Universitat de Barcelona

Departament d'Estadística

CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALS ESTOCÀSTIQUES

David Márquez Carreras

62 MAR
TESI MAT

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Divisió de Ciències Experimentals
i Matemàtiques
13 OCT. 1998
ENTRADA 126

Programa de Doctorat
"Probabilitats i Estadística"

Bienni 1993-95

Memòria presentada per aspirar al grau de Doctor en Matemàtiques

Certifico que la present memòria
ha estat realitzada per
David Márquez Carreras,
al Departament d'Estadística
de la Universitat de Barcelona
sota la meva direcció.

Dra. Marta Sanz Solé
Departament d'Estadística
Universitat de Barcelona.
Barcelona, setembre de 1998.

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA
0700469617

Als meus pares

Agraïments:

A la Dra. Marta Sanz, directora d'aquesta tesi, per tota la seva ajuda i col.laboració.

A la Sílvia, per moltes raons.

A na Montse, na Sònia, na Marta i en Carlos.

Als companys de Departament i amics que m'han ajudat.

Presentació

Aquesta memòria estudia bàsicament el comportament asimptòtic de la densitat de diferents famílies de vectors aleatoris. Al començament es dóna una introducció on es comenten diversos treballs anteriors que tracten sobre estudis asimptòtics de densitats, es pot observar el gran lligam que hi ha entre les estimacions de Varadhan i l'anomenat desenvolupament de Taylor de la densitat. Les estimacions són un primer pas cap a un estudi més extens del comportament asimptòtic. En aquesta introducció es manté, en molts llocs, la notació dels articles als quals es fa referència. Després, en els capítols següents, es detallen els treballs de la memòria pròpiament dita.

Considerem una família de vectors aleatoris $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\}$ amb condicions per l'existència i regularitat d'una densitat $p^\varepsilon(y)$, per a tot $\varepsilon \in (0,1]$.

El Capítol 2 de la memòria està dedicat a l'estudi de les anomenades estimacions de Varadhan. Nosaltres ens preguntarem pel comportament de $p^\varepsilon(y)$ quan $\varepsilon \to 0$. Concretament, estudiarem quan val

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log p^\varepsilon(y). \tag{1}$$

Aquest estudi es portarà a terme agafant com a F^ε la solució d'una equació en derivades parcials estocàstica perturbada de tipus hiperbòlic. Comprovarem que (1) és una funció $C(x,y)$, on x és la condició inicial de l'equació diferencial, i que aquesta funció, $C(x,y)$, està molt lligada a l'esquelet de l'equació. Prèviament, haurem provat l'existència de densitat i certes propietats de regularitat. Aquests resultats estan recollits a l'article [32].

Al tercer Capítol realitzarem un estudi més acurat i exhaustiu del comportament asimptòtic de la densitat. Considerarem un vector aleatori $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de $L^2(\Omega)$ amb representació en caos de Wiener $F = EF + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$. Prendrem la família particular definida per

$$F^\varepsilon = EF + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n I_n(f_n), \quad \forall \varepsilon \in (0,1]. \tag{2}$$

El nostre objectiu serà estudiar l'anomenat desenvolupament de Taylor de $p^\varepsilon(y)$, densitat de F^ε, en $\varepsilon = 0$ i per $y = EF$. Primerament, suposant que F pertany a uns certs espais de derivació, provarem resultats de diferenciabilitat de l'aplicació $\varepsilon \longrightarrow F^\varepsilon$. Posteriorment, afegint condicions de no degeneració, demostrarem que la densitat té l'expansió següent:

$$p^\varepsilon(y) \; = \; \frac{1}{\varepsilon^d} \left(c_0 \; + \; \varepsilon^2 c_2 \; + \; \cdots \; + \; \varepsilon^{n+1} R^\varepsilon_{n+1} \right), \tag{3}$$

on els coeficients c_i seran descrits mitjançant les integrals múltiples $I_n(f_n)$, i correspondran a densitats de mesures de Radon. Endemés, veurem que la resta, R^ε_{N+1}, és uniformement fitada respecte ε. Aquest resultat general l'aplicarem a dos equacions diferencials estocàstiques hiperbòliques. Aquests treballs es troben a [33].

Als Capítols 4, 5 de la memòria generalitzarem aquest resultat previ. Considerarem com a F^ε la coneguda solució de l'equació de la calor estocàstica perturbada. Al Capítol 4, sota les mateixes condicions que s'utilitzen per demostrar l'existència i regularitat d'una densitat $p^\varepsilon(y)$, nosaltres trobarem el desenvolupament asimptòtic (3) amb $d = 1$, on ara els coeficients c_i dependran de les derivades del procés solució de l'equació estocàstica perturbada avaluades en $\varepsilon = 0$; a més a més, aquestes derivades satisfaran equacions d'evolució que seran descrites. Aquesta generalització també es farà considerant un valor concret y, que inclou el cas del Capítol 3, i que depèn de l'esquelet de l'equació. L'estructura particular de la família (2) implicarà que les equacions estudiades aleshores hagin de tenir els coeficients lineals respecte la variable espai. En canvi aquí no haurem d'imposar aquesta restricció. Aquest resultat és recollit a [34].

Finalment, al Capítol 5, estudiarem el comportament asimptòtic de la mateixa densitat que al Capítol 4, però per a tot $y \in \mathbb{R}$. Afegint hipòtesis a les del capítol anterior provarem que la densitat té el desenvolupament següent:

$$p^\varepsilon(y) \; \sim \; \frac{1}{\varepsilon} \exp\{-\frac{a}{2\varepsilon^2}\} \left(d_0 \; + \; \varepsilon \, d_1 \; + \; \varepsilon^2 d_2 \; + \; \cdots \right). \tag{4}$$

Els coeficients d_i s'anul.laran per i senar i seran donats per i parell; a serà la norma mínima dels elements de l'espai de Cameron-Martin que aplicats a l'esquelet tenen per imatge el valor y. El símbol $\sim$ a (4) significarà

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{p^\varepsilon(y) - \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(- \frac{1}{2\varepsilon^2} a \right) \left(d_0 + \varepsilon d_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} d_{k-1} \right)}{\varepsilon^{k-1} \, \exp\left(- \frac{1}{2\varepsilon^2} a \right)} \; < \; +\infty ,$$

per qualsevol $k \geq 1$. Aquest treball es troba a [22].

Els Capítols 2, 3, 4 i 5 contenen una introducció on s'explica la metodologia que nosaltres hem seguit en aquell capítol, donant les idees més importants. Les Seccions d'aquests Capítols constaran quasi sempre de tres parts. Una primera, anomenada *Objectiu*, està dedicada a explicar el propòsit de la Secció. Una segona, dita *Preliminars*, on es donaran els prerequisits necessaris, quan s'escaigui, per poder portar a terme la demostració dels Objectius. A l'última es provaran els resultats.

Al llarg de la memòria les constants que hi apareguin seran anomenades C, encara que canviïn el seu valor. Per qüestions sobre les notacions o nocions sobre l'espai de Wiener vegeu el llibre de D. Nualart *Malliavin Calculus and Related Topics* [41] (i també [42]), si bé, aquestes nocions i notacions seran donades i introduïdes al llarg de la memòria.

Índex

Capítol 1

Introducció

Sigui $q(t, x, y)$ la solució de l'equació

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

amb condició frontera $q(t, x, y) \to \delta_{\{x\}}(y)$ quan $t \to 0$, $y \in \mathbb{R}^k$, que pot ser escrita explícitament com

$$q(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{k}{2}} \exp\{-\frac{1}{2t}\|x - y\|^2\},$$

on $\|\cdot\|$ denota la distància euclídea. És immediat comprovar

$$\lim_{t \downarrow 0} (-2t \log q(t, x, y)) = \|x - y\|^2. \tag{1.2}$$

Considerem ara l'anàleg a (1.1). Sigui $p(t, x, y)$ solució de

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \, \partial x_j} \tag{1.3}$$

amb la mateixa condició frontera que abans. Hom pot preguntar-se si de manera similar a (1.2)

$$\lim_{t \downarrow 0} (-2t \log p(t, x, y)) = d^2(x, y), \tag{1.4}$$

on $d^2(x,y)$ és la distància induïda per la mètrica Riemanniana derivada dels coeficients $\{a_{i,j}(x)\}$, essent aquesta matriu simètrica i definida positiva.

Així és com S.R.S. Varadhan introdueix a l'article *On the behavior of the fundamental solution of the Heat equation with variables coefficients* [53], l'any 1967, el problema que vol resoldre. Observi's que $p(t,x,y)$ correspon a la densitat de transició d'una difusió. S.R.S. Varadhan provarà (1.4) sota condicions Hölder i d'el.lipticitat uniforme sobre $a_{i,j}$, utilitzant tècniques totalment d'anàlisi, i treballant directament amb la densitat com a solució de l'equació (1.3). Aquest és el motiu per què se les conegui com *Estimacions de Varadhan.*

Sigui $X(t)$ un procés de difussió k-dimensional amb densitat de transició donada per la solució fonamental de (1.3). Sigui $\varepsilon \in (0,1]$, i considerem $X_\varepsilon(t) = X(\varepsilon t)$, fixat $t \in [0,T]$. S.R.S. Varadhan va estudiar en el seu treball *Diffusion processes in a small time interval* [54], el mateix any, el comportament quan $\varepsilon \to 0$ de la solució de l'equació

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\varepsilon \sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j}(x)\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\,\partial x_j}, \tag{1.5}$$

que correspon a la densitat del procés difusió $X_\varepsilon(t)$. Sigui $p^\varepsilon(t,x,y)$ la solució de (1.5). Com $p^\varepsilon(t,x,y) = p(\varepsilon t,x,y)$, és equivalent estudiar el comportament de $p(t,x,y)$ quan $t \to 0$ que el comportament de $p^\varepsilon(t,x,y)$, per $t > 0$ fixat, quan $\varepsilon \to 0$. Assumint les mateixes condicions que considera a [53], ell mostrarà un principi de grans desviacions utilitzant (1.4) i presentarà refinaments a l'estudi fet a [53].
Finalment generalitza l'operador que havia considerat anteriorment, i prova l'equivalent a (1.4) per l'operador

$$\mathcal{L}\,f = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_{i,j}(x)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{j=1}^{k} b_j(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{1.6}$$

Notem que en els dos articles els coeficients no depenen del temps.

A mitjants dels anys 70, S.A. Molchanov [37], Yu.I. Kifer [21], i Y. Kannai [20] proven resultats asimptòtics quan $t \to 0$ per la solució fonamental $p(t,x,y)$ de l'equació de difusió $\mathcal{L}p = \frac{\partial p}{\partial t}$, amb condició inicial $p(0,x,y) = \delta_{\{x\}}(y)$, i on $\mathcal{L}$ és l'operador definit a (1.6) o alguna modificació una mica més complexa. Els estudis són molt més precisos que els realitzats per S.R.S. Varadhan ([53], [54]) doncs demostren, amb més o menys rigor, que la densitat té el comportament següent:

$$p(t,x,y) \sim \frac{1}{t^{d/2}} \exp\{-\frac{d^2(x,y)}{2t}\} \Big(K_0(t,x,y) \ + \ K_1(t,x,y)t \ + \ \cdots \Big), \qquad (1.7)$$

on d és la dimensió, $d^2(x,y)$ és la distància introduïda abans i els coeficients $K_i(t,x,y)$ són donats iteradament. Les condicions sobre els coeficients de l'equació són de diferenciabilitat, d'el.lipticitat uniforme, i sense dependència del temps (Yu.I. Kifer [21] esmenta que el seu treball pot estendre's a coeficients no homogenis). A més assumeixen diverses condicions sobre l'estructura del conjunt de geodèsiques que uneixen x i y. S.A. Molchanov utilitzant eines de geometria diferencial estudia bàsicament el primer terme del desenvolupament (vegeu també [4]). Mentre Yu.I. Kifer, considerant a^{-1}, b i les seves derivades uniformement fitades i sense entrar en masses detalls a les demostracions, dóna amb molta precisió els termes $K_i(t,x,y)$. Finalment, Y. Kannai també estudia els coeficients si bé sense donar una estimació de la resta.

Sobre l'obert $U \subset \mathbb{R}^d$, considerem la difusió X_t, $0 \leq t \leq 1$, no homogènia en el temps, solució de la següent equació estocàstica d'Itô

$$d\,X_t \ = \ \sigma(t,X_t)\ d\,W_t \ + \ b(t,X_t)\ d\,t, \qquad (1.8)$$

on W_t és un brownià k-dimensional, els coeficients σ, b són camps $\mathcal{C}^\infty$ sobre $[0,1]\times U$, i la difusió és localment el.líptica. Denotem per $p(s,t,x,y)$ la densitat de transició de X_t coneixent que ha sortit de x a l'instant s.
A principis dels 80, R. Azencott prova a l'article *Densité de diffusions en temps petit: Développements asymptotiques* [3], per x i y propers, la fórmula

$$p(s,t,x,y) = (t-s)^{-\frac{d}{2}} \exp\Big\{ -\frac{d_s^2(x,y)}{2(t-s)}\Big\}[\alpha_0 + \alpha_1(t-s) + \cdots + O(t-s)^{n+1}], \quad (1.9)$$

essent d_s la distància Riemanniana associada a $a(s,x) = (\sigma\sigma^*)(s,x)$, els termes α_i són zero per i senar, els parells són descrits i fitats. La resta també és estimada.
Un fet important és el plantejament del problema, treballa amb la densitat com a densitat d'un procés que és solució de l'equació (1.8), i no, considerant-la com a solució fonamental de $\mathcal{L}f = \frac{\partial p}{\partial t}$. El mateix R. Azencott [2] i H. Doss [16] havien ja utilitzat anteriorment aquest mètode per l'estudi d'altres problemes asimptòtics.
Un dels ingredients que utilitza és el següent. Sigui X_t^ε, $\varepsilon \in (0,1]$, solució de

$$d\,X_t^\varepsilon \ = \ \varepsilon\sigma(\varepsilon^2 t, X_t^\varepsilon)\ d\,W_t \ + \ \varepsilon^2 b(\varepsilon^2 t, X_t^\varepsilon)\ d\,t,$$

i denotem per $p^\varepsilon(s,t,x,y)$ la densitat de transició de la llei de X_t^ε, $\varepsilon \in (0,1]$. Mitjançant la propietat *scaling* del moviment brownià dóna una relació entre $p(s,t,x,y)$ i $p^\varepsilon(s,t,x,y)$, concretament, $p(0,\varepsilon^2,x,y) = p^\varepsilon(0,1,x,y)$. Aleshores, ell estudiarà el comportament de la densitat $p^\varepsilon(0,1,x,y)$ quan $\varepsilon \to 0$.
Utilitzant una funció truncadora divideix aquesta densitat en dues parts. Una de les parts, anomenada *evanescent*, una vegada estudiada veu que pot despreciar-la, mentre que l'altra, dita *localitzada* o *principal*, és la que tractarà detalladament. El pont brownià, la normalització respecte ε de la variable que considera, el teorema de Girsanov, la fórmula de Taylor estocàstica, els sistemes d'Itô en cascada i el mètode de Laplace en són eines que usa per aconseguir el seu objectiu.
Finalment també comenta la validesa de la fórmula (1.9) per x i y allunyats suposant, a més a més, que la parella (x,y) no està dins el *cut-locus* el.líptic.

Sigui l'operador

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} A_i + A_0, \tag{1.10}$$

on A_i són camps de vectors infinitament diferenciables sobre $\mathbb{R}^d$, fitats, amb derivades fitades de tots els ordres, i satisfent la hipòtesi forta d'hipoel.lipticitat de Hörmander (i això vol dir que per a tot $x \in \mathbb{R}^d$, $\dim \mathrm{Lie}(A_1,\cdots,A_m)(x) = d$). Sigui la solució de l'equació diferencial

$$d\,X_t = \sum_{i=1}^{m} A_i(X_t)\circ d\,W_t^i + A_0(X_t)\,d\,t, \quad X_0 = x, \tag{1.11}$$

on $\circ dW^i$ denota la diferencial de Stratonovich de m moviments brownians independents.
L'any 1967, L. Hörmander [19] prova, sota condicions d'hipoel.lipticitat, que el procés X_t, solució de (1.11), té una densitat $p_t(x,y)$ per a tot $t > 0$. És necessari citar el llibre de J.M. Bismut [13] on treballa tant amb hipòtesis el.líptiques com hipoel.líptiques. Amb les primeres estudia el comportament asimptòtic de la densitat; amb les segones troba resultats bàsics sobre l'esquelet, els quals seran utilitzats en articles posteriors de R. Léandre i G. Ben Arous, i planteja també conjectures sobre el comportament asimptòtic de la densitat que més endavant seran demostrades.

Considerem l'equació diferencial de Stratonovich perturbada

$$d\,X_t^\varepsilon = \varepsilon\sum_{i=1}^{m} A_i(X_t^\varepsilon)\circ d\,W_t^i + \varepsilon^2 A_0(X_t^\varepsilon)\,d\,t, \quad X_0^\varepsilon = x, \tag{1.12}$$

i pel resultat que hem citat de L. Hörmander sabem que la llei de X_1^ε posseeix, si $\varepsilon > 0$, una densitat regular, diem-li $p_1^\varepsilon(x, y)$.
Denotem per $\mathcal{H}$ l'espai de Hilbert de les funcions $h : t \to (h^i(t))$ de $[0, 1]$ dins $\mathbb{R}^m$ de quadrat integrable, i amb norma

$$\|h\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (h^i(t))^2 \, dt.$$

Considerem l'equació diferencial determinista

$$\begin{aligned} d\Phi_t(h) &= \textstyle\sum_{i=1}^m A_i(\Phi_t(h)) \, h^i(t) \, dt, \\ \Phi_0(h) &= x. \end{aligned}$$

L'aplicació $h \to \Phi_1(h)$ és $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}$ dins $\mathbb{R}^d$. Aleshores, sigui

$$d^2(x, y) = \inf\{\|h\|^2, \Phi_1(h) = y, \Phi_0(h) = x\}. \tag{1.13}$$

R. Léandre ([23], [24], [25], [26], [27], [28]) demostra, sota aquestes condicions més febles, el resultat següent

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} 2\varepsilon^2 \log p_1^\varepsilon(x, y) = -d^2(x, y), \tag{1.14}$$

on ara d és definida a (1.13). Tal com observava R. Azencott, existeix una relació entre les densitats de la solució de l'equació perturbada i sense perturbar i és la següent: $p_1^\varepsilon(x, y) = p_{\varepsilon^2}(x, y)$. Això vol dir que de fet el que troba és el comportament de $p_t(x, y)$ quan $t \to 0$.
El mètode més utilitzat en aquests articles consisteix en majorar i minorar la densitat, obtenint així el resultat (1.14). L'afitament uniforme respecte ε del procés X_1^ε respecte les normes dels espais de Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$, la no degeneració de la matriu de Malliavin de X_1^ε normalitzada i un resultat anterior sobre grans desviacions són ingredients que li donen la majoració. Per la minoració utilitza el teorema de Girsanov i la normalització de la variable aleatòria degenerada que apareix producte del teorema de Girsanov.
Aquestes tècniques van ser generalitzades per D. Nualart [42] per donar les estimacions de Varadhan per un funcional general F^ε. En aquesta línea ens movem a la primera part d'aquesta memòria.

Assumint hipoel.lipticitat forta i que x i y són fora del *cut-locus* hipoel.líptic, R. Léandre ([27], [28]) i G. Ben Arous ([8], [10]) proven, com R. Azencott en el cas el.líptic, el desenvolpament asimptòtic següent

$$p_t(x,y) = t^{-d/2} \exp\Big\{ - \frac{d^2(x,y)}{2t}\Big\}\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i(x,y)t^i + O(t^{n+1})\Big). \qquad (1.15)$$

G. Ben Arous, a l'article *Développement asumptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus*, demostra amb detall (1.15). Utilitza essencialment resultats de grans desviacions, el mètode de Laplace per difusions amb condicions d'hipoel.lipticitat i la integració per parts del càlcul de Malliavin. Els coeficients c_i són $\mathcal{C}^\infty$ fora del *cut-locus*, $c_0(x,y) > 0$ i les derivades dels coeficients c_i respecte (t,x,y) són fitades uniformement. Troba igualment el desenvolupament asimptòtic de les derivades de $p_t(x,y)$ respecte (t,x,y), fitant uniformement la resta.
El mateix G. Ben Arous donarà també el desenvolupament de Taylor de la densitat a la diagonal, és a dir per $p_t(x,x)$ (vegeu [9], [10]). En el cas hipoel.líptic la parella (x,x) és dins el *cut-locus*, d'aquí aquest estudi.
Endemés, G. Ben Arous i R. Léandre estudiaran en els articles [11] i [12] la influència de A_0 (vegeu fórmula (1.10)) sobre el comportament asimptòtic.

Seguint les mateixes idees proposades en els treballs anteriors de R. Léandre, el propi R. Léandre i F. Russo provaran les estimacions de Varadhan per a dos processos biparamètrics.
A *Estimation de Varadhan pour les diffusions à deux paramètres* [29] consideren l'anomenada difusió a dos paràmetres

$$X_t = x + \int_0^t \{\sum_{j=1}^{m} A_j(X_r)\, dW_r^j + B(X_r)\, dr\}, \quad t \in \mathbb{R}_+^2, \qquad (1.16)$$

on $W_t = (W_t^1, \cdots, W_t^m)$ és un brownià a dos paràmetres m-dimensional, $A_j, B : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $j = 1, \cdots, m$, són de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades fitades de tots els ordres, i $x \in \mathbb{R}^d$. Sota les hipòtesis de Hörmander generalitzades D. Nualart i M. Sanz-Solé [43] havien provat l'existència de densitat. Com en el cas uniparamètric, donen una relació entre la densitat del procés solució perturbat i sense perturbar. Sigui $t \in [0,1]^2$ i $\{Y_t(\varepsilon,x)\}$ la solució de l'equació

$$Y_t(\varepsilon,x) = x + \varepsilon \int_0^t \sum_{j=1}^{m} A_j(Y_r(\varepsilon,x))\, dW_r^j + \varepsilon^2 \int_0^t B(Y_r(\varepsilon,x))\, dr,$$

amb $\varepsilon \in (0,1]$. Aleshores la llei de $X_s(x)$, $s = (s_1,s_2)$, solució de (1.16), és igual a la de $Y_{z_1}(\varepsilon,x)$, $z_1 = (1,1)$, per $\varepsilon = \sqrt{s_1 s_2}$. Denotem $p_{z_1}^{\varepsilon}(x,y)$ la densitat de $Y_{z_1}(\varepsilon,x)$,

R. Léandre i F. Russo demostren sota condicions el.líptiques el següent

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} 2\varepsilon^2 \log p^{\varepsilon}_{z_1}(x,y) = -d^2(x,y),$$

on d és definit com a (1.13) però utilitzant l'esquelet d'aquesta equació biparamètrica.

En canvi, a *Small Stochastic perturbation of a one-dimensional wave equation* [30] consideren directament l'equació diferencial en derivades parcials estocàstica perturbada

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) X(t,x) = \varepsilon\, a(X(t,x))\, \xi(t,x) + b(X(t,x)), \tag{1.17}$$

on ξ és un soroll blanc espai-temps. El fet que només és perturbi el terme aleatori a (1.17) és perquè en aquest cas no es pot obtenir una relació entre la densitat del procés perturbat i sense perturbar. Aleshores aquí troben el comportament asimptòtic de la densitat quan $\varepsilon \to 0$ i no quan $t \to 0$.
En aquest treball també donen el desenvolupament de Taylor de la densitat.

Amb arguments similars als utilitzats per treballar amb (1.17), A. Millet i M. Sanz-Solé [35] troben les estimacions de Varadhan per la solucio de l'equació estocàstica de la calor perturbada que tractarem als Capítols 4, 5. Treballen també amb condicions el.líptiques.

Seguint una metodologia diferent, S. Watanabe, a l'article *Analysis of Wiener Functionals (Malliavin Calculus) and its Applications to heat kernels* [56], fa un estudi molt més general sobre el comportament asimptòtic d'una densitat. Considerem una família de funcionals generals $F(\varepsilon,\omega) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon \in (0,1]$. Sigui $f_0, f_1, f_2, \cdots \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$. $F(\varepsilon,\omega)$ tindrà un desenvolupament asimptòtic

$$F(\varepsilon,\omega) \sim f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots \text{ en } \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ quan } \varepsilon \downarrow 0, \tag{1.18}$$

si, per cada $p \in (1,\infty)$, $s > 0$ i $k = 1,2,\cdots$,

$$F(\varepsilon,\omega) - (f_0 + \varepsilon f_1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} f_{k-1}) = O(\varepsilon^k) \text{ en } \mathbb{D}^s_p(\mathbb{R}^d) \text{ quan } \varepsilon \downarrow 0.$$

Suposem també que aquesta família és uniformement no degenerada. Aleshores, sota aquestes hipòtesis, S. Watanabe troba un desenvolupament asimptòtic per la composició entre un element de l'espai de les distribucions de Schwarz $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ i el funcional $F(\varepsilon,\omega)$. Aquest resultat ho aplicarà al cas particular d'una difusió uniparamètrica perturbada.

Sigui X_t la solució de (1.11), X_t^ε la de (1.12) i $p_t(x,y)$ la densitat de x_t. Primerament, suposant condicions el.líptiques, dóna el desenvolupament de Taylor de la densitat sobre la diagonal

$$p_t(x,x) \ \sim \ t^{-d/2}\,(\,c_0 \ + \ c_1 t \ + \ c_2 t^2 \ + \ \cdots\,), \tag{1.19}$$

on els coeficients c_i seran descrits. La demostració recau en el fet següent

$$p_{\varepsilon^2}(x,x) = E\Big(\delta_{\{x\}}(X^1_{\varepsilon^2})\Big) = E\Big(\delta_{\{x\}}(X^\varepsilon_1)\Big), \tag{1.20}$$

on $\delta_{\{x\}}$ és la delta de Dirac en x.
Mitjançant la fórmula d'Itô trobarà el desenvolupament asimptòtic (1.18) de X_1^ε i aleshores, (1.19) és una conseqüència immediata d'aplicar el resultat general que ha provat anteriorment.
També obté (1.15), és a dir, el desenvolupament asimptòtic fora de la diagonal. Per aconseguir-ho afebleix les condicions el.liptiques però en canvi afegeix dues noves hipòtesis: l'existència d'un únic $h_0 \in \mathcal{H}$ tal que $\Phi_1(h_0) = y$, $\Phi_0(h_0) = x$, $d^2(x,y) = \|h_0\|^2$ (relacionada amb el fet de pertànyer al *cut-locus*); i una fitació de tipus exponencial del coeficient d'ordre 2 del desenvolupament asimptòtic (1.18) de $X_1^\varepsilon(\omega + \frac{h_0}{\varepsilon})$. El mateix raonament que hem fet a (1.20) però per $x \neq y$, i una localització al voltant de h_0 divideixen la densitat en dues parts. Fora de la localització ho estima per un principi de grans desviacions. Per la part principal usa el teorema de Girsanov i un canvi de variable que provoquen l'aparició d'un factor exponencial. La dificultat prové de l'anàlisi del producte entre el terme exponencial i $\delta_{\{0\}}(F(\varepsilon,\omega))$, on

$$F(\varepsilon,\omega) = \frac{X_1^\varepsilon(\omega + \frac{h_0}{\varepsilon}) - y}{\varepsilon}.$$

Ho resoldrà emprant la hipòtesi de tipus exponencial que hem comentat anteriorment, una sèrie de lemes que tracten sobre l'afitament uniforme del terme exponencial convenientment localitzat (vegeu Capítol 5 d'aquesta memòria) i el resultat general demostrat al principi de l'article.
Aquesta és la línea que nosaltres seguim a la segona part de la memòria.
Aquest treball va ésser generalitzat per S. Takanobu i S. Watanabe [52].

Capítol 2

Petites perturbacions en una equació hiperbòlica

2.1 Introducció

Aquest primer apartat de la memòria està dedicat a l'estudi de l'equació diferencial estocàstica en derivades parcials de tipus hiperbòlic

$$\frac{\partial^2 X_{s,t}}{\partial s \partial t} = a_3(X_{s,t})\dot{W}_{s,t} + a_4(s,t) + a_1(s,t)\frac{\partial X_{s,t}}{\partial t} + a_2(s,t)\frac{\partial X_{s,t}}{\partial s}, \tag{2.1.1}$$

$(s,t) \in T = [0,1]^2$ i condició inicial $X_{s,t} = X_0$ sobre els eixos. Els coeficients són funcions mesurables $a_i : T \longrightarrow \mathbb{R}$, per $i = 1, 2$, i $a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, per $i = 3, 4$, $\{\dot{W}_{s,t}, (s,t) \in T\}$ és un soroll blanc sobre T, i X_0 una variable aleatòria $\mathcal{F}_{0,0}$ -mesurable, on $\{\mathcal{F}_{s,t}, (s,t) \in T\}$ és la completació de $\sigma\{W_{s,t}, (s,t) \in T\}$.
Una solució de (2.1.1) és un procés $X = \{X_{s,t}, (s,t) \in T\}$ continu i $\mathcal{F}_{s,t}$ -adaptat que satisfà

$$X_{s,t} = X_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v) a_3(X_{u,v}) dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v) a_4(X_{u,v}) du dv, \tag{2.1.2}$$

on $R_{s,t}$ denota el rectangle $[0,s] \times [0,t]$ i $\gamma_{s,t}(u,v)$ és la funció de Green associada a l'operador diferencial de segon ordre

$$\mathcal{L}f(s,t) = \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s \partial t} - a_1(s,t)\frac{\partial f(s,t)}{\partial t} - a_2(s,t)\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}.$$

Al final d'aquesta secció hem donat un mena d'apèndix amb propietats sobre aquesta funció de Green.
Aquest tipus d'equació apareixen en la construcció d'un drap brownià que pren valors en una varietat (vegeu l'article de J.R. Norris [40]). Pels detalls sobre l'existència i unicitat de solució per a (2.1.2) adrecem al lector als treballs de C. Rovira i M. Sanz-Solé [46] i C. Rovira [45].

