

**UNIVERSITAT
JAUME I**

Técnicas Geoestadísticas Espectrales. Análisis de la Estacionariedad e Independencia

Tesis Doctoral

Presentada por: Pablo Juan Verdoy

Dirigida por: Jorge Mateu Mahiques

Departamento de Matemáticas
Universitat Jaume I de Castellón

Marzo 2005

D. Jorge Mateu Mahiques, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón

CERTIFICA: que la presente memoria, *Técnicas Geoestadísticas Espectrales. Análisis de la Estacionariedad e Independencia*, ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Matemáticas por D. Pablo Juan Verdoy y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, la presenta ante el Departamento de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón, a 21 de Marzo de 2005.

EL Director

Fdo.: Jorge Mateu Mahiques

Agradecimientos

A los compañeros del Departamento de Matemáticas, sobretodo a Fuensanta Saura, Gil Lorenzo y Pablo Gregori, por todas las ayudas en el campo de la estadística y todo lo referente a ella, a M^a José Peris, Modesto Beltrán y Floreal Gracia, por estar en la Universidad apoyando incluso en horas intempestivas.

A Rubén Fernández, que con sus amplios conocimientos de todo tipo tanto de software como de geoestadística, ha permitido solucionar gran cantidad de problemas que iban surgiendo.

A Emilio y a Miriam por todo el apoyo respecto al trabajo y amistad.

A Carlos Añó y a Carmen Antolín, por iniciarme en el campo de la edafología y en particular sobre erosión de suelos, y por permitirme visitar y colaborar con el CIDE.

A Jorge Mateu, que me ha introducido en el apasionante mundo de la estadística, y en particular en el de la geoestadística . Sin él, ninguno de los objetivos que he cumplido hubiesen sido posibles. Y a Eva, Victor, Adrián y Nadia, que han permitido a Jorge la máxima atención en nuestro trabajo.

A mi familia, sobretodo a mi madre y amigos, Antonio, Rosana, Tatiana, Ana, Iván, David... que me han prestado todo su apoyo durante el largo tiempo que he compaginado trabajo y estudios. A su saber estar siempre ahí en los momentos fáciles y sobre todo los difíciles.

A ti Estela, por todos los momentos que no he podido dedicarte.

A Estela

Índice general

1. Introducción	17
2. Fundamentos básicos de la metodología geoestadística	21
2.1. Introducción	22
2.2. Variogramas. Inferencia y modelización	25
2.2.1. Anisotropía	30
2.2.2. Condición de positividad	32
2.2.3. Versiones muestrales de algunas medidas de variabilidad espacial	32
2.2.4. Factores a tener en cuenta para la modelización	34
2.2.5. Métodos de estimación de los parámetros del variograma	35
2.3. Kriging: predicción e interpolación	39
2.3.1. Kriging simple	41
2.3.2. Kriging ordinario	42
2.3.3. <i>Kriging</i> con un modelo de tendencia (KT)	42
2.3.4. <i>Kriging</i> en bloques	44
2.3.5. Kriging factorial	44
2.3.6. <i>Cokriging</i>	45
2.3.7. Kriging con factor externo (<i>external drift</i>)	45
2.3.8. Krigings no lineales	45
2.3.9. Validación cruzada	46
2.4. Métodos alternativos de estimación e interpolación	47
2.4.1. Un modelo básico y general de relación entre variables	47
2.4.2. <i>Thin plate splines</i> (TPS)	48
3. Teoría espectral de procesos espaciales	51
3.1. Dominio espectral: análisis de Fourier	52

3.1.1.	Análisis discreto de Fourier	52
3.1.2.	Series de Fourier para funciones periódicas	54
3.1.3.	Transformaciones de Fourier continuas	55
3.1.4.	Representación de Fourier de las funciones no periódicas	56
3.1.5.	<i>Aliasing</i> en el continuo	56
3.1.6.	<i>Transformadas Fast Fourier</i>	57
3.1.7.	<i>Wavelets</i> frente a Fourier	58
3.2.	Representación espectral	59
3.2.1.	Representación espectral para un proceso estacionario	59
3.2.2.	Representación espectral de un proceso no estacionario	63
3.3.	Densidades espectrales	64
3.3.1.	Clases de densidades espectrales	64
3.3.2.	Efecto de pérdida de especificación en la densidad espectral	67
3.4.	Estructuras de covarianza espacial de la familia <i>Matérn</i>	68
3.4.1.	Forma matemática de la función de correlación de <i>Matérn</i>	69
3.4.2.	Comparación con la familia exponencial <i>Powered</i>	71
3.4.3.	Relación entre correlación y selección de parámetros	72
3.4.4.	Valores de θ_2 que satisfacen $p = \rho(d, \theta_1, \theta_2)$	73
3.5.	Modelización y estimación de la densidad espectral	74
3.5.1.	Dominio espectral: periodograma <i>tapered</i>	74
3.5.2.	<i>Tapering</i>	78
3.5.3.	El modelo <i>Matérn</i> para densidades espectrales	80
3.5.4.	Función de verosimilitud	82
3.5.5.	Periodograma para procesos no estacionarios	83
4.	Análisis de la estimación de la densidad espectral y de las estimaciones de los parámetros espaciales: un estudio de simulación	87
4.1.	Introducción	87
4.2.	Estimación de la densidad espectral y estimación de los parámetros	89
4.2.1.	Análisis de la influencia de N	95
4.2.2.	Análisis de los estimadores de los parámetros espaciales ν y ϕ	96
4.3.	Conclusiones	108

5. Análisis comparativo entre las estimaciones espaciales y espectrales	121
5.1. Introducción	122
5.2. Expresiones formales del modelo <i>Matérn</i>	123
5.3. Métodos de estimación de los parámetros	124
5.3.1. Mínimos cuadrados ponderados espaciales	124
5.3.2. Método de Máxima Verosimilitud en la escala espectral	125
5.3.3. Método de MCO y MCP en la escala espectral	126
5.4. Dependencia del periodograma para datos regularmente espaciados	126
5.4.1. Marco espacial	126
5.4.2. Cumulantes espaciales y cumulantes espectrales. Caso espacial	129
5.4.3. Resultados teóricos en el dominio espacial	130
5.5. Estudio comparativo de las estimaciones de los parámetros	137
6. Tests de independencia y de estacionariedad	165
6.1. Test de independencia para procesos espaciales	165
6.1.1. Desarrollo del test	166
6.1.2. Estudio de las propiedades del test bajo simulación	170
6.2. Test de estacionariedad	185
6.2.1. Un test formal de estacionariedad para un proceso espacial	186
6.2.2. Estudio del comportamiento del test bajo simulación	188
7. Aplicación: análisis geoestadístico espacial y espectral	195
7.1. Introducción	195
7.2. Descripción de variables y zona de estudio	198
7.2.1. Zona de estudio	198
7.2.2. Descripción de las variables y toma de muestras	198
7.3. Estimaciones espaciales y predicciones mediante <i>kriging</i>	203
7.4. Análisis espectrales	213
8. Conclusiones y futuras investigaciones	233
9. Base de datos, Códigos de R y Fortran	237
9.1. Banco de datos para las 118 posiciones de muestreo en la región de estudio, Vila-Real, Betxí, Burriana y Alquerías del Niño Perdido	237
9.2. Códigos R y Fortran	241

10. Referencias

275

Índice de figuras

2.1. Ejemplos de modelos teóricos de variogramas: modelos exponencial, esférico, Gaussiano, lineal y potencial.	30
2.2. Ejemplo de los distintos elementos estructurales defintorios de un modelo de variograma. Nótese que cuando el rango es infinito, el investigador puede tomarlo como el lugar donde el variograma se estabiliza.	31
4.1. Perspectiva de las densidades espectrales para un conjunto de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) : <i>Izquierda</i> : densidad de <i>Matérn</i> teórica con $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$; <i>Derecha</i> : periodograma estimado usando <i>rounded taper</i> con $\epsilon = \delta = 3$	91
4.2. $\log(I_N(\boldsymbol{\omega}))$ frente $\log(\boldsymbol{\omega})$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>rounded tapering</i> con parámetros $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$ y estimación de una densidad espectral de <i>Matérn</i> con parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$	92
4.3. $\log(I_N(\boldsymbol{\omega}))$ frente $\log(\boldsymbol{\omega})$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>tapering</i> multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$ y estimación de una densidad espectral de <i>Matérn</i> con parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$	93
4.4. $\log(I_N(\boldsymbol{\omega}))$ frente $\log(\boldsymbol{\omega})$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>no tapering</i> con parámetros $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$ y estimación de una densidad espectral de <i>Matérn</i> con parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$	94

- 4.5. p -valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (*primera fila*), $N = 10 \times 10$ (*segunda fila*), $N = 5 \times 5$ (*tercera fila*) y $\nu = 0.5$. *Primera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); *Segunda columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); *Tercera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces). 99
- 4.6. p -valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (*primera fila*), $N = 10 \times 10$ (*segunda fila*), $N = 5 \times 5$ (*tercera fila*) y $\nu = 1.0$. *Primera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); *Segunda columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); *Tercera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces). 100
- 4.7. p -valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (*primera fila*), $N = 10 \times 10$ (*segunda fila*), $N = 5 \times 5$ (*tercera fila*) y $\nu = 1.5$. *Primera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); *Segunda columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); *Tercera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces). 101
- 4.8. *Box-plots* de valores estimados del parámetro ν obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro valores de $\delta = \epsilon = 1, 3, 5, 10$ considerados. Con cada subfigura, las siguientes combinaciones de *sill* y rango son mostrados (desde superior izquierda a inferior derecha): (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166) y (2.9, 300). Finalmente, $N = 20 \times 20$ es fijado, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$ y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt). 102
- 4.9. *Box-plots* de valores estimados del parámetro ν obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro valores de $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$ considerados. Con cada subfigura, las siguientes combinaciones de *sill* y rango son mostrados (desde superior izquierda a inferior derecha): (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166) y (2.9, 300). Finalmente, $N = 20 \times 20$ es fijado, $\epsilon = 1, 3, 5, 10$ y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt). 103

- 4.10. *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 1$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt). 104
- 4.11. *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro (desde arriba hasta abajo y de izquierda a derecha): $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 3$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt). 105
- 4.12. *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 5$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt). 106
- 4.13. *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 10$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt). 107
- 5.1. Comparación de la estimación del parámetro *sill*=2.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 1.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 143

- 5.2. Comparación de la estimación del parámetro rango=1.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 144
- 5.3. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=1.0. 145
- 5.4. Comparación de la estimación del parámetro *sill*=2.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 5.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 146
- 5.5. Comparación de la estimación del parámetro rango=5.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 147
- 5.6. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=5.0. 148
- 5.7. Comparación de la estimación del parámetro *sill*=2.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 10.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 149

- 5.8. Comparación de la estimación del parámetro rango=10.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 150
- 5.9. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=10.0. 151
- 5.10. Comparación de la estimación del parámetro *sill*=2.9 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 10.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 152
- 5.11. Comparación de la estimación del parámetro rango=10.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.9 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 153
- 5.12. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.9 y rango=10.0. 154
- 5.13. Comparación de la estimación del parámetro *sill*=2.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 15.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 155

- 5.14. Comparación de la estimación del parámetro rango=15.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha). 156
- 5.15. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=15.0. 157
- 5.16. Comparación de la estimación del parámetro *sill*=2.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 5.0 y $\nu = 1.0$, con tamaño de rejilla 20x20 (superior izquierda), 30x30, 40x40, 50x50 (inferior derecha). 158
- 5.17. Comparación de la estimación del parámetro rango = 5.0 para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y $\nu = 1.0$, con tamaño de rejilla 20x20 (superior izquierda), 30x30, 40x40, 50x50 (inferior derecha). 159
- 5.18. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 1.0$ para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango = 5.0, con tamaño de rejilla 20x20 (superior izquierda), 30x30, 40x40, 50x50 (inferior derecha). 160

- 5.19. Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 1.0, $\nu = 0.5$, rango = 5.0, $\nu = 0.5$, rango = 1.0, $\nu = 1.0$ fila superior, y la misma estructura con rango fijo en la fila inferior. 161
- 5.20. Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 2.0$ para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 1.0, $\nu = 0.5$, $sill = 2.0$ (primero fila superior), rango = 5.0, $\nu = 0.5$, $sill = 2.0$ (segundo fila superior), rango = 1.0, $\nu = 1.0$, $sill = 2.0$ (tercero fila superior),y la misma estructura con rango fijo en la fila inferior. 162
- 5.21. Comparación de los distintos tipos de *taper* (1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3), 5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10)) para la estimación del parámetro $\nu = 1.5$ para el método MCO-espectral, con $sill = 2.0$ y rango = 5. 163
- 6.1. $\log f(\boldsymbol{\omega})$ frente $\log(|\boldsymbol{\omega}|^2)$. Izquierda: Caso de un puro *nugget* o proceso de ruido blanco. Derecha: Caso de un proceso de *Matérn*. 169
- 6.2. Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y $sill$. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 1$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1= no *taper* con $nugget=0$, 2=no *taper* con $nugget=2$, 3=*taper* multiplicativo con $nugget=0$, 4=*taper* multiplicativo con $nugget=2$, 5=*rounded taper* con $nugget=0$, 6=*rounded taper* con $nugget=2$ 172
- 6.3. Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y $sill$. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 3$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1= no *taper* con $nugget=0$, 2=no *taper* con $nugget=2$, 3=*taper* multiplicativo con $nugget=0$, 4=*taper* multiplicativo con $nugget=2$, 5=*rounded taper* con $nugget=0$, 6=*rounded taper* con $nugget=2$ 173

- 6.4. Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 5$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1=no *taper* con *nugget*=0, 2=no *taper* con *nugget*=2, 3=*taper* multiplicativo con *nugget*=0, 4=*taper* multiplicativo con *nugget*=2, 5=*rounded taper* con *nugget*=0, 6=*rounded taper* con *nugget*=2. 174
- 6.5. Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 10$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1=no *taper* con *nugget*=0, 2=no *taper* con *nugget*=2, 3=*taper* multiplicativo con *nugget*=0, 4=*taper* multiplicativo con *nugget*=2, 5=*rounded taper* con *nugget*=0, 6=*rounded taper* con *nugget*=2. 175
- 6.6. Evaluación del nivel de significación del test para los cuatro pares de valores de los parámetros rango y *sill*, en el caso de ruido blanco (pn) para las etiquetas de: pn-nt-0 (no *taper*,*nugget*=0), pn-nt-2 (no *taper*,*nugget*=2), pn-mt-0 (*taper* multiplicativo,*nugget*=0), pn-rt-2 (*taper* multiplicativo,*nugget*=2), pn-rt-0 (*rounded taper*,*nugget*=0),nt-rt-2 (*rounded taper*,*nugget*=2). Izquierdo superior $\epsilon = 1$, derecho superior $\epsilon = 3$, izquierdo inferior $\epsilon = 5$ y derecho inferior $\epsilon = 10$ 176
- 6.7. Evaluación de la potencia del test para diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*, correspondientes al caso $\epsilon = 1$, bajo la presencia de *nugget*=2 y sin *taper*. 183
- 6.8. Evaluación de la potencia del test para diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Los dos primeros gráficos correspondientes al caso $\epsilon = 1$ y los dos siguientes al caso $\epsilon = 10$. Todos los casos bajo la presencia de *nugget* =2 y con *tapering rounded* y multiplicativo. 184
- 6.9. *p*-valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (*primera fila*), $N = 10 \times 10$ (*segunda fila*), $N = 5 \times 5$ (*tercera fila*) y $\nu = 0.5$. *Primera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); *Segunda columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); *Tercera columna*: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces). 190

6.10. <i>p</i> – valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (<i>primera fila</i>), $N = 10 \times 10$ (<i>segunda fila</i>), $N = 5 \times 5$ (<i>tercera fila</i>) y $\nu = 1.0$. <i>Primera columna</i> : (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); <i>Segunda columna</i> : (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); <i>Tercera columna</i> : (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).	191
6.11. <i>p</i> – valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (<i>primera fila</i>), $N = 10 \times 10$ (<i>segunda fila</i>), $N = 5 \times 5$ (<i>tercera fila</i>) y $\nu = 1.5$. <i>Primera columna</i> : (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); <i>Segunda columna</i> : (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); <i>Tercera columna</i> : (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).	192
7.1. Mapa de las 118 posiciones de muestreo.	199
7.2. Histogramas de las cuatro variables.	202
7.3. Box-plots de las cuatro variables.	202
7.4. <i>Thin Plate Spline</i> para CE.	206
7.5. Simple <i>Kriging</i> para CE.	207
7.6. Mapa de error estándar de predicción de simple <i>Kriging</i> para CE.	207
7.7. <i>Kriging</i> ordinario para CE.	208
7.8. Mapa de error estándar de predicción de <i>Kriging</i> ordinario para CE.	208
7.9. <i>Kriging</i> universal para CE.	209
7.10. Mapa de error estándar de predicción de <i>Kriging</i> universal para CE.	209
7.11. <i>Cokriging</i> para CE con carbonatos.	210
7.12. Mapa de error estándar de predicción de <i>Cokriging</i> para CE con carbonatos.	210
7.13. <i>Cokriging</i> para CE con materia orgánica.	211
7.14. Mapa de error estándar de predicción de <i>Cokriging</i> para CE con materia orgánica.	211
7.15. <i>Cokriging</i> para CE con arcilla.	212
7.16. Mapa de error estándar de predicción de <i>Cokriging</i> para CE con arcilla.	212
7.17. Mapa de las cuatro regiones de estudio.	215
7.18. Histogramas de carbonatos en las 4 zonas.	215
7.19. Histogramas de materia orgánica en las 4 zonas.	216
7.20. Histogramas de arcilla en las 4 zonas.	216

7.21. Histogramas de conductividad eléctrica en las 4 zonas.	217
7.22. <i>Box-plots</i> de carbonatos en las 4 zonas.	217
7.23. <i>Box-plots</i> de materia orgánica en las 4 zonas.	218
7.24. <i>Box-plots</i> de arcilla en las 4 zonas.	218
7.25. <i>Box-plots</i> de conductividad eléctrica en las 4 zonas.	219
7.26. Malla con posiciones irregularmente espaciadas (superior izquierda), variograma correspondiente (superior derecha), malla con posiciones regularmente espaciadas (inferior izquierda) y variograma correspondiente (inferior derecha).	220
7.27. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . <i>Izquierda superior</i> : densidad de <i>Matérn</i> teórica; <i>Derecha superior</i> : sin <i>taper</i> ; <i>Izquierda inferior</i> : <i>rounded taper</i> ; <i>Derecha superior</i> : <i>taper</i> multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 1$	221
7.28. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . <i>Izquierda superior</i> : densidad de <i>Matérn</i> teórica; <i>Derecha superior</i> : sin <i>taper</i> ; <i>Izquierda inferior</i> : <i>rounded taper</i> ; <i>Derecha superior</i> : <i>taper</i> multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 3$	221
7.29. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . <i>Izquierda superior</i> : densidad de <i>Matérn</i> teórica; <i>Derecha superior</i> : sin <i>taper</i> ; <i>Izquierda inferior</i> : <i>rounded taper</i> ; <i>Derecha superior</i> : <i>taper</i> multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 5$	222
7.30. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . <i>Izquierda superior</i> : densidad de <i>Matérn</i> teórica; <i>Derecha superior</i> : sin <i>taper</i> ; <i>Izquierda inferior</i> : <i>rounded taper</i> ; <i>Derecha superior</i> : <i>taper</i> multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 10$	222
7.31. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones sin la utilización de <i>tapering</i> .	224
7.32. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>rounded taper</i> con $\epsilon = \delta = 1$	224
7.33. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>taper</i> multiplicativo con $\epsilon = \delta = 1$	225
7.34. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>rounded taper</i> con $\epsilon = \delta = 3$	225

7.35. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>taper</i> multiplicativo con $\epsilon = \delta = 3$	226
7.36. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>rounded taper</i> con $\epsilon = \delta = 5$	226
7.37. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>taper</i> multiplicativo con $\epsilon = \delta = 5$	227
7.38. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>rounded taper</i> con $\epsilon = \delta = 10$	227
7.39. Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado <i>taper</i> multiplicativo con $\epsilon = \delta = 10$	228
7.40. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado sin usar <i>tapering</i>	228
7.41. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>rounded tapering</i> con parámetros $\epsilon = \delta = 1$	229
7.42. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>tapering</i> multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 1$	229
7.43. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>rounded tapering</i> con parámetros $\epsilon = \delta = 3$	230
7.44. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>tapering</i> multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 3$	230
7.45. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>rounded tapering</i> con parámetros $\epsilon = \delta = 5$	231
7.46. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>tapering</i> multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 5$	231
7.47. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>rounded tapering</i> con parámetros $\epsilon = \delta = 10$	232
7.48. $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(\omega)$. El periodograma mostrado es estimado usando un <i>tapering</i> multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 10$	232

Capítulo 1

Introducción

La necesidad de analizar características de procesos espaciales es clara y evidente en disciplinas tan diversas como la astronomía, ecología, estudios forestales, geografía, meteorología, ciencias de suelos y en ciencias medioambientales en general. En cualquier análisis estadístico serio en ciencias ambientales, se puede decir que la determinación de la estructura espacial subyacente es necesaria. El reto de la investigación estadística en la última década ha estado centrado en el desarrollo, comprobación y evaluación de los métodos más apropiados para la cuantificación de la dependencia espacial de los datos.

Los estadísticos están frecuentemente envueltos en el análisis espacial de grandes bases de datos. El análisis espectral de procesos estacionarios es particularmente ventajoso en el análisis de grandes grupos de datos y en el estudio de propiedades de procesos multivariantes. Los datos geoestadísticos son normalmente recogidos en grandes regiones, y el tratamiento de grandes bases de datos es a menudo problemático para las técnicas usadas comúnmente: la inversión de una matriz de covarianza muy grande para calcular la función de máxima verosimilitud puede no ser posible o puede requerir un largo tiempo de computación. El uso del algoritmo *Fast Fourier Transform*, FFT, para densidades espectrales puede ser una buena solución para estos problemas. Sin embargo, FFT puede ser aplicado sólo en datos que se encuentren en una malla regular, aunque esta desventaja no es tan importante como el hecho de las conexiones teóricas entre los estimadores de densidades espectrales tanto en una malla regular como en datos espaciados irregularmente (Renshaw, 2002; Fuentes, 2004; Mateu y Juan, 2005). Podemos añadir a esto que datos observados en una malla regular pueden ser discretizados por FFT cuando hay bastantes observaciones. Métodos espectrales

para estudiar datos en malla con datos faltantes y bases de datos irregularmente espaciados son presentados en Fuentes (2004).

El periodograma, un estimador no paramétrico de la densidad espectral, es una herramienta útil para estudiar las propiedades de los procesos estacionarios observados en una malla de dos dimensiones (Stein, 1999a,b; Fuentes, 2001a,b, 2002, 2004; Fuentes y Smith, 2001). El *tapering* espacial es crucial en problemas de dos o más dimensiones donde hay un gran número de observaciones en los bordes. En particular, los *data taper*, proporcionan suavizamiento de las observaciones de las esquinas de la región. Pero hay que buscar un balance entre la cantidad de suavizamiento y la pérdida de información que esto supone.

En el dominio espacial, los estimadores del variograma empírico son los más comúnmente usados para la estimación de la estructura de correlación de un proceso. Cuando un modelo de variograma paramétrico es usado para estimar un variograma empírico, frecuentemente se usan técnicas como mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud restringida (MVR), aproximaciones que generalmente no tienen en cuenta ninguna correlación entre los valores del variograma estimado. Los mismos datos son usados para estimar el variograma en diferentes *lag*, y los estimadores de variogramas resultantes están más correlacionados que las observaciones del proceso subyacente. No hay mucho conocido sobre las estructuras de correlación de estimadores de variogramas e ignorar tal correlación puede dar lugar a errores en los análisis estadísticos. Por otra parte, en el dominio espectral los valores del periodograma son asintóticamente incorrelacionados. Técnicas como métodos de mínimos cuadrados no lineales pueden ser naturalmente aplicados a esos estimadores independientes. En este caso, un suavizamiento no paramétrico de los estimadores del periodograma *tapered* podría dar mejores resultados que los estimadores de variogramas no paramétricos. La independencia asintótica de los estimadores de los periodogramas es una de las grandes ventajas del análisis espectral. En particular, cuando usamos la clase flexible de densidades espectrales de *Matérn*, aparece una relación lineal entre el logaritmo de la densidad espectral y el logaritmo del módulo de las frecuencias de Fourier, dando lugar así a una fácil estimación de los correspondientes parámetros espaciales.

Con todo esto, el análisis espectral en el campo espacial ha sido generalmente poco tratado y los pocos investigadores que han trabajado sobre el tema lo han hecho en los últimos cuatro o cinco años. Por tanto, se da la situación curiosa de, un tema tan interesante científicamente pero al mismo tiempo muy poco analizado y esta es una de nuestras principales motivaciones para esta tesis doctoral.

En este contexto, en esta tesis nos vamos a centrar en la representación espec-

tral de un proceso espacial con todas las implicaciones teórico-prácticas que esto supone. Para concretar un poco más, vamos a centrarnos y enfatizar las enormes posibilidades que la familia *Matérn* puede aportarnos. Esta familia será la base de las estructuras espectrales con las que vamos a trabajar en esta tesis.

En esta línea, vamos a explorar, por vez primera en la literatura, la estimación de los parámetros espaciales desde el punto de vista de las técnicas espectrales, haciendo énfasis directo en la comparación con las técnicas clásicas en el dominio espacial. Trabajaremos también algunos conceptos que muchas veces se toman como obvios en estudios de datos espaciales, ya que se presupone la no necesidad de su análisis, como son las suposiciones de estacionariedad e independencia. Para ello, presentamos dos tests que permitirán el contraste formal de estas hipótesis en el marco de la modelización práctica.

Como hemos dicho anteriormente, el análisis geoestadístico es necesario y primordial en muchas ciencias, y en particular en las ambientales. Es precisamente en este contexto en el que vamos a desarrollar la aplicación de esta tesis doctoral. En concreto, la aplicación que versa sobre el análisis de las dependencias espaciales que exhiben ciertas propiedades edafológicas del suelo, en una región que tiene cierto interés en la producción citrícola e industrial. Analizaremos la Conductividad Eléctrica, para el análisis de la salinidad de una zona que comprende cuatro comarcas, Vila-Real, Burriana, Alquerías del Niño Perdío y Betxí. Es una zona de aproximadamente 130 km², zona prácticamente citrícola, con pequeñas zonas industriales. Además utilizaremos otras variables, como porcentaje de arcillas, de carbonatos y materia orgánica, que nos servirán como variables secundarias.

El tema que desarrollamos en esta tesis doctoral posee interés desde el punto de vista teórico, científico y práctico.

Desde el *punto de vista teórico y científico*, presentamos resultados de estudios de simulación que por vez primera intentan comparar las técnicas espectrales con las espaciales en cuanto a la estimación de los parámetros que definen las dependencias espaciales. También desarrollamos a nivel teórico los momentos de primer y segundo orden de los periodogramas espaciales con y sin *taper*. Estos resultados permiten dar un paso más allá en el conocimiento teórico y no asintótico (como hace Fuentes en sus diferentes trabajos) del estimador de la densidad espectral.

Desde el *punto de vista práctico*, proponemos una modelización espectral claramente competitiva con la clásica modelización espacial. Tan competitiva como que nos permitimos contrastar las tan importantes hipótesis de independencia espacial y estacionariedad. En este sentido, abrimos un nuevo campo en la modelización práctica de datos espaciales. En particular los datos con los que trabaja-

mos muestran una *trascendencia social* (prevención de riesgos sobre cambios de usos del suelo), *económica* (pérdidas de bienes privados y públicos, descenso de la productividad biológica y en general de calidad de vida) y *política* (herramienta para el diseño de planes de prevención y corrección de suelos, repoblaciones, nuevos sectores industriales, etc.).

El plan de esta tesis es el siguiente:

1. En el capítulo 2 se desarrolla toda la metodología geoestadística. Se trata de un capítulo teórico en el que se presentan los conceptos tradicionales de interpolación y predicción, como pueden ser el semivariograma e interpolación/predicción basada en *krigings*.
2. El capítulo 3 presenta un resumen de la metodología espectral necesaria para comprender el desarrollo de las distintas técnicas que van a ser utilizadas en los capítulos posteriores.
3. El capítulo 4 presenta un completo estudio de simulación para analizar la calidad de las estimaciones bajo las técnicas espectrales.
4. El capítulo 5 muestra un exhaustivo estudio de comparación entre las estimaciones obtenidas en el campo espectral y las obtenidas en el campo espacial.
5. El capítulo 6 se centra en la presentación y desarrollo de los tests de independencia y estacionariedad, analizando las propiedades de significación y potencia de dichos tests.
6. El capítulo 7 desarrolla el análisis práctico de la dependencia espacial de la Conductividad Eléctrica, evaluando dicha dependencia desde el punto de vista espacial y espectral.
7. Finalmente esta tesis acaba con algunas conclusiones y futuras investigaciones junto con la exposición de los códigos y datos utilizados, con el fin de servir de ayuda a investigadores interesados en este campo.

Capítulo 2

Fundamentos básicos de la metodología geoestadística

Índice General

2.1. Introducción	22
2.2. Variogramas. Inferencia y modelización	25
2.2.1. Anisotropía	30
2.2.2. Condición de positividad	32
2.2.3. Versiones muestrales de algunas medidas de variabilidad espacial	32
2.2.4. Factores a tener en cuenta para la modelización	34
2.2.5. Métodos de estimación de los parámetros del variograma	35
2.3. Kriging: predicción e interpolación	39
2.3.1. Kriging simple	41
2.3.2. Kriging ordinario	42
2.3.3. <i>Kriging</i> con un modelo de tendencia (KT)	42
2.3.4. <i>Kriging</i> en bloques	44
2.3.5. Kriging factorial	44
2.3.6. <i>Cokriging</i>	45
2.3.7. Kriging con factor externo (<i>external drift</i>)	45
2.3.8. Krigings no lineales	45

2.3.9. Validación cruzada	46
2.4. Métodos alternativos de estimación e interpolación .	47
2.4.1. Un modelo básico y general de relación entre variables	47
2.4.2. <i>Thin plate splines</i> (TPS)	48

2.1. Introducción

La geoestadística es la ciencia que estudia los fenómenos que fluctúan en el espacio y/o tiempo, ofreciendo una colección de herramientas estadísticas para la descripción y modelización de la variabilidad espacial (y temporal).

La mayoría de la teoría actual sobre estadística espacial ha sido desarrollada a partir del trabajo pionero en la industria de la minería, en relación con el problema de la estimación de la cantidad de mineral en una región, dadas las concentraciones de dicho mineral en un conjunto finito de localizaciones muestreadas. Estos trabajos, los cuales empezaron en Sudáfrica y alcanzaron su madurez en la Escuela de Minas de Fontainebleau, dieron nombre al término *geoestadística*. Las aplicaciones actuales de la geoestadística en problemas medioambientales van mucho más allá de las originales aplicaciones en la minería, aunque la terminología clásica definida en sus principios, sigue siendo ampliamente usada hoy en día. Uno de los trabajos pioneros en este campo, llevado a cabo por el ingeniero de minas sudafricano Krige (1951), presentó las ecuaciones básicas para una interpolación lineal óptima con variables espacialmente correladas. Su nombre fue inmortalizado por Matheron (1962, 1963, 1971) en una serie de libros y trabajos que utilizaban el término francés *krigeage* o su equivalente en inglés *kriging*.

Un acercamiento diferente a la estadística espacial llegó cuando se intentó trabajar con variables de información en agricultura, variables que bajo ningún concepto se podían suponer independientes (Fairfield Smith, 1938), lo que llevó al desarrollo de nuevos métodos estadísticos (Papadakis 1937, Bartlett 1938). Esto conllevó nuevas aproximaciones dadas por Whittle (1954) y Bartlett (1976, 1978). Sin embargo, el desarrollo moderno de los métodos espaciales surgió de la mano de Besag (1974).

Distintos campos científicos, partiendo de la Climatología, pasando por la Edafología y llegando a la Estadística con las técnicas geoestadísticas. No hace falta hacer un profundo análisis de la aplicabilidad de este tipo de técnicas para darse cuenta de la importancia y necesidad de las mismas para la resolución de

problemas reales en muy diversos contextos. Sólo por hacer una breve (que no exhaustiva) mención de algunos trabajos aparecidos en la literatura, exponemos algunos de los más relevantes en diversos contextos científicos, particularmente relacionados con problemas medioambientales.

Trabajos relacionados con estudios *geoestadísticos en minería* pueden ser Chiles (1976), Verly y Sullivan (1985), Chiles y Liao (1993). Trabajos relacionados con estudios *geoestadísticos de suelos* pueden ser Burgess y Webster (1980*a,b,c*, 1981), Tillotson y Nielsen (1984), Trangmar (1985), Cressie y Horton (1987), Oliver (1987), Haas (1990), Laslett y McBratney (1990), Webster y Oliver (1990), Goovaerts (1992), Atteia *et al.* (1994), Goovaerts y Webster (1994), Goovaerts (1994), Russo *et al.* (1994), Webster *et al.* (1994), Goovaerts y Journel (1995), Haas (1995), Haas *et al.* (1995), Persicani (1995), Jacques *et al.* (1996), Vanderborght *et al.* (1996), Smith y Williams (1996), Chien *et al.* (1997), Kanessvsky *et al.* (1997), Juang y Lee (1998), Papritz y Moyeed (1998) y contaminación de suelos como en Kanessvsky *et al.* (1997). Trabajos relacionados con estudios *geoestadísticos sobre hidrología* pueden ser Andrieu *et al.* (1989), Azimi-Zonooz *et al.* (1989), De Kwaadsteniet (1990), Seo *et al.* (1990*a,b*), Kitanidis (1983, 1997), Bardossy *et al.* (1997), Dirks *et al.* (1998). En particular, son abundantes las referencias que analizan la distribución espacial de las precipitaciones (Goovaerts, 1999; Seo *et al.*, 1990*a,b*; Savaliev *et al.*, 1998).

El paradigma básico de la geoestadística predictiva es la caracterización del valor desconocido z como una variable aleatoria Z , siendo la incertidumbre asociada a z definida por la correspondiente distribución de probabilidad. A lo largo de este trabajo, y siguiendo la notación habitual en este contexto, denotaremos por mayúsculas las variables aleatorias, y por minúsculas los correspondientes valores muestreados o conocidos. En el contexto de la geoestadística, la variable aleatoria Z muestra una importante dependencia de la localización espacial, por lo que será denotada por $Z(\mathbf{u})$. Ejemplos de cantidades o medidas reales que pueden ser modelizadas por variables aleatorias dependientes de la localización espacial incluyen propiedades petrofísicas (porosidad, permeabilidad, concentración de metales o polución) y propiedades geográficas (elevaciones topográficas, densidades de población). También encontramos ejemplos de variables aleatorias discretas como propiedades geológicas, clases de insectos o especies de esfoliados.

La función de distribución acumulada (cdf) de una variable aleatoria continua dependiente de la localización espacial \mathbf{u} (es conveniente hacer notar que en este momento \mathbf{u} puede denotar tanto un vector de localizaciones espaciales como una única coordenada espacial) $Z(\mathbf{u})$ viene definida por

$$F(\mathbf{u}; z) = P\{Z(\mathbf{u}) \leq z\} \quad (2.1)$$

denotando P la función de probabilidad asociada. En la práctica es habitual trabajar con información particularizada a n datos (posiblemente vecinos) por lo que la variable aleatoria suele denotarse por $Z(u_i) = z(u_i), i = 1, \dots, n$. En este caso, podemos trabajar con la función de distribución acumulada condicional (ccdf) dada por

$$F(\mathbf{u}; k | n) = P\{Z(\mathbf{u}) \leq z | n\} \quad (2.2)$$

En geoestadística es importante modelizar el grado de correlación o dependencia entre una cierta variable $Z(\mathbf{u}_i), i = 1, \dots, n$ y otras posibles covariables en otros puntos de muestreo $Y(\mathbf{v}_j), j = 1, \dots, n$. El concepto de función aleatoria permite tal modelización. Una función aleatoria define un grupo de variables aleatorias definidas sobre el campo de interés.

Buenas referencias bibliográficas en el contexto de la teoría de la probabilidad y variables aleatorias son Anderson (1984), DeGroot (1989) y Tanner (1996), entre otras muchas. Asimismo, referencias básicas sobre modelización geoestadística, que cualquier lector debe disponer para una correcta, completa y necesaria información sobre este tema, pueden ser Journel y Huijbregts (1978), Isaaks y Srisvastava (1989), Cressie (1993), Wackernagel (1995), Goovaerts (1997a,b), Chiles y Delfiner (1999) y Stein (1999a).

El cálculo de distintos estadísticos, tanto de una cdf uni como multivariante, por ejemplo el de sus momentos (media, varianza, covarianzas, etc), requiere muestreos repetitivos. Por ejemplo, muestreos repetitivos de la variable $Z(\mathbf{u})$ serían en teoría necesarios para evaluar la cdf empírica $F(\mathbf{u}; z) = P\{Z(\mathbf{u}) \leq z\}$.

Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones, sólo un muestreo es posible en cada localización espacial \mathbf{u} , por lo que se necesita hacer uso de la condición de repetibilidad, la cual queda garantizada bajo la hipótesis de estacionariedad. Una correcta decisión sobre la hipótesis de estacionariedad es esencial para una buena representatividad de las herramientas geoestadísticas. La estacionariedad es una propiedad intrínseca a los modelos; así la decisión de estacionariedad puede cambiar si la escala de estudio cambia o si una mayor cantidad de datos son posibles. Si el fin del estudio es global, las características locales pueden obtenerse mediante medias, consecuentemente cuantos más datos sean posibles, mayor será la aportación obtenida por parte de las técnicas estadísticas.

Una variable aleatoria $Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in A$ se dice que es *estacionaria*, o que tiene

la propiedad de la estacionariedad, en la región A , si la cdf multivariante es invariante bajo cualquier traslación C efectuada sobre las localizaciones, esto es:

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k; Z_1, \dots, Z_k) = F(\mathbf{u}_1 + C, \dots, \mathbf{u}_k + C; Z_1, \dots, Z_k) \quad (2.3)$$

para cualquier vector de traslación C .

2.2. Variogramas. Inferencia y modelización

El objeto básico que nosotros consideramos es un proceso estocástico $\{Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D\}$ donde D es un subconjunto de \mathbb{R}^d (espacio Euclídeo d -dimensional), aunque normalmente $d = 2$. Por ejemplo, $Z(\mathbf{u})$ puede representar la concentración de ozono en una localización específica \mathbf{u} . Sea

$$\mu(\mathbf{u}) = E\{Z(\mathbf{u})\}, \quad \mathbf{u} \in D,$$

el valor medio en la localización \mathbf{u} . Asumamos que la varianza de $Z(\mathbf{u})$ existe para todo $\mathbf{u} \in D$.

El proceso Z se dice que es *Gaussiano* si, para cualquier natural $k \geq 1$ y las localizaciones u_1, \dots, u_k , el vector $(Z(\mathbf{u}_1), Z(\mathbf{u}_2), \dots, Z(\mathbf{u}_k))$ tiene una distribución normal multivariante.

El proceso Z se dice que es *estrictamente estacionario* si la correspondiente distribución de $(Z(\mathbf{u}_1), Z(\mathbf{u}_2), \dots, Z(\mathbf{u}_k))$ es la misma que la del vector $(Z(\mathbf{u}_1 + h), Z(\mathbf{u}_2 + h), \dots, Z(\mathbf{u}_k + h))$ para cualesquiera puntos espaciales $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ y cualquier $h \in \mathbb{R}^d$, a condición de que cualquiera de los valores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 + h, \mathbf{u}_2 + h, \dots, \mathbf{u}_k + h$ caigan dentro del dominio de D .

El proceso Z se dice que es *estacionario de segundo orden* (también llamado *estacionariamente débil*) si $\mu(\mathbf{u}) \equiv \mu$ (es decir, la media es la misma para todas las \mathbf{u}) y

$$\text{cov}\{Z(\mathbf{u}_1), Z(\mathbf{u}_2)\} = C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad \text{para todos } \mathbf{u}_1 \in D, \mathbf{u}_2 \in D,$$

donde $C(\mathbf{u})$ es la función covarianza entre una observación en la localización \mathbf{u} y de otra en el 0.

Se puede ver inmediatamente que si todas las varianzas son finitas entonces un proceso estrictamente estacionario es también estacionario de segundo orden.

La afirmación inversa es en general falsa, pero un proceso Gaussiano que es a la vez estacionario de segundo orden será también estrictamente estacionario (como podemos ver por ejemplo en Cressie, 1993).

El siguiente concepto que introducimos es el del variograma (Journel, 1989; Cressie, 1993; Chu, 1996; Goovaerts, 1997a). Asumiendo que $\mu(\mathbf{u})$ es una constante, la cual podemos suponer cero sin pérdida de generalidad, podemos definir

$$2\gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \text{var}\{Z(\mathbf{u}_1) - Z(\mathbf{u}_2)\}. \quad (2.4)$$

La ecuación anterior sólo tiene sentido si la parte izquierda depende de \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 sólo a través de su diferencia $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Un proceso que satisface esta propiedad se llama *intrínsecamente estacionario*. La función $2\gamma(\cdot)$ se llama *variograma* y $\gamma(\cdot)$ *semivariograma*.

La propiedad intrínsecamente estacionario es más débil que la estacionariedad de segundo orden. Supongamos, en primer lugar, que el proceso es estacionario de segundo orden. Es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \text{var}\{Z(\mathbf{u}_1) - Z(\mathbf{u}_2)\} &= \text{var}\{Z(\mathbf{u}_1)\} + \text{var}\{Z(\mathbf{u}_2)\} - 2\text{cov}\{Z(\mathbf{u}_1), Z(\mathbf{u}_2)\} \\ &= 2C(0) - 2C(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

y también que

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h}). \quad (2.6)$$

Contrariamente, supongamos que queremos encontrar la función $C(\cdot)$ dada la función $\gamma(\cdot)$. Esta podría ser encontrada a partir de (2.6) una vez conociéramos $C(0)$. En un proceso estacionario ergódico, tendremos $C(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \infty$, así $C(0)$ puede ser encontrado como el límite de $\gamma(\mathbf{h})$ con $\mathbf{h} \rightarrow \infty$. En general, sin embargo, no está garantizado que tal límite exista. Por ejemplo, si $Z(u)$ es un movimiento Browniano estándar en una dimensión, tendremos $\text{var}\{Z(u_1) - Z(u_2)\} = |u_1 - u_2|$, lo cual tiende a ∞ cuando $|u_1 - u_2| \rightarrow \infty$. En resumen, si $\lim_{h^* \rightarrow \infty} \gamma(\mathbf{h}^*)$ existe, entonces el proceso es estacionario de segundo orden con $C(\mathbf{h}) = \lim_{h^* \rightarrow \infty} \gamma(\mathbf{h}^*) - \gamma(\mathbf{h})$, pero si este límite no existe, entonces el proceso no es estacionario de segundo orden (Cressie, 1993).

Para la teoría de procesos espaciales, la principal hipótesis que se requiere es la estacionariedad intrínseca. Desde este punto de vista, las distintas formas (más fuertes) de estacionariedad no son necesarias. Por otra parte, tanto la estacionariedad estricta como la de segundo orden son suposiciones más naturales

(por ejemplo, como en el análisis de series temporales, donde a menudo es útil pensar en un proceso observado como consistente en una tendencia determinística superpuesta sobre un campo subyacente estacionario). Por esta razón, es buena idea ser cauto cuando un análisis preliminar de los datos indica que el proceso es intrínsecamente estacionario y no estacionario. Podría ser que el proceso se aproxima mejor por una tendencia con residuos estacionarios.

Un concepto diferente, pero no menos importante, es el de *isotropía*. Supongamos que el proceso es intrínsecamente estacionario con semivariograma $\gamma(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$. Si $\gamma(\mathbf{h}) = \gamma_0(\|\mathbf{h}\|)$, es decir, si el semivariograma depende del vector \mathbf{h} sólo a través de su longitud $\|\mathbf{h}\|$, entonces el proceso es isotrópico.

Un proceso que es a la vez intrínsecamente estacionario e isotrópico se dice que es *homogéneo*. Es conveniente trabajar con procesos isotrópicos puesto que hay un amplio abanico a elegir entre diferentes formas paramétricas de semivariogramas. En lo sucesivo, y por facilidad de notación, denotaremos el variograma isotrópico por $\gamma(h)$, donde h representa la longitud del vector, en lugar del propio vector. El semivariograma representa un índice de cambio que muestra una variable (atributo) con la distancia. Su forma describe el patrón de variación espacial en términos de su magnitud y forma general. La pendiente del semivariograma indica la intensidad de cambio del atributo analizado con la distancia al mismo tiempo que el porcentaje de disminución en la dependencia espacial. El máximo valor que alcanza un semivariograma se llama *sill*, o varianza a priori, e indica la escala bajo la cual los datos definen un proceso estacionario de segundo orden. El *lag* o distancia para la que el *sill* es alcanzado se llama *rango* y define el límite de la dependencia espacial. Finalmente, un semivariograma con término independiente define la varianza llamada *nugget*, la cual define la variabilidad intrínseca en los datos y que no ha sido captada por el rango de distancias analizadas así como cualquier variación puramente aleatoria.

Denotando como $h = \mathbf{h}$ y $|h| = \|\mathbf{h}\|$, algunos ejemplos de semivariogramas isotrópicos son:

Modelo *Nugget effect*. Es la estructura más básica de semivariograma indicando falta de estructura espacial. Viene dado por

$$\gamma(|h|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| = 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Modelo lineal. Define un modelo no acotado en función de dos constantes positivas. La función tiende a infinito para distancias grandes lo que hace que

este modelo no se corresponda con un proceso estacionario,

$$\gamma(|h|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |h| = 0, \\ c_0 + c_1 h & \text{si } |h| > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Modelo Esférico. Definido por un rango actual a , una varianza a priori (*sill*) c_1 y un efecto *nugget* c_0 ,

$$\gamma(|h|) = \begin{cases} c_0 + c_1 \cdot [1.5\frac{|h|}{a} - 0.5(\frac{|h|}{a})^3] & \text{si } |h| \leq a, \\ c_0 + c_1 & \text{si } |h| \geq a \end{cases} \quad (2.9)$$

Modelo Exponencial. Definido por un rango efectivo a (rango integral $a/3$), una varianza a priori (*sill*) c_1 y un efecto *nugget* c_0 ,

$$\gamma(|h|) = c_0 + c_1 \cdot \text{Exp}\left(\frac{|h|}{a}\right) = c \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{3|h|}{a}\right)\right] \quad (2.10)$$

Modelo Gaussiano. Definido por un rango efectivo a , una varianza a priori c_1 y un efecto *nugget* c_0 ,

$$\gamma(|h|) = c_0 + c_1 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{(3|h|)^2}{a^2}\right)\right] \quad (2.11)$$

Modelo potencial (*Power*). Definido por un factor $0 < \omega < 2$, una pendiente positiva c_1 y un efecto *nugget* c_0 ,

$$\gamma(|h|) = c_0 + c_1 \cdot |h|^\omega \quad (2.12)$$

Modelo del efecto *Hole*. Se utiliza para definir componentes cíclicas subyacentes. Con una varianza a priori de c_1 y un efecto *nugget* de c_0 , se define como

$$\gamma(|h|) = c_0 + c_1 \cdot \left[1.0 - \cos\left(\frac{|h|}{a} \cdot \pi\right)\right] \quad (2.13)$$

Para ser un modelo de variograma correctamente definido, este modelo de efecto *hole* debe ser sólo aplicado en una dirección.

Familia *Matérn*. Esta familia es llamada así por *Bertil Matérn*, quién la introdujo en 1960, (*Matérn*, 1960) en su tesis doctoral y fue posteriormente reescrita en 1986. Esta clase se define mejor en términos de la función de covarianza dada por

$$C_0(|h|) = \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)} \left(\frac{2\sqrt{\theta_2}|h|}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \kappa_{\theta_2} \left(\frac{2\sqrt{\theta_2}|h|}{\theta_1} \right). \quad (2.14)$$

En este caso, $\theta_1 > 0$ define un parámetro de dependencia espacial y $\theta_2 > 0$ es un parámetro forma. La función $\Gamma(\cdot)$ representa la función gamma mientras que κ_{θ_2} es la función modificada de Bessel de tercera clase de orden θ_2 . Como casos especiales tenemos que $\theta_2 \rightarrow \frac{1}{2}$ tiende a la forma exponencial y el límite $\theta_2 \rightarrow \infty$ daría lugar a la forma Gaussiana.

Todos los modelos anteriores (excepto el lineal y potencial) son acotados, lo que significa que el *sill* se alcanza realmente o en el límite a una cierta distancia marcada por el rango. Además, (a) para el modelo de efecto *nugget*, el *sill* es alcanzado tan pronto la distancia se hace positiva; (b) el modelo esférico alcanza realmente el *sill* a una distancia equivalente a su rango; (c) los modelos exponencial y Gaussiano alcanzan asintóticamente el *sill*, definiéndose un rango práctico como aquella distancia para la que el modelo se encuentra al 95% del *sill*. Los modelos acotados también se suelen llamar *modelos de transición*. Por otra parte, los modelos potencial y lineal no tienen *sill* y, por tanto, carecen de su correspondiente función de covarianza. Podemos distinguir tres tipos de comportamiento alrededor del origen: (a) Comportamiento parabólico: (modelo Gaussiano) tal comportamiento es característico de fenómenos altamente regulares; (b) Comportamiento lineal: (modelos esférico o exponencial) tal comportamiento es característico de aquellos fenómenos que muestran dependencias espaciales a cortas distancias aumentándolas linealmente con las mismas; (c) Comportamiento discontinuo: (modelo de efecto *nugget*) evidencia de gran variabilidad intrínseca a los datos que enmascara cualquier posible dependencia espacial.

El comportamiento cerca del origen del modelo potencial depende de los valores del parámetro ω , siendo lineal para $\omega = 1$ y parabólico para valores de ω cercanos a 2.

La Figura (2.1) muestra algunos ejemplos de modelos de variogramas teóricos y la Figura (2.2) muestra un modelo de variograma exponencial con sus parámetros asociados.

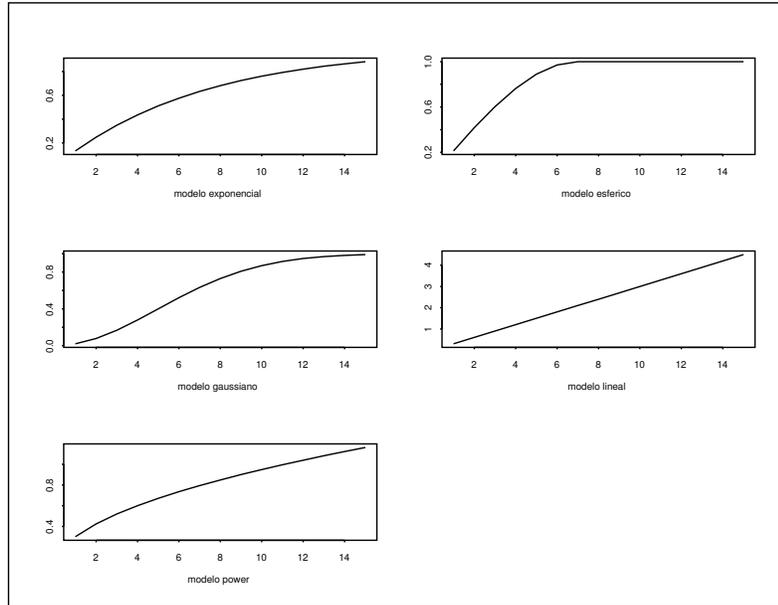


Figura 2.1: Ejemplos de modelos teóricos de variogramas: modelos exponencial, esférico, Gaussiano, lineal y potencial.

2.2.1. Anisotropía

Hay varias formas de trabajar con procesos anisotrópicos considerando éstos como generalizaciones más o menos directas de procesos isotrópicos. La forma más simple es considerar la *anisotropía geométrica*. Esta se refiere a un semivariograma de la forma

$$\gamma(h) = \gamma_0(\|A\mathbf{h}\|) \quad (2.15)$$

donde $\gamma_0(\|A\mathbf{h}\|)$ es un semivariograma isotrópico y A una matriz de dimensión $d \times d$ representando una transformación lineal de \mathbb{R}^d . Lógicamente, si A es la identidad, esto se reduce al caso isotrópico. La idea subyacente en esta situación es que el proceso no es isotrópico en el espacio original, pero sí en algún espacio transformado linealmente, el cual puede, por ejemplo, corresponder a una transformación de las coordenadas. En el caso más lógico y usual en el que A es una matriz definida positiva, los contornos de igual covarianza se corresponden con elipses inscritas en círculos.

Una posible generalización de anisotropía surge de la simple observación de

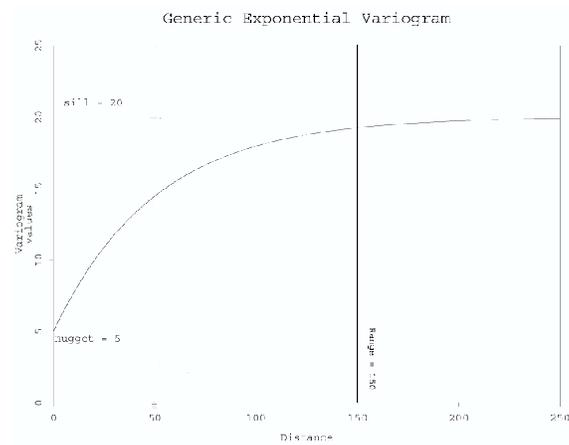


Figura 2.2: Ejemplo de los distintos elementos estructurales definitorios de un modelo de variograma. Nótese que cuando el rango es infinito, el investigador puede tomarlo como el lugar donde el variograma se estabiliza.

que si Z_1, \dots, Z_p son procesos independientes intrínsecamente estacionarios, entonces

$$Z = Z_1 + \dots + Z_p,$$

es también intrínsecamente estacionario, con semivariograma dado por

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \dots + \gamma_p(h),$$

denotando $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ los semivariogramas de Z_1, \dots, Z_p respectivamente. Así,

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^p \gamma_0(A_i h), \tag{2.16}$$

siendo γ_0 un semivariograma isotrópico y A_1, \dots, A_p matrices, es un semivariograma válido que generaliza la anisotropía geométrica. Esta anisotropía se llama *anisotropía zonal*.

Una idea más complicada es asumir que, para alguna función no lineal $g(\mathbf{u})$, el proceso $Z(g(\mathbf{u}))$, en lugar del original $Z(\mathbf{u})$, es un proceso isotrópico estacionario. Esta idea puede, de hecho, analizar tanto la no estacionariedad como la no isotropía y es la base del trabajo de Sampson y Guttorp (1992).

2.2.2. Condición de positividad

Una restricción importante en geoestadística es que no se puede definir una covarianza espacial o una función de semivariograma de forma arbitraria. Necesariamente la primera de ellas debe cumplir con la condición de positividad (*positive definiteness*). En el caso más general en el que $cov\{Z(\mathbf{u}_1), Z(\mathbf{u}_2)\} = C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, el cual no supone ninguna condición de estacionariedad, la condición de positividad significa que la relación

$$\sum_i \sum_j a_i a_j C(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \geq 0 \quad (2.17)$$

se cumple para cualquier conjunto finito de puntos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ y coeficientes reales arbitrarios a_1, \dots, a_n . Queda claro que (2.17) es necesario: la parte izquierda de la ecuación es la varianza de $\sum_i a_i Z(\mathbf{u}_i)$. También tenemos estas mismas condiciones en la versión de variogramas. Supongamos que $\gamma(\cdot)$ es el semivariograma de un proceso estacionario de segundo orden; entonces, por una combinación de (2.6) y (2.17), si a_1, \dots, a_n son constantes con $\sum a_i = 0$, tenemos

$$\sum_i \sum_j a_i a_j \gamma(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \leq 0. \quad (2.18)$$

Esta es la condición de *no positividad condicional* (como podemos ver en Schoenberg, 1938). Se puede ver fácilmente que (2.18) es una condición necesaria para que $\gamma(\cdot)$ sea un semivariograma válido en el caso general (intrínsecamente estacionario). El resultado del caso inverso se puede consultar en detalle en Cressie (1993).

2.2.3. Versiones muestrales de algunas medidas de variabilidad espacial

Consideremos ahora el problema de la estimación del variograma y de otras medidas de variabilidad espacial. En general disponemos de un proceso $\{Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D\}$ observado en un número finito de localizaciones $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$.

El estimador más simple viene dado por el *método de los momentos*, el cual, suponiendo que los puntos de muestreo $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ estén definidos en un retículo regular, viene definido por

$$2\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{\#N(h)} \sum_{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \in N(h)} \{Z(\mathbf{u}_i) - Z(\mathbf{u}_j)\}^2. \quad (2.19)$$

$N(h)$ denota todos aquellos pares (u_i, u_j) para los que $u_i - u_j = h$ y $\#N(h)$ denota el cardinal de $N(h)$. En el caso, por otra parte más común, de que los puntos de muestreo no estén en un retículo regular, aplicaremos la misma fórmula (2.19), pero con la nueva definición de $N(h)$

$$N(h) = \{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) : \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \in T(h)\},$$

siendo $T(h)$ alguna vecindad o región de tolerancia sobre h .

Si disponemos de dos atributos medidos sobre las mismas localizaciones espaciales, puede ser de interés evaluar la variabilidad espacial (cruzada) entre ambos atributos Z, Y . La medida adecuada viene de la mano del estimador del *variograma cruzado* dado por

$$2\widehat{\gamma}_{ZY}(h) = \frac{1}{\#N(h)} \sum_{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \in N(h)} (Z(\mathbf{u}_i) - Z(\mathbf{u}_j))(Y(\mathbf{u}_i) - Y(\mathbf{u}_j)). \quad (2.20)$$

Una posible objeción al método de los momentos es que no es robusto frente valores extremos de Z . Otra objeción surge del hecho del sesgo de la distribución: si suponemos que el proceso es Gaussiano, para valores concretos de \mathbf{u} y h , la distribución de $\{Z(\mathbf{u}+h) - Z(\mathbf{u})\}^2$ es de la forma $2\gamma(h)\chi_1^2$, y la distribución de χ_1^2 está sesgada. Sin embargo, si $X \sim \chi_1^2$, entonces $X^{1/4}$ tiene una distribución casi simétrica y por tanto las medias muestrales de $|Z(u_1) - Z(u_2)|^{1/2}$ se comportarán mejor que las de $\{Z(\mathbf{u}_1) - Z(\mathbf{u}_2)\}^2$. Esta es la idea subyacente al estimador propuesto por Cressie y Hawkins (1980) como estimador insesgado de $2\gamma(h)$, tomando la forma

$$2\bar{\gamma}(h) = \frac{1}{0.457 + 0.494/\#N(h)} \left\{ \frac{1}{\#N(h)} \sum_{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \in N(h)} |Z(\mathbf{u}_i) - Z(\mathbf{u}_j)|^{1/2} \right\}^4 \quad (2.21)$$

que es una forma que deriva de una elegante explicación del método Δ (Hawkins y Cressie, 1984).

La función de *covarianza muestral* puede ser también obtenida mediante el método de los momentos de la siguiente forma

$$\widehat{C}(h) = \frac{1}{\#N(h)} \sum_{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \in N(h)} \{Z(\mathbf{u}_i)Z(\mathbf{u}_j)\} - m^2 \quad (2.22)$$

donde $m = \frac{1}{\#N(h)} \sum_i Z(u_i)$. Si además definimos $\sigma^2 = \frac{1}{\#N(h)} \sum_i Z(\mathbf{u}_i)^2 - m^2$, podemos estandarizar la covarianza para definir el *correlograma*

$$\rho(h) = \frac{C(h)}{\sigma^2} \quad (2.23)$$

Por otra parte, el *madograma* es una medida similar al variograma del método de los momentos en el que el cuadrado de las diferencias entre $Z(\mathbf{u}_i)$ y $Z(\mathbf{u}_j)$ es sustituido por la diferencia absoluta, dando lugar a la expresión

$$2\widehat{\gamma}_M(h) = \frac{1}{\#N(h)} \sum_{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \in N(h)} |Z(\mathbf{u}_i) - Z(\mathbf{u}_j)|. \quad (2.24)$$

Algunas de las anteriores medidas de variación espacial pueden ser usadas cualitativamente para conseguir estructuras de continuidad espacial. Más de un tipo de medida puede ser obtenida al mismo tiempo. En general, las características observadas a través del eje de las abscisas (distancias) son comunes para todas las medidas de variabilidad/continuidad. Sin embargo los valores del eje de ordenadas que definen el variograma son específicos del tipo de variograma elegido.

Tenemos dos reglas prácticas (Journel y Huijbregts, 1978) que deberían ser tenidas en cuenta al estimar un variograma: (a) el variograma empírico sólo debe ser considerado para distancias para las que el número de pares es superior a 30; (b) la distancia de fiabilidad para un variograma experimental es $h < D/2$, siendo D la distancia máxima que presentan las localizaciones muestreadas.

2.2.4. Factores a tener en cuenta para la modelización

En la práctica de la modelización tres son los puntos claves del problema:

1. Determinación del variograma o covarianza experimental.
2. Análisis de los posibles variogramas permisibles.
3. Utilización de información auxiliar, como el conocimiento físico del área y fenómeno bajo estudio o medidas robustas tales como el madograma.

La modelización consiste en la conjunción de estas diferentes fuentes de información para construir un modelo adecuado que retenga la mayoría de las características de los atributos bajo estudio (Barry *et al.*, 1997).

Algunas decisiones importantes en una modelización se centran en: (a) Cómo obtener un modelo isotrópico o anisotrópico; (b)Cuál es el número y tipo de estructuras básicas que constituyan el variograma; (c) Elección adecuada de los parámetros asociados a los variogramas (*sill*, rango y *nugget*). Respecto a la decisión sobre modelo isotrópico o anisotrópico, en la práctica se suele comparar diferentes variogramas experimentales calculados en distintas direcciones (para decidir si existe anisotropía geométrica, por lo menos, tres direcciones deben ser consideradas). Una opción que nos puede ayudar para la detección de anisotropía direccional, es un *scatterplot* del mapa del variograma en el sistema de coordenadas usual. El centro del mapa corresponde con el origen del semivariograma $\gamma(0) = 0$. Cuando la variación es isotrópica, el incremento es similar en cada dirección y por contra, la anisotropía geométrica aparece como líneas de contorno elípticas indicando la dirección de máxima variabilidad espacial. Por esto, la evaluación de un mapa de semivariogramas requiere considerar algunas direcciones e intervalos de distancias (*lags*).

El último peldaño en el proceso de la modelización consiste en la determinación de los parámetros asociados a los modelos seleccionados. Ya hemos hablado en una sección anterior del significado de cada parámetro y en la siguiente comentamos los métodos de determinación de los mismos.

2.2.5. Métodos de estimación de los parámetros del variograma

Asumamos de nuevo en esta sección que muestreemos a partir de un proceso espacial homogéneo para el que el variograma ha sido estimado por alguno de los métodos anteriormente citados.

Aunque son muchas las buenas propiedades de los estimadores de los semivariogramas $\hat{\gamma}(h)$ y $\bar{\gamma}(h)$, éstos carecen, sin embargo, de la propiedad de no positividad condicional. Como consecuencia, es posible que algunas predicciones espaciales derivadas a partir de tales estimadores presenten varianzas negativas. La forma más clara y común de evitar esta dificultad es reemplazando el semivariograma empírico $\hat{\gamma}(h)$ por algún modelo paramétrico, como alguno de los que hemos presentado anteriormente, que se sabe que cumple con la condición de no positividad condicional. Obsérvese, también, que en general no es necesario res-

tringirse a modelos isotrópicos, aunque suelen ser los primeros a ser considerados. En esta sección consideraremos tres métodos: Estimación por mínimos cuadrados (*least squares estimation*), Estimación por máxima verosimilitud (*maximum likelihood*) y Estimación por máxima verosimilitud restringida (MVR).

■ **Estimación por mínimos cuadrados (MC):**

Supongamos que tenemos estimado el semivariograma $\gamma(h)$ en un conjunto finito de valores de h , y queremos ajustar un modelo especificado por una función paramétrica $\gamma(h; \theta)$ en términos de un vector finito de parámetros θ . Este vector suele contener los tres parámetros, efecto *nugget*, *sill* y rango. Supongamos que se ha utilizado el estimator de los momentos $\hat{\gamma}$ y sea $\hat{\gamma}$ el vector que contiene los valores estimados y $\gamma(\theta)$ el vector de los valores derivados por el modelo sobre los mismos valores de h .

Tenemos tres posibilidades para los métodos de **estimación mínimo cuadrática no lineal**:

- Mínimos cuadrados ordinarios (MCO), en los que se toma θ como aquel valor que minimiza

$$\{\hat{\gamma} - \gamma(\theta)\}'\{\hat{\gamma} - \gamma(\theta)\}.$$

(donde ' indica la transposición de matrices).

- Mínimos cuadrados ponderados (MCP) (Cressie, 1985), en los que se toma θ como aquel valor que minimiza

$$\{\hat{\gamma} - \gamma(\theta)\}'W(\theta)^{-1}\{\hat{\gamma} - \gamma(\theta)\}.$$

En este caso $W(\theta)$ es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son las varianzas de $\hat{\gamma}$. Por tanto MCP admite varianzas de $\hat{\gamma}$, aunque no covarianzas, como si lo hace el MCG.

- Mínimos cuadrados generalizados (MCG), en los que se toma θ como aquel valor que minimiza

$$\{\hat{\gamma} - \gamma(\theta)\}'V(\theta)^{-1}\{\hat{\gamma} - \gamma(\theta)\}.$$

Aquí $V(\theta)$ denota la matriz de covarianzas de $\hat{\gamma}$, la cual depende de θ .

En general, los tres estimadores MCO, MCP y MCG, aparecen en orden creciente de eficiencia pero decreciente en simplicidad. Nótese que MCO es fácilmente implementable por algún procedimiento de mínimos cuadrados no lineales, mientras que MCP y MCG requieren la especificación de las matrices $W(\theta)$ y $V(\theta)$.

■ **Estimación máximo verosímil (MV):**

Si asumimos que muestreamos a partir de un proceso Gaussiano, entonces es bastante sencillo obtener la forma exacta de la verosimilitud y maximizarla numéricamente (Kitanidis, 1983; Mardia y Marshall, 1984). Consideremos el proceso espacial

$$Z \sim N(X\beta, \Sigma), \quad (2.25)$$

con Z un vector de observaciones n -dimensional, X una matriz $n \times q$ de covariables ($q < n$; X de rango completo), β un vector de dimensión q de parámetros desconocidos y Σ la matriz de covarianzas de las observaciones. En la práctica podemos asumir que

$$\Sigma = \alpha V(\theta) \quad (2.26)$$

siendo α un parámetro de escala desconocido y $V(\theta)$ es una matriz de covarianzas estandarizadas determinadas por el parámetro desconocido θ . Con Z definido por (2.25), su función de densidad es de la forma

$$(2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - X\beta)' \Sigma^{-1} (Z - X\beta) \right\}. \quad (2.27)$$

Y por tanto, la log-verosimilitud negativa será

$$\ell(\beta, \alpha, \theta) = \frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{n}{2} \log \alpha + \frac{1}{2} \log \det(V(\theta)) + \frac{1}{2\alpha} (Z - X\beta)' V(\theta)^{-1} (Z - X\beta). \quad (2.28)$$

Aunque este método es computacionalmente factible, su mayor dificultad frente a por ejemplo el método de MCP lo hace menos usado. Propiedades asintóticas de los estimadores fueron estudiadas en Mardia y Marshall (1984), quienes mostraron que las propiedades de consistencia y normalidad asintótica se cumplían bajo ciertas circunstancias. Sin embargo, estas

condiciones no son fáciles de comprobar en la práctica, especialmente en el caso de datos en un retículo irregular. Otro problema es la posible multimodalidad de la superficie de verosimilitud. Como parte positiva tenemos que las estimaciones son más eficientes que las de otros métodos para tamaños muestrales grandes. Sin embargo esta situación tampoco está totalmente clara; de hecho en un estudio de simulación de Zimmerman y Zimmerman (1991), en el que se comparaban el estimador máximo verosímil con otros estimadores, se concluyó que el primero sólo era ligeramente mejor en ciertas ocasiones.

■ **Estimación máximo verosímil restringida (MVR):**

La idea de la *estimación máximo verosímil restringida* (MVR) fue originalmente propuesta por Patterson y Thompson (1971) en conexión con los modelos lineales. Supongamos que Y_1, \dots, Y_n son variables aleatorias independientes y normales $N(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos μ y σ^2 . Como bien se sabe los estimadores máximo verosímiles de μ y σ^2 son $\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_i Y_i$ y $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$. Pero este estimador resulta sesgado y en su lugar se suele usar el estimador insesgado de σ^2 , $\frac{1}{n-1} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$. Supongamos ahora que en lugar de trabajar con el vector Y_1, \dots, Y_n , lo hacemos con la densidad conjunta de $(Y_1 - \bar{Y}, Y_2 - \bar{Y}, \dots, Y_{n-1} - \bar{Y})$, cuya distribución no depende de μ . Ahora, el estimador máximo verosímil de σ^2 es directamente $\frac{1}{n-1} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$. Esta idea puede ser extendida al modelo general dado en (2.25). Si definimos $W = A'Z$ un vector de $n - q$ contrastes linealmente independientes, i.e. las $n - q$ columnas de A son linealmente independientes y $A'X = 0$, tenemos que

$$W \sim N(0, A'\Sigma A),$$

y el logaritmo negativo de la función de verosimilitud basado en W será de la forma

$$\begin{aligned} \ell_W(\alpha, \theta) &= \frac{n-q}{2} \log(2\pi) + \frac{n-q}{2} \log \alpha + \frac{1}{2} \log |A'V(\theta)A| \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} W'(A'V(\theta)A)^{-1}W. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como ya señalaron Patterson y Thompson (1971), es posible elegir A que

satisfaga $AA' = I - X(X'X)^{-1}X'$, $A'A = I$. En este caso (2.29) se simplifica a

$$\begin{aligned} \ell_W(\alpha, \theta) = & \frac{n-q}{2} \log(2\pi) + \frac{n-q}{2} \log \alpha - \frac{1}{2} \log |X'X| \\ & + \frac{1}{2} \log |X'V(\theta)^{-1}X| + \frac{1}{2} \log \det(V(\theta)) + \frac{1}{2\alpha} G^2(\theta), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $G^2(\theta)$ denota la suma de cuadrados generalizados de los residuos

$$G^2 = (Z - X\hat{\beta})'V^{-1}(Z - X\hat{\beta}). \quad (2.31)$$

y $\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Z$ es el estimador MCG de β basado en la matriz de covarianzas V .

La estimación MVR proporciona mejores estimaciones que el MV pues, en general, da lugar a estimadores con menores desviaciones para muestras con pocos datos. La estimación MVR es ampliamente utilizada en modelización geoestadística. Sin embargo, es más sensible que el estimador MV de máxima verosimilitud bajo incorrecta especificación del vector de medias β .

En general, como los variogramas estimados por los métodos de verosimilitud (MV, MVR) no están basados en los variogramas empíricos, hay claras diferencias entre éstos y los estimadores MCO o MCP.

2.3. Kriging: predicción e interpolación

En esta sección nos centramos en el elemento principal de la geoestadística: el uso de los modelos de covarianza espacial para la predicción e interpolación de procesos espaciales.

El problema tiene los siguientes fundamentos: dado un conjunto de observaciones de un atributo espacial $Z(\mathbf{u}_1), Z(\mathbf{u}_2), \dots, Z(\mathbf{u}_n)$, el objetivo es predecir el valor de $Z(\mathbf{u}_0)$, para algún $\mathbf{u}_0 \notin \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$.

Kriging es un nombre genérico adoptado en geoestadística para dar nombre a una metodología de interpolación basada en una familia de algoritmos de regresión generalizados por mínimos cuadrados, en reconocimiento de los trabajos pioneros de Daniel Krige (1951), y que fue finalmente formulado por Matheron en 1963.

Todas las clases de estimaciones de *krigings*, y que veremos a continuación, no son más que variantes de las estimaciones de regresión lineal básicas (Journel, 1983; Yakowitz y Szidarovsk, 1985; Laslett, 1994), las cuales para predecir el valor del atributo Z en la localización \mathbf{u}_0 , denotado por $Z^*(\mathbf{u}_0)$, vienen definidas por

$$Z^*(\mathbf{u}_0) - m(\mathbf{u}_0) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_0) [Z(\mathbf{u}_{\alpha}) - m(\mathbf{u}_{\alpha})] \quad (2.32)$$

donde λ_{α} define la ponderación, peso asignado a los datos que intervienen en el sumatorio, $m(\mathbf{u}_0)$ y $m(\mathbf{u}_{\alpha})$ son los correspondientes valores esperados de $Z(\mathbf{u}_0)$ y $Z(\mathbf{u}_{\alpha})$ respectivamente. Obsérvese que sólo actúan aquellas localizaciones u_{α} vecinas a la localización de predicción \mathbf{u}_0 .

Cualquier clase de *kriging* tiene como objetivo la minimización de la varianza del error $\sigma_E^2(\mathbf{u})$, la cual en su formato general viene dada por

$$\sigma_E^2(\mathbf{u}) = Var [Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})] \quad (2.33)$$

donde el superíndice * indica el valor estimado para esa localización. Además, (2.33) se minimiza bajo la restricción de insesgadez, es decir, $E[Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})] = 0$.

Normalmente, la variable aleatoria que define el atributo en estudio se descompone en una componente residual $R(\mathbf{u})$ y otra determinista que define la tendencia $m(\mathbf{u})$,

$$Z(\mathbf{u}) = R(\mathbf{u}) + m(\mathbf{u}) \quad (2.34)$$

La componente residual se modeliza como una variable aleatoria estacionaria de media cero y covarianza $C_R(h)$, siendo

$$E\{R(\mathbf{u})\} = 0 \quad (2.35)$$

$$Cov\{R(\mathbf{u}), R(\mathbf{u} + h)\} = E\{R(\mathbf{u}) \cdot R(\mathbf{u} + h)\} = C_R(h) \quad (2.36)$$

De esta forma, el valor esperado de la variable aleatoria Z en una cierta localización u viene dado por el valor de la componente tendencia en esa localización $E\{Z(\mathbf{u})\} = m(\mathbf{u})$.

De acuerdo con el modelo considerado para la tendencia, podemos considerar tres variantes de *kriging*: simple (SK), ordinario (OK) y con modelo de tendencia o universal (KT).

2.3.1. Kriging simple

En el caso de la clase SK, consideramos que la tendencia (media) $m(\mathbf{u})$ es conocida y constante a lo largo de toda el área de estudio A , es decir, $m(\mathbf{u}) = m$ para todo $\mathbf{u} \in A$.

El hecho de que la tendencia sea constante permite escribir la estimación como una combinación lineal de $n(\mathbf{u}_0) + 1$ elementos: $n(\mathbf{u}_0)$ atributos, $Z(\mathbf{u}_\alpha)$ y el valor medio m ,

$$Z_{SK}^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^{SK}(\mathbf{u}_0) [Z(\mathbf{u}_\alpha) - m] + m \quad (2.37)$$

Con la expresión anterior, nos aseguramos que el estimador será insesgado, es decir,

$$E\{Z_{SK}^*(\mathbf{u}_0) - Z(\mathbf{u}_0)\} = m - m = 0 \quad (2.38)$$

Además, la estimación del error viene dada en función de la componente residual por

$$Z_{SK}^*(\mathbf{u}_0) - Z(\mathbf{u}_0) = R_{SK}^*(\mathbf{u}_0) - R(\mathbf{u}_0) \quad (2.39)$$

de donde el error asociado a la estimación basada en *kriging* simple será $\sigma_{SK}^2 = Q(\lambda_\alpha^{SK}(\mathbf{u}_0))$, $\alpha = 1, \dots, n(\mathbf{u}_0)$, dependiendo de una forma cuadrática $Q(\Delta)$ basada en los valores de covarianzas de los residuos.

