DEPENDENCIA POSITIVA. SU INFLUENCIA EN EL RIESGO DE LA CARTERA

CARME RIBAS MARÍ

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Índice

Capítulo 1

Introducción

1.1 El riesgo de una cartera

Esta tesis estudia riesgos. Es natural, entonces, empezar preguntándonos qué significa la palabra riesgo en el contexto actuarial. En general, un riesgo puede ser definido como un evento que puede o no ocurrir y que implica peligro, sufrimiento o pérdida. Siempre contiene una parte de incertidumbre, ya sea en el momento de su ocurrencia, o en la naturaleza e importancia de sus consecuencias.

En la teoría actuarial del riesgo, los riesgos se formalizan y modelizan de manera que apenas guardan ningún parecido con los eventos con que cualquiera de nosotros pueda topar en su vida cotidiana. Esto es debido, en parte, al hecho de que nos restringimos a **riesgos asegurables**, entendiendo como tales a aquellos que pueden ser valorados en términos monetarios. Se reduce así, el conjunto de todos los riesgos y únicamente se consideran aquellos que permiten establecer un equivalente económico del daño que puedan causar.

Una vez identificado un conjunto de riesgos asegurables, se asume que éstos pueden ser representados por variables aleatorias, con lo que se puede definir un espacio de probabilidad para cada uno de ellos. Actualmente, la **teoría del riesgo** empieza desde este punto, omitiendo la fase de traslado a variables aleatorias de los riesgos reales.

El punto de partida de la moderna teoría actuarial del riesgo se atribuye a la contribución de Filip Lundberg al Congreso Internacional de Actuarios de 1909, con el desarrollo de la "Teoría Colectiva del Riesgo". En ella modelizó el negocio del seguro como un proceso estocástico con aplicaciones tanto en el ramo de vida como en el de no vida. Seal (1969) realizó un estudio de los trabajos que siguieron a esta contribución.

Actualmente, los temas tratados por la teoría del riesgo pasan por la modelización no sólo de riesgos individuales, sino también de conjuntos o **carteras** de riesgos, y de procesos de riesgo, incluyendo métodos para estimar o aproximar numéricamente (características de) sus distribuciones de probabilidad. A partir de ellas es posible determinar las primas de los contratos asegurados, así como de los contratos de reaseguro, estimar el nivel de reservas necesario y desarrollar métodos que permitan mejorar la estabilidad de los procesos de riesgo. Referencias generales en este contexto son, entre otras, Seal (1969), Bülmann (1970), Gerber (1979), Beard et al. (1984), Bowers et al. (1997), Heïlmann (1988) y Panjer & Willmot (1992).

Uno de los temas centrales de la teoría del riesgo es el cálculo de la distribución del **coste total** de los siniestros de una cartera durante un período específico, por ejemplo, un año. A partir de ella, se tiene una medida del **riesgo de la cartera** y es posible desarrollar las políticas de primas, de reaseguro, de previsión de reservas,... Los riesgos asegurados en cada cartera son riesgos individuales, tales como vidas humanas cubiertas por muerte, edificios cubiertos por incendio o automóviles cubiertos por los daños que resulten de accidentes. Por ello, la aproximación natural a la distribución del coste total de una cartera es la del **modelo individual** de la teoría del riesgo, cuya única hipótesis inicial es la asunción de independencia entre los diferentes riesgos de la cartera. En el modelo individual el coste total de los siniestros de la cartera, S, es simplemente

$$S = X_1 + \cdots + X_n,$$

donde n es el número de pólizas en la cartera y X_j, $j = 1, \cdots, n$, es el coste de los siniestros de la póliza j-ésima. La distribución de probabilidad de X_j se supone conocida. El modelo individual considera, además, que cada uno de los riesgos que componen la cartera, como máximo puede dar lugar a un siniestro en el período considerado, la cuantía del cual puede ser fija o aleatoria. Esta asunción hace de este modelo el apropiado para explicar el comportamiento de aquellos riesgos que, por su naturaleza, únicamente pueden producir un siniestro. Éste sería el caso de los seguros de vida. Sin embargo, este modelo se puede utilizar también para riesgos que no presenten esta característica. Basta con tratar los siniestros que cada riesgo individual produzca en el período como uno sólo. La principal limitación en la aplicabilidad del modelo individual radica en la imposibilidad de llegar a determinar, en numerosas ocasiones, las distribuciones asociadas a cada uno de los riesgos individuales. En estos casos se recurre a aproximaciones de la distribución del coste total dentro del modelo colectivo, ver Bowers et al. (1997, capítulos 12 y 14).

Incluso en los casos en que es posible determinar las distribuciones de los riesgos individuales, como en carteras de vida, durante décadas se ha considerado prohibitivo el esfuerzo de cálculo necesario para llegar a la distribución exacta de S y los actuarios se han decantado, mayoritariamente, por técnicas de simulación para aproximar su comportamiento.

La recurrencia de Panjer (1981), que permite el cálculo de la distribución del coste total en el modelo colectivo del riesgo, supuso una auténtica revolución en el campo actuarial. La simplicidad de la misma, hizo que durante los ochenta se prestara especial atención a numerosas propuestas en la literatura referidas a la aproximación de la distribución del coste total a través del modelo colectivo. En este sentido, cabe destacar, entre otras, las aportaciones de Bülmann et al. (1977), Jewell & Sundt (1981), Gerber (1984), Sundt (1985), Kuon et al. (1993) y Kaas & Gerber (1994).

Paralelamente, y coincidiendo con el avance de la informática, aparecieron diferentes propuestas referidas a métodos recurrentes para el cálculo exacto de la distribución del coste total en el modelo individual. Entre éstas cabe destacar las de De Pril (1986, 1989), Waldmann (1994) y Dhaene & Vanderbroek (1995). De éstas surgieron de forma natural, aproximaciones a la distribución del coste total dentro del modelo individual, ver De Pril (1988, 1989) y Dhaene & De Pril (1994). Éstas no son nuevas, ya que anteriormente encontramos en la literatura las aproximaciones de Kornya (1983) y Hipp (1986).

Independientemente de que para llegar a aproximar numéricamente la distribución del coste total sea o no necesario el modelo colectivo, parece claro que el riesgo de la cartera debe entenderse como suma de los diferentes riesgos individuales. En este sentido, destacar las palabras introductorias de Kaas & Gerber (1994): "*The model of choice for the total claims distribution of a portfolio is without doubt the individual model, which assumes only independence between the different policies in a portfolio*". Únicamente la hipótesis de independencia, se ha creído, hasta hace poco, insalvable al hablar del riesgo total de la cartera. No obstante, la hipótesis de independencia entre los diferentes riesgos individuales, no siempre refleja la realidad de la cartera. Si, por ejemplo, tratamos carteras de seguros de vida es claro que:

– Pueden existir duplicados en la cartera, es decir, diferentes pólizas sobre una misma vida. En este caso el número de pólizas no es igual al número de vidas aseguradas. Ver, por ejemplo, Beard & Perks (1949) y Seal (1947).

– Un marido y su mujer pueden ambos tener pólizas dentro de una misma cartera. Está claro que existe algún tipo de dependencia positiva entre su mortalidad puesto que ambos están expuestos, en mayor o menor grado, a los mismos factores de riesgo. Además, en este caso, es conocido el hecho de que el ratio de mortalidad de uno de los cónyuges incrementa tras la muerte del otro (se trata del denominado "broken heart syndrome"). Ver, por ejemplo, Carriere & Chan (1986), Norberg (1989) y Frees, Valdez & Carriere (1995).

– Un fondo de pensiones que cubra a personas que trabajan en una misma compañía, deberá tener en cuenta un cierto grado de dependencia positiva entre la mortalidad de sus asegurados.

– En una cartera con una gran densidad de asegurados en una misma área geográfica, catástrofes naturales derivadas de tormentas, huracanes, terremotos,... provocarán una acumulación de siniestros para el asegurador. Ver, por ejemplo, Stickler (1960), Feilmeier & Segerer (1980) y Kremer (1983).

Tal y como señala Kaas (1993), los actuarios conocen bien estos y otros fenómenos similares, pero, por conveniencia, se ha venido asumiendo que la influencia en la valoración del riesgo que los mismos suponen, es lo suficientemente pequeña como para no ser considerados. Kaas (1993) comparó el riesgo de una cartera de seguros de vida con todos los riesgos individuales mutuamente independientes con una cartera idéntica excepto por el hecho de que un determinado número de pólizas estaban basadas en la misma vida (existencia de duplicados en la cartera). De sus resultados se deduce una notable infravaloración del riesgo real cuando se asume la hipótesis de independencia. Heïlmann (1986) trató un problema similar pero considerando una cartera de seguros de no vida. Sus conclusiones son análogas a las obtenidas por Kaas para el caso de vida.

Desde la segunda mitad de los 90, numerosos artículos han roto la hipótesis de independencia para tratar dependencias entre los riesgos individuales de una cartera. En este sentido, mencionar, entre otros, los trabajos de Goovaerts & Dhaene (1996), Dhaene & Goovaerts (1996, 1997), Dhaene et al. (1997), Müller (1997), Baüerle & Müller (1998), Wang & Dhaene (1998), Ambagaspitya (1998), Dhaene & Denuit (1999), Taizhong & Zhiqiang (1999), Marceau et al. (1999) y Denuit, Dhaene & Ribas (2000, 2001).

1.2 Planteamientos y objetivos

El objetivo de este trabajo es doble. Por una parte, queremos analizar relaciones de dependencia entre riesgos individuales. De entre todas las posibles, únicamente nos ocuparemos de aquellas que incrementan el riesgo del grupo en que se producen con respecto al caso independiente. Aunque en diferentes formas, éstas serán, en cualquier caso, relaciones de dependencia de signo positivo. En segundo lugar, y a modo de aplicación, pretendemos utilizar los resultados obtenidos para aproximar el riesgo global de una cartera de seguros de vida cualquiera, que presente dependencias de signo positivo entre algunos de los riesgos individuales que la componen. Se tratará de aproximar la distribución del coste total en el modelo individual de vida rompiendo la hipótesis de independencia para algunos conjuntos de riesgos que, por su estructura de dependencia positiva, presentan una mayor "peligrosidad", en el sentido que pueden provocar una mayor siniestralidad conjunta que en el caso independiente.

Los dos objetivos surgieron en diferentes momentos de la elaboración de este trabajo en un orden que, a primera vista, puede parecer antinatural. Los primeros años de investigación, se dedicaron a analizar los diferentes métodos aparecidos en la literatura desde la segunda mitad de los 80 para la determinación de la distribución del coste total en el modelo individual bajo la hipótesis de independencia para todos los riesgos de la cartera. Centramos entonces nuestra atención en el modelo individual de vida, modelo que, por la simplicidad de sus riesgos individuales (seguros de vida), había logrado avanzar más en lo que se refiere a resultados exactos para cuantificar el riesgo del total de la cartera. Con la recurrencia de De Pril (1986) es posible obtener de forma exacta la distribución del coste total de una cartera formada por pólizas de vida que garanticen el pago de un capital fijo en caso de muerte del asegurado. Las recurrencias de De Pril (1989), Waldmann (1994) y Dhaene & Vanderbroek (1995) permiten el cálculo exacto de esta distribución para cualquier cartera de seguros de vida. La novedad de éstas es que contemplan, además, la posibilidad de que la cuantía a pagar en caso de muerte del asegurado sea aleatoria.

Teóricamente es posible aplicar estas recurrencias exactas a una cartera de seguros de vida cualquiera, aunque al intentar utilizarlas de forma práctica encontramos una primera limitación en carteras de gran tamaño y/o con una distribución de la cuantía a pagar en caso de siniestro definida en más de unos pocos puntos. En cuanto al primero de los problemas, el tamaño de la cartera, creemos que no merece la pena calificarlo como tal. Los recursos informáticos actuales deben permitir programar las recurrencias mencionadas para cualquier volumen de pólizas y, en todo caso, se reduce a un problema de programación que se aleja de los objetivos de este trabajo. El problema real que queda tras estas recurrencias es el señalado en segundo lugar. Observar que si fuera posible aplicar las obtenidas en el modelo individual de vida para cualquier distribución aleatoria de la cuantía, tendríamos resuelta la problemática de la determinación del coste total en cualquier tipo de cartera, no necesariamente de vida. Desafortunadamente esto no es posible. Señalar, sin embargo, que si nos limitamos a pólizas de seguros de vida, las dos modalidades básicas en el mercado ofrecen el pago de un capital fijo a la muerte del asegurado y la posibilidad de contratar, además, el doble del capital asegurado pagadero en caso de que la muerte se produzca por accidente. Para ambos casos, las recurrencias exactas son perfectamente aplicables y, en este sentido, no merece la pena recurrir a métodos aproximados.

Admitiendo que para nuestro objetivo inicial, determinar la distribución del coste total en carteras de vida, podíamos perfectamente utilizar las recurrencias exactas antes señaladas, empezamos a preocuparnos por la fiabilidad de sus resultados. Aparentemente, se trata de distribuciones exactas pero este propósito nunca se podrá lograr asumiendo la hipótesis de independencia entre todos los riesgos de la cartera. Además, se toman como datos las probabilidades de unas tablas de mortalidad que, aunque se actualizan periódicamente, contienen errores y, en ningún caso, coincidirán exactamente con las de la población asegurada en la cartera. Nos planteamos entonces si realmente estábamos considerando el riesgo de la cartera y si merecía la pena el esfuerzo de tratar con recurrencias exactas o si, por el contrario, era mejor quedarnos con alguna de las aproximaciones propuestas en la literatura[1].

En ese momento, surgió la oportunidad de trabajar con los Drs. Marc Goovaerts y Jan Dhaene. Por entonces, ellos llevaban dos años tratando dependencias entre riesgos en el contexto actuarial y nos pareció una línea muy interesante para continuar nuestra investigación. De ella nació el eje central que sustenta este trabajo. Nuestra idea era clara, queríamos aproximar lo más fiel-

[1] ver apartado 6.5, cap. 6.

mente posible la distribución del coste total en carteras de vida para tener una medida objetiva del riesgo de las mismas. Si basamos todas nuestras políticas en estas distribuciones está claro que, en ningún caso, es prudente infravalorar el riesgo real, circunstancia que se dará al asumir independencia entre aquellos riesgos individuales de la cartera cuya estructura de dependencia incremente su riesgo conjunto. Así, antes de tratar el riesgo de la cartera, se hace necesario analizar por separado el de estos grupos. Desde este punto empieza este trabajo. En primer lugar, se trata de identificar, de entre todas las posibles relaciones de dependencia entre m ($m \geq 2$) riesgos, cuáles incrementan su riesgo global respecto al caso independiente. Para ello será necesario comparar el riesgo de este conjunto bajo diferentes hipótesis de dependencia con el que resulta de la hipótesis de independencia, comparación que, como veremos seguidamente, deberá enmarcarse dentro de la teoría de ordenación de riesgos.

Para poder concluir que una hipótesis concreta de dependencia incrementa el riesgo del conjunto para el cual ha sido formulada, es necesario que cualquier asegurador perciba una mayor "peligrosidad" del mismo que bajo la hipótesis de independencia. Esta percepción debe entenderse dentro de un marco teórico válido para la modelización de toma de decisiones bajo incertidumbre. En este sentido, podemos mencionar la teoría de la utilidad y la teoría dual de Yaari. La primera fue popularizada por von Neumann & Mongestern (1947) y la segunda se debe a Yaari (1987). En el marco de la teoría de la utilidad, la percepción del riesgo depende de una función de utilidad de la riqueza del decisor que, en el caso de decisores adversos al riesgo (calificativo que podemos asignar a cualquier asegurador), es cóncava. En la teoría dual de Yaari, las actitudes ante el riesgo se caracterizan a partir de una función de distorsión que modifica la distribución de probabilidad del mismo. En el caso de decisores adversos al riesgo esta función de distorsión resulta ser convexa. A través de ambas teorías es posible encontrar la ordenación que establece un decisor del mercado entre dos riesgos cualesquiera. Desafortunadamente, esta ordenación depende, en un caso, de una función de utilidad del decisor que es totalmente desconocida y, en otro, de una función de distorsión con el mismo problema. La teoría de la ordenación de riesgos se ocupa de encontrar relaciones de orden equivalentes a las que resultan de la teoría de la utilidad y de la teoría dual pero definidas a partir de las distribuciones de probabilidad de los riesgos. En el contexto actuarial, el trabajo de Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1994) recoge los principales resultados relativos a la ordenación de riesgos dentro del marco de la teoría de la utilidad. Paralelamente, los trabajos de Dhaene et al. (1997), Hürlimann (1998) y Ribas, Dhaene & Goovaerts (1998) tratan la ordenación de riesgos en la teoría dual de Yaari. Wang & Young (1998) y Denuit, Dhaene & van Wouve (1999) analizan las similitudes de ambos enfoques así como sus principales diferencias.

Tanto en el marco de la teoría de la utilidad como en el de la teoría dual, la ordenación que establece cualquier decisor del mercado entre dos riesgos equivale a una relación de dominancia estocástica entre sus funciones de distribución. Para el caso de decisores adversos al riesgo, el equivalente puede establecerse en base a una relación de orden más débil entre sus funciones de distribución, relación conocida en el contexto actuarial con el nombre de orden stop-loss. La dominancia estocástica fue definida por primera vez por Hadar & Rusell (1969), mientras que la ordenación stop-loss se basa en la ordenación convexa desarrollada por Hardly, Littlewood & Polya (1929) e introducida en el área económica por Rothschild & Stiglitz (1970).

La ordenación stop-loss será la clave de este trabajo. Ésta no debe entenderse, en este contexto, como herramienta para establecer políticas de reaseguro, sino como un mecanismo para ordenar riesgos. El orden stop-loss entre dos riesgos determina la ordenación que de los mismos establece cualquier decisor adverso al riesgo, en el sentido que, aquél que resulte superior, en orden stop-loss, es para él el más peligroso. Esta conclusión es válida dentro de la teoría de la utilidad, así como en el marco de la teoría dual de Yaari. A partir del orden stop-loss será posible identificar qué relaciones de dependencia incrementan la "peligrosidad" de los grupos de riesgos no independientes de la cartera. El riesgo de cada grupo vendrá dado por la variable aleatoria coste total que resulta de la suma de los riesgos individuales que forman parte del mismo. Así, las relaciones de dependencia que incrementan la "peligrosidad" de un grupo son aquellas para las que resulta una distribución de la suma superior, en orden stop-loss, a la correspondiente al caso de independencia. La forma en que se mida esta dependencia dependerá del número de riesgos en el grupo y de la definición de sus respectivas distribuciones de probabilidad. En cualquier caso, serán relaciones de dependencia de signo positivo.

Encontrar aquellas relaciones de dependencia positiva que permiten detectar la presencia en la cartera de uno o varios grupos de este tipo es únicamente el primer paso. Una vez éstos identificados está claro que, en cada uno de ellos, deberemos tratar de incorporar el incremento que se ha producido en el riesgo del conjunto por la no independencia de sus componentes. La cuantía de este incremento dependerá, en algún modo, del grado de interdependencia que exista entre los riesgos individuales que forman el grupo.