El primer problema que s'analitza en aquesta secció és l'existència de densitat $p_z(y)$ per a la llei de X_z, $z \in T \setminus E$, on E indica el conjunt $\{(s,t) \in T, s\,t = 0\}$. S'estudien les propietats de $p_z(y)$, tant com a funció de y com de z, separadament. Això representa una continuació del programa desenvolupat per C. Rovira i M. Sanz-Solé a [46], on han provat l'existència de $p_z(y)$ i que la funció

$$y \longrightarrow p_z(y)$$

és C^∞ per a tot $z \in T \setminus E$. A la referència esmentada, els coeficients $a_i, i = 3,4$, també depenen de (s,t) però, per contra, imposen una condició de Hörmander tan sols sobre la derivada de primer ordre de a_3. En aquesta memòria, l'existència i regularitat de densitat es comprova sota unes condicions més generals, anomenades condicions de Hörmander en el cas de les difusions (vegeu ($\mathrm{H}_1 3$) a la Secció 2.2).
En un segon apartat de la Secció 2.2 es veu que la funció

$$z \longrightarrow p_z(y)$$

és Lipschitz per a tot $y \in \mathbb{R}$ fixat. La idea utilitzada per estudiar aquest problema ha estat desenvolupada recentment per P.L. Morien a [38], on s'estudia un problema similar per a la llei de probabilitat de la solució d'una equació diferencial estocàstica en derivades parcials de tipus parabòlic.
La idea consisteix en provar

$$\left|E\Big(f(X_z) - f(X_{z'})\Big)\right| \leq C\|F\|_\infty |z - z'| \tag{2.1.3}$$

per a tota funció regular f i per cada $z, z' \in T$, on F indica la primitiva de f.
La integral estocàstica de (2.1.2) no té la propietat de martingala, d'aquí que no

sigui possible aplicar la fórmula d'Itô per obtenir una expressió per a la part esquerra de (2.1.3), en canvi utilitzant el desenvolupament de Taylor i la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin s'obté el resultat desitjat.

Considerem les petites perturbacions del soroll blanc W provocades per un paràmetre $\varepsilon \in (0,1]$. L'evolució de l'equació governada per aquest soroll ve donada per

$$X^{\varepsilon}_{s,t} = X_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)\varepsilon a_3(X^{\varepsilon}_{u,v})dW_{u,v} + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)a_4(X^{\varepsilon}_{u,v})dudv. \quad (2.1.4)$$

Sigui $p^{\varepsilon}_z(y)$ la densitat de X^{ε}_z per $z \in T \setminus E$. Quan $\varepsilon \to 0$, la solució de (2.1.4) tendeix a una funció determinista, i per tant s'espera que $p^{\varepsilon}_z(y)$ convergeixi a una densitat degenerada. La segona qüestió que s'estudia en aquest capítol és la raó d'aquesta convergència. Es suposa que $x := X_0$ és determinista, i aleshores, sota certes condicions d'hipoel.lipticitat generals es demostra

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log p^{\varepsilon}_z(y) = C(x,y). \quad (2.1.5)$$

El valor de $C(x,y)$ a (2.1.5) és descrit en termes de l'esquelet de (2.1.2). Aquesta noció, la de l'esquelet, és també indispensable per a la caracterització del suport topològic per a la llei de $X_z, z \in T$, i per establir un principi de grans desviacions per $X^{\varepsilon} = \{X^{\varepsilon}_z, z \in T\}$ (vegeu [46], [47]).
Sigui $\mathcal{H}$ l'espai de Cameron-Martin associat al drap brownià $\{W_{s,t}, (s,t) \in T\}$. Això vol dir que $\mathcal{H}$ és el conjunt de funcions $h : T \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|h\|_{\mathcal{H}} := \Big(\int_T (\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(s,t))^2 dsdt \Big)^{1/2} < \infty.$$

L'esquelet de X, amb condició inicial x determinista, és la solució de l'equació d'evolució

$$S^h_{s,t} = x + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v)(a_3(S^h_{u,v})\dot{h}_{u,v} + a_4(S^h_{u,v}))dudv, \quad h \in \mathcal{H}, \quad (2.1.6)$$

on $\dot{h}_{u,v}$ indica la derivada $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(u,v)$.
Sigui

$$d^2(x,y) = \inf\{\|h\|^2_{\mathcal{H}} : S^h_z = y\}. \quad (2.1.7)$$

Aleshores el límit de (2.1.5) és

$$C(x,y) = -\frac{1}{2} d^2(x,y).$$

A la Secció 2.3 es combinen les estimacions de grans desviacions i el càlcul de Malliavin per trobar (2.1.5) (inspirant-nos amb les idees d'altres exemples on s'analitzen equacions diferencials estocàstiques en derivades parcials com [29], [30], [35]). En concret usarem dos resultats donats per D. Nualart en el curs de Saint-Flour [42] (vegeu Proposició 2.3.2, 2.3.3) mitjançant els quals majorarem i minorarem

$$\varepsilon^2 \log p_z^\varepsilon(y).$$

En els exemples que hem comentat ([29], [30], [35]) es requereix però, una condició de no degeneració de tipus el.líptic, en canvi a la Secció 2.3 d'aquest capítol s'utilitza aquest mètode només amb les condicions d'hipoel.lipticitat, obtenint-se també l'estimació. Veure aquest fet recau bàsicament en comprovar una condició de regularitat sobre l'esquelet, aquesta consisteix en provar $\langle DS_z^h, DS_z^h\rangle_{\mathcal{H}} > 0$ (vegeu el Lema 2.3.8 de la Secció 2.3).
Finalment, s'estudia la finitud de $d^2(x,\cdot)$, aquest problema es relacionarà amb la caracterització del suport de la llei de X_z, exposat a l'article de C. Rovira i M. Sanz-Solé [47].

L'índex d'aquest capítol és com segueix, la Secció 2.2 conté els resultats sobre l'existència i les propietats de la densitat, i la Secció 2.3 està dedicada al comportament asimptòtic de p_z^ε. Al capítol també hi ha una quarta secció, a mode d'apèndix, amb les propietats de la funció de Green $\gamma_z(\eta)$ més importants, utilitzades en aquesta part de la memòria i al proper capítol.

2.2 Propietats de la densitat

Objectiu

El propòsit d'aquesta secció és demostrar que sota el conjunt d'hipòtesis (H_1), que detallarem més endavant, la llei de X_z per a tot $z \in T \setminus E$, solució de l'equació (2.1.2), és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ i que la densitat, $p_z(y)$, és infinitament diferenciable. A més a més, també es veurà que per a tot $y \in \mathbb{R}$ l'aplicació

$$\begin{array}{rcl} T \setminus E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longrightarrow & p_z(y) \end{array}$$

és Lipschitz.

Preliminars

Com els resultats d'aquesta secció són aconseguits amb l'ús del càlcul de Malliavin, recordarem amb brevetat els trets més importants.

Siguin $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espai canònic associat al drap brownià W i $\mathbb{E}$ un espai de Hilbert separable. Un vector aleatori $F : \Omega \to \mathbb{E}$ direm que és regular si

$$F = \sum_{i=1}^{M} f_i(W_{z_1}, \dots, W_{z_n}) v_i$$

on $f_i \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $z_1, \dots, z_n \in T$, $T = [0,1]^2$, $v_1 \dots, v_M \in \mathbb{E}$, $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ és el conjunt de les funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$, fitades i amb totes les derivades fitades. Sigui $\mathcal{S}$ el conjunt dels vectors aleatoris regulars.
Per $F \in \mathcal{S}$, la derivada de Malliavin és el vector aleatori que pren valors en $L^2(T; \mathbb{E})$ definit per

$$D_\eta F = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(W_{z_1}, \dots, W_{z_n}) \mathbb{1}_{[0,z_i]}(\eta) v_i.$$

Definim la k-èssima derivada de F per iteració $D^k_{\eta_1,\dots,\eta_k} F = (D_{\eta_1}(\dots(D_{\eta_k} F)\dots)$. Per cada $p \geq 1$ i qualsevol $N \in \mathbb{N}$, anomenarem $\mathbb{D}^{N,p}(\mathbb{E})$ la completació de $\mathcal{S}$ respecte la norma

$$\|F\|^p_{N,p} = E\|F\|^p_{\mathbb{E}} + \sum_{k=1}^{N} E\|D^k F\|^p_{L^2(T^k;\mathbb{E})}.$$

Definim $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{E}) = \bigcap_{p\geq 1} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{D}^{N,p}(\mathbb{E})$. Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, escriurem $\mathbb{D}^\infty$ i $\mathbb{D}^{N,p}$ en lloc de $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{E})$ i $\mathbb{D}^{N,p}(\mathbb{E})$, respectivament.

En aquesta secció treballarem amb variables aleatòries $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, i així, notacionalment escriurem

$$\|D^k F\| := \Big(\int_{T^k} (D^k_\eta F)^2 d\eta \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotem per δ l'operador adjunt a D, és un operador no fitat sobre $L^2(\Omega \times T)$ que pren valors en $L^2(\Omega)$, el seu domini són els processos $u \in L^2(\Omega \times T)$, tals que existeix una constant C, per a qui

$$\left| E \int_T u_\eta D_\eta F \, d\eta \right| \leq C \|F\|_2 \quad \text{per} \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

$\delta(u)$ s'anomena la integral de Skorohod i es denota $\int_T u_s dW_s$.
Si $u \in Dom\, \delta$, caracteritzem $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ per la fórmula de dualitat

$$E(F\delta(u)) = E \int_T D_\eta F u_\eta \, d\eta \quad \text{per} \quad \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}.$$

Al llarg de la secció utilitzarem la propietat següent:
Sigui $u \in Dom\, \delta$, si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ tal que $E(F^2 \int_T u_\eta^2 \, d\eta) < \infty$. Aleshores

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u \rangle_{L^2(T)}, \tag{2.2.1}$$

si la part de la dreta de la igualtat pertany a $L^2(\Omega)$. A [41] hi ha un estudi extens sobre la derivada de Malliavin i la integral de Skorohod.

Denotem per Γ_F la matriu de Malliavin de $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, recordem $\Gamma_F = \langle DF, DF \rangle$. Direm que F és un vector aleatori no degenerat si $F \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\det \Gamma_F^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega)$. Sigui F un vector aleatori no degenerat i $G \in \mathbb{D}^\infty$. Per a tot multiíndex $\alpha \in \{1, \cdots, d\}^k$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $k \geq 1$, definim recurrentment $H_\alpha(F, G) \in \mathbb{D}^\infty$ de la manera següent:

$$\begin{aligned} H_{(i)}(F, G) &= \sum_{j=1}^d \delta(G(\Gamma_F^{-1})_{i,j} DF^j), \\ H_\alpha(F, G) &= H_{(\alpha_k)}(F, H_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1})}(F, G)). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Amb aquesta notació podem establir la següent versió de la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin

$$E[\ (\nabla_\alpha^k g)(F)\ G\ ] = E[\ g(F)\ H_\alpha(F, G)\ ], \tag{2.2.3}$$

on g és qualsevol funció regular definida en $\mathbb{R}^d$ i $\nabla_\alpha^k = \frac{\partial^k}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}}$.

Enunciem un teorema que ens donarà, quan es compleixin les condicions, l'existència i regularitat de la densitat

Teorema 2.2.1 (Corol.lari 2.1.2 [41]) *Sigui $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria complint les condicions següents:*

i) $F \in \mathbb{D}^\infty$.

ii) $\left(\int_T |D_\eta F|^2 d\eta\right)^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega)$.

Aleshores la llei de F és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ i la densitat és infinitament diferenciable.

Finalment, recordem un lema que haurem d'utilitzar per provar la segona hipòtesi del teorema anterior i un lema tipus Gronwall.

Lema 2.2.2 [30] *Sigui Q una variable aleatòria no negativa. Si, per cada $p \geq 2$, existeixen constants $\alpha_0(p)$, $C(p)$ tals que*

$$P\{Q \leq \alpha\} \ \leq \ C(p)\ \alpha^p, \qquad \forall \alpha \leq \alpha_0(p).$$

Aleshores

$$E(Q^{-p}) \ \leq \ C(p+1)\ \alpha_0(p)\ (p+1).$$

Lema 2.2.3 [45] *Sigui $h : T \to \mathbb{R}$ una funció integrable no negativa que satisfà*

$$h(z) \leq K + \int_{R_z} \beta(\eta) h(\eta) d\eta, \qquad z \in T,$$

on $K \geq 0$ i $\beta : T \to \mathbb{R}$ és una funció integrable no negativa. Aleshores per a tot $z \in T$,

$$h(z) \leq K \cdot \exp\left\{ \int_{R_z} \beta(\eta) d\eta \right\}$$

Resultats

En aquesta secció suposarem les següents condicions sobre els coeficients:

(H$_1$1) Les funcions $a_i : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ són fitades, derivables i amb derivades fitades.

(H$_1$2) Les funcions $a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 3, 4$ són infinitament diferenciables, amb derivades fitades de tots els ordres.

(H$_1$3) O bé es compleix que $a_3(X_0) \neq 0$ q.s., o bé existeix un natural $n_0 \geq 1$ tal que $a_3^{(n)}(X_0) = 0$ q.s., per qualsevol $0 \leq n \leq n_0 - 1$, i $(a_3^{(n_0)}a_4)(X_0) \neq 0$ q.s., on per $n = 0$, $a_3^{(n)} = a_3$.

El propòsit de la secció com hem dit anteriorment és provar el resultat següent.

Teorema 2.2.4 *Sota les hipòtesis* (H$_1$1), (H$_1$2) *i* (H$_1$3), *la llei de X_z, solució de* (2.1.2), *per a tot $z \in T \setminus E$, és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, i la densitat, p_z, és infinitament diferenciable. Endemés, per a tot $y \in \mathbb{R}$ l'aplicació*

$$\begin{array}{rcl} T \setminus E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longrightarrow & p_z(y) \end{array}$$

és Lipschitz.

Remarca 2.2.5 *Pels coeficients a_i, $i = 3, 4$, depenent també del temps, l'existència d'una densitat $p_z(\cdot)$, $\mathcal{C}^\infty$, ha estat provada a l'article de C. Rovira i M. Sanz-Solé* [46] (Proposició 3.7) *sota hipòtesis de no degeneració del tipus* (H$_1$3), *incluint-hi només derivades de primer ordre. En particular, si no depenen del temps, el conjunt d'hipòtesis seria el següent: O bé $a_3(X_0) \neq 0$ q.s., o bé $a_3(X_0) = 0$ i $(a_3'a_4)(X_0) \neq 0$ q.s.*

Per provar el Teorema 2.2.4 necessitarem una sèrie de resultats previs.

Proposició 2.2.6 (Proposició 3.5 [46]) *Assumint* (H$_1$1) *i* (H$_1$2), *aleshores $X_z \in \mathbb{D}^\infty$.*

Proposició 2.2.7 *Per qualssevol $z = (s, t) \in T, h \in (0, 1 - s], v \in [0, 1]$, sigui*

$$Z_{s,t}(h, v) = X_{s,t} + v(X_{s+h,t} - X_{s,t})$$

Aleshores, si (H$_1$1), (H$_1$2) *i* (H$_1$3) *són satisfetes,*

$$\Big(\int_T |D_\eta Z_z(h, v)|^2 d\eta \Big)^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega).$$

Prova. Demostrarem la següent propietat equivalent: per a tot $p \in [1, \infty)$ existeix ε_0 tal que

$$P\Big\{ \int_T |D_\eta Z_z(h,v)|^2 d\eta < \varepsilon \Big\} \leq \varepsilon^p, \tag{2.2.4}$$

per a tot $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (Lema 2.2.2).
Sigui $\{Y_z(\eta),\ 0 \leq \eta \leq z \leq (1,1)\}$ la solució de

$$Y_z(\eta) = \gamma_z(\eta) + \int_{(\eta,z]} \gamma_z(\alpha) Y_\alpha(\eta)[a_3'(X_\alpha)dW_\alpha + a_4'(X_\alpha)d\alpha].$$

Per unicitat de solució tenim

$$D_\eta X_z = a_3(X_\eta) Y_z(\eta) \mathbb{1}_{[0,z]}(\eta).$$

Definim

$$\begin{aligned} Y_{s,t}^{h,v}(\eta) &= Y_{s,t}(\eta) + v\ (Y_{s+h,t}(\eta) - Y_{s,t}(\eta)), \\ \gamma_{s,t}^{h,v}(\eta) &= \gamma_{s,t}(\eta) + v\ (\gamma_{s+h,t}(\eta) - \gamma_{s,t}(\eta)). \end{aligned}$$

En primer lloc estudiarem el cas $a_3(X_0) \neq 0$. Fixem ε, β, $\delta \in (0,1)$ i definim $C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon) := (0, \varepsilon^\beta) \times (t - \varepsilon^\delta, t)$, aleshores

$$P\Big\{ \int_T |D_\eta Z_z(h,v)|^2 d\eta < \varepsilon \Big\} \leq q_1(\varepsilon, \beta) + q_2(\varepsilon, \beta),$$

amb

$$q_1(\varepsilon,\beta) = P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\beta}(\varepsilon)} \Big(a_3(X_\eta) Y^{h,v}_{s,t}(\eta) - a_3(X_0)\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1, t) \Big)^2 d\eta > \varepsilon \Big\},$$

$$q_2(\varepsilon,\beta) = P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\beta}(\varepsilon)} a_3^2(X_0) \gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t))^2 d\eta \leq 4\varepsilon \Big\},$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2)$.
A [46] (vegeu (3.9) i (3.10)) han provat per $p \in [1, \infty)$

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E(|X_\eta - X_0|^{2p}) \leq C\varepsilon^{\beta p}, \tag{2.2.5}$$

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E(|Y_z(\eta) - \gamma_z(\eta)|^{2p}) \leq C\varepsilon^{\delta p}.$$

De la mateixa manera podem veure,

$$\sup_{\eta\in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E(|Y^{h,v}_{s,t}(\eta)-\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta)|^{2p})\le C\varepsilon^{\delta p},\quad p\in[1,\infty). \tag{2.2.6}$$

Ara, utilitzant la desigualtat triangular, les propietats (2.2.5), (2.2.6), i la propietat Lipschitz de $\gamma_z(\cdot)$ de la Proposició 2.4.2, obtenim fàcilment

$$\sup_{\eta\in C^z_{\beta,\beta}(\varepsilon)} E|a_3(X(\eta)Y^{h,v}_{s,t}(\eta)-a_3(X_0)\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)|^{2q}\le C\varepsilon^{\beta q},\quad q\in[1,\infty).$$

Llavors, per la desigualtat de Txebitxev

$$q_1(\varepsilon,\beta)\le C\varepsilon^{q(3\beta-1)},\quad \forall q\in[1,\infty).$$

Per altra banda, com que $a_3(X_0)\neq 0$, (2.4.3) ens assegura

$$\int_{C^z_{\beta,\beta}(\varepsilon)} a_3^2(X_0)\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)^2 d\eta\ge C\varepsilon^{2\beta}.$$

Elegint $\beta\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, $q_2(\varepsilon,\beta)=0$ i per tant (2.2.4) es compleix. Queda així provat el resultat en el cas $a_3(X_0)\neq 0$.
Suposem ara que existeix $n_0\ge 1$ amb $a_3^{(n)}(X_0)=0$ per $0\le n\le n_0-1$, i $(a_3^{(n_0)}a_4)(X_0)\neq 0$ q.s., on per $n=0$, $a_3^{(n)}=a_3$. Llavors,

$$P\Big\{\int_T |D_\eta Z_z(h,v)|^2 d\eta<\varepsilon\Big\}\le q_1(\varepsilon,\beta,\delta)+q_2(\varepsilon,\beta,\delta),$$

amb

$$\begin{aligned} q_1(\varepsilon,\beta,\delta) &= P\Big\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} a_3(X_\eta)\Big(Y^{h,v}_{s,t}(\eta)-\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)\Big)^2 d\eta>\varepsilon\Big\},\\ q_2(\varepsilon,\beta,\delta) &= P\Big\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} a_3^2(X_\eta)\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)^2 d\eta\le 4\varepsilon\Big\}. \end{aligned}$$

Utilitzant (2.2.6), la desigualtat de Txebitxev i la propietat Lipschitz de $\gamma_z(\cdot)$, s'obté,

$$q_1(\varepsilon,\beta,\delta)\le C\varepsilon^{(2\delta+\beta-1)q},\quad q\in[1,\infty). \tag{2.2.7}$$

Per altra banda, tenim

$$q_2(\varepsilon,\beta,\delta)\le q_{21}(\varepsilon,\beta,\delta)+q_{22}(\varepsilon,\beta,\delta),$$

on,

$$
\begin{aligned}
q_{21}(\varepsilon,\beta,\delta) &\leq P\Big\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \Big(\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)(a_3(X_\eta) \\
&\qquad - \frac{1}{n_0!}a_3^{(n_0)}(X_0)(X_\eta - X_0)^{n_0})\Big)^2 d\eta > 4\varepsilon\Big\}, \\
q_{22}(\varepsilon,\beta,\delta) &= P\Big\{\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \Big(\gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)\frac{1}{n_0!}a_3^{(n_0)}(X_0)(X_\eta - X_0)^{n_0}\Big)^2 d\eta \leq 16\varepsilon\Big\}.
\end{aligned}
$$

En els propers passos necessitarem la següent desigualtat:

$$
\sup_{\substack{0\leq\eta_1\leq\varepsilon^\beta \\ 0\leq\eta_2\leq t}} E(|X_\eta - X_0|^p) \leq C\varepsilon^{\beta p}, \quad p\in[2,\infty). \tag{2.2.8}
$$

Utilitzem la propietat $a_3(X_0)=0$ i la desigualtat de Burkholder per aconseguir

$$
\begin{aligned}
E(\,|X_\eta - X_0|^p\,) &\leq C\,\Big\{E\,\Big|\int_{R_\eta}\gamma^2_\eta(\zeta)\,(a_3(X_\zeta)-a_3(X_0))^2\,d\zeta\,\Big|^{p/2} \\
&+ E\,\Big|\int_{R_\eta}\gamma_\eta(\zeta)\,a_4(X_\zeta)\,d\zeta\,\Big|^p\Big\}.
\end{aligned}
$$

La propietat Lipschitz de a_3, la desigualtat de Hölder i el Lema 2.2.3 donen l'estimació (2.2.8).
Emprant el desenvolupament de Taylor per $a_3(X_\eta)$ i que qualsevol derivada de a_3 és fitada observem que

$$
|a_3(X_\eta) - \frac{1}{n_0!}a_3^{(n_0)}(X_0)(X_\eta - X_0)^{n_0}| \leq \frac{C}{(n_0+1)!}|X_\eta - X_0|^{n_0+1}, \text{ q.s.}
$$

Mitjançant la desigualtat de Txebitxev i (2.2.8) s'obté

$$
\begin{aligned}
q_{21}(\varepsilon,\beta,\delta) &\leq C\,\varepsilon^{(\beta+\delta-1)q} \sup_{\eta\in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} E\left(|X_\eta - X_0|^{2q(n_0+1)}\right) \\
&\leq C\,\varepsilon^{(\beta(2n_0+3)+\delta-1)q}.
\end{aligned} \tag{2.2.9}
$$

Descomposem $q_{22}(\varepsilon,\beta,\eta)$ com segueix,

$$
q_{22}(\varepsilon,\beta,\delta) \leq q_{221}(\varepsilon,\beta,\delta) + q_{222}(\varepsilon,\beta,\delta),
$$

amb

$$q_{221}(\varepsilon,\beta,\delta) \le P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)^2\, \frac{a_3^{(n_0)}(X_0)^2}{(n_0!)^2} \Big((X_\eta - X_0)^{n_0} - \Big(\int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0)\, d\xi \Big)^{n_0} \Big)^2 d\eta \,>\, 16\,\varepsilon \Big\},$$

$$q_{222}(\varepsilon,\beta,\delta) = P\Big\{ \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)^2\, \frac{a_3^{(n_0)}(X_0)^2}{(n_0!)^2} \times \Big(\int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0)\, d\xi \Big)^{2n_0} d\eta \,\le\, 64\,\varepsilon \Big\}.$$

Examinarem $q_{221}(\varepsilon,\beta,\delta)$. Assumim $n_0 \ge 2$. Pel teorema del valor mig

$$\begin{aligned} (X_\eta - X_0)^{n_0} &- \Big(\int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0) d\xi \Big)^{n_0} \\ &= n_0 \Big\{ \lambda (X_\eta - X_0) + (1-\lambda) \int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0) d\xi \Big\}^{n_0-1} \\ &\quad \times \Big(X_\eta - X_0 - \int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0)\, d\xi \Big), \quad \text{q.s.} \end{aligned}$$

per algun $\lambda \in (0,1)$ depenent de ω. Sigui

$$A_1(\eta) = \Big(E\Big(\Big| \lambda (X_\eta - X_0) + (1-\lambda) \int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0) d\xi \Big|^{4q(n_0-1)} \Big) \Big)^{1/2},$$

$$A_2(\eta) = \Big(E\Big(\Big| X_\eta - X_0 - \int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0) d\xi \Big|^{4q} \Big) \Big)^{1/2}.$$

Aleshores, les desigualtats de Txebitxev i de Schwarz impliquen

$$q_{221}(\varepsilon,\beta,\delta) \le C\,\varepsilon^{q(\beta+\delta-1)} \sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \Big(A_1(\eta)\, A_2(\eta) \Big). \tag{2.2.10}$$

Nosaltres provarem

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} A_1(\eta) \;\le\; C\,\varepsilon^{2(n_0-1)\beta q}, \tag{2.2.11}$$

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} A_2(\eta) \;\le\; C\,\varepsilon^{3\beta q}. \tag{2.2.12}$$

Òbviament, per $\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)$

$$E\Big(\Big|\int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\, a_4(X_0)\, d\xi\Big|^p\Big) \le C\,\varepsilon^{\beta p}, \quad p \in [1,\infty).$$

Aquesta desigualtat, juntament amb (2.2.8), implica (2.2.11). Per provar (2.2.12) notem que

$$A_2^2(\eta) \le C\Big(a_{21}(\eta) + a_{22}(\eta) + a_{23}(\eta)\Big),$$

on

$$\begin{aligned}
a_{21}(\eta) &= E\Big(\Big|\int_{R_\eta} \gamma_\eta(\xi)\, a_3(X_\xi)\, dW_\xi\Big|^{4q}\Big),\\
a_{22}(\eta) &= E\Big(\Big|\int_{R_\eta} \gamma_\eta(\xi)\Big(a_4(X_\xi) - a_4(X_0)\Big)\, d\xi\Big|^{4q}\Big),\\
a_{23}(\eta) &= E\Big(\Big|\int_{R_\eta} \Big(\gamma_\eta(\xi) - \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)\Big)\, a_4(X_0)\, d\xi\Big|^{4q}\Big).
\end{aligned}$$

Fixat $\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)$. Utilitzant $a_3(X_0) = 0$, la propietat Lipschitz de a_3 i a_4 i (2.2.8), obtenim

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \Big(a_{21}(\eta) + a_{22}(\eta)\Big) \le C\,\varepsilon^{6\beta q}.$$

A més, la propietat Lipschitz de $\gamma_z(\eta)$ dóna

$$\sup_{\eta \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} a_{23}(\eta) \le C\,\varepsilon^{8\beta q}.$$

Conseqüentment (2.2.12) és provat.
Les desigualtats (2.2.10), (2.2.11) i (2.2.12) impliquen

$$q_{221}(\varepsilon,\beta,\delta) \le C\,\varepsilon^{((2n_0+2)\beta+\delta-1)q}. \tag{2.2.13}$$

Per $n_0 = 1$, també tenim (2.2.13). És una conseqüència directa de (2.2.12), perquè no és necessari utilitzar el teorema del valor mig.
L'estudi del terme $q_{222}(\varepsilon,\beta,\delta)$ està basat en la propietat de positivitat de la funció γ donada a l'apèndix (vegeu (2.4.3)). Així, tenint en compte $(a_3^{(n_0)}a_4)\,(X_0) \neq 0$,

(2.4.3) ens permet d'assegurar

$$\left(\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma^{h,v}_{s,t}(\eta_1,t)^2 \Big(\int_{R_\eta} \gamma_{0,\eta_2}(0,\xi_2)d\xi\Big)^{2n_0} d\eta\right)\left(\frac{a_3^{(n_0)}(X_0)\, a_4(X_0)^{n_0}}{n_0!}\right)^2$$
$$\geq C\int_0^{\varepsilon^\beta}\int_{t-\varepsilon^\delta}^{t} (\eta_1\,\eta_2)^{2n_0}\, d\eta_1\, d\eta_2$$
$$\geq\; C\,(t-\varepsilon^\delta)^{2n_0}\,\varepsilon^\delta\,\varepsilon^{(2n_0+1)\beta}$$
$$\geq\; C\,\varepsilon^{\delta+(2n_0+1)\beta}.$$

Si elegim $\beta,\delta>0$ satisfent

$$1-\delta-(2\,n_0+1)\beta>0, \tag{2.2.14}$$

llavors $q_{222}(\varepsilon,\beta,\delta)=0$.
Agafem $\delta=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{4n_0+3}$. És fàcil comprovar que compleixen (2.2.14) i a més a més, les restriccions següents: $2\delta+\beta-1>0$ i $\beta(2\,n_0+2)+\delta-1>0$.
Amb tot això, l'estimació (2.2.4) és provada des de (2.2.7), (2.2.9) i (2.2.13) en el cas més general. □

Donem un lema (demostrat per P.L. Morien [38]) que necessitarem per a la demostració del Teorema 2.2.4. És un resultat conseqüència de la dualitat entre la derivada de Malliavin i la integral de Skorohod del qual donarem els arguments més importants de la prova.

