UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TESIS DOCTORAL

ANALISIS NUMERICO BIDIMENSIONAL DE LA CONSOLIDACION PRIMARIA DE ARCILLAS BLANDAS SATURADAS

Presentada por : **JOSE ANGEL SAINZ BORDA**

Dirigida por : **CESAR SAGASETA MILLAN**

santander, septiembre, 1.979

" ¡Vaya con este hombre! Jamás hará nada, pues antes de empezar el trabajo piensa ya en terminarlo "

—Papa León X refiriéndose a Leonardo da Vinci—

AGRADECIMIENTO

Mediante estas líneas deseo expresar mi reconocimiento a todas aquellas personas y entidades que han hecho posible la realización de este trabajo.

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento al Profesor D. César Sagaseta Millán, director de este trabajo, quien con sus continuas enseñanzas y total apoyo ha hecho posible la realización del mismo y me ha brindado la oportunidad de iniciarme en el camino de la investigación.

Al Catedrático D. Enrique Castillo Ron por la atención prestada a cuantas consultas le he formulado y por las facilidades concedidas para la utilización del ordenador de su Departamento.

A todos mis compañeros del Departamento de Ciencias y Técnicas del Suelo que en estos años me han animado a proseguir mi labor.

A la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander por la colaboración prestada en todo momento, poniendo a mi disposición todos los medios a su alcance.

Al Ministerio de Educación y Ciencia que, en su día, me otorgó una beca de formación de personal investigador.

No quiero olvidarme en este momento de los que, en una u otra forma, me han ayudado e impulsado durante la realización de este trabajo. Vaya también para ellos mi más cordial agradecimiento.

INDICE

Pags.

Págs.

Pags.

Pags.

Pags.

Pags.

RESUMEN

RESUMEN

La consolidación de terraplenes es un problema que se plantea con mucha frecuencia en la Ingeniería Civil. Numerosas obras de construcción de estructuras van acompañadas de un relleno previo de las diferencias de nivel del terreno. El conocimiento de las deformaciones diferidas del relleno debidas tanto a su propio peso como a las cargas actuantes sobre el mismo, no es muy completo y se calculan a veces por métodos bastante groseros. Un estudio más exacto de la evolución de estos asientos con el tiempo, permitiría estudiar más adecuadamente el momento en que puede comenzarse a construir la estructura sobre el relleno sin que los asientos que sufra éste posteriormente dañen gravemente a aquélla, así como la influencia sobre obras de fábrica adyacentes.

En el presente trabajo se realiza un análisis bidimensional del problema. Consta de las siguientes partes:

a) Estudio del estado actual de los conocimientos sobre el tema. Se han incluido no sólo los estudios referentes a consolidación bidimensional, sino que se presentan otros casos que, por diversas circunstancias, tienen interés. Se realiza un examen crítico de las teorías existentes de consolidación bidimensional.

Esta revisión bibliográfica, que no pretende ser - exhaustiva, se extiende tanto a las soluciones analíticas como a las obtenidas por métodos numéricos.

Se dedica un breve comentario a los métodos de determinación del estado inicial.

b) Elaboración de un modelo en tensiones efectivas que defina al comportamiento del suelo como el de un material elastoplástico, isótropo, rigidizable y del tipo no-asociado. Este modelo es coherente con el de totales a la hora de analizar el estado inicial producido en el proceso de carga sin drenaje.

Se incluye un comentario sobre la posibilidad de obtención de los parámetros del suelo que intervienen - en el modelo mediante ensayos de laboratorio.

c) Desarrollo de un método de análisis en el que - se tiene en cuenta la variación de las tensiones totales durante la consolidación mediante un procedimiento iterativo.

Se presentan esquemas del proceso iterativo seguido tanto en el caso de terreno elástico como elastoplástico.

d) Aplicación del método de elementos finitos a la resolución numérica del problema planteado siguiendo el proceso descrito en c). Se utilizan elementos rectangulares en la discretización del espacio.

e) Aplicación del modelo desarrollado al estudio de un caso típico de carga en faja indefinida actuando sobre la superficie de un estrato de profundidad finita, de arcilla blanda saturada; dicho estrato descansa sobre una base rocosa con interfaz lisa e impermeable. La superficie cargada se supone permeable.

El análisis se realiza con varias hipótesis sobre las propiedades del terreno y las características de la carga exterior, a partir de un caso básico, considerando los demás como variantes del mismo.

Con objeto de conseguir una mayor generalidad, los resultados se presentan en forma adimensional.

f) Análisis de un problema real correspondiente a una prueba de carga sobre una zapata, comparando los resultados obtenidos al aplicar el modelo y las medidas efectuadas.

Se estudia asimismo la influencia de las propiedades geotécnicas del terreno, determinadas mediante ensayos de laboratorio, en los resultados obtenidos.

CONVENIO DE SIGNOS

- Ejes.- Los sentidos adoptados para los ejes han sido:

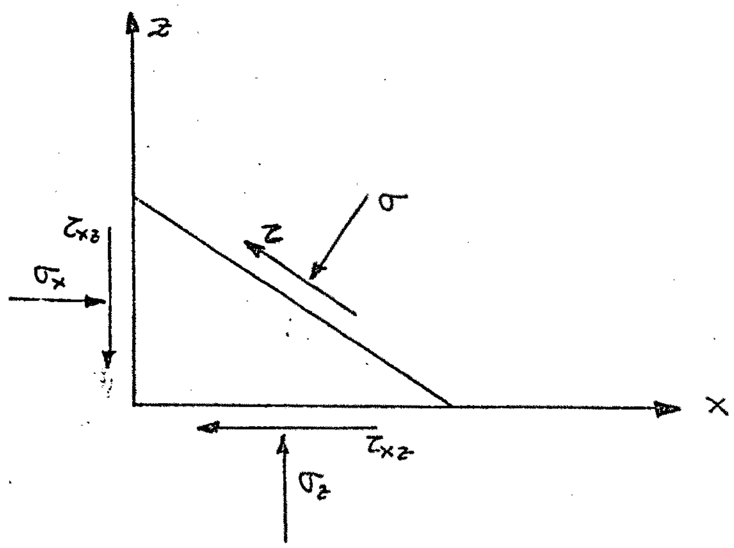
  - Eje de abscisas (eje x), positivo - hacia la derecha.

  - Eje de ordenadas (eje z), positivo hacia arriba.

- Tensiones:

  - Tensiones normales.- Se consideran positivas las compresiones.

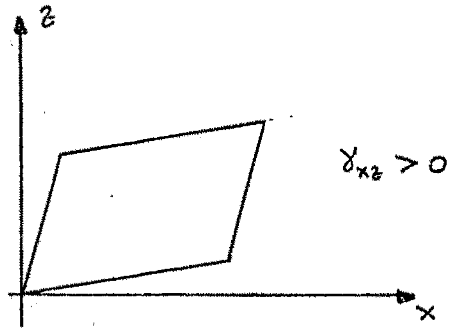
  - Tensiones tangenciales.- La tensión tangencial actuante sobre un plano cualquiera, - se considera positiva cuando, vista desde el interior del elemento, gira en sentido contrario al de las agujas del reloj.



- Deformaciones:

  - Longitudinales.- Positivos los acortamientos.

  - Angulares.- Se consideran positivas las deformaciones originadas por tensiones positivas.



- Desplazamientos.- Positivos según los ejes coordenados.

- Fuerzas.- Positivas según los ejes coordenados.

NOTACION

A	=	Coeficiente de presión intersticial.
a	=	Coeficiente de presión intersticial (14). Semianchura de la faja de carga (49). Semilongitud del elemento-tipo empleado.
B	=	Semianchura de la faja de carga.
$[B^e]$	=	Matriz deformación-desplazamientos nodales elemental.
b	=	Semianchura del elemento-tipo empleado.
$[C]$	=	Matriz deformación-tensión.
c	=	Expresión que interviene en la ecuación de la consolidación bidimensional (120).
c'	=	Cohesión efectiva.
C_c	=	Indice de compresión.
C_e	=	Cohesión verdadera (87).
C_F	=	Coeficiente de consolidación cuando no se considera la hipótesis de pequeñas deformaciones (34).
C_u	=	Cohesión sin drenaje.
C_v	=	Coeficiente de consolidación.
C_{va}	=	Coeficiente de consolidación aparente (30).
C_{vi}	=	Coeficiente de consolidación de cada capa compresible (30).
C_{vo}	=	Coeficiente de consolidación inicial (38).
C_{vr}	=	Coeficiente de consolidación con drenaje radial (44).

$[D]$	= Matriz tensión-deformación.
$[D^e]$	= Matriz tensión-deformación alástica (103).
$[D^{ep}]$	= Matriz tensión-deformación elastoplástica.
D_m	= Coeficiente de Bjerrum (81).
E'	= Módulo de elasticidad con drenaje.
E_m	= Módulo edométrico. Valor del módulo de elasticidad a una profundidad representativa (172).
e	= Indice de poros del suelo.
e_0	= Indice de poros inicial.
e_1	= Indice de poros final.
e_r	= Indice de poros en rotura (87).
$\{F^e\}$	= Fuerzas nodales exteriores.
$\{F_1\}^e$	= Fuerzas nodales elementales.
$\{F_g^e\}$	= Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de superficie (157).
$\{F_m^e\}$	= Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de masa (157).
f	= Criterio de plastificación (85).
$\{f^e\}$	= Matriz de fuerzas de masa.
G'	= Módulo de elasticidad transversal en el plano xz.
g	= Función potencial plástico (86).

$\{g^e\}$	= Matriz de fuerzas de superficie.
H	= Matriz de rigidez del sistema (150).
H, H_o, h_i	= Espesor del estrato o capa compresible.
h_o	= Espesor inicial del estrato de arcilla.
h_t	= Espesor del estrato en el instante t.
h	= Espesor final del estrato.
$[I]$	= Matriz unidad.
I_1, I_2, I_3	= Invariantes del tensor de tensiones.
$J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon}$	= Invariantes del tensor de deformaciones.
K	= Coeficiente de permeabilidad. Parámetro de Hvorslev.
$[K]$	= Matriz de rigidez de la malla.
$[K^e]$	= Matriz de rigidez elemental (157).
$[K_1]$	= Matriz de rigidez del sistema.
K_o	= Coeficiente de empuje al reposo. Coeficiente de permeabilidad inicial (37).
K_f	= Coeficiente de permeabilidad final (37).
K_x, K_y, K_z	= Coeficientes de permeabilidad en las direcciones de los ejes.
K_w	= Coeficiente de compresibilidad del agua.
L	= Longitud de la malla de elementos finitos.
l	= Longitud característica en la malla de diferencias finitas.

l_x, l_y = Cosenos directores de la normal exterior al contorno (126).

M = Parámetro de expresión definida en (1.77).
Parámetro del suelo utilizado para definir el estado crítico (75).
Parámetro del criterio de plastificación en efectivas definido en (2.52).

m_v = Coeficiente de compresibilidad.

$[N]$ = Matriz de funciones de forma.

$[N_1]$ y $[N_2]$ = Derivadas de la matriz de funciones de forma en las direcciones "x" y "z".

N_n , N_{n+1} = Funciones de interpolación (151).

n = Porosidad del suelo.
Relación de permeabilidades en dirección vertical y radial (44).

$\vec{n}$ = Vector normal exterior (117).

p = Carga uniforme aplicada.
Abscisa en el plano de Lambe.

$[P]$ = Matriz auxiliar en la obtención de D^{ep} .

p_o = Presión de consolidación.

p_c = Presión de sobreconsolidación.

p_d = Abscisa del punto de quiebro en el criterio de plastificación en el plano de Lambe (89).

p_e = Presión efectiva equivalente (88).

Q = Expresión que interviene en la ecuación de la consolidación bidimensional (120).

q = Carga uniforme aplicada.
Ordenada en el plano de Lambe.
Flujo por unidad de superficie (126).

R, R_1 = Razón de sobreconsolidación.

r' = Razón de anisotropía relativa a Módulos de elasticidad con drenaje (10).

T_o = Factor de tiempo (34).

T_v = Factor de tiempo.

T_{vf} = Parámetro adimensional

t = Tiempo.

t_f = Tiempo hasta la aplicación total de la carga (173).

U = Grado de consolidación medio.

U_r = Grado de consolidación medio con drenaje sólo en dirección radial.

U_z = Grado de consolidación medio con drenaje sólo en dirección vertical.

U_p = Energía potencial del sistema.

U_p^e = Energía potencial elemental.

u = Sobrepresión intersticial.
Desplazamiento en dirección x.

$\{u\}^e$ = Sobrepresiones intersticiales nodales en cada elemento.

$\{u_1\}$ = Valores incógnitas de la sobrepresión intersticial (153).

$\{u_o\}$ = Valores de la sobrepresión intersticial al comienzo del escalón de tiempo.

u_e = Sobrepresión intersticial elástica.

u_p = Sobrepresión intersticial plástica.

$u_p{}^f$ = Sobrepresión intersticial plástica para - distorsión infinita (95).

Δu_s = Incremento de presión intersticial debido al incremento de tensión tangencial octaé drica (16).

u_n u_{n+1} = Valores de la función u en los nodos en los instantes n y n+1 (151).

V = Volumen.

$\vec{V}$ = Vector velocidad de filtración del agua (117).

$\vec{V_s}$ = Vector velocidad de las partículas sólidas.

$\vec{V_w}$ = Vector velocidad del agua.

v = Desplazamiento en dirección z.
Volumen especifico (76).

W = Densidad de energía de deformación (156).

W_j = Función de peso (152).

X = Fuerza másica según el eje x

x = Abscisa.

Z = Fuerza másica según el eje z.
Matriz de amortiguamiento (150).

z = Ordenada.

α	= Parámetro (15).
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	= Parámetros (13).
β	= Parámetro (15).
γ^p	= Distorsión plástica.
γ_{sat}	= Peso específico saturado.
γ_{sum}	= Peso específico sumergido.
γ_{xz}	= Deformación angular en el plamo xz.
γ_w	= Peso específico del agua.
$\{\delta\}$	= Matriz de desplazamientos.
$\{\delta^e\}$	= Matriz de desplazamientos nodales.
δ_t	= Asiento en un instante t.
δ_f	= Asiento final.
$\{\varepsilon\}$	= Matriz de deformaciones.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	= Deformaciones unitarias según los ejes.
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	= Deformaciones unitarias en ejes principales.
ε_v	= Deformación volumétrica unitaria.
ε_v^e	= Deformación volumétrica unitaria elástica.
ε_v^p	= Deformación volumétrica unitaria plástica.
η	= Constante elástica (49). Parámetro de rigidización (90).
η_o	= Valor inicial del parámetro de rigidización.
η_f	= Valor final del parámetro de rigidización.

κ	=	Pendiente de la rama de descarga o de recarga (87).
λ	=	Pendiente de la rama de carga (87).
λ_E	=	Gradiente del módulo de elasticidad con la profundidad (172).
μ	=	Grado de compresión relativo (37).
μ'	=	Coeficiente de Poisson en efectivas. Coeficiente de Poisson en efectivas en el plano xy (10).
μ'_1	=	Coeficiente de Poisson en efectivas en el plano xz (10).
μ_u	=	Coeficiente de Poisson en totales.
ν	=	Angulo de dilatancia.
ν_o	=	Angulo de dilatancia inicial.
σ	=	Tensión total normal.
σ'	=	Tensión efectiva normal.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	=	Tensiones totales principales mayor, intermedia y menor respectivamente.
$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$	=	Tensiones efectivas principales mayor, intermedia y menor respectivamente.
σ_c	=	Presión de consolidación.
σ'_o	=	Presión efectiva inicial.
σ'_f	=	Presión efectiva final.
σ_{ij}	=	Tensiones totales.

σ'_{ij} = Tensiones efectivas.

σ'_{r} = Presión efectiva normal en rotura.

σ'_{h} = Tensión efectiva normal (sobre un plano - vertical).

σ'_{v} = Tensión efectiva normal (sobre un plano - horizontal).

σ'_{oct} = Tensión octaédrica normal efectiva.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ = Tensiones totales normales sobre planos - perpendiculares a los eje x, y, z respec tivamente.

$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$ = Tensiones efectivas normales sobre planos perpendiculares a los ejes x, y, z respec tivamente.

τ = Tensión tangencial.
Factor de tiempo (49).

τ_{max} = Tensión tangencial máxima.

τ_{oct} = Tensión octaédrica tangencial.

$\tau_{f_{oct}}$ = Tensión octaédrica tangencial de rotura.

τ_{xz} = Tensión tangencial en ejes coordenados.

ϕ = Angulo de rozamiento interno.
Potencial hidraúlico (118).

ϕ' = Angulo de rozamiento interno efectivo.

ϕ_e = Parámetro de Hvorslev.

ϕ_e^* = Angulo de rozamiento interno verdadero - movilizado (87).

Γ = Volumen crítico para presión unitaria (76).

χ = Funcional a minimizar.

Ω = Superficie.

LISTADO DE FIGURAS

LISTADO DE FIGURAS.

CAPITULO I

ESTADO ACTUAL DEL PROBLEMA

1.- INTRODUCCION.

El tema del análisis bidimensional de la consolidación primaria de arcillas blandas saturadas es en principio muy amplio, lo cual plantea algunas dudas en el momento de plantear el estado actual del problema.

En primer lugar, dado que el trabajo que se presenta constituye un análisis teórico del problema, no se incluirá en este capítulo la presentación de los aspectos del mismo que queden fuera de este campo. Así, no se hará referencia a estudios experimentales, técnicas de ensayo de laboratorio y campo o fiabilidad de las predicciones en obras reales. Por otra parte, como queda implícito en el título del trabajo, el estudio se ciñe a la consolidación primaria, dejando aparte problemas como la consolidación secundaria o la inicial, si se tratase de suelos no totalmente saturados.

Aunque el análisis en esta tesis se ha realizado mediante un método numérico, se exponen en este capítulo no sólo las soluciones numéricas precedentes sino también las soluciones analíticas, con el fin de dar una visión global del problema y destacar aquellos aspectos del mismo que precisan un análisis numérico para ser tenidos en cuenta.

Por otro lado, se han incluido no sólo los estudios referentes a consolidación bidimensional, sino que se presentan otros casos que por diversas circunstancias -

tienen interés; así, se incluyen el caso unidimensional que por su sencillez ha sido el más estudiado y el tridimensional que, por su generalidad, da una visión más precisa de las hipótesis que conlleva el estudio bidimensional; también se cita brevemente el caso de simetría radial.

Dado que el análisis que se presenta se ha llevado a cabo considerando para el material del suelo un comportamiento tensodeformacional no lineal, se ha considerado preciso la inclusión de un breve apartado sobre los modelos de comportamiento más adecuados al estudio del problema en cuestión, aunque sin tratar de hacer una presentación exhaustiva del tema.

Por último, debe señalarse que, para el análisis de la consolidación es preciso tomar como datos de partida la distribución de tensiones totales, presiones intersticiales y deformaciones iniciales, inmediatamente después de aplicar la carga; estas distribuciones son de obtención inmediata en el caso de consolidación unidimensional, pero constituyen un problema de no fácil resolución en dos y tres dimensiones, salvo casos sencillos.

Por esta razón, se dedica un apartado de este capítulo a los métodos de determinación del estado inicial. Sin embargo, el estudio de dicho estado no constituye el tema de esta tesis, sino unicamente los datos de partida de la misma, por lo que el comentario citado es somero.

2.- ESTADO INICIAL

El terreno, antes de la actuación sobre el mismo de cualquier tipo de carga, tiene una distribución de tensiones totales, efectivas y presiones intersticiales correspondiente a la actuación del peso propio y a la situación, a una determinada altura, de un nivel freático horizontal.

Al aplicar instantáneamente unas cargas, en un terreno saturado de baja permeabilidad, se producirá, en cada punto del mismo, un incremento en las tensiones totales sobre las que tenía inicialmente. Este incremento se transforma parte en tensión efectiva y parte en presión intersticial. Si la aplicación de la carga es suficientemente rápida con respecto a la permeabilidad del suelo, puede suponerse con suficiente aproximación que existe un instante inmediatamente posterior a la dicha aplicación, en el que aún no ha habido tiempo de producirse ninguna filtración de agua de un punto a otro del suelo, con lo cual éste se deforma a volumen constante. Esta situación, a la que nos referiremos en este apartado, proporciona las condiciones iniciales del problema de la consolidación posterior, y debe ser resuelto previamente.

Este problema se ha abordado de distintas maneras, buscando soluciones analíticas o, en caso de no hallarse éstas, soluciones numéricas. En ambos casos se trata de plantear un conjunto de ecuaciones que liguen las tensiones, las deformaciones y las características del-material.

Esto se puede realizar de dos maneras:

a) Planteando los sistemas básicos de ecuaciones diferenciales:

- ecuaciones de equilibrio interno y externo
- ecuaciones de compatibilidad
- ecuaciones constitutivas del material

b) Definiendo un principio variacional, cuyas ecuaciones de Euler sean las mismas que las definidas en el apartado a)

En ambos casos, la resolución puede ser analítica o numérica. Igualmente en ambos casos y, dependiendo de las incógnitas que se adopten, se pueden distinguir los siguientes métodos:

- método de los desplazamientos o de rigidez.- Se toman como incógnitas los desplazamientos, se ponen todas las demás en función de ellos y, una vez resuelto el sistema se pueden obtener las tensiones.

- método de las tensiones o de flexibilidad.- Se toman como incógnitas las tensiones, poniendo las demás en función de ellas. Las ecuaciones de compatibilidad quedan unicamente en función de las tensiones y basta con integrar el sistema resultante.

- métodos híbridos.- Se toman varios tipos de incógnitas, desplazamientos y algunas tensiones. Se ponen las demás incógnitas en función de las adoptadas como básicas quedando un método híbrido de los dos anteriores.

- métodos completos.- Resuelven el sistema de manera global, tomando como incógnitas los desplazamientos, las tensiones y las deformaciones.

Los métodos mencionados tienen como principios variacionales asociados respectivamente el de energía potencial mínima, el de la energía complementaria mínima, el de REISSNER y el general de HU-WASHIZU. (WASHIZU, 1968).

2.1.- <u>Solución analítica</u>.- En cualquiera de los métodos anteriores se puede abordar la resolución analítica y existen numerosos casos resueltos aunque, dada la complejidad de las ecuaciones, los métodos tradicionales abordan el problema elásticamente. (DAVIS y POULOS, 1974).

2.2.- <u>Solución numérica</u>.- Se utiliza en los casos en que la solución analítica no es viable. Permite realizar un análisis elasto-plástico del problema. Consiste generalmente en adoptar una discretización en elementos finitos con unas ciertas leyes de variación de las incógnitas en el interior de los mismos que permita llegar a un sistema de ecuaciones resoluble numéricamente.

Ahora bien, si se aborda el problema mediante el método de los desplazamientos, la condición de no existir drenaje (μ_u= 0,5) hace que la matriz de rigidez de cada elemento presente valores infinitos.

En el caso de emplear el método de las tensiones, también se presentan problemas con la condición de no drenaje, ya que la matriz de flexibilidad resulta singular.

En ambos casos, la dificultad proviene de la condición de incompresibilidad del material. Los caminos que generalmente se siguen para vencer esta dificultad se pueden agrupar en tres tipos: eliminación de la incompresibilidad, sistituyendo el material por otro de compresibilidad muy pequeña; análisis en tensiones efectivas o empleo de métodos híbridos.

2.2.1.- <u>Eliminación de la incompresibilidad</u>.-

Consiste en sustituir los parámetros elásticos por otros muy parecidos numericamente. En el caso de un material isótropo esto se traduce en sustituir μ_u= 0,5 por μ'= 0,495 ó valores más próximos al anterior. Con ello se salva en cierta manera la singularidad anterior.

Este método sin embargo tiene el inconveniente de la coexistencia, en la matriz de rigidez, de términos con valor muy grande junto con valores mucho menores.

Según algunos autores (URIEL, 1972) este método puede dar errores muy grandes aunque en otros casos ha dado valores aceptables (RAYMOND, 1973). Este método por lo tanto, no parece muy aconsejable salvo en algunos casos calculados también por otros métodos con los que se hayan podido establecer comparaciones.

2.2.2.- <u>Análisis en tensiones efectivas</u>.

Se puede realizar el análisis en tensiones efectivas, con los parámetros correspondientes con lo cual se evita la singularidad anterior. Las presiones intersticiales darán lugar entonces a unas fuerzas másicas adicionales que hay que introducir en el cálculo.

Como se desconoce la distribución de presiones intersticiales "a priori", hay una incógnita más en cada punto. Esto se puede resolver de varias maneras: Suponiendo una distribución cualquiera de presiones intersticiales y resolviendo el problema iterativamente o bien tomando como incógnitas las presiones intersticiales y añadiendo la condición de incompresibilidad (CHRISTIAN, 1968; MATSUMOTO, 1976). En este último caso se suele introducir la incompresibilidad del material según la teoría elástica lo cual ha dado lugar a críticas ya que los suelos reales no se comportan así.

Los métodos iterativos son mejores ya que no hacen ninguna hipótesis concreta al respecto estando definida la presión intersticial por alguna ley (la de SKEMPTON-por ejemplo) con coeficientes variables.

WROTH y SIMPSON (1972) realizan un análisis también en tensiones efectivas, considerando el material elasto-plástico según el modelo Cam-clay.

2.2.3.- Análisis en tensiones totales por métodos híbridos.

Como se ha dicho antes, se basan generalmente en el principio variacional de REISSNER (1950) y, al usar como incógnitas los desplazamientos y tensiones simultáneamente, se obvia la singularidad existente en los métodos anteriores; como inconveniente se puede citar el que son más complicados de programar.

Entre estos métodos se pueden citar el de HERRMAN (1964) para material elástico e isótropo, los de HWANG (1969) y URIEL (1970) para material elástico anisótropo y el de BALLESTER (1977) para material elastoplástico anisótropo.

2.3.- Sobrepresiones intersticiales iniciales.

La sobrepresión intersticial inducida en el proceso de carga sin drenaje se obtiene estableciendo la condición de que la deformación volumétrica del esqueleto-sólido, en términos de tensiones efectivas, sea igual a la compresión del fluido intersticial, considerando que el suelo está totalmente saturado y despreciando la compresibilidad de las partículas sólidas.

Para un elemento de suelo en estado elástico, la deformación volumétrica unitaria viene expresada por:

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_v^e = \dot{\varepsilon}_x^e + \dot{\varepsilon}_y^e + \dot{\varepsilon}_z^e = (M_x, M_y, M_z) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x - u \\ \dot{\sigma}_y - u \\ \dot{\sigma}_z - u \end{Bmatrix} \qquad (1.1)$$

en donde, para material isótropo, $M_x = M_y = M_z = \frac{1-2\mu'}{E'}$ mientras que para material con anisotropía transversal, siendo z el eje de ortotropía, las expresiones son:

$$\begin{aligned} M_x &= (1-\mu'-r'\mu_1')/E' \\ M_y &= (1-\mu'-r'\mu_1')/E' \\ M_z &= r'(1-2\mu_1')/E' \end{aligned} \qquad (1.2)$$

con la siguiente notación:

$E' \longrightarrow$ Módulo de Young horizontal (E_x')

$r' \longrightarrow$ Razón de anisotropía ($r' = E_x'/E_z'$)

$G' \longrightarrow$ Módulo de elasticidad transversal en el plano xz.

$\mu' \longrightarrow$ Coeficiente de Poisson en el plano xy

$\mu_1' \longrightarrow$ Coeficiente de Poisson en el plano xz

Al establecer la condición mencionada antes de igualdad de deformaciones volumétricas, se obtiene:

$$\dot{u} = \frac{1}{M_x + M_y + M_z + \frac{n}{K_w}} \cdot (M_x, M_y, M_z) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} \qquad (1.3)$$

siendo "n" la porosidad del elemento de suelo y Kw el coeficiente de compresibilidad del fluido intersticial. Si se considera que dicho fluido es incompresible, hipótesis que se mantiene en lo que sigue, la expresión queda:

$$\dot{u} = \frac{1}{M_x + M_y + M_z} \cdot \left(M_x, M_y, M_z\right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} \qquad (1.4)$$

que en el caso de suelo isótropo se convierte en:

$$\dot{u} = \frac{1}{3}\left(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z\right) = \frac{1}{3}\left(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3\right) \qquad (1.5)$$

Para un elemento de suelo en estado plástico, la deformación volumétrica unitaria tiene una componente elástica y otra plástica. La componente elástica viene definida por la expresión (1.4), con lo que:

$$\dot{u} = \frac{1}{M_x + M_y + M_z} \cdot \left[\left(M_x, M_y, M_z\right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} + \dot{\varepsilon}_v^{\,p}\right] \qquad (1.6)$$

Según esto, se puede considerar la sobrepresión intersticial formada por una componente elástica y otra plástica, cuyas expresiones vienen definidas por:

$$\dot{u}^{e} = \frac{1}{M_x + M_y + M_z} \cdot \left(M_x, M_y, M_z\right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} \qquad (1.7)$$

$$\dot{u}^{p} = \frac{1}{M_x + M_y + M_z} \cdot \dot{\varepsilon}_v^{\,p} \qquad (1.8)$$

La componente plástica es función unicamente de los incrementos de deformaciones plásticas. (LO, 1969).

En el caso de un elemento de suelo en estado elástico, la sobrepresión intersticial total es función de los valores finales de las tensiones totales, independientemente de la trayectoria seguida, mientras que en el caso de estado elastoplástico, es preciso realizar una integración teniendo en cuenta dicha trayectoria.

Esta integración generalmente es muy complicada por lo que se han desarrollado una serie de fórmulas empíricas dependientes de unos determinados parámetros. Algunas de ellas se basan unicamente en los valores de las tensiones totales para la predicción de la sobrepresión intersticial mientras que otras incluyen también los valores de las deformaciones. El resto de los factores tales como historia tensional, tipo de suelo etc., están incluidos en los valores empíricos de los parámetros.

