Universitat Autònoma de Barcelona

Estrategias de resolución geométrica por Insight
Un estudio exploratorio

Autor

Francisco Sánchez López

Directora de tesis:

Maria Lluïsa Fiol Mora

Coordinador de los Estudios de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias

Josep Maria Fortuny Aymemí

Director del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales

Jordi Deulofeu Piquet

Bellaterra, Abril 2013

Universitat Autònoma de Barcelona

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales

TESIS DOCTORAL

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN GEOMÉTRICA POR INSIGHT
UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Presentada por

Francisco Sánchez López

Dirigida por

Dra. Maria Lluïsa Fiol Mora

Universidad Autónoma de Barcelona

Bellaterra, Abril 2013

A mis padres Antonio y Paqui,
a mi hermano Juan Pablo,
a mi compañera Olga.

Por su magnánimo y cariñoso apoyo en el transcurso
de este viaje sin retorno.

Quizá la mejor manera de describir mi experiencia de hacer matemáticas sea imaginar que entras en una mansión oscura. Entras en la primera habitación y está oscuro, completamente oscuro. Tropiezas y chocas con los muebles, pero al mismo tiempo vas aprendiendo dónde está cada cosa. Al final, […] encuentras por fin el interruptor de la luz, lo pulsas y, de repente, ¡todo está iluminado y puedes ver exactamente dónde estás!

(Andrew Wiles, citado por Albertí, 2010, p.143)

Agradecimientos

Existen momentos en la vida que determinan nuestra existencia, como las ondas que se expanden en un remanso de agua clara. Por ese motivo quiero agradecer, a todas aquellas personas que durante estos 4 años han hecho posible la realización de esta investigación, por haber estado ahí, desde que decidí comenzar este trabajo tan apasionante

En primer lugar y de manera especial a mi directora de tesis María Lluïsa Fiol. No sólo por sus imprescindibles aportaciones científicas y didácticas en la indagación del insight, sabiendo pulir mis ideas en bruto, sino por algo infinitamente más valioso como ha sido su paciencia, dedicación, interés y visión de futuro guiándome en el camino a seguir a partir de enriquecedoras conversaciones, donde de forma exquisita transmite la complicidad latente del espíritu investigador de una excelente formadora de profesores, entre la confianza y la ilusión, de seguir hacia delante con mi investigación.

A mis padres Antonio y Paqui quiero agradecerles su apoyo incondicional en todos los momentos de mi vida en los que prácticamente sin darnos cuenta, me han llevado hasta esta investigación. A mi hermano Juan Pablo, por encontrar esos espacios de tiempo que tanto nos oxigenan cuando estamos fatigados. Y como no podía ser de otra manera y de forma muy especial a mi inestimable compañera de viaje, Olga por su magnánima comprensión en los años vividos. Su amor, paciencia, apoyo y confianza me han dado fuerzas para seguir adelante en los momentos de mayor dificultad.

A Máximo Pedraza y Jesús Martínez, por su desinteresada y experta colaboración en el diseño y elaboración de los tests interactivos que configuran parte de este trabajo. A David Rodríguez, por sus pacientes respuestas a mis preguntas y soporte en la metodología.

A mis estudiantes de 4t de ESO, por haber participado de forma activa y empática en esta investigación, interesándose en la realización de los problemas. Por dedicarme su tiempo y su trabajo.

A las profesoras del departamento de Matemáticas del instituto IES Parets del Vallés, Eulalia Mandado, Mónica Dazouza, Eva Garriga y Pilar Bueno por su apoyo y colaboración en la realización de las distintas herramientas de investigación así como por el traspaso de información de y hacía los estudiantes.

A Francisco Bellot, por sus conversaciones sobre la Educación Secundaria y la resolución de problemas en las Olimpiadas Matemáticas. A Ana Breda de la Universidad de Aveiro y Javier Díez Palomar de la Universidad de Barcelona, por animarme a participar en distintas jornadas matemáticas en Portugal y Barcelona en las que conocí a compañeros que me ayudaron en mis reflexiones sobre el insight.

A Tomas Recio, Enrique de la Torre y Jesús Murillo y al resto de compañeros de los encuentros del Grupo de Investigación Aprengeom en la SEIEM así como los encuentros Aprengeom del CIEM en Castro Urdiales, por las provechosas indicaciones en la concreción de aspectos relevantes en mi investigación.

A Josep María Fortuny, Nuria Gorgorió y al resto de profesores del departamento de Didáctica de las Matemáticas de la UAB, por haber contribuido ya desde los inicios en las clases del master de investigación en Didáctica de las Matemáticas, así como en los proyectos presentados en las jornadas "Divendres de Recerca" y otras colaboraciones, con sus valiosas sugerencias en el camino de la corrección y apoyo en formarnos para mejorar y compartir el aliciente de continuar adelante.

Al Grupo Municipal, por ser el mejor equipo de viaje para aprender, compartir y construir al servicio de los ciudadanos, los anhelos y sueños de Canovelles en el día a día.

A Laura, Celia, Antonio y a los compañeros del Master y Doctorado que aportaron su comprensión y cariño en los momentos especialmente necesarios.

A la Colla Jove, por esos buenos momentos en los que hemos compartido sonrisas, alegrías y la complicidad de seguir adelante, antídoto complaciente contra el estrés implícito.

A todos ellos gracias. Sin todos y cada uno de ellos la realización de este trabajo no hubiese sido posible.

Prefacio

(...) hay movimientos complementarios para animar a los alumnos jóvenes a jugar su propio papel en la generación del conocimiento, a hacer conjeturas, a esperar errores, a ver la necesidad de comprobaciones, a convencer, a probar. En una sociedad que cambia rápidamente, una forma flexible de pensar, más allá de la mera aplicación de algoritmos, se está convirtiendo no sólo en deseable sino cada vez en más necesaria. La creatividad sólo en su más bajo nivel ya no es aceptable.

Ervynck (1991)

¿Qué sería de la humanidad sin esos repentinos destellos de creatividad, originalidad e innovación que nos abren la puerta a nuevos descubrimientos? Posiblemente muchos de los avances de nuestra sociedad están supeditados a ellos, y en el ámbito matemático podemos encontrar muchos ejemplos que así lo corroboran. Nuestra tesis doctoral, quiere ser un ejemplo desde la educación matemática escolar de explorar, describir e identificar aquellos destellos creativos y de comprensión súbita en estudiantes de educación secundaria en el ámbito de la resolución de problemas.

La creatividad no es exclusiva de los genios sino que muy al contrario como por ejemplo afirman Trigo y otros (1999, p. 25), "*la creatividad es una capacidad humana que, en mayor o menor medida, todo el mundo posee*" o Menchén (2001, p. 62), quien plantea la creatividad como *"una característica natural y básica de la mente humana que se encuentra potencialmente en todas las personas*".

En esta línea nuestra investigación se origina a partir de la consideración, que cualquier persona puede tener la ocurrencia de un insight o destello creativo de manera repentina, a partir de una nueva reestructuración y dependiendo de una serie de factores como pueden ser el conocimiento general y específico de la disciplina en concreto, la componente visual y la componente actitudinal, entre otras importantes.

Nuestro interés se basa en identificar aquellos indicios y evidencias de insight que permiten a un conjunto de estudiantes de secundaria, resolver un determinado tipo de problemas. Para ello hemos estudiado las estrategias y resoluciones de 20 estudiantes de 4t de ESO, ante el abordaje de 10 problemas geométricos que hemos definido como problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2).

Las investigaciones en creatividad matemática, normalmente han estado contextualizadas con matemáticos de primera línea (Hadamard, 1947) o con alumnos identificados como talentosos (Krutetskii, 1976). En parte por esto, la investigación educativa sobre el insight como una experiencia matemática creativa, puntual y espontanea se ha asociado tradicionalmente con mentes brillantes. Actualmente, encontramos investigaciones como las de Liljedahl (2008a, 2008b), donde cada vez con más fuerza se constata que el insight en matemáticas se produce en situaciones de resolución de problemas o a posteriori de forma cotidiana en nuestros estudiantes.

La articulación de la investigación está compuesta por 4 bloques:
Un **primer bloque:** ***Marco teórico***, formado por tres capítulos con el objetivo de contextualizar y definir la ocurrencia del insight en la resolución de los problemas geométricos ip^2.
En el primer capítulo: *Matemáticas, creatividad y educación matemática*, describimos aquellos aspectos relevantes en el proceso creativo y en la educación matemática que pueden fomentar la ocurrencia del insight en distintos ámbitos, poniendo un especial énfasis en la resolución de problemas. En el segundo capítulo: *Insight geométrico potencialmente perceptivo*, concretamos la definición del insight que consideraremos en la resolución de los problemas geométricos ip^2, basada en la reestructuración de elementos. Y en el tercer capítulo: *Visualización y memoria visual y espacial*, referenciamos dos aspectos que juegan un papel relevante en las resoluciones de los problemas geométricos ip^2 de la investigación: las imágenes y las habilidades de visualización. Particularmente destacaremos la memoria visual y espacial en la visualización de imágenes o representaciones mentales, en la resolución de problemas y tareas geométricas interactivas.

Un **segundo bloque:** ***Diseño de la investigación***, formado por el cuarto capítulo: *El problema a investigar y metodología* en el que se concreta el problema, las preguntas y los objetivos de la investigación. Se define la Fase Previa en la que se describen los criterios de selección de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo y se realiza una recolección de 50 de ellos. Se describen las dos fases Diagnósticas de Selección y Relación que constituyen el cuerpo central de la metodología.

El **tercer bloque:** ***Fases diagnósticas de la investigación. Análisis y resultados*** está formado por dos capítulos. El quinto capítulo: *Primera Fase Diagnóstica de Selección*, consiste por un lado en seleccionar los participantes que han adquirido un alto porcentaje de las competencias básicas en matemáticas según el curriculum de Secundaria y por otro en seleccionar diez problemas geométricos ip^2 potencialmente relevantes para nuestra investigación. En el sexto capítulo: *Segunda Fase Diagnóstica de Relación*, nos centramos en el estudio de las categorías de resolución y los momentos de insight identificados en los diez problemas geométricos ip^2 seleccionados en la fase Diagnostica anterior. Paralelamente nos hemos interesado por la componente actitudinal del grupo de estudiantes hacía las matemáticas así como la evaluación psicométrica e interactiva de algunas habilidades de visualización que posiblemente podrían facilitar la resolución de los problemas geométricos planteados en la investigación. Finalmente hemos estudiado la posible relación entre los resultados obtenidos en la resolución de los problemas geométricos ip^2 respecto a la componente actitudinal y las habilidades de visualización.

Y por último el **cuarto bloque:** ***Conclusiones***, formado por el séptimo capítulo: *Conclusiones, aportaciones e implicaciones didácticas* en el que se concretan las respuestas a las preguntas de investigación. Por otro lado también exponemos los problemas abiertos y la prospectiva de investigación futura que se nos ha generado a partir de distintas reflexiones que han surgido durante el desarrollo de la investigación.

Situamos nuestro trabajo desde la perspectiva basada en identificar, explorar y describir momentos de insight contextualizados en problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo.

ÍNDICE RESUMIDO

ÍNDICE GENERAL

BLOQUE II: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

BLOQUE III: FASES DIAGNÓSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN. ANÁLISIS Y RESULTADOS

APARTADO 2: TESTS INTERACTIVOS

APARTADO 3: TEST ACTITUDES

BLOQUE IV: CONCLUSIONES

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS Y GRÁFICOS

ÍNDICE DE ESQUEMAS

BLOQUE I: MARCO TEÓRICO

CAPITULO 1

1. MATEMÁTICAS, CREATIVIDAD Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Lo primero que os sorprenderá son estas apariencias de iluminación súbita, signos claros de un largo trabajo anterior inconsciente. El papel de este trabajo inconsciente me parece innegable y se encontrarían sus huellas en otras cosas en donde es menos evidente. A menudo, cuando se trabaja en un problema difícil, no se consigue nada la primera vez que se comienza la tarea. […] Después de repente, la idea decisiva se presenta ante la mente…

(Henry Poincaré, 1983, p.259-260)

Insight occurs when the visual information suddenly is reorganized in a way that satisfies the requirements of the goal.

(Sternberg y Davidson, 1995, p.7)

En este capítulo vamos a exponer, en primer lugar las diferentes perspectivas de estudio de la creatividad en matemáticas, con el objetivo de ubicar nuestra investigación. Según distintos autores, los criterios básicos de la creatividad son: *originalidad, flexibilidad, fluidez y elaboración.* Algunos de estos criterios son los que emplearemos en la metodología de nuestra investigación y en el análisis e interpretación de las resoluciones planteadas por los estudiantes en los problemas…

En segundo lugar realizaremos una reflexión sobre la creatividad a partir de investigaciones que han estudiado la creatividad desde la educación matemática.

1.1 CREATIVIDAD Y MATEMÁTICAS

Las investigaciones sobre creatividad son escasas en comparación con otros ámbitos de estudio en educación matemática. Pero por otra parte son bien conocidas diversas anécdotas, como por ejemplo la de Arquímedes y la de Kekulé, que cuentan cómo se les presentó de forma consciente una idea especialmente creativa cuando estaban inmersos en actividades cotidianas. Un famoso ejemplo, nos explica (Rocke, 1985) que fue durante un sueño cuando al químico Kekulé se le presentó de manera súbita la experiencia de la que derivaría, uno de los grandes descubrimientos científicos en química orgánica de la historia. En él describió haber visto una serpiente formada por seis partes que se unían por la cabeza y la cola. Fue entonces cuando se dio cuenta de que la estructura de la molécula del benceno no era abierta.

> *Dirigí mi silla hacia el fuego y dormité. Nuevamente los átomos brincaban ante mis ojos. Esta vez los grupos más pequeños se mantenían modestamente en el fondo. Mi imaginación, agudizado por visiones repetidas de este tipo, podía ahora distinguir estructuras mayores, de variada configuración; largas filas, a veces más cercanamente ajustadas entre sí; todas apareándose y retorciéndose en un movimiento serpenteante. ¡Pero miren! ¿Qué fue eso? Una de las serpientes había agarrado su propia cola y la forma giraba burlonamente ante mis ojos. Como por un destello relampagueante me desperté.* (Boden, 1994, p.34)

Esta famosa visión y otras que tendría posteriormente, le sugerirían la noción de que las moléculas orgánicas se basan en cadenas de átomos de carbono algunas de ellas cerradas. Suponemos que la imaginación visual, era una habilidad que Kekulé tenía desarrollada; puesto que había sido estudiante de arquitectura antes de serlo de química.

En diversas investigaciones en creatividad, se argumenta cómo se concibió una idea brillante, original o creativa (Poincaré, 1908; Hadamard, 1947; Sriraman, 2009), pero en la mayoría de estos trabajos no se menciona ninguna imagen. Por el contrario en el caso de Kekulé no solo explica cómo se produce de forma repentina la solución sino que explicita una imagen asociada tácitamente al destello creativo.

Conocida es la anécdota de Arquímedes, cuando en el transcurso de una actividad cotidiana como es el baño, gritó ¡Eureka! al descubrir (idea feliz) que el volumen de un cuerpo sumergido equivale al del agua que desaloja.

Los trabajos e investigaciones en matemáticas generalmente desarrollan sus resultados de manera formal, pero se dice muy poco acerca de los procesos creativos matemáticos que los han generado. Es posible que muchos de los científicos busquen las respuestas a como se desarrolla el proceso creativo o idea feliz, desde el ámbito de la psicología y sólo algunos matemáticos como por ejemplo Poincaré (1908), Hadamard (1947) o Ervynck (1991) relatan de forma minuciosa y detallada sus ideas respecto a la creatividad matemática y como éstas se presentan al pensamiento consciente.

En la literatura vigente, los trabajos en creatividad matemática se clasifican (Muñoz, 1994; Gervilla, 2003; Sequera, 2007) en 4 categorías claramente diferenciadas: aquellas investigaciones que estudian la creatividad desde una perspectiva personal, la creatividad desde una perspectiva del proceso, la creatividad como producto y la creatividad desde el enfoque del ambiente o contexto. Concretamente nuestra investigación se clasifica dentro de la categoría de investigaciones que estudian la *creatividad como proceso*. En nuestro trabajo pretendemos identificar y describir algunas de las resoluciones y estrategias que pueden intervenir en la resolución de un tipo de problemas geométricos originales, innovadores y creativos que posteriormente definiremos en el *capítulo 4: El problema a investigar y metodología*, como problemas geométricos[1] potencialmente de insight perceptivo (ip^2).

1.1.1 APROXIMACIÓN HISTÓRICA A LA CREATIVIDAD EN MATEMÁTICAS

Es probable que una de las descripciones históricamente más conocidas, donde se relata como se gesta una idea creativa en matemáticas, sea el caso de Poincaré (1908). De hecho muchas de las teorías que conciben la creatividad en matemáticas desde una perspectiva psicodinámica (Sriraman, 2009), es decir que caracterizan la creatividad a partir de fases o etapas (Wallas, 1926; Hadamard, 1947; Rodríguez, 1995, Sequera, 2007) se basan en las explicaciones dadas por dicho autor.

Henri Poincaré realizó en 1908 una presentación en la Psychological Society en París titulada "*La Creación Matemática*". Esta exposición, constituye aún hoy en día uno de los planteamientos más pioneros y perspicaces (Sriraman, 2009) acerca de la creatividad matemática. En parte, ello se debe a que Poincaré fue el primer autor, del que tenemos

[1] Los criterios que definen los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2) se describen en el apartado 4.2.2 FASE PREVIA: DISEÑO PROBLEMAS.

constancia, que se planteó la génesis de la invención matemática como un paradigma de investigación en matemáticas realmente importante.

Algunas de sus ideas más relevantes inciden en que aquellas personas que poseen cierta aptitud especial hacia las matemáticas destacan por tener una atención selectiva portentosa, un buen nivel de concentración y una memoria fiel. Es a partir de esta memoria, guiada por el razonamiento cuando una persona es capaz de realizar aportaciones matemáticas, donde el orden en el que están colocados los elementos que intervienen es, a veces, más importante que los mismos elementos que intervienen. Es justo en este momento cuando Poincaré (1952) describe la importancia de la noción de la intuición. Concibe esta noción de intuición como generadora del orden matemático, que nos hace prever armonías y las relaciones inicialmente ocultas. Con el objetivo de definir distintos tipos de personas establece unas categorías, según si combinan una cierta gradación entre memoria e intuición, y por tanto pueden llegar a comprender desde las matemáticas más elementales a las más elevadas.

Cuando hablamos de intuición, de manera inevitable nos aproximamos al concepto de la invención, ¿pero qué es la invención matemática, para Poincaré?

Dicho autor explica, que inventar en matemáticas consiste en discernir, en elegir, aunque especificando que la invención matemática no consiste en construir combinaciones de elementos y procedimientos de cualquier índole, sino todo lo contrario en construir sólo las que puedan ser útiles, que no son más que una ínfima minoría. Por eso incide en que inventar es discernir y elegir adecuadamente.

Poincaré (1908) argumenta que ciertas apariencias de iluminación súbita en la invención matemática, son posibles cuando se da un periodo de trabajo intenso y consciente hacia un objetivo determinado, precedido de un trabajo inconsciente. A partir de este trabajo se pueden construir nuevas ideas, estrategias de resolución… Por este motivo considera especialmente relevante el subconsciente, por crear de forma automática gran cantidad de estas combinaciones de ideas y estrategias, que denomina inspiraciones aunque probablemente tan solo las combinaciones útiles e interesantes con cierta sensibilidad estética y matemática serían las que podrían pasar a nuestro consciente. Enfatiza que estas inspiraciones del subconsciente solamente representan el punto de partida de una idea, de una invención, que posteriormente se tendrá que desarrollar y contrastar de forma consciente.

Poincaré fue el primero en plantear una teoría que esboza determinados períodos o fases en la invención matemática y que constituirá el punto de partida de los procesos o fases de la creatividad que expondrán diversos autores en sus teorías posteriores.

A partir del marco conceptual propuesto por Poincaré, en el que la invención matemática se produce a partir de dos tipos de procesos: conscientes e inconscientes y a una cierta intuición que nos permite discernir y elegir el orden y combinación adecuada de los elementos para inventar en matemáticas, Jaques Hadamard (1947) decide iniciar su investigación en invención matemática.

En realidad Poincaré había sido pionero en relacionar la creatividad en matemáticas con el inconsciente. Actualmente la existencia y el potencial del inconsciente especialmente desde los trabajos de Freud está admitido (Freud, 1915; Froufe, 1997) si bien algunos investigadores no lo han vinculado con la invención matemática y concretamente con la idea feliz en matemáticas.

Autores como Adams (1999) o Morgado (2005) enfatizan que el inconsciente puede influir en actividades diarias muy diversas como por ejemplo recordar el rostro de una persona, identificar una jugada de ajedrez; realizar actividades psicomotrices como el caminar o montar en bicicleta; aprender algunas habilidades acústicas o lingüísticas como identificar una determinada melodía o palabra en otro idioma.

> *Aquellas iluminaciones súbitas del pensamiento, que pueden llamarse inspiraciones, no pueden ser producidas por mera casualidad: no puede haber duda sobre la necesidad de la intervención de ciertos procesos mentales previos desconocidos al inventor, o bien, en otros términos, de procesos inconscientes.*
>
> (Hadamard, 1947, p. 49)

En 1947, Hadamard inició una investigación basada en una entrevista a científicos de su época como George Polya, Claude Levi-Strauss o Albert Einstein, con la intención de profundizar en el concepto de la invención matemática y las diferentes fases implícitas en el proceso de la creación. Los resultados de esta investigación se publicaron en su obra "*La Psicología de la invención en el campo de la matemática*" en la que caracterizó de forma general el proceso creativo mediante una teoría de etapas. Su teoría es especialmente relevante, y aún hoy en día representa una de las descripciones más fiables y razonables (Liljedahl, 2008a) del proceso creativo matemático.

Hadamard (1947) plantea en su obra que la invención matemática está relacionada con cuatro etapas diferenciadas en el proceso creativo: iniciación, incubación, iluminación y verificación. La primera de estas etapas la *iniciación* consiste en el trabajo voluntario y consciente, caracterizado por la tentativa de solucionar un problema a partir del repertorio de experiencias pasadas (Schön, 1987). Autores como Feynman (1999) otorgan una gran importancia a esta fase por ser la responsable de generar las condiciones necesarias para la liberación emocional en la fase de la *iluminación*.

Después de no encontrar la solución de un problema a un nivel consciente, comienza el trabajo a un nivel inconsciente (Poincaré, 1908) en el proceso inventivo que Hadamard enmarca en la etapa que denomina *incubación*. Este trabajo a nivel inconsciente se encuentra intrínsecamente vinculado al esfuerzo consciente que lo precede.

Posteriormente puede venir rápidamente a la memoria la inspiración, que se englobaría en el proceso inventivo, dentro de la fase de la *iluminación*, donde Hadamard (1947) explicita se produce un acercamiento entre el campo consciente y el subconsciente de una persona.

En la etapa de la iluminación, esta inspiración de la que nos habla Hadamard (1947), puede reflejarse a partir de un conocimiento más o menos confuso, por consiguiente es en la siguiente etapa, en la *verificación* donde se corregirá y evaluará la idea descubierta, así como las cualidades estéticas de la presentación de ésta.

Hadamard (1947) siguiendo los pasos de Poincaré, define la invención matemática como una adecuada combinación de ideas. El problema es que existe un número extraordinario de tales combinaciones, la mayoría de las cuales carecen de interés, sólo un pequeño número de ellas pueden ser fructíferas. Todas estas combinaciones se forman en el inconsciente, ya que a priori resultan desconocidas para nosotros. Coincide con Poincaré en que inventar o descubrir en matemáticas es elegir de la masa de ideas iniciales aquellas que son realmente importantes y valiosas para nuestro objetivo. Explicita que las imágenes mentales en el pensamiento son necesarias para tener una visión simultánea de todos los elementos del argumento, para captarlos juntos dándoles a la combinación una fisonomía coherente que represente la idea.

Enfatiza el papel que juega la afectividad en la creación matemática, concluyendo que los estados emocionales pueden propiciarla o inhibirla. Parece sensato pensar, que ningún descubrimiento o invención matemática de importancia puede tener lugar sin la voluntad propia de descubrir y la componente afectiva que puede facilitar la motivación adecuada de nuestra voluntad.

> *El elemento afectivo constituye parte esencial de todo descubrimiento o invención es del todo evidente y ha sido reconocido por muchos pensadores; es claro, efectivamente que ningún descubrimiento o invención de importancia puede tener lugar sin la voluntad de descubrir. Pero, con Poincaré vemos algo más, vemos que la intervención del sentido de belleza constituye un medio indispensable de descubrir.*
> *Llegamos, pues, a la doble conclusión:*
> *Que la invención es elección, que está gobernada imperativamente por el sentido de belleza científica.*
>
> (Hadamard, 1947, p.65)

En 1954 otro de los grandes matemáticos George Polya, aborda la resolución de problemas a partir de una de las vertientes especialmente significativa en creatividad matemática: la capacidad heurística. Enfatiza que entre otras cuestiones importantes en la resolución exitosa de un problema se requiere de una cierta capacidad heurística. Tener en cuenta los distintos aspectos de un problema, las posibles alternativas y en definitiva la variedad de heurísticas que se nos pueden plantear. Desde una vertiente (Sriraman, 2009) psicodinámica Polya (1954) plantea una de las más famosas taxonomías de fases ante la resolución de un problema que posteriormente será una de las más aceptadas en la comunidad matemática.

Por otra parte, uno de los máximos exponentes de la Gestalt, (Wertheimer, 1959), realizó una investigación en la que concluían que los estudiantes que eran capaces de plantear estrategias originales o novedosas de resolución productiva[2] ante un problema tenían mayor facilidad para resolver problemas de manera original, a diferencia de los estudiantes que solo planteaban estrategias memorísticas. Afirma que la resolución de un problema mediante el método del descubrimiento *por uno mismo* es más significativo para el futuro aprendizaje de los estudiantes, que la resolución por otro tipo de métodos reproductivos.

Otro de los autores que ha contribuido de forma relevante en la descripción de las ideas relacionadas con la naturaleza de la creatividad matemática y como éstas funcionan, es Ervynck (1991). Dicho autor concibe que la creatividad matemática requiere de un contexto previo adecuado para el desarrollo creativo formado por experiencias

[2]La resolución productiva está relacionada con el pensamiento productivo, que se describe en el apartado 2.1.1 PENSAMIENTO PRODUCTIVO DE LA GESTALT

preparatorias previas en las que se pueda interiorizar una serie de conceptos matemáticos así como los procedimientos y relaciones necesarias. Considera que la creatividad matemática se caracteriza a partir de tres etapas claramente diferenciadas:

- Etapa 0: **Técnica preliminar**
  Consiste en la aplicación técnica o práctica de reglas y procedimientos matemáticos, sin tener ninguna evidencia de sus fundamentos teóricos.
- Etapa 1: **Actividad algorítmica**
  Esta etapa algorítmica está esencialmente relacionada con aplicar técnicas y procedimientos matemáticos, orientados en algún fundamento teórico previo.
- Etapa 2: **Actividad creativa**
  Es cuando tiene lugar la verdadera creatividad matemática a partir de una decisión no reproductiva que puede suponer una escisión y/o atajo en la estructura conceptual y procedimental subyacente.

Algunos ejemplos generales de creatividad en matemáticas son: la capacidad de formular una definición utilizando conceptos que se definen en una teoría anterior, o la ocurrencia de una idea o imagen en la resolución de un problema matemático. Coincidimos con Ervynck (1991) en entender la creatividad como la capacidad de crear nuevas ideas matemáticas, junto con el descubrimiento de sus relaciones mutuas.
Concibe el papel motivador del desarrollo de la creatividad matemática como fruto de una cierta interacción entre los siguientes elementos, sin necesidad de considerarlos exclusivos:

- *Comprensión*: es la capacidad de regenerar los pasos de la creatividad matemática, profundizando en la visión de los conceptos o relaciones asociados al proceso creativo.
- *Intuición*: se prevén conjeturas plausibles a partir de la formación de imágenes de un concepto o relación, curiosidad, fantasía matemática, etc.
- *Insight o inspiración*: se plantea un nuevo conocimiento a partir de reorientar aquello que es importante y de nuestro interés, así como siendo capaces de predecir o imaginar que será importante en el futuro.

- *Generalización*: depende en gran medida de la habilidad para prever que será importante en el futuro. La generalización es una forma de creatividad matemática más o menos significativa según el caso, que pretende ampliar los esquemas a un contexto más amplio. Distingue la generalización expansiva que consiste en ampliar la aplicabilidad de una teoría sin cambiar la naturaleza de la estructura cognitiva y la reconstructiva que requiere una reorganización de la estructura del conocimiento.

En la siguiente tabla 1.1.1, podemos establecer cierta analogía de las fases consideradas por Ervynck con las fases establecidas en la invención matemática según Hadamard.

Elementos de Ervynck (1991)	Fases de Hadamard (1947)
Comprensión	Preparación
Intuición	Preparación, Incubación
Insight o inspiración	Iluminación

Tabla 1.1.1: Comparación Ervynck (1991) y Hadamard (1947)

La intuición a la que se refiere Ervynck (1991) podemos identificarla en una conjunción entre las fases de preparación e incubación de Hadamard (1947). Esta conjunción podría provocar intuiciones que pueden producir el salto creativo, es decir el insight o inspiración que contextualizamos en la fase de la Iluminación según Hadamard.

Ervynck (1991) se pregunta por qué resulta tan difícil para los investigadores en didáctica de las matemáticas o para los docentes aceptar la creatividad matemática como una cualidad general más a tener en cuenta en cualquier teoría y práctica sobre educación matemática. Contestando a su pregunta, el mismo Ervynck (1991) opina que a diferencia de otras cualidades aceptadas comúnmente, como la deducción, el rigor y la exactitud, la creatividad matemática puede ser insegura o falible. Ello produce como consecuencia, que en lugar de considerar la creatividad como una propiedad intrínseca más de la investigación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en la propia docencia, el hecho de que pueda ser falible o arriesgada produce temor y se reacciona inhibiendo su posible aparición.

> *Según la opinión de Lakatos (1976), las matemáticas no funcionan haciendo avances pasito a pasito en una dirección predeterminada, sino de una manera más errática. El pensamiento matemático, en oposición a la reflexiva organización de lo matemáticamente establecido, es una actividad creativa que contiene la posibilidad del error humano. De hecho, es justamente esta posibilidad de error lo que produce los mayores avances en tales monumentos del espíritu humano.*
>
> (Ervynck, 1991, p. 52)

El miedo a equivocarnos en creatividad matemática es algo que a los profesores, padres y estudiantes les cuesta superar. Ken Robinson (2006) experto reconocido a nivel mundial en creatividad y educación, sostiene que los niños desde una temprana edad de forma natural ya son creativos, porque se atreven hasta con lo desconocido, no tienen miedo a equivocarse, y delante de una situación que les resulta desconocida, tantean, y promueven estrategias de aproximación. Normalmente el problema surge cuando se vuelven adultos, ya que la mayoría de estos niños han perdido esa capacidad innata de la creatividad, porque han adquirido apenas sin darse cuenta, el miedo a errar o como explica Adams (1999) el temor a correr un riesgo. Y obviamente de lo que estamos seguros es que si no estás dispuesto a equivocarte, nunca obtendrás un resultado original, innovador y creativo. Picasso dijo una vez, que todos los niños nacen artistas, el problema es seguir siendo artistas mientras crecemos. Coincidimos con Robinson (2006) que de forma general al crecer no adquirimos creatividad, sino que crecemos perdiéndola. Porque entre otros aspectos relevantes, nos movemos dentro de un sistema educativo que en general estigmatiza los errores, incluso en algunos casos estigmatiza plantear preguntas, sugiriendo a los estudiantes que equivocarte es lo peor que pueden hacer. Cuando un sistema educativo está basado fundamentalmente en la prohibición y corrección del error, el resultado es… que estamos inhibiendo la creatividad.

En este sentido Fiol (2004, p.172) explicita que *vivimos en una cultura que antepone los productos al proceso*. En nuestra cultura concebimos el control como un valor positivo o sinónimo de que algo está bien, por eso prácticamente sin darnos cuenta tendemos a controlarlo todo en muchos aspectos de nuestra vida. Intentamos controlar nuestra comida, nuestro trabajo… Posiblemente por esto en clase de matemáticas, normalmente, se trabajan problemas ya resueltos con el objetivo de controlar casi todas las estrategias y procedimientos de resolución que puedan aparecer. Olvidamos en el tintero, que la creatividad no se puede controlar; si inhibimos el pensamiento creativo también la posibilidad de crear e innovar resoluciones que puedan llegar a sorprendernos.

A menudo los estudiantes, docentes e investigadores consideran que en matemáticas, todo debe estar estructurado de forma dogmática, lógica, precisa, exhaustiva y por encima de todo debe ser demostrable y explicable rigurosamente. Nos olvidamos que incluso los grandes matemáticos y genios, necesitaron de un largo tiempo de tanteo, de ensayo y error, antes de poder exponer sus resultados finales bien estructurados, relacional y dogmáticamente, es decir necesitaron la posibilidad de poder errar para poder avanzar.

La creatividad matemática se nutre en el campo del ensayo y error y por tanto es inexacta, y es falible. Tenemos que poder diferenciar las formas finales de presentación de los trabajos de los investigadores matemáticos, que evidentemente exigen formalización y rigor, de las matemáticas que los maestros y profesores enseñamos a los estudiantes. Cuando hablamos de las matemáticas que se escogen para ser enseñadas desde los primeros niveles de infantil y hasta los niveles de la educación secundaria, nos referimos a un campo que abarca desde los procedimientos, los conceptos, la motivación, la heurística, el ensayo y error, etc.

Desde este ámbito, Sequera (2007) realizó una investigación sobre el reconocimiento de la creatividad matemática en la formación docente en primaria, así como la identificación de algunos rasgos creativos a partir de un estudio de casos, mediante la observación de los estudiantes de primaria en clase.

Sequera (2007) introduce el concepto de momentos de aprendizaje creativos en la acción clase *como aquellos escenarios y procesos que van transcurriendo en el desarrollo de una clase, bien sean espontáneos o planificados, que promueven la existencia de rasgos asociados a indicadores creativos en la forma de desarrollo de las tareas*. Uno de los objetivos del estudio que plantea es identificar algunos momentos de aprendizaje creativo en el aula de formación de profesores y qué tipo de acciones definen cada uno de ellos. Los cinco momentos creativos que propone son: preparación, incubación, insight, verificación y autoevaluación. Las aportaciones de su investigación son interesantes porque entre otras cuestiones importantes pone el énfasis en diferenciar entre creatividad en matemáticas y la educación matemática creativa. Concibe la creatividad en matemáticas como una aptitud que se traduce en una cierta *capacidad de combinar elementos de una forma nueva y armoniosa, que resalten su belleza, y de encontrar soluciones divergentes a los problemas que afectan a una comunidad en particular*. (p. 319). En cambio define la educación matemática creativa como el conjunto de elementos que *contribuyen a ver la matemática dentro del proceso educativo como una asignatura sorprendente, que desarrolla el pensamiento flexible, que incentiva a la invención de problemas y situaciones, que promueve la resolución de problemas en un contexto real, que incita a la imaginación, todo ello en un ambiente donde el alumno y el docente disfruten de la matemática y donde el pupilo se atreva a cometer errores y aprenda de sus errores. La educación creativa pondría en juego estos elementos*. (p. 319).

La teoría base a partir de la que se nutre la investigación de Sequera (2007) tiene influencias notables de la caracterización del proceso creativo que inicialmente propone Poincaré (1908) y que posteriormente se consolida con el trabajo de algunos autores (Wallas, 1926; Hadamard, 1947) y en general con la teoría de la Gestalt (Wertheimer, 1959).

Sriraman (2009) es otro de los investigadores matemáticos que ha profundizado en el estudio de la creatividad matemática. En su artículo "*The Characteristics of Mathematical Creativity"* se plantean algunas reflexiones, respecto las definiciones que proponen otros autores como Polya (1954) o Evrynck (1991) y Sternberg y Lubart (2000), para llegar finalmente a proponer una definición más flexible de la creatividad matemática. Sriraman (2009) concibe *la creatividad en matemáticas como la habilidad de producir un trabajo novedoso y original, mediante procesos inusuales y perspicaces que posibilitan la solución a un problema, independientemente del nivel de complejidad (p.20).* Dicho autor, coincidiendo con Sternberg (2000), establece una taxonomía sobre las diferentes perspectivas en las que se puede abordar la noción de creatividad:

1. Perspectiva mística. Cuando se percibe la creatividad como resultado de la divina inspiración o de un proceso espiritual. Matemáticos como Blaise Pascal o Leopold Kronecker concebían la inspiración a partir del concepto de dios.
   Srinivasa Ramanujan (1948) eminente matemático indio, solía decir que la diosa Namakal le inspiraba las fórmulas en sueños. Explicitaba que durante toda su vida, al

levantarse de la cama, escribía resultados y los comprobaba aunque no siempre era capaz de dar una demostración rigurosa.

2. Perspectiva pragmática. Cuando la creatividad matemática se concibe a partir de la variedad heurística al abordar la resolución de un problema. Matemáticos como Polya (1954) destacarían en este enfoque de estudio.
3. Perspectiva psycodinámica. La creatividad se entiende como la combinación de procesos conscientes e inconscientes. Se caracteriza el proceso creativo a partir de fases. El modelo de la Gestalt en 4 fases (preparación, incubación, insight, verificación) representa este enfoque de estudio.
4. Perspectiva psicométrica. Cuando evaluamos la creatividad a partir de pruebas psicométricas, como por ejemplo *The Torrance Tests of Creative Thinking* desarrollados por Torrance (1974).
5. Perspectiva cognitiva. Se concibe la creatividad a partir de las representaciones y procesos mentales del pensamiento humano. Sternberg (2000) es uno de los mayores exponentes de esta perspectiva de estudio.
6. Perspectiva social de la personalidad. Cuando la creatividad se concibe a partir de tres aspectos determinantes: la personalidad, la motivación y el ambiente sociocultural.

Coincidimos con Sriraman (2009) en que la creatividad matemática en su totalidad no se puede explicar unilateralmente mediante una de estas perspectivas, sino que posiblemente es el resultado de la confluencia y combinación de diversas variables y factores que inciden en las distintas perspectivas anteriores. Concretamente Sriraman (2009) sugiere la perspectiva de sistemas para aproximarnos significativamente al concepto de creatividad matemática entendiendo que ésta se basa fundamentalmente en la interacción entre tres grandes pilares:

1. *Individuo*. En este apartado se englobarían los antecedentes de la persona como las habilidades cognitivas y las experiencias pasadas que forman la personalidad del individuo en cuestión.
2. *Dominio*. Aquí se incluiría el dominio cultural general y específico de la materia en concreto.
3. *Campo*. Se incluyen los profesores, maestros y expertos que forman el ámbito social que puede validar la creatividad matemática.

1.1.2 ÁMBITOS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE CREATIVIDAD

> Una persona creativa puede mirar el mundo de una forma diferente a como lo ve otra gente. Si esa persona tiene éxito en expresar y comunicar su especial percepción personal, entonces la llamamos creativa y le asignamos un valor a su contribución, que permite que algunos de nosotros veamos el mundo a través de una perspectiva distinta. (De Bono, 1987, p.61)

Autores como Goleman, Kaufman y Ray (1992) caracterizan el concepto de creatividad a partir de reflexionar sobre las actitudes de los estudiantes sujetos de su estudio. Conciben que buscar el espíritu creativo en algún sitio exterior a sí mismo, es buscar en el lugar errado, el espíritu creativo solo se puede encontrar en el interior de uno mismo. La clave radica en liberarlo, por ello nos alientan a despertar actitudes que nos hagan sentir más vivos. Para estos autores, la creatividad se define básicamente como una actitud. Otros autores como Goñi (2000) exponen que la creatividad es una forma ideal de comportamiento, que puede contribuir significativamente de forma positiva a la evolución de la sociedad. Sin embargo, Monreal, (2000) concibe la creatividad fundamentalmente como la capacidad para transformar la información, mediante nuevos esquemas mentales que puedan promover ideas o productos innovadores que consoliden soluciones divergentes en la resolución de problemas.

Es sorprendente lo poco cuestionadas que han sido las definiciones de creatividad aportadas por los diferentes autores en la literatura vigente. Tenemos la sensación de que, dada la complejidad y ambigüedad del concepto en cuestión en muchas ocasiones uno se ve abocado a aceptar sólo una de las múltiples definiciones. Gervilla (2003) expone que "*La creatividad abarca un campo conceptual tan amplio que hasta el momento ninguna definición ha podido describirla totalmente*" (p.9). Una de las mejores reflexiones sobre las múltiples definiciones dadas sobre el concepto de creatividad, es sin duda la aportada por Agustín de la Herrán Gascón (2009) en su artículo *Contribución al concepto de creatividad: un enfoque paquidérmico.* Este autor expone que hasta el momento muchos investigadores han definido la creatividad mediante sinónimos, características propias e indicadores relevantes que les han servido como representativos. Pero, el problema precisamente radica aquí, en que se han empleado indicadores representativos para definir la creatividad focalizando un solo aspecto, y obviando que ésta abarca un campo conceptual tan amplio que hasta el momento ninguna definición ha podido hacerlo totalmente de forma satisfactoria. Tal y como expone, "*una cosa es sostener que la parte del elefante es así o es esto y otra generalizar una característica o una expresión al todo*" (Herrán Gascón, 2009, p.46). Es decir una interpretación correcta de la creatividad puede expresarse, a través de enfoques múltiples: mediante una cierta sensibilidad para mirar de forma diferente o tener un enfoque distinto, mediante una cierta divergencia de pensamiento, capacidad para resolver problemas, pensamiento lateral, innovación, generación de ideas, imaginación y pensamiento productivo. Todos estos indicadores por separado son creatividad, pero la creatividad entendida de forma integral, no puede identificarse unilateralmente con uno de ellos. Estos indicadores son expresiones de la creatividad que en determinados momentos se pueden dar y en otros no. Por ejemplo, la creatividad puede darse como equivalencia de pensamiento divergente (Guilford y otros, 1994) en algunos casos. Pero, ¿qué entendemos por divergencia de pensamiento? Autores como Herrán Gascón (2009) la definen como la capacidad que tiene un individuo para dar múltiples respuestas a situaciones o problemas, más allá de lo convencionalmente establecido o de lo dado por conocido, lo que supondría incorporar actitudes como la capacidad crítica, la imaginación, la curiosidad, la tendencia al cambio, etc. Por tanto una persona de pensamiento divergente, entendemos que puede dar múltiples respuestas no habituales ante una situación o problema, será más crítica e innovadora, y no permanecerá en lo convencionalmente dado. Howard Gardner (1995, p. 38) considera que "*la idea clave en la concepción psicológica de la creatividad, ha sido la de pensamiento divergente*".

Por el contrario, la convergencia de pensamiento, asociaría características opuestas: aceptación, convencionalismo, tendencia a la respuesta única o más cierta, tendencia a actuar tal y como las cosas se entienden normalmente eficaces, identificación con la norma, sensación de dominio de la situación, etc.

Ya el propio Guilford (1962) había argumentado en cierta manera que la creatividad en realidad se asocia a dos categorías de actividades productivas:

1. Divergente: cuando ante la resolución de un problema se buscan todas las soluciones posibles, se descubren varias alternativas originales, innovadoras, y válidas.
2. Convergente: cuando ante la resolución de un problema, se busca objetivamente la solución más adecuada.

Observamos que, aunque teóricamente los dos conceptos constituyen una dualidad en toda regla, en la práctica se identifican una serie de consideraciones sobre el binomio convergencia-divergencia que nos orientan a la superación de esta dualidad:

a. En la realidad ninguno de los dos polos se da en estado puro para todos los ámbitos de conocimiento, circunstancias y acciones.
b. Distintos autores (Guilford y otros, 1994) ya indicaban que una persona creativa era aquella que sabía utilizar la información disponible y solucionar problemas.
c. En la mayoría de casos predominantemente divergentes, aparece algo así como una área de control de la divergencia, que con el paso del tiempo se va orientando a la convergencia.
d. La vida social y personal requiere de un equilibrio, más espontaneo y autoconsciente, entre ambos.

Es posible que una de las razones de esta equiparación parcialmente errónea entre creatividad y divergencia de pensamiento pueda ser debida a una interpretación equivocada de la lectura del trabajo de Guilford (1962). Ya que a partir de él otros investigadores han obtenido registros en que las personas más creativas presentaban un pensamiento más divergente, mientras que las menos creativas presentaban un pensamiento especialmente convergente. Otros autores como Fernández Huerta (1968) desarrollaron una línea de investigación en la que reflexionaron sobre esta dualidad.

Por tanto, la creatividad no es del todo identificable con la divergencia de pensamiento, ya que también es posible una creatividad desarrollada sobre el pensamiento convergente. Exponemos a continuación diversos ejemplos elaborados por Herrán Gascón (2009) de convergencia creativa:

1) En el test perceptivo gestáltico, la creatividad emerge cuando se ha de descubrir una figura camuflada entre otras figuras y líneas.

2) Cuando un equipo forense intenta reconstruir la forma de la muerte de una víctima, están aplicando su conocimiento y su creatividad a unas tareas obviamente convergentes.

3) La creatividad puede consistir en la generación de una idea especialmente original, ante la resolución de un problema, que por su unicidad, no se pueda interpretar como divergencia.

De este tercer ejemplo encontramos autores como Perelman (1975), Wertheimer (1959) o Gardner (1989) que han trabajado en la elaboración y realización de problemas especialmente originales, cuyas resoluciones se fundamentan en ideas brillantes, innovadoras y convergentes.

Desde nuestro punto de vista, consideramos que la creatividad es divergencia, pero hemos de ser cautos porque no sólo es divergencia. A nuestro parecer, lo que caracteriza la creatividad es *ese pensar mejor que permite ir más allá de lo común o lo aceptado, divergiendo, convergiendo, avanzando en paralelo, saliéndose por la tangente, reculando, permaneciendo o haciendo varias de éstas y otras cosas a la vez.* (Herrán Gascón, 2009, p.53)

Podríamos seguir dando distintas definiciones de la creatividad dependiendo de la perspectiva de estudio, ya que no hay una definición estándar. Herrán Gascón (2009) concibe que la creatividad, es un concepto tan ambiguo que varía según el enfoque, aplicación e incluso ámbito en el que se desenvuelva cada autor. Por otro lado Saturnino de la Torre (2006, pp. 187-188) explicita que Sikora (1979) nos habla de más de cuatrocientos significados distintos asociados al termino *creatividad.*

> *La creatividad, aunque difícil de definir, se estudia desde diferentes ámbitos, mediante teorías propuestas por reconocidos investigadores, las cuales sirven de apoyo para recolectar información pertinente, según las orientaciones de sus trabajos basados en la persona creativa, el proceso y el producto creativo.*
>
> (Chacón, 2005, p. 26)

Otra de las cuestiones que posiblemente favorece la ambigüedad del constructo de la creatividad, es que afecta a muchas de nuestras actividades en la vida cotidiana y esto puede producir discrepancias. Actualmente de manera general el estudio científico de la creatividad ha sido asumido por la psicología y sin su aportación la creatividad nos seria ininteligible. Coincidiendo con Monreal (2000) concebimos que la psicología no es la ciencia de la creatividad pero la ciencia de la creatividad no es posible sin la psicología.

Desde otra perspectiva, encontramos investigaciones muy críticas con el propio estudio de la creatividad defendiendo que su estudio científico es prácticamente imposible. Este es el caso de Roger Penrose (1994) quien afirma que solo los conceptos científicos pueden cuantificarse y por tanto son computables, pero la creatividad no se puede cuantificar pues no es computable. Es decir que no se puede realizar el estudio científico de la creatividad. En cambio diversos autores como Torrance (1974) y Monreal (2000) consideran que parece extraño este punto de vista, ya que la historia de la investigación en creatividad nos muestra abundantes estudios psicométricos, que consisten precisamente en intentar cuantificar la conducta creativa.

Otros autores, siguiendo una línea de crítica a la creatividad, como por ejemplo Popper (1956) exponen que la inspiración como parte del proceso creativo debe asociarse a un sustrato fundamentalmente irracional y que el producto creativo es un nuevo constructo original e innovador del que no tenemos ningún conocimiento anterior. Por esto, considera que la creatividad es por sí misma impredecible.

> *Una cosa es sugerir que las nuevas ideas son útiles, provechosas y estimulantes, y otra muy diferente es sugerir que se puede hacer algo deliberadamente en lo que se refiere a tenerlas. Nadie discrepará en cuanto a la primera premisa, pero la mayoría sí lo hará en cuanto a la segunda.* (De Bono, 1974, p.37)

De Bono (1974) expone que el hecho de generar nuevas ideas, no depende de la casualidad o de la suerte, sino que hay personas a las que se les ocurren muchas más ideas que al resto. Esto tampoco es azar. Esta capacidad está relacionada con una determinada manera de pensar asociada al pensamiento lateral y divergente. Dicho autor expone la metáfora de que no es posible cavar un agujero en un sitio diferente cavando más profundamente en el mismo agujero. Con objeto de dar a entender que la herramienta para cavar es el razonamiento y la lógica, pero sin embargo esta no tiene sentido sin la herramienta que decide donde cavar, la creatividad. Al respecto, infiere (De Bono, 1992) que se ha avanzado muy poco en el estudio de este sustrato de ideas y decisiones que constituyen la creatividad debido en gran parte a que la mayoría de ideas brillantes que nacen como resultado de la originalidad, de la casualidad o del error, en la literatura científica, deben ser presentadas siempre de forma cuidadosamente dogmática y lógica; inhibiendo por tanto esta creatividad, al no dar importancia a cómo sucedió esta idea innovadora (Ervynck, 1991).

A pesar de la no coincidencia sobre si la creatividad es divergente o convergente, o las dudas sobres su posible estudio científico, la creatividad es un ámbito de estudio en auge. La creatividad en educación matemática tiene actualmente un gran impacto y especialmente a nivel internacional. Prueba de ello son los diferentes congresos celebrados y anunciados donde la creatividad tiene un espacio, en algún grupo de investigación, como por ejemplo el ICMI-EARCOME 3 (The Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education) celebrado en CHINA en el 2005 con un simposium dedicado a la creatividad, o el CERME 7 (The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) celebrado en Polonia en el 2011 con un grupo de investigación dedicado al potencial matemático, creatividad y talento o el ICME 12 (the International Congress on Mathematical Education) celebrado en Seoul en el 2012 con un grupo de investigación dedicado a la creatividad en educación matemática o La 7ª Conferencia Internacional sobre creatividad en Educación Matemática (MCG7) realizada en Korea en el 2012, en el que investigadores en matemáticas de distintos países se reúnen con el objetivo de fomentar y apoyar el desarrollo de la creatividad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las habilidades necesarias de los estudiantes para aplicar los conocimientos matemáticos de manera innovadora y creativa. Actualmente está pendiente la 8ª Conferencia Internacional sobre creatividad en Educación Matemática (MCG8) para el 2014, organizada por el grupo internacional de creatividad y talento matemático. Todos ellos son congresos de renombre internacional que ponen de manifiesto la importancia de seguir investigando la creatividad en educación matemática.

Ya en 1975 Taylor clasificaba en siete grandes categorías las investigaciones en creatividad existentes en la literatura: 1. La creatividad en su génesis epistemológica y en la formulación de problemas; 2. La creatividad en su proceso; 3. La creatividad en sus productos; 4. La creatividad en relación a la inteligencia; 5. La creatividad en relación a la salud mental; 6. La creatividad en relación a la personalidad; 7. La creatividad en relación a los contextos.

Así mismo, Urban (1995) denominaba *4P- E Structure* a la estructura formada por los componentes: **p**roblema, **p**ersonalidad, **p**roceso, **p**roducto y entorno, que intervienen en el pensamiento creativo.

Aunque la taxonomía más aceptada en la comunidad científica (Mooney, 1963; Brown, 1989; Muñoz, 1994; Gervilla, 2003; Sequera, 2007) es la que clasifica las investigaciones en creatividad en cuatro categorías según el objeto central de estudio. Existen autores que ponen el énfasis en investigar aquellos aspectos del *ambiente* que pueden potenciar o inhibir la creatividad; otros ponen el acento en caracterizar la creatividad mediante el estudio del *producto*; otros se dedican especialmente a investigar en profundidad los *procesos* y por último hay autores que se centran en la *persona* y en sus rasgos psicológicos para comprender su comportamiento creativo.

A continuación describiremos estas cuatro categorías de estudio con detalle.

1.1.2.1 CREATIVIDAD COMO AMBIENTE CREATIVO

En esta categoría se engloban todas aquellas investigaciones que estudian las circunstancias, criterios o razones que pueden promover o inhibir el potencial creativo de un individuo en determinados contextos. Particularmente en la literatura revisada se enfatizada en la importancia de investigar entornos como el familiar, cultural y escolar con el objetivo de potenciar los rasgos creativos de las personas. ¿Qué elementos suponen un factor que influye positivamente en la conducta creativa de las personas? Según el medio donde se desenvuelva el individuo los criterios para potenciar su conducta creativa pueden variar significativamente. Estos criterios o circunstancias, en definitiva, forman *el medio* que puede desarrollar el potencial creativo de una persona que se desenvuelve en una disciplina concreta. Este medio es lo que algunos autores denominan: ambiente, contexto, entorno o clima en sus respectivas investigaciones en creatividad.

Algunos autores (Prieto, López y Ferrándiz, 2003) presentan criterios para fomentar el potencial creativo de los niños en el contexto escolar y familiar. En el ámbito escolar plantean destrezas para enseñar a los niños a liberar su mente y ser flexibles en la resolución de problemas inusuales; del mismo modo proponen una mejor valoración de los productos creados en el contexto escolar que no de aquellos que son resultado de la mera reproducción del conocimiento. En el contexto familiar, consideran fundamental la confianza y el apoyo que se debe prestar a los niños para favorecer el desarrollo de su potencial creativo.

Los entornos mayormente aceptados y estudiados en la literatura vigente en el campo del ambiente posiblemente creativo son: el contexto escolar, el contexto familiar, el contexto laboral y el contexto socio-cultural del país donde se realiza la investigación.

Desde la perspectiva del ambiente creativo, el paradigma consiste en investigar que propiedades o características del entorno cultural, laboral, escolar o familiar, así como que periodos de la vida de una persona que se desenvuelva en estos contextos, pueden estimular o inhibir la aparición del pensamiento creativo. Por ejemplo, en el medio social y cultural, Murcia (2003) expone que hay investigaciones que demuestran de manera concluyente la influencia de estos medios en los procesos de producción creativa. Pero para otros autores como Monreal (2000), el estudio de la creatividad como ambiente es muy complicado metodológicamente. Argumenta que es imposible controlar la forma cómo cada persona ha vivido el ambiente en el que se ha desarrollado, aunque menciona estudios realizados desde el enfoque ambiental que han aportado datos cualitativos para la psicología social de la creatividad.

Por nuestra parte una de las aportaciones realizadas desde el contexto familiar, fue el articulo *Some strategies of the family environment to enhance creativity* que presentamos (Sanchez, 2011b) en el Congreso FAMA (Family Math for Adult Learners) y publicado posteriormente en *Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics' achievement* (Díez-Palormar y Kanes, 2012). En este artículo exponemos algunas experiencias y anécdotas familiares de científicos, a partir de las que reflexionamos sobre algunas estrategias del entorno familiar que pudieron fomentar su creatividad matemática.

> *We believe that since the family community, can promote creativity in mathematics encouraging attractive questions, as simple or not as simple puzzles, make attempts to model situations of daily life, seek new forms and further enhance the bright results, imaginative efforts, strengthen self-confidence, promote the formulation of open questions independently if they know or not the answer, and so on. In the family community, the fact of sharing imaginative ideas, false starts or not, to answer open questions will help the young student to have a more creative vision of mathematics.*
>
> (Sanchez, 2012a, p.10)

Algunos de los autores que han realizado aportaciones significativas, desde la perspectiva ambiental de la creatividad, son:

- Sternberg y Lubart (1997) plantearon dos enfoques distintos respecto a como el contexto puede incidir en el potencial creativo de una persona pero que pueden complementarse. Contemplan que un ambiente, construido a partir del adecuado estimulo y apoyo, puede facilitar la aparición de la creatividad. Aunque también, un ambiente formado por contextos difíciles o incluso represivos, podría desplegar y estimular la creatividad. Observamos como los dos planteamientos propuestos tienen consecuencias prácticas tanto en la formación del niño o joven en su ámbito escolar o familiar así como en la del adulto en los ámbitos profesional, social o familiar. Una complementación adecuada de los dos ambientes, sería el contexto idóneo para fomentar y facilitar las apariciones de ideas y propuestas creativas por parte de los estudiantes. En cualquiera de los casos, nos parece lícito pensar que es preferible contar con un contexto que estimula y valora la creatividad en la medida adecuada, junto con aquellos obstáculos en el camino del contexto, que sin llegar a la desmotivación, pueden permitir estimular de manera más eficaz el potencial creativo de los estudiantes.

- El enfoque ambiental de Amabile (1996) consiste en la motivación de la creatividad mediante la influencia de aquellos factores socioambientales que valoran un producto final como original e innovador. Propone que tanto la motivación intrínseca, esa que requiere de un estímulo interior para asumir con persistencia tareas creativas, como la motivación extrínseca, esa que requiere de algo del entorno a cambio de la actividad realizada, pueden ser una buena guía de la creatividad si se logran en la combinación adecuada. Las personas pueden ser más creativas cuando se sienten motivadas por el interés, la satisfacción y el reto que representa el trabajo en si mismo que no por presiones externas. Expone también que la motivación extrínseca por si sola puede perjudicar el potencial creativo del individuo si básicamente es algo que se le ha impuesto desde el entorno cultural, social, escolar, familiar etc. Esto es, que la motivación extrínseca en ausencia de la intrínseca puede minar la creatividad, tan solo la composición adecuada de ambas puede lograr intensificar el desarrollo creativo de la persona. En términos generales, plantea la necesidad de estimular más la motivación intrínseca, pero buscando también resultados positivos mediante la motivación extrínseca, que puede ofrecer el entorno.

- A partir de una teoría de la creatividad más contemporánea, Csikszentmihaly (2000) plantea el enfoque de sistemas, donde sugiere que la creatividad es un proceso que puede observarse en la interacción entre el individuo, el dominio (contexto cultural) y el campo (contexto social). El campo o contexto social, está formado por aquellos expertos del dominio cuya finalidad consiste en validar si una idea nueva puede incluirse en un determinado dominio. Por ejemplo el dominio sanitario está formado por una serie de reglas y procedimientos. Csikszentmihaly (2000) expone como ejemplo de creatividad cuando un individuo propone una nueva idea que supone un cambio en el contenido de un dominio y posteriormente esta es aceptada y seleccionada por el campo o contexto social para su inclusión en el dominio. Las ideas nuevas que pueden surgir en un dominio, a partir de cambios significativos, podrán aceptarse y adaptarse como ideas creativas si no son sancionadas por los expertos del contexto social o campo. Por ejemplo, en matemáticas, un número reducido de investigadores expertos en 1994 certificó la validez de la demostración del último teorema de Fermat realizado por Andrew Willes.

En general la conclusión de los autores comentados en este apartado, apunta a reconocer que el ambiente social, escolar, familiar y cultural puede ser relevante para el estímulo creativo de cualquier persona. Lo ideal es tener un entorno positivo que promueva y potencie el desarrollo creativo del individuo independientemente de cual sea el ambiente de desarrollo de este. Para esto es fundamental reconocer qué factores estimulan y bloquean la creatividad en cada uno de los posibles ambientes.

1.1.2.2 CREATIVIDAD COMO PRODUCTO CREATIVO

Las investigaciones que se engloban en esta categoría, es decir aquellas que plantean la creatividad desde la perspectiva del producto o resultado final, estudian qué indicadores y criterios se emplean con el objetivo de reconocer e identificar cuándo un producto o resultado final puede considerarse creativo. Sriraman (2009) explicita algunas reflexiones interesantes sobre el concepto de producto creativo en matemáticas que proponen Sternberg y Lubart (2000). Estos autores conciben la creatividad como la capacidad de producir un resultado creativo. Entendiendo como resultado o producto creativo, un trabajo inesperado, original que sea útil y adaptativo. Sriraman (2009) discrepa en cuanto algo creativo en matemáticas pueda ser o no útil. Nos preguntamos por tanto, si cualquier producto creativo en matemáticas que ha sido generado a partir de ideas originales y brillantes, es útil en términos generales. Dicho autor argumenta al respecto el descubrimiento de la demostración del último teorema de Fermat. Podríamos afirmar que la demostración de Andrew Wiles del último teorema de Fermat constituye uno de los últimos hallazgos creativos en matemáticas confirmado por los expertos aunque como sugiere Sriraman (2009) con poca utilidad y aplicación hasta el momento. Entonces, ¿Qué indicadores o criterios debe tener un resultado o producto para ser considerado creativo? Según Guilford (1962), Muñoz (1994), Romo (1997), Monreal (2000), Gervilla (2003) y Sriraman (2009) los resultados o productos creativos se pueden analizar desde diferentes indicadores o criterios como la novedad, la elaboración, la fluidez, la flexibilidad y la utilidad.

Por ejemplo Guilford entre otros indicadores importantes, concibe la novedad como aquello inusual, aquello que no es frecuente o estadísticamente raro. Otros autores como Romo ponen el énfasis en que los resultados o productos creativos han de ser cosas que dispongan a la vez de novedad y valor. Monreal expone que se requieren al menos dos indicadores para poder evaluar un producto como creativo. Por un lado el indicador de novedad y por otro el indicador de valor y utilidad. Describe la novedad como un indicador necesario pero no suficiente, diferenciando entre dos tipos de novedad: la novedad en relación al individuo capaz de generar productos nuevos respecto a los que él mismo conoce y la novedad en el sentido histórico de la creatividad, entendida como la auténtica y real, ya que esta produce resultados históricamente nuevos. Estos últimos serán más valorados por la comunidad científica y social ya que suponen un avance cualitativo en la mejora del conocimiento y aún más importante en el legado al futuro.

> *[…] Cuando afirmamos de un sujeto su calidad y potencial creadores lo hacemos a partir de sus productos: si los desconocemos, no tenemos ninguna razón para afirmar que un sujeto es o no creador […] los productos se convierten en el criterio principal y observable que nos permite diferenciar al creativo del no creativo.*
>
> (Monreal, 2000, p.46)

Varela y otros (1991) proponen un estudio donde han reconocido e identificado distintas dimensiones para evaluar un producto creativo. Los dos criterios principales que plantean son la *originalidad y la eficacia*. Por originalidad conciben la novedad que conlleva un producto con relación a otros, así como la frecuencia o infrecuencia estadística. En relación al criterio de eficacia entienden que refleja el grado en que dicho producto resuelve una situación problemática. De manera tácita conciben que un resultado creativo es más eficaz en cuanto más inconvenientes, de partida o no, resuelva sin incorporar otros nuevos.

En segundo lugar, con objeto de discernir más fácilmente si un resultado es creativo o no, se establecen otros criterios (Varela y otros, 1991) también importantes que define como la *parsimonia, la germinalidad, la transformacionalidad y la elaboración*.

Describe la *parsimonia*, incidiendo en que el resultado o producto final se construya o se forme de la manera más sencilla posible. Con respecto a la *germinalidad*, podría suceder que una idea no tenga demasiado interés aparentemente, pero que tras un proceso de elaboración y perfeccionamiento adecuado si lo tendría. El conjunto de ideas potencialmente interesantes para el ambiente donde se desarrolla el resultado creativo, constituiría la germinalidad, a la que nos referimos. Otro criterio secundario, pero no menos importante que los anteriores, es la *transformacionalidad*, que vendría a reflejar el grado en que un resultado creativo representa un cambio en algunos de los ambientes donde se desenvuelve. Y por último, la *elaboración*, determina el grado de complejidad y detalle que presenta finalmente el resultado creativo.

Otra investigación interesante que estudia la creatividad como producto la realizó Rodríguez (1995) quien distingue tres categorías según si el nivel de creación, puede trascender a otros colectivos sociales: a) Cuando el resultado creativo solo tiene valor básicamente para la persona en concreto; b) Cuando el resultado creativo es capaz de trascender más allá del ambiente personal, a ambientes profesionales por su valor; c)

Cuando el resultado creativo puede trascender de ambientes profesionales para permanecer válido como un resultado históricamente nuevo. Esta definición es también compartida por Monreal (2000).

En términos generales, las investigaciones sobre creatividad como producto, nacen de la observación final del proceso y del resultado obtenido, descubriendo en él unas determinadas características que sirven de base de estudio para la creatividad. Estás características se definen como criterios o indicadores, que según cada autor pone el énfasis en unas u otras, o en una combinación de ambas. Normalmente las aportaciones de estas investigaciones se centran en la comprobación de unos indicadores característicos y sus relaciones dependiendo de donde se desenvuelva el producto creativo.

1.1.2.3 CREATIVIDAD COMO PROCESO CREATIVO

> *El paralelismo entre cualquier situación en que se pretende resolver un problema y el pensamiento creativo está en que en ambos casos el individuo o tiene que desarrollar y aplicar una nueva estrategia o tiene que transformar el estímulo inadecuado en otro adecuado al caso y aplicarlo.*
>
> (Guilford 1967, p. 435)

Los trabajos e investigaciones que se clasifican en esta categoría, son aquellos que estudian la creatividad bajo la perspectiva del proceso creativo. Se dedican a identificar y estudiar cuales son las etapas o fases que se requieren para llegar a elaborar un producto creativo. Autores como Goñi (2000) argumentan que al concepto de proceso creativo, se le pueden atribuir diversos significados ya que podría comprenderse como una secuencia de pasos o etapas utilizadas para resolver un problema o sencillamente podría representar un cambio perceptual rápido o la transformación que se traduce en una acción determinada cuando se produce una nueva idea o solución a una situación desconocida o problema. No obstante, establece un conjunto más amplio de significados, describiendo también, que *un proceso creativo puede referirse a las estrategias o procedimientos que utilizan las personas creativas, de manera consciente o inconsciente, para promover o producir una nueva idea o combinación, significado, relación, percepción o transformación*. Probablemente la definición explicita de proceso creativo en matemáticas, ha sido abordada por pocos autores, por interesar más generalmente el resultado final que no el cómo se ha producido este. En contraste se posee la descripción detallada hecha por algunos autores que han explicado las etapas o períodos del proceso creativo según su propia experiencia, como es el caso de Poincaré (1908) u otros autores como Wallas (1926) o Hadamard (1947) que plantearon sus investigaciones a partir de las explicaciones dadas por Poincaré (1908).

En todo proceso creativo se recurre a las experiencias anteriores, se emplea la información y recursos de que disponemos, se combinan y se trasladan a la configuración de una nueva estructura (Arnold, 1964) como de forma similar se actúa para resolver determinados problemas. Particularmente, Arnold (1959) atribuye que la solución entendida como proceso creativo debe ser algo más que una sencilla adición de elementos. La nueva combinación que acaba promoviendo el producto creativo, debe ser intrínsecamente más que la suma de los elementos utilizados.

Entre la resolución de determinados problemas y la activación de un proceso creativo, a veces, se ha asociado un cierto paralelismo, desde las formas de abordaje, los tipos generales de procedimientos hasta los modos de comportamiento, que influyen en la búsqueda de la solución. Encontramos autores especialmente interesantes como Durkin (1937, citado en Landau, 1987) que hablan de: a) tentativa y error, b) reorganización perceptiva y c) análisis progresivo.

a) La «tentativa y error» se describiría como el método del ensayo y error, la capacidad heurística de tantear con planteamientos o actuaciones que no se han establecido antes. Posiblemente, la comprensión efectiva puede darse después de poner en práctica la tentativa y error.

b) La «reorganización perceptiva o visión repentina» se produce retrospectivamente a ese periodo de prueba y error. Es cuando desaparece la confusión que existía hasta entonces y la persona es consciente de concebir la posibilidad de prever y entender una estrategia que puede o no conllevar a la resolución exitosa, acompañada de un estado de excitación y de un sentimiento de satisfacción y alivio.

c) El «análisis progresivo» consistiría en la planificación rigurosa de la estrategia concebida. Este periodo concentra la atención en el objetivo perseguido, y la exhaustividad de los pasos y requisitos necesarios para alcanzarlo.

Según las declaraciones de científicos y artistas, las investigaciones que han estudiado el proceso creativo, pueden dividirse en dos grupos claramente diferenciados, de acuerdo con su desarrollo: las que plantean un camino organizado y las que promueven una vía inspirada. El primer grupo concibe que el proceso creativo se desarrolla lentamente, paso a paso, de manera gradual (Arnold, 1959). El segundo grupo considera que el proceso creativo es debido al acceso inspirado, y parte de él tiene lugar en un plano inconsciente y no siempre es posible identificar sus elementos. Esta perspectiva estaría relacionada con la reorganización perceptiva que nos plantea Durkin (1937, citado en Landau, 1987).

Existen muchas descripciones de este segundo grupo, del acceso inspirado como proceso creativo, aunque la más aceptada es la división en cuatro etapas. Algunos autores (Poincaré, 1908; Wallas, 1926; Hadamard, 1947; Goleman y otros, 1992; Sequera, 2007; Sriraman, 2009) hablan de fases o periodos o etapas o estadios, pero de forma unánime todos están de acuerdo en que no siempre se trata de etapas claramente delimitadas en el tiempo, pues a menudo pueden superponerse. Las cuatro etapas son:

1. Preparación

La etapa de preparación consiste en la búsqueda de información para abordar un problema. Para ello se requiere de experiencias pasadas y de la recolección de una amplia gama de datos, procedimientos y estrategias sobre las que sea posible crear una base suficientemente extensa para construir el proceso creativo. Taylor (1959) expone que esta amplia base constituye la materia prima que va a determinar la calidad del proceso creativo. Marksberry (1963) sugiere que esta etapa comienza en el momento en que aparece el impulso hacia la actividad y que puede durar dependiendo distintos factores como los conocimientos generales y específicos acerca del problema, los hábitos de la persona, el tipo de problema, etc. Goleman y otros (1992) argumentan que es importante ser receptivo en esta etapa y que un posible obstáculo, se produce cuando la persona está habituada a hacer las cosas de manera reproductiva, es decir de la misma forma, originándose el fenómeno que en psicología se denomina fijación funcional.

2. **Incubación**

Esta etapa de la incubación hace referencia a la búsqueda de una solución, a partir de los datos almacenados en la memoria, las experiencias acumuladas en el inconsciente, la combinación de ideas, esquemas y asociaciones impredecibles que pueden representar para la persona un tiempo de inquietud y frustración, que generalmente va acompañada de una notable tolerancia a la incertidumbre, si se quiere obtener resultados satisfactorios. La incubación suele manifestarse a través de la intuición. Acostumbra a dar buenos resultados, cuando el problema se deja de lado por un tiempo dedicando la atención a otras tareas. Poincaré (1908) considera que esta fase sucede por completo en el inconsciente.

3. **Visión o iluminación**

La etapa de la iluminación es la que está relacionada con la ocurrencia del *insight*. Esta etapa precede a la incubación donde se almacena la información, relaciones y estrategias que de forma repentina se combinan y transforman en un conocimiento claro y coherente.

Desde una perspectiva genérica, Palma y Cosmelli (2008) explicitan que el insight está relacionado con la adquisición de un conocimiento nuevo originado por una visión interna más profunda, respecto de algo que antes era inaccesible y que se vive con novedad por quien la experimenta.

Frecuentemente la experiencia del *Aha!* o el *Eureka*, se ha descrito por distintos matemáticos mediante el proceso creativo. Gauss la concebía como el "*destello repentino de un relámpago*" (citado en Hadamard, 1947, p.15). Otros autores como Polya (1981) nos hablan de "*una aclaración repentina que trae la luz, el orden, la conexión y el propósito de realización, que antes parecía oscuro, confuso, disperso y difícil de alcanzar*" (p.54). A continuación exponemos algunos autores que se refieren a este término como un momento de experiencia excepcional, de vivencia y entendimiento único, en el que las piezas del puzzle comienzan a encajar y de forma que un problema hasta ahora no resuelto encuentra finalmente salida.

Gardner (1989) relaciona el insight con la vivencia del Aha! haciendo referencia a los destellos de inspiración súbita que sugieren la ocurrencia de una idea brillante en la resolución de un problema. En cambio Liljedahl (2008b) concibe la experiencia matemática del Aha! por la precipitada y repentina llegada a la mente de una idea ante el abordaje de una situación o problema matemático. Considera que realmente lo que define y diferencia la experiencia del Aha! de otras experiencias matemáticas son las componentes afectivas de la experiencia.

Autores como Callejo (1994) relacionan el insight con el Eureka!, cuando se ve y percibe claro el momento de la inspiración, que conlleva a la resolución del problema.

En la traducción de la tesis doctoral de Van Hiele[3] (1957), se propone como traducción de insight la palabra "*comprensión*", aunque en la traducción se explicita que la palabra insight en ingles, no tiene una traducción unánimemente aceptada en español.

Fiol (2004) relaciona el insight con una de las cuatro fases mediante las que describe la creatividad: gatillar o espoleta creativa. En esta fase asocia el insight con un ¡click! que define como una conexión o un silencio interior propio de lo creativo. La ocurrencia de este click! o insight puede tener lugar en situaciones cotidianas, cuando se está sumergido en el hacer de pintar, escuchar música, escribir, etc. Algunos autores (Poincaré, 1908; Hadamard, 1947) definen esta fase en el genio, explicitando que se ha sumergido en el inconsciente. Resumiendo coincidimos con Fiol (2004, p.159) en que lo creativo *radica en poseer mucha información que se combina, relaciona, se mezcla inconsciente con inspiración para producir algo novedoso y original*.

Desde otra vertiente Hernando (2007) en su tesis doctoral en la que investiga la simulación de ciertos cambios de representación en la resolución de problemas, expresa la idea de insight utilizando la idea de *perspicacia*.

Por último haremos referencia a la perspectiva de la Gestalt que nos ha servido de punto de partida en esta investigación. En la Gestalt se plantea el estudio de las resoluciones de problemas mediante la recomposición o reestructuración perceptiva y repentina de los elementos que intervienen en él y que pueden promover la comprensión súbita propiciando la ocurrencia del insight. En este caso se asocia el insight a la comprensión súbita (Wertheimer, 1959; Duncker, 1945; Mayer, 1995).

[3]Traducción al español realizada en 1990 en el proyecto de investigación *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* (director Ángel Gutiérrez) del concurso Nacional de Proyectos de investigación Educativa del C.I.D.E. (1989-91)

En el *CAPITULO 2: INSIGHT GEOMÉTRICO POTENCIALMENTE PERCEPTIVO* de nuestra investigación ampliaremos y estudiaremos el concepto del insight, concretando el significado que emplearemos en este estudio.

4. **Verificación**

   La etapa de la verificación, consiste en adecuar, comprobar, examinar y configurar la idea producida en la etapa de la visión o iluminación a la persona y a su entorno. De forma análoga también es importante en esta etapa traducir rigurosamente la idea obtenida a formas simbólicas objetivas como la escritura y el lenguaje.

Nos ha parecido interesante el planteamiento de Kris (1952) que concibe el proceso creativo, a partir del acceso inspirado, mediante solo dos fases: inspiración y elaboración. Describe la primera fase, inspiración, como una fase donde flotan imágenes, percepciones y pensamientos, a partir de los que se nos ocurren ideas que antes nunca habíamos pensado. Argumenta la segunda fase, elaboración, a partir del trabajo de objetivar exhaustivamente el producto creativo y comunicarlo al entorno.
Rodríguez (1995) pone el énfasis en otra etapa del proceso creativo que denomina: la comunicación. Entendiendo que la creatividad está relacionada con una cierta habilidad para exponer las ideas y productos, así como para hacerlos válidos y útiles tanto a nivel personal como en el entorno.

Dentro de este nivel de concreción, en las fases del proceso creativo mediante el acceso inspirado, seguimos encontrando principios divisorios dependiendo las fases o etapas que consideren los autores. A pesar de todo encontramos un par de principios comunes en todos ellos. En primer lugar, independientemente de las etapas que se consideren, según el autor, estas no están claramente delimitadas pueden superponerse; y en segundo lugar, pueden tener lugar en periodos de intenso trabajo consciente, con periodos de relajación e inconscientes.
La investigación que planteamos, se engloba en la categoría del estudio de la creatividad como proceso, particularmente cuando estudiantes de 4t de la educación secundaria resuelven determinados problemas de geometría. Concretamente dentro de las etapas, fases o elementos clave en el proceso creativo, en nuestro trabajo nos centraremos en investigar uno de los elementos que ha suscitado mayor relevancia históricamente, ya desde Poincaré (1908), nos referimos al insight.

1.1.2.4 CREATIVIDAD COMO CARACTERÍSTICA PERSONAL

> *Los estudios de personas muy creativas indican que éstas tienden a destacar más por la configuración de su personalidad que por su puro poder intelectual. Cuando ya son capaces de realizar obras que se consideran creativas, difieren de sus compañeros en cuanto a ambición, confianza en sí mismos, pasión por su trabajo, insensibilidad a la crítica y por su deseo de ser creativos, de dejar huella en el mundo.*
>
> (Gardner, 2001, p. 129)

Las investigaciones que se engloban en esta categoría consisten en estudiar los rasgos o características que definen a una persona creativa, así como profundizar en el estudio entre la personalidad y la creatividad.
Diferentes investigadores (Amabile, 1993; Gelade, 2002; Feist y Barron, 2003) han estudiado la relación entre la personalidad y la creatividad, poniendo el énfasis en diferentes características personales. Por ejemplo en la investigación realizada por Feist (1998) los resultados indican que en general las personas creativas tienden a ser más autónomas, introvertidas, incrédulas e impulsivas, parece que se aceptan a sí mismas y tienen mejor disposición a nuevas experiencias.

Para Penagos y Aluni (2000) existen variables de la personalidad que pueden influir facilitando el desarrollo creativo: la motivación, la tolerancia a la frustración, la capacidad de logro, la autoestima y los estilos cognitivos. Otros autores como Maslow (2001) indican que los estudios sobre personas creativas presentan algunas características comunes en todas ellas, como la fuerza de carácter y ego, la obstinación por conseguir el objetivo, una cierta independencia, autosuficiencia y algo de arrogancia. Generalmente también coinciden en que el miedo y la debilidad pueden alejar el desarrollo creativo o hacer que este sea menos probable.

Pero, ¿Cuáles son las características que hacen a una persona creativa? Guilford (1962) ha sido uno de los investigadores que ha dado respuesta a esta pregunta, indicando que la personalidad creativa es fruto de la combinación de los rasgos característicos y de comportamiento de las personas creativas: invención, elaboración, organización, composición y planificación. Aquellas personas que manifiestan estos tipos de comportamiento son considerados como personas creativas. Por otra parte Pawlak (2000) expone que una persona creativa e innovadora debe poseer algunas características o formas de comportamiento como la persistencia ante los obstáculos, la facilidad de percibir y valorar las oportunidades, el ser flexible y motivado, así como competitivo y con valentía.

En el modelo de Urban (1995) la creatividad se entiende como el resultado de la combinación de tres componentes cognitivas con tres componentes relacionadas con la personalidad. Las componentes relacionadas con la personalidad que se precisan en él son el compromiso con la tarea, la motivación y la tolerancia a la ambigüedad.

Con la intención de concretar, entre la gran cantidad de rasgos existentes, las características de los indicadores que debe tener una persona creativa como por ejemplo la originalidad, flexibilidad, fluidez, elaboración, análisis, abstracción, síntesis, redefinición, sensibilidad para los problemas, nivel de inventiva, apertura mental, comunicación... etc, hemos considerado finalmente algunos de los que expone Marín (1991) tomados de autores como Guilford, Lowenfeld y Torrance, que podrían ser especialmente significativos en nuestra investigación:

- *Originalidad*: Es el rasgo prioritario usado como indicador para identificar una persona creativa. Una persona original tiene la facilidad para ver las cosas de forma única y diferente.
- *Flexibilidad*: Es otro rasgo fundamental como indicador de una persona creativa. Está relacionado con la capacidad para plantear una variedad y heterogeneidad de ideas cuando se aborda un problema desde diferentes ángulos (Rodríguez, 1995). Las personas creativas destacan por ser capaces de adaptarse a situaciones nuevas, con los recursos que disponen acudiendo a experiencias pasadas si es necesario y adaptándolas a la nueva situación.
- *Fluidez:* Corresponde a la gran cantidad de ideas, respuestas y soluciones que una persona puede producir respecto a un problema o situación determinada. Esta producción de ideas puede ser unilateral, repetitiva o mecánica por eso este indicador no es tan representativo como los dos anteriores (Marín, 1991)

- *Elaboración*: Denota la factibilidad de que las ideas inventadas puedan ser realizables (Rodríguez, 1995). La capacidad de elaboración permite imaginar los procesos siguientes hasta llegar al producto final de manera cuidadosa y minuciosa.

En resumen las investigaciones que se engloban en esta categoría, creatividad como característica personal, parecen centrarse en un conjunto de indicadores o características que se manifiestan con mayor intensidad en las personas consideradas creativas. Hay rasgos que definen algunos de estos autores expuestos anteriormente y que son coincidentes entre sí, ya que acentúan la importancia de la originalidad, la flexibilidad, la fluidez y la elaboración así como la perseverancia ante los obstáculos, la confianza y motivación en sí mismos.

1.1.3 EL POTENCIAL CREATIVO

Las investigaciones de Guilford (1950) suponen el punto de partida de una gran cantidad de trabajos que estudiarán el comportamiento creativo, así como la relación entre personalidad y su influencia en la creatividad; por ser el primer autor en argumentar la relevancia de la creatividad en diferentes ámbitos de nuestra sociedad, como las ciencias, las artes, los negocios y la enseñanza. Guilford indica que existen cuatro criterios básicos para identificar el comportamiento creativo, criterios generalmente usados y aceptados para definir la creatividad en cualquier contexto: originalidad, flexibilidad, fluidez y elaboración. Aun actualmente los criterios de Guilford, se consideran un buen punto de partida, aunque en algunos ámbitos como la educación, parezca algo ambiguo poder evaluar la creatividad sólo a partir de los criterios que plantea.
Aceptando los criterios sobre creatividad expuestos anteriormente por diversos autores, entre ellos Guilford (1950), en nuestra investigación contextualizada en el entorno escolar a partir de este momento más que de criterios hablaremos y utilizaremos la notación de *indicadores*.

McCoy y Evans (2002) realizaron una investigación centrada en el contexto escolar en la que concluyeron que el potencial creativo de un alumno no solo depende de las componentes personales, sino que también depende del ambiente y del proceso. Pensamos que en general (Sequera, 2007) tan solo podemos estar seguros del potencial creativo que podemos caracterizar en un momento determinado, con unas personas en un contexto concreto y mediante un proceso determinado. Sequera asocia el potencial creativo a:

> *El conjunto de evidencias u oportunidades que permiten reconocer progresos en la construcción del conocimiento personal o colectivo de los estudiantes, como nuevo conocimiento, que para los sujetos parece original, porque amplía, concreta, flexibiliza o desarrolla la generación y estructuración elaborada de nuevas ideas o conocimientos.* (Sequera, 2007, p.48)

Poco después de Guilford (1950), Carlton (1959) realizó una investigación que consistió en analizar los conceptos educativos de 14 eminentes matemáticos, entre los que destacan por ejemplo Klein, Hadamard, Poincaré, Bocher y Hilbert. En su análisis planteó una lista con 21 características que identificó en los pensadores que son potencialmente creativos en matemáticas, como por ejemplo disponer de una imaginación vívida que permita prever la manera en que se presentan formas en el espacio y las relaciones entre ellas, o disponer de una cierta intuición de cómo las estructuras deberán concretarse. Sugirió que cualquier estudiante matemáticamente creativo debería mostrar algunas de las 21 características de su lista (ANEXO A.1 *LISTA CARACTERÍSTICAS DEL POTENCIAL CREATIVO*). En el análisis de Carlton (1959) también se distingue entre dos tipos de mentes creativas. La primera es descrita como aquella que utiliza la intuición geométrica, siendo capaz de ver en el espacio y teniendo la facultad de poder ver el final desde lejos; mientras que la segunda es descrita como aquella que utiliza la lógica de trabajo, las definiciones estrictas, el razonamiento por analogía y el trabajo paso a paso a través de un gran número de operaciones elementales.

Más recientemente otros autores como Wendy Yap (2010) han incorporado en el marco de estudio, investigaciones acerca de si las percepciones de los estudiantes sobre su potencial creativo en matemáticas puede afectar a su creatividad y a su nivel de rendimiento en matemáticas. Yap (2010) realizó un estudio en Singapur con una clase de estudiantes de entre 10 y 11 años con buenas capacidades hacía las matemáticas. Concretamente estudió las interrelaciones entre los logros matemáticos de los estudiantes y la percepción que tenían sobre su potencial creativo en matemáticas en términos de flexibilidad, fluidez y originalidad a partir de las respuestas que aportaron.

Entre todos los indicadores recogidos que podrían identificar un producto creativo o una personalidad creativa, desde Guilford (1950), Marín (1991), Rodríguez (1995), Urban (1995), De la Torre (1991), Romo (1997), Varela y otros (1991), Monreal (2000), Sriraman (2009), Leikin (2009), Sheffield (2005, 2010) hasta Yap (2010), hemos seleccionado aquellos que nos han parecido más relevantes para nuestra investigación. Concretamente en nuestro trabajo hemos seleccionado tres indicadores: la originalidad, la flexibilidad y la elaboración, que pensamos nos permitirán describir el potencial creativo de los estudiantes que participen en nuestra investigación y valorar los aspectos creativos de las resoluciones que planteen. De estos indicadores hemos dado unas primeras descripciones en el apartado 1.1.2.4 CREATIVIDAD COMO CARACTERÍSTICA PERSONAL. A continuación describimos estos tres indicadores con detalle:

La originalidad es uno de los indicadores esenciales que componen el pensamiento creativo ya para Guilford (1962), pues equivale a la producción de soluciones inusuales e inteligentes conseguidas desde supuestos muy diferentes. Según Guilford, podemos caracterizar los indicios de novedad de una respuesta o idea, mediante la infrecuencia estadística que presenta dicha idea, dentro de un colectivo establecido de la población, desde el punto de vista cultural. También enfatiza, que la utilidad social de dicha idea es importante para valorar su originalidad. Análogamente, autores como Wendy Yap (2010) describen el factor de la originalidad como la capacidad de pensar en ideas únicas e inusuales que otros no han pensado y concibe que la valoración sobre la originalidad de una idea se mide según la infrecuencia estadística de respuestas correctas que representa.

Torrance (1974) propuso una definición de creatividad que ha servido de base para una batería de tests diseñados con el objetivo de identificar rasgos creativos en las personas. La originalidad es uno de los rasgos ampliamente reconocidos para identificar la creatividad. Concibe que la novedad o originalidad se caracteriza por una forma especial de pensar y tiene que ver con la generación de ideas, enfoques o acciones novedosas manifestándose en productos inusitados e insólitos, como por ejemplo una nueva obra de arte o una nueva hipótesis científica.

La originalidad para Saturnino de la Torre (1991) es un concepto que se identifica básicamente con la persona y que engloba múltiples significados relacionados todos ellos entre sí en mayor o menor medida. Al igual que otros autores, comprende la originalidad como *respuesta inusual*, esto es, como criterio que cuantifica la infrecuencia. La cantidad de respuestas inusuales o de infrecuencia estadística es un indicador que usan diversos autores en sus investigaciones para determinar el nivel de originalidad de un individuo comparado con otro. De esta forma podemos decir que la originalidad queda relativizada por la muestra de estudio que se emplea en cada investigación en particular. También se ha de diferenciar de las respuestas únicas pero extravagantes o inadecuadas con el planteamiento que se está llevando a cabo. Un segundo significado que atribuye De la Torre a la originalidad consiste en comprenderla como *algo originario*, cuando ésta supone la premisa de partida o la génesis de la que se desprenderán toda una serie de acciones, procedimientos y conceptos posteriores que configurarán la respuesta buscada. En tercer lugar De la Torre expone la originalidad como *respuestas ingeniosas o con talento*. Aunque la novedad es una característica definitoria y global de la originalidad, habitualmente las ideas con talento o ingeniosas también suelen ir acompañadas de novedad. Y por último, concibe la originalidad como *asociaciones lejanas o remotas*, cuando se descubren relaciones o conexiones inusuales entre elementos, que eran desconocidas hasta entonces porque salen fuera de lo evidente, transcendiendo más allá de las aprendidas anteriormente.

Frecuentemente se interpreta la originalidad en términos de novedad de manera bivalente, aunque podemos afirmar que toda respuesta o idea considerada como original tiene indicios de novedad, al contrario no siempre es así. Dando por supuesto (Guilford, 1962; Torrance, 1974; De la Torre, 1991; Boden, 2000; Yap, 2010) el hecho de que una respuesta o idea que sea novedad para la persona que la genera, no necesariamente tiene que serlo para nadie más. Boden (2000) distingue la novedad "*de la primera vez*" de lo que propiamente se considera original. Una idea novedosa es una idea que no se ha descubierto hasta el momento, pero que puede ser descrita y producida por el mismo conjunto de reglas y procedimientos generativos, de un determinado dominio cultural, que otras ideas conocidas en ese dominio. Por otra parte Hallman (1963) considera que un resultado es original si tiene cuatro propiedades: novedad, impredictibilidad, unicidad y sorpresa. Hallman hace referencia también al aspecto de la sorpresa en la originalidad, poniendo el énfasis en el efecto psicológico de las combinaciones nuevas sobre la persona. La sorpresa supone el estado de reconocimiento que registra la novedad ante un producto genuinamente original, sin el que probablemente las personas no se pondrían en movimiento para valorar y producir resultados creativos.

Coincidimos con Hallman (1963) y Boden (2000) en que las resoluciones que realmente nos interesan son las originales, aunque hemos de adaptar la interpretación de esta palabra en el contexto escolar. Una solución es original, cuando los alumnos plantean una resolución no esperada y novedosa dentro del colectivo concreto de estudiantes o una resolución que a ellos mismos les produce sorpresa o una combinación de estas. Por último la verificación del profesorado es concluyente.

La flexibilidad es otro de los rasgos que comúnmente se utiliza en las investigaciones para definir la creatividad y tiende a describirse como una facultad de la persona creativa. Una de las descripciones clásicas de flexibilidad es la propuesta por Guilford (1962) quien sitúa este rasgo como característico del pensamiento divergente. Describe la flexibilidad como la cantidad o variedad de planteamientos ante una situación desconocida. Guilford (1962) identifica dos tipos de flexibilidad, *la acomodativa o adaptativa y la espontánea*.

El primer tipo de flexibilidad la *adaptativa*, refleja la cantidad de planteamientos o estrategias aplicadas en la búsqueda de soluciones así como el número de cambios de interpretación o cambios en la dirección de pensamiento. Como ejemplo Landau en su investigación publicada en 1987 plantea el problema de formar cuadrados y triángulos yuxtapuestos con fósforos. Como se sabe el problema consiste desde una determinada configuración realizada con fósforos, en retirar un número determinado de ellos de modo que quede el número establecido de cuadrados o triángulos. En la resolución de este tipo de tarea se requiere un cambio constante de procedimiento bajo una actuación guiada por el principio de ensayo y error; para ello, la persona tiene que ver los cuadrados o triángulos y los fósforos continuamente bajo diferentes puntos de vista. Para algunas soluciones son necesarias estrategias inventivas. Lo que aquí cuenta son las variables con las que la persona aborda el problema.

El segundo tipo de flexibilidad, *la espontanea*, manifiesta las posibilidades que tiene una persona de reestructurar por sí misma los datos de que dispone ante la resolución de una situación. Representa el número de variaciones de respuesta dentro de una misma clase, el número de consideraciones, propiedades o características inherentes al problema o resultado. Uno de los ejemplos de flexibilidad espontánea, que argumenta Landau (1987) consiste en mencionar en un tiempo acotado el mayor número posible de usos de un ladrillo normal. El factor de flexibilidad espontánea analiza la frecuencia con la que una persona encuentra una nueva categoría de soluciones estructuralmente distintas entre sí como por ejemplo podría ser cuando pensamos en una silla como un asiento o como un peldaño o material de desguace o una arma arrojadiza o una mesa o como un juguete, casa, caballo, etc. Landau concluye que la flexibilidad es la capacidad que permite a las personas ver una determinada cosa, idea o planteamiento desde ángulos o perspectivas diferentes.

Fiol (2004) define la creatividad como flexibilidad, entendiendo esta como nutriente esencial del pensamiento divergente. En cierta manera asocia la creatividad al pensamiento divergente teniendo en cuenta que este *no solo se expresa buscando la solución correcta, sino también produciendo una multiplicidad de respuestas originales, así como reestructurando el problema planteado o el tema en el que se trabaja* (p.159).
En esta línea Wendy Yap (2010) también plantea la flexibilidad como la capacidad que tiene una persona de generar nuevas soluciones o nuevas ideas de naturaleza diferente a las que ya se han generado. Concibe que las soluciones, respuestas o ideas de naturaleza equivalente se clasifican en una misma categoría. Por tanto la flexibilidad se puede medir por el número de categorías de respuestas correctas dadas por el estudiante ante la resolución de un problema o situación. De forma similar Sheffield (2010) evalúa el factor de la flexibilidad a partir de un mayor número de elementos que pueden intervenir en el desarrollo del potencial creativo de una persona. Manifiesta la relevancia en el número de diferentes categorías de soluciones, respuestas, procedimientos, métodos o incluso preguntas que pueden llegar a realizar los estudiantes cuando abordan un problema.

Hallman (1963) atribuye una serie de características diferentes a la flexibilidad. Concretamente considera que una persona flexible está relacionada con un tipo de comportamiento, que pone de manifiesto la capacidad de aceptar el conflicto, tolerar las incoherencias y contradicciones, así como ser receptivo y tolerante ante la ambigüedad y lo inseguro. Un comportamiento alegremente serio, que es capaz de percibir significados en situaciones o hechos irrelevantes y posponer decisiones según la combinación de elementos como un reto placentero, se asocia intrínsecamente con un comportamiento flexible en creatividad.

La elaboración es otro de los criterios que comúnmente se relaciona con la persona creativa y el producto creativo. Kris (1952) atribuía especial interés a la fase de la elaboración en el proceso creativo caracterizándola a partir del trabajo y concentración. El trabajo consiste en objetivar los productos creativos obtenidos del inconsciente o no, y en comunicarlos al entorno. Esta comunicación es importante para dar a conocer y transmitir adecuadamente el nuevo producto.

Saturnino de la Torre (1991) explicita algunos criterios expuestos por Guilford para valorar la elaboración:

1. Especificación. Considera la cantidad de detalles añadidos a una estructura, para llegar a un producto creativo.
2. Implicación. Incide en la cantidad de elementos y procedimientos en estructuras más o menos complejas que intervienen en un resultado creativo.
3. Simbolización. Constituye las representaciones que se puedan disponer o utilizar para manifestar elementos que participan en el proceso creativo.

La elaboración se considera frecuentemente como la capacidad de una persona de planificar una idea brillante, añadiendo a ésta otras que están relacionadas. Aunque esta planificación no es un procedimiento unitario; en ésta entran diversos tipos de elaboración como la semántica, la lingüística, la conceptual o la procedimental que interaccionan para realizar una elaboración exacta de los detalles que intervienen en la planificación global. Podemos decir que la mayoría de las grandes innovaciones e invenciones han sido fruto de una rigurosa y esforzada elaboración. Sheffield (2010) concibe el criterio de la elaboración como la elegancia en cuanto a la calidad en la planificación y expresión de una idea brillante. Considera que en esta elaboración pueden participar e interaccionar diseños, gráficos, dibujos, modelos y palabras entre otros elementos relevantes.

En la siguiente Tabla 1.1.3 presentamos un esquema de las aportaciones Sequera, Sheffield y Yap sobre los tres indicadores o criterios de creatividad: Originalidad, flexibilidad y elaboración.

INDICADOR		Descripción
Originalidad	Sequera (2007)	Respuestas estadísticamente poco frecuentes, respuestas ingeniosas más que respuestas correctas, novedad, impredictibilidad, unicidad, sorpresa, asociaciones inusitadas y remotas.
	Sheffield (2010)	Soluciones, respuestas, métodos o preguntas que representan una visión única a la hora de abordar un problema.
	Yap (2010)	La capacidad de pensar en ideas únicas e inusuales que otros no han pensado y se mide por la infrecuencia estadística de las respuestas correctas.
Flexibilidad	Sequera (2007)	Apertura, ausencia de rigidez, receptividad, tolerancia, versatibilidad, libertad de cambios, cambio de interpretaciones, cambio de dirección, riqueza de la argumentación, contemplar la situación desde distintos ángulos.
	Sheffield (2010)	El número de las diferentes categorías de respuestas, métodos, o preguntas ante la resolución de un problema.
	Yap (2010)	La capacidad de generar nuevas soluciones o nuevas ideas de naturaleza diferente a los que ya se han generado. Las soluciones o ideas de naturaleza similar se clasifican en la misma categoría. Se mide por el número de categorías de respuestas correctas dadas por el estudiante en un problema.
Elaboración	Sequera (2007)	Complejidad, cuidar detalles, formar estructuras, simbolización, síntesis, construir representaciones.
	Sheffield (2010)	Corresponde a la elegancia en la calidad de expresión de ideas creativas, incluyendo cuadros, gráficos, dibujos, modelos, y las palabras.
	Yap (2010)	No define este indicador

Tabla 1.1.3: Criterios de Creatividad

En investigaciones, como por ejemplo la de Wendy Yap (2010), además de los indicadores expuestos anteriormente, se utilizan otros que describe como *conocimiento matemático* y *percepción de los estudiantes*. Concibe el *conocimiento matemático* como el rendimiento en matemáticas de los estudiantes de 4t de la educación primaria, evaluado a partir de la nota media obtenida en los exámenes de matemáticas en el segundo semestre del 2009. En cuanto a la *percepción de los estudiantes* sobre su potencial en creatividad matemática, lo define como aquellas características que conocen sobre sí mismos los propios estudiantes cuando trabajan creativamente en matemáticas. Este criterio lo evalúa a partir de la realización de un cuestionario adaptado de la versión original de Carlton (1959) con 12 de las 21 características estudiadas y analizadas que según este autor se le atribuyen a los pensadores potencialmente creativos en matemáticas.

1.2 ENSEÑANZA CREATIVA

> Enseñar creativamente significa enseñar con variaciones e innovaciones. Una lección creativa debe ser interesante, provocadora, no convencional, productiva y motivadora. Hay variaciones en técnicas de enseñar, en materiales, en actividades y en evaluación. Hay innovaciones en los diseños de recursos, en selecciones de actividades y en instrumentos de evaluación.
>
> Claudi Alsina (2007)

Luis Rico (2006) describe la creatividad como uno de los criterios relevantes en la evaluación de las competencias educativas asimiladas por los estudiantes de un país, al hacer referencia a las pruebas del informe PISA del año 2003. Particularmente la creatividad está presente como indicador requerido en la evaluación de las competencias matemáticas dentro del apartado de resolución de problemas geométricos que se plantean en dicha prueba.

La misma ley de educación en Cataluña (LOE) también concibe que en el pleno desarrollo del aprendizaje de nuestros estudiantes se requiere de forma transversal y significativa el poder *desarrollar la creatividad, la iniciativa personal y el espíritu emprendedor* (MEC, 2006, p.8) con el objetivo de contemplar un abanico amplio de recursos para disponer de manera eficaz y eficiente soluciones a los retos futuros que pueda plantear la sociedad. En este aspecto, los entornos educativos pueden ejercer una influencia potenciadora de la creatividad de nuestros estudiantes, generando ambientes propicios para el aprendizaje y enseñanza creativa, sin olvidarnos que la meta es el desarrollo de la personalidad creativa de quien aprende. Saturnino de la Torre (1993) plantea enriquecer la enseñanza desde la creatividad, a partir de la formación para la creatividad, de modo que cuando la creatividad se aplica a la enseñanza y la enseñanza la pretende, es cuando podemos construir realmente la *enseñanza creativa*.

> *Estoy pensando en estrategias basadas en el aprendizaje relevante, en el desarrollo de habilidades cognitivas, en una actitud transformadora; en la organización de actividades innovadoras, flexibles, motivantes; en una mediación que tome en consideración la experiencia, la colaboración, la implicación del discente. Se trata de enriquecer el método con aquellos rasgos atribuidos a la creatividad.* (De laTorre, 1993, p.288)

Dicho autor caracteriza la naturaleza de la enseñanza creativa como flexible y adaptativa, orientada básicamente al desarrollo de habilidades imaginativas, metodologías originales e indirectas, así como la combinación de ideas y procesos mediante la realización de actividades innovadoras.

La enseñanza creativa (Prieto y otros, 2003) requiere entre otros criterios relevantes, de imaginación, originalidad, flexibilidad, fluidez, capacidad de adaptación y de una adecuada aplicación y seguimiento en la resolución de problemas dentro del currículo escolar vigente. En este sentido, el matrimonio Root-Bernstein (2002) concibe que puede darse una educación integral, mediante un pensamiento creativo que es de naturaleza universal. Establecen que existen unas habilidades o capacidades mentales que manifiesta el pensamiento creativo y son comunes en todos los ámbitos de estudio, pudiendo ser potenciadas a partir de una educación que sea realmente transdisciplinar. Las habilidades mentales a las que hacen referencia son: observación, imaginación, abstracción, reconocimiento de pautas, formación de pautas, analogía, pensamiento corporal, empatía, pensamiento bidimensional, modelado, juego, transformación y síntesis. Los autores argumentan que para establecer un sistema educativo capaz de crear pensadores creativos, a priori se debe conocer la naturaleza del pensamiento creativo. Por este motivo identifican que habilidades o herramientas mentales lo caracterizan.

A veces se instaura la creencia de que la enseñanza creativa está relacionada con no establecer pautas o directrices (Beetlestone, 2000) en el aprendizaje de los estudiantes con motivo de darles mayor libertad y dejarles hacer. En estos casos la enseñanza creativa se puede confundir con una enseñanza sin planificación, donde todo es válido, cuando según las aportaciones de distintos autores al respecto, nos sugieren algo distinto. Urban (1995) considera *el compromiso con la tarea* y *el conocimiento base* como prerrequisitos necesarios para estimular el pensamiento creativo. Por otra parte, también considera necesario el dominio de contenidos y destrezas específicas en determinados ámbitos, para alcanzar un proceso creativo brillante. Otros autores (Treffinger y otros, 1990) consideran los elementos motivacionales del docente, especialmente necesarios para guiar a los alumnos, dirigiendo y centrando la atención de los estudiantes, escuchando activamente y en definitiva fomentando un clima que sustente, nutra y fomente la gestación de ideas creativas. Beetlestone (2000) insiste en

que aunque algunos autores puedan considerar la enseñanza creativa como una buena práctica docente, eso no establece una dirección bilateral; es decir, una buena práctica docente no tiene porqué constituir necesariamente una enseñanza creativa.
En este mismo sentido y lejos del proceder de las enseñanzas reproductoras, repetitivas y memorísticas que inhiben la creatividad de los estudiantes Torrance (1976) insiste en que la enseñanza creativa debe planificarse para estimular con éxito el potencial creativo de los estudiantes desde edades preescolares hasta los estudios universitarios. En 1976, Torrance hablando de la enseñanza creativa se propuso transmitir a docentes, educadores y profesores la relevancia de la creatividad como un activo de calidad, determinante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes a nivel escolar. Describió la enseñanza creativa cuando el docente y el estudiante se encuentran inmersos en un proceso de aprendizaje creativo. Entendiendo éste como un feedback, un intercambio, un diálogo entre docente y estudiante, sobre los hechos y la fantasía, sobre lo real y lo posible, sobre lo que es y lo que podría ser, sobre suposiciones, hipótesis y conjeturas. El aprendizaje creativo es un proceso en el que docente y el estudiante, escuchan, aprenden, piensan, actúan, crean y transforman para que sus capacidades potenciales les permitan descubrir un nuevo resultado creativo.

Para reconocer la enseñanza creativa partimos del supuesto de que se puede aprender a ser creativos y se puede fomentar la creatividad. Yap (2010), sustenta esta afirmación con investigaciones como por ejemplo "*An Exploratory Study on the Interrelationships among Mathematical Creativity, Mathematical Attainment and Students' Perceptions of their Creative Potential in Mathematics*" en la que coincide con la perspectiva de Tammadge (1979), en cuanto a como identificar, estimular y fomentar el potencial creativo de los estudiantes con el fin de lograr un salto cualitativo en el aprendizaje de las matemáticas. Creemos que los niños desde su más temprana edad son creativos de manera innata y por lo tanto el educador puede diseñar estrategias que la potencien y en todo caso que no la bloqueen. Diversos autores (Tammadge, 1979; Robinson, 2006) afirman que los niños son normalmente más creativos que los adultos. Los niños habitualmente tienen adquiridas menos inhibiciones, menos rutinas, menos hábitos preestablecidos, normas y dogmas y por tanto generalmente tienen menos temor a equivocarse que los adultos.

1.2.1 EDUCACIÓN EN CREATIVIDAD MATEMÁTICA

En las investigaciones en educación sobre creatividad podemos distinguir dos vertientes claramente identificadas. Aquellas que estudian qué métodos y estrategias pueden estimular la creatividad independientemente del dominio del curriculum escolar en concreto (De Bono, 1974; De la Torre, 1984; Sternberg, 2001) y aquellas que analizan desde una educación creativa en un dominio concreto como fomentar una enseñanza más significativa (Beetlestone, 2000; Tiamina, 2002).

Si nos concretamos en las investigaciones en educación matemática sobre creatividad, nos parece difícil discernir de manera integral que investigaciones pretenden fomentar la creatividad en los procesos de enseñanza-aprendizaje matemáticos de aquellas que pretenden estimular una educación matemática creativa en la que la creatividad surge de la propia actividad matemática.

En el primer caso las investigaciones ponen el énfasis en la creatividad, es decir en el estudio de los métodos y estrategias creativas para enseñar matemáticas y desarrollar la creatividad mediante las matemáticas. En estas se estudian técnicas con la finalidad de promover la creatividad a través de las matemáticas. Desde esta perspectiva la creatividad es un ingrediente metodológico más para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje. Autores como Gervilla (1986) plantean una metodología en base a técnicas creativas. En su trabajo recoge distintas técnicas como brainstorming, síntesis creativa, el preguntar adecuadamente, el método Delfos, métodos combinatorios, saber relacionar, solución de problemas, etc.

En el segundo caso, nos referimos a las investigaciones que estudian cuando la educación matemática es creativa y cuando no lo es. Es decir, nos referimos a aquellas investigaciones en las que la propia actividad matemática pueda generar procesos creativos, donde tengan lugar nuevas asociaciones, se inventen problemas y nuevas soluciones. Generalmente los trabajos en educación matemática creativa comúnmente conocidos se basan en el estudio de problemas y tareas creativas en la enseñanza de las matemáticas contextualizadas en estrategias didácticas que estimulen un aprendizaje creativo, como por ejemplo el aprendizaje por descubrimiento, que en definitiva pueda fomentar un pensamiento creativo matemático. En esta línea Fernández (2003) estudia las estrategias creativas en el área lógico-matemática a partir de plantear una propuesta didáctica del número natural con estudiantes de educación infantil.

Coincidimos con Sequera (2007) en que una educación matemática creativa debe entenderse como el conjunto de elementos que contribuyen a ver la matemática dentro del proceso educativo *como* una asignatura*,"que desarrolla el pensamiento flexible, que incentiva a la invención de problemas y situaciones, que promueve la resolución de problemas en un contexto real, que incita a la imaginación, todo ello en un ambiente donde el alumno y el docente disfruten de la matemática y donde el pupilo se atreva a cometer y aprender de sus errores"* (p. 64).

En el trabajo de algunos autores (Tall y Vinner, 1981; Meissner, 2005) se enfatiza en la idea de que la resolución exitosa de un problema en matemáticas depende en cierta medida de la estructura cognitiva de cada persona. En esta línea, Meissner (2005) concibe que es necesario que una persona posea un *Vorstellungen,* es decir una representación interna o imagen conceptual del problema o de las partes de su resolución, para poderlo solucionar eficazmente. Concretamente insiste en que los *Vorstellungen* espontáneos son necesarios para fomentar el pensamiento creativo en la educación matemática.
En este sentido, encontramos distintos autores que han investigado componentes cognitivas que se relacionan con la creatividad en matemáticas. Investigaciones realizadas en Educación Secundaria como las de Placencia y otros (1998) o la tesis doctoral realizada por Plasencia (2000) que lleva por título *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática, un estudio de casos,* son un buen ejemplo de trabajos donde se manifiesta la relación que se encontró entre la visualización y la creatividad matemática. En términos generales, proponen la imagen como una herramienta en potencia que estimula la creatividad matemática en la resolución de problemas.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al ser ésta considerada como disciplina que básicamente se sustenta en el razonamiento, tiene grandes cuotas de responsabilidad en la formación del pensamiento lógico de los estudiantes. Pero tener un pensamiento lógico desarrollado no es suficiente para resolver determinados problemas, en los que se requiere de una alta dosis de imaginación y creatividad (Arteaga, 2008). Consideramos por tanto que una educación matemática basada solamente en el pensamiento lógico no es suficiente, si no que es necesario en el periodo escolar la formación y estimulación del comportamiento creativo de los estudiantes.

Arteaga (2008) pone de manifiesto las dudas que tienen los educadores matemáticos en el papel que debe desempeñar la educación matemática escolar en la formación de la creatividad de los estudiantes. Atribuye que estas dudas, en parte, se deben a:

1. El escaso nivel de información de que se dispone, sustentado por la baja oferta de cursos en creatividad, así como la escasa bibliografía que existe sobre creatividad en los centros educativos.
2. La poca práctica y el desconocimiento de los métodos para el desarrollo de la creatividad de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La didáctica de las matemáticas no ha avanzado mucho en este sentido.
3. Las creencias de los educadores matemáticos sobre la naturaleza de las matemáticas.
4. Las matemáticas que reciben los futuros educadores matemáticos, generalmente no fomentan o estimulan oportunidades de aprendizaje en las que el conocimiento matemático se pueda construir o descubrir mediante situaciones, tareas o problemas creativos y abiertos. Esto implica que no se potencie adecuadamente y nos alejemos del concepto de la creatividad matemática.

No obstante, también debemos admitir que plantear las condiciones y un ambiente creativo en la diversidad del aula (Tammadge, 1979) presenta una gran complejidad. Un profesor puede trabajar en una clase con uno o dos estudiantes especialmente creativos, pero probablemente tendrá dificultades para llegar a todos los niveles de creatividad que se pueden dar en una clase, según el potencial de los estudiantes. La resolución de ejercicios y el trabajo duro es vital antes de poder preestablecer el dominio de determinadas destrezas y habilidades matemáticas, y esto no siempre gusta a los estudiantes más creativos. Es poco probable crear un ambiente adecuado que fomente la creatividad matemática sin dificultad y sin un aumento de la dedicación por parte de los educadores matemáticos.

A pesar de las reformas con la nueva ley de Educación LOE, el rendimiento de la asignatura de matemáticas sigue siendo muy bajo y el rechazo hacia esta por los estudiantes es cada vez mayor. En los resultados del informe Pisa (OCDE, 2003, p.8) se constata que los estudiantes siguen teniendo deficiencias graves en matemáticas. El 11% de los alumnos de la OCDE no es capaz de resolver ejercicios de nivel 1. Es decir son capaces de realizar operaciones elementales, pero son incapaces de utilizar destrezas matemáticas en situaciones determinadas. Paralelamente se manifiesta el rechazo emocional hacia las matemáticas, constatando en el informe Pisa (OCDE, 2003, p.8) que la ansiedad hacia las matemáticas está generalizada; un 50% en los chicos y más del 60% en las chicas de 15 años afirman que se ponen nerviosos al realizar problemas de matemáticas, de que sienten tensión o incapacidad a la hora de resolver un problema de matemáticas. No podemos olvidar la influencia notable de lo afectivo-motivacional en el comportamiento creativo. Un alumno puede ser creativo en matemáticas si le gustan las matemáticas, cosa que raramente sucede en las aulas (Gnedenko, 1982) si el alumno se encuentra nervioso, tenso o con ansiedad al respecto.

Con estos diversos análisis y reflexiones pretendemos apoyar nuestra creencia de la necesidad de fomentar una educación matemática creativa. Una de las tareas fundamentales de la educación matemática debería ser el desarrollo, no de la creatividad matemática entendida como materia que sólo incide en los estudiantes superdotados, sino de la estimulación de las potencialidades creativas de cada uno de los estudiantes, o lo que algunos autores llaman la creatividad general; lo que implica fomentar aquellos recursos ambientales y de personalidad que pueden potenciar el comportamiento creativo (Mitjans, 1989). Cuando nos referimos a la creatividad como tarea fundamental de la educación matemática, no estamos inhibiendo ni suprimiendo el papel de la instrucción matemática; porque nos parece que es imposible crear en matemáticas, sin tener un mínimo de conocimientos sobre el dominio matemático en que se está trabajando.

Nuestra perspectiva al respecto y coincidiendo con Herrán Gascón (2010), es que la creatividad desde la Didáctica de las Matemáticas puede llegar a ser uno de los objetivos principales sobre el que se sustenta la educación de nuestros estudiantes en matemáticas. Más concretamente consideramos que la creatividad desde la enseñanza de las matemáticas podría ser a la vez una finalidad educativa, una característica de la enseñanza activa, una fuente para la motivación didáctica, un reto estimulante y motivador para profesores y equipos docentes, un proceso de aprendizaje de y para todos, un valor social y en definitiva una condición de calidad didáctica para profesores y maestros (Herrán Gascón, 2010).

Sin embargo, observamos que la creatividad no suele ser uno de los objetivos principales de la Didáctica de la Matemática en términos generales. La creatividad puede no estar asociada a la formación, pero la formación sí que puede favorecer y promover la creatividad matemática de estudiantes y profesores.

Si no se fomenta y estimula el riesgo de pensar con conceptos y procedimientos, entendidos como métodos y estrategias de aprendizaje, que no son los tradicionales y que suponen un cierto grado de innovación e incertidumbre, en cierta manera estaremos reprimiendo la curiosidad y la capacidad heurística. Con ello podemos inhibir (Landau, 1987; Eyrvink, 1991; Robinson, 2006) el desarrollo del potencial creativo de nuestros estudiantes y profesores; en cambio, sí que estaremos fomentando y estimulando un pensamiento reproductivo (Wertheimer, 1959) y conformista. En este modelo de educación normalmente se forma y prepara a las personas para el pasado, ya que no se ponen a su disposición los instrumentos para afrontar creativamente los problemas del futuro.

La importancia de contemplar la creatividad desde la enseñanza y didáctica de las matemáticas como una finalidad educativa, de orden prioritario, nos lleva a implementar en la praxis de nuestras aulas una mejora significativa en la educación matemática creativa.

BLOQUE I: MARCO TEÓRICO

CAPITULO 2

2. INSIGHT GEOMÉTRICO POTENCIALMENTE PERCEPTIVO

> *La vivencia del insight es importante igualmente a la hora de clarificar este concepto. Aquellas personas que en algún momento han producido insight, lo definen como llamaradas fugaces de la inteligencia, iluminaciones anticipatorias que validan una solución determinada tras una rápida revisión crítica.* (De Nicolás, 1999, p.146)

Quienes son capaces de plantear soluciones creativas a determinados problemas pueden experimentar la ocurrencia del insight o la vivencia del aha!. El insight no es un concepto novedoso, ya que tanto su naturaleza como los procesos que pone en marcha han sido motivo de múltiples investigaciones. En este capítulo se pretende una revisión histórica del concepto del insight pasando por las diferentes perspectivas teóricas que lo definen hasta la actualidad. Pondremos un especial énfasis en la visión teórica de la Gestalt por ser uno de los ejes centrales en los que se basa la investigación, así como en la distinción entre insight convergente y divergente. Una segunda parte del capítulo está dedicada a la ocurrencia del insight en la resolución de problemas desde la reestructuración, la organización estructural y la reorganización visual y repentina de los elementos que intervienen. A continuación se exponen diversas taxonomías de problemas según la naturaleza del insight. Y por último dedicamos un apartado en el que reflexionamos sobre el insight en la resolución de problemas.

2.1 HISTORIA Y CONCEPTO

Insight is a form of understanding of a problem and its solution; the product of a process of restructuring; dependent on the features of the problem situation; and only one determinant of success in problem solving.

(Dominowski y Dallob, 2002, p.38)

Los orígenes se remontan a la teoría asociacionista donde por entonces se sustentaba, el concepto del insight en un modelo explicativo basado en el ensayo y error. Köhler (1929) inicialmente planteó el término *einsich*t en sus primeras investigaciones, para los actos de comprensión que permiten resolver un problema. Posteriormente los ingleses tradujeron este término por insight donde una de sus posibles equivalencias en español se asocia a perspicacia o profundidad en la interiorización de algo. Podemos descomponer la palabra alemana einsicht, por un lado en el lexema *sicht* (sichten) que significa divisar o descubrir y el prefijo *ein* que se emplea para intensificar el lexema respectivo, se podrá pues traducir como *ver o descubrir con profundidad*.