El sistema de ecuaciones normales de la técnica de *kriging* simple puede ser escrito como

$$\sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\beta^{SK}(\mathbf{u}_0) C(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) = C(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_0) \quad \alpha = 1, \dots, n(\mathbf{u}_0) \quad (2.40)$$

La varianza asociada a SK toma la forma

$$\sigma_{SK}^2(\mathbf{u}_0) = C(0) - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^{SK}(\mathbf{u}_0) C(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_0) \quad (2.41)$$

Finalmente, el peso asignado a la media m vendrá dado por

$$\lambda_m^{SK}(\mathbf{u}_0) = 1 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^{SK}(\mathbf{u}_0). \quad (2.42)$$

2.3.2. Kriging ordinario

El *kriging ordinario* (OK) tiene en cuenta las posibles fluctuaciones locales de la tendencia o media, limitando el dominio de estacionaridad de la media a la vecindad local $W(u)$: $m(\mathbf{u}^*)$ es una constante (desconocida) para todo $u^* \in W(\mathbf{u})$.

El estimador *kriging* ordinario viene dado por

$$m_{OK}^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\alpha}^{OK}(\mathbf{u}_0) Z(\mathbf{u}_{\alpha}) \quad (2.43)$$

con la restricción de que $\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\alpha}^{OK}(\mathbf{u}_0) = 1$

El sistema de ecuaciones de OK incluye $n(\mathbf{u}_0) + 1$ ecuaciones lineales, $n(\mathbf{u}_0)$ pesos $\lambda_{\alpha}^{OK}(\mathbf{u}_0)$ y el parámetro de *Lagrange* $L_{OK}(\mathbf{u}_0)$, que se tiene en cuenta para la construcción de los pesos,

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\beta}^{OK}(\mathbf{u}_0) C_R(\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) + L_{OK}(\mathbf{u}_0) = C_R(\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) & \alpha, \beta = 1, \dots, n(\mathbf{u}_0) \\ \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\beta}^{OK}(\mathbf{u}_0) = 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

En la práctica, se asume la covarianza residual igual a la covarianza del atributo Z , dando lugar a

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\beta}^{OK}(\mathbf{u}_0) C(\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) + L_{OK}(\mathbf{u}_0) = C(\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) & \alpha, \beta = 1, \dots, n(\mathbf{u}_0) \\ \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\beta}^{OK}(\mathbf{u}_0) = 1 \end{cases} \quad (2.45)$$

La varianza del estimador OK viene dada por

$$\sigma_{OK}^2(\mathbf{u}_0) = C(0) - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_{\alpha}^{OK}(\mathbf{u}_0) C(\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_0) - L_{OK}(\mathbf{u}_0) \quad (2.46)$$

De forma particular nos puede interesar estimar la media (localmente) del atributo. El estimador $m_{OK}^*(\mathbf{u}_0)$ puede ser escrito como una combinación lineal de $n(\mathbf{u}_0)$ variables aleatorias, ver fórmula (2.43).

2.3.3. Kriging con un modelo de tendencia (KT)

Este tipo de *kriging* (KT) también llamado *kriging universal* (UK) considera que la media local no es conocida y varía suavemente en cada vecindad local $W(\mathbf{u})$

(Rendu, 1980; Puente y Bras, 1986; Deutsch, 1991; Stein y Corsten, 1991). La componente de tendencia se modeliza como una combinación lineal de funciones $f_k(\mathbf{u})$ de las coordenadas:

$$m(\mathbf{u}^*) = \sum_{k=0}^K a_k(\mathbf{u}^*) f_k(\mathbf{u}^*) \quad (2.47)$$

con $a_k(\mathbf{u}^*) \approx a_k$, una constante no conocida en todo $\mathbf{u}^* \in W(\mathbf{u})$ que hay que estimar. Por convención, $f_0(\mathbf{u}^*) = 1$, así el caso $K = 0$ es equivalente al OK.

En este caso, el atributo Z se descompone en las siguientes estructuras $Z(\mathbf{u}) = m(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^K a_k f_k(\mathbf{u}) + R(\mathbf{u})$, siendo las funciones $f_k(\mathbf{u})$ conocidas y dependientes de las coordenadas y los a_k parámetros desconocidos. La componente residual se considera variable aleatoria estacionaria con media cero y covarianza $C_R(h)$.

El estimador KT para la localización \mathbf{u}_0 se define como una combinación lineal de las $n(\mathbf{u}_0)$ variables $Z(\mathbf{u}_\alpha)$

$$Z_{KT}^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^{KT}(\mathbf{u}_0) Z(\mathbf{u}_\alpha) \quad (2.48)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^{KT}(\mathbf{u}_0) f_k(\mathbf{u}_\alpha) = f_k(\mathbf{u}_0) \quad k = 0, \dots, K \quad (2.49)$$

El sistema de ecuaciones a resolver viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\beta^{KT}(\mathbf{u}_0) C_R(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \\ \quad + \sum_{k=0}^K L_k^{KT}(\mathbf{u}_0) f_k(\mathbf{u}_0) = C_R(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_0) \\ \quad \quad \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n(\mathbf{u}_0) \\ \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\beta^{KT}(\mathbf{u}_0) = 1 \\ \sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\beta^{KT}(\mathbf{u}_0) f_k(\mathbf{u}_\beta) = f_k(\mathbf{u}_0) \quad k = 0, \dots, K \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Y el error o varianza asociado al estimador KT será

$$\sigma_{KT}^2(\mathbf{u}_0) = C_R(0) - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^{KT}(\mathbf{u}_0) C_R(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_0) - \sum_{k=0}^K L_k^{KT}(\mathbf{u}_0) f_k(\mathbf{u}_0) \quad (2.51)$$

Obsérvese que para $K = 0$, los sistemas de KT y OK coinciden.

2.3.4. *Kriging* en bloques

Kriging en bloques o *Block kriging* es un nombre genérico para la estimación de valores de un atributo sobre un segmento, una superficie, o un volumen de algún tamaño y/o forma concretos. Si consideramos el subíndice V como distintivo del bloque o región correspondiente, y denotamos por $Z_V^*(\mathbf{u}_0)$ la estimación del atributo sobre el conjunto de puntos $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_{01}, \dots, \mathbf{u}_{0N})$ pertenecientes a la región V , tenemos que

$$z_V^*(\mathbf{u}_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_{OK}^*(\mathbf{u}_{0i}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha(\mathbf{u}_{0i})(u_\alpha) \quad (2.52)$$

La varianza asociada vendrá dada por la expresión

$$\sigma_V^2(\mathbf{u}_0) = C(V(\mathbf{u}_0), V(\mathbf{u}_0)) - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u}_0)} \lambda_\alpha^V V(\mathbf{u}_0) C(\mathbf{u}_\alpha - V(\mathbf{u}_0)) - L_V(\mathbf{u}_0) \quad (2.53)$$

siendo $L_V(\Delta)$ el correspondiente multiplicador de Lagrange.

2.3.5. *Kriging* factorial

En ciertas situaciones, en lugar de la descomposición del atributo en dos componentes, uno de tendencia y otro residual, es más práctico considerar la descomposición de $Z(u)$ en varios factores o componentes estocásticos independientes, de la forma

$$Z(\mathbf{u}) = Z_0(\mathbf{u}) + Z_1(\mathbf{u}) + \dots + Z_{NC}(\mathbf{u}) \quad (2.54)$$

Así, la covarianza de Z será la suma de las $(NC+1)$ componentes de covarianza

$$C_Z(h) = \sum_{i=0}^{NC} C_i(h), \quad (2.55)$$

y el sistema de ecuaciones para el *kriging* vendrá dado por

$$\sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} d_\beta(\mathbf{u}_0) C_Z(\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) + L_F(\mathbf{u}_0) \quad (2.56)$$

con la restricción de que $\sum_{\beta=1}^{n(\mathbf{u}_0)} d_\beta(\mathbf{u}_0) = 1$.

2.3.6. Cokriging

El término *cokriging* se utiliza para los métodos de regresión en los que intervienen varios atributos. Supongamos, pues, que disponemos de dos variables Z, Y definidas en las mismas localizaciones (Goovaerts, 1998). La ecuación para la estimación del valor de la variable principal Z en la localización u_0 viene dada por

$$Z_{COK}^*(\mathbf{u}_0) = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}(\mathbf{u}_0) Z(\mathbf{u}_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2}^*(\mathbf{u}_0) Y(\mathbf{u}_{\alpha_2}^*) \quad (2.57)$$

Este tipo de *kriging* requiere un modelo para la matriz de funciones de covarianza, incluida la covarianza de Z , $C_Z(h)$, la covarianza de Y , $C_Y(h)$, la covarianza cruzada de $Z - Y$, $C_{ZY}(h) = Cov\{Z(\mathbf{u}), Y(\mathbf{u} + h)\}$, y la covarianza cruzada de $Y - Z$, $C_{YZ}(h)$.

2.3.7. Kriging con factor externo (*external drift*)

Se trata de un caso particular del KT en el que el modelo de tendencia se limita a dos términos, $m(\mathbf{u}) = a_0 + a_1 f_1(\mathbf{u})$, siendo el término $f_1(\mathbf{u})$ la función identidad para la segunda variable (la externa). Este tipo de *kriging* es simple y muy efectivo para incorporar el efecto (bajo una clara interpretación física) de una variable secundaria en la estimación de la variable primaria $Z(\mathbf{u})$. La variable externa debe variar suavemente en toda la zona de estudio y además debe ser conocida en todas las localizaciones u_α donde lo es la variable primaria y en todas las localizaciones donde haya que estimar el valor de la variable primaria.

Si $Y(u)$ es la segunda variable, el modelo de tendencia viene dado por

$$E[Z(u)] = m(\mathbf{u}) = a_0 + a_1 Y(\mathbf{u}) \quad (2.58)$$

La estimación de la variable Z en u_0 y el correspondiente sistema de ecuaciones es idéntico al sistema KT con $K = 1$ y $f_1(\mathbf{u}) = Y(\mathbf{u})$.

2.3.8. Krigings no lineales

Finalmente, enumeramos un conjunto de clases de *krigings* que no cumplen con la condición de linealidad debida a transformaciones aplicadas sobre los atributos originales. Algunos de estos son:

1. *Kriging lognormal*: *kriging* aplicado al logaritmo de los datos.
2. *Kriging multi-Gaussiano*: se trata de una generalización del *kriging* lognormal aplicado a la transformación de los datos para conseguir normalidad.
3. *Kriging de rango*: *kriging* aplicado sobre una variable rango, transformación de los datos.
4. *Kriging indicatriz*: puede ser comparado con el *kriging* ordinario, donde la media es constante y no conocida, y la predicción es una variable binaria. La creación de estos datos binarios se hace a través del uso de un valor límite para datos continuos, donde los valores serán 0 ó 1, según superen o no dicho límite.
5. *Kriging disyuntivo*: *kriging* aplicado sobre una transformación polinómica (Journel, 1988; Oliver et al., 1996).

2.3.9. Validación cruzada

Una modelización estadística general exige una validación a posteriori de sus resultados, y de forma particular la modelización geoestadística requiere de dicha validación y la basa en una reestimación de los valores conocidos bajo las condiciones de implementación de los modelos construidos. Estas implementaciones incluyen los modelos de variogramas, el tipo de *kriging* y la elección de la estrategia general de modelización.

La técnica de Validación Cruzada (*cross-validation*, CV) sirve para comparar valores estimados por los modelos con los reales. La idea consiste en un proceso iterativo en el que cada vez se elimina un dato real y se estima con el resto de los datos. Cada uno de estos valores se compara, por ejemplo mediante regresión lineal, con el valor real. Buenos coeficientes de correlación/determinación serán indicativos de una correcta modelización.

Sin embargo, la utilización de la validación cruzada para seleccionar modelos de semivariogramas, tiene algunas restricciones:

1. Un remuestreo del modelo de semivariograma no influye en los pesos y *krigings*. Así, los valores de *sill* total no pueden ser obtenidos por validación cruzada de valores reestimados.
2. El *sill* relativo y el comportamiento del semivariograma en el origen *nugget*, no pueden ser usados simultáneamente con la validación cruzada.

3. Si el modelo es inadecuado, entonces no está claro qué parámetros deben ser cambiados.

2.4. Métodos alternativos de estimación e interpolación

En esta sección nos centramos en métodos particulares de interpolación de funciones mediante (*Thin Plate Splines*, TPS). Tres son las áreas de aplicación más importantes: estadística espacial, metodología sobre variables respuesta definidas en superficies y sistemas dinámicos/series temporales no lineales.

La aplicación de TPS, va a ser obtenida mediante el módulo de ArcGIS llamado *Geostatistical Analyst* (Johnston *et al.*, 2001).

La idea general subyacente a la modelización comentada en lo que sigue de esta sección, es el planteamiento o especificación de una función dependiente de una colección de parámetros y funciones, de la forma

$$\hat{f}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^M c_k \psi_k(\mathbf{u}) \quad (2.59)$$

donde ψ_k es un grupo de funciones que suelen llamarse *basis functions* y son funciones con una expresión algebraica muy sencilla y c_k son los parámetros a estimar.

2.4.1. Un modelo básico y general de relación entre variables

Supongamos que disponemos de un conjunto finito de localizaciones $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, y sea $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$. En el vector de localizaciones disponemos de un atributo denotado por Y , y una colección de covariables recogidas en la matriz X . Supongamos el modelo aditivo

$$Y(\mathbf{u}) = f(\mathbf{X}(\mathbf{u})) + \epsilon(\mathbf{u}) \quad (2.60)$$

donde f es la función de interés. La componente residual define un proceso estocástico aleatorio independiente, normalmente distribuido de esperanza nula. Una estrategia eficiente para representar f es asumir la descomposición de f en la suma de polinomios de bajo orden y una función de suavizado de la forma

$$f(\mathbf{X}(\mathbf{u})) = p(\mathbf{X}(\mathbf{u})) + h(\mathbf{X}(\mathbf{u})) \quad (2.61)$$

Bajo la suposición de que f es una realización de un proceso espacial, p puede ser identificado como la componente definitoria de tendencia espacial o *drift* y h es modelizada como un proceso Gaussiano de media cero (Cressie, 1993). Los modelos (2.60) y (2.61) se llaman *Modelo interactivo completo*.

Los métodos de *Spline* y los modelos de proceso espacial son sensibles a la dimensión de X porque se intenta representar todas las posibles interacciones entre las diferentes variables. Esta característica es conocida como *problema de la dimensionalidad* y tiene un incremento exponencial con el número de interacciones. Sin embargo, la regresión neuronal *Neural Network Regression* es menos sensitiva a funciones de gran dimensión. Un modelo de regresión neuronal toma como función f

$$f(\mathbf{X}(\mathbf{u})) = \beta_0 + \sum_{k=1}^M \beta_k \phi(\mu_k + \gamma_k^T \mathbf{X}(\mathbf{u})) \quad (2.62)$$

donde $\phi(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$, y β_k , μ_k y γ_k , $1 \leq k \leq M$ son parámetros a ser estimados. Así, la reducción de la dimensión es conseguida sólo considerando un pequeño número de proyecciones (M).

Otra forma alternativa para simplificar la estructura de f es asumiendo que esta función se descompone aditivamente en una colección de otras funciones, una por covariable,

$$f(X(\mathbf{u})) = \sum_{k=1}^M f_k(\mathbf{X}_k(\mathbf{u})) \quad (2.63)$$

2.4.2. *Thin plate splines (TPS)*

En esta sección se resuelve el problema de ajustar una superficie TPS a un conjunto de datos irregularmente espaciados bajo la modelización de un modelo interactivo completo como el (2.60). La resolución pasa por encontrar la solución de un problema variacional en el que la superficie f anteriormente descrita viene como solución del problema

$$S_\lambda(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y(\mathbf{u}_i) - f(X(\mathbf{u}_i)))^2 + \lambda J_m(f) \quad (2.64)$$

para $\lambda > 0$. TPS es una generalización de un suavizado *spline* cúbico usual con una función de penalización $J_m(f)$ de la forma

$$J_m(f) = \int_{R^d} \sum \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!} (\partial^m f / (\partial X_1^{\alpha_1} \dots \partial X_d^{\alpha_d}))^2 dX \quad (2.65)$$

donde la suma de la integral anterior es sobre todos los vectores de enteros no negativos, α , para los que $\sum \alpha_1 + \dots + \alpha_d = m$ con $2m > d$. Por ejemplo, para una dimensión y $m = 2$, $J_2(f) = \int_{R^2} (f''(X))^2 dX$, y obtenemos la función de penalización de suavizado *spline* cúbico estándar.

Una parte fundamental en una estimación basada en *spline* es la parte del modelo que es no afectado por la penalización de suavizado. Este grupo de funciones donde la penalización es cero, son llamadas *espacio nulo*, y aparecen en todos aquellos polinomios de grado menor o igual a $m - 1$.

Desde un punto de vista Bayesiano, S_λ se interpreta como el valor negativo de una función de densidad a posteriori de f dada por Y . La penalización es equivalente a la distribución a priori para f dada por una realización de un proceso Gaussiano de suavizado (al menos m diferenciable).

La estimación del parámetro λ se suele determinar mediante la técnica de *validación cruzada generalizada* (GCV). Obsérvese que TPS no es más que una función lineal de la variable dependiente observada. Si definimos $A(\lambda)$ como una matriz de suavizado $n \times n$ que actúa como una aplicación de Y sobre el vector de *spline* de los valores predichos, es decir, $(\hat{f}(X(\mathbf{u}_1)), \dots, \hat{f}(X(\mathbf{u}_n)))^T = A(\lambda)Y$, $A(\lambda)$ se interpreta como una medida del número de parámetros efectivos en la representación de los *splines*. Con esta nomenclatura, los residuos viene dados por $(I - A(\lambda))Y$ y así, $n - \text{tr} A(\lambda)$ son los grados de libertad asociados a los residuos. Finalmente, la ecuación de estimación del parámetro λ viene dada por

$$V(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} Y^T (I - A(\lambda))^T W (I - A(\lambda)) Y}{(1 - \text{tr} A(\lambda)/n)^2} \quad (2.66)$$

Una posible variación de este criterio es reemplazar el denominador de (2.66) por $(1 - (C(\text{tr} A(\lambda) - t) + t)/n)^2$, siendo t el número de funciones de polinomios que forman el espacio nulo de J_m y C un parámetro de coste que puede dar más (o menos) peso al número efectivo de parámetros bajo la base del modelo polinomial. Una vez $\hat{\lambda}$ es determinado, se calcula la estimación del parámetro σ^2 ,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y^T (I - A(\hat{\lambda}))^T W (I - A(\hat{\lambda})) Y}{n - \text{tr} (A(\hat{\lambda}))} \quad (2.67)$$

de forma análoga a la estimación clásica de la varianza residual en el contexto de una regresión lineal.

Capítulo 3

Teoría espectral de procesos espaciales

Índice General

3.1. Dominio espectral: análisis de Fourier	52
3.1.1. Análisis discreto de Fourier	52
3.1.2. Series de Fourier para funciones periódicas	54
3.1.3. Transformaciones de Fourier continuas	55
3.1.4. Representación de Fourier de las funciones no periódicas	56
3.1.5. <i>Aliasing</i> en el continuo	56
3.1.6. <i>Transformadas Fast Fourier</i>	57
3.1.7. <i>Wavelets</i> frente a Fourier	58
3.2. Representación espectral	59
3.2.1. Representación espectral para un proceso estacionario	59
3.2.2. Representación espectral de un proceso no estacionario	63
3.3. Densidades espectrales	64
3.3.1. Clases de densidades espectrales	64
3.3.2. Efecto de pérdida de especificación en la densidad es- pectral	67
3.4. Estructuras de covarianza espacial de la familia <i>Matérn</i>	68

3.4.1.	Forma matemática de la función de correlación de <i>Matérn</i>	69
3.4.2.	Comparación con la familia exponencial <i>Powered</i>	71
3.4.3.	Relación entre correlación y selección de parámetros	72
3.4.4.	Valores de θ_2 que satisfacen $p = \rho(d, \theta_1, \theta_2)$	73
3.5.	Modelización y estimación de la densidad espectral	74
3.5.1.	Dominio espectral: periodograma <i>tapered</i>	74
3.5.2.	<i>Tapering</i>	78
3.5.3.	El modelo <i>Matérn</i> para densidades espectrales	80
3.5.4.	Función de verosimilitud	82
3.5.5.	Periodograma para procesos no estacionarios	83

3.1. Dominio espectral: análisis de Fourier

Los métodos espectrales son unas herramientas potentes para el estudio de las estructuras espaciales de campos aleatorios y generalmente ofrecen beneficios computacionales significativos.

3.1.1. Análisis discreto de Fourier

Un análisis de Fourier discreto de un proceso espacial, también llamado análisis armónico, es una descomposición del proceso en una suma de componentes sinusoidales, ondas de senos y cosenos (Fuentes y Smith, 2001).

Los coeficientes de los componentes sinusoidales son las transformaciones discretas de Fourier del proceso. Las formas sinusoidales pueden ser usadas para modelizar variaciones estacionales y eliminando las componentes de tendencia a gran escala, hacerse más visibles. Otra potente fuente de variabilidad en escalas de tiempo corto será aparente cuando los fuertes ciclos anuales sean eliminados.

¿Por qué la elección del análisis de Fourier?

Hay muchas otras familias de funciones periódicas que comparten algunas propiedades de las sinusoidales, nosotros trataremos de justificar la elección de estas funciones sinusoidales.

Por ejemplo, ondas cuadradas se usan en la transformación de *Hass*. Sin embargo, las sinusoidales tienen algunas propiedades características las cuales les dan un papel distintivo para la representación del proceso espacial Z .

Una sinusoidal de frecuencia $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, o periodo $1/\boldsymbol{\omega} = (1/\omega_1, 1/\omega_2)$ en el dominio espacial, puede ser escrita como:

$$Z(\mathbf{s}) = R\cos(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s} + \phi) \quad (3.1)$$

donde R es la amplitud y ϕ es la fase. Consideramos la transformación lineal sobre la localización \mathbf{s} será $\mathbf{s} = (\mathbf{s} - \mathbf{a})/b$, la cual incorpora un cambio de origen y escala $Z(\mathbf{h})$ será:

$$Z(\mathbf{u}) = Z(\mathbf{a} + \mathbf{s}b) = R\cos(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{u}b + \phi + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{a}) = R'\cos(\boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{u} + \phi') \quad (3.2)$$

donde $R' = R$, $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}b$ y $\phi' = \phi + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{a}$. Así, la amplitud es invariable, la frecuencia es multiplicada por b (la recíproca del cambio en el dominio espacial), y la fase viene alterada por una envolvente que cambia el origen espacial y la frecuencia de la sinusoidal.

Como el origen espacial asociado con unos datos es arbitrario, la simplicidad de la relación anterior suele ser usada. En particular, R no depende del origen ni de la escala de tiempo variable y puede ser calculado como una cantidad absoluta sin arbitrariedad en su definición.

Otra propiedad interesante es que una suma de sinusoidales con una frecuencia común es otra sinusoidal con la misma frecuencia. De hecho, tenemos:

$$R\cos(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s} + \phi) = R\cos(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s})\cos(\phi) - R\sin(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s})\sin(\phi) \quad (3.3)$$

cualquier sinusoidal con frecuencia $\boldsymbol{\omega}$ es una combinación lineal de dos funciones básicas $\cos(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s})$ y $\sin(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s})$, y el inverso también es verdad.

Una característica que puede usarse de las sinusoidales es su comportamiento frente al muestreo, por ejemplo cuando observamos un proceso que está definido sobre un espacio continuo y sólo se cuenta con la información sobre valores en una malla. Si las observaciones definidas en una malla están separadas por una distancia $\Delta = (\delta_1, \delta_2)$, las sinusoidales serán de la forma:

$$R\cos(\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s} + \phi) \quad (3.4)$$

y

$$R\cos(\boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{s} + \phi) \quad (3.5)$$

que son indistinguibles si $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'$ es un múltiplo de $2\pi/\Delta$. Este fenómeno es conocido como *aliasing*.

3.1.2. Series de Fourier para funciones periódicas

Por el teorema de Wald con N finito, podemos modelizar unas series temporales de longitud N (Wald, 1949):

$$X(t) = \mu + \sum_{j=1}^{N/2} [A_j \cos(2\pi\omega_j t) + B_j \sin(2\pi\omega_j t)] + \epsilon(t) \quad (3.6)$$

para $\omega_j = j/N$ donde los A_j y B_j son variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza σ_j^2 , tal que:

$$\text{var}(X(t)) = \sigma^2 = \sum_{j=1}^{N/2} \sigma_j^2 \quad (3.7)$$

Así, descomponemos la varianza del proceso como $N/2$ componentes, cada uno asociado con la amplitud al cuadrado de las sinusoidales de una frecuencia particular.

En este modelo trabajamos con procesos de tiempo discreto X_t y un grupo de frecuencias discretas, llamadas $f_j = j/N$, con $1 \leq j \leq N/2$.

Hay cuatro posibles combinaciones de interés: de tiempo continuo con frecuencias continuas; tiempo continuo con frecuencias discretas; tiempo discreto con frecuencias continuas; y tiempo discreto con frecuencias discretas.

Ahora generalizamos la representación anterior para las series de tiempo de dos dimensiones y modelizamos un proceso espacial en una malla $n_1 \times n_2$ como:

$$Z(\mathbf{s}) = \mu + \sum_j [A_j \cos(2\pi\omega_j^T \mathbf{s}) + B_j \sin(2\pi\omega_j^T \mathbf{s})] \quad (3.8)$$

para $\omega_j = (j_1/n_1, j_2/n_2)$ donde las A_j y B_j son variables aleatorias no correlacionadas con media cero y varianza σ_j^2 .

Por conveniencia y facilidad matemática, podemos usar exponenciales complejas en lugar de sinusoidales directamente:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.9)$$

con,

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad (3.10)$$

y

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad (3.11)$$

3.1.3. Transformaciones de Fourier continuas

Supongamos que $g(\mathbf{s})$ es una función real o de valor complejo y se define:

$$G(\boldsymbol{\omega}) = \int_{R^d} g(\mathbf{s}) \exp\{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s}\} d\mathbf{s} \quad (3.12)$$

La función G en la expresión previa se llama transformada de Fourier de g , sí y solo sí g admite la representación (Teorema de Bochner, 1949):

$$g(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{R^d} G(\boldsymbol{\omega}) \exp\{-i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s}\} d\boldsymbol{\omega} \quad (3.13)$$

así que $|G(\boldsymbol{\omega})|$ representa la amplitud asociada con la exponencial compleja con frecuencia $\boldsymbol{\omega}$. La parte derecha de la ecuación es la llamada representación integral de Fourier de g . Las funciones g y G representan el par de la transformada de Fourier.

La transformada de Fourier de $g(\mathbf{s})$ se define como:

$$G(\boldsymbol{\omega}) = \int_{R^d} g(\mathbf{s}) \exp\{i2\pi\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s}\} d\mathbf{s} \quad (3.14)$$

y la inversa de la transformada de Fourier de $G(\boldsymbol{\omega})$ como

$$g(\mathbf{s}) = \int_{R^d} G(\boldsymbol{\omega}) \exp\{-i2\pi\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s}\} d\boldsymbol{\omega} \quad (3.15)$$

Las funciones y sus transformadas suelen ser dos dominios. En aplicaciones físicas se suelen llamar dominio del tiempo (o espacio) y dominio de frecuencia, respectivamente.

Operaciones realizadas en un dominio tienen operaciones correspondientes en el otro dominio. Por ejemplo, la operación convolución en el tiempo (o espacio) su dominio será una multiplicación con el dominio de la frecuencia, $f(x) \otimes g(x) \longrightarrow F(x)G(x)$. El inverso es también verdad, $F(x) \otimes G(x) \longrightarrow f(x)g(x)$.

Tales teoremas nos permiten movernos entre dominios mediante operaciones pudiendo ser obtenidas donde son más fáciles y más ventajosas.

3.1.4. Representación de Fourier de las funciones no periódicas

Si $Z(\mathbf{s})$ es un proceso no periódico y se tiene una integral de Fourier

$$Z(\mathbf{s}) = \int_{R^d} G(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\mathbf{s}} d\boldsymbol{\omega} \quad (3.16)$$

la energía total disipada sobre el espacio infinito R^2 viene dada por,

$$R^2 = \int_{R^d} Z^2(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \int_{R^d} |G(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega} \quad (3.17)$$

$\{|G(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega}\}$ representa la contribución a la energía total de las componentes en $Z(\mathbf{s})$ cuyas frecuencias están entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega} + d\boldsymbol{\omega}$. Hay dos diferencias esenciales entre las propiedades espectrales de funciones periódicas y no periódicas, éstas serán:

- Las funciones periódicas son representadas por un grupo discreto de frecuencias, mientras que las no periódicas envuelven un rango continuo de frecuencias.
- Las funciones periódicas tienen energía total sobre R^2 infinita, por eso sus propiedades espectrales vienen definidas en términos de distribuciones de potencia de un grupo de frecuencias. Las no periódicas, con energía total finita, se describen en términos de distribución de densidad de energía sobre un rango continuo de frecuencias.

3.1.5. *Aliasing* en el continuo

Si descomponemos un proceso continuo Z con una superposición discreta de oscilaciones armónicas, es fácil ver que tal descomposición no puede ser únicamente obtenida de observaciones de Z en ΔZ^2 (es una malla infinita con espacios Δ), donde Δ es la distancia entre observaciones vecinas, y Z^2 la malla entera. La igualdad en el espaciado en el dominio espacial de las observaciones introduce un efecto *aliasing* para las frecuencias. Entonces,

$$\exp\{i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\Delta\} = \exp\{i(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{y}2\pi/\Delta)\mathbf{x}\Delta\} = \exp\{i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\Delta\} \exp\{i2\pi\mathbf{y}\mathbf{x}\} \quad (3.18)$$

para cada \mathbf{x} e \mathbf{y} en Z^2 . Nosotros no podemos simplemente distinguir una oscilación con una frecuencia angular $\boldsymbol{\omega}$ de todas las oscilaciones con frecuencias $\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{y}/\Delta$.

Las frecuencias ω y $\omega' = \omega + 2\pi\mathbf{y}/\Delta$ son indistinguibles y son *aliasing* unas a otras. La imposibilidad de distinguibilidad de los componentes armónicos con frecuencias que difieren un múltiplo entero de $2\pi/\Delta$ mediante observaciones en una malla entera con espaciado Δ define el llamado efecto *aliasing*.

Entonces, si las observaciones de un proceso continuo Z se observan solo en ciertas localizaciones espaciales espaciadas uniformemente Δ unidades, el espectro de las observaciones muestreadas $Z(\Delta\mathbf{x})$, se concentra en la banda de frecuencias finitas $-\pi/\Delta \leq \omega < \pi/\Delta$.

Todas las frecuencias que no estén en ese intervalo de bandas, tienen un efecto *aliasing* en la banda. El espectro de frecuencias correspondiente se repite en bandas de longitud $2\pi/\Delta$ mediante puntos de la forma $(2\mathbf{y}+1)\pi/\Delta$, con $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$, y la distribución de potencias con cada una de las bandas distintas de la principal $-\pi/\Delta \leq \omega < \pi/\Delta$, se superpone sobre la distribución de potencias con la banda principal. Así, si deseamos que las características espectrales del proceso Z sean determinadas de forma robusta por las muestrales, entonces la frecuencia *Nyquist*, π/Δ debe ser necesariamente grande de forma que frecuencias todavía más grandes que ω sólo representan una insignificante contribución a la potencia total del proceso. Esto significa que debemos observar un muestreo denso de Z (pequeño Δ).

Aliasing es un fenómeno simple. En general, cuando tomamos un grupo discreto de datos de observaciones en una función continua, la información se pierde. Esta es una de las ventajas de las funciones trigonométricas, las cuales esta pérdida de información se manifiesta a través del *aliasing*. Decimos que las grandes frecuencias hacen el efecto *aliasing* sobre las bajas frecuencias.

3.1.6. Transformadas Fast Fourier

El método FFT evita muchas de las redundancias de la transformación discreta de Fourier. En primer lugar, las ondas seno y coseno son las mismas ondas en diferentes posiciones. Uno podría calcular la onda seno y cambiar la fase para conseguir la onda coseno. También, se podría usar la simetría de las ondas para reducir los tiempos de cálculo. Además, las ondas, cuando crecen las frecuencias, se trasladan más y más. El método FFT envuelve muy poca computación, y trabaja más rápido que un DFT. Para una muestra de tamaño $N = n_1 \times n_2$, el algoritmo FFT es del orden de $2N \log_2 N$ operaciones, significando una gran número de muestras y frecuencias para analizar, el tiempo de computación es prácticamente lineal (en lugar de las N^2 operaciones necesarias para el cálculo de

una transformada de Fourier). Así, si por ejemplo $N = 1000$, el método de FFT reduce el tiempo de computación a $1/50$ y con un crecimiento de N este aumento crece rápidamente.

3.1.7. *Wavelets* frente a Fourier

Durante muchas décadas, los científicos han estudiado otras funciones diferentes de senos y cosenos, las cuales abarcan las bases del análisis de Fourier para representar el proceso. Un análisis *wavelets* (o de ondas) se puede usar para aproximar funciones que están contenidas en dominios finitos. En un análisis de ondas, la escala que usamos para analizar los datos juega un papel importante. Algoritmos basados en ondas pueden procesar datos de diferentes escalas o resoluciones. Si miramos una señal en una gran ventana, podríamos decir que tiene grandes características. Igualmente, si vemos una señal en una pequeña ventana, podríamos hablar de pequeñas características. El resultado en los análisis de ondas es para ver ambos, el bosque y los árboles, se puede decir.

El procedimiento de análisis de ondas consiste en adoptar una función prototipo de onda, llamado un análisis ondulado u onda madre. Por ejemplo, un análisis temporal podría ser realizado bajo una contracción, versión de grandes frecuencias de la onda prototipo, mientras que análisis de frecuencias se realiza con un dilatado, versión de bajas frecuencias de la misma onda. Esto es debido a la señal original o función, que puede ser representada en términos de una expansión de onda (usando coeficientes en una combinación lineal de las funciones de onda). A priori, podemos elegir una buena base de ondas para nuestros datos, y entonces podríamos necesitar truncar los coeficientes bajo un umbral. El problema es cómo elegir o definir estas bases de onda apropiados y decidir cuando truncar los coeficientes.

Una ventaja de transformaciones en ondas es la posible variación de las ventanas. Para obtener información sobre discontinuidades de señales aislantes, querríamos tener algunas funciones base muy pequeñas. Al mismo tiempo, para obtener un análisis de frecuencias detalladas, deberíamos tener funciones de base grandes. Una forma para obtenerlas es tener funciones base cortas de gran frecuencia y otras largas de baja frecuencia.

En los próximos puntos se presentan herramientas espectrales para modelizar y estimar la covarianza de un proceso espacial Z , usando la representación espectral (bases de Fourier) de Z . Sin embargo, análisis similares podrían hacerse sin el uso de una base ondulada. Es debido a que no hay teoremas de representación

espectral, que den un cierto resultado a la estructura de la covarianza de una representación de las ondas del proceso.

3.2. Representación espectral

En esta sección introduciremos la representación espectral de un proceso espacial estacionario usando ondas de senos y cosenos. Presentaremos el teorema de Bochner para obtener una representación espectral para la covarianza. Estos resultados vienen presentados tanto para los casos de estacionariedad y no estacionariedad.

3.2.1. Representación espectral para un proceso estacionario

La representación espectral de un proceso aleatorio $Z(\mathbf{x})$ se interpreta en forma de superposición de ondas de senos y cosenos de diferentes frecuencias $\boldsymbol{\omega}$. Un campo aleatorio de dos dimensiones Z se dice que es débilmente estacionario si tiene los momentos de segundo orden finitos, esto significa que la media es una función constante y tiene una función de autocovarianza C , tal que $\text{cov}(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{y})) = C(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Entonces Z puede ser representado a través de la siguiente integral de Fourier-Stieltjes (Yaglom, 1987)

$$Z(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}) dY(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.19)$$

donde Y son funciones aleatorias con *incrementos no correlacionados*. La representación (3.19) se llama *representación espectral* de Z . La representación espectral describe el análisis armónico de un proceso estacionario general, por ejemplo sus representaciones en forma de una superposición de oscilatorios armónicos.

Usando la representación de Z y procediendo formalmente,

$$C(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}) F(d\boldsymbol{\omega}) \quad (3.20)$$

donde la función F es una medida espectral finita no negativa (normalmente llamada espectro) para Z , definida por $E |Y(\boldsymbol{\omega})|^2 = F(\boldsymbol{\omega})$. Si F tiene una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, esta densidad es la *densidad espectral* f , definida como la transformada de Fourier de la función de autocovarianza C ,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}) C(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.21)$$

sujeta a la condición de que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |C(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty \quad (3.22)$$

Por el teorema de Bochner, la función C es una autocovarianza sí y solo sí puede ser representada como en (3.21), donde F es una medida finita y positiva. Así, la estructura espacial de Z puede ser analizada con una aproximación espectral o equivalentemente por la estimación de la función de autocovarianza.

A cada proceso estacionario $Z(\mathbf{s})$ se le puede asignar un proceso $Y(\boldsymbol{\omega})$ con incrementos ortogonales, tales que tenemos para cada representación espectral fija

$$Z(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega} dY(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.23)$$

$Y(\boldsymbol{\omega})$ es definida para una variable aleatoria aditiva. El proceso Y es llamado proceso espectral asociado con un proceso estacionario Z . El proceso espectral aleatorio Y tiene las siguientes propiedades:

$$E(Y(\boldsymbol{\omega})) = 0 \quad (3.24)$$

(bajo el supuesto de que la media de Z es 0), el proceso Y tiene incrementos ortogonales:

$$E[Y(\boldsymbol{\omega}_3) - Y(\boldsymbol{\omega}_2), Y(\boldsymbol{\omega}_1) - Y(\boldsymbol{\omega}_0)] = 0 \quad (3.25)$$

donde $(\boldsymbol{\omega}_3, \boldsymbol{\omega}_2)$ y $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_0)$ son intervalos disjuntos. Si definimos F como:

$$E |dY(\boldsymbol{\omega})|^2 = dF(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.26)$$

F es una medida positiva, y

$$E[dY(\boldsymbol{\omega})dY(\boldsymbol{\omega}')] = \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}')dF(\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega}' \quad (3.27)$$

donde $\delta(\boldsymbol{\omega})$ es la función δ -Dirac.

Teorema 1 Bochner (Bochner y Martin, 1949). Una función de variable compleja C sobre \mathbb{R}^d es la función de autocovarianza de un campo aleatorio estacionario complejo en \mathbb{R}^d y continuo en media cuadrática, si y solo si puede ser representado de la forma

$$C(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}} dF(\boldsymbol{\omega}), \quad (3.28)$$

donde F es una medida positiva.

Si pensamos en $Y(\boldsymbol{\omega})$ como una representación del desarrollo espacial de algunos sistemas físicos concretos, la representación espectral define la descomposición de la fluctuación total en sus componentes armónicos elementales. La relación entonces muestra que $dF(\boldsymbol{\omega})$ es una media de potencia disipada a través de una unidad de resistencia mediante los componentes con frecuencias en $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} + d\boldsymbol{\omega})$. Así, la función espectral $F(\boldsymbol{\omega})$ determina la distribución de la media total de potencia en la fluctuación $Z(\mathbf{s})$ sobre el rango de frecuencia angular $\boldsymbol{\omega}$. La media de potencia asignada al intervalo de frecuencia $A=[\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2]^2$ es $F(A)$, la cual se convierte en

$$E |Z(\mathbf{s})|^2 = C(0) = F(\mathbb{R}^2) \quad (3.29)$$

Así, F determina el espectro de potencia del proceso Z . Podemos pensar en esto como una distribución de una masa espectral de cantidad total $C(0)$ sobre el eje $\boldsymbol{\omega}$. F sólo difiere por una constante multiplicativa de una función de distribución ordinaria.

Si tiene una densidad con respecto a la medida Lebesgue, esta densidad es la densidad espectral, $f = F'$, definida como la transformación de Fourier de la función autocovarianza:

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}) C(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.30)$$

Momentos espectrales

Los momentos espectrales

$$\lambda_k = \int \boldsymbol{\omega}^k dF(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.31)$$

pueden o no ser finitos. Como una consecuencia del teorema de Bochner, el momento λ_{2k} está definido si y solo si $C(\mathbf{x})$ tiene una derivada de orden $2k$ en $\mathbf{x} = 0$.

Un proceso Z es m veces diferenciable en media cuadrada sí y solo sí $C^{(2m)}(0)$ existe y es finita y, en este caso, la función de autocovarianza de $Z^{(m)}$ es $(-1)^m C^{(2m)}$. Por tanto, Z es m veces diferenciable en media cuadrada sí y solo sí el momento λ_{2m} es finito.

El caso real

Sea $Z(\mathbf{s})$ real y estacionario. La función de covarianza C será entonces real, y puede representarse por G , la parte real de la distribución espectral F .

Entonces:

$$C(\mathbf{s}) = C(-\mathbf{s}) = \int_{R^2} \cos(\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}) dF(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.32)$$

La densidad espectral correspondiente es una función uniforme. La covarianza C puede ser representada usando G , la parte real de la distribución espectral F . La representación espectral de la función covarianza ahora tomará la forma:

$$C(\mathbf{s}) = \int_{R_+^2} \cos(\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}) dG(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.33)$$

donde $G(\boldsymbol{\omega}) = F(\boldsymbol{\omega}) - F(-\boldsymbol{\omega})$.

El caso discreto

Un proceso estacionario con dominio discreto y media cero es una secuencia de variables aleatorias $Z(\mathbf{s}_m)$ con $\mathbf{s}_m \in [0, \pm 1, \dots]^2$ y $E[Z(\mathbf{s}_m)] = 0$, mientras la covarianza es $C(\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n) = E[Z(\mathbf{s}_m)Z(\mathbf{s}_n)]$. Las integrales finitas en la representación espectral son reemplazadas en el caso discreto por integrales sobre un intervalo, $\Pi^2 = [-\pi, \pi]^2$, de área $2\pi^2$ y tenemos que

$$C(\mathbf{s}_m) = \int_{\Pi^2} e^{i\mathbf{s}_m^T \boldsymbol{\omega}} dF(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.34)$$

donde F es real, nunca decrece, y llega al límite. Para un proceso aleatorio Z tenemos:

$$Z(\mathbf{s}_m) = \int_{\Pi^2} e^{i\mathbf{s}_m^T \boldsymbol{\omega}} dY(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.35)$$

donde Y es un proceso con incrementos ortogonales.

3.2.2. Representación espectral de un proceso no estacionario

Son varias las posibilidades de representaciones no estacionarias. En este caso nos centramos en una de ellas, para obtener una representación espectral de un proceso no estacionario. Tomamos Z como un proceso espacial no estacionario observado en una región D . Supongamos que D está cubierta por subregiones bien definidas S_1, \dots, S_k , y consecuentemente, Z puede ser escrito como una media ponderada de procesos estacionarios locales ortogonales Z_i para $i = 1, \dots, k$, con $cov(Z_i(\mathbf{x}), Z_j(\mathbf{y})) = 0$ para $i \neq j$. Con esto, tenemos

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k Z_i(\mathbf{x})K_i(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

donde Z_i es un proceso estacionario local en la subregión S_i , $K_i(\mathbf{x})$ es una función kernel positiva centrada en los centroides de S_i . Las medias de las ponderaciones (3.36) son las representaciones discretas del proceso Z , pero podríamos escribir esta media como una integral para obtener una representación continua.

La covarianza no estacionaria de Z viene definida en términos de covarianzas estacionarias locales de los procesos Z_i para $i = 1, \dots, k$,

$$cov(Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^k K_i(\mathbf{x})K_i(\mathbf{y})cov(Z_i(\mathbf{x}), Z_i(\mathbf{y})) \quad (3.37)$$

donde $cov(Z_i(\mathbf{x}), Z_i(\mathbf{y})) = C_{\theta_i}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, con el parámetro de covarianza θ_i variando con la subregión y esto es una medida de la falta de estacionariedad de Z .

Centrándonos en el proceso no estacionario Z , definido como una mezcla de procesos estacionarios Z_1, \dots, Z_k como en (3.36) con cada Z_i de la forma (3.19), la representación espectral de Z es

$$Z(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}) dY(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.38)$$

con

$$Y(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^k \bar{K}_i * Y_i(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.39)$$

con \bar{K}_i la transformada de Fourier de K_i , y $*$ denota la convolución

$$\bar{K}_i * Y_i(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathfrak{R}^2} \bar{K}_i(\mathbf{h}) Y_i(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{h}) d\mathbf{h}. \quad (3.40)$$

La covarianza de Z puede ser definida en términos de la covarianza de los procesos estacionarios locales ortogonales Z_i , como en (3.37), definiendo una covarianza no estacionaria válida. La correspondiente densidad espectral viene dada por:

$$f(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{i=1}^k \hat{f}_i * [\bar{K}_i(\boldsymbol{\omega}_1) \bar{K}_i(\boldsymbol{\omega}_2)], \quad (3.41)$$

con

$$\hat{f}_i * [\bar{K}_i(\boldsymbol{\omega}_1) \bar{K}_i(\boldsymbol{\omega}_2)] = \int_{\mathfrak{R}^2} \hat{f}_i(\boldsymbol{\omega}) \bar{K}_i(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}) \bar{K}_i(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}. \quad (3.42)$$

Densidad espectral de un proceso continuo observado en una malla

Las funciones espectrales f y F están íntimamente relacionadas a la descomposición espectral del proceso Z en una superposición de oscilatorios armónicos.

Si el proceso continuo Z es observado sólo en localizaciones uniformemente espaciadas Δ unidades, el espectro de observaciones de la frecuencia del muestreo $Z(\Delta \mathbf{x})$, está concentrado en la banda de frecuencia finita $\pi/\Delta \leq \boldsymbol{\omega} < \pi/\Delta$.

La densidad espectral f_Δ de la secuencia de muestras $Z(\Delta \mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} \in Z^2$, puede ser escrita en términos de la correspondiente densidad espectral, f , definida anteriormente, del proceso Z definido en un espacio continuo. Tenemos,

$$f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{Q_1 \in Z^2} \sum_{Q_2 \in Z^2} f\left(\boldsymbol{\omega}_1 + \frac{2\pi Q_1}{\Delta}, \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{2\pi Q_2}{\Delta}\right) \quad (3.43)$$

para $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \in \Pi_\Delta^2 = [-\pi/\Delta, \pi/\Delta]^2$.

3.3. Densidades espectrales

3.3.1. Clases de densidades espectrales

Consideramos en esta sección un proceso real, por lo tanto, la densidad espectral será una función continua. Describiremos a continuación varias clases particulares de modelos espectrales.

Modelo Gaussiano

La expresión de un proceso espacial con una covarianza Gaussiana isotrópica viene dada por:

$$C(r) = \sigma e^{-\alpha r^2} \quad (3.44)$$

con función de densidad espectral

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \sigma (\pi \alpha)^{-1/2} e^{-\boldsymbol{\omega}^2 / (4\alpha)} \quad (3.45)$$

Hacer notar que C y f ambos comparten el mismo tipo de funciones exponenciales. El parámetro σ es la varianza del proceso y α^{-1} es un parámetro que nos informa de como decae de rápido la correlación.

Para este proceso, la covarianza es infinitamente diferenciable y todos los momentos de la densidad espectral son finitos. Así el correspondiente proceso Z tiene derivadas de todos los órdenes.

Modelo Triangular

Para un proceso espacial con una covarianza isotrópica triangular, la covarianza toma la forma

$$C(r) = \sigma (a - |r|)^+ \quad (3.46)$$

para σ y a positivas, y la correspondiente densidad espectral viene dada por

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \sigma \pi^{-1} \{1 - \cos(\alpha \boldsymbol{\omega})\} / \boldsymbol{\omega}^2 \quad (3.47)$$

El comportamiento de las oscilaciones de la densidad espectral podría ser probablemente poco realista para procesos físicos. No hay razones para asumir que el espectro tiene mucha más masa cerca de la frecuencia $(2n + 1)\pi$ que cerca de $2n\pi$ para n grande. Algunas predicciones de *krigings* bajo este modelo tienen extrañas propiedades como consecuencia de las oscilaciones de la densidad espectral para grandes frecuencias.

Modelo Esférico

Uno de los modelos más comúnmente usados para funciones de covarianza isotrópica en aplicaciones de geología e hidrogeología es el esférico, con expresión,

$$C(\gamma) = \begin{cases} \sigma \left(1 - \frac{3}{2\rho} + \frac{1}{2\rho^3} r^3\right) & r \leq \rho \\ 0 & r > \rho \end{cases} \quad (3.48)$$

para constantes positivas σ y ρ . Esta función tiene covarianza no válida en dimensiones mayores que 3. El parámetro ρ es el rango. Esta función es solo una vez diferenciable en $r = \rho$ y esto puede dar problemas cuando usamos métodos de verosimilitud para la estimación de los parámetros del modelo. En tres dimensiones, la densidad espectral isotrópica correspondiente tiene oscilaciones en altas frecuencias similares a las funciones de covarianza del modelo triangular en una dimensión.

Clase *Matérn*

Una clase de variogramas prácticos y de funciones de autocovarianza para un proceso Z puede ser obtenida a partir de la clase de *Matérn* de densidades espectrales,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(\alpha^2 + |\boldsymbol{\omega}|^2)^{(-\nu - \frac{d}{2})} \quad (3.49)$$

con parámetros $\nu > 0$, $\alpha > 0$ y $\phi > 0$ (el valor d es la dimensión del proceso espacial Z). Aquí, el vector de parámetros de covarianza es $\theta = (\phi, \nu, \alpha)$. El parámetro α^{-1} puede ser interpretado como el rango de autocorrelación. El parámetro ν mide el grado de suavizamiento del proceso Z , cuanto mayor es el valor de ν , mayor suavizamiento Z tendrá, y ϕ es el cociente entre la varianza σ y el rango (α^{-1}) elevado a la potencia 2ν , $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$.

La correspondiente covarianza para la clase *Matérn* viene dada por,

$$C_{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{\pi^{d/2} \phi}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu + d/2) \alpha^{2\nu}} (\alpha |\mathbf{x}|)^{\nu} \kappa_{\nu}(\alpha |\mathbf{x}|) \quad (3.50)$$

donde κ_{ν} es una función de Bessel modificada. Por ejemplo, cuando $\nu = \frac{1}{2}$, podemos decir que se trata de la función de covarianza exponencial

$$C_{\theta}(\mathbf{x}) = \pi \phi \alpha^{-1} \exp(-\alpha |\mathbf{x}|) \quad (3.51)$$

Cuando ν es de la forma $m+1/2$ con m un entero no negativo, la función de covarianza de *Matérn* es de la forma $e^{-\alpha|\mathbf{x}|}$ veces un polinomio en $|\mathbf{x}|$ de grado m .

La simplicidad de la representación del proceso en el dominio espectral frente al dominio espacial es clara simplemente observando las expresiones (3.49) y (3.50).

En las representaciones de covarianzas de *Matérn*, una covarianza Gaussiana y una covarianza exponencial, la primera es más plana en el origen, esto indica

que el proceso espacial es muy suavizado. Por otra parte, la exponencial es casi lineal en el origen, indicando que el correspondiente proceso espacial no es muy suavizado, de hecho este proceso no es uniformemente diferenciable en media cuadrática.

Por la importancia de esta familia, dedicaremos una sección en este capítulo a desarrollar los aspectos metodológicos de la misma. Esta familia es la escogida en esta tesis para los diferentes estudios de simulación.

3.3.2. Efecto de pérdida de especificación en la densidad espectral

El primer paso en nuestro análisis debe ser estimar el parámetro de suavizado de los datos, y no considerarlo conocido como así hacen otras muchas técnicas espaciales. Después de conocer el grado de suavizamiento, la validez del proceso de interpretación estándar depende sólo del parámetro ϕ . Hay que hacer notar que a pequeñas frecuencias (pequeñas $|\omega|$) el efecto de la interpolación espacial es menor.

Es posible dar una teoría cuantitativa sustentada por este punto de vista. Sea f_0 la densidad espectral real del proceso Z y f_1 una densidad incorrecta. Entonces (Stein, 1999a),

$$f_1(\omega)/f_0(\omega) \rightarrow 1 \quad (3.52)$$

con $|\omega| \rightarrow \infty$, entonces todas las predicciones lineales bajo la incorrecta f_1 son asintóticamente uniformemente correctas. Así, si el objetivo es la interpolación espacial, es preferible trabajar en el dominio espectral y focalizar el análisis en valores de grandes frecuencias. Una expresión aproximada para la densidad espectral de la clase *Matérn* para valores de grandes frecuencias se obtiene a partir de la expresión anterior de $f(\omega)$ (3.49) considerando $|\omega|$ que tiende a ∞ :

$$f(\omega) = \phi(|\omega|^2)^{(-\nu-\frac{d}{2})} \quad (3.53)$$

Así, el grado de suavizamiento, ν , y ϕ son los parámetros críticos a estimar (y no el parámetro del rango α^{-1}).

Si representamos una covarianza Gaussiana y una covarianza de *Matérn* con $\nu = 1.5$, ambas covarianzas tienen similares características en cortas distancias, pero, representan dos procesos espaciales muy diferentes. La covarianza Gaussiana corresponde a un proceso que es infinitas veces diferenciable y la covarianza *Matérn* con $\nu = 1.5$ corresponde a un proceso que es sólo una vez diferenciable.

Las propiedades de las interpolaciones espaciales dependerán mucho de cual sea el modelo elegido. El problema es que trabajando en el dominio espacial y analizando la covarianza empírica en cortas distancias, no podemos ver la diferencia entre ambos modelos. Una aproximación alternativa es estudiar la densidad en grandes frecuencias.

3.4. Estructuras de covarianza espacial de la familia *Matérn*

En esta sección, por facilidad de notación, vamos a denotar la variable espacial por \mathbf{u} , en lugar de \mathbf{x} , como se ha hecho en la sección (3.3.1).

La familia exponencial *Powered* de función de correlación:

$$\rho(\mathbf{u}) = \exp(-\alpha |\mathbf{u}|^\delta) \quad (3.54)$$

tiene muchas desventajas tales como cambios bruscos en la señal del proceso cuando $\delta < 2$ y para $\delta = 2$ podemos hablar de la función de correlación isotrópica continua en R^d (*Matérn*, 1986) que puede ser escrita generalmente como:

$$\rho(|\mathbf{u}|) = E(e^{i\mathbf{u}^T X}) \quad (3.55)$$

donde X es una variable aleatoria de d dimensiones.

La esperanza anterior sólo depende de la distribución G de $|X|$. Tomamos Y como una distribución uniforme en unidades esféricas. Entonces,

$$\rho(|\mathbf{u}|) = E(e^{i|\mathbf{u}||X|Y}) = E\Phi_Y(|\mathbf{u}||X|) \quad (3.56)$$

donde Φ_Y es la función característica de Y ,

$$\Phi_Y(t) = k! \left(\frac{2}{t}\right)^k \kappa_k(t), \quad k = \frac{d-2}{2} \quad (3.57)$$

y κ_k es una función Bessel de primera clase. Particularmente, $d = 2$, así $\Phi_Y(t) = \kappa_0(t)$. Entonces,

$$\rho(|\mathbf{u}|) = \int_0^\infty \kappa_0(|\mathbf{u}|t) dG(t) \quad (3.58)$$

Con esto, cualquier función de correlación isotrópica espacial continua es una mezcla de escala de funciones de Bessel κ_0 , por el teorema de Hankel (*Chiles y Delfiner*, 1999).

3.4.1. Forma matemática de la función de correlación de *Matérn*

Particularmente, una selección de $G(t) = -\frac{1}{\theta_1^{2\theta_2}}(t^2 + \theta_1^2)^{-\theta_2}$ con $\theta_1' = \frac{\theta_1}{2\sqrt{\theta_2}}$, da una función de correlación de la familia *Matérn* como:

$$\rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)} \left(\frac{2|\mathbf{u}|\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \right)^{\theta_2} \kappa_{\theta_2} \left(\frac{2|\mathbf{u}|\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \right) \quad (3.59)$$

donde (θ_1, θ_2) son un par de parámetros, con $\theta_1 > 0$ un parámetro de escala que controla el rango espacial de correlación, y $\theta_2 > 0$ controla el suavizamiento del campo aleatorio.

Γ es la función gamma y κ_{θ_2} es la función Bessel modificada con la siguiente definición:

$$\kappa_{\theta_2}(x) = \frac{\pi}{2} i^{\theta_2+1} [J_{\theta_2}(ix) + iY_{\theta_2}(ix)] \quad (3.60)$$

con

$$J_{\theta_2}(z) = \left(\frac{1}{2}z \right)^{\theta_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^k}{k!\Gamma(\theta_2 + k + 1)} \quad (3.61)$$

y

$$Y_{\theta_2}(z) = \frac{J_{\theta_2}(z)\cos(\theta_2\pi) - J_{-\theta_2}(z)}{\sin(\theta_2\pi)} \quad (3.62)$$

Por ejemplo, cuando θ_2 es entero:

$$\begin{aligned} Y_{\theta_2}(z) &= \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{z}{2} + \gamma \right) J_{\theta_2}(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\theta_2-1} \frac{\Gamma(\theta_2 - k)}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{-\theta_2+2k} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\theta_2 - k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\theta_2+2k} \left(\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{\theta_2+k} \frac{1}{m} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

así, cuando $x \ll \theta_2$,

$$\kappa_{\theta_2}(x) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\theta_2} \sum_{k=0}^{\theta_2-1} \frac{\Gamma(\theta_2 - k)}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (3.64)$$

y la función de correlación con distancia d ($d < \theta_1$) es aproximadamente, con $\theta_2 \neq 1$,

$$\rho(d, \theta_1, \theta_2) \approx 1 - \frac{\theta_2}{\theta_2 - 1} \left(\frac{d}{\theta_1} \right)^2 \quad (3.65)$$

en otro caso,

$$\rho(d, \theta_1, \theta_2) \approx 1 \quad (3.66)$$

De forma similar, cuando $x \ll \theta_2$ y $x \rightarrow 0$,

$$\kappa_{\theta_2}(x) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\theta_2} \sum_{k=0}^{\theta_2-1} \frac{\Gamma(\theta_2 - k)}{K!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (3.67)$$

Particularmente, cuando $\theta_2 = 1$, $\kappa_{\theta_2}(x) \approx 0.5 \left(\frac{x}{2} \right)^{-1}$ y $\rho(d, \theta_1, \theta_2) \approx 1$. Sin embargo, cuando $x \gg \theta_2$,

$$\kappa_{\theta_2}(x) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-x) \quad (3.68)$$

y

$$\rho(d, \theta_1, \theta_2) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\theta_2} \Gamma(\theta_2)} \left(\frac{2d\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \right)^{\theta_2 - \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2d\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \right) \quad (3.69)$$

Whittle (1954) argumenta que el caso $\theta_2 = 1$ es más apropiado que el caso $\theta_2 = 1/2$ (Cressie, 1993). Sin embargo, podemos argumentar que el caso $\theta_2 > 1$ es más apropiado que el caso $\theta_2 = 1$. Por ejemplo, dos localizaciones cercanas con $\theta_2 > 1$ tendrán como correlación

$$1 - 2 \frac{\theta_2}{\theta_2 - 1} \left(\frac{d}{\theta_1} \right)^2 \quad (3.70)$$

lo cual está razonablemente relacionado con la distancia d , mientras que dos localizaciones cercanas con $\theta_2 = 1$, siempre tienen aproximadamente correlación 1.

Sin embargo, mostraremos a continuación que el rango $(0, 2]$ de θ_2 es suficiente para cubrir todas las relaciones de correlación.

3.4.2. Comparación con la familia exponencial *Powered*

1. Varias elecciones de clases de varios campos G de funciones de correlación

1. Si $G'(x) = \alpha x(x^2 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$, produce $\rho(|\mathbf{u}|) = \exp(-\alpha |\mathbf{u}|)$
2. Si $G'(x) = \frac{2\alpha}{\alpha^2} e^{-\frac{4x^2}{\alpha^2}}$, produce $\rho(|\mathbf{u}|) = \exp(-\alpha |\mathbf{u}|^2)$
3. Si $G'(x) = 2\theta_2 \theta_1^{-2\theta} x(x^2 + \theta_1^{-2})^{-\theta_2-1}$, produce la clase de *Matérn* $\rho(|\mathbf{u}|) = \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)} (|\mathbf{u}|/\theta_1)^{\theta_2} \kappa_{\theta_2}(|\mathbf{u}|/\theta_1)$ con $\theta_1 = \frac{\theta_2}{2\sqrt{\theta_2}}$.

2. Continuidad y diferenciabilidad

Basado en la familia exponencial *Powered*, $X(t)$ es continua, no diferenciable para $\delta < 2$ e infinitamente diferenciable para $\delta = 2$. Para este último caso, a menudo llamada la función de covarianza Gaussiana, o modelo exponencial cuadrado, se da el límite más alto de suavizamiento en estas clases, el cual corresponde a la clase de *Matérn* ($\theta_2 \rightarrow \infty$)

$$\rho(\mathbf{u}) = \exp(-|\mathbf{u}|^2)/\theta_1^2 \quad (3.71)$$

con demasiado suavizamiento. La familia *Matérn*, es siempre $[\theta_2 - 1]$ -diferenciable.

3. Comparación de parámetros

En la familia de *Matérn*, $\theta_1 > 0$ es un parámetro de escala que controla el rango de correlación espacial, mientras que $\theta_2 > 0$ controla el suavizamiento del campo aleatorio. El vector de parámetros (θ_1, θ_2) en la familia de *Matérn*, no es el mismo que (α, δ) en la familia exponencial *Powered*, sin embargo, hay ciertas relaciones de correspondencia entre ellas.

En la familia de *Matérn*, cuando $\theta_2 = 1/2$ obtenemos $\rho(\mathbf{u}) = \exp(-\mathbf{u}\sqrt{2}/\theta_1)$ (exponencial), y si $\theta_2 \rightarrow \infty$ se obtiene $\rho(\mathbf{u}) = \exp(-\mathbf{u}^2/\theta_1^2)$ (Gaussiana).

Por comparación con la densidad espectral $f_e(\boldsymbol{\omega})$ de la familia exponencial *Powered* y la $f_e(\boldsymbol{\omega})$ de la familia de *Matérn* en R^2 tenemos que,

$$\begin{aligned} f_e(\boldsymbol{\omega}) &= \int \exp(-i\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}) \exp(-\alpha |\mathbf{u}|^\delta) d\mathbf{u} \\ &\approx c_\delta \alpha^\delta |\boldsymbol{\omega}|^{-1-\delta} (\delta < 2) \text{ cuando } |\boldsymbol{\omega}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.72)$$

y

$$C\alpha^{-1} \exp(-\omega^2/(4\alpha^2)) \quad (\delta = 2);$$

$$f_m(\omega) = c(\theta) (1 + (\theta'_1 \omega)^2)^{-1-\theta_2} \quad (3.73)$$

con

$$c(\theta) = \frac{\theta_1^2 \theta_2 (4\theta_2)^{\theta_2}}{\pi}, \theta'_1 = \theta_1 / (2\sqrt{\theta_2}) \quad (3.74)$$

donde hemos aproximado $\theta_2 \rightarrow 0$ cuando $\delta \leq 1$, $\theta_2 = \frac{\delta-1}{2}$ cuando $1 < \delta < 2$, y $\theta_2 \rightarrow \infty$, cuando $\delta = 2$. Así, la familia de *Matérn*, puede tomar cualquier valor de θ_2 en $(0, \infty)$.

4. Independencia y dependencia del campo aleatorio X

Tomando d_{\min} la mínima distancia más entre las localizaciones espaciales, cuando $\theta_1 \ll d_{\min} \implies x = \frac{2d\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \gg \theta_2 \implies \rho(u) \propto x^{\theta_2-0.5} \exp(-x)$ son normalmente valores muy pequeños, así que la independencia de $X(t)$ se puede obtener basada en valores de θ_1 y θ_2 no demasiado grandes. Sin embargo, cuando $\theta_1 \gg d_{\min} \implies x = \frac{2d\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \ll \theta_2 \implies \rho(u) \propto 1 - \frac{\theta_2}{\theta_2-1} (\frac{d_1}{\theta_1})^2$ tiene valores cercanos a 1, así que puede esperarse muy dependiente $X(t)$.

3.4.3. Relación entre correlación y selección de parámetros

Valores (0,2] de θ_2

Aunque θ_2 controla la diferenciabilidad de la señal, muchas funciones de correlación $\rho(d, \theta_1, \theta_2)$ están definidas para θ_2 en el intervalo $0 < \theta_2 \leq 2$. Particularmente, $\theta_2 = 0.5, 1, 2$ es una buena elección, que corresponderá a la familia exponencial, a una familia continua y diferenciable.

Relación entre n, d, θ y el determinante

Combinando la aproximación $\kappa_{\theta_2}(x) \approx \frac{(\theta_2-1)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\theta_2} + \frac{(\theta_2-2)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\theta_2+2}$ ($x \ll \theta_2$) y $\kappa_{\theta_2}(x) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-x)$ ($x \gg \theta_2$), la función modificada de Bessel $\kappa_{\theta_2}(x)$ es una función no creciente de θ_2 para cualquier x ($x > 0$). Así, de:

$$\begin{aligned}
 2J'_{\theta_2}(x) &= J_{\theta_2-1}(x) - J_{\theta_2+1}(x) \\
 2Y'_{\theta_2}(x) &= Y_{\theta_2-1}(x) - Y_{\theta_2+1}(x) \\
 2\kappa'_{\theta_2}(x) &= \kappa_{\theta_2-1}(x) - \kappa_{\theta_2+1}(x) \\
 \kappa_{\theta+1}(x) &\geq \kappa_{\theta-1}(x)
 \end{aligned}$$

se deduce que $\kappa_{\theta_2}(x)$ es no creciente en x para todo θ_2 , y normalmente tiene comportamiento exponencial.

De forma similar, la función de correlación $\rho(x, \theta_2) = \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)} \cdot (x)^{\theta_2} \cdot \kappa_{\theta_2}(x)$ es no creciente en x para todo θ_2 .

Sin embargo, esta propiedad no se cumple para θ_2 , pues

$$\frac{\rho(d, \theta_1, \theta_2 + 1)}{\rho(d, \theta_1, \theta_2)} = \frac{\theta_2}{2} x \frac{\kappa_{\theta_2+1}(x)}{\kappa_{\theta_2}(x)} \tag{3.75}$$

escribiendo $\rho(d, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)} \cdot (x)^{\theta_2} \cdot \kappa_{\theta_2}(x)$.

Otra importante conclusión es que dado (d, θ_2) , $\rho(d, \theta_1, \theta_2)$ es una función no decreciente en θ_1 ($\theta_1 > 0$). De hecho, de

$$\log \rho(d, \theta_1, \theta_2) = -\log\{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)\} + \theta_2 \log(2d\sqrt{\theta_2}) - \theta_2 \log \theta_1 + \log \kappa_{\theta_2}\left(\frac{2d\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right) \tag{3.76}$$

y del hecho de que $\rho(d, \theta_1, \theta_2)$ es una función no creciente en d , dado θ_1 ($\theta_1 > 0$), tenemos que,

$$\frac{x\kappa'_{\theta_2}(x)}{\kappa_{\theta_2}(x)} \leq -\theta_2 \tag{3.77}$$

con $x = \frac{d \cdot 2\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}$. Así,

$$\frac{d}{d\theta_1} \log \rho(d, \theta_1, \theta_2) = -\frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{x\kappa'_{\theta_2}(x)}{\theta_2 \kappa_{\theta_2}(x)} \geq 0 \tag{3.78}$$

3.4.4. Valores de θ_2 que satisfacen $p = \rho(d, \theta_1, \theta_2)$

Generalmente, una cota superior para el valor de θ_2 puede ser obtenida por

$$\theta_2 = \left[1 - \left(\frac{(1 - \rho_{\min})\theta_1^2}{d_{\min}^2} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.79)$$

De hecho, $\rho_{\min} = \rho(d_{\min}, \theta_1, \theta_2) = 0.95$ que es cercano a 1. Así

$$\rho_{\min} \approx 1 - \frac{\theta_2}{\theta_2 - 1} \left(\frac{d_{\min}}{\theta_1} \right)^2 \quad (3.80)$$

y

$$\theta_2 \approx \left[1 - \left(\frac{(1 - \rho_{\min})\theta_1^2}{d_{\min}^2} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (3.81)$$

Esta cota superior no sólo muestra la relación entre θ_1 y θ_2 dado d_{\min} y ρ_{\min} , sino también da evidencia de que θ_2 debe ser fijado en un subintervalo real en términos de computación práctica.

3.5. Modelización y estimación de la densidad espectral

3.5.1. Dominio espectral: periodograma *tapered*

El periodograma espacial es un estimador no paramétrico de la densidad espectral, la cual es la transformada de Fourier de la función de covarianza. Esta es una herramienta muy usada para analizar la estructura de dependencia de un proceso espacial subyacente. El *tapering* (filtro de los datos) puede ser aplicado a los datos espaciales para reducir la desviación del periodograma. La utilización del *tapering* ayuda a eliminar los efectos de borde en problemas dimensionales grandes. Sin embargo, la varianza del periodograma crece cuando la desviación es reducida.

El periodograma espacial es una herramienta muy potente para estudiar las propiedades de campos aleatorios observados en una malla. Es el módulo al cuadrado de una transformada de Fourier finita para la región observada del proceso, introducido para elegir las periodicidades ocultas del proceso. El periodograma, por sí mismo no se considera un estimador consistente de la densidad espectral, pero la consistencia puede serle añadida por la aplicación de filtros de suavizado lineales. El suavizado del periodograma es frecuentemente utilizado en series

temporales y no elimina los efectos de borde en dos o más dimensiones. Los picos subsidiarios que aparecen en los filtros de suavizado, causan innecesariamente grandes valores del periodograma ordinario para altas frecuencias lo que resulta en un gran sesgo. Este fenómeno se conoce como *leakage*. En lugar del suavizado de los periodogramas estimados sesgados, directamente filtrar sobre los datos con un *data taper*, antes de calcular el periodograma, puede también dar una estimación consistente de la densidad espectral. La información perdida a través de las frecuencias más potentes por el suavizado del periodograma pueden ser mejor conservada con los *data taper*.

En datos unidimensionales sólo disponemos de una observación en cada extremo, pero este número crece claramente con la dimensión, lo que lleva a problemas de borde.

Prewhitening es otro método de filtrado de los datos para controlar esta clase de desviación debido al *leakage*. Una buena elección de la cantidad de suavizado, teniendo en cuenta las consideraciones del equilibrio entre las desviaciones y la varianza de los estimadores del periodograma *tapered*, puede ser usada en la práctica para explicar la estructura espacial subyacente de un proceso.

El *data taper* ofrecerá relativamente menos pesos en los puntos extremos y es muy efectivo en la eliminación de los efectos de borde, sobretodo en problemas de grandes dimensiones. Además, en dominios asintóticos, donde el número de observaciones en un área de estudio fija crece, se ha mostrado que usando el periodograma de datos iniciales sin ningún *data taper* aplicado puede producir resultados con grandes sesgos (Stein, 1999a).

El periodograma espacial para datos de mayor dimensión, es una extensión natural del periodograma tradicionalmente usado en series temporales. El periodograma refleja comportamientos de periodicidad de una serie temporal y es una herramienta útil para analizar procesos estocásticos.

Sea un proceso estacionario espacial $Z(\cdot)$ con vector de parámetros de covarianza θ , los cuales asumimos ahora que son conocidos. Observamos el proceso en N localizaciones igualmente espaciadas en una malla regular D ($n_1 \times n_2$), donde $N = n_1 n_2$. Definimos $I_N(\boldsymbol{\omega})$ como el periodograma asociado a la frecuencia $\boldsymbol{\omega}$,

$$I_N(\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-2} (n_1 n_2)^{-1} \left| \sum_{x_1=1}^{n_1} \sum_{x_2=1}^{n_2} Z(\mathbf{x}) \exp \{ -i \mathbf{x}^T \boldsymbol{\omega} \} \right|^2. \quad (3.82)$$

En la práctica, el estimador del periodograma para $\boldsymbol{\omega}$ se calcula sobre un grupo de frecuencias de Fourier $2\pi \mathbf{f}/\mathbf{n}$ donde $\mathbf{f}/\mathbf{n} = \left(\frac{f_1}{n_1}, \frac{f_2}{n_2} \right)$, y $\mathbf{f} \in J_N$, para

$$J_N = \{[-(n_1 - 1)/2], \dots, n_1 - \lfloor n_1/2 \rfloor\} \times \{[-(n_2 - 1)/2], \dots, n_2 - \lfloor n_2/2 \rfloor\} \quad (3.83)$$

donde $\lfloor u \rfloor$ denota el más grande de los enteros menores o iguales que u .

El valor esperado del periodograma en $\boldsymbol{\omega}_0$ viene dado por (Stein, 1999a; Fuentes, 2002)

$$E(I_N(\boldsymbol{\omega}_0)) = (2\pi)^{-2}(n_1 n_2)^{-1} \int_{\mathfrak{R}^2} f(\boldsymbol{\omega}) W(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) d\boldsymbol{\omega} \quad (3.84)$$

donde

$$W(\boldsymbol{\omega}) = \prod_{j=1}^2 \frac{\sin^2(\frac{n_j \omega_j}{2})}{\sin^2(\frac{\omega_j}{2})} \quad (3.85)$$

para $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) = 2\pi \mathbf{f}/\mathbf{n}$ y $\mathbf{f} \in J_N \setminus \{0\}$, y $f(\boldsymbol{\omega})$ es la densidad espectral del proceso Z , en una malla entera. Los picos subsidiarios de la función W pueden provocar una desviación substancial en $I_N(\boldsymbol{\omega}_0)$ como estimador de $f(\boldsymbol{\omega})$ pues hacen que las frecuencias lejanas de $\boldsymbol{\omega}_0$ contribuyan al valor esperado. Si los picos subsidiarios de W fuesen más pequeños substancialmente, podríamos reducir considerablemente esta fuente de desviación para el periodograma.

Hacer notar que el valor esperado del periodograma espacial no es $f(\boldsymbol{\omega})$, sino una integral ponderada de $f(\boldsymbol{\omega})$. En términos de una densidad asintótica creciente, ésta es insesgada asintóticamente, por ejemplo $\lim_{\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty} E[I_N(\boldsymbol{\omega})] = f(\boldsymbol{\omega})$, para la cual la varianza asintótica es $f^2(\boldsymbol{\omega})$, y los valores del periodograma $I_N(\boldsymbol{\omega})$ y $I_N(\boldsymbol{\omega}')$ para $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{\omega}'$, son asintóticamente incorrelados (Fuentes, 2002). Si el proceso Z es Gaussiano, entonces el periodograma tiene una distribución asintótica que es múltiplo de un χ_2^2 . Más específicamente, el periodograma $I_N(\boldsymbol{\omega}_j)$ donde $\boldsymbol{\omega}_j$ es una frecuencia de Fourier, tiende asintóticamente a la distribución $f(\boldsymbol{\omega}_j)\chi_2^2/2$.

Propiedades asintóticas del periodograma

Teorema 2 (Kim y Fuentes, 2000)

Consideramos un proceso estacionario Gaussiano Z con densidad espectral $f(\boldsymbol{\omega})$ en una malla D . Asumimos que Z es observado en localizaciones igualmente espaciadas en D ($n_1 \times n_2$), donde $N=n_1 n_2$, y el espacio entre las observaciones es Δ . Definimos la función de periodograma, $I_N(\boldsymbol{\omega})$, como la expresión dada en (3.82).

Asumimos $n_1 \rightarrow \infty$, $n_1/n_2 \rightarrow \lambda$, para una constante $\lambda > 0$

Entonces tenemos:

(i) El valor de la esperanza del periodograma, $I_N(\boldsymbol{\omega})$ tiende asintóticamente a $f_\Delta(\boldsymbol{\omega})$.

(ii) La varianza asintótica de $I_N(\boldsymbol{\omega})$ es $f_\Delta^2(\boldsymbol{\omega})$.

(iii) El valor del periodograma $I_N(\boldsymbol{\omega})$ y $I_N(\boldsymbol{\omega}')$ para $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{\omega}'$, son asintóticamente independientes.

Por (i), el periodograma I_N , usando dominios que se incrementan asintóticamente, es asintóticamente un estimador insesgado de la densidad espectral, f_Δ en una malla. Hay que hacer notar, que si f es el proceso continuo Z , y f_Δ la densidad espectral en la malla, entonces usando dominios asintóticos crecientes, I_N no es asintóticamente un estimador insesgado de f pero de f_Δ la densidad espectral de la secuencia muestral $Z(\Delta x)$. Por el teorema 2, parte (ii), la varianza del periodograma en $\boldsymbol{\omega}$ es asintóticamente $f_\Delta^2(\boldsymbol{\omega})$. La aproximación tradicional a este problema de inconsistencia, es suavizar el periodograma a través de las frecuencias.