Si estamos hablando de dependencias de signo positivo, es lógico pensar que un incremento en el grado de dependencia provoque un incremento en el riesgo del conjunto. Esta simple idea, necesita de una medida de dependencia capaz de ordenar, en base al orden stop-loss, el riesgo que se deriva del conjunto para diferentes hipótesis sobre el grado de dependencia entre los riesgos individuales. En otras palabras, la medida elegida debe ser tal que tras un incremento/decremento del grado de dependencia asumido, permita afirmar que la nueva distribución suma es superior/inferior, en orden stop-loss, a la inicial. Nos ocuparemos de este tipo de medidas diferenciando según los grupos estén formados por dos o más riesgos, análisis bivariante y multivariante. En cada caso, la medida adecuada será aquella que permita ordenar, en base al orden stop-loss, grupos de riesgos idénticos excepto en el grado de dependencia asumido. Llegar a encontrar estas medidas es de gran importancia puesto que en la práctica será imposible dar números exactos acerca del grado de dependencia que mide el comportamiento conjunto de los riesgos individuales en cada grupo. Así, debemos olvidarnos de distribuciones de probabilidad exactas referidas a su riesgo global. Si nuestro objetivo es precisamente cubrir este riesgo y no podemos llegar a medirlo de forma exacta, parece una estrategia prudente tratar de sobrevalorarlo en una pequeña cuantía. Si incrementamos ligeramente el grado de dependencia que creemos es realista asumir entre los riesgos individuales de cada conjunto, la sobrevaloración queda garantizada siempre que este grado esté definido con una medida monótona creciente respecto al riesgo del conjunto.

Hasta este momento, respecto al análisis de dependencias entre riesgos individuales, hemos tratado dos puntos básicos:

> La necesidad de una medida cualitativa de dependencia capaz de indicarnos que el riesgo del conjunto es superior al que le corresponde en caso de independencia, y, a su vez,
>
> La búsqueda de una medida cuantitativa del grado de dependencia que sea monótona creciente respecto al riesgo del conjunto.

Con la primera medida, sabremos qué grupos de riesgos de la cartera no admiten la hipótesis de independencia si se trata de evitar la infravaloración de su siniestralidad conjunta. Para los riesgos en cada uno de estos grupos, podremos, a través de la segunda medida, establecer una hipótesis suficiente sobre su grado de dependencia como para garantizar que, en ningún caso, se incurre en tal infravaloración. ¿Qué sucede con el riesgo de una cartera cualquiera que contenga algunos de estos grupos? Intuitivamente es claro que éste es superior al que le correspondería en caso de mutua independencia de todos los riesgos que la componen. Analíticamente probaremos esta conclusión a partir de una conocida propiedad del orden stop-loss [2] que presentamos en el capítulo 3. Ésta nos garantiza el mantenimiento del orden stop-loss bajo la convolución de riesgos independientes. Si admitimos que las dependencias en la cartera únicamente se producen dentro de cada uno de estos grupos, siendo los riesgos en diferentes grupos, así como los que quedan fuera de ellos, mutuamente independientes, esta propiedad nos indica que la v.a. coste total de la cartera es superior, en orden stop-loss, a la correspondiente en caso de independencia. Además, esta propiedad nos garantiza que si hemos considerado un grado suficiente de dependencia entre los riesgos de cada uno de los grupos como para no infravalorar su riesgo global tampoco quedará infravalorado el total de la cartera.

Desde un punto de vista teórico, este análisis cubre los objetivos planteados; sin embargo, este logro disminuye cuando pasamos a su aplicabilidad práctica. Las medidas de dependencia que hayan resultado estarán necesariamente definidas sobre la distribución de probabilidad multivariante de los riesgos involucrados y está claro que ésta ya no se corresponde con el producto de las respectivas distribuciones marginales. Para el caso que nos ocupará, riesgos procedentes de carteras de seguros de vida, si limitamos el análisis a grupos no independientes formados por dos y tres riesgos, podremos llegar a aproximar sus respectivas distribuciones bivariantes/trivariantes estimando, en base a la experiencia histórica de siniestralidad causada por grupos similares, sus correspondientes coeficientes de correlación. Una vez estas distribuciones estimadas, podremos, a través del análisis anterior, cubrir el riesgo de una cartera de seguros de vida que contenga parejas y/o tríos no independientes. Si, además, pretendemos tener una medida de este riesgo deberemos tratar de aproximar la distribución del coste total de esta cartera. Para los riesgos que han quedado como independientes, la distribución suma resultará a partir de alguna de las recurrencias anteriormente señaladas para el cálculo de la distribución del coste total en el modelo individual. En cuanto al resto de riesgos, forman parte de las diferentes parejas y/o tríos identificados. Si admitimos que las relaciones de dependencia únicamente se producen dentro de cada uno de estos grupos, siendo los riesgos en diferentes grupos mutuamente independientes, podemos

[2] ver teorema 3.11 en pág. 47

limitarnos a buscar las distribuciones suma de cada uno de los grupos detectados en la cartera. Éstas resultarán de forma inmediata a partir de las respectivas distribuciones bivariantes/trivariantes encontradas para cada grupo. De la convolución de todas ellas resultará la distribución suma del conjunto de riesgos dependientes, distribución que, a su vez convolucionada con la encontrada para los riesgos independientes, dará lugar a la distribución coste total de la cartera.

Creemos necesario finalizar este apartado apuntando las principales limitaciones del desarrollo aquí planteado. De entre todas las relaciones de dependencia positiva que podamos detectar entre los riesgos individuales de una cartera de vida, algunas de las cuales apuntábamos en el primer epígrafe de esta introducción (ver pág. 10), únicamente seremos capaces de tratar con aquellas que se produzcan entre dos y/o tres riesgos. Con ello, podremos incorporar el incremento del riesgo de la cartera debido a la presencia de duplicados/triplicados y/o un cierto número de matrimonios con un ascendiente/descendiente. Aunque dispondremos de herramientas teóricas para tratar dependencias en grupos más amplios, las dificultades asociadas a la definición de su correspondiente distribución multivariante de probabilidad, las convertirán en inoperativas a efectos prácticos. Salvar este inconveniente pasa, a nuestro entender, por la introducción de cópulas en el estudio.
Una cópula es simplemente la definición de una distribución multivariante de probabilidad a partir de las marginales asociadas a cada uno de los riesgos. En la literatura, encontramos una buena introducción a las cópulas en Nielsen (1999). Frees & Valdez (1998) y Wang (1998), recogen las principales cópulas propuestas en la literatura y proponen algunas aplicaciones de las mismas al campo actuarial. Marceau et al. (1999) proponen algunas cópulas para modelizar relaciones de dependencia entre los riesgos del modelo individual. Sus resultados abren una vía con inmensas posibilidades en la que confiamos poder continuar la investigación iniciada con este trabajo.

1.3 Perfil de la tesis

Este trabajo está estructurado en dos partes. En la primera, con el título "Dependencia positiva. Su influencia en el riesgo del grupo", trataremos dependencias entre un grupo de riesgos individuales procedentes de una cartera cualquiera. Como ya hemos señalado, únicamente nos ocuparemos de aquellas relaciones de dependencia de signo positivo que incrementan el riesgo del grupo

en que se define. El riesgo de cada grupo viene dado por la variable aleatoria que resulta de la suma de los riesgos individuales que forman parte del mismo. Así, para tener en cuenta una relación de dependencia, será necesario que el asegurador perciba un mayor riesgo de la v.a. suma que resulta de considerar la hipótesis de dependencia que de la resultante al obviar esta hipótesis. Esta percepción debe entenderse dentro de un marco teórico válido para la ordenación de riesgos. En el capítulo 2, definimos dos de estos marcos: la teoría de la utilidad y la teoría dual de Yaari. A través de ambas teorías se deduce la ordenación que establece un decisor del mercado entre dos riesgos cualesquiera, en un caso a través de una función de utilidad y, en otro, a través de una función de distorsión. A efectos prácticos resulta imposible tratar con estas funciones, por lo que, en el capítulo 3, nos ocupamos de buscar relaciones de orden equivalentes a las encontradas pero definidas a partir de las distribuciones de probabilidad de los riesgos. En el caso de un decisor adverso al riesgo, calificativo que sin duda podemos atribuir al asegurador, la ordenación que establece entre dos riesgos cualesquiera será equivalente al orden stop-loss de los mismos, en el sentido, que aquél que resulte superior, en orden stop-loss, es para él el más peligroso.
Los capítulos 2 y 3 son de carácter introductorio y sientan las bases necesarias para el desarrollo del resto del trabajo. En lo que se refiere al tratamiento de dependencias entre riesgos individuales, sabemos, de los resultados de estos capítulos, que nos basta con ocuparnos de aquellas lo suficientemente fuertes como para garantizar una distribución de la suma superior, en orden stop-loss, a la correspondiente en caso de independencia. Diferenciaremos según éstas se produzcan entre dos o más riesgos. En cada caso distinguiremos según los riesgos provengan de una cartera formada por riesgos individuales con distribución dicotómica o bien por riesgos con distribución arbitraria.

En el capítulo 4 analizaremos dependencias entre dos únicos riesgos. En primer lugar, definiremos algunos conceptos de dependencia bivariante positiva que, posteriormente, se probará son suficientes para asegurar un mayor riesgo de la pareja que en el caso independiente. Una vez probada esta relación, se trata de cuantificar el grado de dependencia existente a través de una medida capaz de asegurar un mayor riesgo de la pareja cuando aumente el grado de dependencia asumido entre sus componentes. La medida adecuada será aquella que permita ordenar, en base al orden stop-loss, pares de riesgos idénticos excepto en el grado de dependencia asumido.

En el capítulo 5, ampliamos el análisis bivariante al caso multivariante. Para secuencias formadas por dos o más riesgos, será posible la generalización de algunos de los conceptos de dependencia bivariante positiva definidos en el capítulo anterior. Algunos de éstos, junto con otros nuevos que recogeremos de la literatura estadística, serán suficientes para garantizar un mayor riesgo global de la secuencia que en el caso independiente. Nuevamente nos ocuparemos, a continuación, de buscar una medida sobre el grado de dependencia entre los riesgos que componen la secuencia que sea monótona creciente respecto al riesgo del conjunto.

Con el capítulo 5 concluye la primera parte de este trabajo. En la segunda parte, bajo el título "Dependencia positiva. Su influencia en el riesgo de la cartera", aplicaremos parte de los resultados en ella obtenidos a una cartera de seguros de vida que presente dependencias de signo positivo entre algunos de sus riesgos. Se tratará, no sólo de controlar el riesgo, sino también de cuantificarlo numéricamente a través de su distribución de coste total. Para ello, en el capítulo 6, recogemos algunas de las recurrencias aparecidas en la literatura para el cálculo de la distribución del coste total en el modelo individual cuando todos los riesgos son mutuamente independientes.

En el capítulo 7, introducimos la posibilidad de que la cartera contenga un determinado número de parejas con una estructura de dependencia positiva lo suficientemente fuerte como para garantizar, en cada caso, un mayor riesgo de la pareja que en el caso independiente. Los resultados del capítulo 4 nos permitirán tratar esta estructura de dependencia en carteras de seguros de vida con pago fijo de un capital a la muerte del asegurado y en carteras que ofrezcan, además, el doble de indemnización cuando la muerte se produzca por accidente.

En el capítulo 8, consideramos, finalmente, la posibilidad de que las dependencias de signo positivo se produzcan entre tres riesgos. Las dificultades asociadas al tratamiento de dependencias multivariantes nos llevarán a limitar el análisis a carteras de seguros de vida con pago fijo de capital. Para este tipo de carteras, los resultados del capítulo 5 nos permitirán ampliar el análisis bivariante realizado en el capítulo anterior y considerar también dependencias que ocurran en grupos formados por tres riesgos.

Las principales conclusiones derivadas del desarrollo de este trabajo, se exponen de forma conjunta en el capítulo 9.

Parte I

Dependencia positiva. Su influencia en el riesgo del grupo

Capítulo 2

Marcos para la ordenación de riesgos

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos dos marcos teóricos válidos para la modelización de la toma de decisiones bajo incertidumbre.

Tradicionalmente, la literatura ha enmarcado las decisiones de los agentes económicos dentro de la teoría de la utilidad. Aunque el concepto de utilidad fue introducido por Cramer y Bernoulli en el siglo XVIII, resolviendo con él la conocida paradoja de San Petersburgo, la popularización de esta teoría se atribuye a von Neumann & Mongenster (1947), quienes establecieron los cinco axiomas en los que se basa esta teoría y demostraron que cualquier decisión tomada consecuentemente con su conjunto axiomático puede ser modelizada a partir de una función de utilidad de la riqueza del decisor. Así, cuando un agente económico valora un suceso aleatorio que afectará de forma positiva (negativa) a su riqueza futura, en realidad, está cuantificando la utilidad que le reportará un aumento (disminución) de su riqueza debido a la realización del suceso.

Aunque nos ocuparemos únicamente de valorar riesgos asegurados, entendiendo como tales a variables aleatorias la realización de las cuales se traducirá en una pérdida para el asegurador (disminución de su riqueza), en este capítulo definimos variables aleatorias con dominio dentro del conjunto de los reales. Así, estamos considerando también variables aleatorias cuya realización incrementará la riqueza del decisor. Sin ello difícilmente podríamos llegar a comprender el origen y posterior desarrollo de la teoría de la utilidad ya que, como veremos, los axiomas postulados por von Neumann & Mongestern se establecen para el conjunto de posibles realizaciones de un suceso aleatorio que represente una ganancia futura del decisor.

Centrándonos en este conjunto de axiomas cabe señalar al más cuestionado de ellos, se trata del quinto axioma de la teoría de la utilidad, el cual establece la independencia entre combinaciones de distribuciones de probabilidad de diferentes realizaciones. Al igual que con el sistema de axiomas Euclideano, muchos autores han cuestionado la existencia de este quinto axioma; ver, por ejemplo, Allains (1953), Kahneman & Tversky (1979), Machina (1982).

Opuesto al concepto de independencia, Yaari (1987) introdujo el concepto de comonotonía y formalizó un conjunto alternativo de axiomas desarrollando la llamada teoría dual de decisión. Se rompe así la vieja creencia de que la teoría de la utilidad es la única herramienta teórica legítima para analizar las decisiones de los agentes económicos en presencia de incertidumbre. La teoría dual de Yaari es relativamente nueva y por ello todavía no ha sido muy aplicada.

La introducción de la teoría dual de Yaari en el campo actuarial es muy reciente. En el contexto de la teoría de ordenación de riesgos, Dhaene, Wang, Young & Goovaerts (1997), Hürlimann (1998) y Ribas, Dhaene & Goovaerts (1998) establecen relaciones de orden equivalentes a las que resultan de la teoría dual definidas sobre las distribuciones de probabilidad de los riesgos. En el siguiente capítulo desarrollaremos el contenido de estos resultados; en éste únicamente presentamos dos marcos válidos para el análisis de la toma de decisiones bajo incertidumbre: la teoría de la utilidad y la teoría dual de Yaari. En ningún momento se pretende comparar estos marcos ni presentar a uno como mejor que otro, creemos para nuestra problemática ambos son perfectamente válidos y por ello obtendremos resultados dentro de cada uno de ellos.

2.2 Principio de la esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria (v.a.) definida dentro del conjunto de los reales que representa la riqueza futura de un determinado individuo. Para esta v.a. definimos sus funciones de distribución acumulativa y desacumulativa que representamos por F_X y S_X respectivamente.

Función de distribución acumulativa de probabilidad:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2.1}$$

Función de distribución desacumulativa de probabilidad:

$$S_X(x) = \Pr(X > x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2.2}$$

En general, el valor esperado de X puede ser evaluado directamente a partir de su función acumulativa (desacumulativa) de probabilidad. En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{0} x\, dF_X(x) + \int_{0}^{\infty} x\, dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{0} x\, dF_X(x) - \int_{0}^{\infty} x\, d(1 - F_X(x)) = x\, F_X(x)]_{-\infty}^{0} \\ & \quad - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\ dx - x(1 - F_X(x))]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x))\ dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x))\ dx. \end{aligned}$$

Así resulta,

$$\begin{aligned} E(X) &= -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x))\ dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} (1 - S_X(x))\, dx + \int_{0}^{\infty} S_X(x)\ dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

¿Es ésta la valoración que hace el agente económico de la realización de X? ¿Se rigen los decisores del mercado según el principio de la esperanza matemática? Si así fuera un decisor sería indiferente entre jugar a un juego que le puede aportar una ganancia futura igual a X, pagando por jugar

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} S_X(x)\ dx \tag{2.4}$$

o bien no jugarlo y quedarse con esta cantidad.

Igualmente, según este principio un decisor es indiferente entre asumir un riesgo X o bien disminuir su riqueza en una cuantía

$$E(-X) = -\int_{-\infty}^{0} (1 - S_{-X}(x))\ dx = -\int_{0}^{\infty} S_X(x)\ dx \tag{2.5}$$

con tal de no asumirlo.

Como veremos en el siguiente apartado este no es el criterio que siguen los agentes económicos para tomar decisiones sobre eventos aleatorios que puedan afectar a su riqueza futura.

2.3 Teoría de la utilidad

2.3.1 Origen de la teoría de la utilidad

Con el desarrollo de la moderna teoría de la probabilidad en el siglo XVII, el atractivo de un juego que ofrezca unos pagos $X = (x_1, \cdots, x_n)$ con probabilidades $(p_1, \cdots, p_n)$ fue asociado a su valor esperado,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; p_i.$$

¿Se rigen los decisores del mercado según el principio de la esperanza matemática? Como hemos visto, si así fuera un decisor seria indiferente entre jugar a este juego que le puede aportar una ganancia futura X, pagando por jugar $E(X)$ o bien no jugarlo y quedarse con esta cantidad.

El principio de la esperanza matemática fue cuestionado por Nicholas Bernoulli, quien propuso en 1728 la conocida paradoja de San Petersburgo que exponemos a continuación.

Supongamos que alguien nos ofrece un premio por lanzar una moneda repetidamente hasta que aparezca la primera cara. El premio es 2^n si la primera cara aparece en el n-ésimo intento $(n = 1, 2, \cdots)$. ¿Cuál es el equivalente cierto que asignaremos a este juego si seguimos el criterio de la esperanza matemática?

Como el valor esperado del pago es

$$2 \, \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \, \left(\frac{1}{4}\right) + 8 \, \left(\frac{1}{8}\right) + \cdots = \infty,$$

este juego será preferido a cualquier otro que ofrezca un premio cierto finito.

No obstante, es evidente que la mayoría de personas preferirán un juego que ofrezca un premio cierto de cuantía moderada a este juego con un premio esperado infinito.

Para resolver esta paradoja, Gabriel Cramer y Daniel Bernoulli (primo de Nicholas) argumentaron que una ganancia de 200 u.m. no tiene porque ser valorada necesariamente como el doble que una ganancia de 100 u.m. Para explicar este fenómeno introdujeron el moderno concepto de utilidad. Argumentaron que, en lugar de utilizar el valor esperado, los individuos valorarán el juego en base a su utilidad esperada. Así, la valoración individual viene determinada por

$$E(u(X)) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \; p_i,$$

siendo u una función que valora la utilidad que los diferentes pagos le reportarán al individuo.

