

CAPÍTOL 5: MODELITZACIÓ EN LA PROSPECCIÓ ELÈCTRICA

5.1 - INTRODUCCIÓ

L'estudi de la resposta elèctrica que presenten les estructures o els cossos que es troben en els primers metres de la superfície terrestre, com són els que creen la distorsió galvànica sobre les dades magnetotellúriques descrits en el capítol 3, es realitza a través de la modelització o solució del problema directe. La determinació de la resposta elèctrica està totalment lligada al perfeccionament de les tècniques numèriques, les quals resolen, amb molt bona precisió, models dels quals és impossible conèixer la seva solució analítica per la complexitat que presenten.

La modelització o simulació és un procés numèric que permet conèixer la resposta elèctrica del subsòl abans de realitzar materialment la campanya de prospecció. Aquest fet aporta informació sobre la capacitat de resolució que presenten les diferents configuracions electròdiques i, per tant, es poden optimitzar tant les despeses econòmiques com el temps que es dedica a l'adquisició de les dades en una campanya de prospecció.

La modelització és una tècnica totalment establerta dins de la geofísica perquè permet realitzar diferents estudis de recerca gràcies a la resposta teòrica aportada pel

problema directe. Existeix un ampli ventall de programes que resolen el problema directe d'elèctrica en 2-D amb la utilització de diferents tècniques numèriques (Rijo, 1977; Dey i Morrison, 1979a; Queralt *et al.* 1991; Oldenburg i Li, 1994; Loke, 1999). Per això, actualment s'està treballant en la modelització en 3-D i en tots els problemes que aquesta comporta (Zhang *et al.* 1995; Spitzer, 1995; Loke i Barker, 1996a; Bing i Greenhalgh, 2001).

Aquest capítol presenta un algorisme de modelització en 2-D basat en els programes previs de Queralt 1989. Les aportacions realitzades sobre l'algorisme de modelització es troben descrites en aquest capítol. Així, s'ha integrat tot el procés de la modelització en un sol programa, el qual ha estat preparat per modelitzar perfils de sondejos elèctrics verticals i tomografia elèctrica. Per reduir el temps de computació de la resolució del problema directe, s'ha implementat un nou mètode per calcular el valor del potencial elèctric antitransformat. A més a més el programa inclou la correcció de la topografia en la resposta elèctrica, i finalment, s'incorpora una nova estratègia amb la utilització de dues malles. Una primera malla que defineix el model i una altra que controla la precisió numèrica. Aquesta darrera novetat aporta avantatges en la resolució del problema invers, descrit detalladament en el capítol posterior.

5.2 – RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ DIFERENCIAL

El càlcul del potencial elèctric en la superfície donada una distribució arbitrària de la conductivitat elèctrica del terreny, $\sigma(\vec{r})$ i una posició de les fonts sobre el medi, $F(\vec{r})$, implica la solució de l'equació diferencial (5.1) amb les condicions de contorn, $C(V)$, (5.2).

$$-\nabla \cdot (\sigma(\vec{r}) \cdot \nabla \cdot V(\vec{r})) = F(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \Omega \quad (5.1)$$

$$C(V) = \sigma(\vec{r}) \cdot \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial n} + \alpha(\vec{r}) \cdot (V(\vec{r}) - V_0) + Q_0 = 0 \quad \forall \vec{r} \in \Gamma \quad (5.2)$$

Així, sobre el contorn del domini, l'algorisme de modelització utilitza unes condicions de contorn mixtes descrites per Queralt *et al.* 1989, on \vec{n} és la direcció perpendicular a la frontera que simula l'infinit, Γ_∞ , i el seu sentit és cap a fora tal com s'observa en la figura 5.1; V_0 és un valor fixat del potencial en els punts del contorn; Q_0 el valor fixat del flux del potencial a través de la frontera descrita i, finalment, $\alpha(\vec{r})$ és una funció afitada. L'avantatge d'aquests tipus de condicions de contorn és que milloren les solucions obtingudes amb la utilització de les condicions de Dirichlet i Neumann.

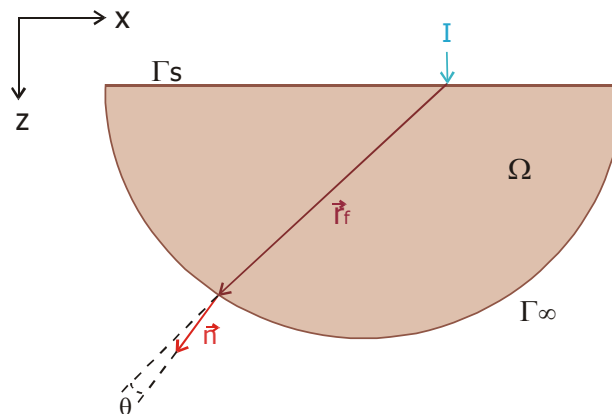


Figura 5.1. Representació de les fronteres, Γ_S i Γ_∞ , del domini Ω , de la direcció normal a la frontera que simula l'infinit, \vec{n} , del vector distància a la font, \vec{r}_f , i de l'angle que formen aquests dos últims vectors, θ . (Modificada de Queralt *et al.*, 1989).

En aquest algorisme es consideren models bidimensionals, on la conductivitat elèctrica només depèn de dues coordenades: $\sigma(x, z)$. La coordenada y es pren com la direcció de l'estructura, o sigui, la direcció on la conductivitat del terreny és constant, $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$.

Malgrat el medi sigui bidimensional, els elèctrodes que injecten el corrent elèctric en el medi són puntuals i en conseqüència, el potencial mesurat és del tipus $V(x, y, z)$. Per tal d'eliminar la dependència del potencial amb la coordenada y , s'utilitza la transformada de Fourier en cosinus. Aquesta funció és parella i s'utilitza degut al comportament que presenta el potencial quan els elèctrodes estan situats en el pla $y=0$. Així, les equacions anteriorment plantejades es transformen en l'espai (x, z, k_y) , on k_y es defineix com el nombre d'ona i té dimensions de L^{-1} . Per tant, la solució del

problema directe és el potencial elèctric transformat, $\check{V}(x, z; k_y)$, el qual es defineix com:

$$\check{V}(x, z; k_y) = \int_0^{\infty} V(x, y, z) \cdot \cos(k_y y) \cdot dy \quad (5.3)$$

Finalment, solucionant l'equació diferencial per a diferents valors del nombre d'ona k_y , es determina el valor del potencial elèctric antitransformat segons la relació:

$$V(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \check{V}(x, z; k_y) \cdot dk_y \quad (5.4)$$

on el terme del cosinus no apareix, perquè el potencial elèctric es determina en el pla $y=0$, perfil perpendicular a l'estructura.

La solució exacta de la darrera integral requeriria la utilització d'infinits valors del nombre d'ona k_y fent realment dificultós la determinació del potencial elèctric antitransformat. Per tant, s'estudia una forma alternativa d'aquest càlcul reduint les dimensions del problema mitjançant la interpolació.

El comportament del potencial transformat en funció de la variable $t=k_y \cdot r_f$, on r_f és la distància del punt considerat a l'elèctrode, presenta una caiguda exponencial per a punts allunyats ($t \rightarrow \infty$) i tendeix a infinit de forma logarítmica per a punts propers a l'elèctrode ($t \rightarrow 0$) amb la presència d'una singularitat integrable en $t=0$.

Així, Queralt *et al.* (1989) proposa la selecció d'un conjunt òptim i reduït de valors del nombre d'ona k_y , 61 valors, des de 10^{-6} fins a 100, per calcular l'espectre del potencial elèctric. La solució es determina aplicant una interpolació logarítmica per aquells punts més propers a l'elèctrode, i una interpolació exponencial pels punts que es troben més lluny i per a valors de k_y grans. Encara que aquest mètode aporta bons resultats, el nombre de k_y utilitzat encara és molt elevat i fa que la modelització sigui un procés massa lent.

Per millorar aquest aspecte es presenta un nou procés que redueix el nombre de k_y utilitzant únicament tres valors i disminuint significativament el temps de computació del problema directe. Prèviament a la descripció d'aquest nou procés, es presenta la

manera com es resol el problema directe mitjançant el mètode dels elements finits en l'espai transformat ja que és necessari per entendre les noves contribucions a la resolució del problema directe.

5.2.1 – MÈTODE DELS ELEMENTS FINITS (M.E.F.)

En aquest algorisme de modelització s'utilitza el mètode dels elements finits, M.E.F., que consisteix en calcular una solució aproximada d'una equació diferencial discretitzant el medi en un nombre finit d'elements i utilitzant les corresponents condicions de contorn.

Per implementar aquesta tècnica es discretitza el domini en N elements, i en cadascun d'ells la propietat física de la conductivitat elèctrica es manté constant. Aquests elements permeten identificar una malla i uns nusos. En aquest treball s'han definit els elements en dues dimensions, amb una forma triangular i una mida variable, figura 5.1.

Per tal que la resolució del mètode numèric sigui bona, la malla es dissenya creant elements més petits en les zones on hi ha canvis de resistivitat, que normalment coincideixen amb les zones més superficials, i va augmentant la seva mida a mesura que els elements se situen a més profunditat.

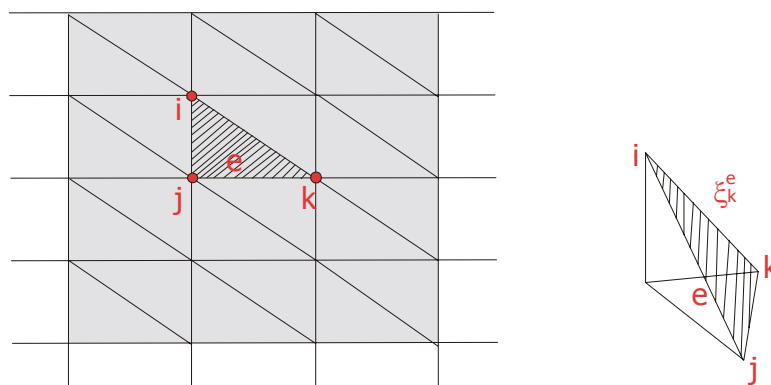


Figura 5.2. Representació dels elements triangulars que formen la malla als quals s'associen les funcions de forma lineals, ξ .

La solució aproximada, \hat{V} , utilitzant aquesta tècnica es basa en la definició del potencial elèctric mitjançant la combinació lineal de les funcions de forma, ξ_i , associades als nusos i definides en un domini acotat.

$$\hat{V}(\vec{r}) \cong \sum_{i=1}^N V(\vec{r}_i) \cdot \xi_i \quad (5.5)$$

Per tal de resoldre l'equació diferencial s'utilitza el mètode dels residus ponderats amb la tècnica de Galerkin (Zienkiewicz, 1981). Aquesta tècnica transforma l'equació diferencial en la suma de diverses integrals quan s'imposa l'ortogonalitat entre els residus de la solució aproximada i unes funcions pes, ω_i . En el cas d'aplicar la tècnica de Galerkin les funcions pes, ω_i , són les mateixes funcions de forma, ξ_i . Les condicions de contorn mixtes s'imposen sobre elles i, aquestes són escollides com funcions contínues i lineals, les quals presenten un salt en les seves derivades primeres.

Quan les estructures es consideren bidimensionals, les funcions de forma tenen la següent expressió en un element de la malla:

$$\xi_i^e = \frac{1}{2\Omega_e} (a_i + b_i x + c_i z)$$

5.2.2 - RESOLUCIÓ EN L'ESPAI TRANSFORMAT

Tal com ha estat explicat anteriorment, la solució de la modelització elèctrica sobre estructures bidimensionals on la conductivitat elèctrica només depèn de les coordenades x i z , se soluciona eliminant la dependència de la coordenada y a partir de la transformada de Fourier en cosinus.

Després de l'aplicació del mètode dels residus ponderats amb el criteri de Galerkin i aplicant la transformada de Fourier sobre l'equació diferencial, s'obté la següent expressió en l'espai transformat (x, z, k_y):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, z) \cdot \nabla \xi_i(\mathbf{x}, z) \cdot \nabla \xi_j(\mathbf{x}, z) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \beta(\mathbf{x}, z; k_y) \cdot \xi_i(\mathbf{x}, z) \cdot \xi_j(\mathbf{x}, z) \, d\Gamma + \right. \\
\left. k_y^2 \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, z) \cdot \xi_i(\mathbf{x}, z) \cdot \xi_j(\mathbf{x}, z) \, d\Omega \right\} \cdot \check{V}_i(\mathbf{x}, z; k_y) = \\
\int_{\Omega} \check{q} \cdot \xi_j(\mathbf{x}, z) \, d\Omega + \int_{\Gamma} [\beta(\mathbf{x}, z; k_y) \cdot \check{V}_0 - \check{Q}_0] \xi_j(\mathbf{x}, z) \, d\Gamma \quad \forall j = 1, \dots, N
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

En el mateix espai transformat, l'equació que defineix les condicions de contorn mixtes, $C(\check{V})$, presenta aquesta forma:

$$C(\check{V}) = \sigma(\mathbf{x}, z) \cdot \frac{\partial \check{V}(\mathbf{x}, z; k_y)}{\partial n} + \beta(\mathbf{x}, z; k_y) \cdot [\check{V}(\mathbf{x}, z; k_y) - \check{V}_0] + \check{Q}_0 = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, z) \in \Gamma
\tag{5.7}$$

L'expressió (5.6) es pot simplificar i obtenir aquest sistema d'equacions en forma matricial:

$$(A + B + C) \cdot \check{V}(\mathbf{x}, z; k_y) = \check{Q}(\mathbf{x}, z)
\tag{5.8}$$

on \check{V} representa el potencial transformat en tots els nusos de la malla, la matriu A és la matriu de conductivitat que aporta informació sobre el medi, la matriu B és la matriu anomenada de contorn que presenta una dependència amb el nombre d'ona, k_y , a través del paràmetre β , i la matriu C depèn del nombre d'ona $(k_y)^2$. Aquestes tres matrius presenten les mateixes característiques, són matrius quadrades d'ordre N, simètriques i definides positives. Finalment, el terme independent del sistema representa la injecció de les fonts de corrent. Aquestes matrius, però, es troben definides sobre cada element d'àrea Ω_e del domini Ω , i es poden expressar tal com s'indica a continuació.

Matriu A sobre l'element d'àrea, o matriu elemental A^e :

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \sigma^e \cdot \nabla \xi_i^e \cdot \nabla \xi_j^e \cdot d\Omega_e = \frac{\sigma^e}{4\Omega_e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad \forall r \in \Omega$$

$$\text{on } b_i = \varepsilon_{ijk} (x_k - x_j) \quad \text{i} \quad c_i = \varepsilon_{ijk} (z_k - z_j)$$

On el valor de b_i i c_i depenen de les coordenades dels nusos de la malla i ε_{ijk} representa el tensor de permutacions, i l'àrea de l'element, Ω_e , val $\Omega_e = 1/2 (c_i b_j - b_i c_j)$.

