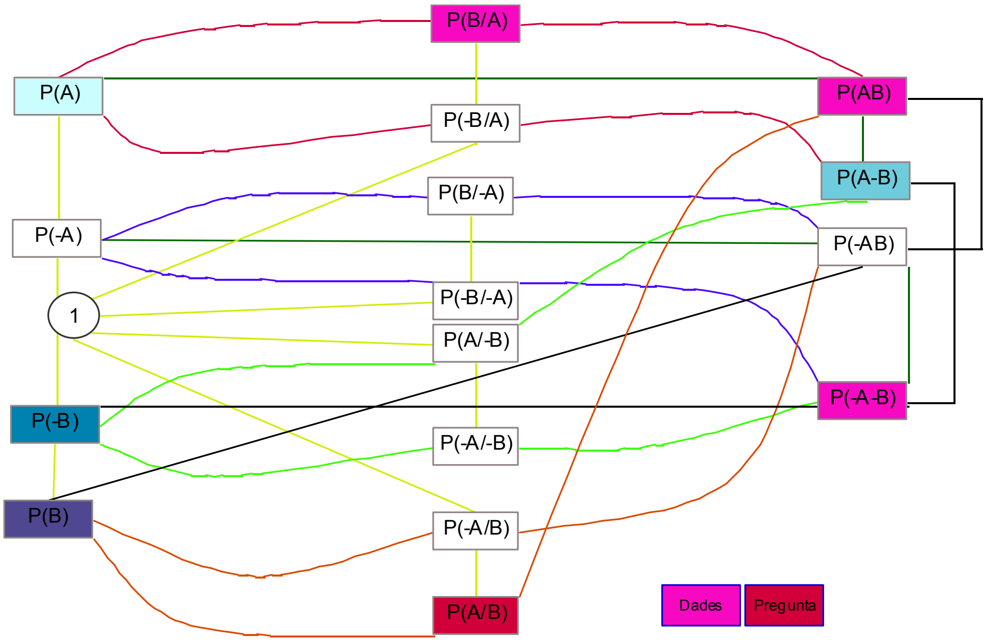


Figura 6 Grafo canónico de [p_{32}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

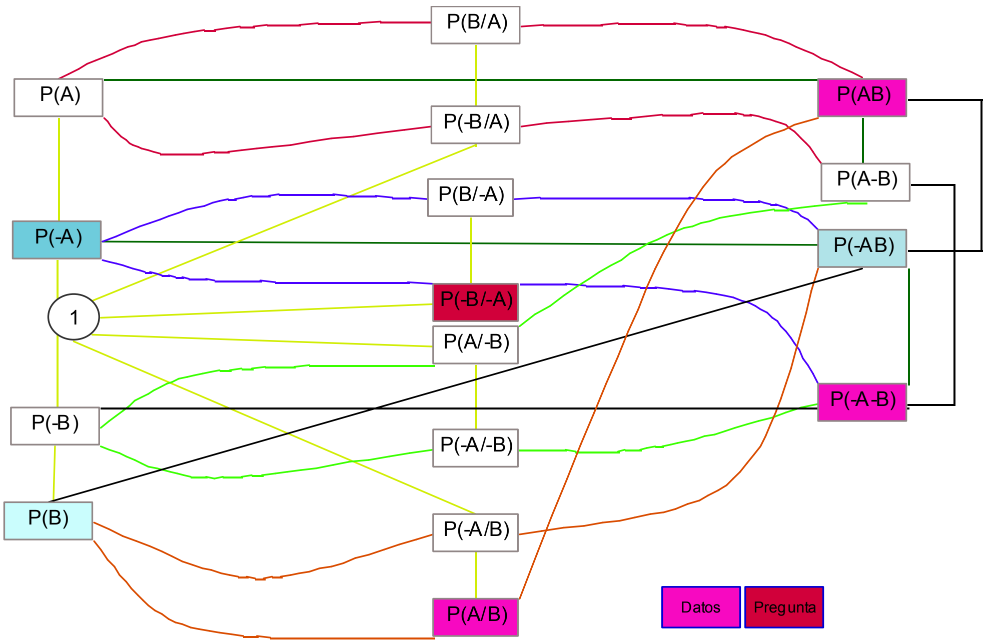


Figura 7 Grafo canónico de [p_{22}]

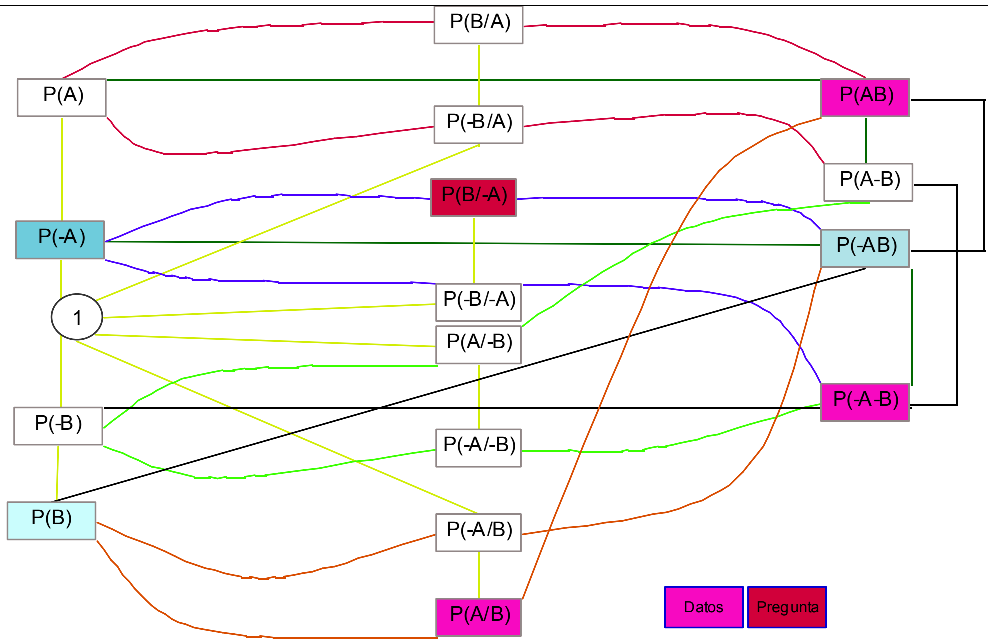


Figura 8 Grafo canónico de [p_{22}]

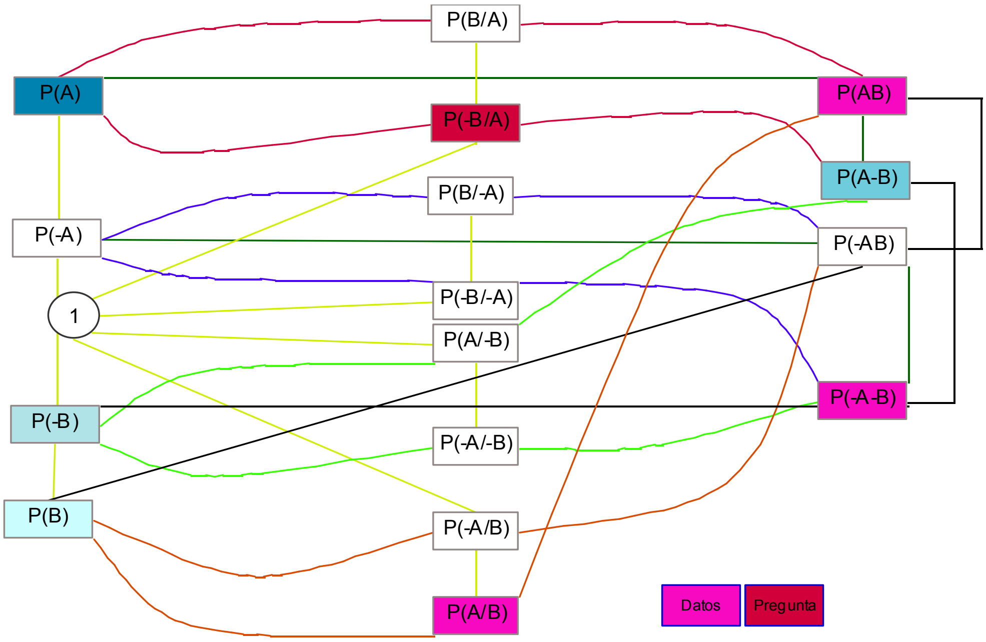


Figura 9 Grafo canónico de [p_{32}]

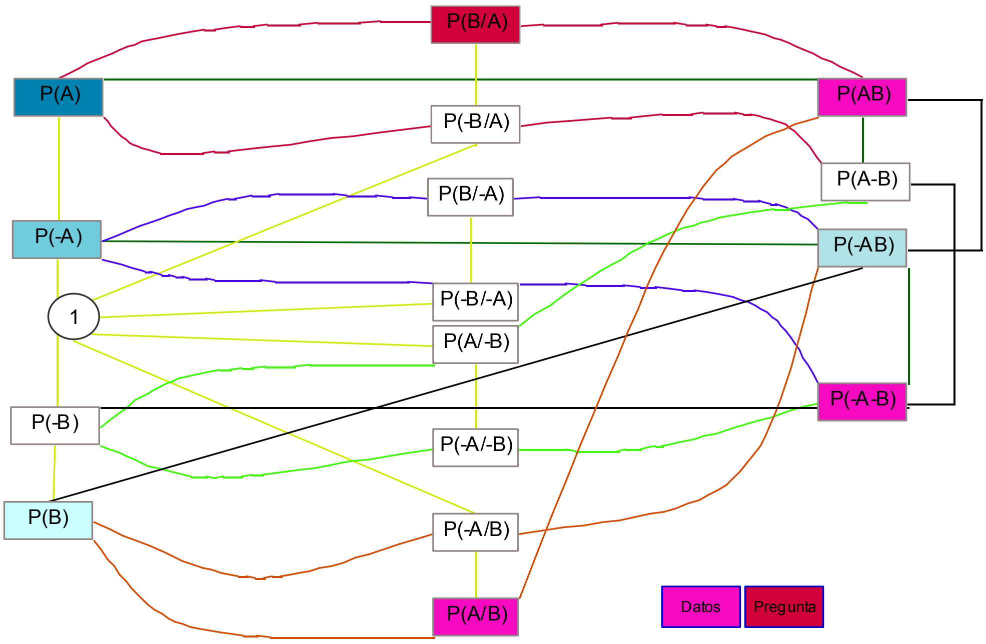


Figura 10 Grafo canónico de [p_{32}]

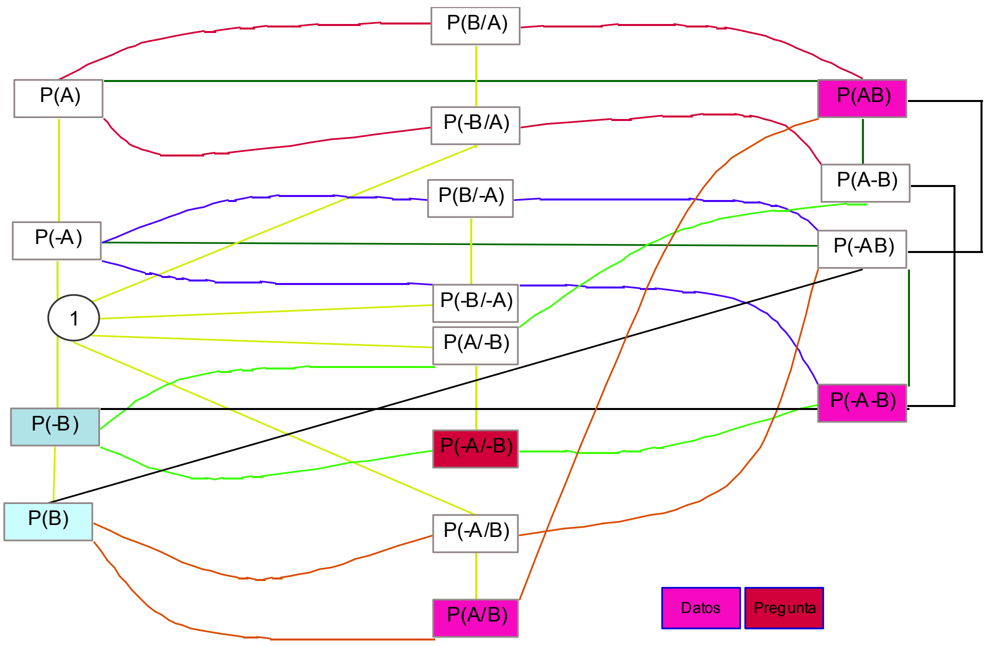


Figura 11 Grafo canónico de [p_{12}]

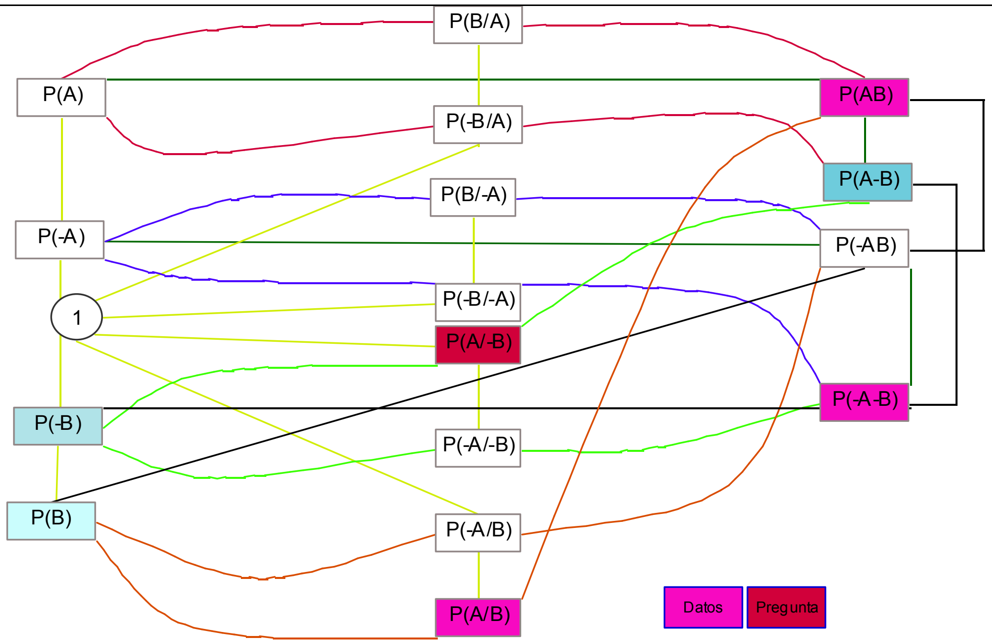


Figura 12 Grafo canónico de $[p_{22}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

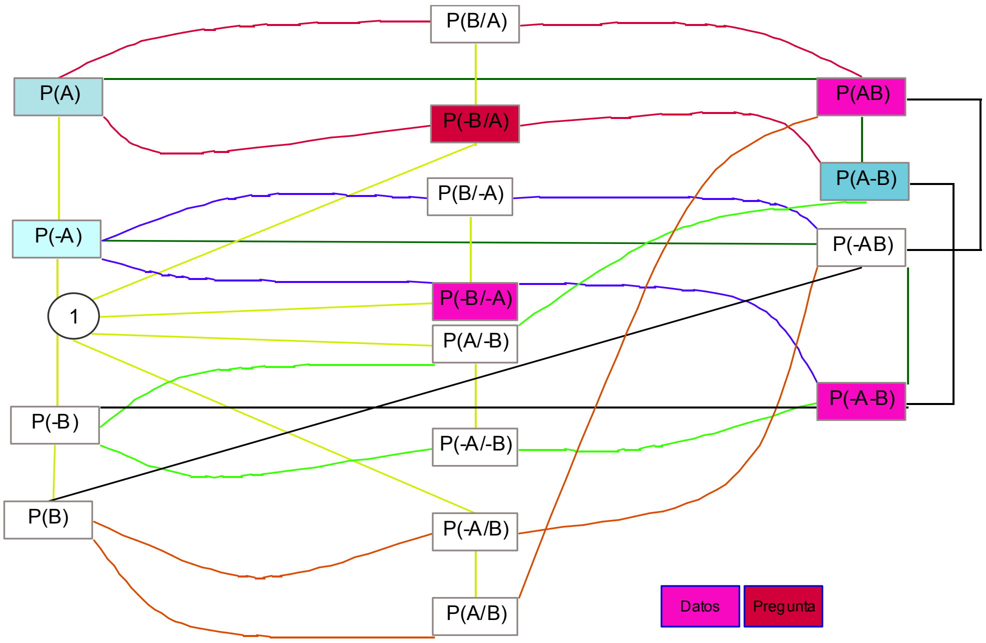


Figura 13 Grafo canónico de $[p_{22}]$

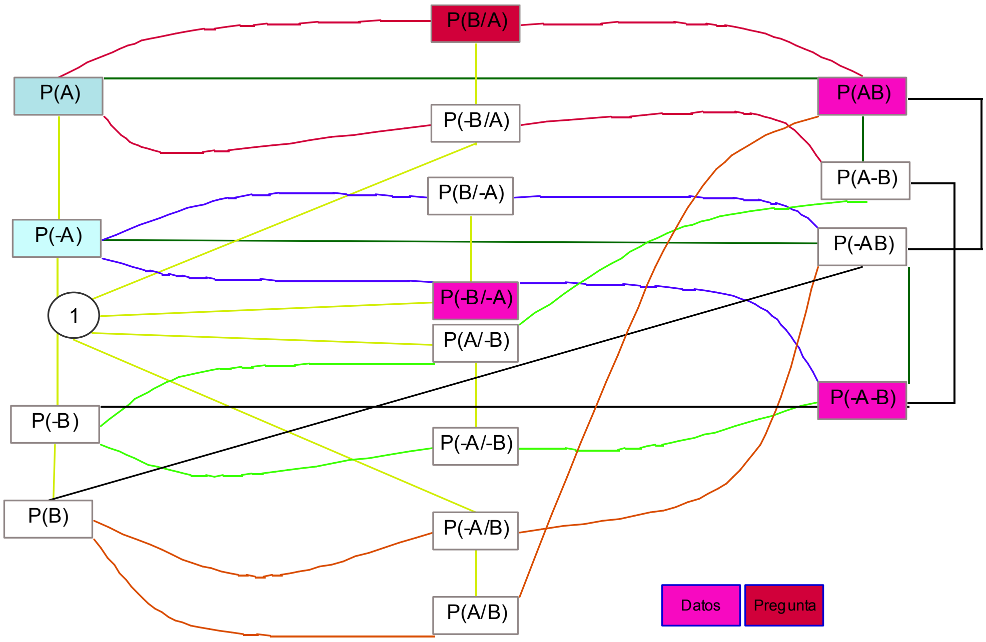


Figura 14 Grafo canónico de [p_{12}]

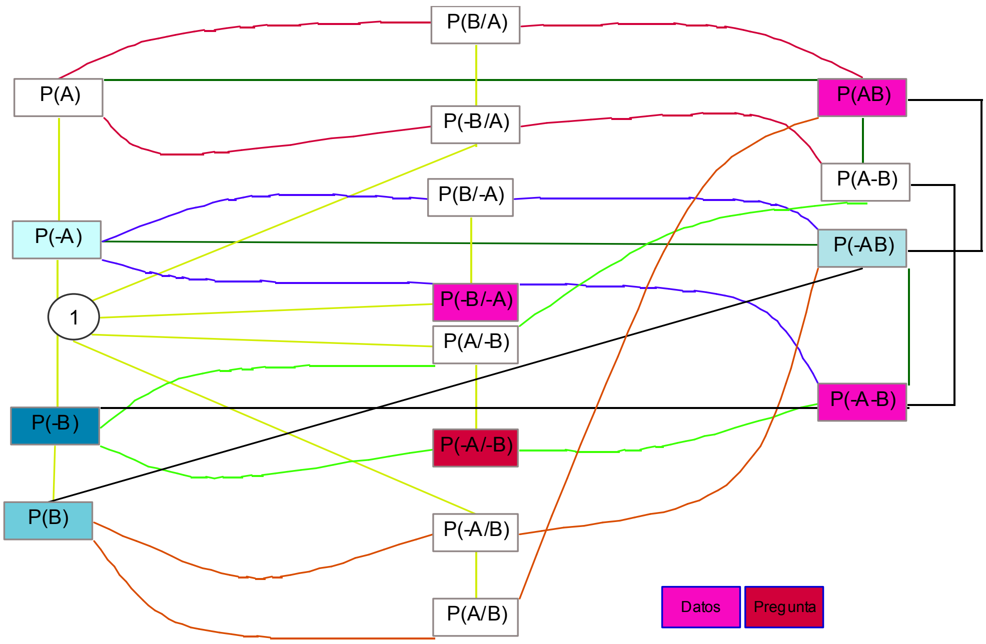


Figura 15 Grafo canónico de [p_{32}]

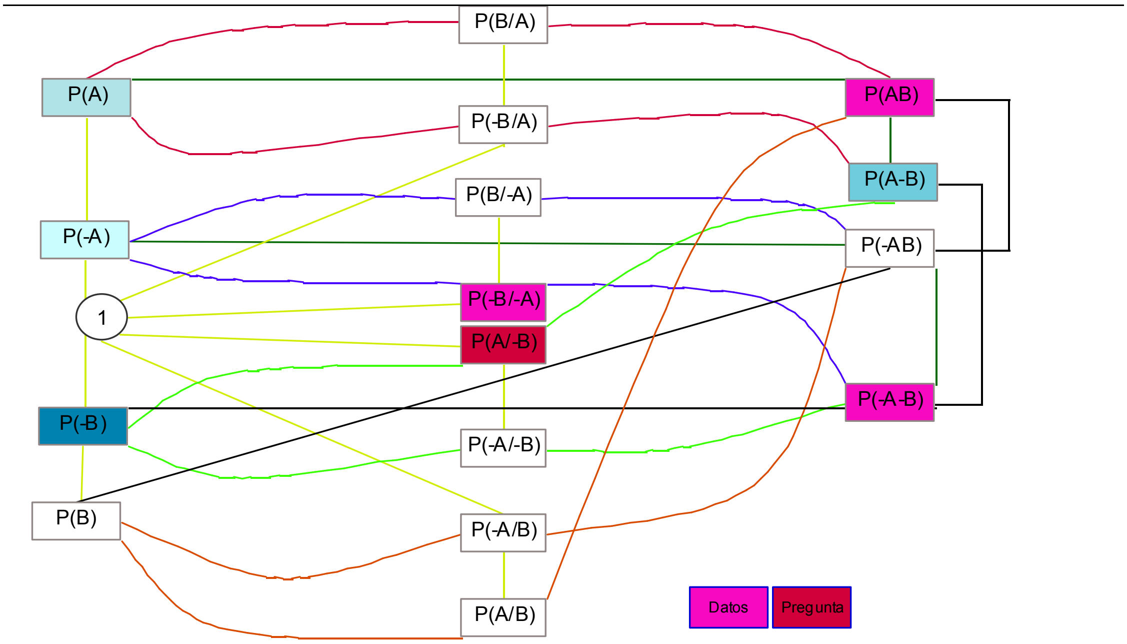


Figura 16 Grafo canónico de [p_{32}]

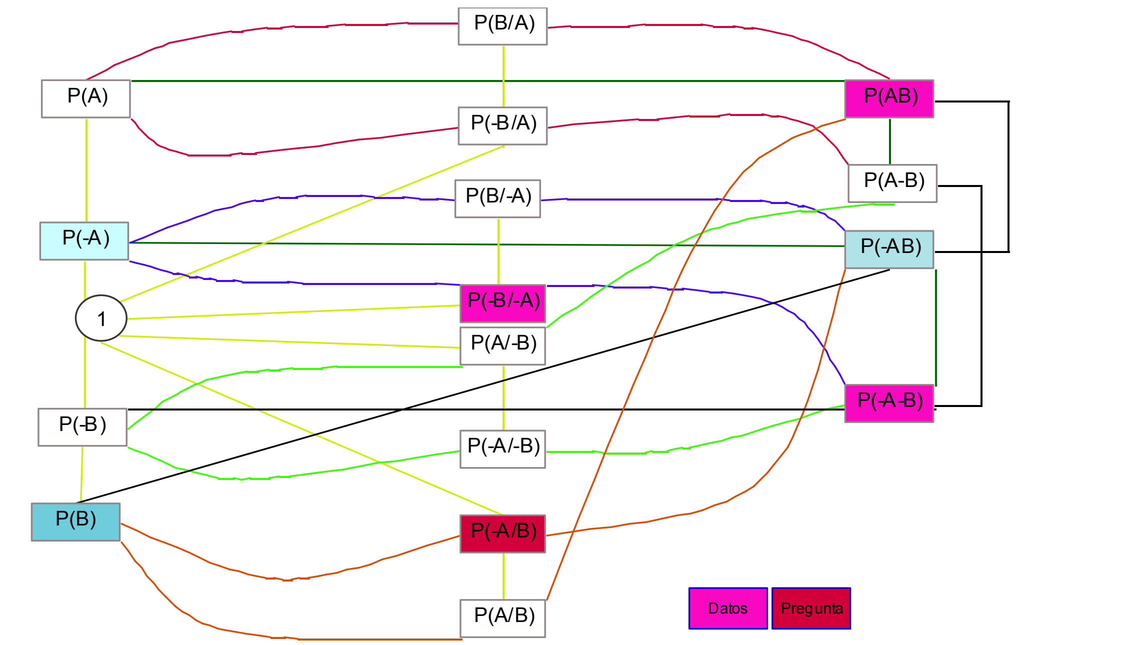


Figura 17 Grafo canónico de [p_{22}]

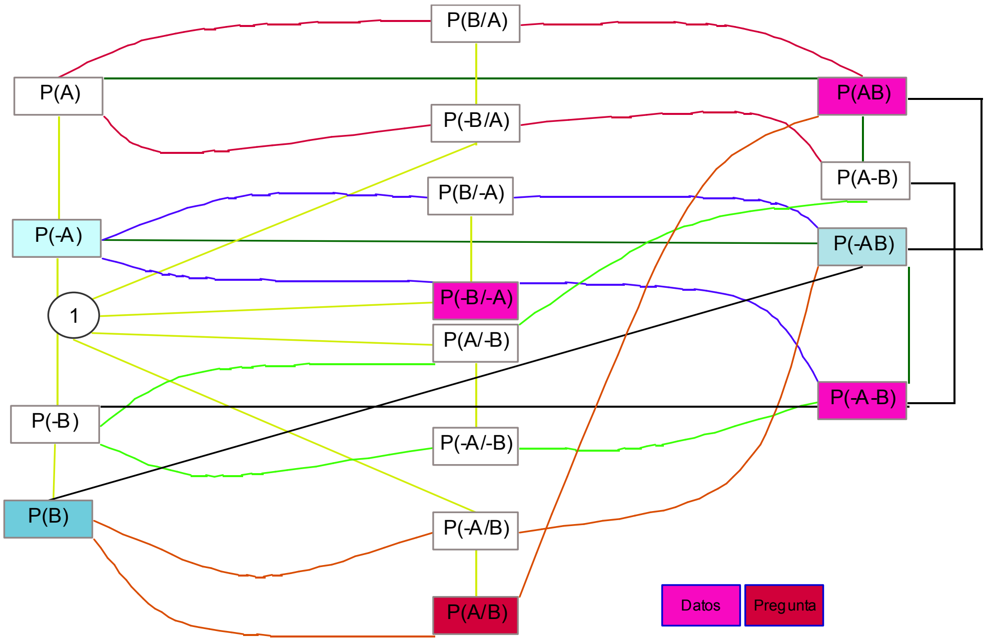


Figura 18 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_1T_1G_2$

Con estos problemas procedemos de la misma forma que con $N_2C_1T_1G_1$

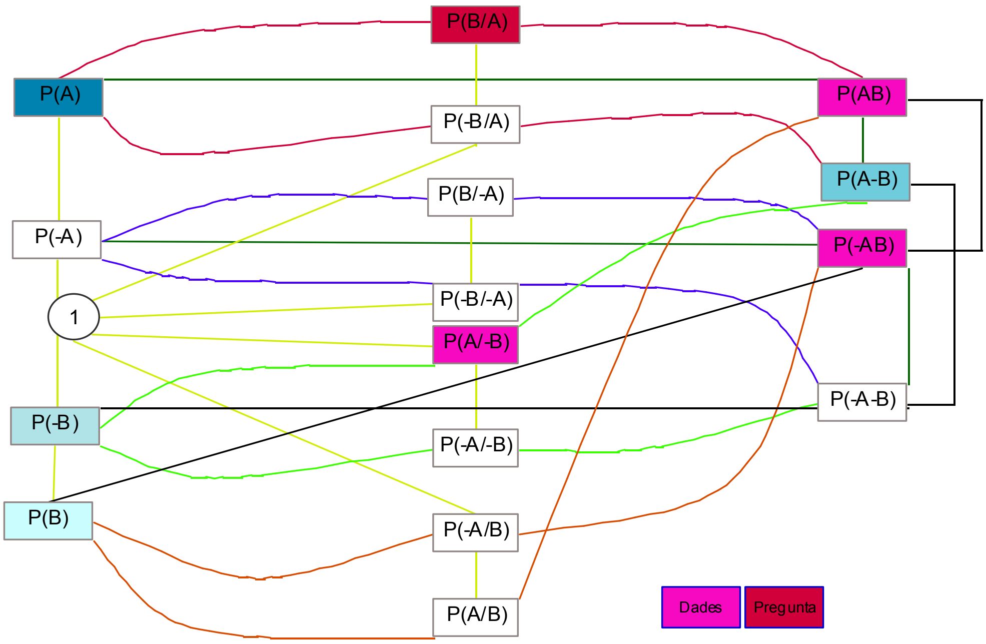


Figura 19 Grafo canónico de [p_{32}]

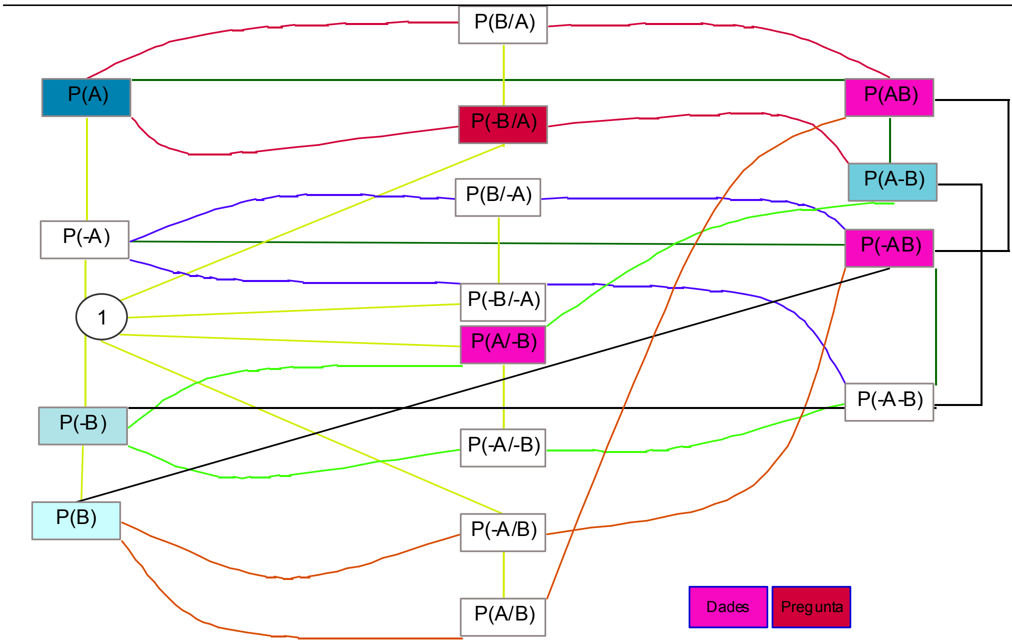


Figura 20 Grafo canónico de [p_{32}]

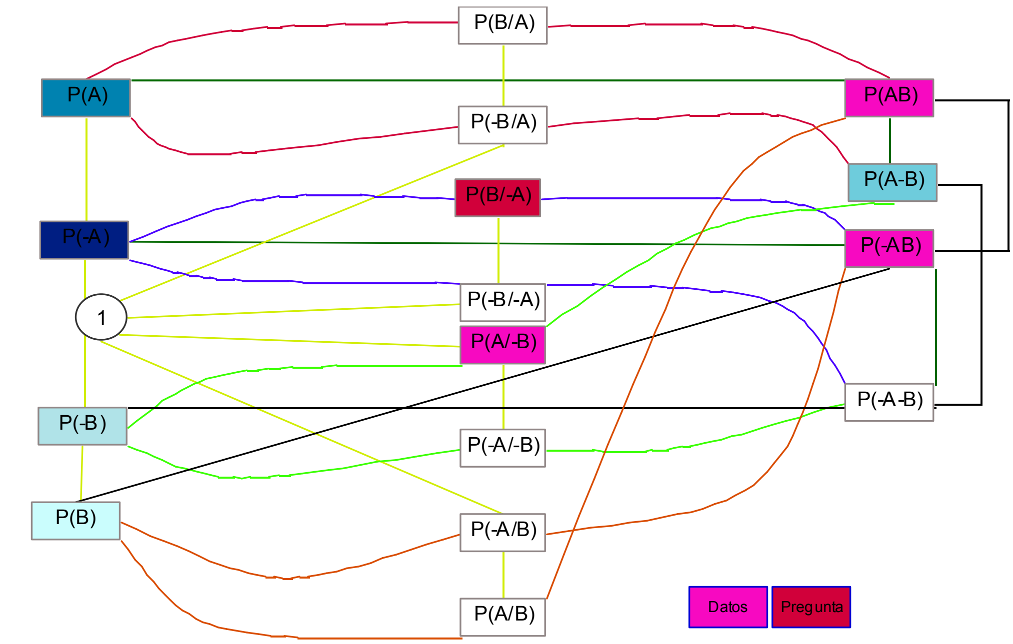


Figura 21 Grafo canónico de [p_{42}]

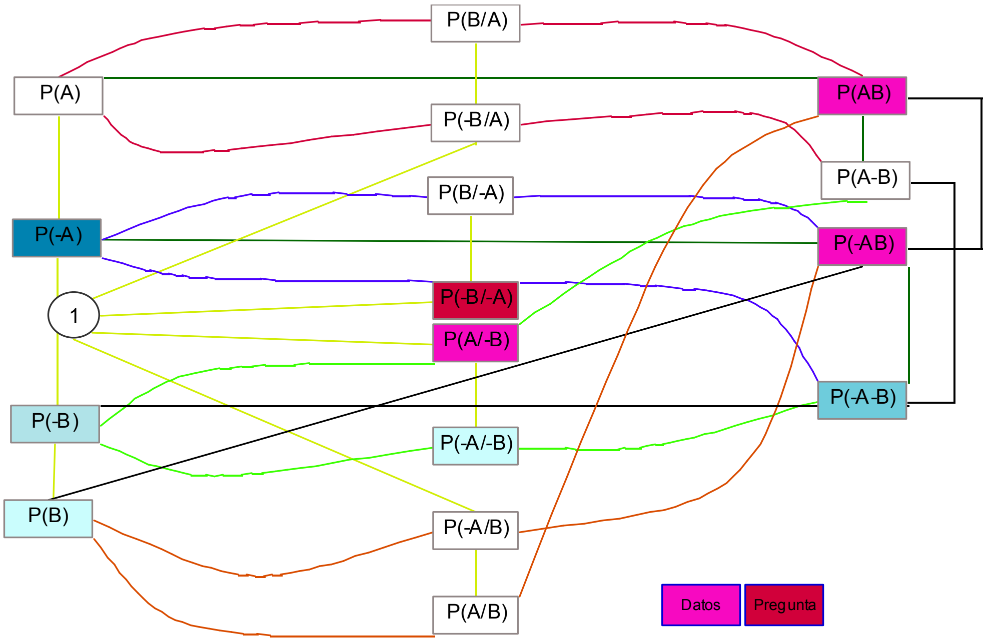


Figura 22 Grafo canónico de [p_{32}]

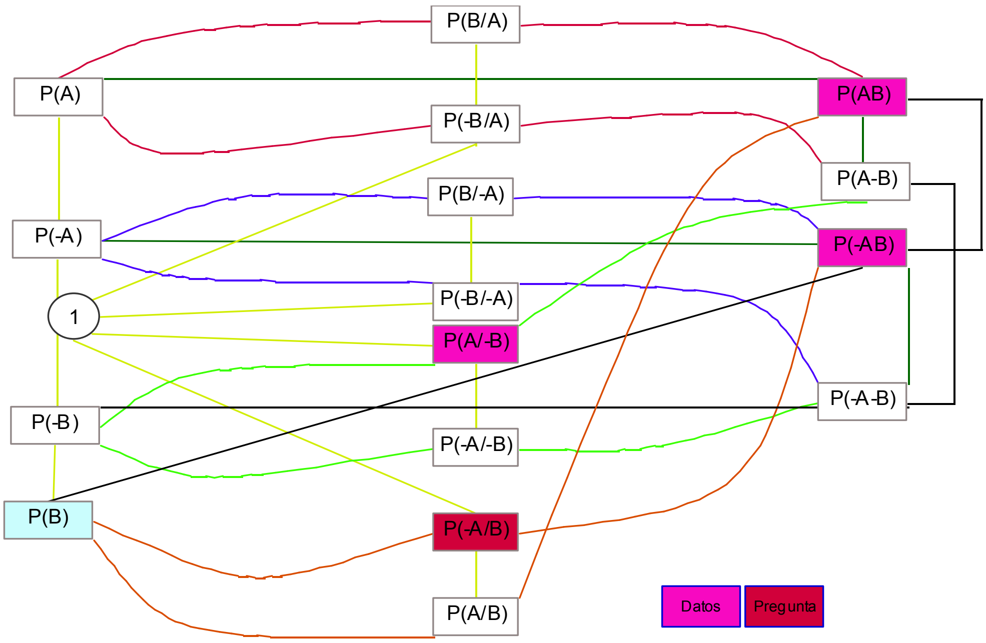


Figura 23 Grafo canónico de [p_{11}]

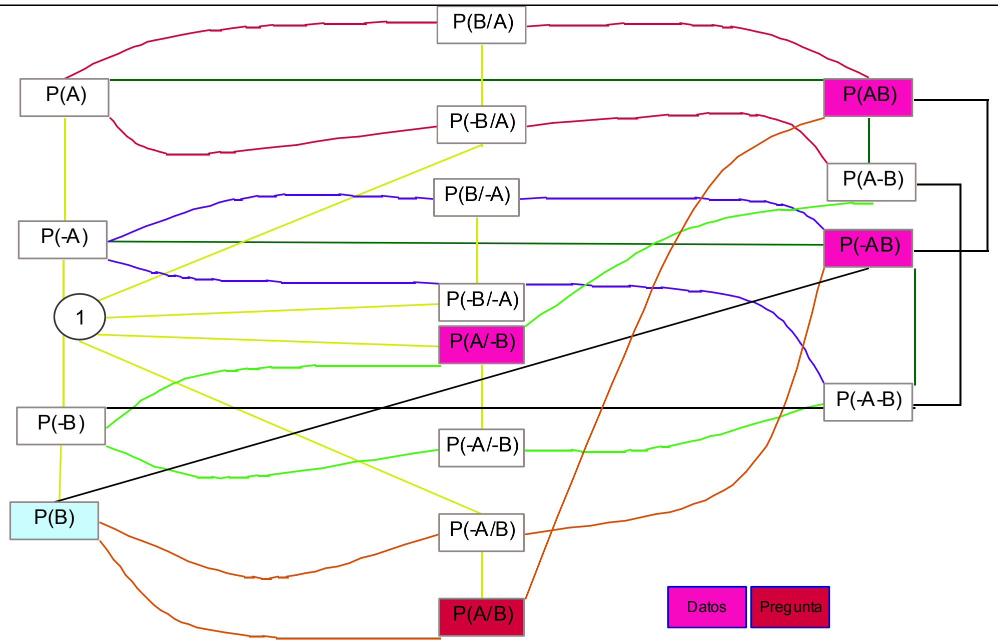


Figura 24 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

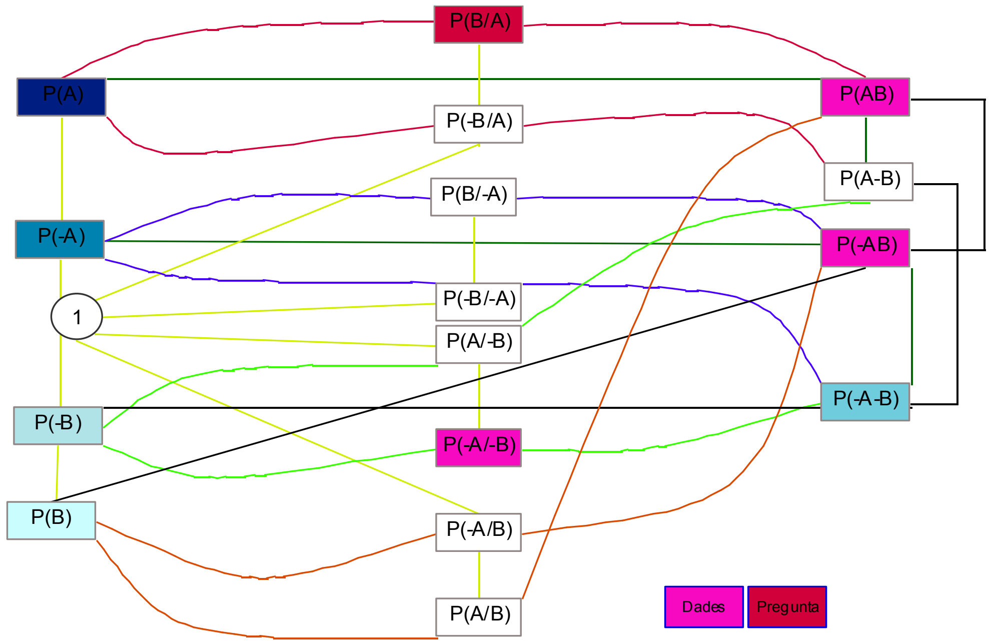


Figura 25 Grafo canónico de [p_{42}]

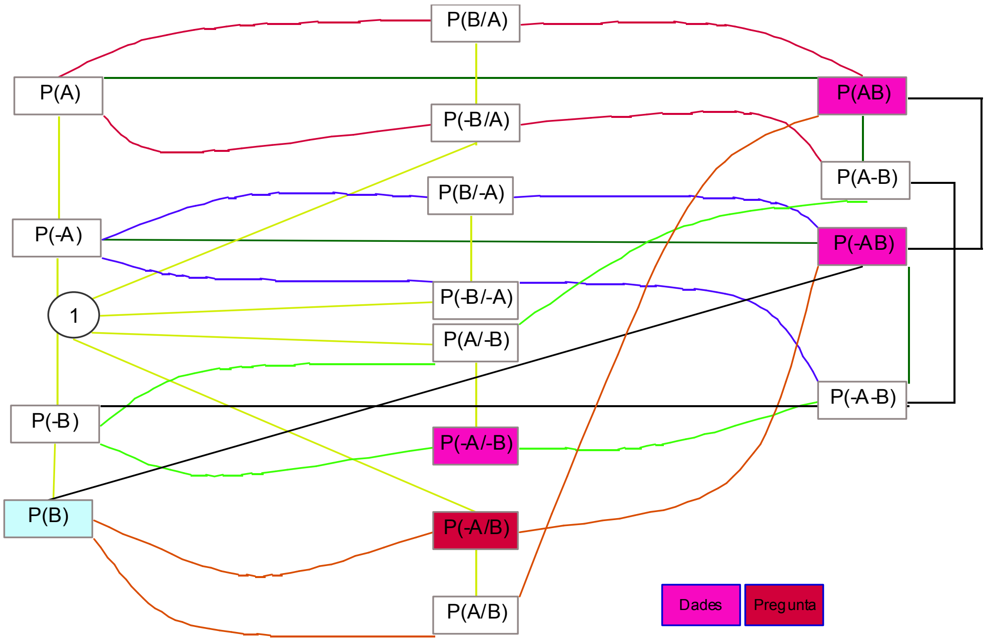


Figura 26 Grafo canónico de $[p_{11}]$

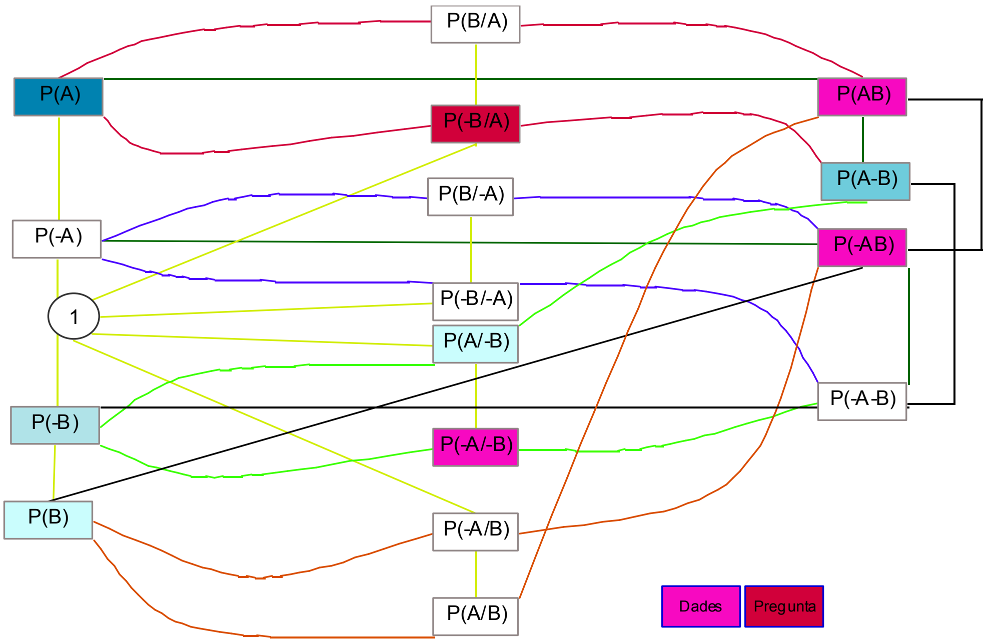


Figura 27 Grafo canónico de $[p_{32}]$

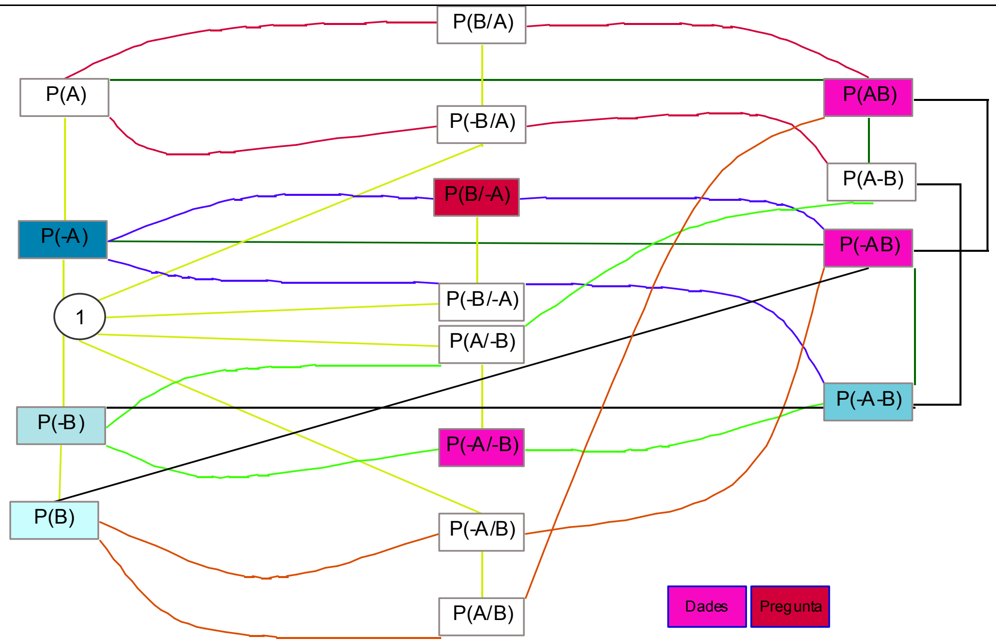


Figura 28 Grafo canónico de [p_{32}]

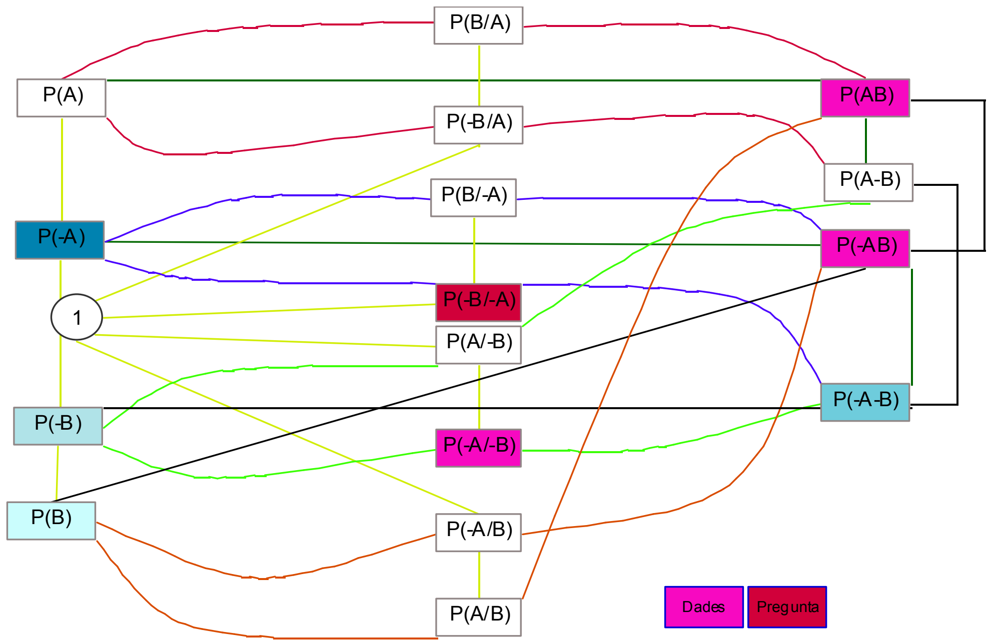


Figura 29 Grafo canónico de [p_{32}]

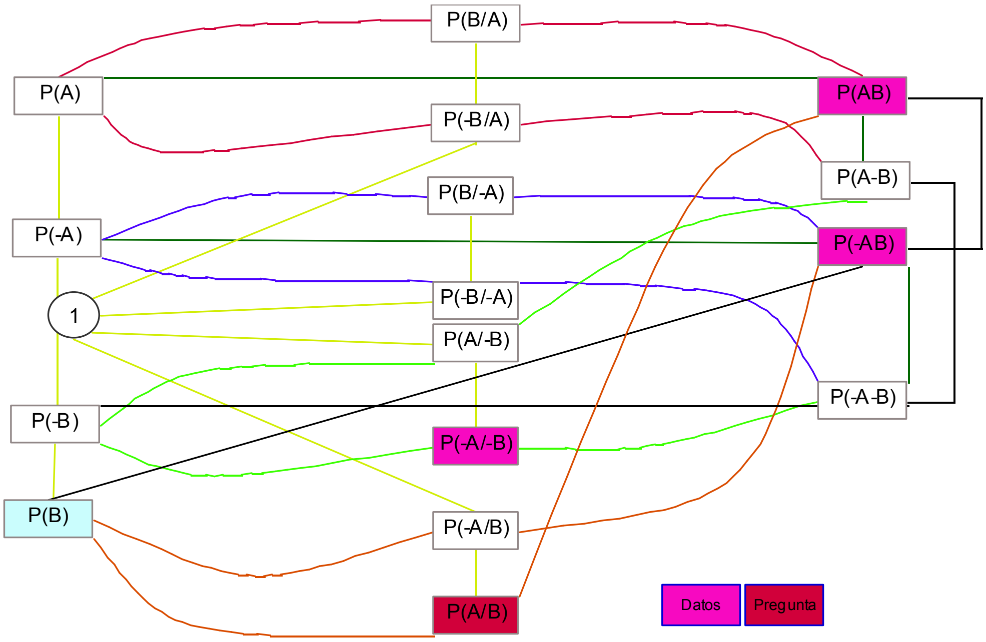


Figura 30 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_1G_3$

Con estos problemas procedemos de la misma forma que con $N_2C_1T_1G_1$

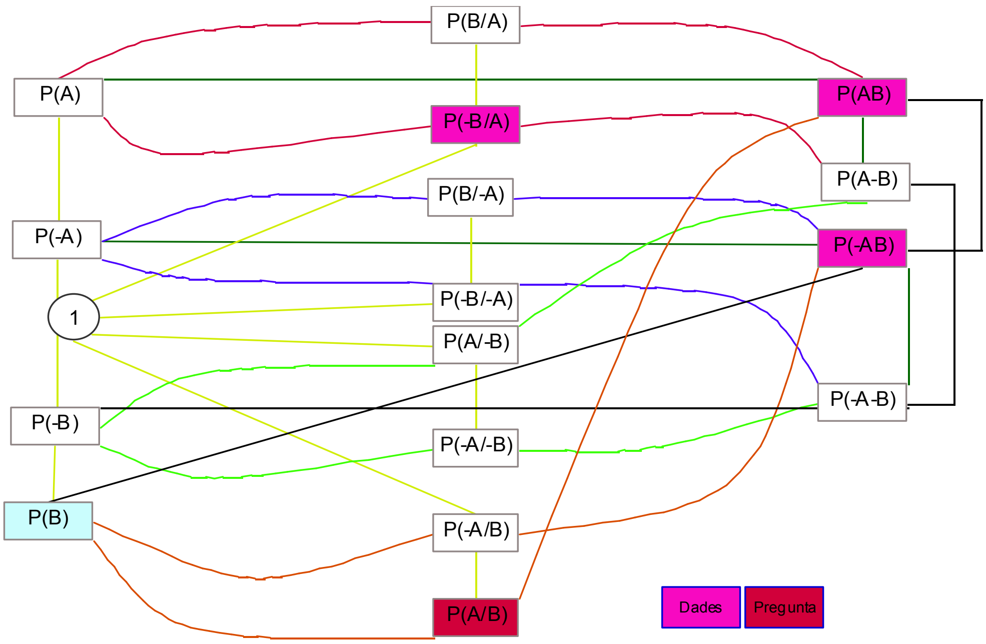


Figura 31 Grafo canónico de [p_{11}]

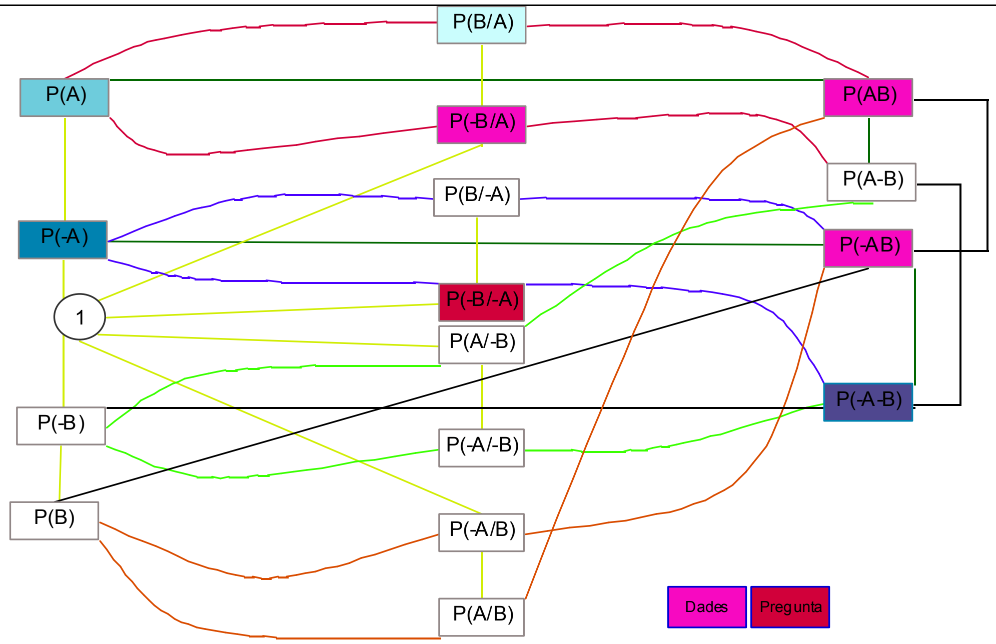


Figura 32 Grafo canónico de [p_{32}]

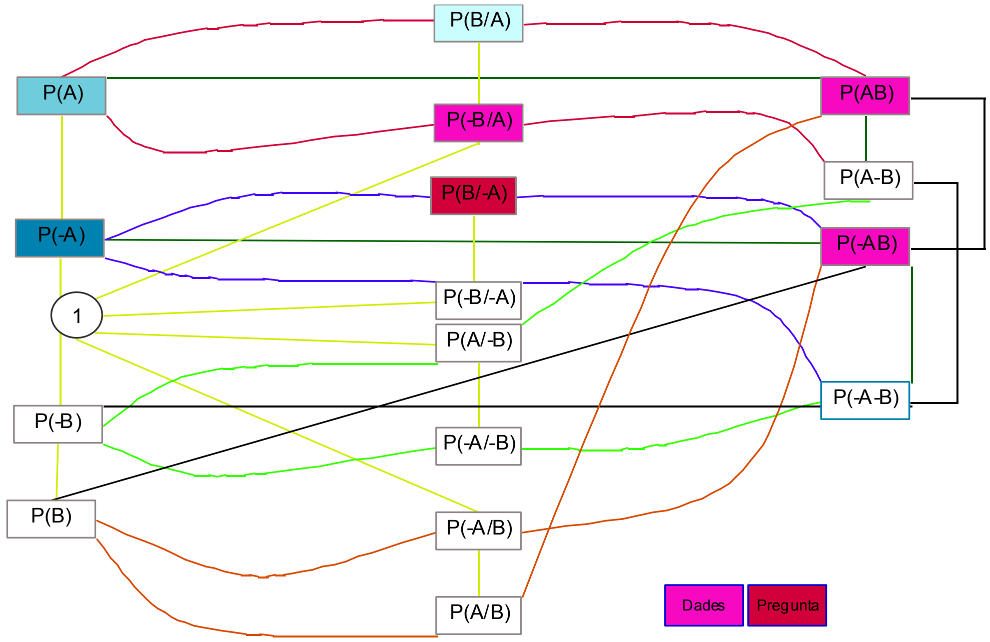


Figura 33 Grafo canónico de [p_{22}]

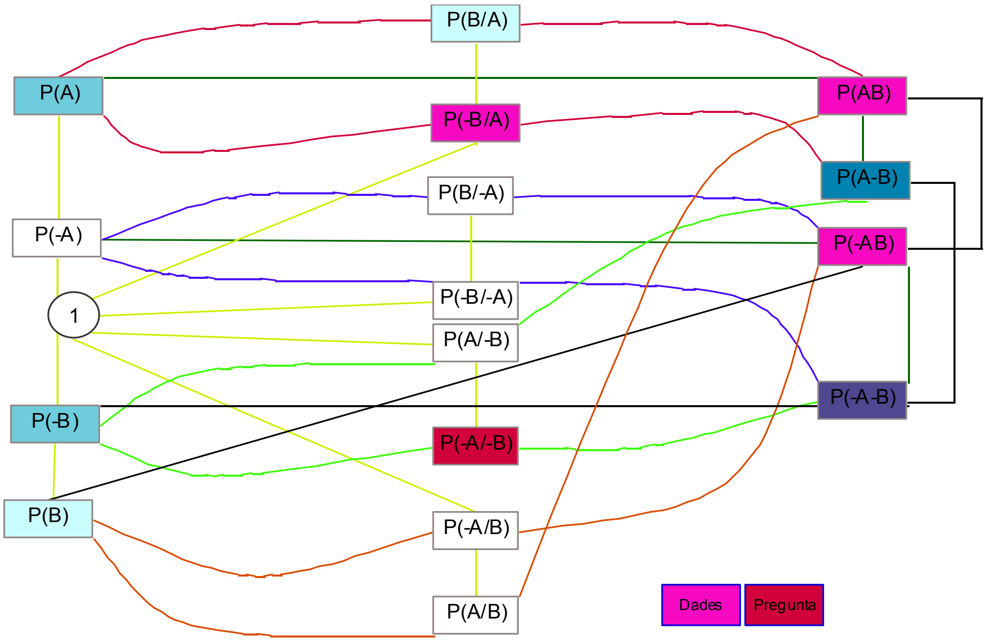


Figura 34 Grafo canónico de [p_{52}]

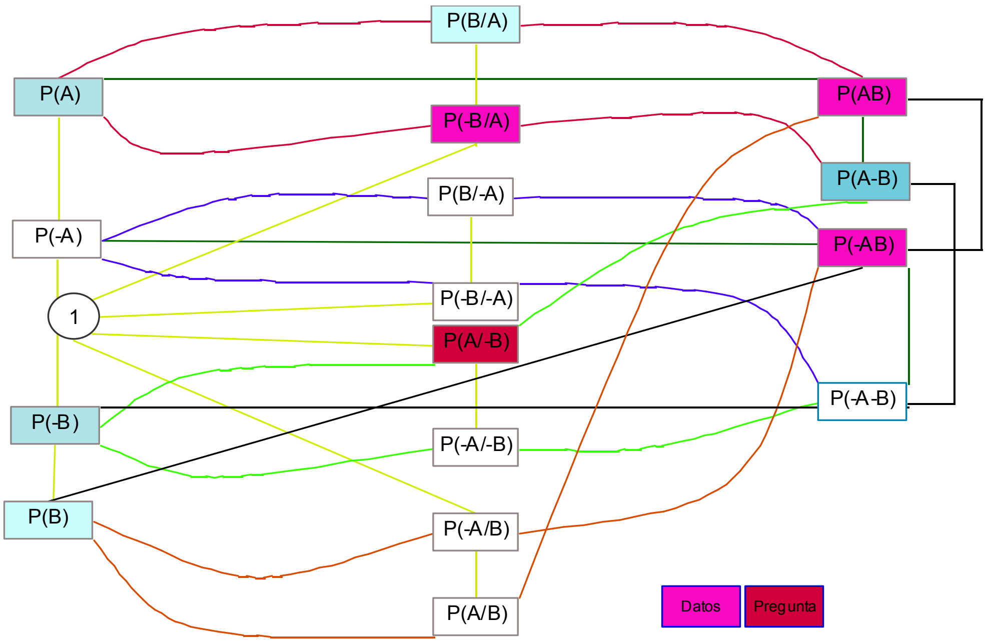


Figura 35 Grafo canónico de [p_{42}]

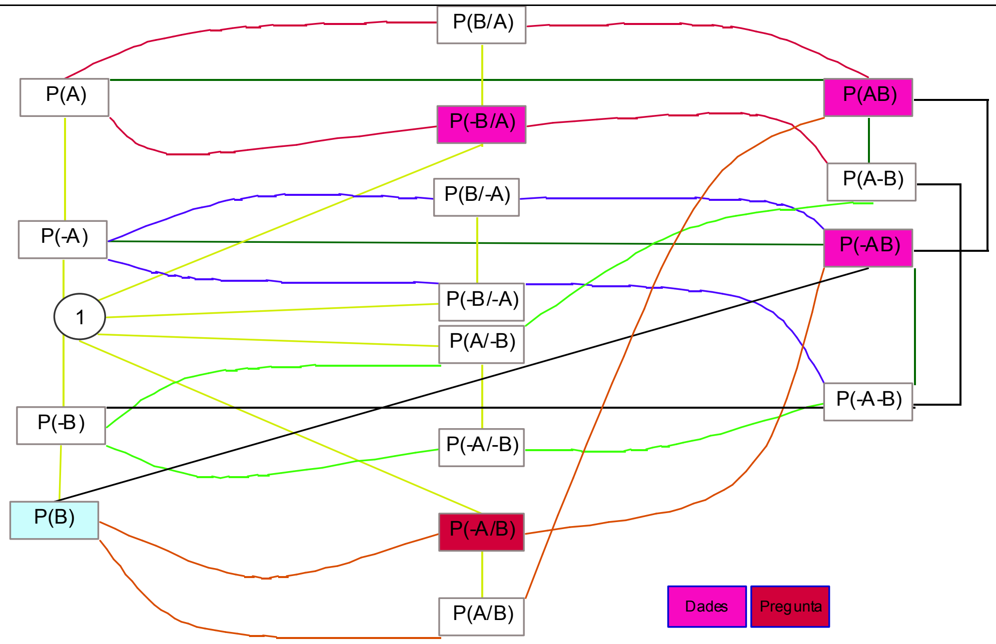


Figura 36 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

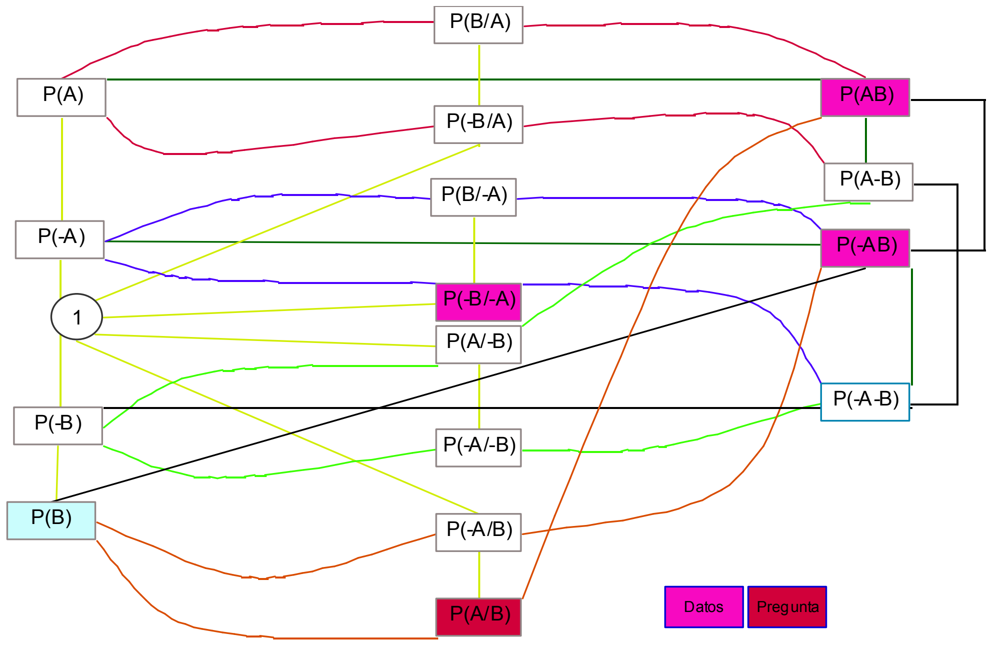


Figura 37 Grafo canónico de [p_{11}]

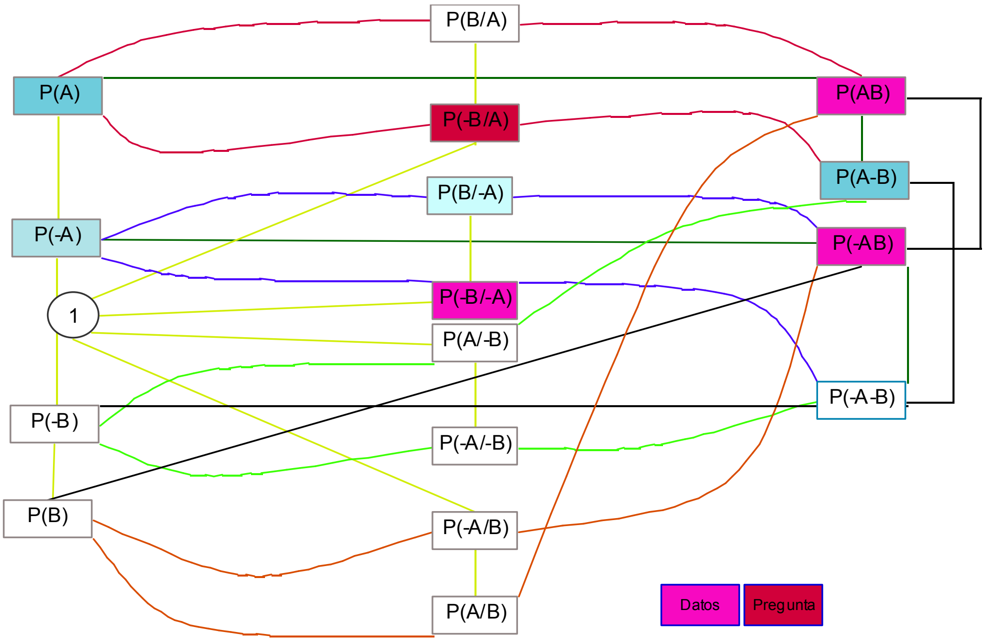


Figura 38 Grafo canónico de [p_{32}]

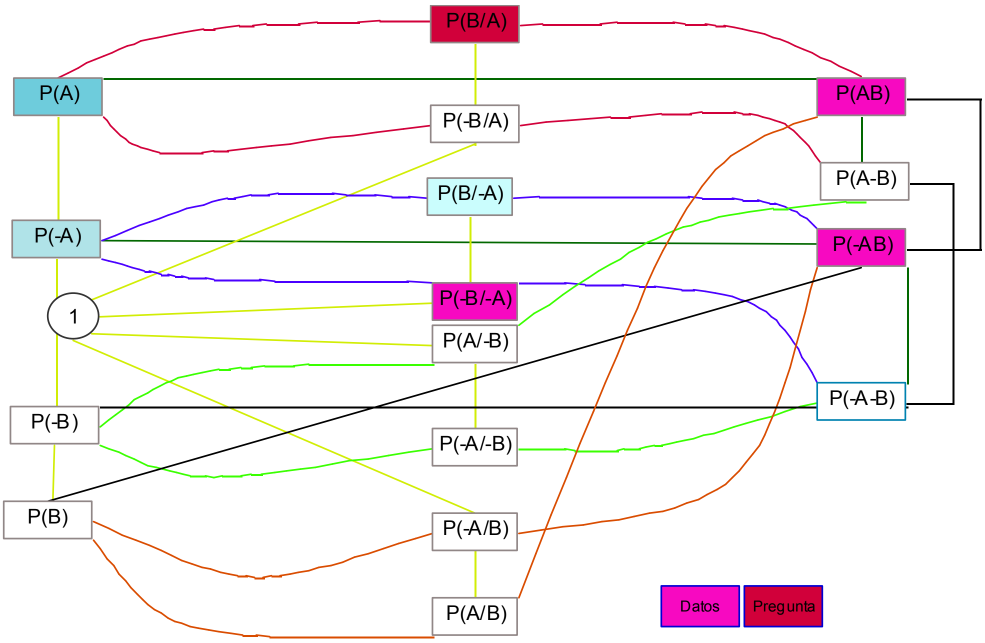


Figura 39 Grafo canónico de [p_{22}]

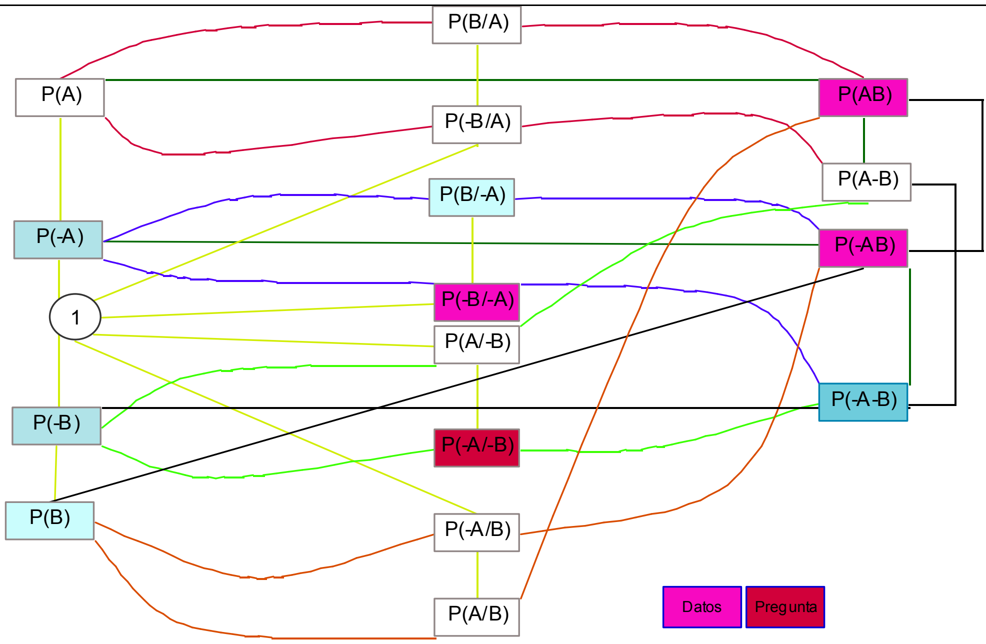


Figura 40 Grafo canónico de [p_{42}]

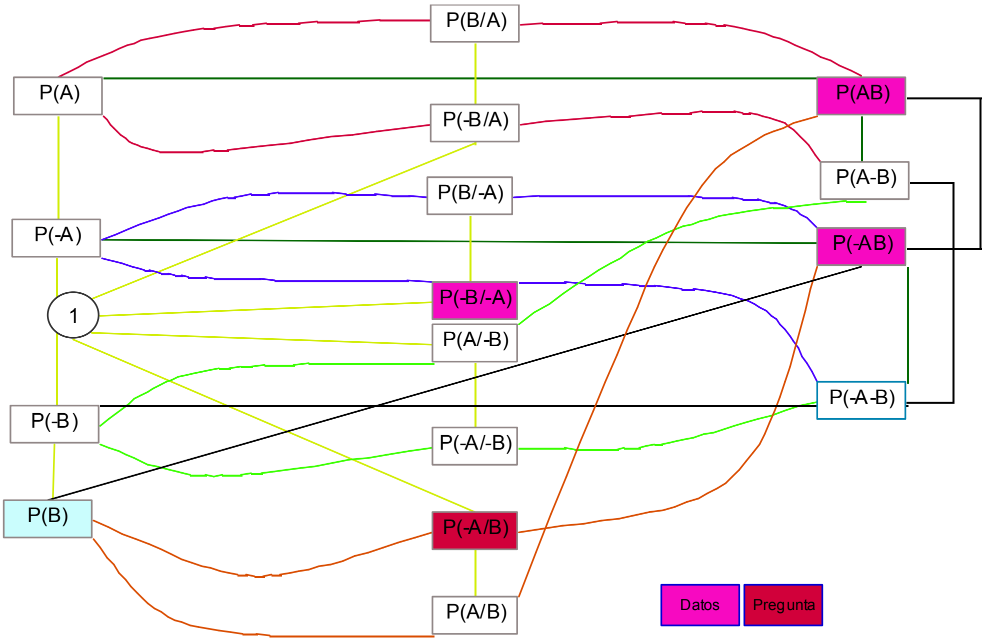


Figura 41 Grafo canónico de [p_{11}]

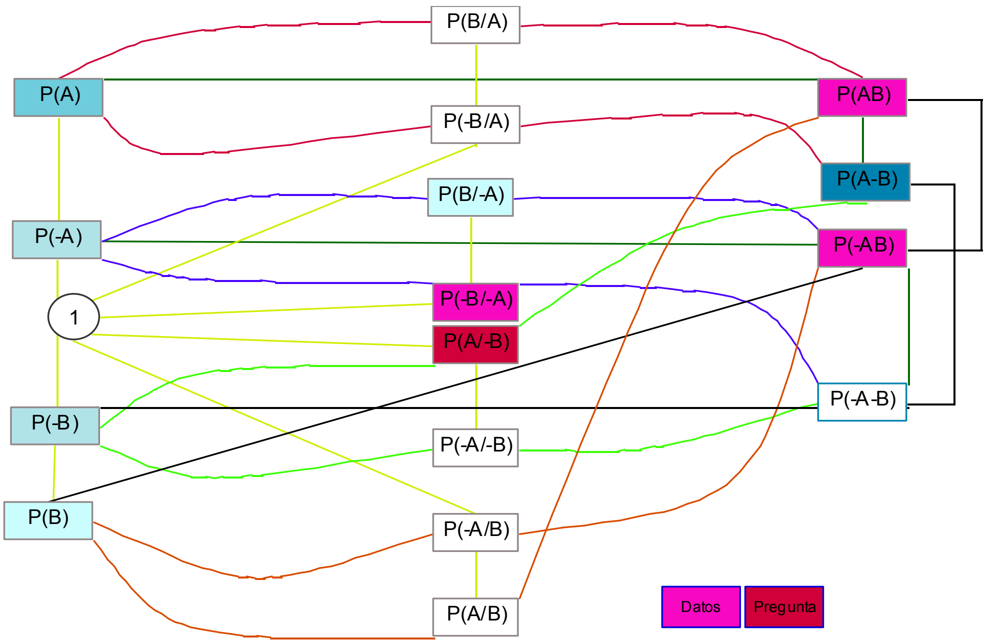


Figura 42 Grafo canónico de [p_{52}]

$N_2C_1T_1G_5$

Seguimos procediendo de la misma forma

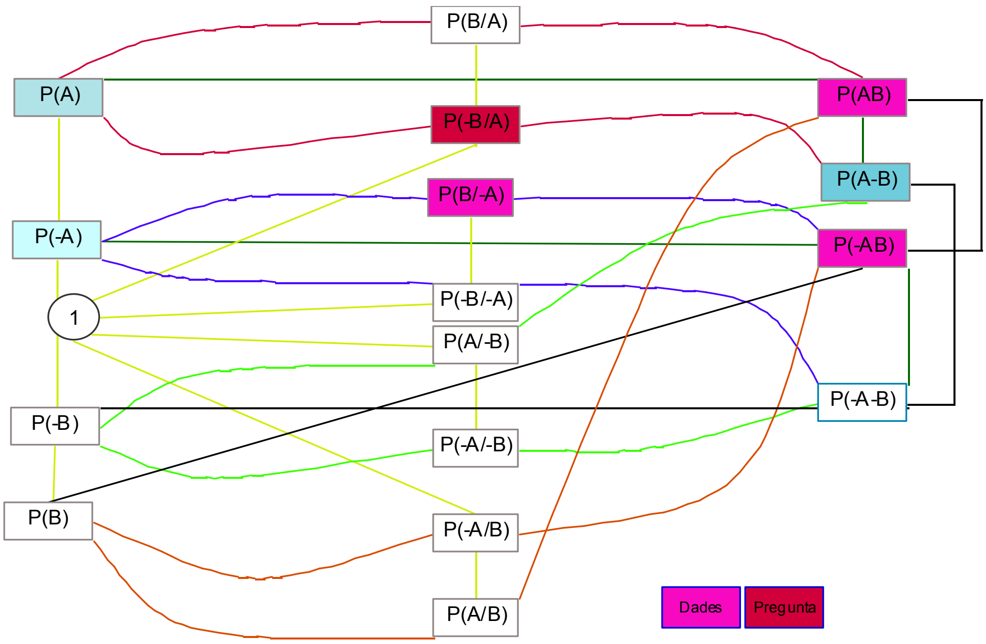


Figura 43 Grafo canónico de [p_{22}]

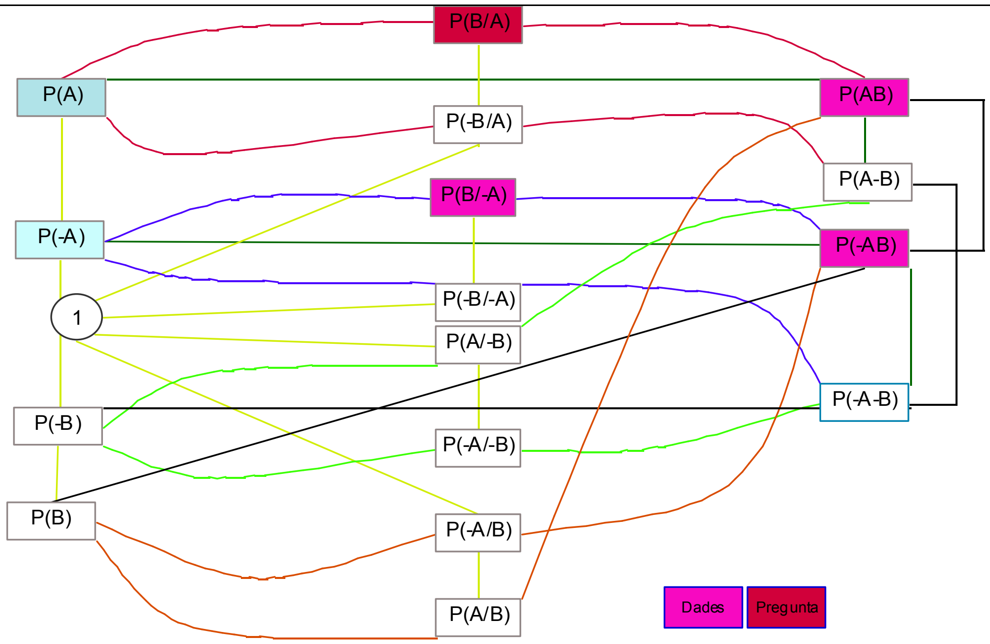


Figura 44 Grafo canónico de [p_{12}]