La ganancia cierta, G, para la cual resulta la misma utilidad que la obtenida por jugar el juego de San Petersburgo viene determinada por la ecuación

$$u(w+G) = u(w+2)\ \frac{1}{2} + u(w+4)\ \frac{1}{4} + u(w+8)\ \frac{1}{8} + \cdots,$$

siendo w la riqueza individual inicial. Si, por ejemplo, la función de utilidad es $u(x) = \log(x)$ y $w = 10.000$ u.m., el equivalente cierto individual será $14'25$ u.m., a pesar de que el juego tiene una esperanza infinita.

Antes de concluir con esta cuestión, señalar que el uso de funciones de utilidad no es la única solución posible a la paradoja de San Petersburgo. Se puede dar, por ejemplo, una explicación alternativa utilizando la percepción que, en general, se tiene de la probabilidad. Alguien puede pensar que llegado un momento es prácticamente imposible seguir sacando cruces. En este caso se valora que es imposible obtener, por ejemplo, 10 cruces seguidas y la probabilidad que se asocia a este suceso es 0.

2.3.2 Axiomas

A lo largo de la extensa literatura de toma de decisiones bajo incertidumbre, la teoría con mayor influencia es indudablemente la teoría de la utilidad desarrollada por von Neumann & Mongenstern en 1947. En este apartado queremos resumir sus principales resultados.

Para un conjunto de sucesos aleatorios cuya realización represente una ganancia futura para el decisor (incremento de su riqueza), sea $\overrightarrow{X}$ el conjunto de v.a. que describe a cada una de las posibles alternativas. En el conjunto $\overrightarrow{X}$ sea $\succsim$ una relación de preferencia binaria que permite la comparación de cualquier par de alternativas $X_1, X_2 \in \overrightarrow{X}$. $X_1 \succsim X_2$ indica que la realización de X_1 es al menos tan buena para el decisor como la de X_2. De $\succsim$ se pueden derivar las siguientes dos importantes relaciones en $\overrightarrow{X}$:

(1) Relación de estricta preferencia: $\succ$,

$$X_1 \succ X_2 \Leftrightarrow (X_1 \succsim X_2 \text{ pero no se cumple } X_2 \succsim X_1),$$

relación que indica que la realización de X_1 es mejor que la de X_2.

(2) Relación de indiferencia $\sim$,

$$X_1 \sim X_2 \Leftrightarrow (X_1 \succsim X_2 \text{ y } X_2 \succsim X_1),$$

relación que indica que la realización de X_1 es indiferente a la de X_2.

La relación $\succsim$ cumple los siguientes cinco axiomas.

Axioma 1. Neutralidad: Si $S_{X_1}(x) = S_{X_2}(x)$ para todo $x \geq 0$, entonces $X_1 \sim X_2$.

Axioma 2. Orden completo: Para cualesquiera $X_1, X_2 \in \overrightarrow{X}$, tenemos que $X_1 \succsim X_2$ o $X_2 \succsim X_1$ (o ambos); de donde se deduce la propiedad reflexiva para $\succsim$:

$$X \succsim X \quad \forall X \in \overrightarrow{X}.$$

Además $\succsim$ es una relación transitiva. Sean $X_1, X_2, X_3 \in \overrightarrow{X}$,

$$\text{si } X_1 \succsim X_2 \text{ y } X_2 \succsim X_3, \text{ entonces } X_1 \succsim X_3.$$

La completitud y transitividad de $\succsim$ tiene las siguientes implicaciones para las relaciones de estricta preferencia e indiferencia (ver, por ejemplo, Mas-Colell, Whinston & Green (1995)):

(1) $\succ$ es irreflexiva (la relación $X \succ X$ nunca se cumple) y transitiva (si $X_1 \succ X_2$ y $X_2 \succ X_3$, entonces $X_1 \succ X_3$).

(2) $\sim$ es reflexiva ($X \sim X$), transitiva (si $X_1 \sim X_2$ y $X_2 \sim X_3$, entonces $X_1 \sim X_3$) y simétrica (si $X_1 \sim X_2$, entonces $X_2 \sim X_1$).

(3) Si $X_1 \succ X_2$ y $X_2 \succsim X_3$, entonces $X_1 \succsim X_3$.

Axioma 3. Continuidad: $\succsim$ es continua en la topología de la convergencia débil (con respecto a la norma L_1).

Axioma 4. Monotonía: Si $S_{X_1}(x) \geq S_{X_2}(x)$ para todo $x \geq 0$, entonces $X_1 \succsim X_2$.

Axioma 5. Independencia: Si $X_1 \succsim X_2$, entonces para cualquier X_3,

$$\{(p, X_1), (1-p, X_3)\} \succsim \{(p, X_2), (1-p, X_3)\}$$

para todo $p \in [0, 1]$, donde la función de distribución desacumulativa de $\{(p, X_1), (1-p, X_3)\}$ viene definida por

$$S_{\{(p,X_1),(1-p,X_3)\}}(x) = p\, S_{X_1}(x) + (1-p)\ S_{X_3}(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Es decir, la introducción de una nueva posible alternativa no debe afectar a la relación de preferencias existente.

Este quinto axioma ha sido uno de los puntos más criticados de la teoría de la utilidad. En este sentido, podemos tomar como ejemplo el llamado "*Common Ratio Effect*" propuesto por Kaheman & Tversky (1979) que parece anular su validez.

Ejemplo 2.1

Consideremos las siguientes loterías

Lotería A1	Realizaciones	Probabilidad
	0	0.2
	4000	0.8
Lotería B1	Realizaciones	Probabilidad
	3000	1

Lotería A2	Realizaciones	Probabilidad
	0	0.8
	4000	0.2
Lotería B2	Realizaciones	Probabilidad
	0	0.75
	3000	0.25

Kaheman & Tversky (1979) propusieron a un grupo de personas que eligieran entre jugar a la lotería A1 o jugar a la lotería B1. El 80% de ellas eligieron B1. A continuación les propusieron elegir entre A2 y B2, en este caso únicamente el 35% prefirieron jugar a la lotería B2.

Si observamos más detalladamente las loterías A2 y B2, vemos que

$$A2 = \{(0.25, \mathrm{A1}), (0.75, \mathrm{C})\}\ \ y\ B2 = \{(0.25, \mathrm{B1}), (0.75, \mathrm{C})\},$$

siendo C una lotería sin premio (equivalente a no jugar).

Así todos aquellos para los cuales $B1 \succ A1$, según el quinto axioma de la teoría de la utilidad deberían haber establecido la relación de orden $B2 \succ A2$, lo cual evidentemente no sucedió.

A pesar de las objeciones existentes, si partimos del conjunto axiomático propuesto por von Neumann & Mongestern y consideramos que un decisor racional es capaz de establecer un mapa de preferencias completo, es decir, de ordenar dos alternativas cualesquiera la realización de las cuales afectará a su riqueza, nos encontramos con la teoría de la utilidad esperada. Bajo esta teoría, von Neumann & Mongestern (1947) demostraron que cualquier decisión tomada consecuentemente con sus cinco axiomas puede ser modelizada a partir de una función de utilidad de la riqueza $u(w)$ definida dentro del conjunto de los reales.

Teorema 2.2
Bajo el sistema de axiomas 1 - 5*, existe una función de utilidad* u*, tal que para cualquier par de v.a.* X, Y; $X \succsim Y$*, si, y sólo si,*

$$E(u(X)) \geq E(u(Y)). \tag{2.6}$$

Si estamos de acuerdo con los cinco axiomas postulados debemos también admitir la existencia de la función de utilidad u, independientemente de que no podamos llegar a conocer cuál es ésta. En la práctica es imposible encontrar la función de utilidad de cada decisor aunque podemos asumir con toda seguridad las siguientes consideraciones sobre ella.

1. La teoría de la utilidad está construida sobre la hipótesis de la existencia de unas preferencias consistentes sobre las distribuciones de probabilidad, por tanto, una función de utilidad no puede dar sorpresas: debe ser la descripción numérica de la existencia de estas preferencias.

2. Una función de utilidad u es una función no decreciente, por tanto,

$$u'(w) \geq 0$$

para cualquier decisor.

3. Una función de utilidad no está determinada de manera única. Si definimos por ejemplo,

$$u^*(x) = a\, u(x) + b, \quad a > 0,$$

entonces

$$E(u(X)) \geq E(u(Y))$$

es equivalente a

$$E(u^*(X)) \geq E(u^*(Y)),$$

es decir, las preferencias se mantienen cuando la función de utilidad es una transformación lineal no decreciente de la original.

Sin pérdida de generalidad, asumiremos en lo que sigue que la riqueza individual inicial es 0. Así el equivalente cierto de una realización aleatoria X cualquiera que suponga una ganancia, G, se puede obtener resolviendo la ecuación

$$u(G) = E(u(X)) = \int_0^\infty S_X(x)\ du(x) \geq 0.$$

Hasta ahora hemos considerado únicamente decisiones individuales sobre fenómenos aleatorios susceptibles de ser valorados económicamente que afectarán "positivamente" a la riqueza del decisor, en el sentido de que su realización implicará una ganancia para éste. A pesar de que la teoría de la utilidad fue postulada sobre este tipo de variables, nosotros queremos llegar a valorar y comparar riesgos. Al hablar de riesgos nos estamos refiriendo a eventos aleatorios la realización de los cuales ocasionarán una disminución en la riqueza del decisor. Bajo el modelo de la utilidad esperada, podemos llegar a establecer el equivalente cierto o pérdida, P, de una realización X que implique una disminución futura de su riqueza individual a partir de la ecuación

$$\begin{aligned} u(-P) &= E(u(-X)) = -\int_{-\infty}^0 (1 - S_{-X}(x))\ du(x) \\ &= -\int_0^\infty S_X(x)\ du(x) \leq 0, \end{aligned}$$

siendo u una función no decreciente.
Entonces, por (2.6), el riesgo X será preferido al riesgo Y, si, y sólo si,

$$E(u(-X)) \geq E(u(-Y)). \tag{2.7}$$

Es decir, si el decisor juzga más riqueza como mejor (requisito que evidentemente cumple), deberá asociarle más riesgo a Y que a X ya que la realización de este último implica una menor disminución de su riqueza.

Introduzcamos ahora la posibilidad de que los agentes económicos sean individuos adversos al riesgo y veamos cómo afecta este hecho a sus decisiones.

2.3.3 Aversión al riesgo en la teoría de la utilidad

Un decisor es adverso al riesgo si prefiere una ganancia (pérdida) segura igual a $E(X)$ a una ganancia (pérdida) aleatoria con el mismo valor esperado, es decir, si

$$E(u(X)) \leq u(E(X)), \ \forall X. \tag{2.8}$$

En el siguiente teorema se presenta la conocida inecuación de Jensen que demuestra que la aversión al riesgo en la teoría de la utilidad es equivalente a la concavidad de la función de utilidad del decisor.

Teorema 2.3
Para cualquier v.a. X y para cualquier función de utilidad cóncava $u(w)$,

$$E(u(X)) \leq u(E(X)). \tag{2.9}$$

Demostración:
Si $u(w)$ es cóncava, para cualquier real c existe una recta $l(x) = a\ x + b$, tal que $l(c) = u(c)$ y $u(x) \leq l(x)$ para todo x. Si elegimos $c = E(X)$ tenemos

$$u(E(X)) = l(E(X)) = a\ E(X) + b = E(l(X)) \geq E(u(X)).$$

□

Apliquemos ahora (2.9) para modificar la valoración que hace un decisor adverso al riesgo a través de la teoría de la utilidad esperada de un posible aumento futuro de su riqueza . En este caso, el equivalente cierto, G, de una realización aleatoria X cumple

$$u(G) = E(u(X)) \leq u(E(X)) \Rightarrow G \leq E(X).$$

Así, un decisor adverso al riesgo infravalora el valor esperado de una ganancia futura.

En el caso de un riesgo, ¿Cómo lo valora un decisor adverso al riesgo? ¿Cuál es ahora el equivalente cierto, P, de una realización aleatoria X que implique una disminución futura en su riqueza? Aplicando nuevamente (2.9), tenemos

$$u(-P) = E(u(-X)) \leq u(E(-X)) = u(-E(X)) \Rightarrow P \geq E(X).$$

Con lo cual podemos concluir que un decisor adverso al riesgo sobrevalora el valor esperado de una pérdida futura.

Sin miedo a equivocarnos podemos afirmar que el asegurador es un decisor económico adverso al riesgo, es decir, valora los riesgos que asegura con una función de utilidad no decreciente pero cóncava y, por tanto, comparará la utilidad que le suponen dos riesgos cualesquiera X e Y a partir de ésta. Así, de (2.7) y por la inecuación de Jensen, podemos afirmar que preferirá el riesgo X sobre el riesgo Y, si, y sólo si,

$$E\left(u\left(-X\right)\right) \geq E\left(u\left(-Y\right)\right), \tag{2.10}$$

siendo u una función de utilidad cualquiera no decreciente y cóncava.

Introducimos en el siguiente apartado la teoría dual de Yaari (1987) que ha supuesto un novedoso marco alternativo para la toma de decisiones en presencia de incertidumbre. Como veremos las conclusiones a que llegamos son similares a las obtenidas en este apartado.

2.4 Teoría dual de Yaari

2.4.1 Axiomas

De forma análoga al desarrollo de la geometría no euclideana, Yaari (1987) formalizó un conjunto de axiomas alternativo al de la teoría de la utilidad y desarrolló la llamada teoría dual para la toma de decisiones en presencia de incertidumbre. Dentro de este conjunto axiomático, la novedad aparece en el quinto axioma, ya que los axiomas 1 - 4 de la teoría de la utilidad permanecen inalterados.

Opuesto al concepto de independencia, Yaari (1987) y Schmeidler (1982, 1989), introducen el concepto de comonotonía entre dos v.a. como una extensión conceptual de la correlación perfecta entre ellas.

Definición 2.4
Sean X, Y dos v.a. definidas dentro del conjunto de los reales. Diremos que X e Y son comonótonas si existe una v.a. Z y dos funciones reales f, g no decrecientes, tales que,

$$X = f\left(Z\right),\ Y = g\left(Z\right). \tag{2.11}$$

La comonotonía juega un papel clave en la teoría dual de Yaari; Yaari (1987, pág. 104) hizo la siguiente descripción de este concepto:

> *"Si dos variables aleatorias son comonótonas podemos afirmar que ninguna de ellas supone una ventaja respecto a la otra. La variabilidad de una nunca se verá compensada por contravariabilidad en la otra."*

Basándose en el concepto de comonotonía, Yaari (1987), propuso el siguiente axioma como alternativa al quinto axioma de la teoría de la utilidad.

Axioma 5*. Independencia dual: Sean X_1, X_2, X_3 v.a. comonótonas dos a dos. Si $X_1 \succeq X_2$, entonces para cualquier $p \in [0,1]$,

$$pX_1 + (1-p)\,X_3 \succeq pX_2 + (1-p)\,X_3.$$

Si comparamos este axioma 5* con el axioma 5 de la teoría de la utilidad, observamos que la independencia ahora no se postula entre combinaciones de distribuciones de probabilidad sino entre combinaciones de posibles alternativas, aunque ahora se restringe la independencia al caso en que exista comonotonía entre ellas. Consideremos un decisor para el cual $X_1 \succeq X_2$. ¿Se mantendrá su relación de preferencias si por ejemplo X_1 y X_2 se combinan respectivamente mitad y mitad, con una tercera v.a. cualquiera a la que llamaremos X_3? Si para el decisor cuyas preferencias están siendo discutidas, X_3 le supone una mejora respecto a X_2 pero no respecto a X_1, entonces puede tener razones para cambiar la dirección de sus preferencias, es decir, las relaciones $X_1 \succeq X_2$ y $\frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \succeq \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_3$ pueden ser ambas ciertas. Por ello, exigir que $X_1 \succeq X_2$ implique $pX_1 + (1-p)\,X_3 \succeq pX_2 + (1-p)\,X_3$, parece únicamente justificado cuando ninguna de las variables suponga una ventaja respecto a las otras.

En el marco de la teoría dual de Yaari aparece el concepto de función de distorsión (Yaari, 1987) paralelo al de función de utilidad dentro de la teoría de la utilidad.

Definición 2.5
Una función de distorsión g es una función no decreciente $g : [0,1] \to [0,1]$ con $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.

Bajo el conjunto axiomático 1 - 4 y 5*, Yaari (1987) demostró que existe una función de distorsión g tal que para cualquier v.a. X su equivalente cierto, $H_g(X)$, viene definido por

$$H_g(X) = -\int_{-\infty}^{0} [1 - g(S_X(x))]\,dx + \int_{0}^{\infty} g(S_X(x))\ dx. \tag{2.12}$$

Observemos que $H_g(X) = E(X)$ si g es la función identidad. Así, para una función de distorsión cualquiera, el equivalente cierto $H_g(X)$ puede ser interpretado como una "esperanza distorsionada" de la v.a. X obtenida a partir de una "probabilidad distorsionada".

Bajo la teoría dual de Yaari, para cualquier par de v.a. X, Y; $X \succeq Y$ si, y sólo si, existe una función de distorsión g tal que

$$H_g(X) \geq H_g(Y). \tag{2.13}$$

Introducimos en el siguiente apartado la posibilidad de que los individuos sean adversos al riesgo dentro de este marco dual de toma de decisiones en presencia de incertidumbre.

2.4.2 Aversión al riesgo en la teoría dual de Yaari

Yaari (1987) demostró que para el conjunto de decisores adversos al riesgo la función de distorsión g es convexa en todo su dominio, es decir, en el intervalo $[0,1]$, con lo cual será necesariamente continua en el intervalo $(0,1]$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que toda función de distorsión convexa es también continua en 0.

Dentro de la teoría dual, introduzcamos ahora este hecho para interpretar la valoración que hace un decisor adverso al riesgo de la realización de una v.a. que afecte "positivamente" a su riqueza.

En el caso de que la realización de una v.a. X suponga una ganancia para el decisor, bajo la teoría dual el equivalente cierto que le atribuye a ésta, G, viene determinado por

$$G = H_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))\ dx \geq 0.$$

Si g es una función de distorsión convexa $g(x) \leq x$, para todo $x \in [0,1]$. Así

$$G = \int_0^\infty g(S_X(x))\ dx \leq \int_0^\infty S_X(x)\ dx = E(X).$$

Así, podemos concluir que si el decisor es adverso al riesgo infravalora el valor esperado de una ganancia futura, conclusión a la que también habíamos llegado dentro de la teoría de la utilidad.

