

Universitat de Barcelona

Departament de Didàctica i Organització Educativa

Programa de Doctorat
Innovació Educativa i Formació del Professorat

Bienni 1990-1992

*Anàlisi del tractament de la geometria al currículum de
l'educació primària. Una proposta didàctica i un estudi de cas
sobre les transformacions geomètriques*

Per optar al títol de doctor en
Filosofia i Ciències de l'Educació

Doctorant: Jordi Quintana Albalat

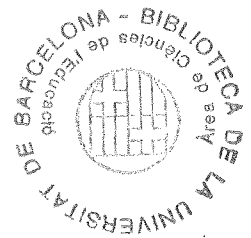
Director: Dr. Claudi Alsina Català

Tutora: Dra. Juana María Sancho Gil

Barcelona, 1996

- 44 -

0555-25760



TD

369



2.3.4 La International Association of Educational Achievement

La International Association of Educational Achievement (IEA) -Associació Internacional d'Avaluació Educativa-, creada al 1959 amb l'objectiu de comparar les competències dels estudiants de diferents països i sistemes educatius del món, va publicar al 1989 (Travers i Westbury, 1989) els resultats del "Second International Mathematics Study" (SIMS), que es va realitzar una vintena de sistemes educatius durant els anys vuitanta.

Aquest estudi, centrat en l'ensenyament secundari, volia ser una continuació del "First International Mathematics Study" (FIMS) dels anys 1960, el qual es va realitzar sobre una dotzena de sistemes educatius (Sosniak, Ethington i Varelas, 1991; Wiley i Wolfe, 1992).

Una de les accions realitzades per l'IEA va ser analitzar la importància que els països donaven als continguts dels cinc temes seleccionats (aritmètica, àlgebra, geometria, estadística i mesura), en relació a les següents categories cognoscitives:

- Càlcul (Cal)
- Comprensió (Com)
- Aplicació (Apl)
- Anàlisi (Ana)

L'escala de valoració va ser la següent: Molt importants (M), Importants (I) i sense importància (-).

En algun cas la importància va ser només indicada per alguns sistemes educatius i per tant s'ha codificat amb IS (Importància Sistemes).

En el cas del tema que ens ocupa, les **isometries**, els resultats van ser els de la taula següent de categories cognoscitives (Travers i Westbury, 1989, 30):

Continguts dels temes	Categories cognoscitives				
	Cal	Com	Apl	Ana	Ordre
200 Geometria					
201 Classificació de figures planes	I	M	I	IS	2
202 Propietats de figures planes	I	M	I	I	1
203 Congruència de figures planes	I	I	I	IS	3
204 Semblança de figures planes	I	I	I	IS	3
205 Construccions geomètriques	IS	IS	IS	-	6
206 Triangles pitagòrics	IS	IS	IS	-	6
207 Eixos de coordenades	I	I	I	IS	3
208 Deduccions simples	IS	I	I	I	3
209 Transformacions geomètriques informals	I	I	I	-	4
210 Relacions entre rectes i plans a l'espai	-	-	-	-	0
211 Cossos (propietats de simetria)	IS	IS	IS	-	6
212 Representació i visualització espacial	-	IS	IS	-	7
213 Orientació (espacial)	-	IS	-	-	8
214 Descomposició de figures	-	-	-	-	0
215 Geometria de les transformacions	IS	IS	IS	-	6
Ordre	3	1	2	4	

En la taula anterior es posa de manifest la importància que es dóna als ítems 209 i 215, que se situen els llocs 4 i 6 respectivament.

Els ítems 203 i 204 no s'analitzen per pertànyer de manera molt específica a l'ensenyament secundari.

Jordi Quintana. La Geometria a Primària - Un cas: les transformacions

El detall d'aquesta valoració per països d'aquests dos ítems relatius a les transformacions, a partir d'un rang de puntuació d'entre 0 i 6, és el següent (Travers i Westbury, 1989, 35):

	Ítem 209	Ítem 215
Anglaterra i Gal·les (ENW)	1	4
Bèlgica Flamenca (BFL)	4	6
Bèlgica Francesa (BFR)	4	6
Canadà-British Colúmbia (CBC)	2	0
Canadà-Ontario (CON)	4	0
Escòcia (SCO)	0	0
Estat Units (USA)	0	0
Finlàndia (FIN)	1	0
França (FRA)	4	6
Holanda (NTH)	4	0
Hong Kong (HKO)	2	0
Hongria (HUN)	0	0
Irlanda (IRE)	4	6
Israel (ISR)	2	0
Japó (JPN)	0	0
Luxemburg (LUX)	2	0
Nigèria (NGE)	2	0
Nova Zelanda (NZE)	4	0
Suècia (SWE)	2	0
Swazilàndia (SWA)	4	0
Tailàndia (THA)	3	0
Total	49	28
Percentatge sobre el màxim (126)	38.39	22.22
Mitjana (0-6)	2.33	1.33

L'Associació Internacional d'Avaluació Educativa diu al respecte que (Travers i Westbury, 1989, 32):

"The only topic for which there appears to be a substantial problem of mismatch is Geometry. Indeed, a major finding of the Study proved to be the great diversity of curricula in geometry for Population A [all students in the grade in which the modal number of students has attained the age of 13.0-13.11 years by the middle of the school year] around the world. In spite of the best efforts of the International Mathematics Committee to provide a comprehensive covering for geometry, there remained some systems, and some topics, for which the match not good".

Com a detall complementari, en la taula següent es mostra la consideració general dels països participants sobre l'adequació dels temes de matemàtiques escollits per l'IEA als seus currículums (Travers i Westbury, 1989, 83).

Tema	Aritmètica	Àlgebra	Geometria	Estadística	Mesura
Mitjana	0.92	0.83	0.64	0.69	0.91

Quant a l'adequació específica del currículum de cada país als quinze continguts propis del tema Geometria⁸ que s'han detallat a la taula de valoració de categories cognoscitives i continguts del tema geometria mostrada més amunt, valorada en un rang d'adequació de 0 a 4, va ser la següent (Travers i Westbury, 1989, 91):

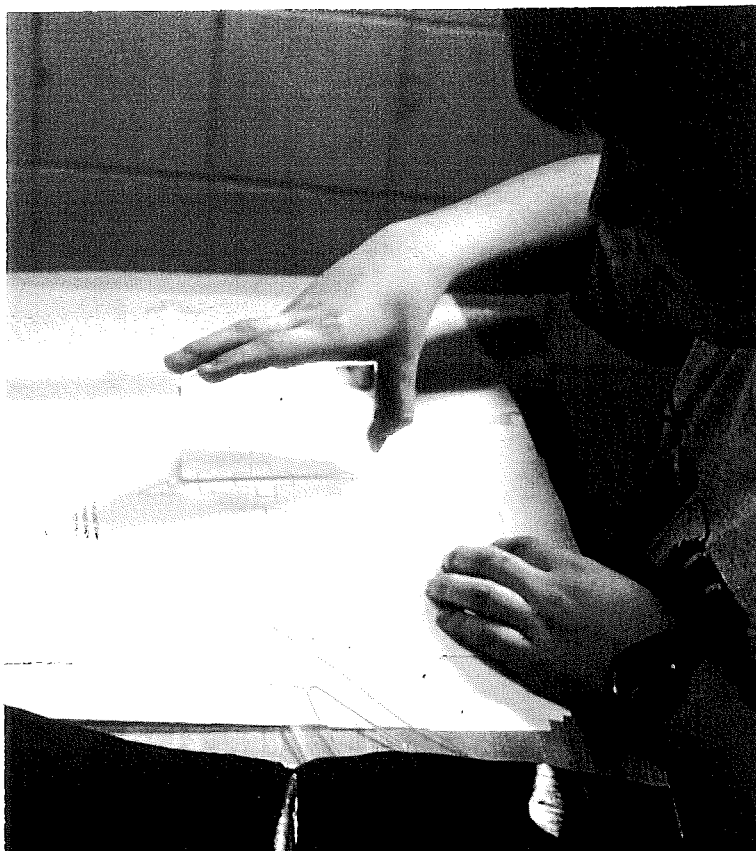
⁸ Els continguts 210, 213 i 214 s'han omès degut a la poca importància que li van atorgar els diferents països participants.

País	201	202	203	204	205	206	207	208	209	211	212	215	Mit.
Anglaterra i Gal·les	4	4	3	4	0	0	4	3	4	4	2	1	4
Bèlgica Flamenca	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4	0
Bèlgica Francesa	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4	0
Canadà-British Col.	4	3	2	1	0	0	2	2	0	4	3	1	2
Canadà-Ontario	4	4	4	4	0	2	4	4	4	4	4	3	4
Escòcia	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	1	4
Estat Units	4	3	3	4	0	0	2	1	0	4	4	0	2
Finlàndia	4	4	3	0	4	0	4	4	3	4	1	1	3
França	1	3	3	0	4	0	4	2	3	0	3	1	2
Holanda	4	4	4	0	0	0	4	4	3	4	4	1	3
Hong Kong	4	4	4	3	0	3	4	3	1	0	0	0	3
Hongria	4	4	4	4	0	2	4	4	4	4	2	3	4
Irlanda	4	3	0	0	0	0	0	1	0	4	2	1	1
Israel	4	4	4	4	0	0	4	3	1	0	0	0	3
Japó	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	1	4
Luxemburg	2	2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
Nova Zelanda	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	3	4
Suècia	3	2	3	3	0	0	4	2	2	0	4	0	2
Swazilàndia	4	4	0	0	0	0	4	3	4	4	1	1	3
Tailàndia	3	4	4	4	0	0	3	3	0	4	4	0	3
Mitjana (0-4)	4	4	4	2	0	2	4	4	2	4	2	1	

L'IEA, (Travers i Westbury, 1989, 207) conclou que "the SIMS system show very little agreement as to what topics in Geometry should be in the Population A curriculum. The stem-and-leaf table below illustrates high between-system variation in geometric content in the intended curriculum. But even in the face of this great diversity, there is, with exceptions of Luxembourg and the two Belgian systems, a small core of topics common to all of the SIMS countries: Classification of Plane Figures, Properties of Plane Figures, Congruence of Plane Figures, Coordinate and some work on Simple Deduction. Beyond that, there is a cluster of systems that deal with Informal Transformations, Spatial Visualization and Solids. And much smaller (and different) cluster of system provides formal work on Transformational Geometry".

3

**Investigacions, propostes i
experiències sobre l'aprenentatge de
les isometries**



3 INVESTIGACIONS, PROPOSTES I EXPERIÈNCIES SOBRE L'APRENTATGE DE LES ISOMETRIES

En el darrers anys els estudis sobre les isometries han anat prenent més importància tant per conèixer millor les nocions i conceptes intuïtius dels infants; com per detectar els errors lligats a preconcepcions, dificultats cognitives i mals aprenentatges; com per fer propostes psicopedagògicament i epistemològicament adequades, en relació al seu aprenentatge escolar.

Seguint la proposta de Bartolini i Mariotti (1996), que d'alguna manera amplia la que en el seu moment van fer Laborde (1988)¹, Gaulin (1996)² i Marchi, Morelli i Tortora (1986)³, el present recull d'estudis s'ha estructurat en base a les següents categories:

1. Investigacions sobre el raonament geomètric: investigacions de marcat caràcter psicològic, generalment orientades a l'estudi dels

¹ La proposta de Laborde (1988, 346) era agrupar-les per les següents categories:

- *La détermination des contenus d'enseignement*
- *L'organisation des interactions savoirs-apprenants*
- *L'organisation des interactions entre savoirs, enseignant et apprenants en situation d'enseignement*".

² Gaulin (1996), després d'analitzar, entre d'altres, les propostes de classificació de Lesh i Mierkiewicz (1978), Laborde (1988) i Hershkowitz (1990), suggereix agrupar les investigacions segons es refereixin a:

- Què i quan ensenyar
- Com s'aprèn
- Com ensenyar

³ Marchi, Morelli i Tortora (1996, 56) proposen els següents temes com a categories d'agrupament:

- a) *Disciplinary*;
- b) *Didactical transposition and school curricula*;
- c) *Epistemological problems and education value*".

processos mentals de la construcció de conceptes geomètrics i a la construcció de models del raonament geomètric.

2. **Propostes d'innovació en l'ensenyament de la geometria** -en el nostre cas les **isometries**-, estructurades al voltant d'elements didàctics i metodològics, aportant propostes curriculars i d'intervenció educativa concretes.
3. **Relat d'experiències escolar** en les qual s'han emprat elements innovadors, com materials manipulables comercials o creats específicament, entorns i aplicacions informàtiques, etc.

3.1 Investigacions sobre l'aprenentatge de les isometries

3.1.1 Investigacions específiques sobre les isometries

El següent recull està ordenat per l'any de la seva realització o difusió, i dintre d'aquest, per ordre alfabètic.

F. R. Kidder (1978) (Alsina, Pérez i Ruiz, 1989; Dickson, Brown i Gibson, 1984; Jaime i Gutiérrez, 1996) va realitzar diverses investigacions sobre la conservació de la longitud en situacions d'isometries. En una d'elles que anomenarem "Llistó patró" va realitzar una experiència amb seixanta alumnes de 8, 9 i 10 anys, en la qual, a partir d'un test piagetia de conservació de longitud, va proposar als alumnes que seleccionessin d'entre cinc llistons, el que creguessin que era el resultat d'aplicar girs, simetries i translacions a llistó patró. Només un dels cinc llistons era de la mateixa longitud que el patró.

Dels 20 alumnes de 8 anys, només 8 (40%) van reconèixer la conservació de la longitud, dels 20 de 9 anys, només, 12 (55%) i dels 20 de 10 anys, 12 (60%), el que representa un total de 31 alumnes dels 60, o sigui, un 52%.

En el test de conservació de la longitud del llistó patró, només 7 dels 31 alumnes conservadors (22%) triaren el llistó correcte en el cas de la translació, el que representa el 12% dels 60 alumnes.

A partir d'aquests resultat Kidder, va concloure que aquests indiquen que la conservació de la longitud en el sentit clàssic piagetia no és suficient per garantir la conservació de la longitud en operacions mentals més complexes, però que és una condició necessària per a la conservació de la longitud en tasques més complicades (Pearman, 1990).

En altra investigació que anomenarem "Eскурadents", Kidder va proposar a 72 alumnes de 9, 11 i 13 anys que construïssin la figura resultant d'aplicar diverses transformacions a un triangle donat. Havien de triar entre set escuradents, només tres dels quals corresponien als costats del triangle donat. Només 4 alumnes dels 72 (6%) van resoldre correctament la situació. A partir d'aquest fet Kidder suggereix que fins que una persona no es trobi a un nivell piagetia de pensament operacional formal no serà capaç de separar tots els factors implícits en una tasca d'aquest tipus en la qual cal construir una imatge.

J. C. Moyer (1978) (Jaime i Gutiérrez, 1996), va realitzar diverses entrevistes a infants de 4 a 8 anys als quals els mostrava translacions, giris i simetries fetes a parells cercles, alguns transparents i altres amb el radi i/o el diàmetre marcat. L'investigador dibuixava un punt al cercle que no s'havia mogut i els infants havien de fer el mateix a la seva parella que s'havia mogut.

Les principals conclusions a les qual arribà van ser:

1. La translació i la simetria són igual de fàcils ($T = S$).
2. El gir és la isometria més difícil ($T \text{ i } S > G$).
3. El tipus de disc que es fa servir i la realització física del moviment són poc significatius.

F. Perham (1978) (Alsina, Pérez i Ruiz, 1989; Dickson, Brown i Gibson, 1984), va investigar les següents isometries: girs (de 45° , 90° i 180°), simetries (verticals, horitzontals, esbiaixades i interiors) i translacions (verticals, horitzontals, esbiaixades i interiors). Les tasques es van fer per mitjà de construccions geomètriques amb, geoplà i dibuix lliure.

El principal resultat al qual arribà és que els infants aprenen primer les translacions, després les simetries i després els girs ($T > S > G$).

Una altra conclusió a tenir en compte és que l'orientació de les transformacions és un element important a l'hora de valorar les dificultats, i que l'ordre creixen d'aquestes és horitzontal, vertical i inclinat ($H > V > I$).

K. Schultz (1978), va fer estudi amb 200 alumnes de 6 a 10 anys també sobre les isometries (Alsina, Pérez i Ruiz, 1989; Dickson, Brown i Gibson, 1984; Jaime i Gutiérrez, 1996), en el qual els alumnes, veient la transformació (gir, simetria o translació) d'un full d'acetat buit coincident amb un altre amb una figura dibuixada, havien de construir la figura resultat en l'acetat buit "transformat".

Les variables que va utilitzar van ser:

- Transformació: Gir, simetria i translació
- Desplaçament: Horitzontal: Llarg, curs i solapat
Diagonal: Llarg, curs i solapat
- Figura: Significativa: Gran i petita
No significativa: Gran i petita

De les conclusions a què arribà cal destacar l'ordre de dificultat creixent entre:

1. Translacions, simetries i girs ($T > S > G$).
2. Transformacions curtes, llargues i solapaments.
3. L'orientació horitzontal i la inclinada o en diagonal dels moviments i eixos ($H > I$).
4. Figures grans i figures petites.
5. Figures significatives o reals i figures abstractes.

D. Thomas (1978) (Alsina, Pérez i Ruiz, 1989; Dickson, Brown i Gibson, 1984; Jaime i Gutiérrez, 1996) va realitzar diverses investigacions al voltant del tema de les isometries i de la conservació de la longitud.

Una d'elles va ser realitzada amb alumnes de 6, 9 i 12 anys, en el marc de la conservació de la longitud, consistent en aplicar girs, simetries i translacions a un triangle mòbil que estava a sobre d'un altre igual i fix, i analitzar què passava a la longitud dels seus costats. En ella va concloure que:

- 1) La constatació de la conservació de la longitud dels costats del triangle, o sigui, el reconeixement de la invariància depèn de la capacitat de conservació de la longitud en el sentit piagetjà (Holloway, 1986).
- 2) La majoria dels alumnes veuen que la longitud es conserva després d'aplicar girs i simetries, però que en el cas de les translacions no tots reconeixen la conservació.

Una altra experiència va consistir en veure com els alumnes copsaven la invariància de la posició d'un punt d'un costat d'un triangle en aplicar-li girs, simetries i translacions.

Els resultats correctes foren els següents:

Transformació	6 anys	9 anys	12 anys
Gir d'1/4 a la dreta	40%	50%	100%
Gir d'1/4 a l'esquerra	60%	60%	100%
Gir d'1/2 a la dreta	50%	60%	100%
Gir d'1/2 a l'esquerra	40%	60%	100%
Total	47.50%	57.50%	100%
Translació horitzontal	80%	80%	90%
Translació vertical	90%	60%	100%
Total	85%	70%	95%
Simetria d'eix vertical	80%	70%	100%
Simetria d'eix horitzontal	77.50%	65%	100%
Total	78.75%	67.50%	100%

Aquests resultats posen de manifest que:

- 1) L'ordre creixent de dificultats identificat és: translacions, simetries i girs ($T > S > G$).
- 2) Les diferències entre gir a la dreta o a l'esquerra, translació horitzontal o vertical, i simetria horitzontal o vertical no són gaire significatives.
- 3) Els nois i les noies de 12 realitzen bé gairebé tots els exercicis de les tres isometries (el 100% constataren la invariància en els girs, el 100% en les simetries i el 95% en les translacions).

D. Küchemann [1978] va fer un estudi amb 449 alumnes de 14 anys (Alsina, Pérez i Ruiz, 1989; Contreras, 1994; Cooper, 1992; Dickson, Brown i Gibson, 1984), en el qual havien de realitzar girs i simetries en un punt i en un banderí.

En el segon cas tingué en compte l'angle format entre la figura i l'eix, la inclinació d'aquest, i l'ús de termes tècnics.

Les conclusions a les quals arribà foren:

- 1) Molt alumnes resolen situacions de simetria amb eixos esbiaixats com si fossin horitzontals o verticals.
- 2) Les quadrícules de fons faciliten les tasques de simetries.
- 3) En la resolució de simetries hi ha cinc nivells de comprensió:

- Nivell 0: dificultat de comprensió i coordinació de la inclinació dels eixos
 - Nivell 1: l'ús de materials com el geoplà facilita la coordinació de la inclinació
 - Nivell 2: s'inicia la coordinació de la inclinació i la comprensió del concepte
 - Nivell 3: ús de l'anàlisi en la comprensió de simetries
 - Nivell 4: comprensió i coordinació de dos eixos inclinats
- 4) Els girs en els quals el centre està en la figura a girar són més fàcils que aquells en els quals el centre de gir és exterior ($GC > GE$).
- 5) L'ordre de dificultats creixents en els gir depèn de la situació horitzontal, vertical o esbiaixada de la figura inicial ($H > V > I$).
- 6) Les quadrícules de fons dificulten seriosament les tasques de girs.

E. Gallou i E. Marka (1989), partint d'una recerca anterior (Gallou-Duminel, 1988) van fer una investigació sobre la simetria central i l'ortogonal amb alumnes de 12 i 13 anys, en l'entorn *Logo*.

En ambdós casos havien de resoldre situacions constructives que es presentaven a la pantalla de l'ordinador, per mitjà de procediments *Logo*, tot anotant el procés seguit.

Quan creien que havien acabat el dibuix de la figura simètrica sol·licitaven la solució, i si la figura no coincidia ho podien intentar dues vegades més.

Investigacions, propostes i experiències

Alguns dels principals resultats sobre la simetria ortogonal van ser:

Exercici	Figura	Posició	Eix	Posició	Resultat
CA	Quadrat	Base horitzontal	Horitzontal	Exterior a sota i paral·lel	Correcte
CB	Quadrat amb diagonal de NE a SO	Base horitzontal	Horitzontal	Exterior a sota i paral·lel	80% d'errors. No fan la diagonal de NO a SE
CC	Quadrat	Base horitzontal	Horitzontal	Secant a 1/4 de la base i paral·lel	Molts errors. Només "passen a un costat"
CD	Quadrat	Base inclinada 30°	Inclinat 30°	Exterior a sota i paral·lel	Correcte
TA	Triangle rectangle escalè (TRE)	Hipotenusa vertical i catet curt avall	Vertical	Exterior a la dreta i paral·lel	1/4 canvien de lloc els angles
TB	Triangle rectangle escalè	Catet curt vertical avall i llarg inclinat de NE a SO	Inclinat de NE o SO	Exterior a la dreta i paral·lel	1/4 fa segments no perpendiculars a l'eix
RA	Rectangle	Catet curt és la base horitzontal	Inclinat 45°	Secant de vèrtex inf. esq. a meitat costat llarg dreta	1/2 "traslladen" el rectangle avall, la meitat del costat

Quant als resultats sobre la simetria central, els principals van ser:

Exercici	Figura	Posició	Centre	Posició	Resultat
CE	Quadrat	Base horit.	Vèrtex	Inferior esquerre	Correcte
CF	Quadrat	Base horitzontal	Costat vertical esquerre	A 1/4 de la base	Alguns fan centre al vèrtex inf. esquerre
CG	Quadrat	Base horitz.	Interior	A la diagonal a $\sqrt{200}$	No dona dades
TC	Triangle rectangle isòsceles	Catets iguals a la base horit. i a l'esquerre	Vèrtex	Inferior dret	No dona dades
TD	Triangle rectangle isòsceles	Catets iguals, a la base horitzontal i a l'esquerre vèrtex amunt	Costat	1/2 hipotenusa	No dona dades
TE	Triangle rectangle isòsceles	Catets iguals, horitzontal a dalt i a dreta vertical avall	Exterior	A 20 passes avall del vèrtex sup. esquerre	No dona dades
TF	Triangle rectangle isòsceles	Catets iguals, horitzontal a dalt i a dreta vertical avall	Exterior	A 60 passes avall del vèrtex sup. esquerre	No dona dades
TG	Triangle rectangle isòsceles	Hipotenusa base horitzontal	Interior	A $\sqrt{250}$ sobre la bisectriu vèrtex inferior dret	No dona dades

Com a conclusions les autores diuen que els resultats són similars en ambdós casos, però que sembla més adequat treballar la simetria ortogonal als 12 anys, i després la simetria central als 13 anys.