Más adelante incidiremos en la conceptualización gestaltiana que considera el insight como un mecanismo mental mediante el que se pueden resolver ciertos problemas novedosos a partir de una reorganización o reestructuración perceptiva. Y por último haremos referencia al concepto de insight desde la vertiente cognitiva. Normalmente el concepto de insight se relaciona con uno o varios procesos cognitivos que vendrían a constituir parte de la intuición. Por ello nos centraremos en aquellos modelos teóricos que han resultado comúnmente aceptados en la explicación del insight, desde las contribuciones más clásicas de la Gestalt (Wertheimer, 1959; Köhler, 1929), hasta las teorías de reestructuración del insight más relevantes (Hadamard, 1947; Ohlsson, 1984; Simon, 1977; Sternberg y Spear-Swerling, 1996) y actuales en el ámbito cognitivo. En cada uno de los modelos teóricos que se expondrán, se estudiarán los enfoques planteados de la naturaleza intrínseca del insight como proceso; se pretende dar una explicación de la funcionalidad y ocurrencia de este proceso dependiendo de la perspectiva bajo el que es estudiado. No obstante, el estudio del insight como proceso, no ha llegado a un consenso comúnmente aceptado por la comunidad científica, existiendo gran controversia sobre múltiples cuestiones relacionadas con este concepto que de alguna manera Mayer (1995) pretendió resumir o sintetizar.

Concretamente, el concepto del insight, fue introducido por la Gestalt en el estudio de la resolución de problemas. Desde entonces distintos autores (Frijda y de Groot, 1982) en la línea del insight se han interesado en el estudio de los diferentes procesos implícitos en la resolución de problemas originales e innovadores. Köhler (1969) y Wertheimer (1959) definieron unilateralmente el insight como el mecanismo mental mediante el que bajo ciertas circunstancias, una persona es capaz de encontrar la solución a un problema, careciendo de cualquier tipo de experiencia previa sobre la situación. El ejemplo clásicamente conocido de insight, citado por Wertheimer (1959) es el de la niña que resolvió el área del paralelogramo, donde a partir de la dificultad que se le planteaba, supo buscar más allá de su experiencia, planteando satisfactoriamente una solución original y correcta.

Van Hiele (1957) planteó un concepto del insight centrado en la resolución de problemas en geometría. Afirmó que un niño tiene comprensión (*insight) en un determinado campo de la geometría cuando a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes.* (p. 1)

Contrariamente a la perspectiva de la Gestalt expuesta por Köhler y Wertheimer, otros autores como Thorndike (1898), a partir de una visión asociacionista, afirman que independientemente del resultado obtenido en la resolución de un problema, éste es fruto de un intenso proceso de aprendizaje basado en el ensayo y error. En la teoría de la Gestalt, se considera que la experiencia de una persona basada solamente en el trabajo reproductivo, repetitivo y memorístico, puede llegar a bloquear la resolución de problemas de insight impidiendo la posibilidad de un cambio de perspectiva o una nueva óptica necesaria para resolver el problema.

Otro aspecto importante es la vivencia del insight (Liljedalh, 2008b). Autores como Kekulé (Boden, 1994) que lo han experimentado lo definen como un momento fugaz, donde súbitamente se anticipa la solución a una determinada situación novedosa. En otros casos un *eureka!* como el de Arquímedes, o inspiraciones como las de Poincaré (1948) o Darwin son representativas del insight. De este último se narra que fue durante un paseo en coche cuando se dio cuenta de que la selección natural era la clave para responder a las preguntas que se había planteado. Curiosamente una persona de su comunidad familiar, su abuelo Erasmus ya había escrito un libro en verso acerca de la idea de la evolución de las especies, que el joven Darwin leyó a los 17 años. Quizás la idea repentina había tenido un largo periodo de incubación.

2.1.1 PENSAMIENTO PRODUCTIVO DE LA GESTALT

> *Insight es una especie de stock, para la compra venta del pensador científico. Tradicionalmente el proceso o un conjunto de los procesos que subyacen en los descubrimientos científicos se han referido como insight. Muchos de nosotros reconocemos nuestros propios insight mientras intentamos solucionar un problema, tenemos una experiencia –ahá-. De repente lo que parecía un desastre se convierte claramente en algo evidente, y podemos ver la solución a un problema anteriormente difícil.*
>
> (Sternberg y Davidson, 1986)

Los tres portaestandartes de la Gestalt: Wertheimer, Koffka y Köhler, centraron sus investigaciones más características en los temas de percepción, aprendizaje y pensamiento (Köhler, 1969; Wertheimer, 1959). Concretamente los gestaltistas estudiaron ampliamente la resolución de aquellos problemas en los que se suministran todas las partes necesarias, (ya sea información fraccionada, objetos concretos, etc) y la tarea de los que tienen que resolverlos consiste en reestructurar y reorganizar mentalmente los elementos que intervienen una y otra vez, hasta conseguir una configuración que les guie a la solución. Consideran (Mayer, 1986) que el proceso de resolución de un problema tan solo es eficaz mediante una comprensión estructural de éste, si podemos ser capaces de captar cómo todas las partes del problema encajan, para encontrar la solución esperada.

El enfoque cognitivo de la Gestalt en la resolución de problemas distingue dos tipos de pensamiento. El primero, *pensamiento productivo*, (Wertheimer, 1959) basado en la modificación y reorganización implícita del aprendizaje pasado, generando nuevo contenido mental que se transforma en una nueva solución al problema; el segundo basado en la aplicación de soluciones pasadas al problema, que se llama *pensamiento reproductivo*, donde simplemente se reproducen experiencias previas, hábitos, habilidades o estrategias de resolución. Consideraremos en esta investigación, de forma significativa el estudio de las resoluciones productivas, por insight (Berlyne, 1976; Best, 2001; Cunningham y MacGregor, 2008), donde la *perspicacia intuitiva* y la *habilidad de visualización,* dos de los pilares intrínsecos del aprendizaje por comprensión de la Gestalt en el pensamiento productivo adquieren un papel crucial en el pensamiento creativo (De Bono, 1971).

Vamos a explicitar la distinción entre pensamiento productivo y reproductivo a partir de uno de los muchos ejemplos que propuso Wertheimer (1959) a sus estudiantes.

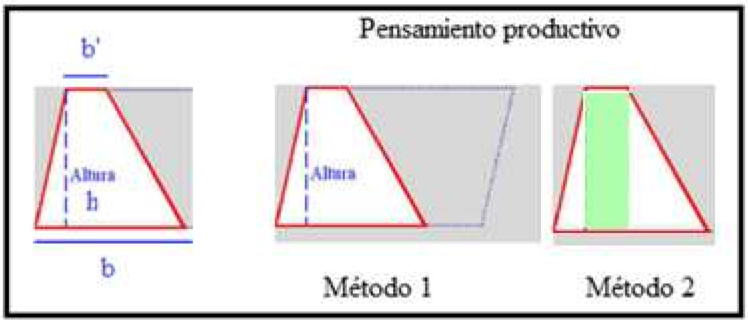
Supongamos que queremos hallar el área de un trapecio, dentro de las múltiples estrategias de resolución, distinguiremos tres métodos:

1) El primer método consiste en añadir al trapecio original uno igual pero invertido, de manera que la figura resultante es un romboide que tiene la misma altura y como base tiene la suma de las bases del trapecio. Observamos que el área del romboide es el doble que la del trapecio.

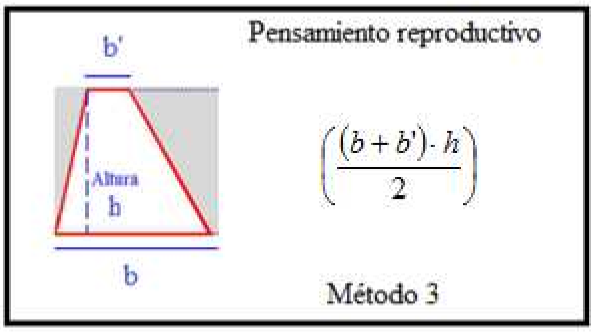
2) El segundo método se basa en descomponer el trapecio en dos triángulos rectángulos que representan el triangulo de área $\left(\frac{(b-b')\cdot h}{2}\right)$ y un rectángulo $(b'\cdot h)$.

3) En el tercer método sólo aplicamos la fórmula $\left(\frac{(b+b')\cdot h}{2}\right)$.

Las soluciones propuestas en el método 1) y 2) se producen a partir de la reconfiguración de las partes del problema y hacen referencia al pensamiento productivo, a no ser que las soluciones hayan sido conocidas con anterioridad por el resolutor, en este caso serían resoluciones reproductivas.



En el tercer método hacemos referencia al pensamiento reproductivo, en el que calculamos el área del trapecio a partir de la memorización de la fórmula conociendo las bases (b y b') y la altura (h).



Wertheimer (1959) explicitó que aquellos alumnos que resolvían problemas mediante el planteamiento de estrategias de resolución productiva, tenían mayor facilidad para transferir lo que habían aprendido a otras situaciones. Es decir, estos alumnos tenían más facilidad para resolver situaciones problemáticas que difiriesen de la original, que no aquellos alumnos que habían empleado inicialmente estrategias de resolución reproductivas. Dicho autor también otorga un papel relevante al método del descubrimiento *"por uno mismo"* en la resolución de un problema por compartir con el aprendizaje productivo de la Gestalt un rendimiento superior tanto en la transferencia como en la retención de lo aprendido por parte del estudiante.

Bajo el enfoque de la Gestalt, el pensamiento productivo conduce a reorganizar el campo perceptual, permitiendo así nuevas relaciones y asociaciones. El pensamiento productivo, se gesta en una nueva reestructuración de los elementos que intervienen en un problema que normalmente viene posibilitada por un cambio de perspectiva. Las soluciones a los problemas planteados incorporan elementos novedosos y creativos. En esta forma de pensamiento no nos limitamos sencillamente a recordar, sino que somos capaces de producir respuestas no ensayadas previamente. Algunos autores contemporáneos también han usado circunstancialmente el término pensamiento productivo en relación con la creatividad e incluso como sinónimo.

Otra de las grandes contribuciones, ampliamente aceptada en la comunidad científica, del enfoque de la Gestalt, son las leyes de la organización perceptual (Ballesteros, 2001), basadas en la idea de que la percepción *"envuelve"* la mente imponiendo un cierto orden o estructura a partir de los estímulos que recibe. En nuestra investigación serán especialmente importantes en el estudio cognitivo de la visualización.

En rasgos generales, la Gestalt considera que cuando una persona consigue resolver un problema de forma repentina, sin poder explicar cómo lo ha logrado, es entonces cuando se produce la comprensión súbita del problema el –Ahá- (Wertheimer, 1959) que acompaña la ocurrencia del insight. El insight solo puede venir generado mediante el pensamiento productivo, independientemente de los mecanismos cognitivos y funcionales que subyacen en él. El concepto del insight supone soluciones concretas y nuevas reorganizaciones estructurales de los elementos del problema (Duncker, 1945; Köhler, 1929; Wertheimer, 1959) de manera que se considera:

1. El insight, se produce mediante la reorganización perceptiva que tiende a enfocar y centrar adecuadamente un problema.
2. La solución final aparece como producto de sucesivas reorganizaciones y reestructuraciones graduales, en las que también interviene de forma relevante la comprensión de las relaciones entre los elementos del problema. El pensamiento va evolucionando saltando de una fase a otra cualitativamente distinta.
3. La rapidez con la que se encuentra la solución depende de la experiencia previa y de la fijación que pueda tener una persona. Wertheimer (1959) argumenta que cuando se ha enseñado a una persona de manera mecánica y rutinaria, ésta puede tener dificultades para resolver problemas de forma diferente.
4. El insight se puede considerar a veces como un proceso súbito de comprensión y otras como producto de una profunda reflexión (Wertheimer, 1959)

A pesar de todo la teoría de la Gestalt ha generado cierta crítica y controversia entorno al insight. Controversia que se debe fundamentalmente en parte a una falta de definición en la conceptualización del mismo y en los mecanismos y procesos que intervienen, así como la ausencia de un sistema taxonómico del insight. Autores como Dellarosa (1988) critican cierta falta de claridad y rigor metodológico al respecto.
Por este motivo han surgido diversos modelos teóricos con la intención de explicar de forma más significativa el proceso del insight. El estudio del insight normalmente se ha asociado al paradigma gestáltico, sin embargo hasta la actualidad, diversos autores han investigado este complejo proceso desde diferentes vertientes, incluyendo la teoría del procesamiento de la información en el paradigma cognitivo. A continuación expondremos aquellos modelos teóricos del insight que hemos considerado más relevantes.

2.1.2 MODELOS TEÓRICOS DEL INSIGHT

Exponemos algunos de los modelos teóricos que por las aportaciones realizadas, nos han parecido más relevantes en el estudio del insight.

- Hadamard (1947) expone una explicación más significativa del proceso del insight, evitando las posibles carencias de la Gestalt. Concibe que en todos los casos de insight documentados, están presentes cuatro etapas con rasgos claramente diferenciados: a) *preparación*, en la que se requiere un importante esfuerzo al intentar resolver el problema; b) *incubación*, comprendida a partir de la importancia que concierne al pensamiento inconsciente; c) *iluminación*, de forma inesperada y rápida se accede a la solución; y la última etapa d) *verificación*, es la encargada de revisar los detalles de la solución planteada.

Su teoría del insight o iluminación otorga un papel crucial al razonamiento inconsciente por encargarse de considerar las posibles soluciones alternativas a las planteadas en la etapa de preparación (Tabla 1.1.1). Considera el pensamiento inconsciente como el responsable de concebir una combinación de ideas exitosa en la resolución de un problema y posteriormente transferirla a nuestro consciente, produciéndose así en nuestra mente de forma casi imperceptible *la nueva idea* resolutoria que provoca el insight. Wallas (1926) plantea una explicación del insight muy similar con pequeñas variaciones.

- Para Simon (1977) es la teoría de la familiarización y el olvido selectivo, que plantea, la que puede explicar el proceso del insight. Es el primero de los modelos teóricos que expone una explicación cognitiva del insight en base a la memoria a corto y largo plazo. Concibe la familiarización cuando la persona aborda de forma consciente las diferentes heurísticas, métodos y estrategias a utilizar para poder resolver un determinado problema planteado. Esta etapa coincidiría con la fase de preparación de Hadamard. Las posibles ideas fallidas o no, heurísticas, estrategias y en definitiva las experiencias resolutorias no acertadas que se generan en la familiarización se mantienen en la memoria a corto plazo y se albergan en la memoria a largo plazo. Es entonces, a medida que se generan nuevas experiencias resolutorias, cuando se produce el olvido selectivo de aquellas que se mantenían en la memoria a corto plazo. Sin embargo, la memoria a largo plazo va aumentando el repertorio de "trozos-heurísticos" y estos fragmentos de memoria nos conducen a posibles estrategias bastante diferentes a las anteriores, hasta llegar a una resolución correcta, que en algunos casos podría propiciar la ocurrencia del insight.

- Perkins (1981) propone una teoría cognitiva del insight, considerándolo como uno de los soportes esenciales del desarrollo de la creatividad, entendida como la habilidad de formar nuevas combinaciones de ideas para llegar a un fin. En su teoría considera el insight como un proceso de razonamiento y comprensión estructural y profunda, estableciendo algunos procedimientos para fomentar el insight en el aula. A diferencia de otros autores no atribuye un papel prominente al subconsciente, porque considera que los procesos mentales del subconsciente en cierta medida sustentan el pensamiento y por tanto no desempeñan un papel extraordinario en el pensamiento productivo.

- Ohlsson (1984) plantea una teoría de la reestructuración para explicar el fenómeno del insight en la resolución de problemas. De forma análoga al paradigma gestáltico, concibe el insight a partir de la reestructuración óptima de los elementos que intervienen en una situación problemática concreta. No obstante, dicho autor a diferencia de la Gestalt entiende que la ocurrencia de una *reestructuración óptima* solo puede venir posibilitada por la adecuada descripción y configuración espacial del problema en cuestión. La resolución de un problema no viene dada por la resolución directa o analítica, sino a partir de una forma espacial diferente de enfocarlo o a partir de otra perspectiva espacial distinta. Para algunos autores (Ohlsson, 1984; Bermejo, 1995) la reestructuración es un elemento clave del insight ya que ésta se da siempre en la resolución de un problema, aunque, no siempre signifique un progreso. Dicha reestructuración no tiene por qué darse en todas las fases de un problema y solo se puede concebir adecuadamente mediante un análisis profundo del problema.

- Para Metcalfe (1986) en la resolución de problemas de insight se da siempre un cambio completo de la representación inicial del problema. Sugiere la ocurrencia del insight a partir de aplicar los conocimientos adquiridos de la experiencia a una situación nueva contextualizada en un problema y esto conlleva implícitamente una reestructuración del planteamiento inicial del mismo. El insight supone una solución repentina y novedosa en cuanto a la forma de comprender el problema. Entendemos que la controversia sobre el insight sigue abierta, como lo demuestran las afirmaciones de Metcalfe (1986) y Perkins (1981), para quienes un mismo problema que precisa de una solución de insight se concibe de maneras distintas. Mientras que Metcalfe (1986) plantea una cambio de perspectiva y representación, Perkins (1981) considera que la solución está supeditada básicamente a ciertas dosis de razonamiento y comprensión.

- Sternberg y Davidson (1986) argumentan la dificultad latente en explicar el proceso del insight en el que a diferencia del paradigma gestáltico consideran que el constructo del insight comprende tres ámbitos. Lo conciben de forma implícita como un constructo fundamentado en la inteligencia creativa, a diferencia de otras teorías que basan el insight en el pensamiento inconsciente (Hadamard, 1947) o la reestructuración espacial (Olhsson, 1984). Explicitan que para generar el pensamiento adecuado que posibilite el insight es necesario que tres procesos: *codificación selectiva, combinación selectiva y comparación selectiva,* puedan interrelacionarse en mayor o menor grado y se apliquen con éxito ante la resolución de problemas novedosos e ingeniosos.

- *Codificación selectiva.*
  Sucede cuando un estudiante es capaz de seleccionar de toda la información disponible, aquella que es realmente importante para la solución de un problema.

- *Combinación selectiva.*
  Tiene lugar cuando una vez se conocen las partes relevantes del problema, se escoge de manera óptima la forma en que éstas se combinan, reconfiguran, reestructuran o encajan para llegar a la solución exitosa.

- *Comparación selectiva.*
  Sucede cuando se descubre la relación implícita entre la información de experiencias pasadas y la información nueva desde otra perspectiva distinta, necesaria para resolver un problema. Dependiendo como se use la antigua información para comprender la nueva se producirá una comparación selectiva encaminada a la resolución buscada.

Sternberg y Davidson, establecen el insight a partir de la adecuada combinación de estos tres procesos, no obstante también argumentan que la ocurrencia de algunos insights pueden generarse como resultado potencial de uno de estos procesos, si predomina de forma especial en la estrategia de resolución del problema por encima de los otros. Tácitamente han establecido una clasificación triarquica de los tipos de insight existentes.

- Otros autores como Weisberg (1996) no consideran especialmente, la reestructuración de las partes integrantes de una situación problemática, en el sentido de la Gestalt, como un criterio significativamente necesario para la ocurrencia del insight. Establece una relación más amplia entre el proceso del insight y el pensamiento creativo. Concibe que los problemas de insight demandan un tipo de pensamiento concreto: el pensamiento discontinuo, que en cierta manera está relacionado con el pensamiento lateral de Eduardo de Bono (1971). El pensamiento discontinuo se genera cuando en un momento determinado de la resolución de un problema es necesario cambiar el enfoque o perspectiva para poder realizar algún avance hacia la solución final.

Establece también una taxonomía de problemas de insight, respecto a aquellos problemas que para resolverlos requieren de manera unilateral del pensamiento discontinuo (problemas de insight puro) y de aquellos que también admiten técnicas y estrategias convencionales para su resolución (problemas de insight híbridos).

- Dentro de los modelos contemporáneos de cognición creativa, cabe destacar el modelo de Geneplore[4] (Finke y otros, 1995; De Nicolás, 1999) por constituir un marco teórico valioso sobre la invención, en el que se denomina el insight como insight creativo. Este modelo concibe la invención creativa como un ciclo compuesto por dos fases interactivas que pueden repetirse formando nuevos ciclos. La primera fase es la *generativa* donde la persona construye representaciones mentales que se denominan estructuras preinventivas. En esta primera fase generativa se estudian los distintos tipos de procesos generativos cognitivos (recuperación desde la memoria, la asociación, la síntesis, la transformación, la transferencia analógica y la reducción categorial) que pueden ser relevantes en la construcción de estas estructuras preinventinvas que pueden promover el descubrimiento creativo. Dentro de estas representaciones mentales, los patrones visuales, las formas de objetos, las mezclas mentales, las categorías y los modelos mentales han sido interpretados como estructuras preinventivas.

[4]El modelo Geneplore (Finke y otros, 1995) se concreta en el estudio de la creatividad desde los procesos cognitivos creativos. Está compuesto por dos fases que interactúan: la generativa y la de exploración. Concretamente estos procesos denominados generativos constituyen la fase de inicio donde se construyen las representaciones mentales o estructuras preinventivas que pueden promover el descubrimiento creativo. En la fase de exploración intervienen distintos procesos que podrían facilitar la ocurrencia del insight creativo.

La segunda fase de *exploración* es donde estas representaciones mentales o estructuras preinventivas se interpretan a través de distintos procesos como por ejemplo evaluar las hipótesis del problema en la estructura preinventiva o las posibles representaciones de la solución del problema, infiriendo los posibles usos de la estructura, la interpretación conceptual, el contexto y la búsqueda de características significativas, pudiendo llegar a propiciar la ocurrencia del insight creativo.

Una ventaja de este modelo, es el hecho de considerar la generación y exploración como procesos distintos pero que interactúan. Las ideas creativas pueden generar originalmente estructuras preinventivas interesantes o significativas, es entonces cuando posteriormente podremos considerar sus diversas implicaciones durante la fase exploratoria. En el modelo de Geneplore se describen detalladamente ciertas propiedades de estas estructuras, como la ambigüedad, emergencia e incongruencia contribuyendo de forma explícita al descubrimiento y a la exploración creativa.

- Desde una vertiente de estudio basada en la creatividad como ambiente, Sequera (2007) plantea una investigación en la que uno de los objetivos principales consiste en identificar aquellos escenarios o procesos en el desarrollo de una clase, que promueven la existencia de indicadores creativos en matemáticas. Describe estos escenarios o procesos como momentos de aprendizaje creativo, entre los que reconoce cinco cualitativamente distintos: preparación, incubación, insight, verificación y reflexión. Estos momentos son los que le han permitido dar una explicación estructural de lo ocurrido en el aula.

  Particularmente, Sequera (2007) define el insight como momento de aprendizaje creativo, cuando el docente es capaz de estimular a los alumnos a dar respuestas a preguntas, sin importar si la respuesta es correcta, cuando los anima a formular preguntas, los ayuda a establecer relaciones matemáticas internas o externas, promoviendo el análisis, la síntesis, etc. Autores como Callejo (1994) insisten en que la ocurrencia del insight o la inspiración tiene lugar en el instante en que se ve claro el momento del Eureka y la vivencia del Ajá! porque conduce a una estrategia de resolución del problema.

  En el momento del insight el conocimiento aflora de forma repentina, produciéndose las conexiones internas o externas adecuadas. Este momento se identifica por la vivencia del descubrimiento que da lugar a una respuesta innovadora y efectiva, caracterizada por dar forma al conocimiento, sabiendo como organizar el material acumulado durante el momento incubatorio y siendo capaz de abordar un momento comunicativo posterior sobre el resultado esperado. Sequera considera que los momentos creativos, como el insight, que podemos identificar en una clase se pueden enriquecer con distintas acciones, muchas de las cuales son posibles dejando transcurrir el tiempo incluso en otros ambientes distintos. Aunque de forma tácita explicita que estos momentos creativos no son lineales, ni tienen una secuencia ni ocurrencia fija, sino que dependen de cada actividad planteada. Las interferencias y creencias o fijaciones funcionales del alumnado pueden hacer que se den momentos creativos o no, dependiendo del contexto.

- En la investigación de Liljedahl (2008b) realizada con una muestra formada por estudiantes, profesores y matemáticos e investigadores actuales afirma que la experiencia del Ajá! en matemáticas y concretamente en la resolución de problemas se identifica en buena medida en la componente afectiva. Llega a identificar la componente afectiva como aquella que diferencia la ocurrencia del insight de otras experiencias matemáticas. Esta aportación supone un salto cualitativo en el entendimiento de la experiencia del Ajá! ya que hasta ahora había sido estudiada desde el contexto de la componente cognitiva, basada generalmente en procesos de razonamiento, comprensión y lógica. Es decir, hasta ahora se creía que los procesos cognitivos ocultos por descubrir, eran los que potencialmente podían generar el valor extraordinario de estas experiencias matemáticas del Ajá!. En cambio dicho autor afirma a partir de diversas fuentes, que no es el misterio del proceso en sí lo que otorga el valor extraordinario, sino la respuesta afectiva positiva que la propia persona que resuelve la situación problemática siente de forma consciente.

- Existen otras investigaciones interesantes como la de Cunningham y MacGregor (2008) correlacionadas con el insight. Dichos autores estudiaron la resolución de jeroglíficos/puzles donde para resolverlos se requería superar los supuestos implícitos de la lectura normal, proceso similar a la reestructuración mental necesaria en el insight. Partían de la hipótesis de que a medida que existen más supuestos implícitos involucrados en la solución, más difícil resultaría la resolución del problema. La investigación contó con una muestra de 72 estudiantes universitarios, a los que se les pasó una serie de problemas denominados *rebuzz puzle*. Estos problemas eran rompecabezas formados esencialmente por imágenes y normalmente realizados a partir de letras y palabras que crípticamente representaban una palabra o frase.

A lo largo de este trabajo, se tendrán presente las diferentes aportaciones cualitativas sobre el insight de los distintos modelos teóricos que hemos explicitado. Pondremos un especial énfasis en las teorías de la reestructuración de la Gestalt, así como en las contribuciones de otros autores (Hadamard, 1947; Liljedahl, 2008b) especialmente relevantes para nuestra investigación.

2.1.3 INSIGHT CONVERGENTE VERUS INSIGHT DIVERGENTE

Desde la perspectiva de la cognición creativa, el insight no es un proceso único que conlleva siempre la misma medida y combinación de procesos, por eso se distingue entre insight creativo o divergente e insight convergente, distinción que nos parece necesaria para nuestra investigación. La cognición creativa aplica el método científico a la exploración y el descubrimiento creativo con el objetivo de minimizar las connotaciones ambiguas y místicas que se generan entorno a la creatividad, sin trivializarla tacita y asépticamente como a veces puede suceder cuando, con un diseño muy sofisticado, se emplean procedimientos artificiales o experimentalmente demasiado rebuscados o barrocos.

Desde esta perspectiva podemos diferenciar entre el insight divergente y el insight convergente, conceptos que tradicionalmente reflejan la clásica distinción entre pensamiento divergente y convergente (Finke y otros, 1995).

Coincidiendo con De Nicolás (1999), cuando exponemos el pensamiento divergente nos referimos a aquel que transciende fuera de un concepto, asociando ideas y posibilidades que generalmente no se suelen considerar. Revierte en el descubrimiento de relaciones e intuiciones remotas hasta la utilización inusual de objetos o elementos corrientes que previamente se han concebido con otras funcionalidades. Mientras que cuando incidimos en el pensamiento convergente nos referimos a la forma de pensamiento que se enfoca hacia una sola idea o finalidad, a partir de una información previa. Algunos ejemplos de pensamiento convergente consistirían en descubrir al culpable de un crimen después de considerar todas las evidencias posibles, o descubrir que una ruta en particular es el mejor camino para ir de un punto concreto a otro teniendo en cuenta una serie de condicionantes, etc.

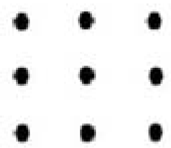
Enfatizando aún más en la distinción entre insight divergente y convergente, consideramos otros ejemplos al respecto.

El *insight divergente* sucede cuando se empieza con una estructura o idea pretendiendo encontrar usos o implicaciones originales de esta misma, para resolver una situación determinada. En ocasiones, los artistas y científicos (Finke y otros, 1995; Miller, 2000) promueven y generan ideas o estructuras creativas interesantes sin un fin específico, sencillamente por explorar nuevos planteamientos, posibilidades y alternativas.

En definitiva, en el insight divergente nos interesa descubrir qué nuevos significados se pueden atribuir a una estructura determinada. Finke (1990) ha estudiado este tipo de insight, planteando estrategias y técnicas para generar e interpretar formas y estructuras que pueden favorecer su ocurrencia. El insight divergente consiste básicamente en encontrar significado en la estructura planteada en un situación concreta, a diferencia del insight convergente que consiste más en estructurar, reorganizar y reestructurar lo que ya tiene significado. Como ejemplo de insight divergente, planteamos el siguiente problema:

Conectar los puntos del diagrama, utilizando no más de cuatro líneas rectas sin levantar el lápiz del papel y no pasando dos veces por el mismo punto.

Adaptación de Adams (1999)



Este problema en sí mismo, ya aporta una estructura formada para su resolución, es decir hemos de trazar líneas rectas que unan los puntos del diagrama. El insight divergente consiste en encontrar cual de las múltiples aplicaciones de esta estructura de resolución satisface el enunciado del problema. James L. Adams hace un brillante y divertido ejercicio en su libro publicado en 1999 donde colecciona distintas soluciones a este problema.

En cambio en el *insight convergente*, una persona descubre una estructura o idea creativa que tiene sentido partiendo de datos, elementos o relaciones desconectados a priori. Encontramos una buena ilustración de ejemplos en los clásicos problemas de insight propuestos por distintos autores (Wertheimer, 1959; Perelman, 1975; Gardner, 1987,1989; Metcalfe y Wiebe, 1987; Weisberg y Alba, 1981) donde ponen de

manifiesto que los enfoques y perspectivas tradicionales de abordar un problema no funcionan. Nos referimos al insight convergente cuando hemos de resolver situaciones problemáticas inusuales o innovadoras que suponen un misterio para la persona de manera que tiene que detectar las pistas o indicios relevantes para posteriormente encauzarlos en la creación de una nueva reestructuración o estructura coherente.
Como ejemplo de insight convergente, planteamos uno de los clásicos problemas de insight geométrico (Metcalfe, 1986; Holt, 1988; Batllori, 2000), representado en la figura 2.1.3 donde el objetivo consiste en determinar la longitud de la hipotenusa "a" siendo "r" el radio del circulo de valor conocido.

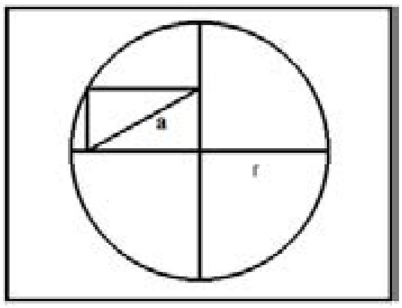


Figura 2.1.3: Problema insight convergente

Este problema por sí mismo, no desprende una estructura de resolución como en el caso del insight divergente, sino que requiere de la creación de una nueva estructura partiendo de elementos geométricos que inicialmente parecen no tener conexión previa.

Observamos que la diferencia principal entre los dos tipos de insight, posiblemente radica en que la naturaleza del insight divergente parece fundamentarse en que la estructura del problema facilita las posibles estrategias de resolución. Mientras que en el caso del insight convergente, la estructura del problema no sugiere generalmente posibles estrategias de resolución. Como hemos visto en los ejemplos anteriores y con una cierta frecuencia el insight divergente se identifica con problemas de soluciones múltiples y por el contrario los de insight convergente con problemas de una única resolución.
Concretamente en nuestra investigación identificaremos y estudiaremos principalmente el **insight convergente** y en algún caso el divergente, mediante problemas geométricos planteados a estudiantes de 4t de la Educación Secundaria Obligatoria.

2.2 EL INSIGHT EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el apartado 2.1.1 *Pensamiento productivo de la Gestalt*, hemos descrito el concepto de insight que se planteó en la Gestalt (Köhler, 1969; Wertheimer, 1959), como mecanismo mental basado en la reorganización perceptual, reestructuración de elementos y reconocimiento de relaciones en el que bajo ciertas circunstancias, las personas podemos lograr un insight en la resolución de un problema, aunque no hayamos tenido una amplia experiencia en el trabajo de este tipo de problemas. En contra posición otros autores como Thorndike (1911) argumentaban que cualquier comportamiento está basado en el ensayo y error, donde toda eficiencia en este sentido es resultado de un extremo aprendizaje de la situación.

Un clásico ejemplo que refuta esta perspectiva teórica, es la respuesta dada por una de las niñas estudiadas por Wertheimer (1959, p.49) al resolver el problema de determinar el área de un paralelogramo. A dicha niña se le había enseñado a resolver el área de un rectángulo contando el numero de cuadraditos que encajaban en él. Ante la figura del paralelogramo la niña exclamo "Hay algo raro aquí y aquí". Dubitativamente dijo: "Podría hacerlo bien aquí… pero…". De repente gritó: "¿Pueden dejarme unas tijeras? Lo que sobra allí es justo lo que falta aquí. ¡Ya está! " A continuación cortó la figura verticalmente y colocó el extremo izquierdo a la derecha. Este ejemplo hizo ver a Wertheimer la importancia del pensamiento productivo, porque a la niña nunca se le había enseñado como cortar un paralelogramo para construir un rectángulo con la finalidad de calcular su área. En definitiva, vemos como la niña no tenía un conocimiento específico previo de la situación, pero pudo a través del análisis de la dificultad que se le presentaba, buscar respuestas, ideas y soluciones más allá de su experiencia pasada creando una resolución nueva.

2.2.1 INSIGHT Y REORGANIZACIÓN ESTRUCTURAL

Una de las primeras referencias interesantes sobre el insight, la podemos encontrar en el trabajo de Otto Selz[5], citado en Frijda y de Groot (1982). En su trabajo se plantea una primera teoría no asociacionista sobre el insight y la solución de problemas creativos, que sirvió de punto de partida para la Gestalt. Concibe que la ocurrencia del insight puede propiciarse a partir de la resolución de problemas creativos. Dicha resolución implica imaginarse como los elementos, datos y el objetivo de un problema se ajustan dentro de una estructura coherente. En definitiva, el insight puede suceder cuando la persona es capaz de superar la dificultad que le crea una estructura compleja. Por ejemplo, Benjamín Franklin pretendía atraer la electricidad del relámpago hasta donde él estaba, para ello tuvo que imaginarse una estructura coherente. El insight de Franklin sucedió cuando estaba pensando como anticipar un esquema de la situación que le permitió plantear un experimento con una cometa provista de una punta metálica y al comprobar que la botella de Leyden era cargada con electricidad del cielo, finalmente descubrió la estructura del pararrayos.

Selz describió el insight (Frijda y de Groot, 1982) como el proceso de anticipación de un esquema, que consiste en integrar todos los componentes de un problema dentro de una estructura coherente. Dicho autor definía un problema, como un conjunto de enunciados que presentan algún vacio o laguna y su solución implica imaginarse cómo superar el vacio de manera que se complete una estructura coherente.

Vamos a ilustrar este apartado con un tradicional problema de construcción geométrica:

Dadas dos rectas que se cortan en un angulo α, construir una circumferencia de radio r dado, tangente a las dos rectas dadas.

En la resolución del problema se requiere previamente poder imaginar y ubicar cada uno de los elementos que intervienen así como establecer las relaciones geométricas entre ellos.

[5]Otto Selz (1881-1943) es considerado como uno de los psicólogos precursores más importantes de la revolución cognitiva, aunque sorprendentemente existen pocos estudios de su obra. A menudo se le menciona en el contexto de la escuela de Würzburg de la psicología del pensamiento y, a veces, en el contexto de la psicología de la Gestalt. Anticipó algunos de los conceptos más importantes en la psicología cognitiva (Hark, 2010) referentes a la resolución de problemas (la comprensión de un problema implica la formación de una estructura) y los procesos de pensamiento.

Después de poner a prueba mediante ensayo y error, diferentes estrategias para construir la circunferencia de radio r, posiblemente nos demos cuenta de que el problema se reduce a encontrar la ubicación del centro de la circunferencia que equidiste de las dos rectas una distancia r. Una de las posibles resoluciones podría venir inspirada si conseguimos visualizar las rectas paralelas a una distancia r de cada una de las rectas del enunciado. Su intersección seria la ubicación buscada del centro, tal y como podemos comprobar en la representación de la Figura 2.2.1 siguiente:

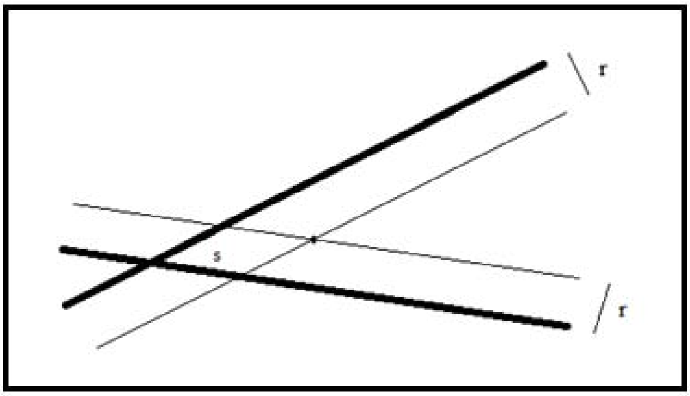


Fig 2.2.1: Problema construcción geométrica

Otra posible solución, podría venir inspirada por la ocurrencia de trazar la bisectriz al ángulo dado s y una recta paralela a una de las dos rectas del enunciado a distancia r. La intersección nos proporcionaría el centro de la circunferencia buscado.
Hoy en día la teoría de Selz (Frijda y de Groot, 1982) es considerada como un preludio en el movimiento de la Gestalt e incluso en la revolución cognitiva posterior. De hecho la perspectiva del insight, como proceso para anticipar y completar un esquema, continúa desarrollándose en la perspectiva de la investigación cognitiva.

Por otro lado, Wertheimer (1959) sugiere que el insight se produce cuando somos capaces de captar la organización estructural de una situación o problema y conseguimos aplicarla adecuadamente a un nuevo problema. Según este autor, la solución de problemas, consiste en captar las relaciones estructurales y funcionales intrínsecas de una situación hasta conseguir reorganizarlas con el fin de plantear una solución adecuada. Si a los estudiantes se les anima y motiva a centrarse en las relaciones estructurales entre los diversos elementos de un problema seguramente tendrán mayor capacidad para transferir lo que han aprendido en otras situaciones problemáticas más o menos similares. En esta línea, Katona (1940) obtuvo resultados parecidos, empleando otro tipo de problemas geométricos, que consisten en realizar figuras geométricas uniendo un determinado número de palillos. Los resultados inciden en que los alumnos que descubrieron la estructra subyacente del problema, como darse cuenta que cada palillo podría formar parte de uno o dos cuadrados u otras figuras, manifestaron mayor capacidad de transferir lo que habían aprendido en la resolución de problemas nuevos. En cambio los alumnos que aprendieron mediante aprendizaje rutinario una serie de respuestas, no mostraban tanta capacidad de transferencia a la hora de abordar problemas nuevos. La investigación sobre la transferencia, es decir sobre aquellos prolemas que hipotéticamente una vez resueltos podrían ayudar a resolver otros supuestamente similares para la persona que propone la resolución, es también un tema importante en la vertiente cognitiva actual (Sternberg y Detterman, 1992). Distintos autores han estudiado las condiciones bajo las cuales una persona es capaz de captar la organización estructural de una situación desde la solución de problemas previos para aplicarla o no a problemas nuevos (Perkins, 1981).

En definitiva consideramos que lo importante de la experiencia es lo que una persona ha ganado con la misma, ¿son conexiones no entendidas? o ¿insights subyacentes en las relaciones estructurales? La cuestión básica no es lo que se recuerda, sino cómo se recuerda y se aplica lo recordado a una situación novedosa. Si aplicamos lo recordado de manera rutinaria, sistemática y a ciegas posiblemente no obtendremos los resultados buscados o si por el contrario aplicamos lo recordado adaptándolo a la estructura requerida por la situación, posiblemente favorezcamos la aparición del insight que nos guie a la solución acertada.

En cualquier caso, la investigación sobre el pensamiento por analogía representa una línea de investigación relevante (Vosniadou y Ortony, 1989). En el caso de la analogía y coincidiendo con Fiol (2007) la comparación es un gesto cotidiano inevitable y creativo. Si somos capaces de estimularla en el contexto escolar desde la perspectiva adecuada puede ser una aliada que facilite el desarrollo creativo de los estudiantes en la resolución de problemas. Cómo comparaciones podemos establecer tácitamente las analogías y las metáforas. La diferencia radica básicamente en que las analogías son comparaciones entre comparaciones explicitables y en las metáforas entra en juego el lenguaje figurado. En cualquiera de los dos casos la analogía y la metáfora, son herramientas cotidianas que se emplean de manera distendida y potencian la capacidad creativa de las personas. Encontramos una referencia a una cita especialmente interesante de la psicóloga Ellen Winer (Fiol, 2007, p.15), en la que se afirma que nuestra capacidad metafórica disminuye con el paso de los años, mientras que nuestra capacidad analógica aumenta.

2.2.2 INSIGHT Y REORGANIZACIÓN VISUAL REPENTINA

Una de las perspectivas más importantes relacionadas intrínsecamente con la naturaleza del inisght es la teoría perceptiva planteada por Köhler (1929). Este autor estudió y aportó una de las mayores contribuciones a la investigación del insight. Concibe que la ocurrencia del insight puede suceder cuando una persona es capaz de ver o mirar la situación de un problema de una forma nueva. En definitiva, cuando se consigue reorganizar súbitamente los elementos que constituyen la información visual, en determinados problemas, de forma que se verifiquen las condiciones del objetivo final, pudiendo generar una nueva solución. Desde esta perspectiva resaltamos básicamente dos aspectos. Por un lado insistimos en la naturaleza visual del insight y la percepción en algunos problemas concretos; según el problema, incidirán más algunas habilidades de visualización, imágenes y métodos visuales que otros con el fin de construir una nueva reestructuración coherente y organizada a partir de la información inicial de que se disponga. Por otro lado, consideramos que el pensamiento creativo frecuentemente exige de una reorganización y reestructuración de la información visual.

Por ejemplo, en el clásico problema geométrico de insight convergente presentado en la Figura 2.1.3, el objetivo consiste en determinar la longitud de “a” siendo “r” el radio del circulo de valor conocido. El insight necesario para resolver dicho problema consiste precisamente en darse cuenta de que el lado “a” que puede ser cualquiera de las dos diagonales del rectángulo es igual al radio del círculo; la diagonal no dibujada del rectángulo coincide con el radio. Algunas de las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) necesarias para resolver este problema eficazmente consisten en:

- **a.** *La identificación visual*, cuando se identifica independientemente del contexto del problema, un par de triángulos rectángulos, un rectángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo como diagonal del rectángulo.
- **b.** *La discriminación visual*, cuando comparamos adecuadamente las dos diagonales del rectángulo identificado.

c. *El reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas*, cuando se descubre la relación geométrica entre la diagonal del rectángulo, la hipotenusa del triángulo y el radio del círculo.

Concluimos que en el momento que somos capaces de cambiar la perspectiva de cómo mirar la figura geométrica, reorganizando y reestructurando la información visual (Köhler, 1969) dada es cuando podemos facilitar la aparición del insight y resolver el problema.

La investigación del pensamiento visual y las habilidades de visualización en la resolución de problemas sigue siendo un foco de gran interés, prueba de ello es la cantidad de estudios que encontramos en la literatura. Algunos estudios son por ejemplo la visualización en la computación (Wheatley, 1997; Sinclair, 2003; Gilbert, 2005) o las representaciones que ayudan a construir modelos mentales (Presmeg, 2006) y que pueden facilitar la resolución de problemas matemáticos (Krutetskii, 1976; Nelsen, 1993; Guzman, 1996; Presmeg, 2006).

2.2.3 INSIGHT Y BLOQUEO MENTAL

Desde otro enfoque del insight, algunos autores se han interesado por estudiar qué es lo que impide a las personas inventar soluciones creativas ante la resolución de problemas. ¿Conseguir una reestructuración nueva de los elementos para conseguir una solución? Duncker (1945) considera que el insight puede producirse cuando una persona consigue superar un cierto bloqueo mental. Una de las dificultades que puede propiciar este bloqueo mental, es el hecho de pensar en utilizar los datos, objetos o elementos para su uso habitual, en un problema que exige un uso nuevo de estos elementos, para encontrar una solución. A este fenómeno es el que se refieren los autores como Duncker (1945) cuando hablan de "*fijeza funcional*".

El insight implica superar la forma en la que se ha aprendido a mirar algunas situaciones o problemas, para poder percibirlos de forma nueva. En algunos casos, la solución del problema requiere superar ciertos muros mentales que bloquean a la persona para poder percibir adecuadamente la resolución del problema. La fijación funcional, impide frecuentemente las soluciones creativas que promueven el insight (Finke y otros, 1995).

Este enfoque del insight como proceso necesario para superar un bloqueo mental supone una de las caracterizaciones más relevantes a diferencia de los ejercicios de cálculo donde deben ponerse en marcha una serie de habilidades y técnicas reproductoras (Eyvinck, 1991; Mayer, 1986).

Adams (1999) explicita los bloqueos perceptivos y emocionales como ejemplos de aquellos obstáculos mentales que pueden impedir resolver problemas especialmente originales y creativos así como plantear nuevas perspectivas de resolución o percibir la información necesaria para resolverlos.

Concibe los bloqueos perceptivos como aquellos estereotipos que se integran de manera innata, y que pueden suponer un impedimento para percibir posibles combinaciones en la elaboración de nuevas resoluciones ante un problema. Por ejemplo, supongamos que tratamos de pensar qué hacer con un grupo de sillas. Si sólo pensamos en ellas como el estereotipo perceptivo que tenemos integrado, posiblemente solo pensaremos en usos cotidianos como sentarnos en ellas… Pero si pensamos en los atributos de una silla (tela, tapizado, patas de madera, tornillos, etc) podríamos plantear muchos más usos. Por ejemplo quitar las patas de madera y emplear solo los asientos como grada para ver un partido de futbol, hacer bolsos con la tela, vender los tornillos…. Los estereotipos inhiben este tipo de pensamiento que puede resultar decisivo en el planteamiento de nuevas resoluciones creativas. Dicho autor define los estereotipos perceptivos cuando la mente procesa cierta información, de manera que antes de ser almacenada en la memoria es filtrada, eliminando aquello que no considera importante. Entonces, cuando se vuelve a tener acceso a dicha información, ésta se recuerda simplificada y clasificada, lo que en cierto modo atribuye Adams (1999) sería un *estereotipo perceptivo* de la información original.

Respecto los bloqueos emocionales, concibe que pueden interferir cuando exploramos y manipulamos la gestación de nuevas ideas en ser más flexibles e incluso en comunicar o expresar nuestras ideas a otros de manera que ganen aceptación. Algunos de los motivos que pueden propiciar bloqueos emocionales en la resolución de problemas son:

1. El miedo a cometer errores, a fracasar, a arriesgarse.
2. La dificultad para tolerar la ambigüedad respecto un exceso de control, seguridad y orden.
3. La preferencia por juzgar ideas en lugar de concebirlas

4. La dificultad para relajarse e incubar una idea original y creativa.
5. La falta de motivación y estímulo, provocada por la falta de interés en los problemas.
6. La sobremotivación para lograr el éxito de inmediato.

2.2.4 INSIGHT Y RELACIONES

Parece ser que una mayoría de autores (Van Hiele, 1957; Wertheimer, 1959) coinciden en destacar que en cierta manera el insight implica comprensión.
Según pongamos el énfasis en los aspectos internos o externos podemos distinguir dos tipos de comprensión (Greeno, 1977). El aspecto externo, sucede cuando podemos comprender algo nuevo a partir de relacionarlo con algo que ya conocíamos previamente. Tiene lugar cuando se incorpora el conocimiento de una persona en una nueva estrategia, proceso o estructura, potenciando así la comprensión. Un ejemplo de este tipo de comprensión, son las relaciones que se establecen mediante analogías en la resolución de problemas.
Por otro lado el aspecto interno de la comprensión se refiere a las relaciones existentes entre los elementos de una situación. Coloquialmente, hablamos de cómo se relacionan las partes para llegar al todo. Un ejemplo clásico de este tipo de comprensión se muestra en el hecho de que conocer diferentes palabras contenidas en una frase no significa necesariamente que la comprendamos; para comprender la frase necesitamos algo más. Es necesario relacionar las palabras o conectarlas de forma apropiada para conseguir el significado de la frase en su conjunto. Los diagramas o mapas conceptuales son ejemplos de diseños que quieren potenciar o hacer explícita la comprensión de relaciones internas.

En el caso de la solución de problemas, las relaciones entre los elementos que intervienen y la solución son de especial relevancia. Múltiples problemas de ajedrez, de matemáticas y rompecabezas generalmente exigen pocas relaciones con otros aspectos del conocimiento, pero sí de relaciones internas entre los elementos subyacentes.
En la Gestalt (Wertherimer, 1959) una de las consideraciones que se ha destacado más acerca del insight es que éste se encuentra relacionado con los rasgos internos de la comprensión, es decir con el hecho de captar la estructura interna de las relaciones que se establecen en un problema.

2.2.5 INSIGHT Y REESTRUCTURACIÓN

La reestructuración es otra de las caracterizaciones más relevantes que emplea la Gestalt para describir el insight, como proceso mediante el que se comprende un problema de forma diferente y creativa. Wertheimer (1959) define la reestructuración, no solo como una reordenación de los elementos, relaciones y conexiones entre los elementos de un problema sino también como un cambio en la representación de estos. Consideramos que la reestructuración en sí misma, puede darse en cualquier fase de la resolución de un problema ya que no existen pautas de aplicación al respecto. El conocido problema, que nos plantea Holt (1988) es una muestra de ello.

Un jardinero se dispone a plantar cuatro árboles, de manera que cada uno se encuentre a la misma distancia de los otros tres. ¿Cómo puedes colocarlos?

En los problemas de insight, generalmente no existen pautas en la reestructuración adecuada de los elementos. La ocurrencia del insight puede venir posibilitada en cualquier momento de la resolución, como ocurre en este caso, a partir de un cambio dimensional en la representación del problema.

Autores como Ohlsson (1984) concluyen que la reestructuración al igual que los cambios de percepción en figuras geométricas, suceden durante el intervalo de tiempo en que se resuelve el problema. Parece evidente que toda reestructuración conlleva un cambio en mayor o menor medida en la resolución de un problema, aunque a veces este cambio puede suponer un progreso y otras veces no. La dificultad radica aquí, en que no tenemos una base para predecir cuando la reestructuración supondrá realmente un avance. Por este motivo Ohlsson (1984) sugiere, que en la medida en que las reestructuraciones que se realicen estén relacionadas con un análisis global del problema y de la meta, tendrán mayor garantía de suponer un progreso en su resolución. Otros autores como J. Metcalfe (1986) han estudiado la relación entre la memoria, basada en la reestructuración y el insight en la resolución de problemas. Los problemas de insight que estudiaba requerían presumiblemente de un cambio de perspectiva completo mediante una reestructuración o representación adecuada del problema que no podía predecirse de su representación inicial. Exponemos en la figura 2.2.5 uno de los problemas que estudió Metcalfe (1986) y que también hemos empleado en nuestra investigación.

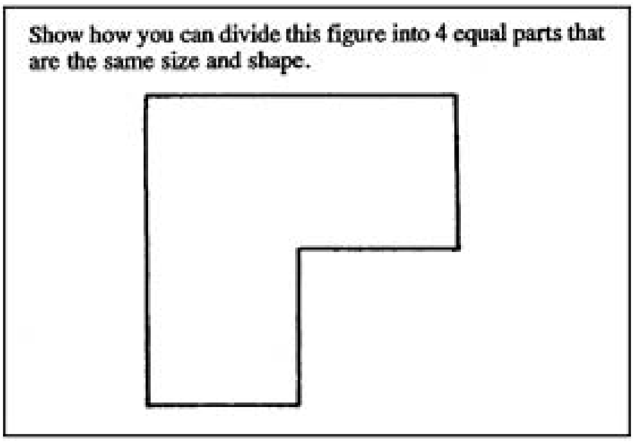


Figura 2.2.5: Problema Fragmentación

El cambio que requiere la representación de este problema, puede conllevar una dificultad o bloqueo mental, que puede a su vez impedir la información parcial necesaria que se genera en los intentos y tanteos iniciales. Según la autora, aquellos participantes, que pudieron predecir y reestructurar adecuadamente la información almacenada en la memoria, a partir de los intentos iniciales, son los que pudieron resolver el problema.
En este problema consideramos que posiblemente, la fragmentación adecuada, junto con las habilidades de identificación y discriminación visual pueden sugerir la reestructuración apropiada que permita identificar las 4 figuras geométricas de la misma forma y tamaño.

Concebimos el insight en la resolución de un problema como aquella reestructuración que posibilita una nueva solución. Entendemos que estas reestructuraciones podrían estar relacionadas con uno o distintos procesos tal y como hemos expuesto en los apartados anteriores. A partir de una nueva organización estructural de los elementos del problema o una nueva configuración de las relaciones de los elementos que intervienen o una nueva reorganización visual repentina, o mediante una combinación de alguna de estas. A modo de conclusión consideraremos en nuestra investigación el concepto de insight geométrico potencialmente perceptivo, contextualizado en la resolución de problemas geométricos y que notaremos a partir de ahora (ip^2), *como aquella reestructuración de los elementos del problema que mediante una reorganización visual repentina puede posibilitar una nueva solución*. Esta reestructuración puede estar basada en una combinación de distintos procesos (Ohlsson, 1984; Wertheimer, 1959) como hemos explicitado anteriormente.

Al hablar de reorganización visual, no queremos referirnos a la percepción entendida sólo como una función visual psíquica específica, sino que la percepción la entendemos como un conjunto, un “todo” en el que también se integran las sensaciones, al igual que la asociación y la atención. Koffka (1922, citado en Aniorte y otros, 2003) entiende que en base a la relación entre estos tres conceptos se sustenta la teoría de la Gestalt sobre la percepción. Cuando los elementos se convierten en forma de sensaciones, podemos experimentarlos en forma de imágenes. En estos casos la asociación puede propiciar que una sensación cause la aparición de otra así como la atención ante un estímulo determinado pueda producir la sensación esperada o no, según si la atención hacía otros elementos ha generado que la sensación pasara inadvertida.

Concebimos la percepción en la línea de la Gestalt, como “el todo es más que la suma de las partes”, entendiendo que los inputs internos de la persona como son las necesidades, motivaciones y la experiencia previa también proporcionaran contribuciones relevantes en cada uno de los estímulos externos. Esta percepción no pretende ser una sustitución superficial del conocimiento, sino que pretende incidir en el núcleo de la idea; dando significado y profundidad al conocimiento, sirviendo de guía para resolver problemas e inspirando descubrimientos creativos.

Caracterizamos algunas de las propiedades del insight, que estudiaremos en la resolución de los problemas geométricos de nuestro estudio :

- **a.** Es prioritario adaptar la aplicación de conocimientos adquiridos a situaciones nuevas (aprendizaje productivo).
- **b.** Representa una forma estructural de comprender un problema y su resolución.
- **c.** Supone una solución repentina después de una reorganización o reestructuración visual.
- **d.** Puede ser necesario la superación de un cierto bloqueo mental previo a la ocurrencia del insight.
- **e.** Es fruto de la comprensión interna de las relaciones que se establecen en una situación problemática.
- **f.** Puede ser el resultado de uno o varios procesos de reestructuración.
- **g.** Pondremos un especial énfasis en aquellos insights que pueden posibilitar la resolución del problema a partir de una única forma de resolución.

2.3 EL INSIGHT DESDE LA PERSPECTIVA COGNITIVA

Desde la perspectiva Cognitiva, el insight se encuentra relacionado con la resolución creativa de problemas, donde bajo determinadas circunstancias, las personas somos capaces de identificar previamente esquemas estructurales que suponen una solución final al problema en cuestión.

Existe una amplia investigación que va desde Wallas (1926), Hadamard (1947), Goleman y otros (1992) hasta Sequera (2007) y Sriraman (2009) en la actualidad que enfatiza y remarca la relevancia sobre las fases, etapas o periodos que intervienen en el proceso creativo. De la misma forma que otros trabajos (De Nicolas, 1999) manifiestan la importancia de conocer las fases del insight. Conocer estas fases en profundidad nos podría permitir identificar donde se originan las dificultades que podrían inhibir la aparición del insight, al mismo tiempo que posibilitarían estudiar cómo evitarlas.

2.3.1 EL INSIGHT Y FASES DE RESOLUCIÓN

A partir de la vertiente del paradigma del procesamiento de la información autores como Davidson, Seifert y otros (1995) plantearon un modelo para concebir y explicar las fases del insight y sus respectivas componentes. El modelo planteado por estos autores, profundiza, analiza y adapta la propuesta estructural originariamente propuesta por otros autores (Wallas, 1926; Hadamard, 1947; Goleman y otros, 1992) en la descripción de las etapas del proceso creativo.

Davidson, Seifert y otros (1995) distinguen tres fases en la ocurrencia del insight: la fase de preparación, la fase de incubación y por último la fase de iluminación. Cada una de ellas se dividen en distintas subfases que exponemos a continuación:

1) Fase de preparación. Se procesa el abordaje de la información del problema en cuatro subfases.

- **i.** Confrontación con el problema. Se requiere motivación y esfuerzo para abordar el problema en cuestión y poder construir una primera representación mental de la situación.
- **ii.** Análisis de los errores. Se toma consciencia de los fallos y errores que surgen al enfrentarnos al problema.
- **iii.** Almacenamiento en la memoria a largo plazo. La memoria almacena los errores cometidos y retroalimenta los nuevos indicadores que servirán de guía en el proceso perceptivo y de comprensión.

iv. Suspensión del planteamiento inicial. Tiene ocurrencia un cierto bloqueo mental que promueve una suspensión de la propuesta inicial de resolución del problema.

2) Fase de incubación. Se subdivide en tres subfases.

i. Incubación intermedia con otras actividades. Los estímulos externos mediante otras actividades motivadoras, pueden facilitar la creación de nueva información e indicadores que nos guíen en la producción de soluciones de insight.

ii. Exposición externa a nueva información precedente del ambiente. Puede nutrir nuevas soluciones de insight.

iii. Recuperación y clasificación general de errores. La nueva información se combina con los errores producidos, al mismo tiempo que selecciona nuevos procesos de percepción y comprensión nuevamente estimulados.

3) Fase de iluminación. Sucede en el procesamiento de la información mediante la estimulación externa y la retroalimentación de los datos y errores almacenados en la memoria a largo plazo. Se subdivide en dos subfases.

i. Interpretación y asimilación de la información. Implica un control, reinterpretación y reestructuración de la nueva representación mental que va a permitir progresar adecuadamente hacía la percepción y comprensión final del insight.

ii. Insight. Representación de alta calidad del problema, que aún no resuelto, ya contiene la clave para la solución correcta.

Coincidimos con Wertheimer (1959) en que la importancia del insight en la resolución de problemas, radica en superar la forma en que se ha aprendido a "ver" y "resolver" ciertas situaciones siendo capaces de poderlas ver, adaptar y aplicar de otra manera, ante aquellas nuevas situaciones que lo requieren.

2.3.2 INSIGHT VERSUS INVENCIÓN

A lo largo de la historia diferentes autores (Poincaré, 1908; Hadamard, 1947) han planteado el concepto de invención relacionándolo ambiguamente con el de insight. En este subapartado queremos incidir en este aspecto. Para De Nicolas (1999) la invención es el proceso de generar estrategias originales con las que realizar determinadas tareas o solventar algunas necesidades. Coincidiendo con este autor, generalmente los productos de la invención son a la vez originales y valiosos, por tanto podemos sugerir que la invención es una forma de creatividad. La invención es algo más que el acto de crear, tiene que ver con el desarrollo de una idea original motivada por el hecho de resolver una tarea, problema o situación y que puede ponerse en acto.

Isaac y Just (1995) comprenden la invención a partir de tres fases distintas, según las operaciones utilizadas en cada una de ellas: limitación de espacio de diseño, generación de diseño y análisis de diseño. Estos autores consideran que un resultado creativo con ciertas garantías de éxito depende de algunos componentes como los condicionantes de la naturaleza de la invención y de que estos se liberen o reformulen en las respectivas fases de limitación de espacio del diseño, el análisis del diseño y la generación de diseño respectivamente.

La invención y el insight se pueden distinguir básicamente porque en la invención observamos la presencia de componentes analíticos que supervisan la generación de esta invención. Sin embargo, en el insight no tienen lugar los mecanismos analíticos o limitaciones. Es por esto que quizás, tradicionalmente debido a la falta de rigor en los procesos analíticos en creatividad, se ha enfatizado ambiguamente en los procesos generativos contribuyendo a la confusión entre el concepto de invención e insight (Poicare, 1908; Hadamard, 1947)

En la invención se alterna entre las fases de la generación de diseño y el análisis de diseño de manera recursiva para llegar a un producto creativo final, y por el contrario en el insight se pasa de manera directa de la generación del diseño a su desarrollo directo. Es decir la ocurrencia del insight normalmente viene precedida de una fase de elaboración donde se desarrollan y describen los aspectos analíticos. En este caso el insight y la elaboración no se alternan. Nos parece por tanto que todo proceso de insight está relacionado de alguna forma con la invención pero en toda invención no necesariamente tiene ocurrencia el insight.

2.4 TAXONOMÍA DE PROBLEMAS DE INSIGHT

En primer lugar es necesario plantear alguno de los criterios fundamentales bajo los que se han clasificado los problemas de insight que tradicionalmente se han estudiado (Wertheimer, 1959) y que estudiaremos en nuestra investigación. En este sentido el insight se concibe en la resolución de un problema mediante la reestructuración, teniendo en cuenta las diferentes caracterizaciones de ésta que hemos analizado en el apartado *2.2 EL INSIGHT EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.* En definitiva, incidimos en la reestructuración como "*aquel cambio estructural en la representación de la resolución de un problema en un momento determinado*". Este cambio estructural puede venir supeditado a través de un cambio de perspectiva, de una nueva organización de los elementos, de una nueva reorganización visual repentina o de establecer nuevas relaciones internas o una combinación de éstas. Esto nos va a sugerir la base para establecer una taxonomía de problemas, basados en la resolución mediante alguna de las caracterizaciones que hemos definido anteriormente en el apartado 2.2.5 INSIGHT Y REESTRUCTURACIÓN.

Un problema se considera resuelto mediante la reestructuración, si dentro de las múltiples estructuras de resolución que se planteen, la correcta difiere de la que parece sugerir directamente el enunciado. Hablamos de problemas de insight resueltos, de manera consciente cuando la estructura de la resolución final es distinta de la planteada inicialmente, aunque de manera inconsciente pueda realizarse una reestructuración que tácitamente no sea explicitada incluso para el propio resolutor.

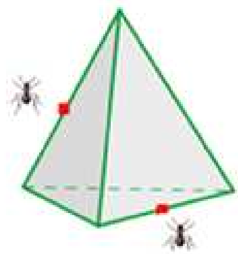
Las taxonomías de problemas de insight pueden abordarse desde la continuidad versus discontinuidad, desde la discontinuidad sin reestructuración, y directamente a partir de las taxonomías del insight. Veamos a continuación estos tres abordajes posibles con más detalle.

2.4.1 CONTINUIDAD VERSUS DISCONTINUIDAD

A menudo la resolución de un problema, requiere de la aplicación de una estrategia o algoritmo de manera reproductiva. En otras ocasiones se deben realizar pequeñas modificaciones de la estrategia original con el objetivo de adaptarla a la nueva situación. Por ejemplo un estudiante que haya memorizado un algoritmo para dividir, cuando tenga que resolver una división con números más grandes de lo que hace habitualmente, podrá tener alguna dificultad o no, pero la aplicación de este algoritmo no le aportará ninguna idea original. En estos casos podemos decir que la solución del ejercicio, está basada en la *continuidad* del pensamiento, a partir de extender las estrategias, ideas o recursos de que dispone a priori nuestro propio conocimiento para solucionar el problema.

No obstante, la solución de un problema no siempre se consigue aplicando la primera estrategia, un algoritmo memorizado, una representación estructural o procedimiento inicial tomado, ya que en muchos casos es necesario un cambio de procedimiento, estrategia o representación estructural para lograr algún progreso. Ésto es lo que concebimos como *discontinuidad* en el pensamiento. Existen distintos tipos de discontinuidad, desde la reestructuración integral en la representación de un problema, hasta el cambio de perspectiva o procedimiento en una fase determinada de la resolución del problema. Autores como Perelman (1975) o Gardner (1989) conocidos especialmente por sus colecciones de problemas de ingenio plantean algunos problemas donde la estrategia de resolución subyacente consiste en una discontinuidad basada en el cambio dimensional. Como por ejemplo en el problema siguiente extraído de Gardner (1978) y adaptado de una versión original de Perelman (1975):

Una hormiga se encuentra en el punto medio de una arista (de 10cm) de un tetraedro y quiere ir al punto medio de la arista opuesta. (En un tetraedro dos aristas son opuestas si no tienen ningún vértice en común) ¿Cúal es el camino más corto? ¿Cuál es su longitud?



En este caso la discontinuidad de pensamiento viene sustentada por una reestructuración que consiste en representar uno de los desarrollos planos del tetraedro, aquel que nos permita identificar el camino más corto en línea recta.

Ante la resolución de un problema cabría preguntarse si este requiere en cierta medida de discontinuidad de pensamiento. Un buen indicador puede ser, el hecho de que los estudiantes sean capaces de resolver un problema, simplemente aplicando los estándares

curriculares, o los procedimientos y estrategias aprendidos según el protocolo escolar. En el ejemplo anterior, sobre realizar una división, un estudiante con habilidades en aritmética no denotaría discontinuidad de pensamiento al realizar un problema basado en la realización de una división extensa.
Las discontinuidades de pensamiento en la resolución de un problema van más allá del ensayo y error y a menudo se originan a partir de un bloqueo mental en un momento determinado en el que se requiere un cambio de perspectiva, producto de una nueva reestructuración o reorganización visual. Las discontinuidades de pensamiento en la resolución de un problema, posiblemente estén relacionadas con la aparición del insight.

En este ámbito encontramos autores como Castañares (2008) muy críticos acerca de la naturaleza de estas discontinuidades. Dicho autor plantea que estas discontinuidades son producto de un proceso a veces muy largo, lleno de situaciones donde se duda y se busca tanteando una solución. Plantea que estas discontinuidades sencillamente están basadas en el ensayo y error.

2.4.2 DISCONTINUIDAD SIN REESTRUCTURACIÓN

Una discontinuidad de pensamiento en un momento determinado de la resolución de un problema, generalmente está basada en alguna de las formas de reestructuración como por ejemplo cuando se reestructuran los elementos de un problema a partir de una nueva reubicación, o cuando se establecen nuevas relaciones entre los elementos del problema o cuando se establece entre ellos una nueva organización estructural tal y como hemos citado anteriormente en los distintos casos del apartado *2.2 EL INSIGHT EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*. En el problema del tetraedro del apartado anterior (*2.4.1 CONTINUIDAD VERSUS DISCONTINUIDAD*) la resolución puede venir propiciada por una reestructuración que consiste en establecer nuevas relaciones entre los elementos del tetraedro posibilitado por su desarrollo plano. En este caso la reestructuración está supeditada a un cambio de perspectiva dimensional.

En cambio en otro tipo de problemas, como es el caso de la resolución de un anagrama, palabra o frase construida como resultado de la transposición de letras de una palabra o frase, la resolución se produce mediante una discontinuidad por la permutación adecuada, pero sin reestructuración en alguno de los sentidos que hemos descrito en apartados anteriores.

Otro de los casos es el citado por Ohlsson (1984) hablando del problema de las torres de Hanoi. Este problema puede ser resuelto a través de la restructuración basada en una cierta secuencia de movimientos y en cambio clásicamente se considera que se resuelve sin la ocurrencia del insight.

2.4.3 TAXONOMIAS DEL INSIGHT

Existen otros investigadores (Metcalfe y Wiebe, 1987; Sternberg y Davidson, 1984, 1986) que han planteado distintas taxonomías con la finalidad de clasificar los problemas de insight desde diferentes vertientes.

Sternberg y Davidson (1984, 1986) plantean tres categorías de problemas de insight según tres procesos que pueden identificarse de forma separada. Estos autores no argumentan específicamente la reestructuración en el sentido de la Gestalt, como un criterio para la aparición del insight, aunque sí conciben en parte el término de la reestructuración según la concepción de la Gestalt. Consideran que existen tres procesos: codificación selectiva, combinación selectiva y comparación selectiva, que sirven de base para la ocurrencia del insight.

Conciben que un primer tipo de insight es producto de una *codificación selectiva*, cuando se selecciona y codifica adecuadamente la información relevante de un problema de la que no lo es. Un segundo tipo de insight es resultado de una *combinación selectiva*, cuando se unen y combinan adecuadamente elementos y procedimientos, aunque no tengan una relación a priori. Y por último un tercer tipo de insight es producto de una *comparación selectiva*, cuando se descubre una relación no evidente entre la información nueva de un problema y la aprendida por la experiencia.

Como se ha comentado anteriormente en el apartado *2.1.2 MODELOS TEÓRICOS DEL INSIGHT* los investigadores Sternberg y Davidson (1984, 1986) emplean el concepto de insight de forma más amplia de la que se ha considerado tradicionalmente en la Gestalt (Wertheimer, 1959). Por ese motivo clasifican algunos problemas como de insight aunque no requieran de reestructuración para su solución. También, es necesario destacar que tampoco establecen un criterio especifico para clasificar los problemas en las distintas categorías que exponen; por ejemplo no argumentan de forma detallada porqué una persona puede solo codificar la información correcta en lugar de comparar o combinarla. De la misma manera que no consideran las tres categorías excluyentes, pudiendo intervenir procesos de codificación, combinación y comparación en un mismo problema.

Metcalfe y Wiebe (1987) propusieron una clasificación de problemas de insight según el sentimiento de entusiasmo de las personas al alcanzar la solución. Es decir, los autores pedían a las personas que a medida que trabajaban los problemas, dejasen constancia del grado de afectividad que sentían, del grado de entusiasmo, así como de su percepción sobre a qué distancia se encontraban de la solución final. Definen un problema resuelto por insight como aquel *en el que los sentimientos de entusiasmo del sujeto no aumentaban a medida que se acercaba a la solución. Los participantes no mostraban indicio alguno de estar aproximándose a la solución hasta que la encontraban de repente* (Bermejo, 1995, p.139)

Weisberg (1996) formuló una taxonomía de problemas extraídos a partir de las distintas investigaciones que han estudiado el insight mediante la resolución de problemas. En dicha taxonomía se clasifican los problemas de insight según los diferentes tipos de reestructuración. El hallazgo que parece más importante es la distinción, entre insight híbrido e insight puro. Si el problema clasificado como de insight puede resolverse con diferentes estrategias con o sin reestructuración lo denomina problema de insight híbrido, por el contrario si solo puede resolverse mediante una única estrategia de reestructuración lo describe como problema de insight puro.

2.4.4 PROBLEMAS POR INSIGHT

Existen muchas investigaciones centradas en el estudio de la resolución de los problemas por insight. Guilera (2002) plantea una investigación, en la que estudia la transferencia de conocimiento mediante problemas facilitadores, que puedan ayudar a la resolución del problema de insight que ella centra en el de las tres bombillas. Este es el enunciado del problema:

Tres mellizas duermen en la planta de arriba en tres camas A, B y C. Al lado de cada cama se les ha instalado una bombilla independiente en cada mesita de noche. He puesto los tres interruptores en la planta baja, al pie de la escalera. Pero me he hecho unlio con los cables eléctricos y ahora no sé cuál es el interruptor que corresponde a cada una de las bombillas. Desde abajo es imposible distinguir qué luz se enciende y he de subir al dormitorio cada vez que quiero saber la repercusión que ha tenido la manipulación de los interruptores. ¿Qué puedo hacer para averiguar la correspondencia entre los tres interruptores y las tres bombillas? Indicame, con una aspa en cada fila, cuál(es) de las siguientes maneras me será(n) válida(s) y cuáles no. Justifica la o las opciones consideradas válidas.

1. Sólo se puede hacer en tres viajes.

2. Se puede hacer en dos viajes.

3. Se puede hacer en un viaje.

Dentro de los diferentes tipos de problemas de insight identificados en la literatura vigente, en nuestra investigación nos vamos a centrar en los problemas de insight matemáticos (Wertheimer, 1959; Scheerer, 1963; Perelmán, 1975; Gardner, 1987, 1989; Weisberg y Alba, 1981; Segarra, 1987; Metcalfe, 1986; Holt, 1988; Meirovitz y Jacobs, 1989). A continuación exponemos un par de ellos:

- En el siguiente problema, la dificultad o complejidad se encuentra en que una mayoría de estudiantes se bloquean al leer el enunciado porque piensan que no tienen los conocimientos necesarios en estadística y probabilidad como para tratar la situación de manera eficaz.

Si tienes en tu cajón calcetines negros y calcetines marrones, mezclados en la proporción 4/5 , ¿Cuántos calcetines tendrás que sacar para asegurarte tener un par del mismo color? (Sternberg, y Davidson, 1982)

A pesar de esto si el estudiante puede reorganizar los elementos y reestructurar la situación, simplemente imaginando que ocurriría si sacara los calcetines del cajón uno a uno, podría prever la solución buscada posibilitando la aparición del insight.

- Otro de los problemas de insight comúnmente conocido, es el de los lirios:

Existen un determinado tipo de lirios que se duplican en área cada 24 horas. Al principio del verano, hay un lirio en el lago. Se necesitan 60 días para que el lago este cubierto completamente de lirios. ¿En que día el lago se encuentra medio lleno de lirios? (Sternberg, y Davidson, 1982)

Normalmente la dificultad en la resolución de este problema se encuentra en la primera representación que uno se hace, ya que se aborda inicialmente el problema de manera inductiva y linealmente. Superar esta primera representación sólo es posible mediante una reestructuración. Está reestructuración será eficaz si está supeditada a un proceso de deducción inversa, dónde se perciban las relaciones estructurales que permiten pasar del último día del lago al primero.

Entre los problemas de insight matemáticos y teniendo presente nuestra perspectiva de estudio del insight a partir del concepto de la reestructuración**,** en nuestra investigación nos centraremos en los problemas geométricos. En el apartado *4.3 FASE PREVIA: DISEÑO PROBLEMAS* de la investigación se definen los criterios y el tipo de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2) que estudiaremos. Exponemos a continuación algunos problemas geométricos de insight comúnmente conocidos:

- Un problema tradicionalmente conocido y expuesto en el apartado *2.2.5 INSIGHT Y REESTRUCTURACIÓN* a partir de un enunciado de resolución análoga:

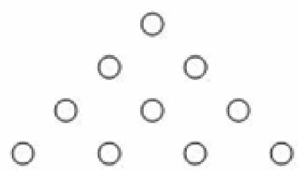
Utilizando seis cerillas iguales, formar cuatro triángulos equiláteros, con una cerilla completa haciendo de lado de cada triángulo.

(Scheerer, 1963; Weisberg y Alba , 1981)

Una de las primeras dificultades en la resolución de este problema es la representación inicial que acostumbramos a realizar. Esta representación inicial normalmente se explicita sobre el plano. Generalmente esta dificultad acaba convirtiéndose en un bloqueo mental. Es mediante un cambio estructural, supeditado a las relaciones establecidas entre las cerillas del problema en un contexto de cambio dimensional cuando se podrá facilitar la ocurrencia de la solución por insight.

- Otro de los problemas clásicamente conocido, es el del triángulo de monedas:

Un triángulo apunta hacía lo alto de la página. ¿Cómo puedes mover sólo tres monedas y hacer que el triángulo apunte hacia abajo de la página?
(Metcalfe, 1986)



Al abordar este problema, la reestructuración que puede promover el insight tiene lugar cuando se es capaz de dividir el triángulo en una parte fija constituida por un rosetón central y una parte variable formada por tres monedas que se desplazan. Tampoco podemos descartar la posibilidad de que se elija mover las monedas por tanteo y llegar a resolver el problema sin analizar la presencia de unos componentes constantes y otros que pueden rotarse, por lo menos a un nivel consciente.

- Y por último exponemos el histórico problema de Herón, formulado a partir de la versión de Puig Adam (1986):

Un arriero tiene que ir de un punto A a otro B situados a un mismo lado de una acequia rectilínea r y abrevar su caballería en dicha acequía durante el trayecto. Hallar el camino más corto que debe seguir.

Una de las posibles soluciones a este problema (Heaht, 1921) es la argumentada por Puig Adam (1986) al considerar el punto B’ simétrico de B respecto de la recta r, lo que nos permite representar dos trayectos de igual longitud APB=APB'. La solución es la suma de segmentos que forman el camino APB.

Ilustramos la resolución en la representación de la siguiente figura 2.4.5:

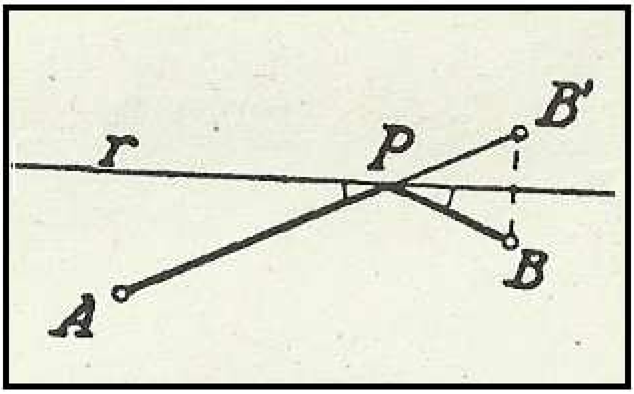


Fig 2.4.5: Problema Herón. Versión Puig Adams

Una explicación sobre el razonamiento de esta resolución se basa en que la simetría conserva las distancias y que el segmento es la línea más corta entre dos puntos del plano. A simple vista, posiblemente la resolución pueda parecer trivial una vez realizada, pero difícilmente imaginable para quien aborda por primera vez este problema. Alberti (2010) explicita que esta resolución basada en la simetría es un ejemplo de perspicacia, una posible forma de referirse al insight. Esta es la creatividad que muchas personas conocen y nombran como "la ocurrencia de una idea feliz" o "iluminación súbita".

Liljedahl (2008b) cita este problema ya que al intentar resolverlo se dio cuenta que pudo lograrlo por insight, que él asocia a la vivencia del Ajá!. Cuenta que esta fue una de las tres razones para decidir el tema de su tesis titulada "*The Aha! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*". Curiosamente este problema se puede resolver también doblando el papel por la línea r y mirando por transparencia se "ve" la solución.

2.5 REFLEXIONES SOBRE EL INSIGHT

Cuando se estudia el insight mediante la resolución de problemas, estos incluyen ciertas dificultades en la propia descripción y definición. Estas dificultades o limitaciones son condicionantes que pueden acabar convirtiéndose en bloqueos mentales. Por otra parte una persona que resuelve un problema de insight, puede autoimponerse otro tipo de limitaciones injustificadas, como por ejemplo considerar erróneamente algunos elementos destacados como fundamentales para llegar a la solución, o aplicar estrategias semejantes a las que aplican normalmente para resolver problemas similares.

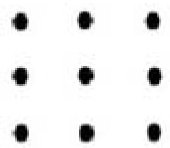
Cuando los estudiantes están entrenados en la utilización de determinadas estrategias que son requeridas en la resolución de unos problemas actúan con mayor confianza en sí mismos porque se sienten (Metcalfe, 1986) progresivamente cada vez más cerca de la solución final. Esto sucede por ejemplo cuando se abordan problemas o ejercicios estandarizados, previamente trabajados en el aula clase como por ejemplo algunos ejercicios de algebra o cálculo.

En cambio, en los problemas de insight los estudiantes suelen percibir ciertas dificultades. En algunos casos porque pueden al leer el enunciado de un problema, autoimponerse limitaciones injustificadas o considerar erróneamente algunos elementos como esenciales cuando no lo son. Ello impide que a veces las personas empleen las estrategias necesarias para poder resolver los problemas considerados de insight (Wertheimer, 1959; Metcalfe, 1986; De Nicolas, 1999).

A modo de ilustración veamos el conocido problema de los 9 puntos :

Conectar los puntos del diagrama, utilizando no más de cuatro lineas rectas sin levantar el lápiz del papel y no pasando dos veces por el mismo punto.

Adaptación de Adams (1999)



Al intentar resolverlo por primera vez, con frecuencia se acostumbra a representar un cuadrado de forma lineal siguiendo el perímetro formado por los puntos exteriores y dejándose el punto central del cuadrado sin conectar (Weisberg y Alba, 1981). Al

concebir esta representación estructural del problema a partir de un cuadrado cerrado, posiblemente sin darse cuenta se autoimponen algunas limitaciones adicionales, como por ejemplo que las líneas no deberían ser diagonales o que éstas no deberían extenderse fuera del perímetro de la formación de puntos, fuera del cuadrado pensado.
Estas limitaciones acaban suponiendo un bloqueo mental a la hora de seleccionar estrategias válidas para la resolución del problema, cuando realmente, una de las soluciones del problema requiere utilizar de líneas diagonales que sobresalgan del perímetro de puntos que forman el cuadrado.

Adams (1999) expone en su libro "*Guía y Juegos para superar los bloqueos mentales*" distintas soluciones a este problema, todas muy brillantes y creativas. Las soluciones de las figuras 2.4.6 y 2.4.7 son un buen ejemplo.

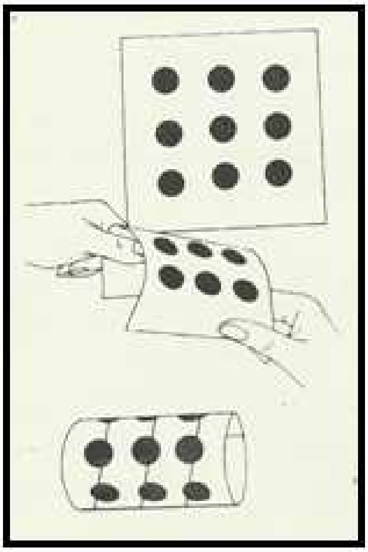


Fig 2.4.6: 1r Solución

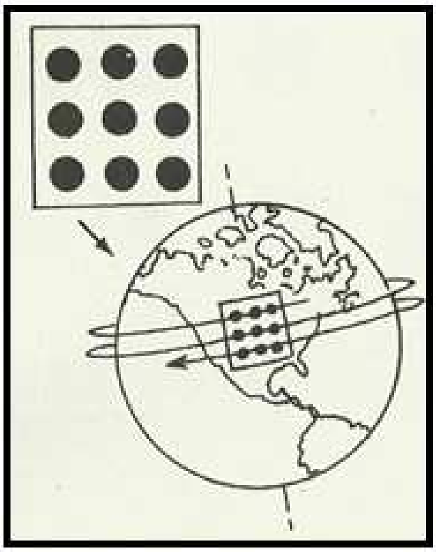


Fig 2.4.7: 2n Solución

Estas resoluciones implican la superación de algunos bloqueos perceptivos que en algunos casos suponen limitaciones autoimpuestas, que pueden impedir percibir el problema desde otras vertientes como por ejemplo a partir de un cambio dimensional. Concretamente las dos resoluciones se basan en pensar el problema a partir de la superficie de un cuerpo geométrico, hecho que posibilita una solución innovadora mediante una nueva reestructuración de los puntos y líneas.

Coincidimos con De Nicolas (1999) en algunas reflexiones finales sobre las posibles resoluciones de los problemas:

1. En la resolución de problemas de insight es importante liberarse de las limitaciones y bloqueos que imposibilitan la selección de estrategias que podrían ser necesarias.

2. A menudo las personas se autoimponen limitaciones injustificadas, originadas por estrategias que normalmente tienen éxito en la resolución de problemas estandarizados. En algunos casos suelen mantener estas limitaciones, debido a que no están acostumbradas a abordar y resolver este tipo de problemas y no se sienten seguras delante de estos enunciados.

3. Una forma de liberarse de las limitaciones de un problema de insight, puede propiciarse enfatizando en las características particulares del problema, o en adquirir un dominio adicional relacionado con la temática de éste así como generando estrategias alternativas.

4. La idea de limitar la selección de estrategias, está relacionada con los conceptos de fijeza funcional de Wertheimer (1959) y con el concepto de bloqueo mental que se atribuye en el período de incubación (Mayer, 1986; Adams, 1999).

5. Coincidiendo con la Gestalt, la ocurrencia del insight puede tener lugar cuando los elementos y relaciones de un problema viso-espacial adquieren nuevos significados, en la medida que se va reestructurando y reorganizando el problema (Ellen, 1982).

BLOQUE I: MARCO TEÓRICO

CAPITULO 3

3. VISUALIZACIÓN Y MEMORIVA VISUAL Y ESPACIAL

La visualización ha sido tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aun las más abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos.

(Guzmán, 1996, p. 29)

En este capítulo estudiaremos básicamente el contexto de resolución de los problemas geométricos propuestos en nuestra investigación desde la perspectiva de la visualización. En la que a la vez diferenciamos tres aspectos teóricos. En primer lugar hacemos referencia al modeló teórico de Del Grande (1990) en el que estableceremos algunas de las habilidades de visualización necesarias para resolver los problemas geométricos propuestos. Un segundo aspecto en el que consideramos la teoría de Presmeg (2006) en cuanto a los tipos de imágenes que posiblemente pueden requerir los participantes en sus resoluciones. Y por último la memoria visual y espacial, por sustentar en parte algunas habilidades de visualización e imágenes que son requeridas en la resolución de este tipo de problemas y en la ejecución de los tests interactivos.

3.1 VISUALIZACIÓN

La visualización constituye otro de los ámbitos importantes, en el marco teórico de nuestra investigación. Autores como Macnab, Phillips y Norris (2012) explicitan 23 definiciones del concepto de visualización en la literatura vigente, todas ellas relacionadas con los términos: imágenes y ayuda visual. Los autores coinciden en que generalmente el término visualización se emplea para describir representaciones visuales o la actividad cognitiva relacionada con imaginar una representación visual. A partir de la revisión que realizan, recomiendan tres distinciones explicitas sobre la definición de visualización:

1. Visualización del objeto.
   Aquellas que hacen referencia a un objeto físico cuando es visto por una persona.
2. Visualización introspectiva
   Aquellas que hacen referencia a la construcción imaginativa de una experiencia visual en ausencia del objeto físico. Este tipo de visualización se centra en los objetos representados en la mente.
3. Visualización interpretativa
   Aquellas que hacen referencia a la interpretación del significado del objeto de visualización respecto al conjunto de creencias, experiencias y conocimiento de la persona en ausencia del objeto físico.

Las clasificaciones que se establecen (Macnab, Phillips y Norris, 2012) diferencian la visualización según las acciones cognitivas involucradas. En otras palabras diríamos que la visualización se puede comprender desde tres perspectivas distintas:

1. Objetos físicos, cuando los percibimos mediante ilustraciones, animaciones por ordenador, figuras manipulativas o en su contexto real.
2. Objetos mentales, que representamos en la mente como pueden ser esquemas mentales, imágenes, construcciones o representaciones mentales.
3. Procesos cognitivos basados en manipular y transformar objetos mentales mediante modos de pensamiento abstracto y visual.

Enfatizan en la diferencia entre la visualización que representa directamente los objetos percibidos (Visualización del objeto) de aquella que en ausencia de estos, se genera a partir de objetos mentales (Visualización introspectiva e interpretativa). Estas distinciones son importantes para entender el contexto de las visualizaciones y para elaborar aplicaciones didácticas eficientes sobre visualización en el aula de matemáticas.

En esta línea, coincidimos con Senechal (1991) en Geometry's Future, en el capitulo *Visualization and Visual Thinking*, en el que explicita la diferencia entre visualización y pensamiento visual. Por visualización concibe cualquier representación visual o mental simple. En cambio por pensamiento visual comprende la transformación o manipulación de una o varias representaciones mentales como por ejemplo cuando representamos mentalmente un cubo y contamos sus aristas o vértices o cuando inspeccionamos el desarrollo plano de un prisma o escuchamos música y creamos imágenes eidéticas con luces, sombras y movimientos. Estamos pensando visualmente cuando reconocemos y de forma automática manipulamos símbolos matemáticos para construir nuevas ideas.

En realidad el pensamiento visual es un componente crucial en la psicología de las matemáticas, si tenemos en cuenta entre otros aspectos que gran parte de la historia de las matemáticas, es la historia de la notación matemática, es decir la búsqueda de símbolos mnemotécnicos que han representado los instrumentos necesarios para el científico experimental. Podemos recordar el debate entre Leibniz y Newton sobre la notación más adecuada para la derivada y otros avances históricos en matemáticas como la notación matricial son una buena prueba de ello.

Senechal (1991) concibe que la visualización es un tema más apropiado para integrar en la educación escolar que en cursos universitarios. Porque es en esta etapa escolar donde se pueden asentar las bases y desarrollo de eficientes habilidades de visualización a partir de problemas geométricos adecuados, que impliquen la elaboración de diagramas, la representación y construcción de objetos en distintos soportes como el lápiz y papel, figuras manipulables, gráficos por ordenador, etc.

Algunos autores como Gutiérrez (1996) sugieren que dos de los elementos principales que sustentan la visualización en la resolución de problemas son: las imágenes mentales y las capacidades o habilidades de visualización. En una de sus investigaciones posteriores (Gutiérrez, 1998) pone de manifiesto la importancia de analizar y estudiar los requisitos psicológicos necesarios para construir y manipular

imágenes así como la aplicación de habilidades de visualización a partir de distintas tareas geométricas como pueden ser la rotación de poliedros o la comparación de posiciones de figuras o cuerpos geométricos desde distintos soportes: de forma interactiva por ordenador con aplicaciones informáticas adecuadas, a partir de tareas manipulativas con figuras o cuerpos geométricos y a partir de ejercicios o problemas en los que sea necesario la representación con lápiz y papel.
En nuestra investigación nos interesaremos por la visualización y su influencia en los procesos de aprendizaje, en lo referente a la geometría plana en la resolución de problemas geométricos ip^2. Concretamente, será necesario analizar los procesos tanto de construcción como de transformación de imágenes (Presmeg, 2006) y habilidades de visualización (Del Grande, 1990) que podrían estar implicadas en las estrategias de resolución geométrica necesarias en el abordaje de los problemas geométricos ip^2 que forman parte de nuestro objeto de estudio en esta investigación.

Guzmán (1996) enfatiza el papel de la visualización en la resolución de problemas, como muestra la publicación del libro "*El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis matemático*". En este libro expone diversos motivos por los que considera fundamental el papel de la visualización en el desarrollo de la actividad matemática. Entre ellos destacaremos la defensa que hace de la visualización como herramienta eficaz en el trabajo creativo, favoreciendo las relaciones y conexiones a veces muy complejas entre los objetos matemáticos. Explica que cuando estas conexiones se manejan con naturalidad y sin esfuerzo, entonces favorecen una elección heurística más eficaz para resolver los problemas a los que nos enfrentamos. Guzmán (1996) también argumenta ampliamente acerca de los beneficios de la visualización, insistiendo en que muchos de los conceptos matemáticos que tratamos hoy en día con total naturalidad surgieron en sus orígenes arraigados a una componente muy visual. Ilustra como ejemplo algunos conceptos del análisis como el orden, la distancia y operaciones entre números que surgieron de situaciones cotidianas muy concretas y visuales. Argumenta que los profesores deberían enfatizar y atender este origen visual, cuando manejan los objetos matemáticos correspondientes en la enseñanza, potenciando así un mayor abanico de representaciones visuales que pueden facilitar nuevas estrategias y recursos de resolución ante determinados problemas.

Una mayoría de investigaciones referentes a la visualización en lo relativo al aprendizaje de la geometría se centran en la geometría espacial. No obstante, encontramos algunos trabajos especialmente relevantes que sí se han interesado por la visualización en relación con la geometría plana. Por ejemplo, en el trabajo de Orton (1997) se analizan modelos de reconocimiento de figuras planas a partir de la manipulación mental de éstas. Dicho autor, planteó un test de visualización en el que los estudiantes de primaria y secundaria realizaron tareas que requerían, entre otras habilidades de visualización, de la identificación visual, la discriminación visual y la rotación mental para poder responder correctamente a las diversas cuestiones que propuso respecto a la comparación de figuras planas congruentes o semejantes presentadas en diferentes posiciones.

En Educación Matemática, Bishop (1983) es el primer autor que de manera concisa establece dos distinciones respecto a la consideración del concepto de *visualización*. Una primera consideración consiste en entender la visualización como proceso. Es decir cómo la habilidad o habilidades necesarias para el proceso de visualizar. Y una segunda consideración referente al producto final de la visualización consiste en comprender la visualización como resultado final: las imágenes.

3.1.1 HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN

Posiblemente una de las primeras referencias que ha tenido mayor influencia en el desarrollo de la teoría de la visualización como proceso, fue propuesta en el año 1983 por Bishop. Dicho autor plantea una investigación en la que define dos habilidades de visualización diferentes:

1. IFI (interpretation of figural information). Hace referencia a la habilidad para interpretar información figurativa. Describe esta habilidad de visualización como la capacidad de comprender representaciones visuales y vocabulario espacial que se usa en el trabajo geométrico, gráficos, tablas, esquemas y diagramas de todo tipo. Esta habilidad está relacionada con la comprensión e interpretación del contenido, contexto y particularmente con la forma en que se presenta el estímulo geométrico.
2. VP (visual processing). Hace referencia a la habilidad para el procesamiento visual. Describe esta habilidad de visualización como la capacidad de manipular y transformar las representaciones e imágenes visuales. Bishop (1983) no relaciona

esta habilidad con la forma del estímulo geométrico presentado y sí particularmente con las relaciones abstractas y no figurativas que pueden establecerse en términos visuales.

La importancia de la habilidad de visualización VP, radica en que Bishop engloba en ella, todos los procesos de manipulación, desplazamiento y transformación que se obtienen a partir del estímulo geométrico inicial.

Bishop (1983) argumenta que las dos habilidades de visualización IFI y VP, planteadas en su investigación tienen mucho en común con dos tipos de habilidades espaciales expuestas años anteriores por McGee (1979) respectivamente: la relación y orientación espacial y la visualización espacial.
La *relación y orientación espacial* según McGee implica comprender la colocación, posición y relaciones de los elementos que forman parte de un modelo visual independientemente si la configuración presentada cambia de orientación. La *visualización espacial* en cambio implicaría la habilidad para manipular, girar, invertir o rotar mentalmente una figura u objeto geométrico presentado.

Gorgorió (1995) concibe la interpretación figurativa de un objeto (IFI) y el procesamiento visual (VP) como habilidades que difícilmente pueden entenderse totalmente separadas ya que potencialmente determinan la correcta ejecución de las tareas espaciales. Considera que en la interpretación de un estímulo visual, previamente es necesario su respectivo procesamiento visual. "*De otra forma se nos hace difícil suponer que se pueda producir ningún proceso visual si antes no tiene lugar la interpretación de la información dada*" (Gorgorió, 1995, p.45). En nuestra investigación la interpretación figurativa que realicen los participantes del estímulo de memoria (figura geométrica o composición de cuerpos geométricos representados en el plano según sea el caso, en las dos tareas geométricas realizadas en los tests interactivos) puede incidir de forma significativa en el rendimiento de la tarea. Es decir la interpretación de los alumnos sobre el estímulo geométrico, así como el grado de realismo que tenga para ellos, pueden ser factores determinantes en la ejecución de las tareas geométricas interactivas que estudiaremos, pudiendo afectar significativamente la realización de éstas.

En cambio Gutiérrez (1996) a diferencia de Gorgorió (1995) argumenta que las habilidades VP i IFI expuestas por Bishop (1983) se comprenden mejor como procesos que como habilidades. Explicita que la descripción de un proceso también incluye información sobre la acción a realizar, independientemente de la forma en que se realice en otro caso cualquiera. Ilustra como ejemplo, que la rotación mental de una imagen, parte a priori de un proceso de interpretación figurativa (IFI) del estímulo geométrico presentado, donde el estímulo o la imagen inicial se transforma en otra que presenta al mismo estímulo geométrico en una posición distinta. La manera de realizar esta rotación mental, cambia si la rotación se hace en el plano o en el espacio, con el eje interior o exterior al estímulo geométrico, por tanto esto da lugar necesariamente a la utilización de diferentes habilidades.

Desde otra vertiente, Duval (1998) nos propone el proceso de visualización respecto a la representación del espacio y exploración heurística teniendo como función principal la comprobación de relaciones o propiedades geométricas, elemento básico ante cualquier actividad geométrica escolar. Entiende la visualización como un tipo de aprehensión perceptual de gran interés para el aprendizaje geométrico escolar. Enfatiza en la importancia de que los alumnos empiecen en la educación primaria a discriminar entre la información que pueden obtener de la figura geométrica que representa un determinado dibujo y el propio dibujo en sí. Distinción que no es obvia a la edad de estos alumnos (geometría escolar) y que normalmente produce errores al concluir inferencias sobre las propiedades del dibujo sin tener en cuenta la riqueza de las propiedades de la figura geométrica. Obtener información a partir de la representación de figuras nos abre un abanico de exploración heurística, propiedades y posibles relaciones que pueden nutrir nuevas estrategias y resoluciones ante el abordaje de problemas geométricos.

En nuestra investigación una de las vertientes de la visualización estará supeditada a considerar los procesos que están implicados cuando los estudiantes construyen, relacionan y manipulan imágenes mentales visuales, donde la mente juega un papel especialmente activo rotando, trasladando, invirtiendo o transformando imágenes mediante estímulos geométricos (diagramas, figuras o objetos geométricos) presentados en papel o en ordenador. Nos interesaremos especialmente en identificar algunas de las habilidades de visualización propuestas en el marco teórico de Del Grande (1990) en las resoluciones de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo que estudiaremos:

1) *Identificación visual*. Concibe esta destreza como la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto.
2) *Discriminación visual*. Concibe esta habilidad con el fin de comparar figuras o cuerpos geométricos.
3) *Reconocimiento de posiciones geométricas*. La describe como la habilidad para relacionar la posición de un objeto, figura o cuerpo respecto un punto de referencia.
4) *Reconocimiento de las relaciones geométricas*. Considera esta destreza como la habilidad para identificar las relaciones geométricas o espaciales entre diversos objetos, figuras o cuerpos.
5) *Memoria visual*. Considera la memoria visual como la habilidad para recordar las características visuales y de posición de una figura o cuerpo geométrico.

Identificaremos y analizaremos la utilización de dichas habilidades en los métodos visuales de resolución. Es decir en aquellos que implican representaciones visuales a partir de imágenes, con o sin esquemas o diagramas visuales como parte esencial del método de resolución, incluso si también se emplean razonamientos o métodos algebraicos (Presmeg, 1985).
Pondremos un especial énfasis en la conexión entre las representaciones internas como por ejemplo las imágenes mentales visuales y las representaciones externas como por ejemplo los esquemas, dibujos o diagramas visuales realizados por los estudiantes. Esta conexión será la que nos permitirá interpretar las resoluciones planteadas por los participantes de nuestra investigación con la finalidad de identificar las habilidades de visualización empleadas ante el abordaje de los problemas geométricos ip^2.

Desde otra perspectiva, Blakemore y Frith (2008) conciben que la previa visualización de las acciones podría facilitar la posterior ejecución de éstas; este es el caso de los deportistas de élite que continuamente perfeccionan sus técnicas motoras, a partir de la previa imaginación antes de llevarlas a cabo. Dichos autores conciben que la capacidad de representar mentalmente objetos en el espacio y sus respectivas transformaciones, nos ayuda a planificar de forma más eficiente la ejecución física de nuestros actos y a prever los resultados de éstos.

En el siguiente apartado estudiaremos la segunda perspectiva del término *visualización* que consideraremos en nuestra investigación. Nos referimos a concebir la visualización como producto o resultado final es decir como imagen mental.

3.1.2 IMAGEN

El concepto de imagen es uno de los temas centrales en la historia de la Psicología con gran importancia para la didáctica de la geometría. La definición de imagen mental es una tarea polémica. Michel Denis (1984) realiza un análisis detallado de lo que sabemos sobre la imagen mental, especialmente en lo que atañe a sus relaciones con la percepción, la memoria, el lenguaje, la inteligencia y la afectividad.

Denis (1984) considera que las distintas formas de imagen mental se pueden clasificar. En primer lugar en función del terreno sensorial con el que se relacionan; distinguimos así las imágenes visuales capaces de evocar diferentes propiedades de los objetos percibidos, como la forma, textura u olor. En segundo lugar las imágenes mentales pueden clasificarse por las circunstancias de su producción. Entre ellas destacamos las imágenes hipnagógicas que aparecen en estados de semiinconsciencia entre la vigilia y el sueño, las imágenes hípnicas que aparecen en el sueño y las imágenes alucinatorias que atribuyen una realidad objetiva de naturaleza patológica.

Las imágenes estrechamente vinculadas con la percepción están relacionadas con alguna actividad perceptiva y pueden integrarse en formas relativamente elaboradas de la actividad mental. Entre ellas destaca la imagen consecutiva de memoria, supeditada a una memoria a corto plazo o la imagen eidética cuando se describe en la inmediatez la imagen con gran nitidez y riqueza de detalles. También considera las imágenes evocadas en la actividad mental en las que tradicionalmente se explicitaban las imágenes de memoria relacionadas con la evocación y restitución cognitiva de un acontecimiento relativamente preciso del pasado y las imágenes de imaginación basadas en procesos combinatorios y creativos, enfatizando en la novedad u originalidad del contenido de la imagen.

Creemos que es importante precisar el concepto cuando hacemos referencia a una imagen mental. Tradicionalmente y de manera elemental se consideraba que las imágenes eran representaciones de los objetos físicos (Arnheim, 1986). Actualmente podemos decir que una imagen mental (Plasencia, 2000) constituye un formato representacional de nuestro sistema cognitivo que puede suceder en una o varias de entre estas seis modalidades: imágenes visuales, auditivas, gustativas, táctiles, olfativas y cenestésicas con lo que la imagen no sólo puede ser una representación de objetos, sino también de sonidos, olores y en general sensaciones.

Un ejemplo donde se ilustran las diferentes modalidades, podría ser recordar un paseo realizado o no en la montaña. Imaginando dicho paseo podemos: a) generar la imagen mental del sonido de un pájaro, b) del olor del romero, c) del sentir el camino pedregoso bajo nuestros pies, d) del saborear un tipo de galleta en un descanso, e) de la contemplación de un valle, y f) de la gesticulación al encontrar una fuente. Generalmente las modalidades utilizadas en matemáticas son la auditiva, la cenestésica y fundamentalmente la visual (Presmeg, 1997).

Coincidimos con Plasencia (2000) y otros investigadores en el ámbito de la educación matemática en que la concepción metafórica que asocia las imágenes son mucho más que "dibujos en la mente". Investigadores como Wheatley (1996) conciben la imagen como una construcción mental basada principalmente en el flujo retroalimnetario de la experiencia de una persona. Dicho autor considera que las imágenes pueden ser representadas mentalmente sin la necesidad de un estímulo, mediante la voluntad y la memoria o la imaginación y la fantasía.

En nuestra investigación y en la misma línea de Presmeg (1986, 1997) consideraremos como *imagen mental* al constructo que la mente crea y que supone un formato representacional de nuestro sistema cognitivo, pudiendo ser representado, transformado y reconstruido las veces que se considere adecuado. En definitiva la naturaleza de la imagen dependerá de construcciones mentales previas entre otros factores relevantes como puede ser la motivación y el propósito.

Más concretamente dentro de los diferentes tipos de imágenes, nos centraremos en (Presmeg, 1986, 1997) la imagen visual como un constructo mental que de manera general describe información visual o espacial de una situación concreta. En particular en nuestra investigación nos interesaremos fundamentalmente por las imágenes visuales, es decir aquellas imágenes que tienen una fuerte componente visual, que son las que utilizaremos y a las que haremos referencia en el estudio empírico.

En nuestro estudio, establecemos como referencia la clasificación de imágenes visuales formulada por Presmeg (1985), al igual que en nuestra investigación las conclusiones de su estudio empírico están basadas en los resultados obtenidos cuando los estudiantes de secundaria resuelven problemas matemáticos. Concretamente realizó una investigación con profesores y estudiantes de secundaria, en la que identificó cinco tipos de imágenes:

a. *Imágenes concretas o pictóricas*. Es el tipo de imágenes que predominó en la investigación de Presmeg (1985). Algunos ejemplos que propone son: las imágenes de triángulos concretos, las imágenes de gráficos, las imágenes figurativas y personales de objetos construidas por algunos estudiantes, entre otros. Son imágenes sin movimiento pero con detalle: fotografías o dibujos.

b. *Imágenes patrón*. Son imágenes donde faltan detalles concretos y se representan relaciones en un esquema visual-espacial. En cierta forma son como patrones de los que se desprenden relaciones. Algunos ejemplos de imágenes patrón planteados por Presmeg son: esquemas visuales o representaciones gráficas que hacen referencia a relaciones abstractas, esquemas para representar la magnitud y dirección de un vector, modelos de tablas que permiten encontrar razones trigonométricas, imágenes de fórmulas trigonométricas para ángulos compuestos, etc. Presmeg (1985) remarca la dificultad en ciertas situaciones en diferenciar dónde acaba la imagen concreta y dónde empieza la imagen patrón.

c. *Imágenes de fórmulas*. Son imágenes utilizadas por los estudiantes que dijeron “ver” una fórmula en su mente de la misma forma como la vería por ejemplo en el libro de texto o imaginándola escrita en la pizarra o en el cuaderno. Este tipo de imágenes posiblemente puedan ser más accesibles que las imágenes patrón y comportan más ventajas mnemotécnicas asociadas que otras imágenes en general. Algunos ejemplos que cita Presmeg (1985) son cuando los estudiantes explicaron que vieron la fórmula del modulo de un vector o la fórmula de las raíces de una ecuación de segundo grado.

d. *Imágenes cinestésicas*. Son aquellas que implican actividad muscular o algún tipo de expresión corporal, como la gesticulación con las manos, la cabeza, etc. Algunos ejemplos son cuando los estudiantes dibujan en el aire un objeto geométrico, una gráfica, o expresan el trazado de una curva con los dedos ya sea sobre la mesa del aula o en el aire.

e. *Imágenes dinámicas*. Son aquellas que implican una cierta habilidad para mover, manipular y transformar mentalmente imágenes concretas, que pueden sustentarse en figuras geométricas en el plano u objetos geométricos en el espacio o una combinación de las dos. En su estudio Presmeg (1985) identificó pocas imágenes de este tipo. Los estudiantes a los que hace referencia explicaron que en un determinado diagrama visual desplazaron mentalmente un triángulo a la posición de otro para encontrar la solución al problema.

Incidimos en que una imagen puede ser de dos tipos diferentes ya que su clasificación como cinestésica o dinámica es independiente de su clasificación como pictórica, patrón o de fórmula.

3.1.2.1 IMÁGEN Y CREATIVIDAD

En nuestra investigación nos parece importante poder reflexionar sobre la interrelación entre visualización y creatividad cuando los estudiantes trabajan inmersos en actividades matemáticas, como pueden ser la resolución de problemas geométricos. Veamos ahora distintos ejemplos que ponen de manifiesto la relación entre las imágenes mentales y los procesos creativos que pueden sustentar y fomentar la ocurrencia del insight.

Plasencia (2000) distingue en el proceso creativo dos tipos de creatividad*: la primaria* y *la secundaria*. Entiende por creatividad *primaria*, el conjunto de etapas que pueden suscitar la fase de inspiración o insight y por creatividad *secundaria* la que tiene lugar en el proceso de elaboración y desarrollo de la idea brillante. Concibe que la visualización en sí y en algunos casos las imágenes mentales visuales, pueden contribuir de forma relevante a la creatividad *primaria*, es decir en propiciar ese primer destello, en la fase de inspiración del proceso creativo.

Además de favorecer el recuerdo las imágenes mentales pueden jugar un papel crucial en el pensamiento de las personas creativas. La literatura del conocimiento nos muestra casos evidentes de ello. En el caso de la música, las imágenes mentales auditivas de Mozart, le permitían *oír* sinfonías que aún no había escrito (Miller, 1984). En el caso de la ciencia el matemático y físico Douglas R. Hofstadter, expresaba así en su libro *Un eterno y gràcil bucle*, que le valió el premio Pulitzer:

> *Mi interés es transmitir algunas de las imágenes que más me ayudaron a visualizar la forma en que la conciencia brota de la jungla de neuronas; transmitir un conjunto de intuiciones intangible, en la esperanza de que sean válidas y puedan así contribuir, en alguna medida a que otros lleguen a afinar la formulación de sus propias imágenes acerca de lo que hace funcionar la mente.*
>
> (Hofstadter, 1995, p.765)

Otra de las anécdotas clásicamente conocidas según Guzmán (1996) es la del famoso matemático Norbert Wiener, quien estando atascado en la ejecución de una compleja demostración en el aula, se dirigió rápidamente a un extremo de la pizarra donde dibujó unas figuras que le permitieron continuar, sin dificultades, con la demostración hasta el final.
En esta misma línea de anécdotas, Clements (1981) argumenta que George Boole, descubrió las propiedades de los polígonos y poliedros oblicuos que llevan su nombre cuando George Boole explicaba que para poder responder a cuestiones complejas sobre cuerpos tetradimensionales era necesario pensar previamente con imágenes mentales.

Las cartas de Albert Einstein a Hadamard (1947) son un buen documento ilustrativo que manifiesta el papel relevante de las imágenes mentales en el descubrimiento científico.

> *Las herramientas que parecen servir como elementos de pensamiento son ciertos signos e imágenes más o menos claros que se pueden "voluntariamente" reproducir y combinar. Este juego combinatorio parece ser la característica esencial del pensamiento productivo, antes de que exista conexión o construcción lógica en palabras u otro tipo de señales que se pueden comunicar a otros.* (Hadamard, 1947, p.142)

Estas imágenes mentales le permitieron a Einstein realizar experimentos mentales que seguramente empleó como modelos de simulación de sus teorías. Posiblemente la famosa teoría de la relatividad estuvo ligada a un profundo proceso de comprensión visual previo. Einstein llegó a plantear el papel crucial y especialmente significativo que la imaginación desempeñaba en su trabajo. En este sentido pensamos que en la resolución de problemas geométricos es necesario ver más allá de las representaciones o dibujos, hemos de poder inventar, imaginar e interpretar imágenes para ver los elementos o relaciones que no están representadas. La imaginación es una fuente de interpretación y creación, ligada al pensamiento visual que en muchos casos puede promover la ocurrencia del insight o el click! (Fiol, 2004) de ideas necesario para resolver una situación problemática.

Autores como Shepard (1978) que han estudiado la utilización de las imágenes por parte de otros investigadores, concluyen en su trabajo que un gran número de creaciones de científicos fueron realizadas por un pensamiento fundamentalmente no verbal. Esta forma de pensamiento incluía representaciones que a menudo podían ser descritas como imágenes de carácter espacial y visual.

Coincidiendo con Miguel de Guzmán (1996) destacamos que de manera natural el pensamiento visual puede tener su espacio en el acto creativo y particularmente en la creatividad matemática. Creaciones brillantes y originales han sido resultado en matemáticas de representaciones mentales no verbales basadas primordialmente en imágenes mentales visuales.

> *La visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.* *(Guzmán, 1996, p.17)*

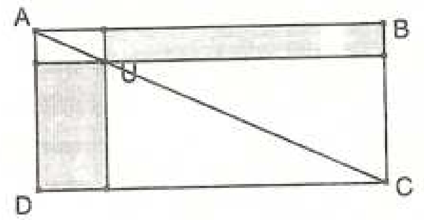
Insistimos una vez más que en los ejemplos anteriores hemos pretendido exponer, el papel relevante que la creación de imágenes puede desempeñar en el proceso creativo en matemáticas y consecuentemente en el destello creativo que podría posibilitar el insight geométrico.

3.1.3 RAZONAMIENTO VISUAL

Coincidiendo con Clements y Battista (1992) consideramos el razonamiento visual como aquel tipo de razonamiento que integra los procesos a partir de los que se obtienen conclusiones que emanan de la representación de objetos geométricos (en el plano o espacio), así como de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones geométricas. Des de el pensamiento de Clements y Battista (1992), el razonamiento visual nos garantiza un apoyo perceptual de forma implícita, ante una mayoría de textos geométricos donde a partir de las representaciones de figuras se pueden comprender algunas relaciones como por ejemplo la relación que se establece entre ángulos opuestos por el vértice, ángulos complementarios, rectas paralelas, perpendiculares, etc sin necesidad de explicaciones escritas.

El siguiente ejemplo ilustra lo expuesto anteriormente, a partir de un problema geométrico basado en el cálculo de superficies.

Dado el rectángulo ABCD, demostrar que las áreas de los dos rectángulos sombreados son iguales, siendo U un punto de la diagonal AC.



Si se quiere demostrar que las aéreas de los dos rectángulos sombreados son equivalentes es necesario hacer uso del razonamiento visual para darse cuenta de las relaciones geométricas claves (Guzmán, 1996). Es decir deben identificarse las subconfiguraciones especialmente relevantes para la solución. El problema requiere de la observación cuidadosa de la figura para identificar aquella subconfiguración que nos aporte información útil para la solución.

De entre las distintas relaciones, configuraciones y reestructuraciones visuales, las siguientes deberían distinguirse para llegar a la solución:

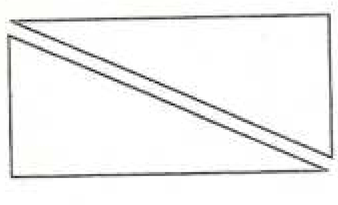


Fig 3.1.3: Rectángulo inferior

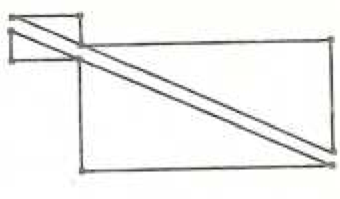


Fig 3.1.4: Dos rectángulos

Además de identificar la congruencia de estos triángulos, se requiere de otras operaciones visuales:

1. Identificar la igualdad de áreas de los triángulos en cada una de las dos reestructuraciones, independientemente del punto U, corroborando que la diagonal divide al rectángulo en triángulos congruentes.
2. Realizar una operación visual de sustracción de áreas, en la que al triángulo rectángulo inferior de la Fig 3.1.3 se le sustrae los dos triángulos rectángulos inferiores de la Fig 3.1.4. De forma análoga al triángulo superior de la Fig 3.1.3 se le sustrae los triángulos rectángulos superiores de la Fig 3.1.4.
3. Establecer la equivalencia del área resultante (Fig 3.1.3) entre el triángulo rectángulo inferior y superior, correspondiente a los dos rectángulos sombreados.

Somos conscientes que aprovechar el razonamiento visual en las resoluciones de problemas requiere enlazar la percepción visual con las propiedades, relaciones o características geométricas de los elementos que intervienen mediante una compleja actividad mental. Entre otros, en el problema planteado, se requiere de un proceso de análisis donde se subdivide la figura geométrica teniendo en cuenta sus características, y a continuación se compara la nueva estructura generada con la percepción anterior.
Para generar razonamiento visual no es suficiente con sólo mirar una figura geométrica, consideramos que también se requiere:

i. Reconocer las partes que configuran o en que se puede fragmentar una figura, sobre una línea, plano o el espacio. Se trataría de aplicar adecuadamente las habilidades de identificación y discriminación visual (Del Grande, 1990).
ii. Identificar relaciones geométricas en la figura a partir de nuevas subconfiguraciones y fragmentaciones. Consistiría en la aplicación de la habilidad visual del reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas (Del Grande, 1990).
iii. Realizar nuevas representaciones a partir de cambios, manipulaciones y transformaciones geométricas con la intención de obtener nuevas reconfiguraciones de la figura original, que posibiliten nuevas relaciones. En este caso intervendrían una combinación de habilidades relacionadas en el razonamiento visual donde enfatizaríamos en la memoria visual (Del Grande, 1990) necesaria para construir nuevas configuraciones geométricas a partir de las originales.

Entre otras cuestiones, para que una figura geométrica propicie un razonamiento visual, debe tener algunas características, como por ejemplo que se vea fácilmente la unión de varias configuraciones relacionadas entre sí o que posibilite la fragmentación y reconfiguración necesaria para identificar nuevas relaciones geométricas o propiedades.

3.1.4 VISUALIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Respecto a la visualización en nuestra investigación nos interesa especialmente el trabajo de autores como Krutetskii (1976), Wheatley (1997), Arcavi (2003) y Presmeg (2006) por haber estudiado la visualización desde diversos ámbitos y perspectivas en la resolución de problemas. Todos ellos se caracterizan porque de forma implícita, sugieren que la visualización es una herramienta potencial de la intuición, nexo esencial en la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo que estudiaremos.