En el caso de un riesgo X, la realización del cual suponga una disminución de la riqueza del decisor, el equivalente cierto que le atribuya a esta disminución será

$$H_g(-X) = -\int_{-\infty}^{0} (1 - g(S_{-X}(x)))\ dx \leq 0.$$

Si nuevamente llamamos P a la pérdida que la realización de X le suponga,

$$P = -H_g(-X),$$

tenemos que cuando se trate de un decisor adverso al riesgo, es decir, un decisor cuya función de distorsión g sea convexa,

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{0} (1 - g(S_{-X}(x)))\ dx \geq \int_{-\infty}^{0} (1 - S_{-X}(x))\ dx \\ &= \int_{0}^{\infty} S_X(x)\ dx = E(X). \end{aligned}$$

Así podemos concluir que si el decisor es adverso al riesgo sobrevalora el valor esperado de una pérdida futura. Si el valor esperado de la pérdida es 5 u.m. lo podría valorar, por ejemplo, como perder 8 u.m.. Nuevamente esta conclusión es similar a la obtenida en el marco de la teoría de la utilidad.

En el siguiente teorema obtenemos el equivalente cierto de una v.a. cualquiera bajo una nueva función de distorsión g^*.

Teorema 2.6
Sea la función de distorsión g^* definida por $g^*(x) = 1 - g(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, siendo g una función de distorsión cualquiera, entonces para cualquier v.a. X,

$$H_{g^*}(X) = -H_g(-X).$$

Demostración

$$\begin{aligned} H_g(-X) &= -\int_{-\infty}^{0} (1 - g(S_{-X}(x)))\ dx + \int_{0}^{\infty} g(S_{-X}(x))\ dx \\ &= -\int_{0}^{\infty} (1 - g(1 - S_X(x)))\ dx + \int_{-\infty}^{0} g(1 - S_X(x))\ dx \\ &= -\int_{0}^{\infty} g^*(S_X(x))\ dx + \int_{-\infty}^{0} (1 - g^*(S_X(x)))\ dx \\ &= -H_{g^*}(X). \end{aligned}$$

□

Remarcar que cuando la función de distorsión g es convexa, g^* resulta ser cóncava.

Corolario 2.7
Para cualquier v.a. X, el funcional $H_g(X)$ cumple

$$\begin{array}{ll}(1)\ H_g(a\,X+b) = a\,H_g(X)+b & a>0,\ b\geq 0.\\ (2)\ H_g(a\,X+b) = a\,H_{g^*}(X)+b & a<0,\ b\geq 0.\end{array}$$

Demostración
(1) Sean dos reales cualesquiera a, b, cumpliendo $a > 0,\ b \geq 0$. Por ser

$$S_{aX+b}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < b, \\ S_X\left(\frac{x-b}{a}\right), & x \geq b, \end{cases}$$

se cumple:

$$\begin{aligned} H_g(aX+b) &= \int_0^b dx + \int_b^\infty g\left(S_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) dx \\ &= b + a\int_0^\infty g(S_X(t))\, dt. \end{aligned}$$

(2) Sean dos reales cualesquiera a, b, cumpliendo $a < 0,\ b \geq 0$. Tenemos:

$$\begin{aligned} H_g(a\,X+b) &= H_g(-a\,-X+b) \overset{(1)}{=} -a\,H_g(-X)+b \\ &= -a\,-H_{g^*}(X)+b = a\,H_{g^*}(X)+b. \end{aligned}$$

□

Lo que nos interesará será comparar el "atractivo" de diferentes riesgos para un decisor del mercado, el asegurador. Bajo la teoría dual de Yaari el asegurador preferirá el riesgo X sobre el riesgo Y (o será indiferente entre ellos) si, y sólo si, para una función de distorsión g cualquiera $H_g(-X) \geq H_g(-Y)$; ya que entonces, la realización de X le supondrá una menor (igual) disminución en su riqueza que la realización de Y.

Si además el asegurador pertenece al grupo de decisores adversos al riesgo preferirá el riesgo X al riesgo Y si, y sólo si,

$$H_g(-X) \geq H_g(-Y),$$

siendo g una función de distorsión convexa. Aplicando el corolario anterior encontramos

$$H_g(-X) \geq H_g(-Y) \Leftrightarrow -H_{g^*}(X) \geq -H_{g^*}(Y) \Leftrightarrow H_{g^*}(X) \leq H_{g^*}(Y),$$

siendo g^* una función de distorsión cóncava.

En lo que sigue hablaremos únicamente de riesgos y valoraremos la pérdida que la realización de uno cualquiera de ellos suponga para el asegurador a partir de

$$H_{g^*}\left(X\right) = \int_0^\infty g^*\left(S_X\left(x\right)\right)\,dx. \tag{2.14}$$

Este riesgo será preferido a otro cualquiera Y si, y sólo si,

$$H_{g^*}\left(X\right) \leq H_{g^*}\left(Y\right). \tag{2.15}$$

Si además éste se encuentra dentro del grupo de decisores adversos al riesgo su función de distorsión g^* será una función cóncava.

Omitiremos a partir de este momento el superíndice *.

Capítulo 3

Ordenación univariante

3.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos visto cuál es la ordenación que establece un decisor del mercado entre un par de riesgos cualesquiera, tanto en el marco de la teoría de la utilidad como en el de la teoría dual. Desafortunadamente los criterios allí presentados para la ordenación no son operativos en la práctica. En el caso de la teoría de la utilidad dependen de una función de utilidad del decisor que es imposible encontrar en la práctica, mientras que si hablamos de la teoría dual, topamos con una función de distorsión que presenta el mismo problema.

En la literatura actuarial numerosos autores se han dedicado a buscar relaciones de orden manejables que sean consistentes con las que se derivan de la teoría de la utilidad. Actualmente, en este tema, el trabajo más completo es probablemente el realizado por Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1994) que recoge y amplía gran parte de sus resultados anteriores (Goovaerts, Kaas, van Heerwaarden & Bauwelinckx (1990) y van Heerwaarden (1991)). Para un par de riesgos X e Y cualesquiera sobre el orden de los cuales todos los decisores del mercado están de acuerdo, estos autores proponen diferentes relaciones de orden definidas a partir de las funciones de distribución de los mismos. Estas relaciones de orden se convierten en una herramienta muy útil a la hora de valorar riesgos, ya nos que dan información sobre las preferencias de un decisor cualquiera a partir de las funciones de distribución de los riesgos y no a partir de una función de utilidad del decisor que es totalmente desconocida. Con ellas se obtiene una medida del riesgo objetiva, si bien presentan el inconveniente de no poder proporcionar un orden total dentro del conjunto de alternativas. Existen muchos pares de riesgos sobre el orden de los cuales todos los decisores del mercado están de acuerdo. Nosotros nos centraremos en la valoración de este conjunto de preferencias comunes y obtendremos así una ordenación parcial del conjunto de todos los riesgos. Para poder llegar a un orden total, es decir, a una valoración que además de los anteriores, incluya una relación de orden para aquellos pares de riesgos sobre los cuales diferentes decisores tienen preferencias opuestas, deberíamos incorporar la subjetividad de cada decisor particular, cuestión que sobrepasa los objetivos de este trabajo.

En el apartado 3.3 presentaremos las características que definen a una relación de orden total y a una de orden parcial y, a continuación, pasaremos a recoger dos de las relaciones de orden parcial propuestas por Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1994) para la ordenación de riesgos actuariales. Se trata de la dominancia estocástica de primer orden, definida por primera vez por Hadar & Rusell (1969) y de la ordenación stop-loss basada en la ordenación convexa desarrollada por Hardly, Littlewood & Pólya (1929) e introducida en el área económica por Rothschild & Stiglitz (1970). Presentamos estas dos relaciones en los apartados 3.4 y 3.5.

Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1994) demuestran la equivalencia entre la relación de dominancia estocástica de un riesgo sobre otro y la ordenación que de los mismos realiza bajo la teoría de la utilidad un decisor cualquiera. En el mismo sentido, estos autores demuestran que la relación de orden stop-loss es equivalente a la que resulta de la teoría de la utilidad esperada si estamos ante un decisor adverso al riesgo. Presentamos estos resultados en el apartado 3.6.1.

En el apartado 3.6.2, nos centramos en la ordenación dentro del marco de la teoría dual de Yaari en la que nos encontramos con una función de distorsión que presenta los mismos problemas en cuanto a su conocimiento que los mencionados para la función de utilidad. Veremos que en este marco, nuevamente la dominancia estocástica y la ordenación stop-loss serán dos relaciones de orden parcial perfectamente válidas para la valoración de riesgos. Dhaene, Wang, Young & Goovaerts (1997) demuestran la equivalencia entre la relación de dominancia estocástica entre dos riesgos y la ordenación que establece de los mismos cualquier decisor a partir de su función de distorsión. En el mismo sentido, Dhaene, Wang, Young & Goovaerts (1997), Hürlimann (1998) y Ribas, Dhaene & Goovaerts (1998) demuestran que la ordenación stop-loss de dos riesgos coincide con la ordenación que establece de los mismos un decisor con función de distorsión cóncava (decisor adverso al riesgo).

3.2 Definición de riesgo

Definimos a un riesgo X como una v.a. real, no negativa con esperanza finita, representando una pérdida futura. Denotamos su función de densidad de probabilidad por f_X, siendo

$$f_X(x) = \Pr(X = x), \quad 0 \leq x < \infty, \tag{3.1}$$

Sus respectivas funciones de distribución acumulativa y desacumulativa, F_X y S_X, son

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x), \quad 0 \leq x < \infty, & (3.2)\\ S_X(x) &= \Pr(X > x), \quad 0 \leq x < \infty. & (3.3)\end{aligned}$$

En general, F_X y S_X no son estrictamente crecientes/decrecientes y continuas por lo que se debe tener cuidado a la hora de definir sus inversas. Definimos a F_X^{-1} y S_X^{-1} como sigue,

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &= \inf\ \{x : F_X(x) \geq p\};\ 0 < p \leq 1,\ F_X^{-1}(0) = 0. & (3.4)\\ S_X^{-1}(p) &= \inf\ \{x : S_X(x) \leq p\};\ 0 \leq p < 1,\ S_X^{-1}(1) = 0. & (3.5)\end{aligned}$$

Adoptamos la convención de que $\inf\ \{\emptyset\} = \infty$.

Remarcar que $F_X^{-1}(x)$ es no decreciente, $S_X^{-1}(x)$ no creciente y se cumple la siguiente relación entre ellas,

$$S_X^{-1}(p) = F_X^{-1}(1-p). \tag{3.6}$$

Observemos que para cualesquiera $x \geq 0$ y $0 \leq p \leq 1$, se cumplen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} S_X(x) \leq p \Leftrightarrow S_X^{-1}(p) \leq x,\\ F_X(x) \geq p \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq x \end{aligned} \tag{3.7}$$

y en general $S_X^{-1}(p) \geq x$ NO ES EQUIVALENTE a $S_X(x) \geq p$ ni $F_X^{-1}(p) \geq x$ a $F_X(x) \leq p$, aunque estas relaciones si resultan equivalentes cuando las desigualdades son estrictas.

Bajo estas dos nuevas funciones podemos dar ahora dos definiciones equivalentes para la esperanza matemática de un riesgo cualquiera X, así como para su equivalente cierto bajo la teoría dual de Yaari.

De (2.3), tenemos

$$E(X) = \int_0^\infty S_X(x)\,dx = -\int_0^\infty x\,d(S_X(x)) = \int_0^1 S_X^{-1}(p)\,dp.$$

Así

$$E(X) = \int_0^1 S_X^{-1}(p)\,dp = \int_0^1 F_X^{-1}(1-p)\,dp. \tag{3.8}$$

Igualmente de (2.12), tenemos que para cualquier función de distorsión g (g no decreciente y cumpliendo $g(0)=0,\ g(1)=1$)

$$H_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))\,dx = -\int_0^\infty x\,dg(S_X(x)) = \int_0^1 S_X^{-1}(p)\,dg(p),$$

de donde

$$H_g(X) = \int_0^1 S_X^{-1}(p)\,dg(p) = \int_0^1 F_X^{-1}(1-p)\,dg(p). \tag{3.9}$$

Observemos, por último, que a partir de estas dos funciones inversas, podemos definir dos nuevas v.a. cuya función de distribución es igual a la de X.

Teorema 3.1
Sea X un riesgo cualquiera y sea U una v.a. uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$, entonces

$$X \overset{d}{=} F_X^{-1}(U) \overset{d}{=} S_X^{-1}(U), \tag{3.10}$$

donde $\overset{d}{=}$ indica que las distribuciones de probabilidad de estas tres v.a. son iguales.

Demostración
Para todo $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_{F_X^{-1}(U)}(x) &= \Pr\left[F_X^{-1}(U) \leq x\right] = \left\{F_X^{-1}(U) \leq x \Leftrightarrow F_X(x) \geq U\right\} \\ &= \Pr\left[U \leq F_X(x)\right] = F_X(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{S_X^{-1}(U)}(x) &= \Pr\left[S_X^{-1}(U) \leq x\right] = \left\{S_X^{-1}(U) \leq x \Leftrightarrow S_X(x) \leq U\right\} \\ &= \Pr\left[U \geq S_X(x)\right] = 1 - \Pr\left[U < S_X(x)\right] \\ &= 1 - S_X(x) = F_X(x). \end{aligned}$$

□

3.3 Orden parcial y orden total

En esta sección definimos las características que hacen que una relación de orden entre las funciones de distribución de diferentes riesgos constituya una relación de orden parcial o total.

Definición 3.2
Sea Δ un conjunto de funciones de distribución acumulativas -ver (3.2)- *asociadas a riesgos.*
Diremos que $\leq_p$ es un orden parcial en Δ si para cualesquiera F_X, F_Y y $F_Z \in \Delta$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Transitiva.*

$$\text{Si } F_X \leq_p F_Y \text{ y } F_Y \leq_p F_Z, \text{ entonces } F_X \leq_p F_Z.$$

2. *Reflexiva.*

$$F_X \leq_p F_X.$$

3. *Antisimétrica.*

$$\text{Si } F_X \leq_p F_Y \text{ y } F_Y \leq_p F_X, \text{ entonces } F_X = F_Y.$$

Remarcar que la misma definición se puede obtener también a partir del conjunto de funciones de distribución desacumulativas -ver (3.3)-.

En un orden parcial es posible que un par de funciones de distribución no puedan compararse (ni por tanto tampoco el riesgo que estas funciones tienen asociado).

Como hemos dicho nos ocuparemos únicamente de órdenes parciales. Normalmente escribiremos estos órdenes en función de v.a., aunque debemos tener siempre presente que el orden se define sobre las funciones de distribución asociadas a los riesgos.

Definición 3.3
Un orden total es un orden parcial con la propiedad adicional de que todas las funciones de distribución son comparables, es decir, para cualquier par de funciones de distribución F_X y F_Y: $F_X \leq_p F_Y$ o bien $F_Y \leq_p F_X$, o ambas relaciones son ciertas.

3.4 Dominancia estocástica

En este apartado queremos definir la dominancia estocástica que, como veremos posteriormente, es la relación de orden común de todos los decisores con función de utilidad/función de distorsión no decreciente. Comprobaremos también algunas conocidas propiedades de esta relación de orden. Éstas se pueden encontrar, por ejemplo, en Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1994).

Definición 3.4
Sean X e Y dos riesgos cualesquiera. Diremos que el riesgo Y domina estocásticamente a X, $X \leq_{st} Y$, si se cumple una cualquiera de las dos siguientes relaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} S_X(x) &\leq S_Y(x), \quad \forall x \geq 0, \\ F_X(x) &\geq F_Y(x), \quad \forall x \geq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Obviamente, si los riesgos son tales que $X \leq Y$ con probabilidad 1, entonces $X \leq_{st} Y$.

Supongamos que un riesgo Y domina estocásticamente a un riesgo X. ¿Qué sucede si convolucionamos[1] a cada uno de estos riesgos con un tercer riesgo cualquiera Z independiente de X e Y? En el siguiente teorema se demuestra que se mantiene la relación de orden.

Teorema 3.5
Sean X, Y, Z tres riesgos, tales que Z es independiente de X e Y. Entonces

$$X \leq_{st} Y \Rightarrow X + Z \leq_{st} Y + Z. \tag{3.12}$$

Demostración
Para todo $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_{X+Z}(x) &= \int_0^\infty \Pr(X + Z > x \;/\; Z = z)\; \Pr(Z = z)\; dz \\ &= \int_0^\infty \Pr(X > x - z)\; dF_Z(z) = \int_0^\infty S_X(x - z)\; dF_Z(z) \\ &\leq \int_0^\infty S_Y(x - z)\; dF_Z(z) = \cdots = S_{Y+Z}(x) \end{aligned}$$

□

[1]Se denomina convolución a la distribución de probabilidad que resulta para la suma de un conjunto de v.a. independientes.

En el mismo sentido, en el siguiente teorema se demuestra el mantenimiento de la relación de dominancia estocástica de dos conjuntos de riesgos independientes si convolucionamos sus respectivos componentes.

Teorema 3.6
Sean $X_1, \cdots, X_n$ e $Y_1, \cdots, Y_n$ dos secuencias de riesgos independientes (independencia entre todos los riesgos) tales que para todo $i = 1, \cdots, n$, se cumple $X_i \leq_{st} Y_i$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^{n} Y_i. \tag{3.13}$$

Demostración
Realizaremos esta demostración por inducción. Obviamente la relación es cierta para $k = 1$.
Supongamos que se cumple para $k = n - 1$, es decir:

$$X_i \leq_{st} Y_i \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n-1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} X_i \leq_{st} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$$

Aplicando (3.12) a esta relación resulta

$$(X_1 + \cdots + \ X_{n-1}) + X_n \leq_{st} (Y_1 + \cdots + \ Y_{n-1}) + X_n.$$

Si tenemos en cuenta ahora que $X_n \leq_{st} Y_n$ y volvemos a aplicar (3.12), resulta

$$(Y_1 + \cdots + \ Y_{n-1}) + X_n \leq_{st} (Y_1 + \cdots + Y_{n-1}) + Y_n,$$

relación que junto con la anterior completa la demostración por inducción.

□

3.5 Orden stop-loss

Utilizando la dominancia estocástica es imposible comparar dos riesgos cuyas respectivas funciones de distribución se crucen. Por ello, en este apartado introducimos una relación de orden más débil, explotando el hecho de que los decisores de las compañías de seguros, en general, no tienen una función de utilidad/distorsión únicamente no decreciente, sino que además ésta es cóncava. Así, combinar estas dos propiedades debe ser de interés para cualquier actuario y, como veremos, de esta combinación resulta una relación de orden parcial equivalente a la ordenación stop-loss que definimos a continuación y en la que se basan muchas de las aplicaciones actuariales y la mayoría de conclusiones obtenidas en este trabajo.

En primer lugar necesitamos definir la prima stop-loss neta de un riesgo en la que se basa la ordenación stop-loss.

Definición 3.7
Para un riesgo X cualquiera y para cualquier real $d \geq 0$, sea $(X-d)_+ = \max(0, X-d)$. La prima stop-loss neta del riesgo X con retención d, $E(X-d)_+$, es

$$E(X-d)_+ = \int_d^{\infty} S_X(x)\ dx. \tag{3.14}$$

Definición 3.8
Sean X e Y dos riesgos cualesquiera. Diremos que X precede a Y en orden stop-loss, $X \leq_{sl} Y$, si para cualquier retención $d \geq 0$, la prima stop-loss neta de X es menor a la correspondiente a Y, es decir,

$$E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+,\ \forall d \geq 0. \tag{3.15}$$

Como hemos mencionado el orden stop-loss es un orden más débil que el que resulta a partir de la dominancia estocástica entre dos riesgos. Veámoslo en el siguiente teorema.