Muchos autores, SKEMPTON, (1948), BJERRUM, (1954), SKEMPTON, (1960), HENKEL, (1960), HENKEL y WADE, (1966) han intentado relacionar la sobrepresión intersticial inducida con las tensiones totales. La ecuación general se puede expresar como:

$$u = f(I_1, I_2, I_3) \qquad (1.9)$$

siendo I_1, I_2, I_3 los tres invariantes del tensor de tensiones totales definidos como:

$$I_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$I_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \qquad (1.10)$$

$$I_3 = \frac{1}{27}\left[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)\right]$$

Sin perder excesiva generalidad, la expresión (1.9) se puede poner como:

$$u = \alpha_1 . I_1 + \alpha_2 . I_2^{1/2} + \alpha_3 . I_3^{1/3} \qquad (1.11)$$

en donde α_1, α_2 y α_3 son parámetros adimensionales. Como bajo la acción de una compresión isótropa, la presión intersticial debe ser igual a I_1 se llega a la conclusión de que $\alpha_1 = 1$

Para el caso de un material perfectamente elástico, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, mientras que en suelos en los que la relación tensión-deformación no sea lineal α_2 y α_3 tendrán distintos valores dependiendo del estado tenso-deformacional del suelo.

Considerando el suelo consolidado isotrópicamente se han elaborado algunas fórmulas que se citan a continuación:

- Despreciando la influencia de I_3 en la sobrepresión inducida y suponiendo una simetría axial en tensiones ($\sigma_2 = \sigma_3$), SKEMPTON (1948) propuso:

$$\Delta u = \Delta\sigma_3 + A.\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3\right) \qquad (1.12)$$

siendo:

$$A = \frac{1}{3} + \frac{\alpha_2}{3} \qquad (1.13)$$

El valor del coeficiente A no es constante sino que depende de la historia tensional, de la presión de consolidación, de la trayectoria de tensiones, del porcentaje de deformación, del estado tensional y del tipo de problema (deformación plana, simetría axial, etc.) En el caso de terreno elástico, el coeficiente A vale 1/3.

En la siguiente tabla se dan unos valores medios de dicho coeficiente A para las tensiones admisibles en cimentaciones en distintos tipos de terrenos:

TIPO DE ARCILLA	VALOR DE A
Arcillas blandas de alta susceptibilidad	> 1
Arcillas normalmente consolidadas	0,5 a 1
Arcillas sobre consolidadas	0,25 a 0,6
Arcillas arenosas muy sobreconsolidadas	0 a 0,25

- SKEMPTON (1960) y HENKEL (1960) proponen una ecuación más general para la sobrepresión intersticial:

$$\Delta u = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3} + a.\left[\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3\right)^2 + \left(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3\right)^2 + \left(\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1\right)^2\right] \qquad (1.1$$

en donde "a" es un parámetro empírico. Esta ecuación es un caso particular de la (1.11) sin más despreciar la influencia de I_3, o bien hacer $\alpha_3 = 0$

- HENKEL y WADE (1966) presentan una modificación a la expresión (1.14) anterior, adoptando como definición de la sobrepresión intersticial la siguiente:

$$\Delta u = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3} + \frac{a}{3} \cdot \Delta\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2} \quad (1.15)$$

- JIMENEZ SALAS (1971) propone una modificación a ésta última, tomando el incremento de tensión tangencial octaédrica en valor absoluto.

- JUAREZ-BADILLO (1963) propone una nueva expresión haciendo intervenir el tercer invariante del tensor de tensiones I_3. La expresión es:

$$\Delta u = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3} + \alpha . \sigma_c . \left(\frac{\tau_{oct}}{\tau_{f oct}}\right)^{\beta} \quad (1.16)$$

en donde:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2} = \left(\frac{2}{3} . I_2\right)^{1/2}$$

$\tau_{f oct} \rightarrow$ tensión tangencial octaédrica de rotura.

$\sigma_c \rightarrow$ presión de consolidación.

$\alpha, \beta \rightarrow$ parámetros empíricos.

Todas estas teorías presentan deficiencias a la hora de querer interpretar algunos resultados experimentales. Para eliminar dichas deficiencias algunos autores han introducido las deformaciones. Los tres invariantes del tensor de deformaciones se pueden poner como:

$$I_{1\varepsilon} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

$$I_{2\varepsilon} = \frac{1}{6}\left[\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2 + \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_3\right)^2 + \left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)^2\right] \qquad (1.17)$$

$$I_{3\varepsilon} = \frac{1}{27}\left[\left(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3\right)\left(2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1\right)\left(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\right]$$

LO (1969) propuso la siguiente expresión para las sobrepresiones intersticiales producidas en un ensayo sin drenaje en una arcilla saturada normalmente consolidada:

$$\Delta u = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3} + \Delta u_s \qquad (1.18)$$

en donde Δu_s es el incremento de presión intersticial producido por el incremento de la tensión tangencial octaédrica. En la mayor parte de los problemas tanto en laboratorio como en el campo se pueden referir a casos de deformación plana o de simetría axial. En estas circunstancias, Δu_s es función unicamente de la deformación principal mayor.

$$\Delta u_s / \sigma_1' = f(\varepsilon_1) \qquad (1.19)$$

siendo σ_1' la tensión principal mayor durante la consolidación.

Con respecto a la inclusión de estas leyes de presión intersticial en los métodos de análisis citados anteriormente, hay que señalar que si el análisis se realiza en tensiones efectivas, el cálculo de las presiones intersticiales se realiza simultaneamente con el análisis tensodeformacional; queda entonces excluída la posibilidad de empleo de fórmulas empíricas, debiendo introducirse la expresión (1.6), introduciendo la deformación volumétrica plástica según la ley tensión-deformación empleada en el análisis. Si, por el contrario, se hace el análisis en tensiones totales, las presiones intersticiales se calculan posteriormente, con lo cual pueden introducirse otras fórmulas de presión intersticial, ya que no se ha hecho aún ninguna hipótesis sobre las leyes constitutivas del material en tensiones efectivas. Sin embargo, si el cálculo de las presiones intersticiales tiene como objeto el estudio de la consolidación posterior (estudio que debe hacerse en tensiones efectivas), la limitación de los métodos en tensiones totales para el estado inicial es la misma que la citada para los métodos en tensiones efectivas.

2.4.- Parámetros del suelo.-

En el análisis en tensiones totales, hay que definir unos parámetros elásticos del suelo así como un criterio de plastificación del mismo adecuado al estado de deformación sin drenaje.

Los parámetros elásticos son los correspondientes a un ensayo sin drenaje (E_u, $\mu_u = 1/2$). El valor de E_u no es constante con la profundidad, depende de la presión de consolidación del terreno y esto hay que tenerlo en cuenta de alguna manera en el cálculo. Este valor de E_u se puede obtener mediante distintos ensayos aunque se ve muy afectado por la alteración en la toma de las muestras. En el caso de que el suelo se comportase como un material isótropo y elástico, la relación entre E_u y los parámetros efectivos sería:

$$E_u = \frac{3\,E'}{2\,(1+\mu')} \qquad (1.20)$$

En cuanto a los parámetros resistentes y al criterio de plastificación se refiere, se suele utilizar normalmente el criterio de Tresca ($C = C_u$; $\phi = 0$). Este valor de C_u varía también con la profundidad a que se considere y, por supuesto, para obtener buenos resultados hay que tener en cuenta esa variación.

Además de lo referente a la variación de los parámetros elásticos y resistentes con la profundidad es preciso tener en cuenta la anisotropía del terreno producida normalmente porque la consolidación bajo peso propio no es isótropa. Es fácil considerar la anisotropía del terreno en análisis elásticos y aplicarlo a casos con y sin drenaje (BARDEN, 1963; SUKLJE, 1963; URIEL, 1970; PICKERING, 1970; URIEL y CAÑIZO, 1971). Los análisis elastoplásticos incluyendo anisotropía son muy escasos aunque se han desarrollado algunos (PREVOST, 1977; BALLESTER, 1977).

3.- PROCESOS DE CONSOLIDACION

Con cierta independencia de lo citado en el apartado anterior, se van a analizar en éste las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno de consolidación, según las hipótesis que se admiten en cada caso. En los casos en que esté obtenida, se presentará también la solución analítica.

3.1.- Consolidación unidimensional.-

Aunque la ecuación de TERZAGHI precedió históricamente a otros tratamientos más generales de la consolidación unidimensional, con unas hipótesis y desarrollo propios, se puede analizar en un contexto más amplio para dar mayor coherencia a la exposición. LOPEZ PITA (1973) ha presentado una visión de conjunto sobre este tema.

Con todo, se pueden distinguir en esta exposición dos grupos de teorías asociadas a dos formas ligeramente distintas de enfocar el fenómeno: la llamada ecuación simplificada y la ecuación general de consolidación unidimensional de GIBSON ET AL.

3.1.1.- Ecuación simplificada de la consolidación.-

Es de destacar que el desarrollo seguido en la obtención de dicha ecuación se refiere a un caso generalmente tridimensional, si bien se puede acoplar a un caso de consolidación unidimensional. La ecuación de TERZAGHI se puede presentar como caso particular de ésta - última, de ahí su interés.

Para su obtención se consideran las ecuaciones siguientes:

- ecuación de la continuidad del agua.
- ley de Darcy.
- ley de Terzaghi puesta en la forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + u \cdot \delta_{ij} \tag{1.21}$$

con la notación usual:

$\sigma_{ij} \longrightarrow$ tensiones totales.

$\sigma'_{ij} \longrightarrow$ tensiones efectivas.

$u \longrightarrow$ presión intersticial.

$\delta_{ij} \longrightarrow$ delta de Kronecker.

- ley de comportamiento del esqueleto sólido.

  Esta ley se puede poner en la forma: $e = e(\sigma'_{ij})$ siendo "e" el índice de poros del suelo.
- no se considera la ecuación de la continuidad para la masa sólida, lo que equivale a admitir que las deformaciones y los asientos del esqueleto - sólido son muy pequeños.

Con todo ello y, para un suelo isótropo, se obtiene como ecuación simplificada de la consolidación tridimensional:

$$\nabla^2 u = \frac{\gamma_w}{(1+e_o).K} \cdot \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \delta_{ij} \right] \cdot \frac{\partial e}{\partial \sigma'_{ij}} \qquad (1.22)$$

siendo:

K ⟶ coeficiente de permeabilidad.

e_o ⟶ índice de poros inicial.

El índice de poros "e" es función de la deformación volumétrica ($\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$), es decir:

$$e = f(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z) \qquad (1.23)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= f_1 (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z) \\ \varepsilon_y &= f_2 (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z) \\ \varepsilon_z &= f_3 (\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z) \end{aligned} \qquad (1.24)$$

Al imponer la condición de que la consolidación sea unidimensional, $\varepsilon_x = 0$ y $\varepsilon_y = 0$, con lo que de las tres ecuaciones anteriores se pueden eliminar σ'_x y σ'_y quedando el índice de poros función unicamente de la presión efectiva vertical:

$$e = f(\sigma'_z) \qquad (1.25)$$

Con ello, se llega a la ecuación simplificada de la consolidación unidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{k}{\gamma_w}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\frac{1}{1+e_0}\cdot\frac{\partial e}{\partial \sigma_z'}\cdot\left[\frac{\partial \sigma_z}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right] \qquad (1.26)$$

Tomando como base de partida esta ecuación, se pueden hacer nuevas hipótesis, obteniendose entonces la solución de TERZAGHI Y FROHLICH (1936) y la de DAVIS Y RAYMOND (1965).

3.1.1.1.- Solución de TERZAGHI Y FROHLICH.-

Dichos autores hacen las siguientes hipótesis adicionales:

a) drenaje y consolidación unidimensionales.

b) la tensión vertical total σ_z es constante en el tiempo para cada punto.

c) la derivada $\partial e/\partial \sigma_z'$ es constante en todos los puntos del suelo. ($\partial e/\partial \sigma_z' = -a_v$)

d) el coeficiente de permeabilidad es constante en el tiempo y en el espacio.

Con estas hipótesis, la ecuación anterior queda:

$$\frac{k\,(1+e_0)}{\gamma_w\cdot a_v}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.27)$$

Se llama coeficiente de consolidación a la expresión $C_v = \frac{k\,(1+e_0)}{\gamma_w .\, a_v}$. En el caso concreto que se analiza (sin deformación horizontal), $a_v = (1+e).m_v$ siendo $m_v = \Delta\varepsilon_z/\Delta\sigma'_z$ el coeficiente de deformación volumétrica y su inverso $E_m = 1/m_v$ el módulo edométrico.

El coeficiente de consolidación C_v tiene como expresión:

$$C_v = \frac{k\,(1+e_0).\,E_m}{(1+e).\,\gamma_w} \qquad (1.28)$$

Ahora bien, admitiendo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se tiene que $(1+e_0) \simeq (1+e)$ quedando $C_v = \frac{k.\,E_m}{\gamma_w}$, que se supone constante durante el proceso de consolidación.

Con todo ello, la ecuación de TERZAGHI Y FROHLICH:

$$C_v.\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.29)$$

Esta ecuación está resuelta analíticamente para distintas distribuciones de la sobrepresión intersticial inicial como son:

- uniforme
- lineal, con drenaje en ambos extremos.

- senoidal

- triangular (caso particular del segundo)

En el primero de estos casos, la expresión del "grado de consolidación medio" U, que viene definido como cociente entre el asiento en un instante t, (δ_t) y el asiento final (δ_f) es:

$$U = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \cdot e^{-M^2 T_v} \qquad (1.30)$$

siendo:

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot (2m+1)$$

$$T_v = \frac{C_v\, t}{H^2} \longrightarrow \text{(factor de tiempo)}$$

e = base de los logartimos neperianos

H = espesor del estrato compresible (la mitad si el drenaje es por ambas caras)

En cuanto a las presiones intersticiales, la expresión que resulta es:

$$u = \Delta\sigma \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \cdot \cos\left(\frac{Mz}{H}\right) \cdot e^{-M^2 T_v} \qquad (1.31)$$

siendo $\Delta\sigma$ el incremento de tensión total aplicado.

En el segundo caso, con drenaje por ambos extremos, el grado de consolidación es igual, para un mismo factor de tiempo, que cuando es uniforme.

En los casos tercero y cuarto la consolidación es más lenta como se puede apreciar en la figuar adjunta.

Aunque es difícil conocer con exactitud la influencia de las aproximaciones realizadas se ha podido ver que son aproximadamente válidas para el caso de estratos de débil espesor y cargas débiles.

3.1.1.2.- Soluciones de DAVIS Y RAYMOND, (1965).-

Partiendo de la ecuación simplificado de la consolidación, obtenida anteriormente, estos autores hacen las siguientes hipótesis adicionales:

a) drenaje y consolidación unidimensionales.

b) se admite que la relación que liga el índice de poros con la tensión efectiva vertical es la definida por la curva edométrica:

$$e - e_o = - C_c \cdot \log \frac{\sigma'}{\sigma'_o} \qquad (1.32)$$

siendo:

C_c → índice de compresión que se supone constante.

e_o, σ'_o → índice de poros y presión efectiva inicial respectivamente.

c) En los resultados obtenidos en el edómetro y, para suelos normalmente consolidados se ve que el coeficiente de consolidación C_V varía mucho menos que el coeficiente de compresibilidad m_V. - Se supone entonces que C_V permanece constante - durante el proceso de consolidación. Ello lleva a admitir que la disminución de la permeabilidad viene compensada por la variación que sufre m_V.

Con estas hipótesis adicionales, la ecuación simplificada de la consolidación unidimensional se puede expresar como:

$$C_v \cdot \left[\frac{1}{\sigma'} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\sigma'}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] = \frac{1}{\sigma'} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \qquad (1.33)$$

Si se hace el cambio de variable expresado por - $W = \log\left(\sigma'/\sigma'_f\right) = \log\left(\frac{\sigma'_f - u}{\sigma'_f}\right)$ la ecuación se convierte en:

$$C_v \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (1.34)$$

que es idéntica formalmente a la de TERZAGHI Y FROHLICH y se puede resolver de la misma manera, con las condiciones de contorno del edómetro.

El grado de consolidación medio obtenido en esta - teoría coincide con el obtenido por TERZAGHI Y FROHLICH.

Por otra parte ambas teorías difieren a la hora de definir la velocidad de disipación de las presiones intersticiales ya que resulta:

$$u = \sigma'_f \cdot \left[1 - \left(\sigma'_o / \sigma'_f \right)^{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \cdot \operatorname{sen} \frac{Mz}{H} \cdot e^{-M^2 T_v}} \right] \quad (1.35)$$

siendo:

$\sigma'_o \longrightarrow$ tensión efectiva inicial

$\sigma'_f \longrightarrow$ tensión efectiva final

el resto de las variables están definidas ya en el caso de TERZAGHI.

BURLAND y ROSCOE, (1969) han demostrado que para relaciones de $(\sigma'_f - \sigma'_o)/\sigma'_o$ mayores de la unidad en arcillas normalmente consolidadas, esta teoría es más adecuada que la de TERZAGHI Y FROHLICH para valores de esta relación menores de 0,5 las dos teorías son bastante aceptables.

3.1.1.3.- Sistemas multicapas.-

En lo anterior se ha analizado el caso de un estrato homogéneo de arcilla en contacto con capas rígidas infinitamente permeables. Este caso no es el más usual en la realidad, sino que es muy frecuente la presencia de varias capas compresibles con distintas características.

La resolución práctica de la consolidación de un sistema multicapa, no es posible generalmente con la ayuda de fórmulas generales o de ábacos (salvo en casos particulares) ya que se deben verificar en cada caso:

a) las condiciones de los límites del sistema multicapa.

b) la igualdad de caudales que entran y salen de cada capa.

c) la ecuación de la consolidación en cada capa.

Por todo ello, la resolución matemática rigurosa es muy compleja.

Un caso bastante frecuente es el formado por dos capas contiguas, una de las cuales es incompresible respecto a la otra aunque no infinitamente permeable respecto a ella. Es el caso de un estrato de arcilla situado junto a un estrato limoso. La solución a este caso concreto la ha presentado SHIELDS (1963) mediante unas curvas como las de la figura.

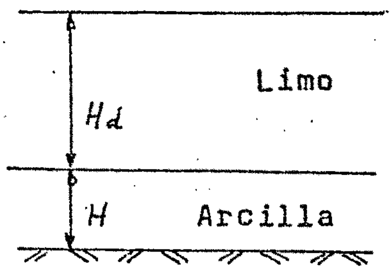


Fig 1.1

Hd → espesor del estrato de limo

H → espesor del estrato de arcilla

Kd → permeabilidad del limo

K → permeabilidad de la arcilla

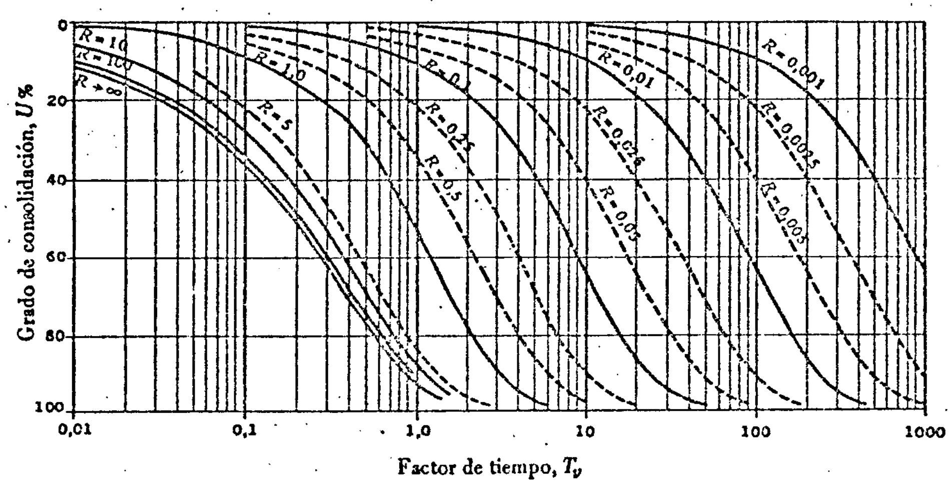


Fig 1.2.- Consolidación de una capa compresible adyacente a otra incompresible (SHIELDS, 1963)

En la figura de SHIELDS se dan unas curvas que relacionan el grado de consolidación de la capa compresible, U, con el factor de tiempo T_v, para distintos valores de R, siendo:

$$R = \frac{H}{Hd} \cdot \frac{Kd}{K} \quad ; \quad T_v = \frac{C_v\, t}{H^2}$$

Se ve que para valores de R iguales o mayores de 100 es como si la capa incompresible fuese infinitamente permeable, es decir, se cumple la solución de TERZAGHI Y FROHLICH.

En el caso de varias capas arcillosas compresibles el problema está resuelto por MOULY-ARGROT (1973) aunque no se encuentra tabulado.

Si el sistema responde al esquema de TERZAGHI Y FROHLICH con "n" capas con coeficientes de consolidación C_{vi} y espesores hi diferentes para cada capa, se puede estudiar la evolución del asiento refiriéndose el problema al de un estrato único, homogéneo, del mismo espesor H que la multicapa y con un coeficiente aparente de consolidación C_{va} cuya expresión es:

$$C_{va} = \frac{H^2}{\left[\Sigma \dfrac{h_i}{\sqrt{C_{vi}}}\right]^2} \qquad (1.36)$$

Esta transformación tiene la ventaja de facilitar el cálculo. Sin embargo, el sistema multicapa es heterogéneo ya que cada capa tiene su permeabilidad y compresibilidad propias y que no se pueden atribuir al conjunto de las capas. Además Terzaghi supone que el medio compresible es perfectamente homogéneo o isótropo, por lo que la solución propuesta es aproximada.

3.1.2.- Ecuación general de la consolidación unidimensional.-

Se ha admitido ya que la ecuación de la consolidación unidimensional de TERZAGHI Y FROHLICH se basa en hipótesis simplificativas que, en la práctica, se cumplen sólo de manera aproximada.

En el establecimiento de esta ecuación general se admiten hipótesis más generales que las adoptadas habitualmente. No se establece la restricción de que las deformaciones sean pequeñas, tomando incluso en consideración la variación de la compresibilidad del suelo y de su permeabilidad durante la consolidación. Aunque se admite la ley de Darcy, se expresa de una manera un tanto particular como se verá a continuación.

Se trata de analizar la consolidación de una capa delgada de arcilla sometida a unas tensiones tales que las debidas unicamente al peso propio se puedan considerar despreciables respecto a ellas. El incremento de tensión total se supone constante con la profundidad.

Las ecuaciones que se utilizan son:

a) ecuación de la continuidad del agua intersticial.

Se expresa como:

$$\operatorname{div}\left(n.\overrightarrow{V_w}\right) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \qquad (1.37)$$

siendo:

n $\longrightarrow$ porosidad del suelo

$\overrightarrow{V_w}$ $\longrightarrow$ vector velocidad del agua.

b) ecuación de la continuidad de las partículas só lidas, cuya expresión es:

$$\operatorname{div}\left[\overrightarrow{V_s}\,(1-n)\right] + \frac{\partial (1-n)}{\partial t} = 0 \qquad (1.38)$$

siendo: $\overrightarrow{V_s}$ $\longrightarrow$ vector velocidad de las partículas sólidas.

c) ley de Darcy.- Se adopta la formulación propuesta por SCHEIDEGGER(1957): $\overrightarrow{V_w} = \overrightarrow{V_s} - \frac{K}{n}\,.\,\overrightarrow{\operatorname{grad}\phi}$

d) leyes constitutivas del esqueleto sólido.

Con estas ecuaciones básicas, se llega a expresar como ecuación de la consolidación unidimensional, utilizando las variables de Euler, la siguiente:

$$(1+e)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(C.\frac{\partial e}{\partial z}\right) = \frac{\partial e}{\partial t} \qquad (1.39)$$

siendo :

$$C(e) = -\frac{k}{(1+e)\,\gamma_w} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial e} \qquad (1.40)$$

Utilizando las variables de Lagrange, esta ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial}{\partial z_o}\left[C_F \cdot \frac{\partial e}{\partial z_o}\right] = \frac{\partial e}{\partial t} \qquad \text{(GIBSON et al.)} \qquad (1.41)$$

siendo

$$C_F = -\frac{(1+e_o)^2}{(1+e)} \cdot \frac{K(e)}{\gamma_w} \cdot \frac{d\sigma'}{de} \qquad (1.42)$$

Las variables elegidas por Legrange son las coordenadas iniciales y el tiempo.

Es fácil ver que la relación de C_F con C_v según la definición dada antes es:

$$C_F = \frac{(1+e_o)^2 . C_v}{(1+e)^2} \qquad (1.43)$$

3.1.2.1.- <u>Solución de GIBSON et al. (1967)</u>

GIBSON, ENGLAND Y HUSSEY presentan dos soluciones a esta ecuación. Se supone un estado inicial del estrato - consolidado bajo una presión q_o que dará lugar a un índice de poros inicial e_o y se aumenta esta presión hasta - q_1 con lo que se llegará a un índice de poros e_1.

Las dos soluciones mencionadas son:

a) teoría lineal.- Se supone C_F constante, con lo - que la ecuación queda:

$$C_F \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial z_o^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \qquad (1.44)$$

En el instante t, el índice de poros de un punto - que inicialmente está situado a una distancia Z_o del plano medio del estrato tiene por expresión:

$$e(z_o,t) = e_o + (e_1 - e_o) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \exp\left[-(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot T_{vo}^2\right] \cdot \cos\frac{(2n+1)\cdot\pi\cdot z_o}{h_o} \qquad (1.45)$$

siendo:

e_o ⟶ índice de poros inicial

e_1 ⟶ índice de poros final

h_o ⟶ espesor del estrato de arcilla (con drenaje ambas caras)

T_o ⟶ (factor de tiempo) ⟶ $\frac{C_F \cdot t}{h_o^2}$

El grado de consolidación medio está dado por:

$$U = \frac{h_o - h_t}{h_o - h_\infty} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \exp\left[-(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot T_o\right] \qquad (1.4$$

siendo:

h_o ⟶ espesor inicial del estrato

h_t ⟶ espesor del estrato en el instante t

h_∞ ⟶ espesor final del estrato

Hay que señalar que la hipótesis de que C_F es - -

es constante es válida unicamente cuando el estrato de suelo es poco compresible y el aumento relativo de carga $(q_1 - q_0)/q_0$ es pequeño.

b) teoría no lineal.- En los casos en que la teoría lineal da errores grandes debido a la naturaleza del suelo o al valor del incremento de la carga, la ecuación de GIBSON se puede resolver numéricamente, utilizando una relación entre C_F y el índice de poros e determinada experimentalmente. Como simplificación se suele admitir una relación del tipo:

$$C_F = C_o + \alpha (e - e_o) \qquad (1.47)$$

siendo C_o y α dos constantes a determinar mediante ensayos.

Se utilizan unos cambios de variable apropiados y se llega a establecer una relación:

$$U = \psi (\lambda, e_1/e_o) . \sqrt{T_o} \qquad (1.48)$$

siendo:

$$\lambda = \frac{\alpha . e_o}{C_o - \alpha e_o}$$

U $\longrightarrow$ grado de consolidación medio

$T_o \longrightarrow$ (factor de tiempo) $\longrightarrow \dfrac{C_F . t}{h_o^2}$

La función ψ no se determina analiticamente sino en forma numérica y se presentan unas curvas para distintos valores de λ y de e_1/e_o

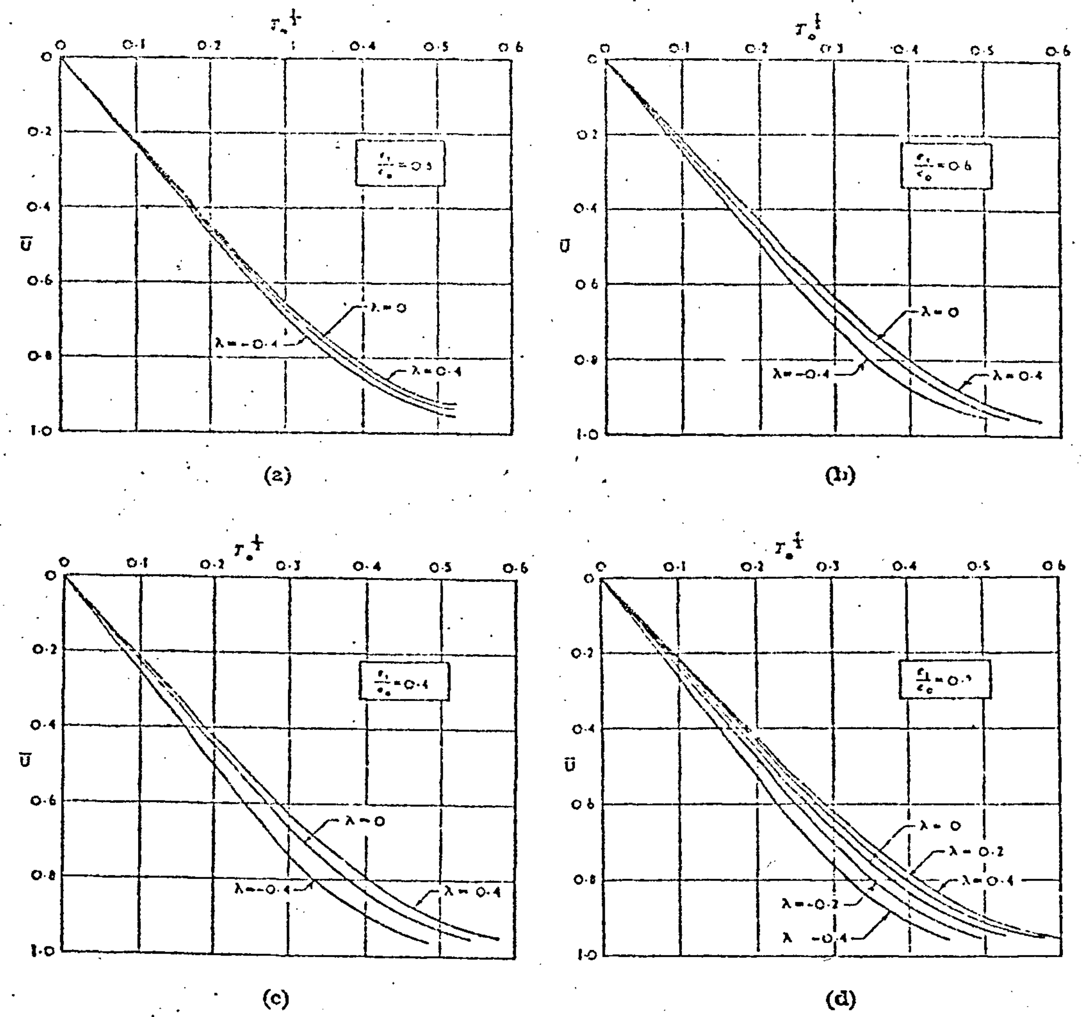


Fig 1.3.- Relación entre el grado de consolidación medio (U) y el factor de tiempo (T_o) para distintos valores de e_1/e_o y $-0'4 \leq \lambda \leq 0'4$.(GIBSON et al., 1967)

3.1.2.2.- Solución de POSKITT (1969)

Este autor resuelve la ecuación de GIBSON et al.