Matriu elemental B^e :

$$B_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} \beta^e \cdot \xi_i^e \cdot \xi_j^e \cdot d\Gamma_e = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, z) \notin \Gamma \\ \frac{\beta^e}{6} L_e (1 + \delta_{ij}) & \text{si } (x, z) \in \Gamma \end{cases}$$

on L_e és la longitud de l'element.

Matriu elemental C^e :

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \sigma^e \cdot k_y^2 \cdot \xi_i^e \cdot \xi_j^e \cdot d\Omega_e = k_y^2 \frac{\sigma^e \Omega_e}{12} (1 + \delta_{ij}) \quad \forall r \in \Omega$$

Aplicant un sumatori sobre els valors de les matrius elementals A^e , B^e i C^e , es determina el valor de les tres matrius anteriors, A , B i C .

$$A_{ij} = \sum_e A_{ij}^e \quad B_{ij} = \sum_e B_{ij}^e \quad \text{i} \quad C_{ij} = \sum_e C_{ij}^e$$

Conegudes aquestes tres matrius, el sistema d'equacions (5.8) permet trobar la incògnita del problema, el potencial transformat en tots els nusos de la malla per a un valor determinat del nombre d'ona k_y .

5.2.2.1 - IMPOSICIÓ DE LES CONDICIONS DE CONTORN

Les condicions de contorn es compleixen de forma natural sobre els contorns dels elements que representen el subsòl terrestre. En el cas concret de les fronteres exteriors, les condicions de contorn mixtes presenten l'avantatge que són generals per a qualsevol model que representi un medi semi-inifinit.

Quan s'imposen les condicions de contorn mixtes en l'espai transformat (Queralt *et al.*, 1991) es considera que $\check{V}_0 = \check{Q}_0 = 0$, i per tant l'equació s'expressa com:

$$\sigma(x, z) \cdot \frac{\partial \check{V}(x, z; k_y)}{\partial \bar{n}} = \beta(x, z; k_y) \cdot \check{V}(x, z; k_y)$$

Per acotar el domini on es vol resoldre el problema directe, es considera un medi semi-inifinit limitat per dues fronteres o contorns: la superfície terrestre, Γ_s , i la frontera que simula l'infinit, Γ_∞ . Sobre aquests dos contorns del domini s'apliquen les condicions de contorn mixtes.

En el cas concret de la frontera que separa el medi terrestre de l'aire, Γ_s , s'imposa la condició de Neumann homogènia, la qual es dedueix de la continuïtat del component normal del vector densitat de corrent quan es considera l'aire com un medi totalment aïllant o de conductivitat nul·la ($\sigma=0$). Aquesta condició de contorn s'expressa com:

$$\frac{\partial \mathcal{V}(r)}{\partial \bar{n}} = 0$$

Per a la frontera situada a l'infinit, Γ_∞ , s'imposa la condició desenvolupada per Dey i Morrison (1979a), la qual es basa en el comportament asimptòtic del potencial elèctric a grans distàncies de la font. En l'espai transformat aquest comportament s'expressa com:

$$\check{V}(x, z; k_y) = A \cdot K_0(\bar{r}_f \cdot k_y)$$

on A és una constant que depèn del model i \bar{r}_f és la distància a la font. Seguint l'equació de les condicions de contorn mixtes, (5.7), es calcula el valor de la derivada

parcial del potencial elèctric transformat respecte de la direcció normal i s'obté:

$$\frac{\partial \check{V}(x, z; k_y)}{\partial n} = -A \cdot k_y \cdot K_1(\bar{r} \cdot k_y) \cdot \cos \theta$$

$$-\sigma(x, z; k_y) \cdot \frac{\partial \check{V}(x, z; k_y)}{\partial n} = \sigma(x, z; k_y) \cdot k_y \cdot \frac{K_1(\bar{r} \cdot k_y)}{K_0(\bar{r} \cdot k_y)} \cdot \cos \theta \cdot \check{V}(x, z; k_y)$$

Per tant, es dedueix el valor de $\beta(x, z; k_y)$:

$$\beta(x, z; k_y) = \sigma(x, z; k_y) \cdot k_y \cdot \frac{K_1(\bar{r} \cdot k_y)}{K_0(\bar{r} \cdot k_y)} \cdot \cos \theta$$

Finalment, sobre els elements que formen la malla i que són el resultat de l'aplicació del mètode dels elements finits, s'ha de complir la continuïtat del potencial elèctric i del component normal del vector densitat de corrent, els quals ja havíem introduït en l'apartat 5.2.1.

5.2.3 – MÈTODE PER DETERMINAR EL POTENCIAL ELÈCTRIC

Per tal de reduir el temps de càlcul del problema directe, es presenta un nou mètode per calcular el potencial elèctric antitransformat utilitzant un nombre petit de valors del nombre d'ona, k_y . L'avantatge d'aquesta tècnica és la disminució del temps de resolució sense que això suposi augmentar de forma significativa l'error en el càlcul de la resistivitat aparent.

El mètode que s'estudia es basa en considerar que el potencial elèctric transformat presenta el mateix comportament que la funció modificada de Bessel de segona espècie i d'ordre zero, K_0 . Gràcies a aquesta analogia se simplifica el càlcul de la integral (5.4) utilitzant únicament tres valors de k_y .

La figura 5.3 mostra el comportament pel potencial elèctric transformat en funció de la variable, $t=k_y \cdot r$. On r indica la distància a qualsevol punt de la malla.

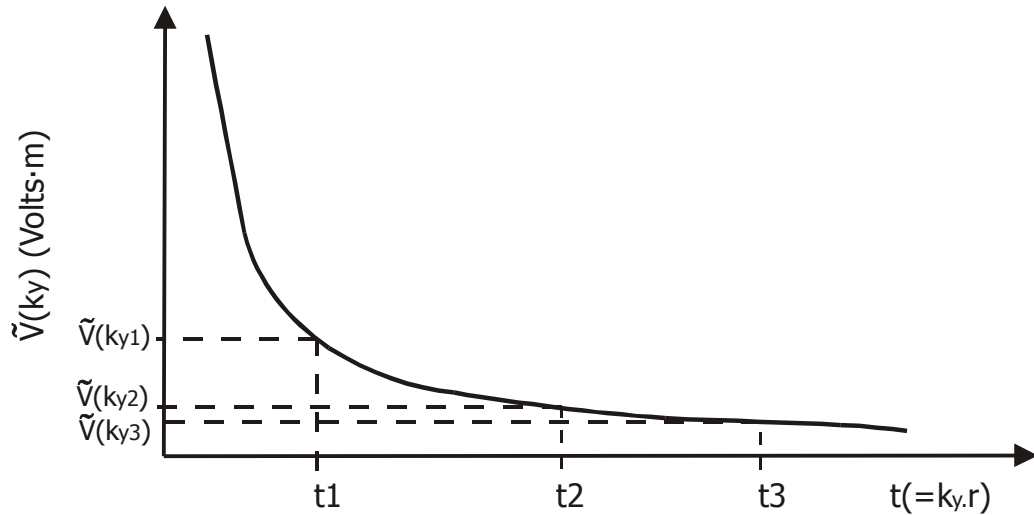


Figura 5.3. Representació del potencial elèctric transformat, $\tilde{V}(k_y)$, en funció de la variable $t=k_y \cdot r$.

La funció es pot interpolar entre els valors, t_1 , t_2 i t_3 , els quals es determinen a partir de tres valors diferents de k_y i en un mateix punt sobre la malla: $t_1=k_{y1} \cdot r$, $t_2=k_{y2} \cdot r$ i $t_3=k_{y3} \cdot r$. Així, l'espectre del potencial elèctric es divideix en aquests quatre intervals:

$$\tilde{V}(k_y) = C_1 \cdot K_0(t) \text{ entre } [0, t_1]$$

$$\tilde{V}(k_y) = C_1 \cdot K_0(t) + (C_2 - C_1) \cdot \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \cdot K_0(t) \text{ entre } [t_1, t_2]$$

$$\tilde{V}(k_y) = C_2 \cdot K_0(t) + (C_3 - C_2) \cdot \left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \right) \cdot K_0(t) \text{ entre } [t_2, t_3]$$

$$\tilde{V}(k_y) = C_3 \cdot K_0(t) \text{ entre } [t_3, \infty]$$

Els termes C_1 , C_2 i C_3 es poden entendre com els següents quocients entre funcions:

$$C_1 = \frac{\tilde{V}(k_{y1})}{K_0(t_1)} , \quad C_2 = \frac{\tilde{V}(k_{y2})}{K_0(t_2)} \quad \text{i} \quad C_3 = \frac{\tilde{V}(k_{y3})}{K_0(t_3)} \tag{5.9}$$

Utilitzant aquesta nova forma de la funció del potencial elèctric transformat pels diferents intervals i les relacions descrites en (5.9), el potencial elèctric en l'espai (x, y, z) queda expressat d'aquesta forma:

$$V(\vec{r}) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \check{V}(k) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \left[\int_0^{t_1} C_1 \cdot K_0(t) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[C_1 + (C_2 - C_1) \cdot \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \right] \cdot K_0(t) \cdot dt + \int_{t_2}^{t_3} \left[C_2 + (C_3 - C_2) \cdot \left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \right) \right] \cdot K_0(t) \cdot dt + \int_{t_3}^{\infty} C_3 \cdot K_0(t) \cdot dt \right] \quad (5.10)$$

Aquesta nova tècnica només requereix calcular dos tipus integrals les quals depenen de la funció modificada de Bessel d'ordre zero, i es descriuen tot seguit:

$$\int_0^{t_i} K_0(t) \cdot dt = I(t_i) \quad , \text{ on } I(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (5.11)$$

$$\int_0^{t_i} t \cdot K_0(t) \cdot dt = 1 - t_i \cdot K_1(t_i) \quad (5.12)$$

El resultat de la integral (5.11) depèn de la funció modificada de Bessel d'ordre 1. Aquestes funcions, $I(t)$, $K_1(t)$ i $K_0(t)$ es troben tabulades i són relativament senzilles d'implementar dins el programa de modelització. Substituint aquestes relacions en l'equació (5.10), la solució del problema directe o modelització bidimensional per a la prospecció elèctrica en l'espai (x, y, z) s'expressa com:

$$V(\vec{r}) = \frac{2}{\pi} \cdot r \cdot \left[\left(C_3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{t_1}{t_2 - t_1} \cdot (C_2 - C_1) \cdot (I(t_1) + K_1(t_1)) \right) + \left(\frac{t_3}{t_3 - t_2} \cdot (C_2 - C_3) \cdot (I(t_3) + K_1(t_3)) \right) \right] + (2 \cdot C_2 \cdot I(t_2)) + \left(\frac{t_2}{t_2 - t_1} \cdot (C_1 - C_2) + \frac{t_2}{t_3 - t_2} \cdot (C_3 - C_2) \right) \cdot (I(t_2) + K_1(t_2)) \quad (5.13)$$

L'inconvenient principal d'aquest mètode és que la variable que s'utilitza, $t=k_y \cdot r$, depèn de la distància de l'elèctrode als diferents nusos de la malla, r , i per tant, depèn del tipus de malla que es construeix per a cada configuració electrònica.

5.3 - DESCRIPCIÓ DE L'ALGORISME DE MODELITZACIÓ

Els desenvolupaments teòrics descrits en l'apartat 5.2 s'implementen en un únic programa de modelització en llenguatge Fortran 90, que integra els 5 programes desenvolupats per Queralt 1989 escrits en Fortran 77. El programa s'adapta per a la resolució del problema directe en perfils de sondejos elèctrics verticals i de tomografia elèctrica i es considera el cas que els perfils siguin perpendiculars a l'estructura.

El programa s'estructura en quatre parts importants, tal com mostra el diagrama de la figura 5.4. Els continguts i objectius de cadascuna de les parts es descriuen breument a continuació.

- 1) La primera part del programa consisteix en una nova manera de descriure els fitxers d'entrada de les dades a través de dues malles. Una malla dona a conèixer la distribució de la resistivitat elèctrica de l'estructura del subsòl, la localització de les fonts de corrent utilitzades i les característiques del dispositiu utilitzat (nombre d'elèctrodes i separació entre ells) i està definida pel propi usuari del programa. Pel contrari, l'altra malla està definida en funció de la configuració electrònica i presenta una disposició dels elements fixa.
- 2) En segon lloc, el medi es divideix en N elements i es determina la conductivitat elèctrica en cadascun d'aquests elements que formen la malla utilitzant la nova estratègia de la superposició de dues malles. Posteriorment, es defineixen les coordenades de cada nus i els contorns que delimiten el medi, superfície i frontera que simula l'infinit.
- 3) Seguidament, se soluciona l'equació diferencial tal com feia el programa de Queralt 1989, a través del mètode dels elements finits en l'espai transformat i en tots els

nusos de la malla. Després s'aplica l'antitransformada per trobar el potencial elèctric en l'espai (x, y, z) aplicant el nou mètode de resolució.

- 4) L'última fase del programa requereix calcular el valor de la resistivitat aparent i expressar els valors en forma que el fitxer de sortida pugui ser visualitzat de manera senzilla.

En la tercera part del programa és on es calcula pròpiament l'algorisme de modelització i, en concret, la resolució de l'equació diferencial en l'espai transformat a partir del programa desenvolupat per Queralt, 1989. Aquest càlcul està totalment integrat en una sola subrutina, la qual es pot estructurar alhora en aquestes sis fases:

- I. En la primera fase es calculen les matrius elementals A^e , B^e i C^e , les quals estan definides en l'apartat 5.3.2. El càlcul de la matriu elemental de contorn, B^e , precisa conèixer les funcions modificades de Bessel d'ordre 0 i 1, K^0 i K^1 , les quals es troben implementades en el mateix programa en forma de subrutines.
- II. Aquestes tres matrius se sumen entre elles per trobar la matriu global M , la qual està present en l'equació diferencial, (5.8). La matriu B es transforma a l'esquema concentrat, que consisteix en sumar tots els components de la matriu a la seva diagonal. El fet d'utilitzar l'esquema concentrat no introdueix un error important en el resultat final del potencial transformat, però pel contrari, si que aporta estabilitat al procés numèric amb un estalvi important de memòria i de temps (Queralt, 1989).
- III. Les característiques que presenten les matrius A , B i C , simètriques, poc denses, amb diagonal dominant i definides positives, permeten la utilització dels mètodes directes per solucionar el sistema d'equacions.
El programa utilitza la descomposició de Cholesky (Ralston i Wilf, 1967), on la matriu global M s'expressa com el producte d'una matriu triangular inferior per la seva transposada, $M = S^T \cdot S$.
- IV. Coneixent el valor del corrent que s'injecta a través dels elèctrodes, I , s'incorpora el terme de la font en els nusos on s'han situat aquests elèctrodes.
- V. Seguidament, el sistema d'equacions diferencials $(S^T S) \cdot \check{V} = \bar{Q}$ se soluciona

en dos passos. Primer es defineix $S \cdot \check{V} = \bar{X}$ i el sistema anterior s'expressa com $S^T \cdot \bar{X} = \bar{Q}$. En un primer pas es calcula el valor de \bar{X} i després, el valor del potencial transformat, \check{V} utilitzant la mateixa subrutina.