Por el teorema 2 parte (iii), los valores del periodograma son aproximadamente independientes. Esta propiedad nos dará facilidad para encontrar en el dominio espectral un modelo paramétrico para los valores del periodograma. Sin embargo, en el dominio espacial, la correlación entre la covarianza empírica o los valores del variograma frustra el uso de mínimos cuadrados.

Distribución asintótica del periodograma

Si el proceso Z es Gaussiano, entonces el periodograma tiene distribución asintótica que es un múltiplo de una χ_2^2 . Más específicamente, el periodograma, $I_N(\boldsymbol{\omega}_j)$ donde $\boldsymbol{\omega}_j$ es una frecuencia de Fourier, tiende asintóticamente a la distribución $f(\boldsymbol{\omega}_j)\chi_2^2/2$ (Stein, 1999a).

La independencia asintótica de los estimadores del periodograma es una de las grandes ventajas del análisis espectral, y esto facilita el uso de las técnicas como son mínimos cuadrados lineales (*linear least squares*, *LS*) para obtener un modelo espectral teórico de los valores del periodograma.

Cuando un modelo de variograma paramétrico se obtiene a partir de estimadores de variogramas empíricos, es frecuente el uso de técnicas como NLS o máxima verosimilitud restringida (MVR), aproximaciones que generalmente no tienen en cuenta ninguna correlación entre los valores del variograma estimado.

Los mismos puntos de datos son usados para estimar el variograma en diferentes *lags*, y los estimadores de los variogramas resultantes son más correlacionados que las observaciones del proceso subyacente. Ignorada tal correlación, puede introducir errores en el análisis de los datos. Técnicas como son los métodos de mínimos cuadrados lineales y no lineales pueden ser aplicadas para esos estimadores independientes. En este caso, el suavizamiento no paramétrico de los estimadores de los periodogramas *tapered* pueden dar mejores resultados que estimadores de periodogramas no paramétricos (Mateu *et al.*, 2005).

3.5.2. *Tapering*

Si la densidad espectral es suavizada en una vecindad de $\boldsymbol{\omega}_0$ entonces $I_N(\boldsymbol{\omega}_0)$ será aproximadamente un estimador insesgado para $f(\boldsymbol{\omega}_0)$. *Tapering* es una técnica que efectivamente reduce los puntos subsidiarios asociados con la ventana espectral, pero cada vez que realizamos un *tapering*, perdemos información.

El *leakage* puede también extenderse para frecuencias distantes. Por ejemplo, frecuencias lejanas con relativamente gran peso comparado con las frecuencias cercanas, pueden ser completamente equiparadas por el *leakage* a frecuencias distantes con pesos más grandes. Si los picos subsidiarios de W fuesen sustancialmente menores, podríamos reducir considerablemente esta fuente de desviación para los periodogramas.

En nuestro caso usaremos *data taper* para prever el *leakage* de frecuencias lejanas que podrían tener mucho peso. Así, formamos el producto $h(\mathbf{x})Z(\mathbf{x})$ para cada valor de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, donde $\{h(\mathbf{x})\}$ es una secuencia adecuada de valores reales constantes llamados *data taper*. El *data taper* tradicional usado para datos de dos dimensiones, es el producto tensorial de dos *data tapers* unidimensionales, $h_M(j) = h_1(j_1)h_2(j_2)$, donde $j = (j_1, j_2)$, $1 \leq j_1 \leq n_1$ y $1 \leq j_2 \leq n_2$. $h_M(\cdot)$ es conocido como *data taper* multiplicativo para datos de dos dimensiones (Fuentes, 2002, 2004; Fuentes y Smith, 2001).

Así, un *data taper* multiplicativo define un rectángulo incluido en la malla, y da menor peso (cercano a 0) a las observaciones en el borde de la malla, peso 1 a las observaciones dentro del rectángulo, y un peso $h_M(\cdot)$, que suaviza desde 1 a 0 a las observaciones entre el rectángulo y el borde de la malla.

Por ejemplo, $h_1(\cdot)$ (lo mismo para $h_2(\cdot)$) podría ser un *taper* m -coseno donde $1 \leq m < \frac{n_1}{2}$,

$$h_1(j_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 - \cos(\frac{\pi(j_1-1/2)}{m})\} & 1 \leq j_1 \leq m \\ 1 & m+1 \leq j_1 \leq n_1 - m \\ h_1(n_1 - j_1 + 1) & n_1 - m + 1 \leq j_1 \leq n_1 \end{cases}$$

Siguiendo Fuentes (2002), Fuentes y Smith (2001) y Fuentes (2004), podemos también definir un *rounded taper*. Esta clase de *taper* es definido en términos de dos parámetros (δ y ϵ) que controlan la región *rounded*.

El parámetro $\delta \in [0, n/2]$, con $n = \min(n_1, n_2)$, juega el mismo papel que m en el *data taper* multiplicativo, y el parámetro $\epsilon \in [0, n/2]$ define la región del *rounded*. En primer lugar se definen las nuevas coordenadas $(r_1, r_2) \in [-\frac{n_1}{2}, \frac{n_1}{2}] \times [-\frac{n_2}{2}, \frac{n_2}{2}]$ en términos de $(x_1, x_2) \in [1, n_1] \times [1, n_2]$,

$$\begin{aligned} r_1 &= |x_1 - (n_1 - 1)/2| \\ r_2 &= |x_2 - (n_2 - 1)/2| \\ d &= \sqrt{[r_1 - (n_1/2 - \epsilon)]^2 + [r_2 - (n_2/2 - \epsilon)]^2} \\ S &= \{(r_1, r_2), \text{s.t. } r_1 > (n_1/2 - \epsilon) \text{ y } r_2 > (n_2/2 - \epsilon)\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Representamos la función de los pesos, $h_R(\cdot)$, que definen el *rounded data taper*, como

$$h_R(r_1, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 - \cos(\frac{\pi(n_2/2-r_2)}{\delta})\} & \text{para } (r_1, r_2) \in A \\ \frac{1}{2}\{1 - \cos(\frac{\pi(n_1/2-r_1)}{\delta})\} & \text{para } (r_1, r_2) \in B \\ 1 & \text{para } (r_1, r_2) \in C \text{ o } F \\ \frac{1}{2}\{1 - \cos(\frac{\pi(\epsilon-d)}{\delta})\} & \text{para } (r_1, r_2) \in D \\ 0 & \text{para } (r_1, r_2) \in E \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \{(r_1, r_2), r_1 \leq n_1/2 - \epsilon \text{ y } r_2 > n_2/2 - \delta\} \\ B &= \{(r_1, r_2), r_2 \leq n_2/2 - \epsilon \text{ y } r_1 > n_1/2 - \delta\} \\ C &= \{(r_1, r_2), r_1 \leq n_1/2 - \delta \text{ y } r_2 < n_2/2 - \epsilon, \text{ o } \\ &\quad r_1 \leq n_1/2 - \epsilon \text{ y } r_2 < n_2/2 - \delta\} \\ D &= \{(r_1, r_2), (r_1, r_2) \in S \text{ y } d \in [\epsilon - \delta, \epsilon]\} \\ E &= \{(r_1, r_2), (r_1, r_2) \in S \text{ y } d \geq \epsilon\} \\ F &= \{(r_1, r_2), (r_1, r_2) \in S \text{ y } d \leq \epsilon - \delta\} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Generalmente perdemos más información con un *data taper* multiplicativo, si igualamos la cantidad de *tapering* en las esquinas.

El periodograma es la transformada de Fourier discreta del estimador sesgado de la covarianza.

Una de las ventajas del *tapering* es la reducción de la desviación, debido a los extremos de las covarianzas muestrales. Los efectos de borde son un serio problema en la estadística espacial porque el número de puntos extremos crece con las observaciones. Así, generalmente necesitamos más *tapering* en las observaciones de las esquinas. Un *rounded taper* da más *tapering* en las observaciones de las esquinas, así con menos *tapering* total, obtenemos el mejor caso de suavizado que se necesita sin perder mucha información.

3.5.3. El modelo *Matérn* para densidades espectrales

Tal y como ha sido presentado en la sección (3.3.1), una clases de variogramas prácticos y de funciones de autocovarianza para procesos estacionarios continuos Z puede ser obtenido a partir de la clase de *Matérn* (Matérn, 1960), con densidades espectrales de la forma,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(\alpha^2 + |\boldsymbol{\omega}|^2)^{-(\nu-d/2)} \quad (3.88)$$

con parámetros $\nu > 0, \alpha > 0$ y $\phi > 0$, donde d es la dimensión de Z . Aquí, el vector de los parámetros de covarianza es $\theta = (\nu, \alpha, \phi)$. El parámetro α^{-1} puede ser interpretado como el rango de autocorrelación. El parámetro ν mide el grado de suavizamiento del proceso Z , a mayor valor de ν mayor es el suavizamiento de Z , ϕ es el cociente de la varianza σ^2 y el rango (α^{-1}) elevado a la potencia 2ν , $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$. Para una discusión más a fondo sobre la clase *Matérn*, ver Stein (1999a).

La correspondiente covarianza para la clase *Matérn* es

$$C_{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{\pi\phi}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)\alpha^{2\nu}}(\alpha|\mathbf{x}|)^{\nu}\kappa_{\nu}(\alpha|\mathbf{x}|) \quad (3.89)$$

donde κ_{ν} es una función de Bessel de orden ν . Por ejemplo, cuando $\nu = \frac{1}{2}$, tenemos la función de covarianza de una exponencial, $C_{\theta}(\mathbf{x}) = \pi\phi\alpha^{-1}\exp(-\alpha|\mathbf{x}|)$.

La simplicidad de la representación de un proceso de *Matérn* en el dominio espectral frente al dominio espacial, es clara ante la comparación entre la expresión para la densidad espectral (3.88) y la correspondiente covarianza (3.89).

Un gran número de modelos comúnmente usados para las estructuras de covarianza, incluyendo la esférica, exponencial y la Gaussiana, asumen que el parámetro de suavizamiento es conocido y fijo a priori. La clase de *Matérn* da posibilidad (y esto representa mayor flexibilidad) de estimar este parámetro con los datos.

La validez de los procedimientos de interpolación local estándar, dependen de los parámetros ϕ y ν . Si el parámetro rango varía con la localización, los procedimientos de interpolación local (*kriging*) pueden ser asintóticamente óptimos siempre y cuando ν y ϕ sean constantes sobre el dominio. Esta es una consecuencia del hecho que el comportamiento a bajas frecuencias del espectro (pequeños valores de $|\boldsymbol{\omega}|$) tendrán un efecto pequeño en la interpolación (Stein, 1999a). Considerando f_0 como la densidad espectral real del proceso Z y f_1 la seleccionada, si $f_1(\boldsymbol{\omega})/f_0(\boldsymbol{\omega}) \rightarrow 1$ cuando $|\boldsymbol{\omega}| \rightarrow \infty$, entonces, todos los predictores lineales bajo la densidad incorrecta f_1 son uniforme y asintóticamente correctos.

Así, si el objetivo es interpolación espacial, es preferible trabajar en el dominio espectral y centrarnos en valores de grandes frecuencias (Fuentes, 2002). Una expresión aproximada para la densidad espectral de la clase de *Matérn* para valores de frecuencias altas se obtiene por la expresión (3.88) tomando $|\boldsymbol{\omega}|$ tendiendo a ∞ . Como consecuencia, el grado de suavizamiento, ν , y ϕ son los parámetros críticos (y no el rango α^{-1}). En este caso,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(|\boldsymbol{\omega}|^2)^{(-\nu-d/2)} \quad (3.90)$$

Y trabajando ahora en escala logarítmica, podemos obtener el modelo lineal

$$\log(f(\boldsymbol{\omega})) = \beta_0 + \beta_1 \log(|\boldsymbol{\omega}|), \quad (3.91)$$

donde $\beta_0 = \log(\phi)$ y $\beta_1 = -2(\nu + d/2)$.

Para modelizar la estructura de Z por ajuste de una densidad espectral f a los valores del periodograma, podemos usar los procedimientos de mínimos cuadrados en el dominio espectral frente al dominio espacial, porque los valores del periodograma son aproximadamente independientes mientras que los valores del variograma no lo son.

Con todo esto, la idea es seleccionar un *data taper* así de forma $W()$ sea uniformemente pequeño en frecuencias lejanas de 0. La ventana espectral para el *rounded taper*, al menos para todas las frecuencias a través del eje vertical, son más pequeñas que las ventanas espectrales para el multiplicativo. La ventana espectral total para el *rounded taper* tiene mejores propiedades (menos picos de los lados) que la ventana espectral para el *taper* multiplicativo. En resumen, *tapering*

es una operación que reemplaza la ventana espectral del periodograma con otra teniendo mejores propiedades de los picos de los extremos, proporcionando un método para reducir la desviación del *leakage* en estimadores espectrales directos. Una caracterización de uso de las funciones de densidades espectrales, f , es, en términos de sus rangos dinámicos,

$$10 \log_{10} \left(\frac{\max_{\omega} f(\omega)}{\min_{\omega} f(\omega)} \right) \quad (3.92)$$

El rango dinámico de un proceso de ruido blanco es 0. La desviación en un periodograma para procesos con rangos dinámicos grandes puede ser atribuido a los picos de los lados de la ventana espectral. Así, *tapering* es particularmente importante para densidades espectrales con rangos dinámicos grandes. En la práctica, el *rounded taper*, especialmente en los bordes de la región, parece ser una elección razonable, siendo adecuada para el suavizado, sin pérdida de mucha información.

3.5.4. Función de verosimilitud

En general, los datos medioambientales son muy grandes y calcular los determinantes que tiene la función de verosimilitud puede ser muy largo y difícil. Los métodos espectrales podrían ser usados para aproximar la verosimilitud y obtener el estimador máximo verosímil de los parámetros de la covarianza. Whittle (1954) propuso la siguiente aproximación para la verosimilitud negativa Gaussiana:

$$\sum_{j \in J_N} \{ \log f(2\pi j/n) + I_N(2\pi j/n)(f(2\pi j/n))^{-1} \} \quad (3.93)$$

donde la suma es considerada para las frecuencias de Fourier ($2\pi j/n$) y usamos una versión *tapered* del periodograma. Las sumas son a menudo sustituidas por integrales, pero preferimos la suma para cubrir las frecuencias de Fourier y usar la transformada de Fourier (FFT) para calcular eficientemente la expresión anterior. También es recomendable sacar de las sumas las pequeñas frecuencias, las que se aproximan a 0, para solucionar el problema de estimación de medias no conocidas del proceso.

Guyon (1982) provó que cuando el periodograma se usa para aproximar la densidad espectral en la función de verosimilitud de un modelo paramétrico para el proceso, la desviación del periodograma contribuye a la aparición de componentes no poco importantes del error cuadrático medio de los parámetros estimados

para procesos de dos dimensiones, y para tres dimensiones esta desviación domina el error cuadrático medio. Guyon demostró que este problema puede solucionarse con el uso de una versión diferente del periodograma, un *periodograma sin desviación*, el cual es la transformada de Fourier discreta de una versión no desviada de la covarianza de la muestra. Otra forma de resolver este problema es la aplicación de *data taper* antes de calcular la función de verosimilitud. La recomendación es usar siempre el *tapering* antes de aplicar la aproximación de Whittle para la verosimilitud.

3.5.5. Periodograma para procesos no estacionarios

Presentamos en esta sección un estimador no paramétrico de la densidad espectral de un proceso espacial no estacionario, estimación asintóticamente insesgada.

Periodograma para procesos espaciales no estacionarios

Consideramos ahora un proceso espacial no estacionario Z con función de covarianza $C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$. Observamos el proceso en N localizaciones igualmente espaciadas en una malla regular D ($n_1 \times n_2$), donde $N=n_1n_2$, y la separación entre observaciones es Δ . Definimos un periodograma no estacionario, I_N , que es un estimador no paramétrico de la densidad espectral, $f(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$, la cual es la transformada de Fourier de la función de covarianza no estacionaria. Proponemos el siguiente estimador no paramétrico de $f(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$,

$$I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \Delta^2(2\pi)^{-2}(n_1n_2)^{-1} \sum_{x_1=1}^{n_1} \sum_{x_2=1}^{n_2} Z(\Delta\mathbf{x}) \exp\{-i\Delta\mathbf{x}^T \boldsymbol{\omega}_1\} \sum_{y_1=1}^{n_1} \sum_{y_2=1}^{n_2} Z(\Delta\mathbf{y}) \exp\{-i\Delta\mathbf{y}^T \boldsymbol{\omega}_2\} \quad (3.94)$$

con $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ y, $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$.

Ahora, definimos $J(\boldsymbol{\omega})$, una versión discreta del proceso espectral $Y(\boldsymbol{\omega})$, la cual es la transformada de Fourier de Z ,

$$J(\boldsymbol{\omega}) = \Delta(2\pi)^{-1}(n_1n_2)^{-1/2} \sum_{x_1=1}^{n_1} \sum_{x_2=1}^{n_2} Z(\Delta\mathbf{x}) \exp\{-i\Delta\mathbf{x}^T \boldsymbol{\omega}_1\} \quad (3.95)$$

Así, tenemos,

$$I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = J(\boldsymbol{\omega}_1)J^c(\boldsymbol{\omega}_2) \quad (3.96)$$

y esta expresión para I_N es consistente con la definición de la distribución espectral F , como una función del proceso espectral Y , y Y^c .

El valor de la esperanza del periodograma no paramétrico I_N en $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ viene dado por,

$$E(I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)) = \Delta^2(2\pi)^{-2}(n_1n_2)^{-1} \int_{\Pi^2} \int_{\Pi_\Delta^2} f_\Delta(\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}'_2) W_2[(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) - (\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}'_2)] d\boldsymbol{\omega}'_1 d\boldsymbol{\omega}'_2 \quad (3.97)$$

donde

$$W_2[(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) - (\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}'_2)] = \Delta^2(2\pi)^{-2}(n_1n_2)^{-1} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \exp\{-i[\Delta s_1^T(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}'_1) + \Delta s_2^T(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}'_2)]\} \quad (3.98)$$

La función W_2 actúa asintóticamente como una función delta de Dirac. Los picos subsidiarios de la función W_2 pueden ocasionar una desviación sustancial sobre $I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ como un estimador de $f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ lo que nos permitirá dar el valor de f_Δ en las frecuencias lejanas de $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ que contribuyen al valor de la esperanza. Podríamos usar *data taper* para reducir los $\boldsymbol{\omega}$ asociados con la ventana espectral W_2 .

Propiedades asintóticas para el periodograma no estacionario

Teorema 3 (Fuentes, 2000)

Consideramos un proceso no estacionario Gaussiano Z con densidad espectral $f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$, Z es observado en N localizaciones igualmente espaciadas en una malla regular $(n_1 \times n_2)$, donde $N=n_1n_2$, y el espaciado entre las localizaciones es Δ . Definimos la función del periodograma no estacionario, $I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ de la misma forma que anteriormente. Asumimos $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$, y $n_1/n_2 \rightarrow \lambda$, para una constante $\lambda > 0$. Denotamos f_Δ la densidad espectral de los procesos en una malla de espaciado Δ .

Entonces tenemos que:

- (i) El valor de la esperanza del periodograma $I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ es asintóticamente $f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$.

- (ii) La varianza asintótica de $I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ es $f_\Delta^2(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}_1)f_\Delta(-\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_2)$.
- (iii) Finalmente, $\text{cov}\{I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2), I_N(\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}'_2)\}$, para $\boldsymbol{\omega}_1 \neq \boldsymbol{\omega}'_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2 \neq \boldsymbol{\omega}'_2$, es asintóticamente

$$f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}'_1)f_\Delta(-\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}'_2) + f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}'_2)f_\Delta(\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}_2) \quad (3.99)$$

Por este teorema, parte (i) el periodograma no paramétrico asintótico es un estimador insesgado de la densidad espectral f_Δ del proceso en una malla con espaciado Δ . La varianza asintótica de $I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$, por el teorema 3, parte (ii) es $f_\Delta^2(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + f_\Delta(\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}_1)f_\Delta(-\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_2)$ y por tanto suavizando los valores del periodograma se reducirá la varianza de I_N .

En el caso estacionario, cuando $\boldsymbol{\omega}' \neq \boldsymbol{\omega}$, tenemos que $I_N(\boldsymbol{\omega}')$ e $I_N(\boldsymbol{\omega})$ son asintóticamente independientes. Así, tenemos que $\text{cov}\{I_N(\boldsymbol{\omega}'), I_N(\boldsymbol{\omega})\}=0$, asintóticamente.

Sin embargo, mediante la parte (iii) del teorema 3, en el caso no estacionario $I_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ e $I_N(\boldsymbol{\omega}'_1, \boldsymbol{\omega}'_2)$ no son asintóticamente independientes. Proponemos ahora otro periodograma no estacionario, \tilde{I}_N , tal que los valores de \tilde{I}_N , en las diferentes frecuencias sean asintóticamente independientes.

Convolución de periodogramas

Presentamos aquí un estimador no paramétrico insesgado asintóticamente, \tilde{I}_N , de la densidad espectral f_Δ de un proceso no estacionario Z en una malla con espaciado Δ entre las observaciones. Modelizamos Z como un máximo de los procesos estacionarios locales. Así, una forma natural para definir el periodograma no estacionario, \tilde{I}_N , es una convolución del periodograma $I_{i,N}$ de los procesos estacionarios locales Z_i ,

$$\tilde{I}_N(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{i=1}^k I_{i,N} * [\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\omega}_1)\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\omega}_2)] \quad (3.100)$$

donde $*$ denota la siguiente convolución,

$$I_{i,N} * [\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\omega}_1)\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\omega}_2)] = \sum_{\boldsymbol{\omega} \in J_N} I_{i,N}(\boldsymbol{\omega})\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega})\overline{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}) \quad (3.101)$$

con J_N el grupo de datos de las frecuencias de Fourier. Mediante la definición de f_Δ como una función de las densidades espectrales locales $f_{\Delta,i}$ para $i = 1, \dots, k$, y el hecho que los periodogramas $I_{i,N}$ son estimadores insesgados asintóticos de $f_{\Delta,i}$, obtenemos que \tilde{I} es asintóticamente insesgado de f_Δ . La varianza asintótica de $\tilde{I}_N(\omega_1, \omega_2)$ puede ser fácilmente obtenida, usando el hecho que los procesos Z_i para $i = 1, \dots, k$, son ortogonales. Así, cuando $n_i \rightarrow \infty$, for $i = 1, 2$, la varianza de $\tilde{I}_N(\omega_1, \omega_2)$ será

$$\sum_{i=1}^k f_{\Delta,i}^2 * [\overline{\omega}_i^2(\omega_1) \overline{\omega}_i^2(\omega_2)] \quad (3.102)$$

Por el teorema 3, $I_N(\omega_1, \omega_2)$ y $I_N(\omega'_1, \omega'_2)$ no son asintóticamente independientes. Pero como \tilde{I}_N es una convolución de periodogramas estacionarios independientes, obtenemos que:

$$cov\{\tilde{I}_N(\omega_1, \omega_2), \tilde{I}_N(\omega'_1, \omega'_2)\} = 0$$

asintóticamente, con lo que conseguimos la independencia asintótica en el caso no estacionario.

Capítulo 4

Análisis de la estimación de la densidad espectral y de las estimaciones de los parámetros espaciales: un estudio de simulación

Índice General

4.1. Introducción	87
4.2. Estimación de la densidad espectral y estimación de los parámetros	89
4.2.1. Análisis de la influencia de N	95
4.2.2. Análisis de los estimadores de los parámetros espaciales ν y ϕ	96
4.3. Conclusiones	108

4.1. Introducción

Ya conocemos la necesidad de analizar características de procesos espaciales es clara y evidente en disciplinas tan diversas como la astronomía, ecología, estudios

forestales, geografía, meteorología, ciencias de suelos y en ciencias medioambientales en general. En cualquier análisis estadístico serio en ciencias ambientales, se puede decir que la determinación de la estructura espacial subyacente es necesaria.

El periodograma, un estimador no paramétrico de la densidad espectral, es una herramienta útil para estudiar las propiedades de los procesos estacionarios observados en una malla de dos dimensiones (Stein, 1999a,b; Fuentes, 2001a,b, 2002, 2004; Fuentes y Smith, 2001). *Tapering* espacial es crucial en problemas de dos o más dimensiones donde hay un gran número de observaciones en los bordes. Usaremos aquí, como ya se ha comentado anteriormente, dos clases de *data taper*, cada uno de los cuales dará un diferente *tapering* a las observaciones de las esquinas. Esta idea estará relacionada con la necesidad del suavizado sin mucha pérdida de información.

En el dominio espacial los estimadores del variograma empírico son los más comúnmente usados para la estimación de la estructura de correlación de un proceso. Cuando un modelo de variograma paramétrico es usado para estimar un variograma empírico, frecuentemente se usan técnicas como mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud restringida (MVR), aproximaciones que generalmente no tienen en cuenta ninguna correlación entre los valores del variograma estimado. Los mismos datos son usados para estimar el variograma en diferentes *lag*, y los estimadores de variogramas resultantes están más correlacionados que las observaciones del proceso subyacente. No hay mucho conocido sobre las estructuras de correlación de estimadores de variogramas e ignorar tal correlación puede dar lugar a errores en los análisis estadísticos. Por otra parte, en el dominio espectral los valores del periodograma son asintóticamente incorrelacionados. Técnicas como métodos de mínimos cuadrados lineales y no lineales pueden ser naturalmente aplicados a estos estimadores independientes. En este caso, un suavizamiento no paramétrico de los estimadores del periodograma *tapered* podría dar mejores resultados que estimadores de variogramas no paramétricos. La independencia asintótica de los estimadores de los periodogramas es una de las grandes ventajas del análisis espectral. En particular, cuando usamos la clase flexible de densidades espectrales de *Matérn*, aparece una relación lineal entre el logaritmo de la densidad espectral y el logaritmo del módulo de las frecuencias de Fourier, dando lugar así a una fácil estimación de los correspondientes parámetros espaciales.

Así, el principal objetivo de este capítulo, será mostrar algunas características en el uso de las aproximaciones espectrales para estimar la estructura de dependencia espacial, centrándonos en la interpolación espacial. En particular, los

objetivos son dos: (a) análisis del estimador de la densidad espectral a través del periodograma, teniendo en cuenta el equilibrio entre las desviaciones y la varianza del periodograma *tapered*, y (b) análisis de la estimación de los parámetros de dependencia espacial a través de los algoritmos espectrales.

Nos centraremos especialmente en procesos espaciales estacionarios. Sin embargo, los procesos espaciales en ciencias medioambientales son generalmente no estacionarios, ya que la estructura espacial depende de la localización. Así, también mostraremos que un proceso no estacionario puede descomponerse en una suma de procesos estacionarios ponderados y así nuestros análisis y conclusiones pueden ser generalizadas para el caso de no estacionariedad.

4.2. Estimación de la densidad espectral y estimación de los parámetros

Supongamos que tenemos un proceso espacial bidimensional estacionario Z medido en $N = n_1 \times n_2$ datos regularmente espaciados. Hay que tener en cuenta que si Z es no estacionario, podemos descomponer Z en una suma de procesos estacionarios locales Z_i para k subregiones que cubren una región de interés, D . El número de regiones (k) puede ser obtenido usando el criterio AIC (Fuentes, 2001a), o por experimentación dependiente, por ejemplo, en el conocimiento previo de las características físicas de la región D . Sin embargo, el número k está restringido por el número inicial de localizaciones de muestras originales N .

Supongamos que la densidad espectral del proceso espacial Z proviene de la clase de *Matérn*, expresada en (3.88), con vector de parámetros positivo dado por $\theta = (\phi, \nu, \alpha)$. Recaltar y recordar que α^{-1} define el rango de autocorrelación, ν mide el grado de suavizamiento del proceso, y el parámetro $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$, un cociente de la varianza (*sill*) y el rango, y es una medida de la variabilidad espacial. Recordar también que el parámetro *sill* (la varianza del proceso) es la integral de la función de densidad espectral, $\int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$. Si nos centramos en valores de altas frecuencias, una aproximación a la expresión (3.88) viene dada por

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(|\boldsymbol{\omega}|^2)^{(-\nu-d/2)} \quad (4.1)$$

con ν y ϕ como parámetros críticos. Trabajando ahora en escala logarítmica, podemos obtener el siguiente modelo lineal $\log(f(\boldsymbol{\omega})) = \beta_0 + \beta_1 \log(|\boldsymbol{\omega}|)$, donde $\beta_0 = \log(\phi)$ y $\beta_1 = -2(\nu + d/2)$.

El punto clave aquí es que en la práctica, $f(\boldsymbol{\omega})$ es estimado por el correspondiente periodograma $I_N(\boldsymbol{\omega})$, y los valores del periodograma son asintóticamente independientes. Así, podemos usar las técnicas de regresión lineal para estimar los valores de la pendiente y ordenada en el origen, como se indica anteriormente. La Figura (4.1) representa una perspectiva de una densidad espectral de *Matérn* teórica para un conjunto de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) y parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ (estos parámetros corresponden a los parámetros de la covarianza espacial $sill=2.0$ y $rango=10.0$) y $\nu = 1$, y sus correspondientes periodogramas estimados usando un *rounded taper* con $\epsilon = \delta = 3$. Hacer notar la cercana correspondencia entre ambas, las teóricas y las funciones espectrales estimadas. En las Figuras (4.2-4.4), mostramos el tipo de relación lineal entre $\log(I_N(\boldsymbol{\omega}))$ y $\log(|\boldsymbol{\omega}|)$. Esta clase de relación es la que estamos explorando en nuestras simulaciones y constituye la base para la técnica de estimación de los parámetros espaciales.

Presentamos aquí un estudio de simulación para analizar el comportamiento de la estimación de parámetros de estructura espacial a través de las técnicas espectrales y así analizar su procedimiento como una robusta alternativa a las técnicas clásicas de geostatística en el dominio espacial. Dentro de este marco, también analizaremos la estimación de la densidad espectral a través del periodograma espacial, teniendo en cuenta el equilibrio entre la desviación y la varianza del periodograma *tapered*.

Simulamos procesos espaciales *Matérn* sobre una malla regular de $N = n_1 \times n_2$ definido en el cuadrado de lados n_1 y n_2 bajo una amplia variedad de diferentes circunstancias experimentales. Consideramos los siguientes escenarios: (a) tres valores para el tamaño de la malla (N) en los cuales el proceso es observado: $N = 20 \times 20, 10 \times 10, 5 \times 5$; (b) cuatro combinaciones para los parámetros *sill* y *rango*: $(2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300)$; (c) cuatro valores para los parámetros ν , el cual controla el grado de suavizamiento del proceso: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$; (d) tres posibles estimadores para el periodograma espacial: sin *taper* y con *taper* (multiplicativo y *rounded*); (e) cuatro valores para los parámetros $\delta, \epsilon, m_1, m_2$, los cuales controlan los *data taper*: 1, 3, 5, 10 (en cada caso, tendremos cuatro parámetros iguales).

Los distintos grupos de parámetros fueron seleccionados para cubrir el máximo número de casos posibles y para analizar: (a) el impacto del número de puntos de la malla en el que el proceso es observado en calidad de la estimación de la densidad espectral y parámetros estimados, (b) el uso de un particular *data taper* y su repercusión en la calidad de la densidad espectral y los parámetros estimados, (c) el papel de los parámetros que controlan la cantidad de *tapering*

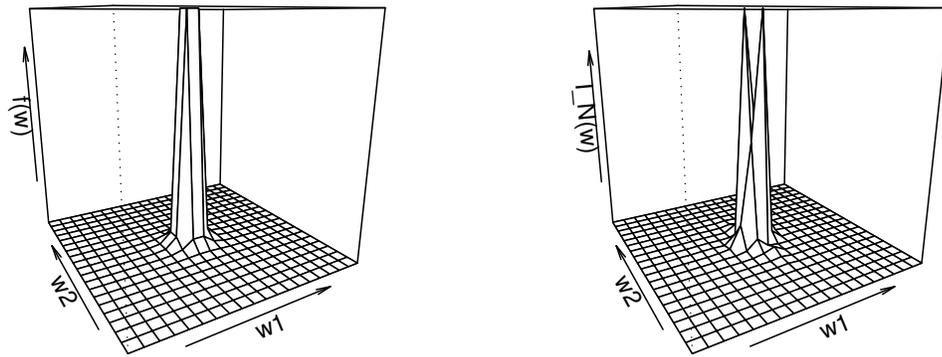


Figura 4.1: Perspectiva de las densidades espectrales para un conjunto de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) : *Izquierda*: densidad de *Matérn* teórica con $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$; *Derecha*: periodograma estimado usando *rounded taper* con $\epsilon = \delta = 3$.

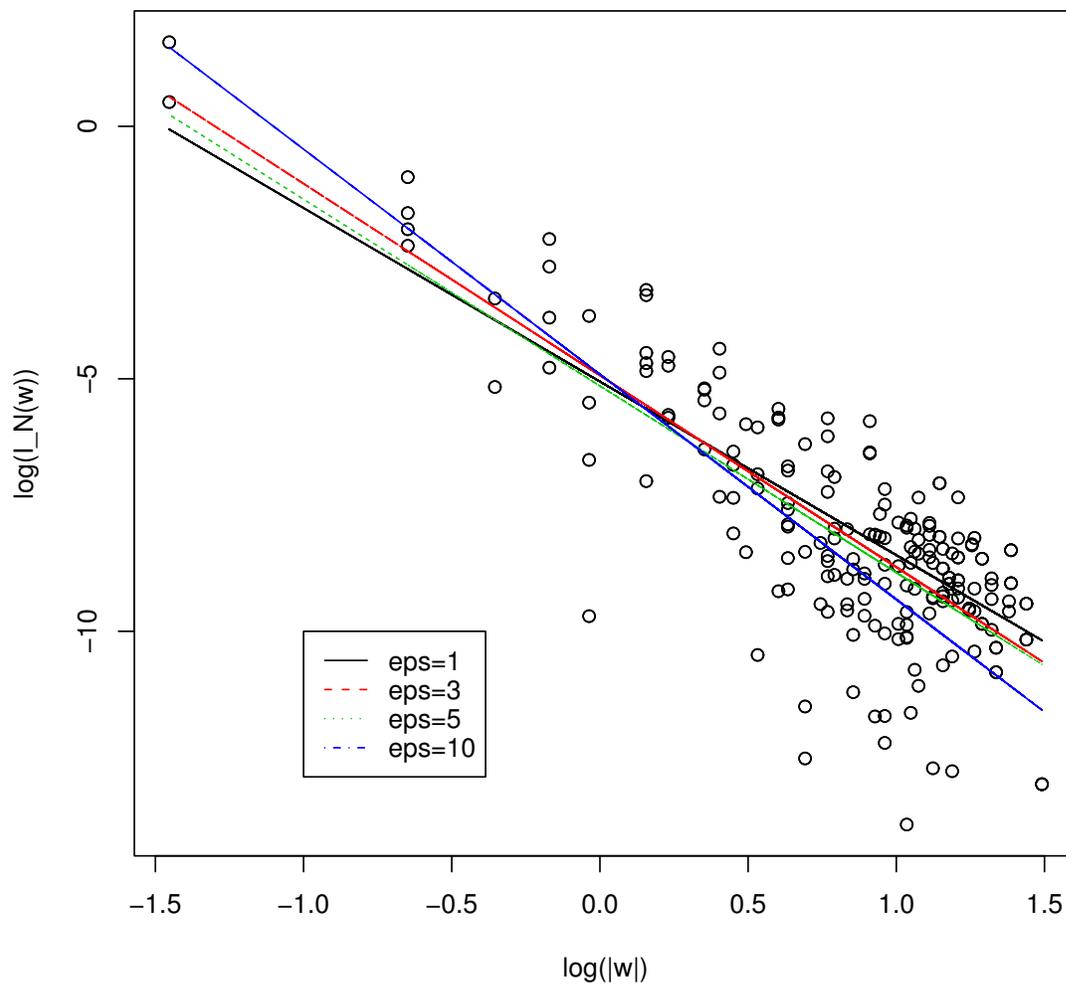


Figura 4.2: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *rounded tapering* con parámetros $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$ y estimación de una densidad espectral de *Matérn* con parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$.

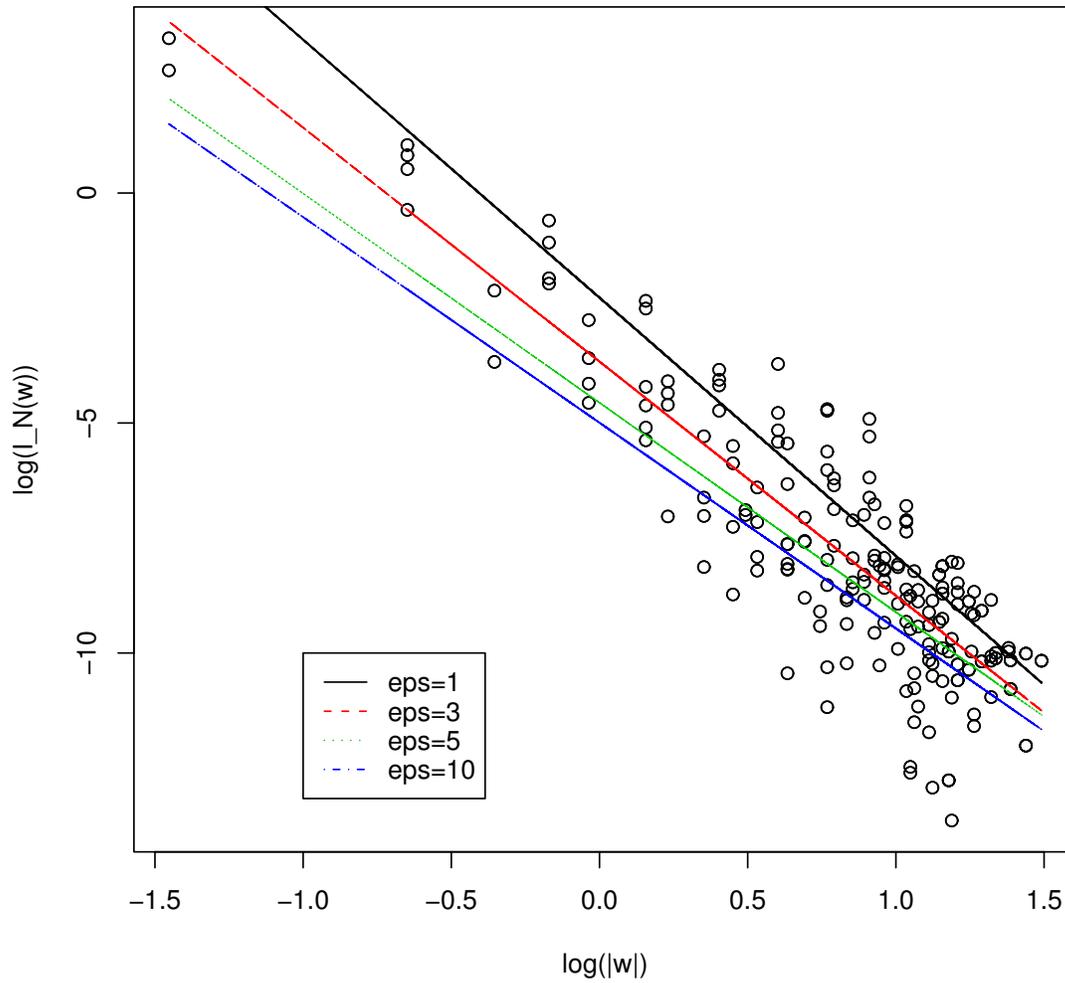


Figura 4.3: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *tapering* multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$ y estimación de una densidad espectral de *Matérn* con parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$.

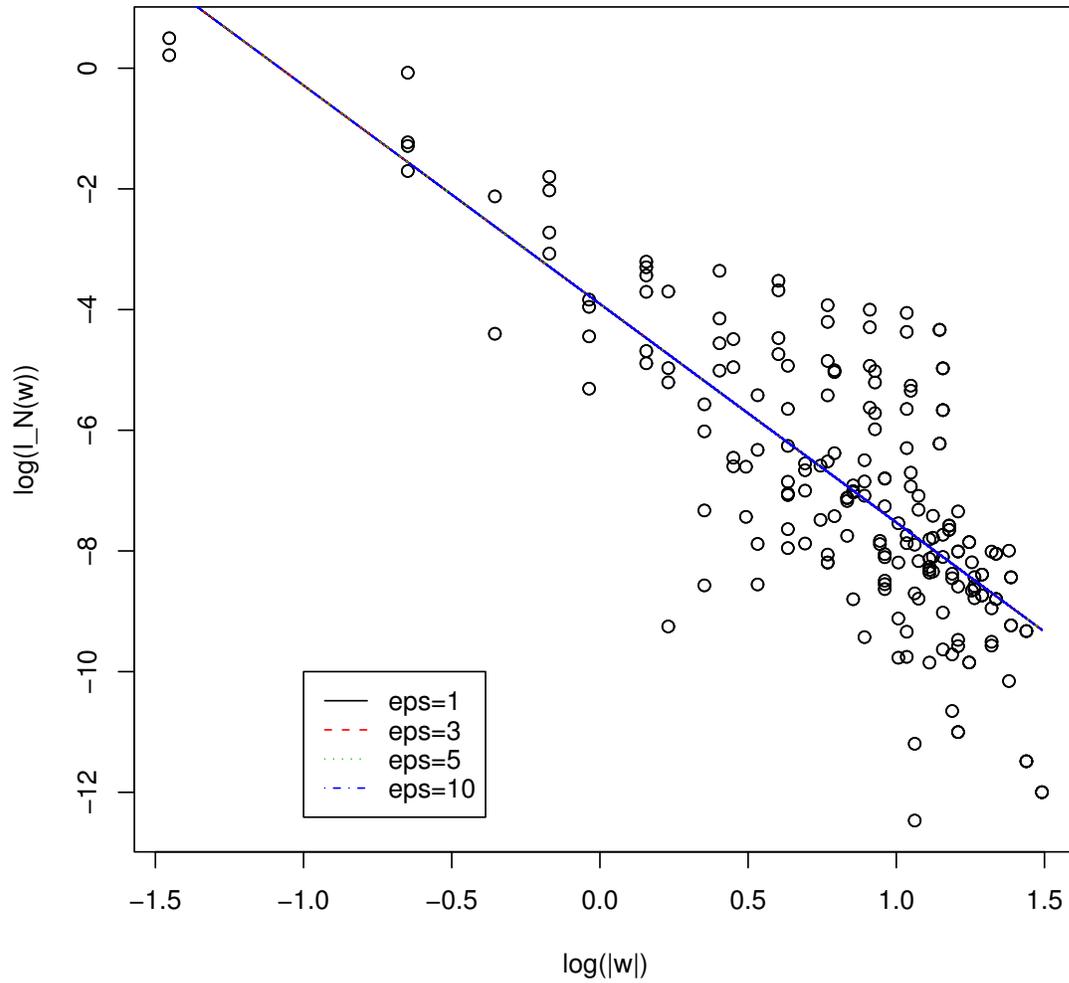


Figura 4.4: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *no tapering* con parámetros $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$ y estimación de una densidad espectral de *Matérn* con parámetros $\phi = 0.02$, $\alpha = 0.10$ y $\nu = 1$.

y, finalmente, (d) el impacto de los valores de la combinación de los parámetros rango y el *sill* en la calidad de la densidad espectral y los parámetros estimados.

Usaremos 400 frecuencias de Fourier en el intervalo definido en la ecuación (3.83) para la evaluación del periodograma. Para cada combinación de los parámetros anteriormente considerados, simulamos 1000 procesos y para cada proceso estimamos el periodograma y ajustamos una regresión lineal paramétrica para obtener la estimación correspondiente de los parámetros definiendo la estructura espacial. Presentaremos también los resultados en forma de *box-plots*. Las tablas muestran medias, desviaciones estándar y desviaciones relativas $((\bar{\theta} - \theta)/\theta)$.

Como son muchas las posibles combinaciones, en un primer análisis, seleccionaremos un subgrupo de combinaciones y analizaremos la influencia del número de puntos de la malla regular sobre el cual el proceso espacial es observado. Como consecuencia, discutiremos y decidiremos los valores apropiados para N , y este parámetro será considerado fijo en el siguiente paso del estudio de simulación.

4.2.1. Análisis de la influencia de N

Para analizar la relativa importancia del tamaño de la malla (N) en la cual el proceso es observado, consideramos un periodograma *rounded taper* basado en los parámetros de suavizado $\delta = \epsilon = 3$. Entonces, nos centramos en $\nu = 0.5, 1, 1.5$ y los siguientes pares de valores de *sill* y rango $(2.0, 10)$, $(2.9, 10)$, $(2.9, 166)$, $(2.9, 300)$ para centrarnos en el análisis del comportamiento de los estimadores de (ϕ, ν) basados en $N = 20 \times 20$, 10×10 , y 5×5 . El resultado de estas simulaciones son presentadas en las Tablas (4.3-4.3). En general, el procedimiento de regresión produce las mejores estimaciones (en términos de mostrar las menores desviaciones estándar y desviaciones relativas) para el caso de tamaño de malla más grande (20×20) y para los mayores rangos. El procedimiento muestra resultados engañosos en la mayoría de los casos cuando el número de puntos evaluados fue $N = 5 \times 5$, y algunos casos cuando $N = 10 \times 10$. En general, los parámetros fueron subestimados (desviación relativa negativa). Hacer notar que un rango más grande significa un menor parámetro ϕ , y este parámetro fue mejor estimado, y con las desviaciones estándar más bajas, cuando $\nu = 1.5$. Sin embargo, el parámetro ν fue mejor estimado cuando $\nu = 1$, seguido por $\nu = 1.5$ y $\nu = 0.5$.

Así, en resumen, el número de puntos en la malla donde el proceso espacial va a ser observado debería ser lo más grande posible, y para esos casos los estimadores de ambos parámetros fueron mejores con rangos más grandes.

Una mejor evaluación de la influencia de N en la bondad del ajuste de la regresión lineal obtenida, fue evaluar las diferencias espaciales, a través de un procedimiento gráfico mostrando los p-valores obtenidos por Monte Carlo. Tomamos un proceso espacial definido a través del vector de parámetros $\theta = (\phi, \nu)$. Suponemos que queremos estudiar la hipótesis nula de $\theta_0 = \theta_1$, donde el vector de parámetros θ_1 ha sido estimado a partir de los datos y queremos comparar este valor con unos valores de parámetros fijos, θ_0 . Realizamos grupos de 1000 simulaciones bajo las condiciones de θ_0 y se calculan p-valores para cada θ_1 . Estos se obtienen por el procedimiento de ranking como sigue. El valor del parámetro observado θ_1 fue comparado con 1000 simulaciones bajo θ_0 . Si θ_1 supera el $50 \times p$ más grande, el nivel de significación obtenido por el test de p. Bajo la hipótesis nula de $\theta_0 = \theta_1$, el p-valor debería ser una distribución Uniforme de rango $(0, 1)$. Y cuando una diferencia real exista, los p-valores deberían estar lejos de la Uniforme. Esto está basado en el concepto de Nivel de significación esperada (*Expected Significance Level*, ESL), la cual fue introducida por Dempster y Schatzoff (1965).

Los resultados para $N = 20 \times 20$, $N = 10 \times 10$ y $N = 5 \times 5$ se muestran en las Figuras (4.5-4.7). Definiremos como $\theta_0 = (2.9, 166)$ y testaremos los siguientes parámetros $\theta_1 = (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300)$ frente θ_0 . De nuevo, nos centraremos en $\nu = 0.5, 1, 1.5$. Mediante círculos, se muestra una línea que representa, para la hipótesis nula, la diferencia, que en este caso actúa como una Uniforme. Las líneas marcadas mediante cruces, indican el p-valor cuando existe diferencias. Si la línea de cruces fuese compatible con la Uniforme (es decir que estuviesen juntas), significaría que las diferencias espaciales no pueden ser identificadas correctamente.

Se muestra claramente que en el caso $N = 5 \times 5$, el procedimiento no puede detectar una diferencia real (por ejemplo, el caso de rango = 200 frente al rango=166), aunque encontramos las diferencias cuando éstas son grandes (rango=166 frente rango=10). Cuando usamos mallas más grandes ($N = 20 \times 20$, $N = 10 \times 10$), el procedimiento, en general, funciona bien para detectar diferencias reales. Esto confirma lo mostrado en las Tablas (4.3-4.3).

4.2.2. Análisis de los estimadores de los parámetros espaciales ν y ϕ

Teniendo en cuenta los resultados presentados en la sección anterior, en esta sección vamos a fijar el número de localizaciones donde el proceso es observado para $N = n_1 \times n_2 = 20 \times 20$. Entonces, analizamos los estimadores de los paráme-

tros espaciales ν y ϕ bajo una amplia variedad de situaciones prácticas: (a) cuatro combinaciones de los parámetros *sill* y rango: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300); (b) cuatro valores para el parámetro de suavizamiento: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$; (c) tres posibles estimadores para el periodograma espacial: sin *taper* y con *taper* (multiplicativo y *rounded*), definido en el Capítulo 3; (d) cuatro valores para los parámetros de *tapering* ($\delta, \epsilon, m_1, m_2$): 1, 3, 5, 10. Nuevamente usamos 400 frecuencias de Fourier en el intervalo definido en la ecuación (3.83) para la evaluación del periodograma. Para cada combinación de los parámetros, simulamos 1000 procesos y para cada proceso estimamos el periodograma y llevamos a cabo una regresión lineal paramétrica para obtener los correspondientes parámetros que definen la estructura espacial. Los resultados pueden ser observados en forma de *box-plots*. En particular, las Tablas (4.3-4.3) y las Figuras (4.8-4.9) muestran los resultados de la estimación para el parámetro ν . Las Tablas (4.3-4.3) y las Figuras (4.10-4.13) están dedicadas a los resultados de la estimación del parámetro ϕ .

Los comentarios los podemos analizar en dos grupos:

(a) *Respecto a la estimación del parámetro ν .*

Se muestra claramente que, en general, usando los *data taper*, se mejora la estimación de los parámetros espaciales. El *rounded taper* parece mejor que el multiplicativo cuando se estiman valores grandes del parámetro ν (en particular para valores de $\nu > 1.0$ para pequeños rangos (≤ 10) y para $\nu \geq 1.0$ para grandes rangos (≥ 166)) mientras se usa un parámetro de *tapering* $\epsilon > 1$. En el caso de $\delta, \epsilon, m_1, m_2 = 1$, el *taper* multiplicativo aporta las mejores estimaciones.

En términos de analizar la mejor opción para los parámetros de *tapering*, los siguientes puntos deben ser tenidos en cuenta : (a) independientemente del valor de ν a ser estimado, los mejores resultados fueron obtenidos por $\epsilon \geq 3$ para ambos tipos de *taper*, multiplicativo y *rounded*; (b) en algunos casos, el multiplicativo aporta los mejores resultados cuando $\epsilon = 1$, como es el caso en el que se estima $\nu = 1$; (c) se puede hacer notar que para grandes rangos (≥ 166), y cuando se usan grandes valores del parámetro ϵ (≥ 5), la desviación relativa aumenta considerablemente para el *rounded taper*, pero no para el multiplicativo; (d) en general, el *taper* multiplicativo proporciona las mejores estimaciones, para cualquier parámetro de *tapering* ϵ , cuando se estiman valores pequeños del parámetro de suavizamiento, $\nu = 0.5, 1$.

Por otro lado, manteniendo fijo el parámetro de *tapering* ϵ , y analizando cual es el parámetro de suavizamiento ν mejor estimado, se muestra que para pequeños valores del rango (≤ 10), $\nu = 1.5, 2.0$ fue mejor estimado cuando se usan los parámetros de *tapering* $\epsilon = 3, 5, 10$. También, si se usa el parámetro de *tape-*

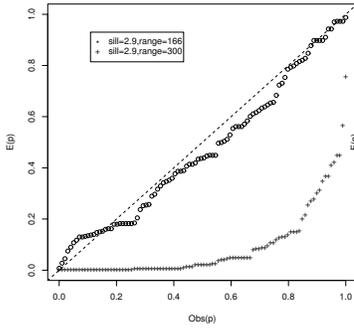
ring más pequeño posible, ($\epsilon = 1$), $\nu = 1$ fue el mejor estimado. Sin embargo, cuando usamos grandes rangos, el parámetro $\nu = 1$ fue el mejor estimado, independientemente del *data taper* y el parámetro de *tapering* usado.

(b) *Respecto a la estimación del parámetro ϕ .*

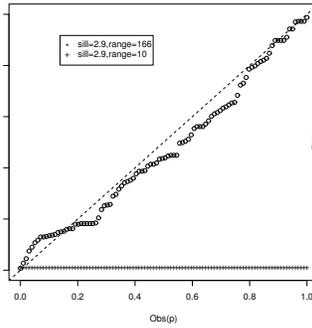
En este caso, la estimación del parámetro ϕ controlando la variabilidad espacial depende mucho de la combinación de los parámetros (*sill*, rango, suavizado (ν)). De hecho, este parámetro es definido como una combinación particular de estos parámetros. En general, y en concordancia con los resultados mostrados para el caso previo cuando estimamos el parámetro ν , usando un *data taper* mejora la estimación del parámetro ϕ . Esto es cierto excepto en el caso particular cuando estimamos el correspondiente valor de ϕ asociado a $\nu = 0.5$, cuando, independientemente del parámetro de *tapering* usado, la utilización de *data taper* no aporta mejoras. Los siguientes resultados son de interés significativo: (a) para pequeños rangos (≤ 10), la consiguiente combinación de rango y *sill* aporta datos significantes y resultados diferentes cuando estamos en los casos (2,10) y (2.9,10). Por ejemplo, cuando estimamos los correspondientes valores de ϕ asociados a $\nu = 2$, el *taper* multiplicativo mejora al *rounded*, para el caso (2,10), pero justo lo contrario ocurre para el caso (2.9,10); (b) para grandes rangos (≥ 166), cuando estimamos los correspondientes valores de ϕ asociados a $\nu \geq 1.5$, el *taper* multiplicativo mejora al *rounded*, para cualquier parámetro de *tapering*; sin embargo, para $\nu = 1$ el *rounded taper*, produce los mejores resultados.

En términos del análisis de la mejor opción para el *data taper* y parámetros de *tapering*, cuando estimamos el parámetro ϕ , los siguientes puntos son de interés: (a) si $\nu = 0.5$, no encontramos diferencias significativas entre los tres casos de *data tapers* y los cuatro parámetros de *tapering* usados; (b) si $\nu = 1.0$, la mejor opción fue $\epsilon = 3$, hacer notar que para grandes valores del parámetro de *tapering*, la desviación relativa crece; (c) si $\nu = 1.5$, las mejores opciones fueron $\epsilon = 3, 5$; (d) si $\nu = 2.0$, la mejor opción fue $\epsilon = 10$; (e) los resultados de los puntos (a-d) son válidos para pequeños y grandes rangos. Sin embargo, es importante hacer notar que para valores de rango (166,300), la estimación del parámetro espacial ϕ fue realmente mala, cuando $\nu = 2$, mostrando valores de desviaciones relativas muy grandes.

Figura (4.5.1)



Figura(4.5.2)



Figura(4.5.3)

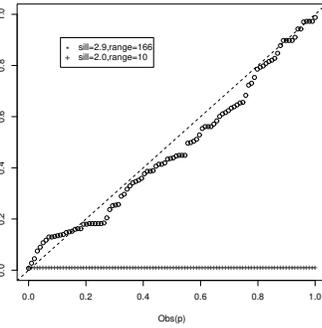


Figura (4.5.4)

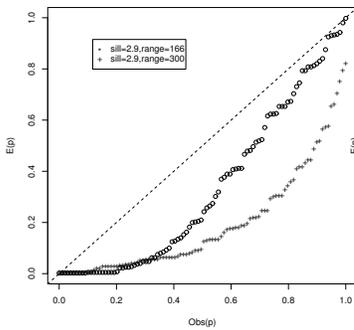


Figura (4.5.5)

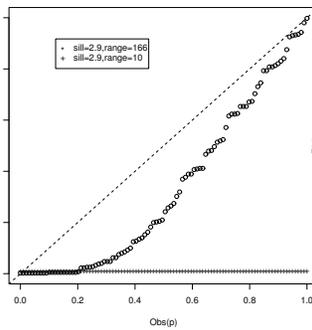


Figura (4.5.6)

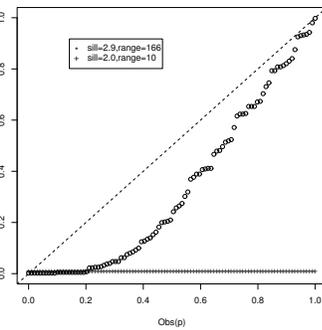


Figura (4.5.7)

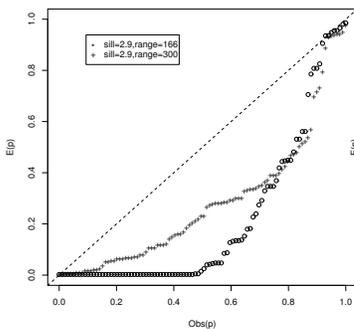


Figura (4.5.8)

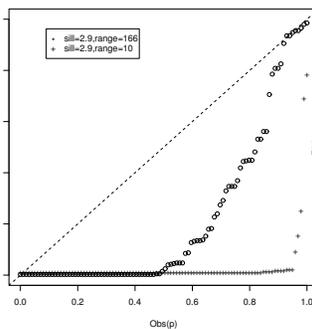


Figura (4.5.9)

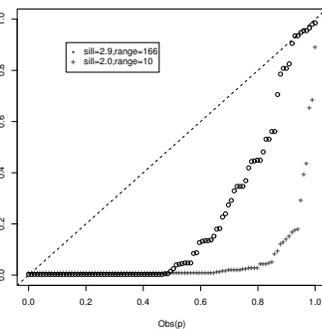


Figura 4.5: p – valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (primera fila), $N = 10 \times 10$ (segunda fila), $N = 5 \times 5$ (tercera fila) y $\nu = 0.5$. Primera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); Segunda columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); Tercera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).

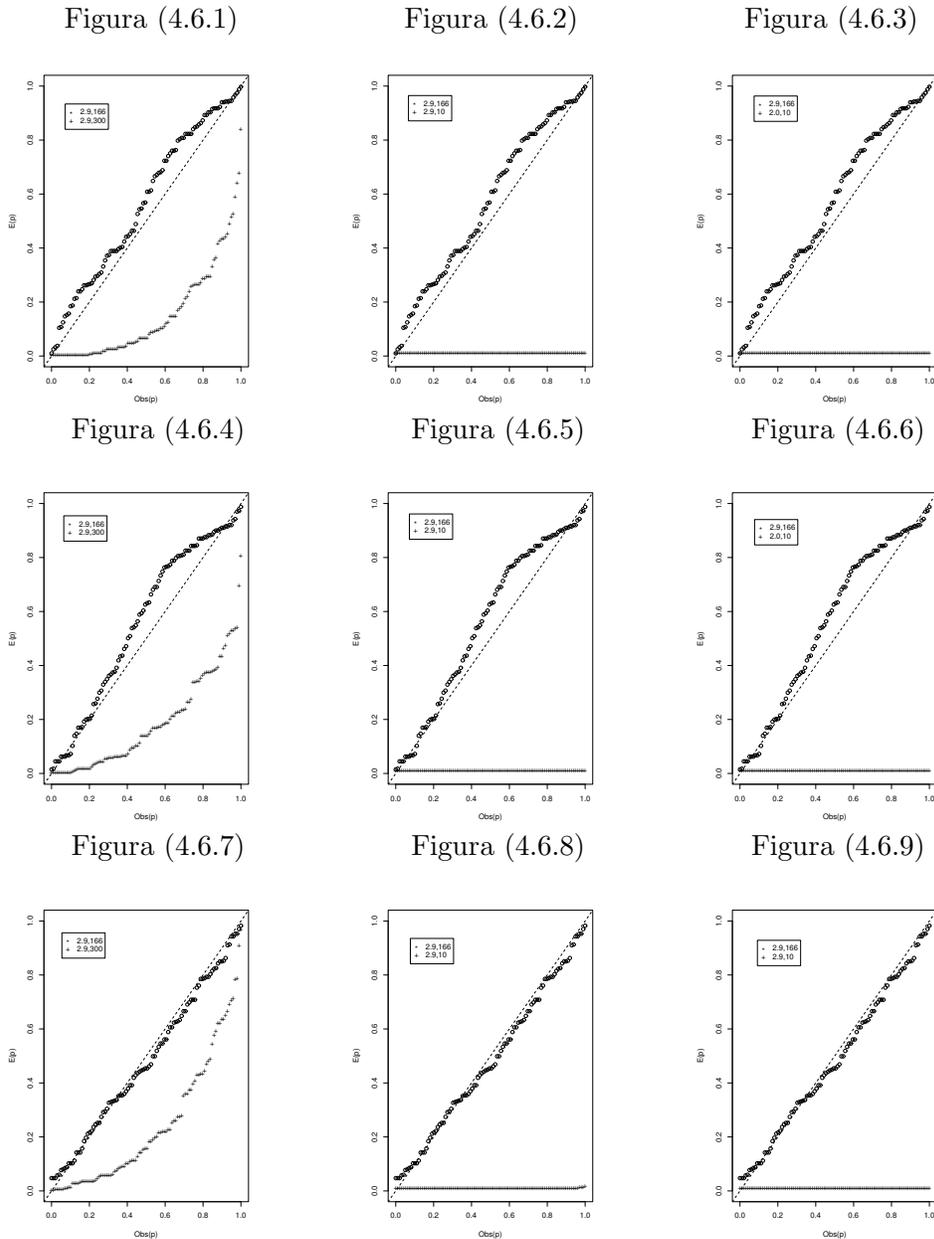


Figura 4.6: p - valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (primera fila), $N = 10 \times 10$ (segunda fila), $N = 5 \times 5$ (tercera fila) y $\nu = 1.0$. Primera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); Segunda columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); Tercera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).

Figura (4.7.1)

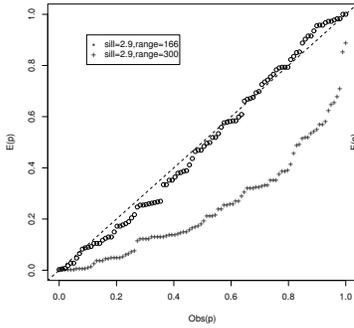


Figura (4.7.2)

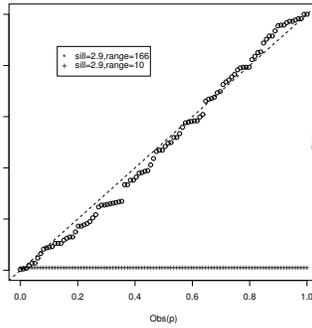


Figura (4.7.3)

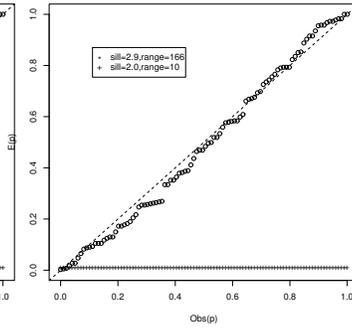


Figura (4.7.4)

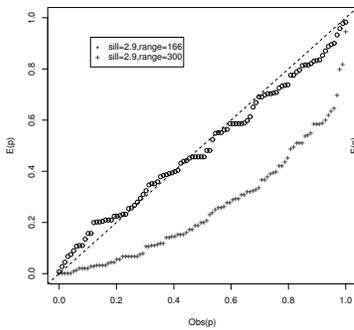


Figura (4.7.5)

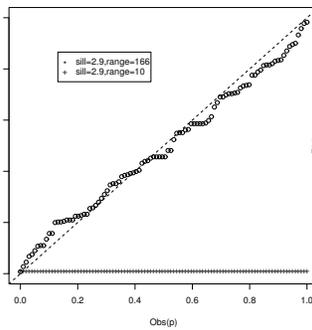


Figura (4.7.6)

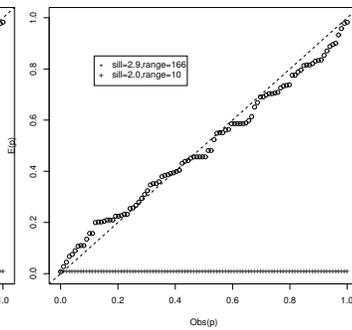


Figura (4.7.7)

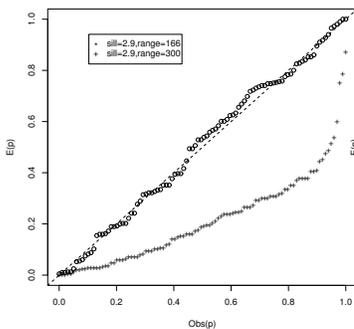


Figura (4.7.8)

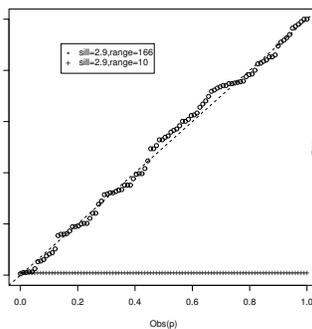


Figura (4.7.9)

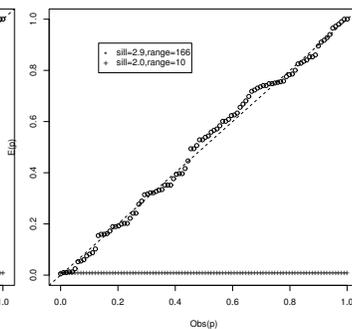
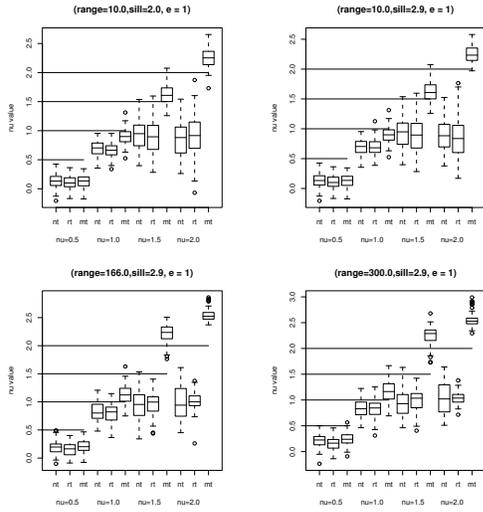
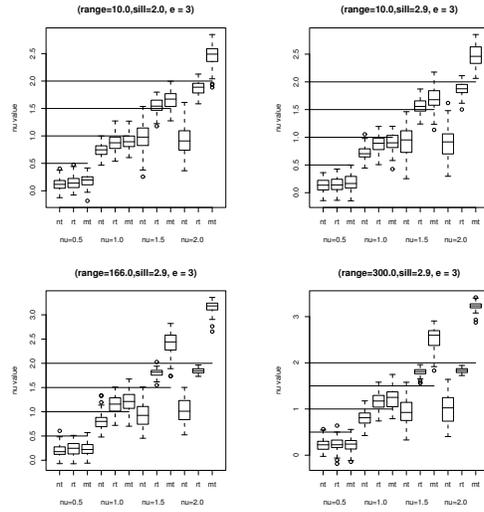


Figura 4.7: p – valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (primera fila), $N = 10 \times 10$ (segunda fila), $N = 5 \times 5$ (tercera fila) y $\nu = 1.5$. Primera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); Segunda columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); Tercera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).

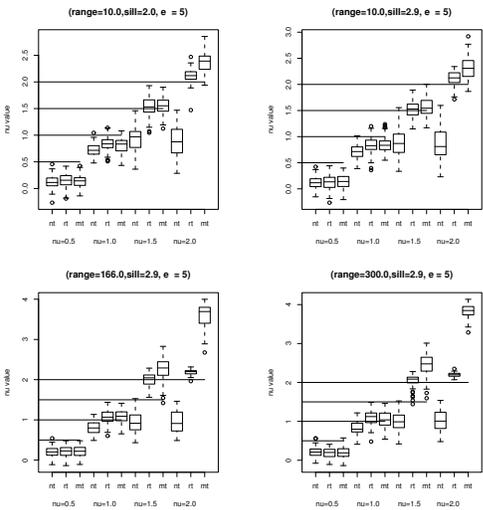
Figura(4.8.1)



Figura(4.8.2)



Figura(4.8.3)



Figura(4.8.4)

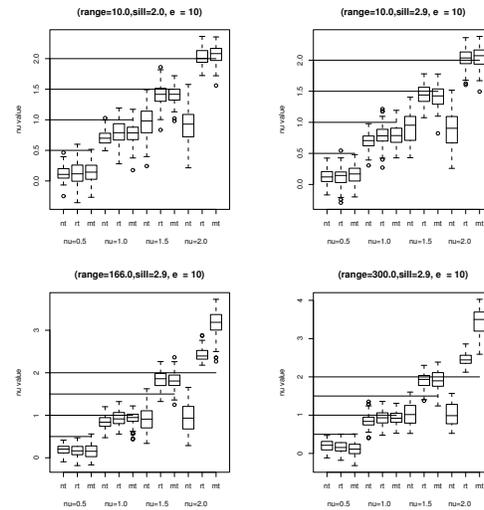
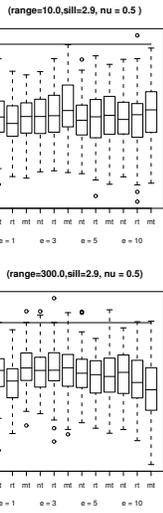
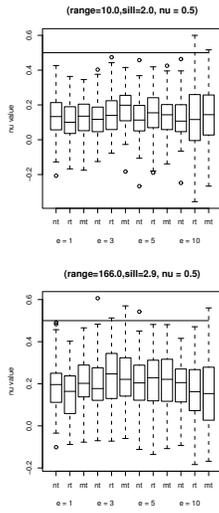
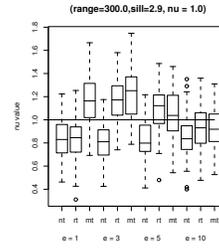
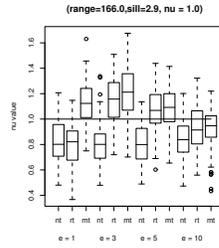
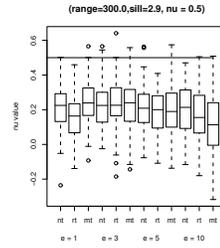
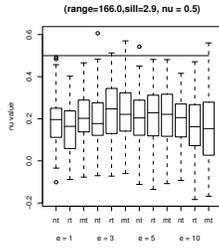
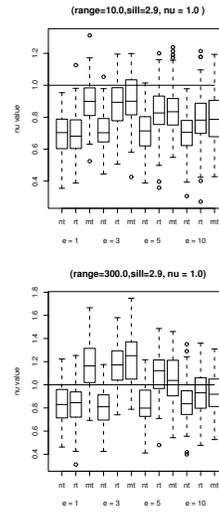
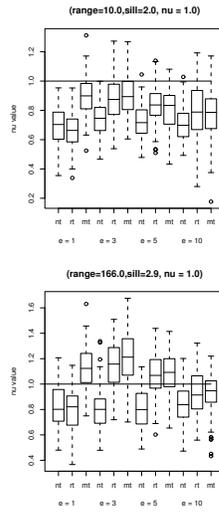


Figura 4.8: *Box-plots* de valores estimados del parámetro ν obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro valores de $\delta = \epsilon = 1, 3, 5, 10$ considerados. Con cada subfigura, las siguientes combinaciones de *sill* y rango son mostrados (desde superior izquierda a inferior derecha): (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166) y (2.9, 300). Finalmente, $N = 20 \times 20$ es fijado, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$ y tres tipos de *tapering* son considerados: *No taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt).

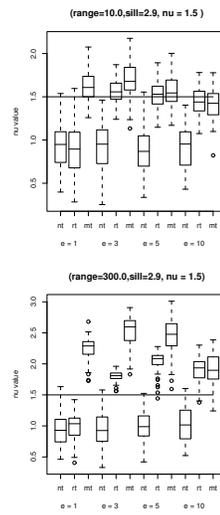
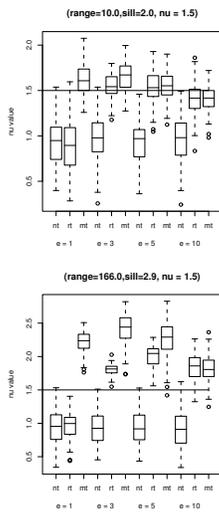
Figura(4.9.1)



Figura(4.9.2)



Figura(4.9.3)



Figura(4.9.4)

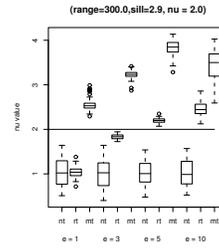
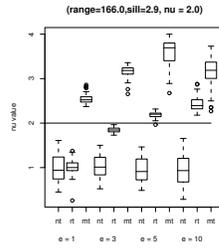
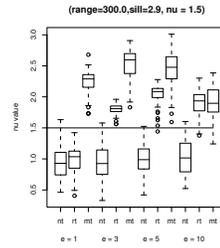
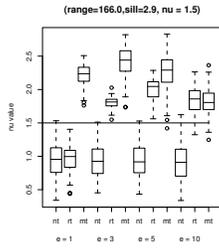
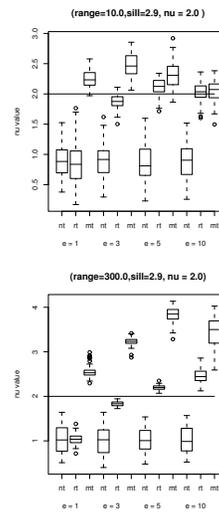
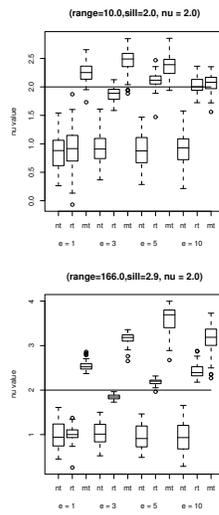


Figura 4.9: *Box-plots* de valores estimados del parámetro ν obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro valores de $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$ considerados. Con cada subfigura, las siguientes combinaciones de *sill* y rango son mostrados (desde superior izquierda a inferior derecha): (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166) y (2.9, 300). Finalmente, $N = 20 \times 20$ es fijado, $\epsilon = 1, 3, 5, 10$ y tres tipos de *tapering* son considerados: *No taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt).