Teorema 3.9
Sean X e Y dos riesgos tales que $X \leq_{st} Y$, entonces $X \leq_{sl} Y$.

Demostración

$$X \leq_{st} Y \Rightarrow S_X(x) \leq S_Y(x),\quad \forall x \geq 0.$$

$$E(X-d)_+ = \int_d^{\infty} S_X(x)\ dx \leq \int_d^{\infty} S_Y(x)\ dx = E(Y-d)_+$$

□

Como veremos en el siguiente teorema, al igual que sucedía con la dominancia estocástica, el orden stop-loss entre dos riesgos se mantiene si éstos se convolucionan con un tercer riesgo independiente.

Teorema 3.10
Sean X, Y, Z tres riesgos, tales que Z es independiente de X e Y. Entonces

$$X \leq_{sl} Y \Rightarrow X + Z \leq_{sl} Y + Z. \tag{3.16}$$

Demostración

$$\begin{aligned} E\left(X+Z-d\right)_+ &= E\left[E\left(\left(X+Z-d\right)_+ / \; Z=z\right)\right] \\ &= \int_0^\infty E\left[\left(X+Z-d\right)_+ / \; Z=z\right] \, dF_Z\left(z\right) \\ &= \int_0^\infty E\left[\left(X-\left(d-z\right)\right)_+\right] \, dF_Z\left(z\right) \\ &\leq \int_0^\infty E\left[\left(Y-\left(d-z\right)\right)_+\right] \, dF_Z\left(z\right) \\ &= \cdots = E\left(Y+Z-d\right)_+ \end{aligned}$$

□

Igualmente, la ordenación stop-loss entre dos conjuntos de riesgos independientes se mantiene bajo la convolución de los mismos.

Teorema 3.11
Sean $X_1, \cdots, X_n$ e $Y_1, \cdots, Y_n$ dos secuencias de riesgos independientes (independencia entre todos los riesgos), tales que para todo $i = 1, \cdots, n$, se cumple $X_i \leq_{sl} Y_i$, entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^n Y_i \tag{3.17}$$

Demostración
Similar a la del teorema 3.6 utilizando el teorema 3.10 dos veces.

□

Introducimos, por último, una condición suficiente para el orden stop-loss entre dos riesgos. Siguiendo la nomenclatura de Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1994), llamaremos a esta relación orden de peligrosidad entre dos riesgos.

Definición 3.12
Sean X e Y dos riesgos cualesquiera. Diremos que Y es mayor en orden de peligrosidad que X, $X \leq_D Y$, si

$$E\left(X\right) \leq E\left(Y\right) \tag{3.18}$$

y existe un real $c \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned} S_X(x) &\geq S_Y(x) \quad \forall x < c \\ S_X(x) &\leq S_Y(x) \quad \forall x \geq c. \end{aligned} \tag{3.19}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} F_X(x) &\leq F_Y(x) \quad \forall x < c \\ F_X(x) &\geq F_Y(x) \quad \forall x \geq c. \end{aligned} \tag{3.20}$$

En el siguiente teorema se demuestra que si las funciones de distribución de dos riesgos se cruzan una sola vez, la desacumulativa con cola más gruesa corresponde al riesgo con mayor prima stop-loss neta.

Teorema 3.13

Sean X e Y dos riesgos tales que $X \leq_D Y$, entonces $X \leq_{sl} Y$.

Demostración

En primer lugar consideremos el caso en que $d \geq c$, tenemos

$$E(X-d)_+ = \int_d^\infty S_X(x)\ dx \leq \int_d^\infty S_Y(x)\ dx = E(Y-d)_+ .$$

Cuando $d < c$:

$$\begin{aligned} E(X-d)_+ &= \int_d^\infty S_X(x)\ dx = \int_0^\infty S_X(x)\ dx - \int_0^d S_X(x)\ dx \\ &= E(X) - \int_0^d S_X(x)\ dx \leq E(Y) - \int_0^d S_Y(x)\ dx = E(Y-d)_+ . \end{aligned}$$

□

El orden de peligrosidad entre dos riesgos es una de las herramientas más útiles a la hora de descubrir la existencia de orden stop-loss entre los mismos. Como hemos visto el orden de peligrosidad es más fuerte que el orden stop-loss, aunque a diferencia de éste último, el orden de peligrosidad no es un orden parcial puesto que no es transitivo. Si Z es más peligroso que Y y a su vez Y es más peligroso que X es posible que las funciones de distribución de X y Z se crucen más de una vez.

3.6 Ordenación univariante y elección bajo incertidumbre

3.6.1 Ordenación univariante bajo la teoría de la utilidad

3.6.1.1 Dominancia estocástica

En este apartado veremos que la dominancia estocástica es la relación de orden que describe las preferencias comunes de un gran conjunto de decisores del mercado. Concretamente, la de todos aquellos cuyas decisiones se pueden modelizar dentro de la teoría de la utilidad a partir de una función de utilidad de la riqueza no decreciente.

Teorema 3.14
Un riesgo Y domina estocásticamente a un riesgo X, $X \leq_{st} Y$, si, y sólo si, X es preferido a Y por cualquier decisor cuya función de utilidad sea no decreciente.

Demostración
De (2.7), tenemos que el teorema quedará demostrado si, para cualquier función de utilidad no decreciente u, se cumple

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow E\left(u\left(-X\right)\right) \geq E\left(u\left(-Y\right)\right)$$

Para una función no decreciente $u\left(x\right)$, definimos $w\left(x\right) = -u\left(-x\right)$. La función w también resulta ser no decreciente. Así para demostrar el teorema basta demostrar

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow E\left[w\left(X\right)\right] \leq E\left[w\left(Y\right)\right]$$

siendo w una función no decreciente.
$\Rightarrow$) Si existe dominancia estocástica de Y sobre X, por la definición dada en (3.11), la relación

$$\Pr\left(X > x\right) \leq \Pr\left(Y > x\right),$$

se cumple para todo $x \geq 0$ y por esta relación de dominancia estocástica se cumplirá también

$$\Pr\left(X \geq x\right) \leq \Pr\left(Y \geq x\right), \ \forall x \geq 0.$$

Observemos ahora que

$$E\left[w\left(X\right)\right] = \int_0^\infty \Pr\left[w\left(X\right) > y\right] \, dy$$

con lo cual, $E[w(X)] \leq E[w(Y)]$ quedará demostrado si

$$\Pr[w(X) > y] \leq \Pr[w(Y) > y], \ \forall\, y \geq 0.$$

Dado que w es una función no decreciente, tenemos

$$w(x) > y \Leftrightarrow x \in A,$$

siendo A un conjunto del tipo $[d\,,\,\infty[$ o bien $]d\,,\,\infty[\,,\ d \geq 0$.
Así

$$\begin{aligned}
\Pr[w(X) > y] &= \Pr[X \in A] = \Pr(X \geq d) \\
&\leq \Pr(Y \geq d) = \Pr[Y \in A] = \Pr[w(Y) > y]\,.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Partimos del cumplimiento de la relación

$$E(w(X)) \leq E(w(Y))$$

para cualquier función w no decreciente.

Observemos ahora que

$$S_X(x) = \Pr(X > x) = E\left[I_{(x\,,\,\infty)}(X)\right]$$

siendo $I_A(x) = 1$ si $x \in A$ o 0 en cualquier otro caso. $I_{(x\,,\,\infty)}(z)$ es una función no decreciente de z. Así, eligiendo $w(x) = I_{(x\,,\,\infty)}(x)$, resulta

$$S_X(x) = E\left[I_{(x\,,\,\infty)}(X)\right] \leq E\left[I_{(x\,,\,\infty)}(Y)\right] = S_Y(x)\,.$$

□

3.6.1.2 Orden stop-loss

En este apartado presentamos la equivalencia entre la ordenación stop-loss de un par de riesgos y la que resulta de un decisor cualquiera adverso al riesgo bajo la teoría de la utilidad, es decir, un decisor con función de utilidad no decreciente y cóncava. Así la ordenación stop-loss, como hemos visto aplicable a un mayor número de casos que la dominancia estocástica y sencilla de verificar a partir de la relación de orden de peligrosidad, se convierte en una herramienta fundamental para el desarrollo de esta tesis puesto que nos permitirá comprobar cuando se está infravalorando/sobrevalorando el riesgo asumido en la cartera.

Teorema 3.15

Un riesgo X precede a un riesgo Y en orden stop-loss, $X \leq_{sl} Y$, si, y sólo si, el riesgo X es preferido al riesgo Y por cualquier decisor adverso al riesgo.

Demostración

De (2.10), tenemos que el teorema quedará demostrado si para cualquier función de utilidad no decreciente y cóncava u se cumple

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow E\left(u\left(-X\right)\right) \geq E\left(u\left(-Y\right)\right).$$

Para cualquier función no decreciente y cóncava $u\left(x\right)$ definimos $w\left(x\right) = -u\left(-x\right).$ La función w también es no decreciente pero resulta convexa. Para demostrar el teorema basta probar la relación

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow E\left[w\left(X\right)\right] \leq E\left[w\left(Y\right)\right]$$

para cualquier función w no decreciente y convexa.

$\Rightarrow$) En primer lugar supongamos que $w\left(x\right)$ es una función no decreciente convexa a partes lineales siendo $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ los puntos de "rotura". Sea α_i la derivada de w en el intervalo $\left(x_i, x_{i+1}\right)$. Por ser w convexa sabemos que α_i es una función creciente respecto a i. Es fácil comprobar que $w\left(x\right)$ puede expresarse como

$$w\left(x\right) = w\left(0\right) + \sum_{m=1}^{n} p_m \left(x - x_m\right)_+ \quad \text{siendo } p_m = \alpha_m - \alpha_{m-1} \geq 0$$
$$m = 1, 2, \cdots, n,\ \alpha_0 = 0$$

Para $x = X$ resulta

$$w\left(X\right) = w\left(0\right) + \sum_{m=1}^{n} p_m \left(X - x_m\right)_+ .$$

Tomando esperanza matemática a ambos lados

$$\begin{aligned} E\left[w\left(X\right)\right] &= w\left(0\right) + \sum_{m=1}^{n} p_m E\left(X - x_m\right)_+ \\ &\leq w\left(0\right) + \sum_{m=1}^{n} p_m E\left(Y - x_m\right)_+ = E\left[w\left(Y\right)\right] \end{aligned}$$

Cualquier función no decreciente convexa $w\left(x\right)$ puede ser aproximada por una función a partes lineales del tipo anterior, sobre la cual haciendo $\lim\limits_{n\to\infty}$ encontramos el resultado deseado.

$\Leftarrow$) Esta demostración es inmediata considerando la función no decreciente convexa $w(x) = (X - d)_+$.

□

De este teorema se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.16
Sean X e Y dos riesgos cualesquiera, si $X \leq_{sl} Y$, se cumple

$$E(X^{\alpha}) \leq E(Y^{\alpha}), \qquad \forall \alpha \geq 1.$$

Demostración
La demostración es inmediata ya que para cualquier $\alpha \geq 1$, $f(x) = x^{\alpha}$ es una función convexa $\forall x \geq 0$.

□

3.6.2 Ordenación univariante bajo la teoría dual

En este apartado realizaremos un desarrollo paralelo al del apartado anterior aunque en este caso queremos trabajar bajo el marco de la teoría dual. Como veremos los resultados aquí obtenidos son análogos a los que se derivan bajo el marco de la teoría de la utilidad. Así, la dominancia estocástica resultará equivalente a la ordenación establecida entre dos riesgos por un decisor cualquiera mientras que la ordenación stop-loss será la que sigan el conjunto de decisores adversos al riesgo. Estamos hablando de modelizar las decisiones bajo el marco de la teoría dual y por tanto hablaremos en este apartado de riesgos valorados a partir de funciones de distorsión.

3.6.2.1 Dominancia estocástica

Hemos visto anteriormente que la relación de dominancia estocástica es equivalente a la ordenación que realiza en el marco de la teoría de la utilidad cualquier decisor con función de utilidad no decreciente. Como veremos, en el marco de la teoría dual, la dominancia estocástica resulta equivalente a la ordenación establecida por cualquier decisor bajo una función de distorsión cualquiera. Para llegar a este resultado necesitaremos del siguiente lema.

Lema 3.17

Para un cierto p arbitrario pero fijado en el intervalo $[0,1)$, sea la función de distorsión $g(x) = I(x > p)$, siendo I la función indicadora. En este caso el equivalente cierto de cualquier riesgo X viene dado por

$$H_g(X) = S_X^{-1}(p). \tag{3.21}$$

Demostración

Para cualquier $x \geq 0$ tenemos que $S_X(x) \leq p \Leftrightarrow S_X^{-1}(p) \leq x$ -ver (3.7)- , con lo que se cumple

$$g(S_X(x)) = I(S_X(x) > p) = \begin{cases} 1 & x < S_X^{-1}(p), \\ 0 & x \geq S_X^{-1}(p), \end{cases}$$

de donde resulta el equivalente cierto,

$$H_g(X) = \int_0^{\infty} g[S_X(x)]\ dx = \int_0^{S_X^{-1}(p)}\ dx = S_X^{-1}(p).$$

$\square$

En el siguiente teorema presentamos la equivalencia entre la dominancia estocástica y la ordenación que bajo la teoría dual realiza un decisor cualquiera con función de distorsión g. Recordemos el resultado obtenido en (2.15), el cual nos indica que este decisor preferirá un riesgo X sobre un riesgo Y si, y sólo si,

$$H_g(X) \leq H_g(Y).$$

Teorema 3.18

Para dos riesgos X, Y cualesquiera las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $X \leq_{st} Y$
2. *Para toda función de distorsión g,* $H_g(X) \leq H_g(Y)$.
3. *Para cualquier* $p \in [0,1]$, $S_X^{-1}(p) \leq S_Y^{-1}(p)$.

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$:

Si $X \leq_{st} Y$ para cualquier $x \geq 0$, $S_X(x) \leq S_Y(x)$ y al ser cualquier función de distorsión no decreciente por definición, tenemos

$$H_g(X) = \int_0^{\infty} g(S_X(x))\, dx \leq \int_0^{\infty} g(S_Y(x))\, dx = H_g(Y).$$

$(2) \Rightarrow (3)$:
Para $p = 1$, tenemos $S_X^{-1}(1) = S_Y^{-1}(1) = 0$, con lo que se cumple la relación.

Sean p y x dos reales arbitrarios pero fijados cumpliendo $p \in [0, 1)$, $x \geq 0$ y consideremos la función de distorsión $g(x) = I(x > p)$. En este caso sabemos de (3.21) que los equivalentes ciertos vienen dados por

$$\begin{aligned} H_g(X) &= S_X^{-1}(p), \\ H_g(Y) &= S_Y^{-1}(p). \end{aligned}$$

Así,

$$H_g(X) \leq H_g(Y) \Rightarrow S_X^{-1}(p) \leq S_Y^{-1}(p).$$

$(3) \Rightarrow (1)$:
Para un real $x \geq 0$ dado, sea $p = S_Y(x)$. Observemos que $p \in [0, 1]$ y se cumple la relación $S_Y^{-1}(p) \leq x$. Por ser la función desacumulativa de probabilidad S_X no creciente,

$$S_X(x) \leq S_X\left(S_Y^{-1}(p)\right) \leq S_X\left(S_X^{-1}(p)\right) \leq p = S_Y(x).$$

Repitiendo esta demostración para cualquier $x \geq 0$ encontramos el resultado buscado.

□

3.6.2.2 Orden stop-loss

En este apartado veremos que para un par de riesgos cualesquiera, si uno precede al otro en orden stop-loss, entonces en el marco de la teoría dual de Yaari podemos afirmar que el primero es preferido al segundo por todo el conjunto de decisores adversos al riesgo, es decir, decisores cuya función de distorsión g es cóncava. La demostración de esta propiedad aparece por primera vez en Wang (1996a) aunque desafortunadamente ésta contiene un error, ver Hürlimann (1998). Dhaene, Wang, Young & Goovaerts (1997) llegan a una demostración general de este resultado que presentaremos en este apartado. Sin embargo, tal y como los mismos autores señalan caben otras demostraciones menos complejas para situaciones menos generales pero totalmente aplicables a la mayoría de casos reales. En este sentido, en primer lugar, queremos presentar una sencilla demostración de este resultado recogida en Ribas, Goovaerts & Dhaene (1998). Ésta sólo es aplicable cuando las respectivas funciones de distribución de los dos riesgos cruzan un número finito de veces, aunque cabe remarcar que es difícil encontrar alguna situación real en la que esta circunstancia no se cumpla.

Recordemos antes de empezar con las demostraciones que cualquier función de distorsión cóncava es necesariamente continua en el intervalo $(0,1]$ y que por conveniencia hemos asumido en el capítulo anterior que la continuidad se mantiene en 0.

Teorema 3.19

Sean X e Y dos riesgos para los cuáles $S_X - S_Y$ tiene un número finito de cambios de signo. Si $X \leq_{sl} Y$, entonces para cualquier función de distorsión g cóncava en todo su dominio, $H_g(X) \leq H_g(Y)$.

Demostración

Si $S_X - S_Y$ no tiene cambios de signo, por ser $X \leq_{sl} Y$ se tiene que cumplir $S_X(x) \leq S_Y(x)$, $\forall x \geq 0$, de donde inmediatamente se sigue que $H_g(X) \leq H_g(Y)$.

Consideremos ahora el caso en que S_X y S_Y tienen como mínimo un punto de corte. Para $n \geq 1$, sean $c_1, \cdots, c_n$ los diferentes puntos de corte. Sin pérdida de generalidad asumimos que $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n$.

Por ser g una función de distorsión cóncava en todo su dominio, es decir, en el intervalo $[0,1]$ tenemos que para cada y en este intervalo existen dos reales a_y, b_y y una recta $l(x) = a_y x + b_y$, tales que $l(y) = g(y)$ y $l(x) \geq g(x)$ para todo x en $[0,1]$. Como $l(y) = g(y)$ encontramos que $l(x) = a_y(x-y) + g(y)$. Así $l(x) \geq g(x)$ también puede expresarse como

$$g(x) - g(y) \leq a_y (x-y) \text{ para todo } x, y \text{ en } [0,1].$$

Además, por ser g no decreciente y cóncava, a_y es una función no negativa y no creciente en y.

Sustituyendo x e y por $S_X(x)$ y $S_Y(x)$ en la anterior inecuación tenemos

$$g(S_X(x)) - g(S_Y(x)) \leq a_{S_Y(x)} (S_X(x) - S_Y(x)) \quad \forall x \geq 0.$$

Remarcar que $a_{S_Y(x)}$ es una función no decreciente en x.