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left[\frac{-(1+e_0)^2}{1+e}\cdot\frac{k}{\gamma_w}\cdot\frac{d\sigma'}{de}\cdot\frac{\partial e}{\partial z_0}\right]=\frac{\partial e}{\partial t} \qquad (1.42)$$

ya mencionada admitiendo la variación de la compresibilidad y de la permeabilidad.

En cuanto a la variación de la compresibilidad, POSKITT adopta la ley definida para la rama de compresión noval de la curva edométrica:

$$e - e_0 = - C_c \cdot \log \frac{\sigma'}{\sigma'_0}$$

siendo:

e_0 , σ'_0 ⟶ índice de poros y tensión efectiva iniciales.

C_c ⟶ índice de compresión.

Se define como grado de compresión relativo, μ, a la expresión: $\mu = \frac{e_0 - e}{e_0 - e_f}$ siendo e_f el índice de poros final. Con esta notación, se puede llegar a poner:

$$\sigma' = \sigma'_0 \left[\frac{\sigma'_f}{\sigma'_0}\right]^{\mu} \longrightarrow \sigma' = \sigma'_0 \cdot a^{\mu} \qquad (1.49)$$

siendo σ'_f la tensión efectiva final y $a = \sigma'_f/\sigma'_0$.

De manera análoga, la variación de la permeabilidad la expresa como:

$$K = K_0 \cdot b^{\mu} \qquad \text{siendo} \quad b = K_f/K_0 \qquad (1.50)$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior, y operando, se llega a escribir la ecuación como:

$$C_{v_o} \cdot \frac{\partial}{\partial z_o} \cdot \left[\frac{(a.b)^{\mu}}{1-\mu b} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z_o} \right] = \frac{\partial \mu}{\partial t} \qquad (1.51)$$

siendo

$$C_{v_o} = \frac{k_o \, (1+e_o) \, \sigma'_o \, . \, L(\sigma'_f/\sigma'_o)}{\gamma_w \, . \, (e_o - e_f)} \qquad (1.52)$$

$$\beta = \frac{e_o - e_f}{1 + e_o}$$

El coeficiente $\frac{(a.b)^{\mu}}{1-\mu.b}$ se puede sustituir por -- $(1+\alpha\mu)$ siendo α = log (ab)+β . Haciendo además unos cambios de variable expresados por:

$$x = \frac{\pi . z_o}{H_o} \qquad y \qquad T = \frac{C_{v_o} . \pi^2 \, t}{H_o^2} \qquad (1.53)$$

se tiene la ecuación expresada en forma adimensional:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(1+\alpha\mu) . \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] = \frac{\partial \mu}{\partial T} \qquad (1.54)$$

cuyo término no lineal está multiplicado por el parámetro α cuyo valor es pequeño.

La solución se puede poner en la forma:

$$\mu = \mu_o + \alpha\mu_1 + \alpha^2\mu_2 + \alpha^3\mu_3 + \cdots \qquad (1.55)$$

en donde μ_o es la solución de TERZAGHI. POSKITT ha encontrado la expresión del coeficiente μ_1 y ha demostrado que, sin error excesivo, puede despreciarse el resto de los términos. Con ello, la solución resulta:

$$\mu = \mu_0 + \alpha \mu_1 \qquad (1.56)$$

Deshaciendo los cambios, la presión intersticial viene dada por:

$$\frac{u}{q} = \frac{a - a^{\mu}}{a - 1} \qquad (1.57)$$

siendo q el incremento de carga aplicado.

3.2.- Consolidación tridimensional.-

Generalmente, los métodos de predicción de magnitud y velocidad de producción de asientos están basados en la teoría de la consolidación unidimensional de TERZAGHI que es muy fácil de aplicar. En realidad, son pocos los casos que satisfacen las hipótesis de TERZAGHI por lo que, algunos autores han intentado abordar el problema con mayor generalidad.

La generalización de la teoría de TERZAGHI a tres dimensiones ha dado lugar a dos alternativas que, según SCHIFFMAN; (1969) se pueden designar como:

- teoría pseudotridimensional
- teoría realmente tridimensional

A continuación se desarrollan ambas teorías designándolas por el nombre de sus autores.

3.2.1.- Teoría de TERZAGHI-RENDULIC, (1936).-

Las hipótesis que se admiten para el desarrollo de esta teoría son:

a) el suelo es homogéneo

b) el suelo está totalmente saturado

c) tanto los granos del suelo como el agua, se consideran incompresibles

d) se supone que es válida la aplicación del cálculo infinitesimal al proceso que estamos considerando

e) validez de la ley de DARCY

f) se hace el análisis en la hipótesis de pequeñas deformaciones

g) el suelo puede ser anisótropo pero debe tener tres planos de simetría, ortogonales entre sí, que se cortan según tres direcciones principales

h) los coeficientes de permeabilidad según las tres direcciones principales son constantes, si bien no tienen por qué ser iguales entre sí.

i) la deformación volumétrica unitaria es función lineal de las tensiones efectivas.

j) la carga externa se supone aplicada instantaneamente, constante en el tiempo y se supone que las tensiones principales totales permanecen constantes durante el proceso de consolidación.

Debido a esta última hipótesis, esta teoría recibe a veces la denominación de análisis pseudotridimensio - nal de la consolidación.

Con estas hipótesis, estableciendo la condición de que el volumen de agua que abandona la unidad de volu - men de suelo en la unidad de tiempo sea igual a la dis- minución de volumen unitario por unidad de tiempo, se - tiene, para el caso de suelo isótropo la ecuación:

$$c \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.58)$$

Si el esqueleto de las partículas es elástico e - isótropo el coeficiente c tiene como expresión:

$$c = \frac{K \cdot E'}{3\, \gamma_w \,(1 - 2\mu')} \qquad (1.59)$$

3.2.2.- Teoría de BIOT (1941).-

Las hipótesis que sirven de base para el desarrollo de esta teoría son, basicamente las mismas que antes sal vo las diferencias siguientes:

i) el esqueleto del suelo se comporta como un sólido lineal elástico e isótropo.

j) la carga externa se supone aplicada instantanea- mente, permaneciendo constante en el tiempo. Las tensiones totales varían durante la consolidación. Por ello, en contraste con la teoría de RENDULIC, suele denominarse a esta teoría como verdaderamen te tridimensional.

Para el establecimiento de la ecuación se impone - como antes la condición de igualdad de volúmenes (volumen de agua perdido = disminución de volumen del esqueleto sólido). La diferencia estriba en que la variación de volumen del esqueleto sólido se obtiene según las leyes de la elasticidad, obteniéndose como ecuación diferencial:

$$c.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\partial t} \qquad (1.60)$$

siendo:

$c \longrightarrow$ (la misma expresión anterior (1.59))

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \longrightarrow$ tensiones totales en tres direcciones perpendiculares.

3.2.3.- Análisis comparativo.-

La teoría de RENDULIC, como se ve, lleva a una ecuación diferencial más sencilla de resolver y se presta a considerar leyes de comportamiento del material distintas de la elástica. Tiene el inconveniente de que sólo - proporciona el grado de disipación de las presiones intersticiales.

La diferencia esencial entre las dos teorías está - en el término $\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\partial t}$. Se ha comprobado que aunque la carga exterior permanezca constante, este término no es generalmente nulo debido a la redistribución de tensiones que tiene lugar en una masa de suelo tridimensional durante la consolidación. Esto da lugar en algunos puntos del suelo al llamado efecto MANDEL-CRYER (MANDEL, 1953; CRYER, 1963) que se puede manifestar como un aumento de la presión intersticial durante las primeras fases después de la aplicación de la carga.

Es evidente que es preferible la teoría verdaderamente tridimensional que la pseudo-tridimensional, concretamente en lo que se refiere a la predicción de la velocidad de producción del asiento y a la evolución de las tensiones durante el proceso. Por desgracia, las hipótesis simplificativas de la misma y su mayor complejidad matemática han limitado su uso en la práctica.

3.3.- Consolidación radial.-

El término consolidación radial propiamente dicho se aplica a casos con simetría axial en los que existe un flujo radial transitorio pero es nulo el flujo axial. En el presente apartado, sin embargo, se utiliza un concepto más amplio y es el de considerar como tal todo proceso de consolidación tridimensional con simetría axial, destinando para el anterior el término de consolidación radial plana.

La ecuación diferencial de la consolidación tridimensional, según la teoría de RENDULIC ha sido deducida en el apartado anterior siendo su expresión:

$$\frac{E'}{3\,\gamma_w\,(1-2\mu')} \cdot \left[k_x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.61)$$

Si un proceso de consolidación tridimensional es simétrico respecto a un eje, es más conveniente reemplazar las coordenadas cartesianas por cilíndricas, r en una dirección radial y z en una dirección axil.

Con esta sustitución, la ecuación toma la forma:

$$C_{vr} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] + C_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.62)$$

siendo:

$C_v = \dfrac{K}{m_v \cdot \gamma_w}$ → coeficiente de consolidación

$n = \dfrac{K}{K_r}$ → relación de permeabilidades en dirección z y radial

$C_{vr} = \dfrac{C_v}{n}$ → coeficiente de consolidación con drenaje radial

La consolidación radial plana es un caso particular y se puede ver facilmente que si el movimiento radial tiene lugar en planos perpendiculares al eje z, el término $\partial^2 u/\partial z^2$ es igual a cero y se obtiene:

$$C_{vr} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.63}$$

CARRILLO, (1942) ha demostrado que la consolidación radial tridimensional se puede descomponer en una consolidación radial plana y en otra unidimensional. Si U_r es el grado de consolidación medio de una capa de arcilla, debido al drenaje radial plano y U_z el correspondiente al drenaje según la dirección z, se puede poner:

$$U = 100 \left[1 - (1 - U_z)(1 - U_r) \right] \tag{1.64}$$

siendo U el grado de consolidación debido a la combinación de los drenajes lineal y radial.

Se ha utilizado esta teoría para estudiar el efecto del drenaje radial y la influencia de los drenes laterales en el ensayo triaxial por BISHOP y HENKEL, (1962), BISHOP y GIBSON (1963), SCOTT, (1963).

Esta teoría tiene también gran importancia en el estudio de la consolidación de estratos de arcilla en los que se utilice la técnica de drenes de arena verticales para acelerar la consolidación. En este caso se supone una deformación unidimensional (vertical) y un flujo tridimensional. Existen ábacos que permiten obtener facilmente el grado de consolidación medio para un tiempo dado, en función del diámetro de los drenes, de la separación entre los mismos y de los valores del coeficiente de consolidación.

3.4.- Consolidación bidimensional.-

La consolidación bidimensional no es sino un caso particular de la consolidación tridimensional con la condición de deformación plana. En la realidad hay muchos casos que se pueden asimilar a éste, en particular aquéllos en los que una dimensión de la superficie cargada (uniformemente) sea mucho mayor que la otra (carga en faja).

3.4.1.- Teorías de TERZAGHI- RENDULIC y de BIOT.-

El desarrollo de las teorías correspondientes parte de las mismas hipótesis que las de RENDULIC y de BIOT, siguiendo un tratamiento análogo sin más que añadir la condición de deformación plana. El análisis a partir de la teoría de RENDULIC lleva a la ecuación diferencial de la consolidación pseudobidimensional, que es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[k_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right] = c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.65)$$

siendo:

$$c = \frac{2(1-2\mu')(1+\mu') \cdot \gamma_w}{E'} \qquad (1.66)$$

mientras que siguiendo la teoría de BIOT se llega a la ecuación diferencial de la consolidación bidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[k_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right] + Q = c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1.67)$$

siendo

$$Q = \frac{\gamma_w (1-2\mu')(1+\mu')}{E'} \cdot \frac{\partial(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial t} \qquad (1.68)$$

y c la misma expresión anterior.

3.4.2.- Análisis comparativo.-

Como se ha citado al hablar de consolidación tridimensional es preferible la aplicación de la última de las dos teorías citadas. La teoría bidimensional considera un acoplamiento entre la magnitud y el progreso del asiento, mientras que en la pseudobidimensional no existe tal.

El hecho de que en algunos casos se hayan obtenido soluciones analíticas de ambas teorías permite efectuar una comparación entre ambas. Tal es el caso analizado por SCHIFFMAN, CHEN y JORDAN, (1969) de un semiespacio elástico con una carga en faja cuyos resultados se comentan a continuación.

Se analizan en primer lugar una serie de hechos que se observan en la solución bidimensional para comparar posteriormente con el comportamiento en la solución pseudobidimensional. En todo ello, el factor de tiempo está definido como $T_v = 2Gkt/\gamma_w a^2$ siendo "a" el semiancho de la faja.

Uno de los hechos significativos en la teoría bidimensional es el que se presenta en la figura 1.4.

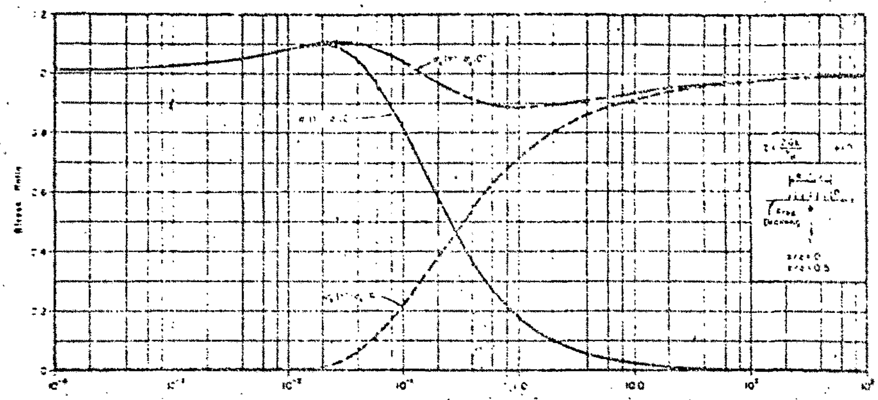


Fig 1.4.- Efecto Mandol-Cryer (SCHIFFMAN et al., 1969)

En ella se puede apreciar el llamado efecto MANDEL-CRYER que se caracteriza por un aumento en la sobrepresión intersticial durante las primeras fases de tiempo, disminuyendo a continuación. Para comprender algo este efecto se debe tener en cuenta que despues de un tiempo pequeño tras la aplicación de la carga, los puntos cercanos a la superficie se han drenado apreciablemente. Esto originará deformaciones e incrementos de tensiones totales y efectivas en los elementos drenados. Si consideramos ahora un punto de suelo del interior, en el mismo instante no ha comenzado todavia a drenar ni a desarrollar incremento de deformaciones ni de tensiones efectivas. Debe haber, sin embargo, una compatibilidad de deformaciones entre los elementos de la superficie y los del interior. Para mantener esta compatibilidad, parte de los incrementos de tensiones totales de la superficie se transfieren a los elementos del interior y de esta manera, en los primeros momentos de la consolidación, las tensiones totales aumentan de valor respecto al inicial.

Por otra parte, se ha comprobado que el aumento relativo es mayor en el caso de las tensiones horizontales que en el de las verticales.

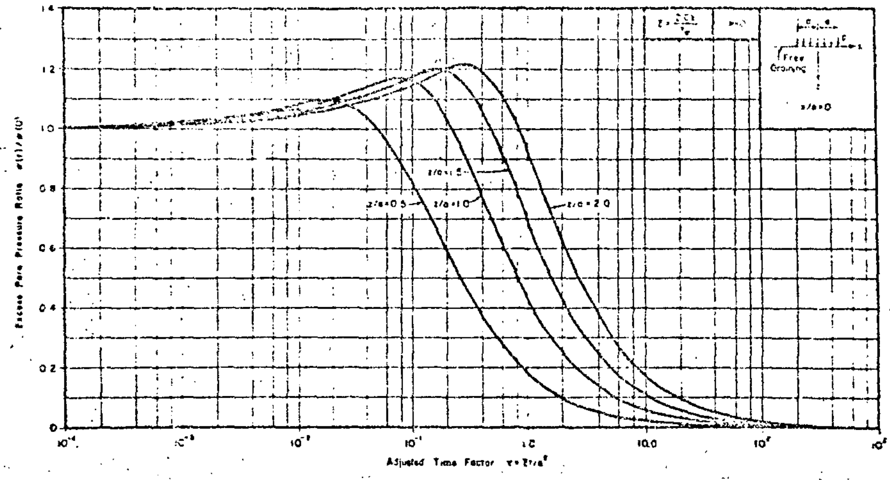


Fig 1.5.- Influencia de la profundidad en la variación de la sobrepresión intersticial. (SCHIFFMAN et al. 1969)

En la figura 1.5 se aprecia la influencia de la profundidad en la magnitud de la variación relativa de tensiones. La magnitud del efecto aumenta con la profundidad. Para valores pequeños del factor de tiempo τ, CHEN, (1966) ha obtenido como solución exacta:

$$\sigma = \frac{P}{\pi} \cdot \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{2az}{z^2 + x^2 - a^2} + \left[2 \cdot \frac{a}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\eta}} \right] \cdot \left[\frac{x+a}{z^2 + (x+a)^2} - \frac{x-a}{z^2 + (x-a)^2} \right] \right] + o(\tau) \qquad (1.69)$$

siendo η una constante elástica definida por $\eta = \dfrac{1-\mu'}{1-2\mu'}$

Del análisis de esta expresión resulta que la zona en donde tiene lugar el efecto MANDEL-CRYER viene definido por:

$$x^2 - z^2 < a^2 \qquad (1.70)$$

que es una región limitada por una hipérbola cuyos ejes coinciden con los adoptados para el semiespacio. Según esto se puede afirmar que al aumentar la profundidad aumenta horizontalmente la zona afectada por el citado efecto MANDEL-CRYER.

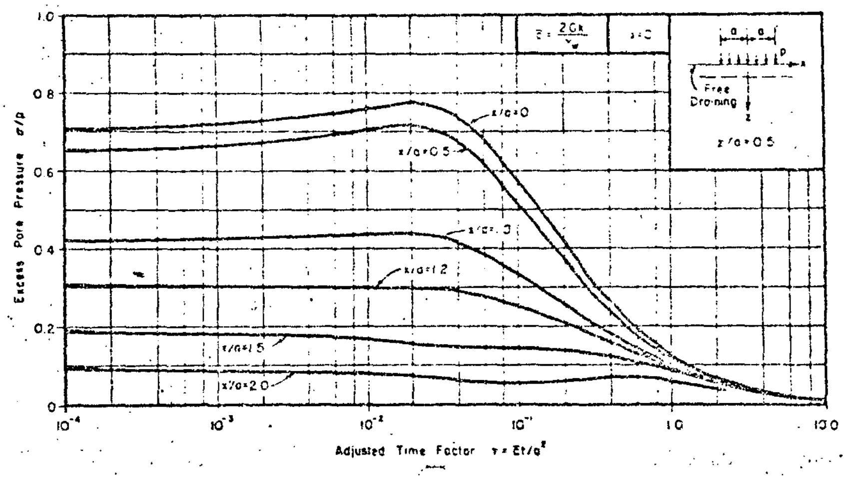


Fig 1.6.- Curvas sobrepresión intersticial-tiempo para z/a = 0,5.(SCHIFFMAN et al. 1969)

En la figura 1.6 se presentan las curvas sobrepresión intersticial-tiempo para puntos situados a una misma profundidad. Se ve que la forma de las curvas varía al salir de la zona definida por la desigualdad (1.70).

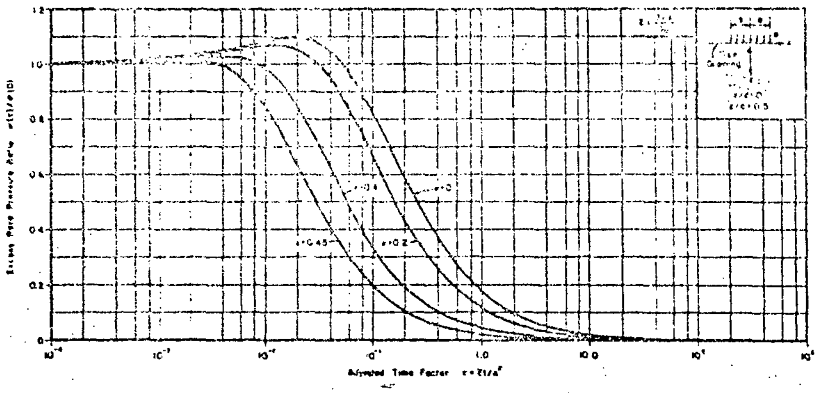


Fig 1.7.- Influencia de ν en la ley de variación de u. (SCHIFFMAN et al. 1969)

En la figura 1.7 se presenta la influencia que tiene el valor del coeficiente de Poisson en la magnitud del efecto MANDEL-CRYER. Se observa que disminuye su valor relativo al aumentar el coeficiente de Poisson.

La teoría de consolidación pseudobidimensional considera como se sabe que los componentes de las tensiones totales son constantes durante el proceso de consolidación. En la figura 1.8 se observa por el contrario que-

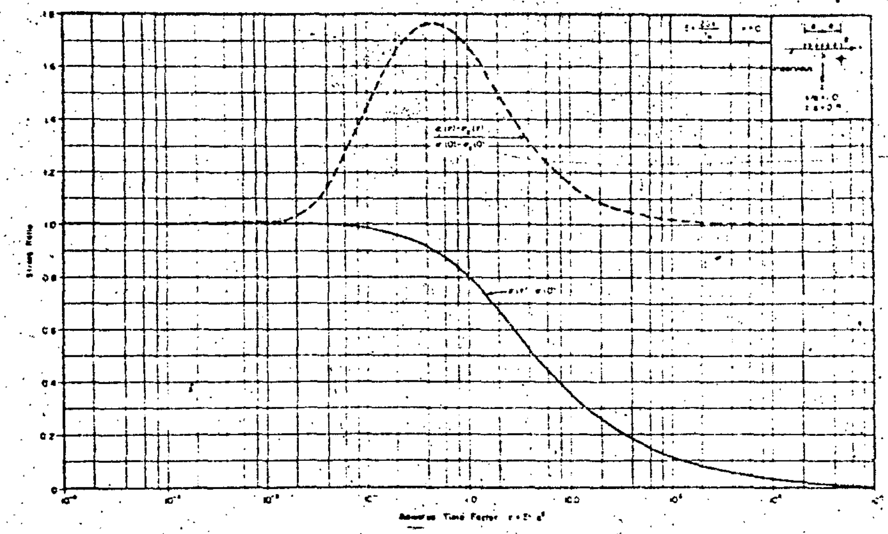


Fig 1.8.- Variación de τ_{max} en un punto durante la consolidación. (SCHIFFMAN et al. 1969)

la máxima tensión tangencial sufre un cambio sustancial durante el proceso de consolidación, pudiéndose producir en determinados materiales zonas plásticas y presentarse en algunos casos, problemas de inestabilidad. En el valor de la máxima tensión tangencial influyen también las condiciones de drenaje como se ve en la figura 1.9.

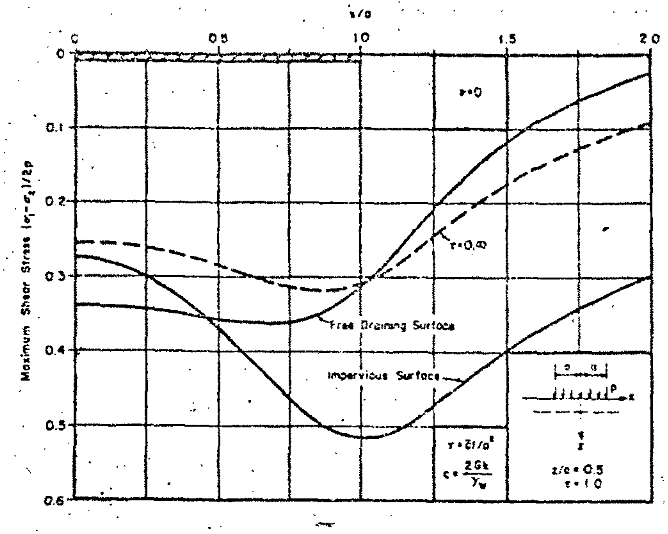


Fig 1.9.- Influencia de las condiciones de drenaje en el valor de τ_{max}. (SCHIFFMAN et al. 1969)

Dichas condiciones de drenaje afectan también, para un valor dado del coeficiente de Poisson a la magnitud del efecto MANDEL-CRYER. (figura 1.10)

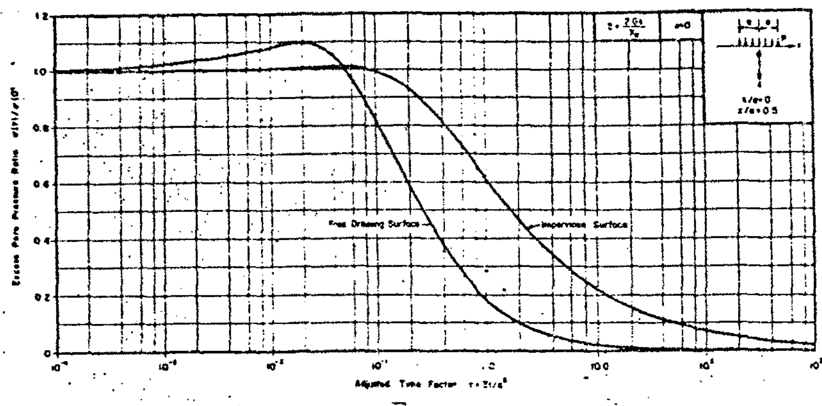


Fig 1.10.- Influencia de las condiciones de drenaje en el efecto MANDEL-CRYER. (SCHIFFMAN et al. 1969)

En la figura 1.11 se presenta la distribución lateral (en puntos situados a una misma profundidad) de sobrepresiones intersticial para un valor dado del factor de tiempo (T_V = 0,1) y distintos valores del coeficiente de Poisson. Como se ve, al aumentar el coeficiente de Poisson, dicha distribución se hace más uniforme.

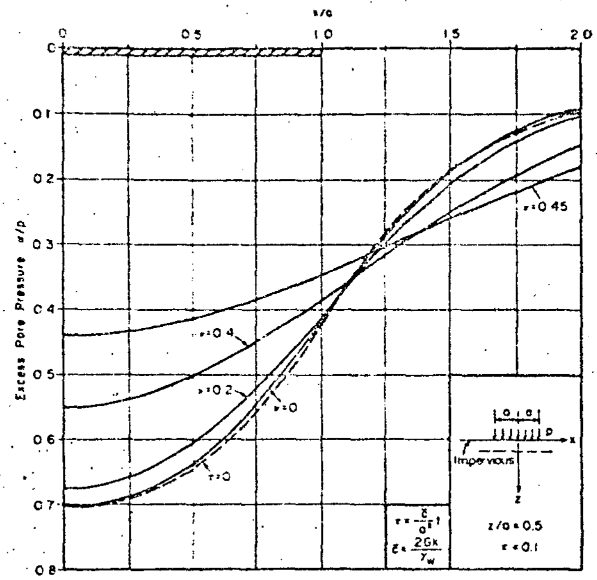


Fig 1.11.- Distribución lateral de sobrepresiones intersticiales en función de ν. (SCHIFFMAN et al. 1969)

En la figura 1.12 se presenta ya un análisis comparativo de ambas teorías en lo que se refiere a la evolución de la sobrepresión intersticial en el tiempo para un punto dado. En primer lugar, el efecto MANDEL-CRYER no se presenta en la teoría pseudobidimensional. Dicha teoría es también independiente del coeficiente de Poisson.

Estos dos hechos son los que marcan una mayor diferencia entre ambas teorías. Por otra parte, se ve que hay un notable paralelismo entre todas las curvas.

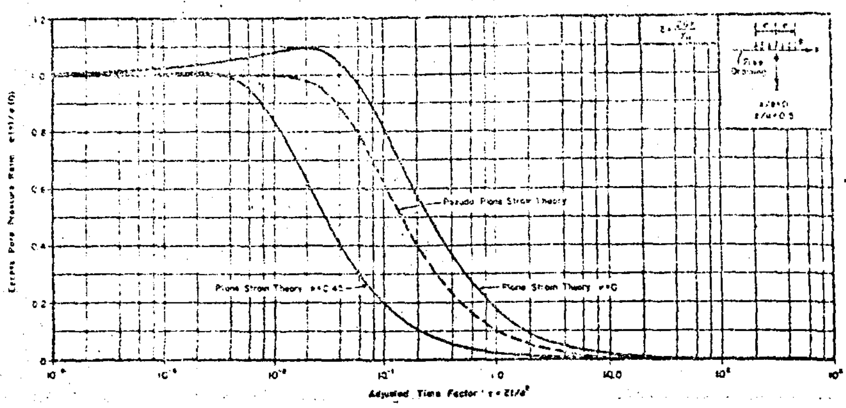


Fig 1.12.- Comparación de las distintas teorías.
(SCHIFFMAN et al. 1969)

En cuanto a la distribución de sobrepresiones intersticiales en profundidad, en la figura 1.13 se ven los resultados para el eje de la carga y un valor del factor de tiempo de $T_v = 0'1$. Se observa que la mayor diferencia tiene lugar a pequeñas profundidades, siendo siempre inferiores los valores de la teoría pseudobidimensional.