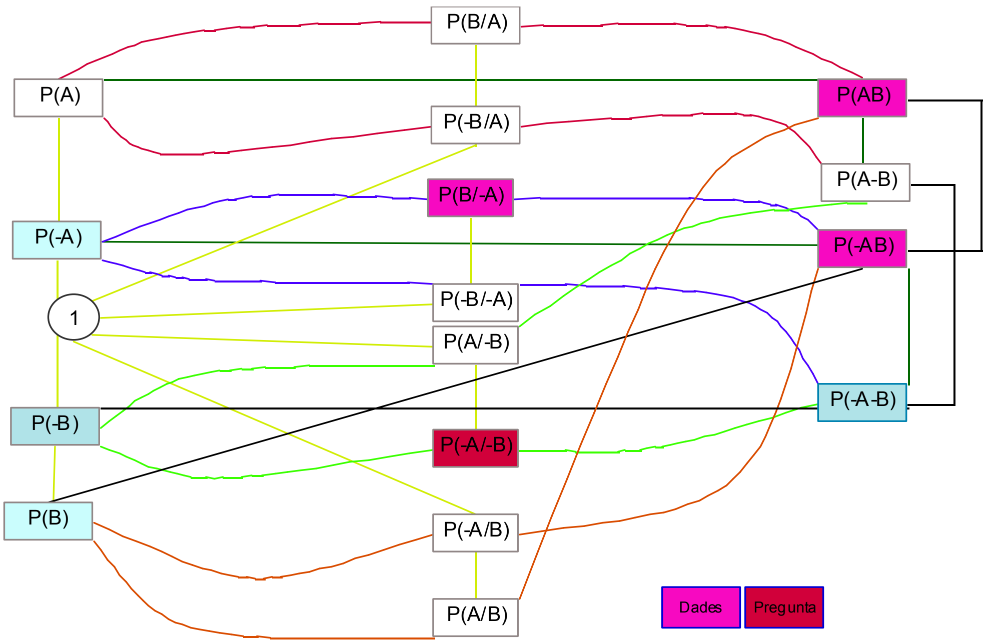


Figura 45 Grafo canónico de [p_{32}]

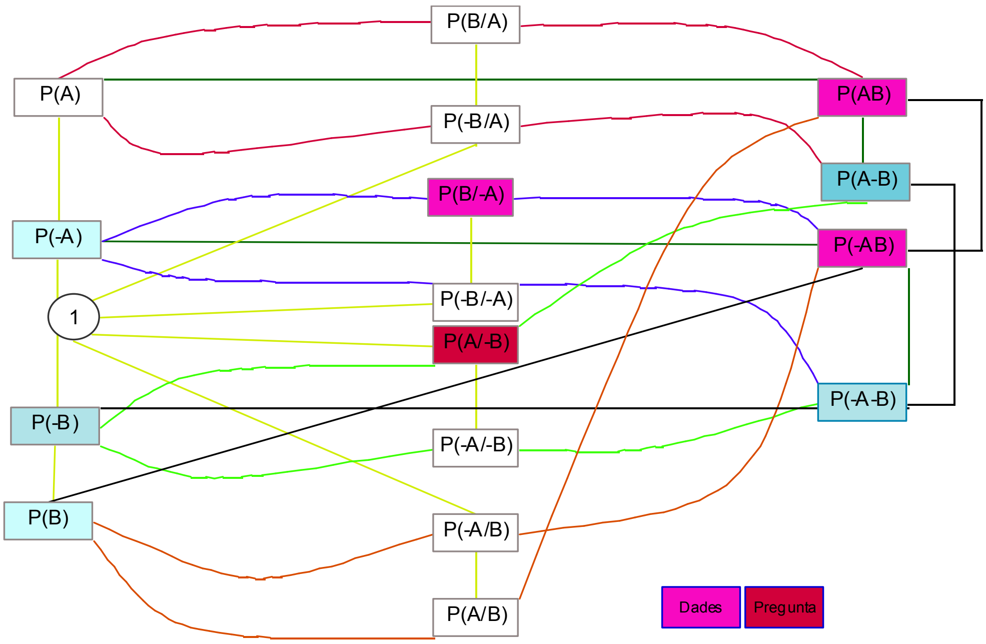


Figura 46 Grafo canónico de [p42]

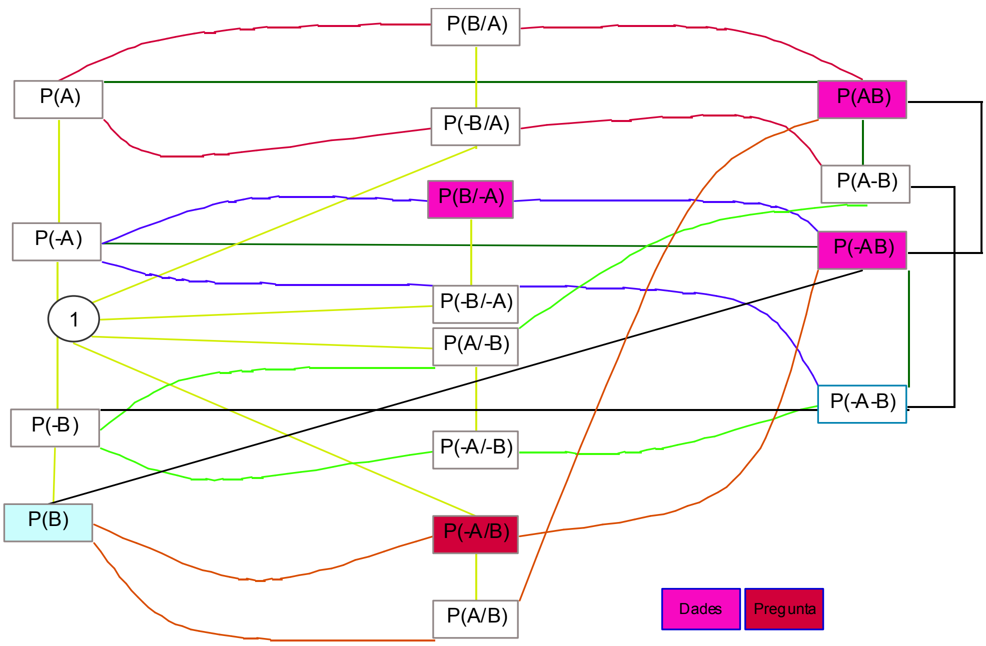


Figura 47 Grafo canónico de [p_{11}]

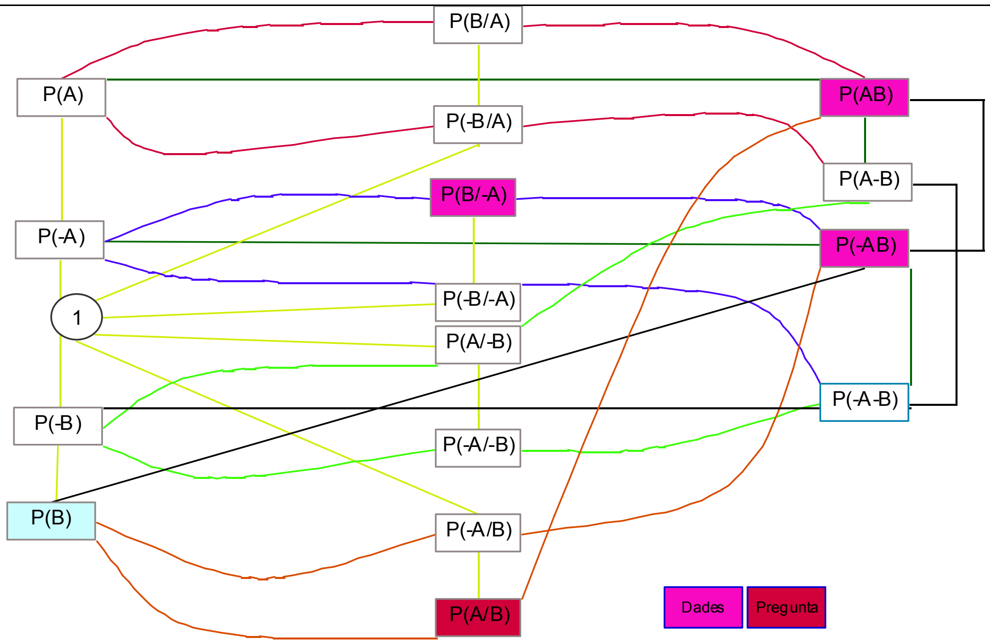


Figura 48 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

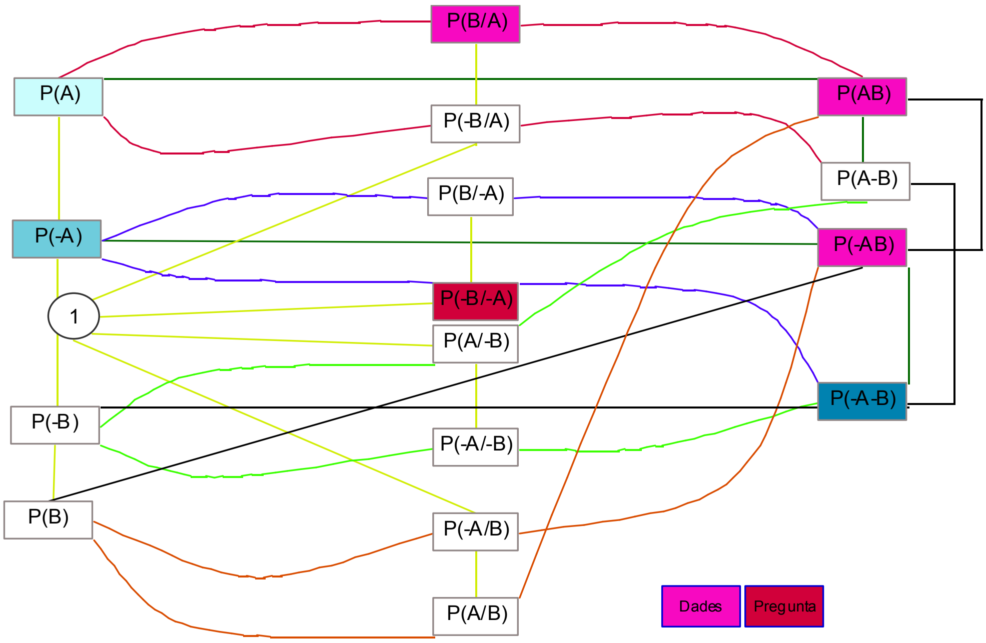


Figura 49 Grafo canónico de [p_{22}]

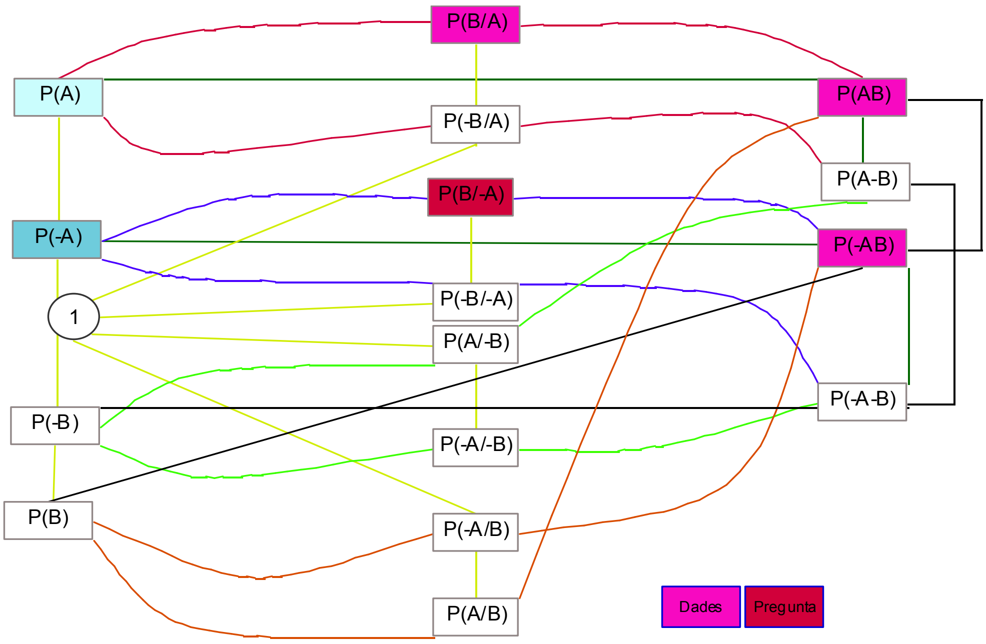


Figura 50 Grafo canónico de [p12]

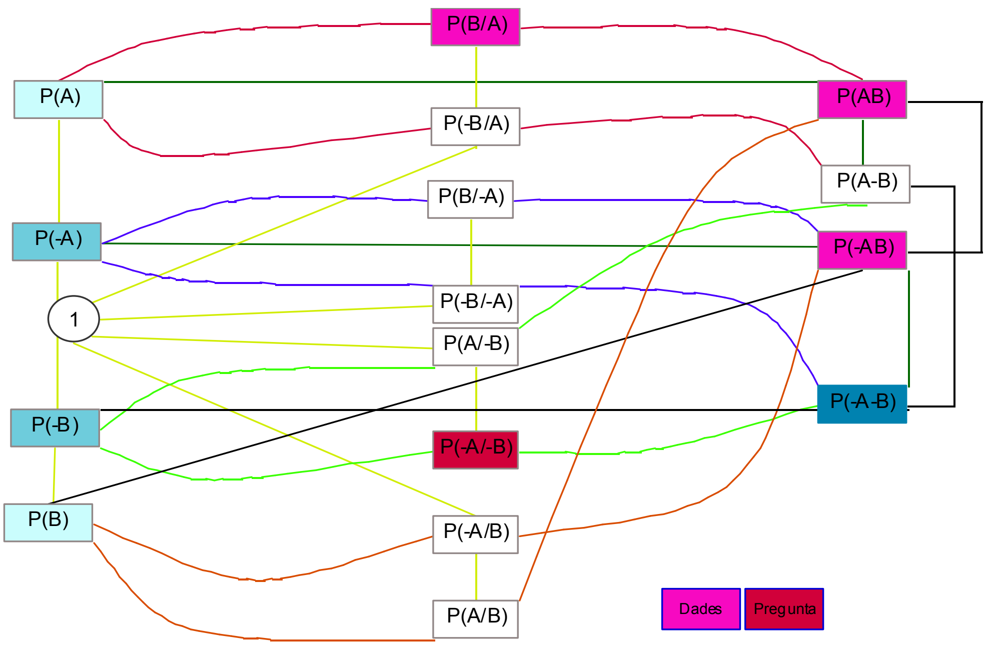


Figura 51 Grafo canónico de [p_{42}]

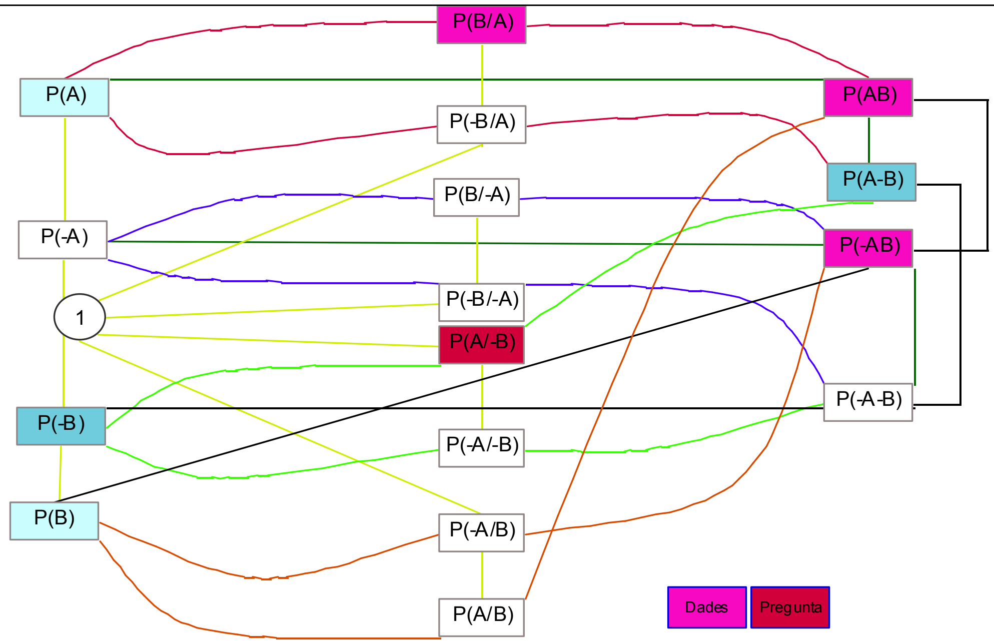


Figura 52 Grafo canónico de [p_{32}]

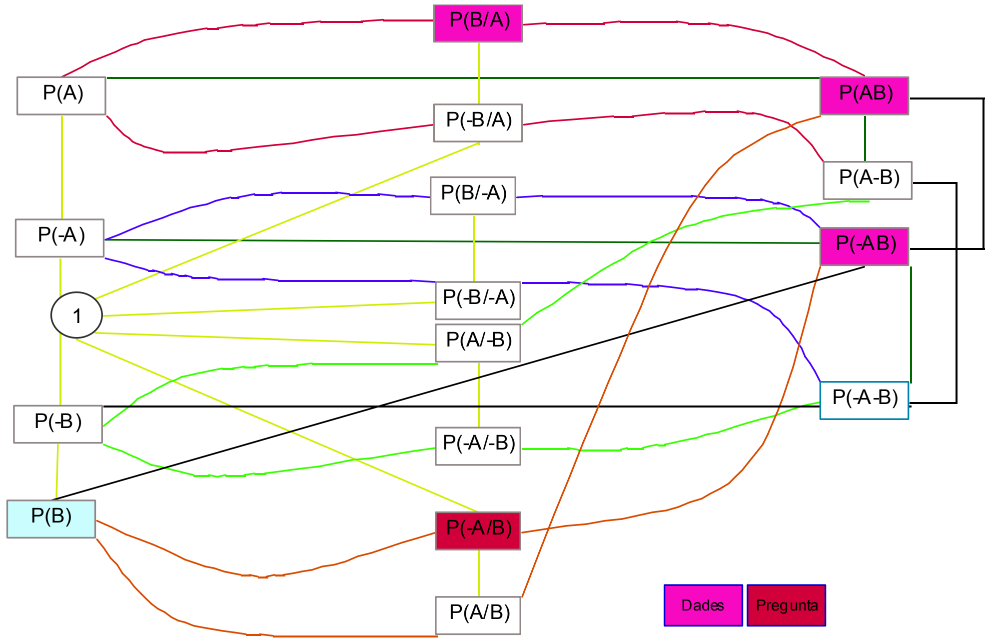


Figura 53 Grafo canónico de [p_{11}]

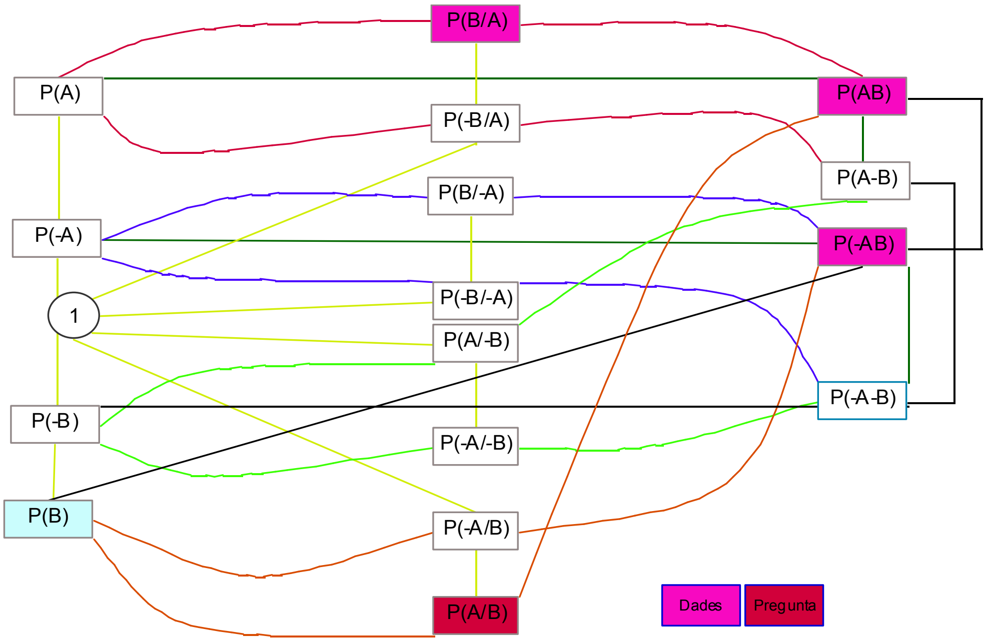


Figura 54 Grafo canónico de $[p_{11}]$

$N_2C_1T_1G_6$

Procedemos de la misma forma

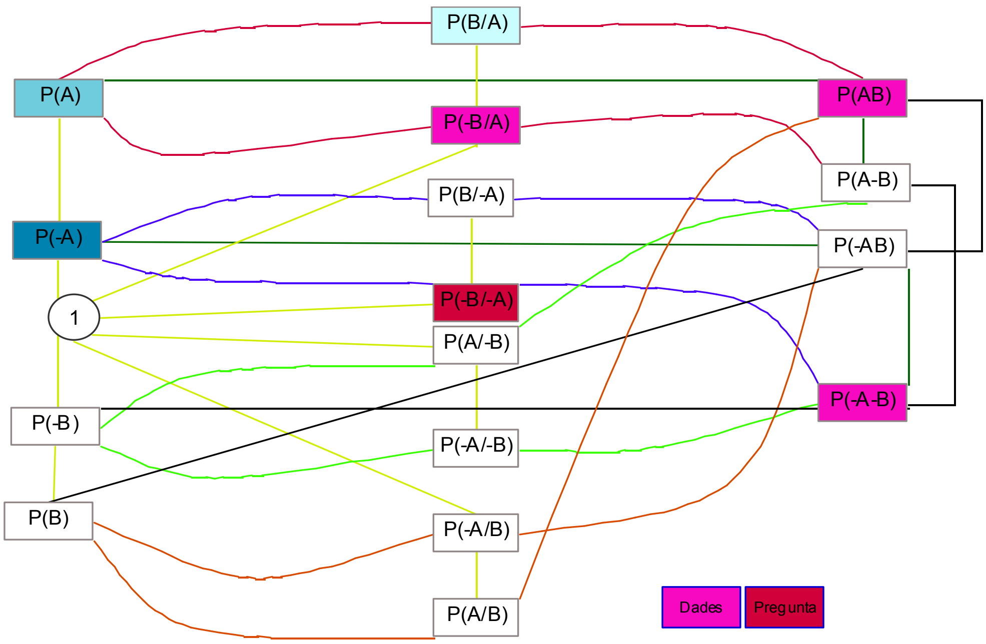


Figura 55 Grafo canónico de $[p_{22}]$

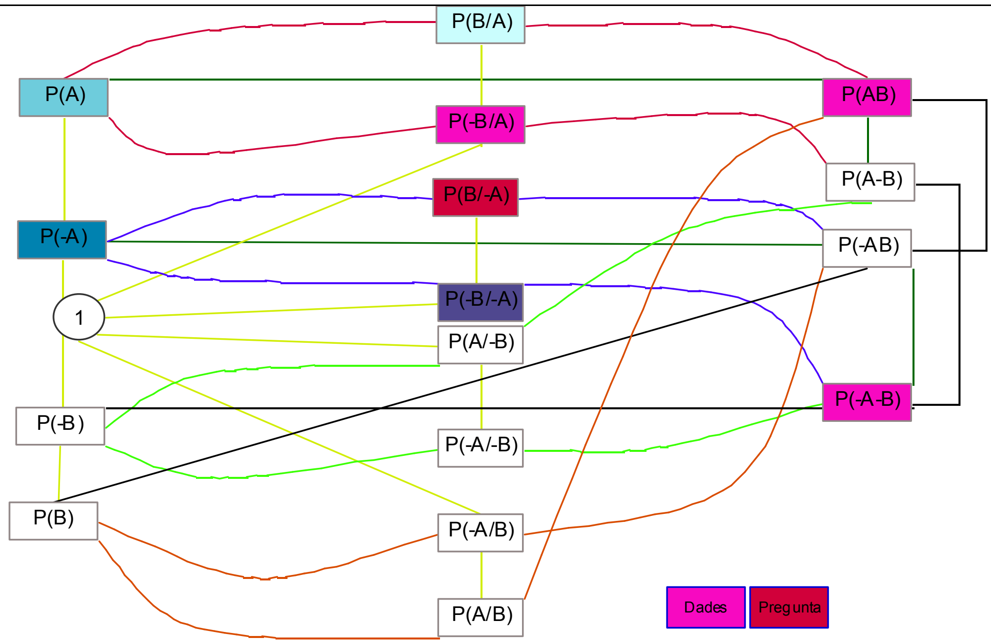


Figura 56 Grafo canónico de [p_{32}]

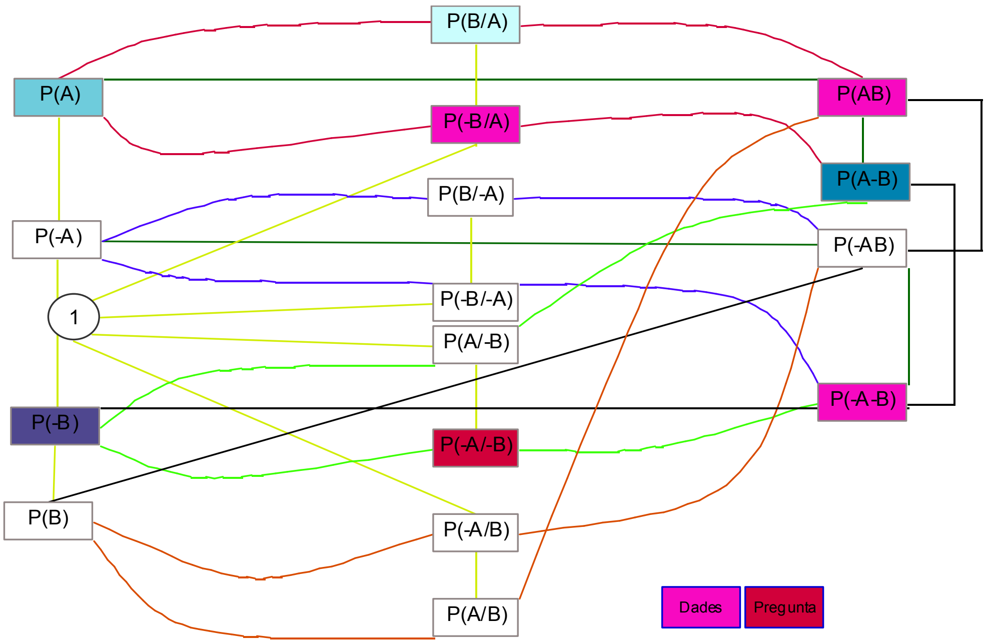


Figura 57 Grafo canónico de [p_{32}]

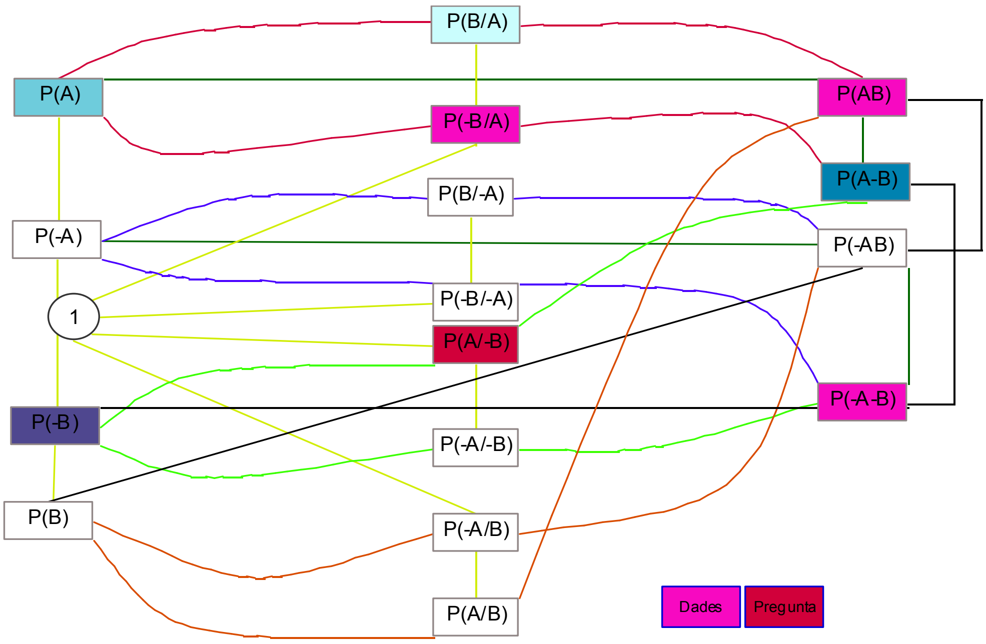


Figura 58 Grafo canónico de [p_{32}]

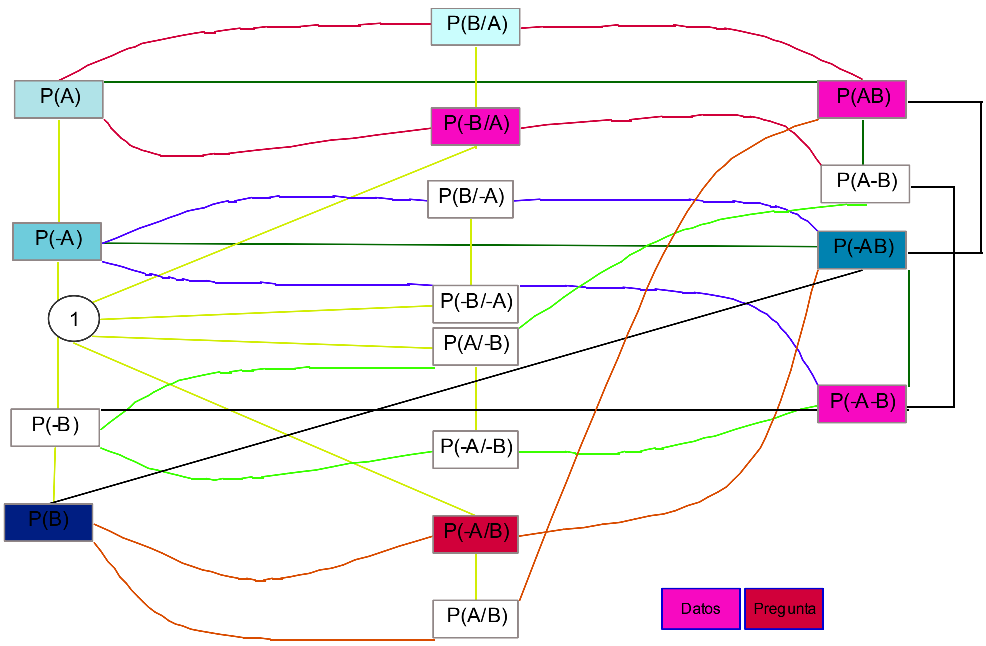


Figura 59 Grafo canónico de [p_{42}]

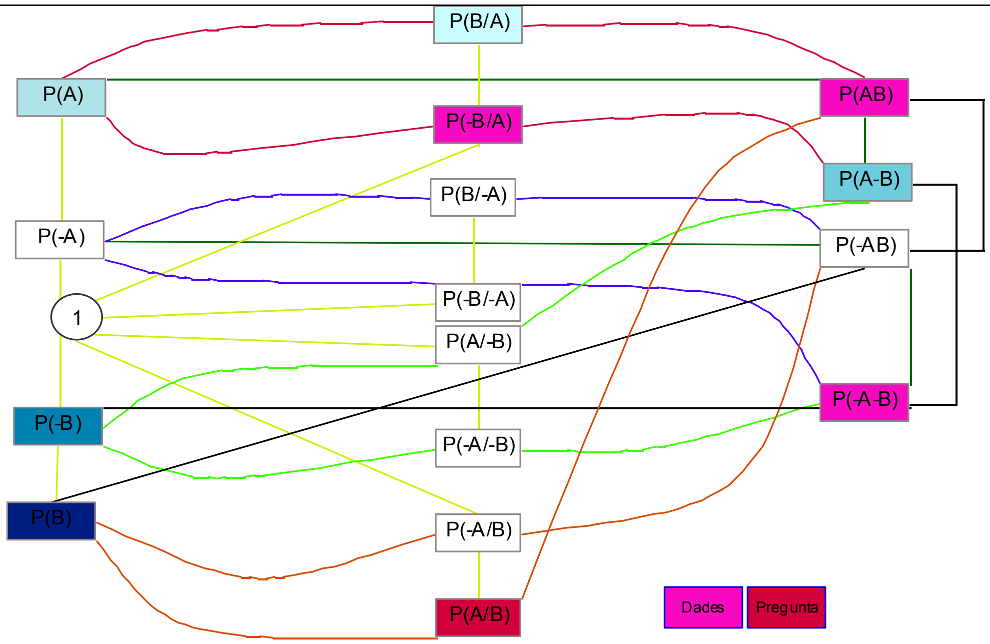


Figura 60 Grafo canónico de [p_{42}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

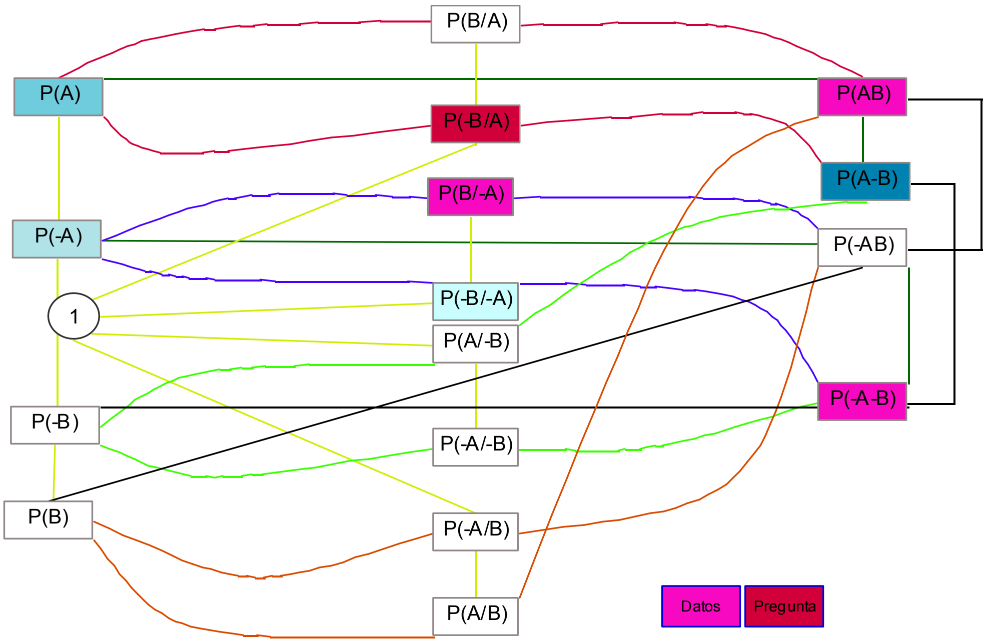


Figura 61 Grafo canónico de [p_{32}]

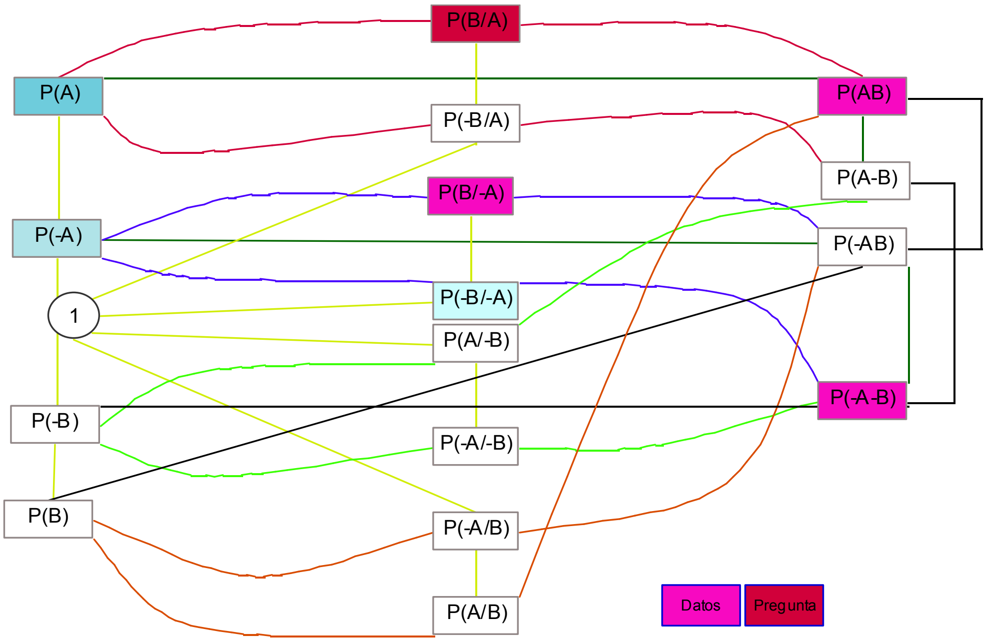


Figura 62 Grafo canónico de [p_{22}]

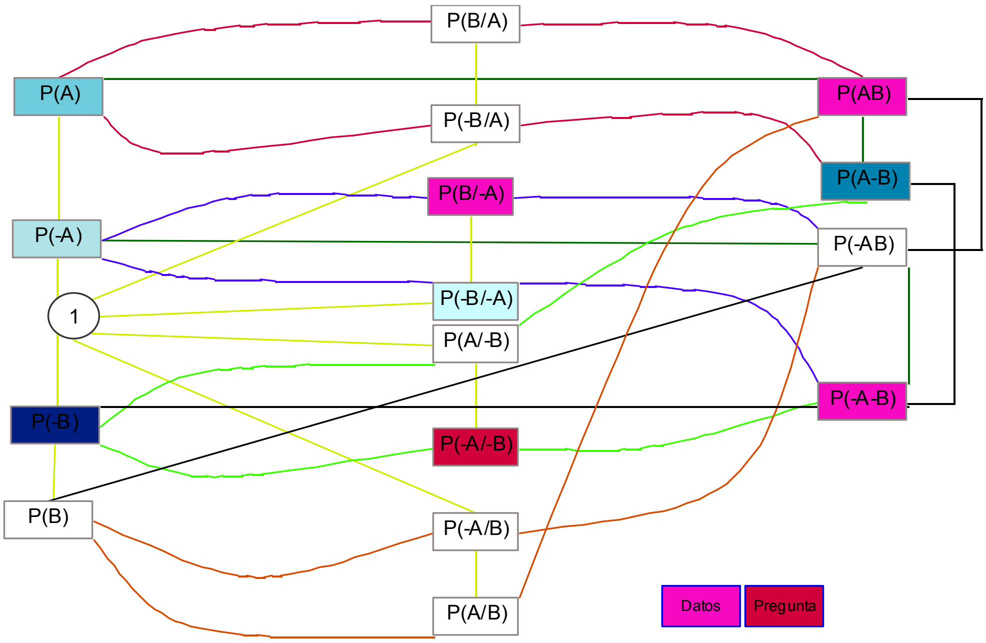


Figura 63 Grafo canónico de [p_{42}]

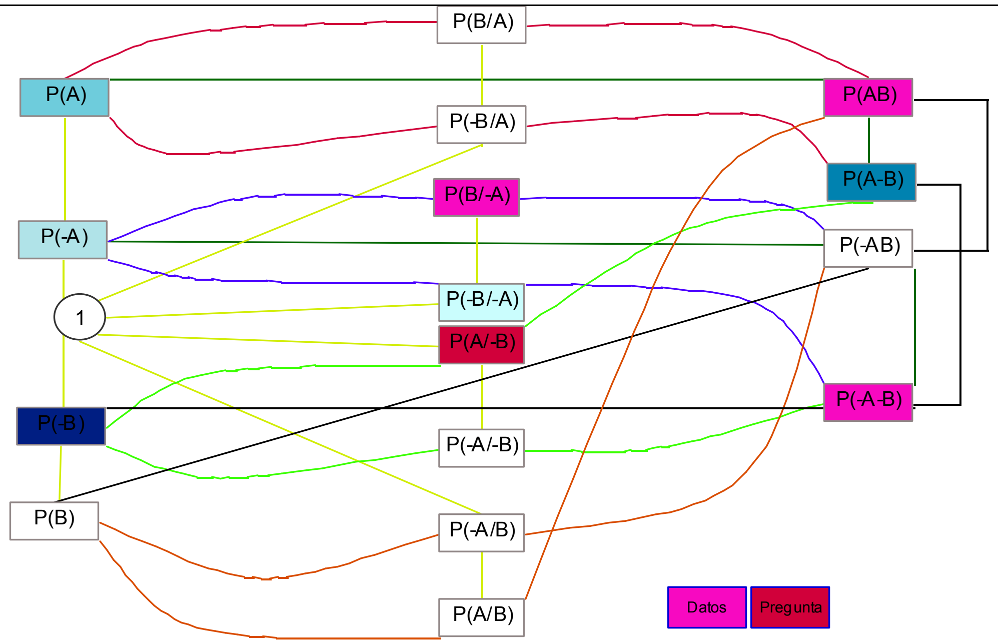


Figura 64 Grafo canónico de [p_{42}]

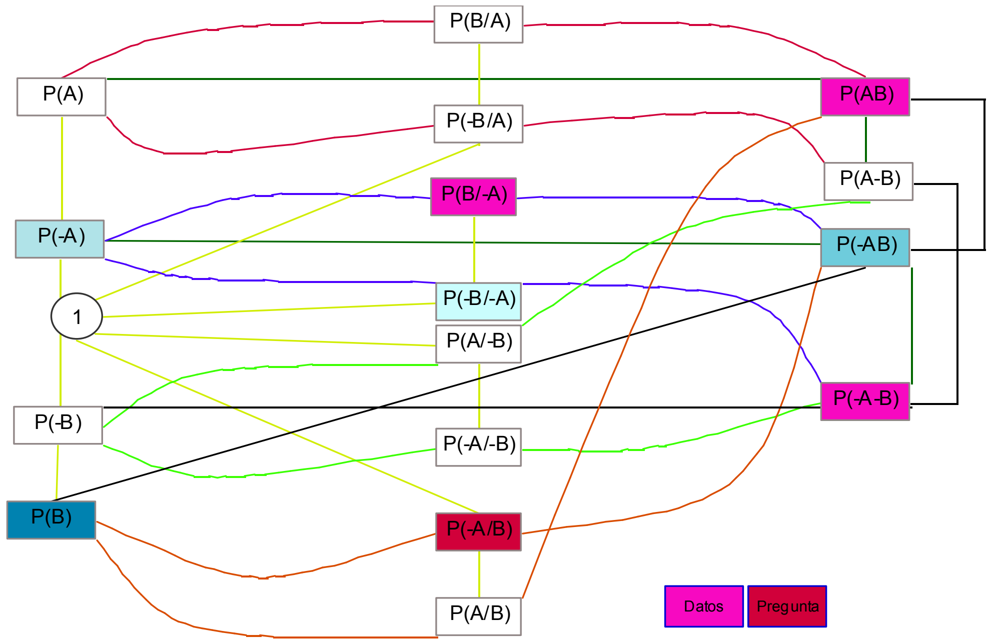


Figura 65 Grafo canónico de [p_{32}]

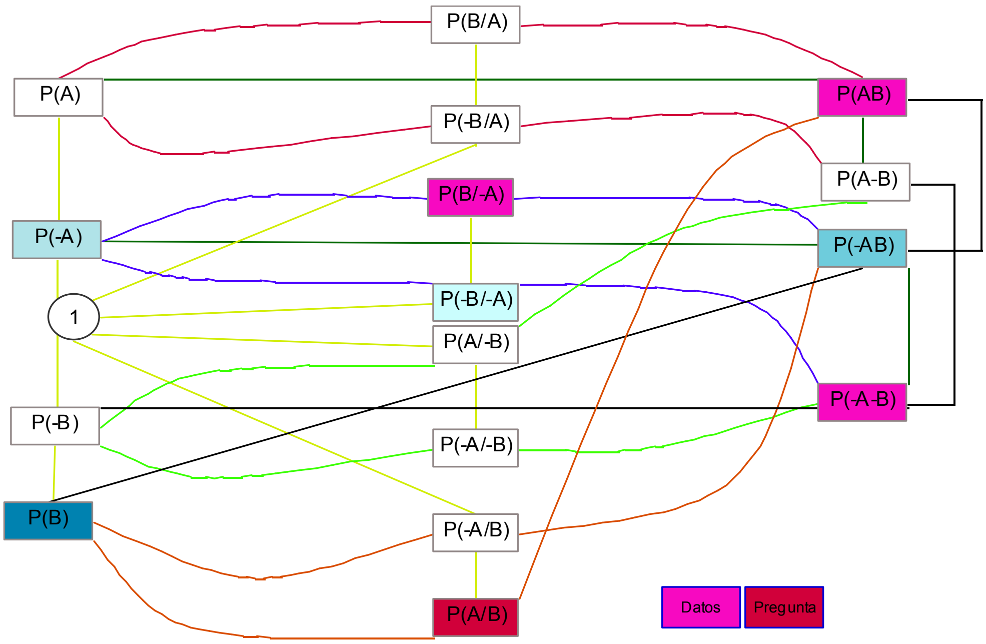


Figura 66 Grafo canónico de $[p_{32}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

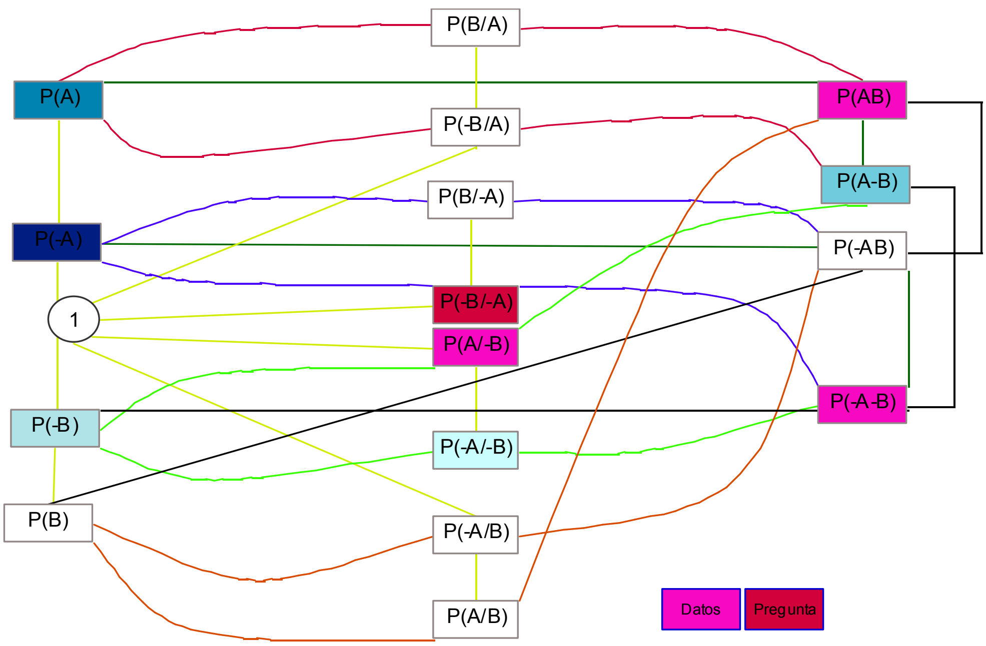


Figura 67 Grafo canónico de $[p_{42}]$

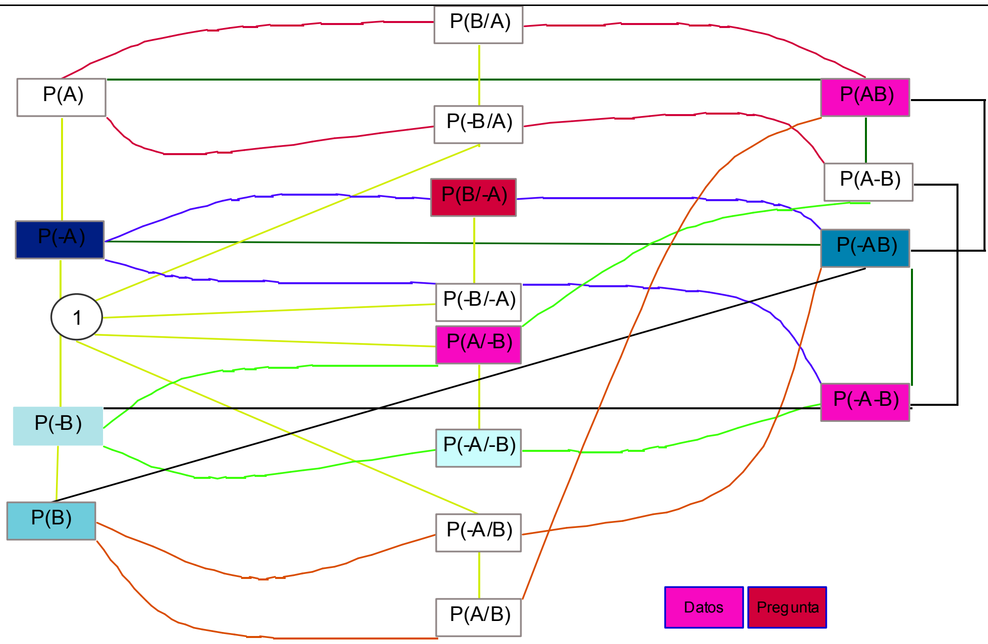


Figura 68 Grafo canónico de [p_{42}]

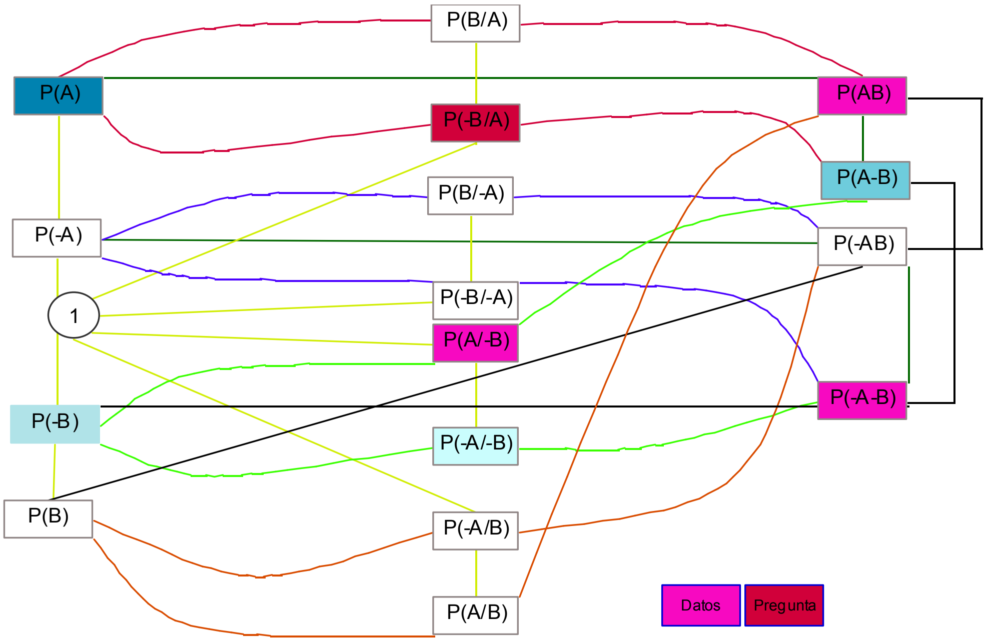


Figura 69 Grafo canónico de [p_{32}]

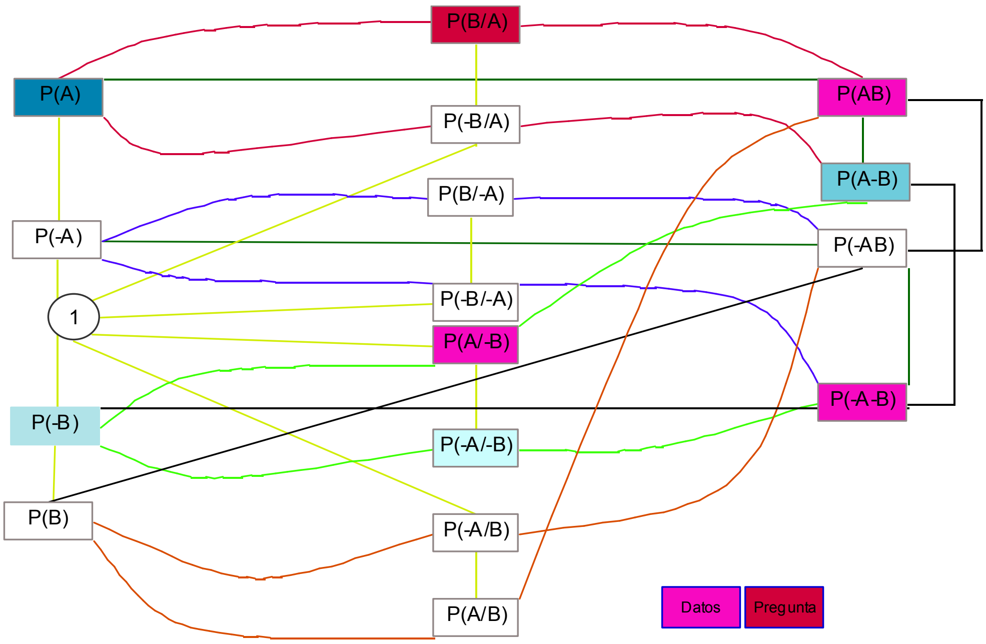


Figura 70 Grafo canónico de [p_{32}]

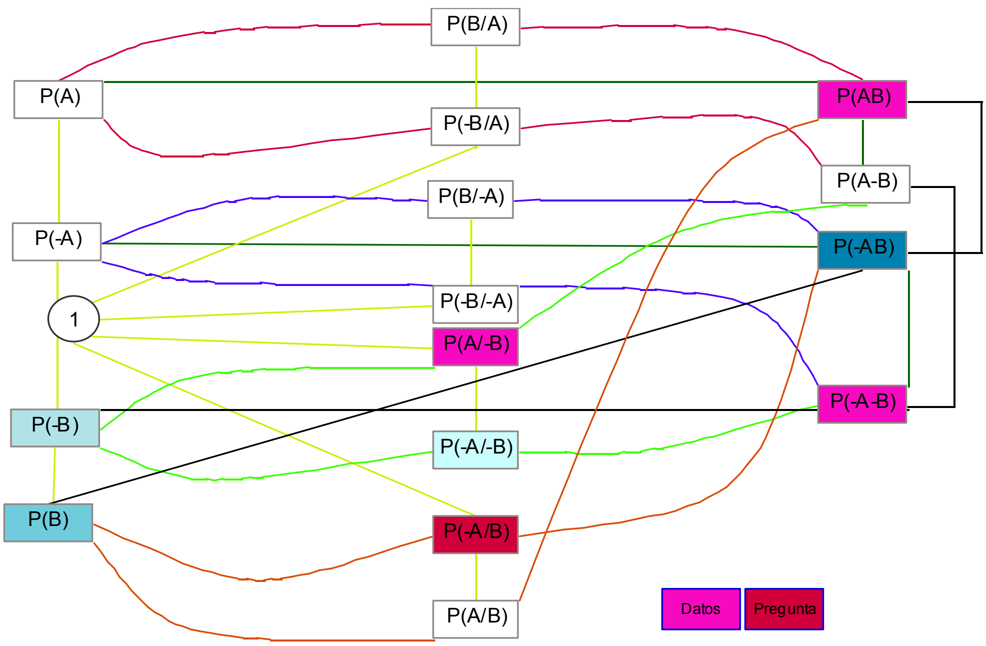


Figura 71 Grafo canónico de [p_{32}]

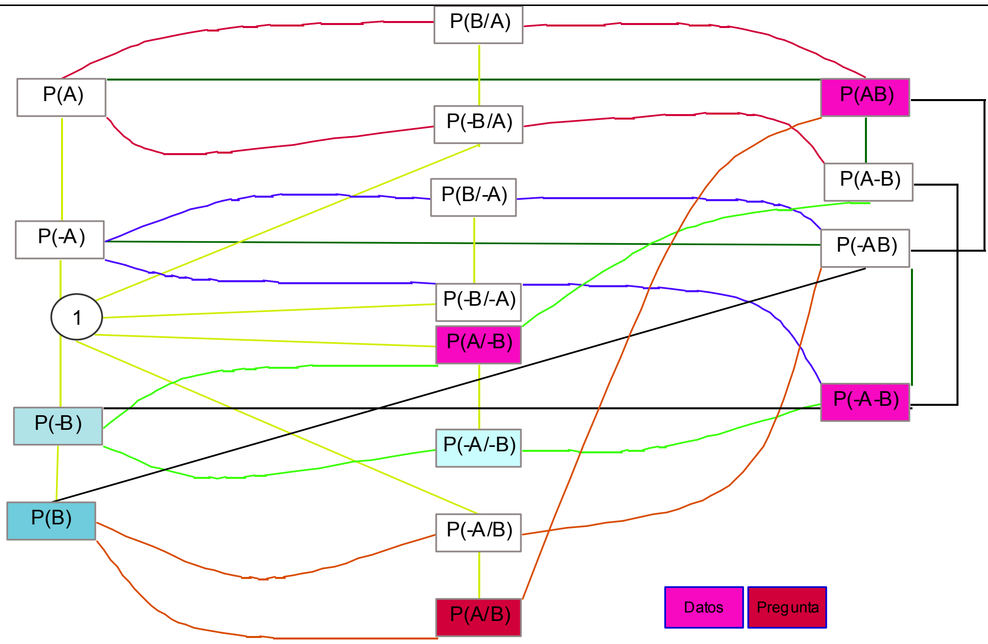


Figura 72 Grafo canónico de [p_{22}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

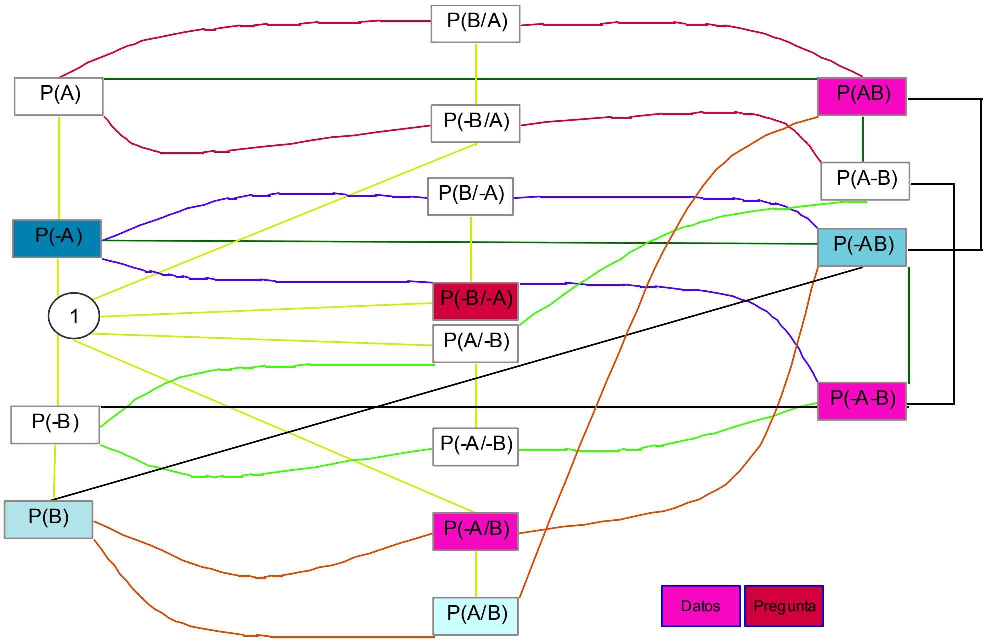


Figura 73 Grafo canónico de [p_{32}]

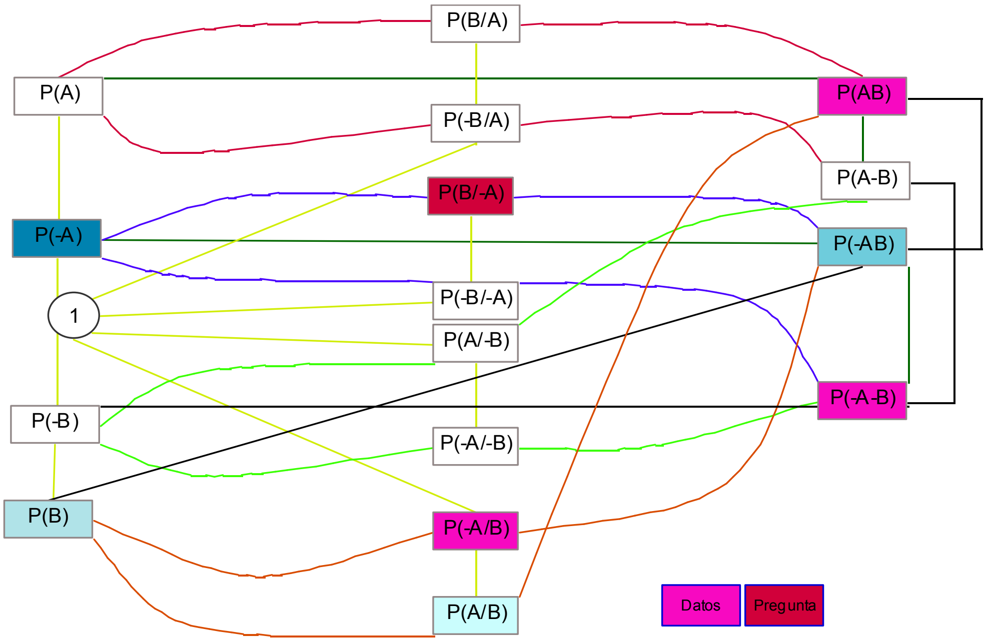


Figura 74 Grafo canónico de [p_{32}]

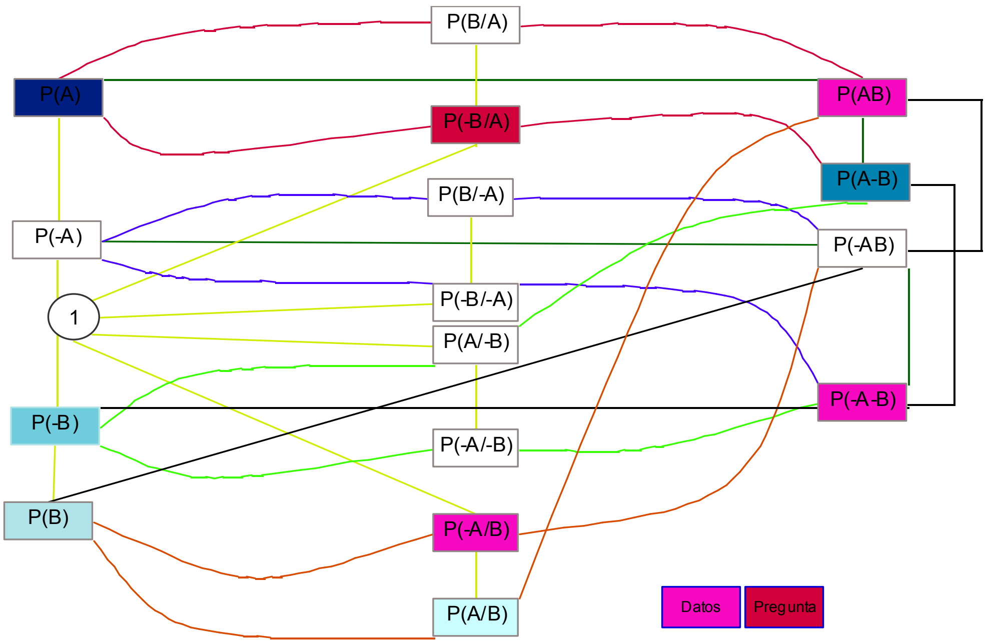


Figura 75 Grafo canónico de [p_{42}]

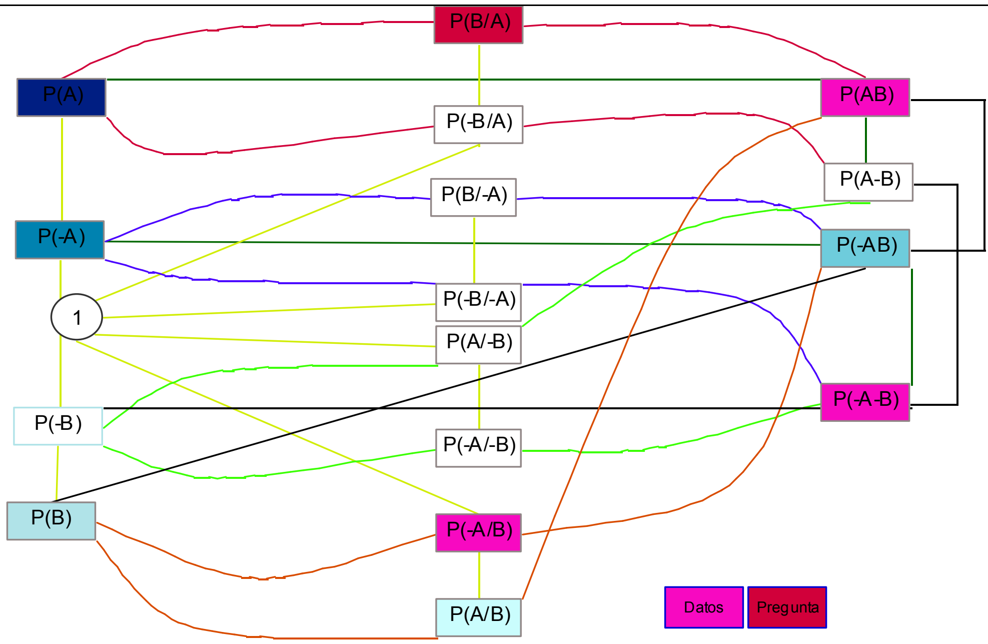


Figura 76 Grafo canónico de [p42]

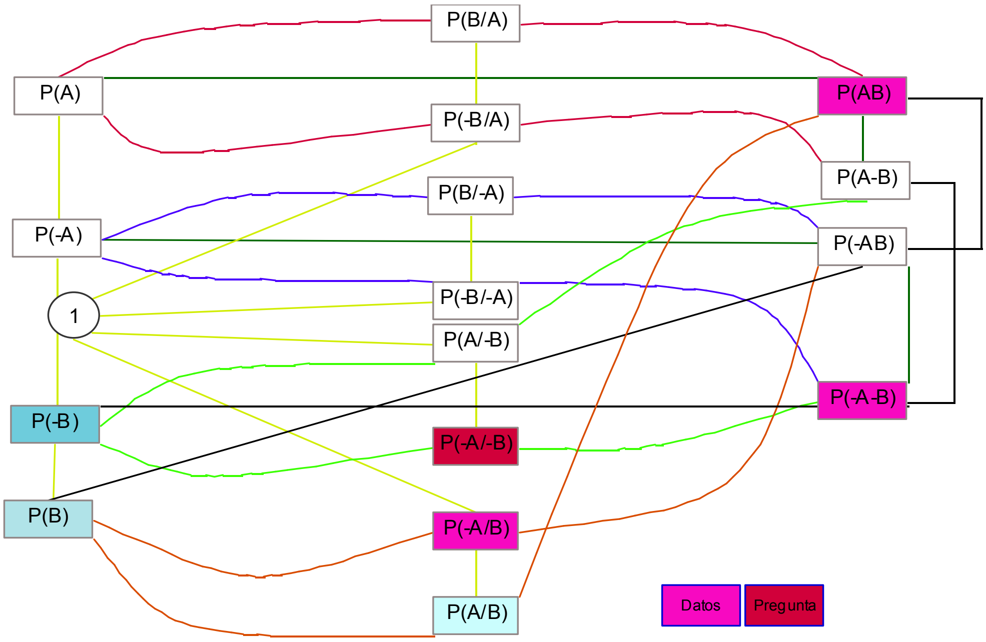


Figura 77 Grafo canónico de [p22]

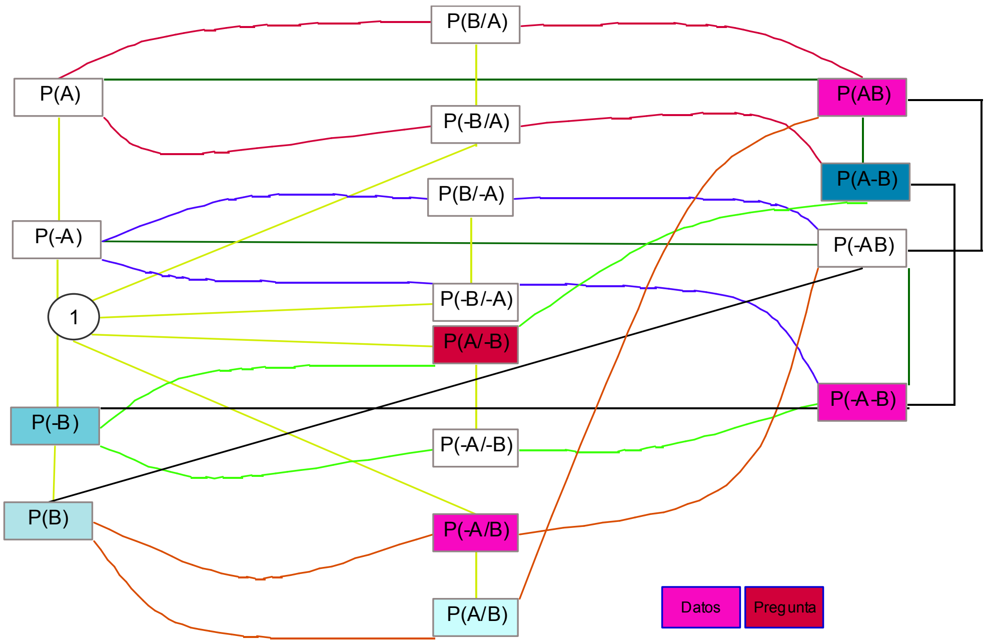


Figura 78 Grafo canónico de [p_{32}]

I. 2. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_1T_2$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.12

$N_2C_1T_2G_1$

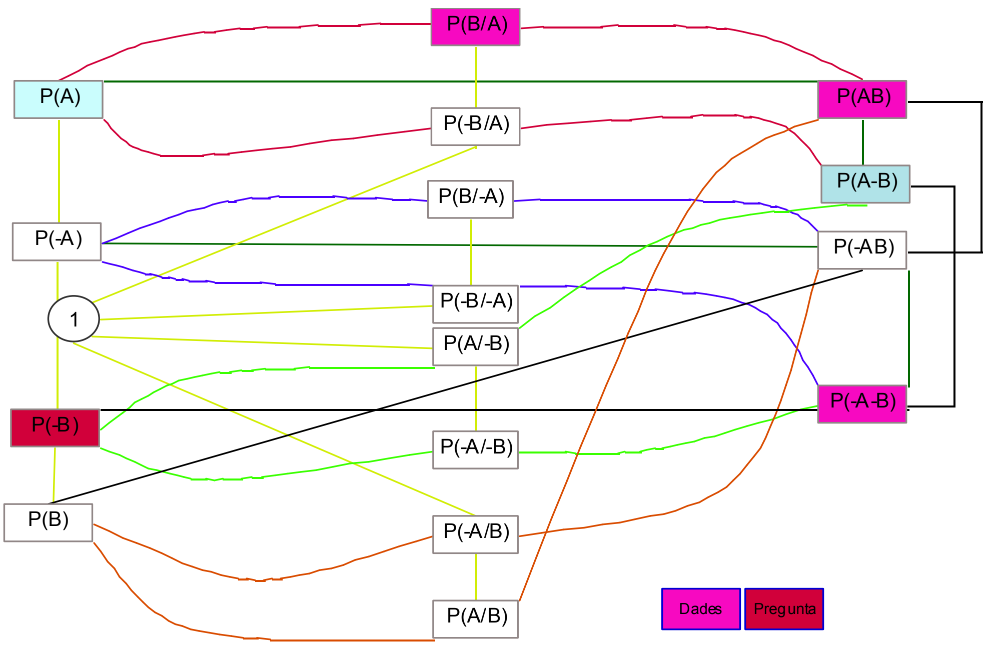


Figura 79 Grafo canónico de [p_{21}]

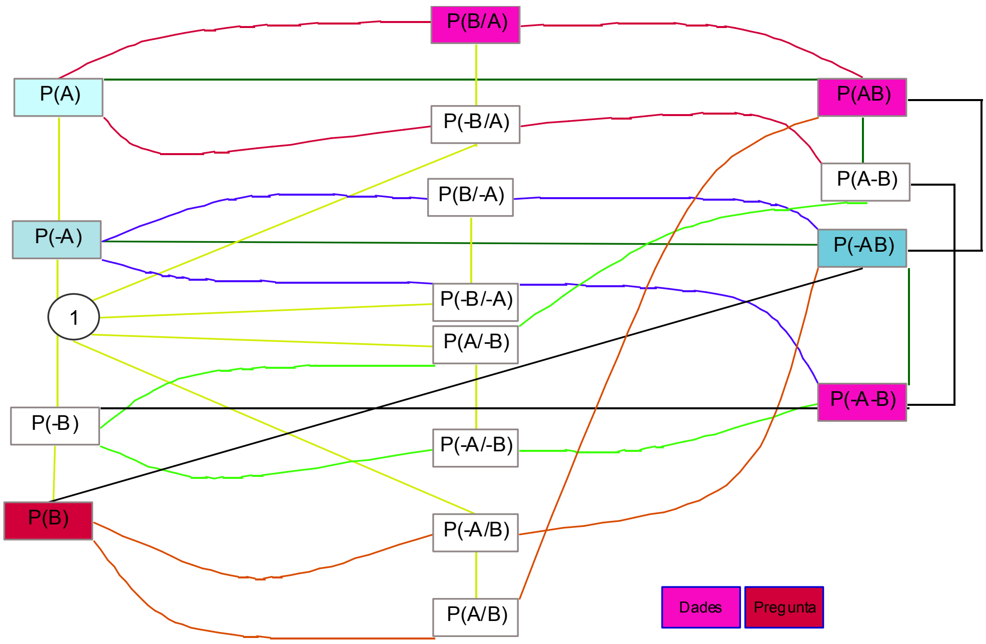


Figura 80 Grafo canónico de [p_{31}]

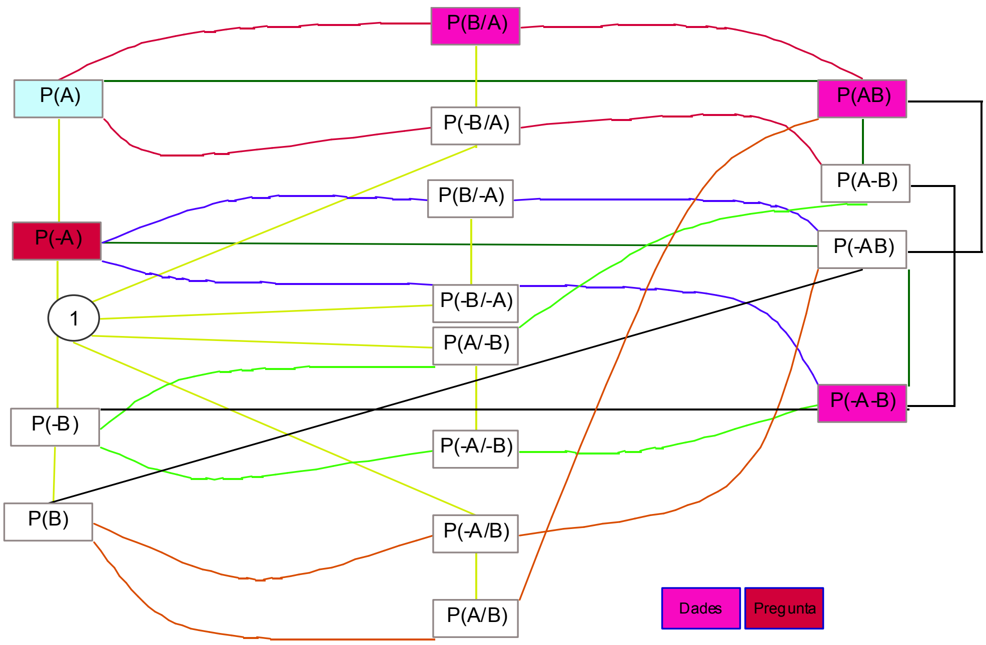


Figura 81 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

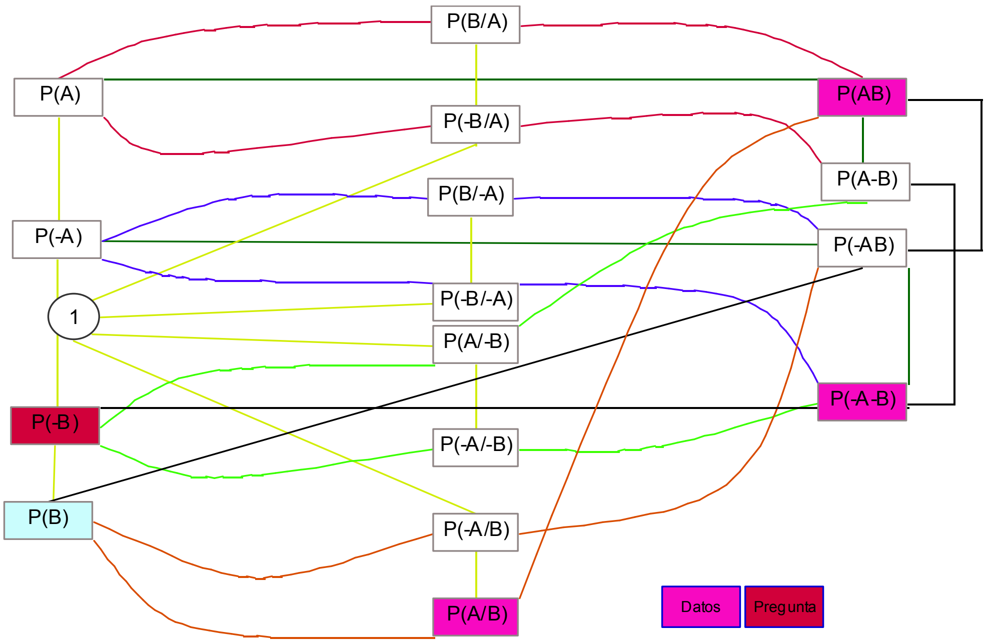


Figura 82 Grafo canónico de [p_{11}]

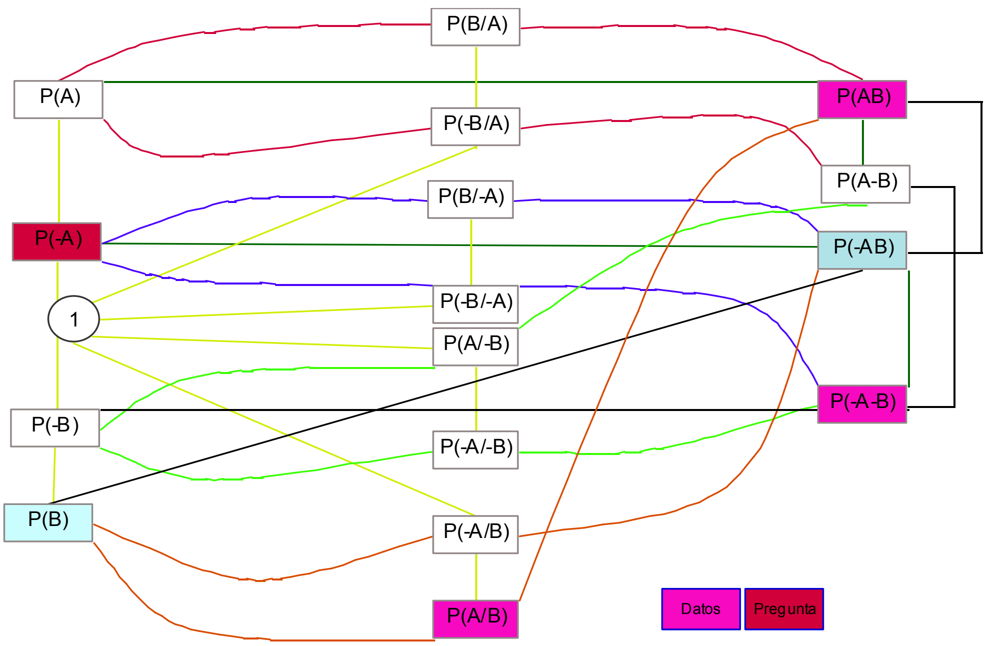


Figura 83 Grafo canónico de [p_{21}]