- VI. Finalment, la determinació de la resposta elèctrica requereix transformar el potencial elèctric a l'espai antitransformat (x, y, z) .

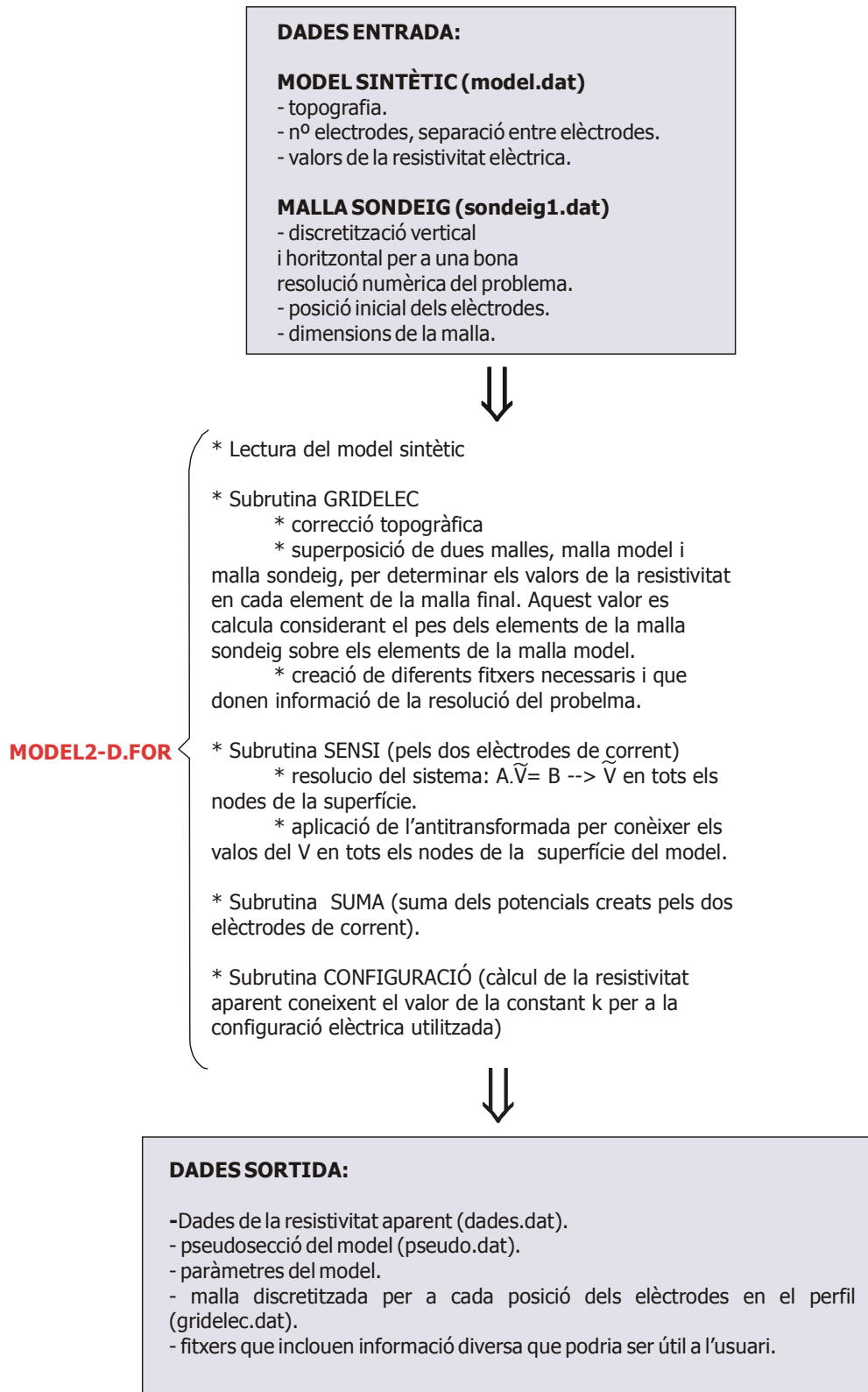


Figura 5.4. Diagrama del procés de modelització on s'inclouen les entrades i sortides de les dades.

5.3.1 – TRACTAMENT DE LA MALLA

Una qüestió molt important en la resolució de la modelització bidimensional és la precisió numèrica. La resolució mitjançant el mètode dels elements finits requereix discretitzar el subsòl en un nombre adequat d'elements, els quals constitueixen la malla del problema directe. La malla és la que controla la precisió de la solució numèrica i per aquesta raó, és important que la seva discretització sigui fina. Això comporta que presenti unes elevades dimensions.

Aquest treball introdueix una nova estratègia per a simplificar aquest pas amb la utilització de dues malles, una malla anomenada "malla dispositiu", la qual controla la solució numèrica, i una altra malla anomenada "malla model", la qual descriu l'estructura del subsòl. Aquesta estratègia és encara més important en la solució del problema invers com es veurà en el capítol següent. Al llarg del desenvolupament del capítol ens referirem a elles amb aquests noms, "malla dispositiu" i "malla model", per tal de poder distingir-les.

5.3.1.1 – MALLA DISPOSITIU

Inicialment es descriu la malla dispositiu, la qual es dissenya en funció de la configuració electròdica, encara que certes característiques són vàlides per a tots els tipus de dispositius.

En primer lloc, la dimensió de la malla sempre és elevada i la longitud dels seus elements varia en funció de la profunditat i de la localització respecte dels elèctrodes. La malla no és regular en cap de les dues direccions. La distància entre les línies horitzontals va augmentant a mesura que la profunditat és major, i la distància entre les línies verticals augmenta a mesura que ens allunyem de la posició dels elèctrodes.

En aquesta memòria es descriuen les malles construïdes per a la tomografia elèctrica i pel SEV, ja que degut a les característiques dels dispositius, no poden ser la mateixa. Així, en la figura 5.5 es presenta la part central de la malla dissenyada quan s'utilitza un perfil elèctric amb una configuració del tipus Wenner-Schlumberger o Dipol-Dipol. En particular, la malla per aquests dispositius està formada per 116 nusos en la direcció horitzontal i per 29 nusos en la direcció vertical, amb un total de 3364 nusos.

Així, el nombre d'elements és de 3220, 115x28, cadascun d'ells amb el seu valor de la resistivitat elèctrica. El disseny de la malla s'ha efectuat de manera que hi hagi al menys quatre nodes horitzontals entre dos dels elèctrodes, per assegurar que el càlcul del potencial elèctric es realitza amb suficient precisió. La distància horitzontal entre els nusos 6 i 110 de la malla es manté constant, però abans i després d'aquests, la distància va augmentant per tal de simular l'infinit. Es pot dir que les línies verticals de la malla dispositiu estan distribuïdes simètricament respecte del nus central, tal com es mostra en l'exemple de la figura 5.5.

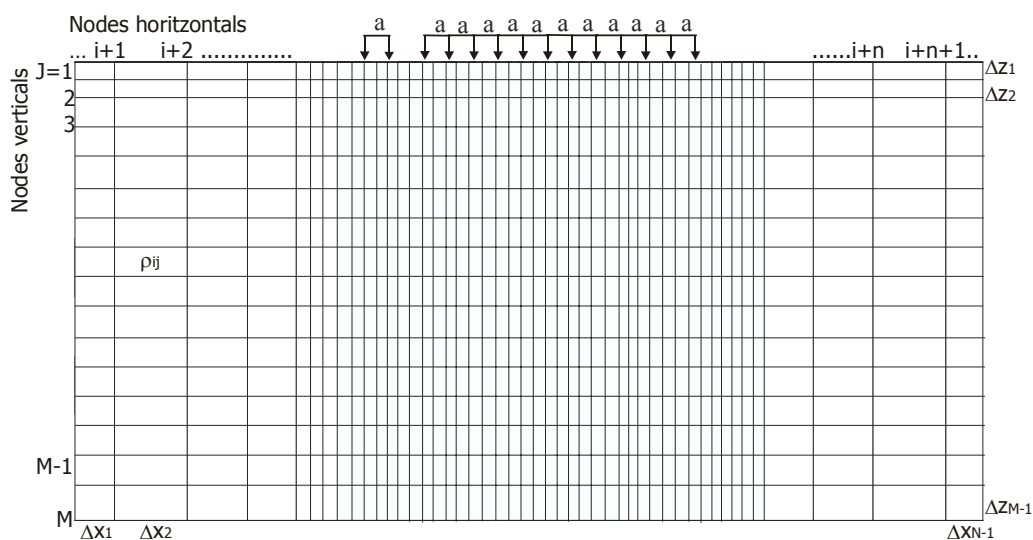


Figura 5.5. Part central de la malla dispositiu utilitzada en el mètode dels elements finits, MEF, pel cas de la configuració electròdica Wenner-Schlumberger o Dipol-Dipol.

En el cas de modelitzar un sondeig elèctric vertical s'utilitza una malla diferent, formada per 101 nusos horitzontals i 34 nusos verticals, amb un total de 3434 nusos o nodes i 3300 elements, figura 5.6. La malla està dissenyada de manera que el primer $AB/2$ és de 10 metres aproximadament, i va augmentant amb sis valors per dècada logarítmica fins assolir una obertura de 1000 metres. Aquests valors, però, es poden modificar en funció de la profunditat que es vol investigar.

Pel cas de la configuració SEV, la distància horitzontal entre els nusos es manté fixa entre els valors 39 i 60. En la resta dels punts, la malla augmenta la distància de forma que s'adapta perfectament a l'obertura entre els elèctrodes, figura 5.6.

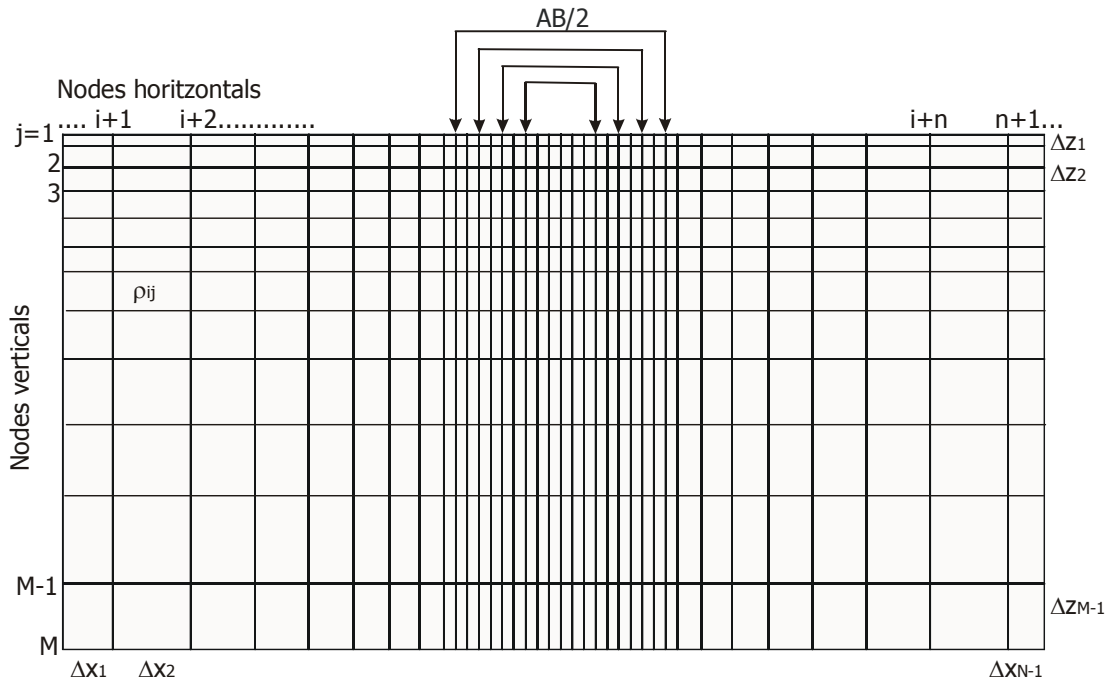


Figura 5.6. Representació gràfica de la part central de la malla dispositiu utilitzada en un sondeig elèctric vertical.

5.3.1.2 – MALLA MODEL

Seguidament, es descriuen les característiques de la malla model que presenta un disseny totalment diferent. La malla model descriu el subsòl amb un nombre reduït de blocs rectangulars o elements, figura 5.7, és a dir, que l'estructura del subsòl es representa amb una discretització menys precisa. La dimensió d'aquesta malla és relativament petita comparada amb la malla dispositiu, i aporta l'avantatge que la descripció del model es realitza amb pocs paràmetres, cosa que simplificarà, posteriorment, la resolució del problema invers.

En el cas de la malla model, la distància entre les línies horitzontals i entre les verticals no és fixa, depèn de la geometria que es vulgui representar i és el propi usuari el que realitza aquesta descripció en funció de la informació *a priori* que vol introduir. La llibertat per explicar gràficament el model és possible a causa que aquesta malla no controla la solució numèrica, i per tant, no necessita tenir una dimensió elevada ni una discretització fina. Els elements poden ser grans en ambdues direccions, tant si estan a prop de la superfície com si es troben a distàncies superiors.