Lema 2.2.8 *Siguin ξ una variable aleatòria no degenerada i $Z\in\mathbb{D}^\infty$. Sigui $H_0(Z,\xi)$ $=Z$ i $H_{n+1}(Z,\xi)=\delta(H_n(Z,\xi)\|D\xi\|^{-2}D\xi), n\geq 0$. (com a (2.2.2)). Aleshores, per a tot enter $n,q\geq 1$ i $p\in(1,\infty)$,*

$$\|H_n(Z,\xi)\|_{q,p}\leq C\,(\|Z\|_{q+n,4^np}),$$

on C és una constant que depèn de les normes següents:

$$\|\xi\|_{q+2,4^np} \qquad \text{i} \qquad E[\,(\,\|D\xi\|^2)^{-1}]^{k(n)},\ \textit{amb}\ k(n)\in\mathbb{N}.$$

Prova. Provarem el cas $n=1$, el cas general es fa per recurrència. Tenim

$$\|H_1(Z,\xi)\|_{q,p}=\Big\|\delta(Z\|D\xi\|^{-2}D\xi)\Big\|_{q,p}.$$

La part dreta de la igualtat està formada per termes amb la forma següent:

$$A_M := E\left(\left\|D^M\delta(Z\|D\xi\|^{-2}D\xi)\right\|^p\right), \qquad M \leq q.$$

Utilitzant (2.2.1) obtenim

$$A_M \leq A_{M,1} + A_{M,2},$$

amb

$$A_{M,1} = E\left\|D^M(Z\|D\xi\|^{-2}\delta(D\xi))\right\|^p,$$
$$A_{M,2} = E\left\|D^M(\langle D(Z\|D\xi\|^{-2}), D\xi\rangle)\right\|^p.$$

Estudiem en primer lloc $A_{M,1}$. Per les desigultats triangular i de Schwarz tenim

$$\begin{aligned}
A_{M,1} &\leq C\sum_{k=0}^{M} E\left(\left\|D^{M-k}(Z\|D\xi\|^{-2})\otimes D^k(\delta D\xi)\right\|^p\right) \\
&\leq C\sum_{k=0}^{M} E\left[\left\|D^{M-k}(Z\|D\xi\|^{-2})\right\|^p \cdot \|D^k(\delta D\xi)\|^p\right] \\
&\leq C\sum_{k=0}^{M} \left(E\left\|D^{M-k}(Z\|D\xi\|^{-2})\right\|^{2p}\right)^{1/2} \cdot \left(E\|D^k(\delta D\xi)\|^{2p}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Reiterant aquest mateix raonament i aplicant la hipòtesi $\|D\xi\|^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ i $q \leq M$, resulta

$$\begin{aligned}
E\left\|D^{M-k}(Z\|D\xi\|^{-2})\right\|^{2p} &\leq C\sum_{i=0}^{M-k} E\left[\|D^{M-k-i}Z\|^{2p} \cdot \left\|D^i(\|D\xi\|^{-2})\right\|^{2p}\right] \\
&\leq C\sum_{i=0}^{M-k} \left(E\|D^{M-k-i}Z\|^{4p}\right)^{1/2} \\
&\leq C\|Z\|^{2p}_{M-k,4p} \\
&\leq C\|Z\|^{2p}_{q,4p}.
\end{aligned}$$

Per altra banda, per les desigualtats de Meyer (vegeu [42] Secció 1.5)

$$E\,\|D^k(\delta D\xi)\|^{2p} = E\,\|D^k C^2\xi\|^{2p} \leq C\|\xi\|^{2p}_{q+2,2p}.$$

Queda així demostrat el resultat per $A_{M,1}$. Analitzem ara $A_{M,2}$. La desigualtat de Schwarz i $\|D\xi\|^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$ impliquen

$$\begin{aligned}
E\Big\|D^M\Big(\langle D(Z\|D\xi\|^{-2}), D\xi\rangle\Big)\Big\|^p &\leq C\, E\Big[\sum_{k=0}^{M}\Big\|D^{k+1}(Z\|D\xi\|^{-2})\Big\|^p\|D^{M-k+1}\xi\|^p\Big] \\
&\leq C\sum_{k=0}^{M}\Big(E\Big\|D^{k+1}(Z\|D\xi\|^{-2})\Big\|^{2p}\Big)^{1/2} \\
&\leq C\sum_{k=0}^{M}\sum_{i=0}^{k+1}\Big(E\|D^iZ\|^{4p}\Big)^{1/4} \\
&\leq C\,\|Z\|^p_{q+1,4p}.
\end{aligned}$$

Finalitzant així la demostració del lema per $n = 1$. □

Prova del Teorema 2.2.4. Fixat $z = (s,t) \in T \setminus E$; aplicant la Proposició 2.2.7 quan $v = 0$, s'obté $(\int_T |D_\eta X_z|^2 d\eta)^{-1} \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\Omega)$. Aquesta propietat i la Proposició 2.2.6 impliquen que es compleixin les condicions del Teorema 2.2.1, i això ens dóna l'existència d'una densitat regular per a la llei de X_z.
Provem ara la propietat Lipschitz. Sigui f una funció real regular. Denotem per F la seva primitiva. Veurem, per a tot $h \in (0, 1-s)$,

$$\Big|E\Big(f(X_{s+h,t}) - f(X_{s,t})\Big)\Big| \leq C\,\|F\|_\infty h. \tag{2.2.15}$$

Primerament, considerem el desenvolupament de Taylor fins a la derivada de segon ordre,

$$E\Big(f(X_{s+h,t}) - f(X_{s,t})\Big) = A_1 + A_2, \tag{2.2.16}$$

amb

$$\begin{aligned}
A_1 &= E\Big(f'(X_{s,t})\,(X_{s+h,t} - X_{s,t})\Big), \\
A_2 &= E\Big((X_{s+h,t} - X_{s,t})^2\int_0^1 (1-v)\;f''(Z_{s,t}(h,v))\,dv\Big).
\end{aligned}$$

Descomposem A_1 de la manera següent:

$$A_1 = \sum_{i=1}^{3} A_{1i},$$

on

$$\begin{aligned}
A_{11} &= E\Big(f'(X_{s,t}) \int_{R_{s,t}} (\gamma_{s+h,t}(\eta) - \gamma_{s,t}(\eta))\, a_3(X_\eta)\, dW_\eta\Big), \\
A_{12} &= E\Big(f'(X_{s,t})\Big(\int_{R_{s,t}} (\gamma_{s+h,t}(\eta) - \gamma_{s,t}(\eta))\, a_4(X_\eta)\, d\eta \\
&\quad + \int_s^{s+h}\int_0^t \gamma_{s+h,t}(\eta) a_4(X_\eta)\, d\eta\Big)\Big), \\
A_{13} &= E\Big(f'(X_{s,t}) \int_s^{s+h}\int_0^t \gamma_{s+h,t}(\eta)\, a_3(X_\eta)\, dW_\eta\Big).
\end{aligned}$$

Sigui

$$K_{s,t}^{(1)}(h) = \int_{R_{s,t}} \Big(\gamma_{s+h,t}(\eta) - \gamma_{s,t}(\eta)\Big)\, a_3(X_\eta)\, dW_\eta.$$

Aplicant (2.2.3) obtenim

$$A_{11} = E\Big(F(X_{s,t})\; H_2(K_{s,t}^{(1)}(h),\; X_{s,t})\Big) \le \|F\|_\infty\; E\Big(\,|H_2(K_{s,t}^{(1)}(h), X_{s,t})|\,\Big).$$

Les variables aleatòries $Z := K_{s,t}^{(1)}(h)$ i $\xi := X_{s,t}$ satisfan les condicions del Lema 2.2.8, aquest fet és una conseqüència de la Proposició 2.2.7. Per tant,

$$|A_{11}| \le C\; \|F\|_\infty\; \|K_{s,t}^{(1)}(h)\|_{2,16}.$$

A més, la propietat Lipschitz de $\gamma_{\cdot}(\eta)$ implica

$$\|K_{s,t}^{(1)}(h)\|_{n,p} \le C\, h.$$

Així,

$$|A_{11}| \le C\; \|F\|_\infty\, h.$$

Sigui

$$K_{s,t}^{(2)}(h) = \int_{R_{s,t}} \Big(\gamma_{s+h,t}(\eta) - \gamma_{s,t}(\eta)\Big)\, a_4(X_\eta)\, d\eta + \int_s^{s+h}\int_0^t \gamma_{s+h,t}(\eta)\, a_4(X_\eta)\, d\eta.$$

Com abans,

$$A_{12} = E\Big(F(X_{s,t})\, H_2(K_{s,t}^{(2)}(h), X_{s,t})\Big),$$

i el Lema 2.2.8 aplicat a $Z := K_{s,t}^{(2)}(h)$ i $\xi := X_{s,t}$ ens dóna

$$|A_{12}| \le C\|F\|_\infty\; \|K_{s,t}^{(2)}(h)\|_{2,16} \le C\; \|F\|_\infty\; h.$$

Per finalitzar l'estudi de A_1, $f'(X_{s,t})$ i $\int_s^{s+h}\int_0^t \gamma_{s+h,t}(\eta)\ a_3(X_\eta)\,dW_\eta$ són variables aleatòries independents. Per tant $A_{13}=0$. Això, junt amb les fitacions de A_{11} i A_{12} ens demostra

$$|A_1| \leq C\ \|F\|_\infty\, h. \tag{2.2.17}$$

Estudiem ara A_2. Emprant (2.2.3) obtenim

$$E\Big((X_{s+h,t}-X_{s,t})^2\ f''((Z_{s,t}(h,v))\Big) = E\Big(F(\xi)\ H_3(Z,\xi)\Big)$$

amb

$$Z=(X_{s+h,t}-X_{s,t})^2, \quad \xi = Z_{s,t}(h,v).$$

Com les condicions del Lema 2.2.8 són satisfetes,

$$|A_2| \leq C\ \|F\|_\infty\ \|(X_{s+h,t}-X_{s,t})^2\|_{3,64}.$$

A més,

$$\|(X_{s+h,t}-X_{s,t})^2\|_{n,p} \leq C\,h. \tag{2.2.18}$$

Per $n=0$ vegeu, per exemple, la Proposició 2.5 a [47]. Per $n\geq 1$, (2.2.18) pot ésser fàcilment provat tenint en compte que $X_z\in\mathbb{D}^\infty$, per a tot $z\in T$, i que la diferència està elevada al quadrat.
D'aquí,

$$|A_2| \leq C\ \|F\|_\infty\, h. \tag{2.2.19}$$

Des de (2.2.16), (2.2.17) i (2.2.19), l'estimació (2.2.15) es compleix. Anàlogament, per a tot $h\in(0,1-t)$,

$$|E(f(X_{s,t+h})-f(X_{s,t}))| \leq C\ \|F\|_\infty h. \tag{2.2.20}$$

Fixem $y\in\mathbb{R}$ i considerem la funció delta de Dirac $\delta_{\{y\}}$. Sigui $\{f_n,\ n\geq 1\}$ una successió de funcions reals regulars que convergeixen a $\delta_{\{y\}}$. I passant al límit les estimacions (2.2.15), i (2.2.20) per f_n, quan $n\to\infty$, obtenim la propietat Lipschitz per l'aplicació $z\longrightarrow p_z(y)$. Això finalitza la demostració del Teorema 2.2.4. $\square$

2.3 Estimacions de Varadhan

Objectiu

El propòsit d'aquest capítol és provar

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log p_z^\varepsilon(y) = -\frac{1}{2} d^2(x, y)$$

sota el conjunt d'hipòtesis ($\mathrm{H}_1 1$), ($\mathrm{H}_1 2$) i ($\mathrm{H}_1 3$), essent p_z^ε la densitat de X_z^ε, solució de (2.1.4), però amb condició inicial determinista x, i on $d^2(x, y)$ és donat a (2.1.7). Discutirem també la finitud de $d^2(x, y)$, relacionant aquest fet amb la positivitat de la densitat.

Preliminars

Sigui $(\mathbb{E}, \Sigma)$ un espai mètric separable i complet amb la σ-àlgebra de Borel corresponent. Sigui $(p_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ una família de mesures de probabilitat en $(\mathbb{E}, \Sigma)$ i $I : \mathbb{E} \longrightarrow [0, \infty)$ una funció semi-contínua inferiorment anomenada funcional d'acció, tal que els conjunts $\{I \leq a\}$ són compactes per qualsevol $a \in [0, \infty)$.

Definició 2.3.1 *Direm que $(p_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ satisfà un principi de grans desviacions amb funcional d'acció I si es compleix*

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \log p_\varepsilon\{O\} &\geq -\Lambda(O), && \textit{per cada obert } O, \\ \varepsilon^2 \log p_\varepsilon\{F\} &\leq -\Lambda(F), && \textit{per cada tancat } F, \end{aligned}$$

on $\Lambda(A) = \inf_{x \in A} I(x)$, donat un subconjunt $A \subset \mathbb{E}$.

La definició també la podem utilitzar quan la família de probabilitats és una successió.

Per aconseguir el propòsit d'aquesta secció demostrarem una minoració i una majoració de la densitat. Els resultats següents van ser presentats per D. Nualart [42] per a funcionals de Wiener generals, utilitzant la formulació de R. Léandre i F. Russo ([29],[30]).

Proposició 2.3.2 (Proposició 4.4.2 [42]) *Sigui $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ una família de vectors aleatoris no degenerats satisfent*

(a) $\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|F^\varepsilon\|_{k,p} < \infty$, *per cada enter $k \geq 1$ i qualsevol $p \in (1,\infty)$.*

(b) *Per qualsevol $p \in [1,\infty)$, existeix $N(p) \in [1,\infty)$ tal que $\|\Gamma_{F^\varepsilon}^{-1}\|_p \leq \varepsilon^{-N(p)}$.*

(c) $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ *segueix un principi de grans desviacions sobre $\mathbb{R}^m$ amb funcional d'acció $I(y),\ y \in \mathbb{R}^m$.*

Aleshores, si p^ε denota la densitat de F^ε,

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon^2\ \log\ p^\varepsilon(y) \leq -I(y).$$

La minoració és una lleugera modificació a la Proposició 4.4.1 de D. Nualart [42].

Proposició 2.3.3 *Considerem una família $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1)\}$ de vectors aleatoris no degenerats, i $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H},\mathbb{R}^m)$ tals que*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{F^\varepsilon(\omega+\frac{h}{\varepsilon}) - \Phi(h)}{\varepsilon} = Z(h) \tag{2.3.1}$$

en la topologia de $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$, per cada $h \in \mathcal{H}$, on $Z(h)$ és un vector aleatori m-dimensional amb distribució absolutament contínua.
Definim, per a tot $y \in \mathbb{R}^m$,

$$d_R^2(y) = \inf\left\{ \|h\|_{\mathcal{H}}^2 : \Phi(h) = y,\ \det\Big(\langle D\,\Phi(h),\ D\,\Phi(h)\rangle_{\mathcal{H}}\Big) > 0\right\}.$$

Aleshores, si p^ε denota la densitat de F^ε,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon^2\ \log\ p_\varepsilon(y) \geq -\frac{1}{2}\ d_R^2(y). \tag{2.3.2}$$

Recordem que $D\Phi(h)$ vol dir derivada en el sentit de Fréchet.
Per finalitzar aquests preliminars, definim que és el suport.

Definició 2.3.4 *Donada una variable aleatòria* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{B}$ *que pren valors en un espai de Banach separable* $(\mathbb{B}, \|.\|)$, *anomenarem suport topològic de la llei de probabilitat de* F *al més petit tancat* A *de* $\mathbb{B}$ *complint* $P \circ F^{-1}(A) = 1$.

Resultats

Considerem el procés $\{X_z^\varepsilon,\ z \in T\}$, $\varepsilon > 0$, que s'obté des de (2.1.2) perturbant el soroll i amb condició inicial determinista x. Això vol dir que $\{X_z^\varepsilon,\ z \in T\}$ és la solució de l'equació

$$X_z^\varepsilon = x + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \left(\varepsilon\, a_3(X_\eta^\varepsilon)\, dW_\eta + a_4(X_\eta^\varepsilon)\, d\eta\right), \quad \varepsilon > 0. \tag{2.3.3}$$

Assumim que es compleixen les hipòtesis $(\mathrm{H}_1 1)$, $(\mathrm{H}_1 2)$ i $(\mathrm{H}_1 3)$ de la Secció 2.2, i com a conseqüència d'aquest fet, per a tot $z \in T \setminus E$, la llei de X_z^ε té una densitat, p_z^ε, per cada $\varepsilon > 0$.
L'objectiu d'aquesta secció és provar el següent resultat.

Teorema 2.3.5 *Sota* $(\mathrm{H}_1 1)$, $(\mathrm{H}_1 2)$ *i* $(\mathrm{H}_1 3)$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \ \log\ p_z^\varepsilon(y) = -\frac{1}{2}\, d^2(x, y),$$

on $d^2(x, y)$ *és donat per* (2.1.7).

En els pròxims lemes donem algunes eines utilitzades en la demostració del Teorema 2.3.5.

Lema 2.3.6 *Assumim* $(\mathrm{H}_1 1)$, $(\mathrm{H}_1 2)$ *i* $(\mathrm{H}_1 3)$. *Per qualssevol* $p \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1]$,

$$\|\, (\Gamma_z^\varepsilon)^{-1} \|_p \leq C\, \varepsilon^{-2}, \tag{2.3.4}$$

on $\Gamma_z^\varepsilon = \int_T\ |D_r\ X_z^\varepsilon|^2\, d\, r$.

Prova. Sigui $\{Y_z^\varepsilon\,(r),\ 0 \leq r \leq z\}$ solució de

$$Y_z^\varepsilon\,(r) = \gamma_z(r) + \int_{(r,z]} \gamma_z(\eta)\ Y_\eta^\varepsilon\,(r)\ \left[\varepsilon\, a_3'\,(X_\eta^\varepsilon)\, d\, W_\eta + a_4'\,(X_\eta^\varepsilon)\, d\,\eta\right].$$

Per unicitat de solució, la derivada de Malliavin de X_z^ε satisfà

$$D_r\, X_z^\varepsilon = \mathbb{1}_{\{r\leq z\}}\, \varepsilon\, a_3(X_r^\varepsilon)\, Y_z^\varepsilon\,(r).$$

Conseqüentment, $\Gamma_z^\varepsilon = \varepsilon^2\, Q_z^\varepsilon$, amb

$$Q_z^\varepsilon = \int_{R_z} a_3\,(X_r^\varepsilon)^2\, Y_z^\varepsilon\,(r)^2\, d\,r.$$

Els mateixos arguments de la Proposició 2.2.7 proven

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} E\Big(\,|\,(Q_z^\varepsilon)^{-1}|^p\Big) \leq C_p, \quad p\in[1,\infty).$$

Queda així demostrat (2.3.4). □

Provem ara la diferenciabilitat de l'esquelet.

Proposició 2.3.7 *Sota les hipòtesis* $(\mathrm{H}_1 1)$ *i* $(\mathrm{H}_1 2)$*, l'aplicació* $h \in \mathcal{H} \longrightarrow S_z^h$, $z\in T$, *definida en* (2.1.6)*, és infinitament diferenciable en el sentit de Fréchet. Endemés, la derivada de Fréchet,* $D\, S_z^h$*, ve donada per*

$$D\, S_z^h\,(k) = \int_{R_z} (D_r\, S_z^h)\; \dot{k}_r\, dr, \quad k\in\mathcal{H}.$$

Prova. Es demostra per inducció. Fixem $h\in\mathcal{H}$. La desigualtat de Hölder, la fitació de la funció de Green i el Lema 2.2.3 tipus Gronwall proven

$$\sup_{z\in T} \quad |S_z^h| \leq C, \tag{2.3.5}$$

$$\sup_{z\in T} \quad |S_z^{h+k} - S_z^h| \leq C\|k\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.3.6}$$

per a tot $k\in\mathcal{H}$.
Veiem que S és diferenciable. Sigui $h\in\mathcal{H}$ i $z\in T$, formalment podríem escriure la derivada per $k\in\mathcal{H}$ com

$$D\, S_z^h\,(k) = \int_{R_z} (D_r\, S_z^h)\; \dot{k}_r\, dr,$$

on $D_r S^h_z$ és g.p.t. $r \in T$ l'única solució de l'equació

$$D_r S^h_z = \mathbb{1}_{R_z}(r)\Big\{\gamma_z(r) a_3(S^h_r) + \int_{(r,z]} \gamma_z(\eta) D_r S^h_\eta \{a_3'(S^h_\eta)\dot{h}_\eta + a_4'(S^h_\eta)\} d\eta\Big\}. \quad (2.3.7)$$

Per altra banda tenim

$$\begin{aligned} S^{h+k}_z - S^h_z &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big(a_3(S^{h+k}_\eta) - a_3(S^h_\eta)\Big)(\dot{h}_\eta + \dot{k}_\eta) d\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) a_3(S^h_\eta)\dot{k}_\eta d\eta \\ &+ \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big(a_4(S^{h+k}_\eta) - a_4(S^h_\eta)\Big) d\eta. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Des de (2.3.7), el teorema de Fubini implica

$$DS^h_z(k) = \int_{R_z} \gamma_z(\eta) a_3(S^h_\eta)\dot{k}_\eta d\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta) DS^h_\eta(k)\{a_3'(S^h_\eta)\dot{h}_\eta + a_4'(S^h_\eta)\} d\eta. \quad (2.3.9)$$

Siguin $M(z) = DS^h_z(k)$ i $N(z) = S^{h+k}_z - S^h_z$. Restant (2.3.8) i (2.3.9) obtenim

$$\begin{aligned} M(z) - N(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big\{a_3'(S^h_\eta)\dot{h}_\eta + a_4'(S^h_\eta)\Big\}\Big(M(\eta) - N(\eta)\Big) d\eta \\ &+ A(z) + B(z) + C(z), \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} A(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big\{a_3'(S^h_\eta) N(\eta) - a_3(S^{h+k}_\eta) + a_3(S^h_\eta)\Big\}\dot{h}_\eta d\eta, \\ B(z) &= -\int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big\{a_3(S^{h+k}_\eta) - a_3(S^h_\eta)\Big\}\dot{k}_\eta d\eta, \\ C(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\Big\{a_4'(S^h_\eta) N(\eta) - a_4(S^{h+k}_\eta) + a_4(S^h_\eta)\Big\} d\eta. \end{aligned}$$

Mitjançant la desigualtat de Hölder, la fitació de la funció de Green, les hipòtesis ($\mathrm{H}_1 1$) i ($\mathrm{H}_1 2$), i el Lema 2.2.3 s'obté fàcilment

$$|M(z) - N(z)|^2 \le C(|A(z)|^2 + |B(z)|^2 + |C(z)|^2).$$

La desigualtat de Hölder, la fitació de la funció de Green, la propietat Lipschitz de a_3 i a_4, i (2.3.6) impliquen

$$\begin{aligned} |A(z)|^2 &\le C \int_{R_z} |a_3'(S^h_\eta) N(\eta) - a_3(S^{h+k}_\eta) + a_3(S^h_\eta)|^2 d\eta \le o(\|k\|^2_{\mathcal{H}}), \\ |B(z)|^2 &\le C\|k\|^2_{\mathcal{H}} \int_{R_z} |a_3(S^{h+k}_\eta) - a_3(S^h_\eta)|^2 d\eta \le C\|k\|^4_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Fitem $C(z)$ com hem fet per $A(z)$. Combinant aquestes tres fitacions provem que S és diferenciable en el sentit de Fréchet i que la derivada és

$$D\,S^h_z\,(k) = \int_{R_z} (D_r\,S^h_z)\;\dot{k}_r\,dr, \qquad k \in \mathcal{H},$$

on $D_r S^h_\eta$ és la solució de (2.3.7). El cas general es prova recurrentment usant els mateixos arguments que per la diferenciabilitat. $\square$

Considerem la equació

$$J_z(r) = \gamma_z(r) + \int_{(r,z]} \gamma_z(\eta)\;J_\eta(r)\;\Big[a_3'\,(S^h_\eta)\;\dot{h}_\eta + a_4'\,(S^h_\eta)\Big]d\eta, \qquad 0 \le r \le z. \qquad (2.3.10)$$

Igual que per la derivada de Malliavin, $D_r\,X^\varepsilon_z$, és fàcil comprovar

$$D_r\,S^h_z = \mathbb{1}_{\{r\le z\}}\;a_3\,(S^h_r)\;J_z(r).$$

Sigui

$$\Gamma^h_z = \int_{R_z} |D_r\,S^h_z|^2\,dr,$$

on el significat de Γ^h_z és anàleg al de la matriu de Malliavin però en el cas determinista.

Lema 2.3.8 *Assumim* (H$_1$1), (H$_1$2) *i* (H$_1$3)*. Aleshores, per a tot $h \in \mathcal{H}$, $\Gamma^h_z > 0$.*

Prova. Suposem primer que $a_3(x) \neq 0$. Per a tot $\varepsilon > 0$ definim, com a la Secció 2.2, $C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon) = (0, \varepsilon^\beta) \times (t - \varepsilon^\delta, t)$. Siguin

$$B_1(\varepsilon) = \int_{C^z_{1,1}(\varepsilon)} a_3^2(x)\;\gamma^2_{s,t}(0,t)\,dr,$$
$$B_2(\varepsilon) = \int_{C^z_{1,1}(\varepsilon)} \Big(a_3(S^h_r)\;J_z(r) - a_3(x)\;\gamma_{s,t}\,(0,t)\Big)^2\,dr.$$

Òbviament,

$$\Gamma^h_z \ge \frac{1}{2}\;B_1(\varepsilon) - B_2(\varepsilon). \qquad (2.3.11)$$

Des de $a_3(x) \neq 0$, (2.4.3) ens assegura

$$B_1(\varepsilon) \ge C\,\varepsilon^2. \qquad (2.3.12)$$

Tot seguit provem

$$B_2(\varepsilon) \le C\,\varepsilon^3. \tag{2.3.13}$$

A partir de (2.3.10), utilitzant la desigualtat de Schwarz i el Lema 2.2.3 , podem comprovar

$$\sup_{z\in T}\ \sup_{r\le z}\ |J_z(r)\,| \le C \tag{2.3.14}$$

per alguna constant C finita.
Conseqüentment, per $r \in C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)$

$$|\,J_z(r) - \gamma_z(r)\,| \le C \int_{(r,z]} |\,J_\eta(r)\,|\,(\dot{h}_\eta + 1)\,d\eta \le C\,\varepsilon^{\delta/2}. \tag{2.3.15}$$

A més,

$$|S^h_r - x| \le C\,(r_1 r_2)^{1/2}, \qquad r = (r_1, r_2), \tag{2.3.16}$$

per alguna constant depenent tan sols de la constant de Lipschitz i $\|h\|_{\mathcal{H}}$. Les hipòtesis de ($\mathrm{H}_1 2$), les propietats de γ i (2.3.14) donen

$$\Big|\,a_3(S^h_r)\ J_z(r) - a_3(x)\ \gamma_{s,t}(0,t)\,\Big| \le C\,\Big\{|J_z(r) - \gamma_z(r)\,| + |r_1| + |t - r_2| + |S^h_r - x|\,\Big\}.$$

Aleshores, (2.3.13) segueix des de (2.3.15) i (2.3.16). Per (2.3.12) i (2.3.13) existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que per qualsevol $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, la part dreta de (2.3.11) és estrictament positiva, i així, $\Gamma^h_z > 0$.
Suposem ara $a_3(x) = 0$. Fixem $\beta, \delta, \varepsilon > 0$ que determinarem més endavant. Siguin

$$A_1(\varepsilon,\beta,\delta) = \frac{1}{2}\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma^2_z(r)\ a^2_3(S^h_r)\ dr,$$
$$A_2(\varepsilon,\beta,\delta) = \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \Big(J_z(r) - \gamma_z(r)\Big)^2\, a^2_3(S^h_r)\,dr.$$

Fàcilment,

$$\Gamma^h_z \ge \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} |\,D_r\ S^h_z|^2\ dr \ge A_1(\varepsilon,\beta,\delta) - A_2(\varepsilon,\beta,\delta). \tag{2.3.17}$$

Per (2.3.15) i (2.3.5)

$$A_2(\varepsilon,\beta,\delta) \le C\ \varepsilon^{\beta+2\delta}. \tag{2.3.18}$$

Considerem el desenvolupament de Taylor de a_3 al voltant de x, que és la condició inicial de l'equació evolució que defineix S^h_z,

$$a_3\,(S^h_r) = \frac{1}{n_0\,!}\ a^{(n_0)}_3(x)\ (S^h_r - x)^{n_0} + \frac{1}{(n_0+1)\,!}\ a^{(n_0+1)}_3\ (\bar{x})\ (S^h_r - x)^{n_0+1}, \tag{2.3.19}$$

on $\bar{x}$ és algun punt entre S_r^h i x.
Prenem la descomposició

$$S_r^h - x = \sum_{j=1}^{4} S_r^j$$

amb

$$\begin{aligned}
S_r^1 &= \int_{R_r} \gamma_r(\xi)\; a_3(S_\xi^h)\; \dot{h}_\xi \, d\xi,\\
S_r^2 &= \int_{R_r} \gamma_r(\xi)\; \Big(a_4(S_\xi^h) - a_4(x)\Big) d\xi,\\
S_r^3 &= \int_{R_r} \Big(\gamma_r(\xi) - \gamma_{0,r_2}(0,\xi_2)\Big)\, a_4(x)\, d\xi,\\
S_r^4 &= \int_{R_r} \gamma_{0,r_2}(0,\xi_2)\; a_4(x)\, d\xi.
\end{aligned}$$