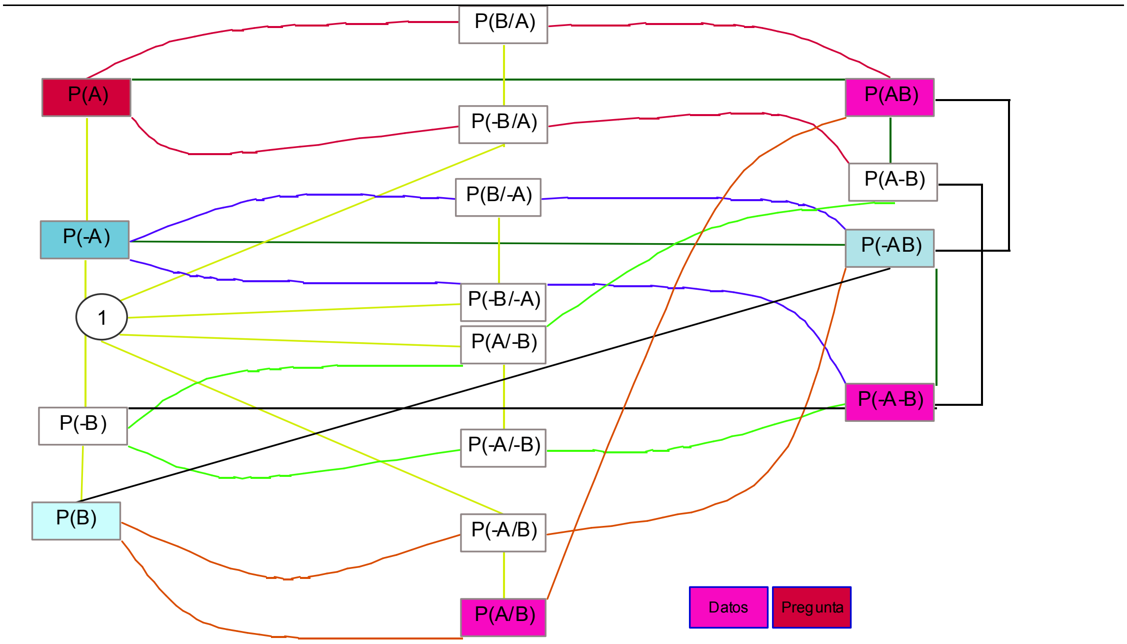


Figura 84 Grafo canónico de $[p_{31}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

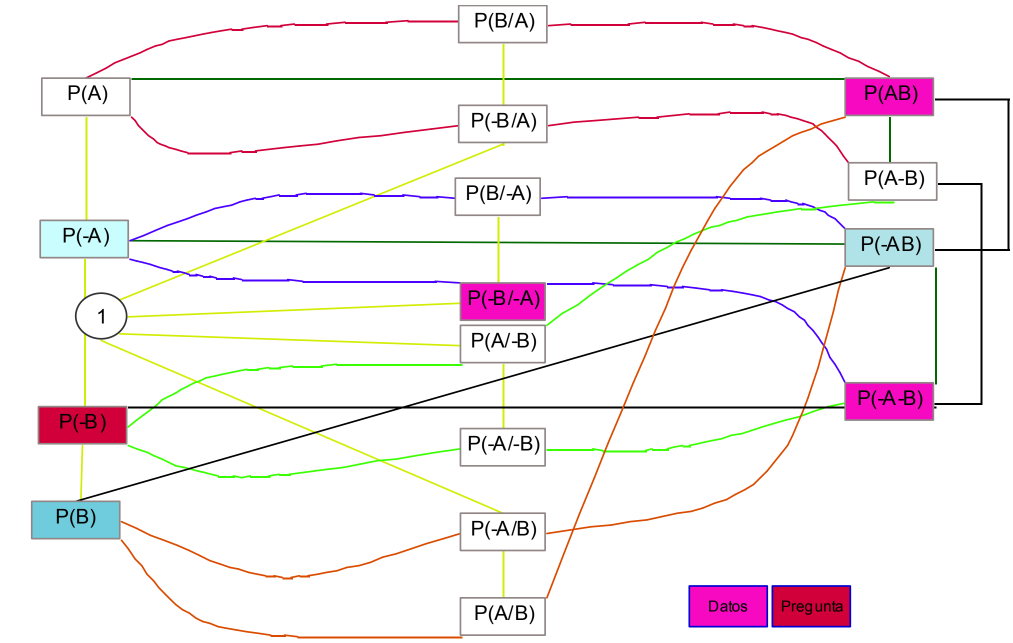


Figura 85 Grafo canónico de $[p_{31}]$

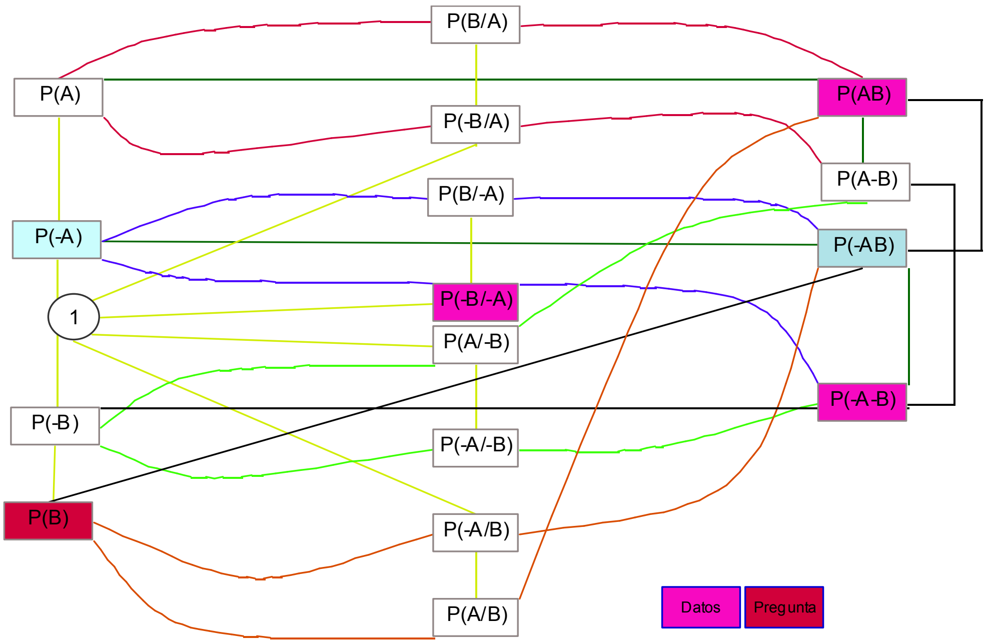


Figura 86 Grafo canónico de [p_{21}]

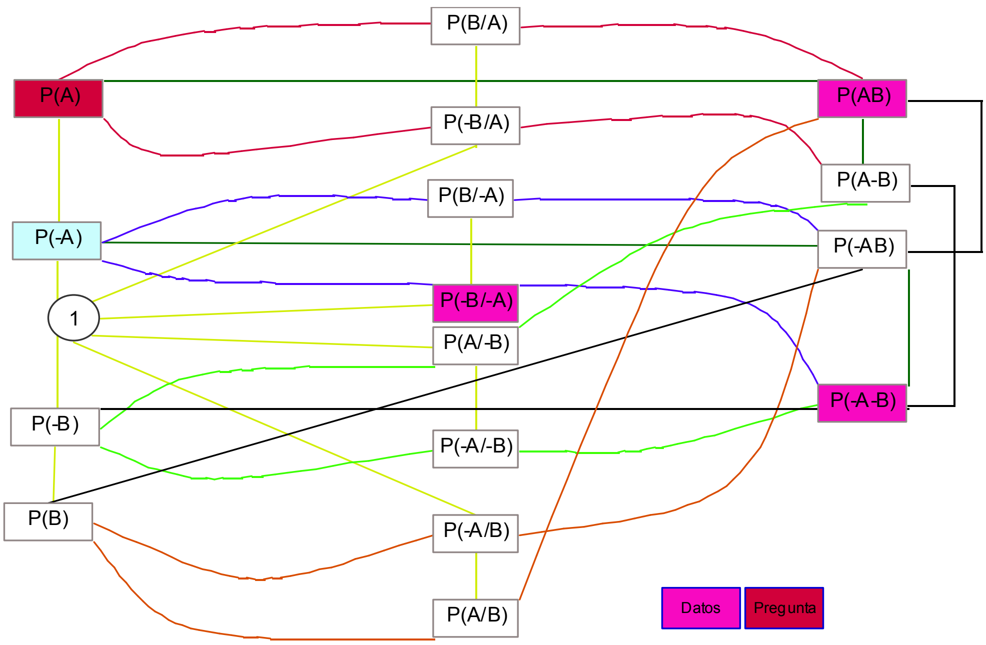


Figura 87 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

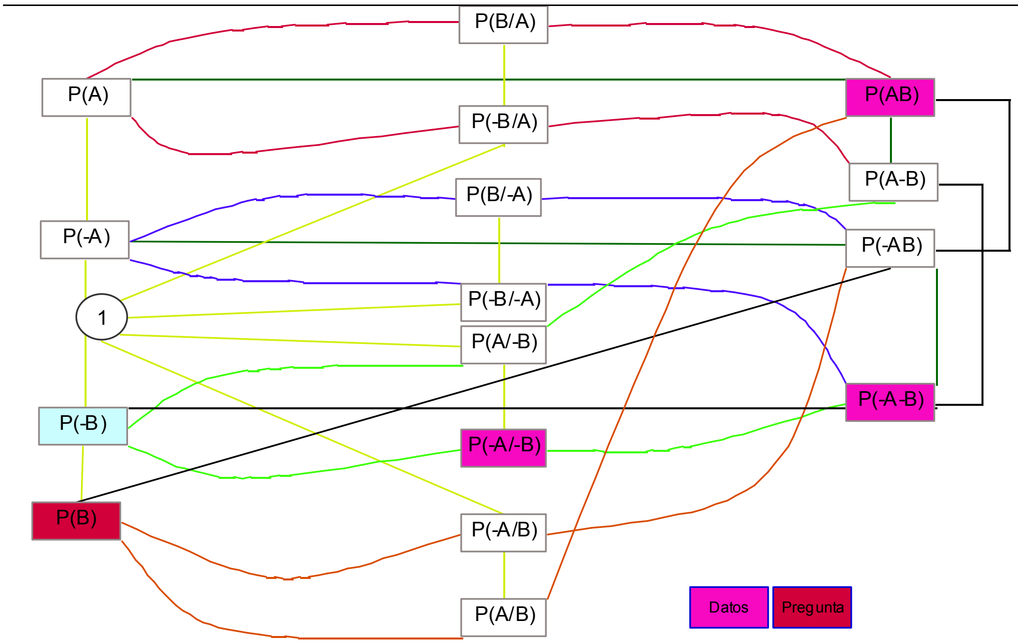


Figura 88 Grafo canónico de [p_{11}]

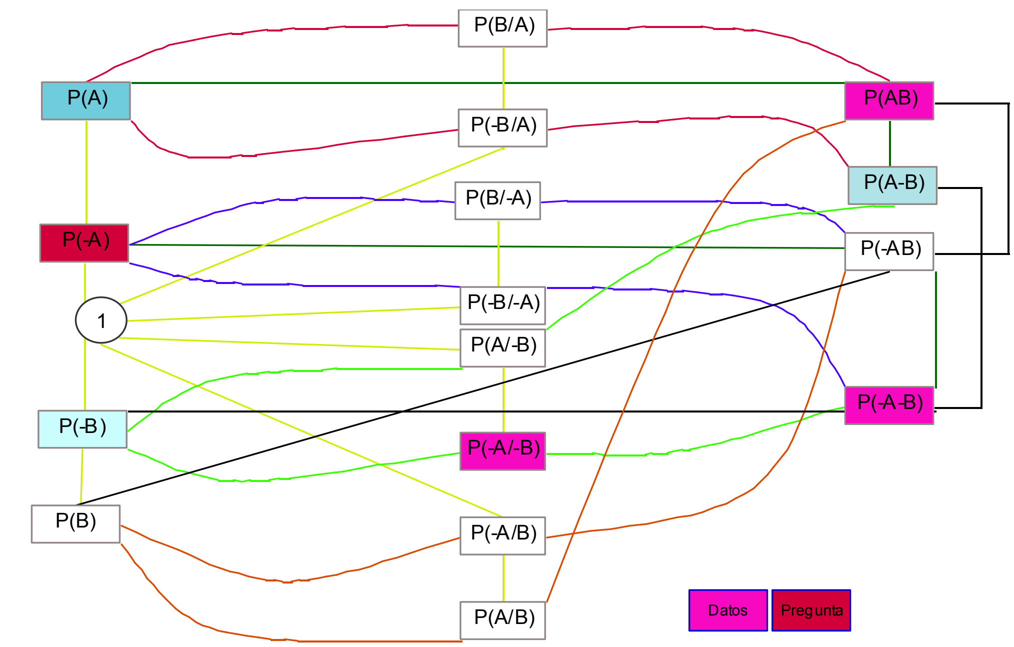


Figura 89 Grafo canónico de [p_{31}]

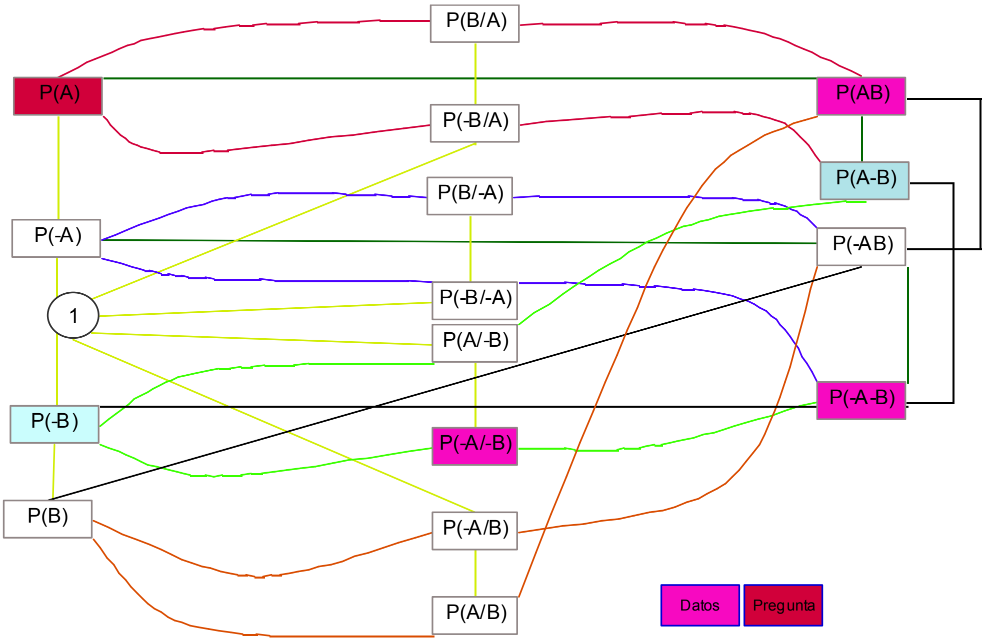


Figura 90 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_2G_2$

Solo se puede preguntar por tres probabilidades marginales, pues la 4ª no es problema

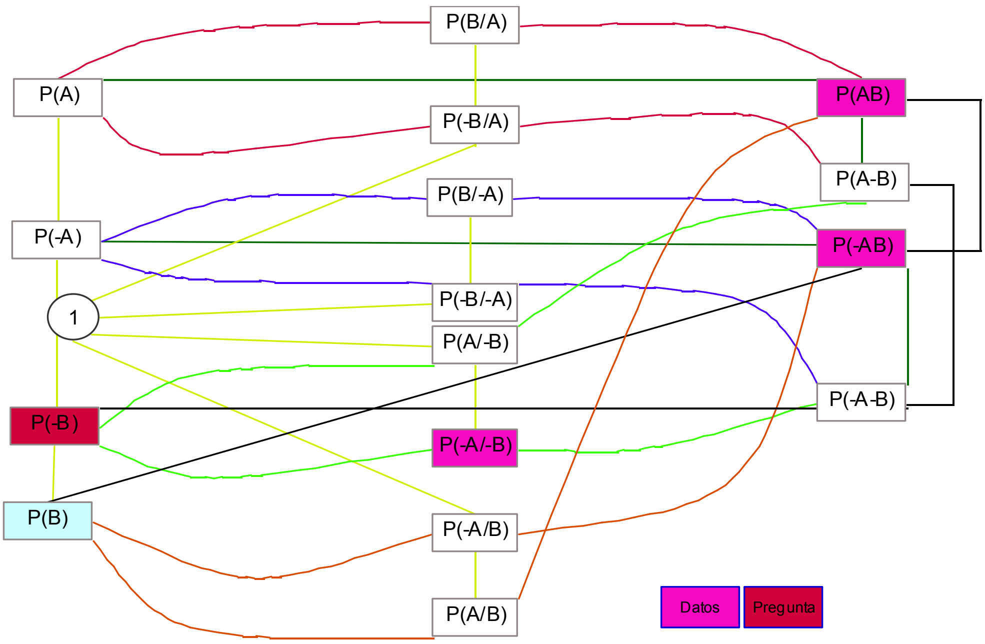


Figura 91 Grafo canónico de [p_{20}]. No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

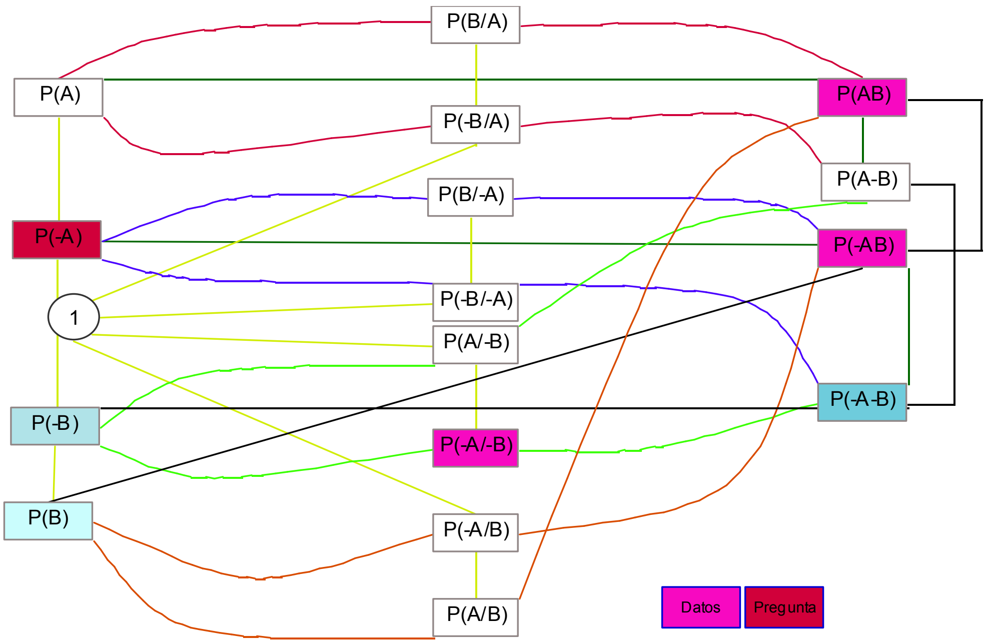


Figura 92 Grafo canónico de [p_{31}]

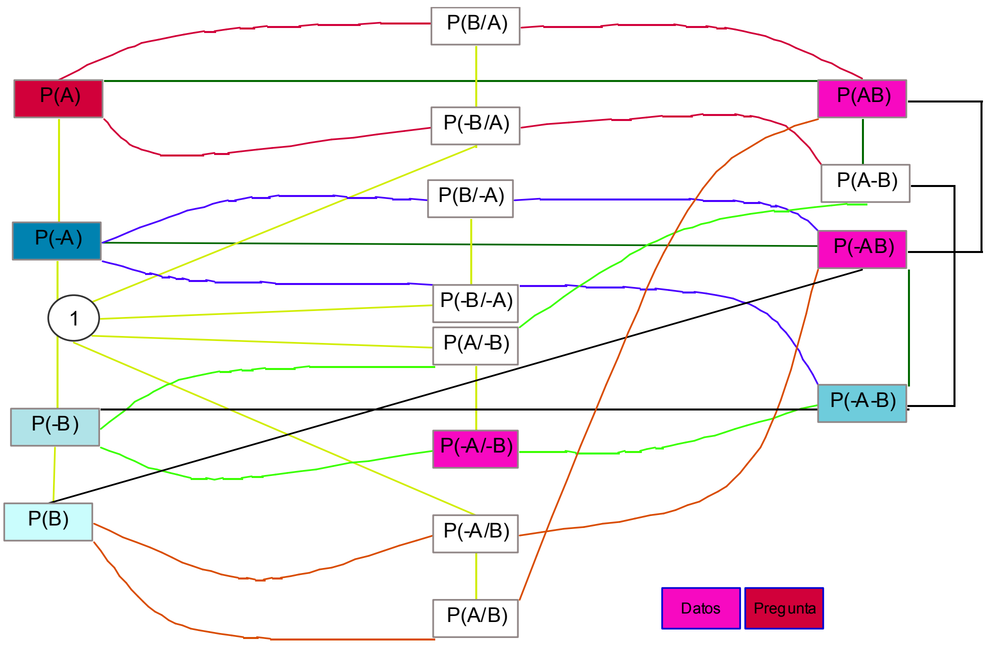


Figura 93 Grafo canónico de [p_{41}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de problemas

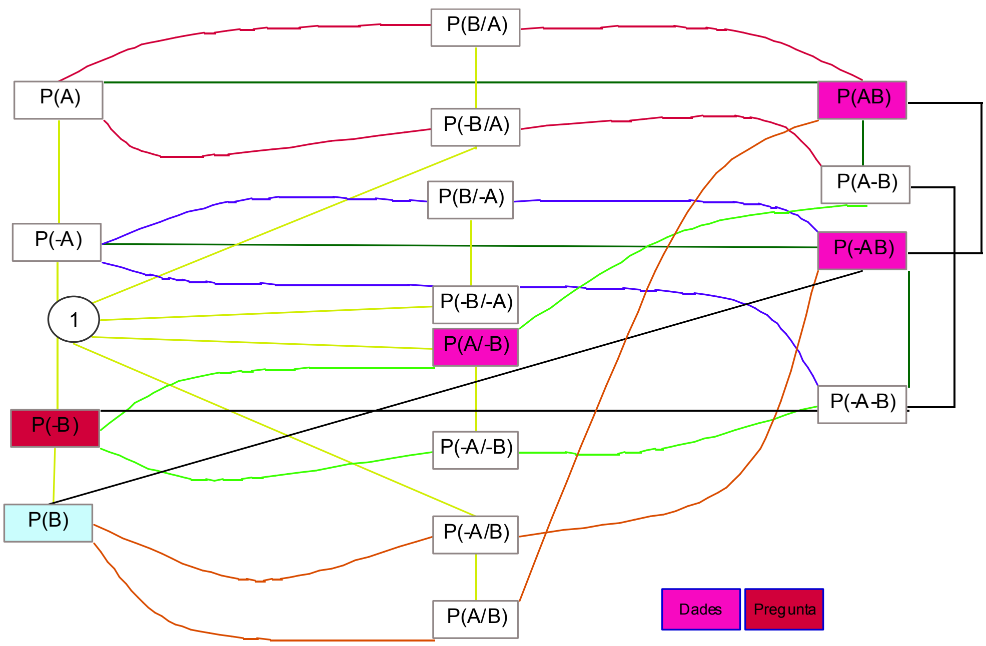


Figura 94 Grafo canónico de [p_{20}]. No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

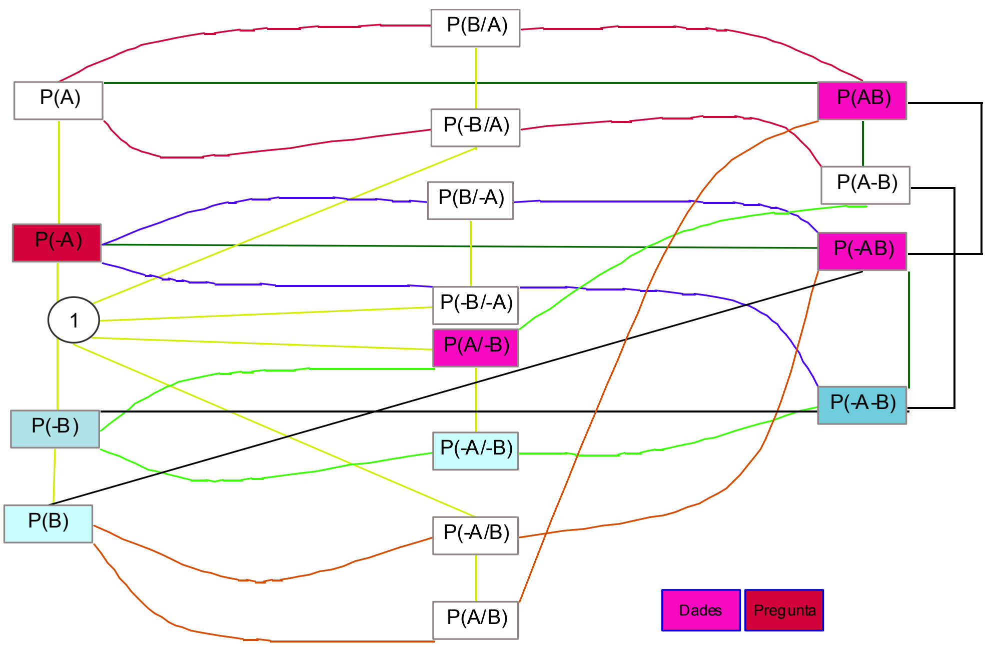


Figura 95 Grafo canónico de [p_{41}]

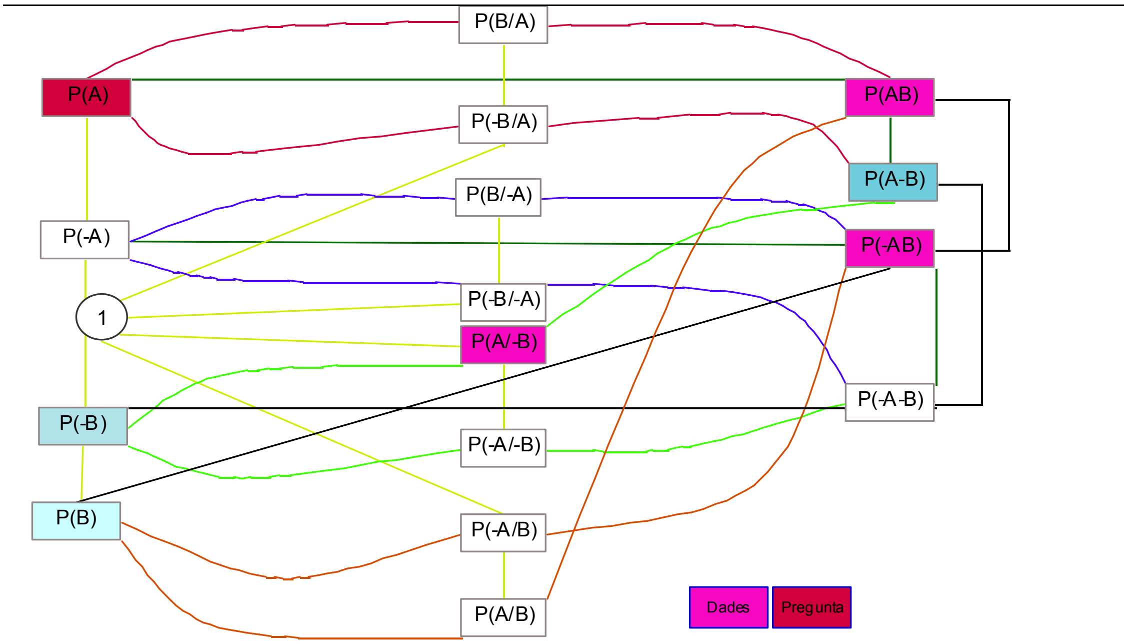


Figura 96 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_1T_2G_3$

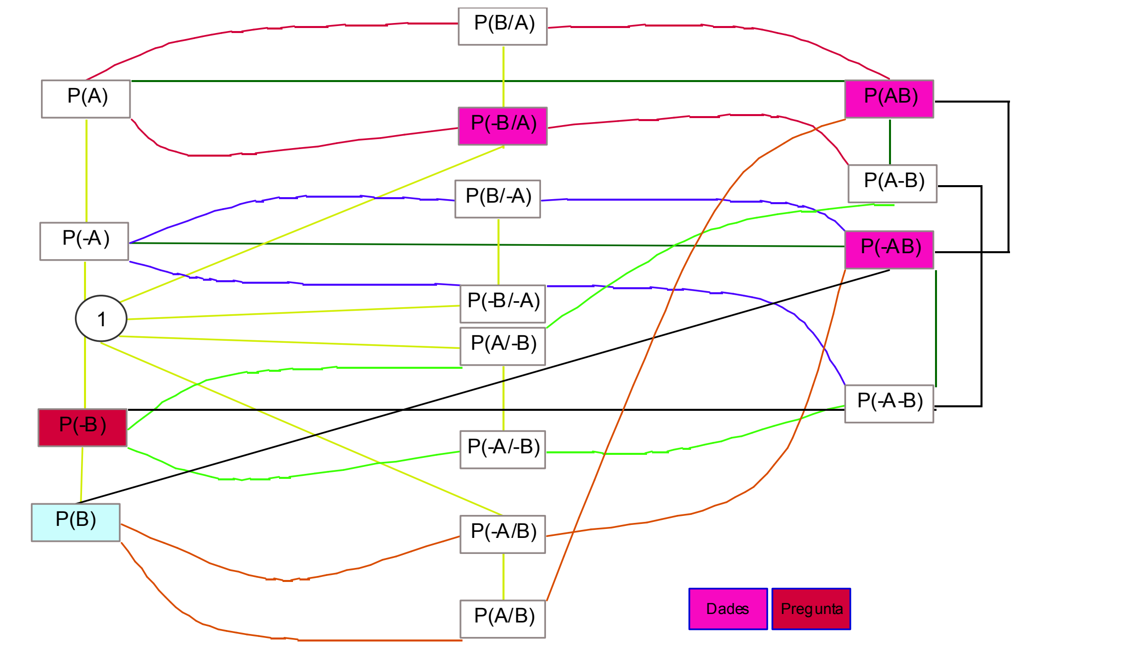


Figura 97 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

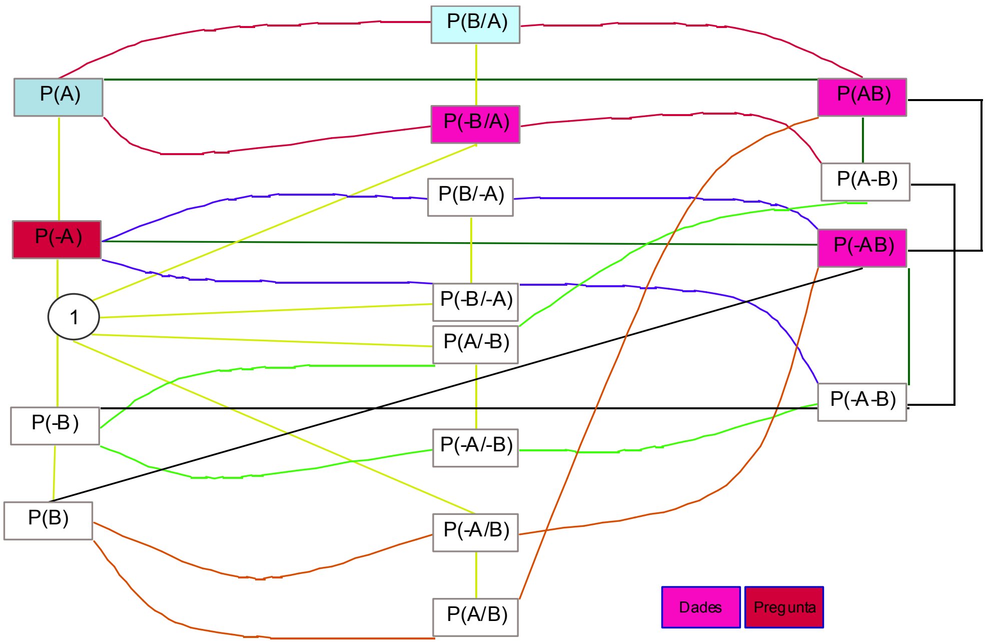


Figura 98 Grafo canónico de [p_{21}]

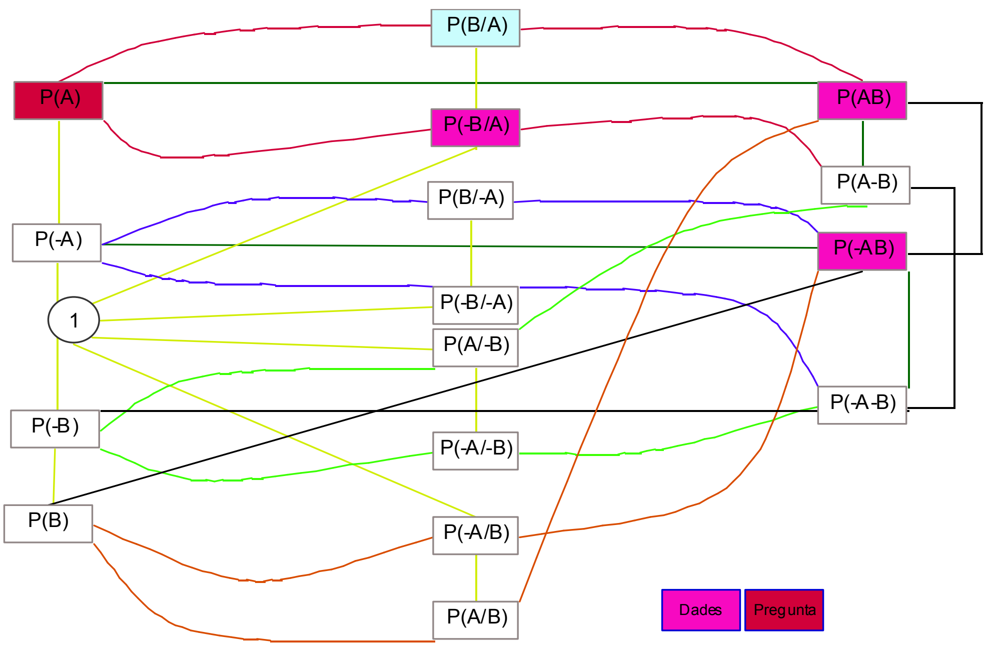


Figura 99 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

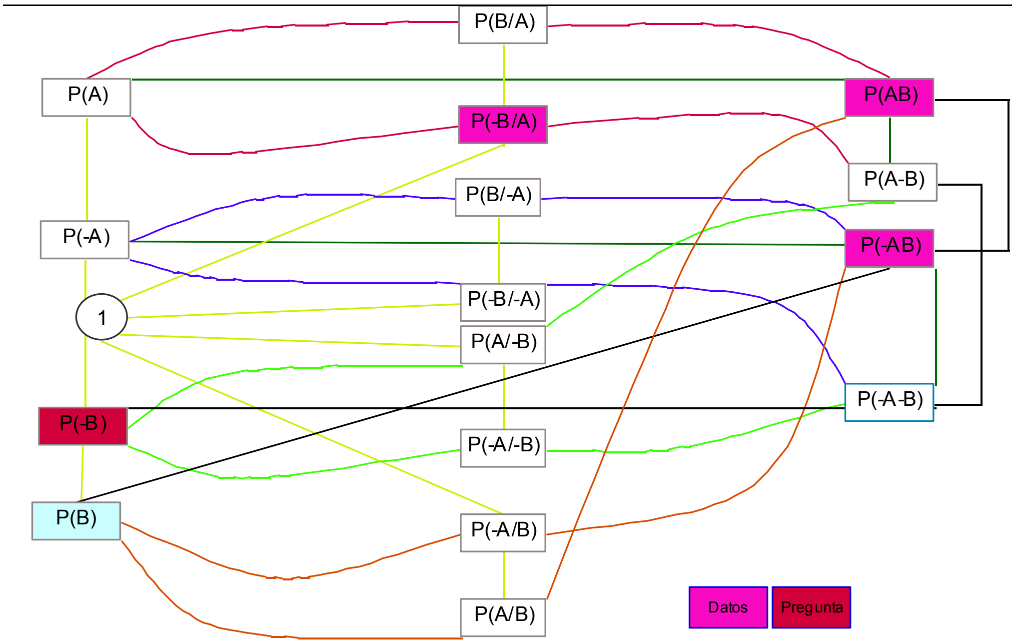


Figura 100 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

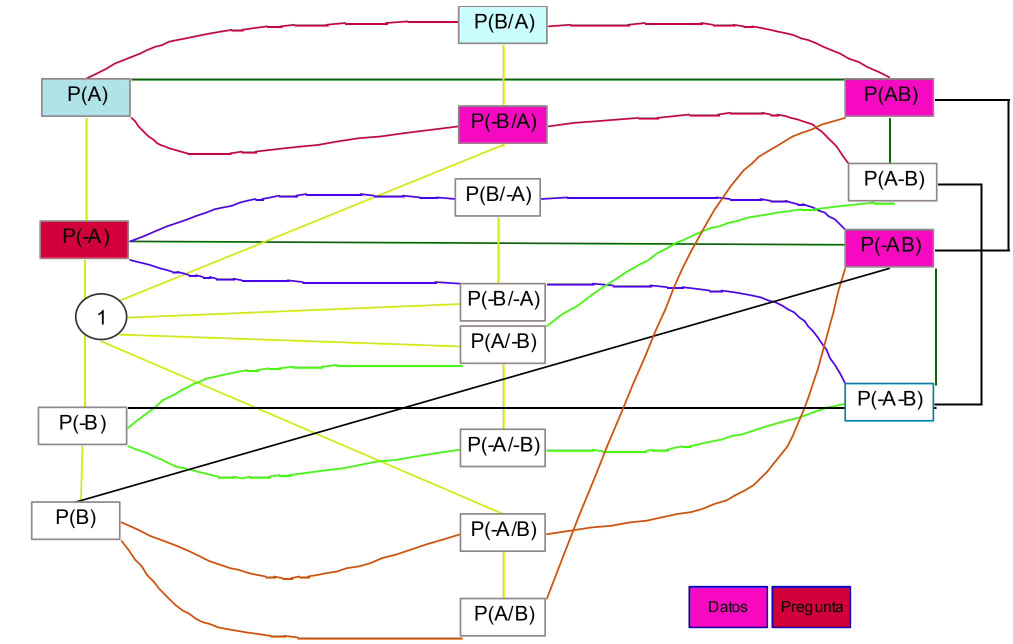


Figura 101 Grafo canónico de [p_{21}]

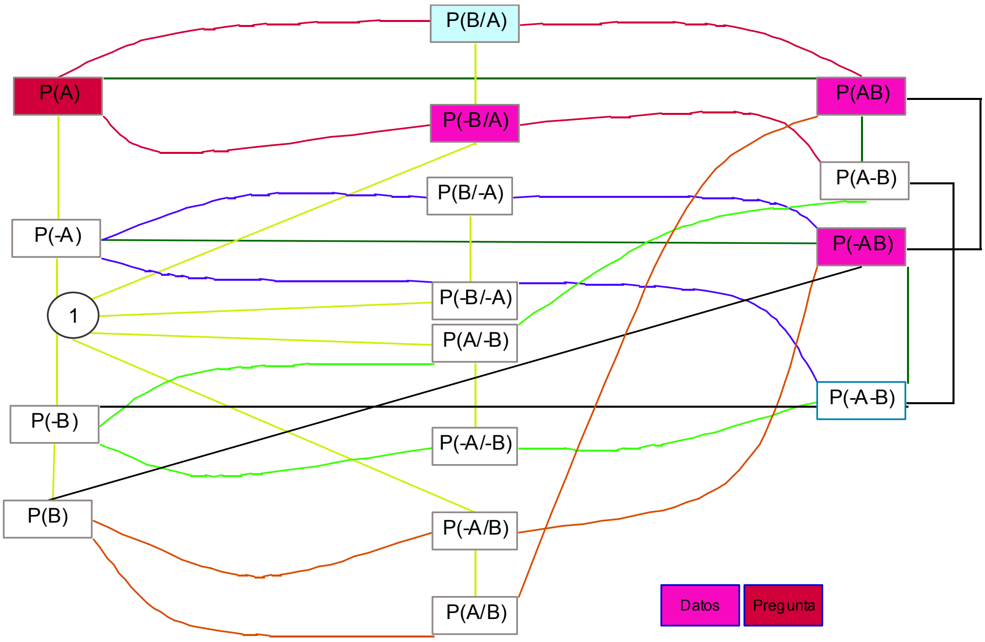


Figura 102 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

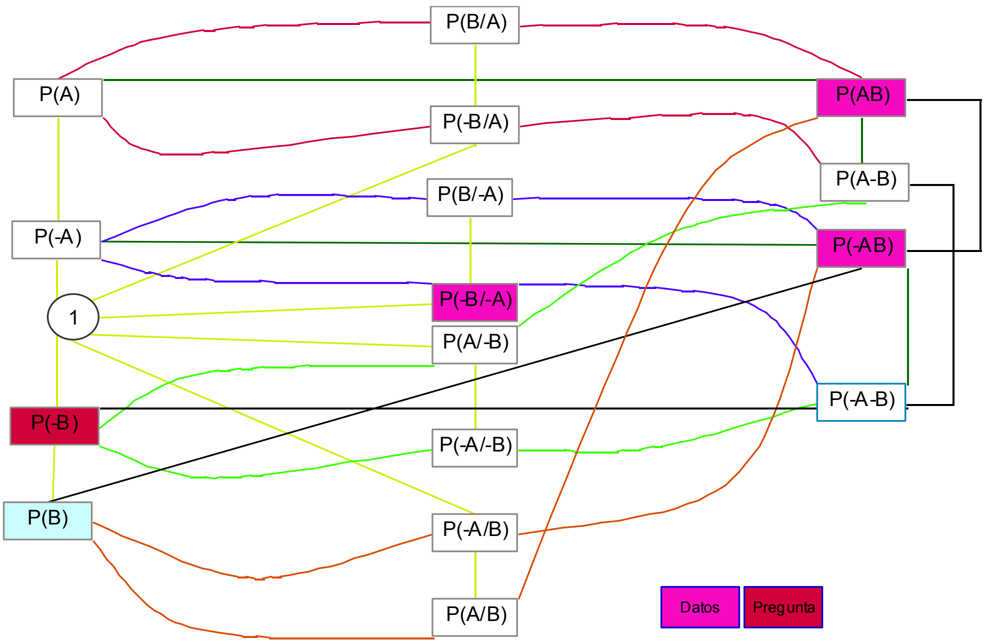


Figura 103 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

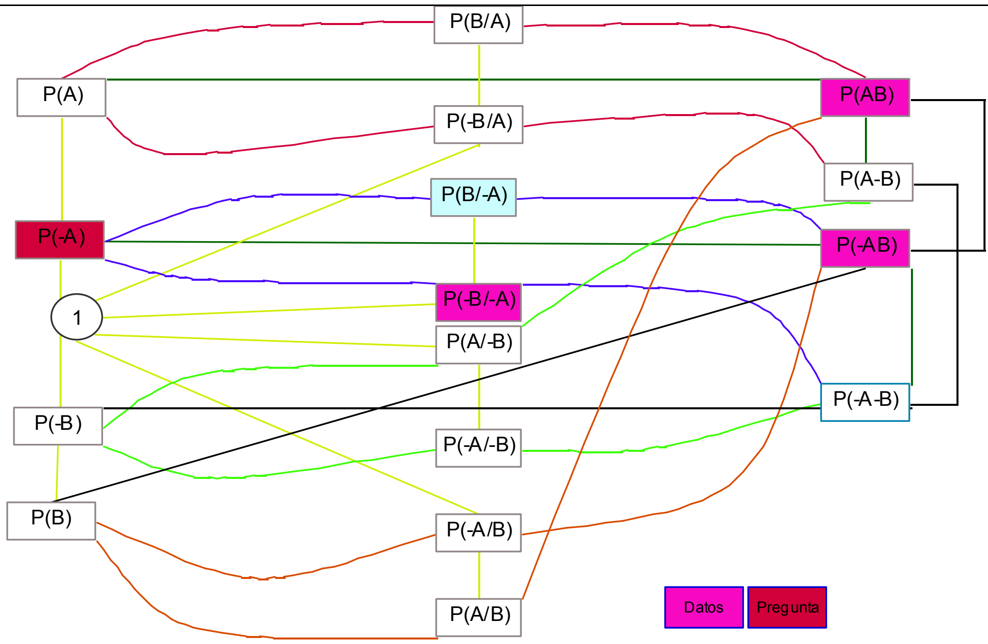


Figura 104 Grafo canónico de [p_{11}]

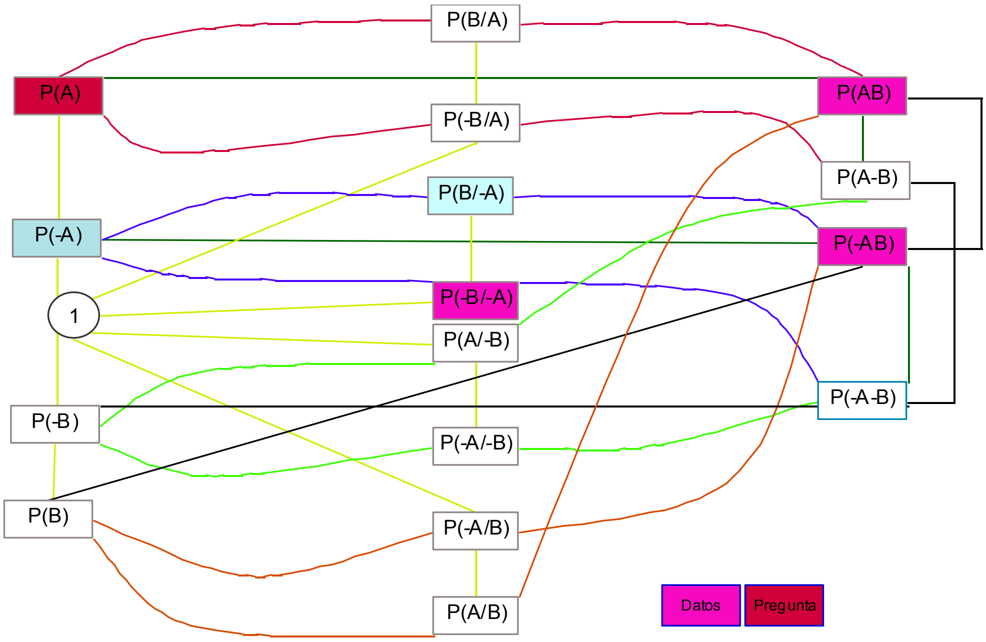


Figura 105 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_2G_5$

Sólo nos podemos preguntar por dos marginales, pues las otras dos no son problema. Además uno de éstos no es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

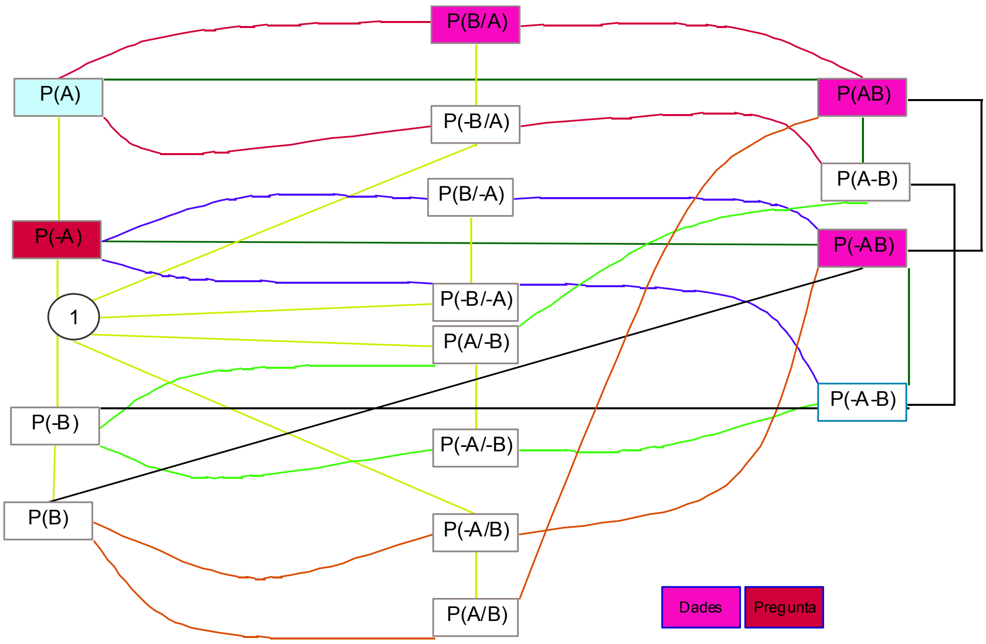


Figura 106 Grafo canónico de [p_{11}]

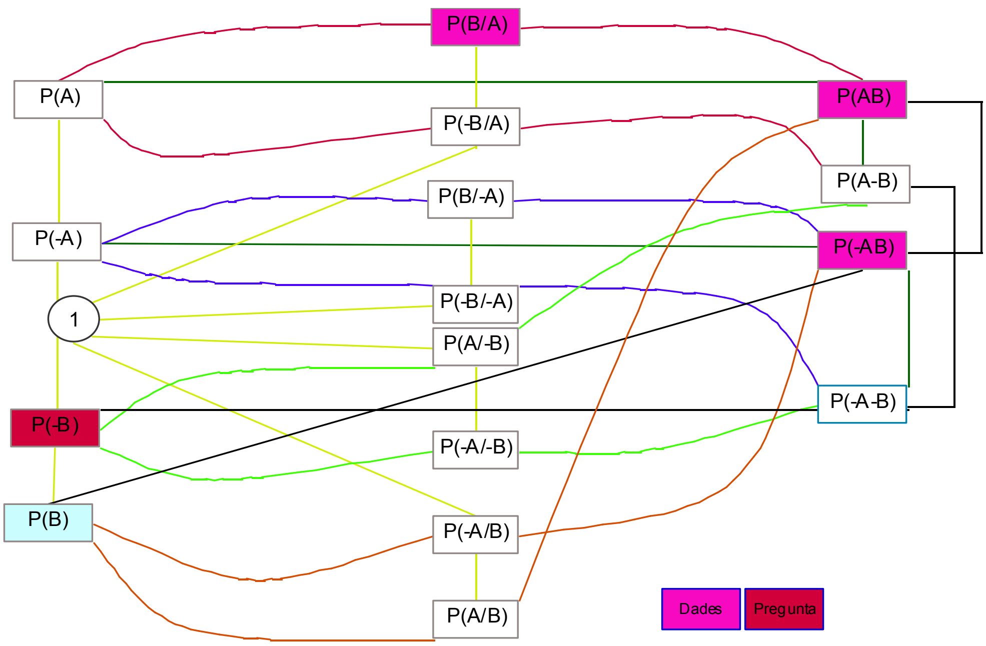


Figura 107 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

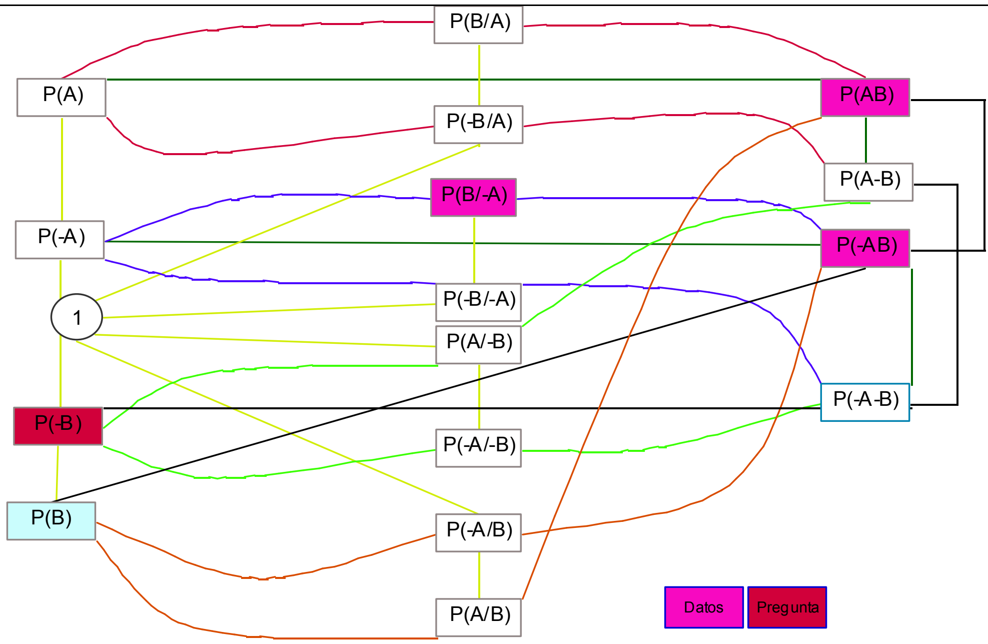


Figura 108 Grafo canónico de [p_{20}] No es un PPC pues el dato que da cuenta de la probabilidad condicional es innecesario para la resolución del problema.

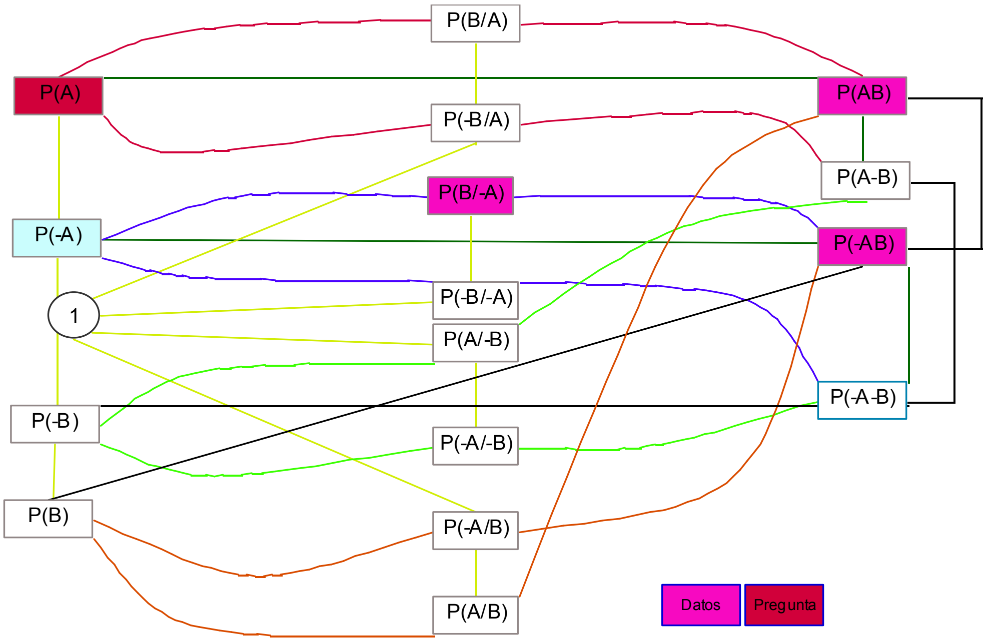


Figura 109 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_2G_6$

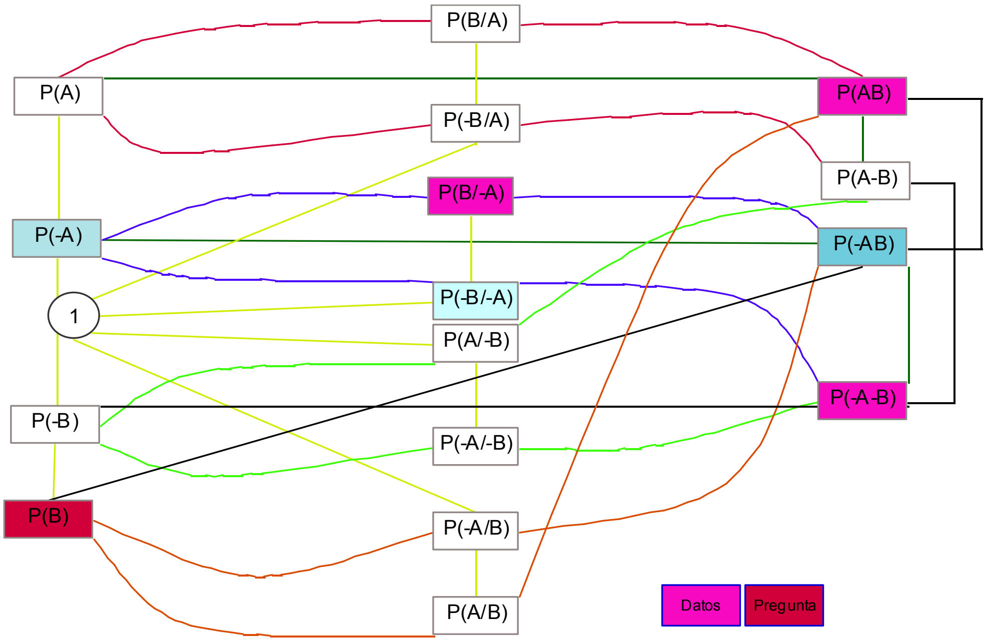


Figura 110 Grafo canónico de [p_{31}]

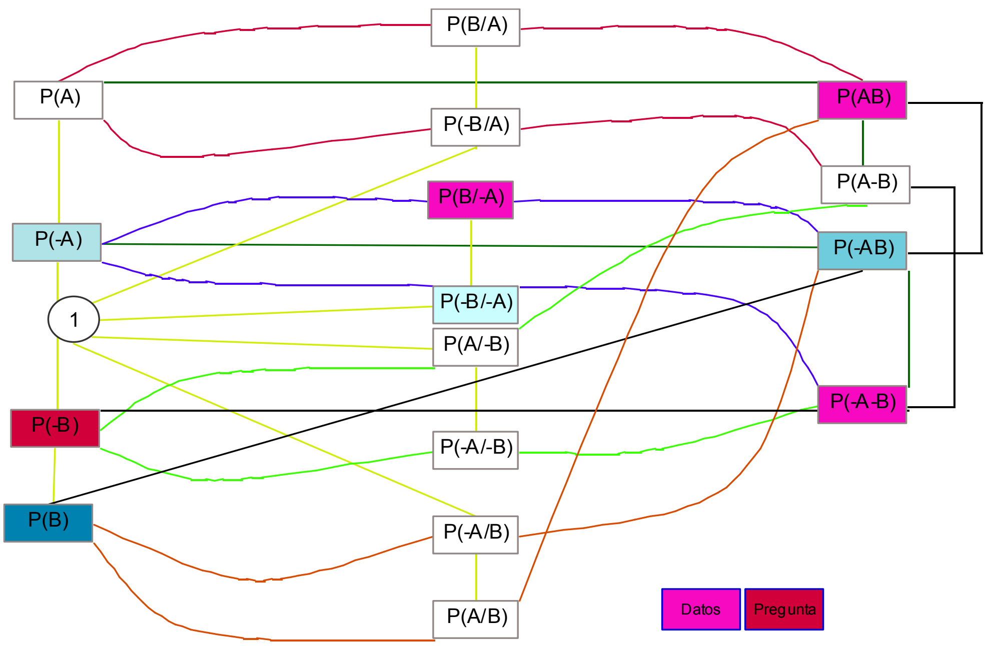


Figura 111 Grafo canónico de [p_{41}]

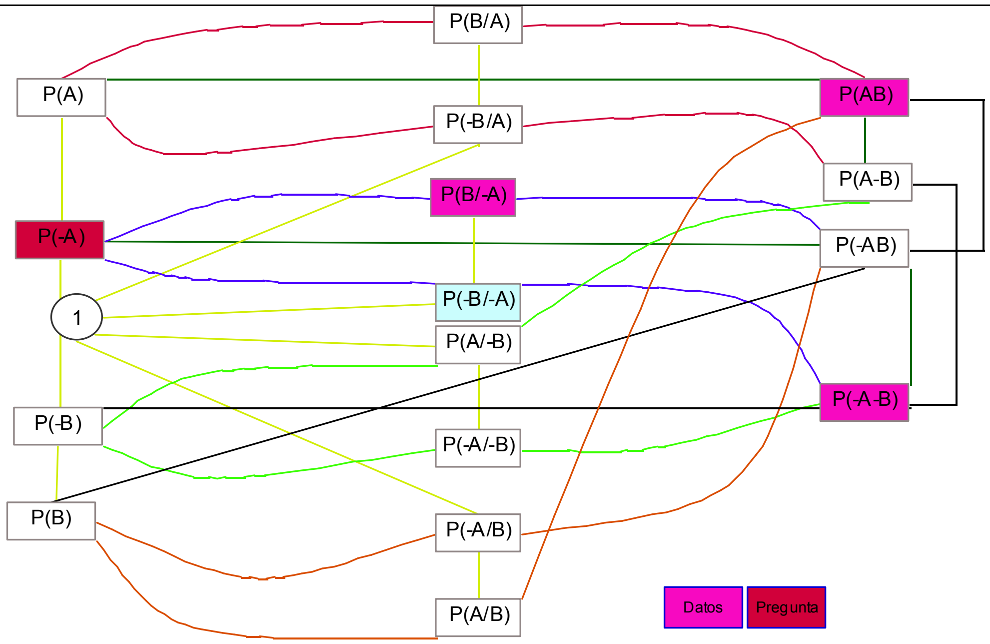


Figura 112 Grafo canónico de $[p_{11}]$

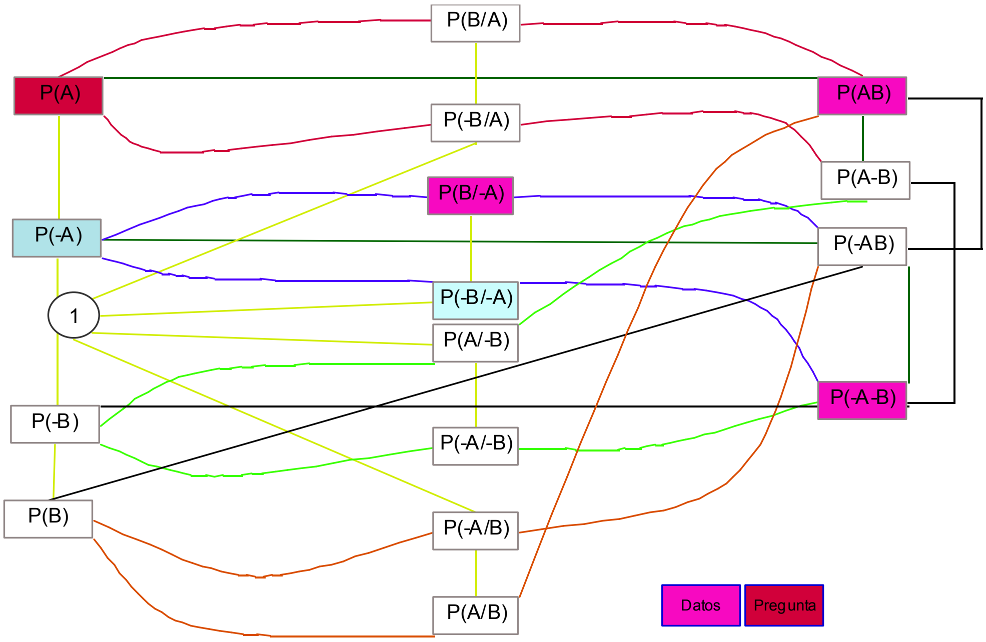


Figura 113 Grafo canónico de $[p_{21}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

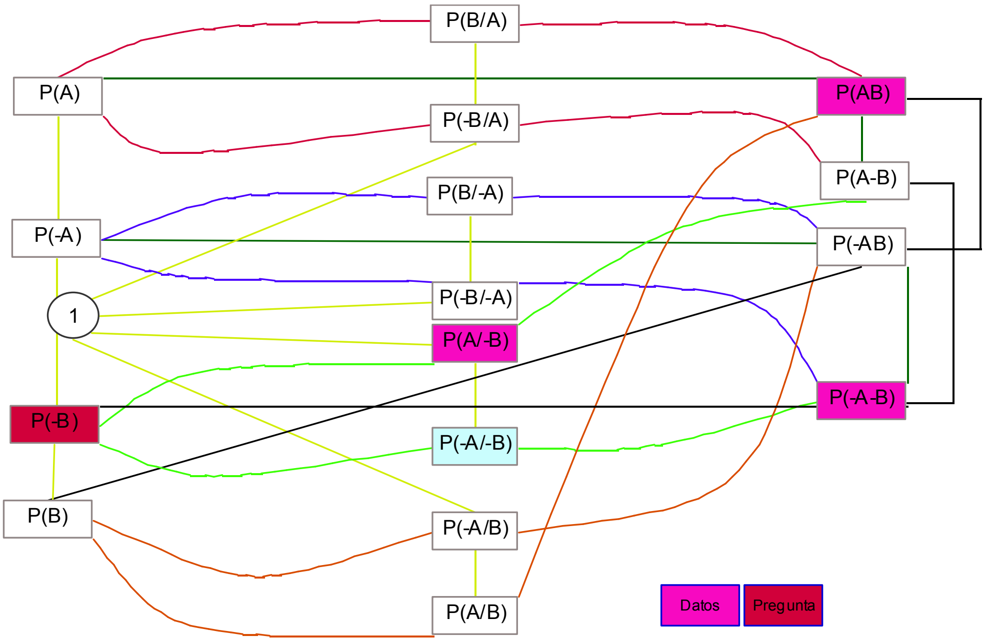


Figura 114 Grafo canónico de [p_{11}]

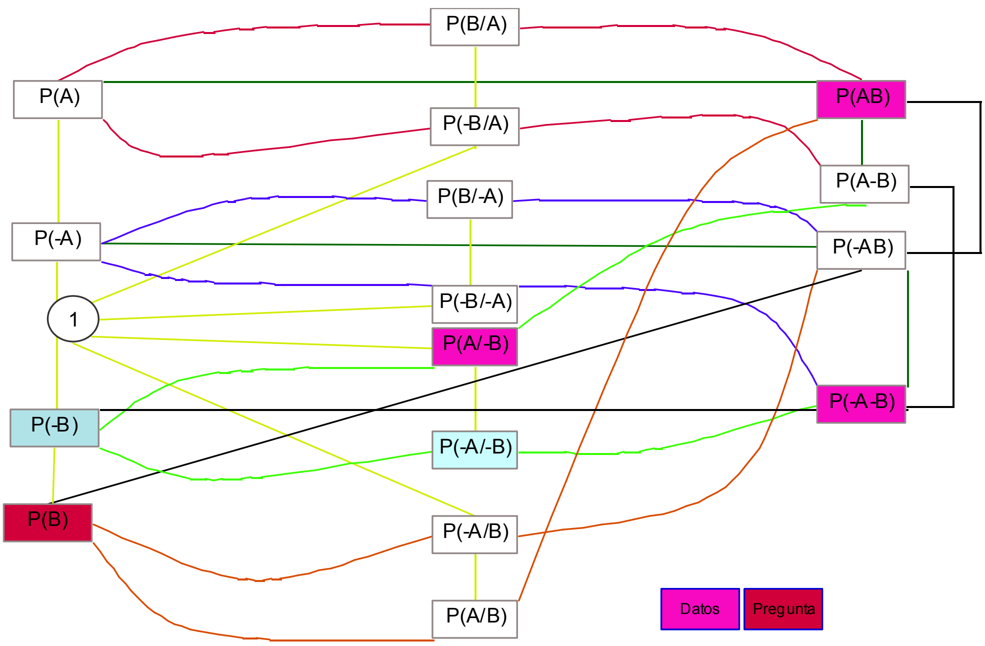


Figura 115 Grafo canónico de [p_{21}]

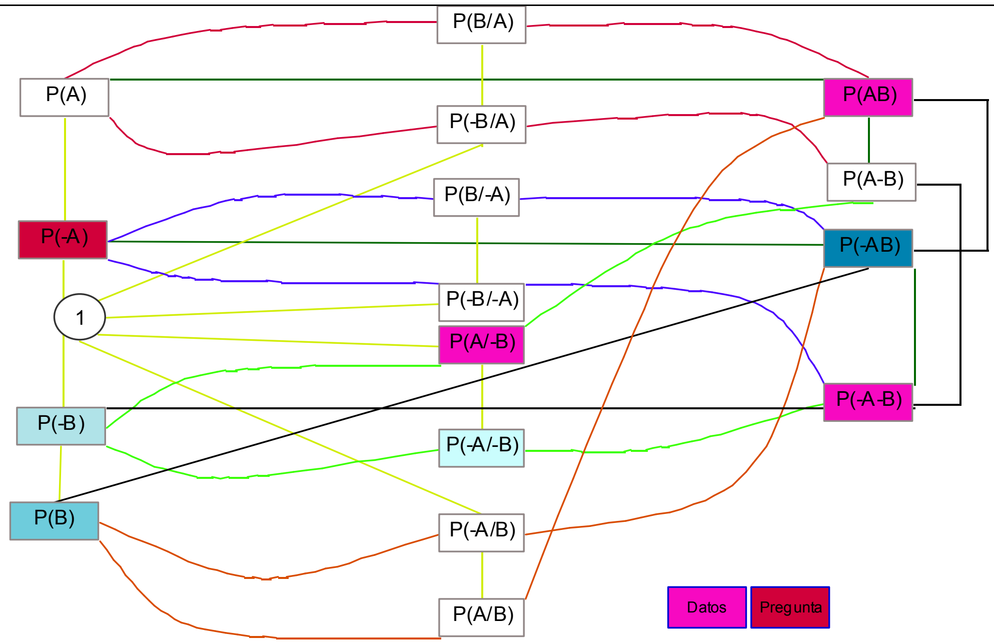


Figura 116 Grafo canónico de [p_{41}]

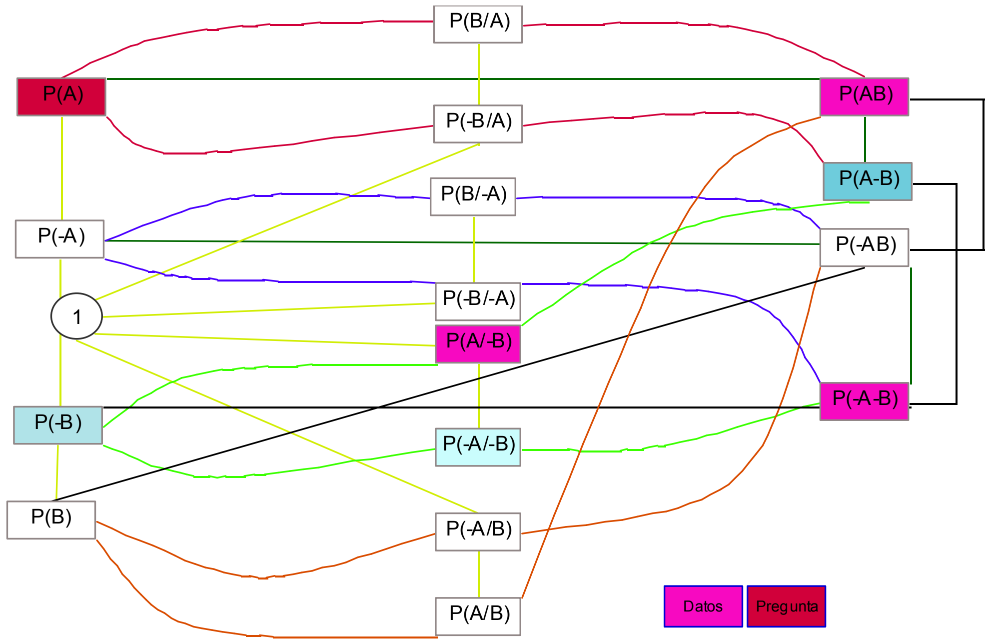


Figura 117 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

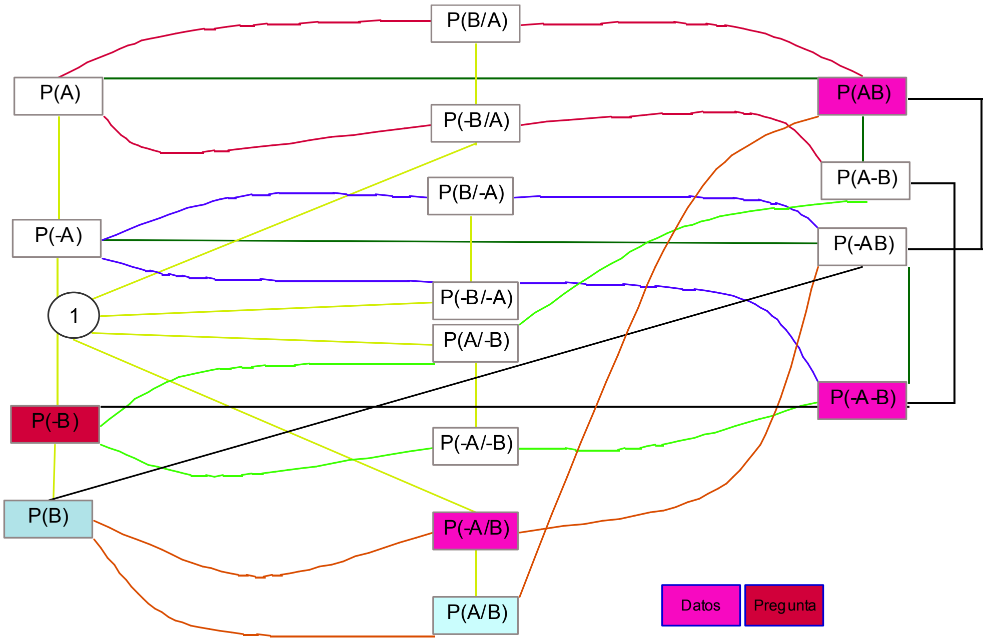


Figura 118 Grafo canónico de [p_{21}]

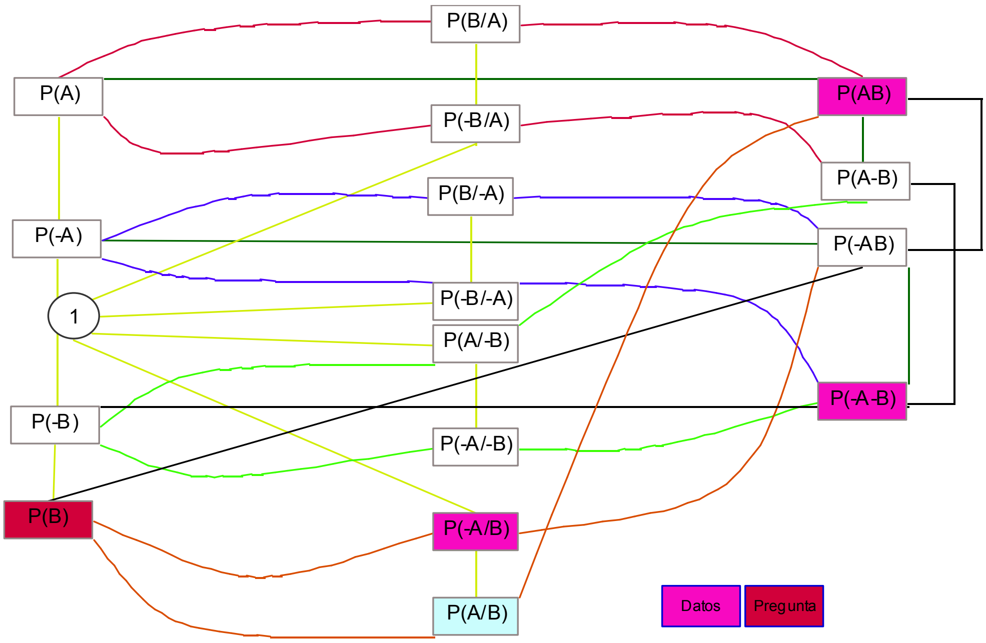


Figura 119 Grafo canónico de [p_{11}]

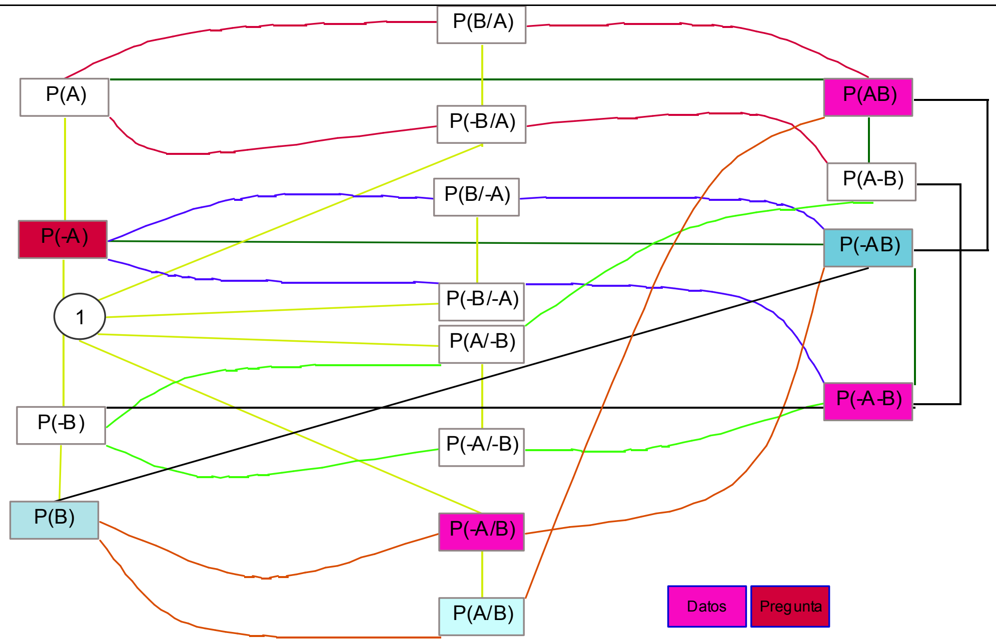


Figura 120 Grafo canónico de [p_{31}]

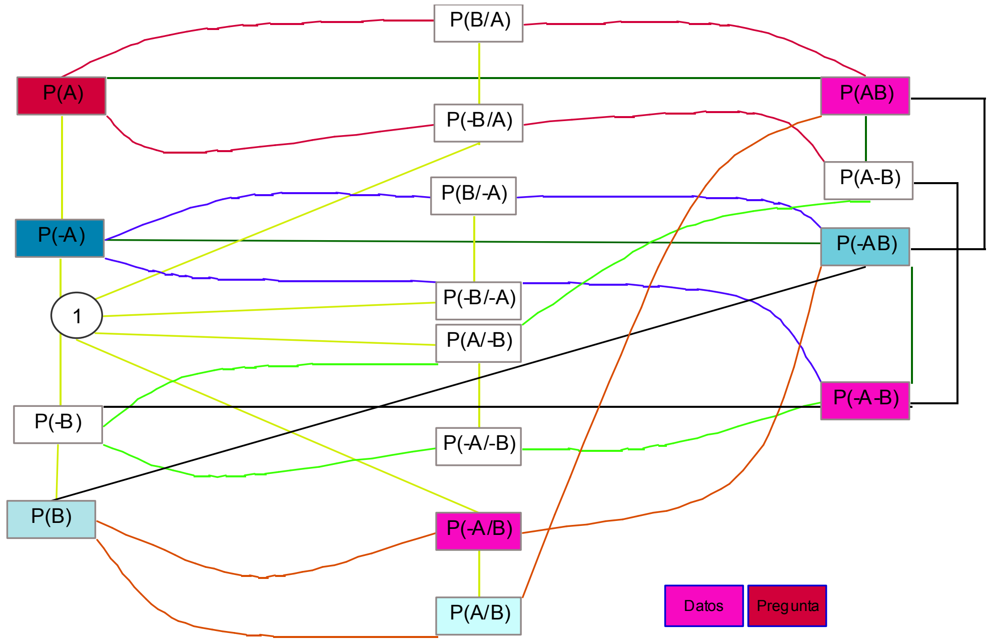


Figura 121 Grafo canónico de [p_{41}]