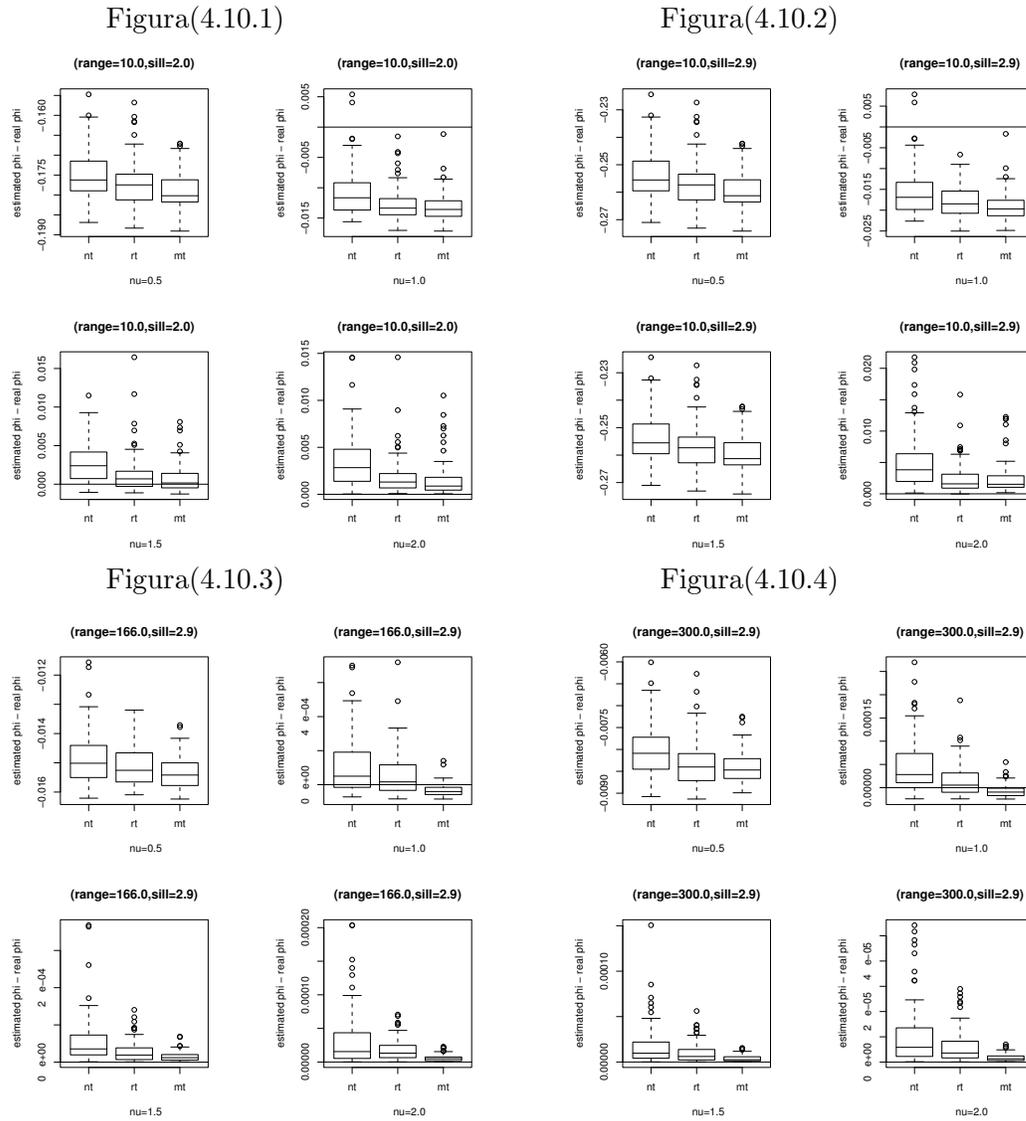
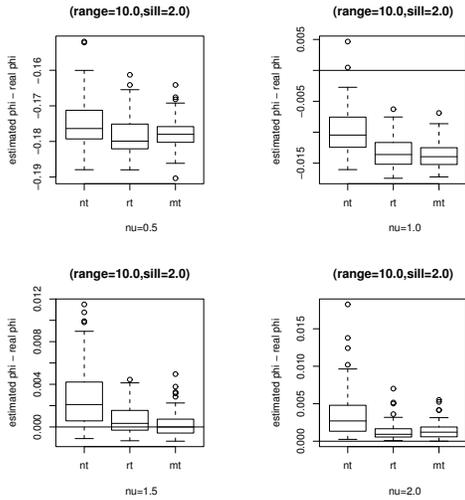
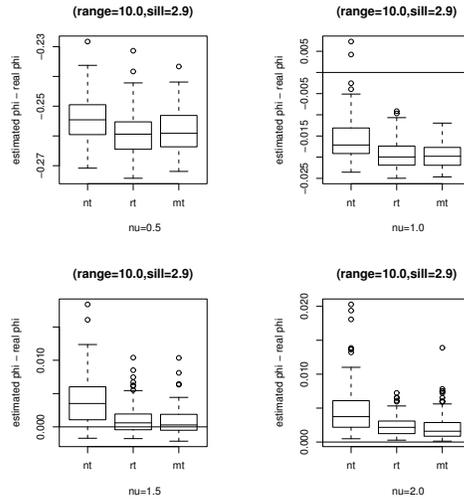


Figura 4.10: *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 1$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: *No taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt).

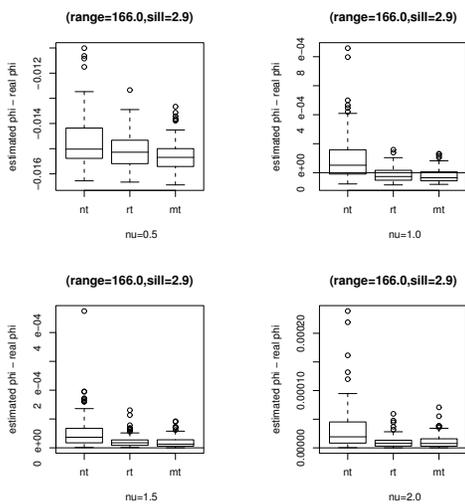
Figura(4.11.1)



Figura(4.11.2)



Figura(4.11.3)



Figura(4.11.4)

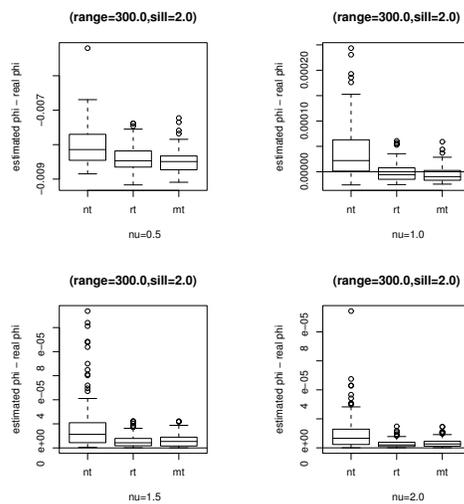


Figura 4.11: *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro (desde arriba hasta abajo y de izquierda a derecha): $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 3$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: *No taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt).

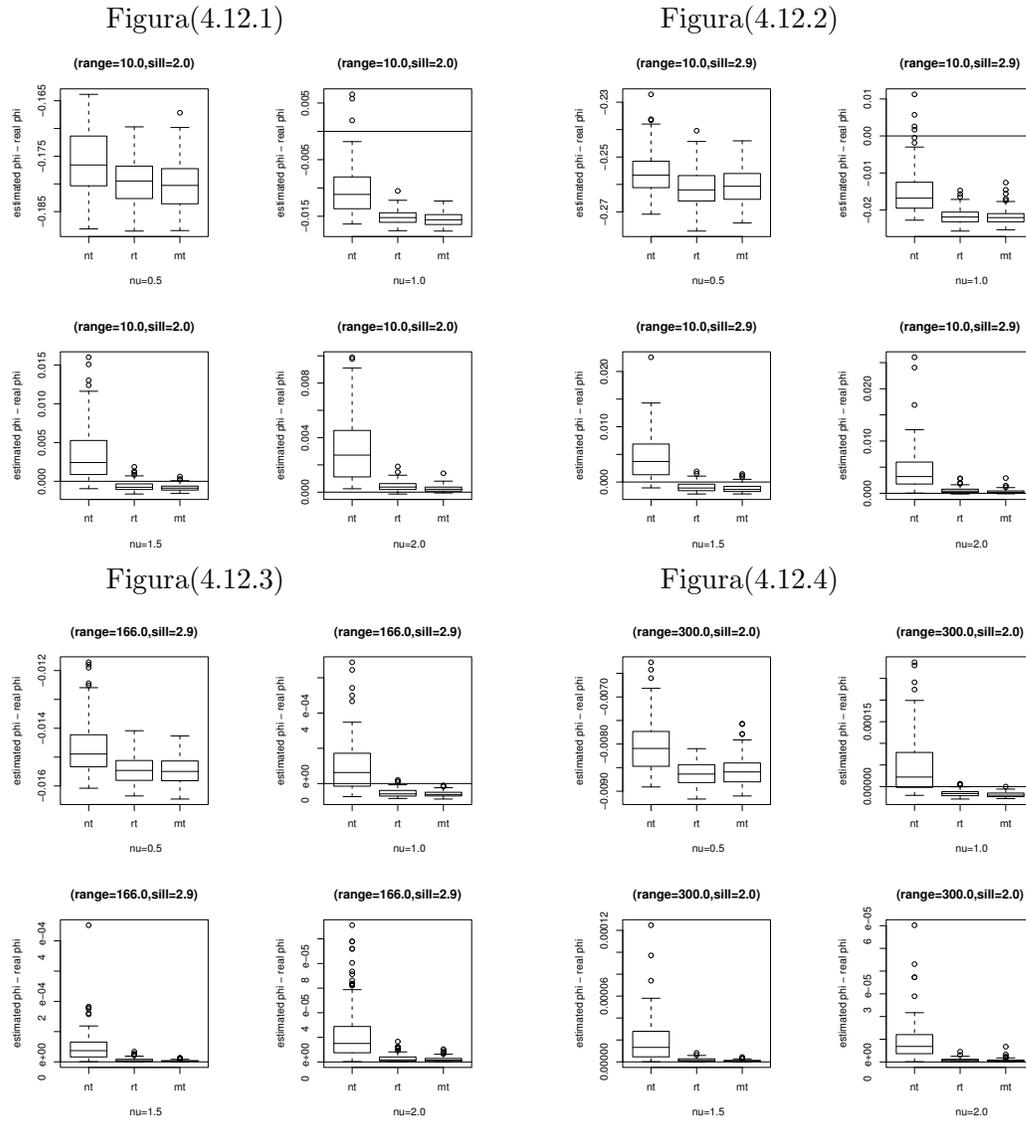
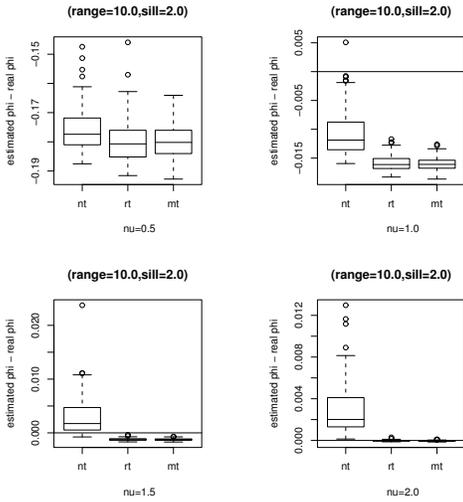
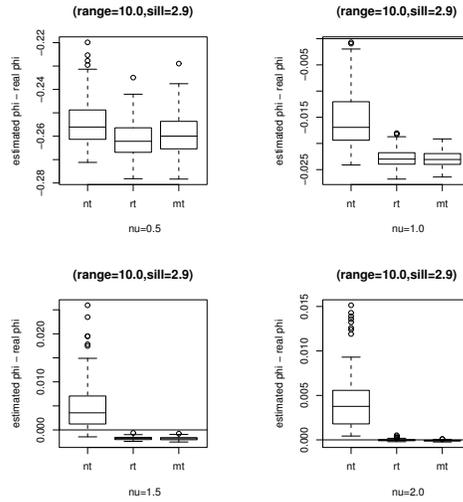


Figura 4.12: *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 5$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: *No taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper Multiplicativo* (mt).

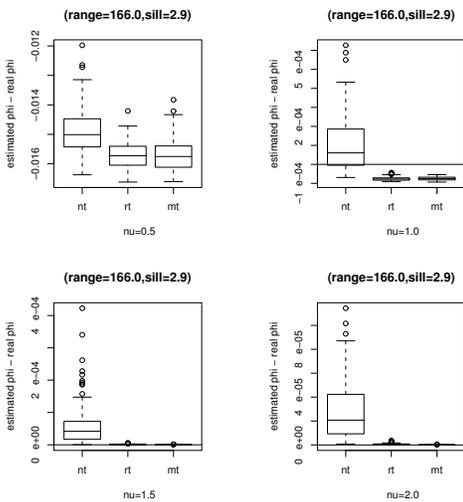
Figura(4.13.1)



Figura(4.13.2)



Figura(4.13.3)



Figura(4.13.4)

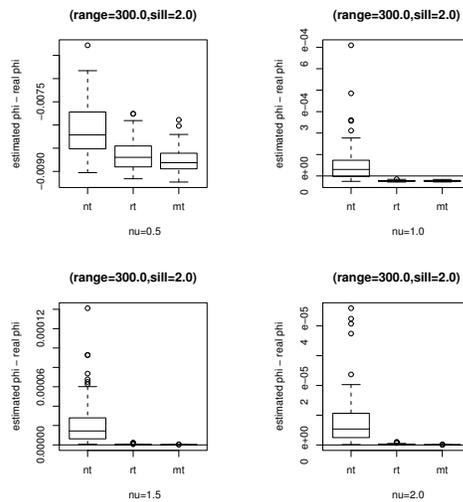


Figura 4.13: *Box-plots* de valores estimados de $\hat{\phi} - \phi$ obtenidos a través de 1000 repeticiones. Cada subfigura de 4 gráficos muestra los resultados para cada uno de los cuatro pares de valores de *sill* y rango considerados: (2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 166), (2.9, 300). Con cada subfigura, cada gráfico corresponde a cada valor del parámetro: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$. Finalmente, $N = 20 \times 20$ y $\epsilon = 10$ son fijados, y tres tipos de *tapering* son considerados: No *taper* (nt), *Rounded taper* (rt) y *taper* Multiplicativo (mt).

4.3. Conclusiones

Centrándonos en la familia *Matérn* de densidades espaciales y espectrales, como una clase general y flexible que contiene mucho interés y familia ampliamente usada en modelos espaciales, se ha presentado un estudio de simulación para el análisis del comportamiento del estimador del periodograma y su uso en la estimación de los parámetros espaciales caracterizando la variabilidad espacial. Se muestra que, en general, usando *data taper* mejoramos la estimación de los parámetros espaciales. En particular, el *rounded taper* mejora el multiplicativo en algunas situaciones donde el parámetro de suavizamiento es mayor o igual a uno. Independientemente del valor de ν a ser estimado, los mejores resultados se obtienen para $\epsilon \geq 3$ para ambos tipos de *taper*. Pero también es importante el hecho de que para parámetros de *tapering* más grandes (> 5) aportan desviaciones relativas mayores y así peores estimaciones.

En este capítulo nos hemos centrado en la estimación de los parámetros ν, ϕ que juegan un papel en los procedimientos de interpolación local, y el otro hecho de que bajas frecuencias tienen un comportamiento sobre el espectro que afecta muy poco a la interpolación. Así, en este contexto, el rango no es un parámetro crítico, y esto nos permite el uso de modelos lineales para la estimación de parámetros. Los resultados muestran claramente la dependencia en la validación de los modelos lineales, sin embargo algunos otros modelos podrían ser usados para la estimación de parámetros. Por ejemplo, la regresión cuantil podría ser una alternativa potente. También hacer notar que podría ser interesante la estimación de ν, ϕ, α , sin suponer altas frecuencias. Esto nos llevaría al uso de mínimos cuadrados ponderados no lineales. Una comparación entre la estimación espacial y espectral es un punto clave aquí, como es investigado en otro capítulo y en Mateu *et al.* (2005).

N	$sill$	rango	real (ϕ)	media (ϕ)	de (ϕ)	sr (ϕ)	media (ν)	de (ν)	sr (ν)
20×20	2.0	10	0.2000	0.0220	0.0042	-0.8900	0.1519	0.1228	-0.6962
	2.9	10	0.2900	0.0333	0.0083	-0.8852	0.1449	0.1175	-0.7102
	2.9	166	0.0175	0.0024	0.0007	-0.8628	0.2378	0.1330	-0.5244
	2.9	300	0.0097	0.0018	0.0004	-0.8144	0.2398	0.1346	-0.5204
10×10	2.0	10	0.2000	0.0213	0.0078	-0.8935	0.0049	0.1600	-0.9902
	2.9	10	0.2900	0.0295	0.0125	-0.8983	-0.0162	0.1906	-1.0324
	2.9	166	0.0175	0.0021	0.0009	-0.8800	0.0399	0.1789	-0.9202
	2.9	300	0.0097	0.0013	0.0005	-0.8660	0.0697	0.1751	-0.8606
5×5	2.0	10	0.2000	0.0137	0.1184	-0.9315	-0.4158	0.3327	-1.8316
	2.9	10	0.2900	0.0216	0.0154	-0.9255	-0.3934	0.3264	-1.7868
	2.9	166	0.0175	0.0016	0.0011	-0.9086	-0.2993	0.2851	-1.5986
	2.9	300	0.0097	0.0008	0.0009	-0.9175	-0.3726	0.2929	-1.7452

Tabla 4.1: Resultados de simulación, basados en 1000 repeticiones, cuando son estimados los parámetros ϕ y ν . Los parámetros teóricos considerados aquí son: $\nu = 0.5$, $N = 20 \times 20$, 10×10 , 5×5 y sus correspondientes combinaciones de ($sill$, rango). El periodograma está basado en un *rounded taper* con $\delta = \epsilon = 3$. Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr = sesgo relativo.

N	$sill$	rango	real (ϕ)	media (ϕ)	de (ϕ)	sr (ϕ)	media (ν)	de (ν)	sr (ν)
20×20	2.0	10	0.0200	0.0072	0.0028	-0.6400	0.8681	0.1433	-0.1319
	2.9	10	0.0290	0.0112	0.0037	-0.6138	0.8811	0.1427	-0.1189
	2.9	166	0.00011	0.00014	0.00012	0.2727	1.1410	0.1917	0.1420
10×10	2.0	10	0.0200	0.0083	0.0052	-0.5850	0.5180	0.1560	-0.4820
	2.9	10	0.0290	0.0117	0.0068	-0.7293	0.5160	0.1520	-0.4840
	2.9	166	0.00011	0.00012	0.00011	0.0909	0.5870	0.1250	-0.4130
5×5	2.0	10	0.0200	0.0059	0.0057	-0.7020	0.0260	0.2220	-0.9740
	2.9	10	0.0290	0.0078	0.0064	-0.7293	-0.0460	0.2400	-1.046
	2.9	166	0.00011	6.6e-05	6.8e-05	-0.4000	0.0440	0.2050	-0.9560
5×5	2.9	300	3.2e-05	4.2e-05	2.8e-05	0.3125	0.6120	0.1310	-0.3880
	2.9	300	3.2e-05	2.5e-05	3.3e-05	-0.2187	0.0570	0.2220	-0.9430

Tabla 4.2: Resultados de simulación, basados en 1000 repeticiones, cuando son estimados los parámetros ϕ y ν . Los parámetros teóricos considerados aquí son: $\nu = 1.0$, $N = 20 \times 20$, 10×10 , 5×5 y sus correspondientes combinaciones de ($sill$, rango). El periodograma está basado en un *rounded taper* con $\delta = \epsilon = 3$.

N	$sill$	rango	real (ϕ)	media (ϕ)	de (ϕ)	sr (ϕ)	media (ν)	de (ν)	sr (ν)
20×20	2.0	10	0.0020	0.0030	0.0019	0.5100	1.5473	0.1306	0.0315
	2.9	10	0.0029	0.0049	0.0035	0.6896	1.5611	0.1410	0.0407
	2.9	166	6.3e-7	4.1e-5	5.3e-5	67.3333	1.8054	0.0755	0.2036
	2.9	300	1.1e-7	1.2e-5	1.3e-5	119	1.8050	0.0757	0.2033
10×10	2.0	10	0.0020	0.0041	0.0033	1.0500	0.6827	0.1262	-0.5448
	2.9	10	0.0029	0.0049	0.0043	0.6896	0.6761	0.1335	-0.5493
	2.9	166	6.3e-7	2.3e-5	2.1e-5	37.3333	0.6825	0.1077	-0.5450
	2.9	300	1.1e-7	9.2e-6	1.1e-5	91.0000	0.6810	0.1040	-0.5460
5×5	2.0	10	0.0020	0.0022	0.0028	0.1000	0.0922	0.1642	-0.9385
	2.9	10	0.0029	0.0034	0.0035	0.1724	0.1284	0.1548	-0.9144
	2.9	166	6.3e-7	1.4e-5	2.1e-5	22.3334	0.1605	0.0614	-0.8930
	2.9	300	1.1e-7	3.7e-6	4.1e-6	3.6e-6	0.1658	0.0547	-0.8895

Tabla 4.3: Resultados de simulación, basados en 1000 repeticiones, cuando son estimados los parámetros ϕ y ν . Los parámetros teóricos considerados aquí son: $\nu = 1.5$, $N = 20 \times 20$, 10×10 , 5×5 y sus correspondientes combinaciones de ($sill$, rango). El periodograma está basado en un *rounded taper* con $\delta = \epsilon = 3$.

ν	media de			media de			media de			media de												
	nt			rt			de			sr												
$\epsilon = 1$	0.5	0.1378	0.1130	-0.7244	0.1037	0.1151	-0.7926	0.1322	0.1070	-0.7356	0.5	0.6996	0.1241	-0.3004	0.6670	0.1217	-0.3400	0.8981	0.1323	-0.1019		
	1.0	0.9290	0.2441	-0.3807	0.8909	0.2662	-0.4067	1.6098	0.1629	0.0732	1.0	0.7342	0.1193	-0.2658	0.8681	0.1433	-0.1319	0.8973	0.1431	-0.1027		
	1.5	0.9745	0.2400	-0.3503	1.5473	0.1306	0.0315	1.6608	0.1662	0.1072	1.5	0.9745	0.2400	-0.3503	1.5473	0.1306	0.0315	1.6608	0.1662	0.1072		
	2.0	0.9071	0.2497	-0.5465	1.8733	0.1219	-0.0635	2.4598	0.1935	0.2299	2.0	0.9071	0.2497	-0.5465	1.8733	0.1219	-0.0635	2.4598	0.1935	0.2299		
	$\epsilon = 3$	0.5	0.1232	0.1118	-0.7536	0.1519	0.1228	-0.6962	0.1856	0.1048	-0.6288	0.5	0.1232	0.1118	-0.7536	0.1519	0.1228	-0.6962	0.1856	0.1048	-0.6288	
		1.0	0.8708	0.2872	-0.5646	0.9253	0.3639	-0.5374	2.2558	0.1680	0.1279	1.0	0.7342	0.1193	-0.2658	0.8681	0.1433	-0.1319	0.8973	0.1431	-0.1027	
		1.5	0.9290	0.2441	-0.3807	0.8909	0.2662	-0.4067	1.6098	0.1629	0.0732	1.5	0.9745	0.2400	-0.3503	1.5473	0.1306	0.0315	1.6608	0.1662	0.1072	
		2.0	0.9071	0.2497	-0.5465	1.8733	0.1219	-0.0635	2.4598	0.1935	0.2299	2.0	0.9071	0.2497	-0.5465	1.8733	0.1219	-0.0635	2.4598	0.1935	0.2299	
		$\epsilon = 5$	0.5	0.1190	0.1127	-0.7620	0.1479	0.1210	-0.7042	0.1374	0.1148	-0.7252	0.5	0.1190	0.1127	-0.7620	0.1479	0.1210	-0.7042	0.1374	0.1148	-0.7252
			1.0	0.7203	0.1119	-0.2797	0.8338	0.1283	-0.1662	0.8064	0.1379	-0.1936	1.0	0.7203	0.1119	-0.2797	0.8338	0.1283	-0.1662	0.8064	0.1379	-0.1936
			1.5	0.9239	0.2304	-0.3841	1.5386	0.1687	0.0257	1.5562	0.1572	0.0375	1.5	0.9239	0.2304	-0.3841	1.5386	0.1687	0.0257	1.5562	0.1572	0.0375
			2.0	0.8815	0.2785	-0.5593	2.1212	0.1226	0.0606	2.3739	0.1826	0.1869	2.0	0.8815	0.2785	-0.5593	2.1212	0.1226	0.0606	2.3739	0.1826	0.1869
$\epsilon = 10$			0.5	0.1249	0.1197	-0.7502	0.1233	0.1974	-0.7534	0.1281	0.1649	-0.7438	0.5	0.1249	0.1197	-0.7502	0.1233	0.1974	-0.7534	0.1281	0.1649	-0.7438
			1.0	0.7037	0.1104	-0.2963	0.7878	0.1805	-0.2122	0.7656	0.1677	-0.2344	1.0	0.7037	0.1104	-0.2963	0.7878	0.1805	-0.2122	0.7656	0.1677	-0.2344
			1.5	0.9664	0.2492	-0.3557	1.4086	0.1773	-0.0609	1.4126	0.1457	-0.0582	1.5	0.9664	0.2492	-0.3557	1.4086	0.1773	-0.0609	1.4126	0.1457	-0.0582
			2.0	0.9058	0.2901	-0.5471	2.0286	0.1426	0.0143	2.0645	0.1478	0.0322	2.0	0.9058	0.2901	-0.5471	2.0286	0.1426	0.0143	2.0645	0.1478	0.0322

Tabla 4.4: Resultados de simulación para el parámetro ν basados en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2, \epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.0$, $rango=10$). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper multiplicativo*, de = desviación estándar y sr = sesgo relativo.

	ν	nt			rt			mt		
		media	de	sr	media	de	sr	media	sr	de
$\epsilon = 1$	0.5	0.1378	0.1134	-0.7244	0.1037	0.1153	-0.7926	0.1332	0.1090	-0.7336
	1.0	0.6996	0.1261	-0.3040	0.6879	0.1347	-0.3121	0.8981	0.1303	-0.1019
	1.5	0.9290	0.2431	-0.3807	0.8909	0.2692	-0.4061	1.6098	0.1639	0.0732
	2.0	0.8877	0.2699	-0.5561	0.8622	0.3372	-0.5689	2.2475	0.1428	0.1238
$\epsilon = 3$	0.5	0.1359	0.1132	-0.7282	0.1449	0.1175	-0.7102	0.1770	0.1436	-0.6460
	1.0	0.7049	0.1190	-0.2951	0.8811	0.1427	-0.1189	0.9062	0.1559	-0.0938
	1.5	0.9215	0.2559	-0.3857	1.5611	0.1410	0.0407	1.6917	0.1925	0.1278
	2.0	0.9082	0.2933	-0.5459	1.8713	0.1186	-0.0644	2.4728	0.1825	0.2364
$\epsilon = 5$	0.5	0.1213	0.1058	-0.7574	0.1262	0.1316	-0.7476	0.1370	0.1277	-0.7260
	1.0	0.7162	0.1304	-0.2838	0.8329	0.1529	-0.1671	0.8462	0.1436	-0.1538
	1.5	0.8845	0.2608	-0.4103	1.5256	0.1619	0.0171	1.5671	0.1676	0.0447
	2.0	0.8601	0.2833	-0.5699	2.1169	0.1285	0.0585	2.3124	0.1991	0.1562
$\epsilon = 10$	0.5	0.1278	0.1183	-0.7444	0.1239	0.1572	-0.7522	0.1552	0.1489	-0.6896
	1.0	0.7011	0.1244	-0.2989	0.7895	0.1663	-0.2105	0.7864	0.1564	-0.2136
	1.5	0.9161	0.2393	-0.3893	1.4441	0.1540	-0.0373	1.4111	0.1621	-0.0592
	2.0	0.8898	0.2778	-0.5551	2.0306	0.1488	0.0153	2.0551	0.1578	0.0275

Tabla 4.5: Resultados de simulación para el parámetro ν basados en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$, $\epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.9$, rango=10). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr = sesgo relativo.

ν	rt	media de sr											
$\epsilon = 1$	0.5	0.1897	0.1141	-0.6206	0.1539	0.1139	-0.3461	0.2150	0.1158	-0.5700	1.1330	0.1661	0.1330
	1.0	0.8295	0.1718	-0.1705	0.7949	0.1765	-0.2051	1.1330	0.1661	0.1330	2.2206	0.1572	0.4804
	1.5	0.9545	0.2424	-0.3637	0.9565	0.2056	-0.3623	2.2206	0.1572	0.4804	2.5450	0.1016	0.2725
	2.0	0.9777	0.2926	-0.5112	1.0079	0.1547	-0.4960	2.5450	0.1016	0.2725	0.2309	0.1436	-0.5382
	0.5	0.1967	0.1227	-0.6066	0.2378	0.1330	-0.5244	0.2309	0.1436	-0.5382	1.2153	0.2144	0.2153
	1.0	0.8011	0.1581	-0.1989	1.1410	0.1917	0.1420	1.2153	0.2144	0.2153	2.4130	0.2330	0.6086
	1.5	0.9435	0.2557	-0.3710	1.8054	0.0755	0.2036	2.4130	0.2330	0.6086	3.1629	0.1190	0.5815
	2.0	1.0310	0.2629	-0.4845	1.8450	0.528	-0.0775	3.1629	0.1190	0.5815	0.2095	0.1385	-0.5810
	0.5	0.2088	0.1193	-0.5824	0.2106	0.1318	-0.5788	0.2095	0.1385	-0.5810	1.0817	0.1670	0.0817
	1.0	0.7982	0.1534	-0.2018	1.0643	0.1726	0.0643	1.0817	0.1670	0.0817	2.2638	0.2736	0.5092
	1.5	0.9323	0.2565	-0.3784	1.9990	0.1526	0.3326	2.2638	0.2736	0.5092	3.6029	0.2713	0.8015
	2.0	0.9528	0.2647	-0.5236	2.1867	0.0552	0.0934	3.6029	0.2713	0.8015	0.1582	0.1566	-0.6836
$\epsilon = 3$	0.5	0.1927	0.1132	-0.6146	0.1687	0.1406	-0.6626	0.1582	0.1566	-0.6836	0.9252	0.1624	-0.0748
	1.0	0.8389	0.1547	-0.1611	0.9242	0.1720	-0.0758	0.9252	0.1624	-0.0748	1.8152	0.2055	0.2101
	1.5	0.9291	0.2822	-0.3806	1.8397	0.2097	0.3397	1.8152	0.2055	0.2101	3.1683	0.2935	0.5842
	2.0	0.9535	0.3033	-0.5233	2.4250	0.1520	0.2125	3.1683	0.2935	0.5842			

Tabla 4.6: Resultados de simulación para el parámetro ν basados en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2, \epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.9$, rango=166). Las etiquetas son las siguientes: mt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper multiplicativo*, de = desviación estándar y sr = sesgo relativo.

	ν	nt			rt			mt		
		media	de	sr	media	de	sr	media	de	sr
$\epsilon = 1$	0.5	0.2088	0.1197	-0.5824	0.1555	0.1263	-0.6890	0.2438	0.1216	-0.5124
	1.0	0.8384	0.1730	-0.1616	0.8298	0.1725	-0.1702	1.1669	0.1979	0.1669
	1.5	0.9403	0.2501	-0.3731	0.9924	0.1935	-0.3384	2.2482	0.1703	0.4988
	2.0	1.0274	0.3006	-0.4863	1.0930	0.1145	-0.4535	2.5570	0.1258	0.2785
$\epsilon = 3$	0.5	0.2220	0.1256	-0.5660	0.2398	0.1346	-0.5204	0.2252	0.1366	-0.5496
	1.0	0.8110	0.1626	-0.1890	1.1639	0.1869	0.1639	1.2099	0.2138	0.2099
	1.5	0.9492	0.2589	-0.3672	1.8050	0.0757	0.2033	2.5277	0.2280	0.6851
	2.0	1.0038	0.3013	-0.4981	1.8300	0.0508	-0.0850	3.2298	0.0883	0.6149
$\epsilon = 5$	0.5	0.2134	0.1236	-0.5732	0.1820	0.1303	-0.6360	0.2104	0.1438	-0.5792
	1.0	0.8374	0.1727	-0.1626	1.0831	0.1895	0.0831	1.0520	0.2097	0.0520
	1.5	0.9962	0.2398	-0.3359	2.0485	0.1426	0.3657	2.4486	0.2838	0.6324
	2.0	1.0123	0.2624	-0.4939	2.1931	0.0561	0.0966	3.8245	0.1745	0.9123
$\epsilon = 10$	0.5	0.2030	0.1307	-0.594	0.1680	0.5230	-0.3320	0.1099	0.1633	-0.7802
	1.0	0.8548	0.1766	-0.1452	0.9317	0.1705	-0.0683	0.9120	0.1664	-0.0880
	1.5	1.0173	0.2776	-0.3218	1.9082	0.1931	0.2721	1.9238	0.2433	0.2825
	2.0	1.0154	0.2882	-0.4923	2.4638	0.1620	0.2319	3.4377	0.3274	0.7188

Tabla 4.7: Resultados de simulación para el parámetro ν basados en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$, $\epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.9$, $rango=300$). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr= sesgo relativo.

ϵ	ϕ	nt			media de sr			rt			media de sr			mt																			
1	0.2	0.0248	0.0061	-0.8760	0.0227	0.0058	-0.8863	0.0211	0.0046	-0.8944	0.0047	0.0025	1.3600	17.500	0.0020	0.0019	9.0000	0.0016	0.0017	0.3550	7.4000	0.0027	0.0023	-0.6595	0.0068	0.0023	-0.6595						
1	0.02	0.0092	0.0039	-0.5385	0.0072	0.0028	0.3600	0.0068	0.0023	-0.6595	0.0047	0.0025	1.3600	17.500	0.0032	0.0025	0.6250	0.0016	0.0017	0.3550	7.4000	0.0027	0.0023	-0.6595	0.0068	0.0023	-0.6595						
1	0.0002	0.0037	0.0028	17.500	0.0020	0.0019	9.0000	0.0016	0.0018	7.4000	0.0037	0.0028	17.500	0.0020	0.0019	9.0000	0.0016	0.0018	7.4000	0.0016	0.0017	0.3550	7.4000	0.0027	0.0023	-0.6595	0.0068	0.0023	-0.6595				
3	0.2	0.0249	0.0065	-0.8753	0.0217	0.0054	-0.8918	0.0222	0.0041	-0.8890	0.0047	0.0028	1.3700	17.750	0.0026	0.0012	0.3350	0.0023	0.0012	0.1500	7.0000	0.0047	0.0028	1.3700	17.750	0.0026	0.0012	0.3350	0.0023	0.0012	0.1500		
3	0.02	0.0101	0.0036	-0.4935	0.0066	0.0022	-0.6695	0.0064	0.0021	-0.6800	0.0101	0.0036	-0.4935	0.0066	0.0022	-0.6695	0.0064	0.0021	-0.6800	0.0012	0.0012	0.1500	7.0000	0.0047	0.0028	1.3700	17.750	0.0026	0.0012	0.3350	0.0023	0.0012	0.1500
3	0.0002	0.0037	0.0030	17.750	0.0015	0.0012	6.5500	0.0016	0.0011	7.0000	0.0037	0.0030	17.750	0.0015	0.0012	6.5500	0.0016	0.0011	7.0000	0.0012	0.0012	0.1500	7.0000	0.0047	0.0028	1.3700	17.750	0.0026	0.0012	0.3350	0.0023	0.0012	0.1500
5	0.2	0.0239	0.0057	-0.8802	0.0204	0.0040	-0.8978	0.0198	0.0044	-0.9010	0.0096	0.0043	-0.5195	0.0048	0.0011	-0.759	0.0045	0.0012	-0.7750	0.0044	-0.9010	0.0096	0.0043	-0.5195	0.0048	0.0011	-0.759	0.0045	0.0012	-0.7750	0.0044	-0.9010	
5	0.02	0.0055	0.0036	26.650	0.0013	0.0006	-0.3100	0.0012	0.0004	-0.4000	0.0055	0.0036	26.650	0.0013	0.0006	-0.3100	0.0012	0.0004	-0.4000	0.0012	0.0004	-0.4000	0.0055	0.0036	26.650	0.0013	0.0006	-0.3100	0.0012	0.0004	-0.4000		
5	0.0002	0.0033	0.0023	15.700	0.0006	0.0003	2.2500	0.0005	0.0002	1.5000	0.0033	0.0023	15.700	0.0006	0.0003	2.2500	0.0005	0.0002	1.5000	0.0002	0.0002	1.5000	0.0033	0.0023	15.700	0.0006	0.0003	2.2500	0.0005	0.0002	1.5000		
10	0.2	0.0245	0.0075	-0.8773	0.0202	0.0075	-0.8986	0.0199	0.0057	-0.9005	0.0092	0.0038	-0.5385	0.0041	0.0013	0.2080	0.0040	0.0011	-0.8000	0.0040	-0.9005	0.0092	0.0038	-0.5385	0.0041	0.0013	0.2080	0.0040	0.0011	-0.8000	0.0040	-0.9005	
10	0.02	0.0049	0.0036	23.850	0.0008	0.0002	-0.6100	0.0008	0.0002	-0.6000	0.0049	0.0036	23.850	0.0008	0.0002	-0.6100	0.0008	0.0002	-0.6000	0.0002	0.0002	-0.6000	0.0049	0.0036	23.850	0.0008	0.0002	-0.6100	0.0008	0.0002	-0.6000		
10	0.0002	0.0032	0.0026	15.250	0.0002	6.4e-5	-0.6792	0.0002	4.9e-5	0.0000	0.0032	0.0026	15.250	0.0002	6.4e-5	-0.6792	0.0002	4.9e-5	0.0000	0.0002	4.9e-5	0.0032	0.0026	15.250	0.0002	6.4e-5	-0.6792	0.0002	4.9e-5	0.0000	0.0000	0.0000	

Tabla 4.8: Resultados de la simulación para el parámetro ϕ basado en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2, \epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.0$, rango=10). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr = sesgo relativo. La columna de ϕ corresponde a la expresión $\phi = \sigma^2 a_{2\nu}$.

ϵ	ϕ	nt			rt			mt		
		media	de	sr	media	de	sr	media	de	sr
1	0.29	0.0359	0.0088	-0.8760	0.0329	0.0084	-0.8862	0.0306	0.0066	-0.8944
	0.029	0.0134	0.0058	-0.5383	0.0112	0.0037	-0.6148	0.0098	0.0034	-0.6621
	0.0029	0.0068	0.0036	1.3621	0.0047	0.0037	0.4379	0.0039	0.0026	0.3448
	0.00029	0.00536	0.00453	17.483	0.00267	0.00242	8.2069	0.00264	0.00246	8.1035
3	0.29	0.0360	0.0082	-0.8758	0.0312	0.0075	-0.8925	0.0318	0.0073	-0.8903
	0.029	0.0132	0.0054	-0.5434	0.0097	0.0039	-0.6689	0.0095	0.0030	-0.6724
	0.0029	0.0069	0.0037	1.3897	0.0041	0.0023	0.4069	0.0038	0.0021	0.3103
	0.00029	0.00513	0.00411	16.6897	0.00136	0.00152	3.6896	0.0026	0.0022	7.9655
5	0.29	0.0343	0.0080	-0.8817	0.0288	0.0069	-0.9008	0.0295	0.0069	-0.8983
	0.029	0.0142	0.0065	-0.5083	0.0072	0.0021	-0.7583	0.0072	0.0021	-0.7517
	0.0029	0.0076	0.0043	1.6379	0.0020	0.0009	-0.2931	0.0018	0.0007	-0.3793
	0.00029	0.00466	0.00417	15.0690	0.00086	0.00055	1.9655	0.0006	0.0004	1.0689
10	0.29	0.0358	0.0102	-0.8765	0.0286	0.0081	-0.9014	0.0304	0.0087	-0.8951
	0.029	0.0134	0.0053	-0.5355	0.0061	0.0018	-0.7886	0.0060	0.0016	-0.7931
	0.0029	0.0075	0.0059	1.5862	0.0012	0.0004	-0.6000	0.0011	0.0003	-0.6207
	0.00029	0.00464	0.00341	15.000	0.00027	0.00012	-0.0670	0.00021	6.57e-5	-0.2758

Tabla 4.9: Resultados de la simulación para el parámetro ϕ basado en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$, $\epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.9$, rango=10). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr= sesgo relativo. La columna de ϕ corresponde a la expresión $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$.

ϵ	ϕ	nt	media	de	sr	rt	media	de	sr	mt	media	de	sr													
1	0.01747	0.00265	0.00086	-9.8483	0.00240	0.00068	-0.8626	0.00217	0.00055	-0.8758	0.01747	0.00011	0.00022	0.00018	1.0000	0.00014	0.00010	0.2727	7.083e-5	3.572e-5	-0.3561	23.4321	1.55e-5	1.283e-5	4.881e-5	1496.51
3	0.01747	0.00280	0.00101	-0.8397	0.00238	0.00067	-0.8638	0.00222	0.00064	-0.8729	0.01747	0.00011	0.00020	0.00017	0.8181	9.183e-5	5.285e-5	-0.1652	8.7e-5	5.21e-5	-0.2091	30.9085	2.02e-5	2.05e-5	1.25e-5	3036.44
5	0.01747	0.00288	0.00098	-0.8351	0.00207	0.00050	-0.8815	0.00202	0.00047	-0.8843	0.01747	0.00011	0.00021	0.00015	0.9090	5.060e-5	2.227e-5	-0.5940	4.56e-5	1.67e-5	-0.5854	4.6466	2.06e-6	2.07e-6	2.07e-6	538.408
10	0.01747	0.00261	0.0077	-0.8506	0.00181	0.00046	-0.8964	0.00181	0.00055	-0.8963	0.01747	0.00011	0.00022	0.00015	1.0000	2.976e-5	1.033e-5	-0.7295	2.98e-5	8.50e-6	-0.7290	0.1640	7.38e-7	3.82e-7	8.50e-8	27.8033

Tabla 4.10: Resultados de la simulación para el parámetro ϕ basado en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5$, $\epsilon = 1, 1.5, 2, \epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.9$, rango=166). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr = sesgo relativo. La columna de ϕ corresponde a la expresión $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$.

ϵ	ϕ	nt			rt			mt		
		media	de	sr	media	de	sr	media	de	sr
1	0.00967	0.00168	0.00058	-0.8263	0.00138	0.00050	-0.8573	0.00129	0.00036	-0.8666
	3.220e-5	7.839e-5	5.819e-5	1.4344	4.750e-5	3.440e-5	0.4752	2.501e-5	1.344e-5	-0.2233
	1.074e-7	1.686e-5	2.107e-5	155.98	1.016e-5	1.109e-5	93.600	3.942e-6	3.532e-6	35.704
	3.580e-10	1.057e-5	1.193e-5	29524	6.421e-6	6.421e-6	17935	1.73e-6	1.420e-6	4839.78
3	0.00967	0.00169	0.00061	-0.8252	0.00131	0.00038	-0.8645	0.00122	0.00034	-0.8738
	3.220e-5	7.100e-5	5.569e-5	1.2050	3.085e-5	1.864e-5	-0.0419	2.69e-5	1.56e-5	-0.1645
	1.074e-7	2.016e-5	2.470e-5	186.71	6.090e-5	5.564e-6	566.04	6.32e-6	5.21e-6	57.8454
	3.580e-10	1.051e-5	2.814e-6	29357	2.814e-6	2.733e-6	7859.3	3.49e-6	3.22e-6	9747.60
5	0.00967	0.00167	0.00054	-0.8273	0.00107	0.00026	-0.8894	0.00115	0.00032	-0.8810
	3.220e-5	7.997e-5	6.963e-5	1.4835	1.654e-5	7.554e-6	-0.4863	1.35e-5	5.80e-6	-0.5807
	1.074e-7	1.981e-5	2.082e-5	183.45	1.932e-6	1.622e-6	16.990	1.11e-6	8.72e-7	9.3351
	3.580e-10	9.121e-6	9.400e-6	25479	8.532e-7	7.602e-7	2382.2	6.99e-7	8.44e-7	1951.51
10	0.00967	0.00160	0.00055	-0.8345	0.00105	0.00031	-0.8914	0.00095	0.00028	-0.9017
	3.220e-5	8.434e-5	8.702e-5	1.6193	9.127e-6	2.957e-6	-0.7166	9.11e-6	2.86e-6	-0.7170
	1.074e-7	2.189e-5	2.320e-5	203.75	3.441e-7	3.383e-7	2.2039	1.70e-7	1.06e-7	0.5828
	3.580e-10	8.052e-6	8.686e-6	22490	1.844e-7	1.925e-7	514.08	2.87e-8	2.46e-8	79.1675

Tabla 4.11: Resultados de la simulación para el parámetro ϕ basado en 1000 repeticiones cuando $N = 20 \times 20$, $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$, $\epsilon = 1, 3, 5, 10$ y ($sill=2.9$, rango=300). Las etiquetas son las siguientes: nt = *no taper*, rt = *rounded taper*, mt = *taper* multiplicativo, de = desviación estándar y sr= sesgo relativo. La columna de ϕ corresponde a la expresión $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$.

Capítulo 5

Análisis comparativo entre las estimaciones espaciales y espectrales

Índice General

5.1. Introducción	122
5.2. Expresiones formales del modelo <i>Matérn</i>	123
5.3. Métodos de estimación de los parámetros	124
5.3.1. Mínimos cuadrados ponderados espaciales	124
5.3.2. Método de Máxima Verosimilitud en la escala espectral	125
5.3.3. Método de MCO y MCP en la escala espectral	126
5.4. Dependencia del periodograma para datos regularmente espaciados	126
5.4.1. Marco espacial	126
5.4.2. Cumulantes espaciales y cumulantes espectrales. Caso espacial	129
5.4.3. Resultados teóricos en el dominio espacial	130
5.5. Estudio comparativo de las estimaciones de los parámetros	137

5.1. Introducción

La motivación particular de este capítulo se centra en el análisis comparativo entre las estimaciones procedentes del campo espacial y del campo espectral. Proponemos, para ello un estudio completo de simulación que cubre una amplia casuística para cubrir cuantas más situaciones reales posibles. Nuevamente será la familia *Matérn* el modelo elegido para tratar la dependencia espacial. Vamos a recordar sólo algunos elementos para definir la familia de *Matérn*. Para una explicación más completa, acudir a la Sección (3.3).

El análisis espectral de procesos estacionarios es muy ventajoso en casos en los que se necesita analizar muchos datos y en estudios de propiedades de procesos multivariantes. Las bases de datos utilizados en geostatística suelen estar distribuidos en grandes regiones y ser extensos en número. Estos son a menudo difíciles de tratar y llevan mucho tiempo en el cálculo computacional de la matriz inversa de covarianzas para obtener la función de verosimilitud. El uso del algoritmo de la transformada de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) para las densidades espectrales, es una buena solución para estos problemas. Sin embargo, FFT puede ser usado sólo en datos espaciados regularmente en una malla, aunque esta desventaja, no es tan importante por las conexiones entre las estimaciones de las densidades espectrales en el caso de malla regular y datos espaciados irregularmente (Renshaw, 2002). El periodograma, estimación no paramétrica de la densidad espectral, es una buena herramienta para el estudio de las propiedades de los procesos estacionarios observados en una malla de dos dimensiones (Stein, 1999a).

En la primera sección de este capítulo, vamos a conocer distintas expresiones formales del modelo de *Matérn* que serán utilizadas para los distintos métodos de estimación de los parámetros que presentaremos en la siguiente sección. Seguidamente, desarrollaremos la dependencia del periodograma para datos regularmente espaciados tanto para los casos en los que se utiliza el *tapering* como en los que no. Finalmente, en la última sección, presentaremos un estudio comparativo de los estimadores de los parámetros donde, a partir de distintos escenarios en los que variaremos el tipo de *tapering*, parámetros y el método de estimación, analizaremos y estudiaremos los sesgos producidos en las distintas estimaciones que nos permitirán comparar las estimaciones espaciales y espectrales y conocer en que casos son mejores unos estimadores frente a otros.

5.2. Expresiones formales del modelo *Matérn*

Un primer formato de la función de correlación de la familia *Matérn* es, tal y como hemos comentado en capítulos anteriores, el siguiente:

$$\rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)} \left(\frac{2\mathbf{u}\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \right)^{\theta_2} K_{\theta_2} \left(\frac{2\mathbf{u}\sqrt{\theta_2}}{\theta_1} \right) \quad (5.1)$$

donde (θ_1, θ_2) son un par de parámetros, $\theta_1 > 0$, es un parámetro de escala que controla el rango espacial de correlación y $\theta_2 > 0$ controla el suavizamiento del campo aleatorio.

La versión espectral del modelo *Matérn* toma la forma,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(\alpha^2 + |\boldsymbol{\omega}|^2)^{(-\nu - \frac{d}{2})} \quad (5.2)$$

con parámetros $\nu > 0, \alpha > 0$ y $\phi > 0$ (el valor d es la dimensión del proceso espacial Z). Aquí, el vector de los parámetros de covarianza es $\theta = (\phi, \nu, \alpha)$. El parámetro α^{-1} puede ser interpretado como el rango de autocorrelación. El parámetro ν mide el grado de suavizamiento del proceso Z , cuanto mayor es el valor de ν , mayor suavizamiento tendrá Z , y ϕ es el cociente entre la varianza σ o *sill* y el rango (α^{-1}) elevado a la potencia 2ν , $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$.

Hay que hacer notar la diferencia fundamental entre este capítulo y el anterior en cuanto a la suposición de trabajar bajo altas frecuencias. Obsérvese que ahora vamos a trabajar con la expresión (5.2) que al suponer que trabajamos con todo el conjunto de frecuencias, contiene el parámetro rango en su interior, lo que nos permitirá estimarlo (recordar que en el capítulo anterior suponía altas frecuencias lo que nos llevaba a fijar dicho parámetro, ver sección (4.2)).

La correspondiente función de covarianza para la clase *Matérn* toma la forma,

$$C_{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{\pi^{d/2}\phi}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu + d/2)\alpha^{2\nu}} (\alpha|\mathbf{x}|)^{\nu} \kappa_{\nu}(\alpha|\mathbf{x}|) \quad (5.3)$$

donde κ_{ν} es la función de Bessel modificada. Por ejemplo, cuando $\nu = \frac{1}{2}$, podemos decir recuperar la función de covarianza exponencial

$$C_{\theta}(\mathbf{x}) = \pi\phi\alpha^{-1} \exp(-\alpha|\mathbf{x}|) \quad (5.4)$$

Cuando ν es de la forma $m+1/2$ con m un entero no negativo, la función de covarianza de *Matérn* es de la forma $e^{-\alpha|\mathbf{x}|}$ veces un polinomio en $|\mathbf{x}|$ de grado m .

La simplicidad de la representación del proceso en el dominio espectral frente al dominio espacial es clara con simplemente comparar las formas de $f(\boldsymbol{\omega})$ y la covarianza correspondiente $C_\theta(\mathbf{x})$.

En las representaciones de covarianzas de *Matérn*, una covarianza Gaussiana y una covarianza exponencial, la primera es más plana en el origen lo que indica que el proceso espacial es muy suavizado. Por otra parte, la exponencial es casi lineal en el origen, indicando que el correspondiente proceso espacial no es muy suavizado, de hecho este proceso no es uniformemente diferenciable en media cuadrática .

5.3. Métodos de estimación de los parámetros

En esta sección comentamos brevemente el método de MCP espacial y los métodos MCP, MCO y ML espectrales.

5.3.1. Mínimos cuadrados ponderados espaciales

Supongamos que tenemos estimado el semivariograma $\gamma(h)$ en un conjunto finito de valores de h , y queremos ajustar un modelo especificado por una función paramétrica $\gamma(h; \theta)$ en términos de un vector finito de parámetros θ . Este vector suele contener los tres parámetros, efecto *nugget*, *sill* y rango. Supongamos que se ha utilizado el estimator de los momentos $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ y sea $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ el vector que contiene los valores estimados y $\boldsymbol{\gamma}(\theta)$ el vector de los valores derivados por el modelo sobre los mismos valores de h .

Tenemos tres posibilidades para los métodos de estimación mínimo cuadrática no lineal:

- *Mínimos cuadrados ordinarios (MCO)*, en los que se toma θ como aquel valor que minimiza

$$\{\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\theta)\}^T \{\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\theta)\}.$$

- *Mínimos cuadrados generalizados (MCG)*, en los que se toma θ como aquel valor que minimiza

$$\{\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\theta)\}^T V(\theta)^{-1} \{\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\theta)\}.$$

Aquí $V(\theta)$ denota la matriz de covarianzas de $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, la cual depende de θ .

- *Mínimos cuadrados ponderados (MCP)*, en los que se toma θ como aquel valor que minimiza

$$\{\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\theta)\}^T W(\theta)^{-1} \{\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}(\theta)\}.$$

En este caso $W(\theta)$ es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son las varianzas de $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$. Por tanto MCP admite varianzas de $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, aunque no covarianzas, como si lo hace el MCG.

Cuando hagamos referencia a este tipo de ajuste, hablaremos de MCP-espectral, para poder diferenciarlo, tanto en los gráficos como en las aplicaciones, de los ajustes espectrales.

5.3.2. Método de Máxima Verosimilitud en la escala espectral

Supongamos que tenemos el siguiente modelo de regresión:

$$Y_k = m(\boldsymbol{\omega}_k) + z_k \tag{5.5}$$

donde Y_k es el logaritmo del periodograma ($\log(I_N)$), $m(\boldsymbol{\omega}_k)$ es el logaritmo de la densidad espectral, $\log(f(\boldsymbol{\omega}))$.

La función de máxima verosimilitud asociada, vendrá dada por:

$$\sum_{k_1=1}^{\lfloor (n_1-1)/2 \rfloor} \sum_{k_2=1}^{\lfloor (n_2-1)/2 \rfloor} [Y_k - m_\theta(\boldsymbol{\omega}_k) - e^{Y_k - m_\theta(\boldsymbol{\omega}_k)}] \tag{5.6}$$

La maximización, en este caso, vendrá dada por $\hat{\theta}$, la estimación máxima verosímil de θ (aproximación paramétrica).

Para poder dejar más claro el tipo de ajuste para este modelo, y siendo coherentes con los distintos parámetros, podemos expresar la maximización de la siguiente forma:

$$\sum_k \left(\left(\ln \left(\frac{I_N(\boldsymbol{\omega})}{f(\boldsymbol{\omega})} \right) \right) - \left(\frac{I_N(\boldsymbol{\omega})}{f(\boldsymbol{\omega})} \right) \right) \tag{5.7}$$

es decir, dependiente sólo del periodograma y de la densidad espectral, dependiente de la frecuencia.

En todo momento, nos referiremos a este caso de ajuste como el ML-espectral, desarrollado en Crujeiras y González-Manteiga (2005).

5.3.3. Método de MCO y MCP en la escala espectral

En este caso, la expresión general de mínimos cuadrados, viene dada por:

$$\sum_k ((Y_k - \ln f_\theta(\boldsymbol{\omega}_k))^2 \cdot P_k) \quad (5.8)$$

En el caso de **Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)**, Tenemos que $P_k = 1$, y sabiendo que Y_k es $\log(I_N)$ y $m(\boldsymbol{\omega}_k)$ es $\log(f(\boldsymbol{\omega}))$, la expresión (5.8) quedará:

$$\sum_k \left(\left(\frac{I_N(\boldsymbol{\omega})}{f(\boldsymbol{\omega})} \right) - 1 \right)^2 \quad (5.9)$$

Nos referimos a este ajuste como el método MCO-espectral.

Para el **Método de Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)** en la escala espectral, tomaremos $P_k = e^{-\ln f(\boldsymbol{\omega}_k)}$, que sustituyendo en la expresión (5.8) nos dará la forma de la expresión a ajustar:

$$\sum_k ((Y_k - \ln f_\theta(\boldsymbol{\omega}_k))^2 \cdot e^{-\ln f(\boldsymbol{\omega}_k)}) \quad (5.10)$$

Este método lo denotaremos por MCP-espectral.

5.4. Dependencia del periodograma para datos regularmente espaciados

5.4.1. Marco espacial

Tomamos $\{Z(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ un proceso espacial estacionario con función de covarianza

$$C(\mathbf{h}) = \text{Cov}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}), Z(\mathbf{s})), \quad \mathbf{s}, \mathbf{s} + \mathbf{h} \in \mathcal{D} \quad (5.11)$$

Para simplificar, asumimos que $Z(\cdot)$ es de media cero. Así, este proceso puede ser representado (Yaglom, 1987) en forma de una integral de Fourier-Stieltjes

$$Z(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(is^T \boldsymbol{\lambda}) dY(\boldsymbol{\lambda}) \quad (5.12)$$

donde $Y(\cdot)$ es un proceso aleatorio en el dominio espectral. En el caso estacionario, los incrementos de estos procesos son incorrelados. Denotando por

$$E(Y(\boldsymbol{\lambda})\overline{Y(\boldsymbol{\lambda})}) = G(\boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.13)$$

donde \bar{Y} denota la conjugada de Y . Obtenemos el espectro del proceso. La función covarianza puede ser escrita como

$$C(\mathbf{s} - \mathbf{h}) = \text{Cov}(Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{h})) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i(\mathbf{s} - \mathbf{h})^T \boldsymbol{\lambda}) dG(\boldsymbol{\lambda}) \quad (5.14)$$

Si G tiene una densidad espectral con respecto a la medida de Lebesgue, esta densidad f , es la transformada de Fourier de la función de covarianza

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\mathbf{h}^T \boldsymbol{\omega}) C(\mathbf{h}) d\mathbf{h}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.15)$$

Asumimos que nuestro proceso $Z(\cdot)$ es observado en N localizaciones. Un buen y conocido estimador no paramétrico de la densidad espectral es el periodograma, dado por

$$I_N(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \left| \sum_s Z(\mathbf{s}) \exp(-i\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}) \right|^2, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.16)$$

Si consideramos la transformada de Fourier discreta (DFT) de nuestro proceso $Z(\cdot)$ y la evaluamos en un conjunto de frecuencias $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^2$

$$d(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{N}} \sum_s \exp(-i\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}) Z(\mathbf{s}), \quad (5.17)$$

entonces, el periodograma puede ser escrito como

$$I_N(\boldsymbol{\omega}) = d(\boldsymbol{\omega})\overline{d(\boldsymbol{\omega})} \quad (5.18)$$

En la práctica, podemos asumir que nuestro proceso es observado en una malla regularmente espaciada con tamaño $n_1 \times n_2$, y que el estimador del periodograma se hace sólo en un grupo finito de frecuencias de Fourier. En el análisis de Fourier, es conocido que las sumas parciales de unas series de Fourier no son necesariamente una buena aproximación de la función de interés. Los *data taper* aparecen en los análisis de Fourier para mejorar la aproximación de las sumas parciales de unas series de Fourier a una función continua. Esos *tapers* (factores

de convergencia) normalmente envuelven un máximo de 1 para $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ y, decrecen a 0 cuando $|\mathbf{t}|$ crece, donde $|\mathbf{s}| = \sqrt{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2}$.

Suposición 1 *Asumimos que $h(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ es medible en s , con soporte compacto, $\int h(s)^2 ds \neq 0$ y existe una constante finita K tal que*

$$\int |h(\mathbf{s} + \mathbf{t}) - h(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < K|\mathbf{s}| \quad (5.19)$$

Esta última condición es una forma de la condición de integrabilidad de Lipschitz. Como podemos ver en Brillinger (1981) o Brockwell y Davis (1991), esta condición es satisfecha por funciones con primeras derivadas uniformemente acotadas y por funciones de variación acotada. Definimos también

$$H_r(\boldsymbol{\omega}) = \sum_s h(\mathbf{s})^r \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{s}) ds, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.20)$$

Esta función existe porque h es acotada de soporte compacto. Y para el teorema de Riemann-Lebesgue, $H_r(\boldsymbol{\omega}) \rightarrow 0$ cuando $|\boldsymbol{\omega}| \rightarrow \infty$. En lugar de considerar la transformada discreta de Fourier del proceso (datos observados), consideramos la transformada de Fourier de los valores *tapered*

$$d^T(\boldsymbol{\omega}) = \sum_s h(\mathbf{s})Z(\mathbf{s}) \exp(-i\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.21)$$

y el estimador para la densidad espectral es el periodograma *tapered*

$$I_N^T(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} d^T(\boldsymbol{\omega}) \overline{d^T(\boldsymbol{\omega})} = \frac{1}{(2\pi)^2 H_2(0)} \left| \sum_s h(\mathbf{s})Z(\mathbf{s}) e^{-i\mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}} \right|^2 \quad (5.22)$$

De las expresiones (5.21) y (5.22), es fácil ver que

$$d^T(\boldsymbol{\omega}) = \int H(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda}) dY(\boldsymbol{\lambda}) \quad (5.23)$$

Así, en la práctica, deseamos $d^T(\boldsymbol{\omega})$ que no sea demasiado diferente de $dY(\boldsymbol{\omega})$. Entonces, h debe seleccionarse tal que H es una función de peso suavizada en la que la masa está concentrada cerca del origen. Algunos *data taper* para series espaciales pueden ser encontradas en Brillinger (1970), pero es bastante común el uso de *taper* multiplicativo, obtenido por multiplicación de dos *data tapers* (en

\mathbb{R}^2), una por cada componente. Los factores de convergencia y sus respectivas transformadas de Fourier son descritas en Brillinger (1981). Usando *data taper*, se reduce la desviación de los efectos de borde. En series espaciales, un nuevo *data taper* ha sido recientemente propuesto por Fuentes (2004). Es el *rounded taper*, el cual da más *tapering* a las observaciones de las esquinas.

Brillinger (1974) aproxima las expresiones de $d^T(\boldsymbol{\omega})$ y $d(\boldsymbol{\omega})$ para grandes cantidades de datos. Para $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, $d^T(\mathbf{0})$ es asintóticamente normal. Para una frecuencia $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, la distribución asintótica es normal compleja.

5.4.2. Cumulantes espaciales y cumulantes espectrales. Caso espacial

Una completa descripción de los cumulantes para propiedades de series espaciales puede ser encontrada en Brillinger (1970). Aquí, introducimos la definición y remarcamos algunas propiedades, que nos harán falta para demostrar las propiedades de las siguientes secciones.

Definición 1 *Tomamos (X_1, \dots, X_r) una r -variable aleatoria. El cumulante de X_1, \dots, X_r es el coeficiente de t_1, \dots, t_r en la expansión del cumulante, generalizando la función*

$$\log E(e^{\sum_j X_j t_j}) \tag{5.24}$$

Una definición alternativa viene dada por

$$cum(X_1, \dots, X_r) = \sum (-1)^{p-1} (p-1)! E\left(\prod_{j \in \mu_1} X_j\right) \dots E\left(\prod_{j \in \mu_p} X_j dF\right) \tag{5.25}$$

donde las sumas y productos se extienden sobre todas las particiones (μ_1, \dots, μ_p) , $p = 1, \dots, r$ de $(1, \dots, r)$. De esta definición, una relación inversa es obtenida

$$E(X_1 \dots X_r) = \sum (cum\{X_j, j \in \mu_1\}) \dots (cum\{X_j, j \in \mu_p\}) \tag{5.26}$$

Además, los cumulantes son simétricos y multilineales en sus argumentos (Brillinger, 1981) y si algún grupo de $\{X_1, \dots, X_r\}$ es estadísticamente independiente del grupo que queda, entonces $cum(X_1, \dots, X_r) = 0$. Por esta propiedad, los cumulantes pueden ser usados como una medida de dependencia estadística entre variables. Entonces, los cumulantes de una simple variable es su esperanza y la covarianza entre X y Y es el correspondiente cumulante de X y \bar{Y} . Como consecuencia, la densidad espectral puede ser cubierta por un cierto cumulante.

Definición 2 Supongamos que los momentos de $X_j, j = 1, \dots, r$ de todos los órdenes existen. La función del cumulante conjunto de orden k se define como

$$c_{1,\dots,k}(s_1, \dots, s_{(k-1)}) = \text{cum}\{X_1(s_1 + s), \dots, X_{k-1}(s_{k-1} + s), X_k(s)\} \quad (5.27)$$

Hacer notar que

$$c_{1,\dots,k}(s_1, \dots, s_{k-1}) = c_{1,\dots,k}(s_1, \dots, s_{k-1}, \mathbf{0}) \quad (5.28)$$

Si X es estacionario y sus momentos existen y satisface

$$\int \int \{|s_1| + \dots + |s_{k-1}|\} \cdot |c_{1,\dots,k}(s_1, \dots, s_{k-1})| ds_1 \dots ds_{k-1} < \infty \quad (5.29)$$

entonces, podemos definir los cumulantes espectrales de orden k como

$$f_{1,\dots,k}(\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{k-1}) = (2\pi)^{-2(k-1)} \int \int c_{1,\dots,k}(s_1, \dots, s_{k-1}) e^{-i \sum_{j=1}^{k-1} \boldsymbol{\lambda}_j^T s_j} ds_1 \dots ds_{k-1}$$

Para el caso particular de $k = 2$, se obtiene la densidad espectral.

5.4.3. Resultados teóricos en el dominio espacial

En las siguientes proposiciones, SRF denotará un *Spatial Random Field* (Campo aleatorio Espacial).

Proposición 1 (Porcu, et al. (2005)) Tomamos $Z \sim SRF(\mu, C(\mathbf{h}))$, observado en una malla regular $n_1 \times n_2$ y $N = n_1 n_2$. Tomamos $I_N(\cdot)$ el periodograma sin taper de la ecuación (5.16). Finalmente, supongamos que $C(\mathbf{h})$ es tal que

$$\sum_{\mathbf{h}} |C(\mathbf{h})| < \infty.$$

Entonces

$$E(I_N(\boldsymbol{\omega})) = \frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin n_1 \omega_1 / 2}{\sin \omega_1 / 2} \right]^2 \left[\frac{\sin n_2 \omega_2 / 2}{\sin \omega_2 / 2} \right]^2 f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \left[\frac{\sin n_1 \omega_1 / 2}{\sin \omega_1 / 2} \right]^2 \left[\frac{\sin n_2 \omega_2 / 2}{\sin \omega_2 / 2} \right]^2 \mu^2 \quad (5.30)$$

Demostración.

Por propiedades elementales de los cumulantes

$$E(d(\boldsymbol{\omega})\overline{d(\boldsymbol{\omega})}) = cum(d(\boldsymbol{\omega})\overline{d(\boldsymbol{\omega})}) + |E(d(\boldsymbol{\omega}))|^2,$$

donde $d(\boldsymbol{\omega})$ viene definido como en la ecuación (5.17). Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} E(I_N(\boldsymbol{\omega})) &= E\left(\frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \left| \sum_s Z(s) \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T s) \right|^2\right) \\ &= cum(d(\boldsymbol{\omega})\overline{d(\boldsymbol{\omega})}) + |cum(d(\boldsymbol{\omega}))|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \sum_s \sum_{\mathbf{t}} \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T (s - \mathbf{t})) C(s - \mathbf{t}) \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \left| \sum_s \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T s) \right|^2 \mu^2 \end{aligned}$$

Obteniendo las diferencias $s - \mathbf{t} = \mathbf{h}$, el vector diferencia será

$$\{1 - n_1, \dots, n_1 - 1\} \times \{1 - n_2, \dots, n_2 - 1\}$$

Cada vector \mathbf{h} aparece $\left(1 - \frac{|h_1|}{n_1}\right) \left(1 - \frac{|h_2|}{n_2}\right)$ veces y juega el mismo papel que un taper en un DFT (transformada de Fourier discreta). Hacer notar que el kernel de Bartlett viene dado por

$$\frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \left[\frac{\sin(n_1 \omega_1 / 2)}{\sin(\omega_1 / 2)} \right]^2 \left[\frac{\sin(n_2 \omega_2 / 2)}{\sin(\omega_2 / 2)} \right]^2 \quad (5.31)$$

y se puede obtener por medio de

$$\begin{aligned} &\sum_{h_1=1-n_1}^{n_1-1} \sum_{h_2=1-n_2}^{n_2-1} \left(1 - \frac{|h_1|}{n_1}\right) \left(1 - \frac{|h_2|}{n_2}\right) g(\mathbf{h}) \exp(-i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{h}) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2\pi)^2 n_1 n_2} \left[\frac{\sin n_1 \lambda_1 / 2}{\sin \lambda_1 / 2} \right]^2 \left[\frac{\sin n_2 \lambda_2 / 2}{\sin \lambda_2 / 2} \right]^2 G(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

Así, finalmente completamos la prueba mediante

$$\begin{aligned}
 E(I_N(\boldsymbol{\omega})) &= \frac{1}{(2\pi)^2 N} \sum_{\mathbf{h}} \left(1 - \frac{|h_1|}{n_1}\right) \left(1 - \frac{|h_2|}{n_2}\right) \exp(-i\mathbf{h}^T \boldsymbol{\omega}) C(\mathbf{h}) \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^2 N} \left| \sum_s \exp(-is^T \boldsymbol{\omega}) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 N} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n_1 \lambda_1/2}{\sin \lambda_1/2}\right)^2 \left(\frac{\sin n_2 \lambda_2/2}{\sin \lambda_2/2}\right)^2 f_{\theta}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^2 N} \left(\frac{\sin n_1 \omega_1/2}{\sin \omega_1/2}\right)^2 \left(\frac{\sin n_2 \omega_2/2}{\sin \omega_2/2}\right)^2 \mu^2 \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 N} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n_1(\omega_1 - \lambda_1)/2}{\sin(\omega_1 - \lambda_1)/2}\right)^2 \left(\frac{\sin n_2(\omega_2 - \lambda_2)/2}{\sin(\omega_2 - \lambda_2)/2}\right)^2 f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^2 N} \left(\frac{\sin n_1 \omega_1/2}{\sin \omega_1/2}\right)^2 \left(\frac{\sin n_2 \omega_2/2}{\sin \omega_2/2}\right)^2 \mu^2
 \end{aligned}$$

Proposición 2 (Porcu, et al. (2005)) Tomando $Z \sim SRF(\mu, C(\mathbf{h}))$, observado en una malla regular $n_1 \times n_2$ y $N = n_1 n_2$. Sea $I_N^T(\cdot)$ el periodograma tapered que aparece en la ecuación (5.22). Finalmente, supongamos que $C(\mathbf{h})$ es tal que

$$\sum_{\mathbf{h}} |C(\mathbf{h})| < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 E(I_N^T(\boldsymbol{\omega})) &= \left((2\pi)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\boldsymbol{\lambda})|^2 d\boldsymbol{\lambda} \right)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})|^2 f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 &+ \left((2\pi)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\boldsymbol{\lambda})|^2 d\boldsymbol{\lambda} \right)^{-1} |H(\boldsymbol{\omega})|^2 \mu^2 \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

Demostración.

Hacer notar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\boldsymbol{\lambda})|^2 d\boldsymbol{\lambda} = (2\pi)^2 \sum_{\mathbf{t}} h^2(\mathbf{t})$$

La esperanza del periodograma tapered, viene dada por

$$\begin{aligned}
 E(I_N^T(\boldsymbol{\omega})) &= \frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} E(d^T(\boldsymbol{\omega}) \overline{d^T(\boldsymbol{\omega})}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \text{cum}(d^T(\boldsymbol{\omega}), \overline{d^T(\boldsymbol{\omega})}) \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} |E(d^T(\boldsymbol{\omega}))|^2, \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

donde d^T viene definido en la ecuación (5.21). Ahora, operando en el primer término de (5.33) tenemos

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \text{cum}(d^T(\boldsymbol{\omega}), \overline{d^T(\boldsymbol{\omega})}) \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \sum_s \sum_t h(s)h(t) \exp(-is^T \boldsymbol{\omega}) \exp(it^T \boldsymbol{\omega}) C(s-t) \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_s \sum_t h(s)h(t) \exp(-i(s-t)^T \boldsymbol{\omega}) \exp(i(s-t)^T \boldsymbol{\lambda}) f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_s \sum_t h(s)h(t) \exp(-i(s-t)^T (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})) f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_s h(s) \exp(-is^T (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})) \sum_t h(t) \exp(it^T (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})) \right\} f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})|^2 f_{\theta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\boldsymbol{\lambda})|^2 f_{\theta}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}
 \end{aligned}$$

Finalmente, operando en el segundo término, tenemos

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} |E(d^T(\boldsymbol{\omega}))|^2 \\
 = &\frac{1}{(2\pi)^2 H_2(\mathbf{0})} \left| \sum_s \exp(-is^T \boldsymbol{\omega}) \right|^2 \mu^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 |H_2(\mathbf{0})|} |H(\boldsymbol{\omega})|^2 \mu^2
 \end{aligned}$$

Antes de ir a otros resultados teóricos, podemos hacer unos comentarios. En ambos casos, el valor esperado del periodograma depende de las dimensiones de la malla, pero mientras el periodograma *tapered*, $I_N(\cdot)$, en (5.30) depende directamente de las dimensiones de la malla, el periodograma *tapered* correspondiente en (5.32) depende sólo a través del *taper* asociado H . Así, la forma analítica elegida para los resultados del *taper* es crucial para la dependencia del valor esperado en las dimensiones de la malla en el que vamos a trabajar.

Además, tal y como es conocido, ambos $I_N(\cdot)$ y $I_N^T(\cdot)$ son asintóticamente insesgados. Pero, ¿cuál tiene menor desviación en una malla finita? La comparación no es posible mientras el *taper* no esté definido. Es razonable esperar que $I_N^T(\cdot)$ tenga menor sesgo, pues el procedimiento de *tapering* reduce el efecto de picos de vecindad y los llamados efectos de borde. El kernel de Bartlett (5.31) presenta el inconveniente de pesos asignados al límite de las frecuencias 0 y todos múltiplos de 2π . Así, este mismo procedimiento de *tapering* puede ser preferible, incluso si en los casos en los que, en el dominio de las frecuencias, son enmascarados de alguna manera por el procedimiento anterior. De hecho, observando las expresiones (5.30) y (5.32), es fácil ver que ambas integrales en la mano izquierda de las dos expresiones, se pueden considerar como promedio ponderado de la densidad espectral con los pesos proporcionales, en el caso de no *tapering*, a la componente de distancias entre las frecuencias ω_1, λ_1 y ω_2, λ_2 . Esta característica deseable permite considerar el diverso comportamiento de los distintos componentes del vector de frecuencias. Cuando elegimos un *tapering* multiplicativo, se puede ver una diferente contribución de las dos componentes ω_1, ω_2 .

Otro aspecto importante, el cual debe ser tenido en cuenta, es la suposición de continuidad/discontinuidad del *taper*. Si el *taper* no es continuo, entonces esto causa una discontinuidad en el origen y los niveles de éste influyen en el comportamiento asintótico de la transformada de Fourier.

Proposición 3 (Porcu, et al. (2005)) *Sea $Z \sim SRF(0, C(\mathbf{h}))$, observado en una malla regular $n_1 \times n_2$ y $N = n_1 n_2$. Tomamos $I_N(\cdot)$ el periodograma sin *taper* en la ecuación que aparece en (5.16). Entonces, la estructura de la covarianza asociada*

al periodograma $I_N(\cdot)$ vendrá dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_N(\boldsymbol{\omega}), I_N(\boldsymbol{\lambda})) &= \left\{ \left(\frac{\sin n_1(\omega_1 + \lambda_1)/2}{n_1 \sin(\omega_1 + \lambda_1)/2} \cdot \frac{\sin n_2(\omega_2 + \lambda_2)/2}{n_2 \sin(\omega_2 + \lambda_2)/2} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\sin n_1(\omega_1 - \lambda_1)/2}{n_1 \sin(\omega_1 - \lambda_1)/2} \cdot \frac{\sin n_2(\omega_2 - \lambda_2)/2}{n_2 \sin(\omega_2 - \lambda_2)/2} \right)^2 \right\} f_\theta(\boldsymbol{\omega})^2 \\ &+ \mathcal{O}(N^{-1}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Demostración.

La expresión para la covarianza es derivada usando las siguientes igualdades de bases de cumulantes,

$$\text{Cov}(I_N(\boldsymbol{\omega}), I_N(\boldsymbol{\lambda})) = \text{cum}(d(\boldsymbol{\omega})\overline{d(\boldsymbol{\omega})}, d(\boldsymbol{\lambda})\overline{d(\boldsymbol{\lambda})})$$

Definimos:

$$\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_s \exp(-is^T \boldsymbol{\lambda})$$

Por la propiedad de los cumulantes de productos de variables, los cuales dan una expresión de los cumulantes en términos de cumulantes espectrales, es sencillo ver que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_N(\boldsymbol{\omega}), I_N(\boldsymbol{\lambda})) &= ((2\pi)^2)^3 N f_4(\boldsymbol{\omega}, -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(1) \\ &+ (\Delta(\boldsymbol{\omega})f_1 + \mathcal{O}(1)) ((2\pi)^2 \Delta(-\boldsymbol{\omega})f_3(-\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(1)) + \text{tres términos similares} \\ &+ (\Delta(\boldsymbol{\omega})f_1 + \mathcal{O}(1)) (\Delta(\boldsymbol{\lambda})f_1 + \mathcal{O}(1)) ((2\pi)^2 \Delta(-\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})f_2(-\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) \\ &+ \text{tres términos similares} \\ &+ ((2\pi)^2 \Delta(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})f_2(\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) ((2\pi)^2 \Delta(-\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})f_2(-\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) \\ &+ ((2\pi)^2 \Delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})f_2(\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) ((2\pi)^2 \Delta(-\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})f_2(-\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) \end{aligned}$$

Desde las dos últimas adiciones

$$\begin{aligned} &((2\pi)^2 \Delta(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})f_2(\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) ((2\pi)^2 \Delta(-\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})f_2(-\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) \\ &+ ((2\pi)^2 \Delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})f_2(\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) ((2\pi)^2 \Delta(-\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})f_2(-\boldsymbol{\omega}) + \mathcal{O}(1)) \end{aligned}$$

obtenemos

$$(2\pi)^4 |\Delta(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})|^2 f_2(\boldsymbol{\omega})^2 + (2\pi)^4 |\Delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})|^2 f_2(\boldsymbol{\omega})^2 = \left[\left(\frac{\sin n_1(\omega_1 + \lambda_1)/2}{\sin(\omega_1 + \lambda_1)/2} \cdot \frac{\sin n_2(\omega_2 + \lambda_2)/2}{\sin(\omega_2 + \lambda_2)/2} \right)^2 + \left(\frac{\sin n_1(\omega_1 - \lambda_1)/2}{\sin(\omega_1 - \lambda_1)/2} \cdot \frac{\sin n_2(\omega_2 - \lambda_2)/2}{\sin(\omega_2 - \lambda_2)/2} \right)^2 \right] f_2(\boldsymbol{\omega})^2$$

lo cual prueba la mayor parte de la expresión (5.34). Finalmente, el último término $\mathcal{O}(N^{-1})$ viene de

$$(2\pi)^{2(4-1)} N f_4(\boldsymbol{\omega}, -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda})$$

En este caso, podemos escribir f_4 en términos de una suma de cumulantes y entonces, combinar las diferencias $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{h}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{h}$, apareciendo el factor N^{-2} . Asumiendo $f_1 = E(Z) = 0$, el otro término se cancela. Los factores n_i , $i = 1, 2$, en el denominador, vienen de la definición de $d(\boldsymbol{\omega})$. Hay cuatro de esas variables (en $\boldsymbol{\omega}, -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}$), y aparece así el factor N^2 .