Krutetskii (1976), identificó los procesos cognitivos de estudiantes que trabajaban una serie de problemas especialmente preparados. Concretamente caracterizó dos modos de pensamiento en matemáticas: verbal/lógico y visual/pictórico. El contraste entre estas dos formas de pensamiento le permitieron establecer una taxonomía con cuatro categorías diferentes de personas en lo referente a como procesan sus ideas en matemáticas. Destacamos la categoría geométrica que describió como aquella formada por personas con una componente visual/pictórica muy fuerte y con una componente verbal/lógica por encima de la media. Una de las conclusiones que particularmente enfatizó fue el hecho de detectar la tendencia de los estudiantes superdotados a escoger estrategias de pensamiento visual/pictórico, así como a identificarlas y expresarlas.

Desde otra vertiente, Wheatley y sus colaboradores Brown y Solano a partir de los resultados obtenidos en tres estudios (Brown y Wheatley, 1989, 1990; Wheatley, Brown y Solano, 1994), conciben que existe una fuerte relación entre el uso de imágenes y el éxito en la resolución de problemas. La metodología que emplearon en las investigaciones realizadas fue básicamente cualitativa, donde mediante el test WSAT (Wheatley Spatial Ability Test) se seleccionaron un conjunto de estudiantes que en primer lugar realizaron diferentes tipos de problemas matemáticos, y posteriormente fueron entrevistados. En general los resultados de los tres estudios, sugieren que aquellos estudiantes que obtuvieron una puntuación alta en el test WSAT tuvieron más éxito en el abordaje y resolución de los problemas matemáticos "no rutinarios".

Arcavi (2003) nos describe los tres roles fundamentales de la visualización para el estudiante de matemáticas en *The role of visual representations in the learning of mathematics* :

1) Actuar como soporte e ilustración de resultados simbólicos.
2) Resolver conflictos entre soluciones correctas simbólicas e intuiciones correctas.
3) Reorganizar ciertas características de los conceptos muchas de las cuales pueden ser obviadas por las soluciones formales.

Dicho autor concibe que la visualización nos ofrece *un método para ver lo invisible* en la resolución de problemas, pudiendo desempeñar un papel central para inspirar una solución global y completa, más allá de la meramente procedimental. Coincidiendo con Magidson (1989) pensamos que nuestra visualización está condicionada por lo que sabemos y por el contexto donde se presenta… "no sabemos lo que vemos, vemos lo que sabemos".

Aun cuando la utilización de estrategias visuales puede ser más efectiva, que el uso de cálculos y algoritmos tal como nos explicitaba Gutiérrez (1996), siguiendo la línea de Presmeg y Bergsten (1995), algunas investigaciones identifican cierta reticencia por parte de los estudiantes a utilizar estrategias de visualización ante el aprendizaje geométrico en la resolución de problemas. Este es el caso de la investigación realizada por González Martin y Camacho (2004). Coinciden en que esta reticencia es mayor en cursos universitarios posiblemente por la falta de práctica de este tipo de estrategias en cursos de primaria y secundaria. En la investigación de González Martin y Camacho (2004) se analizaron las estrategias de resolución planteadas por estudiantes de 1r curso de carrera ante un problema relacionado con integrales. Los investigadores concluyen que posiblemente los estudiantes piensan que las estrategias de visualización no son las más adecuadas para resolver este tipo de problemas. Probablemente esto es debido a que los participantes en su experiencia escolar interiorizaron la utilización frecuente de estrategias resolutoras que en general no eran de naturaleza visual. El motivo por el que los estudiantes eran reticentes a visualizar no debe ser simplista, atribuyendo entre otras, diferentes causas posibles: el problema en cuestión, las instrucciones para realizar el problema, así como los factores socioculturales y los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Presmeg (2006) en su artículo *Research on visualization in learning an teaching mathematics,* engloba múltiples investigaciones relacionadas con diversos ámbitos de la visualización. En 1991 realizó una investigación con un grupo de profesores con la intención de identificar un perfil visualizador: errores, usos y dificultades. Presmeg (1991) estableció que las características manifestadas por el grupo de profesores visuales podrían considerarse relacionadas con una forma de pensamiento que incluye aspectos de la personalidad asociados con la creatividad. En esta investigación los profesores visuales establecían, un mayor número de conexiones entre el concepto a explicar y otras aéreas relacionadas. Es decir los profesores considerados "visuales" emplearon diferentes formas para enseñar los conceptos y estuvieron más inclinados a utilizar diferentes métodos de solución en los problemas planteados a sus alumnos. Sin embargo, los profesores no visuales fueron más propensos a presentar la materia desde el principio hasta el final de una forma más rigurosa, adoctrinada y lógica. Ante los resultados anteriores, nos preguntamos si realmente ¿Son los profesores visuales más creativos que el resto?

En cuanto a los procesos visuales de resolución, coincidimos con Presmeg (2006) en que el estudio de las representaciones e imágenes en cualquier contexto y concretamente en la resolución de problemas es una tarea compleja, puesto que en principio tenemos que suponer que la memoria, la descripción y la representación de dibujos, palabras y acciones nos proporcionan una indicación sobre la naturaleza de la imagen mental. Aunque lo cierto es que no tenemos garantía de que la construcción de la naturaleza de estas imágenes coincida en el sentido de la interpretación que realiza el investigador.

3.2 MEMORIA VISUAL

> *Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.*
>
> (Gutiérrez, 1991, p.47)

Históricamente existen múltiples evidencias donde se manifiesta la relación intrínseca que se establece entre la visualización y la memoria. Uno de los ejemplos conocidos, se remonta a hace más de 2500 años cuando Simónides planteó un procedimiento para que los oradores recordasen sus discursos (Paivio, 1971). Dicho procedimiento consistía en construir sobre un itinerario real un trayecto etiquetado mediante la generación de las imágenes de aquellas cosas que se querían recordar, situándolas en determinados lugares del camino mental. Así cada vez que volvieran a recorrer mentalmente el itinerario real y localizasen los objetos imaginados recuperarían la parte del discurso que pusieron en cada lugar.
Luria (1968) expone otro clásico ejemplo, el de Shereshevskii, persona que ponía en práctica sus grandes dotes para la memorización, mediante la utilización de imágenes para potenciar su especial capacidad para el recuerdo. Parece ser que recordaba con gran exactitud matrices de decenas de dígitos, a partir de generar imágenes eidéticas, es decir imágenes de gran nitidez dónde la persona ve lo que tiene que recordar de forma especialmente exhaustiva.

El estudio de la memoria (Ruiz-Vargas, 2002; Ruiz-Sánchez, 2006) ha ido evolucionando según la relevancia que los investigadores han concebido en sus trabajos a como se almacena y como se recupera la información. La mayoría de investigaciones, convergen en tres procedimientos: codificación, almacenamiento y recuperación de la información, que generalmente acostumbran a aparecer interrelacionados en los conceptos clásicos de memoria y aprendizaje.

En los años 60, aparece una de las primeras teorías sobre la clasificación de la memoria que se denominaba la memoria multialmacén (Atkinson y Shiffrin, 1968). Ésta constituía un sistema de memoria formado por 3 estructuras cuya principal distinción entre ellas residía en como se proyectaba, trataba y recibía la información. Cada una de estas estructuras (Fig 3.2) se caracterizaba por distintas propiedades funcionales: el tipo de información almacenada, la capacidad de almacenamiento, la duración temporal de la información y el formato simbólico de la información. Se trata de la memoria sensorial, la memoria a corto plazo (MCP) y la memoria a largo plazo (MLP).

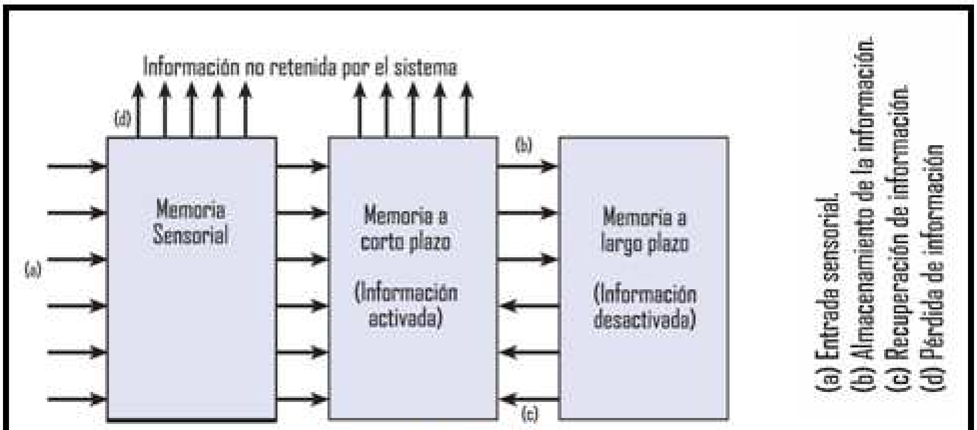


Fig 3.2: Estructuras memoria

En nuestra investigación básicamente nos centraremos en la memoria a corto plazo (MCP), como forma concreta de memoria explícita y consciente también conocida como memoria de trabajo. Identificamos la memoria de trabajo (MT), por tener una capacidad limitada, unida a un acceso y recuperación de la información bastante rápida. En cambio, la memoria a largo plazo se diferencia porque es de gran capacidad aunque presenta limitaciones respecto al acceso y recuperación de la información.

Uno de los modelos de memoria de trabajo científicamente conocido y aceptado, es el propuesto por Baddeley y Hitch (1974), en el que subdividen la memoria de trabajo en 3 subsistemas:

1. *El ejecutivo central* que coordina, selecciona y opera los procesos de control, disponiendo de una retención temporal y capacidad limitada de procesamiento. Coordina dos siguientes componentes subsidiarios:
2. *El bucle fonológico*, responsable de la información auditivo-verbal (almacén fonológico).
3. *La agenda o pizarra viso-espacial*, responsable de almacenar la información viso-espacial.

Posteriormente autores como Baddeley (2000) modificaron dicho modelo debido a que los dos subsistemas dependientes del ejecutivo central, no eran suficientes para explicar todos los fenómenos que cotidianamente podían tener lugar en la memoria de trabajo. Por este motivo, propuso añadir un cuarto componente a su modelo, denominado retén o almacén episódico que dependiese del ejecutivo central. Este almacén episódico de capacidad limitada es *"capaz de mantener información compleja, de manipularla y de utilizarla a lo largo de un intervalo de tiempo muy superior al que se asume para los sistemas subsidiarios de la memoria de trabajo"* (Baddeley, 2000, p. 420)

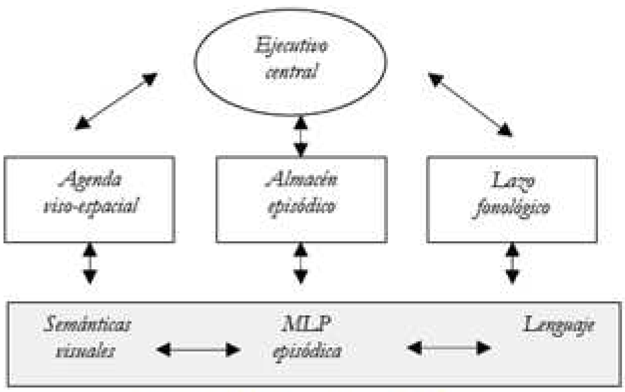


Fig 3.21 Baddeley (2000)

3.2.1 MEMORIA DE TRABAJO

Autores como Morgado (2005) entienden la memoria de trabajo como aquella que utilizamos, entre otras cuestiones en tareas cotidianas, cuando retenemos información que acaba de suceder para utilizarla en el propio razonamiento. Ilustramos algunos ejemplos como retener los datos obtenidos para continuar la resolución de un problema, recordar mentalmente los dígitos de un número de teléfono que nos acaban de decir, escoger entre distintos desarrollos en el plano cual coincide con el de un poliedro dado, etc. En todas estas tareas es necesario retener información parcial para el desenlace final de nuestro propósito. Esta retención de la información, es lo que se conoce como memoria de trabajo.

La memoria de trabajo es la más cotidiana porque es la que empleamos de forma natural en las actividades y tareas diarias, pudiéndose mejorar tácitamente con el entrenamiento adecuado, así como el porcentaje de inteligencia que depende directamente de ella. En detrimento de lo anterior, también es la memoria más perjudicada en la medida en que envejecemos (Güell, 2006).

A partir de los años 90, la memoria de trabajo (Burin, D. y otros, 2004) ha resurgido con gran relevancia social en la valoración de algunas aptitudes psicométricas como las matemáticas, la comprensión del lenguaje y la aptitud espacial por ser especialmente valoradas en algunos ámbitos laborales. Particularmente una de las aptitudes de mayor nivel jerárquico sustentada en la memoria de trabajo es la visualización espacial.

Una de las razones por las que la enseñanza de las matemáticas en algunos casos puede ser difícil es porque requiere un alto grado de integración de destrezas cognitivas que no son específicas de la materia, pero intervienen en su aprendizaje. Ciertas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas podrían estar condicionadas por la memoria de trabajo. Algunos psicólogos consideran que la funcionalidad de la memoria de trabajo depende del tipo de material almacenado. Es decir si hacemos referencia a imágenes, representaciones, palabras, números, etc. Por tanto, cabe la posibilidad que personas sin dificultades para almacenar palabras en su memoria, si las tuviera para mantener representaciones mentales de nuestro entorno o retener información numérica. Desde esta vertiente nos preguntamos sí ¿podrían explicarse des de esta perspectiva muchos de los problemas que tienen los estudiantes en matemáticas, sin dificultades en otras disciplinas?. Rivière (1990) contesta afirmativamente esta pregunta, argumentando diversas investigaciones que establecen las dificultades explícitas que pueden tener algunos estudiantes en retener temporalmente información de tipo numérico (aritmética) o viso-espacial (geometría), pero que sin embargo no tienen dificultades en retener información de tipo verbal.

Pero hay que tener en cuenta que el aprendizaje significativo de las matemáticas, sólo podemos entenderlo a partir del entramado global de las diferentes funciones cognitivas que intervienen. Por ejemplo, comúnmente es conocida la relación existente entre poder conservar temporalmente la información de tipo verbal, la comprensión lectora y la resolución de problemas en cualquier área de las matemáticas. Rivière (1990) expone que raramente podemos encontrar alumnos con dificultades en la lectura, comprensión lectora o en la memoria de trabajo verbal y que obtengan buenos resultados en la resolución de problemas.

En nuestra investigación nos centraremos en la memoria de trabajo visual y espacial por ser requerida tanto en la ejecución de los tests interactivos de visualización, que proponemos en la investigación (*apartado 6.2 INTRODUCCIÓN: TESTS*

INTERACTIVOS) como en la ejecución de algunas habilidades de visualización e imágenes requeridas en la resolución de algunos de los problemas geométricos ip^2 de nuestro estudio.

No podemos olvidar que la memoria ha supuesto un elemento vital para la supervivencia de los seres vivos a lo largo de la historia. Por haber constituido el recuerdo del refugio seguro, del lugar donde se han encontrado los alimentos, así como las estrategias para la adaptación y la supervivencia de la especie. Se entiende por memoria espacial el proceso cognitivo de codificar, retener y recuperar la información asociada con el entorno en el que nos desenvolvemos y los objetos físicos que coexisten en él.

Generalmente utilizamos la memoria espacial, en múltiples situaciones diarias, como por ejemplo cuando nos desplazamos de un lugar a otro, utilizamos mapas o cuando visualizamos un espacio o un recorrido, un edificio o cualquier objeto físico en nuestro entorno.

La memoria de trabajo visual y espacial está supeditada a un subsistema mental a corto plazo responsable de la entrada, tratamiento y posterior proyección de la información viso-espacial que Baddeley (2000) denominó pizarra o agenda viso-espacial. De este subsistema dependen tareas como por ejemplo recordar donde se acaban de dejar las llaves en casa, resolver ciertos problemas de geometría como rotar mentalmente un objeto, así como en *"cualquier otra tarea en la que es necesaria la creación y manipulación de una representación que preserve las características espaciales y visuales"* (Castellanos, 2001, p.25)

Cuando hacemos referencia a la información almacenada en la memoria de trabajo visual y espacial (Baddeley, 2000) nos referimos por un lado a la información visual relativa a la forma y color de figuras y objetos y por otro lado a la información espacial relativa a la ubicación o posición angular de figuras y objetos respecto un elemento de referencia.

La evidencia experimental recogida por diversos autores (Della Sala, Gray, Baddeley, Allamano y Wilson, 1999; Baddeley, 2000; Pickering Gathercole, Hall y Lloyd, 2001) sugiere que este subsistema de la memoria de trabajo visoespacial puede tratar de manera independiente la información espacial o localización de un objeto o figura y la información visual respecto a su forma y color.

3.2.2 MEMORIA Y APRENDIZAJE

En geometría, es determinante como la memoria visual y espacial puede llegar a intervenir en aquellas tareas o resolución de problemas que requieren de la manipulación mental de figuras y cuerpos geométricos. Las capacidades de representación que hacen referencia a la memoria visual y las de orientación que hacen referencia a la memoria espacial son concluyentes para conseguir un desarrollo eficaz en las actividades didácticas que precisan de la manipulación y desplazamientos mentales de figuras y cuerpos geométricos así como en los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.

A partir de la implicación del tipo de memoria, existen distintas vertientes de aprendizaje que interaccionan dando sentido al contenido de la materia.
El aprendizaje *declarativo* es una de ellas. En él consideramos por ejemplo la elaboración razonada del cálculo de superficies y volúmenes de cuerpos geométricos, la resolución de problemas o cualquier actividad de enseñanza que fomente la reflexión, el razonamiento y la creatividad matemática que posibilite una oportunidad de aprendizaje. Esta forma de aprendizaje declarativo o explícito se caracteriza porque la memoria a largo plazo y la memoria de trabajo interaccionan continuamente y la información codificada así como la recuperación de ésta se realiza intencionada y voluntariamente.
En cambio el aprendizaje *no declarativo*, consiste en el aprendizaje de tareas o estrategias como por ejemplo caminar, montar en bicicleta o explicitar las tablas de multiplicar en educación primaria. Este tipo de aprendizaje es producto de la aplicación reiterada de estrategias repetitivas y métodos reproductivos que quedan almacenados en la memoria y prácticamente sin darnos cuenta se interiorizan y se utilizan de forma automática. Una de la situaciones que puede darse es el caso de que un aprendizaje declarativo a fuerza de repetición pueda llegar a convertirse en un aprendizaje automático y no declarativo. De esta manera podemos llegar a relacionar prácticamente de forma no intencionada y automática la representación de un cuerpo geométrico con su desarrollo plano o con la fórmula para hallar su superficie o volumen.

De manera frecuente, en la resolución de aquellos problemas geométricos en los que es necesario una representación mental como estrategia de resolución, ésta suele ser concebida mediante la componente visual y espacial de la memoria de trabajo.

Es la memoria de trabajo, la que nos permite representar la forma de cada una de las figuras o cuerpos geométricos que intervienen en un problema concreto, así como su orientación espacial. En la resolución de un problema geométrico es importante poder acceder en distintos momentos a la componente visual de la memoria de trabajo, que es la que nos va a permitir determinar la representación visual de los elementos geométricos que intervienen en él. Por otro lado la componente espacial de la memoria de trabajo es la que nos va a permitir realizar mentalmente desplazamientos, traslaciones, homotecias y rotaciones. Tareas como calcular el área o el volumen de un prisma triangular o calcular la altura de una pirámide de base pentagonal, se pueden realizar a partir de la combinación de aprendizajes declarativos y no declarativos según la facilidad que dispongan los estudiantes para cada uno de ellos.

En la comunidad matemática son comúnmente conocidos los problemas llamados de construcción geométrica. Problemas que pueden resolverse o no utilizando sólo regla y compás. En estos casos las estrategias cognitivas de resolución difieren tácitamente de las comentadas anteriormente porque en estos problemas es necesario recordar elementos que previamente no están citados ni representados. Posiblemente de alguna manera los estudiantes que abordan este tipo de problemas han de *"ver"* mentalmente parte de la solución del problema antes de poder realizarlo. En la educación secundaria actual y concretamente en la geometría que se enseña son comúnmente conocidas algunas construcciones elementales como por ejemplo: a) polígonos regulares; b) bisectriz de un ángulo; c) división de un segmento en partes iguales; d) recta perpendicular o paralela a otra pasando por un punto dado; e) mediatriz de un segmento, etc. Estas construcciones geométricas son ejercicios de regla y compás, aunque lo que en muchos casos sucede es que en la etapa escolar no se profundiza en el aprendizaje de una geométrica constructiva más elaborada. Esta forma de geometría ha ido perdurando en la historia a través de tres clásicos problemas griegos: a) duplicación del cubo; b) trisección del ángulo; y por último c) cuadratura del círculo. En este sentido uno de los autores más formativos e ilustres en el ámbito de la geometría constructiva, es Puig Adam (1986). En su obra *Curso de geometría métrica* se resuelven distintos problemas, mediante regla y compás de forma muy visual, explicitando todos los pasos realizados y elaborando una buena lista de enunciados de problemas por resolver.

Posiblemente sea la memoria no declarativa o implícita cuya recuperación de información no intencionada, es más misteriosa y posiblemente la responsable del tipo de estrategias mnésicas que pueden determinar la resolución exitosa de esta clase de problemas. A modo de ejemplo, ilustraremos uno de los tradicionales problemas de construcción geométrica expuesto en la Fig 2.2.1 (apartado 2.2.1 INSIGHT Y REORGANIZACIÓN ESTRUCTURAL)

Actualmente las nuevas tecnologías tienen un valor muy importante en el desarrollo de la visualización y en la memoria visual y espacial. El uso de las calculadoras gráficas se ha convertido en algo común en las aulas de secundaria. La utilización de distintos recursos tecnológicos desde aplicaciones interactivas, softwares y programas informáticos como el Cabri-geometre, el Geogebra, el Geometer Sketchpad, el Mahematica, el Maple y hasta una gran cantidad de applets que podemos encontrar en internet nos permiten poder representar datos estadísticos, figuras y cuerpos geométricos así como posibles configuraciones en movimiento (Macnab, Phillips y Norris, 2012).

Estos materiales interactivos que propician representaciones y configuraciones visuales, que desde otros soportes sería difícil poderlas realizar, desempeñan un papel importante en la memoria visual y espacial de los estudiantes porque pueden influir en la realización de futuras actividades de enseñanza y aprendizaje que requieran de habilidades de visualización o de representaciones visuales. Es decir, consideramos por ejemplo que aquellos estudiantes que hayan visto representado desde distintas perspectivas angulares un octaedro tendrán más facilidad para identificar y reconocer el número de aristas y vértices. De la misma manera que aquellos que hayan visualizado distintos desarrollos planos de un cubo, pueden tener más facilidad para identificarlos en ocasiones futuras. En estos casos, los recursos tecnológicos contribuyen especialmente al desarrollo significativo de la visualización en educación matemática.

Nos parece muy interesante desde el punto de vista didáctico el profundizar en el estudio de la naturaleza intrínseca de la memoria, aunque lo que realmente nos interesa es estudiar la funcionalidad en la práctica, de la memoria visual y espacial cómo soporte y nutriente de algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) e imágenes mentales (Presmeg, 1986) que pueden ser necesarias en la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo propuestos en nuestra investigación.

3.2.3 MEMORIA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el artículo *Procesos y habilidades en visualización espacial* (Gutiérrez, 1991) se explicita una relación detallada de las habilidades que también afirma Del Grande (1990) pueden utilizar las personas en la creación y procesamiento de imágenes visuales. Se establece una taxonomía de habilidades que pueden formar parte de la percepción espacial, dentro de las que se incluye la *memoria visual*. Define la memoria visual como la habilidad para recordar las características visuales y de posición de objetos geométricos con los que se trabaja en la resolución de un problema o en una actividad de enseñanza/aprendizaje. Esta forma de memoria a la que hace referencia Del Grande (1990), contextualizada en la resolución de un problema es la que nos permite poder manipular la imagen mental de una figura u objeto, necesaria en una traslación, discriminación visual o en el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas. En este tipo de memoria Morgado (2005) hace referencia a la memoria de trabajo visual y espacial que nos permite almacenar información espacial y visual de forma transitoria, pudiendo ser necesaria en aquellas resoluciones de problemas que requieren de procesos visuales, como por ejemplo en problemas que impliquen generar una superficie de revolución, reconocer adecuadamente determinadas figuras y superficies o en aquellos que se requiere realizar el desarrollo plano de un poliedro o cuerpo geométrico.

A continuación exponemos diversos problemas geométricos cuyas estrategias de resolución requieren, en mayor o menor grado de la memoria visual (Del Grande, 1990):

1) La utilización de representaciones mentales, sustentadas en la memoria de trabajo visual y espacial, puede fomentar nuevas y originales estrategias en la resolución de problemas matemáticos así como consolidar el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos de diferentes niveles de dificultad. La investigación de Wheatley (1997), incide en que existe una relación significativa entre "*tener éxito*" en la resolución de problemas y la utilización de representaciones mentales. En su trabajo concluye que aquellos estudiantes que abordaron la resolución de problemas no rutinarios a partir de imágenes y representaciones mentales tuvieron más éxito, que aquellos que los resolvieron mediante otras estrategias. Coincidimos en que la utilización de las representaciones mentales pueden desempeñar un papel crucial en la resolución de problemas geométricos. De forma que al igual que construir un mapa mental de un cierto recorrido podría ayudarnos a encontrar más rápidamente un determinado lugar, también podría facilitarnos la resolución de problemas geométricos almacenar en nuestra menoría visual una mayor cantidad de imágenes y representaciones mentales asociadas a relaciones geométricas, figuras y cuerpos geométricos. Ilustraremos este apartado, con el siguiente problema:

Consideramos un romboide de lados 7cm y 4cm, cuyo ángulo agudo mide 30º y gira entorno del lado mayor. Comprobar que el volumen del cuerpo geométrico obtenido es $28\pi cm^3$.

Para garantizar ciertas cuotas de éxito en la resolución de este tipo de problemas es esencial poder representar el cuerpo geométrico engendrado. En este problema concreto a partir de las rotaciones mentales realizadas con el romboide. A continuación ilustramos en la siguiente Figura 3.2.3 la construcción de la imagen mental del cuerpo geométrico, en la que observamos como podemos trasladar el cono de arriba en el mismo que falta abajo y generar finalmente un cilindro. De esta manera podemos calcular rápidamente el volumen requerido en el problema.

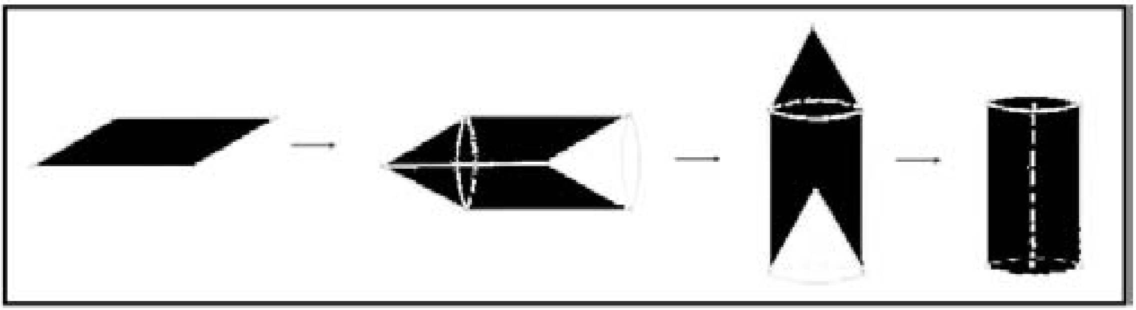


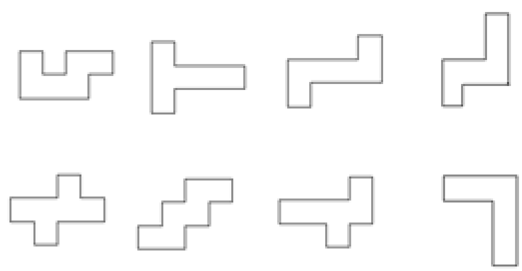
Fig 3.2.3: Problema Romboide

En esta resolución comprobamos que son necesarios distintos procesos de representación, transformación y rotación mental. Procesos que están sustentados en la memoria de trabajo visual y espacial. Es precisamente cuando conseguimos interrelacionar significativamente los distintos procesos mentales que intervienen en un problema, cuando podríamos tener más posibilidades de resolverlo con éxito.

2) Las representaciones mentales, en muchas ocasiones, pueden facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema. De la misma manera que en momentos determinados estas pueden propiciar de forma casi inmediata que "surja" la resolución buscada. Wheatley (1997) afirma que generalmente resultan más comprensivas y elegantes las resoluciones sustentadas en imágenes y representaciones mentales. En este contexto son ilustrativas las demostraciones propuestas por Nelsen (1993) realizadas únicamente a partir de representaciones e imágenes de diversos teoremas algebraicos y geométricos como por ejemplo hallar el cuadrado de una suma, el cuadrado de una diferencia, así como diversas demostraciones del teorema de Pitágoras. Como docentes confirmamos, que algunos estudiantes comprenden mejor el teorema de Pitágoras mediante demostraciones y representaciones con ayuda visual. Son en estos casos, a partir de la adecuada comprensión del problema o teorema, donde probablemente la memoria visual asume un papel fundamental en las posibles futuras aplicaciones.

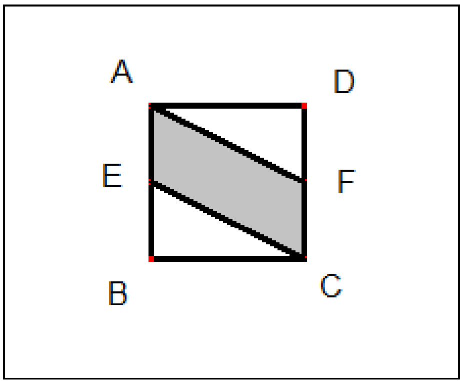
3) La memoria de trabajo visual y espacial también desempeña una función especialmente relevante en la resolución de aquellos problemas que requieren de la construcción de modelos tridimensionales. Particularmente en la construcción del desarrollo plano de cuerpos geométricos así como a la inversa. El cuerpo geométrico generado a partir de su desarrollo. Son en estos problemas donde el estudiante requiere de la memoria de trabajo visual y espacial para construir, mantener manipular y transformar el desarrollo en la mente, con el objetivo de conseguir el cuerpo geométrico buscado. A modo de ejemplo, ilustramos el siguiente problema.

Dados ocho hexominoes determinar cuáles de ellos pueden considerarse desarrollos de un cubo.



4) Por otro lado la memoria de trabajo visual y espacial es determinante en la resolución de los problemas geométricos que requieren desplazar mentalmente una figura en el plano o un cuerpo geométrico en el espacio. Esta memoria es la responsable de retener y generar mentalmente la figura o cuerpo geométrico que sea necesario desde la ubicación y posición inicial hasta la final en todos los pasos intermedios de la resolución del problema geométrico. Planteamos el siguiente problema propuesto por Presmeg (1985) en su tesis doctoral:

Sabiendo que el área del cuadrado ABCD es cuatro unidades cuadradas y que E y F son los puntos medios de los segmentos AB y CD, encontrar el área del paralelogramo AECF.



Observamos que el área del rectángulo AEFD es dos, al representar la mitad de la superficie del cuadrado original. De manera similar podemos "ver" que la superficie del paralelogramo AECF es igual a la del rectángulo AEFD, si conseguimos desplazar mentalmente el triangulo ECF sobre la posición del triangulo AFD y verificar que coinciden.

Respecto a otras investigaciones relevantes relacionadas con las nuevas tecnologías:

i. Existen investigaciones (Zimmermann y Cunningham, 1991) en las que se plantean distintas estrategias de análisis y experiencias propias respecto a la importancia de la visualización de imágenes o representaciones mentales. Los autores Zimmermann y Cunningham (1991) exponen diferentes tareas relacionadas con la visualización mediante softwares dinámicos e interactivos en los que se tratan diferentes temas desde geometría, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, análisis numérico hasta procesos estocásticos y otros fenómenos aleatorios.

Dichos autores entienden la visualización matemática como una herramienta en potencia de la intuición y la conciben como la capacidad que puede dar significado al conocimiento y en muchas ocasiones sirve de guía heurística en la resolución de problemas, inspirando posibles descubrimientos nuevos. Recomiendan que las imágenes y representaciones en ordenador o en el aula clase, no deben estar aisladas del contexto matemático sino que tendrían que asociarse a otros modos de pensamiento matemático así como a otras formas de representación.

ii. Cladellas y Castelló (2008) plantearon diversas investigaciones sobre tareas espaciales de forma interactiva por ordenador. Su estudio se centró en tareas donde al menos uno de los procesos implicados era una rotación mental. Los resultados obtenidos concluyen diferencias de género respecto a la rapidez y número de errores en la ejecución de la tarea. Los autores argumentan que en la medida que aumenta el entrenamiento de la tarea espacial las diferencias de género en la ejecución se minimizaban. En la investigación se explicita que posiblemente los factores que han podido influir de forma significativa en la ejecución de la tarea espacial son la familiaridad del estímulo y la interpretación figurativa de éste. Nos ha parecido interesante referenciar esta investigación puesto que en nuestro trabajo también hemos desarrollado dos tests interactivos basados en una tarea contextualizada en el plano y otra en el espacio respectivamente. La tarea geométrica que planteamos en cada uno de los tests interactivos se caracteriza porque al menos uno de los procesos implicados en su ejecución es la rotación mental.

El desarrollo del pensamiento visual así como de aquellas habilidades visuales que hacen referencia a la manipulación, transformación y rotación mental a través de soportes interactivos, software y gráficos por ordenador, pueden potenciar y estimular la memoria visual así como la motivación en futuras actividades de enseñanza y aprendizaje.

BLOQUE II: DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPITULO 4

4. EL PROBLEMA A INVESTIGAR Y METODOLOGÍA

> *[...] Pero es la que mucha gente ha venido llamando «idea feliz», una especie de truco o de iluminación súbita y mágica que no figuraba en los datos ni en el enunciado del problema y que el contexto en el que se había planteado difícilmente induce a pensar. Las ideas felices existen, pero ni están restringidas a los genios ni todos los problemas se resuelven con ellas.*
>
> (Albertí, 2010, p.18)

En este capítulo, la primera parte está dedicada a exponer el problema de investigación. Posteriormente se explicarán las preguntas y objetivos de la investigación así como los supuestos e hipótesis que sustentan nuestro estudio empírico cualitativo.

En la segunda parte del capítulo, iniciamos la articulación y diseño de la metodología de nuestro trabajo compuesto por dos fases diagnósticas:

- Primera Fase Diagnóstica *de Selección,* cuyo objetivo radica en seleccionar los estudiantes y los problemas que serán potencialmente interesantes para nuestra investigación.
- Segunda Fase Diagnóstica *de Relación,* cuyo objetivo consiste en estudiar las resoluciones planteadas ante los problemas geométricos ip^2 seleccionados en la fase anterior así como estudiar si existe alguna relación entre aquellos estudiantes que tienen mayor facilidad para resolver este tipo de problemas con aquellos que denotan una actitud positiva ante las matemáticas o significativas habilidades de visualización.

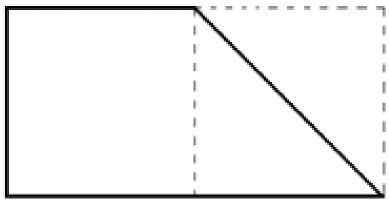
Describimos también dentro de esta segunda parte del capítulo el contexto y la muestra de estudiantes que participarán en las dos fases diagnósticas. Por último se describen los criterios que definen los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo.

4.1 EL PROBLEMA A INVESTIGAR

La enseñanza de la Geometría afronta diversas dificultades, siendo una de las principales la falta de éxito que tienen los alumnos en la resolución de problemas en general y más aun en la resolución de los problemas novedosos. Entendiendo por problemas novedosos aquellos problemas "no rutinarios" que salen fuera de los que están acostumbrados a realizar a nivel escolar tanto en primaria como en secundaria.
La realidad cotidiana como docente, nos muestra la cantidad de dificultades, errores y bloqueos que padecen los estudiantes en la educación secundaria cuando se enfrentan a la resolución de una tarea o problema geométrico o matemático "no rutinario". Éste es uno de los motivos que ha centrado el interés de gran parte de la investigación del proceso de enseñanza y aprendizaje de los matemáticos en las dificultades, estrategias y estilos de resolución de problemas (Polya, 1965; Schoenfeld, 1985) y tareas matemáticas por parte de diversos autores (Barroso y Gavilán, 2003; Gutiérrez, 2005); Aunque no es hasta los años 70, cuando la inclusión de la resolución de problemas en los estándares curriculares de matemáticas en los Estados Unidos, asumidos en su esencia por otros países, significó un avance cualitativo en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de la disciplina de las matemáticas.
Diversos autores han realizado aportaciones relevantes en esta dirección, desde la distinción de las diferentes fases en la resolución de un problema (Polya, 1965), la clasificación formal de las distintas vertientes de investigación en las resoluciones de problemas (Schoenfeld, 1985), hasta las habilidades cognitivas (Ballesteros 2001; Best, 2001; Helmut, 2008) y formas de pensamiento (Bono, 1998; Root-Bernstein, 2002) que empleamos ante la resolución de determinadas tareas o problemas matemáticos. Según la clasificación establecida por Schoenfeld (1985), nuestra investigación se podría relacionar en cierta medida con el *"estudio de los procesos cognitivos de la mente que intervienen en el pensamiento matemático y concretamente en el geométrico en relación con problemas más o menos complejos"*.

Una contribución importante (Berlyne, 1976; Mayer 1986; Whertheimer, 1991; Cunningham y MacGregor, 2008) en este ámbito, es la idea de que las personas se atascan en la resolución de problemas o tareas geométricas porque no pueden reorganizar la situación planteada. Como no pueden ver la situación desde una perspectiva diferente, no pueden percibir una forma nueva para hacer encajar los elementos y por tanto no pueden encontrar una solución. Todos estos aspectos están relacionados con el pensamiento productivo y con la posible ocurrencia del insight que explicitamos en el *capítulo 2: Insight geométrico potencialmente perceptivo*. Recordamos que entendemos por pensamiento productivo aquel que está basado en la producción de una nueva solución a una tarea o problema, mediante una nueva organización o reestructuración de la situación. Ilustraremos, como ejemplo el hecho de resolver el siguiente problema adaptado del propuesto inicialmente por Hans y otros (2004):

La siguiente figura geométrica está formada por un cuadrado y la mitad de otro. ¿Podrías dividirla en 4 partes exactamente iguales?



Aunque a priori parece difícil de resolver, la solución se encuentra en la forma de reorganizar la situación, posibilitada por el hecho de fraccionar adecuadamente la figura geométrica. Una heurística eficiente en el camino de la resolución consiste en tener presente la forma geométrica de la figura original, si se piensa en un cuadrado y en un triángulo que sea la mitad de este cuadrado, los cuatro trapecios rectángulos iguales se hacen presentes.

Diversos autores han establecido distintas distinciones entre el pensamiento productivo y su recíproco, Wertheimer (1959) concibe *"insight"* frente a *"pensamiento reproductivo"*, Mayer (1986) explicita *"comprensión estructural"* contra *"memoria mecánica"*, De Bono (1971) expone *"el pensamiento lateral"* versus *"el pensamiento vertical"* y Root-Bernstein (2002) plantea "*el pensamiento creativo*". Este trabajo pretende contribuir a investigar uno de los constructos más importantes en el conocimiento de la creatividad; nos referimos al insight.

Concretamente, en nuestra investigación, nos centraremos en el estudio de algunos procesos cognitivos subyacentes en el pensamiento productivo que intervienen en la resolución de problemas y tareas geométricas. En palabras de Rivière (1990, p. 4), "*La lógica de esta perspectiva es muy clara: si conocemos, por ejemplo, los procesos mentales que* *se emplean para efectuar una operación de suma, o las estructuras intelectuales que debe poseer el alumno para realizarla, podremos comprender mejor sus fallos y errores al sumar"*, por lo tanto si logramos identificar algunos de los procesos mentales que se ponen en marcha al realizar determinadas estrategias de resolución geométrica podremos comprender mejor los conflictos, bloqueos y obstáculos de nuestros alumnos así como plantear futuras estrategias didácticas y métodos de enseñanza-aprendizaje más eficaces, consiguiendo mejores resultados en este ámbito del aprendizaje de la geometría. Así pues, en nuestra investigación el trabajo está ligado al estudio y análisis de lo que genéricamente conocemos por competencias geométricas, desde la aplicación de algunas habilidades de visualización y estrategias de resolución geométrica, en una vertiente muy particular: el pensamiento productivo.

El conocimiento de algunas habilidades de visualización, nos va a permitir identificar algunos errores y dificultades que se generan durante la resolución de una tarea o problema geométrico, pudiendo desde esta perspectiva diagnosticar al alumno identificando su estilo de razonamiento y pensamiento, con la intención de redirigir y mejorar sus estrategias de resolución de problemas, así como sus conceptos geométricos asociados; de la misma forma que comprender el desarrollo, integración y evolución escolar de los estudiantes que participen en esta investigación, puede ayudarnos a entender de forma significativa las posibles futuras inferencias de los resultados obtenidos.

Básicamente podemos definir el **problema de investigación** que desarrollaremos en este trabajo en los siguientes términos:

Identificar algunas estrategias de resolución en una colección de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2).

Como ya explicitamos en el capítulo 2, emplearemos la notación ip^2 para nombrar los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo que estudiaremos en nuestra investigación y que están definidos en el apartado *4.3 FASE PREVIA: DISEÑO DE PROBLEMAS.*

Partimos del supuesto que, entre otros, el pensamiento productivo puede contribuir cualitativamente al aprendizaje y conocimiento matemático significativo (Berlyne, 1976) de nuestros estudiantes así como en la resolución de problemas geométricos. Por este motivo, también nos proponemos identificar qué influencia ejercen los procesos de la visualización en las estrategias de pensamiento productivo, con el objetivo de analizarlos y aportar nuevas propuestas didácticas de actuación respecto a la educación matemática de nuestros alumnos. Concretamente la investigación que planteamos aborda el aprendizaje geométrico a partir del análisis de las estrategias que utilicen los estudiantes para resolver los problemas que se conocen en la comunidad científica como problemas de insight desde la vertiente perceptiva. Nos interesaremos por el perfil visualizador de los participantes y su posible relación con el hecho de "tener éxito" en la resolución de este tipo de problemas.

En los próximos apartados desarrollaremos el problema de investigación con detalle a partir de los objetivos y preguntas de investigación planteadas.

4.1.1 JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

Desde 1997 la OCDE estudia el rendimiento de los sistemas educativos mediante nuevos indicadores. El rendimiento educativo de un país está constituido, entre otros, por los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales de sus ciudadanos, que pueden ser relevantes para el bienestar personal, social y económico.
El informe PISA, genera indicadores de este rendimiento educativo que se realiza mediante una evaluación internacional. Concretamente pretende establecer a partir de pruebas estandarizadas, en qué medida los jóvenes de 15 años, al final de la escolaridad obligatoria, están preparados para satisfacer las necesidades que la sociedad de hoy día demanda.
Rico (2006) en su artículo *"Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría"* aborda, entre otros, tres aspectos especialmente relevantes relacionados con los indicadores del informe PISA en el caso de la geometría y también relacionados con nuestra investigación:

A. Otorga un papel importante al estudio del espacio y forma haciendo referencia al estudio de objetos y formas así como sus relaciones geométricas y espaciales. *Para conseguirlo es preciso comprender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas. Debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas… Ello significa entender la relación entre formas e imágenes, o representaciones visuales… (Rico, 2006).* Observamos de la relevancia que concede a la percepción y en definitiva a las habilidades de visualización.

B. Respecto a la complejidad de las competencias requeridas en la resolución de los problemas geométricos realizados en las pruebas PISA, se han establecido tres clases. Observamos que la tercera clase incide directamente en la resolución de problemas que sean originales. Esta es una de las características que identifica los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo que estudiaremos en nuestra investigación.

III Complejidad en las Competencias

Los items que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias.

Primera clase: Reproducción y procedimientos rutinarios.

Segunda clase: Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados.

Tercera clase: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

C. Dentro de cada una de las tres categorías de tareas y problemas (reproducción, conexión, reflexión) se han establecido los indicadores respectivos para su correspondiente evaluación.

Los indicadores para la complejidad de las tareas en cada una de las categorias se resumen en la siguiente tabla:

REPRODUCCIÓN	CONEXIÓN	REFLEXIÓN
• Contextos familiares • Conocimientos ya practicados • Aplicación de algoritmos estándar • Realización de operaciones sencillas • Uso de fórmulas elementales.	• Contextos menos familiares • Interpretar y explicar • Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación • Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	• Tareas que requ re comprensión y r • Creatividad • Ejemplificación y uso de conceptos • Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos • Generalizar y justificar resultados obtenido

Observamos que la creatividad es uno de los indicadores a tener presente para evaluar aquellas tareas y problemas que se engloban en la tercera categoría de *REFLEXIÓN*. Es decir la creatividad, entre otros, es uno de los indicadores que evalúa el potencial educativo de nuestros estudiantes y concretamente su aprendizaje matemático en geometría.

4.1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Partiendo del ámbito creativo en el que se contextualizan los problemas geométricos ip^2 que abordarán los participantes en la investigación, consideramos distintos aspectos relevantes que pueden influir en la creación de resoluciones creativas, originales e innovadoras.

Por un lado la estructura conceptual, es decir el conjunto de conceptos matemáticos que posee el estudiante y que puede emplear en la resolución de problemas. Consideramos especialmente importante conocer los conceptos matemáticos que ostenta el alumno, no solo desde el marco curricular, si no aún más importante desde un enfoque epistemológico; ya que éstos van a configurar la estructura cognitiva base, a partir de la cual van a emanar las posibles especulaciones de resolución, tácticas metodológicas de resolución, estrategias heurísticas, etc. Parece lícito pensar, que si partimos de una estructura conceptual errónea o parcial, las posibilidades de éxito de los estudiantes en la resolución de un problema se reducen considerablemente.

En segundo lugar, consideraremos la estructura procedimental formada por el conjunto de métodos y algoritmos que de forma explícita o implícita pueden intervenir en la resolución de problemas geométricos.

A modo de conclusión, el conocimiento general (Urban, 1995) en matemáticas y el específico (conceptual y procedimental) en geometría que dispongan los participantes influirá de forma relevante en las resoluciones creativas que puedan construir y plantear, pudiendo estimular la ocurrencia del insight, ante el abordaje de los problemas geométricos ip^2.

En esta investigación estudiaremos algunos de los procesos cognitivos que pueden propiciar la ocurrencia del insight. Entre ellos uno de los procesos cognitivos que consideramos relevantes en nuestro trabajo por promover y potenciar el insight en las resoluciones geométricas es la visualización.

> *"la visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático"*
>
> *(Guzmán, 1996, p.17)*

La visualización (Gutiérrez, 1996; Presmeg, 2006) es uno de los procesos cognitivos substancialmente significativo en la resolución de problemas matemáticos y concretamente en los problemas geométricos ip^2 y tareas geométricas de nuestra investigación, por estar intrínsecamente relacionada con el razonamiento. La visualización puede ser determinante en la resolución de aquellos problemas que demandan de transformaciones mentales de las figuras y cuerpos geométricos que intervienen o se pueden generar.

Tomando como punto de partida el Trabajo Final de Master (Sánchez, 2009) abordaremos de manera psicométrica el estudio y análisis de algunas habilidades de visualización. Estas habilidades de visualización están intrínsecamente involucradas, en la resolución de problemas geométricos ip^2 y en la ejecución de los tests interactivos de visualización (Shepard y Cooper, 1985; Castellanos, 2001; Cladellas y Castelló, 2008)

Por último consideraremos otro ámbito importante que está relacionado con las resoluciones creativas y productivas que un estudiante de la educación secundaria puede plantear ante situaciones o problemas geométricos desconocidos e innovadores. Nos referimos al estudio de las actitudes (Fennema-Sherman, 1976; Mann, 2005) de los estudiantes hacia las matemáticas y como estas pueden influir en la resolución de determinados problemas geométricos, concretamente ante los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo que estudiaremos en nuestro trabajo.

Una vez explicitados los ámbitos que estudiaremos y que pueden influir en las resoluciones a los problemas geométricos ip^2 y especialmente en la ocurrencia del insight, exponemos la pregunta central de investigación:

¿Qué estrategias de resolución plantean los estudiantes de secundaria ante problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2)?

Esta pregunta central de investigación se concreta en las siguientes:

1) ¿Qué momentos de insight identificamos en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo?

2) ¿Cómo establecemos niveles de pensamiento productivo?

3) ¿La ejecución de dos tareas geométricas interactivas, en las que intervienen algunas habilidades de visualización, contribuyen a la predicción de los resultados obtenidos en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo?

4) ¿La actitud de los estudiantes hacia las matemáticas contribuye a la predicción de los resultados obtenidos en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo?

A modo de resumen, concluimos que las preguntas de investigación propuestas, hacen referencia de forma específica al problema de investigación general: analizar cómo los estudiantes resuelven problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2) y qué tipo de resoluciones o estrategias utilizan; así como identificar si éstas presentan alguna relación con determinadas habilidades de visualización de los estudiantes requeridas en la realización de dos tests interactivos o con las actitudes de los estudiantes hacía las matemáticas. Es decir en definitiva estudiar la ocurrencia del insight a partir de la resolución de problemas geométricos ip^2, poniendo un especial énfasis en dos aspectos relevantes la visualización y las actitudes.

4.1.3 OBJETIVOS

El objetivo central de esta investigación radica en *identificar, describir, explorar, analizar y comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje en geometría de los estudiantes de educación secundaria a partir de la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo.*

El objetivo central se concreta en los siguientes subobjetivos:

1. Identificar y definir ejemplos de momentos de insight geométrico en la resolución de problemas.

2. Describir niveles de pensamiento productivo a través de la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight.

2.1 Analizar y clasificar las estrategias de resolución geométrica de los alumnos en la realización de problemas geométricos ip^2.

3. Evaluar algunas habilidades de visualización de los estudiantes y correlacionar los resultados con el cuestionario de problemas geométricos ip^2.

4. Evaluar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y correlacionar los resultados con el cuestionario de problemas geométricos ip^2.

4.1.4 SUPUESTOS E HIPÓTESIS

En el apartado anterior *4.1 EL PROBLEMA A INVESTIGAR*, hemos expuesto el problema de investigación que consiste en *identificar algunas estrategias de resolución en una colección de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ver pag 129)* aunque en un nivel de mayor concreción pretendemos: identificar, analizar, comprender, describir e interpretar aquellos indicios que hacen que algunos estudiantes de Secundaria se atasquen y bloqueen ante problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2). Empezaremos abordando el problema de investigación, a partir del conjunto de posibles estrategias de resolución que podrían utilizar los estudiantes. De manera análoga, nos interesaremos por las actitudes de los estudiantes hacía las matemáticas y por su comportamiento visualizador sustentado en algunas habilidades de visualización, así como su posible relación con el hecho de "tener éxito" en la resolución de este tipo de problemas.

La pregunta central de nuestra investigación planteada en el apartado *4.1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN: ¿Qué estrategias de resolución plantean los estudiantes de secundaria ante problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2)?* y las subpreguntas en que se concreta esta, se sustentan en los siguientes supuestos de partida:

- La resolución de los problemas geométricos ip^2 que seleccionaremos en nuestro instrumento de investigación requieren, entre otras, de algunas de las habilidades de visualización establecidas por Del Grande (1990) como son la identificación visual, la discriminación visual, el reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y la memoria visual.

- La resolución de los problemas que seleccionaremos en nuestro instrumento de investigación para analizar el proceso del insight geométrico, requieren entre otras componentes cognitivas, de una significativa componente visual y espacial. Componentes que creemos necesarias para codificar (Sternberg y Davidson, 1995) y comprender adecuadamente los problemas como mínimo en una de sus posibles resoluciones. Posiblemente los participantes tendrán que generar representaciones y estructuras geométricas basadas en componentes visuales y espaciales en diversos momentos de la resolución de los problemas. Estas representaciones de los estudiantes necesarias en el planteamiento de estrategias de resolución geométrica por insight, probablemente se sustentan mediante imágenes (Presmeg, 1986) y habilidades de visualización (Del Grande, 1990).

- Presuponemos que algunas funciones cognitivas como la atención selectiva y sostenida (Sanchez, 2009) del participante pueden afectar diferencialmente a la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo y a la ejecución de las tareas geométricas planteadas en los tests interactivos de nuestro estudio.

- Los estudiantes finalmente seleccionados para realizar nuestra investigación, tienen asimilados un cierto conocimiento general base en la resolución de problemas en matemáticas según el currículum vigente en educación secundaria mediante la adquisición de las competencias básicas en matemáticas.

El objetivo central que hemos planteado en el apartado anterior *4.1.3 OBJETIVOS*: *"identificar, describir, explorar, analizar y comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje en geometría de los estudiantes de educación secundaria a partir de la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo"* y los subobjetivos en los que se concreta éste respecto las subpreguntas de investigación, se han planteado teniendo presente las siguientes hipótesis de partida:

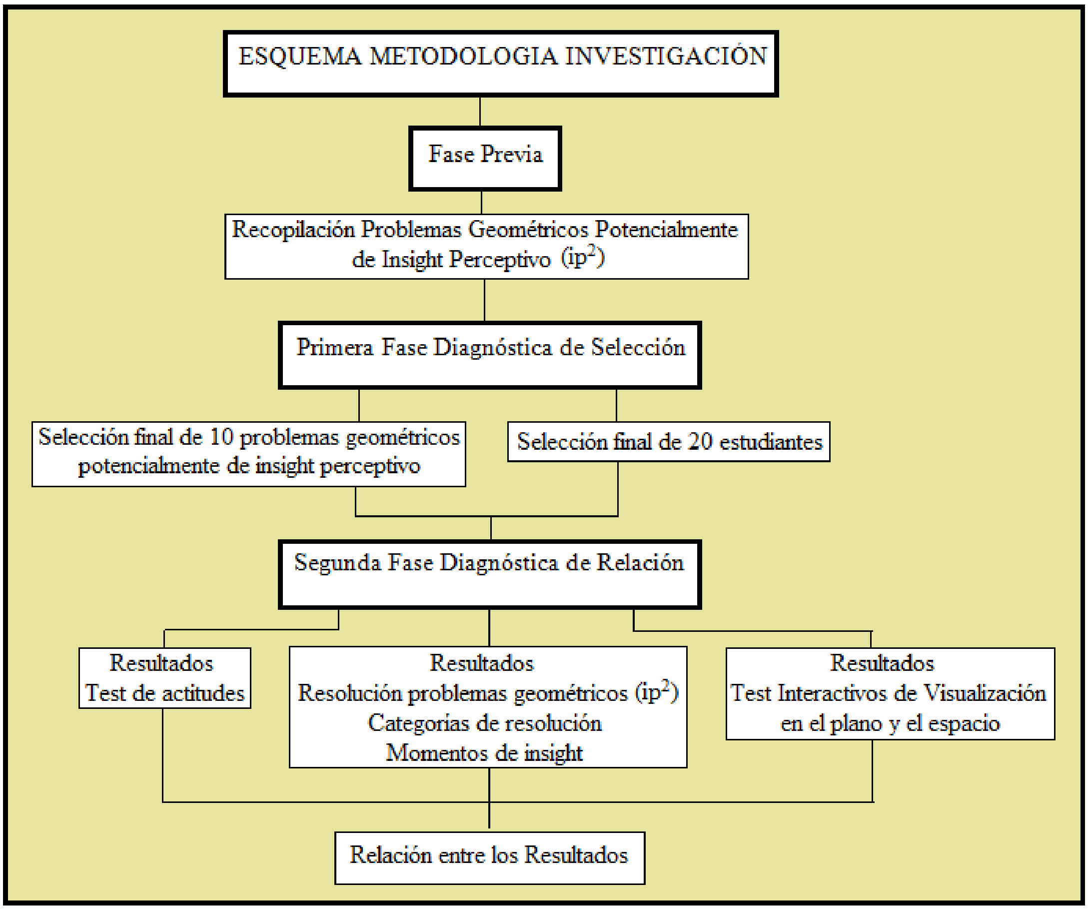
- Aquellos participantes que denoten unos resultados especialmente significativos en los tests interactivos que evalúan ciertas habilidades de visualización como la identificación visual, la discriminación visual, el reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y la memoria visual suponemos que posiblemente tendrán una mayor facilidad para resolver con *éxito* los problemas geométricos ip^2 que plantearemos en nuestro estudio.

  Respecto las tareas geométricas propuestas en los tests interactivos que forman parte de la segunda fase Diagnóstica de Relación, se espera que la ejecución sea más difícil con un mayor tiempo de reacción, dependiendo la diferencia angular (en el plano o espacio) que exista entre la posición del estímulo de memoria y el de prueba (Shepard y Cooper, 1985). Aunque habrá que ponderar los resultados teniendo en cuenta investigaciones posteriores como la de Cladellas y Castelló (2008) donde apuntan que a partir de una cierta diferencia angular, ésta puede ser determinante en la rotación mental que ejecuta adecuadamente la tarea. Respecto la componente visual, se espera una ejecución más difícil cuando exista mayor parecido en la forma de las figuras y cuerpos geométricos presentados como estímulos de memoria y de prueba.

- Los participantes que denoten unos resultados especialmente significativos en el test de actitudes, en la segunda fase diagnóstica de Relación, esperamos que posiblemente tendrán mayor facilidad para desenvolverse con *éxito* ante la resolución de los problemas geométricos ip^2 de nuestra investigación.

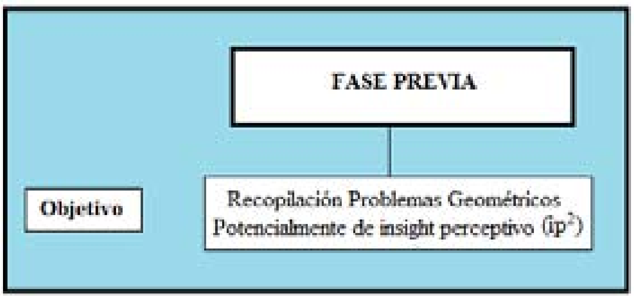
4.2 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología de la investigación se enmarca próxima a planteamientos cualitativos. El objetivo central de esta radica en analizar las estrategias de resolución que emplean los estudiantes de 4t de ESO cuando se enfrentan ante problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2). Nos interesa analizar, describir e interpretar las representaciones, indicios, habilidades visuales y posibles argumentaciones en el proceso de exploración de un problema geométrico potencialmente de insight perceptivo y en general, aquellas impresiones que involucren una nueva forma de aproximarnos a una resolución que sea creativamente significativa. Exponemos el diseño de la metodología:



Esquema 4.2: Metodología Investigación

En primer lugar definimos una Fase Previa cuyo objetivo consiste en la elección de 50 problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2) siguiendo los criterios de selección establecidos en el apartado 4.*3 FASE PREVIA: DISEÑO PROBLEMAS* y presentados en el Anexo *B.1 LISTA RECOPILACIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2***.** A continuación exponemos el *Esquema 4.2.1: Fase previa*.



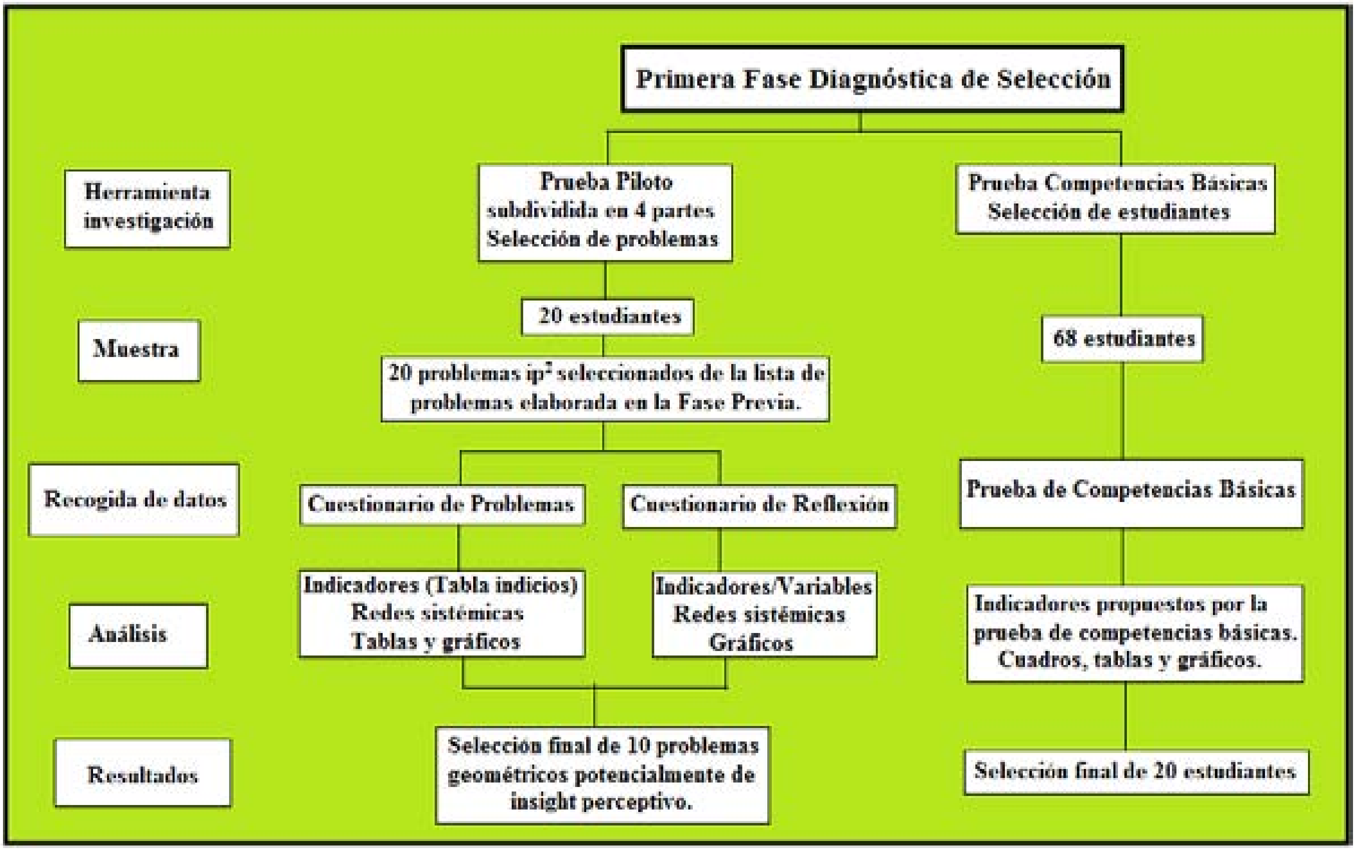
Esquema 4.2.1: Fase Previa

Una vez seleccionados los problemas geométricos ip^2 de la Fase Previa, distinguimos dos fases diagnósticas claramente diferenciadas:

1) Primera Fase Diagnóstica de Selección.

El objetivo consiste en seleccionar por un lado aquellos estudiantes que participarán en nuestra investigación y por otro seleccionar de la Fase Previa aquellos problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo relevantes para nuestro estudio.

Exponemos a continuación el *esquema 4.2.2 Primera Fase Diagnóstica de Selección.*



Esquema 4.2.2: Primera Fase Diagnóstica de Selección

2) Segunda Fase Diagnóstica de Relación.

Formada por tres herramientas de investigación:

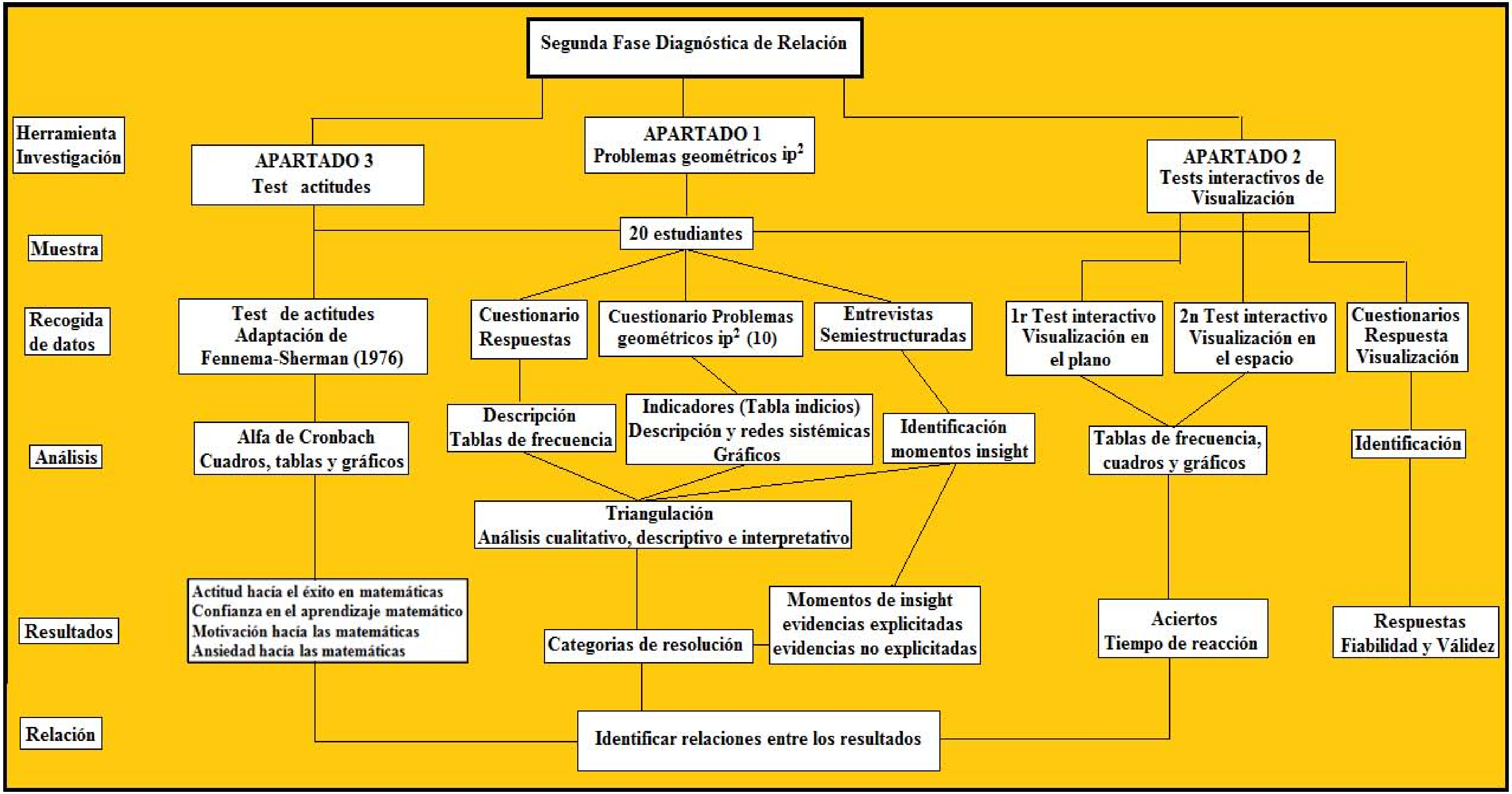
I. Herramienta: está formada por un cuestionario de 10 problemas geométricos ip^2, un cuestionario de respuestas y una entrevista semiestructurada.

II. Herramienta: está constituida por un test interactivo de visualización en el plano, un test interactivo de visualización en el espacio y un cuestionario de respuesta.

III. Herramienta: formada por un test de actitudes en el que se valoran las actitudes de los estudiantes hacía las matemáticas.

Esta Segunda Fase Diagnóstica de Relación se fundamenta en dos objetivos. El primero de ellos radica en obtener los resultados de cada una de las tres herramientas de investigación anteriores y el segundo consiste en identificar las posibles relaciones que pueden establecerse entre los resultados del cuestionario de problemas geométricos ip^2 y los resultados de los tests interactivos y de actitudes.

Exponemos a continuación el esquema 4.2.3 Segunda Fase Diagnóstica de Relación.



Esquema 4.2.3 Segunda Fase Diagnóstica de Relación

En las dos fases diagnósticas, tanto en la Primera de Selección como en la Segunda de Relación, destacamos dos tipos de cuestionarios. Por un lado el cuestionario de problemas cuyo objetivo consiste en estudiar las resoluciones geométricas aportadas por los estudiantes y un segundo tipo de cuestionario que hemos denominado cuestionario de respuesta o de reflexión, según la fase diagnóstica, que recoge las explicaciones y reflexiones de los estudiantes sobre las resoluciones de los problemas geométricos ip^2 realizados.

En el estudio de las resoluciones geométricas, hemos establecido un análisis bilateral. Por un lado hemos realizado un análisis cuantitativo, mediante la descripción de indicadores a validar en las estrategias realizadas por los estudiantes, con las correspondientes tablas multientrada y gráficos de representación. Por otro lado hemos realizado un análisis cualitativo en el que hemos tenido presente las reflexiones hechas por los estudiantes sobre sus estrategias de resolución y las redes sistémicas en las que se explicitan las resoluciones aportadas en cada uno de los problemas planteados así como las respectivas inferencias interpretativas y descriptivas.
En los tests interactivos, hemos basado nuestro análisis en la frecuencia y posterior interpretación en la inferencia de dos variables estudiadas: el tiempo de reacción y el número de aciertos. Finalmente en el test de actitudes, el análisis se centra en primer lugar en la frecuencia de los ítems que forman las cuatro escalas (Mann, 2005). En segundo lugar en la construcción de una escala de medición que determina las componentes actitudinales a partir de las que interpretaremos los resultados obtenidos de los participantes.

Los datos recogidos en cada una de las herramientas de investigación que constituyen las distintas fases diagnósticas del diseño experimental se han transcrito, entre otros métodos relevantes, mediante la codificación, el desarrollo de categorías, la descripción e interpretación de resultados y relaciones así como la aplicación en algunos casos necesarios de algunas pruebas de estadística. Las transcripciones e interpretaciones de los resultados han sido codificados de varias maneras para facilitar un mejor análisis cualitativo sobre las acciones de los estudiantes y así podernos aproximar en la medida de lo posible a su forma de pensamiento, en las resoluciones geométricas que han planteado ante los problemas geométricos ip^2.

4.2.1 MUESTRA Y CONTEXTO

El contexto de esta investigación radica en el estudio de estrategias de resolución, habilidades de visualización e ideas productivas de los estudiantes de 4t de ESO cuando abordan problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2). Este estudio se construye básicamente a partir de la perspectiva de la creatividad y de la resolución de problemas en geometría.

Las muestras de participantes correspondientes a cada una de las dos fases del diseño de la investigación están formadas por distintos grupos de estudiantes todos ellos pertenecientes al instituto IES Parets del Vallés donde realizaba clases de matemáticas, durante la investigación:

- Primera Fase Diagnóstica *de Selección*. Una primera muestra de 20 participantes de 4t de ESO en el curso 2009-2010 y una segunda muestra de estudiantes de 4t de ESO en el curso 2010-2011 que participaron en la Prueba Piloto y la Prueba de Competencias Básicas respectivamente.

- Segunda Fase Diagnóstica de *Relación.* Una muestra de 20 alumnos de 4t de ESO en el curso 2010-2011 escogidos según los criterios y resultados obtenidos en la primera fase diagnóstica de Selección.

El presente trabajo está basado en una investigación de carácter cualitativo, a partir de la identificación, descripción, exploración e interpretación de los resultados obtenidos en las diferentes herramientas metodológicas definidas en los instrumentos de investigación que forman cada una de las dos fases diagnósticas de la investigación. En nuestro estudio se combinan distintas herramientas de investigación, desde los diferentes cuestionarios de problemas geométricos ip^2, cuestionarios respuesta o de reflexión, tests interactivos de visualización mediante un software informático y un test de actitudes hacía las matemáticas, por este motivo, el análisis que realizaremos en nuestra investigación integrará métodos cuantitativos, cualitativos y descriptivos o una combinación de éstos según sea el caso.

El contexto de nuestra investigación se enmarca en un estudio cualitativo. El foco de la investigación tiene un carácter principalmente exploratorio, descriptivo e interpretativo (Taylor y Bogdan, 1984), aunque en menor caso, también se emplearan algunas estrategias cuantitativas para facilitar el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos.

Hemos ilustrado algunas reflexiones sobre los tests interactivos empleados en la segunda fase Diagnóstica de Relación. Los dos tests interactivos de visualización empleados, se ejecutan mediante los programas informáticos que hemos realizado en el lenguaje informático visual C. A partir de éstos se evalúan dos tareas geométricas respectivamente. Una primera tarea geométrica consiste en la discriminación de figuras geométricas planas según la forma independientemente de la orientación en la que se presenten. Una segunda tarea geométrica consiste en la discriminación de cuerpos geométricos tridimensionales representados en el plano según su orientación angular. La ejecución de estas tareas geométricas e interactivas de forma psicométrica requieren, entre otras, de algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) como por ejemplo la identificación visual, la discriminación visual, la rotación mental, el reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y la memoria visual.
No obstante, queremos enfatizar que el software y diseño utilizado en las tareas geométricas propuestas es únicamente experimental con la intención de:

i. Evaluar determinadas funciones cognitivas relacionadas con la ejecución de algunas habilidades de visualización.
ii. Recoger datos empíricos sobre la realización de las tareas geométricas propuestas.

Es decir el programa experimental informático que utilizaremos, no se engloba dentro de la categoría de los programas didácticos en geometría como el Geogebra o el Cabri-geomètre. En este programa pretendemos evaluar de manera psicométrica dos tareas geométricas interactivas muy específicas en las que se requieren algunas habilidades de visualización para su adecuada ejecución.

4.2.1.1 SOBRE EL CONTEXTO: VISUALIZACIÓN Y SOFTWARE.

Existen diversas investigaciones sobre las representaciones dinámicas a partir de recursos informáticos y softwares que han potenciado el desarrollo del estudio e investigación de la visualización en diferentes ámbitos.

Autores como Paláis (1999) argumentan que los softwares destinados a la visualización matemática difieren ostensiblemente de los empleados comúnmente en informática porque utilizan técnicas y algoritmos especiales. Dicho autor hace referencia a diversos procesos algorítmicos conocidos como el "morphing" o los "fotogramas" para poder visualizar el movimiento o la forma dinámica en la representación de desplazamientos, rotaciones y traslaciones complejas de figuras o cuerpos geométricos, así como la representación de curvas o representaciones fractales que de otra forma serían difíciles de ver con exactitud.

Otros autores han estudiado las estrategias y métodos visuales de resolución basándose principalmente en la perspectiva del ámbito o soporte en el que se produce la percepción. Gilbert (2005) de forma natural establece que toda visualización entendida y concebida como representación mental y producto de la percepción, se fundamenta a partir de su soporte de percepción. Explicita que estos soportes de percepción, es decir el medio en el que se produce la visualización, están aumentando considerablemente con la aparición de nuevos softwares que permiten la representación interactiva en dos dimensiones y tres dimensiones en diversos ámbitos científicos como la química, la geología o la física. En algunas vertientes de la matemática, considera que los procesos de enseñanza y aprendizaje pueden ser más significativos y eficaces cuando se producen mediante un soporte que promueva la visualización interactiva y multimedia, por facilitar y potenciar las representaciones mentales internas de los estudiantes.

Una investigación interesante es la planteada por Sinclair (2003) quien a partir de utilizar diversos ejercicios de forma interactiva en su instrumento de investigación, corroboró que a parte de las interrelaciones entre alumno y profesor, se dan interrelaciones igualmente relevantes entre el estudiante, el software y la tarea para el proceso de enseñanza aprendizaje. Dicho autor concibe que la naturaleza y características únicas de un software, pueden facilitar e incluso llegar a determinar que estas interrelaciones entre el estudiante y software puedan ser beneficiosas para la ejecución de la tarea de enseñanza y aprendizaje en cuestión.

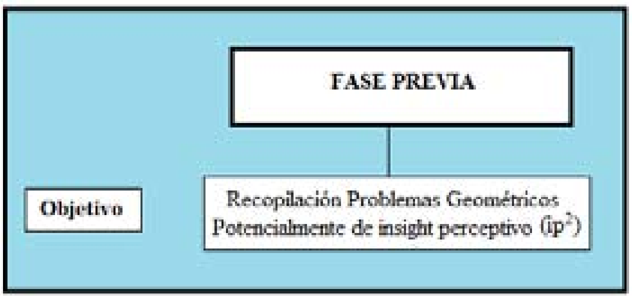
En esta línea hemos de hacer referencia a la noción de génesis instrumental expuesta por Artigue (2002) al considerar el software, no como un artefacto independiente, sino como instrumento que supone la conjunción del software, programa informático o artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para su uso. Distinguimos dos aspectos en esta génesis instrumental, la instrumentalización y la instrumentación, que según Verillon y Rabardel (1995) son definidas respectivamente como el proceso de la interiorización del uso del software o artefacto y el proceso a partir del cual el software o artefacto influye en el aprendizaje del estudiante.

En la investigación de Sinclair (2003) se construyó un instrumento basado en cuestionarios interactivos mediante el software Java, con el que los estudiantes podían mover y desplazar partes de las figuras geométricas que se presentaban en las tareas del estudio empírico. Observó que los estudiantes empleaban los cuestionarios interactivos básicamente como los diagramas de los libros de texto, perdiendo mucha de la información visual que aportaba la representación dinámica. Finalmente, concluyó que los estudiantes no aprovecharon toda la información visual a su alcance, porque fueron reticentes a plantear estrategias de resolución visual, dejando de lado la información proporcionada por los canales visuales en virtud de emplear teoremas o algoritmos ya conocidos anteriormente. Los alumnos no utilizaron toda la información visual disponible porque principalmente no emplearon métodos visuales de resolución.

Observamos que aún con un soporte diferente al comúnmente utilizado de lápiz y papel, en este caso el interactivo, Sinclair (2003) concluye en su investigación unos resultados bastante similares y que convergen en la misma dirección que otras investigaciones como la de Presmeg (1991) o la de González Martin y Camacho (2004). Es decir, independientemente del soporte utilizado en la realización de tareas y problemas geométricos, parece existir un factor implícito bastante frecuente en la educación geométrica de nuestros estudiantes. Este consiste en una cierta reticencia que adquieren y muestran los estudiantes a utilizar métodos visuales en sus estrategias de resolución.

4.3 FASE PREVIA: DISEÑO PROBLEMAS

Previamente a la descripción de las fases diagnósticas que forman parte de la metodología de nuestra investigación, hemos realizado una Fase Previa. En ella empezamos por describir los criterios y categorías que consideramos en la selección de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2) que trabajaremos en nuestro estudio.



Esquema 4.3 Objetivo Fase Previa

Los criterios de selección de los problemas geométricos ip^2 que formaran esta Fase Previa son:

A. Los problemas deben promover el pensamiento productivo, discontinuo y creativo.

B. Han de ser problemas novedosos, originales y creativos que salgan fuera de lo que habitualmente están acostumbrados a resolver en clase los estudiantes del segundo ciclo según el currículo vigente de la educación secundaria.

C. Se requiere, como mínimo en una de sus posibles resoluciones, de una reestructuración (Wertheimer, 1959) que puede estar basada en una nueva organización estructural de los elementos, figuras o cuerpos geométricos o en una nueva organización de las relaciones geométricas que se establecen o en una nueva reorganización visual que las integre a ambas de forma repentina o en una combinación de ellas.

D. Se requiere de procesos, métodos o estrategias de visualización para su resolución, como mínimo en una de sus posibles resoluciones.

E. Se requiere, como mínimo en una de sus posibles resoluciones de alguna de estas habilidades de visualización: identificación visual, discriminación visual, reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y memoria visual.

F. Cuando los participantes aborden la resolución del problema, en una primera aproximación debe generar una cierta dificultad y obstáculo al estudiante de secundaria respecto a como plantear su posible resolución a partir de los procedimientos y conocimientos aprendidos anteriormente (Hadamard, 1947; Wertheimer, 1959; Sequera, 2007).

G. Hemos considerado la categorización de Davidson y Sternberg (1986) y una adaptación de la taxonomía de Weisberg (1996) en cada uno de los problemas.

A partir de los criterios de selección enunciados, en el diseño de los problemas que formaran parte de nuestro estudio empírico hemos llevado a cabo en esta fase previa, una recopilación de 50 problemas geométricos ip^2 consultando diversos autores (Scheerer, 1963; Wertheimer, 1959; Perelmán, 1975; Gardner, 1987, 1989; Weisberg y Alba, 1981; Segarra, 1987; Metcalfe, 1986; Holt, 1988; Meirovitz y Jacobs, 1989; Orton, 1997; Plasencia, 2000; Hans y otros, 2004; Moscovich, 2007; Poniachik, 2007; Grabarchuk, 2009). Esta recopilación de problemas geométricos se encuentra en el Anexo B.1 LISTA RECOPILACIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2.

En general los problemas seleccionados se caracterizan por requerir como mínimo en una de sus posibles resoluciones geométricas, por un lado de una cierta componente original, innovadora y creativa y por otro de una componente perceptiva, espacial y visual. Son problemas geométricos que destacan por sus resoluciones innovadoras y originales, que se sustentan en una cierta reestructuración (Hadamard, 1947; Wertheimer, 1959) de elementos o relaciones geométricas, así como de significativas estrategias de visualización basadas en algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) o imágenes (Presmeg, 1985).

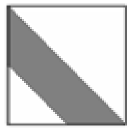
4.3.1 CATEGORÍAS DE PROBLEMAS

En esta Fase Previa del diseño metodológico de nuestra investigación, hemos establecido tres categorías de problemas geométricos ip^2 estructuralmente diferenciadas:

1) ***PROBLEMAS DE REESTRUCTURACIÓN DE ÁREAS Y PUZZLES***.

En esta categoría hemos considerado aquellos problemas que como mínimo en una de sus posibles resoluciones requieren de una reestructuración de superficie o volumen respecto las partes, elementos, figuras o cuerpos geométricos que intervienen en el problema (fragmentación en partes menores, creación de nuevas figuras o cuerpos geométricos, etc). A continuación ilustramos esta categoría con un problema adaptado de la versión original de Plasencia (2000):

Calcular el área de la zona sombreada del cuadrado siguiente, si sabemos que el cuadrado tiene una superficie de 16m².



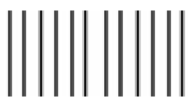
Este es un problema de insight híbrido (Weisberg, 1996) porque acepta distintas formas de resolución. Entre todas ellas destacamos en nuestra investigación dos, en las que las estrategias de visualización son especialmente determinantes respecto a poder promover la ocurrencia del insight potencialmente perceptivo mediante la reestructuración basada en la fragmentación de las superficies integrantes del cuadrado.

Este es un problema donde la ocurrencia del insight puede venir posibilitada a partir de una combinación de algunas habilidades de visualización que nos permitan: a) identificar visualmente las diferentes figuras geométricas integrantes en el cuadrado; b) discriminar visualmente las distintas figuras geométricas identificadas de menor superficie que la original; c) reconocer las relaciones y posiciones geométricas que se establecen entre la figura unidad y el resto del cuadrado; d) recordar las características visuales y de posición (memoria visual) cuando se generan imágenes dinámicas (Presmeg, 1986) y se comparan con otras figuras del cuadrado original. En cualquier caso, la utilización de alguna de estas habilidades de visualización o imágenes no es excluyente en una misma resolución. El objetivo que nos interesa en la resolución es promover la ocurrencia del insight mediante la reestructuración adecuada que puede producirse cuando el estudiante es capaz de fragmentar adecuadamente las posibles figuras geométricas del problema independientemente del contexto general hasta identificar la superficie unidad, mediante la que puede medir la zona sombreada respecto a la superficie total (3/8).

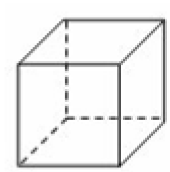
2) *PROBLEMAS DE REESTRUCTURACIÓN DE LÍNEAS Y PUNTOS*.

Esta categoría está formada por aquellos problemas en los que como mínimo en una de sus posibles resoluciones requieren de una reestructuración basada principalmente en determinados elementos, que intervienen en el problema, concretamente puntos y líneas. Es especialmente importante comprender las propiedades intrínsecas de los elementos, figuras y cuerpos geométricos que aparecen en los problemas así como entender de qué manera se relacionan entre ellos, para poder plantear una resolución satisfactoria. En este tipo de problemas la ocurrencia del insight viene precedida necesariamente por alguna forma de reestructuración basada en dos tipos de elementos geométricos: puntos y líneas (en realidad puntos y segmentos). Vamos a ilustrar esta categoría con un problema adaptado de la versión original de Orton (1997):

Unir 12 cerillas de modo que formen seis cuadrados tangentes (cada cuadrado comparte todos sus lados con otros cuadrados) cuyos lados sean iguales a la longitud de una cerilla.



Este es un problema de insight puro (Weisberg, 1996) con una única reestructuración que posibilita la resolución correcta. Generalmente una mayoría de estudiantes en una primera aproximación a la resolución del problema, se atascan y bloquean al no poder reorganizar adecuadamente las doce cerillas. Este problema requiere entre otras habilidades de visualización de una cierta identificación y discriminación visual, en la construcción de las posibles teselaciones que verifiquen el enunciado. Análogamente se requiere del reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas de las figuras formadas en el plano así como de los posibles cuerpos geométricos que se podrían generar en el espacio. La ocurrencia del insight en la resolución viene posibilitada por pensar el problema mediante un cambio dimensional en el que podamos ver o imaginar el cuerpo geométrico que cumple las propiedades del enunciado. Probablemente los estudiantes tienden a pensar la resolución en el plano siguiendo los procedimientos aprendidos en problemas más o menos parecidos en la escuela.



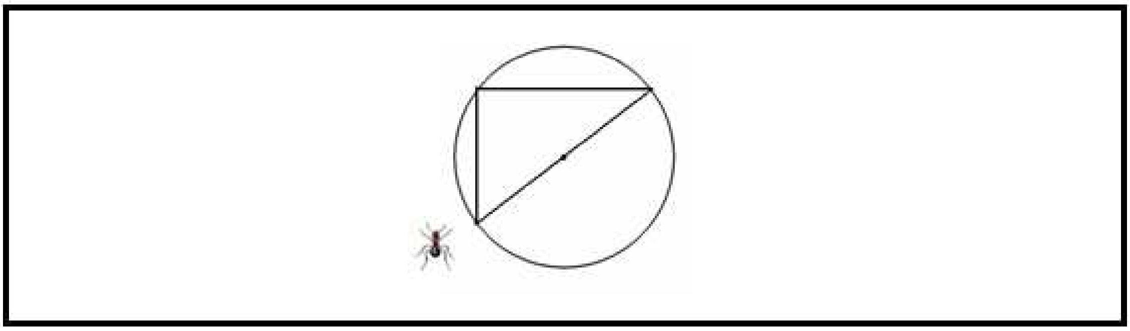
3) *PROBLEMAS DE REPRESENTACIÓN CONCEPTUAL.*

En esta categoría se clasifican aquellos problemas en los que como mínimo en una de sus posibles resoluciones, se requiere de una reestructuración mediante asociar o descubrir una relación geométrica no evidente entre la información dada en el problema (propiedades geométricas entre figuras, congruencia, ángulos, paralelismo, etc) y el conocimiento geométrico ya aprendido por la experiencia. En este tipo de problemas la ocurrencia del insight viene posibilitada por el descubrimiento de una nueva relación geométrica. Vamos a ilustrar esta categoría con un problema adaptado de la versión original de Perelman (1975):

El borde de un embalse es una circunferencia perfecta. Una mosca empieza en un punto del borde y vuela en dirección norte 6 metros, lo que le devuelve al borde. Vuela entonces en dirección este, llegando al borde después de recorrer 8 metros. ¿Cuál es el diámetro del embalse?

En esta categoría de problemas, el concepto de insight geométrico que pretendemos estudiar se asemeja en cierta medida al propuesto por Davidson y Sternberg (1986) en su taxonomía de problemas citada anteriormente en el apartado *2.4.3 TAXONOMIAS DEL INSIGHT*, donde se enfatiza en el estudio del insight por comparación selectiva.

Este es un problema cuya resolución requiere, entre otras habilidades de visualización, de una identificación y discriminación visual que nos permita seleccionar adecuadamente la información realmente importante: visualizar la circunferencia y el trazado del vuelo de la mosca en línea recta. La ocurrencia del insight puede venir precedida, cuando el estudiante es capaz de reconocer las relaciones y posiciones geométricas del trazado de la mosca en el contexto del problema. Más concretamente cuando es capaz de descubrir la relación entre el vuelo de la mosca y la figura geométrica que representa. Es decir cuando imagina o visualiza un triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia correspondiente.



Investigadores del ámbito de la enseñanza (Prieto y otros, 2003) y divulgadores sobre los procesos de creatividad (Root-Bernstein, 2002) coinciden en señalar algunos aspectos, factores, habilidades o capacidades que intervienen en una educación creativa: imaginación, originalidad, flexibilidad, capacidad de adaptación, abstracción, reconocimiento de pautas, formación de pautas, analogía, etc. Desde una perspectiva matemática y científica algunos autores (Davis y Hersh, 1989; Lakatos, 1994; Courant y Robbins, 1996; Alberti, 2010) identifican diversos factores que intervienen en la investigación de las resoluciones creativas: imaginación, observación, conjetura, experimentación, intuición, analogía, generalización, razón, verificación, estrategia y suerte.

Consideramos que los factores anteriores pueden influir en la resolución de los problemas geométricos ip^2 que forman las tres categorías explicitadas anteriormente, poniendo un especial énfasis en algunos de ellos como la atención, la observación, las habilidades de visualización, la imaginación, la originalidad, la flexibilidad, la intuición, la analogía, la paciencia y la constancia, etc.

BLOQUE III: FASES DIAGNÓSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN. ANÁLISIS Y RESULTADOS.

CAPITULO 5

5. PRIMERA FASE DIAGNÓSTICA DE SELECCIÓN

> *El momento de la verdad, la emergencia repentina de una nueva comprensión, es un acto de intuición. Tales intuiciones dan la apariencia de destellos milagrosos o de cortocircuitos del razonamiento. De hecho, se los puede comparar con una cadena montañosa sumergida, de la cual sólo los extremos son visibles por encima de la superficie de la conciencia. El buzo se sumerge en un extremo de la cadena y emerge del otro lado, guiado por eslabones invisibles.*
>
> (Koestler, 1975, p. 117)

En este capítulo, después de la Fase Previa donde se seleccionaron 50 problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, abordamos el diseño metodológico de la primera fase Diagnóstica de Selección, así como los resultados obtenidos en ella. Esta Primera Fase Diagnostica de Selección consta de dos partes: en primer lugar se expone el diseño metodológico de la Prueba Piloto que nos va a permitir seleccionar los diez problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo que se utilizarán en la siguiente fase de la investigación que llamamos Fase Diagnóstica de Relación. Y en segundo lugar se incide en el diseño metodológico de la Prueba de Competencias Básicas en matemáticas realizada a 68 alumnos de 4t de ESO para seleccionar los veinte estudiantes que participarán en la siguiente Fase Diagnóstica de Relación.

5. PRIMERA FASE DIAGNÓSTICA DE SELECCIÓN

El objetivo principal de esta Primera Fase Diagnóstica de Selección, consiste en seleccionar los problemas y los participantes que intervendrán en la Segunda Fase Diagnóstica de Relación. A partir de los problemas seleccionados en la Fase Previa realizaremos una Prueba Piloto con el objetivo de escoger aquellos problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo (ip^2) que serán relevantes para nuestro estudio y por otro lado elegiremos los estudiantes de 4t de ESO que mediante una prueba de evaluación demuestren haber adquirido las competencias básicas en matemáticas según el currículo (2007) vigente establecido en Cataluña por la ley orgánica escolar (LOE).

El instrumento de investigación de esta Primera Fase Diagnóstica de Selección está constituido por lo tanto, por dos partes esenciales de la investigación: una Prueba Piloto y una Prueba de Competencias Básicas. Podemos ver el diseño de estas dos partes en el *Esquema 4.2.2 Primera Fase Diagnóstica de Selección*.

5.1 PRUEBA PILOTO: SELECCIÓN DE PROBLEMAS

En el diseño de la Prueba Piloto hemos procurado garantizar el tiempo suficiente para que los participantes puedan resolver los problemas geométricos ip^2 y reflexionar sobre sus estrategias geométricas planteadas. Teniendo en cuenta los criterios para configurar horarios y aulas de los participantes hemos considerado necesario dividir la prueba piloto en cuatro partes: Prueba piloto parte A, parte B, parte C y Parte D, siguiendo el mismo diseño estructural en cada una de ellas. Cada una de las cuatro partes de la Prueba Piloto, está formada por 5 problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo diferentes. Los criterios que se han tenido en cuenta en la selección de los veinte problemas que finalmente formaran la Prueba Piloto son:

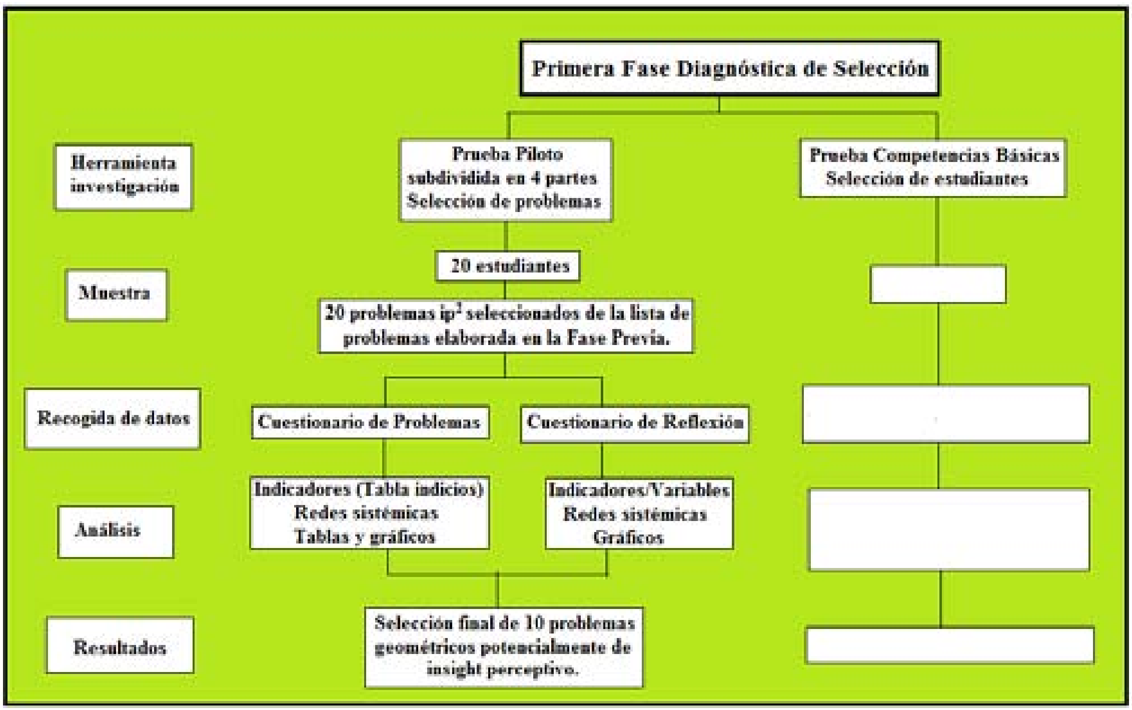
- Los problemas se escogen de entre la recopilación de 50 problemas geométricos ip^2 realizada a priori y citada en el apartado *4.3 FASE PREVIA: DISEÑO PROBLEMAS.*

- Hemos considerado la taxonomía de problemas construida en el apartado *4.3.1 CATEGORÍAS DE PROBLEMAS.*

- Estudio detallado de posibles estrategias de resolución y dificultades en cada uno de los problemas.

- Consultas a otros investigadores y profesores de secundaria sobre las dificultades así como los métodos, estrategias y habilidades de visualización que pueden facilitar la resolución de los problemas y promover la ocurrencia del insight en los estudiantes de 4t de ESO del IES Parets del Vallés.

Los problemas se comparan y revisan, profundizando, reflexionando y contrastando entre los distintos problemas los posibles identificativos comunes así como con otros problemas de la literatura, explorando, estudiando ideas y posibles resoluciones.
Ilustramos el diseño metodológico de la Prueba Piloto:



Esquema 5.1: Prueba Piloto

5.1.1 MUESTRA

Para realizar la Prueba Piloto formada por los 20 problemas seleccionados según los criterios del apartado anterior y que consiste en escoger finalmente 10, hemos seleccionado un grupo de estudiantes de 4t de ESO del instituto IES Parets del Vallés siguiendo los siguientes criterios de selección:

1. Un buen rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de matemáticas en el curso escolar 2009-2010.

2. Un buen rendimiento en las competencias básicas según el currículo vigente (LOE) en matemáticas y concretamente en geometría en el curso anterior.

3. Reflexiones y aportaciones de los profesores de matemáticas de 4t de ESO en el instituto Parets del Vallés, sobre los estudiantes potencialmente más creativos en matemáticas y geometría, así como de otros profesores de matemáticas que habían dado clase a los estudiantes en cursos anteriores.

Se realizó una entrevista de forma individual con cada uno de los tres profesores del Departamento de Matemáticas del IES que en algún otro curso de la Educación Secundaria impartieron clase a los estudiantes de 4t de ESO. Estas entrevistas consistieron en un traspaso de información sobre el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los alumnos en los distintos cursos de la ESO, destacando aquellos casos que sobresalían por un adecuado rendimiento académico y aquellos que manifestaban un especial interés en el ámbito matemático o geométrico por sus intervenciones en clase o el trabajo particularmente original y creativo que realizaban.

La distribución del temario de matemáticas en la Educación Secundaria, según el currículo vigente, se ha articulado siguiendo cuestiones de organización departamental, calendario escolar, plantilla y horas lectivas semanales para la ejecución del programa de matemáticas correspondiente. Según las entrevistas realizadas a los profesores del departamento de Matemáticas del IES, llama la atención la distribución en la aplicación del bloque de geometría: Espacio, Forma y Medida durante los cuatro años de educación secundaria. Concretamente el temario que hace referencia al bloque de Geometría correspondiente al currículo de 3r de ESO se subdivide en dos partes que se imparten en los cursos de 2n y 4t de ESO en virtud de realizar un bloque más extenso de análisis y algebra. Es decir, los estudiantes de 3r de ESO no realizan ninguna unidad didáctica basada en geometría, con el objetivo de ampliar y consolidar los conocimientos y competencias en el bloque de análisis y algebra.

Después de analizar y valorar los criterios establecidos, seleccionamos 4 estudiantes de 4rA, 9 estudiantes de 4rB y 7 estudiantes de 4rC. Finalmente un total de 20 estudiantes forman la muestra.

Existen algunos factores relativos a la muestra de estudiantes, que han sido particularmente relevantes en el diseño metodológico de la Prueba Piloto. Por ejemplo, la incompatibilidad del horario escolar de los distintos participantes, ya que pertenecían a distintos grupos de clase.

5.1.2 DISEÑO

En el diseño experimental de la Prueba Piloto, hemos tenido presente los siguientes criterios:

- Factores relativos a la muestra de 20 participantes seleccionados, según explicitamos en el apartado *5.1.1 Muestra*, como la compatibilidad horaria o la disponibilidad del profesorado de los estudiantes.

- La selección de 20 problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo para estudiar y analizar en la Prueba Piloto de los que se seleccionaran posteriormente 10.

- Garantizar el tiempo necesario a los participantes para reflexionar y plantear sus posibles estrategias mediante ensayo y error, teniendo en cuenta las dificultades que a priori pueda suponer el enunciado y la comprensión del problema. Hemos considerado un tiempo mínimo de 10 minutos para la realización de cada problema.

Después de valorar los criterios anteriormente expuestos, consideramos adecuado establecer siguiendo un mismo diseño, hemos establecido siguiendo un mismo diseño, una Prueba Piloto formada por 4 partes (A,B,C,D). Cada una de estas 4 partes de la Prueba Piloto, está constituida por 5 problemas del total de 50. Para organizar los problemas se ha tenido en cuenta que en cada uno de los grupos de 5 problemas figure al menos un problema de cada una de las tres categorías de problemas geométricos ip^2:

1) reestructuración de áreas y puzles.
2) reestructuración de líneas y puntos.
3) reestructuración conceptual.

Categorías que definimos en el apartado *4.2.3 CATEGORÍAS* con el objetivo de asegurar cierta homogeneidad en cada una de las propuestas de problemas geométricos ip^2 a resolver.
En el diseño de la Prueba Piloto, garantizamos por un lado la realización de los 20 problemas seleccionados y por otro el tiempo mínimo aproximado (10 minutos por problema) que consideramos necesario para que los participantes puedan plantear sus estrategias de resolución geométrica por insight, dentro del contexto horario de la realización de la prueba. De esta manera facilitamos también una aproximación más cualitativa sobre el estudio, análisis e investigación sobre las estrategias de resolución que planteen los estudiantes.

Valorando la inviabilidad de realizar las cuatro partes de la Prueba Piloto durante un mismo día por cuestiones de compatibilidad horaria y asistencia de los participantes, hemos planificado una cronología de distintos días para realizar la prueba piloto completa. Como las cuatro partes de la Prueba Piloto siguen un mismo diseño estructural y para evitar redundancias, explicitaremos las directrices de la Prueba Piloto genérica. El diseño genérico está constituido por tres etapas diferenciadas:

1ª Etapa: Presentación. Duración aproximada 5 minutos
En la que se realizó una presentación inicial al grupo de participantes de la Prueba Piloto. En ella se explicó las dos etapas siguientes de la prueba: el cuestionario de problemas y el cuestionario de reflexión sobre los problemas geométricos, así como el tiempo del que disponían para su realización. Se puso un especial énfasis en destacar que lo realmente importante era que intentasen plantear sus estrategias de resolución es decir sus ideas y planteamientos a los problemas que se les proponían, mediante representaciones o argumentaciones.

2ª Etapa: Cuestionario de problemas. Duración aproximada 50 minutos.
Se entregó un cuestionario de 5 problemas, a los estudiantes en el que antes de empezar, debían previamente rellenar el cuadro de la cabecera con los datos identificativos de la

prueba y leer las instrucciones respectivas. El objetivo de este cuestionario consiste en recoger las resoluciones y estrategias que plantearon los estudiantes, ante el abordaje de los problemas geométricos ip^2.

3ª Etapa: Cuestionario reflexión. Duración aproximada 20 minutos.
Se entregó un cuestionario de preguntas abiertas con el objetivo de que los participantes pudieran reflexionar por escrito sobre sus resoluciones, ideas, dificultades y bloqueos, al abordar la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo del cuestionario anterior.

La realización de la prueba piloto, se contextualizó en una sesión de una hora y media.

5.1.2.1 CUESTIONARIO DE PROBLEMAS

En el anexo *B.2.1 CUESTIONARIOS DE PROBLEMAS* se pueden consultar los cuestionarios que forman cada una de las partes de la Prueba Piloto. Los problemas geométricos que intervienen, se han clasificado (anexo *B.2.2 CATEGORIZACIÓN DE PROBLEMAS)* según la categoría a la que pertenecen: 1) reestructuración de aéreas y puzles, 2) reestructuración de líneas y puntos y 3) reestructuración conceptual.

La ejecución de las etapas de la Prueba Piloto, se realizaron en el aula 22 del IES, los miércoles dentro del contexto horario de 10,15h a 11,45h de la mañana. Se estableció un margen de 50 minutos para que los alumnos pudiesen resolver los cinco problemas que forman el cuestionario de problemas. Los estudiantes se ubicaban en clase según el criterio del investigador, manteniendo una cierta distancia de separación para poder trabajar correctamente de forma individual. El investigador presente en la ejecución del cuestionario, se limitó a controlar el desarrollo de la prueba, sin facilitar ningún tipo de información conceptual de los enunciados de los problemas, ni información procedimental en cuanto a las posibles dudas que pudieron manifestar los estudiantes.

Partiendo de uno de los criterios de selección establecido en el apartado *4.3 FASE PREVIA: DISEÑO PROBLEMAS* basado en el supuesto de que en una primera aproximación al abordaje (Hadamard, 1947; Wertheimer, 1959) de la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, posiblemente se generará una cierta dificultad. Es en este período de dificultad donde se pueden poner en marcha las estrategias heurísticas con el objetivo de aplicar alguna reestructuración de los elementos que nos permita, una aproximación a la solución del problema con ciertas garantías de éxito.

5.1.2.2 CUESTIONARIO REFLEXIÓN DE LOS PROBLEMAS

Una vez resueltos los problemas en esta segunda etapa de la Prueba Piloto, se realizó un cuestionario (Anexo *B.2.3 CUESTIONARIO REFLEXIÓN DE PROBLEMAS)* en el que de forma individual los participantes de cada una de las partes de la Prueba Piloto, respondían una serie de preguntas abiertas y otras cerradas con el objetivo de que pudiesen reflexionar sobre sus propias resoluciones. Nos interesa indagar sobre qué dificultades, bloqueos y obstáculos se han encontrado los estudiantes a la hora de resolver los problemas geométricos ip^2, así como identificar, explorar, analizar y comprender que estrategias, métodos, representaciones y diagramas visuales podrían posibilitar la ocurrencia del insight.

Somos conscientes de que, en parte, la calidad de la información recogida depende del tipo de cuestiones planteadas y de su contextualización según los objetivos a evaluar. Conviene que hagamos una distinción entre aquellas preguntas que sólo pretenden evaluar aquello que el estudiante recuerda (reproductivas) y aquellas que tienen como finalidad comprobar si se han adquirido nuevos conocimientos en el análisis e interpretación de hechos o fenómenos diferentes de los estudiados inicialmente (productivas). En nuestro caso nos interesan este tipo de preguntas productivas, porque podrían influenciar en que los participantes lograsen plantear una resolución diferente a las que plantearon en el cuestionario de problemas, basada en una nueva reestructuración que posibilitase la ocurrencia del insight.

5.1.3 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS PRUEBA PILOTO

Como hemos afirmado ya antes, nuestra investigación es próxima a planteamientos cualitativos. El análisis de datos y resultados será realizado en diferentes momentos según las herramientas de investigación que forman cada una de las dos fases diagnósticas. Los momentos de análisis y recogida de datos suelen aparecer interconectados, en un proceso dinámico (Taylor y Bodgan, 1984). Concretamente la estrategia de análisis de la Prueba Piloto será la combinación (Bericat, 1998) que consiste en integrar una metodología que combina un análisis cuantitativo y cualitativo, independientemente de la aplicación de uno u otro en distintos momentos, con el objetivo de reforzar y facilitar la interpretación de los resultados obtenidos.

A partir de los resultados obtenidos en esta Prueba Piloto se han elaborado los criterios y problemas que formaron el cuestionario definitivo de estudio correspondiente a la Segunda Fase Diagnostica *de Relación* de esta investigación. Durante el análisis hemos procurado obtener una comprensión más significativa de lo que se está estudiando y refinar de forma continuada nuestras interpretaciones.
El tratamiento de la estrategia de análisis empleada se ha llevado a cabo siguiendo el orden:

- Estrategia Análisis del Cuestionario de Problemas
- Estrategia Cuestionario de Reflexión de los Problemas

5.1.3.1 ESTRATEGIA ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO PROBLEMAS

El análisis del Cuestionario de Problemas, se ha realizado a partir de un doble análisis, cuantitativo y cualitativo, que se realiza (Bericat, 1998) en distintos momentos a partir de las estrategias de resolución obtenidas con la intención de proporcionar una interpretación más significativa. En el análisis cuantitativo hemos definido una serie de indicadores e indicios relacionados con el comportamiento resolutor, visualizador y creativo-insight para facilitar la identificación de algunos elementos importantes en las estrategias utilizadas por los estudiantes. Realizamos una corrección exhaustiva de cada uno de los problemas, que nos permitió comenzar a identificar unos indicadores iniciales que posteriormente fueron revisados y modificados. En cuanto al análisis cualitativo, empleamos redes sistémicas para facilitar la descripción, exploración e interpretación de los resultados.

5.1.3.1.1 ANÁLISIS CUANTITATIVO

El instrumento para el análisis cuantitativo consta básicamente de cuatro elementos relacionados explícitamente: comportamiento, categorías de indicadores, descriptores e indicios que se presentan en la Tabla 5.1.3.1.1 De Indicios (Anexo *B.2.4 TABLA INDICIOS).* A continuación exponemos los elementos que forman parte de esta tabla.

Comportamientos de estudio

Hemos considerado 3 comportamientos de estudio. Un primer *Comportamiento Resolutor*, con objeto de identificar el grado de éxito de los estudiantes en las resoluciones planteadas. Un segundo *Comportamiento Visualizador*, que identifica la utilización de algunas estrategias de visualización en la resolución de problemas. Y por último un tercer Comportamiento *Creativo-Insight* con el objetivo de identificar ideas, estrategias o resoluciones innovadoras, originales y creativas en el abordaje de los problemas.

Categoría Indicadores

Es la categoría de indicadores que se define mediante una cualidad, palabra o frase que nos permite reconocer el potencial resolutor, visualizador y creativo de los estudiantes ante la resolución de los problemas geométricos de nuestro estudio. Hemos considerado cinco categorías de Indicadores:

Respecto el Comportamiento Resolutor, definimos dos categorías de indicadores:

- Intenta Resolver Problema (IRP): Identifica si el estudiante ha intentado plantear alguna estrategia, a partir de algún planteamiento o propuesta de resolución.
- Resuelve Correctamente Problema (RCP): Reconoce si el estudiante ha resuelto el problema.

  A parte de las categorías de indicadores explicitados, como dígito de control interno no expuesto en la tabla, hemos considerado paralelamente la variable Éxito (EX) que establece la relación entre la frecuencia de respuestas correctas (RCP) sobre el número de intentos (IRP) en un problema concreto. Es la variable que representa el porcentaje de respuestas que han representado una solución correcta a un problema.

Respecto el Comportamiento Visualizador definimos dos categorías de indicadores:

- Método visual (MV): Identifica si el estudiante ha empleado algún método que sólo implique estrategias visuales o imágenes de forma explícita o implícita.

Comportamiento	CATEGORIA INDICADORES	DESCRIPTORES	INDICIOS	ITEM
Comportamiento RESOLUTOR	**IRP Intenta Resolver Problema**	**IRPG: Gráficamente**	Identifica alguna estrategia mediante una representación visual y gráfica. (*Intenta Resolver Problema Gráficamente*)	**IRPG**
		IRPE: Escrito	Identifica alguna estrategia mediante una explicación escrita. (*Intenta Resolver Problema por Escrito*)	**IRPE**
	RCP Resuelve Problema	**RCP Resuelve Problema**	Identifica una resolución que soluciona el problema. (*Resuelve Correctamente Problema*)	**RCP**
Comportamiento VISUALIZADOR	**MV Método Visual**	**MVHV Habilidad Visual**	Identifica una figura aislándola de su contexto. (*Identificación Visual*)	**MVHV1**
			Inferimos una comparación entre figuras o cuerpos geométricos. (*Discriminación Visual*)	**MVHV2**
			Identifica las relaciones de posición de una figura o cuerpo respecto de un punto, figura o cuerpo geométrico de referencia. (*Reconocimiento Posiciones Geométricas*)	**MVHV3**
			Inferimos que se identifican las relaciones geométricas entre diversas figuras y/o cuerpos geométricos. (*Reconocimiento Relaciones Geométricas*)	**MVHV4**
			Inferimos que se recuerdan las características visuales (forma y posición) de una figura o cuerpo. (*Memoria visual*)	**MVHV5**
		MVII Imagen Inferida	Identifica representaciones de figuras o cuerpos geométricos con detalle (*Concretas*)	**MVII1**
			Identifica la representación de relaciones en un esquema visual o espacial. (*Patrón*)	**MVII2**
			Identifica algún tipo de expresión corporal o gesticulación con las manos. (*Cinestésicas*)	**MVII3**
			Inferimos que se desplazan, giran y/o manipulan mentalmente imágenes concretas. (*Dinámicas*)	**MVII4**
	CM Combinación de Métodos	**CMVA Visual, Analítico…**	Se combinan métodos visuales y analíticos. (*Combinación de métodos*)	**CMVA**
Comportamiento CREATIVO INSIGHT	**IO Proceso Creativo de Reestructuración Insight**	**IOO: Originalidad**	Descubrir reestructuraciones o relaciones no triviales entre conceptos o representaciones. (*Descubrir relaciones*)	**IOO1**
			Se inventan las estrategias o resoluciones. (*Inventar estrategias*)	**IOO2**
			Sólo se explicita la solución final sin explicar cómo ha resuelto el problema. (*No explicitar*)	**IOO3**
		IOF: Flexibilidad	Identifica diferentes resoluciones de naturaleza distinta o diferentes formas de representar y organizar los elementos. (Representar datos)	**IOF1**
			Tantear, retroceder y avanzar a partir de diversos intentos mediante uno o varios enfoques. (Tantear)	**IOF2**
		IOE: Elaboración	Identificar modelos y sistemas representativos gráficos o escritos en la resolución que faciliten la comprensión. (*Construir modelos*)	**IOE1**
			Aplicar y organizar adecuadamente conceptos y métodos de la matemática escolar. (*Escolar*)	**IOE2**

TABLA 5.1.3.1.1 DE INDICIOS

- Combinación de Métodos (CM): Reconoce cuando el estudiante ha empleado algún método de resolución donde se integran o combinan estrategias visuales y analíticas de forma explícita o implícita en alguna fase de la resolución del problema.

Respecto el Comportamiento Creativo Insight definimos una categoría de indicadores:

- Proceso Creativo de Reestructuración. Insight Observado. (IO): Se infiere si el estudiante ha explicitado alguno de los factores que definen un proceso creativo (Guilford, 1962; Sriraman, 2009), en su estrategia de resolución. Hemos priorizado los factores que pueden posibilitar el insight convergente. Finke (1990) explicita, que el insight divergente consiste básicamente en encontrar significado en la estructura planteada en un situación concreta, a diferencia del insight convergente que consiste más en estructurar, reorganizar y reestructurar los elementos de un problema.

Descriptores

Los descriptores son las palabras que empleamos para especificar las categorías de indicadores que utilizamos en el estudio de las estrategias de resolución geométrica. Los descriptores constituyen las distintas posibilidades de aplicar y comprender una categoría de indicadores, según nuestra investigación. Es decir cada una de las aplicaciones en las que se divide una categoría de indicadores, se explicita mediante un descriptor. Hemos considerado 9 descriptores:

Respecto la categoría *Intenta Resolver Problema* (IRP), hemos definido dos descriptores:

- Intenta Resolver Problema Gráficamente (IRPG): Se identifica alguna estrategia de resolución mediante alguna representación visual: diagrama, imagen, esquema, etc.
- Intenta Resolver Problema Escrito (IRPE): Se identifica alguna noción escrita sobre como plantear alguna estrategia de resolución.

Respecto la categoría *Resuelve Correctamente Problema* (RCP), definimos un descriptor:

- Resuelve Correctamente Problema (RCP): El descriptor en este caso identifica que la resolución planteada soluciona el problema geométrico ip^2.

Respecto la categoría *Método Visual (MV)*, definimos dos descriptores:

- Habilidad Visual (MVHV): Identifica si el estudiante ha empleado alguna estrategia visual de forma explícita o implícita en la resolución del problema, que esté sustentada en alguna de las cinco habilidades de visualización: identificación visual, discriminación visual, reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y memoria visual (Del Grande, 1990).
- Imagen Inferida (MVII): Identifica si el estudiante ha empleado algún tipo de imagen. Hemos empleado una adaptación de la categorización de Presmeg (1985) según el tipo de imágenes identificadas: imágenes concretas, patrón, cinestésicas o dinámicas.

Respecto la categoría *Combinación de métodos (CM)*, definimos un descriptor:

- Combinación de métodos visual y analítico (CMVA): Identifica si el estudiante ha empleado una combinación de estrategias visuales y analíticas de forma explícita o implícita en alguna fase de la resolución del problema. Este descriptor hace referencia a la frecuencia con la que las estrategias visuales se apoyan y complementan con estrategias analíticas pudiendo coexistir en una misma resolución. En algunas ocasiones las estrategias analíticas y visuales interaccionan de forma natural en las resoluciones de problemas.

Respecto a la categoría *Insight Observado (IO)*, definimos tres descriptores:

- Originalidad (IOO): En nuestra investigación asumimos que ser original implica que el estudiante de forma explícita plantea una estrategia innovadora que raramente se presenta en su contexto escolar. Identificaremos este descriptor mediante la novedad de algún planteamiento o estrategia especialmente innovadora, mediante la reestructuración de los elementos, figuras o cuerpos geométricos que intervienen en el problema, así como el descubrimiento de nuevas conexiones y/o relaciones geométricas.

- Flexibilidad (IOF): Identificamos la flexibilidad matemática en nuestra investigación como aquella que reconoce distintas formas de resolución de naturaleza diferente, ante el abordaje de un problema. A diferencia de la fluidez que generalmente solo cuantifica la cantidad de posibles resoluciones o estrategias que se generan ante la resolución de un problema independientemente la naturaleza de éstas.
- Elaboración (IOE): Identificamos la elaboración como el conjunto de procedimientos y estrategias a partir de los que se estructura adecuadamente la construcción y el desarrollo de una resolución mediante los elementos necesarios.