Grafos canónicos asociados otro trío de datos

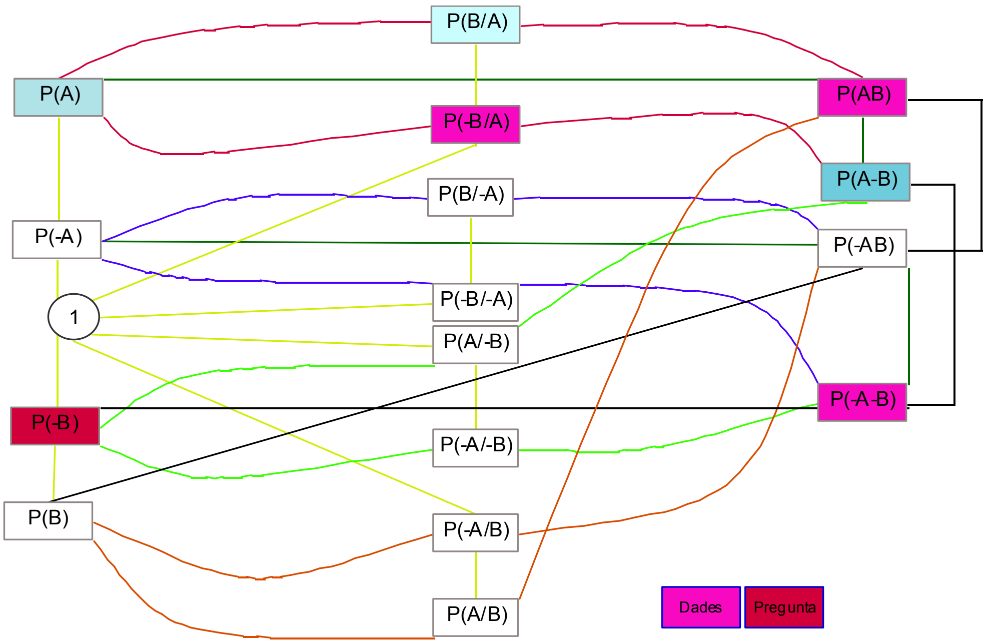


Figura 122 Grafo canónico de [p_{31}]

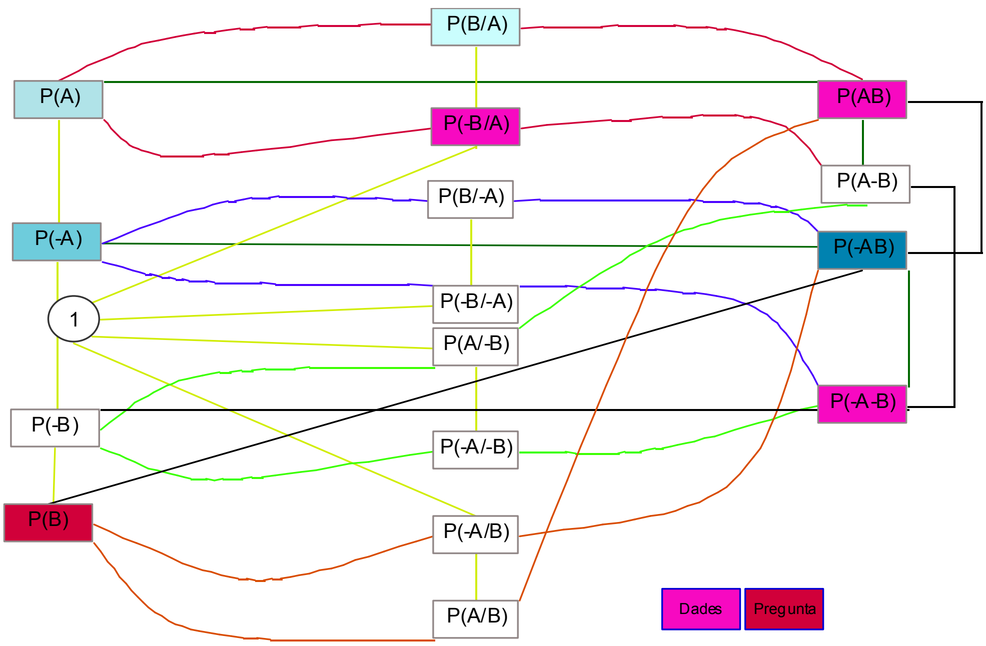


Figura 123 Grafo canónico de [p_{41}]

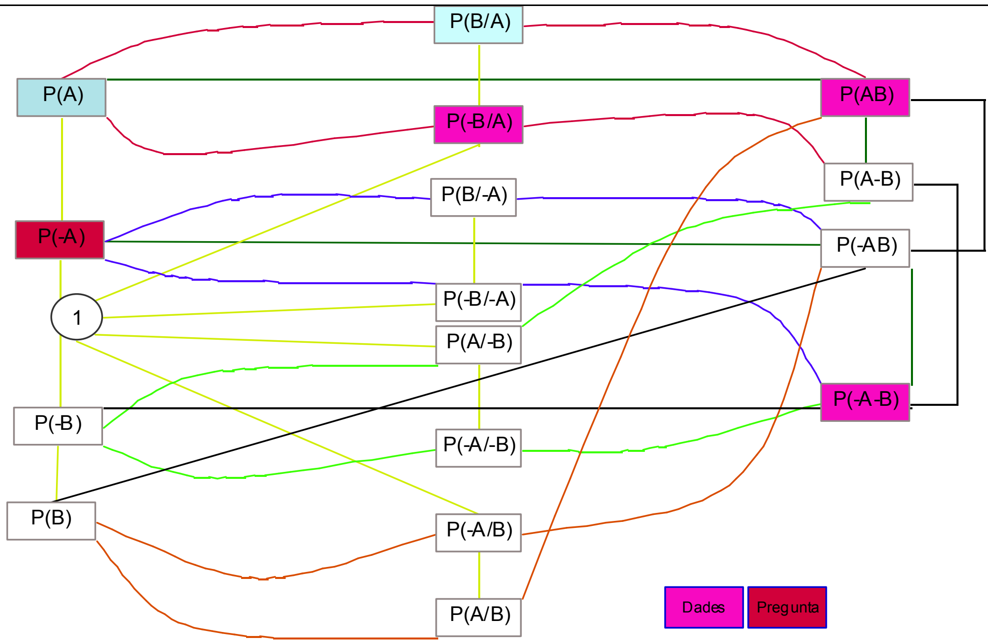


Figura 124 Grafo canónico de [p_{21}]

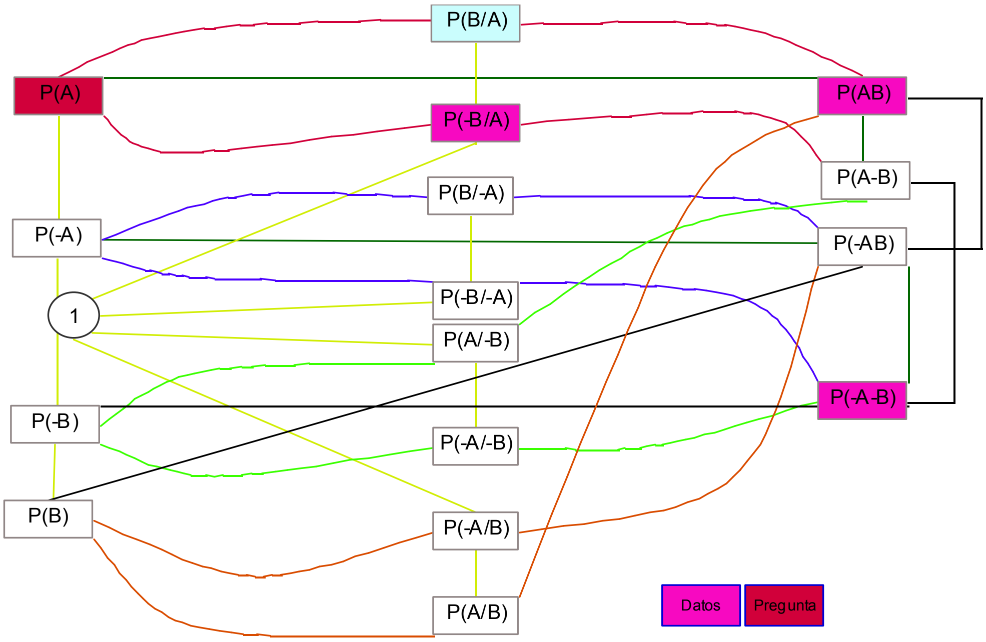


Figura 125 Grafo canónico de [p_{11}]

I.3. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_1T_3$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.13

$N_2C_1T_3G_1$

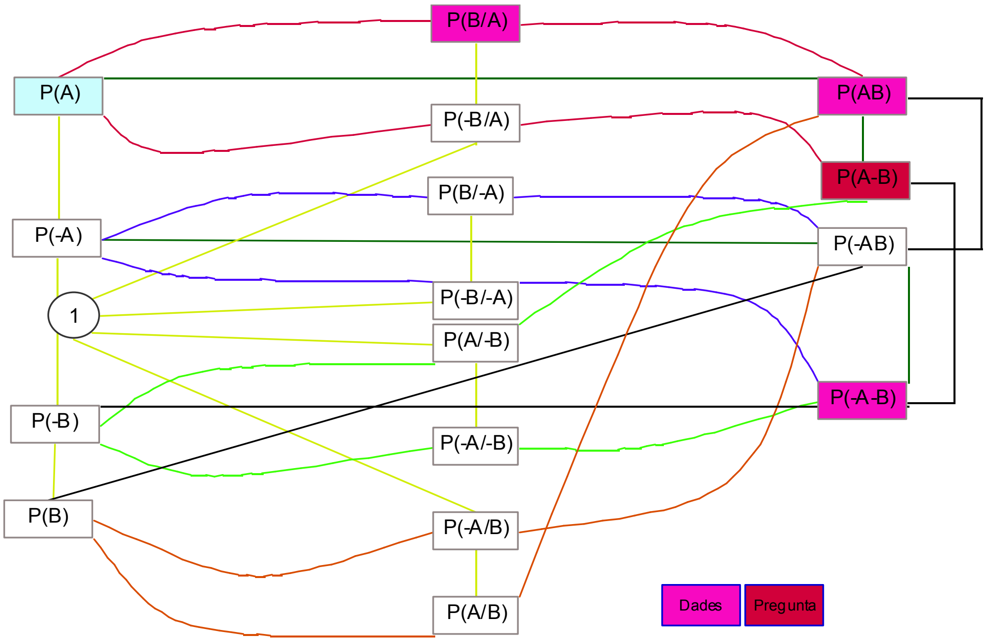


Figura 126 Grafo canónico de $[p_{11}]$

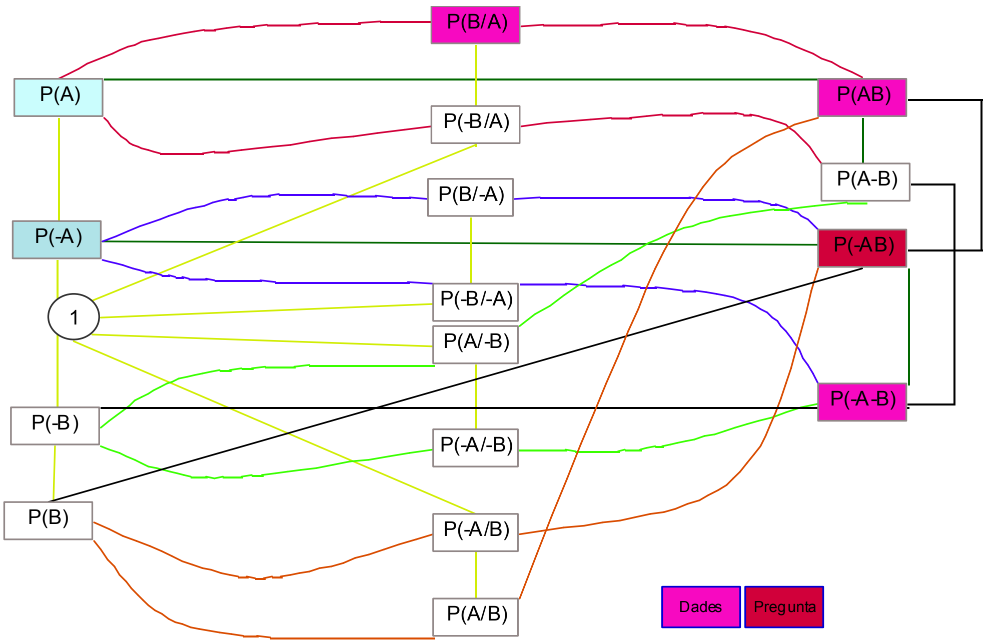


Figura 127 Grafo canónico de $[p_{21}]$

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

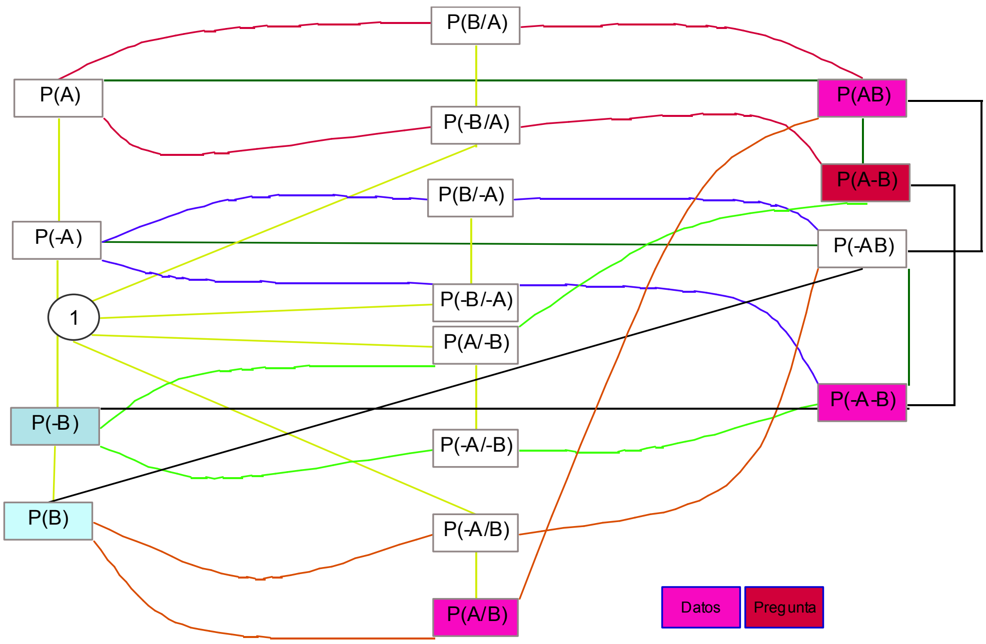


Figura 128 Grafo canónico de [p_{21}]

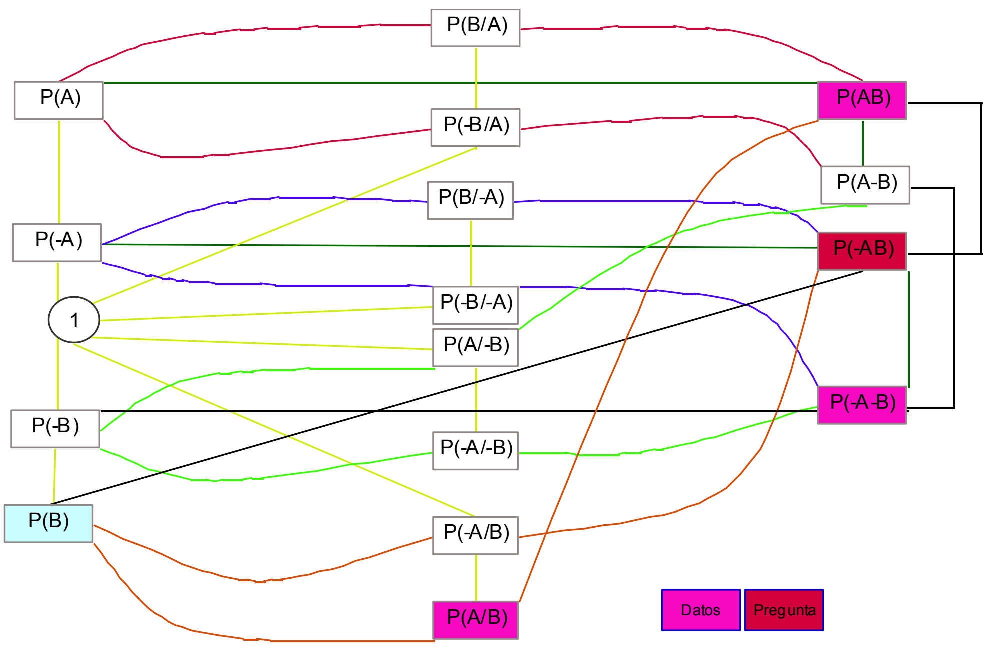


Figura 129 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

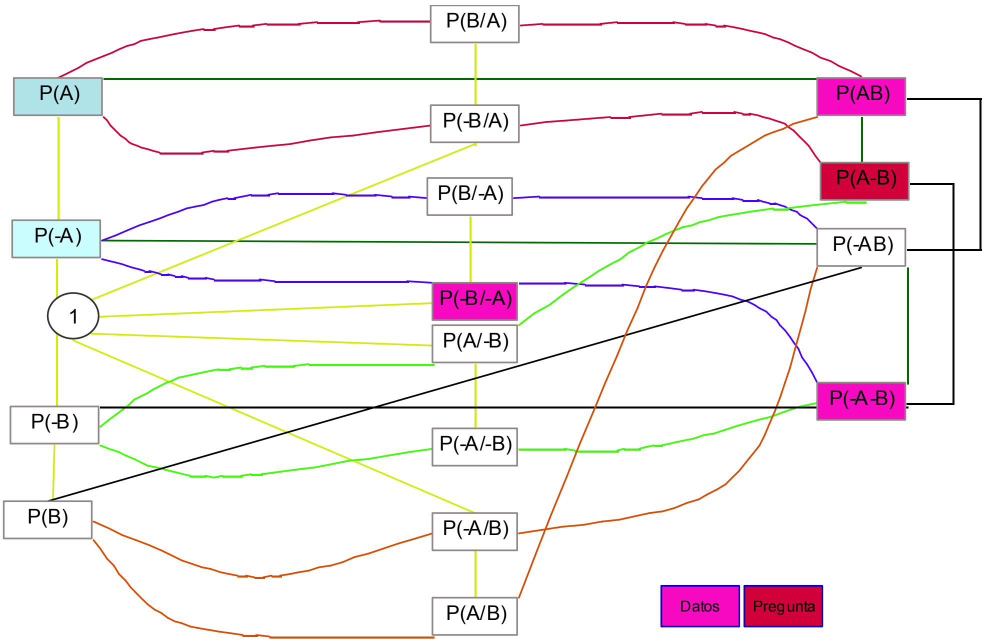


Figura 130 Grafo canónico de [p_{21}]

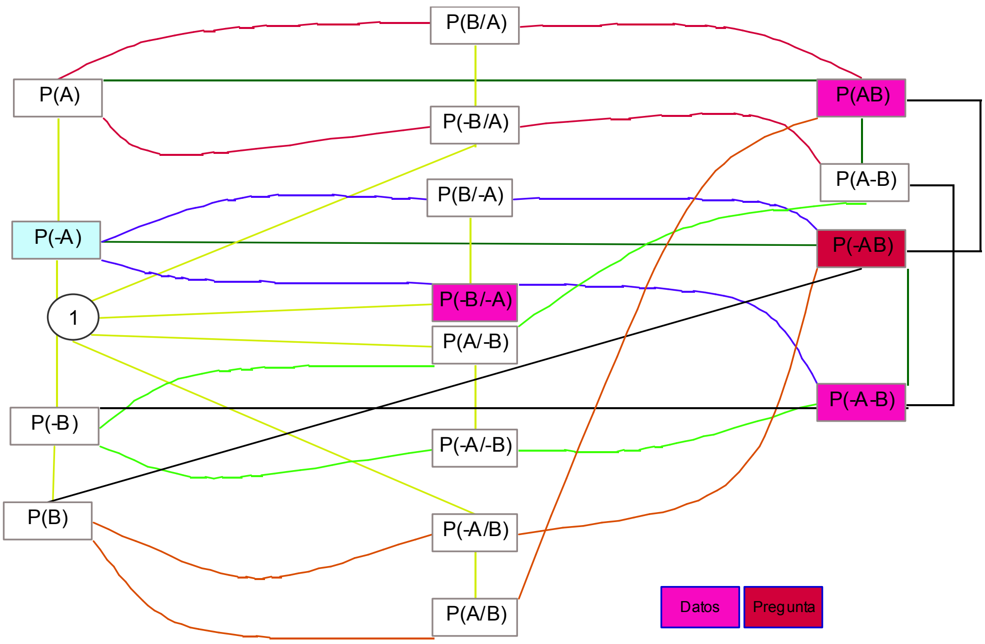


Figura 131 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

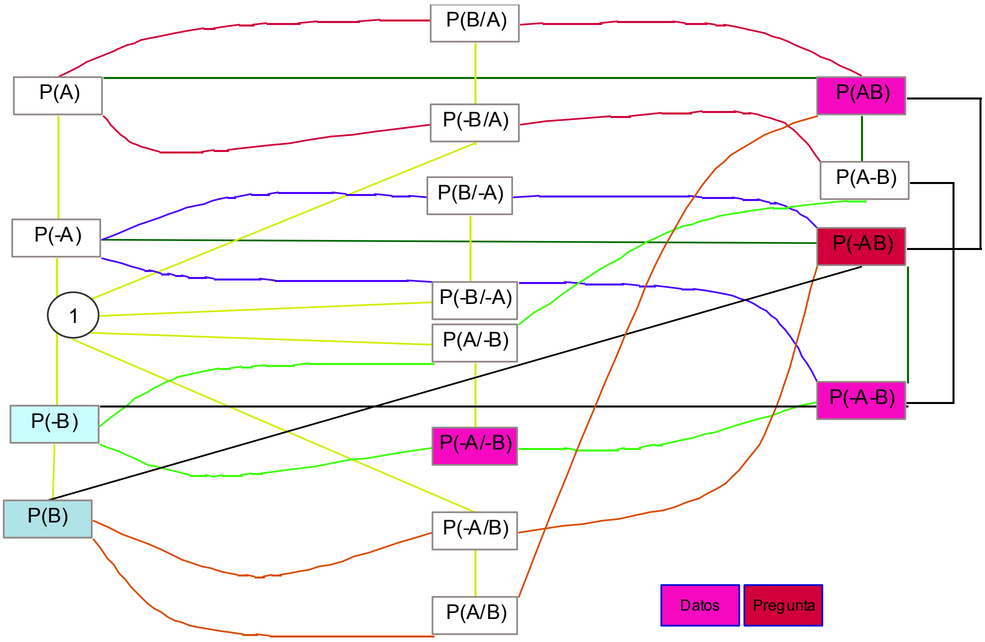


Figura 132 Grafo canónico de [p_{21}]

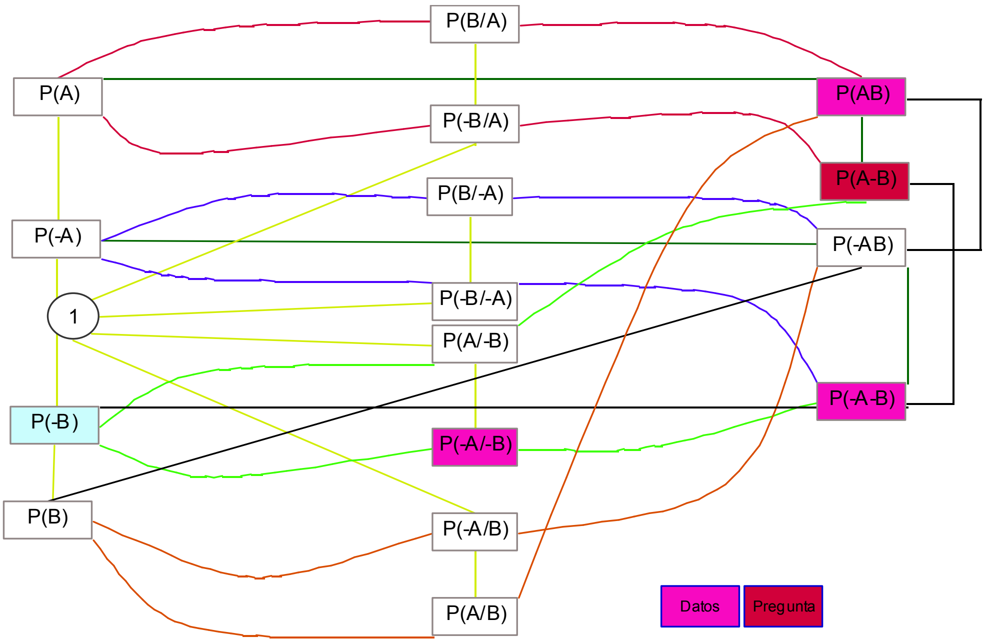


Figura 133 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_1T_3G_2$

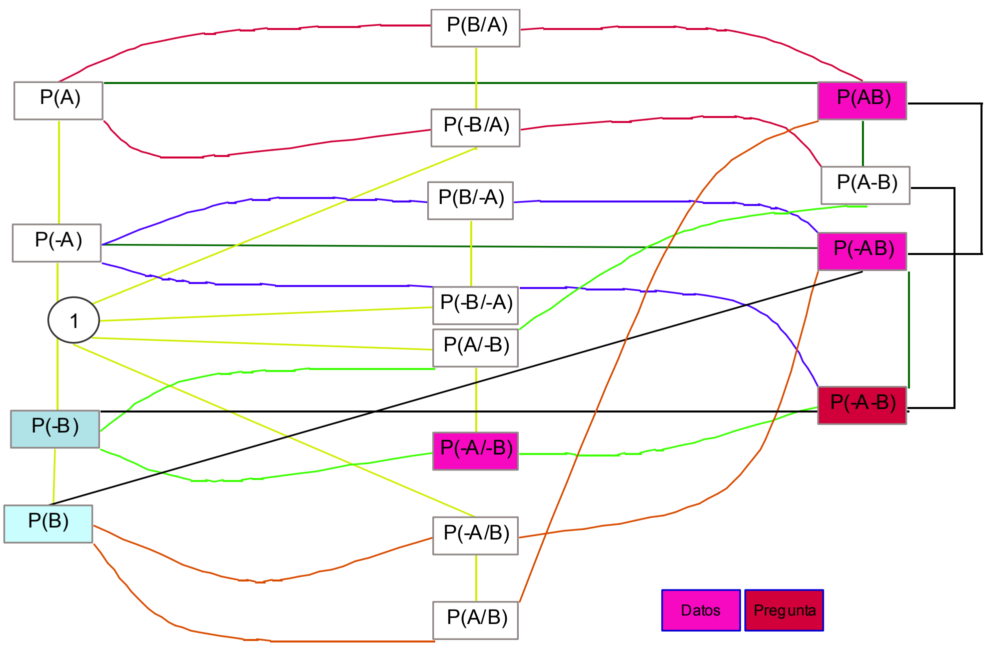


Figura 134 Grafo canónico de [p_{21}]

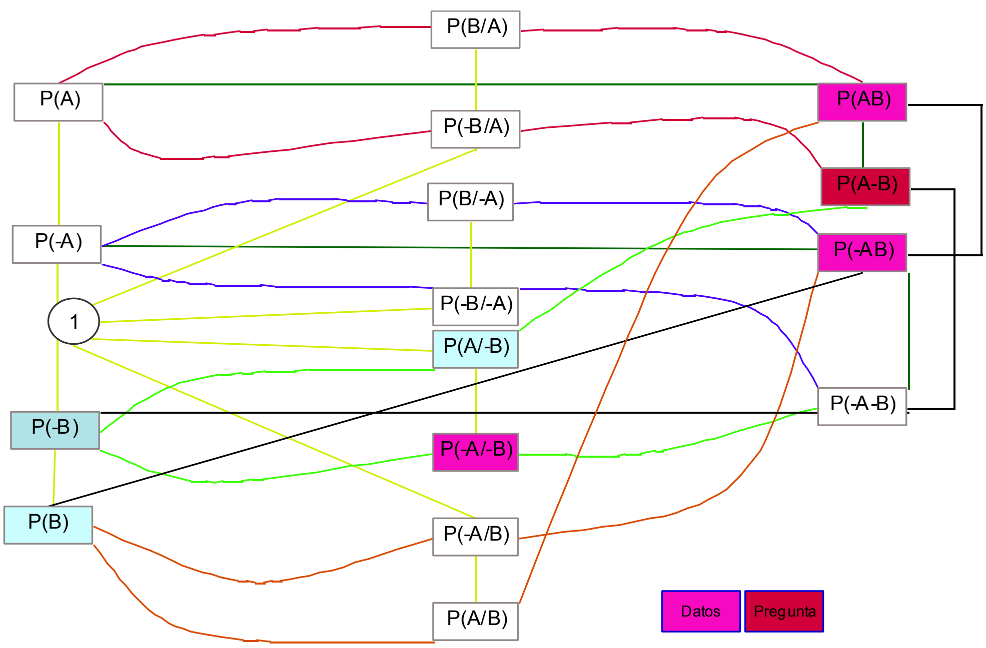


Figura 135 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos:

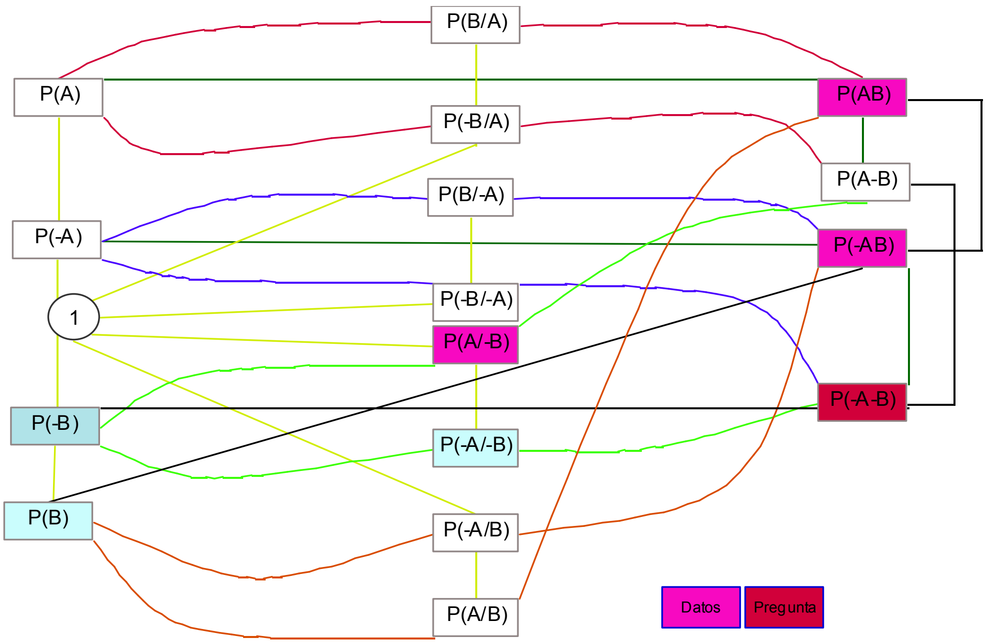


Figura 136 Grafo canónico de [p_{31}]

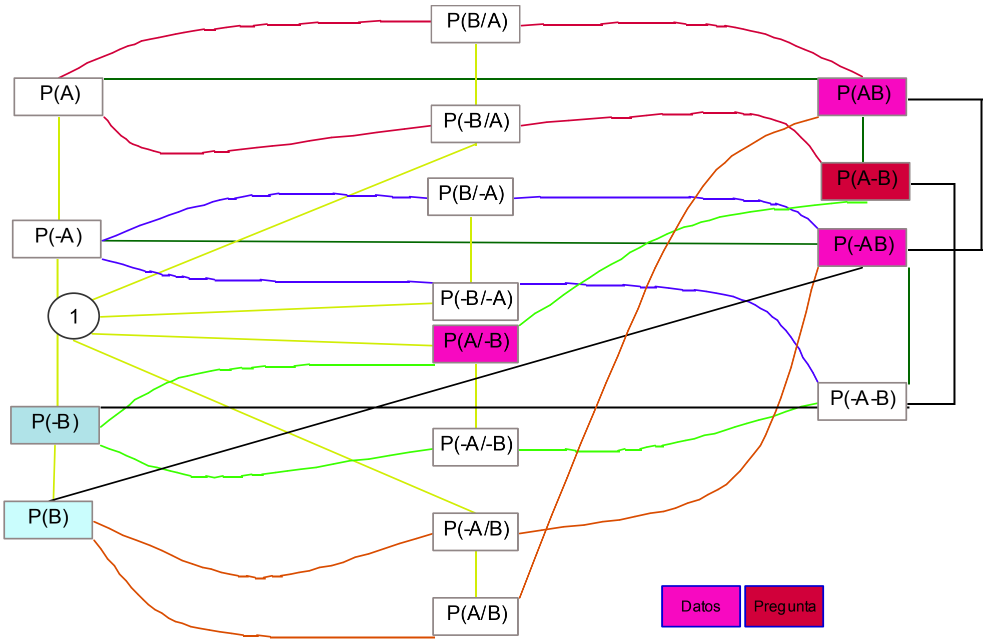


Figura 137 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_3G_3$

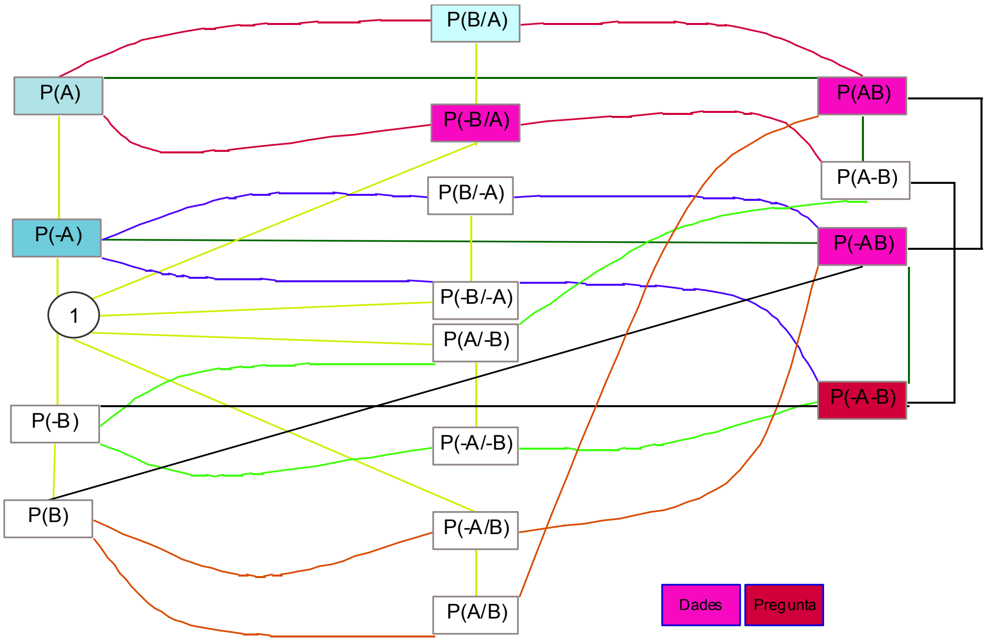


Figura 138 Grafo canónico de [p_{31}]

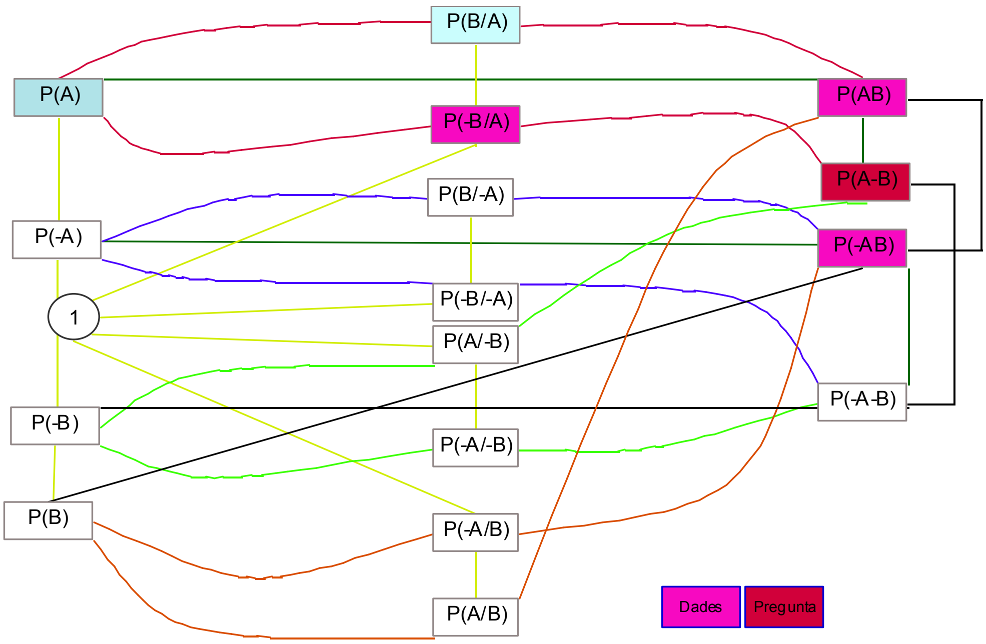


Figura 139 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

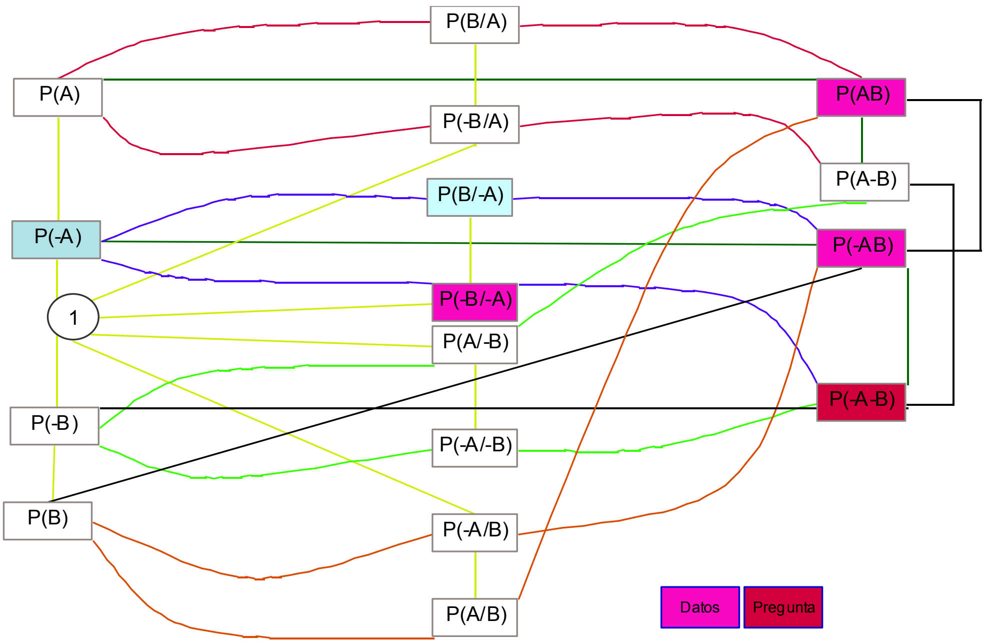


Figura 140 Grafo canónico de [p_{21}]

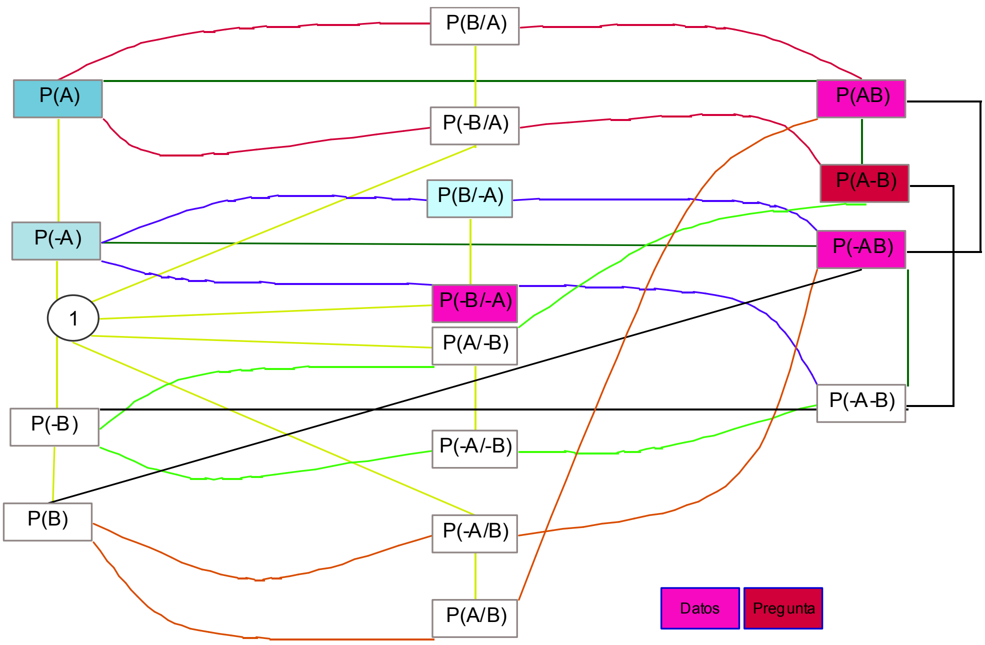


Figura 141 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_1T_3G_5$

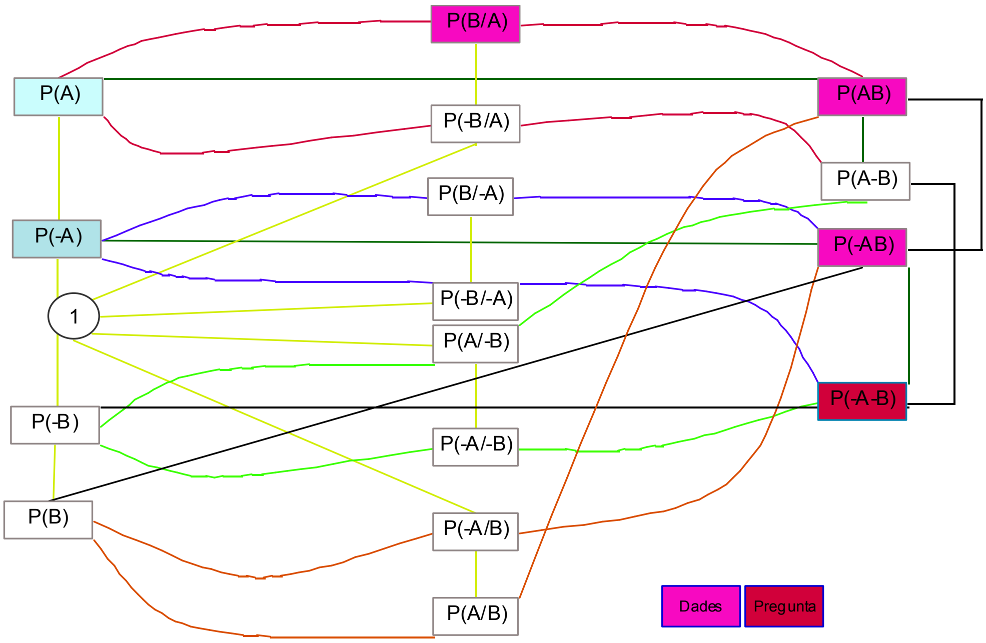


Figura 142 Grafo canónico de [p_{21}]

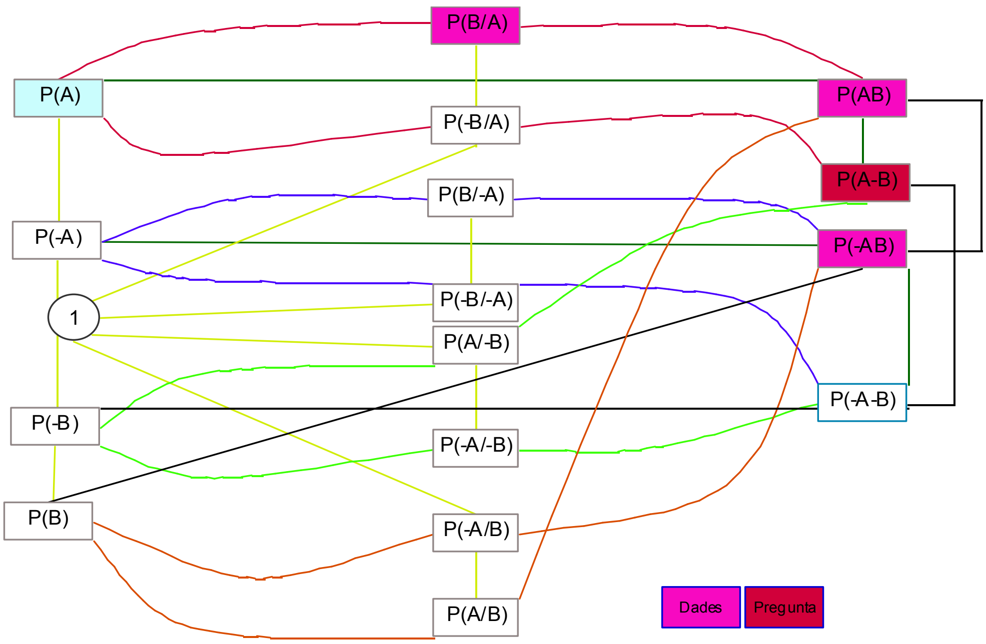


Figura 143 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

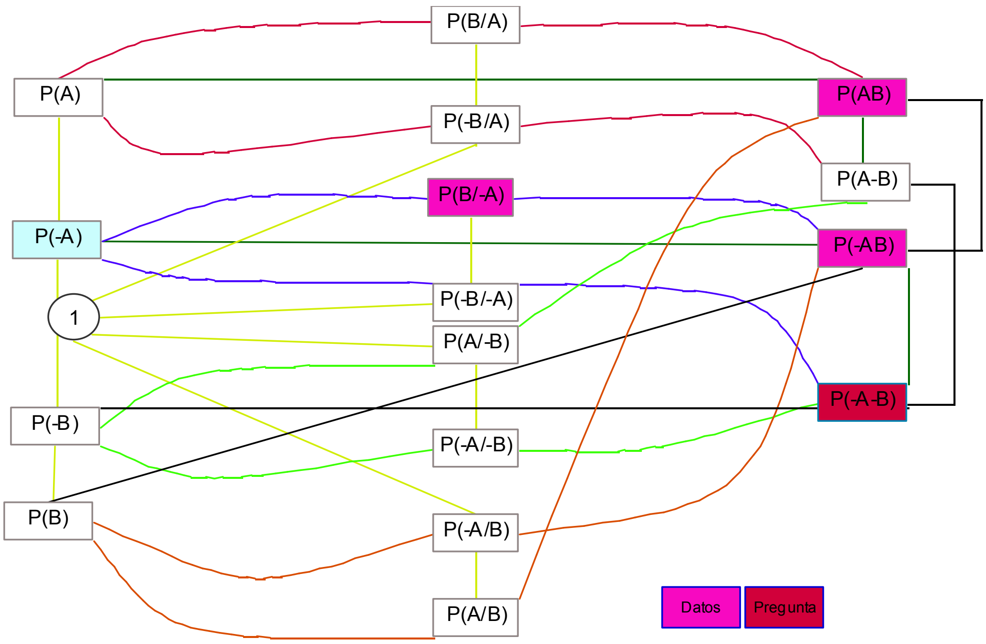


Figura 144 Grafo canónico de [p_{11}]

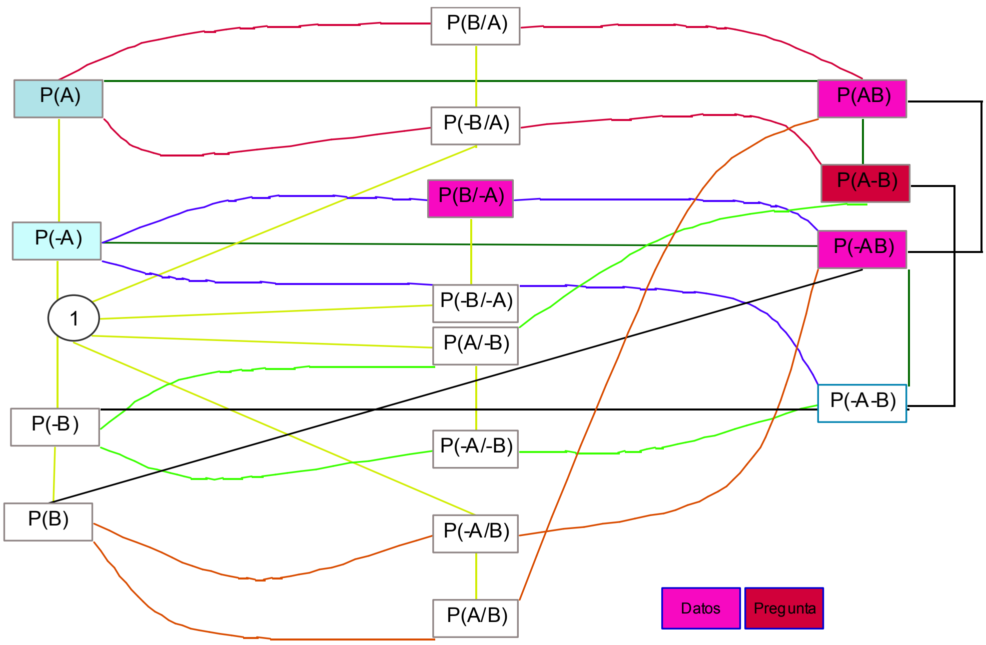


Figura 145 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_1T_3G_6$

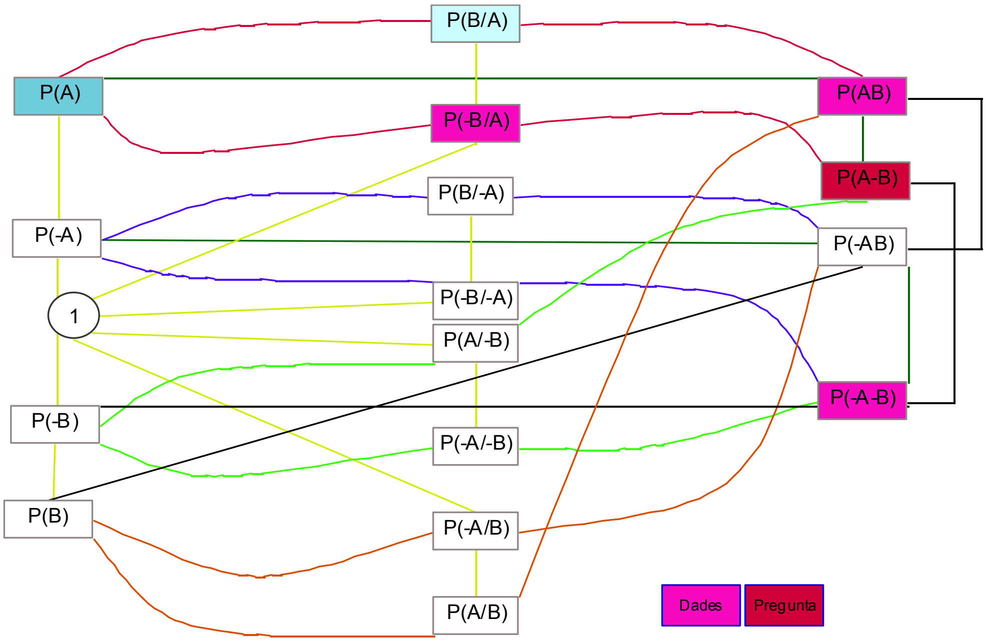


Figura 146 Grafo canónico de [p_{21}]

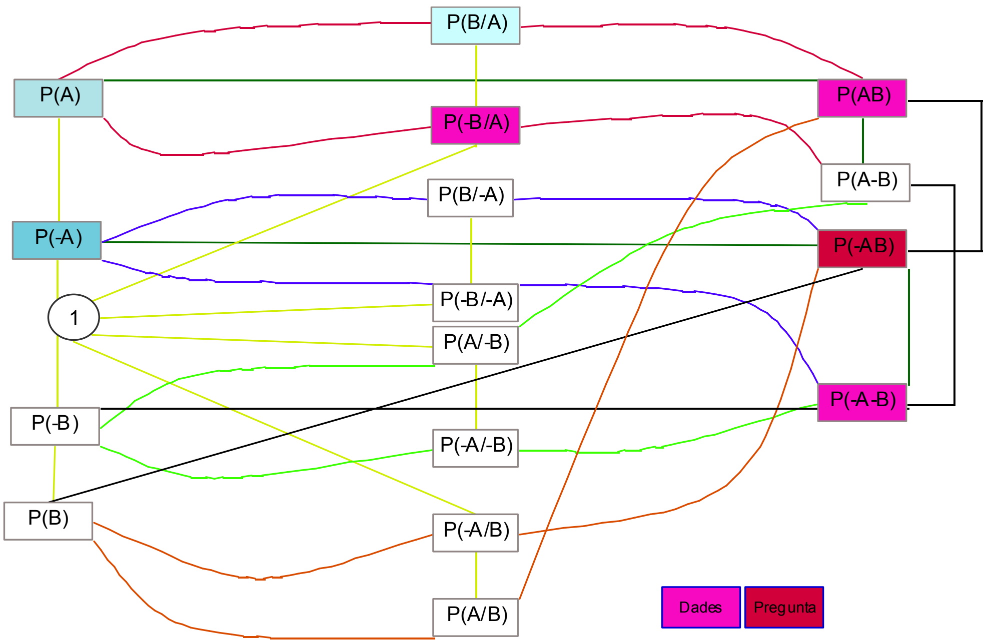


Figura 147 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

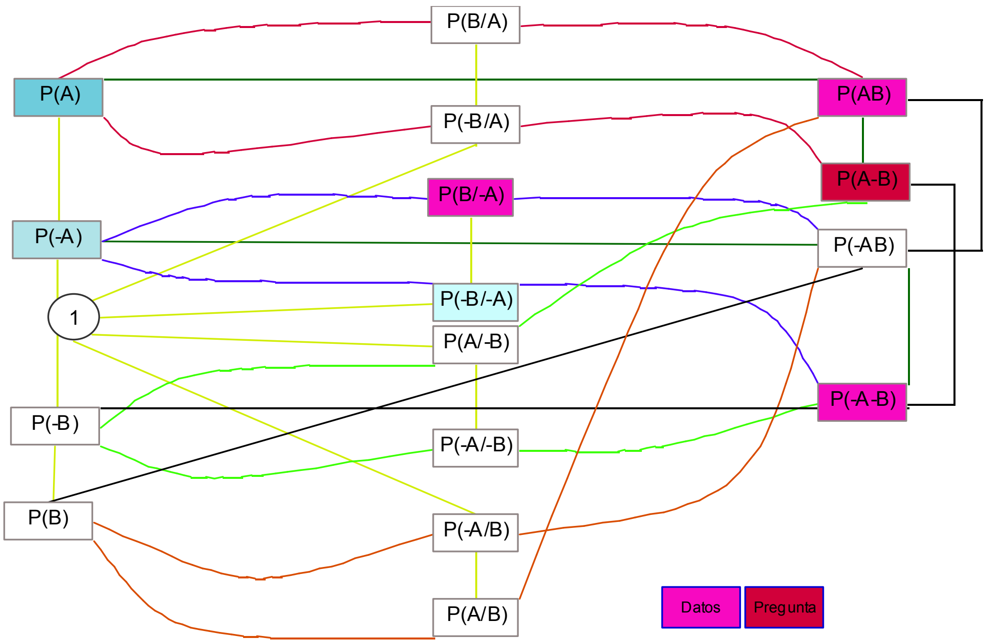


Figura 148 Grafo canónico de [p_{31}]

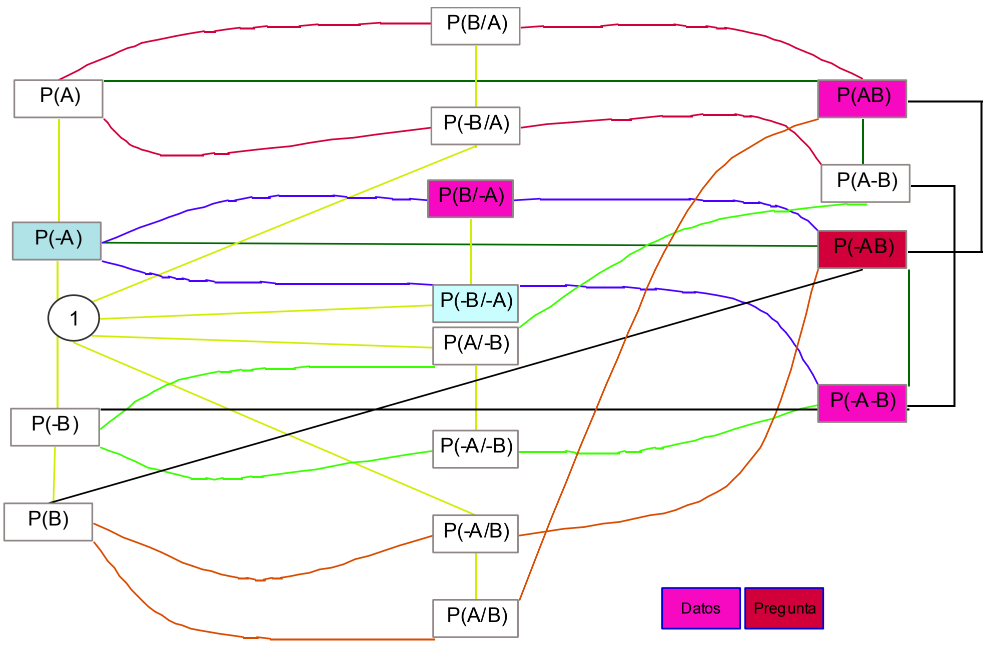


Figura 149 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

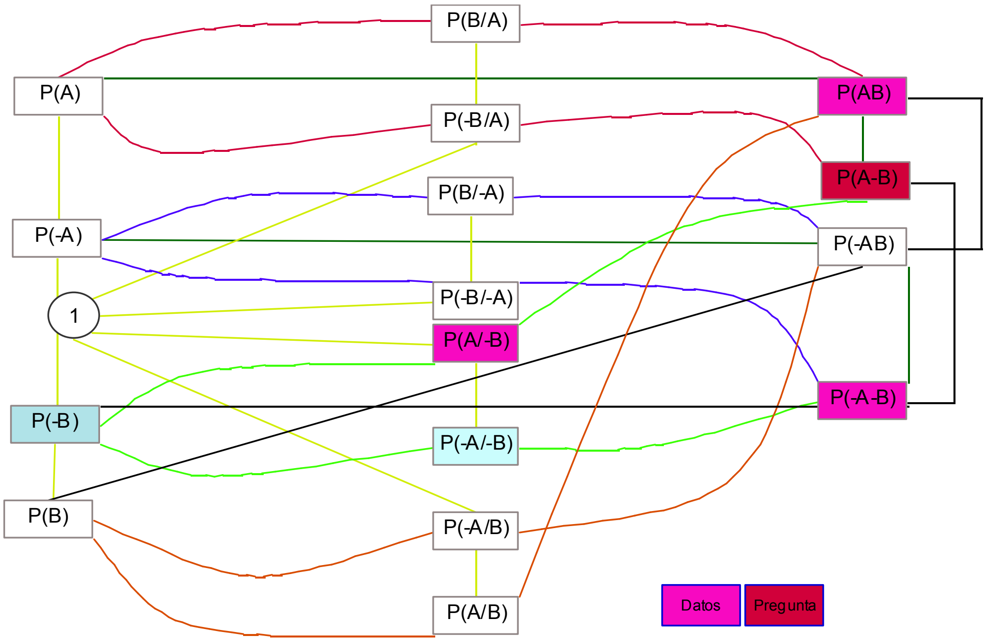


Figura 150 Grafo canónico de [p_{21}]

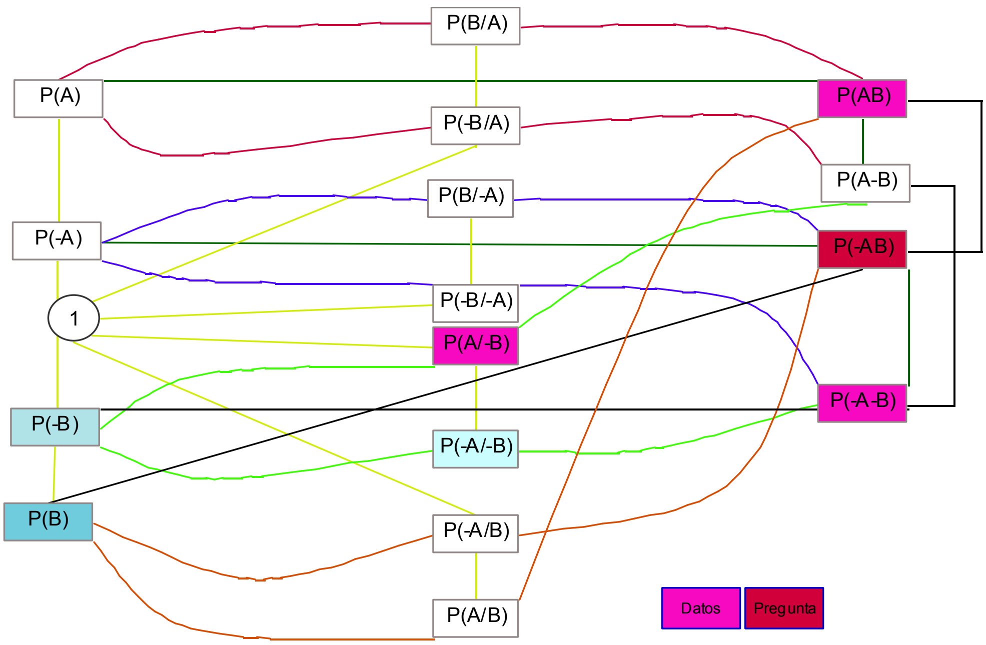


Figura 151 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

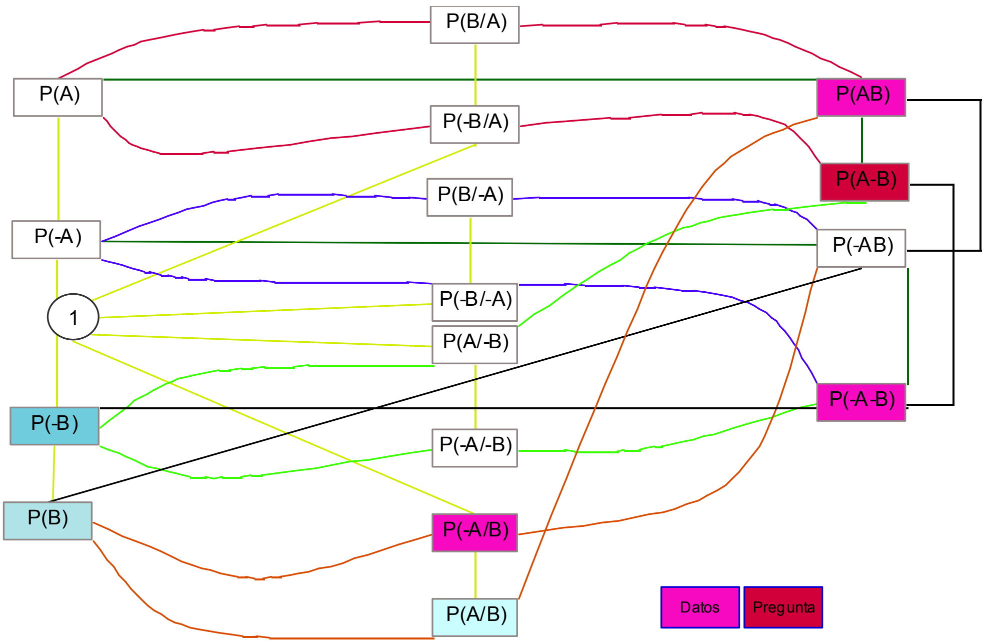


Figura 152 Grafo canónico de [p_{31}]

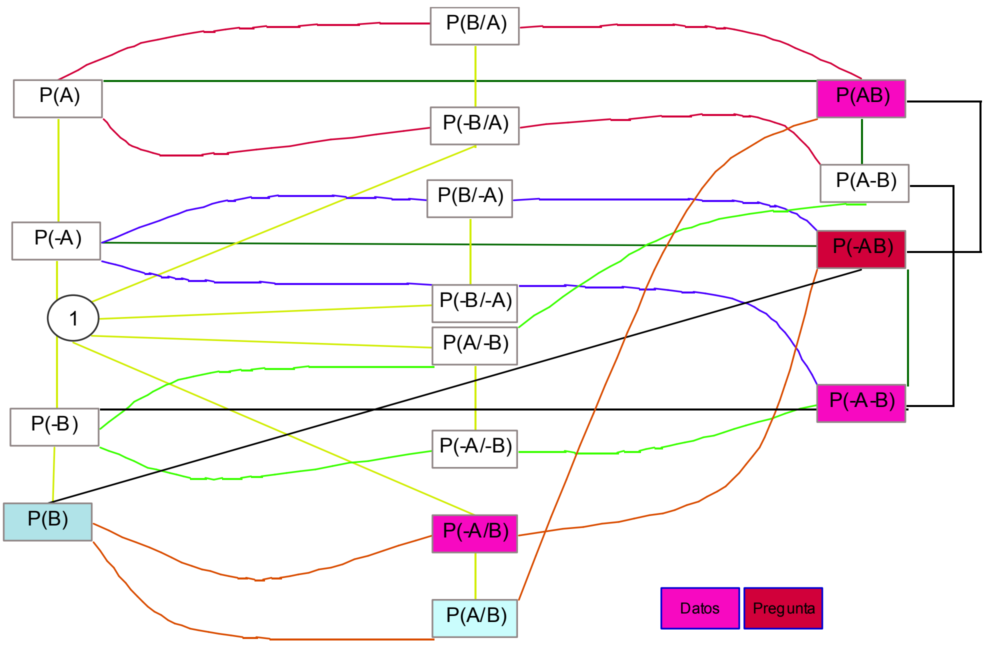


Figura 153 Grafo canónico de [p_{21}]

II. N_2C_2

II.1. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_2T_1$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.14

$N_2C_2T_1G_1$

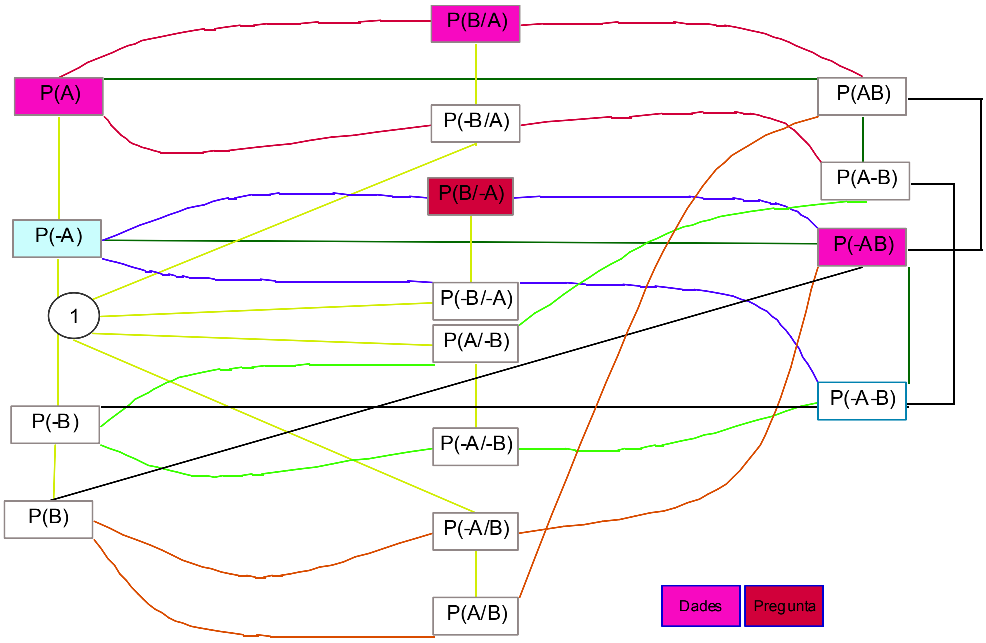


Figura 154 Grafo canónico de [p_{11}]

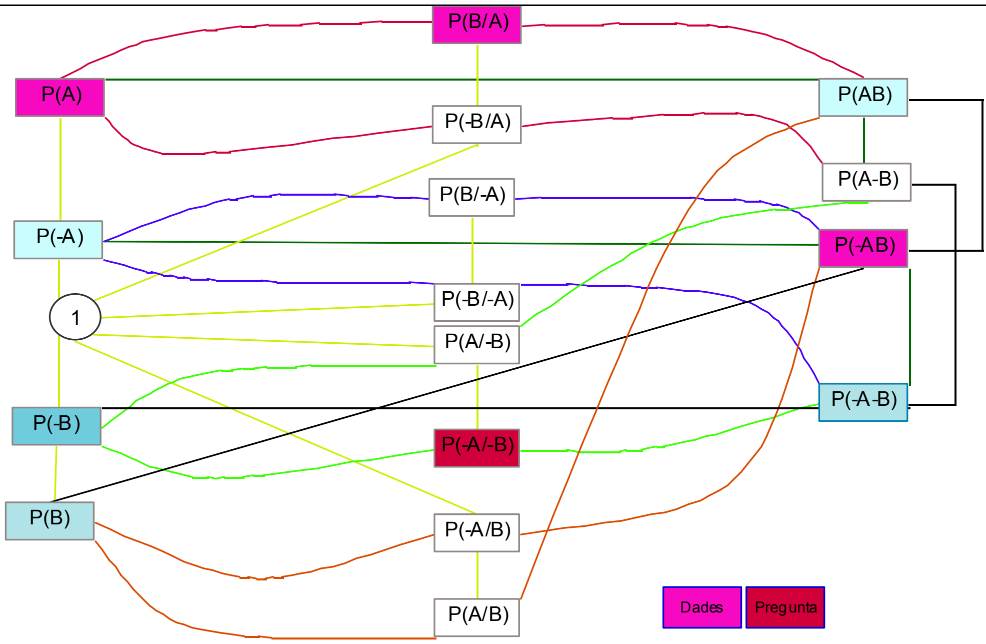


Figura 155 Grafo canónico de [p_{41}]

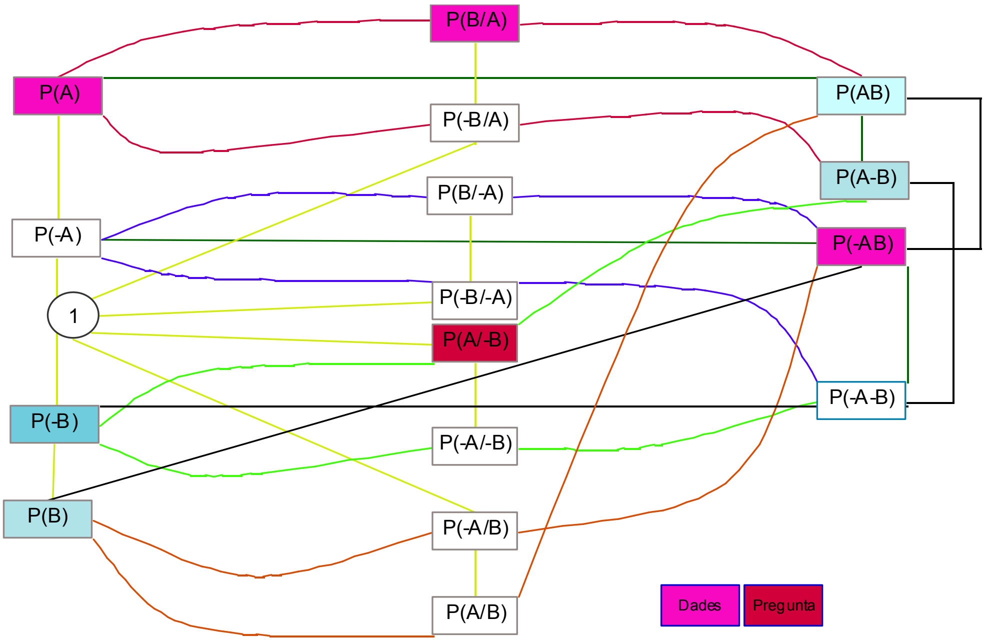


Figura 156 Grafo canónico de [p_{32}]

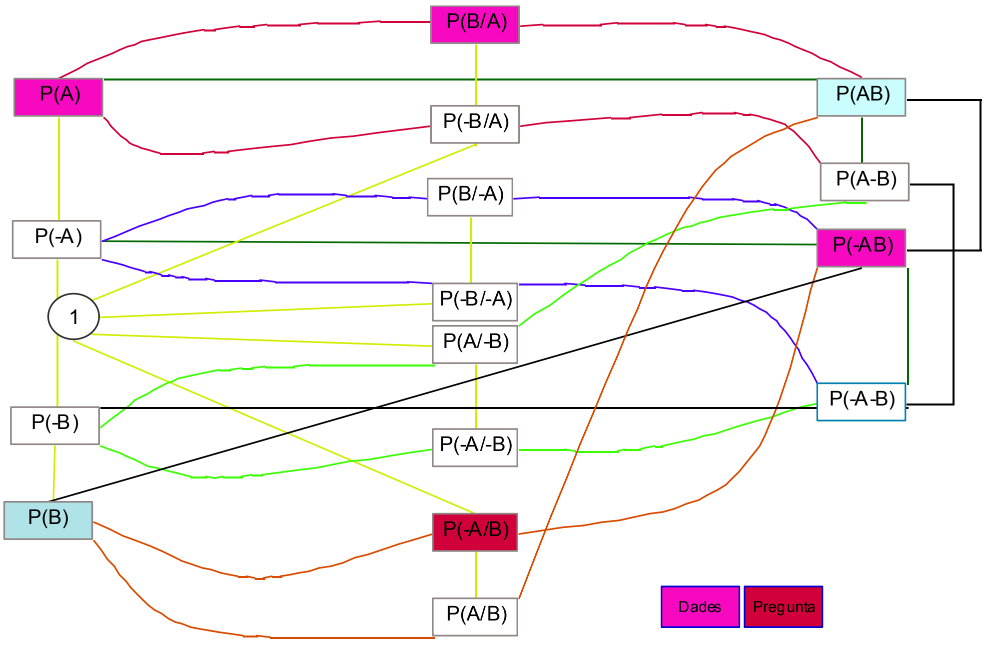


Figura 157 Grafo canónico de [p_{12}]

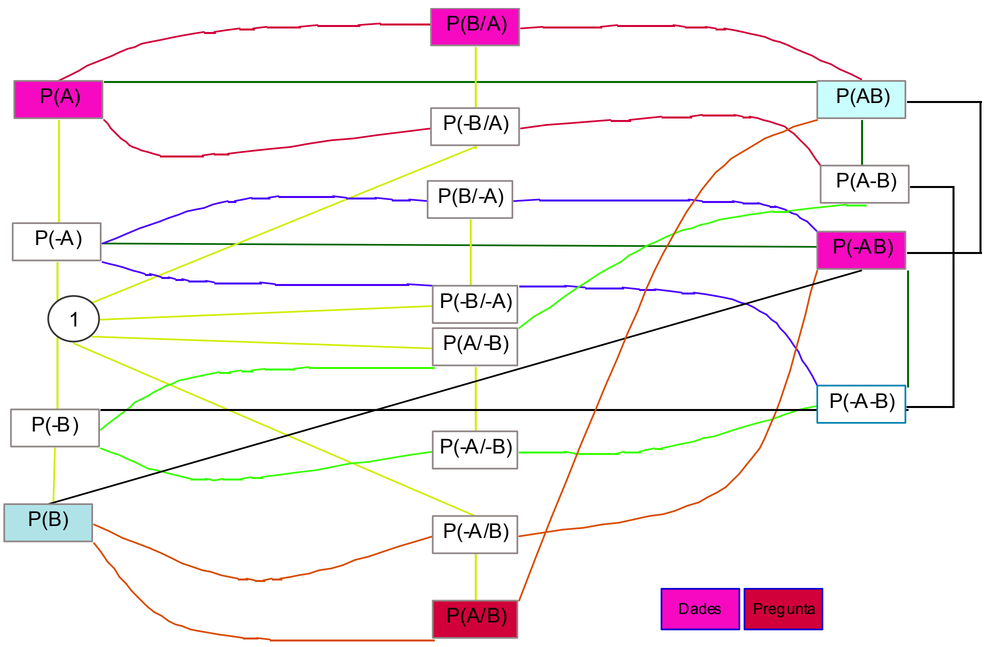


Figura 158 Grafo canónico de [p_{12}]

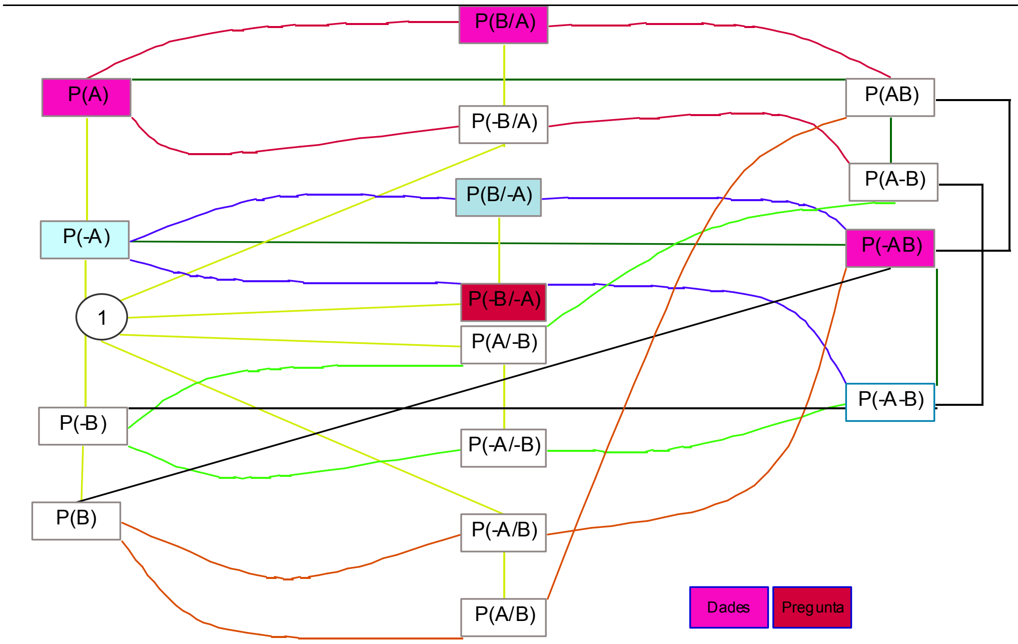


Figura 159 Grafo canónico de [p_{21}]

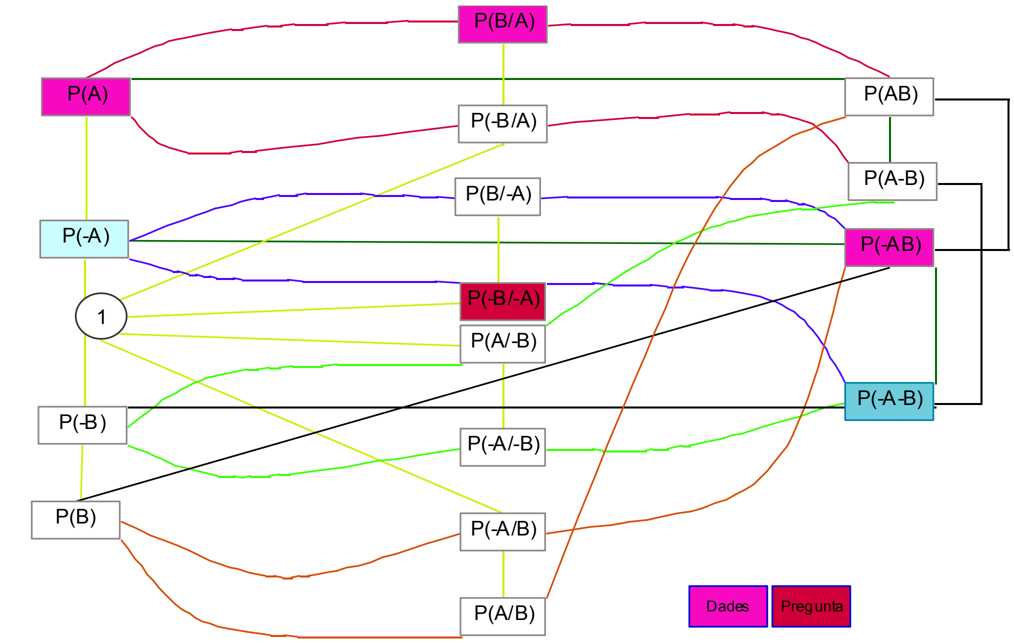


Figura 160 Grafo canónico de [p_{21}]. Este grafo representa el mismo problema que el de la figura 159, en el que hemos utilizado aristas diferentes pero de la misma naturaleza, dos rectas y una curva.