Proposición 4 (Porcu, et al. (2005)) *Sea $Z \sim \text{SRF}(0, C(\mathbf{h}))$, observado en una malla regular $n_1 \times n_2$ y $N = n_1 n_2$. Sea $I_N^T(\cdot)$ el periodograma tapered como en la ecuación (5.22). Entonces, la estructura de covarianza asociada al periodograma que aparece tapered $I_N^T(\cdot)$ vendrá dado por*

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I_N^T(\boldsymbol{\omega}), I_N^T(\boldsymbol{\lambda})) &= |H_2(\mathbf{0})|^{-2} \{ |H_2(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})|^2 + |H_2(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})|^2 \} f_\theta(\boldsymbol{\omega})^2 \\ &+ \mathcal{O}(N^{-1}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Demostración.

Para completar la expresión del periodograma tapered, vamos a considerar los factores fraccionales donde $H_2(\mathbf{0})$ aparece. Así,

$$\begin{aligned} & \text{cum}(d^T(\boldsymbol{\omega}) \overline{d^T(\boldsymbol{\omega})}) \\ &= ((2\pi)^2)^3 H_4(\mathbf{0}) f_4(\boldsymbol{\omega}, -\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(1) \\ &+ [(2\pi)^2 H_2(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) f_2(\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(1)] [(2\pi)^2 H_2(-\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda}) f_2(\boldsymbol{\lambda})] \\ &+ [(2\pi)^2 H_2(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda}) f_2(\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(1)] [(2\pi)^2 H_2(-\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(1)], \end{aligned}$$

donde d^T es obtenido como en (5.21).

Entonces, la expresión para la covarianza

$$\text{Cov}(I_N^T(\boldsymbol{\omega}), I_N^T(\boldsymbol{\lambda})) = |H_2(\mathbf{0})|^{-2} \{ |H_2(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})|^2 + |H_2(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})|^2 \} f_2(\boldsymbol{\lambda}) + \mathcal{O}(N^{-1})$$

Algunos comentarios son necesarios. Las fórmulas (5.34) y (5.35), son unos de los elementos importantes que fundamentan este capítulo, ya que, tanto con la utilización o no del *tapering*, la covarianza entre los valores del periodograma es no estacionario, a menos que la densidad espectral sea constante, la cual correspondería a un efecto *nugget* puro, en el dominio espectral. Es interesante observar que, en el caso de una densidad espectral constante, la covarianza del periodograma en (5.35) podría depender de la elección del tipo de *taper*, el cual es evaluado en $\mathbf{0}$ y en una componente constante o desigual, $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\lambda})$ y $(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})$, respectivamente. La suma de los *tapers* en las dos componentes es suavizado por el factor $|H_2(\mathbf{0})|^2$, mientras en (5.34) no hay presencia de pesos en las mismas sumas.

Otro importante aspecto puede ser deducido para el caso en que $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda}$, el cual nos ayuda a obtener la expresión de la varianza para el periodograma con o sin *tapering*. Un cálculo elemental es que (5.34) presenta una forma indeterminada, la cual es una característica no deseada, que aleja cualquier conocimiento del proceso. En (5.35) la varianza existe, pero es evidentemente no estacionaria, y depende de las frecuencias y de la caracterización de la densidad espectral. En el caso de una densidad espectral constante, la varianza del periodograma *tapered* podría ser proporcional a $|H_2(\mathbf{0})|^{-2} \{ |H_2(2\boldsymbol{\omega})|^2 + 1 \}$.

5.5. Estudio comparativo de las estimaciones de los parámetros

Supongamos que los datos espaciales vienen definidos por un modelo de *Matérn* observado sobre una malla regular $N = n_1 \times n_2$, en el cuadrado unidad. Consideramos los siguientes escenarios: (a) distintos valores para el tamaño de la malla (N) en los cuales el proceso es observado: $N = 20 \times 20, 30 \times 30, 40 \times 40, 50 \times 50$; (b) distintas combinaciones para los parámetros *sill* y rango: $(2.0, 10), (2.9, 10), (2.9, 8.3), (2.9, 15)$, elegidos de esta forma para cubrir un amplio rango de posibilidades, desde una relación *sill* - rango de una quinta parte (como en $(2.0, 10)$) hasta relaciones menores (como $(2.9, 8.3)$), dentro de las posibilidades de los límites de

distancia de la región, es decir si el tamaño de la malla es $N = 20 \times 20$, la mayor distancia euclídea sería aproximadamente 28; (c) seis valores para los parámetros ν , el cual controla el grado de suavizamiento del proceso: $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4$; (d) tres posibles estimadores para el periodograma espacial: sin *taper* y con *taper* (multiplicativo y *rounded*); (e) cuatro valores para los parámetros $\delta, \epsilon, m_1, m_2$, los cuales controlan los *data taper*: 1, 3, 5, 10 (en cada caso, consideraremos cuatro parámetros iguales).

Las distintas combinaciones de parámetros fueron seleccionadas para cubrir el máximo número de casos posibles. En el caso de la elección de los parámetros $\delta, \epsilon, m_1, m_2$, se debe tener en cuenta, que serán como valor límite la mitad de N , por lo que si el tamaño de la malla es $N = 20 \times 20$ el valor límite será 10. La relación de estos parámetros no será directamente relacionado con los casos de malla como $30 \times 30, 40 \times 40, 50 \times 50$, ya que la proporción es diferente. Con todo esto, vamos a analizar: (a) el impacto del número de puntos de la malla en el que se observa el proceso sobre la calidad de la densidad espectral y parámetros estimados, (b) el uso de un particular *data taper* y su impacto en la calidad de la densidad espectral y los parámetros estimados, (c) el papel de los parámetros que controlan la cantidad de *tapering* y, finalmente, (d) la comparación en la estimación de los distintos parámetros en los formatos espacial y espectral.

Para cada combinación de los parámetros anteriormente considerados, simulamos 1000 procesos y para cada proceso estimamos el periodograma y realizamos una regresión lineal paramétrica para obtener los correspondientes parámetros definiendo la dependencia espacial. Presentaremos también los resultados en forma de *box-plots*.

Como la cantidad de combinaciones es de parámetros es muy grande, intentaremos agrupar la mayor cantidad de casos en cada gráfico para facilitar el estudio y el análisis correspondiente.

Comenzamos esta sección explicando el formato genérico de los gráficos, que en todos los casos son conjuntos de *box-plots*. En cada gráfico, en el eje de abscisas tenemos los distintos métodos de estimación, numerados del 1 al 9:

1. Predicción de parámetros sin *taper*.
2. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo multiplicativo de parámetros $\epsilon = 1, \delta = 1$.
3. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo *rounded* de parámetros $\epsilon = 1, \delta = 1$.

4. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo multiplicativo de parámetros $\epsilon = 3$, $\delta = 3$.
5. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo *rounded* de parámetros $\epsilon = 3$, $\delta = 3$.
6. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo multiplicativo de parámetros $\epsilon = 5$, $\delta = 5$.
7. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo *rounded* de parámetros $\epsilon = 5$, $\delta = 5$.
8. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo multiplicativo de parámetros $\epsilon = 10$, $\delta = 10$.
9. Predicción de parámetros utilizando: *taper* de tipo *rounded* de parámetros $\epsilon = 10$, $\delta = 10$.

Además de estos elementos, podemos ver los datos agrupados de la siguiente forma. Los primeros nueve, *box-plots* del 1 al 9, son estimaciones realizadas mediante el método de Máxima Verosimilitud espectral. Los nueve siguientes, *box-plots* del 10 al 18, son estimaciones obtenidas mediante el método de Mínimos Cuadrados Ponderados espectrales. Los nueve siguientes, *box-plots* del 19 al 27, son estimaciones realizadas mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios espectrales. Por último, el último caso, *box-plot* 28, es la estimación realizada mediante el método de mínimos cuadrados ponderados espaciales.

Esta primera parte nos permite comparar, en un mismo gráfico el tipo de *taper* que da mejor predicción, y el mejor tipo de estimación comparando análisis espectral y espacial.

En cada grupo de gráficos, estimamos un parámetro diferente: El primer grupo (6 *box-plots*) son para la estimación del parámetro *sill*, el grupo siguiente (6 *box-plots* más), estimación del rango y el tercer grupo de 6 *box-plots* permiten la estimación del parámetro de suavizado (ν).

Todo esto lo podemos analizar en grupos de tres en tres gráficos (es decir, estimación de *sill*, rango y suavizamiento):

- Figuras (5.1-5.3), *sill* = 2.0, rango = 1.0, (ν)=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0.
- Figuras (5.4-5.6), *sill* = 2.0, rango = 5.0, (ν)=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0.

- Figuras (5.7-5.9), $sill = 2.0$, rango = 10.0, (ν)=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0.
- Figuras (5.10-5.12), $sill = 2.9$, rango = 10.0, (ν)=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0.
- Figuras (5.13-5.15), $sill = 2.0$, rango = 15.0, (ν)=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0.

Las Figuras (5.16-5.18), muestran la variación de estimación de los parámetros $sill = 2.0$, rango = 5.0, $\nu = 1.0$, con la variación de la malla, al pasar de 20x20, 30x30, 40x40 y 50x50.

Finalmente, en las últimas Figuras de este capítulo, (5.19-5.20), podremos comparar la predicción del parámetro $sill = 2.0$ y $\nu=0.5, 1.0$, para los casos en los que el rango no es fijo frente a los que sí que lo es (rango = 5.0 y 1.0).

Para el caso de $sill = 2.0$, rango = 1.0, observando la Figura (5.1), podemos ver que el ML-espectral mejora en todos los casos hasta un valor de $\nu = 1.5$, pero un mayor aumento de suavizamiento empeora la estimación. Las estimaciones con MCP-espectral tienen mucha dispersión en todos los casos excepto en $\nu = 1.0$. El MCO-espectral mejora la estimación al aumentar el ν . El MCP-espectral es el más robusto en todos los casos.

Respecto al rango (ver Figura (5.2)) el MCO-espectral es el que mejor estimación proporciona en todos los casos, además de mejorar con el aumento del suavizado.

Respecto a la estimación de ν (ver Figura (5.3)) en todos los métodos espectrales, un aumento del parámetro ν mejora la estimación y esto es más apreciable en los casos en los que el parámetro de *tapering* es más alto. Cuando no se utiliza *tapering*, hay mucha dispersión en los métodos espectrales.

En las Figuras (5.4-5.6), que representan los casos de $sill = 2.0$ y rango = 5.0. Podemos observar que para la estimación del $sill$, las técnicas de ML-espectral y MCP-espectral proporcionan peores estimaciones al aumentar ν , mientras que el caso *rounded* 3,3 el MCO-espectral es el mejor caso.

Para el caso $sill = 2.0$ y rango = 10.0 (ver Figura (5.7-5.9)) la estimación del $sill$ empeora al aumentar el suavizamiento, es decir el mejor caso se da cuando $\nu = 0.5$ (exponencial). Al igual que antes, el caso *rounded* 3,3 del MCO-espectral es un método de estimación que proporciona buenas estimaciones. La estimación del rango tiene en todos los casos mucha dispersión. En la estimación de ν , los métodos de ML-espectral y MCO-espectral son mejores que el método espacial. En general, al aumentar ν , empeora la estimación.

Si observamos las Figuras (5.10-5.12) que comparan el caso $sill = 2.9$ y rango = 10.0, las simulaciones son similares al caso de $sill = 2.0$ y rango = 10.0 por

lo que la variación del parámetro *sill* no afecta para la elección del método de estimación.

Si pasamos al caso $sill = 2.0$ y rango = 15.0 (ver Figuras (5.13-5.15)), será la estimación del *sill* bajo el caso de menor suavizamiento ($\nu = 0.5$), los distintos casos aportan una buena estimación, y en particular el ML-espectral es el que nos da mejores estimaciones. Al aumentar ν , solo se mantienen de forma más estable (en relación a la dispersión) los métodos de estimación ML-espectral y MCO-espectral.

Si analizamos el aumento de rango, se observa que los estimadores del *sill* tienen en general mayor dispersión, siendo buenas las estimaciones en el caso de ML-espectral con rangos altos. En general, al aumentar el rango aumenta la dispersión. Además, existen casos como $\nu = 1.0$ con rango = 15.0 que son dos ejemplos de buenas estimaciones.

Respecto a la variación del tamaño de malla, al pasar de 20x20, a 30x30, 40x40 y finalmente 50x50 (ver las Figuras (5.16-5.18)), la simulación del *sill* y ν mejoran con claridad y en muchas ocasiones también la estimación del rango.

Si analizamos aquellos casos en que hemos fijado el rango, Figuras (5.19-5.20), y hemos estimado el *sill* y el ν , no encontramos gran mejoría.

Si lo que queremos es comparar la estimación según el tipo de *taper* utilizado, podemos observar la Figura (5.21) donde queda claro que, para la estimación del parámetro $\nu = 1.5$ mediante el método MCO-espectral con $sill = 2.0$ y rango = 5.0, al aumentar los parámetros ϵ y δ , en los distintos tipos de *tapering* utilizado, mejora la estimación hasta llegar al tipo *rounded* con $\epsilon = 10$ y $\delta = 10$ que centra sus valores en el $\nu = 1.5$.

En resumen, podemos decir que en general el método más robusto de estimación de parámetros, es el MCP-espacial. Sin embargo, este comportamiento no siempre es así, ya que en ciertos casos, estas estimaciones tienen gran variabilidad.

También es importante el papel que juega el aumento del tamaño de malla ya que mejora claramente las estimaciones en todos los casos.

Respecto a los distintos parámetros, la estimación del *sill* suele mejorar con el aumento de ν hasta 1.5. A partir de este punto suele empeorar. Respecto al rango, se observa que con el aumento de éste, aumenta la dispersión en general para la estimación de todos los parámetros, desde el mismo rango hasta ν y *sill*. Sólo en casos concretos, como la estimación con el método MCO-espectral y *tapering* del tipo *rounded* (3,3), aparecen estimaciones coherentes.

En general, la dispersión de la estimación del parámetro ν aumenta con su valor.

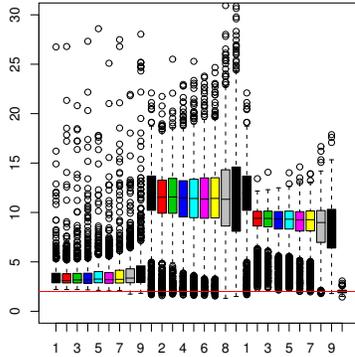
Todo lo observado hasta ahora, nos permite comentar algunos aspectos de interés en relación a la sección metodológica del capítulo. Como se observa en las expresiones (5.30) y (5.32), el periodograma es un estimador sesgado de la densidad espectral. El sesgo depende de la función *taper* a utilizar. Por tanto, las estimaciones obtenidas de los distintos métodos utilizados, tienen de forma intrínseca un sesgo asociado. La combinación de *taper* en los parámetros ϵ y δ , reduce dicho sesgo para obtener mejores estimaciones.

Con respecto a la incorrelación entre valores del periodograma en diferentes frecuencias, hay que hacer notar que según las ecuaciones (5.34) y (5.35), dicha correlación no es nula, fijado el valor de N (sabemos que sí lo es bajo condiciones límite).

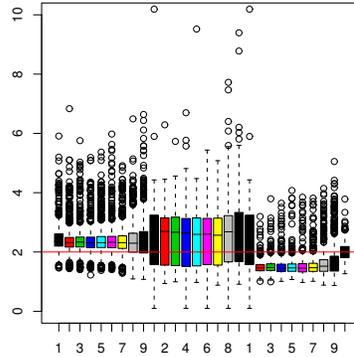
La existencia de esta correlación, provoca nuevamente sesgo en las estimaciones. En particular, hace que la estimación por regresión lineal (propuesta por Fuentes, 2000), no sea la más adecuada. Evidentemente esto provocan ciertos sesgos de importancia en el conjunto de estimaciones.

Finalmente, para este estudio de simulación comparativo se han elegido una colección suficientemente general y amplia como para que las conclusiones sean lo más representativas posibles. Sin embargo, otros métodos pueden ser utilizados para este estudio.

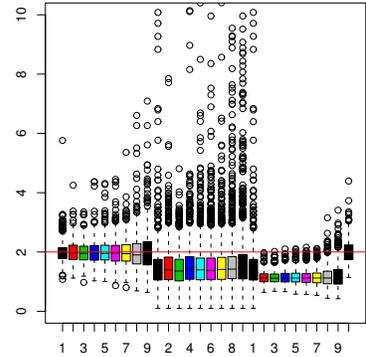
Figura(5.1.1)



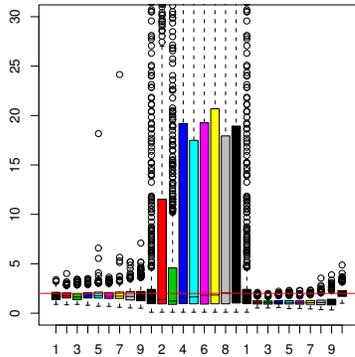
Figura(5.1.2)



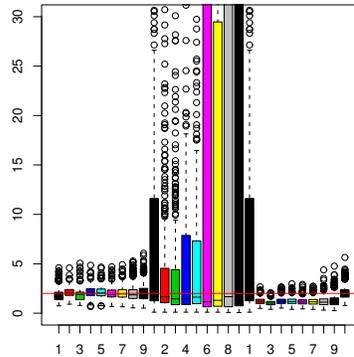
Figura(5.1.3)



Figura(5.1.4)



Figura(5.1.5)



Figura(5.1.6)

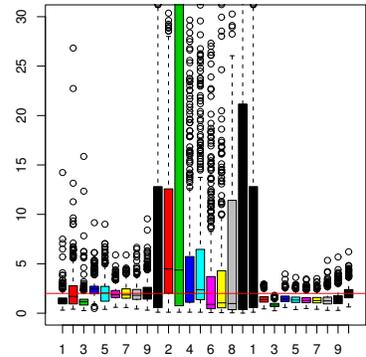


Figura 5.1: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1- no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 1.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

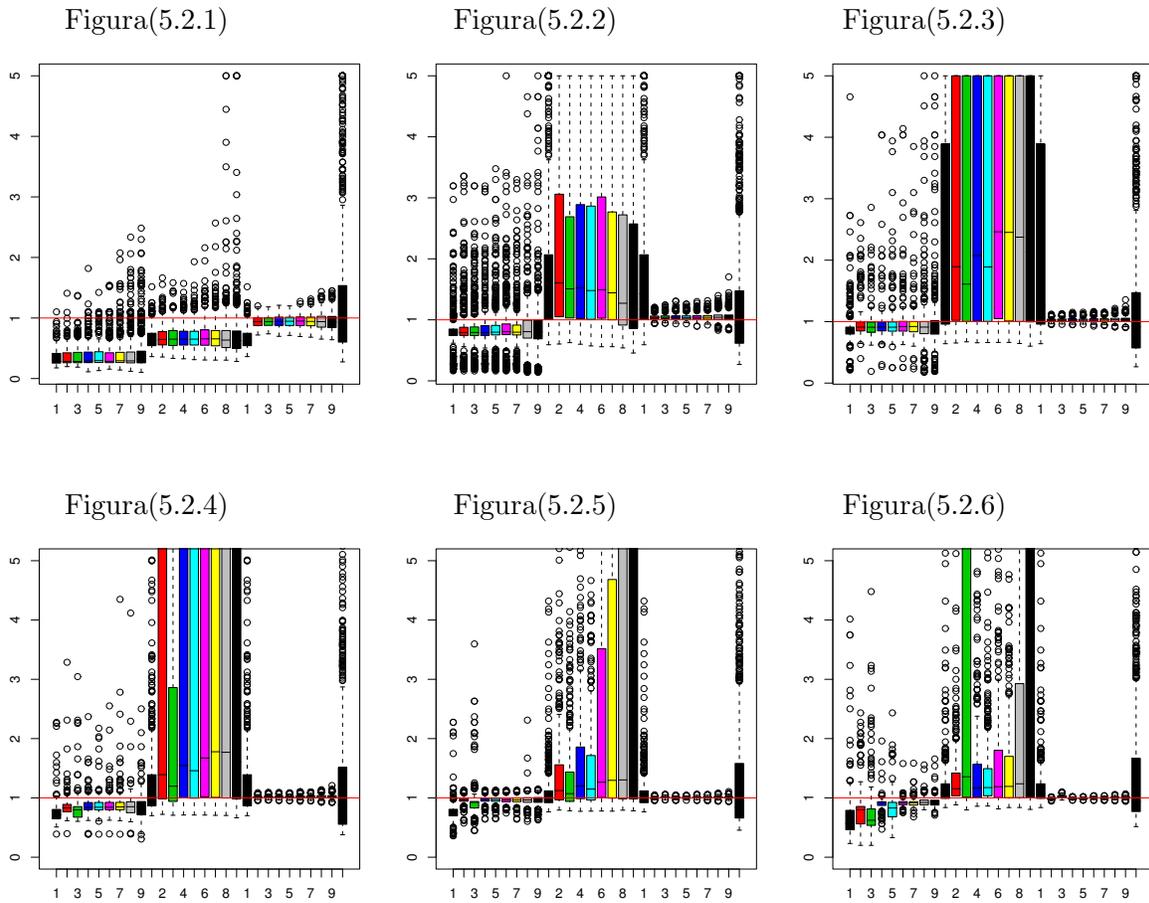


Figura 5.2: Comparación de la estimación del parámetro rango=1.0 para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.0$ y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

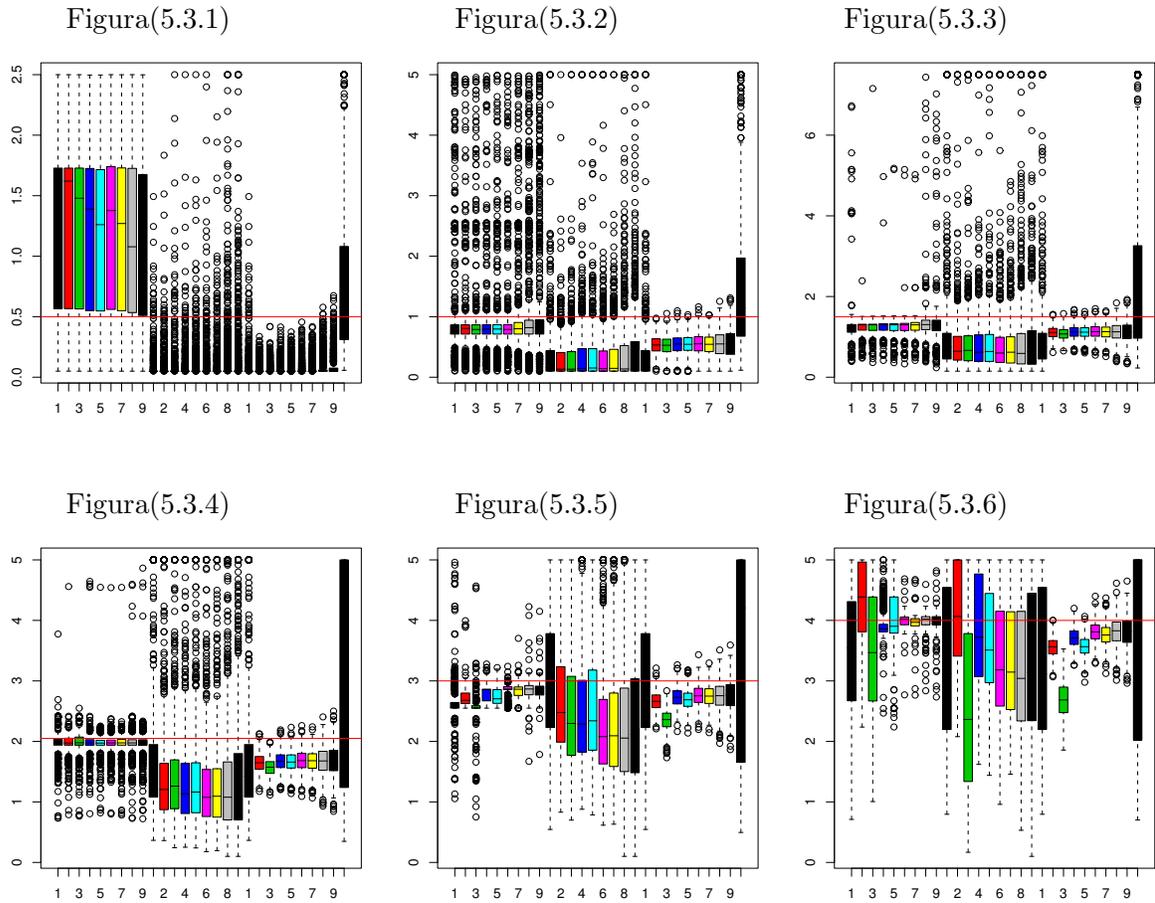
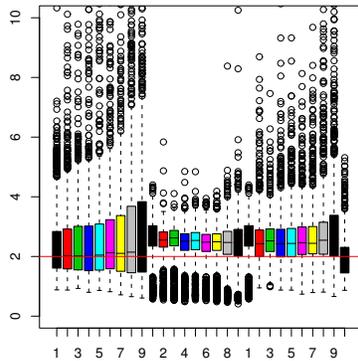
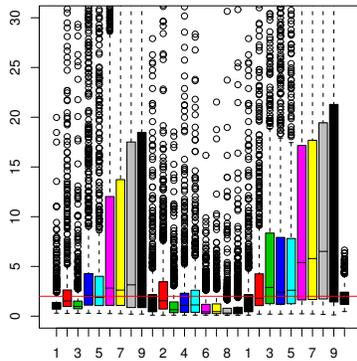


Figura 5.3: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=1.0.

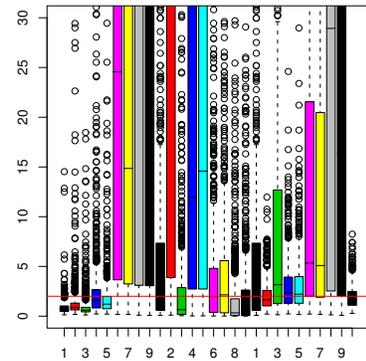
Figura(5.4.1)



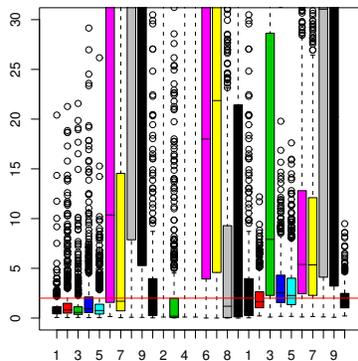
Figura(5.4.2)



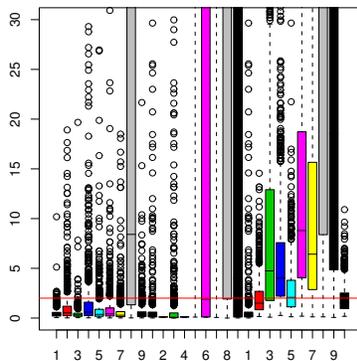
Figura(5.4.3)



Figura(5.4.4)



Figura(5.4.5)



Figura(5.4.6)

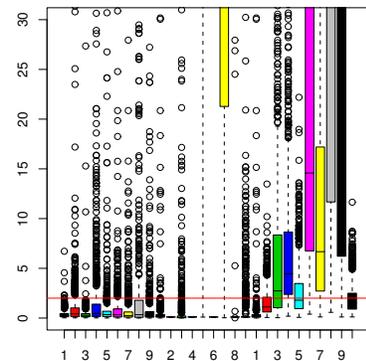
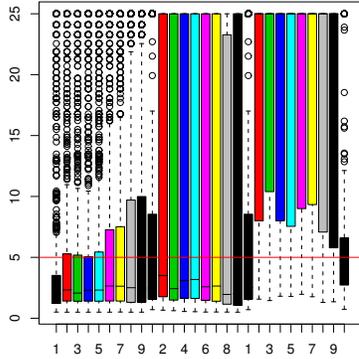
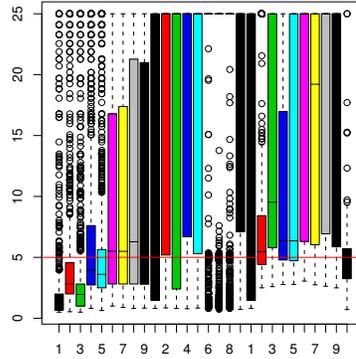


Figura 5.4: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1- no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 5.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

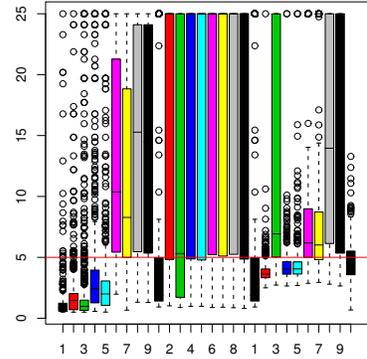
Figura(5.5.1)



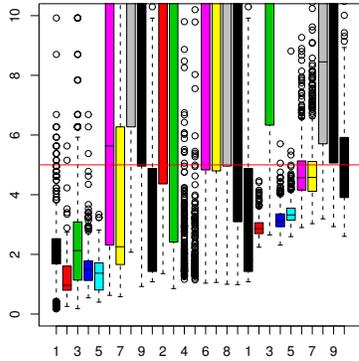
Figura(5.5.2)



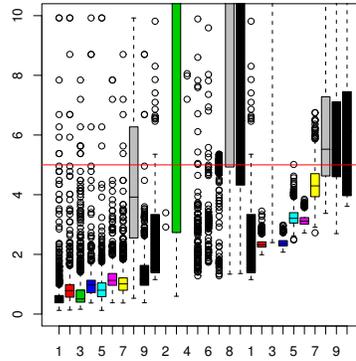
Figura(5.5.3)



Figura(5.5.4)



Figura(5.5.5)



Figura(5.5.6)

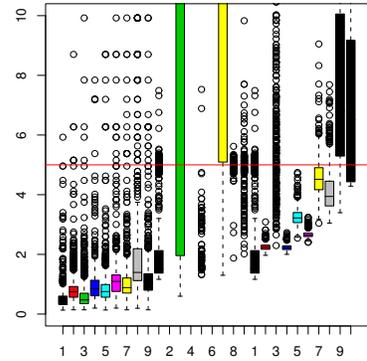
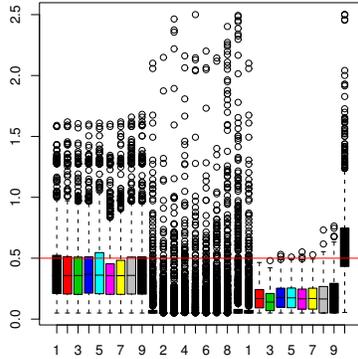
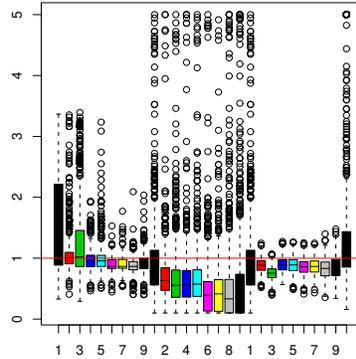


Figura 5.5: Comparación de la estimación del parámetro rango=5.0 para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.0$ y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

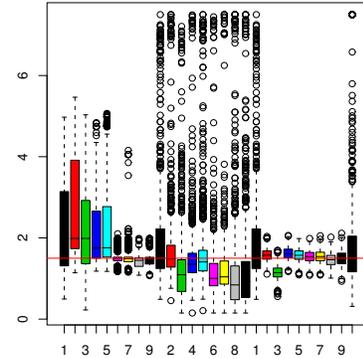
Figura(5.6.1)



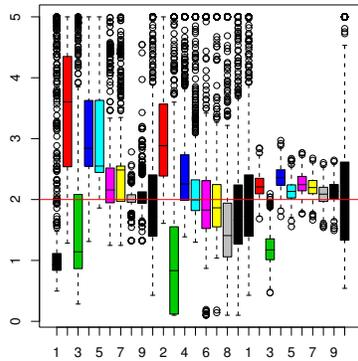
Figura(5.6.2)



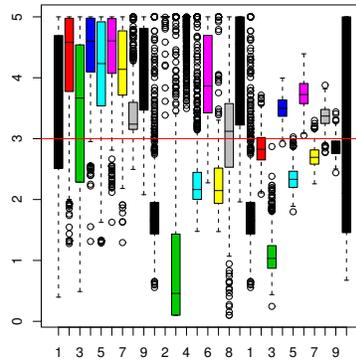
Figura(5.6.3)



Figura(5.6.4)



Figura(5.6.5)



Figura(5.6.6)

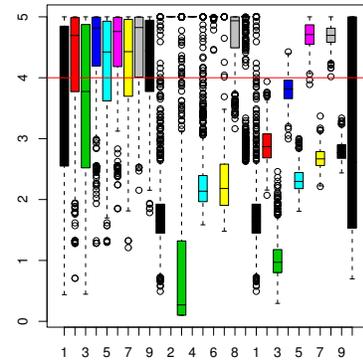
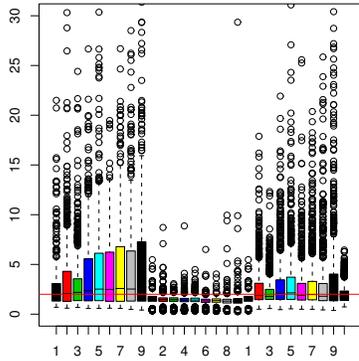
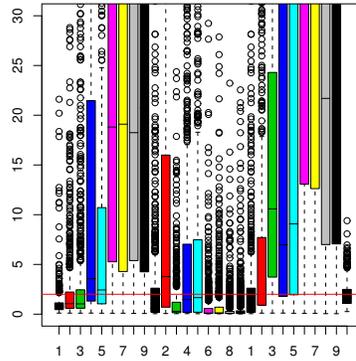


Figura 5.6: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=5.0.

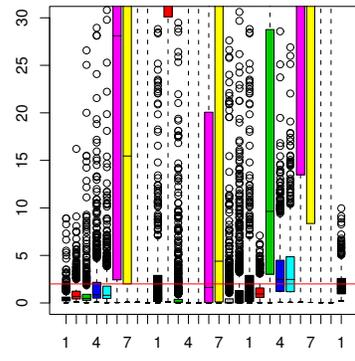
Figura(5.7.1)



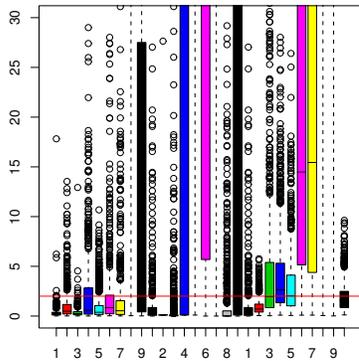
Figura(5.7.2)



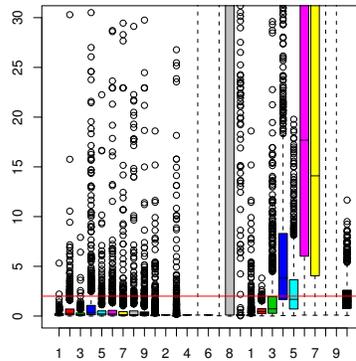
Figura(5.7.3)



Figura(5.7.4)



Figura(5.7.5)



Figura(5.7.6)

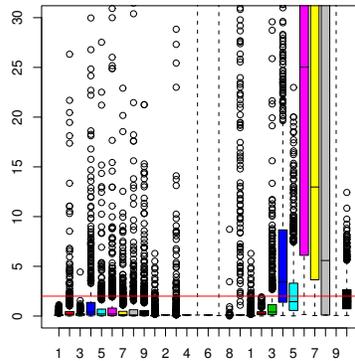


Figura 5.7: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1- no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 10.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

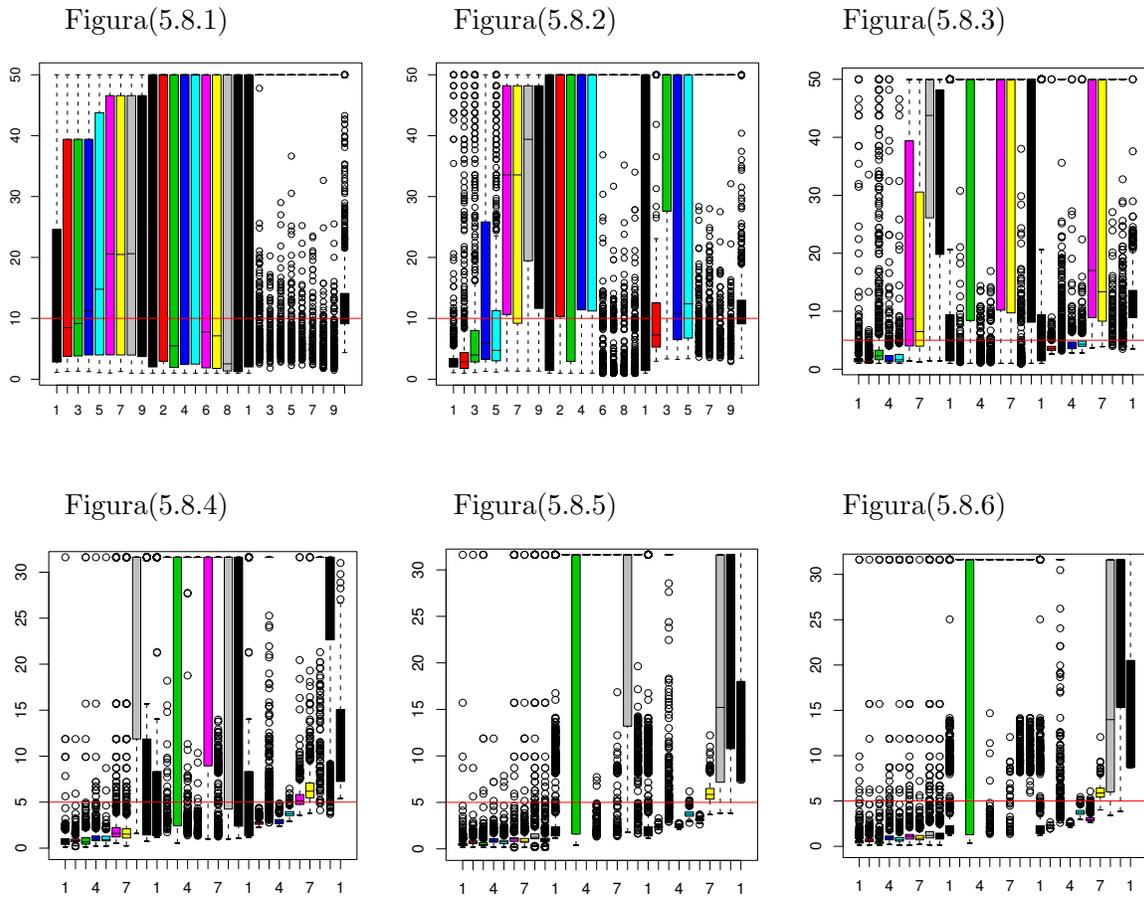
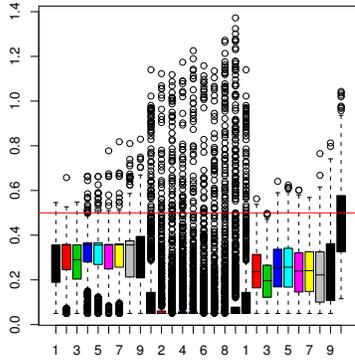
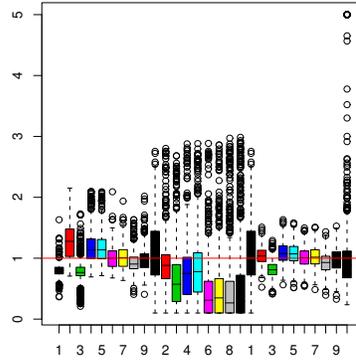


Figura 5.8: Comparación de la estimación del parámetro rango=10.0 para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.0$ y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

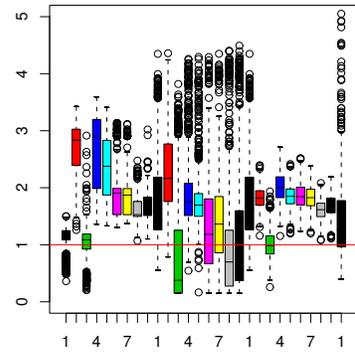
Figura(5.9.1)



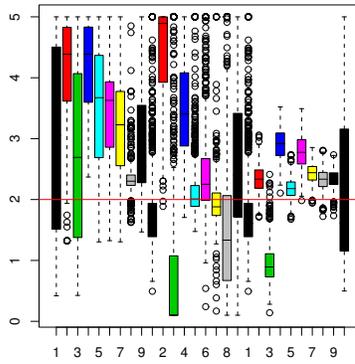
Figura(5.9.2)



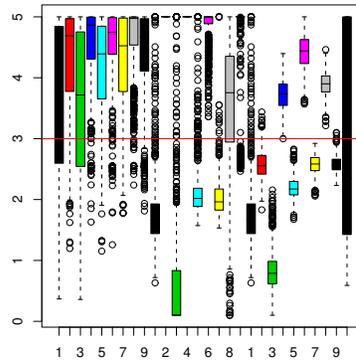
Figura(5.9.3)



Figura(5.9.4)



Figura(5.9.5)



Figura(5.9.6)

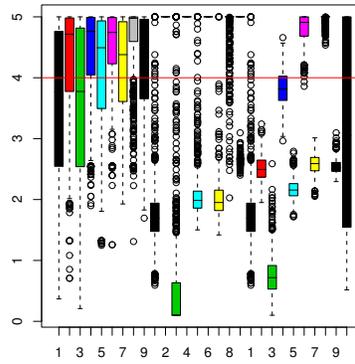
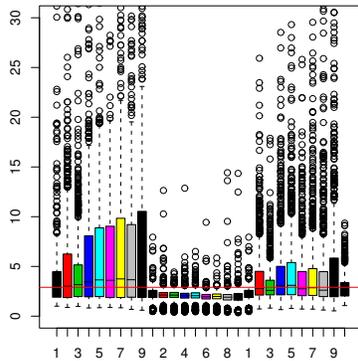
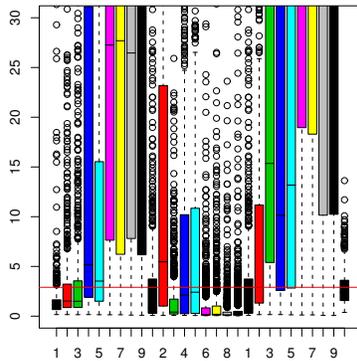


Figura 5.9: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=10.0.

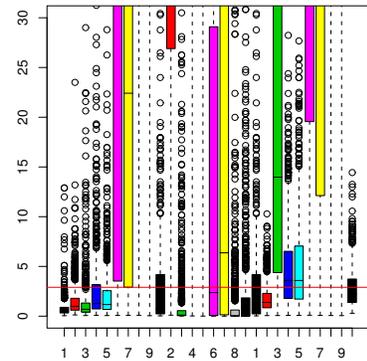
Figura(5.10.1)



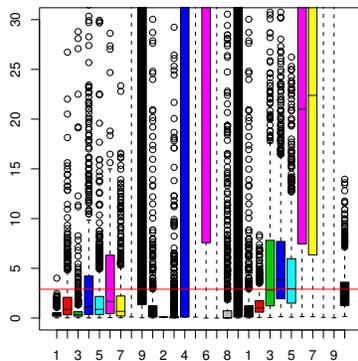
Figura(5.10.2)



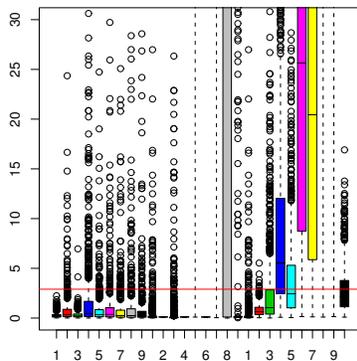
Figura(5.10.3)



Figura(5.10.4)



Figura(5.10.5)



Figura(5.10.6)

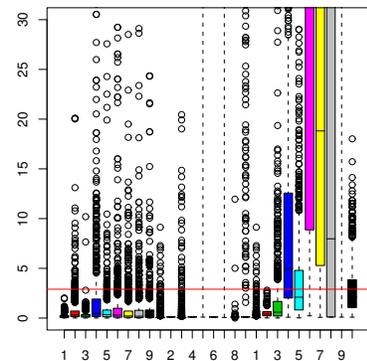
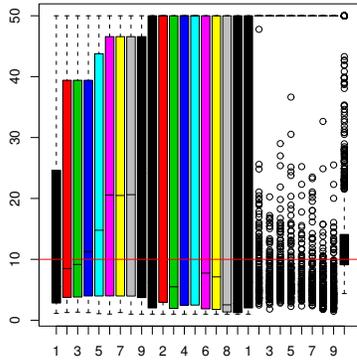
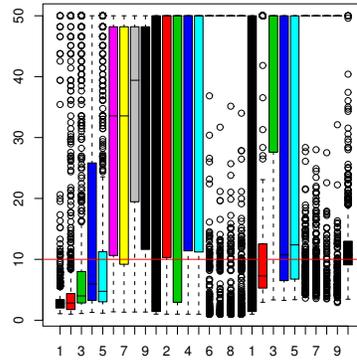


Figura 5.10: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.9$ para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 10.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

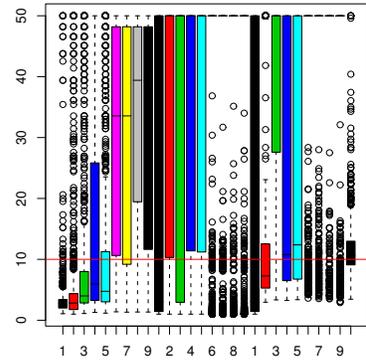
Figura(5.11.1)



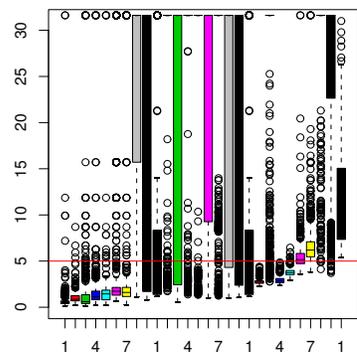
Figura(5.11.2)



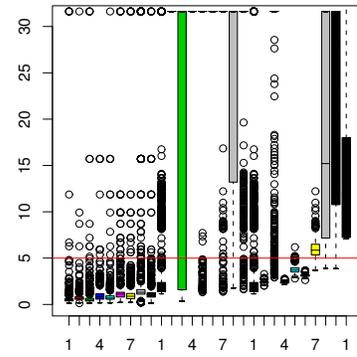
Figura(5.11.3)



Figura(5.11.4)



Figura(5.11.5)



Figura(5.11.6)

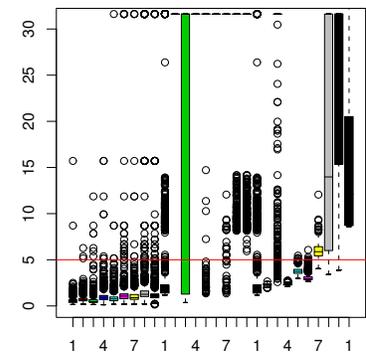


Figura 5.11: Comparación de la estimación del parámetro rango=10.0 para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.9$ y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

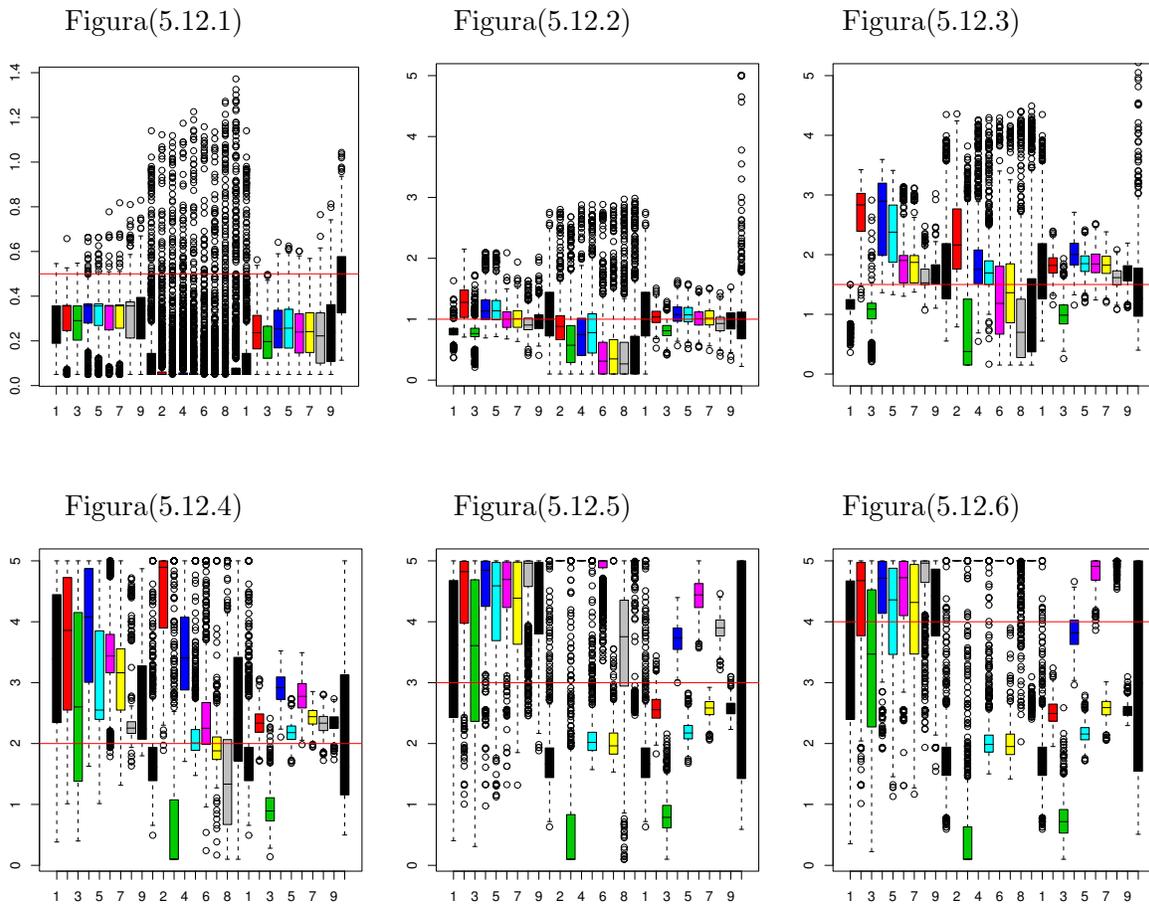
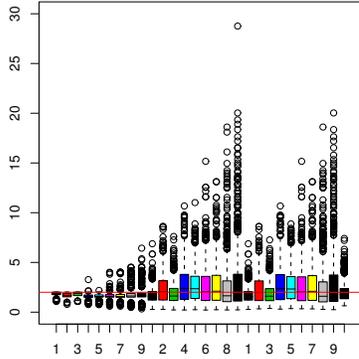
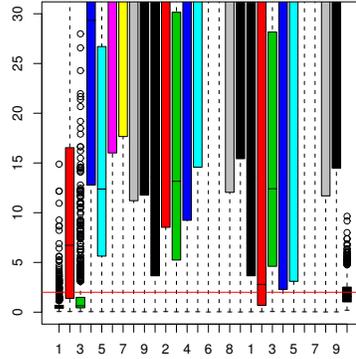


Figura 5.12: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3), 5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.9$ y rango=10.0.

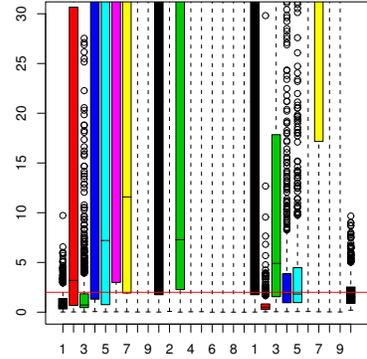
Figura(5.13.1)



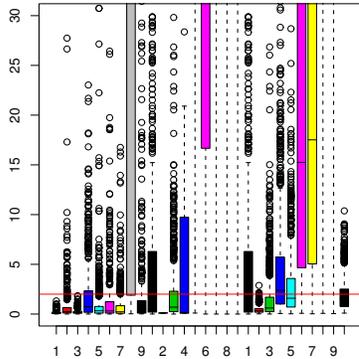
Figura(5.13.2)



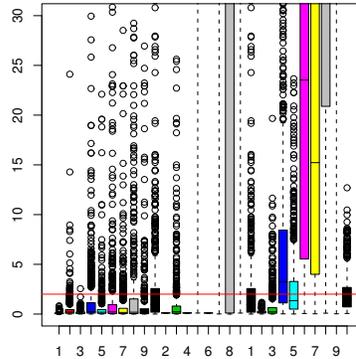
Figura(5.13.3)



Figura(5.13.4)



Figura(5.13.5)



Figura(5.13.6)

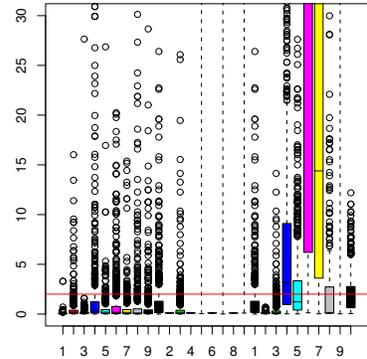
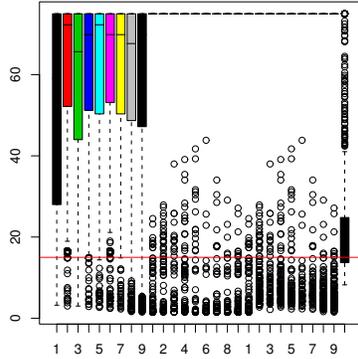
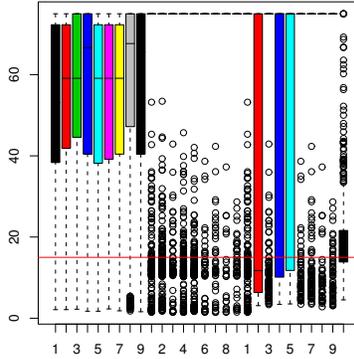


Figura 5.13: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 15.0 y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

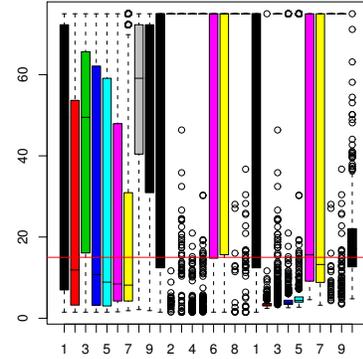
Figura(5.14.1)



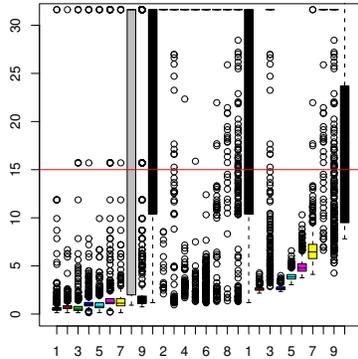
Figura(5.14.2)



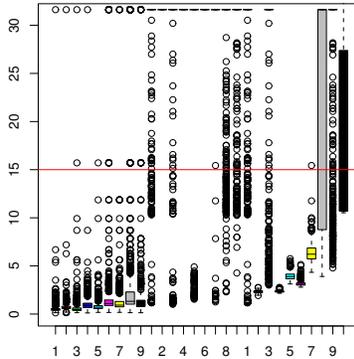
Figura(5.14.3)



Figura(5.14.4)



Figura(5.14.5)



Figura(5.14.6)

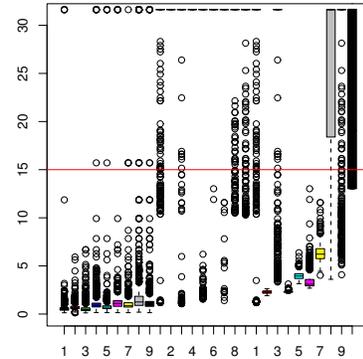
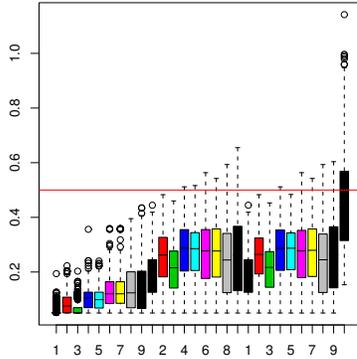
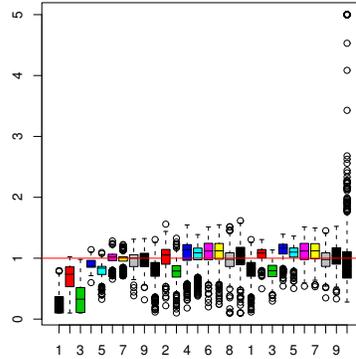


Figura 5.14: Comparación de la estimación del parámetro rango=15.0 para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.0$ y $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha).

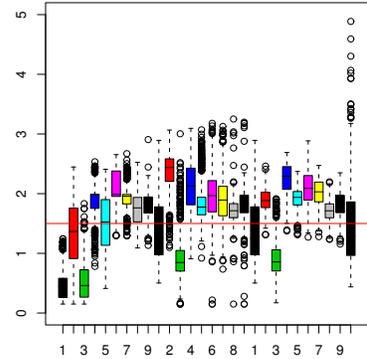
Figura(5.15.1)



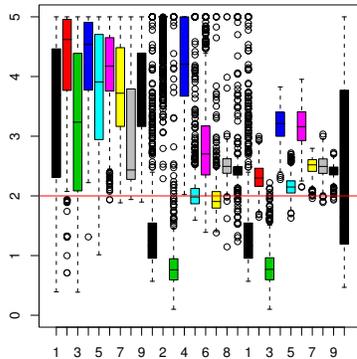
Figura(5.15.2)



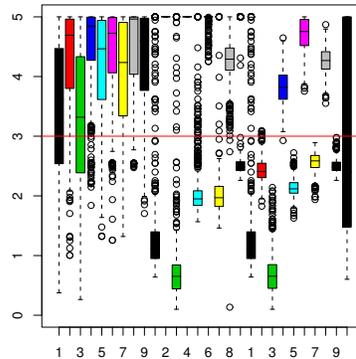
Figura(5.15.3)



Figura(5.15.4)



Figura(5.15.5)



Figura(5.15.6)

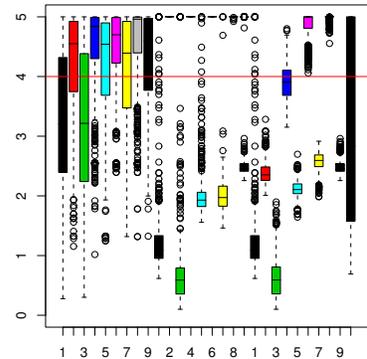


Figura 5.15: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 0.5$ (superior izquierda), 1, 1.5, 2, 3, 4 (inferior derecha) para los casos: 1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con *sill* = 2.0 y rango=15.0.

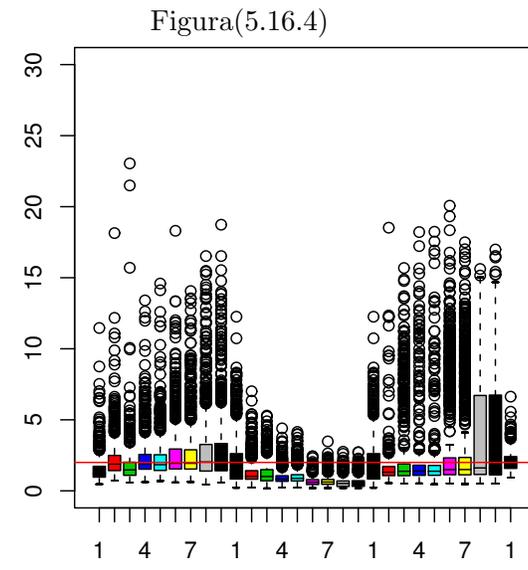
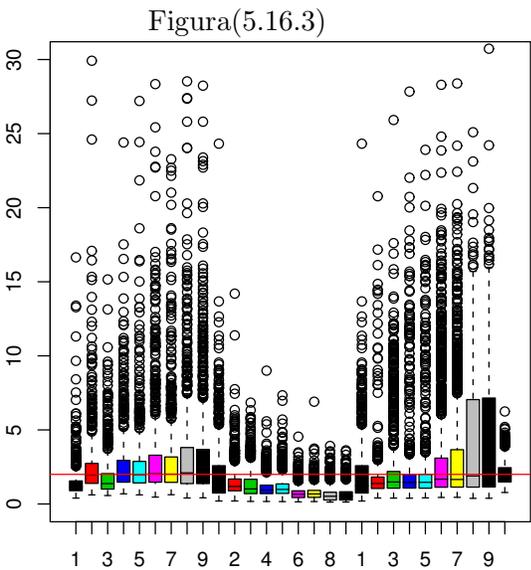
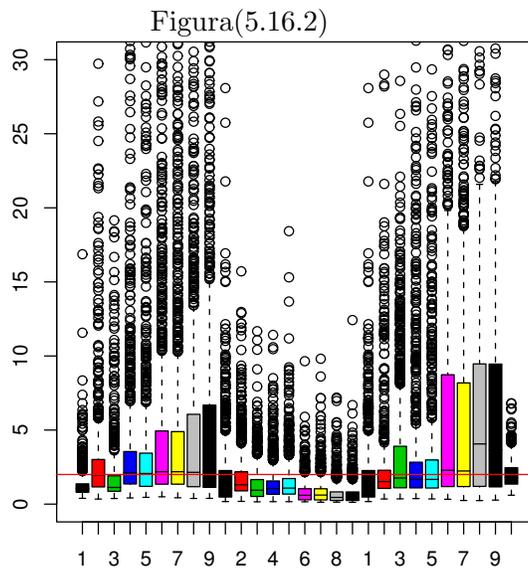
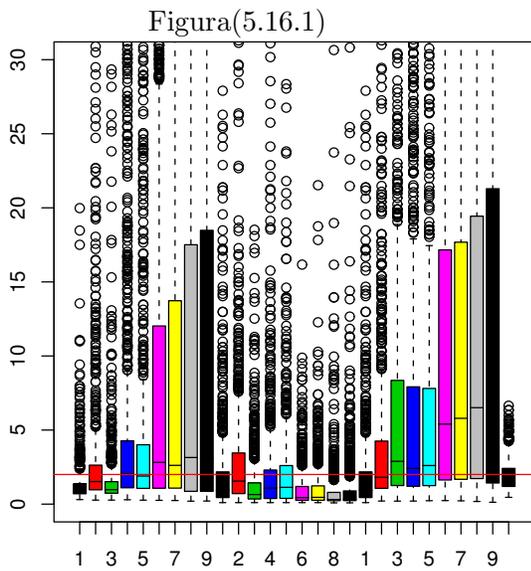


Figura 5.16: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 5.0 y $\nu = 1.0$, con tamaño de rejilla 20x20 (superior izquierda), 30x30, 40x40, 50x50 (inferior derecha).

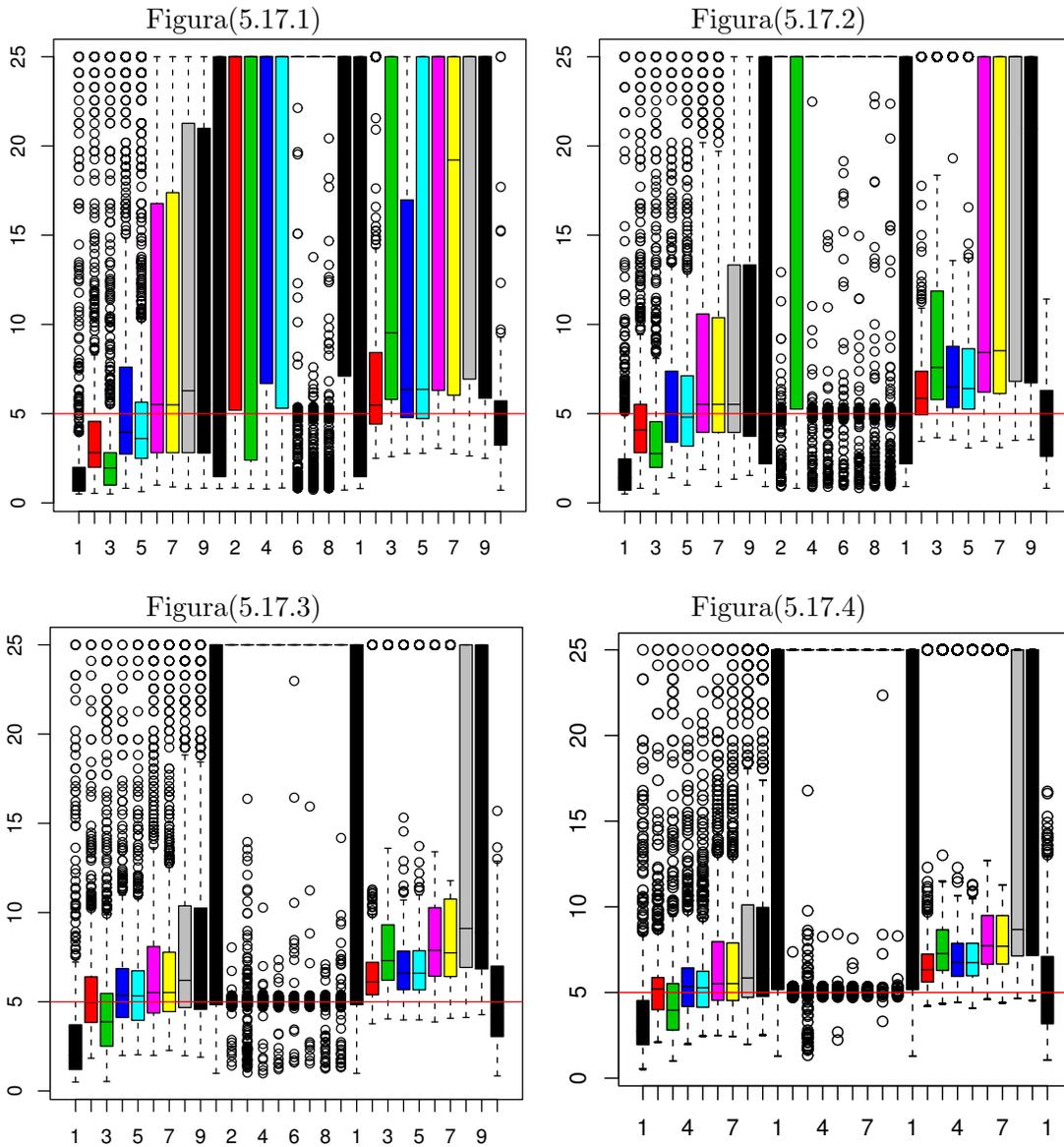


Figura 5.17: Comparación de la estimación del parámetro rango = 5.0 para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.0$ y $\nu = 1.0$, con tamaño de rejilla 20x20 (superior izquierda), 30x30, 40x40, 50x50 (inferior derecha).

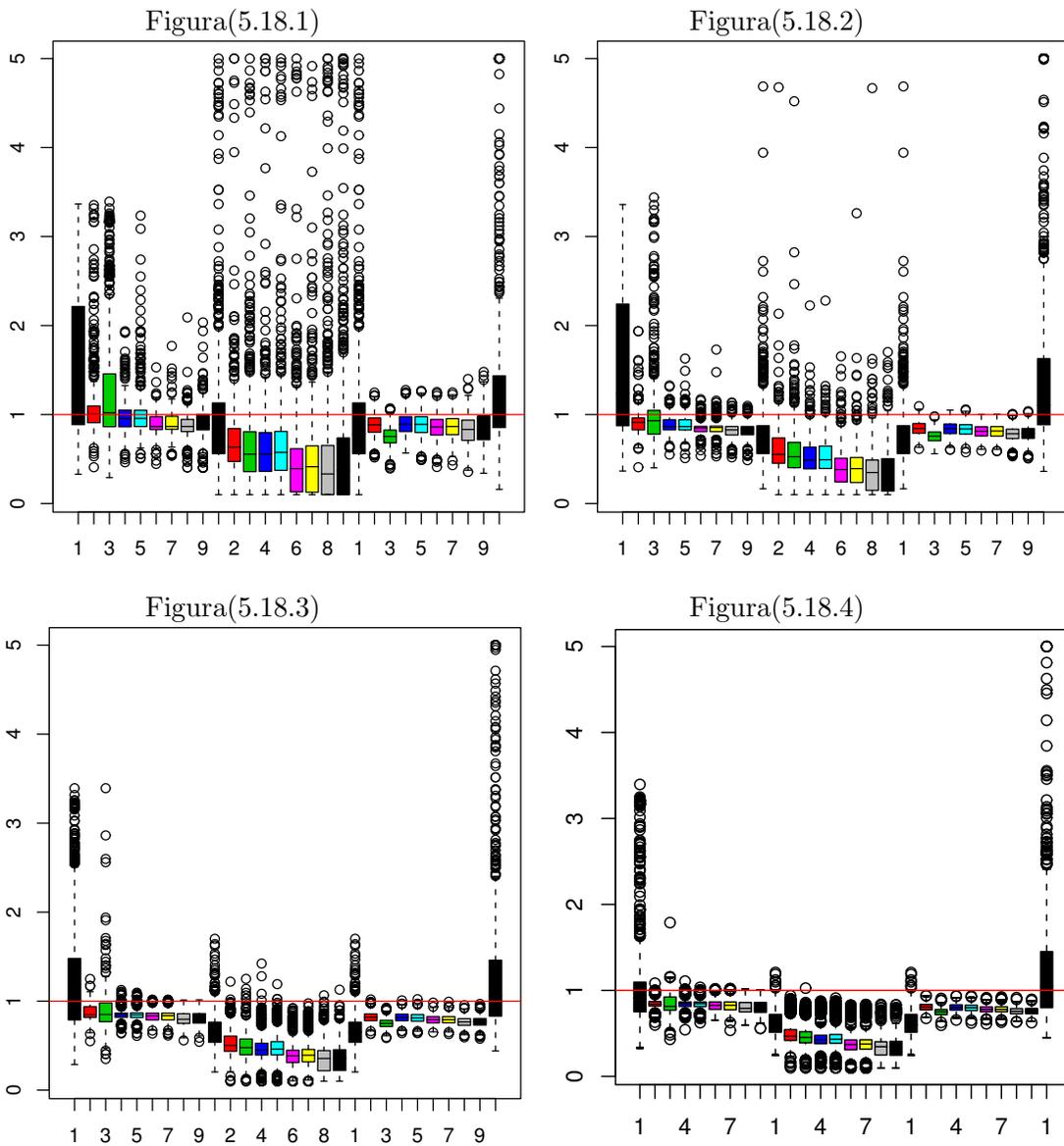
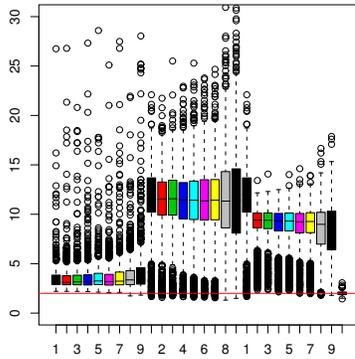
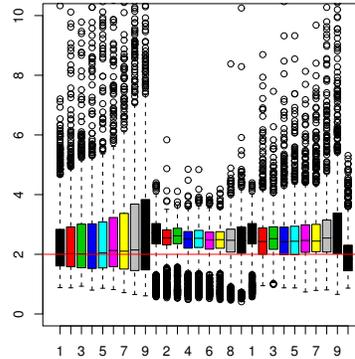


Figura 5.18: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 1.0$ para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con $sill = 2.0$ y rango = 5.0, con tamaño de rejilla 20x20 (superior izquierda), 30x30, 40x40, 50x50 (inferior derecha).

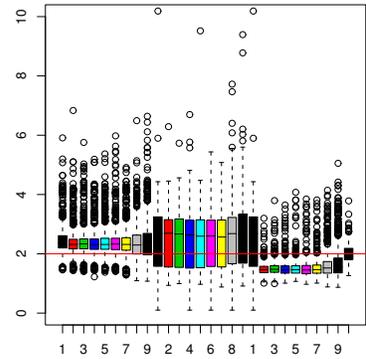
Figura(5.19.1)



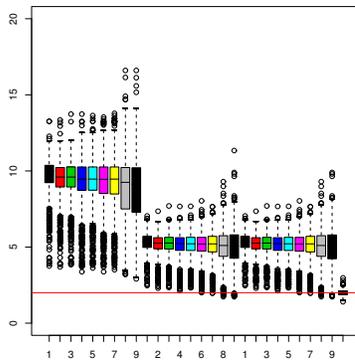
Figura(5.19.2)



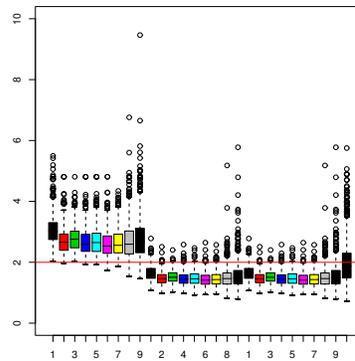
Figura(5.19.3)



Figura(5.19.4)



Figura(5.19.5)



Figura(5.19.6)

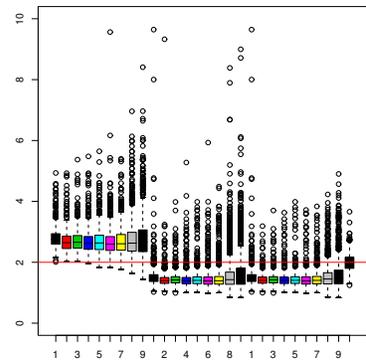
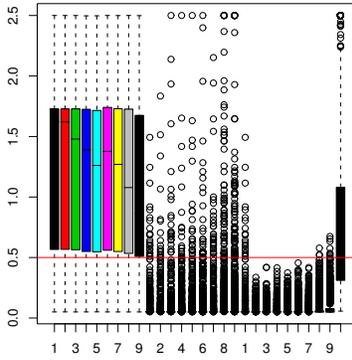
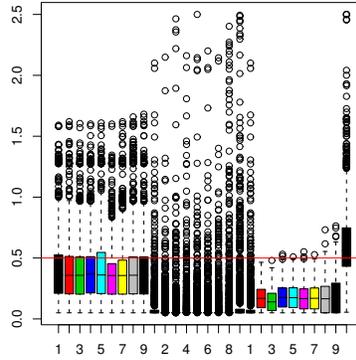


Figura 5.19: Comparación de la estimación del parámetro $sill=2.0$ para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 1.0, $\nu = 0.5$, rango = 5.0, $\nu = 0.5$, rango = 1.0, $\nu = 1.0$ fila superior, y la misma estructura con rango fijo en la fila inferior.