Indicios

Los indicios son las frases que hemos seleccionado para describir de la manera más operativa posible las caracterizaciones de cada uno de los descriptores. Un descriptor puede identificarse por uno o varios indicios. A modo de ilustración, nos ha parecido interesante exponer en cada uno de los indicios, la resolución de algún participante de la prueba piloto, en el que se identifique dicho indicio. Hemos considerado veinte indicios:

Respecto al descriptor *Intenta Responder Problema Gráficamente (IRPG)*, definimos un indicio con la misma nomenclatura:

- Intenta Responder Problema Gráficamente (IRPG): Identifica alguna estrategia mediante una representación visual y gráfica.

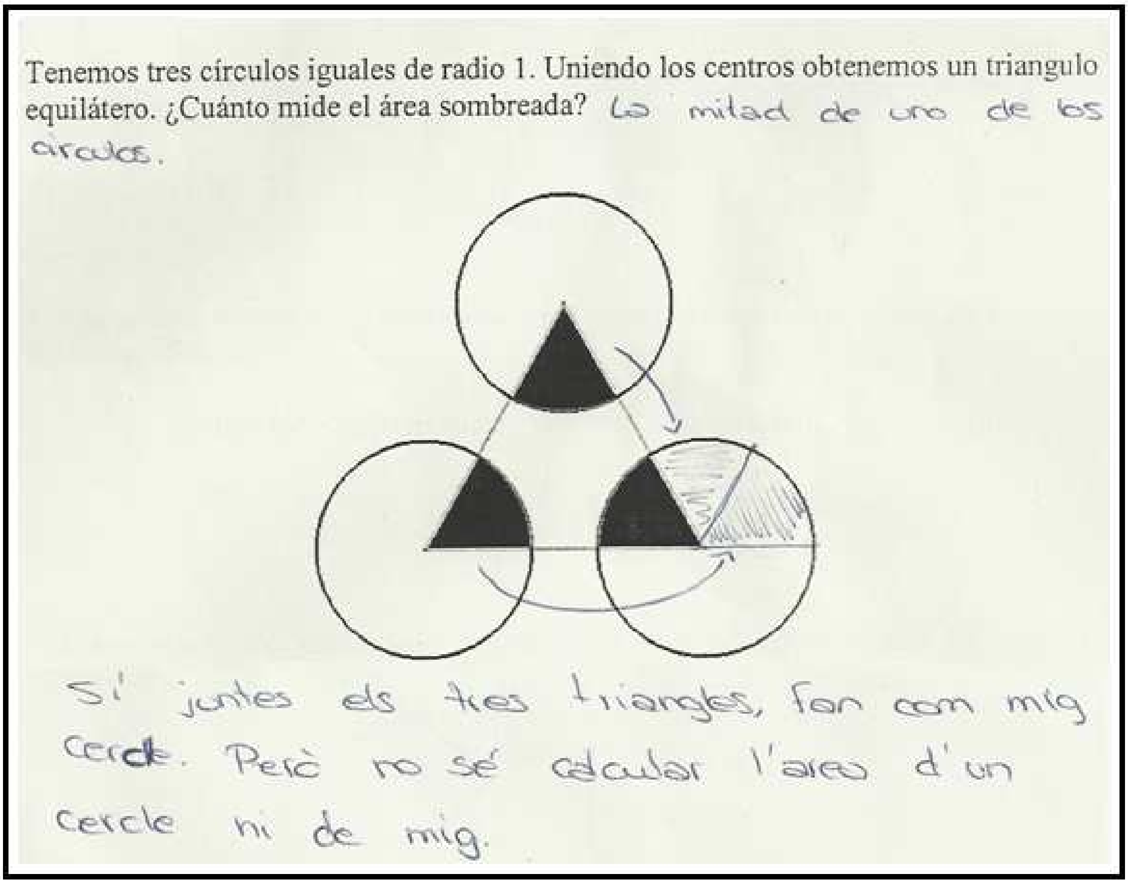
Respecto al descriptor *Intenta Responder Problema Escrito* (IRPE), definimos un indicio con la misma nomenclatura:

- Intenta Responder Problema Escrito (IRPE): Identifica alguna estrategia mediante una explicación o argumentación.

Respecto al descriptor *Resuelve Correctamente Problema (RCP)*, definimos un indicio con la misma nomenclatura:

- Resuelve Correctamente Problema (RCP): Identificamos una resolución que soluciona el problema.

En el siguiente problema realizado en la prueba piloto, adaptación de la versión original de Poniachick (1994), identificamos los tres indicios anteriores:


Tenemos tres círculos iguales de radio 1. Uniendo los centros obtenemos un triangulo equilátero. ¿Cuánto mide el área sombreada? La mitad de uno de los circulos.

Si juntes els tres triangles, fan com mig cercle. Però no sé calcular l'area d'un cercle ni de mig.

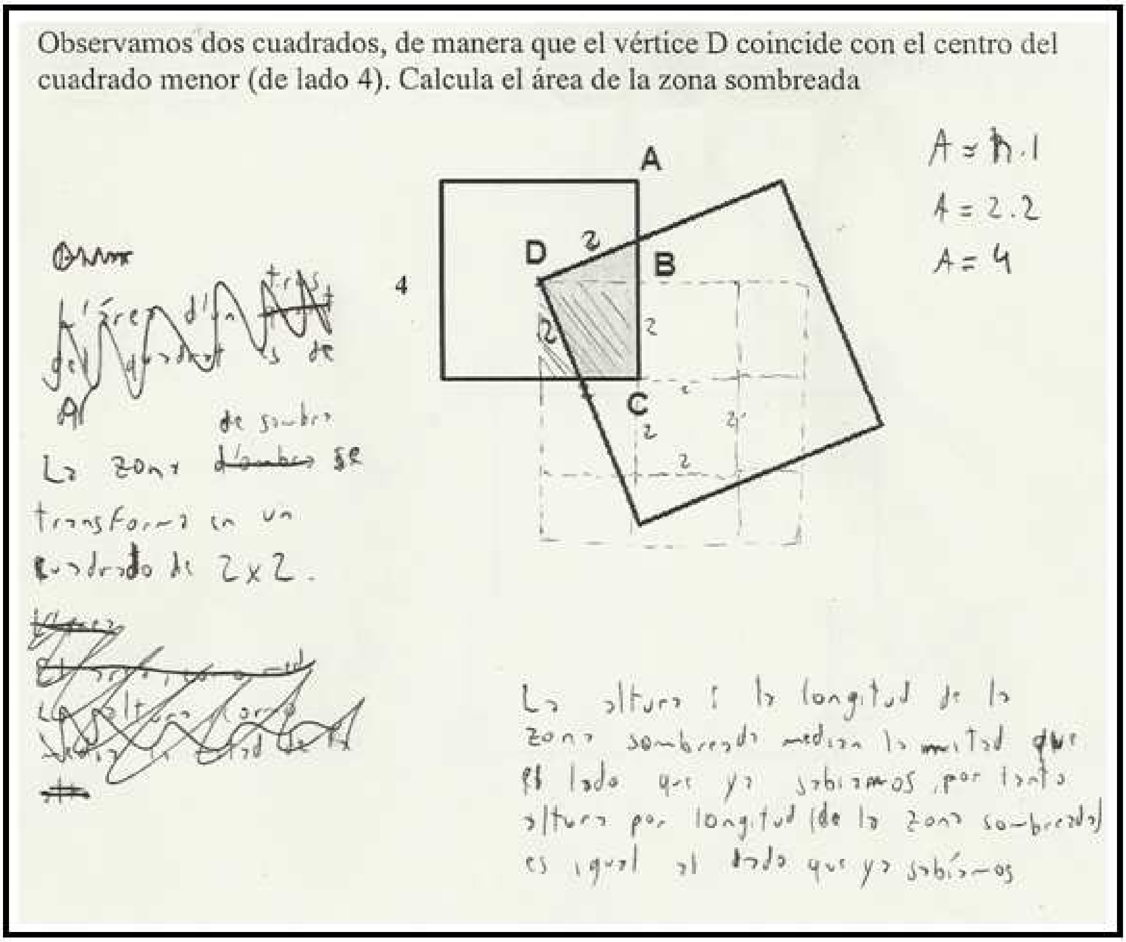
Comprobamos que se identifica el indicio IRPG, ya que el estudiante plantea una estrategia a partir de un diagrama visual en el que se representan y reubican dos sectores circulares en una posición determinada en el interior de uno de los círculos del enunciado. Análogamente, realiza un comentario escrito especificando la estrategia visual aplicada (IRPE). Y por último identificamos el indicio RCP, considerando cómo válida la solución, aunque no se exprese analíticamente.

<u>Respecto al descriptor Habilidad visual (MVHV), definimos cinco indicios:</u>

- Identificación Visual (MVHV1): Identifica una figura geométrica aislándola de su contexto.
- Discriminación Visual (MVHV2): Inferimos una comparación entre figuras o cuerpos geométricos.

- Reconocimiento Posiciones Geométricas (MVHV3): Identificamos las relaciones de posición de una figura o cuerpo geométrico respecto de un punto, figura o cuerpo geométrico de referencia
- Reconocimiento Relaciones geométricas (MVHV4): Inferimos que se identifican las relaciones geométricas entre diversas figuras y/o cuerpos geométricos.
- Memoria Visual (MVHV5): Inferimos que se recuerdan las características visuales (forma y posición) de una figura o cuerpo geométrico.

Exponemos la resolución de un problema de la prueba piloto, adaptación de la versión original de Gardner (1989), en el que se identifican los indicios anteriores:



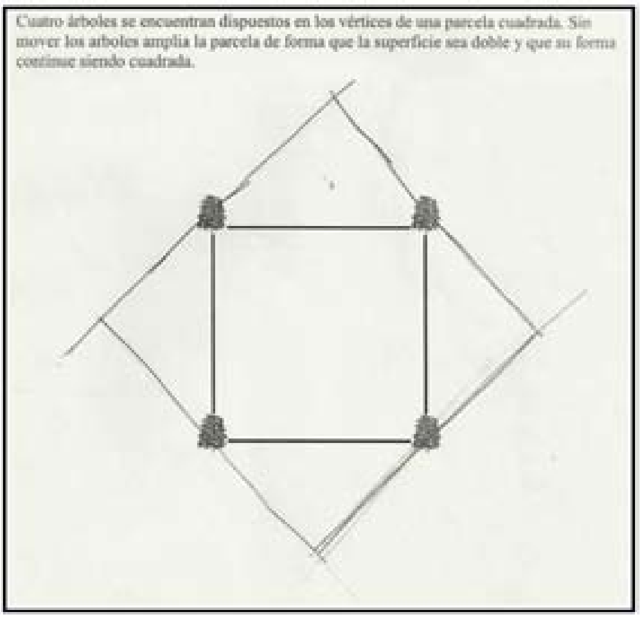
En primer lugar inferimos que se ha realizado una identificación visual (MVHVI), al identificar 9 subcuadrados independientemente del contexto, en el cuadrado de superficie mayor presentado en el enunciado. En segundo lugar inferimos una Discriminación Visual (MVHV2), ya que se comparan los 9 subcuadrados entre ellos, teniendo en cuenta sus medidas. En tercer lugar inferimos que se ha realizado un

Reconocimiento de la Posición (MVHV3) del cuadrado de mayor superficie respecto el centro del cuadrado de lado 4, cuando el participante ha aplicado la estrategia de rotar mentalmente dicho cuadrado (según sus explicaciones en el cuestionario de reflexión). En cuarto lugar, inferimos que se ha descubierto la relación geométrica (MVHV4) de igualdad entre la figura sombreada y el subcuadrado de lado 2, tal y como explicita en la resolución. Por último identificamos según las explicaciones que realiza el estudiante en el cuestionario de reflexión, el indicio Memoria Visual (MVHV5), porque previamente a la ejecución de la estrategia en algún momento el estudiante ha imaginado mentalmente la rotación del cuadrado y por tanto necesariamente ha tenido que conservar y recordar las características de posición y forma de éste.

Respecto al descriptor Imágenes Inferidas (MVII), definimos cuatro indicios:

- Imagen concreta (MVII1): Identifica representaciones de figuras o cuerpos geométricos con detalle.

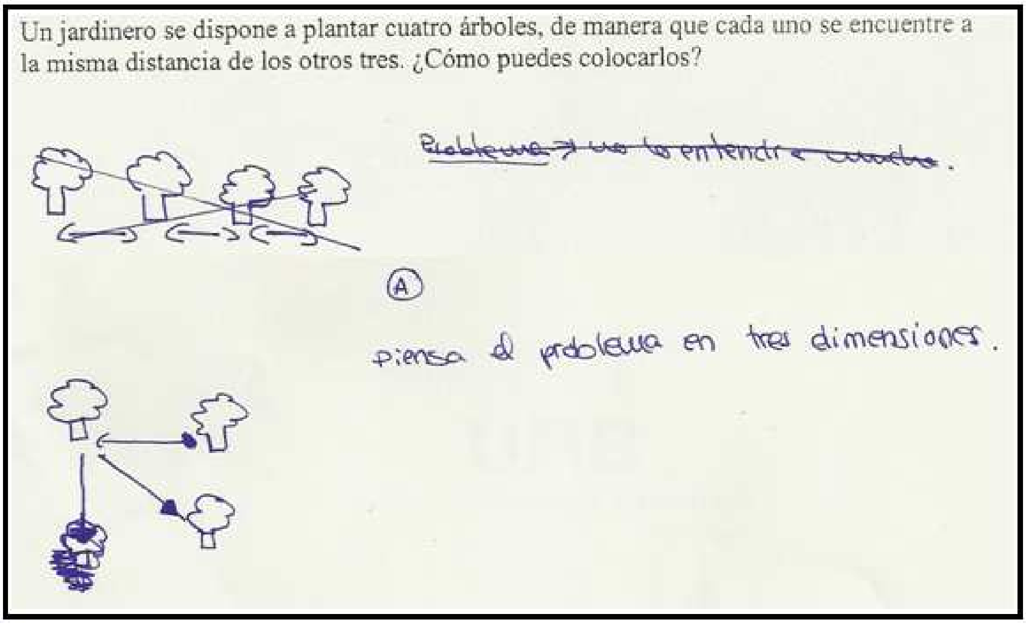
Ilustramos este indicio con el siguiente problema de la prueba piloto, que hace referencia al clásico problema de Sócrates sobre la duplicación del área de un cuadrado referenciado en Cambray (2011):



Hemos identificado el Indicio Imagen Concreta (MVII1) porque el estudiante ha construido una figura geométrica nueva y aunque no explicita la estrategia usada resuelve el problema. Entre las posibles estrategias que podemos inferir cabe pensar, que una de ellas podría sustentarse en descomponer el cuadrado en cuatro triángulos rectángulos iguales a partir de trazar las diagonales y en cada caso visualizar el simétrico respecto de cada lado del cuadrado.

- Imagen Patrón (MVII2): Identifica la representación de relaciones en un esquema visual o espacial.

Ilustramos este indicio con una resolución de un problema de la prueba piloto tradicionalmente conocido y referenciado en la versión original de Holt (1988):

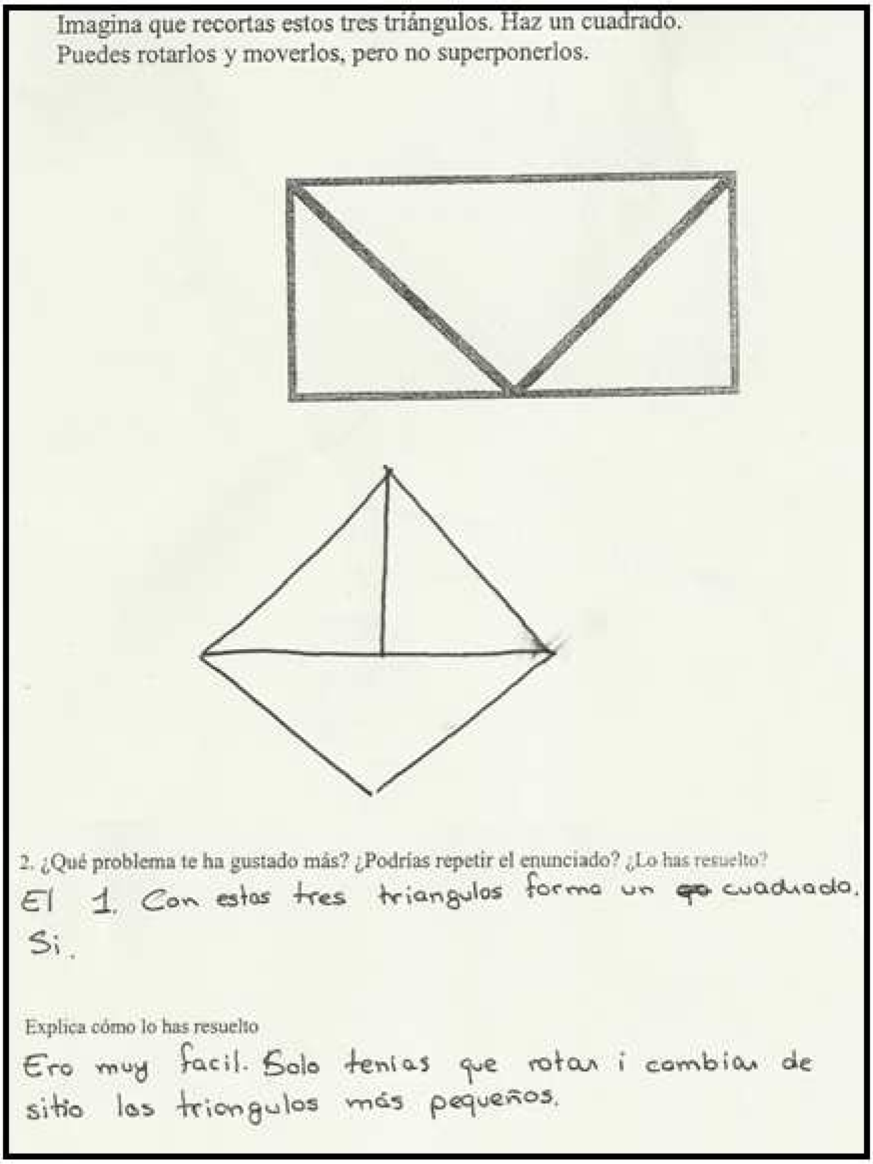


En esta resolución hemos inferido una imagen patrón, ya que mediante las flechas se pretende representar la relación de igualdad de distancias entre los árboles.

- Imagen Cinestésica (MVII3): Identifica cuando el participante realiza algún tipo de expresión corporal, gesticulación con las manos o con alguna parte del cuerpo.

- Imagen Dinámica (MVII4): Inferimos que el participante desplaza, mueve, o gira mentalmente imágenes concretas. Identificamos el indicio MVII4 cuando el estudiante explicita textualmente “mover”, “desplazar”, “rotar” o “girar” una determinada figura o cuerpo geométrico en la resolución del problema, en los cuestionarios de reflexión o respuesta o en las entrevistas. A partir de nuestra experiencia como docente con estudiantes de 4t de ESO, deducimos que posiblemente cuando realizan un *desplazamiento mental o rotación mental* de una figura geométrica, generalmente no empleen este vocabulario específico, sino que empleen expresiones más coloquiales a las que están acostumbrados, como por ejemplo mover, desplazar, girar o rotar una figura geométrica.

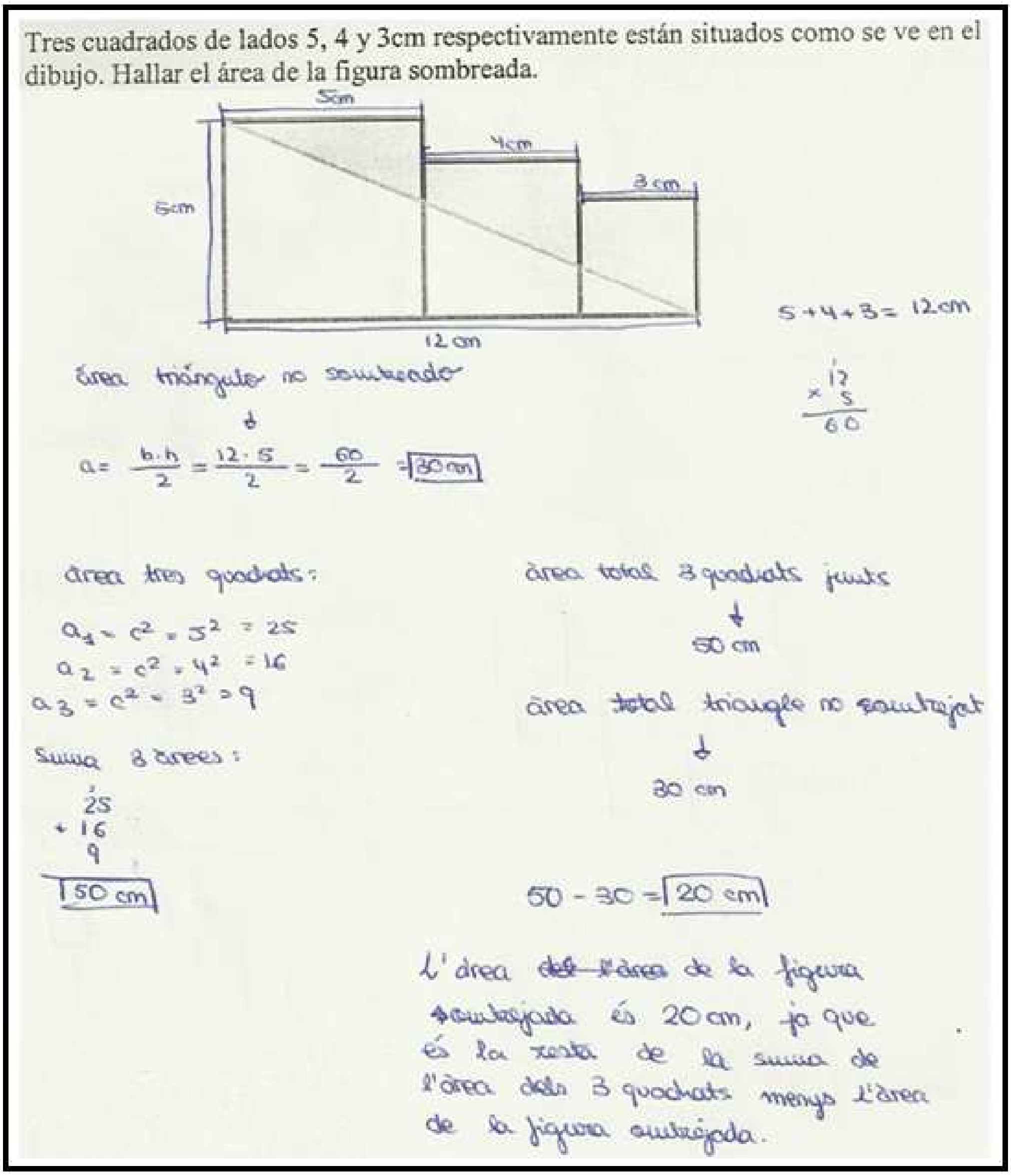
Ilustramos este indicio con una resolución de un problema (Segarra, 1987) de la prueba piloto, donde la estudiante, en el cuestionario de reflexión explicitó haber rotado los triángulos:



Respecto al descriptor Combinación de métodos (CMVA), definimos un indicio:

- Combinación de Métodos (CMVA): Se identifica cuando el participante, combina métodos visuales y analíticos en distintos momentos de la resolución del problema.

Ilustramos este indicio con la resolución de un problema adaptado de la versión original planteada por Bolt (1988):

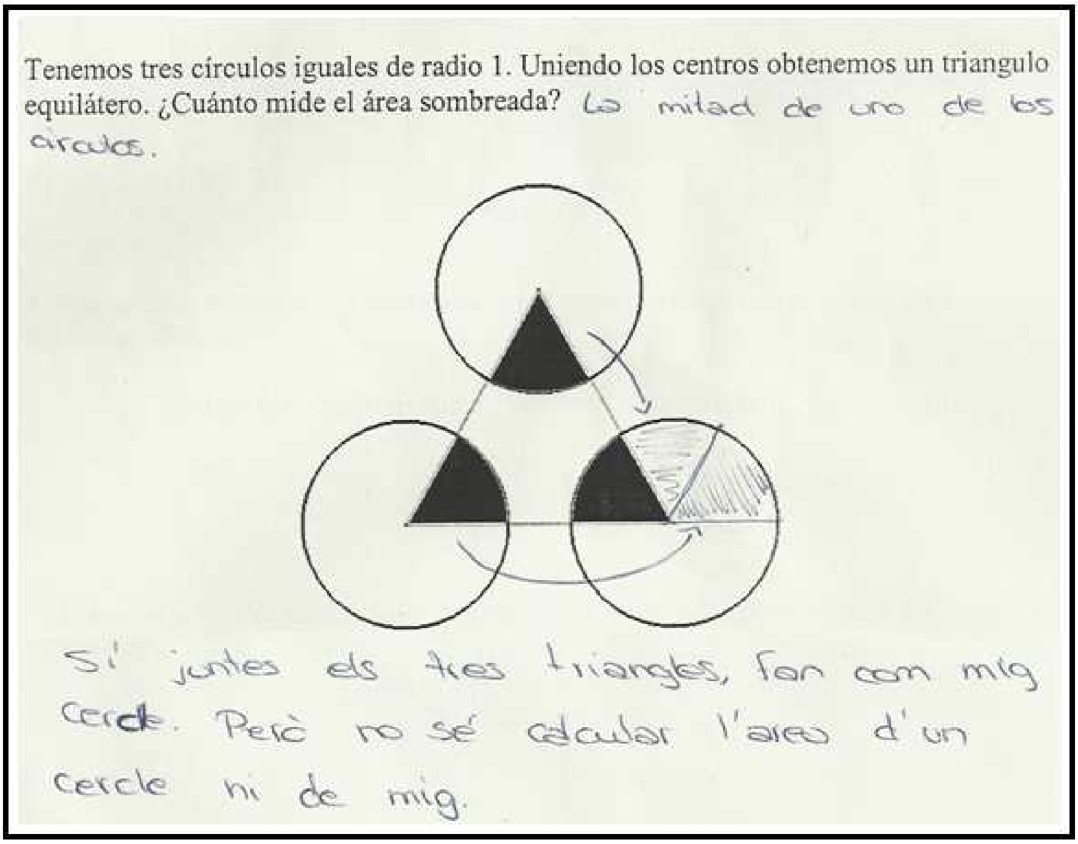


En esta resolución el participante ha aplicado una estrategia visual de adición y sustracción de superficies, en la que paralelamente ha ido calculando analíticamente las correspondientes superficies, hasta calcular el área de la figura sombreada.

Respecto el descriptor Originalidad (IOO), definimos tres indicios:

- Descubrir Relaciones (IOO1): Inferimos que los participantes descubren reestructuraciones o relaciones no triviales entre conceptos o representaciones matemáticas.
- Inventar Estrategias (IOO2): Se identifica que los participantes inventan sus propias estrategias y resoluciones.

Ilustramos estos dos indicios con la resolución expuesta anteriormente, mediante la adaptación de la versión original de Poniachick (1994):



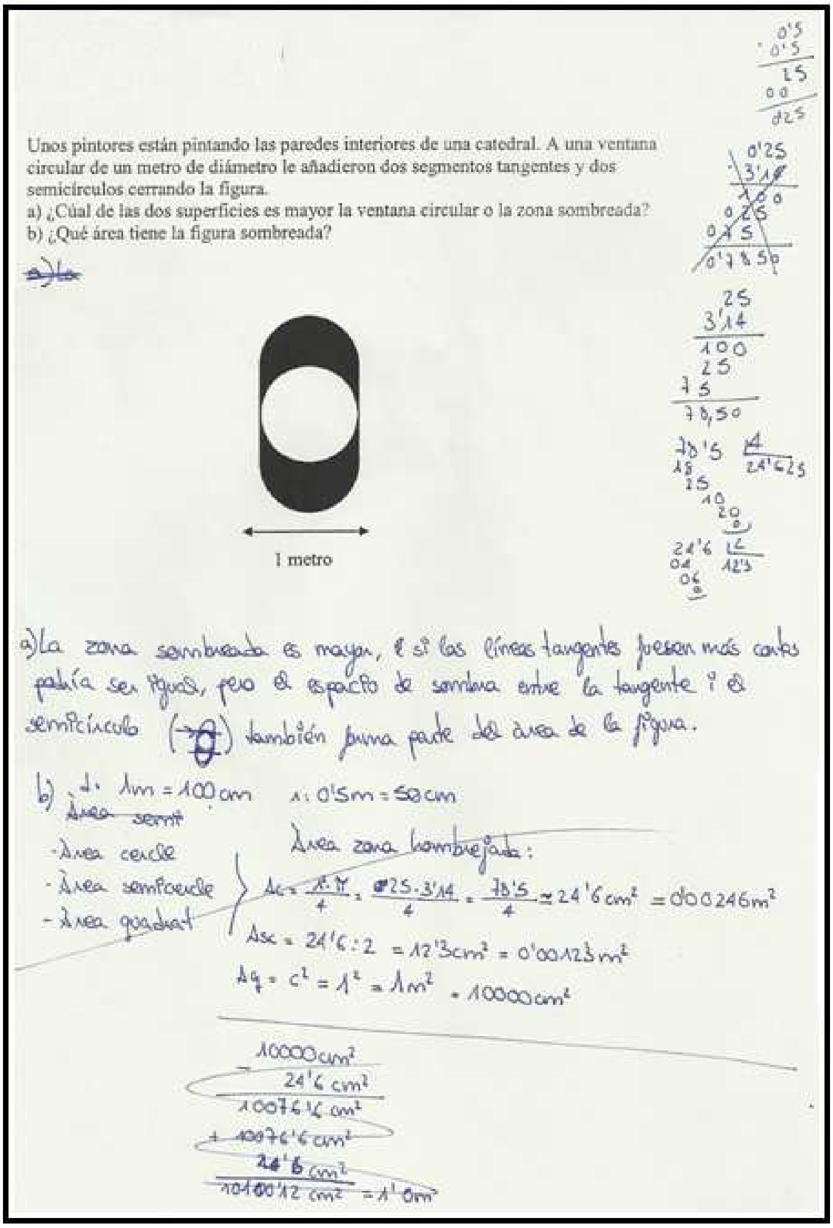
Identificamos el indicio IOO1, porque consideramos que el participante descubre una relación geométrica no trivial, asociando la igualdad de la superficie de los tres sectores circulares con la mitad del círculo. Relación geométrica supeditada a la estrategia visual que consiste en desplazar y rotar (IOO2) las secciones circulares, según las explicaciones que aportó en el cuestionario de reflexión.

- No explicitar (IOO3): Se identifica sólo la solución final del problema, sin explicitar o explicar las estrategias que se han empleado o como se ha resuelto. La ocurrencia del insight en la resolución de problemas (Köhler, 1929; Wertheimer, 1959), en muchas ocasiones se produce de forma repentina sin saber explicitar el cómo ha tenido lugar la idea o estrategia de resolución.

Respecto al descriptor Flexibilidad (IOF), definimos dos indicios:

- Representar datos (IOF1): Identificamos diferentes resoluciones de naturaleza distinta así como diferentes formas de representar y organizar los elementos del problema.

Ilustramos este indicio con la resolución de un problema de la tesis doctoral de Plasencia (2000):


Unos pintores están pintando las paredes interiores de una catedral. A una ventana circular de un metro de diámetro le añadieron dos segmentos tangentes y dos semicírculos cerrando la figura.
a) ¿Cúal de las dos superficies es mayor la ventana circular o la zona sombreada?
b) ¿Qué área tiene la figura sombreada?

1 metro

a) La zona sombreada es mayor, i si las líneas tangentes fuesen más cortas podría ser iguales, pero el espacio de sombra entre la tangente i el semicírculo también forma parte del área de la figura.

b) $d: 1m = 100 cm$ $r: 0'5m = 50 cm$

- Àrea cercle
- Àrea semicercle
- Àrea quadrat

Àrea zona sombrejada:

$Ac = \frac{r \cdot \pi}{4} = \frac{25 \cdot 3'14}{4} = \frac{78'5}{4} \simeq 24'6 cm^2 = 0'00246 m^2$

$Asc = 24'6 : 2 = 12'3 cm^2 = 0'00123 m^2$

$Aq = c^2 = 1^2 = 1 m^2 = 10000 cm^2$

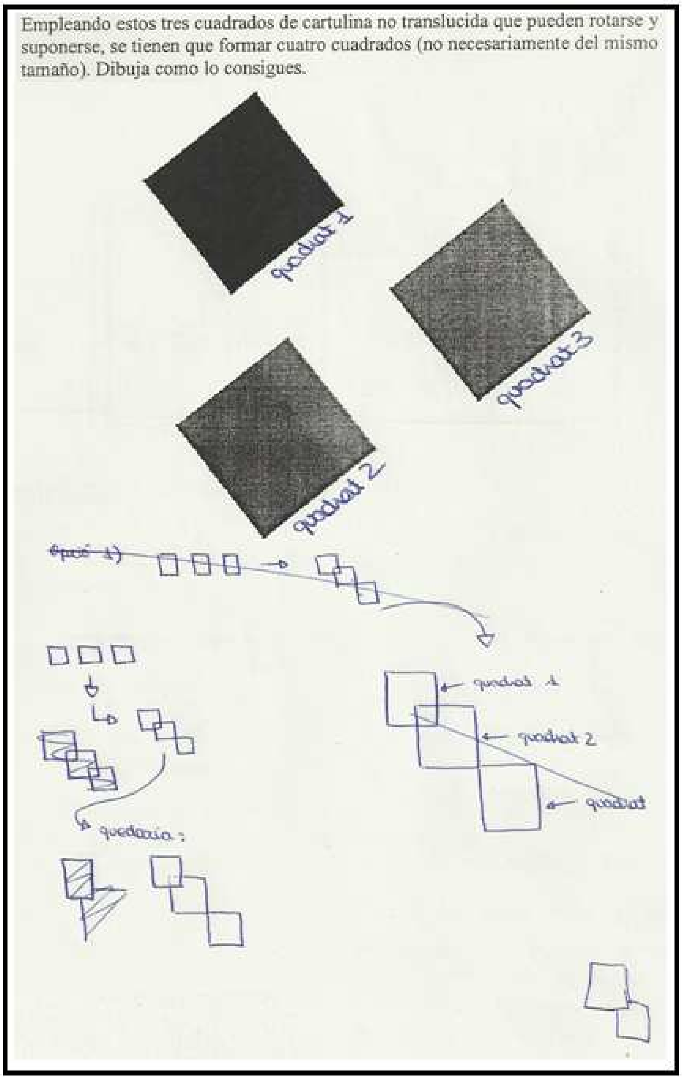
En la respuesta a la primera pregunta, inferimos que el participante emplea los datos del problema con el objetivo de aplicar una estrategia visual para identificar y discriminar que superficie es mayor. En cambio en la segunda respuesta emplea los datos del problema con el objetivo de aplicar una estrategia analítica. Llega a considerar las superficies de diferentes figuras, pero sin explicitar la correcta.

- Tantear (IOF2): Se identifica cuando el participante tantea, retrocede y avanza a partir de diversos intentos mediante uno o varios enfoques (visual, cambio dimensional, analítico, etc)

Respecto el descriptor Elaboración (IOE), definimos dos indicios:

- Construir Modelos (IOE1): Identificamos modelos y sistemas representativos gráficos o escritos en la resolución que facilitan su comprensión.

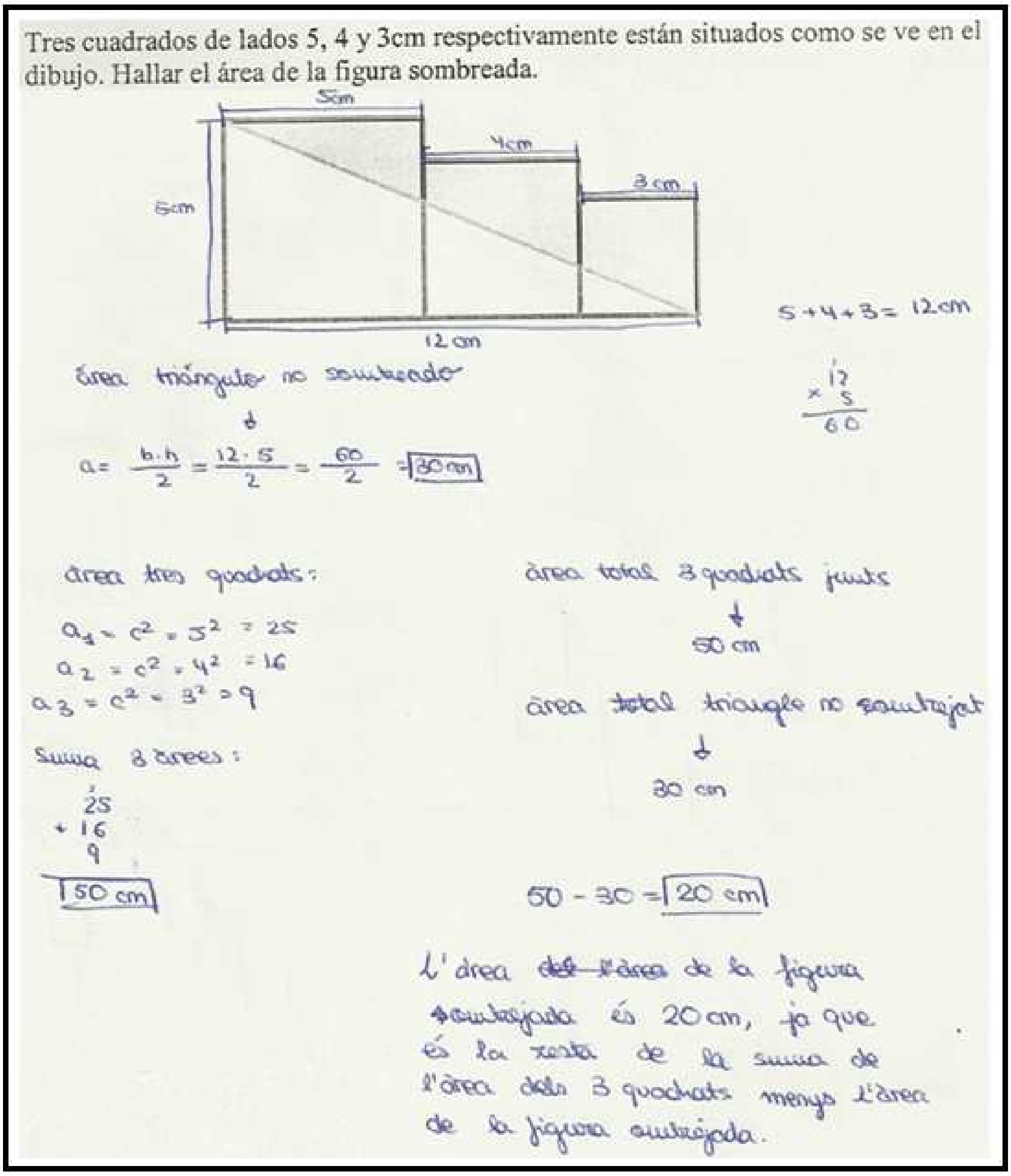
Identificamos los indicios IOF2 y IOE1 en la siguiente resolución de un problema de la prueba piloto (Grabarchuk, 2009):



Interpretamos que el estudiante ha tanteado (IOF2) al menos con dos posibles estrategias visuales de desplazamiento, la traslación y la rotación mental de los cuadrados del enunciado del problema, según ha explicitado en el cuestionario de reflexión. Observamos que las dos estrategias planteadas, se representan indicando específicamente (IOE1) los pasos siguientes de la resolución mediante un modelo basado en un diagrama de flechas que facilita su comprensión.

- Escolar (IOE2): Se identifica cuando el participante aplica y organiza adecuadamente conceptos y métodos de la matemática escolar.

Ilustramos este indicio en la resolución del problema visto anteriormente Bolt (1988):


Tres cuadrados de lados 5, 4 y 3cm respectivamente están situados como se ve en el dibujo. Hallar el área de la figura sombreada.

5cm

4cm

3 cm

5cm

12 cm

$5+4+3=12$ cm

àrea triàngle no sombreado

$a = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = \boxed{30 \text{ cm}}$

$12 \times 5 = 60$

àrea tres quadrats:

$a_1 = c^2 = 5^2 = 25$

$a_2 = c^2 = 4^2 = 16$

$a_3 = c^2 = 3^2 = 9$

Suma 3 àrees:

$25 + 16 + 9 = \boxed{50 \text{ cm}}$

àrea total 3 quadrats junts

50 cm

àrea ~~total~~ triangle no sombrejat

30 cm

$50 - 30 = \boxed{20 \text{ cm}}$

L'àrea ~~de l'àrea~~ de la figura sombrejada és 20 cm, ja que és la resta de la suma de l'àrea dels 3 quadrats menys l'àrea de la figura ombrejada.

En esta resolución se aplican adecuadamente conceptos del algebra y geometría escolar (IOE2) sobre el cálculo de superficies de figuras geométricas así como la aplicación de estrategias de adición y sustracción de áreas que se sustentan en el fraccionamiento y la identificación visual.

Items

Describimos los ítems como la codificación de cada uno de los indicios, con el objetivo de establecer mayor funcionalidad en el análisis de los resultados.

Los resultados de las cuatro partes de la prueba piloto se recogieron en la tabla del Anexo *B.2.4 TABLA INDICIOS*. En esta tabla de doble entrada las columnas corresponden a los problemas y las filas a los indicios que hemos definido anteriormente. En ella se recoge el porcentaje de indicios identificados en el análisis de las resoluciones de cada uno de los problemas geométricos ip^2.

Posteriormente en el Anexo *B.2.5 GRÁFICOS RESULTADOS PROBLEMAS* hemos representado los resultados gráficamente, clasificándolos según los tres comportamientos de estudio en nuestro trabajo: Resolutor, Visualizador y Creativo-Insight. Concretamente se representa el porcentaje de indicios identificado en cada uno de los problemas de las cuatro partes de la prueba piloto.

A partir del análisis de los indicios identificados en la resolución de los problemas, indagamos y reflexionamos sobre las resoluciones planteadas por los estudiantes acerca de los conceptos geométricos contextualizados en ámbitos novedosos y creativos así como extraer rasgos y evidencias que nos permitan comenzar a establecer niveles de pensamiento productivo desde el punto de vista del insight y la visualización.

Hemos de tener presente que este tipo de análisis, aunque nos aporta una primera interpretación sobre la resolución de los problemas y las estrategias que aplicaron los alumnos, puede no codificar algunos matices especialmente relevantes en la transcripción de resultados. Podríamos tener algunos casos que a priori, según la categorización de indicios definidos, tendrían las mismas puntuaciones pero que si los analizásemos en profundidad albergarían situaciones diferentes. Por ejemplo, supongamos el caso ficticio de tener dos estudiantes que han utilizado imágenes concretas (MVII1) en sus respectivas estrategias de resolución: un primer estudiante emplea una imagen que le conduce a la solución del problema y un segundo estudiante emplea un círculo para resaltar una información relevante del enunciado. Los indicios MVII1 se identificarían en ambos casos de forma que aparecerían al mismo nivel dos casos esencialmente distintos. Un caso análogo podría suceder cuando contabilizamos las respuestas correctas. Supongamos el siguiente ejemplo: un estudiante que no plantea ninguna resolución ante un problema y otro estudiante que realiza una resolución correcta pero que en el último momento comete un error que le impide solucionar el problema. En ambos casos no se identificaría el indicio RCP aunque cualitativamente serían casos esencialmente diferentes. Algo similar puede suceder con el hecho de identificar cuando un estudiante emplea una habilidad visual o imagen. En la resolución de un problema, en algunos casos es necesario de un análisis cualitativo que complemente la identificación significativa de algunos indicios como por ejemplo de una determinada imagen (MVII) o habilidad visual (MVHV) que nos pueda facilitar la interpretación e inferencia de las resoluciones obtenidas con mayor rigurosidad y fiabilidad.

En este sentido el cuestionario de reflexión nos aportará información cualitativa sobre las resoluciones realizadas por los participantes.

5.1.3.1.2 ANÁLISIS CUALITATIVO

En el análisis cualitativo de las estrategias utilizadas por los estudiantes en el cuestionario de problemas, hemos considerado utilizar redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) con el objetivo de facilitar la selección y discriminación de aquellos problemas geométricos ip^2 especialmente significativos que podrían formar parte de la siguiente Fase Diagnóstica de Relación. Las redes sistémicas nos permiten poder observar todas las resoluciones de los participantes en la Prueba Piloto. Esta forma de disponer los resultados nos aporta una visión de conjunto más amplia, pudiendo visualizar de forma más efectiva las relaciones que se dan entre los diferentes indicios que hemos concretado en el estudio de la resolución de un problema.

A continuación exponemos la información que aportarán las redes sistémicas y que complementará el análisis realizado anteriormente sobre el Comportamiento, las interacciones de representaciones y la frecuencia identificada:

i) Comportamiento

- Comportamiento Resolutor: Identifica información sobre el tipo de problemas resueltos así como las dificultades y los intentos realizados mediante estrategias escritas o gráficas.
- Comportamiento Visualizador: Identifica que imágenes, habilidades y estrategias visuales emplean los participantes en la resolución de problemas.
- Comportamiento Creativo-Insight: Identifica algunos rasgos creativos y la utilización de resoluciones, estrategias e ideas originales, innovadoras y creativas, algunas de las que podrían promover la ocurrencia del insight.

ii) Interacción de representaciones

La identificación de representaciones, estrategias y/o habilidades visuales en la resolución del problema, nos permitirá discriminar si hay alguna que predomina sobre otras.

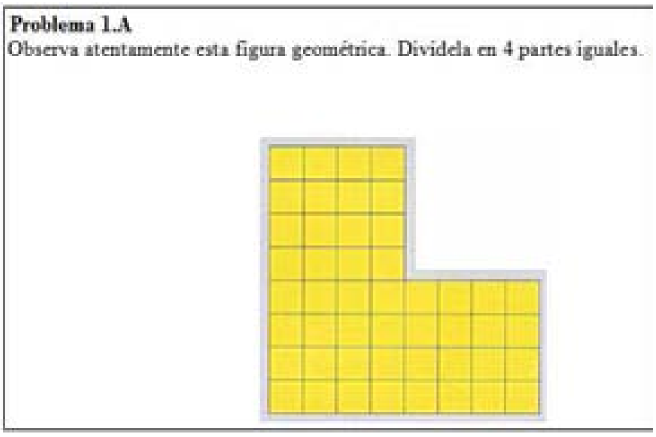
iii) Frecuencia

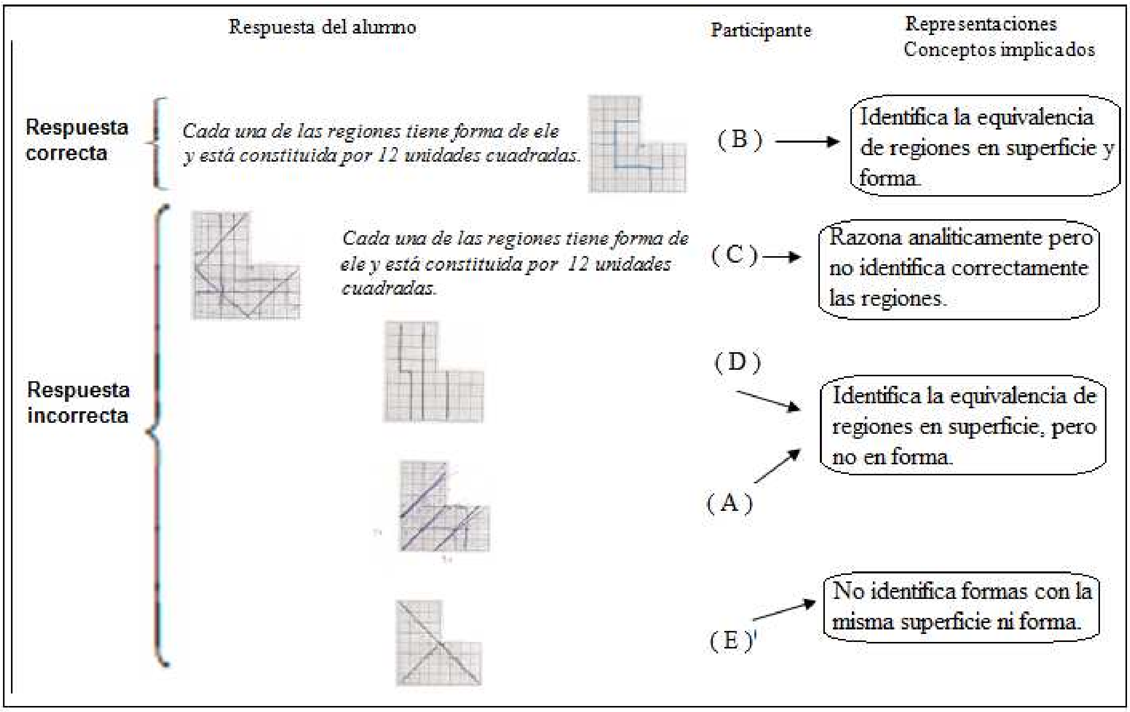
Nos permitirá obtener una aproximación a la frecuencia de estudiantes que pueden identificarse en los comportamientos visual/analítico y productivo o reproductivo.

En primer lugar hemos realizado una revisión cualitativa de las resoluciones, dificultades, bloqueos y una comparativa entre las resoluciones más creativas y aquellas que resuelven con éxito el problema geométrico en cuestión.

En segundo lugar hemos establecido redes sistémicas (Valdivé y Garbin, 2007) realizando un análisis descriptivo e interpretativo en cada una de ellas. Las redes sistémicas solo se han realizado en aquellos problemas en los que se ha identificado una frecuencia de indicios similar y el análisis cuantitativo, por sí solo, ha sido insuficiente para discernir sobre los problemas que podrían ser candidatos potencialmente relevantes en nuestro estudio para la siguiente fase diagnóstica. La estructura de las redes se disponen en forma de árbol con ramas que pueden subdividirse agrupando *clases* con características comunes. Los participantes de cada parte de la Prueba Piloto se han identificado con una letra del abecedario. Hemos citado las respuestas literales de los participantes y hemos recuadrado las reflexiones asociadas en cada resolución.

A modo de ilustración vamos a exponer un ejemplo respecto a la red sistémica asociada al problema 1.A (nº problema, parte Prueba piloto) que nos ha parecido interesante:





Esquema 5.1.3.1.2: Red sistémica asociada al problema 1.A

Los estudiantes fragmentan la figura geométrica a partir de las distintas interpretaciones que realizan de la palabra igual que aparece en el enunciado del problema. Partiendo de establecer como unidad de medida el cuadrado pequeño aplican estrategias de recuento para determinar la superficie total de la figura y para identificar las 4 superficies equivalentes que pueden recubrir la figura original.

Observamos que sólo uno de los participantes consigue visualizar adecuadamente la forma y área de las partes. Inferimos después de las resoluciones obtenidas que los participantes han realizado distintas interpretaciones de "*cuatro partes iguales*". Posiblemente no todos los participantes interpretan que cuatro partes iguales en el contexto del problema hacen referencia a la forma y la superficie. Consideramos que los participantes C) y D) interpretan la igualdad solo como igualdad de superficie y en cambio el participante E) lo interpreta como igualdad en forma y así elige dibujar cuatro triángulos rectángulos isósceles. Nos llama la atención que el participante B), da la explicación correcta pero no consigue representar de forma adecuada las cuatro partes iguales.

Este es un problema de combinación selectiva según Sternberg y Davidson (1986) porque concebimos el insight geométrico cuando el estudiante es capaz de reestructurar, combinar y reorganizar los elementos, identificando y fragmentando la figura geométrica, hasta poder visualizar cuatro partes de la misma forma y superficie que recubran la figura original. Los representantes de la Gestalt (Köhler, 1929; Wertheimer, 1959) entenderían la resolución de este problema a partir de la reestructuración o reorganización perceptual de las partes o elementos identificados en él.

Autores como Weisberg (1996) concebirían este problema de insight puro porque sólo existe una única resolución si interpretamos el concepto de igualdad respecto el área y la forma. Metcalfe (1986) presentó este problema en su investigación que lleva por título *"Feeling of knowing in memory and problem solving"* con estudiantes universitarios, pero sin fragmentar la figura original del enunciado de forma que la dificultad en la resolución era más significativa.

5.1.3.2 ESTRATEGIA ANÁLISIS CUESTIONARIO REFLEXIÓN

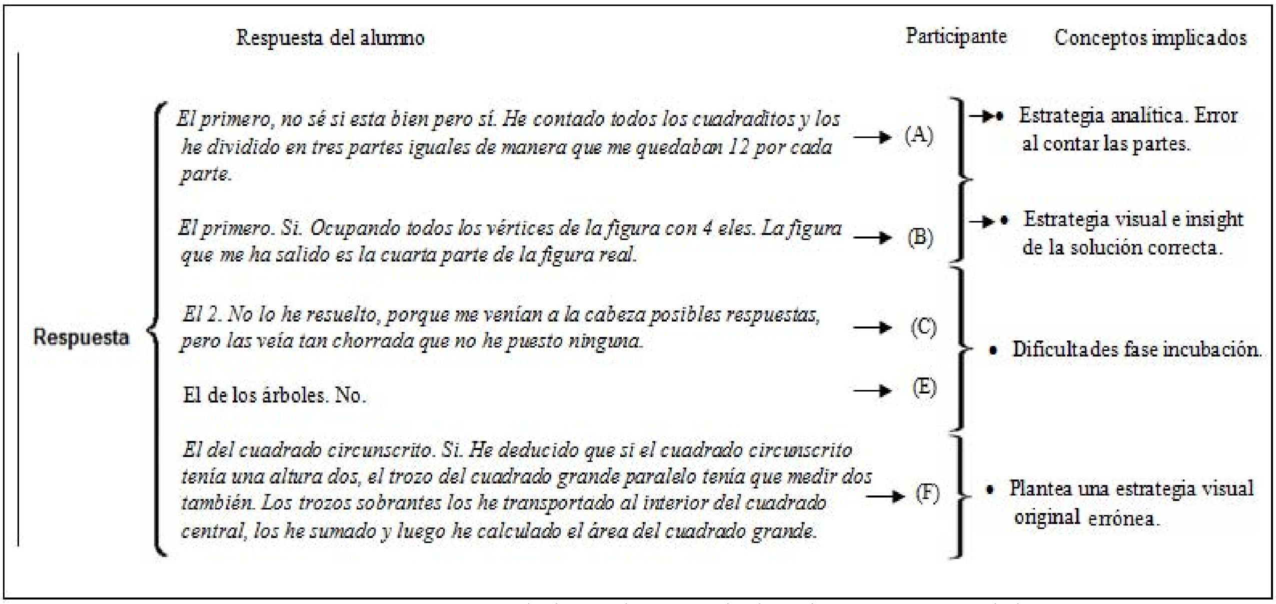
El análisis del cuestionario de reflexión (Anexo *B.2.3 CUESTIONARIO REFLEXIÓN DE PROBLEMAS*) se ha realizado por un lado siguiendo una metodología próxima a planteamientos cualitativos a partir de redes sistémicas y por otro complementando esta información mediante un análisis cuantitativo a partir de definir cinco variables relacionadas con cada una de las preguntas del cuestionario respectivamente.

Las aportaciones cualitativas obtenidas de los resultados del cuestionario de reflexión reforzarán y complementarán el análisis del cuestionario de problemas, con el objetivo de facilitar la selección de aquellos problemas potencialmente significativos en el estudio del insight. La descripción e interpretación de los resultados obtenidos se ha realizado en base a las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) correspondientes a las preguntas realizadas en el cuestionario de reflexión.

Las redes sistémicas recogen la información cualitativa de los participantes sobre las posibles tendencias y patrones que caracterizan y corroboran las inferencias realizadas en las resoluciones planteadas por los participantes en los problemas geométricos ip^2 estudiados.

A modo de ilustración vamos a exponer un ejemplo respecto a la red sistémica asociada a la primera pregunta del cuestionario de reflexión, respecto al cuestionario de problemas de la parte A de la prueba piloto.

1. ¿Qué problema te ha sorprendido más? ¿Lo has resuelto?
   Explica cómo lo has conseguido.



Esquema 5.1.3.2: Red sistémica asociada a la pregunta 1 del cuestionario de Reflexión. Parte A de la prueba piloto.

En el análisis cuantitativo, hemos definido una variable para cada una de las preguntas del cuestionario de reflexión con el objetivo de identificar la frecuencia de respuestas en cada una de ellas. Respecto al comportamiento Creativo-Insight definimos:

- 1. ¿Qué problema te ha sorprendido más? ¿Lo has resuelto?
  Explica cómo lo has conseguido.

  Variable Sorpresa (Asociada a la pregunta 1, del cuestionario de reflexión): El participante determina que problema le ha sorprendido más.

- 2. ¿Qué problema te ha gustado más? ¿Podrías repetir el enunciado? ¿Lo has resuelto?
  Explica cómo lo has resuelto

Variable Motivación (Asociada a la pregunta 2): El participante determina que problema le ha gustado más.

Y por último definimos tres variables relativas al Comportamiento Resolutor y Comportamiento Visualizador:

- 3.Qué problema te ha resultado más difícil? ¿Por qué?

  Variable Dificultad (Asociada a la pregunta 3): El estudiante considera el problema más difícil de resolver de los presentados en el cuestionario de problemas.

- 4. ¿Qué enunciado te ha costado más comprender?

  Variable Dificultad Comprensión Enunciado (Asociada a la Pregunta 4): El estudiante considera el enunciado del problema que más difícil de entender le ha resultado.

- 5. ¿Si tuvieras que sacar alguno de los 5 problemas, cual sacarías?

  Variable Eliminar (Asociada a la Pregunta 5): El participante explicita que problema eliminaría.

Las aportaciones obtenidas a partir del análisis cuantitativo de estas variables complementará las aportaciones logradas a partir del análisis cualitativo de las redes sistémicas.

5.1.3.3 FIABILIDAD Y VÁLIDEZ

Respecto a la fiabilidad y validez de la Prueba Piloto enfatizamos en el uso de la variedad de fuentes de verificación, con ello hemos pretendido buscar convergencia de los datos. Coincidimos con Schoenfeld (2000) en que "cuantas más fuentes independientes de confirmación haya, más robusto será probablemente un descubrimiento". Hemos planteado un análisis en el que se combinan desde herramientas cuantitativas y cualitativas con la intención de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos y ser lo más rigurosos posibles en las inferencias realizadas en las resoluciones de los participantes. También hemos optado por grupos reducidos de participantes en cada una de las partes de la Prueba Piloto con el fin de garantizar unas condiciones optimas, en la resolución de un número reducido de problemas en un tiempo determinado que permitiesen la posibilidad de hacer emerger la ocurrencia del insight en algunas de las resoluciones de los participantes.

Así mismo, además de lograr la comparación entre las distintas fuentes metodológicas, los datos han sido analizados por otros investigadores independientes. Hemos consultado a investigadores en Didáctica de la geometría en las reuniones del grupo de investigación de Aprendizaje de la Geometría de la SEIEM que tuvieron lugar en los Encuentros Aprengeom 2010 y 2011 en Castro Urdiales organizados por el CIEM. Encuentros dirigidos por Tomas Recio y Enrique de la Torre y en los que presentamos dos comunicaciones respectivamente que llevan por título *"Estrategias de resolución geométrica por insight*" (Sánchez, 2010) y "*Las estrategias de resolución geométrica por insight II*" (Sánchez, 2011a) respectivamente.

5.2 RESULTADOS PRUEBA PILOTO

Exponemos los resultados obtenidos en el cuestionario de problemas y cuestionario de reflexión realizados en la Prueba Piloto. A partir de la interpretación e inferencia de las estrategias de resolución planteadas por los estudiantes en el cuestionario de problemas y las reflexiones y argumentaciones obtenidas en el cuestionario de reflexión, se explicitan los criterios que determinarán la elección de los problemas geométricos ip^2 que se emplearán en la segunda fase Diagnóstica de Relación. Finalmente plantearemos la propuesta de problemas geométricos ip^2 seleccionados.

5.2.1 ANÁLISIS CUESTIONARIO REFLEXIÓN

El análisis del cuestionario de Reflexión está basado en planteamientos cualitativos a partir de redes sistémicas que se complementan con el análisis cuantitativo de cinco variables relacionadas con las preguntas del cuestionario de reflexión (apartado *5.1.3.2 ESTRATEGIA ANÁLISIS CUESTIONARIO REFLEXIÓN*).

Nos centraremos en aquellas aportaciones cualitativas que inferimos del cuestionario de reflexión que pueden aportarnos información significativa sobre las estrategias planteadas en los problemas geométricos ip^2.

Presentamos el mismo diseño en cada una de las partes A,B,C y D de la Prueba Piloto. Este diseño consta de dos apartados:

1) ***Variables.***

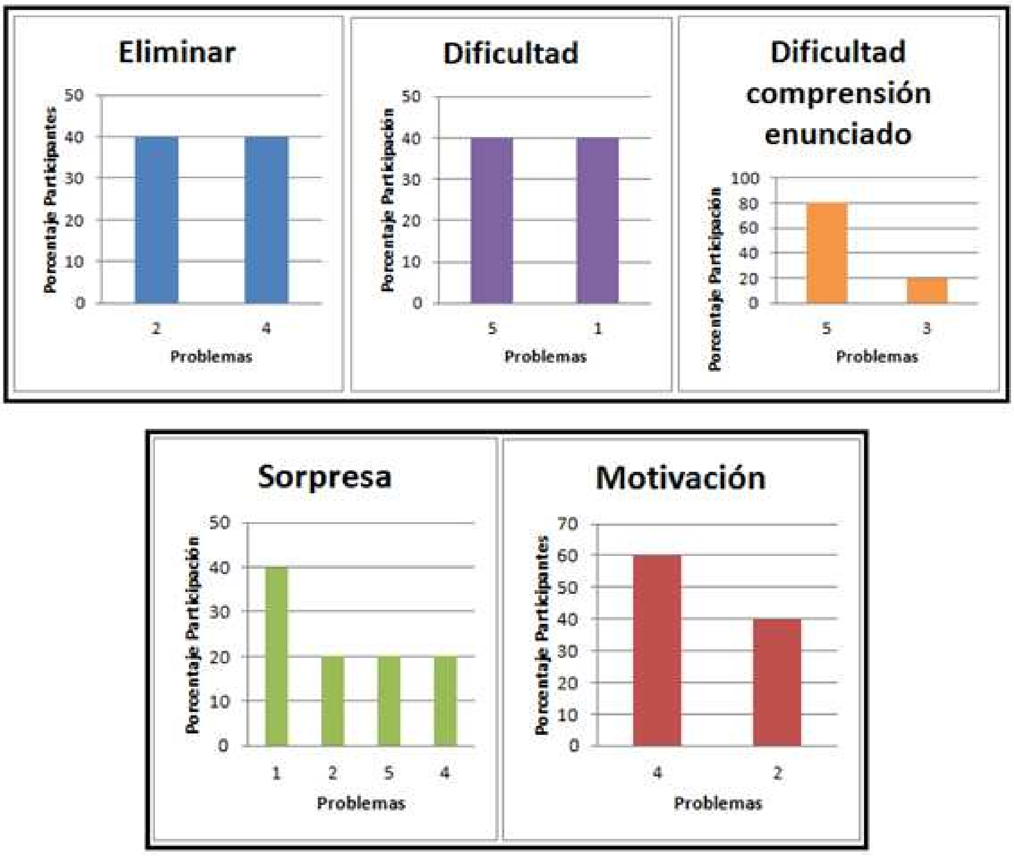
En este primer apartado se explicitan los gráficos de los resultados obtenidos en las variables (anexo B.2.3.1 VARIABLES) relacionadas con las cinco preguntas del Cuestionario de Reflexión: Sorpresa, Motivación, Dificultad, Dificultad Comprensión Enunciado y Eliminar.

2) ***Redes sistémicas.***

En este segundo apartado se explicitan las aportaciones cualitativas obtenidas a partir de las redes sistémicas (anexo B.2.3.2 REDES SISTÉMICAS) de las tres primeras preguntas del Cuestionario de Reflexión que hacen referencia a las variables Sorpresa, Motivación y Dificultad respectivamente. Las respuestas de los participantes a las preguntas 4 y 5 han sido explícitamente numéricas, sin reflexiones y por tanto se han recogido en las variables Dificultad Comprensión Enunciado y Eliminar del primer apartado.

PRUEBA PILOTO PARTE A

1) VARIABLES



Variables Cuestionario Reflexión

Comprobamos que las variables Eliminar y Dificultad no representan el 100% de los participantes debido a que alguno de ellos no ha respondido las preguntas relacionadas con estas variables.

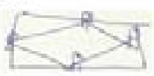
Los problemas 2.A y 4.A son en los que hemos identificado un mayor porcentaje (40%) de participantes que explicitaban eliminarlos. Los problemas 5.A y 1.A son los problemas que han generado mayor dificultad (40%) en la resolución, siendo también el problema 5.A el que ha generado mayor dificultad en la comprensión del enunciado (80%). El problema 1.A es el que ha generado mayor sorpresa (40%) y el problema 4.A mayor motivación (60%) a los participantes.

2) REDES SISTÉMICAS

Las redes sistémicas asociadas a cada una de las tres primeras preguntas del Cuestionario de Reflexión son:

	Respuestas	Participante	Conceptos implicados
Pregunta nº 1	El primero no sé si está bien pero si. Me contaba todos los cuadraditos y los he dividido en tres partes iguales de manera que me quedaban 12 por cada parte.	(A)	Sensación de incertidumbre. Solo considera la igualdad de partes en superficie no en forma.
	El primero. Si. Ocupando todos los vértices de la figura con 4 eles. La figura que me ha salido es ¼ parte de la figura real.	(B)	Considera la superficie y forma
	El 2 no lo he resuelto porque me venían a la cabeza posibles respuestas, pero las veía tan chorrada que no he puesto ninguna.	(C)	Falta de confianza en si mismo
	El de los arboles. No	(D)	
	El del cuadrado circunscrito. Si. He deducido que si el cuadrado circunscrito tenía una altura dos, el trozo del cuadrado grande paralelo, tenía que medir dos también. Los trozos sobrantes los he movido al interior del cuadrado central, los he sumado y luego he calculado el área del cuadrado grande.	(E)	Identificación del indicador MVII4. Imágen dinámica.

Respecto la primera pregunta referente a la variable sorpresa, enfatizamos en las respuestas de los participantes A y B relacionadas con el problema 1.A que consiste en dividir una figura geométrica en 4 partes iguales. Inferimos que el participante A tan solo aplica una estrategia reproductora, donde previamente ha identificado la unidad de superficie, y establece 4 partes sólo cuantitativamente equivalentes. En cambio el participante B concibe el concepto de igualdad, respecto a los parámetros superficie y forma. En este último caso el concepto de igualdad que aplica el estudiante es geométricamente más significativo.

	Respuestas	Participante	Conceptos implicados
Pregunta nº 2	El de la parcela. No lo recuerdo. 	(A)	No recuerda el enunciado, pero si la representación gráfica.
	El 4. Tenemos un cuadrado cuyos vértices son 4 árboles. Sin mover los árboles, haz un cuadrado cuya superficie sea el doble que el primero. Si lo he resuelto. Inscribiendo el cuadrado pequeño en otro, de manera que los arboles hagan la mitad de los lados.	(B)	Resuelve el problema inscribiendo un cuadrado dentro de otro.
	El 4, no sé bien como era. Me ha venido una manera de hacerlo alargando los lados del cuadrado y separándolos, es lo primero que me ha venido a la cabeza.	(C)	No reflexiona sobre la resolución. Representa más del doble de la superficie del cuadrado.
	El de la terraza. El área del rectángulo era 12 ya que 6x2=12. Entonces: 	(D)	Calcula las superficies de las figuras geométricas identificadas.
	El de la terraza. Una terraza mide dos metros de altura y 6m de longitud. Qué superficie tiene la terraza? I la zona sombreada? Si. He visto que los triángulos de los extremos median un tercio de la longitud total los he colocado en un extremo, para que encajaran y he restado su área total de la del rectángulo.	(E)	La idea del problema se gesta, cuando el participante "ve" que los triángulos de los extremos hacen 1/3 de la longitud total de la figura.

Respecto la segunda pregunta referente a la variable Motivación, por un lado destacamos el participante A que no consigue recordar el enunciado del problema pero sin embargo consigue realizar la representación gráfica de éste. Y por otro, el participante D que consigue visualizar la representación gráfica del problema 1.A y aplicar una estrategia visual de adición de superficies en la que previamente calcula mentalmente las superficies de todas las figuras geométricas que identifica. Enfatizamos también en la explicación del participante E que explicita como consiguió ver la resolución del problema 1.A. Inferimos que de manera implícita el participante desplaza y manipula los triángulos de los extremos hasta "encajarlos" y ver que constituyen una figura geométrica que representa una tercera parte de la figura original (terraza) del problema.

	Respuestas	Participante	Conceptos implicados
Pregunta nº 3	El primero, no encontraba la solución, creo que lo tengo mal. Yo lo he intentado pero creo que no.	(A) ⇒	Ensayo y error, sin llegar a encontrar la solución.
	El de dividir en cuatro, me he quedado en blanco.	(B) ⇒	Dificultad y bloqueo, por no encontrar la solución.
	El quinto. No entendía muy bien el enunciado.	(C) ⇒	Dificultad en la comprensión del enunciado.
	El 5. Porque las figuras me han desconcertado bastante.	(D) ⇒	Dificultad por la situación novedosa e innovadora.
	Lo de calcular el área, porque no me acordaba de cómo se calculaba.	(E) ⇒	Problemas en el calculo de superficies.

Y por último en la tercera pregunta relacionada con la variable Dificultad, observamos que los problemas 1.A y 5.A son los que han generado mayor dificultad. Entre las dificultades identificadas, podemos destacar la dificultad de comprensión en el enunciado, el bloqueo que puede producirse cuando el estudiante se enfrenta ante un problema novedoso por primera vez y el cálculo de superficies.

1) VARIABLES

Los resultados obtenidos en las variables (Anexo B.2.3.1 VARIABLES) nos indican que el problema 5.B con un 60% de los participantes fue el que generó mayor dificultad y dificultad en la comprensión del enunciado. En esta línea un 60% de los participantes también consideró eliminar el problema 5.B.

En cambio los problemas 2.B y 5.B fueron los que generaron una mayor sorpresa en un 40% de los participantes. Identificamos también que un 40% de los participantes consideraron el problema 1.B como el problema que más les había gustado y motivado.

2) REDES SISTÉMICAS

A partir de los resultados obtenidos en las redes sistémicas (anexo B.2.3.2 REDES SISTÉMICAS) explicitamos las siguientes reflexiones:

Respecto la primera pregunta relacionada con la variable Sorpresa, nos llama la atención los participantes F y G que han considerado el problema 5.B basado en un cambio dimensional como el problema que más les ha sorprendido aunque conciben no haberlo resuelto correctamente y también explicitan que ha sido el problema que más dificultad les ha generado. Concretamente el participante G, consigue ver la solución del camino más corto dando "vueltas" alrededor del cilindro así como visualizar la solución, en el desarrollo plano del cuerpo geométrico, representando la diagonal.

En la segunda pregunta relacionada con la variable Motivación, destacamos el participante H que después de explicar la resolución del problema que más le ha gustado (2.B), se da cuenta que no lo ha resuelto correctamente. Así como el participante J, que explícitamente concibe el ensayo y error como estrategia para resolver el problema 3.B que ha sido el que más le ha gustado. Y por último el participante G, que emplea una estrategia de medición de perímetros y áreas en el problema 1.B a partir de identificar como unidad de medida un triángulo.

Respecto la tercera pregunta relacionada con la variable Dificultad, enfatizamos en dos participantes (F,G) que han considerado el problema 5.B del cambio dimensional, como el más difícil y el que más les ha sorprendido. Identificamos dificultades en la comprensión del enunciado así como en la posible reestructuración del desarrollo plano que posibilita el cambio dimensional que puede facilitar la solución al problema. Destacamos también los participantes I y J que justifican tener mayor dificultad en los problemas 3.B y 1.B porque no son "*su fuerte*". Observamos que previamente a la resolución ya están condicionados ellos mismos con una actitud "No Favorable".

1) VARIABLES

Los resultados obtenidos nos indican que (Anexo B.2.3.1 VARIABLES) que ha habido participantes que no han respondido a las preguntas respectivas del cuestionario de reflexión referentes a las variables Eliminar y Dificultad Comprensión. En la variable Eliminar y Dificultad Comprensión identificamos que una mayoría de participantes (40%) han explicitado el problema 4.C. En la variable Dificultad, un 60% de los participantes consideran el problema 2.C como el que más dificultades les ha generado.
Finalmente el problema 1.C y 5.C fueron los que generaron una mayor motivación y sorpresa en un 80% y 40% de los participantes respectivamente.

2) REDES SISTÉMICAS

A partir de las redes sistémicas (anexo B.2.3.2 REDES SISTÉMICAS) destacamos algunas respuestas.
Respecto la variable Sorpresa, incidimos en los participantes K y M que explicitan los problemas 3.C y 2.C aunque no recuerdan las fórmulas del cálculo de superficies de algunas figuras geométricas necesarias para la resolución. También destacamos el participante L que explicita el problema 5.C y lo resuelve imaginándose "*un cubo de gelatina e imaginando como lo cortaría*"
Respecto la variable Motivación, destacamos las resoluciones planteadas por los participantes K y M, donde explicitan el procedimiento de cómo han trazado las líneas para resolver el problema 1.C, respecto el participante N que con un comportamiento más visual sencillamente se limita a representar la solución correcta. Destacamos el participante L, que explicita que ha podido discriminar la superficie más grande del problema 5.C, porque "*es una pregunta de lógica más que de mates y estoy acostumbrado a hacer problemas de lógica*".
El cálculo de superficies geométricas es la Dificultad que la mayoría de participantes (K,M,N,Ñ) explicitan. En algunos casos por no recordar o aplicar adecuadamente la fórmula en concreto de figuras geométricas que deberían ser conocidas según el currículum vigente en educación secundaria y en otros por no aplicar adecuadamente las estrategias para el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas. Posiblemente en estos casos, el no poder recordar la fórmula del cálculo de determinadas superficies geométricas puede haber generado un bloqueo a los estudiantes como para no poder llegar a plantear otras resoluciones de distinta naturaleza que pudieran solucionar el problema.

1) VARIABLES

Los resultados obtenidos en las variables (Anexo B.2.3.1 VARIABLES) Dificultad y Eliminar nos indican que una mayoría de participantes (60%) consideraron el problema 4.D. Este mismo problema fue el que generó mayor dificultad en la comprensión del enunciado en un 80% de los participantes.

En el problema 5.D identificamos la variable sorpresa en un 40% de los participantes y el problema 1.D fue el que generó mayor motivación en un 40% de los participantes.

2) REDES SISTÉMICAS

A partir de las redes sistémicas (anexo B.2.3.2 REDES SISTÉMICAS) destacamos algunas aportaciones cualitativas.

Respecto la variable Sorpresa nos ha llamado la atención, los participantes P y R que han considerado el problema 5.D basado en el cambio dimensional, como el que más les ha sorprendido, aunque no han conseguido resolverlo correctamente. El participante P, explicita que cree que ha podido resolverlo "*pensando en las dimensiones en 3D*".

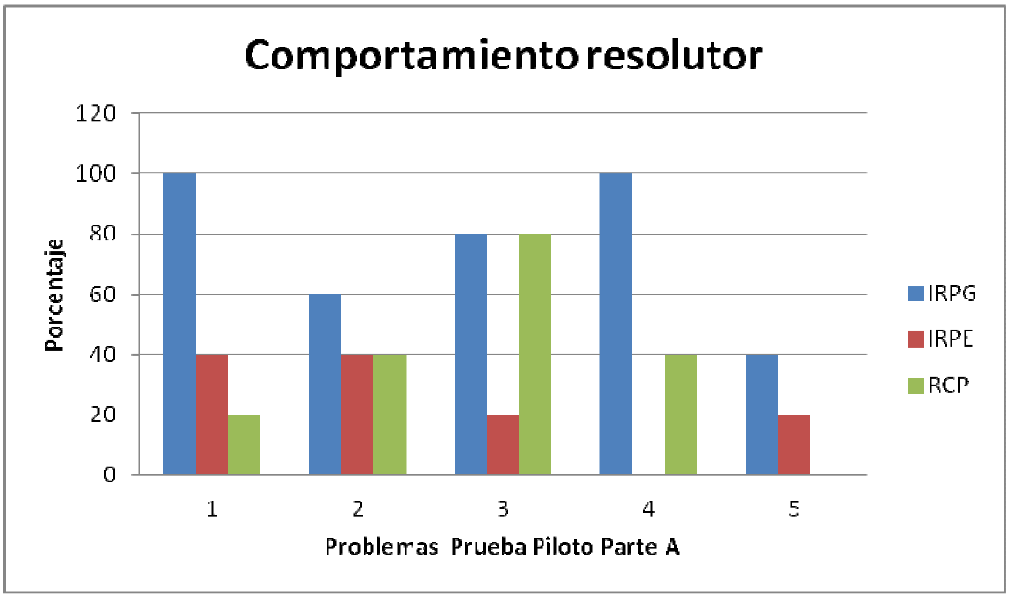
Respecto la variable Motivación, incidimos en el participante P por la resolución gráfica del problema 1.D que aporta como solución. Representando un cuadrado en la posición de un rombo. Posiblemente para este participante es más fácil visualizar el cuadrado mediante la posición del rombo. Destacamos también el participante R, que plantea una resolución original fragmentando el triángulo original del problema 2.D en un cuadrado en la posición de rombo y dos triángulos para construir un rectángulo y un cuadrado. Aunque no es una solución correcta según el enunciado del problema ya que el rectángulo y cuadrado deben construirse con todos los polígonos del triángulo.

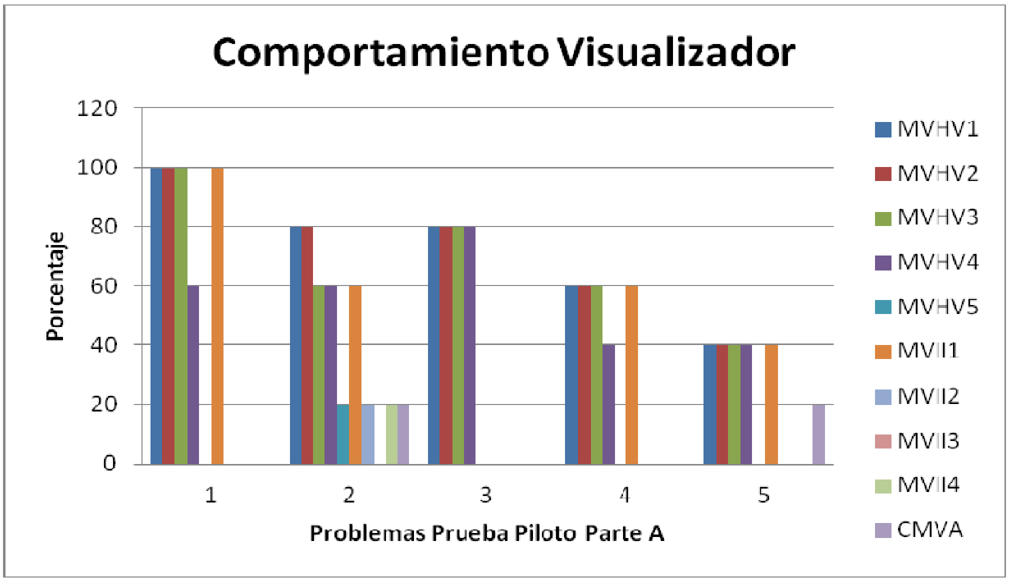
Una mayoría de participantes (O, P, R) han considerado el problema 4.B, basado en encontrar el camino más corto entre dos puntos de un tetraedro, como el problema más difícil. Algunos participantes explicitan dificultades en la comprensión del enunciado y posiblemente el hecho de no pensar el problema desde otra perspectiva mediante un cambio dimensional que permita el desarrollo plano del tetraedro, ha podido propiciar un cierto bloqueo o dificultad que les ha impedido resolver el problema. Por último enfatizamos en el participante Q que no ha podido identificar visualmente los polígonos necesarios en el problema 2.D que permitían encontrar una nueva reestructuración para construir un cuadrado y un rectángulo.

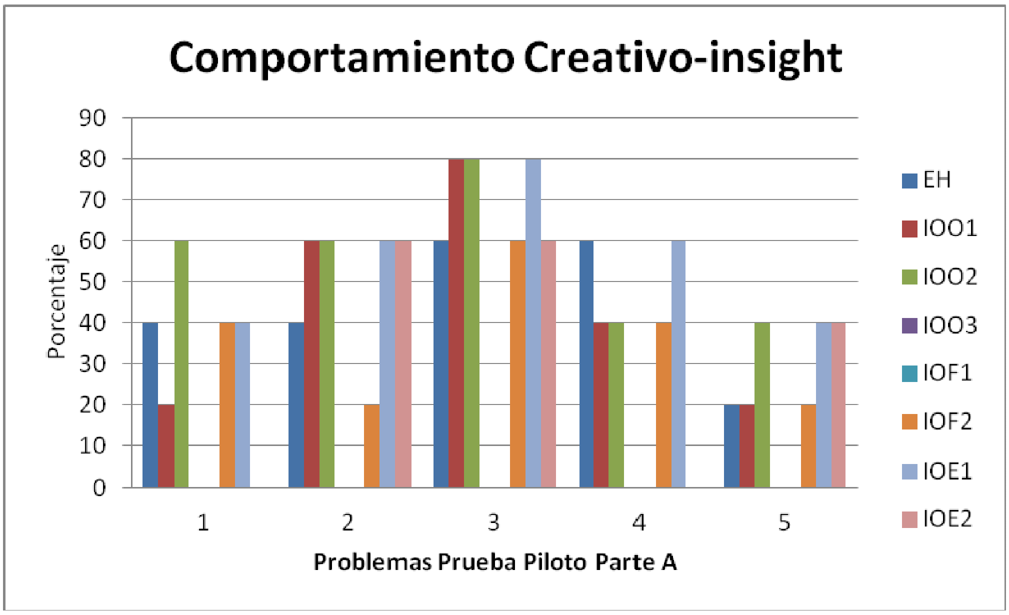
5.2.2 ANÁLISIS CUANTITATIVO CUESTIONARIO PROBLEMAS

Los gráficos del anexo *B.2.5 GRÁFICOS RESULTADOS PROBLEMAS*, reflejan el porcentaje identificado de indicios (TABLA 5.1.3.1.1 DE INDICIOS) en las resoluciones de los participantes en los cuestionarios de problemas que forman cada una de las partes A,B,C y D de la Prueba Piloto.

A modo de ilustración presentamos los gráficos, en los que se representan los indicios identificados en las resoluciones de los problemas de la parte A de la prueba piloto. Los indicios están clasificados según los tres comportamientos de estudio en los que centramos nuestra investigación: Comportamiento Resolutor, Comportamiento Visualizador y Comportamiento Creativo-Insight.







A partir de la interpretación minuciosa de los datos obtenidos y reflejados en los gráficos anteriores pueden inferirse resultados a cerca de los niveles de adquisición de los comportamientos que investigamos así como las posibles dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos ip^2.

Para una mejor concreción, notificaremos los problemas (1r dígito.2n dígito) de manera que el primer dígito indicará el número del problema respectivo y el segundo dígito hará referencia a la parte (A,B,C o D) de la Prueba Piloto a la que pertenece.

Comportamiento Resolutor

Centrándonos en los indicios que hacen referencia a los descriptores relativos al Comportamiento Resolutor (IRPG, IRPE, RCP) observamos que el primer resultado a destacar es el bajo porcentaje de respuestas correctas identificadas. En la siguiente Tabla 5.2.2 representamos el porcentaje de respuestas correctas (RCP) obtenidas en los problemas geométricos ip^2 de la prueba piloto:

Porcentaje de aciertos	**Problemas**
100%	1.C
80%	3.A
60%	1.D
40%	2.A, 4.A, 1.B, 4.B, 3.C
20%	1.A, 2.B, 2.C
0%	5.A, 5.B, 4.C, 5.C, 2.D, 3.B, 3.D, 4.D, 5.D

Tabla 5.2.2: Porcentaje Indicio RCP

No obstante cabe destacar que la mayoría de problemas se han intentado contestar mediante una representación visual (IRPG) o mediante alguna explicación escrita que explicita la estrategia de resolución (IRPE). En cambio los problemas en los que hemos identificado una mayor dificultad debido a que no se han intentado resolver de manera explícita son:

Porcentaje	Problemas
60%	5.A
40%	3.D, 5.B, 2.A
20%	3.A, 3.B, 4.B, 4.C, 5.C, 5.D, 2.D

Tabla 5.2.2.1: Porcentaje problemas no intentados

Comprobamos también que el porcentaje de la variable de control éxito (EX) que definimos como la relación entre el número de respuestas correctas sobre el número de intentos identificados en un problema concreto, es significativamente bajo. Es interesante corroborar en este tipo de problemas geométricos ip^2 que el porcentaje de aciertos observados es independiente del número de respuestas que reciben. Los problemas que identifican una mayor frecuencia de respuestas manifiestan un porcentaje bajo de aciertos, contradiciendo el hecho extendido en docencia de que los alumnos responden más aquellos problemas que mejor saben hacer. Un análisis más fino corrobora que prácticamente más del 50% de los problemas realizados entre las cuatro partes de la Prueba Piloto (problemas 1.A, 5.A, 2.B, 5.B, 2.C, 4.C, 5.C, 2.D, 3.D, 4.D, 5.D) denotan un porcentaje de intentos (IRPG o IRPE) mayor o igual al 80% y sin embargo manifiestan un porcentaje de aciertos (EX) menor o igual al 20%.

Comportamiento Visualizador

Respecto a los indicios que forman parte de los descriptores (MVHV, MVII, CMVA) que denotan el Comportamiento Visualizador mencionaremos previamente algunas reflexiones relevantes, para facilitar la comprensión e interpretación de los resultados obtenidos.

Observamos que algunos indicios como por ejemplo la Imagen Patrón (MVII2) o la Imagen dinámica (MVII4) se identifican en un porcentaje bajo o prácticamente nulo en la mayoría de problemas de la Prueba Piloto.

El indicio imagen cinestésica (MVII3) no se ha evaluado en esta Primera Fase Diagnóstica por ese motivo el porcentaje de identificación es nulo en todos los problemas. En la segunda fase diagnóstica se evaluará en la entrevista semiestructurada.
En cambio el indicio Imagen pictórica o concreta (MVII1) es el mayormente identificado (Presmeg, 1986) en los problemas de la Prueba Piloto, al ser el tipo de imágenes más frecuentemente utilizadas en la resolución de problemas geométricos a nivel escolar: figuras geométricas, polígonos y circunferencias que sustentan las estrategias de resolución.

Este dato podría suponer una contradicción con el elevado porcentaje de algunos indicios que refleja el descriptor habilidad visual (MVHV) cuando a priori suponemos que una estrategia visual está supeditada en parte por la utilización de imágenes o representaciones visuales. Este fenómeno radica en comprender que en una mayoría de problemas geométricos ip^2 la solución implica de manera intrínseca la representación de un determinado diagrama visual o imagen; por otro lado, en muchos de los casos las imágenes necesarias se proporcionan en el enunciado. En estos casos se *guía* implícitamente al estudiante a poder emplear esta herramienta en la resolución. Por ese motivo solo hemos identificado los indicios del descriptor imagen inferida MVII, cuando el participante ha construido una imagen o diagrama visual nuevo independientemente del proporcionado por el enunciado del problema.

Prácticamente en más del 80% de los problemas geométricos ip^2 planteados en la prueba piloto, se identifican al menos un 80% del conjunto de indicios relativos al descriptor MVHV. Inferimos por tanto que la mayoría de participantes empleó en algún momento determinado habilidades visuales en la mayoría de los problemas que intentó resolver. Este fenómeno puede parecernos contradictorio con otras investigaciones (Presmeg, 1981; González Martín, 2004) que manifiestan la reticencia de los estudiantes a visualizar en la resolución de problemas.

Comportamiento Creativo-Insight

Respecto el estudio del comportamiento Creativo-Insight pondremos un especial énfasis en el estudio de los indicios correspondientes a los descriptores: Originalidad, Flexibilidad y Elaboración.

En el estudio del Descriptor Originalidad formado por los indicios IOO1, IOO2 y IOO3 destacaremos de forma prioritaria la identificación del indicio IOO1 por ser significativamente importante en la generación de una estrategia original, innovadora y creativa cuando se descubre una relación remota entre conceptos, figuras o cuerpos geométricos posibilitada a partir de una determinada reestructuración de los elementos del problema geométrico.

El Indicio IOO1 se ha identificado independientemente de si la relación remota entre conceptos, figuras o cuerpos geométricos conducía a una estrategia creativa que posibilitaba la solución correcta del problema o no. A continuación exponemos en la siguiente tabla el porcentaje identificado en los problemas de la Prueba Piloto.

Porcentaje indicio IOO1	Problemas
100%	1.C
80%	3.A
60%	2.C, 2.A
40%	4.A, 4.B, 3.C, 1.D
20%	1.A, 5.A, 1.B, 5.B, 3.B, 2.D

Tabla 5.2.2.2: Porcentaje Indicio IOO1

En el problema 1.C identificamos en todos los participantes el indicio IOO1 debido a que mediante alguna estrategia innovadora y original probablemente descubrieron alguna reestructuración o relación remota que les permitió continuar con la resolución del problema. Por otro lado el Indicio IOO2, *"inventar sus propias estrategias"* se ha identificado en un porcentaje igual o superior al IOO1 en todos los problemas de la Prueba Piloto realizada, a excepción de los problemas 1.C y 3.B debido a que en estos problemas algunos participantes solamente explicitaban la solución final del problema sin especificar el método o estrategia inventada en la resolución.

En lo relativo a los indicios del Descriptor Flexibilidad (IOF1, IOF2) destacamos el indicio IOF2 *"tantear, retroceder y avanzar"* identificado en los problemas de la Prueba Piloto:

Porcentaje IOF2	Problemas
100%	
80%	1.C, 2.B, 3.B
60%	2.C, 5.B, 3.A
40%	5.D, 1.A, 4.A

Tabla 5.2.2.3: Porcentaje Indicio IOF2

En cambio el Indicio IOF1 prácticamente no se ha identificado debido a que generalmente en las resoluciones los participantes expresan y representan los elementos y datos del problema de manera unilateral desde una misma vertiente y en pocas ocasiones se identifican resoluciones de naturaleza distinta. Generalmente los participantes independientemente del problema emplean una única representación de los elementos del problema y perspectiva en la que sustentan sus resoluciones.

En lo referente a los Indicios del Descriptor Elaboración, incidimos en el IOE1 *"construir modelos para facilitar la comprensión"* identificado en los problemas siguientes:

Porcentaje IOE1	Problemas
100%	2.B
80%	3.A, 3.B
60%	2.A, 4.A, 2.D, 4.D, 5.D
40%	1.A, 5.A, 1.B, 4.B, 5.B, 2.C, 5.C, 1.D, 3.D

Tabla 5.2.2.4: Porcentaje Indicio IOE1

En cambio el Indicio IOE2, *"aplicar y organizar adecuadamente conceptos de la matemática escolar"* se ha identificado en muy pocas ocasiones ya que entendemos que una mayoría de resoluciones que pueden propiciar la ocurrencia del insight están basadas en el método visual es decir en alguna representación o imagen y/o en la aplicación de alguna habilidad de visualización. En estos casos no hemos identificado el Indicio IOE2 porque las imágenes o habilidades visuales ya se identifican en otros indicios de la categoría de Descriptores del método visual. Sin embargo, sí hemos encontrado resoluciones donde los participantes se han apoyado en una estrategia analítica errónea, como por ejemplo no aplicar correctamente el cálculo de superficies, no recordar la fórmula del área de alguna figura geométrica o realizar errores en el cálculo algebraico.

5.2.3 ANÁLISIS CUALITATIVO. CUESTIONARIO PROBLEMAS.

Desde una perspectiva cualitativa nos interesa ponderar significativamente el valor del descriptor Originalidad, por encima de los descriptores Flexibilidad o Elaboración. Algunos de los problemas geométricos ip^2 que estudiamos son convergentes y otros divergentes tal y como explicamos en el apartado *2.1.3 INSIGHT CONVERGENTE VERSUS INSIGHT DIVERGENTE*. Estudiaremos la ocurrencia del insight mediante la

identificación de estrategias innovadoras y originales. Consideramos que los tres descriptores de la categoría de indicadores Proceso Creativo de Reestructuración Insight Observado (IO) son los que pueden influir en la creación de estrategias creativas.
Parece lícito pensar que en los problemas geométricos ip^2 que hemos identificado porcentajes altos en el Descriptor Originalidad, éste Descriptor también puede estar relacionado de forma implícita con haber planteado al menos una resolución de naturaleza distinta (Flexibilidad) a las que generalmente el estudiante realiza en el contexto escolar. Posiblemente también puede estar relacionado con representar los datos del problema al menos de una forma diferente a la habitual y construir la resolución de forma adecuada (Elaboración). Consideramos que el descriptor Originalidad es más relevante porque en cierta manera y en algunos casos podría englobar a los descriptores Flexibilidad y/o Elaboración pero no al contrario. Es decir, plantear estrategias de resolución de distinta naturaleza o construir modelos que faciliten el desarrollo de una resolución, pueden influir pero no tienen por qué ser necesariamente vinculantes a una estrategia final considerada original.

Esto nos hace plantearnos una cierta jerarquía en cuanto a la relevancia e influencia de los descriptores definidos. Por este motivo en primer lugar consideraremos la Originalidad, en segundo lugar la Flexibilidad y en tercer lugar la Elaboración.
En primer lugar valoraremos el descriptor Originalidad, en base a la novedad y las posibles conexiones no triviales que el estudiante pueda realizar o inventar entre conceptos, figuras o cuerpos geométricos. En segundo lugar valoraremos la Flexibilidad, en virtud de la capacidad del alumno en tantear, emplear distintos enfoques y organizar datos de formas diferentes. Y por último en tercer lugar valoraremos la Elaboración en cuanto a saber expresar y construir la idea o estrategia innovadora.

El análisis cualitativo se realizará en aquellos problemas donde el análisis cuantitativo genere discrepancias o no garantice una interpretación significativa en el proceso de selección de los problemas que formaran parte de la siguiente Fase Diagnóstica de Relación. A continuación realizaremos un análisis previo según el criterio en el que consideraremos la selección de aquellos problemas geométricos en los que por un lado se identifiquen un mayor porcentaje de Indicios en el comportamiento Creativo-Insight, priorizando el siguiente orden Originalidad (IOO1, IOO2, IOO3), Flexibilidad (IOF1, IOF2) y Elaboración (IOE1, IOE2); y por otro se identifiquen al menos la mitad de los indicios del Descriptor Habilidad Visual (MVHV). En el caso de tener identificado el mismo porcentaje de un indicio del comportamiento Creativo-Insight en dos problemas, se priorizará la identificación de los Indicios según el orden preestablecido anteriormente. En la siguiente tabla 5.2.3 exponemos los problemas que cumplen el criterio anterior:

Porcentaje Estudiantes	100%	80%	60%	40%	20%
Criterio	1.C	3.A	2.A, 2.C	4.A, 4.B, 3.C, 1.D	1.A, 5.A, 1.B, 5.B, 2.D, 3.B

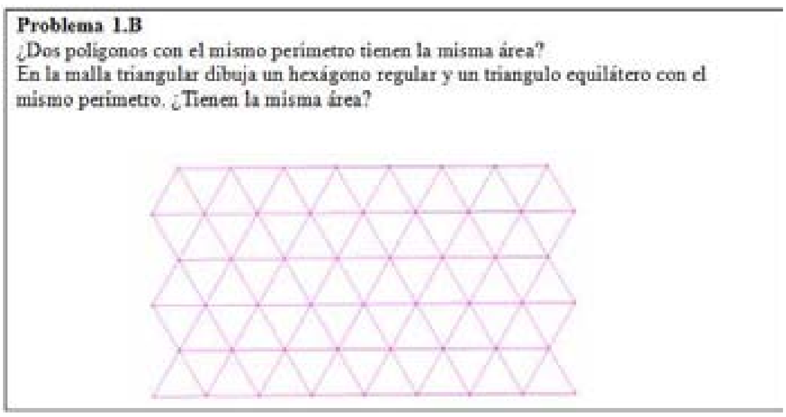
Tabla 5.2.3: Porcentaje Estudiantes verifican Criterio

En esta primera clasificación hemos obtenido 14 problemas, aunque nos va a interesar seleccionar sólo 10 problemas para la siguiente Fase Diagnóstica de Relación. Realizaremos un análisis más fino en los problemas (1.A, 5.A, 1.B, 5.B, 2.D, 3.B) que hemos identificado un porcentaje más bajo (20%) del criterio anterior. Estudiaremos la frecuencia de identificación de los restantes indicios (ver tabla 5.2.3.1) que pertenecen al comportamiento Creativo-Insight.

	Originalidad			Flexibilidad		Elaboración	
Problema	IOO1	IOO2	IOO3	IOF1	IOF2	IOE1	IOE2
1.A	20%	60%	0%	0%	40%	40%	0%
5.A	20%	40%	0%	0%	20%	40%	40%
1.B	20%	80%	0%	0%	0%	40%	0%
5.B	20%	80%	0%	0%	60%	40%	60%
2.D	20%	80%	0%	0%	20%	60%	0%
3.B	20%	0%	0%	0%	80%	80%	0%

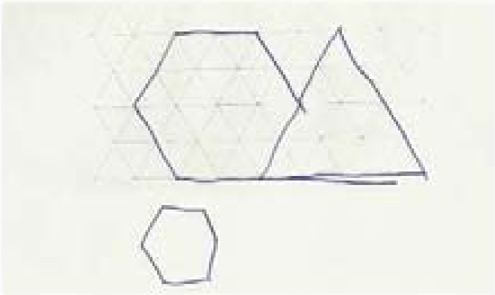
Tabla 5.2.3.1: Porcentaje Indicios Comportamiento Creativo

Corroboramos que en los problemas 1.B, 5.B y 2.D se han identificado un mayor porcentaje de indicios, priorizando la frecuencia según el orden establecido en los descriptores Originalidad, Flexibilidad y Elaboración. Completaremos el estudio de estos tres problemas a partir del análisis cualitativo de las redes sistémicas correspondientes. A continuación exponemos las redes sistémicas de los tres problemas.

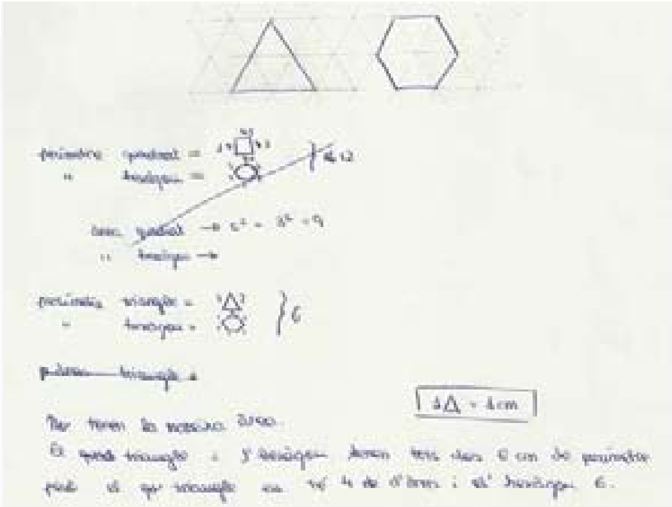


Participante | Conceptos implicados

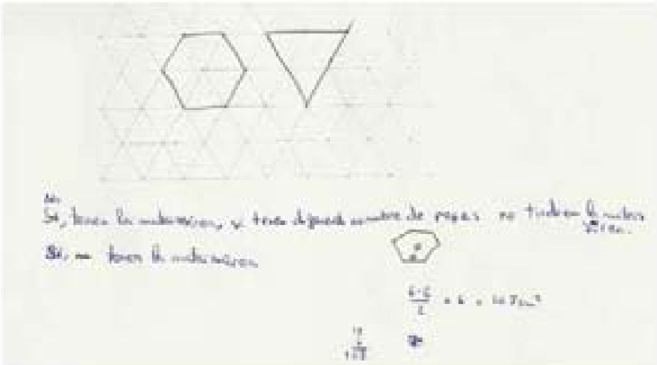
(C) Responde correctamente la pregunta concreta sin argumentarla. No explicita estrategias utilizadas.



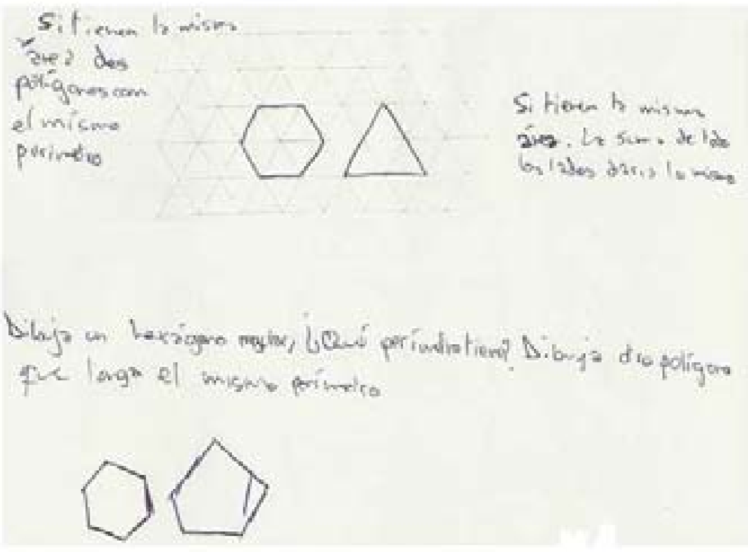
(A) Responde correctamente las dos preguntas, sin argumentarlas. No explicita ninguna analogía. Intento de ensayo y error.



(B) Concibe explícitamente la adición de areas como estrategia. Responde correctamente la pregunta concreta. No responde la pregunta general.



(D) Explicita la adicion de areas como estrategia. Solo responde la pregunta concreta.



(E) No concibe la adición de areas como estrategia. No argumenta ninguna estrategia explícita.

Intento de ensayo y error.

Esquema 5.2.3: Red sistémica Problema 1.B

Los participantes que resuelven el caso concreto del hexágono y triángulo equilátero, inferimos que emplean una estrategia de adición de superficies a partir de identificar la figura geométrica unidad, aunque de manera explícita sólo un participante así lo representa. Algunos participantes en cambio solo se limitan a contestar alguna de las preguntas sin explicitar ninguna estrategia de resolución, solo representan el hexágono y el triángulo equilátero.

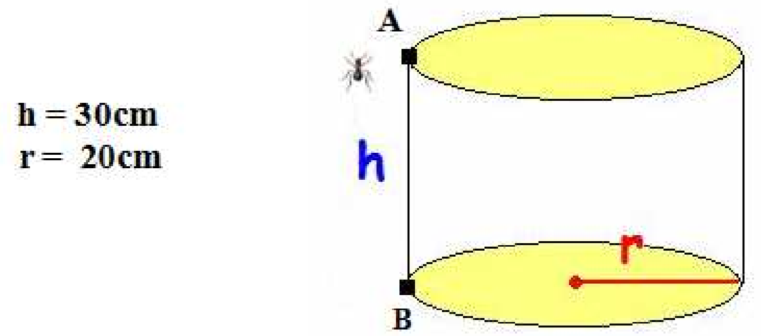
A excepción del participante A no se contesta a la primera pregunta, bien por la dificultad en generalizar o porque al responder la segunda parte del problema los participantes ya no tienen en cuenta la primera.

El participante B de manera explícita aplica una estrategia aditiva para calcular el perímetro del hexágono y triángulo.

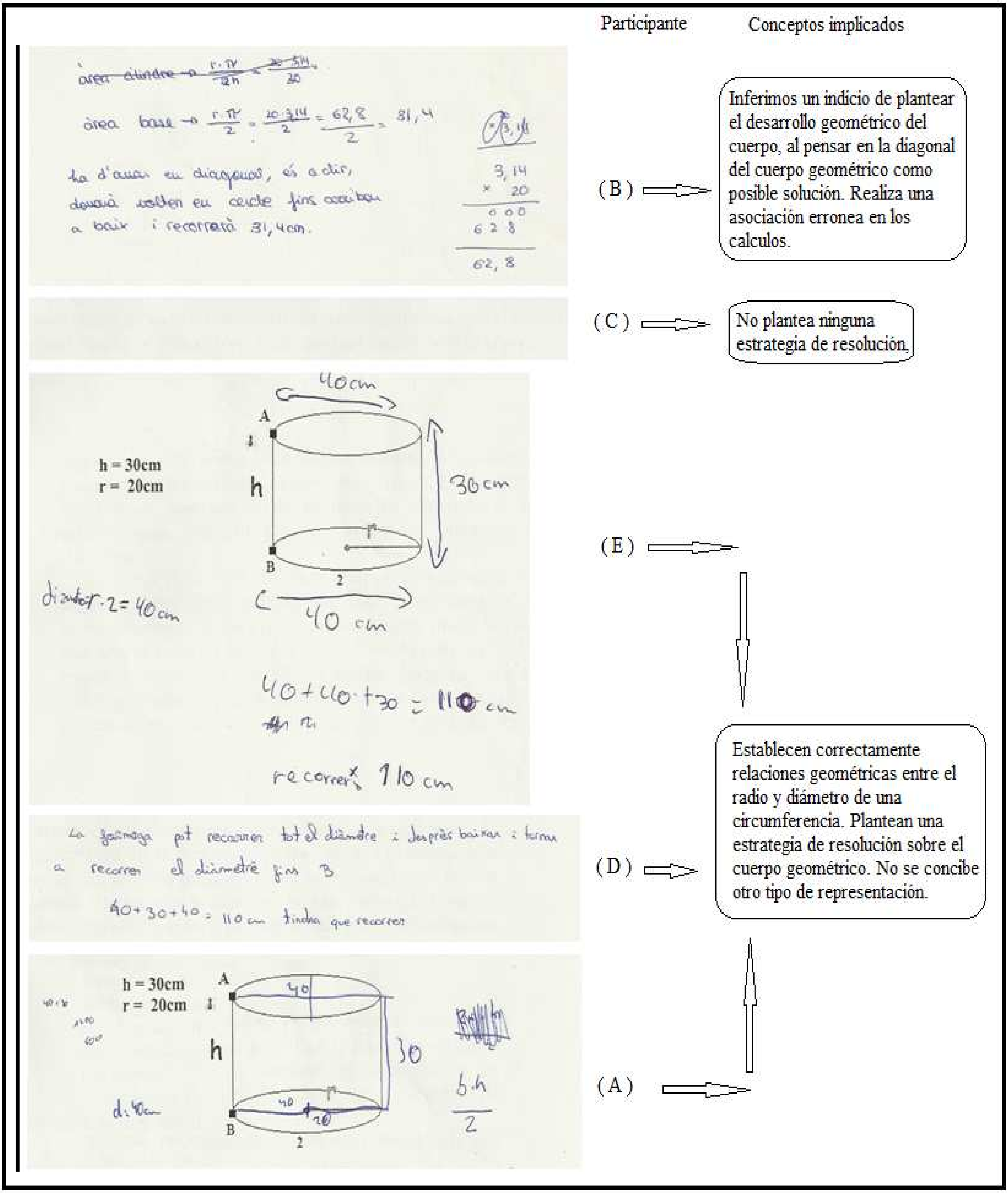
A continuación exponemos el problema 5.B:

Problema 5.B

Una hormiga se encuentra en un cilindro de altura 30cm y radio 20cm, en la posición que indica la figura. Quiere ir del punto A al punto B por la superficie lateral del cilindro (sin bajar por la altura), empleando el camino más corto, que distancia recorrerá?



Y la red sistémica correspondiente:



Esquema 5.2.3.1: Red sistémica Problema 5.B

Inferimos que este problema 5.B genera dificultad y complejidad en los participantes debido a que ninguno lo ha resuelto correctamente. Posiblemente plantearse el cuerpo geométrico mediante su desarrollo plano, conlleva la dificultad implícita de pensar el problema desde la perspectiva del cambio dimensional. Dos participantes trazan el camino más corto a partir de la representación en línea recta del punto A al B, en la superficie del cuerpo geométrico. No diferencian entre la superficie lateral y la superficie total y por tanto realizan la adición de distancias mínimas. El participante D imagina el camino más corto mediante una estrategia mental sin necesidad de realizar la representación visual.

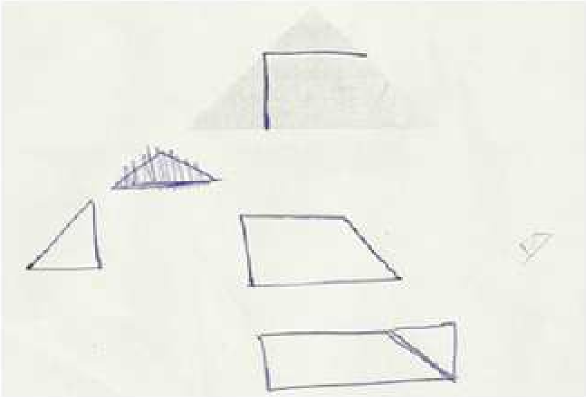
Nos ha sorprendido la capacidad de imaginación del participante B, respecto los otros participantes, porque el camino más corto alrededor de la superficie lateral parece ser que lo interpreta como la diagonal en el plano de manera implícita. Interpretamos que "voltes en cercle" es una manera de expresar la hélice. Dicho participante muestra rasgos de aproximarse a pensar el problema desde la perspectiva dimensional, aunque la resolución numérica es incorrecta.

A continuación exponemos el problema 2.D:

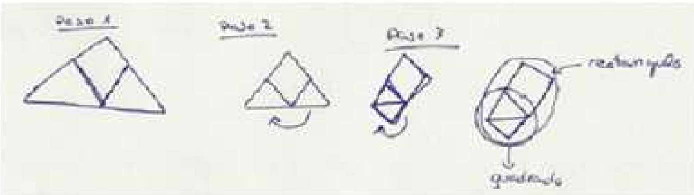
Problema 2.D
Divide el siguiente triangulo en 3 poligonos de forma que éstos puedan combinarse formando un cuadrado y también un rectángulo.

Y la red sistémica respectiva:

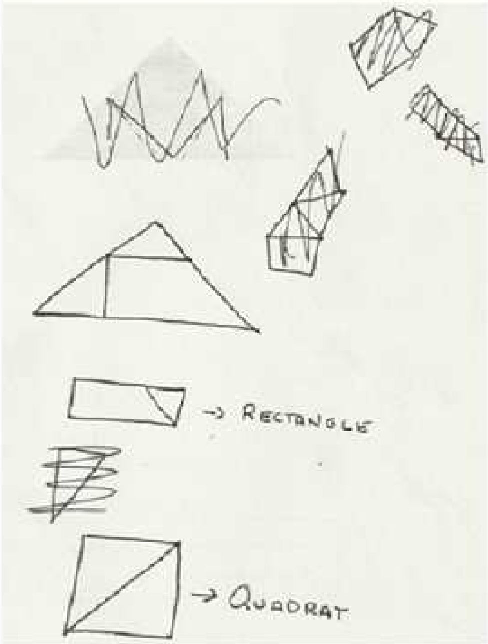
Participante | Conceptos implicitos



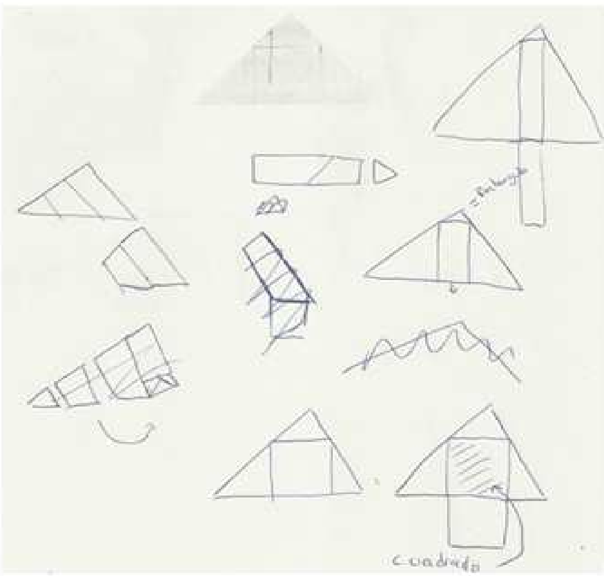
(B) ⇨ Fragmenta en tres polígonos el triángulo. Supone las medidas para que dos de los polígonos se combinen formando sólo el rectángulo.



(D) ⇨ Fragmenta el triángulo original y combina los tres polígonos. Supone las medidas para construir el rectángulo, aunque el polígono que considera un cuadrado no lo parece en su representación. Construye el cuadrado que pide el enunciado solo a partir de dos polígonos.



(A) ⇨ Fragmenta y combina figuras geométricas. Supone a priori que las medidas son las adecuadas para formar los polígonos que pide el enunciado. No concibe que los tres fragmentos geométricos (polígonos) deben generar el rectángulo y el polígono.
La solución no cumple el enunciado.



(E) ⇨ No cumple el enunciado, por fragmentar el triángulo en 4 polígonos. No los combina para obtener el cuadrado.

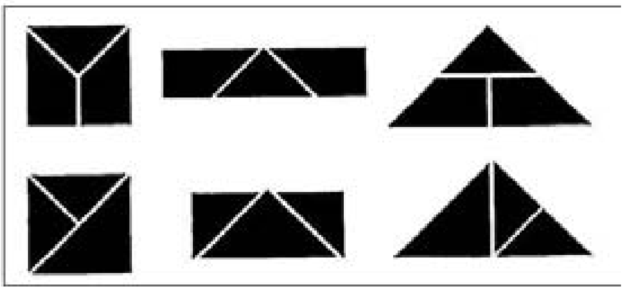
(C) ⇨ No responde al problema

Esquema 5.2.3.2: Red sistémica Problema 2.D

Los resultados en el problema 2.D muestran que una mayoría de participantes han aplicado la estrategia que sugiere el enunciado de fragmentar el triángulo inicial en distintas partes con el objetivo de aplicar una estrategia de reestructuración y combinación y así poder construir el cuadrado y rectángulo requerido. Esta perspectiva de resolución denota cierta dificultad, porque es preciso ensayar la fragmentación con distintos tipos de polígonos, hasta identificar la combinación adecuada. En una mayoría de casos, inferimos que debido a la dificultad del problema los participantes no lo resuelven adecuadamente, porque construyen el cuadrado o el rectángulo independientemente del número de polígonos indicado en el enunciado.

Una posible solución vendría determinada por una perspectiva de abordaje del problema distinta. En lugar de dividir el triángulo, iniciar el problema dividiendo un cuadrado en tres polígonos que su combinación permita obtener un rectángulo y un triángulo.

A continuación ilustramos un par de soluciones.



A partir del análisis descriptivo realizado en los problemas 1.B, 5.B y 2.D destacamos algunas consideraciones.

El problema 1.B puede ser significativo en nuestra investigación debido a que abordar la relación entre el perímetro y área a partir de casos concretos, puede propiciar estrategias que posibiliten en casos generales la ocurrencia del insight geométrico

En el problema 5.B consideramos la estrategia del cambio dimensional especialmente significativa porque puede propiciar la ocurrencia del insight en la resolución del problema. Dentro de la categoría de problemas geométricos de reestructuración conceptual, este es uno de los problemas donde el insight puede ser promovido de manera única por una estrategia basada en el cambio dimensional (Weisberg, 1996).

Por último el problema 2.D nos ha parecido interesante por generar estrategias de resolución suficientemente variadas que pueden posibilitar el insight geométrico.

A continuación realizamos la selección final de problemas.

5.2.4 ANÁLISIS GLOBAL Y SELECCIÓN FINAL DE PROBLEMAS

Las indicios respectivos a los descriptores definidos en la *TABLA INDICIOS* del apartado *5.2.1 ANALISIS CUANTITATIVO CUESTIONARIO PROBLEMAS* nos permiten inferir e interpretar las posibles relaciones entre el Comportamiento Resolutor, el Comportamiento Visualizador y el Comportamiento Creativo-insight identificado en la resolución de los problemas geométricos ip^2 de la Prueba Piloto.

Los resultados ponen de manifiesto que aquellos problemas resueltos mediante el método visual tienen más posibilidades de éxito, debido a que en la mayoría de problemas geométricos ip^2 que se han resuelto correctamente se han identificado habilidades de visualización o imágenes. El método visual se ha encontrado presente en todos aquellos problemas en los que se han aplicado estrategias e ideas originales o innovadoras independientemente de si éstas conducían a la solución correcta del problema o no. Parece ser que en los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, identificamos una cierta relación explícita entre el hecho de tener éxito en la resolución del problema y emplear una tendencia visualizadora. Lo que interpretamos como un rasgo de que el método de visualización identificado en las resoluciones de nuestro trabajo basado principalmente en algunas habilidades de visualización (Del grande, 1990) y en menor caso en algunas imágenes (Presmeg, 1986) podría facilitar la resolución de los problemas geométricos ip^2 estudiados en nuestra investigación.