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

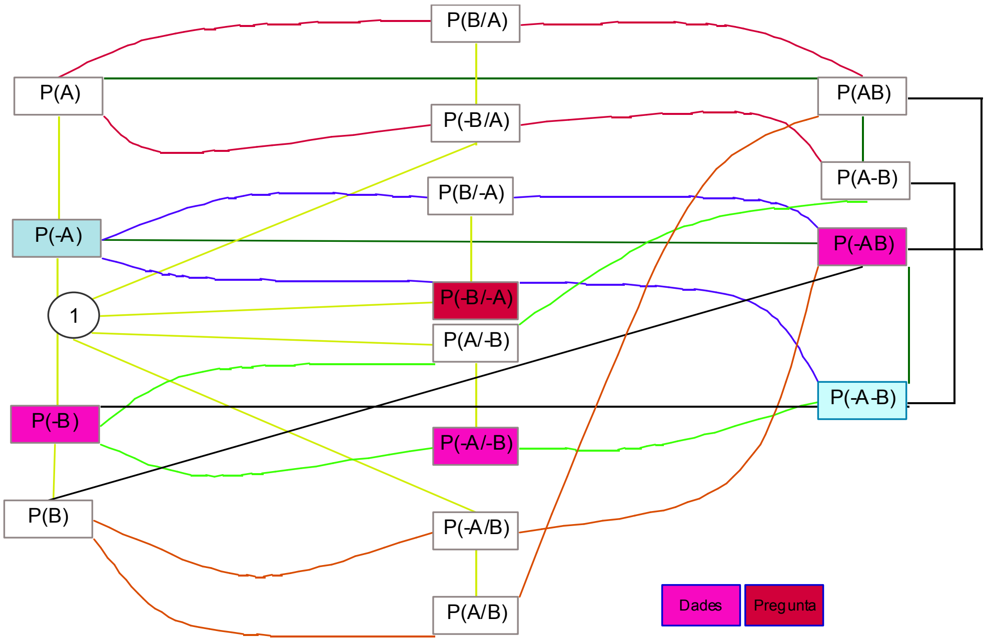


Figura 161 Grafo canónico de [p_{12}]

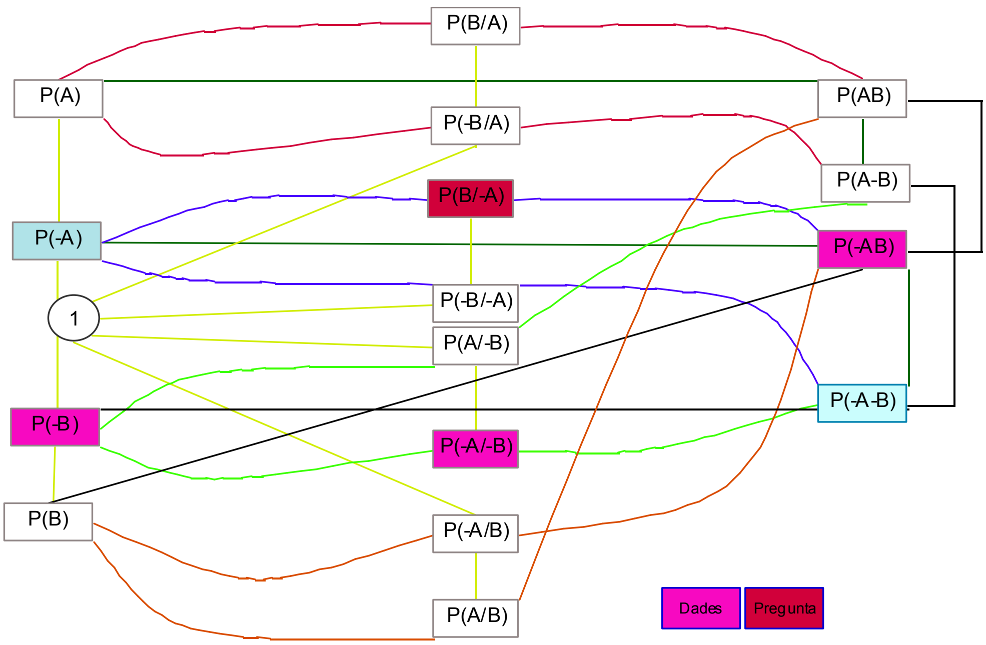


Figura 162 Grafo canónico de [p_{12}]

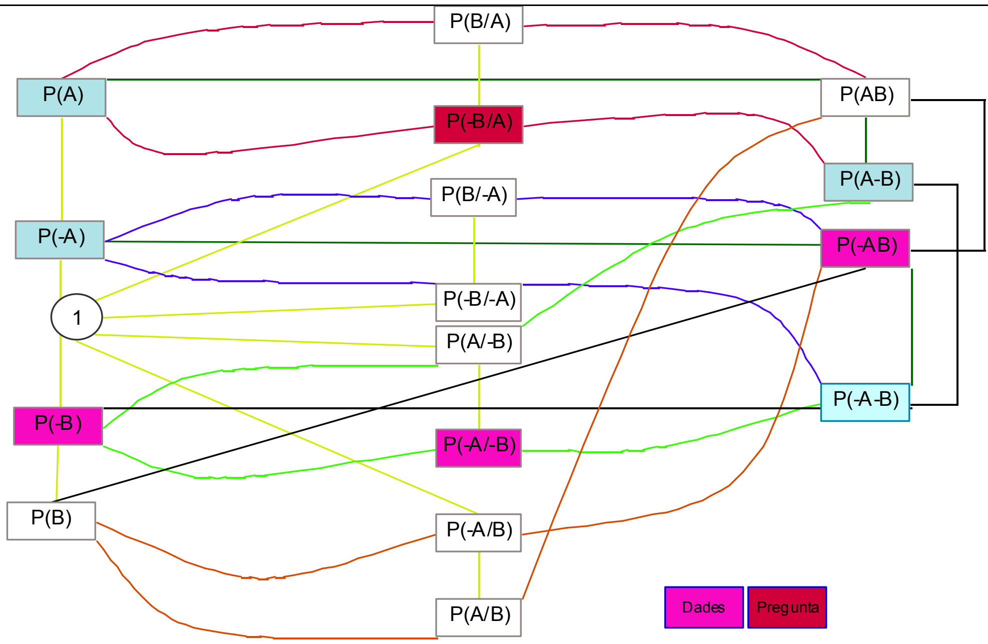


Figura 163 Grafo canónico de [p32]

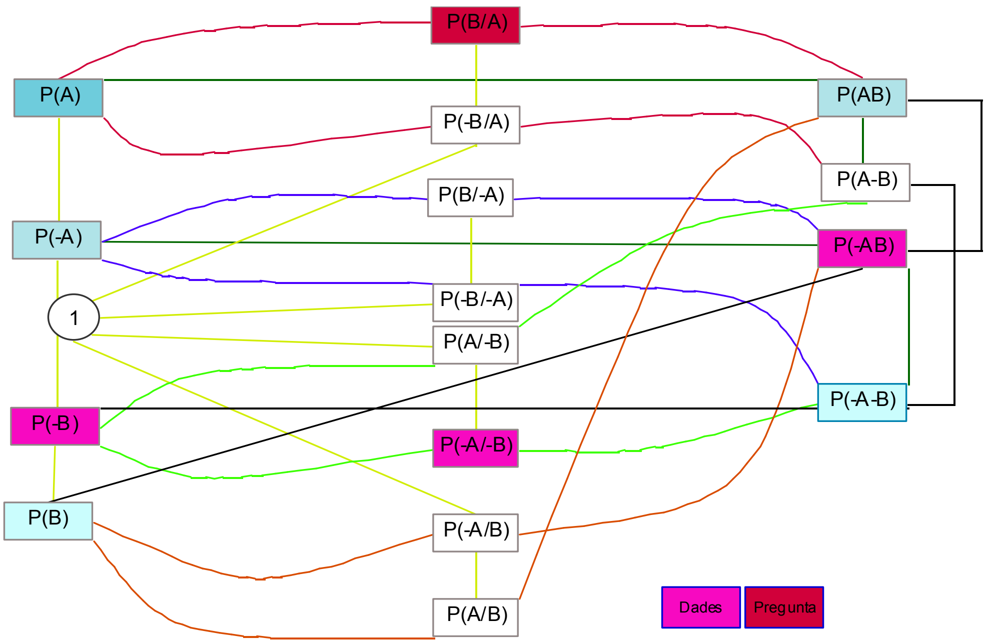


Figura 165 Grafo canónico de [p42]

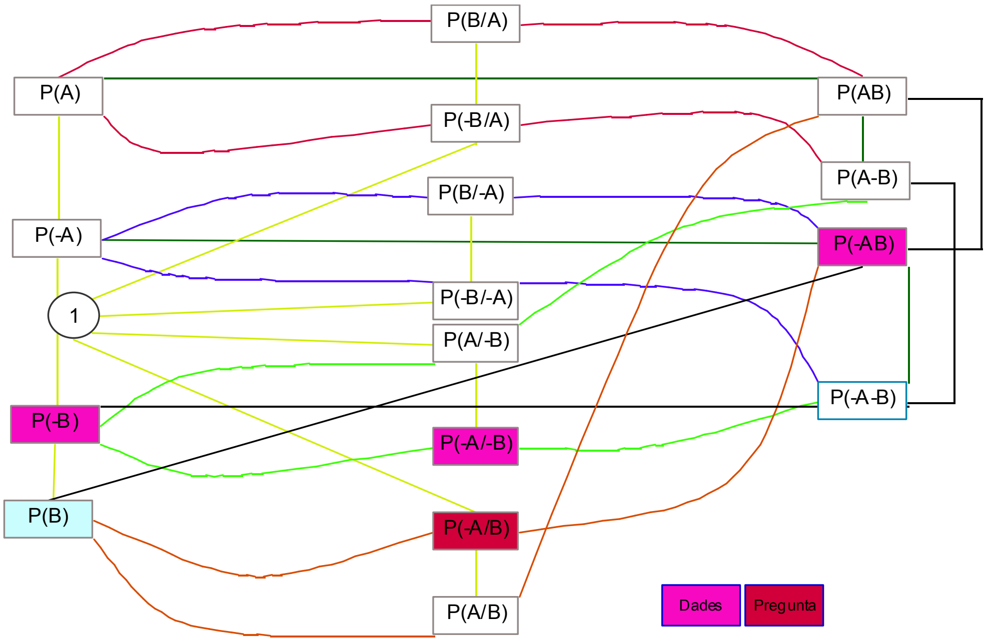


Figura 166 Grafo canónico de [p_{11}]

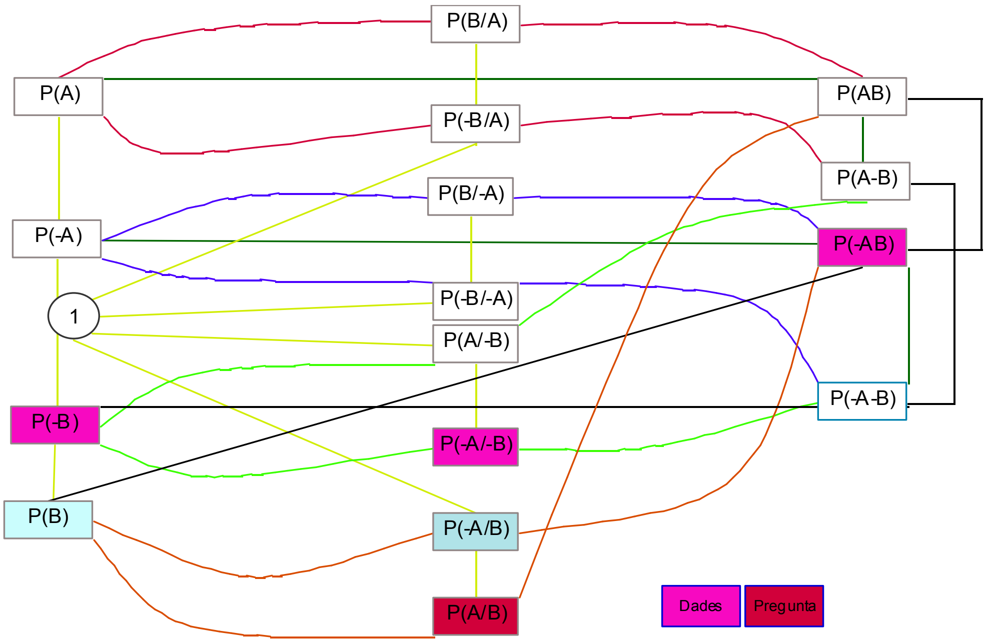


Figura 167 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_1G_2$

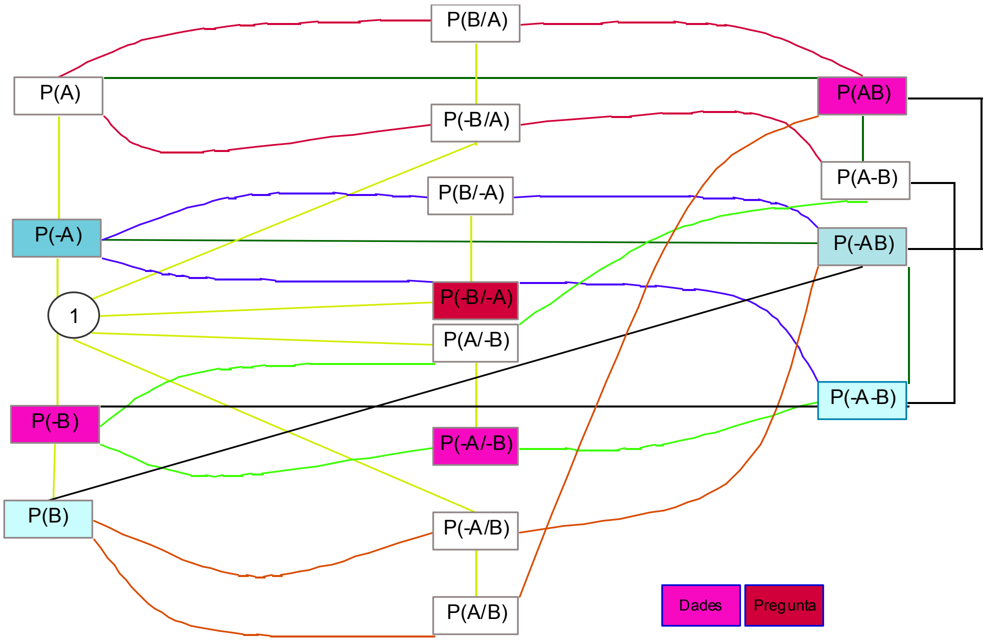


Figura 168 Grafo canónico de [p_{32}]

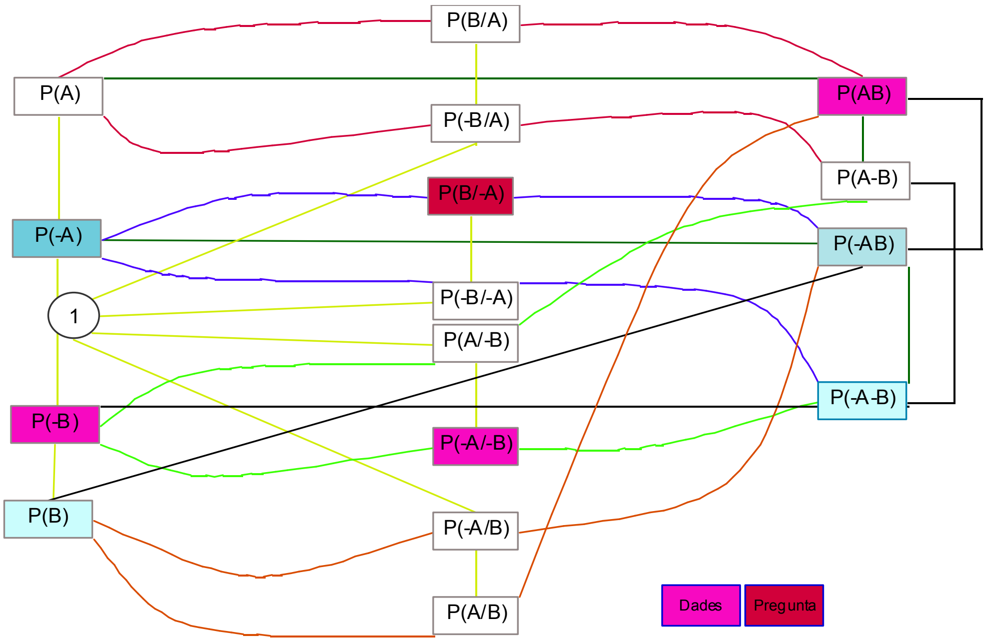


Figura 169 Grafo canónico de [p_{32}]

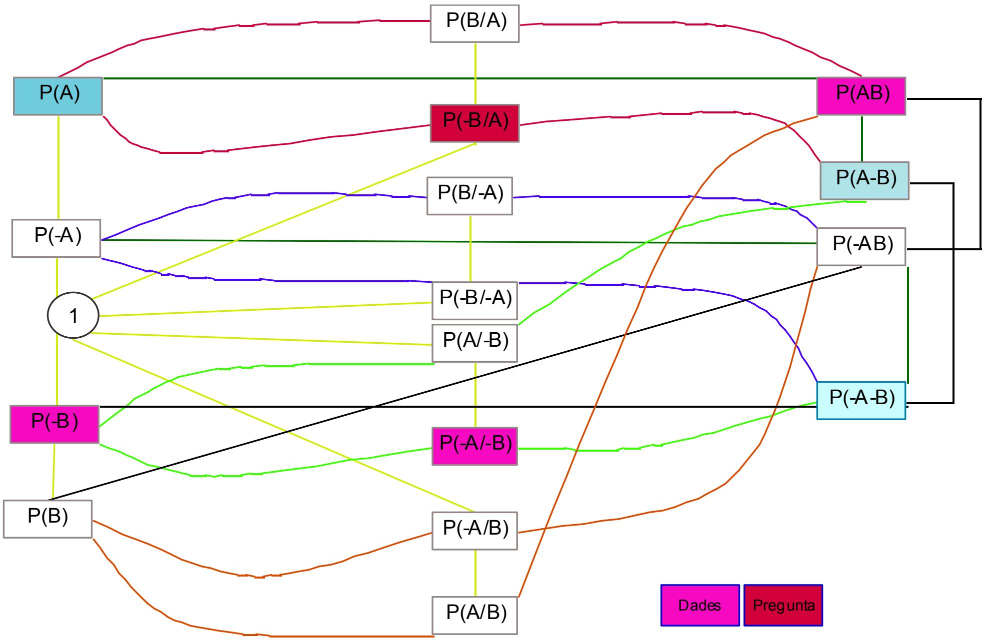


Figura 170 Grafo canónico de [p_{22}]

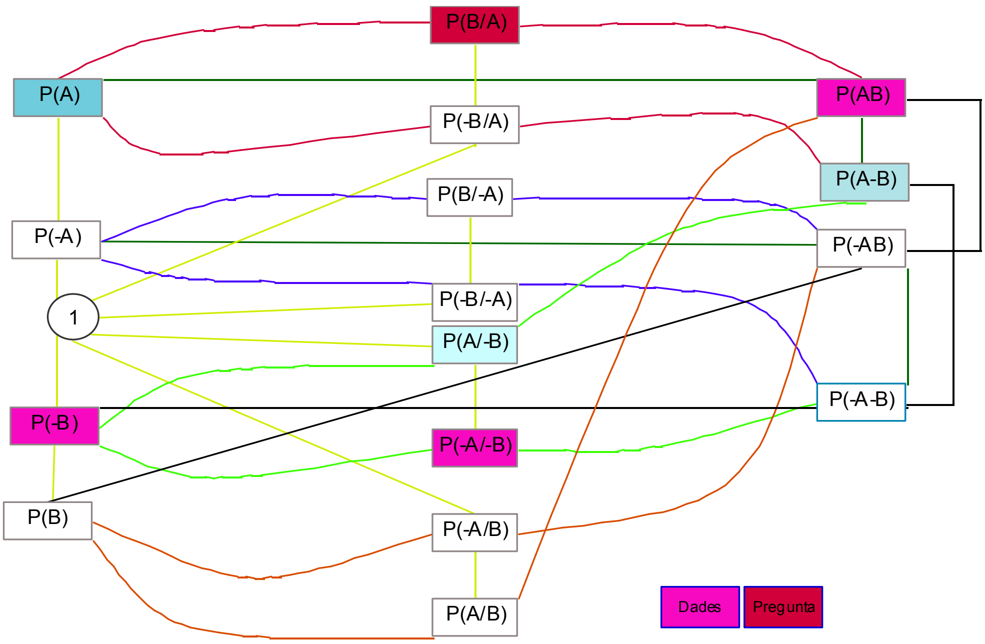


Figura 171 Grafo canónico de [p_{22}]

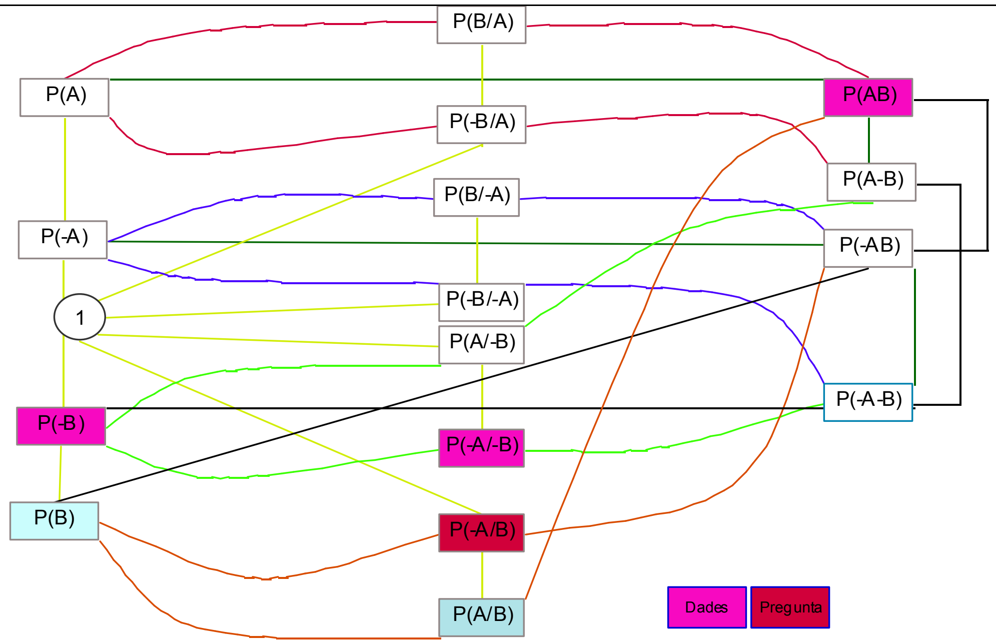


Figura 172 Grafo canónico de [p_{21}]

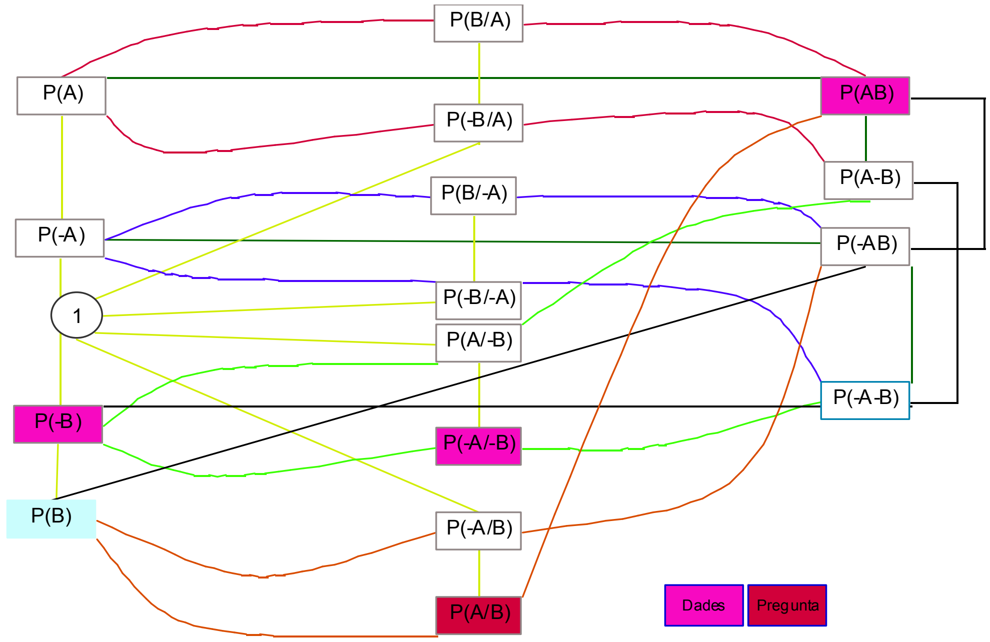


Figura 173 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_1G_4$

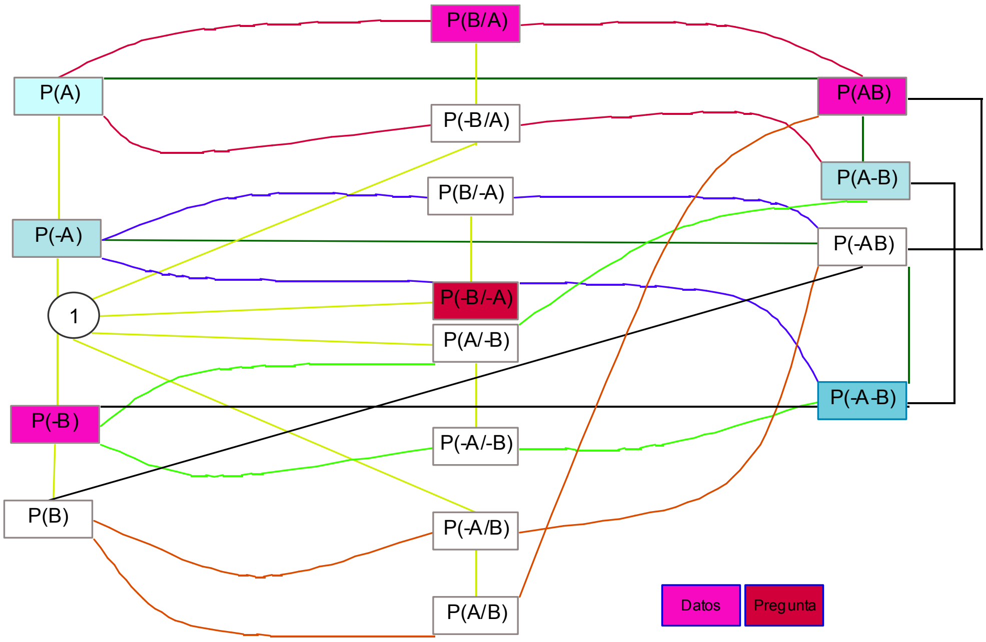


Figura 174 Grafo canónico de [p_{32}]

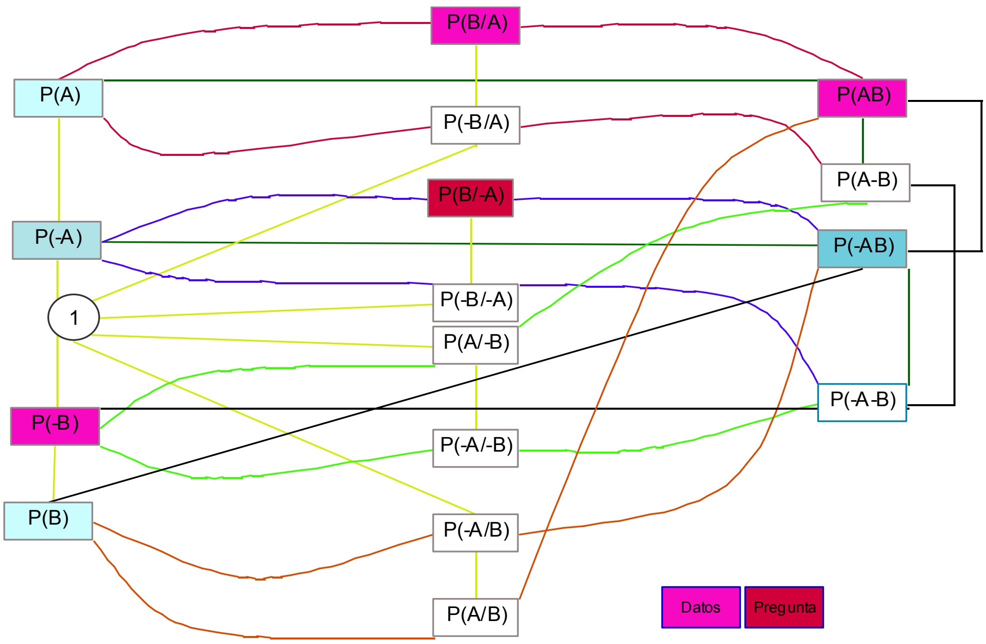


Figura 175 Grafo canónico de [p_{32}]

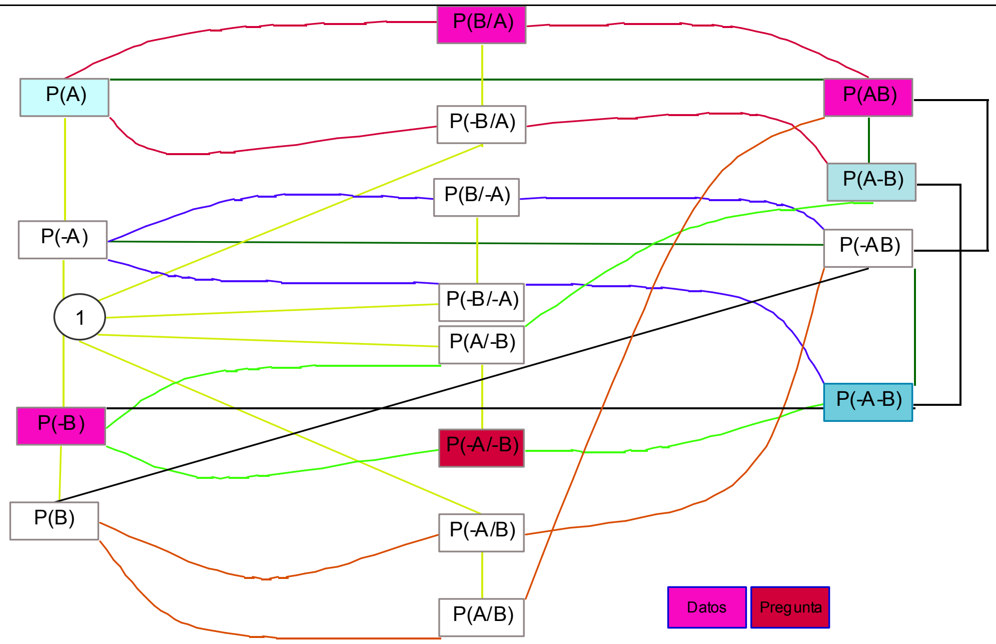


Figura 176 Grafo canónico de [p_{22}]

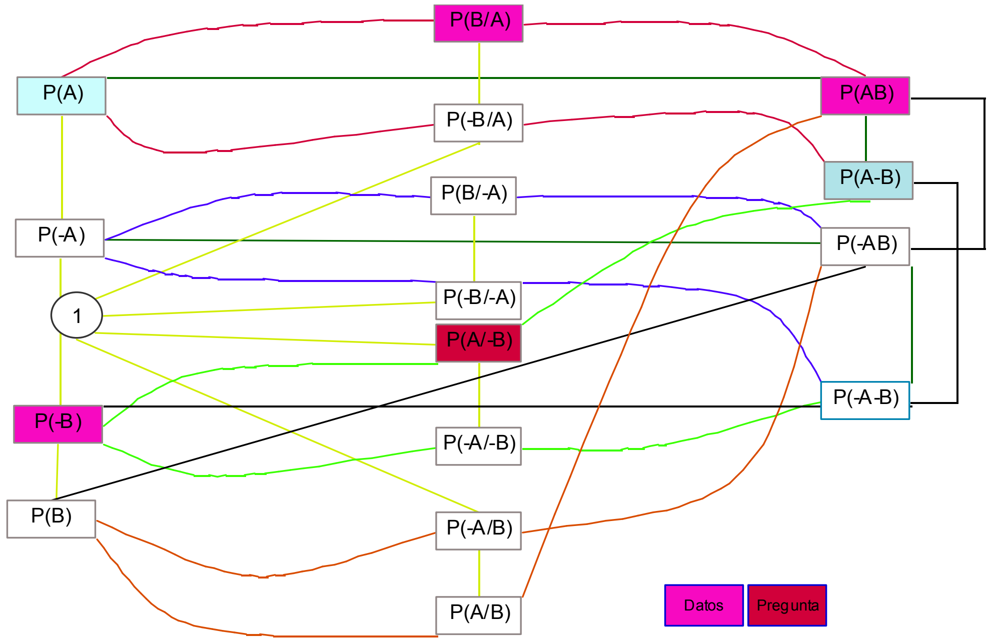


Figura 177 Grafo canónico de [p_{12}]

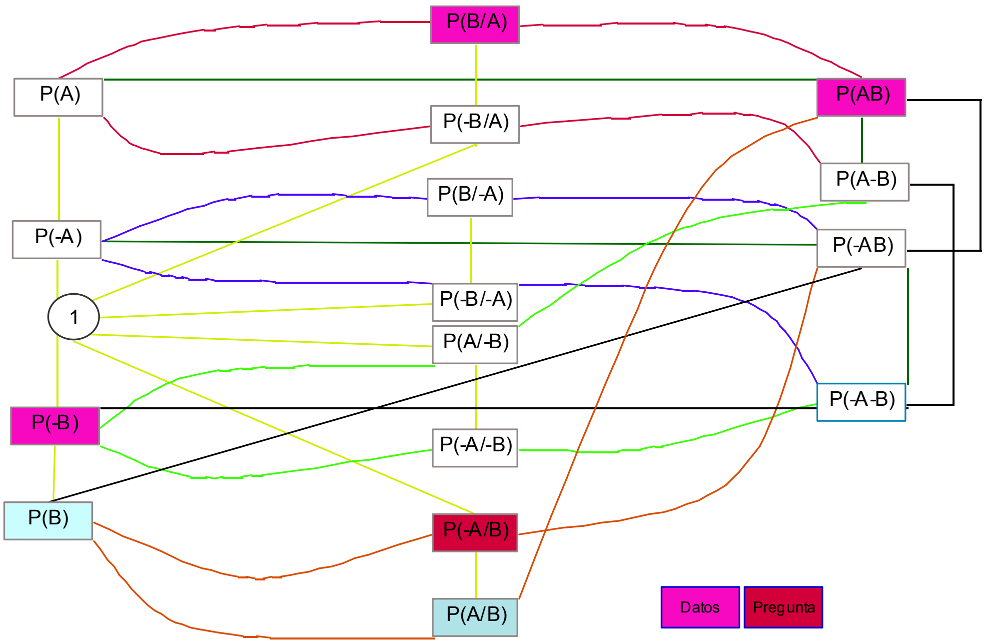


Figura 178 Grafo canónico de [p_{21}]

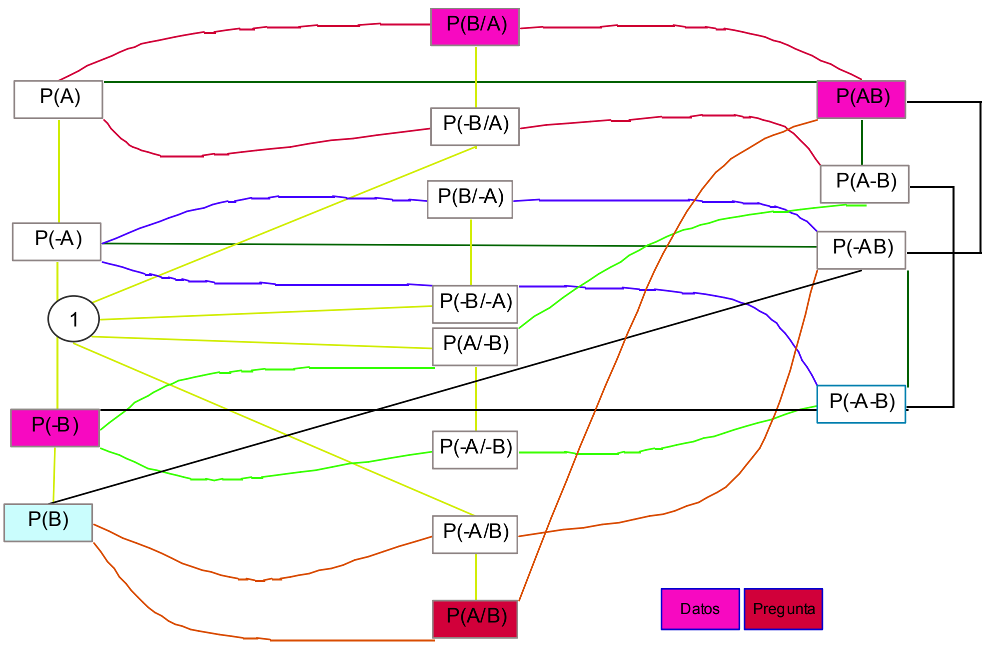


Figura 179 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

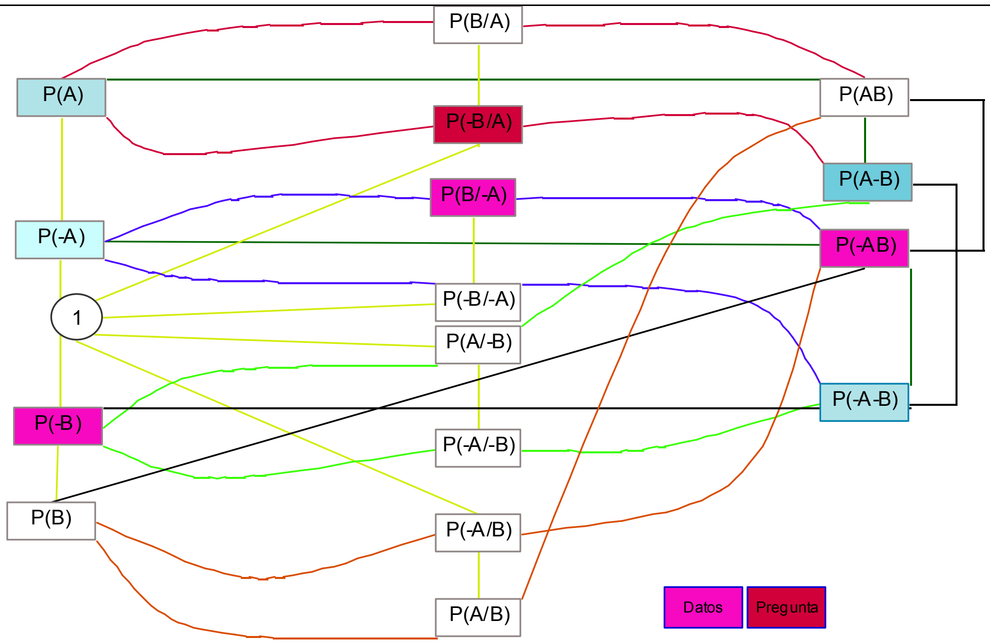


Figura 180 Grafo canónico de [p_{32}]

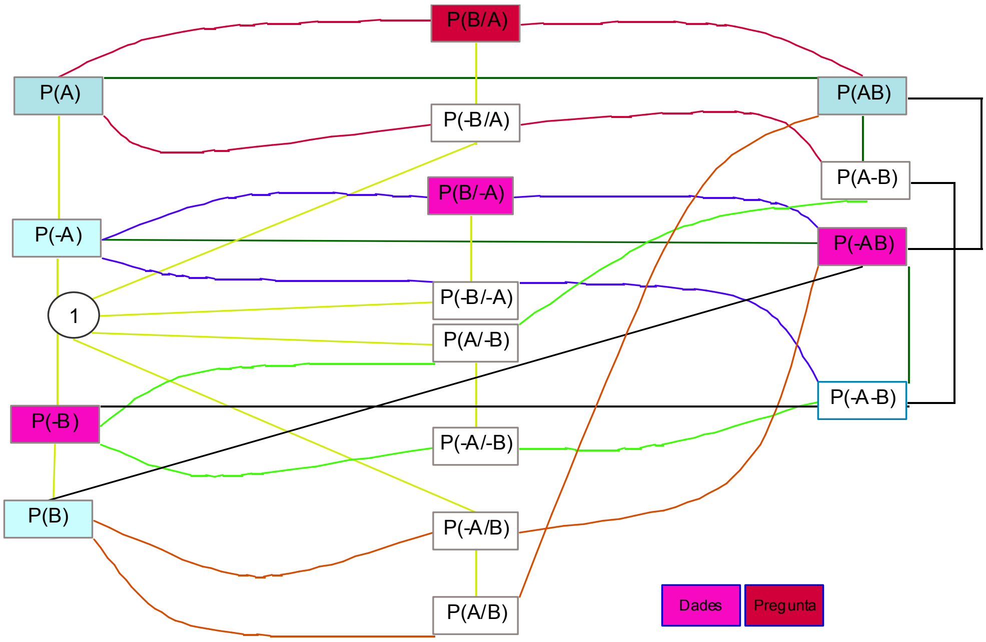


Figura 181 Grafo canónico de [p_{32}]

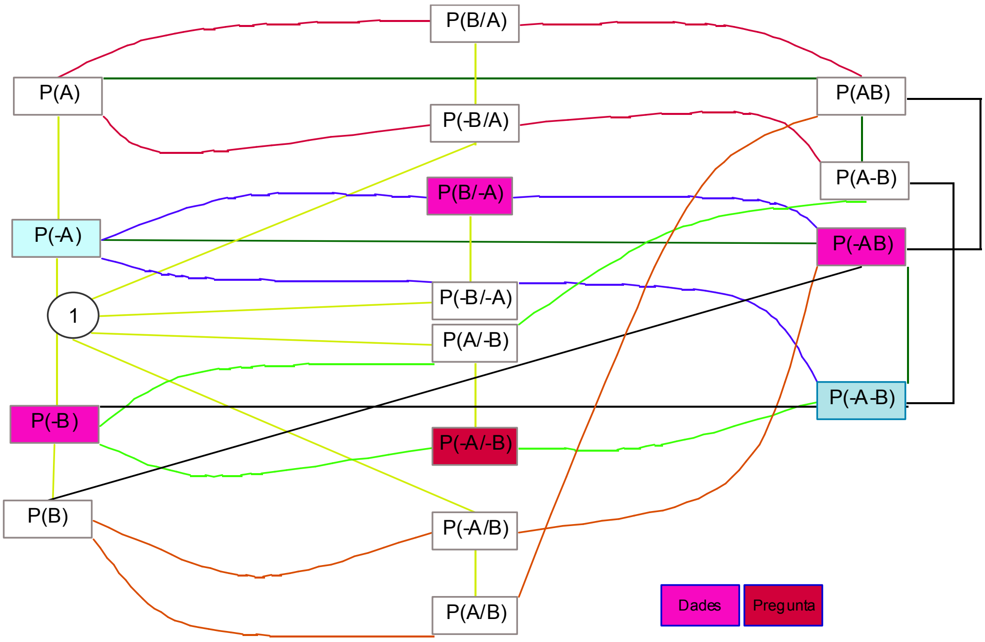


Figura 182 Grafo canónico de [p_{12}]

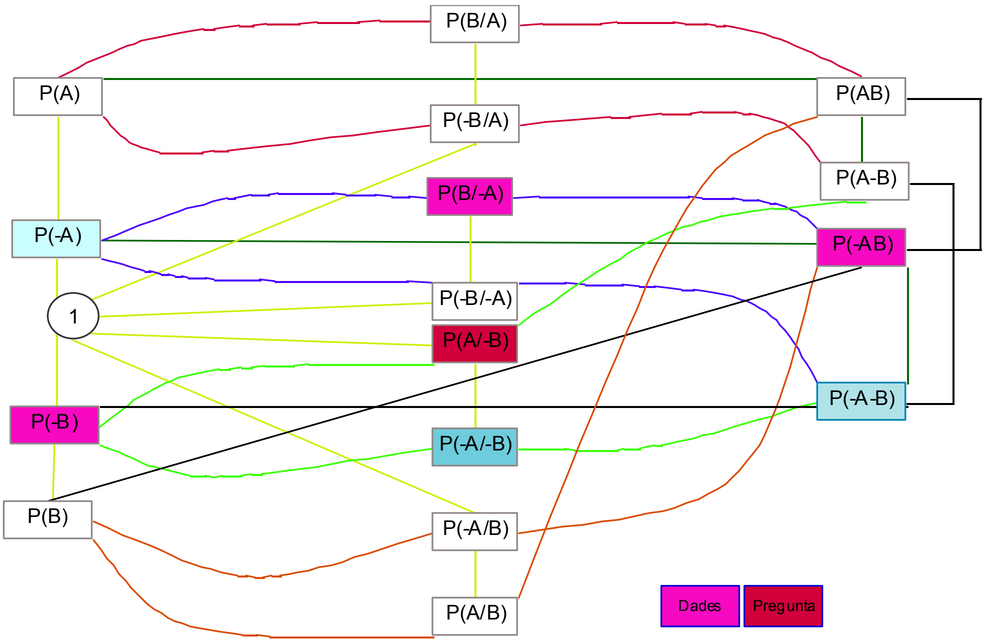


Figura 183 Grafo canónico de [p_{22}]

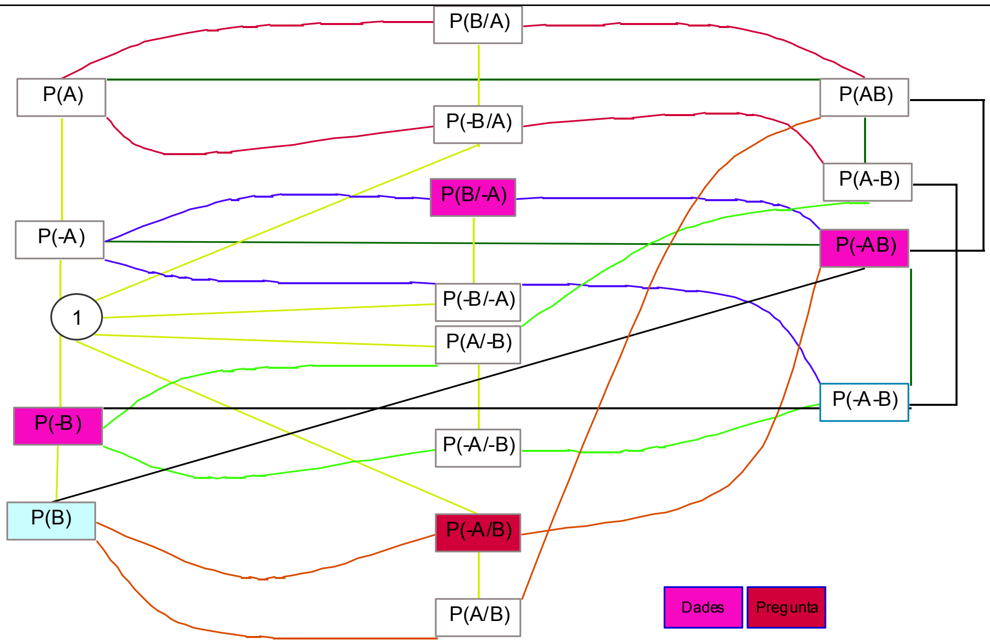


Figura 184 Grafo canónico de [p_{11}]

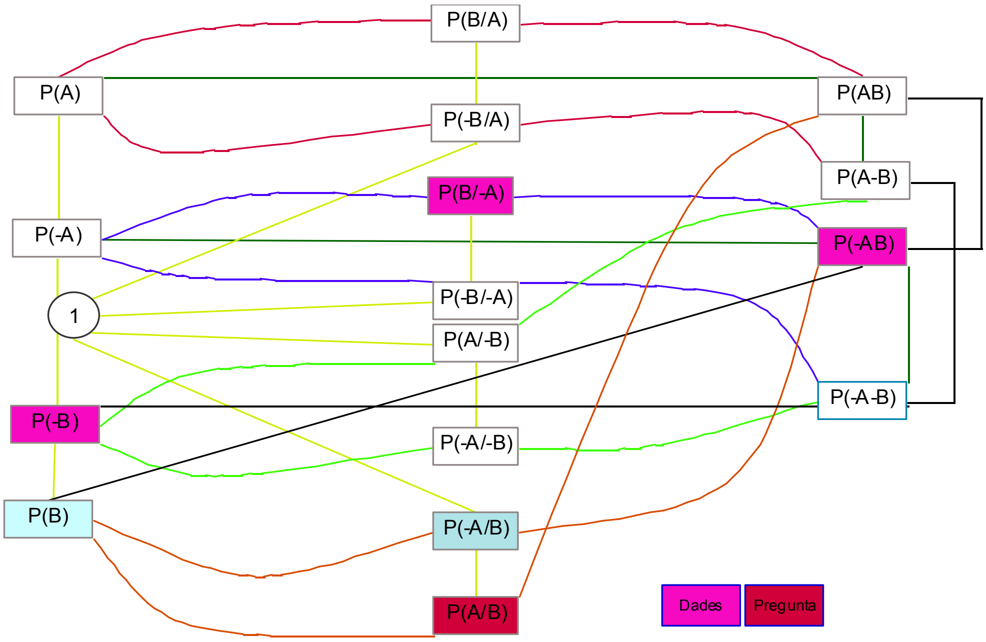


Figura 185 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_1G_5$

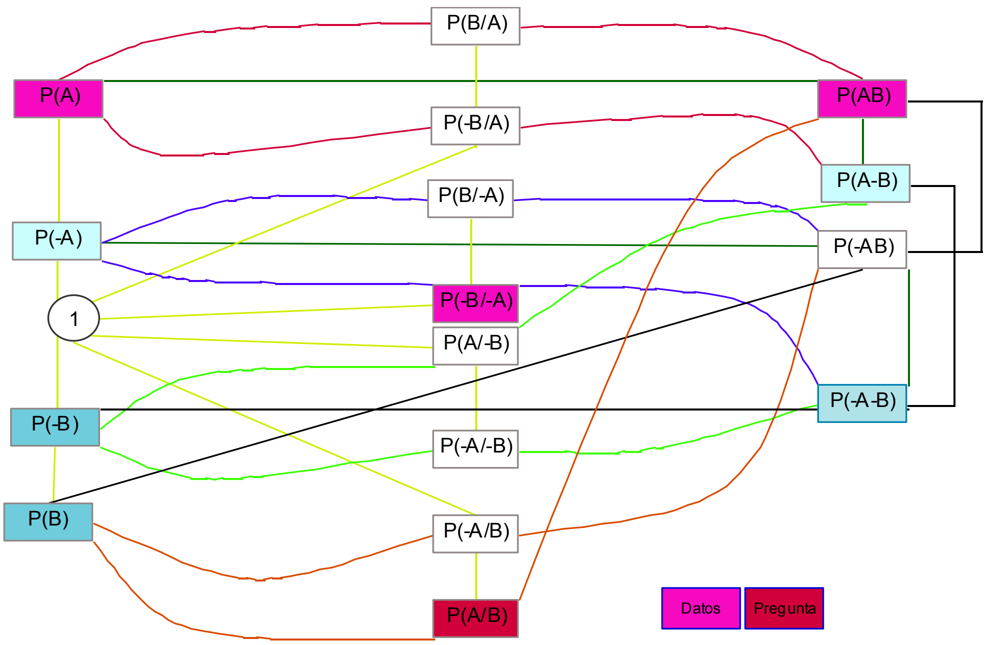


Figura 186 Grafo canónico de [p_{42}]

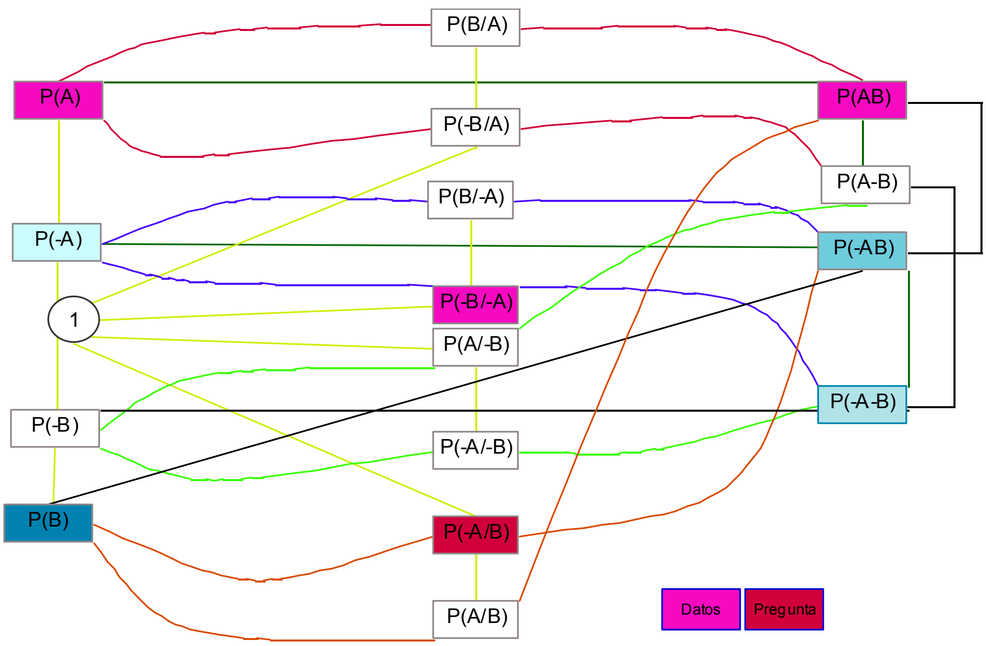


Figura 187 Grafo canónico de [p_{32}]

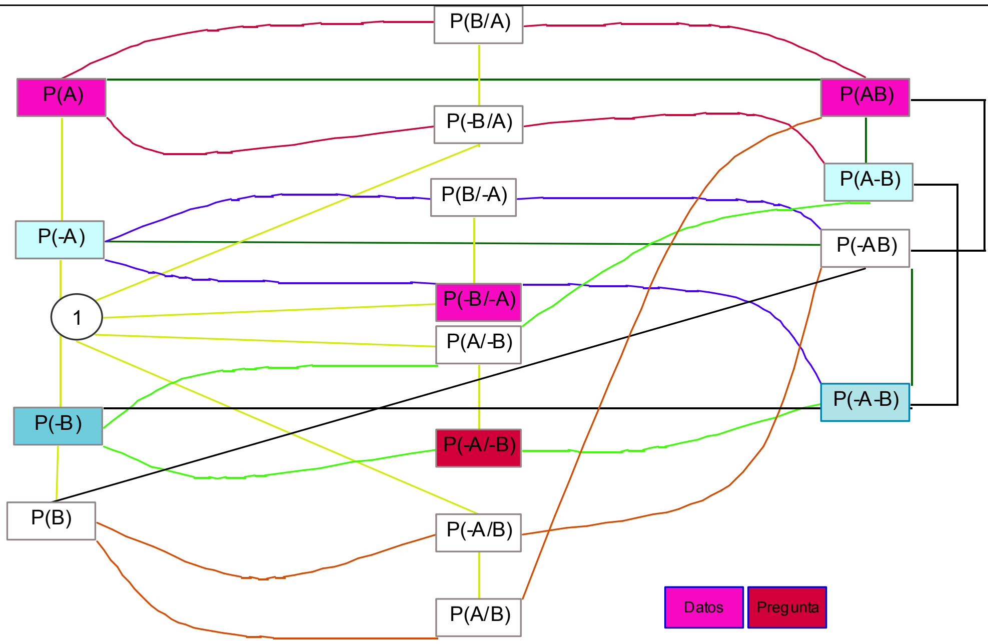


Figura 188 Grafo canónico de [p_{32}]

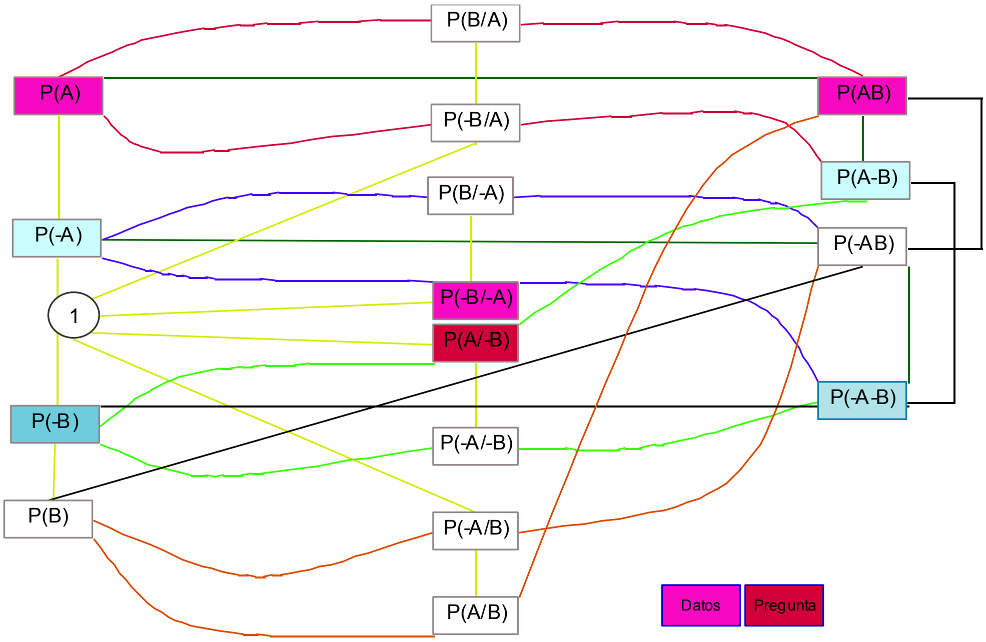


Figura 189 Grafo canónico de [p_{32}]

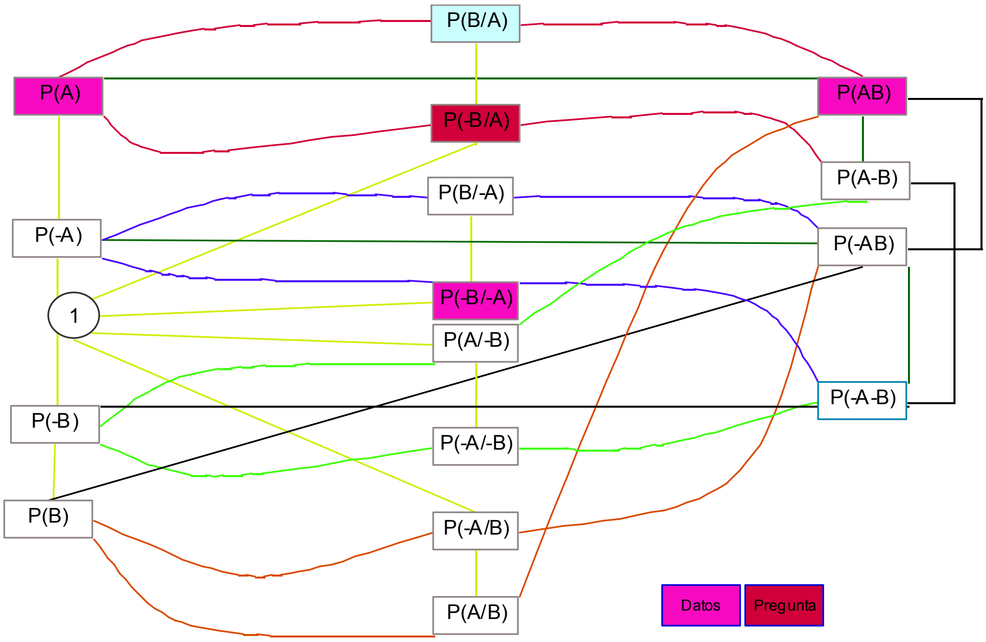


Figura 190 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_1G_6$

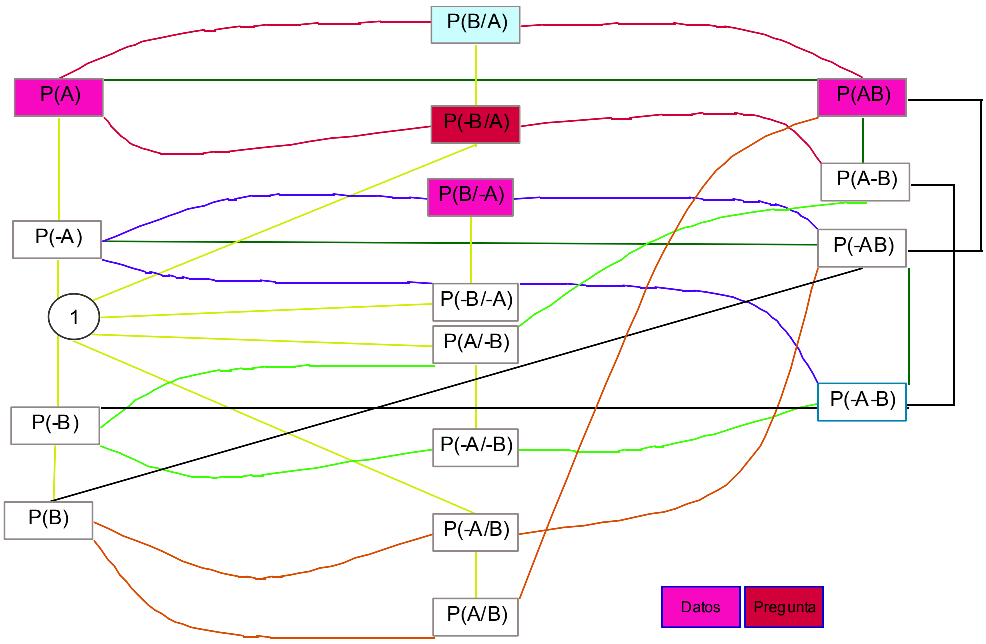


Figura 191 Grafo canónico de [p_{11}]

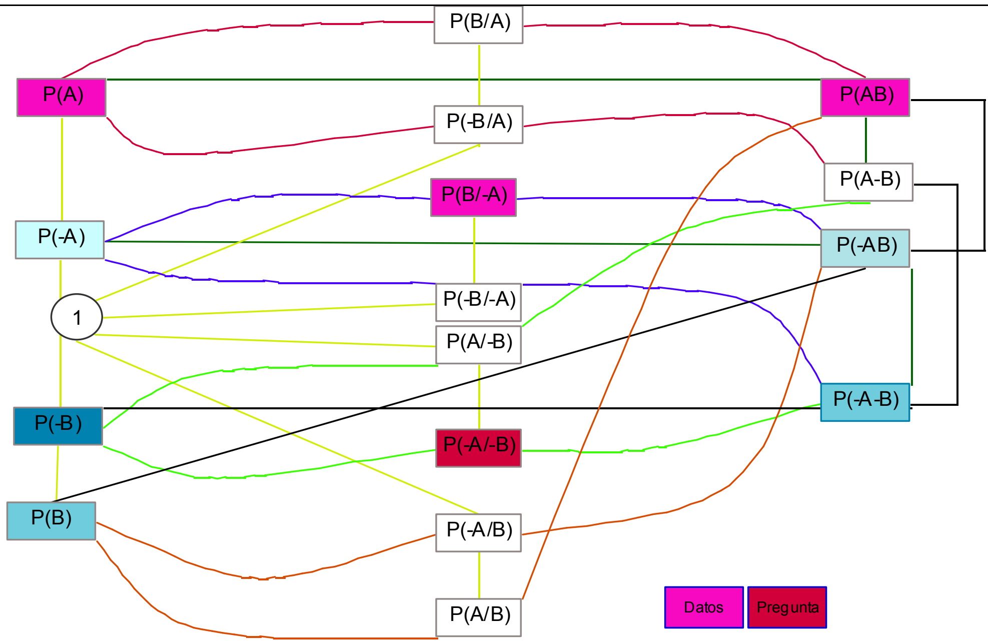


Figura 192 Grafo canónico de [p_{42}]

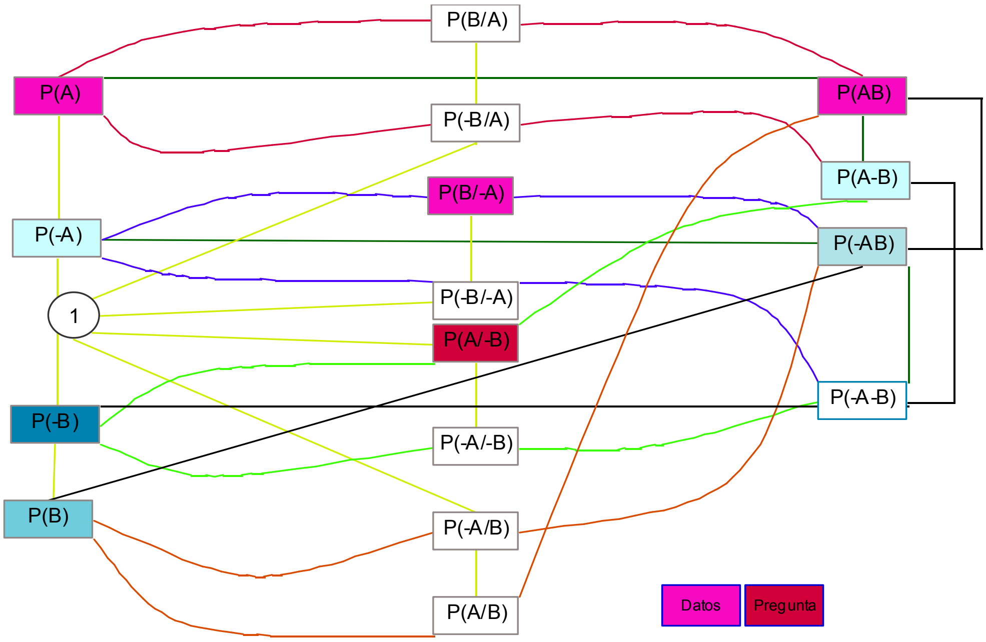


Figura 193 Grafo canónico de [p_{42}]

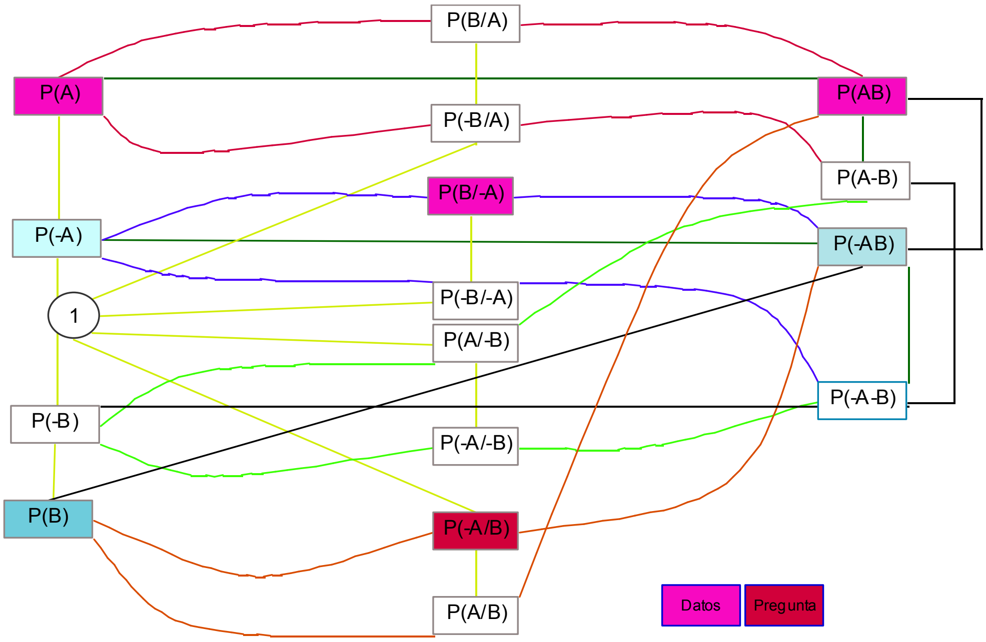


Figura 194 Grafo canónico de [p22]

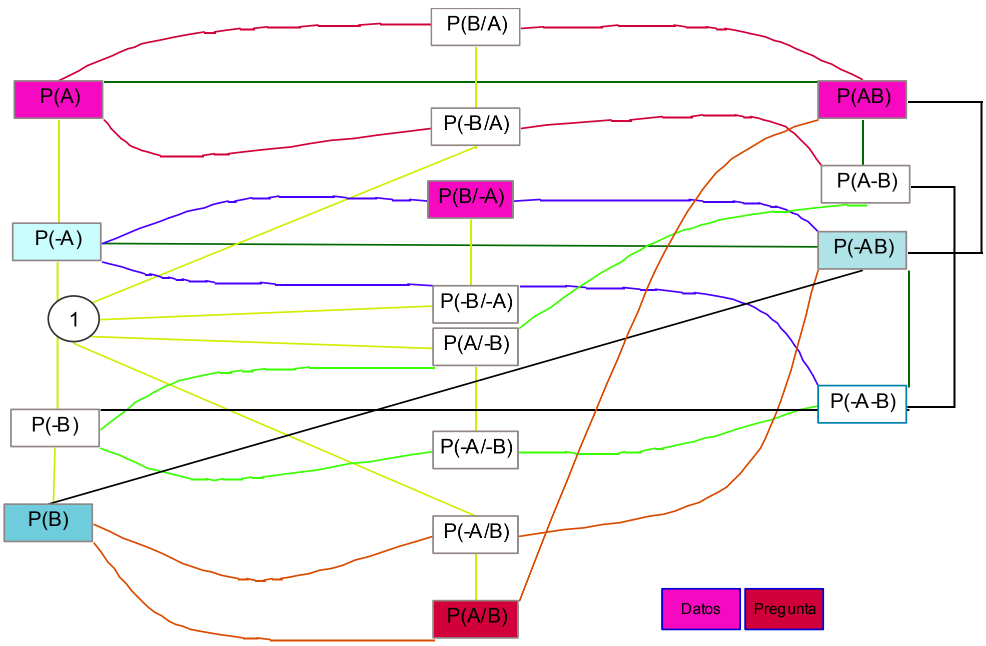


Figura 195 Grafo canónico de [p22]

$N_2C_2T_1G_7$

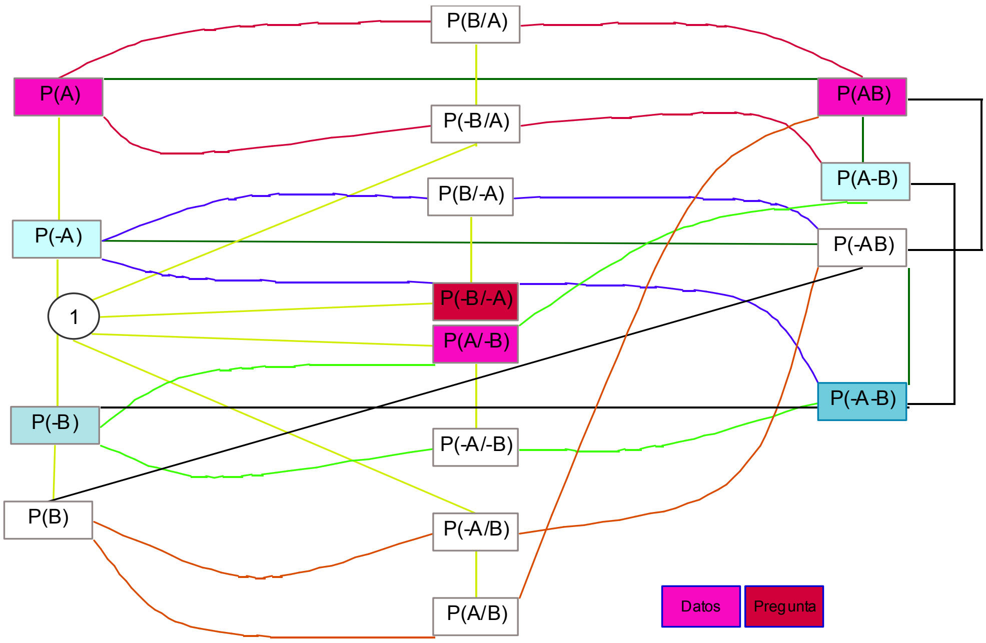


Figura 196 Grafo canónico de [p_{32}]

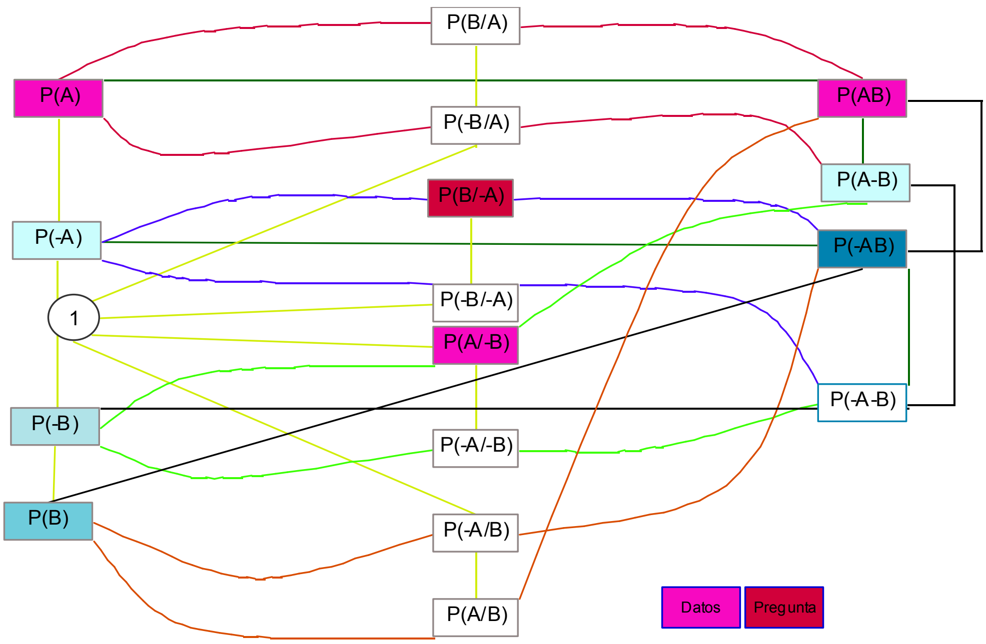


Figura 197 Grafo canónico de [p_{42}]

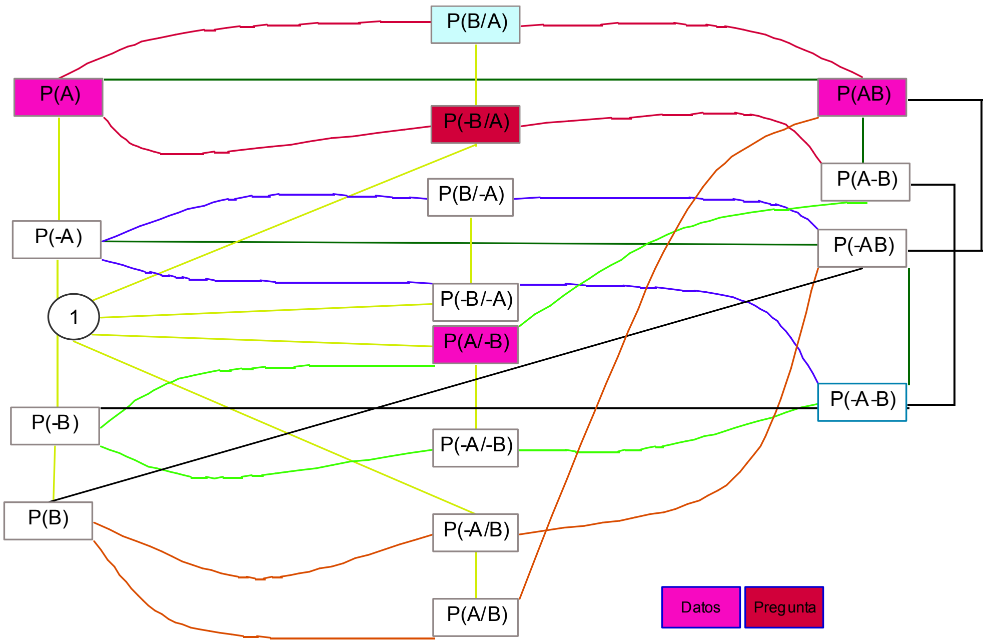


Figura 198 Grafo canónico de $[p_{11}]$

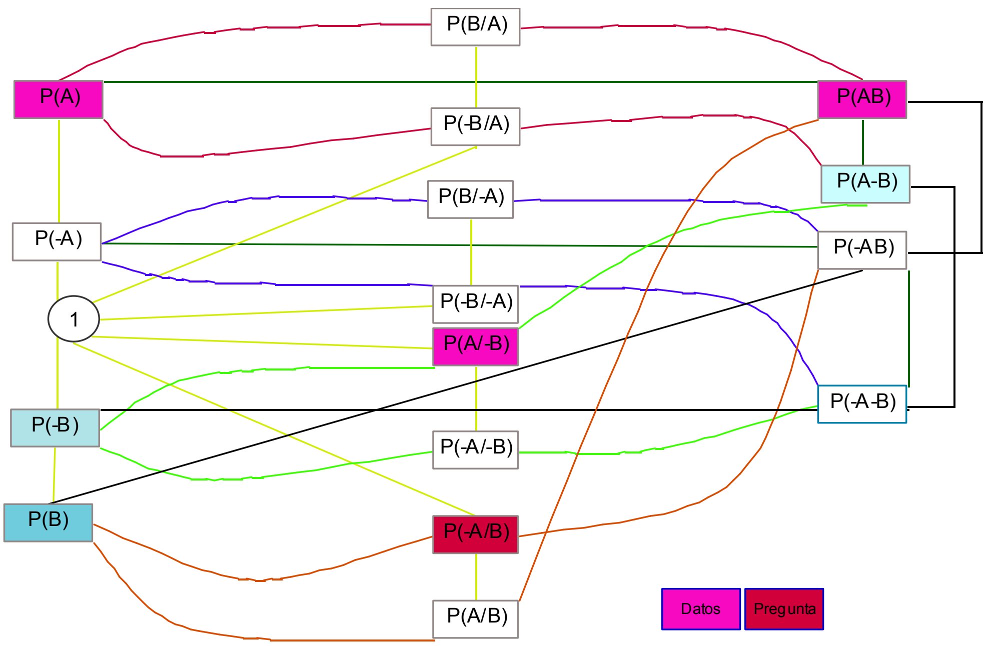


Figura 199 Grafo canónico de $[p_{22}]$

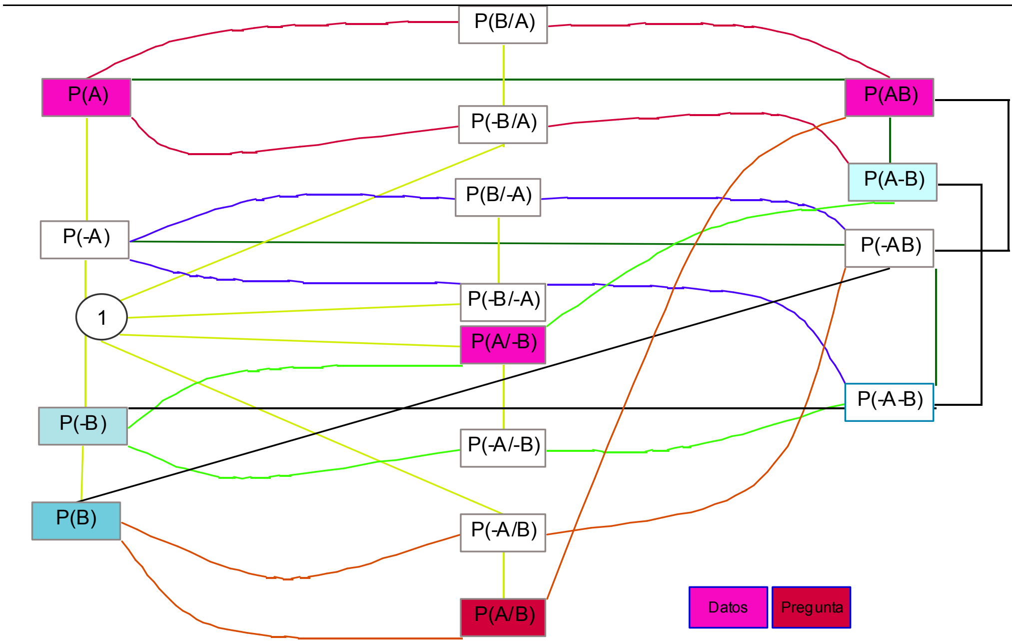


Figura 200 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_2T_1G_8$

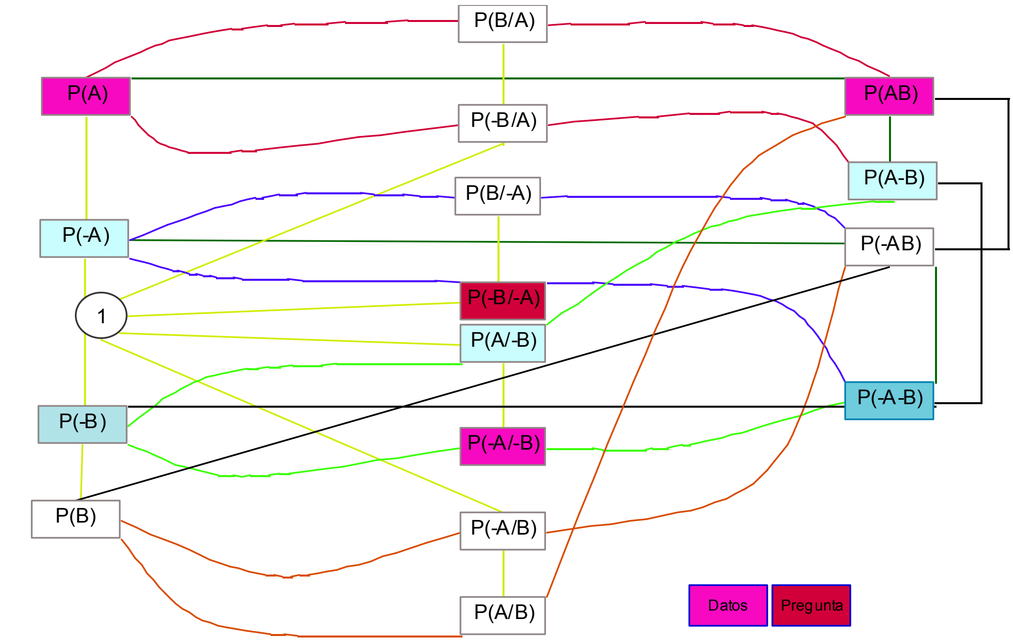


Figura 201 Grafo canónico de [p_{42}]