D. Grenier (1989) va realitzar un estudi sobre el funcionament d'un procés d'ensenyament de la simetria ortogonal amb alumnes d'11 anys, construït en el marc de la teoria de les situacions didàctiques de Brousseau (vegeu apartat 1), on per mitjà d'un seguit de situacions problema es fes evolucionar de manera positiva les concepcions errònies i els coneixements de l'alumnat sobre la simetria axial.

La recerca s'organitzà al voltant d'un diagnòstic molt acurat de les concepcions de l'alumnat (Jaime i Gutiérrez, 1996), en el qual, a partir de considerar com a variables la posició de la figura i la posició de l'eix de simetria, es van diferenciar quatre posicions d'un eix de simetria, quatre posicions relatives entre un segment i un eix de simetria, i set angles significatius dels múltiples formats pel segment i l'eix, i a partir d'ells s'establiren 192 ítems d'investigació.

Els principals procediments identificats van ser: l'ortogonal, el de superposició o perllongació, el del paral·lelisme i el moviment vertical o horitzontal de punts (Cooper, 1992).

En les conclusions es confirma la importància de la variable direcció de l'eix i de la percepció global de la figura i de la situació.

Així mateix s'assenyala la importància de tenir en compte les concepcions de l'alumnat abans i durant els processos, i de reflexionar sobre com assegurar una devolució del problema a l'alumnat que preservi el sentit dels aprenentatges en joc sense tornar la situació caduca, i vetllar per les eines que cal

desenvolupar per un control dels esdeveniments que es produeixen en la gestió de les fases col·lectives de balanç i institucionalització.

Aquesta autora també va fer una interessant proposta de nivells d'aprenentatge formada per:

- Metamorfosi i moviments.
- Relacions entre figures.
- Transformacions puntuals al pla o a l'espai.
- Elements d'un grup.

D. Pearman (1990) va realitzar una investigació amb alumnes de 6 i 7 anys per determinar el nivell de comprensió de les isometries (girs, simetries i translacions) i veure si:

- 1) Copsaven la conservació de la longitud en girs, simetries i translacions.
- 2) Identificaven la posició de les figures després de les transformacions.
- 3) Si sabien seleccionar la imatge correcta d'una inicial a la qual se li havia aplicat una transformació.

Partint de les proves piagetianes de conservació de longitud (Holloway, 1986), va fer una rèplica i ampliació de les investigacions de Thomas (1978) que hem anomenat "Triangle" i "Punt-Triangle", i les va complementar amb una prova en la qual els alumnes havien d'identificar, entre cinc possibilitats, el resultat d'aplicar girs, simetries i translacions a figures.

Els resultats globals, tenint en compte que les proves de simetria es van fer amb un costat del triangle tocant i no tocant a l'eix, van ser:

	Prova piagetiana	Girs	Simetria costat-eix	Simetria costat-no eix	Translació
Conservació longitud	0%	28%	50%	50%	44%
Posició	-	33%	96%	100%	89%

Com a conclusions poden dir:

- 1) Que malgrat que cap dels infants de les proves va passar la prova piagetiana de conservació de longitud, molt d'ells van copsar la conservació en les transformacions. Pearman diu que aquesta constatació contradiu les conclusions de Kidder (1978) amb alumnes més grans ja que queda demostrat que la conservació de la longitud no és una condició necessària per a la conservació de la longitud en tasques més complicades. Per reafirmar-ho va ampliar la investigació amb dues proves més de simetria d'eix horitzontal i translació vertical essent els resultats de conservació del 42% i del 50% (abans eren 50% i 44% respectivament).
- 2) Que contràriament a les conclusions de Thomas (1978), que diu que la majoria de l'alumnat veu la conservació de la longitud en els girs i les simetries, però no en les translacions, la taula anterior posa de manifest que la conservació es constata més les simetries que en les translacions, i en aquestes que en els girs. Aquest fet es comprova i reforça en l'anàlisi de les respostes de les qüestions relatives a la selecció d'imatges de figures transformades, les quals, en el cas de les simetries són correctes en el 83%, en les translacions en el 67% i en el

girs en el 25%. Per tant, l'ordre de dificultat creixent de les isometries, segons aquest autor, és el de simetries, translacions i girs ($S > T > G$).

- 3) Que en l'anàlisi de les posicions, els resultat de les simetries eren molt alts (100%), seguits de les translacions (66%) i dels girs (33%). En el cas de les simetries i els girs, els resultats són molt divergents dels presentats per Thomas (simetries el 80% i girs el 60%). En l'anàlisi dels motius d'aquesta divergència l'autor trobà que els alumnes feia poc que havien estat treballant patrons simètrics de l'art hindú. Davant d'això Pearman diu que aquest és un bon exemple de com les matemàtiques poden ser enriquides i desenvolupades des d'altres àrees del currículum escolar.

L. Edwards i R. Zazkis (1993). Aquestes dues professores, van realitzar una investigació sobre les idees informals d'un grup de 14 estudiants de magisteri, sobre les isometries.

Partint d'una investigació anterior d'Edwards (1991 i 1992), les autores van dissenyar un micromon *Logo* anomenat *TGEO* format pels procediments *ROTATE*, *REFLECT* i *SLIDE*, corresponents a les isometries: rotació o gir, reflexió o simetria, i lliscament, desplaçament o translació. En ell es mostraven en pantalla dues lletres *eles* (L), asimètriques congruents en situacions i posicions diferents, i es demanava als usuaris que entressin les primitives necessàries fins a fer-les coincidir.

Els objectius de la investigació van ser:

- 1) Descriure les intuïcions i idees informals sobre girs i simetries que tenen els estudiants de magisteri abans de la instrucció formal.

- 2) Descriure les idees dels estudiants sobre les transformacions després de l'experiència amb el micromon *TGEO*.

La investigació es va portar a terme en tres fases:

- 1) Realització individual de girs i simetries als següents set objectes: un bolígraf, una bandereta, un llibre, una nina, un guant, un nombre 9 de paper retallat i una lletra *ela* també de paper.
- 2) Joc també individual amb el micromon *TGEO* durant dues sessions de dues hores i mitja.
- 3) Simulacions en paper:
 - a) El joc de micromon *TGEO* però en paper, escrivint els procediments necessaris per anar de l'*ela* inicial a la final donades, tot superposant-les. Es podia fer amb un sol moviment.
 - b) També sobre paper, donada la figura inicial i un procediment, dibuixar la figura final. Es podia fer amb un sol moviment.

Els principals resultats foren els següents:

Fase 1

- 1) En el cas dels girs, davant l'ordre "Si us plau, podries girar aquest objecte?", s'observa que majoritàriament (73.50%) se selecciona com a centre de gir el centre visual de la figura, que de vegades coincideix amb el real, i en segon lloc (26.50%) un vèrtex especial, com l'inferior esquerre de l'*ela*.
- 2) Un 71% van realitzar un gir de 360° i un 20% de 180°.

- 3) En el cas de les simetries, i davant l'ordre "Si us plau, podries fer una simetria a aquest objecte?", majoritàriament (71.50%) van seleccionar com a eix de simetria un segment que passés pel mig de l'objecte, i la resta (28.50%) van seleccionar un del costats de l'objecte.

Les dades recollides foren:

Objecte	Gir		Simetria	
	Centre visual	Vèrtex especial	Meitat	Costat
Bolígraf	93%	7%	-	-
Bandereta	64%	36%	57%	43%
Llibre	86%	14%	86%	14%
Nina	86%	14%	93%	4%
Guant	79%	21%	86%	14%
9	64%	36%	57%	43%
L	43%	57%	50%	50%
Total	73.50%	26.50%	71.50%	28.50%

Fase 3, a)

- 1) Malgrat tots els exercicis proposats es podien resoldre amb un sol moviment (gir o simetria), la majoria dels estudiants (el 83% en els girs i el 50% en les simetries) va descompondre la transformació global en transformacions més senzilles i curtes molt relacionades amb les idees informals mostrades en els resultat de la fase 1.
- 2) Els girs de centre exterior a la figura van ser resolts per mitjà d'un gir al voltat d'un vèrtex de la figura i una translació.

- 3) Les simetries respecte a un eix exterior i paral·lel un costat de la figura van ser resolts per mitjà d'una translació que fes coincidir el costat paral·lel a l'eix amb aquest, i tot seguit una simetria respecte a ell.

Les dades recollides, inclosa una segona oportunitat que es va donar per trobar el pas d'una figura a l'altre amb una sola transformació, foren:

	Descomposició	Moviment únic	Altres	Moviment únic 2a vegada
Gir amb centre arbitrari	86%	4%	10%	25%
Gir amb centre a la figura	68%	29%	3%	54%
Total	83%	8%	8%	30%
Simetria amb eix vertical o horitzontal	36%	58%	6%	72%
Simetria amb eix inclinat	71%	11%	28%	25%
Total	50%	37%	14%	51%

Fase 3 a), segona oportunitat

- 1) Tot i donar una segona oportunitat, una important part dels estudiants no va ser capaç de reconèixer les transformacions presentades.
- 2) Va ser més fàcil reconèixer les simetries (el 51%) que els girs (30%).
- 3) Els girs s'associen preferentment a girs sobre el centre o un vèrtex de les figures.

- 4) Les simetries s'associen preferentment a les realitzades respecte a eixos que coincideixen amb costats de les figures.

Fase 3, b)

- 1) Les principals incorreccions tant en els girs com en les simetries rauen en la interpretació de les transformacions com a moviments locals i no com a aplicacions en tot el pla.

Les dades recollides foren:

	Correcte i ben posicionat	Correcte però mal posicionat	Incorrecte
Gir	48%	15%	37%
Simetria	54%	21%	14%
Total	54%	18%	28%

Conclusions generals:

- 1) Les imatges mentals que els estudiants tenen de les transformacions estan molt influenciades per les seves experiències amb els moviments físics.
- 2) Les transformacions s'interpreten com a moviments locals i no com a aplicacions global en tot el pla.
- 3) La consideració que els girs han de tenir com a centre el centre o un vèrtex de les figures, i que les simetries s'han de fer respecte a eixos que coincideixen amb costats de les figures, coincideix amb allò que Piaget anomenà "*terminal boundary taboo*" entès com la reticència dels

infants a operar fora dels límits d'una figura, degut a les seves experiències quotidianes.

- 4) Quan un infant o un adult ha de fer un gir respecte a un centre que no està en la figura, o una simetria respecte a un eix exterior a ella, se li provoca un conflicte entre els seus coneixements intuïtius i les operacions formals, en aquest cas del micromon.
- 5) Aquestes situacions fan que els estudiants puguin construir l'acomodació necessària entre les seves idees informals i locals sobre els moviments, i les experiències amb incorporacions formals.
- 6) En tota instrucció matemàtica cal partir dels coneixement previs formals i informals de l'alumnat, però també cal possibilitar el "trencament cognitiu" amb els conceptes erronis i la superació de les nocions intuïtives, per poder arribar a una comprensió matemàtica més comprensiva i general.

A. Jaime (1993), va fer una important contribució a l'aplicació del model Van Hiele a l'ensenyament de les isometries planes, fonamentada en una proposta d'activitats seqüenciades que tenen en compte tant els nivells de raonament com les fases d'aprenentatge proposades per l'esmentat model. Així mateix, va proposar un mètode per determinar el grau d'adquisició dels nivells de Van Hiele per part de l'alumnat.

Els antecedents d'aquesta investigació els trobem en estudis que la mateixa autora va fer anteriorment en relació al treball de les isometries del pla, tant a l'EGB com a Magisteri, que inclouen la creació de materials, (Jaime, et al., 1989), i la seva experimentació en un marc general d'ensenyament de les

isometries (Gutiérrez i Jaime, 1985; Jaime, Gutiérrez y Cáceres, 1989). Les principals conclusions a les qual arribà van ser:

- 1) Les activitats manipulatives faciliten el coneixement de cada isometria, el seu ús i la descoberta de les seves propietats (Gutiérrez i Jaime, 1985).
- 2) L'ordre de dificultats decreixents detectat és translacions, simetries i girs ($T > S > G$) (Gutiérrez i Jaime, 1985).
- 3) L'ús de materials facilita l'adquisició intuïtiva del concepte de gir (Jaime, et al., 1989).
- 4) L'ús de materials i la participació activa de l'alumnat en l'aprenentatge facilita la descoberta i comprensió de conceptes i propietats (Jaime, Gutiérrez y Cáceres, 1989).

Tal com hem dit, la investigació i la proposta d'A. Jaime (1993, 1994) es basen en els nivells de raonament de Van Hiele i es concreten en l'aprenentatge de les isometries planes.

Tot i que en un altre lloc (vegeu apartat 1) hem comentat més detalladament la proposta dels Van Hiele, creiem oportú recordar els cinc nivells de raonament matemàtic i les cinc fases seqüencials d'aprenentatge de les matemàtiques:

- Nivells de raonament matemàtic: 1) Visualització o Reconeixement, 2) Anàlisi, 3) Classificació o Deducció informal, 4) Deducció formal, i 5) Rigor.
- Fases d'aprenentatge de les matemàtiques: 1) Informació, 2) Orientació dirigida, 3) Explicitació, 4) Orientació lliure, i 5) Integració.

Jaime va experimentar la seva proposta de treball de les isometries planes amb alumnes 3r i 6è d'EGB (actualment Primària), amb alumnes de BUP (actualment Secundària) i amb alumnes de Magisteri. Així mateix va fer un estudi longitudinal de l'evolució dels nivells de raonament de Van Hiele, de 6è d'EGB a COU (d'11 a 18 anys).

Els principals resultats i conclusions a les quals arribà són:

- 1) L'establiment d'uns nivells de Van Hiele per a les isometries planes.
- 2) La creació de tres unitats didàctiques per a l'ensenyament de les isometries planes, relatives a les translacions, els girs i les simetries (Jaime i Gutiérrez, 1996), dirigides a l'ensenyament secundari.
- 3)
- 4) La caracterització del procés continu d'adquisició dels nivells de raonament de Van Hiele.
- 5) La definició d'un mètode per determinar els graus d'adquisició dels nivells de Van Hiele.
- 6) La correlació entre els nivells de raonament de Van Hiele, i els cursos o nivells escolars, segons el seu grau d'adquisició. En aquest punt l'autora presenta les següents dades agrupades en els set nivells escolars estudiats en el seu moment, o sigui: 6è, 7è i 8è d'EGB; 1r, 2n i 3r de BUP; i COU. Ara bé, tot i que es podria fer una correspondència amb l'estructura del sistema educatiu actual (6è de Primària; 1r, 2n, 3r i 4t d'ESO; i 1r i 2n de Batxillerat), hem cregut més adequat presentar els resultats a partir de l'edat de l'alumnat.

Correlació entre els nivells de raonament de Van Hiele i l'edat de l'alumnat:

Anys	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3	Nivell 4	Resum de nivells
11-12	60.39%	7.55%	0.33%	0.00%	1 i inici del 2
12-13	69.92%	15.56%	1.05%	0.00%	1, 2 i inici del 3
13-14	87.95%	26.23%	2.55%	0.00%	
14-15	65.24%	27.05%	6.00%	2.86%	1, 2, 3 i inici del 4
15-16	83.10%	36.50%	15.28%	2.50%	
16-17	92.41%	43.32%	12.93%	2.32%	1 aconseguit
17-18	93.55%	55.29%	21.65%	2.85%	2, 3 i inici del 4

En la taula es constata que entre els 11 i els 14 anys hi ha un increment d'adquisició del primer nivell de Van Hiele (Reconeixement) que es completa a 8è (14 anys), juntament amb un inici en l'adquisició del segon nivell (Anàlisi) a partir de 7è (13 anys).

A més, entre els 11 i els 14 anys, no hi ha mostres significatives de raonament de tercer nivell (Classificació) i hi ha una absència total de raonament del quart nivell (Deducció formal) (Jaime, 1993, C3-30).

3.1.2 Comparances entre les investigacions analitzades

En la següent taula resum de les investigacions sobre isometries, hem extret els elements més importants de les investigacions anteriorment analitzades.

En ella es pot observar que gairebé totes coincideixen que translacions són més fàcils que les simetries i que aquestes són més fàcils que els girs ($T > S > G$), erigint-se, per tant, aquests com els més difícils. Aquesta postura va ser replicada per Pearman que diu que, per motius d'ús social, la simetria és més fàcil que la translació.

	Kidder	Moyer	Perham	Schultz	Thomas	Küchemann	Gallou...	Grenier	Pearman	Edwards...	Jaime
Conservació longitud (CL)	CL necessària però no sufi. per CL en Tf.				<ul style="list-style-type: none"> • Concepte invariància depèn CL • CL: G=S>T 				<ul style="list-style-type: none"> • C.L. no necessària per C.L. en Tf. • C.L.: S>T>G 		
Girs					G D = G E	<ul style="list-style-type: none"> • c int > c ext • Quadrícula difícil 				c mig fig > c vèrtex fig	<ul style="list-style-type: none"> • c int > c ext • Errors: G sense canvi direcció fig; equidistància
Simetries					S H = S V	<ul style="list-style-type: none"> • S H = S V > • Error: S l = H o V • Quadrícula facilitada 	<ul style="list-style-type: none"> • S H = S V > • eix: ext > tg > sec • 1r, S orto., 2n, central 	<ul style="list-style-type: none"> • Depèn de \angle fig. i eix • eix: ext > tg > sec 		eix mig fig > eix tg costat	<ul style="list-style-type: none"> • S V = S H > • Errors: no L: no ; equidistància; desplaçament
Translacions					T H = T V						
Dificultats	Concepte d'imatge depèn de l'estadi de les operacions formals			<ul style="list-style-type: none"> • Tf curtes > llargues > solapades • H > l • Fig gran > Fig petita • Fig real > fig abstracta 	Als 12 anys no hi ha dificultats			Concepcions prèvies			Concepte de vector en les translacions
Orientació de les Tf			H > V > l	H > l	H > V > l			H > V > l			
Graduació		T = S > G	T > S > G	T > S > G	T > S > G				S > T > G		T > S > G

Taula resum de les investigacions sobre isometries

Notes: > = més fàcil que; c= centre; CL= Conservació de la longitud; D= Dreta; E= Esquerra; ext= exterior; fig= figura; G= Girs; H= Horizontal; l= Inclinat; int= interior; op= operacions; orto.= ortogonal; S= Simetries; sec=secant; T= Translacions; Tf= Transformació; tg = tangent; V= vertical.

Quant a les dificultats, a la taula es mostra que hi ha cert acord en relació a que:

- La realització d'una isometria en vertical és més fàcil o igual que en horitzontal, però la inclinada és més difícil ($V > H > I$ o $V = H > I$).
- Les isometries curtes són més fàcils que les llargues, aquestes que les tangents i aquestes que les secants o amb solapaments ($Curt > Llarg > Tg > Sec$).
- Que la dificultat dels girs depèn sobretot de si el centre és a l'interior, en un vèrtex o a l'exterior.

3.1.3 Altres investigacions a referenciar

Vinh-Bang i I. Flückiger (1976) van realitzar un estudi amb 72 infants de 2 a 6 anys, en el marc de la reversibilitat operatòria entesa com la capacitat d'executar una mateixa acció en els dos sentits del recorregut, tenint però consciència que es tracta de la mateixa acció (Holloway, 1986), en el qual, i a partir de la hipòtesi que l'infant, per produir desplaçaments en simetria s'ha de representar un idèntic, i per tant construir-lo en el pensament tot invertint-lo en relació a la producció de l'experimentador, aquest se situava amb una nina a una mà a un costat d'una taula i l'infant, amb una altra nina, al costat oposat.

L'experimentador, desplaçava la nina del seu costat al de l'infant sense deixar traça, sortint de davant seu, de la seva dreta o de la seva esquerra.

El recorregut podia ser vertical, esbiaixat (20°), molt esbiaixat (45°) o lateral, i en línia recta o fent alguna zigazaga. L'única consigna era "fes el mateix".

Els resultats mostraren fonamentalment 4 tipus de reproduccions:

- 1) El camp pròxim (els infants porten la seva nina al costat de la de l'experimentador).
- 2) Les primeres travessies (els infants porten la seva nina a l'altre costat de la taula).
- 3) La coordinació entre el canvi de costat i la forma del trajecte (els infants tenen en compte la forma del trajecte, però els esbiaixats els resolien verticalment).
- 4) Les simetries de mirall (els infants coordinen l'oposició de les situacions de sortida i arribada i la inversió de les relacions entre els trajectes).

A més es realitzà un estudi de nivells que s'establí en tres moments:

- I. Infants de 2 a 3 anys. Reproduccions de tipus 1 i 2, en les quals l'infant es limita al seu espai proper, com si existís una frontera que delimités l'espai de l'infant i el de l'experimentador.
- II. Infants de 3 a 4 anys. Reproduccions de tipus 2 i 3, en les quals l'infant travessa aquesta "frontera" però el seu espai proper encara no està coordinat amb l'espai de l'experimentador.
- III. Infants de 4 a 6 anys. Reproduccions de tipus 3 i 4, en les quals l'infant coordina les posicions recíprocament oposades per compondre les trajectòries inverses per mitjà de la reproducció del desplaçament en simetria especular.

A. Cornu-Wells, S. Dionnet i B. Vitale (1985) del Centre Internacional d'Espistemologia Genètica de Ginebra van realitzar una investigació amb 35 infants de 4 a 11 anys, al voltant de la seva representació del moviment d'un

objecte en rotació, a partir d'un llistó de fusta de 25 centímetres amb 11 forats col·locat a sobre d'una base, i de xinxetes de colors. Al mig del llistó n'hi havia una de manera que pogués girar. Els investigadors va proposar realitzar tres tipus de tasques:

- 1) Preguntaven quin tipus de moviment faria la barra i després col·locaven una xinxeta a la base a prop del llistó i preguntaven com s'ho farien perquè el llistó toqués la xinxeta, qüestionant si hi havia més d'una solució.
- 2) Amb la xinxeta col·locada com en la tasca 1, es demanava que possessin una altra xinxeta perquè el llistó toqués les dues al mateix temps.
- 3) A partir de la situació anterior es demanava als infants que col·loquessin una altra xinxeta de manera que fos la primera que toqués el llistó. Tot seguit se'ls suggeria que possessin més xinxetes sempre i quant poguessin dir l'ordre en el qual serien tocades pel llistó.

L'anàlisi dels resultats va permetre agrupar les solucions en tres nivells:

- I. Referències i punt de referència. Caracteritzats per la delimitació d'una zona globalment activa (zona de moviment al voltant del llistó), el moviment del llistó és reduït a una de les seves parts (generalment la de la dreta), i la sincronia dels punts de l'espai de la tasca (per tocar dues xinxetes alhora cal posar-les juntes o simètriques -simetria central "figural"- respecte a un eix que sigui el propi llistó o perpendicular a ell).
- II. La concreció de les propietats del moviment. Caracteritzades per la consideració de l'objecte en rotació com un tot i la inversió del sentit del moviment de les seves dues parts (solucions simètriques lligades a l'acte de moviment de tot el llistó, utilitzant les propietats de l'objecte en

moviment), l'objectivació de propietats del moviment per assimilació a les particularitats de l'objecte (alineació de xinxetes), i el tenir en compte les dificultats del moviment (coordinació entre sentit del moviment i posició de les xinxetes).

III. Cap a la parametrització de l'espai del moviment. Caracteritzada per la consideració que l'espai generat pel moviment és independent de les propietats de l'objecte en moviment, la parametrització, i la utilització d'eixos (no coincideixents amb el llistó), punts imaginaris i el radi del gir.

L'anàlisi de l'experiència mostrarà diverses etapes en l'estructuració de l'espai generat pel moviment d'un objecte en rotació, i l'organització de diferents propietats atribuïdes a l'objecte i les seves transformacions, que estan relacionades amb l'edat.

Els autors, d'acord amb Martí (1984b) van posar en evidència que els infants més petits només tenen en compte la forma del moviment que s'aplica a l'objecte (un quadrat que gira deixa una traça circular), però que els més grans també tenen en compte les propietats geomètriques de l'objecte i del seu moviment (un quadrat que gira genera una forma d'estrella, que conserva les puntes del quadrat).