Por ese motivo nos va a interesar estudiar y seleccionar para la siguiente Fase Diagnóstica de Relación aquellos problemas geométricos en los que al menos se han identificado más de la mitad de los Indicios asociados al Descriptor Habilidad Visual (MVHV).

Finalmente seleccionaremos 10 problemas geométricos ip^2 según los dos criterios explicitados a continuación:

1) Resoluciones realizadas correctamente en las que se identifica el indicio RCP y al menos la mitad de indicios del descriptor MVHV (Habilidad Visual).

2) Resoluciones en las que se priorizará la frecuencia en la identificación de indicios respecto a los descriptores en el siguiente orden Originalidad (IOO1, IOO2, IOO3), Flexibilidad (IOF1, IOF2, IOF3) y Elaboración (IOE1, IOE2, IOE3) y en las que se identificaran al menos la mitad de indicios del descriptor

MVHV (habilidad visual) como describimos en la tabla 5.2.3.1 en el apartado *5.2.3 ANÁLISIS CUESTIONARIO PROBLEMAS.*

Exponemos los problemas geométricos ip^2 cuyas resoluciones verifican cada uno de los criterios anteriores:

Porcentaje estudiantes	100%	80%	60%	40%	20%
1.Criterio	1.C	3.A	1.D	2.A 4.A 1.B, 4.B 3.C	2.C
2.Criterio	1.C	3.A	2.A, 2.C	4.A 4.B 3.C 1.D,	1.A,5.A,1.B, 5.B,2.D, 3.B

Tabla 5.2.4: Porcentaje 1r y 2n Criterio. Selección problemas.

A partir de la tabla 5.2.4 seleccionamos los problemas geométricos ip^2 que verifican los dos criterios simultáneamente:

1.C, 3.A, 2.A, 2.C, 1.D, 4.A, 4.B, 3.C, 1.B

Sin embargo necesitamos seleccionar un problema más para obtener la propuesta final formada por 10 problemas. Los resultados de la tabla 5.2.4 nos muestran un conjunto de problemas geométricos ip^2 que verifican sólo el segundo criterio: 1.A, 5.A, 5.B, 2.D y 3.B.

En el apartado *5.2.3 ANÁLISIS CUALITATIVO. CUESTIONARIO DE PROBLEMAS,* analizamos la propuesta de problemas que cumplían el seg*undo criterio (Tabla 5.2.3). Los resulta*dos del análisis realizado sobre los problemas 1.A, 5.A, 5.B, 2.D y 3.B indica que las resoluciones obtenidas en los problemas 5.B y 2.D son las que a nivel cuantitativo (mayor porcentaje identificado de indicios en el siguiente orden Originalidad, Flexibilidad y Elaboración) y a nivel cualitativo (estudio de las resoluciones y redes sistémicas) son más significativas para nuestra investigación.

En el apartado *5.2.1 ANÁLISIS CUESTIONARIO REFLEXIÓN* explicitamos que una mayoría de participantes en el problema 5.B denotaron cierto bloqueo y dificultad en la comprensión del enunciado, como en el planteamiento de resoluciones y estrategias desde distintas perspectivas que pudieran estar sustentadas en el cambio dimensional como por ejemplo el desarrollo plano del cuerpo geométrico. En cambio en el problema 2.D no se manifiesta una dificultad mayoritaria por parte de los participantes en el planteamiento de estrategias subyugadas a la fragmentación y combinación de las figuras geométricas que intervienen en el problema.
Finalmente discrepamos respecto del problema 2.D, independientemente de las dificultades que presenten los estudiantes, por identificar estrategias creativas de resolución como la fragmentación y combinación de figuras geométricas que son similares a las empleadas en otros problemas geométricos ya seleccionados como el 2.A y 1.D. Nos interesa ampliar el estudio de las distintas estrategias que pueden posibilitar la ocurrencia del insight. Por tanto hemos seleccionado finalmente el problema 5.B.

Por tanto los 10 problemas geométricos ip^2 seleccionados finalmente para la siguiente fase Diagnóstica de Relación son:

1.C, 3.A, 2.A, 2.C, 1.D, 4.A, 4.B, 3.C, 1.B, 5.B

La distribución de estos problemas en la segunda Fase Diagnóstica se encuentra en la siguiente tabla 5.2.5 y en el anexo *C.1 CUESTIONARIO DE PROBLEMAS.*

Segunda Fase Diagnóstica de Relación Problemas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primera Fase Diagnóstica de Selección Selección Final Problemas	2.A	2.C	3.A	4.A	1.B	1.C	1.D	5.B	4.B	3.C

Tabla 5.2.5: Selección Final Problemas

Respecto el problema 1.B seleccionado destacamos que hemos considerado necesario profundizar en el estudio de la posible ocurrencia del insight en problemas o actividades que requieran de la relación perímetro-área de figuras geométricas y por ese motivo hemos realizado una adaptación/ampliación del problema (anexo *C.1 CUESTIONARIO DE PROBLEMAS).*

En los problemas geométricos estudiados la identificación del Indicio Descubrir Relaciones (IOO1) hace referencia a cuando el participante ha planteado una relación o reestructuración geométrica no trivial e innovadora, como por ejemplo cuando se ha planteado adecuadamente una discriminación entre la forma y el tamaño de dos figuras geométricas o cuando se ha visto la equivalencia entre determinadas figuras geométricas o cuando se aplica una reestructuración desde una perspectiva desconocida a priori, entre otros planteamientos relevantes.

De forma similar al identificar el Indicio Descubrir Relaciones (IOO1) en las resoluciones geométricas de los participantes de manera intrínseca también se ha identificado el Indicio Inventar Estrategias (IOO2) cuando hemos corroborado que se ha aplicado la idea o el descubrimiento de la nueva relación mediante una resolución no reproductiva (Wertheimer, 1959). Como por ejemplo cuando se ha aplicado una estrategia de adición y sustracción de determinadas superficies o la reubicación de algunas figuras geométricas para construir otras, etc.

Queremos remarcar que existe otro tipo de inferencia cruzada que sería la realizada a partir de la perspectiva del análisis de los resultados de los participantes. Este tipo de análisis aportaría información interesante y complementaria al realizado anteriormente. No obstante y según el objetivo de esta Prueba Piloto hemos realizado un análisis, bajo la perspectiva central de la interpretación e inferencia de las resoluciones obtenidas en los problemas geométricos ip^2 realizados en los cuestionarios planteados.

5.3 PRUEBA COMPETENCIAS BÁSICAS: SELECCIÓN DE PARTICIPANTES

Planteamos en Educación Secundaria una prueba de evaluación de las Competencias Básicas en matemáticas con el objetivo de seleccionar los participantes que realizarán la Segunda Fase Diagnóstica que forma parte de nuestra investigación. Concretamente hemos escogido la prueba oficial propuesta por el departamento de Educación de la Generalitat de Catalunya en el curso 2003/2004.

Peralta y Fernández (1998) explicitan en los tres modelos de creatividad que plantean, que el conocimiento general y especifico en el estudio de una disciplina, son factores fundamentales en cualquier trabajo de investigación sobre creatividad. En su artículo *Estudio de tres modelos de creatividad: criterios para la identificación de la producción creativa,* proponen tres de los modelos teóricos más aceptados en la comunidad científica sobre creatividad para explicar el acto de la producción creativa, independientemente del ámbito en el que pueda ser aplicado:

i) modelo componencial de creatividad (Urban, 1995).
ii) teoría de la inversión (Sternberg y Lubart, 1993)
iii) modelo teórico del pensamiento productivo (Treffinger, Feldhusen y Isaksen, 1990).

De manera general estos tres modelos consideran la estructura resultante de la interacción entre procesos, productos, personalidad y entorno, encontrándose la diferencia básica entre unos y otros en la prioridad que se da a unos componentes respecto a otros en la participación del acto creativo y las relaciones que se establecen en él.

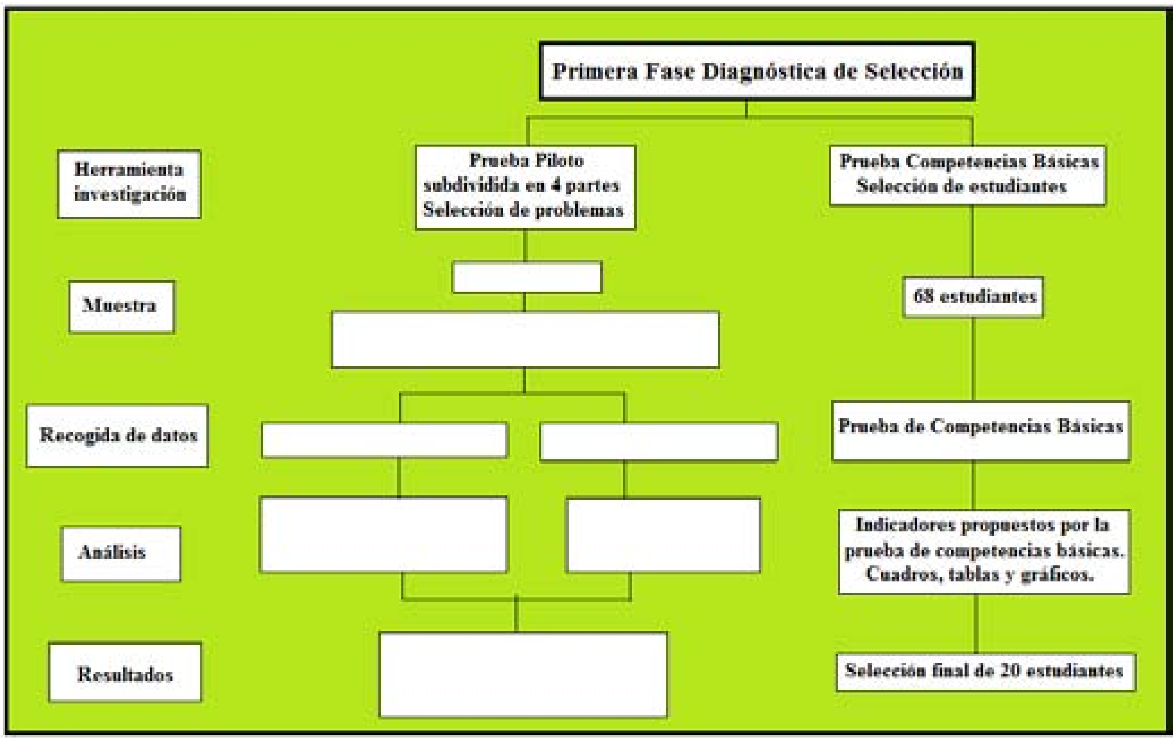
En nuestra investigación sobre la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, coincidimos con Peralta y Fernández (1998) en destacar la importancia del conocimiento general y especifico en matemáticas, debido a que pueden ser elementos determinantes e influyentes en el planteamiento de resoluciones creativas e innovadoras. Creemos que posiblemente un estudiante de secundaria podría resolver un problema geométrico ip^2 de forma creativa con ciertas garantías de éxito, entre otros aspectos relevantes, si tuviese asimilado un cierto conocimiento general base y especifico en matemáticas.

Desde el ámbito de la educación matemática, en la realización de actividades de enseñanza-aprendizaje creativas o en la resolución de problemas tradicionalmente conocidos como de insight (Gardner, 1978; Metcalfe, 1986) existen diversos autores (Mann, 2005) como por ejemplo Gulsah Batdal (2008) que enfatiza en que los rasgos creativos en un proceso de enseñanza-aprendizaje matemático, requieren de un cierto equilibrio entre **las capacidades analíticas, las capacidades creativas** y **el desarrollo de las habilidades prácticas del estudiante**. El estudiante que sólo predomina en el pensamiento creativo puede llegar a tener ideas innovadoras pero quizás tendrá dificultades en reconocerlas y en comunicarlas. En cambio, el estudiante que sólo predomine en el pensamiento analítico puede ser un gran crítico de las ideas de otras personas pero es poco probable que genere ideas originales. Por último el estudiante que solo predomine en las habilidades y destrezas prácticas es probable que pueda ser un gran comunicador de ideas, pero es poco probable que pueda evaluar el valor y la relevancia de éstas.

Por este motivo ponemos un especial énfasis en evaluar, ante el estudio de la resolución de problemas geométricos ip^2, si previamente los estudiantes tienen asimilado un cierto conocimiento general base o especifico (a nivel conceptual) y un cierto grado de dominio de los procedimientos respectivos (habilidades prácticas) en matemáticas. Para ello evaluaremos que participantes han adquirido un mayor porcentaje de las competencias básicas en matemáticas establecidas en el curriculum escolar[6] vigente de Educación Secundaria Obligatoria en Cataluña. Entendiendo por competencias básicas en matemáticas según los contenidos del currículum, aquellas que tienen en cuenta la funcionalidad y la transferencia del conocimiento matemático adquirido por el alumno, así como la potencialidad para resolver problemas y su relevancia para el uso cotidiano, social, técnico, etc. Adquirir las competencias básicas en matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria implica pensar y razonar matemáticamente, plantearse y resolver problemas, obtener, interpretar y generar información con contenido matemático, utilizar técnicas matemáticas básicas y instrumentos para hacer matemáticas, interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos, así como comunicar a otros el trabajo realizado utilizando el lenguaje matemático.

A continuación exponemos en el Esquema 5.3 el diseño metodológico de la Prueba de Competencias Básicas:

[6]Currículum de Educación Secundaria Obligatoria – Decreto 143/2007 DOGC núm. 4915



Esquema 5.3: Diseño Prueba Competencias Básicas

5.3.1 MUESTRA

En esta Prueba de Competencias Básicas en matemáticas han participado 68 alumnos de 4t de ESO del IES Parets del Vallés. Todos los estudiantes realizan el itinerario curricular ordinario, debido a que ninguno de los alumnos que realizó la prueba de competencias básicas sigue una adaptación curricular. Concretamente participaron 24 estudiantes de 4tA, 21 estudiantes de 4tB y 23 estudiantes de 4tC haciendo un total de 68 participantes (33 alumnos y 34 alumnas) con edad entre 15 y 17 años. En el conjunto de participantes destacamos algunos rasgos relevantes a tener en cuenta en la interpretación de los resultados obtenidos (Gráfico 5.3.1) como por ejemplo la frecuencia de participantes repetidores de 4t de ESO o los que tienen las matemáticas de 3r de ESO suspendidas.

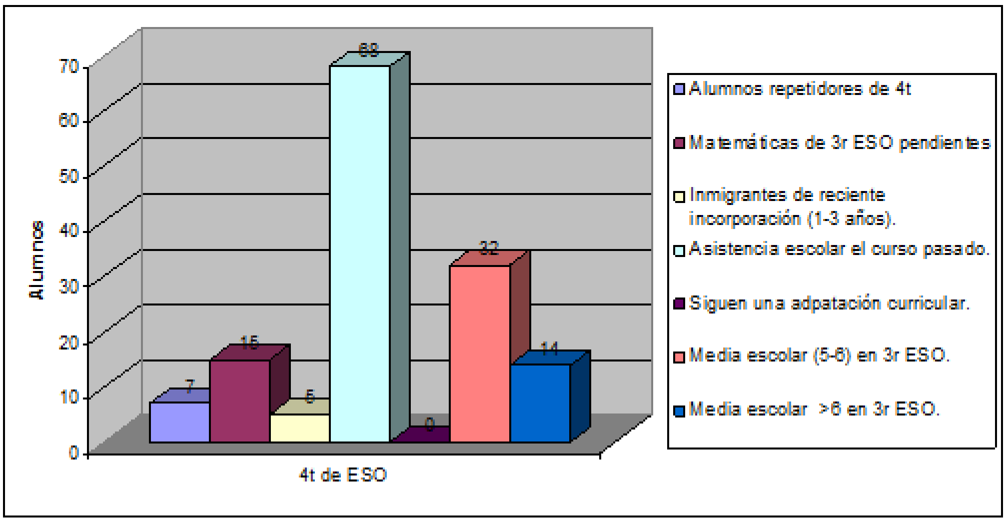


Fig 5.3.1: Gráfico Muestra

5.3.2 DISEÑO

La prueba que se empleó para evaluar las competencias básicas en matemáticas de los estudiantes de 4t de ESO fue la establecida por el Departamento de Educación de la Generalitat de Catalunya en el curso 2003-2004 (anexo B.3 *SELECCIÓN PARTICIPANTES: PRUEBA COMPETENCIAS BÁSICAS*). En ella realizamos alguna pequeña adaptación para actualizar los datos que aparecían en los problemas de la actividad 1, como por ejemplo actualizar las equivalencias entre las diferentes unidades monetarias que se requerían para resolver los ejercicios que se planteaban. En el apartado b) del ejercicio 3 y en el ejercicio 2 de la actividad 1, modificamos algunos enunciados que dependían de las equivalencias monetarias. Invertimos el orden de presentación de los ejercicios 2 y 3 de la actividad 6 y se volvieron a redactar los enunciados con la intención de facilitar su comprensión.

Teniendo presente los contenidos del currículum de Educación Secundaria, en esta prueba de evaluación de las competencias básicas en matemáticas se priorizan actividades que implican el dominio de la numeración y el cálculo; la representación del espacio, la forma y la medida; la interpretación y el cambio de relaciones, así como el uso de la estadística y el azar. Los problemas o tareas que se plantean responden a situaciones contextualizadas en la vida del alumnado, el entorno escolar, familiar o social.

El cuaderno está formado por 9 actividades donde cada una de ellas está constituida por diferentes ejercicios y problemas. Previamente a la realización de la prueba de competencias básicas, durante cinco minutos, se explicaron a los alumnos las directrices a seguir durante el desarrollo de ésta:

1) Antes de empezar la prueba debían rellenar la portada con sus datos personales.

2) El único material que podían disponer los estudiantes era un bolígrafo azul o negro, una regla y la calculadora.

3) Los ejercicios, preguntas y problemas debían responderse y resolverse en el espacio correspondiente del cuaderno.

4) El tiempo para el desarrollo de la prueba era de una hora.

En un mismo día se realizó la prueba de forma consecutiva con cada uno de los tres cursos de cuarto de ESO (4tA, 4tB y 4tC) garantizando así la confidencialidad de los ejercicios y problemas realizados. Debido al tamaño reducido de las aulas, consideramos realizar la prueba de esta forma ya que posiblemente más de 30 estudiantes en una de ellas nos conllevaría dificultades para garantizar las condiciones adecuadas de trabajo, silencio y concentración en la realización de una prueba de estas características.

5.3.3 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

La estrategia de análisis empleada en la evaluación de la prueba de Competencias Básicas es cuantitativa. Los indicadores que empleamos en la valoración de las respuestas vinieron determinados por la guía de aplicación y corrección expuesta en el anexo *B.3.1 GUIA DE RESOLUCIÓN* que se publicó en el curso escolar 2003-2004 por el Departamento de Educación de la Generalitat de Catalunya.

Hemos dado mayor importancia y énfasis a la interpretación de los resultados de las actividades 6 y 7 por estar contextualizadas en un entorno geométrico a partir de la representación del espacio, la forma y/o en la medida. Estas son actividades que requieren del método visual, debido a que comparten algunas estrategias de visualización en su resolución, así como las que se requieren en la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo de la prueba piloto de nuestro trabajo.

Por un lado realizaremos un análisis general de la prueba de Competencias Básicas mediante la variable *aciertos1* y por otro un análisis de las resoluciones de las actividades 6 y 7 evaluadas a partir de la variable *aciertos2*.

En la guía de resolución, la frecuencia máxima que se puede obtener en la corrección global de la prueba en la variable *aciertos1* es 68 puntos y la frecuencia máxima en la corrección de las actividades 6 y 7 en la variable *aciertos2* es 13 puntos.

5.3.4 FIABILIDAD Y VÁLIDEZ

Esta prueba de Competencias Básicas se realizó en los centros de Enseñanza Secundaria en el curso 2003-2004 y está contrastada y avalada por el Departamento de Educación de la Generalitat de Catalunya.

Ilustraremos este apartado citando otras investigaciones en creatividad matemática, similares a la nuestra que han empleado pruebas estatales como parte de su instrumento de investigación. Este es el caso de la investigación realizada por Eric Louis Mann (2005). En su tesis doctoral *Mathematical Creativity and School Mathematics:*

Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students (Mann, 2005) empleó la prueba estatal *Connecticut Mastery Test - 3ª generación* planteada por el Departamento de Educación del estado de Connecticut (EEUU) en el año 2001 para evaluar el dominio y rendimiento matemático de los estudiantes de sexto grado. En EEUU la Middle School está formada por aquellos estudiantes que cursan desde sexto a octavo grado, cuya equivalencia en nuestro sistema educativo actual sería la Educación Secundaria comprendida desde 1r a 4t de ESO.

Esta prueba estatal formó parte de su instrumento de investigación con el objetivo de contrastar y correlacionar los resultados obtenidos con otras pruebas que evaluaban la habilidad creativa en matemáticas de los estudiantes (Mann, 2005) o las creencias de los profesores respecto las habilidades creativas en matemáticas de sus alumnos (Renzulli y otros, 2004).

5.4 RESULTADOS PRUEBA DE COMPETENCIAS BÁSICAS

En este apartado incidiremos en los resultados de la prueba de Competencias Básicas que determinarán la elección de los estudiantes que participarán en la siguiente Fase Diagnóstica de Relación.

A partir de la prueba que planteamos nos interesa poder determinar que participantes han asimilado las competencias básicas en el curriculum de matemáticas en Secundaria

5.4.1 ANÁLISIS PRUEBA DE COMPETENCIAS BÁSICAS

Hemos realizado un análisis riguroso, cuantificando el porcentaje de aciertos de cada uno de los participantes desde dos vertientes:

(i) Los resultados de los participantes en la prueba de Competencias Básicas se analizan de manera global con el objetivo de determinar que participantes han obtenido un mayor porcentaje de aciertos en la prueba (variable *aciertos1*).

(ii) Los resultados de los participantes en las actividades 6 y 7 se analizan y cuantifican en la variable *aciertos2*. Estas actividades consideramos que requieren de algunas competencias básicas en geometría y de habilidades de visualización para su resolución como por ejemplo la identificación y discriminación visual, el reconocimiento de posiciones geométricas y la memoria visual.

A continuación desarrollamos estas dos vertientes.

i) Resultados de los participantes en la prueba de Competencias Básicas

Explicitamos el análisis de la variable *aciertos1* según la muestra de participantes. En primer lugar observamos la distribución de las puntuaciones obtenidas en la variable *aciertos1* a partir del diagrama de cajas correspondiente:

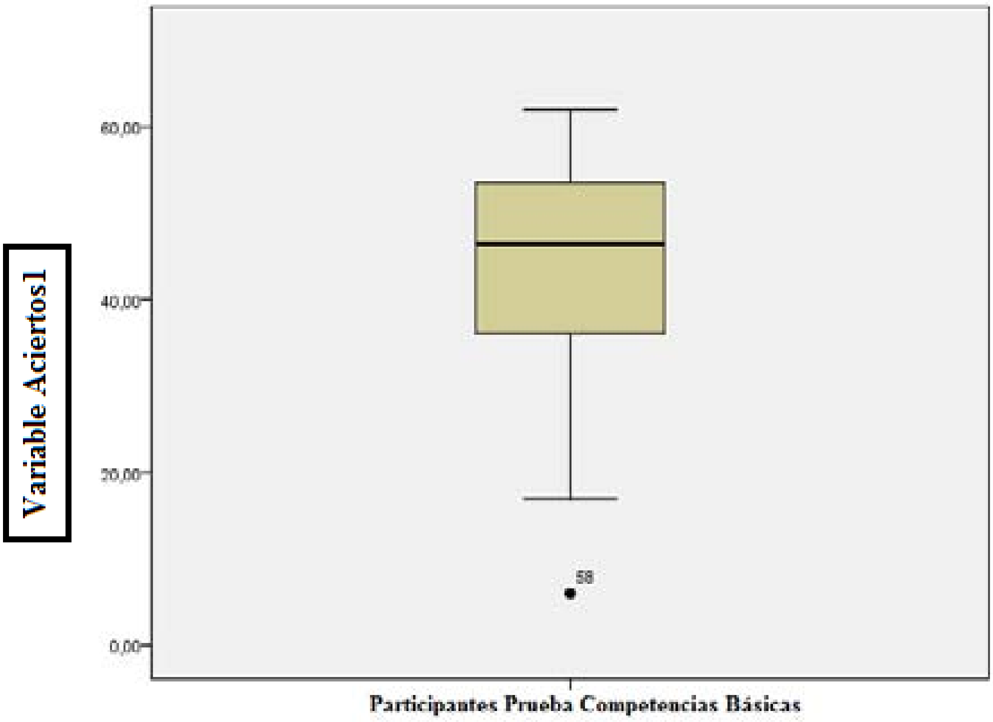


Fig 5.4.2: Diagrama de Cajas *Aciertos1*

En segundo lugar contrastamos en la siguiente Tabla 5.4.3 algunos estadísticos de la variable *aciertos1*:

N	Válidos	68
	Perdidos	2
Media		44,2279
Mediana		46,5000
Moda		58,00
Desv. típ.		12,02343
Varianza		144,563
Rango		56,00
Mínimo		6,00
Máximo		62,00
Percentiles	25	35,5000
	50	46,5000
	75	53,7500
	80	55,2000

Tabla 5.4.3: Estadísticos *Aciertos1*

Después de analizar la variable *aciertos1*, respecto cada uno de los participantes y a la vista de los resultados de la tabla 5.4.3 anterior, inferimos que el 75% de los participantes obtuvieron una puntuación prácticamente superior al 50% de aciertos (35,5). El 50% de los participantes obtuvieron una puntuación superior al 68,38% de aciertos (mediana=46,50). Consideraremos significativamente en nuestra investigación las puntuaciones superiores al percentil 80. Es decir un 20% de los estudiantes, concretamente 14 participantes, obtuvieron una puntuación superior al 81,17% de aciertos (55,2).

Exponemos la clasificación de los participantes según la puntuación obtenida en la variable *aciertos1*:

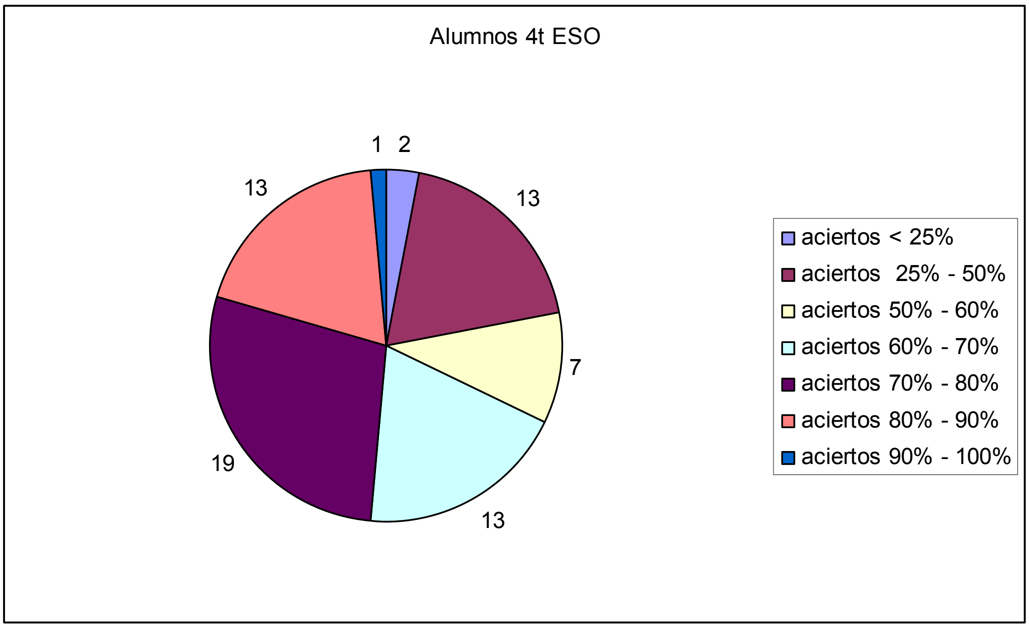


Fig 5.4.4: Diagrama de sectores. Variable *aciertos1*

Efectivamente 13 participantes han obtenido un porcentaje de aciertos entre el 80% y el 90% y solo un participante ha obtenido un porcentaje entre el 90% y el 100% de aciertos.

ii) Resultados de los participantes en las actividades 6 y 7

Estudiaremos los resultados de las actividades 6 y 7 porque consideramos requieren del dominio de algunas competencias en geometría (representación del espacio, la forma y la medida) así como de algunas estrategias de visualización que también podrían ser necesarias en la resolución de los problemas geométricos ip[2] propuestos en la prueba piloto.

Nos interesa considerar el grupo de participantes que ha obtenido una mayor puntuación en la variable *aciertos2*, según los resultados obtenidos en la realización de las actividades 6 y 7. A continuación explicitamos en la tabla 5.4.5 los estadísticos de la variable *aciertos2:*

N	Válidos	68
	Perdidos	2
Media		7,1029
Mediana		7,0000
Moda		10,00[a]
Desv. típ.		3,54561
Varianza		12,571
Asimetría		-,346
Error típ. de asimetría		,291
Rango		12,00
Mínimo		,00
Máximo		12,00
Percentiles	25	4,0000
	50	7,0000
	75	10,0000

Tabla 5.4.5: Estadísticos variable *Aciertos2*

Observamos que la muestra de resultados sigue una distribución normal (asimetría=-0,346) siendo ésta una muestra significativamente compensada ya que el 50% de los participantes han obtenido una puntuación aproximadamente por debajo de la media (7,1029) como podemos contrastar en el percentil 50. En el diagrama de sectores 5.4.6 exponemos la frecuencia de participantes según su porcentaje de aciertos.

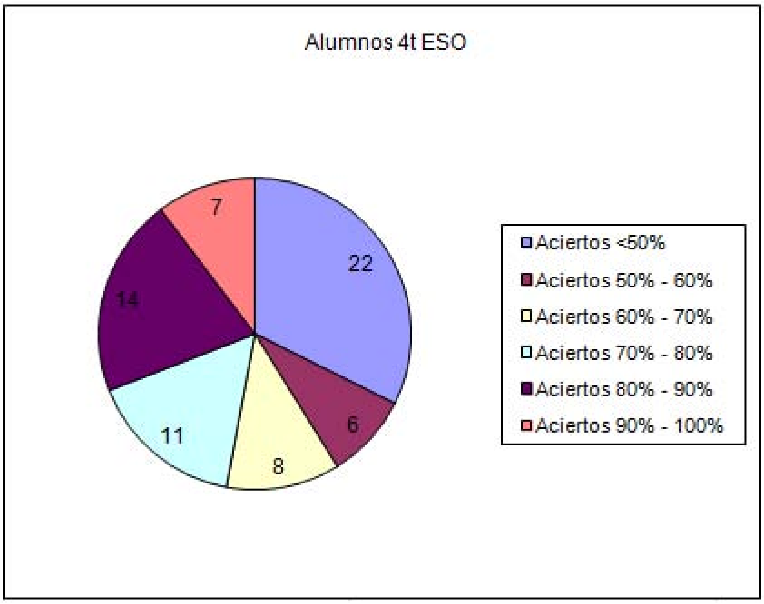


Fig 5.4.6: Diagrama de sectores. Variable *Aciertos2*

Comprobamos que 14 participantes han obtenido entre un 80% y 90% de aciertos y 7 participantes obtuvieron el mayor porcentaje de aciertos situado entre el 90% y el 100% en la resolución de las actividades 6 y 7 de la prueba de Competencias Básicas.

5.4.2 SELECCIÓN DE PARTICIPANTES

Coincidimos con algunos autores (Treffinger, Feldhusen y Isaksen, 1990; Urban, 1995; Sternberg y Lubart, 1993) que el conocimiento general y específico de una disciplina, en nuestro caso las matemáticas puede determinar un papel relevante en la resolución de los problemas geométricos ip^2. Cuando hacemos referencia a cómo podría influir el conocimiento general sobre conceptos, relaciones, procedimientos y habilidades en matemáticas, nos referimos a como éste podría influir en la realización de los problemas geométricos creativos de nuestra investigación que hemos clasificado como *potencialmente de insight perceptivo.*

Los dos criterios de selección establecidos para escoger a los estudiantes que participaran en la Segunda Fase Diagnóstica de esta investigación se basan esencialmente en la adquisición de las competencias básicas en matemáticas:

cg) Criterio general.

Estudiantes que han obtenido una puntuación superior al 75% en la variable aciertos1.

cv) Criterio visualización.

Estudiantes que han obtenido una puntuación superior al 80% en la variable aciertos2.

Consideramos la frecuencia de participantes que verifican estos dos criterios, expuestos en la tabla 5.4.7 con el objetivo de seleccionar la muestra de participantes:

	N	**Criterios de selección**
Participantes	**25**	**cg)**
Participantes	**21**	**cv)**
Total participantes	**20**	**cg) y cv)**

Tabla 5.4.7: Selección participantes

Finalmente la muestra de estudiantes seleccionada para realizar la siguiente fase Diagnóstica de Relación está formada por **20** alumnos que verifican los criterios cg) y cv) explicitados anteriormente. Los estudiantes seleccionados en un porcentaje considerable y según la prueba realizada tienen asimiladas las competencias básicas en matemáticas. Concretamente en la muestra final escogida se ha mantenido la paridad en el género.

5.4.3 CONCLUSIÓN FASE DIAGNÓSTICA DE SELECCIÓN

Finalmente hemos seleccionado a partir de la prueba piloto y según los criterios establecidos (apartado *5.2.4 Análisis global y selección final de problemas)* **10 problemas geométricos ip^2** que son potencialmente relevantes para nuestro estudio en la Segunda Fase Diagnóstica de Relación. Posteriormente hemos seleccionado a partir de la prueba de Competencias Básicas y según los criterios explicitados (apartado *5.4.2 Selección de participantes)* una muestra formada por **20 estudiantes** que participaran en la siguiente Fase Diagnóstica.

BLOQUE III: FASES DIAGNÓSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN. ANÁLISIS Y RESULTADOS.

CAPITULO 6

6. SEGUNDA FASE DIAGNÓSTICA DE RELACIÓN

> *Insight is nothing more than switching to a new combination of responses associated with a problem situation or, in the jargon of the day, a new combination of habit strengths within a habit family hierarchy.* (Sternberg y Davidson, 1995, p.5)

> *Insight occurs when a problem solver mentally redefines and clarifies the problem, such as reformulating the givens or the goal.* (Sternberg y Davidson, 1995, p.8)

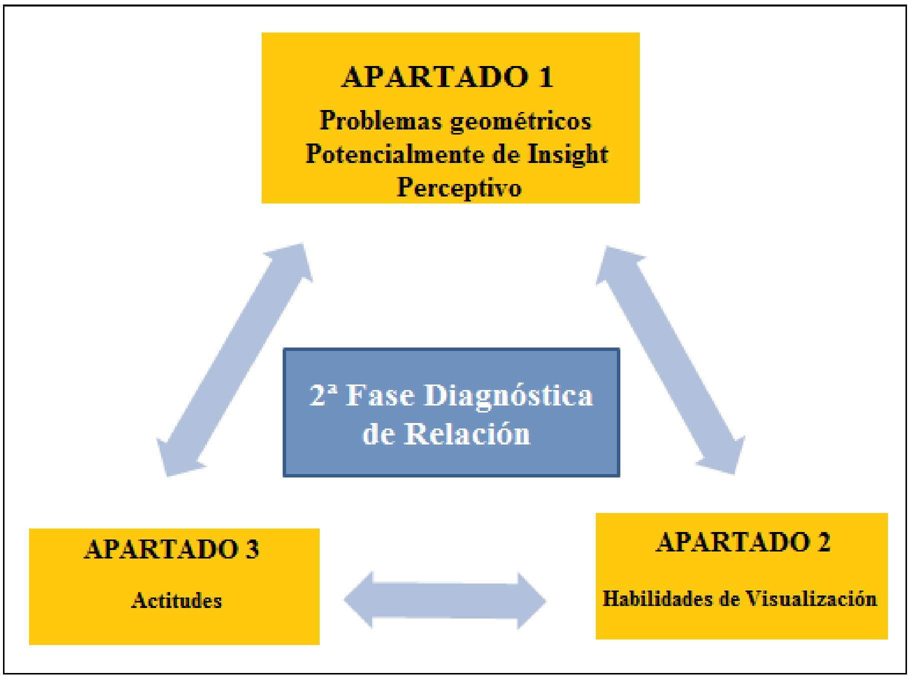
La Segunda Fase diagnóstica de Relación consta fundamentalmente de dos partes. Una primera parte formada por tres grandes apartados: 1r) el estudio de las resoluciones en los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo y la identificación de los momentos de insight, 2n) el estudio de algunas Habilidades de Visualización (Del Grande, 1990) mediante dos tests interactivos de visualización y 3r) el estudio de las Actitudes (Fenmema y Sherman, 1976; Mann, 2005) de los estudiantes de la muestra mediante un test de actitudes.

Una segunda parte consiste en estudiar, describir e identificar la existencia de posibles relaciones entre los resultados obtenidos en cada uno de los tres apartados explicitados anteriormente.

6. SEGUNDA FASE DIAGNÓSTICA DE RELACIÓN

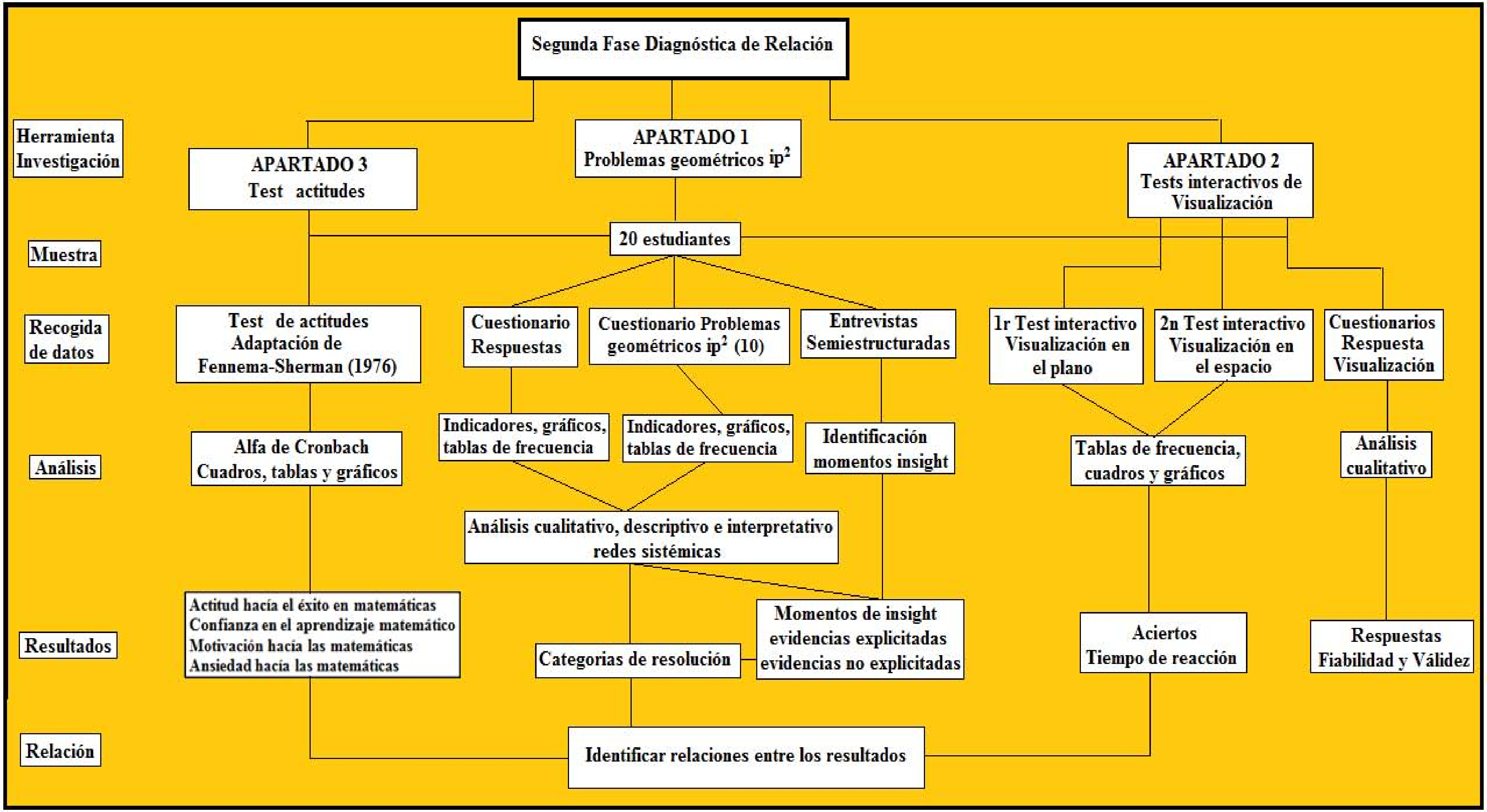
Esta fase diagnóstica constituye la segunda del diseño experimental de nuestra investigación que denominamos de Relación. El objetivo fundamental radica por un lado en explorar, analizar, describir e identificar las estrategias de resolución propuestas por los participantes que posibilitan los momentos de insight ante la resolución de los problemas geométricos ip^2. En segundo lugar nos centraremos en analizar los resultados obtenidos a partir de las herramientas de investigación que evalúan psicométricamente algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) así como las actitudes hacía las matemáticas (Fenmema y Sherman, 1976; Mann, 2005) de los estudiantes de la muestra. Y por último triangularemos, describiremos e identificaremos si existe alguna relación entre los resultados obtenidos y el hecho de tener *éxito* en la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo.

En el siguiente *Esquema 6* definimos los tres apartados que forman esta segunda Fase Diagnóstica según el objeto de estudio: a) Apartado 1: Problemas geométricos de insight perceptivo, b) Apartado 2: Habilidades de Visualización, c) Apartado 3: Actitudes.



Esquema 6: *Apartados. Segunda Fase Diagnóstica de Relación*

A continuación ilustramos en el siguiente Esquema 6.0.1 el diseño general de la Segunda Fase Diagnóstica de Relación.



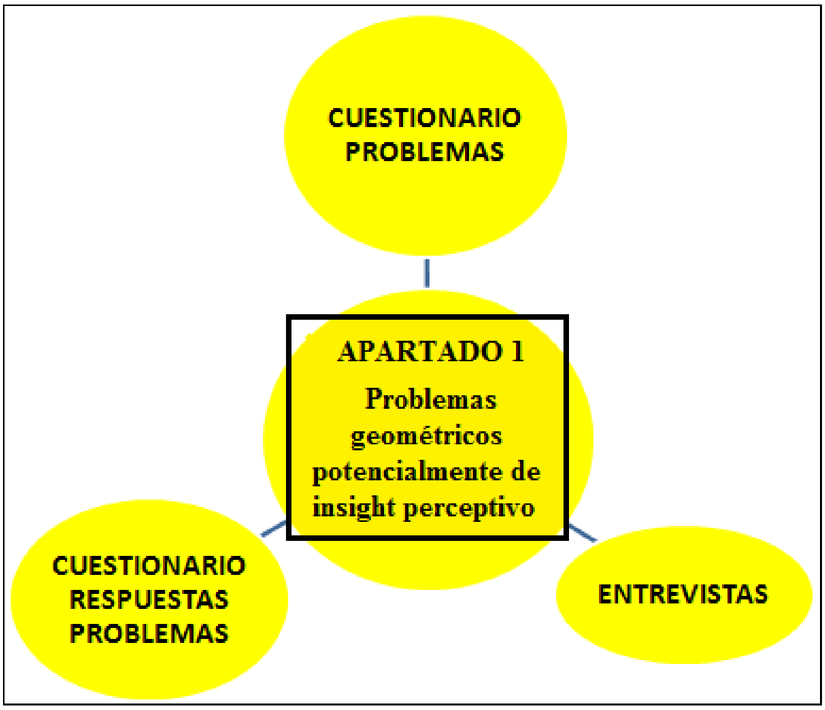
Esquema 6.0.1: Segunda Fase Diagnóstica de Relación

APARTADO 1: Problemas IP^2

6.1 INTRODUCCIÓN: PROBLEMAS GEOMÉTRICOS POTENCIALMENTE DE INSIGHT PERCEPTIVO

En este primer apartado de la Segunda Fase Diagnóstica de Relación nos centraremos en el estudio de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo seleccionados a partir de los resultados obtenidos en la Primera Fase Diagnóstica de Selección.

En el siguiente Esquema *6.1 herramientas investigación Apartado 1* explicitamos las tres herramientas de investigación que emplearemos en el estudio, análisis y descripción de los problemas geométricos ip^2: CP) el Cuestionario de Problemas, CR) el Cuestionario de Respuestas sobre los problemas y ES) las Entrevistas Semiestructuradas realizadas a los participantes de la muestra.



Esquema 6.1: Herramientas investigación Apartado 1

6.1.1 MUESTRA

La muestra de participantes está formada por 20 estudiantes de 4t de la Educación Secundaria del instituto de Parets del Vallés. Esta muestra se escogió en base a los resultados obtenidos en la prueba de Competencias Básicas realizada en la primera fase

Diagnóstica y los criterios de selección establecidos en el apartado *5.4.2 SELECCIÓN DE PARTICIPANTES.*

La muestra se caracteriza por estar equilibrada respecto al género. Los participantes denotaron unos resultados iguales o superiores al 75% de aciertos (variable aciertos1) en la prueba global de Competencias Básicas y unos resultados iguales o superiores al 80% de aciertos (variable aciertos2) en las actividades 6 y 7 de la prueba.

En las diferentes herramientas que forman el diseño de esta Segunda Fase Diagnóstica de Relación emplearemos una nomenclatura alfabética (A,B,C…) para designar a cada uno de los participantes de la muestra.

6.1.2 DISEÑO

En el diseño de esta Fase Diagnóstica hemos tenido presente los siguientes criterios:

- Factores relativos a la muestra de 20 participantes seleccionados de la prueba de Competencias Básicas realizada en la primera Fase Diagnóstica, según los criterios expuestos en el apartado *5.4.2 SELECCIÓN DE PARTICIPANTES.*
- La selección final de 10 problemas geométricos ip^2 según los criterios expuestos en el apartado *5.2.4 ANÁLISIS GLOBAL Y SELECCIÓN FINAL DE PROBLEMAS* de la prueba piloto.
- Los participantes deberán disponer del tiempo necesario para resolver y reflexionar sobre las estrategias planteadas en la resolución de los problemas. Suponemos que en cada uno de los problemas geométricos ip^2 los participantes requieren de un tiempo prudencial para poder plantear sus posibles estrategias de ensayo y error y superar la dificultad o bloqueo que a priori pueda suponer el enunciado y/o comprensión del problema.
- Consenso con otros investigadores sobre el diseño final.

Teniendo en cuenta los criterios anteriores hemos expuesto en el apartado *4.2 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN* y concretamente en el *Esquema 6.0.1 Segunda Fase Diagnóstica de Relación* el diseño metodológico de este primer apartado que consiste en el estudio de 10 problemas geométricos ip^2. Concretamente el diseño experimental está formado por tres herramientas de investigación que se aplicaron de forma secuencial dentro de una misma franja horaria y en un mismo día:

a) Cuestionario de Problemas. Duración aproximada 1h y 20 minutos.

Está formado por el cuestionario de 10 problemas geométricos ip^2. Los estudiantes de 4t de ESO antes de dar la vuelta a la primera hoja deben rellenar el cuadro con los datos identificativos así como leer las instrucciones del cuestionario.

b) Cuestionario sobre las Respuestas. Duración aproximada 30 minutos.

Está formado por tres preguntas abiertas y tres preguntas cerradas que se evalúan mediante una escala de Likert de cinco grados con la finalidad de que los estudiantes puedan reflexionar sobre las resoluciones, ideas, dificultades y métodos que han planteado al intentar resolver cada uno de los problemas geométricos ip^2 realizados en el cuestionario anterior.

c) Entrevista Semiestructurada. Duración aproximada 30 minutos.

Se realizó una entrevista semiestructurada formada por 7 preguntas, cuatro de ellas abiertas y dos cerradas. Se registró con grabador de audio.

En este Primer Apartado nos interesaba garantizar las condiciones adecuadas para que los 20 participantes pudiesen realizar los 10 problemas geométricos ip^2 del Cuestionario de Problemas, así como el Cuestionario de Respuestas y la Entrevista Semiestructurada. Por ese motivo se realizó un diseño en el que se concentró de forma secuencial la realización de las tres herramientas de investigación. El desarrollo de las dos primeras herramientas transcurrieron en una misma aula (nº 22 del instituto Parets del Vallés) junto con el soporte de otra profesora del Departamento de Matemáticas del instituto. Posteriormente cuando los participantes finalizaban se desplazaban al aula nº21, previa indicación del investigador para realizar la Entrevista Semiestructurada.

6.1.2.1 CUESTIONARIO DE PROBLEMAS

El Cuestionario de Problemas consta de una batería de 10 problemas geométricos ip^2 que nos posibilitarán investigar estrategias de resolución geométrica por insight. Las estrategias geométricas identificadas en los problemas de la prueba piloto como por ejemplo la fragmentación de figuras geométricas, la adición o sustracción de superficies o el desarrollo plano de un cuerpo geométrico entre otras estrategias importantes han sido clasificadas teniendo en cuenta el Comportamiento Resolutor, el Comportamiento Creativo-Insight y el Comportamiento Visualizador. Estas estrategias también nos han

servido para especificar y concretar los indicios correspondientes a los comportamientos de estudio definidos en la investigación.
En el anexo *C.1 CUESTIONARIO DE PROBLEMAS* exponemos el Cuestionario de Problemas empleado en este primer apartado de la Segunda Fase Diagnóstica de Relación. Particularmente en el anexo *C.1.1 CATEGORIZACIÓN DE PROBLEMAS* corroboramos que seis de los diez problemas pertenecen a la categoría de reestructuración de áreas y puzles, dos problemas pertenecen a la categoría de reestructuración de líneas y puntos y dos problemas a la categoría de reestructuración conceptual.

En la ejecución del Cuestionario de Problemas los participantes se dispusieron en el aula según el criterio del investigador y la profesora del departamento de matemáticas que colaboró en su realización con el objetivo de que se garantizasen las condiciones adecuadas en el desarrollo de la prueba. En la primera hoja del cuestionario de problemas los participantes tenían que aportar algunos datos identificativos utilizados únicamente como dígitos de control interno.

6.1.2.2 CUESTIONARIO DE RESPUESTAS

Cuando los participantes acababan el Cuestionario de Problemas acto seguido se les proporcionaba el Cuestionario de Respuestas. En este cuestionario se pretende que los estudiantes reflexionen sobre las dificultades, estrategias e ideas que han podido aflorar al abordar la resolución de cada uno de los problemas geométricos ip^2. En el cuestionario se plantea en cada uno de los problemas tres preguntas abiertas:
1. ¿Cómo has resuelto el problema? Explícalo con el máximo detalle.
2. Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema.
3. Ahora mismo se te ocurre alguna otra forma de resolver el problema.

Posteriormente se proponen tres preguntas cerradas evaluadas a partir de una escala de Likert de cinco grados con objeto de que los participantes valoren la dificultad en la realización del problema, como consideran que lo han resuelto y si consideran que disponen de los conocimientos necesarios para resolverlo.
El Cuestionario de respuestas está ilustrado en el Anexo *C.2 CUESTIONARIO DE RESPUESTAS.*

6.1.2.3 ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

A medida que los participantes acababan el Cuestionario de Respuestas, se realizó una Entrevista Semiestructurada con grupos reducidos de estudiantes en el aula nº 21 contigua a la que se realizaron los problemas. Se dispuso de 30 minutos aproximadamente para la realización del total de entrevistas.

Planteamos una entrevista semiestructurada basada en las directrices de la investigación cualitativa. La entrevista se inicia con preguntas indirectas, abiertas y de opinión con intención de no bloquear al estudiante, y comenzar de la forma más distendida posible. A medida que va avanzando la entrevista se plantea alguna pregunta más específica. En el anexo *C.3 ENTREVISTA* exponemos las preguntas de la entrevista realizada y registrada en audio.

Nos interesa especialmente que los estudiantes nos proporcionen descripciones detalladas, específicas y con matices sobre cómo han podido resolver los problemas geométricos ip^2, qué dificultades han podido tener y cómo creen que se les ha ocurrido la resolución, estrategia o idea innovadora que les ha facilitado la solución. No pretendemos buscar opiniones generales, aunque alguna pregunta está formulada de manera cerrada. Pretendemos básicamente interpretar el significado establecido por el estudiante entrevistado a partir de lo que se dice y cómo lo dice.

Aunque a priori la entrevista tiene un orden preestablecido, la consideramos una entrevista semiestructurada porque el entrevistador reformula las preguntas explicándolas, eliminándolas o añadiendo comentarios, incluso modificando el orden con el objetivo de hacerla más abierta, accesible y dinámica a los participantes, según sus respuestas a las preguntas anteriores. Pretendemos que de esta forma los estudiantes puedan dar sus opiniones más detalladas y poder valorar las individualidades, así como aquellas particularidades únicas en la generación de una idea creativa que posiblemente podría promover un insight geométrico potencialmente perceptivo.

6.1.3 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

Autores como Bericat (1998) argumentan que la integración de un diseño multimétodo en el análisis de una investigación puede estar explícitamente justificada en base a tres razones: complementación, combinación y triangulación.

La estrategia de análisis empleada en esta Segunda Fase Diagnóstica será *la combinación* (Bericat, 1998) que consiste en integrar una metodología, sea la cualitativa o la cuantitativa, en la otra con el objetivo de que ambas se refuercen aportando informaciones significativas y compensando posibles debilidades, independientemente de la aplicación de la metodología realizada en cada momento del análisis. La relevancia de este diseño no está en la convergencia de resultados sino en la adecuada combinación metodológica.

El tratamiento de los resultados se ha llevado a cabo siguiendo el orden:

A. Análisis del Cuestionario de Problemas
B. Análisis del Cuestionario de Respuestas.
C. Análisis Entrevista Semiestructurada

La estructura del análisis de los resultados en cada una de las herramientas de investigación se detallan a continuación.

6.1.3.1 ESTRATEGIA CUESTIONARIO DE PROBLEMAS

En el análisis del Cuestionario de Problemas de esta Segunda Fase Diagnóstica de Relación (anexo *C.1 CUESTIONARIO DE PROBLEMAS*) se combinan distintas estrategias metodológicas (Bericat, 1998).

En primer lugar realizamos un análisis cuantitativo basado en la identificación de los indicios definidos en la *TABLA DE INDICIOS* expuesta en el apartado *5.1.3.1.1 ANÁLISIS CUANTITATIVO* así como las tablas y gráficos que recogen los resultados obtenidos en los problemas geométricos. En segundo lugar reforzamos el análisis anterior a partir de un análisis cualitativo mediante la descripción, exploración e inferencia de las resoluciones planteadas en los cuestionarios de problemas y la construcción de redes sistémicas (Garbin, 1998) con el objetivo de facilitar la interpretación de los resultados obtenidos.

Desde una perspectiva cualitativa realizaremos un análisis descriptivo de cada uno de los problemas en el que estudiaremos y clasificaremos las resoluciones significativamente originales y creativas, que inferimos podrían favorecer la ocurrencia de momentos de insight. Definimos los momentos de insight (apartado 6.1.5.6 MOMENTOS DE INSIGHT) a partir de las evidencias explicitadas o no explicitadas de insight identificadas en las resoluciones.

6.1.3.2 ESTRATEGIA CUESTIONARIO DE RESPUESTAS

La estrategia de análisis del Cuestionario de Respuestas se realiza en base a una metodología básicamente cualitativa que se refuerza mediante alguna estrategia cuantitativa. Se diferencia por un lado un análisis descriptivo e interpretativo de las tres preguntas abiertas y por otro un análisis cuantitativo de las tres preguntas cerradas basadas en una escala de Likert.

A partir de este análisis pretendemos aportar información cualitativa sobre las resoluciones planteadas por los participantes en los problemas geométricos ip^2 con el objetivo de categorizar las estrategias de resolución obtenidas desde un comportamiento Creativo-Insight.

El diseño metodológico está constituido por redes sistémicas (Garbin, 1998) como sistema de representación de los resultados cualitativos obtenidos en el cuestionario, para facilitar la descripción e interpretación de las resoluciones y estrategias planteadas en los problemas geométricos ip^2 del cuestionario de problemas. Las redes sistémicas nos posibilitaran una configuración de los resultados que nos permiten observar todas las respuestas efectivas de los participantes. Estos datos pueden aproximarnos a los esquemas conceptuales de los participantes asociados a la producción de una estrategia o idea creativa, original e innovadora en la resolución de los problemas geométricos ip^2 que en algunos casos podría posibilitar la ocurrencia del insight.

6.1.3.3 ESTRATEGIA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

La Entrevista Semiestructurada se registró en audio y se realizó a grupos reducidos de participantes. Pretendemos aportar información cualitativa en cuanto a la categorización de niveles de pensamiento productivo de los participantes así como la identificación y descripción de los posibles momentos de insight geométricos identificados en las resoluciones planteadas por los estudiantes. Para ello realizamos un análisis descriptivo e interpretativo cuyo objetivo consiste en reconocer las posibles resoluciones geométricas innovadoras y los rasgos que nos indican la ocurrencia de un momento de insight pasado o incluso en el mismo momento de la entrevista. En algunos casos los estudiantes al recordar y reflexionar sobre sus resoluciones también generaban estrategias o resoluciones alternativas que podían originar la ocurrencia de un nuevo insight.

Nos interesa corroborar y verificar cómo los participantes expresaban, explicaban y reproducían sus estrategias e ideas creativas en la resolución de problemas geométricos ip^2 realizados en el Cuestionario de Problemas. Pusimos un especial interés en identificar cualquier indicio que pudiera denotar una resolución creativa enfatizando en qué había posibilitado la ocurrencia o vivencia (Liljedalh, 2008b) de una idea significativamente innovadora y original. En el apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT* definimos los criterios para seleccionar aquellos datos de la entrevista en los que identificamos cuando un participante potencialmente ha tenido la ocurrencia de un insight a partir de sus explicaciones y comentarios.

El análisis de las transcripciones requiere de varios procesos en un avanzar y retroceder entre descripciones, interpretaciones y razonamientos inductivos y deductivos entre otros. Las transcripciones más relevantes que hemos considerado se caracterizan por haber identificado momentos de insight en nuestro análisis. (anexo *C.3.1 TRANSCRPCION DE LA ENTREVISTA)*

6.1.4 FIABILIDAD Y VALIDEZ

La descripción, interpretación e inferencia de los resultados obtenidos se triangula mediante tres herramientas de investigación: Cuestionario de Problemas, Cuestionario Respuestas de problemas y Entrevista Semiestructurada. Esta medida nos permite contrastar y comparar los resultados obtenidos desde diferentes tipologías de datos recogidos y por tanto nos permite un mayor grado de fiabilidad y validez en las conclusiones obtenidas.

Respecto la metodología hemos empleado un análisis en el que se triangulan (Bericat, 1998) herramientas cualitativas y cuantitativas con la intención de compensar los posibles desequilibrios en las inferencias realizadas según los resultados obtenidos.

Además de realizar una comparación entre las distintas fuentes metodológicas, nuestro trabajo ha sido revisado por otros investigadores independientes. Esta investigación ha sido el núcleo didáctico de una comunicación presentada en el congreso Elementary Geometry From an Advanced Point of View, realizado en Aveiro (Portugal) y que tiene por título *"Un estudio exploratorio sobre las estrategias de resolución geométrica por insight*" (Sánchez, 2011c). En dicha presentación se reflexionó sobre algunas aportaciones cualitativas realizadas en la resolución de problemas geométricos ip^2 por parte de algunos investigadores en didáctica de las matemáticas, reafirmando la metodología empleada.

Presentamos también dos comunicaciones en el fórum de discusión científica que lleva por nombre, *Divendres de Recerca*, realizado desde el programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona. Las dos comunicaciones presentadas tituladas

"*Procesos creativos en un entorno educativo tecnológico*" (Sanchez, 2011d) y "*Resoluciones creativas de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo*" (Sanchez, 2012b) hacen referencia al marco teórico y a la metodología de nuestra investigación. En ambas presentaciones se revisó el desarrollo de la investigación y se realizaron aportaciones significativas por parte de los diferentes investigadores que asistieron al fórum de discusión científica.

Desde otra perspectiva concretamente sobre cómo el entorno familiar puede propiciar estrategias creativas originales e innovadoras que puedan posibilitar la ocurrencia del insight ante la resolución de problemas matemáticos, presentamos una comunicación basada en nuestro trabajo, en el congreso "*Family Math for Adult Learners"* realizado en Barcelona y que tiene por título "*Some strategies of the family environment to enhance creativity*" (Sánchez, 2011b)**.** Esta comunicación posteriormente ha sido publicada en el libro "*Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics' achievement*" (Díez-Palormar y Kanes, 2012).

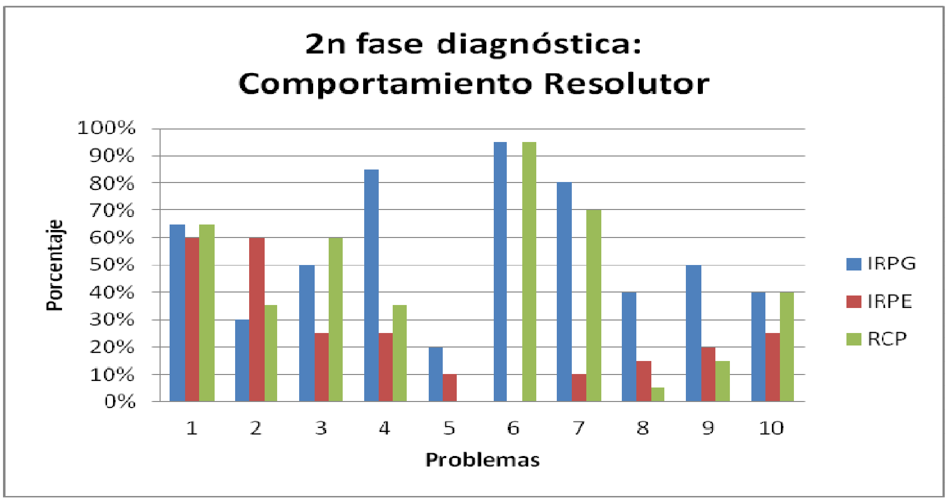
6.1.5 RESULTADOS APARTADO 1: PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2

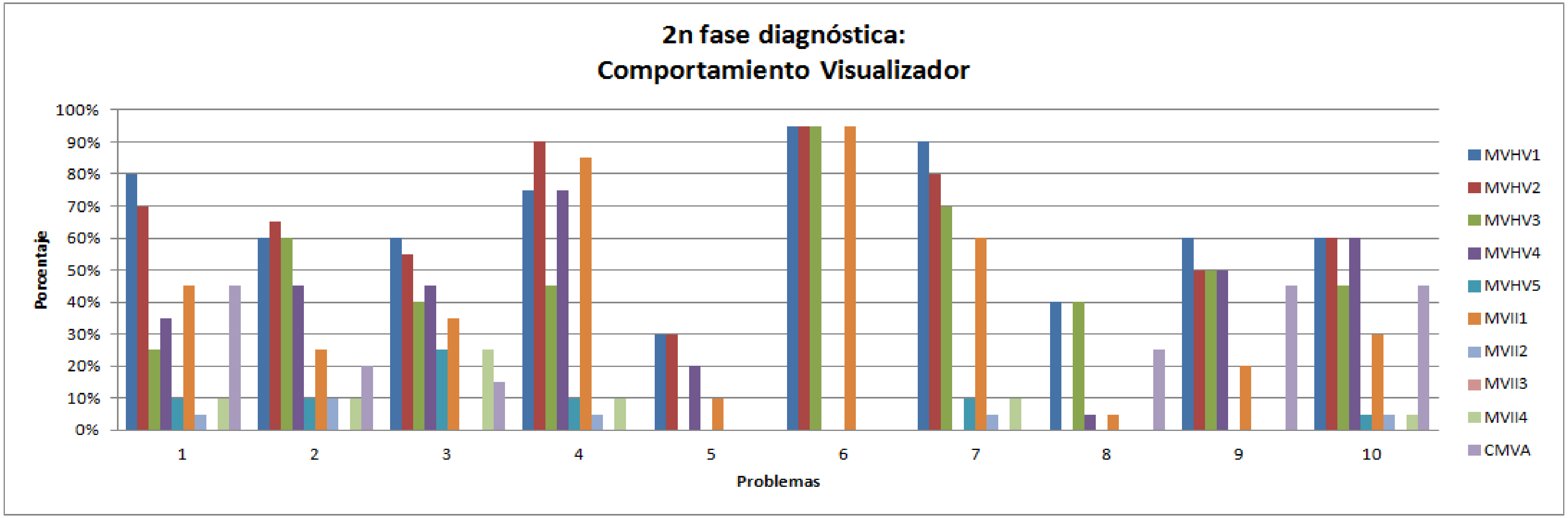
A continuación exponemos los resultados obtenidos en cada una de las tres herramientas de investigación empleadas en este primer apartado.

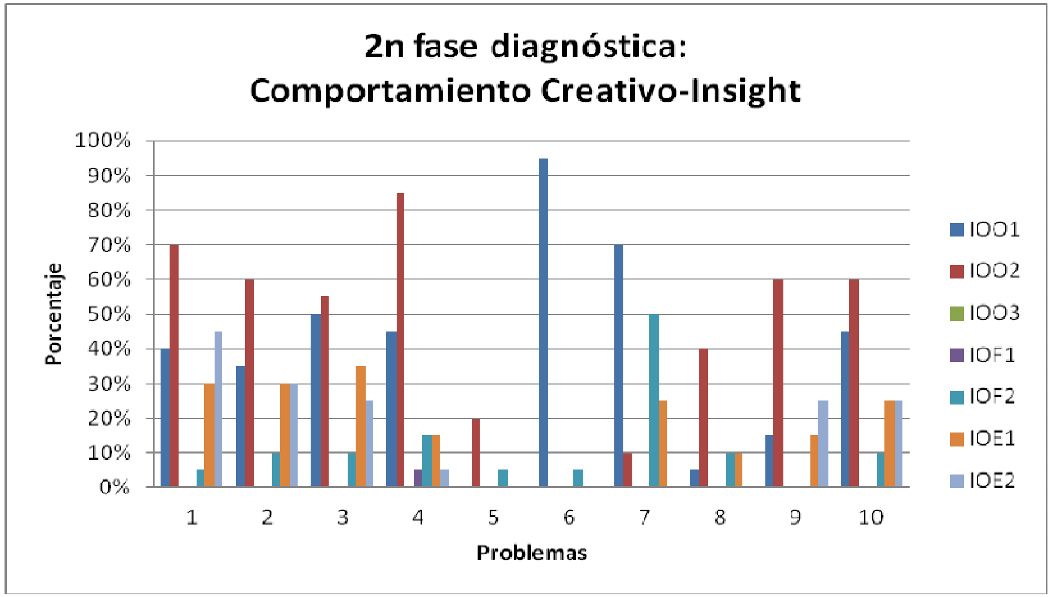
6.1.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO PROBLEMAS

En el anexo *C.1.2 TABLA PORCENTAJE INDICIOS IDENTIFICADOS* explicitamos el porcentaje identificado de indicios según la TABLA DE INDICIOS definida en el apartado *5.1.3.1.1 ANÁLISIS CUANTITATIVO.* Los indicios se analizan según los tres comportamientos de estudio de nuestra investigación: Resolutor, Visualizador y Creativo-insight.

En los siguientes gráficos se expresan los resultados obtenidos:




2n fase diagnóstica:
Comportamiento Visualizador
Porcentaje
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Problemas
MVHV1
MVHV2
MVHV3
MVHV4
MVHV5
MVII1
MVII2
MVII3
MVII4
CMVA


2n fase diagnóstica:
Comportamiento Creativo-Insight
Porcentaje
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Problemas
IOO1
IOO2
IOO3
IOF1
IOF2
IOE1
IOE2

- Respecto a los resultados del Comportamiento Resolutor destacamos que el problema geométrico ip[2] que obtuvo el mayor porcentaje de aciertos (Indicio RCP) fue el problema 6 que pertenece a la categoría de problemas de reestructuración de líneas y puntos (Anexo *C.1.1 CATEGORIZACIÓN DE PROBLEMAS*).
  En cambio el problema 8 perteneciente a la categoría de problemas de reestructuración conceptual obtuvo el porcentaje más bajo de resoluciones correctas según el Indicio RCP. Posiblemente la estrategia del cambio dimensional necesaria en la resolución de este problema produjo un mayor bloqueo y dificultad en los participantes.

- Los resultados del Comportamiento Visualizador muestran que generalmente las habilidades de visualización identificadas con una mayor frecuencia son la identificación visual (MVHV1), la discriminación visual (MVHV2), y el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas (MVHV3 y MVHV4). El tipo de imágenes identificadas en mayor medida en la resolución de los problemas han sido las Imágenes Concretas (MVII1). Coincidimos con Presmeg (1986) en que posiblemente sean el tipo de imágenes mayormente utilizadas por los estudiantes en la resolución de problemas geométricos. Hemos identificado las imágenes concretas cuando el participante construía o realizaba una nueva representación concreta (figura geométrica) distinta de la presentada en el problema. Hemos inferido también el Indicio MVII1 cuando el participante construía nuevas figuras geométricas a partir de fragmentaciones de la representación gráfica dada por el problema.

  Generalmente cuando en una resolución se ha inferido el Indicio Imagen Dinámica (MVII4) también hemos identificado el Indicio Memoria Visual (MVHV5) porque a diferencia de casos particulares concebimos que cuando un estudiante desplaza, rota o traslada mentalmente una figura o cuerpo geométrico lo hace conservando sus características iniciales de forma y tamaño, por lo que ha de recurrir a su memoria de trabajo y concretamente a su memoria visual. Incidimos en que sólo hemos inferido el Indicio Imagen Dinámica (MVII4) cuando los resultados del cuestionario de respuestas o la entrevista semiestructurada nos han confirmado que el participante ha explicitado que "ha movido", "ha girado" o "ha desplazado" una determinada figura geométrica. En cualquier otro caso no hemos inferido una Imagen Dinámica aunque el participante haya explicitado que "ha juntado" o "puesto" figuras geométricas de una

determinada forma, debido a la falta de concreción sobre las distintas estrategias que podrían estar involucradas en dicha ejecución.
Es importante destacar al respecto que al ser estudiantes de 4t de ESO el argot y vocabulario que emplean cotidianamente en sus resoluciones está compuesto por palabras como “poner la figura geométrica”, “subir o bajar el triangulo”, etc debido a que difícilmente emplearían expresiones como “traslación o desplazamiento mental de figuras geométricas”.

- En los resultados del Comportamiento Creativo-Insight destacamos que solo se ha identificado el Indicio Inventar Estrategias (IOO2) cuando el participante inventaba una estrategia de resolución que no venia intrínsecamente propiciada por el enunciado o representación gráfica del problema. Por ejemplo en los problemas 6 y 7 hemos identificado que la naturaleza de las estrategias a aplicar para resolver los problemas en cierta manera vienen determinadas por el propio enunciado. En estos dos problemas hemos identificado el Indicio Descubrir Relaciones (IOO1) cuando entre las diferentes estrategias de trazar líneas o reubicar figuras geométricas el participante consigue discernir y plantear la adecuada para resolver el problema.

Hay que notar que entre los resultados de los diferentes comportamientos expuestos anteriormente identificamos el Indicio Descubrir Relaciones (IOO1) al descubrir una relación remota entre conceptos o figuras geométricas que sugiere el planteamiento de una resolución original e innovadora, que no está necesariamente relacionada con tener éxito en la resolución del problema.

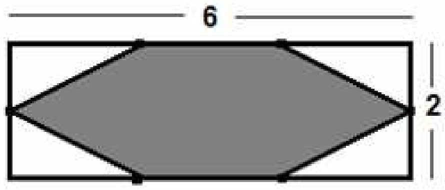
Los Indicios del Descriptor Elaboración muestran una frecuencia ínfima. Interpretamos que los participantes, generalmente, no construyen modelos gráficos o escritos para facilitar la ejecución de sus estrategias de resolución. De forma similar el Indicio Escolar (IOE2) muestra unos porcentajes de frecuencia escasa, esto es debido a que en muchos de los casos independientemente si la estrategia planteada resuelve el problema, no se evidencia la aplicación y organización adecuada de los conceptos matemáticos escolares necesarios. En algunos casos porque los participantes sólo plantean la solución final sin mostrar cómo han llegado hasta ella. En otros casos porque se plantean resoluciones y estrategias como por ejemplo la fragmentación o la construcción de una figura geométrica que en cierta medida pueden ser independientes del conocimiento o conceptos matemáticos escolares de los participantes. Por ejemplo poder visualizar un determinado número de triángulos inscritos en un cuadrado, entre otros factores, depende fundamentalmente de la habilidad visual que el participante dispone para identificar figuras geométricas independientemente del contexto.

De forma análoga los resultados nos indican una frecuencia baja en el Indicio Tantear (IOF2) en la mayoría de problemas geométricos ip^2. Este resultado se debe a que sólo se ha identificado el indicio IOF2 cuando hemos verificado muestras explícitas gráficas o escritas de que el participante ha tanteado y aplicado estrategias que en cierta forma han estado basadas en el ensayo y error.

6.1.5.1.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO Y EXPLORATORIO

En este apartado nos centramos en un análisis detallado a nivel descriptivo, exploratorio y cualitativo de cada uno de los problemas en los que clasificaremos las categorías de resolución que hemos considerado significativamente originales y creativas:

Problema 1
En una terraza observamos una zona sombreada interior. Si sabemos que la terraza tiene forma rectangular con longitudes 6m y 2m. ¿Cual es el area de la terraza? y ¿Cual es el área de la zona sombreada?



En este problema hemos identificado distintas resoluciones. En la gran mayoría de ellas el denominador común es la fragmentación adecuada de figuras geométricas entendida como la estrategia de identificar visualmente aquellas figuras geométricas que independientemente del contexto pueden facilitarnos la resolución del problema. A continuación exponemos las diferentes categorías de resolución identificadas en los participantes:

- **Fragmentación y adición de superficies de figuras geométricas:** Englobamos en esta categoría aquellas resoluciones donde los participantes fragmentan el rectángulo en partes menores buscando una unidad de medida, para posteriormente poder realizar la adición de superficies correspondiente a la zona sombreada. Así como aquellas que identifican figuras geométricas subdividiendo la figura sombreada y procediendo posteriormente a la adición de las superficies.
- **Fragmentación, reubicación y adición de superficies de figuras geométricas:** En esta categoría consideramos los métodos en los que posteriormente a una fragmentación adecuada, se reubican determinadas figuras geométricas con el objetivo de reconocer determinadas relaciones y equivalencias geométricas. Es decir antes de realizar la adición de superficies menores identificadas en el rectángulo de manera explícita se reubican (rotan o trasladan) determinadas figuras geométricas con la intención de establecer algunas equivalencias geométricas, que nos permitan poder resolver el problema más fácilmente. Por ejemplo la equivalencia existente

entre los dos triángulos isósceles sombreados y el cuadrado central, supeditada a reconocer previamente que la superficie de cualquiera de los dos triángulos isósceles sombreados es equivalente a la mitad del cuadrado en el que están inscritos. Así como reconocer que la reubicación adecuada de los cuatro triángulos rectángulos no sombreados equivalen a uno de los tres cuadrados equivalentes en los que se puede dividir el rectángulo.

- **Fragmentación, adición y sustracción de superficies de figuras geométricas:**
  Las resoluciones de esta categoría se caracterizan por identificar y diferenciar las figuras geométricas sombreadas de las no sombreadas. En primer lugar los participantes calculan la superficie total del rectángulo y en segundo lugar calculan la adición de las 4 superficies de los triángulos rectángulos no sombreados. Finalmente sustraen estos dos valores.
- **Fragmentación, reubicación, adición y sustracción de superficies de figuras geométricas:**
  Esta categoría de resoluciones se diferencia de la anterior en que los participantes de manera explícita reubican (mueven, ponen o rotan) los cuatro triángulos rectángulos no sombreados de manera que visualizan la forma de una superficie cuadrada equivalente a un tercio del área total del rectángulo. Esto les permite calcular la superficie sombreada a partir de sustraer del área total del rectángulo la superficie del cuadrado no sombreado.
- **Plantea la solución directamente**
  En esta categoría hemos incluido aquellos participantes que resuelven correctamente el problema pero no explicitan ninguna resolución en el Cuestionario de Problemas Plantean la solución directamente, por tanto inferimos que consiguen "ver" o imaginar la solución.

También hemos identificado estudiantes que plantean métodos de resolución basados en equivalencias entre superficies de figuras geométricas erróneas o que inician el problema partiendo de supuestos geométricos erróneos.

La mayoría de categorías de resolución se encuentran en menor o mayor medida relacionadas debido a que parten de una previa reestructuración que consiste en una adecuada fragmentación de la figura geométrica del rectángulo, así como de la aplicación adecuada de algunas habilidades de visualización como la identificación visual, la discriminación visual o el reconocimiento de relaciones geométricas.

Consideramos que una de las diferencias básicas entre las estrategias identificadas reside en que en algunos casos los participantes manipulan las figuras geométricas después de la previa fragmentación entendiendo que desplazan, trasladan o rotan estás figuras geométricas con el objetivo de identificar finalmente otras que puedan facilitarles la resolución. En cambio en otros casos los participantes después de la previa fragmentación, realizan la adición y/o sustracción de las figuras geométricas identificadas que consideran necesarias.

A continuación planteamos la red sistémica con las categorías de resolución que nos han parecido significativamente originales, identificadas en el problema 1:

	Reestructuración	Participantes
Problema 1	Fragmentación y adición de superficies de figuras geométricas	F, L, S
	Fragmentación, reubicación y adición de superficies de figuras geométricas	A, B, E, C, I, H
	Fragmentación, adición y sustracción de superficies de figuras geométricas	*M,R*
	Fragmentación, reubicación, adición y sustracción de superficies de figuras geométricas	J,K
	Plantea la solución directamente	G

Esquema 6.1.5.1: Red sistémica Problema 1

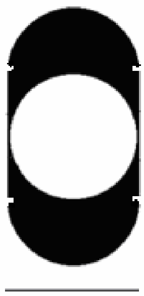
En estas categorías de resolución identificamos ciertos rasgos que posiblemente promueven evidencias no explicitadas de insight (Definidas en el apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT*). Categorías de resolución basadas principalmente en identificar y discriminar visualmente figuras geométricas que posibilitan el descubrimiento de relaciones y equivalencias geométricas que pueden propiciar la resolución del problema. Como por ejemplo cuando se identifica y se reconoce que uno de los dos triángulos isósceles sombreados es equivalente a la mitad de uno de los tres cuadrados en los que se puede descomponer el rectángulo del enunciado.

También inferimos evidencias explicitadas de insight en aquellas resoluciones en las que se ha planteado una cierta reubicación de figuras geométricas para llegar a construir e identificar otras que puedan facilitar la resolución del problema. Como por ejemplo cuando se ha identificado visualmente el cuadrado formado a partir de la reubicación de los cuatro triángulos rectángulos no sombreados que pertenecen al rectángulo.

Problema 2

Una ventana circular de un metro de diámetro se complementa con dos semicírculos cerrando la figura.

a) ¿Cúal de las dos superficies es mayor la ventana circular o la zona sombreada?
b) ¿Qué área tiene la figura sombreada?



1 metro

En este problema hemos identificado el Indicio Resuelve Correctamente Problema (RCP) cuando se han resuelto correctamente las dos preguntas formuladas en el enunciado. En los casos donde los participantes no representaban una imagen nueva distinta de la figura geométrica del enunciado no hemos identificado el indicio Imagen Concreta (MVII1).
Algunas de las dificultades que hemos identificado en las resoluciones de los estudiantes en este problema consisten en cuestiones algebraicas al no aplicar adecuadamente conceptos matemáticos sobre el cálculo de áreas de círculos y semicírculos, dificultades para comprender el enunciado, no aprovechar la información del primer apartado para resolver el segundo, no interpretar correctamente la figura geométrica dada por el enunciado o dificultades en imaginar o visualizar la figura geométrica final aunque se reconozca que los dos semicírculos encajan en la ventana circular.

Las categorías de resolución originales y creativas que hemos identificado en este problema son:

- **Reubicación de los semicírculos sombreados como ventana circular. Solo resuelven la primera parte del problema.**
  En esta categoría los participantes reubican los semicírculos sombreados llegando a corroborar que la unión de superficies es equivalente a la ventana circular. Inferimos que en algunos casos la equivalencia solo se realiza a nivel mental, porque aunque los participantes consideren implícitamente que la unión de las superficies de los dos semicírculos es equivalente a la ventana circular, en sus soluciones no explicitan ninguna representación gráfica. En todas las resoluciones planteadas en esta categoría sólo se resuelve la primera pregunta del problema.

- **Reubicación, adición y sustracción de superficies. Sustracción del cuadrado respecto del círculo interior y adición de los semicírculos. No se visualiza el cuadrado como zona sombreada final.**
  En esta categoría de resolución los participantes reubican adecuadamente los semicírculos llegando a imaginar o visualizar que constituyen la ventana circular. Se plantean resoluciones que consisten en la sustracción de superficies entre el cuadrado (1x1) y la ventana circular en las que finalmente se unen las superficies de los dos semicírculos. Los participantes después de la previa reubicación de los semicírculos sombreados en la ventana circular no acaban de identificar o ver el cuadrado 1x1 sombreado como figura geométrica final que representa la totalidad de la superficie sombreada inicial.

- **Reubicación y adición de superficies. Se considera el cuadrado final 1x1 como resultado del área de la zona sombreada.**
  En esta categoría de resolución, los participantes reubican los semicírculos en el interior de la ventana circular y acaban identificando el cuadrado final sombreado 1x1 como resultado de la figura geométrica sombreada del enunciado.

En estas categorías de resolución identificadas consideramos que al menos se requieren de habilidades de visualización como la identificación y discriminación visual con el objetivo de comparar la equivalencia de los dos semicírculos. En otros casos y según el anterior análisis cuantitativo realizado es posible que la interacción de un conjunto de habilidades de visualización (identificación visual, discriminación visual, reconocimiento de posiciones geométricas y reconocimiento de relaciones geométricas) puedan llegar a corroborar que efectivamente los dos semicírculos se pueden “reubicar” en la ventana circular ocupando exactamente la misma superficie. Si los participantes han concluido este resultado empleando alguna representación gráfica, entre otros indicios hemos identificado el de Reconocimiento de Posiciones Geométricas (MVHV3) y si lo han argumentado hemos identificado el Indicio Reconocimiento de Relaciones Geométricas (MVHV4).

Exponemos las diferentes categorías de resoluciones planteadas por los estudiantes, que nos han parecido originales y creativas:

	Reestructuración	Participantes
Problema 2	**Reubicación de los semicírculos sombreados como ventana circular. Solo resuelven la primera parte del problema.**	**E,S,O,G**
	Reubicación, adición y sustracción de superficies. Sustracción del cuadrado respecto del circulo interior y adición de los semicírculos. No se visualiza el cuadrado como zona sombreada final.	**A,F,H,K,L,R**
	***Reubicación y adición de superficies.* Considera el cuadrado final 1x1 como resultado del área de la zona sombreada.**	***I,P***

Esquema 6.1.5.2: Red sistémica Problema 2

Destacamos que en estas categorías de resolución identificamos ciertos rasgos que muestran evidencias explícitas de insight posibilitado cuando el participante descubre que la reubicación adecuada de los dos semicírculos es equivalente a la ventana circular. Nos ha parecido especialmente significativo que aunque algunos estudiantes identifiquen la reubicación de los dos semicírculos en la ventana circular, posteriormente no lleguen a identificar el cuadrado final 1x1 como figura geométrica sombreada final.

Es ilustrativa la resolución planteada por el participante P:

a) La zona sombrejada, ja que seria així: una rodona dins
d'un ~~rectangle~~ cuadrat i en els dos extrems mig

cercle a cada ~~en~~ extrem. Si ens fixem hi ha
una part sombrejada que no forma part del mig cercle (zona pintada)
i això fa que la zona sombrejada sigui més gran.

b) Primer hem de calcular l'area del cercle blanc. Fet
això es calcula l'area del ~~rectangle~~ cuadrat. ~~D~~ Després s'he li
resta l'area del cercle a l'area del ~~rectangle~~ cuadrat.
Amb això ja tenim l'area pintada del meu dibuix.
~~De~~ Seguidament, com que els dos semicercles dels dos
extrems ~~són iguals~~ junts són iguals que el cercle blanc,
s'he li suma l'area del cercle.
Per estalviar-son tants calculs, podem suposar que els
dos semicercles, com que equivalen a l'area del cercle,
es "fiquen" dins del cercle blanc. Així doncs, només fa
falta calcular l'area del ~~rectangle~~ cuadrat.

Hi ha un problema. Amb la dada que el dona d'1metre,
pots saber el diàmetre del cercle i d'aquí en pots treure
el radi, ~~pero~~ però no en pots treure l'altura.

Això es mentida ja que es un cuadrat. Això se sap perque
si fos un rectangle sobrarien costats quan fiques el cercle
dins. Com que encaixa a la perfecció, és un cuadrat.

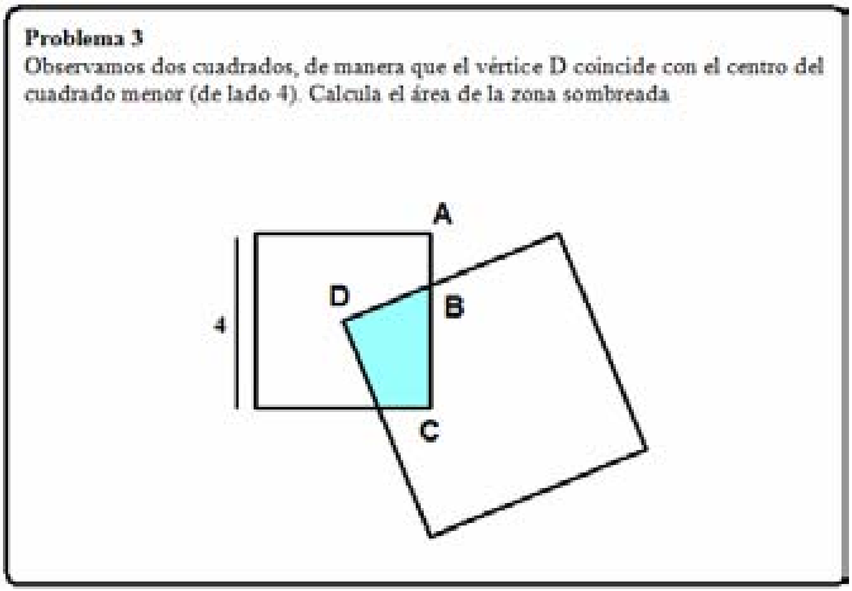
L'Area de cuadrat és aquesta per aquesta per tant.

a: 1m · 1
a = 1m².

Respuesta participante P

Observamos que a medida que el participante P va argumentando su razonamiento visual (Clements y Battista, 1992; Guzmán, 1996) va reflexionando sobre este, descartando heurísticas y/o procedimientos analíticos erróneos hasta que finalmente emerge la solución de forma acertada.

Nuevamente coincidimos con Presmeg (1986) en la reticencia que denotan los estudiantes a representar gráficamente sus ideas y estrategias de resolución como por ejemplo el participante P que en el apartado b) argumenta su razonamiento, pero sin explicitar ninguna representación visual. El salto creativo tiene lugar cuando el participante explicita "*podem suposar que els dos semicercles, com que equivalen a l''area del cercle es fiquen dins del cercle blanc. Així doncs només fa falta calcular l'àrea del cuadrat*".



En este problema hemos identificado diferentes categorías de resolución que hemos considerado originales y creativas:

- **Girar el cuadrado grande**
  Destacamos cuatro participantes que han planteado una resolución basada en "mover" o "girar" el cuadrado de mayor superficie mediante representaciones gráficas. Posteriormente han discriminado, reconocido e identificando visualmente que la superficie sombreada equivale a un cuarto de la superficie del cuadrado pequeño.
- **Equivalencia de triángulos y rotación del cuadrado**
  Esta resolución nos ha parecido interesante porque el participante establece una equivalencia de triángulos a partir de fragmentar parte de la zona sombreada. Considera dos triángulos rectángulos equivalentes. El primero es un triángulo rectángulo interior de la superficie sombreada y el segundo es un triángulo rectángulo exterior a la superficie sombreada de manera que considerando la equivalencia entre ellos llega a visualizar que sustituyendo uno por otro, la superficie sombreada resultante es equivalente a un cuadrado que representa una cuarta parte del cuadrado de menor superficie. Es ilustrativa la resolución del participante expuesta en la siguiente hoja.
- **Medición sexagesimal del ángulo en el vértice del cuadrado pequeño.**
  En esta categoría de resolución clasificamos las resoluciones que han estado supeditadas a constatar el ángulo recto de la zona sombreada y por tanto posteriormente a comprobar que si se giraba el cuadrado de mayor superficie la zona

sombreada conservaba el ángulo recto. A partir de aquí corroboran, identifican y visualizan que la zona sombreada es un cuadrado que representa una cuarta parte del cuadrado de menor superficie.

- **Identifica 4 figuras geométricas equivalentes a partir de trazar líneas en el cuadrado.**
  En esta categoría de resolución los participantes trazan líneas consecutivas a los lados de la zona sombreada y reconocen e identifican que las cuatro figuras geométricas en las que queda dividido el cuadrado de menor superficie son equivalentes entre sí. Esto les conduce a deducir que la superficie sombreada es equivalente a una cuarta parte del cuadrado pequeño.
- **He visto, deducido, me he dado cuenta… que el área sombreada es ¼ de la superficie del cuadrado pequeño.**
  En esta categoría los participantes sólo explicitan la solución final. Los participantes no explicitan el método o resolución concreta que han empleado, sino que inferimos que probablemente en un momento determinado han imaginado, han visto o se han dado cuenta de la proporción de la superficie sombreada respecto la superficie del cuadrado pequeño. Posiblemente de manera implícita han realizado una rotación de la superficie sombreada.

Inferimos que en algunas resoluciones los participantes son conscientes de la rotación o giro del cuadrado de mayor superficie como procedimiento en su resolución para identificar la superficie de la zona sombreada. En otros casos los participantes empiezan aplicando estrategias como la medición de ángulos o equivalencias entre figuras geométricas que pueden llegar a influir en la rotación del cuadrado de mayor superficie, pero que en cualquier caso pueden ser determinantes para llegar a visualizar la superficie sombreada como un cuadrado. Por último identificamos aquellas resoluciones en las que los participantes no explican las estrategias utilizadas sino que por el contrario sólo explicitan alguna expresión haciendo referencia a que se "*dan cuenta o han visto*" que la zona sombreada es un cuarto del cuadrado de menor superficie.

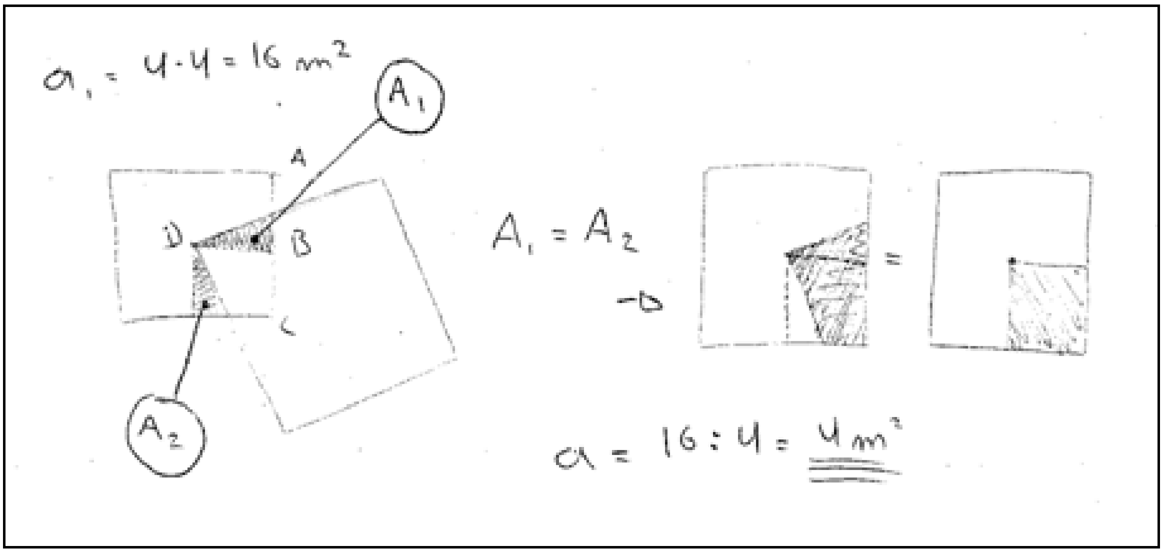
A continuación exponemos la red sistémica asociada:

	Reestructuración	Participantes
Problema 3	Girar el cuadrado grande	O,F,H,B
	Equivalencia de triángulos y rotación del cuadrado	I
	Medición sexagesimal del ángulo en el vértice del cuadrado pequeño	J,M
	Identifica 4 figuras geométricas equivalentes a partir de trazar líneas en el cuadrado.	E,A
	He visto, deducido, me he dado cuenta... que el área sombreada es ¼ de la superficie del cuadrado pequeño	R, L

Esquema 6.1.5.3: Red sistémica Problema 3

Inferimos que la ocurrencia del insight geométrico podría venir posibilitado por dos niveles de evidencia. Un primer nivel de evidencia explicitada cuando los participantes representan gráficamente la rotación del cuadrado de mayor superficie para identificar la figura geométrica que equivaldría a la superficie de la zona sombreada. Identificamos un segundo nivel de evidencia no explicitada en el que los participantes en sus resoluciones "han visto" o "se han dado cuenta" de la solución pero no explican o explicitan que estrategia han realizado. En estos casos normalmente sólo plantean una representación final. En cualquier caso consideramos que la ocurrencia del insight geométrico en los participantes podría venir posibilitado, entre otras estrategias, a partir del giro o rotación del cuadrado de mayor superficie. Esta estrategia propicia que los participantes puedan imaginar o visualizar la figura geométrica final a la que equivale la superficie sombreada. En los casos donde el estudiante ha explicitado que "ha movido" o "ha girado" el cuadrado de mayor superficie, hemos identificado el Indicio Imagen Dinámica (MVII4).

Nos ha parecido interesante y creativa la resolución planteada por el participante I:

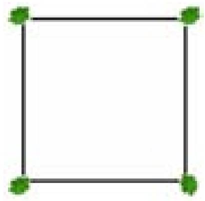


Observamos que el participante I a priori realiza una identificación visual donde identifica un triangulo rectángulo interior y uno exterior a la zona sombreada. Posteriormente realiza una discriminación visual y un reconocimiento de la relación geométrica que se establece entre estos dos triángulos rectángulos A_1 y A_2, concibiendo que los dos son equivalentes en superficie. Inferimos que posiblemente a partir de esta equivalencia deduce que la superficie de la zona sombreada es equivalente a un cuarto del cuadrado de menor superficie. Al contrastar la resolución del participante I respecto sus aportaciones en el cuestionario de respuestas (apartado 6.1.5.2 CUESTIONARIO DE RESPUESTAS) inferimos que la equivalencia de triángulos rectángulos fue la estrategia que le permitió realizar finalmente la rotación del cuadrado de mayor superficie.

Exponemos la transcripción del participante I en el cuestionario de respuestas:

> *"Me he dado cuenta de que podía mover el triangulo de posición para así conseguir que la zona sombreada tenga forma de cuadrado. Los dos triángulos son iguales... y me he dado cuenta de que podía rotar el cuadrado grande en el eje D, hasta conseguir que el area sea un cuadrado, una cuarta parte del cuadrado pequeño."*

Problema 4
Cuatro árboles se encuentran dispuestos en los vértices de una parcela cuadrada. Sin mover los árboles amplia la parcela de forma que la superficie sea doble y que su forma continue siendo cuadrada.



Este es un problema comúnmente conocido como la duplicación del cuadrado de Sócrates. Las categorías de resolución originales y creativas identificadas son:

- **Representan el cuadrado de doble superficie, sin explicitar ninguna estrategia.**
  En esta categoría de resoluciones los participantes no explicitan que procedimientos han empleado, aunque representan acertadamente la superficie de doble área. En algunos casos inferimos que posiblemente realizan una estimación del doble de la superficie del cuadrado y posteriormente representan la figura geométrica estimada, o simplemente acaban "imaginando" o "viendo" y representando como sería la superficie cuadrada final o conocían la solución del problema.
  Hemos identificado otros participantes (A,C,Q,N,P,Q) que no hemos reflejado en esta categoría porque sus resoluciones o estrategias están basadas en estimaciones o suposiciones aleatorias y erróneas que no verifican el enunciado y no convergen a la solución del problema.
- **Rotan el cuadrado**
  En esta categoría de resoluciones los participantes explicitan que *"rotan"* o *"giran"* el cuadrado para construir la figura geométrica correspondiente a la duplicación del cuadrado. En algunos de estos casos los participantes a priori denotan dificultades respecto a la ubicación de los arboles en la nueva superficie cuadrada. Aunque los participantes que aplican la estrategia de rotar o girar la superficie de la parcela cuadrada, finalmente comprenden que los arboles no necesariamente han de ser los vértices de la nueva superficie cuadrada.
- **A partir de la figura de un rombo**
  En esta categoría de resoluciones los participantes explicitan construir la figura de un rombo para representar el cuadrado de doble superficie. Interpretamos que cuando se refieren a un rombo, los participantes no consideran la figura geométrica

de manera intrínseca mediante sus propiedades geométricas, sino que únicamente se refieren a la posición de ésta. Es decir consideran el cuadrado como un caso particular de un rombo, especialmente cuando se presenta en una determinada posición.

- **A partir de la bisectriz del cuadrado**

  En esta categoría de resoluciones el participante representa el cuadrado de doble superficie y traza las bisectrices de la parcela cuadrada inicial del enunciado. Concretamente inferimos que posiblemente esta estrategia de trazar las bisectrices, le va a permitir poder identificar visualmente cuatro triángulos equivalentes e interiores en la parcela cuadrada que posteriormente podrá emplear para trazar sus simétricos respecto cada uno de los cuatro lados y así construir la superficie de doble área.

  A partir del Cuestionario de Problemas y la Entrevista Semiestructurada inferimos que el participante podría haber trazado las bisectrices del cuadrado inicial que coinciden con las diagonales y darse cuenta que estas forman parte de las mediatrices de los lados del cuadrado que se busca para resolver el problema.

- **Fragmentar el cuadrado buscando figuras geométricas equivalentes para construir el cuadrado con doble superficie.**

  En esta categoría de resolución los participantes identifican figuras geométricas dentro del cuadrado formado por los 4 árboles y representan nuevas figuras geométricas equivalentes en superficie. Estas figuras geométricas las reubican mediante traslaciones y rotaciones con el objetivo de construir una parcela cuadrada con el doble de superficie que la original.

A continuación exponemos la red sistémica de resoluciones creativas que hemos identificado y que podrían posibilitar la ocurrencia del insight:

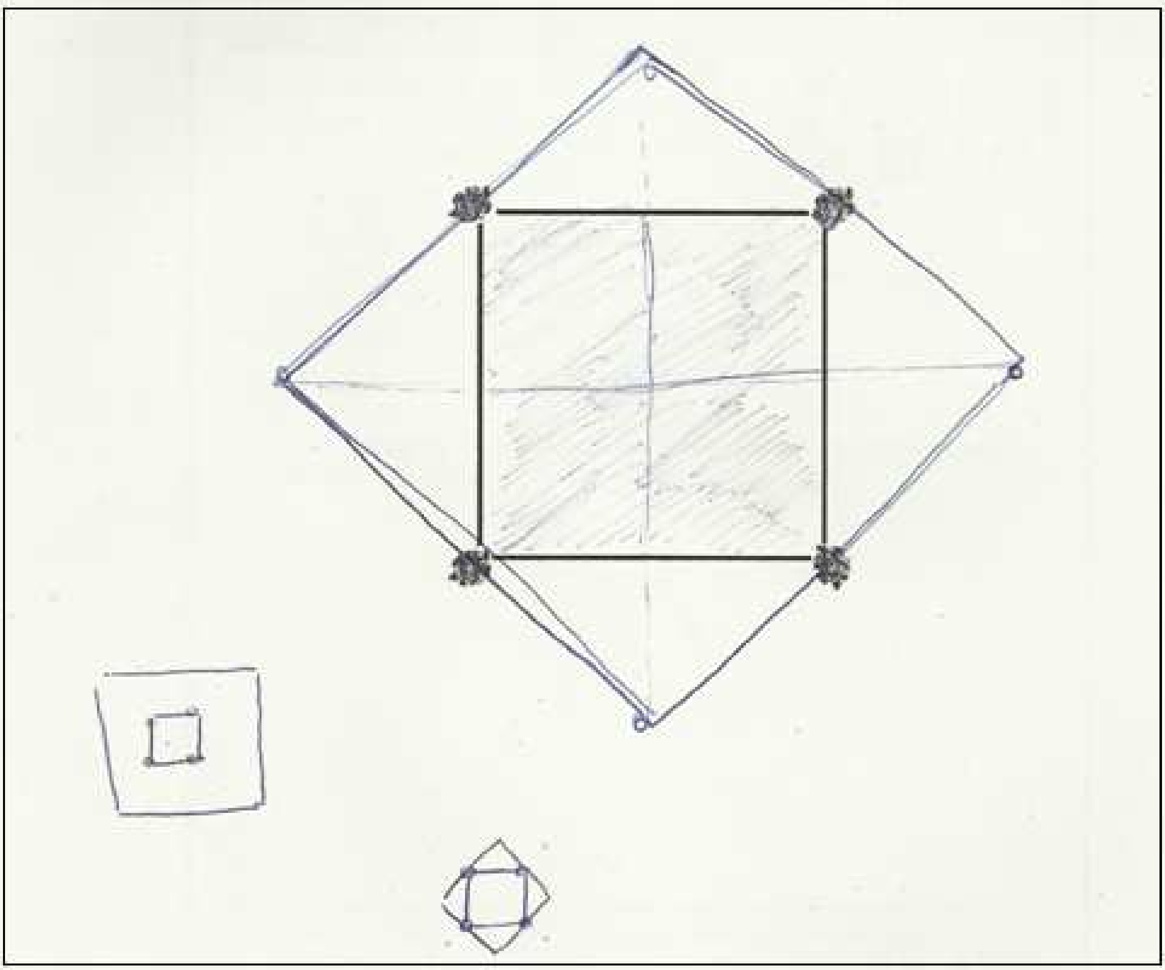
	Reestructuración	Participantes
Problema 4	Sólo representa el cuadrado de doble área, sin explicitar ninguna estrategia.	F,J
	Rotan el cuadrado	I,K
	A partir de la figura de un rombo (Entendida como posición)	Ñ,S
	A partir de la bisectriz del cuadrado	*R*
	Fragmenta el cuadrado buscando figuras geométricas equivalentes para construir el cuadrado con doble superficie.	B, E

Esquema 6.1.5.4: Red sistémica problema 4

Destacamos los participantes F y J que han resuelto el problema correctamente, representando únicamente la parcela cuadrada de doble superficie, sin explicitar ninguna estrategia de resolución.

Inferimos que en una mayoría de resoluciones se combinan algunas habilidades de visualización como por ejemplo la identificación visual con el objetivo de llegar a identificar la parcela cuadrada final; la discriminación visual, donde se compara la parcela cuadrada inicial y final; el reconocimiento de la posición geométrica, cuando el participante reconoce que posición ha de disponer la parcela cuadrada final respecto la inicial y el reconocimiento de relaciones geométricas cuando se reconoce la relación del doble de superficie entre la parcela inicial y final.

Nos ha parecido interesante ilustrar la resolución del participante J:

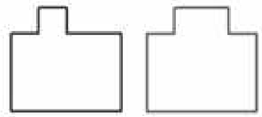


Resolución participante J

Inferimos como el participante tantea que disposiciones y reubicaciones de las parcelas cuadradas inicial y final pueden ser eficaces para resolver el problema. Parece ser que finalmente opta por un modelo que realiza en pequeño y que posteriormente amplia en la representación del enunciado. En el Cuestionario de Respuestas hemos identificado una evidencia no explicitada de insight del participante J, al explicar que ha resuelto el problema porque… *"Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro. Intuición"*. Consideramos que el estudiante traza las diagonales del cuadrado grande con el objetivo de comparar la superficie de las figuras geométricas interiores y discriminar que efectivamente el cuadrado de mayor superficie representa el doble de superficie que el cuadrado interior del enunciado. Inferimos que podría haber identificado el triángulo unidad entre los dos cuadrados de manera que fraccionando adecuadamente obtendría 16 triángulos isósceles equivalentes en la parcela cuadrada de mayor superficie y 8 triángulos isósceles equivalentes en la parcela cuadrada de menor superficie, cuestión que de manera implícita resolvería el problema.

Problema 5

a) Observa estos dos polígonos: (Pon una X donde consideres y razona la respuesta)



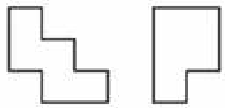
Si No

i) ¿Tienen la misma área?
¿Tienen el mismo perimetro?
Razona tu respuesta.

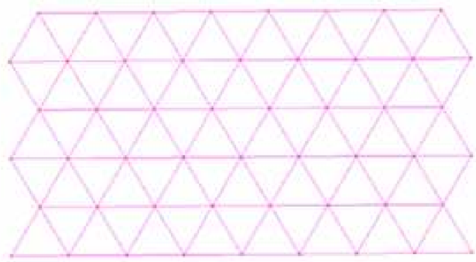
Ahora, observa estos dos polígonos:

Si No

ii) ¿Tienen la misa área?
¿Tienen el mismo perimetro?
Razona tu respuesta



b) En la malla triangular dibuja un hexágono regular y un triangulo equilátero con el mismo perímetro. ¿Tienen la misma área?



c) Generalmente, dos polígonos con el mismo perímetro tienen la misma área? Y dos polígonos con la misma área tienen el mismo perímetro? Explica lo que piensas.

En este problema identificamos el Indicio *Resuelve Correctamente Problema* (RCP) cuando los participantes responden correctamente a los tres apartados (a,b,c).

Las categorías de resolución originales y creativas identificadas son:

- **Fragmentación de figuras geométricas**

  En esta categoría de resolución los participantes fragmentan las figuras geométricas con el objetivo de identificar la unidad de superficie, que les permita poder discriminar respecto la medida de las áreas y la longitud de los perímetros de las figuras geométricas en cada apartado. Destacamos la resolución del participante P que identifica la unidad de superficie y realiza el recuento de unidades de superficie en cada figura geométrica con la finalidad de discriminar sobre la relación entre el área y el perímetro.

- **Estimación**

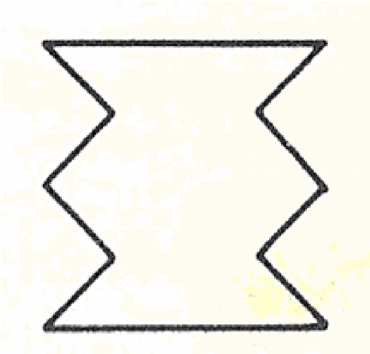
  En esta categoría de resolución los participantes no emplean una estrategia de fragmentación en las figuras geométricas. Consideramos que posiblemente realizan alguna estimación visual y por ese motivo acaban generalmente discriminando erróneamente sobre la relación entre el perímetro y superficie de las figuras geométricas presentadas.

Generalmente todos los participantes tienen dificultades para descubrir tácitamente la no existencia de relación entre el perímetro y área entre figuras geométricas. Posiblemente debido, entre otros motivos, a la falta de ejemplos y actitud crítica que les pudiera permitir contrastar todos los casos posibles. Exceptuando algún caso aislado como por ejemplo la resolución del participante A en la que él mismo explicita que ha conseguido deducir que *"si dos polígonos de diferente forma tienen la misma área el perímetro no es el mismo y al contrario también"*.

A partir de los resultados obtenidos en el análisis de este problema coincidimos con Moreira (1996) en la dificultad que presenta el estudio de la relación entre área y perímetro de las figuras planas, así como adquirir una idea sobre cada uno de estos conceptos. Autores como Marchini (1999) tratan sobre el conflicto entre la relación de los conceptos del área y perímetro y de cómo se podría abordar didácticamente para conseguir alcanzar resultados positivos.
Encontramos investigaciones interesantes como la de Fandiño y D'Amore (2007) donde investigan las concepciones y convicciones respecto la relación entre el perímetro y área de estudiantes, maestros y profesores. Esta investigación sugiere que las supuestas relaciones entre el perímetro y área entre determinadas figuras geométricas, se sustentan en que en la mayoría de trabajos escolares la relación entre el área y el perímetro siempre es una relación estática y de manera implícita se acaba sugiriendo una relación funcional.

Corroboramos que prácticamente no hemos identificado resoluciones originales, creativas y exitosas por parte de los estudiantes que puedan promover la ocurrencia del insight geométrico con el objetivo de descubrir que en general no existe una relación funcional entre el perímetro y el área de figuras geométricas. Los resultados nos indican que el problema ha generado una gran dificultad y bloqueo debido a que una mayoría de participantes han dejado apartados en blanco. Además verificamos que ninguno de los participantes ha resuelto con éxito (apartado 6.1.5.1 ANALISIS CUESTIONARIO PROBLEMAS) el problema porque no hemos identificado el Indicio Resuelve Correctamente Problema (RCP). Por este motivo hemos descartado este problema en nuestra investigación y no lo tendremos presente en los análisis posteriores.

Problema 6
Utilizando solo tres líneas rectas divide la siguiente figura en seis triangulos.



En este problema concebimos que el propio enunciado orienta a los participantes a aplicar una determinada estrategia basada en el ensayo y error. Por ese motivo cuando los participantes aplican la estrategia sugerida por el problema no hemos identificado el Indicio Inventar Estrategias (IOO2) porque consideramos que no "inventan" sus resoluciones.

Hemos identificado el Indicio Imagen Concreta (MVII1) cuando los participantes reconocían o identificaban gráficamente los 6 triángulos necesarios para resolver el problema.

De entre las diferentes categorías de resolución originales y creativas identificadas consideramos:

- **Ensayo y error**

  En esta categoría de resoluciones los participantes explicitan resolver el problema a partir de ir probando diferentes combinaciones y ubicaciones de líneas hasta identificar las figuras geométricas que resuelven el problema. Las resoluciones que forman parte de esta categoría están supeditadas al ensayo y error, a partir de las distintas representaciones gráficas empleadas por los participantes.

  Inferimos que en otras categorías de resolución en este problema, puede haberse empleado de manera implícita el ensayo y error, aunque no hemos identificado diferentes representaciones gráficas significativas que así lo corroboren por parte de los participantes.

- **Reestructuración por completación**

  En esta categoría de resoluciones, los participantes tienden a completar y/o prolongar los lados de la figura geométrica del problema. En un primer momento tienden a unir los lados de la figura geométrica representando dos diagonales interiores en forma de cruz.

Inferimos que visualmente los estudiantes tienden más fácilmente a completar la figura geométrica, coincidiendo con la Gestalt (Wertheimer, 1959), antes que llegar a aplicar otras estrategias de resolución. Posiblemente también dependerá de la representación visual concreta y como sucede en este caso la estrategia de la reestructuración por completación puede ser más fácil de plantear para los estudiantes.

- **Unir los vértices**

  En esta categoría los participantes marcan los vértices de la figura geométrica y representan las tres diagonales para obtener los seis triángulos. Esta categoría en cierta medida se relaciona con la anterior ya que los participantes describen una forma de completar o prolongar los lados interiores de la figura geométrica.

- **He visto como resolver el problema**

  En esta categoría los participantes en el Cuestionario de Respuestas explicitan haber "*imaginado*" o "*visualizado*" la resolución del problema, respecto a cómo disponer las líneas para obtener los seis triángulos y poder resolver el problema. Las resoluciones que forman esta categoría solo plantean la solución final sin explicitar que estrategia han empleado.

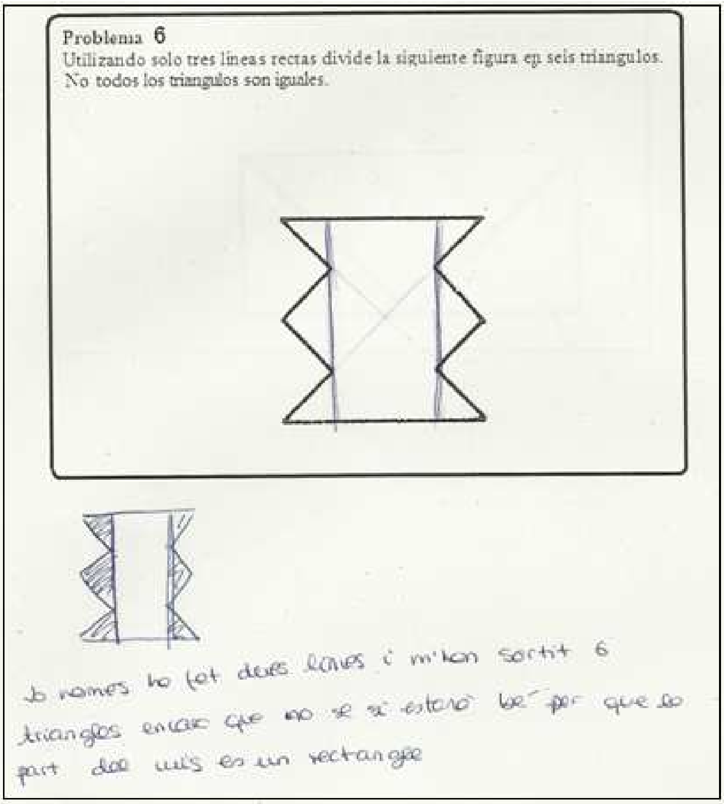
A continuación exponemos la red sistémica asociada de resoluciones originales y creativas que han podido posibilitar la ocurrencia de algún insight.

	Reestructuración	Participantes
Problema 6	Ensayo y error	D, H, J, K,N
	Reestructuración por completación	A,B,G,I,Q,S
	Unir los vértices	M,F,O,R
	He visto como resolver el problema	P,E,L,Ñ

Esquema 6.1.5.6: Red sistémica Problema 6

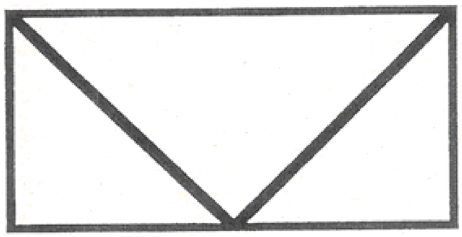
Reconocemos un nivel de evidencia no explicitada de insight en la categoría de resoluciones "*He visto como resolver el problema*" debido a que en la mayoría de resoluciones que forman esta categoría, los participantes simplemente atribuyen haber *visualizado* o *visto* como resolver el problema sin explicitar ningún procedimiento o estrategia al respecto.

A continuación destacamos la resolución original propuesta por el participante J que nos ha parecido interesante:



Inferimos que el participante J en un principio parece ser que aplica una estrategia de completación en la que une los vértices interiores a partir de prolongar y completar las dos diagonales, pero no consigue visualizar la tercera línea que le permita identificar los 6 triángulos. Posiblemente después de tantear, avanzar y retroceder acaba escogiendo una estrategia mediante la representación de dos líneas paralelas que unen dos a dos los vértices interiores y en la que identifica los seis triángulos, aunque sin verificar las condiciones del enunciado que indicaba utilizar solo tres líneas rectas.

Problema 7
Imagina que recortas estos tres triángulos. Haz con ellos un cuadrado.
Puedes rotarlos y moverlos, pero no superponerlos.



En este problema no hemos identificado el Indicio Inventar estrategias (IOO2) cuando la estrategia empleada por los participantes es la promovida por el enunciado del problema: mover y rotar las figuras geométricas. En cambio si hemos identificado el indicio (IOO2) cuando se han planteado estrategias diferentes a la sugerida por el enunciado como por ejemplo la fragmentación de los triángulos que forman el rectángulo en otras figuras geométricas.

De forma similar el Indicio Imagen Concreta (MVII1), solo se ha identificado cuando los participantes construyen nuevas representaciones o figuras geométricas independientemente de las identificadas en el enunciado.

A continuación explicitamos las categorías de resolución originales y creativas planteadas por los estudiantes que consideramos podrían posibilitar la ocurrencia del insight:

- **Representar solo la solución final**.

  En esta categoría de resolución los participantes sólo exponen la representación del cuadrado final que resuelve el problema a partir de los tres triángulos que forman el rectángulo del enunciado, sin explicitar que estrategias han empleado.

- **Reubicar los triángulos formando un rombo-posición y girarlo para formar un cuadrado.**

  Esta categoría de resolución se caracteriza porque los participantes explicitan que reubican los dos triángulos equivalentes del enunciado, desplazándolos y rotándolos de manera que consiguen llegar a ubicarlos como un triángulo rectángulo que constituye la mitad de un cuadrado y junto con el otro triángulo consideran la figura geométrica de un rombo-posición. Posteriormente inferimos que a partir de un giro consiguen visualizar el cuadrado que resuelve el problema.