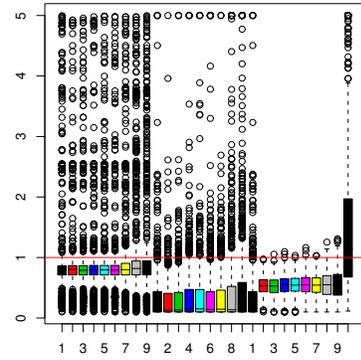
Figura(5.20.1)



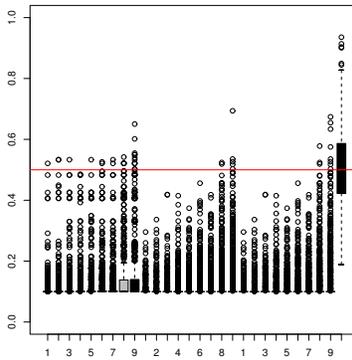
Figura(5.20.2)



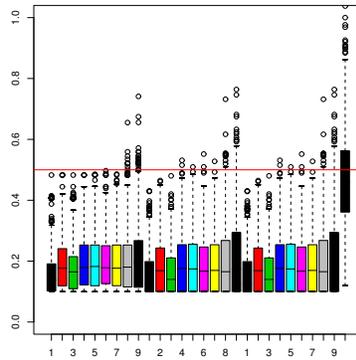
Figura(5.20.3)



Figura(5.20.4)



Figura(5.20.5)



Figura(5.20.6)

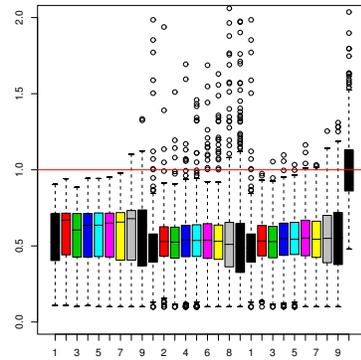


Figura 5.20: Comparación de la estimación del parámetro $\nu = 2.0$ para los casos: 1-no taper, 2-multiplicativo(1,1), 3-rounded(1,1), 4-multiplicativo(3,3),5-rounded(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-rounded(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-rounded(10,10), dentro de ML - espectral (1-9), MCP - espectral(1-9), MCO - espectral (1-9) y MCP - espacial (1), con rango = 1.0, $\nu = 0.5$, sill = 2.0 (primero fila superior), rango = 5.0, $\nu = 0.5$, sill = 2.0 (segundo fila superior), rango = 1.0, $\nu = 1.0$ sill = 2.0 (tercero fila superior),y la misma estructura con rango fijo en la fila inferior.

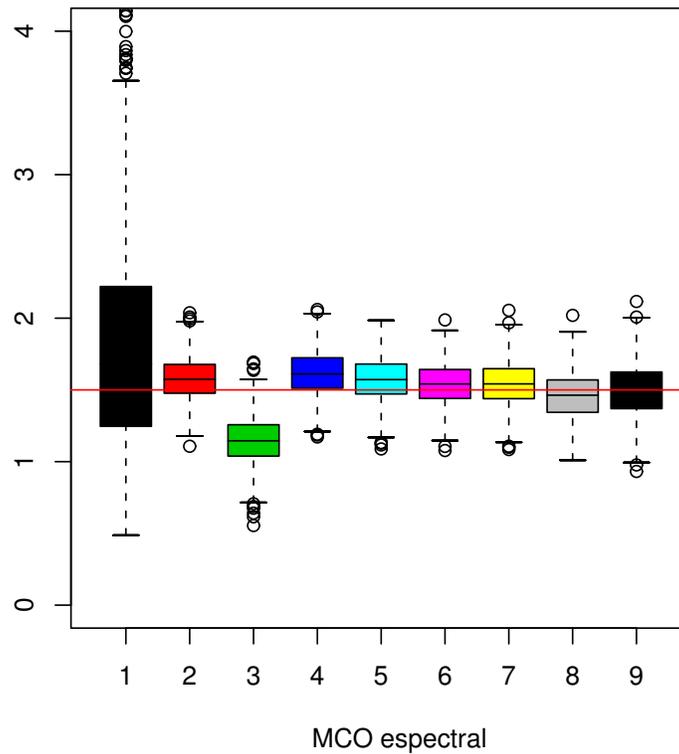


Figura 5.21: Comparación de los distintos tipos de *taper* (1-no *taper*, 2-multiplicativo(1,1), 3-*rounded*(1,1), 4-multiplicativo(3,3), 5-*rounded*(3,3), 6-multiplicativo(5,5), 7-*rounded*(5,5), 8-multiplicativo(10,10), 9-*rounded*(10,10)) para la estimación del parámetro $\nu = 1.5$ para el método MCO-espectral, con *sill* = 2.0 y rango = 5.

Capítulo 6

Tests de independencia y de estacionariedad

Índice General

6.1. Test de independencia para procesos espaciales . . .	165
6.1.1. Desarrollo del test	166
6.1.2. Estudio de las propiedades del test bajo simulación . .	170
6.2. Test de estacionariedad	185
6.2.1. Un test formal de estacionariedad para un proceso es- pacial	186
6.2.2. Estudio del comportamiento del test bajo simulación .	188

6.1. Test de independencia para procesos espaciales

Ya hemos comentado a lo largo de esta tesis la interesante necesidad de analizar características de procesos espaciales en gran cantidad de disciplinas como ecología, geografía, estudios forestales, ciencias de suelos y en general, ciencias medioambientales, lo que hace que sea necesario el estudio de la estructura espacial. Por tanto, el análisis de la dependencia, y en su caso independencia espacial, es un elemento fundamental en este contexto. Utilizando técnicas espectrales presentamos un test para analizar la independencia espacial que un proceso espacial

Z observado sobre una malla regular $N = n_1 \times n_2$ puede exhibir. El test está basado en el contraste de un proceso de ruido blanco frente a un proceso con clara dependencia espacial y proveniente de un modelo de *Matérn*. Esta comparación será realizada mediante un estudio de simulación donde se analizarán el nivel de confianza y la potencia del test propuesto bajo una gran variedad de escenarios.

6.1.1. Desarrollo del test

Como hemos comentado en capítulos anteriores, una clase de variogramas prácticos y funciones autocovarianza para procesos Z de dos dimensiones, pueden ser obtenidos a partir de la clase de *Matérn* de densidades espectrales,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(\alpha^2 + |\boldsymbol{\omega}|^2)^{(-\nu-1)} \quad (6.1)$$

con el vector de parámetros de covarianza dado por $\theta = (\phi, \nu, \alpha)$. El parámetro α^{-1} puede ser interpretado como el rango de autocorrelación. El parámetro ν mide el grado de suavizamiento del proceso, y $\phi = \sigma^2 \alpha^{2\nu}$, es el cociente entre la varianza y el rango. El suavizamiento del campo aleatorio en la clase de *Matérn* juega un papel muy importante en los problemas de interpolación. Un gran número de modelos comúnmente usados, como el modelo Esférico, Exponencial o el Gaussiano, asumen el parámetro de suavizamiento como conocido a priori. Pero este no es el caso bajo la familia de *Matérn*, lo que hace de esta familia un modelo muy atractivo para la modelización práctica.

Siguiendo Stein (1999a), Fuentes (2001a,b) y Juan *et al.* (2005), si el objetivo es la interpolación espacial, es preferible trabajar en el dominio espectral y centrarnos en los valores de altas frecuencias. Una aproximación de la expresión de la densidad espectral de *Matérn* para valores de frecuencias grandes (tomando $|\boldsymbol{\omega}|$ tendiendo a ∞) viene dada por,

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \phi(|\boldsymbol{\omega}|^2)^{(-\nu-1)} \quad (6.2)$$

Así, el grado de suavizamiento, ν y ϕ son los parámetros críticos de importancia. Además, si en esta expresión, trabajamos en escala logarítmica, podemos obtener el siguiente modelo:

$$\log f(\boldsymbol{\omega}) = \beta_0 + \beta_1 \log(|\boldsymbol{\omega}|^2) \quad (6.3)$$

donde $\beta_0 = \log(\phi)$ y $\beta_1 = -\nu - 1$.

En la práctica, la densidad espectral debe ser estimada, y como hemos dicho anteriormente, el periodograma espacial constituye una estimación no paramétrica de la densidad espectral y una herramienta muy útil en nuestro caso. Se trata del módulo al cuadrado de la transformada finita de Fourier para la región observada del proceso, introducida para elegir la periodicidad latente del proceso. El periodograma por sí mismo no es un estimador consistente de la densidad espectral, pero se puede conseguir la consistencia mediante la aplicación de filtros de suavizado. El suavizamiento del periodograma, como se hace frecuentemente en series temporales, no elimina los grandes efectos de borde en dos o más dimensiones. La aparición de unos picos subsidiarios por los filtros de suavizamiento causan innecesariamente grandes valores de los periodogramas ordinarios para grandes frecuencias y resultan en un sesgo substancial (fenómeno *leakage*).

Consideremos el proceso espacial estacionario $Z(\cdot)$ con vector de parámetros de la función de covarianza, θ , el cual es asumido aquí conocido. Observamos el proceso en N localizaciones igualmente espaciadas en una malla regular $D(n_1 \times n_2)$, donde $N = n_1 n_2$.

Definimos $I_N(\boldsymbol{\omega})$ como el periodograma de frecuencia $\boldsymbol{\omega}$,

$$I_N(\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-2} (n_1 n_2)^{-1} \left| \sum_{x_1=1}^{n_1} \sum_{x_2=1}^{n_2} Z(\mathbf{x}) \exp\{-i\mathbf{x}^T \boldsymbol{\omega}\} \right|^2 \quad (6.4)$$

En la práctica, la estimación del periodograma se calcula para un conjunto de frecuencias $\boldsymbol{\omega}$ las cuales vienen definidas en $2\pi f/n$ donde $f/n = \frac{f_1}{n_1}, \frac{f_2}{n_2}$, y $f \in J_N$, para

$$J_N = \{ \lfloor -(n_1 - 1)/2 \rfloor, \dots, n_1 - \lfloor n_1/2 \rfloor \} \times \\ \times \{ \lfloor -(n_2 - 1)/2 \rfloor, \dots, n_2 - \lfloor n_2/2 \rfloor \} \quad (6.5)$$

donde $\lfloor n \rfloor$ es el entero más grande menor o igual que n .

El valor esperado del periodograma espacial no es $f(\boldsymbol{\omega})$, pero sí una integral ponderada con pesos $f(\boldsymbol{\omega})$. Pero asintóticamente si se puede considerar un estimador insesgado, con varianza asintótica, $f^2(\boldsymbol{\omega})$, y los valores del periodograma $I_N(\boldsymbol{\omega})$ y $I'_N(\boldsymbol{\omega}')$ para $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{\omega}'$, son asintóticamente incorrelacionados (Fuentes 2002). La independencia asintótica del periodograma, es una de las más grandes ventajas del análisis espectral, y esto facilita el uso de técnicas como mínimos cuadrados lineales para obtener un modelo espectral teórico de los valores del periodograma. En cualquier caso, esto hay que tratarlo como una aproximación

estadística pues basta recordar los resultados del capítulo anterior cuando N es fijo y no asintótico.

En el dominio espacial las estimaciones del variograma empírico son más comúnmente usadas para estimar la estructura de la correlación del proceso. Cuando un modelo de variograma paramétrico es utilizado para estimar variogramas empíricos, frecuentemente se utilizan técnicas como mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud restringida (MVR), aproximaciones que generalmente no tienen en cuenta ninguna correlación entre los valores del variograma estimado. Los mismos puntos de los datos son usados para estimar el variograma en diferentes *lags* y el resultado es que los variogramas estimados están más correlacionados que las observaciones de los procesos correspondientes. Ignorando esta correlación puede llevar a análisis engañosos. Técnicas como el método de mínimos cuadrados no lineales pueden ser aplicados naturalmente para esas estimaciones independientes. En este caso, el suavizado no paramétrico de las estimaciones del periodograma *tapered* puede dar mejores resultados que las estimaciones de los variogramas no paramétricos.

Por tanto, supongamos que deseamos ver si un proceso de dos dimensiones Z exhibe cierta dependencia espacial. Así, supongamos que Z viene observado en una malla de $N = n_1 \times n_2$ puntos regularmente espaciados.

En este punto, hay que tener en cuenta dos posibles problemas: (a) En la práctica podemos tener datos faltantes en algún punto de la malla y (b) los datos no tienen porqué estar regularmente espaciados. En este caso, y teniendo en cuenta los resultados de Renshaw (2002), podemos definir una malla regular apropiado como aproximación de los datos de las localizaciones irregulares, y proceder normalmente con el test.

Supondremos que la densidad espectral del proceso Z proviene de la clase de *Matérn*, con el vector de parámetros dado por $\theta = (\phi, \nu, \alpha)$. Centrándonos en valores de altas frecuencias, y trabajando ahora en escala logarítmica, podemos considerar el modelo antes definido con $\beta_0 = \log(\phi)$ y $\beta_1 = -\nu - 1$. En la práctica, $f(\omega)$ es estimada mediante el correspondiente periodograma $I_N(\omega)$, bajo todos los pros y contras antes comentados.

Teniendo en cuenta que los valores del periodograma son asintóticamente independientes, podemos utilizar técnicas de regresión para estimar los valores de la pendiente y el punto de corte con las ordenadas.

Sabiendo que un proceso de ruido blanco es un proceso sin dependencia espacial y tiene una densidad espectral constante, la hipótesis nula de nuestro test es que la densidad espectral es constante o, equivalentemente, la no existencia de

dependencia lineal entre las variables aleatorias $\log f(\boldsymbol{\omega})$ y $\log(|\boldsymbol{\omega}|^2)$. La hipótesis alternativa de nuestro test está basada en la existencia de dependencia espacial bajo un proceso espacial proviene de la clase de *Matérn*. Así, haremos uso del coeficiente de correlación de Kendall para construir un simple test estadístico para contrastar la existencia de dependencia espacial. El test estadístico contrasta la nulidad del coeficiente de correlación y se define como,

$$t_{n-2} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (6.6)$$

donde r representa el coeficiente de correlación. Bajo la hipótesis nula de correlación cero entre $\log f(\boldsymbol{\omega})$ y $\log(|\boldsymbol{\omega}|^2)$, el proceso no muestra dependencia espacial o equivalentemente se trata de un proceso de ruido blanco. En otro caso, un rechazo significativo de la hipótesis nula, significará que nuestro proceso espacial proviene de una familia de *Matérn* exhibiendo clara dependencia espacial.

En la Figura (6.1) se muestra el gráfico de $\log f(\boldsymbol{\omega})$ frente $\log(|\boldsymbol{\omega}|^2)$ para ambos casos, puro *nugget* o ruido blanco y un proceso *Matérn*. Podemos observar una relación lineal nula en el primer caso y claramente una estructura lineal (con pendiente negativa) en el segundo caso. Estas son la clase de estructuras lineales que nuestro test intenta explorar.

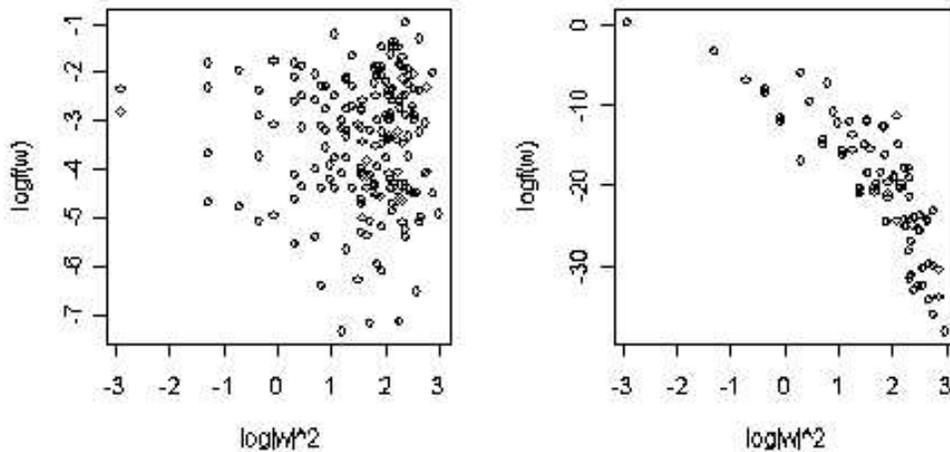


Figura 6.1: $\log f(\boldsymbol{\omega})$ frente $\log(|\boldsymbol{\omega}|^2)$. Izquierda: Caso de un puro *nugget* o proceso de ruido blanco. Derecha: Caso de un proceso de *Matérn*.

6.1.2. Estudio de las propiedades del test bajo simulación

Presentamos un estudio completo de simulación para analizar el nivel de significación y la potencia del test planteado bajo una amplia variedad de escenarios prácticos.

Supongamos que tenemos un proceso espacial de dos dimensiones Z medido en $N = n_1 \times n_2$ con datos regularmente espaciados. Si Z es no estacionario, podemos descomponerlo en una suma de k regiones y para ello podemos utilizar el criterio AIC (Fuentes, 2001a), o por experiencia, por ejemplo, en un conocimiento previo de las características físicas de la región D . Sin embargo, el número de regiones k está restringido por el número de localizaciones originales N .

En este estudio de simulación, fijaremos el tamaño de la malla a $N = 20 \times 20$ porque es donde mejores resultados se han obtenido en análisis previos de estas clases de procesos espaciales observados en regiones regulares (Mateu y Juan, 2004). Variaremos el parámetro de suavizamiento ($\nu = 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4$) para cubrir distintos procesos con los diferentes tipos de variabilidad. También se consideran distintas combinaciones para los parámetros *sill* y el rango ((rango, *sill*)=(10,2), (10,2.9), (166,2.9), (200,2.9), (300,2.9)), centrándonos en los casos para los cuales hay mucha o poca diferencia entre los rangos. En la práctica, $f(\boldsymbol{\omega})$ es estimado mediante el correspondiente periodograma, $I_N(\boldsymbol{\omega})$, el cual puede tener *taper* o no. Nos centraremos en tres casos, a) no *taper*, b) *taper* multiplicativo y c) *rounded taper* y usaremos 400 frecuencias de Fourier para la evaluación de cada periodograma.

Bajo la hipótesis nula, simulamos un ruido blanco o puro *nugget* (como ejemplo de no dependencia espacial) y como hipótesis alternativa consideramos un proceso espacial de *Matérn*, con las distintas combinaciones de posibilidades anteriores. Para cada combinación de posibilidades, hemos realizado 1000 repeticiones para obtener el nivel de significación y la potencia del test. Además, se analiza como funciona el test bajo la presencia de un efecto *nugget* igual a 2 para compararlo con los casos en los que no hay efecto *nugget*.

Los resultados del test, en formato gráfico, los podemos ver en las Figuras (6.2-6.8). Además, pueden ser comparados los distintos resultados en las Tablas (6.1-6.6).

El nivel de significación del test funciona bien en general para cualquier tipo de *taper* usado, obteniéndose valores menores que el 10%. El *taper* multiplicativo, nos da el mejor resultado mostrando los niveles de significación más bajos. El *tapering* produce resultados razonables si el parámetro ϵ (el parámetro de tipo *bandwidth*) es bajo. En particular $\epsilon = 10$ muestra mayores valores del nivel de significación. En general, en presencia de efecto *nugget*, hay claro incremento en los niveles de significación.

Respecto a la potencia del test, ésta es en general cercana al 100% cuando no aparece efecto *nugget*, independientemente del tipo de *taper* usado. Sin embargo, cuando un efecto *nugget* es observado, las cosas cambian dramáticamente, bajando los valores de la potencia. En este caso, las mayores potencias obtenidas son observadas cuando usamos menor valor del rango (10) y menores valores del parámetro de suavizado en la familia de *Matérn*.

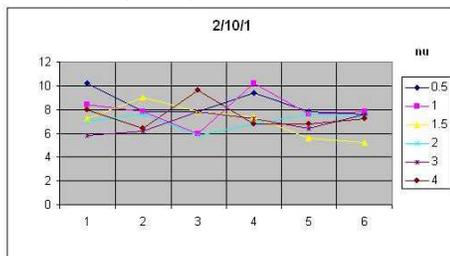
En la Figura (6.7) podemos ver la comparación de los distintos casos para $\epsilon = 1$ y sin *tapering*. En general no es muy diferente al caso en el que consideramos *tapering*.

Además, si comparamos el comportamiento del test bajo la variación de ϵ , en la Figura (6.8), podemos ver que en el caso de $\epsilon = 1$ disminuye rápidamente la potencia de test, algo que no ocurre con $\epsilon = 10$, y esto es debido al aumento del parámetro de *tapering*.

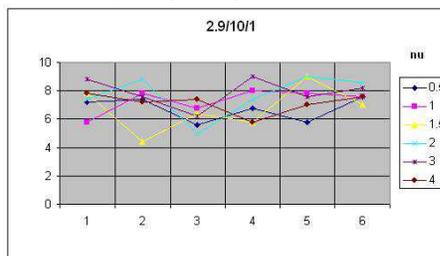
Cuando un efecto *nugget* aparece en los datos espaciales, y los parámetros de suavizamiento y rango de la familia *Matérn* son bastante grandes, el test da resultados con muchas variaciones.

Como conclusión, podemos afirmar que el test presenta una muy razonable potencia, siendo capaz de detectar la dependencia espacial existente en los datos. También en, general, falla en menos de un 10% en la detección de un ruido blanco. Por tanto estas conclusiones están avaladas por un número considerable de interesantes combinaciones que afectan de forma directa al test. Finalmente, en presencia de un efecto *nugget*, el test tiene que ser cuidadosamente utilizado.

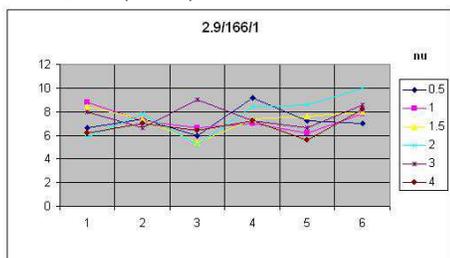
Figura(6.2.1)



Figura(6.2.2)



Figura(6.2.3)



Figura(6.2.4)

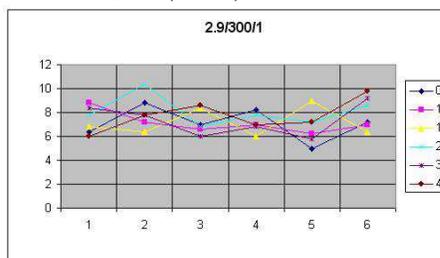
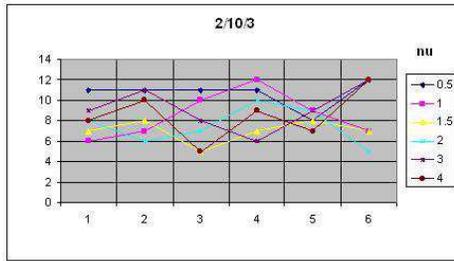
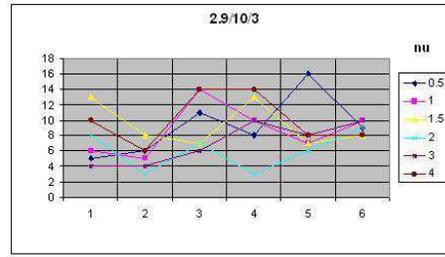


Figura 6.2: Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 1$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1=no *taper* con *nugget*=0, 2=no *taper* con *nugget*=2, 3=*taper* multiplicativo con *nugget*=0, 4=*taper* multiplicativo con *nugget*=2, 5=*rounded taper* con *nugget*=0, 6=*rounded taper* con *nugget*=2.

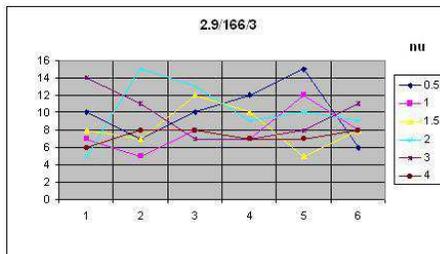
Figura(6.3.1)



Figura(6.3.2)



Figura(6.3.3)



Figura(6.3.4)

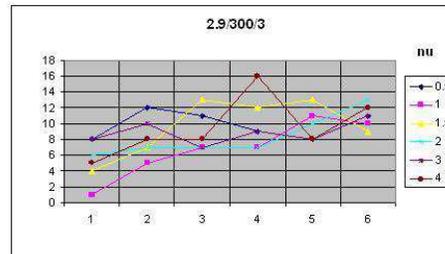
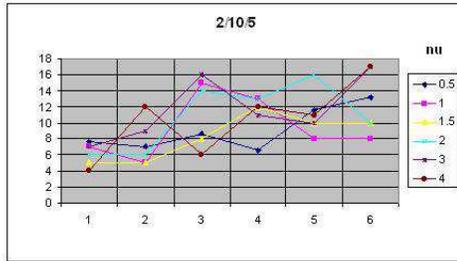
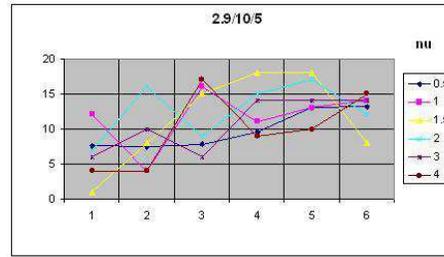


Figura 6.3: Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 3$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1= no *taper* con *nugget*=0, 2=no *taper* con *nugget*=2, 3=*taper* multiplicativo con *nugget*=0, 4=*taper* multiplicativo con *nugget*=2, 5=*rounded taper* con *nugget*=0, 6=*rounded taper* con *nugget*=2.

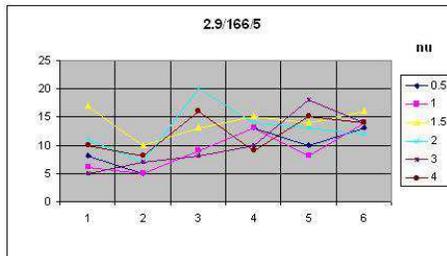
Figura(6.4.1)



Figura(6.4.2)



Figura(6.4.3)



Figura(6.4.4)

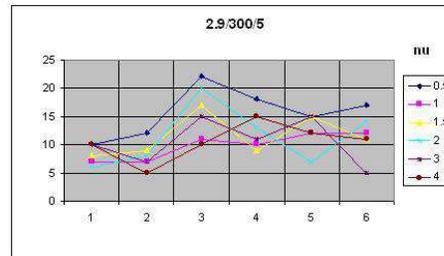
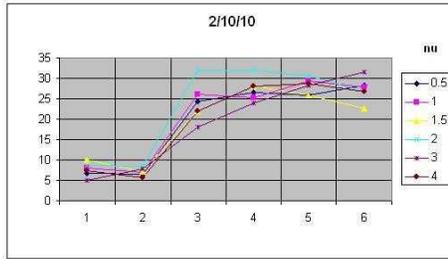
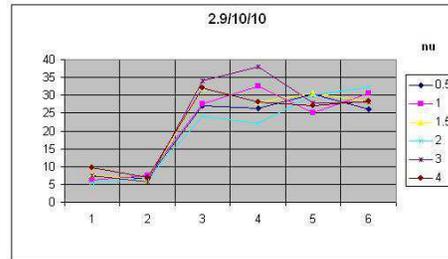


Figura 6.4: Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 5$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1= no *taper* con *nugget*=0, 2=no *taper* con *nugget*=2, 3=*taper* multiplicativo con *nugget*=0, 4=*taper* multiplicativo con *nugget*=2, 5=*rounded taper* con *nugget*=0, 6=*rounded taper* con *nugget*=2.

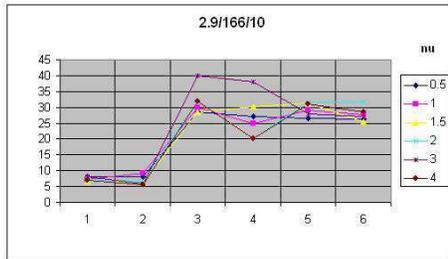
Figura(6.5.1)



Figura(6.5.2)



Figura(6.5.3)



Figura(6.5.4)

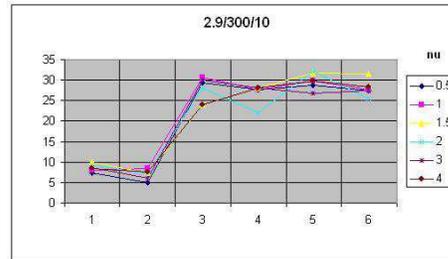
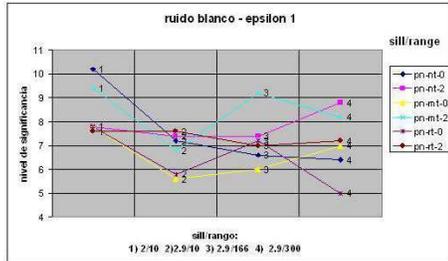
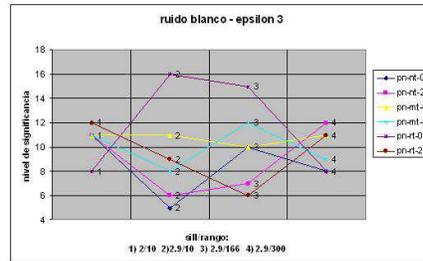


Figura 6.5: Evaluación del nivel de significación del test bajo diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y sill. Para los casos de *taper rounded* y multiplicativo usamos $\epsilon = 10$. Los valores del eje de las x hacen referencia a: 1= no *taper* con *nugget*=0, 2=no *taper* con *nugget*=2, 3=*taper* multiplicativo con *nugget*=0, 4=*taper* multiplicativo con *nugget*=2, 5=*rounded taper* con *nugget*=0, 6=*rounded taper* con *nugget*=2.

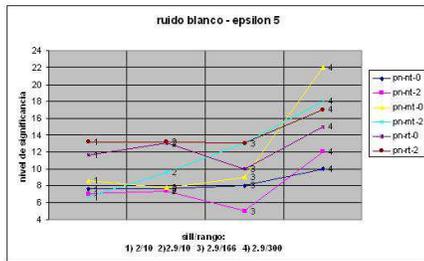
Figura(6.6.1)



Figura(6.6.2)



Figura(6.6.3)



Figura(6.6.4)

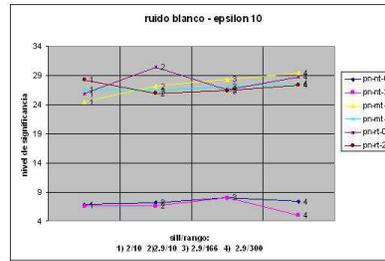


Figura 6.6: Evaluación del nivel de significación del test para los cuatro pares de valores de los parámetros rango y sill, en el caso de ruido blanco (pn) para las etiquetas de: pn-nt-0 (no taper, nugget=0), pn-nt-2 (no taper, nugget=2), pn-mt-0 (taper multiplicativo, nugget=0), pn-rt-2 (taper multiplicativo, nugget=2), pn-rt-0 (rounded taper, nugget=0), nt-rt-2 (rounded taper, nugget=2). Izquierdo superior $\epsilon = 1$, derecho superior $\epsilon = 3$, izquierdo inferior $\epsilon = 5$ y derecho inferior $\epsilon = 10$.

Tabla 6.1: Niveles de significación (S) y potencia (P) del test bajo varios escenarios cuando $\epsilon = 1$. La simbología es la siguiente: t1 = S con no *taper*, t2 = S con *taper* multiplicativo, t3 = S con *rounded taper*. Los casos entre paréntesis son los correspondientes a la presencia de efecto *nugget*.

Rango	Sill	ν	t1	t2	t3
10	2.0	0.5	10.2(7.8)	7.8(9.4)	7.8(7.6)
10	2.0	1.0	8.4(7.8)	6(10.2)	7.6(7.8)
10	2.0	1.5	7.2(9)	7.8(7.4)	5.6(5.2)
10	2.0	2.0	7(7.6)	5.8(6.8)	7.6(7.4)
10	2.0	3.0	5.8(6.2)	7.8(7.2)	6.4(7.6)
10	2.0	4.0	8(6.4)	9.6(6.8)	6.8(7.2)
10	2.9	0.5	7.2(7.4)	5.6(6.8)	5.8(7.6)
10	2.9	1.0	5.8(7.8)	6.8(8)	7.8(7.6)
10	2.9	1.5	7.8(4.4)	6.4(5.8)	9(7)
10	2.9	2.0	7.4(8.8)	5(7.4)	9(8.6)
10	2.9	3.0	8.8(7.6)	6.2(9)	7.6(8.2)
10	2.9	4.0	7.8(7.2)	7.4(5.8)	7(7.6)
166	2.9	0.5	6.6(7.4)	6(9.2)	7.2(7)
166	2.9	1.0	8.8(7.2)	6.6(7)	6.2(7.8)
166	2.9	1.5	8.4(7.4)	5.4(7.4)	7.6(8)
166	2.9	2.0	5.8(7.8)	5.2(8.4)	8.6(10)
166	2.9	3.0	8(6.6)	9(7.2)	6.6(8.6)
166	2.9	4.0	6.2(7)	6.4(7.2)	5.6(8.2)
300	2.9	0.5	6.4(8.8)	7(8.2)	5(7.2)
300	2.9	1.0	8.8(7.2)	6.6(7)	6.2(7)
300	2.9	1.5	6.8(6.4)	8.4(6)	9(6.4)
300	2.9	2.0	7.8(10.4)	6.8(7.8)	7.2(8.6)
300	2.9	3.0	8.4(7.8)	6(6.8)	5.8(9.2)
300	2.9	4.0	6(7.8)	8.6(7)	7.2(9.8)

Tabla 6.2: Niveles de significación(S) y potencia (P) del test bajo varios escenarios cuando $\epsilon = 3$. La simbología es la siguiente: t1 = S con no *taper*, t2 = S con *taper* multiplicativo, t3 = S con *rounded taper*. Los casos entre paréntesis son los correspondientes a la presencia de efecto *nugget*.

Rango	Sill	ν	t1	t2	t3
10	2.0	0.5	11(11)	11(11)	8(12)
10	2.0	1.0	6(7)	10(12)	9(7)
10	2.0	1.5	7(8)	5(7)	8(7)
10	2.0	2.0	8(6)	7(10)	9(5)
10	2.0	3.0	9(11)	8(6)	9(12)
10	2.0	4.0	8(10)	5(9)	7(12)
10	2.9	0.5	5(6)	11(8)	16(9)
10	2.9	1.0	6(5)	14(10)	7(10)
10	2.9	1.5	13(8)	7(13)	7(8)
10	2.9	2.0	8(3)	7(3)	6(9)
10	2.9	3.0	4(4)	6(10)	8(10)
10	2.9	4.0	10(6)	14(14)	8(8)
166	2.9	0.5	10(7)	10(12)	15(6)
166	2.9	1.0	7(5)	8(7)	12(8)
166	2.9	1.5	8(7)	12(10)	5(8)
166	2.9	2.0	5(15)	13(9)	10(9)
166	2.9	3.0	14(11)	7(7)	8(11)
166	2.9	4.0	6(8)	8(7)	7(8)
300	2.9	0.5	8(12)	11(9)	8(11)
300	2.9	1.0	1(5)	7(7)	11(10)
300	2.9	1.5	4(7)	13(12)	13(9)
300	2.9	2.0	6(7)	7(7)	10(13)
300	2.9	3.0	8(10)	7(9)	8(11)
300	2.9	4.0	5(8)	8(16)	8(12)

Tabla 6.3: Niveles de significación (S) y potencia (P) del test bajo varios escenarios cuando $\epsilon = 5$. La simbología es la siguiente: t1 = S con no *taper*, t2 = S con *taper* multiplicativo, t3 = S son *rounded taper*. Los casos entre paréntesis son los correspondientes a la presencia de efecto *nugget*.

Rango	Sill	ν	t1	t2	t3
10	2.0	0.5	7.6(7)	8.6(6.6)	11.6(13.2)
10	2.0	1.0	7(5)	15(13)	8(8)
10	2.0	1.5	5(5)	8(12)	10(10)
10	2.0	2.0	6(6)	14(13)	16(10)
10	2.0	3.0	7(9)	16(11)	13(17)
10	2.0	4.0	4(12)	6(12)	11(17)
10	2.9	0.5	7.6()	7.8(9.6)	13(13.2)
10	2.9	1.0	12()	16(11)	13(14)
10	2.9	1.5	1()	15(18)	18(8)
10	2.9	2.0	7()	9(15)	17(12)
10	2.9	3.0	6()	6(14)	14(14)
10	2.9	4.0	4()	17(9)	10(15)
166	2.9	0.5	8(5)	9(13)	10(13)
166	2.9	1.0	6(5)	9(13)	8(14)
166	2.9	1.5	17(10)	13(15)	14(16)
166	2.9	2.0	11(7)	20(14)	13(12)
166	2.9	3.0	5(7)	8(10)	18(14)
166	2.9	4.0	10(8)	16(9)	15(14)
300	2.9	0.5	10(12)	22(18)	15(17)
300	2.9	1.0	7(7)	11(10)	12(12)
300	2.9	1.5	8(9)	17(9)	15(11)
300	2.9	2.0	6(8)	20(13)	7(14)
300	2.9	3.0	10(7)	15(11)	15(5)
300	2.9	4.0	10(5)	10(15)	12(11)

Tabla 6.4: Niveles de significación (S) y potencia (P) del test bajo varios escenarios cuando $\epsilon = 10$. La simbología es la siguiente: t1 = S con no *taper*, t2 = S con *taper* multiplicativo, t3 = S son *rounded taper*. Los casos entre paréntesis son los correspondientes a la presencia de efecto *nugget*.

Rango	Sill	ν	t1	t2	t3
10	2.0	0.5	6.8(6.6)	24.4(26.6)	25.8(28.2)
10	2.0	1.0	8(7)	26(25.2)	29.4(27.8)
10	2.0	1.5	10(7.2)	22(28)	25.8(22.6)
10	2.0	2.0	8.8(8.4)	32(32)	30.6(26.8)
10	2.0	3.0	5(7.8)	18(24)	28.2(31.6)
10	2.0	4.0	7.4(5.6)	22(28)	28.8(26.8)
10	2.9	0.5	7.2(6.6)	27.2(26.4)	30.4(26)
10	2.9	1.0	6.2(7.4)	27.6(32.6)	25.2(30.8)
10	2.9	1.5	7.6(6)	32(28)	30.6(28.2)
10	2.9	2.0	5.4(6.8)	24(22)	30(32.2)
10	2.9	3.0	7.4(5.6)	34(38)	27.8(28)
10	2.9	4.0	9.8(7)	32(28)	27.2(28.2)
166	2.9	0.5	8(8)	28.4(27)	26.6(26.4)
166	2.9	1.0	7.4(9.2)	29.8(25)	29.2(27.8)
166	2.9	1.5	6.8(6.2)	28.6(30.2)	31.2(25.4)
166	2.9	2.0	7.2(6.6)	32(20)	31.6(31.6)
166	2.9	3.0	8(6)	40(38)	28(27)
166	2.9	4.0	7(5.6)	32(20)	31(28.4)
300	2.9	0.5	7.4(5)	29.4(27.6)	28.8(27.4)
300	2.9	1.0	8(8.4)	30.6(27.6)	29.8(27.6)
300	2.9	1.5	10(7.4)	24(28)	31.8(31.6)
300	2.9	2.0	9.2(7.2)	28(22)	32.2(25.6)
300	2.9	3.0	8.6(6)	30(28)	26.8(27.5)
300	2.9	4.0	8.4(7.6)	24(28)	29.8(28.4)

Tabla 6.5: Niveles de significación (S) y potencia (P) del test bajo varios escenarios cuando $\epsilon = 1$. La simbología es la siguiente: t4 = P con no *taper*, t5 = P con *taper* multiplicativo, t6 = P con *rounded taper*. Los casos entre paréntesis son los correspondientes a la presencia de efecto *nugget*.

Rango	Sill	ν	t4	t5	t6
10	2.0	0.5	100(66.8)	100(96.6)	100(63.2)
10	2.0	1.0	100(32)	100(28.4)	100(34.6)
10	2.0	1.5	100(23.4)	100(15.4)	99.8(17.2)
10	2.0	2.0	100(19.8)	100(12)	99.4(16.4)
10	2.0	3.0	100(15.2)	100(9.6)	99.6(13)
10	2.0	4.0	100(14.4)	100(11.4)	99.8(10.2)
10	2.9	0.5	100(78.4)	100(63.4)	100(76)
10	2.9	1.0	100(51.6)	100(34.4)	100(41.4)
10	2.9	1.5	100(31.8)	100(20.8)	100(24)
10	2.9	2.0	100(27)	100(17)	99.4(22.2)
10	2.9	3.0	100(20)	100(10.8)	99(13.2)
10	2.9	4.0	100(14.2)	100(11.6)	98.4(13.4)
166	2.9	0.5	100(16.8)	100(8.4)	100(13.4)
166	2.9	1.0	100(9.6)	100(8.4)	100(6)
166	2.9	1.5	100(9)	100(6.8)	100(5.8)
166	2.9	2.0	100(8.4)	100(6.2)	100(7)
166	2.9	3.0	100(8.8)	100(6.4)	100(7.4)
166	2.9	4.0	100(5.6)	100(7.8)	100(8.2)
300	2.9	0.5	100(8.2)	100(10.8)	100(10.4)
300	2.9	1.0	100(7.4)	100(8.6)	100(6.6)
300	2.9	1.5	100(6.6)	100(7)	100(6.6)
300	2.9	2.0	100(6)	100(9)	100(7.6)
300	2.9	3.0	100(6)	100(6.6)	100(6.6)
300	2.9	4.0	100(6.8)	100(6.2)	100(5.8)

Tabla 6.6: Niveles de significación (S) y potencia (P) del test bajo varios escenarios cuando $\epsilon = 10$. La simbología es la siguiente: t5 = P con *taper* multiplicativo, t6 = P con *rounded taper*. Los casos entre paréntesis son los correspondientes a la presencia de efecto *nugget*.

Rango	<i>Sill</i>	ν	t5	t6
10	2.0	0.5	100(45.8)	100(57.2)
10	2.0	1.0	100(34.8)	100(38.6)
10	2.0	1.5	100(32)	100(31.8)
10	2.0	2.0	100(26)	100(33.4)
10	2.0	3.0	100(24)	100(30.8)
10	2.0	4.0	100(38)	100(29.8)
10	2.9	0.5	100(53.6)	100(63.8)
10	2.9	1.0	100(35.6)	100(45.2)
10	2.9	1.5	100(30.2)	100(33.6)
10	2.9	2.0	100(30.2)	100(36.4)
10	2.9	3.0	100(30.2)	100(32.6)
10	2.9	4.0	100(30.2)	100(32)
166	2.9	0.5	100(33)	100(33.6)
166	2.9	1.0	100(26.4)	100(25.8)
166	2.9	1.5	100(22.8)	100(27.6)
166	2.9	2.0	100(18)	100(29.6)
166	2.9	3.0	100(32)	100(29)
166	2.9	4.0	100(18)	100(26.2)
300	2.9	0.5	100(28.2)	100(27.4)
300	2.9	1.0	100(24.4)	100(30.4)
300	2.9	1.5	100(26)	100(26)
300	2.9	2.0	100(22)	100(27.4)
300	2.9	3.0	100(40)	100(28)
300	2.9	4.0	100(26)	100(27)

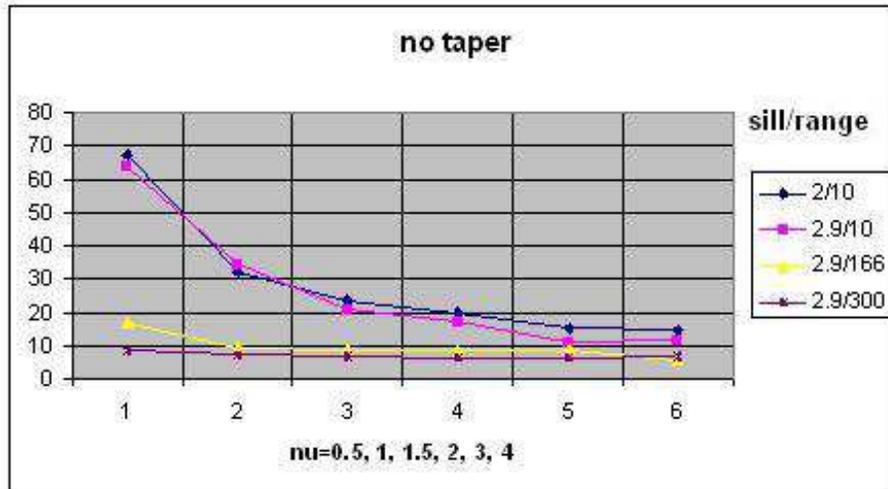
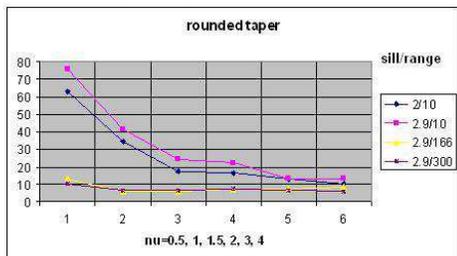
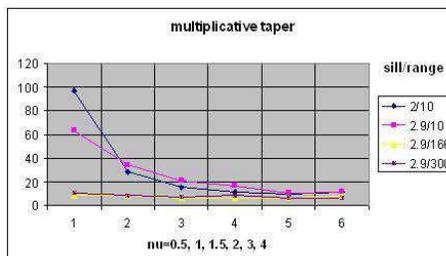


Figura 6.7: Evaluación de la potencia del test para diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*, correspondientes al caso $\epsilon = 1$, bajo la presencia de *nugget*=2 y sin *taper*.

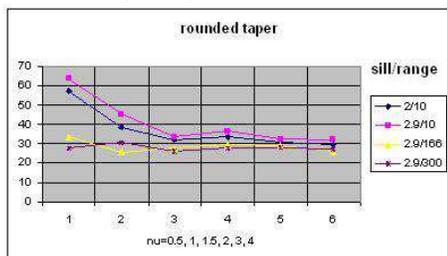
Figura(6.8.1)



Figura(6.8.2)



Figura(6.8.3)



Figura(6.8.4)

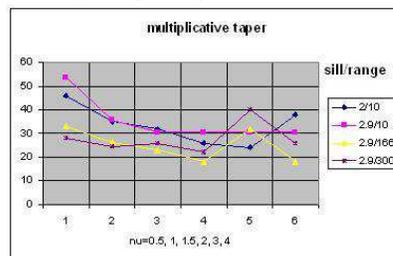


Figura 6.8: Evaluación de la potencia del test para diferentes valores de los parámetros de suavizado, rango y *sill*. Los dos primeros gráficos correspondientes al caso $\epsilon = 1$ y los dos siguientes al caso $\epsilon = 10$. Todos los casos bajo la presencia de *nugget* = 2 y con *tapering rounded* y multiplicativo.

6.2. Test de estacionariedad

Los procesos espaciales en ciencias medioambientales son normalmente no estacionarios, en el sentido en que la estructura espacial depende de la localización, y así, los métodos estándar de interpolación espacial son inadecuados. Con esto, queda claro que muchas soluciones en problemas medioambientales deben tratarse bajo no estacionariedad del proceso espacial subyacente. Es verdad que muchas veces la decisión de tomar el problema como estacionario o no estacionario no está basado en un mero escrutinio estadístico de valores de datos, sino por las consideraciones físicas del problema. Sin embargo, al menos dos razones que refuerzan la necesidad de las herramientas estadísticas para la detección de la no estacionariedad son: (a) los investigadores no tienen siempre acceso a todos los datos físicos, y no es posible un modelo físico apropiado subyacente, y (b) como procedimiento de la validación de la no estacionariedad, incluso conociendo a priori los datos.

Los últimos años, probablemente el método de estudio más extendido para procesos espaciales no estacionarios es la aproximación por deformación realizada por Sampson y Guttorp (1992); ver también Guttorp y Sampson (1994). Haas (1995, 1996) propone una aproximación a un *kriging* espacial no estacionario basado en ventanas móviles. Higdon *et al.* (1999) aportan un modelo para tener en cuenta la heterogeneidad en la función de covarianza espacial de un proceso espacial, usando una especificación de media móvil de un proceso Gaussiano. Otra aproximación fue desarrollada por Nychka y Saltzman (1998) y Holland *et al.* (1999). Recientemente, en una serie de artículos (Fuentes, 2001a, 2002; Fuentes y Smith, 2001; Mateu y Juan, 2004), algunos métodos espectrales para análisis y la interpolación de procesos no estacionarios medioambientales son presentados y analizados.

Por ejemplo, la concentración a nivel de tierra de un contaminante de aire dependerá de la proximidad de la fuente, la meteorología que prevalece, y la naturaleza y la extensión de las reacciones químicas atmosféricas entre las fuentes y el receptor. La interacción de esos procesos atmosféricos químicos y físicos y las fuentes de las localizaciones tienden a producir datos en patrones que muestran gran variabilidad espacial (Fuentes, 2001b). Debido a que los patrones espaciales de concentraciones y flujos de contaminantes son procesos no estacionarios, en los casos en los que la estructura espacial cambia con la localización, los métodos estándar de interpolación espacial son inadecuados.

Aquí nos centraremos en la metodología presentada por Fuentes, en los artícu-

los comentados anteriormente, para la interpolación espacial de procesos no estacionarios usando métodos espectrales, para proponer un test de simple diagnóstico de no estacionariedad de un proceso espacial.

6.2.1. Un test formal de estacionariedad para un proceso espacial

Supongamos que deseamos comprobar si un proceso espacial de dos dimensiones Z es no estacionario, con el objetivo de una mejor interpolación espacial. Entonces, suponemos que Z está medido en $N = n_1 \times n_2$ datos regularmente espaciados. En este punto, hay que hacer notar que: (a) En la práctica, podemos tener datos faltantes en distintas localizaciones en la malla; (b) La fuente de datos puede estar en una malla irregular. En este caso, y teniendo en cuenta los resultados en Renshaw (2002), podemos definir una malla regular apropiada para aproximar las localizaciones de los datos irregulares, y proceder normalmente con el test propuesto. Entonces, descomponemos Z en una suma de procesos estacionarios locales Z_i para k subregiones que cubren la región de interés llamada D . Como ya hemos comentado el número de regiones (k) puede ser encontrado usando un criterio AIC (Fuentes, 2001b), o por experimentación con el conocimiento de las características físicas de la región D . Sin embargo, el valor de k está restringido por el número de localizaciones de muestras originales N . Hacer notar que en cada subregión S_i tendremos sólo un grupo de N datos, y como mostraremos más tarde, la potencia del test estadístico propuesto depende mucho del número de localizaciones de datos en cada subregión. Además, cada subregión no necesita ser del mismo tamaño comparado con las otras, sin embargo, definimos todas las subregiones k bajo los mismos tamaños y esto facilitará el trabajo de las comparaciones del test.

Supongamos que la densidad espectral de un proceso Z proviene de la clase de *Matérn*, dada por (3.88), con vector de parámetros positivos dados por $\theta_i = (\phi_i, \nu_i, \alpha_i)$. Recordar que los parámetros ϕ_i miden la variabilidad espacial. Centrándonos en valores de altas frecuencias, una aproximación de la expresión de (3.88) viene dada por $f_i(\boldsymbol{\omega}) = \phi_i(|\boldsymbol{\omega}|^2)^{-(\nu_i-1)}$, con ν_i y ϕ_i como parámetros críticos. Trabajando en escala logarítmica, podemos definir el siguiente modelo lineal $\log(f_i(\boldsymbol{\omega})) = \beta_{0i} + \beta_{1i}\log(|\boldsymbol{\omega}|)$, donde $\beta_{0i} = \log(\phi_i)$ y $\beta_{1i} = -2(\nu_i + 1)$.

Recordar que el parámetro α_i^{-1} define el rango de autocorrelación, el parámetro ν_i mide el grado de suavizamiento del proceso, y $\phi_i = \sigma_i^2 \alpha_i^{2\nu_i}$, es un cociente entre la varianza *sill* y el rango, que mide la variabilidad espacial. Notar que el

parámetro *sill* es la integral de la función de densidad espectral, $\int_{\mathbb{R}^2} f(\omega) d\omega$.

En la práctica, $f_i(\boldsymbol{\omega})$ es estimada por el correspondiente periodograma *tapered* $I_N^i(\boldsymbol{\omega})$. Teniendo en cuenta que los valores del periodograma son independientes asintóticamente, podemos usar las técnicas de regresión para estimar el valor de la pendiente y la ordenada en el origen.

Un diagnóstico para detectar la no estacionariedad de Z , podría posibilitar el detectar diferencias entre los valores de β_{0i} y β_{1i} para diferentes subregiones (diferentes valores de i). Varias alternativas pueden considerarse. Un simple mapa de esos valores en la región de interés, podría ser un primer paso. Sin embargo, necesitamos un test formal para detectar las posibles diferencias significativas. Vamos a considerar el siguiente test para la igualdad de ecuaciones de regresión (Rao, 1973, p.281). Tomamos $y_i = \log(I_N^i(\boldsymbol{\omega}))$ y $x_i = \log(|\boldsymbol{\omega}|)$, para formar la ecuación de regresión $y_i = \beta_{0i} + \beta_{1i}x_i$. Consideramos otra ecuación dada por $y_j = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_j$. Tenemos n_i y n_j que definen el tamaño de la muestra. Aquí, adaptamos un test conocido en el contexto de la regresión, para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta_{0i} = \beta_{0j}$ y $\beta_{1i} = \beta_{1j}$. Este procedimiento puede ser fácilmente generalizado para la comparación de varias ecuaciones de regresión. Definimos las sumas correctas de productos para las segundas series como: $S_{xy}^j = \sum (x_j - \bar{x}_j)(y_j - \bar{y}_j)$ y $S_y^j = \sum (y_j - \bar{y}_j)^2$. Esas cantidades son suficientes para determinar la función de regresión $y_i = \beta'_{0j} + \beta'_{1j}x_i$. Entonces, la suma de los residuos de los cuadrados para los casos de regresiones separadas viene calculado por $R_0^2 = S_y^j - \beta'_{1j}S_{xy}^j + S_y^i - \beta'_{1i}S_{xy}^i$ y tiene $n_i + n_j - 4$ grados de libertad. Consideramos las muestras en diferentes subregiones todas juntas y las consideramos como una simple muestra. Procediendo del mismo modo, calculamos R_1^2 , la suma de los residuos de cuadrados para el caso de regresión común, el cual tiene $n_i + n_j - 2$ grados de libertad. Finalmente, realizamos el análisis de la varianza del test sobre la igualdad de las regresiones (Rao, 1973).

Una guía para una implementación práctica de este contraste es la siguiente. Dados unos datos de un proceso espacial, datos regularmente espaciados (ver los comentarios anteriores en el caso de ser irregularmente espaciados): (a) Seleccionar un número de subregiones, con igual tamaño si es posible; (b) Para cada subregión, estimar la densidad espectral sobre un rango de frecuencias de Fourier por medio del periodograma. Seleccionar un *data taper*, por ejemplo el tipo *rounded*; (c) Para cada subregión, estimar la ordenada en el origen y la pendiente de la correspondiente ecuación de regresión. Así, calcular los parámetros estimados de la función de covarianza espacial; (d) Evaluar el test estadístico para ver si aparecen diferencias espaciales, por ejemplo debido a un comportamiento local

diferente del proceso espacial.

Sin embargo, antes del uso del procedimiento del test en la práctica, necesitamos analizar el error tipo I y la potencia del test. Consideramos para ello el siguiente procedimiento. Estimar, usando las técnicas de regresión, el correspondiente vector de parámetros θ_i , para cualquier subregión dada. Elegir, entre los valores obtenidos, un valor del parámetro, llamado θ_0 , el cual será tomado fijo para todas las subregiones. Entonces, usamos un test de Monte Carlo basado en simulaciones de procesos espaciales subyacentes con θ_0 para crear el test de hipótesis formal, donde la condición de *no diferencias entre los valores de dos parámetros* define la hipótesis nula. Hay que hacer notar que el valor del parámetro observado de la subregión i -ésima, θ_i , es comparado con un número de simulaciones (400 en nuestro caso) bajo θ_0 . Si θ_i es el $4 \times p$ más grande, el nivel de significación obtenido del test es $p\%$.

En este caso, evaluamos la significación del test propuesto usando el concepto de Nivel de Significación Esperado (*Expected Significance Level*, ESL), el cual fue primeramente introducido por Dempster y Schatzoff (1965). Comentarios sobre el ESL han sido ya hechos en el capítulo 4.

6.2.2. Estudio del comportamiento del test bajo simulación

Para analizar varias posibilidades con el fin de ser lo más generalistas posible, presentamos un estudio de simulación para evaluar α y $1 - \beta$ del test propuesto. Consideramos un proceso Z medido sobre $N = 20 \times 20, 10 \times 10$ y 5×5 y bajo varios valores de rango y *sill*. Además Z se supone proveniente de una familia de *Matérn* con ν fijo igual a 1.

Una primera evaluación de esta técnica fue hecha a través de un procedimiento gráfico aplicado sobre los p-valores obtenidos mediante Monte Carlo. Supongamos que el vector de parámetros θ_i ha sido estimado en cada subregión. Deseamos comparar este valor con un valor del parámetro fijo, θ_0 , para las cuatro subregiones, donde θ_0 puede ser o no el mismo que θ_i . Tenemos ahora 400 simulaciones de θ_0 como condición y calculados un grupo de p-valores para cada θ_i , obtenido por el procedimiento explicado anteriormente. Bajo la hipótesis nula de $\theta_0 = \theta_i$, el p-valor muestra un comportamiento semejante al de una distribución uniforme de rango $(0, 1)$. Y cuando una diferencia real existe, el p-valor muestra diferencias con la distribución uniforme.

Los resultados para $N = 20 \times 20, N = 10 \times 10$ y $N = 5 \times 5$ son mostrados en

las Figuras (6.9-6.11). Hacer notar que en el caso para $N = 5 \times 5$, el procedimiento puede no detectar diferencias reales (por ejemplo, el caso de rangos = 200, 166), aunque sí puede detectarlas cuando las diferencias reales de rango son significativas como es el caso para 166 y 10. La correspondiente línea bajo la hipótesis nula, de no diferencia, aparece con círculos y el comportamiento, en todas las ocasiones, bajo $N = 10 \times 10$, es una uniforme. Las líneas marcadas con cruces indican el p-valor cuando aparecen diferencias reales. Si son compatibles con la distribución Uniforme, el test no podría identificar las diferencias espaciales.

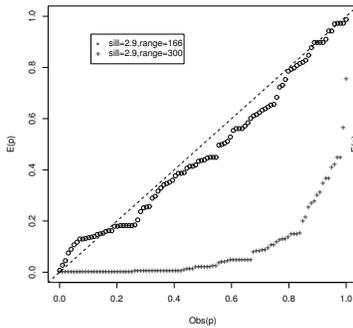
En general, el procedimiento funciona bien para cualquier caso, particularmente usando mallas de gran tamaño.

Pasamos ahora a evaluar el test propuesto basándonos en la igualdad de los coeficientes de regresión, siguiendo Rao (1973). Para analizar el comportamiento bajo la hipótesis nula de *no diferencias entre los parámetros para las $k = 4$ subregiones*, para evaluar el error tipo I, consideramos las mismas combinaciones de parámetros en las cuatro subregiones y realizamos 1000 simulaciones, bajo las anteriores condiciones. El análisis de la varianza es posteriormente considerado. Los porcentajes de rechazo, bajo el nivel de significación de 0.05, son mostrados en la Tabla (6.7). Para analizar el comportamiento bajo la hipótesis de *diferencias entre los parámetros para las 4 subregiones*, para evaluar la potencia del test, consideramos los siguientes grupos de parámetros: (2.9, 300), (2.9, 200), (2.9, 10). En este caso, dos de las subregiones son definidas con una combinación y las otras dos con combinaciones diferentes de la primera. El procedimiento es repetido 1000 veces. Las potencias estimadas aparecen en la Tabla (6.8). Observando las Tablas (6.7 y 6.8), podemos ver que este test puede ser útil para detectar diferencias espaciales cuando están presentes y detectar estacionariedad cuando no hay diferencias espaciales, cuando el tamaño de las mallas donde el proceso es observado es al menos 10×10 . El test proporciona resultados erróneos para tamaños menores.

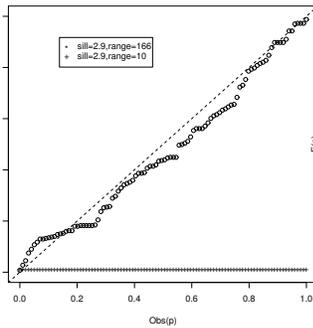
Hemos mostrado un procedimiento para detectar la no estacionariedad basado en la representación espectral de un proceso no estacionario y en el caso particular de la familia de *Matérn* de densidades espectrales. El test ha sido capaz de detectar diferencias, cuando realmente existen, y detectar estacionariedad cuando aparece.

Sin embargo, en los problemas reales, la no estacionariedad puede ser suave, las regiones podrían no ser bien conocidas y los datos pueden estar espaciados irregularmente. Algunas de estas posibilidades han sido consideradas, pero sólo hemos analizado un número limitado de posibles escenarios, pero una mayor

Figura (6.9.1)



Figura(6.9.2)



Figura(6.9.3)

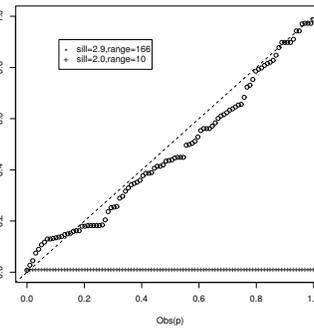


Figura (6.9.4)

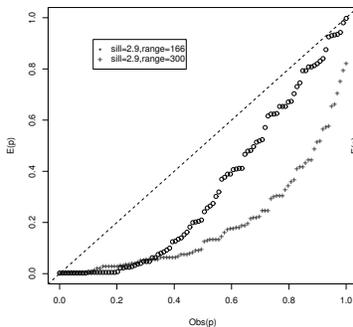


Figura (6.9.5)

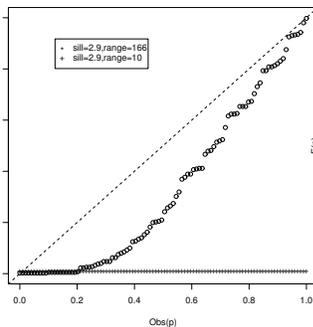


Figura (6.9.6)

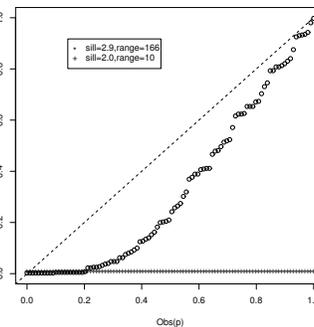


Figura (6.9.7)

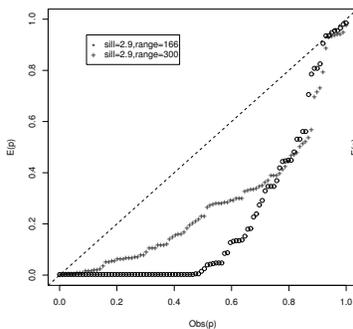


Figura (6.9.8)

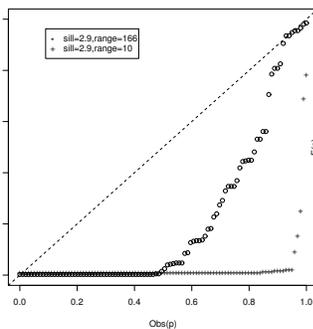


Figura (6.9.9)

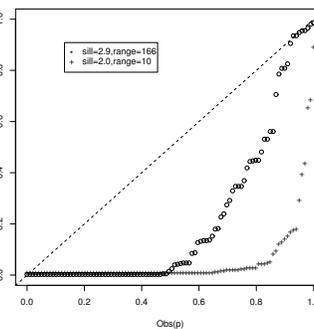


Figura 6.9: p – valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (primera fila), $N = 10 \times 10$ (segunda fila), $N = 5 \times 5$ (tercera fila) y $\nu = 0.5$. Primera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); Segunda columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); Tercera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).

Figura (6.10.1)

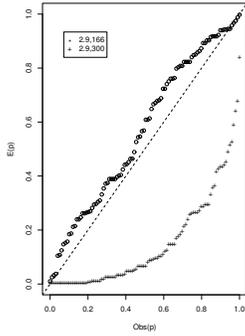


Figura (6.10.2)

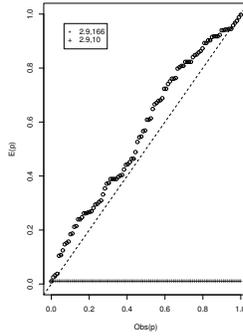


Figura (6.10.3)

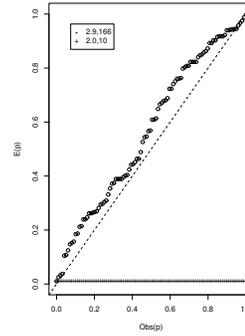


Figura (6.10.4)

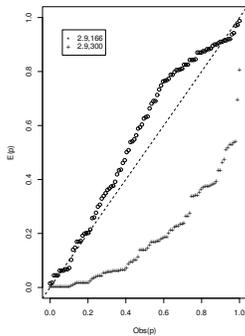


Figura (6.10.5)

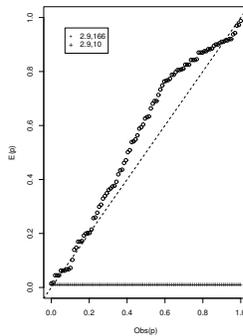


Figura (6.10.6)

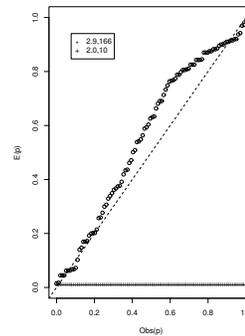


Figura (6.10.7)

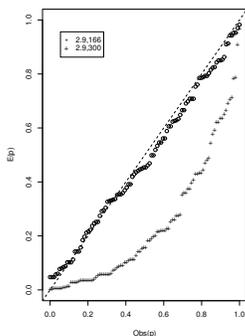


Figura (6.10.8)

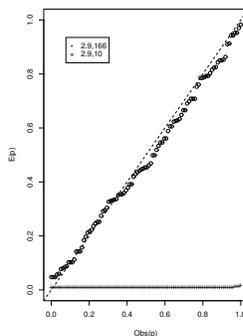


Figura (6.10.9)

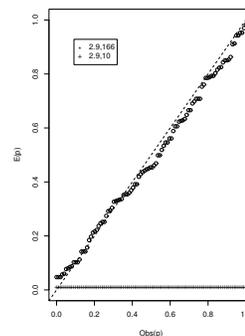


Figura 6.10: p - valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (primera fila), $N = 10 \times 10$ (segunda fila), $N = 5 \times 5$ (tercera fila) y $\nu = 1.0$. Primera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); Segunda columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); Tercera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).

Figura (6.11.1)

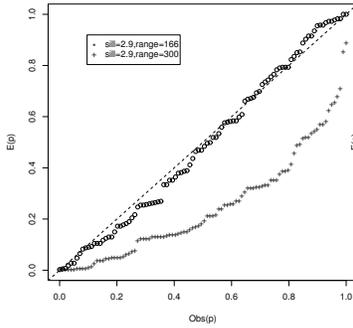


Figura (6.11.2)

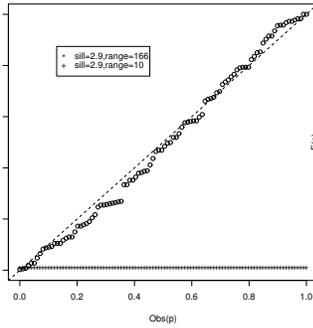


Figura (6.11.3)

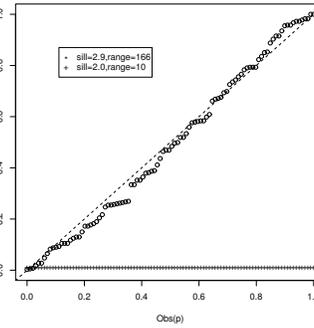


Figura (6.11.4)

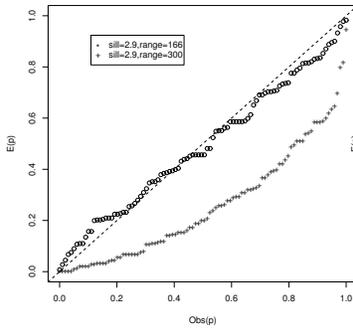


Figura (6.11.5)

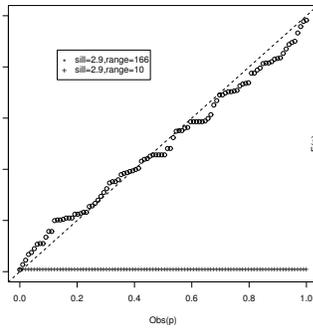


Figura (6.11.6)

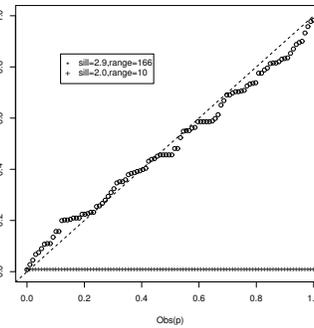


Figura (6.11.7)

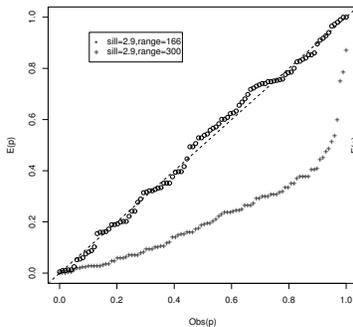


Figura (6.11.8)

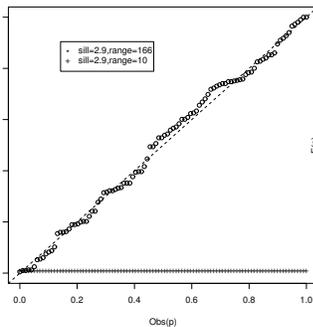


Figura (6.11.9)

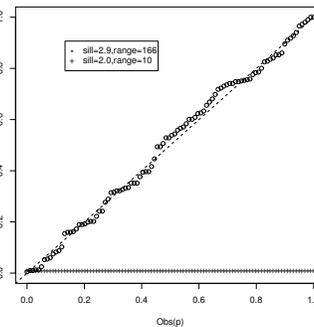


Figura 6.11: p - valores Observados frente Esperados bajo H_o (no diferencias) y H_a (diferencias reales) en el caso donde los datos son observados en una malla regular de $N = 20 \times 20$ (primera fila), $N = 10 \times 10$ (segunda fila), $N = 5 \times 5$ (tercera fila) y $\nu = 1.5$. Primera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,300) (Cruces); Segunda columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.9,10) (Cruces); Tercera columna: (2.9,166) vs (2.9,166) (Círculos) y (2.0,10) (Cruces).

Tabla 6.7: Tasa de rechazo (en porcentajes) al 0.05 (Error tipo I) bajo la hipótesis nula para el test basado en la igualdad de los coeficientes de regresión.

<i>sill</i>	rango	$N = 20 \times 20$	$N = 10 \times 10$	$N = 5 \times 5$
2.9	300	0.8	1.9	12.3
2.9	10	1.8	3.1	19.1
2.0	10	2.0	3.7	18.3
2.9	166	0.4	2.1	20.6
2.9	200	0.6	1.9	16.7

Tabla 6.8: Potencias estimadas (en porcentajes) al 0.05 bajo la hipótesis alternativa para el test basado en la igualdad de los coeficientes de regresión.

$(sill, \text{rango})$	$N = 20 \times 20$	$N = 10 \times 10$	$N = 5 \times 5$
(2.9,300) vs (2.9,200)	98.3	88.6	37.7
(2.9,300) vs (2.9,10)	99.2	92.2	40.2
(2.9,200) vs (2.9,10)	99.1	89.6	39.1

variedad de casos pueden ser analizados considerando una mayor variación de los distintos parámetros.

Capítulo 7

Aplicación: análisis geoestadístico espacial y espectral

Índice General

7.1. Introducción	195
7.2. Descripción de variables y zona de estudio	198
7.2.1. Zona de estudio	198
7.2.2. Descripción de las variables y toma de muestras	198
7.3. Estimaciones espaciales y predicciones mediante <i>kri- ging</i>	203
7.4. Análisis espectrales	213

7.1. Introducción

En este capítulo presentamos un análisis espacial de la variable Conductividad Eléctrica (CE) referida a extracto de saturación a 25°C, que junto a las demás variables que actuarán como secundarias, han sido obtenidas por muestreo y tratadas para su posterior estudio por el Centro de Investigaciones sobre Desertificación (CIDE). Este análisis espacial se presentará en formato geoestadístico bajo el dominio espacial y en formato espectral bajo el dominio frecuencial. La Conductividad Eléctrica es la variable que nos permite diagnosticar la existencia de problemas de salinidad por exceso de sales solubles.

En general, dentro de este contexto, podemos hablar de dos tipos de variables o propiedades que afectan al suelo, las propiedades físicas y químicas del suelo, como podemos ver en Porta, (1986), Porta *et al.*, (1999) y M.A.P.A., 1986.

Dentro de las propiedades físicas del suelo, podemos hablar de *elementos gruesos*, que son los fragmentos de roca o de mineral de diámetro aparente superior a 2 mm y se expresa en porcentaje en volumen respecto al horizonte muestreado, si se considera el perfil del suelo, o al total si se trata de una muestra superficial, el *color*, que permite inferir otras propiedades como el contenido en materia orgánica o la presencia de óxidos de hierro y manganeso, sales, y otros minerales y la *textura*, que expresa las proporciones relativas de las distintas partículas minerales inferiores a 2 mm (arena, limo y arcilla), agrupadas por clases de tamaños en fracciones granulométricas, tras la destrucción de los agregados.

En este último grupo aparece una de las variables utilizadas, el porcentaje de arcillas. Las diferentes combinaciones de porcentajes de arcilla, limo y arena, dan lugar a lo que se conoce como clases texturales (Porta, 1986). Cada clase textural agrupa a los suelos que presentan un mismo comportamiento respecto al agua y a las plantas. Constituye una de las características más estables ya que es una propiedad permanente en el tiempo, algo que nos permite estudiarla de forma solo espacial sin tener en cuenta la componente temporal.

En lo que respecta a las propiedades químicas del suelo, podemos hablar de la Materia Orgánica, que constituye el conjunto de los residuos animales y vegetales en distintos estadios de descomposición. Es un componente minoritario de los suelos con relación a la fracción mineral; no obstante presenta un papel predominante en la estructuración del suelo, en la retención de agua, en la aireación y en la nutrición de las plantas. Un elevado contenido en materia orgánica, en general, proporciona al suelo una serie de características altamente favorables. Se expresa como el porcentaje de carbono orgánico total por muestra de suelo seco y porcentaje de materia orgánica total por muestra de suelo seco.

El pH o concentración de iones hidrógeno en la solución del suelo, indica la acidez o basicidad del mismo. En los sistemas naturales el pH varía entre 3, en suelos muy ácidos, y 12 en los suelos muy básicos. Se ha medido a partir del extracto de pasta saturada. Entre otras propiedades afecta a la unión y dispersión de arcillas, a la movilidad de los distintos elementos químicos del suelo y por tanto la nutrición de plantas y los niveles de toxicidad ya que si disminuye la solubilidad, las plantas no podrán absorber el elemento y si aumenta excesivamente la solubilidad, puede que produzca niveles de toxicidad y a la descomposición de la materia orgánica.

La Capacidad de Intercambio Catiónico (CIC) es la propiedad de un cambiador (una superficie cargada electrónicamente como las arcillas o la materia orgánica), para adsorber cationes procedentes de la fase líquida, desadsorbiendo, a su vez, un número equivalente de otros cationes que se encontraban unidos a la superficie del cambiador. Constituye un índice de la fertilidad del suelo, valores de CIC entre 8-10 cmol(+) Kg⁻¹. Se expresa en centimoles de cargas positivas por kilogramo. Es importante por su relación con la materia orgánica y la textura.

La saturación de bases de cambio representa la proporción de cationes nutrientes presentes en un suelo respecto a la capacidad total de unión de cationes que tiene un suelo; considerando a los cationes: Ca²⁺, Mg²⁺, Na⁺, K⁺; nutrientes esenciales de las plantas. Es, por tanto, una medida de la fertilidad del suelo. Afecta sobretodo a los carbonatos, al pH y al CIC.