El desenvolupament (2.3.19) i la desigualtat triangular impliquen

$$2\,A_1(\varepsilon,\beta,\delta) \geq A_{11}(\varepsilon,\beta,\delta) - A_{12}(\varepsilon,\beta,\delta), \tag{2.3.20}$$

on

$$\begin{aligned}
A_{11}(\varepsilon,\beta,\delta) &= \frac{1}{2^{2n_0}} \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r)\, \Big(\frac{a_3^{(n_0)}(x)}{n_0\,!}\Big)^2 (S_r^4)^{2n_0}\, dr,\\
A_{12}(\varepsilon,\beta,\delta) &= \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r)\, \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{a_3^{(n_0)}(x)}{n_0\,!}\Big)^2 \Big(\sum_{j=1}^{3} S_r^j\Big)^{2n_0} + \Big(\frac{a_3^{(n_0+1)}(\bar{x})}{(n_0+1)\,!}\Big)^2\\
&\quad \times \Big(S_r^h - x\Big)^{2(n_0+1)}\Big) dr.
\end{aligned}$$

A més a més,

$$A_{11}(\varepsilon,\beta,\delta) \geq A_{111}(\varepsilon,\beta,\delta) - A_{112}(\varepsilon,\beta,\delta) \tag{2.3.21}$$

amb

$$\begin{aligned}
A_{111}(\varepsilon,\beta,\delta) &= \frac{1}{2^{2n_0+1}} \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r_1,t)\Big(\frac{a_3^{(n_0)}(x)}{n_0\,!}\Big)^2 \Big(S_r^4\Big)^{2n_0} dr,\\
A_{112}(\varepsilon,\beta,\delta) &= \frac{1}{2^{2n_0}} \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \Big(\gamma_z(r) - \gamma_z(r_1,t)\Big)^2 \Big(\frac{a_3^{(n_0)}(x)}{n_0\,!}\Big)^2 \Big(S_r^4\Big)^{2n_0} dr.
\end{aligned}$$

Des de (2.4.3), i tenint en compte $(a_3^{(n_0)}\, a_4)\,(x) \neq 0$, s'obté

$$A_{111}\,(\varepsilon,\beta,\delta) \geq C \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} (r_1\, r_2)^{2n_0}\, dr_1\, dr_2 \geq C\ \varepsilon^{\delta+(2n_0+1)\beta}. \tag{2.3.22}$$

El que resta de prova consisteix en trobar unes bones fitacions per $A_{12}\,(\varepsilon,\beta,\delta)$ i $A_{112}\,(\varepsilon,\beta,\delta)$.
Tenim

$$\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r)\ a_3^{(n_0)}\ (x)^2\ (S_r^1)^{2n_0}\, dr \leq C\ \varepsilon^{(3n_0+1)\beta+\delta}. \tag{2.3.23}$$

Com per a tot $z=(s,t)\in T$, $|\,S_z^h - x| \leq C\ |s\,t|$. Aleshores,

$$|\,S_r^1|^{2n_0} \leq C\,(r_1\, r_2)^{3n_0}$$

i per això es compleix (2.3.23).
Anàlogament,

$$|\,S_r^2|^{2n_0} \leq C\,(r_1\, r_2)^{4n_0},$$

complint-se llavors

$$\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r)\ a_3^{(n_0)}\,(x)^2\ (S_r^2)^{2n_0}\, dr \leq C\ \varepsilon^{(4n_0+1)\beta+\delta}. \tag{2.3.24}$$

Per la propietat Lipschitz de γ,

$$|\,S_r^3|^{2n_0} \leq C\ r_1^{4n_0}\, r_2^{2n_0}.$$

Conseqüentment,

$$\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r)\ a_3^{(n_0)}\ (x)^2\ (S_r^3)^{2n_0}\, dr \leq C\ \varepsilon^{(4n_0+1)\beta+\delta}. \tag{2.3.25}$$

També tenim

$$\int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} \gamma_z^2(r)\ a_3^{(n_0+1)}\ (\bar{x})^2\ (S_r^h - x)^{2n_0+2}\, dr \leq C\ \varepsilon^{(2n_0+3)\beta+\delta}. \tag{2.3.26}$$

Aleshores, (2.3.23)-(2.3.26) impliquen

$$A_{12}\,(\varepsilon,\beta,\delta) \leq C\,\Big(\varepsilon^{(3n_0+1)\beta+\delta} + \varepsilon^{(2n_0+3)\beta+\delta}\Big). \tag{2.3.27}$$

Finalment,

$$A_{112}(\varepsilon,\beta,\delta) \leq C \int_{C^z_{\beta,\delta}(\varepsilon)} |t-r_2|^2\,|r_1\,r_2|^{2n_0}\,dr \leq C\,\varepsilon^{(2n_0+1)\beta+3\delta}. \tag{2.3.28}$$

Des de (2.3.17), (2.3.20) i (2.3.21)

$$\Gamma^h_z \geq \frac{1}{2}\,A_{111}(\varepsilon,\beta,\delta) - \frac{1}{2}\,A_{112}(\varepsilon,\beta,\delta) - \frac{1}{2}\,A_{12}(\varepsilon,\beta,\delta) - A_2(\varepsilon,\beta,\delta).$$

Així, (2.3.18), (2.3.22), (2.3.27) i (2.3.28) ens asseguren

$$\Gamma^h_z \geq C\left(\varepsilon^{(2n_0+1)\beta+\delta} - \varepsilon^{\beta+2\delta} - \varepsilon^{\delta+((3n_0+1)\wedge(2n_0+3))\beta}\right), \tag{2.3.29}$$

per alguna constant C positiva. Elegim $0<\beta,\delta$ tals que $\delta > 2\,n_0\,\beta$. Aleshores (2.3.29) ens dóna $\Gamma^h_z > 0$. $\square$

Sigui $y^{\varepsilon,h}_z(\omega) = X_z(\varepsilon\omega + h)$, $\varepsilon \in [0,1]$, $h \in \mathcal{H}$, $z \in T$. El procés $\{y^{\varepsilon,h}_z,\ z \in T\}$ satisfà l'equació

$$y^{\varepsilon,h}_z = x + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\,\left[\varepsilon\,a_3\,(y^{\varepsilon,h}_\eta)\;dW_\eta + a_3\,(y^{\varepsilon,h}_\eta)\;\dot{h}_\eta\;d\eta + a_4\,(y^{\varepsilon,h}_\eta)\;d\eta\right],$$

i per unicitat de solució, $y^{0,h}_z = S^h_z$.

Lema 2.3.9 *Assumim* ($\mathrm{H_1}$1) *i* ($\mathrm{H_1}$2') $a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=3,4$, *Lipschitz. Aleshores*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{z\in T}\,E\,(\,|y^{\varepsilon,h}_z - S^h_z|^p)\right) = 0, \qquad p \in [1,\infty).$$

Prova. És una conseqüència immediata del lema tipus Gronwall i de la fitació següent

$$\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1}\,\sup_{z\in T}\,E\,(\,|y^{\varepsilon,h}_z|^p) \leq C, \tag{2.3.30}$$

per alguna constant C positiva i finita. $\square$

Considerem $\{Z^h_z,\ z\in T\}$ definit per

$$Z^h_z = \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\;a_3(S^h_\eta)\;dW_\eta + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\;Z^h_\eta\;\left[a'_3\,(S^h_\eta)\;\dot{h}_\eta + a'_4\,(S^h_\eta)\right]\,d\eta.$$

Notem que Z^h_z és un procés gaussià, doncs la derivada de Malliavin $D\,Z^h_z$ és determinista.
Sigui $\zeta^{\varepsilon,h}_z = \frac{y^{\varepsilon,h}_z - S^h_z}{\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1]$. El nostre propòsit serà estudiar la convergència de $\zeta^{\varepsilon,h}_z$, quan $\varepsilon \downarrow 0$, per $z\in T$, $h \in \mathcal{H}$ fixades, ço és, la derivabilitat de $\varepsilon \longmapsto y^{\varepsilon,h}_z$.

Lema 2.3.10 *Assumim* ($H_1 1$) *i* ($H_1 2$") $a_i, i = 3, 4$, *són funcions* C^1 *amb derivades fitades. Aleshores*

$$L^p - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\zeta_z^{\varepsilon,h} - Z_z^h) = 0, \quad p \in [1, \infty),$$

uniformement en $z \in T$.

Prova. Fixat $p \in [2, \infty)$. Aleshores,

$$E\Big(|\zeta_z^{\varepsilon,h} - Z_z^h|^p\Big) \le C\ \Big(A_1(\varepsilon, z) + A_2(\varepsilon, z) + A_3(\varepsilon, z)\Big),$$

amb

$$A_1(\varepsilon, z) = E\left(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)\ \Big[a_3(y_\eta^{\varepsilon,h}) - a_3(S_\eta^h)\Big]\, dW_\eta\Big|^p\right),$$

$$A_2(\varepsilon, z) = E\left(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)\ \Big[\frac{a_3(y_\eta^{\varepsilon,h}) - a_3(S_\eta^h)}{\varepsilon} - a_3'(S_\eta^h)\ Z_\eta^h\Big]\, \dot{h}_\eta\, d\eta\Big|^p\right),$$

$$A_3(\varepsilon, z) = E\left(\Big|\int_{R_z} \gamma_z(\eta)\ \Big[\frac{a_4(y_\eta^{\varepsilon,h}) - a_4(S_\eta^h)}{\varepsilon} - a_4'(S_\eta^h)\ Z_\eta^h\Big]\, d\eta\Big|^p\right).$$

La desigualtat de Burkholder i la propietat Lipschitz de a_3 impliquen

$$\sup_{z \in T} A_1(\varepsilon, z) \le C \sup_{z \in T} E\Big(|y_z^{\varepsilon,h} - S_z^h|^p\Big). \tag{2.3.31}$$

Pel teorema del valor mig

$$a_i(y_\eta^{\varepsilon,h}) - a_i(S_\eta^h) = a_i'(\chi_\eta^{\varepsilon,h,i})\,(y_\eta^{\varepsilon,h} - S_\eta^h)$$

amb $\chi_\eta^{\varepsilon,h,i} = \lambda^i y_\eta^{\varepsilon,h} + (1 - \lambda^i) S_\eta^h$, per algun $\lambda^i \in (0, 1)$ depenent de $\omega, i = 3, 4$. Conseqüentment, per $i = 3, 4$,

$$\left|\frac{a_i(y_\eta^{\varepsilon,h}) - a_i(S_\eta^h)}{\varepsilon} - a_i'(S_\eta^h) Z_\eta^h\right| \le C\ \Big\{|\,\zeta_\eta^{\varepsilon,h} - Z_\eta^h\,| + |\,\chi_\eta^{\varepsilon,h,i} - S_\eta^h\,|\ |Z_\eta^h|\Big\}.$$

Pels típics arguments basats en les desigualtats de Burkholder i Hölder i el Lema 2.2.3, resulta

$$\sup_{z \in T} E\Big(|Z_z^h|^p\Big) \le C\,, \quad p \in [1, \infty].$$

A més, pel Lema 2.3.9

$$\sup_{z\in T} E\left(|\chi_z^{\varepsilon,h,i} - S_z^h|^p\right) = \sup_{z\in T} E\left((\lambda^i)^p |y_z^{\varepsilon,h} - S_z^h|^p\right) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.3.32}$$

Com a conseqüència,

$$\sup_{z\in T} E\left(|\zeta_z^{\varepsilon,h} - Z_z^h|^p\right) \leq C\left\{a(\varepsilon) + \int_{R_z} \sup_{\xi\leq\eta} E\left(|\zeta_\xi^{\varepsilon,h} - Z_\xi^{\varepsilon,h}|^p\right) d\eta\right\}$$

amb $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} a(\varepsilon) = 0$, degut a (2.3.31) i (2.3.32). Així, utilitzant el Lema 2.2.3 finalitzem la prova d'aquest lema. □

A continuació veurem un refinament del Lema 2.3.10.

Lema 2.3.11 *Assumim* ($H_1 1$) *i* ($H_1 2$). *Aleshores*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\zeta_z^{\varepsilon,h} - Z_z^h\right) = 0\,,$$

en la topologia $\mathbb{D}^\infty$.

Prova. Com S_z^h és determinista, Z_z^h és Gaussià i, a causa del Lema 2.3.10, només ens queda comprovar

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left(\left|\int_T \left(\frac{1}{\varepsilon} D_\eta y_z^{\varepsilon,h} - D_\eta Z_z^h\right)^2 d\eta\right|^{p/2}\right) = 0\,, \tag{2.3.33}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} E\left(\left|\int_{T^j} \left(\frac{1}{\varepsilon} D_\eta^j y_z^{\varepsilon,h}\right)^2 d\eta\right|^{p/2}\right) = 0\,, \quad j = 2,3,\ldots\,, \tag{2.3.34}$$

$p \in [1,\infty)$.
Tenim $D_\eta y_z^{\varepsilon,h} = \mathbb{1}_{\{\eta\leq z\}}\, \varepsilon\, a_3(y_\eta^{\varepsilon,h})\, M_z^{\varepsilon,h}(\eta)$, amb

$$M_z^{\varepsilon,h}(\eta) = \gamma_z(\eta) + \int_{(\eta,z]} \gamma_z(\xi) M_\xi^{\varepsilon,h}(\eta)\left[\varepsilon\, a_3'(y_\xi^{\varepsilon,h}) dW_\xi + a_3'(y_\xi^{\varepsilon,h})\dot{h}_\xi d\xi + a_4'(y_\xi^{\varepsilon,h}) d\xi\right].$$

Anàlogament, $D_\eta Z_z^h = \mathbb{1}_{\{\eta\leq z\}}\, a_3(S_\eta^h) N_z^h(\eta)$, on

$$N_z^h(\eta) = \gamma_z(\eta) + \int_{(\eta,z]} \gamma_z(\xi) N_\xi^h(\eta)\left[a_3'(S_\xi^h)\dot{h}_\xi + a_4'(S_\xi^h)\right] d\xi\,.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} &E\left(\Big|\int_T\Big(\frac{1}{\varepsilon}D_\eta y_z^{\varepsilon,h}-D_\eta Z_z^h\Big)^2 d\eta\Big|^{p/2}\right)\\ &\quad= E\left(\Big|\int_{R_z}\Big(a_3(y_\eta^{\varepsilon,h})M_z^{\varepsilon,h}(\eta)-a_3(S_\eta^h)N_z^h(\eta)\Big)^2 d\eta\Big|^{p/2}\right)\\ &\quad\le C\Big(C_1(\varepsilon,z)+C_2(\varepsilon,z)\Big), \end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon,z)&=E\left(\Big|\int_{R_z}\Big(a_3(y_\eta^{\varepsilon,h})(M_z^{\varepsilon,h}(\eta)-N_z^h(\eta))\Big)^2 d\eta\Big|^{p/2}\right),\\ C_2(\varepsilon,z)&=E\left(\Big|\int_{R_z}|y_\eta^{\varepsilon,h}-S_\eta^h|^2\,|N_z^h(\eta)|^2 d\eta\Big|^{p/2}\right). \end{aligned}$$

Un argument similar a l'utilitzat en la demostració del Lema 2.3.9 prova

$$\sup_{\eta\le z}E\left(|M_z^{\varepsilon,h}(\eta)-N_z^h(\eta)|^p\right)\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{}0\,,\quad p\in[1,\infty)\,.$$

A més, $\sup_{\eta\le z}|N_z^h(\eta)|\le C$. Aquestes propietats juntament amb (2.3.30) donen (2.3.33).
El compliment de (2.3.34) és una conseqüència trivial del següent fet: per $j\in\mathbb{N}-\{1\}$,

$$D_\eta^j\, y_z^{\varepsilon,h}=\varepsilon^j\mathbb{1}_{\{0\le\eta_1\le\ldots\le\eta_j\le z\}}R_z^{\varepsilon,h}(\eta)\,, \tag{2.3.35}$$

$\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_j)$, amb $\sup_{0\le\eta_1\le\ldots\le\eta_j\le z}E(|R_z^{\varepsilon,h}(\eta)|^p)\le C$, $p\in[1,\infty)$.
Així, (2.3.35) pot ser fàcilment comprovat de manera recursiva. □

A l'article de C. Rovira i M. Sanz-Solé [46] han demostrat que la família $\{X^\varepsilon,\varepsilon>0\}$ de solucions de (2.3.3) satisfà un principi de grans desviacions sobre l'espai de funcions contínues definides sobre T i amb valor x sobre els eixos. El funcional d'acció ve donat per

$$I(g)=\inf\left\{\frac{1}{2}\|\,h\,\|_{\mathcal{H}}^2 : S^h=g\right\}.$$

Això és una conseqüència força coneguda de la següent estimació (vegeu [46], Teorema 4.4):
Sota ($H_1 1$) i

($H_1 2$'') $a_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=3,4$, són funcions fitades i Lipschitz.

Per a tot $h \in \mathcal{H}$, $\delta, R > 0$, $\varepsilon \in [0,1]$, existeix $\alpha > 0$ tal que

$$P\left\{ \sup_{z\in T} |X_z^\varepsilon - S_z^h| > \delta\,, \quad \sup_{z\in T} |\varepsilon W_z - h| < \alpha \right\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right). \tag{2.3.36}$$

Com a conseqüència d'això, nosaltres obtenim el següent resultat.

Proposició 2.3.12 *Assumim* ($\mathrm{H}_1 1$) *i* ($\mathrm{H}_1 2'$) $a_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, i = 3, 4$ *Lipschitz. Fixat* $z \in T \setminus E$. *Aleshores, la família de variables aleatòries* $\{X_z^\varepsilon, \varepsilon \in [0,1]\}$ *satisfà un principi de grans desviacions amb funcional d'acció*

$$I(y) = \inf\left\{ \frac{1}{2}\,\|\, h\|_{\mathcal{H}}^2 : S_z^h = y \right\}.$$

Prova. Si els coeficients a_i, $i = 3, 4$, són fitats, obtenim el que desitgem mitjançant el principi de contracció de grans desviacions tal com està fet a [46]. Per a_i, $i = 3, 4$, essent Lipschitz usarem una localització, aquesta localització és la següent. Sigui

$$T^\varepsilon(\delta) = \inf\left\{ t : \sup_{z\leq(t,t)} |X_z^\varepsilon - S_z^h| \geq \delta \right\} \wedge 1, \quad \delta > 0\,.$$

Escollim $\tau^\varepsilon(\delta) = \Big(T^\varepsilon(\delta)\,, T^\varepsilon(\delta)\Big)$. I notem que

$$\sup_{z\leq\tau^\varepsilon(\delta)} |X_z^\varepsilon| \leq \delta + \sup_{z\in T} |S_z^h| \leq C\,. \tag{2.3.37}$$

La part esquerra de (2.3.36) coincideix amb

$$P\left\{ \sup_{z\leq\tau^\varepsilon(\delta)} |X_z^\varepsilon - S_z^h| > \delta\,, \ \sup_{z\in T} |\varepsilon\, W_z - h| < \alpha \right\}$$

i, a causa de (2.3.37), els coeficients a_i, $i = 3, 4$, poden suposar-se fitats. □

Ara tenim les eines per donar la demostració del principal resultat d'aquesta secció.

Prova del Teorema 2.3.5. Sigui $F^\varepsilon = X_z^\varepsilon$, la solució a (2.3.3) en un punt fixat $z \in T \setminus E$. A [46] han provat que $X_z \in \mathbb{D}^\infty$. El mateix argument serveix per demostrar que $\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|X_z^\varepsilon\|_{k,p} < \infty$, per a tot enter $k \geq 1$, $p \in (1, \infty)$. Aquesta propietat, junt amb el Lema 2.3.6 i la Proposició 2.3.12, ens asseguren el compliment de les hipòtesis de la Proposició 2.3.2. Conseqüentment,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \log p_z^\varepsilon(y) \leq -\frac{1}{2} d^2(x,y) .$$

Per $F^\varepsilon = X_z^\varepsilon$, $\Phi(h) = S_z^h$, $Z(h) = Z_z^h$, les hipòtesis de la Proposició 2.3.3 són satisfetes. La derivada de Malliavin, $D_\eta Z_z^h$, és solució de

$$D_\eta Z_z^h = \mathbb{1}_{\{\eta \leq z\}} \Big\{ \gamma_z(\eta) a_3(S_\eta^h) + \int_{(\eta,z]} \gamma_z(\xi)\, D_\eta\, Z_\xi^h \Big[\, a_3'(S_\xi^h))\dot{h}_\xi + a_4(S_\xi^h) d\xi \Big] \Big\}.$$

Notem que per unicitat de solució $DZ_z^h = DS_z^h$. Aleshores, pel Lema 2.3.8, la covariança de la variable Gaussiana Z_z^h no s'anul.la i $d_R^2(y) = d^2(y)$. A més, el Lema 2.3.11 implica la convergència (2.3.1). Així

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \;\log\; p_z^\varepsilon(y) \geq -\frac{1}{2} d^2(x,y) . \qquad \square$$

Finalitzarem aquesta secció analitzant la finitud de $d^2(x,y)$. Aquest problema està lligat amb la positivitat de la densitat $p_z^\varepsilon(y)$. Seguint les idees que van desenvolupar A. Millet i M. Sanz-Solé a [35], per l'equació (2.1.2) essent $x := X_0$ determinista, hom pot obtenir

$$\Big\{ p_z^\varepsilon(y) > 0 \Big\} = \Big\{ y\, ;\; \exists\, h \in \mathcal{H} : S_z^h = y \quad \mathrm{i} \quad DS_z^h \text{ exhaustiva} \Big\} .$$

Així

$$d^2(x,y) < \infty \Leftrightarrow p_z^\varepsilon(y) > 0 .$$

Conseqüentment, si $d^2(x,y) = \infty$, el Teorema 2.3.5 és trivial.
Per la Proposició 4.1.2 de [42]

$$\Big\{ p_z^\varepsilon(y) > 0 \Big\} = \overbrace{\operatorname{supp} P \circ (X_z^\varepsilon)^{-1}}^{\circ} , \qquad (2.3.38)$$

on supp $(P \circ (X_z^\varepsilon)^{-1})$ denota el suport topològic de la llei de X^ε. El conjunt supp $(P \circ (X_z^\varepsilon)^{-1})$ és un interval tancat (un conjunt tancat i connex, per un resultat de S. Fang [17]). Notem que com $P \circ (X_z^\varepsilon)^{-1}$ és absolutament contínua, (2.3.38) ens assegura $\{p_z^\varepsilon(y) > 0\} \neq \phi$.

Proposició 2.3.13 *Suposant que* $a_3(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{R}$. *Aleshores*

$$\{y : d^2(x,y) < \infty\} = \mathbb{R}.$$

Prova. Fixat $y \in \mathbb{R}$. Primer provem l'existència de $k_z \in \mathcal{H}$ tal que si

$$f(z) := x + \int_{R_z} \gamma_z(\eta)\dot{k}_z(\eta)\, d\eta\,,$$

llavors $f(z) = y$.
L'estimació (2.4.3) ens dóna $\int_{R_z} \gamma_z(\eta)^2 d\eta > 0$. Sigui

$$\alpha(z) = (y - x)\left(\int_{R_z} \gamma_z(\eta)^2 d\eta\right)^{-1}.$$

Aleshores, $\dot{k}_z(\eta) = \alpha(z)\,\gamma_z(\eta)$ satisfà $f(z) = y$.
Per qualsevol $\xi \in R_z$, sigui

$$f(\xi) = x + \int_{R_\xi} \gamma_\xi(\eta)\ \dot{k}_z(\eta)\, d\eta, \tag{2.3.39}$$

i per qualsevol $\eta \in R_z$, definim

$$\dot{h}_z(\eta) = -\frac{a_4(f(\eta)) - \dot{k}_z(\eta)}{a_3(f(\eta))}. \tag{2.3.40}$$

(2.3.39) i (2.3.40) impliquen

$$f(\xi) = x + \int_{R_\xi} \gamma_\xi(\eta)\Big[a_3(f(\eta))\,\dot{h}_z(\eta) + a_4(f(\eta))\Big]\, d\eta\,, \quad \xi \in R_z\,.$$

Així, $f(\xi) = S_\xi^{h_z}$, $\xi \in R_z$. En particular $y = S_z^{h_z}$ i d'aquí $d^2(x,y) < \infty$. $\square$

2.4 Apèndix

Objectiu

En aquest apartat enunciarem alguns resultats sobre la funció de Green, no es dóna pràcticament cap demostració doncs aquestes estan fetes amb profunditat tant a [46] i [47], com a [45]. El motiu d'aquest recull és donar una introducció a la funció de Green, així com els resultats que s'han utilitzat al llarg del capítol.

Preliminars

Considerem l'operador de segon ordre

$$\mathcal{L}f(s,t) = \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s \partial t} - a_1(s,t)\frac{\partial f(s,t)}{\partial t} - a_2(s,t)\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}.$$

Resultats clàssics sobre equacions en derivades parcials ens diuen que si utilitzem la funció de Green γ associada a l'operador $\mathcal{L}$, podem escriure, sota certes condicions de regularitat sobre els coeficients, l'única solució de l'equació diferencial en derivades parcials

$$\mathcal{L}f(s,t) = b(s,t)$$

$(s,t) \in T = [0,1]^2$, $f(s,t) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ si $s \cdot t = 0$, com

$$f(s,t) = x_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u,v) b(u,v)\, dudv$$

La funció de Green associada a $\mathcal{L}$ es defineix de la següent manera (vegeu [49], Capítol 3). Fixat $(s,t) \in T$, sigui $\gamma_{s,t}(u,v)$ la funció definida sobre $\{(u,v) : (0,0) \leq (u,v) \leq (s,t)\}$ que satisfà les propietats:

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial (a_1(u,v)\gamma_{s,t}(u,v))}{\partial v} + \dfrac{\partial (a_2(u,v)\gamma_{s,t}(u,v))}{\partial u} = 0\,, \\ \dfrac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u} = -a_1(u,v)\gamma_{s,t}(u,v), \quad \text{quan} \quad v = t\,, \\ \dfrac{\partial \gamma_{s,t}(u,v)}{\partial v} = -a_2(u,v)\gamma_{s,t}(u,v), \quad \text{quan} \quad u = s\,, \\ \gamma_{s,t}(u,v) = 1, \quad \text{quan} \quad u = s \quad \text{i} \quad v = t\,. \end{cases}$$

Resultats

Suposem que els coeficients a_1 i a_2 satisfan les condicions següents:

($H_1$1) Les funcions $a_i : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, són fitades, derivables i amb derivades fitades.

Al no poder donar de forma explícita la funció de Green $\gamma_{s,t}(\cdot, \cdot)$, es construeix a partir d'una sèrie definida de forma iterada.
Considerem

$$H_0(s,t;u,v) \equiv 1,$$

$$H_{n+1}(s,t;u,v) = \int_u^s a_1(r,v)H_n(s,t;r,v)dr + \int_v^t a_2(u,w)H_n(s,t;u,w)dw,$$

$(u,v) \leq (s,t)$, $n \geq 1$. Aleshores definim

$$\gamma_{s,t}(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(s,t;u,v), \qquad (u,v) \leq (s,t) \tag{2.4.1}$$

Proposició 2.4.1 [45] (a) *La sèrie* (2.4.1) *que defineix la funció de Green* γ *és absolutament convergent i satisfà*

$$\gamma_{s,t}(u,v) = 1 + \int_u^s a_1(r,v)\gamma_{s,t}(r,v)dr + \int_v^t a_2(u,w)\gamma_{s,t}(u,w)dw, \tag{2.4.2}$$

$(0,0) \leq (u,v) \leq (s,t)$.
(b) *Per tot* $(s,t) \in T$, $\gamma_{s,t}(\cdot,\cdot)$ *té derivades parcials de primer ordre respecte* u *i* v, *i de segon ordre creuada, uniformement fitades sobre* $\{(u,v) : 0 < u \leq s, 0 < v \leq t\}$.
(c) *Fixat* $(u,v) \in T$, *la funció* $(s,t) \longrightarrow \gamma_{s,t}(u,v)$ *té derivades parcials de primer ordre respecte* s *i* t, *i de segon ordre creuada, uniformement fitades sobre* $\{(u,v) : 0 \leq u \leq s < 1, 0 \leq v \leq t < 1\}$.

La derivabilidad de la funció i (2.4.2) impliquen que les propietats (P) es compleixin. Aleshores es tracta de la funció de Green associada a l'operador $\mathcal{L}$.

Proposició 2.4.2 [45] *Existeix una constant universal* $C > 0$ *tal que*

$$\sup_{(s,t)\in T} \sup_{(u,v)\le(s,t)} |\gamma_{s,t}(u,v)| \le C\,,$$

$$\sup_{(s,t)\in T} |\gamma_{s,t}(\overline{u},\overline{v}) - \gamma_{s,t}(u,v)| \le C\left\{|\overline{u}-u| + |\overline{v}-v|\right\}, \quad (\overline{u},\overline{v}),(u,v) \le (s,t)\,,$$

$$\sup_{(u,v)\in T} |\gamma_{\overline{s},\overline{t}}(u,v) - \gamma_{s,t}(u,v)| \le C\left\{|\overline{s}-s| + |\overline{t}-t|\right\}, \quad (\overline{s},\overline{t}),(s,t) \ge (u,v)\,.$$

Proposició 2.4.3 [45] *Sigui* $\gamma_{s,t}(u,v)$ *la funció definida a la sèrie* (2.4.1). *Aleshores es compleixen*

$$\frac{\partial^2\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s\partial t} - a_1(s,t)\frac{\partial\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial t} - a_2(s,t)\frac{\partial\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial s} - a_1(s,t)\gamma_{s,t}(u,v), \quad \text{quan} \quad t = v\,,$$

$$\frac{\partial\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial t} - a_2(s,t)\gamma_{s,t}(u,v), \quad \text{quan} \quad s = u.$$

Per la prova de la Proposició 2.4.1, 2.4.2 i 2.4.3 vegeu [46], [47] i sobre tot [45], on hi ha un estudi exhaustiu de la funció de Green associada a $\mathcal{L}$. A la propera proposició es detalla una mica la seva demostració perquè hi apareixen dos expressions molt utilitzades al llarg de la primera part de la memòria.