Cuando los participantes hacen referencia a un rombo, se refieren al concepto de una determinada posición del cuadrado donde identifican éste como un rombo particular. En este caso la percepción influye en la consideración de la figura geométrica. Johnson (1991) ya explicitaba que según la definición que se plantee un cuadrado puede ser considerado un caso particular de un rectángulo. De la misma forma según la definición que establezcamos entendemos que un cuadrado puede ser considerado el caso particular de un rombo.

- **Fragmentar los triángulos geométricos y reubicarlos para formar un cuadrado**
  En esta categoría de resolución a diferencia de la anterior observamos que previamente los participantes fragmentan los triángulos geométricos del rectángulo, identificando nuevas figuras geométricas. Posteriormente reubican las nuevas figuras geométricas identificadas desplazándolas y rotándolas de manera adecuada hasta llegar a construir un cuadrado. Posiblemente el hecho de fragmentar las figuras geométricas, podría facilitar la construcción del cuadrado, aunque en algunos casos no se identifican los tres triángulos del enunciado en la representación del cuadrado final y por tanto no se resolvería el problema verificando el enunciado.
- **Desplazar y reubicar los triángulos pequeños encima del triángulo mayor.**
  Esta categoría de resolución se caracteriza porque los participantes fijan el triángulo mayor ubicando un cateto de forma horizontal. Posteriormente desplazan y rotan los triángulos menores en superficie de manera implícita o explícita hasta que los reubican en la hipotenusa del triángulo fijado obteniendo un cuadrado.

A continuación exponemos la red sistémica asociada a las categorías de resolución:

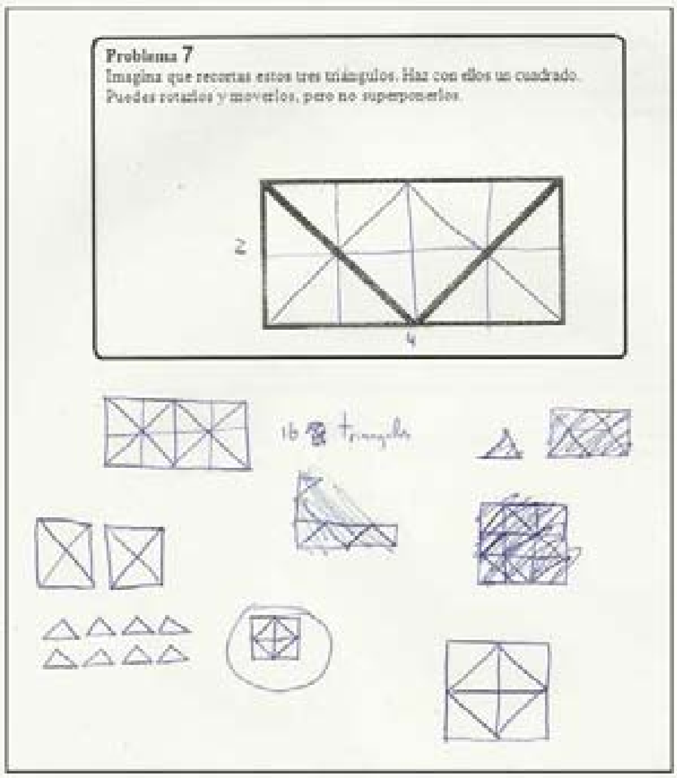
	Reestructuración	Participantes
Problema 7	Representar solo la solución final.	R,S,Ñ,K,C
	Reubicar los triángulos formando un rombo y girarlo para formar un cuadrado.	G,B, P
	Fragmentar los triángulos geométricos y reubicarlos para formar un cuadrado	M,F
	Desplazar y reubicar los triángulos pequeños encima del triángulo mayor.	L,I,A

Esquema 6.1.5.7: Red sistémica Problema 7

En las resoluciones consideramos que de manera implícita se emplean algunas habilidades de visualización como identificar y discriminar visualmente los triángulos del rectángulo así como reconocer la posición de éstos para construir un cuadrado.

Inferimos posibles evidencias no explicitadas de insight en la categoría de resolución "*Representar solo la solución final*" porque los participantes plantean la solución final sin explicitar la estrategia empleada. En cambio en las restantes categorías de resolución inferimos que pueden haberse producido evidencias explicitadas de insight, cuando los participantes consiguen descubrir la reubicación adecuada de las figuras geométricas que les permiten representar el cuadrado.

Exponemos la resolución planteada por el participante F:

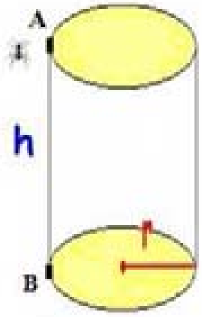


Observamos que el participante F tantea con varias estrategias de fragmentación en el rectángulo dado por el enunciado del problema. Posteriormente escoge una en la que identifica visualmente 8 triángulos isósceles. A continuación inferimos que aplica una estrategia de reestructuración con el objetivo de reubicar los triángulos y disponerlos de manera que pueda representar un cuadrado (MVII1). El participante concibe que los triángulos que aparecen en el cuadrado final (imagen concreta) son triángulos isósceles rectángulos, aunque la representación realizada puede llevarnos a confusión porque en ella no se identifican todos los triángulos pequeños como rectángulos isósceles que son. Entendemos que dicha representación es el producto de reubicar una fragmentación de figuras geométricas con objeto de construir un cuadrado. Independientemente de que la representación final sea correcta, consideramos que esta estrategia es original y podría haber posibilitado alguna evidencia explicita de insight geométrico.

Problema 8

Una hormiga se encuentra en un cilindro de altura 3m y radio 63cm , en la posición que indica la figura. Quiere ir del punto A al punto B por la superficie lateral del cilindro (sin bajar por la altura), empleando el camino más corto, que distancia recorrerá?

h= 3m
r= 63cm



En este problema identificamos que más de la mitad de los participantes (12) no han planteado ninguna resolución, posiblemente debido a diferentes motivos como por ejemplo no saber cómo empezar el problema o tener dificultades en la comprensión del enunciado o haberse quedado bloqueados ante la resolución.

Las categorías de resolución originales y creativas que hemos identificado son:

- **Desarrollo plano**
  En esta categoría de resolución, el participante A, ha planteado una estrategia de cambio dimensional que podría haber posibilitado el insight, mediante el desarrollo plano del cuerpo geométrico. Posteriormente una vez realizado el desarrollo plano del cilindro establece como distancia más corta la diagonal entre los vértices A y B.

Hemos identificado otras resoluciones basadas en la representación en el cilindro de la línea que une el punto A y el punto B en las que se consideran los diámetros de las dos bases y la altura del cuerpo geométrico. Estas resoluciones no las hemos considerado como originales o creativas, porque los participantes se limitan a trazar una línea por los diámetros de las bases y la superficie lateral que recorre el cuerpo geométrico del punto A al B. En estos casos tampoco se resuelve el problema geométrico propuesto. Por ese motivo en la red sistémica asociada a este problema sólo hemos considerado una categoría de resolución:

Problema 8	Estrategia / Reestructuración	Participantes
	Realiza un cambio dimensional	A

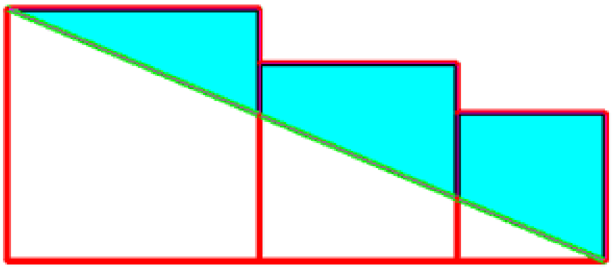
Esquema 6.1.5.8: Red sistémica Problema 8

Posiblemente la redacción del enunciado del problema, entre otras cuestiones, puede haber influido en que los participantes no hayan tenido la ocurrencia de plantear resoluciones basadas en el cambio dimensional, que pudieran propiciar el insight geométrico. Probablemente la representación del "camino más corto" en un cilindro, alberga cierta ambigüedad en la comprensión del problema, respecto la resolución por insight que pretendíamos.

En el anexo *B1 LISTA RECOPILACIÓN PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2* los problemas 43 (Perelman, 1975) y 42 (Moscovich, 2007) están sustentados en la misma naturaleza de resolución que nuestro problema de estudio, en la que el cambio dimensional podría ser la estrategia que posibilitase la ocurrencia del insight.

Los resultados nos indican que solo un participante (A) ha resuelto el problema y ha planteado una resolución creativa que podría haber propiciado el insight. Por ese motivo no estudiaremos este problema en nuestra investigación. Sin embargo consideramos que la ocurrencia de esta tipología de insight puede ser especialmente relevante en la didáctica de la geometría, por eso dejaremos como prospectiva de futuro el estudio de las resoluciones geométricas por insight promovidas por estrategias supeditadas en un cambio dimensional.

Problema 9
Tres cuadrados de lados 5, 4 y 3cm respectivamente están situados como se ve en el dibujo. Hallar el área de la figura sombreada.



Las categorías de resolución originales y creativas que hemos identificado en este problema son:

- **Fragmentación, cálculo y adición de las superficies identificadas en la zona sombreada.**
  En esta categoría de resolución los participantes fragmentan las figuras geométricas sombreadas identificando otras figuras geométricas con el objetivo de aplicar una estrategia de adición de áreas más fácil y sencilla a partir de las figuras geométricas resultantes. Generalmente en estas resoluciones se combinan estrategias analíticas y visuales.
- **Identifica y manipula las figuras geométricas hasta construir un cuadrado**
  En las resoluciones que forman parte de esta categoría los participantes identifican y discriminan figuras geométricas que consideran equivalentes a las superficies sombreadas. Posteriormente reubican estas figuras geométricas que consideran equivalentes de manera que acaban construyendo la representación final de un cuadrado. Esta resolución está basada en la posible estimación de figuras geométricas equivalentes y en la suposición de que una reubicación adecuada representaría un cuadrado. Esta es una estrategia de resolución determinada intrínsecamente por el tanteo aproximado.
- **Adición y sustracción de superficies**
  Esta categoría de resolución se divide en tres partes. Una primera parte en la que los estudiantes aplican una estrategia de adición de superficies respecto los tres

cuadrados que forman la figura geométrica del enunciado. Una segunda parte basada en identificar visualmente la zona geométrica no sombreada como un triángulo rectángulo y posteriormente calcular su área. Y por último una tercera parte en la que sustraen las superficies calculadas.

Exponemos la red sistémica asociada a las categorías de resolución de este problema:

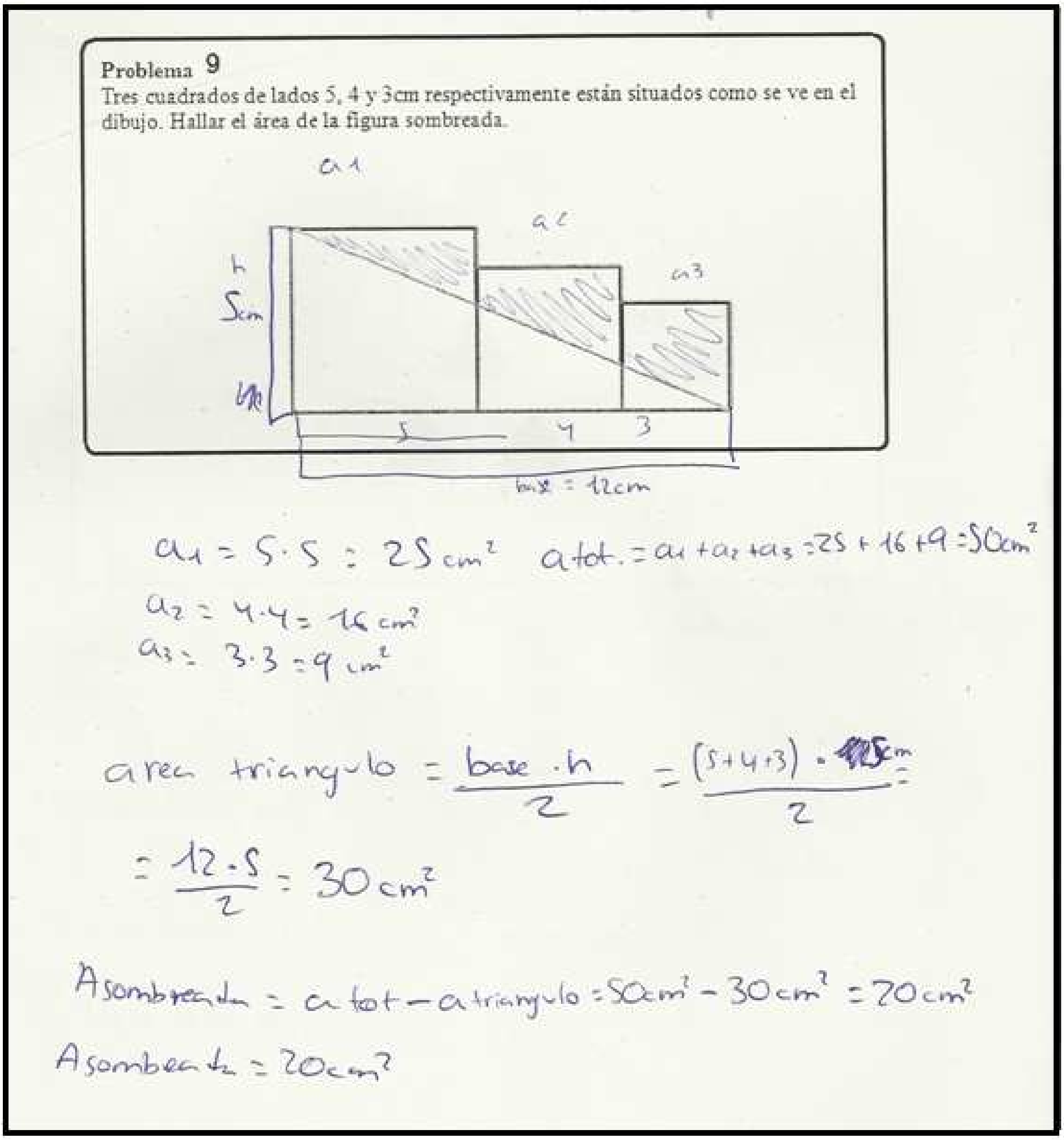
	Reestructuración	Participantes
Problema 9	Fragmentación, cálculo y adición de las superficies identificadas en la zona sombreada.	M,K,H
	Identifica y manipula las figuras geométricas hasta construir un cuadrado.	J,E
	Adición y sustracción de superficies	O,R,A

Esquema 6.1.5.9: Red sistémica Problema 9

Inferimos que en la categoría de resolución basada en la adición y sustracción de superficies podríamos identificar alguna evidencia no explicita de insight cuando los participantes en algún momento de la resolución del problema son capaces de visualizar la zona no sombreada como un triángulo. En general una caracterización importante en las tres categorías de resoluciones que hemos considerado, reside en que los participantes son capaces de identificar visualmente las figuras geométricas que intervienen en el problema aunque en algunos casos no consiguen visualizar el triángulo rectángulo de base doce como figura geométrica.

De manera similar en una mayoría de resoluciones hemos identificado el Indicio Combinación de Métodos (CMVA) ya que se combinan estrategias analíticas y visuales.

A continuación exponemos una de las resoluciones originales, identificadas en el participante A:



Problema 9

Tres cuadrados de lados 5, 4 y 3cm respectivamente están situados como se ve en el dibujo. Hallar el área de la figura sombreada.

$a_1 = 5\cdot 5 = 25\ cm^2$ $\quad a_{tot.} = a_1 + a_2 + a_3 = 25 + 16 + 9 = 50cm^2$

$a_2 = 4\cdot 4 = 16\ cm^2$

$a_3 = 3\cdot 3 = 9\ cm^2$

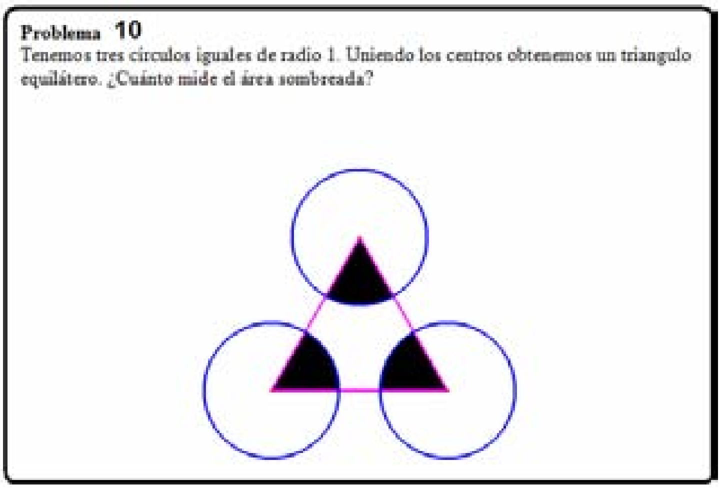
$$\text{area triangulo} = \frac{\text{base}\cdot h}{2} = \frac{(5+4+3)\cdot 5cm}{2} =$$

$$= \frac{12\cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$A_{sombreada} = a_{tot} - a_{triangulo} = 50cm^2 - 30cm^2 = 70cm^2$

$A_{sombreada} = 20cm^2$

Inferimos que el participante A posiblemente puede haber tenido la ocurrencia de una evidencia no explicita de insight al haber visualizado el triángulo rectángulo de base doce en su estrategia de resolución. Comprobamos que esta es una resolución basada en la combinación de estrategias de adición y sustracción de superficies de figuras geométricas.



Las categorías de resolución originales y creativas identificadas en este problema son:

- **Fragmenta el círculo en seis zonas circulares equivalentes a las del enunciado y calcula la superficie sombreada total.**
  En esta categoría de resolución los participantes plantean una estrategia de resolución que consiste básicamente en fragmentar el círculo a partir de identificar sectores circulares equivalentes a los que están sombreados, en cada uno de los círculos respectivos. En esta resolución la identificación y discriminación visual así como el reconocimiento de las posiciones geométricas de los sectores circulares son habilidades de visualización determinantes para conseguir ver o imaginar con éxito la superficie de la figura geométrica final formada por los tres sectores circulares sombreados.

  Algunos participantes a partir de una relación de transitividad identifican los tres sectores circulares sombreados en un mismo círculo y acaban “viendo” la superficie total sombreada que generan. En otros casos los participantes aplican una estrategia analítica de cálculo de las tres unidades de superficie.

- **Reubicar los sectores circulares sombreados en un círculo y calcula el área de la zona sombreada total.**
  En esta categoría de resolución identificamos distintas formas de aplicación. En primer lugar inferimos una forma de resolución en la que los participantes a base de ensayo y error llegan a “imaginarse” o “visualizar” la disposición de los tres sectores circulares ubicados en un mismo círculo. En segundo lugar inferimos otra forma de resolución donde los participantes pueden haber empleado una estrategia en la que “mueven”, “desplazan” o “rotan” los sectores circulares hasta “juntarlos” en un mismo círculo. En cualquiera de estas estrategias de resolución, el objetivo final consiste en reubicar los sectores circulares sombreados con el fin de identificar y visualizar la superficie de la figura geométrica final que representan.

La red sistémica de estrategias que podrían posibilitar el insight es:

	Reestructuración	Participantes
Problema 10	Fragmenta el circulo en seis zonas circulares equivalentes a las del enunciado y calcula la superficie sombreada total.	R,A,H,M,P
	Reubica los sectores circulares sombreados en un círculo y calcula el área de la zona sombreada total.	J,I,E,B,L

Esquema 6.1.5.10: Red sistémica Problema 10

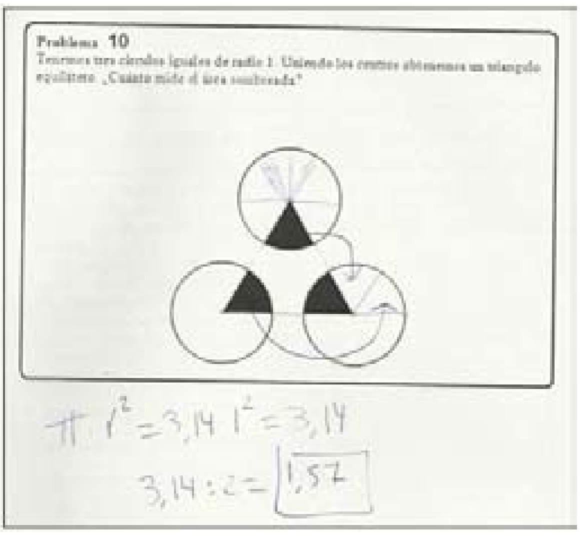
Incidimos en la existencia de otras estrategias donde los participantes no fragmentan de manera equivalente los sectores circulares y estrategias en las que se reflejan errores de cálculo de superficies así como dificultades y bloqueos en la resolución del problema.

La diferencia esencial entre las dos categorías de resolución identificadas en la red sistémica radica en que mientras la primera, parte de la fragmentación de uno de los círculos en sectores circulares equivalentes, la segunda parte de una reubicación de sectores circulares. Aunque en algunas resoluciones las estrategias de fragmentación y reubicación han podido combinarse. En este caso, cuando el semicírculo final que representaba la adición de los tres sectores circulares, se identificaba en el mismo círculo que previamente se había fragmentado con sectores equivalentes hemos clasificado la resolución en la primera categoría de Fragmentación. En cambio si se identificaba en otro círculo distinto como resultado de trasladar los sectores circulares, la hemos clasificado en la categoría de Reubicación.

Inferimos un posible nivel de evidencia explicitada de insight cuando los participantes consiguen ver la unión de los tres sectores circulares sombreados como un semicírculo.

Observamos que ninguno de los participantes hace referencia a la medición angular (60º) de los sectores circulares como estrategia de resolución.

Nos ha parecido ilustrativa la resolución del participante L:



Observamos cómo de forma explícita el participante L reubica los sectores circulares en un mismo circulo para llegar a identificar la superficie total sombreada. En esta estrategia inferimos posiblemente la existencia de una evidencia explicitada de insight, ya que a partir de reubicar adecuadamente los sectores circulares sombreados el participante L identifica la superficie equivalente final del semicírculo que resuelve el problema.

Una vez finalizado el análisis descriptivo y exploratorio de las categorías de resolución originales y creativas que hemos identificado en los problemas geométricos ip^2 iniciaremos el estudio de los resultados del Cuestionario de Respuestas.

6.1.5.2 RESULTADOS CUESTIONARIO DE RESPUESTAS

El Cuestionario de Respuestas se presentó a los estudiantes comentándoles que era muy importante su colaboración en su realización y que era un trabajo que no formaba parte de la evaluación del curso.

Reflexionar sobre las respuestas, estrategias y resoluciones planteadas en los problemas puede aportarnos información cualitativa en el análisis de los problemas.

A continuación exponemos los resultados sobre el análisis de la frecuencia de las tres preguntas cerradas del Cuestionario de Respuestas, según la escala de Likert de cinco grados que hace referencia a las preguntas:

a) Valora cúal crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

b) ¿Cómo crees que has realizado este problema?

c) ¿Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

Posteriormente exponemos en cada uno de los problemas las redes sistémicas asociadas a las categorías de respuestas obtenidas por los participantes en las tres preguntas abiertas del Cuestionario de Respuestas:

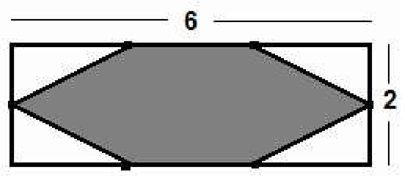
i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

A continuación empezamos con el primer problema.

Problema 1
En una terraza observamos una zona sombreada interior. Si sabemos que la terraza tiene forma rectangular con longitudes 6m y 2m. ¿Cual es el area de la terraza? y ¿Cual es el área de la zona sombreada?



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cúal crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	1	10	8	1	

b. ¿Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	1	11	6	2		

c. ¿Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	4	7	5	3	1

Los resultados nos indican que un participante ha considerado difícil el nivel de complejidad del problema. Aproximadamente la mitad de los participantes (12) creen que han realizado el problema correctamente (1 y 11 resp) y más de tres cuartas partes de estudiantes (16) consideran que tienen los conocimientos necesarios para resolver el problema (4, 7 y 5 resp).

RESULTADOS PREGUNTAS ABIERTAS

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	Resolución explicada

A1.1. Fragmentan la figura geométrica, identifican y visualizan que los dos o cuatro triángulos sombreados (según fragmenten) reubicados adecuadamente forman un cuadrado, y finalmente visualizan la solución de la zona sombreada a partir de la adición de las superficies sombreadas resultantes.

B1.1. Fragmentan y realizan la adición de superficies de figuras geométricas sombreadas.

C1.1. No responden

D1.1. Fragmetan e identifican cuatro triángulos exteriores no sombreados y los reubican formando una única figura geométrica. Aplican una estrategia de sustracción de areas, entre la superficie del rectángulo y la superficie de los cuatro triángulos exteriores.

E1.1. Fragmentan el rectángulo e identifican los cuatro triángulos exteriores no sombreados, y aplican una estrategia de sustracción entre el área del rectángulo y los triángulos no sombreados.

F1.1. Aplican una estrategia errónea, fragmentando inadecuadamente y no visualizando la zona sombreada correcta.

G1.1. Fragmenta y realiza la adición de superficies. Se argumenta una estrategia analítica incorrecta a partir del teorema de Pitágoras en el cálculo de áreas.

H1.1. Plantean la solución directamente.

I1.1. Reconoce no haber resuelto el problema correctamente, aunque ve que restando la superficie del rectángulo a los cuatro triángulos no sombreados, obtendría la zona sombreada.

Categoría	A1.1	B1.1	C1.1	D1.1	E1.1	F1.1	G1.1	H1.1	I1.1
Frecuencia	6	2	3	2	2	2	1	1	1
Participante	A, B, E C,I, H,	L,F	O,P,D	K,J	M,R	Q,N	S	G	Ñ

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	Dificultades

A2.1. Argumentan los cambios en la posición de las zonas sombreadas

B2.1. No recuerdan o aplican adecuadamente las fórmulas del cálculo de áreas

C2.1 Explican dificultades en descubrir las equivalencias y divisiones de la terraza rectangular.

D2.1. Argumentan dificultades en reconstruir la representación de figuras geométricas.

E2.1. En que método analítico utilizar, como Pitágoras.

F2.1. No responden o explicitan no tener dificultad.

G2.1. Han tenido dificultad hasta que han encontrado una manera de resolver el problema.

H2.1. Explica como dificultad el no saber como empezar.

I2.1. Explicita el problema como difícil.

Categoría	A2.1	B2.1	C2.1	D2.1	E2.1	F2.1	G2.1	H2.1	I2.1
Frecuencia	1	4	1	1	1	8	2	1	1
Participantes	I	R,O,F,G	H	J	S	Q,P,L,A, D,M,K,E	Ñ,B	C	N

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	Resolución alternativa

A3.1. Plantean una estrategia de sustracción entre la superficie total y la superficie de los cuatro triángulos no sombreados identificados.

B3.1. No responden o explícitamente responden "no".

C3.1. Realizan algún comentario inexacto sobre como calcular la superficie de la zona sombreada.

D3.1. Proponen una estrategia que se basa en considerar la relación geométrica entre la superficie del cuadrado y los dos triángulos sombreados.

E3.1. Plantean una estrategia a partir de fragmentar la superficie del rectángulo en tercios y asociar la superficie sombreada a dos tercios.

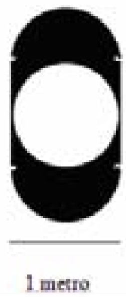
F3.1. Consideran la superficie sombreada como el área de un triángulo no sombreado multiplicado por 8.

Categoría	A3.1	B3.1	C3.1	D3.1	E3.1	F3.1
Frecuencia	1	12	3	2	1	1
Participantes	A	S,N,O,L,J, H,G,D,C,B	O,I,E,P	Ñ,K	R	F

Problema 2

Una ventana circular de un metro de diámetro se complementa con dos semicirculos cerrando la figura.

a) ¿Cúal de las dos superficies es mayor la ventana circular o la zona sombreada?
b) ¿Qué área tiene la figura sombreada?



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cúal crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	2	1	8	6	3

b.¿ Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	3	4	7	2	1	3

c.¿ Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	2	6	2	6	4

Observamos que aproximadamente la mitad de los participantes (9) han considerado difícil este problema (6 y 3 resp.) y tan solo 7 creen que han realizado bien el problema (3 y 4 resp.). La mitad de los participantes consideran que disponen de los conocimientos necesarios para resolver el problema (2, 6 y 2 resp.).

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	**Resolución explicada**

A1.2. Argumentan una sustracción de superficies entre el cuadrado de lado 1cm y el círculo interior, para obtener la superficie entre estas dos figuras y posteriormente realizan una adición del círculo sombreado formado por los dos semicírculos sombreados.

B1.2. No responden o explicitan que lo han explicado en la hoja de problemas.

C1.2. Explicita una estrategia considerando que toda la zona sombreada es igual a la ventana circular.

D1.2. Explica una estrategia considerando la zona sombreada como la suma de las superficies de los semicírculos sombreados y del cuadrado.

E1.2. No visualiza la unión de semicírculos dentro de la ventana circular del cuadrado.

F1.2. Reubican los semicírculos sombreados en la ventana circular, aunque no resuelven la segunda parte del problema.

G1.2. Explicita una estrategia sobre el cálculo de áreas.

H1.2. Argumenta que no sabía realizar el problema, aunque si visualizarlo.

I1.2. Reubican los dos semicírculos dentro de la ventana circular y visualizan el cuadrado de lado 1cm como solución de la superficie sombreada.

Categorías	A1.2	B1.2	C1.2	D1.2	E1.2	F1.2	G1.2	H1.2	I1.2
Frecuencia	6	3	1	1	1	4	1	1	2
Participantes	A,F,H, K,L,R	J,B,C	D	M	Q	S,O,G,E	N	Ñ	I,P

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	**Dificultades**

A2.2. No responden

B2.2. Argumentan que no están seguros.

C2.2. Explicitan que no han tenido.

D2.2. Explican que todo el problema se le ha hecho una dificultad.

E2.2. No reconocen las equivalencias entre las figuras geométricas de la ventana circular y la zona sombreada, como por ejemplo que los semicírculos formaban un círculo que se podía ubicar en la ventana circular.

F2.2. Explican que han tenido dificultades para calcular el área del círculo.

G2.2. Argumentan dificultades en calcular el área entre el círculo y el cuadrado de lado 1cm.

H2.2. No interpreta bien el dibujo, desconoce si la ventana circular pertenece a la figura.

Categorias	A2.2	B2.2	C2.2	D2.2	E2.2	F2.2	G2.2	H2.2
Frecuencia	3	1	2	1	4	5	3	1
Participantes	J,A,P	B	O,N	C	H,D,K ,I	R,Ñ,G ,F,E	S,M,L	Q

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	**Resolución alternativa**

A3.2. Argumenta que si se ubican los dos semicírculos dentro de la ventana circular obtenemos un cuadrado de lado 1cm.

B3.2. Explicitan que no se les ha ocurrido ninguna otra resolución.

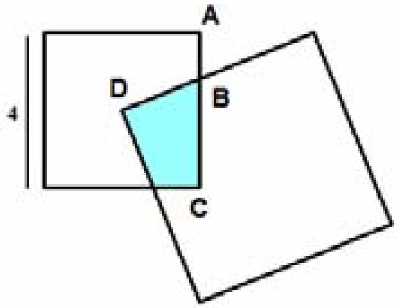
C3.2. No responden

D3.2. Calcula el área de toda la figura menos la del círculo no sombreado.

E3.2. Calcula el área del círculo sombreado y la diferencia entre la superficie del cuadrado y la ventana circular.

Categorías	A3.2	B3.2	C3.2	D3.2	E3.2
Frecuencia	1	15	2	1	1
Participantes	A	F,E,D,C,B, G,H,I,N,Ñ, O,Q,K,L,S	J,P	M	R

Problema 3
Observamos dos cuadrados, de manera que el vértice D coincide con el centro del cuadrado menor (de lado 4). Calcula el área de la zona sombreada



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cual crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	2	1	7	8	2

b. Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	3	6	3	2	1	5

c. Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	3	6	2	5	4

Los resultados muestran que la mitad de los participantes han considerado el problema difícil (8 y 2 resp.) y 5 de estos estudiantes no han realizado el problema. Prácticamente la mitad de participantes (9) creen que han realizado bien el problema y más de la mitad (11) consideran que tienen los conocimientos necesarios para resolver el problema.

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	**Resolución explicada**

A1.3. Argumentan "que ya está explicado".

B1.3. Explicitan que "deducen o se dan cuenta" que el área sombreada es ¼ de la superficie del cuadrado pequeño y la calculan.

C1.3. Argumentan que no lo han hecho o no responden nada.

D1.3. Giran y mueven el cuadrado de mayor superficie hasta ver la zona sombreada como un cuadrado, y poderla calcular.

E1.3. Ve que los lados de la zona sombreada son la mitad del cuadrado pequeño y la asocia a un cuadrado.

F1.3. Emplean Pitágoras con el objetivo de calcular los lados de la zona sombreada.

G1.3. Dividen los lados del cuadrado de menor superficie en partes iguales.

H1.3. Identifican el ángulo recto de la figura geométrica en el punto D previo a la rotación.

I1.3. Identifican 4 figuras geométricas equivalentes a partir de trazar líneas en el cuadrado.

J1.3. Establece una equivalencia entre triángulos y posteriormente realiza el giro del cuadrado.

K1.3. Explicita que sin saber como lo ha visto.

Categoria	A1.3	B1.3	C1.3	D1.3	E1.3	F1.3	G1.3	H1.3	I1.3	J1.3	K1.3
Frecuencia	1	1	5	4	1	1	1	2	2	1	1
Participantes	P	A	Ñ,G,C,N,D	O,F,H,B	K	S	Q	J,M	R,L	I	E

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	**Dificultades**

A2.3 No plantean ninguna dificultad o bloqueo.

B2.3 Plantean que la dificultad en general ha sido todo el problema.

C2.3 Explicitan no conocer las medidas exactas de la zona sombreada.

D2.3 No conciben como empezar, ni como calcular el área de la zona sombreada.

E2.3 Argumentan que les ha costado un poco.

F2.3 Consideran que los lados D-B y D-C no miden lo mismo.

Categoria	A2.3	B2.3	C2.3	D.2.3	E2.3	F2.3
Frecuencia	9	4	1	4	1	1
Participantes	A,M,L,P,N,D,B,F,E	K,Ñ,C	S,G	O,H,I,J	R	Q

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	**Resolución alternativa**

A3.3. No dan explicaciones.

B3.3. Explicitan textualmente que "no"

C3.3 Explica que midiendo con una regla podrían conocer las medidas de la zona sombreada para calcular el área.

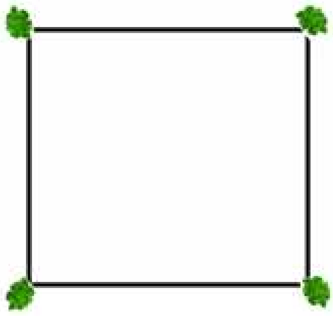
D3.3. Explicita calcular el área a partir de la superficie del otro cuadrado.

E3.3. Plantean una estrategia errónea, a partir de sumar la superficie de los dos cuadrados y restar la zona sombreada.

F3.3. Argumenta que dividendo un lado de la zona sombreada entre dos, podemos conocer un lado del cuadrado de menor superficie que está dentro del grande.

Categoria	A3.3	B3.3	C3.3	D3.3	E3.3	F3.3
Frecuencia	2	14	1	1	1	1
Participantes	J,A	G,F,D,C,H,I,S,R,Q,P,O,Ñ,N,L	B	E	K	M

Problema 4
Cuatro árboles se encuentran dispuestos en los vértices de una parcela cuadrada. Sin mover los árboles amplia la parcela de forma que la superficie sea doble y que su forma continue siendo cuadrada.



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cual crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	3	4	5	7	1

b. Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	3	5	7	3	2	0

c. Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	5	5	5	3	2

Los resultados indican que menos de la mitad de los participantes (8) han considerado el problema difícil o muy difícil (7 y 1 resp.). En la misma proporción menos de la mitad de los estudiantes (8) creen que han realizado correctamente el problema (3 y 5 resp.). Y por último según los resultados obtenidos más de la mitad de los estudiantes (15) consideran que tienen los conocimientos (5,5 y 5 resp.) necesarios para resolver el problema.

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	**Resolución explicada**

A1.4. No concretan ninguna explicación de cómo lo han resuelto, emplean algún calificativo y alguna idea ambigua como "hemos agrandado el cuadrado"… etc.

B1.4. No realizan explicaciones.

C1.4. Explican que realizan la diagonal o la bisectriz y sitúan los arboles como vértices.

D1.4. Fragmentan el cuadrado buscando figuras geométricas equivalentes para construir el cuadrado de doble superficie.

E1.4. Explicitan construir el cuadrado de superficie final a partir de sumar ¼ del lado, a cada uno de los lados del cuadrado del enunciado.

F1.4. Rotan el cuadrado y consiguen ver que los arboles no se sitúan en los vértices sino en el centro de las aristas del nuevo cuadrado.

G1.4. Fragmenta el cuadrado por la mitad y lo añade al cuadrado. (Piensa en una solución en tres dimensiones)

H1.4. Explican que a partir de considerar la figura geométrica de un rombo, resuelven el problema.

I1.4. Argumenta que los arboles deben quedar dentro de la parcela, porque en el enunciado no se pide que los arboles sean los vértices.

Categorias	A1.4	B1.4	C1.4	D1.4	E1.4	F1.4	G1.4	H1.4	I1.4
Frecuencia	8	3	2	1	1	2	1	2	1
Participantes	A,C,Q,F ,N,P,Q,J	B,G,M	D,R	E	H	I,K	L	Ñ,S	O

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	**Dificultades**

A2.4. Plantean dificultades en descubrir que los vértices del cuadrado final no tenían por qué coincidir con los arboles necesariamente.

B2.4. No explicitan ninguna dificultad.

C2.4. Explica que le ha costado explicarlo.

D2.4. Argumentan que no sabían cómo empezar.

E2.4. Explicitan como dificultad el descubrir que no podían mover los árboles.

F2.4. Plantean que no sabían resolver el problema.

G2.4. Explica que no tenía compas.

Categorías	A2.4	B2.4	C2.4	D2.4	E2.4	F2.4	G2.4
Frecuencia	2	8	1	3	3	2	1
Participantes	A,P	B,F,K,M, N,Ñ,O,S	C	D,E,I	G,H,Q	J,L	R

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	**Resolución alternativa**

A3.4. No han planteado ninguna alternativa.

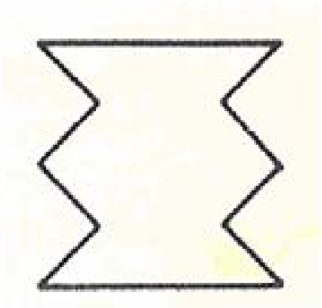
B3.4. Plantea un desplazamiento de los vértices sobre las diagonales hacia fuera para construir un cuadrado de mayor superficie.

C3.4. Explicita que girando el cuadrado podría haber hecho otro más grande.

D3.4. Propone dividir el cuadrado en cuatro partes y posteriormente desdoblarlo hacía fuera.

Categorías	A3.4	B3.4	C3.4	D3.4
Frecuencias	17	1	1	1
Participantes	A,C,D,E,G, H,I,J,L,N, Ñ,O,P,Q,R,S,M,	B	F	K

Problema 6
Utilizando solo tres lineas rectas divide la siguiente figura en seis triangulos.
No todos los triangulos son iguales.



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cual crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	14	4	1	0	1

b. Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	15	3	1	0	0	1

c. Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	13	2	3	1	1

Observamos que más de las ¾ partes de los participantes (18) han considerado fácil (14 y 4 resp) el problema. Estos datos correlacionan con el hecho de que una mayoría de participantes (18) han considerado haber realizado bien (15 y 3 resp) el problema así como prácticamente la totalidad de la muestra (18) han considerado que disponían de los conocimientos necesarios para resolverlo (13, 2 y 3 resp.).

RESULTADOS PREGUNTAS ABIERTAS

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explícalo con el máximo detalle.

Categoría	**Resolución explicada**

A1.6. Explicitan que mediante ir probando, ensayo y error.

B1.6. Explica que ha dividido la superficie de la figura geométrica.

C1.6. Argumentan que no han podido resolver el problema y que han padecido dolor de cabeza.

D1.6. Argumentan que trazan dos líneas rectas en cruz de forma que identifican 2 triángulos y 2 rombos. Posteriormente trazan otra en horizontal e identifican 6 triángulos.

E1.6. Explica que pensando mentalmente le ha venido la idea de cruzar las líneas y en el primer intento ha conseguido ver la solución.

F1.6. Argumentan que han utilizado los vértices para representar las tres líneas.

G1.6. Explican que al ver la representación del enunciado han visto como hacer el problema.

Categorias	A1.6	B1.6	C1.6	D1.6	E1.6	F1.6	G1.6
Frecuencia	5	1	1	5	1	4	3
Participantes	H,N, D, K, J	B	C	S,G,A, I, Q	E	F,M, O,R	L,Ñ,P

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	**Dificultades**

A2.6. No responden o explicitan textualmente "ninguna dificultad"

B2.6. Plantean como dificultad el hecho de que hay muchas posibilidades para probar.

C2.6. Explica que en general todo el problema ha sido una dificultad.

D2.6. Plantea como dificultad donde poner las líneas.

Categorías	A2.6	B2.6	C2.6	D2.6
Frecuencias	17	1	1	1
Participantes	A,D,I, B,E,F ,G,L,M,N,Ñ,O, P,Q,R,S,K	H	C	J

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	**Resolución alternativa**

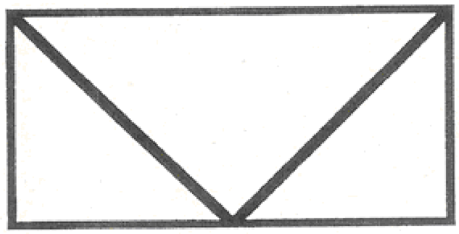
A3.6. No responden o textualmente explicitan que no.

B3.6. Argumentan, que han de buscar y probar otras formas de resolución.

C3.6. Plantean una representación gráfica donde las figuras resultantes no son triángulos.

Categorías	A3.6	B3.6	C3.6
Frecuencias	17	1	2
Participantes	A,H,B,C,D,F, G,I,J,L,M,N, Ñ,O,Q,S,K	E	P,R

Problema 7
Imagina que recortas estos tres triángulos. Haz con ellos un cuadrado.
Puedes rotarlos y moverlos, pero no superponerlos.



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cual crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	8	2	3	7	0

b. Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	7	4	2	1	2	4

c. Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	9	1	5	4	1

Los resultados indican que la mitad de los participantes han considerado el problema fácil o muy fácil (2 y 8 resp.) coincidiendo aproximadamente con la misma proporción de participantes (11) que creen que han realizado el problema bien (4 y 7 resp.). Por último los resultados muestran que tres cuartas partes de los participantes consideran que tienen los conocimientos necesarios para resolver el problema (9, 1 y 5 resp.).

RESULTADOS PREGUNTAS ABIERTAS

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	Resolución explicada

A1.7 Explicita que lo resolvió de cabeza, "poniendo diferentes formas".

B1.7. Plantea: invertir el triángulo rectángulo mayor y uniendo las bases de los dos triángulos equivalentes forma un triángulo rectángulo de mayor superficie. Posteriormente une: los dos triángulos finales idénticos para formar un cuadrado.

C1.7. No responden

D1.7. Explicitan que han puesto los dos triángulos menores formando un triángulo de la misma base que el grande y el otro lo han movido encima.

E1.7. Explican haber probado diferentes combinaciones. Ensayo y error.

F1.7. Argumentan que fragmentan los triángulos y los reubican hasta hacer un cuadrado.

G1.7. Explicita que construye el cuadrado con solo dos triángulos.

H1.7. Explican que reubicando los triángulos, llegan a construir o ver un rombo que girado representa el cuadrado que soluciona el problema.

I1.7. Reubican los triángulos menores encima del triángulo mayor para construir el cuadrado.

J1.7. Expone que, sin saber como consigue ver un rombo.

Categorías	A1.7	B1.7	C1.7	D1.7	E1.7	F1.7	G1.7	H1.7	I1.7	J1.7
Frecuencia	1	1	5	2	2	2	1	2	3	1
Participantes	S	R	Q,D,O, H,K	Ñ,C	N,E	F,M	J	G,P	A,I,L	B

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	Dificultades

A2.7. No responden o explicitan que no han tenido dificultades.

B2.7. Argumentan que no sabían como poner los triángulos para obtener el cuadrado.

C2.7. Explica que les ha costado un poco llegar a la conclusión.

D2.7. Plantea que no sabía donde utilizar el triángulo que sobraba.

E2.7. Expone como dificultad que no coincidían las longitudes del triángulo grande con las longitudes de los dos triángulos pequeños.

F2.7. Explica que al principio le ha costado entenderlo pero una vez ha juntado los dos triángulos pequeños ya no ha tenido problemas.

G2.7. Expone como dificultad el hecho de tener que ir probando para llegar a la solución.

Categorias	A2.7	B2.7	C2.7	D2.7	E2.7	F2.7	G2.7
Frecuencia	11	4	1	1	1	1	1
Participantes	S,R,I,D, A,P,N,M, L,B,K	Q,O,F,E	Ñ	J	H	G	C

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	Resolución alternativa

A3.7. No responden o exponen que no se les ocurre otra manera.

B3.7. Plantea que se podría rotar la figura.

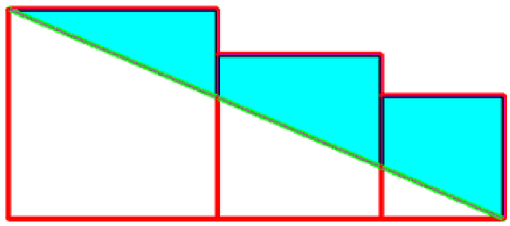
C3.7. Explicita como estrategia seguir probando.

D3.7. Expone una nueva representación gráfica correcta de la construcción del cuadrado, distinta de la resolución que planteó en el problema.

Categorias	A3.7	B3.7	C3.7	D3.7
Frecuencia	17	1	1	1
Participantes	A,K,S,Q, P, O,Ñ,N,M,L, J,I,H,G,F,C,B	R	E	D

Problema 9

Tres cuadrados de lados 5, 4 y 3cm respectivamente están situados como se ve en el dibujo. Hallar el área de la figura sombreada.



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cual crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	0	5	5	6	4

b. Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	0	9	2	2	0	7

c. Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	4	5	3	4	4

Los resultados obtenidos nos muestran que la mitad de los participantes consideraron este problema difícil (6 y 4 resp.) aunque aproximadamente la mitad de los participantes creen que lo realizaron bien. En esta línea los resultados indican que más de la mitad de los participantes (12) han considerado que tienen los conocimientos necesarios para resolverlo (4, 5 y 3 resp.).

RESULTADOS PREGUNTAS ABIERTAS

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	**Resolución explicada**

A1.9. Argumentan haber calculado la suma del área de cada cuadrado. Posteriormente calculan el área del triángulo no sombreado y la sustraen al área total.

B1.9. Exponen que no han sabido resolverlo o no responden.

C1.9. Plantean reubicar las zonas sombreadas. Establecen de manera intuitiva equivalencias, manipulando y transformando algunas de las zonas sombreadas en figuras geométricas conocidas.

D1.9. Argumenta que sumando el área de los tres cuadrados y el resultado dividiéndolo entre dos obtendríamos el resultado final que multiplicado por el número Pi, ya nos daria la solución.

E1.9. Explicita que a partir de ingenio, fragmentando y buscando equivalencias de cada zona sombreada en cada figura geométrica y sumándolas todas ellas identifica la superficie total sombreada.

F1.9. Explican que a partir de la fragmentación (Dividiendo los cuadrados, estimando longitudes y areas), adición y calculo de superficies de las zonas sombreadas.

G1.9. Plantea que cada cuadrado marca una proporción 1/4→2/4→3/4 del siguiente y realizando diferentes cálculos ha conseguido encontrar la superficie final.

H1.9. Explicita que ha ido probando y calculando las superficies.

Categorias	A1.9	B1.9	C1.9	D1.9	E1.9	F1.9	G1.9	H1.9
Frecuencia	3	9	2	1	1	2	1	1
Participantes	A,O,R	C,L,Ñ,P, D,F,I,Q,B	E,J	G	H	M,K	N	S

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	**Dificultades**

A2.9. No responden o explicitan que no han tenido dificultades.

B2.9. Explican que todo el problema ha sido una dificultad.

C2.9. Plantea que quizás las sombras juntas no den un cuadrado.

D2.9. Propone: que los tres cuadrados eran diferentes.

E2.9. Expone que no se le ha ocurrido la manera de cambiar la disposición de la zona sombreada para que sea más fácil calcularlo.

F2.9. Explicita la posibilidad de dividir el cuadrado A i C en tres partes.

G2.9. Plantea que no encontraba la mejor manera de hacer este problema.

H2.9. Explican que no entendían el enunciado.

I2.9. Expone que no sabía cómo calcular cuanto media la parte inferior de cada parte sombreada.

Categorías	A2.9	B2.9	C2.9	D2.9	E2.9	F2.9	G2.9	H2.9	I2.9
Frecuencia	9	2	1	2	1	1	1	2	1
Participantes	A,D,K,B, J,H,O,R,S	C,L	E	F,G	I	M	N	Ñ,P	Q

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

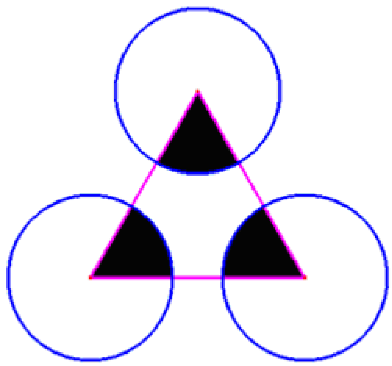
Categoría	**Resolución alternativa**

A3.9. No responden o explicitan que no se les ocurre ninguna otra manera de resolver el problema.

B3.9. Plantea calcular las áreas de los 3 cuadrados y del triángulo y posteriormente sustraer el área del triángulo a los tres cuadrados.

Categorías	A3.9	B3.9
Frecuencia	19	1
Participantes	A,D,I,Q,K, B,C,E,G,H, J,L,M,N,Ñ, O,P,R,S	F

Problema 10
Tenemos tres círculos iguales de radio 1. Uniendo los centros obtenemos un triangulo equilátero. ¿Cuánto mide el área sombreada?



RESULTADOS PREGUNTAS CERRADAS

a. Valora cual crees que ha sido el nivel de dificultad del problema.

	1 muy facil	2 facil	3 normal	4 dificil	5 muy dificil
Frecuencia	2	2	7	5	4

b. Cómo crees que has realizado este problema?

	1 muy bien	2 bien	3 regular	4 mal	5 muy mal	no lo he hecho
Frecuencia	1	7	5	2	1	4

c. Te ha parecido que tienes los conocimientos necesarios para resolver este problema?

	1 Totalmente	2 bastante	3 si	4 parcialmente	5 no
Frecuencia	3	4	5	4	4

Los resultados indican que aproximadamente la mitad de participantes (9) han considerado el problema difícil (5 y 4 resp.) y más de ¼ parte de los participantes han considerado que no han realizado bien el problema o no lo han hecho (2,1 y 4 resp.). Por último más de la mitad de los participantes (12) consideran que tienen los conocimientos necesarios para resolverlo (3,4 y 5 resp.).

RESULTADOS PREGUNTAS ABIERTAS

i) ¿Cómo has resuelto el problema? Explicalo con el máximo detalle.

Categoría	**Resolución explicada**

A1.10. Explicita haber utilizado la formula S=pi*r^2 y posteriormente ha multilplicado por 3.

B1.10. Establecen la equivalencia de los tres sectores circulares sombreados. Fragmentan el círculo en 6 sectores equivalentes al sector circular sombreado y posteriormente calculan la superficie que forma la zona sombreada de los tres sectores.

C1.10. No responden

D1.10. Explicitan que no lo han sabido resolver.

E1.10. Realiza una adición angular de los sectores circulares, a partir de una previa estimación errónea.

F1.10. Reubican los tres sectores circulares en un círculo y calculan el área de la zona sombreada.

G1.10. Explicita que calculando el área total.

H1.10. Explica que ha calculado la superficie de una de las zonas sombreadas y la ha multipliciado por 3.

I1.10. Expresan que se "dan cuenta" o "ven" la zona sombreada final.

Categorias	A1.10	B1.10	C1.10	D1.10	E1.10	F1.10	G1.10	H1.10	I1.10
Frecuencia	1	5	2	4	1	5	1	1	2
Participantes	S	R,P,M, H,A	Q,K	O,Ñ,F, C	N	J,E, B,	G	D	L,I

ii) ¿Explica que dificultades y bloqueos has tenido en la resolución del problema?

Categoría	**Dificultades**

A2.10. Explican que no sabían que formula aplicar, para el cálculo de áreas.

B2.10. Exponen que no han tenido dificultades.

C2.10. Plantea que no sabía que media el perímetro del sector circular.

D2.10. Explicitan que no sabían resolver el problema.

E2.10. Plantea que no está seguro que sea el método correspondiente.

F2.10. No responden

G2.10. Explicita como dificultad dividir el círculo.

H2.10. Expone que ha tenido dificultades en todo el problema.

Categorias	A2.10	B2.10	C2.10	D2.10	E2.10	F2.10	G2.10	H2.10
Frecuencia	3	8	1	2	1	3	1	1
Participantes	S,G,E	R,A,D, P,M,L,J,B	Q	Ñ,O	N	I,F,K	H	C

iii) ¿Ahora mismo se te ocurre alguna otra manera de resolver el problema?

Categoría	**Resolución alternativa**

A3.10. Explicitan que no se les ha ocurrido otra forma de resolver el problema

B3.10. No responden

Categorías	A3.10	B3.10
Frecuencia	16	4
Participantes	S,R,P,O,Ñ, M,L,J,I,H, G,F,D,C,B	Q,N,E,A

6.1.5.3 RESULTADOS ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

En los anexos *C.3.1 TRANSCRPCION DE LA ENTREVISTA* hemos expuesto las transcripciones de las entrevistas semiestructuradas que nos han parecido más interesantes por sus aportaciones cualitativas en el estudio de las resoluciones de los problemas geométricos ip^2.

Concretamente hemos seleccionado aquellos fragmentos de transcripciones donde hemos identificado evidencias explícitas o no explícitas de insight. Éstas se han representado en color azul. También hemos querido reflejar en las transcripciones el Indicio Imagen Cinestésica (MVII3), en color rojo, cuando los participantes se apoyaban en la gesticulación para realizar sus argumentaciones sobre la resolución de los problemas realizados. La entrevista semiestructurada mantiene la mismo diseño en cada uno de los problemas.

Destacamos de forma significativa las transcripciones en las que hemos identificado momentos de insight *(APARTADO 6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT)* que orientan y conducen a los participantes a la resolución del problema. En algunos casos podemos encontrarnos que los participantes después de un periodo de ensayo y error, en el abordaje de un problema descubran nuevas reestructuraciones o figuras geométricas que no converjan hacía la resolución de éste. Un ejemplo concreto lo encontramos en el problema de la duplicación del cuadrado, observamos que el participante P: *Yo me pensaba que… los arboles tenían que ser los vértices, tenían que continuar siéndolo y luego me he dado cuenta que no,* denota haber tenido la ocurrencia de una evidencia explicitada de insight, cuando consigue darse cuenta que los los arboles no tienen porque seguir siendo los vértices del nuevo cuadrado. A pesar de identificar esta evidencia explicitada de insight, ésta no promueve la solución del problema, ya que finalmente la resolución que acaba planteando el participante P es errónea. Nos encontramos ante posibles evidencias explicitadas o no explicitadas de insight que en un momento de la resolución pueden ayudar a resolver el problema, pero que no tienen por qué ser necesariamente determinantes en la resolución. En otros casos, identificamos situaciones donde las evidencias explicitadas o no explicitadas de insight conducen y orientan a los participantes a la resolución final.

Otro resultado importante en las transcripciones es la identificación en algunos casos, de diferentes evidencias de insight referentes a distintos aspectos en la resolución de un mismo problema. Por ejemplo en el problema 1 el participante F, explicitó “*Pues yo he* *visto que si dividías la zona sombreada se podían hacer ocho triángulos de los blancos, pues he calculado el área de uno blanco y lo he multiplicado por ocho"*. Seguidamente ante la pregunta ¿cómo se os ocurrió la idea para resolver el problema? El participante F explicó que "*Yo a la que he visto que uno blanco… o sea dos blancos eran… no… que uno negro era como dos blancos, pues he empezado a hacer".* En este caso inferimos que descubrió la equivalencia entre las figuras geométricas sombreadas y no sombreadas que identificó en el problema. Este es un caso en el que identificamos dos evidencias explicitadas de insight distintas que orientan al participante F a la resolución adecuada del problema. Una primera evidencia explicitada hace referencia a descubrir la relación geométrica entre los triángulos blancos y la superficie del rectángulo del problema y una segunda evidencia explicita el descubrimiento de la relación entre los triángulos blancos y los sombreados (o negros).

La mayoría de evidencias explicitadas de insight, de la misma forma que las identificadas en el cuestionario de respuestas denotan que el participante ha descubierto una nueva reestructuración o relación geométrica no trivial para él, que explicita y a partir de la que ha podido continuar la resolución del problema porque ha "*visto*" o se ha "*dado cuenta*" de la solución.
En cambio las evidencias no explicitadas de insight, denotan que los participantes consiguen ver o descubrir la solución final de manera repentina y efusiva pero sin concebir o poder explicar que reestructuración o relación geométrica ha posibilitado la ocurrencia del momento de insight o la idea brillante que permite continuar con la resolución o resolver el problema. Simplemente explicitan alguna expresión como por ejemplo "me ha venido un flash" o "lo he visto".

Destacamos que en 61 intervenciones hemos identificado el Indicio Imagen Cinestésica (MVII3). Esto nos indica que los participantes emplearon asiduamente la gesticulación, para reforzar sus explicaciones y argumentaciones en la entrevista. En este sentido debido a que la mayoría de categorías de resolución (APARTADO 6.1.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO PROBLEMAS) identificadas en los problemas geométricos ip^2 están basadas en el Método Visual (MV), incidimos en que algunas de las explicaciones de los participantes en la entrevista están sustentadas en argumentaciones sobre las estrategias visuales aplicadas en las que tienden a emplear la gesticulación para reforzar sus explicaciones.

Una vez terminado el análisis de resultados del Cuestionario de Problemas, Cuestionario de Respuestas y de la Entrevista Semiestructurada, nos interesa triangular las aportaciones cualitativas identificadas en las tres herramientas de investigación.

6.1.5.4 TRIANGULACION: CATEGORÍAS DE RESOLUCIÓN.

En este apartado triangularemos la información obtenida en las categorías de resolución identificadas en el Cuestionario de Problemas, con los resultados obtenidos en el Cuestionario de Respuestas y la Entrevista Semiestructurada (apartados 6.1.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO PROBLEMAS, 6.1.5.2 RESULTADOS CUESTIONARIO DE RESPUESTAS y 6.1.5.3 RESULTADOS ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA, respectivamente).

Pretendemos contribuir con aportaciones cualitativas que corroboren las categorías de resolución originales y creativas identificadas en el Cuestionario de Problemas. Concretamente triangulando en las tres herramientas de investigación, identificaremos qué aportaciones cualitativas caracterizan las resoluciones geométricas que forman parte de las categorías de resolución. Estas aportaciones cualitativas nos facilitarán el estudio sobre los niveles de pensamiento productivo que identificamos en cada una de las resoluciones geométricas; así como reconocer si pueden haber posibilitado la ocurrencia del insight ante la resolución de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo estudiados.

Para facilitar la interpretación de los resultados obtenidos en las siguientes tablas utilizaremos el color rojo, azul y negro para identificar los aportes cualitativos extraídos del Cuestionario de Respuestas, de la Entrevista Semiestructurada y del Cuestionario de Problemas respectivamente.

A continuación exponemos los aportes cualitativos identificados en cada una de las categorías de resolución obtenidas en los problemas geométricos ip^2:

PROBLEMA 1

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Fragmentación y adición de superficies de figuras geométricas.	**F, L, S**
He separado la zona negra en 2 triángulos y un cuadrado. Una vez tengo las áreas, las sumo todas.	F Cuest. de respuestas
Primero calculas el área del rectángulo. La divides entre tres para tener el cuadrado del medio. Luego el resultado lo divides en dos y te dará el triángulo. Sumas los dos triángulos y el cuadrado y te da la zona sombreada.	L Cuest. de respuestas
Da 8 porque como la parte del medio da 4. Los otros dos extremos, los triángulos como la parte no sombreada es lo mismo que la sombreada da 2, porque le quitas la mitad, entonces sumas todo y da 8.	S Cuest. de problemas
Fragmentación, reubicación y adición de superficies de figuras geométricas.	**A, B, E, I , H,**
Me he dado cuenta que podía separar la terraza en tres partes iguales. Luego he agrupado las tres partes en zonas sombreadas y no sombreadas. El resultado ha sido que tenía dos cuadrados de 2x2 sombreados y uno no sombreado.	A Cuest. de respuestas
Todo lo he divido en tres partes y me quedaba en el medio un cuadrado entero, y en el otro dos triángulos así…, y entonces el… un triangulo lo he movido para abajo (gesticulando con las manos) y me ha quedado medio cuadrado… he calculado el área del medio cuadrado y lo he multiplicado por dos.	B Entrevista
A simple vista he podido comprobar que se trataba de tres cuadrados iguales juntos. Luego para calcular la terraza he pensado que si encajamos las 4 partes formarían un solo cuadrado. A partir de ahí he calculado el área de uno. Y luego me han sobrado dos cuadrados, que eran la parte sombreada.	E Cuest. de respuestas
Yo he puesto los dos tria…bueno los dos de cada lado… triángulos blancos… de cada lado, los he puesto así en vertical y al otro lado también y me ha quedado un cuadrado en el centro, he calculado el cuadrado ese y ya está. (Gesticula en toda la explicación).	I Entrevista
Los dos triángulos no sombreados de cada lado equivalen al sombreado. He dividido el área del cuadrado en 2 y así he encontrado la de los triángulos. Después he sumado el área de triángulos y el cuadrado.	*H* Cuest. de respuestas
Fragmentación, adición y sustracción de superficies figuras geométricas	***M,R***
He hecho el área de toda la figura…y luego el área de un triangulo blanco, y… he sumado los blancos y luego lo he restado el área total menos los blancos.	M Entrevista
He multiplicado el área de un triangulo no sombreado por los cuatro que son y finalmente he restado este resultado al área del rectángulo.	*R* Cuest. de respuestas
Fragmentación, reubicación, adición y sustracción de superficies de figuras geométricas	**J,K**
Primero he hecho la base por la altura… y después me he dado cuenta que si juntabas todos los triángulos que no estaban sombreados era como una tercera parte…, entonces he hecho dos tercios del área total… y lo que salía era justo el resultado.	**J** Entrevista
Los triángulos de la izquierda no sombreados se mueven por tal que encajen con los de la derecha formando un cuadrado de 2 de altura y 1/3 de la base del rectángulo grande. Ya sabemos el área de los triángulos, para saber la de la zona sombreada hemos de restar-los del área total.	K Cuest. de problemas
Plantea la solución directamente	**G**
Yo he juntado cuatro triángulos blancos… en un lado y me he dado cuenta que el área era dos por dos… lo he quitado del área sombreada y… he calculado el área sombreada, y ya está. (Gesticula en la explicación)	G Entrevista

PROBLEMA 2

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Reubicación de los semicírculos sombreados como ventana circular. Solo resuelven la primera parte del problema.	**E,S,O,G**
He comprobado que los dos semicírculos forman el mismo círculo que el que está en blanco.	E Cuest. de respuestas
He juntado las dos zonas sombreadas haciendo un dibujo en la mente, luego me he dado cuenta de que si las junto forman un círculo igual que el de la ventana circular.	G Cuest. de respuestas
No sabía cómo medir la parte que envuelve la ventana.	S Cuest. de respuestas
He calculado el área del círculo no sombreado. Después me he dado cuenta de que moviendo los semicírculos la figura total estaba constituida por una redonda partida por la mitad y cada mitad en un extremo diferente y un cuadrado en el medio.	O Cuest. de respuestas
Reubicación, adición y sustracción de superficies. Sustracción del cuadrado respecto del círculo interior y adición de los semicírculos. No se visualiza el cuadrado como zona sombreada final.	**A,F,H,K,L,R**
Solo tenias que llegar a ver que si ponías los dos semicírculos dentro del área no sombreada tenías un cuadrado de 1x1 y era mucho más fácil.	A Cuest. de respuestas
Como los dos semicírculos equivalen al área del círculo blanco ya tengo su área. Calculo el área del cuadrado y se la he restado al área del círculo blanco y le he sumado el área de los círculos negros.	F Cuest. de respuestas
Sabiendo el diámetro podía saber los lados del cuadrado que envuelve el circulo y he calculado su área y restado a la del circulo así he encontrado la zona sombreada de alrededor del circulo. He sumado las áreas de las zonas sombreadas.	H Cuest. de respuestas
No lo podía explicar hasta que he movido los dos semicírculos y los he visto como el círculo blanco central.	K Cuest. de respuestas
Calculo el área del cuadrado y le resto el área de la redonda, esto nos dará la parte negra. Después de esto lo sumo con el área de la redonda y tenemos la zona sombreada entera	*L* Cuest. de respuestas
Le he restado al cuadrado el área de la circunferencia y al resultado le he sumado las áreas de los dos semicírculos.	*R* Cuest. de respuestas
***Reubicación y adición de superficies.* Considera el cuadrado final 1x1 como resultado del área de la zona sombreada.**	***I,P***
Me he tenido que dar cuenta de que los semicírculos los podía juntar en el cuadrado con el agujero de la ventana circular.	I Cuest. de respuestas
He supuesto que los semicírculos se podían juntar al círculo interior.	P Cuest. de problemas

PROBLEMA 3

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Girar el cuadrado de mayor superficie	O,F,H,I,B
Si giraba un poco el cuadrado tapaba un cuarto del pequeño, entonces el pequeño lo he dividido en 4 más pequeños.	*O* Cuest. de respuestas
Simplemente girando el cuadrado grande hasta crear uno más pequeño.	F Cuest. de respuestas
He movido el cuadrado grande y me he dado cuenta que la superficie sombreada ocupaba ¼ de la superficie del cuadrado pequeño.	H Cuest. de respuestas
Lo he visto… que moviendo el cuadrado coincidía con la mitad de los lados del cuadrado pequeño	B Cuest. de respuestas
Equivalencia de triángulos y rotación del cuadrado	*I*
Me he dado cuenta de que podía mover el triangulo de posición para así conseguir que la zona sombreada tenga forma de cuadrado. Los dos triángulos son iguales… y me he dado cuenta de que podía rotar el cuadrado grande en el eje D, hasta conseguir que el área sea un cuadrado, una cuarta parte del cuadrado pequeño.	*I* Cuest. de respuestas
Medición sexagesimal del cuadrado	*J,M*
Ha pues yo me he dado cuenta que o sea el lado este que está así tumbado… es un ángulo de 90 grados (Gesticulando) entonces al ponerlo recto era una cuarta parte del otro… calculo toda el área y le he restado una cuarta parte y ya está.	J Entrevista
El otro cuadrado ocupa ¼ del cuadrado pequeño porque tiene 90 º. Por lo tanto si el área total del cuadrado A=16, la zona sombreada tiene un área de 4.	M Cuest. de respuestas
He descubierto que el área sombreada es ¼ de la superficie del cuadrado pequeño	**A,E**
He deducido que la área de la zona sombreada era una cuarta parte del cuadrado pequeño entonces solo he tenido que calcular el área del cuadrado (4x4) y multiplicarla por ¼ que es la parte sombreada.	A Cuest. de respuestas
No sé cómo pero lo he visto.	E Cuest. de respuestas
Fragmenta e identifica 4 figuras geométricas equivalentes a partir de trazar líneas en el cuadrado.	***R,L***
Después de pensar un rato, he deducido que la parte sombreada equivalía a un cuarto del cuadrado y tras comprobar si se podía dividir el cuadrado en cuatro partes iguales con estas medidas, he hecho la parte sombreada era un cuarto del cuadrado.	*R* Cuest. de respuestas
Calculas el área del cuadrado y con la parte sombreada que es ¼ del cuadrado pues haces ¼ del área y te dará la parte sombreada.	*L* Cuest. de respuestas

PROBLEMA 4

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Sólo representa el cuadrado de doble área, sin explicitar ninguna estrategia.	F,J
Creando un cuadrado que tenga inscrito en él el cuadrado pequeño	F Cuest. de respuestas
Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro. Intuición	J Cuest. de respuestas
Rotan el cuadrado	**I,K**
Me pensaba que era imposible porque no se podían mover los arboles hasta que se me ha ocurrido rotar el cuadrado.	*I* Cuest. de respuestas
Se me ha ocurrido girar el cuadrado y en lugar de que sean los arboles los vértices sean el centro de las aristas del nuevo cuadrado, y me ha salido.	*K* Cuest. de respuestas
A partir de la figura de un rombo (Entendida como posición)	**Ñ,S**
He formado un rombo más grande.	Ñ Cuest. de respuestas
He conseguido ver que se podía poner como un rombo desde los lados y me ha salido el cuadrado.	*S* Cuest. de respuestas
A partir de la bisectriz del cuadrado	**R**
Hacer la bisectriz a los segmentos que hacen de lados y después he unido los extremos de los lados con la bisectriz correspondiente.	R Cuest. de respuestas
Fragmenta el cuadrado buscando figuras geométricas equivalentes para construir el cuadrado con doble superficie.	**B, E**
Los arboles no hace falta moverlos. Cojo un extremo y lo estiro en esta dirección hasta que más o menos obtengo casi una superficie igual a la del cuadrado pero en diferente forma. (Estima figuras equivalentes a otras en el interior del cuadrado)	*B* Cuest. de problemas
Si tenía que conservar la misma forma se tendría que ampliar por todos los lados igual. Por eso he creído que lo mejor era ampliar por cada lado la mitad de lo que media la parcela principal. (Busca la figura geométrica unidad)	*E* Cuest. de respuestas

PROBLEMA 6

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Ensayo y error	D,H,J,K,N
He probado hasta que ha salido	K Cuest. de respuestas
La verdad es que era ir probando.	N Cuest. de respuestas
Yo sólo he hecho dos líneas y ya me han salido 6 triángulos.	J Cuest. de problemas
He trazado dos líneas rectas en cruz de forma que me quedaban 2 triángulos y 2 rombos. Luego he trazado otra entre medio de los dos rombos y me han quedado 6 triángulos.	D Cuest. de respuestas
Probando de hacer rayas al final he llegado a la respuesta.	H Cuest. de respuestas
Completación de la figura geométrica	A, B, G, I, Q, S,
Si hacía una cruz y luego partía la figura en horizontal me salían los 6 triángulos.	*A* Cuest. de respuestas
Dividiendo la superficie de la figura geométrica.	B Cuest. de respuestas
He partido la figura con tres líneas en 6 partes	G Cuest. de respuestas
He hecho dos líneas diagonales y una horizontal	I Cuest. de respuestas
He cruzado tres líneas y he obtenido 6 triángulos	Q Cuest. de respuestas
He hecho una cruz y me han salido dos triángulos y dos rombos después he dividido los rombos.	S Cuest. de respuestas
Unir los vértices	M,F,O,R
Uniendo los vértices	M Cuest. de respuestas
He utilizado los vértices para hacer las tres líneas	F Cuest. de respuestas
He dividido la figura en dos partes horizontalmente, después he hecho dos diagonales uniendo las cuatro puntas interiores.	R Cuest. de respuestas
Sólo necesitaba unir los vértices de dentro de dos en dos y entonces los vértices que salían hacía fuera unirlos con otro.	*O* Cuest. de respuestas
"Visualizando" como resolver el problema	***P,E,L,Ñ***
He visto como hacer el problema.	P Cuest. de respuestas
He pensado mentalmente y me ha venido la idea de cruzar las líneas y en el primer intento cuando las he dibujado en la hoja ya me ha salido bien.	*E* Cuest. de respuestas
Al ver el dibujo, he visto la imagen… de las líneas.	*L* Cuest. de respuestas
Simplemente pensando un poco.	Ñ Cuest. de respuestas

PROBLEMA 7

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Representar solo la solución final	R,S,Ñ,K,C
Poniendo en mi cabeza diferentes formas	S Cuest. de respuestas
He invertido el triángulo más grande y he juntado las bases de los dos triángulos pequeños y he unido la base grande a la base invertida del otro triángulo.	R Cuest. de respuestas
He puesto los dos triángulos pequeños formando un triángulo de la misma base que el grande y el otro lo he puesto encima de ellos.	*Ñ* Cuest. de respuestas
Juntando dos triángulos pequeños se consigue otro triángulo y juntándolo con el triángulo grande se consigue el cuadrado	C Cuest. de respuestas
Era como el rombo del principio de los arboles, pues cambias de posición los dos triángulos de abajo y queda la mitad cada uno y me ha salido un cuadrado.	K Entrevista
Reubicar los triángulos hasta conseguir un cuadrado en posición de rombo y girarlo.	G,B, P
No sé cómo, pero he visto muy claro el cuadrado.	*B* Cuest. de respuestas
He subido los dos triángulos pequeños arriba de tal manera que pareciera un rombo, luego lo he girado y ya lo he visto.	*G* Cuest. de respuestas
Como que juntando los dos triángulos pequeños hacen medio cuadrado y ya tenemos otro medio cuadrado… se juntan y forman un rombo. Girándolo ya lo tenemos.	*P* Cuest. de problemas
Fragmentar los triángulos geométricos y reubicarlos para formar un cuadrado	**M,F**
He dividido todos los triángulos en dos y luego los he colocado formando un cuadrado.	M Cuest. de respuestas
He ido dividiendo en triangulitos más pequeños. Luego los he ido uniendo hasta que he hecho el cuadrado.	F Cuest. de respuestas
Reubicar (mover, girar, etc) los triángulos hasta formar un cuadrado.	**L,I,A**
Girando los triángulos te das cuenta de que puedes hacer un cuadrado	L Cuest. de respuestas
Juntando dos triángulos pequeños se consigue otro triángulo y juntándolo con el triángulo grande se consigue el cuadrado.	I Cuest. de respuestas
Me he dado cuenta que juntando los dos triángulos pequeños formaba uno idéntico al grande y luego si lo ponía encima de él se formaba un cuadrado.	A Cuest. de respuestas

PROBLEMA 9

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Fragmentación y adición de las superficies geométricas identificadas en la zona sombreada.	**M,K,H**
Primero he hecho el área del cuadrado B dividido entre dos. El área del cuadrado A lo he dividido en las 2 partes iguales y me da la mitad de la altura de las otras dos partes y luego lo he dividido entre dos. En el cuadrado C, he hecho lo mismo que en el A. Al final he sumado las partes sombreadas.	M Cuest. de respuestas
La altura más pequeña es igual que… la parte de abajo del triangulo… grande y a partir de ahí… ya se podía dividir los cuadrados… en triángulos…	K Entrevista
Intentando saber a cuanto equivalía cada zona sombreada en cada figura y encontrando su superficie	*H* Cuest. de respuestas
Manipula y transforma las superficies sombreadas hasta construir un cuadrado.	**J,E.**
Lo he resuelto instintivamente he pensado que la parte sombreada sería igual al área del cuadrado de 4cm de lado.	*J* Cuest. de respuestas
He pensado que si juntas las sombras puede darte el cuadrado grande.	*E* Cuest. de respuestas
Adición y sustracción de superficies	***O,R,A***
He hecho el área de los tres cuadrados y las he sumado todas por dentro del área total de la figura. Entonces he calculado el área del triángulo no sombreado y lo he restado a la total. El resultado era la zona sombreada.	O Cuest. de problemas
He calculado el área de cada cuadrado y las he sumado, he calculado el área del triángulo que hace la parte no sombreada. Finalmente he restado el área del triángulo al de la suma de las áreas de los cuadrados.	R Cuest. de respuestas
He calculado el área de cada cuadrado y las he sumado, luego he calculado el área del triángulo y la he restado al área total del triángulo.	A Cuest. de respuestas

PROBLEMA 10

REESTRUCTURACION	PARTICIPANTES
Fragmenta el círculo en seis zonas circulares equivalentes a las del enunciado y calcula la superficie sombreada total.	**R,A,H,M,P**
He calculado el área de los círculos y la he dividido en 6 partes	R Cuest. de respuestas
Divide la circunferencia en 6 partes, luego he calculado el área de una circunferencia y lo he multiplicado por 1/6. Y el resultado lo he multiplicado por 3.	A Cuest. de respuestas
Dividir el círculo en partes iguales a la zona sombreada. Dividir las partes entre el área y sumarlas.	H Cuest. de respuestas
He dividido el primer círculo en partes iguales (6), entonces le he restado al área las partes y lo he multiplicado por 3.	M Cuest. de respuestas
Se calcula el área de una redonda y se divide en 6 para saber cuánto hace una de las zonas sombreadas. Después se multiplica por 3 y ya lo tenemos. El área del área sombreada.	P Cuest. de problemas
Reubica los sectores circulares sombreados en un círculo y calcula el área de la zona sombreada total.	**J,I,E,B,L**
He puesto las tres zonas en una circunferencia, las he sumado y me ha dado que es igual a la mitad de la circunferencia.	J Cuest. de respuestas
He visto que la solución era la mitad del círculo.	I Cuest. de respuestas
He movido las tres sombras y me he dado cuenta que era media circunferencia.	E Cuest. de respuestas
Me he dado cuenta que si juntas las tres zonas sombreadas te da media circunferencia, luego he calculado la circunferencia entera y después lo he dividido entre dos.	B Cuest. de respuestas
No lo sé pero me he dado cuenta que el área sombreada es la mitad de la circunferencia….	*L* Cuest. de respuestas

6.1.5.4.1 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS: NIVELES DE RESOLUCIÓN

A partir de la triangulación realizada en el apartado anterior en la que identificamos las aportaciones cualitativas que caracterizan las categorías de resolución aportadas por los participantes, vamos a clasificar las resoluciones mediante tres criterios evaluados de manera inclusiva:

1. Una resolución que converge a la solución del problema.
2. Una resolución original, innovadora y creativa.
3. Una nueva reestructuración de los elementos del problema, que promueve evidencias de insight geométrico.

Definiremos tres niveles de resolución relacionados intrínsecamente con el nivel de pensamiento productivo (Wertheimer, 1959) de los participantes al resolver los problemas geométricos ip^2 planteados.

Los tres niveles de resolución o pensamiento productivo se definen a partir de los tres criterios expuestos anteriormente. Criterios que se emplearan para clasificar las resoluciones obtenidas en cada uno de los problemas geométricos ip^2 y determinar los distintos niveles de resolución:

- Un <u>primer nivel de resolución</u>, formado por aquellas categorías de resolución en las que se concretan las resoluciones que verifican el primer criterio.
- Un <u>segundo nivel de resolución</u>, en el que identificamos aquellas categorías de resolución en las que se concretan las resoluciones que destacan por ser más originales e innovadoras, así como por una mayor naturaleza de invención e imaginación con respecto al resto. En las resoluciones que pertenecen a estas categorías de resolución se verifican el primer y segundo criterio.
- Un <u>tercer nivel de resolución</u>, formado por aquellas categorías de resolución en las que se concretan las resoluciones en las que se han identificado evidencias de insight. En estas resoluciones se verifican el primero, segundo y tercer criterio.

A continuación ilustraremos las categorías de resolución identificadas en los tres niveles de resolución definidos. Utilizaremos la notación $\alpha(\beta)$, donde α representará la frecuencia identificada de participantes que ha empleado esa categoría de resolución y β representará el número del problema geométrico.

1) PRIMER NIVEL DE RESOLUCIÓN

CATEGORÍAS DE RESOLUCIÓN	α(β)
Adición y sustracción de superficies de figuras geométricas	3(9)
Reubicar figuras geométricas:	
i. Triangulos hasta formar un cuadrado.	3(7)
ii. hasta conseguir un cuadrado en posición de rombo y girarlo.	3(7)
iii. Semicirculos en la ventana circular	4(2)
iv. y adición y sustracción de superficies.	6(2)
Ensayo y error	5(6)
Completación de la figura geométrica	6(6)
Unir los vértices	4(6)
Fragmentar figuras geométricas:	
i. y adición de superficies de figuras geométricas	3(1)
ii.y adición y sustracción de figuras geométricas	2(1)
iii. e identificación de nuevas figuras geométricas equivalentes	2(4)
Medición sexagesimal	2(3)

2) SEGUNDO NIVEL DE RESOLUCIÓN

CATEGORÍAS DE RESOLUCIÓN	I(J)
Reubicar figuras geométricas:	
i. Sectores circulares	5(10)
ii. y adición y sustracción de superficies, visualizando el cuadrado 1x1 como resultado final.	2(2)
Transformar las superficies sombreadas en otras equivalentes hasta construir un cuadrado.	2(9)
Fragmentar figuras geométricas:	
i. e identificar nuevas de equivalentes	5(10),2(3)
ii. y adición de superficies de figuras geométricas	3(9)
iii. y reubicar las nuevas figuras identificadas.	2(7)
iv. y reubicación y adición:	
a. y sustracción de superficies de figuras geométricas	2(1)
b. de superficies de figuras geométricas	5(1)

Representar solo la solución final	5(7),2(4) 1(1)
Descubrir o visualizar como resolver el problema	4(6), 2(3)
Rotar o girar una figura geométrica	2(4), 6(3)
Construir un cuadrado de doble superficie a partir de la posición de un rombo	2(4)
Construir un cuadrado de doble superficie mediante la bisectriz del cuadrado	1(4)

En primer lugar inferimos que en algunos casos las categorías de resolución seleccionadas son una combinación de distintas estrategias elementales. En el caso de la categoría de resolución "*Fragmentación, reubicación, adición y sustracción de superficies de figuras geométricas"*, comprobamos que está compuesta por distintas estrategias que se relacionan entre ellas en diferentes momentos de la resolución del primer problema geométrico ip^2.
Contrastamos que aunque a priori parece que tenemos categorías de resolución compartidas en los dos primeros niveles de resolución, no es exactamente así. Por ejemplo en la categoría de resolución "*Reubicación de figuras geométricas*", desde una perspectiva cualitativa las resoluciones obtenidas en el problema 7, en las que el propio enunciado insta a que los participantes reubiquen los diferentes triángulos para construir un cuadrado, no son tan significativas como las resoluciones basadas en la reubicación que plantean algunos participantes en el problema 10, donde reubicar los sectores circulares sombreados es una estrategia que surge de la propia iniciativa, originalidad y creatividad del participante. De aquí que tengamos categorías de resolución que aunque convivan en los dos primeros niveles de resolución, se diferencian debido a que existen resoluciones de la categoría que no se nutren de la misma naturaleza, porque el origen y aplicación de la resolución en el problema es cualitativamente diferente.

De forma similar sucede con la categoría de resolución basada en la "*fragmentación de figuras geométricas y adición de superficies de figuras geométricas*". Existen diferencias cualitativas entre la categoría de resolución expuesta en el primer nivel de resolución referente al primer problema geométrico ip^2 y la expuesta en el segundo nivel de resolución que hace referencia al noveno problema geométrico ip^2. Las resoluciones obtenidas en el primer problema y clasificadas en el primer nivel de resolución de esta categoría se caracterizan por ser resoluciones poco originales y estándar ya que comparten la misma naturaleza reproductiva que las resoluciones comúnmente escolares basadas en el cálculo de las superficies de figuras geométricas que a su vez forman parte de una superficie geométrica mayor. Sin embargo la misma categoría de resolución "*fragmentación de figuras geométricas y adición de superficies de figuras geométricas*" aplicada en el noveno problema, por tres participantes, es de naturaleza más perspicaz y original (Boden, 2000; Yap, 2010) que las otras resoluciones planteadas en este problema. En esta resolución se fragmentan las zonas sombreadas de los tres cuadrados de la figura geométrica del problema con el objetivo de identificar figuras geométricas equivalentes a las zonas sombreadas que permitan facilitar el cálculo de la superficie sombreada total. Posiblemente en estas resoluciones se requiere de una naturaleza más original e innovadora, así como de la aplicación eficaz de algunas habilidades de visualización para llevar a cabo la correcta resolución. Por ese motivo las hemos clasificado en el segundo nivel de pensamiento productivo.

3) <u>TERCER NIVEL DE RESOLUCIÓN</u>

Este es el nivel de resolución más importante en nuestra investigación, por estar formado por las categorías de resolución en las que hemos identificado posibles evidencias de insight. Dedicaremos el apartado *6.1.5.5.2 TERCER NIVEL DE RESOLUCIÓN:CATEGORIAS DE RESOLUCIÓN IP^2* íntegramente a estudiar y determinar las resoluciones que constituirán este tercer nivel de resolución.

En el contexto de la ocurrencia del insight y con la intención de ser lo más rigurosos posibles en su identificación en las resoluciones geométricas vamos a definir el concepto de Momento de insight en el siguiente apartado.

6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT

En este apartado definiremos cómo identificar la ocurrencia del insight o el momento del insight en la resolución de un problema geométrico ip^2.

Autores como Sequera (2007) consideran en su investigación cinco tipos de momentos creativos en la acción de clase, que surgen de la interacción entre alumno y profesor. Estos momentos creativos también están basados en las fases del proceso creativo: preparación, incubación, iluminación, verificación y autoevaluación (Hadamard, 1947). En el diseño de su investigación el profesor desempeña un papel relevante animando a los estudiantes a introducir nuevos elementos para mejorar las tareas realizadas, incentivando a crear nuevas estrategias y promoviendo la reflexión con el objetivo de que los participantes identifiquen sus errores y aprendan de ellos (momento creativo de la autoevaluación).

En cambio autores como Barnes (2000) describen los momentos de insight, como momentos mágicos en matemáticas basados en circunstancias concretas de los estudiantes en clase de matemáticas en las que tuvo lugar la ocurrencia del insight. Barnes (2000) concibe este momento "mágico" en matemáticas, cuando los estudiantes explicitan una repentina comprensión de un nuevo conocimiento que "ven" con gran claridad y confianza en sí mismos. Puntualiza algunos ejemplos de los participantes que identificó en su investigación "*a flash of understanding*" o por ejemplo "*it might just click*" (Barnes, 2000, p.34). Generalmente describe que el "*momento mágico*" en la ocurrencia del insight, suele ir acompañado de una respuesta emocional positiva, que se puede describir de distintas maneras mediante la satisfacción, sorpresa o triunfo. Expone algunos ejemplos identificados en su investigación como "It's great when it happens", "When it happens, it's good", o "you're on your way again" (Barnes, 2000, p.34). Las observaciones de los momentos mágicos, se realizaron en un grupo de 4 estudiantes (16-17 años) de la High School en Melbourne, ante la resolución de algunos problemas geométricos.

En esta línea en nuestra investigación definiremos *Momento de Insight al periodo o la circunstancia del proceso en la resolución de un problema geométrico (ip^2) en el que inferimos que el participante descubre de forma repentina una nueva reestructuración geométrica de los elementos que intervienen en el problema, que le permite visualizar y comprender la situación y por tanto continuar con la resolución.*

Van Hiele (1957) planteó un concepto de insight centrado en geometría. Dicho autor identificaba el insight en los estudiantes cuando a partir de los datos y relaciones geométricas que disponían eran capaces de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se habían enfrentado antes. Van Hiele (1957) identificó la ocurrencia del insight, cuando los estudiantes eran conscientes de él, a partir de sus explicaciones "Ah! ya lo veo, o sea que si…." Y a continuación planteaban una forma de actuación procedimental para llegar a resolver la situación o el problema en cuestión.

Es decir de manera consciente el participante explicita que en un determinado momento en la resolución de un problema ha podido "ver", "imaginar", "visualizar", "darse

cuenta", "*tener un flash*" o simplemente "*comprender de manera súbita*" la solución, independientemente de si puede concebir o explicar como se le ha ocurrido.
Coincidiendo con algunos autores (Van Hiele, 1957; Barnes, 2000) en el proceso de identificación de la ocurrencia del insight, identificaremos en nuestra investigación los momentos de insight a partir de dos clases de evidencias:

a) Insight de evidencia explicitada. Cuando el participante explicita, explica o argumenta como se le ha ocurrido la reestructuración o relación geométrica que ha descubierto y le ha permitido seguir con la resolución del problema. Algunas de las expresiones identificadas son "he visto que…" o "me he dado cuenta de que…", etc.

b) Insight de evidencia no explicitada. Cuando el participante no explica ni argumenta como ha descubierto la reestructuración o relación geométrica que le ha permitido continuar con la resolución del problema. Se limita a explicitar expresiones como por ejemplo, lo he resuelto "de repente", me ha venido a la mente "una idea fugaz", lo he "visto", he tenido "un flash", "un Eureka", "un aja!" (Gardner, 1989; Callejo, 1994; Liljedahl, 2008b) u otras expresiones similares.

Hemos de tener presente que las dos evidencias de insight no son excluyentes, debido a que podrían convivir en una misma resolución en distintos momentos. Un participante podría tener distintas evidencias de insight en la resolución de un problema geométrico ip^2, según las diferentes dificultades y bloqueos que pudiera llegar a encontrarse. En nuestra investigación inferimos las evidencias de insight a partir de los resultados obtenidos en el Cuestionario de Problemas, Cuestionario de Respuestas y la Entrevista Semiestructurada. Las evidencias de insight nos permitirán identificar los momentos de insight que han podido suceder en las resoluciones que forman parte de las categorías de resolución en el apartado *6.1.5.4 TRIANGULACIÓN: CATEGORIAS DE RESOLUCIÓN.*
A continuación realizaremos una selección de los posibles momentos de insight, según los dos tipos de evidencias de insight definidas e identificadas en las categorías de resolución establecidas en cada uno de los problemas geométricos ip^2. Emplearemos un asterisco para identificar las evidencias de insight extraídas del Cuestionario de Respuestas (*) y dos asteriscos para aquellas que se han extraído de la Entrevista Semiestructurada (**).

PROBLEMA 1

Evidencia explicitada
(*) Participante A: Me he dado cuenta que podía separar la terraza en tres partes iguales. Luego he agrupado las tres partes en zonas sombreadas y no sombreadas. El resultado ha sido que tenía dos cuadrados de 2x2 sombreados y uno no sombreado.
(**) Participante J: Primero he hecho la base por la altura… y después me he dado cuenta que si juntabas todos los triángulos que no estaban sombreados era como una tercera parte…, entonces he hecho dos tercios del área total… y lo que salía era justo el resultado.
(**) Participante Ñ: em… yo cuando he visto que estaba divido en partes iguales pues lo he visto.
(**) Participante H: Pues yo me he dado cuenta, que la terraza era como tres cuadrados de la zona… sombreada… y entonces he hallado la área de la terraza…
(**) Participante G: Yo he juntado cuatro triángulos blancos… en un lado y me he dado cuenta que el área era dos por dos… lo he quitado del área sombreada y… he calculado el área sombreada, y ya está. (Gesticula en la explicación)
(**) Participante F: Pues yo he visto que si dividías la zona sombreada se podían hacer ocho triángulos de los blancos, pues he calculado el área de uno blanco y lo he multiplicado por ocho.
(**) Participante F: Yo a la que he visto que uno blanco… o sea dos blancos eran… no… que uno negro era como dos blancos, pues he empezado a hacer.

Los resultados obtenidos nos indican que hemos identificado 7 posibles evidencias explicitadas de insight, que corresponderían a siete momentos de insight potencialmente perceptivos que han podido suceder en las resoluciones que han planteado algunos participantes en este primer problema.

Tres participantes (A,Ñ,H) se han dado cuenta de que la terraza se podía dividir en tres partes iguales. Consideramos que esta evidencia explicitada de insight les ha permitido poder descubrir la relación geométrica de equivalencia entre las tres partes del rectángulo. Inferimos que es entonces cuando la ocurrencia del momento de insight les ha facilitado poder ver y continuar con sus resoluciones respectivas.

Inferimos también que después de descubrir la figura geométrica que formaban los triángulos no sombreados, los participantes J y G han podido calcular la superficie no sombreada y por tanto también la superficie sombreada. Y por último consideramos el participante F que al descubrir una determinada fragmentación del rectángulo le ha permitido poder identificar y calcular la superficie de la zona sombreada.

Evidencia no explicitada
(**) Participante P: No, yo lo he entendido en seguida y lo he hecho… de repente.
(**) Participante J: Un flash (gesticulando con la mano)

Hemos identificado dos evidencias no explicitadas de insight que se han producido en la realización de este problema por parte de los participantes P y J. En la entrevista manifestaron que la idea para resolver el problema se les ocurrió “de repente” y “como un flash”, respectivamente.

Los resultados nos indican dos tipos de evidencias del participante J. Por un lado una evidencia explicitada en la que explica la ocurrencia de que a partir de juntar los triángulos no sombreados descubrió que formaban una tercera parte del rectángulo. Y por otro lado una evidencia no explicitada en la que manifiesta que la idea para resolver el problema le vino como “un flash”.

En este caso consideramos que posiblemente las dos evidencias de insight se complementan reafirmando la ocurrencia de un insight geométrico del participante J durante la realización de la resolución del problema.

PROBLEMA 2

Evidencia explicitada
(*) Participante A: Solo tenias que llegar a ver que si ponías los dos semicírculos dentro del área no sombreada tenias un cuadrado de 1x1 y era mucho más fácil.
(*) Participante G: He juntado las dos zonas sombreadas haciendo un dibujo en la mente, luego me he dado cuenta de que si las junto forman un círculo igual que el de la ventana circular.
(*) Participante O: He calculado el área del círculo no sombreado. Después me he dado cuenta de que moviendo los semicírculos la figura total estaba constituida por una redonda partida por la mitad y cada mitad en un extremo diferente y un cuadrado al medio.
(*) Participante K: No lo podía explicar hasta que he movido los dos semicírculos y los he visto como el circulo blanco central
(**) Participante F: Al ver que los dos círculos… los dos semicírculos, los unías y eran como el… como el otro circulo.
(*) Participante I: Me he tenido que dar cuenta de que los semicírculos los podía juntar en el cuadrado con el agujero de la ventana circular. (El participante llega a visualizar el cuadrado 1x1, como resultado final)

Hemos identificado tres evidencias explicitadas de insight que hacen referencia básicamente a que los participantes G,K y F en algún momento de la resolución del problema descubren la reestructuración que relaciona los dos semicírculos sombreados y la ventana circular de la figura geométrica. Estos tres participantes han descubierto que los dos semicírculos sombreados son equivalentes y que reubicados adecuadamente forman la ventana circular. Inferimos que en este momento de insight los participantes han podido comprender o ver como superar una dificultad o bloqueo que les permite continuar con la resolución del problema.
En cambio las evidencias explicitadas de insight que hacen referencia a los participantes I,O y A denotan la reestructuración de los semicírculos basada en la reubicación que les permite llegar a ver la superficie sombreada final como un cuadrado.

En el problema 2 no hemos identificado evidencias no explicitadas de insight.

PROBLEMA 3

Evidencia explicitada
(*) Participante I: Me he dado cuenta de que podía mover el triangulo de posición para así conseguir que la zona sombreada tenga forma de cuadrado. Los dos triángulos son iguales… y me he dado cuenta de que podía rotar el cuadrado grande en el eje D, hasta conseguir que el área sea un cuadrado, una cuarta parte del cuadrado pequeño
(**) Participante J: Ha pues yo me he dado cuenta que o sea el lado este que está así tumbado… es un ángulo de 90 grados… (Gesticula) entonces al ponerlo recto era una cuarta parte del otro… calculo toda el área y le he restado una cuarta parte y ya está.
(*) Participante B: Lo he visto… que moviendo el cuadrado coincidía con la mitad de los lados del cuadrado pequeño
(*) Participante H: He movido el cuadrado grande y me he dado cuenta que la superficie sombreada ocupaba ¼ de la superficie del cuadrado pequeño.

En los participantes I,H y B identificamos tres evidencias explicitadas de insight basadas en la reestructuración que consiste en mover o rotar el cuadrado de mayor superficie. A partir de esta reestructuración se dan cuenta de la relación geométrica entre la superficie de la zona geométrica sombreada y la del cuadrado de menor superficie.

En otro caso, el participante (J) explicita darse cuenta de la relación entre la superficie de la zona geométrica sombreada y el cuadrado de menor superficie, al descubrir que independientemente de mover o girar la zona sombreada los ángulos de ésta se conservan. Inferimos que la evidencia explicita de insight posiblemente se sustenta en ver el ángulo de 90 grados de la zona sombreada.

Evidencia no explicitada
(*) Participante E: No sé como, pero lo he visto.

Identificamos la evidencia no explicitada de insight en la que el participante E, concibe la resolución del problema, pero sin explicitar o explicar como ha conseguido resolverlo ni que estrategias ha aplicado. Simplemente considera que lo ha visto.

PROBLEMA 4

Evidencia explicitada
(*) Participante I: Me pensaba que era imposible porque no se podían mover los arboles hasta que se me ha ocurrido rotar el cuadrado.
(*) Participante K: Se me ha ocurrido girar el cuadrado y en lugar de que sean los arboles los vértices sean el centro de las aristas del nuevo cuadrado y me ha salido.
(*) Participante S: He conseguido ver que se podía poner como un rombo desde los lados y me ha salido el cuadrado.

Los resultados nos indican evidencias explicitadas de insight de una misma naturaleza. En un primer caso, identificamos dos evidencias de insight explicitadas de los participantes I y K que se sustentan en la rotación del cuadrado como estrategia que les ha posibilitado descubrir o visualizar la forma del cuadrado de doble superficie. En un segundo caso, la evidencia explicitada del participante S hace referencia a la ocurrencia de la posición de la figura geométrica de un rombo, que implícitamente es una estrategia que ha consistido en girar el cuadrado y de manera similar a las evidencias anteriores ha posibilitado descubrir o ver la solución del cuadrado de doble superficie.

Evidencia no explicitada
(*) Participante J: Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro. Intuición
(**) Participante J: Esta ha sido un plas, pum y ya está. Participante O: Pues si… Participante Ñ: Lo he visto

Los resultados obtenidos en el Cuestionario de Problemas y la Entrevista Semiestructurada muestran que el participante J, ha concebido dos evidencias no explicitadas de insight mediante dos expresiones que hacen referencia de manera unilateral a la comprensión repentina que le ha permitido resolver el problema.

De forma análoga el participante Ñ, explicita que “ha visto” como resolver el problema, sin explicar que estrategias ha aplicado.

PROBLEMA 6

Evidencia explicitada
(*) Participante E: He pensado mentalmente y me ha venido la idea de cruzar las líneas y en el primer intento cuando las he dibujado en la hoja ya me ha salido bien.

En este problema hemos identificado una evidencia explicitada de insight pero no en el sentido de insight convergente planteado en nuestra investigación en el apartado *2.1.3 Insight convergente versus insight divergente,* posiblemente debido a que el problema de manera implícita orienta a los participantes sobre el método de resolución a realizar. Es decir el participante difícilmente escogerá otro método de resolución, que no sea el que el propio enunciado del problema sugiere. Observamos que después de pensar cierta reubicación sobre como colocar las líneas y posteriormente dibujarlas se da cuenta y corrobora que ha realizado el problema correctamente.

A diferencia de los problemas geométricos ip^2 anteriores este tipo de problemas promueve un insight que consideramos asociado al pensamiento divergente (De Nicolas, 1999). Es decir se propicia la ocurrencia de un insight de carácter divergente (Finke, 1990; Miller, 2000) en el sentido de que éste está basado en encontrar un nuevo significado a la figura geométrica planteada en el enunciado, pero sin requerir la creación de una nueva estructura mediante la reestructuración de los elementos del problema.

Evidencia no explicitada
(*) Participante P: He visto como hacer el problema.
(*) Participante L: Al ver el dibujo, he visto la imagen… de las líneas.

Hemos identificado dos evidencias no explicitas de insight en los participantes P y L, que sustentadas en las expresiones respectivas conciben *haber visto* la solución. En ambos casos inferimos la ocurrencia de un momento de insight basado en la evidencia no explicita de “ver” una determinada imagen sobre la reubicación de las líneas o la identificación de los triángulos en la figura geométrica del enunciado que posiblemente sugiere a los participantes la solución buscada.

PROBLEMA 7

Evidencia explicitada
(*) Participante L: Girando los triángulos te das cuenta de que puedes hacer un cuadrado
(*) Participante A: Me he dado cuenta que juntando los dos triángulos pequeños formaba uno idéntico al grande y luego si lo ponía encima de él se formaba un cuadrado.
(*) Participante G: He subido los dos triángulos pequeños arriba de tal manera que pareciera un rombo, luego lo he girado y ya lo he visto.

Este es un problema geométrico ip^2 que a diferencia del problema anterior promueve un insight convergente. Aunque el propio enunciado orienta a los participantes sobre el método de resolución a utilizar, la diferencia reside en que en este caso se requiere de una reestructuración de los elementos o figuras geométricas que intervienen en el problema para llegar a solucionarlo (Finke, 1990). En este sentido las evidencias de insight explicitas que hemos identificado se sustentan en una naturaleza convergente (De Nicolas, 1999; Miller, 2000) mediante la creación de una nueva estructura que se origina a partir de la reconfiguración y reestructuración de los elementos, figuras y relaciones geométricas que pueden establecerse en el problema, no a partir de atribuir un nuevo significado a la figura geométrica original que permita resolver el problema.

Evidencia no explicitada
(*) Participante B: No sé como, pero he visto muy claro el cuadrado.
(**) Participante Ñ: ehm… o sea porque yo estaba buscando un cuadrado (Gesticula) entonces de repente… me di cuenta… y ya fue fácil. Participante Ñ: O sea un rombo… (Gesticulando) Participante L: Hacer un rombo… (Gesticulando, explicándole a una de sus compañeras) Participante O: Ahh! Vale! Participante O: Pues yo no lo he visto. Participante Ñ: Ya, ya… pero cuando lo ves girado ya está.

Los resultados indican dos evidencias no explicitadas de insight que identificamos en los participantes B y Ñ cuando consiguen “ver” o imaginar la imagen-posición concreta del rombo que les permite identificar el cuadrado que soluciona el problema.

PROBLEMA 9

En este problema no hemos identificado evidencias explicitadas de insight. Aunque destacamos las reflexiones de dos participantes en el Cuestionario de Respuestas, porque nos han parecido significativas. En el caso del participante J *"Lo he resuelto instintivamente he pensado que la parte sombreada sería igual al área del cuadrado de 4cm de lado",* inferimos que basa su resolución en una suposición instintiva que es errónea. En el caso del participante H *"Ingenio, intentando saber a cuanto equivalía cada zona sombreada en cada figura y encontrando su superficie"* consideramos que en algún momento de la resolución del problema ha supuesto ciertas equivalencias entre las figuras geométricas y las zonas sombreadas que son erróneas.

Estos dos casos se caracterizan porque los participantes basan sus resoluciones en estimaciones o suposiciones. Aunque debido a la falta de concreción y rigor en la aplicación y elaboración de las resoluciones de los participantes J y H en el Cuestionario de Problemas no las hemos considerado como significativas.

Evidencia no explicitada
(**) Participante O: No lo sé, es que me ha venido… así.

En este problema hemos identificado una evidencia no explicitada de insight cuando el participante O en la entrevista expone, que no sabe como se le ha ocurrido la idea para resolver el problema sino que *"le ha venido… así"*. En este caso inferimos que el participante ha tenido la ocurrencia de la estrategia o idea brillante que le ha posibilitado resolver el problema. En el Cuestionario de Respuestas verificamos que resuelve el problema a partir de una estrategia de adición y sustracción de superficies.

PROBLEMA 10

Evidencia explicitada
(*) Participante B: Me he dado cuenta que si juntas las tres zonas sombreadas te da media circunferencia, luego he calculado la circunferencia entera y después lo he dividido entre dos.
(*) Participante E: He movido las tres sombras y me he dado cuenta que era media circunferencia
(**) Participante J: Ah pues, me he dado cuenta que sumando los tres triángulos es la mitad de una circunferencia y entonces he hecho el área de toda la circunferencia dividida entre dos.

Las evidencias explicitadas de insight identificadas en los participantes (B,E,J) están basadas en la reestructuración que les permite reubicar adecuadamente los tres sectores circulares sombreados en uno de los círculos y descubrir que la zona sombreada que representan es equivalente a la mitad del círculo.

Evidencia no explicitada
(**) Participante G: Pues ha sido ir probando, he probado… y pum! y de repente ya está.
(*) Participante L: No lo sé pero me he dado cuenta que el área sombreada es la mitad de la circunferencia
(**) Participante L: Yo, es que estaba aburrida… (Risas.) Participante L: He empezado… y después lo he visto (Gesticula)
(*) Participante I: He visto que la solución era la mitad del círculo.

Inferimos que las evidencias no explicitadas de insight identificadas en los participantes G y L, nos sugieren que después de un periodo de ensayo y error en el que se tantea, avanza y retrocede con posibles estrategias de resolución, los participantes sin explicar o explicitar ninguna idea o estrategia en concreto llegan a ver la imagen que les proporciona la solución final del problema. De forma similar el participante I acaba viendo la imagen concreta que representa la solución final.

6.1.5.5.1 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Los momentos de insight que hemos identificado en el apartado *6.1.5.4 Triangulación: Categorías de resolución* a partir de los resultados obtenidos en el Cuestionario de Respuestas o en la Entrevista Semiestructurada hacen referencia a dos posibles niveles de evidencia: la explicitada y la no explicitada; respecto a la ocurrencia del insight en el descubrimiento de una nueva reestructuración que permita al participante poder continuar con la resolución del problema.

En la primera clase de evidencia explicitada, los participantes explican la estrategia que les ha permitido descubrir una nueva relación o reestructuración entre los elementos del problema y que les ha facilitado poder "*ver*" o "*darse cuenta*" de como continuar con la resolución. En algunos casos pudiendo llegar a plantear la solución final.

En la segunda clase de evidencia no explicitada, los participantes no explican cómo se les ha ocurrido la idea o estrategia para resolver el problema. Conciben de manera implícita la reestructuración necesaria para resolver la dificultad o bloqueo que genera el problema, como diría Callejo (1994) con un "Eureka", o Gardner (1989) con un Aja!. En nuestro caso los participantes emplean expresiones como "lo he visto", "me ha venido de repente" o "Esta ha sido un plas, pum y ya está", etc.

La diferencia natural entre las dos clases de evidencia de insight, radica en que en la evidencia explicitada los participantes conciben y explicitan cómo ha sucedido la ocurrencia del insight mediante una nueva reestructuración de los elementos del problema ya sea a partir del ensayo y error, la observación, deducción, inferencia, la capacidad heurística (De Bono, 1971; Root-Bernstein, 2002) u otros métodos visuales (Del Grande, 1990; Presmeg, 1986). En cambio en la evidencia no explicitada de insight los participantes tienen una sensación de efusividad más repentina, significativa y profunda de la ocurrencia del insight aunque no expliciten o describan la estrategia o reestructuración que ha propiciado el nuevo descubrimiento. En los casos de evidencia no explicitada, inferimos que los participantes también podrían abordan el problema, sin darse cuenta, de manera implícita a partir del ensayo y error, observación, deducción, inferencia, capacidad heurística y otros métodos visuales aunque ellos mismos no conciban y/o expliquen como lo han resuelto.

Una diferencia fundamental que identificamos se encuentra en como se produce la sensación de la ocurrencia de insight mediante el descubrimiento de la nueva reestructuración de elementos que puede posibilitar la resolución del problema. Generalmente los participantes describen las evidencias no explicitadas de manera efusiva con ciertos rasgos emotivos de sorpresa a partir de expresiones como por ejemplo “me ha venido”, “lo veía muy claro”, “me ha venido de repente” o “he tenido un flash” y en cambio los participantes describen las evidencias explicitadas de insight de forma menos efusiva sin enfatizar en rasgos tan emotivos de sorpresa, a partir de expresiones como por ejemplo “Me he dado cuenta que si juntas… “, “…hasta que se me ha ocurrido rotar el cuadrado” o “he visto claro desde el principio que moviendo…”. En cualquier caso consideramos que en el descubrimiento de una nueva reestructuración de elementos en la resolución de un problema geométrico ip^2, influyen distintos aspectos como el conocimiento general y especifico del participante (Treffinger, Feldhusen y Isaksen, 1990; Urban, 1995; Peralta y Fernández, 1998) el periodo de incubación (Hadamard, 1947; Wertheimer, 1959) referente a la dificultad que genera el problema, la motivación y el gusto del estudiante (Fennema y Sherman, 1976) por las matemáticas y la resolución de problemas geométricos empleando métodos visuales (Guzmán, 1996; Presmeg, 2006) así como también una sensación intrínseca de mayor o menor efusividad y sorpresa del propio estudiante (Gardner, 1989; Callejo, 1994; Liljedalh, 2008b).

Inferimos por tanto que el descubrimiento de una nueva reestructuración de los elementos que intervienen en un problema puede posibilitar la sensación de la ocurrencia del insight en algunos participantes pero no en otros, dependiendo entre otras cuestiones de la combinación de los aspectos que hemos señalado anteriormente. Por ejemplo descubrir una nueva reestructuración o relación geométrica basada en que un triángulo inscrito en una circunferencia con uno de sus lados como diámetro es un triángulo rectángulo, puede suponer la ocurrencia de un insight para algunos estudiantes pero no para otros.

6.1.5.5.2 TERCER NIVEL DE RESOLUCIÓN: CATEGORÍAS DE RESOLUCIÓN IP²

En este tercer nivel de resolución, hemos considerado las categorías de resolución planteadas por los estudiantes y recogidas en el apartado *6.1.5.5.2 TRIANGULACIÓN: CATEGORIAS DE RESOLUCIÓN*, que podrían posibilitar el insight geométrico. Posteriormente hemos contrastado las categorías de resolución con los resultados obtenidos en el apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT.* Finalmente seleccionaremos en el Tercer nivel de Resolución aquellas categorías de resolución en las que se han identificado una mayor frecuencia de momentos de insight, independientemente si la naturaleza de estos corresponde a evidencias explicitadas o no explicitadas de insight.

Hemos afinado la clasificación de los momentos de insight en aquellas categorías de resolución donde consideramos que realmente se han producido, aunque previamente este clasificado en una categoría de resolución más genérica. Por ejemplo el participante I, en el Cuestionario de Respuestas sobre el problema 2 manifestó *"Me he tenido que dar cuenta de que los semicírculos los podía juntar en el cuadrado con el agujero de la ventana circular".* En el apartado *6.1.5.5.2 TRIANGULACIÓN: CATEGORIAS DE RESOLUCIÓN* esta resolución del participante I, se ha clasificado en la categoría de "*Reubicación y adición de superficies. Considera el cuadrado final 1x1 como resultado del área de la zona sombreada"***.** Sin embargo en este Tercer nivel de Resolución hemos clasificado esta resolución del participante I en la categoría de "*Reubicar figuras geométricas"* porque una vez triangulados todos los resultados obtenidos, consideramos que la ocurrencia del momento de insight en este caso, está relacionada fundamentalmente con el hecho de que el participante I reubica las figuras geométricas en una determinada posición y en menor grado con la adición de superficies o con considerar el cuadrado final 1x1 como resultado final de la zona sombreada. Aunque posiblemente pueden intervenir o estar relacionados otros factores relevantes en la ocurrencia del insight.

Nos encontramos que dada una resolución e independientemente de la categoría de resolución a la que pertenezca, una vez triangulados los resultados obtenidos en el Cuestionario de Problemas, Cuestionario de Respuestas y Entrevista Semiestructurada nos va a interesar discernir y establecer un mayor nivel de concreción respecto a que reestructuraciones han posibilitado la ocurrencia del insight. Por tanto en este Tercer nivel de Resolución hemos definido diferentes categorías de resolución, según el tipo de reestructuración en la que hemos identificado los momentos de insight definidos en el apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT.*

A continuación definimos las categorías de resolución ip^2, en las que hemos identificado los momentos de insight:

1. Fragmentación de figuras geométricas (frecuencia 7 momentos de insight)

En esta categoría de resolución ip^2 los participantes generalmente fragmentan la figura geométrica dada por el enunciado del problema, buscando la figura geométrica unidad o bien identificando otras figuras geométricas que faciliten la resolución del problema, sea para el cálculo de superficies o su reubicación, así como el reconocimiento de nuevas relaciones o reestructuraciones geométricas.

Consideramos que en esta categoría de resolución pueden intervenir de forma relevante entre otras, una combinación de habilidades de visualización desde: a) la identificación visual, cuando somos capaces de identificar figuras geométricas independientemente del contexto; b) la discriminación visual, cuando buscamos fragmentar superficies equivalentes. Los momentos de insight en esta categoría de resolución están relacionados con la fragmentación de superficies y con el descubrimiento de nuevas figuras geométricas que permiten a los participantes reestructurar los elementos del problema pudiendo llegar a ver una posible solución. Los momentos de insight (apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT)* identificados en esta categoría de resolución son:

Problema geométrico (ip^2)	1	2
Frecuencia momentos insight	5	2

Tabla 6.1.5.5.2.1: Momentos insight & Fragmentación

2. Reubicación de figuras geométricas (frecuencia 11 momentos de insight)

Esta categoría de resolución ip^2 identifica cuando los participantes reubican puntos, líneas o figuras geométricas en determinadas posiciones. Concretamente esta categoría de resolución ip^2 inferimos que puede consistir en una combinación de desplazamientos, traslaciones o movimientos parciales y/o rotaciones de figuras geométricas, mediante ensayo y error, hasta conseguir descubrir la reubicación adecuada que permite a los estudiantes poder llegar a plantear resoluciones exitosas ante los problemas geométricos a los que se enfrentan. Los participantes explicitan que “juntan” o “unen” figuras geométricas en sus resoluciones cuando hacen referencia a esta estrategia de resolución. Identificamos esta categoría de resolución de manera única o bien en combinación con otras estrategias de fragmentación, adición, sustracción e identificación de figuras geométricas. Los momentos de insight (apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT)* identificados en esta categoría de resolución son:

Problema geométrico (ip^2)	1	2	4	6	7	10
Frecuencia momentos insight	2	4	1	1	1	2

Tabla 6.1.5.5.2.2: Momentos de insight & Reubicación

3. Descubrir reestructuraciones no explicitadas (frecuencia 13 momentos de insight)

En esta categoría de resolución hemos identificado aquellos momentos de insight, basados únicamente en evidencias no explicitadas de insight.

La naturaleza de estos momentos de insight nos indica que no están relacionados explícitamente con alguna estrategia de resolución concreta, sencillamente porque los participantes experimentan la ocurrencia del insight, pero no explican o explicitan que ideas o estrategias lo han posibilitado.

En la siguiente tabla exponemos la frecuencia de momentos de insight identificados en los problemas geométricos ip^2 (apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT)* y que son generados por *Reestructuraciones no explicitadas.*

Problema geométrico (ip^2)	1	3	4	6	7	9	10
Frecuencia momentos insight	2	1	2	2	1	1	4

Tabla 6.1.5.5.2.3: Momentos de insight & No explícitos

4. Girar o mover una figura geométrica (frecuencia 10 momentos insight)

Esta categoría de resolución está constituida por aquellas resoluciones que consisten en una única estrategia basada en desplazar o girar figuras geométricas. Los participantes explicitan que “giran” o “mueven” figuras geométricas de una posición a otra con la intención de plantear posibles resoluciones exitosas. La diferencia básica entre esta categoría y la categoría de “*Reubicación de figuras geométricas*” reside en que en esta categoría identificamos que los participantes realizan una Imagen Dinámica (Presmeg,

1986) ya que así lo indican los resultados obtenidos. En cambio en la otra categoría, la reubicación de figuras geométricas interpretamos que puede producirse mediante una combinación de estrategias diversas no especificadas como por ejemplo girar, desplazar, simetrizar, tantear, extraer del plano, etc. Los momentos de insight (apartado *6.1.5.5 MOMENTOS DE INSIGHT)* que hemos identificado en esta categoría de resolución son:

Problema geométrico (ip^2)	3	4	7	10
Frecuencia momentos insight	4	2	3	1

Tabla 6.1.5.5.2.4: Momentos de insight & Girar o mover

En este tercer nivel de resolución hemos identificado 4 categorías de resolución que posibilitan la ocurrencia del momento de insight. Consideramos que otras estrategias o factores pueden haber influido previamente en la ocurrencia del momento de insight en un periodo determinado de la resolución de un problema. Cuando hablamos de categorías de resolución e identificamos estrategias explicitas no queremos negar la posibilidad de que puedan haberse producido también estrategias implícitas que puedan haber influenciado en la ocurrencia del momento de insight.

Inferimos que en la mayoría de categorías, de manera implícita o explícita se requiere del método visual, a partir de la aplicación de algunas habilidades de visualización (Del grande, 1990) y/o de la representación de imágenes (Presmeg, 1986).
Las categorías que forman parte de este Tercer nivel de Resolución, no determinan en los participantes ningún tipo de vinculación o exclusividad entre ellas.