Aquesta estructuració ve donada per quatre etapes:

1. Una primera etapa formada per un procés de "simetrització", en el qual, d'una forma més local, es posen en contacte diferents punts, localitzant regularitats i simetries "figurals" fixes.
2. En la segona etapa els infants comencen a estructurar les propietats a nivell de la representació gràcies a una simetrització dinàmica que

- esdevé un instrument privilegiat d'espacialització per mitjà del qual l'infant d'aquest nivell copsa l'espai del moviment de rotació del llistó.
3. En la tercera etapa apareix ja una parametrització de l'espai del moviment segons els eixos.
 4. La darrera etapa és la de la rotació com a transformació puntual.

En resum, l'experiència mostra que una vegada fixat el comportament de l'objecte a través del qual esdevé una figura en moviment, el subjecte l'assimila en funció dels elements espacials que componen la figura.

J. Rogalski (1985) va realitzar una investigació sobre el concepte piagetian de conservació lligat a les transformacions, en la qual manifesta que *“des situations expérimentales de conservation sont soumises à une formalisation mathématique, qui permet d'analyser finement les propriétés objectives des transformations et d'inférer les interactions entre les propriétés de la situation et les activités cognitives du sujet. Le passage du continu au discret (lié à la notion d'atomisme de Piaget) et la centration sur le processus même de la déformation constituent deux modalités distinctes pour l'acquisition de la conservation.*

La distinction entre conservation forte et conservation faible^[4] peut, de plus, permettre de lever des paradoxes ou des contradictions de résultats expérimentaux. La décomposition mathématique du processus, qui permet de conclure à une conservation, peut être transposée en hypothèses concernant les étapes cognitives de l'acquisition de la conservation. On peut l'utiliser pour

⁴ Aquests dos conceptes estan lligats a les següents propietats: la injectivitat de la transformació, la noció de límit i la reversibilitat operatòria en la composició i descomposició de transformacions.

construire des expériences sur la conservation touchant à des points spécifiques de l'acquisition."

P. Ernest (1986) va realitzar una investigació en la qual va comparar els resultat del treball de dos grups d'alumnes, un treballant amb ordinador (grup experimental) i l'altre amb paper i llapis (grup control), en relació a la realització i identificació de translacions, simetries, girs de 180° amb centre a un vèrtex d'un triangle, i girs de més i menys de 90°, també amb centre a un vèrtex d'un triangle.

Els test utilitzats els hem anomenat Test 1 A i B, i Test 2. El Test 1A va ser creat per l'autor, el Test 1B era equivalent al Test 1A i el Test 2 va ser extret dels de Hart (1980) .

Els resultats de la recerca van ser:

		Grup experimental	Grup control
Pretest	Test 1A	13.1 %	12.1 %
Posttest	Test 1B	38.9 %	17.2 %
Guany		25.8 %	5.1 %
Pretest	Test 2	33.7 %	26.2 %
Posttest	Test 2	36.1 %	36.9 %
Guany		2.4 %	10.7 %

L'autor va concloure, tot avisant del perill de la generalització, dient que donat que l'ús del joc d'ordinador [*Triangles* de M. Cook del R.L.D.U. de Bristol] aporta una millora en la realització de les activitats del grup experimental, als procediments específics inclosos en el Test 1, però que no n'aporta als del Test 2, i per tant:

- 1) No és clar que el joc d'ordinador sigui un mitjà profitós per dominar els procediments proposats.
- 2) Les pràctiques amb paper i llapis dels mateixos procediments pot aportar una millora en la seva consecució.

D. Medici, F. Speranza i P. Vighi (1986) van realitzar una investigació amb alumnes de 9 i 10 anys, per estudiar la formació de conceptes geomètrics i la influència d'alguns factors, en particular quines característiques geomètriques son escollides preferentment per efectuar els procediments d'abstracció i quin és el paper del lèxic geomètric.

En ella es va passar una prova d'11 ítems. En el 1r, es demanava quina figura s'assemblava més a un quadrat model (QM) amb la base paral·lela al terra, d'entre un quadrat més petit (QP), el mateix quadrat girat 45° (Q45) i un rectangle (R). Les respostes van ser: QP un 29%, Q45 un 58%, R 2% i altres un 11%. Sembla ser que el criteri de semblança que va portar a escollir el Q45 va ser el de la congruència⁵.

⁵ Aquesta resposta és una mica sorprenent ja que des de l'any 1984 estic realitzant una senzilla experiència consistent en ensenyar un full DIN-A4 i fer un quadrat pel mètode papiroflèxic que fa coincidir el costat curt a sobre del llarg i retallar la banda sobrerera. Llavors ensenyo a la gent el quadrat resultant, mostrant-lo de manera que un costat sigui paral·lel a terra i dic que pensin quina figura geomètrica veuen. A continuació explico que em giraré d'esquena, faré alguna cosa a la figura i em tornaré a girar de cara a ells i llavors hauran de pensar el nom d'allò que els ensenyi. Quan em giro d'esquena l'única cosa que faig és girar el quadrat 45° de manera que un vèrtex apunti a terra.

Aquesta experiència fins al moment present l'he realitzat: al 1984 a 116 alumnes de 13 i 14 anys i el 73% van dir que el que veien era un rombe; al 1995 a 26 alumnes de 16 a 18 anys, dels quals el 65% també van dir que era un rombe; del 1984 al 1986 a 950 adults, majoritàriament estudiants de màgisteri, i el 62% ha manifestat que també han vist un rombe. Al 1996, el grup de 24 alumnes de 6è de primària (d'11 i 12 anys) en el qual es va fer la intervenció ressenyada en la present memòria, un 67% també van dir que era un rombe. En resum, el 63% diuen que és un rombe.

De tota manera cal dir que després que algú verbalitzi que és un rombe, hi ha gent que canvia d'opinió, però no és fins que algú diu en veu alta que és un quadrat, que les expressions "Ah! sí!" es generalitzen. Altrament, sempre hi ha qui diu que és un quadrat girat, com si les seves propietats depenguessin de la posició.

En el 6è ítem es demanava el nom d'un quadrat que es recolzava a sobre d'un vèrtex (com en Q45 de l'ítem 1). Les respostes van ser: rombe 50%, quadrat 38%, paral·lelogram 9%, quadrat torçat 2% i altres 2%.

En l'anàlisi de les respostes d'aquest ítem els propis investigadors diuen que l'alt percentatge dels alumnes que responen "rombe" indica que la influència del grup de les transformacions com a criteri de comparació de les figures és fort.

Així mateix fan constar que a les escoles en les quals s'han tractat les transformacions geomètriques gairebé sempre la resposta ha estat "quadrat".

Dues importants conclusions són:

- 1) Els models geomètrics presentats pel professorat acostumen a ser regulars i ens posicions estables i horitzontals, fet que potencia la posició per sobre de les propietats.
- 2) L'establiment de figures models referencials facilita la confusió entre posició i forma⁶.

M. Cooper (1992) va fer una recerca amb 394 estudiants de secundària australians sobre els errors que es cometien en fer simetries horitzontals, verticals i inclinades a un cub, el qual tenia un punt o un segment marcat en un vèrtex, una aresta o una cara, en trenta-sis posicions diferents. Se simulava tallar el cub amb un mirall i havien de dibuixar el punt o el segment simètric al lloc corresponent. Els resultats van mostrar una forta tendència a resoldre les

⁶ Fisher (1978) i Herschkowitz, Bruckheim i Shlomo (1987) van arribar a conclusion semblants.

situacions fent servir "moviments" horitzontals i verticals, tot descomposant la simetria.

D. R. Boulter i J. R. Kirby (1994) van realitzar una investigació de caire psicologista, amb alumnes de 10 a 12 anys, sobre els tipus d'estratègies que es fan servir en la resolució de problemes de transformacions geomètriques, les qual van agrupar en holístiques (figura sencera, transformació òptima i simple, i resolució mental) i analítiques (fragmentació de la figura i descomposició de la transformació).

Els resultats van ser:

Respostes correctes			Respostes incorrectes		
E. holística	E. analítica	Altres	E. holística	E. analítica	Altres
1.2	1.5	0	1.2	0.3	0.8

Per tant es posa de manifest que les estratègies analítiques són més adequades ja que acompanyen la correcció de les respostes i s'allunyen de la incorrecció.

Quant al perquè de la selecció d'una estratègia o una altra, els autors apunten al tipus de qüestió que es proposi, a les preferències individuals, a la manera personal de processar la informació, i a les estratègies instruccionals rebudes.

En aquesta investigació d'alguna manera també es constata la dificultat de comprensió global de les transformacions.

3.2 Propostes d'innovació en l'ensenyament de les isometries

Donat que algunes de les propostes d'innovació es mouen en l'àmbit curricular, arribant fins i tot a fer propostes de seqüències i de materials curriculars de tercer nivell de concreció, com ara les de C. Burgués; M. A. Canals; Z. P. Dienes; i A. Jaime i A. Gutiérrez, les hem inclòs a l'apartat 2, punt 2.2 *Propostes sobre les isometries*.

R. Lesh (1976) a partir d'una justificació matemàtica i psicològica del perquè de l'estudi de les transformacions, presenta un conjunt d'idees pel seu treball, molt centrades a l'utilització de materials, al plegat i retallat de paper i al dibuix

G. Marastoni (1980)⁷ fa una proposta d'introducció al concepte de moviment, curiosament a partir dels desplaçaments, moviments, posicions i situacions d'un llapis, en la qual només s'inclouen les translacions i els girs, aquests darrers lligats als angles.

G. Dosi i G. Gazzola (1988) van presentar una proposta sobre les transformacions isomètriques al segon cicle de primària presentant diverses activitats model fent servir geoplans, paper quadriculat i eixos de coordenades, en el marc general de les transformacions com a operacions, i per tant amb una posició inicial, una acció/màquina/transformació, i una posició final.

⁷ Marastoni (1980, 39) de manera semblant a la majoria d'autors ressenyats al punt 5, diu que en la formació del concepte de figura hi ha tres fases: de manipulació, de representació gràfica i d'anàlisi.

M. L. Niess (1988) va desenvolupar un conjunt de procediments *Logo* per treballar els girs (*TURN*), les simetries (*FLIP*) i les translacions (*SLIDE*), que anaven acompanyats d'un conjunt de fitxes dirigides a conèixer els procediments, les transformacions i fer-les servir per fer dibuixos.

E. Balzano i E. Sassi (1989), van desenvolupar en programa informàtic *TRANSFORM*, que de manera diferent a anteriors aplicacions en *Logo* o en Pascal, permetés un entorn més obert i mantingués en pantalla la figura inicial després d'haver-li aplicat la transformació, i incorporés el canvi d'escala, podent visualitzar en tot moment les coordenades dels punts. A més hi va incorporar algunes transformacions òptiques. Tot i no disposar de dades experimentals, el treball amb el programa evidencia l'interès dels usuaris i l'efectivitat del seu ús.

D. Haylock i A. Cockbrun (1989) després de fer un repàs dels principals conceptes associats a les isometries, presenten un conjunt d'activitats model per ser treballades amb l'alumnat d'educació primària.

U. Leron i R. Zazkis (1989) van fer un estudi sobre les relacions formals entre els moviments de la tortuga en el *Logo* i les transformacions geomètriques, en el qual es mostra que una translació en el pla equival a un gir, una translació i un gir invers en *Logo*, i un gir en el pla equival a una translació, un gir i una translació en *Logo*.

Així, defineixen l'estat de la tortuga per (x, y, g) , o sigui per les coordenades (x, y) de la tortuga i la seva orientació (g) en graus, i per tant qualsevol gir a queda definit per $(x, y, g \pm k)$ i qualsevol desplaçament b per $(x+b \sin g, y+b \cos k, g)$.

A partir d'ells suggereixen la seriosa reflexió del professorat que faci servir el *Logo* en el treball de les isometries, ja que una translació en el món *Logo*, és, com ja hem dit, un gir, una translació i un gir invers en el món euclidià; un gir de centre exterior, és una translació, un gir, un gir una translació i un gir; i en el cas de la simetria en concepte d'eix no té corresponent en el món *Logo*.

A. Martínez i F. Juan (1989) fan una proposta de treball de les regularitats en les figures a finals de primària, tot estudiant els girs i les simetries, amb la següent seqüència: girs, simetries centrals i simetries axials. En ella donen un llistat d'activitats model bàsiques de tipus psicomotriu, i un altre llistat d'activitats complementàries de tipus gràfic, manipulatiu i reflexiu, orientades al coneixement d'aquestes les transformacions en el marc d'una metodologia activa i lúdica.

R. E. Orton (1990) va elaborar el programa informàtic *TRANSFORM*, per facilitar el treball de les transformacions amb un mínim d'instruccions i de la forma més transparent possible, així com explorar la seva composició.

J. P. Morris (1991) presenta un interessant conjunt de lliçons o sessions graduades per treballar les simetries a primària amb el reconeixement de dibuixos, l'ús de miralls, el plegat de paper i jocs diversos.

J. Arévalo i altres (1992) van editar amb la Junta d'Andalusia un programa informàtic per al primer cicle d'educació primària anomenat *Simetrías*, que en un marc de treball de conceptes bàsics. En ell s'han d'omplir de color diverses

graelles amb un eix de simetria horitzontal o vertical, o amb dos eixos, un horitzontal i l'altre vertical.

G. Barberini i M. G. Bartolini (1993a i 1993b) realitzaren un important estudi sobre la connexió entre el sentit comú i la formalització matemàtica del concepte de transformació geomètrica, a nivell d'educació primària, centrant l'anàlisi en les relacions entre la intuïció i els aspectes racionals de la geometria. En ell manifesten que no hi ha cap evidència de dependència entre les nocions intuïtives provinents de l'àmbit de la natura i els posteriors nivells d'abstracció. Així mateix proposen que el treball escolar de les transformacions es faci amb materials.

J. Castellsaguer (1994) va realitzar una important aportació a l'estudi de la geometria euclidiana amb ordinador, concretament amb el programa *Cabri Géomètre*, en la qual s'inclouen diferents activitats dirigides a les isometries planes. En ella, a més d'una proposta de seqüenciació, s'hi inclou un conjunt de macroconstruccions per construir translacions de punts, segments, angles i arcs, i girs i homotècies de punts.

A. Contreras (1994) presenta les interaccions i diferències entre la programació en *Logo* i els moviments geomètrics, en el marc del que Leron i Zazkis (1989) referenciades més amunt, van proposar sobre les relacions formals entre els moviments de la tortuga en el *Logo* i les transformacions geomètriques. Conclou exposant la diferència de significat entre els moviments del pla en la "institució matemàtica", en la "institució *Logo*", i en el pensament de l'alumnat.

L. R. Kroner (1994) va elaborar un material de treball de les isometries a partir de la realització de fitxes basades en el dibuix de la imatge final d'una graella de 5 x 5, amb algunes caselles pintades, a la qual se li apliquen diverses transformacions.

Els seus objectius són facilitar la comprensió geomètrica de les transformacions; desenvolupar la consciència espacial, l'orientació visual i l'anàlisi de patrons; i aplicar la deducció lògica a la resolució de problemes.

S. K. Eddins, et al. (1994a i 1994b) presenten un conjunt d'activitats model que ofereixen a l'alumnat de 8 a 16 anys, l'oportunitat de familiaritzar-se amb les isometries, a partir de l'ús de diverses estratègies i treballs en grups petits, amb material manipulatiu, i discussions en gran grup.

Els objectius de la proposta són: desenvolupar el vocabulari de les transformacions, connectar els conceptes bàsics de les transformacions amb les coordenades cartesianes, i aplicar les matrius (notació i terminologia) a la realització de transformacions.

M. J. Hodgson (1995) presenta un micromon *Logo* amb, els procediments *translate*, *rotate*, *reflect* i *enlarge*, que faciliten el treball de les isometries planes, com a proposta de concreció de l'objectiu terminal 4 del nivell 6 del currículum anglès: "Transformar formes fent servir ordinadors o altres coses".

Conclusions

De l'anàlisi i comparança entre aquestes propostes es pot concloure que:

- La manipulació de materials (geoplà, miralls...) i el plegat de paper són bons recursos que motiven i faciliten el treball.
- Així mateix, els dibuixos, els gràfics, l'ús de graelles, de quadrícules i d'eixos de coordenades, també es manifesten com a recursos adequats.
- L'ús d'aplicacions informàtiques, especialment amb el Cabri i el Logo, facilita la visualització i la comprensió dels conceptes i de les propietats.

3.3 Experiències escolars sobre les isometries

A nivell d'experiències escolars sobre l'ensenyament i l'aprenentatge de les isometries, voldríem referenciar les següents:

E. Vidal i E. de la Torre (1984) presenten un esquema d'organització dels continguts relatius a les transformacions geomètriques, estructurat tipus mapa conceptual, i suggereixen un conjunt de suggeriments didàctics, basats en les propostes de Dienes (vegeu apartat 2), per desenvolupar conceptes topològics, projectius i euclidians (girs, simetries i translacions).

A. Jaime i A. Gutiérrez (Jaime i Gutiérrez, 1985; Gutiérrez i Jaime, 1985; Jaime, Gutiérrez i Cáceres, 1989; Jaime, et al., 1989) presenten un programa informàtic per mostrar gràficament les semblances en el pla, en el qual, a partir de la definició d'un polígon per mitjà de les coordenades dels seus vèrtexs,

s'escull una transformació (translació, gir, simetria, simetria en lliscament i homotècia) i en pantalla es mostra el resultat, tot marcant la traça.

Així mateix van elaborar un conjunt d'activitat destinat a l'ensenyament dels moviments en el pla a nivell de primària, amb l'ús de diversos material i amb una metodologia activa, tot donant una visió dinàmica de les isometries. A partir de les manipulacions i reflexions es pretén que l'alumnat conegui cada isometria, les utilitzi amb facilitat i descobreixi les seves propietats. La progressió queda definida per: translació, gir, simetria, composició de moviments, rossetons i mosaics.

I. Barragán, M. V. Sánchez i S. Llinares (1986) presenten una experiència amb alumnes del cicle inicial en la qual s'estudien les propietats de dins/fora, ordre, alineació i paral·lelisme, en les tres transformacions geomètriques, les topològiques, les projectives i les euclidianes, en aquestes darreres només els girs i les translacions. La seva base és la utilització de materials concrets en una mena de taller matemàtic.

E. Vidal i E. de la Torre (1986) van realitzar una experiència amb *Logo* sobre els moviments en el pla, a partir del treball amb el material *Trimat* i *Cuadrimat* de Dienes i Mezard (1971). Els autors manifesten que la experiència va ser molt atractiva per l'alumnat, i que al mateix temps que precisaven les seves nocions d'angle, coordenades i distància, desenvolupaven les seves capacitats d'observació, de concentració, d'intuïció i de posar conjectures, i s'iniciaven al treball amb ordinadors tot aprenent el *Logo*.

L. Edwards (1991) va realitzar una experiència que posteriorment (vegeu punt 3.1.1) seria ampliada com a investigació (Edwards i Zazkis, 1993), amb alumnes d'entre 11 i 14 anys, en la qual es va servir un micromon *Logo* amb les primitives *Flip*, *Pivot*, *Reflect*, *Rotate*, *Slide* i *Scale*, per iniciar el coneixement de les isometries, així com un conjunt de fitxes de treball. En ella es va valorar molt positivament tant el *feedback* visual immediat, com el baix nivell d'errors i la solució d'aquest a partir del comentari entre companys i companyes. També van observar una tendència a fer excessives generalitzacions.

F. Bellemain i B. Capponi (1992) presenten el resultat de l'experiència d'implementació d'una seqüència d'ensenyament, emmarcada en l'escola francesa de didàctica de la matemàtica (vegeu apartat 1), en la qual s'usava el *Cabri*. El treball girava entorn a les propietats geomètriques de la simetria ortogonal i partia de les propostes de Grenier (1989) (vegeu 3.1.1).

S. Okolica i G. Macrina (1992) van realitzar una experiència en un centre d'ensenyament secundari, a partir de la qual van concloure que el treball de les isometries al principi de curs possibilitava que l'alumnat percebés i visualitzés conceptes més abstractes, alhora que facilitava la introducció de la geometria deductiva.

K. Shaw (1996) relata la seva experiència amb infants de sis anys, fet servir el programa *Transforms* editat per SMILE de Londres, previ treball amb llapis i paper, i comenta les importants possibilitats d'exploració que dona un mitjà informàtic com l'esmentat, permetent experimentar, fer conjectures, etc., amb una interacció ràpida i agradable.

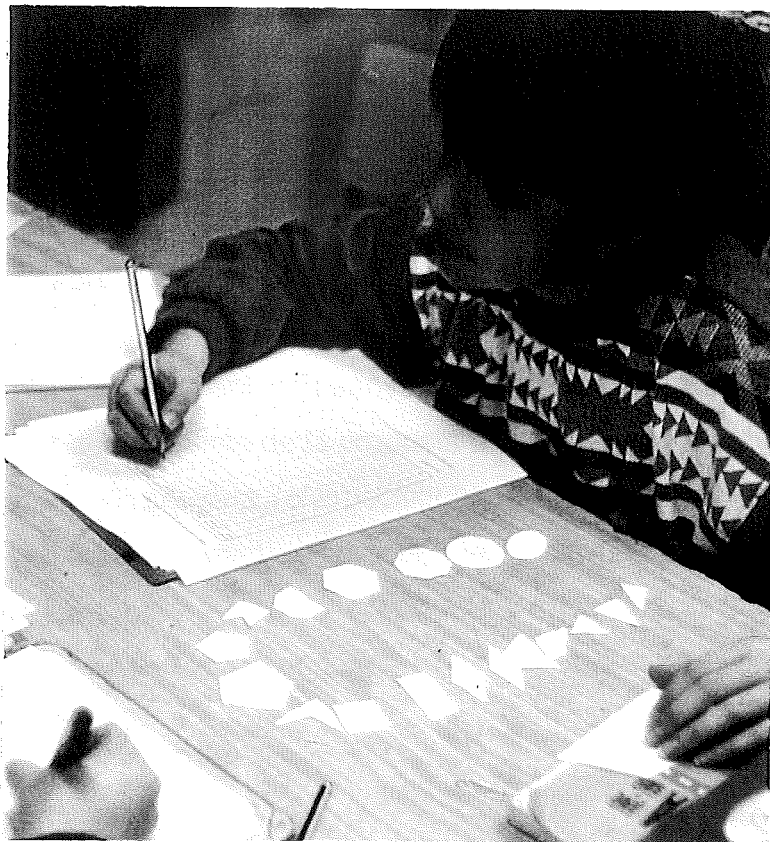
Conclusions

De les propostes d'innovació analitzades es desprèn que:

- Les activitats motrius i la manipulació de materials concrets o d'ús corrent (miralls, paper carbó i vegetal, vidres de finestres, papiroflèxia, elements de la natura...) i de materials estructurats (geoplà, mira, aplicacions informàtiques...), són recursos molt adequats per a l'aprenentatge de les isometries.
- Els suports gràfics (dibuixos, gràfics, quadrícules, graelles, eixos de coordenades, traços...), faciliten la comprensió dels conceptes i de les propietats.
- Els enfocaments metodològics de caràcter lúdic, tenen importants potencialitats per l'aprenentatge significatiu.
- L'ús d'aplicacions informàtiques (Cabri, micromons Logo...), a més de la significativitat potencial que comporta, facilita la visualització de les propietats, potencia una visió dinàmica, operacional i constructiva de les transformacions, i permet a l'alumnat conjecturar, provar, refutar i concloure.

4

La Unitat de Programació



4 LA UNITAT DE PROGRAMACIÓ

En aquest apartat es presenta una proposta original de continguts de les isometries al llarg de l'educació primària, elaborada per l'autor d'aquest informe, que recull i es fonamenta en: el marc teòric i experiencial de referència de la concepció constructivista de l'ensenyament i de l'aprenentatge de les matemàtiques, presentada a l'apartat 1; els fonaments matemàtics de les isometries que es presenten a l'apèndix d'aquest apartat; els resultats de les anàlisis de les propostes curriculars incloses a l'apartat 2; les conclusions de les investigacions prèvies ressenyades a l'apartat 3; i en la nostra experiència en l'ensenyament d'aquest tema a l'educació primària i a la formació permanent del professorat, en l'elaboració de llibres text de matemàtiques (Canals, Dalmau i Quintana, 1994a, 1994b, 1995a i 1995b), de materials curriculars (Dalmau i Quintana (En premsa) i de videogrames (Bo i Quintana, 1994), i en l'elaboració de programes curriculars (Torra i Quintana, 1992).