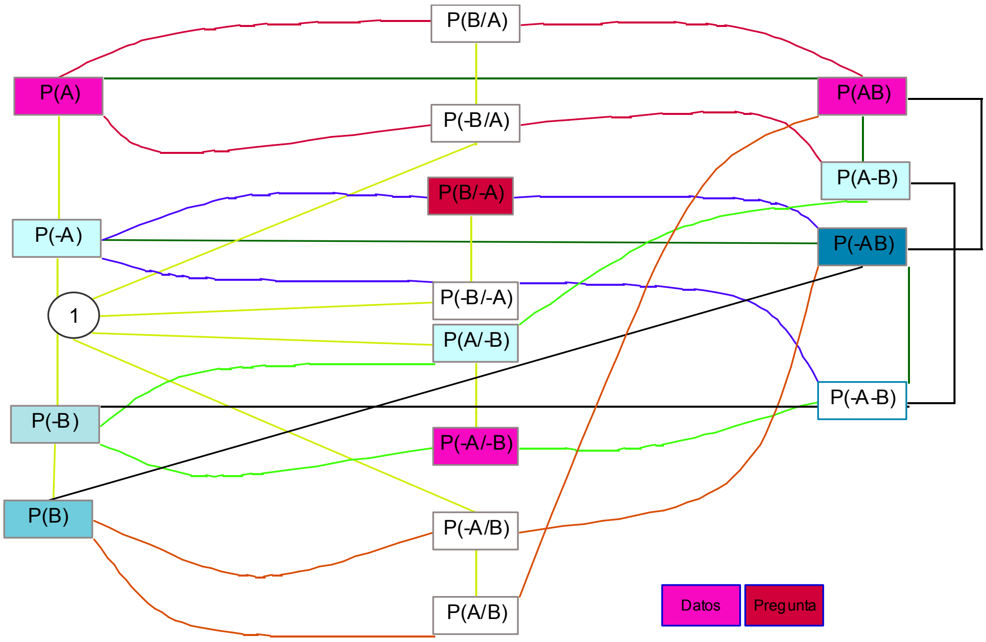


Figura 202 Grafo canónico de [p_{52}]

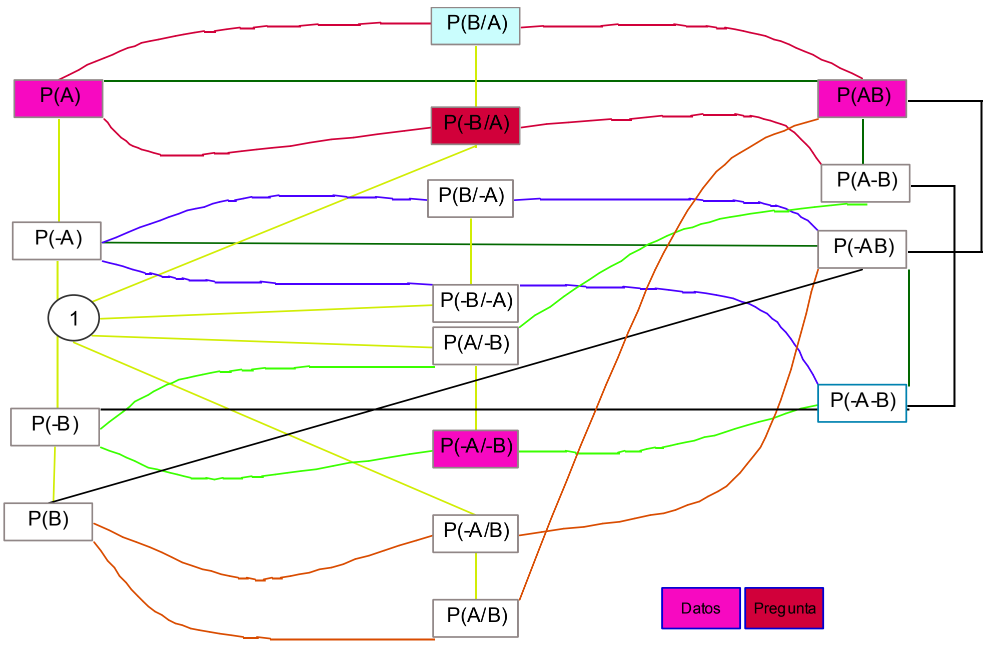


Figura 203 Grafo canónico de [p_{11}]

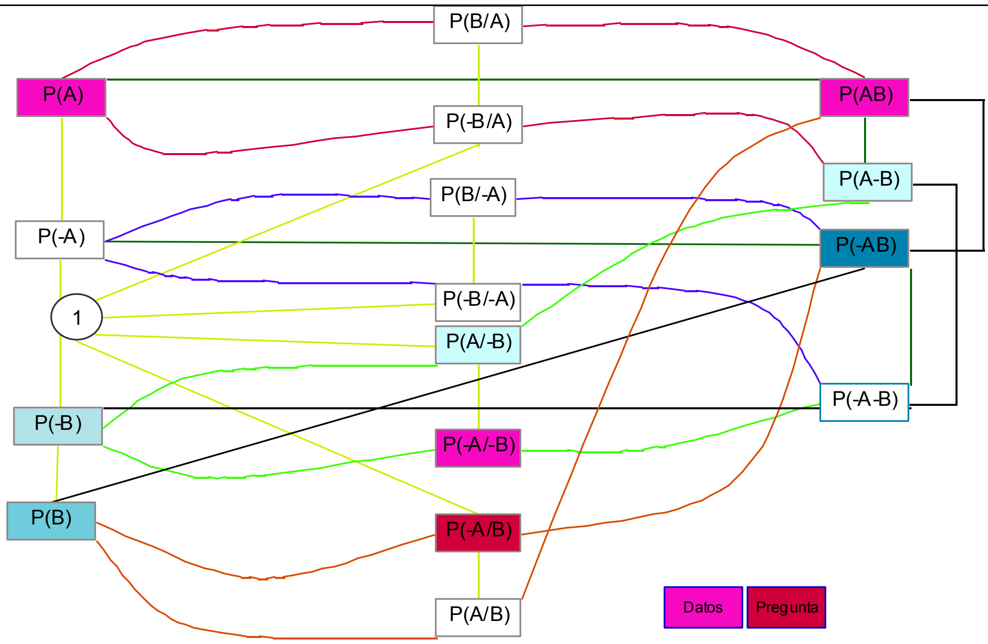


Figura 204 Grafo canónico de [p_{42}]

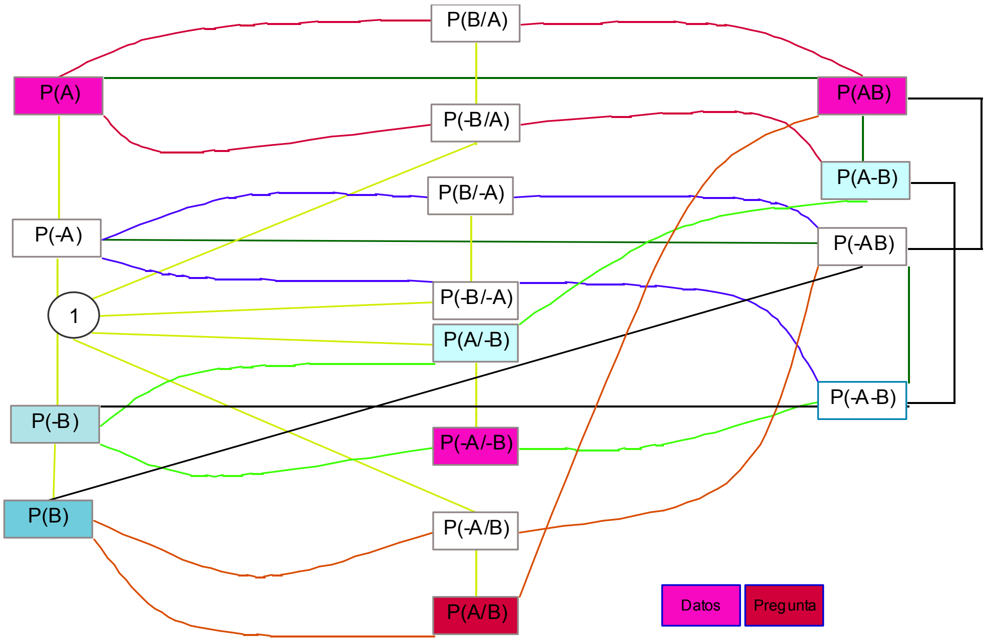


Figura 205 Grafo canónico de [p_{32}]

$N_2C_2T_1G_{11}$

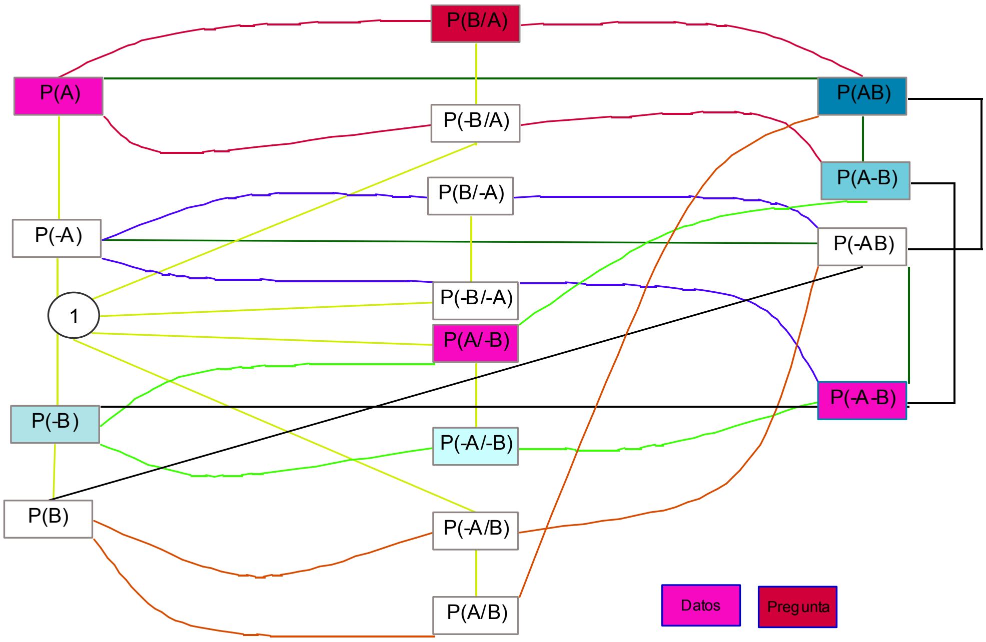


Figura 206 Grafo canónico de [p_{32}]

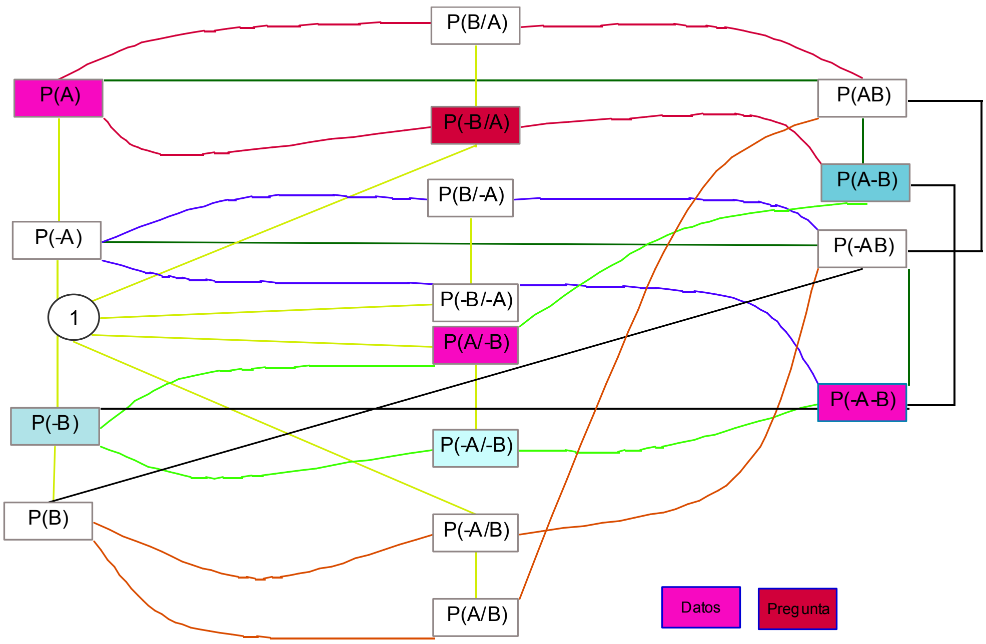


Figura 207 Grafo canónico de [p_{22}]

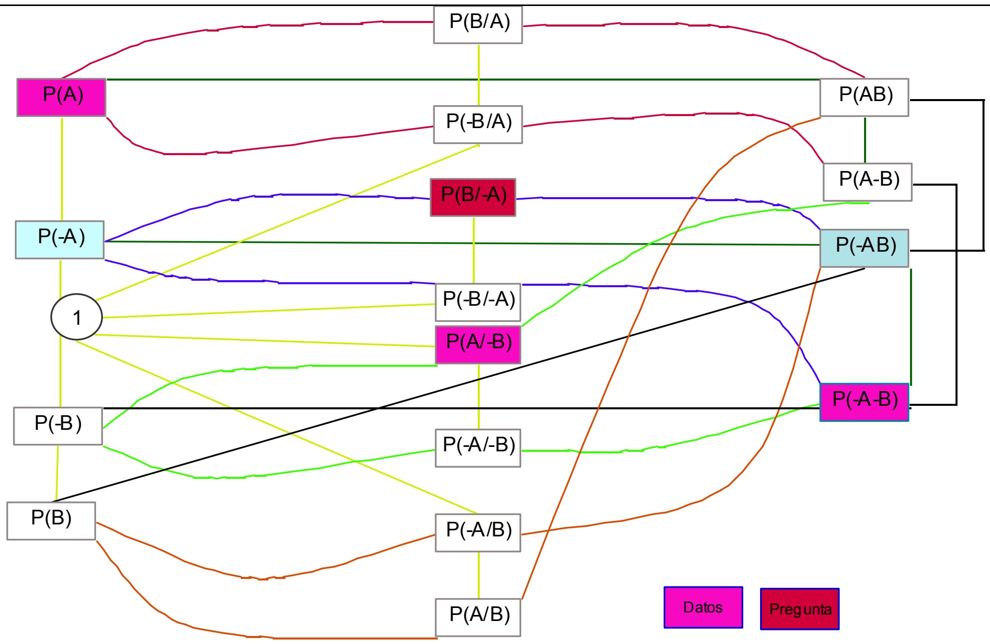


Figura 208 Grafo canónico de [p_{21}]

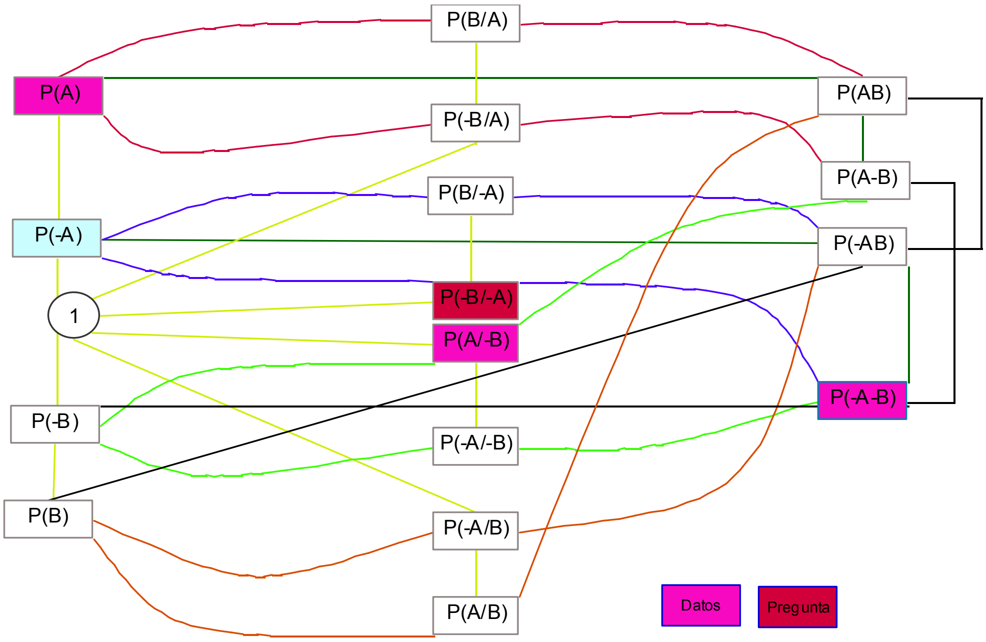


Figura 209 Grafo canónico de [p_{11}]

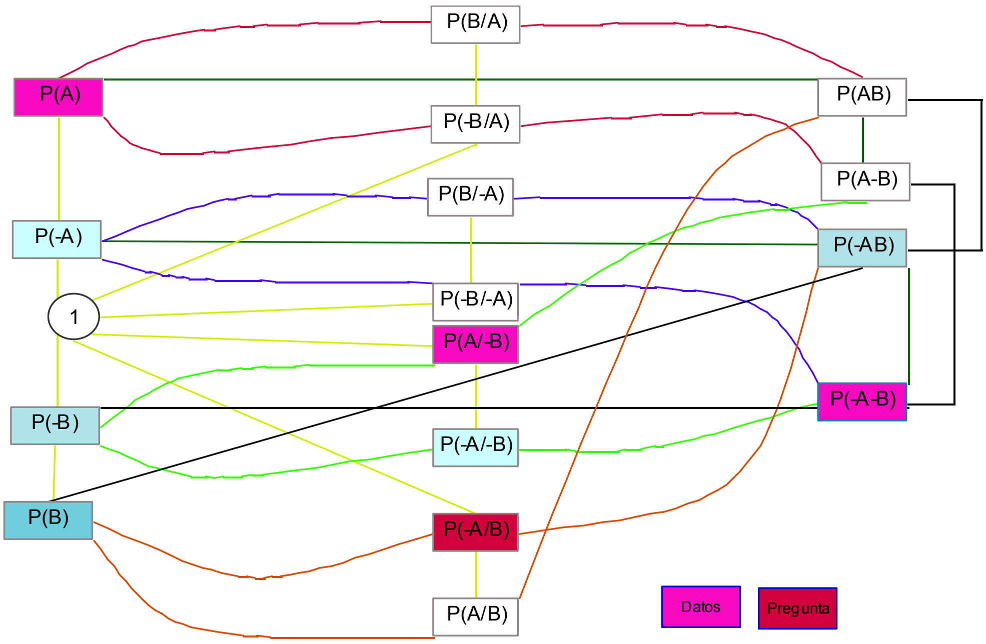


Figura 210 Grafo canónico de [p_{42}]

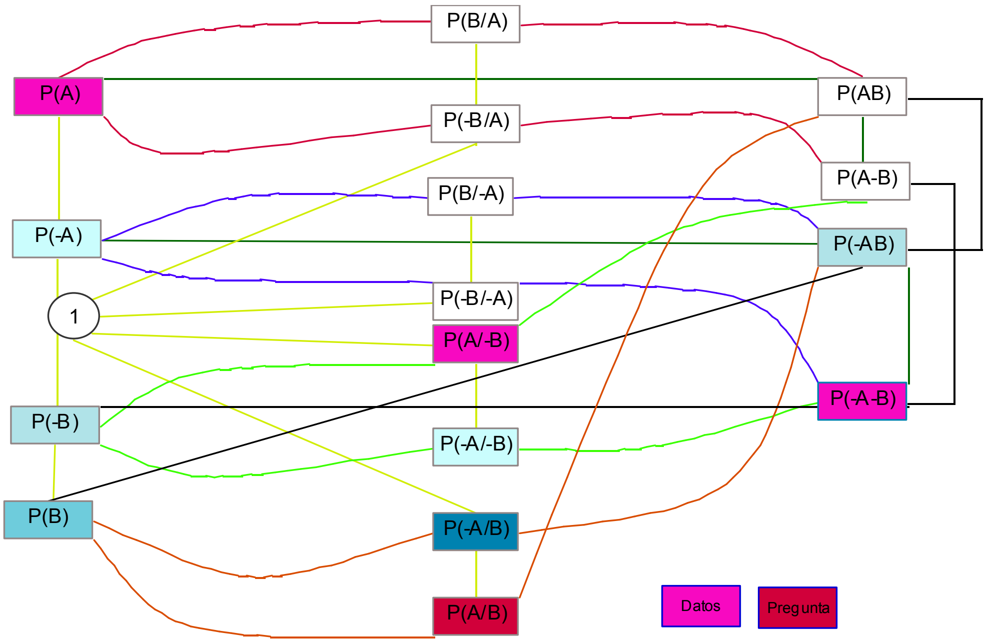


Figura 211 Grafo canónico de [p_{52}]

II.2. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_2T_2$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.15

$N_2C_2T_2G_1$

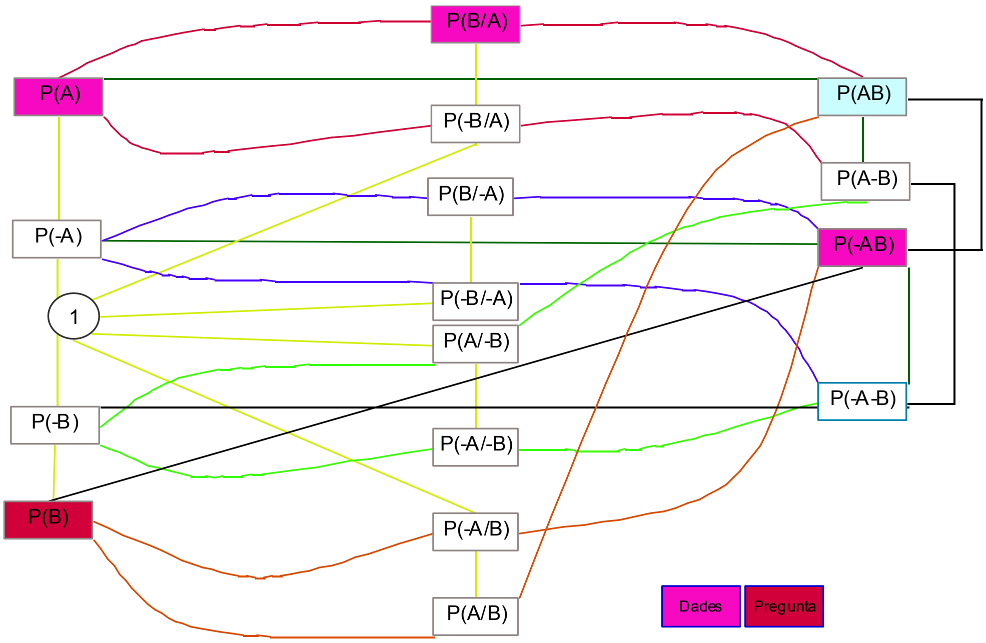


Figura 212 Grafo canónico de [p_{11}]

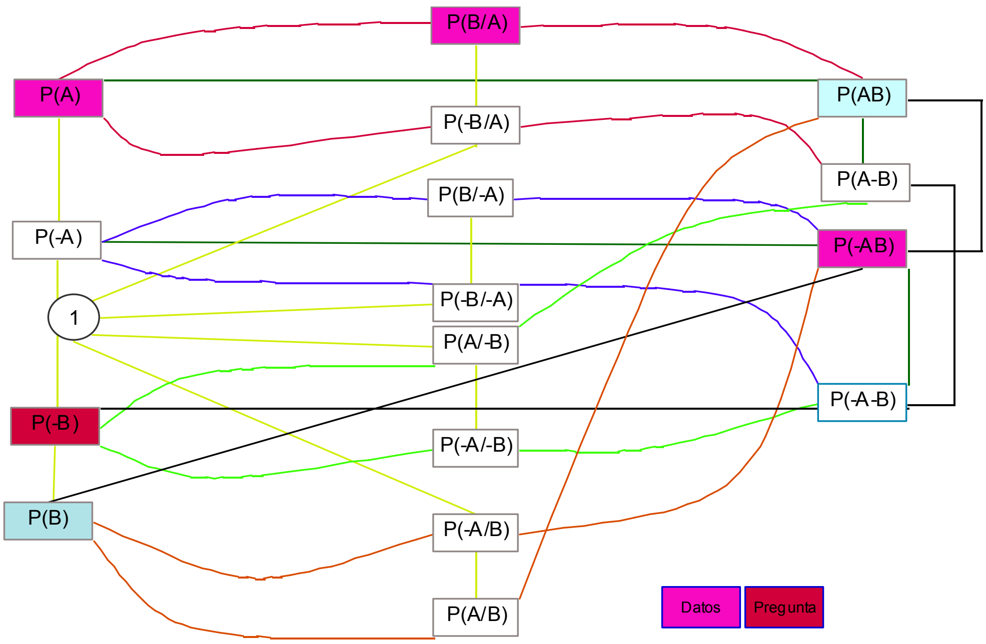


Figura 213 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_2G_2$

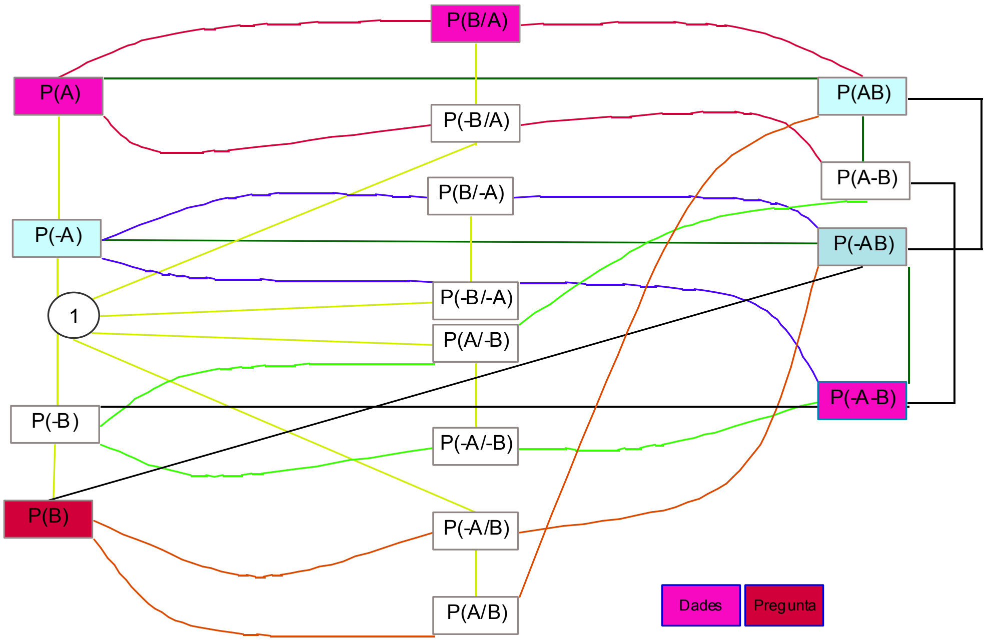


Figura 214 Grafo canónico de $[p_{31}]$

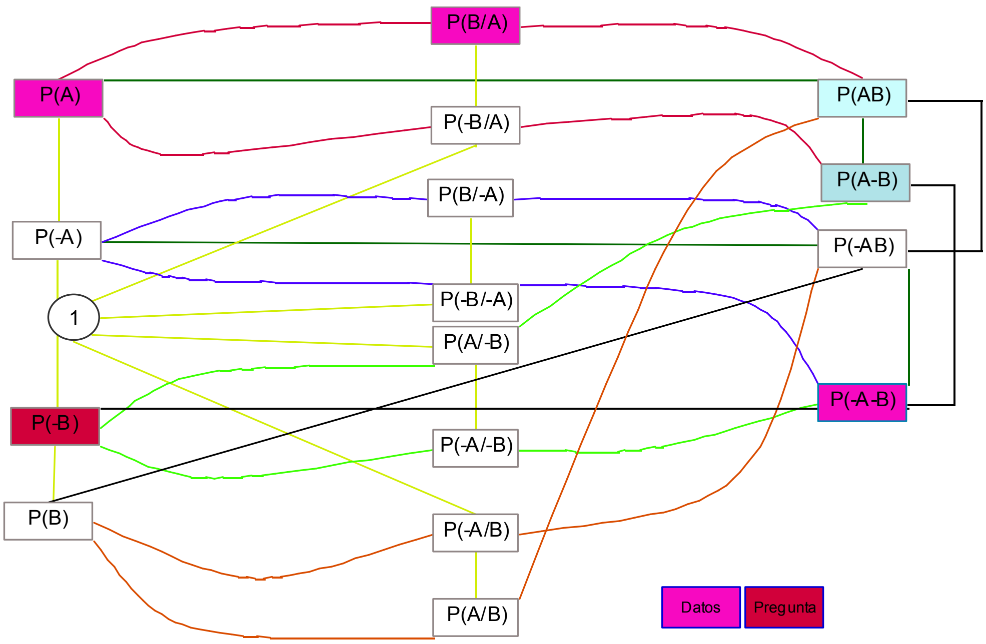


Figura 215 Grafo canónico de $[p_{21}]$

$N_2C_2T_2G_4$

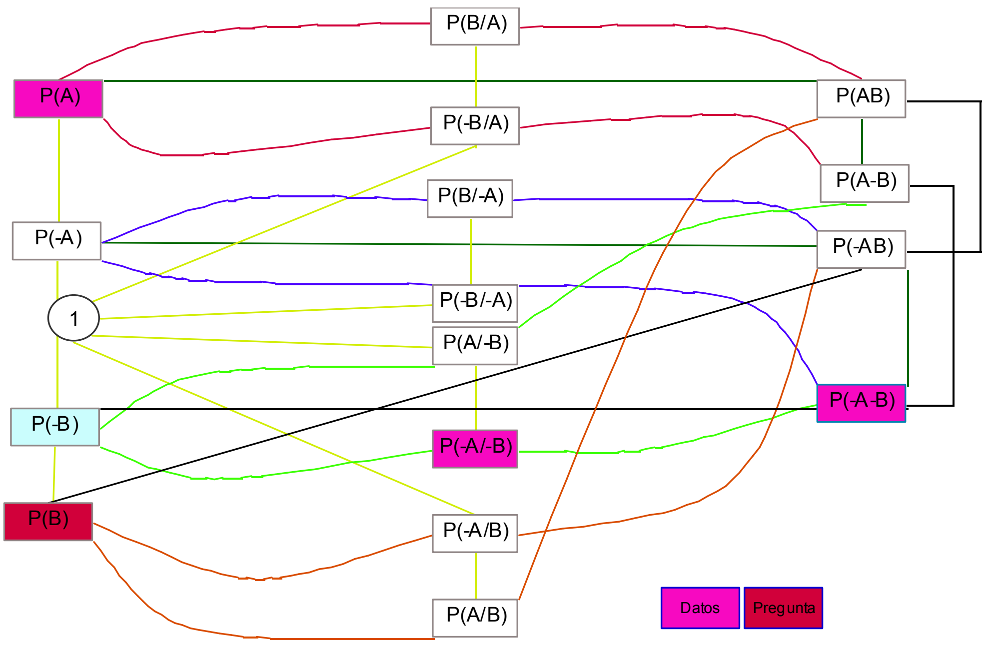


Figura 216 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_2G_5$

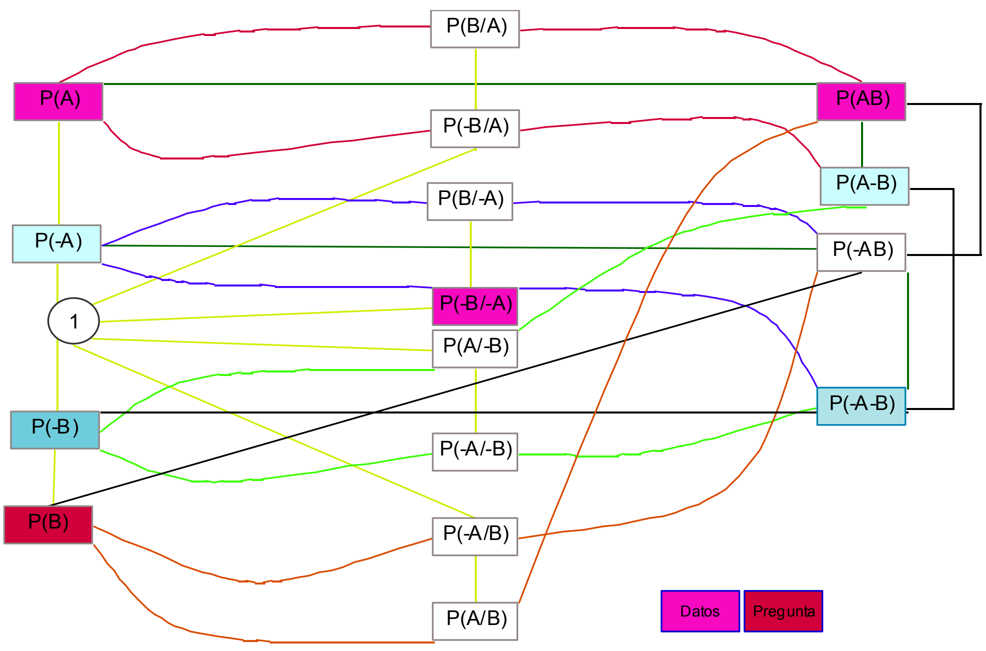


Figura 217 Grafo canónico de [p_{41}]

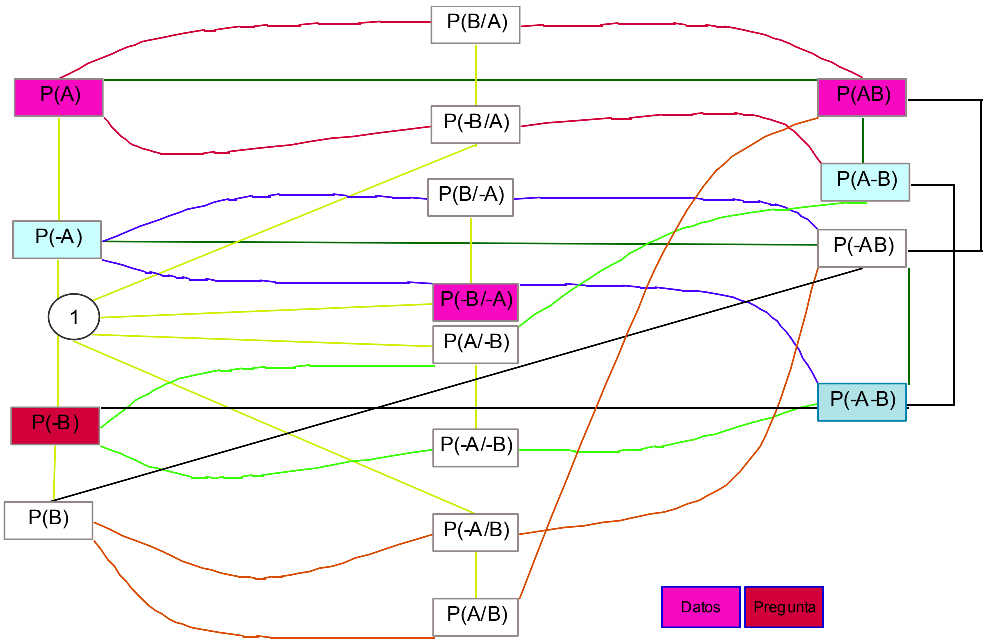


Figura 218 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_2T_2G_6$

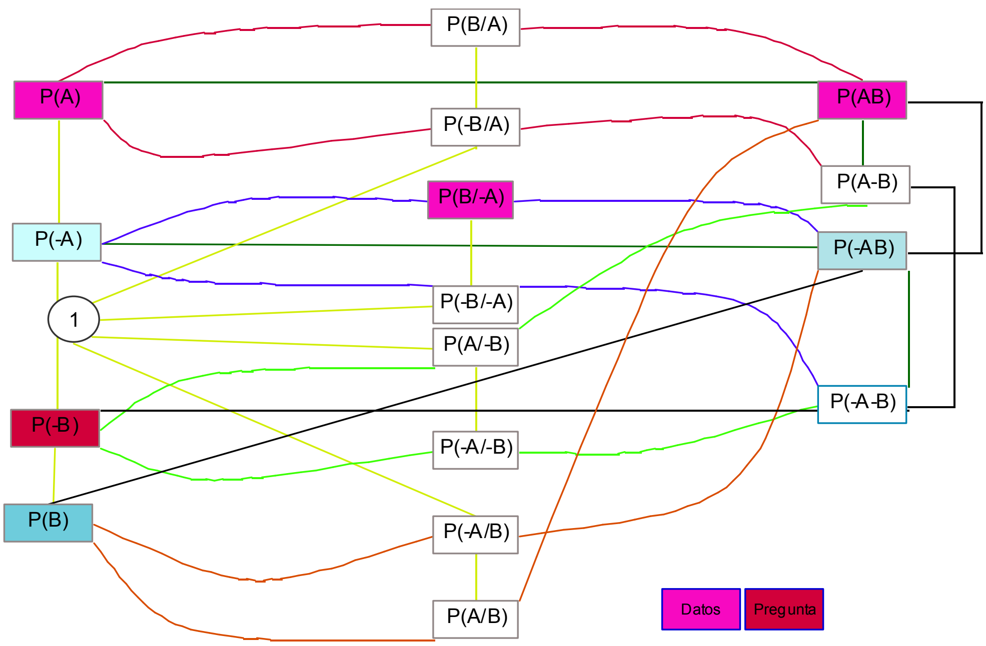


Figura 219 Grafo canónico de [p_{31}]

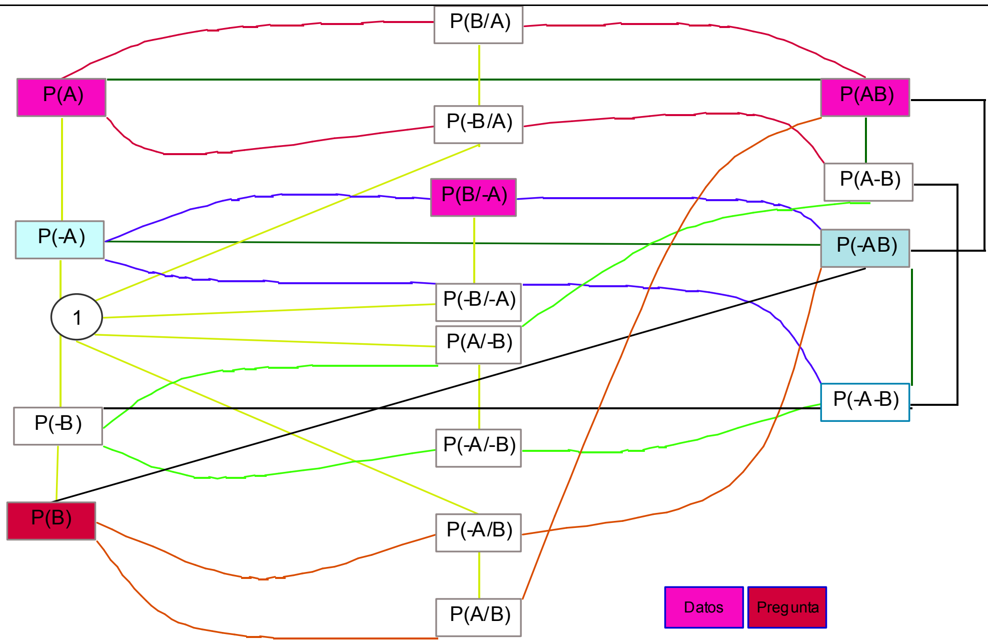


Figura 220 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_2G_7$

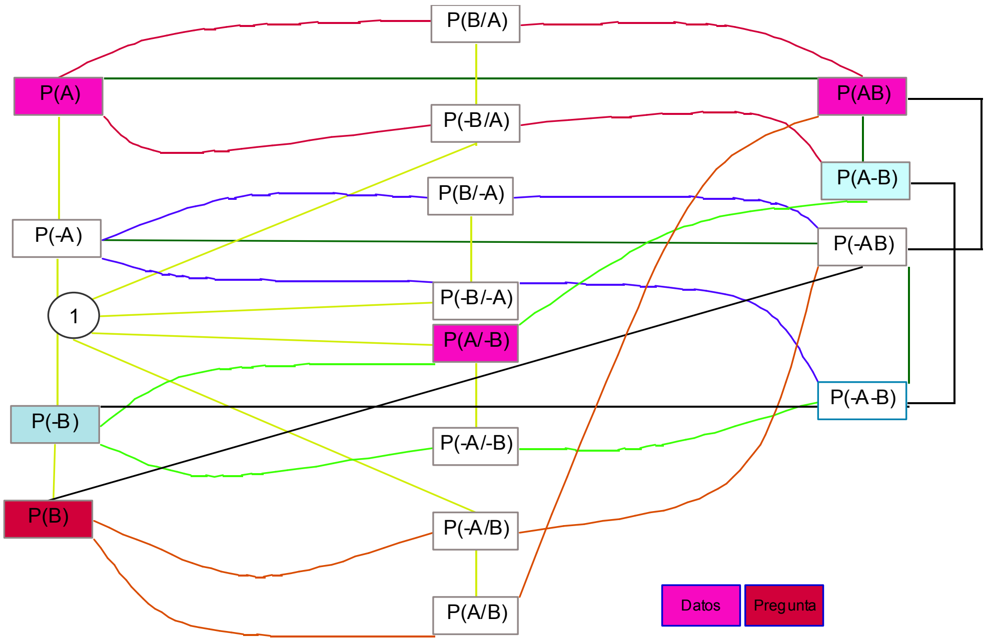


Figura 221 Grafo canónico de [p_{21}]

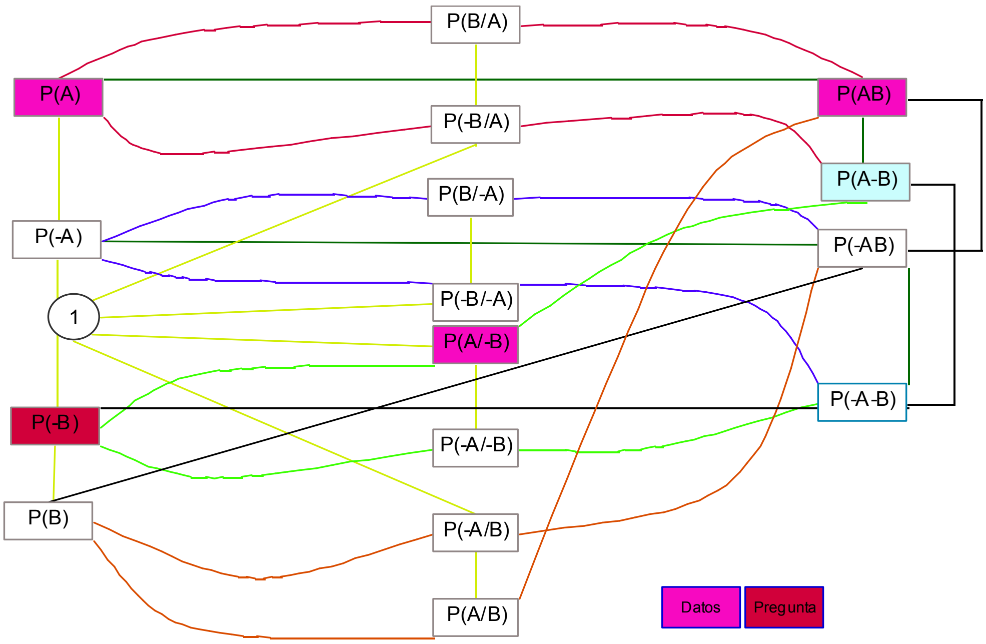


Figura 222 Grafo canónico de $[p_{11}]$

$N_2C_2T_2G_8$

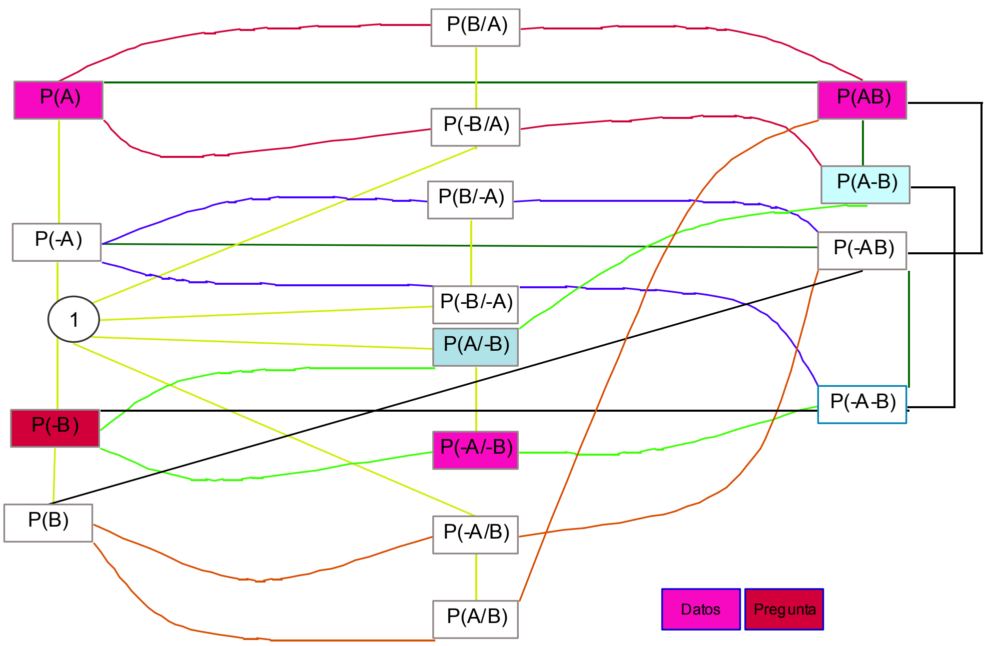


Figura 223 Grafo canónico de $[p_{21}]$

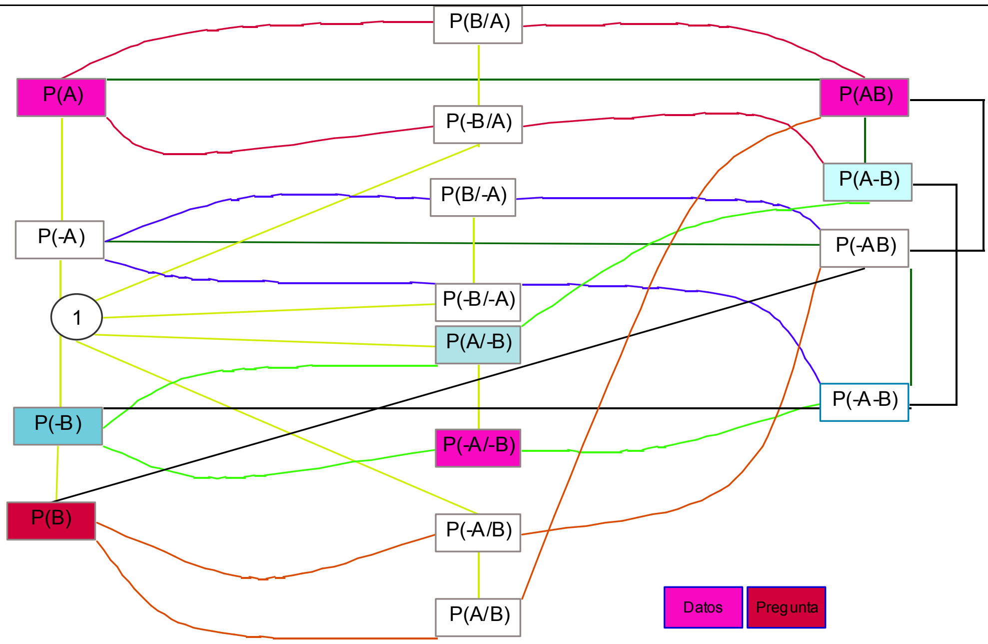


Figura 224 Grafo canónico de [p_{31}]

$N_2C_2T_2G_{11}$

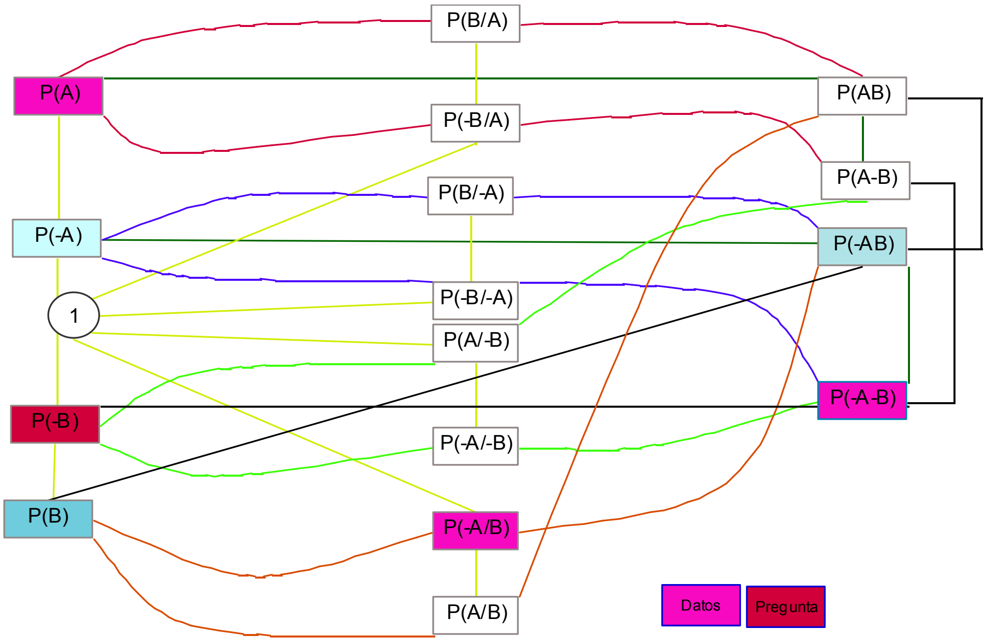


Figura 225 Grafo canónico de [p_{31}]

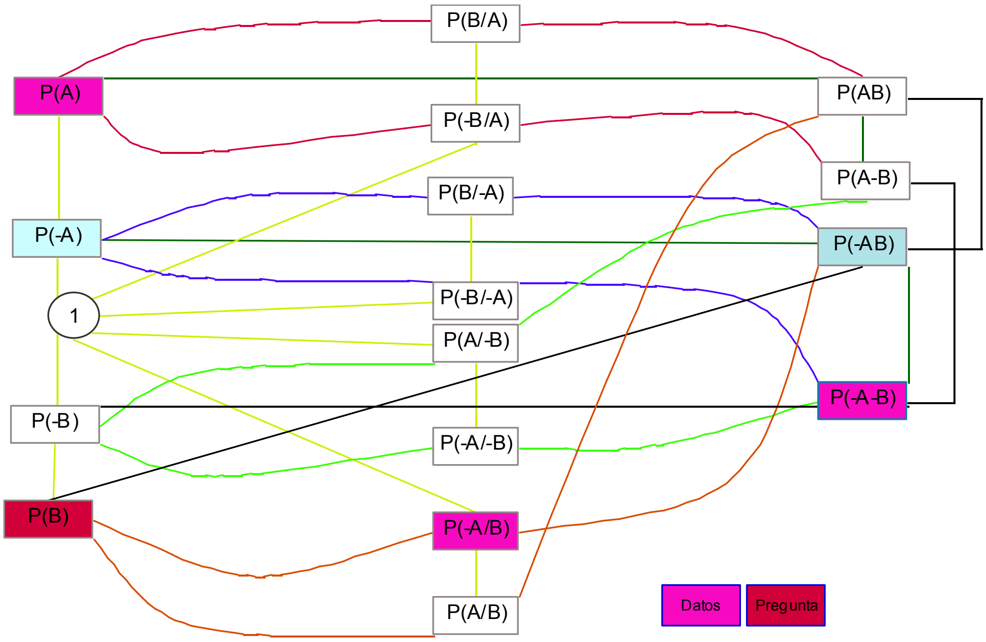


Figura 226 Grafo canónico de $[p_{21}]$

II.3. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_2T_3$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.16

$N_2C_2T_3G_1$

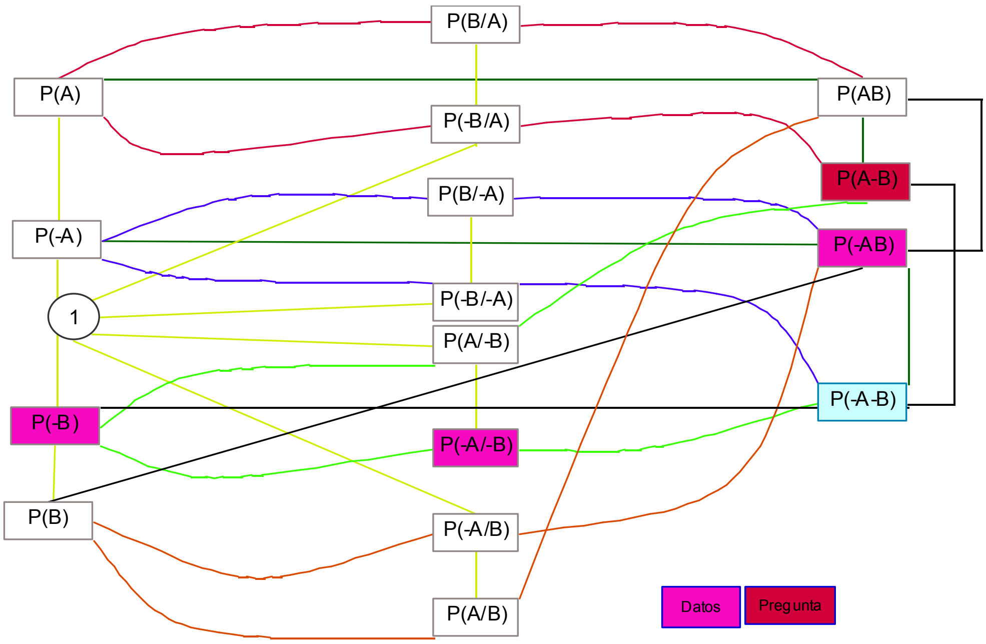


Figura 227 Grafo canónico de $[p_{11}]$

El siguiente problema no sería de probabilidad condicional:

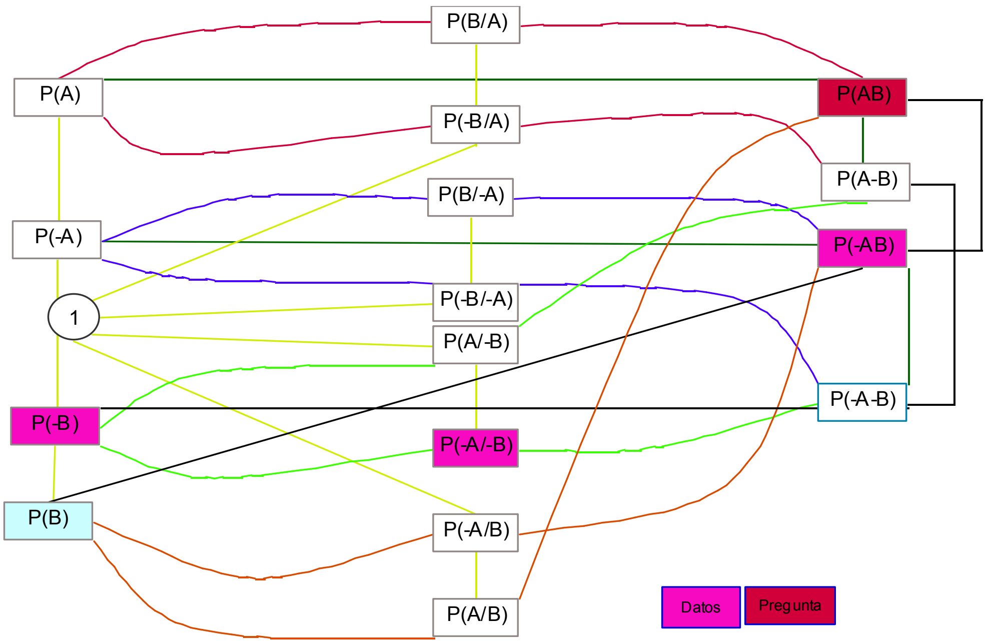


Figura 228 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

El siguiente problema no sería de probabilidad condicional:

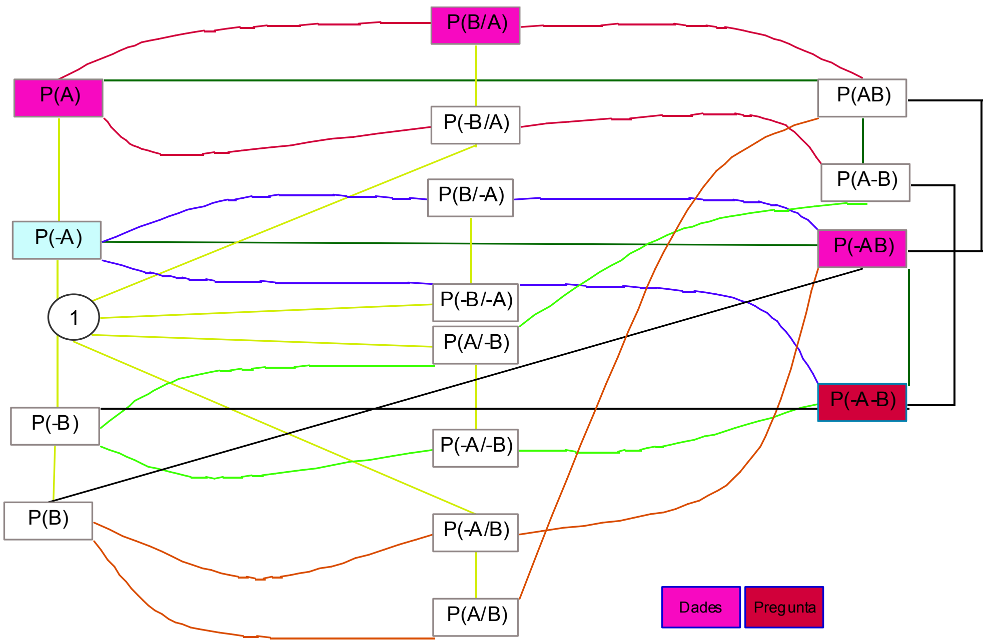


Figura 229 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

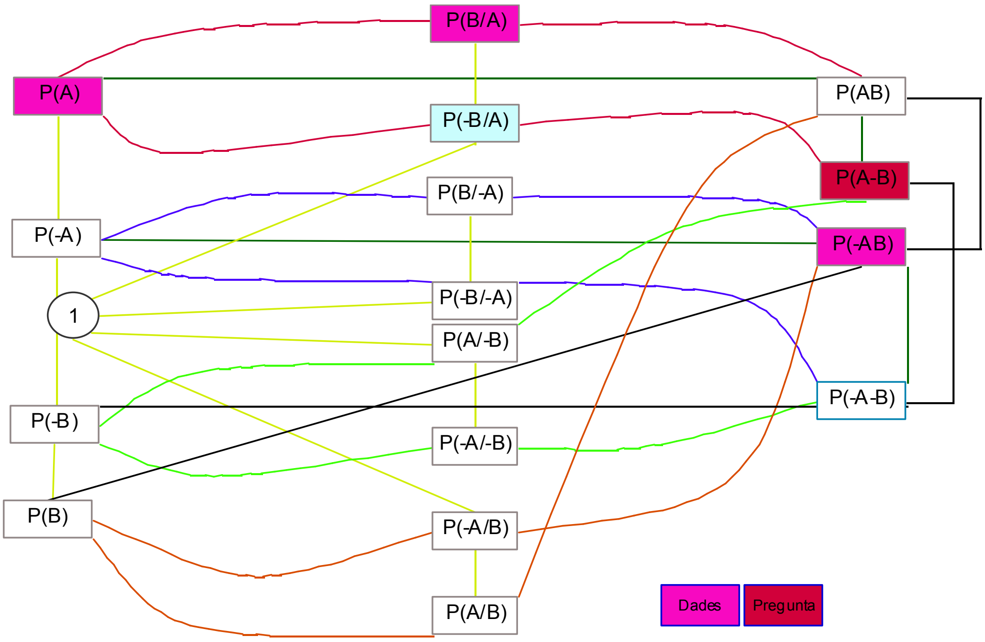


Figura 230 Grafo canónico de $[p_{11}]$

$N_2C_2T_3G_2$

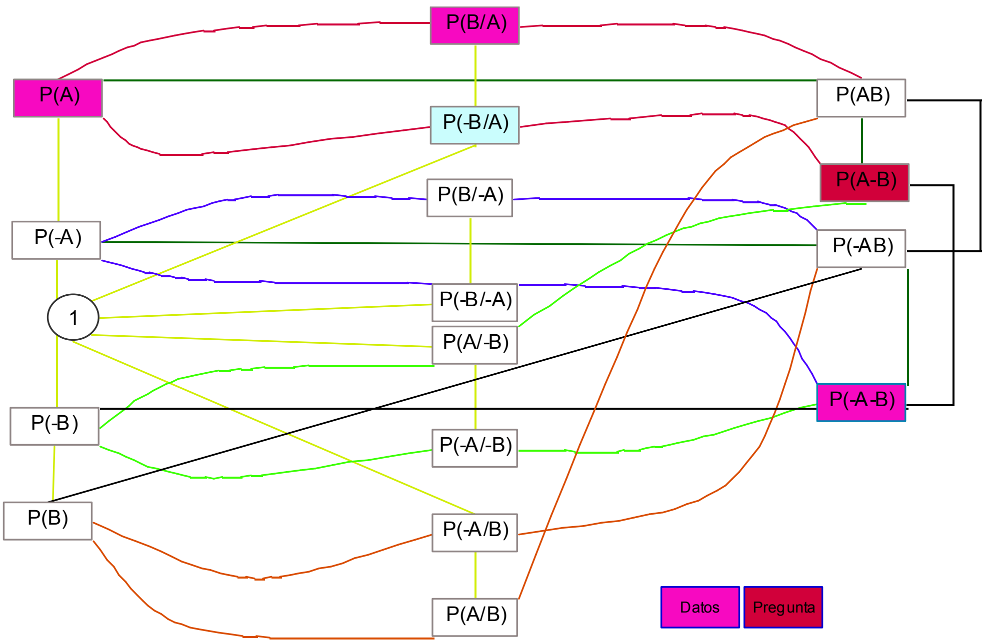


Figura 231 Grafo canónico de $[p_{11}]$

El siguiente problema no sería de probabilidad condicional:

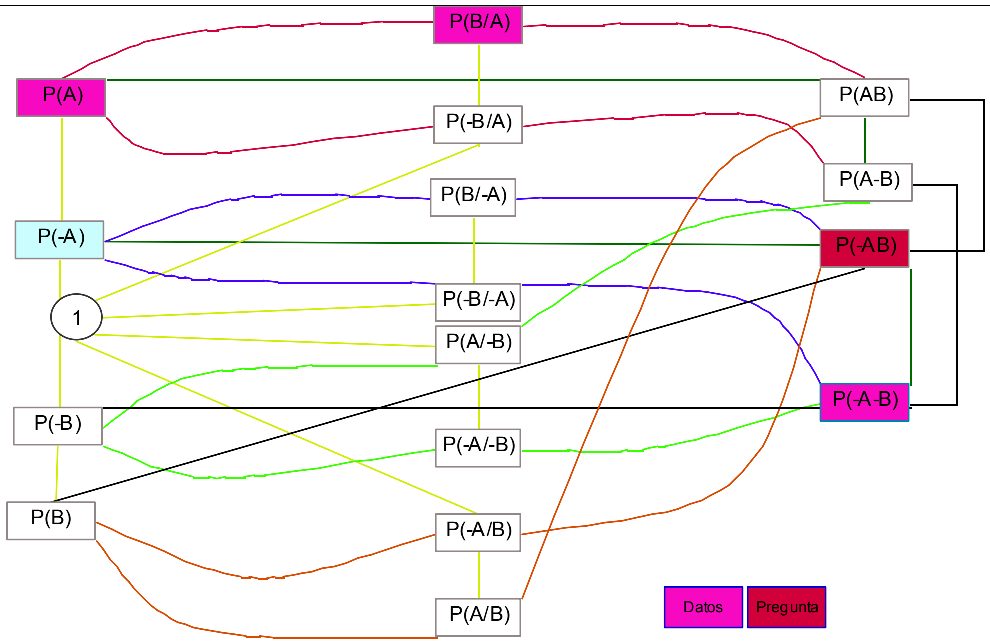


Figura 232 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

$N_2C_2T_3G_4$

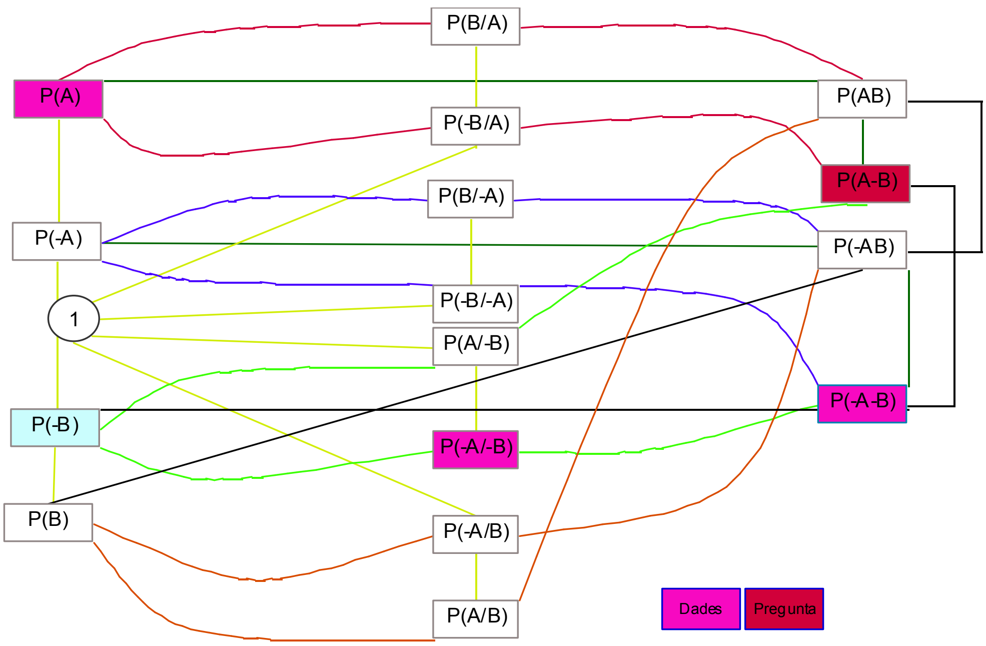


Figura 233 Grafo canónico de [p_{11}]

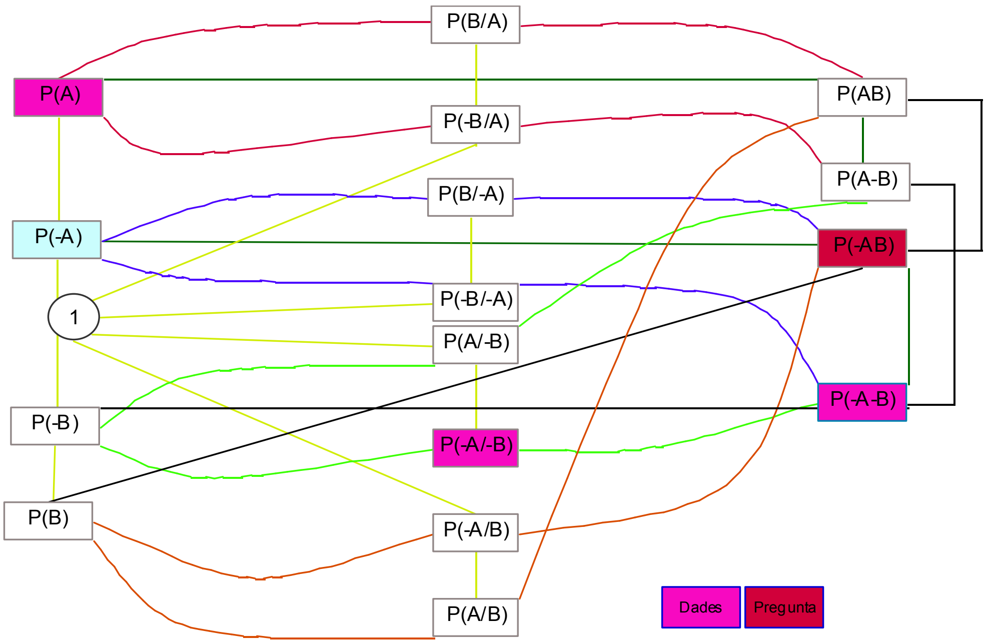


Figura 234 Grafo asociado a un problema que no es de probabilidad condicional

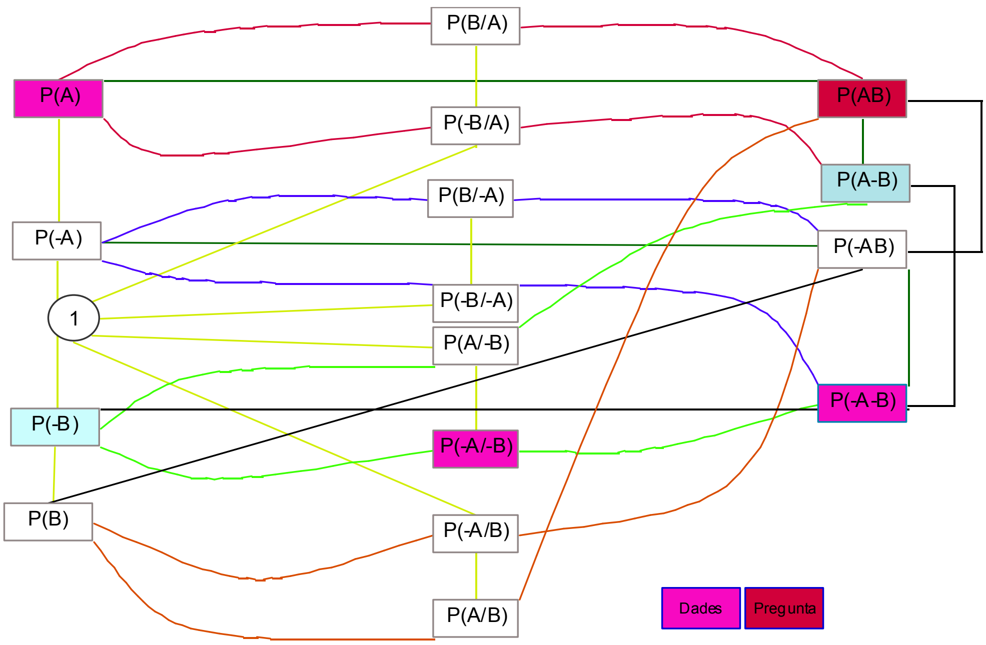


Figura 235 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_2T_3G_5$

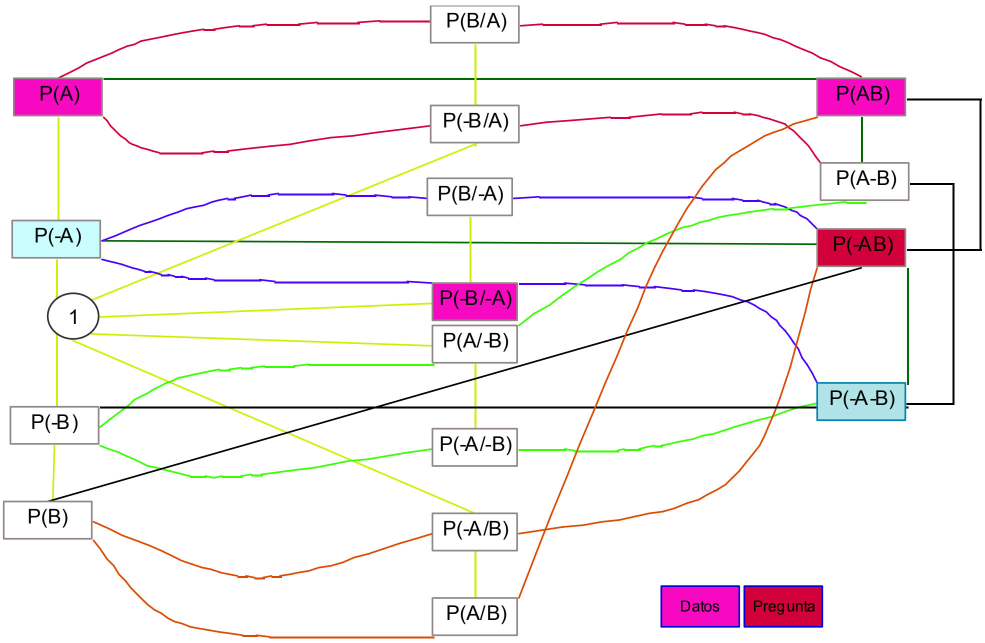


Figura 236 Grafo canónico de [p_{21}]

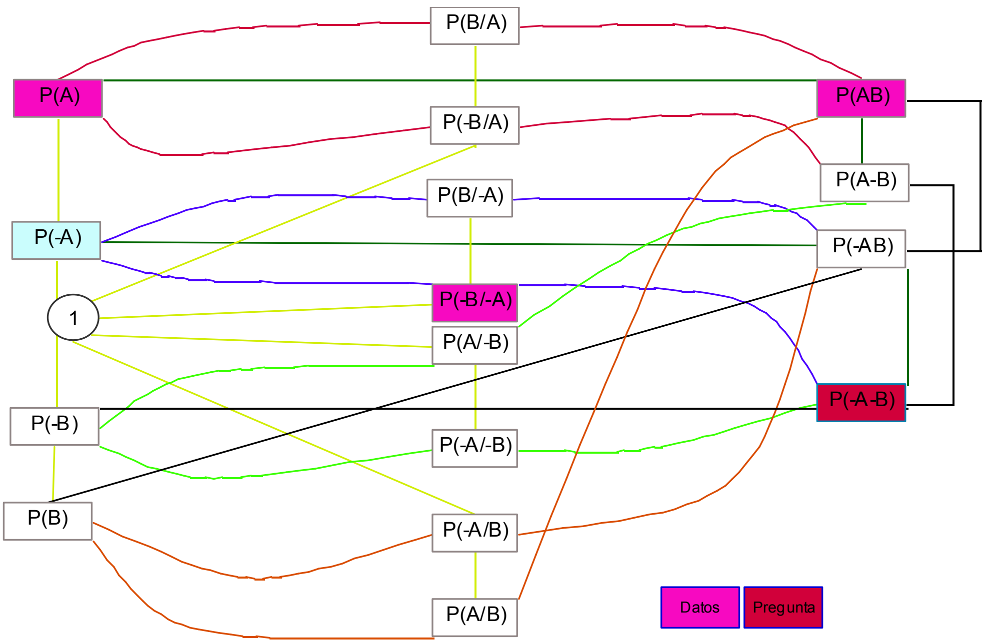


Figura 237 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_3G_6$

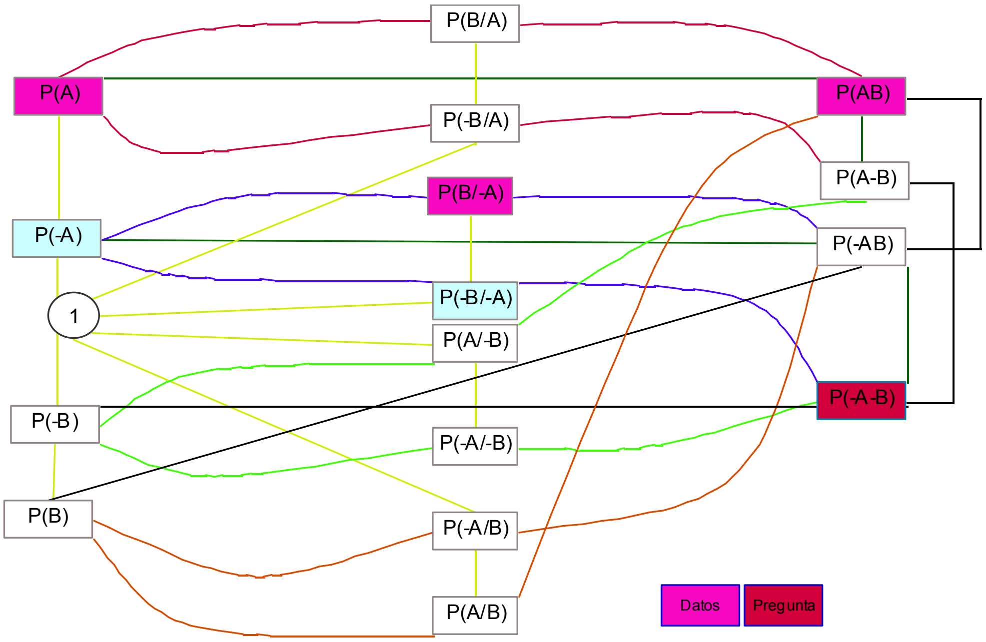


Figura 238 Grafo canónico de [p_{21}]

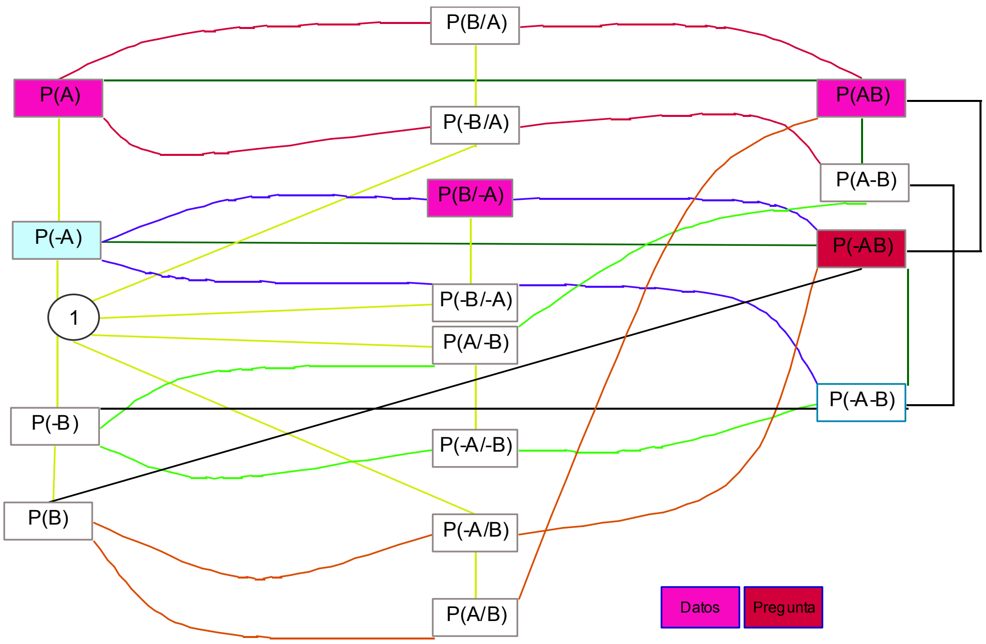


Figura 239 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_2T_3G_7$

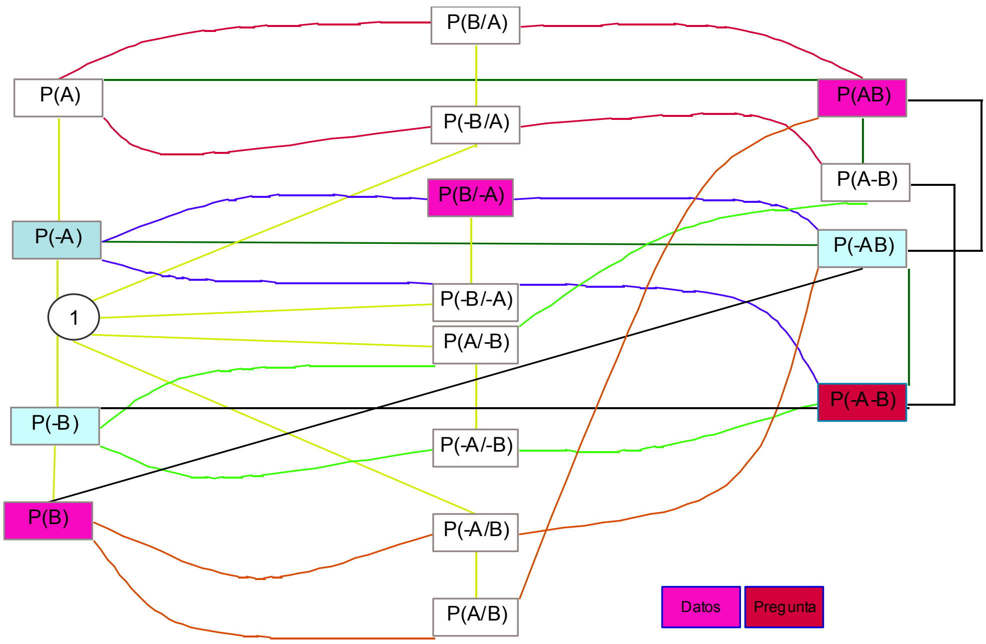


Figura 240 Grafo canónico de [p_{31}]