Por ser $X \leq_{sl} Y$, para todo $x \geq c_n$ se tiene que cumplir $S_X(x) \leq S_Y(x)$. Así,

$$\int_{c_n}^{\infty} [g(S_X(x)) - g(S_Y(x))]\,dx \leq \int_{c_n}^{\infty} a_{S_Y(x)} [S_X(x) - S_Y(x)]\,dx$$

$$\leq a_{S_Y(c_n)} \int_{c_n}^{\infty} [S_X(x) - S_Y(x)]\,dx \leq 0.$$

Si x pertenece al intervalo $[c_{n-1}, c_n]$ se cumplirá $S_X(x) \geq S_Y(x)$ con lo cual,

$$\int_{c_{n-1}}^{\infty} [g(S_X(x)) - g(S_Y(x))]\, dx \leq \int_{c_{n-1}}^{c_n} a_{S_Y(x)} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx$$

$$+ \int_{c_n}^{\infty} a_{S_Y(x)} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx \leq a_{S_Y(c_n)} \int_{c_{n-1}}^{c_n} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx$$

$$+ a_{S_Y(c_n)} \int_{c_n}^{\infty} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx = a_{S_Y(c_n)} \int_{c_{n-1}}^{\infty} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx$$

$$\leq a_{S_Y(c_{n-1})} \int_{c_{n-1}}^{\infty} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx \leq 0.$$

Siguiendo el mismo procedimiento tenemos que para $j = 0, 1, \cdots, n$ se cumple,

$$\int_{c_{n-j}}^{\infty} [g(S_X(x)) - g(S_Y(x))]\, dx \leq \cdots \leq a_{S_Y(c_{n-j})} \int_{c_{n-j}}^{\infty} [S_X(x) - S_Y(x)]\, dx \leq 0.$$

Haciendo $j = n$ llegamos al resultado buscado.

□

Pasemos ahora a la demostración del caso general. Previamente necesitamos recoger el resultado presentado en el siguiente lema.

Lema 3.20

Para un cierto p arbitrario pero fijado en el intervalo $(0, 1]$, sea la función de distorsión $g(x) = \min(x/p, 1)$. En este caso, el equivalente cierto de cualquier riesgo X viene dado por

$$H_g(X) = S_X^{-1}(p) + \frac{1}{p} \int_{S_X^{-1}(p)}^{\infty} S_X(x)\; dx. \tag{3.22}$$

Demostración

$$g(S_X(x)) = min\,(S_X(x)/p, 1) = \begin{cases} 1 & x < S_X^{-1}(p), \\ S_X(x)/p & x \geq S_X^{-1}(p), \end{cases}$$

de donde obtenemos el equivalente cierto,

$$\begin{aligned} H_g(X) &= \int_0^{\infty} g(S_X(x)dx = \int_0^{S_X^{-1}(p)} dx + \int_{S_X^{-1}(p)}^{\infty} S_X(x)/p\; dx \\ &= S_X^{-1}(p) + \frac{1}{p} \int_{S_X^{-1}(p)}^{\infty} S_X(x)dx. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.21

Para dos riesgos X e Y cualesquiera las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $X \leq_{sl} Y$.

2. *Para toda función de distorsión g del tipo*

$$g(x) = \min(x/p, 1) \quad p \in (0, 1],$$

se cumple $H_g(X) \leq H_g(Y)$.

3. *Para toda función de distorsión cóncava g, $H_g(X) \leq H_g(Y)$.*

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$:

Sea p un real arbitrario pero fijado en el intervalo $(0, 1]$ y sea la función de distorsión g definida por $g(x) = \min(x/p, 1)$. Bajo esta función de distorsión debemos demostrar que los equivalentes ciertos de los riesgos X e Y cumplen $H_g(X) \leq H_g(Y)$.

Por ser $X \leq_{sl} Y$, de la definición de esta relación de orden tenemos que para todo $d \geq 0$, $E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+$. Eligiendo $d = S_Y^{-1}(p)$, tenemos:

$$\begin{aligned} H_g(X) &= \frac{1}{p}\int_0^\infty \min(S_X(x), p)\, dx = \frac{1}{p}\left[\int_0^d \min(S_X(x), p)\, dx\right. \\ &\quad \left. + \int_d^\infty \min(S_X(x), p)\, dx\right] \leq d + \frac{1}{p}\, E(X-d)_+ \\ &\quad \leq d + \frac{1}{p}\, E(Y-d)_+ = \{\text{ver } (3.22)\} = H_g(Y). \end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow (3)$:

Sea g una función de distorsión cóncava. Bajo ésta debemos demostrar que los equivalentes ciertos de los riesgos X e Y cumplen $H_g(X) \leq H_g(Y)$.

Si $H_g(Y) = \infty$ el resultado es inmediato.

Supongamos que $H_g(Y) < \infty$. La función de distorsión g se puede aproximar por debajo a partir de funciones de distorsión cóncavas a partes lineales g_n, tales que para todo x en $[0, 1]$, se cumplirá:

$$g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_n(x) \leq \cdots \leq g(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x).$$

Observemos ahora la expresión que resulta para una función de distorsión cóncava a partes lineales g_n. Para $i = 1, \cdots, n-1$ sean a_i los diferentes puntos de “rotura” de g_n, con $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$. Además sea la derivada de la función g_n en el intervalo (a_{i-1}, a_i) igual a α_i. Por ser g_n cóncava α_i resulta ser función decreciente de i y es fácil comprobar que para cualquier $x \in [0,1]$,

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \min(x/a_i, 1)$$

con $\alpha_{n+1} = 0$.

Así tenemos que g_n se puede expresar como combinación lineal de funciones de distorsión del tipo $\min(x/p, 1)$ con lo cual por cumplirse (2) sabemos que

$$H_{g_n}(X) \leq H_{g_n}(Y) \quad \forall n.$$

Además la aproximación se está haciendo por debajo por ser g cóncava, así

$$H_{g_n}(Y) \leq H_g(Y) < \infty \quad \forall n.$$

Para cualquier x en el intervalo $[0,1]$ se cumplen las siguientes dos relaciones:

$$g_n(x) \leq g_{n+1}(x),$$
$$g_n(x) \leq 1,$$

con lo cual podemos aplicar el teorema de convergencia al equivalente cierto $H_{g_n}(X)$, de donde resulta

$$\lim_{n\to\infty} H_{g_n}(X) = H_g(X),$$

lo que nos lleva a concluir que

$$H_g(X) \leq H_g(Y).$$

$(3) \Rightarrow (1)$:

Para un real arbitrario fijado no negativo, d, tenemos que demostrar que

$$E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+ .$$

Si $S_X(d) = 0$, entonces $E(X-d)_+ = 0$, con lo que inmediatamente encontramos esta relación.

Supongamos ahora que $S_X(d) > 0$. En este caso eligiendo $g(x) = \min(x/p\ ,\ 1)$ con $p = S_X(d)$ y teniendo en cuenta que $H_g(X) \leq H_g(Y)$ y $S_X(x) \leq p \Leftrightarrow d \leq x$, tenemos

$$\begin{aligned}
E(X-d)_+ &= \int_d^\infty S_X(x)\ dx = \int_d^\infty \min(S_X(x)\ ,\ p)\ dx \\
&= p\int_0^\infty \min(S_X(x)/p\ ,\ 1)\ dx - \int_0^d \min(S_X(x)\ ,\ p)\ dx \\
&= pH_g(X) - p\,d \ \leq\ pH_g(Y) - pd \ \leq\ pH_g(Y) \\
&\quad - \int_0^d \min(S_Y(x)\ ,\ p)\ dx = \int_d^\infty \min(S_Y(x)\ ,\ p)\ dx \\
&\leq \int_d^\infty S_Y(x)\ dx = E(Y-d)_+\,,
\end{aligned}$$

quedando así completada la demostración.

□

Antes de terminar este capítulo queremos recordar los principales resultados en él obtenidos ya que serán de gran importancia en los capítulos que siguen. Hemos presentado dos relaciones de orden basadas en las funciones de distribución de los respectivos riesgos, consistentes con la ordenación que resulta tanto para el conjunto de decisores cuya única restricción a la hora de elegir un riesgo sobre otro sea que la realización del primero le reporte una menor disminución de su riqueza como para el subconjunto de aquellos que, además, incorporan en sus decisiones una aversión al riesgo responsable del hecho que infravaloren el valor esperado de la pérdida que les ocasionará cada uno de ellos. La dominancia estocástica y la ordenación stop-loss son como hemos visto relaciones de orden equivalentes a las que resultan para el primer y segundo grupo de decisores respectivamente, válidas tanto bajo el marco de la teoría de la utilidad como bajo el de la teoría dual de Yaari.

Capítulo 4

Ordenación bivariante

4.1 Introducción

Llegados a este punto, estamos en condiciones de abordar el tema central de este trabajo. Si asumimos la hipótesis de independencia entre todos los riesgos de una cartera; ¿Estamos valorando correctamente el coste total de los siniestros que de la misma se derivan? Los resultados de Heilmann (1986) y Kaas (1993), indican que si estamos ante una cartera con dependencias positivas entre los diferentes riesgos que la componen, realizar la hipótesis de independencia significa estar infravalorando las correspondientes primas stop-loss. Dado que el orden stop-loss es, como hemos visto, el orden que sigue cualquier asegurador (decisor adverso al riesgo), podemos concluir que en presencia de dependencia positiva, asumir la hipótesis de independencia entre los riesgos que componen una cartera cualquiera, implica estar tomando decisiones sobre la misma basadas en la creencia de que el riesgo global que de ella se deriva es menor del que realmente existe. Es decir, de hecho se está sustituyendo el riesgo real por uno menor, lo que sin duda constituye una estrategia peligrosa. Esta circunstancia nos parece suficiente para centrarnos, a partir de este momento, en analizar como las dependencias positivas que puedan existir entre algunos de los riesgos individuales que componen una cartera afectan al riesgo total que de la misma se deriva.

En esta capítulo consideraremos únicamente dos de los riesgos que componen una cartera cualquiera de seguros. Para éstos romperemos la tradicional hipótesis de mutua independencia y analizaremos la posibilidad de que presenten una relación de dependencia de signo positivo suficiente como para incremetar su riesgo global con respecto al caso independiente. En primer lugar, será necesario detectar la existencia de este tipo de dependencia y para ello, en el apartado 4.2, recogemos algunos conceptos estadísticos de dependencia bivariante positiva. Una vez identificada la forma mínima de dependencia que cumple con esta propiedad, analizaremos como el riesgo que de esta pareja se deriva aumenta a medida que aumenta el grado de dependencia entre sus componentes. Esto nos llevará a comparar diferentes pares de riesgos con una característica común: las dos distribuciones marginales correspondientes a los riesgos que componen cada par son idénticas. La hipótesis acerca de la igualdad de las marginales de los riesgos individuales es crucial ya que en realidad estamos siempre considerando el mismo par y únicamente varían las hipótesis referidas a su relación de dependencia.

En lo que se refiere al estudio del riesgo derivado de esta pareja, habrá que diferenciar según que provenga de una cartera formada por riesgos individuales con distribución dicotómica (por ejemplo, carteras de seguros de vida) o bien por riesgos individuales con cualquier otra forma en su distribución de probabilidad, riesgos con distribución arbitraria en lo que sigue. En el apartado 4.3 trataremos el primer tipo de riesgos. En base al trabajo de Dhaene & Goovaerts (1997), consideraremos el caso particular de una pareja de riesgos dicotómicos, es decir, con distribuciones marginales de probabilidad definidas en dos puntos: cada riesgo puede dar lugar a un único siniestro y en caso de que éste se produzca la cuantía del mismo es fija. Como veremos, en este caso, el orden de covarianzas bastará para ordenar el riesgo que del par se deriva. Así, a medida que aumente la covarianza entre estos dos riesgos, aumentará su riesgo conjunto.

En el apartado 4.4 pasaremos a considerar una pareja de riesgos cuyas respectivas distribuciones individuales puedan venir definidas por cualquier tipo de distribución de probabilidad. En base al trabajo de Dhaene & Goovaerts (1996), analizaremos la posibilidad de que exista dependencia positiva entre los dos riesgos que la componen. El desarrollo será paralelo al del apartado 4.3. En este caso, veremos que el orden de covarianzas no nos sirve para ordenar los diferentes pares de riesgos que resulten bajo las distintas hipótesis de dependencia establecidas. Así, será necesario buscar alguna medida estadística alternativa que permita comparar el riesgo global que de estos dos riesgos se deriva en función del grado de dependencia asumido entre los mismos. Ésta la encontraremos en el orden de correlación, definido por primera vez por Barlow & Proschan (1975).

4.2 Algunos conceptos de dependencia bivariante positiva

Dentro de este apartado recogemos, en primer lugar, algunos conceptos estadísticos de dependencia positiva entre dos v.a. para, a continuación, analizar las relaciones que existen entre los mismos. Éstos son válidos para dos v.a. cualesquiera aunque nosotros nos restringiremos al caso que nos interesa, dos riesgos cualesquiera de los definidos en el apartado 3.2 del capítulo anterior. Llamaremos a éstos X_1 y X_2 siendo sus funciones de densidad de probabilidad f_{X_1}, f_{X_2} y sus respectivas funciones de distribución acumulativas y desacumulativas F_{X_1}, F_{X_2} y S_{X_1}, S_{X_2} -ver (3.1), (3.2) y (3.3)-. La función de densidad de probabilidad bivariante de la pareja (X_1, X_2), f_{X_1,X_2}, es

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2), \ \forall\ x_1,x_2 \geq 0. \tag{4.1}$$

La función de distribución bivariante acumulativa de (X_1, X_2), F_{X_1,X_2}, será

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2), \ \ \forall x_1,x_2 \geq 0, \tag{4.2}$$

siendo la desacumulativa correspondiente, S_{X_1,X_2}, la que se obtiene de

$$S_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2), \ \ \forall x_1,x_2 \geq 0. \tag{4.3}$$

Observemos que en el caso en que los riesgos X_1 y X_2 son independientes (4.1), (4.2) y (4.3) se reducen al producto de las respectivas funciones marginales, es decir, para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$ se cumple

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2), \\ F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2), \\ S_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= S_{X_1}(x_1)\, S_{X_2}(x_2). \end{aligned}$$

Veamos a continuación algunas de las características de estas funciones de distribución bivariantes bajo ciertas medidas estadísticas de dependencia positiva.

4.2.1 Dependencia cuadrática positiva

Definición 4.1

Sean X_1 *y* X_2 *dos riesgos cualesquiera. Diremos que* X_1 *y* X_2 *presentan dependencia cuadrática positiva,* $PQD(X_1, X_2)$, *si para cualesquiera* $x_1, x_2 \geq 0$, *se cumple*

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2). \tag{4.4}$$

Observemos que esta inecuación indica que la distribución bivariante de (X_1, X_2) está siempre por encima de la que les correspondería a estos mismos riesgos en caso de que fueran independientes. Así, $PQD(X_1, X_2)$ es equivalente a decir que X_1 y X_2 están más positivamente correlacionados que en el caso en que son independientes.

Remarcar que la inecuación anterior no es la única que caracteriza la existencia de dependencia cuadrática positiva. Demostraremos a continuación que para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, la relación en (4.4) es equivalente a cada una de las siguientes tres,

$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2) \leq \Pr(X_1 \leq x_1) \Pr(X_2 > x_2). \tag{4.5}$$

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2) \leq \Pr(X_1 > x_1) \Pr(X_2 \leq x_2). \tag{4.6}$$

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1) \Pr(X_2 > x_2). \tag{4.7}$$

En efecto, observemos que se cumplen las siguientes relaciones:

(4.4)⇒(4.5):
Si para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, se cumple (4.4), entonces

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2) = \Pr(X_1 \leq x_1) - \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
&\quad \leq \Pr(X_1 \leq x_1) - \Pr(X_1 \leq x_1) \Pr(X_2 \leq x_2) \\
&\quad = \Pr(X_1 \leq x_1) \Pr(X_2 > x_2).
\end{aligned}$$

(4.5)⇒(4.6):
Si para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, se cumple (4.5), entonces

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2) = \Pr(X_2 \leq x_2) - \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
&\quad = \Pr(X_2 \leq x_2) - \Pr(X_1 \leq x_1) + \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2) \\
&\quad \leq \Pr(X_2 \leq x_2) - \Pr(X_1 \leq x_1) + \Pr(X_1 \leq x_1) \Pr(X_2 > x_2) \\
&\quad = \Pr(X_2 \leq x_2) - \Pr(X_1 \leq x_1)(1 - \Pr(X_2 > x_2)) \\
&\quad = \Pr(X_2 \leq x_2)(1 - \Pr(X_1 \leq x_1)) = \Pr(X_2 \leq x_2) \Pr(X_1 > x_1).
\end{aligned}$$

(4.6)⇒(4.4):
Si para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, se cumple (4.6), entonces

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \Pr(X_1 > x_1) - \Pr(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2) \\
&\geq \Pr(X_1 > x_1) - \Pr(X_1 > x_1)\Pr(X_2 \leq x_2) = \Pr(X_1 > x_1)\Pr(X_2 > x_2).
\end{aligned}$$

(4.7)⇒(4.4):
Si para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, se cumple (4.7), entonces

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \Pr(X_1 \leq x_1) - \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2) \\
&= \Pr(X_1 \leq x_1) - \Pr(X_2 > x_2) + \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&\geq \Pr(X_1 \leq x_1) - \Pr(X_2 > x_2) + \Pr(X_1 > x_1)\Pr(X_2 > x_2) \\
&= \Pr(X_1 \leq x_1) - \Pr(X_2 > x_2)(1 - \Pr(X_1 > x_1)) \\
&= \Pr(X_1 \leq x_1)(1 - \Pr(X_2 > x_2)) = \Pr(X_1 \leq x_1)\Pr(X_2 \leq x_2).
\end{aligned}$$

Así, podemos investigar si existe dependencia cuadrática positiva entre dos riesgos a partir de (4.4), (4.5), (4.6) ó (4.7).

Se demuestra, a continuación, que la dependencia cuadrática positiva entre dos riesgos implica positividad de su covarianza. Este resultado se deduce de la expresión de la covarianza dada en el siguiente lema.

Lema 4.2
Para dos riesgos cualesquiera, X_1 y X_2, se cumple

$$Cov(X_1, X_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[F_{X_1,X_2}(u,v) - F_{X_1}(u)\,F_{X_2}(v)\right] du\,dv. \tag{4.8}$$

Demostración
Sean (X_1, X_2) y (Z_1, Z_2) dos pares de riesgos idénticamente distribuidos y con todos los riesgos mutuamente independientes. Entonces:

$$\begin{aligned}
&E[(X_1 - Z_1)\ (X_2 - Z_2)] = E(X_1X_2) - E(X_1Z_2) - E(Z_1X_2) + E(Z_1Z_2) \\
&= E(X_1X_2) - E(X_1)\ E(Z_2) - E(Z_1)\ E(X_2) + E(Z_1Z_2) \\
&= E(X_1X_2) - E(X_1)\ E(X_2) - E(X_1)\ E(X_2) + E(X_1X_2) \\
&= 2\,Cov(X_1, X_2).
\end{aligned}$$

Sea I la función indicadora. Observemos que para dos reales cualesquiera $x, z \geq 0$, se cumple

$$\int_0^\infty \left[I\left(z \le u\right) - I\left(x \le u\right)\right] du = \int_z^x du = x - z.$$

Igualmente, para cualesquiera $x_1, x_2, z_1, z_2 \ge 0$ se cumplirá

$$\begin{aligned}(x_1 - z_1)(x_2 - z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty &\left[I\left(x_1 \le u\right) I\left(x_2 \le v\right)\right. \\ +I\left(z_1 \le u\right) I\left(z_2 \le v\right) - I\left(x_1 \le u\right) I\left(z_2 \le v\right) &\left. - I\left(z_1 \le u\right) I\left(x_2 \le v\right)\right] dudv.\end{aligned}$$

Tomando esperanza matemática encontramos

$$\begin{aligned} E\left[(X_1 - Z_1)(X_2 - Z_2)\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[F_{X_1,X_2}(u,v) + F_{Z_1,Z_2}(u,v)\right. \\ &\left. -F_{X_1}(u) F_{X_2}(v) - F_{X_1}(u) F_{X_2}(v)\right] du\, dv \\ &= 2\int_0^\infty \int_0^\infty \left[F_{X_1,X_2}(u,v) - F_{X_1}(u) F_{X_2}(v)\right] du\, dv, \end{aligned}$$

de donde se sigue inmediatamente el resultado buscado.