Aquesta proposta s'ha organitzat com a una Unitat de Programació per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les isometries a l'educació primària (vegeu el seu detall a l'annex 2), i com a tal, està estructurada en funció dels apartats suggerits tant del Departament d'Ensenyament (1992e), com per Del Carmen (1993). En aquest sentit, a més de la proposta de programació de les isometries per a tota l'educació primària, s'especifiquen de forma detallada els seus continguts i objectius didàctics propis, les activitats d'ensenyament i d'aprenentatge, i els objectius i els continguts de les proves inicials i finals dissenyades, que es recullen als annexos 1 i 3 respectivament.

4.1 Proposta de continguts de les isometries al llarg de l'Educació Primària, en la qual s'emmarca la Unitat de Programació

Cicle Inicial

Procediments

- Experimentació de moviments amb joguines electròniques i entorns informàtics (Logo) a partir d'instruccions directes.
- Construcció d'angles a partir de l'activitat motriu de girar i de l'ús d'aplicacions informàtiques.
- Identificació de moviments, desplaçaments, posicions i situacions.
- Experimentació i reconeixement de: Desplaçaments o translacions; Voltes, girs o rotacions; Reflexions o simetries.
- Identificació de simetries en objectes i figures.
- Realització experimental de simetries en figures planes i cossos.

Cicle Mitjà

Procediments

- Realització d'instruccions verbals, escrites i gràfiques dirigides al moviment (desplaçament i gir), en entorns manipulatiu, gràfic i informàtic (Cabri, Logo...).

- Construcció i reconeixement d'angles a partir de girs realitzats o observats en activitats motrius, manipulacions o aplicacions informàtiques.
- Identificació de moviments, de desplaçaments, de posicions i de situacions.
- Experimentació i reconeixement, en figures planes i cossos, de: Desplaçaments o translacions; Voltes, girs o rotacions; Reflexions o simetries.
- Identificació de simetries en objectes i figures planes i tridimensionals.
- Identificació de girs en objectes i situacions quotidianes.
- Identificació de translacions en situacions quotidianes.
- Observació de propietats de les figures que romanen invariables en aplicar-les-hi transformacions: topològiques (obert/tancat), projectives (paral·lelisme) i mètriques (forma).

Conceptes

- Transformacions: topològiques (deformacions), projectives (ombres) i mètriques (moviments).
- Principals propietats de les figures que romanen invariables a transformacions.
- Isometries: simetries, translacions i girs (inici)

Cicle Superior

Procediments

- Interpretació, realització i formulació d'instruccions verbals, escrites i gràfiques dirigides al moviment (desplaçament i gir), en entorns manipulatius, gràfics i informàtics.
- Construcció, reconeixement i classificació d'angles a partir de girs realitzats o observats en activitats manipulatives, gràfiques o en aplicacions informàtiques.
- Classificació de figures per criteris topològics, projectius i mètrics.
- Experimentació i reconeixement, en figures planes i cossos, de girs, simetries i translacions.
- Identificació i construcció de girs, simetries i translacions en objectes, situacions reals, i figures planes i cossos.
- Realització de girs amb centre a la figura i a l'exterior.
- Realització i reconeixement de simetries d'eixos verticals, horitzontals i inclinats, i figures exteriors, tangents i secants a l'eix.
- Realització i reconeixement de translacions amb vectors de diferent longitud, sentit i direcció.
- Observació i reconeixement de les propietats de les figures que romanen invariables en aplicar-les-hi transformacions: topològiques (obert/tancat, ordre del punts...), projectives (paral·lelisme, rectitud...) i mètriques (forma, longitud, angles...).
- Classificació de polígons segons diferents criteris en base a transformacions: el nombre eixos de simetria, els girs coincidents, les direccions dels costats, l'equivalència...
- Experimentació de la composició de transformacions

Conceptes

- Transformacions topològiques, projectives i mètriques.
- Isometries: Girs, translacions i simetries.
- Propietats de les figures que romanen invariables a transformacions.
- Composició d'isometries
- Inici a la semblança.

4.2 Continguts de la Unitat de Programació

4.2.1 Procediments

- Expressió de formes, distàncies, posicions, moviments..., de figures i objectes al pla i a l'espai.
- Realització d'accions manipulatives i experimentals evocadores dels conceptes i procediments geomètrics relacionats amb les transformacions geomètriques.
- Verbalització i representació gràfica de les accions realitzades.
- Aplicació correcta de les normes d'ús i aplicació de les eines clàssiques de construcció geomètrica: regle, escaire, compàs, transportador, transportador de simetries...
- Aplicació correcta de les normes d'ús i aplicació de materials físics: brúixola solar, geoplà...
- Aplicació correcta de les normes d'ús i aplicació del programari: Logo, Deluxe Paint, Cabri Géomètre, PaintBrush...

- Interpretació, realització i formulació d'instruccions verbals i gràfiques dirigides al moviment (desplaçament i gir), en entorns antropomòrfics, manipulatius, gràfics i informàtics.
- Ordenació d'elements i figures geomètriques segons diferents criteris.
- Observació, reconeixement i transformació de models geomètrics dinàmics.
- Construcció i reconeixement d'angles a partir de girs realitzats o observats en activitats manipulatives, gràfiques o informàtiques.
- Experimentació i reconeixement, en objectes, figures planes i cossos, de: Desplaçaments o translacions; Voltes, girs o rotacions; Reflexions o simetries.
- Identificació de simetries en objectes i figures.
- Experimentació i reconeixement, en figures planes i cossos, de: girs, translacions i simetries.
- Identificació i construcció de simetries de figures planes i cossos.
- Observació i reconeixement de les propietats de les figures que romanen invariables o que varien en aplicar-los-hi isometries: convexitat, longituds, angles, paral·lelisme, obert/tancat, ordre dels punts, forma, mida, posició, costats...
- Classificació de polígons segons diferents criteris: nombre d'eixos de simetria, girs coincidents, direccions dels costats, equivalència...
- Resolució de problemes i situacions geomètriques que incorporin conceptes i procediments propis de les transformacions.
- Utilització de materials, calculadores, recursos informàtics..., en la resolució de problemes i situacions geomètriques.

4.2.2 Conceptes

- Transformacions topològiques (deformacions), projectives (ombres) i mètriques (moviments).
- Isometries: Desplaçaments o translacions; voltes, girs o rotacions; reflexions o simetries.
- Propietats de les figures que romanen invariables en les isometries.
- Girs: figures amb centre, elements (centre, sentit i amplitud), centre interior, tangent i exterior, composició.
- Simetries: figures simètriques, figures amb eix de simetria, l'eix de simetria, eixos interiors, tangents, secants i exteriors, distàncies a l'eix, invariants, composició.
- Translacions: elements (distància, direcció i sentit), el vector, composició translacions.

4.2.3 Actituds

- Organització i planificació del treball.
- Valoració positiva del propi treball, esforç i progrés, així com del dels altres companys i companyes.
- Consideració de l'error com a element informatiu i estímul per a noves iniciatives.
- Adquisició d'una progressiva autonomia en la cerca d'ajudes, recursos i eines de treball i resolució de situacions i problemes.
- Elaboració i presentació dels treballs de forma correcta i acurada.
- Manifestació d'interès per la comunicació i confrontació d'informació amb els companys i companyes.

- Apreciació dels elements de la vida quotidiana, la naturalesa, la tecnologia, l'art, etc., que es poden geometritzar.
- Interès per la precisió i exactitud dels càlculs matemàtics, mesures, descripcions i representacions geomètriques.
- Actitud interrogativa en problemes, situacions i experimentacions.
- Interès i constància en la cerca de camins i solucions a problemes geomètrics.
- Aplicar informacions i recursos coneguts a contextos diferents.
- Verbalització de la presa de decisions i del procés seguit en la realització de tasques.
- Correcció, precisió i pulcritud en l'ús de materials.
- Confiança en les pròpies capacitats.
- Elaboració d'estratègies personals per a la resolució de problemes.
- Actitud reflexiva sobre què s'ha après i com s'ha après.

4.3 Objectius Didàctics de la Unitat de Programació

- Trobar relacions geomètriques entre les figures i llurs elements, que possibilitin alguna classificació.
- Reconèixer figures geomètriques iguals i determinar el moviment o transformació geomètrica que les fa coincidir.
- Expressar i representar aspectes espacials de la realitat relatius a formes, grandàries, posició, moviment, distàncies, etc., mitjançant el llenguatge geomètric i triant i utilitzant els models adequats.
- Reconèixer les transformacions com a operacions amb tres estats.

- Reconèixer els tres tipus d'isometries; girs, simetries i translacions, en la vida quotidiana i en casos geomètrics.
- Identificar els elements necessaris per fer un gir, una simetria i una translació.
- Reconèixer les principals propietats que romanen invariables en aplicar a una figura una isometria.
- Realitzar girs, simetries i translacions en figures.
- Realitzar composicions de girs, de simetries i de translacions, i reconèixer en cada cas el seu resultat.
- Aprendre l'ús del regle, de l'escaire, del transportador i del compàs i utilitzar-los en la construcció geomètrica.
- Construir figures planes amb recursos informàtics i experimentar les seves propietats i invariants en aplicar-los-hi alguna isometria.
- Utilitzar programes i aplicacions informàtics com a simuladors.
- Utilitzar els conceptes matemàtics apresos en l'estudi d'objectes i situacions de la vida real.
- Construir models de treball i d'estudi de situacions geomètriques.

4.4 Activitats d'ensenyament i d'aprenentatge de la Unitat de Programació

4.4.1 Les Proves Inicials¹

Objectius i continguts de la Prova Inicial 1

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de transformació.	Concepte informal de transformació.
2	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de transformació.	Transformacions a la vida real.
3	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de transformació.	Utilitat de les transformacions.
4	Reconèixer transformacions en canvis i accions, associats a la natura i a isometries	Reconeixement de transformacions.

¹ Tot i que a partir d'aquest moment parlarem de Proves Inicials i Proves Finals, volem aclarir que de fet, més que proves són exercicis quotidians fets per l'alumnat. Així mateix cal fer constar que les Proves Inicials són totalment diferents que les Proves Finals, i estan destinades a objectius diferents.

Objectius i continguts de la Prova Inicial 2

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de gir en el camp geomètric.	Concepte de gir en el camp geomètric.
2	Recordar i reflexionar sobre els elements geomètrics dels girs.	Elements geomètrics dels girs.
3	Identificar objectes que girin.	Objectes que girin.
4	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de simetria a el camp geomètric.	Concepte de simetria en el camp geomètric.
5	Recordar i reflexionar sobre els elements de les simetries.	Elements geomètrics de les simetries.
6	Identificar objectes que tinguin simetria.	Objectes amb simetria.
7	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de translació al camp geomètric.	Concepte de translació en el camp geomètric.
8	Recordar i reflexionar sobre els elements geomètrics de les translacions.	Elements geomètrics de les translacions.
9	Identificar objectes que es traslladin.	Objectes que es traslladin.
10	Reconèixer isometries en accions i objectes.	Reconeixement d'isometries.
11	Associar els girs, les simetries i les translacions a conceptes sinònims.	Concepte de gir, de simetria i de translació.
12	Reconèixer situacions i objectes representatius girs, simetries i translacions	Reconeixement de girs, de simetries i de translacions.

Objectius i continguts de la Prova Inicial 3

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Reconèixer girs, simetries i translacions aplicades a una figura.	Girs de diversos centres i sentits, simetries de diversos eixos i translacions de diversos vectors.
2	Reflexionar sobre les variants de les figures en aplicar-los-hi una transformació.	Propietats que varien en les figures en aplicar-los-hi un gir, una simetria o una translació: la posició
3	Reflexionar sobre les invariants de les figures en aplicar-los-hi una transformació.	Propietats que no varien en les figures en aplicar-los-hi un gir, una simetria o una translació: forma, costats, angles, mides, etc.

Vegeu el detall dels tres exercicis o proves inicials a l'annex 1, i el seu buidat i comentaris a l'apartat 6.

4.4.2 Les activitats de la Unitat de Programació

4.4.2.1 Índex de continguts de la Unitat de Programació

Girs

Contingut	Document-qüestió
Aplicar	PG1-1
Centre de polígon	PG3-taula / PG3-4 / PG3-5 / R-9
Centre interior / exterior	G-1 / PG1-5
Composició	PG1-1 / PG1-3 / PG1-4 / PG2-1 / PG2-2 / PG2-3 / PG2-4 / PG2-5 / PG2-15 / R-8
Elements	G-2/R-5
Gir complet	PG1-5 / PG1-14 / R-7
Gir invers	PG1-4 / PG2-2 / PG2-6 / PG2-7 / PG2-8 / PG1-9 / PG2-10 / PG2-11 / PG2-12 / PG2-13 / PG2-14 / R-6
Identificar	PG2-2
Invariants	PG3-2 / PG3-19 / PG3-10 / R-1 / R-2 / R-3
Polígon regular i gir central	PG3-taula / PG3-1 / R-10
Posició i situació	PG3-11 / R-7
Sentit del gir	PG2-9 / PG2-10 / PG2-11 / PG2-12 / PG2-13 / PG2-14
Ús quotidià / vida real	G-3 / PG1-5

G= Les isometries: els girs

R= Fulls de resum i conclusions dels girs

Simetries

Contingut	Document-qüestió
Aplicar	PS1-1 / PS2 -1 / PS2 -2 / PS4 -1 / PS4-2 / PS4-5
Composició	PS1-2 / PS4-7 / PS4-8 / PS4-9 / R-7 / R-8 / R-9 / R-10 / R-11 / R-12 / R-13
Eix	S-1 / S-3 / S-4 / S-5 / PS3-taula / PS4-3 / PS4-7 / PS4-8 / PS4-9 / R-4
Invariants	PS2-3 / PS4-4 / PS4-6 / R-1 / R-2 / R-3
Polígon regular i simetria	PS3-taula / R14
Propietats	PS4-6 / R-5
Punts homòlegs	PS4-5
Simetria en i entre	S-1 / S-2
Simetria inversa	R-6
Ús quotidià / vida real	S-0

S= Les isometries: les simetries

R= Fulls de resum i conclusions de les simetries

Translacions

Contingut	Document-qüestió
Aplicar	PT1-1 / PT1-2 / PT2-1 / PT2-4 / PT3-4
Composició	PT3-1 / PT3-2 / R-8 / R-9 / R-10
Direcció i sentit	T-3 / T-4
Elements	T-2 / T-3 / T-6 / R-5
Invariants	PT1-3 / R-1 / R-2 / R-3
Reconèixer	PT2-2
Translació inversa	PT3-3 / R-7
Ús quotidià / vida real	T-1 / T-6
Vector	T-5 / R-6

S= Les isometries: les translacions

R= Fulls de resum i conclusions de les translacions

4.4.2.2 Les activitats una per una

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
Les transformacions	Previ	Introducció general al concepte de transformació. Nosaltres vam recórrer al llibre <i>Actimates C.S. 2</i> (Canals, Quintana i Dalmau, 1995a).
	1	Repàs del concepte de transformació.
	2	Els tres moment d'una transformació. La transformació com a operació.
	3	Invariants
	4	Repàs del concepte de transformació i invariants
	5	Tipus d'isometries: girs, simetries i translacions. Aquí cal una explicació o record previs.
	6	Per reflexionar
	7	Relació entre les isometries i la vida quotidiana.
	8	Els tres moment d'una transformació. La transformació com a operació.
Les isometries: els girs	1-2	Girs a la vida quotidiana. Reflexió sobre coses que giren i al voltant de què: de si mateix, d'altres coses... Elements dels girs: <ul style="list-style-type: none"> • Al voltant de què? → Punt → Centre • Quant? → Molt o poc → Angle • Cap a on? → Dreta o esquerra → Sentit
	3	Els girs en les expressions.

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
PG1 La peça quadrada	1	Material: la peça quadrada Girs de quarts de volta. Composició de 2 i 3 girs. Reflexió sobre la suma.
	2	Buscar pas intermedi entre 2 girs consecutius. Buscar gir donada situació inicial i final.
	3-4	Composició de girs. Inici als girs inversos.
	5	Centre de gir interior i exterior.
PG2A Una brúixola solar PG2B Els girs del Logo		Nota: Les activitats de PG2A i PG2B són les mateixes. En el cas de PG2A es fan manipulativament, i en PG2B es fan en el <i>Win Logo</i> . Cal decidir si només es vol fer PG2A o només PG2B, bé si primer PG2A i després PG2B, bé una combinació d'ambdues. En el nostre cas vam preferir la manipulació de PG2A. Material: En PG2A, la brúixola solar. En PG2B, el <i>Win Logo</i> i el fitxer <i>pg2b.log</i>
	1	Composició de girs del mateix centre.
	2	Girs inversos.
	3-5	Composició de girs.
	6-8	Girs inversos.
	9-14	Girs inversos. Els dos sentits d'un gir.
	15	Composició i descomposició de gir.

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
PG3 Els girs dels polígons	Material: Polígons retallats i Plantilla de polígons	Treball del nom dels polígons, dels tipus i subtipus, que també anomenem cognoms, els costats, les coincidències en girar, el centre i la regularitat.
	1	Relació entre polígon regular i girs centrals.
	2	Invariants.
	3-5	Centre.
	6	Polígons còncaus, convexos, irregulars i regulars.
	7	El cercle, polígon d'infinits costats.
	8	Diferència entre el·lipse i oval.
	9	Invariants,
	10	Invariants.
	11	Significat de posició i situació.
PG4 Girs de figures	Material: Figures i Plantilla de figures	Treball del nom de les figures, les coincidències en girar i el centre.
PG5 Girs de les lletres		Treball dels girs de les lletres i el centre.
Fulls de resum i de conclusions dels girs	<p>Aquests fulls es poden fer al final de la seqüència de treball dels girs o bé anar-los omplint a mida que es facin els exercicis anteriors.</p> <p>En el nostre cas es van fer de manera individual al final, amb posterior posada en comú.</p>	

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
Les isometries: les simetries	1-2	Simetries a la vida quotidiana. Figures amb simetria en elles mateixes, figures simètriques entre si, inici a simetria a l'espai.
	3, 4 i 5	L'eix de simetria.
PS1 Simetries amb la peça quadrada	1 Material: La peça quadrada.	Simetries amb eixos verticals i horitzontals.
	2	Composició de simetries d'eixos verticals paral·lels i d'eixos concurrents perpendiculars.
PS2 Simetries de figures	1	Completar dibuixos amb materials. La nostra experiència ens fa aconsellar l'ús del paper vegetal i el llapis. En les creus cal donar ajut.
	2	Construir simetries de figures amb l'eix exterior, tangent i secant. El vocabulari per l'alumnat podria ser, amb l'eix a fora o exterior, que l'eix toca o tangent i que l'eix traspassa, travessa o secant Hi ha figures paral·leles i no paral·leles a l'eix, i aquest pot ser vertical, horitzontal i inclinat.
	3-4	Invariants de les simetries.
PS3 Els eixos de simetria dels polígons	Material: Polígons retallats i resultats de la taula feta a PG3	Treball del nom dels polígons, del nombre de costats, del d'eixos, les coincidències en girar, el centre i la regularitat. Relació entre costats, eixos i girs.

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
PS4 Simetries amb el Cabri	Material: <i>Cabri Géomètre</i>	Si no el coneixen, caldrà una petita introducció. Aconsellem guiar la creació de tres punts, la dels segments que els uneixen, modificar el triangle anomenant els seus vèrtexs, fer altres operacions com determinar un angle i mesurar els segments i l'angle, crear una recta que passi per dos punts que faci d'eix de simetria, construir els punts simètrics dels vèrtexs, etc.
	1	Fer simetries
	2	Dependència de punts. Canvis en la figura simètrica si es modifica la inicial. La invariabilitat de l'eix.
	3	Eix de simetria exterior, tangent i secant. Canvis en moure l'eix.
	4	Determinar i mesura d'angles. Invariància de mesures. Anàlisi de què varia. Suma dels angles interiors d'un triangle.
	5 Material: Fitxers <i>SIM1A.FIG</i> i <i>SIM1B.FIG</i>	Eix de simetria exterior, tangent i secant. Punts homòlegs.
	6	Invariància de longituds i distàncies i altres propietats: $pq=p'q'$, $pe = p'e$, $pe = \frac{1}{2} pp'$, $e \perp pp'$.
	7 Material: Fitxer <i>SIM2A.FIG</i>	Composició de dues simetries d'eixos paral·lels

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
PS4	8 Material: <i>SIM3A.FIG</i>	Composició de dues simetries d'eixos concurrents, concretament perpendiculars.
	9 Material: <i>SIM3B.FIG</i>	Aprofundiment del fet que dues simetries seguides d'eixos concurrents són un gir.
PS5 Simetries de les lletres		Buscar eixos verticals i horitzontals. H, O i X tenen 2 eixos. Les lletres N, S i Z tenen simetria central. Hi ha 7 casos sense simetria.
PS6 El joc de les paraules simètriques	1	Eixos verticals: MOTO, IMMA, VOMIT i TOMATO
	2	Eixos horitzontals: BICI, BEBE, XOC, COCO, DECIDIDO
	3	A part de llegir el text, suggerim debatre què pensen de la pregunta.
	4	Eixos horitzontals.
PS7 - Com fer simetries amb el Deluxe Paint		Material: <i>Deluxe Paint</i> .
PS8 - El micromon simetria del WinLogo		Material: Micromon <i>Simetria</i> de Joan Homar-PIE.
PS9 - Jocs de simetries amb el PaintBruh		Material: <i>PaintBrush</i> de Microsoft i el fitxer <i>CARES.BMP</i>
Fulls de resum i conclusions de les simetries		Com en el cas dels girs, cal decidir quan es passen, i si es fan de manera individual, grupal o amb tota la classe. En el nostre cas es van fer de manera individual al final, amb posterior posada en comú.

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
Les isometries: les translacions	1	Translacions a la vida quotidiana
	2-3	Elements de les translacions: Quant? → Distància o longitud Cap a on? → Direcció / Sentit
	4	Els dos sentits de tota direcció.
	5	El vector
	6	Direcció i sentit
PT1 Fitxa de pràctiques de translacions	1	Exercicis de translacions en una graella, a partir de vectors verticals, horitzontals i inclinats dibuixats.
	2	Exercicis de translacions en una graella, a partir de diversos vectors. Els invariants.
PT2 Fitxa de pràctiques de translacions	1	Exercicis sense graelles i vectors horitzontals i verticals assenyalats.
	2-3	Composició de translacions. Figura inicial i figura final. Buscar vector. Translació inversa.
PT3 Fitxa de pràctiques de translacions	1	Composició de translacions. Vector resultant.

Document	Exercici núm.	Continguts i Comentaris
<p>PT4</p> <p>Translacions amb el Logo</p>	<p>Material: Win-Logo i <i>trans.log</i></p>	<p>Procediments: <i>bandera.log</i> <i>triangle.log</i> <i>quadrat.log</i> <i>cub.log</i></p> <p>Abans de fer-los servir, cal canviar-los-hi el nom pel de <i>figures.log</i></p> <p>Si no el coneixen caldrà fer una breu sessió introductòria, o un petit repàs.</p> <p>Algunes figures interessants: una bandera, un triangle, un quadrat que permet fer graelles, un cub...</p> <p>Suggerim combinar el procediment <i>trans.log</i> amb les primitives <i>gira.dreta</i> i <i>gira.esquerra</i></p>
<p>Fulls de resum i conclusions de les translacions</p>	<p>Com en el cas dels girs i de les simetries, cal decidir quan es passen, i si es fan de manera individual o grupal. En el nostre cas es van fer de manera individual al final, amb posterior posada en comú.</p>	
<p>El Transjoc</p>	<p>Materials: Tauler de joc, peces i dau.</p> <p>Qüestions vàries:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Una partida dura uns vint minuts. • Suggerim plastificar el tauler i les peces. • Els daus es poden ser dels blancs que venen a les botigues de jocs de rol, escrits amb retolador. • Per jugar més còmodament suggerim fer un tauler i unes fitxes de quadrets d'un centímetre de costat. • Aconsellem que el professorat intervingui durant el desenvolupament del joc tant per aclarir dubtes (per on gira la peça, si al final ha de coincidir de manera exacta, etc.), com per fer referències als girs, les simetries i les translacions. • Suggerim incorporar el joc a la classe durant el que queda de curs. 	