Proposició 2.4.4 [45] *Sigui* $\gamma_{s,t}(u,v)$ *la funció definida a la sèrie* (2.4.1). *Aleshores es compleix*

$$\inf_{0\le v\le t} \gamma_{s,t}(s,v) > 0 \quad \text{i} \quad \inf_{0\le u\le s} \gamma_{s,t}(u,t) > 0\,.$$

Prova. Si resolem les equacions diferencials satisfetes per

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial v} = -a_2(u,v)\gamma_{s,t}(u,v), & \text{quan} \quad u = s\,, \\ \gamma_{s,t}(u,v) = 1, \quad \text{quan} \quad u = s \quad \text{i} \quad v = t\,, \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_{s,t}(u,v)}{\partial u} = -a_1(u,v)\gamma_{s,t}(u,v), & \text{quan} \quad v = t\,, \\ \gamma_{s,t}(u,v) = 1, \quad \text{quan} \quad u = s \quad \text{i} \quad v = t\,. \end{cases}$$

Obtenim

$$\begin{aligned}\gamma_{s,t}(s,v) &= \exp\left(\int_v^t a_2(s,w)\,dw\right), \quad 0 \le v \le t\,,\\ \gamma_{s,t}(u,t) &= \exp\left(\int_u^s a_1(r,t)\,dr\right), \quad 0 \le u \le s\,.\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Això prova la proposició. $\square$

Capítol 3

Desenvolupament asimptòtic de la densitat utilitzant la descomposició en Caos de Wiener

3.1 Introducció

Sigui $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espai de mesura amb una mesura σ-finita μ. Sigui $\mathcal{H} = L^2(T, \mathcal{T}, \mu)$ i $W = \{W_h,\ h \in \mathcal{H}\}$ un procés Gaussià centrat i $E(W_h W_{h'}) = \langle h, h' \rangle_{\mathcal{H}}$ definit sobre un espai de probabilitats $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sigui $\mathcal{F}$ la σ-àlgebra generada per W. Considerem una aplicació mesurable $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ que pertany a $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ amb la descomposició següent en caos de Wiener

$$F = E(F) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n). \tag{3.1.1}$$

Sigui la família $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0, 1]\}$ definida per

$$F^\varepsilon = E(F) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n I_n(f_n). \tag{3.1.2}$$

Assumim que la llei de F^ε és absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$. L'objectiu d'aquest capítol és estudiar el desenvolupament de Taylor de la densitat $p^\varepsilon(y)$ de F^ε en $\varepsilon = 0$, i on $y = E(F) = E(F^\varepsilon)$. Aquest problema ha estat extensament estudiat en el cas de les difusions, així com certes generalitzacions, tal com hem comentat a la Introducció general.

En aquest capítol, per una banda, aprofundirem en l'estudi del comportament asimptòtic d'una densitat, doncs trobarem un desenvolupament més extens i complet que per les estimacions de Varadhan; en canvi de moment perdrem generalitat perquè farem l'estudi per un valor y particular. Aquest incovenient serà solucionat al Capítol 5.

En primer lloc provarem la diferenciabilitat de l'aplicació F^ε, $\varepsilon \in (0,1]$ en espais de derivació apropiats relacionats amb els espais de Sobolev $\mathbb{D}^{N,2}$ del càlcul de Malliavin. En particular, demostrarem que si $F \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbb{D}^{j,2}$ existeix una versió de F^ε, $\varepsilon \in (0,1)$ que és infinitament diferenciable, i descriurem les derivades en funció de les integrals múltiples $I_n(f_n)$, també provarem l'existència del límit de les derivades de F^ε respecte ε quan $\varepsilon \to 0$. A la segona part del capítol considerarem la família següent:

$$\hat{F}^\varepsilon := \frac{F^\varepsilon - EF}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \in (0,1].$$

Sota aquestes mateixes condicions podrem obtenir per $\hat{F}^\varepsilon$ els mateixos resultats que hem trobat per F^ε.

Després, afegint una hipòtesi de no degeneració i utilitzant aquests resultats previs, trobarem el desenvolupament asimptòtic de $p^\varepsilon(y)$ per $y = EF$. Per això seguirem les idees donades per R. Léandre [28], R. Léandre i F. Russo [30]. Sigui $\hat{p}^\varepsilon(y)$ la densitat de $\hat{F}^\varepsilon$ i f_m una successió de funcions de $\mathbb{R}^d$ convergint en el sentit de distribucions cap a la delta de Dirac en el 0. Aleshores, per $y = EF$,

$$\begin{aligned} p^\varepsilon(y) &= \lim_{m\to\infty} E\{f_m(F^\varepsilon - y)\} = \frac{1}{\varepsilon^d} \lim_{m\to\infty} E\{f_m(\frac{F^\varepsilon - y}{\varepsilon})\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d}\, \hat{p}^\varepsilon(0). \end{aligned}$$

Nosaltres trobarem el desenvolupament de $\hat{p}^\varepsilon(0)$. Considerem una funció $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ regular i denotem per α un multiíndex, el desenvolupament de Taylor de la composició $f(\hat{F}^\varepsilon)$ en $\varepsilon = 0$ és q.s.

$$f(\hat{F}^\varepsilon) = \sum_{j\le N} \varepsilon^j \sum_{|\alpha|\le j} f^{(\alpha)}(\hat{F}^0)\, L_j^{(\alpha)} + \varepsilon^{N+1} \,\text{Resta},$$

on $L_j^{(\alpha)}$ són funcionals que explicitarem. Prenent esperances i utilitzant la integració per parts clàssica del càlcul de Malliavin donada al Capítol 2 podrem fer desaparèixer les derivades d'ordre més gran o igual a 1 de f, quedant així factors com el següent

$$E\,\{f(\hat{F}^0)\; G^{(\alpha)}\},$$

on $G^{(\alpha)}$ seran funcionals regulars. Fent una nova integració per parts, emprant que la mesura de Radon definida per $f \to E(f(\hat{F}^0)G^{(\alpha)})$ té una densitat regular i coneguda, i agafant en lloc de f una successió de funcions f_m convergint a la delta de Dirac en el 0, trobarem el desenvolupament següent:

$$p^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}\hat{p}^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon^d}(c_0 + \varepsilon^2 c_2 + \cdots + \varepsilon^{N+1} R^\varepsilon_{N+1}), \qquad y = EF.$$

Els coeficients senars seran 0 tal com passava a les difusions, i els parells seran descrits en funció de les integrals múltiples $I_n(f_n)$ i correspondran a mesures de Radon. Finalment, assumint una hipòtesi addicional, provarem l'afitament uniforme de la resta.

L'índex d'aquest capítol és el següent. La Secció 3.2 està dedicada a demostrar els resultats de diferenciabilitat necessaris. A la Secció 3.3 es dóna i prova el resultat principal, el desenvolupament de la densitat. Finalment, a la Secció 3.4 apliquem aquest resultat general a dos casos particulars d'equacions diferencials en derivades parcials estocàstiques de tipus hiperbòlic.

3.2 Regularitat del funcional

Objectiu

Es provaran els resultats necessaris de diferenciabilitat respecte ε sobre la família definida a (3.1.2), perquè puguin ésser aplicats a l'estudi del desenvolupament de la densitat. Concretament, demostrarem que si $F \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbb{D}^{j,2}$, existeix una versió de la família $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1)\}$ que és infinitament diferenciable i descriurem aquestes derivades mitjançant les integrals múltiples de la descomposició en caos de Wiener de F.

Preliminars

Al llarg d'aquesta secció, així com dins tot aquest capítol, treballarem constantment amb nocions sobre el caos de Wiener. Anem a donar una breu introducció.
Sigui $H_n(x)$ l'n-èssim polinomi d'Hermite, definit com

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}), \quad n \geq 1,$$

i $H_0(x) = 1$. Per cada $n \geq 1$, denotarem $\mathcal{H}_n$ el subespai lineal tancat de $L^2(\Omega, \mathcal{a}, P)$ generat per les variables aleatòries $\{H_n(W(h)), h \in \mathcal{H}, \|h\|_{\mathcal{H}} = 1\}$. $\mathcal{H}_0$ és el conjunt de les constants. $\mathcal{H}_1$ coincideix amb el conjunt de variables aleatòries $\{W(h), h \in \mathcal{H}\}$. $\mathcal{H}_n$ i $\mathcal{H}_m$ són ortogonals per $n \neq m$. L'espai $\mathcal{H}_n$ s'anomena *el caos de Wiener d'ordre n.*
Sigui $\mathcal{F}$ la σ-àlgebra generada per les variables aleatòries $\{W(h), h \in \mathcal{H}\}$.

Teorema 3.2.1 ([41]) *L'espai $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pot ser descomposat en una suma ortogonal infinita de subespais $\mathcal{H}_n$,*

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

Teorema 3.2.2 ([41]) *Sigui $\mathcal{H}_n(x)$ l'n-èssim polinomi d'Hermite, i sigui $h \in \mathcal{H} = L^2(T)$ un element de norma 1. Aleshores*

$$n!\ H_n(W(h)) = \int_{T^n} h(t_1) \cdots h(t_n) W(dt_1) \cdots W(dt_n)$$

Com a conseqüència, la integral múltiple I_n fa anar elements de $L^2(T^n)$ dins el caos de Wiener $\mathcal{H}_n$, i qualsevol $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pot ser expressada com una sèrie d'integrals múltiples estocàstiques,

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

Aquí $f_0 = E(F)$, i I_0 és la identitat aplicada sobre les constants. Endemés, podem assumir que les funcions $f_n \in L^2(T^n)$ són simètriques i, en aquest cas, únicament determinades per F.

Per altra banda, recordem que per qualsevol $j \in \mathbb{Z}^+$, els espais de Sobolev $\mathbb{D}^{j,2}$ poden ser caracteritzats tal com segueix

$$\mathbb{D}^{j,2} = \left\{ F \in L^2(\Omega) : \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{k\,!}{(k-j)\,!} \right)^2 (k-j)\,!\ \|f_k\|_2^2 < \infty \right\}, \tag{3.2.1}$$

on $\|f_k\|_2$ denota la norma de f_k en $L^2(T^k)$.
Finalment, assumint que F, amb la descomposició (3.1.1), és un vector aleatori que pertany a $\mathbb{D}^{\infty,2} := \bigcap_{N \geq 0} \mathbb{D}^{N,2}$. Aleshores

$$f_k(\cdot) \ = \ \frac{1}{k!}\, E\, (D^k_{\cdot} F), \tag{3.2.2}$$

per cada $k \geq 0$ (vegeu, per exemple, l'article de D.W. Stroock [51], o també [42]).

Resultats

Sigui $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vector aleatori sobre l'espai de Wiener abstracte $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ que pertany a $L^2(\Omega)$ i que té la representació en caos de Wiener donada a (3.1.1). Per qualsevol $\varepsilon \in (0, 1]$ definim, com hem anticipat a la introducció,

$$F^{\varepsilon}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n\, I_n(f_n). \tag{3.2.3}$$

Evidentment, la sèrie que defineix $F^{\varepsilon}(\omega)$ convergeix en $L^2(\Omega)$. Introduïm a continuació uns espais de derivació relacionats amb els clàssics espais de Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$. Per qualsevol $j \in \mathbb{Z}^+$, sigui

$$\Delta^{j,2} = \{ F \in L^2(\Omega) : \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{k\,!}{(k-j)\,!} \right)^2 k\,!\ \|f_k\|_2^2 < \infty \}.$$

Notem que $\Delta^{0,2} = L^2(\Omega)$ i $\Delta^{j,2}$ decreix quan j creix.
El proper resultat es prova per $d = 1$. Per $d > 1$ la demostració es fa component a component.

Proposició 3.2.3 *Fixem $j \geq 1$, i assumim $F \in \Delta^{j+1,2}$. Aleshores, existeix una versió de $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1)\}$ que és de classe $\mathcal{C}^j$. A més a més,*

$$\frac{d^j F^\varepsilon}{d\,\varepsilon^j} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k\,!}{(k-j)\,!}\ \varepsilon^{k-j}\ I_k(f_k)\,.$$

Prova. Considerem en primer lloc el cas $j = 1$. Per ε, ξ amb $0 < \varepsilon + \xi < \varepsilon_0 < 1$ tenim

$$\frac{F^{\varepsilon+\xi} - F^\varepsilon}{\xi} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i}\ \varepsilon^i\ \xi^{k-i}\ I_k(f_k)}{\xi} = A_1^\varepsilon + \xi\, A_2^{\varepsilon,\xi}, \tag{3.2.4}$$

amb

$$A_1^\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\varepsilon^{k-1}\ I_k(f_k)\,,$$
$$A_2^{\varepsilon,\xi} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \varepsilon^i\, \xi^{k-i-2}\ I_k(f_k)\,.$$

Com $F \in \Delta^{1,2}$, la sèrie que defineix A_1^ε convergeix en $L^2(\Omega)$. A més,

$$\sup_\xi\ |A_2^{\varepsilon,\xi}| \leq C\, X_1\,,$$

on $X_1 := \left(\sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)^2(I_k(f_k))^2\right)^{1/2}$. Això és una conseqüència de la desigualtat de Schwarz, fixem-nos,

$$\begin{aligned}
|A_2^{\varepsilon,\xi}| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} \frac{k\,(k-1)}{(k-i)(k-i-1)}\ \varepsilon^i\, \xi^{k-i-2}\ |I_k(f_k)| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\ (\varepsilon+\xi)^{k-2}\ |I_k(f_k)| \\
&\leq \frac{1}{2} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon+\xi)^{2k}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)^2(I_k(f_k))^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2}\ \frac{1}{(1-\varepsilon_0^2)^{1/2}}\ X_1\,.
\end{aligned}$$

Com $F \in \Delta^{2,2}$, X_1 és finita q.s. Aleshores, des de (3.2.4) obtenim

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{F^{\varepsilon+\xi} - F^\varepsilon}{\xi} = A_1^\varepsilon, \quad \text{q.s.}$$

Sigui $j > 1$ i aceptem que per a tot $k \in \{1, \dots, j-1\}$ es compleix

$$d^{\varepsilon}_{j-1} = \frac{d^{j-1} F^{\varepsilon}}{d\varepsilon^{j}} = \sum_{k=j-1}^{\infty} \frac{k!}{(k-j+1)!} \varepsilon^{k-j+1} I_k(f_k).$$

Llavors,

$$\frac{d^{\varepsilon+\xi}_{j-1} - d^{\varepsilon}_{j-1}}{\xi} = B^{\varepsilon}_1 + \xi B^{\varepsilon,\xi}_2,$$

on

$$B^{\varepsilon}_1 = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{(k-j)!} \varepsilon^{k-j} I_k(f_k),$$

$$B^{\varepsilon,\xi}_2 = \sum_{k=j+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-j-1} \frac{k!}{(k-j+1)!} \binom{k-j+1}{i} \varepsilon^{i} \xi^{k-j-i-1} I_k(f_k).$$

La sèrie que defineix B^{ε}_1 convergeix en $L^2(\Omega)$, doncs $F \in \Delta^{j,2}$. Com per $A^{\varepsilon,\xi}_2$ tenim

$$|B^{\varepsilon,\xi}_2| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\varepsilon_0^2)^{1/2}} X_j,$$

amb $X_j := \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{k!}{(k-j-1)!} \right)^2 (I_k(f_k))^2 \right)^{1/2}$. Aquesta variable aleatòria és finita q.s., perquè $F \in \Delta^{j+1,2}$. Aleshores

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{d^{\varepsilon+\xi}_{j-1} - d^{\varepsilon}_{j-1}}{\xi} = B^{\varepsilon}_1, \quad \text{q.s.}$$

Això finalitza la demostració de la proposició. □

Observació. Des de (3.2.1) i utilitzant el criteri del quocient per comparar sèries, podem comprovar que $\mathbb{D}^{2j,2} = \Delta^{j,2}$, $\forall j \in \mathbb{Z}^+$.
Així, podem formular el resultat següent.

Corol.lari 3.2.4 *Sigui $F \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbb{D}^{j,2}$. Aleshores, existeix una versió de $\{F^{\varepsilon}, \varepsilon \in (0,1)\}$ que és de classe C^{∞} respecte ε i*

$$\frac{d^{j} F^{\varepsilon}}{d\varepsilon^{j}} = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{(k-j)!} \varepsilon^{k-j} I_k(f_k), \tag{3.2.5}$$

$j \in \mathbb{Z}^+$, on la sèrie (3.2.5) convergeix en $L^2(\Omega)$.

Al proper capítol nosaltres no treballarem amb F^ε, sinó que ho farem amb el vector aleatori següent

$$\hat{F}^\varepsilon = \frac{F^\varepsilon - E(F)}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Aleshores des del Corol.lari 3.2.4 podem concloure el pròxim resultat:

Corol.lari 3.2.5 *Sigui* $F \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathbb{D}^{j,2}$. *Existeix una versió de* $\{\hat{F}^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1)\}$ *que és de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *en* ε *i*

$$\frac{d^j\, \hat{F}^\varepsilon}{d\,\varepsilon^j} = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{(k-1)\,!}{(k-(j+1))\,!}\, \varepsilon^{k-(j+1)}\, I_k(f_k)\,, \tag{3.2.6}$$

$$\left.\frac{d^j\, \hat{F}^\varepsilon}{d\,\varepsilon^j}\right|_{\varepsilon=0} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{d^j\, \hat{F}^\varepsilon}{d\,\varepsilon^j} = j\,!\ I_{j+1}(f_{j+1})\,, \tag{3.2.7}$$

$j \in \mathbb{Z}^+$. *Particularment, prenent* $\hat{F}^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \hat{F}^\varepsilon$, *tenim* $\hat{F}^0 = I_1(f_1)$.

La fórmula (3.2.6) pot ser comprovada per inducció, utilitzant els mateixos arguments que a la Proposició 3.2.3.

3.3 Desenvolupament asimptòtic de la densitat

Objectiu

El propòsit és obtenir el desenvolupament asimptòtic de la densitat de F^ε, denotada per $p^\varepsilon(y)$, en $y = EF = EF^\varepsilon$ al voltant de $\varepsilon = 0$, sempre que la densitat existeixi. En el Teorema 3.3.3 descriurem d'una manera exacta els coeficients del desenvolupament. A més a més, sota una condició addicional, demostrarem que la resta d'aquesta expansió està uniformement fitada respecte $\varepsilon \in (0,1]$.

Preliminars

Primerament donarem un resultat tècnic i totalment determinista que utilitzarem a la demostració del teorema principal d'aquesta secció, així com en capítols posteriors.

Sigui $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^\infty$. Assumim que l'aplicació $\varepsilon \to \phi^\varepsilon$ és $\mathcal{C}^\infty((0,1), \mathbb{R}^d)$. Fixem un multiíndex $\alpha \in \{1, \cdots, d\}^k$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $k \geq 1$. Aleshores la fórmula de Leibniz ens diu que per $j \geq 1$,

$$\frac{d^j}{d\,\varepsilon^j}\left(f(\phi^\varepsilon)\right) = \sum^{(j)} (\nabla^k_\alpha f)\,(\phi^\varepsilon)\;\nabla^{\beta_1}\phi^{\varepsilon,\alpha_1}\ldots\nabla^{\beta_k}\phi^{\varepsilon,\alpha_k}, \tag{3.3.1}$$

amb $\nabla^k_\alpha := \frac{\partial^k}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_k}}$, $\nabla^{\beta_i} := \frac{d^{\beta_i}}{d\varepsilon^{\beta_i}}$, i on el símbol $\sum^{(j)}$ és una abreviatura per

$$\sum_{k=1}^{j}\;\sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j\\ \beta_1,\ldots,\beta_k\geq 1}}\;\sum_{\substack{\alpha\in\{1,\ldots,d\}^k\\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}} c_j(\beta_1,\ldots,\beta_k).$$

Els coeficients $c_j(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ són obtinguts recursivament com segueix,

$$c_j(\beta_1,\ldots,\beta_k) = \sum_{i=1}^{k} c_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_k)\,,$$

amb els convenis

$$\begin{cases} c_1(1) = 1, \\ c_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_i-1,\ldots,\beta_k) = 0, \quad \text{si } \beta_i = 1 \text{ per } i<k, \\ c_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_k-1) = c_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_{k-1}), \quad \text{si } \beta_k = 1. \end{cases}$$

Els preliminars de la Secció 2.2 són vàlids en aquesta secció. Seguint amb les nocions donades llavors, una lleugera generalització del Lema 2.2.8 (D. Nualart, Proposició 3.2.2 [42]) dóna la fitació següent: Siguin Φ un vector aleatori no degenerat i $\Psi \in \mathbb{D}^\infty$. Per a tot $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ i multiíndex α, existeixen números reals positius $a, a', b, b', d, d', k', k''$ més grans que 1 tals que

$$\|H_\alpha(\Phi,\Psi)\|_{k,p} \leq C\,(k,p,\alpha)\,\|\Gamma_\Phi^{-1}\|_{k'}^{k''}\;\|\Phi\|_{d,b}^{a}\;\|\Psi\|_{d'b'}^{a'}\,, \tag{3.3.2}$$

$H_\alpha(\Phi, \Psi)$ definit a (2.2.2).

Considerem una funció g suficientment regular. De manera anàloga a (2.2.3), la mesura de Radon definida per

$$g \longrightarrow E\ (g(\Phi)\ \Psi)$$

té una densitat $q(y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, fitada i

$$q(y) \;=\; E\{\,\mathbb{1}_{\{\Phi>y\}}\, H_{(1,\cdots,d)}(\Phi,\Psi)\}. \tag{3.3.3}$$

La demostració és una petita modificació del Corol.lari 3.2.1 [42].

Per acabar, introduirem una nova noció. Considerem el semigrup $\{T_t, t \geq 0\}$ d'operadors de contracció sobre $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definit per

$$T_t F \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}\, I_n(f_n). \tag{3.3.4}$$

Aquest semigrup s'anomena d'Ornstein-Uhlenbeck, i té la propietat següent:
Si $F \in \mathbb{D}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, aleshores $T_t F \in \mathbb{D}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ i $\lim_{t\downarrow 0} \|T_t F - F\|_{k,p} = 0$ (vegeu (2.11) a [42]).

Resultats

Sigui $F \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$. La família $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ de vectors aleatoris a valors en $\mathbb{R}^d$ definida per (3.2.3) es dirà *uniformement no degenerada* si

$$\|\Gamma_{F^\varepsilon}^{-1}\|_p \leq C\,\varepsilon^{-2}, \tag{3.3.5}$$

per quassevol $\varepsilon \in (0,1],\ p \in [1,\infty)$.

Remarca 3.3.1 *Considerem el semigrup Ornstein-Uhlenbeck* $\{T_t, t \geq 0\}$ *definit a* (3.3.4). *Aleshores, des de* $F^\varepsilon = T_{-log\varepsilon} F$, $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\} \subset \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Remarca 3.3.2 *Sigui* $\sigma^2 = det(Cov(I_1(f_1)))$. *La condició de no degeneració uniforme* (3.3.5) *implica* $\sigma^2 > 0$.

Prova. Sigui

$$M_r^\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} n I_{n-1}(f_n(\cdot, r)); \quad r \in T,$$

i denotem per H^ε la matriu $(\langle M^{\varepsilon,i}, M^{\varepsilon,j}\rangle_{L^2(T)})_{1\le i,j\le d}$.
Aleshores $D_r F^\varepsilon = \varepsilon M_r^\varepsilon$, i (3.3.5) és equivalent a

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|(H^\varepsilon)^{-1}\|_p \le C, \quad \forall p \in [1,\infty). \tag{3.3.6}$$

Nosaltres provarem

$$L^1 - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} H^\varepsilon = Cov(I_1(f_1)). \tag{3.3.7}$$

Aleshores, el lema de Fatou i (3.3.6) mostren $\sigma^2 > 0$.
Per simplificar la demostració suposarem $d = 1$. Llavors,

$$E\,|H^\varepsilon - Var(I_1(f_1))| \le T_1^\varepsilon + T_2^\varepsilon,$$

amb

$$\begin{aligned} T_1^\varepsilon &= E\left|\sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{2(n-1)} n^2 \int_T (I_{n-1}(f_n(\cdot,r)))^2\, dr\right|, \\ T_2^\varepsilon &= E\left|\int_T \sum_{\substack{n,m=1\\ n\ne m}}^{\infty} \varepsilon^{n+m-2} nm\, I_{n-1}(f_n(\cdot,r))\, I_{m-1}(f_m(\cdot,r))\, dr\right|. \end{aligned}$$

Per una banda tenim

$$T_1^\varepsilon \le \varepsilon^2 \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (n-1)!\, \|f_n\|_2^2.$$

Anàlogament, $T_2^\varepsilon = \varepsilon T_{21}^\varepsilon$, amb

$$T_{21}^\varepsilon = E\left|\int_T \sum_{\substack{n,m=1\\ n\ne m}}^{\infty} \varepsilon^{n+m-3} nm\, I_{n-1}(f_n(\cdot,r))\, I_{m-1}(f_m(\cdot,r))\, dr\right|.$$

Fixem $\alpha > 1$. La desigualtat de Schwarz implica

$$\begin{aligned} T_{21}^\varepsilon &\le E\left|\sum_{\substack{n,m=1\\ n\ne m}}^{\infty} \varepsilon^{n+m-3} nm \Big(\int_T I_{n-1}(f_n(\cdot,r))^2 dr\Big)^{1/2} \Big(\int_T I_{m-1}(f_m(\cdot,r))^2 dr\Big)^{1/2} dr\right| \\ &\le E\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\, \big(\int_T I_{n-1}(f_n(\cdot,r))^2\, dr\big)^{1/2}\Big)^2 \\ &\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2+\alpha}\, (n-1)!\, \|f_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Com $F \in \mathbb{D}^\infty$, la sèrie $\sum_{n=1}^\infty n^{2+\alpha}\,(n-1)!\,\|f_n\|_2^2$ convergeix. Així

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(T_1^\varepsilon + T_2^\varepsilon) = 0,$$

demostrant (3.3.7). $\square$

Donem ara el resultat principal d'aquesta secció.

Teorema 3.3.3 *Sigui* $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ *una família uniformement no degenerada. La densitat* $p^\varepsilon(y)$*, per* $y = E(F^\varepsilon) = E(F)$*, té el desenvolupament de Taylor següent:*

$$p^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}\left\{\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\,\sigma} + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j\,\frac{1}{j\,!}\,p_j + \varepsilon^{N+1}\,\tilde{p}_{N+1}^\varepsilon\right\}. \tag{3.3.8}$$

Els coeficients p_j *s'anul.len si* j *és senar. Per* $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ *parell,*

$$p_j = E\Big(\mathbb{1}_{\{I_1(f_1)>0\}}\ P_j\Big), \tag{3.3.9}$$

amb P_j *pertanyent a* $\bigoplus_{k=0}^{3j+d}\mathcal{H}_k$*, i*

$$P_j = \sum^{(j)} H_{(1,\ldots,d)}\Big(I_1(f_1),\ H_\alpha(I_1(f_1)),\ \prod_{\ell=1}^k \beta_\ell!\ I_{\beta_\ell+1}\,(f_{\beta_\ell+1}^{\alpha_\ell}))\Big). \tag{3.3.10}$$

Endemés, si per qualssevol $j \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{N},\ p \in [1,\infty)$

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\left\|\frac{d^j}{d\,\varepsilon^j}\,\hat{F}^\varepsilon\right\|_{k,p} \le C\,, \tag{3.3.11}$$

aleshores, $\sup_{\varepsilon\in(0,1]}|\tilde{p}_{N+1}^\varepsilon|$ *és finit.*

Observacions.

(1) Des de (3.3.3) les identitats (3.3.9), (3.3.10) expressen que $p_j,\ j=1,\ldots,N$, són densitats en $x=0$ de mesures de Radon definides per

$$g \longmapsto E\Big(g\,(I_1(f_1))\ \sum^{(j)} H_\alpha\Big(I_1(f_1),\prod_{\ell=1}^k \beta_\ell\,!\ I_{\beta_\ell+1}\,(f_{\beta_\ell+1}^{\alpha_p})\Big)\Big).$$

(2) Observarem també al llarg de la prova que $\tilde{p}^{\varepsilon}_{N+1}$ és la densitat d'una mesura de Radon depenent de ε. Al final del Teorema 3.3.3, afegint la condició (3.3.11), provarem l'afitament uniforme d'aquesta densitat. En aquest cas, el darrer terme de l'expansió (3.3.8) és $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ quan $\varepsilon \downarrow 0$.