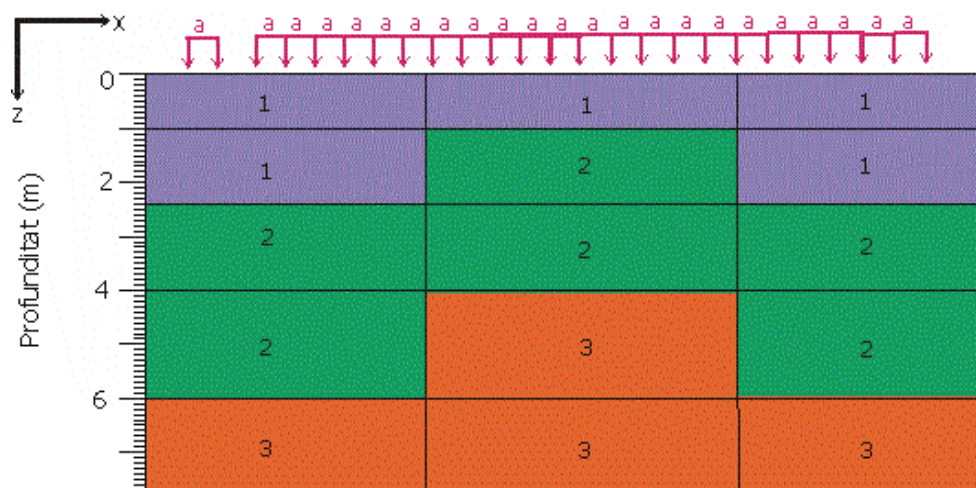


Figura 5.7. Exemple d'una malla model simulant una estructura geològica amb diferents valors de la resistivitat elèctrica. Cada color o nombre s'identifica amb una resistivitat elèctrica diferent.

5.3.1.3 – ESTRATÈGIA AMB LES DUES MALLES

L'estratègia desenvolupada en aquest programa de modelització bidimensional consisteix en construir una nova malla que és el resultat de la superposició de les dues malles presentades anteriorment. Inicialment, s'utilitza la malla model per descriure l'estructura del subsòl, la posició inicial dels elèctrodes i la separació entre ells. Un cop coneguda tota aquesta informació, el potencial elèctric es determina en els nusos de la malla dispositiu.

En el cas que la modelització simuli una configuració elèctrica, Wenner-Schlumberger o Dipol-Dipol, el primer elèctrode del perfil se situa sobre un determinat nus de la malla dispositiu localitzat sobre la zona de discretització fina, i la resta dels elèctrodes estan localitzats en funció de la configuració triada a una distància que serà un múltiple de la separació entre els elèctrodes, a .

En canvi, en el cas d'un perfil de SEV, el procés és una mica diferent. El nus que defineix el punt mig de la malla dispositiu s'associa exactament amb el punt on es localitza el sondeig elèctric vertical.

Finalment, en el cas de tenir un perfil de sondejos elèctrics verticals la malla dispositiu

es desplaça a la posició del nou SEV, el qual es troba descrit en la malla model.

Una vegada les dues malles es troben superposades, es calcula de forma ponderada els valors de la resistivitat elèctrica que corresponen als elements de la malla dispositiu. D'aquesta manera la malla dispositiu controla la resolució numèrica del problema directe, però els valors de la resistivitat dels elements estan controlats per la malla model.

El valor de la resistivitat elèctrica que obtindria un element de la malla dispositiu un cop realitzada la superposició amb la malla model es mostra d'una manera gràfica en l'equació (5.14) i la figura 5.8 .

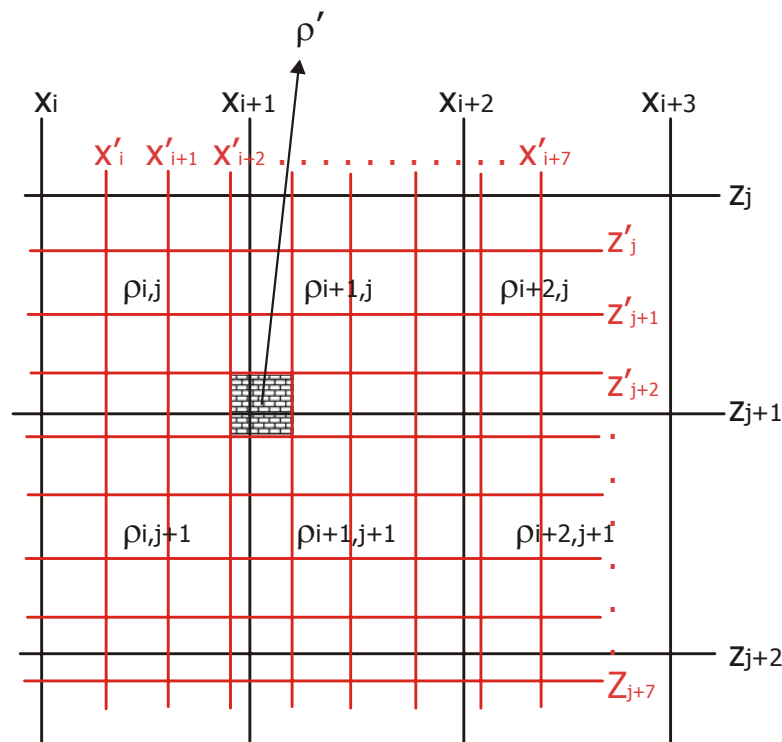


Figura 5.8. Representació gràfica de la superposició de les dues malles i mostra del càlcul de la resistivitat elèctrica tenint en compte el pes dels elements. (Malla dispositiu en color vermell i malla model en color negre).

Els valors de la resistivitat elèctrica dels elements de la malla dispositiu es calculen en funció de les coordenades dels nusos d'ambdues malles. Siguin x_i i x'_i les distàncies horitzontals dels nusos de la malla model i de la malla dispositiu respectivament, i z_j i z'_j les seves distàncies verticals, el pes d'un element de la malla dispositiu depèn de com aquest estigui situat dins de la malla model tal com mostra aquesta equació.

$$\rho' = \frac{(\rho_{i,j} \cdot P_{i,j}) + (\rho_{i+1,j} \cdot P_{i+1,j}) + (\rho_{i,j+1} \cdot P_{i,j+1}) + (\rho_{i+1,j+1} \cdot P_{i+1,j+1})}{P_{i,j} + P_{i+1,j} + P_{i,j+1} + P_{i+1,j+1}} \quad (5.14)$$

$$\text{on } P_{i,j} = (P_{i,j})_x + (P_{i,j})_z = \frac{(x_{i+1} - x'_{i+2})}{(x'_{i+3} - x'_{i+2})} + \frac{(z'_{j+2} - z_j)}{(z'_{j+2} - z'_{j+1})}$$

Es poden descriure diverses situacions, les quals es resumeixen en:

- El cas més senzill, on l'element de la malla fina cau totalment a dins d'un element de la malla grollera. En aquest cas el valor de la resistivitat és el mateix que té l'element de la malla model i el pes serà igual a la unitat.
- El cas més complex on l'element de la malla dispositiu cau en la línia de separació de dos o més elements de la malla model. La resistivitat elèctrica dels elements es determinarà a partir d'una suma ponderada de les resistivitats elèctriques definides en els elements de la malla model. El pes es calcula en funció de la longitud de l'element de la malla dispositiu que es troba dins l'element de la malla model. Total com s'indica en la figura 5.8.

A través d'aquesta nova l'estratègia que s'ha dut a terme amb les dues malles, es construeix una matriu de pesos, la qual serà molt útil alhora de plantejar el problema invers. La matriu de pesos aporta la informació sobre la dependència que existeix entre els elements d'ambdues malles. La dimensió d'aquesta matriu és molt elevada ja que el nombre de files correspon al nombre d'elements de la malla model i el nombre de columnes correspon al nombre d'elements de la malla dispositiu. Això implica un esforç per implementar-la i guardar-la en la memòria, però els avantatges que aporta en la resolució del problema invers justifiquen el temps invertit i la memòria utilitzada.

Un exemple senzill de la superposició entre aquestes dues malles es troba en la figura 5.9, on es pot observar la malla dispositiu de la configuració Wenner-Schlumberger o Dipol-Dipol, una vegada ha estat superposada amb la malla model, figura 5.7. El resultat és una malla que presenta un canvi gradual entre les fronteres dels elements de resistivitat elèctrica diferent. És pot dir que les fronteres estan suavitzades, perquè

els pesos dels elements tendeixen a evitar canvis bruscos entre dos elements consecutius de resistivitat diferent. El resultat d'aplicar aquesta estratègia és molt satisfactori perquè simplifica la construcció dels models teòrics.

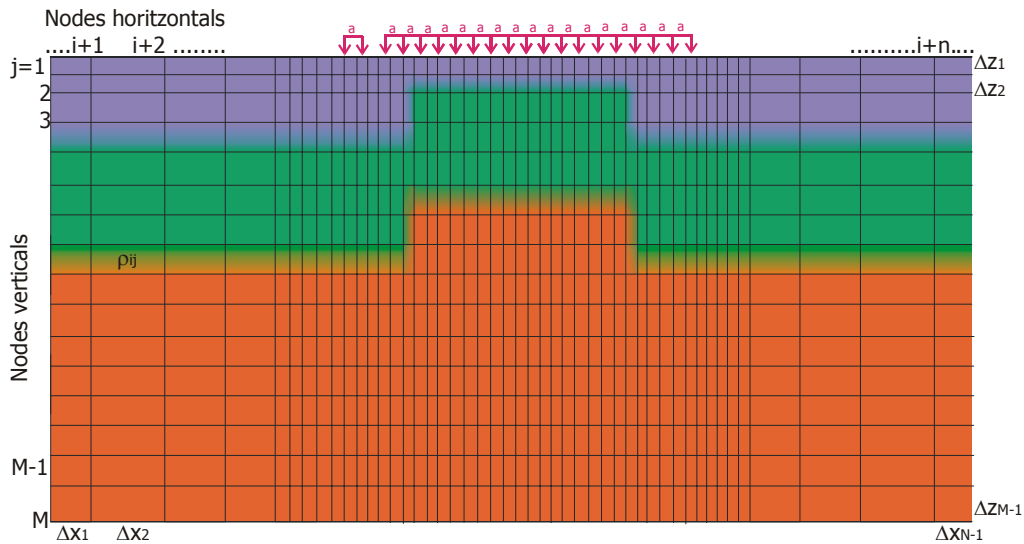


Figura 5.9. Exemple de la superposició de les malles de les figures 5.5 i 5.7. Aquesta malla presenta les dimensions de la malla dispositiu i els valors de la resistivitat aparent ponderats en funció dels valors fixats en la malla model.

5.3.2 – CÀLCUL DEL POTENCIAL ELÈCTRIC

El nou mètode proposat en l'apartat 5.2.3, que determina el potencial elèctric transformat amb tres valors de t , ha estat aplicat inicialment a les configuracions Wenner-Schlumberger i Dipol-Dipol, i posteriorment als perfils de SEV.

En el cas de la tomografia elèctrica, el comportament del potencial elèctric transformat presenta la característica que no varia de forma significativa entre els nusos que estan més allunyats de la posició de l'elèctrode de corrent i els nusos que estan més propers, figura 5.10. En aquesta figura es mostra el potencial elèctric transformat pel cas d'un medi homogeni de $100 \Omega \cdot m$ on s'ha realitzat un perfil elèctric amb la configuració Wenner-Schlumberger. Es presenten els resultats en quatre nusos concrets de la malla per tal d'observar el comportament d'aquesta funció. El nus 1 representa el nus més allunyat de la posició de l'elèctrode, i en canvi, el nus 9 representa el més proper ja

que l'elèctrode es clava en el node 10. Entre aquests dos nodes es troba el nus 5, el qual se situa fora del perfil elèctric i, finalment, el nus 50 estaria localitzat aproximadament en la meitat de la malla dispositiu.

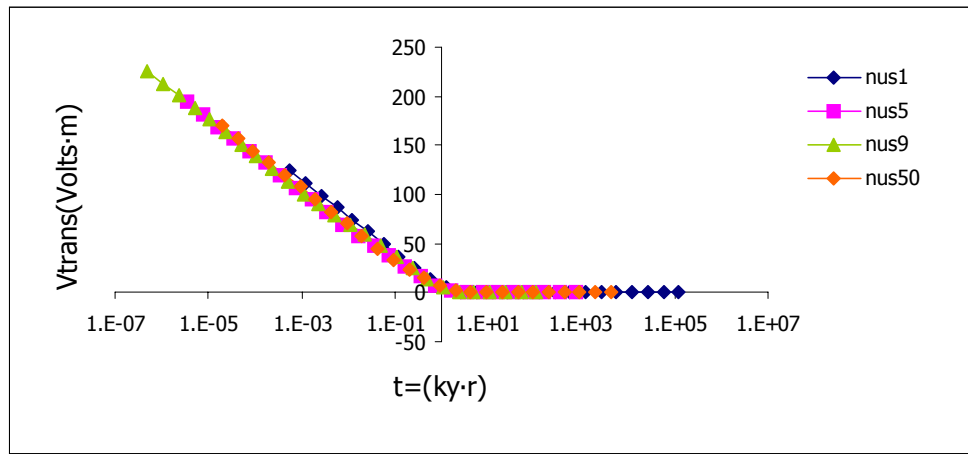


Figura 5.10. Representació gràfica del potencial elèctric transformat, V_{trans} , en funció de $t=(k_y \cdot r)$ en l'escala logarítmica, per a diferents nodes de la malla de la configuració Wenner-Schlumberger.

Les quatre gràfiques es troben pràcticament superposades i es comporten de la mateixa manera. Es pot observar com la funció té un comportament lineal decreixent des de valors molt petits del $\ln(t)$ fins que s'assoleix el valor nul del potencial elèctric transformat. Aquesta característica permet que es puguin fixar tres valors de k_y per a fer el càlcul de l'antitransformada del potencial elèctric.

Els valors triats després de realitzar diferents assajos són:

$$k_{y1} = 4,641 \cdot 10^{-6}, k_{y2} = 6,813 \cdot 10^{-4} \text{ i } k_{y3} = 0.1467,$$

els quals es distribueixen al llarg del domini dels nombres d'ona. Per valors de k_y entre 0 i 10^{-6} la contribució a la integral (5.4) és de l'ordre de 10^{-11} , per la qual cosa es pot considerar menyspreable.

Pel cas de la modelització d'un sondeig elèctric vertical la malla que s'utilitza és bastant diferent, figura 5.7, perquè presenta una forma regular durant pocs metres i ràpidament la distància entre els nodes va augmentant per tal d'aconseguir que els $AB/2$ vagin des de 10 fins a 1000 metres. Això provoca que les distàncies entre elements de la malla siguin molt més grans que en el cas dels perfils elèctrics

anteriors, i en conseqüència, la forma de l'espectre del potencial elèctric varia significativament respecte dels diferents punts de la malla, figura 5.11.

El comportament de la funció del potencial elèctric transformat és també lineal decreixent quan es representa respecte del $\ln(t)$, però en aquest cas, les gràfiques se separen lateralment entre elles i no es poden seleccionar tres valors de k_y compatibles per a tots els nusos. Així, aquesta nova tècnica presenta complicacions quan s'aplica en el sondeig elèctric vertical.

La figura mostra el potencial elèctric transformat per a quatre nusos que es troben distribuïts al voltant de la malla, des del node més allunyat, nus 1, fins al node més proper a l'elèctrode, nus 47 (l'elèctrode es troba clavat en el nus 48).