4.4.3 Les Proves Finals

El detall d'aquestes proves està en l'annex 3, i el seu buidat i comentaris a l'apartat 6.

Objectius i continguts de la Prova Final 1

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Reconèixer els invariants de les isometries.	Invariants de les isometries.
2	Conèixer i reconèixer girs, simetries i translacions.	Concepte de gir, de simetria i translació.
3	Identificar invariants i particularitats de les isometries	Invariants i particularitats de les isometries.

Objectius i continguts de la Prova Final 2

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Reconèixer els punts invariants de les isometries.	Punts invariants dels girs, de les simetries i de les translacions.
2	Reconèixer els invariants de les isometries.	Invariants dels girs, de les simetries i de les translacions.
3	Reconèixer variants de les isometries.	Variants dels girs, de les simetries i de les translacions.
4	Identificar els elements de les isometries.	Elements dels girs, de les simetries i de les translacions.
5	Reconèixer transformacions inverses	Transformacions inverses.

Qüestió	Objectius	Continguts
6	Comprendre la composició de les isometries.	Composició de girs, de simetries i de translacions
7	Relacionar la regularitat i les isometries.	Regularitat dels polígons i isometries.
8	Reflexionar sobre allò que s'ha après dels girs.	Concepte, elements i propietats dels girs.
9	Reflexionar sobre allò que s'ha après de les simetries.	Concepte, elements i propietats de les simetries.
10	Reflexionar sobre allò que s'ha après de les translacions.	Concepte, elements i propietats de les translacions.

4.5 Recursos utilitzats

4.5.1 Recursos materials estàndards

Regle, escaire, transportador d'angles, transportador de simetries (en alguns casos fotocopiats en acetat de transparències), compàs, paper vegetal, paper carbó, paper quadriculat, tisores, mirallets i llibre de miralls (preferentment de cartró o paper metal·litzat), etc.

4.5.2 Recursos materials propis (vegeu l'apartat Materials a l'annex 2)

- La peça quadrada (PG1 i PS1).
- La brúixola solar (PG2a).
- Divuit polígons retallables (PG3 i PS3).

- Deu figures retallables (PG4).
- El joc Transjoc, amb el tauler, les fitxes i el dau.

4.5.3 Recursos informàtics

- *Deluxe Paint* de Dro Soft (PS7).
- *PaintBrush* del Windows i el fitxer original *CARES.BMP* (PS9).
- *Cabri Géomètre* d'IMAG-PIE i els fitxers originals *SIM1A.FIG*, *SIM1B.FIG*, *SIM2A.FIG*, *SIM3A.FIG* i *SIM3B.FIG* (PS4).
- *Win-Logo* d'Idea (PG2b)
- *Win-Logo* d'Idea i el micromon *Simetria* de Joan Homar-PIE (1993) i els procediments originals *bandera.log*, *cub.log*, *pg2b.log*, *quadrat.log*, *trans.log* i *triangle.log* (PS8).

4.5.4 Recursos videogràfics

- *Alícia al país de les transformacions geomètriques* de la Fundació Serveis de Cultura Popular (Bo i Quintana, 1994).

APÈNDIX A L'APARTAT 4: PRINCIPALS CONCEPTES MATEMÀTICS DE LES ISOMETRIES

En aquest apèndix es presenta un resum dels principals conceptes i elements de l'estructura matemàtica de les isometries planes, que són el fonament científic i epistemològic dels objectius i continguts del seu aprenentatge a l'educació obligatòria, i més concretament de la Unitat Didàctica que es proposa en aquesta memòria.

Així, i essent conscients de les limitacions d'espai i de les necessàries simplificacions, hem estructurat la presentació de manera funcional i esquemàtica a partir de les definicions fonamentals del concepte i dels tipus o subgrups d'isometries, l'enumeració de les seves propietats -sovint simplificacions de teoremes-, l'estructura algebraica i les equacions.

Les principals fonts consultades han estat: Alsina, Pérez i Ruiz, 1989; Alsina i Trillas, 1984; Balosi, de Maron i Ponziani, 1995; Bell, 1971, 1972a, 1972b, 1973 i 1974; Brown, 1973; Jaime i Gutiérrez, 1996; Martin, 1994; i Puig Adam, 1980.

Tot i que els subgrups de les isometries són els girs, les simetries, les translacions i les simetries amb lliscament, aquesta darrera no ha estat recollida en no formar part de la nostra proposta didàctica esmentada.

Les isometries

Definició 1: Una **isometria** és una aplicació -biunívoca i contínua- del pla en si mateix que conserva les distàncies: $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$

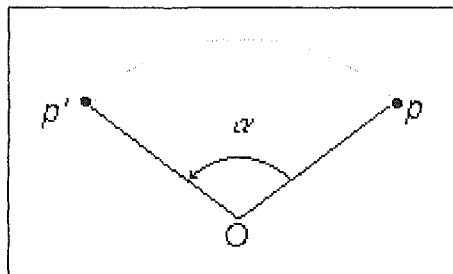
Propietat: Existeix una transformació identitat tal que $i(p) = p$

Definició 2: Dues isometries f i g són **equivalents** quan $f(p) = g(p)$

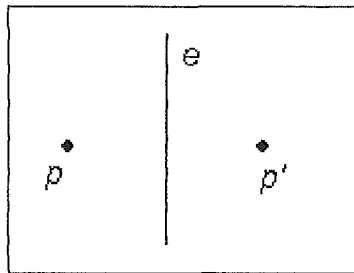
Definició 3: Un punt p que pertany al pla és **invariant** per una isometria f , si $f(p) = p$

Propietat: El producte o **composició** de dues isometries f i g és una isometria $g \circ f(p) = g(f(p))$

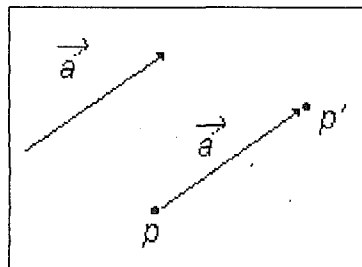
Definició 4: Donats un punt p del pla i un angle orientat α , anomenem **gir** de centre O i angle α a la transformació $G(O, \alpha)(p) = p'$, tal que la distància del centre al punt és igual a la distància del centre al punt imatge [$d(O, p) = d(O, p')$], i l'angle format pel punt, el centre i la imatge és igual a l'angle de gir [$\angle pOp' = \alpha$]



Definició 6: Donats un punt p i una recta e del pla, anomenem **simetria axial** d'eix e a la transformació $S_e(p) = p'$, tal que el segment format pel punt i la seva imatge sigui perpendicular a l'eix $[\overline{pp'} \perp e]$, i que la distància de l'eix al punt sigui la mateixa que la de l'eix a la seva imatge $[d(e,p) = d(e,p')]$



Definició 7: Donats un punt p i un vector lliure \vec{a} del pla, anomenem **translació** de vector \vec{a} , a la transformació $T_{\vec{a}}(p) = p'$, tal que la distància entre el punt i la imatge sigui igual a la longitud del vector $[d(pp') = |\vec{a}|]$



Propietats de les isometries

Propietats dels girs

G1: Tot gir és una isometria

G2: Dos girs del mateix centre són equivalents, sí i només sí la seva diferència és 0° o 360° .

G3: El centre d'un gir és l'únic punt invariable en la transformació.

G4: La composició de dos girs de mateix centre és un altre gir amb el mateix centre i l'angle igual a la suma dels dos angles inicials.

G5: La composició de dos girs de diferent centre és:

a) Si la suma dels dos girs és diferent de 0° o 360° , un altre gir amb diferent centre i l'angle igual a la suma dels dos angles inicials.

b) Si la suma dels dos girs és igual a 0° o 360° , una translació.

G6) Tot gir es pot descomposar d'infinites maneres en un producte de dos girs amb el mateix centre.

G7) Tot gir es pot descomposar d'infinites maneres en un producte de dos girs de diferent centre.

G8) Tota translació es pot descomposar d'infinites maneres en un producte de dos girs de diferent centres.

G9) Els girs conserven el sentit dels angles i per tant l'orientació.

Propietats de les simetries

- S1: Tota simetria és una isometria
- S2: El segment que uneix un punt amb el seu simètric és perpendicular a l'eix de simetria. L'eix és la mediatriu del segment.
- S3: La distància d'un punt a l'eix de simetria és igual que la distància del punt simètric al mateix eix.
- S4: Els punts de l'eix de simetria són els únics punts que es mantenen invariables en la transformació.
- S5: La composició de dues simetries,
- a) D'eixos paral·lels és una translació de vector perpendicular als dos eixos i longitud igual al doble de la distància entre ells.
 - b) D'eixos secants o concurrents és un gir de centre el punt de tall dels dos eixos i amplitud el doble de la que formen entre ells.
- S6: La composició d'un nombre parell de simetries d'eixos paral·lels és una translació.
- S7: La composició d'un nombre senar de simetries d'eixos paral·lels és una simetria.
- S8: Tota translació es pot descomposar d'infinites maneres en un producte de dues simetries d'eixos perpendiculars al vector translació.
- S9: Tot gir es pot descomposar d'infinites maneres en un producte de dues simetries que es tallen en el centre de gir.
- S10: Les simetries inverteixen el sentit dels angles i per tant l'orientació.

Propietats de les translacions

- T1) Tota translació és una isometria.
- T2) La composició de dues translacions és una altre translació de vector igual a la suma dels dos vectors inicials.
- T3) Tota translació es pot descomposar d'infinites maneres en un producte de dues translacions.
- T4) Les translacions conserven el sentit dels angles.

Propietats generals de les isometries

- I1) El producte d'una translació i un gir és un gir de centre diferent a l'inicial i d'angle igual.
- I2) Una isometria queda determinada per tres punts no alineats i les seves imatges
- I3) Tota isometria es pot descomposar en un producte de com a màxim tres simetries.
- I4) Tota isometria ha de ser un gir, una simetria, una translació o una simetria amb lliscament.
- I5) Tota isometria directa és un gir o una translació.
- I6) Tota isometria inversa és una simetria.

Estructures de les isometries

Els **girs** tenen l'estructura de grup abelià perquè tenen:

- Operació interna: $G(O, \alpha) \circ G(O, \beta) = G(O, \alpha + \beta)$
- Element neutre: $G(O, \alpha) \circ G(O, 0^\circ) = G(O, \alpha + 0^\circ) = G(O, \alpha)$
- Element simètric: $G(O, \alpha)^{-1} = G(O, -\alpha)$
- La propietat commutativa: $G(O, \beta) \circ G(O, \alpha) = G(O, \alpha) \circ G(O, \beta)$
- La propietat associativa: $(G(O, \gamma) \circ G(O, \beta)) \circ G(O, \alpha) = G(O, \gamma) \circ (G(O, \beta) \circ G(O, \alpha))$

Les **translacions** tenen l'estructura de grup abelià perquè tenen:

- Operació interna: $T_a \circ T_b = T_{a+b}$
- Element neutre: $T_0 \circ T_a = T_{a+0} = T_a$
- Element simètric: $T_a^{-1} = T_{-a}$
- La propietat commutativa: $T_b \circ T_a = T_a \circ T_b$
- La propietat associativa: $(T_c \circ T_b) \circ T_a = T_c \circ (T_b \circ T_a)$

El conjunt de **girs i translacions** és un grup no abelià ja que:

- La composició de dos girs és un gir o una translació; la composició de dues translacions és una translació; i la composició d'un gir i una translació és un gir.

- Els girs i les translacions tenen com element neutre la identitat que és alhora un gir de 0° i una translació de vector nul.
- Els girs i les translacions tenen elements simètrics.
- Les composicions són associatives.
- Els girs de diferent centre no són commutatius.

El conjunt de les **isometries del pla** és un grup no abelià amb la llei de composició d'aplicacions ja que:

- La composició de dues isometries qualsevol és una isometria.
- La composició d'isometries és associativa.
- Les isometries tenen com a element neutre la transformació identitat.
- Totes les isometries tenen element simètric.

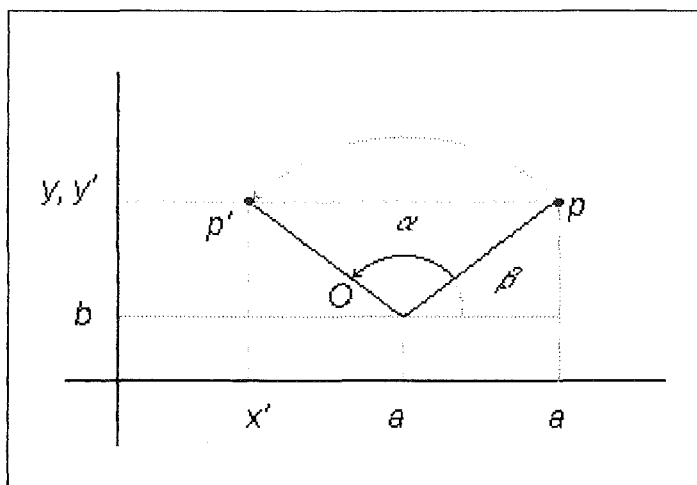
Equacions de les isometries

Equacions d'un gir

Sigui un gir $G(O, \alpha)$, on les coordenades del centre O són (a, b) , i un punt p de coordenades (x, y) . En aplicar el gir indicat al punt p , es genera la imatge p' de coordenades (x', y') , les quals estan definides per les següents equacions:

$$x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha$$

$$y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha$$



Equacions d'una simetria

Sigui una simetria S_e on l'eix e té com a equació la recta $ax + by + c = 0$, i un punt p de coordenades (x, y) . En aplicar la simetria axial indicada al punt p , es genera la imatge p' de coordenades (x', y') , les quals estan definides per les següents equacions:

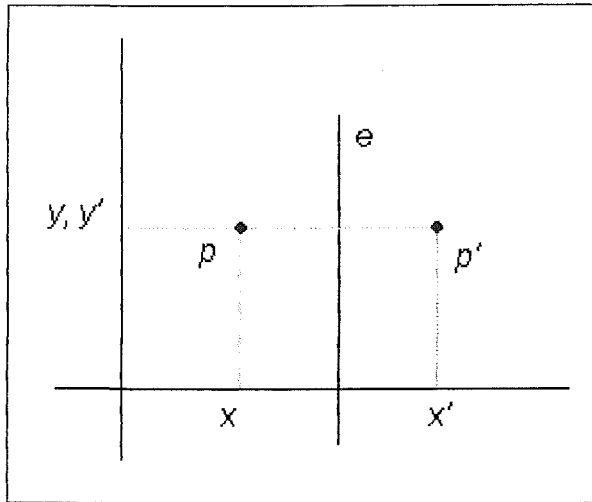
$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}$$

$$y' = y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}$$

El segment $\overline{pp'}$ talla a l'eix e en el punt q de coordenades (x'', y'') , les quals estan definides per les següents equacions:

$$x'' = \frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y'' = \frac{a^2y - abx - ac}{a^2 + b^2}$$

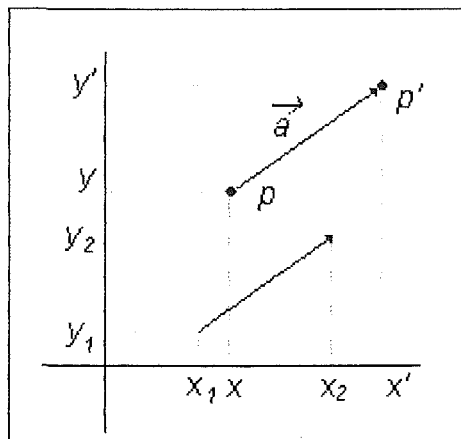


Equacions d'una translació

Sigui una translació T_a de vector \vec{a} definit pels punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , i un punt p de coordenades (x, y) . En aplicar la translació al punt p , es genera la imatge p' de coordenades (x', y') , les quals estan definides per les següents equacions.

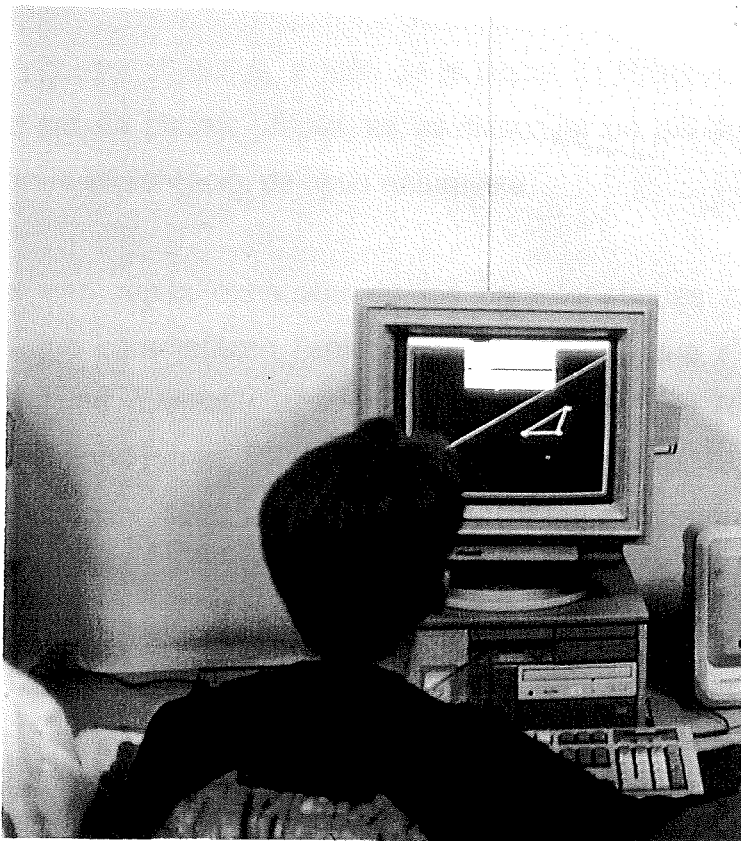
$$x' = x + (x_2 - x_1)$$

$$y' = y + (y_2 - y_1)$$



5

Programa i desenvolupament de la intervenció



5 PROGRAMA I DESENVOLUPAMENT DE LA INTERVENCIÓ

La Unitat de Programació presentada a l'apartat anterior (vegeu apartat 4), a més de voler ser un material útil per al professorat i per a l'alumnat, pretén col·laborar en la detecció dels coneixements previs informals i formals de l'alumnat sobre les isometries; fer aflorar els principals errors conceptuals i procedimentals tant d'origen social i col·loquial, com d'aprenentatges deficients, com d'autoexplicacions lògiques, però no per això correctes; identificar dificultats en el seu aprenentatge; i portar a la pràctica l'ensenyament i l'aprenentatge d'un contingut cultural concret, com les isometries, en un marc constructivista.

Per aconseguir aquests objectius, a més de la Unitat de Programació amb els seus exercicis o proves inicials i finals, es va dissenyar un pla de seguiment i valoració de la seva implantació, de tipus naturalista.

Sense voler fer cap repàs exhaustiu de les característiques conceptuals i metodològiques que caracteritzen l'enfocament naturalista que s'emmarca en l'anomenat paradigma qualitatiu (Cook i Reichard, 1986; Del Rincón, 1995; Gervilla, 1988; Gimeno i Pérez, 1989 i 1992; Goetz i LeCompte, 1988; Martínez, 1990b; Taylor i Bodgan, 1992; Wittrock, 1989; entre d'altres), presentem a continuació alguns dels seus fonaments i elements més importants.

Com assenyala Guba (1988) l'enfocament naturalista s'acosta a la realitat sense teories ni hipòtesis preestablertes, ja que parteix de la convicció que no hi ha una sola realitat, sinó múltiples interpretacions de fets, cosa que permet centrar l'estudi en els seus significats i en els seus possibles valors, en un marc o context específic.

El disseny de la investigació es va desenvolupant al llarg del propi procés d'investigació, ja que és un model obert i versàtil que accepta la subjectivitat dels instruments i que dona més importància a la rellevància que al rigor, a l'evidència que a la significativitat estadística.

L'objectiu d'aquest enfocament d'investigació, és descriure *"las características de las variable y fenómenos, con el fin de generar y perfeccionar categorías conceptuales, descubrir y validar asociaciones entre fenómenos, o comparar los constructos y postulados generados a partir de fenómenos observados en escenarios distintos"* (Goetz i LeCompte, 1988, 33).

X. Torres, en el pròleg del llibre esmentat (Goetz i LeCompte, 1988, 14), manifesta que *"el objeto de la etnografía educativa se centra en descubrir lo que allí acontece cotidianamente a base de aportar datos significativos, de la forma más descriptiva posible, para luego interpretarlos y poder comprender e intervenir más adecuadamente en este nicho ecológico que son las aulas"*.

La metodologia concreta en la qual ens hem recolzat és la pròpia dels estudis de cas, entesos com "a examen d'un exemple en acció" (Martínez, 1990, 58).

El mètode dels estudis de cas, com diu Stenhouse (1988) *"involve the collection and recording of data about a case or cases, and the preparation of a report or a presentation of the case. The collection of data on site is termed «fieldwork», and it involves: (a) generally, participant or nonparticipant observation and interviewing; (b) probably, the collection of documentary evidence and descriptive statistics, and the administration of tests or questionnaires; and (c) possibly, the use of photography, motion pictures, or videorecording.*

Sometimes, particularly in evaluation research, which is commissioned to evaluate a specific case, the case itself is regarded as of sufficient interest to merit investigation. However, case study does not preclude an interest in generalization, and many researchers seek theories that will penetrate the varying conditions of action, or applications founded on the comparison of case with case”.

Quant a les seves fases, metodologia i instruments, Stenhouse (1988 i 1990) suggereix que s'estructurin en base a quatre fases o moments: “[1] *selecting cases and negotiating access*, [2] *fieldwork*, [3] *the organization of records*, and [4] *the writing of a report”*.

En la primera [1], cal seleccionar el cas en base a interessos alhora socials, científics, educatius i personal de l'investigador, i exposar i negociar l'àmbit, els objectius, la metodologia i les repercussions de la recerca, així com la seva posterior utilització, i, si s'escau, les garanties de confidencialitat.

En la segona [2], a més de “triar el terreny”, s'hi inclouen els documents, recerques anteriors, l'observació preferentment de tipus participant, les entrevistes formals i informals, i la recollida de dades qualitatives i quantitatives.

En la tercera [3] els dos recursos més aconsellables són la categorització i la indexació.

I en la quarta [4], l'estil proposat és el descriptiu/narratiu, que no oblidis l'anàlisi, ja que, segons el mateix Stenhouse, “*has two great strengths: directness and subtlety*”.

En el nostre cas, quant a les principals fonts d'informació, vam recórrer a:

- La concreció de l'enfocament de l'ensenyament de les matemàtiques, i específicament de la geometria, al Projecte Curricular del Centre.
- La programació de curs.
- El material de suport de matemàtiques: llibre de text, diccionari, dossiers i altres documents.
- L'equip directiu del centre.
- El coordinador de matemàtiques.
- El professor del grup.
- Diversos documents del centre en relació a les matemàtiques.

I quants als instruments utilitzats, els principals van ser:

- L'observació participant a l'aula de classe i a la d'ordinadors.
- El registre anecdòtic.
- Les entrevistes breus a l'alumnat .
- La realització de la Unitat de Programació.
- La pròpia intervenció educativa.
- La realització d'exercicis, de pràctiques i de proves.
- Els diàlegs informals.

5.1 Etapes i calendari del disseny, intervenció, seguiment i valoració

En el disseny, elaboració, aplicació, seguiment i valoració d'aquesta Unitat de Programació s'han seguit diverses etapes o moments, algunes d'implantació, altres de revisió i altres de modificació i adaptació, que es detallen a continuació.