Prova del Teorema 3.3.3. Denotem per $\hat{p}^{\varepsilon}$ la densitat de $\hat{F}^{\varepsilon} = \frac{F^{\varepsilon}-E(F)}{\varepsilon}$, complint-se $p^{\varepsilon}(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}\,\hat{p}^{\varepsilon}(0)$. Nosaltres trobarem el desenvolupament per $\hat{p}^{\varepsilon}(0)$. Sigui $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^{\infty}$ amb suport compacte i simètrica. L'aplicació $\varepsilon \longmapsto f(\hat{F}^{\varepsilon})$ és $\mathcal{C}^{\infty}$, q.s., i a més a més,

$$\begin{aligned} f\left(\hat{F}^{\varepsilon}\right) &= f(\hat{F}^{0}) + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j\,!}\,\varepsilon^{j}\,\frac{d^{j}}{d\varepsilon^{j}}\left(f\left(\hat{F}^{\varepsilon}\right)\right)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &+ \varepsilon^{N+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N\,!}\,\frac{d^{N+1}}{d\eta^{N+1}}\left(f\left(\hat{F}^{\eta}\right)\right)\Big|_{\eta=t\varepsilon}\,dt\,. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Prenent esperances als dos costats de la igualtat anterior, utilitzant (3.3.1), (3.2.7) i la fórmula d'integració per parts (2.2.3) obtenim

$$\begin{aligned} E\Big(f\left(\hat{F}^{\varepsilon}\right)\Big) &= E\Big(f\left(I_1(f_1)\right)\Big) \\ &+ \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j!}\,\varepsilon^{j}\,E\Big\{f(I_1(f_1))\sum^{(j)} H_{\alpha}\Big(I_1(f_1),\,\prod_{\ell=1}^{k}\beta_{\ell}!\,I_{\beta_{\ell}+1}\left(f^{\alpha_{\ell}}_{\beta_{\ell}+1}\right)\Big)\Big\} \\ &+ \varepsilon^{N+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} E\Big\{f(\hat{F}^{\varepsilon t})\sum^{(N+1)} H_{\alpha}\Big(\hat{F}^{\varepsilon t},\,\prod_{\ell=1}^{k}\frac{d^{\beta_{\ell}}\,\hat{F}^{\eta,\alpha_{\ell}}}{d\eta^{\beta_{\ell}}}\Big|_{\eta=\varepsilon t}\Big)\Big\}dt. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Les hipòtesis del teorema asseguren (vegeu les Remarques 3.3.1, 3.3.2) que les mesures de Radon definides per $E\left(f(\hat{F}^{\varepsilon})\right)$, $E(f\left(I_1(f_1)\right))$, $E\{f(I_1(f_1))\;Q^j\}$, $j = 1,\ldots,N$, $E\{f(\hat{F}^{\varepsilon t})\;Q^{N+1,\varepsilon}\}$, amb

$$\begin{aligned} Q^{j} &= \sum^{(j)} H_{\alpha}\Big(I_1(f_1),\,\prod_{\ell=1}^{k}\beta_{\ell}!\,I_{\beta_{\ell}+1}\left(f^{\alpha_{\ell}}_{\beta_{\ell}+1}\right)\Big), \\ Q^{N+1,\varepsilon} &= \sum^{(N+1)} H_{\alpha}\Big(\hat{F}^{\varepsilon t},\,\prod_{\ell=1}^{k}\frac{d^{\beta_{\ell}}}{d\eta^{\beta_{\ell}}}\,\hat{F}^{\eta,\alpha_{\ell}}\Big|_{\eta=\varepsilon t}\Big), \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

tenen densitats $\mathcal{C}^{\infty}$. A més a més, una nova integració per parts a (3.3.13) dóna

$$\hat{p}^{\varepsilon}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\,\sigma} + \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j!}\,\varepsilon^{j}\,E\left\{\mathbb{1}_{\{I_1(f_1)>0\}}\;P_j\right\} + \varepsilon^{N+1}\,\tilde{p}^{\varepsilon}_{N+1}\,,$$

amb

$$\tilde{p}^{\varepsilon}_{N+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} E\Big\{ \mathbb{1}_{\{\hat{F}^{\varepsilon t}>0\}}$$

$$H_{(1,\dots,d)}\Big(\hat{F}^{\varepsilon t}, \sum^{(N+1)} H_\alpha\Big(\hat{F}^{\varepsilon t}, \prod_{\ell=1}^{k} \frac{d^{\beta_\ell}}{d\,\eta^{\beta_\ell}} \hat{F}^{\eta,\alpha_\ell}\Big|_{\eta=\varepsilon t}\Big)\Big)\Big\}dt. \quad (3.3.15)$$

Considerem la descomposició en caos de Wiener

$$\hat{F}^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} I_n(f_n)$$

i f una funció parella i regular. La mesura de Wiener és invariant sota la transformació $\mathcal{Z}(\omega) = -\omega$. Així, $f(\hat{F}^{-\varepsilon})$ i $f(\hat{F}^{\varepsilon})$ tenen la mateixa llei i els coeficients senars del desenvolupament són zero.
El fet que P_j tingui una descomposició finita en caos de Wiener, més precisament,

$$P_j \in \mathcal{J}_{3j+d} := \bigoplus_{k=0}^{3j+d} \mathcal{H}_k,$$

és una conseqüència del Lema 3.3.4. Efectivament, per a tot $k \in \{1,\dots,j\}$,

$$\Psi := \prod_{\ell=1}^{k} \beta_\ell!\; I_{\beta_\ell+1}(f^{\alpha_\ell}_{\beta_\ell+1}) \in \mathcal{J}_{2j},$$

doncs $\beta_1+\ldots+\beta_k = j$. Aleshores $Q_j \in \mathcal{J}_{3j}$, perquè la longitud de α és k. Finalment, des de $P_j = H_{(1,\dots,d)}\,(I_1(f_1),\, Q_j)$, el Lema 3.3.4 ens diu que $P_j \in \mathcal{J}_{3j+d}$.
Ara volem donar una fitació uniforme per $\tilde{p}^{\varepsilon}_{N+1}$ (vegeu (3.3.15)). Sigui $G^{\varepsilon} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{d^{\beta_\ell}}{d\varepsilon^{\beta_\ell}} \hat{F}^{\varepsilon}$. Clarament, n´hi ha prou provant

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} E\Big\{ \Big|H_{(1,\dots,d)}\,(\hat{F}^{\varepsilon},\, H_\alpha(\hat{F}^{\varepsilon},\, G^{\varepsilon}))\Big|\Big\} \leq C, \quad (3.3.16)$$

per a tot $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$, $\beta_1+\ldots+\beta_k = N+1$, $k = 1,\dots,N+1$, i alguna contant $C > 0$ finita. L'estimació (3.3.2) dóna, per números reals positius $k', k'', b, b', a, a', d, d'$,

$$E\Big|H_{(1,\dots,d)}\Big(\hat{F}^{\varepsilon},\, H_\alpha(\hat{F}^{\varepsilon}, G^{\varepsilon})\Big)\Big| \leq C\Big(\|\Gamma^{-1}_{\hat{F}^{\varepsilon}}\|^{k''}_{k'}\; \|\hat{F}^{\varepsilon}\|^{a}_{d,b}\; \|G^{\varepsilon}\|^{a'}_{d',b'}\Big).$$

La condició de no degeneració $\|\Gamma^{-1}_{\hat{F}^{\varepsilon}}\|_p \leq C\varepsilon^{-2}$, $\forall p \in (1,\infty)$ juntament amb la condició (3.3.11) implica (3.3.16). Això finalitza la demostració del teorema. □

Lema 3.3.4 *Sigui Φ un vector aleatori no degenerat d-dimensional que pertany al primer caos $\mathcal{H}_1$, $\Psi \in \mathcal{J}_\ell$, $\ell \geq 0$. Per a tot multiíndex $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_r) \in \{1, \ldots, d\}^r$, la variable aleatòria $H_\alpha(\Phi, \Psi)$ pertany a $\mathcal{J}_{\ell+r}$.*

Prova. Ho demostrarem per inducció sobre la longitud de α. Sigui $(b^{i,j})_{i,j=1,\ldots,d} = (\text{Cov } \Phi)^{-1}$ i $\Phi = I_1(f)$. Aleshores, per tot $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$H_{(i)}(\Phi, \Psi) = \sum_{j=1}^{d} b^{ij} \delta(\Psi f) \in \mathcal{J}_{\ell+1}\,.$$

Assumim que ho hem provat per qualsevol multiíndex de longitud $r-1$. Sigui $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \{1, \ldots, d\}^r$. Per la definició de H, vegeu (2.2.2),

$$H_\alpha(\Phi, \Psi) = H_{(\alpha_r)}\,(\Phi, \tilde{\Psi}) = \sum_{j=1}^{d} b^{\alpha_r,j}\ \delta(\tilde{\Psi} f)\,,$$

amb $\tilde{\Psi} \in \mathcal{J}_{\ell+r-1}$. D'aquí $H_\alpha(\Phi, \Psi) \in \mathcal{J}_{\ell+r}$ i acabem la demostració. $\square$

Observació. Sigui

$$\Phi(h) = E(F) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T^n} f_n(s_1, \ldots, s_n)\, dh_{s_1} \ldots dh_{s_n}, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Notem que la sèrie que defineix $\Phi(h)$ és absolutament convergent doncs

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\ \|f_n\|_2^2 < +\infty.$$

Assumim que existeix una successió $\{\omega^n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ tal que $P - \lim_{n\to\infty} \Phi(\omega^n) = F$, i a més, per a tot $h \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, existeix una transformació absolutament contínua $T_n^h : \Omega \to \Omega$ tal que $P - \lim_{n\to\infty} F \circ T_n^h = \Phi(h)$. Si, a més a més, $F^\varepsilon \in \mathbb{D}^\infty$ i $\|\det \Gamma_{F^\varepsilon}^{-1}\|_p < +\infty$, $\forall p \in (1, \infty)$, el Teorema 3.41 a [1] estableix la següent caracterització dels punts de positivitat de la densitat de F^ε:

$$\{p^\varepsilon(y) > 0\} = \{y : \exists\, h \in \mathcal{H} : \Phi(h) = y \quad \text{i} \quad D\Phi(h) \text{ exhaustiva}\}.$$

Assumim que la família $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ té la propietat d'aproximació descrita abans i és uniformement no degenerada. Aleshores, per $y = E(F)$, $p^\varepsilon(y) > 0$. Doncs $\Phi(0) = E(F) = y$ i, per a tot $k \in \mathcal{H}$,

$$D\,\Phi(0)\,(k) = \int_T f_1(s)\ k(s)\ d\mu(s).$$

Així, com $\sigma^2 := \det \Big(\mathrm{Cov}(I_1(f_1))\Big) > 0$, $D\,\Phi(h)$ és exhaustiva.

3.4 Aplicacions

Objectiu

Aplicarem el resultat general que hem demostrat a la Secció 3.3 a dos casos concrets de solucions d'equacions diferencials estocàstiques de tipus hiperbòlic. Una de les equacions és una modificació de l'equació estudiada al Capítol 2. L'altra va ésser estudiada per D. Nualart i M. Sanz-Solé a [44].

3.4.1 Una equació diferencial estocàstica hiperbòlica

Preliminars

Sigui $T = [0,1]^2$ i $\{W_{s,t},\ (s,t) \in T\}$ un drap brownià. Considerem

$$\frac{\partial^2 X_{s,t}}{\partial s\, \partial t} = a_3(X_{s,t},\ s,t)\, \dot{W}_{s,t} + a_4(X_{s,t},\ s,t) + a_1(s,t)\, \frac{\partial X_{s,t}}{\partial s} + a_2(s,t)\, \frac{\partial X_{s,t}}{\partial t}, \tag{3.4.1}$$

amb condició inicial determinista $X_{s,t} = x_0$ si $(s,t) \in T,\ s{\cdot}t = 0$. Per més informació sobre aquesta equació vegeu el Capítol 2 d'aquesta memòria, [18], i sobre tot [46], [47] i [45].

Per la situació particular que es dóna en aquest capítol, precisarem de les hipòtesis següents:

($\mathrm{H}_2 1$) $a_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ són funcions diferenciables, fitades i amb derivades parcials de primer ordre fitades.

(H$_2$2) $a_i : \mathbb{R} \times T \to \mathbb{R}$, $i = 3, 4$ són funcions *lineals* respecte la variable espai, és a dir,

$$a_i(x,\, s, t) = a_{i1}(s, t)x + a_{i2}(s, t)\,.$$

A més a més, suposem que a_{31}, a_{32}, a_{41} i a_{42} són contínues.

Una solució de (3.4.1) és un procés estocàstic $\{X_{s,t},\ (s, t) \in T\}$ que satisfà

$$X_{s,t} = x_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}\,(u, v)\ \{a_3\,(X_{u,v},\, u, v)\, dW_{u,v} + a_4(X_{u,v},\, u, v)\, du\, dv\}\,, \qquad (3.4.2)$$

on $R_{s,t} = [0, s] \times [0, t]$ i $\gamma_{s,t}(u, v)$ és la funció de Green estudiada a l'Àpendix 2.4.

El Teorema 2.1 a [46] prova l'existència i unicitat d'un procés continu i adaptat $\{X_{s,t}, (s, t) \in T\}$ fitat en L^p per qualsevol $p \geq 2$. A més, $X_{s,t} \in \mathbb{D}^\infty$, $\forall (s, t) \in T$. Per a tot $\varepsilon \in (0, 1]$, sigui

$$X^\varepsilon_{s,t} = x_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u, v)\, \{\varepsilon\, a_3(X^\varepsilon_{u,v}, u, v)\ dW_{u,v} + a_4(X^\varepsilon_{u,v}, u, v)\, du\, dv\} \qquad (3.4.3)$$

i, per a tot $h \in \mathcal{H}$, on $\mathcal{H}$ és l'espai de Cameron-Martin associat a $\{W_{s,t}, (s, t) \in T\}$, considerem

$$S^h_{s,t} = x_0 + \int_{R_{s,t}} \gamma_{s,t}(u, v)\, \{a_3(S^h_{u,v}, u, v)\ dh_{u,v} + a_4(S^h_{u,v}, u, v)\, du\, dv\}\,.$$

Resultats

Provem en primer lloc que aquesta família compleix la condició (3.2.3).

Proposició 3.4.1 *Assumim* (H$_2$1) *i* (H$_2$2). *Per a tot $z \in T$, $z = (s, t)$, $st \neq 0$, sigui*

$$X_z = E\, X_z + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$$

la descomposició en caos de Wiener de la solució (3.4.2) *per $z = (s, t)$. Aleshores, per a tot $\varepsilon \in (0, 1]$,*

$$X^\varepsilon_z = E\, X_z + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n\, I_n(f_n)\,.$$

Prova. Sigui $X_z^\varepsilon = E\,X_z^\varepsilon + \sum_{n=1}^\infty I_n(f_n^\varepsilon)$. Des de (3.2.2), és suficient provar $E\,X_z = E\,X_z^\varepsilon$ i $E\,(D_{\underline{\alpha}}^n X_z^\varepsilon) = \varepsilon^n\, E(D_{\underline{\alpha}}^n X_z)$, $n \geq 1$.
Prenent esperances en (3.4.2), (3.4.3), i per unicitat de solució, obtenim immediatament

$$E\,X_z = E\,X_z^\varepsilon = S_z^0\,.$$

Fixem $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in R_z$. Denotem per $\underline{\alpha}$ el vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$; sigui $\alpha^i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_N)$, $N \geq 2$, $\sup \underline{\alpha} = \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_N$. La forma particular dels coeficients a_i, $i = 3, 4$ i les regles del càlcul de Malliavin donen les expressions següents per $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_{\underline{\alpha}}^N\, X_z = &\sum_{i=1}^N a_{3,1}(\alpha_i)\gamma_z(\alpha_i)\; D_{\alpha^i}^{N-1}\; X_{\alpha_i} \\ &+ \int_{[\sup\, \underline{\alpha}, z]} \gamma_z(\eta)\, [a_{3,1}\,(\eta)\, D_{\underline{\alpha}}^N\, X_\eta\, dW_\eta + a_{4,1}\,(\eta)\; D_{\underline{\alpha}}^N\; X_\eta\, d\eta]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\underline{\alpha}}^N\, X_z^\varepsilon = &\sum_{i=1}^N \varepsilon\, a_{3,1}(\alpha_i)\gamma_z(\alpha_i)\; D_{\alpha^i}^{N-1}\; X_{\alpha_i}^\varepsilon \\ &+ \int_{[\sup\, \underline{\alpha}, z]} \gamma_z(\eta)\, [\varepsilon\, a_{3,1}\,(\eta)\, D_{\underline{\alpha}}^N\, X_\eta^\varepsilon\, dW_\eta + a_{4,1}\,(\eta)\; D_{\underline{\alpha}}^N\; X_\eta^\varepsilon\, d\eta]\,. \end{aligned}$$

Sigui $U_{\underline{\alpha}}^N(z)$, $N \geq 1$, la solució de l'equació

$$U_{\underline{\alpha}}^N(z) = 1 + \int_{[\sup\, \underline{\alpha}, z]} \gamma_z(\eta)\; a_{4,1}(\eta)\; U_{\underline{\alpha}}^N(\eta)\, d\eta\,.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} E\,(D_{\underline{\alpha}}^N\, X_z) &= \Big(\sum_{i=1}^N a_{3,1}(\alpha_i)\, \gamma_z(\alpha_i)\; E(D_{\alpha^i}^{N-1}\, X_{\alpha_i})\Big) U_{\underline{\alpha}}^N(z), \\ E\,(D_{\underline{\alpha}}^N\, X_z^\varepsilon) &= \Big(\sum_{i=1}^N \varepsilon\, a_{3,1}(\alpha_i)\, \gamma_z(\alpha_i)\; E(D_{\alpha^i}^{N-1}\, X_{\alpha_i}^\varepsilon)\Big) U_{\underline{\alpha}}^N(z)\,. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Per $N = 1$,

$$E\,(D_\alpha\, X_z) = \gamma_z(\alpha)\, [a_{3,1}(\alpha)\; E\,X_\alpha + a_{3,2}(\alpha)]\; U_\alpha^1\,(z)\,,$$

$$E\,(D_\alpha\, X_z^\varepsilon) = \varepsilon\, \gamma_z(\alpha)\, [a_{3,1}(\alpha)\; E\,X_\alpha^\varepsilon + a_{3,2}(\alpha)]\; U_\alpha^1\,(z)\,.$$

Així, $E(D_\alpha X_z^\varepsilon) = \varepsilon\, E(D_\alpha X_z)$, perquè $E\, X_\alpha = E\, X_\alpha^\varepsilon$. Aquest fet i (3.4.4) permeten d'acabar la demostració usant un argument recursiu. $\square$

A partir d'ara treballarem amb un $z \in T$ fixat i que no pertany als eixos. Utilitzarem la notació següent:

$$\hat{X}_z^\varepsilon = \frac{X_z^\varepsilon - S_z^0}{\varepsilon}, \quad X_j^\varepsilon(z) = \frac{d^j}{d\,\varepsilon^j}\, X_z^\varepsilon, \quad \hat{X}_j^\varepsilon(z) = \frac{d^j}{d\,\varepsilon^j}\, \hat{X}_z^\varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

El Corol.lari 3.2.4 aplicat a $F = X_z$ ens diu que les derivades existeixen, aleshores podem fàcilment comprovar

$$\begin{aligned} X_1^\varepsilon(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \Big((\, a_{3,1}(\eta)\, X_\eta^\varepsilon + a_{3,2}(\eta)\,)\, d\,W_\eta + \varepsilon\, a_{3,1}(\eta)\, X_1^\varepsilon(\eta)\, d\,W_\eta \\ &+ a_{4,1}(\eta)\, X_1^\varepsilon(\eta)\, d\eta \Big), \qquad (3.4.5) \\ X_j^\varepsilon(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \Big(j\, a_{3,1}(\eta)\, X_{j-1}^\varepsilon(\eta)\, d\,W_\eta + \varepsilon\, a_{3,1}(\eta)\, X_j^\varepsilon(\eta)\, d\,W_\eta \\ &+ a_{4,1}(\eta)\, X_j^\varepsilon(\eta)\, d\eta \Big), \qquad j \geq 2. \qquad (3.4.6) \end{aligned}$$

Sigui $X_j^0(z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_j^\varepsilon(z)$, $j \geq 1$. Aleshores $X_j^0(z)$, $j \geq 1$ satisfan les equacions diferencials estocàstiques següents:

$$\begin{aligned} X_1^0(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \Big((a_{3,1}(\eta)\, S_\eta^0 + a_{3,2}(\eta)\,)\, d\,W_\eta + a_{4,1}(\eta)\, X_1^0(\eta)\, d\,\eta \Big), \qquad (3.4.7) \\ X_j^0(z) &= \int_{R_z} \gamma_z(\eta) \Big(j\, a_{3,1}(\eta)\, X_{j-1}^0(\eta)\, d\,W_\eta + a_{4,1}(\eta)\, X_j^0(\eta)\, d\,\eta \Big). \qquad (3.4.8) \end{aligned}$$

Lema 3.4.2 *Suposem que* ($H_2$1) *i* ($H_2$2) *són satisfetes. Aleshores*

$$\hat{X}_j^\varepsilon(z) = \frac{1}{j+1} \left[X_{j+1}^0(z) + \varepsilon \int_0^1 (1 - \xi^{j+1})\, X_{j+2}^{\xi\varepsilon}(z)\, d\xi \right], \qquad (3.4.9)$$

$j \in \mathbb{Z}^+$, *on, per conveni,* $\hat{X}_0^\varepsilon(z) = \hat{X}_z^\varepsilon$.

Al Capítol 4 (vegeu el Lema 4.3.4) demostrarem un resultat similar però de caràcter més general, aquest és el motiu perquè no es dóna en aquest moment la demostració. Aquesta es fa utilitzant el desenvolupament de Taylor de X_z^ε en $j = 0$, i mitjançant un argument resursiu.

A la propera proposició comprovarem la hipòtesi (3.3.11) del Teorema 3.3.3 en el cas particular de $\hat{F}^\varepsilon = \hat{X}^\varepsilon_z$.

Observació. Sabem que existeix una versió de $\{\hat{X}^\varepsilon_j(z),\ z \in T\}$ que és contínua repecte ε. Des del lema previ i (3.2.7) resulta que

$$I_n(f_n) = \frac{X^0_n(z)}{n!}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Proposició 3.4.3 *Assumim* (H$_2$1) *i* (H$_2$2). *Per a tot* $j \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{N},\ p \in (1,\infty)$,

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \left\| \frac{d^j}{d\,\varepsilon^j}\, \hat{X}^\varepsilon_z \right\|_{k,p} \leq C\,.$$

Prova. Per (3.4.9), la prova és una conseqüència de demostrar els següents fets

$$\sup_{z\in T} \|X^0_j(z)\|_{k,p} \leq C\,, \tag{3.4.10}$$

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\ \sup_{z\in T}\ E\,(\,|X^\varepsilon_j(z)\,|^p) \leq C\,, \tag{3.4.11}$$

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\ \sup_{z\in T}\ \sup_{\underline{\alpha}:\,\sup \underline{\alpha}<z}\ E(\,|D^k_{\underline{\alpha}}\, X^\varepsilon_j(z)\,|^p) \leq C\,, \tag{3.4.12}$$

per a tot $j,\ k \in \mathbb{N},\ p \in (1,\infty)$ i alguna constant C positiva.
L'Observació anterior ens diu que $X^0_j(z) \in \mathcal{H}_j$, per qualsevol $j \in \mathbb{N}$. Això ens dóna (3.4.10).
Nosaltres sabem (vegeu [46])

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\ \sup_{z\in T}\ E\,(\,|X^\varepsilon_z|^p) \leq C\,, \quad p \in (1,\infty)\,.$$

Aleshores, un argument estàndard basat en les desigualtats de Burkholder, Hölder i Gronwall aplicat a les equacions (3.4.5) i (3.4.6) prova, recursivament, (3.4.11).
Finalment, per demostrar (3.4.12) nosaltres haurem d'escriure les equacions satisfetes per $D^k_{\underline{\alpha}}\, X^\varepsilon_j(z),\ j \in \mathbb{N}$; les podem donar utilitzant (3.4.5), (3.4.6) i les regles del càlcul de Malliavin. Aleshores procedirem com a la demostració de (3.4.11). Aquesta estimació ens permet d'emprar l'argument recurrent que necessitem. □

Acabarem l'estudi d'aquest exemple comprovant la condició de no degeneració uniforme. Necessitem assumir les següents hipòtesis addicionals sobre els coeficients:

($H_2$3) $|a_{3j}\,(s,t) - a_{3j}\,(s,' t')| \leq C\,\{\,|s-s'|+|t-t'|\,\}$, $j=1,2$, $(s,t),(s',t') \in T$.

($H_2$4) $\sup_{t\in[0,1]}\ |a_{4j}\,(s,t) - a_{4j}\,(s',t)| \leq C\,|s-s'|$, $\quad j=1,2$, $(s,s') \in T$

$\sup_{(s,t)\in T}\ |\partial_1^2\, a_{3j}(s,t)| \leq C$, $\quad j=1,2$,

($H_2$5) $a_{31}\,(0,t)x_0 + a_{32}(0,t) \neq 0$, $\quad t \neq 0$,

($H_2$6) $a_{31}(0,v)x_0 + a_{32}(0,v) = 0$, $\quad \forall v \in (0,t]$

$$\partial_1\, a_{31}(0,t)\,x_0 + \partial_1\, a_{32}(0,t) + a_{31}(0,t)\int_0^t \gamma_{0,t}(0,w)\,(\,a_{41}\,(0,w)\,x_0 + a_{42}\,(0,w))dw \neq 0\,,$$

on ∂_1 vol dir la derivada respecte la variable s.
La Proposició 3.5 a [46] estableix que $X_{s,t} \in \mathbb{D}^\infty$ sota ($H_2$1) i ($H_2$2), per a tot $(s,t) \in T$.

Proposició 3.4.4 *Sigui $z=(s,t)\in T$, $s\cdot t \neq 0$ fixat. Un dels següents conjunts de condicions implica $\|\Gamma^{-1}_{X^\varepsilon_z}\|_p \leq C\,\varepsilon^{-2}$, per alguna contant C positiva i cada $\varepsilon \in (0,1]$, $p \in (1,\infty)$*

(a) ($H_2$1), ($H_2$2), ($H_2$3) *i* ($H_2$5),

(b) ($H_2$1), ($H_2$2), ($H_2$3), ($H_2$4) *i* ($H_2$6).

Prova. N'hi ha prou demostrant que la inversa de la variable aleatòria

$$\varepsilon^{-2}\int_{R_z} |D_\alpha X^\varepsilon_z|^2\, d\alpha$$

té moments de qualsevol ordre. Considerem l'equació diferencial estocàstica

$$Y^\varepsilon_z(\alpha) = \gamma_z(\alpha) + \int_{(\alpha,z]} \gamma_z(\eta)\; Y^\varepsilon_\eta(\alpha)\;\{\varepsilon\, a_{3,1}(\eta)\; dW_\eta + a_{4,1}(\eta)\, d\eta\}\,, \quad 0 \leq \alpha \leq z\,.$$

Aleshores, $D_\alpha\; X^\varepsilon_z = \varepsilon\, a_3(X^\varepsilon_\alpha,\alpha)\; Y^\varepsilon_z(\alpha)$. Conseqüentment, hem de provar

$$P\Big\{\int_{R_z}\Big(a_3(X^\varepsilon_\alpha,\alpha)\; Y^\varepsilon_z(\alpha)\Big)^2 d\alpha \leq \eta\Big\} \leq \eta^p\,,$$

per a tot $p \in (1,\infty)$ i $\eta \leq \eta_0$.

Això ha estat provat a les Proposicions 3.6 i 3.7 de l'article de C. Rovira i M. Sanz-Solé [46]. Indiquem que encara que les hipòtesis ($H_2 3$) i ($H_2 4$) en aquesta referència són mes fortes, el resultat pot ésser igualment establert. $\square$

Les Proposicions 3.4.1, 3.4.3, 3.4.4 donen tots els ingredients necessaris per aplicar el Teorema 3.3.3 a la família $\{X_z^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ definida en (3.4.3) amb $z = (s,t) \in T,\ s \cdot t \neq 0$.