Los carbonatos y los bicarbonatos solubles tienen su interés debido a su tendencia a precipitar con cationes divalentes (Ca²⁺, Mg²⁺). Esto provoca que aumente la proporción de sodio en la solución y, por tanto, el riesgo de sodificación del mismo. Afecta a las demás variables ya que un elevado contenido en carbonatos produce la elevación del pH, la presencia de bicarbonatos es frecuente en suelos salinos y un exceso de carbonatos puede provocar problemas de nutrición en las plantas por antagonismo con otros elementos químicos.

En relación a los carbonatos tenemos la caliza activa, que constituye la fracción de carbonato cálcico de tamaño inferior a 50 micras. El análisis de la determinación de caliza activa se realiza cuando el porcentaje de carbonatos totales obtenidos, es superior al 10 %.

Finalmente vamos a comentar la principal variable para nuestro estudio que es la Conductividad Eléctrica (CE) referida a extracto de saturación de 25°C, ya estudiada bajo aplicaciones geostadísticas para explicación de la salinidad en Jordán *et al.* (2004), que permite diagnosticar la existencia de problemas de salinidad por exceso de sales solubles. Esta variable, con sus distintas características, nos permite justificar la necesidad de su análisis, ya que la zona de estudio es una zona de alto porcentaje agrícola, donde el principal cultivo son los cítricos, que pueden estar afectados por las propiedades del suelo y en concreto por la salinidad. Además, afectará al uso del suelo por la limitación producida por la salinidad, según la gradación del parámetro (Añó y Sánchez, 2003), para los distintos valores de la variable CE, muy baja (sin limitaciones: < 2 dS/m); baja (limitaciones ligeras: 2 – 4 dS/m); moderada (limitaciones moderadas: 4 – 8 dS/m); alta (limitaciones severas: 8 – 16 dS/m) y muy alta (limitaciones muy severas: > 16 dS/m).

7.2. Descripción de variables y zona de estudio

7.2.1. Zona de estudio

La zona de estudio está formada por la unión de cuatro zonas que son parte de cuatro comarcas, las de Vila-Real, Betxí, Burriana y Alquerías del Niño Perdido, y podemos ver en la siguiente Tabla (7.1) su distribución según los kilómetros cuadrados de cada zona, y el porcentaje de cultivo en cada uno de ellos. Esta distribución en cuatro zonas, va a ser nuestra justificación para la posterior separación y comparación de las distintas zonas para analizar la condición de estacionariedad e independencia.

Tabla 7.1: Datos del área de estudio.

Municipio	Sup. total (km ²)	Cultivos(km ²)	Terreno forestal (km ²)	Otras sup. (km ²)
Alquerias del N.P.	12.6	89.2	0.0	10.8
Betxí	21.4	73.6	9.4	17.0
Burriana	47.2	81.8	0.0	18.2
Vila-Real	55.1	74.0	0.0	26.0

Observamos en la Figura 7.1 un mapa con la distribución de los puntos de muestreo. Comentaremos como han sido estos puntos seleccionados y muestreados en la sección siguiente. En cada una de las posiciones, tenemos el valor de las distintas variables que a continuación vamos a describir.

7.2.2. Descripción de las variables y toma de muestras

En estudios previos, como Juan *et al.* (2003), podemos ver como la geoestadística nos permite analizar las dependencias espaciales en variables de suelos de forma clara. Comentamos en los siguientes párrafos, la metodología seguida para la toma de muestras.

Para la realización del estudio es necesario diferenciar las unidades que componen el área a estudiar por medio de la fotointerpretación, utilizando el método descrito en Vink (1963). En estudios previos, para la división del terreno, se realizaron y se utilizaron fotografías en color a escala 1:20.000 y fotografías pancromáticas a escala 1:40.000 (ampliadas a una escala aproximada de 1:26.000).



Figura 7.1: Mapa de las 118 posiciones de muestreo.

Ambos vuelos se realizaron en Octubre de 1997. Para la delimitación de las unidades, se partió de las unidades con alta y muy alta capacidad de uso, según se recoge de la publicación *El Suelo Como Recurso Natural en la Comunidad Valenciana* (Antolín *et al.*, 1998). Además de toda la información que lleva emparejada el mapa de capacidades de uso comentado anteriormente, se utilizó el siguiente material de apoyo:

1. Mapas topográficos a escala 1:50.000 procedentes del Servicio Geográfico del Ejército y mapas geológicos a escala 1:50.000 publicadas por el IGME.
2. Mapa geocientífico de la Comunidad Valenciana a escala 1:300.000.
3. Mapa de unidades fisiográficas a escala 1:50.000.
4. Mapa de usos del territorio a escala 1:50.000 y mapa de planeamiento urbanístico a escala 1:25.000.
5. Mapa de riesgos de inundación a escala 1:20.000 y el catálogo de zonas húmedas de la Comunidad Valenciana.

Después de comprobar los límites de las unidades, en campo y contando con la ayuda de los resultados obtenidos en el laboratorio, se comienza la digitalización de las unidades utilizando un GIS (Sistemas de Información Geográfica).

El muestreo de campo realizado por el CIDE, fue producido mediante un sistema de malla flexible. Arbitrariamente se dispusieron los puntos de sondeos en cada unidad realizando un zig-zag, situando en la zona central de cada una, el punto de muestreo. Esta forma de muestreo nos permite aplicar técnicas gracias a la forma regular de la distribución de las posiciones de los datos. En el caso de que la unidad presentara gran extensión o una morfología muy alargada, se decidió aumentar el número de muestras. Así mismo, en el caso de hallar puntos de sondeo que presentaban significativas diferencias respecto al resto de la unidad, se optó por tomar muestras. Por término medio se establecieron en cada unidad 7 observaciones de las cuales una correspondería al punto de muestreo mientras que el resto serían las sondas. Se hicieron un total de 251 observaciones, de las que se tomaron 132 muestras superficiales, que son las que nosotros estudiamos. Todas las observaciones se georreferenciaron con un sistema GPS. Se hicieron una serie de determinaciones en el laboratorio partiendo de las muestras secas al aire y tamizadas con un tamiz de 2 mm de paso (Porta, 1986). Finalmente, por similitudes o datos similares en algunas posiciones cercanas, se pasó a 118 puntos de muestreo, a partir de los cuales se ha analizado la aplicación.

Las determinaciones realizadas sobre las muestras fueron las siguientes:

1. Color.
2. La humedad del suelo.
3. Carbonatos totales en caliza.
4. Caliza activa.
5. El porcentaje de materia orgánica.
6. Textura del suelo.
7. El pH en una suspensión 1:2,5 suelo:agua y en una suspensión 1:2,5 suelo:KCl 1M.
8. Bases de cambio.
9. Capacidad de intercambio catiónico (CIC).
10. Carbonatos y bicarbonatos solubles.
11. Conductividad eléctrica (CE).

Las propiedades del suelo que vamos a utilizar como variables en la aplicación estadística son las siguientes (hay que hacer referencia de que la variable CE es la variable objetivo):

- Carbonatos
- Arcillas
- Materia Orgánica
- Conductividad Eléctrica (CE)

En la Tabla 7.2 se presenta una descripción de estas variables, donde podemos observar la gran dispersión que hay entre las distintas variables tomadas en la región de estudio.

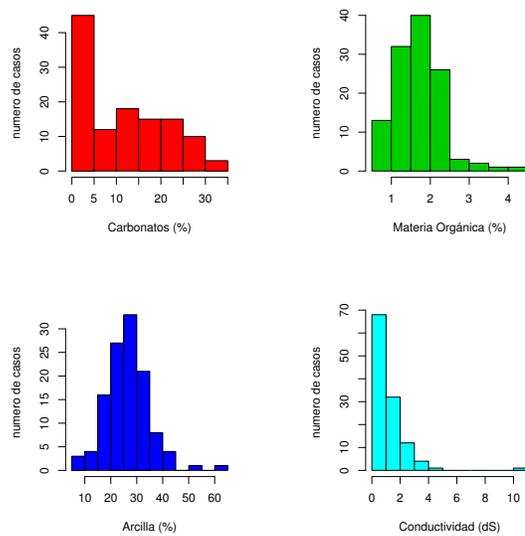


Figura 7.2: Histogramas de las cuatro variables.

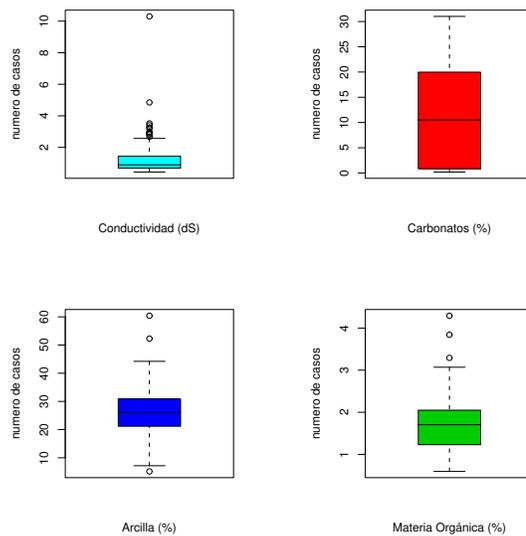


Figura 7.3: Box-plots de las cuatro variables.

Tabla 7.2: Descriptiva de los datos.

	carbonatos	materia orgánica	arcilla	conductividad eléctrica
N	118	118	118	118
Media	11.3339	1.7083	26.3632	1.2858
Des. Típica	9.6976	0.6274	8.5570	1.1579
Varianza	94.044	0.394	73.222	1.341
Asimetría	0.333	1.006	0.546	4.638
Curtosis	-1.213	2.442	1.859	31.401
Máximo	31.0130	4.2930	60.3950	10.3000
Mínimo	0.1790	0.5950	5.1600	0.4350
Mediana	10.5105	1.7045	26.0975	0.8980
Primer cuartil	0.8520	1.2300	21.1740	0.6826
Tercer Cuartil	19.975	2.049	30.853	1.439

En las Figuras (7.2 y 7.3) presentamos los histogramas y los *box-plots* de las cuatro variables. Obsérvese que las variables arcilla y materia orgánica tienen un comportamiento Gaussiano. La variable carbonatos está ligeramente sesgada debido a una gran cantidad de valores pequeños (< 5). Finalmente, la variable CE presenta un sesgo debido a una gran cantidad de valores con $CE < 2$, es decir, asociadas a condiciones de baja salinidad. Esto justifica la bondad del suelo para la zona de cultivo. Sin embargo este sesgo de CE hace que los análisis de predicción espacial que presentamos en la primera parte del capítulo, muestren un cierto sesgo, por la falta de Gaussianidad presente en la CE. Pero este inconveniente no se presenta al utilizar técnicas espectrales, que son las utilizadas en la segunda parte del capítulo, lo que refuerza el uso de las mismas.

7.3. Estimaciones espaciales y predicciones mediante *kriging*

En esta sección presentamos los mapas de predicción espacial para la variable CE tanto por sí sola como al analizar conjuntamente con otras variables.

Para la obtención de los distintos mapas de predicciones, disponemos de una gran cantidad de software. Como ejemplos destacados podemos hablar del *GeoEst*, utilizado para obtención de predicciones mediante *krigings*, (Fernández-Casal,

2003), o el *GSLIB*, del mismo enfoque (Deutsch y Journel, 1998). El que nosotros vamos a utilizar es el módulo *Geostatistical Analyst* de *ArcGIS*, que viene desarrollado de forma teórica en Johnston *et al.* (2001). Este módulo de *ArcGIS* nos va a permitir el uso de gran cantidad de técnicas geoestadísticas, como la obtención de variogramas, mapas de predicción por *kriging*, etc. En relación a este tipo de aplicaciones tenemos que hablar de los sistemas de información geográfica (GIS), que nos permiten estudiar las variables espaciales de forma clara y sencilla.

Algunas referencias relacionadas con GIS y estudios de variables los podemos ver en Burrouh y McDowell (1998), Davis *et al.* (1991), Lunetta *et al.* (1991) y Stein *et al.* (1995). Una referencia destacada en cartografía es la de White *et al.* (1992) e interesante es la mención de congresos específicos de los temas geoestadísticos como el SIC (1998).

Otro software con gran importancia para las distintas aplicaciones estadísticas es el S-Plus (SPLUS, 2000) o en su versión libre el geoR/geoS (Ribeiro y Diggle, 1999).

Como paso previo y necesario para la obtención de los mapas de predicción, presentamos de forma concisa, los modelos de variogramas obtenidos para los diferentes casos:

- Variograma para la variable CE para OK y SK:
 $1.6746 * \text{Exponential}(728.69) + 0.0076121 * \text{Nugget}$
- Variograma para la variable CE para UK de primer orden:
 $1.5813 * \text{Exponential}(728.69) + 0.071988 * \text{Nugget}$
- Variogramas y covariogramas para el *Cokriging* de CE con carbonatos:
Var1 - Var1: $0.079381 * \text{Exponential}(4741.3) + 1,6096 * \text{Nugget}$
Var1 - Var2: $-1.3865 * \text{Exponential}(4741.3)$
Var2 - Var2: $24.216 * \text{Exponential}(4741.3) + 26.64 * \text{Nugget}$
- Variogramas y covariogramas para el *Cokriging* de CE con Materia Orgánica:
Var1 - Var1: $1.6757 * \text{Exponencial}(728.69) + 0.006488 * \text{Nugget}$
Var1 - Var2: $-0.0455 * \text{Exponencial}(728.69)$
Var2 - Var2: $0.02084 * \text{Exponencial}(728.69) + 0.35303 * \text{Nugget}$

- Variogramas y covariogramas para el *Cokriging* de CE con Arcilla:

Var1 - Var1: $0.72278 * \text{Exponential}(1240.1) + 0.96335 * \text{Nugget}$

Var1 - Var2: $-1.0925 * \text{Exponential}(1240.1)$

Var2 - Var2: $75.225 * \text{Exponential}(1240.1) + 0 * \text{Nugget}$

En la Figura (7.4), y previo a los mapas de *kriging*, presentamos el mapa de predicción obtenida mediante *Thin Plate Spline* para la variable CE. Podemos observar gran diferencia de predicción respecto a los mapas posteriores obtenidos mediante las técnicas de *kriging* además de que no podemos obtener el mapa de error asociado, algo que hace que este tipo de predicciones sea más pobre.

Tomando como base los modelos de variograma, podemos obtener distintos mapas de predicción: El *Kriging* simple, *Kriging* ordinario y *Kriging* universal para CE y los *Cokrigings* para CE con carbonatos, materia orgánica y arcilla.

Si observamos las distintas Figuras de predicción de la variable Conductividad Eléctrica (CE) (Figuras 7.5, 7.7, 7.9) podemos ver la diferencia de predicción según tomemos la media como constante y conocida (SK) o en otros casos (OK y UK). Además, en los tres casos, las zonas de mayor error de predicción coinciden con las zonas donde no existen puntos de muestreo (lo cual es esperable).

Dentro de la comparación de los distintos mapas obtenidos por predicción de la variable CE, podemos ver que existen zonas más oscuras en la escala de predicción, donde el valor de CE es mayor, que además corresponderá con lugares de mayor salinidad. Estos altos valores de CE aparecen en la zona central de la región, dentro de la comarca de Vila-Real y en posiciones limítrofes de las comarcas de Burriana, Betxí y Alquerías.

Si observamos los mapas de predicción de SK, OK y UK de la variable CE, en general, coinciden las zonas de más altos y bajos valores, aunque en el SK, al suponer la media conocida y constante hace que aparezca cierta direccionalidad de la variable (de norte a sur).

Todas estas predicciones se verán mejoradas con los siguientes mapas de *cokriging*, como se puede corroborar y observar en la Tabla (7.3).

En las Figuras (7.11, 7.13, 7.15) se puede ver la diferencia de predicción dependiendo de que variables analicemos conjuntamente con la CE. De esta forma, bajo un *cokriging* con CE, es la variable arcilla la que muestra un menor error de predicción. No es sólo importante la predicción de los valores de la variable analizada de forma espacial, sino también el error producido a lo largo de toda la región de muestreo, que nos facilita la tarea de la comparación entre las distintas variables secundarias.

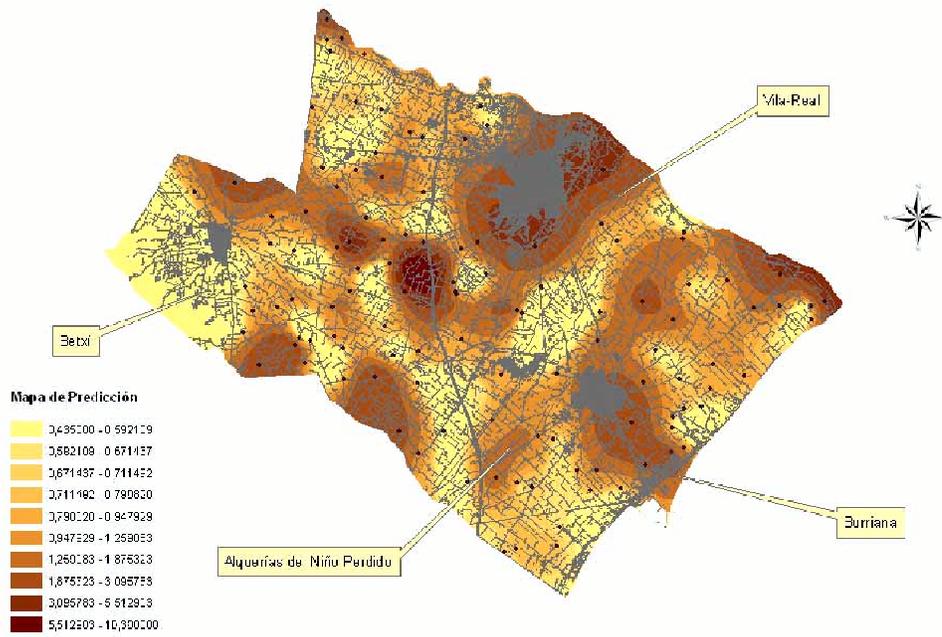


Figura 7.4: *Thin Plate Spline* para CE.

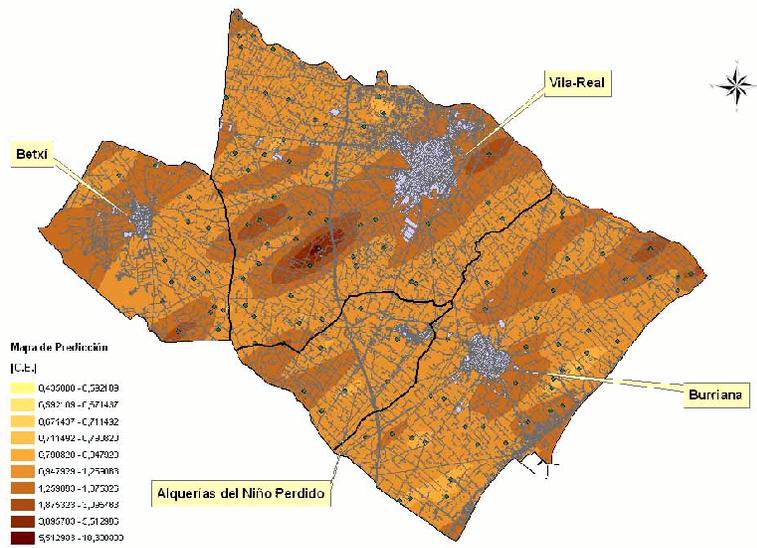


Figura 7.5: Simple *Kriging* para CE.

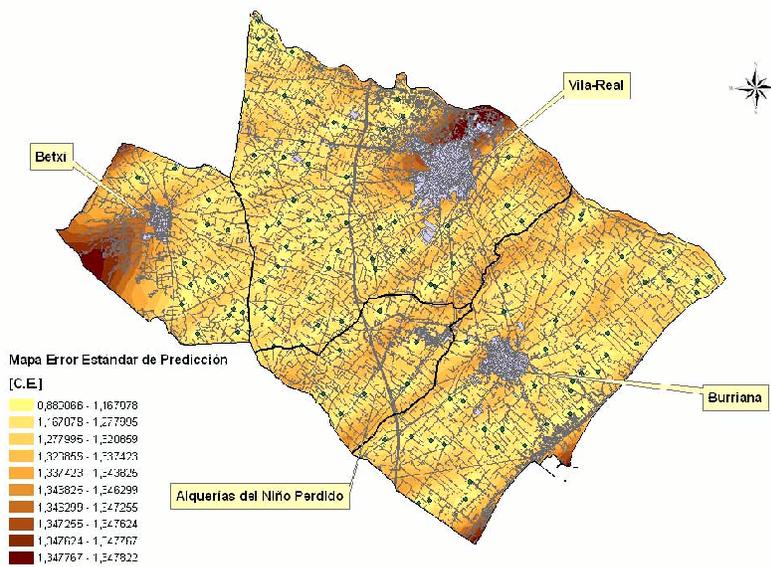


Figura 7.6: Mapa de error estándar de predicción de simple *Kriging* para CE.

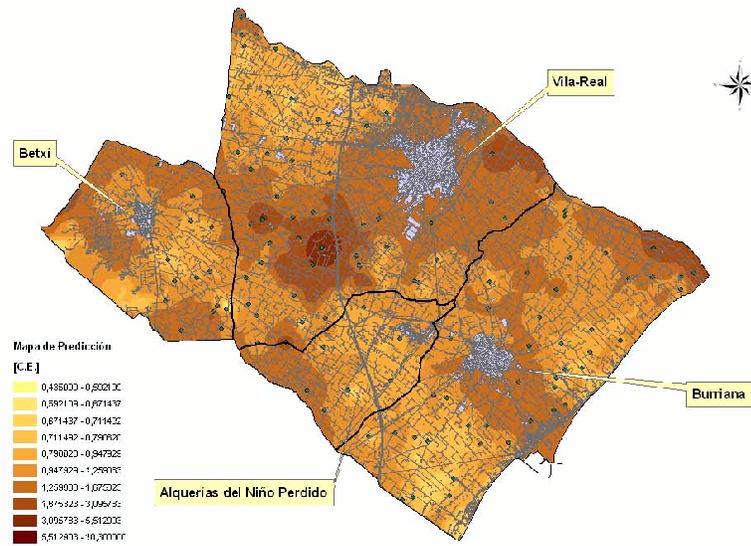


Figura 7.7: *Kriging* ordinario para CE.

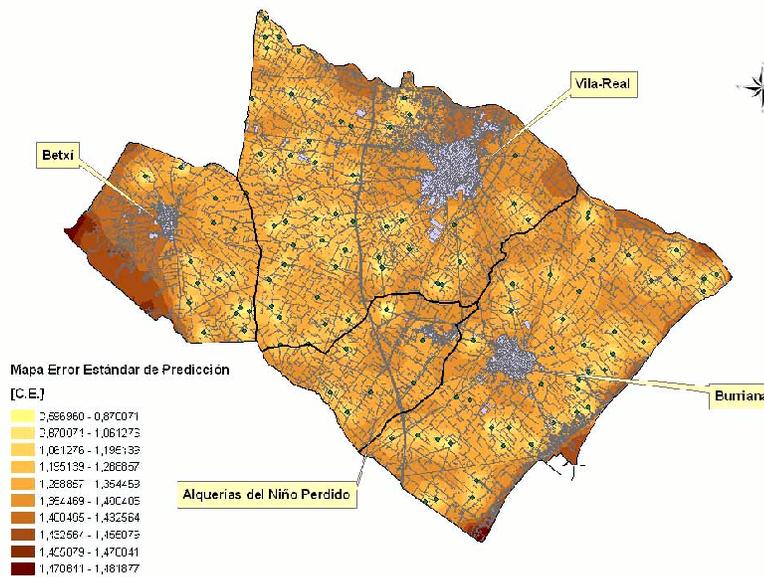


Figura 7.8: Mapa de error estándar de predicción de *Kriging* ordinario para CE.

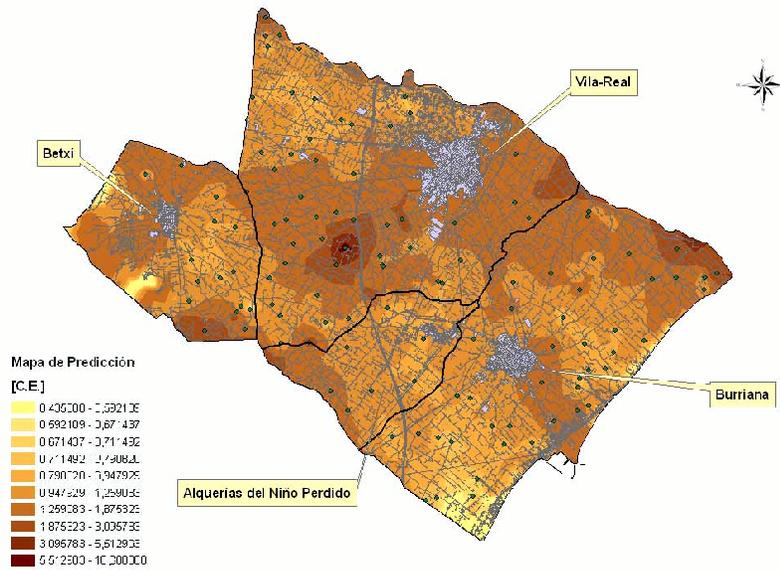


Figura 7.9: *Kriging* universal para CE.

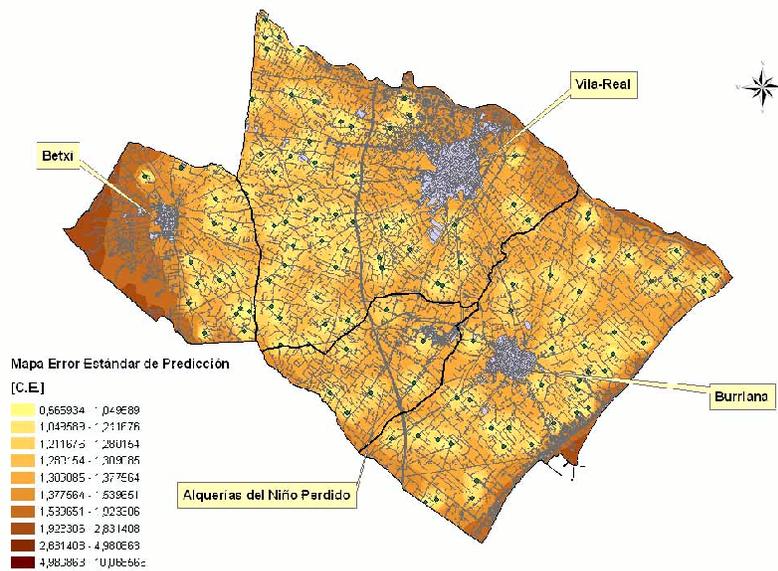


Figura 7.10: Mapa de error estándar de predicción de *Kriging* universal para CE.

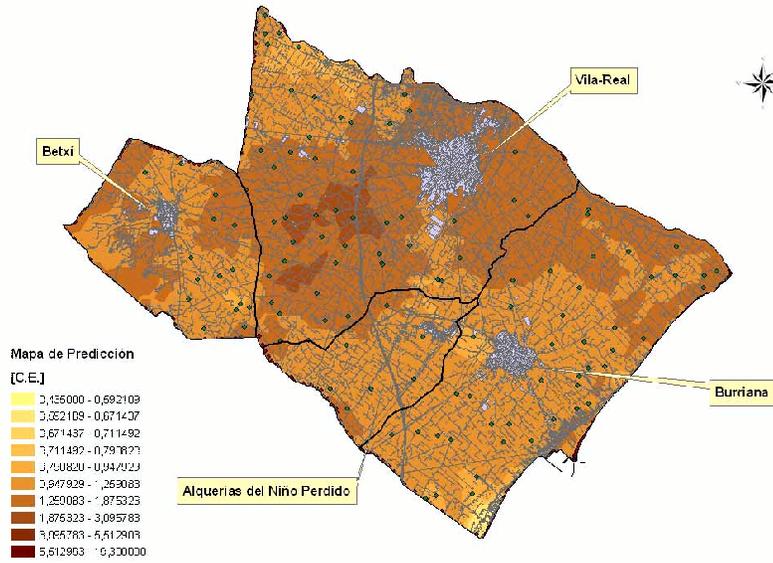


Figura 7.11: *Cokriging* para CE con carbonatos.

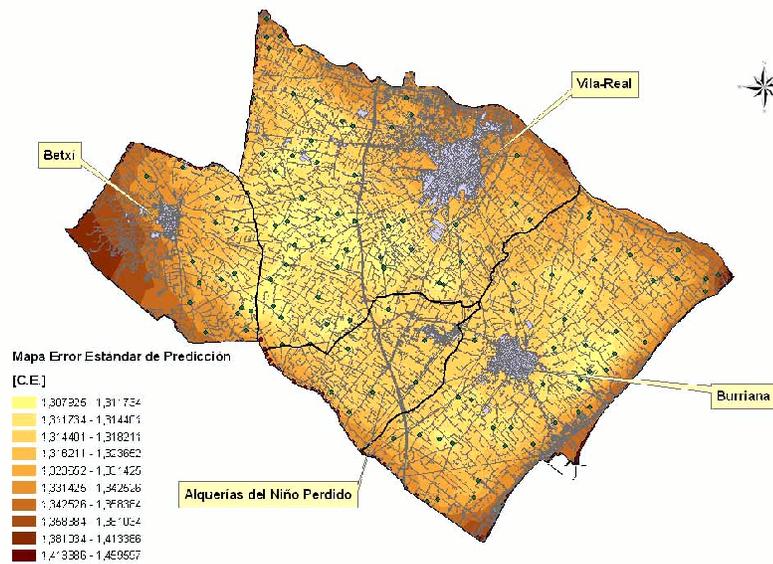


Figura 7.12: Mapa de error estándar de predicción de *Cokriging* para CE con carbonatos.

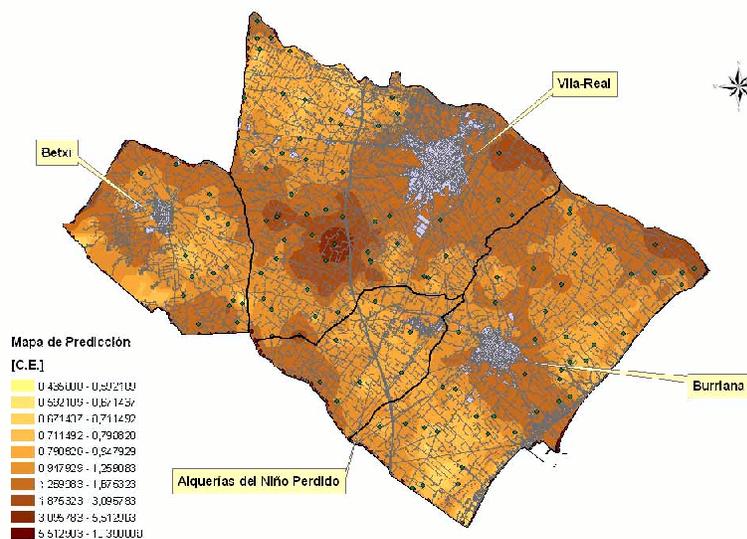


Figura 7.13: *Cokriging* para CE con materia orgánica.

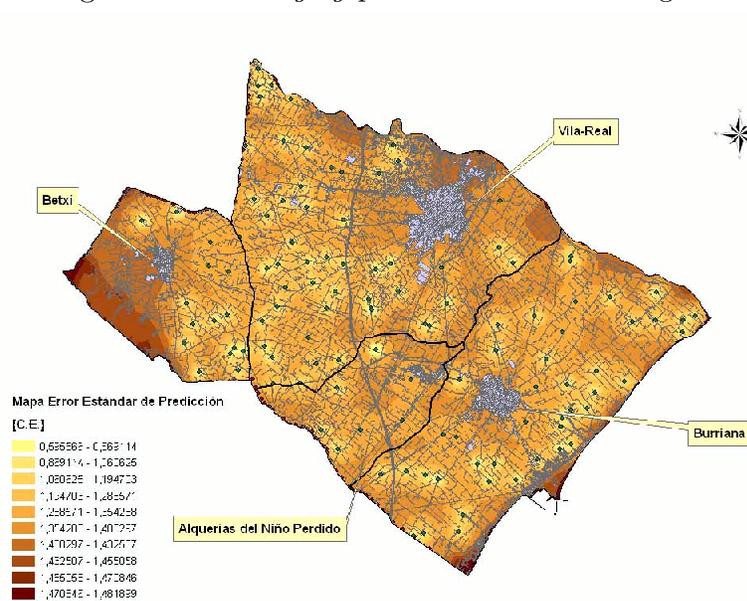


Figura 7.14: Mapa de error estándar de predicción de *Cokriging* para CE con materia orgánica.

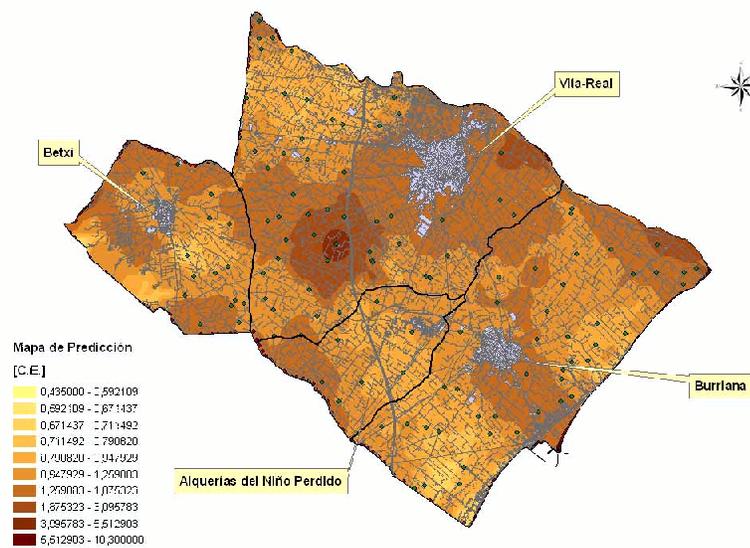


Figura 7.15: *Cokriging* para CE con arcilla.

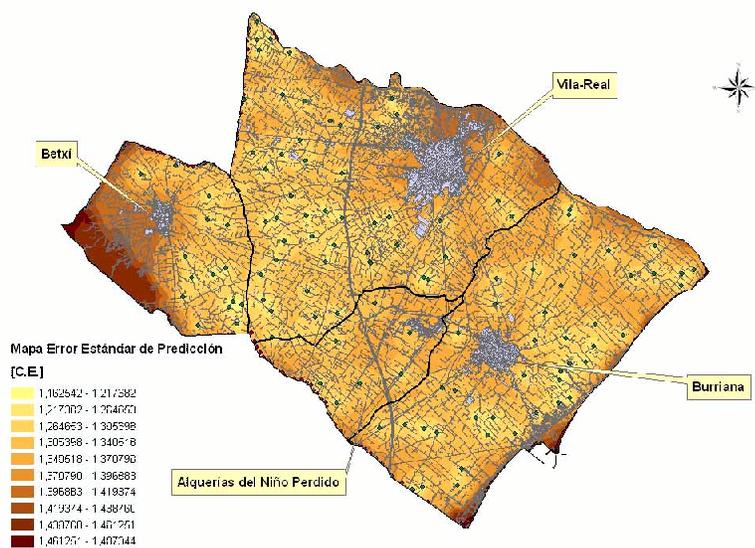


Figura 7.16: Mapa de error estándar de predicción de *Cokriging* para CE con arcilla.

En todo caso, en estas Figuras hay que pensar que hemos presupuesto la existencia de estacionariedad y dependencia espacial que vamos a estudiar y analizar en las próximas secciones.

Una mejor manera de comparar los resultados de las predicciones, la tenemos a través de los valores de los ajustes de los errores cuadráticos medios obtenidos mediante validación cruzada en la Tabla (7.3), donde podemos comparar los valores de las predicciones. Como podemos ver en esta Tabla (7.3), claramente la opción de elegir *Cokriging* frente a otro tipo de predicción es mucho mejor y además mejora la predicción de CE con la utilización de la variable materia orgánica. Esto nos lleva a la conclusión de la necesidad de incluir variables secundarias para la predicción de la principal, ya que esto mejora la predicción de la variable.

Hay que buscar un equilibrio entre todas las variables, el mapa de error, el mapa de predicción propiamente dicha, el método de predicción y los resultados de la validación cruzada, que harán que nos permitan elegir la mejor opción, que en este caso concreto podría ser la utilización del mapa de *cokriging* de la variable CE con la materia orgánica.

Tabla 7.3: Comparación mediante Validación Cruzada de los distintos tipos de predicción.

Tipo de Predicción	Validación cruzada (coef. R)
<i>Kriging</i> simple (CE)	0.896
<i>Kriging</i> ordinario (CE)	0.893
<i>Kriging</i> universal (CE)	0.782
<i>Cokriging</i> CE - carbonatos	0.909
<i>Cokriging</i> CE - materia orgánica	0.941
<i>Cokriging</i> CE - arcilla	0.916

7.4. Análisis espectrales

Utilizamos la potencialidad manifestada de algunas de las técnicas espectrales.

Como primer paso para la aplicación, dividiremos la región en cuatro zonas, en relación a las cuatro comarcas que componen la zona de estudio (Figura 7.17). Podemos observar el tamaño de cada comarca, el cual estará en relación al número

de puntos de muestreo, siendo las regiones 1 y 2 (16 y 11 datos respectivamente) las que disponen de un menor número de puntos muestrales, siendo muy superior en las regiones 3 y 4 (49 y 42 datos, respectivamente).

De la misma forma que describimos los datos de forma global en la primera parte del capítulo, aquí también presentamos histogramas (Figuras 7.18-7.21) y *box-plots* (Figuras 7.22-7.25) de las cuatro zonas y para cada una de las cuatro variables. En estas Figuras podemos ver que la distribución de los datos varía en relación a la región en la que nos encontremos, por ejemplo en la variable de carbonatos, la zona 1 y 3 tienen una distribución muy diferente a la de las zonas 2 y 4, como puede verse en la Figura (7.18). Esto puede ser un claro indicio de falta de estacionariedad en las variables en juego, en particular, en la CE, variable en la que centramos nuestro interés.

Para poder hacer uso de las técnicas espectrales necesitamos definir una malla sobre la que se observa nuestro proceso, Z , en este caso la CE. En un primer acercamiento definimos ante una malla regular como una irregular (Figura 7.26).

El variograma asociado a los datos muestreados (como ya conocemos de la primera parte del capítulo) es: $1.6746 * Exponential(728.69) + 0.0076121 * Nugget$ que corresponde con unos valores de $sill = 1.6746$, $rango = 728.69$ ($\alpha = 1/rango$) y $\phi = 0.0023$.

Consideramos una malla regular que se superpone y aproxima a los 118 puntos originales de muestreo. Comprobamos que el variograma sobre esta malla regular se asemeja al original (Figura 7.26). Esto justificará la bondad de utilizar esta malla regular para los futuros análisis.

Con el proceso estocástico CE observado sobre la malla regular, intentamos estimar la densidad espectral originalmente proveniente de un modelo de *Matérn* con $\nu = 0.5$ (exponencial) mediante el periodograma. Como disponemos de tanta casuística, analizamos el periodograma bajo los siguientes casos: (a) *Matérn* teórico, no *taper*, *rounded taper* y *taper* multiplicativo y (b) *data taper* con $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$. Las Figuras (7.27 - 7.30) muestran la perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , en los casos de *Matérn* teórica, sin *taper*, *rounded taper* y *taper* multiplicativo, para los casos en que $\epsilon = \delta = 1, 3, 5, 10$. Podemos observar la clara diferencia entre las cuatro casos que cada Figura y la diferencia entre las cuatro Figuras, con la mejora de la introducción del *tapering*.

Con la densidad espectral, $f(\omega)$, estimada mediante el $I_N(\omega)$, podemos dar

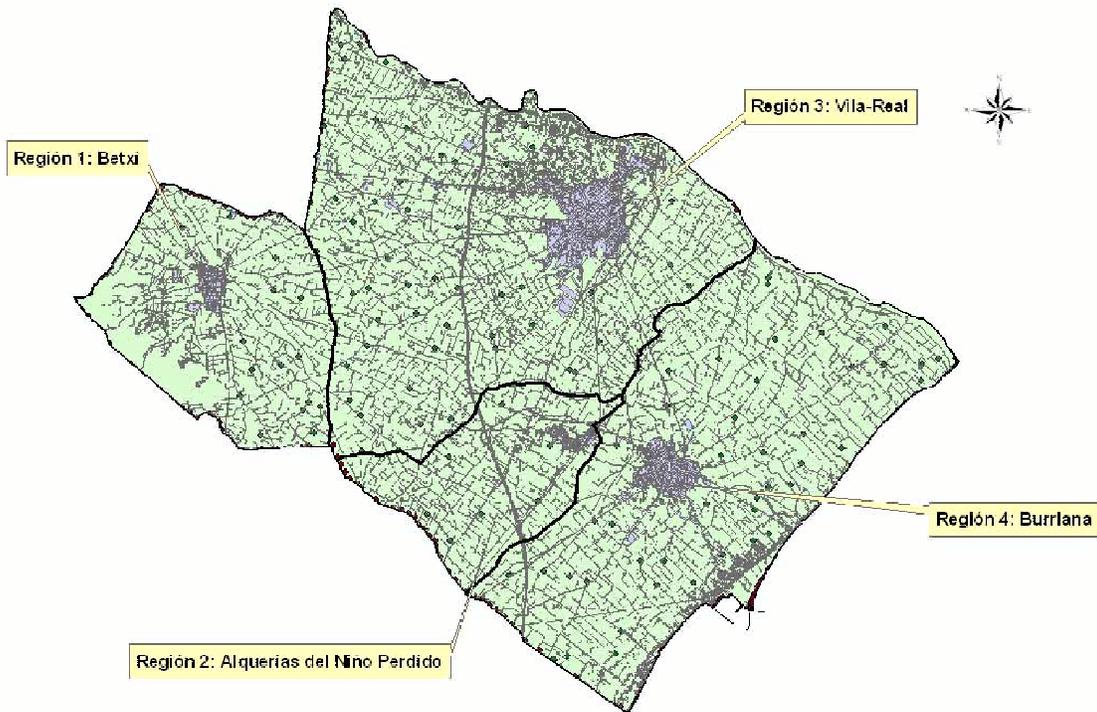


Figura 7.17: Mapa de las cuatro regiones de estudio.

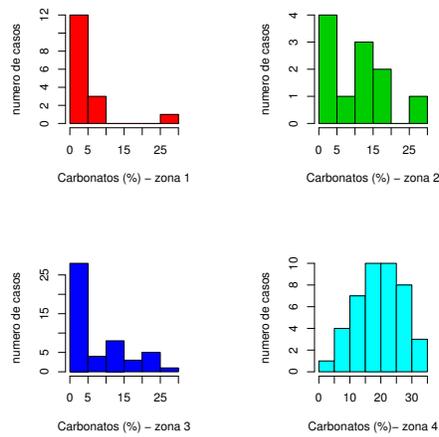


Figura 7.18: Histogramas de carbonatos en las 4 zonas.

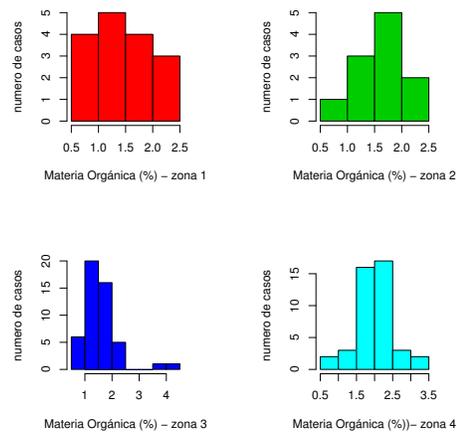


Figura 7.19: Histogramas de materia orgánica en las 4 zonas.

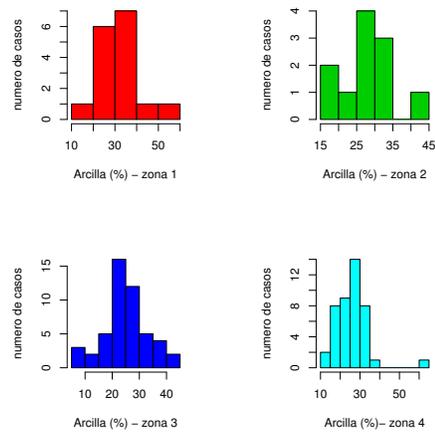


Figura 7.20: Histogramas de arcilla en las 4 zonas.

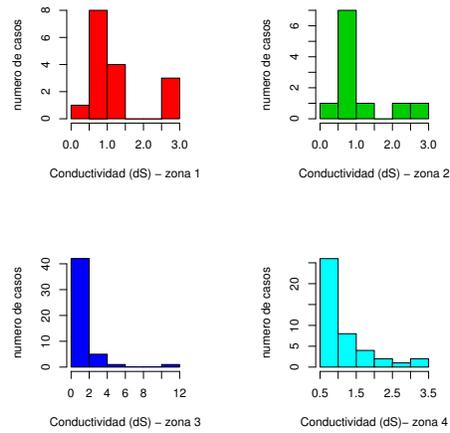


Figura 7.21: Histogramas de conductividad eléctrica en las 4 zonas.

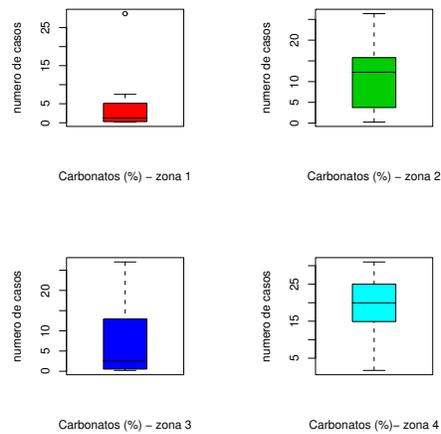


Figura 7.22: *Box-plots* de carbonatos en las 4 zonas.

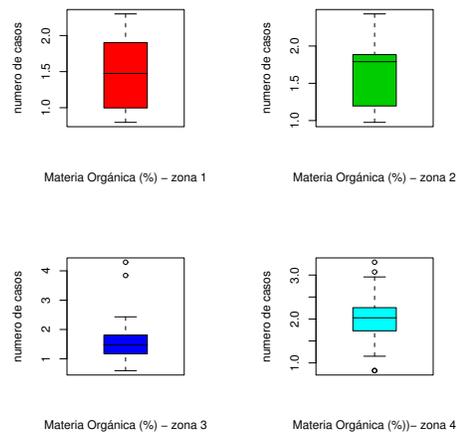


Figura 7.23: *Box-plots* de materia orgánica en las 4 zonas.

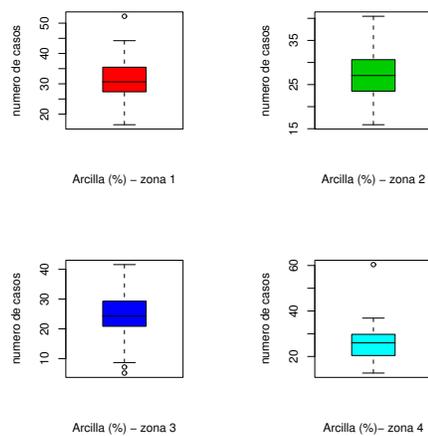


Figura 7.24: *Box-plots* de arcilla en las 4 zonas.

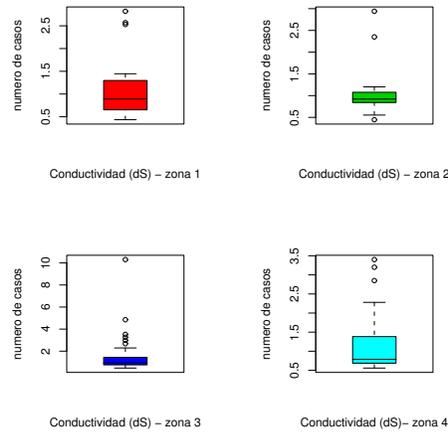


Figura 7.25: *Box-plots* de conductividad eléctrica en las 4 zonas.

paso al análisis de los tests de independencia y estacionariedad.

Respecto al contraste de dependencia espacial, los pasos a seguir son:

1. Definimos el conjunto de frecuencias y evaluamos el periodograma.
2. Calculamos la correlación entre el $\log(I_N(\omega))$ y $\log(|\omega|^2)$.
3. Calculamos el test estadístico.
4. Analizamos el resultado del test para ver si se rechaza la hipótesis de independencia espacial. Rechazaremos si $t \notin (-2, 2)$.

Pasamos el test a la variable CE bajo multitud de escenarios posibles, entre ellos:

- *taper* multiplicativo (1,1). En este caso el resultado de $t = -8.333613$ y rechazamos H_0 .
- *rounded taper* (1,1). En este caso el resultado de $t = -9.809599$ y rechazamos H_0 .
- *taper* multiplicativo (5,5). En este caso el resultado de $t = -10.02663$ y rechazamos H_0 .

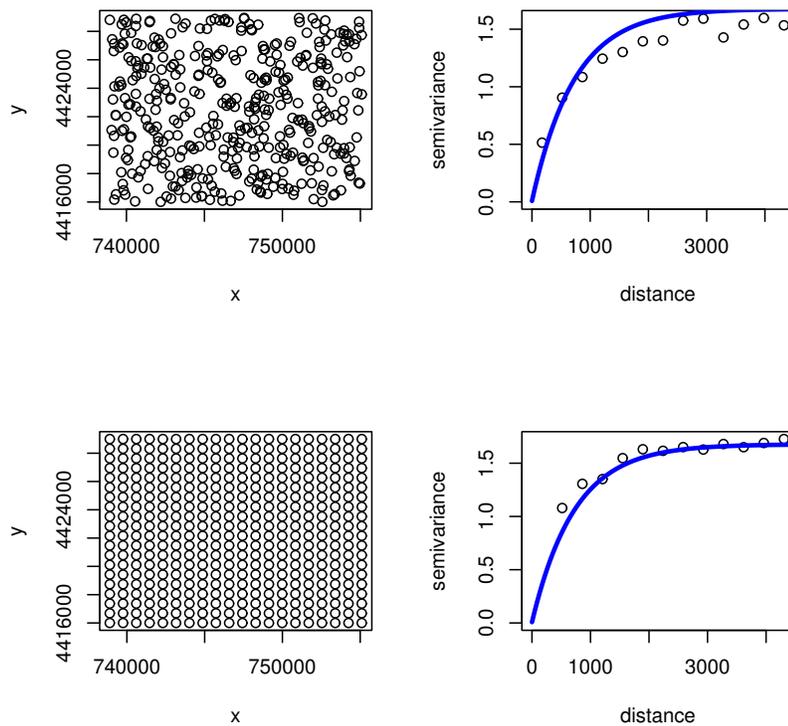


Figura 7.26: Malla con posiciones irregularmente espaciadas (superior izquierda), variograma correspondiente (superior derecha), malla con posiciones regularmente espaciadas (inferior izquierda) y variograma correspondiente (inferior derecha).

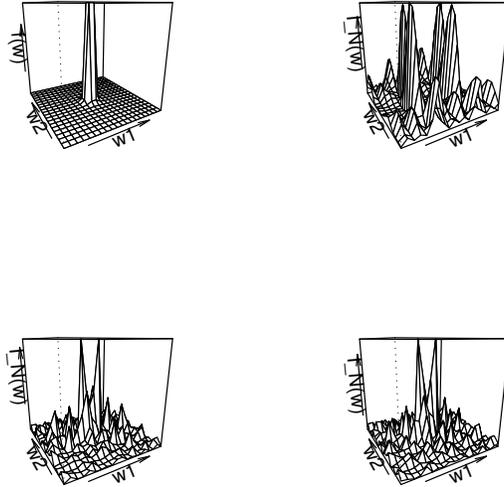


Figura 7.27: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . *Izquierda superior*: densidad de *Matérn* teórica; *Derecha superior*: sin *taper*; *Izquierda inferior*: *rounded taper*; *Derecha superior*: *taper* multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 1$.

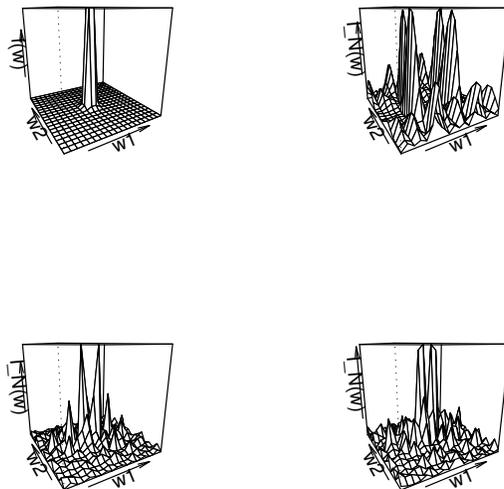


Figura 7.28: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . *Izquierda superior*: densidad de *Matérn* teórica; *Derecha superior*: sin *taper*; *Izquierda inferior*: *rounded taper*; *Derecha superior*: *taper* multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 3$.

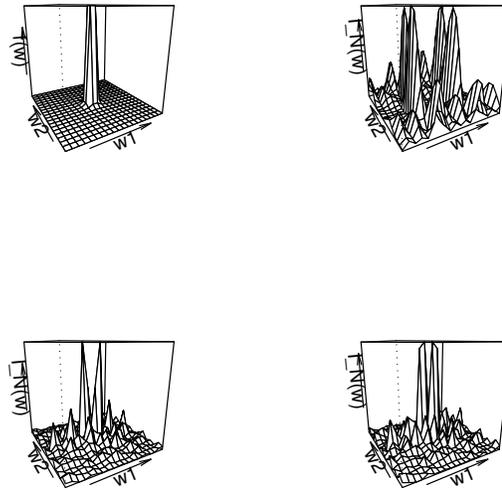


Figura 7.29: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . *Izquierda superior*: densidad de Matérn teórica; *Derecha superior*: sin taper; *Izquierda inferior*: rounded taper; *Derecha superior*: taper multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 5$.

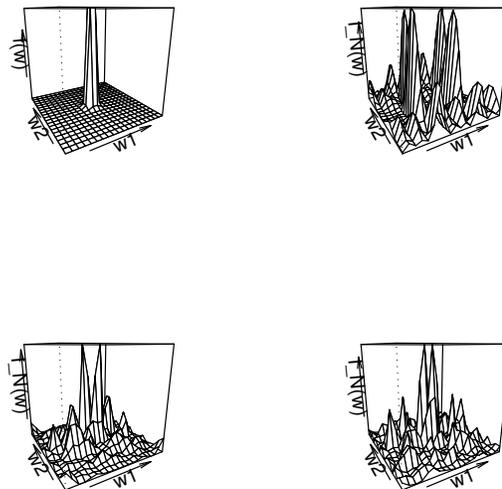


Figura 7.30: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) . *Izquierda superior*: densidad de Matérn teórica; *Derecha superior*: sin taper; *Izquierda inferior*: rounded taper; *Derecha superior*: taper multiplicativo; para el caso de $\epsilon = \delta = 10$.

- *rounded taper* (5,5). En este caso el resultado de $t = -9.961412$ y rechazamos H_0 .

En todos los casos, al rechazar la hipótesis nula consideramos que hay clara evidencia de que existe dependencia espacial. Son datos claramente dependientes en relación a su distribución espacial.

Finalmente, analizamos el test de estacionariedad, observando posibles diferencias entre las cuatro subregiones. Para ello, primeramente presentamos los variogramas de las cuatro zonas para la variable conductividad eléctrica, observándose gran diferencia entre las cuatro zonas:

1. Región 1: $0.10666 * \text{Exponential}(4741.3) + 0.51961 * \text{Nugget}$
2. Región 2: $0 * \text{Exponential}(4409.9) + 0.59622 * \text{Nugget}$
3. Región 3: $2.5624 * \text{Exponential}(728.69) + 0.19519 * \text{Nugget}$
4. Región 4: $0.07226 * \text{Exponential}(4741.3) + 0.40841 * \text{Nugget}$

Seguidamente, presentamos las estimaciones de los periodogramas de las cuatro regiones, para los distintos casos de *tapering* y diferentes parámetros (valores de ϵ y $\delta = 1, 3, 5, 10$) utilizados (Figuras 7.31-7.39).

El último paso es mostrar el ajuste que obtenemos de $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$ para los distintos casos y regiones (Figuras 7.40-7.48). Podemos observar que no son rectas similares en las cuatro regiones que componen la zona de muestreo, lo que muestra indicios de falta de estacionariedad. De hecho, si pasamos el análisis de la varianza, para analizar las posibles diferencias entre las rectas de regresión, este nos lleva a un claro rechazo de la igualdad de dichas rectas ($p = 0.02$). Hemos añadido en las Figuras los valores de β_0 y β_1 (b_0 y b_1) para hacer más palpable dichas diferencias.

Esto nos permite concluir que no es aceptable la suposición de estacionariedad sobre la variable CE.

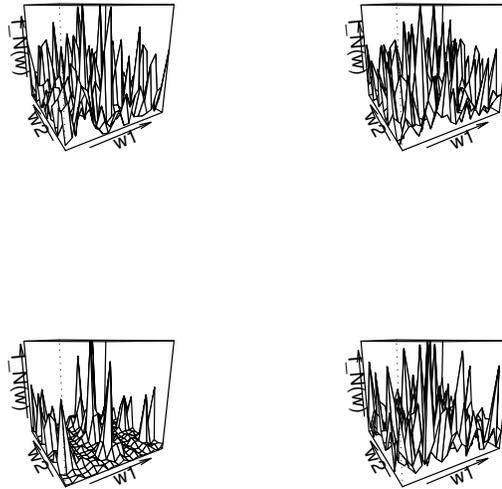


Figura 7.31: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones sin la utilización de *tapering*

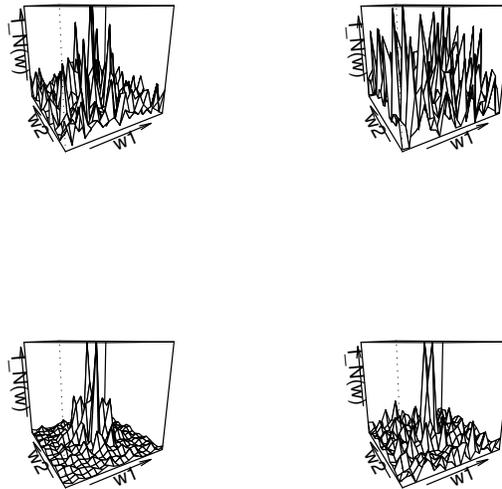


Figura 7.32: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *rounded taper* con $\epsilon = \delta = 1$.

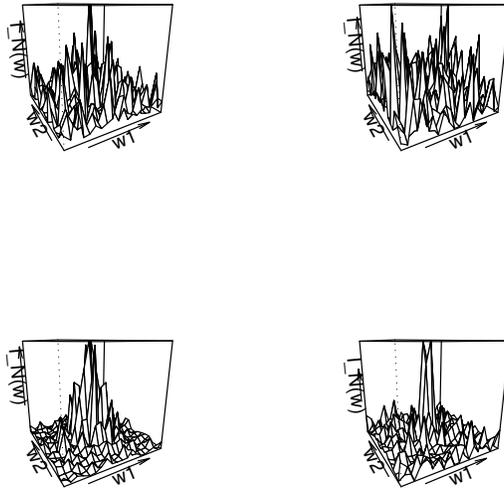


Figura 7.33: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *taper* multiplicativo con $\epsilon = \delta = 1$.

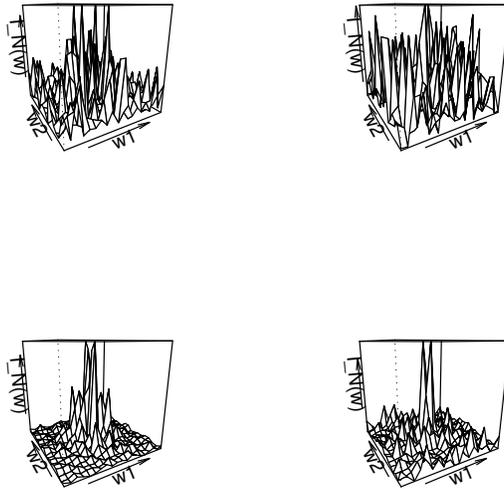


Figura 7.34: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *rounded taper* con $\epsilon = \delta = 3$.

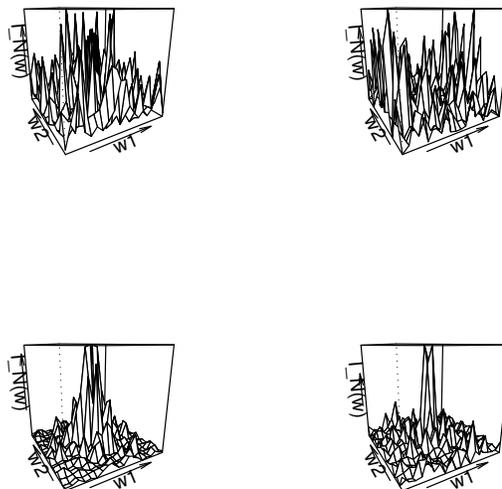


Figura 7.35: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *taper* multiplicativo con $\epsilon = \delta = 3$.

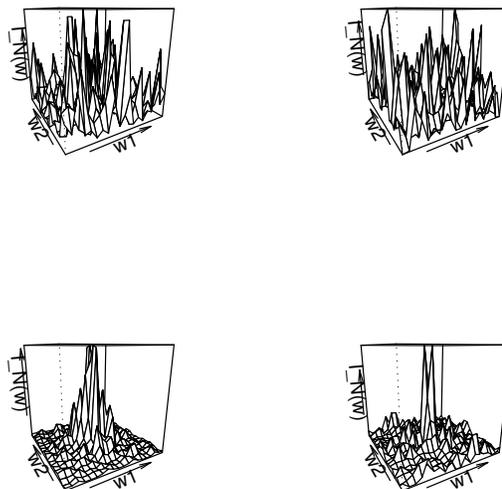


Figura 7.36: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *rounded taper* con $\epsilon = \delta = 5$.

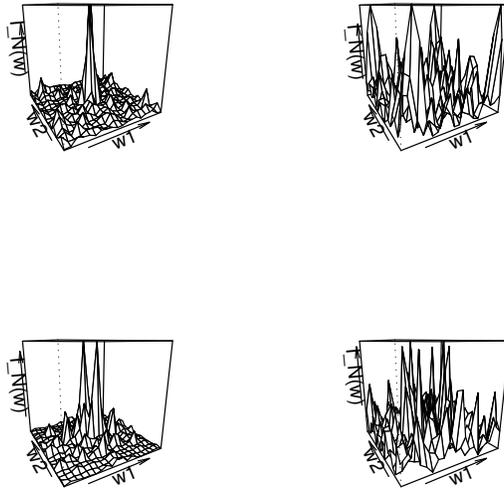


Figura 7.37: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *taper* multiplicativo con $\epsilon = \delta = 5$.

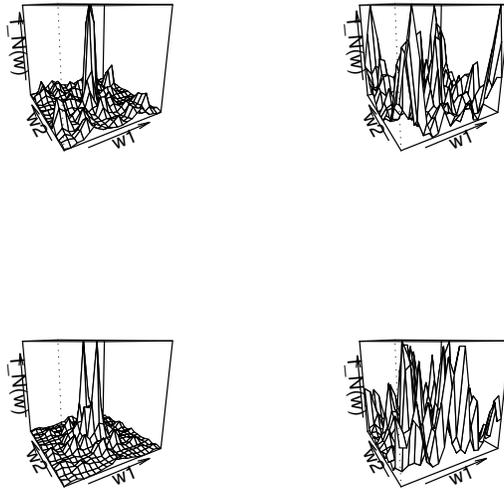


Figura 7.38: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *rounded taper* con $\epsilon = \delta = 10$.

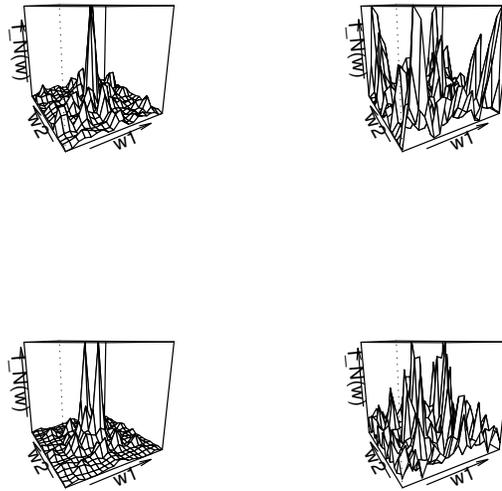


Figura 7.39: Perspectiva de las densidades espectrales para un grupo de frecuencias de Fourier (w_1, w_2) , para las 4 regiones y para el caso en que es usado *taper* multiplicativo con $\epsilon = \delta = 10$.

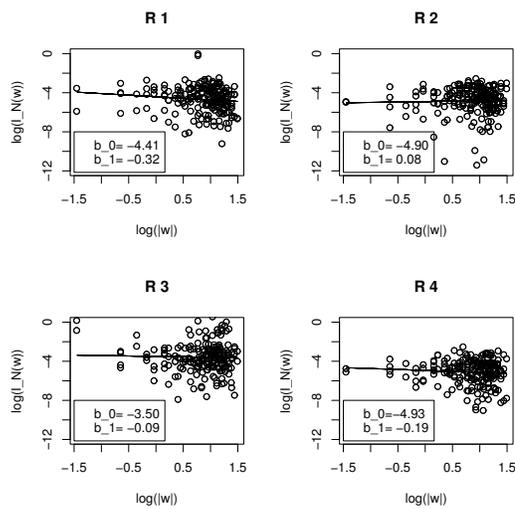


Figura 7.40: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado sin usar *tapering*.

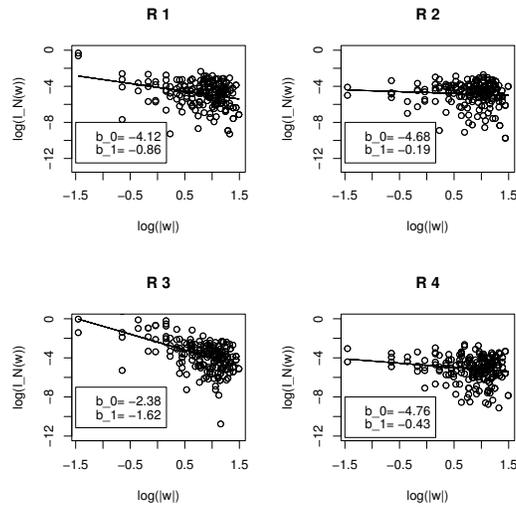


Figura 7.41: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *rounded tapering* con parámetros $\epsilon = \delta = 1$.

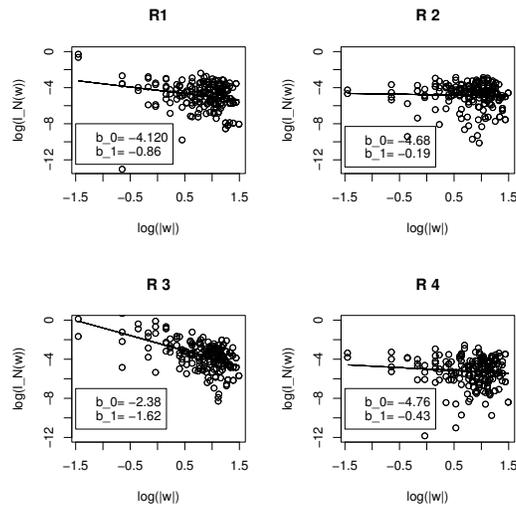


Figura 7.42: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *tapering* multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 1$.

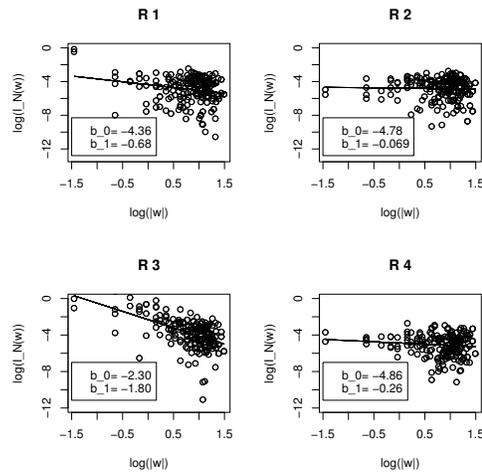


Figura 7.43: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *rounded tapering* con parámetros $\epsilon = \delta = 3$.

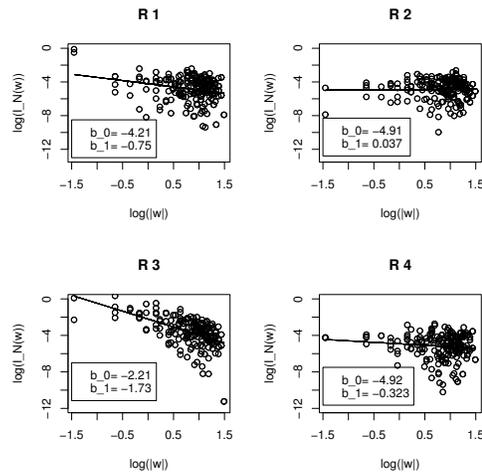


Figura 7.44: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *tapering* multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 3$.

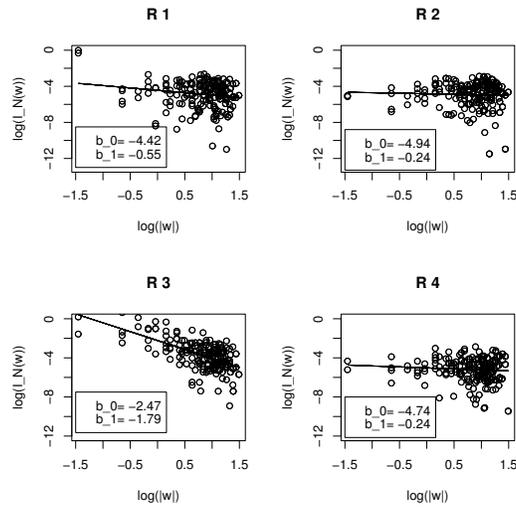


Figura 7.45: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *rounded tapering* con parámetros $\epsilon = \delta = 5$.

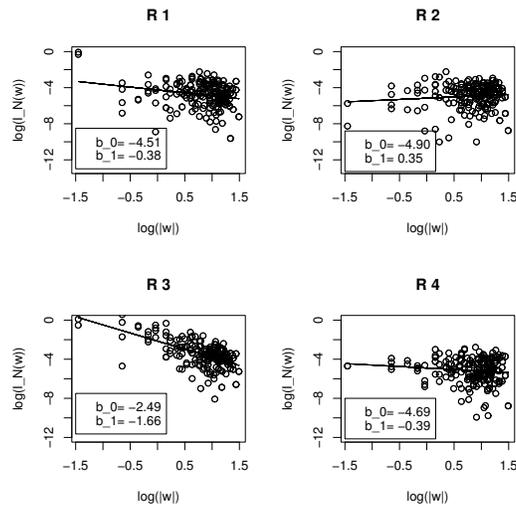


Figura 7.46: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *tapering* multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 5$.

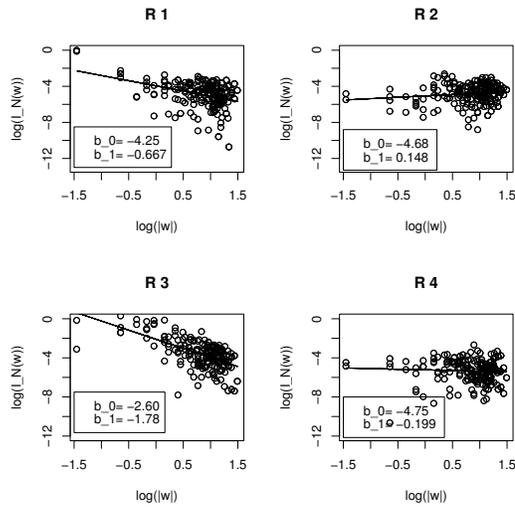


Figura 7.47: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *rounded tapering* con parámetros $\epsilon = \delta = 10$.

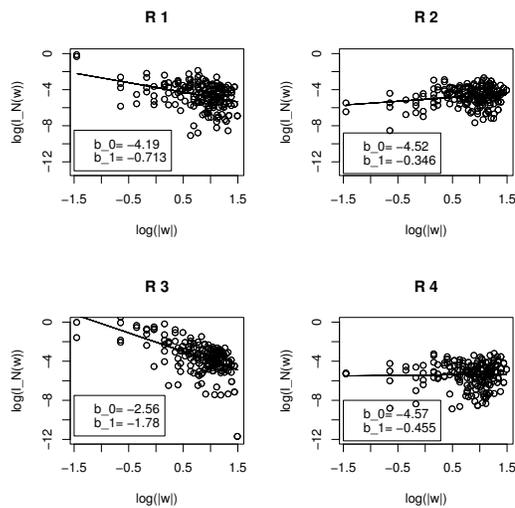


Figura 7.48: $\log(I_N(\omega))$ frente $\log(|\omega|)$. El periodograma mostrado es estimado usando un *tapering* multiplicativo con parámetros $\epsilon = \delta = 10$.

Capítulo 8

Conclusiones y futuras investigaciones

El trabajo aquí presentado, expone una metodología estadística potente y capaz de resolver el problema que ha fundamentado y motivado esta investigación.

La teoría geoestadística expuesta en este trabajo recoge tanto los aspectos más básicos y bien conocidos de esta metodología como otros aspectos bastante más novedosos.

De novedoso puede ser considerada la utilización de los métodos espectrales en la modelización espacial. La complejidad de los cálculos matemáticos que aparecen en las distintas técnicas de predicción espacial, nos lleva al uso de técnicas espectrales que en muchos casos van a facilitar el trabajo computacional, matemático y de aplicación.

Podemos ver que existe gran variedad de técnicas que nos permiten la predicción de cualquier tipo de variable georeferenciada, técnicas como son *kriging* o *cokriging*, eso sí, siempre basadas en el supuesto de estacionariedad.

Como podemos ver en los distintos capítulos, el *tapering* es una operación que reemplaza la ventana espectral del periodograma consiguiendo mejores propiedades en picos subsidiarios, lo que lleva a una reducción de la desviación y el sesgo (evita el *leakage* en estimadores espectrales directos).

A lo largo de la tesis nos hemos centrado en la familia de *Matérn* de densidades espaciales y espectrales, como una clase general y flexible, de gran interés y ampliamente utilizada en modelos espaciales. Su formato en el dominio espectral hace más cómodo su uso par la práctica de la modelización.

Mediante un estudio completo y exhaustivo de simulación, se ha mostrado

que usando *data taper* mejoramos la estimación de los parámetros espaciales. En particular, el *rounded taper* mejora el multiplicativo en algunas situaciones donde el parámetro de suavizamiento es mayor o igual a uno. Independientemente del valor de ν a ser estimado, los mejores resultados son obtenidos por $\epsilon \geq 3$ para ambos tipos de *taper*. Pero también es importante el hecho de que para parámetros de *tapering* más grandes (> 5) aportan desviaciones relativas mayores y así peores estimaciones. Nos hemos centrado en la estimación de los parámetros ν, ϕ que juegan un papel en los procedimientos de interpolación local, y teniendo en cuenta que bajas frecuencias tienen un comportamiento sobre el espectro que afecta muy poco a la interpolación. Así en este contexto, el rango no es un parámetro crítico, y esto nos permite el uso de modelos lineales para la estimación de parámetros. Los resultados muestran claramente la dependencia en la validación de los modelos lineales, sin embargo algunos otros modelos podrían ser usados para la estimación de parámetros.

En lo que respecta a la comparación entre los métodos de estimación, es de destacar que no siempre el MCP-espacial es el más robusto (de hecho, presenta en ciertos casos mucha dispersión) frente al espectral que supone una muy buena y adecuada alternativa.

También es importante el papel que tiene el aumento del tamaño de malla ya que mejora claramente las estimaciones en todos los casos.

Respecto a los dos test presentados, uno de ellos tendrá utilidad para el estudio de la dependencia/independencia en procesos espaciales de dos dimensiones medidos en una malla regular. El test funciona bien en términos de niveles de significación particularmente cuando usamos un *taper* multiplicativo con parámetro de *bandwidth* pequeño. En cualquier caso, el valor de la potencia es cercano a 100%. Cuando un efecto *nugget* está presente en los datos espaciales, y los parámetros de suavizamiento y rango de la familia de *Matérn* son bastante grandes en relación con las dimensiones de la región, el test da resultados con gran variedad y poca robustez.