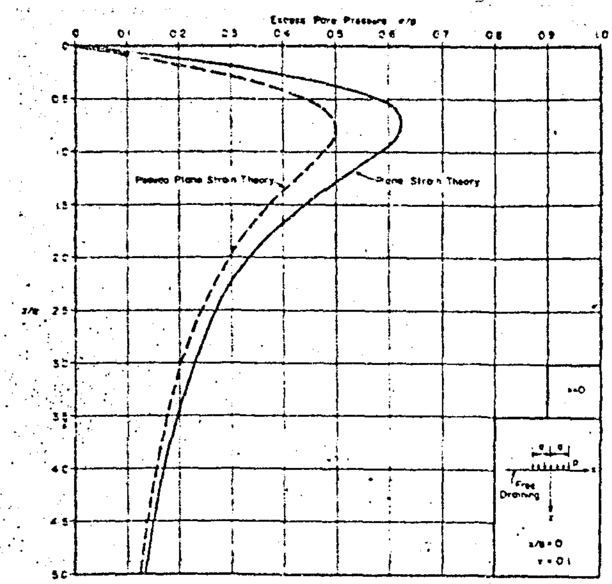


Fig 1.13.- Distribución de "u" en el eje de la carga para un valor dado de T_v.
(SCHIFFMAN et al. 1969)

En las figuras 1.14 y 1.15 se muestra la variación en el tiempo de las tensiones efectivas relativas horizontal y vertical para un punto dado.

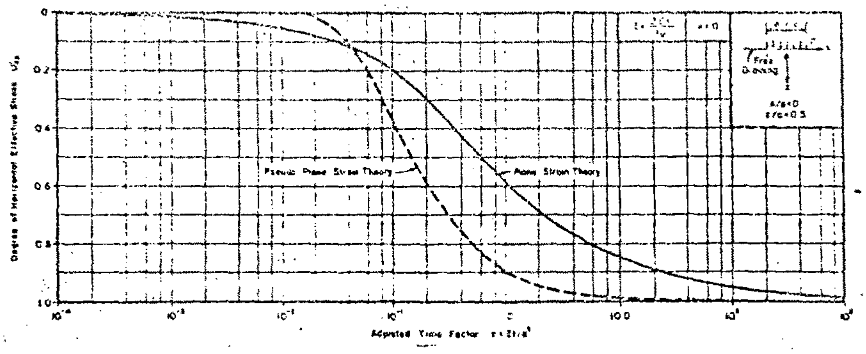


Fig 1.14.- Variación de σ_h' en un punto dado.
(SCHIFFMAN et al. 1969)

Se observa que las diferencias existentes entre los resultados correspondientes a ambas teorías son más acusadas en el caso de las tensiones horizontales que en el de las tensiones verticales.

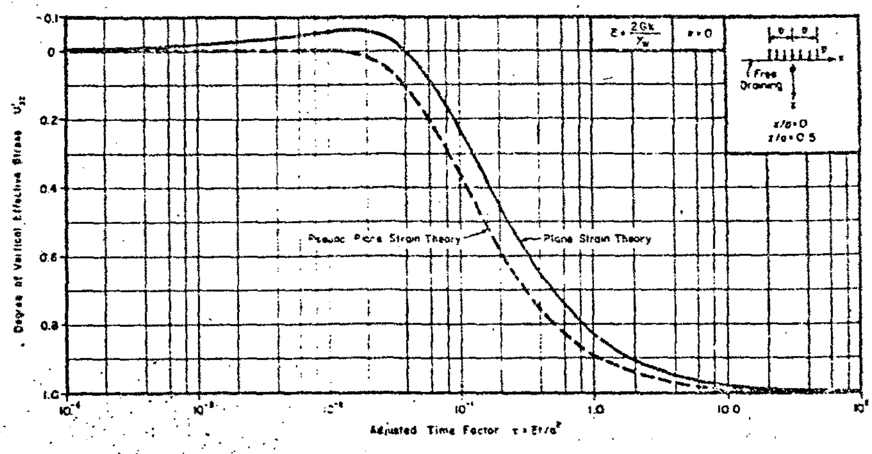


Fig. 1.15.- Variación de σ_v' en un punto dado.
(SCHIFFMAN et al. 1969)

Por último se examina el caso de un estrato de arcilla de espesor finito. Se toma una relación $a/H = 0'1$ para minimizar la influencia del mismo en el caso del semiespacio bidimensional. La figura 1.16 muestra un análisis comparativo de las dos teorías de consolidación bidimensional junto con un análisis del problema con la teoría unidimensional.

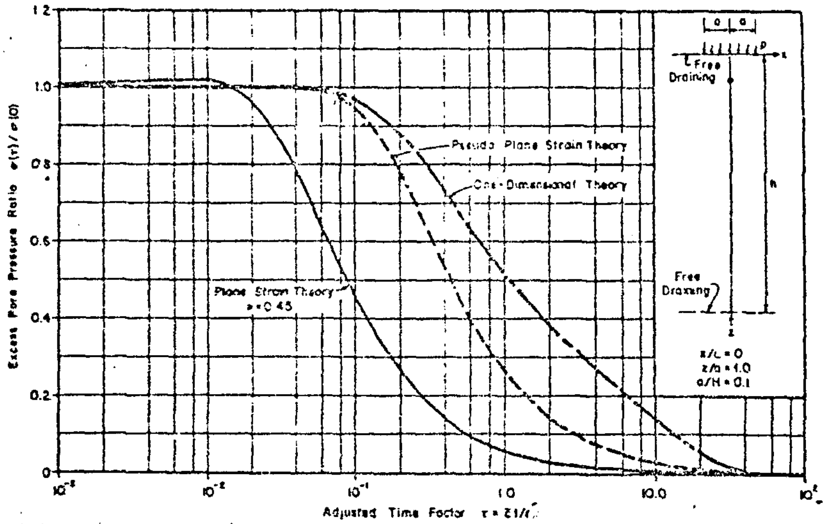


Fig 1.16.- Comparación de las distintas teorías en el estudio de un estrato de espesor finito. (SCHIFFMAN et al. 1969)

Se ha adoptado un valor del coeficiente de Poisson para la arcilla de 0,45 con lo cual las diferencias existentes son máximas. Si se tratase de una arcilla con $\mu' = 0$, las diferencias serían algo menores.

De todo lo anterior se puede concluir que sin un conocimiento adecuado a posteriori de la relación tensiones totales-tiempo, la teoría pseudobidimensional no es una aproximación válida de la consolidacion bidimensional. A pesar de ello y dada su mayor simplicidad matemática se sigue utilizando.

3.4.3.- Solución analítica.-

A pesar de las complicaciones matemáticas grandes que lleva consigo el buscar soluciones analíticas se han resuelto algunos casos.

Mc NAMEE y GIBSON (1960) resuelven el problema de consolidación de un semiplano mediante el uso de funciones de desplazamientos y transformaciones integrales. Los componentes de las tensiones y de los desplazamientos se obtienen de las funciones de desplazamientos y transformaciones integrales. Los componentes de las tensiones y de los desplazamientos se obtienen de las funciones de desplazamientos (CHEN, 1966).

GIBSON, SCHIFFMAN y PU (1968) han resuelto por el mismo método el caso de un estrato de arcilla sobre una base lisa e impermeable.

YAMAGUCHI y MURAKAMI (1976) estudian la consolidación multidimensional de un estrato de arcilla de espesor finito según la teoría de BIOT. Resuelven el caso mediante un método de separación de variables.

Hay que destacar el notable esfuerzo que suponen estas soluciones analíticas si bien, dada su compleji - dad matemática, sólo se pueden obtener de casos senci - llos. Si se quieren tener en cuenta otros factores como anisotropía, no linealidad, etc... es preciso recurrir a métodos numéricos que están teniendo gran difusión en los últimos tiempos. Dentro de ellos podemos citar los- de diferencias finitas y elementos finitos.

3.4.4.- Solución numérica aproximada

3.4.4.1.- Método de diferencias finitas.-

Para el desarrollo de este procedimiento es necesa rio, en primer lugar, el establecimiento de una retícu- la, de manera que las incógnitas sean los valores de la función en los nudos de la misma. La ecuación a resol - ver, en el caso de suelo homogéneo e isótropo es:

$$C_1 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial u}{\partial t} - Q_1 \qquad (1.71)$$

siendo:

$$C_1 = \frac{k\, E'}{2\, \gamma_w (1+\mu')(1-2\mu')} \qquad (1.72)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial t}$$

Por las caracteristicas del problema se procede por una parte a una discretización del espacio y por otra a una discretización del tiempo. Se convierte la ecuación diferencial en un conjunto de ecuaciones algebraicas.

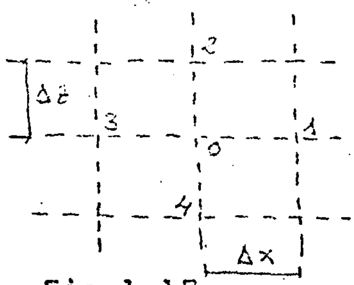


Fig 1.17

Para cada intervalo de tiempo, t, se tiene en primer lugar:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = \frac{u_{0,T+\Delta t} - u_{0,T}}{\Delta t} \qquad (1.73)$$

Por otra parte:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{(\Delta x)^2} - \frac{2(\Delta x)^2}{4!} \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_0 + \cdots$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{(\Delta z)^2} - \frac{2(\Delta z)^2}{4!} \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right)_0 + \cdots \qquad (1.74)$$

El error que se comete al despreciar el segundo sumando es proporcional al cuadrado de la mayor dimensión de la malla elegida.

Hay que tener en cuenta que la derivada temporal obtenida es un valor medio en el intervalo. Para una solución correcta, habría que tomar también los valores medios en el intervalo de las derivadas espaciales.

La forma más simple de solución consiste en no tener en cuenta esta consideración y tomar los valores de las derivadas espaciales en el instante inicial del intervalo; con ello se obtienen los esquemas de diferencias finitas explícitas, en los que la presión intersti cial en el nodo "o" al final del intervalo es función explícita de los valores de la presión intersticial en los nodos al comienzo del intervalo. En efecto, sustituyendo las derivadas en la ecuación diferencial, resulta, en el caso de malla cuadrada de lado Δl:

$$\frac{c}{(\Delta \ell)^2} \cdot \left[u_{1,T} + u_{2,T} + u_{3,T} + u_{4,T} - 4 . u_{o,T} \right] = \frac{u_{o,T+\Delta t} - u_{o,T}}{\Delta t} - A \qquad (1.75)$$

habiendo considerado Q_1 como constante.

Despejando, se obtiene:

$$u_{o,T+\Delta t} = M . \left[u_{1,T} + u_{2,T} + u_{3,T} + u_{4,T} \right] + (1-4M)\, u_{o,T} + A . \Delta t \qquad (1.76)$$

siendo:

$$M = \frac{c . \Delta t}{(\Delta \ell)^2} \qquad (1.77)$$

La condición para que esta solución sea estable es que

$$M \leq 1/4 \qquad (1.78)$$

La expresión (1.76) anterior es válida unicamente en el caso de que los cuatro puntos adyacentes al O sean interiores al dominio. En el caso de que se trate de un punto cercano a un contorno permeable como el de la figura, la expresión se convierte en:

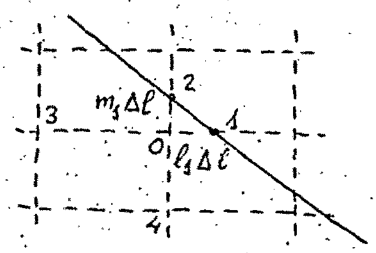


Fig 1.18

$$u_{0,T+\Delta t} = M \cdot \left[\frac{2 \cdot u_{1,T}}{l_1 (l_1 + 1)} + \frac{2\, u_{2,T}}{m_1 (m_1 + 1)} + \frac{2 \cdot u_{3,T}}{l_1 + 1} + \frac{2\, u_{4,T}}{m_1 + 1} \right] + \left[1 - \left(\frac{2}{l_1} + \frac{2}{m_1} \right) \cdot M \right] \cdot u_{0,T} + A \cdot \Delta t \qquad (1.79)$$

Es preciso también el buscar expresiones particulares para los nudos situados en un contorno impermeable, en el que la condición a satisfacer es que el gradiente hidráulico no tenga componente normal al contorno.

Contra lo que podría parecer, la solución explícita (1.76) no es la más adecuada ya que, cuando el tamaño de la malla es pequeño, el proceso es muy lento (incrementos de tiempo necesariamente pequeños por la condición 1.78) y si se mantienen por el contrario valores aceptables para dichos incrementos de tiempo, la malla espacial resulta demasiado grosera.

Para evitar esto, se recurre a poner la ecuación en diferencias finitas en otra forma, tomando como valor de $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial z^2$ la media de los correspondientes al instante T y al $T + \Delta t$. Queda entonces como -

expresión:

$$u_{o,T+\Delta t} - u_{o,T} = \frac{M}{2} \cdot \Big[u_{1,T} + u_{2,T} + u_{3,T} + u_{4,T} - 4\, u_{o,T} + u_{1,T+\Delta t} + u_{2,T+\Delta t} + u_{3,T+\Delta t} + u_{4,T+\Delta t} - 4\, u_{o,T+\Delta t} \Big] \quad (1.80)$$

Otro método es el propugnado por LIEBMANN (1955) - que consiste en expresar

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_o = \frac{u_{o,T} - u_{o,T-\Delta t}}{\Delta t}$$

con lo que:

$$u_{o,T} - u_{o,T-\Delta t} = M. \left[u_{1,T} + u_{2,T} + u_{3,T} + u_{4,T} \right] - 4.\, M.\, u_{o,T} \quad (1.81)$$

LIEBMANN ha indicado que esta ecuación es estable para todos los valores de M.

Estos sistemas de ecuaciones se pueden resolver directamente con la ayuda de un ordenador o bien calculando los residuos en cada uno de los nudos procediendo posteriormente a su eliminación por procedimientos de relajación.

Otros autores han avanzado en este campo, llegando a métodos más refinados. RICHTMEYER y MORTON (1967) han elaborado diversas soluciones en forma implícita. Los problemas que aparecen en estos métodos son debidos al tamaño de la malla. Por ejemplo, en un problema bidimensional con una malla formada por N puntos en cada - -

dirección, hay un total de N^2 puntos interiores. Ello lleva a una matriz de $N^2 \times N^2$ que resulta inabordable para valores de N un poco altos.

PEACEMAN y RACHFORD (1955) introducen el método ADI (alternating-direction implicit) utilizable en el caso de que el número de puntos de la malla sea grande. En este método el tamaño de la matriz a resolver en cada incremento de tiempo se reduce a expensas de resolver una matriz menor varias veces para cada incremento de tiempo. Se utiliza una forma implícita y explícita alternativamente para $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial z^2$ en los sucesivos incrementos de tiempo.

BARAKAT y CLARK (1966) describen un método explícito incondicionalmente estable.

En general, todos estos métodos de diferencias finitas presentan dificultades a la hora de adaptarse a los contornos y también cuando se trata de casos en los que el material es heterogéneo. Ello hace que dichos métodos no sean muy utilizados en la práctica, salvo para el análisis y tabulación de soluciones de casos típicos de contornos sencillos.

3.4.4.2.- Método de elementos finitos.-

Sin entrar en el detalle de los fundamentos del método de los elementos finitos, se puede afirmar que, en su enfoque variacional se caracteriza por la minimiza - ción numérica directa de un funcional asociado a las e- cuaciones diferenciales que rigen el fenómeno que se es tudia. Sus aspectos generales han alcanzado ya una amplia difusión (p. ej., ZIENKIEWICZ, 1977).

Un caso particular es su aplicación al estudio de- la consolidación.

Los tipos de elementos finitos empleados son muy - variados, dependiendo de las hipótesis que se hagan res pecto a la variación, dentro del dominio, de las funcio nes incógnita.

Los elementos finitos presentan frente al método de diferencias finitas, la ventaja de que permiten una me- jor adaptación de la malla a cualquier tipo de contorno y mayor versatilidad en cuanto a las características del suelo.

Como es sabido, en el análisis de consolidación in terviene, por una parte, el comportamiento hidrodinámi- co del fluido intersticial y, por otra, el comportamien to tenso-deformacional del esqueleto sólido. Se trata - pues de un problema acoplado. La evolución en el tiempo se analiza dividiendo éste en una serie de incrementos, que, generalmente, puden ser distintos entre sí.

El primer problema, del que se ha hablado en el apartado 2 es el análisis del proceso inicial de - -

carga sin drenaje. Dentro de esto, parte de los métodos citados anteriormente utilizan para su resolución el método de los elementos finitos, tanto mediante análisis en tensiones efectivas, elásticos (CHRISTIAN, 1968; MATSUMOTO, 1976) o elastoplásticos (WROTH y SIMPSON, 1972), o en tensiones totales con métodos en desplazamientos (RAYMOND, 1972) o híbridos tanto elásticos (HERRMANN, 1965; HWANG et al., 1969; URIEL, 1970) como elastoplásticos (BALLESTER, 1977).

Dentro ya del proceso de consolidación (disipación de sobrepresiones intersticiales) CHRISTIAN y BOEHMER (1970) han formulado un método mixto de elementos finitos y diferencias finitas en consolidación. Aplican el método directo al principio variacional equivalente a las ecuaciones de equilibrio interno y a la relación tensión-deformación elástica y la técnica de diferencias finitas a la relación entre el cambio de volumen del suelo y el gradiente hidraúlico. Debido a la naturaleza de la técnica de diferencias finitas, han debido introducir elementos ficticios fuera del dominio ocupado por el suelo.

Siguiendo las investigaciones llevadas a cabo en principios variacionales para termoelasticidad, SANDHU y WILSON (1969) han llevado a cabo una formulación de la teoría de consolidación tridimensional considerando el problema de forma acoplada. El método de análisis requiere la resolución de una serie de ecuaciones algebraicas lineales de equilibrio y ecuaciones de continuidad expresadas en términos de valores discretizados de desplazamientos y un campo de sobrepresiones intersticiales con un esquema de integración en el tiempo mediante escalones. La formulación del principio variacional correspondiente es bastante compleja. En análisis de este tipo, cada nodo lleva asociadas tres incógnitas, lo que hace que sean necesarios ordenadores bastante potentes para su resolución en el caso de mallas de tamaño no muy grande. Este método sólo es aplicable a problemas de consolidación con carga continua en el tiempo.

Otros autores como YOKOO, YAMAGATA y NAGAOKA (1971) han seguido este camino y han desarrollado nuevos principios variacionales aplicables a problemas de consolidación, para el caso de que la carga varíe con el tiempo en forma discontinua. Todos ellos presentan bastante complejidad en su formulación.

Estos métodos que presentan, en principio un gran rigor matemático, no tienen sin embargo mucha aplicación práctica ya que se reducen al estudio de materiales elásticos. El hecho de considerar el suelo como un material elástico limita mucho su campo de aplicación.

Otro posible tratamiento del problema de consolidación consiste en analizar cada uno de los dos comportamientos por separado, realizando el acoplamiento para cada incremento de tiempo mediante un procedimiento iterativo.

En la presente tesis se analiza el problema de consolidación mediante un procedimiento de este tipo, que se desarrolla ampliamente en los capítulos siguientes.- Este análisis permite considerar un comportamiento elastoplástico del material, lo cual le hace más aplicable que los anteriores al caso estudiado de arcillas blandas.

3.5.- Aspectos especiales.-

Las teorías mencionadas anteriormente, debido a su complejidad de formulación, se han aplicado a casos sencillos mediante hipótesis simplificativas en cuanto a características y comportamiento del suelo.

A continuación se analizan algunos factores cuya variación puede influir en el proceso.

3.5.1.- Heterogeneidad.-

Este problema se ha tratado ya al hablar de sistemas multicapas en la consolidación unidimensional. La heterogeneidad no se refiere sólo al caso de estratos de materiales diferentes con parámetros constantes en cada uno de ellos sino también al hecho de que, dentro de un mismo estrato, el coeficiente de permeabilidad y los parámetros resistentes y de deformabilidad varíen con la-profundidad. El análisis de un caso unidimensional con permeabilidad y deformabilidad variables con la profundidad ha sido realizado por SCHIFFMAN y GIBSON (1964).

El análisis bidimensional de problemas de este tipo se lleva a cabo por métodos numéricos. Dentro de éstos, el más empleado es el de los elementos finitos ya que permite adaptarse muy bien a estas condiciones. Este método permite asimismo la consideración de distintas capas drenantes o impermeables a distintas profundidades.

3.5.2.- Anisotropía.-

La anisotropía en el comportamiento de las arcillas es un hecho comprobado. BRINCH HANSEN y GIBSON (1949) predicen que la arcilla tendrá un comportamiento anisótropo debido a la no isotropía de las tensiones durante su consolidación. Posteriormente, muchos autores han puesto de manifiesto este hecho en arcillas al realizar diferentes ensayos.

En el problema de consolidación, la anisotropía tiene influencia tanto en el comportamiento hidrodinámico como en el tenso-deformacional. Se puede admitir que la arcilla se comporte de igual manera en todas las direcciones horizontales y diferente de la dirección vertical. Es lo que se llama anisotropía transversal.

En cuanto a la anisotropia en el comportamiento tenso-deformacional, si el terreno es elástico, la ley de HOOKE generalizada depende de cinco parámetros. Estos parámetros no pueden adoptar cualquier valor. PICKERING (1970) obtuvo una superficie límite de existencia de la anisotropía. URIEL y CAÑIZO (1971) han analizado esta superficie y su relación con el comportamiento geotécnico. Sus resultados constituyen mejoras respecto al modelo isótropo pero su complejidad teórica y la dificultad práctica de obtención de los cinco parámetros necesarios hacen que sea difícil de aplicar. Por otra parte, la anisotropía en un proceso con drenaje es mucho menor que un proceso sin drenaje. Ello es debido principalmente a que las deformaciones producidas en estos procesos son grandes y destruyen la orientación inicial de las partículas que es una de las causas de la anisotropía. Todo ello hace que este fenómeno de anisotropia no se considere en el proceso de consolidación (fase drenada). BALLESTER (1977) considera la anisotropia transversal de una arcilla blanda en un proceso de carga sin drenaje.

La anisotropia en el comportamiento hidrodinámico del fluido intersticial tiene una mayor importancia en el proceso de consolidación. Viene reflejada en los distintos valores del coeficiente de permeabilidad en dirección horizontal y vertical. Obviamente, la magnitud de los asientos inicial y final es independiente de la permeabilidad, unicamente influye en la velocidad de producción del asiento.

DESAI y SAXENA (1977) analizan por el método de elementos finitos el comportamiento de un terreno formado por varios estratos. Introducen en el cálculo, suponiendo el terreno elástico, la influencia de factores tales como la anisotropía, velocidad de carga, geometría arbitraria y variación de parámetros con la profundidad. Se ha visto que el método de los elementos finitos permite cálculos realistas de asientos observados así como la consideración de factores que no se pueden incluir en la teoría unidimensional convencional.

3.5.3.- Proceso constructivo.-

En muchos casos, la rapidez del proceso constructivo y la baja permeabilidad del terreno permiten suponer que no se ha producido disipación alguna de sobrepresiones intersticiales durante dicho proceso, por lo que la carga se puede considerar instantánea. En otros casos, sin embargo, esto no es cierto, sino que la generación y disipación (ésta en menor grado) de sobrepresiones intersticiales es simultánea.

SCHIFFMAN (1958) ha resuelto, para la consolidación unidimensional, el caso correspondiente a carga que varía linealmente con el tiempo hasta llegar a su valor final. La obtención de soluciones analíticas para consolidación bidimensional es mucho más compleja.

Un caso concreto de influencia del proceso constructivo es el que tiene lugar en los núcleos de presas de materiales sueltos. EISENSTEIN et al (1972) analizan este problema mediante el método de los elementos finitos. El análisis se lleva a cabo por incrementos de tiempo, durante los cuales tanto los parámetros que definen el comportamiento del material como las tensiones totales permanecen constantes, pudiendo variarse para un nuevo incremento de tiempo.

SANDHU y WILSON (1969) consideran este aspecto si bien sólo en el caso de que la carga varíe de manera continua con el tiempo.

En la presente tesis se desarrolla un método de análisis por elementos finitos que abarca estos aspectos, habiéndose aplicado satisfactoriamente a los resultados obtenidos en una prueba de carga (OTEO, SAGASETA, SAINZ y BALLESTER, 1979).

4.- MODELOS DE COMPORTAMIENTO TENSO-DEFORMACIONAL.

En este apartado no se pretende hacer una recopilación exhaustiva de los modelos de comportamiento desarrollados para suelos, sino más bien presentar esquemáticamente los más importantes desde el punto de vista del tema tratado en la presente tesis.

Como se ha citado en el apartado 2.3 del presente capítulo, el análisis del proceso inicial de carga sin drenaje cabe realizarlo en tensiones totales o en tensiones efectivas mientras que el análisis del proceso de consolidación se realiza necesariamente en efectivas.

Si se realiza en ambos casos el análisis en tensiones efectivas, las presiones intersticiales se obtienen simultaneamente con el análisis tenso-deformacional definiendo un sòlo modelo. En caso contrario, es necesario definir ambos modelos de manera que sean coherentes, obteniéndose de ello la ley de presiones intersticiales.

4.1.- Modelos en tensiones efectivas.-

En general, los modelos empleados son elásticos (lineales o no lineales) o elastoplásticos. Los modelos elásticos no lineales están en general basados en la respuesta hiperbólica (KONDNER,1962). En los modelos elastoplásticos, la fase elástica suele suponerse lineal e isótropa. La anisotropía transversal se ha empleado -

unicamente en análisis puramente elásticos.

Para el estudio de la fase plástica es preciso e-legir en primer lugar el modelo de comportamiento del - material en cuanto a que se considere plástico perfecto, rigidizable o reblandecible. Posteriormente ha de definirse el criterio de plastificación, cuyos parámetros - serán constantes en el primer caso o función de la de - formación plástica acumulada en los otros dos, según u-na ley de rigidización. Por último, es preciso definir- la ley de flujo plástico del material; si se acepta la ley de la normalidad, esta ley de flujo se deduce directamente del criterio de plastificación, mientras que en caso contrario es preciso definir una función de potencial plástico.

En función del criterio de plastificación adoptado se pueden establecer dos grupos principales de modelos- para arcillas;los basados en el criterio de Mohr-Coulomb y los basados en la teoría de estado crítico.

4.1.1.- Modelos basados en el criterio de Mohr-Coulomb.-

Según que los parámetros c' y ϕ' del criterio de Mohr Coulomb se consideren constantes o variables el comportamiento será de material plástico-perfecto o rigidizable. Esta rigidización puede ser de distintos tipos si-bien como más sencillos se pueden citar:

- cinemática (PRAGER, 1956).- Considera que el criterio de rotura se mantiene constante, sufriendo sólo una traslación en la dirección normal en el punto donde se ha alcanzado la plastificación. Este tipo se ha adoptado especialmente al caso de metales.

- isótropa.- Supone que las sucesivas superficies de rotura se expanden homotéticamente respecto al origen.

- mixta.- Se trata de una combinación de los dos anteriores.

Si se acepta la ley de la normalidad, al combinar la ley de flujo con el criterio de plastificación de Mohr-Coulomb se obtienen las ecuaciones de DRUCKER-PRAGER que definen la ley tensión-deformación incremental. Con esta hipótesis, sin embargo, la deformación volumétrica plástica que se predice se comprueba en la práctica que es excesiva. Por ello algunos autores (BENT HANSEN, 1958; PARISEAU, 1966; CAÑIZO, 1971) proponen definir una función "g" denominada potencial plástico con una estructura formal semejante al criterio de plastificación, introduciendo además un parámetro "ν" denominado ángulo de dilatancia.

El criterio de rotura de Mohr-Coulomb reproduce bastante bien la condición de plastificación si bien al analizar las deformaciones volumétricas presenta algunos defectos.

4.1.2.- Basados en la teoría de estado crítico.-

Esta teoria ha sido desarrollada en Cambridge por ROSCOE et al (1958) que sugirieron que una arcilla que está experimentando una deformación de corte uniforme alcanza finalmente un estado critico en el cual no hay cambio de volumen y que estos estados críticos se encuentran todos en una línea llamada de estado crítico. La proyección de esta línea sobre el plano de tensiones es una recta de ecuación:

$$q = M \cdot p \qquad (1.82)$$

siendo:

$$p = \frac{\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'}{3} = \sigma_{oct}'$$

$$q = \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{2} \qquad (1.83)$$

$M \longrightarrow$ parámetro del suelo

Entre los modelos desarrollados se encuentran el modelo Granta-Gravel para materiales granulares (arenas) y el modelo Cam-Clay con modificaciones posteriores para arcillas que se comenta a continuación. En dicho modelo se acepta la ley de la normalidad y se considera el material rigidizable.

En la figura 1.19? se puede ver una representación gráfica del criterio de rotura.

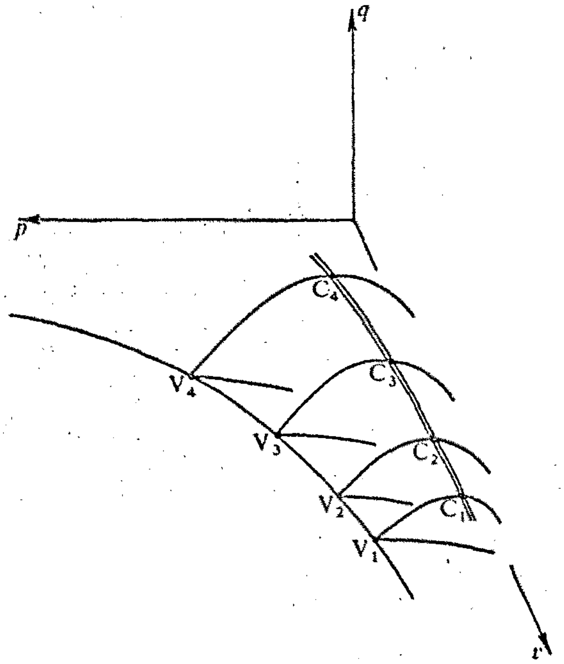


Fig 1.19.- Representación gráfica del criterio de rotura.