3.4.2 Una equació d'Itô en el pla

<u>**Preliminars**</u>

Considerem el procés de Wiener unidimensional $\{W_{s,t}, (s,t) \in T\}$, $T = [0,1]^2$, els camps $A(x) = \binom{x_1}{x_2}$, $A_0(x) = \binom{x_2}{x_1}$ i l'equació diferencial estocàstica sobre $\mathbb{R}^2$

$$Z_z = x_0 + \int_{R_z} [A(Z_\eta)\, dW_\eta + A_0(Z_\eta)\, d\eta]\,, \quad z \in T\,, \tag{3.4.13}$$

amb condició inicial $x_0 = \binom{1}{0}$. Sigui $\{Z_z^\varepsilon,\ z \in T\}$ la solució de

$$Z_z^\varepsilon = x_0 + \int_{R_z} [\varepsilon\, A(Z_\eta^\varepsilon)\, dW_\eta + A_0(Z_\eta^\varepsilon)\, d\eta],$$

i $\{\Psi(z),\ z \in T\}$ donat per

$$\Psi(z) = x_0 + \int_{R_z} A_0(\Psi(\eta)) d\eta\,.$$

<u>**Resultats**</u>

Sigui z un punt fixat de T que no es troba sobre els eixos. L'anàleg a la Proposició 3.4.1 per la solució de (3.4.13) pot ser provat amb els mateixos arguments degut a la linealitat dels coeficients A i A_0. Així,

$$Z_z^\varepsilon = E\,Z_z + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n\; I_n(f_n)\,,$$

on $Z_z = E\,Z_z + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$ és la descomposició en caos de Wiener del funcional de L^2, Z_z.
Sigui $\hat{Z}_z^\varepsilon = \frac{Z_z^\varepsilon - \Psi(z)}{\varepsilon}$. Seguint les idees de la prova de la Proposició 3.4.3 obtenim

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \left\| \frac{d^j}{d\,\varepsilon^j}\; \hat{Z}_z^\varepsilon \right\|_{k,p} \leq C\,,$$

per qualssevol $j \in Z^+$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$.
A [44] han provat que $Z_z \in \mathbb{D}^\infty$ i $\|\Gamma_{Z_z}^{-1}\|_p \leq C$, per qualsevol $p \in [1,\infty)$. Considerant els coeficients εA en lloc de A tenim $\|\Gamma_{Z_z^\varepsilon}^{-1}\|_p \leq C_\varepsilon$, $p \in [1,\infty)$, per alguna constant C_ε que depèn de $\varepsilon \in (0,1]$.
La derivada de Malliavin de Z_z^ε satisfà l'equació diferencial estocàstica

$$D_\alpha\, Z_z^\varepsilon = A\,(Z_\alpha^\varepsilon) + \int_{(\alpha,z]} [\varepsilon \nabla A\,(Z_\eta^\varepsilon)\; D_\alpha\, Z_\eta^\varepsilon\, dW_\eta + \nabla A_0(Z_\eta^\varepsilon)\, D_\alpha\, Z_\eta^\varepsilon\, d\eta]\,. \tag{3.4.14}$$

Nosaltres finalitzarem aquesta secció comprovant $\|\Gamma_{Z_z^\varepsilon}^{-1}\|_p \leq C\,\varepsilon^{-2}$ per a tot $\varepsilon \in (0,1]$, $p \in (1,\infty)$ i alguna constant C positiva. N'hi haurà prou provant

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} E\,(\,|\det \gamma_\varepsilon^{-1}|^p) \leq C\,, \quad p \in (1,\infty)\,,$$

amb $\gamma_\varepsilon = \varepsilon^{-2}\,\Gamma_{Z_z^\varepsilon}$. Aquesta propietat serà conseqüència del fet següent:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\; \sup_{|v|=1}\; P\{\, v^* \gamma_\varepsilon\, v \leq \eta\} \leq C\,(p)\,\eta^p\,, \tag{3.4.15}$$

per a tot $p \in (1,\infty)$ i η suficientment petita. Utilitzant (3.4.14) podem obtenir

$$\gamma_\varepsilon^{ij} = \int_{R_z} \xi_k^{\varepsilon,i}(z,r)\;\, A^k(Z_r^\varepsilon)\; \xi_{k'}^{\varepsilon,j}(z,r)\;\, A^{k'}(Z_r^\varepsilon)\, dr\,, \quad 1 \leq i,j \leq 2\,,$$

on $\{\xi^\varepsilon(z,r),\ 0 \leq r \leq z\}$ és un procés a valors en $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ solució a l'equació diferencial estocàstica

$$\xi^\varepsilon(z,r) = I + \int_{(r,z]} \{\, \varepsilon\, \nabla A(Z_\eta^\varepsilon)\;\, \xi^\varepsilon(\eta,r)\, d\,W_\eta + \nabla A_0(Z_\eta^\varepsilon)\;\, \xi^\varepsilon(\eta,r)\; d\eta\,\}\,.$$

Aleshores, com a l'article de D. Nualart i M. Sanz-Solé [44], la demostració de (3.4.15) es redueix a veure

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]}\sup_{|v|=1} P\Big\{\int_0^s |v_i\, A^i(Z^\varepsilon_{\sigma t})\,|^2\, d\sigma \le \eta\Big\} \le C(p)\,\eta^p\,.$$

Sigui $\mathcal{D} = \{A,\ A_0^\nabla A\}$ on $A_0^\nabla A$ denota la derivada covariant de A en la direcció de A_0. Clarament, el span de $\mathcal{D}$ en $x_0 = \binom{1}{0}$ és $\mathbb{R}^2$. Conseqüentment, existeixen $R > 0,\ c > 0$ tals que

$$\sum_{V\in\mathcal{D}} \Big(v_i\, V^i(y)\Big)^2 \ge c\,, \tag{3.4.16}$$

per a tot $|v| = 1$ i $y \in B_R(x_0)$.
Sigui $S^\varepsilon = \inf\{\sigma \ge 0\ : \sup_{\xi\le\sigma,\tau\le t} |Z^\varepsilon_{\xi\tau} - x_0| \ge R\} \wedge s$. Aleshores

$$P\Big\{\int_0^{S^\varepsilon} |v_i\, A^i(Z^\varepsilon_{\sigma t})|^2\, d\,\sigma < \eta\Big\} \le p_1^\varepsilon(\eta) + p_2^\varepsilon(\eta) + p_3^\varepsilon(\eta),$$

amb

$$p_1^\varepsilon(\eta) = P\Big\{\int_0^{S^\varepsilon} |v_i\, A^i(Z^\varepsilon_{\sigma t})|^2\, d\,\sigma < \eta,\ \int_0^{S^\varepsilon} |v_i(A_0^\nabla\, A)^i\,(Z^\varepsilon_{\sigma t})|^2\, d\sigma < \eta^\alpha,\ S^\varepsilon \ge \eta^\beta\Big\},$$
$$p_2^\varepsilon(\eta) = P\,\{S^\varepsilon < \eta^\beta\}\,,$$
$$p_3^\varepsilon(\eta) = P\Big\{\int_0^{S^\varepsilon} |v_i\, A^i(Z^\varepsilon_{\sigma t})|^2\, d\,\sigma < \eta,\ \int_0^{S^\varepsilon} |v_i(A_0^\nabla\, A)^i\,(Z^\varepsilon_{\sigma t})|^2\, d\sigma \ge \eta^\alpha\Big\},$$

on $0 < \beta < \alpha < 1$.
La propietat (3.4.16), elegint β, α adequats, dóna $p_1^\varepsilon(\eta) = 0$ per η suficientment petit. Les desigualtats de Txebitxev, Burkholder i Hölder asseguren $\sup_{\varepsilon\in(0,1]} p_2(\eta) \le C\eta^{\beta q/2}$. El terme $p_3^\varepsilon(\eta)$ es té que analitzar amb més detall. Aquest estudi ha estat donat a [44] (pg. 15) i correspon al terme A_2 de la referència amb $V = A$, $X_{\sigma\cdot} = Z^\varepsilon_{\sigma\cdot}$, $\varepsilon^{m(j-1)} = \eta$, $\alpha = \frac{m(j)}{m(j-1)}$. Indiquem que el span $\Big(A(x_0),\ A_0^\nabla\ A(x_0)\Big) = \mathbb{R}^2$ implica el compliment de la hipòtesi (H2) del Teorema 2.2 a [44], doncs amb la notació de l'article

$$A(x_0) = A^1(x_0),\quad A_0^\nabla A(x_0) = \Big[\int_0^1 (A_0 * A)\ (\tau, 1)\, d\tau\Big]\,(x_0)\,.$$

Utilitzant totes les estimacions que hem mencionat, la demostració es pot fer uniformement en ε.

Capítol 4

Comportament asimptòtic de la densitat sobre la diagonal en una equació estocàstica de la calor

4.1 Introducció

Sigui $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ un espai de Wiener abstracte i $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\}$ una família de funcionals de Wiener a valors en $\mathbb{R}^d$. Assumim que, per a tot $\varepsilon \in (0,1]$, $P \circ (F^\varepsilon)^{-1}$ té una densitat respecte la mesura de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$, denotada per p^ε.

Al capítol anterior hem considerat una família particular de funcionals $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in [0,1]\}$ definida a (3.1.2), i hem trobat, sota certes condicions sobre la família, el desenvolupament de Taylor de la densitat de F^ε, $p^\varepsilon(y)$, en $\varepsilon = 0$ i per $y = EF^\varepsilon$. Quan hem pres F^ε com la solució d'una equació en derivades parcials estocàstica hem hagut d'exigir linealitat als coeficients respecte la variable espai.
En aquest capítol generalitzarem el resultat de manera que no sigui necessari exigir aquesta condició. El mètode desenvolupat és el mateix que el del Capítol 3.
Concretament, a la Secció 4.2 donem un resultat sobre l'expansió asimptòtica de densitats de funcionals generals seguint les idees desenvolupades al Capítol 3. Ara serem capaços d'aplicar aquest resultat general a situacions que no cobria el cas del

capítol anterior, per exemple, no serà necessari demanar linealitat sobre els coeficients.

El propòsit d'aquest capítol és obtenir el desenvolupament asimptòtic, quan $\varepsilon \downarrow 0$, per les densitats de la següent família d'equacions diferencials en derivades parcials estocàstiques perturbades de tipus parabòlic

$$\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 X^\varepsilon}{\partial x^2}(t,x) + \varepsilon\sigma(X^\varepsilon(t,x))\,\dot{W}_{t,x} + b(X^\varepsilon(t,x)), \tag{4.1.1}$$

$(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$, amb condició inicial $X^\varepsilon(0,x) = X_0(x)$, i condicions frontera, o bé Neumann (i.e. $\frac{\partial}{\partial x}X(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}X(t,1) = 0$), o bé Dirichlet (i.e. $X(t,0) = X(t,1) = 0$). El procés $\{\dot{W}_{t,x}, (t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$ és un soroll blanc espai-temps i els coeficients $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions regulars.
Una solució de (4.1.1) és un procés $\{X^\varepsilon(t,x),\ (t,x) \in [0,T]\times[0,1]\}$ satisfent l'equació d'evolució

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)\,X_0(y)dy \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Big\{\varepsilon\,\sigma\Big(X^\varepsilon(s,y)\Big)\,W(ds,dy) + b\Big(X^\varepsilon(s,y)\Big)\,ds\,dy\Big\}, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

on $G_t(x,y)$ és la solució fonamental de l'equació de la calor sobre $[0,T] \times [0,1]$ amb una de les dues condicions frontera abans citades, és a dir,

$$\begin{aligned} G_t(x,y) &= \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{ \exp\Big(- \frac{(y-x-2n)^2}{4t}\Big) \\ &\quad + \gamma\ \exp\Big(- \frac{(y+x-2n)^2}{4t}\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

amb $\gamma = 1$ o $\gamma = -1$ per condicions frontera Neumann o Dirichlet, respectivament (vegeu, per exemple, el curs de Saint-Flour de J.B. Walsh [55]).

V. Bally i E. Pardoux [6] han provat l'existència i regularitat de la densitat $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ de $X^\varepsilon(t,x)$, solució de (4.1.2), per $(t,x) \in (0,T] \times (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1]$ fixats. Endemés, la densitat és estrictament positiva per a tot $y \in \mathbb{R}$.

Sigui $\{\Psi_{X_0}(t,x), (t,x) \in [0,T]\times[0,1]\}$ la solució de l'equació d'evolució determinista

$$\Psi_{X_0}(t,x) = \int_0^1 G_t(x,y)X_0(y)dy + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)b\Big(\Psi_{X_0}(s,y)\Big)ds\,dy\,. \tag{4.1.3}$$

A la Secció 4.3 aplicarem el resultat general que hem comentat al principi d'aquesta introducció a la demostració del desenvolupament de Taylor de $p^{\varepsilon}_{t,x}(y)$ en $\varepsilon = 0$ per $y = \Psi_{X_0}(t,x)$.

En la literatura clàssica de les difusions, aquest valor y correspon a la condició inicial. En aquest cas, a l'anàlisi del comportament asimptòtic de la densitat se l'anomena *estudi asimptòtic sobre la diagonal*, d'aquí que conservem aquesta noció.

4.2 Desenvolupament d'un funcional general

Objectiu

Enunciarem un resultat que generalitza el Teorema 3.3.3. És a dir, trobarem el desenvolupament asimptòtic de les densitats d'una família de funcionals més generals que els del capítol anterior amb l'objectiu de tenir un ventall més gran d'aplicacions.

Preliminars

Seran útils les eines introduïdes als Preliminars de les Seccions 2.2, 3.3.

A més, redefinirem la noció de família uniformement no degenerada. La nova definició va lligada a la donada a (3.3.5), si bé, aquesta nova serà de caràcter més general. Recordem que al capítol 3 treballàvem amb una família concreta i particular de funcionals.

Definició 4.2.1 *Una família F^{ε}, $\varepsilon \in [0,1]$ d'elements de $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ s'anomenarà uniformement no degenerada si satisfà les dues properes condicions:*

(i) $F^0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F^{\varepsilon}$, *q.s.*

(ii) $\sup_{\varepsilon\in[0,1]} \|\Gamma_{F^\varepsilon}^{-1}\|_p \leq C$, *per qualsevol* $p \in [1,\infty)$.

Observació. Si considerem una família $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in [0,1]\}$ que sigui uniformement no degenerada podem assegurar que F^ε posseeix una densitat regular per cada $\varepsilon \in [0,1]$.

Resultats

Donem l'esmentada generalització del Teorema 3.3.3.

Teorema 4.2.2 *Sigui* $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in [0,1]\}$ *una família uniformement no degenerada de vectors aleatoris satisfent les condicions següents:*

(a) *La família* $\{F^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1)\}$ *té una versió* $\mathcal{C}^\infty$ *respecte* ε. *Sigui* $F_j^\varepsilon = \frac{d^j F^\varepsilon}{d\varepsilon^j}$, $j \in \mathbb{N}$. *Aleshores els límits*

$$F_j^0 := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_j^\varepsilon, \text{q.s.}$$

existeixen per a tot $j \in \mathbb{N}$,

(b) F_j^ε *pertany a* $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^d)$, *per a tot* $j \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in [0,1)$.

Aleshores la densitat $p^\varepsilon(y)$ *de* F^ε *té l'expansió de Taylor següent:*

$$p^\varepsilon(y) = p^0(y) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \frac{1}{j!} p_j(y) + \varepsilon^{N+1} \tilde{p}_{N+1}^\varepsilon(y), \tag{4.2.1}$$

on $p^0(y)$ *és la densitat de* F^0, *i per* $j \geq 1$,

$$p_j(y) = E\left\{ \mathbb{1}_{\{F^0>y\}} P_j \right\},$$

amb

$$P_j = \sum^{(j)} H_{(1,\dots,d)}\left(F^0, H_\alpha\left(F^0, \prod_{\ell=1}^{k} F_{\beta_\ell}^{0,\alpha_\ell}\right)\right).$$

Endemés, si per qualssevol $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty)$,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \|F_j^\varepsilon\|_{k,p} \leq C, \tag{4.2.2}$$

aleshores $\sup_{\varepsilon\in(0,1]} \left(|\tilde{p}_{N+1}^\varepsilon(y)|\right)$ *és finit.*

Prova. La demostració és molt semblant a la donada al Teorema 3.3.3, per tant exposarem tan sols els trets més destacats.
Sigui $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funció $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte i simètrica. L'aplicació $\varepsilon \in (0,1) \longmapsto f(F^\varepsilon)$ és $\mathcal{C}^\infty$, q.s., i la seva expansió de Taylor dóna

$$f(F^\varepsilon) = f(F^0) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\varepsilon^j} \left(f(F^\varepsilon)\right)\Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} \frac{d^{N+1}}{d\eta^{N+1}} \left(f(F^\eta)\right)\Big|_{\eta=t\varepsilon} dt.$$

Prenent esperances i utilitzant (3.3.1) i (2.2.3) obtenim

$$E(f(F^\varepsilon)) = E(f(F^0)) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \frac{1}{j!} E\Big\{f(F^0) \sum^{(j)} H_\alpha\Big(F^0, \prod_{\ell=1}^{k} F_{\beta_\ell}^{0,\alpha_\ell}\Big)\Big\} + \varepsilon^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} E\Big\{f(F^{\varepsilon t}) \sum^{(N+1)} H_\alpha\Big(F^{\varepsilon t}, \prod_{\ell=1}^{k} F_{\beta_\ell}^{\varepsilon t,\alpha_\ell}\Big)\Big\} dt. \tag{4.2.3}$$

Siguin

$$Q_j = \sum^{(j)} H_\alpha\Big(F^0, \prod_{\ell=1}^{k} F_{\beta_\ell}^{0,\alpha_\ell}\Big), \quad j = 1, \cdots, N,$$
$$Q_{N+1}^{\varepsilon t} = \sum^{(N+1)} H_\alpha\Big(F^{\varepsilon t}, \prod_{\ell=1}^{k} F_{\beta_\ell}^{\varepsilon t,\alpha_\ell}\Big).$$

Les condicions imposades sobre $\{F^\varepsilon, \varepsilon \in [0,1]\}$ ens permeten d'assegurar que les mesures de Radon definides per $E(f(F^\varepsilon))$, $E(f(F^0))$, $E\{f(F^0)\, Q_j\}$, $j = 1, \ldots, N$, i $E\{f(F^{\varepsilon t})\, Q_{N+1}^{\varepsilon t}\}$ tenen densitats $\mathcal{C}^\infty$ fitades. Aplicant (3.3.3) a (4.2.3) tenim

$$p^\varepsilon(y) = p^0(y) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \frac{1}{j!} E\{\mathbb{1}_{\{F^0 > y\}} P_j\} + \varepsilon^{N+1} \tilde{p}_{N+1}^\varepsilon(y),$$

amb P_j donat a l'enunciat del teorema i

$$\tilde{p}_{N+1}^\varepsilon(y) = \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} E\Big\{\mathbb{1}_{\{F^{\varepsilon t} > y\}} H_{(1,\ldots,d)}\Big(F^{\varepsilon t}, \sum^{(N+1)} H_\alpha\Big(F^{\varepsilon t}, \prod_{\ell=1}^{k} F_{\beta_\ell}^{\varepsilon t,\alpha_\ell}\Big)\Big)\Big\} dt.$$

Per demostrar la fitació uniforme s'usen els mateixos arguments que en el Teorema 3.3.3. □

4.3 L'equació de la calor estocàstica

Objectiu

Aplicarem el resultat que acabem de demostrar a la solució de l'equació diferencial en derivades parcials estocàstica (4.1.2), coneguda com equació estocàstica de la calor. De fet, treballarem amb una normalització de la solució doncs el procés solució no satisfarà les condicions que s'han de complir per poder aplicar el teorema de la secció anterior. L'objectiu és previsible, provar que el procés normalitzat que considerem si satisfà les hipòtesis.

Preliminars

A més d'utilitzar els Preliminars de seccions prèvies, enunciarem el teorema de Kolmogorov, molt utilitzat al llarg d'aquest secció, així com al Capítol 5. Aquesta versió és a l'interval $[0,1]$ doncs és la que necessitem.

Teorema 4.3.1 (J.B. Walsh [55]) *Sigui $\{Y_t, t \in [0,1]\}$ un procés estocàstic a valors en $\mathbb{R}$. Suposem que existeixen constants $k > 1$, $K > 0$ i $\gamma > 0$ tals que per qualssevol $s, t \in [0,1]$,*

$$E\left\{|Y_t - Y_s|^k\right\} \;\le\; K|t-s|^{1+\gamma}.$$

Aleshores

(i) *Y té una versió contínua.*

(ii) *Existeixen constants C i ϑ, depenent només de k i γ, i una varible aleatòria Z tals que amb probabilitat 1, per qualssevol $s, t \in [0,1]$,*

$$|Y_t - Y_s| \;\le\; Z|t-s|^{\gamma/k}\Big(\log\frac{\vartheta}{|t-s|}\Big)^{2/k},$$

i

$$E\left\{Z^k\right\} \;\le\; CK.$$

(iii) *Si* $E\{|Y_t|^k\} < \infty$ *per algun* t, *aleshores*

$$E\,\{\sup_{t\in[0,1]} |Y_t|^k\} < \infty.$$

Per acabar els Preliminars donarem un resultat particular del nucli de la calor $G_t(x,y)$

$$G_t(x,y) \le \frac{C}{\sqrt{t}}\,\exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{4t}\Big).$$

Per tant, fixats $x \in [0,1], t \in [0,T]$, i $a \in (1,3)$,

$$\int_0^t \int_0^1 G^a_{t-s}(x,y)\,dsdy \;\le\; C. \tag{4.3.1}$$

Resultats

Considerem ara la família $\{X^\varepsilon(t,x),(t,x) \in [0,T]\times[0,1]\}$, $\varepsilon \in (0,1]$, definida a (4.1.2), i suposem les condicions següents sobre els coeficients:

(H$_3$1) $\sigma, b\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades de primer ordre fitades i derivades d'ordre superior amb creixement polinomial.

(H$_3$2) Existeix $C > 0$ tal que $\inf\{\,|\sigma(y)|;\; y \in \mathbb{R}\} \ge C$.

Fixem $t \in (0,T]$, $x \in (0,1)$. Sigui $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ la densitat de $X^\varepsilon(t,x)$. L'objectiu és aplicar el Teorema 4.2.2 per obtenir un desenvolupament de Taylor en $\varepsilon = 0$ de $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ i amb $y = \Psi_{X_0}(t,x)$ (vegeu (4.1.3)). Definim $X^0(t,x) = \Psi_{X_0}(t,x)$.
Notem que $X^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in [0,1]$, no satisfà les condicions de la Definició 4.2.1 perquè $X^0(t,x)$ és determinista. Nosaltres considerarem les següents noves variables aleatòries definides per

$$\hat{X}^\varepsilon(t,x) = \frac{X^\varepsilon(t,x) - \Psi_{X_0}(t,x)}{\varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon \le 1\,. \tag{4.3.2}$$

Provarem que $\hat{X}^0(t,x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \hat{X}^\varepsilon(t,x)$ existeix q.s. i que la família $\hat{X}^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in [0,1]$ compleix les hipòtesis del Teorema 4.2.2. L'expansió de Taylor per $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ serà obtinguda tenint en compte que, per $y = \Psi_{X_0}(t,x)$,

$$p^\varepsilon_{t,x}(y) = \frac{1}{\varepsilon}\,\hat{p}^\varepsilon_{t,x}(0), \tag{4.3.3}$$

on $\hat{p}^{\varepsilon}_{t,x}(y)$ denota la densitat de $\hat{X}^{\varepsilon}(t,x)$.
Tot seguit introduirem una sèrie de notacions que usarem més endavant. Siguin $X^{\varepsilon}_j(t,x)$, $X^0_j(t,x), j \geq 1, \varepsilon \in (0,1]$, les solucions de les equacions diferencials estocàstiques següents:

$$\begin{aligned} X^{\varepsilon}_1(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\{\sigma(X^{\varepsilon}(s,y))W(ds,dy) + \varepsilon\,\sigma'(X^{\varepsilon}(s,y))\; X^{\varepsilon}_1(s,y) \\ &\times\; W(ds,dy) \;+\; b'(X^{\varepsilon}(s,y))\,X^{\varepsilon}_1(s,y)\,ds\,dy\}, \qquad (4.3.4) \\ X^0_1(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\;\{\sigma(\Psi_{X_0}(s,y))\,W(ds,dy) \;+\; b'(\Psi_{X_0}(s,y)) \\ &\times\; X^0_1(s,y)\,ds\,dy\} \qquad (4.3.5) \end{aligned}$$

i, per $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} X^{\varepsilon}_j(t,x) &= I^{\varepsilon}_{j-1}(t,x) + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\; c_j(j)\; \{\varepsilon\,\sigma'(X^{\varepsilon}(s,y))X^{\varepsilon}_j(s,y)\,W(ds,dy) \\ &+\; b'(X^{\varepsilon}(s,y))X^{\varepsilon}_j(s,y)\,ds\,dy\}, \qquad (4.3.6) \\ X^0_j(t,x) &= I^0_{j-1}(t,x) + \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\; c_j(j)b'(\Psi_{X_0}(s,y))X^0_j(s,y)\,ds\,dy, \quad (4.3.7) \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} I^{\varepsilon}_{j-1}(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Bigg\{\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j-1 \\ \beta_1,\ldots,\beta_k\geq 1}} k_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_k) \\ &\times\; \sigma^{(k)}(X^{\varepsilon}(s,y))\prod_{\ell=1}^{k} X^{\varepsilon}_{\beta_\ell}(s,y)\,W(ds,dy) \\ &+\; \sum_{k=2}^{j} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j \\ \beta_1,\ldots,\beta_k\geq 1}} c_j(\beta_1,\ldots,\beta_k)\Big[\varepsilon\,\sigma^{(k)}(X^{\varepsilon}(s,y))\prod_{\ell=1}^{k} X^{\varepsilon}_{\beta_\ell}(s,y)\,W(ds,dy) \\ &+\; b^{(k)}(X^{\varepsilon}(s,y))\;\prod_{\ell=1}^{k} X^{\varepsilon}_{\beta_\ell}(s,y)\,ds\,dy\Big]\Bigg\}, \\ I^0_{j-1}(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Bigg\{\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j-1 \\ \beta_1,\ldots,\beta_k\geq 1}} k_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_k) \end{aligned}$$

$$\times \quad \sigma^{(k)}(\Psi_{X_0}(s,y)) \prod_{\ell=1}^{k} X^0_{\beta_\ell}(s,y)\, W(ds,dy) + \sum_{k=2}^{j} \sum_{\substack{\beta_1+\dots+\beta_k=j \\ \beta_1,\dots,\beta_k\geq 1}} c_j(\beta_1,\dots,\beta_k)$$

$$\times \quad b^{(k)}(\Psi_{X_0}(s,y)) \prod_{\ell=1}^{k} X^0_{\beta_\ell}(s,y)\, ds\, dy \Big\}. \tag{4.3.8}$$

Els coeficients $c_j(\beta_1,\dots,\beta_k)$ (vegeu els Preliminars de la Secció 3.3) i $k_j(\beta_1,\dots,\beta_k)$ són definits per inducció.
Utilitzem la convenció $X_0^\varepsilon(t,x) = X^\varepsilon(t,x)$ i $X_0^0(t,x) = \Psi_{X_0}(t,x)$.
La propera proposició és un dels ingredients per a la comprovació que $\hat{X}^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in (0,1)$ satisfà la hipòtesi (a) del Teorema 4.2.2

Proposició 4.3.2 *Assumim* $(\mathrm{H}_3 1)$. *Existeix una versió de* $\{X^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in (0,1)\}$ *que és* $\mathcal{C}^\infty$ *respecte* ε *i, per a tot* $j \in \mathbb{N}$, $\frac{d^j X^\varepsilon}{d\varepsilon^j}(t,x) = X_j^\varepsilon(t,x)$. *A més a més,*

$$\text{q.s.} - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_j^\varepsilon(t,x) = X_j^0(t,x), \quad j \in \mathbb{Z}^+.$$

Prova. Primerament provarem la continuïtat. Utilitzant (4.3.1), les desigualtats de Burkholder i Hölder, i el Lema 2.2.3, és fàcil comprovar

$$\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \sup_{x,t} E\,|X^\varepsilon(t,x)|^p \leq C\,, \tag{4.3.9}$$

per qualsevol $p \in (1,\infty)$ i alguna constant C positiva. Les desigualtats de Burkholder i Hölder, juntament amb (4.3.1) i (4.3.9), mostren

$$E\,|X^{\varepsilon+\xi}(t,x) - X^\varepsilon(t,x)|^p \leq C\,|\xi|^p + C \int_0^t \sup_x E\,|X^{\varepsilon+\xi}(s,x) - X^\varepsilon(s,x)|^p\, ds,$$

per qualssevol $p \in (1,\infty)$, $\varepsilon \in [0,1]$ i ξ tals que $0 \leq \varepsilon + \xi \leq 1$. Així, el lema tipus Gronwall implica

$$\sup_{x,t} E\,|X^{\varepsilon+\xi}(t,x) - X^\varepsilon(t,x)|^p \leq C\,|\xi|^p. \tag{4.3.10}$$

L'existència d'una versió contínua de $\{X^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in [0,1]\}$ és conseqüència del teorema de Kolmogorov. A més,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} X^\varepsilon(t,x) = \Psi_{X_0}(t,x), \text{ q.s.}$$

Comprovem ara la diferenciabilitat de primer ordre. Per a tot $\varepsilon \in [0,1]$, $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ tals que $0 \leq \varepsilon + \xi \leq 1$, definim

$$Z^{\varepsilon}_{\xi}(t,x) = \frac{X^{\varepsilon+\xi}(t,x) - X^{\varepsilon}(t,x)}{\xi}.$$

Per teorema del valor mig,

$$\begin{aligned}
Z^{\varepsilon}_{\xi}(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big\{ \sigma(X^{\varepsilon+\xi}(s,y))\, W(ds,dy) \\
&+ \varepsilon \Big[\int_0^1 \sigma'\Big(X^{\varepsilon}(s,y) + \lambda(X^{\varepsilon+\xi}(s,y) - X^{\varepsilon}(s,y))\Big)\, d\lambda \Big] Z^{\varepsilon}_{\xi}(s,y)\, W(ds,dy) \\
&+ \Big[\int_0^1 b'\Big(X^{\varepsilon}(s,y) + \lambda(X^{\varepsilon+\xi}(s,y) - X^{\varepsilon}(s,y))\Big) d\lambda \Big] Z^{\varepsilon}_{\xi}(s,y)\, ds\, dy \Big\}
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Clarament, des de (4.3.9), per qualsevol $p \in (1,\infty)$ i alguna constant C positiva,

$$\sup_{\substack{0 \leq \varepsilon \leq 1 \\ \xi > 0}} \sup_{x,t} E\, |Z^{\varepsilon}_{\xi}(t,x)|^p \leq C. \tag{4.3.12}$$

Per qualsevol $p \in (1,\infty)$,

$$E\, |Z^{\varepsilon}_{\xi}(t,x) - Z^{\varepsilon'}_{\xi'}(t,x)|^p \leq C \sum_{i=1}^{6} A_i^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x),$$

amb

$$\begin{aligned}
A_1^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) &= E \Big| \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big[\sigma(X^{\varepsilon+\xi}(s,y)) - \sigma(X^{\varepsilon'+\xi'}(s,y)) \Big] W(ds,dy) \Big|^p, \\
A_2^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) &= E \Big| \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)(\varepsilon - \varepsilon') \Big[\int_0^1 \sigma'\Big(X^{\varepsilon'}(s,y) \;+\; \lambda(X^{\varepsilon'+\xi'}(s,y) \\
&- X^{\varepsilon'}(s,y))\Big) d\lambda \Big]\; Z^{\varepsilon'}_{\xi'}(s,y)\, W(ds,dy) \Big|^p, \\
A_3^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) &= E \Big| \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, \varepsilon \Big[\int_0^1 \Big\{ \sigma'\Big(X^{\varepsilon}(s,y) \;+\; \lambda(X^{\varepsilon+\xi}(s,y) \\
&- X^{\varepsilon}(s,y))\Big) - \sigma'\Big(X^{\varepsilon'}(s,y) \;+\; \lambda(X^{\varepsilon'+\xi'}(s,y) - X^{\varepsilon'}(s,y))\Big) \Big\} d\lambda \Big] \\
&\times\; Z^{\varepsilon}_{\xi}(s,y)\, W(ds,dy) \Big|^p,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_4^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) &= E\Big|\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\Big[\int_0^1 \Big\{b'\Big(X^\varepsilon(s,y)\;+\;\lambda(X^{\varepsilon+\xi}(s,y)\\
&-\;X^\varepsilon(s,y))\Big) - b'\Big(X^{\varepsilon'}(s,y)\;+\;\lambda(X^{\varepsilon'+\xi'}(s,y) - X^{\varepsilon'}(s,y))\Big)\Big\}d\lambda\Big]\\
&\times\; Z_\xi^\varepsilon(s,y)\,ds\,dy\Big|^p,\\
A_5^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) &= E\Big|\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\varepsilon\Big[\int_0^1 \sigma'\Big(X^{\varepsilon'}(s,y)+\lambda(X^{\varepsilon'+\xi'}(s,y)\\
&-\;X^{\varepsilon'}(s,y))\Big)d\lambda\Big]\,\Big(Z_{\xi'}^{\varepsilon'}(s,y) - Z_\xi^\varepsilon(s,y)\Big)W(ds,\,dy)\Big|^p,\\
A_6^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) &= E\Big|\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\Big[\int_0^1 b'\Big(X^{\varepsilon'}(s,y)+\lambda(X^{\varepsilon'+\xi'}(s,y)\\
&-\;X^{\varepsilon'}(s,y))\Big)d\lambda\Big]\,\Big(Z_{\xi'}^{\varepsilon'}(t,x) - Z_\xi^\varepsilon(t,x)\Big)ds\,dy\Big|^p.
\end{aligned}
$$

La hipòtesi ($\mathrm{H}_3 1$), (4.3.10), (4.3.12) i les desigultats de Burkholder i Hölder, impliquen

$$
\sum_{i=1}^{4}\sup_{x,t} A_i^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'}(t,x) \le C\left\{|\varepsilon-\varepsilon'|^p + |\xi-\xi'|^p\right\}. \tag{4.3.13}
$$

La resta de termes son fitats com segueix:

$$
\sup_{x,t} A_5^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'} + \sup_{x,t} A_6^{\varepsilon,\varepsilon',\xi,\xi'} \le C\int_0^t \sup_x E\,|Z_\xi^\varepsilon(s,x) - Z_{\xi'}^{\varepsilon'}(s,x)|^p ds\,. \tag{4.3.14}
$$

Aleshores, (4.3.13), (4.3.14), el lema tipus Gronwall i el teorema de Kolmogorov proven que $X^\varepsilon(t,x)$ té una versió diferenciable. Endemés, és fàcil demostrar

$$
L^2 - \lim_{\xi\downarrow 0} Z_\xi^\varepsilon(t,x) = X_1^\varepsilon(t,x),
$$

i per tant $\frac{dX^\varepsilon}{d\varepsilon}(t,x) = X_1^\varepsilon(t,x)$, q.s. L'argument estàndard que hem utilitzat abans també prova que $\{X_1^\varepsilon(t,x), \varepsilon\in[0,1]\}$ satisfà les condicions del criteri de continuïtat de Kolmogorov. Així

$$
\text{q.s.} - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} X_1^\varepsilon(t,x) \;=\; X_1^0(t,x).
$$

La prova finalitza utilitzant inducció sobre l'ordre de diferenciabilitat. □

Corol.lari 4.3.3 *Suposem* ($\mathrm{H}_3 1$). *Aleshores, per a tot* $j\in\mathbb{Z}^+$,

$$
E\{\sup_{0\le\varepsilon\le 1} |X_j^\varepsilon(t,x)|^p\} \;<\; \infty\,.
$$

Prova. És una conseqüència immediata del teorema de Kolmogorov. □

El proper lema relaciona les derivades dels processos $X^\varepsilon(t,x)$ i $\hat{X}^\varepsilon(t,x)$. Com anteriorment, per qualsevol número natural j, denotem $\hat{X}_j^\varepsilon(t,x) = \frac{d^j \hat{X}^\varepsilon(t,x)}{d\varepsilon^j}$ i $\hat{X}_0^\varepsilon(t,x) = \hat{X}^\varepsilon(t,x)$.