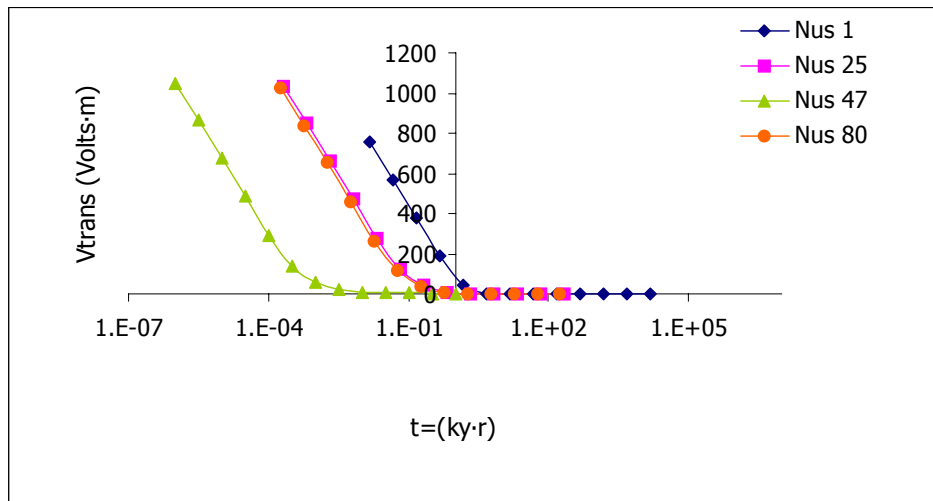


Figura 5.11. Representació gràfica del potencial elèctric transformat, V_{trans} , en funció de la variable $t=(k_y \cdot r)$, en l'escala logarítmica, per a diferents nodes de la malla SEV.

El càlcul de la integral per a determinar el potencial antitransformat es fa en funció de la variable $t=(k_y \cdot r)$, segons el desenvolupament de l'apartat 5.2.3. En la figura 5.12 s'observa com es dispersen les corbes del potencial transformat sobre l'eix d'abscisses quan es representa en funció de la variable k_y . En aquest cas, resulta complicat determinar quin és el valor de k_{y3} adequat per poder interpolar l'espectre del potencial elèctric. El valor de k_{y3} que serveix pel nus 1 no serveix pels altres nusos de la malla. Aquest és el motiu pel qual es va optar per aplicar un canvi de variable sobre la integral (5.4) amb la variable $t (= k_y \cdot r)$.

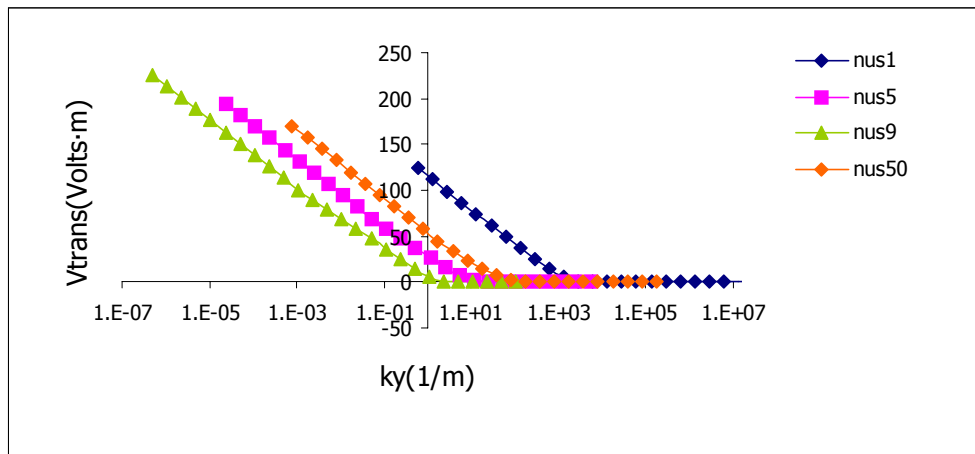


Figura 5.12. Representació del potencial transformat en funció del nombre d'ona en l'escala logarítmica per a diferents nodes de la malla Wenner-Schlumberger.

Finalment, les figures 5.13 i 5.14 mostren el comportament del potencial elèctric transformant per a tots els punts de la malla del dispositiu SEV. El valor més petit es determina en els punts més allunyats de l'elèctrode de corrent, extrems de la funció, i adquireix el valor màxim exactament en el nus on s'injecta la intensitat, posició del pic. La funció presenta un comportament simètric per a qualsevol valor de k_y , tal com mostren les figures 5.13 i 5.14, per a un model homogeni. A més, comparant aquestes dos figures es pot observar com el potencial disminueix a mesura que el valor de k_y augmenta.

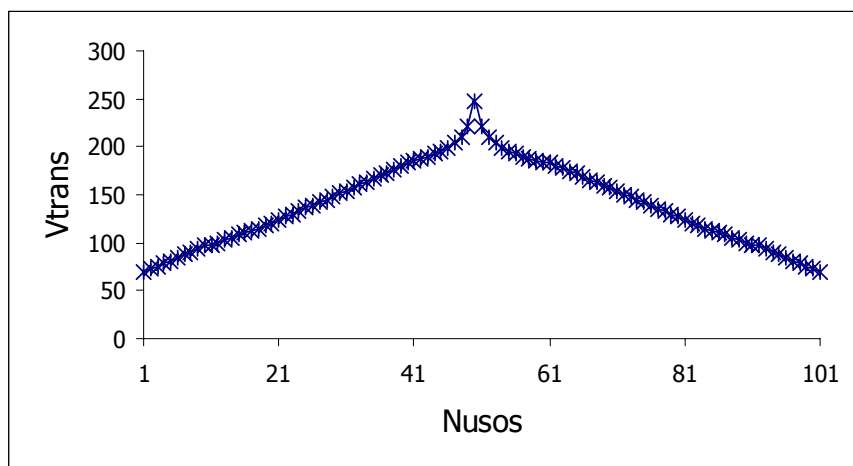


Figura 5.13. Comportament del potencial elèctric transformant, V_{trans} , en tots els nusos de la malla per a un valor de $k_y = 10^{-6}$.

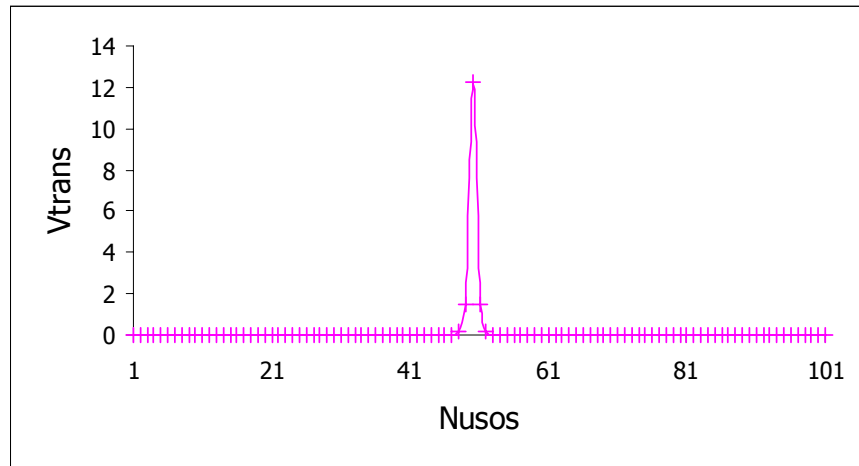


Figura 5.14. Comportament del potencial elèctric transformat, V_{trans} , en tots els nusos de la malla per a un valor de $k_y = 2.1544$.

La limitació d'aquesta tècnica es troba quan s'utilitzen valors grans de t , on apareixen problemes numèrics, perquè tant $\check{V}(k_y)$ com $K_0(k_y)$ tenen valors extremadament petits. La divisió d'aquestes dues magnituds, segons les definicions de C_1 , C_2 i C_3 , produeix valors exageradament grans del potencial elèctric antitransformat que afecten significativament al càlcul de la resistivitat aparent.

$$C_1 = \frac{\check{V}(k_{y1})}{K_0(t_1)} , \quad C_2 = \frac{\check{V}(k_{y2})}{K_0(t_2)} \quad \text{i} \quad C_3 = \frac{\check{V}(k_{y3})}{K_0(t_3)}$$

En el cas d'utilitzar la configuració elèctrica Wenner-Schlumberger o Dipol-Dipol, el mètode presentat té resultats satisfactoris, perquè les aproximacions que es fan per a distàncies grans no afecten al càlcul de la resistivitat aparent. Els elèctrodes que mesuren el potencial elèctric es localitzen en la zona refinada de la malla, a prop dels elèctrodes de corrent.

Per comparar els resultats obtinguts amb els dos mètodes, en la figura 5.15 es mostren dues pseudoseccions obtingudes en la modelització d'un medi homogeni de $100 \Omega \cdot m$. La primera pseudosecció ha estat calculada utilitzant 61 k_y i el temps de computació ha estat de 750 segons. En la segona pseudosecció s'ha utilitzat aquesta nova tècnica per calcular el potencial elèctric antitransformat amb tres valors de k_y i el

temps de computació es redueix a 50 segons. La diferència relativa entre aquests dos resultats es mostra en el gràfic inferior, on s'observa com la diferència acceptable (< 5%) es produeix quan els dipols es troben poc separats, és a dir, quan es s'obté informació de les zones més superficials.

Pel contrari, quan es treballa amb el sondeig elèctric vertical, es necessita fins al darrer nus de la malla per arribar a la profunditat de 1000 metres, de manera que les aproximacions realitzades per a valors grans de t , no són vàlides.

Així, per a modelitzar el sondeig elèctric s'haurà d'utilitzar el mateix mètode de la interpolació logarítmica i exponencial proposat per Queralt 1989, però reduint el nombre de k_y per fer més ràpid el procés de càlcul sense augmentar significativament l'error en la determinació de la resistivitat aparent.

La figura 5.16 mostra les corbes de la resistivitat aparent modelitzades quan s'utilitza el mateix mètode per a determinar el potencial elèctric en l'espai (x, y, z) , però amb 61 valors de k_y i amb 13 valors de k_y . Els resultats no són molt diferents tal com mostra la gràfica següent. Les dues corbes són perfectament paral·leles entre elles i es manté sempre un error relatiu aproximat d'un 3%.

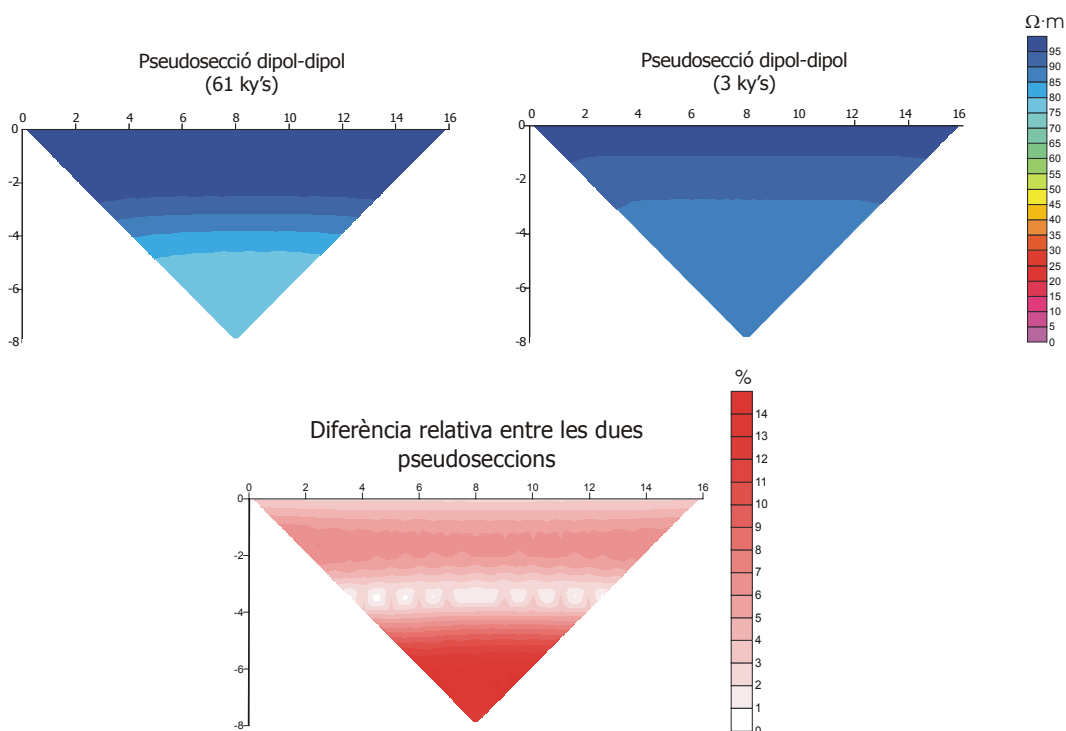


Figura 5.15. Part superior: Pseudo-seccions obtingudes per a una configuració Dipol-Dipol utilitzant el programa de modelització amb 61 k_y i amb 3 k_y per a calcular el potencial elèctric antitransformat. Part inferior: diferència relativa entre les dues pseudo-seccions en % .

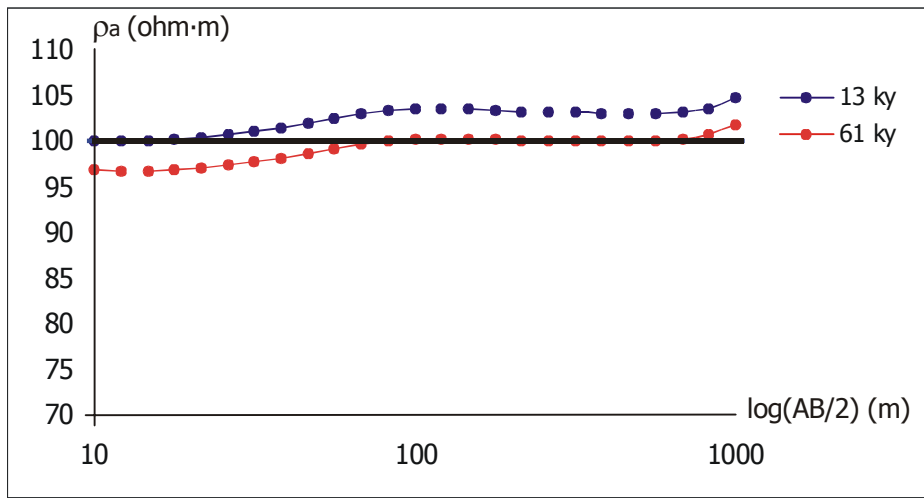


Figura 5.16. Representació gràfica de les resistivitats aparents obtingudes en la modelització d'un sondeig elèctric vertical en un medi homogeni.