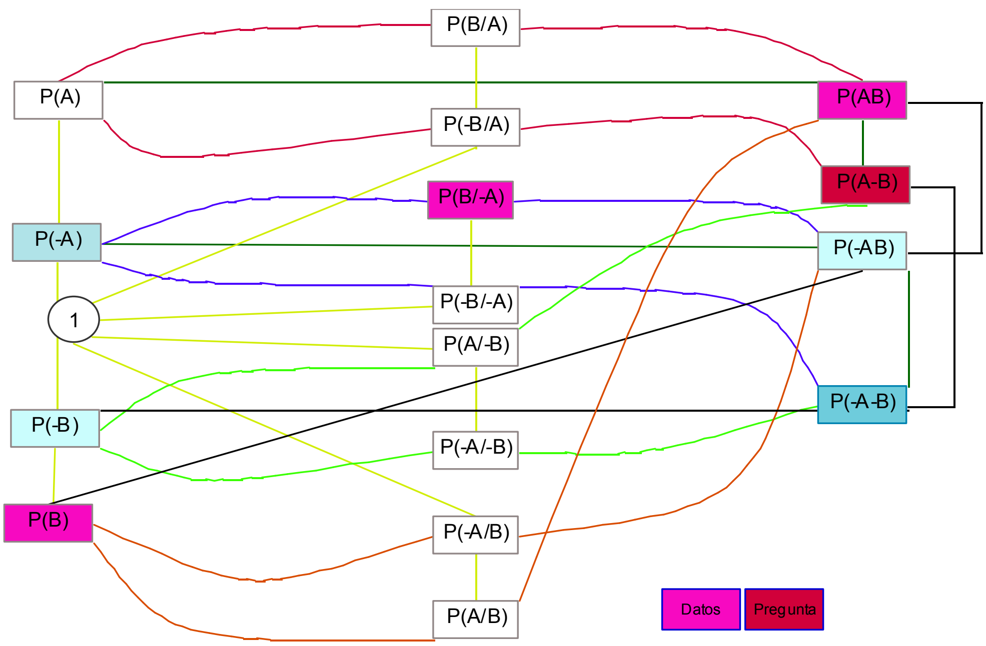


Figura 241 Grafo canónico de [p_{41}]

$N_2C_2T_3G_8$

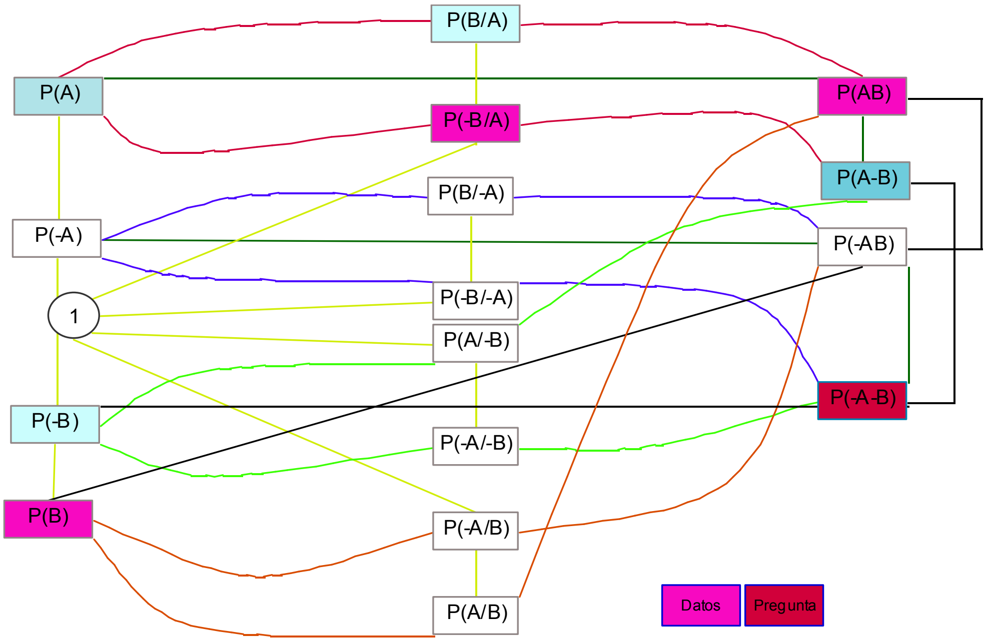


Figura 242 Grafo canónico de $[p_{41}]$

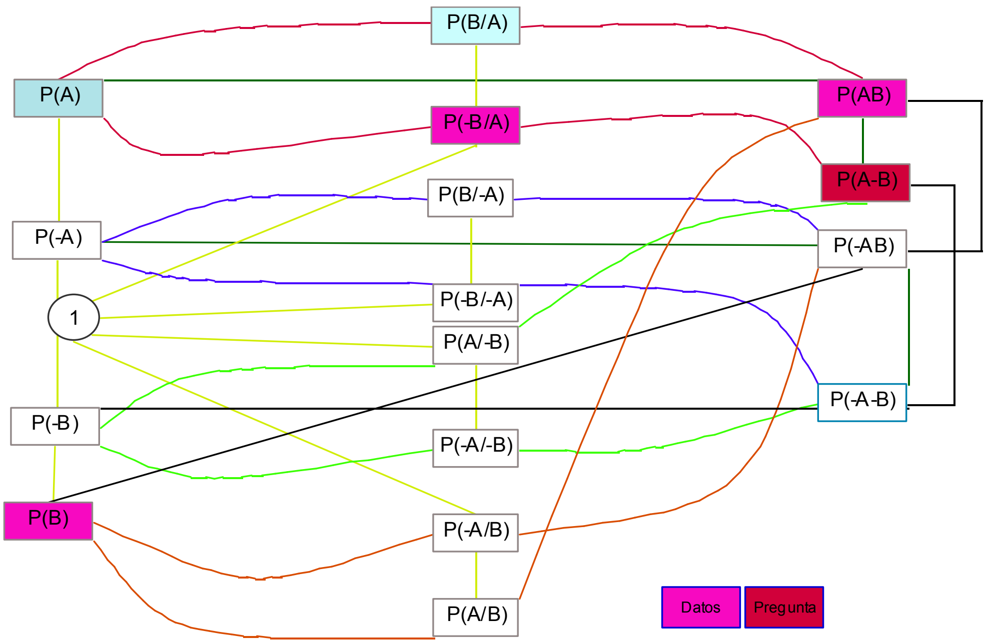


Figura 243 Grafo canónico de $[p_{21}]$

$N_2C_2T_3G_{11}$

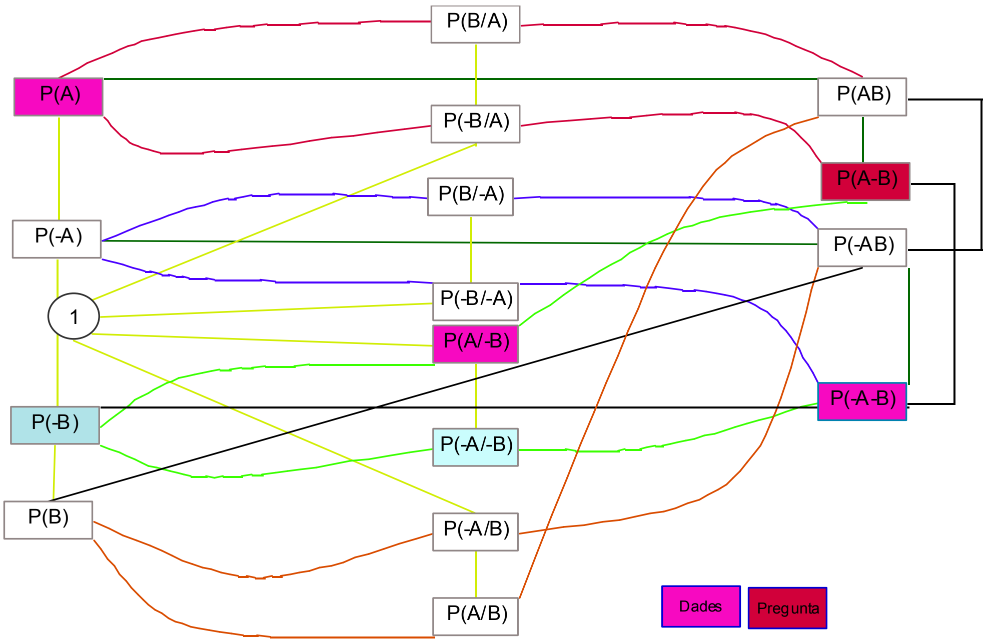


Figura 244 Grafo canónico de [p_{21}]

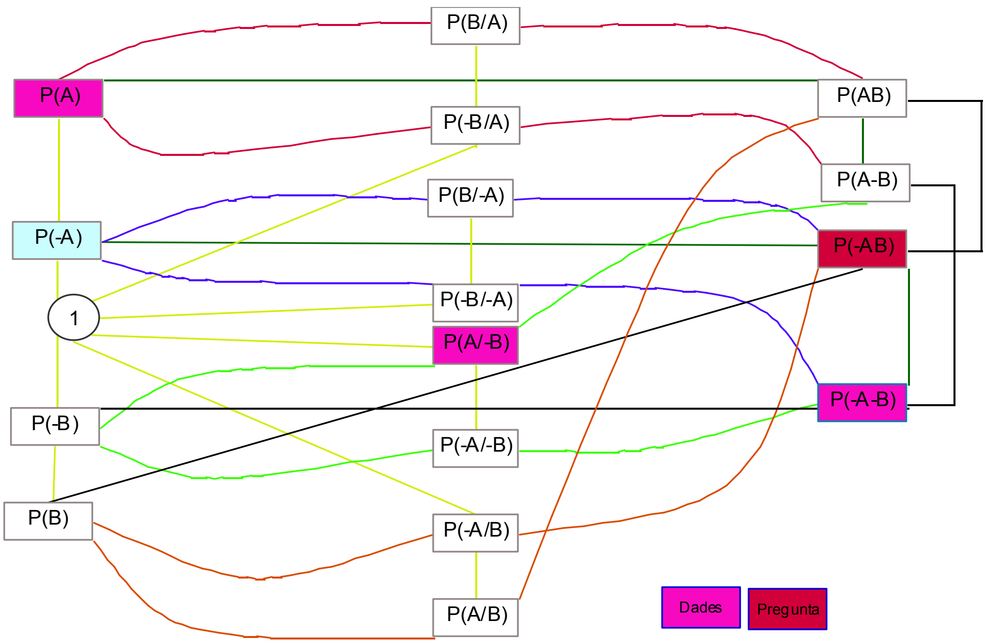


Figura 245 Grafo canónico de [p_{11}] de un problema que no es de probabilidad condicional

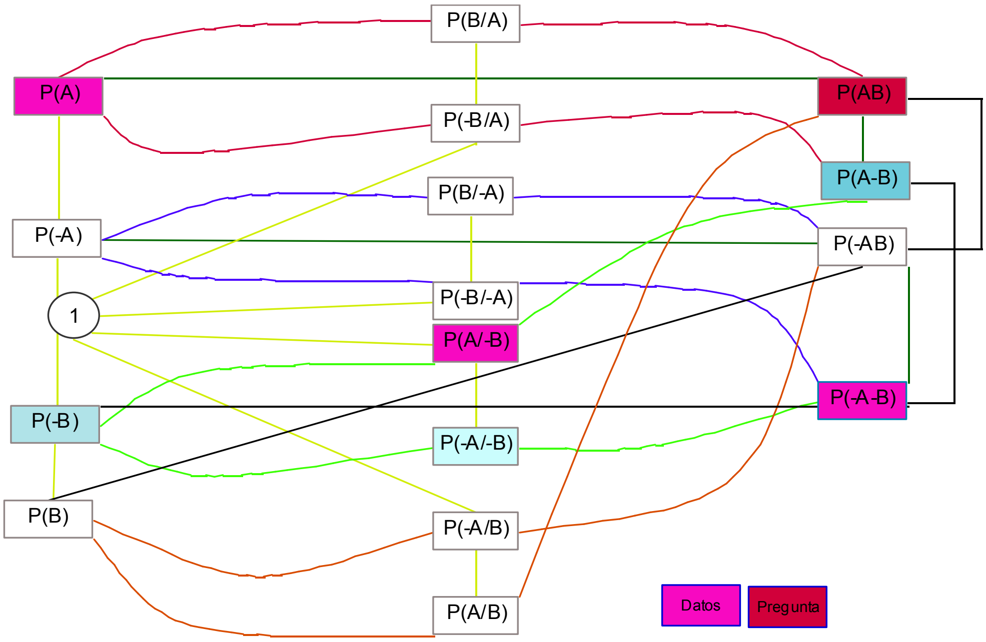


Figura 246 Grafo canónico de [p_{31}]

III. N_2C_3

III.1. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_3T_1$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.17

$N_2C_3T_1G_1$

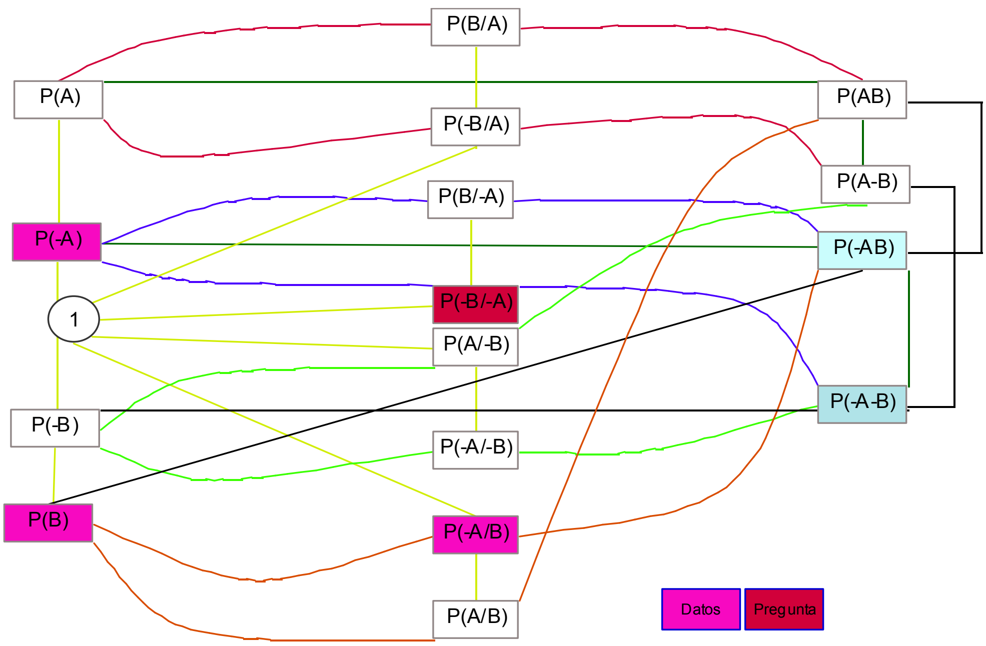


Figura 247 Grafo canónico de [p_{12}]

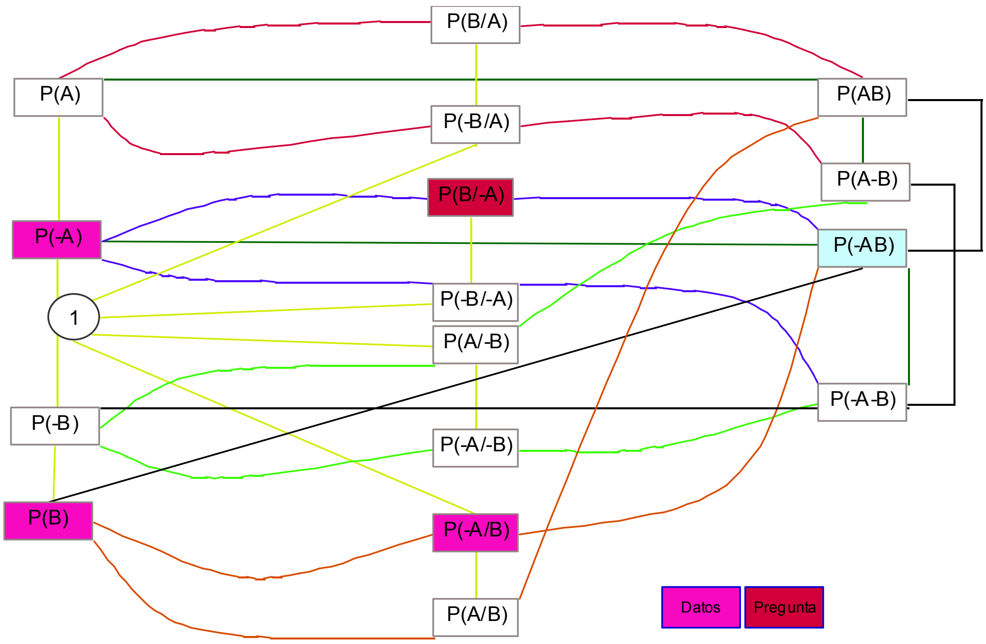


Figura 248 Grafo canónico de [p_{02}]

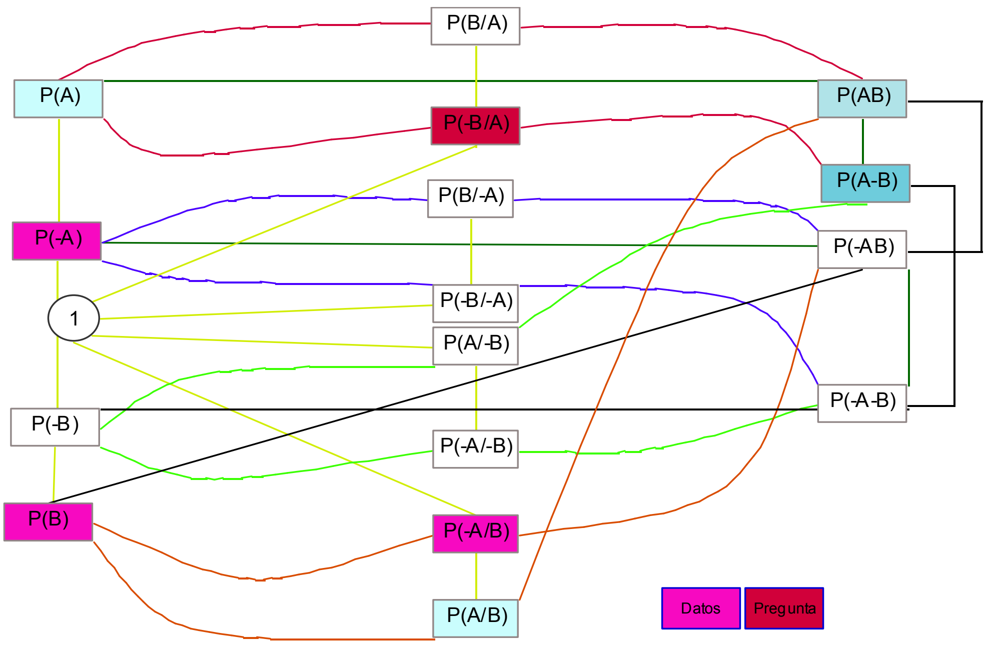


Figura 249 Grafo canónico de [p_{32}]

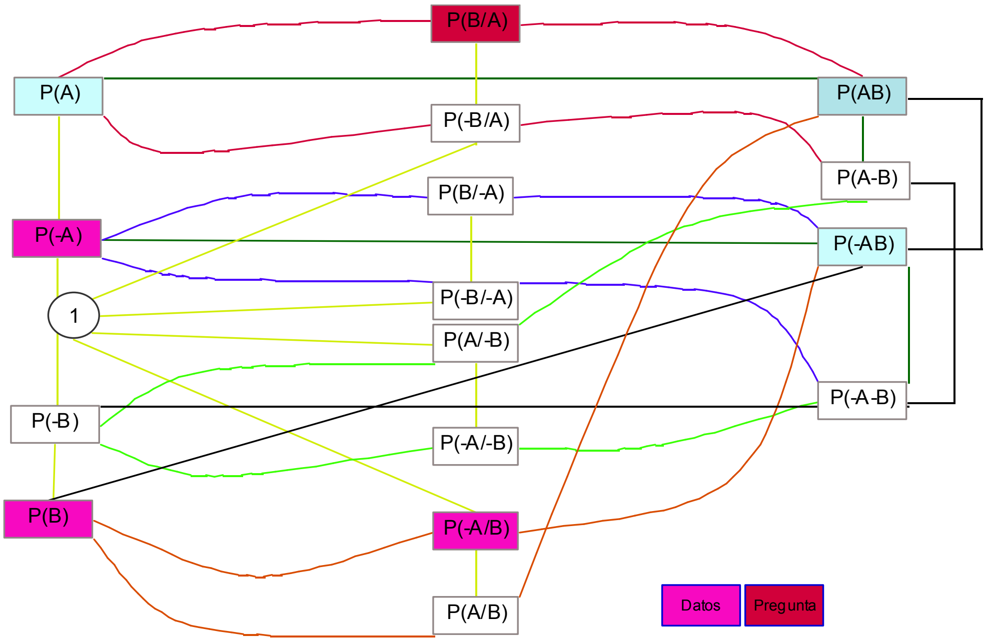


Figura 250 Grafo canónico de [p_{22}]

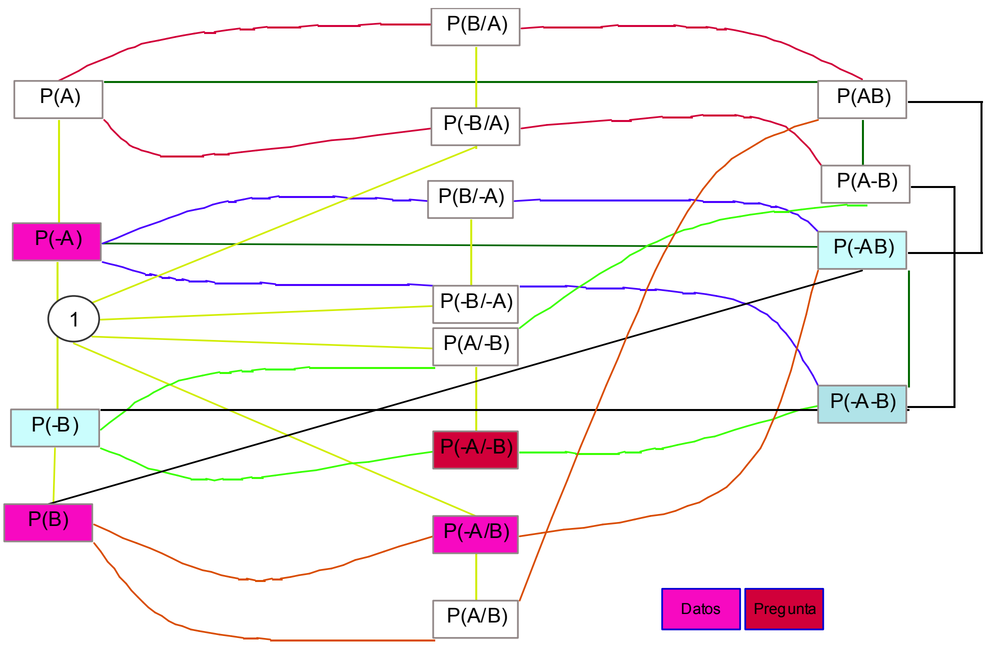


Figura 251 Grafo canónico de [p_{22}]

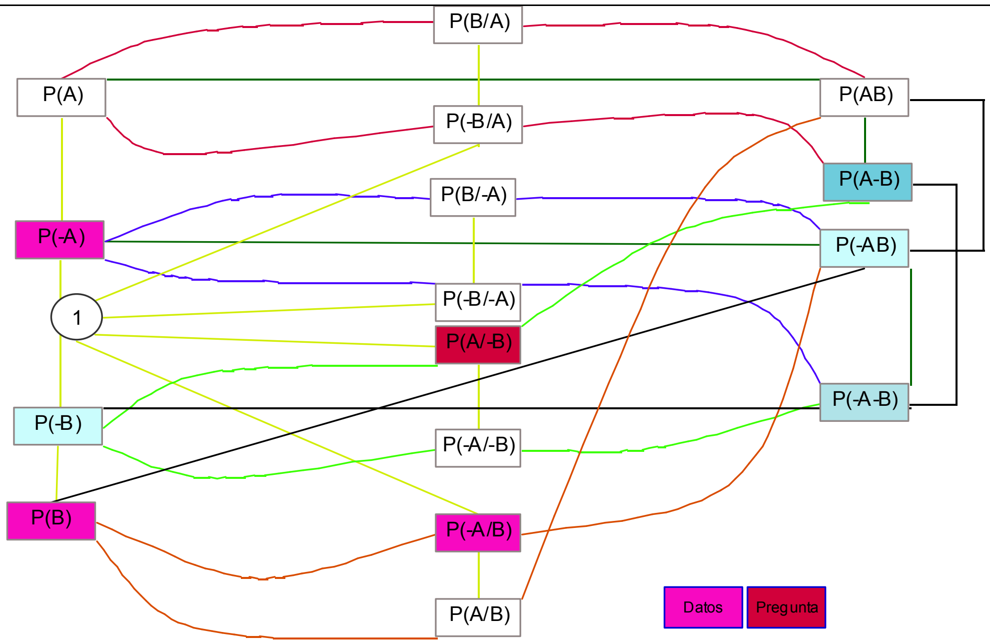


Figura 252 Grafo canónico de [p_{32}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

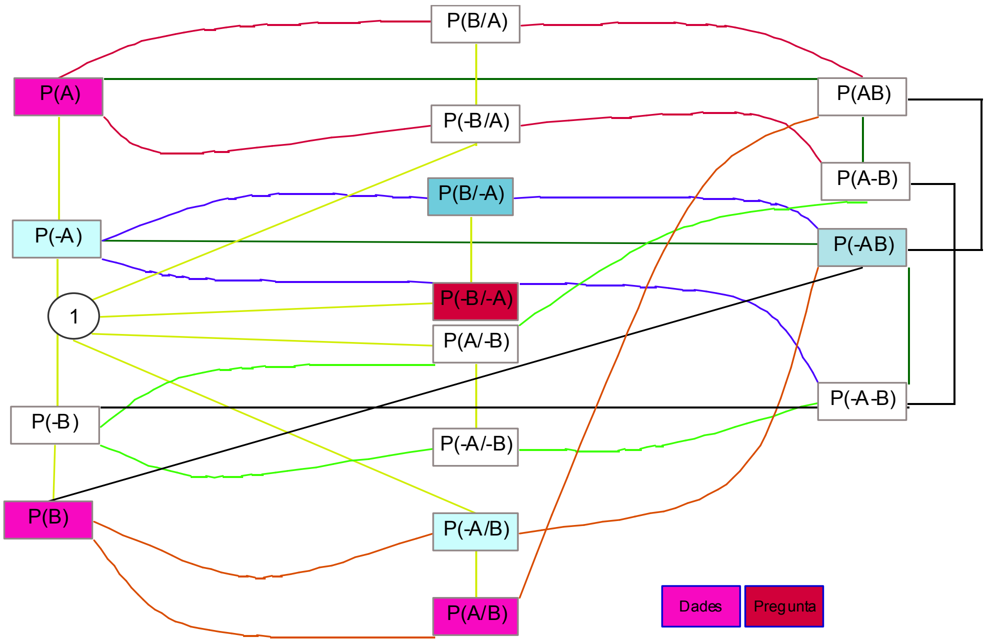


Figura 253 Grafo canónico de [p_{32}]

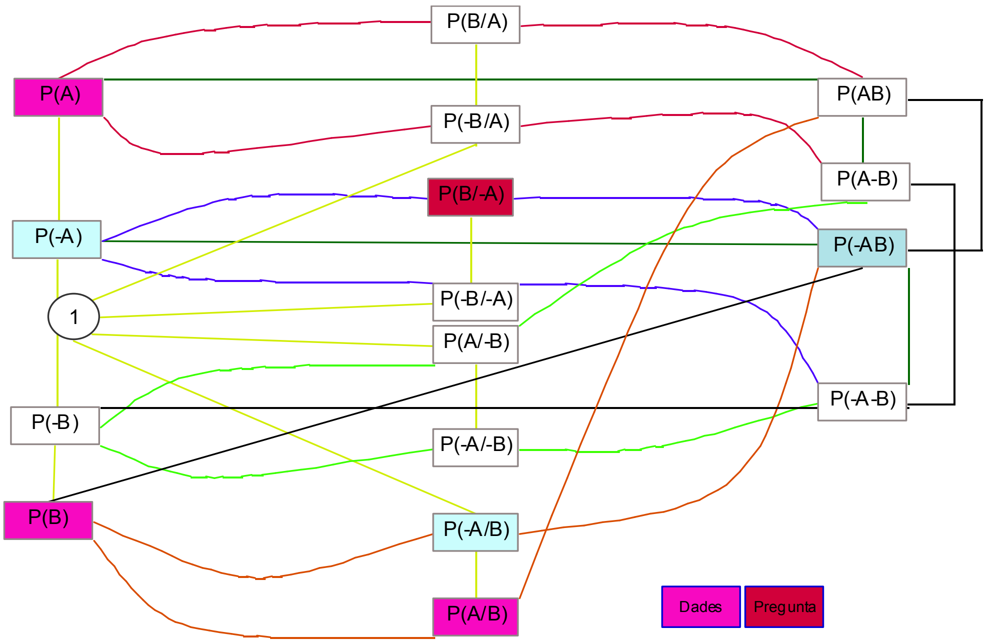


Figura 254 Grafo canónico de [p_{22}]

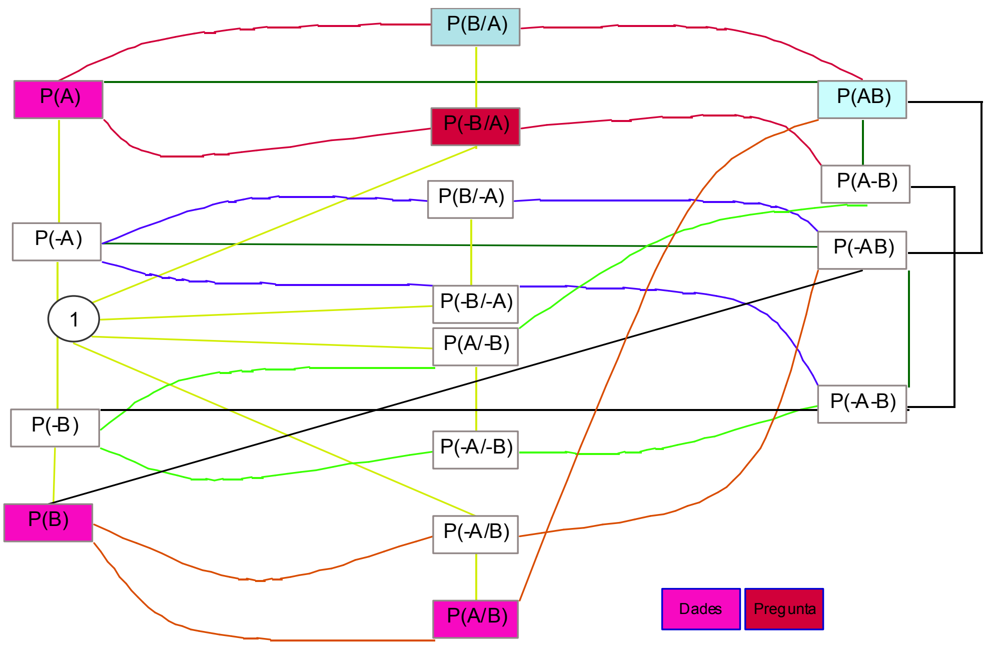


Figura 255 Grafo canónico de [p_{12}]

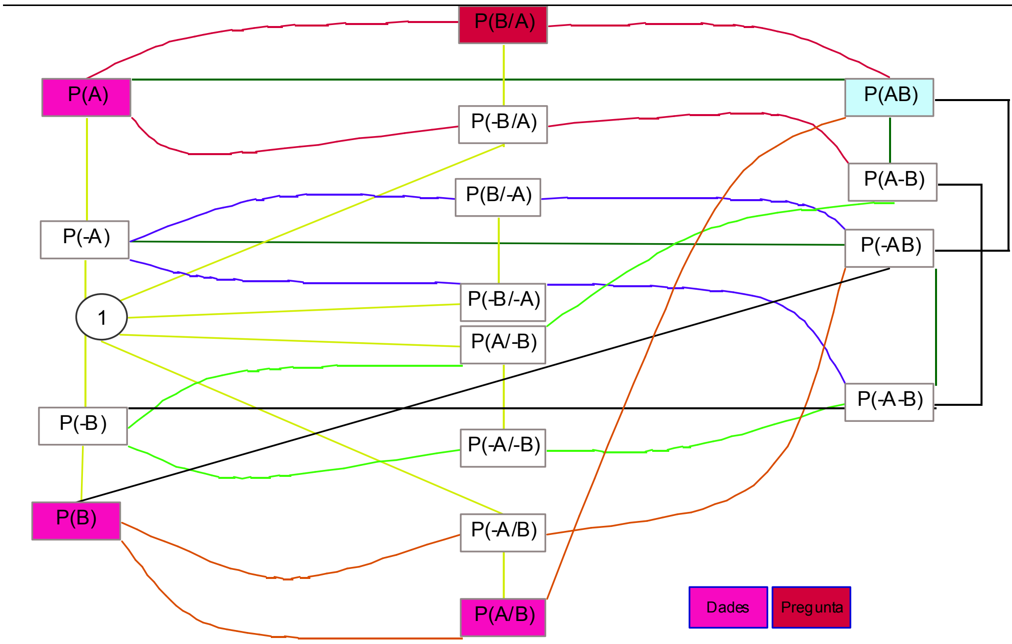


Figura 256 Grafo canónico de [p_{02}]

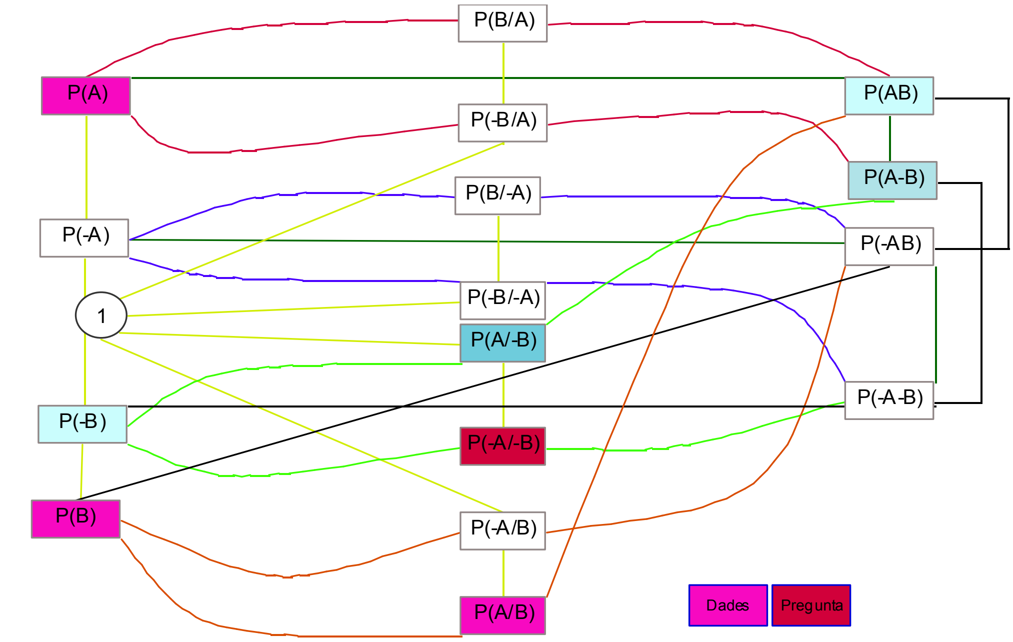


Figura 257 Grafo canónico de [p_{32}]

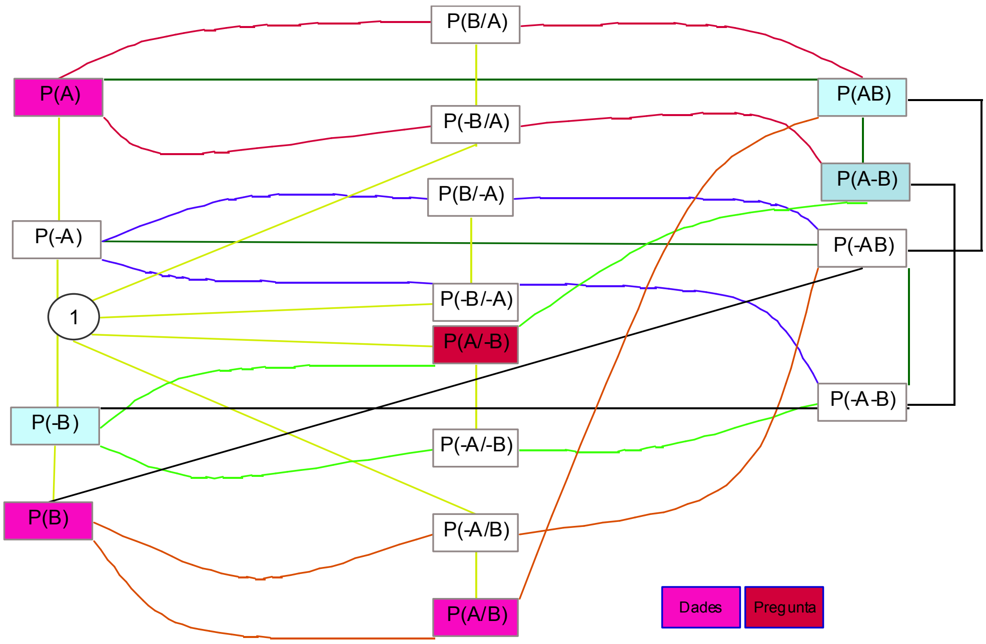


Figura 258 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_3T_1G_2$

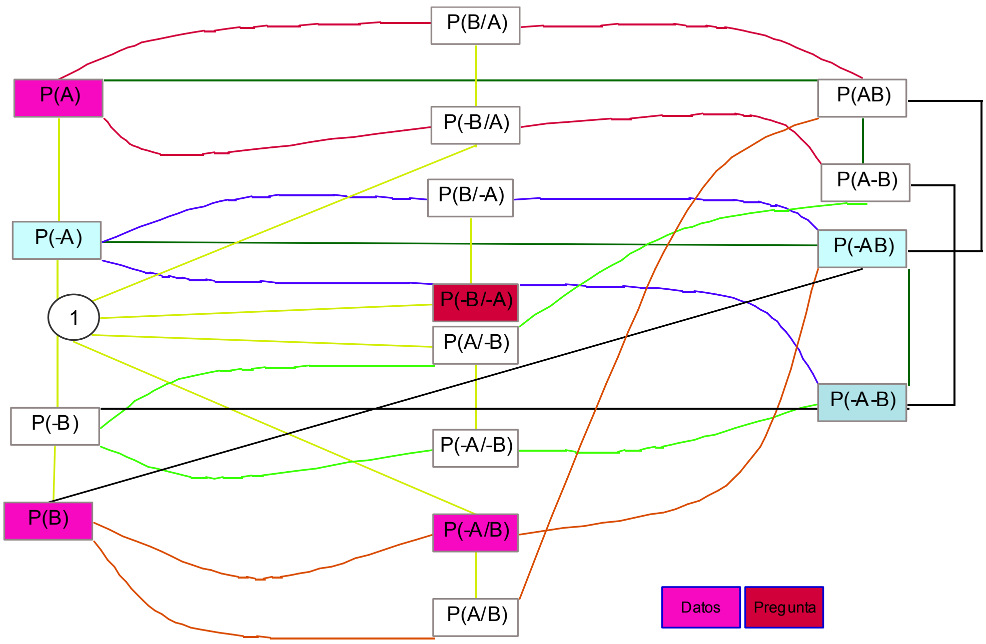


Figura 259 Grafo canónico de [p_{22}]

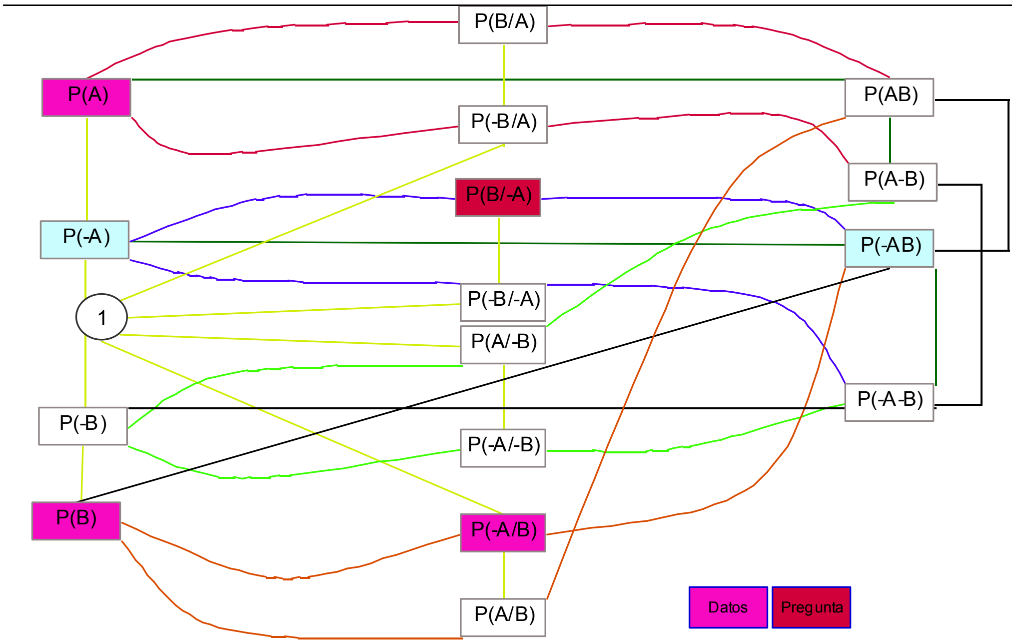


Figura 260 Grafo canónico de [p_{12}]

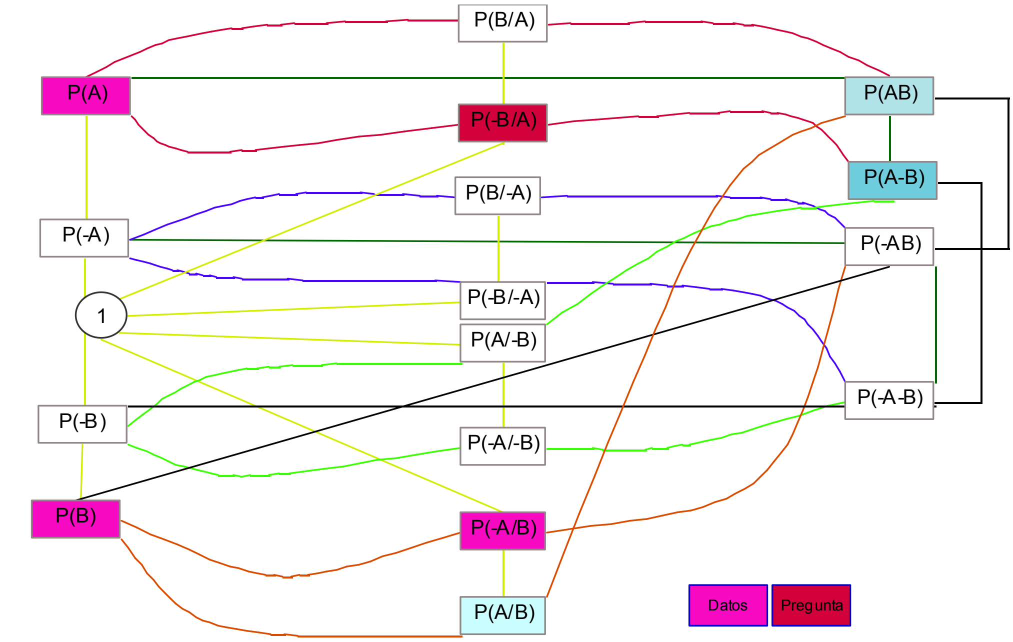


Figura 261 Grafo canónico de [p_{22}]

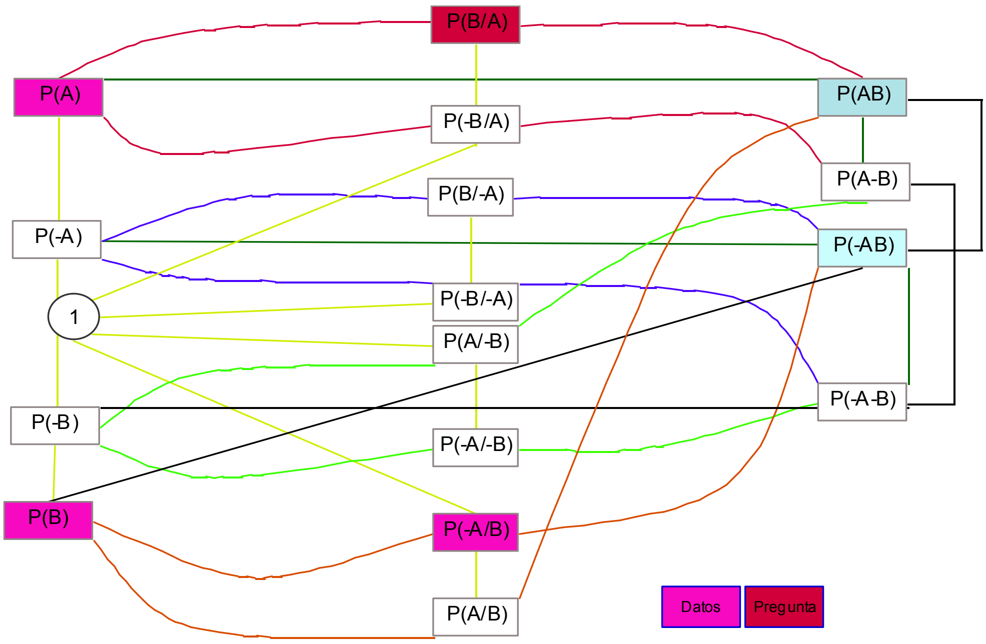


Figura 262 Grafo canónico de [p_{12}]

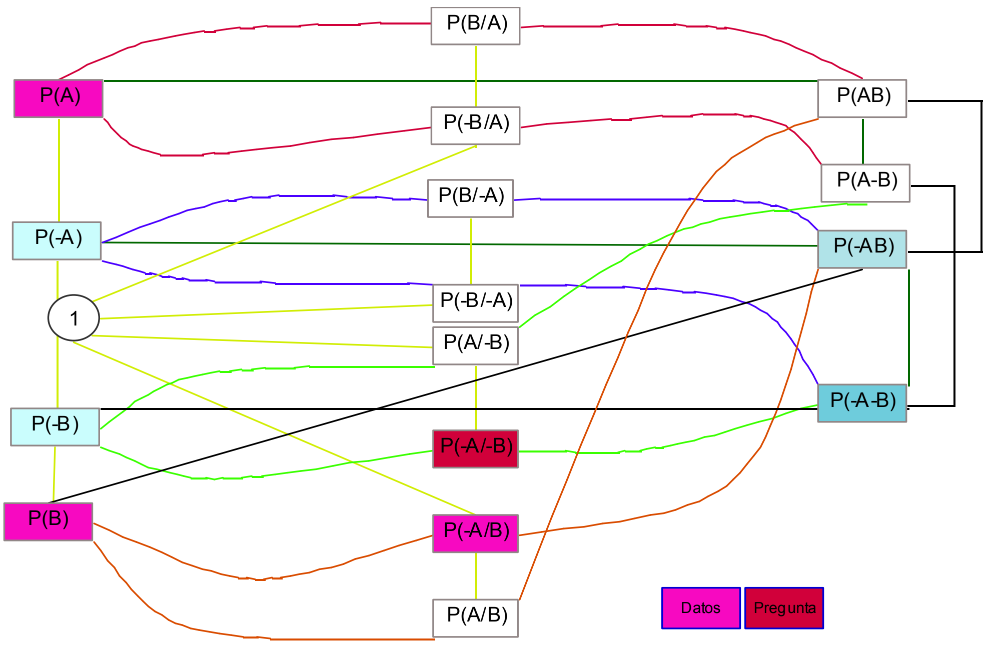


Figura 263 Grafo canónico de [p_{32}]

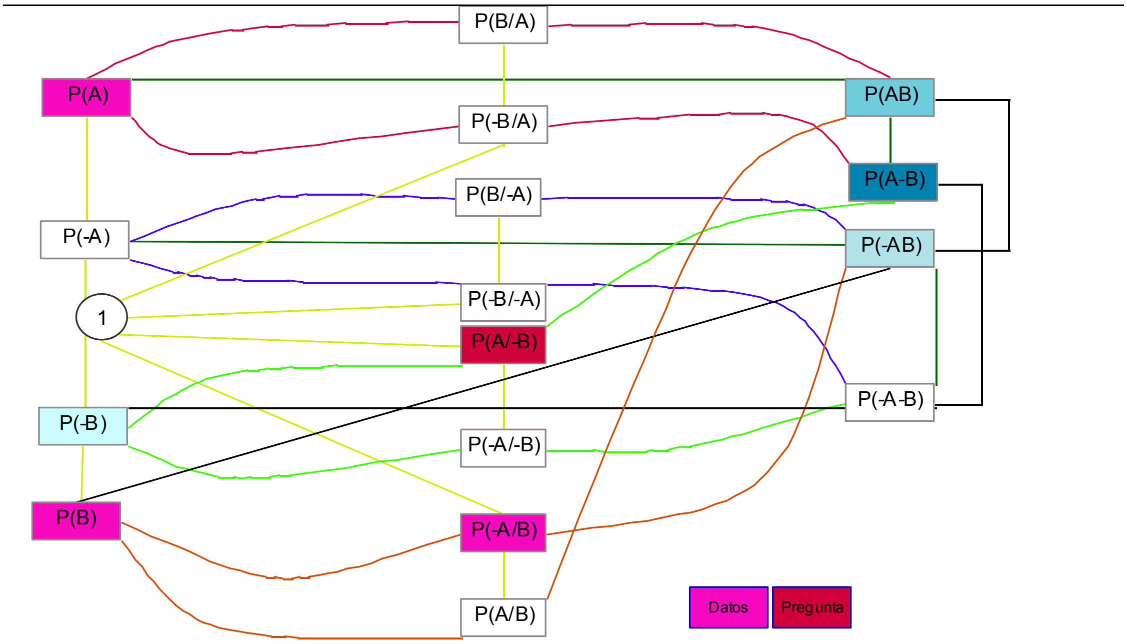


Figura 264 Grafo canónico de [p_{32}]

$N_2C_3T_1G_3$

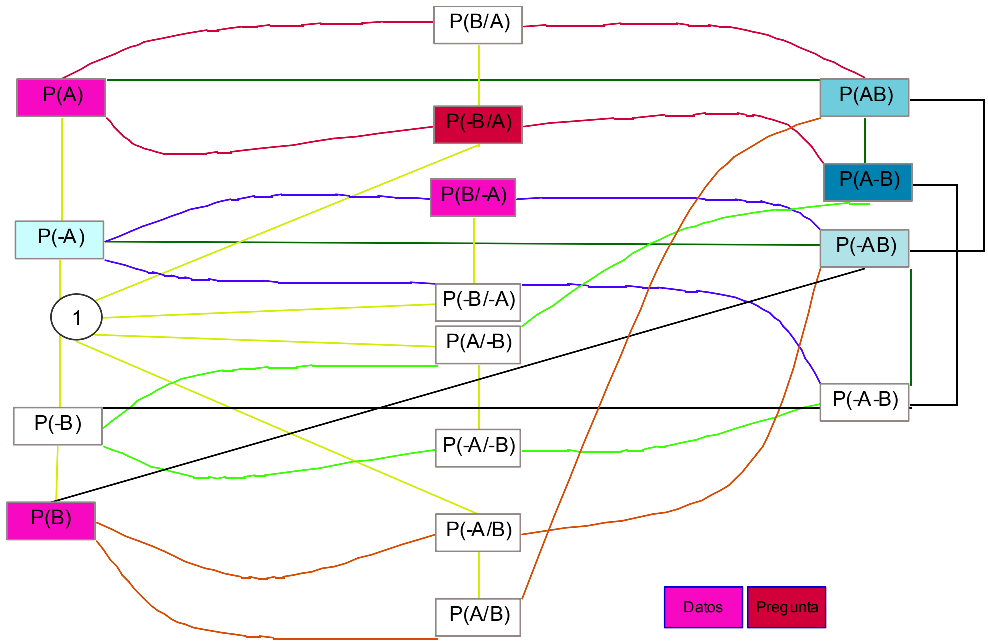


Figura 265 Grafo canónico de [p_{32}]

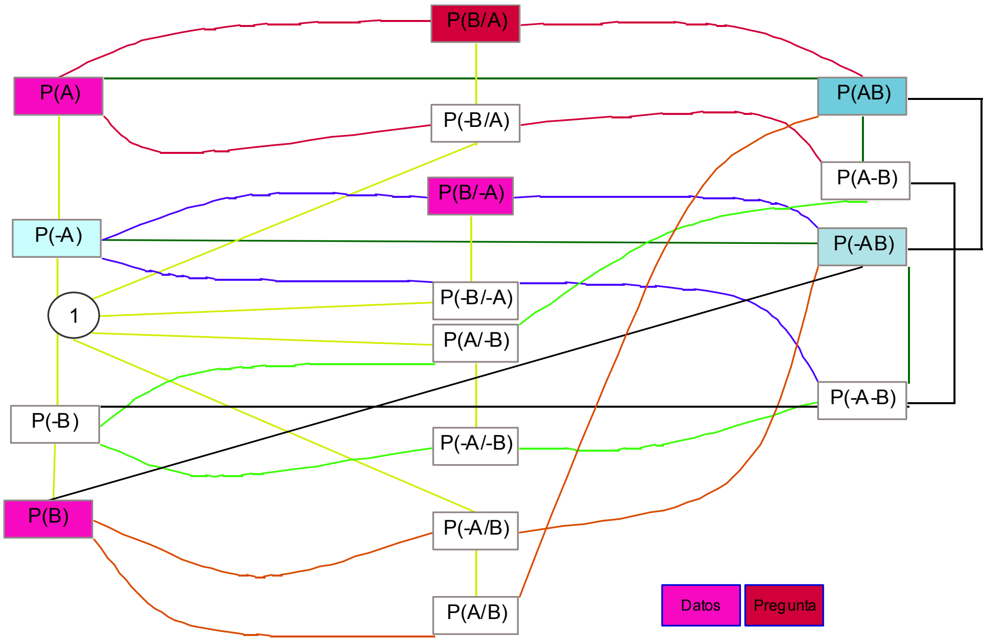


Figura 266 Grafo canónico de [p_{22}]

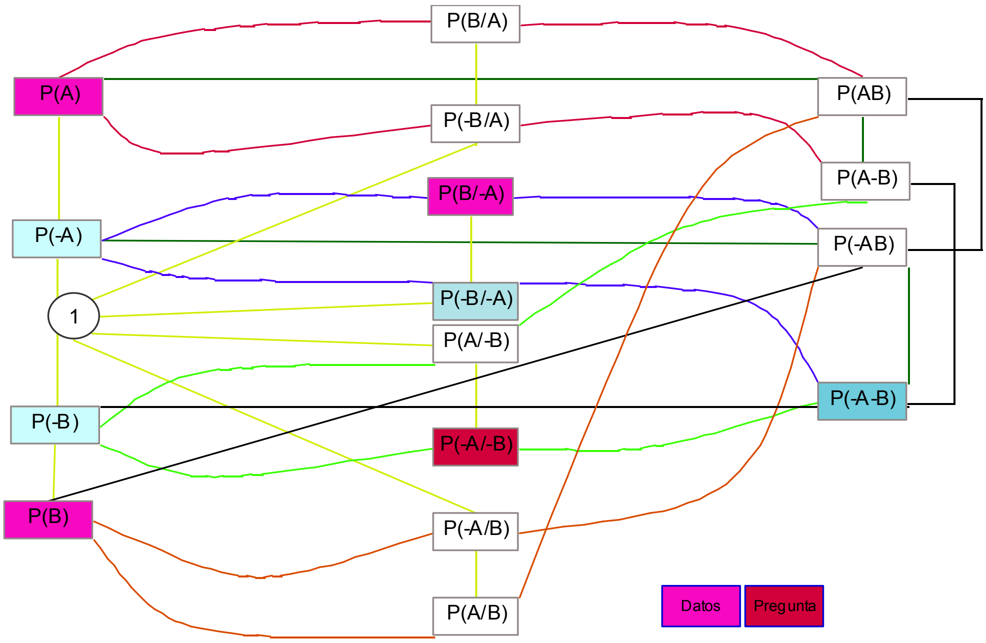


Figura 267 Grafo canónico de [p_{32}]

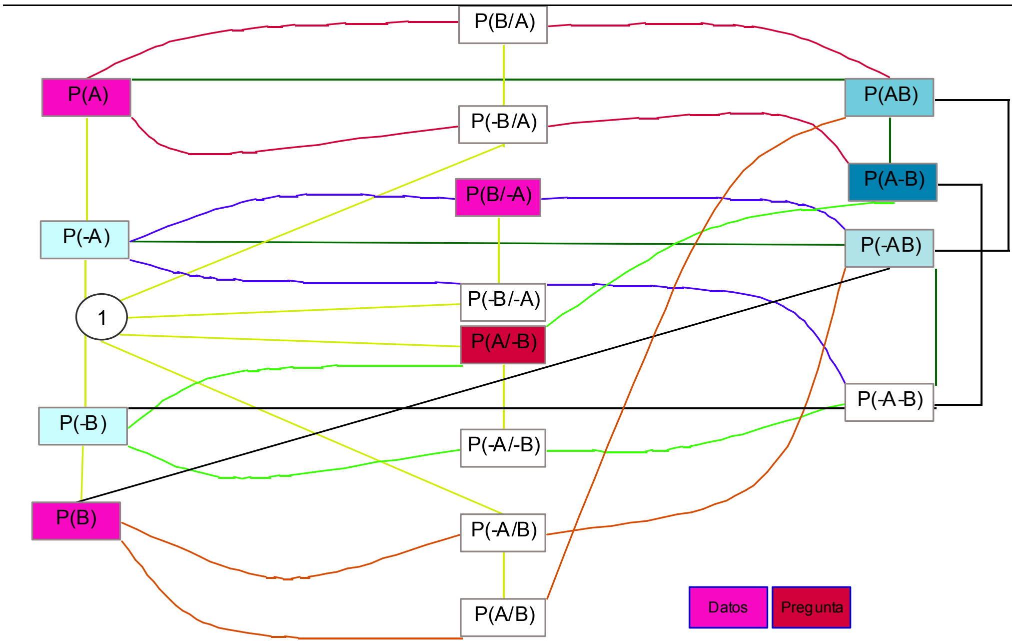


Figura 268 Grafo canónico de [p_{42}]

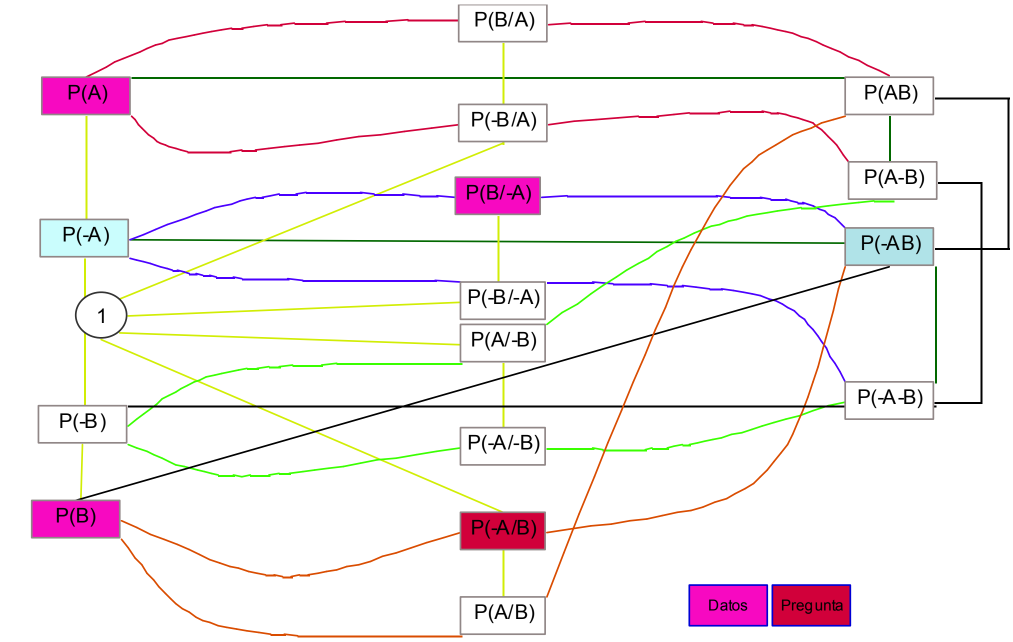


Figura 269 Grafo canónico de [p_{12}]

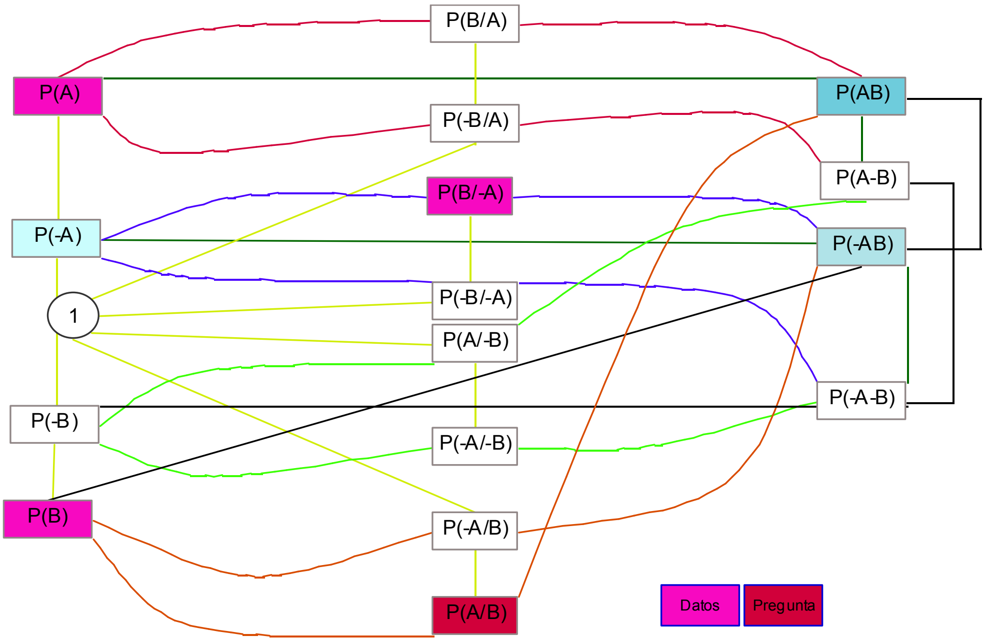


Figura 270 Grafo canónico de [p_{22}]

$N_2C_3T_1G_4$

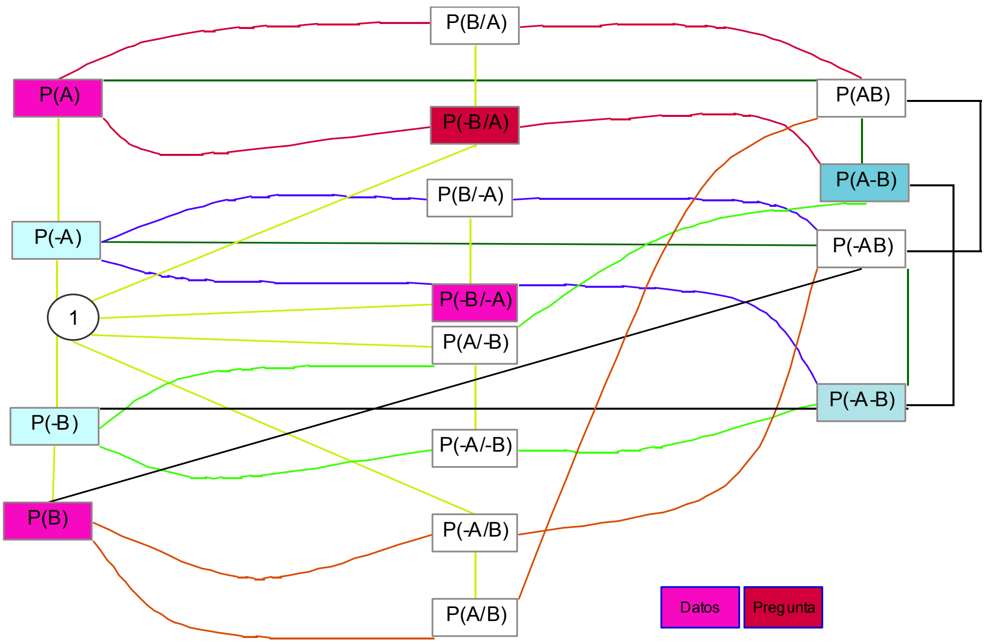


Figura 271 Grafo canónico de [p_{32}]

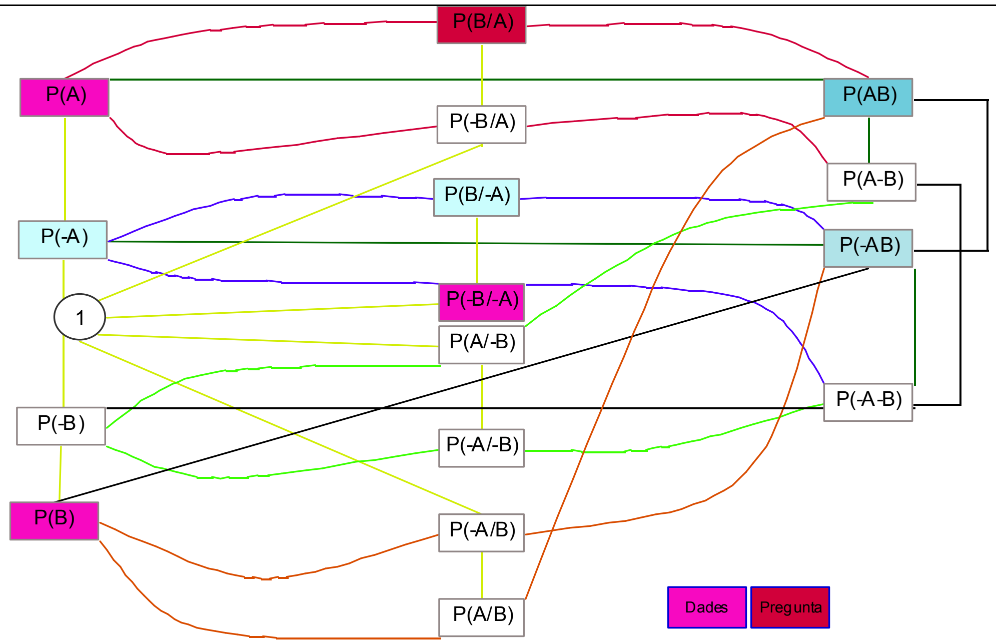


Figura 272 Grafo canónico de [p_{32}]

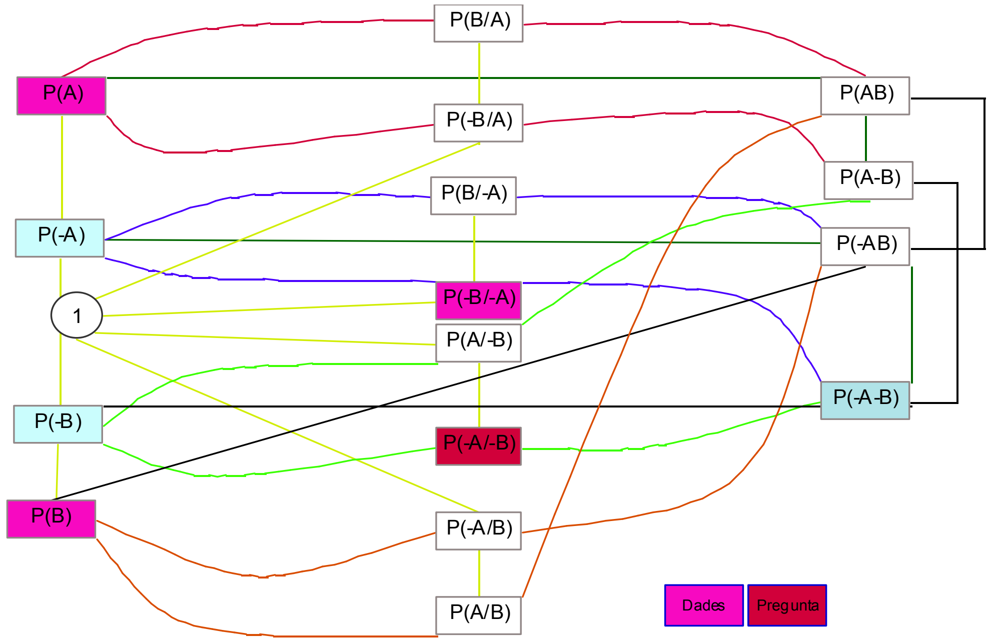


Figura 273 Grafo canónico de [p_{22}]

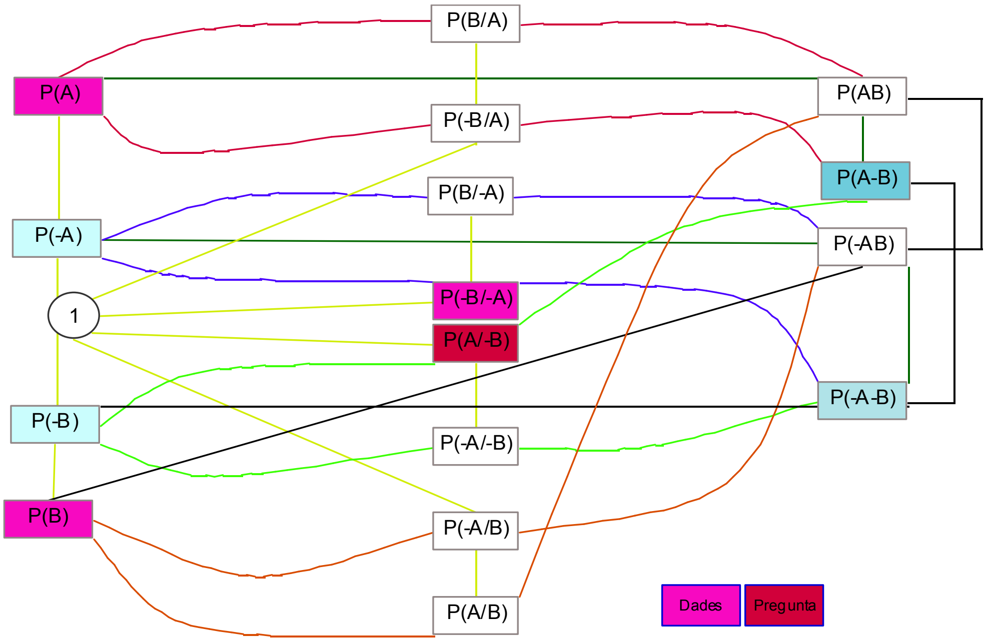


Figura 274 Grafo canónico de [p_{32}]

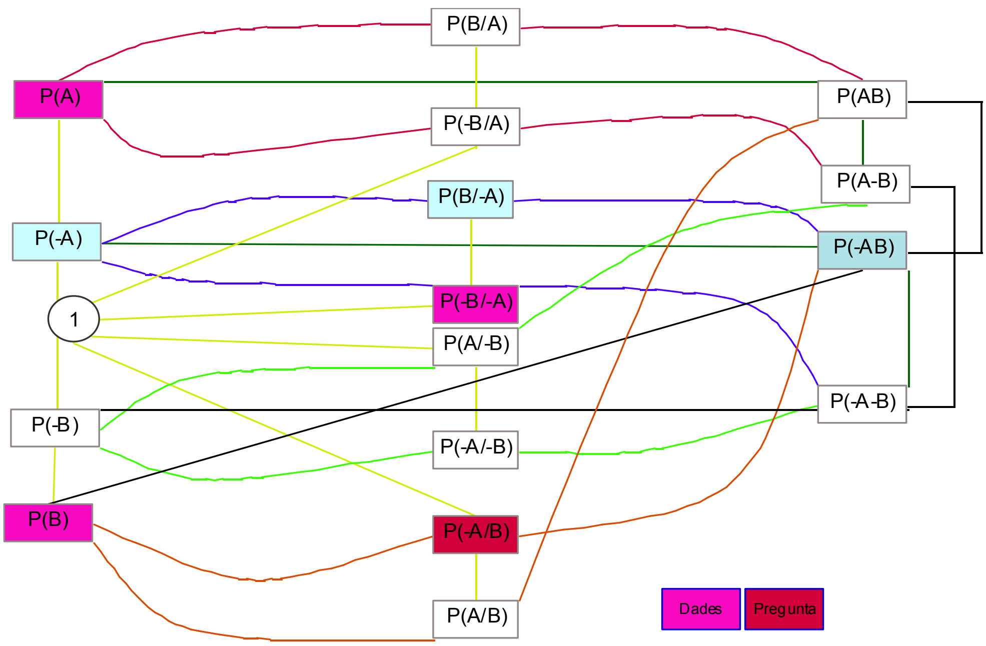


Figura 275 Grafo canónico de [p_{22}]

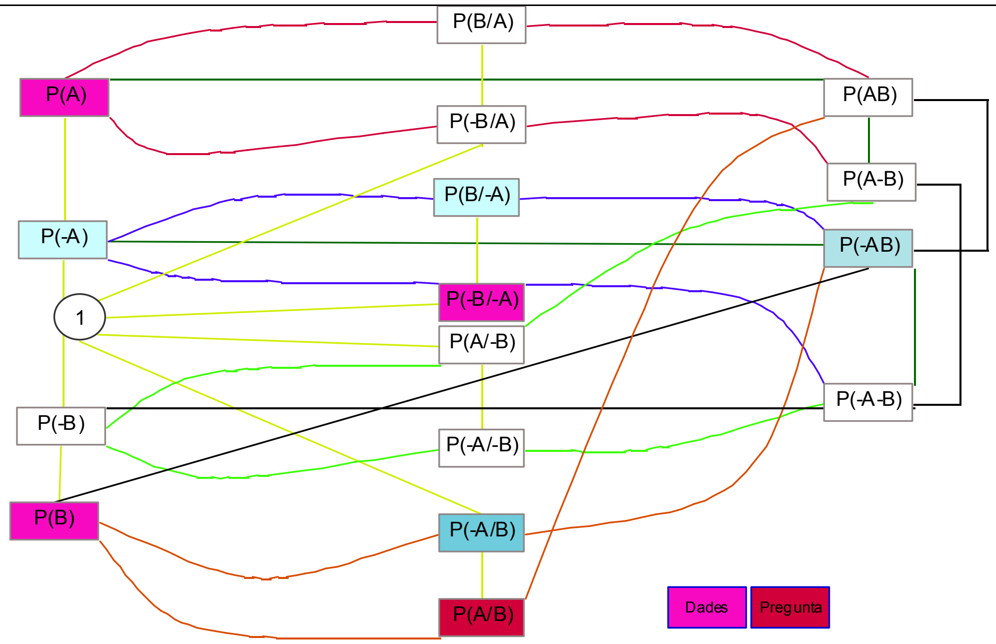


Figura 276 Grafo canónico de [p_{32}]

III.2. GRAFOS CANÓNICOS QUE DAN CUENTA DE LAS CLASES DE EQUIVALENCIA EN LA QUE QUEDA DIVIDIDA LA FAMILIA $N_2C_3T_3$, QUE SE CORRESPONDEN CON LOS RESULTADOS DE LA TABLA 4.17

$N_2C_3T_3G_1$

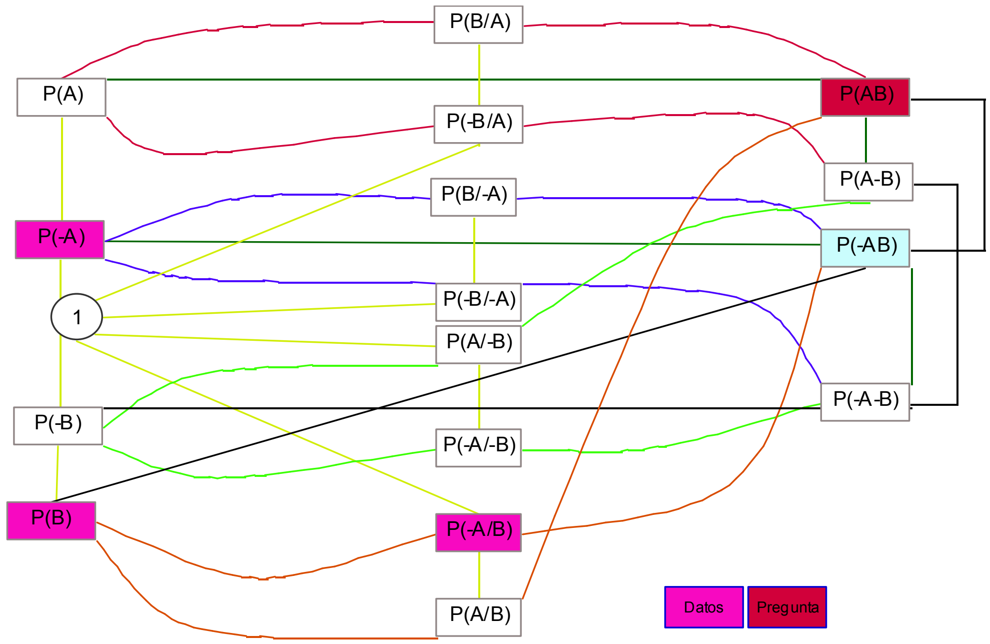


Figura 277 Grafo canónico de [p_{11}]

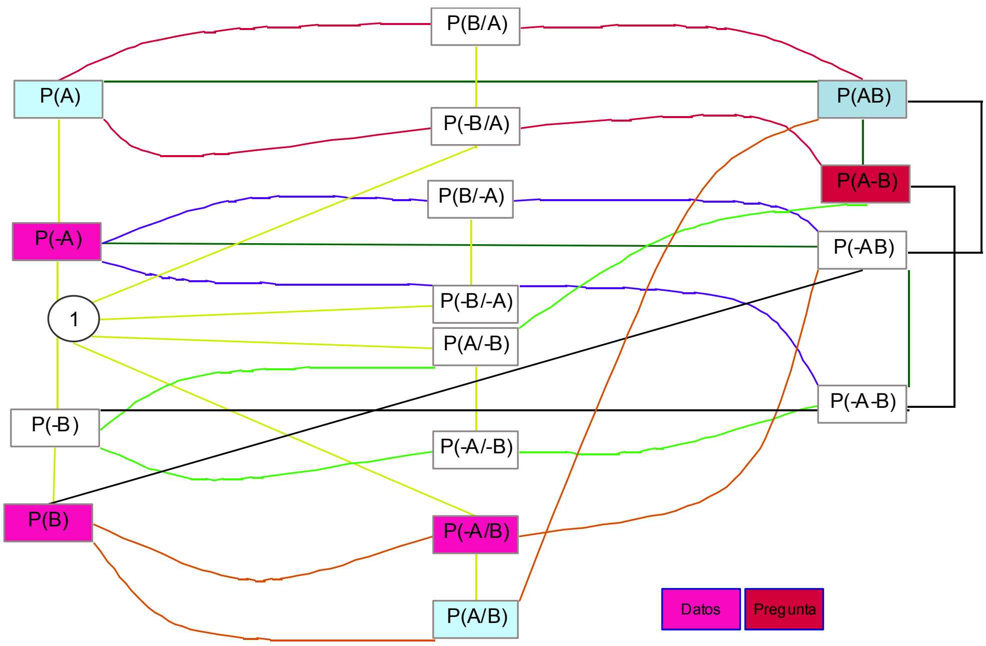


Figura 278 Grafo canónico de [p_{31}]