6.1.5.6 RESULTADOS POR ESTUDIANTES

En este apartado vamos a estudiar básicamente la frecuencia de problemas resueltos correctamente por cada participante. Realizamos un análisis para cuantificar la frecuencia del Indicio Resuelve Correctamente Problema (RCP), considerada como variable Problemas Resueltos (RCP) respecto cada uno de los estudiantes. En el anexo *C.1.4 RESULTADOS PROBLEMAS RESUELTOS* hemos expuesto la tabla que relaciona cada uno de los 20 participantes con la frecuencia de problemas resueltos con éxito. A excepción del problema número 5 en el que no hemos identificado ningún Indicio RCP (apartado *6.1.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO PROBLEMAS)* el análisis se realizó sobre los 9 problemas en los que se han identificado al menos algún Indicio RCP.

Exponemos a continuación en la Fig 6.1.5.6, el diagrama de barras de la variable Problemas Resueltos (RCP) que representa la frecuencia del Indicio Resuelve Correctamente Problema (RCP) de cada uno de los participantes:

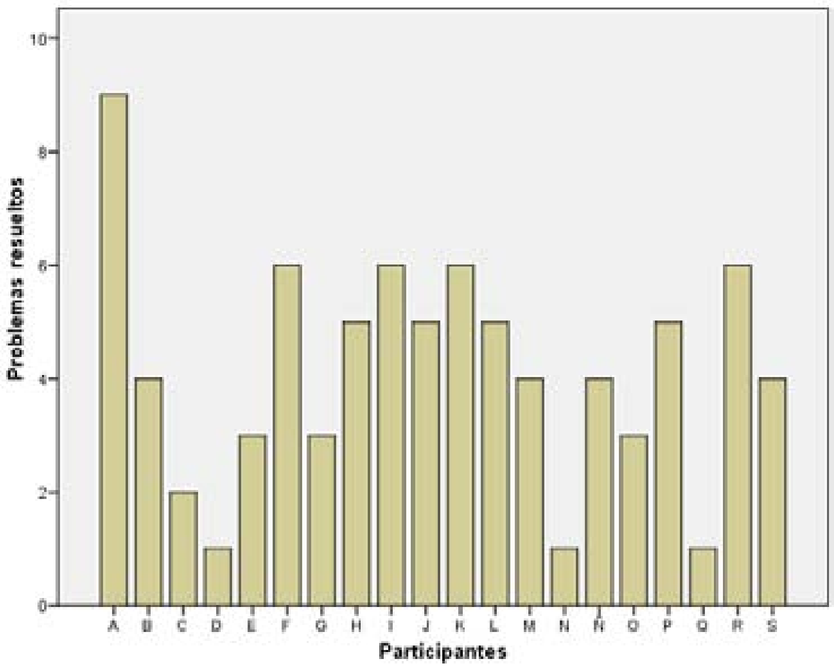


Fig 6.1.5.6: Diagrama Frecuencia RCP

A continuación estudiamos algunos estadísticos descriptivos que vamos a considerar en este análisis:

N	Válidos	20
	Perdidos	0
Media		4,15
Mediana		4,00
Moda		4[a]
Desv. típ.		2,033
Varianza		4,134
Asimetría		,234
Error típ. de asimetría		,512
Percentiles	25	3,00
	50	4,00
	75	5,75

Tabla 6.1.5.6: Estadísticos Variable RCP

Los resultados nos indican una media de 4 problemas correctos con una desviación típica de 2,033 en la muestra de participantes. La distribución de la variable Problemas Resueltos RCP, cumple los criterios de normalidad (asimetría=0,234), siendo esta una distribución significativamente compensada (simétrica) porque aproximadamente el 50% de los participantes han obtenido una puntuación por debajo de la media (4,15) cómo podemos contrastar en el percentil 50.

El siguiente diagrama de cajas establece los participantes que se encuentran en cada uno de los percentiles correspondientes según la frecuencia de Problemas Resueltos:

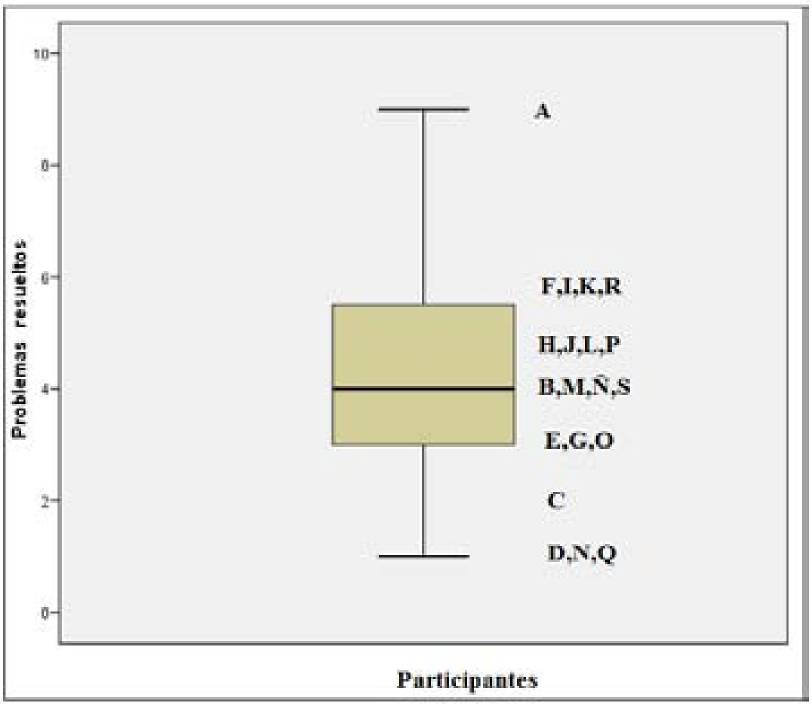


Fig 6.1.5.6.2: Diagrama de cajas Frecuencia Problemas Resueltos

De forma más precisa a partir de los diagramas 6.1.5.6 y 6.1.5.6.2 comprobamos que los participantes F,K,R,I han resuelto 6 problemas y el participante A ha resuelto 9 problemas. En cambio por debajo del primer cuartil identificamos los participantes N,D,Q con tan solo un problema resuelto y el participante C con dos problemas resueltos. Todos los demás participantes se encuentran entre el primer y tercer cuartil.

Es decir un 25% de participantes han realizado correctamente entre 1 y 2 problemas, un 50% de los participantes han realizado adecuadamente entre 3 y 5 problemas y el 25% restante de participantes consiguieron resolver 6 problemas a excepción del participante

A que resolvió 9 problemas. Concretamente, trece participantes (65%) han resuelto un número de problemas geométricos ip^2 superior o igual a la media de la muestra.

Una vez estudiado los problemas geométricos ip^2 desde la perspectiva de las categorías de resolución que promueven los momentos de insight en los estudiantes, nos interesa también por una parte estudiar algunas habilidades de visualización de los participantes que pueden ser relevantes en su resolución y por otra estudiar algunas actitudes de los estudiantes ante las matemáticas.

APARTADO 2: TESTS INTERACTIVOS

6.2 INTRODUCCIÓN: TESTS INTERACTIVOS

En la realización de los tests interactivos de visualización que planteamos en nuestra investigación, nos han influenciado diferentes autores que han aportado a la literatura diferentes tests con la finalidad de evaluar distintas capacidades cognitivas entre las que consideramos especialmente relevantes aquellas pruebas psicométricas que evalúan habilidades de visualización (Del Grande, 1990).

En la década de 1920, la creciente consciencia de que la llamada inteligencia no era una facultad unitaria sino que se componía de muchas aptitudes que se presentaban en distintas cantidades, impulsó la necesidad científica de medir muchos aspectos de la capacidad mental. Es entonces cuando los tests de aptitudes diferenciales se empezaron a revisar y estandarizar. A continuación exponemos algunos ejemplos de tests que nos han parecido interesantes tener en cuenta en nuestra investigación:

1) La batería DAT (Differential Aptitude Tests) está constituida por diferentes tests (Bennett, Seashore y Wesman, 2002) con la intención de evaluar distintas aptitudes diferenciales frente a la capacidad mental general. La batería de tests está pensada para aplicarla a personas con un nivel cultural previo de final de la Educación Primaria y a partir de los 14 años. Concretamente nos hemos centrado en un par de tests. El primero el test DAT-SR (Relaciones espaciales) por ser particularmente importante en el desarrollo de aquellas tareas que requieren de la visualización y la manipulación de objetos. El aspecto más innovador de este test es que combina dos factores que frecuentemente se han considerado como independientes: por un lado visualizar un cuerpo que ha de construirse a partir del desarrollo plano de un modelo previo y por otro la capacidad de imaginar como aparecería el cuerpo si se le hiciese girar en distintos sentidos o tuviese que ser percibido desde diversas perspectivas. Ambos factores son relevantes para evaluar y concebir una buena capacidad para poder pensar en términos espaciales. Mostramos un ejemplo en la siguiente figura 6.2:

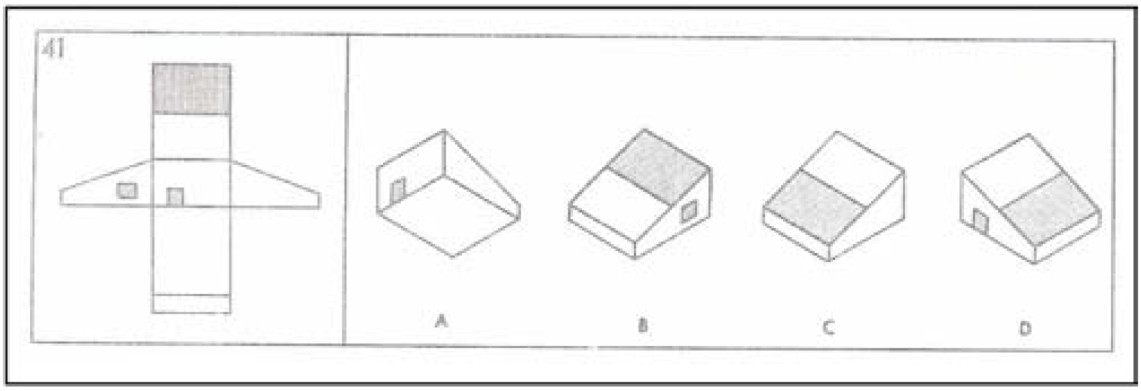


Figura 6.2 Test DAT-SR relaciones espaciales

Este ejemplo consiste en identificar qué cuerpo puede construirse correctamente a partir del desarrollo plano del modelo indicado en la izquierda. Basta unos segundos para darnos cuenta que los cuatro cuerpos son correctos en cuanto a la forma pero las caras que se ven son diferentes. Solo uno de estos cuerpos puede construirse a partir del desarrollo plano del modelo.

2) Otro de los test que nos ha parecido interesante hacer referencia dentro de la batería de los DAT (Bennett, Seashore y Wesman, 2002), es el test DAT-AR (Razonamiento abstracto). En este test se pretende evaluar la capacidad de razonamiento abstracto con formas no verbales. Es decir se requiere que la persona intuya o capte el principio operativo en virtud del cual se producen los cambios sucesivos en las figuras presentadas. Si la persona consigue descubrir la ley general que gobierna los cambios, comprenderá la conexión lógica entre las figuras. De manera minuciosa y con la intención de que la evaluación del razonamiento abstracto no quede contaminado por la discriminación visual, se han seleccionado figuras de forma que las diferencias entre ellas resulten evidentes, potenciando así, en la medida de lo posible una solución que sea independiente de la agudeza perceptiva.

3) Cattell y Cattell (1994) plantearon un test de inteligencia llamado Factor "g" comúnmente conocido en la comunidad científica. De entre las diferentes pruebas psicométricas hemos puesto un especial énfasis en la denominada escala 3 considerada como una prueba no verbal, donde el alumno debe discernir y percibir la posibilidad de relación entre figuras y formas. Concretamente esta prueba está formada por cuatro subtests (series, clasificación, condiciones y matrices) en los que se requieren para su correcta realización de algunas operaciones cognitivas como la identificación visual, la visualización espacial, semejanzas perceptivas, clasificación, seriación y comparación espacial. Todos ellos son contenidos perceptivos distintos con la intención de evitar que algunas posibles discrepancias perceptivas de los participantes puedan influir de forma predominante en los resultados finales obtenidos.

Exponemos a continuación una de las tareas que nos ha resultado interesante en este test. En la tarea que se muestra a partir de la siguiente figura 6.2.1 el participante debe discernir entre las figuras (a,b,c,d,e,f) cual es la que precede a la serie de figuras de la izquierda.

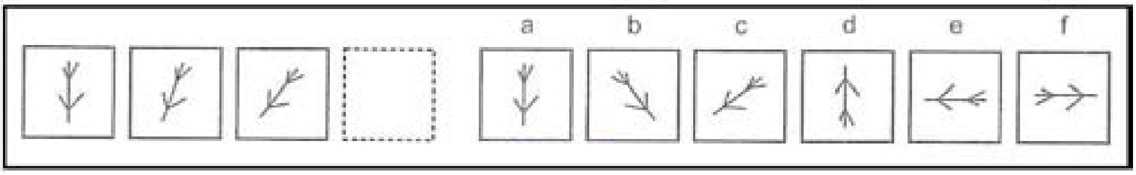


Figura 6.2.1: Factor "g". Prueba no Verbal. Series.

Observamos como una simple rotación de la figura en cuestión nos aportará la solución.

6.2.1 TESTS INTERACTIVOS. JUSTIFICACIÓN.

Los dos tests interactivos planteados para nuestra investigación se han construido y diseñado a partir del lenguaje de programación informático Visual C. Los tests interactivos propuestos requieren entre otras habilidades importantes para su ejecución, algunas de las habilidades de visualización establecidas por Del Grande (1990).

El objetivo de la construcción de los tests interactivos, reside en posibilitar la realización de tareas geométricas de forma interactiva a los participantes, como por ejemplo discernir sobre la orientación angular de dos cuerpos geométricos o la comparación de figuras geométricas.

En el diseño y realización de los tests interactivos hemos tomado como referencia, algunas indicaciones, restricciones y variables condicionantes establecidas en el trabajo que realizamos en el Master de investigación del departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona (Sanchez, 2009) *"La interacción de la memoria visual y espacial en tareas de reconocimiento de objetos"* respecto el análisis y evaluación de las funciones cognitivas a través de pruebas psicométricas interactivas que pueden intervenir en la ejecución de tareas geométricas por ordenador. Las indicaciones que consideraremos son:

- Simulación previa, los estudiantes deben conocer exactamente en qué consiste la tarea geométrica a realizar interaccionando con el software informático de lo contrario los primeros resultados no serán significativos en la prueba.

- Aprendizaje por la práctica, se deben establecer los correspondientes tiempos de descanso entre tarea y tarea geométrica así como contrabalancear la muestra para evitar que la ejecución reiterada, interfiera en los resultados obtenidos de los estudiantes y evitar que los resultados se alteren debido al aprendizaje por la práctica.

- La atención selectiva y sostenida, son determinantes en la ejecución de las tareas geométricas que proponemos mediante ordenador. La capacidad de fijar la atención en un punto concreto y mantener la atención durante un periodo de tiempo son especialmente relevantes en la realización de los tests interactivos que planteamos.

Los criterios de evaluación sobre la ejecución de los dos tests interactivos vendrán posibilitados por el análisis de dos variables:

- <u>El tiempo de reacción (TR):</u> tiempo que el estudiante requiere para discrepar en la ejecución de una tarea.
- <u>Aciertos (AC):</u> Identifica la frecuencia de "éxito" en la ejecución de una tarea.

El motivo esencial en la construcción de los tests interactivos, radica en posibilitar una manera interactiva de evaluar mediante tareas psicométricas algunas habilidades de visualización (Del Grande, 1990) como el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas, la identificación visual, la discriminación visual y la memoria visual.
Los resultados obtenidos en el apartado *6.1.5.4 TRIANGULACIÓN: CATEGORÍAS DE RESOLUCIÓN* y en el apartado *6.1.5.5.2 TERCER NIVEL DE RESOLUCIÓN: CATEGORÍAS DE RESOLUCIÓN* IP^2 nos indican que las categorías de resolución que pueden llegar a promover la ocurrencia de los momentos de insight, posiblemente están constituidas por una combinación de habilidades de visualización:

- En algunos casos la resolución puede venir posibilitada por la reubicación de figuras geométricas hasta que se consiguen combinar y reubicar adecuadamente.

- Inferimos que los participantes pueden retener, desplazar, mover o girar figuras geométricas que conservan sus características visuales, de forma y tamaño, a partir de su memoria visual (Del Grande, 1990; Castellanos, 2001) aunque de manera explícita no lo manifiestan.

- La fragmentación parece ser una estrategia comúnmente utilizada con el objetivo de identificar visualmente (Del Grande, 1990) nuevas figuras geométricas que puedan facilitar la resolución del problema.

- En otros casos la resolución puede venir posibilitada por el reconocimiento de relaciones geométricas (Del Grande, 1990) entre distintas figuras geométricas como por ejemplo la equivalencia entre superficies, donde la discriminación visual (Del Grande, 1990) desempeña un papel especialmente significativo.

- De forma análoga en algunos casos las resoluciones parecen estar vinculadas a reconocer que posiciones geométricas (Del Grande, 1990) se establecen entre figuras o cuerpos geométricos de manera que los participantes puedan llegar a "*ver*" la resolución del problema como por ejemplo cuando los participantes descubren la posición de distintas figuras geométricas para construir un cuadrado u otras figuras geométricas.

Por este motivo hemos elaborado 2 tests interactivos: **1r test interactivo: visualización en el plano** y **2n test interactivo: visualización en el espacio.** Tests en los que pretendemos evaluar de manera psicométrica a partir de las tareas geométricas que plantean, las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) explicitadas.

6.2.2 MUESTRA

La muestra de estudiantes que han participado en el *APARTADO 2: TESTS INTERACTIVOS* es la misma que ha participado en el *APARTADO 1: PROBLEMAS GEOMÉTRICOS*, de esta segunda Fase Diagnóstica de Relación. Se trata de 20 alumnos de 4t de ESO del instituto de Parets del Vallés que consta de 2 líneas de ESO y dos líneas de bachillerato. La edad de los participantes oscila entre los 15 y 16 años. Ningún alumno presentaba disfunciones visuales.

6.2.3 PRIMER TEST INTERACTIVO: VISUALIZACIÓN EN EL PLANO

Tomamos como punto de referencia para nuestro estudio, algunas investigaciones relevantes (Orton, 1997; Wheatley, 1996) que han planteado tests de visualización como instrumentos de recogida de datos y que nos han orientado en el diseño y construcción de este primer test interactivo de visualización en el plano.

Investigaciones como las que propone Orton (1997) estudian modelos de reconocimiento de figuras planas mediante la manipulación mental de éstas. En su investigación Orton (1997) planteó tareas a los estudiantes de Primaria y Secundaria basadas en diversas cuestiones respecto a la comparación de figuras planas congruentes o semejantes presentadas en diferentes posiciones. En los tests que propuso entre otras habilidades necesarias, se requería del reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas, de la discriminación visual y la rotación de figuras geométricas para realizar con éxito las tareas que planteó.

Wheatley (1996) fue el creador del Wheatley Spatial Ability Test (WSAT) con el objetivo de medir la habilidad espacial de los estudiantes. El WSAT es un test de lápiz y papel que consiste en evaluar la habilidad espacial de los estudiantes a partir de medir su capacidad para rotar figuras en dos dimensiones. Este test consta de 20 tipos de problemas visuales, cada uno de ellos compuesto por una secuencia de 6 figuras que pueden ser iguales en tamaño y forma o no. El estudiante examina la primera figura de la izquierda y posteriormente debe discriminar si cada una de las cinco figuras restantes es igual a la figura inicial, tachando la letra Y en caso afirmativo y la letra N en caso contrario. Las cinco figuras restantes pueden presentarse o no mediante una rotación de la figura inicial. Existen diferentes tipos de figuras utilizadas por Grayson Wheatley (1996) en el test WSAT pero todas ellas se caracterizan por ser figuras negras sobre fondo blanco como se muestra en el ejemplo de la Figura 6.2.2. Concretamente en las diferentes partes del test las figuras geométricas empleadas son pentominós, hexominós, heptominós y octominós.

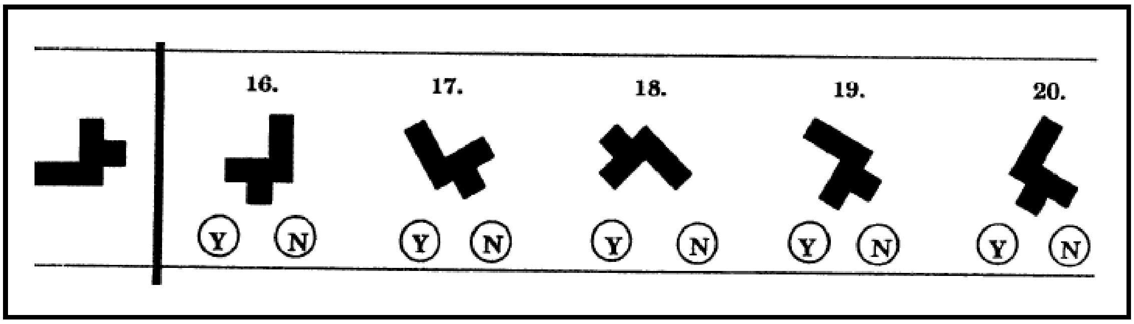


Figura 6.2.2: Wheatley Spatial Ability Test

En nuestra investigación el primer test interactivo de visualización en el plano, consiste en reconocer la forma y posición de dos figuras o estímulos geométricos representados en el plano después de un período de retención mnésica. Consideramos que para la adecuada ejecución de la tarea que proponemos en este primer test se requieren entre otras habilidades de visualización:

a) La discriminación visual en la comparación de las figuras geométricas presentadas.
b) La rotación de figuras geométricas.
c) El reconocimiento de relaciones geométricas en la identificación de las posibles equivalencias entre las dos figuras o estímulos geométricos presentados.
d) La memoria visual con objeto de recordar las propiedades visuales y de posición del estímulo geométrico.

6.2.3.1 MATERIALES

A partir del lenguaje de programación Visual C hemos implementado este primer test interactivo de visualización en el plano, en el que se presenta a los participantes las diversas figuras o estímulos geométricos que intervienen en la tarea geométrica así como las instrucciones para la realización de ésta.

Como estímulos de memoria y prueba en la tarea geométrica se han utilizado dos tipos de figuras planas: pentominós y hexominós. Estas figuras geométricas están compuestas por 5 y 6 cuadrados respectivamente unidos entre sí por aristas comunes según distintas disposiciones. Todos los pentominós y hexominós están representados por sus aristas en negro y las caras en blanco tal y como podemos comprobar en la siguiente *figura 6.2.3.*

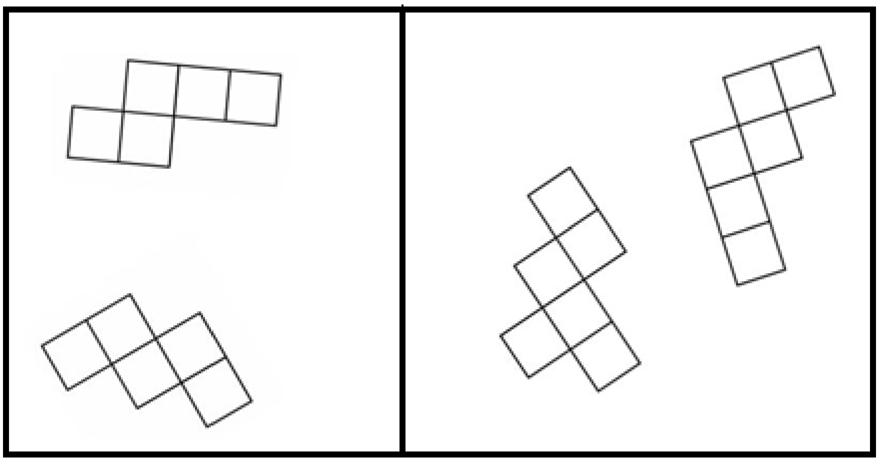


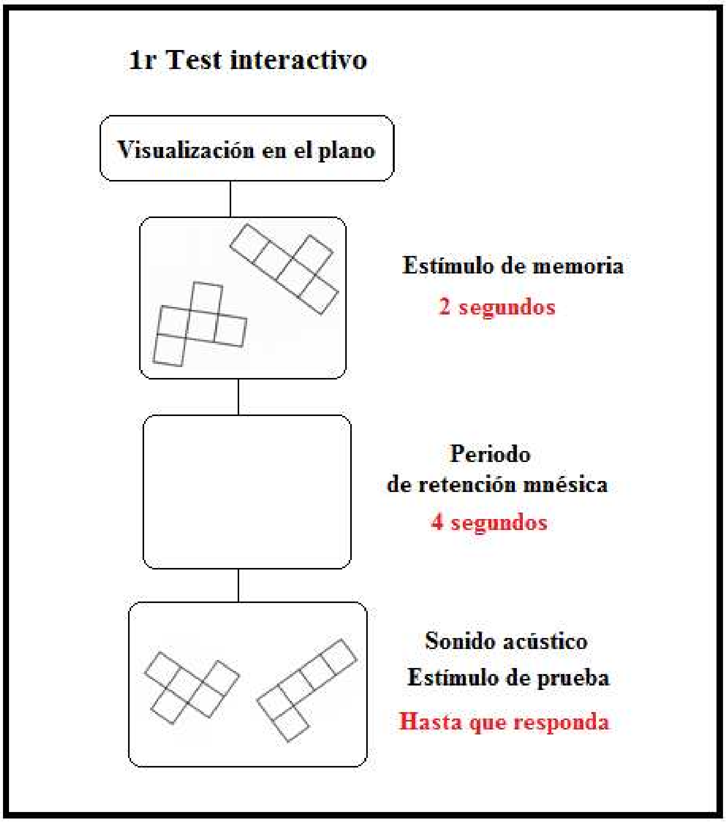
Figura 6.2.3: Estímulos geométricos 1r test interactivo Visualización

El resto de pentominós y hexominós empleados en el test interactivo se pueden consultar en el anexo *C.4.2 ESTÍMULOS GEOMÉTRICOS DEL PRIMER TEST INTERACTIVO*. Los estímulos de memoria y prueba se presentan centrados en la pantalla con una resolución máxima de 640 x 480 píxeles (8 bits) sobre fondo blanco.
Los dos primeros ensayos del test son de adaptación a la tarea y están formados por una combinación de pentominós y hexominós. En cambio en los siete ensayos siguientes del test interactivo hemos empleado como estímulos de memoria y prueba sólo pentominós. Concretamos que estos estímulos de memoria y prueba representados en el plano están formados por dos pentominos diferentes en forma y posición. Finalmente en los últimos siete ensayos del test interactivo, los estímulos de memoria y prueba que se han empleado están representados por dos hexominós diferentes en forma y posición.

Los participantes responden individualmente en un ordenador, ante los estímulos de prueba únicamente pulsando dos teclas S y N, para indicar si están de acuerdo o no respecto la igualdad en forma y tamaño de los estímulos o figuras geométricas. Una vez finalizado el test interactivo este genera un fichero Excel en formato .csv, donde se almacenan dos variables de control: el número de aciertos (AC) y el tiempo de reacción (TR) empleado en cada uno de los ensayos presentados. Los ordenadores utilizados en la prueba estaban dotados con 2G de memoria Ram y una velocidad del procesador a 1100 ghz.

6.2.3.2 DISEÑO

En el diseño de este primer test interactivo se manipularon dos tareas (reconocimiento de la orientación y reconocimiento de la forma del objeto). Las tareas se realizan en un primer bloque formado por dos ensayos de adaptación más catorce ensayos computables. Cada ensayo del test está constituido por un estimulo de memoria, un periodo de retención mnésica y un estímulo de prueba. Exponemos a continuación en el Esquema 6.2.3.2 la estructura del test, en el que explicitamos cada una de las fases de un ensayo:



Esquema 6.2.3.2: Estructura del 1r test interactivo de visualización

Cada participante realiza un total de 16 ensayos consecutivos. Hemos estimado un tiempo medio aproximado entre 3 y 6 minutos en la realización del test.

6.2.3.3 PROCEDIMIENTO

Se habilitó una aula de informática, para 10 alumnos como máximo, con la intención de garantizar unas adecuadas condiciones de control y atención en el aula. Una vez cada participante estaba delante de su ordenador respectivo, se realizó una explicación de la estructura general de la prueba (*Esquema 6.2.3.2: Estructura del 1r test interactivo de*

visualización). Posteriormente se explicó que cada uno de los ensayos del test de visualización en el plano consistiría en presentar dos figuras geométricas (dos pentominós o dos hexominós) que constituirían el estímulo de memoria y al cabo de 4 segundos (período retención mnésica) aparecerían otras dos figuras geométricas (dos pentominós o dos hexominós) que constituirían el estímulo de prueba. La tarea geométrica consiste en discriminar si las dos figuras geométricas presentadas inicialmente (estímulo de memoria) son iguales en forma a las presentadas finalmente (estímulo de prueba). Las figuras geométricas pueden presentarse en una posición que puede diferir de las presentadas inicialmente en el estimulo de memoria. Esto nos indica que los participantes previamente a la discriminación, deben realizar un reconocimiento previo a la rotación del estímulo de prueba y decidir si las dos figuras geométricas han rotado respecto la posición del estímulo de memoria.
Si los participantes consideraban que el estímulo de memoria y prueba eran iguales en forma pulsaban la letra S y si consideraban que eran diferentes pulsaban la letra N.
Era importante que entendieran y realizaran las fases de descanso, entre cada uno de los dos tests interactivos, ya que estas nutren significativamente la atención selectiva y sostenida, concluyentes en la ejecución de tareas psicométricas (Quinn, 2007) como la planteada en nuestro test interactivo.

Consideramos que la ejecución correcta de la tarea propuesta en este primer test interactivo demanda de una cierta combinación de algunas habilidades de visualización: discriminación visual, rotación mental, reconocimiento de posiciones geométricas y memoria visual.

6.2.3.4 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

El análisis de los resultados se ha realizado mediante una metodología cuantitativa a partir del estudio de dos variables: Aciertos (AC) y Tiempo de Reacción (TR).
La variable AC determina la frecuencia de éxito en la ejecución de la tarea de cada participante. Esta variable puede oscilar entre una puntuación mínima de 0 y una máxima de 14 ya que los dos ensayos de ejemplo iniciales no se computan.
La variable TR determina el tiempo que requiere un participante en discriminar si dos estímulos geométricos son iguales en forma o no. La unidad de medida de esta variable es en segundos. El valor que asumirá está variable, respecto cada participante, será el promedio del Tiempo de Reacción empleado en los 14 ensayos del test.

6.2.3.5 FIABILIDAD Y VÁLIDEZ

La fiabilidad y validez de este test interactivo se ha triangulado desde cuatro vertientes:

a. La tarea geométrica que se plantea respecto a la comparación de figuras planas que sean equivalentes y presentadas en diferentes posiciones, está avalada por el test de visualización que realizó Orton en 1997 en su estudio, donde se presentaba la misma tarea de reconocimiento de figuras planas mediante la manipulación mental de estas. De la misma forma que en el test de Orton (1997) en la tarea geométrica propuesta en este primer test interactivo se requieren de habilidades de visualización (Del Grande, 1990) como la identificación y discriminación visual, la rotación mental y el reconocimiento de posiciones geométricas de figuras planas. Pero a diferencia del test de Orton (1997), en este primer test interactivo se pone un especial énfasis en la memoria visual, debido a que el estímulo de memoria y el de prueba no se presentan en el mismo momento.

b. Los estímulos de memoria y de prueba empleados en el test interactivo son los mismos empleados por el Spatial Ability Test (WSAT) realizado en 1996 por Wheatley. Se emplean pentominós y hexominós con arista negra y fondo blanco. El hecho de no emplear las figuras geométricas dibujadas compactadas en negro como Wheatley (1996) sino más bien representadas de manera que se identifican los cuadrados, pensamos que puede favorecer una ejecución de la tarea geométrica más imaginativa pudiendo llegar a aplicar otro tipo de estrategias más creativas.

c. El test se ha validado y contrastado con otros investigadores.

d. Los resultados del Cuestionario de Visualización nos aportarán información cualitativa sobre la ejecución del test interactivo.

6.2.4 SEGUNDO TEST INTERACTIVO: VISUALIZACIÓN EN EL ESPACIO

En la realización del segundo test interactivo hemos considerado algunas investigaciones relevantes como por ejemplo la de Shepard y Cooper (1985). En su investigación argumentan la importancia de la imaginación visual y espacial, en situaciones tan simples, como por ejemplo cuando queremos introducir una mesa por una puerta muy estrecha sin tener que doblar las patas o coger una figura de una estantería sin golpear o dañar las otras o bien los deportistas de elite que continuamente perfeccionan sus técnicas motoras. Todas ellas son acciones que requieren de la interacción visual y espacial del entorno, así como de la previa imaginación por parte del sujeto para llevarlas a cabo satisfactoriamente.

La capacidad de representar mentalmente objetos en el espacio y sus respectivas transformaciones, nos ayuda a planificar de forma más eficaz la ejecución física de nuestros actos y a prever los resultados de estos.

En el segundo test interactivo, tomamos como punto de referencia la investigación realizada por Shepard y Cooper (1985) *"Rotación mental de los objetos"* en la que entre otras variables, estudiaban el tiempo de reacción que empleaban los participantes en discriminar si dos estímulos geométricos tridimensionales presentados simultáneamente en el plano a partir de un taquistoscopio eran iguales en forma o no. Los resultados de esta investigación apuntan a que los tiempos medios de reacción de los participantes a la respuesta aumentaban en proporción directa a la diferencia angular de la orientación de los objetos idénticos presentados para su comparación en parejas de dibujos. Es decir denotan que esta relación puede sugerir la existencia de un proceso de rotación mental subyacente en la comparación de estímulos geométricos, donde el tiempo de reacción en producirse dicho proceso puede depender de la diferencia angular de orientación entre los dos estímulos presentados (Figura 6.2.4).

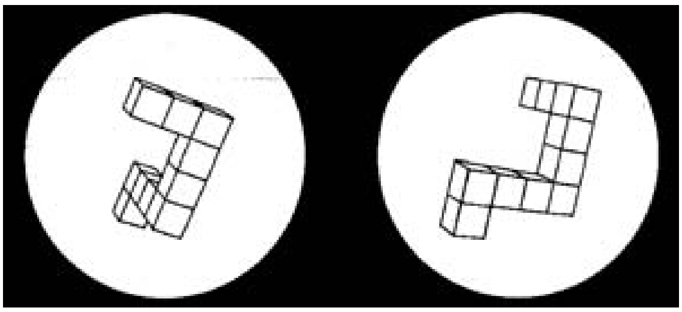


Figura 6.2.4: Estímulos geométricos Shepard y Cooper

Así en nuestro segundo test interactivo se trabaja el reconocimiento de la orientación angular de un cuerpo o estímulo geométrico tridimensional representado en el plano después de un periodo de retención mnésica.

6.2.4.1 MATERIALES

Este segundo test se ha implementado a partir de un programa informático, siguiendo la dinámica del primer test, en el lenguaje de programación Visual C en el que se presentan visualmente a los participantes las instrucciones de realización de la prueba psicométrica así como los diversos cuerpos o estímulos geométricos, que constituyen la tarea de visualización. Una vez finalizada la tarea, el programa genera un fichero Excel en formato .csv, en el que se almacenan dos variables: el número de aciertos (AC) y el tiempo de reacción (TR) de cada estímulo de prueba presentado. Los participantes responden individualmente en un ordenador ante los estímulos de prueba únicamente pulsando dos teclas S y N, para indicar si están de acuerdo o no. Los ordenadores de la prueba estaban dotados con 2G de memoria Ram y una velocidad del procesador a 1100 ghz.

Como estímulos de memoria y prueba, se han utilizado los cuerpos tridimensionales empleados por Shepard y Cooper (1985) en su investigación *Rotación mental de los objetos*. Estos cuerpos tridimensionales representados en el plano, están compuestos por 10 cubos unidos por una cara formando una estructura articulada con 3 pliegues en ángulo recto realizados aleatoriamente. Todos los estímulos de memoria y prueba se presentan en círculos centrados en la pantalla con una resolución de 500 x 500 píxeles (8 bits) sobre fondo blanco, como se muestra en la siguiente Figura 6.2.4.1**:**

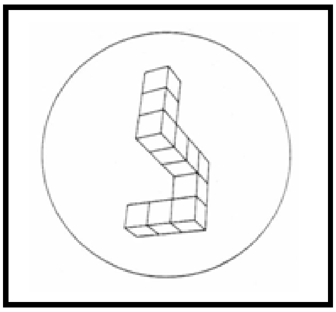
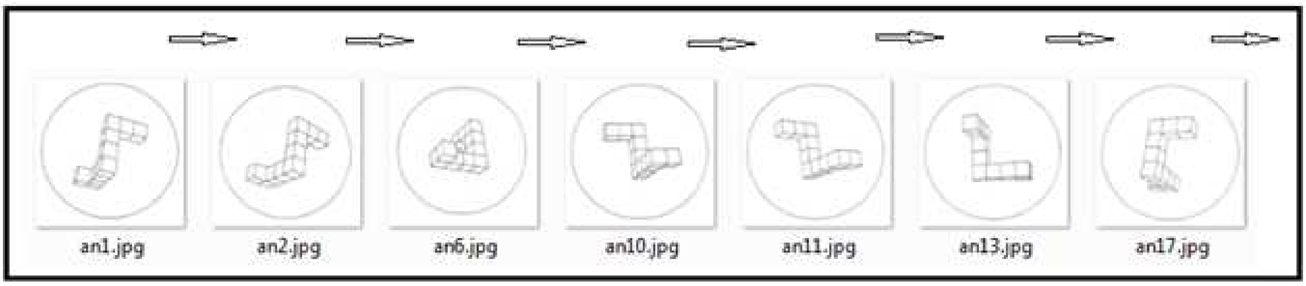


Figura 6.2.4.1: Estímulos geométricos 2n Test interactivo Visualización

Existen 5 cuerpos tridimensionales diferentes (a, b, c, d, e), donde cada uno de ellos se compone por 7 perspectivas angulares que difieren entre sí dependiendo los ángulos de giro de 20º, 80º, 80º, 20º, 40º, 80º y 40º sucesivamente. Ilustramos un ejemplo:



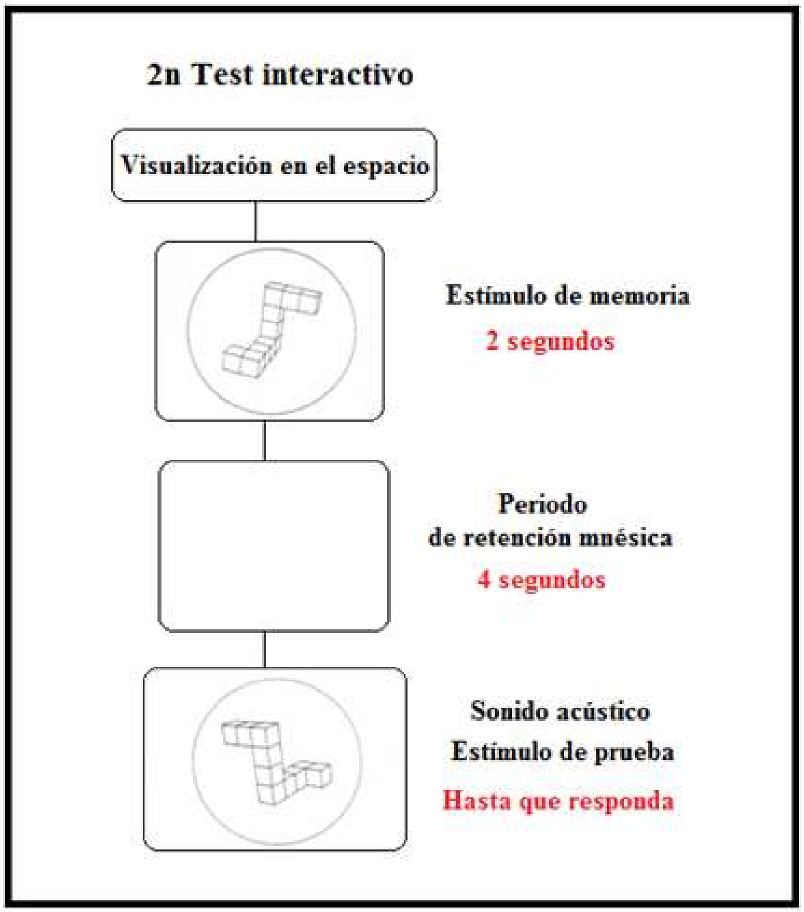
Esquema 6.2.4.1: Perspectivas angulares del cuerpo geométrico a

Inicialmente en el diseño del test se consideran 70 cuerpos tridimensionales porque de cada cuerpo geométrico existen dos posibles orientaciones angulares: la positiva y la negativa. Aunque finalmente solo se seleccionaron 21 perspectivas angulares como estímulos geométricos para formar parte del test que pueden consultarse en el anexo *C.4.4 ESTÍMULOS GEOMÉTRICOS DEL SEGUNDO TEST.*

6.2.4.2 DISEÑO

En el diseño de este segundo test interactivo se manipuló la tarea de reconocer la orientación angular de un cuerpo geométrico presentado en el plano después de un periodo de retención mnésica. La prueba psicométrica que planteamos está compuesta por 14 ensayos experimentales más dos ensayos de demostración iniciales. Es decir cada participante realiza un total de 16 ensayos consecutivos. Cada uno de los ensayos está constituido, como indicamos en el diagrama posterior por un estímulo geométrico de memoria, un período de retención mnésica y un estímulo geométrico de prueba.

Exponemos a continuación en el Esquema 6.2.4.2 la estructura del test (tiempo aproximado realización 3-6 minutos), explicitando cada una de las fases de un ensayo:



Esquema 6.2.4.2: Estructura del 2n Test interactivo de visualización

6.2.4.3 PROCEDIMIENTO

Una vez finalizado el 1r test interactivo y el correspondiente tiempo de descanso se iniciará la ejecución del 2n test interactivo. Siguiendo las directrices expuestas en el procedimiento del 1r test interactivo, se explicó a los participantes que cada uno de los ensayos del test, consistiría en presentar un primer cuerpo geométrico (estímulo de memoria) y al cabo de unos segundos (período retención mnésica) aparecería el mismo cuerpo geométrico (estímulo de prueba) con una orientación angular que podía diferir de la presentada inicialmente. Debían por tanto realizar un reconocimiento previo a la rotación del segundo cuerpo geométrico y decidir si había rotado verticalmente respecto a la posición del estímulo geométrico de memoria presentado inicialmente. Si consideraban que el estímulo de memoria y prueba presentaban la misma posición angular con la mayor celeridad posible debían pulsar la letra S y si consideraban que diferían pulsaban la letra N.

Consideramos que en la correcta ejecución de la tarea que proponemos en este test, se requieren entre otras habilidades de visualización (Del Grande, 1990), de la discriminación visual en la comparación de los cuerpos o estímulos geométricos presentados, de la rotación mental de los cuerpos geométricos, del reconocimiento de las posiciones de los cuerpos o estímulos geométricos y por último de la memoria visual para recordar las propiedades de forma y posición de los cuerpos o estímulos geométricos presentados.

6.2.4.4 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

El análisis de los resultados del segundo test, se ha realizado mediante una metodología cuantitativa a partir del estudio de dos variables: Aciertos (AC) y Tiempo de Reacción (TR).

La variable AC determina la frecuencia de éxito en la tarea propuesta en el test. Esta variable puede oscilar entre una puntuación mínima de 0 y máxima de 14, ya que los dos ensayos de muestra iniciales no se computan.

La variable TR determina el tiempo que requiere un participante para discriminar si dos cuerpos o estímulos geométricos se han presentado en la misma orientación angular. La unidad de medida de esta variable es en segundos. Esta variable asumirá el valor promedio de los tiempos de reacción calculados en cada uno de los 14 ensayos del test.

6.2.4.5 FIABILIDAD Y VALIDEZ

La fiabilidad y validez del test interactivo de visualización en el espacio se ha triangulado desde cuatro vertientes:

a. La tarea geométrica de este segundo test interactivo de visualización en el espacio, discriminar visualmente la orientación angular de dos cuerpos geométricos, está avalada por la investigación realizada por Shepard y Cooper en 1985 *"Rotacion mental de los objetos"* en la que se investigó la misma tarea geométrica.

b. Los cuerpos geométricos empleados como estímulos de memoria y prueba son los utilizados en la investigación de Shepard y Cooper (1985).

c. El test interactivo de visualización en el espacio ha estado contrastado y validado por otros investigadores.

d. Los resultados del Cuestionario de Visualización nos aportarán información cualitativa sobre la ejecución del test interactivo.

6.2.5 CUESTIONARIO VISUALIZACIÓN

Consideramos de manera significativa poder conocer como los participantes han ejecutado los tests interactivos con el objetivo de facilitar la descripción e interpretación de los resultados obtenidos. Des de este ámbito así como para garantizar la fiabilidad y validez de los tests interactivos nos propusimos realizar un Cuestionario de Visualización. Las respuestas de los participantes en referencia a como han realizado los tests interactivos, nos proporcionarán información relevante acerca de la validez de los objetivos que nos planteamos inicialmente: poner en práctica y evaluar psicométricamente algunas habilidades de visualización.

El Cuestionario de Visualización está formado por una única pregunta que hace referencia a cada uno de los dos tests interactivos: ¿Qué estrategia has utilizado en la realización del test?. Cuando se finalizaba uno de los dos tests interactivos anteriores, los participantes realizaban el cuestionario respectivo, en el tiempo de descanso. Hemos expuesto el Cuestionario de Visualización completo en el anexo *C.5 CUESTIONARIO TESTS INTERACTIVOS VISUALIZACIÓN.*

6.2.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO VISUALIZACIÓN

En este apartado exponemos un análisis cualitativo de los resultados obtenidos en el Cuestionario de Visualización sobre la realización de los dos tests interactivos:

Cuestionario Visualización: 1r Test interactivo visualización en el plano

Respecto el primer test interactivo de visualización en el plano vamos a identificar, describir e interpretar las respuestas obtenidas de los participantes en el Cuestionario de Visualización.

Participantes	Descripción e interpretación respuestas
F,Ñ,Q,R,L	Explicitan *comparar las figuras geométricas que aparecen* como estrategia de resolución. En este caso entre otras habilidades, centraríamos en la discriminación visual un papel relevante en la ejecución de la tarea geométrica propuesta.
C,N,E	Exponen tener en cuenta *la posición de las dos figuras geométricas aparecidas como estrategia de discriminación,* comprobando si cambian de posición. Entre otras importantes, posiblemente la habilidad de visualización del reconocimiento de la posición geométrica desempeña un papel relevante en la ejecución adecuada de la tarea geométrica.
K	Plantea *imaginar como se podían mover las figuras geométricas* para discernir si eran equivalentes o no. De manera implícita propone como realizar una rotación mental.
B	Explicita que intenta *recordar la imagen de la figura geométrica* y *darle la vuelta en la mente* para discernir sobre la discriminación de las figuras geométricas que se presentaban. En este caso al igual que el participante K, se pone de manifiesto la posible utilización de rotaciones mentales en la ejecución de la tarea geométrica.
H,M,P	Aplican estrategias más creativas como por ejemplo imaginarse *las figuras geométricas como letras.*
A	Plantea *intentar imaginar o recordar formas estándar*.
D,G	Proponen como estrategia *la visualización*.
J,O	Exponen *la memoria* como estrategia en la ejecución de la tarea.
I,S	Conciben la estrategia de *fijarse o imaginar los cuadrados que forman las figuras geométricas* que aparecen como estímulos, para discriminar sobre la equivalencia de estas. En este caso la identificación y discriminación visual de los participantes podría ser determinante en la realización de la tarea.

Consideramos que la estrategia mayormente empleada por parte de los estudiantes en la ejecución de la tarea geométrica del primer test interactivo es la discriminación visual y probablemente de manera implícita la memoria visual en el reconocimiento de la forma de las figuras geométricas que se presentan como estímulos. Los resultados obtenidos nos muestran que los participantes en la ejecución de la tarea, posiblemente utilizan habilidades de visualización como pueden ser la memoria visual, la identificación y la discriminación visual, la rotación mental, el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas y otras estrategias creativas como imaginar letras o formas estándar o una combinación en menor o mayor grado de las habilidades y estrategias comentadas anteriormente.

Cuestionario Visualización: 2n Test interactivo visualización en el espacio

Respecto a la ejecución del segundo test interactivo de visualización en el espacio vamos a identificar, describir e interpretar las respuestas de los participantes aportadas en el Cuestionario de Visualización:

Participantes	Descripción e interpretación respuestas
N,Ñ,R	Identificamos que exponen como estrategia *comparar las figuras geométricas y cubos.* Sugerimos que posiblemente la habilidad de la discriminación visual desempeñe un papel determinante. En este caso probablemente los estudiantes no realizan una rotación del cuerpo geométrico, sino que la discriminación sólo se basa en la comparación de dos cuerpos geométricos como si de dos imágenes concretas se tratase.
H	Este participante de forma similar a la estrategia empleada en el test interactivo anterior, plantea que se imagina *los cuerpos geométricos como letras*, para poder discriminar sobre la rotación angular de los cuerpos geométricos presentados.
M	Explicita una especial atención en la parte final del cuerpo geométrico, para discernir *hacia donde miraban* y así poder discriminar eficazmente. En esta estrategia inferimos que posiblemente el reconocimiento de la posición desempeñe un papel más relevante que otras habilidades de visualización.
F,J,O,D,C	Atribuyen de manera explícita a la *memoria* el poder discriminar adecuadamente sobre la posición de los estímulos geométricos presentados.
A,K,E,G	Expresan como estrategia de ejecución, que intentaban *recordar las formas de los cuerpos geométricos.*
I,P,S	Consideran que la estrategia aplicada se basaba en *fijarse o contar los cuadrados del interior de los cuerpos geométricos* presentados. Posiblemente la habilidad de la identificación y discriminación visual sean más relevantes en este tipo de estrategia.
B,L,Q	Argumentan como estrategia, *imaginarse mentalmente el cuerpo geométrico y rotarlo* con la intención de discriminar si coincide con el presentado inicialmente. En este caso, posiblemente la rotación mental, influya especialmente en la ejecución de la tarea.

La mitad de participantes aproximadamente concibieron una estrategia basada en la memoria visual (forma). En otros casos inferimos estrategias de reconocimiento de la posición y discriminación visual de los cuerpos geométricos presentados, sin llegar a realizar una rotación mental. A excepción de tres casos (B,L,Q) donde los participantes explicitan haber realizado un giro o rotación mental previa a la discriminación. Aportaciones como "*le he dado la vuelta a la pieza en la mente para ver si coincide*" por parte del participante L, así lo corroboran. Otros participantes han empleado estrategias más creativas asociando letras a los cuerpos geométricos o reconociendo solo una parte del cuerpo geométrico como elemento clave para la discriminación.
Los resultados obtenidos nos indican, que los participantes en la ejecución de la tarea geométrica, emplean habilidades de visualización entre las que destacamos la memoria visual y en segundo lugar habilidades como la identificación visual, la discriminación visual, el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas y la rotación mental o una combinación de éstas.

6.2.6 RESULTADOS TESTS INTERACTIVOS

En el análisis de los resultados de los tests interactivos hemos empleado una metodología basada en planteamientos cuantitativos.

Empezamos por contrastar ***la variable Aciertos*** (AC) de los dos tests interactivos realizados, considerando que las dos tareas geométricas propuestas (correspondientes al 1r y 2n test interactivo) posiblemente comparten algunas habilidades de visualización como la identificación y la discriminación visual, el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas, la rotación mental y la memoria visual.
Se realizó un análisis por participantes a partir de la prueba t Student para muestras dependientes, ya que en nuestro caso queremos analizar la variable aciertos (AC) de los participantes de una misma muestra en una tarea de visualización en el plano y una tarea de visualización espacial (estímulos tridimensionales) representada en el plano. El análisis de aciertos (AC) se ha estudiado según el porcentaje de respuestas correctas. Este tipo de métodos tienen como hipótesis fundamental la normalidad de los datos. En este caso sin embargo, cuando las muestras son dependientes, no es necesario que las observaciones en ambas muestras provengan de poblaciones normales, sino que únicamente se requiere comprobar la normalidad de su diferencia; tal y como nos

confirma el estadístico Asimetría = -0,322 del programa estadístico informático SPSS (versión 15.0)

Concretamente la prueba de contraste t Student (Tabla 6.2.6) con dos muestras apareadas, nos permite con un nivel crítico superior a 0,05 (p=0,308) no poder rechazar la hipótesis de igualdad de medias y concluir que no existe evidencia estadística de que la variable Aciertos en el primer test de visualización en el plano difiera de la del segundo test de visualización en el espacio.

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
					95% Intervalo de confianza para la diferencia				
		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	Inferior	Superior			
Par 1	Aciertos1rTest - Aciertos2nTest	,65000	2,77726	,62101	-,64980	1,94980	1,047	19	,308

Tabla 6.2.6: Correlación Aciertos 1r Test – Aciertos 2n Test

Los resultados nos indican que el porcentaje de aciertos no es diferencialmente significativo entre el primer y segundo test interactivo de visualización. Este resultado lo interpretamos de forma significativa en cuanto a que posiblemente, se comparten algunas de las habilidades de visualización determinantes en la ejecución eficaz de las dos tareas geométricas planteadas en los tests interactivos respectivamente.

En segundo lugar vamos a contrastar ***la variable promedios del tiempo de reacción*** (TR) de los participantes obtenidos en los dos tests interactivos a partir de la prueba de Wilcoxon. En este caso emplearemos la prueba no paramétrica de Wilcoxon, por no cumplirse los supuestos de normalidad requeridos para aplicar la prueba t Student. El análisis de la variable TR, se ha estudiado según el porcentaje que refleja el promedio de los tiempos de reacción de cada participante. En nuestro caso, tenemos dos muestras de datos dependientes ya que provienen de los mismos participantes que han realizado los dos tests interactivos respectivamente.

Concretamente la prueba de contraste Wilcoxon (Tabla 6.2.6.0.1) con dos muestras dependientes, nos permite con un nivel crítico inferior a 0,05 (p=0,02) poder rechazar la hipótesis de igualdad de medias y concluir la existencia de evidencia estadística que nos indica que la variable del Tiempo de Reacción en el primer test de visualización en el plano difiere significativamente de la del segundo test de visualización en el espacio.

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Tiempos2nTest - Tiempos1rTest	Rangos negativos	17[a]	11,00	187,00
	Rangos positivos	3[b]	7,67	23,00
	Empates	0[c]		
	Total	20		

Estadísticos de contraste[b]

	Tiempos2n Test - Tiempos1r Test
Z	-3,061[a]
Sig. asintót. (bilateral)	,002

Tabla 6.2.6.0.1: Test Wilcoxon. Correlación Tiempo Reacción 1r Test- 2n Test.

Concluimos por tanto que el promedio del tiempo de reacción es diferencialmente significativo según si se realiza la tarea de visualización del primer test o del segundo. Concretamente podremos comprobar en el apartado *6.2.6.2 SEGUNDO TEST INTERACTIVO: VISUALIZACIÓN EN EL ESPACIO* que en general los participantes requieren menos tiempo de reacción para ejecutar la tarea geométrica de visualización propuesta en el segundo test interactivo.

6.2.6.1 PRIMER TEST INTERACTIVO: VISUALIZACIÓN EN EL PLANO.

Centrándonos en el primer test de visualización en el plano, podemos observar en la Tabla 6.2.6.1 los resultados del análisis de las variables Aciertos (AC) y Tiempo de Reacción (TR).

1t Test Interactiu Identificació de figures planes		
	Aciertos	Tiempo reacción
Media	65,71%	2,9695s
Coeficient Variació	24,33%	50,15%

Tabla 6.2.6.1: Aciertos y Tiempo Reacción. 1r test interactivo visualización

Los resultados muestran que el coeficiente de variación en la variable del Tiempo de Reacción (TR) es significativamente alto (50,15%) debido posiblemente a que algunos estímulos geométricos, generaron una mayor dificultad en la ejecución de la tarea que otros. Tenemos presente que en este test se empleaban dos tipos de estímulos geométricos estructuralmente caracterizados: pentominós y hexominós. Respecto la variable Aciertos observamos que tanto la media del porcentaje de aciertos en la Tabla 6.2.6.1 como la frecuencia de aciertos de cada uno de los participantes expresada en el diagrama de la Figura 6.2.6.1.1, denotan que la ejecución de la tarea fue significativa por encima de la media.

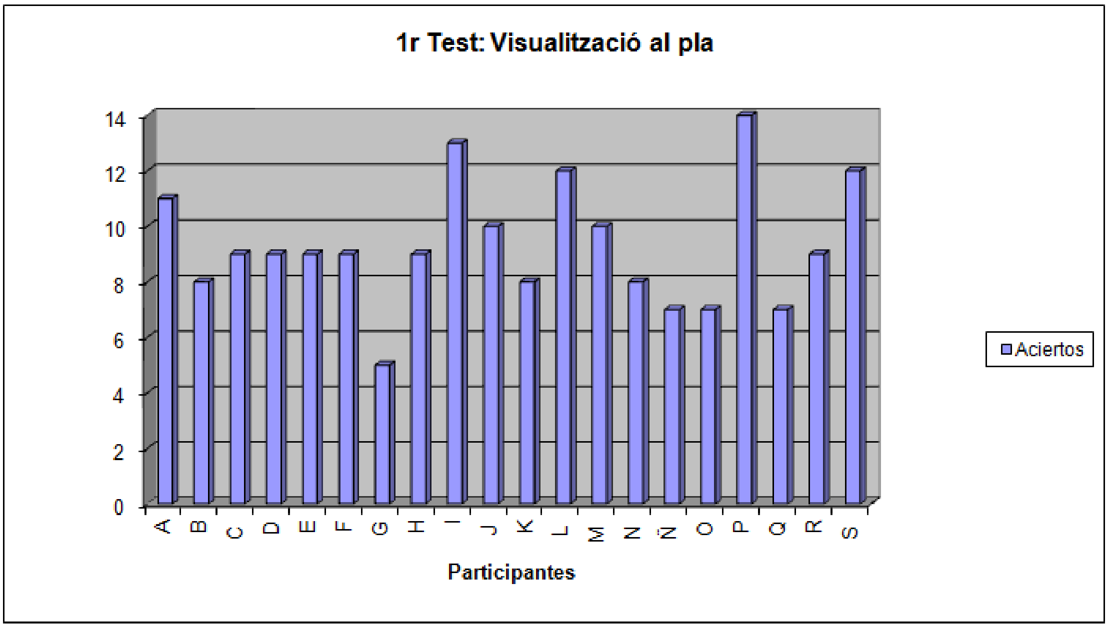


Fig 6.2.6.1.1: Frecuencia Aciertos 1r Test interactivo visualización

A partir de estos resultados inferimos que las estrategias realizadas por los participantes en la ejecución de la tarea fueron significativamente efectivas, ya que la mayoría de participantes obtuvieron más de un 50% de aciertos. Concretamente en el 80% de los participantes identificamos unos resultados igual o superiores al 57% de aciertos (8 ensayos). En el siguiente diagrama de la figura 6.2.6.1.2 se encuentra representada la relación entre los resultados de la variable Aciertos, el promedio de la variable del Tiempo de reacción y su correspondiente desviación típica.

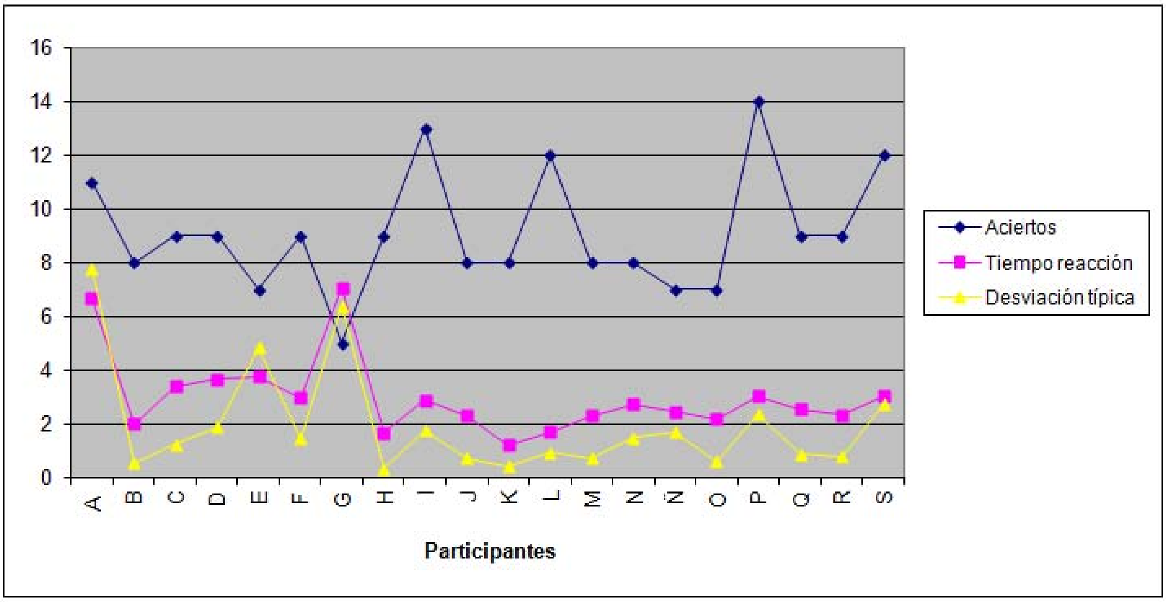


Fig 6.2.6.1.2: Aciertos & Tiempo Reacción. 1r Test interactivo visualización

Observamos que en general los promedios del Tiempo de Reacción (TR) de más de la mitad de los participantes (12) se encuentran en el intervalo [2,3]. El aumento de la desviación típica (respecto la variable promedio del TR) en algunos participantes (A,E,G) nos indica que posiblemente algunos estímulos geométricos les generaron cierta dificultad en la realización de la tarea, necesitando un mayor tiempo para la ejecución.

Por último, se ha analizado la correlación entre la variable del promedio del TR y la variable AC a partir del coeficiente de Spearman (Versión no paramétrica del coeficiente de Pearson) porque los datos de la variable promedio del Tiempo de Reacción (TR) no están normalmente distribuidos (asimetría=1,88). Concluimos que el Tiempo de Reacción y los Aciertos de los participantes en la tarea de visualización en el plano de este primer test interactivo, no correlacionan significativamente ($r = 0{,}25$; $p = 0{,}918 > 0{,}05$)

En el Anexo *C.4.1 RESULTADOS 1R TEST DE VISUALIZACIÓN EN EL PLANO* exponemos la tabla con los resultados de la frecuencia de la variable Aciertos (AC) y el promedio de la variable del Tiempo de Reacción (TR) de los participantes de la muestra.

6.2.6.2 SEGUNDO TEST INTERACTIVO: VISUALIZACIÓN EN EL ESPACIO.

El segundo test de visualización en el espacio se caracteriza básicamente porque los estímulos geométricos empleados son cuerpos tridimensionales representados en el plano. En la Tabla 6.2.6.2 se explicitan la media y el coeficiente de variación respecto los porcentajes obtenidos en las variables Aciertos (AC) y Tiempo de Reacción (TR).

2n Test Interactiu Identificació de cossos geomètrics		
	Aciertos	Tiempo reacción
Media	61,07%	1,9963s
Coeficient Variació	25,02%	36,06%

Tabla 6.2.6.2: Aciertos y Tiempo Reacción. 2n test interactivo visualización

Los resultados nos muestran que en este segundo test interactivo, el promedio del Tiempo de Reacción es significativamente menor que el empleado por los participantes en la tarea de discriminación visual en el plano del primer test interactivo. Los resultados obtenidos en el Test de Wilcoxon (Tabla 6.2.6.0.1) y en la Tabla 6.2.6.2 nos indican que existe evidencia estadística significativa que confirma una reducción del promedio del Tiempo de Reacción de los participantes en la ejecución de la tarea de visualización en el espacio. El coeficiente de variación (36,06%) nos muestra que los participantes ejecutaban la tarea de visualización con menos dificultades que la tarea del test anterior por requerir menos tiempo en la discriminación visual. Posiblemente el hecho de que todos los estímulos presentados compartiesen una misma estructura ha podido facilitar que los participantes hayan tenido menos dificultades.

La frecuencia de la variable Aciertos de cada uno de los participantes expresada en el diagrama de la siguiente Figura 6.2.6.2, denota que la ejecución de la tarea fue significativamente eficiente. No obstante no podemos evidenciar diferencias significativas tal y como muestra el estadístico t de Student expresado en la Tabla 6.2.6, respecto el promedio de Aciertos de la tarea visual realizada en el test interactivo anterior. Es decir no existen diferencias significativas en el porcentaje de aciertos entre las tareas de visualización realizadas en los dos tests.

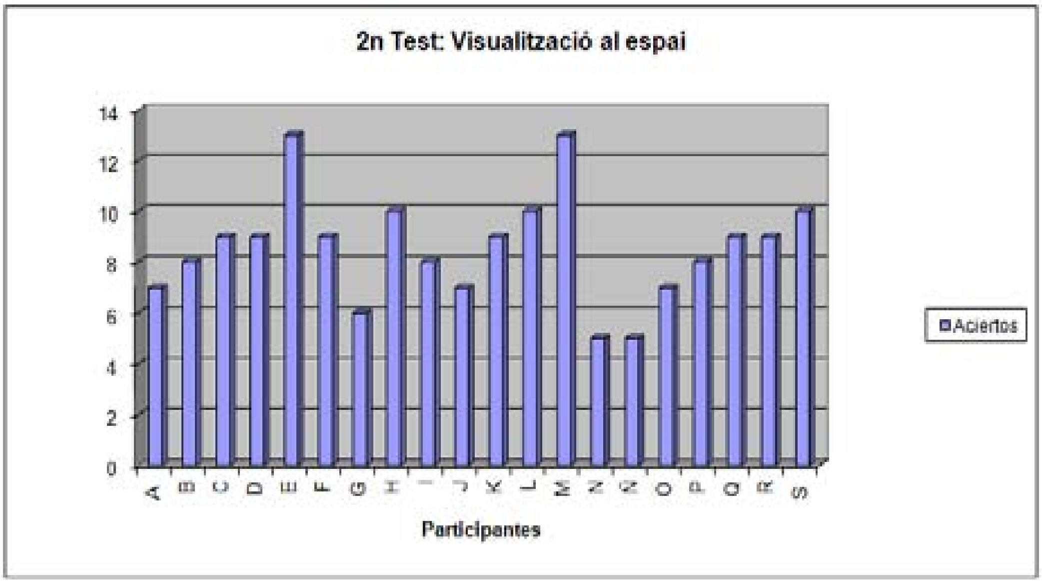


Fig 6.2.6.2: Frecuencia Aciertos. 2n Test interactivo visualización

La variable Aciertos explicita que una mayoría de participantes obtuvo una frecuencia mayor o igual a 7, del total de 14 ensayos existentes en el test. Concretamente el 70% de los participantes obtuvo unos resultados igual o superior al 57% de aciertos (8 ensayos).

En el siguiente diagrama de la Figura 6.2.6.2.1 se representa la relación entre los resultados de la variable Aciertos, la variable del promedio del Tiempo de Reacción y su correspondiente desviación típica.

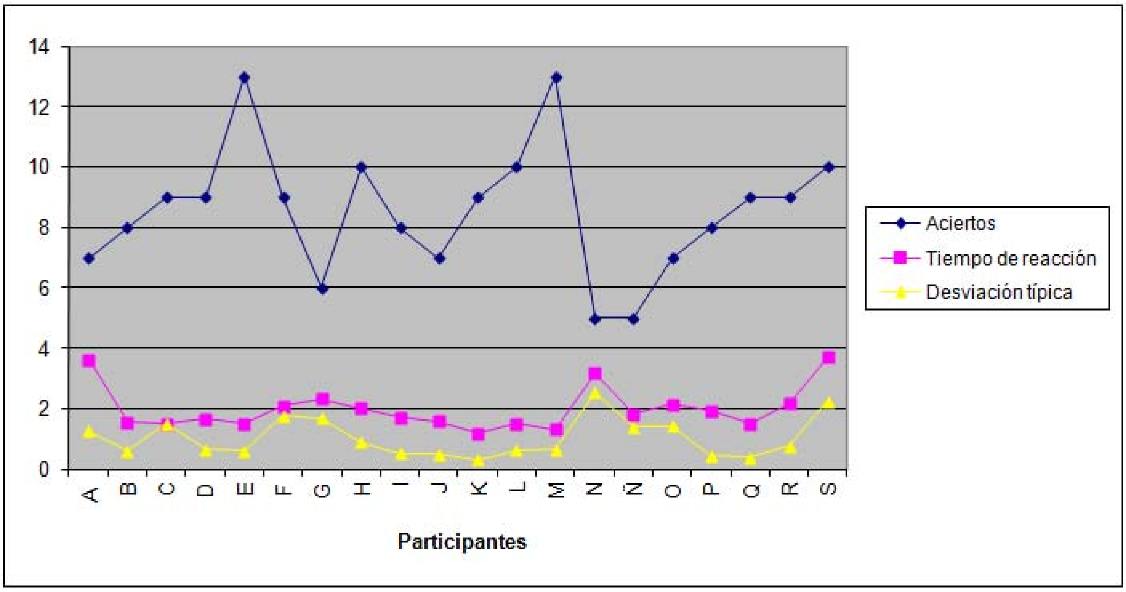


Fig 6.2.6.2.1: Aciertos & Tiempo Reacción. 2n test interactivo visualización

Observamos que en general los promedios del Tiempo de Reacción de los participantes son algo más homogéneos, a excepción de tres participantes. Las desviaciones típicas de los promedios del Tiempo de Reacción de los participantes, están más agrupadas (en un intérvalo aproximado de 2 segundos) que en el primer test de visualización en el plano. Sugerimos que las estrategias empleadas por los participantes en la ejecución de la tarea durante el test interactivo, fueron eficientes ya que no se identifican dificultades (desviación típica) que denoten un incremento significativo en el Tiempo de Reacción (a excepción de tres casos concretos).

Nuevamente hemos analizado *la correlación entre la variable del promedio del Tiempo de Reacción (TR) y la variable Aciertos (AC)*, en este segundo test interactivo, a partir del coeficiente de Spearman (Versión no paramétrica del coeficiente de Pearson) ya que los datos de la variable promedio del TR no cumplen los criterios de normalidad (asimetría=1,47). Los resultados muestran que el tiempo de reacción y los aciertos de los participantes en la ejecución de esta tarea, correlacionan inversamente de forma significativa ($r = -0,46$; $p = 0,041 < 0,05$). Esto nos sugiere que a medida que un participante realiza un mayor número de aciertos disminuye el promedio de su tiempo de reacción, es decir aquellos participantes que aplicaban estrategias de resolución de la tarea eficientes y eficaces mejoraban su tiempo de reacción en los ensayos.
En el Anexo *C.4.3 RESULTADOS 2N TEST DE VISUALIZACIÓN EN EL ESPACIO*, hemos expuesto la tabla con los resultados de la frecuencia de la variable Aciertos (AC) y el promedio de la variable del Tiempo de Reacción (TR) de los participantes de la muestra.

6.2.9 INTERPRETACIÓN Y CONCLUSIONES

Destacamos que no existen diferencias significativas entre los aciertos obtenidos en el primer y segundo test interactivo de visualización. La ejecución de las dos tareas geométricas basadas en la discriminación visual fueron eficientes, tanto en el primer test interactivo en el que se discriminaban figuras geométricas en el plano según la forma y posición como en el segundo test interactivo en el que se discriminaba la orientación angular de los cuerpos geométricos representados en el plano.
La mayoría de participantes obtuvo una frecuencia de más de la mitad de aciertos. Concretamente el 80% y el 70% de los participantes respectivamente en cada una de las dos tareas geométricas, obtuvieron unos resultados en la variable aciertos superiores o iguales al 57%. A partir de los resultados obtenidos y a nivel cualitativo en el Cuestionario de Visualización (apartado *6.2.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO*

VISUALIZACIÓN), inferimos que posiblemente se compartan algunas habilidades de visualización en la ejecución de las tareas geométricas de cada uno de los tests interactivos de visualización, como pueden ser la identificación y discriminación visual, el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas y la memoria visual.

En cambio los resultados nos indican que el Tiempo de Reacción difiere significativamente en el primer test respecto del segundo test. Los participantes necesitaron menos tiempo para ejecutar la tarea geométrica en el segundo test interactivo de visualización. El coeficiente de variación del Tiempo de Reacción del primer test (50,15%) nos indica que algunos estímulos geométricos generaron cierta dificultad a los participantes necesitando más tiempo que en el segundo test para discriminar visualmente de manera adecuada. Posiblemente el hecho de tener estímulos geométricos formados por dos figuras geométricas que son estructuralmente diferentes (pentominós y hexominós) en el primer test interactivo puede haber generado mayor dificultad y haber influenciado en que los participantes necesitasen más tiempo para ejecutar la tarea correctamente.
En cambio a partir del coeficiente de variación (36,06%) del Tiempo de Reacción obtenido en el segundo test interactivo, inferimos que posiblemente haber presentado estímulos geométricos estructuralmente equivalentes formados por 10 cubos, puede haber facilitado la ejecución de la tarea geométrica basada en discriminar su orientación angular.

Cabe también destacar que en el segundo test interactivo de visualización en el espacio las variables Aciertos y el promedio del Tiempo de Reacción correlacionan inversamente de manera moderada. Es decir inferimos que a medida que los participantes obtienen un mayor número de aciertos disminuye el tiempo de reacción que necesitan para ejecutar la tarea adecuadamente.
A modo de conclusión destacamos que la mayoría de participantes ejecutó eficazmente las dos tareas geométricas propuestas en los dos tests interactivos de visualización, sin resultados diferencialmente significativos (Aciertos), aunque tuvieron más dificultades en discriminar (promedio Tiempo Reacción) correctamente las figuras geométricas planas del primer test, que la orientación angular de los cuerpos geométricos del segundo test de visualización.

APARTADO 3: TESTS DE ACTITUDES

6.3 INTRODUCCIÓN: TEST DE ACTITUDES

El problema de las actitudes en la Educación Matemática escolar de la enseñanza Secundaria ha sido estudiado por diversos autores. Poder averiguar las actitudes de los estudiantes hacía las matemáticas a partir del contexto escolar en secundaria, el desarrollo de las clases, la interacción social con estudiantes y profesor, entre otros aspectos importantes puede aportarnos información cualitativa para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Investigaciones recientes enfatizan en el estudio y evaluación de las actitudes de los estudiantes en la Educación Secundaria Obligatoria (Muñoz y Mato, 2008) y su relación con el rendimiento académico (Mato y De la Torre, 2010)

En esta línea planteamos investigaciones de diferentes autores como Fenmema y Sherman (1976), Sandman (1980) y Watson (1983) que han tenido como núcleo de interés el conocimiento de las actitudes de las personas para comprender el cómo y porque actúan de una determinada forma ante las matemáticas.

Para Young y otros (1967) las actitudes son esencialmente una respuesta anticipatoria, que se expresa mediante el comienzo de una acción que no se completa necesariamente.

Desde una perspectiva de la enseñanza, Gal y Garfiel (1997) consideran que las actitudes son una serie de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia de estudio.

La medición de actitudes, intereses y valores, forma parte del dominio afectivo de las personas (Rodríguez, Cabrera, Espín y Marín, 1997). Es importante tener presente aquellas situaciones que promueven un contexto constructivo de enseñanza y aprendizaje en el que se desarrolla el afecto, ya que éste puede promover que las actitudes y valores hacia las matemáticas escasamente positivos, vayan encontrando un campo propicio para su generación y desarrollo en las matemáticas escolares. En esta línea, distintas investigaciones (Hernández y Socas ,1999; Mann, 2005) coinciden en apuntar que de manera natural las actitudes positivas de los alumnos hacia las matemáticas disminuyen a medida que avanzan los cursos escolares. Autores como Tammadge (1979) y Robinson (2006) desde otra perspectiva corroboran que por naturaleza los niños son generalmente más creativos que los adultos, por tener menos inhibiciones y restricciones adquiridas y por tanto menos miedo a equivocarse y ser originales.

En la línea de fomentar una actitud positiva ante las matemáticas, Liljedahl (2008b) considera especialmente relevante la componente afectiva en la experiencia matemática de la resolución de problemas. Concibe la ocurrencia del insight o la vivencia del Aha!, a partir de la componente afectiva de la experiencia matemática. En su investigación con distintos participantes desde alumnos, profesores e importantes investigadores en matemáticas, expone que generalmente la vivencia del aha!, viene acompañada de una respuesta emocional y actitudinal positiva, tal y como explicita en una cita de Peter J. Huber "*When things had been settled and written up, I felt exhausted and empty, and itched until I had a new promising idea.*" (Liljedahl, 2008b, p.140). Debido a que probablemente una actitud negativa, ante la resolución de un problema o situación matemática, puede inhibir las posibles estrategias o resoluciones creativas que podrían propiciar la ocurrencia del insight.

Por este motivo en nuestra investigación, nos hemos interesado por algunas escalas de actitud matemática. Las escalas de actitud han sido uno de los instrumentos más populares en la investigación sobre las actitudes hacia las matemáticas, por ser una de las herramientas más utilizadas en las últimas tres décadas. Particularmente el instrumento de investigación que plantean Fennema y Sherman (1976) evalúa 9 escalas de actitud: (1) Actitud hacia el éxito en matemáticas, (2) La confianza en el aprendizaje matemático, (3) Ansiedad en matemáticas, (4) Efectancia y Motivación en Matemáticas, (5) Matemáticas respecto el profesor, (6) Matemáticas respecto el papel de la madre, (7) Matemáticas respecto el papel del padre, (8) Utilidad en matemáticas y (9) El dominio en matemáticas. Entender el modelo de Fennema y Sherman, conlleva comprender que la interacción de afectos entre ellos la confianza, la ansiedad, la actitud hacia el éxito en las matemáticas, etc y el comportamiento durante las tareas de aprendizaje constituyen aspectos especialmente condicionantes en el rendimiento matemático.

6.3.1 JUSTIFICACIÓN

Nos interesa conocer la perspectiva de los participantes respecto a sus actitudes y como se sienten cuando realizan tareas o problemas matemáticos. Pretendemos aportar información cualitativa y estudiar si las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas pueden contribuir a la predicción de su rendimiento cuando se enfrentan ante la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo.

6.3.2 MUESTRA

Los estudiantes que participaron en el test de actitudes, son los mismos que se seleccionaron en el apartado *6.2.2 MUESTRA* para la realización de los tests interactivos de visualización y que a su vez se escogieron inicialmente en la prueba de Competencias Básicas realizada en la primera Fase Diagnóstica de Selección según los criterios explicitados en el apartado *5.4.2 SELECCIÓN DE PARTICIPANTES.*

Particularmente en este *APARTADO 3: TESTS DE ACTITUDES*, se analizan las actitudes hacía las matemáticas de aquellos alumnos seleccionados de 4t de ESO del instituto Parets del Valles, según los criterios expuestos en la prueba de Competencias Básicas realizada en la primera Fase Diagnóstica de Selección.

6.3.3 DISEÑO

El diseño del test de actitudes en nuestra investigación se fundamenta en el test de actitudes "*How I Feel About Math*" (anexo *C.6 TEST DE ACTITUDES)* empleado por Eric Mann (2005) en su investigación *"Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students"* y que está basado en las escalas de actitudes matemáticas de Fennema-Sherman (1976).

La identificación del potencial creativo en matemáticas es un reto. Generalmente las investigaciones que pretenden identificar la creatividad matemática (Torrance, 1976; Cattell y Cattell, 1994) se han centrado en el desarrollo de instrumentos de investigación-medición. La amplia interpretación de posibles respuestas y el tiempo requerido de aplicación de estos instrumentos, ha propiciado en parte que la utilización de estos instrumentos en contextos escolares, particularmente en institutos y colegios pueda haber sido muy escasa. Mann (2005) plantea una investigación en la que de manera sencilla propone obtener indicadores del potencial creativo en matemáticas. En su análisis de resultados exploró la relación entre la creatividad matemática y tener éxito en las resoluciones matemáticas, la actitud hacía las matemáticas, la auto-percepción de la capacidad creativa por parte de los estudiantes, el género y por último la percepción del talento matemático y la habilidad creativa que tienen los profesores sobre sus alumnos. Los resultados fueron obtenidos a partir de una muestra de 89 estudiantes de séptimo grado de la Middle Schol en Connecticut. En nuestro sistema educativo equivaldría a estudiantes entre 2n y 3r de la Educación Secundaria.

El test de actitudes que emplearemos está adaptado de la versión original de Mann (2005) y está compuesto por 4 escalas:

- *Actitud hacia el éxito en matemáticas (10 ítems)*: esta escala mide el grado en el que los estudiantes anticipan las consecuencias positivas o negativas, como resultado del éxito en matemáticas.
- *La confianza en el aprendizaje matemático (11 ítems)*: esta escala mide la confianza de un estudiante en su aprendizaje matemático así como en la realización de tareas, problemas o nuevos retos matemáticos.
- *La ansiedad matemática (12 ítems)*: esta escala pretende medir los sentimientos y emociones de ansiedad, temor y nerviosismo asociado a las matemáticas.
- *La motivación en matemáticas (12 ítems)*: esta escala está diseñada para medir la motivación de un estudiante hacía las matemáticas, así como la realización de tareas o problemas matemáticos y la búsqueda de nuevos desafíos.

En la elaboración de los ítems de cada escala, Mann (2005) optó por un formato en el que cada participante tenía que manifestar su grado de acuerdo o desacuerdo con una serie de ítems a partir de una escala tipo Likert de 5 grados (Totalmente de acuerdo, Bastante de acuerdo, Ni de acuerdo ni en desacuerdo, Bastante en desacuerdo, Totalmente en desacuerdo). Se han incluido ítems redactados en forma positiva mostrando una actitud favorable hacía las matemáticas y otros en forma negativa, para compensar la posible tendencia a aceptar o rechazar sistemáticamente ítems redactados en un único sentido. Distinguimos dos tipos de ítems:

- **Ítems positivos**

Aquellos que en su redacción muestran una actitud favorable hacía las matemáticas: 1,5,8,9,10,11,14,15,16,21,23,24,28,29,30,32,35,36,37,41,43 y 45.

- **Ítems negativos**

Aquellos que se caracterizan porque en su redacción muestran una actitud desfavorable hacía las matemáticas: 2,3,4,6,7,12,13,17,18,19,20,22,25,26,27,31,33,34,38,39,40,42 y 44.

6.3.4 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

En el análisis de resultados a cada respuesta le asignamos una puntuación. La suma de las puntuaciones de las respuestas obtenidas de cada participante en todos los ítems respectivos, generan su puntuación global que entendemos como representativa de su posición (De acuerdo o Desacuerdo) con respecto al objeto o escala actitudinal que estemos valorando. A cada ítem le asignaremos un peso, según sea clasificado como positivo o negativo, según corresponda al modo de respuesta planteado. Los pesos asignados a cada uno de los ítems son:

Ítems positivos				
Totalmente de acuerdo	Bastande de acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Bastante en desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
5	4	3	2	1

Ítems negativos				
Totalmente de acuerdo	Bastande de acuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	Bastante en desacuerdo	Totalmente en desacuerdo
1	2	3	4	5

Construiremos una escala de medición con el objetivo de clasificar la situación actitudinal de cada participante en tres componentes actitudinales: No Favorable, Regular y Favorable. Realizaremos esta clasificación a partir de la puntuación (ValorZescala, Z=1,2,3,4) que pueda haber obtenido cada participante en cada una de las cuatro escalas del test de actitudes.

En el estudio de la consistencia y fiabilidad del test se utilizó el Coeficiente alfa de Cronbach. Se analizó el índice de homogeneidad de cada ítem y la correlación de cada ítem con el resto, para estudiar el comportamiento de la fiabilidad respecto cada una de las escalas de actitudes propuestas en el test. Todos los análisis fueron realizados con el paquete estadístico SPSS (versión 15.0).

Posteriormente analizamos la posible relación existente entre los resultados obtenidos en las escalas de actitudes que forman el test. Y finalmente realizamos un análisis y estudio mediante gráficos y diagramas de cajas sobre la frecuencia de resultados obtenidos en cada una de las escalas de actitudes.

6.3.5 FIABILIDAD Y VÁLIDEZ

6.3.5.1 FIABILIDAD: ESCALAS DEL TEST.

La fiabilidad y validez de este test de actitudes está avalado por la investigación de Eric Mann (2005) en la que establece significativamente la fiabilidad de las cuatro escalas propuestas, respecto las planteadas por Fennema-Sherman (1976).

El análisis de los ítems nos permitió estudiar la validez interna de las cuatro escalas por separado con el objetivo de verificar si eran consistentes o no. Los resultados de un primer análisis nos indicaron que el comportamiento de algún ítem no era positivo debido a que su correlación con el resto de ítems de la escala era muy baja y procedimos a eliminarlo. No aseguraba la consistencia interna y validez de cada una de las escalas por separado. Se eliminó el ítem 3 "*Si tengo la nota más alta en matemáticas prefiero que nadie lo sepa*", correspondiente a la primera escala, quedando un total de 44 ítems significativos en el test de actitudes final.

Una vez eliminado este ítem que distorsionaba la fiabilidad, procedimos al cálculo del coeficiente alfa de Cronbach en cada una de las escalas así como la correlación de cada ítem respecto todos los demás. Los resultados recogidos en las tablas siguientes (SPSS, versión 15.0), muestran un coeficiente de fiabilidad alfa de Cronbach superior al 0,8 en cada una de las escalas del test. Corroboramos por tanto que las escalas del test de actitudes, son fiables y realizan mediciones estables y consistentes:

En la Tabla 6.3.5.1 exponemos el coeficiente Alfa de Cronbach, respecto la primera escala *actitud hacía el éxito en las matemáticas:*

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,806	9

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se eleimina el elemento
item16	33,45	24,576	,518	,786
item17	33,90	23,358	,644	,766
item18	33,30	27,905	,413	,798
item29	33,45	24,050	,724	,758
item31	33,25	29,039	,155	,832
item38	33,55	23,629	,716	,757
item43	33,40	26,568	,556	,782
item44	33,10	26,832	,528	,786
item45	33,40	27,411	,344	,807

Tabla 6.3.5.1: Alfa de Cronbach. Primera escala actitud

En la Tabla 6.3.5.2 exponemos el coeficiente Alfa de Cronbach respecto, la segunda escala *la confianza en el aprendizaje matemático*:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,962	11

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se eleimina el elemento
Item1	35,75	126,408	,864	,958
item6	35,15	117,924	,863	,957
item11	35,10	123,253	,858	,958
item12	35,05	128,261	,590	,966
item25	35,55	121,524	,817	,959
item27	35,60	119,621	,918	,956
item30	36,25	118,829	,884	,957
item33	35,55	115,734	,920	,955
item34	35,60	128,884	,749	,961
item35	36,35	118,766	,813	,959
item41	36,05	120,366	,805	,959

Tabla 6.3.5.2: Alfa de Cronbach. Segunda escala actitud

En la Tabla 6.3.5.3 exponemos el coeficiente Alfa de Cronbach, respecto la tercera escala *la ansiedad matemática*:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,927	12

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se eleimina el elemento
item4	36,80	116,379	,679	,921
item7	35,95	112,892	,803	,916
item10	36,80	108,063	,822	,915
item14	37,55	120,892	,516	,927
item15	36,75	111,355	,699	,921
item19	36,20	116,168	,775	,918
item20	36,60	111,937	,723	,919
item23	36,75	121,145	,449	,930
item26	36,30	108,537	,864	,913
item32	37,10	122,095	,594	,924
item36	36,00	121,895	,674	,922
item42	36,10	112,200	,724	,919

Tabla 6.3.5.3: Alfa de Cronbach. Tercera escala actitud

Y por último en la Tabla 6.3.5.4 exponemos el coeficiente Alfa de Cronbach, respecto la cuarta escala *la motivación en matemáticas*:

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,927	12

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se eleimina el elemento
item2	37,60	104,884	,849	,915
item5	37,40	108,989	,575	,925
item8	37,85	100,976	,896	,912
item9	37,40	110,884	,631	,923
item13	37,90	101,147	,767	,918
item21	37,25	111,776	,638	,923
item22	37,40	104,147	,774	,917
item24	37,35	112,871	,510	,927
item28	38,00	108,105	,636	,923
item37	37,90	105,674	,685	,921
item39	37,05	100,787	,844	,914
item40	37,35	108,134	,514	,929

Tabla 6.3.5.4: Alfa de Cronbach. Cuarta escala actitud

En la siguiente Tabla 6.3.5.5 comparamos el coeficiente de fiabilidad y consistencia interna de cada escala de nuestro test (Alfa de Cronbach), con el obtenido por otros autores en sus investigaciones en las que han empleado también estas cuatro escalas actitudinales.

Scale	Fennema-Sherman Reported 1976 (split-half)	Eric Mann (2005) (Cronbach's alpha)	Present Study Data Sánchez (2012) (Cronbach's alpha)	Number of items
Attitude Towards Success in Mathematics Scale	.87	.78	**,806**	**9**
Confidence in Learning Mathematics Scale	.93	.94	**,962**	**11**
Mathematics Anxiety Scale	.89	.91	**,927**	**12**
Effectance Motivation Scale	.87	.86	**,927**	**12**

Tabla 6.3.5.5: Comparativa escalas actitud

Comprobamos que las mediciones de fiabilidad según las cuatro escalas e ítems seleccionados en el test de actitudes final, son significativas. El test de actitudes final que analizaremos (anexo *C.6 TEST DE ACTITUDES E INTERESES)* es una adaptación del aplicado por Mann (2005) en su investigación, que a su vez fue una adaptación de la versión original de Femmema-Sherman (1976). Finalmente las cuatro escalas que formaran el test de actitudes están compuestas por los siguientes ítems:

1ª Escala: actitud hacia el éxito en matemáticas
ítems 16,17,18,29,31,38,43,44,45.

2ª Escala: la confianza en el aprendizaje matemático
ítems 1,6,11,12,25,27,30,33,34,35,41.

3ª Escala: la ansiedad matemática
ítems 4,7,10,14,15,19,20,23,26,32,36,42.

4ª Escala: la motivación en matemáticas
ítems 2,5,8,9,13,21,22,24,28,37,39,40.

6.3.5.2 VALIDEZ INTERNA

La validez interna del test está justificada por la fiabilidad de forma independiente de cada una de las cuatro escalas de actitudes. A partir de un coeficiente Alfa de Cronbach (0,959) garantizamos la validez del conjunto de 44 ítems que forman el test de actitudes final.

La distribución de frecuencias (*Anexo C.6.1 VARIABLES TEST ACTITUDES*) de los ítems nos permite ver que se cubren todas las opciones de respuestas y las puntuaciones medias de los ítems oscilan entre el valor mínimo 2,35 y el máximo 4,5.

6.3.6 RESULTADOS TEST ACTITUDES

Realizaremos un estudio de los resultados obtenidos en cada una de las escalas de actitudes que forman el test.

6.3.6.1 ANALISIS DEL TEST DE ACTITUDES

En primer lugar emplearemos una metodología en el análisis del test de actitudes próxima a planteamientos cuantitativos y en segundo lugar utilizaremos una metodología descriptiva e interpretativa, porque nos interesa explorar y describir el comportamiento actitudinal de los participantes de la muestra. Emplearemos alguna herramienta estadística para complementar el análisis. En el apartado *6.3.4 ESTRATEGIA DE ANÁLISIS*, establecemos la puntuación de los pesos de los ítems según si están clasificados como "*positivos*" o "*negativos*".

Realizamos un análisis por participantes con la intención de analizar los resultados obtenidos en las cuatro escalas que constituyen el test de actitudes. Definimos cuatro variables Valor1escala, Valor2escala, Valor3escala y Valor4escala (*Anexo C.6.1 VARIABLES TEST ACTITUDES*) correspondientes a la puntuación obtenida por cada participante en cada una de las escalas del test. Concretamente cada variable representa la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítems, que forman cada escala respectiva.

Para poder analizar los datos obtenidos y teniendo presente que hemos utilizado una muestra reducida, realizaremos la medición de la escala de Likert del test de actitudes a partir de construir una escala de medición[7]. El objetivo de esta escala de medición reside en ubicar la situación actitudinal en la que se encuentra cada participante, según la puntuación que ha obtenido en cada escala (ValorZescala, Z=1,2,3,4).
Consideraremos dos puntos de corte A y B en cada escala según el número de ítems correspondiente, de forma que generarán tres componentes actitudinales:

- Componente Actitudinal "**No Favorable**"
- Componente Actitudinal "**Regular**"
- Componente Actitudinal "**Favorable**"

En estas componentes se clasificaran los participantes según la puntuación obtenida en cada escala (ValorZescala, Z=1,2,3,4). Las componentes actitudinales quedaran determinadas mediante los puntos de corte A y B, a partir de la variable N que corresponderá al número de ítems de cada escala.

$$\begin{cases} A = 2N + 0{,}25N \\ B = 4N - 0{,}25N \end{cases}$$

Consideraremos el valor redondeado en cada uno de los puntos de corte A y B.
A continuación explicitamos la escala de medición en cada una de las escalas:

[7]Escala de medición. Los puntos de corte A y B, determinan tres componentes actitudinales "**No Favorable**", "**Regular**" y "**Favorable**", en las que se ubicarán actitudinalmente los participantes según la puntuación obtenida (ValorZescala, Z=1,2,3,4) en cada una de las escalas del test, respectivamente.

1) Primera escala: actitud hacía el éxito en las matemáticas

Considerando en esta escala N=9 y el valor de la puntuación obtenida por los participantes (Valor1escala), determinamos:

- Una puntuación cercana a los 9 puntos: Actitud Muy Desfavorable
- Una puntuación cercana a los 27 puntos: Actitud Regular
- Una puntuación cercana a los 45 puntos: Actitud Muy Favorable

Por tanto, las tres componentes actitudinales se concretan**:

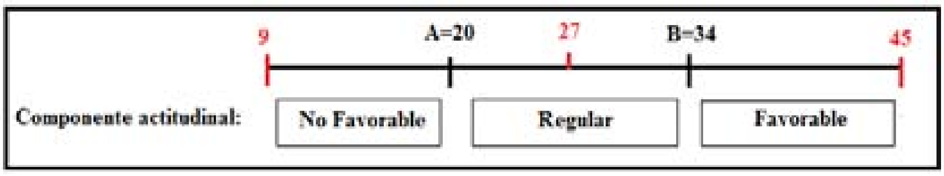


Fig 6.3.6.1: Medición primera escala

2) Segunda escala: actitud hacía la confianza en el aprendizaje en matemáticas

Considerando en esta escala N=11 y el valor de la puntuación obtenida por los participantes (Valor2escala), determinamos:

- Una puntuación cercana a los 11 puntos: Actitud Muy Desfavorable
- Una puntuación cercana a los 33 puntos: Actitud Regular
- Una puntuación cercana a los 55 puntos: Actitud Muy Favorable

Las tres componentes actitudinales se concretan**:

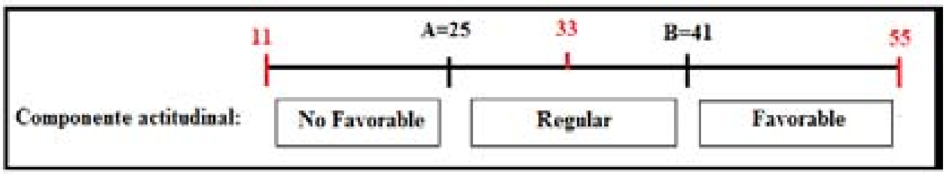


Fig 6.3.6.1.1: Medición segunda escala

3) Tercera y Cuarta escala: ansiedad y motivación en matemáticas.

Debido a que las dos escalas tienen el mismo número de ítems (N=12), consideraremos los mismos puntos de corte A y B. Dependiendo la puntuación obtenida por los participantes (Valor3escala y Valor4escala), consideramos:

**El cálculo de los puntos de corte A y B se concretan según la fórmula

$$** \begin{cases} A = 2N + 0{,}25N \\ B = 4N - 0{,}25N \end{cases}$$

- Una puntuación cercana a los 12 puntos: Actitud Muy Desfavorable
- Una puntuación cercana a los 36 puntos: Actitud Regular
- Una puntuación cercana a los 60 puntos: Actitud Muy Favorable

Las tres componentes actitudinales se concretan**:

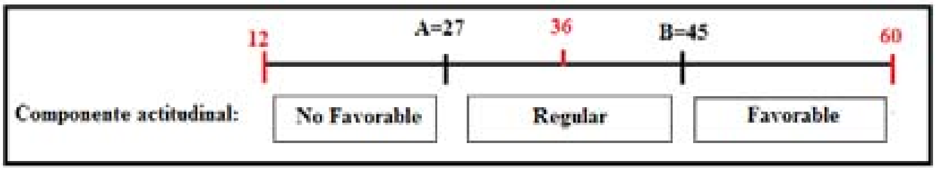


Fig 6.3.6.1.2: Medición tercera y cuarta escala

Los participantes clasificados en la componente actitudinal “No Favorable” denotan una puntuación (ValorZescala, Z=1,2,3,4) en la escala respectiva inferior o igual al punto de Corte A. Los participantes seleccionados en la componente actitudinal “Regular” denotan una puntuación superior al punto de Corte A e inferior o igual al punto de Corte B. Por último los participantes clasificados en la componente actitudinal “Favorable” obtuvieron una puntuación superior al punto de corte B. Posteriormente mediante un análisis cualitativo y descriptivo, estudiaremos los casos más paradigmáticos identificados en cada una de las componentes.

La redacción de los ítems que forman parte de cada una de las escalas, está realizada en un sentido u otro, de manera positiva o negativa porque así garantizamos la consistencia y fiabilidad de cada una de las escalas del test (*apartado 6.3.5 FIABILIDAD Y VALIDEZ*). En esta línea, concebimos que una puntuación alta en la variable Valor1escala, (*actitud hacía el éxito en matemáticas)*, Valor2escala (*la confianza en el aprendizaje matemático)* y Valor4escala (*la motivación en matemáticas*) nos sugeriría una actitud favorable respecto el éxito, confianza y motivación en matemáticas respectivamente. Y por último una puntuación alta en la variable Valor3escala (*la ansiedad en matemáticas*) nos indicaría no identificar actitudes de temor, nerviosismo o ansiedad ante las situaciones matemáticas explicitadas en la tercera escala del test.

A continuación vamos a estudiar por separado los resultados obtenidos en cada una de las escalas de actitudes:

**El cálculo de los puntos de corte A y B se concretan según la fórmula

$$** \begin{cases} A = 2N + 0,25N \\ B = 4N - 0,25N \end{cases}$$

a) Primera escala: *Actitud hacía el éxito en matemáticas*

Representamos las puntuaciones obtenidas de los participantes en la primera escala:

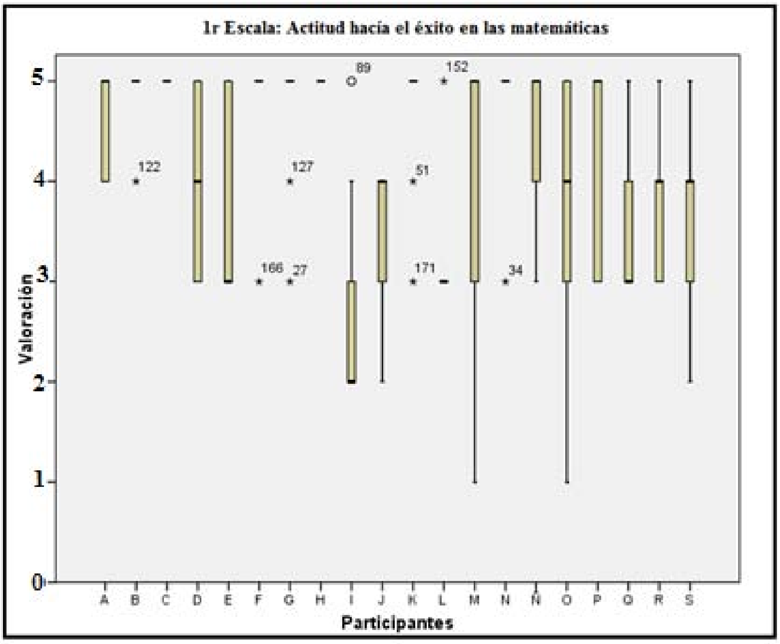


Fig 6.3.6.1.3: Puntuaciones Primera Escala

Observamos que en general los estudiantes denotaron una actitud positiva hacía el éxito en las matemáticas. Concretamente ¾ partes de los participantes denotaron puntuaciones superiores o iguales a 3.

Deacuerdo a la escala de medición establecida en la Fig. 6.3.6.1 (Punto de Corte A=20, B=34), hemos analizado y clasificado la variable Valor1escala en las componentes actitudinales "No Favorable", "Regular" y "Favorable" que se representan en la siguiente figura 6.3.6.1.4:

Los resultados indican que 7 (35%) de los 20 participantes denotaron una **componente actitudinal "Regular"** y 13 (65%) participantes denotaron **una componente actitudinal "Favorable"**.

Ningún participante pertenece a la **componente actitudinal "No Favorable".**

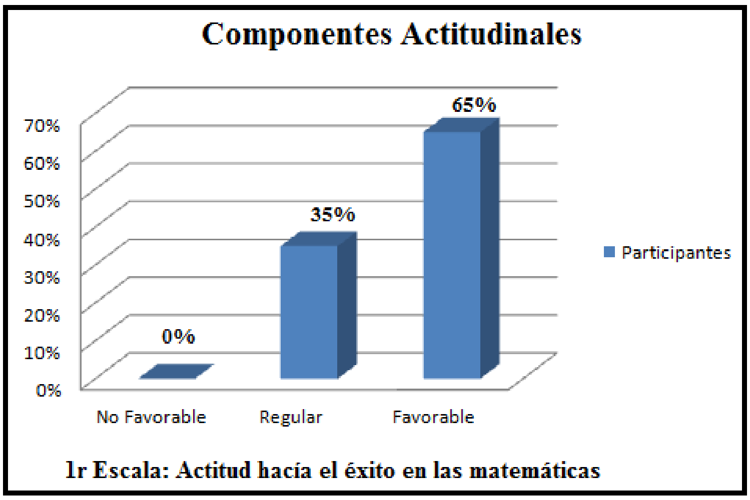


Fig 6.3.6.1.4: Diagrama Componentes actitudinales Primera Escala

b) Segunda escala: ***Confianza en el aprendizaje matemático***

En el siguiente diagrama de cajas de la Fig 6.3.6.1.5 mostramos las puntuaciones obtenidas por los participantes en la segunda escala.

En esta escala observamos actitudes muy dispares ante la confianza en el propio aprendizaje matemático. Identificamos estudiantes (Q,C,Ñ) que denotan una actitud muy desfavorable, respecto su confianza en su propio aprendizaje o sea en la correcta realización de tareas, problemas o actividades matemáticas nuevas o más complejas. En cambio otros participantes (S,O,N,L) denotan una actitud muy favorable en el aprendizaje de nuevas tareas o actividades, así como en la resolución de nuevos desafíos matemáticos.

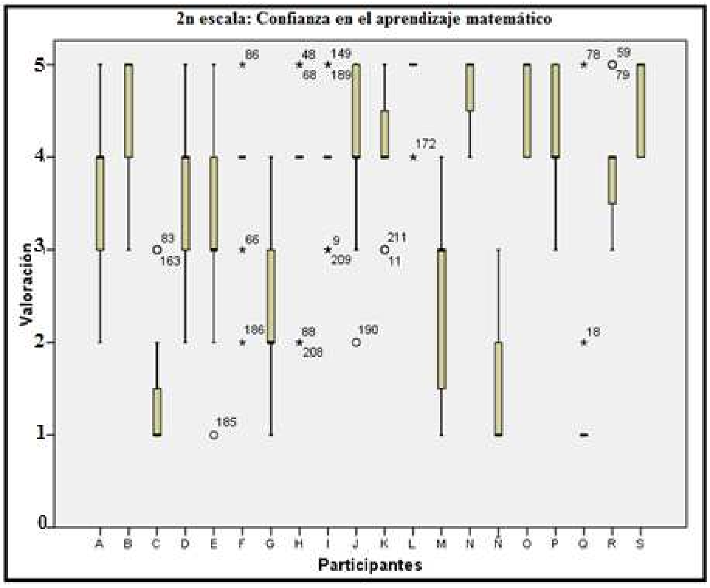


Fig 6.3.6.1.5: Puntuaciones Segunda Escala

En el siguiente diagrama de barras de la Fig 6.3.6.1.6 se muestra el porcentaje de participantes en cada una de las componentes actitudinales, según las puntuaciones obtenidas en la variable Valor2escala.

Deacuerdo a la escala de medición establecida en la Fig 6.3.6.1.1 determinamos que finalmente 3 (15%) participantes denotaron una **componente actitudinal "No Favorable"** respecto su confianza en el propio aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado 5 (25%) participantes denotaron una **componente actitudinal "Regular"**.

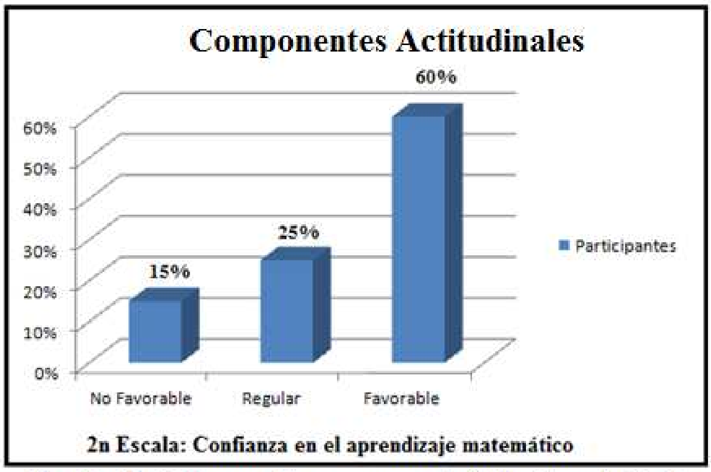


Fig 6.3.6.1.6: Diagrama Componentes actitudinales Segunda Escala

Y finalmente 12 (60%) participantes mostraron una **componente actitudinal "Favorable"** ante el aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

c) Tercera escala: *La ansiedad matemática*

En el siguiente diagrama de cajas de la figura 6.3.6.1.7 mostramos las puntuaciones obtenidas en la escala por cada uno de los participantes.

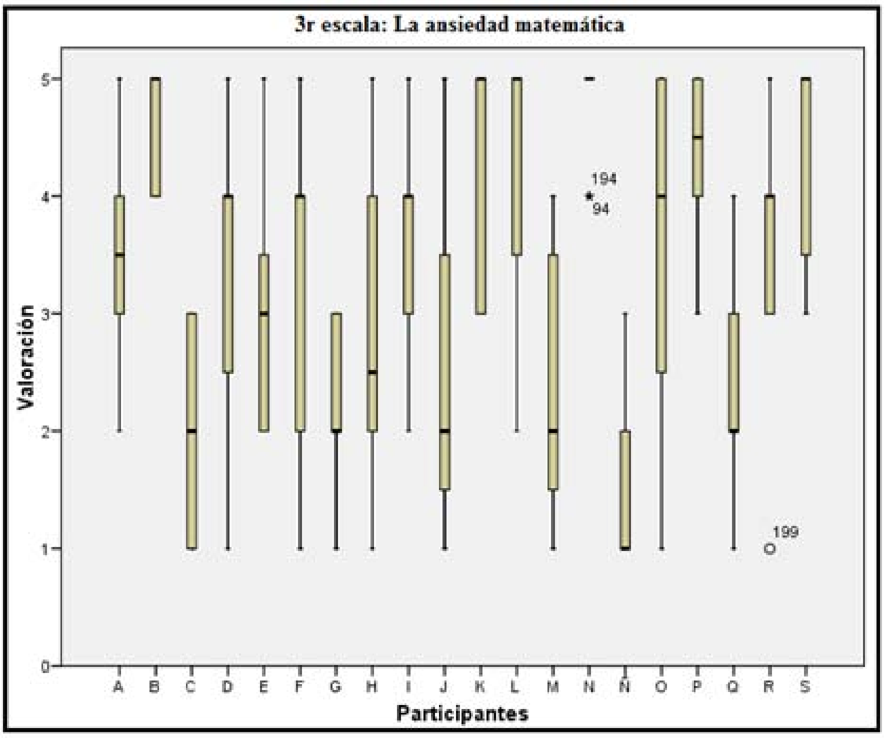


Fig 6.3.6.1.7: Puntuaciones Tercera Escala

En la representación de la distribución de las puntuaciones obtenidas por cada participante, identificamos los participantes B y N (10%) que denotan íntegramente en todos los ítems de la escala, un valor superior o igual a 4. Inferimos por tanto que no expresan una actitud de ansiedad o temor ante las matemáticas, cuando se enfrentan a la resolución de problemas o a la realización de tareas matemáticas que consideran más complejas o difíciles.

Hemos identificado en 8 participantes (30%), valoraciones que oscilan entre 2 y 4 (ambas inclusive), debido a que algunas situaciones matemáticas planteadas en la tercera escala les generan ciertos indicios de ansiedad y otras no. Por ejemplo algunos participantes (M,H,E) ante el ítem 20 "*Un examen de matemáticas me da miedo*" respondieron con una valoración de 2 "*Bastante de acuerdo*", pero sin embargo ante el ítem 7, "*Las matemáticas me hacen sentir incomodo, inquieto e irritable"* respondieron con una valoración de 4 "*Bastante en desacuerdo*".

Realizamos un análisis con la intención de ubicar actitudinalmente a los participantes según la puntuación global de ítems obtenida en la escala (anexo *C.6.1 VARIABLES TEST ACTITUDES)*. A partir de la escala de medición establecida en la Fig 6.3.6.1.2, analizamos y clasificamos la variable Valor3escala en las componentes actitudinales "No Favorable", "Regular" y "Favorable" representadas en el diagrama de la siguiente Fig 6.3.6.1.8.

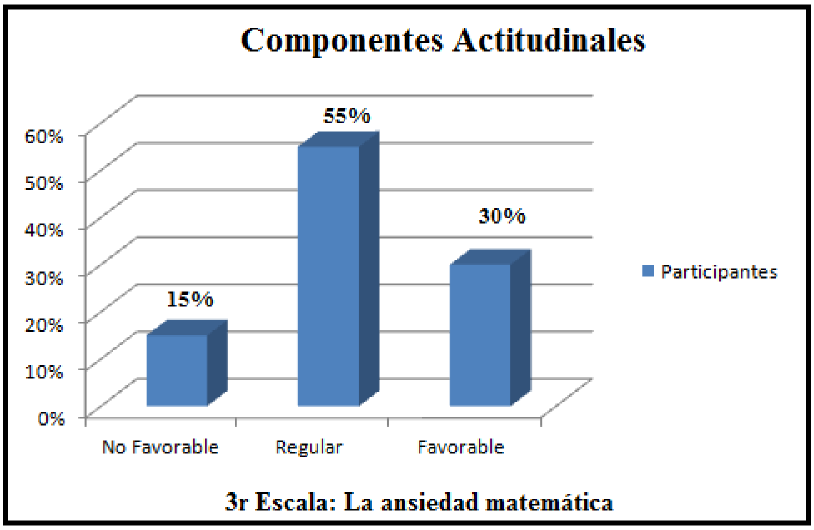


Fig 6.3.6.1.8: Diagrama Componentes actitudinales Tercera escala

Los resultados nos indican que 6 (30%) participantes denotaron una **componente actitudinal "Favorable"** y 3 (15%) participantes denotaron una **componente actitudinal "No Favorable"** respecto la ansiedad matemática.

En la **componente actitudinal "Regular"** identificamos 11 (55%) participantes que se caracterizan por denotar diferentes valoraciones "Favorables" (4,5), "Regulares" (3) y "No Favorables" (1,2) según las situaciones planteadas en cada uno de los ítems de la escala. Identificamos en algunos de estos participantes (D,F,I,R,O) una cierta tendencia actitudinal "Regular-Favorable", debido a que han respondido más ítems con una valoración "Favorable" que el conjunto de ítems que han valorado "Regular" o "No Favorable". En cambio dentro de esta componente actitudinal también identificamos otros participantes (E,H,J,M,Q) con una tendencia actitudinal "Regular-No Favorable", porque respondieron más ítems valorados como "No Favorables" que el conjunto de ítems valorados como "Regular" o "Favorables". Destacamos el participante A que ha respondido el mismo número de ítems con una valoración "Favorable" que el conjunto de ítems que ha valorado como "No Favorable" o "Regular".

d) Cuarta escala: ***La motivación en matemáticas***

En el siguiente diagrama de cajas de la Figura 6.3.6.1.9 mostramos las puntuaciones obtenidas en la escala.

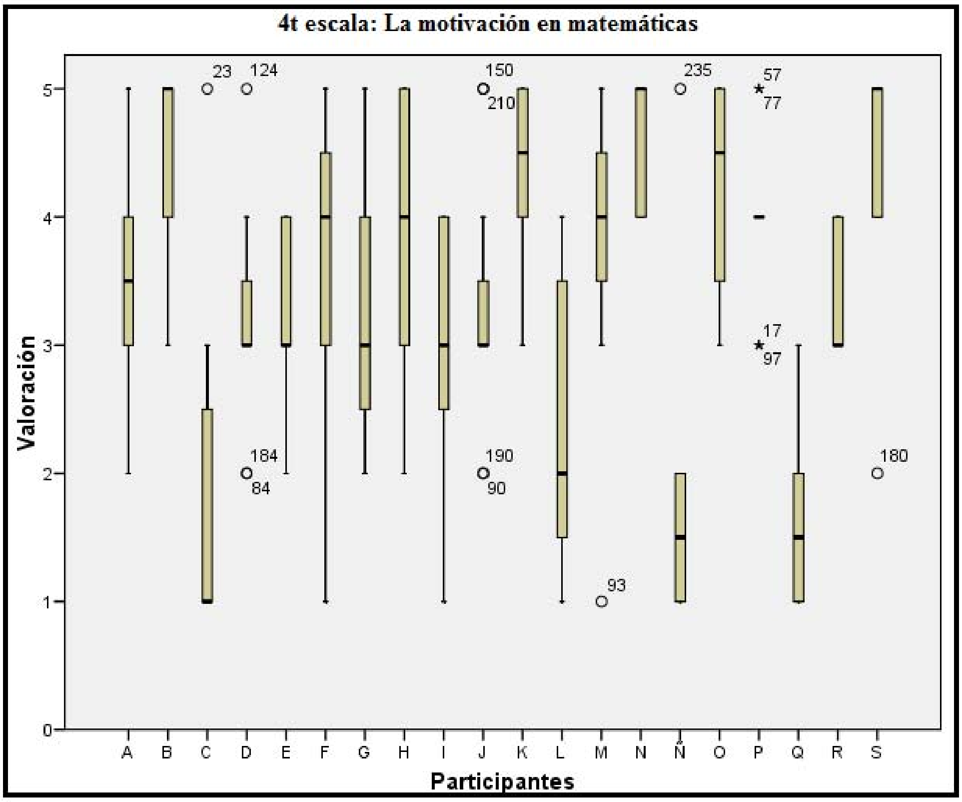


Fig 6.3.6.1.9: Puntuaciones cuarta escala

Identificamos 6 participantes (B,K,N,O,P,R) que respondieron con puntuaciones mayores o iguales a 3, lo que corresponde a una combinación de valoraciones neutras "*Ni de acuerdo, ni en desacuerdo*" y positivas según las diferentes situaciones que se plantean en la escala. De forma similar algunos participantes (A,D,E,F,G,H,I,J,L,S) respondieron con valoraciones entre 2 y 4 correspondientes a actitudes Favorables y No Favorables según la motivación que denotaban ante las situaciones planteadas en la escala.