5.1.1 Etapes del disseny, intervenció, seguiment i valoració

Les etapes o moments que es van seguir són les següents:

1. Recerca, anàlisi i consideració d'informació relativa als diferents àmbits del marc teòric i experiencial de referència detallat més amunt.
2. Disseny i elaboració de la Unitat de Programació, en sintonia amb el marc referencial explicitat.
3. Negociació amb el C.P. Pau Casals de Gràcia (Barcelona), tant amb professor de l'aula de 6è de primària, que a més era el coordinador de matemàtiques del centre, com amb l'equip directiu, per acordar els termes de la realització, seguiment, anàlisi, valoració i ús de l'experiència.
4. Realització del primer exercici o Prova Inicial 1 (vegeu l'annex 1) a 24 alumnes de la classe de 6è de l'esmentat centre. A l'apartat 6 s'hi inclou el seu buidat i comentaris.
5. Realització del segon exercici o Prova Inicial 2 (vegeu l'annex 1). A l'apartat 6 s'hi inclou el seu buidat i comentaris.

6. Divisió de classe en dos grups A i B.
 - Grup A) Realització del tercer exercici o Prova Inicial 3 (vegeu l'annex 1). A l'apartat 6 s'hi inclou el seu buidat i comentaris.
 - Grup B) Realització de jocs de càlcul.
7. Reunificació de la classe. Els dos grups junts visualitzen els capítols 2 i 3 del vídeo *Alícia al país de les transformacions geomètriques* (Bo i Quintana, 1994), titulats *Simetries: un berenar de bojos*, i *Girs i translacions: les cartes i el joc* (vegeu annex 4).
8. Divisió de classe en dos grups A i B.
 - Grup A) Realització de jocs de càlcul.
 - Grup B) Realització del tercer exercici o Prova Inicial 3 (vegeu l'annex 1). A l'apartat 6 s'hi inclou el seu buidat i comentaris
9. Correcció i anàlisi dels exercicis o Proves Inicials (vegeu apartat 6) i modificació i adequació de les activitats de la Unitat de Programació.
10. Realització de les activitats de girs incloses de la Unitat de Programació (vegeu l'annex 2 i el 5) i detallades una per una a l'apartat 6.
11. Realització d'un qüestionari obert sobre els girs del vídeo visualitzat anteriorment (vegeu l'annex 4).
12. Realització de les activitats de simetries incloses de la Unitat de Programació (vegeu l'annex 2 i el 5) i detallades una per una a l'apartat 6.
13. Realització d'un qüestionari obert sobre les simetries del vídeo visualitzat anteriorment (vegeu l'annex 4).

Programa i desenvolupament de la intervenció

14. Realització de les activitats de translacions incloses de la Unitat de Programació (vegeu l'annex 2 i el 5) i detallades una per una a l'apartat 6.
15. Realització d'un qüestionari obert sobre les translacions del vídeo visualitzat anteriorment (vegeu l'annex 4).
16. Realització de l'exercici o Prova Final 1 (vegeu l'annex 3). A l'apartat 6 s'hi inclou el seu buidat i comentaris.
17. Realització de l'exercici o Prova Final 2 (vegeu l'annex 3). A l'apartat 6 s'hi inclou el seu buidat i comentaris.
18. Realització del Qüestionari Postvídeo 2 (vegeu l'annex 4).

Vegeu a l'annex 5 el diari i les observacions recollides al llarg de la intervenció realitzada, on es fan palesos els principis d'acció, la metodologia emprada i l'estil d'interacció educativa.

5.1.2 Calendari de concreció de les etapes

La seqüència d'etapes o moments esmentats, es van concretar en el següent calendari:

Dia	Activitat
26-4-95	Presentació de l'experiència a l'equip directiu del C.P. Pau Casals - Gràcia. Exposició i negociació de l'àmbit, els objectius, la metodologia i les repercussions de la recerca, així com la seva posterior utilització.

Dia	Activitat
9-5-95	Aprovació pel Claustre del C.P. Pau Casals - Gràcia.
12-5-95	Primera versió de la Unitat de Programació.
28-9-95	Primera revisió de la Unitat de Programació.
16-10-95	Segona revisió de la Unitat de Programació.
15-1-96	Presentació als alumnes de 6è de primària del C.P. Pau Casals - Gràcia, del que es farà a classe i del J. Quintana.
24-1-96	Inici de l'experiència. Es passen els exercicis o <i>Proves Inicials 1 i 2</i> .
1-2-96	Es passen els fulls <i>Les transformacions</i> , i fa les pàgines 87 i 88 del llibre <i>Actimates C.S. 2</i> (Canals, Quintana i Dalmau, 1995a).
7-2-96	<p>Es fan dos grups de 12 nois i noies cadascun i s'organitza la classe en tres moments:</p> <p>1r. Grup A) Es passa l'exercici o Prova Inicial 3.</p> <p>Grup B) Fan jocs de càlcul.</p> <p>2n. Els dos grups junts visualitzen els capítols 2 i 3 del vídeo <i>Àlícia al país de les transformacions geomètriques</i> titulats <i>Simetries: un berenar de bojos</i>, i <i>Girs i translacions: les cartes i el joc</i>.</p> <p>3r. Grup A) Fan jocs de càlcul.</p> <p>Grup B) Es passa l'exercici o Prova Inicial 3.</p>
14-2-96	Es passen els fulls <i>Les isometries: Els Girs i la Fitxa de pràctiques de girs PG1</i> (La peça quadrada).
21-2-96	Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de girs PG2a</i> (Una brúixola solar).
28-2-96	<p>Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de girs PG3</i> (Els girs dels polígons).</p> <p>Deures de casa: <i>Fitxa de pràctiques de girs PG4</i> (Girs de figures) i/o <i>Fitxa de pràctiques de girs PG5</i> (Girs de les lletres).</p>
6-3-96	Es passen els <i>Fulls de resum i conclusions dels girs</i> .

Programa i desenvolupament de la intervenció

Dia	Activitat
13-3-96	Es passen els fulls <i>Les isometries: Les simetries</i> i els fulls <i>Fitxa de pràctiques de girs PG1</i> (Simetries amb la peça quadrada) i la <i>Fitxa de pràctiques de girs PG2</i> (Simetries de figures).
20-3-96	<p>Es fan dos grups de 12 nois i noies cadascun:</p> <p>Grup A) Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS3</i> (Els eixos de simetria dels polígons). Treballen a l'aula de classe.</p> <p>Grup B) Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS4</i> (Simetries amb el Cabri). Treballen a l'aula d'ordinadors.</p>
25-3-96	<p>Es fan dos grups de 12 nois i noies cadascun:</p> <p>Grup A) Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS4</i> (Simetries amb el Cabri). Treballen a l'aula d'ordinadors.</p> <p>Grup B) Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS3</i> (Els eixos de simetria dels polígons). Treballen a l'aula de classe.</p> <p>Deures de casa: <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS5</i> (Simetries de les lletres) i/o <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS6</i> (El joc de les paraules simètriques).</p> <p>Per manca de temps no es fan ni la <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS7</i> ni la <i>Fitxa de pràctiques de simetries PS8</i>.</p>
27-3-96	Es passen els <i>Fulls de resum i conclusions de les simetries</i> .
10-4-96	<p>Es passen els fulls <i>Les isometries: Les Translacions</i> i la <i>Fitxa de pràctiques de girs PT1</i>.</p> <p>Deures de casa: <i>Fitxa de pràctiques de translacions PT2</i> i <i>Fitxa de pràctiques de translacions PT3</i>.</p>
15-4-96	Correcció col·lectiva dels fulls <i>Fitxa de pràctiques de translacions PT2</i> i <i>Fitxa de pràctiques de translacions PT3</i>

Dia	Activitat
17-4-96	<p>Sessió de doble durada. Es fan dos grups de 12 nois i noies cadascun i s'organitza la classe en dos moments:</p> <p>1r. Grup A) Es passen els <i>Fulls de resum i conclusions de les translacions</i>. Treballen a l'aula de classe.</p> <p>Grup B) Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de translacions PT4</i> (Translacions amb el Logo). Treballen a l'aula d'ordinadors.</p> <p>2n. Grup A) Es passa la <i>Fitxa de pràctiques de translacions PT4</i> (Translacions amb el Logo). Treballen a l'aula d'ordinadors.</p> <p>Grup B) Es passen els <i>Fulls de resum i conclusions de les translacions</i>. Treballen a l'aula de classe.</p>
24-4-96	Tot el grup junt, juga al <i>Transjoc</i> . Hem preparat 6 taulers de joc.
8-5-96	Fi de l'experiència. Es passen els exercici o <i>Proves Finals 1 i 2</i> .
20-5-96	Reunió amb l'equip directiu fent un resum de l'experiència.

Vegeu a l'annex 5 el diari i les observacions de les sessions de treball i a l'apartat 6 el buidat i comentaris dels exercicis.

5.2 La Unitat de Programació a la pràctica

La Unitat de Programació detallada a l'apartat 4 i concretada i temporalitzada als punts anteriors 5.1 i 5.2, tal com ja hem dit, va ser portada a la pràctica al llarg de 16 sessions, amb un grup de 24 alumnes de 6è de primària del C. P. Pau Casals - Gràcia de Barcelona.

La dinàmica en la qual es portà a terme el treball, va ser una continuació de la que el professor de matemàtiques i tutor del grup havia portat des de principi de curs. Una dinàmica flexible, de participació i de corresponsabilitat de tasques, propiciadora de l'aprenentatge significatiu. El professor, lluny d'informar, exposar o explicar, posava a l'abast de tota la classe, un conjunt de coneixements, d'activitats i de connexions facilitadores de descobertes i de construccions, tenint el compte, les necessitat i els interessos individuals.

Les interaccions entre el professor i l'alumnat -tant a nivell individual, com amb els grups de treball, com amb tot el grupclasse-, i les interaccions entre el propi alumnat van ser una de les bases de l'ambient i de la metodologia de treball. Interaccions mediatitzades alhora per l'afectivitat i pels recursos, inclosos els tecnològics.

En cada tema de la unitat, a partir de la realització d'activitats inicials d'aflorament de coneixements previs i preconcepcions, d'activitats de contacte amb els continguts i nocions noves, generalment lligades a situacions reals i vivencials, i a manipulacions i experimentacions, els nois i noies iniciaven el treball amb les fitxes de pràctiques creades (vegeu annex 3), bé individualment, bé en petit grup segons els objectius i la tipologia dels exercicis.

Al llarg del treball el professor i l'autor d'aquesta memòria, passejaven per l'aula responen qüestions, aclarint dubtes, qüestionant respostes als exercicis i les conclusions extretes.

De vegades s'aturava el treball per fer alguna explicació col·lectiva o per plantejar conflictes cognitius a tot el grup.

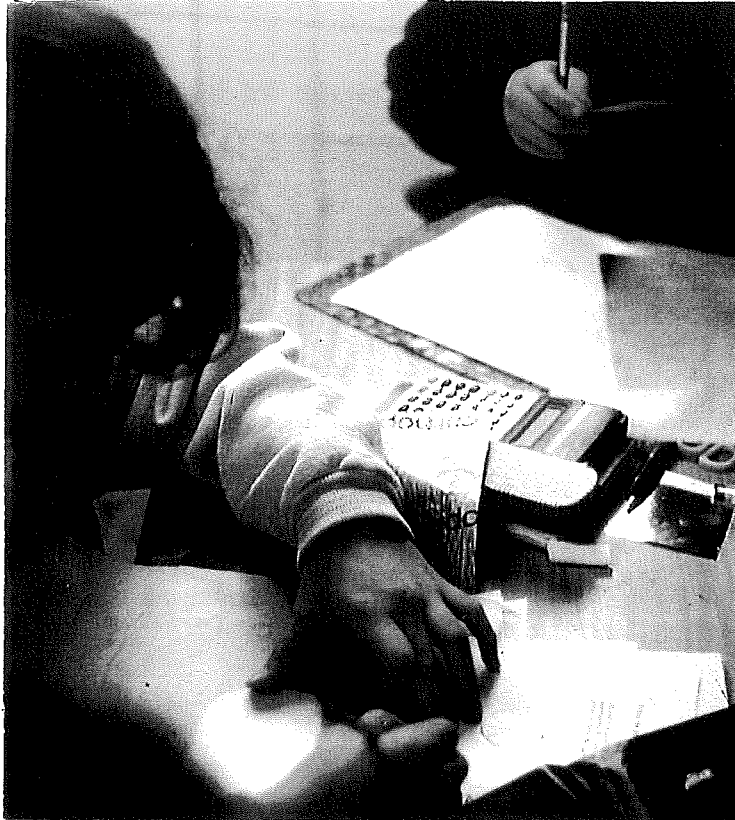
Una vegada acabats els exercicis es feia una correcció col·lectiva dels més importants, tot aclarint conceptes i, quan s'esqueia, aquests es reforçaven o s'ampliaven. Al dia següent, al tauler de suro de matemàtiques es penjava un dossier resolt com a instrument d'autocorrecció.

Posteriorment l'alumnat lliurava el dossier de cada isometria el qual era degudament corregit pel professor, i a partir d'aquesta correcció es feia alguna intervenció grupal de repàs i aclariment de conceptes.

Al llarg de les setze sessions es van fer diversos registres d'observacions, així com de les converses i intervencions de l'alumnat (vegeu annex 5).

6

**Buidat de les proves i comentaris:
anàlisi i interpretació dels exercicis**



6 BUIDAT DE LES PROVES I COMENTARIS: ANÀLISI I INTERPRETACIÓ DELS EXERCICIS

En el present apartat es presenten les solucions, els resultats i els comentaris a les qüestions presentades als exercicis proposats, considerats com a proves inicials i finals (vegeu els annexos 1 i 3), segons els objectius exposats a l'apartat 4, i el programa d'investigació previst, especificat i relatat a l'apartat 5.

Com hem dit abans, les tres proves inicials, ha estat creades per aportar informació sobre els coneixement previs informals i formals de l'alumnat en relació les isometries; per evidenciar els principals errors conceptuals i procedimentals d'origen personal, social, col·loquial o d'aprenentatge; i per ajustar el més adequadament possible la intervenció prevista.

Les proves finals, són del tot diferents a les inicials i van ser creades per identificar el coneixement i el reconeixement formal de les isometries i dels seus invariants.

En cada exercici analitzat es mostren els objectiu, els continguts i els resultat de les respostes bé directes, bé degudament categoritzades, així com el nombre d'alumnes que les han respost, i quan és oportú, el seu relatiu percentatge.

Al final de cada qüestió hem inclòs un comentari específic i, quan s'hi escau, una taula resum de les respostes, generalment categoritzades, així com algun un gràfic. A més s'ha realitzat contrastacions entre les pròpies qüestions, i entre aquestes i alguns dels resultats d'investigacions exposades a l'apartat 3

6.1 Proves Inicials

Aquestes proves es van passar abans de la intervenció educativa i en elles es feien aflorar, s'explicitaven i es recollien, tant els coneixements previs, com les intuïcions, com la formació anterior sobre el tema.

Es van realitzar entrevistes i comentaris a l'alumnat per recollir més informació sobre el significat i el contingut de les seves respostes, així com per demanar-los justificacions i exemples, o posar-los en dubte les seves conclusions.

6.1.1 Prova Inicial 1

Objectius i continguts de les qüestions plantejades

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de transformació.	Concepte informal de transformació.
2	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de transformació.	Transformacions a la vida real.
3	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de transformació.	Utilitat de les transformacions.
4	Reconèixer transformacions en canvis i accions, associats a la natura i a transformacions geomètriques	Reconeixement de transformacions.

Qüestions de la prova

1) Explica què és una transformació.

Respostes	Nombre d'alumnes	%
Canvi	9	38%
Canvi d'aspecte o d'aparença	5	21%
Una cosa que passa a ser una altra	4	17%
Canvi d'estat	1	4%
Canvi de forma	1	4%
Exemple: Un animal al llarg del temps	1	4%
Exemple: Els capgrossos	1	4%
Exemple: Alguns animals	1	4%
Exemple: De líquid a sòlid	1	4%
Total	24	100%

Comentaris a la qüestió 1

A partir de l'anàlisi de la taula resum podem afirmar que la totalitat de l'alumnat associa transformació a canvi.

Comentant amb l'alumnat el significat de canvi, aquest l'associa als **canvis que es produeixen en els éssers vius al llarg del temps** (creixement). Hi ha 5 alumnes (21%) que parlen específicament de **metamorfosi**.

Aquestes respostes afermen l'opinió de Barberini i Bartolini (1993b, 792) que diuen que una transformació, en el llenguatge comú s'entén com "*una modifica sensibile (metamorfosi) di una parte delle caratteristiche ritenute cruciali per l'identificazione dell'oggetto considerato, dovuta ad una causa esplicita o explicitabile*".

I que tota transformació, entre altres possibilitats, *“può essere riferita: alla relazione tra due oggetti -eventualmente lo stesso oggetto in tempi diversi”*, tenint en compte que les transformacions poden ser reversibles (inflar un globus) o irreversibles (trencar un vas).

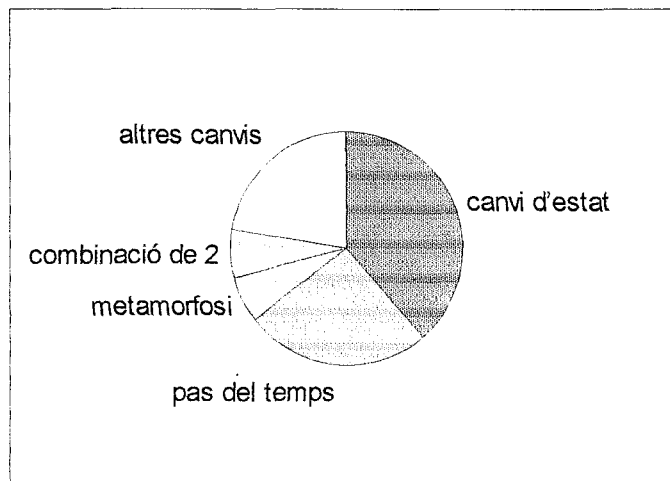
2) Posa dos exemples de transformacions que formin part de la vida real.

Respostes	Tipus	Nombre d'alumnes
Creixement de les persones	pas del temps	5
Fer una truita	canvi d'estat	3
Descongelar el caldo	canvi d'estat	3
Cuc de seda	metamorfosi	2
Els glaçons	canvi d'estat	2
De mones a humans	pas del temps	2
Encendre una espelma	altres canvis	1
Escriure a la pissarra	altres canvis	1
Retallar el paper	altres canvis	1
Els "transformers" (de robots a nombres)	altres canvis	1
De blat a farina	canvi d'estat	1
Del dia a la nit	altres canvis	1
$3-1=2$	combinació de dos	1
Fregir la carn	canvi d'estat	1
D'arbres a paper	altres canvis	1
De paper blanc a paper escrit	altres canvis	1
De llavor a menjar	canvi d'estat	1
D'olives a l'oli	canvi d'estat	1
Blau i groc dona verd	combinació de dos	1

Comentaris a la qüestió 2

Taula resum del tipus de transformació de la qüestió 2

Categorització de respostes	Nombre d'alumnes	%
canvi d'estat	12	39%
pas del temps	8	26%
metamorfosi	2	6%
combinació de 2	2	6%
altres canvis	7	23%
Total	31	100%



En la taula i gràfic s'observa que el concepte de canvi es manté, prioritàriament associat a canvi d'estat. Així mateix es diversifica i s'incrementa l'associació amb el canvi al llarg del temps, generalment aplicat als éssers vius.

3) Explica alguna utilitat pràctica d'alguna transformació.

Respostes	Concepte subjacent	Nombre d'alumnes
Fer una truita	canvi d'estat	2
Congelar l'aigua	canvi d'estat	1
Decorar la casa amb plantes que han crescut	pas del temps	1
Descongelar el caldo	canvi d'estat	1
Descongelar el menjar	canvi d'estat	1
Fer adornos de paper	altres canvis	1
Fer gelat	canvi d'estat	1
Fer llum amb una espelma	altres canvis	1
Fer un ou ferrat	canvi d'estat	1
Fer vinagre	canvi d'estat	1
Menjar polos	canvi d'estat	1
Refredar una beguda amb glaçons	altres canvis	1
Reproduir-se	pas del temps	1
Tenim arbres que venen de llavors	canvi d'estat	1
Tenir seda	altres canvis	1
Tenir vi	canvi d'estat	1
No responen		7
Total		24

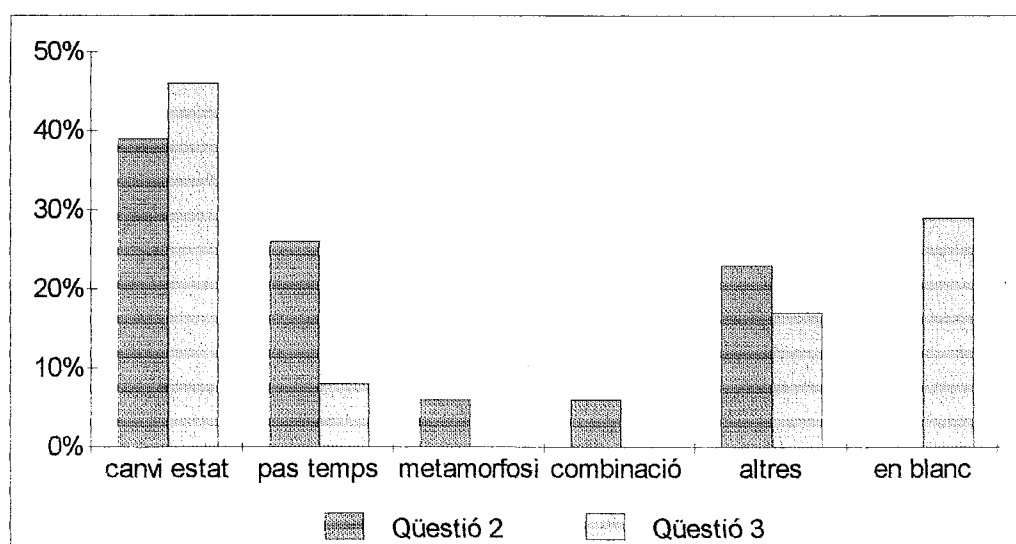
Comentaris a la qüestió 3

Taula resum de la qüestió 3

Categorització de respostes	Nombre d'alumnes	%
canvi d'estat	11	46%
pas del temps	2	8%
altres canvis	4	17%
no responen	7	29%
Total	24	100%

Taula resum de comparança de les qüestions 2 i 3

Categorització de respostes	Qüestió 2	Qüestió 3
canvi d'estat	39%	46%
pas del temps	26%	8%
metamorfosi	6%	0%
combinació de dos	6%	0%
altres canvis	23%	17%
en blanc	0%	29%



En aquesta taula resum i en el gràfic s'observa un increment en l'associació d'una transformació a un canvi d'estat.

Tot i que apareixen referències directes a "metamorfosi" i "combinació de dos", els resultats d'aquesta qüestió són molt semblants a l'anterior. Possiblement l'enunciat no era gaire diferenciador.

4) Marca amb una creu al lloc on creus que hi ha una transformació.

Concepte	Concepte subjacent	Nombre d'alumnes	%
el cuc de seda que es fa papallona	metamorfosi	23	96%
passar de sòlid a líquid, com el gel que passa a ser aigua	canvi d'estat	22	92%
el canvi de cap-gros a granota	metamorfosi	22	92%
fer vi amb el raïm	canvi d'estat	20	83%
fer un ou ferrat	canvi d'estat	19	79%
obrir una aixeta d'aigua	gir	4	17%
mirar-se al mirall	simetria	4	17%
cargolar un "tornillo"	gir	3	13%
baixar per un tobogan	translació	3	13%
obrir una porta	gir	2	8%
descargolar un tap de rosca	gir	2	8%
un ascensor que puja i baixa	translació	2	8%
un noi o una noia corrent amb un monopatí	translació	2	8%
les portes del metro quan s'obren i tanquen	translació	2	8%

Comentaris a la qüestió 4

Taula resum de les identifikacions de la qüestió 4

Categorització de respostes	%
metamorfosi	94%
canvi d'estat	47%
reconeixement de simetries	17%
reconeixement de girs	12%
reconeixement de translacions	9%

Aquests resultats posen de manifest que el concepte geomètric de transformació així com els tipus d'isometries, gir, simetria i translació, no va gaire associat a les accions de la vida quotidiana que n'incorporen.