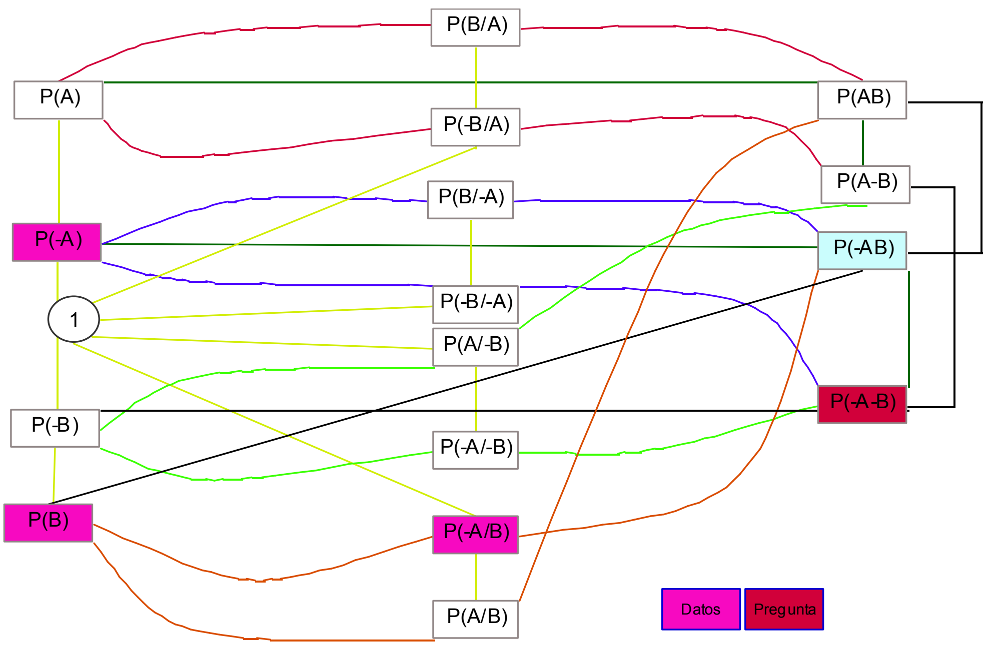


Figura 279 Grafo canónico de [p_{11}]

Grafos asociados a otro trío de datos

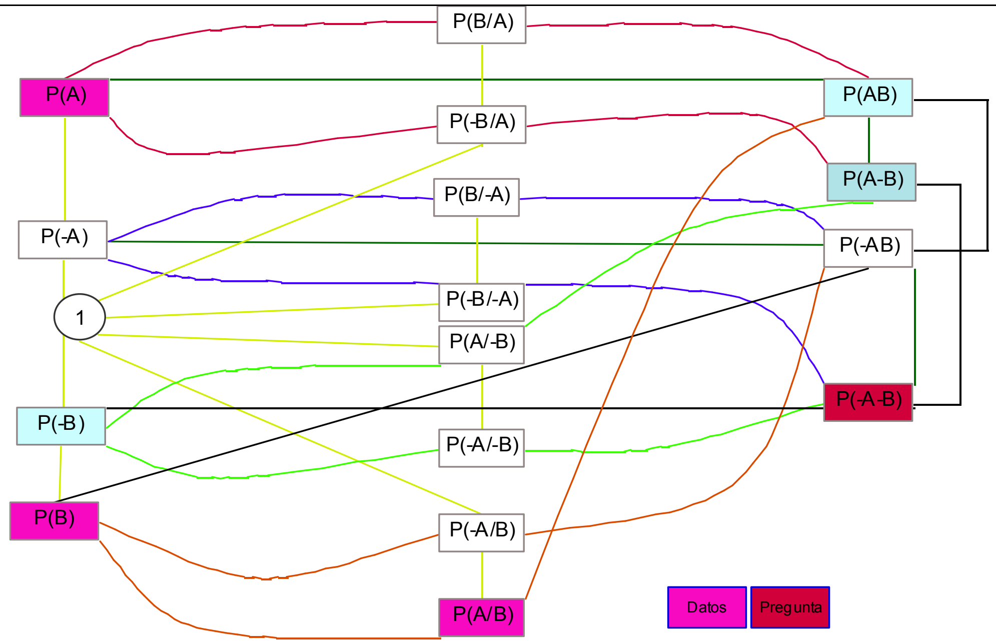


Figura 280 Grafo canónico de [p31]

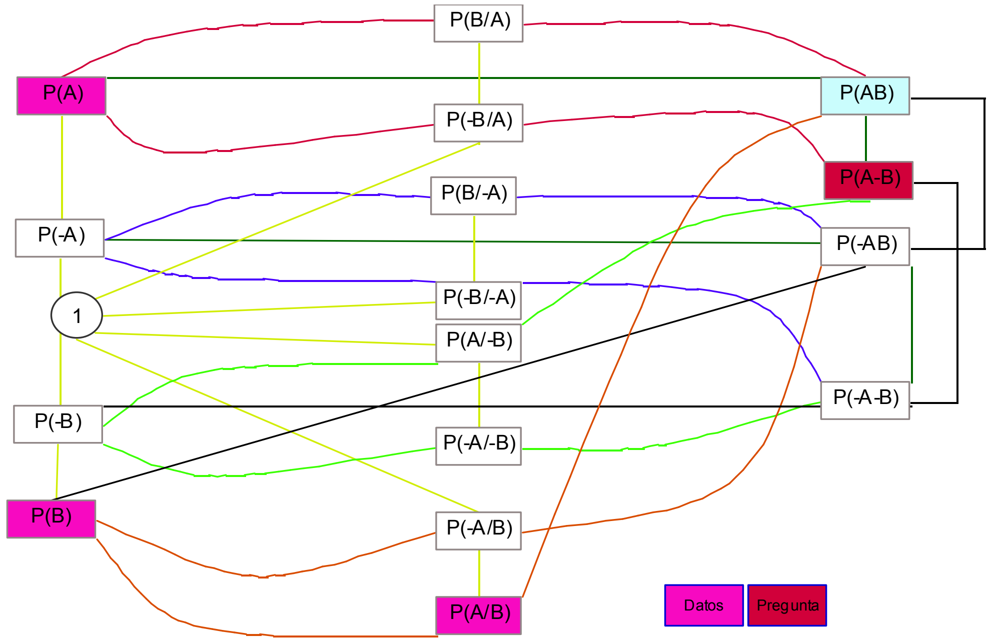


Figura 281 Grafo canónico de [p11]

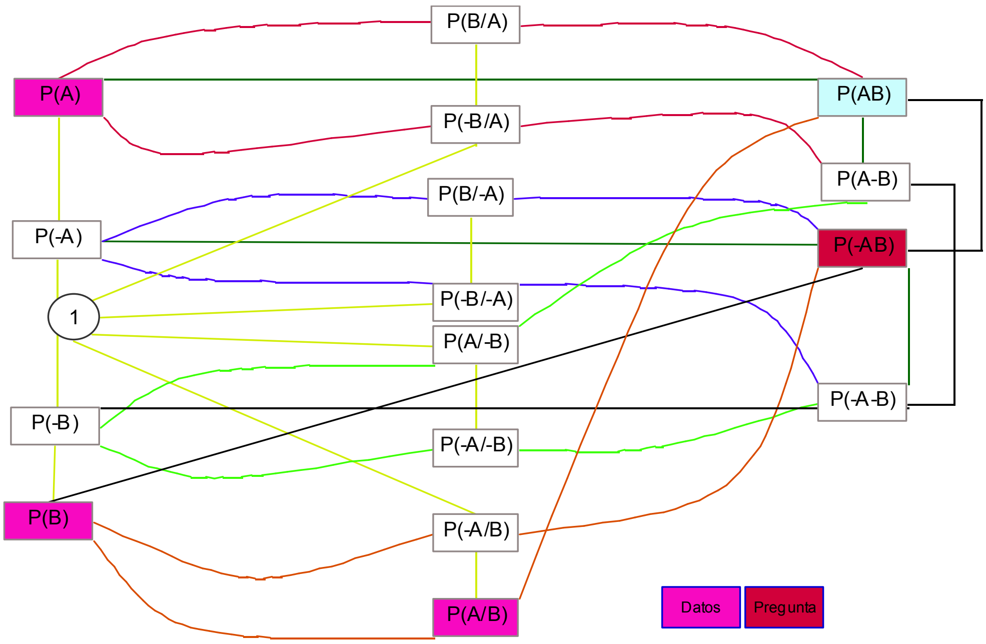


Figura 282 Grafo canónico de [p_{11}]

$N_2C_3T_3G_2$

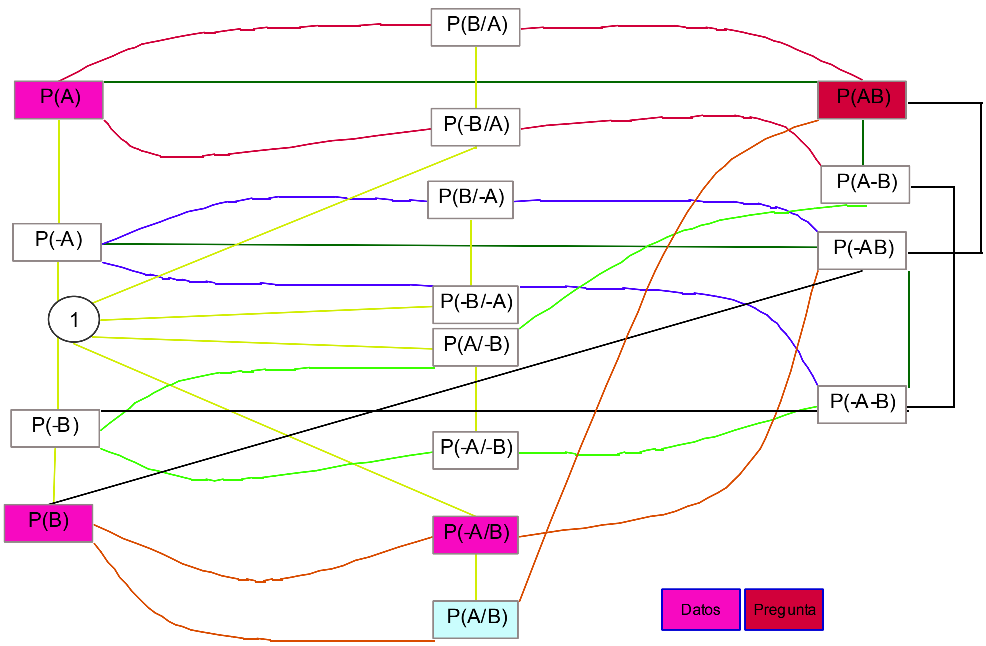


Figura 283 Grafo canónico de [p_{11}]

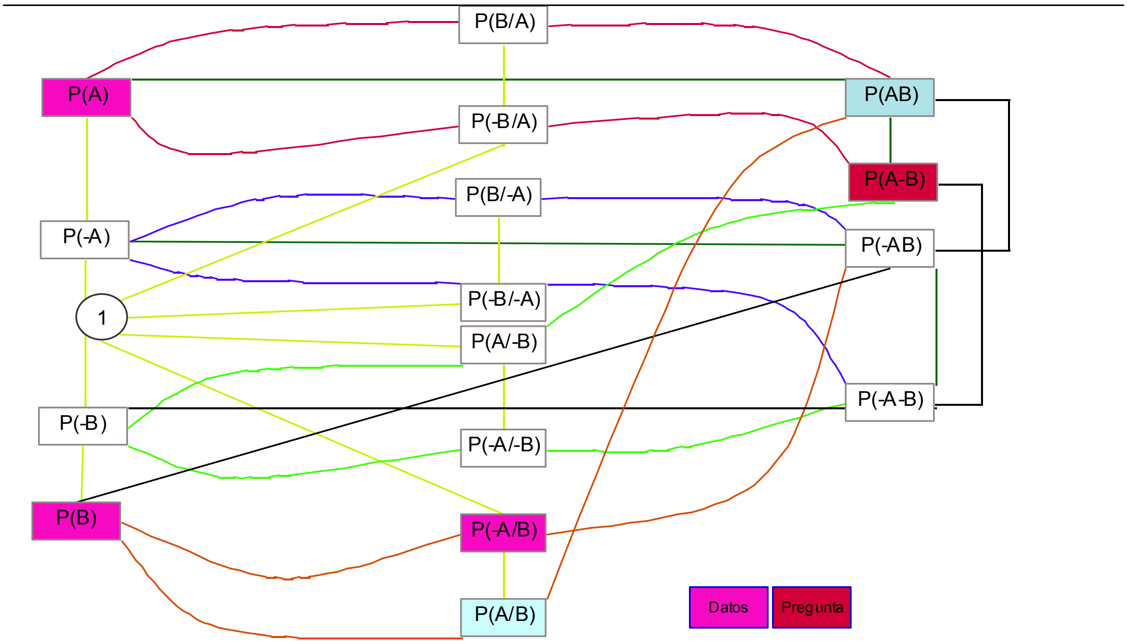


Figura 284 Grafo canónico de [p_{21}]

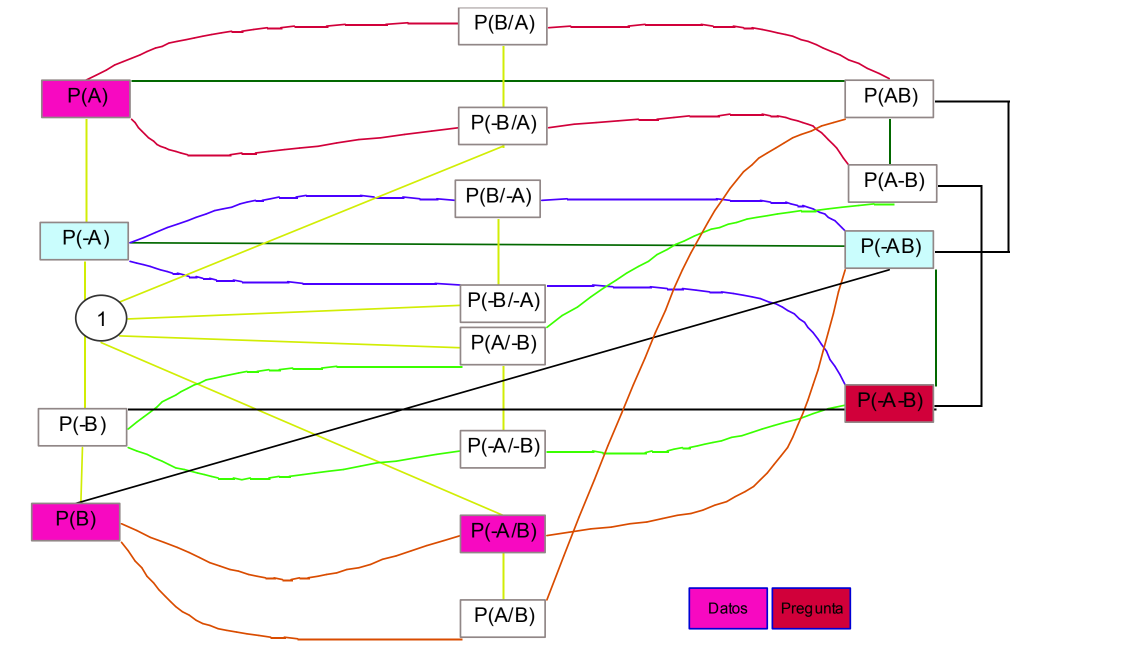


Figura 285 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_3T_3G_3$

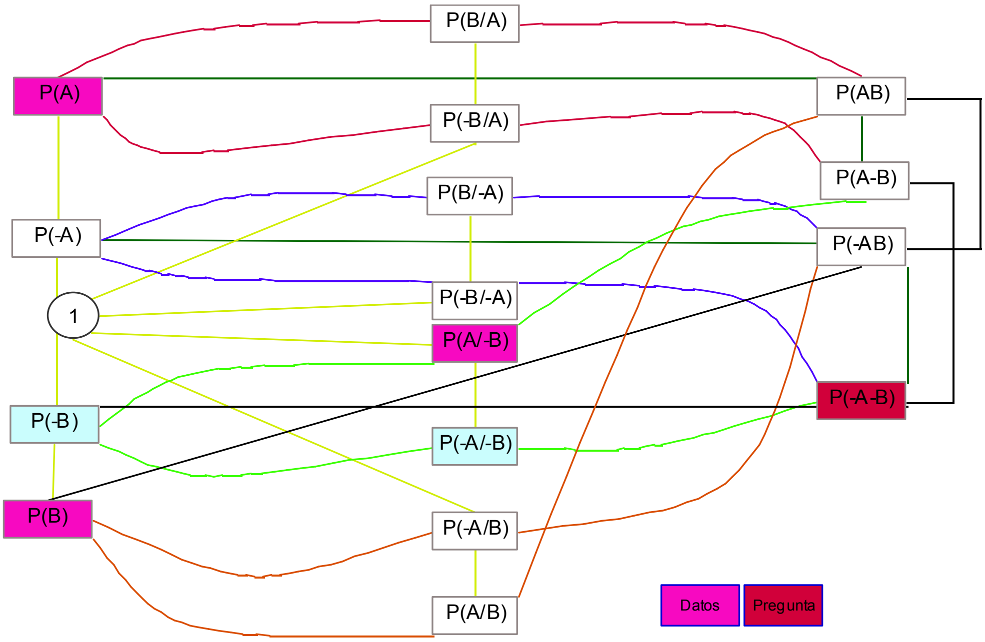


Figura 286 Grafo canónico de [p_{21}]

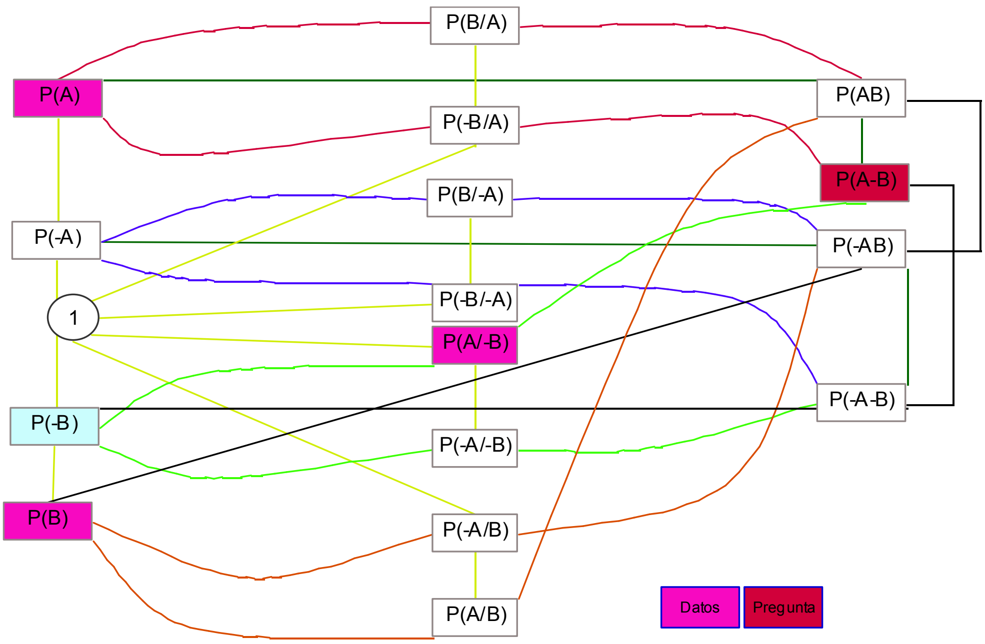


Figura 287 Grafo canónico de [p_{11}]

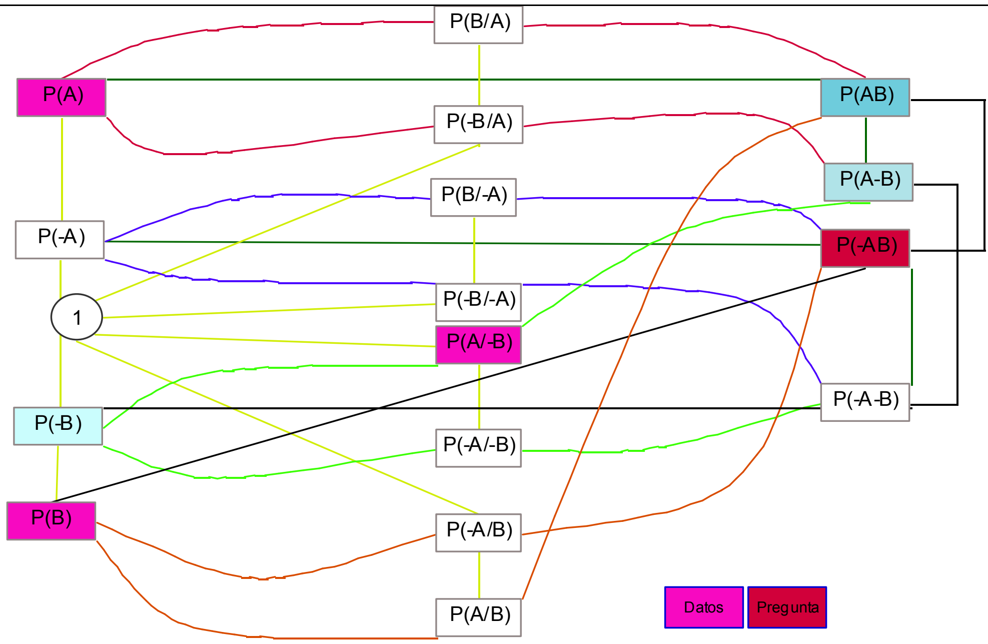


Figura 288 Grafo canónico de [p_{31}]

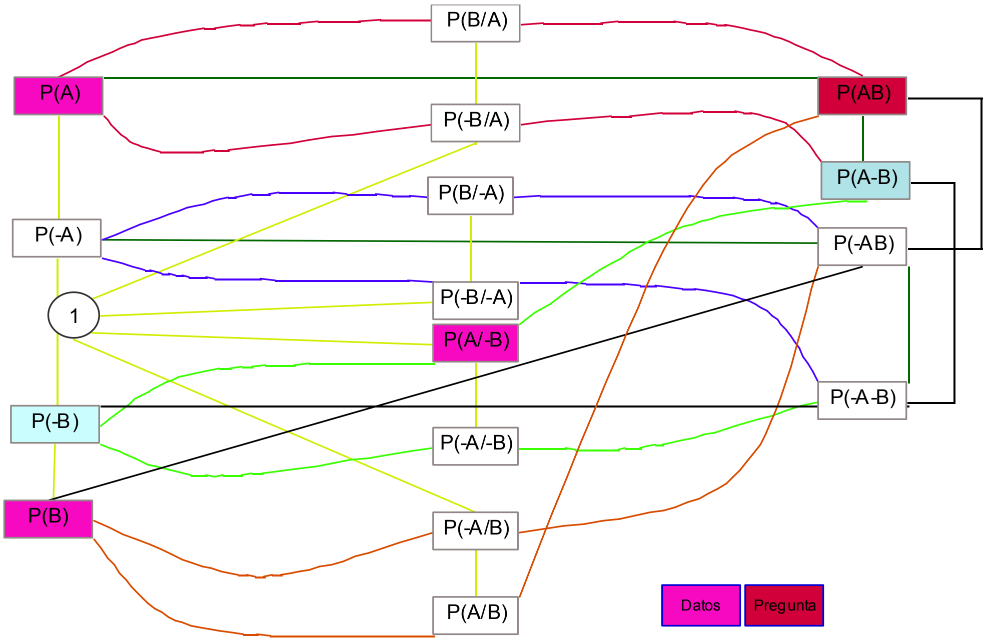


Figura 289 Grafo canónico de [p_{21}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

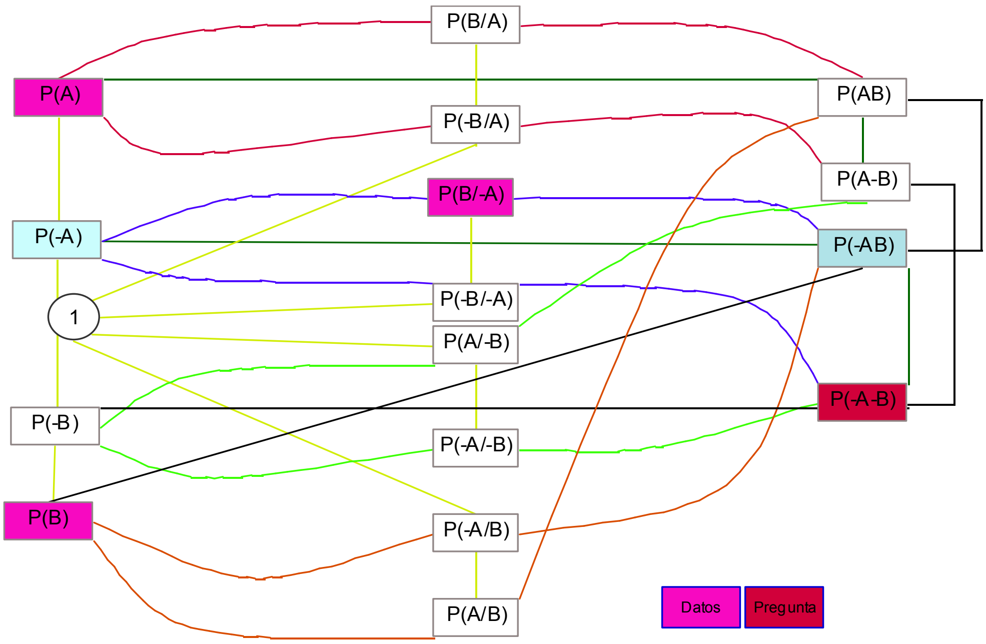


Figura 290 Grafo canónico de $[p_{21}]$

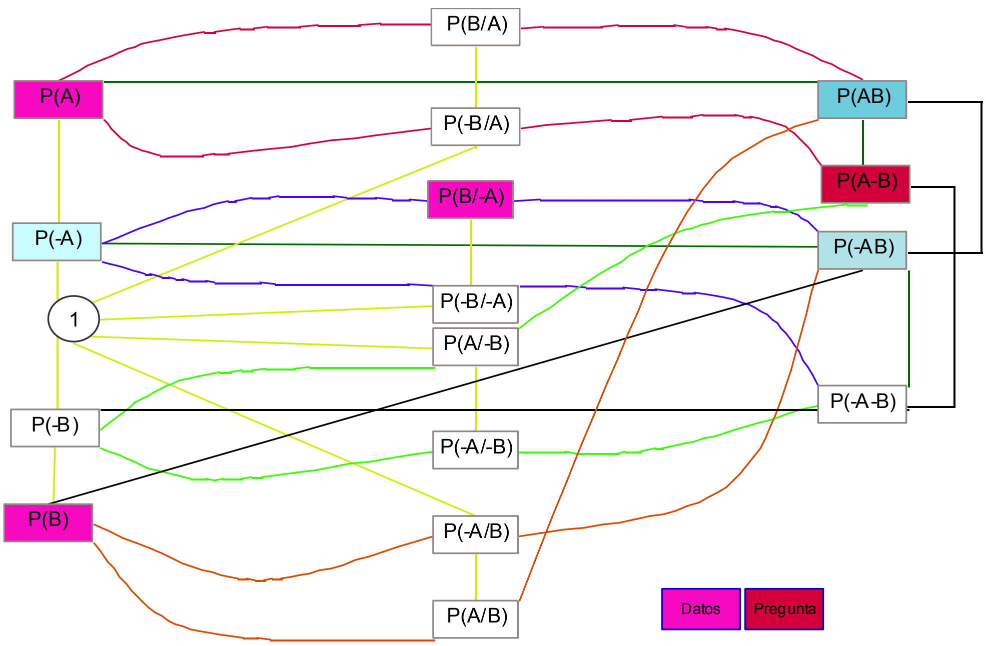


Figura 291 Grafo canónico de $[p_{31}]$

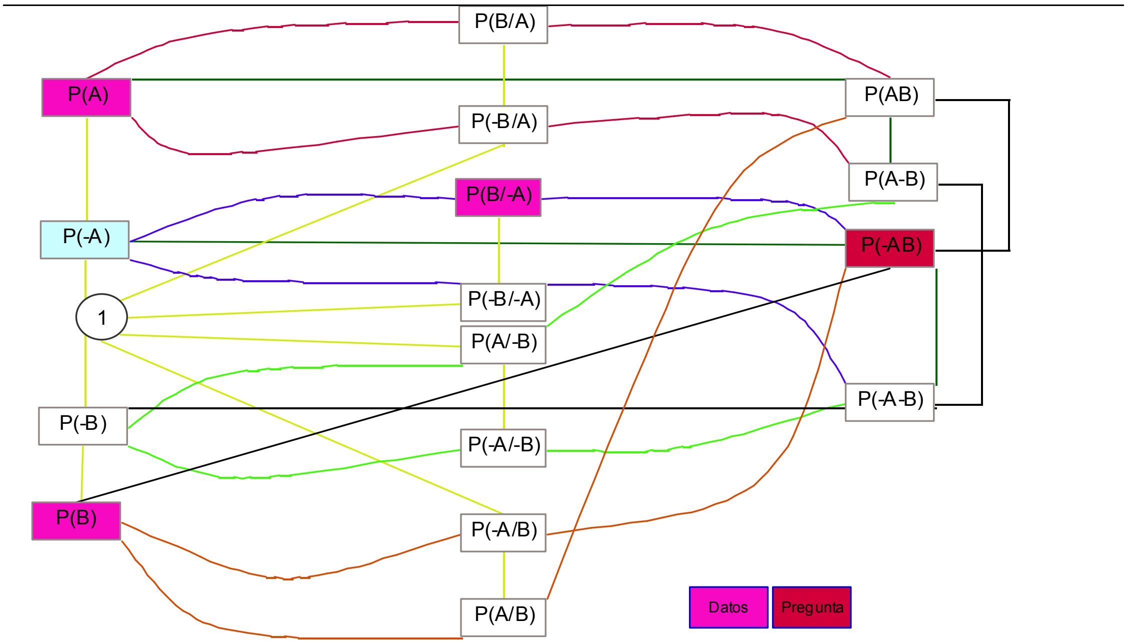


Figura 292 Grafo canónico de [p_{11}]

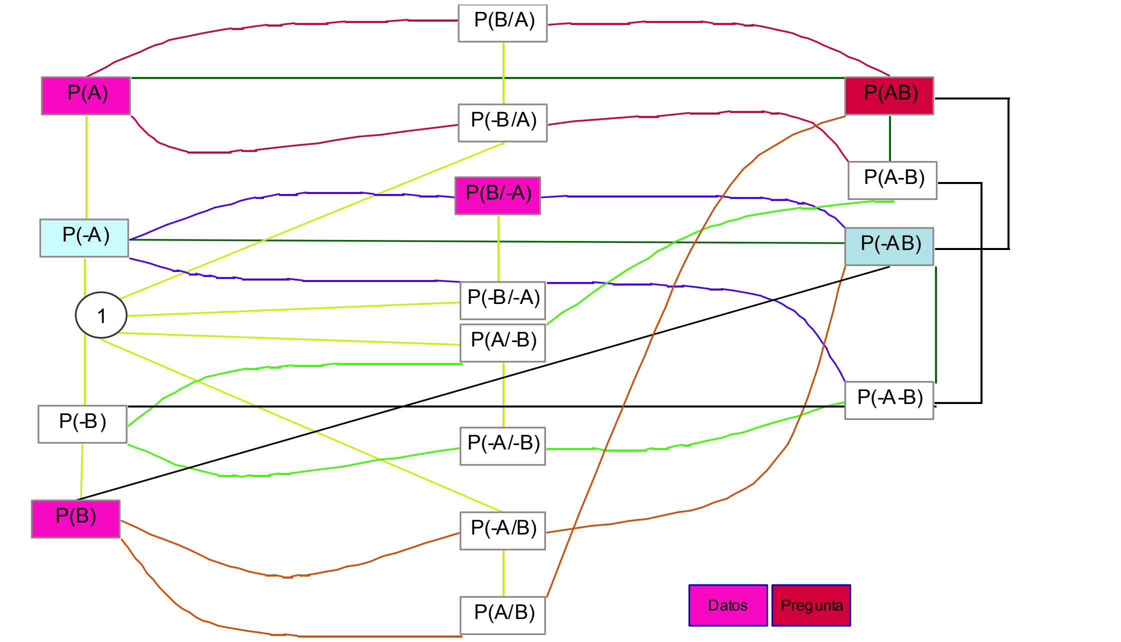


Figura 293 Grafo canónico de [p_{21}]

$N_2C_3T_3G_4$

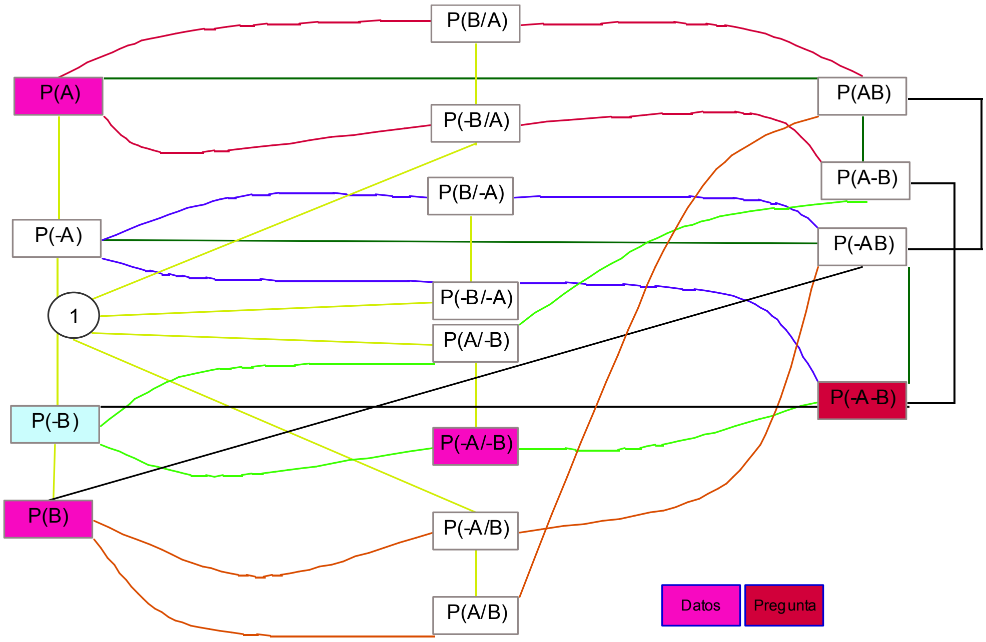


Figura 294 Grafo canónico de [p_{11}]

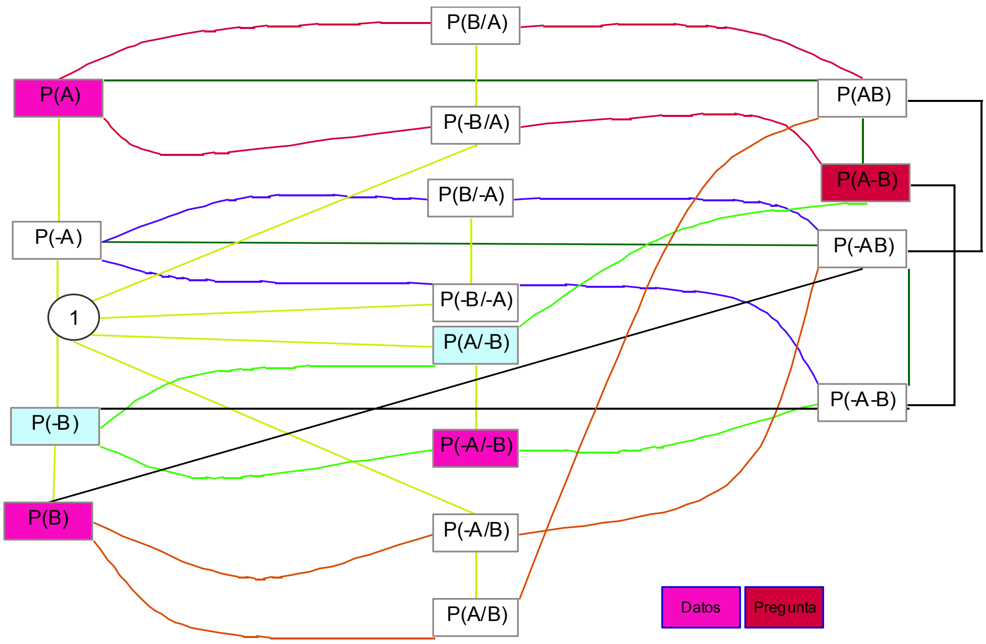


Figura 295 Grafo canónico de [p_{21}]

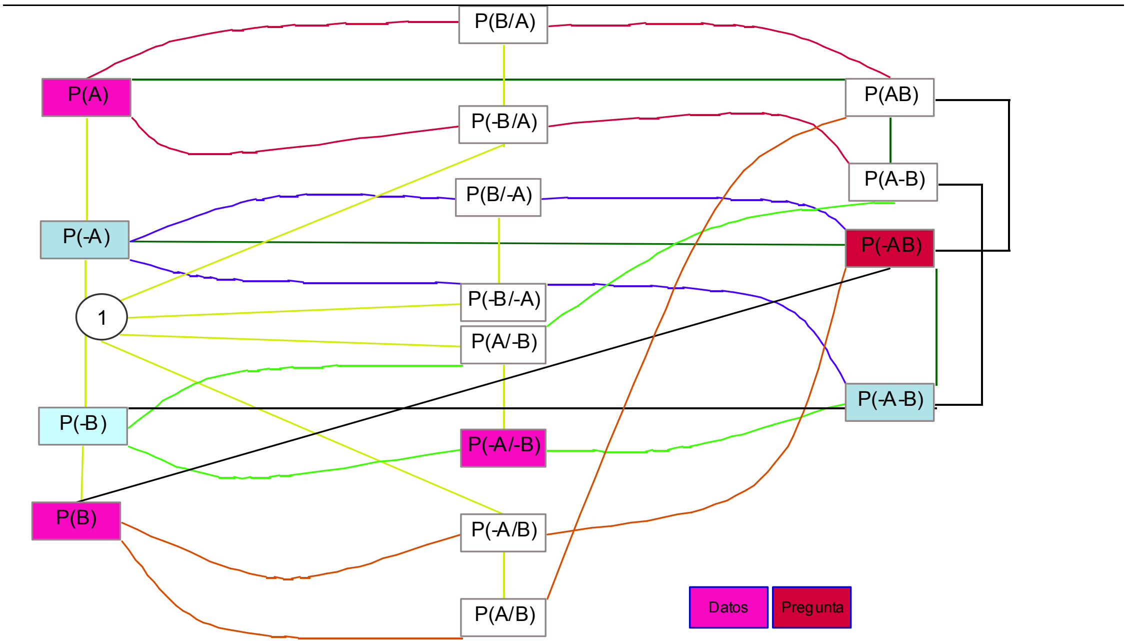


Figura 296 Grafo canónico de [p_{31}]

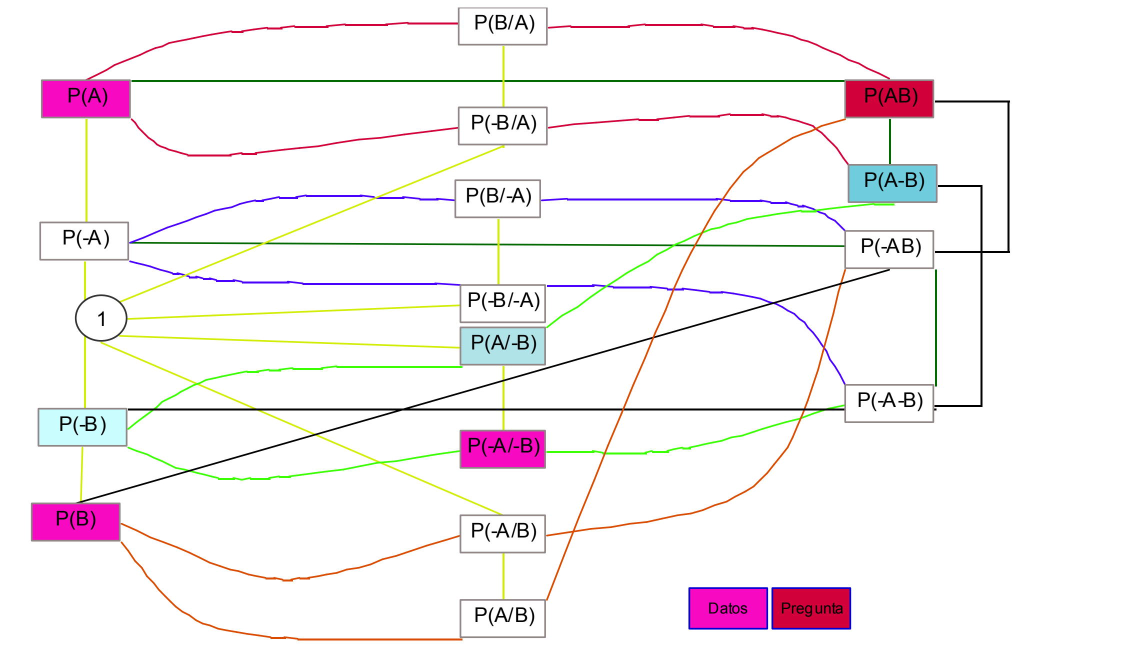


Figura 297 Grafo canónico de [p_{31}]

Grafos canónicos asociados a otro trío de datos

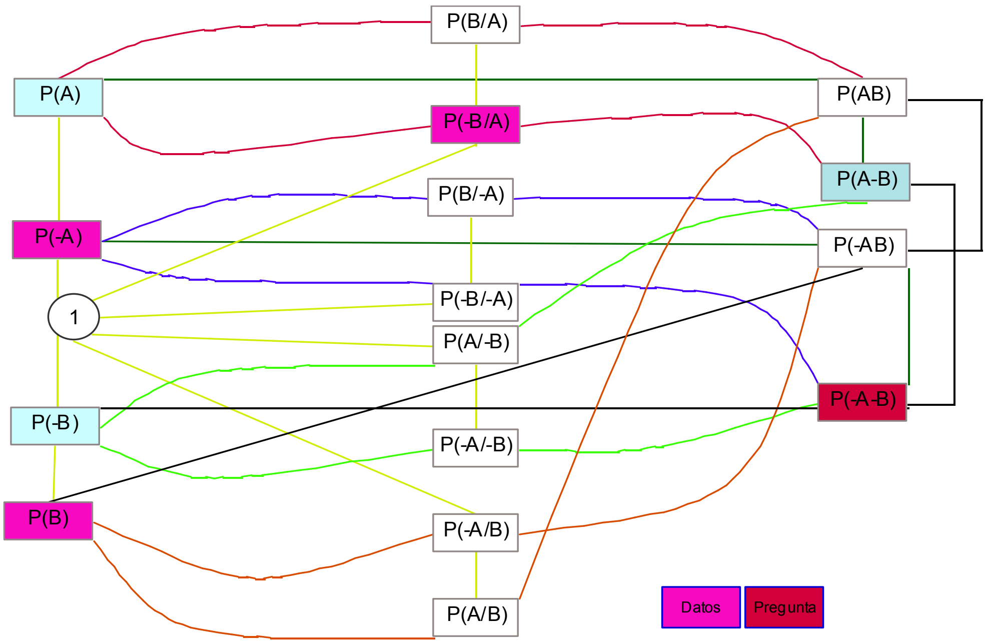


Figura 298 Grafo canónico de [p_{31}]

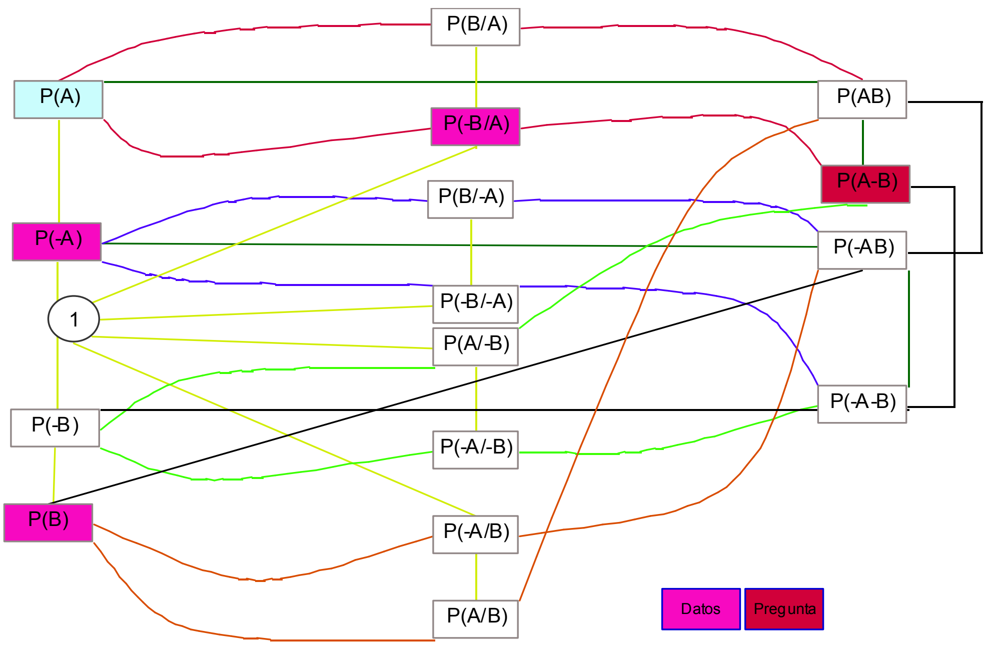


Figura 299 Grafo canónico de [p_{11}]

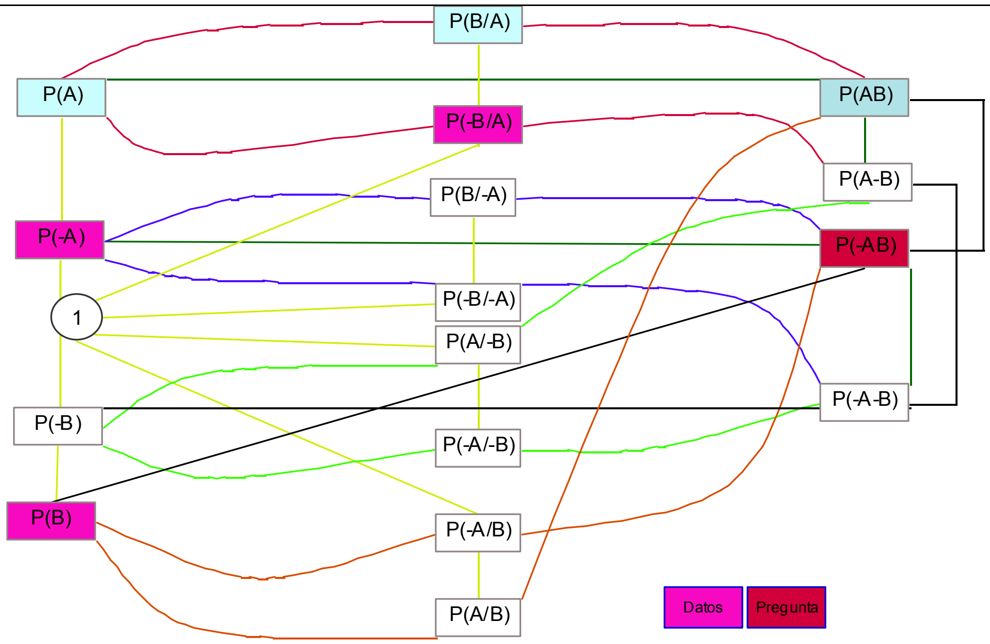


Figura 300 Grafo canónico de [p_{31}]

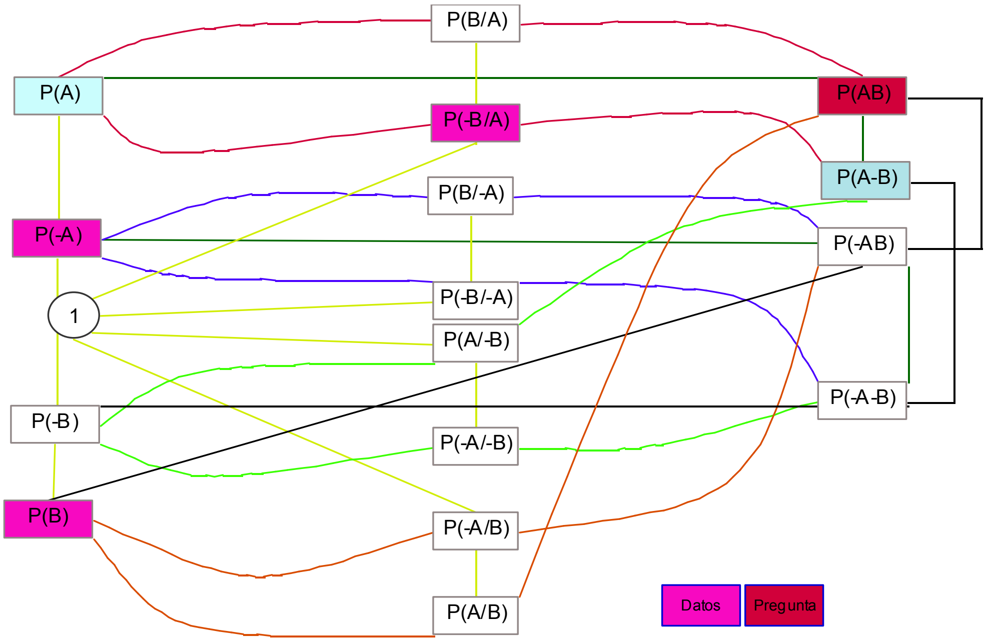


Figura 301 Grafo canónico de [p_{21}]

ÍNDICE

COLECCIÓN DE PROBLEMAS DE LA PRIMERA FASE

PROBLEMA 1 De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	PROBLEMA 9 En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0.3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumno de los que no practica baloncesto, éste practique fútbol es 0.4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.
PROBLEMA 2 Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis un 40% practican golf. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	PROBLEMA 10 En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0.3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0.3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0.4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.
PROBLEMA 3 En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian inglés y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.	PROBLEMA 11 En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie inglés y francés es 0.3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0.3. Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0.4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.
PROBLEMA 4 En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas	PROBLEMA 12 De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0.55. De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0.2, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0.1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.
PROBLEMA 5 En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De éstas, el	PROBLEMA 13 En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer

20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11’25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras	es 0.55. De éstas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0.2, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0.1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras .
PROBLEMA 6 En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11’25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	PROBLEMA 14 La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0.55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0.2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0.1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.
PROBLEMA 7 (Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1, cambiado y preparado para la prueba) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?	PROBLEMA 15 En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0.6 y la de aprobar matemáticas es de 0.7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0.8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?
PROBLEMA 8 Santos, D., (1988), Matemáticas COU, Opciones C y D, Madrid: Santillana. p.248, problema 10, cambiado y preparado para la prueba) En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	PROBLEMA 16 En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0.6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0.5. Sabiendo que p(B/A) = 0.7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?
PROBLEMA 17 El 60% de los asistentes a un congreso desayunan zumo de naranja. De los que no desayunan zumo de naranja, un 40%	PROBLEMA 18 En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un

son franceses y un 24% no desayuna zumo de naranja ni es francés. Calcula la probabilidad de ser francés	40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación

Prueba A

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

2. De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0'55. De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0'2, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0'1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas

3. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

4. El 60% de los asistentes a un congreso desayunan zumo de naranja. De los que no desayunan zumo de naranja, un 40% son franceses y un 24% no desayuna zumo de naranja ni es francés. Calcula la probabilidad de ser francés.

Prueba B

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0'3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumnos de los que no practica baloncesto éste practique fútbol es 0'4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.

2. En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas

3. En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

4. En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un 40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación.

Prueba C

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian ingles y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.

2. En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11'25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

3. En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0'6 y la de aprobar matemáticas es de 0'7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0'8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

4. En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer es 0'55. De estas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0'2, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

Prueba D

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis un 40% practican golf. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

2. En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11’25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

3. En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0’6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0’5. Sabiendo que p(B/A) = 0’7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?

4. En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie ingles y francés es 0’3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0’3. Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0’4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.

Prueba E

ESO – Bachiller ……………… – Facultad ………………… – curso …………- nº…………

1. En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

2. La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

3. Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?

4. En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras

Descripción de cada problema de la primera fase

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**	**Prueba**	**Nº Estudiantes** **(EFM, 2BT-C, 2BCS-H, 1BT-C, 1BCS-H, 4ESO)**
P1	$N_2C_1T_2$	%	Sabemos que de los…	[p_{31}]	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)
P2	$N_2C_1T_3$	%	Además conocemos que de los	[p_{31}]	D	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P3	$N_2C_1T_1$	%	Además, de los que… De que … elegido un alumno que …	[p_{32}]	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)
P4	$N_2C_2T_3$	%	De las mujeres, el 20% …	[p_{11}]	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	[p_{11}]	D, E	66 (4, 14, 6, 16, 14, 12)
P6	$N_2C_2T_1$	%	De las niñas, el 20% … De que eligiendo uno de los que	[p_{12}]	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	[p_{02}]	A, E	67 (4, 15, 7, 16, 14, 11)
P8	$N_2C_3T_3$	%	p(B/A) = 70 %,	[p_{31}]	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P9	$N_2C_1T_2$	Probab.	Sabemos …que de los que	[p_{31}]	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P10	$N_2C_1T_3$	Probab.	Además conocemos … que de los	[p_{31}]	E	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P11	$N_2C_1T_1$	Probab.	Además, …de los que… De que … elegido un alumno que …	[p_{32}]	D	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P12	$N_2C_2T_3$	Probab.	De las mujeres, la probabilidad de …	[p_{11}]	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)
P13	$N_2C_2T_2$	Probab.	De éstas, la probabilidad de que	[p_{11}]	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)
P14	$N_2C_2T_1$	Probab.	De las niñas, la probabilidad de … De que eligiendo un integrante que	[p_{12}]	E	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P15	$N_2C_3T_1$	Probab.	Además, elegido un alumno de los que…	[p_{02}]	C	33 (2, 8, 3, 7, 8, 5)

			Si Juan ….			
P16	$N_2C_3T_3$	Probab.	p(B/A) = 0.7,	[p_{31}]	D	33 (2, 7, 3, 8, 7, 6)
P17	$N_2C_2T_1$	%	De los niños un 40%	Sol. Algeb.	B	34 (2, 8, 3, 7, 8, 6)
P18	$N_2C_2T_2$	%	De los que no …	Sol. Algeb.	A	34 (2, 8, 4, 8, 7, 5)

Tabla 1: Descripción de cada problema de la primera fase

Descripción de los problemas de cada una de las pruebas de la primera fase:

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P1	$N_2C_1T_2$	%	Sabemos que de los…	[p_{31}]
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	[p_{02}]
P12	$N_2C_2T_3$	Probab.	De las mujeres, la probabilidad de …	[p_{11}]
P18	$N_2C_2T_2$	%	De los que no …	Sol. Algeb.

Tabla 2: Descripción de la prueba A

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P4	$N_2C_2T_3$	%	De las mujeres, el 20% …	[p_{11}]
P8	$N_2C_3T_3$	%	p(B/A) = 70 %,	[p_{31}]
P9	$N_2C_1T_2$	Probab.	Sabemos …que de los que	[p_{31}]
P17	$N_2C_2T_1$	%	De los niños un 40%	Sol. Algeb.

Tabla 3: Descripción de la prueba B

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P3	$N_2C_1T_1$	%	Además, de los que… De que … elegido un alumno que …	[p_{32}]
P6	$N_2C_2T_1$	%	De las niñas, el 20% … De que eligiendo uno de los que	[p_{12}]

P13	$N_2C_2T_2$	Probab.	De éstas, la probabilidad de que	[p_{11}]
P15	$N_2C_3T_1$	Probab.	Además, elegido un alumno de los que… Si Juan ….	[p_{02}]

Tabla 4: Descripción de la prueba C

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P2	$N_2C_1T_3$	%	Además conocemos que de los	[p_{31}]
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	[p_{11}]
P11	$N_2C_1T_1$	Probab.	Además, …de los que… De que … elegido un alumno que …	[p_{32}]
P16	$N_2C_3T_3$	Probab.	p(B/A) = 0.7,	[p_{31}]

Tabla 5: Descripción de la prueba D

PROB.	**$N_2C_iT_j$**	**Natur.**	**Semántica**	**[p_{ij}]**
P5	$N_2C_2T_2$	%	De éstas el 20%	[p_{11}]
P7	$N_2C_3T_1$	%	Además, un 80% de los que… Si Juan ….	[p_{02}]
P10	$N_2C_1T_3$	Probab.	Además conocemos … que de los	[p_{31}]
P14	$N_2C_2T_1$	Probab.	De las niñas, la probabilidad de … De que eligiendo un integrante que	[p_{12}]

Tabla 6: Descripción de la prueba E

Nombre, Apellidos:

PROBLEMA 1

En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

PROBLEMA 2

En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.

PROBLEMA 3

El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.

PROBLEMA 4

De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?

PROBLEMA 5

El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?

PROBLEMA 6

De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?

ÍNDICE

A continuación mostramos las tablas (de tabla 1 a tabla 18) correspondientes a cada uno de los problemas de la primera fase.

Problema 1 De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	4	8	7	5	34
1. Procesos de resolución con éxito.	1	0	0	1	2	0	4
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	0	0	1	0	0	1
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	3	2	3	1	3	12
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	1	0	0	1	0	2
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	2	0	0	0	0	2
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	1	0	0	2
7. Blanco	0	4	0	2	3	2	11

Tabla 1: Número de estudiantes cuyas respuestas a P1 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 2 Un 30% de los huéspedes de un hotel practican el tenis y el golf y un 30% practican el tenis y no practican el golf. Además conocemos que de los huéspedes que no practican tenis un 40% practican golf. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	EFM 2	2BT-C 7	2BCS-H 3	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 6	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	3	0	1	2	0	6
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	1	2	2	0	3	8
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	0	0	2	0	4
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	1	0	0	0	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
7. Blanco	1	0	1	5	3	3	13

Tabla 2: Número de estudiantes cuyas respuestas a P2 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 3 En una academia de idiomas un 30% de los alumnos estudian inglés y francés y un 30% estudian inglés y no estudian francés. Además, de los alumnos que no estudian inglés, un 40% estudian francés. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 5	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	1	0	1
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	2	0	0	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	4	0	1	4	1	11
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	1	1	4	3	1	10
2.iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección	0	0	1	0	0	0	1
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	1	0	0	0	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
7. Blanco	0	0	1	2	0	3	6

Tabla 3: Número de estudiantes cuyas respuestas a P3 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 4 En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres. De las mujeres, el 20% se dedican a las tareas administrativas, y de todos los trabajadores, el 11'25% son hombres y administrativos. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 6	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	2	2	0	3	0	1	8
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	1	2	1	6	2	10
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	1	0	0	0	0	1
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	1	0	0	1	2
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	1	0	1	0	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
7. Blanco	0	1	0	2	2	1	6

Tabla 4: Número de estudiantes cuyas respuestas a P4 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 5 En una universidad el 55% de los estudiantes son mujeres. De estas, el 20% estudian carreras de letras, y de todos los estudiantes, el 11'25% son hombres y estudian carreras de letras. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	4	14	6	16	14	12	66
1. Procesos de resolución con éxito.	2	8	3	7	8	0	28
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	2	4	3	1	3	8	21
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	0	0	0	0	1	1
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	0	0	0	1	0	1
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	0	0	1	0	1
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	0	1	0	0	3
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
7. Blanco	0	2	1	6	6	3	18

Tabla 5: Número de estudiantes cuyas respuestas a P5 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 6 En un campamento de verano el 55% de los integrantes son niñas. De las niñas, el 20% realizan actividades acuáticas, y de todos los integrantes, el 11’25% son niños y realizan actividades acuáticas. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	5	33
1. Procesos de resolución con éxito.	2	0	0	0	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	1	3	2	6
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	0	1	0	1	0	2
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	3	2	1	1	1	8
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	0	2	0	0	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	2	0	3
7. Blanco	0	2	0	3	1	2	8

Tabla 6: Número de estudiantes cuyas respuestas a P6 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 7 (Grupo Erema: M.A. Martín, J.M. Rey, M. Reyes, Estadística y Probabilidad, Bachillerato, Cuaderno 4, Grupo Editorial Bruño, Madrid 2002, página 26, problema 1, cambiado y preparado para la segunda fase) Un 60% de los alumnos de un colegio aprobaron filosofía y un 70% matemáticas. Además, un 80% de los alumnos que aprobaron matemáticas, aprobaron también filosofía. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	4	15	7	16	14	11	67
1. Procesos de resolución con éxito.	4	0	0	0	0	0	4
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	3	1	1	4	6	15
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	0	1	0	0	0	1
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	6	3	8	3	2	22
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	2	0	1	0	3
7. Blanco	0	6	1	7	6	4	24

Tabla 7: Número de estudiantes cuyas respuestas a P7 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 8 Santos, D., (1988), Matemáticas COU, Opciones C y D, Madrid: Santillana. p.248, problema 10, cambiado y preparado para la segunda fase) En un curso el porcentaje de aprobados en Historia (A) es 60 %. Para Matemáticas (B) es del 55 %. Sabiendo que p(B/A) = 70 %, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 6	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	6	1	0	4	4	15
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	0	0	0	1	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	2	6	2	0	4	4	18
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	3	1	1	0	5
7. Blanco		2	2	1	2	2	9

Tabla 8: Número de estudiantes cuyas respuestas a P8 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 9 En un instituto, la probabilidad de practicar baloncesto y fútbol es 0.3 y la probabilidad de practicar el baloncesto y no practicar el fútbol es 0'3. Sabemos que la probabilidad de que elegido un alumno de los que no practica baloncesto éste practique fútbol es 0'4. Calcula la probabilidad de practicar fútbol.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	6	34
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	2	1	2	2	2	10
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	1	0	1	0	4
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	0	0	1	0	0	1
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	0	0	0	0	1	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	3	1	0	4
7. Blanco		4	1	1	4	3	13

Tabla 9: Número de estudiantes cuyas respuestas a P9 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 10 En un hotel, la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique el tenis y el golf es 0'3 y la probabilidad de que practique el tenis y no practique el golf es 0'3. Además conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis éste practique golf es 0'4. Calcula la probabilidad de que elegido un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
1. Procesos de resolución con éxito.	1	1	0	0	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	3	1	3	5	3	16
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	1	4	1	2	10
7. Blanco	0	1	1	1	1	1	5

Tabla 10: Número de estudiantes cuyas respuestas a P10 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 11 En una academia de idiomas, elegido un estudiante al azar la probabilidad de que estudie ingles y francés es 0'3 y de que estudie inglés y no estudie francés es 0'3. Además, elegido un alumno de los que no estudian inglés, la probabilidad de que estudie francés es de 0'4. Calcula la probabilidad de que estudie inglés elegido un alumno que estudia francés.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	7	3	8	7	6	33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	1	0	0	0	0	1
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	1	2	0	1	0	5
2.iii. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por otra marginal	0	2	0	2	0	0	4
2.iv. Interpretación de la intersección por una marginal y del dato condicional por intersección	0	0	0	0	0	1	1
2.v. Interpretación de la intersección por marginal	0	1	0	0	1	0	2
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	0	0	0	0	4	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco		2	1	5	4	2	14

Tabla 11: Número de estudiantes cuyas respuestas a P11 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 12 De los trabajadores de una empresa, la probabilidad de ser mujer es de 0'55. De las mujeres, la probabilidad de dedicarse a las tareas administrativas es de 0'2, y elegido un trabajador al azar, la probabilidad de ser hombre y administrativo es 0'1125. Calcula la probabilidad de ser mujer y no realizar tareas administrativas.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 4	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 5	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	2	1	1	0	1	1	6
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	2	0	0	2	3	7
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	0	2	0	0	0	2
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	1	0	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco		3		3	8	1	15

Tabla 12: Número de estudiantes cuyas respuestas a P12 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 13 En una universidad, elegido un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer es 0'55. De estas, la probabilidad de que estudien carreras de letras es de 0'2, y elegido un estudiante al azar, la probabilidad de ser hombre y estudiar carrera de letras es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar (hombre o mujer) estudie carrera de letras.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 3	1BT-C 7	1BCS-H 8	4ESO 5	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	1	2	0	0	0	0	3
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	1	2	2	2	3	10
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	1	1	0	0	0	0	2
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	2	0	1	1	0	4
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	0	1	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco	0	1	1	3	5	2	12

Tabla 13: Número de estudiantes cuyas respuestas a P13 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 14 La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.	EFM 2	2BT-C 7	2BCS-H 3	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 6	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	1	0	0	1	0	0	2
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	1	2	2	5
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	1	0	0	0	0	1
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	3	3	0	1	0	7
3.ii. Interpretación de la condicional por una marginal.	0	1	0	1	0	0	2
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	0	0	0	1	1
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	0	0	1	0	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	1	0	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco	0	2	0	3	4	3	12

Tabla 14: Número de estudiantes cuyas respuestas a P14 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 15 En un colegio, la probabilidad de aprobar filosofía es de 0'6 y la de aprobar matemáticas es de 0'7. Además, elegido un alumno de los que aprobaron matemáticas, la probabilidad de que aprobara filosofía es de 0'8. Si Juan aprobó filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también matemáticas?	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	5	33
1. Procesos de resolución con éxito.	2	0	0	0	0	0	2
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	0	0	0	0	1	1
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	0	3	1	4
3.i. Interpretación de la condicional por intersección	0	1	0	0	2	1	4
4. Uso no adecuado de herramientas aritméticas como las reglas de tres, los porcentajes.	0	1	0	1	0	0	2
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	1	0	0	1
7. Blanco	0	6	3	5	5	2	21

Tabla 15: Número de estudiantes cuyas respuestas a P15 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 16 En un curso la probabilidad de aprobar Historia (A) es 0'6 y la de aprobar Matemáticas (B) es 0'5. Sabiendo que p(B/A) = 0'7, ¿cuál es la probabilidad de que, escogido al azar un alumno, resulte no haber aprobado ninguna de las dos asignaturas?	EFM 2	2BT-C 7	2BCS-H 3	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 6	Muestra 33
1. Procesos de resolución con éxito.	0	0	0	0	0	0	0
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	1	1	0	1	3	3	9
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	0	0	0	1	0	1
5. Utilización no adecuada de conceptos de probabilidad como la complementariedad o de fórmulas de probabilidad.	2	1	1	1	3	3	11
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	2	0	3	1	0	6
7. Blanco		4	2	4	2	3	15
Queremos resaltar que en este problema, al igual que en P8, los estudiantes que interpretan que p(B∣A) representa la probabilidad de los aprobados en las dos asignaturas, es decir, interpretan p(B∣A) como la probabilidad de la intersección, a la vez interpretan que el complementario de esta intersección es la probabilidad de no aprobar ninguna asignatura. De aquí el número elevado que se corresponde con el descriptor 5.							

Tabla 16: Número de estudiantes cuyas respuestas a P16 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 17: En un colegio hay un 60% de niñas. Sabemos que el 16% son niños y practican la natación, y de los niños un 40% practica la natación. Calcula la probabilidad de que elegido una niña, ésta practique la natación.	EFM	2BT-C	2BCS-H	1BT-C	1BCS-H	4ESO	Muestra
	2	8	3	7	8	6	34
1. Procesos de resolución con éxito.	2	0	0	0	0	0	2
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	1	0	0	0	0	1
2.ii Interpretación del dato condicional por intersección	0	0	0	0	1	0	1
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	0	1	0	0	0	0	1
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	4	4	3	11
7. Blanco	0	3	3	3	3	2	14

Tabla 17: Número de estudiantes cuyas respuestas a P17 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Problema 18: El 60% de los asistentes a un congreso desayunan zumo de naranja. De los que no desayunan zumo de naranja, un 40% son franceses y un 24% no desayuna zumo de naranja ni es francés. Calcula la probabilidad de ser francés.	EFM 2	2BT-C 8	2BCS-H 4	1BT-C 8	1BCS-H 7	4ESO 5	Muestra 34
1. Procesos de resolución con éxito.	1	0	0	0	0	0	1
2.i. Interpretación del dato condicional por marginal	0	1	0	0	0	0	1
2.vi. Interpretación de la intersección por condicional	0	3	1	0	0	2	6
2.vii. Otras interpretaciones de los datos	1	1	0	0	0	1	3
3.iii. Otras interpretaciones de la pregunta.	0	0	0	2	1	0	3
6. No se entienden las cantidades y/o los signos utilizados en el texto del problema	0	0	1	0	2	0	3
7. Blanco	0	2	1	3	2	2	10

Tabla 18: Número de estudiantes cuyas respuestas a P18 se corresponden con los descriptores cuantificables.

Las tablas siguientes, 19 y 20, muestran los porcentajes de estudiantes según los descriptores definidos, en los problemas con los datos en porcentajes y en los problemas con los datos en términos de probabilidad respectivamente.

		PROBLEMAS CON LOS DATOS EN PORCENTAJES							
		P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	11.76	18.18	3.03	23.53	42.42	6.06	5.97	0
	1'. No éxito	55.88	42.43	78.79	58.82	30.31	69.7	58.21	73.53
	2.i. Condicional por marginal (datos)	5.26	0	7.69	0	0	0	0	0
	2.ii Condicional por intersección	63.16	57.14	42.31	38.46	55.26	26.09	38.46	60
	2.iii. Intersección por marginal y condicional por marginal	0	28.57	38.46	0	0	0	0	0
	2.iv. Intersección por marginal y condicional por intersección	0	0	3.85	5	0	8.7	0	0
	2.v. Intersección por marginal	10.53	0	3.85	0	2.63	0	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	10.53	0	0	0	2.63	0	0	0
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	0	0	0	0	0	0	2.56	0
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	0	0	0	34.78	56.41	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0	0	0	0	0	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	7.14	0	10	2.63	0	7.69	0
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0	0	20	7.9	17.39	0	4
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	10.53	7.14	3.85	5	2.63	13.04	0	72
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	0	0	0	0	0	0	0	20
	7. Blanco	32.36	39.39	18.18	17.64	27.27	24.24	35.82	26.47

Tabla 19: Porcentajes de los estudiantes en los ocho primeros problemas según descriptores definidos

		PROBLEMAS CON LOS DATOS EN TÉRMINOS DE PROBABILIDAD							
		P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	0	6.06	0	17.64	9.09	6.06	6.06	0
	1'. No éxito	61.76	78.79	57.58	38.24	54.55	57.58	30.3	54.55
	2.i. Condicional por marginal (datos)	0	0	5.26	0	0	0	10	0
	2.ii Condicional por intersección	47.62	61.54	26.32	25	55.56	26.32	40	50
	2.iii. 2ª intersección por marginal y condicional por marginal	19.05	38.46	21.05	0	0	0	0	0
	2.iv. 2ª intersección por marginal y condicional por intersección	0	0	5.26	0	11.11	0	0	0
	2.v. Intersección por marginal	4.76	0	10.53	0	0	0	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	0	0	0	15.38	0	5.26	0	0
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	4.76	0	0	0	0	0	0	5.56
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0	21.05	0	0	36.84	40	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0	0	0	0	10.53	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	0	0	7.69	0	5.26	0	0
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0	0	0	22.22	5.26	20	0
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	4.76	0	5.26	7.69	5.56	5.26	0	61.11
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	19.05	0	5.26	0	5.56	5.26	10	33.33
	7. Blanco	38.24	15.15	42.42	44.12	36.36	36.36	63.64	45.45

Tabla 20: Porcentajes de los estudiantes en los problemas de P9 a P16 según descriptores definidos

La tabla 21 da cuenta de los porcentajes de los estudiantes en los problemas indeterminados, P17 y P18, según los descriptores elegidos.

		P17	P18
DESCRIPTORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES	1. Éxito	5.88	2.94
	1'. No éxito	53.92	67.65
	2.i. Condicional por marginal (datos)	2.94	2.94
	2.ii Condicional por intersección	2.94	0
	2.iii. 2ª intersección por marginal y condicional por marginal	0	0
	2.iv. 2ª intersección por marginal y condicional por intersección	0	0
	2.v. Intersección por marginal	0	0
	2.vi. Intersección por condicional	0	17.65
	2.vii. Otras interpretaciones de datos	2.94	8.82
	3.i. Condicional por intersección (pregunta)	0	0
	3.ii. Condicional por marginal (pregunta)	0	0
	3.iii. Otras interpretaciones pregunta	0	8.82
	4. Uso no adecuado herramientas aritméticas	0	0
	5. Uso no adecuado conceptos y fórmulas probabilidad	0	0
	6. No se entienden las cantidades y/o signos utilizados en el texto del problema	32.35	8.82
	7. Blanco	41.18	29.41

Tabla 21: Porcentajes de los estudiantes en los problemas indeterminados P17 y P18 según descriptores definidos

Las tablas siguientes (22 a 25) muestran el número de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase, según el nivel educativo:

4º ESO	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	13	2	0	13	2	3
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	7	0	0	4	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	6	2	0	9	2	3
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	10	12	16	12	13	20
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	10	11	0	0	19
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	5	0	0	0	4	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	2	0	0	0	1	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	1	1	9	11	10	20
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	1	1	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	5	9	3	1	1	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	8	17	15	6	16	8

Tabla 22: Número de estudiantes de 4º ESO que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

1º BCN	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	4	3	1	12	2	2
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	4	1	1	12	2	2
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	2	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	15	13	14	9	11	14
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	10	10	0	0	10
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	1
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	1	0	0	2	3	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	1	0	0	2	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	2	0	0	0	1	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	1	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	5	12	11	4	7	12
2.2.2.1.3. Reglas de tres	2	0	0	2	1	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	5	3	4	0	0	1
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	5	8	9	3	11	8

Tabla 23: Número de estudiantes de 1º BCN que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

2º BCCSS	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	4	4	2	6	0	3
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	4	0	0	6	0	3
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	3	0	0	3	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	1	1	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	3	1	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	3	1	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	8	7	7	6	6	5
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	1	4	2	0	0	4
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	1	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	1	0	0	2	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	1	0	0	0	3	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	2	0	4	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	5	4	3	0	4
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	1	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	1	1	3	0	2	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	1	0	0	0	1	1
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	5	5	2	1	2	1
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	1	2	1	2	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	2	1	1	1	1	0
3. Otras	3	4	6	3	9	7

Tabla 24: Número de estudiantes de 2º BCCSS que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

EFM	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	8	4	3	7	5	2
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	5	1	0	6	1	1
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	1	2	1	3	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	1	1	1	1	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	3	2	1	0	1	1
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	1	6	5	0	3	5
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	3	2	0	3	3
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	0	1	0	0	0
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	1	1	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	1	1	0	0	2
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	1	1	1	0	0	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	2	0	0	0	1
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	1	0	2	3	2	3

Tabla 25: Número de estudiantes de EFM que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Las tablas siguientes (26 a 29) muestran el porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase, según el nivel educativo:

4º ESO	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	41.94	6.45	0	41.94	6.45	9.68
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	53.85	0	0	30.77	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	46.15	50	0	69.23	100	100
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	32.26	38.70	51.61	38.71	41.94	64.52
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	53.33	68.75	0	0	95
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	50	0	0	0	30.77	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	20	0	0	0	7.69	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	10	8.33	56.25	91.67	76.92	100
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	6.25	8.33	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	50	75	18.75	8.33	7.69	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	25.8	54.84	48.39	19.35	51.61	25.8

Tabla 26: Porcentaje de estudiantes de 4º ESO que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

1º BCN	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	16.67	12.5	4.17	50	8.33	8.33
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	100	33.33	100	100	100	100
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	66.67	0	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	0	0	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	62.5	54.17	58.33	37.5	45.84	58.34
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	76.92	71.43	0	0	71.43
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	7.14
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	6.67	0	0	22.22	27.27	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	6.67	0	0	22.22	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	13.33	0	0	0	9.1	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	9.1	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	33.33	92.31	78.57	44.44	63.64	85.71
2.2.2.1.3. Reglas de tres	13.33	0	0	22.22	9.1	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	0	0	0	0	0
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	33.33	23.08	28.57	0	0	7.14
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	20.83	33.33	37.5	12.5	45.83	33.33

Tabla 27: Porcentaje de estudiantes de 1º BCN que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

2º BCCSS	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1. Proceso de resolución con éxito	26.67	26.67	13.33	40	0	20
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	100	0	0	100	0	100
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	75	0	0	50	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	25	50	0	0	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	0	75	50	0	0	0
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	100	100	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	53.33	53.33	46.67	40	40	33
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	12.5	57.14	28.57	0	0	80
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	16.67	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	12.5	0	0	33.33	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	12.5	0	0	0	50	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	28.57	0	66.67	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	71.43	57.14	50	0	80
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	16.67	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	12.5	14.28	42.86	0	33.33	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	12.5	0	0	0	16.67	20
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	62.5	71.43	28.57	16.67	33.33	20
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	14.28	28.57	16.67	33.33	0
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	25	14.28	14.29	16.67	16.67	0
3. Otras	20	26.67	40	20	60	46.67

Tabla 28: Porcentaje de estudiantes de 2º BCCSS que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

EFM	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	80	40	30	70	50	20
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	0	0	0	0	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	62.5	25	0	85.71	20	50
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	25	66.67	14.28	60	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	100	50	100	33.33	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	37.5	50	33.33	0	20	50
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	10	60	50	0	30	50
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	0	30	40	0	100	60
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	0	0	0	0	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	0	0	0	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	0	0	20	0	0	0
2.2.2.1.3. Reglas de tres	0	0	0	0	0	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	0	16.67	20	0	0	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	0	16.67	20	0	0	40
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	100	16.67	20	0	0	0
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	33.33	0	0	0	20
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
3. Otras	10	0	20	30	20	30

Tabla 29: Porcentaje de estudiantes de EFM que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Las tablas 30 y 31 muestran, respectivamente, el número de estudiantes y el porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase de toda la muestra

Toda la muestra	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	29	13	6	38	9	10
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	7	0	0	4	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	19	4	1	33	5	9
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	3	0	0	3	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	4	3	1	3	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	1	1	1	1	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	3	5	2	0	1	1
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	3	1	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	34	38	42	27	33	44
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	1	27	25	0	3	36
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	1
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	6	0	0	2	8	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	2	0	0	4	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	5	0	0	0	5	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	2	0	5	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	6	18	25	18	17	36
2.2.2.1.3. Reglas de tres	2	0	1	4	1	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	1	2	4	0	2	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	1	1	1	0	1	3
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	16	18	10	2	3	2
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	3	2	1	2	1
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	2	1	1	1	1	0
3. Otras	17	29	32	15	38	26

Tabla 30: Número de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase

Toda la muestra	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
1. Proceso de resolución con éxito	36.25	16.25	7.5	47.5	11.25	12.5
1.1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	24.13	0	0	10.53	0	0
1.1.1 Uso de destrezas heurísticas	0	0	0	0	0	0
1.2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	65.52	30.77	16.67	86.84	55.55	90
1.2.1 Uso de destrezas heurísticas	16.7	0	0	9.09	0	0
1.3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	30.77	50	2.63	33.33	0
1.3.1 Uso de destrezas heurísticas	0	25	33.33	100	33.33	0
1.4. Proceso de resolución probabilístico	10.34	38.46	33.33	0	11.11	10
1.4.1 Uso de destrezas heurísticas	0	60	50	0	0	0
2. Proceso de resolución sin éxito	42.5	47.5	52.5	33.75	41.25	55
2.2.1.1.1 Interpretación del dato condicional por la intersección	2.94	71.05	59.52	0	9.1	81.81
2.2.1.1.2 Interpretación del dato condicional por la marginal	0	0	0	0	0	2.27
2.2.1.2.1 Interpretación de la pregunta condicional por la intersección	17.65	0	0	7.41	24.24	0
2.2.1.2.2 Interpretación de la pregunta condicional por el dato condicional	5.88	0	0	14.81	0	0
2.2.1.2.3. Interpretación de la pregunta condicional por la marginal	14.71	0	0	0	15.15	0
2.2.2.1.1. Números decimales	0	0	4.76	0	15.15	0
2.2.2.1.2. Porcentajes	17.65	47.37	59.52	66.67	51.51	81.81
2.2.2.1.3. Reglas de tres	5.88	0	2.38	14.81	3.03	0
2.2.2.2.1. Conceptos de probabilidad	2.94	5.26	12.5	0	6.06	0
2.2.2.2.2.. Fórmulas de probabilidad	2.94	2.63	2.38	0	3.03	6.82
2.2.3. Errores en las interpretaciones de los sucesos	47.06	47.37	23.81	7.41	9.1	4.55
2.3.1. Uso competente de las destrezas heurísticas	0	7.89	4.76	3.7	6.06	2.27
2.3.2. Uso no adecuado de las destrezas heurísticas	5.88	2.63	2.38	3.7	3.03	0
3. Otras	21.25	36.25	40	18.75	47.5	32.5

Tabla 31: Porcentaje de estudiantes que manifiestan determinado tipo de respuesta recogida en los descriptores seleccionados en la segunda fase