Lema 4.3.4 *Assumim* (H$_3$1). *Aleshores, per qualssevol $j \in \mathbb{Z}^+$, $\varepsilon \in (0,1)$,*

$$\hat{X}_j^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{j+1}\left\{X_{j+1}^0(t,x) + \varepsilon \int_0^1 (1-\xi^{j+1})\, X_{j+2}^{\varepsilon\xi}\,(t,x)\, d\xi\right\}. \tag{4.3.15}$$

Prova. Ho demostrarem per inducció sobre j. Per $j=0$, (4.3.15) es prova usant el desenvolupament de Taylor de $X^\varepsilon(t,x)$ en $\varepsilon = 0$. Suposem que (4.3.15) és satifet per a tot $0 \le k \le j$. Aleshores, per cada $\delta \in \mathbb{R} - \{0\}$ amb $0 \le \varepsilon + \delta \le 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta}\left\{\hat{X}_j^{\varepsilon+\delta}(t,x) - \hat{X}_j^\varepsilon(t,x)\right\}\\
&= \frac{1}{\delta}\left\{\frac{\varepsilon+\delta}{j+1}\int_0^1 (1-\xi^{j+1})\, X_{j+2}^{(\varepsilon+\delta)\xi}(t,x)\, d\xi - \frac{\varepsilon}{j+1}\int_0^1 (1-\xi^{j+1})\, X_{j+2}^{\varepsilon\xi}(t,x)\, d\xi\right\}\\
&= \frac{1}{j+2}\, X_{j+2}^0(t,x) + B_1^{\varepsilon,\delta}(t,x) + B_2^{\varepsilon,\delta}(t,x)\,,
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

amb

$$B_1^{\varepsilon,\delta}(t,x) = \frac{\varepsilon}{j+1}\int_0^1 (1-\xi^{j+1})\, \frac{X_{j+2}^{(\varepsilon+\delta)\xi}(t,x) - X_{j+2}^{\varepsilon\xi}(t,x)}{\delta}\, d\xi\,,$$

$$B_2^{\varepsilon,\delta}(t,x) = \frac{1}{j+1}\int_0^1 (1-\xi^{j+1})\, \left(X_{j+2}^{(\varepsilon+\delta)\xi}(t,x) - X_{j+2}^0(t,x)\right) d\xi\,.$$

El Corol.lari 4.3.3 i el teorema de convergència dominada donen, q.s.

$$\lim_{\delta\to 0} B_1^{\varepsilon,\delta}(t,x) = \frac{\varepsilon}{j+1}\int_0^1 (\xi - \xi^{j+2})\, X_{j+3}^{\varepsilon\xi}(t,x)\, d\xi. \tag{4.3.17}$$

Utilitzant el teorema de convergència dominada novament, el desenvolupament de Taylor, un canvi de variables i el teorema de Fubini, obtenim

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} B_2^{\varepsilon,\delta}(t,x) &= \frac{1}{j+1}\int_0^1 (1-\xi^{j+1}) \int_0^{\varepsilon\xi} X_{j+3}^\beta(t,x)\, d\beta\, d\xi\\
&= \frac{\varepsilon}{j+1}\int_0^1 \left(\frac{j+1}{j+2} - \xi + \frac{\xi^{j+2}}{j+2}\right) X_{j+3}^{\varepsilon\xi}\,(t,x)\, d\xi\,.
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Aleshores (4.3.16)-(4.3.18) proven la fórmula (4.3.15) per $j+1$. $\square$

Assumim ($H_3$1). Com a conseqüència del Lema 4.3.4 i el Corol.lari 4.3.3 tenim, q.s.

$$\hat{X}_j^0(t,x) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{X}_j^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{j+1} X_{j+1}^0(t,x), \tag{4.3.19}$$

per qualsevol $j \in \mathbb{Z}^+$. Aleshores (4.3.15), (4.3.19) i les equacions satisfetes per $X_j^\varepsilon(t,x)$, $\varepsilon \in [0,1]$, $j \in \mathbb{Z}^+$, donades a les referències (4.3.4)-(4.3.7), permeten de comprovar, com en el treball de V. Bally i E. Pardoux [6], que $\hat{X}_j^\varepsilon(t,x)$ pertany a $\mathbb{D}^\infty$, per cada $\varepsilon \in [0,1]$, $j \in \mathbb{Z}^+$.
Assumim ($H_3$1) i ($H_3$2). A l'article [36] A. Millet i M. Sanz-Solé han provat

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1} E\left(|\det \Gamma^{-1}_{\hat{X}^\varepsilon(t,x)}|^p\right) \le C, \tag{4.3.20}$$

per qualsevol $p \in (1,\infty)$ i alguna contant C positiva. El mateix argument del Lema 2.5 [36] prova que la variable Gaussiana i centrada $\hat{X}^0(t,x) = X_1^0(t,x)$ satisfà $E\,|X_1^0(t,x)|^2 > 0$.
Fins ara ja hem provat que $\{\hat{X}^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in [0,1]\}$ és una família uniformement no degenerada que compleix les condicions (a) i (b) del Teorema 4.2.2. La propera proposició mostra que la fitació (4.2.2) també és satisfeta.

Proposició 4.3.5 *Assumim* ($H_3$1). *Aleshores, per a tot* $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$,

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1} \sup_{x,t} \|\hat{X}_j^\varepsilon(t,x)\|_{k,p} \le C\,.$$

Prova. A causa de la igualtat (4.3.15), és suficient comprovar

$$\sup_{0\le\varepsilon\le 1} \sup_{x,t} \|X_j^\varepsilon(t,x)\|_{k,p} \le C\,, \tag{4.3.21}$$

per qualssevol $j \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (1,\infty)$.
Per $j=0$, (4.3.21) ha estat provat a [6]. Els processos $\{X_j^\varepsilon(t,x), (t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$, $\varepsilon \in [0,1]$, $j \in \mathbb{Z}^+$, són solucions de les equacions d'evolució estocàstiques (4.3.4)-(4.3.7). Usant el mateix mètode que per la demostració de (4.3.9), provem, per a tot $j \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sup_{0\le\varepsilon\le 1} \sup_{x,t} E(|X_j^\varepsilon(t,x)|^p) \le C. \tag{4.3.22}$$

La derivada de Malliavin de qualsevol ordre dels processos $\{X_j^\varepsilon(t,x), (t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$, $\varepsilon \in [0,1]$, $j \in \mathbb{Z}^+$, també segueixen equacions d'evolució estocàstiques. Així, el mètode estàndard basat en les desigualtats de Burkholder i Hölder, i el lema tipus Gronwall pot ser aplicat per acabar la demostració. Provarem el cas $j = 1$. Utilitzant (4.3.4) i la regla de la cadena del càlcul de Malliavin, obtenim

$$D_{rz} X_1^\varepsilon(t,x) = \mathbb{1}_{(r<t)} \Big\{ \sum_{i=1}^{6} M_i^\varepsilon(r,z;t,x) \Big\},$$

$(r, z) \in [0,T] \times [0,1]$, amb

$$M_1^\varepsilon(r,z;t,x) = G_{t-r}(x,z) \Big\{ \sigma(X^\varepsilon(r,z)) + \varepsilon\, \sigma'(X^\varepsilon(r,z))\; X_1^\varepsilon(r,z) \Big\},$$

$$M_2^\varepsilon(r,z;t,x) = \int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, \sigma'(X^\varepsilon(s,y))\, D_{rz} X^\varepsilon(s,y)\, W(ds,dy),$$

$$M_3^\varepsilon(r,z;t,x) = \int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, \varepsilon\, \sigma''(X^\varepsilon(s,y))\, D_{rz} X^\varepsilon(s,y)\, X_1^\varepsilon(s,y)\, W(ds,dy),$$

$$M_4^\varepsilon(r,z;t,x) = \int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, \varepsilon\, \sigma(X^\varepsilon(s,y))\, D_{rz} X_1^\varepsilon(s,y)\, W(ds,dy).$$

$$M_5^\varepsilon(r,z;t,x) = \int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, b''(X^\varepsilon(s,y))\, D_{rz} X^\varepsilon(s,y)\, X_1^\varepsilon(s,y)\, dsdy,$$

$$M_6^\varepsilon(r,z;t,x) = \int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\, b'(X^\varepsilon(s,y))\, D_{rz} X_1^\varepsilon(s,y)\, dsdy.$$

Aleshores, per qualsevol $p \in (2, \infty)$,

$$E\Big| \int_0^t \int_0^1 |D_{rz}\, X_1^\varepsilon(t,x)\,|^2 dr\, dz \Big|^{p/2} \;\leq\; C \sum_{i=1}^{6} E\Big| \int_0^t \int_0^1 |M_i^\varepsilon(r,z;t,x)\,|^2 dr\, dz \Big|^{p/2}.$$

(4.3.9) i (4.3.22) donen

$$\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1} \sup_{x,t} E\Big| \int_0^t \int_0^1 |M_1^\varepsilon(r,z;t,x)|^2 dr\, dz \Big|^{p/2} \leq C. \tag{4.3.23}$$

Aplicant la desigualtat de Burkholder per martingales a valors en espais de Hilbert, la desigualtat de Hölder, el resultat de V. Bally i E. Pardoux esmentat anteriorment i (4.3.22) obtenim, per $i = 2, 3, 5$,

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \sup_{x,t} E\Big| \int_0^t \int_0^1 |M_i^\varepsilon(r,z;t,x)|^2 dr\, dz \Big|^{p/2} \leq C, \tag{4.3.24}$$

i, per $i = 4, 6$,

$$\begin{aligned} \sup_{x,t} E\left| \int_0^t \int_0^1 |M_i^\varepsilon(r,z;t,x)|^2 dr\, dz \right|^{p/2} \\ \leq C \int_0^t \sup_x E\left| \int_0^s \int_0^1 |D_{rz} X_1^\varepsilon(s,y)|^2 dr\, dz \right|^{p/2} ds. \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Des de (4.3.23)-(4.3.25), el lema tipus Gronwall assegura

$$\sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \sup_{x,t} E\left| \int_0^t \int_0^1 |D_{rz} X_1^\varepsilon(t,x)|^2 dr\, dz \right|^{p/2} \leq C,$$

per qualsevol $p \in (2, \infty)$.
Per les derivades de Malliavin d'ordre superior usem inducció. □

Ara podem donar el desenvolupament de la densitat de la solució de l'equació diferencial estocàstica de tipus parabòlic (4.1.2). En el proper teorema, fixem $t \in (0, T]$, $x \in (0,1)$, i $p_{t,x}^\varepsilon(y)$ denota la densitat de $X^\varepsilon(t,x)$ per $\varepsilon \in (0,1]$ en $y = \Psi_{X_0}(t,x)$.

Teorema 4.3.6 *Assumim* ($\mathrm{H}_3 1$) *i* ($\mathrm{H}_3 2$). *Sigui* $\sigma^2 = E(|X_1^0(t,x)\,|^2)$. *Aleshores*

$$p_{t,x}^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \frac{1}{j!}\, p_j + \varepsilon^{N+1}\, \tilde{p}_{N+1}^\varepsilon \right\}, \tag{4.3.26}$$

Els coeficients p_j *s'anul.len per* j *senar. Per* $j \in \{2, \ldots, N\}$ *parell*

$$p_j = E\left\{ \mathbb{1}_{\{X_1^0(t,x)>0\}}\, P_j \right\},$$

amb

$$P_j = \sum_{k=1}^j \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j \\ \beta_1,\ldots,\beta_k \geq 1}} c_j(\beta_1, \ldots, \beta_k)\, H_{k+1}\left(X_1^0(t,x), \prod_{\ell=1}^k \frac{1}{\beta_\ell + 1}\, X_{\beta_\ell+1}^0(t,x) \right).$$

Endemés, $P_j \in \oplus_{n=0}^{3j+1} \mathcal{H}_n$, *i* $\sup_{\varepsilon\in(0,1]} (|\tilde{p}_{N+1}^\varepsilon|)$ *és finit.*

Prova. La variable aleatòria $\hat{X}^\varepsilon(t,x)$ definida a (4.3.2) per $\varepsilon \in (0,1]$ i $\hat{X}^0(t,x) = X_1^0(t,x)$ (vegeu (4.3.19)) satisfan les condicions del Teorema 4.2.2. Aleshores el desenvolupament (4.3.26) segueix des de (4.2.1) i (4.3.3).

Considerem el desenvolupament (4.2.3) amb $F^{\varepsilon} = \hat{X}^{\varepsilon}(t,x)$ i una funció f regular i parella. El drap brownià W té una llei simètrica. Així, les variables aleatòries $f(\hat{X}^{\varepsilon}(t,x))$ i $f(\hat{X}^{-\varepsilon}(t,x))$ tenen la mateixa llei. Llavors, els coeficients senars del desenvolupament de Taylor són zero.
Des de l'estructura de les equacions d'evolució estocàstiques $X^0_{\beta}(t,x), \beta \in \mathbb{Z}^+$ (vegeu (4.3.5) i (4.3.7)) és fàcil demostrar que

$$X^0_{\beta}(t,x) \in \bigoplus_{n=0}^{\beta} \mathcal{H}_n.$$

Aleshores, per $k \in \{1,\dots,j\}$, $\beta_1,\cdots,\beta_k \geq 1$ amb $\beta_1+\ldots+\beta_k = j$, tenim

$$\prod_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\beta_\ell+1} X^0_{\beta_\ell+1}(t,x) \in \bigoplus_{n=0}^{j+k} \mathcal{H}_n.$$

Això implica que $P_j \in \bigoplus_{n=0}^{3j+1} \mathcal{H}_n$. Doncs, si ϕ és una variable aleatòria Gaussiana no degenerada i ψ pertany a $\bigoplus_{n=0}^{m} \mathcal{H}_n$, $m \geq 0$, llavors $H_k(\phi,\psi) \in \bigoplus_{n=0}^{m+k} \mathcal{H}_n$ (vegeu Lema 3.3.4).
Això completa la prova del teorema. $\square$

Capítol 5

Comportament asimptòtic de la densitat fora de la diagonal en una equació estocàstica de la calor

5.1 Introducció

Suposem que ens trobem en el mateix context del Capítol 4. És a dir, sigui el procés $\{X^\varepsilon(t,x),\ (t,x)\in[0,T]\times[0,1]\}$, solució de (4.1.1), que satisfà l'equació d'evolució

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(t,x) &= \int_0^1 G_t(x,y)\,X_0(y)dy \\ &+ \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Big\{\varepsilon\,\sigma\Big(X^\varepsilon(s,y)\Big)\,W(ds,dy) + b\Big(X^\varepsilon(s,y)\Big)\,ds\,dy\Big\}, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

on $G_t(x,y)$ és la solució fonamental de l'equació de la calor sobre $[0,T]\times[0,1]$. Hem denotat per $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ la densitat de $X^\varepsilon(t,x)$. Sota les hipòtesis ($\mathrm{H}_3 1$) i ($\mathrm{H}_3 2$) del capítol anterior sabem que aquesta densitat existeix, és regular i estrictament positiva (vegeu [6]).

Sigui $\mathcal{H}$ l'espai de Cameron-Martin associat al drap brownià $W = \{W_{t,x},\ (t,x)\in$

$[0,T]\times[0,1]\}$, i

$$\|h\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^T\int_0^1 |\dot{h}_{t,x}|^2\,dt\,dx$$

amb $\dot{h}_{t,x} = \frac{\partial^2 h(t,x)}{\partial t\partial x}$. Per a tot $h\in\mathcal{H}$, sigui $\{\Psi^h_{X_0}(t,x),(t,x)\in[0,T]\times[0,1]\}$ la solució de l'equació d'evolució determinista

$$\begin{aligned}\Psi^h_{X_0}(t,x) = &\int_0^1 G_t(x,y)X_0(y)dy\\ &+\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Big\{\sigma(\Psi^h_{X_0}(s,y))\dot{h}(s,y)+b(\Psi^h_{X_0}(s,y))\Big\}\,ds\,dy.\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

A l'article [36], A. Millet i M. Sanz-Solé han trobat les estimacions de Varadhan per aquesta mateixa densitat, $p^\varepsilon_{t,x}(y)$, és a dir, han donat el comportament del límit següent:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^2\log p^\varepsilon_{t,x}(y).$$

En aquesta memòria nosaltres hem estudiat aquest comportament per una altra densitat, en concret, la densitat de la solució d'una equació en derivades parcials estocàstica de tipus hiperbòlic (vegeu Capítol 2). Al Capítol 4, generalitzant un resultat previ, hem provat el desenvolupament de Taylor de $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ en $\varepsilon=0$ i quan $y=\Psi^0_{X_0}(t,x)$; fixem-nos que és agafar $\Psi^h_{X_0}(t,x)$ en el cas $h=0$ (vegeu (5.1.2)). Per una banda hem generalitzat el resultat de A. Millet i M. Sanz-Solé, doncs hem donat un comportament de $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ més complet, però per contra, ho hem fet per un y particular i concret. El nostre actual propòsit és estendre aquest resultat a qualsevol $y\in\mathbb{R}$, les estimacions de Varadhan seran aleshores un cas particular d'aquest estudi molt més general.

Observem un moment que passa en el cas de les difusions. Si y és el valor inicial d'una difusió d-dimensional, diem-li $y=x$, el terme d'ordre zero de l'expansió és, sense tenir en compte les constants, ε^{-d}. Això és el que nosaltres hem vist al capítol anterior. En canvi, per $y\neq x$, és de l'ordre de $\exp\{-\frac{C}{\varepsilon}\}\varepsilon^{-d}$. Nosaltres obtindrem el mateix comportament per la nostra família $\{X^\varepsilon(t,x),\varepsilon\in(0,1]\}$.

Considerem

$$\begin{aligned}\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x) &:= \frac{X^\varepsilon(t,x)(\omega+\frac{h}{\varepsilon})-\Psi^h_{X_0}(t,x)}{\varepsilon},\\ S^{\varepsilon,h}(t,x) &:= \frac{\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x)-X_1^{0,h}(t,x)}{\varepsilon},\end{aligned}$$

$\varepsilon \in (0,1]$, i $X_1^{0,h}(t,x)$ una variable aleatòria que serà solució d'una equació diferencial estocàstica (vegeu (5.2.2)). Degut al teorema de Girsanov haurem de tractar amb $X^\varepsilon(t,x)(\omega+\frac{h}{\varepsilon})$, i una sèrie de resultats ens portaran a treballar també amb $\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x)$ i $S^{\varepsilon,h}(t,x)$. A la Secció 5.2, sota pràcticament les mateixes hipòtesis del capítol anterior, provarem propietats de regularitat en ε per aquestes tres famílies, aquests resultats els necessitarem a la propera secció. Entre altres coses, demostrarem que aquestes tres variables satisfan a ε fixat unes equacions d'evolució estocàstiques que donarem; que aquestes variables són infinitament diferenciables respecte ε; descriurem les seves derivades, així com la relació que hi ha entre elles; i que els dos límits següents existeixen q.s. i també satisfan equacions d'evolució

$$\begin{aligned} \hat{X}^{0,h}(t,x) &:= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x), \\ S^{0,h}(t,x) &:= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} S^{\varepsilon,h}(t,x). \end{aligned}$$

Finalment, veurem que aquestes famílies i les seves derivades en ε són uniformement fitades respecte ε en les normes $\|\cdot\|_{k,p}$. Tot això, conjuntament amb condicions de no degeneració ($\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x), \varepsilon \in [0,1]$ seran variables aleatòries no degenerades), són eines que ens serviran per poder abordar el principal objectiu d'aquesta secció: El desenvolupament de Taylor de $p^\varepsilon_{t,x}(y)$ en $\varepsilon = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

El mètode utilitzat per tractar el problema està inspirat en els articles de R. Léandre [28], G. Ben Arous [8], S. Watanabe [56] i el propi S. Watanabe i S. Takanobu [52]. Una primera eina bàsica, formulada com (H_43) a la Secció 5.3, ens assegura que per qualsevol $y \in \mathbb{R}$ hi ha un número finit d'elements $h_1, \cdots, h_{n_0}$ de $\mathcal{H}$ tal que $\Psi^{h_i}_{X_0}(t,x) = y, i = 1, \cdots, n_0$, i $\|h_i\|^2_{\mathcal{H}}$ és mínima. Mitjançant una localització al voltant dels elements que assoleixen aquest mínim podem dividir la densitat en dues parts. A una li direm part *evanescent* de la densitat i a l'altra part *principal* de la densitat, conservant així la manera com R. Azencott les anomenava a [3]. Aquest mètode és portat a terme a la Secció 5.3.

Resultats sobre grans desviacions per a la família $\{X^\varepsilon(t,x), \varepsilon \in (0,1]\}$, provats per R.B. Sowers [50] i F. Chenal i A. Millet [14], ens permeten de tractar amb la part *evanescent*, és a dir, les trajectòries per les quals $X^\varepsilon(t,x)$ i $\Psi^{h_i}_{X_0}(t,x), i = 1, \cdots, n_0$, són distants. En realitat, veurem que el desenvolupament ve donat per la part *principal*. Aquest és el motiu d'anomenar-les d'aquesta manera.

Per facilitar la lectura d'aquesta introducció suposem que hi ha un únic $h \in \mathcal{H}$ satisfent (H_43) i denotem-lo per $\bar{h}$. Per la part *principal*, això vol dir, quan les

trajectòries són properes, el teorema de Girsanov, una normalització per ε i una conseqüència del mètode dels multiplicadors de Lagrange, redueixen el problema a l'estudi d'un funcional de Wiener que és producte de dues variables aleatòries, una de tipus exponencial $\exp\{\bar{\lambda}S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)\}$, on $\bar{\lambda}$ prové del mètode dels multiplicadors de Lagrange, i $f(\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x))$, on f és regular i més endavant l'aproximarem a la delta de Dirac en el 0. Tot això convenientment localitzat.
El pas següent és obtenir els desenvolupaments usuals de Taylor de les funcions $\exp\{\bar{\lambda}S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)\}$ i $f(\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x))$, i ajuntar-los. Com al Capítol 3 haurem d'utilitzar una fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin per anul.lar les derivades de f d'ordre $k \geq 1$ i prendre en lloc de f una successió de funcions regulars f_m que convergeixin cap a $\delta_{\{0\}}$. La principal dificultat és l'aplicació de la fórmula d'integració per parts doncs la fórmula usual donada als Preliminars de la Secció 2.2 no és útil en aquest context.
Oblidem, momentàneament, l'estudi de la resta del desenvolupament asimptòtic que és el punt més delicat i vegem que passa amb els coeficients de l'expansió. Una vegada aplicat Taylor a les dues funcions i combinats aquests dos resultats, al desenvolupament final hi apareixen factors com el següent

$$f^{(i)}(\hat{X}^{0,\bar{h}}(t,x))\exp\{\bar{\lambda}S^{0,\bar{h}}(t,x)\}N,$$

$i \in \mathbb{Z}^+$, N una variable aleatòria que pertany a $\mathbb{D}^\infty$. Per eliminar les derivades hem d'aplicar una mena d'integració per parts, i en principi, nosaltres no podem garantitzar que $\exp\{\bar{\lambda}S^{0,\bar{h}}(t,x)\}$ pertanyi a L^p. Aleshores, sota una nova hipòtesi (vegeu ($H_4$4)) provarem directament que existeix $p \in (1,\infty)$ tal que l'exponencial pertany a L^p. Utilitzant aquest fet adaptarem la fórmula clàssica d'integració per parts del càlcul de Malliavin al nostre context. Amb tot el que hem comentat nosaltres som capaços de donar el resultat següent:

$$p^{\varepsilon}_{t,x}(y) = \varepsilon^{-1}e^{-\frac{\|\bar{h}\|^2}{2\varepsilon^2}}\,[p^0_{t,x} + \varepsilon p^1_{t,x} + \varepsilon^2 p^2_{t,x} + \cdots + \varepsilon^n p^n_{t,x}] + \text{Resta}, \tag{5.1.3}$$

on els coeficients seran descrits i comprovarem que els senars s'anul.len. Ara bé, de moment, no hem controlat la resta del desenvolupament i el que pretenem es fitar-la uniformement. La resta de (5.1.3) provindrà d'ajuntar els dos desenvolupaments de Taylor i la funció localitzadora al voltant de $\bar{h}$. D'entre tots els factors que formen la resta, el més difícil de tractar serà el que conté la resta del desenvolupament de Taylor de $\exp\{\bar{\lambda}S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)\}$, diem-li R^{ε}_1.
Amb aquest propòsit abans haurem provat, utilitzant ($H_4$4) i una sèrie de lemes tècnics sobre les cues de probabilitats, que existeix $p \in (1,\infty)$ tal que

$$\sup_{\varepsilon} E\{\exp(p\bar{\lambda}S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x))\Phi\} < \infty,$$

on Φ és la funció localitzadora al voltant de $\bar{h}$.
Comentem, per reflectir la problemàtica i sense entrar en masses detalls, que la dificultat per tractar R_1^ε prové del fet que nosaltres només podrem demostrar

$$|R_1^\varepsilon| \;\leq\; \exp\{\bar{\lambda}S^{0,\bar{h}}(t,x)\}\; N_1^\varepsilon \;+\; \exp\{\bar{\lambda}S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)\}\; N_2^\varepsilon, \tag{5.1.4}$$

essent $N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon$ funcionals regulars; i obtenir un resultat similar a (5.1.4) per les derivades de Malliavin de R_1^ε però local, concretament sobre

$$\{\bar{\lambda}\max(|S^{0,\bar{h}}(t,x)|,|S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)|) \leq n\}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Aleshores, amb aquests condicionants, haurem de demostrar una fórmula d'integració per parts (vegeu Proposició 5.3.8) per poder eliminar les derivades de f de factors com el següent

$$E\{f^{(i)}(\hat{X}^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x))\; N_3^\varepsilon\; R_1^\varepsilon\; \Phi\},$$

on $i \in \mathbb{Z}^+$, i N_3^ε pertany a $\mathbb{D}^\infty$ uniformement en ε. Després, una vegada provada aquesta fórmula, la manera de treballar és semblant a la dels dos capítols anteriors.

La Secció 5.3 l'hem dividit en diverses subseccions per facilitar la lectura. A la primera Subsecció estudiarem la part *evanescent* de la densitat; a la segona realitzarem les estimacions exponencials de les cues de distribucions per després donar la fórmula particular d'integració per parts; amb aquests ingredients farem l'estudi de la part *principal* de la densitat a la tercera; i a la darrera Subsecció hi donarem el resultat general així com una comprovació de que realment les condicions que hem imposat poden ser satisfetes. Finalment, la Secció 5.4 és una mena d'apèndix que conté dos resultats tècnics.

La distribució d'aquest capítol es lleugerament diferent a la dels anteriors. Molts preliminars han estat comentats a seccions prèvies. Aleshores, aquí, els Preliminars (usuals a cada secció) són utilitzats per introduir-hi notacions (Secció 5.2), o bé per donar un esquema de treball (Secció 5.3). Els preliminars necessaris seran donats a mesura que vagin apareixent. La Secció 5.4 segueix mantenint la mateixa estructura que sempre.