Para el modelo Cam-Clay, la expresión que define el criterio de rotura es:

$$|q| = \frac{M.p}{\lambda - K} \cdot \left[\Gamma + \lambda - K - v - \lambda \ln p \right] \qquad (1.84)$$

en donde:

λ y K parámetros similares a C_c y C_s en el ensayo edométrico

$\Gamma \longrightarrow$ volumen crítico para una presión $p = 1$

v = volumen específico $= 1 + e$; siendo "e" el índice de poros.

La ecuación de la línea de compresión noval isótropa es:

$$v = \Gamma - \lambda \ln p \qquad (4.85)$$

Si una muestra está normalmente consolidada isotrópicamente, estará representada por un punto de esta línea pero si está sobreconsolidada, estará representada por un punto del interior.

La superficie dibujada separa los estados que son accesibles a una muestra determinada de aquellos que no lo son.

Los puntos cuya proyección sobre el plano pq queden por debajo de la línea de estado crítico corresponden a casos de dilatancia negativa (disminución de volumen) mientras que si ésta proyección queda por encima corresponden a casos con dilatancia positiva.

En este modelo, a diferencia del Granta-Gravel en que no hay deformaciones elásticas, la trayectoria que sigue un punto en estado elástico hasta alcanzar la superficie de estado límite no es plana sino una curva alabeada.

4.2.- Modelos en tensiones totales.-

El esquema general es el mismo que para análisis en tensiones efectivas con la diferencia que supone la incompresibilidad del medio. Esta incompresibilidad hace que, en modelos elásticos, algunos parámetros, singularmente los coeficientes de Poisson, no sean independientes. En modelos plásticos, al ser horizontal la envolvente de Mohr, es decir, al ser nulo el ángulo de rozamiento interno, el aceptar la ley de la normalidad implica dilatancia nula, lo cual concuerda con la citada incompresibilidad. Por esta razón, el modelo simple de criterio de Tresca con ley de la normalidad asociada da buenos resultados y se ha empleado con profusión. Sin embargo, como ya se ha citado anteriormente, los parámetros de resistencia y deformabilidad del terreno varían con la profundidad, siendo esa variación especialmente importante en el caso de arcillas blandas. La anisotropía, como también se comentó, tiene gran influencia en el caso de carga sin drenaje; estos dos factores (variación de propiedades con la profundidad y anisotropía) están intimamente relacionados con la historia tensional. BALLESTER, (1977) ha presentado un modelo elastoplástico anisótropo en el que tiene en cuenta estos factores. PREVOST, (1977) ha desarrollado un modelo más general, considerando material rigidizable, aunque no relaciona los parámetros del modelo con la historia tensional en forma explícita.

CAPITULO II

MODELO DE COMPORTAMIENTO DEL SUELO

1.- DESCRIPCION GENERAL

De los posibles métodos de análisis de la consolidación citados en el capítulo anterior, se ha elegido uno que consiste en realizar un análisis en tensiones totales en el proceso inicial de carga sin drenaje y un análisis en tensiones efectivas de la fase posterior con drenaje. Ello lleva consigo la necesidad de definir dos modelos de comportamiento tenso-deformacional que, como ya se ha citado, deberán ser coherentes entre sí.

En lo que sigue se describen los modelos empleados haciendo especial hincapié en el modelo en tensiones efectivas.

2.- MODELO EN TENSIONES TOTALES

Para la obtención de la distribución de tensiones totales inducida en el proceso inicial de carga sin drenaje, se utiliza un modelo elastoplástico anisótropo (BALLESTER, 1977). Para tensiones inferiores a las de plastificación, el terreno se considera elástico lineal con anisotropía transversal y deformabilidad variando linealmente con la profundidad. Se considera que el material tiene un criterio de rotura función unicamente de las tensiones y un comportamiento posterior de sólido plástico perfecto. La expresión de dicho criterio de rotura es:

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + p_o(1-D_M)\cdot\frac{1-K_o}{2}\right]^2 + \left[\tau_{xz} + M\cdot p_o\cdot D_M\cdot \operatorname{tg}\phi_e\cdot\frac{1-K_o}{2}\right]^2} - \left[K p_c + p_o\, D_M \operatorname{tg}\phi_e\cdot\frac{1+K_o}{2}\right] = 0 \qquad (2.1)$$

siendo:

- p_o y p_c ⟶ presiones de consolidación y sobreconsolidación respectivamente.
- K y ϕ_e ⟶ parámetros de Hvorslev.
- D_M ⟶ coeficiente positivo igual o menor que la unidad.
- M ⟶ coeficiente cuyos valores son:

  1 si $\tau_{xz} > 0$

  -1 si $\tau_{xz} < 0$

K_o ——> relación entre tensiones efectivas horizontal y vertical durante la consolidación previa de la arcilla sometida a la sola acción de su peso propio.

De estos parámetros, K, $\emptyset_e$ y D_m son intrínsecos de la arcilla y p_o, p_c, K_o definen la historia tensional hasta el momento de aplicar las cargas sin drenaje.

El criterio no es una función par de las tensiones, por lo cual se refleja el efecto Bauschinger del material es decir, la resistencia al corte sin drenaje es diferente en el caso activo que en el pasivo. Es una generalización anisótropa del criterio de Tresca, diferente de la propuesta por HILL, (1950).

En la fase plástica se acepta como válida la ley de la normalidad.

La representación gráfica del criterio de rotura se ve en la figura 2.1

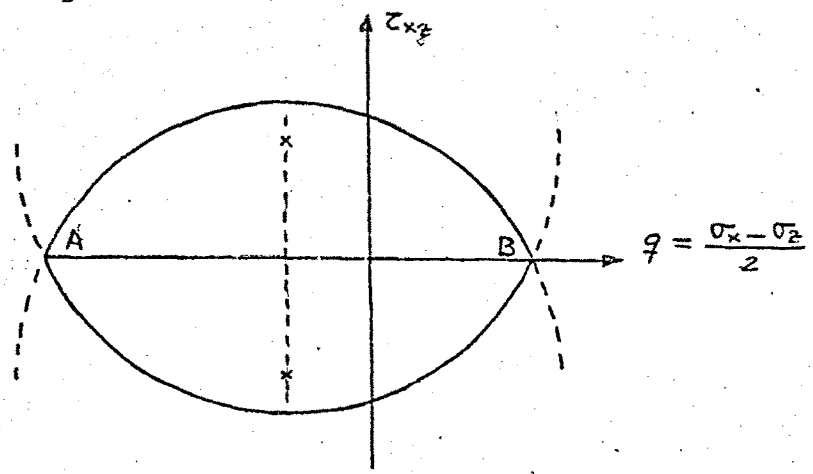


Fig 2.1.- Criterio de rotura en totales

Se puede ver que hay dos puntos singulares (A y B) en los que la normal a la superficie de plastificación es doble. Ello no afecta a la condición de rotura pero sí a la ley de flujo. Para salvar la singularidad, se toma un vector intermedio entre las dos normales existentes en el punto singular. En este caso concreto se toma para M el valor medio de los posibles (± 1), es decir, cero.

La ley de flujo cuya expresión es:

$$\dot{\varepsilon}_x^{\,p} = \lambda . \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{\lambda}{2c} . \left[\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + p_o (1 - D_M) . \frac{1 - K_o}{2} \right]$$

$$\dot{\varepsilon}_z^{\,p} = \lambda . \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = \frac{-\lambda}{2c} . \left[\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} + p_o (1 - D_M) . \frac{1 - K_o}{2} \right] \qquad (2.2)$$

$$\dot{\gamma}_{xz}^{\,p} = \lambda . \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} = \frac{\lambda}{2c} \left[\tau_{xz} + M . p_o . D_M \, tg \, \phi_e . \frac{1 - K_o}{2} \right]$$

predice un cambio de volumen plástico nulo, al ser el criterio anterior independiente de la tensión normal media. Con ello se satisface plenamente la condición de incompresibilidad que impone el hecho de no existir drenaje.

3.- MODELO EN TENSIONES EFECTIVAS

3.1.- Hipótesis básicas.-

Para la definición de este modelo se supone que el comportamiento del suelo en tensiones efectivas corresponde al de un material elastoplástico, isótropo, rigidizable y del tipo no-asociado, es decir, no cumpliendo la ley de la normalidad.

El modelo en tensiones efectivas, como ya se ha citado, debe ser coherente con el descrito en el apartado anterior a la hora de analizar el estado inicial producido el proceso de carga sin drenaje. Esta coherencia tiene su principal reflejo a la hora de definir las sobrepresiones intersticiales inducidas en este proceso inicial ya que el que un punto se encuentre en estado plástico es independiente de que se refiera a tensiones totales o efectivas (el estado plástico implica deformaciones remanentes). Ello quiere decir que la plastificación debe producirse de manera simultánea en tensiones totales y en efectivas.

Para tensiones inferiores a las de plastificación, el suelo se comporta como elástico lineal e isótropo cumpliéndose la ley de Hooke siendo E' y μ' el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson en efectivas respectivamente. La coherencia necesaria, mencionada anteriormente, hace que estos parámetros no sean independientes sino que estén relacionados con los parámetros elásticos en tensiones totales. El ser el modelo en tensiones efectivas isótropo, implica que, aunque el modelo en totales descrito en el apartado anterior permita la consideración de la anisotropía, se utiliza sólo el caso isótropo (parámetro E_u en fase elástica, con $\mu_u = 0,5$ y $K_o = 1$ en fase plástica). Con esto, los parámetros elásticos están relacionados por la expresión:

$$E_u = \frac{3\ E'}{2(1+\mu')} \qquad (2.3)$$

Ello es debido a que, en un material elástico, en un proceso de carga sin drenaje, se puede deducir el valor de la presión intersticial inducida a partir de la teoría elástica así como la relación entre las deformaciones y tensiones totales.

Para definir el modelo en la fase plástica es necesaria en primer lugar la definición del criterio de plastificación habiéndose adoptado para el mismo una expresión del tipo:

$$f(\sigma'_{ij}, \eta_k) = 0 \qquad (2.4)$$

viniendo definida la ley de rigidización en función de la deformación plástica como:

$$\eta_k = h_k(\varepsilon_{ij}^p) \qquad (2.5)$$

Existirá, pues, una familia de superficies de plastificación desde la inicial, para deformación plástica-nula, hasta la final, para deformaciones infinitamente grandes.

Dado que se trata de un material del tipo no-asociado, es decir, que no cumple la ley de la normalidad, se define una función potencial plástico en la forma:

$$g(\sigma'_{ij}, p_k) = 0 \qquad (26)$$

Tal como se dijo anteriormente, la consideración de la anisotropia mecánica (resistencia y deformabilidad), que tiene gran interés en procesos sin drenaje, es menos importante en problemas de consolidación, en los que las deformaciones son mayores. Por ello, el modelo elaborado en tensiones efectivas se ha desarrollado unicamente para material isótropo, siendo posible su generalización posterior al caso de anisotropia transversal.

Sin riesgo a perder la necesaria coherencia con el modelo en totales cabe realizar una serie de hipótesis particulares lo cual se lleva a cabo en el subapartado siguiente.

3.2.- Hipótesis particulares del modelo.-

El criterio de plastificación adoptado en la definición del modelo es del tipo Mohr-Coulomb utilizándose en su definición los parámetros de Hvorslev. (K y ϕ_e). Se supone además que la cohesión permanece constante con la deformación admitiéndose sin embargo, una moviliza-ción progresiva de la fricción en función de la distor-sión plástica acumulada.

Según Hvorslev, la resistencia al corte con drenaje de una arcilla viene definida por:

$$\tau = C_e + \sigma'_r \cdot \operatorname{tg} \phi_e^* \qquad (2.7)$$

siendo:

C_e ⟶ cohesión verdadera

ϕ_e^* ⟶ angulo de rozamiento interno verdadero movilizado

σ'_r ⟶ presión efectiva normal en rotura

La cohesión verdadera no es una constante del mate-rial sino que depende del índice de poros en el momento de la rotura:

$$C_e = f(e_r) \qquad (2.8)$$

El valor de e_r depende de la historia tensional. - En la figura 2.2 se representa un ensayo de compresión isótropa sobre una muestra de arcilla

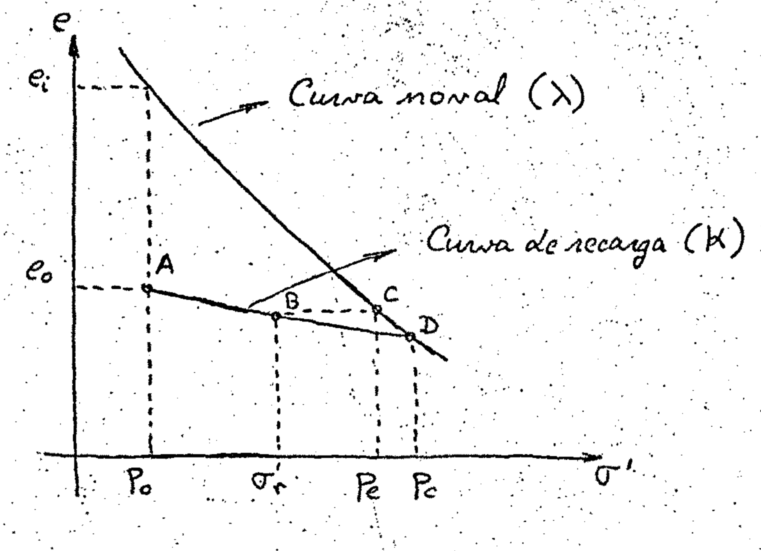


Fig 2.2.- Ensayo de compresión isótropa.

en donde:

p_o ⟶ presión de consolidación

p_c ⟶ presión de sobreconsolidación

$R = p_c/p_o$ ⟶ razón de sobreconsolidación

El punto de rotura el el B. Si trazamos la horizontal BC, el valor e_r depende unicamente de la presión p_e ("presión efectiva equivalente") una vez conocida la ecuación de la curva noval. Haciendo ensayos, se encuentra que

$$C_e = K . p_e \qquad (2.9)$$

siendo K = parámetro de Hvorslev.

A la hora de hallar p_e hay dos casos posibles:

a) $\sigma'_r \leq p_c$

b) $\sigma'_r > p_c$

En el segundo caso, se ve claramente que $p_e = \sigma'_r$ y en el primer caso se puede obtener de manera sencilla a partir de las ecuaciones de las curvas noval y de recarga, y se tiene:

$$p_e = p_c \cdot \left(\frac{\sigma'_r}{p_c} \right)^{K/\lambda} \qquad (2.10)$$

Para simplificar, se puede hacer la hipótesis de que K es despreciable frente a λ con lo que la expresión anterior queda:

$$p_e = p_c$$

Según esto, el criterio de plastificación en el plano de Mohr no se puede expresar de manera única sino que está formado por dos líneas:

a) Para $\sigma' \leq p_c$

$$\tau = K p_c + \sigma' tg\, \phi_e^* \qquad (2.11)$$

b) Para $\sigma' > p_c$

$$\tau = \sigma'(K + tg\, \phi_e^*) \qquad (2.12)$$

cuya representación gráfica son dos rectas que se cortan para $\sigma' = p_c$. Se ha supuesto un caso de consolidación isótropa, es decir, con un coeficiente de empuje al reposo igual a la unidad.

La definición del criterio de plastificación en el plano de Lambe viene dada por:

$$\left.\begin{array}{ll} q = K p_c \cos \phi_e^* + p . \operatorname{sen} \phi_e^* & p \leq p_d \\ q = p . \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left[K + tg\, \phi_e^* \right] \right] & p > p_d \end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

siendo:

$$p = \frac{\sigma'_x + \sigma'_z}{2} = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}$$

$$q = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \qquad (2.14)$$

$$p_d = \frac{K p_c \cos \phi_e^*}{\operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left[K + tg\, \phi_e^* \right] \right] - \operatorname{sen} \phi_e^*}$$

La hipótesis admitida antes de que la cohesión permanece constante equivale a considerar constante el producto $K\,p_c \cos \phi_e^*$ o, lo que es lo mismo:

$$\cos \phi_e^* = cte \qquad (2.15)$$

lo cual es razonable para el caso que se estudia de arcillas blandas con razones de sobreconsolidación bajas. En cuanto a la movilización de la fricción se considera en la forma:

$$\text{sen}\, \phi_e^* = \eta \cdot \text{sen}\, \phi_e \qquad (2.16)$$

y por lo tanto

$$\text{tg}\, \phi_e^* = \eta \ \text{tg}\, \phi_e \qquad (2.17)$$

siendo η un parámetro función de la distorsión plástica.

Se tiene con ello definido el criterio de plastificación en función de un único parámetro de rigidización (η) en la forma:

$$q = K\,p_c \cos \phi_e + p \cdot \eta\, \text{sen}\, \phi_e \qquad p \le p_d$$

$$q = p \cdot \text{sen} \left[\text{arc tg} \left[K + \text{tg} \left[\text{arc sen} \left[\eta\, \text{sen}\, \phi_e \right] \right] \right] \right] \qquad p > p_d$$

(2.18) , (2.19)

siendo, en este caso:

$$p_d = \frac{K\,p_c \cos \phi_e}{\text{sen} \left[\text{arc tg} \left[K + \text{tg} \left[\text{arc sen} \left[\eta\, \text{sen}\, \phi_e \right] \right] \right] \right] - \eta \cdot \text{sen}\, \phi_e} \qquad (2.20)$$

A partir de las expresiones (2.18) y (2.19) y de la hipótesis admitida al principio de este subapartado de que la movilización progresiva de la fricción es-función de la distorsión plástica se llega a establecer que el parámetro de rigidización es función de las deformaciones plásticas en la forma:

$$\eta = \eta\,(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p) \qquad (2.21)$$

Siguiendo lo propuesto por algunos autores (BENT HANSEN, 1958; PARISEAU, 1970; CAÑIZO, 1971) se define la función potencial plástico con una estructura análoga a la del criterio de plastificación, introduciendo un nuevo parámetro (ν) denominado ángulo de dilatancia. En el modelo que se presenta se ha supuesto que este parámetro varía desde un valor inicial (ν_o), al comenzar a plastificar, hasta un valor cero para distorsión plástica infinita (estado crítico). La expresión de dicho potencial plástico es:

$$g(\sigma'_{ij}, \nu) \equiv \begin{cases} q - K\,p_c \cos\nu + p \,.\, \operatorname{sen}\nu & p \leq p_d \\ q - p\,.\,\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,tg}\left[K + \operatorname{tg}\nu\right]\right] & p > p_d \end{cases} \qquad (2.22)$$

siendo p_d la expresión definida en (2.20).

El valor del ángulo de dilatancia inicial (ν_o) se supone variable en función de la razón de sobreconsolidación, del punto en cuestión, en el momento de plastificar por primera vez.

Esta variación se supone del tipo:

$$\nu_o = \alpha_1 + \alpha_2 \,.\, R_1 \qquad (2.23)$$

siendo:

α_1 y α_2 parámetros del modelo.

La variación del ángulo de dilatancia en función de la distorsión plástica se establece en la forma:

$$\operatorname{sen} \nu = \frac{\operatorname{sen} \nu_0}{1 + c^2 \left(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p\right)^2} \qquad (2.24)$$

siendo c un parámetro a determinar.

3.3.- Desarrollo.-

Con las hipótesis establecidas en los subapartados anteriores es preciso establecer ahora la coherencia con el modelo en totales. Dicha coherencia se establece a partir de una correcta definición de sobrepresiones intersticiales en la fase de carga sin drenaje.

Con las hipótesis mencionadas anteriormente de que la plastificación es simultánea en totales y en efectivas y que para la fase elástica la sobrepresión intersticial viene definida por la ley elástica, se llega a la conclusión de que, para un punto cuya trayectoria en totales sea la definida por OBC en la figura 2.3 , la trayectoria en efectivas es la OAA_1 durante el proceso de carga sin drenaje, en el caso de deformación plana.

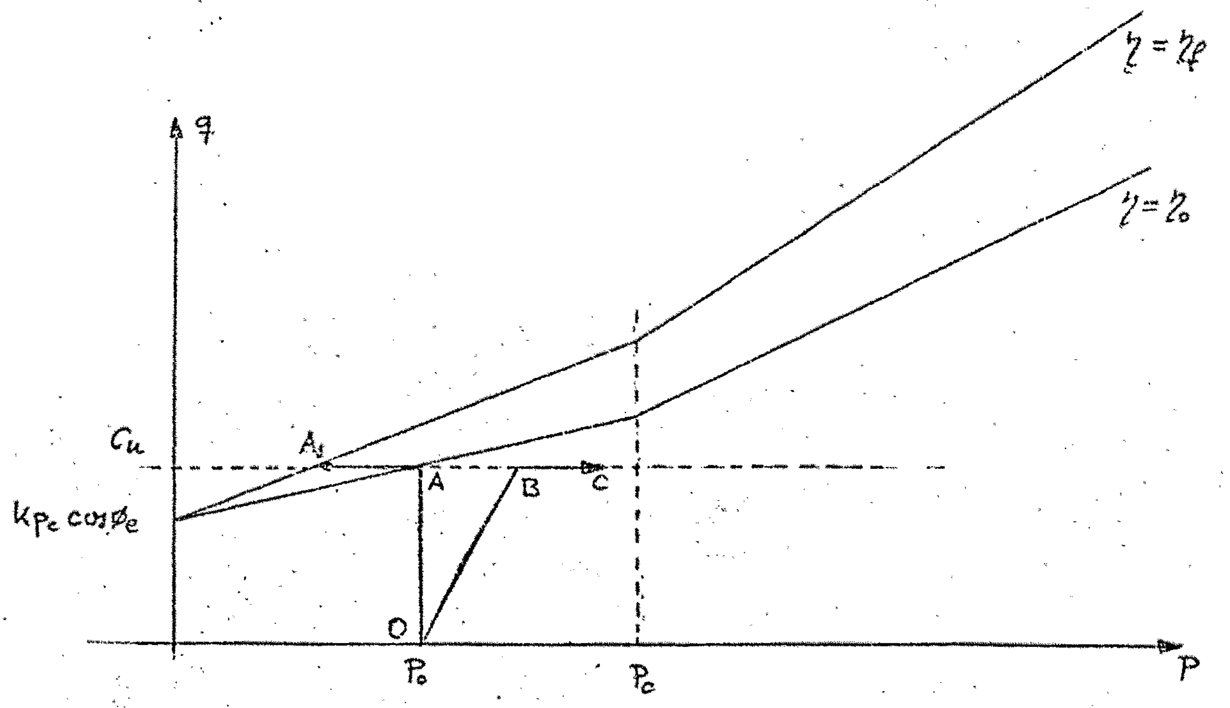


Fig 2.3.- Criterios de plastificación inicial y de rotura en efectivas.

La plastificación inicial se produce en el punto A con $p = p_0$, lo cual permite obtener η_0 de la igualdad:

$$K p_c \cos\phi_e + p_0 . \eta_0 . \operatorname{sen}\phi_e = K p_c + p_0 D_M \operatorname{tg}\phi_e \qquad (2.25)$$

resultando:

$$\eta_0 = \frac{K R (1 - \cos\phi_e) + D_M \operatorname{tg}\phi_e}{\operatorname{sen}\phi_e} \qquad (2.26)$$

siendo $R = p_c/p_0$, la razón de sobreconsolidación.

En cuanto al criterio de plastificación final, corresponde a una distorsión plástica infinita para la que se moviliza totalmente la fricción, es decir

$$\operatorname{sen}\phi_e^* = \operatorname{sen}\phi_e \qquad (2.27)$$

con lo cual se deduce que:

$$\eta_f = 1$$

Por otra parte, según lo citado en el apartado 2.3 del capítulo anterior, la sobrepresión intersticial inducida en el proceso de carga sin drenaje en el caso de deformación plana se puede poner como:

$$\dot{u} = \frac{1}{M_x + M_z} \cdot \left[(M_x, M_z) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} + \dot{\varepsilon}_v^{\,p} \right] \qquad (2.28)$$

siendo:

$$\dot{\varepsilon}_v^{\,p} = - \operatorname{sen} \nu . \left(\dot{\varepsilon}_1^{\,p} - \dot{\varepsilon}_3^{\,p} \right)$$

$$M_x = M_z = \frac{(1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \qquad (2.29)$$

$$\operatorname{sen} \nu = \frac{\operatorname{sen} \nu_0}{1 + c^2 \left(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p \right)^2}$$

Con todo ello, la ecuación (2.28) se puede poner como:

$$\dot{u} = \frac{1}{M_x + M_z} \cdot \left[(M_x, M_z) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_z \end{Bmatrix} - \frac{\operatorname{sen} \nu_0}{1 + c^2 \left(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p \right)^2} \cdot \left(\dot{\varepsilon}_1^{\,p} - \dot{\varepsilon}_3^{\,p} \right) \right] \qquad (2.30)$$

Integrando la ecuación anterior, en el caso de deformación plana, para una trayectoria dada de tensiones y deformaciones se puede obtener el valor final de la sobre presión intersticial en función de los valores finales de las tensiones y de las deformaciones como sigue:

$$u = u_e + u_p \qquad (2.31)$$

siendo:

$$u_e = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \qquad (2.32)$$

$$u_p = \frac{2 u_p^f}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{-\pi \cdot \operatorname{sen} \nu_0}{2 \cdot H \cdot u_p^f} \cdot \left(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p\right)\right] \qquad (2.33)$$

en donde:

$$H = M_x + M_z = \frac{2(1+\mu')(1-2\mu')}{E'}$$

$u_p^f \longrightarrow$ sobrepresión intersticial plástica para distorsión infinita.

En un caso general, el valor de u_p^f se determinaría a partir de ensayos realizados con deformaciones plásticas grandes. En el presente caso, sin embargo, se puede dar ima formulación concreta para dicho valor, ya que al producirse distorsiones infinitas, el punto A tiende hacia A_1 (figura 2.3), con lo que u_p^f es igual a $\overline{AA_1}$ que se puede obtener facilmente, quedando:

$$u_p^f = p_0 - \frac{K p_c (1 - \cos \phi_e) + p_0 D_M \operatorname{tg} \phi_e}{\operatorname{sen} \phi_e} = p_0 (1 - \eta_0) \qquad (2.34)$$

Con todo ello, la expresión de la sobrepresión intersticial inducida en el proceso de carga sin drenaje resulta:

$$u = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{2 p_0 (1-\eta_0)}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{-E \cdot \pi \cdot \operatorname{sen} \nu_0}{4 p_0 (1-\eta_0)(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p\right)\right]$$

(2.35)

Esta expresión tiene carácter general ya que, en los puntos en estado elástico en los que la distorsión plástica es nula, se reduce a:

$$u = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \qquad (2.36)$$

que es la ley elástica, como se había supuesto antes. - Como se ve, este método de predicción de la sobrepresión intersticial inducida en el proceso de carga sin drenaje tiene la ventaja sobre otros posibles métodos de conseguir que no haya saltos bruscos en la sobrepresión intersticial al pasar de la zona elástica a la plástica - lo cual provocaría fuertes gradientes de presiones que no responderían a la realidad.

A partir de la expresión (2.35) obtenida para la sobrepresión intersticial en el proceso de carga sin drenaje y según se ve en la figura 2.4 la ley de rigidización se puede obtener de la igualdad:

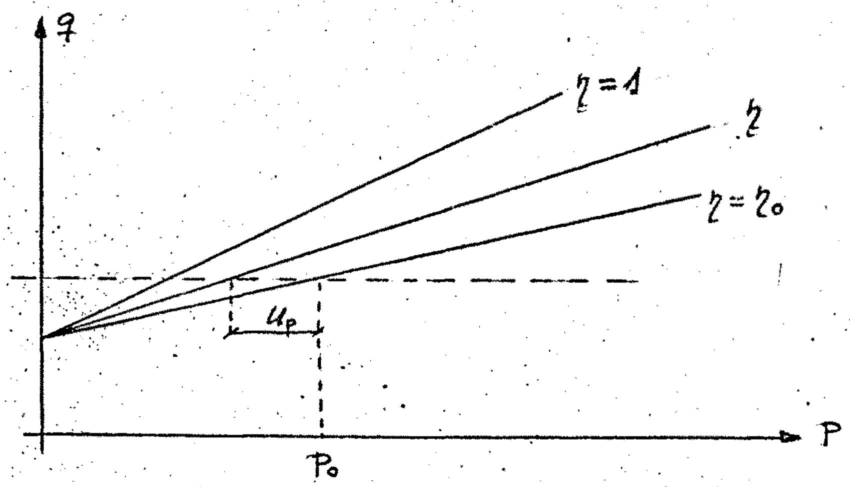


Fig 2.4.- Sobrepresión intersticial plástica.

$$K p_c \cos \phi_e + (p_0 - u_p) \cdot \eta \cdot \operatorname{sen} \phi_e = K p_c + p_0 \cdot D_M \operatorname{tg} \phi_e \qquad (2.37)$$

con lo que resulta:

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 - \omega} \qquad (2.38)$$

siendo:

$$\omega = \frac{2(1-\eta_0)}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left[\frac{- E \pi \cdot \operatorname{sen} \nu_0}{4 p_0 (1-\eta_0)(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot (\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p) \right] \qquad (2.39)$$

Con todo ello, queda definido el modelo tenso-deformacional desarrollado en la presente tesis.