Malgrat la determinació de la resistivitat aparent és menys precisa a causa de la reducció dels valors en la interpolació, la disminució del temps de computació és important ja que es passa de 52 a 12 segons per a un únic SEV. Quan es modelitza un perfil de SEV, on existeix un nombre elevat de sondejos, llavors aquest temps augmenta de forma important. Per aquesta raó s'aposta per la utilització de menys valors dels nombres d'ona sense que això impliqui un augment significatiu de l'error.

5.3.3 – EFECTES DE LA TOPOGRAFIA

L'estudi dels efectes topogràfics en la modelització va iniciar-se amb l'estudi de models molt simples (Coggon, 1971; Hallof 1970; Rijo 1977) ja que fins llavors, els algorismes de modelització es basaven en la consideració d'una superfície plana. En determinades situacions, aquests efectes són molt importants, per això es comença a pensar en incloure la topografia en els algorismes de modelització. Rijo (1977) dona a conèixer un programa bidimensional basat en els elements finits el qual tenia en compte la topografia alhora de realitzar la interpretació de les dades.

Els següents diagrames, figures 5.17 i 5.18, expliquen com la topografia afecta a les línies de corrent i a les superfícies equipotencials en un model homogeni on la font de

corrent està situada a una distància considerablement gran.

Com es mostra en la figura 5.17, les línies de corrent se separen entre elles sota la presència d'una elevació topogràfica, es diu que les línies divergeixen. Pel contrari, quan les línies de corrent es troben sota d'una depressió del terreny, figura 5.17, les línies de corrent s'ajunten entre elles, convergint.

Quan parlem de superfícies equipotencials el comportament és similar. L'efecte de l'elevació del terreny produeix també una divergència en aquestes superfícies fent que la diferència de potencial mesurat disminueixi respecte dels valors que es mesurarien en una superfície plana, figura 5.17. En canvi, quan existeix una disminució de la cota topogràfica, les superfícies equipotencials convergeixen produint un augment en la mesura de la diferència del potencial elèctric, figura 5.18 (Fox *et al.*, 1980).

Alguns programes de modelització comercials no consideren l'efecte topogràfic correctament, sinó que afegixen la cota topogràfica als models finals calculant el potencial elèctric sobre una superfície plana. Pel contrari, el programa de modelització que es presenta integra la topografia en la pròpia malla model per tal d'obtenir una resposta satisfactòria dels models. Abans de descriure com s'ha implementat en el programa, es presenten alguns resultats que mostren el seu efecte sobre el càlcul de la resistivitat elèctrica quan s'utilitza la tomografia elèctrica.

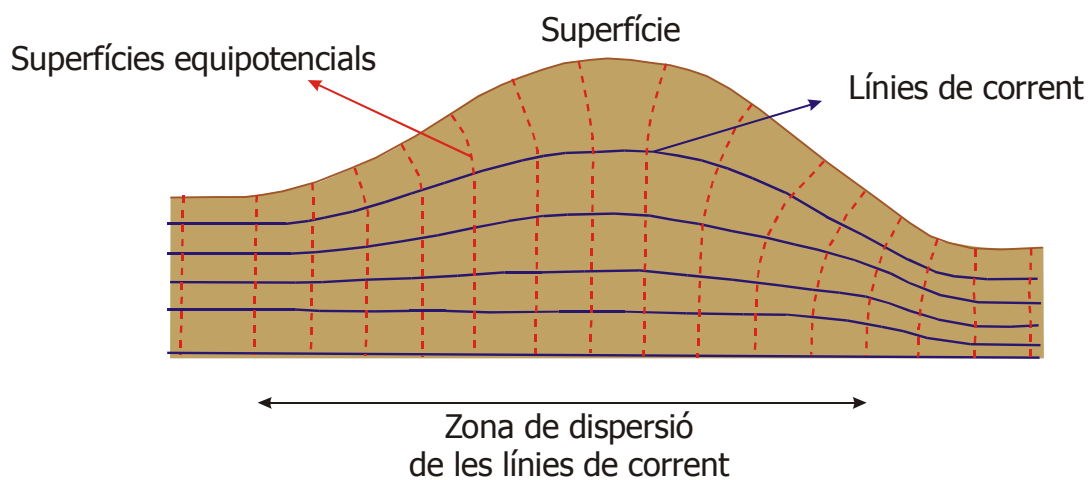


Figura 5.17. Efecte d'una elevació topogràfica sobre les línies de corrent i les superfícies equipotencials (modificat de Fox et al. 1980).

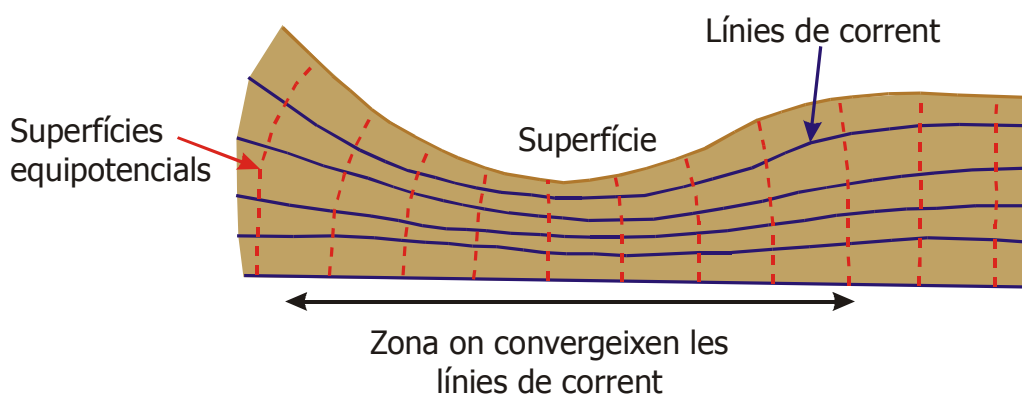


Figura 5.18. Efecte sobre les línies de corrent i les superfícies equipotencials d'una zona on la topografia disminueix (modificat de Fox et al. 1980).

5.3.3.1 – EXEMPLE 1 (EFECTE DE LA TOPOGRAFIA)

Els exemples modelitzats pretenen mostrar els efectes de tres formes diferents de la superfície del terreny, elevació topogràfica, depressió topogràfica o desnivell brusc en forma d'esglaó (pendent vertical), figura 5.19.

Les pseudoseccions obtingudes es mostren en la figura 5.20 on es poden comparar els resultats obtinguts amb la pseudosecció que resultaria si s'hagués considerat una superfície plana.

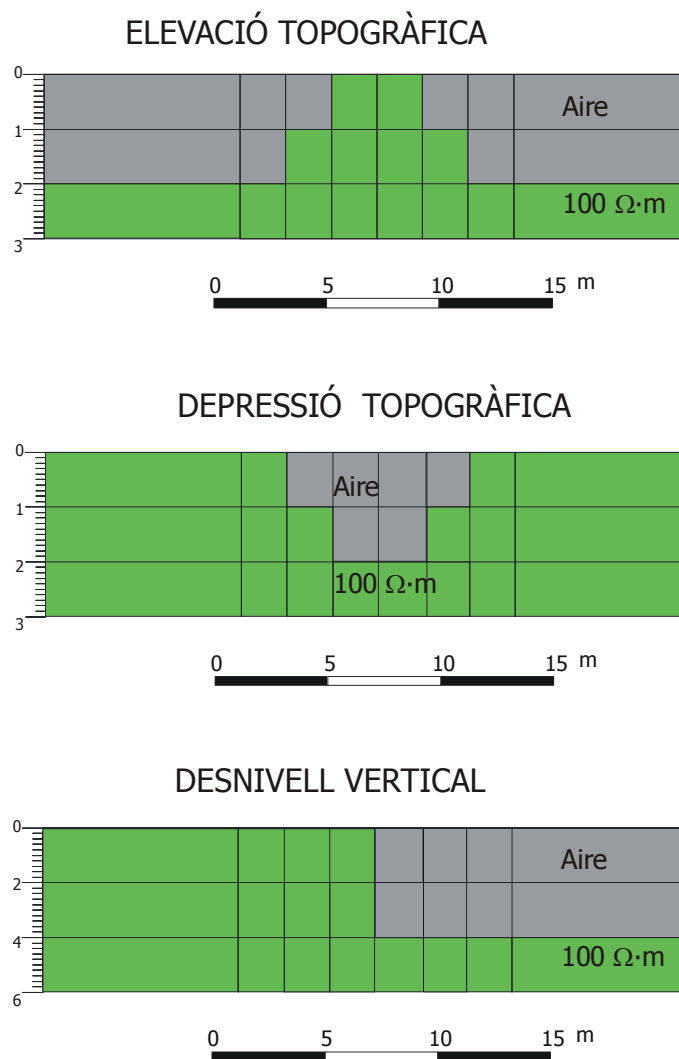


Figura 5.19. Descripció de les estructures utilitzades en la modelització per tal d'observar els efectes de la topografia.

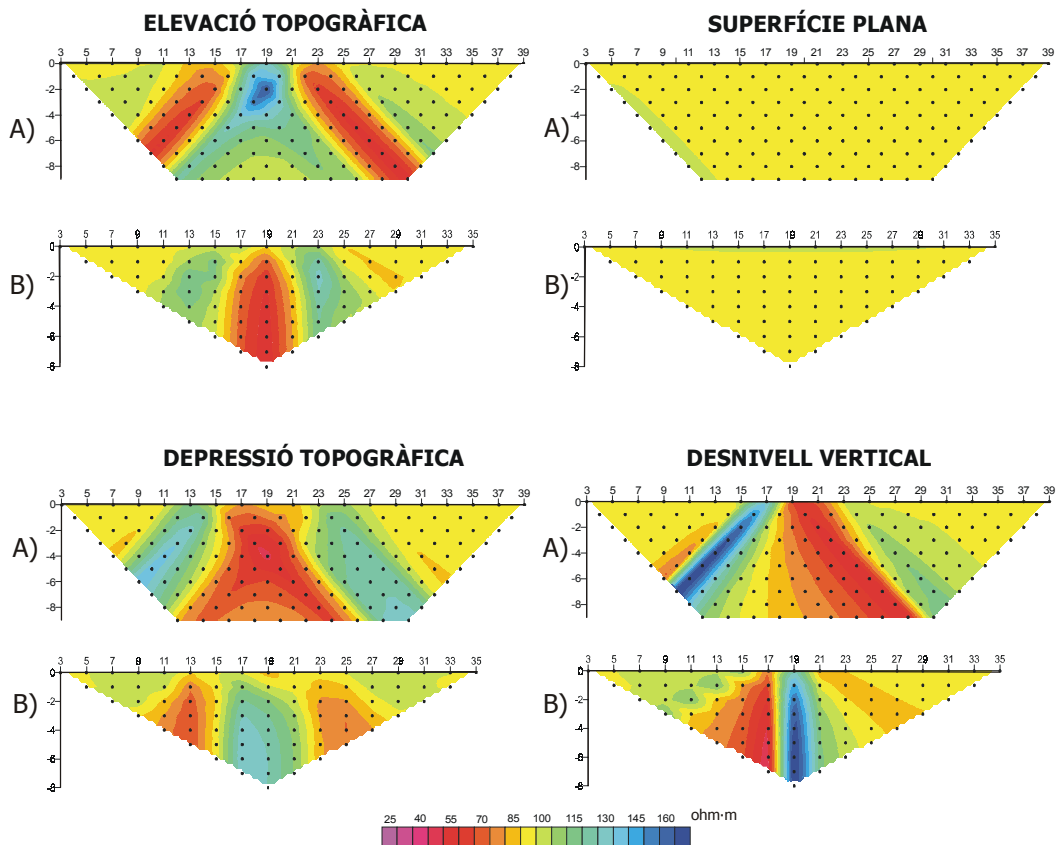


Figura 5.20. Mostra dels efectes topogràfics sobre un model homogeni on existeix una elevació topogràfica, una depressió o un desnivell vertical, utilitzant els dispositius A) Dipol-Dipol o B) Wenner-Schlumberger.

ELEVACIÓ DEL TERRENY

Tal com mostra aquesta figura, els efectes topogràfics també depenen de la disposició dels elèctrodes, i en conseqüència del dispositiu utilitzat. Quan la configuració utilitzada és Dipol-Dipol es genera una anomalia de resistivitat aparent més elevada per sota de la part central de l'elevació del terreny, la qual es va ampliant a mesura que la separació entre els dipols també augmenta (cas A de la figura 5.20). En el cas de realitzar la modelització amb el dispositiu Wenner-Schlumberger es genera exactament el procés oposat. Es crea una anomalia de més baixa resistivitat aparent just per sota la part central de l'elevació de la topografia (cas B de la figura 5.20).

DEPRESSIÓ TOPOGRÀFICA

Com era d'esperar, les pseudoseccions obtingudes quan el terreny presenta una disminució de l'elevació tenen l'efecte totalment oposat al cas de l'elevació del terreny. La configuració Dipol-Dipol mostra una anomalia de més baixa resistivitat (cas A de la figura 5.20) mentre que la configuració Wenner-Schlumberger presenta una zona amb resistivitat més alta (cas B de la figura 5.20).

DESNIVELL VERTICAL

Finalment, aquest exemple mostra el cas on el terreny pateix una caiguda en forma d'esglaó. En les dues configuracions s'obté una zona d'anomalia alta en contacte amb una zona d'anomalia més baixa, que representa el canvi d'alçada del terreny. L'única diferència entre els dos dispositius, Dipol-Dipol (cas A de la figura 5.20) i Wenner-Schlumberger resistivitat (cas B de la figura 5.20), és la localització d'aquestes dues zones dins la pseudosecció.

5.3.3.2 – EXEMPLE 2 (DIMENSIÓ DE LA TOPOGRAFIA)

Per poder observar l'efecte de la topografia es presenta un exemple amb la configuració Dipol-Dipol i una separació entre els elèctrodes val 2 metres. En la figura 5.21 es mostren els models utilitzats i les respostes obtingudes a mesura que va augmentant l'elevació topogràfica en un model homogeni de $100 \Omega \cdot m$.

Aquest exemple s'ha aplicat sobre una elevació, però resultats equivalents s'obtindrien per altres dispositius i per altres tipus d'estructures.

Els models utilitzats es presenten en la part dreta de la figura 5.21 on la zona pintada en color gris representa el medi aïllant de l'aire i el medi homogeni de $100 \Omega \cdot m$ està representat per la zona pintada en color verd.