□

De este lema se deduce que $PQD\left(X_1, X_2\right)$ implica $Cov\left(X_1, X_2\right) \ge 0$. ¿Se cumple la implicación contraria? Con el siguiente contraejemplo veremos que, en general, no tiene porqué cumplirse.

Contraejemplo

Sean X_1 y X_2 dos riesgos con función de densidad de probabilidad de X_i $(i = 1, 2)$, definida por

$$f_i(x) = \Pr\left(X_i = x\right) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x = 0, 1, 2, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

y cumpliendo

$$\Pr\left(X_2 = 0/X_1 = 0\right) = 1,\ \Pr\left(X_2 = 1/X_1 = 2\right) = 1,\ \Pr\left(X_2 = 2/X_1 = 1\right) = 1.$$

De las relaciones existentes entre X_1 y X_2 se sigue que la función de densidad de probabilidad bivariante de estas variables es

(x_1, x_2)	$\Pr\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right)$
$(0, 0)$	$1/3$
$(1, 2)$	$1/3$
$(2, 1)$	$1/3$

De donde:

$$Cov\,(X_1, X_2) = E\,(X_1\,X_2) - E\,(X_1)\,E\,(X_2) = 2\,\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0.$$

Observemos, sin embargo, que

$$\Pr\,(X_1 = 2, X_2 = 2) = 0 \leq \frac{1}{9} = \Pr\,(X_1 = 2)\Pr\,(X_2 = 2)\,.$$

Tenemos, por tanto, que la covarianza entre estos dos riesgos es positiva y, sin embargo, no presentan dependencia cuadrática positiva. Veremos más adelante que únicamente en el caso de riesgos con distribución dicotómica, $PQD\,(X_1, X_2)$ $\Leftrightarrow Cov\,(X_1, X_2) \geq 0$.

4.2.2 Asociación

Definición 4.3
Sean X_1 y X_2 dos riesgos cualesquiera. Diremos que X_1 y X_2 son asociados, $A\,(X_1, X_2)\,,$ si

$$Cov\,(f\,(X_1, X_2)\,, g\,(X_1, X_2)) \geq 0,$$

para cualquier par de funciones $f, g : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}$ no decrecientes en cada uno de sus argumentos para las cuales la covarianza exista.

Por simplicidad, hablaremos en lo que sigue de funciones no decrecientes en $\mathbf{R}_+^2$ y entenderemos como tales a aquellas que cumplen la condición de no decrecimiento en cada uno de sus argumentos.

Presentamos a continuación algunas de las principales propiedades que cumple la asociación entre dos riesgos (para la demostración de las mismas ver, por ejemplo, Esary, Proschan & Walkup (1967)).

1. Un conjunto con un solo riesgo es asociado.

2. Funciones no decrecientes de riesgos asociados son asociadas.

   Sean X_1 y X_2 dos riesgos asociados y sean $h_1, h_2, \cdots, h_m : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}$, funciones no decrecientes cualesquiera. Entonces, $h_1\,(X_1, X_2)\,, h_2\,(X_1, X_2)\,,$ $\cdots, h_m\,(X_1, X_2)$ son asociadas.

3. Si dos riesgos son independientes, entonces son asociados.

4.2.3 Dependencia estocástica creciente

Definición 4.4
Sean X_1 y X_2 dos riesgos cualesquiera. Diremos que X_2 es estocásticamente creciente en X_1, $SI\left(X_2/X_1\right)$, si para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$,

$$\Pr\left(X_2 > x_2/X_1 = x_1\right)$$

es no decreciente en el dominio de X_1 respecto a x_1, para todo x_2.

4.2.4 Relaciones

En el siguiente teorema se presentan las diferentes relaciones existentes entre los conceptos de dependencia bivariante positiva que acabamos de presentar.

Teorema 4.5
Para dos riesgos cualesquiera, X_1 y X_2, se cumplen las siguientes implicaciones:

$$SI\left(X_2/X_1\right) \Rightarrow A\left(X_1, X_2\right) \Rightarrow PQD\left(X_1, X_2\right) \Rightarrow Cov\left(X_1, X_2\right) \geq 0. \qquad (4.9)$$

Demostración
$SI\left(X_2/X_1\right) \Rightarrow A\left(X_1, X_2\right)$:

Consideremos la función de distribución

$$F_{X_2/X_1=x_1}\left(x_2\right) = \Pr\left(X_2 \leq x_2/X_1 = x_1\right).$$

Para una v.a. U cualquiera uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$ e independiente de X_1, definimos

$$h\left(U, x_1\right) = F^{-1}_{X_2/X_1=x_1}\left(U\right) = \inf\left\{x_2 : F_{X_2/X_1=x_1}\left(x_2\right) \geq U\right\}.$$

Es inmediato comprobar que $h\left(U, x_1\right)$ es no decreciente en U. Además por ser X_2 estocásticamente creciente en X_1, tenemos que para $0 \leq x_1 < x_1'$, se cumple

$$F_{X_2/X_1=x_1}\left(x_2\right) \geq F_{X_2/X_1=x_1'}\left(x_2\right), \ \forall x_2 \geq 0 \Rightarrow h\left(U, x_1\right) \leq h\left(U, x_1'\right),$$

resultando ser $h\left(U, x_1\right)$ no decreciente en cada uno de sus argumentos.
Además para cualquier $x_2 \geq 0$, se cumple:

$$h\left(U, x_1\right) = F^{-1}_{X_2/X_1=x_1}\left(U\right) \leq x_2 \Leftrightarrow F_{X_2/X_1=x_1}\left(x_2\right) \geq U,$$

de donde

$$\begin{aligned}
\Pr\left(h\left(U,x_1\right)\leq x_2\right) &= \Pr\left(F^{-1}_{X_2/X_1=x_1}\left(U\right)\leq x_2\right)\\
&= \Pr\left(F_{X_2/X_1=x_1}\left(x_2\right)\geq U\right)=F_{X_2/X_1=x_1}\left(x_2\right).
\end{aligned}$$

Así, la distribución de $h\left(U,x_1\right)$ coincide con la que resulta para $X_2/X_1=x_1$. Observemos ahora la distribución bivariante de $\left(X_1,X_2\right)$

$$\Pr\left(X_1\leq x_1,X_2\leq x_2\right)=\frac{\Pr\left(X_2\leq x_2/X_1\leq x_1\right)}{\Pr\left(X_1\leq x_1\right)}$$

$$=\frac{\displaystyle\int_0^{x_1}\Pr\left(X_2\leq x_2/X_1=s\right)\,dF_{X_1}\left(s\right)}{\Pr\left(X_1\leq x_1\right)}=\frac{\displaystyle\int_0^{x_1}\Pr\left(h\left(U,s\right)\leq x_2\right)\,dF_{X_1}\left(s\right)}{\Pr\left(X_1\leq x_1\right)}$$

$$=\frac{\displaystyle\int_0^{x_1}\Pr\left(h\left(U,s\right)\leq x_2/X_1=s\right)\,dF_{X_1}\left(s\right)}{\Pr\left(X_1\leq x_1\right)}=\Pr\left(X_1\leq x_1,h\left(U,X_1\right)\leq x_2\right).$$

Así

$$\left(X_1,X_2\right)\stackrel{d}{=}\left(X_1,h\left(U,X_1\right)\right).$$

Por definición X_1 y U son independientes y son, por tanto, asociadas (propiedad 3, asociación). Así podemos concluir que X_1 y $h\left(U,X_1\right)$ son asociadas por ser funciones no decrecientes de X_1 y U (propiedad 2, asociación).

$A\left(X_1,X_2\right)\Rightarrow PQD\left(X_1,X_2\right):$

Sea I la función indicadora. Para dos reales cualesquiera fijados, $x_1,x_2\geq 0$, definimos

$$X=I\left(X_1>x_1\right)\qquad Y=I\left(X_2>x_2\right).$$

X e Y son funciones no decrecientes de X_1 y X_2 y son, por tanto, asociadas (propiedad 2, asociación). Entonces para dos funciones no decrecientes cualesquiera, f y g

$$Cov\left(f\left(X,Y\right),g\left(X,Y\right)\right)\geq 0.$$

Elegimos

$$f\left(x,y\right)=x\qquad g\left(x,y\right)=y.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &\leq Cov\left(X,Y\right)=Cov\left(1-X,1-Y\right)\\
&= E\left(\left(1-X\right)\left(1-Y\right)\right)-E\left(1-X\right)E\left(1-Y\right)\\
&= \Pr\left(X_1\leq x_1,X_2\leq x_2\right)-\Pr\left(X_1\leq x_1\right)\Pr\left(X_2\leq x_2\right).
\end{aligned}$$

$PQD\,(X_1, X_2) \Rightarrow Cov\,(X_1, X_2) \geq 0$:
Inmediato a partir del lema 4.2.

□

Remarcar que salvo en el caso de riesgos con distribución dicotómica, las implicaciones anteriores son estrictas. Analizaremos, en el siguiente apartado, el caso particular de riesgos cuyas respectivas distribuciones marginales quedan definidas en dos puntos. Veremos que, en este caso, los conceptos de dependencia bivariante presentados resultan ser equivalentes. Marshall & Olkin (1979) presentan contraejemplos que demuestran que en cualquier otro caso no se cumple tal equivalencia.

Dentro de este apartado queremos, por último, ampliar el concepto de comonotonía entre dos riesgos definido en el capítulo 2 -ver definición 2.4-. Se trata de una relación particular de dependencia positiva entre dos riesgos que será fundamental para el desarrollo de este trabajo. Iremos viendo como ésta es la relación de dependencia más "peligrosa" con que puede encontrarse el asegurador entre los riesgos de su cartera.

4.2.5 Comonotonía entre dos riesgos

Si hablamos de riesgos podemos redefinir la definición de comonotonía dada en el capítulo 2 - definición 2.4- como sigue.

Definición 4.6
Sean X_1 y X_2 dos riesgos cualesquiera. Diremos que los riesgos X_1 y X_2 son comonótonos si existe un riesgo cualquiera Z y dos funciones u_1 y u_2 no decrecientes en $\mathbf{R}_+$, tales que

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (u_1\,(Z)\,, u_2\,(Z))\,, \tag{4.10}$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ indica igualdad en la distribución bivariante de probabilidad.

En el siguiente teorema se dan definiciones equivalentes de la comonotonía entre dos riesgos. Éstas nos facilitarán la interpretación de la relación de dependencia que existe en este caso.

Teorema 4.7
Sean X_1 y X_2 dos riesgos cualesquiera. Diremos que X_1 y X_2 son comonótonos si se cumple una cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) *Existe un riesgo cualquiera Z y dos funciones u_1 y u_2 no decrecientes en* $\mathbf{R}_+$, *tales que*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (u_1(Z), u_2(Z)).$$

(2) *Su función de distribución bivariante, F_{X_1,X_2}, cumple*

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\}, \ \forall x_1, x_2 \geq 0. \tag{4.11}$$

(3) *Para cualquier v.a. U uniformemente distribuida en el intervalo* $[0,1]$, *se cumple*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U)\right). \tag{4.12}$$

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$:

Supongamos que existe una v.a. Z y dos funciones u_1 y u_2 no decrecientes en $\mathbf{R}_+$ tales que

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (u_1(Z), u_2(Z)).$$

Entonces tenemos que

$$X_1 \leq x_1 \Leftrightarrow u_1(Z) \leq x_1 \Leftrightarrow Z \in A,$$
$$X_2 \leq x_2 \Leftrightarrow u_2(Z) \leq x_2 \Leftrightarrow Z \in B,$$

donde para cualesquiera reales $a, b > 0$, A y B son intervalos del tipo $[0, a]$ ó $[0, a[$ y $[0, b]$ ó $[0, b[$, dado que u_1 y u_2 son funciones no decrecientes. Como $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$, encontramos:

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \Pr(u_1(Z) \leq x_1, u_2(Z) \leq x_2) \\ &= \Pr(Z \in A, Z \in B) = \min\{\Pr(Z \in A), \Pr(Z \in B)\} \\ &= \min\{\Pr(X_1 \leq x_1), \Pr(X_2 \leq x_2)\} = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\}. \end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow (3)$:

Sea la función de distribución de (X_1, X_2)

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\},$$

entonces para dos v.a. U_1, U_2 uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$, tenemos:

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \min\{\Pr(X_1 \leq x_1), \Pr(X_2 \leq x_2)\} = \{\text{ver } (3.10)\} \\ &= \min\left\{\Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1\right), \Pr\left(F_{X_2}^{-1}(U_2) \leq x_2\right)\right\} \\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1 \ , \ F_{X_2}^{-1}(U) \leq x_2\right), \end{aligned}$$

siendo U una v.a. uniformemente distribuida en $[0,1]$. Así,

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U)\right).$$

$(3) \Rightarrow (1)$:
Trivial por ser las funciones $F_{X_1}^{-1}$ y $F_{X_2}^{-1}$ funciones no decrecientes en $\mathbf{R}_+$.

$\square$

Del teorema 3.1 del capítulo anterior sabemos que para dos v.a. U_1, U_2 uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$ se cumple, en general,

$$X_1 \stackrel{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U_1) \text{ y } X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(U_2),$$

Acabamos de probar ahora, que cuando X_1, X_2 son comonótonos

$$X_1 \stackrel{d}{=} F_{X_1}^{-1}(U) \text{ y } X_2 \stackrel{d}{=} F_{X_2}^{-1}(U)$$

para una misma v.a. U uniformemente distribuida en $[0,1]$.

Representaremos a partir de este momento por X_1^U y X_2^U a dos riesgos mutuamente comonótonos para indicar que ambos son funciones no decrecientes de una misma v.a. U uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$.

En el mismo sentido, señalar también que la distribución bivariante correspondiente a dos riesgos comonótonos -dada en (4.11)- coincide con la cota superior de Fréchet. Por ello, es frecuente encontrar referencias en la literatura que hablan de v.a. distribuidas según la cota superior de Fréchet y no de v.a. comonótonas.

En el capítulo 2 habíamos mencionado que la comonotonía parecía poder ser interpretada como una extensión del concepto de correlación positiva perfecta entre dos v.a.. Observemos que si X_1 y X_2 presentan una correlación positiva perfecta, existen dos reales $a > 0$ y b tales que se cumple: $X_2 = aX_1 + b$ excepto, tal vez, para valores de X_1 con probabilidad 0. Si así es, podemos considerar las funciones no decrecientes

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x \\ u_2(x) &= ax + b, \quad a > 0, \end{aligned}$$

para las que se cumple

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (u_1(X_1), u_2(X_1)),$$

de donde se sigue inmediatamente que la correlación perfecta positiva entre X_1 y X_2 implica comonotonía entre los mismos. Observemos, no obstante, que la implicación contraria no es cierta, es decir, si dos riesgos son comonótonos no necesariamente presentan correlación perfecta positiva. En efecto, para un real $d \geq 0$ cualquiera, consideremos los siguientes dos riesgos:

$$X_1 = \begin{cases} X & \text{si } X \leq d \\ d & \text{si } X > d \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq d \\ X - d & \text{si } X > d \end{cases}.$$

Aunque ambos presentan correlación positiva (si aumenta X, aumentan los dos riesgos) X_1 y X_2 no están perfectamente correlacionados ya que ninguno de ellos puede escribirse en función del otro. Observemos, sin embargo, que ambos son funciones no decrecientes de un tercer riesgo X con lo que son comonótonos.

Podemos concluir, por tanto, que la comonotonía entre dos riesgos no implica, en general, correlación positiva perfecta entre los mismos. Únicamente en determinados casos particulares esta correspondencia se cumplirá. A pesar de ello, veremos a lo largo de este capítulo que la comonotonía es la relación de dependencia positiva máxima que puede darse entre dos riesgos con distribuciones marginales dadas.

Por la importancia de esta relación de dependencia entre dos riesgos, creemos interesante analizar algunas características adicionales que cumple la distribución de probabilidad bivariante de los riesgos (X_1, X_2) cuando éstos son comonótonos.

Teorema 4.8
Para dos riesgos, X_1 y X_2 mutuamente comonótonos, X_1^U, X_2^U, los estamentos siguientes son equivalentes:

(1) $F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\}$.

(2) $\Pr\left(X_1^U > x_1, X_2^U \leq x_2\right) = \max\{S_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, 0\}$.

(3) $S_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) = \min\{S_{X_1}(x_1), S_{X_2}(x_2)\}$.

(4) $\Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U > x_2\right) = \max\{F_{X_1}(x_1) + S_{X_2}(x_2) - 1, 0\}$.