El test de estacionariedad nos muestra un procedimiento para detectar la estacionariedad (o no estacionariedad) basado en la representación espectral de un proceso no estacionario y en el caso particular de la familia de *Matérn* de densidades espectrales. El test ha mostrado que es eficaz para detectar diferencias, cuando realmente existen y detectar estacionariedad cuando la hay.

Sin embargo, en los problemas reales, la no estacionariedad puede ser suave, las regiones podrían no ser bien conocidas y los datos pueden estar espaciados irregularmente. Algunas de estas posibilidades han sido consideradas, pero so-

lo hemos analizado un número limitado de posibles escenarios, y por tanto una mayor variedad de casos pueden ser analizados ampliando los escenarios considerados.

El peso de esta tesis está puesto en los estudios de simulación y en algún aspecto metodológico sobre los momentos del periodograma. La aplicación está tratada como una vía para la utilidad de los métodos expuestos. No hemos querido darle más énfasis ni más importancia que la que tiene en el contexto de la tesis.

Con el objetivo de que éste sea un trabajo útil y manejable para futuros estudios e investigadores que quieran iniciarse en este tema, hemos incluido bastantes referencias bibliográficas, algunas absolutamente básicas y otras no tanto pero sí necesarias para disponer de una visión general sobre la aplicabilidad de las técnicas geoestadísticas en los campos espacial y espectral para la resolución de problemas medioambientales. Además, también se ha incluido descripciones de los softwares más comunes usados en la práctica de la geoestadística, indicando aquellos que son comerciales y los que pueden ser libremente bajados desde alguna dirección web.

Siguiendo en esta línea, y también con el objetivo de ser lo más transparentes posible, hemos incorporado al final de este trabajo no sólo los datos reales con los que hemos realizado el presente estudio sino también los códigos de programación, básicamente de R y Fortran, para que sean de libre acceso y sirvan de autoaprendizaje a futuros investigadores.

Sin embargo, como siempre, quedan otros muchos puntos abiertos que necesitan de aclaración o desarrollo y que dejan abiertas varias líneas de próximos trabajos. A continuación, comentamos algunos de estos puntos abiertos.

1. En este trabajo no nos hemos planteado establecer la idoneidad de la ubicación espacial de los datos ni si el número de observaciones era suficiente o si se podría haber llegado a los mismos resultados con menor número de localizaciones. Creemos que un buen trabajo continuador puede ser la realización de un análisis exhaustivo del diseño y optimización de los datos espaciales.
2. Todas las herramientas geoestadísticas desarrolladas en este estudio se centran únicamente en el análisis espacial del fenómeno analizado. No hemos contemplado la posibilidad de que este fenómeno dependa también del tiempo y por tanto la metodología adecuada hubiera sido las técnicas espaciotemporales en el dominio espectral (Porcu, 2004). Estas técnicas están en reciente introducción en la literatura y si el fenómeno en estudio manifiesta

ambas tendencias, sin lugar a dudas serán las herramientas a utilizar. Sin embargo, y en este sentido, en este trabajo nos hemos centrado sólo en la evolución espacial, guiándonos también por el hecho que las variables que hemos manejado no disponían de componente temporal.

3. Contraste de hipótesis sobre los modelos espectrales no han sido considerados, pero es un elemento de especial importancia.
4. En este estudio han sido tomados datos de suelos de una región formada por parte de cuatro comarcas, y en concreto la variable Conductividad estudiada respecto a Carbonatos, Arcillas y Materia Orgánica. En el futuro, también deberían considerarse el resto de variables que participan en el desencadenamiento de los procesos de evaluación de suelos y ser incorporados en los modelos.
5. Finalmente, en recientes trabajos, han aparecido contrastes sobre la separabilidad en espacio-tiempo bajo técnicas espectrales. Consideramos esta una importante vía de desarrollo.

Capítulo 9

Base de datos, Códigos de R y Fortran

9.1. Banco de datos para las 118 posiciones de muestreo en la región de estudio, Vila-Real, Betxí, Burriana y Alquerías del Niño Perdido

Las variables son:

xcoord (este)

ycoord (norte)

Carbonatos (%)

Materia Orgánica (%)

Arcilla (%)

Conductividad Eléctrica (dS)

4422337	745600	23.0	1.8	22.73	1.01
4422593	745536	6.4	1.6	33.29	0.86
4422287	745613	20.4	3.8	29.12	1.25
4423616	744778	0.2	4.3	37.06	1.78
4423826	744293	10.6	0.6	33.25	1.17

4425300	743693	0.6	0.9	21.27	1.83
4422817	744555	8.0	1.3	22.49	10.30
4423678	743723	3.2	2.0	24.26	1.85
4423613	742848	0.6	1.5	36.50	4.85
4423496	742532	0.3	2.3	34.40	1.81
4425265	740985	0.2	1.0	35.26	2.25
4422380	742847	1.4	1.3	16.90	1.25
4421954	742400	0.7	1.5	40.16	1.25
4420879	742687	0.5	0.8	25.43	0.59
4420139	743518	18.6	1.1	25.15	2.94
4420691	743985	1.8	1.1	32.23	0.47
4420098	742720	0.2	2.3	29.16	0.85
4418745	744128	13.3	1.9	30.15	2.35
4418747	745283	3.5	1.2	31.15	0.45
4417441	745888	1.7	1.8	26.92	0.56
4417538	746623	14.7	1.7	33.18	1.64
4416256	748275	12.1	2.1	29.86	0.64
4417301	747554	6.8	1.7	30.85	0.71
4417405	747179	7.1	2.4	30.30	0.68
4418549	748097	17.3	2.0	22.96	0.65
4418610	747728	15.4	3.1	20.63	1.16
4417274	749848	18.1	2.8	26.00	0.68
4417878	750494	14.9	2.8	32.97	1.97
4418197	751149	17.2	2.4	24.21	2.28
4420833	750736	19.6	1.8	27.00	0.56
4420003	750434	20.9	2.2	30.22	1.62
4420491	752226	21.4	1.8	36.87	0.92
4420167	753030	14.0	3.3	60.39	0.85
4419853	752161	22.3	2.0	28.06	0.84
4421929	753277	25.5	2.5	26.11	1.34
4422645	752605	27.5	1.7	14.56	1.03
4421981	753943	25.1	3.0	15.36	1.25
4421621	754753	28.3	2.2	21.17	0.79
4421979	754761	27.4	2.1	25.70	0.65
4422522	751597	9.1	0.8	34.38	0.66
4422096	750398	24.9	2.0	28.72	2.18
4423655	749751	9.7	1.8	27.51	0.78

4424103	749354	20.0	2.1	30.14	0.99
4420817	744636	0.8	2.4	22.00	0.95
4421107	745744	18.2	1.2	15.91	0.94
4420217	746775	12.3	1.8	16.43	0.86
4420225	748187	26.4	1.9	25.02	0.84
4417752	749222	14.9	2.1	16.36	1.31
4417752	748715	15.6	2.4	23.09	0.77
4417225	749054	10.4	1.5	23.07	0.76
4418976	750136	19.9	1.9	21.03	2.85
4418834	751171	20.0	1.9	23.03	0.57
4419103	751206	17.3	1.6	12.72	0.73
4418324	751467	21.2	2.1	29.51	1.08
4419325	751474	20.5	1.5	17.67	0.74
4419378	751940	20.0	2.1	19.72	0.58
4422102	755117	29.8	1.6	27.61	3.40
4420087	751354	30.1	1.9	16.62	0.62
4422796	753970	26.9	1.8	16.08	3.20
4423719	751445	31.0	1.3	19.03	1.43
4423859	751463	30.5	1.2	20.22	0.76
4421830	749314	21.2	2.3	27.63	0.72
4421080	749266	21.6	0.8	16.66	1.44
4422469	747812	12.9	1.4	23.74	0.52
4421802	747299	21.4	2.4	5.16	0.53
4421865	747188	27.0	1.9	29.24	1.54
4423521	747651	17.9	1.6	25.85	3.26
4425490	749386	21.9	1.6	26.09	3.52
4422809	746387	14.9	1.3	22.86	0.58
4423638	746159	22.3	1.9	22.81	2.29
4423465	745731	0.3	1.2	25.85	0.94
4424916	744779	1.0	1.7	23.35	0.82
4423073	743881	7.8	1.2	12.04	0.96
4422935	743074	2.6	1.7	8.67	0.90
4422337	744279	13.2	1.2	7.18	2.98
4421469	743754	0.4	1.2	24.90	0.76
4421204	742463	0.2	1.7	29.87	1.06
4420498	741694	0.5	2.3	38.96	1.15
4421075	741827	0.5	1.9	33.49	0.44

4422139	741368	5.9	1.5	29.23	1.04
4423399	741415	0.2	0.9	27.38	0.60
4423574	740833	7.0	1.3	21.28	0.68
4425165	739886	0.2	1.4	21.39	2.53
4419992	744590	9.6	1.6	40.47	0.55
4418190	744618	4.0	1.8	34.68	1.20
4420985	741458	4.3	2.3	34.13	2.57
4421153	741561	28.7	1.8	27.43	0.58
4420456	740536	7.5	0.9	35.97	2.82
4421296	740110	2.7	2.0	34.99	0.64
4422477	740175	0.4	1.5	44.22	0.66
4421851	740366	2.0	1.6	27.35	0.91
4421965	740983	3.8	0.9	30.05	0.83
4424907	738861	0.3	0.8	16.51	0.87
4425037	742535	0.3	1.3	20.85	1.27
4425528	742163	0.2	2.2	38.97	0.66
4424258	743286	0.6	1.6	39.78	0.76
4424413	741726	0.3	1.1	52.27	1.45
4424274	740863	0.2	1.9	31.25	1.05
4425496	743008	0.6	1.0	20.52	0.86
4425914	743526	0.4	0.8	41.58	0.66
4426475	744419	0.3	1.3	20.52	1.06
4426334	744726	0.9	1.2	22.59	0.68
4419022	746508	13.4	1.0	27.05	0.92
4426644	746398	0.9	1.2	22.43	0.59
4427116	746256	3.6	1.6	19.39	0.64
4427045	743671	0.5	1.1	21.24	0.60
4427248	743014	11.6	1.2	28.19	0.77
4427101	741894	2.5	0.7	25.13	0.78
4429370	742263	10.3	1.7	28.26	2.68
4415714	747144	10.8	2.0	29.63	0.72
4415761	748179	21.1	2.4	33.66	0.74
4415628	746845	9.9	2.1	32.33	0.69
4421616	751207	20.9	1.7	29.45	1.56
4428480	743232	13.5	1.2	16.75	0.89
4428880	742664	12.1	1.8	15.98	1.44
4428862	742279	0.4	0.6	10.55	0.77

4428552	742347	0.5	1.1	16.14	0.56
4426281	745830	17.5	1.5	27.77	1.13

9.2. Códigos R y Fortran

```
##### A)
La siguiente función, evalúa el periodograma con/sin taper para un proceso
espacial estacionario.
```

```
#####
```

```
pgram.jorge.taper.conjunto<-function(object,n1,n2,lf1,lf2,m1,m2,epsilon,
delta,toggle.taper,freq0.rm=T)
{
```

```
N<-n1*n2 m<-lf1*lf2 i<-complex(real=0,imaginary=1) a1<-floor(-(n1-1)/2)
a2<-floor(-(n2-1)/2) b1<-n1-floor(n1/2) b2<-n2-floor(n2/2)
f1<-seq(a1,b1,len=lf1) f2<-seq(a2,b2,len=lf2) omega.f1<-2*pi*f1/n1
omega.f2<-2*pi*f2/n2 data<-object
```

```
#epsilon,delta actúan sobre el rounded taper #m1,m2 actúan sobre el
multiplicative taper epsilon<-epsilon delta<-delta m1<-m1 m2<-m2
```

```
matriz.omega<-as.matrix(expand.grid(omega.f1,omega.f2)) #matriz.omega es
una matriz on filas=lf1*lf2=m y cols=2 (varian filas primero)
pgram.tap<-rep(0,m) modulo.omega<-rep(0,m)
```

```
for(j in 1:m){
  omega1<-matriz.omega[j,1]
  omega2<-matriz.omega[j,2]
  cat("pgram asociado al omega",j,"\n")
}
```

```
pgram.tap[j]<-pgram.jorge.taper(object=data,n1=n1,n2=n2,
omega1=matriz.omega[j,1],omega2=matriz.omega[j,2],m1,m2,epsilon,delta,
toggle.taper,freq0.rm=T)$pgram
```

```
modulo.omega[j]<-sqrt((matriz.omega[j,1]^2)+(matriz.omega[j,2]^2))
}
```

```
modulo.omega.cuad<-modulo.omega^2
resultado1<-as.matrix(cbind(matriz.omega,modulo.omega,
modulo.omega.cuad,pgram.tap))
resultado2<-matrix(pgram.tap,nrow=lf1)
return(list(res1=resultado1,pgram.mat=resultado2)) }
```

```
pgram.jorge.taper<-function(object,n1,n2,omega1,omega2,m1,m2,epsilon,
delta,toggle.taper,freq0.rm=T)
```

```
{
```

Evalua el periodograma para un proceso espacial estacionario. Llamada por la funcion `pgram.jorge.taper.conjunto` para cada entrada de `w` en 2 dim, calcula $I<-N(w)$, un numero real. Object debe ser una matriz con 3 columnas: #col 1=vector $Z(s)$; col 2= coordenada x ; col 3=coordenada y #lf1,2 es la longitud del vector de frecuencias # $N<-n1*n2$ #n1 y n2 son el num. de coordenadas que definen el grid regular # $m=c(m1,m2)$ son los smoothing pars asociados al data taper multiplicativo #epsilon,delta son los parámetros de suavizado asociados a data taper rounded #esta version contiene la posibilidad de no hacer tapering, es decir del `pgram.jorge`

```
N<-n1*n2 i<-complex(real=0,imaginary=1) omega1<-omega1 omega2<-omega2
epsilon<-epsilon m1<-m1 m2<-m2 delta<-delta
datos.lat<-as.matrix(expand.grid(1:n1,1:n2))
```

```
#tapering
```

```

if(toggle.taper == "no-taper") {

cat("no taper selected...\n")

tap<-rep(0,N)
h1<-rep(0,N)
h2<-rep(0,N)
const.normalizadora<-rep(0,N)

for(k in 1:N){ h1[k]<-1 h2[k]<-1 tap[k]<-object[k,1]*h1[k]*h2[k]
const.normalizadora[k]<-h1[k]*h1[k]*h2[k]*h2[k] }

}

if(toggle.taper == "multiplicative") {
cat("multiplicative taper selected...\n")

tap<-rep(0,N)
h1<-rep(0,N)
h2<-rep(0,N)
const.normalizadora<-rep(0,N)
#para la constante normalizadora, ver articulo de Montse-Kim, pag5

for(k in 1:N){

#building h1
#version con object (estos datos ya vienen en coordenadas enteras)

if(object[k,2]>=1&object[k,2]<=m1){h1[k]
<-(.5)*(1-cos((pi*(object[k,2]-0.5))/(m1))))}
if(object[k,2]>=(m1+1)&object[k,2]<=(n1-m1)){h1[k]<-1}

if(object[k,2]>=(n1-m1+1)&object[k,2]<=n1){h1[k]
<-(.5)*(1-cos((pi*((n1-object[k,2]+1)-0.5))/(m1))))}

#version rho fuentes-Kim con s/N, #con datos.lat (en caso de que las

```

coords no vengan en enteros) #con los data[,2:3] si ya vienen los datos originales en coordenadas enteras

```
temp<-NULL
#temp<-datos.lat[k,1]/n1
#temp<-object[k,2]/n1
#if(temp>=0 & temp<(epsilon/2))
{h1[k]<-(.5)*(1-cos((2*pi*temp)/epsilon))}
  #if(temp>=(epsilon/2) & temp<=(1-epsilon/2)) {h1[k]<-1}
  #if(temp>(1-epsilon/2) & temp<= 1)
{h1[k]<-(.5)*(1-cos((2*pi*(1-temp))/epsilon))}

#building h2
#version con object (j2) numero entero

if(object[k,3]>=1&object[k,3]<=m2){h2[k]
<-(.5)*(1-cos((pi*(object[k,3]-0.5))/(m2)))}
  if(object[k,3]>=(m2+1)&object[k,3]<=(n2-m2)){h2[k]<-1}

if(object[k,3]>=(n2-m2+1)&object[k,3]<=n2){h2[k]
<-(.5)*(1-cos((pi*((n2-object[k,3]+1)-0.5))/(m2)))}

#version rho fuentes-Kim con s/N
temp<-NULL
#temp<-datos.lat[k,2]/n2
#temp<-object[k,3]/n2
#if(temp>=0 & temp<(delta/2)) {h2[k]
  <-(.5)*(1-cos((2*pi*temp)/delta))}
  #if(temp>=(delta/2) & temp<=(1-delta/2)) {h2[k]<-1}
  #if(temp>(1-delta/2) & temp<= 1)
{h2[k]<-(.5)*(1-cos((2*pi*(1-temp))/delta))}

tap[k]<-object[k,1]*h1[k]*h2[k]
const.normalizadora[k]<-h1[k]*h1[k]*h2[k]*h2[k]
}
```

```

}

if(toggle.taper == "rounded") {
  cat("rounded taper selected...\n")

  tap<-rep(0,N)
  h1<-rep(0,N)
  h2<-rep(0,N)
  const.normalizadora<-rep(0,N)
  c1<-n1/2-epsilon
  c2<-n1/2-delta
  c3<-n2/2-delta
  c4<-n2/2-epsilon

  for(k in 1:N){
    r1<-NULL
    r2<-NULL
    r1<-abs(object[k,2]-((n1-1)/2))
    r2<-abs(object[k,3]-((n2-1)/2))
    d<-sqrt((r1-((n1/2)-epsilon))**2+(r2-((n2/2)-epsilon))**2)

    #building h<-R(r1,r2)

    #version rho fuentes-Kim con s/N,
    #con datos.lat (en caso de que las coords no vengan
    en enteros)
    #con los data[,2:3] si ya vienen los
    datos originales en coordenadas enteras

    if(r1<=c1 & r2>c3) {h1[k]<-(.5)*(1-cos((pi*((n2/2)-r2))/delta))}
    #reg A
    if(r2<=c4 & r1>c2) {h1[k]<-(.5)*(1-cos((pi*((n1/2)-r1))/delta))}
    #reg B
    if((r1<=c2 & r2<c4) | (r1<=c1 & r2<c3)) {h1[k]<-1} #reg C
    if(r1>c1 & r2>c4 & (d<=(epsilon-delta))) {h1[k]<-1} #reg F
    if(r1>c1 & r2>c4 & (epsilon-delta<=d<=epsilon))

```

```
{h1[k]<-(.5)*(1-cos((pi*(epsilon-d))/delta))} #reg D
  if(r1>c1 & r2>c4 & (d>=epsilon)) {h1[k]<-0} #reg E

  tap[k]<-object[k,1]*h1[k]
  const.normalizadora[k]<-h1[k]*h1[k]

} }

#fin tapering

temp<-rep(0,N)

for(k in 1:N){ #
temp[j]<-tap[j]*exp(-i*((object[j,2]*omega1)+(object[j,3]*omega2)))
para s
originales # temp[k]<-tap[k]*exp(-i*((datos.lat[k,1]*omega1)+
(datos.lat[k,2]*omega2))) temp[k]<-tap[k]*exp(-i*((object[k,2]
*omega1)+(object[k,3]*omega2))) }

pgram<-((Mod(sum(temp)))^2)/(2*pi*2*pi*(sum(const.normalizadora)))

list(fourier.freq.f1=omega1,fourier.freq.f2=omega2,pgram=pgram) }

#####
B) Cálculo de la densidad espectral teorica de Matérn en 2d y 1d
#####

densidad.espectral.matern.2d<-function(phi,alfa,n1,n2,nu,lf1,lf2,d=2)
{a1<-floor(-(n1-1)/2) a2<-floor(-(n2-1)/2) b1<-n1-floor(n1/2)
b2<-n2-floor(n2/2) f1<-seq(a1,b1,len=lf1) f2<-seq(a2,b2,len=lf2)
omega.f1<-2*pi*f1/n1 omega.f2<-2*pi*f2/n2
matriz.omega<-as.matrix(expand.grid(omega.f1,omega.f2)) m<-lf1*lf2
f<-rep(0,m) logf<-rep(0,m) modulo<-rep(0,m)

for(j in 1:m) {
  omega1<-NULL
```

```

omega2<-NULL
omega1<-matriz.omega[j,1]
omega2<-matriz.omega[j,2]
modulo[j]<-sqrt((omega1^2)+(omega2^2))
modulo2<-(omega1^2)+(omega2^2)
f[j]<-phi*(((alfa^2)+(modulo2))^(nu-(d/2)))
logf[j]<-(log(phi))+((-nu-1)*(log(alfa^2+modulo2)))
}

mat<-as.matrix(cbind(matriz.omega,modulo,f,logf))
fmat<-matrix(f,ncol=lf2,nrow=lf1) logfmat<-matrix(logf,ncol=lf2,
nrow=lf1)
return(feq.f1=omega.f1,feq.f2=omega.f2,mat=mat,fmat=fmatlogfmat=
logfmat)}
densidad.espectral.matern.1d<-function(phi,alfa,n1,nu,lf1,d=1) {
a1<-floor(-(n1-1)/2) b1<-n1-floor(n1/2) f1<-seq(a1,b1,len=lf1)
omega.f1<-2*pi*f1/n1 f<-rep(0,lf1)

for(j in 1:lf1) {
modulo2<-(omega.f1[j]^2)+(omega.f1[j]^2)
f[j]<-phi*(((alfa^2)+(modulo2))^(nu-(d/2)))
}

mat<-as.matrix(cbind(omega.f1,f)) return(feq.f1=omega.f1,mat=mat) }

#####
C) Test de independencia
#####
# A continuación vamos a ver los distintos pasos y las
#distintas pruebas realizadas para el test de independencia
#####

#implementacion del estadistico test en situaciones diferentes,
#es decir: diferentes valores de los parametros
# simulando un ruido blanco o una matern
# sin tapering o con multiplicative o rounded taper

```

```
# en un otro file hay que poner todos los resultados así que
# podremos calcular el tamaño de la region de rechazo y la potencia
# empírica del test añadimos el test sobre el pendiente de
# la linea de regresión y vemos si se obtiene el mismo resultado.
#####
```

```
# Las distintas pruebas (algún ejemplo):
#####
#Prueba1: ruido blanco sin taper
#Prueba2: ruido blanco con multiplicative taper
#Prueba3: ruido blanco con rounded taper
#Prueba4: matern con sill=2.9, range=166, nu=1.5, sin taper
#Prueba5: matern con sill=2.9, range=166, nu=1.5, con taper (mult)
#Prueba6: matern con sill=2.9, range=166, nu=1.5, con taper (round)
#Prueba7: matern con sill=2.9, range=166, nu=1.5, sin taper,
          nugget=2.9
#Prueba8: matern con sill=2.9, range=166, nu=1.5, con taper (mult),
          nugget=2.9
#Prueba9: matern con sill=2.9, range=166, nu=1.5, con taper (round),
          nugget=2.9
#Observacion: las pruebas 4-5-6-7-8-9 tienen que ser repetidas
unas cuantas veces con parametros diferentes
```

```
#####
#####
#_-----
#Prueba1
#####
#UN NUEVO TEST DE INDEPENDENCIA BASADO SOBRE LA DENSIDAD
#ESPECTRAL.
#####
```

```
#####
#PLAN DE TRABAJO (Va a ser el mismo en todos los casos:
# 1) Simular un proceso con cov NUGGET
# 2) Calcular la correlacion del muestreo
```

```

# 3) Calcular el estadístico test correspondiente
# 4) Rechazar o menos la hipótesis de independencia
# 5) calcular el pendiente de la regresión lineal
# 6) Hacer un otro test
# 7) rechazar o menos
#####

#####
#paso 1: simulación (sill=2, range=10) sin taper
#####
t1.29.300.05.1<-rep(0,1000)
tt1.29.300.05.1<-rep(0,1000)
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a11<-NULL
periodograma.a11<-NULL
x1<-NULL
x12<-NULL
y1<-NULL
fichero1<-NULL

cat("iteración=",i,"\n")

datos.simulados.a11<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,20),ylims=c(1,20),
cov.model ="pure.nugget",cov.pars=c(2.9,300), nugget=2.9,
kappa=0.5,nsim=1)
datos.simulados.a11<-cbind(datos.simulados.a11$data,
datos.simulados.a11$coords)
datos.simulados.a11<-cbind(datos.simulados.a11[,1]-
mean(datos.simulados.a11[,1]),datos.simulados.a11[,2],
datos.simulados.a11[,3])
periodograma.a11<-pgram.jorge.taper.conjunto(
object=datos.simulados.a11,
n1=20,n2=20,lf1=20,lf2=20,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="no-taper",freq0.rm=T)

#####

```

```
#paso 2: calcular la correlcion entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x1<-(periodograma.a11$res1[,3])
x12<-log(x1^2)
y1<-log(periodograma.a11$res1[,4])
fichero1<-data.frame(cbind(x12,y1))
names(fichero1)<-c("x12","y1")

#calcular la correlación del muestreo
rho1<-cor(x12, y1 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

n<-length(x1)
t1.29.300.05.1[i]<-(rho1*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho1^2))

}

selt1.29.300.05.1<-(t1.29.300.05.1>-2)&(t1.29.300.05.1<2)
at1.29.300.05.1<-length(t1.29.300.05.1[selt1.29.300.05.1])
alfat1.29.300.05.1<-(((1000-at1.29.300.05.1)/1000)*100)

#-----
#Prueba 2.
#-----

#####
#paso 1: simulacion (sill=2, range=10) taper:multiplicative
#####
t2.29.300.05.1<-rep(0,1000)
```

```

tt2.29.300.05.1<-rep(0,1000)
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a12<-NULL
periodograma.a12<-NULL
x2<-NULL
x22<-NULL
y2<-NULL
fichero2<-NULL
rho2<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a12<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,20),
ylims=c(1,20), cov.model = "pure.nugget",cov.pars=c(2.9,300),
nugget=2.9, kappa=0.5,nsim=1)
datos.simulados.a12<-cbind(datos.simulados.a12$data,
datos.simulados.a12$coords)
datos.simulados.a12<-cbind(datos.simulados.a12[,1]-
mean(datos.simulados.a12[,1]),datos.simulados.a12[,2],
datos.simulados.a12[,3])
periodograma.a12<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a12,
n1=20,n2=20,lf1=20,lf2=20,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="multiplicative",freq0.rm=T)
#####
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x2<-(periodograma.a11$res1[,3])
x22<-log(x2^2)
y2<-log(periodograma.a12$res1[,4])
fichero2<-data.frame(cbind(x22,y2))

```

```
names(fichero)<-c("x22","y2")

#calcular la correlacion del muestreo
rho2<-cor(x22, y2 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

n<-length(x2)
t2.29.300.05.1[i]<-(rho2*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho2^2))

}

selt2.29.300.05.1<-(t2.29.300.05.1>-2)&(t2.29.300.05.1<2)
at2.29.300.05.1<-length(t2.29.300.05.1[selt2.29.300.05.1])
alfat2.29.300.05.1<-(((1000-at2.29.300.05.1)/1000)*100)

#-----
#Prueba3
#-----

#####
#paso 1: simulacion (sill=2, range=10) taper:rounded
#####
t3.29.300.05.1<-rep(0,1000)
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a13<-NULL
periodograma.a13<-NULL
x3<-NULL
x32<-NULL
y3<-NULL
fichero3<-NULL
rho3<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")
```

```

datos.simulados.a13<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,20),
ylims=c(1,20),cov.model = "pure.nugget",cov.pars=c(2.9,300),
nugget=2.9,kappa=0.5,nsim=1)
datos.simulados.a13<-cbind(datos.simulados.a13$data,
datos.simulados.a13$coords)
datos.simulados.a13<-cbind(datos.simulados.a13[,1]-
mean(datos.simulados.a13[,1]),datos.simulados.a13[,2],
datos.simulados.a13[,3])
periodograma.a13<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a13,
n1=20,n2=20,lf1=20,lf2=20,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="rounded",freq.rm=T)

#####
#paso 2: calcular la correlacion entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x3<-(periodograma.a11$res1[,3])
x32<-log(x3^2)
y3<-log(periodograma.a13$res1[,4])
fichero3<-data.frame(cbind(x32,y3))
names(fichero3)<-c("x32","y3")

#calcular la correlacion del muestreo
rho3<-cor(x32, y3 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

n<-length(x3)

```

```
t3.29.300.05.1[i]<-(rho3*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho3^2))
}

selt3.29.300.05.1<-(t3.29.300.05.1>-2)&(t3.29.300.05.1<2)
at3.29.300.05.1<-length(t3.29.300.05.1[selt3.29.300.05.1])
alfat3.29.300.05.1<-(((1000-at3.29.300.05.1)/1000)*100)

-----
#Prueba4 ESTRUCTURA DE MATERN

#####
#      nu = 1.5 #
#####

#####
#paso 1: simulación (sill=2.9, range=166);
#sin taper; NUGGET=CERO, epsilon = 1
#####
t4.29.166.15.1<-rep(0,1000)
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a14<-NULL
periodograma.a14<-NULL
x4<-NULL
x42<-NULL
y4<-NULL
fichero4<-NULL
rho4<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a14<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,20),
  ylims=c(1,20),cov.model = "matern",cov.pars=c(2.9,166),
  nugget=0,kappa=1.5,nsim=1)
datos.simulados.a14<-cbind(datos.simulados.a14$data,
datos.simulados.a14$coords)
```

```

datos.simulados.a14<-cbind(datos.simulados.a14[,1]-
mean(datos.simulados.a14[,1]),
datos.simulados.a14[,2],datos.simulados.a14[,3])
periodograma.a14<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a14,
n1=20,n2=20,lf1=20,lf2=20,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="no-taper",freq0.rm=T)
#pesos<-1/periodograma.a14$pgram.mat

#####
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x4<-(periodograma.a11$res1[,3])
x42<-log(x4^2)
y4<-log(periodograma.a14$res1[,4])
fichero4<-data.frame(cbind(x42,y4))
names(fichero4)<-c("x42","y4")

#calcular la correlación del muestreo
rho4<-cor(x42, y4 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadístico test
#####

n<-length(x4)
t4.29.166.15.1[i]<-(rho4*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho4^2))
}
selt4.29.166.15.1<-(t4.29.166.15.1>-2)&(t4.29.166.15.1<2)
at4.29.166.15.1<-length(t4.29.166.15.1[selt4.29.166.15.1])
alfat4.29.166.15.1<-(((1000-at4.29.166.15.1)/1000)*100)

```

```
#-----  
#Prueba5 ESTRUCTURA DE MATERN  
  
#####  
#paso 1: simulacion (sill=2.9, range=166)  
# taper: multiplicative; nugget: 0  
#####  
t5.29.166.15.1<-rep(0,1000)  
for(i in 1:1000){  
  
  datos.simulados.a15<-NULL  
  periodograma.a15<-NULL  
  x5<-NULL  
  x52<-NULL  
  y5<-NULL  
  fichero5<-NULL  
  rho5<-NULL  
  
  cat("iteracion=",i,"\n")  
  
  datos.simulados.a15<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,10),  
    ylims=c(1,10),cov.model = "matern",cov.pars=c(2,10),  
    nugget=0,kappa=1.5,nsim=1)  
  datos.simulados.a15<-cbind(datos.simulados.a15$data,  
    datos.simulados.a15$coords)  
  datos.simulados.a15<-cbind(datos.simulados.a15[,1]-  
    mean(datos.simulados.a15[,1]),  
    datos.simulados.a15[,2],datos.simulados.a15[,3])  
  periodograma.a15<-pgram.jorge.taper.conjunto  
    (object=datos.simulados.a15,  
    n1=10,n2=10,lf1=10,lf2=10,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,  
    toggle.taper="multiplicative",freq0.rm=T)  
  #pesos<-1/periodograma.a15$pgram.mat  
  
#####  
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma  
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
```

```
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x5<-(periodograma.a15$res1[,3])
x52<-log(x5^2)
y5<-log(periodograma.a15$res1[,4])
fichero5<-data.frame(cbind(x52,y5))
names(fichero5)<-c("x","y")

#calcular la correlacion del muestreo
rho5<-cor(x52, y5 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

#z<-0.5*log((1+rho/1-rho))
n<-length(x5)
t5.29.166.15.1[i]<-(rho5*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho5^2))
}

selt5.29.166.15.1<-(t5.29.166.15.1>-2)&(t5.29.166.15.1<2)
at5.29.166.15.1<-length(t5.29.166.15.1[selt5.29.166.15.1])
alfat5.29.166.15.1<-(((1000-at5.29.166.15.1)/1000)*100)

#-----
#Prueba6 ESTRUCTURA DE MATERN

#####
#paso 1: simulacion (sill=2.9, range=166);
# taper: ROUNDED; nugget=0
#####
t6.29.166.15.1<-rep(0,1000)
```

```
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a16<-NULL
periodograma.a16<-NULL
x6<-NULL
x62<-NULL
y6<-NULL
fichero6<-NULL
rho6<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a16<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,10),
ylims=c(1,10),
cov.model = "matern",cov.pars=c(2,10), nugget=0,kappa=1.5,nsim=1)
datos.simulados.a16<-cbind(datos.simulados.a16$data,
datos.simulados.a16$coords)
datos.simulados.a16<-cbind(datos.simulados.a16[,1]-
mean(datos.simulados.a16[,1]),
datos.simulados.a16[,2],datos.simulados.a16[,3])
periodograma.a16<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a16,
n1=10,n2=10,lf1=10,lf2=10,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="rounded",freq0.rm=T)
#pesos<-1/periodograma.a16$pgram.mat

#####
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x6<-(periodograma.a16$res1[,3])
x62<-log(x6^2)
y6<-log(periodograma.a16$res1[,4])
```

```

fichero6<-data.frame(cbind(x62,y6))
names(fichero6)<-c("x","y")

#calcular la correlacion del muestreo
rho6<-cor(x62, y6 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

n<-length(x6)
t6.29.166.15.1[i]<-(rho6*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho6^2))
}

selt6.29.166.15.1<-(t6.29.166.15.1>-2)&(t6.29.166.15.1<2)
at6.29.166.15.1<-length(t6.29.166.15.1[selt6.29.166.15.1])
alfat6.29.166.15.1<-(((1000-at6.29.166.15.1)/1000)*100)

#-----
#Prueba7 ESTRUCTURA DE MATERN

#####
#paso 1:simulacion (sill=2.9, range=166); taper: NO; nugget=2.9
#####
t7.29.166.15.1<-rep(0,1000) for(i in 1:1000){

datos.simulados.a17<-NULL
periodograma.a17<-NULL
x7<-NULL
x72<-NULL
y7<-NULL
fichero7<-NULL
rho7<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a17<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,10),

```

```
ylims=c(1,10),cov.model = "matern",cov.pars=c(2,10),
nugget=2.9,kappa=1.5,nsim=1)
datos.simulados.a17<-cbind(datos.simulados.a17$data,
datos.simulados.a17$coords)
datos.simulados.a17<-cbind(datos.simulados.a17[,1]-
mean(datos.simulados.a17[,1]),
datos.simulados.a17[,2],datos.simulados.a17[,3])
periodograma.a17<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a17,
n1=10,n2=10,lf1=10,lf2=10,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="no-taper",freq0.rm=T)
#pesos<-1/periodograma.a17$pgram.mat

#####
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x7<-(periodograma.a17$res1[,3])
x72<-log(x7^2)
y7<-log(periodograma.a17$res1[,4])
fichero7<-data.frame(cbind(x72,y7))
names(fichero7)<-c("x","y")

#calcular la correlacion del muestreo
rho7<-cor(x72, y7 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

n<-length(x7)
t7.29.166.15.1[i]<-(rho7*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho7^2))
```

```

}

selt7.29.166.15.1<-(t7.29.166.15.1>-2)&(t7.29.166.15.1<2)
at7.29.166.15.1<-length(t7.29.166.15.1[selt7.29.166.15.1])
alfat7.29.166.15.1<-(((1000-at7.29.166.15.1)/1000)*100)

#-----
#Prueba8 ESTRUCTURA DE MATERN

#####
#paso 1: simulacion (sill=2.9, range=166);
#taper: rounded; nugget=2.9
#####
t8.29.166.15.1<-rep(0,1000)
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a18<-NULL
periodograma.a18<-NULL
x8<-NULL
x82<-NULL
y8<-NULL
fichero8<-NULL
rho8<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a18<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,10),
ylims=c(1,10),
cov.model = "matern",cov.pars=c(2,10), nugget=2.9,
kappa=1.5,nsim=1)
datos.simulados.a18<-cbind(datos.simulados.a18$data,
datos.simulados.a18$coords)
datos.simulados.a18<-cbind(datos.simulados.a18[,1]-
mean(datos.simulados.a18[,1]),
datos.simulados.a18[,2],datos.simulados.a18[,3])
periodograma.a18<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a18,

```

```
n1=10,n2=10,lf1=10,lf2=10,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="rounded",freq0.rm=T)
#pesos<-1/periodograma.a18$pgram.mat

#####
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x8<-(periodograma.a18$res1[,3])
x82<-log(x8^2)
y8<-log(periodograma.a18$res1[,4])
fichero8<-data.frame(cbind(x82,y8))
names(fichero8)<-c("x","y")

#calcular la correlacion del muestreo
rho8<-cor(x82, y8 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadistico test
#####

n<-length(x8)
t8.29.166.15.1[i]<-(rho8*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho8^2))
}
selt8.29.166.15.1<-(t8.29.166.15.1>-2)&(t8.29.166.15.1<2)
at8.29.166.15.1<-length(t8.29.166.15.1[selt8.29.166.15.1])
alfat8.29.166.15.1<-(((1000-at8.29.166.15.1)/1000)*100)
#_-----
#Prueba9 ESTRUCTURA DE MATERN

#####
#paso 1: simulacion (sill=2.9, range=166);
#taper: multiplicative; nugget=2.9
```

```
#####
t9.29.166.15.1<-rep(0,1000)
for(i in 1:1000){

datos.simulados.a19<-NULL
periodograma.a19<-NULL
x9<-NULL
x92<-NULL
y9<-NULL
fichero9<-NULL
rho9<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a19<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,10),
ylims=c(1,10),cov.model = "matern",cov.pars=c(2,10),
nugget=2.9,kappa=1.5,nsim=1)
datos.simulados.a19<-cbind(datos.simulados.a19$data,
datos.simulados.a19$coords)
datos.simulados.a19<-cbind(datos.simulados.a19[,1]-
mean(datos.simulados.a19[,1]),
datos.simulados.a19[,2],datos.simulados.a19[,3])
periodograma.a19<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a19,
n1=10,n2=10,lf1=10,lf2=10,m1=1,m2=1,epsilon=1,delta=1,
toggle.taper="multiplicative",freq0.rm=T)
#pesos<-1/periodograma.a19$pgram.mat

#####
#paso 2: calcular la correlation entre el periodograma
# y el modulo de la frecuencia elevado al cuadrado
#####

#disponer un fichero con primera columna el modulo de omega
# y segunda columna el periodograma

x9<-(periodograma.a19$res1[,3])
```

```
x92<-log(x9^2)
y9<-log(periodograma.a19$res1[,4])
fichero9<-data.frame(cbind(x92,y9))
names(fichero9)<-c("x","y")

#calcular la correlacion del muestreo
rho9<-cor(x92, y9 , use = "all.obs", method = c("pearson"))

#####
#paso 3: calcular el estadístico test
#####

#z<-0.5*log((1+rho/1-rho))
n<-length(x9)
t9.29.166.15.1[i]<-(rho9*sqrt(n-2)/sqrt(1-rho9^2))
}

selt9.29.166.15.1<-(t9.29.166.15.1>-2)&(t9.29.166.15.1<2)
at9.29.166.15.1<-length(t9.29.166.15.1[selt9.29.166.15.1])
alfat9.29.166.15.1<-(((1000-at9.29.166.15.1)/1000)*100)

#####
D) Test de estacionaridad:
#####

# A continuación tenemos un ejemplo para
#la obtención de los valores de fi y nu para el test

#-----
#caso: sill=2.9 , rango=166, nu = 0.5 , multiplicative, e=10
#-----
fi05.29.166e10m<-rep(0,100)
nu05.29.166e10m<-rep(0,100)

for(i in 1:100){

datos.simulados.a11<-NULL
```

```

periodograma.a11<-NULL
x11<-NULL
y11<-NULL
fi05t11<-NULL

cat("iteracion=",i,"\n")

datos.simulados.a11<-grf(400,grid="reg",xlims=c(1,20),
ylims=c(1,20),
cov.pars=c(2.9,166),nugget=0,kappa=0.5,nsim=1)
datos.simulados.a11<-cbind(datos.simulados.a11$data,
datos.simulados.a11$coords)
datos.simulados.a11<-cbind(datos.simulados.a11[,1]-
mean(datos.simulados.a11[,1]),datos.simulados.a11[,2],
datos.simulados.a11[,3])
periodograma.a11<-pgram.jorge.taper.conjunto
(object=datos.simulados.a11,
n1=20,n2=20,lf1=20,lf2=20,m1=10,m2=10,epsilon=10,delta=10,
toggle.taper="multiplicative",freq0.rm=T)

x11<-as.numeric(log(periodograma.a11$res1[,3]))
y11<-as.numeric(log(periodograma.a11$res1[,4]))
fi05t11<-lm(y11~x11)

fi05.29.166e10m[i]<-exp(as.numeric(fi05t11$coef[1]))
nu05.29.166e10m[i]<--(as.numeric(fi05t11$coef[2])/2)-1
}

```

```

#####
E) Código Fortran para simulaciones
#####

```

```

PROGRAM PERIODOGRAM
USE numerical_libraries
USE ModEPeriodog
USE ModDEspParIso
USE ModESVarIso

```

```
USE ModVarParIso
USE ModDat
IMPLICIT NONE
c Datos reguralmente espaciados
INTEGER NX(2)
REAL*8 IncX(2)
REAL*8, ALLOCATABLE :: X(:, :)
c Opciones
INTEGER iPad, ttaper, nparf, iajustral, iWPer
REAL*8 ParTeor(4)
REAL*8, EXTERNAL :: ModeloSVI
c
INTEGER ISEED, NIter, iter, i, j1, j2, i1, i2, i3, i4
c
CCCC LEER FICHERO DE ENTRADA
OPEN (UNIT=10, FILE='espectral.inp')
c Numero de iteraciones
READ(10, *) NIter
WRITE(*, *) 'Num de iter: ', NIter
c Parametros teóricos
DO i=1, 4
    READ(10, *) ParTeor(i)
    WRITE(*, '(1X, A, I1, A, F12.6)') 'ParTeor(', i, '): ', ParTeor(i)
END DO
c Límites parametros
DO i=1, 4
    READ(10, *) LBParSVI(i)
    READ(10, *) UBParSVI(i)
    WRITE(*, '(1X, A, I1, A, F12.6)') 'LBParSVI(', i, '): ', LBParSVI(i)
    WRITE(*, '(1X, A, I1, A, F12.6)') 'UBParSVI(', i, '): ', UBParSVI(i)
END DO
TipoSVI=7
DimSVI=2
CALL SetLUBEspDEI(DimSVI, TipoSVI, LBParSVI, UBParSVI)
WRITE(*, '(A, 3F14.6)') 'LBParDEI', LBParDEI(1:3)
WRITE(*, '(A, 3F14.6)') 'UBParDEI', UBParDEI(1:3)
c Dimensiones rejilla
```

```

DO i=1,2
  READ(10,*) NX(i)
  WRITE(*,'(1X,A,I1,A,I2)') 'NX(',i,'): ',NX(i)
END DO
DO i=1,2
  READ(10,*) IncX(i)
  WRITE(*,'(1X,A,I1,A,F12.6)') 'IncX(',i,'): ',IncX(i)
END DO
c  Estimación del periodograma
c  Incluir frecuencia 0
  READ(10,*) IPar(1) !=0 NO FREC 0
  WRITE(*,*) 'IPar(1):',IPar(1)
c  Centrar datos
  READ(10,*) IPar(2) !=0 NO CENTRAR
  WRITE(*,*) 'IPar(2):',IPar(2)
c  Rellenado de datos (0 padding)
  READ(10,*) iPad !=0 NO RELLENAR
  WRITE(*,*) 'iPad: ',iPad
c  Guardar estimaciones
  READ(10,*) iWPer !=0 NO GUARDAR
  WRITE(*,*) 'iWPer: ',iWPer
  CLOSE(10)
CCCC  FIN LECTURA FICHERO DE ENTRADA
c
  CALL CPUTimeIni
  NDat=NX(1)*NX(2)
  NDim=2
  OPEN (UNIT=8,FILE='parvar.sim')
  OPEN (UNIT=9,FILE='pardes.sim')
  OPEN (UNIT=10,FILE='period.sim')
c  Asignar memoria
  CALL DatInit
  ALLOCATE (X(NX(1),NX(2)),STAT=i)
  IF (i.NE.0) CALL Error(i)
c  Generar X
  DO i=1,NDim
    IncX(i)=1.0/(NX(i)-1.0)

```

```
END DO
i=0
DO i1=1,NX(1)
  DO i2=1,NX(2)
    i=i+1
    DatX(1,i)=IncX(1)*(i1-1)
    DatX(2,i)=IncX(2)*(i2-1)
  END DO
END DO
c Iniciar var periodograma
IF (iPad.EQ.1) THEN
  NPad(1)=NX(1)-1
  NPad(2)=NX(2)-1
ELSE
  NPad=0
END IF
NPer=NX+NPad
CALL LPerIInit(NPer(1),NPer(2))
c Iniciar estimación espacial del semivariograma
CALL ESVarIsoInit(15)
RDESV=MIN(IncX(1),IncX(2))
c
ISEED=1234567890
c ISEED=1977866317
CALL RNSET(ISEED)
c
DO iter=1,NIter
c
c Generar datos
WRITE(*,*) 'Generando datos...',iter
CALL RNGET(ISEED)
WRITE(*,*) 'ISEED=',ISEED
TipoSVI=7
DimSVI=NDim
ParSVI(1:4)=ParTeor(1:4)
Umbral=ParSVI(1)+ParSVI(2)
  CALL SimulaPENMD(NDat,NDim,DatX,DatZ,ModeloSVI,Umbral)
```

```
CALL SetParEspDEI(DimSVI,TipoSVI,ParSVI)
WRITE(*,*) 'Parametros teoricos:'
WRITE(*,'(A,4F10.4)') 'ParDEI',ParDEI(1:3)
WRITE(*,'(A,4F10.4)') 'ParSVI',ParSVI(1:4)
i=0
DO i1=1,NX(1)
    DO i2=1,NX(2)
        i=i+1
        X(i1,i2)=DatZ(i)
    END DO
END DO
CALL CPUTimePrint(6)
```

c

```
DO ttaper=1,9
SELECT CASE (ttaper)
CASE(1)
    ITaper=0
    IPar(3)=5
    IPar(4)=5
CASE(2)
    ITaper=3
    IPar(3)=1
    IPar(4)=1
CASE(3)
    ITaper=4
    IPar(3)=1
    IPar(4)=1
CASE(4)
    ITaper=3
    IPar(3)=3
    IPar(4)=3
CASE(5)
    ITaper=4
    IPar(3)=3
    IPar(4)=3
CASE(6)
    ITaper=3
```

```
        IPar(3)=5
        IPar(4)=5
CASE(7)
    ITaper=4
    IPar(3)=5
    IPar(4)=5
CASE(8)
    ITaper=3
    IPar(3)=10
    IPar(4)=10
CASE(9)
    ITaper=4
    IPar(3)=10
    IPar(4)=10
END SELECT
c
c  Calcular periodograma
WRITE(*,*) 'Calculando periodograma...',iter,ttaper
CALL LPerIso2D(NX,X,NX(1),IncX,NPad,ITaper,IPar,
    &          LPerI,FrecI,NPerI)
IF (iWPer.NE.0) THEN
    DO i=1,NPerI
        WRITE(10,'(2i2,2F15.5)') iter,ttaper,FrecI(i),
    &          LPerI(i),DEITipo(FrecI(i))
C        WRITE(10,'(2i2,2F15.5)') iter,ttaper,FrecI(i),LPerI(i)
    END DO
END IF
CALL CPUTimePrint(6)
c  Ajustar modelo
DO iajustral=1,3
    DimDEI=2
    TipoSVI=7
    DimSVI=NDim
    ParSVI(1:4)=ParTeor(1:4)
    CALL SetParEspDEI(DimSVI,TipoSVI,ParSVI)
C    considerar mco
    SELECT CASE (iajustral)
```

```

CASE(1)
c   Ajustar modelo por max ver
    WRITE(*,*) 'Ajustando modelo por max ver',iter,ttaper
    CALL AjMDEspParI2(LPerI,FrecI,NPerI,DimDEI,TipoDEI,
&                    ParDEI,LBParDEI,UBParDEI,CPMDEI)
CASE(2)
c   Ajustar modelo por min cuadrados ponderados
    WRITE(*,*) 'Ajustando modelo por mcp',iter,ttaper
    CALL AjMDEspParIso(LPerI,FrecI,NPerI,DimDEI,TipoDEI,
&                    ParDEI,LBParDEI,UBParDEI,10,CPMDEI)
    call Graficos
CASE(3)
c   Ajustar modelo por min cuadrados ordinarios
    WRITE(*,*) 'Ajustando modelo por mco',iter,ttaper
    CALL AjMDEspParIso(LPerI,FrecI,NPerI,DimDEI,TipoDEI,
&                    ParDEI,LBParDEI,UBParDEI,1,CPMDEI)
END SELECT
c   Imprimir resultados
    WRITE(*,'(A,3I3,4F10.4)') 'ParDEI',iter,ttaper,iajustral,
&                    ParDEI(1:3)
    WRITE(9,'(3I4,4(1X,F14.5))') iter,ttaper,iajustral,ParDEI(1:3)
    CALL GetParEspDEI(DimSVI,TipoSVI,ParSVI)
    WRITE(*,'(A,3I3,4F10.4)') 'ParSVI',iter,ttaper,iajustral,
&                    ParSVI(1:4)
    WRITE(8,'(3I4,4(1X,F14.5))') iter,ttaper,iajustral,ParSVI(1:4)
    CALL CPUTimePrint(6)
END DO      ! Fin bucle iajustral
END DO      ! Fin bucle ttaper
c   Estimación en escala espacial
    iajustral=4
    ttaper=1
c   Estimar semivariograma
    WRITE(*,*) 'Estimando semivariograma...',iter
    IOpESV=0
    ROpESV=0.DO
    CALL EstSVarIso(NDat,NDim,DatZ,DatX,NESV,RDESV,
&                    ESV,HESV,NHESV,IOpESV,ROpESV)

```

```
c  Ajustar modelo
WRITE(*,*) 'Ajustando modelo semivariograma...',iter
NESVAj=MAX0(IOpESV(3)/2+1,NESV) !Hasta la mitad del salto máximo
ParSVI(1:4)=ParTeor(1:4)
c  ROpESV(3)=ROpESV(3)/2.0D0
c  CALL GetParIniSVI(TipoSVI,ParSVI,StatZ(2),ROpESV(3))
CALL AjMVarParIso(ESV,HESV,NHESV,NESVAj,NDim,TipoSVI,ParSVI,
&
&                LParSVI,UBParSVI,CPMSVI)
c  Imprimir resultados
WRITE(*,'(A,3I3,4F10.4)') 'ParSVI',iter,ttaper,iajustral,
&
&                ParSVI(1:4)
WRITE(8,'(3I4,4(1X,F14.5))') iter,ttaper,iajustral,ParSVI(1:4)
CALL SetParEspDEI(DimSVI,TipoSVI,ParSVI)
WRITE(*,'(A,3I3,4F10.4)') 'ParDEI',iter,ttaper,iajustral,
&
&                ParDEI(1:3)
WRITE(9,'(3I4,4(1X,F14.5))') iter,ttaper,iajustral,ParDEI(1:3)
c  CALL GrafAjVarIso
CALL CPUTimePrint(6)
END DO      !   Fin bucle iter

c
CALL CPUTimePrint(6)
c  Liberar memoria
DEALLOCATE (X,STAT=i)
IF (i.NE.0) CALL Error(i)
CLOSE(8)
CLOSE(9)
CLOSE(10)
CALL ESVarIsoExit
CALL LPerIExit
CALL DatExit
100  FORMAT(i4,4(1x,f12.6))

c
CONTAINS

SUBROUTINE Graficos

c
ParSVI(1:4)=ParTeor(1:4)
```

```
        CALL SetParEspDEI(DimSVI,TipoSVI,ParSVI)
c      DO i=1,NPerI
c          WRITE(10,'(i2,2F15.5)') 0,FrecI(i),DEITipo(FrecI(i))
c      END DO
        CALL GrafAjLPerIso
        RETURN
        END SUBROUTINE Graficos

        END PROGRAM PERIODOGRAM
```

```
        SUBROUTINE GrafAjLPerIso
        USE ModEPeriodog
        USE ModDEspParIso
        INTEGER i
c      GUARDAR AJUSTE MODELO GEOEST
c      Almacenar el estimador utilizado y el modelo ajustado
        OPEN (11, FILE = 'AjLPerI.txt')
        WRITE(11,*) (FrecI(i),LPerI(i),DEITipo(FrecI(i)),i=1,NPerI)
        CLOSE(11)
        RETURN
        END SUBROUTINE GrafAjLPerIso
```


Capítulo 10

Referencias

1. Anderson, T. (1984). *An introduction to multivariate statistical analysis*, 2ª edición, Wiley.
2. Andrieu, H., Creuting, J.D., Delrieu, J., Leoussof, J. y Pointin, Y. (1989). Radar data processing for hydrology in the Cevennes region. Remote Sensing and Large-Scale Global Processes . *Proceedings of the IAHS Third Int. Assembly*, Baltimore, MD, May 1989, IAHS Publ. no. 186.
3. Antolín, C., Carbó, E. y Álvarez, D. (1998). Aplicación de la ecuación universal de pérdida de suelo en la Comunidad Valenciana. En: *El suelo como recurso natural en la Comunidad Valenciana. Territori 8*. Consellería de Obras Públicas, Urbanismo y Transportes, Generalitat Valenciana, Valencia.
4. Añó, C. y Sánchez, J. (2003). *Orientaciones de Uso Agrario. Una metodología para la planificación de usos del suelo en la Comunidad Valenciana*. Biblioteca de Ciencias 5, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 129.
5. Atteia, O., Dubois, J.P. y Webster, R. (1994) Geostatistical analysis of soil contamination in the Swiss Jura. *Environmental Pollution*, **86**, 315-327.
6. Azimi-Zonooz, A., Krajewski, W.F., Bowles, D.S. y Seo, D.J. (1989). Spatial rainfall estimation by linear and non-linear co-kriging of radar -rainfall and raingauge data. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, **3**, 51-67.

7. Bardossy, A., Haberlandt, U. y Grimm-Strele, J. (1997) Interpolation of groundwater quality parameters using additional information, *geoENV-1 Geostatistics for Environmental Applications*. Kluwer Academic Publishers, 189-200.
8. Barry, J., Crowder, M. y Diggle, P. (1997). *Parametric estimation of the variogram*. Technical Report ST-97-06, Dept. Maths and Stats, Lancaster University, Lancaster, UK.
9. Bartlett, M.S. (1938). The approximate recovery of information from field experiments with large blocks. *Journal of Agricultural Science*, **28**, 418-427.
10. Bartlett, M.S. (1976). *The statistical analysis of spatial pattern*. Chapman and Hall, London.
11. Bartlett, M.S. (1978). Nearest neighbour models in the analysis of field experiments (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, **40**, 147-175.
12. Besag, J.E. (1974). Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *Journal of the Royal Statistical Society*, **36**, 192-236.
13. Bochner, M., y Martin, W.T. (1949). *Several Complex Variables*, Mathematical Series, **10**, Princeton University Press, Princeton.
14. Brillinger, D.R. (1970). The frequency analysis of relations between stationary spatial series. In R. Pyke, editor, *Proceedings, 12th Biennial Seminar on Time Series, Stochastic Processes, Convexity, Combinatorics*. Canadian Mathematical Congress, Montreal.
15. Brillinger, D.R. (1974). Fourier analysis of stationary processes. *Proceedings of the IEEE*, **62**, 1628-1643.
16. Brillinger, D.R. (1981). *Time series*. Holden-Day Inc., Oakland, California, segunda edición.
17. Brockwell, P.J. y Davis, R.A. (1991). *Time series: theory and methods*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, Nueva York, segunda edición.
18. Burgess, T.M. y Webster, R. (1980a). Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. I. The semivariogram and punctual kriging. *Journal of Soil Science*, **31**, 315-331.

19. Burgess, T.M. y Webster, R. (1980b). Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. II. Block kriging. *Journal of Soil Science*, **31**, 333-341.
20. Burgess, T.M. y Webster, R. (1980c). Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. III. Changing drift and universal kriging. *Journal of Soil Science*, **31**, 505-524.
21. Burgess, T.M. y Webster, R. (1981). Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties. IV. Sampling strategy. *Journal of Soil Science*, **31**, 643-659.
22. Burrouh, P.A. y McDowell, R.A. (1998). *Principes of Geographical Information Systems*. Oxford University Press.
23. Chien, Y.J., Lee, D.Y, Guo H.Y. y Houg H.H. (1997). Geostatistical analysis of soil properties of mid-west Taiwan soils. *Soil Science*, **162**, 291-298.
24. Chiles, J.P. (1976). How to adapt kriging to non-classical problems: the case studies. In *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*. (Eds) M. Guarascio, M. David, y C.J. Huijbregts, 69-90.
25. Chiles, J.P. y Liao, H.T. (1993). Estimating the recoverable reserves of gold deposits: Comparison between disjunctive kriging and indicator kriging. In A. Soares (ed.), *Geostatistics Troia 92*, **2**. Kluwer, Dordrecht, pp. 1053-1064.
26. Chiles, J.P. y Delfiner, P. (1999). *Geoestatistics. Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley Series in Probability and Statistics, Canada.
27. Chu, J. (1996). Fast sequential indicator simulation: Beyond reproduction of indicator variograms. *Mathematical Geology*, **28**, 923-936.
28. Cressie, N.A.C. (1985). Fitting variogram models by weighted least squares. *Mathematical Geology*, **47**, 563-586.
29. Cressie, N.A.C. (1993). *Statistics for Spatial Data*. John Wiley, Nueva York.
30. Cressie, N.A.C. y Hawkins, D.M. (1980). Robust estimation of the variogram I. *Mathematical Geology*, **12**, 115-125.
31. Cressie, N.A.C. y Horton, R. (1987). A robust-resistant spatial analysis of soil water infiltration. *Water Resources Research*, **23**, 911-917.

32. Crujeiras, R. y González-Manteiga, W. (2005). *Generalized likelihood ratio test for spatial spectra in lattice processes*. En preparación.
33. Davis, F.W., Quattrochi, D.A., Ridd, M.K., Lam, N.S.-M., Walsh, S.J., Michaelson, J.C., Franklin, J., Stow, D.A., Johannsen, C.J. y Johnston, C.A. (1991). Environmental analysis using integrated GIS and remotely sensed data: some research needs and priorities. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **57**, 689-697.
34. DeGroot, M. (1989). *Probability and statistics*. 2ª edición, Addison-Wesley.
35. Dempster, A.P. y Schatzoff, M. (1965). Expected Significance Level as a sensitivity index for test statistics. *Journal of the American Statistical Association*, **60**, 420-436.
36. De Kwaadsteniet, J.W. (1990). On some fundamental weak spots of kriging technique and their consequences. *Journal of Hydrology*, **114**, 277-284.
37. Deutsch, C.V. (1991). *The relationship between universal kriging, kriging with an external drift, and cokriging*. Stanford Center of Reservoir Forecasting (SCRF), Report 4, May 1991.
38. Deutsch, C.V. y Journel, A.G. (1998). *Geostatistical Software Library and User's Guide, GSLIB*. Oxford University Press, New-York.
39. Dirks, K.N., Hay, J.E., Stow, C.D. y Harris, D. (1998). High-resolution studies of rainfall on Norfolk Island. Part II: Interpolation of rainfall data. *Journal of Hydrology*, **208**, 187-193.
40. Fairfield Smith, H. (1938). An empirical law describing heterogeneity in the yields of agricultural crops. *Journal of Agricultural Science*, **28**, 1-23.
41. Fernández-Casal, R. (2003). *Geostadística Espacio-Temporal, Modelos flexibles de variogramas anisotrópicos no separables*. Tesis Doctoral.
42. Fuentes, M. (2000). Interpolation of Nonstationary environmental processes. *Proceedings of the Joint Statistical Meeting*.
43. Fuentes, M. (2001a). A high frequency kriging approach for nonstationary environmental processes. *Environmetrics*, **12**, 469-483.

-
44. Fuentes, M. (2001b). Modeling and prediction of nonstationary spatial processes. *Statistical Modelling: An International Journal*. Por aparecer.
 45. Fuentes, M. (2002). Spectral methods for nonstationary spatial processes. *Biometrika*, **89**, 197-210.
 46. Fuentes, M. (2004). Spectral methods to approximate the likelihood for irregularly spaced spatial data. *Research report*, North Carolina State University.
 47. Fuentes, M. y Smith, R.L. (2001). A new class of nonstationary spatial models. *North Carolina State University*.
 48. Goovaerts, P. (1992). Factorial kriging analysis: A useful tool for exploring the structure of multivariate spatial soil information. *Journal of Soil Science*, **43**, 597-619.
 49. Goovaerts, P. y Webster, R. (1994). Scale-dependent correlation between opsoil copper and cobalt concentration in Scotland. *European Journal of Soil Science*, **45**, 79-95.
 50. Goovaerts, P. (1994). Study of spatial relationships between two sets of variables using multivariate geostatistics. *Geoderma*, **62**, 93-107.
 51. Goovaerts, P. y Journel, A.C. (1995). Integrating soil map information in modelling the spatial variation of continuous soil properties. *European Journal of Soil Science*, **46**, 397-414.
 52. Goovaerts, P. (1997a). *Geostatistics for natural resources evaluation*. Oxford University Press, New York.
 53. Goovaerts, P. (1997b). Kriging vs stochastic simulation for risk analysis in soil contamination. *geoENV-1 Geostatistics for Environmental Applications*. Kluwer Academic Publishers, 247-258.
 54. Goovaerts, P. (1998). Ordinary cokriging revisited. *Mathematical Geology*, **30**, 21-42.
 55. Goovaerts, P. (1999). Using elevation to aid the geostatistical mapping of rainfall erosivity. *CATENA*, **34**, 227-242.

56. Guttorp, P. and Sampson, P. (1994). Methods for estimating heterogeneous spatial covariance functions with environmental applications. In *Handbook of Statistics*, **12**, eds. G.P. Patil and C.R. Rao, Elsevier Science B.V., 661-689.
57. Guyon, X. (1982). Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice. *Biometrika*, **69**, 95-105.
58. Haas, T.C. (1990). Lognormal and Moving Window Methods of Estimating Acid Deposition. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 950-963.
59. Haas, T.C. (1995). Local prediction of a spatio-temporal process with an application to wet sulfate deposition. *Journal of the American Statistical Association*., **90**, 1189-1199.
60. Haas, T.C., van Tooren, C.F. y Brettschneider, V. (1995). Optimisation of a cleanup using moving window kriging. *Contaminated Soil'95*, 205-206. Kluwer Academic Press.
61. Haas, T.C. (1996). Multivariate spatial prediction in the presence of non-linear trend and covariance non-stationarity. *Environmetrics*, **7**, 145-165.
62. Hawkins, D.M., y Cressie, N.A.C. (1984). Robust kriging - a proposal. *Mathematical Geology*, **16**, 3-18.
63. Higdon, D., Swall, J. y Kern, J. (1999). Non-stationary spatial modeling. In *Bayesian Statistics*, **6**, eds. J.M. Bernardo *et al.*, Oxford University Press, 761-768.
64. Holland, D., Saltzman, N., Cox, L.H. y Nychka, D. (1999). Spatial prediction of sulfur dioxide in the eastern United States. In *GeoEnv II, Geostatistics for Environmental Applications*, eds. Gómez-Hernández, J., Soares, A. and Froideveaux, R., Kluwer, Dordrecht, 65-76.
65. Isaaks, E. y Srisvastava, R. (1989). *An introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York.

-
66. Jacques, D., Vanderborght, J., Mallants, D., Mohanty, B. P. y Feyen J. (1996). Analysis of solute redistribution in heterogeneous soil: I Geostatistical approach . *First European Conference on Geostatistics for Environmental Applications*, 20-22 November, Lisboa.
 67. Johnston, K., Ver Hoef, J.M., Krivoruchko, K. y Lucas, N. (2001). *Using ArcGIS Geostatistical Analyst*. Ed. ESRI, Nueva York.
 68. Jordán, M.M., Navarro, J., Garcia, E., Mateu, J. y Juan, P. (2004). Spatial dynamics of soil salinity under arid and semiarid conditions: Geological and environmental implications. *Environmental Geology*, **45**, 448-456.
 69. Journel, A. y Huijbregts, C.J. (1978). *Mining Geostatistics*. Academic Press, New York.
 70. Journel, A.G. (1983). Non-parametric estimation of spatial distributions. *Mathematical Geology*, **15**, 445-468.
 71. Journel, A.G. (1988). *Imaging of spatial uncertainty: A non-Gaussian approach*. Ed. B.Buon, Geostatistical sensitivity and uncertainty methods for ground water flow, Batelli Press.
 72. Journel, A. (1989). *Fundamentals of geostatistics in five lessons*. American Geophysical Union.
 73. Juan, P., Mateu, J. y Añó, C. (2003). *Caracterización de la Agresividad de la Lluvia en la Provincia de Castellón*. Publicaciones de la Universitat Jaume I. Colección e-Medio Ambiente, Num 1. ISBN: 84-8021-431-7. Depósito Legal: CS-327-2003.
 74. Juan, P., Porcu, E. y Mateu, J. (2005). Testing independence for spatial processes through spectral analysis. *Quantitative Geology and Geostatistics*, **14**. Por aparecer.
 75. Juang, K.W. y Lee, Dar-Yuan, (1998). A Comparison of Three Kriging Methods Using Auxiliary Variables in Heavy-Metal Contaminated Soils. *Journal of Environmental Quality*. **27**, 355-363.

76. Kanesvskey, M., Arutyuyan, R., Bolshov, L., Chernov, S., Demyanov, V., Koptelova, , Linger, I., Savelieva, E., Haas, T. y Maignan, M. (1997). Chernobyl Fallout: Review of advanced spatial data analysis. *geoENV-1 Geostatistics for Environmental Applications*. Kluwer Academic Publishers, 389-400.
77. Kim, H.-J. y Fuentes, M. (2000). Expectation and Variance of the Tapered Spatial Periodogram. *Technical Report*.
78. Kitanidis, P. (1983). Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrologic applications. *Water Resources Research*, **19**, 909-921.
79. Kitanidis, P. (1997). *Introduction to geostatistics: applications in hydrogeology*. Cambridge University Press.
80. Krige, D. (1951). *A statistical approach to some mine valuations an allied problems at the witwaersrand*. Master's thesis, University of Witwatersrand.
81. Laslett, G.M. y McBratney, A. B. (1990). Further Comparison of Spatial Methods for Predicting Soil pH. *Journal of Soil Science American Society*, **54**, 1553-1558.
82. Laslett, G.M. (1994). Kriging and Splines: An Empirical Comparison of Their Predictive Performance in Some Applications. *Journal of American Statistical Association*, **89**, 391-400.
83. Lunetta, R.S., Congalton, R.G., Fenstermaker, L.K., Jensen, J.R., McGwire, K.C. y Tinney, L.R. (1991). Remote sensing and geographic information system data integration: error sources and research issues. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **57**, 677-687.
84. M.A.P.A. (1986). *Métodos oficiales de análisis (suelos)*. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, **531**, Madrid.
85. Mardia, K.V. y Marshall, R.J. (1984). Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, **71**, 135-146.

-
86. Matérn, B. (1960). Spatial variation. *Medd. Statens Skogsforskningsinst.*, **49-5**, 1-144. Also in *Lecture Notes in Statistics*, **36**, 1986. Springer-Verlag, New York, NY, US.
 87. Matérn, B. (1986). *Spatial variation*. Lecture Notes in Statistics, **36**, Springer-Verlag, New York.
 88. Mateu, J., Fernández-Casal, R. y Juan, P. (2005). Comparison between spatial and spectral estimates for general spatial processes. En preparación.
 89. Mateu, J. y Juan, P. (2004). A spectral test of nonstationarity for spatial processes. *Quantitative Geology and Geostatistics*, **13**, 213-224.
 90. Mateu, J. y Juan, P. (2005). Spectral density and parameter estimation in spatial processes: A simulation study. Technical Report, **76**, Universitat Jaume I. Enviado a *Communications in Statistics: Simulation and Computation*.
 91. Matheron, G. (1962). *Traité de géostatistique appliquée*. Tomos 1 y 2, Mémoires du Bureau De Recherches Géologiques et Minières, No. 14, Editions Technip, París.
 92. Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics *Economic Geology*, **58**, 1246-1266.
 93. Matheron, G. (1971). *The theory of regionalized variables and its applications*. Ecole des Mines, Fontainebleau.
 94. Nychka, D. y Saltzman, N. (1998). Design of air quality networks. In *Case Studies in Environmental Statistics*, eds. D. Nychka, W. Piegorsch and L.H. Cox, Lecture Notes in Statistics, **132**, Springer Verlag, New York, 51-76.
 95. Oliver, M.A. (1987). Geostatistics and its application to soil science. *Soil use and Management*, **3**, 8-19.
 96. Oliver, M.A., Webster, R. y McGrath, S.P. (1996). Disjunctive kriging for environmental management. *Environmetrics*, **7**, 333-358.
 97. Papadakis, J.S. (1937). Méthode statistique pour les expériences du champ. *Bull. Inst. Amél. Plantes à Salonique*, **23**.

98. Papritz, A. y Moyeed, R.A. (1998). Linear and non-linear kriging methods: Tools for monitoring soil pollution. En: V. Barnett, K. Turkman y A. Stein (eds) *Statistics for the Environment 4. Health and the Environment*. Wiley, 303-336.
99. Patterson, H. D., y R. Thompson. 1971. Recovery of interblock information when block sizes are unequal. *Biometrika*, **58**, 545-554.
100. Persicani, D. (1995). Evaluation of soil classification and kriging for mapping herbicide leaching simulated by two models. *Soil Technology*, **8**, 17-30.
101. Porcu, E. (2004). *Geostatistica Spazio-temporale: Nuove Classi di Covarianza, Variogramma e Densità Spettrali*. Tesis Doctoral, Università di Milano-Bicocca.
102. Porcu, E., Crujeiras, R., Mateu, J. y González-Manteiga, W. (2005). Spatial and spatio-temporal dependence of the periodogram for regularly spaced data. *Technical Report*, **79** Universitat Jaume I. Enviado a *Journal of Nonparametric Statistics*.
103. Porta, J. (1986). *Técnicas y experimentos en Edafología*, Colegio Oficial de Ingenieros Agrónomos de Catalunya, Barcelona, pp 282.
104. Porta, J., López-Acevedo, M. y Roquero, C. (1999). *Edafología para la agricultura y el medio ambiente*, Mundi Prensa, 2ª edición, Madrid.
105. Puente, C.E. y Bras, R.L. (1986). Disjunctive kriging, universal kriging, or no kriging: Small sample results with simulated fields. *Mathematical Geology*, **18**, 287-305.
106. Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*. 2ª Edición, Wiley, New York.
107. Rendu, J.M. (1980). Disjunctive kriging: Comparison of theory with actual results. *Mathematical Geology*, **12**, 305-320.
108. Renshaw, E. (2002). Two-dimensional spectral analysis for marked point processes. *Biometrical Journal*, **6**, 718-745.
109. Ribeiro Jr, P. y Diggle, P. (1999). *geoR/geoS: A geostatistical library for R/S-plus*. Technical Report ST-99-09, Dept. Maths and Stats, Lancaster University, Lancaster, UK.

-
110. Russo, D., Zaidel, J. y Laufer, A. (1994). Stochastic analysis of solute transport in partially saturated heterogeneous soil. I. Numerical experiments. *Water Resources Research*, **30**, 769-779.
 111. Sampson P.D. y Guttorp, P. (1992). Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. *Journal of American Statistical Association*, **87**, 108-119.
 112. Savaliev, A.A., Mucharamova, S.S. y Piliugin, G.A. (1998). Modeling of the daily rainfall values using surface under tension and kriging. *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, **2**.
 113. Seo, F.J., Krajewski, W.F. y Bowles, D.S. (1990a). Stochastic interpolation of rainfall data from rain gauges and radar using cokriging. 1. Design of experiments. *Water Resources Research*, **26**, 469-477.
 114. Seo, F.J., Krajewski, W.F., Azimi-Zonooz, A. y Bowels, D.S. (1990b). Stochastic interpolation of rainfall data from rain gauges and radar using cokriging. 2. Results. *Water Resources Research*, **26**, 915-924.
 115. Schoenberg, I.J. (1938). Metric spaces and completely monotone functions. *Annals of Mathematics*, **39**, 811-841.
 116. SIC (1998). *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, Vol. **2**, Special Issue. Dubois et al. (Ed.).
 117. Smith, M.L. y Williams, R.E. (1996). Examination of methods for evaluationg remining a mine waste site, part II indicator kriging for selective remediation *Engineering Geology*, **43**, 23-30.
 118. SPLUS. (2000). *S-PLUS 2000 Profesional Realase 2*. USA. MathSoft, Inc.
 119. Stein, A. y Corsten, L. (1991). Universal kriging and cokriging as a regression procedure. *Biometrics*, **47**, 575-587.
 120. Stein, A., Staritsky, I., Bouma, J. y Groenigen, J.W. (1995). Interactive GIS for environmental rish assessment. *International Journal of Geographical Information Systems*, **5**, 509-525.
 121. Stein, M. (1999a). *Interpolation of Spatial Data: some theory for kriging*. Springer-Verlag, New York.

122. Stein, M. (1999b). Predicting random fields with increasingly dense observations. *Annals of Applied Probability*, **9**, 242-273.
123. Tanner, M. (1996). *Tools for Statistics Inference*. Springer, New York.
124. Tillotson, P.M. y Nielsen, D.R. (1984). Scale factors in soil science. *Soil Science Society of American Journal*, **48**, 953-959.
125. Trangmar, B.B. (1985). Application of geostatistics to spatial studies of soil properties. *Advances in Agronomy*, **38**, 45-94.
126. Vanderborgh, J., Jacques, D., Mallants, D., Tseng, P. y Feyer, J. (1996). Analysis of solute redistribution in the heterogeneous soil: II. Numerical simulation of solute transport. *First European Conference on Geostatistics for Environmental Applications*. 20-22 November, Lisboa, Portugal, this issue.
127. Verly, G. y Sullivan, J. (1985). Multigaussian and probability kriging-application to the Jerritt Canyon deposit. *Mining Engineering*, **37**, 568-574.
128. Vink, A.P.A. (1963). *Planning of Soil Surveys in Land Development*. Int. Institute for Land Reclamation and Improvement., **10**, Wageningen, Holanda.
129. Wackernagel, H. (1995). *Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin.
130. Wald, A. (1949). Note on the consistency of the maximum likelihood estimate. *Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 595-601.
131. Webster, R. y Oliver, M.A. (1990). *Statistical Methods for Soil and Land Resources Survey*. Oxford: Oxford University Press.
132. Webster, R., Atteia, O., y Dubois, J.P. (1994). Coregionalization of trace metals in the soil in the Swiss Jura. *European Journal of Soil Science*, **45**, 205-218.
133. White, D., Kimerling, A.J. y Overton, W.S. (1992). Cartographic and geometric components of a global sampling design for environmental monitoring. *Cartography and Geographic Information Systems*, **19**, 5-22.
134. Whittle, P. (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, **41**, 434-439.

135. Yaglom, A.M. (1987). *Correlation theory of stationary and related random functions*. Springer-Verlag, New York.
136. Yakowitz, S.J. y Szidarovsk, F. (1985). A comparison of kriging with non-parametric regression methods. *Journal of Multivariate Analysis*, **16**, 21-53.
137. Zimmerman, D. y Zimmerman, M. (1991). A comparison of spatial semi-variogram estimators and corresponding kriging predictors. *Technometrics*, **33**, 77-91.