Les dues primeres pseudoseccions pràcticament no presenten cap tipus d'anomalia, perquè l'elevació topogràfica encara no ha assolit un valor important. Quan el terreny presenta una elevació d'uns 40 cm d'alçada, el seu efecte comença a ser important. Apareix una zona anòmala de resistivitat aparent més alta acompanyada de dues anomalies amb una resistivitat aparent més baixa. Aquest efecte es va potenciant a

mesura que l'alçada de la topografia és major. Els efectes més importants s'assoleixen per a les alçades de 1 m, figura 5.21 D, i 2 m, figura 5.21 E, és a dir, quan el valor de la cota topogràfica és la meitat de la separació entre elèctrodes o superior.

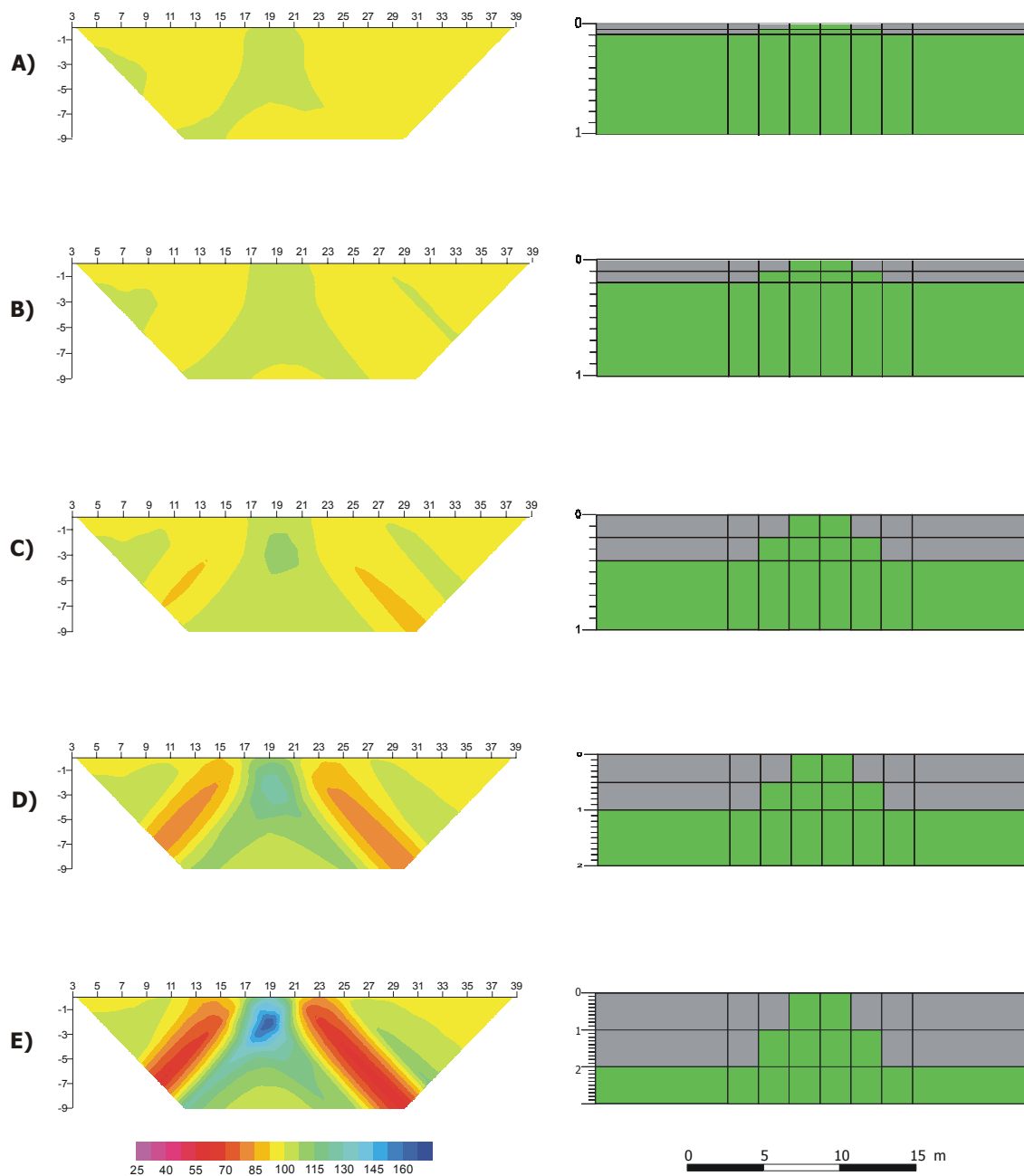


Figura 5.21. Pseudo-seccions obtingudes i models que representen una elevació topogràfica amb diferents alçades: A) 0.1 m, B) 0.2 m, C) 0.4 m, D) 1 m i E) 2 m.

5.3.3.3 – IMPLEMENTACIÓ DE LA TOPOGRAFIA

La topografia pot ser fàcilment incorporada i simulada en la modelització quan s'utilitza el mètode dels elements finits (Tong *et al.*, 1990). Aquest mètode presenta una important avantatge degut a la flexibilitat dels elements triangulars, els quals s'adapten fàcilment a la forma de la topografia. Altres mètodes per solucionar el problema directe, com és el mètode de les diferències finites, no permeten incloure amb la mateixa senzillesa la topografia, perquè divideixen el subsòl a través d'elements rectangulars (Tsourlos *et al.*, 1999).

La implementació de la topografia en aquest programa es realitza assignant als elements de la malla que representen l'aire un valor molt alt de la resistivitat, 10^{20} $\Omega\cdot\text{m}$. Això produeix que el contrast entre l'aire i el subsòl sigui molt elevat i per evitar que apareguin inestabilitats numèriques es refina la malla en el contacte entre aquests dos medis.

El programa desenvolupat detecta la topografia a través de la descripció d'aquesta en la malla model. Una vegada ha estat definida l'estructura del subsòl i la seva topografia, la malla dispositiu es deforma per adaptar-se a les diferents cotes topogràfiques i representar l'estructura del subsòl de forma refinada. Posteriorment, s'utilitza un índex per identificar aquells nusos que pertanyen a la superfície del terreny modelitzat i sobre els quals s'ha de calcular el potencial elèctric seguint els mateixos passos que han estat indicats en la resolució del problema directe, apartat 5.2.

5.4 –EXEMPLES DE MODELITZACIÓ D'ESTRUCTURES

La prospecció elèctrica no utilitza una disposició fixa dels elèctrodes, sinó que existeixen moltes configuracions i cadascuna d'elles presenta unes característiques determinades. L'estudi desenvolupat se centra en la modelització de les configuracions electròniques presentades en el capítol 4. En primer lloc s'estudien els perfils utilitzant sondejos elèctrics verticals. En segon lloc es modelitza la resposta del dispositiu Wenner-Schlumberger i, finalment, la resposta de la configuració Dipol-Dipol.

Cal tenir present, que en funció del dispositiu utilitzat, les imatges obtingudes són

diferents a causa de la col·locació dels elèctrodes en l'espai. Així, les pseudoseccions de les configuracions Wenner-Schlumberger i Dipol-Dipol detecten de forma diferent els contorns de les estructures i cadascuna d'elles presenta les seves avantatges i els seus inconvenients. A través de la modelització és possible conèixer quina és la millor configuració per a la detecció d'una determinada estructura tenint en compte la profunditat d'investigació requerida i el tipus de resolució necessària, vertical o lateral.

A continuació es mostren alguns exemples de la modelització realitzada amb l'algorisme presentat sobre un perfil de SEV, sobre les configuracions de tomografia elèctrica, Wenner-Schlumberger i Dipol-Dipol.

5.4.1 - PERFILS DE SEV

El programa inicial del qual sorgeix aquest treball, Queralt 1989, està pensat únicament per modelitzar la resposta d'un sondeig elèctric vertical (modelització unidimensional).

Actualment, però, es porten a terme campanyes de prospecció elèctrica on es realitzen diferents SEV al llarg d'una mateixa línia. Per aquest motiu, es va creure útil adaptar el programa a l'obtenció de la resposta elèctrica d'una seqüència de SEV. Aquesta aportació al programa ha permès considerar respostes bidimensional del subsòl a través dels SEV i aprofitar la important resolució vertical d'aquest dispositiu.

Seguidament, es mostra un exemple de la resposta elèctrica d'un perfil de SEV amb la modelització bidimensional. El model utilitzat es presenta en la figura 5.22. Aquest mostra un contrast de resistivitats força important, ja que sobre un medi 1 ($100 \Omega \cdot m$) es descriu una estructura intrusiva 2 ($5000 \Omega \cdot m$). El perfil està format per 8 SEV. La distància entre SEV és 100 m excepte pels 2 SEV situats en els extrems del perfil que estan a 350 m dels anteriors.

La resposta de la modelització bidimensional del perfil es presenta en la figura 5.23. La manera concreta de disposar les dades en l'espai, pel cas dels sondejos elèctrics verticals, és col·locar la mesura de la resistivitat aparent immediatament per sota del punt mig entre els elèctrodes que mesuren el potencial elèctric tal com mostra la figura 5.23.

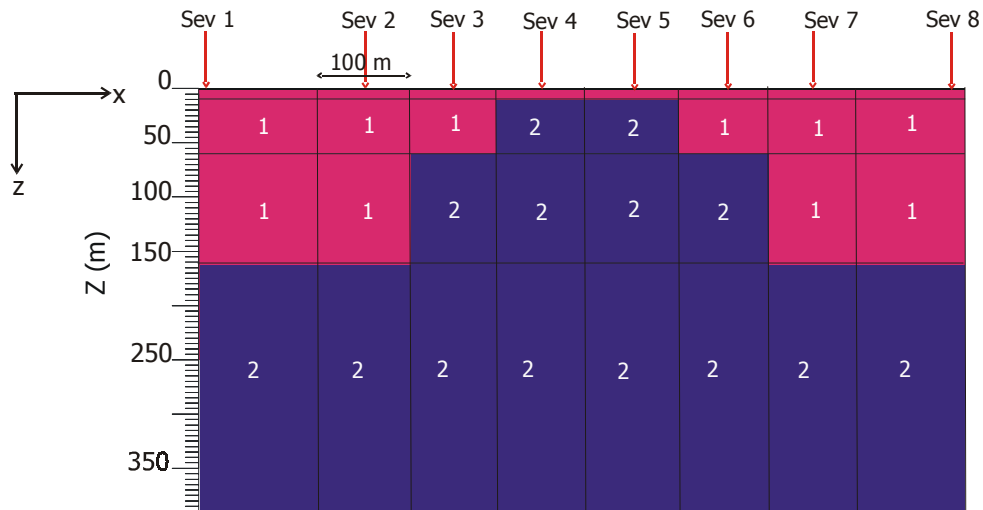


Figura 5.22. Model utilitzat per calcular la resposta d'un perfil de vuit sondejos elèctrics verticals (SEV).

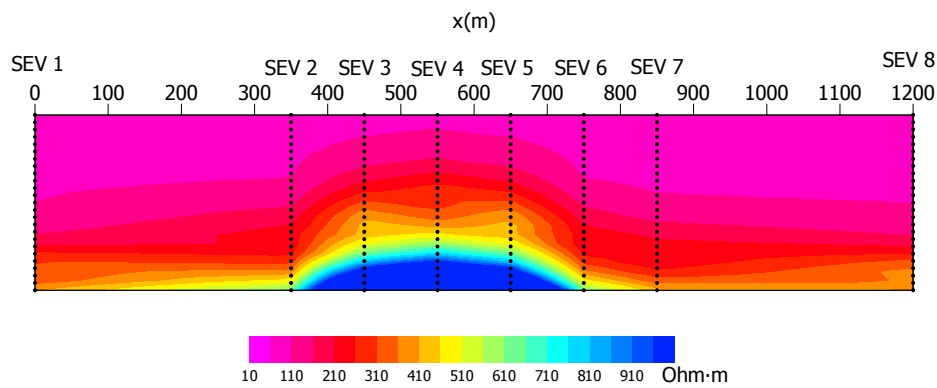


Figura 5.23. Resposta obtinguda amb un perfil de vuit SEV al llarg d'una mateixa línia en la superfície del model de la figura 5.22. Els punts negres indiquen la posició de la resposta obtinguda en la modelització.

5.4.2 – WENNER-SCHLUMBERGER

La sensibilitat d'aquest dispositiu és moderadament bona per estructures que presenten canvis de resistivitat en ambdues direccions, horitzontal i vertical.

En la figura 5.25 es presenta la pseudosecció que resulta de la modelització d'una estructura geològica amb canvis laterals i verticals. L'estructura representada, figura

5.24, és una falla que separa un medi resistent 1 ($1000 \Omega \cdot m$) d'un medi més conductor 3 ($500 \Omega \cdot m$). Els elements que representen la falla es troben descrits per un material encara més conductor 2 ($100 \Omega \cdot m$). Els punts de la pseudosecció (punts negres) mostren les dades calculades per aquesta configuració. En concret, 16 elèctrodes amb una distància de 2 m entre ells.

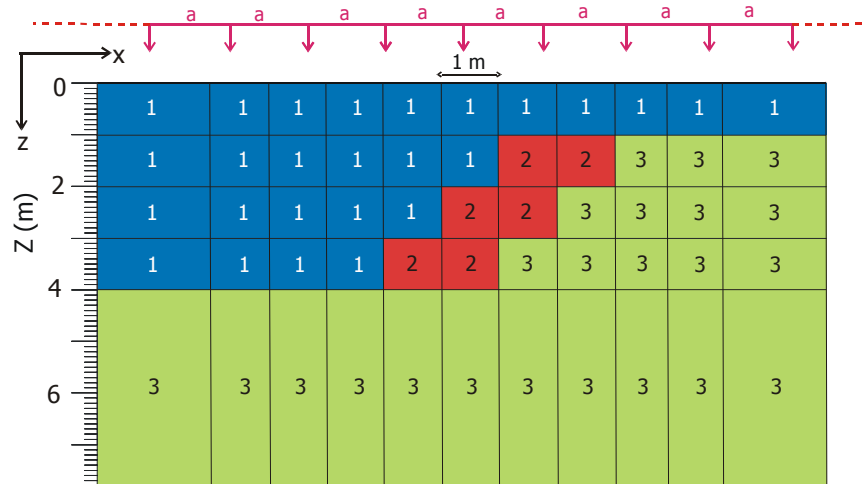


Figura 5.24. Representació senzilla d'una falla, de la qual es vol conèixer la resposta elèctrica utilitzant un dispositiu Wenner-Schlumberger.