A continuación pasamos a realizar un análisis sobre la ubicación actitudinal de cada uno de los participantes, a partir de la escala de medición que hemos establecido en el diagrama de la Fig 6.3.6.1.2. Los resultados obtenidos en la variable valor4escala (anexo *C.6.1 VARIABLES TEST ACTITUDES)* nos determinaran los estudiantes que pertenecen a cada una de las componentes actitudinales. Exponemos los resultados:

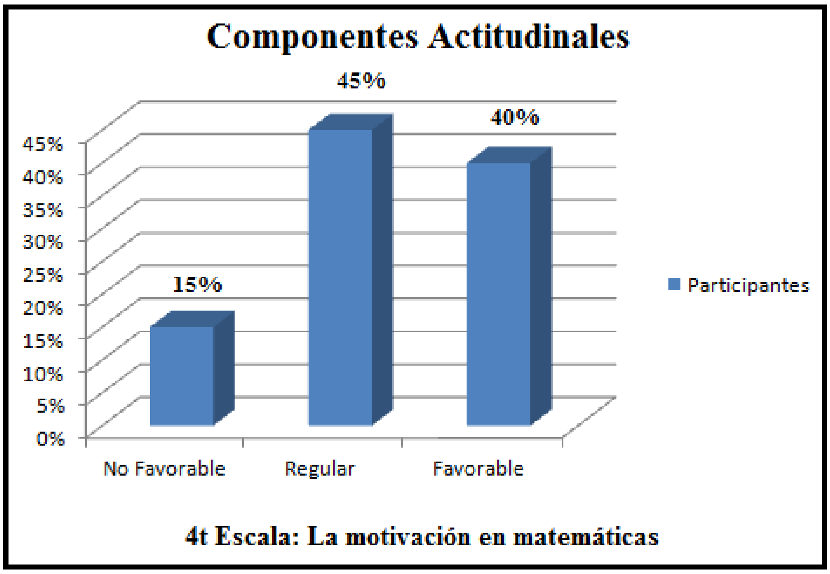


Fig 6.3.6.1.9.1: Diagrama Componentes actitudinales cuarta escala

Observamos que 3 (15%) participantes pertenecen a la **componente actitudinal "No Favorable"** respecto la motivación en matemáticas a partir de las situaciones planteadas en el test.

Los 9 (45%) participantes que pertenecen a la **componente actitudinal "Regular"**, combinaron valoraciones "Favorables" (4,5), "Regulares" (3) y "No Favorables" (1,2) en las respuestas de los ítems de la escala. En la componente actitudinal "Regular" identificamos algunos participantes (L,R,J,I,G,E,D) con una cierta tendencia actitudinal "Regular - No favorable", porque respondieron más ítems con valoraciones "No Favorables" que el conjunto de ítems valorado como "Regular" o "Favorable". Por otro lado, también identificamos un participante (F) con una tendencia actitudinal "Regular-Favorable" por haber respondido más ítems con valoraciones "Favorables" que el conjunto de ítems que valoró como "Regular" o "No Favorable". Por último el participante A respondió la misma cantidad de ítems de forma "Favorable" que el conjunto de ítems valorado como "No Favorable" o "Regular".

Finalmente la **componente actitudinal "Favorable"**, está formada por 8 (40%) participantes. Destacamos las puntuaciones de los estudiantes B y N (Valor4escala=55) por ser las más altas en la componente actitudinal "Favorable", lo que no sugiere que dichos participantes denotan una actitud "Muy Favorable" respecto su motivación en matemáticas.

6.3.6.2 INTERPRETACIÓN Y CONCLUSIONES.

Respecto al análisis sobre la fiabilidad y validez del test de actitudes concluimos que es satisfactorio (Alfa de Cronbach, α = 0,959). Hemos obtenido también Coeficientes Alpha de Cronbach elevados (superiores a 0,8) en cada una de las cuatro escalas que constituyen el test de actitudes, lo que nos indica que tenemos una significativa consistencia interna. Concluimos que la correlación ítem-escala, es significativa como podemos comprobar en las tablas 6.3.5.1, 6.3.5.2, 6.3.5.3 y 6.3.5.4 expuestas en el apartado *6.3.5.1 FIABILIDAD: ESCALAS DEL TEST.*

De acuerdo a la escala de medición que hemos establecido[8] y según los datos recogidos (*C.6.1 VARIABLES TEST ACTITUDES)* correspondientes a las puntuaciones de los participantes en cada escala (ValorZescala, Z=1,2,3,4), destacamos las siguientes conclusiones:

En la primera escala concluimos que más de la mitad de los participantes denotaron una actitud de éxito “Favorable” hacia las matemáticas. Un 15% de los participantes que pertenecen a la componente actitudinal “Regular”, denotaron tendencias ascendentes a “Favorables”. Esto es debido a que respondieron más ítems con valoraciones Favorables (4,5) que el resto de ítems con valoraciones Regulares (3) o No Favorables (1,2), independientemente del sentido positivo o negativo de la redacción de los ítems.

En la segunda escala concluimos que más de la mitad de los participantes denotaron una actitud “Favorable” de confianza en su aprendizaje matemático. Los resultados nos indican que un 10% de los participantes que forman parte de la componente actitudinal “Regular”, demostraron tendencias ascendentes a “Favorables” por responder más ítems con valoraciones Favorables (4,5) que el resto de ítems con valoraciones Regulares (3) o No Favorables (1,2).

Nos parece lícito pensar que los alumnos participantes en el test de actitudes, al ser estudiantes seleccionados a partir de sus significativos resultados obtenidos en la prueba

---

[8] Escala de medición establecida en el apartado *6.3.6.1 Análisis del test de actitudes* (Fig 6.3.6.1, Fig 6.3.6.1.1 y Fig 6.3.6.1.2) y en la que a partir de los puntos de corte A y B, definimos tres componentes actitudinales “No Favorable”, “Regular” y “Favorable”. En estas componentes actitudinales se clasifican los participantes según la puntuación obtenida (ValorZescala, Z=1,2,3,4) en cada una de las escalas del test de actitudes.

de Competencias Básicas (Primera Fase Diagnóstica de Selección), disponen generalmente y en su mayoría de una actitud “Favorable” hacía el éxito en las matemáticas, así como de una confianza “Favorable” en sí mismos respecto al aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos.

En los resultados de la tercera escala, concluimos que sólo un 30% de los participantes, denotaron una actitud “Favorable” respecto la ansiedad en matemáticas. Menos de la mitad de los estudiantes no demostraron incomodidad, confusión, temor o ansiedad ante las situaciones que se plantearon en la escala, como por ejemplo el miedo a los exámenes. En la componente actitudinal “Regular” identificamos un 25% de los participantes con una tendencia actitudinal a “Favorable”.

Y por último en los resultados obtenidos en la cuarta escala, concluimos que el 40% de los participantes denotaron una componente actitudinal “Favorable” respecto a su motivación en matemáticas. Menos de la mitad de los participantes consideraron que las matemáticas son estimulantes, agradables y se motivarían ante nuevos retos o desafíos matemáticos. En la componente actitudinal “Regular” identificamos un participante con una tendencia actitudinal a “Favorable”.

Debido a la muestra reducida de 20 participantes, únicamente nos hemos limitado a explorar, identificar y describir el comportamiento actitudinal de los estudiantes de la muestra. Concluimos que más de la mitad de los participantes denotan una actitud de fatiga, temor o ansiedad ante algunas situaciones relacionadas con las matemáticas. De manera similar más de la mitad de los participantes mostraron una actitud de desmotivación y falta de estimulación ante algunas situaciones como por ejemplo en la resolución de aquellos problemas que puedan suponer un acertijo o desafío matemático, en descubrir nuevos problemas matemáticos o en insistir en una pregunta o problema matemático hasta llegar a encontrar la solución. En resumen se puede afirmar que una mayoría de estudiantes expresaron una actitud “Favorable” hacía el éxito en matemáticas y hacía su confianza en el propio aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo y por otra parte identificamos una mayoría de estudiantes que explicitan sentirse poco motivados. Sienten cierto temor, desanimo y ansiedad ante algunas situaciones como por ejemplo la realización de un examen o la realización de más cursos en matemáticas.

RELACIONES ENTRE APARTADOS

6.4 CORRELACIONES ENTRE RESULTADOS

A partir de los resultados obtenidos estudiaremos y analizaremos las relaciones existentes entre los apartados (1,2) y (1,3).

1. PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2
2. TESTS INTERACTIVOS
3. TEST ACTITUDES

6.4.1 ANÁLISIS Y CORRELACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2 Y LOS TESTS INTERACTIVOS.

Iniciamos el análisis a partir del estudio del Indicio Resuelve Correctamente Problema (RCP) y la variable Aciertos (AC).

El Indicio RCP identificará la frecuencia de problemas geométricos ip^2 resueltos por cada uno de los participantes de esta segunda Fase Diagnóstica de Relación. Los valores que asume este Indicio, considerado a partir de ahora como una variable, están explicitados en el Anexo *C.1.4*

La variable AC que definimos en el apartado de los tests interactivos de visualización, representa la frecuencia de aciertos obtenidos por cada uno de los participantes en la ejecución de la tarea geométrica de cada uno de los dos tests. En el anexo *C.4* están explicitados los valores que asume la variable Aciertos (AC) en cada uno de los dos tests interactivos.

En el estudio de esta relación diferenciaremos dos casos según el test interactivo de visualización en el plano o el espacio que consideremos:

Resultados relación:
Problemas geométricos ip^2 y 1r Test interactivo de visualización en el plano

Las distribuciones (SPSS, versión 15.0) del Indicio Resuelve Correctamente Problema (RCP), considerado como variable Problemas Resueltos (RCP) (asimetría=0,23) y la variable Aciertos (AC) (asimetría=0,53) cumplen los criterios de normalidad. Veamos en la Tabla 6.4.1 siguiente los resultados de las variables:

Participantes	RCP Problemas Resueltos	AC Aciertos 1r Test interactivo	AC Aciertos 2n Test interactivo
A	9	11	7
B	4	8	8
C	2	9	9
D	1	9	9
E	3	9	13
F	6	9	9
G	3	5	6
H	5	9	10
I	6	13	8
J	5	10	7
K	6	8	9
L	5	12	10
M	4	8	13
N	1	8	5
Ñ	4	7	5
O	3	7	7
P	5	14	8
Q	1	7	9
R	6	9	9
S	4	12	10

Tabla 6.4.1: Problemas Resueltos & Aciertos

Debido a que las distribuciones de las dos variables cumplen los criterios de normalidad, para estudiar la posible existencia de una relación entre ellas, hemos aplicado el procedimiento de correlación bivariada. En la siguiente Tabla 6.4.2 exponemos el coeficiente de Pearson y la significación estadística:

Correlaciones

		Problema sresueltos	ACPrimerTest
Problemasresueltos	Correlación de Pearson	1	,456*
	Sig. (bilateral)		,044
	N	20	20
ACPrimerTest	Correlación de Pearson	,456*	1
	Sig. (bilateral)	,044	
	N	20	20

*. La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

Tabla 6.4.1.1: Pearson Problemas resueltos y AC 1r Test

Concluimos que la variable Problemas Resueltos (RCP) y Aciertos (AC) en la realización del primer test interactivo de visualización en el plano, correlacionan positivamente pero de forma moderada (r = 0,456; p = 0,044 < 0,05). Esto nos indica que existe una relación moderadamente proporcional, entre la resolución de problemas geométricos ip^2 y el número de ensayos realizados correctamente en el primer test interactivo de visualización en el plano.

Resultados relación:

Problemas geométricos ip^2 y 2n Test interactivo de visualización en el espacio

En este caso estudiamos la relación entre la variable Problemas Resueltos (RCP) y la variable Aciertos (AC) del segundo test interactivo de visualización en el espacio. Una vez comprobado que se cumplen los criterios de normalidad (Asimetría=0,407) de la variable aciertos (AC) del segundo test interactivo de visualización, aplicamos nuevamente el procedimiento de correlación bivariada.

En este caso el coeficiente de correlación de Pearson (r=0,016) obtenido entre las dos variables Problemas resueltos y Aciertos es prácticamente cero. No existe ningún tipo de relación lineal entre las dos variables.

Exponemos también una tabla Anova (SPSS, versión 15.0) con la intención de contrastar la existencia de una posible relación cuadrática entre las dos variables.

ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	5,508	2	2,754	,575	,573
Residual	81,442	17	4,791		
Total	86,950	19			

La variable independiente esProblemasresueltos.

Tabla 6.4.1.2: Anova Problemas Resueltos y AC 2n Test.

En la tabla Anova, se muestra con un p-valor=0,573 mayor que el nivel de significación $\alpha = 0.05$, que no podemos rechazar la hipótesis nula de "*no regresión cuadrática*". Establecemos por tanto que no existe una relación cuadrática entre las dos variables.

A continuación vamos a representar las distribuciones de los estadísticos generados por regresión (SPSS, versión 15.0) con el objetivo de visualizar la posible existencia de una relación entre la variable independiente Problemas resueltos (RCP) y la variable dependiente Aciertos (AC).

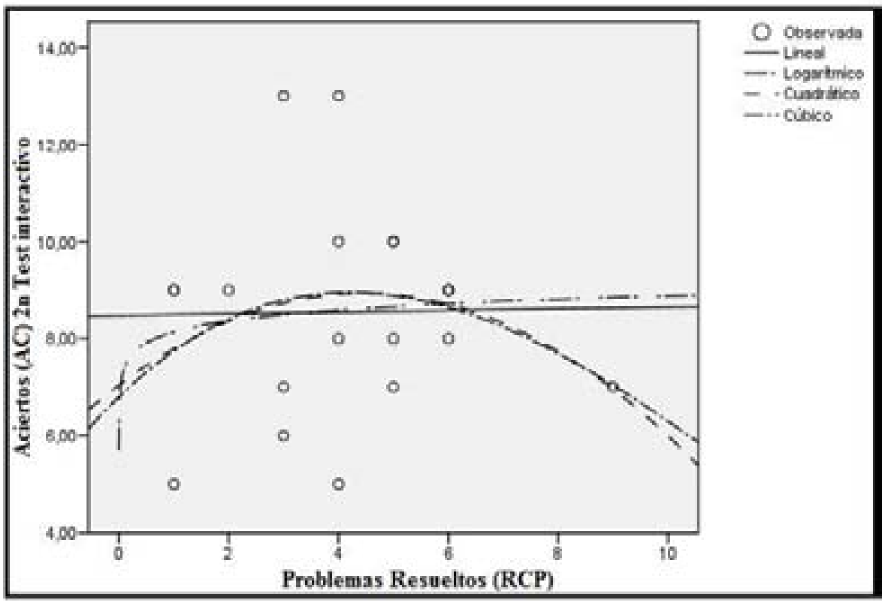


Fig 6.4.1.3: Distribución RCP y AC 2n Test.

Los resultados nos indican a partir del diagrama de dispersión que en este caso no existe relación (lineal, cuadrática, logarítmica o cúbica) entre las variables Problemas Resueltos (RCP) y Aciertos (AC).

6.4.1.1 INTERPRETACIÓN Y CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos concluimos evidencias de una cierta relación positiva moderada (lineal, r=0,456) entre la variable Resolución Problemas (RCP) y la variable Aciertos (AC) obtenida en el primer test interactivo de visualización en el plano. Inferimos que en cierta manera, la naturaleza que sustenta la ejecución de la tarea geométrica basada en discriminar figuras geométricas planas, ha podido influir moderadamente en la resolución de problemas geométricos ip^2. La discriminación visual (MVHV2), la identificación visual (MVHV1) y el reconocimiento de posiciones (MVHV3) y relaciones geométricas (MVHV4) son algunos de los Indicios que hemos identificado con mayor frecuencia en las resoluciones de los participantes en los problemas geométricos ip^2 planteados en nuestra investigación. En una mayoría de los problemas geométricos de estudio, de manera natural y de forma explícita o implícita en alguna fase de su resolución, se requiere que los estudiantes puedan identificar o discriminar figuras geométricas en el plano, así como reconocer las posiciones o las

relaciones geométricas que pueden establecerse entre ellas y que pueden hacer referencia a equivalencias, a la forma, etc.
Posiblemente por este motivo, son los participantes que han denotado una ejecución significativa (mayor frecuencia de aciertos) en el primer test interactivo, los que han tenido mayor facilidad para plantear y resolver los problemas geométricos ip^2 con ciertas garantías de éxito.

Sin embargo los resultados no muestran ninguna relación, entre la variable problemas resueltos (RCP) y la variable aciertos (AC) del segundo test interactivo de visualización en el espacio. Concebimos que posiblemente es debido a que la tarea geométrica propuesta en el segundo test interactivo no comparte la naturaleza que sustenta las estrategias que han aplicado los estudiantes en la resolución de los problemas geométricos ip^2. Es decir a partir de los resultados obtenidos en el apartado *6.1.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO PROBLEMAS*, comprobamos que la tarea de reconocer y/o discriminar la orientación angular de dos cuerpos geométricos representados en el plano, prácticamente no se ha identificado en las resoluciones de los problemas geométricos ip^2.

A modo de conclusión identificamos la existencia de una cierta relación positiva moderadamente proporcional entre la frecuencia de problemas geométricos ip^2 resueltos y los aciertos obtenidos en la ejecución del primer test interactivo.

6.4.2 ANÁLISIS Y CORRELACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2 Y EL TEST DE ACTITUDES.

Por un lado consideraremos la variable Problemas Resueltos (RCP) y por otro la variable ValorZescala (Z=1,2,3,4) correspondiente a la puntuación global obtenida (anexo *C.6.1)* por cada participante en cada una de las cuatro escalas del test de actitudes.

En el estudio de esta relación diferenciaremos cuatro casos según la variable ValorZescala (z=1,2,3,4):

Resultados relación:

Problemas geométricos ip^2 y 1ª Escala: éxito hacia las matemáticas (Valor1escala)

Verificamos que las distribuciones (SPSS, versión 15.0) de la variable Problemas Resueltos (RCP) (asimetría= 0,23) y de la variable Actitud hacía el éxito en matemáticas (Valor1escala) (asimetría= -0,48) cumplen los criterios de normalidad.

En este caso el coeficiente de correlación de Pearson ($r = -0{,}054$; $p = 0{,}821 > 0{,}05$) entre las dos variables cuantitativas, Problemas Resueltos y Valor1escala, no es significativo al nivel $\alpha=0{,}05$. Por tanto no identificamos una relación lineal entre el número de problemas geométricos ip^2 resueltos y la puntuación obtenida por los participantes en la primera escala de actitud hacía el éxito en las matemáticas.

A continuación vamos a estudiar la existencia de otras formas de relación (cuadrática, logarítmica o cúbica) entre las dos variables considerando la variable independiente como la variable Valor1escala y la variable dependiente Problemas Resueltos. Para esto generaremos diversos estadísticos por regresión en la siguiente tabla 6.4.2.1:

Variable dependiente: Problemasresueltos

	Resumen del modelo					Estimaciones de los parámetros			
Ecuación	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.	Constante	b1	b2	b3
Lineal	,003	,053	1	18	,821	4,879	-,019		
Logarítmica	,005	,094	1	18	,763	7,480	-,921		
Cuadrático	,036	,315	2	17	,734	19,185	-,826	,011	
Cúbico	,036	,315	2	17	,734	19,185	-,826	,011	,000

La variable independiente esValor1escala.

Tabla 6.4.2.1: Correlación Problemas Resueltos y Valor1escala.

Comprobamos que las posibles estimaciones logarítmicas, cuadráticas o cúbicas no son significativas al nivel $\alpha=0{,}05$. En el siguiente diagrama de dispersión de la Fig 6.4.2.2 representamos los valores obtenidos:

Contrastamos que las dos variables son diferencialmente significativas, es decir no existe relación (lineal, cuadrática, logarítmica, o cúbica) entre la actitud hacía el éxito en matemáticas de los participantes (Valor1escala) y la frecuencia de problemas geométricos ip^2 que resolvieron (RCP).

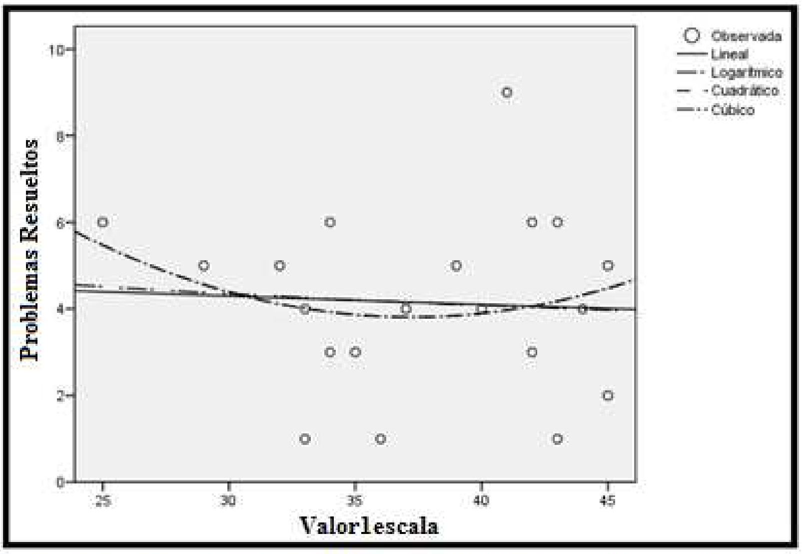


Fig 6.4.2.2: Diagrama de dispersión Problemas Resueltos y Valor1escala

Resultados relación:

Problemas geométricos ip^2 y 2ª Escala: Confianza en el aprendizaje (Valor2escala)

Las distribuciones (SPSS, versión 15.0) de las variables Problemas Resueltos (RCP), (asimetría= 0,23) y Confianza en el aprendizaje matemático (Valor2escala), (asimetría= -0,93) cumplen los criterios de normalidad.

El coeficiente de correlación de Pearson ($r = 0,326$; $p = 0,161 > 0,05$) entre las dos variables cuantitativas, RCP y Valor2escala, no es significativo al nivel $\alpha=0,05$. No se identifica una relación proporcional entre el número de problemas resueltos y la puntuación obtenida por los participantes en esta segunda escala, correspondiente a la confianza en el aprendizaje matemático.

A continuación vamos a estudiar la existencia de otras formas de relación (cuadrática, logarítmica y cúbica) considerando cómo la variable independiente Valor2escala y la variable dependiente Problemas Resueltos. A partir del SPSS (versión 15.0) generaremos distintos estadísticos por regresión para corroborar la posible existencia de una relación entre estas dos variables.

Variable dependiente: Problemasresueltos

	Resumen del modelo					Estimaciones de los parámetros			
Ecuación	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.	Constante	b1	b2	b3
Lineal	,106	2,134	1	18	,161	2,000	,055		
Logarítmica	,142	2,978	1	18	,102	-2,895	1,953		
Cuadrático	,269	3,133	2	17	,069	-4,751	,517	-,007	
Cúbico	,295	2,236	3	16	,123	4,578	-,438	,022	,000

La variable independiente esValor2escala.

Tabla 6.4.2.3: Correlación Problemas Resueltos y Valor2escala.

Las posibles estimaciones logarítmicas ($p=0,102$), cuadráticas ($p=0,069$) o cúbicas ($p=0,123$) entre las dos variables no son significativas a un nivel de confianza $\alpha=0,05$. Este resultado nos indica que no existe evidencia estadística de una posible relación (logarítmica, cuadrática o cúbica) entre las dos variables. Representamos el diagrama de dispersión en la Fig 6.4.2.4:

Verificamos que no existe relación (lineal, cuadrática, logarítmica o cúbica) entre la puntuación denotada por los participantes en su confianza en el aprendizaje matemático (Valor2escala) y el número de problemas geométricos ip^2 que resolvieron (RCP).

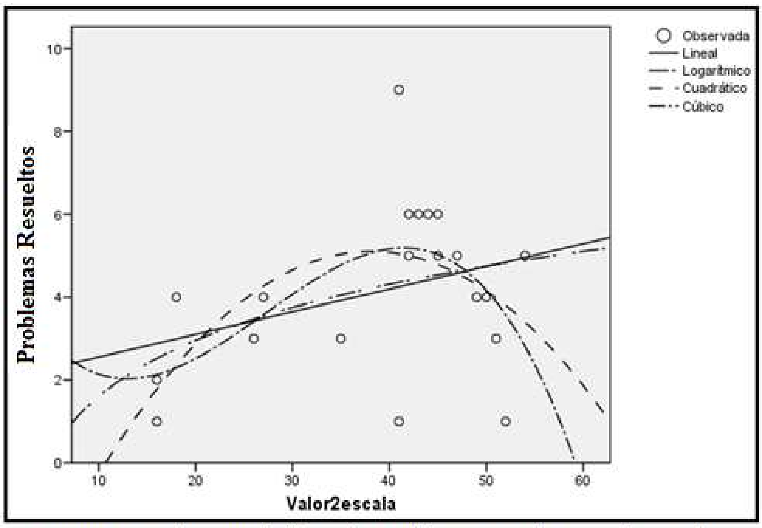


Fig 6.4.2.4: Diagrama de dispersión Problemas Resueltos y Valor2escala

Resultados relación:
Problemas geométricos ip^2 y 3ª Escala: Ansiedad (Valor3escala)

Las distribuciones de las variables Problemas Resueltos (RCP) (asimetría= 0,23) y Ansiedad hacía las matemáticas (Valor3escala) (asimetría= -0,142) cumplen los criterios de normalidad.

El coeficiente de correlación de Pearson (r=0,156; p=0,512 > 0,05) obtenido entre las variables Problemas resueltos y Valor3escala, no es significativo al nivel α=0,05. No se identifica una relación lineal entre el número de problemas resueltos y la puntuación obtenida por los participantes en esta escala de actitud.

A continuación vamos a estudiar la existencia de otras formas de relación (cuadrática, logarítmica, y cúbica) considerando cómo la variable independiente Valor3escala y la variable dependiente Problemas resueltos. Generamos diversos estadísticos curvilíneos, logarítmicos o cúbicos por regresión (SPSS, versión 15.0), con el objetivo de estudiar una posible relación entre las dos variables. En la siguiente tabla 6.4.2.5 exponemos los resultados:

Variable dependiente: Problemasresueltos

	Resumen del modelo					Estimaciones de los parámetros			
Ecuación	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.	Constante	b1	b2	b3
Lineal	,024	,448	1	18	,512	3,067	,027		
Logarítmica	,037	,700	1	18	,414	-,302	1,223		
Cuadrático	,140	1,385	2	17	,277	-4,534	,451	-,005	
Cúbico	,298	2,261	3	16	,121	22,712	-1,971	,062	-,001

La variable independiente esValor3escala.

Tabla 6.4.2.5: Correlación Problemas Resueltos y Valor3escala.

Corroboramos que las posibles estimaciones logarítmicas (p=0,414), cuadráticas (p=0,277) o cúbicas (p=0,121) no son significativas al nivel α=0,05. Representamos los valores en el diagrama de dispersión de la Fig 6.4.2.6:

Comprobamos que las dos variables son diferencialmente significativas. No existe relación (lineal, cuadrática, logarítmica, o cúbica) entre la actitud de ansiedad ante las matemáticas (Valor3escala) y el número de problemas geométricos ip^2 resueltos (RCP).

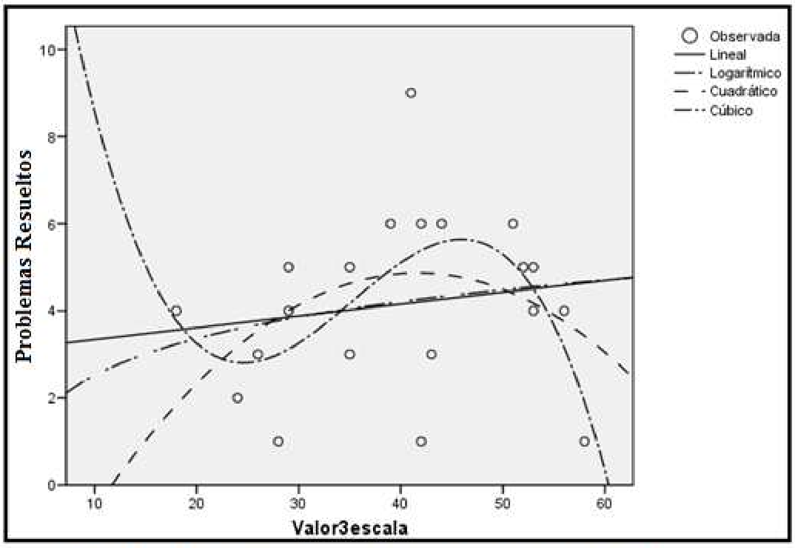


Fig 6.4.2.6: Diagrama de dispersión Problemas Resueltos y Valor3escala

Resultados relación:
Problemas geométricos ip² y 4ª Escala: Motivación (Valor4escala)

En esta escala las variables Problemas Resueltos (RCP) (asimetría= 0,23) y Motivación hacía las matemáticas (Valor4escala) (asimetría=-0,703) cumplen los criterios de normalidad (SPSS, versión 15.0).

El coeficiente de correlación de Pearson (r= 0,226; p= 0,337 > 0,05) obtenido entre las dos variables cuantitativas RCP y Valor4escala, no es significativo al nivel α=0,05. Por tanto no se identifica una relación proporcional entre el número de problemas geométricos ip^2 resueltos y la motivación denotada por los participantes hacía las matemáticas.

De forma similar a los apartados anteriores, generaremos distintos estadísticos por regresión (Tabla 6.4.2.7) con la intención de estudiar la existencia de una posible relación entre las dos variables.

Variable dependiente: Problemasresueltos

Ecuación	Resumen del modelo					Estimaciones de los parámetros			
	R cuadrado	F	gl1	gl2	Sig.	Constante	b1	b2	b3
Lineal	,051	,972	1	18	,337	2,470	,041		
Logarítmica	,082	1,603	1	18	,222	-2,399	1,785		
Cuadrático	,224	2,454	2	17	,116	-5,971	,540	-,007	
Cúbico	,229	2,530	2	17	,109	-3,453	,305	,000	-5,9E-005

La variable independiente esValor4escala.

Tabla 6.4.2.7: Correlación Problemas Resueltos y Valor4escala.

Contrastamos que las estimaciones logarítmicas (p=0,337), cuadráticas (p=0,116) y cúbicas (p=0,109) no son significativas al nivel α=0,05. Representamos en el diagrama de dispersión en la Fig 6.4.2.8 los valores y las distintas estimaciones por regresión:

Concluimos finalmente que no se identifica una relación (lineal, logarítmica, cuadrática o cúbica) entre la motivación hacía las matemáticas (Valor4escala) de los participantes y el número de problemas geométricos ip^2 que resolvieron (RCP).

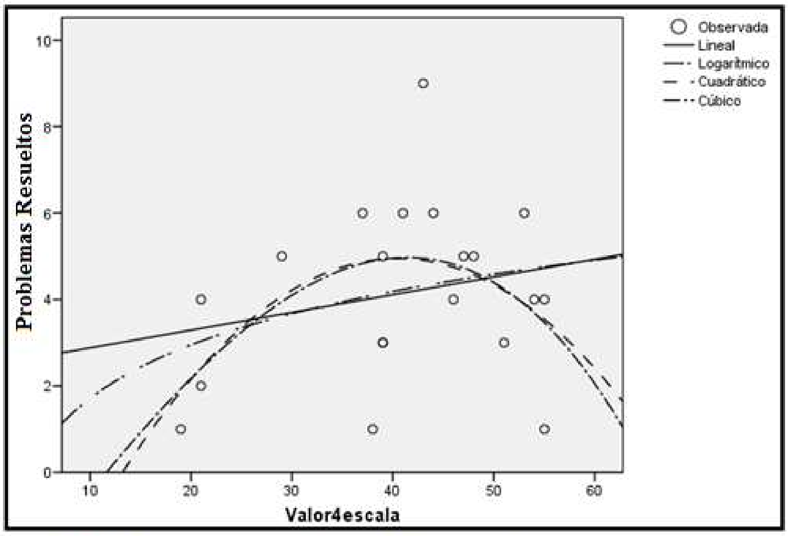


Fig 6.4.2.8: Diagrama de dispersión Problemas Resueltos y Valor4escala

6.4.2.1 INTERPRETACIÓN Y RESULTADOS

Después de un previo análisis cualitativo de detalle y según los resultados obtenidos entre la relación de Problemas Resueltos (RCP) y las puntuaciones obtenidas en las escalas (ValorZescala, Z=1,2,3,4) del test de actitudes destacamos algunas conclusiones.

En la primera escala de actitudes, identificamos que un 25% de los participantes (P,A,K,F,H) pertenecientes a la componente actitudinal "Favorable" resolvieron más de la mitad de los problemas geométricos ip^2. En cambio en la componente actitudinal "No Favorable" identificamos que sólo el participante Q también coincide con aquellos que resolvieron sólo un problema. Aunque podemos establecer algunas relaciones puntuales en algunos participantes, los resultados obtenidos concluyen que no existe relación entre la actitud de los participantes hacía el éxito en matemáticas y la frecuencia de problemas geométricos ip^2 que resolvieron.

En la segunda escala de actitudes, identificamos que el 40% de los participantes (F,R,I,K,H,P,J,L) que pertenecen a la componente actitudinal "Favorable" resolvieron más de la mitad de los problemas geométricos ip^2.
Desde la perspectiva contraria sólo los participantes Q y C que resolvieron 1 y 2 problemas geométricos respectivamente, están clasificados actitudinalmente en la componente "No Favorable". Nuevamente podemos establecer algunas relaciones cualitativamente puntuales en algunos participantes, aunque los resultados obtenidos nos indican que no existen evidencias de una posible relación entre la actitud de los participantes hacía su confianza en el aprendizaje matemático y la frecuencia de problemas geométricos ip^2 que resolvieron.

En la tercera escala de actitudes, la ansiedad matemática, un 15% de los participantes (K,L,P) ubicados actitudinalmente en la componente "Favorable", resolvieron más de la mitad de los problemas geométricos ip^2. En cambio solo el participante C que resolvió 2 problemas geométricos ip^2 está ubicado actitudinalmente en la componente "No Favorable". A pesar de identificar alguna relación puntual entre las dos variables en algunos participantes, los resultados nos indican que no existe una relación entre el número de problemas geométricos ip^2 resueltos y la actitud respecto el temor o ansiedad ante las matemáticas. Urban (1995) explicita la tolerancia a la ambigüedad, entendida como indicador inverso de la ansiedad y como una componente relacionada con la personalidad creativa.

Respecto la última escala de actitudes, la motivación hacía las matemáticas, hemos identificado un 15% de participantes (K,P,H) pertenecientes a la componente actitudinal "Favorable" que resolvieron más de la mitad de los problemas geométricos ip^2. En la componente "No Favorable" un 10% de participantes (Q,C) se encuentran entre el 20% de los participantes que resolvió menos problemas geométricos ip^2. Los resultados obtenidos en el apartado anterior, nos sugieren que no existe una relación entre la frecuencia de problemas resueltos y la motivación de los estudiantes respecto las matemáticas. Algunos autores como Urban (1995) o Pawlak (2000) conciben la motivación como una de las componentes especialmente significativas relacionadas con la personalidad y el comportamiento creativo.

Estudiar la correlación entre estas dos variables, Problemas Resueltos (RCP) y la puntuación obtenida en el test de actitudes (valorZescala, z=1,2,3,4), con una muestra (n=20) pequeña de participantes no nos garantiza un análisis suficientemente representativo de las variables estudiadas con la intención de que puedan establecerse muestras evidentes estadísticas de una posible relación. Por ese motivo nos hemos limitado a explorar, identificar y describir el comportamiento actitudinal de los estudiantes de la muestra.

Concluimos que en algunos casos puntuales hemos identificado cierta relación entre algunos participantes (K,P,H,L,F,R,I,J,A) que resolvieron más de la mitad de problemas geométricos ip^2 correctamente y también denotaron una componente actitudinal "Favorable" en alguna de las escalas del test. Análogamente identificamos una cierta relación cualitativa entre algunos participantes (Q,C) que resolvieron 1 y 2 problemas geométricos ip^2 respectivamente y denotaron una actitud "No Favorable" en una mayoría de las escalas del test de actitudes. Independientemente de estos casos particulares y en términos generales cabe destacar que los resultados nos indican que no existen evidencias significativas de una correlación entre los Problemas Resueltos correctamente y la actitud de los participantes correspondiente a cada una de las cuatro escalas del test.

BLOQUE IV: CONCLUSIONES

CAPITULO 7

7. CONCLUSIONES, APORTACIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS.

Se dice que un niño tiene comprensión (insight) en un determinado campo de la geometría cuando a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si… " y a continuación formula un nuevo teorema […] Podemos concluir por tanto que la comprensión se reconoce como tal cuando el sujeto actúa adecuada e intencionalmente ante una nueva situación.

(Van Hiele, 1957, p.3)

En este capítulo se recogen las exploraciones e identificaciones que constituyen las aportaciones y descripciones de nuestro trabajo, haciendo referencia explícitamente a cada una de las preguntas de investigación planteadas inicialmente. Se realiza una diagnosis del trabajo y se plantean futuras perspectivas de investigación que completaran significativamente nuestro estudio, como es la investigación de aquellos casos paradigmáticos que destacan de la muestra por haber obtenido especialmente buenos resultados en la resolución de problemas, así como buenas puntuaciones en el test de actitudes o los tests interactivos de visualización. Posteriormente incidiremos en las posibles propuestas e implicaciones didácticas que consideramos podrían estimular, fomentar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geométrica escolar, en la educación secundaria.

7.1 CONCLUSIONES: PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN PLANTEADAS.

A continuación respondemos a cada una de las preguntas de investigación.

1. ¿Qué momentos de insight identificamos en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo?

Una de las distintas aportaciones realizadas en nuestra tesis, es la definición de momento de insight, en la resolución de problemas geométricos *potencialmente de insight perceptivo*. Coincidimos con autores como Sequera (2007) que lo definen como el escenario o proceso que podría promover un aprendizaje creativo. Concretamente en nuestra investigación hemos definido un momento de insight (ip^2) como *el periodo o la circunstancia del proceso en la resolución de un problema geométrico (ip^2) en el que inferimos que el participante descubre de forma repentina una nueva reestructuración geométrica, de los elementos que intervienen en el problema, que le permite visualizar y comprender la situación y por tanto continuar con la resolución.* Coincidimos con Barnes (2000) que el conocimiento de esta nueva reestructuración se "ve" con gran claridad, experimentando un alto grado de confianza o certeza y normalmente va acompañada de una respuesta emocional positiva, que puede describirse de diferentes maneras como satisfacción y sorpresa. Autores como Durkin (1937, citado en Landau, 1987) ya concebían esta reestructuración, como una "*reorganización o visión repentina"* acompañada de un estado de agrado y de un sentimiento de satisfacción y alivio.

En la literatura vigente el concepto de insight (Hadamard, 1947; Wertheimer, 1959; Simón, 1977; Perkins, 1981; Ohlsson, 1984; Sternberg y Davidson, 1986; Weisberg, 1996; Barnes, 2000; Sequera, 2007; Sriraman, 2009) es muy amplio según la perspectiva de estudio que se considere. En nuestra investigación hemos acotado, delimitado y concebido el concepto de insight tal como hemos explicitado en el Capitulo 2: *Insight geométrico potencialmente perceptivo*.

Entre otros aspectos que pueden ser influyentes, la ocurrencia de un insight potencialmente perceptivo en un momento determinado, es único e irrepetible y depende implícitamente de la persona en concreto. Es decir una determinada reestructuración de los elementos de un problema geométrico potencialmente de insight perceptivo, puede llegar a posibilitar la ocurrencia de un insight para algunos estudiantes pero no para otros. En el primer problema geométrico ip^2 (Plasencia, 2000) los estudiantes que identifican visualmente los triángulos de la figura geométrica y descubren por primera vez la equivalencia entre los triángulos sombreados y no

sombreados, posiblemente tendrán la ocurrencia de la comprensión súbita del cálculo de toda la superficie sombreada. Sin embargo aquellos estudiantes que ya han concebido previamente la ocurrencia de este insight, posiblemente no lo volverán a experimentar en futuras ocasiones en circunstancias similares, ya que no se producirá el descubrimiento de una nueva relación o reestructuración (Wertheimer, 1959) porque probablemente esta habrá quedado almacenada en la memoria para futuras ocasiones.
Así vemos, en el cuarto problema geométrico ip^2 (Cambray, 2011), que consistía en construir un cuadrado con el doble de la superficie que el que se presentaba en el enunciado, la estrategia de rotar el cuadrado o aplicar una imagen dinámica (Presmeg, 1985) ha promovido en algún participante (I,K,S) un momento de insight, al descubrir la posible solución. Probablemente en otros participantes, rotar el cuadrado, no les ha promovido el momento de insight que les ha permitido ver la solución al problema.

Con la intención de ser más rigurosos y objetivos en la identificación de los momentos de insight de los estudiantes, nos ha parecido necesario definir dos constructos que nos puedan facilitar algunos indicios y rasgos sobre su existencia. Concretamente estos constructos, los hemos definido como evidencias explicitadas o no explicitadas de insight. Hemos considerado una evidencia explicitada de insight, cuando el participante ha manifestado haber realizado un descubrimiento sobre una nueva reestructuración de los elementos de un problema geométrico (ip^2) y explicita las ideas o estrategias que le han permitido poder continuar con la resolución de manera exitosa.
Ilustramos este tipo de evidencias con la reflexión del participante A extraído del Cuestionario de Respuestas en el problema 7, "*Me he dado cuenta que juntando los dos triángulos pequeños formaba uno idéntico al grande y luego si lo ponía encima de él se formaba un cuadrado",* y del participante B también extraído del Cuestionario de Respuestas en el problema 3, "*Lo he visto claro desde el principio que moviendo el cuadrado coincidía con la mitad de los lados del cuadrado pequeño."*
En cambio cuando hemos identificado una evidencia no explicitada de insight, los participantes manifiestan haber descubierto la solución, la idea o la reestructuración de los elementos del problema, sin explicar o explicitar como han llegado a ella. En estos casos los participantes atribuyen expresiones como "he tenido un flash", "lo he visto", etc sin dar más argumentos.
Ilustramos este tipo de evidencia no explicitada mediante una afirmación del participante P en la entrevista, comentando la solución del problema 1, "*No, yo lo he*

entendido en seguida y lo he hecho… de repente" y del participante J en el Cuestionario de Respuestas referente al problema 4, "*Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro. Intuición".*

En nuestra investigación hemos identificado (*6.1.5.5 Momentos de insight)* 29 evidencias explicitadas de insight y 13 evidencias no explicitadas de insight. A continuación vamos a destacar algunos casos que nos han parecido especialmente interesantes.

Consideramos los estudiantes I,J y L por ser los participantes en los que más momentos de insight (concretamente 4) hemos identificado en las resoluciones que han realizado ante los problemas geométricos (ip^2). Aunque los tres participantes no destacan en todas las escalas del test de actitudes realizado, coincidimos con Maslow (2001) en que posiblemente alguna componente personal, el carácter, la autoestima o una combinación de actitudes como la motivación, la tolerancia a la frustración o la capacidad del logro (Penagos y Aluni, 2000), pueden haber influenciado en que estos participantes tengan una mayor facilidad para abordar problemas no rutinarios y plantear resoluciones originales e innovadoras.
En el caso del participante J, hemos identificado dos evidencias no explicitadas de insight en la resolución del problema 4, que convergen unilateralmente en la ocurrencia del mismo momento de insight. Es decir en este caso las dos evidencias no explicitadas de insight identificadas provienen, por un lado a partir del cuestionario de respuestas, "*Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro. Intuición"*, y por otro de las explicaciones del participante en la entrevista, *"Esta ha sido un plas, pum i ya esta".*
Y en el caso del participante L, hemos identificado también dos evidencias no explicitadas de insight, en el problema 10. Una primera en la que el participante explicitaba, *"Jo, es que estaba aburrida… , i he començat a dibuixar-li ratlles a la circunferencia… i després ho he vist*". Posiblemente vio la reubicación de los tres sectores circulares sombreados en la mitad de una de las circunferencias, tal y como explicita el mismo participante en otra evidencia no explicitada de insight extraída del Cuestionario de Respuestas, "*Me he dado cuenta que el área sombreada es la mitad….".* Nuevamente verificamos que dos evidencias no explicitadas de insight promueven la ocurrencia de un único momento de insight, en un período determinado de la resolución del problema.

Destacamos también en la resolución del primer problema, el caso del participante F en el que hemos identificado dos momentos de insight en una misma resolución pero haciendo referencia a diferentes periodos o fases de la solución del problema. Corroboramos dos evidencias explicitadas de insight del participante F. Una primera en la entrevista, ”*…pues yo he visto que si dividías la zona sombreada se podían hacer ocho triángulos de los blancos, pues he calculado el área de uno blanco y lo he multiplicado por ocho”,* en la que el participante F consigue ver que el rectángulo de la terraza (del primer problema) se puede dividir en ocho triángulos. Posteriormente, identificamos una segunda evidencia explicitada de insight cuando el participante también en la entrevista argumenta que, “*Yo a la que he visto que uno blanco… o sea dos blancos eran… no… que uno negro era como dos blancos, pues he empezado a hacer”,* y por tanto consigue descubrir la equivalencia existente entre un triángulo sombreado y dos no sombreados, que le permite continuar con la resolución del problema. En este caso las dos evidencias explicitadas de insight hacen referencia a momentos de insight distintos en la resolución del problema.

Cabe mencionar que no hemos encontrado diferencias significativas independientemente del problema geométrico ip^2 resuelto, en la componente afectiva y expresiva de los participantes, cuando han manifestado evidencias explicitadas o no explicitadas de insight.

En conclusión, en una misma resolución de un problema geométrico ip^2 podemos identificar distintas evidencias de insight, ya sean explicitadas o no explicitadas mediante el descubrimiento de una única nueva reestructuración de los elementos del problema o distintas reestructuraciones que pueden dar lugar a la ocurrencia de un único momento de insight o varios, según sea el caso.

Por otra parte en los momentos de insight de algunos alumnos hemos identificado expresiones que podemos interpretar como de sorpresa agradable, paso del aburrimiento a la idea que da la solución, u otras situaciones con una destacada componente afectiva. Un aspecto que define y puede diferenciar la experiencia del aha! o la ocurrencia del insight de otras experiencias matemáticas, coincidiendo con Liljedalh(2008), es la componente afectiva frente a la experiencia de la precipitada ocurrencia de una nueva reestructuración. La vivencia del insight viene determinada por el propio estudiante.

2. ¿Cómo establecemos niveles de pensamiento productivo?

Hemos establecido los niveles de pensamiento productivo, definiendo tres niveles de resolución a partir de las aportaciones cualitativas originales y creativas, que hemos identificado en el apartado *6.1.5.4 Triangulación: Categorías de resolución*. Asociado a un primer nivel de pensamiento productivo, definimos un primer nivel de resolución basado en aquellas categorías que convergen a la solución del problema geométrico ip^2 respectivo. En un segundo nivel, relacionado con un segundo nivel de pensamiento productivo consideramos aquellas categorías de resolución basadas en reestructuraciones de naturaleza más novedosa, original e innovadora que el resto. De manera que este nivel de pensamiento productivo puede ser más rico y productivo que el primer nivel de resolución. Y por último el tercer nivel de resolución (apartado *6.1.5.5.2 Tercer nivel de resolución: Categorías de resolución ip^2)* y cualitativamente más productivo, está formado por las categorías de resolución en las que se han identificado evidencias de insight que denotan la existencia de momentos de insight (Ver Figura 7.1).

Los resultados del análisis cualitativo y descriptivo de las categorías de resolución en el apartado *6.1.5.4.1 Interpretación de resultados: Niveles de resolución* y en el apartado *6.1.5.5.2 Tercer nivel de resolución: Categorías de resolución ip^2* evidencian que los niveles de resolución establecidos no son excluyentes. Es decir identificamos alguna categoría de resolución del tercer nivel de resolución, como por ejemplo "*Reubicar figuras geométricas*" que en algunos participantes también cumpliría los criterios del primer y segundo nivel de resolución. De forma similar sucede en el segundo nivel de resolución, en el que hemos identificado alguna categoría de resolución que también resuelve el problema geométrico ip^2 respectivo, cumpliendo por tanto el criterio del primer nivel de resolución.

Cabe mencionar, con objeto de discernir las resoluciones más productivas, de las que no lo son, que la clasificación cualitativa de una categoría de resolución depende de cómo la aplicó el participante y del propio problema en sí. Por ese motivo identificamos resoluciones de una misma naturaleza que están clasificadas en un primer nivel de resolución o en un segundo nivel de resolución según sea el caso.

La estrategia de reubicar figuras geométricas planteadas por algunos estudiantes en el problema 7, a nivel productivo no tiene el mismo valor cualitativo que la estrategia reubicar figuras geométricas planteada por algunos participantes en el problema 10. La diferencia radica básicamente en que en el problema 7, el propio enunciado del problema insta a que los participantes reubiquen los triángulos de la figura geométrica para construir un cuadrado, por tanto la resolución se ha clasificado en el primer nivel de resolución, ya que no es significativamente original e innovadora en este problema concreto. En cambio en el problema 10, la estrategia de reubicar los sectores circulares en un circulo y llegar a ver la figura geométrica final que forman sí que la hemos considerado a nivel cualitativo como una estrategia original e innovadora, respecto las que se han planteado en este problema. Por ese motivo se ha clasificado en la categoría de resolución "Reubicar figuras geométricas" perteneciente al segundo nivel de resolución.

Centrándonos en el tercer nivel de resolución productivo, las categorías de resolución en las que hemos identificado momentos de insight son:

- **Fragmentación de figuras geométricas**
- **Reubicación de figuras geométricas**
- **Girar o mover una figura geométrica**
- **Descubrir reestructuraciones no explicitadas.**

En este caso hemos simplificado las categorías de resolución, con la intención de concretar en la medida de lo posible las estrategias más simples que han promovido el insight en la resolución de los problemas geométricos ip^2. Estas tres primeras categorías de resolución corresponden a la identificación de evidencias explicitadas de insight.

- ***Fragmentación de figuras geométricas***. El momento de insight se identifica al fragmentar adecuadamente una figura geométrica, identificando aquellas otras que pueden posibilitar el descubrimiento de una nueva reestructuración que permita la resolución del problema. Esta categoría está supeditada a alguna habilidad de visualización como la identificación visual.
- ***Reubicación de figuras geométricas***. El momento de insight se identifica cuando se ubican determinadas figuras geométricas en una posición concreta, independientemente de las estrategias que se puedan emplear. Esta categoría nos

posibilita una nueva reestructuración que representa una nueva figura geométrica que nos permite continuar con la resolución del problema.

- ***Girar o mover una figura geométrica***. El momento de insight se caracteriza cuando se identifica una imagen dinámica (Presmeg, 1986). En esta categoría de resolución exclusivamente se "gira" o "mueve" una figura geométrica y así se consigue establecer una nueva reestructuración que permite continuar con la resolución del problema.

Estas tres categorías como unitarias que son, por descontado suelen identificarse combinadas con otras categorías de resolución más complejas. Por este motivo hemos identificado algunas de estas categorías celulares en las categorías de resolución que pertenecen al primer nivel o segundo nivel de resolución. La categoría de "***Reubicación de figuras geométricas***", la encontramos integrada en la categoría de resolución del problema 7 denominada "*Reubicación de triángulos hasta formar un cuadrado*" del primer nivel de resolución, en la que hemos identificado un momento de insight por parte del participante A*: "Me he dado cuenta que juntando los dos triángulos pequeños formaba uno idéntico al grande y luego si lo ponía encima de él se formaba un cuadrado"*.
De la misma manera sucede en el segundo nivel de resolución. La categoría unitaria de "***Fragmentación de figuras geométricas***", aparece integrada en la categoría de resolución "*Fragmentación, reubicación y adición de superficies de figuras geométricas*" del segundo nivel de resolución. En ella hemos identificado un momento de insight correspondiente al participante H, en el problema 1: **"***Pues yo me he dado cuenta, que la terraza era como tres cuadrados de la zona… sombreada… y entonces he hallado la área de la terraza…*".

En la tercera categoría "***Girar o mover una figura geométrica"*** la identificación de imágenes dinámicas en la resolución de problemas geométricos ip[2] es una tarea compleja. Coincidiendo con Presmeg (2006) a priori suponemos que la memoria, la descripción y la representación nos proporcionan indicios sobre la naturaleza de la imagen mental. Sólo hemos considerado la identificación de la naturaleza de una imagen como dinámica, cuando los participantes así lo explicitaban en el cuestionario de problemas, de respuestas o en la entrevista semiestructurada, textualmente mediante los verbos de acción "mover", "desplazar", "rotar" o "girar".

En cuarto lugar y por último en la categoría "***Descubrir reestructuraciones no explicitadas***" los estudiantes no explicitan la reestructuración en el problema sin embargo plantean alguna expresión que puede tener ciertos rasgos efusivos y de sorpresa, a partir de la cual inferimos la ocurrencia del momento de insight. Algunos momentos de insight, identificados hacen referencia al participante J: "*Me ha venido un flash y de repente lo he visto todo claro. Intuición*" o al participante P: "*He visto como hacer el problema*".

En estas categorías de resolución, y principalmente en la categoría "*Descubrir reestructuraciones no explicitadas*" coincidimos con Clements y Battista (1992) en que el razonamiento visual puede garantizar un apoyo perceptual significativo de forma implícita en la comprensión de algunas reestructuraciones y relaciones geométricas como la equivalencia de superficies, ángulos opuestos por el vértice, proporcionalidad entre superficies, etc sin necesidad de realizar explicaciones al respecto. Posiblemente un razonamiento visual adecuado de manera implícita, puede inhibir las explicaciones de los participantes respecto a los procedimientos que han aplicado en la nueva reestructuración que les ha permitido continuar o resolver el problema y por tanto la ocurrencia del insight.

Consideramos que aprovechar el razonamiento visual de manera eficiente en las resoluciones de problemas geométricos ip^2 requiere por parte de los participantes vincular la percepción visual con las propiedades y relaciones geométricas (Guzmán, 1996) a partir de una compleja actividad mental. Para ello es necesario de un proceso de análisis que les permita poder fragmentar y reconfigurar nuevas figuras geométricas, así como manipularlas y transformarlas con la intención de obtener nuevas reconfiguraciones de la figura original, que les permita contrastar las características y propiedades a partir de la percepción inicial.

En conclusión los tres niveles establecidos de pensamiento productivo :

1r nivel de resolución. Categorías de resolución que resuelven el problema geométrico ip^2.
2n nivel de resolución. Categorías de resolución especialmente originales y creativas.
3r nivel de resolución. Categorías de resolución en las que identificamos momentos de insight

tienen una estructura que reflejamos en la siguiente Figura 7.1:

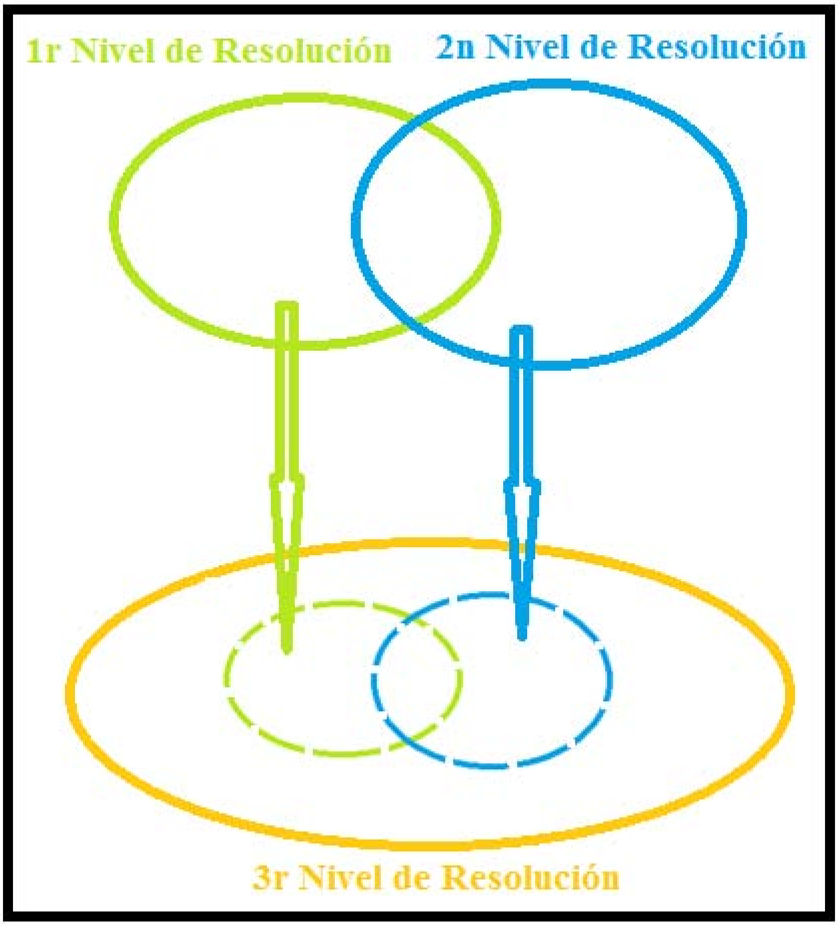


FIGURA 7.1: Niveles de Resolución

Cada uno de los tres niveles queda identificado por una zona. En el primer nivel de resolución se identifican las categorías de resolución que solucionan los problemas geométricos ip^2.

En el segundo nivel de resolución hemos considerado las categorías de resolución más novedosas, originales y creativas que el primer nivel. De este segundo nivel de resolución existen categorías que resuelven el problema y otras que no.

En el tercer nivel de resolución o de pensamiento productivo, está formado por aquellas categorías en las que identificamos momentos de insight. En este tercer nivel distinguimos por un lado las categorías que resuelven el problema y no son especialmente creativas, las que son especialmente creativas y no resuelven el problema y por último las que resuelven el problema y también son especialmente creativas.

3. **¿La ejecución de dos tareas geométricas interactivas, en las que intervienen algunas habilidades de visualización, contribuyen a la predicción de los resultados obtenidos en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo?**

Recordamos que las tareas geométricas interactivas, se plantearon a partir de dos tests interactivos de visualización: un primer test interactivo de visualización en el plano y un segundo test interactivo de visualización en el espacio. Algunas de las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) que se requieren en la ejecución de los tests interactivos son la identificación visual, la discriminación visual, el reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas y la memoria visual.

En términos generales la mayoría de participantes ejecutaron eficazmente las tareas geométricas propuestas en los dos tipos de tests interactivos de visualización, sin resultados diferencialmente significativos respecto la variable Aciertos, aunque el promedio del Tiempo de Reacción nos indicó que los participantes necesitaron más tiempo en discriminar las figuras geométricas planas del primer test interactivo (Wheatley, 1996; Orton, 1997), que la orientación angular de los cuerpos geométricos del segundo test interactivo (Shepard y Cooper, 1985; Sanchez, 2009). Posiblemente el incremento del Tiempo de Reacción en la ejecución de la primera tarea geométrica, puede venir determinado por unos estímulos geométricos que son diferencialmente significativos respecto a los empleados en la segunda tarea geométrica. Es decir los ensayos del primer test interactivo, estaban formados por dos figuras geométricas planas que podían diferir entre ellas (pentominós y hexominós), sin embargo cada ensayo del segundo test interactivo estaba formado, en cada caso, por un cuerpo geométrico tridimensional de 10 cubos, representado en el plano.

Respecto a la ejecución de las tareas en cada uno de los tests interactivos y los resultados obtenidos coincidimos con Plasencia (2000), en que las imágenes mentales pueden contribuir de manera crucial en el pensamiento de las personas creativas. Algunos de los participantes (H,M,P) argumentaban como estrategia de ejecución, imaginarse figuras geométricas como letras o figuras estándar. En otros casos los participantes (I,P,S) se fijaban en una determinada parte de las figuras o cuerpos geométricos, o contaban los cuadros identificados en ellas, etc.

Los resultados obtenidos en el apartado *6.4.1 ANÁLISIS Y CORRELACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2 Y LOS TESTS INTERACTIVOS,* nos sugieren evidencias de una cierta correlación positiva moderada (r=0,456) entre la frecuencia de problemas geométricos ip^2 resueltos correctamente (RCP) y la frecuencia de aciertos (AC) en la ejecución de la tarea geométrica del primer test interactivo de visualización en el plano. Concluimos por lo tanto la existencia de una relación moderada entre aquellos participantes que denotando algunas significativas habilidades de visualización ejecutaron la tarea geométrica con un alto porcentaje de aciertos, y aquellos que resolvieron un mayor número de problemas geométricos ip^2.
En cambio los resultados de los participantes no mostraron evidencias de una posible relación entre la resolución de los problemas geométricos ip^2 y la ejecución de la tarea geométrica del segundo test de visualización en el espacio.

En cierta manera, la naturaleza que sustenta la ejecución de la tarea geométrica de discriminar visualmente figuras planas puede haber influido moderadamente en el planteamiento, abordaje y resolución de los problemas geométricos ip^2, por encontrarse posiblemente también presente en sus resoluciones.
En el apartado *6.1.5.1 RESULTADOS CUESTIONARIO PROBLEMAS* comprobamos que en una mayoría de categorías de resolución, se ha requerido en algún momento de la resolución, identificar figuras geométricas planas, reconocer sus posiciones o relaciones geométricas así como discriminar visualmente según su tamaño y forma. En otras categorías de resolución como en *"Girar el cuadrado de mayor superficie"* en el problema 3, en las que se han identificado imágenes dinámicas (Presmeg, 1986) entendemos que la memoria visual desempeña un papel crucial en la manipulación de figuras geométricas conservando su tamaño y forma.

Las categorías de resolución obtenidas por los participantes en la resolución de problemas geométricos ip^2 que hemos seleccionado, no comparten la naturaleza de las habilidades de visualización aplicadas en cuerpos geométricos tridimensionales representados en el plano, que se requieren en la ejecución significativa de la tarea geométrica del segundo test interactivo de visualización. Prácticamente en ningún problema geométrico ip^2, se plantean cuerpos geométricos como elementos clave de la resolución, a excepción del problema 8 (sólo el participante A consiguió resolverlo). Podemos pensar que los participantes no requieren de habilidades de visualización entre cuerpos geométricos para resolver los problemas de nuestra investigación, lo que nos sugiere que realmente no podamos establecer ninguna correlación significativa.

Posiblemente una muestra más grande de participantes, podría dar resultados más afinados en el estudio y análisis de las posibles correlaciones. No obstante concluimos que fomentar y desarrollar habilidades de visualización en los participantes de nuestra investigación como la identificación y discriminación visual, el reconocimiento de relaciones y posiciones geométricas, y la memoria visual en figuras geométricas planas, podría facilitar el planteamiento y las resoluciones exitosas de los problemas geométricos ip^2 seleccionados en nuestro estudio.

4. ¿La actitud de los estudiantes hacia las matemáticas contribuye a la predicción de los resultados obtenidos en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo?

En general los resultados obtenidos en el test de actitudes (Femena Sherman, 1976; Mann, 2005) realizado en nuestra investigación, denotaron unas puntuaciones altas respecto la actitud de los participantes hacía el éxito en matemáticas así como una actitud "Favorable" de confianza en el aprendizaje de las matemáticas. Este resultado nos parece razonable ya que los participantes de la muestra son estudiantes de 4t de ESO, seleccionados a partir de sus "*buenos"* resultados obtenidos (80% aciertos) en la prueba de competencias básicas realizada en la primera Fase Diagnóstica de Selección. Es decir son "*buenos estudiantes*" en el sentido que tienen asimiladas las competencias básicas en la educación secundaria según la prueba realizada. Posiblemente el hecho de ser "*buenos estudiantes*", muestra que una mayoría de ellos (65%) tengan una componente actitudinal "Favorable" hacía el éxito en matemáticas y también dispongan (60%) de una componente actitudinal "Favorable" respecto la confianza en su aprendizaje matemático, cuando se enfrentan ante situaciones o problemas matemáticos nuevos e ingeniosos.

En cambio los resultados más bajos obtenidos en el test de actitudes corresponden a la actitud respecto la ansiedad y la motivación en matemáticas. Tan sólo un 30% de los participantes denotaron una componente actitudinal "Favorable" respecto la ansiedad matemática y un 40% denotaron una componente actitudinal "Favorable" respecto su motivación hacía las matemáticas. Estos datos nos sugieren que más de la mitad de los participantes mostraron una componente actitudinal "Regular" o "No Favorable" en la tercera escala *ansiedad matemática* denotando incomodidad, confusión, temor o ansiedad ante una mayoría de las situaciones que se plantearon en la escala del test. Por otra parte más de la mitad de los participantes consideraron una componente actitudinal "Regular" o "No Favorable" en la cuarta escala, *motivación hacía las matemáticas*, lo que nos indica que para estos estudiantes la mayoría de situaciones matemáticas de la escala del test no son motivantes ni agradables.

Resumiendo, los resultados obtenidos en las cuatro escalas del test de actitudes nos indican que una mayoría de participantes denotan una actitud positiva hacía el éxito en las matemáticas y de confianza respecto su aprendizaje matemático, pero por otra parte aunque explicitan no estar motivados ante las matemáticas, si denotan indicios de ansiedad en una mayoría de situaciones planteadas en esta escala. En cierta manera estos resultados en una primera lectura parecen contradictorios ya que los participantes explicitan una actitud positiva hacía el éxito en las matemáticas y sin embargo afirman no estar motivados. Una interpretación posible es que tienen autoconfianza en sí mismos y sin embargo no tienen curiosidad por las situaciones conocidas en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la escala *ansiedad matemática*, entendemos que un estudiante que se encuentre nervioso, tenso o con ansiedad ante la resolución de un problema que puede suponer un desafío matemático, difícilmente podrá ser creativo (Gnedenko, 1982) y tener la ocurrencia de un insight. En esta línea diversos autores (Urban, 1995; Pawlak, 2000) consideran la motivación como una de las componentes personales especialmente determinantes en el comportamiento creativo.

Respecto el estudio de una posible correlación entre las puntuaciones de los participantes obtenidas en las cuatro escalas del test de actitudes y la resolución de problemas geométricos ip^2, queremos enfatizar que sólo en algunos participantes concretos hemos identificado cierta relación. A nivel cualitativo, en algunos casos puntuales hemos establecido cierta relación entre aquellos participantes que resolvieron más de la mitad de problemas geométricos ip^2 y aquellos que denotaron una componente actitudinal "Favorable" en alguna escala del test.
Por ejemplo en la primera escala (actitud hacía el éxito en las matemáticas), segunda escala (confianza en el aprendizaje matemático), tercera escala (ansiedad matemática) y cuarta escala (motivación hacía las matemáticas), los participantes (P,A,K,F,H), (F,R,I,K,H,P,J,L), (K,L,P), (K,P,H) respectivamente cumplen con la relación explicitada anteriormente en cada una de las escalas respectivas. Contrariamente los participantes Q y C que resolvieron 1 y 2 problemas geométricos ip^2 denotaron una componente actitudinal "No Favorable" en una mayoría de escalas del test de actitudes.

Independientemente de los casos particulares, los resultados del apartado *6.4.2 ANÁLISIS Y CORRELACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2 Y EL TEST DE ACTITUDES*, nos indican que no existen evidencias significativas de una posible relación entre la variable Problemas Resueltos

(RCP) y cualquiera de las cuatro escalas del test de actitudes (ValorZescala, z=1,2,3,4). Lo que nos sugiere que la actitud hacía el éxito en matemáticas o la confianza de los participantes en su aprendizaje matemático en nuestro caso y según los resultados obtenidos en las escalas del test, no muestran una relación con la frecuencia de problemas geométricos ip^2 resueltos correctamente. De la misma forma la actitud de los participantes hacía la ansiedad o la motivación hacía las matemáticas, tampoco indican relación con la frecuencia de problemas geométricos ip^2 resueltos correctamente.

En nuestra investigación sólo podemos afirmar, que no existen evidencias significativas ni estadísticas que avalen una relación entre la actitud de los estudiantes, respecto las cuatro escalas actitudinales (éxito hacia las matemáticas, confianza, ansiedad y motivación) y la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, a excepción de algunos casos particulares.

7.2 APORTACIONES E IMPLICACIONES EN LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

En la literatura actual, apenas existen investigaciones que como la nuestra estudien el insight como proceso, en la resolución de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, con estudiantes de 4t de ESO desde la didáctica de la geometría.

Los resultados de nuestra investigación a partir de la muestra de estudiantes de 4t de ESO y la resolución de estos problemas geométricos (ip^2) nos aportan información sobre las estrategias que utilizan en sus resoluciones. Estas aportaciones cualitativas apuntan a una caracterización detallada de aquellas resoluciones y estrategias que seguramente podrán desarrollar, potenciar y fomentar el pensamiento productivo y por tanto la ocurrencia del insight o la vivencia del Aha!, cuando los estudiantes de la muestra se enfrentan ante los problemas planteados. Concretamente este conjunto de categorías de resolución, intrínsecamente está relacionado con fragmentar, reubicar y girar o mover figuras geométricas, es decir con manipularlas adecuadamente desde distintas vertientes. Estas categorías de resolución, pueden aparecer combinadas con otras estrategias en algunos casos, constituyendo las resoluciones de los participantes que sustentan o promueven los momentos de insight identificados en la resolución de los problemas geométricos ip^2.

El problema está en la situación inversa. Las categorías de resolución identificadas podrían formar parte de un conjunto más amplio que también resolviese esta misma colección de problemas. Situados en una relación de enseñanza aprendizaje, la enseñanza reproductiva de las estrategias que determinan las categorías de resolución, incluso la hipotética colección total, no nos asegura que sea efectiva en casos posteriores a nivel de aprendizaje. Esta línea de estudio, abre una nueva investigación futura.

Dadas las categorías de resolución obtenidas, seguramente sería importante a lo largo de la educación escolar, trabajar estrategias de fragmentación, reubicación y manipulación de figuras geométricas, adaptadas a los contenidos y procedimientos en geometría de cada curso escolar. Por ejemplo en primaria, promover actividades de enseñanza y aprendizaje que impliquen construcciones manipulativas y geométricas, a partir de materiales diversos o figuras geométricas que los niños puedan tocar y manipular.

En educación secundaria, seguramente sería positivo fomentar la realización de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo. Problemas geométricos innovadores, que fomenten el pensamiento lateral (De Bono, 1971), buscando el equilibrio entre el aprendizaje de fórmulas y el pensamiento productivo. Es decir problemas creativos, que se adapten a los contenidos y procedimientos del curso escolar, y que requieran de la aplicación de una o varias habilidades de visualización como la identificación y discriminación visual, la memoria visual o el reconocimiento de posiciones y relaciones geométricas, que puedan propiciar la ocurrencia del insight, al menos en una de sus posibles resoluciones. Especialmente todos aquellos problemas geométricos, que supongan un desafío matemático para nuestros participantes en los que se incentive la fragmentación, manipulación y reubicación de figuras geométricas con la intención de construir otras nuevas que permitan la resolución del problema.

Actualmente, además se debería favorecer la utilización de programas interactivos como el Cabri-Géomètre o el GeoGebra, en actividades de enseñanza y aprendizaje en la geometría escolar, con la finalidad de fomentar desde la perspectiva visual las estrategias para manipular figuras y cuerpos geométricos. En el entorno de las nuevas tecnologías (Palais, 1999; Sinclair, 2003; Gilbert, 2005), la visualización mediante programas interactivos didácticos, a nivel escolar puede suponer una herramienta especialmente útil, para trabajar la manipulación de figuras y cuerpos geométricos, la posición angular en el plano o el espacio respectivamente, así como la fragmentación de figuras y cuerpos geométricos. Los recursos interactivos (TIC), aplicados adecuadamente en las clases de geometría, complementan y fomentan las habilidades de visualización de los participantes de nuestra investigación, necesarias en futuras ocasiones para resolver situaciones o problemas geométricos en los que se requiera manipular, fragmentar o reubicar figuras geométricas.

Otra de las implicaciones didácticas que se desprende de nuestro trabajo, es la realización de una amplia lista de problemas geométricos ip^2. Proponemos una lista (Anexo B.1 LISTA RECOPILACIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS IP^2) de problemas geométricos ip^2 que pueden utilizarse en el aula en la educación secundaria escolar, así como las referencias bibliográficas de esta recopilación. Esta lista de problemas puede permitir a los estudiantes trabajar resoluciones y estrategias que faciliten y fomenten el abordaje y la resolución de este tipo de problemas geométricos ip^2 tanto con lápiz y papel, como a partir de la implementación de software dinámicos (TIC).

Entendemos que la importancia más que en la solución reside en favorecer el esfuerzo a partir de la resolución de problemas geométricos abiertos, creativos, no resueltos o potencialmente de insight perceptivo. El efecto Zeigarnik así lo confirma, tenemos tendencia a recordar las cosas no cerradas e inacabadas con mayor facilidad que las que han sido completadas. Consideramos que deberíamos ampliar la investigación con distintos aspectos que nos han sugerido cuestiones a reflexionar en el desarrollo de nuestro trabajo y que exponemos a continuación en el siguiente apartado.

7.3 PREGUNTAS ABIERTAS Y PROSPECTIVA DE INVESTIGACIÓN FUTURA.

Nuestra investigación es un trabajo limitado en el tiempo y acotado en sus objetivos. Esto nos permite poder plantear diversas actuaciones futuras que pueden continuar e implementar mejoras en este trabajo. A lo largo de su desarrollo hemos tenido que prescindir de caminos que se nos abrían y preguntas que nos formulábamos y que por diversas razones no podíamos abordar. También nos hemos encontrado con limitaciones que se nos hacían evidentes. Todo ello nos permite aquí y ahora plantear algunas preguntas abiertas:

1. ¿Qué momentos de insight identificamos en estudiantes de 4t de ESO en la resolución de problemas geométricos ip^2 (3D) basados en cuerpos geométricos?
2. ¿Con estudiantes de otras etapas educativas (secundaria, post-obligatoria, universitaria), que momentos de insight, resoluciones, estrategias y dificultades se identificarían en la resolución de los problemas geométricos ip^2 planteados en esta investigación?
3. ¿Qué diferencias encontramos a nivel visual y actitudinal entre el participante en el que hemos identificado mayor número de momentos de insight respecto a otros participantes de la muestra?
4. ¿Qué habilidades de visualización, estrategias y resoluciones identificamos en estudiantes de 4t de ESO que pueden contribuir en la resolución exitosa de problemas geométricos ip^2 (3D) basados en cuerpos geométricos?
5. ¿Qué actividades de enseñanza y aprendizaje promueven eficazmente, las estrategias identificadas en nuestra investigación que pueden propiciar el insight en la resolución de los problemas geométricos ip^2 estudiados?

6. ¿Existen problemas geométricos "facilitadores" cuya resolución podría ayudar heurísticamente a los estudiantes de secundaria en la resolución de los problemas geométricos ip^2 planteados en nuestra investigación?

Estas preguntas de investigación se concretan respectivamente en las siguientes propuestas de investigación futuras:

1. Una investigación interesante sería ampliar nuestro estudio a otro tipo de problemas geométricos potencialmente de insight, poniendo un mayor énfasis en aquellos problemas en los que intervienen cuerpos geométricos. Concretamente en identificar, explorar y describir las resoluciones, estrategias y momentos de insight supeditadas a los problemas geométricos basados en cuerpos geométricos, el cambio dimensional, etc.

2. Otra investigación interesante de futuro, consiste en escoger una nueva muestra más amplia de estudiantes de la educación obligatoria o postobligatoria, como por ejemplo de bachillerato y contrastar los resultados obtenidos a partir de los problemas geométricos ip^2 de nuestro estudio.
   Distintos autores (Treffinger, Feldhusen y Isaksen, 1990; Urban, 1995) sugieren que el conocimiento general y específico de una disciplina, entre otros factores, es un elemento clave que puede facilitar la resolución de problemas no rutinarios, creativos, originales e innovadores. Por ese motivo vamos a plantear otra vertiente de estudio futura basada en investigar qué relaciones o diferencias existen entre la muestra de participantes de nuestra investigación y aquellos participantes que obtuvieron un porcentaje más bajo de asimilación de las competencias básicas en matemáticas, según la prueba de evaluación realizada del currículum vigente en Secundaria. Es decir nos interesa contrastar, inferir, identificar, explorar y describir si existen diferencias significativas entre estos dos grupos de participantes según tres aspectos:
   a. Categorías de resolución y momentos de insight identificados.
   b. Resultados en los tests interactivos de visualización.
   c. Resultados en el test de actitudes.

3. Una nueva línea de investigación consiste en estudiar aquellos casos paradigmáticos que han destacado por su Comportamiento Resolutor, Visualizador o Creativo-insight así como por la componente actitudinal, a partir de los resultados obtenidos en la resolución de problemas geométricos ip^2, los tests interactivos y el test de actitudes. Concretamente, entre otros casos relevantes, nos interesamos por el estudio de casos del participante en el que hemos identificado una mayor frecuencia de momentos de insight. En segundo lugar incidiremos en el estudio de casos del participante que más problemas geométricos ip^2 ha resuelto.

Nos va a interesar explorar, identificar y describir si existen diferencias cualitativas en el Comportamiento Visualizador y la Componente Actitudinal entre estos casos paradigmáticos y el resto de participantes de la muestra.

4. – 5. Las preguntas 4 y 5 hacen referencia a la prospectiva de futuro respecto a investigaciones en Didáctica de la Geometría. Estas investigaciones se concretan por una parte en estudiar las habilidades de visualización y por otro en el estudio de actividades de enseñanza y aprendizaje en geometría, que puedan promover la aparición de momentos de insight en la resolución de problemas geométricos ip^2. Así como la utilización de materiales y recursos interactivos (TIC) como el Geogebra, Cabri, etc con este propósito.

6. Planteamos una nueva línea de investigación futura, basada en el estudio de los problemas "facilitadores" que podrían ayudar y promover la resolución exitosa de los problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo, planteados en nuestra investigación.

Kershaw y Ohlsson (2001) realizaron una investigación en la que estudiaron el problema geométrico de insight de los nueve puntos (Weisberg y Alba, 1981) expuesto en la Fig 4.5.1 en el *capítulo 2: Insight geométrico potencialmente perceptivo*. Concretamente estudiaron si existen problemas facilitadores que pudieran influir significativamente en la resolución de este problema. Emplearon problemas para poder trabajar las dificultades encontradas en la resolución de este problema de insight. Estos consistían desde trazar líneas en un espacio entre dos puntos, hasta posibilitar que se cruzasen fuera del diagrama de trabajo. Los resultados de la investigación mostraron que el grupo de participantes que trabajó los problemas facilitadores obtuvieron mejores resultados en la resolución del problema de insight que el grupo de control.

En cambio en la investigación de Guilera (2002) los resultados concluyen que los problemas facilitadores no influyeron en la mejora de la eficacia de resolución en el problema de las tres bombillas. Guilera (2002) sugiere que posiblemente el conocimiento tácito generado en la resolución de problemas facilitadores sólo funciona cuando corresponde directamente con las estrategias concretas necesitadas en el problema de insight, hasta el punto de convertir un problema de insight en un problema de transformación y solución incremental. Corrobora que en general la eficacia de resolución de los problemas de insight no tiene correlaciones significativas con la eficacia de resolución de problemas lógicos y matemáticos, a menos que como hemos explicitado anteriormente empleen las mismas estrategias concretas.

Presentaremos los diferentes resultados obtenidos de la investigación, en distintos seminarios y congresos sobre Educación y Didáctica de la Geometría, así como en otros centrados en Creatividad Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, J, L. (1999). *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*. Barcelona: Gedisa.

Alsina, C. (2007). Las musas matemáticas: hacia una enseñanza creativa. *Sigma, 30*, p. 131-135

Albertí, M. (2010). *La creatividad en matemáticas. Cómo funciona una mente maravillosa*. España: RBA colección el mundo es matemático.

Amabile, T. (1993). What does a theory of creativity require?. *Psychological Inquire*, *4(2)*, p. 179-181

Amabile, T. (1996). *Creativity in context*. Colorado: Westview Press.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, *52(3)*, p. 215-24.

Arnold, J.E. (1959). Creativity in engineering. En P. Smith. (Ed.), *Creativity. An examination of the creative process*. Nueva York: Hastings House, p. 33-34.

Arnold, J.E. (1964). *Education for innovation, en Source book of creative thinking*. Nueva York: Scribner, p.127-138.

Arnheim, R. (1986). *El pensamiento visual*. Barcelona: Paidós.

Arteaga, E. (2008). Aproximación teórica al concepto de creatividad: un análisis creativo. *Revista Paideia Puertorriqueña*, *3 (1)*. Universidad de Puerto Rico.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7(3)*, p. 245-274.

Baddeley, A. D. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, *4*, p. 417-423.

Baddeley, A. D. y Hitch, G. (1974). Working memory. *The Psychology of Learning and Motivation, 8*, p. 47-89.

Baddeley, A.D. y Logie, R.H. (1999). Working memory: The multiple-component model. In A. Miyake y P. Shah (Eds.), *Models of working memory* (pp. 28–61). New York: Cambridge University Press.

Ballesteros, J. A (2001). *Habilidades cognitivas básicas. Formación y deterioro*. Madrid: UNED

Barnes, M. S. (2000). Magical moments in mathematics: Insights into the process of coming to know. *For the Learning of Mathematics*, *20(1),* p. 33-43.

Barroso, R. y Gavilán, J.M. (2003). Resolución de problemas de geometría con Cabri II, *Números 54*, pp. 23-30.

Batdal, G. (2008). History of the gifted education and developing creativity in Turkey. Consultado el 18 Febrero, 2012, from International Workshop and Research Project: Intercultural Aspects of Creativity: Challenges and Barriers Web site: http://construct.haifa.ac.il/~rozal/templeton/Gulsah%20BATDAL-%20Templeton%20workshop.pdf

Batllori, J. (2000). *Juegos para entrenar el cerebro. Desarrollo de habilidades cognitivas y sociales*. Madrid: Nancea.

Beetlestone, F. (2000). *Niños creativos, enseñanza imaginativa*. Madrid: La Muralla

Benett, G. K.; Seashore, H.G. y Wesman, A. G. (2002). *Manual DAT. Test de aptitudes diferenciales*. Madrid: TEA 15ª Edición.

Bermejo, M. R. (1995). El insight en la solución de problemas: cómo funciona en los superdotados. Tesis Doctoral. Microficha: Universidad de Murcia

Bericat, E. (1998). *La integración de los métodos cuantitativo y cualitativo en la investigación social*. Barcelona: Ariel, S.A.

Berlyne, E. D. (1976). *Estructura y función del pensamiento*. México: Trillas.

Best, B. J. (2001). *Psicología cognitiva*. Madrid: Paraninfo Thomson.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 125-203). New York, USA: Academic Press.

Blakemore, S.J. y Frith, U. (2008). *Cómo aprende el cerebro. Las claves para la educación*. Barcelona: Ariel

Bliss, J.; Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research*. Londres: Coom Helm.

Boden, M.A. (1994). *La mente creativa. Mitos y mecanismos*. Barcelona: Gedisa

Boden, M.A. (2000). Computer models of creativity. *The Psychologist*, *13(2)*, p.72–76

Bolt, B. (1988). *Actividades Matemáticas*. Barcelona: Labor

Boltyanskii, V.G. (1973). *Figuras equivalentes y equidescomponibles*. México: Limusa-Wiley

Brown, R.T. (1989). Creativity: What are we to Measure?. En: Glover, J.A.; Ronning, R.R. y Reynolds, C.R. (Eds.). *Handbook of Creativity*. New York: Plenum, p. 3–32.

Brown, D. L. y Wheatley, G. (1989). Relationship between spatial ability and Mathematics knowledge. *Proceedings of the XI Annual Meeting Psychology of Mathematics Education*. N. New Brunswick, NJ.

Brown, D.L. y Wheatley, G.H. (1990). The role of imagery in mathematics reasoning. In *Proceedings of the Fourteenth Annual Meeting International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference*, (pp. 217-224). Mexico.

Burin, D.; Duarte, A.; Delgado, A. y Prieto, G. (2004). Memoria de trabajo visoespacial y aptitud de Visualización. *Cognitiva*, *16 (1)*, p. 95-113

Callejo, M.L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea, 2ª ed, 1998

Cambray, R. (2011). Descubrimiento de los teoremas de Pitágoras en la educación secundaria. En *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Universidad de México.

Carlton, V. L. (1959). An analysis of the educational concepts of fourteen outstanding mathematicians, 1790–1940, in the areas of mental growth and development, creative thinking, and symbolism and meaning. *Dissertation Abstracts*, *20(6)*, 2131.

Castañares, W. (2008). El acto creativo: Continuidad, innovación y creación de hábitos. *Utopìa y Praxis Latinoamericana* [online], *13(40)*, p. 67-82. Disponible en: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S131552162008000100004&lng=es&nrm=iso

Castellanos B. Mª C. (2001). *Disociación en la memoria de trabajo viso-espacial*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cattell, R.B. y Cattell, A.K.S. (1994). *Tests de Factor «g», Escalas 2 y 3*. Madrid: TEA Ediciones, S. A.

Chacón, Y.A. (2005). Una revisión crítica del concepto de creatividad. *Actualidades Investigativas en Educación*, *5(1)*, p.1-30.

Cladellas P.R. y Castelló T.A. (2008). Efectos diferenciales de un prolongado entrenamiento en una tarea espacial entre hombres y mujeres. *Apuntes de Psicología*, *26(1)*, p. 117-128.

Clements, M.A. (1981). Visual imagery and school Mathematics. Parte I. *For the learning of Mathematics*, *2(2)*, p. 2-9.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 420-464). New York: Macmillan

Colomé, R.; Sans, A.; López-Sala, A. y Boix, C. (2009). Trastorno de aprendizaje no verbal: características cognitivo-conductuales y aspectos neuropsicológicos. *Revista de neurología, 48*

Courant, R. y Robbins. H. (1996). *What is Mathematics?* An elementary approach to ideas and methods.(2nd edition, revised by Ian Stewart). London: Oxford University Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). Implications of a systems perspective for the study of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity.* p. 313−338. Cambridge UK: Cambridge University Press.

Curriculum Educació secundaria. (2007). Decret 143/2007 DOGC núm. 4915.

Cunningham, B. y MacGregor, N.J. (2008). Rebus puzzles as insight problems. *Behavior Research Methods, 40 (1)*, p. 263-268.

Davidson, N.; Seifert, C.M.; Meyer, D.E; Patalano, A.L. y Yaniv, I. (1995) Demystification of Cognitive Insight: Opportunistic Assimilation and the prepared-Mind Perspective. En R.J. Sternberg y J.E. Davidson (Eds.). *The nature of insight*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Davis, P. y Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática*. Barcelona: Labor y Ministerio de Educación y ciencia.

De Bono, E. (1971). *The Use of Lateral Thinking*. Londres: Penguin Books. Traducción castellana: Barcelona: Paidós, 2008.

De Bono, E. (1974). *El pensamiento lateral*. Barcelona: Paidós.

De Bono, E. (1987). *Aprender a pensar.* Barcelona: Plaza&Janés

De Bono, E. (1992). *Yo tengo razón, tú estás equivocado*. Barcelona: Divulgación.

De la Torre, S. (1991). *Evaluación de la creatividad. TAEC, un instrumento de apoyo a la reforma*. Madrid: Escuela Española.

De la Torre, S. (1984). *Creatividad Plural. Sendas para indagar sus múltiples perspectivas*. Barcelona: PPU

De la Torre, S. (1993). *Creatividad Plural*. Barcelona: PPU.

De la Torre, S. (2006). Un modelo polivalente para evaluar la creatividad. En S. de la Torre, y V. Violant, *Comprender y evaluar la creatividad*, 2: Cómo investigar y evaluar la creatividad. Málaga: Aljibe.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), p. 14-20

Dellarosa, D. (1988). A history of thinking. En R.J. Sternberg y E.F. Smith (Eds), *The psychology of human thought*. Nueva York: Cambridge University Press.

Della Sala, S.; Gray, C.; Baddeley, A.; Allamano, N. y Wilson, L. (1999). Pattern span: a tool for unwelding visuoespatial memory. *Neuropsychologia, 37*, p. 1189-1199.

De Nicolas C. J. (1999). *El insight creativo*. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

Denis, M. (1984). *Imágenes mentales.* Madrid: Siglo XXI de España editores, S.A.

Díez-Palormar, J. y Kanes, C. (2012). *Family and community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics's achievement*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de publicacions.

Dominowski, R.L. y Dallob, P. (2002). Insight and Problem solving. Reprint of Sternberg, R.J. y Davidson, J.E. (1995). *The nature of insight*. 2, p. 33-65. Cambridge, MA:MIT Press

Duncker, K (1945) On problem solving. *Psychological Monographs, 58 (2)*, Whole no. 270.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V.Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51)

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North AmericanChapter of the International Group of PME, Cuernavaca, México* (pp. 3-26). Columbus, Ohio.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* p. 103–131

Edo, M.; Baeza, M.; Deulofeu, J. y Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Unión 14,* p. 61-75.

Ellen, P. (1982). Direction, past experience, and hints in creative problem solving: Réplica de Weisberg y Alba. *Experimental Psychology: General*, *111*, pp. 316-325

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, p. 42–53.

Fandiño P. M.I. y D'Amore, B. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. Relime (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa), 10(1). p. 39-68.

Feist, G. (1998). A meta-analysis of personality in scientific and artistic creativity. *Personality and Social Psychology Review, 2 (4)*, p. 290-309.

Feist, G. y Barron, F. (2003). Predicting creativity from early to late adulthood: Intellect, potencial, and personality. Journal *of Research in Personality, 37*, p. 62-88.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). *Instruments designed to measure attitudes towards the learning of mathematics by females and males*. Madison: University of Wisconsin.

Fernández, C. (2003). Didáctica del número natural versus metodología creativa. En *Creatividad aplicada*, Gervilla, A. (coord.). Universidad de Málaga, p.701-722

Fernández Huerta, J. (1968). La enseñanza programada y las máquinas de enseñar. *Tiempo y Educación, 2(9)*.

Feynman, R. (1999). *The pleasure of finding things out*. Cambridge, MA: Perseus Publising.

Finke, R. A. (1990). *Creative imagery: Discoveries and inventions in visualization*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Finke, R.A.; Ward, T.B. y Smith, S.M. (1995). *Creative Cognition: Theory research and applications*. Cambridge, MA: The Mit Press.

Fiol, M. L. (2004). La forma de las cosas: del sueño a la imaginación. En M. F. Blanco (Ed), *Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO*. p. 147-181. Instituto Superior de Formación de Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Fiol, M. L. (2007). Tota comparació és inevitable. *Perspectiva escolar, 314*, p. 8-15.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24(2)*, p. 139-162.

Freud, S. (1915). *Lo inconsciente. Metapsicología*. Madrid: Biblioteca Nueva.

Frijda, N.H. y de Groot, A.D. (1982). *Otto Selz: His contribution to psychology*. The Hague: Mouton.

Froufe, M. (1997). *El inconsciente cognitivo: La cara oculta de la mente*. Madrid: Biblioteca Nueva.

Fujita, T.; Jones, K. y Yamamoto, S. (2004): The role of intuition in geometrics education: learning from the teaching practice in the early 2oth century. In, *10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10), Copenhagen.*

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. In I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education,* p. 37-51. IOS. Press. Voorburg.

Garbin, S. (1998). *Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresados en diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Estudio exploratorio*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Gardner, M. (1987). *Carnaval Matemático*. Madrid: Alianza.

Gardner, M. (1989). ¡Aja! Paradojas: Paradojas que hacen pensar. Barcelona: Labor, 4ª edición

Gardner, H. (1995). *Mentes creativas. Una anatomía de la creatividad*. Barcelona: Paidós.

Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada. Las inteligencias múltiples en el Siglo XXI*. Barcelona: Paidós

Gelade, G. (2002). Creativity style, personality, and artistic endeavor. *Genetic, Social and General Psychology Monographs, 128 (3)*, p. 213-234.

Gervilla, A. (1986). *La creatividad en el aula*. Málaga: Innovare

Gervilla, M.A. (2003). *Creatividad aplicada. Una apuesta de futuro*. Madrid: Dykinson

Gilbert, J.K. (2005). Visualization: A metacgonitive skill in science and science education. In J.K. Gilbert (Ed.), *Visualization in science education*. Dordrecht: Springer.

Gnedenko, B.V. (1982). Sobre la creatividad Matemática. En B.V. Gnedenko *Formación de la Concepción del mundo en los estudiantes en el proceso de enseñanza de la Matemática*. Moscú: Biblioteca del Maestro.

Goleman, D.; Kaufman, P. y Ray, M. (1992). *El espiritu creativo*. Barcelona:Vergara.

González Martín, A.S. y Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the PME,* 2, p. 479–486

Goñi, A. (2000). *Desarrollo de la creatividad*. San José: UNED.

Gorgorió, N. (1995). *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials*. Tesi Doctoral. Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona. ISBN 84490001455.

Grabarchuk, P. (2009). *Juegos de ingenio Mensa*. Barcelona: Tutor

Greeno, J. G. (1977). Process of understanding in problem solving. En N.J. Castellan, D.B. Pisoni, y G. R. Potts (eds.), *Cognitive theory*, 2. Hillsdale, NJ :Erlbaum

Güell, L. I. (2006). *El Cerebro al Descubierto: de la emoción a la palabra*. Barcelona: Cairos

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. Memorias del III Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, pp. 44-59. Extraído el 23 de noviembre, 2011 de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Matematics Education, 1,* pp. 3-19. España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. (1998). *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización.* Texto de la ponencia invitada en el *Encuentro de Investigación en Educación Matemática, TIEM98*. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, España. Documento manuscrito, obtenido el 10-03-2011 del sitio web personal http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* p. 27-44.

Gutiérrez, A. y Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Roterdam: Sens Publishers

Guilera, L. (2002). *Vias de acceso conceptual en la resolución de problemas: Importancia de los estímulos sensoriales*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Guilford, J. P. (1950). *Creativity*. *American Psychologist, 5*, p. 444–454.

Guilford, J.P. (1962). Factores que favorecen y factores que obstaculizan la creatividad. En *implicaciones educativas de la Creatividad*. En Curtis, G.; Demos, y Torrance, E: *Implicacines Educativas de la Creatividad*. Salamanca: Anaya, p. 113-130

Guilford, J.P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill

Guilford, J.P.; Lageman, J.K.; Eisner, E.W.; Singer, J.L.; Wallach, M.A.; Kogan, N.; Sieber, J.E., y Torrance, E.P. (1994). *Creatividad y educación*. Barcelona: Paidos

Gulsah B. (2008). History of mathematics for creative teaching. In *Proceedings of The 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students, 2*, pp.87-96.

Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Pirámide: Madrid

Hofstadter, D. R. (1995). *Gödel, Escher, Bach, un eterno y grácil bucle*. Barcelona:Tusquests.

Jones, K. y Simons, H. (2000). The Student Experience of Online MathematicsEnrichment. In: T. Nakahara and M. Koyama (Eds), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Hiroshima, Japan, Volume 3, p. 103-110.

Hark, M. T. (2010). The psychology of thinking before the cognitive revolution: Otto Selz on problems, schemas, and creativity. *History of Psychology*, 13(1), p. 2-24.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo de la matemática*. Madrid: Espasa Calpe

Hallman, R. (1963). Condiciones necesarias y suficientes para la creatividad. En *Implicaciones educativas de la creatividad*. En Curtis, G., Demos, y Torrance, E. (1976). *Implicaciones Educativas de la Creatividad*. Salamanca: Anaya p. 22-36

Hans, M. J.A.; Muñoz, S. J. y Fernández-Aliseda, R. A. (2004). Dividir en partes iguales. *Suma, 45*, p.93-96.

Heath, T.L. (1921). *A history of greek mathematics.* Vols. I, II. Nueva York: Dover.

Helmut, E. L. (2008). Orígenes de la psicología de la Gestalt. *Mente y Cerebro, 30* p.74-79.

Hernández, M. y Socas, M. (1999). Las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. El papel de los materiales didácticos. En Socas, M,; Camacho, M. y Morales, A. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática I. Dpto. de Análisis matemático*. Universidad de la Laguna, p. 105-114.

Hernando, E.A. (2007). *Teoría e implementación de modelos computacionales de comportamientos inteligentes perspicaces (insight)*. Tesis doctoral. Madrid: UPM

Herran Gascon, A. de la (2009) Contribución al Concepto de Creatividad: Un enfoque Paquidérmico (1ª parte). *Educación y Futuro*. *Revista de Investigación Aplicada y Experiencias Educativas*. 21, p. 43-70.

Herran Gascon, A. de la (2010) Contribución al Concepto de Creatividad: Un enfoque Paquidérmico (2ª parte). Educación y Futuro. *Revista de Investigación Aplicada y Experiencias Educativas.* 22, p. 151-175.

Holt, M. (1988). *Matemáticas recreativas 3*. Barcelona: Martinez Roca.

Isaak, M. I., y Just, M. A. (1995). Constraints on thinking in insight and invention. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 281–326). Cambridge, MA: MIT Press.

Johnson, M. (1991). *El cuerpo en la mente: fundamentos corporales del significado, la imaginación y la razón*. Madrid: Debate

Katona, G. (1940). *Organizing and memorizing: Studies in the psychology of learning and teaching.* New York: Columbia University Press.

Kershaw, T.C. y Ohlsson, S. (2001). Training for insight: The case of the nine-dot problem. In J.D. Moore & K. Stenning (Eds.), Proceedings of the Twenty-third Annual Conference of the Cognitive Science Society (pp. 489-493). Mahwah, NJ: Lance Erlbaum Associates

Koestler, A. (1974). *El acto de la creación*. Buenos Aires: Losada

Köhler, W. (1929). *Gestalt psychology*. New york: Liveright. Trad. Cast. De A. Guera: *Psicología de la configuración*. Madrid: Morata, 1967.

Köhler, W. (1969). *The task of Gestalt psychology*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Kris, E. (1952). *Psychoanalytic explorations in Art.* New York:Internacional University Press

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago, EE.UU: The University of Chicago Press.

Landau, E. (1987). *El vivir creativo. Teoría y práctica de la creatividad*. Barcelona: Herder

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. (Ch. 9, pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Liljedahl, P. (2008a). Mathematical creativity: in the words of the creators. *In Proceedings of The 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. Israel. University of Canada. p. 153-159

Liljedahl, P. (2008b*). The AHA! Experience: Mathematical Contexts, Pedagogical Implications.* Saarbrücken, Germany: VDM Verlag.

Logie, R. H. y Pearson, D.G. (1997). The inner eye and the inner scribe of visuo-spatial working memory: Evidence from developmental fractionation. *Europeal Journal of Cognitive Psychology, 9(3)*, p. 241-257.

Luria, A. R. (1968). *The mind of a mnemonist: A little book about a vast memory. Translated by Lynn Solotaroff*. Cambridge MA: Harvard University Press.

Mac Lane, S. (1986). *Mathematics, Form and Function*. Berlin: Springer.

Macnab, J.S.; Phillips, L.M., y Norris, S.P. (2012). Visualizations and visualization in mathematics education. In S.P. Norris (Eds.), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education*. Canada: Sense Publishers. p. 103-122.

Magidson, S. (1989). *Revolving Lines: Naive Theory Building in a Guided Discovery Setting.* Unpublished Manuscript, EMST, School of Education, University of California, Berkeley.

Maltzman, I (1955). *Thinking:From a behaviourist point of view*. Psychological Review, 62, p. 275-286

Mann, E. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. PhD thesis, University of Connecticut

Marchini, C. (1999). Il problema dell'area. *L'educazione matematica. 1(1)*, p. 27- 48.

Marín, R. (1991). Definición de la creatividad. En R. Marín y S. de la Torre (Coord.), *Manual de la Creatividad*. Barcelona: Vicens Vives. p. 95-99

Marksberry, M.L. (1963). *Foundations of creativity*. Nueva york: Harper&Row

Maslow, A. H. (2001). *La personalidad creadora..* Barcelona:Kairós. 7ª ed

Mayer, R.E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós

Mayer, R.E. (1995). The search for insight: Grappling with Gestalt Psychology's Unanswered Questions. En R.J. Sternberg y J.E. Davidson (Eds.). The nature of insight (pp. 3-32). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Mato, M. D. y De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA, 5(1)*, pp. 197-208.

McCoy, J. y Evans, G. (2002). The potential role of the physical environment in fostering creativity. En *Creativity research journal*, *14(3-4),* p.409-426.

McDonald, R. J. y White, N. M. (1993). A triple dissociation of memory systems: hippocampus, amygdala and dorsal striatum. *Behavioral Neuroscience, 107*, p. 3-22.

McLane, S. (1986). The Mathematical Network. En: *Mathematics. Forward Function*, New York: 409-456.

MEC (2006). Ley Organica de Educacion. 2/2006. BOE nº 106, 17158-17207. Consultado el 23/11/11. http://www.mec.es/mecd/gabipren/documentos/A17158-17207.pdf

Meirovitz, M. y Jacobs, P. (1989). *Pensamiento visual*. Barcelona: Martínez roca

Meissner, H. (2000). Creativity in mathematics Education. *En Proceedings of the International Conference Creativity and Mathematics Education*. Universidad de Muenster, Alemania, 2000. Disponible en http://www.math.unimuenster.de/dibaktik/u/meissne/WWW/creativity.crhm.doc

Meissner, H. (2005). Challenges to provoke creativity. *In proccedings ICMI EARCOME3*. China. Univ. Muenster, Germany.

Menchén, F. (2001). *Descubrir la creatividad. Desaprender para volver a aprender*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Metcalfe, J. (1986). Feeling of knowing in memory and problem solving. *Journal of experimental psicology: Learning, Memory and cognition, 12(2)*, pp.288-294.

Metcalfe, J. y Wiebe. D. (1987). Intuition in insight and noninsight problem solving. *Memory and Cognition, 15(3)*, p. 238-246.

Miller, A.I. (1984). *Imagery in scientific thought: Creating 20th-century physics*. Cambridge, MA: MIT Press

Miller, A. I. (2000). Metaphor and Scientific Creativity. In F. Hallyn (ed.), *Metaphor and Analogy in the Sciences*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Mitjans, A. (1989). La creatividad como proceso de la personalidad. En González R. F. y Mitjáns, A., *La personalidad, su educación y desarrollo*. La Habana: Pueblo y Educación.

Monreal, C. (2000). *Qué es la creatividad*. Madrid: Editorial Biblioteca Nueva.

Mooney, R. (1963). A Conceptual Model for Integrat ing four Approaches to the Identification of Creative Talent. En: Taylor, C.W. y Barron, F. (Eds.). *Scientific Creativity: Its Recognition and Development*. New York: Wiley, p. 331–340.

Moreira, P. (1996). À propos de l'apprentissage du concept d'aire. *Petit x*. 43, p. 43-68.

Morgado, I. (2005). *Psicobiología del aprendizaje y la memoria: Fundamentos y avances recientes*. En Revista de Neurología. 40 (5), p. 289-297.

Moscovich, I. (2007). *El gran libro de juegos para la mente.* Buenos aires: Troquel

Muñoz, J. (1994). *El pensamiento creativo*. Desarrollo del programa Xènius. Barcelona: Octaedro.

Muñoz, J. M. y Mato, M. D. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. *Revista de investigación educativa, RIE*, *26(1)*, p. 209-226.

Murcia, N. (2003). Los condicionantes: Concertación e imposición en el desarrollo de la creatividad motriz. *Apunts, 71*, p. 29-39.

Murcia, N.; Vargas, J. y Puerta, G. (1998). El camino de la creatividad en el Educación Física y el entrenamiento deportivo infantil. *Revista Educación Física y Recreación, 2(3), p.* 59-79.

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs without words* (Exercises in Visual thinking). New York: Mathematical Association of America.

OCDE (2003). *Aprender para el mundo de mañana*. Resumen de resultados. PISA 2003. Consultado el 7/04/2011. Disponible en http://www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003resumenocde.pdf?documentId=0901e72b80110703

Orton, J. (1997). Pupil's perception of pattern in relation to shape, en E. Pekhonen (ed), *Proceedings of the 21th P.M.E.* Conference (Lathi, Finlandia) 3, p. 304-311

Ohlsson, S. (1984). Restructuring revisited: Summary and critique of the Gestalt Theory of problem solving. *Scandinavian Journal of Psychology, 25*, p.65-78.

Paivio, A. (1971). *Imagery and Verbal processes*. Nueva York: Holt.

Palais, R.S. (1999). The visualization of mathematics: Toward a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS, 46(6)*, p. 647-658.

Palma, B. y Cosmelli, D. (2008). Aportes de la Psicología y las Neurociencias al concepto del "Insight": la necesidad de un marco integrativo de estudio y desarrollo. *Revista Chilena de Neuropsicología, 3*, p. 14 - 27

Pawlak, A. (2000). Fostering creativity in the new millennium. *Research Technology Management, 43(6),* p. 32-35.

Penagos, J. C. y Aluni, R. (2000). Preguntas más frecuentes sobre creatividad. Revista Psicología, (ed. Especial). Recuperado el 23 de octubre de 2012, de http://homepage.mac.com/penagoscorzo/creatividad_2000/creatividad8.htm.

Penrose, R. (1994). *Shadows of the Mind*. New York: Oxford University

Perkins, D.N. (1981). *The Mind's Best Work*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peralta, F.L. y Fernández, R.F. (1998). Estúdio de três modelos de creatividad: critérios para la identificación de la producción creativa. *Faisca: revista de altas capacidades, 6,* p.67-85.

Perelmán, I. Ya. (1975). *Problemas y experimentos recreativos*. Moscu: Mir

Pickering, S. J.; Gathercole, S. E.; Hall, M., y Lloyd, S. (2001). Development ofmemory for pattern and path: evidence for the fractionation of visuospatial memory. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 54(2)*, p. 397-420.

Placencia, I.; Espinel, C., y Orta, J., (1998). Visualización y creatividad. En *Educación Matemática*. 10 (2), p.102-120.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* Tesis doctoral. Tenerife: Universidad de La Laguna.

Poincaré, H. (1908). *Science and method*. Nueva york: Dover. Trad en *Ciencia y método*. Madrid: Espasa-Calpe, 1965.

Poincaré, H (1948). *La creación Matemática*. En M. KLINE, (ed.), *Matemáticas en el mundo moderno*. Madrid: Blume, 1974, p. 14-17.

Poincaré, H. (1983). *Filosofia de la ciencia*. Mexico D.F: Consejo nacional de ciencia y tecnología.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1965). *How to solve it*. Princenton University Press (Traducción: Cómo plantear y resolver problemas, de Julián Zugazagoitia. Méjico: Trillas.)

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery: On Understanding, *Learning and Teaching Problem Solving.* 2. New York: Wiley.

Poniachick, J. (1994). *El acertijo*. Buenos aires: Periodic Publications.

Poniachik, J. (2007). *Inteligencia instantánea*. Barcelona: Ediciones de mente

Popper, K. R. (1956). *The foundations of scientific discovery*. New York: Basic Books

Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Unpublished *Ph. D. dissertation*. University of Cambridge. England.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6* (3), p. 42-46.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery inhigh school Mathematics. *Proceeding of the XV International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 15*, p. 191-198. Italia: Assisi.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. *In L. D. English (Ed), Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images*. p. 299-312. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Presmeg, N.C. y Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: an international study. In L. Meira y D. Carraher (Eds), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, p. 58-65. Recife, Brazil: PME.

Prieto, M.D.; López, O., y Ferrándiz, C. (2003). *La creatividad en el contexto escolar. Estrategias para favorecerla*. Madrid: Pirámide

Puig Adam P. (1986). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo 1 Fundamentos. Madrid: Euler

Quinn, G.J. (2007) Movement and visual coding: the structure of visuospatial working memory. *Review Springer, 9,* p.35-43

Ramanujan, S. (1948). Srinivasa Ramanujan. En KLINE, M. *Matemáticas en el mundo moderno.* Blume, Madrid, 1974, p. 84-88.

Rocke, A.J. (1985). Hypothesis and Experiment in Kekulé's Benzene Theory. *Annals of Science, 42,* p. 355-381.

Renzulli, J. S.; Smith, L. H.; White, A. J.; Callahan., C. M.; Hartman, R. K. y Westberg, K.L. (2004). *Scales for rating the behavioral characteristics of superior students.*Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Rico, L. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Sociedad Andaluza Educación Matemática. Grupo EGB de Granada. España.

Rico, L. (2006). *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas*. Revista de Educación, extraordinario, p. 275-294.

Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. *Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar*, 9, p. 155-182.

Robinson, K. (2006). *Schools kill creativity*. TED Conference (p. Video on TED.com). Monterey, California, EEUU: The Sapling Foundation. http://video.google.es/videoplay?docid=-9133846744370459335

Rodríguez, M. (1995). *Psicología de la creatividad*. México: Pax México

Rodríguez, M.; Cabrera, F.; Espín, J. y Marín, A. (1997). Elaboración de una escala de actitudes hacia la educación multicultural. *Revista de Investigación educativa, 15(1)*, p. 103-124.

Root-Bernstein, M. (2002). *El secreto de la creatividad*. Barcelona: Kairós

Romo, M. (1997). *Psicología de la creatividad*. Barcelona: Paidós.

Ruiz Sánchez de Leon, J.M; Guinea, S.F. y Marqués, J.G. (2006). Aspectos teóricos actuales de la memoria a largo plazo: De las dicotomías a los continuos. *Anales de psicología, 22(2)*, p. 290-297

Ruiz Vargas, J.Mª. (2002). *Memoria y olvido. Perspectivas evolucionista, cognitiva y neurocognitiva*. Madrid: Trotta

Sánchez, L. F. (2009). *La interacción de la memoria visual y espacial en tareas de reconocimiento de objetos*. Master investigación Didáctica de las Matemáticas. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Sánchez, L. F. (2010). Estrategias de resolución geométrica por insight. *En el congreso Encuentro Aprengeom 2010, impartido por el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM).* Castro Urdiales. Publicada en: http://www.ciem.unican.es/es/node/800

Sánchez, F. (2011a). Las estrategias de resolución geométrica por insight II. *En el congreso II Encuentro Aprengeom 2011, impartido por el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM)*. Castro Urdiales. Publicada en: http://www.ciem.unican.es/node/836

Sánchez, F. (2011b). Some strategies of the family environment to enhance creativity. In Proceedings Conference MATH, *Family Math for Adult Learners.* Barcelona

Sánchez, F. (2011c). Resoluciones geométricas por insight. In Proceedings Elementary Geometry from an Advanced Point of View, Workshop "EnsGeo I", Aveiro (Portugal). Disponible en: http://c3.glocos.org/egapv2011/program/

Sánchez, F. (2011d). Procesos creativos en un entorno educativo tecnológico. En Proyecto de discusión científica "*Divendres de Recerca*" del programa de Doctorado del departamento de Didáctica de la matemática y la Ciencia de la Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en: https://sites.google.com/site/divendresderecerca/edicio-2011/ponencies/06-17

Sánchez, F. (2012a). Some strategies of the family environment to enhance creativity. En Díez-Palomar, J. y Kanes, C. (Eds.), *Family and Community in and out of the classroom: Ways to improve mathematics' achievement.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona Servei de publicacions, p. 123-135

Sánchez, F. (2012b). *Resoluciones creativas de problemas geométricos potencialmente de insight perceptivo.* En Proyecto de discusión científica "*Divendres de Recerca*", Seminari 4: Viabilitat dels instruments metodològics, del programa de Doctorado del departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en: https://sites.google.com/site/divendresderecerca/edicio-2012/sessions/seminari-4

Sandman, R.S. (1980). The mathematics experience and attitude and their relation to computer attitude. *Educational Technology, 353*, p. 32-38.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. USA

Shoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47(6). Traducción Juan D. Godino.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Scheerer, M. (1963). Problem solving. *Scientific American, 208*, p. 118-128.

Segarra, Ll. (1987). *La cuadratura del círculo. Matemática recreativa*. Barcelona: Graó.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. In J. Malkevitch (Ed.), *Geometry's future*. Arlington, MA: comap.

Sequera, G.E.C. (2007). *Creatividad y desarrollo professional docente en matemáticas para la educación primaria.* Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.

http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-0604108-124110/03.ECSG_PARTE_III.pdf

Sheffield, L. (2005) Techniques to Further Mathematical Creativity. *In Proceedings ICMI-EARCOME 3. China*

Sheffield, L. (2010) The Peak in the Middle: Developing Middle Grades Students' MP3 (Mathematical Promise, Passion and Perseverance). In Proceedings *6th International conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students.* Riga.

Shepard, R.N. (1978). The mental image. *American Psychologist. 33*. p. 125-137.

Shepard, N.R. y Cooper. A.L. (1985). Rotación mental de los objetos. En *Investigación y Ciencia, 101*, p. 70-77.

Sikora, J. (1979). *Manual de métodos creativos*. Buenos Aires: Kapelusz.

Sinclair, M. P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. In *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*, edited by N. A. Pateman, B. J. Dougherty and J. T. Zilliox, 191–198. Honolulu, HI: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.

Simon, H.A. (1977). *Boston studies in the philosophy of science*. Vol. 54. Models of discovery. Boston: Reidel.

Sriraman, B. (2009). The Characteristics of Mathematical Creativity. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 41(1&2):13-27. Reprint of Sriraman, B. (2004). *The characteristics of mathematical creativity*, The Mathematics Educator, 14(1), p. 19-34.

Sternberg, R.J. y Davidson, J.E. (1982). The mind of the puzzler. *Psychology Today, 16* p. 37- 44

Sternberg, R.J. y Davidson, J.E. (1984). The role of insight in intellectual giftedness. *Gifted Child Quarterly, 28*, p. 58-64

Sternberg, R.J. y Davidson, J.E. (1986). *Conceptions of Giftedness*. New York: Cambridge University, p. 3–18.

Sternberg, R.J. y Davidson, J.E. (1995). *The nature of insight*. Cambridge, MA:MIT Press

Sternberg, R. y Detterman, D.K. (1992). *¿Qué es la inteligencia*? Madrid: Pirámide.

Sternberg, R.J. y Lubart, T.I. (1993). Creative Giftedness: A Multivariate Investment Approach. *Gifted Child Quarterly*, 37(1), p. 7–15.

Sternberg, R.J. y Lubart, T.I. (1997). *La creatividad en una cultura conformista. Un desafío a las masas*. Barcelona: Paidós.

Sternberg, R. J. y Lubart, T.I. (2000). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity*. Cambridge, UK: Cambridge. University Press.

Sternberg, R.J. y Spear-Swerling, L. (1996). *Enseñar a pensar*. Madrid: Aula XXI. Santillana.

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook of creativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sternberg, R.J. (2001). La creatividad es una decisión. En *Creatividad y Sociedad, Revista de la Asociación para la Creatividad, 1*, p.15-23.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), p.151-169.

Tammadge, A. (1979). In Creativity. *Journal The Mathematical Gazette*. 425(63), p.145-163

Taylor, C.W. (1959). The 1955 and 1957 research conferences on the identification of creative scientific talent. *Journal Psych*, 14.

Taylor, I.A. (1975). A restropective view of creative investigation. En Taylor y Getzels (Eds.) *Perspectives in Creativity*. Chicago: Aldine.

Taylor, S.J. y Bogdan, R. (1984). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona: Paidós

Thorndike, E.L. (1898) Animal intelligence: An experimental study of the associative processes in animals. *Psychological Monographs*, 2 (8).

Thorndike, E. L. (1911). *Animal intelligence*. New York: Macmillan

Tiamina, D (2002). Mathematical way of thinking when is creative? En *proceedings of the International Conference Creativity and Mathematics Education*. Riga: Universidad de Riga.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking: Normstechnical manual*. Lexington, MA: Ginn.

Torrance, E.P. (1976). *La enseñanza creativa*. Madrid: Santillana.

Treffinger, D.J.; Feldhusen, J.F. y Isaksen, S.G. (1990). Organization and structure of productive thinking. *Creative Learning Today*. 4 (2), p.6-8

Trigo, E. (1999). *Creatividad y motricidad*. Barcelona: INDE Publicaciones.

Ufer S.; Heinze A. y Reiss K. (2009). Mental models and the development of geometric proof competency *In Tzekaki M., Kaldrimidou M., Sakonidis H. Poceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychologyof Mathematics Education*. 5, p. 257-264.

Urban, K. K. (1995). Different models in describing, exploring, explaining and nurturing creativity in society. *European Journal for High Ability*, 6, p. 143-159

Valdivé, C. y Garbin, S. (2007). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(3).

Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. PhD thesis. Universidad de Utrecht. (Traducción al español 1990, por el proyecto de investigación Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele, director Angel Gutiérrez)

Varela, J.; Olea, J. y San Martín, R. (1991). Dimensiones de evaluación de productos creativos: ¿Dualismo o bipolaridad?. *Psicothema 3*(1). p.97-109.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), p. 77-101.

Vosniadou, S., y Ortony, A. (1989). *Similarity and analogical reasoning*. New York: Cambridge University Press.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt Brace.

Watson, J.M. (1983). The Aiken Attitude to mathematics Scales: Psychometric Data on Reliability and Discriminant Validity. *Educational and Psychological Measurement,* 43, p.1247-1253.

Weisberg, R. W. (1996). Prolegomena to theories of insight in problem solving: A taxonomy of problems. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 157-196). Cambridge, MA: MIT Pres

Weisberg, R.W. y Alba, J.W. (1981). An examination of the alleged role of "fixation" in the solution of several "insight" problems. *Journal of Experimental Psychology: General, 110(2)*, p.169-192.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking.* Nueva York: 1-larper and Brothers. (Trad. cast.: *El pensamiento productivo.* Barcelona, Paidós, 1991.)

Wheatley, G. H. (1996). *Wheatley Spatial Ability Test*. Tallahassee. FL: Mathematics Learning.

Wheatley, G. H. (1997). *Reasoning with images in mathematical activity. Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wheatley, G.; Brown, D. y Solano, A. (1994). Long term relationship between spatialability an mathematical knowledge. *North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education.* Baton Rouge, LA.

Yap, W. (2010). An Exploratory Study on the Interrelationships among Mathematical Creativity, Mathematical Attainment and Students' Perceptions of their Creative Potential in Mathematics. *En Proceedings of the 6th International conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students.* Riga. Nanyang Technological University Singapore.

Young, K.; Flugel, J.C. y Otros (1967). *Psicología de las Actitudes*. Buenos Aires. Paidós

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington: D.C. Mathematical Association of America.