3.4.- Leyes constitutivas.-

Se presenta en primer lugar, en este subapartado, un resumen de las expresiones que definen el modelo desarrollado, considerando el suelo como un material isótropo, elastoplástico rigidizable y del tipo no-asociado.- Se tiene para ello:

a) Criterio de plastificación

$$f(\sigma'_{ij}, \eta) \equiv \begin{cases} q - K p_c \cos \phi_e - p \cdot \eta \cdot \operatorname{sen} \phi_e & \text{para } p \leq p_d \\ q - p \cdot \operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left[K + \operatorname{tg} \left[\operatorname{arcsen} \left[\eta \operatorname{sen} \phi_e \right] \right] \right] \right] & p > p_d \end{cases}$$

siendo: (2.40)

$$p_d = \frac{K p_c \cos \phi_e}{\operatorname{sen} \left[\operatorname{arctg} \left[K + \operatorname{tg} \left[\operatorname{arc\,sen} \left[\eta \operatorname{sen} \phi_e \right] \right] \right] \right] - \eta \operatorname{sen} \phi_e} \qquad (2.41)$$

b) Ley de rigidización

$$\eta = \frac{\eta_0}{1-\omega} \qquad (2.42)$$

siendo:

$$\eta_0 = \frac{k.\ R\ (1-\cos\phi_e) + D_M \operatorname{tg}\phi_e}{\operatorname{sen}\phi_e} \qquad (2.43)$$

$$\omega = \frac{2(1-\eta_0)}{\pi} .\ \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{-E.\pi.\operatorname{sen}\nu_0}{4p_0(1-\eta_0)(1+\mu')(1-2\mu')} .\ (\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)\right]$$

c) Función potencial plástico:

$$g(\sigma'_{ij}, \nu) \equiv \begin{cases} q - Kp_c \cos\nu + p \operatorname{sen}\nu & p \leq p_d \\ q - p.\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,tg}\left[K + \operatorname{tg}\nu\right]\right] & p > p_d \end{cases} \qquad (2.44)$$

en donde:

$$\operatorname{sen}\nu = \frac{\operatorname{sen}\nu_0}{1 + c^2(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)^2} \qquad (2.45)$$

siendo:

$$\nu_0 = \alpha_1 + \alpha_2 .\ R$$

$$c = \frac{-E.\ \pi.\ \operatorname{sen}\nu_0}{4p_0(1-\eta_0)(1+\mu')(1-2\mu')} \qquad (2.46)$$

Cabe también destacar en este resumen la expresión de la sobrepresión intersticial inducida en los puntos- de la masa de suelo durante la fase de carga sin drenaje:

$$u = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{2p_0(1-\eta_0)}{\pi} .\ \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{-E.\ \pi.\ \operatorname{sen}\nu_0}{4p_0(1-\eta_0)(1+\mu')(1-2\mu')} .\ (\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)\right]$$

$$(2.47)$$

3.4.1.- Ley deformación-tensión.-

Para la obtención de dicha ley se tiene que en la fase elástica lineal, el tensor de tensiones y el de deformaciones están ligados por la ley de Hooke generalizada que, en el caso de deformación plana se puede poner como:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} \cdot \left[(1-\mu'^2) \cdot \sigma'_x - \mu'(1+\mu') \cdot \sigma'_z \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E'} \cdot \left[-\mu'(1+\mu') \sigma'_x + (1-\mu'^2) \cdot \sigma'_z \right] \qquad (2.48)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\mu')}{E'} \cdot \tau_{xz}$$

El criterio de plastificación definido en (2.40) marca el nivel de tensiones para el que el suelo deja de ser elástico y aparecen deformaciones remanentes. Para estudiar el comportamiento del suelo una vez plastificado es necesario recurrir a una ley deformación-tensión de tipo incremental. La deformación tiene una parte elástica y otra plástica:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \qquad (2.49)$$

La componente elástica viene definida por la ley de Hooke en la forma:

$$d\varepsilon_x^e = \frac{1}{E'} \cdot \left[(1-\mu'^2) \cdot d\sigma'_x - \mu'(1+\mu') \cdot d\sigma'_z \right]$$

$$d\varepsilon_z^e = \frac{1}{E'} \cdot \left[-\mu'(1+\mu') \, d\sigma'_x + (1-\mu'^2) \cdot d\sigma'_z \right] \qquad (2.50)$$

$$d\gamma^{e}_{xz} = \frac{2(1+\mu')}{E'} \cdot d\tau_{xz}$$

mientras que la componente plástica viene definida por la expresión:

$$d\varepsilon^{p}_{ij} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\partial g(\sigma'_{ij},\nu)}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot \frac{\partial f(\sigma'_{ij},\eta)}{\partial \sigma'_{kl}} \cdot d\sigma'_{kl} \qquad (2.51)$$

El parámetro 1/M se obtiene conociendo la ley de rigidización del material permitiendo con ello obtener, de manera explícita los incrementos de deformación en función de los incrementos de tensión, lo cual no sería posible en el caso de tratarse de material plástico perfecto. La expresión de 1/M es:

$$\frac{1}{M} = \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon^{p}_{ij}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}} \qquad (2.52)$$

siendo $f(\sigma'_{ij},\eta)$ y $g(\sigma'_{ij},\nu)$ las definidas en 2.40 y 2.44. En el apéndice I se desarrollan completamente estas expresiones tanto para el caso en que p es menor o igual que p_d como en el caso de que sea $p > p_d$, llegando a expresar los incrementos de deformación plástica en la forma:

$$d\varepsilon^{p}_{x} = \frac{1}{M} \cdot (R1-R2) \cdot \left[(R1-R3) \cdot d\sigma'_{x} + (-R1-R3)\, d\sigma'_{z} + R4 \cdot d\tau_{xz}\right]$$

$$d\varepsilon^{p}_{z} = \frac{1}{M} \cdot (-R1-R2) \cdot \left[(R1-R3) \cdot d\sigma'_{x} + (-R1-R3) \cdot d\sigma'_{z} + R4 \cdot d\tau_{xz}\right]$$

$$d\gamma^{p}_{xz} = \frac{1}{M} \cdot R4 \cdot \left[(R1-R3)\, d\sigma'_{x} + (-R1-R3) \cdot d\sigma'_{z} + R4 \cdot d\tau_{xz}\right]$$

$$(2.53)$$

siendo:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} \cdot \frac{\pi\,(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)(1-\omega)^2 \left[1+\beta^2(\varepsilon_1^p-\varepsilon_3^p)^2\right] \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_x' - \sigma_z'}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}}{\beta\,\eta_0(1-\eta_0)\left[(\varepsilon_x^p - \varepsilon_z^p)(\sigma_x' - \sigma_z') + 2\,\gamma_{xz}^p \cdot \tau_{xz}\right]} \qquad (2.54)$$

en donde:

$\eta_0 \longrightarrow$ valor inicial del parámetro de rigidización, definido en

$$\beta = \frac{-E \cdot \pi \cdot \operatorname{sen} \nu_0}{4\,p_0\,(1-\eta_0)(1+\mu')(1-2\mu')}$$

$$\omega = \frac{2(1-\eta_0)}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left[\beta(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)\right] \qquad (2.55)$$

Analizando la expresión, (2.54) se observa que - presenta una indeterminación para el caso de plastificación inicial, en el que las deformaciones plásticas acumuladas son nulas. Para resolver dicha indeterminación, se halla el límite del cociente, haciendo tender a cero la deformación plástica acumulada, con la hipótesis adicional (SALENCON, 1974) de coincidencia de las direcciones principales del tensor de tensiones y del de los incrementos de deformación plástica, resultando:

$$\left(\frac{1}{M}\right)_0 = \frac{1}{M_1} \cdot \frac{\pi}{2\,\eta_0 \cdot \beta \cdot (1-\eta_0)} \qquad (2.56)$$

En cuanto a las expresiones de $1/M_1$, R1, R2, R3, - R4 cabe distinguir:

a) Para $p \leq p_d$:

$$\frac{1}{M_1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\phi_e \cdot (\sigma_x' + \sigma_z')} \;;\quad R1 = \frac{\sigma_x' - \sigma_z'}{4\sqrt{J_2}} \;;\quad R2 = \frac{\operatorname{sen}\nu}{2} \qquad (2.57)$$

$$R3 = \frac{\eta \cdot \operatorname{sen}\phi_e}{2} \quad ; \quad R4 = \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{J_2}}$$

b). Para $p > p_d$:

$$\frac{1}{M_1} = \frac{2\sqrt{1-[\eta \operatorname{sen}\phi_e]^2} \cdot \left[1+\left[K+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left[\eta \operatorname{sen}\phi_e\right]\right]\right]^2\right]}{(\sigma'_x+\sigma'_z) \cdot \operatorname{sen}\phi_e \cdot \cos\left[\operatorname{arctg}\left[K+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left[\eta \operatorname{sen}\phi_e\right]\right]\right]\right] \cdot \left[1+\operatorname{tg}^2\left[\operatorname{arcsen}\left[\eta \operatorname{sen}\phi_e\right]\right]\right]}$$

$$R1 = \frac{\sigma'_x - \sigma'_z}{4\sqrt{J_2}} \quad ; \quad R2 = \frac{\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left[K+\operatorname{tg}\nu\right]\right]}{2} \qquad (2.58)$$

$$R3 = \frac{\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,tg}\left[K+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,sen}\left[\eta \operatorname{sen}\phi_e\right]\right]\right]\right]}{2} \quad ; \quad R4 = \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{J_2}}$$

(2.59)

siendo:

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma'_x-\sigma'_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \qquad (2.60)$$

De las expresiones anteriores se llega a que el incremento de deformación volumétrica plástica tiene por expresión:

$$d\left(\Delta V/V\right)^p = -\frac{2 \cdot R2}{M} \cdot \left[(R1-R3)\, d\sigma'_x + (-R1-R3)\, d\sigma'_z + R4 \cdot d\tau_{xz}\right]$$

(2.61)

3.4.2.- Ley tensión-deformación.-

En la fase elástica lineal, la ley tensión-deformación se puede expresar matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [D^e] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \qquad (2.62)$$

en donde $[D^e]$ es la matriz elástica definida como:

$$[D^e] = \frac{E'(1-\mu')}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu'}{1-\mu'} & 0 \\ \frac{\mu'}{1-\mu'} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu'}{2(1-\mu')} \end{bmatrix} \qquad (2.63)$$

Para estudiar el comportamiento del suelo una vez plastificado, es necesario recurrir, como en el subapartado 3.4.1 a una ley de tipo incremental, en la forma:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma'_x \\ d\sigma'_z \\ d\tau_{xz} \end{Bmatrix} = [D^{ep}] \cdot \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{xz} \end{Bmatrix} \qquad (2.64)$$

en donde $[D^{ep}]$ se define como matriz elastoplástica siendo su expresión:

$$[D^{ep}] = [D^e] - \frac{[D^e] \cdot \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}\right\} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}\right\}^t \cdot [D^e]}{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}\right\}^t \cdot [D^e] \cdot \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}\right\} - \left\{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\right\}^t \cdot \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}}\right\}} \qquad (2.65)$$

siendo $[D^e]$ la matriz elástica, cuya expresión ha sido definida en (2.63) . Por otra parte, se tiene que

$$- \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}} \right\}^t \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \right\} = M \qquad (2.66)$$

siendo 1/M la expresión definida en el subapartado anterior, en (2.54)

La expresión (2.65) se puede poner también en la forma:

$$[D^{ep}] = [D^e] \cdot \left[[I] - \frac{1}{F1} \cdot [P] \right] \qquad (2.67)$$

siendo:

$[I]$ ⟶ la matriz unidad

$[P]$ ⟶ una matriz cuyos términos se definen a continuación

$$\frac{1}{F1} = \frac{1}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \right\}^t \cdot [D^e] \cdot \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \right\} + M} \qquad (2.68)$$

En el apéndice I se desarrollan completamente, al igual que lo realizado para el subapartado anterior, estas expresiones tanto para el caso de que p es igual o menor que p_d como en el caso en que sea p mayor que p_d, llegando a expresar los elementos de la matriz $[P]$ en la forma:

$$P_{11} = \frac{E'}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left[(1-2\mu')\cdot R1^2 - [(1-2\mu')\cdot R2 + R3]\cdot R1 + R2\cdot R3\right]$$

$$P_{12} = \frac{E'}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left[-(1-2\mu')\cdot R1^2 - [-(1-2\mu')\cdot R2 + R3]\cdot R1 + R2\cdot R3\right]$$

$$P_{13} = \frac{E'}{2(1+\mu')} \cdot [R1 - R2]\cdot R4$$

$$P_{21} = \frac{E'}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left[-(1-2\mu')\cdot R1^2 - [(1-2\mu')\cdot R2 - R3]\cdot R1 + R2\cdot R3\right]$$

$$P_{22} = \frac{E'}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left[(1-2\mu') R1^2 - [-(1-2\mu')\cdot R2 - R3]\cdot R1 + R2\cdot R3\right].$$

$$P_{23} = \frac{E'}{2(1+\mu')} \cdot [-R1 - R2]\cdot R4$$

$$P_{31} = \frac{E'}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left[(1-2\mu')\cdot R1 - R3\right]\cdot R4$$

$$P_{32} = \frac{E'}{(1+\mu')(1-2\mu')} \cdot \left[-(1-2\mu')\cdot R1 - R3\right]\cdot R4 \qquad (2.69)$$

$$P_{33} = \frac{E'}{2(1+\mu')} \cdot R4^2$$

mientras que la expresión de F_1 es:

$$F1 = \frac{E'}{2(1+\mu')} \cdot \left[1 + \frac{4\cdot R2\cdot R3}{1-2\mu'}\right] + M \qquad (2.70)$$

en donde R1, R2, R3 y R4 son las expresiones obtenidas para uno y otro caso en el subapartado anterior.

4.- DETERMINACION DE PARAMETROS

4.1.- Enumeración.-

Tanto el modelo en tensiones totales como el desarrollado en tensiones efectivas dependen de una serie de parámetros que se pueden agrupar como sigue:

4.1.1.- Parámetros elásticos.-

En el modelo en tensiones totales, interviene el valor del módulo de elasticidad sin drenaje, (E_u), variable con la profundidad, como único parámetro elástico, ya que el coeficiente de Poisson tiene como valor $\mu_u = 0,5$.

En el modelo en tensiones efectivas intervienen sin embargo, el valor del módulo de elasticidad (E'), variable con la profundidad, y el coeficiente de Poisson (μ'). Como se ha visto, estos valores están relacionados con el anterior en la forma:

$$E_u = \frac{3\ E'}{2(1+\mu')} \qquad (2.71)$$

Se ve por lo tanto que es suficiente determinar dos de estos parámetros, obteniéndose facilmente el tercero.

4.1.2.- Parámetros plásticos.-

Dentro de éstos cabe distinguir los que intervienen en la definición del criterio de plastificación y los que intervienen en la definición de la función potencial plástico.

En cuanto a los primeros, son los parámetros de Hvorslev (K y ϕ_e) y el coeficiente D_m, mientras que en el segundo caso se trata unicamente del ángulo de dilatancia inicial (ν_o) bien definiéndolo como tal o por medio de los parámetros α_1 y α_2, definiéndolo entonces en función de la razón de sobreconsolidación.

4.1.3.- Permeabilidad.-

Es uno de los parámetros fundamentales dentro del análisis del proceso de consolidación. En este caso, dado que se admite una posible anisotropía en cuanto a la permeabilidad, es preciso determinar los valores de la misma en las direcciones horizontal y vertical (Kx y Kz).

4.1.4.- Historia tensional.-

Se supone conocida en cada punto y viene determinada por los valores de po y pc, presión de consolidación y de sobreconsolidación respectivamente.

4.2.- Determinación.-

4.2.1.- Parámetros elásticos.-

La determinación de estos parámetros se realiza en forma convencional, mediante ensayos triaxiales con y sin drenaje, determinando los valores de E' y E_u, respectivamente, a partir de muestras tomadas a distintas profundidades. El coeficiente de Poisson (μ') se determina a partir de la expresión (2.71).

4.2.2.- Parámetros plásticos.-

Para su determinación se realizan ensayos triaxiales sobre probetas consolidadas isotrópicamente y llevadas a rotura sin drenaje, con medida de presiones intersticiales. El proceso recomendado consta de los siguientes pasos:

a) Se consolidan varias probetas en una célula triaxial con un mismo valor de la presión de célula aplicada para todas ellas (p_c).

b) Se reduce la presión a un cierto valor p_{oi} (distinto para cada una) con lo que se obtendrán razones de sobreconsolidación diferentes para cada una, ensayándolas posteriormente hasta desviador constante.

c) Se representan, para cada una de las probetas - ensayadas, las curvas que relacionan el desviador aplicado (D) y la presión intersticial inducida (u) con la deformación axil (ε_z) quedando en la forma:

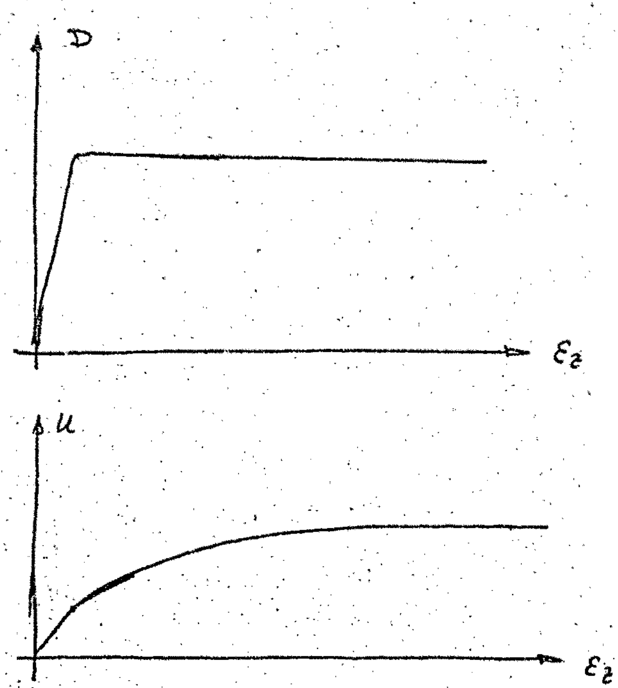


Fig 2.5.- Curvas desviador-deformación y sobrepresión intersticial-deformación.

d) En este paso se procede a separar el comportamiento elástico del plástico en cada una de las probetas ensayadas. Se obtiene, en primer lugar, la presión intersticial elástica (u_e) mediante la expresión (2.36), restándola posteriormente de la presión intersticial total obteniendo de esta manera la presión intersticial plástica (u_p).

Con ayuda de los parámetros elásticos, se obtiene la deformación axil elástica (ε_z^e), restándola posteriormente de la deformación axil total (ε_z) quedando de esta manera la deformación axil plástica. Por otra parte,

$$\gamma^{p} = \frac{3}{2} . \varepsilon_{2}^{p} \qquad (2.72)$$

con lo que se puede representar, para cada ensayo, la curva que relaciona la presión intersticial plástica (u_p) y la distorsión plástica (γ^p) quedando en la forma:

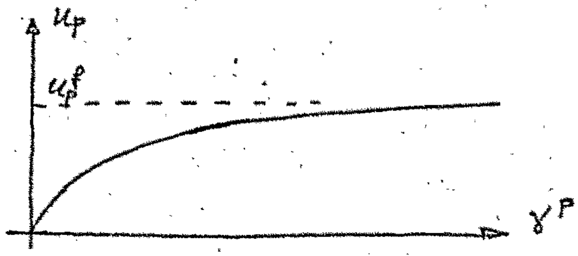


Fig 2.6.- Variación de la sobrepresión intersticial plástica con la distorsión plástica.

e) A partir de los valores obtenidos para la resistencia al corte sin drenaje (C_u) en los distintos ensayos, para distintas razones de sobreconsolidación, se ajustan los valores de K y D_m tg ϕ_e.

f) Para poder obtener separadamente los valores de D_m y ϕ_e, es preciso recurrir a los valores finales de la presión intersticial plástica (u_p^f), cuya expresión analítica es:

$$\frac{u_p^f}{p_o} = 1 - \frac{K R (1 - \cos \phi_e) + D_M \operatorname{tg} \phi_e}{\operatorname{sen} \phi_e} \qquad (2.73)$$

Se ve facilmente que, conocidos los valores de K, R y D_m tg ϕ_e se obtiene directamente el valor de ϕ y posteriormente el de D_m.

g) Para obtener el valor del ángulo de dilatancia en cada ensayo, se expresa la presión intersticial plástica en la forma:

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \cdot u_p^f \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{u_p}{u_p^f}\right] = \frac{-\operatorname{sen}\nu_o}{H} \cdot \gamma^p$$

con lo que los puntos correspondientes a cada ensayo (en un diagrama $\gamma^p - \lambda$) se deben ajustar a una recta en la forma:

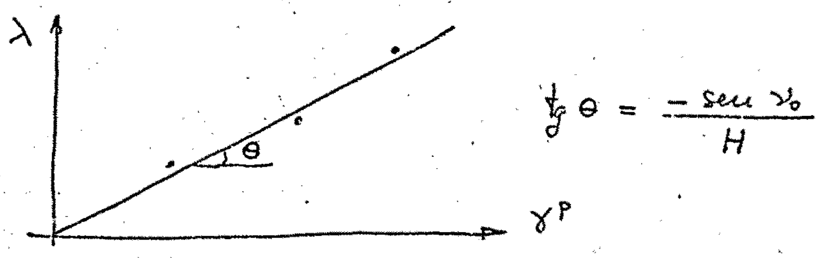


Fig 2.7.- Obtención de ν_o en cada ensayo.

A partir del valor de ν_o en cada ensayo se puede obtener su variación con la razón de sobreconsolidación representando los puntos correspondientes en un diagrama como el de la figura 2.8 ajustando una recta a la nube

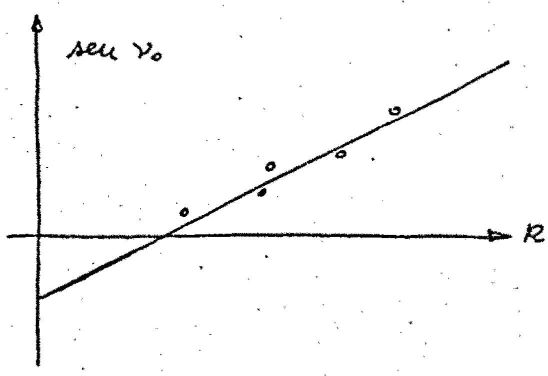


Fig 2.8.- Ley de variación de ν_o.

de puntos obteniendo de esta manera los valores de α_1 y α_2.

4.2.3.- Permeabilidad.-

Los valores del coeficiente de permeabilidad en dirección horizontal y vertical (Kx y Ky) se pueden determinar mediante ensayos edométricos o mediante ensayos de permeabilidad bajo carga en la célula triaxial, realizándose en uno u otro caso sobre probetas talladas en dichas direcciones.

CAPITULO III

METODO DE ANALISIS

1.- DESCRIPCION GENERAL

En la presente tesis se realiza un análisis del proceso de consolidación bidimensional que sufre un estrato de arcilla sometido a la acción, en parte de su superficie, de unas cargas que pueden ser variables con el tiempo.

Se parte en este análisis de un estado inicial correspondiente a la acción de una carga rápida en un proceso sin drenaje.

En cuanto al problema de consolidación se procede en primer lugar a una discretización del tiempo en incrementos o escalones. Por otra parte, se ha citado en el capítulo I que en el problema de consolidación intervienen conjuntamente el comportamiento hidrodinámico del fluido intersticial y el tenso-deformacional del esqueleto sólido. Para tratar este tema conjuntamente, se utiliza en esta tesis un procedimiento iterativo.

Dicho procedimiento iterativo se realiza durante cada escalón o incremento de tiempo. En primer lugar se realiza un análisis simplificado del problema de consolidación, considerando que las tensiones totales no varían. Del resultado de este análisis se obtiene una variación en dichas tensiones totales que se utiliza para un segundo análisis del problema incluyendo dicha variación. En el caso de terreno elastoplástico, el proceso iterativo es algo diferente, como se detalla en el apartado 4.3.2.

2.- ESTADO INICIAL

El estado inicial viene definido por la distribución de tensiones totales, sobrepresión intersticial y desplazamientos totales obtenidos en el proceso de carga sin drenaje. Para su obtención realiza un análisis en tensiones totales a partir del modelo de comportamiento del suelo descrito en el apartado 2 del capítulo anterior.

En dicho capítulo se ha obtenido asimismo una ley que define la sobrepresión intersticial inducida en el proceso de carga sin drenaje. Tanto para conocer esta ley como para caracterizar el comportamiento tensodeformacional del esqueleto sólido en el proceso posterior de consolidación es imprescindible conocer las deformaciones plásticas acumuladas durante el citado proceso de carga sin drenaje.

3.- CONSOLIDACION

3.1.- Hipótesis.-

Las hipótesis adoptadas en este estudio coinciden en gran parte con las de BIOT (1941), con algunas pequeñas diferencias. Dichas hipótesis son:

a) el suelo es homogéneo

b) el suelo está totalmente saturado.

c) tanto el agua como las partículas sólidas se consideran incompresibles.

d) se supone válida la aplicación del cálculo infinitesimal al caso del suelo formado por partículas de tamaño finito.

e) se supone válida la ley de Darcy

f) se realiza el análisis admitiendo la hipótesis de pequeñas deformaciones.

g) el suelo se considera isótropo en cuanto a las condiciones de resistencia y deformabilidad tanto para el análisis del proceso con drenaje como para la fase inicial sin drenaje. Este aspecto se ha comentado más ampliamente en el apartado 3.5.2 del capítulo I.

h) se admite que la permeabilidad no sea isótropa, siendo las direcciones horizontal y vertical los ejes principales de anisotropía.

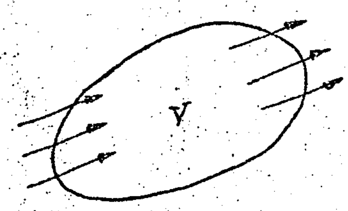
i) en cuanto al comportamiento tenso-deformacional del esqueleto sólido, es el de un material isótrop, elastoplástico rigidizable según el modelo definido en el apartado 3 del capítulo anterior.

j) las tensiones totales se suponen variables durante el proceso de consolidación.

3.2.- Problema hidrodinámico.-

La idea básica en todo proceso de consolidación es que la variación de volumen de un elemento diferencial de suelo, supuesta despreciable la compresibilidad del agua y de las partículas sólidas, ha de ser igual al volumen de agua expulsado de dicho elemento, referido todo ello a la unidad de tiempo.

Partiendo de un elemento diferencial de suelo, cuyo volumen sea dV y su superficie $d\Omega$ y suponiendo un campo de velocidades de filtración del agua V definido para cada punto del mismo, el volumen de agua expulsado (dVa) es decir, el flujo neto de agua que lo atraviesa, en un tiempo dt, viene expresado por:



$$dV_a = dt. \iint_{\Omega} \vec{V}.\vec{n}.d\Omega \qquad (3.1)$$

siendo $\vec{V}$ el vector velocidad de filtración del agua en los puntos de la superficie y $\vec{n}$ el vector normal a la misma en los puntos correspondientes.

Aplicando el teorema de Ostrogradski-Gauss, se puede poner:

$$dV_a = dt. \iint_{\Omega} \vec{V}.\vec{n}.d\Omega = dt. \iiint_{V} (\mathrm{div}\,\vec{V}).dVol. \qquad (3.2)$$

Al admitir como válida la ley de Darcy, el vector velocidad del agua, será el producto contraido del tensor de permeabilidades por el gradiente del campo de potenciales hidraúlicos, es decir:

$$\vec{V} = - K. \overrightarrow{\text{grad } \phi} \tag{3.3}$$

De la ecuación (3.2) se deduce que:

$$\frac{dV_a}{dV_{ol}} = \operatorname{div} \vec{V} . dt \tag{3.4}$$

Aplicando esta formulación al caso de consolidación bidimensional, resulta:

$$\frac{dV_a}{dV_{ol}} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x . \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z . \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \right] . dx.dz.dt \tag{3.5}$$

siendo "ϕ" el potencial hidraúlico.

Esta expresión se puede poner en términos de la sobrepresión intersticial en la forma siguiente:

$$\frac{dV_a}{dV_{ol}} = \frac{-1}{\gamma_w} . \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x . \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z . \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right] . dx\, dz\, dt \tag{3.6}$$

siendo "u" la sobrepresión intersticial.

Este valor ha de ser igual, como se ha dicho antes, a la variación de volumen del esqueleto sólido, en la forma:

$$\frac{dV_a}{dV_{st}} = d\left(\Delta V/V\right) \qquad (3.7)$$

En cuanto a la variación de volumen del esqueleto-sólido, hay que tener en cuenta que su expresión será - distinta según que el punto considerado (según su nivel de tensiones) se encuentre en la fase elástica lineal o bien se encuentre plastificado.

Si se encuentra en estado elástico:

$$d\left(\Delta V/V\right) = \frac{(1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \cdot \left(d\sigma'_x + d\sigma'_z\right) \qquad (3.8)$$

Si, por el contrario, se encuentra plastificado, la variación volumétrica tendrá una componente elástica y otra plástica y, de acuerdo con las expresiones desarrolladas en el subapartado 3.4 del capítulo 2 se llega a:

$$d\left(\Delta V/V\right) = \frac{(1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \cdot \left(d\sigma'_x + d\sigma'_z\right) + \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,\nu \cdot \mathrm{sen}\,\phi_e}{2} \cdot \left[d\sigma'_x + d\sigma'_z\right] - \frac{(\sigma'_x - \sigma'_z)\,\mathrm{sen}\,\nu}{4 \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}} \cdot \left[d\sigma'_x - d\sigma'_z\right] - \frac{\tau_{xz} \cdot \mathrm{sen}\,\nu}{\sqrt{\left(\frac{\sigma'_x - \sigma'_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}} \cdot d\tau_{xz}\right] \qquad (3.9)$$

con la notación utilizada en el citado subapartado.

Con todo ello, la ecuación diferencial que rige el comportamiento hidrodinámico del fluido intersticial viene definida por la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\left[K_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right] + Q - c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (3.10)$$

en donde:

a) para un punto del suelo que se encuentre en estado elástico:

$$c = \frac{2\,\gamma_w \cdot (1+\mu')(1-2\mu')}{E'}$$

$$Q = \frac{\gamma_w\,(1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \cdot \frac{\partial(\sigma_x+\sigma_z)}{\partial t} \qquad (3.11)$$

b) para un punto del suelo que se encuentre en estado plástico:

$$c = \frac{2\,\gamma_w\,(1+\mu')(1-2\mu')}{E'} + \frac{\gamma_w}{M} \cdot \eta \cdot \operatorname{sen}\nu \cdot \operatorname{sen}\phi_e$$

$$Q = \frac{\gamma_w\,(1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \cdot \frac{\partial(\sigma_x+\sigma_z)}{\partial t} + \frac{\gamma_w}{M} \cdot \left[\frac{\eta\,\operatorname{sen}\nu \cdot \operatorname{sen}\phi_e}{2} \cdot \frac{\partial(\sigma_x+\sigma_z)}{\partial t} - \frac{(\sigma_x-\sigma_z)\operatorname{sen}\nu}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}} \cdot \frac{\partial(\sigma_x-\sigma_z)}{\partial t} - \frac{\tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}\nu}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}} \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t}\right] \qquad (3.12)$$

siendo $\widetilde{C}/m$, ζ y sen ν las expresiones citadas en el subapartado 3.4 del capítulo anterior.