En aquest sentit, Barberini i Bartolini (1993a i 1993b) diuen que les identifikacions i experiències de transformacions en la natura i en la vida quotidiana no tenen una relació directa amb la seva conceptualització científica.

Curiosament els reconeixement de les accions que incorporen isometries, segueix un ordre d'identifikació no coincident amb l'apuntat a l'anàlisi d'investigacions (vegeu apartat 3).

O sigui, aquí l'ordre d'identifikació de les isometries és Simetria > Gir > Translació (S > G > T), i l'ordre de dificultats esmentat és Translació > Simetria > Gir (T > S > G).

6.1.2 Prova Inicial 2

Objectius i continguts de les qüestions plantejades

Qüestió	Objectius	Continguts
1	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de gir en el camp geomètric.	Concepte de gir en el camp geomètric.
2	Recordar i reflexionar sobre els elements geomètrics dels girs.	Elements geomètrics dels girs.
3	Identificar objectes que girin.	Objectes que girin.
4	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de simetria en el camp geomètric.	Concepte de simetria en el camp geomètric.
5	Recordar i reflexionar sobre els elements geomètrics de les simetries.	Elements geomètrics de les simetries.
6	Identificar objectes que tinguin simetria.	Objectes amb simetria.
7	Recordar i explicitar nocions, intuïcions i coneixements previs informals i formals del concepte de translació en el camp geomètric.	Concepte de translació en el camp geomètric.
8	Recordar i reflexionar sobre els elements geomètrics de les translacions.	Elements geomètrics de les translacions.

Qüestió	Objectius	Continguts
9	Identificar objectes que es traslladin.	Objectes que es traslladin.
10	Reconèixer transformacions geomètriques en accions i objectes.	Reconeixement de transformacions geomètriques.
11	Associar els girs, les simetries i les translacions a conceptes sinònims.	Concepte de gir, de simetria i de translació.
12	Reconèixer situacions i objectes representatius girs, simetries i translacions	Reconeixement de girs, de simetries i de translacions.
13	Realitzar de manera intuïtiva i informal un gir.	Realització d'un gir.
14	Realitzar de manera intuïtiva i informal una simetria.	Realització d'una simetria.
15	Realitzar de manera intuïtiva i informal una translació.	Realització d'una translació

Qüestions de la prova

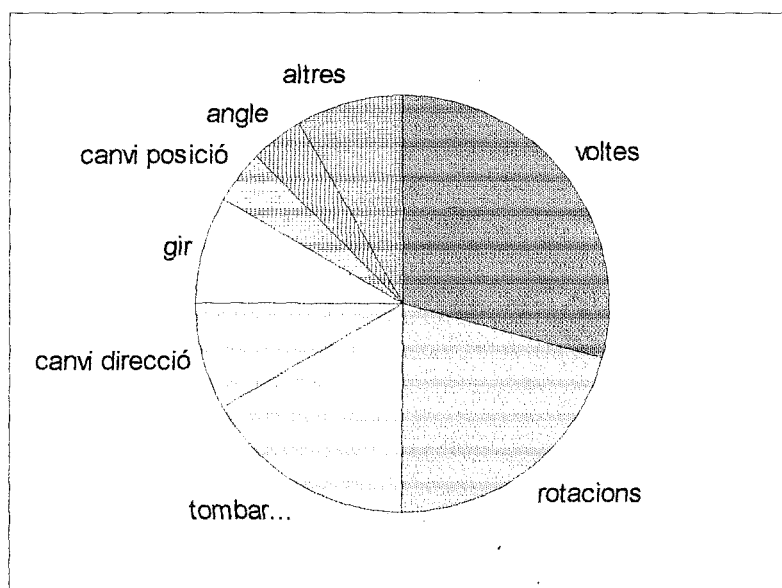
1) Explica què és un gir.

Respostes	Nombre d'alumnes
canviar de direcció	1
canviar de posició sense moure's de lloc	1
posar de cap per avall	1
quelcom que roda	1
un angle de 175°	1
un gir	2
un moviment de rotació	1
un moviment que canvia de direcció	1
un moviment rotatori	1
una curvatura	1
una línia que es torça a la dreta o a l'esquerra	1
una part o tot una circumferència	1
una recta corbada	1
una recta que tomba	1
una rotació	1
una rotació gran o petita	1
una volta	3
una volta de com a màxim 360°	1
una volta dels graus que vulguis	1
una volta pel seu eix	1
una volta sense moure's de lloc	1
Total	24

Comentaris a la qüestió 1

Taula de classificació del tipus de respostes de la qüestió 1

Respostes	Nombre d'alumnes	%
relatives a voltes	7	30%
relatives a rotacions	5	21%
relatives a tombar, torçar, corbar...	4	17%
canvi de direcció	2	8%
un gir	2	8%
un canvi de posició	1	4%
un angle	1	4%
altres	2	8%
Total	24	100%



En aquesta taula i en el gràfic s'observa que majoritàriament (68%) el gir s'associa directament a termes sinònims com ara fer voltes, rotacions, tombar, etc.

Així mateix no s'explicita cap distinció entre "girar sobre si mateix" o gir de centre interior, i "girar al voltant de" o gir de centre exterior.

2) Quins elements geomètrics són necessaris per fer un gir?

Respostes	Nombre d'alumnes	%
compàs	8	33%
transportador	5	21%
regle	3	13%
tub de cola	1	4%
cercle	1	4%
esfera	1	4%
graus	1	4%
roda	1	4%
en blanc	3	13%
Total	24	100%

Comentaris a la qüestió 2

Per elements geomètrics del gir, en lloc d'interpretar centre, sentit i amplitud, s'interpreta majoritàriament (67%) com a material, com a instruments de construcció geomètrica: compàs, transportador i regle.

3) Escriu tres coses que girin.

Respostes	Nombre d'alumnes	Tipus	Centre
roda	12	propietat intrínseca	interior - al mig
pilota	8	propietat intrínseca	interior - eix
agulles d'un rellotge	6	propietat intrínseca	interior - vèrtex
baldufa	5	propietat intrínseca	interior - eix
cotxes	3	propietat intrínseca	exterior
la terra	3	propietat intrínseca	interior/exterior
compàs	3	propietat intrínseca	interior - vèrtex
bicicleta	3	propietat intrínseca	exterior
maneta (manivela)	2	propietat intrínseca	interior - vèrtex
molí	2	propietat intrínseca	interior - al mig
pedals d'una bici	2	propietat intrínseca	interior - vèrtex
ballarina	1	propietat intrínseca	interior - eix
boomerang	1	propietat intrínseca	interior/exterior
caixa de música amb nina	1	propietat intrínseca	interior - eix
calculadora	1	es pot girar	
carretera	1	altres	
cavallets de fira	1	propietat intrínseca	exterior
CDROM	1	propietat intrínseca	interior - al mig
cel·lo	1	propietat intrínseca	interior - al mig
cèrcol de jugar	1	propietat intrínseca	interior - al mig
corda de saltar	1	propietat intrínseca	exterior - eix
corba	1	altres	
estoig	1	es pot girar	
full	1	es pot girar	
moneda	1	es pot girar	
plat	1	es pot girar	
sínia	1	propietat intrínseca	interior - al mig
vàlvula d'olla de pressió	1	propietat intrínseca	interior - al mig

Comentaris a la qüestió 3

Taula resum dels tipus de respostes de la qüestió 3

Tipus de respostes	Nombre d'alumnes	%
propietat intrínseca	59	89%
es pot girar	5	8%
altres	2	3%
Total	66	100%

Per propietat intrínseca entenem una característica pròpia i d'alta significativitat, que es manifesta gairebé sempre.

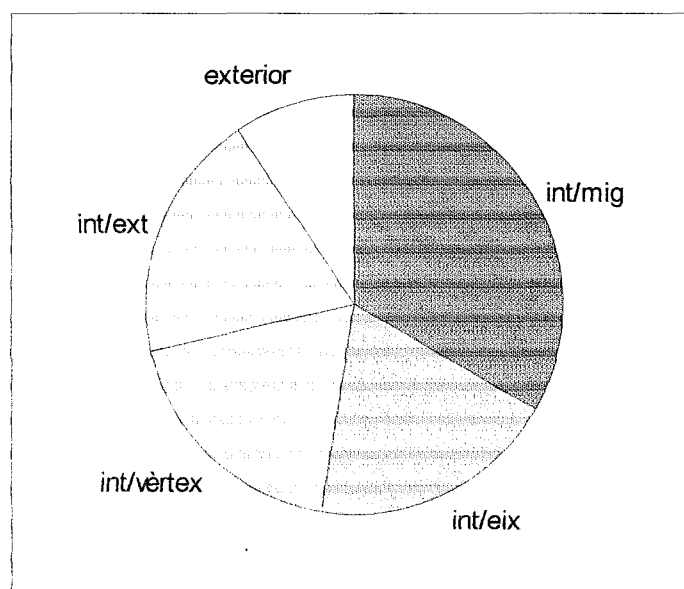
Queda força clar que la majoria de l'alumnat selecciona coses amb la propietat intrínseca de girar, bé com a propietat fonamental (roda, pilota, baldufa...), bé com a possibilitat (cotxe, bicicleta...).

Quant a la pilota, es manifesta una confusió entre rodar i girar. Cal ressaltar la referència d'objectes amb forma rodona com ara el cercol, que de fet actualment ningú el fa servir per jugar, així com el plat i la moneda. La carretera i la corba són associacions directes lligades a "girar en una corba d'una carretera".

Hi ha un 12% de respostes que hem tipificat amb "es pot girar". En elles s'han agrupat objectes que es poden girar per voluntat de l'ésser humà, com per exemple la calculadora o l'estoig. Aquest és el sentit donat per l'alumnat: "si vull, ho agafo i ho faig girar".

Taula resum del centre de gir

Centre	Nombre d'objectes	%
interior - al mig	7	33%
interior - eix	4	19%
interior - vèrtex	4	19%
interior/exterior	4	19%
exterior	2	10%
Total	21	100%



Els objectes més seleccionats són els que tenen el centre a l'interior i al mig, amb independència de si són bidimensionals o tridimensionals. Així mateix, podem dir que el 71% dels objectes seleccionats tenen centre interior, el 90% tenen al menys un centre interior, el 10 % tenen centre exterior i el 29% tenen al menys un centre exterior.

Es manifesten confusions entre centre de gir i eix de gir.



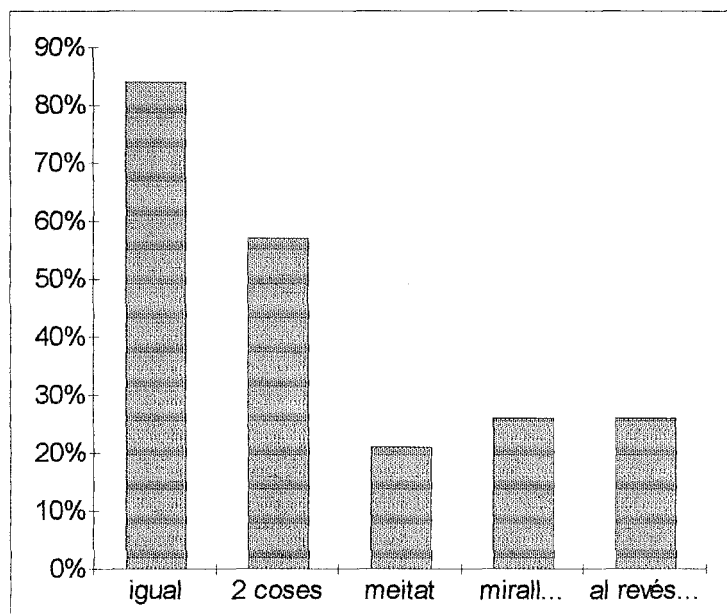
4) Explica què és una simetria.

Respostes	Paraules clau			N. alumnes
una cosa igual a una altra	igual	dues coses		3
dues coses iguals	igual	dues coses		2
és com si li poséssim un mirall			mirall	2
una cosa que si la partim les dues parts són iguals	igual	meitat	partir	2
coses iguals	igual			1
dues coses de les mateixes mides	"igual"	dues coses	mateixes mides	1
dues coses iguals o una que si la partim les dues parts són iguals	igual	dues coses meitat	partit	1
dues coses iguals però invertides	igual	dues coses	inversió	1
imatges iguals però al revés	igual		al revés	1
quan dos costats s'ajunten				1
dibuixos o objectes diferents perquè un està a una banda i l'altre a l'altre com amb un mirall al mig		dues coses	2 costats mirall	1
un objecte còpia d'un altre objecte	"igual"	dues coses	còpia	1
un objecte igual girat	igual	dues coses	girat	1
una cosa és igual que la meitat o idèntica a una altra	igual	meitat	idèntica	1
una cosa igual a una altre fent reflex	igual	dues coses	reflex	1
una cosa que d'un costat a l'altre siguin iguals	igual		2s costats	1
una cosa que es veu doble i es veu idèntica que la del costat	"igual"	dues coses	2 costats idèntica	1
una cosa, objecte, animal, home, etc., que té un cantó igual a un altre	igual		2 costats	1
una figura que si imaginem una ratlla al mig els dos costats són iguals	igual	meitat	2 costats ratlla mig	1
Total				24

Comentaris a la qüestió 4

Taula resum dels tipus de respostes de la qüestió 4

Conceptes	Nombre d'alumnes	%
igual	16	84%
dues coses	10	57%
meitat	4	21%
mirall, reflex	3	26%
al revés, invertida, girada	3	26%



En la taula i el gràfic fàcilment és observable que en les explicacions de l'alumnat, la majoria utilitzen el terme "igual" de manera explícita, així com també de forma implícita (còpia, idèntic...).

Així mateix cal ressaltar la idea que en la simetria hi ha dues coses, i per tant seria una simetria entre figures, o sigui, figures simètriques entre si. Parlant amb l'alumnat alguns d'ells diuen que:

- “La figura inicial es transforma en la final”, i per tant la inicial desapareix.
- “La figura inicial fa la simètrica”, i per tant no desapareix.
- “La simetria es pot fer d'aquí [dreta] a aquí [esquerra] o d'aquí [esquerra] a aquí [dreta]”, però si hi ha figures als dos costats de l'eix i la simetria es fa “de dreta a esquerra”, les figures de l'esquerra no “passen” a la dreta.
- “És com girar per fora”, referint-se al fet que per fer coincidir la figura i la seva imatge, cal sortir del pla.

El concepte de transformació, en aquest cas de simetria, entesa com a una isometria i per tant com una aplicació del pla en si mateix, és del tot incompreensible, a aquesta edat, per motius de dificultats de representació mental.

Quant a la idea de “meitat” es planteja el tema de les figures amb eix de simetria.

Hem volgut també ressaltar l'aparició de les paraules “mirall” i “reflex”, com a representatives de les simetries, així com les d’“invertida”, “al revés” i “girada” (180°), com a reconeixement de propietats, ja que ambdues situacions acosten al concepte de simetria.

5) Quins elements geomètrics són necessaris per fer una simetria?

Respostes	Nombre d'alumnes	%
regle	5	21%
regle i escaire	3	13%
elements iguals i de la mateixa mida	1	4%
un regle per fer la línia	1	4%
paper vegetal i llapis	1	4%
regle, compàs, escaire i transportador	1	4%
una ratlla imaginària i els costats iguals	1	4%
aigua que reflecteixi el dibuix	1	4%
no responen res	10	42%
Total	24	100%

Comentaris a la qüestió 5

Com en el cas de la qüestió 2, per elements geomètrics s'interpreten majoritàriament (46%) les eines de construcció geomètrica com el regle, l'escaire, preferentment, però també el compàs i el transportador.

També esmenten altres materials que possiblement van fer servir altres anys com el paper vegetal.

En aquest cas, però, el nombre de respostes en blanc és força més elevat, ja que passa del 13% al 42%. Possiblement aquest és un símptoma de la inadequació de la formulació de la pregunta.

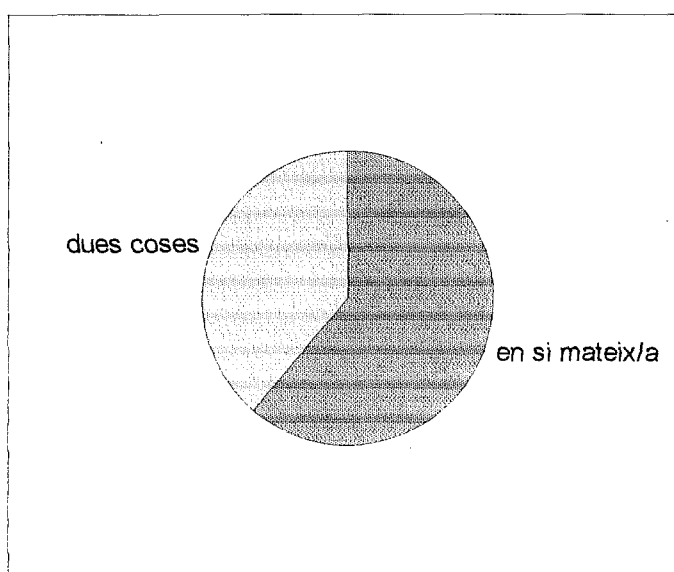
6) Escriu tres coses que tinguin simetria.

Respostes	Paraula clau	Nombre d'alumnes
papallona	en si mateixa	6
cara	en si mateixa	5
quadrat	en si mateixa	3
mirar-se al mirall	dues coses	3
florescent	en si mateix	2
mans	dues coses	2
tisores	en si mateixa	2
ulls	dues coses	2
ampolla sense etiqueta	en si mateixa	1
cadira	en si mateixa	1
camisa	en si mateixa	1
carrer	en si mateixa	1
cilindre	en si mateix	1
circumferència	en si mateixa	1
dos bolis iguals	dues coses	1
dos bolis junts	dues coses	1
dos fluorescents	dues coses	1
dos llibres iguals	dues coses	1
dos mans juntes	dues coses	1
dues cames	dues coses	1
dues sabates	dues coses	1
estrella	en si mateixa	1
forat rodó	en si mateix	1
guitarra	en si mateixa	1
home	en si mateix	1
jersei llis	en si mateix	1
la terra	en si mateixa	1
llapis	en si mateix	1
orelles	dues coses	1
pal	en si mateix	1
pantalons	en si mateixos	1
paperera	en si mateixa	1
persona	en si mateixa	1
peus	dues coses	1
pilota	en si mateixa	1
rajola	en si mateixa	1
rectes paral·leles	dues coses	1
roda	en si mateixa	1
rodona	en si mateixa	1
sostre i terra	dues coses	1
Torres de la Vila Olímpica	dues coses	1

Comentaris a la qüestió 6

Taula resum dels tipus de respostes de la qüestió 6

Conceptes	Casos	%
en si mateix/a	25	61%
dues coses	16	39%
Total	41	100%



S'introdueix de manera més manifesta la doble possibilitat de figures amb simetria en elles mateixes i figures simètriques entre si (dues coses), ja que en la qüestió 4 els resultats eren del 57% i del 21%, existint un 22% d'indefinició, i aquí els resultats són del 61% i del 39%, sense cap indefinició, possiblement degut que aquí, a diferència de l'altre qüestió que era més oberta, es força una concreció en haver d'anomenar objectes.

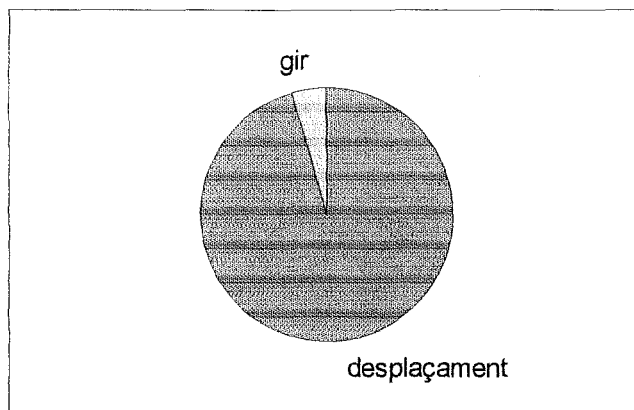
7) Explica què és una translació.

Respostes	Nombre d'alumnes	%
desplaçament	9	38%
canvi de lloc	4	17%
un objecte es mou d'un lloc a un altre	3	13%
es trasllada	2	8%
moviment per traslladar-se	1	4%
transportar figures geomètriques	1	4%
rotació	1	4%
fer el doble d'un objecte	1	4%
objecte o material que va d'un establiment a un altre	1	4%
moure una figura sense canviar-la	1	4%
Total	24	100%

Comentaris a la qüestió 7

Taula resum dels tipus de respostes de la qüestió 6

Concepte	Nombre d'alumnes	%
desplaçament	22	92%
gir	1	4%
simetria	1	4%
Total	24	100%



A la taula i en el gràfic s'observa l'alt grau d'associació entre translació i desplaçament. Quant als dos errors, un cop interrogats els alumnes, es va evidenciar una confusió entre translació i transformació.

8) Quins elements geomètrics són necessaris per fer una translació?

Respostes	Nombre d'alumnes	%
regle	3	13%
regle i escaire	3	13%
qualsevol element geomètric amb rodes	1	4%
regle i compàs	1	4%
compàs, regle i transportador	1	4%
politja, corda i moviment rotatori (fa pujar)	1	4%
en blanc	3	13%
no responen res	11	45%
Total	24	100%

Comentaris a la qüestió 8

Com en les qüestions 2 i 5, per elements geomètrics s'interpreten majoritàriament (34%) les eines de construcció geomètrica. El nombre de

respostes en blanc segueix incrementant-se, ja que passa del 13% al 42%, i d'aquest al 58%, fet que reforça la hipòtesi de la possible inadequació de la formulació de la pregunta.

9) Escriu tres coses que es traslladin.

Respostes	Concepte subjacent	Nombre d'alumnes
cotxe	desplaçament	12
avió	desplaçament	4
tren	desplaçament	3
bicicleta	desplaçament	3
animals	desplaçament	2
camió	desplaçament	2
humans o persones	desplaçament	2
metro	desplaçament	2
telefèric	desplaçament	2
ascensor	desplaçament	1
caminar	desplaçament	1
carro	desplaçament	1
carro d'anar a comprar	desplaçament	1
cistell de paletes	desplaçament	1
esquiador	desplaçament	1
grua	desplaçament	1
l'electricitat per un cable	desplaçament	1
patins	desplaçament	1
pilota	desplaçament	1
quan algú es canvia de casa	desplaçament	1
remolc	desplaçament	1
tobogan	desplaçament	1
tramvia	desplaçament	1
un animal quan un bosc es crema	desplaçament	1
vehicles	desplaçament	1

Comentaris a la qüestió 9

En la taula també s'observa una total associació de la translació al desplaçament.

Cal fer notar la inexistència de referències a la línia recta.