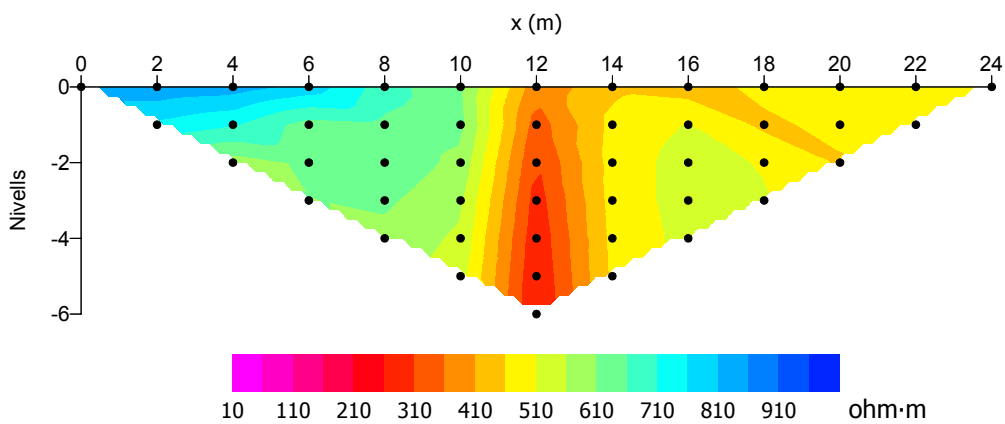


Figura 5.25. Resposta elèctrica en forma de pseudosecció.

5.4.3 – DIPOL-DIPOL

Aquest dispositiu és molt sensible als canvis horitzontals de resistivitat i molt menys sensible als canvis verticals. Això significa que la configuració Dipol-Dipol serà molt útil per estudiar estructures com per exemple, una cavitat o un dic, és a dir, estructures verticals. Es presenta en la següent figura, 5.26, el model que representa una intrusió molt resistent 2 ($5000 \Omega \cdot m$) en un medi 1 ($100 \Omega \cdot m$). La seva corresponent pseudosecció, figura 5.27, mostra una densitat dels punts mesurats (punts negres) molt més elevada que en el cas de la configuració Wenner-Schlumberger. S’han fet servir igualment 16 elèctrodes i una distància de 2 m entre ells.

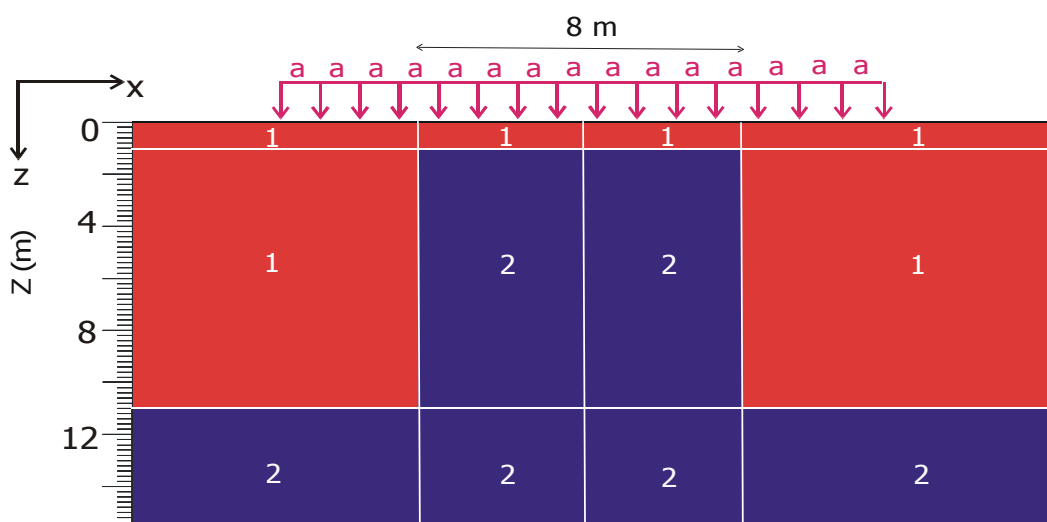


Figura 5.26. Model d'una estructura vertical, intrusió d'un material resistent en un medi més conductor.

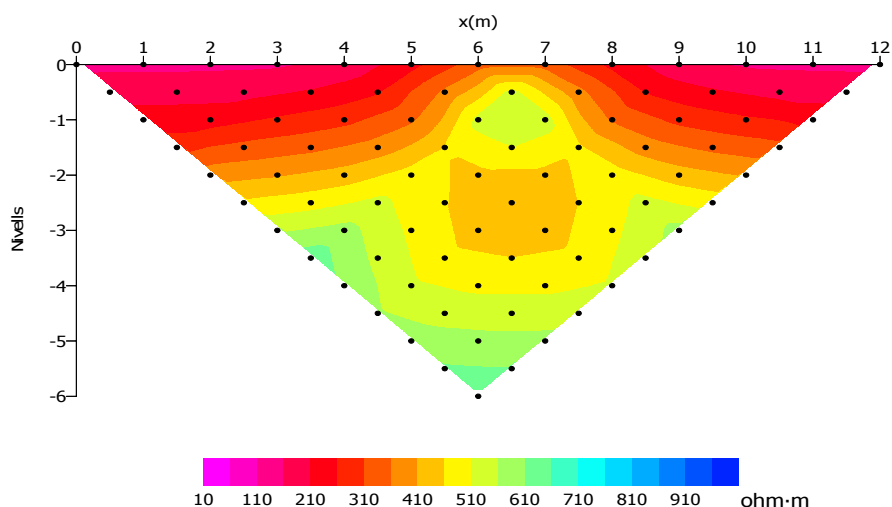


Figura 5.27. Resposta elèctrica en forma de pseudosecció.

Finalment, per tal d'observar la diferència en la determinació de la resposta elèctrica quan s'utilitzen les configuracions Dipol-Dipol o Wenner-Schlumberger, es presenten els resultats de la modelització per a un mateix model. El model consisteix en dos cossos resistents 2 ($1000 \Omega \cdot m$) enterrats en un medi homogeni 1 ($30 \Omega \cdot m$), figura 5.28. Els cossos tenen forma quadrada de quatre metres de costat, separats 16 m entre ells i es troben a una profunditat de 2 m. En funció de les dimensions d'aquestes estructures, es modelitza un perfil elèctric d'una longitud de 40 m amb una distància entre elèctrodes de 2 m.

En les figures 5.29 i 5.30 es pot observar com les diferents configuracions utilitzades, Wenner-Schlumberger i Dipol-Dipol, donen imatges elèctriques diferents per a un mateix model. En el cas de la detecció d'aquests dos cossos, seria més convenient una configuració Wenner-Schlumberger ja que localitza millor les estructures en l'espai, figura 5.29. La pseudosecció obtinguda amb la configuració Dipol-Dipol, figura 5.30, mostra una tercera zona més resistent, en la seva part inferior, la qual no forma part del model, però que és el resultat de la disposició dels elèctrodes. Malgrat això, aquest dispositiu acota els cossos en profunditat.

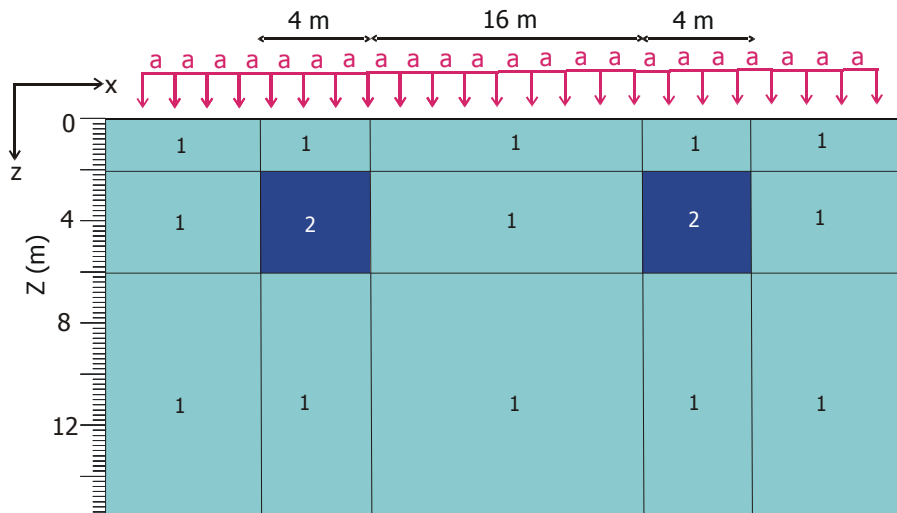


Figura 5.28. Model de dos cossos resistents de $1000 \Omega \cdot m$ en un medi conductor de $30 \Omega \cdot m$.

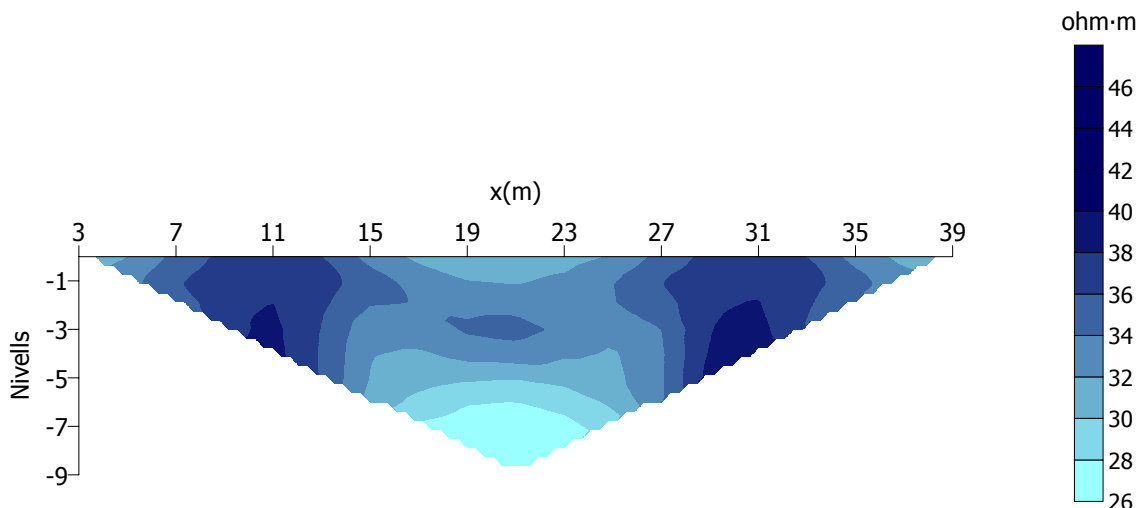


Figura 5.29. Pseudosecció obtinguda amb un perfil de 22 elèctrode en la configuració Wenner-Schlumberger.

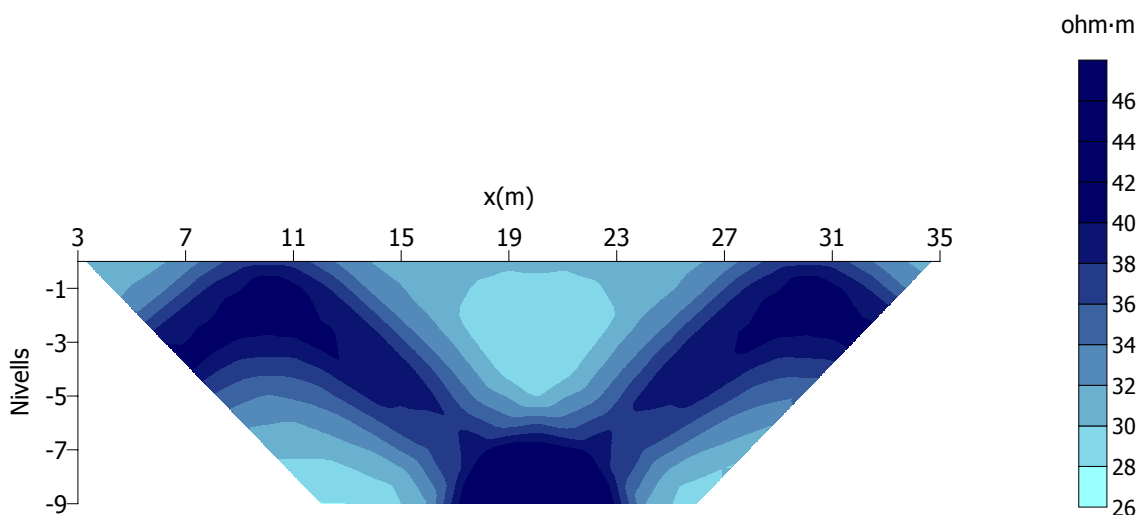


Figura 5.30. Pseudosecció obtinguda amb un perfil de 20 elèctrodes en la configuració Dipol-Dipol.

5.5 – CONCLUSIONS

Els objectius marcats per aquest capítol estan totalment assolits amb la presentació del programa de modelització de corrent continu en dues dimensions. Aquest permet obtenir la resposta elèctrica de qualsevol tipus d'estructura, sigui quina sigui la seva complexitat, abans de procedir a la seva mesura en el camp. Això presenta l'avantatge

que es poden prendre decisions abans de realitzar la campanya de prospecció elèctrica i determinar quina configuració és la més sensible o quina és la profunditat d'investigació per aquella composició concreta del terreny.

El programa aporta noves metodologies en determinats punts de la resolució del problema directe que ajuden a reduir el temps de computació de forma important, sense que això impliqui un augment significatiu de l'error en el càlcul de la resposta. En primer lloc s'ha presentat el mètode que determina el potencial elèctric antitransformat amb tres nombres d'ona. Els resultats són molt satisfactoris pel cas de la tomografia elèctrica, però pel cas del SEV, aquesta aplicació no és possible i s'ha optat per a seguir utilitzant el mètode antic.

La incorporació de la topografia en la modelització és una altra aportació dins de la tesi i ha permès obtenir respostes satisfactòries de models que presenten superfícies irregulars. Aquesta consideració permet realitzar una interpretació més correcta de les dades, perquè els efectes topogràfics poden provocar anomalies si no es tenen presents.

Finalment, cal destacar el treball realitzat amb les dues malles. L'estratègia dissenyada permet tenir una malla per definir el model i una altra per a controlar la resolució numèrica i obtenir una resposta ben determinada. El fet d'utilitzar aquestes dues malles permet definir el model amb un nombre de paràmetres més reduït que en el cas de la malla del dispositiu, i ajudar d'una manera important a la resolució del problema invers, procés que es l'objectiu del proper capítol.

El control absolut sobre la resolució del problema directe permet afrontar el problema invers amb bones perspectives, perquè aquest últim procés, requereix obtenir la resposta elèctrica en cada iteració.

Així, el programa realitzat aporta resultats molt satisfactoris pels tres tipus de perfils que s'han estudiat: perfil de sondejos elèctrics verticals i configuració Wenner-Schlumberger i Dipol-Dipol de la tomografia elèctrica.