Como se ve, en esta ecuación diferencial intervienen los valores de las tensiones totales y sus derivadas respecto al tiempo. Por lo tanto, para resolver el problema de la consolidación bidimensional será necesario analizar también el comportamiento tenso-deformacional del esqueleto sólido.

3.3.- Problema tenso-deformacional del esqueleto sólido

Para estudiar este problema, se realiza un análisis en tensiones efectivas mediante el método de los desplazamientos.

Se dispone para ello de:

- ecuaciones de equilibrio tanto interno como en el contorno.
- leyes constitutivas del material. Estas leyes se han desarrollado ampliamente en el apartado 3 del capítulo anterior.

Este análisis permite obtener los valores de las tensiones efectivas y de los desplazamientos que experimenta la masa de suelo sometida a la acción de unas determinadas fuerzas.

Las tensiones efectivas actuantes sobre un punto del suelo sufren una variación durante el proceso de consolidación la cual se puede representar por la trayectoria seguida en el plano de Lambe.

Si se parte de un punto del suelo en estado elástico y su trayectoria correspondiente no alcanza en ningún momento la línea de plastificación inicial, en dicho punto el suelo se habrá comportado durante todo el proceso como material elástico lineal.

Si, en el punto en cuestión, el suelo se encuentra inicialmente en estado plástico (punto O de la figura 3.1)

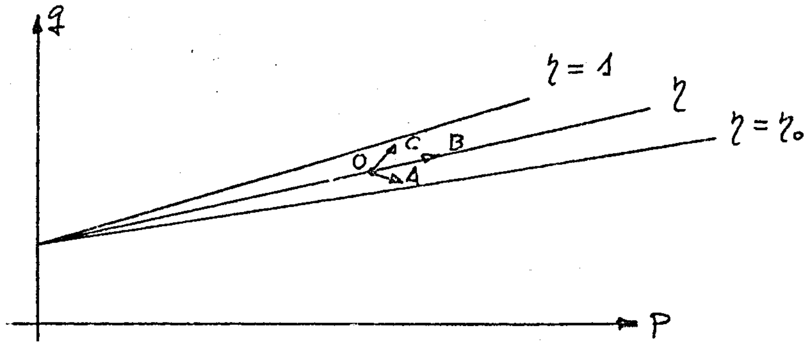


Fig 3.1.- Análisis de posibles descargas.

y sufre un incremento de tensiones, éste tendrá lugar hacia el interior de la superficie de plastificación (línea OA), sobre ella (línea OB) o hacia afuera de la misma (línea OC), produciéndose según esto una descarga, una carga neutra o una carga. En el caso de que se produzca una descarga o una carga neutra el comportamiento posterior será de material elástico lineal.

Si el punto considerado se encuentra inicialmente en estado elástico y plastifica durante el proceso, a partir de ese instante estará sujeto a las consideraciones del-párrafo anterior.

Dada la influencia que tiene el que un elemento de-suelo se encuentre en estado elástico o plástico a la hora de expresar la ecuación diferencial que rige el fenómeno, es importante definir las condiciones que deben - cumplir los incrementos de tensiones ($d\sigma'_{ij}$) para que-dicho elemento sufra un proceso de descarga, de carga - neutra o de carga.

Diferenciando la ecuación que establece el criterio de plastificacion, se tiene:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} . d\sigma'_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} . d\eta \qquad (3.13)$$

Según esto:

a) Para que se produzca una descarga, el punto re - presentativo se debe mover hacia el interior de la superficie de plastificación, es decir, df ha de ser menor que cero y, habida cuenta de que la descarga no supone rigidización ($d\eta = 0$), se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} . d\sigma'_{ij} < 0 \qquad (3.14)$$

b) Para que tenga lugar un proceso de carga neutra, es preciso que el punto representativo se mueva sobre - la superficie de plastificación, siendo, por lo tanto, igual a cero. En este caso no se producen deformaciones plásticas ni rigidización, quedando:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} = 0 \qquad (3.15)$$

c) Al producirse un proceso de carga, el punto representativo se mueve hacia afuera de la superficie de plastificación, produciéndose nuevas deformaciones plásticas y rigidización energética. Se cumple asimismo que df es igual a cero.

El criterio de plastificación debe ser tal que su derivada respecto al parámetro de rigidización sea negativa y como además $d\eta$ es mayor que cero, resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} > 0 \qquad (3.16)$$

En los materiales plásticos perfectos sólo caben las posibilidades a) o b). En la primera no hay deformaciones plásticas mientras que en la seguna sí.

Es importante destacar que si un elemento de suelo que se ha descargado vuelve a plastificar, los valores de las deformaciones plásticas y del parámetro de rigidización son los correspondientes al momento de producirse la descarga.

3.4.- Funcionales asociados.-

El problema del comportamiento hidrodinámico del -

fluido intersticial está completamente definido por la ecuación (3.10) y las correspondientes condiciones de contorno. Sin embargo, es posible una formulación alternativa con la ayuda del cálculo de variaciones, si bien, el término $\partial u/\partial t$ presenta para ello algunas dificultades.

Si se analiza el problema en un instante determinado, el término $c.\partial u/\partial t$ se puede considerar unicamente como una función de posición, siendo aplicable el cálculo variacional.

La formulación equivalente a la ecuación diferencial anterior consiste en minimizar un funcional definido como:

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left[K_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K_z \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \left(Q - c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot u \right] \cdot dx\,dz \tag{3.17}$$

manteniéndose las condiciones de contorno idénticas. Es fácil comprobar la equivalencia de ambas formulaciones sin más que aplicar el conocido teorema de Euler de cálculo de variaciones (ZIENKIEWICZ y CHEUNG, 1967).

Las condiciones de contorno que se pueden presentar en este estudio son de dos tipos:

a) el valor del potencial hidraúlico está definido en el contorno(condición tipo Dirichlet):

$$\phi = z + \frac{u_o + u}{\gamma_w} \qquad (3.18)$$

ello equivale a definir en dicho contorno el valor de la sobrepresión intersticial "u".

b) está definido el flujo hidraúlico en dirección normal al contorno. (condición tipo Neumann). Su expresión matemática es:

$$K_x . \frac{\partial \phi}{\partial x} . l_x + K_z . \frac{\partial \phi}{\partial z} . l_z + q = 0 \qquad (3.19)$$

siendo lx, lz los cosenos directores de la normal exterior al contorno correspondiente, y "q" el flujo por unidad de superficie, conocido.

Teniendo en cuenta la expresión (3.18) definida anteriormente para el potencial hidraúlico, la (3.19) equivale a:

$$K_x . \frac{\partial u}{\partial x} . l_x + K_z . \frac{\partial u}{\partial z} . l_z + \gamma_w . q = 0 \qquad (3.20)$$

Las condiciones de contorno del tipo a) son muy fáciles de introducir en el cálculo mientras que las del tipo b) presentan algunas dificultades. Este último tipo de condiciones de contorno se puede cumplir imponiendo algunas restricciones al valor de la función en las cercanias del contorno si bien esto es bastante complicado. Es más aconsejable modificar el principio variacional de manera que los valores de la función "u" no estén sometidos a ningún tipo de limitación en ese tipo de contorno. Esto se suele hacer añadiendo convenientemente algunos términos adicionales al funcional a minimizar.

Se puede ver facilmente (BERG, 1962) que si una parte C del contorno está sometida a una condición del tipo b), el funcional (3.17) a minimizar debe ser modificado, quedando:

$$\chi = \iint \left[\frac{1}{2} \left[K_x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K_z \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \left(Q - c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot u \right] . dx\, dz + \int_C q \cdot u . d \qquad (3.21)$$

en donde la última integral está extendida al contorno sometido a la condición del tipo b).

En el caso particular de contorno impermeable, la condición (3.19) se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (3.22)$$

con lo cual, al ser q=o, el término adicional a introducir en la expresión del funcional es igual a cero. Por lo tanto, todo contorno en el que no se imponga ninguna condición, se supone implícitamente impermeable.

En cuanto al análisis del comportamiento tenso-deformacional del esqueleto sólido se demuestra que, el sistema de ecuaciones que rige el problema elástico, le corresponde un problema variacional asociado. El principio variacional utilizado se expresa así: "De todos los sistemas de desplazamientos posibles, que cumplan las ecuaciones de compatibilidad y satisfagan las condiciones de contorno, la solución es la que hace mínima la energía potencial del sistema".

Su formulación en el caso de deformación plana es:

$$U_p = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^t [D] . \{\varepsilon\} \right] . d\Omega - \iint_{\Omega} \{f\}^t . \{\delta\} . d\Omega - \int_c \{g\}^t . \{\delta\} . ds - \{F\} . \{\delta\} \quad (3.23)$$

El primer sumando presenta la energía interna del sistema y los demás son trabajos producidos por las fuerzas de masa, de superficie y puntuales respectivamente.

En el caso de que haya puntos del suelo que se encuentren en estado plástico, el análisis se realiza en forma incremental considerando una ley lineal dentro de cada incremento, es decir, admitiendo que, para esos puntos, la matriz [D] permanece constante dentro de cada incremento, variando, sin embargo, de uno a otro.

4.- METODO DE ANALISIS EMPLEADO

En la resolución del problema de consolidación hay que analizar tanto el comportamiento hidrodinámico del fluido intersticial como el tenso-deformacional del esqueleto sólido. Para realizar el análisis, se lleva a cabo una discretización del tiempo en incrementos o escalones de amplitud variable en general.

El método desarrollado en esta tesis consiste en analizar separadamente cada uno de los dos comportamientos, realizando la conexión entre ambos mediante un procedimiento iterativo. Dicho procedimiento iterativo, como se verá, es algo más sencillo cuando se supone que el suelo se comporta como un material elástico lineal.

Como datos de partida, es necesario disponer de los valores de las tensiones totales, efectivas, sobrepresiones intersticiales y desplazamientos en los puntos de la masa de suelo, derivados del proceso inicial de carga sin drenaje.

4.1.- Análisis de consolidación.-

Se designa con este nombre el análisis del comportamiento hidrodinámico del fluido intersticial, que viene regido por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right] + Q - c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (3.24)$$

ya desarrollada en el apartado 3.2 del presente capítulo y las correspondientes condiciones de contorno. Las expresiones de c y Q para puntos en estado elástico o plástico son las definidas en dicho apartado.

Esta ecuación se resuelve dos veces durante cada escalón de tiempo. En la primera de ellas se considera Q igual a cero, simplificándose notablemente la resolución. El considerar Q igual a cero equivale, como se puede ver en las expresiones del apartado 3.2, a considerar que las tensiones totales permanecen constantes durante el escalón de tiempo considerado. En la segunda se admite que Q sea distinto de cero permaneciendo constante para cada punto durante el citado escalón.

De cada uno de los dos análisis se obtienen como resultados unas nuevas sobrepresiones intersticiales que se utilizan para obtener unas fuerzas másicas incrementales cuya acción se evalúa mediante el análisis en tensiones efectivas que se presenta a continuación.

4.2.- Análisis en tensiones efectivas.-

Con este epígrafe se designa el procedimiento que permite obtener las tensiones efectivas y desplazamientos en los puntos de la masa de suelo, considerado éste como elastoplástico rigidizable o elástico lineal según los casos, debidos a la acción de unas fuerzas másicas, y unas fuerzas exteriores, cumpliéndose además unas determine las condiciones de contorno.

Este análisis se realiza tres veces durante cada - escalón de tiempo en el caso de comportamiento elasto-plástico rigidizable o bien solamente dos en el caso - de comportamiento elástico lineal.

Las ecuaciones de equilibrio en tensiones totales se pueden poner como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= X \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= Z \end{aligned} \qquad (3.25)$$

siendo X y Z las fuerzas másicas totales en las direcciones x y z. Las mismas ecuaciones en tensiones efectivas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= X - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} &= Z - \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \qquad (3.26)$$

Como se ve, un análisis general aparecen como fuerzas másicas las derivadas de la sobrepresión intersticial en las direcciones x y z.

Como es sabido, la ley tensión-deformación en puntos en estado plástico viene dada en forma incremental. Por ello se ha creido conveniente el realizar el presente análisis en forma incremental, introduciendo todas -

las acciones y condiciones de contorno en fuerzas en forma incremental. Los resultados vendrán dados en forma de incrementos de tensiones efectivas o incrementos de desplazamientos.

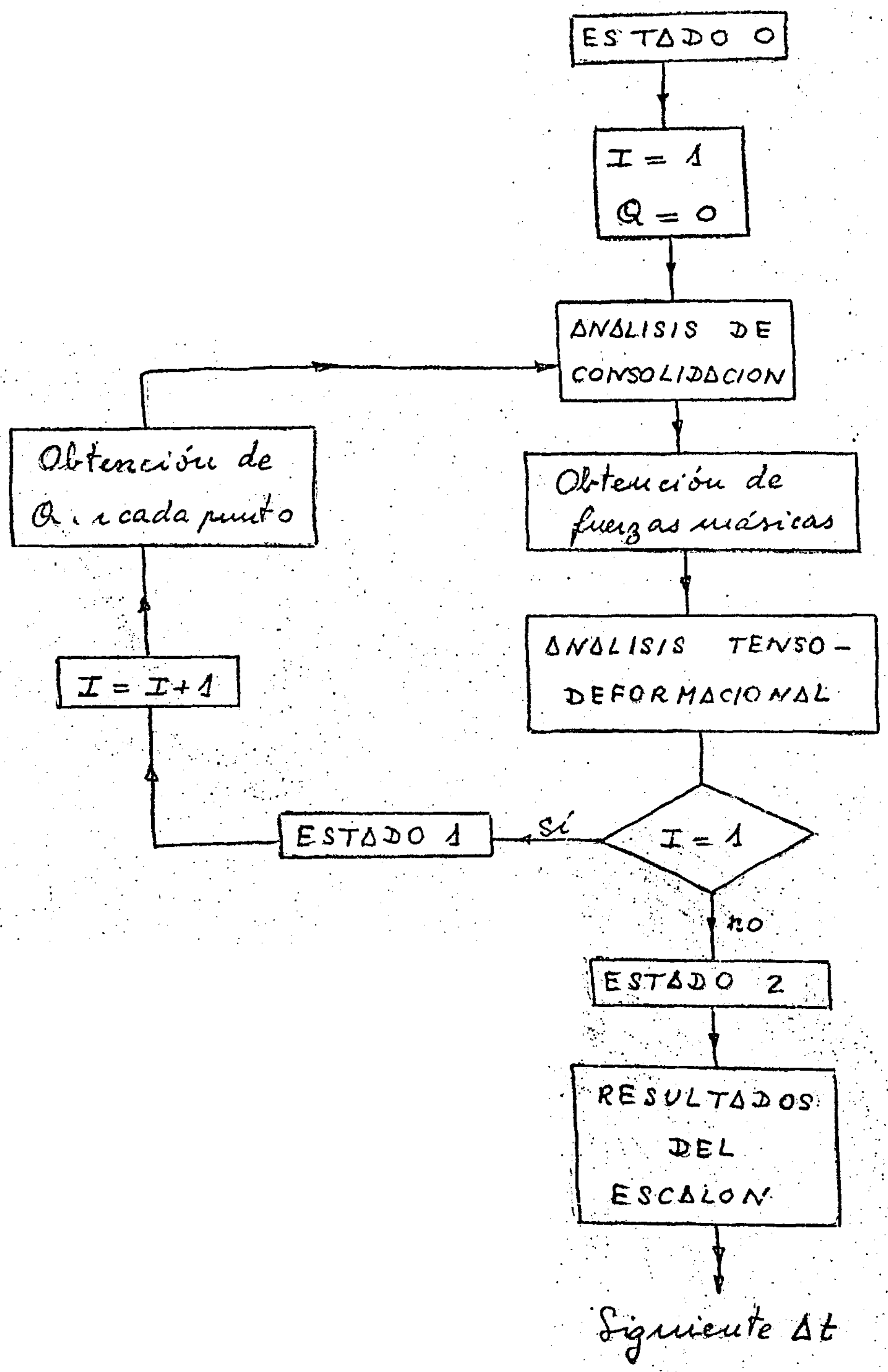
4.3.- Proceso seguido.-

Una vez definidos los dos tipos de análisis, el proceso iterativo seguido dentro de cada escalón de tiempo en el caso de que el suelo se comporte como un material elástico lineal o elastoplástico rigidizable es algo diferente, presentando en este último caso una iteración más. Sin embargo, tanto el análisis de consolidación como el realizado en tensiones efectivas se llevan a cabo en la misma forma.

A continuación se presentan separadamente los procesos seguidos para cada uno de estos comportamientos del suelo, si bien, es de destacar la gran similitud en sus organigramas correspondientes.

4.3.1.- Material elástico lineal.-

Se presenta, en primer lugar, un organigrama esquemático del proceso seguido, comentándolo posteriormente.


ESTADO 0
I = 1
Q = 0
ANALISIS DE CONSOLIDACION
Obtención de fuerzas másicas
ANALISIS TENSO-DEFORMACIONAL
I = 1
sí
no
ESTADO 1
I = I+1
Obtención de
Q
cada punto
ESTADO 2
RESULTADOS DEL ESCALON
Siguiente Δt

El estado 0 está definido por los valores de las - tensiones totales, efectivas, sobrepresiones intersticiales y desplazamientos en cada punto de la masa de suelo antes de comenzar el escalón de tiempo correspondiente.

A partir de aquí, el proceso seguido comprende los siguientes pasos:

1º.- Se define un valor para el incremento de tiempo (Δt). Dicho valor no tiene por qué ser constante sino- que dependerá de los valores que se quiere que adopte - el factor de tiempo. La expresión adoptada para el factor de tiempo es:

$$T_v = \frac{C_v . t}{l^2} \qquad (3.27)$$

siendo:

C_v ⟶ coeficiente de consolidación que en el caso de deformación plana, según la teoría de BIOT es igual a

$$C_v = \frac{E' . k_v}{2 \gamma_w (1+\mu')(1-2\mu')} \qquad (3.28)$$

K_v ⟶ valor del coeficiente de permeabilidad en dirección vertical

l ⟶ longitud característica (anchura de la faja de carga, espesor del estrato compresible, etc) del problema concreto que - se estudie.

2º.- Se realiza un análisis de consolidación (apartado 4.1) estableciendo la condición de Q igual a cero. Se resuelve con ello la ecuación simplificada de la consolidacion bidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[k_z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right] = c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3.29)$$

obteniéndose unos nuevos valores de la sobrepresión intersticial en cada punto.

3º.- A partir de las fuerzas másicas correspondientes a los valores de la sobrepresión intersticial obtenidos en el paso 2º y a los existentes en el estado 0, se obtienen unas fuerzas másicas incrementales que se introducen en el análisis en tensiones efectivas (apartado 4.2), con unas condiciones de contorno en fuerzas, incrementales, y unas condiciones de contorno en desplazamientos.

El resultado de este análisis son unos incrementos de tensiones efectivas y unos incrementos de desplazamientos en cada punto.

Las cargas exteriores aplicadas durante cada escalón de tiempo se suponen constantes, con lo que las condiciones de contorno en fuerzas (incrementales) vienen representadas por cargas nulas. Todo ello supone admitir que la variación en el tiempo de las cargas exteriores aplicadas se produce en forma de escalones permitiendo-adaptarse así a cualquier tipo de variación en dicha carga.

4º.- Los valores de los incrementos de tensiones efectivas e incrementos de desplazamientos, obtenidos en el paso anterior, se suman a los correspondientes al estado 0, definiendo estos valores y los obtenidos para la sobrepresión intersticial en el paso 2º lo que se ha dado en llamar estado 1.

5º.- A partir de los incrementos de tensiones efectivas obtenidos como resultado en el paso 3º y de los incrementos de sobrepresión intersticial obtenidos como diferencia de los valores correspondientes al estado 1 y al estado 0 en cada punto se llega a obtener los incrementos de tensiones totales en cada punto, según:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \Delta u \qquad (3.30)$$

Dichos incrementos de tensiones totales permiten obtener mediante la expresión:

$$Q = \frac{\gamma_w (1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \cdot \frac{\Delta(\sigma_x + \sigma_z)}{\Delta t} \qquad (3.31)$$

el valor de Q en cada punto de la masa de suelo.

6º.- Con estos valores de Q se repiten los pasos 2º y 3º de análisis de consolidación, (con Q distinto de cero en este caso) y de análisis en tensiones efectivas respectivamente. Mediante un procedimiento idéntico al segundo en el paso 4º se obtienen los valores de la sobrepresión intersticial, desplazamientos y tensiones efectivas en cada punto que definen el estado 2 y son los resultados correspondientes al escalón de tiempo considerado.

En el caso de que la carga exterior aplicada permanezca constante en el tiempo estos valores definen a su vez el estado 0 del siguiente escalón de tiempo.

7º.- En el caso de carga variable en el tiempo, la carga exterior se considera compuesta por una serie de vectores de carga estando definida para cada uno de ellos su ley de variación en el tiempo. Esta variación se establece definiendo el valor de cada vector de carga en cada uno de los escalones de tiempo considerados, produciéndose de esta manera una variación en escalones. En cada uno de estos escalones, el incremento de carga correspondiente se supone aplicado de forma instantánea.

Por tratarse de un material elástico lineal, el cálculo se simplifica ya que basta realizar una sola vez (para cada vector de carga) el análisis en totales del proceso de carga sin drenaje considerando un valor unitario para la carga. Los resultados correspondientes a un incremento cualquiera de la carga se obtienen multiplicando los anteriores por el valor de dicho incremento para cada vector de carga.

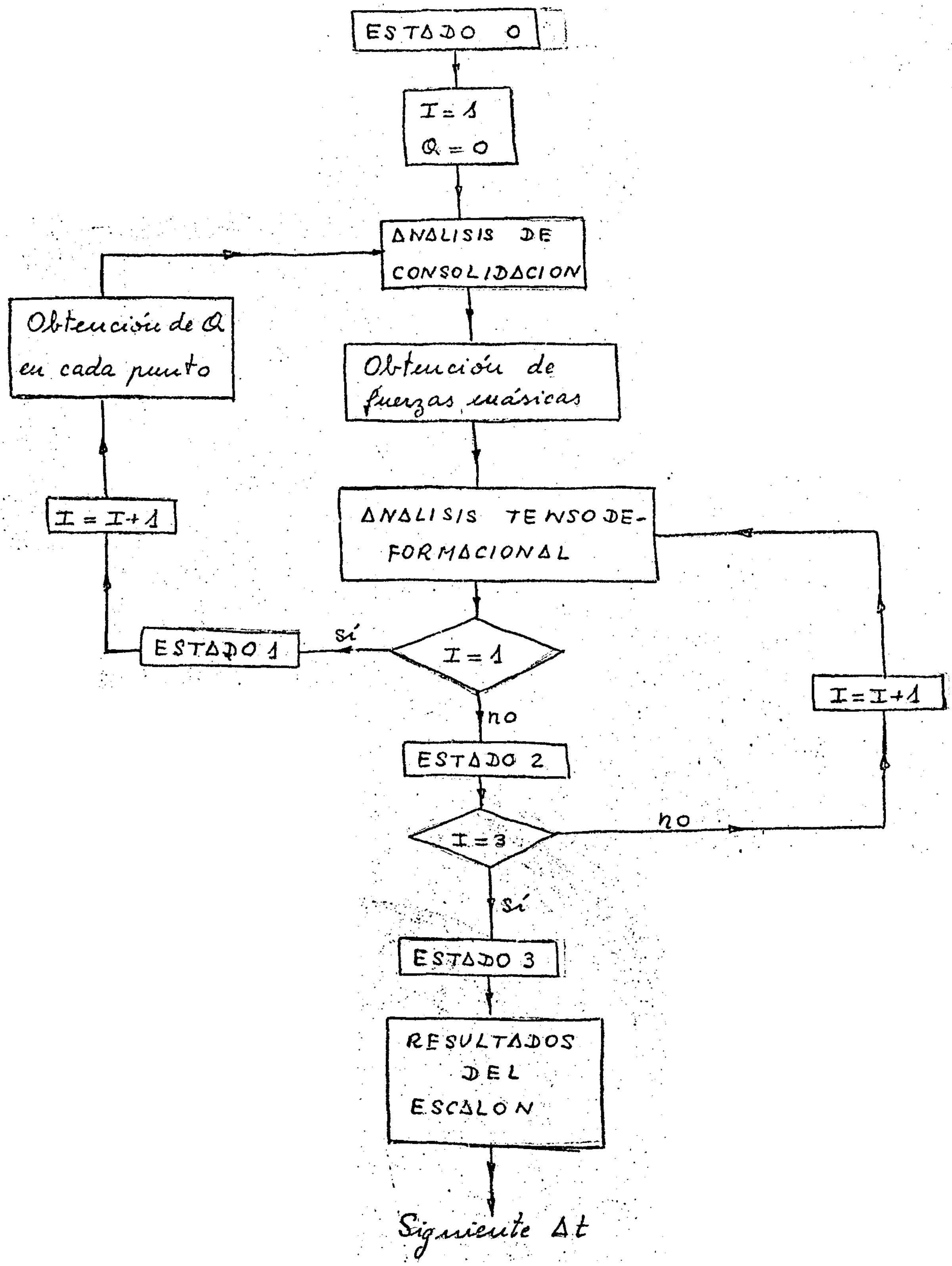
Según esto, una vez obtenidos los resultados de un cierto escalón de tiempo mediante el proceso descrito, se suman a los mismos los valores correspondientes al incremento de cada vector de carga (fase sin drenaje) durante el siguiente escalón de tiempo, obteniéndose de esta manera los valores que definen el estado 0 del siguiente escalón de tiempo.

4.3.2.- <u>Material elastoplástico rigidizable.</u>-

Se presenta, en primer lugar, como en el caso anterior, un organigrama esquemático del proceso seguido, comentándolo posteriormente.

El estado 0 está definido por los valores de las tensiones totales, efectivas, sobrepresiones intersticiales y desplazamientos en cada punto de la masa de suelo antes de comenzar el escalón de tiempo correspondiente, como en el caso anterior, así como los valores de las deformaciones plásticas acumuladas ya que son necesarios para utilizar el modelo desarrollado en tensiones efectivas.

En los puntos en estado plástico al comienzo del escalón intervienen, tanto en el análisis de consolidación como en el análisis tensodeformacional, los valores de 1/M, R1, R2, R3 y R4, cuyas expresiones se han definido en el apartado 3.4.1 del capítulo anterior. Dichos -


ESTADO 0
I = 1
Q = 0
ANALISIS DE CONSOLIDACION
Obtención de Q en cada punto
Obtención de fuerzas másicas
I = I+1
ANALISIS TENSO DEFORMACIONAL
ESTADO 1
sí
I = 1
no
ESTADO 2
I = I+1
I = 3
no
sí
ESTADO 3
RESULTADOS DEL ESCALON N
Siguiente Δt

valores son función de las tensiones efectivas y de las deformaciones plásticas acumuladas en los citados puntos.

En el análisis de los pasos a seguir se hace especial hincapié en los detalles que diferencian este proceso del seguido en el caso elástico. Los pasos a seguir son:

1º.- Se define un valor para el incremento de tiempo (Δt). En cuanto a las expresiones del factor de tiempo y del coeficiente de consolidación es de aplicación lo referido en el paso correspondiente de 4.3.1.

2º.- Se realiza un primer análisis de consolidación como en el caso de material elástico lineal. La única diferencia es que, en los puntos en estado plástico, la expresión de "c" es:

$$c = \frac{2\gamma_w (1+\mu')(1-2\mu')}{E'} + \frac{2\gamma_w}{M} . R2 . R3 \qquad (3.32)$$

Los valores de 1/M, R2 y R3, se obtienen a partir de los valores de las tensiones efectivas y deformaciones plásticas acumuladas correspondientes al estado 0.

3º.- Con las fuerzas másicas incrementales obtenidas como en 4.3.1, se realiza el análisis en tensiones efectivas, con la particularidad de considerar como matriz incremento de tensión-incremento de deformación, la matriz tangente, es decir, la obtenida a partir de los valores de las tensiones y deformaciones plásticas correspondientes al estado 0. El resultado de este análisis son unos incrementos de tensiones efectivas y de desplazamientos en cada punto.

4º.- Los valores de los incrementos de tensiones efectivas y de desplazamientos, obtenidos en el paso anterior, se suman a los correspondientes al estado 0. Se obtienen asimismo las nuevas deformaciones plásticas acumuladas, lo cual permite, a través del parámetro de rigidización, definir para cada punto de la zona plastificada, el nuevo criterio de plastificación al que deberán ajustarse, en dichos puntos, las tensiones efectivas. Se analizan también los puntos que han sufrido un proceso de descarga (ver subapartado 3.3)

Con estos valores y los obtenidos para la sobrepresión intersticial en el paso 2º, se define el estado 1.

5º.- Con la misma secuencia que en el paso 5º de 4.3.1, se obtiene el valor de Q en cada punto de la masa de suelo, con la salvedad de que, en los puntos en estado plástico la expresión de Q es:

$$Q = \frac{\gamma_w (1+\mu')(1-2\mu')}{E'} \cdot \frac{\Delta(\sigma_x + \sigma_z)}{\Delta t} + \frac{2\gamma_w}{M} \cdot \left[R2 . R3 . \frac{\Delta(\sigma_x + \sigma_z)}{\Delta t} - R1 . R2 . \frac{\Delta(\sigma_x - \sigma_z)}{\Delta t} - R2 . R4 . \frac{\Delta \tau_{xz}}{\Delta t} \right] \quad (3.33)$$

en donde los valores de 1/M, R1, R2, R3 y R4 se obtienen a partir de las tensiones efectivas y deformaciones plásticas acumuladas correspondientes al estado 0.