10) Escriu al costat si hi ha un gir, una simetria o una translació

Situació	Percentatge de respostes			
	Gir	Simetria	Translació	Errors
un ascensor que puja i baixa	0%	0%	100%	0%
obrir una porta	69%	9%	22%	31%
rebobinar un vídeo	65%	13%	22%	35%
calcar un dibuix	0%	87%	13%	13%
baixar per un tobogan	4%	0%	96%	4%
obrir una aixeta	82%	9%	9%	18%
dues mans juntes	0%	96%	4%	4%
imatge del retrovisor d'un cotxe	4%	83%	13%	17%
un telefèric	0%	0%	100%	0%
unes tisores	22%	69%	9%	31%
descargolar un tap de rosca	96%	0%	4%	4%
un esquiador esquiant	9%	4%	87%	13%
una piragua navegant	0%	4%	96%	4%
un ventilador funcionant	96%	0%	4%	4%
cargolar un "tornillo"	96%	0%	4%	4%

Comentaris a la qüestió 10

Taula resum de l'índex de correcció de les respostes de la qüestió 10

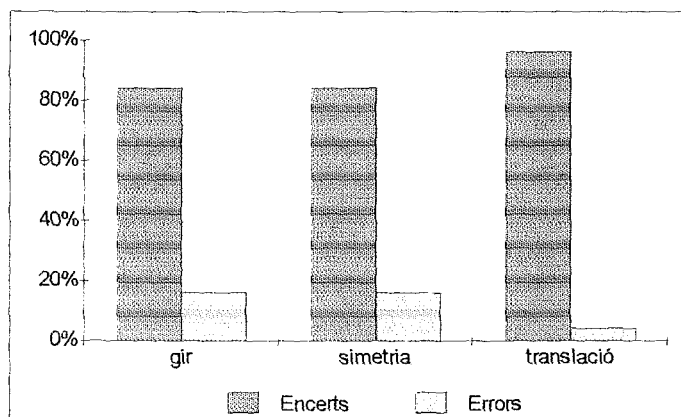
Transformació	Encerts
gir	84%
simetria	84%
translació	96%

Aquest índex d'encerts en el reconeixement de transformacions en situacions quotidianes ($T > G = S$), gairebé confirma del tot el que s'ha dit en relació a l'ordre de dificultats en l'aprenentatge de les isometries ($T > S > G$) exposat a l'apartat 3.

Taula resum de l'índex d'errors de les respostes de la qüestió 10

Transformació	Errors
gir	16%
simetria	16%
translació	4%

Gràfic resum de l'índex d'encerts i d'errors de les respostes de la qüestió 10



Taula resum dels errors més significatius de les respostes de la qüestió 10

Situació	Gir	Simetria	Translació	Errors
obrir una porta	69%	9%	22%	31%
rebobinar un vídeo	65%	13%	22%	35%
unes tisores	22%	69%	9%	31%

Consultat l'alumnat sobre les seves respostes, per alguns d'ells "obrir una porta" és traslladar-la i no saben dir perquè. Un diu: "és que la mous tota".

Podríem avançar la hipòtesi que el motiu de la confusió està en fer un gir a l'espai, i confondre moviment i desplaçament.

Quant a "rebobinar un vídeo", tot i reconeixent que la cinta gira, per alguns d'ells i d'elles és més important el fet de tenir simetria, "ser simètrica" que diuen, i per altres que "la cinta passa d'un costat a l'altre", "es trasllada".

Quant a les "tisores", el motiu és clar: "quan les obres giren per aquí".

11) Relaciona la columna del mig amb les de la dreta i l'esquerra. Pots deixar-ne sense fletxes.

	Créixer
Gir	Desplaçament
	Volta
Simetria	Relliscar
	Igual
Translació	Reflexió
	Rotació

Comentaris a la qüestió 11

Taula resum dels aparellaments de la qüestió 11

Termes aparellats	Alumnes	%
Gir → Rotació	21	91%
Gir → Volta	17	72%
Simetria → Igual	17	72%
Simetria → Reflexió	12	52%
Translació → Desplaçament	21	91%
Translació → Relliscar	10	43%
Error a): Translació → Créixer	4	17%
Error b): Translació → Rotació	2	9%
Error c): Simetria → Rotació	1	4%

Taula resum de respostes a la qüestió 11

Transformació	Encerts
gir	82%
simetria	62%
translació	67%

En aquest cas no es confirma l'ordre de dificultats en l'aprenentatge de les isometries, ja que és $G > T > S$. Possiblement els sinònims dels girs són molt clars.

L'error d'associar translació amb créixer, i per tant ampliació, pot ser una connexió entre translació i semblança.

12) Escriu en cada cas un objecte o situació més representativa per tu de:

a) Gir

	Propietat	Nombre d'alumnes	Seleccions en qüestió 3
volta	intrínseca	4	0
agulles rellotge	intrínseca	3	6
pilota	intrínseca	3	8
aixeta	intrínseca	2	0
volant	intrínseca	2	0
cargol	intrínseca	1	0
cargolar tornillo	intrínseca	1	0
carretera amb corbes	altres	1	1 (carretera)
cotxe que gira	intrínseca	1	3 (cotxe)
girar	intrínseca	1	0
girar al Win Logo	intrínseca	1	0
roda	intrínseca	1	12
en blanc		3	
Total		24	

Comentaris a la qüestió 12 relativa als girs

En la taula es pot veure que la majoria d'exemples seleccionats (83%) tenen el gir com a propietat intrínseca pròpia o especificada (cotxe que gira...).

Recordem que en la qüestió 3, "escriu tres coses que girin", aquests representaven el 85%.

b) Simetria

	Propietat	Nombre d'alumnes	Seleccions en qüestió 6
papallona	en si mateixa	4	6
mans	dues coses	3	2
mirall	dues coses	2	3
dos ... iguals	dues coses	2	2
dos ...	dues coses	1	5
cara	en si mateixa	1	5
estrella	en si mateixa	1	1
fotocòpia	dues coses	1	0
igual	dues coses	1	0
pantalons	en si mateixos	1	1
simètric		1	0
torres bessones de BCN	dues coses	1	1
ulls	dues coses	1	2
una cosa igual	dues coses	1	0
en blanc		3	
Total		24	

Comentaris a la qüestió 12 relativa a les simetries

En la taula es pot veure que la majoria d'exemples seleccionats (54%) reflecteixen una simetria entre dues coses i els altres un objecte amb simetria en si mateix (29%).

Recordem que en la qüestió 6, "escriu tres coses que tinguin simetria", aquests dos representaven el 39% i el 61% respectivament.

c) Translació

	Nombre d'alumnes	Seleccions en qüestió 9
ascensor	4	1
cotxe	3	12
comes	1	0
corrent per un cable	1	0
cotxe que gira	1	0
desplaçament	1	0
home que porta un paquet	1	0
metro	1	2
monopatí	1	1
moure's de casa	1	0
moure's de lloc	1	0
moviment	1	0
persiana	1	0
persones	1	2
senyor caminant	1	1
traslladar	1	0
en blanc	3	
Total	24	

Comentaris a la qüestió 12 relativa a les translacions

En la taula es pot veure que la majoria d'exemples seleccionats (71%) reflecteixen l'associació entre translació i desplaçament.

Recordem que en la qüestió 9, "escriu tres coses que es traslladin", aquests representaven el 100%.

13) Dibuixa el resultat d'aplicar un gir a aquesta figura.

	Centre	Sentit	45°	90°	180°	NAI	%
Gir	centre exterior dreta	dreta	1	1	1	3	12%
	centre exterior dreta	esquerra	4	2	0	6	25%
	centre exterior esquerra	dreta	1	0	0	1	4%
	centre exterior esquerra	esquerra	1	1	4	6	25%
	vèrtex inferior dret	esquerra	0	1	0	1	4%
Simetria + Gir	eix exterior a la dreta centre exterior dreta	dreta	0	2	0	2	8%
Simetria + Gir	eix exterior a la dreta centre exterior esquerra	esquerra	0	2	0	2	8%
Simetria	eix exterior a la dreta		-	-	-	2	8%
Simetria	eix secant vèrtex sup. dret inclinat 45°		-	-	-	1	4%
Total			7	9	5	24	100%

Comentaris a la qüestió 13

Taula resum dels resultats de la construcció del gir de la qüestió 13

centre					sentit		%
exterior	interior	vèrtex	dreta	esquerra	dreta	esquerra	
√							67%
	√						0%
		√					4%
√			√				38%
√				√			29%
√			√		√		13%
√			√			√	25%
√				√	√		4%
√				√		√	25%

Quant al sentit del gir podríem resumir-lo dient que un 50% fan un gir a l'esquerra i un 17% a la dreta. Els altres són errors.

Generalitzant, el gir model és el de centre exterior (67%), situat indistintament a la dreta o a l'esquerra de la figura (25% + 25% = 50%) i de sentit cap a l'esquerra (50%). Una possible explicació d'aquest fet la podríem trobar en l'aprenentatge formal motriu del dibuix de rodones o d'escriptura de lletres amb forma circular com la lletra *a*, l'*o*, la *de*, etc.

Aquests resultats d'alguna manera contradiuen les conclusions de Thomas (1978) comentades a l'apartat 3 en relació a la igualtat de dificultat entre els girs a la dreta i els a l'esquerra ($GD = GE$), ja que hem observat que a partir de la relació entre gir model i espontani i nivell de dificultat, $GE > GD$.

D'altra banda, i també en el marc de girs espontani i més "natural", també hi ha diferències amb Küchemann (Dickson, Brown i Gibson, 1984) i Edwards i Zazkis (1993) que conclouien que els girs amb centre al mig o interior eren més fàcils que els girs de centre exterior.

Així mateix tampoc es verifiquen les conclusions d'Edwards i Zazkis (1993) les quals, amb una lletra *ela* de cartró van comprovar que davant de l'ordre genèrica "gira-la", el 100% dels estudiants de magisteri de la investigació, van girar-la al voltant d'un centre interior de la figura, un 43% en el centre visual, i un 57% en un vèrtex especial. Recordem que en el nostre cas, que és amb dibuix, el 67% fan servir un centre exterior, el 4% en un vèrtex i el 0% un a l'interior.

No voldríem passar per alt que en la resolució de les Fitxes de pràctiques dels girs PG3 i PG4, s'ha evidenciat que els girs de polígons regulars són més fàcils que els girs de polígons irregulars i els còncaus, i que els girs de

figures reals també són més fàcils que els de figures abstractes, tal com va dir Schultz (1978).

14) Dibuixa el resultat d'aplicar una simetria a aquesta figura.

	Eix	Situació	Nombre d'alumnes	%
Simetria	vertical dreta	exterior	7	29%
	vertical dreta	tangent	5	21%
	vertical esquerra	exterior	3	13%
	vertical esquerra	tangent	5	21%
Translació	horitzontal	dreta	1	4%
	horitzontal	esquerra	2	8%
	inclinada	NE	1	4%
Total			24	100%

Comentaris a la qüestió 14

Taula resum de la situació de l'eix en la construcció de la simetria de la qüestió 14

vertical	horitzontal	inclinat	dreta	esquerra	exterior	tangent	%
√							84%
	√						0%
		√					0%
√			√				50%
√				√			34%
√			√		√		29%
√			√			√	21%
√				√	√		13%
√				√		√	21%

Generalitzant, la simetria model és la d'eix vertical (84%), situat a la dreta de la figura (50%) i indistintament exterior (42%) o tangent (42%) a ella.

Quant als tres errors de translacions horitzontals, interrogat l'alumnat, tots van dir quelcom semblant a: "Ah! Sí! S'havia de girar", referint-se a la inversió. Una possible explicació d'aquest fet la podríem trobar en el nostre sentit de lectura i d'escriptura occidental, que va d'esquerra a dreta.

Aquestes conclusions contrasten amb les de Küchemann (Dickson, Brown i Gibson, 1984), Thomas (1978) i Gallou i Marka (1989), ja que aquests autors coincideixen que la dificultat de realització de simetria d'eix vertical és la mateixa que la d'eix horitzontal, però en el nostre cas la simetria d'eix vertical és utilitzada en un 84% de les situacions.

Quant a la dificultat superior de la simetria d'eix inclinat els nostres resultats coincideixen amb els dels autors esmentats. Ara bé, no coincidim amb Edwards i Zazkis (1993) quan, en experimentar una simetria amb una lletra ela de cartró, un 50% de l'alumnat ho feia respecte a un eix secant (al mig) i un altre 50% respecte a un eix tangent. Recordem que en el nostre cas les dades relatives són un 50% respecte a un eix exterior i un altre 50% respecte a un eix tangent.

No voldríem passar per alt que en la resolució de la Fitxa de pràctiques de les simetries PS2, s'ha evidenciat que les simetries d'eix secant al mig tenen una dificultat semblant a les d'eix exterior, però inferior a les d'eix tangent, les qual són més fàcils que les d'eix secant ($\frac{1}{2} = \text{Ext} > \text{Tg} > \text{Sec}$), comprovant així les conclusions d'Edwards i Zazkis (1993), Gallou i Marka (1989), i Grenier (1989).

D'altra banda, no es confirmen les conclusions de Thomas (1978), Küchemann (Dickson, Brown i Gibson, 1984) i Gallou i Marka (1989) ja que si en elles, $SH = SV > SI$, en el nostre cas, $SV > SH > SI$.

En les fitxes esmentades, les constatacions sobre simetries foren¹:

- $\frac{1}{2} = \text{Ext} > \text{Tg} > \text{Sec}$
- $SV > SH > SI$
- $V_{\text{ExtD}} = V_{\text{ExtE}} = V_{\text{TgD}} = V_{\text{TgE}} > V_{\text{Sec}} > \text{Fig. no } || \text{ a l'eix}$
- $H_{\text{Ext}} \uparrow > H_{\text{Ext}} \downarrow > H_{\text{Tg}} \uparrow > H_{\text{Tg}} \downarrow > H_{\text{Tg}} = H_{\text{Tg}} \downarrow$
- $I_{\text{Tg}} > I_{\text{Sec}} > I_{\text{Ext no } ||} > I_{\text{Ext o } ||}$

15) Dibuixa el resultat d'aplicar una translació a aquesta figura.

	Direcció	Sentit	N. alumnes	%
Translació	horitzontal	dreta	9	38%
	horitzontal	esquerra	1	4%
	vertical	avall	1	4%
	inclinada	NE	3	13%
	inclinada	NO	2	8%
	inclinada	SE	1	4%
Simetria	eix horitzontal		1	4%
Gir	centre ext. esq.		2	8%
Ampliació			1	4%
No el fan			3	13%
		Total	24	100%

¹ La codificació utilitzada és la següent: > = Més fàcil que; || = Paral·lel; ↑ = Amunt; ↓ = Avall; $\frac{1}{2}$ = Al mig; D= Dreta; E = Esquerra; Ext = Exterior; H = Horitzontal; I = Inclinat; S = Simetria; Sec = Secant; Tg = Tangent; V = Vertical.

Comentaris a la qüestió 15

Taula resum de la direcció i del sentit en la construcció de la translació.

Direcció			Sentit				%
horitzontal	vertical	inclinat	dreta	esquerra	avall	altres	
√							42%
	√						4%
		√					25%
√			√				38%
√				√			4%
	√				√		4%
		√				√	25%

Generalitzant, la translació model és la de vector de direcció horitzontal (42%) i sentit cap a la dreta de la figura (38%).

Quant als errors, els dos alumnes, en el comentari posterior va dir que ells havien fet una simetria. De fet havien dibuixat el resultat a partir d'una resolució mental. En relació a l'ampliació ens remetem a allò que s'ha dit a la qüestió 11 sobre la semblança. Una possible explicació d'aquest fet també la podríem trobar en el nostre sentit de lectura i d'escriptura occidental, que va d'esquerra a dreta. Aquests resultat no concorden amb els de Thomas (1978) ja que segons ell las translacions de vector horitzontal tenien una dificultat inferior que les de vector vertical, però en nostre cas el 42% de l'alumnat fa translacions horitzontals, el 25% inclinades i el 4% verticals.

Quant a la Fitxa de pràctiques de les translacions, hem comprovat la utilitat de treballar amb graelles, malgrat impliqui unitats no estàndards, així com les conclusions de Thomas (1978) quant als nivells de dificultat: $H = V > I$.

6.1.3 Prova Inicial 3

Nota: En l'anotació de resultats d'aquesta prova hem diferenciat dos grups:

- A) Format per 12 alumnes que primer van resoldre aquesta prova i després van visualitzar els dos vídeo de l'Àlicia.
- B) Format també per 12 alumnes però que en primer lloc va fer la visualització del vídeo i després va resoldre la prova.

Objectius i continguts de les qüestions presentades

Qüestió	Objectius		Continguts
1	Reconèixer girs, simetries i translacions aplicades a una figura.	1.3 1.4 1.8 1.1 1.5 1.9 1.2 1.6 1.7	Gir: centre exterior i sentit a la dreta centre exterior i sentit a sota centre a vèrtex i sentit a la dreta Simetria: eix vertical i dreta eix horitzontal i avall eix inclinat de NO a SE Translació: vector horitzontal dreta vector inclinat SO a NE vector vertical amunt
2	Reflexionar sobre les variants de les figures en aplicar-los-hi una transformació.		Propietats que varien en les figures en aplicar-los-hi un gir, una simetria o una translació: la posició
3	Reflexionar sobre les invariants de les figures en aplicar-los-hi una transformació.		Propietats que no varien en les figures en aplicar-los-hi un gir, una simetria o una translació: forma, costats, angles, mides, etc.

Qüestions de la prova

1) En cadascun dels 9 casos, quina transformació hem aplicat a la figura inicial A perquè ens doni com a resultat la figura final B?

Qüestió	Gir			Simetria			Translació		
	A	B	Total	A	B	Total	A	B	Total
1	8%	8%	8%	92%	84%	88%	-	8%	4%
2	-	8%	4%	8%	8%	8%	92%	84%	88%
3	92%	100%	96%	-	-	-	8%	-	4%
4	84%	100%	92%	8%	-	4%	8%	-	4%
5	-	-	-	8%	8%	8%	92%	92%	92%
6	-	16%	8%	100%	84%	92%	-	-	-
7	8%	8%	8%	17%	8%	13%	75%	84%	79%
8	75%	50%	62%	17%	25%	21%	8%	25%	17%
9	42%	33%	37%	33%	50%	42%	25%	17%	21%

Nota: Hi ha 10 alumnes (42%) que experimenten amb les mans o papers.

Comentaris a la qüestió 1

Taula resum dels exercici de la qüestió 1 ordenats per ordre d'errors

Exercici	Encerts	Errors
9 - S	42%	58%
8 - G	62%	37%
7 - T	79%	21%
1 - S	88%	12%
2 - T	88%	12%
4 - G	92%	8%
5 - T	92%	8%
6 - S	92%	8%
3 - G	96%	4%

L'exercici 9 corresponia a una simetria d'eix inclinat de NO a SE. És fàcil de confondre, fins i tot a nivell de percepció visual ràpida, amb un gir per la posició relativa però impossible per la seva inversió, la qual ha estat desestimada per aquest alumnat. Cap dels alumnes va comprovar experimentalment la seva resposta.

En l'exercici 8, corresponent a un gir de 180° a la dreta respecte al vèrtex inferior dret, no hi ha evidència visual de simetria i encara menys de translació.

Malgrat tot alguns dels alumnes que han dit simetria ho justifiquen dient que: "és com si un eix passés per aquí", referint-se al centre de gir. Aquests alumnes tampoc han tingut en compte la inversió pròpia de les simetries.

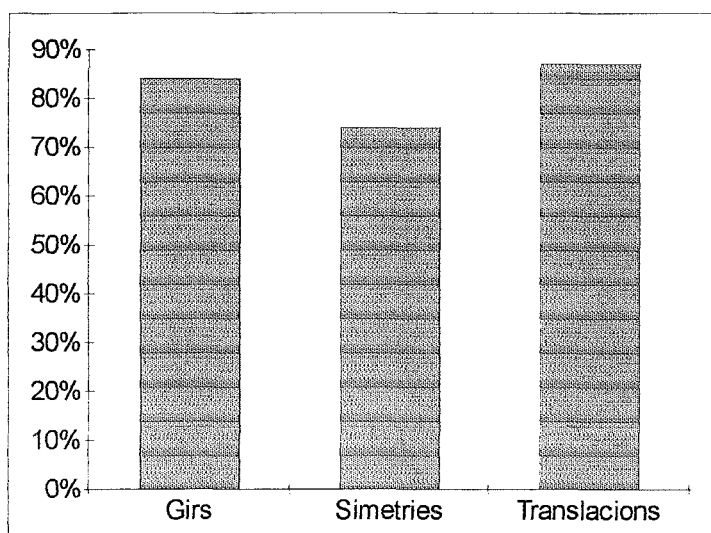
Quant a l'exercici 7 relatiu a una translació de vector vertical cap amunt, en motiu de no tenir en compte la inversió és explicable considerar-la com a simetria.

Aquestes dades reforcen que l'ordre de dificultat creixent per l'alumnat en les transformacions segons la seva orientació, tal com s'ha evidenciat a l'apartat 3, és: Horitzontal > Vertical > Inclinat ($H > V > I$).

En el nostre cas, però, les simetries en són una excepció ja que l'ordre que hem observat és el de Vertical > Horitzontal > Inclinat, que, com hem dit abans, no verifiquen lo exposat per Küchemann (Dickson, Brown i Gibson, 1984), Thomas (1978) i Gallou i Marka (1989).

Taula resum d'encerts dels exercici de la qüestió 1

Exercici	Encerts
Girs	84%
Simetries	74%
Translacions	87%

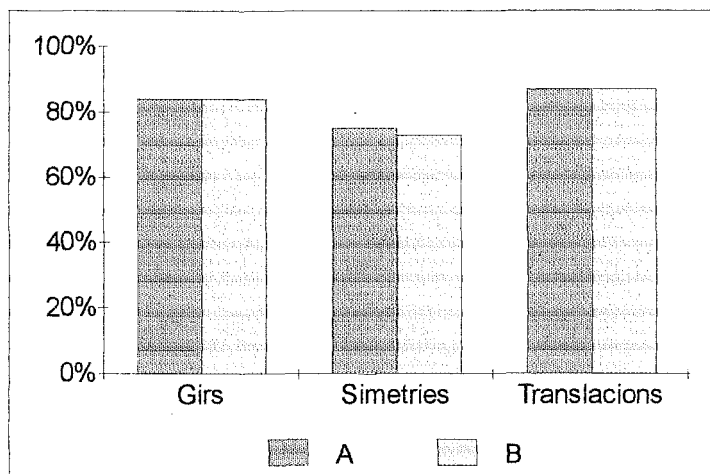


Així mateix, i en aquest cas concret no es confirma que l'ordre de dificultat creixent d'aprenentatge de les isometries per part de l'alumnat, és: Translació, Simetria i Gir ($T > S > G$).

En el nostre cas, i com es pot veure en el gràfic, l'ordre és $T > G > S$ (87%, 84%, 74%), però analitzat el motiu, podem concloure que els exercicis proposats en cada tipus de simetria no eren del mateix nivell de dificultat i per tant no comparables en aquest aspecte. D'altra banda, i com ja hem dit abans, tampoc es comprova la conclusió de Thomas (1978) ja que segons ell $GD = GE$, i nosaltres hem observat que $GE > GD$.

En relació a l'existència de diferències entre els grups A i B, en la taula i en el gràfic següents es pot comprovar que gairebé no se n'evidencia cap.

Qüestió	Girs		Simetria		Translació	
	A	B	A	B	A	B
1			92%	84%		
2					92%	84%
3	92%	100%				
4	84%	100%				
5					92%	92%
6			100%	84%		
7					75%	84%
8	75%	50%				
9			33%	50%		
	84%	84%	75%	73%	87%	87%



En resum trobem que el nivell d'encerts del grup A és del 82% i el del grup B del 81%. D'aquest resultats es pot concloure la nul·la influència de la visualització del vídeo en el reconeixement de les isometries de figures realitzades sobre el pla, en un entorn de classe de matemàtiques.

2) Explica què creus que canvia en aplicar a una figura: un gir, una simetria, una translació

a)

Gir	A	B	Total
la posició	4	7	11
la posició i la forma	2	0	2
figura que gira al voltant d'una cosa o de si mateixa	0	2	2
que gira	2	0	2
res	1	0	1
dóna mitja volta	1	0	1
la posició i el lloc	0	1	1
la direcció	1	0	1
la posició inicial	0	1	1
que fa una volta	0	1	1
no responen	1	0	1
Total	12	12	24

Comentaris a la qüestió 2 relatives als girs

En general el canvi es lliga a la posició (46%). En aquest punt el grup B (29%) té uns resultats superiors a l'A (17%).

b)

Simetria	A	B	Total
és la mateixa figura però al revés	3	3	6
la posició	1	3	4
res	3	1	4
el lloc	2	1	3
la inversa	0	3	3
n'hi ha una altra igual	2	0	2
canvia de costat	1	0	1
la posició i direcció	0	1	1
Total	12	12	24