6º.- Con estos valores de Q, se realiza un segundo análisis de consolidación como se ha descrito en el paso 2º (con Q distinto de cero en este caso). El valor de "c" en los puntos que permanecen en estado plástico se obtiene mediante la expresión (3.12) en donde 1/M, R2 y R3 tienen como valores la media entre los correspondientes a tomar como dato para su obtención el estado 0 y el estado 1. En los puntos en estado elástico (al comienzo del escalón de tiempo o que se hayan descargado) la expresión de "c" es la correspondiente a material elástico.

Como resultado de este paso, se obtiene el valor de la sobrepresión intersticial en cada punto, que se considera como definitivo en el escalón.

7º.- Con las fuerzas másicas incrementales obtenidas como en el paso 3º, se realiza un segundo análisis tensodeformacional. En este segundo análisis(en los puntos en estado plástico) y con el fin de que los errores del cálculo no sean acumulativos (CAÑIZO, 1971) no se trabaja con la matriz "tangente" a la ley tensión deformación en el comienzo del escalón, sino con una matriz "secante intermedia". Esta matriz se forma como semisuma entre las matrices incremento de tensión-incremento de deformación correspondientes a los niveles de tensiones efectivas y deformaciones plásticas acumuladas que definen los estados 0 y 1. En los puntos que hayan sufrido una descarga, la matriz a considerar es la elástica.

8º.- Se repite el paso 4º obteniendo, de esta manera, las tensiones y desplazamientos así como las deformaciones plásticas acumuladas que definen el estado 2.

9º.- Con las fuerzas másicas incrementales obtenidas en el paso 7º se realiza una nueva iteración, el tercer análisis tensodeformacional. En este análisis, en los puntos en estado plástico, la matriz "secante intermedia" se forma como semisuma de las incremento de tensión-incremento de deformación obtenidas a partir de los estados 0 y 2. En los puntos que se hayan descargado, la matriz a considerar es la elástica.

10º.- Repitiendo el paso 4º se obtienen los valores de las tensiones totales, efectivas, sobrepresión intersticial y desplazamientos en cada punto de la masa de suelo, así como las deformaciones plásticas acumuladas (en los puntos en estado plástico). Estos valores definen lo que se ha dado en llamar estado 3, siendo los resultados correspondientes al escalón de tiempo considerado. Estos valores definen, a su vez, el estado 0 del siguiente escalón de tiempo.

CAPITULO IV

DISCRETIZACION EN ELEMENTOS FINITOS

1.- INTRODUCCION

Aún en el caso de utilizar la discretización en el tiempo, el problema de consolidación sigue siendo muy difícil de resolver analíticamente, salvo casos con condiciones de contorno simples, por lo que se recurre a la discretización del continuo en elementos finitos.

Se realiza la formulación en elementos finitos tanto del análisis de consolidación como del análisis tenso-deformacional citados en el capítulo anterior. Se procede para ello a la minimización de los respectivos funcionales asociados (ver apartado 3 del capítulo anterior).

En ambos análisis se utiliza la misma malla de elementos. El tipo de elemento empleado es el rectángulo con cuatro nodos. Las incógnitas consideradas son el valor de la sobrepresión intersticial en cada uno de los nodos de la malla en el análisis de consolidación y los desplazamientos horizontal y vertical en cada uno de dichos nodos en el análisis tenso-deformacional. Las condiciones de contorno, en ambos casos, se deben imponer en los nodos.

2.- FORMULACION DEL PROBLEMA HIDRODINAMICO EN ELEMENTOS FINITOS

En la resolución de este problema se trata de minimizar un funcional definido como:

$$\chi = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left[K_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \left(Q - c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot u \right] \cdot dx\,dz \tag{4.1}$$

siendo Ω el recinto de definición de la función u.

En la discretización en elementos finitos, dicho funcional se puede expresar como suma de tantos funcionales como elementos de la malla.

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n \tag{4.2}$$

Cada uno de los sumandos tiene como expresión la (4.1) estando extendida la integral al área del elemento correspondiente.

En el interior de cada elemento, la sobrepresión intersticial "u" está definida en la forma:

$$u = \| N \| \cdot \left\{ u \right\}^e \tag{4.3}$$

siendo //N// una matriz cuyos componentes, denominados funciones de forma, son funciones de "x" y "z", dependien do su expresión del tipo de elemento empleado y $\{u\}^e$ la matriz columna formada por los valores de la sobrepresión intersticial en los nodos de dicho elemento.

Con todo ello, el funcional contiene N incógnitas (siendo N el número de nodos de la malla) que son los valores de la sobrepresión intersticial en los nodos. La minimización del funcional se realiza haciendo:

$$\frac{\partial \chi}{\partial u_i} = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots\ldots N \qquad (4.4)$$

es decir:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial u_i} + \frac{\partial \chi_2}{\partial u_i} + \text{-----} + \frac{\partial \chi_n}{\partial u_i} = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, 3 \ldots\ldots N \quad (4.5$$

Si se designa por "j" un elemento cualquiera, se tiene

$$\frac{\partial \chi_j}{\partial u_i} = \iint_{\Omega_j} \Big[K_x . \frac{\partial u}{\partial x} . \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + K_z . \frac{\partial u}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) -$$

$$- Q . \frac{\partial u}{\partial u_i} + c . \frac{\partial u}{\partial t} . \frac{\partial u}{\partial u_i} \Big] . dx\, dz \qquad (4.6)$$

siendo Ω_j el área del elemento "j" considerado.

A partir de la expresión (4.3), las derivadas parciales de "u" respecto a "x" y "z" se pueden poner como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \| N_1 \| . \left\{ u \right\}^e \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \| N_2 \| . \left\{ u \right\}^e \qquad (4.8)$$

en donde los términos de las matrices $//N_1//$ y $//N_2//$ se obtienen al derivar los correspondientes de la matriz $//N//$ de funciones de forma respecto a x y z respectivamente.

Por otra parte, las derivadas $\partial u/\partial u_i$, $\partial[\partial u/\partial x]/\partial u_i$ y $\partial[\partial u/\partial z]/\partial u_i$ que intervienen en (4.6) se obtienen de manera sencilla a partir de las expresiones (4.7) y (4.8)

Dentro del sistema de N ecuaciones con N incógnitas, la influencia de cada elemento de la malla se refleja, a través de la expresión (4.6), unicamente en las ecuaciones correspondientes a los nodos que lo forman.

Aplicando la expresión (4.6) a cada uno de los nodos que forman un elemento cualquiera, se tiene, expresándolo en forma matricial, los términos debidos a dicho elemento que se deben introducir en el sistema de ecuaciones global:

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\}^e = [k] . \left\{ u \right\}^e + \left\{ F_1 \right\}^e + [z] . \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}^e \qquad (4.9)$$

en donde:

$\left\{\frac{\partial \chi}{\partial u}\right\}^e$ ⟶ derivadas del funcional χ_e correspondiente a ese elemento respecto al valor de la sobrepresión intersticial en cada uno de los nodos

$\left\{u\right\}^e$ ⟶ valores de la sobrepresión intersticial en cada uno de los nodos del elemento

$\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}^e$ ⟶ derivada respecto al tiempo de los valores de la sobrepresión intersticial en cada nodo.

Por otra parte, las matrices $[h]$ y $[z]$ tienen como expresiones:

$$[h] = \iint_{\Omega e} \left(k_x . \|N_1\|^T . \|N_j\| + k_z . \|N_2\|^T . \|N_2\| \right) . dx\, dz \qquad (4.10)$$

$$[z] = \iint_{\Omega e} c . \|N\|^T . \|N\| . dx\, dz \qquad (4.11)$$

mientras que la matriz $\left\{F_1\right\}^e$ de fuerzas nodales corresponde a la integración de:

$$\left\{F_1\right\}^e = - \iint_{\Omega e} Q . \|N\| . dx\, dz \qquad (4.12)$$

Las expresiones anteriores son válidas tanto para elementos que se encuentran en estado elástico como para elementos plastificados sin más que utilizar en cada caso las expresiones correspondientes de c y Q, que se han detallado en el capítulo anterior.

Realizando el ensamblaje de todos los elementos, el sistema de ecuaciones resultante, expresado en forma matricial, queda:

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} = [H] \cdot \{u\} + [Z] \cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} + \{F\} = \{0\} \qquad (4.13)$$

Las matrices $[H]$ y $[Z]$ (de dimensiones N x N) se obtienen al ensamblar convenientemente las matrices $[h]$ y $[p]$ correspondientes a cada uno de los elementos que forman la malla.

La ecuación (4.13) anterior se puede poner esquemáticamente en la forma:

$$Z \cdot \dot{u} + H \cdot u + f = 0 \qquad (4.14)$$

siendo Z la "matriz de amortiguamiento" y H la "matriz de rigidez" del sistema.

Para su resolución se utiliza un esquema de recurrencia a partir de los valores correspondientes a dos instantes, en la forma:

$$u = N_n . u_n + N_{n+1} . u_{n+1} \qquad (4.15)$$

siendo:

Nn y Nn+1 ⟶ funciones de interpolación

Un y Un+1 ⟶ los valores de la función u (en los nodos) en los instantes n y n + 1.

El menor orden del polinomio necesario para las funciones Nn y Nn+1 es la unidad, ya que sólo aparecen derivadas de primer orden en la ecuación.

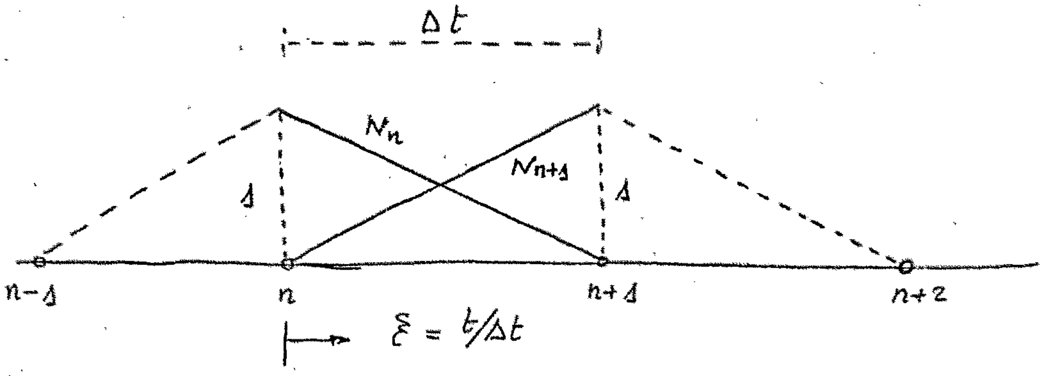


Fig 4.1.- Funciones de interpolación.

Las funciones de interpolación y sus primeras derivadas se pueden expresar, en coordenadas locales, como:

$$0 \leq \xi \leq 1 \qquad \xi = t/\Delta t$$

$$N_n = 1 - \xi \qquad \dot{N}_n = -1/\Delta t \qquad (4.16)$$

$$N_{n+1} = \xi \qquad \dot{N}_{n+1} = 1/\Delta t$$

Aplicando el método de las funciones pesantes se tiene:

$$\int_0^1 W_j \left[Z_1 \left(u_n . \dot{N}_n + u_{n+1} . \dot{N}_{n+1} \right) + \right.$$

$$\left. + H \left(u_n . N_n + u_{n+1} . N_{n+1} \right) + f \right] . d\xi = 0 \qquad (4.17)$$

Supuestos conocidos los valores de u en el instante n, se pueden obtener los correspondientes a n + 1, en forma explícita, mediante la expresión:

$$\left[H . \int_0^1 W_j . \xi . d\xi + Z_1 . \int_0^1 W_j . d\xi / \Delta t \right] . u_{n+1} + \left[H . \int_0^1 W_j (1 - \xi) . d\xi - \right.$$

$$\left. - Z_1 . \int_0^1 W_j . d\xi / \Delta t \right] . u_n + \int_0^1 W_j . f . d\xi = 0 \qquad (4.18)$$

siendo Wj una función de peso cualquiera. Esta ecuación se puede poner en forma esquemática como:

$$\left[H . \theta + \frac{Z_1}{\Delta t} \right] . u_{n+1} + \left[H (1 - \theta) - \frac{Z_1}{\Delta t} \right] . u_n + \bar{f} = 0 \qquad (4.19)$$

siendo:

$$\theta = \int_0^1 W_j . \xi . d\xi \Big/ \int_0^1 W_j . d\xi$$

$$\bar{f} = \int_0^1 W_j . f . d\xi \Big/ \int_0^1 W_j . d\xi \qquad (4.20)$$

Para valores de $\theta \geqslant 1/2$ los esquemas son estables - incondicionalmente (ZIENKIEWICZ, 1977).

En este trabajo, se ha adoptado como función de peso Wj, la definida por

$$W_j = \mathcal{E} \qquad (4.21)$$

con lo que $\theta = 2/3$.

En resumen, el esquema de resolución se reduce a:

$$\left[\frac{2}{3}[H] + \frac{[Z]}{\Delta t}\right] \cdot \left\{u_1\right\} = -\left[\frac{1}{3}[H] - \frac{[Z]}{\Delta t}\right] \cdot \left\{u_0\right\} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \cdot \int_0^{\Delta t} \left\{F\right\} . t . dt$$

(4.22)

siendo:

$\{u_1\}$ ⟶ valores a determinar, correspondientes al final del escalón de tiempo - considerado

$\{u_0\}$ ⟶ valores de las incógnitas al comienzo del escalón

Δt ⟶ duración del escalón de tiempo

En la primera fase de la resolución, el segundo sumando del segundo miembro es nulo ya que se supone Q = 0. En la segunda, dicho sumando se convierte en $-\{F\}$

ya que se supone que el valor de Q en cada elemento es constante durante el incremento de tiempo, si bien depende de "x" y "z". La ecuación anterior, en cada una de las fases del proceso, se puede poner como:

$$\| K_1 \| \cdot \left\{ u_1 \right\} = \left\{ F_1 \right\} \tag{4.23}$$

siendo $\| K_1 \|$ la "matriz de rigidez" del sistema que en este caso es simétrica.

La condición de que la presión intersticial sea conocida en algún nodo, se establece anulando todos los elementos de la fila correspondiente de la matriz $\| K_1 \|$ salvo el de la diagonal principal que se hace igual a la unidad. En la matriz $\left\{ F_1 \right\}$ se sustituye el término en la fila correspondiente, por el valor conocido de la sobrepresión intersticial.

Respecto a los contornos impermeables, no se requiere introducir ninguna modificación en el sistema, como se indicó anteriormente (capítulo 3, apartado 3.4).

3.- FORMULACION DEL PROBLEMA TENSO-DEFORMACIONAL EN ELEMENTOS FINITOS

El principio variacional asociado a este problema es el de hacer mínima la energía potencial del sistema, llegando, como en el caso anterior, a una ecuación matricial de fácil resolución.

Se definen, en primer lugar, los desplazamientos en el interior de un elemento en función de los desplazamientos de los nodos del mismo, en la forma:

$$\{\delta\} = \| N \| \cdot \{\delta^e\} \qquad (4.24)$$

siendo $\|N\|$ la matriz de "funciones de forma".

Se definen asimismo las deformaciones en cada punto, en función de los desplazamientos mediante las expresiones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.25)$$

siendo u y v los desplazamientos en dirección horizontal y vertical respectivamente (según los ejes). Expresándolo en forma matricial, en función de los desplazamientos nodales, se tiene:

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \| B^e \| . \left\{ \delta^e \right\} \tag{4.26}$$

Las tensiones en cada pur o se pueden obtener a partir de las deformaciones, premultiplicando éstas por la matriz tensión-deformación correspondiente:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma'_x \\ \sigma'_z \\ \tau_{xz} \end{matrix} \right\} = \| D \| . \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{matrix} \right\} \tag{4.27}$$

La energía potencial de cada elemento tiene como expresión:

$$U_p^e = \iint_{\Omega_e} W . d\Omega - \iint_{\Omega e} \left\{ f^e \right\}^T . \left\{ \delta \right\} . d\Omega - \int_{\Sigma e} \left\{ g^e \right\}^T . \left\{ \delta \right\} . d\Sigma -$$

$$- \left\{ F^e \right\}^T . \left\{ \delta^e \right\} \tag{4.28}$$

siendo:

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \sigma \right\}^T . \left\{ \varepsilon \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \right\}^T . \| D^e \| . \left\{ \varepsilon \right\} \tag{4.29}$$

siendo $\| D^e \|$ la matriz tensión-deformación del elemento en cuestión. El primer sumando de U_p^e es la energía interna del elemento mientras que los restantes son el trabajo de las fuerzas másicas dentro del elemento, el de las fuerzas exteriores superficiales y el de las fuerzas exteriores puntuales.

Sustituyendo las expresiones (4.26) y (4.29) en la (4.28) se tiene como energía potencial del elemento la definida por:

$$U_P^e = \frac{1}{2} \cdot \left\{\delta^e\right\}^T \cdot \left[\iint_{\Omega_e} \| B^e \|^T \cdot \| D^e \| \cdot \| B^e \| \cdot d\Omega \right] \cdot \left\{\delta^e\right\} -$$

$$- \left[\iint_{\Omega_e} \left\{f^e\right\} \cdot \| N^e \| \cdot d\Omega \right] \cdot \left\{\delta^e\right\} - \left[\int_{\Sigma_e} \left\{g^e\right\}^T \cdot \| N^e \| \cdot d\Sigma \right] \cdot \left\{\delta^e\right\} -$$

$$- \left\{F^e\right\}^T \cdot \left\{\delta^e\right\} \qquad (4.30)$$

y minimizando esta expresión, resulta:

$$\left\{F_t^e\right\} = \left\{F^e\right\} + \left\{F_m^e\right\} + \left\{F_s^e\right\} = \| K^e \| \cdot \left\{\delta^e\right\} \qquad (4.31)$$

en donde:

$\|K^e\|$ matriz de rigidez del elemento que tiene como expresión:

$$\| K^e \| = \iint_{\Omega_e} \| B^e \|^T \cdot \| D^e \| \cdot \| B^e \| \cdot d\Omega \qquad (4.32)$$

$\left\{F^e\right\} \rightarrow$ fuerzas nodales exteriores

$\left\{F_m^e\right\} \rightarrow$ fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de masa

$$\left\{F_m^e\right\} = \iint_{\Omega_e} \| N^e \|^T \cdot \left\{f^e\right\} \cdot d\Omega$$

$$\left\{\Gamma_{\Sigma}^{e}\right\} = \int_{\Sigma^e} \| N^e \|^T \cdot \left\{g^e\right\} d\Sigma \longrightarrow \text{fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas de superficie.}$$

Es obvio que, en la expresión de la matriz de rigidez de cada elemento habrá que introducir la matriz tensión-deformación elástica o la plástica, según que el elemento se encuentre en estado elástico o plástico, respectivamente.

Este proceso se repite para cada elemento, con lo que se llega a una expresión matricial global:

$$\left\{F\right\} = \| K \| \cdot \left\{\delta\right\} \qquad (4.33)$$

siendo $//K//$ la matriz de rigidez de la malla.

En cuanto a las condiciones de contorno en desplazamientos que se pueden presentar en los nodos del contorno son:

a) nodo libre ⟶ Corresponde al caso en que el dato es la fuerza exterior aplicada. Para introducir dicha condición, se sustituye el término independiente de la ecuación correspondiente por el valor de dicha fuerza aplicada.

b) nodo con desplazamientos conocidos ⟶ Se sustituyen las ecuaciones del nodo correspondiente por:

$$\begin{aligned} u_i &= u_o \\ v_i &= v_o \end{aligned} \qquad (4.34)$$

lo cual equivale a anular todos los elementos de las filas correspondientes de la matriz /K/ salvo los de la diagonal principal que se hacen iguales a la unidad. En la matriz $\left\{F\right\}$ se sustituyen los elementos correspondientes por U_0 y V_0. Como casos particulares, se incluyen los de los nodos fijos y aquellos que tienen um desplazamiento nulo en una de las direcciones.

El proceso seguido en la presente tesis es, como se ha comentado en el capítulo anterior, de tipo incremental con lo que la matriz $\left\{F\right\}$ estará formada por los incrementos de fuerzas nodales entre los instantes n y n obteniéndose como resultado unos incrementos de desplazamientos.

4.- METODO DE RESOLUCION EMPLEADO

En el caso de elementos finitos, el sistema a resolver es una matriz en banda. El ancho de la banda es proporcional al número de "desplazamientos" de un nodo y a la máxima diferencia en la numeración de dos nodos contiguos cualesquiera. Esto facilita la resolución del problema.

De las expresiones presentadas en los apartados 2 y 3 del presente capítulo se deduce que ambos procesos se reducen a la misma expresión formal:

$$\left\{F\right\} = \|K\| . \left\{\delta\right\} \qquad (4.35)$$

con la diferencia de que $\{\delta\}$ representa, en el caso de consolidación, la sobrepresión intersticial en los nodos y, en el análisis tensodeformacional, los desplazamientos nodales.

En el proceso de consolidación, se ha comentado ya que la matriz de rigidez es simétrica. Por el contrario, en el análisis en tensiones efectivas, en los elementos plastificados, la matriz incremento de tensión-incremento de deformación no es simétrica (ver anejo 1) con lo que la matriz de rigidez de dicho elemento tampoco lo será. Ello hace que, al ensamblar las matrices de rigidez de los elementos de la malla, la matriz de rigidez global no resulte simétrica.

Sería necesario disponer de un instrumento de cálculo muy potente para poder invertir directamente las matrices de rigidez que se presentan en los casos estudiados. En la presente tesis se ha utilizado un procedimiento indirecto, dividiendo la malla de elementos finitos en particiones, lo cual permite trabajar con una malla de elementos finitos adecuada. Este método ha tenido ya una amplia difusión.

La ecuación matricial, en forma esquemática es:

$$\begin{bmatrix} K_1 & C_1 & 0 & & & \\ D_1 & K_2 & C_2 & & & \\ 0 & D_2 & K_3 & C_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & D_{N-2} & K_{N-1} & C_{N-1} \\ & & & 0 & D_{N-1} & K_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix} \qquad (4.36)$$

siendo N el número de particiones.

El hecho de que la matriz $[D_i]$ no sea, en general, la matriz traspuesta de la $[C_i]$, lleva consigo la necesidad de una mayor capacidad de almacenamiento de matrices y un mayor tiempo requerido para el cálculo.

5.- APLICACION AL TIPO DE ELEMENTOS FINITOS EMPLEADO

El tipo de elemento empleado en ambos análisis es - el rectángulo con cuatro nodos, con la notación indicada en la figura 4.2.

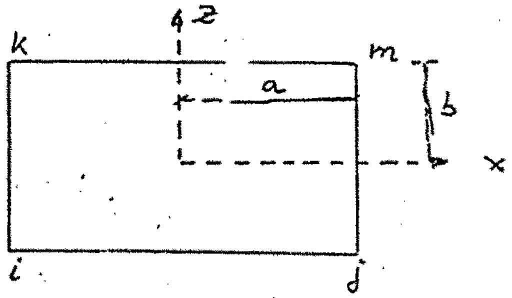


Fig 4.2.- Tipo de elemento empleado.

Tanto en el análisis de consolidación como en el - realizado en tensiones efectivas la "matriz de rigidez" de cada elemento viene expresada por una integral. El método utilizado ha sido el de realizar la integración analítica término a término introduciendo las expresiones - resultantes en el ordenador. En lo que sigue se presentan las expresiones de las matrices citadas en los apartados 2 y 3 del presente capítulo para el tipo de elemento adoptado.

5.1.- Análisis de consolidación.-

La sobrepresión intersticial en el interior de un - elemento cualquiera, está definida como:

$$u = \| N_i,\ N_j,\ N_m,\ N_k \| \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_k \end{Bmatrix} \qquad (4.37)$$

siendo:

$$N_i = \frac{1}{4ab}(a-x)(b-y) \quad ; \quad N_j = \frac{1}{4ab}(a+x)(b-y)$$

$$N_m = \frac{1}{4ab}(a+x)(b+y) \quad ; \quad N_k = \frac{1}{4ab}(a-x)(b+y)$$

$$(4.38)$$

las expresiones de las "funciones de forma".

En cuanto a las matrices //N1// y //N2// sus expresiones son:

$$\| N_1 \| = \frac{1}{4ab} \| -(b-y),\ (b-y),\ (b+y),\ -(b+y) \|$$

$$(4.39)$$

$$\| N_2 \| = \frac{1}{4ab} \| -(a-x),\ -(a+x),\ (a+x),\ (a-x) \|$$

La matriz [h] correspondiente a un elemento cualquiera viene definida por:

$$[k] = \frac{1}{6ab} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} 2b^2K_x + 2a^2K_z & a^2K_z - 2b^2K_x & -a^2K_z - b^2K_x & b^2K_x - 2a^2K_z \\ \hline a^2K_z - 2b^2K_x & 2b^2K_x + 2a^2K_z & b^2K_x - 2a^2K_z & -a^2K_z - b^2K_x \\ \hline -a^2K_z - b^2K_x & b^2K_x - 2a^2K_z & 2a^2K_z + 2b^2K_x & a^2K_z - 2b^2K_x \\ \hline b^2K_x - 2a^2K_z & -a^2K_z - b^2K_x & a^2K_z - 2b^2K_x & 2a^2K_z + 2b^2K_x \end{array}\right] \qquad (4.40)$$

mientras que la matriz $[p]$ es:

$$[p] = \frac{abc}{9} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

siendo c la expresión correspondiente según que el elemento se encuentre en estado elástico o haya plastificado.

Para la obtención de la matriz $\{F_1^e\}$ de "fuerzas nodales" del elemento se supone que Q tiene un valor constante dentro del mismo, tomando como valor representativo el correspondiente al centro del elemento. (la expresión de Q será distinta según que el elemento se encuentre en estado elástico, o bien haya plastificado). La expresión de $\{F_1^e\}$ es:

$$\{F_1^e\} = - Q.a.b. \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.42)$$

5.2.- Análisis tenso-deformacional.-

Las leyes que definen los desplazamientos horizontal y vertical en un punto cualquiera del interior del rectángulo, en función de dichos desplazamientos, son:

$$u = \frac{1}{4ab} . \left[(a-x)(b-z).u_i + (a+x)(b-z).u_j + (a+x)(b+z).u_m + (a-x)(b+z).u_k \right]$$

$$v = \frac{1}{4ab} . \left[(a-x)(b-z).v_i + (a+x)(b-z).v_j + (a+x)(b+z).v_m + (a-x)(b+z).v_k \right]$$

$$(4.43)$$

con lo que los elementos de la matriz de "funciones de forma" son:

$$N_{12} = N_{14} = N_{16} = N_{18} = N_{21} = N_{23} = N_{25} = N_{27} = 0$$

$$N_{11} = N_{22} = \frac{(a-x)(b-z)}{4ab}$$

$$N_{13} = N_{24} = \frac{(a+x)(b-z)}{4ab} \qquad (4.44)$$

$$N_{15} = N_{26} = \frac{(a+x)(b+z)}{4ab}$$

$$N_{17} = N_{28} = \frac{(a-x)(b+z)}{4ab}$$

En cuanto a la matriz $/B^e/$ de dimensiones 3 x 8, su expresión es:

$$\|B^e\| = \frac{1}{4ab}\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} (b-z) & 0 & -(b-z) & 0 & -(b+z) & 0 & (b+z) & 0 \\ \hline 0 & (a-x) & 0 & (a+x) & 0 & -(a+x) & 0 & -(a-x) \\ \hline -(a-x) & -(b-z) & -(a+x) & (b-z) & (a+x) & (b+z) & (a-x) & -(b+z) \end{array}\right]$$

$$(4.45)$$

Las deformaciones correspondientes al centro del elemento, tienen como expresión:

$$(\varepsilon_x)_o = \frac{1}{4a} \cdot \left[u_i - u_j - u_m + u_k \right]$$

$$(\varepsilon_z)_o = \frac{1}{4b} \cdot \left[v_i + v_j - v_m - v_k \right] \qquad (4.46)$$

$$(\gamma_{xz})_o = \frac{1}{4ab} \cdot \left[a \cdot \left(-u_i - u_j + u_m + u_k \right) + b \left(-v_i + v_j + v_m - v_k \right) \right]$$

y premultiplicando por la matriz //D^e// correspondiente se obtienen las tensiones efectivas en el centro de dicho e lemento (o bien sus incrementos en el caso de realizar - el análisis en forma incremental).

Las expresiones correspondientes a los términos de la matriz de rigidez de cada elemento de(dimensiones 8x8) se presentan en el anejo 2.

La matriz de fuerzas nodales equivalentes a las fuer zas de masa se obtiene por una sencilla integración a par tir de la matriz $\{f^e\}$ de fuerzas de masa. Su expresión - es:

$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} -\partial u/\partial x \\ -\partial u/\partial z \end{Bmatrix} \qquad (4.47)$$

siendo "u" la sobrepresión intersticial en cada punto. Realizando la integración, se tiene:

$$\left\{F_m^e\right\} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{6}\left[2\left(u_j-u_i\right)+\left(u_m-u_k\right)\right] \\ -\frac{a}{6}\left[2\left(u_k-u_i\right)+\left(u_m-u_j\right)\right] \\ -\frac{b}{6}\left[2\left(u_j-u_i\right)+\left(u_m-u_k\right)\right] \\ -\frac{a}{6}\left[2\left(u_m-u_j\right)+\left(u_k-u_i\right)\right] \\ -\frac{b}{6}\left[2\left(u_m-u_k\right)+\left(u_j-u_i\right)\right] \\ -\frac{a}{6}\left[2\left(u_m-u_j\right)+\left(u_k-u_i\right)\right] \\ -\frac{b}{6}\left[\left(2u_m-u_k\right)+\left(u_j-u_i\right)\right] \\ -\frac{a}{6}\left[2\left(u_k-u_i\right)+\left(u_m-u_j\right)\right] \end{bmatrix} \qquad (4.48)$$

En el caso de la presente tesis, los valores de u_i, u_j, u_m y u_k son los incrementos de sobrepresión intersticial, en los nodos del elemento en cuestión, entre dos instantes determinados. Se obtienen con ello, las fuerzas incrementales e introducir en el análisis en tensiones efectivas.