Demostración
$(1) \Rightarrow (2)$:
Supongamos que se cumple

$$F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X_1^U > x_1, X_2^U \leq x_2\right) &= F_{X_2}(x_2) - F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) \\
&= F_{X_2}(x_2) - \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right\}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(a)\ F_{X_1}(x_1) \geq F_{X_2}(x_2) \Leftrightarrow F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1) \leq 0 \\
\Leftrightarrow F_{X_2}(x_2) + S_{X_1}(x_1) - 1 \leq 0,\ F_{X_2}(x_2) - \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right\} = 0 \\
(b)\ F_{X_1}(x_1) < F_{X_2}(x_2) \Leftrightarrow F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1) > 0 \\
\Leftrightarrow F_{X_2}(x_2) + S_{X_1}(x_1) - 1 > 0,\ F_{X_2}(x_2) - \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right\} \\
\ = F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1) = F_{X_2}(x_2) + S_{X_1}(x_1) - 1
\end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{S_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, 0\right\}.$$

$(2) \Rightarrow (3):$

Supongamos que se cumple

$$\Pr\left(X_1^U > x_1, X_2^U \leq x_2\right) = \max\left\{S_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, 0\right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
S_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) &= S_{X_1}(x_1) - \Pr\left(X_1^U > x_1, X_2^U \leq x_2\right) \\
&= S_{X_1}(x_1) - \max\left\{S_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, 0\right\}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(a)\ F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1) \leq 0 \Leftrightarrow F_{X_2}(x_2) \leq F_{X_1}(x_1) \\
\Leftrightarrow S_{X_2}(x_2) \geq S_{X_1}(x_1), S_{X_1}(x_1) - \max\left\{F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1), 0\right\} \\
= S_{X_1}(x_1). \\
(b)\ F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1) > 0 \Leftrightarrow F_{X_2}(x_2) > F_{X_1}(x_1) \\
\Leftrightarrow S_{X_2}(x_2) < S_{X_1}(x_1),\ S_{X_1}(x_1) - \max\left\{F_{X_2}(x_2) - F_{X_1}(x_1), 0\right\} \\
= S_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1}(x_1) = S_{X_2}(x_2)
\end{array}\right\}$$

$$= \min\left\{S_{X_1}(x_1), S_{X_2}(x_2)\right\}.$$

$(3) \Rightarrow (4):$

Supongamos que se cumple

$$S_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) = \min\left\{S_{X_1}(x_1), S_{X_2}(x_2)\right\},$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U > x_2\right) &= S_{X_2}(x_2) - S_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) \\
&= S_{X_2}(x_2) - \min\left\{S_{X_1}(x_1), S_{X_2}(x_2)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(a)\ S_{X_2}(x_2) \leq S_{X_1}(x_1) \Leftrightarrow S_{X_2}(x_2) - S_{X_1}(x_1) \leq 0 \\
\Leftrightarrow S_{X_2}(x_2) + F_{X_1}(x_1) - 1 \leq 0, S_{X_2}(x_2) - \min\left\{S_{X_1}(x_1),\right. \\
\quad \left. S_{X_2}(x_2)\right\} = 0 \\
(b)\ S_{X_2}(x_2) > S_{X_1}(x_1) \Leftrightarrow S_{X_2}(x_2) - S_{X_1}(x_1) > 0 \\
\Leftrightarrow S_{X_2}(x_2) + F_{X_1}(x_1) - 1 > 0,\ S_{X_2}(x_2) - \min\left\{S_{X_1}(x_1),\right. \\
\quad \left. S_{X_2}(x_2)\right\} = S_{X_2}(x_2) - S_{X_1}(x_1) = S_{X_2}(x_2) + F_{X_1}(x_1) - 1
\end{array}
\right\}
$$

$$
= \max\left\{F_{X_1}(x_1) + S_{X_2}(x_2) - 1, 0\right\}.
$$

$(4) \Rightarrow (1):$

Supongamos que se cumple

$$
\Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U > x_2\right) = \max\left\{F_{X_1}(x_1) + S_{X_2}(x_2) - 1, 0\right\},
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U \leq x_2\right) &= F_{X_1}(x_1) - \Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U > x_2\right) \\
&= F_{X_1}(x_1) - \max\left\{F_{X_1}(x_1) + S_{X_2}(x_2) - 1, 0\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(a)\ F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) \leq 0 \Leftrightarrow F_{X_1}(x_1) \leq F_{X_2}(x_2) \\
\ F_{X_1}(x_1) - \max\left\{F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2), 0\right\} = F_{X_1}(x_1) \\
(b)\ F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) > 0 \Leftrightarrow F_{X_1}(x_1) > F_{X_2}(x_2) \\
\ F_{X_1}(x_1) - \max\left\{F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2), 0\right\} = F_{X_2}(x_2)
\end{array}
\right\}
$$

$$
= \min\left\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right\}.
$$

□

4.3 Parejas de riesgos con distribución dicotómica

4.3.1 Distribución bivariante

Para $i = 1, 2$, sean α_i y p_i reales arbitrarios pero fijados, cumpliendo $\alpha_i > 0$ y $0 < p_i < 1$. Sean X_1 y X_2 dos riesgos con función de densidad de probabilidad de X_i $(i = 1, 2)$ definida por

$$
\begin{aligned}
f_{X_i}(0) &= \Pr(X_i = 0) = p_i, \\
f_{X_i}(\alpha_i) &= \Pr(X_i = \alpha_i) = q_i = 1 - p_i.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

En este caso diremos que los riesgos X_1 y X_2 tienen una distribución de probabilidad dicotómica.

Sea $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ la clase de todos los pares de riesgos dicotómicos cuyas respectivas funciones de densidad de probabilidad vienen dadas por (4.13). La diferencia entre los diferentes pares de riesgos incluidos en esta clase, viene marcada por sus respectivas distribuciones de probabilidad bivariantes ya que en el caso de las marginales (las correspondientes a cada uno de los dos riesgos que componen la pareja) son idénticas.

La función de densidad de probabilidad bivariante de cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, únicamente toma valores diferentes de cero en $(0,0)$, $(\alpha_1, 0)$, $(0, \alpha_2)$ y (α_1, α_2). Observemos que una vez conocido el valor en uno de estos puntos, por ejemplo en (α_1, α_2), f_{X_1,X_2} queda totalmente determinada por pertenecer esta pareja a la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = 0) = q_1 - \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2), \\
&\Pr(X_1 = 0, X_2 = \alpha_2) = q_2 - \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2), \\
&\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - q_1 - q_2 + \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2).
\end{aligned}$$

Como veremos en el siguiente lema, conocida la covarianza entre estos dos riesgos queda determinada $\Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2)$ y, por tanto, su función de densidad de probabilidad bivariante.

Lema 4.9
Para cualesquiera dos riesgos $(X_1, X_2) \in R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$,

$$Cov(X_1, X_2) = \alpha_1\alpha_2 \left(\Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2) - q_1 q_2\right). \tag{4.14}$$

Demostración
Por pertenecer (X_1, X_2) a la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, se cumple

$$E(X_1 X_2) = \alpha_1\alpha_2 \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2),$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado buscado.

□

Igualmente conocida la covarianza entre dos riesgos cualesquiera incluidos en esta clase, quedarán determinadas sus respectivas funciones de distribución bivariantes acumulativa y desacumulativa.

Observemos que la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ contiene todas las posibles relaciones de dependencia que pueden existir entre dos riesgos con marginales dadas por (4.13). Como hemos mencionado nuestro interés se centrará únicamente en aquellos pares de riesgos cuya relación de dependencia hace que el riesgo total que de los mismos se deriva sea mayor que en el caso independiente. Antes de llegar a la relación de dependencia que cumple con esta propiedad, debemos deducir cuál es el riesgo total de una pareja cualquiera de las incluidas en la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. Éste vendrá dado por la v.a. suma cuya distribución presentamos en el siguiente apartado.

4.3.2 Distribución de la suma

Para un par de riesgos cualesquiera incluidos en la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ se obtiene, en el siguiente lema, una expresión de la función de distribución que resulta para su suma. Esta v.a. suma representa el coste total de los siniestros que de esta pareja se deriva y, por tanto, refleja el riesgo global de la misma.

Únicamente consideraremos los casos en que $\alpha_1 < \alpha_2$ y $\alpha_1 = \alpha_2$. El caso $\alpha_1 > \alpha_2$ resulta por simetría.

Lema 4.10
Sean $(X_1, X_2) \in R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. *Entonces,*
Si $\alpha_1 < \alpha_2$

$$F_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} p_2 - q_1 + \Pr(X_1 + X_2 = \alpha_1 + \alpha_2) & \text{si } 0 \leq x < \alpha_1 \\ p_2 & \text{si } \alpha_1 \leq x < \alpha_2 \\ 1 - \Pr(X_1 + X_2 = \alpha_1 + \alpha_2) & \text{si } \alpha_2 \leq x < \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha_1 + \alpha_2. \end{cases} \tag{4.15}$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$F_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} p_2 - q_1 + \Pr(X_1 + X_2 = 2\alpha) & \text{si } 0 \leq x < \alpha \\ 1 - \Pr(X_1 + X_2 = 2\alpha) & \text{si } \alpha \leq x < 2\alpha \\ 1 & \text{si } x \geq 2\alpha. \end{cases} \tag{4.16}$$

Demostración
Consideremos el caso en que $\alpha_1 < \alpha_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + X_2 = \alpha_1) &= \Pr(X_1 = \alpha_1) - \Pr(X_1 + X_2 = \alpha_1 + \alpha_2) \\ &= q_1 - \Pr(X_1 + X_2 = \alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(X_1+X_2=\alpha_2) &= \Pr(X_2=\alpha_2)-\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)\\ &= q_2-\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2).\end{aligned}$$

Ahora por diferencia encontramos

$$\begin{aligned}&\Pr(X_1+X_2=0)=1-\Pr(X_1+X_2=\alpha_1)-\Pr(X_1+X_2=\alpha_2)\\ &\quad-\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)=p_2-q_1+\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2).\end{aligned}$$

Así, la función de densidad de probabilidad es

x	$\Pr(X_1+X_2=x)$
0	$p_2-q_1+\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)$
α_1	$q_1-\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)$
α_2	$q_2-\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)$
$\alpha_1+\alpha_2$	$\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)$

De ésta resulta por adición la de distribución buscada.

Si $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ tenemos la función de densidad de probabilidad

x	$\Pr(X_1+X_2=x)$
0	$p_2-q_1+\Pr(X_1+X_2=2\alpha)$
α	$q_1+q_2-2\Pr(X_1+X_2=2\alpha)$
2α	$\Pr(X_1+X_2=2\alpha)$

de donde nuevamente se obtiene la función de distribución buscada.

□

Es fácil comprobar que para $\alpha_1\leq\alpha_2$ se cumplen las dos siguientes relaciones

$$\begin{aligned}Var(X_1+X_2) &= q_1p_1\alpha_1^2+q_2p_2\alpha_2^2\\ &\quad+2\alpha_1\alpha_2\left(\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)-q_1q_2\right), \quad (4.17)\\ Cov(X_1,X_2) &= \alpha_1\ \alpha_2\ \left(\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)-q_1q_2\right). \quad (4.18)\end{aligned}$$

Así la distribución de X_1+X_2 queda totalmente determinada conociendo $\Pr(X_1+X_2=\alpha_1+\alpha_2)$, $Var(X_1+X_2)$ o $Cov\ (X_1,X_2)$.

Remarcar por último que en el caso en que X_1 y X_2 sean riesgos independientes podemos llegar alternativamente a la función de distribución de su suma a partir de la convolución de las distribuciones marginales de los dos riesgos.

4.3.3 Orden de covarianzas y orden stop-loss

Estamos ahora en condiciones de deducir cuál es la relación de orden parcial que establece cualquier decisor adverso al riesgo entre los diferentes elementos de la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. El riesgo total que le supone uno cualquiera de ellos, (X_1, X_2), viene dado por la v.a. suma, $X_1 + X_2$, cuya distribución hemos deducido en el apartado anterior. Veamos en el siguiente teorema cuando preferirá este elemento sobre otro cualquiera de la misma clase.

Teorema 4.11
Sean (X_1, X_2) *e* (Y_1, Y_2) *elementos de* $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. *Definimos*

$$V = X_1 + X_2,$$
$$W = Y_1 + Y_2.$$

Entonces los estamentos siguientes son equivalentes:

(1) $\Pr(V = \alpha_1 + \alpha_2) \leq \Pr(W = \alpha_1 + \alpha_2)$.

(2) $Var(V) \leq Var(W)$.

(3) $Cov(X_1, X_2) \leq Cov(Y_1, Y_2)$.

(4) $V \leq_{sl} W$.

Demostración
De (4.17) y (4.18) se deduce que (1), (2) y (3) son equivalentes. Supongamos entonces que (1) se cumple. Del lema 4.10 vemos que, en este caso, las funciones de distribución de V y W se cruzan una vez, con lo cual por lo visto en el teorema 3.13 tenemos

$$\left.\begin{array}{ll} F_V(x) \leq F_W(x) & \text{si } x < \max(\alpha_1, \alpha_2) \\ F_V(x) \geq F_W(x) & \text{si } x \geq \max(\alpha_1, \alpha_2) \end{array}\right\} \Rightarrow V \leq_D W \Rightarrow V \leq_{sl} W.$$

Supongamos ahora que (4) se cumple. En el capítulo anterior hemos visto que esta condición equivale a $E(w(V)) \leq E(w(W))$ siendo w una función no decreciente y convexa cualquiera. Si elegimos $w = x^2$ tenemos que $E(V^2) \leq E(W^2)$ con lo que se cumple $Var(V) \leq Var(W)$ por ser $E(V) = E(W)$.

□

El orden stop-loss entre dos parejas de riesgos implica que una de ellas es preferida a la otra por todo el conjunto de decisores adversos al riesgo (con función de utilidad no decreciente y cóncava o equivalentemente con función de distorsión cóncava). Observemos que en el caso de riesgos con distribución dicotómica este orden es equivalente al que resulta de la ordenación de las covarianzas entre las parejas de riesgos. Así, en esta clase particular, comparar dos parejas de riesgos equivale a comparar sus covarianzas y aquella pareja con menor covarianza es la que menor riesgo le supone al decisor.

4.3.4 La clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$

4.3.4.1 Definición

De los resultados del apartado anterior, es claro que reducir la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ a la subclase de parejas de riesgos con covarianza mayor o igual a 0, implica considerar únicamente a aquellas parejas que le supondrán un mayor riesgo global al asegurador que en el caso independiente. Llamaremos $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ a la subclase de $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ con esta propiedad. Así, para cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ se cumple

$$Cov(X_1, X_2) \geq 0.$$

Si dada una pareja de riesgos, queremos investigar su pertenencia a la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ nos basta con investigar el signo de su covarianza. En caso de que ésta resulte ser positiva debemos tener en cuenta que si consideramos a esta pareja como independiente estamos infravalorando el riesgo real de la misma.

En el siguiente teorema se demuestra que las parejas de riesgos incluidas en $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ cumplen además todas las relaciones de dependencia positiva presentadas en el apartado 4.2.

Teorema 4.12 *Para cualesquiera dos riesgos* $(X_1, X_2) \in R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, *las relaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $Cov(X_1, X_2) \geq 0.$

(b) $PQD(X_1, X_2).$

(c) $SI(X_2/X_1).$

(d) $A(X_1, X_2).$

Demostración

$(a) \Rightarrow (b)$:

Por tratarse de riesgos incluidos en la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$,

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &\geq 0 \Leftrightarrow E(X_1 X_2) \geq E(X_1) E(X_2) \\ &\Leftrightarrow \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2) \geq \Pr(X_1 = \alpha_1) \Pr(X_2 = \alpha_2). \end{aligned}$$

Observemos que esta última inecuación es, en este caso particular, equivalente a

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1) \Pr(X_2 > x_2), \quad \forall x_1, x_2 \geq 0.$$

$(b) \Rightarrow (c)$:

Si (X_1, X_2) son PQD,

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1) \Pr(X_2 > x_2), \quad \forall x_1, x_2 \geq 0.$$

Por ser (X_1, X_2) un elemento de $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ la inecuación anterior es equivalente a

$$\Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2) \geq \Pr(X_1 = \alpha_1) \Pr(X_2 = \alpha_2),$$

de la cual se deduce

$$\Pr(X_1 = 0, X_2 = \alpha_2) \leq \Pr(X_1 = 0) \Pr(X_2 = \alpha_2).$$

Observemos que las dos relaciones anteriores se pueden reescribir como

$$\Pr(X_2 = \alpha_2 / X_1 = \alpha_1) \geq \Pr(X_2 = \alpha_2)$$

y

$$\Pr(X_2 = \alpha_2 / X_1 = 0) \leq \Pr(X_2 = \alpha_2).$$

Así

$$\Pr(X_2 = \alpha_2 / X_1 = \alpha_1) \geq \Pr(X_2 = \alpha_2 / X_1 = 0),$$

de donde se sigue inmediatamente $SI(X_2 / X_1)$.

$(c) \Rightarrow (d)$:

Inmediato a partir del teorema 4.5.

$(d) \Rightarrow (a)$:

$A(X_1, X_2)$ implica que para cualesquiera f, g no decrecientes

$$Cov(f(X_1, X_2), g(X_1, X_2)) \geq 0.$$

Eligiendo las funciones no decrecientes

$$f(x_1, x_2) = x_1 \text{ y } g(x_1, x_2) = x_2,$$

resulta inmediatamente el resultado buscado.

□

De este teorema se sigue que cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ presentan también $PQD(X_1, X_2)$, $A(X_1, X_2)$ y $SI(X_2/X_1)$.

4.3.4.2 Orden stop-loss

La ordenación de los diferentes pares de riesgos en $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ es inmediata a partir del teorema 4.11. En esta subclase, el orden de covarianzas es equivalente al orden stop-loss. Así aquellos riesgos con mayor covarianza son los que mayor riesgo presentan.

De este resultado se sigue que para cada una de las parejas en la cartera con covarianza positiva, debemos tratar de estimar lo más exactamente posible el valor de sus respectivas covarianzas si queremos considerar su riesgo real. Se trata de garantizar que, en ningún caso, éstas queden infravaloradas.

4.3.4.3 Dependencia más segura y dependencia con más riesgo

Del teorema 4.11, es claro que el elemento más seguro de la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ es aquel par formado por dos riesgos mutuamente independientes. En cuanto al elemento con más riesgo, será aquel par cuya covarianza se corresponda con la covarianza máxima que puede existir entre dos riesgos de la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. Como veremos a continuación, éste se obtiene en caso de comonotonía. Antes, no obstante, mostrar que el par de riesgos comonótonos incluido en $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ pertenece a la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$.

Sean $(X_1^U, X_2^U) \in R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ con X_1^U y X_2^U mutuamente comonótonos. Es fácil comprobar desacumulando la función de distribución correspondiente a estos riesgos -dada en (4.11)- que la función de densidad de probabilidad bivariante de estos riesgos es

$$\Pr\left(X_1^U = x_1, X_2^U = x_2\right) = \begin{cases} \min\{p_1, p_2\} & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \max\{p_2 - p_1, 0\} & \text{si } (x_1, x_2) = (\alpha_1, 0) \\ \max\{p_1 - p_2, 0\} & \text{si } (x_1, x_2) = (0, \alpha_2) \\ \min\{q_1, q_2\} & \text{si } (x_1, x_2) = (\alpha_1, \alpha_2). \end{cases} \tag{4.19}$$

de donde se sigue inmediatamente la positividad de su covarianza y, por los resultados del teorema 4.12, $PQD\left(X_1^U, X_2^U\right)$, $A\left(X_1^U, X_2^U\right)$ y $SI\left(X_2^U/X_1^U\right)$.

Estamos ahora en condiciones de obtener el elemento más seguro y el más peligroso de la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. Presentamos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 4.13
Sean $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$, (X_1, X_2) *y* $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ *elementos de la clase* $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, *tales que* $X_1^{\perp}, X_2^{\perp}$ *son mutuamente independientes y* X_1^U, X_2^U *son comonótonos. Entonces*

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} \leq_{sl} X_1 + X_2 \leq_{sl} X_1^U + X_2^U. \tag{4.20}$$

Demostración
Por ser $X_1^{\perp}$ y $X_2^{\perp}$ independientes y por pertenecer (X_1, X_2) a la clase $R_{2,+}(p_1, p_2;$ $\alpha_1, \alpha_2)$ se cumple

$$Cov\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right) = 0 \leq Cov\left(X_1, X_2\right).$$

Para X_1^U y X_2^U, de (4.19) tenemos

$$E\left(X_1^U X_2^U\right) = \alpha_1\alpha_2 \Pr\left(X_1^U = \alpha_1, X_2^U = \alpha_2\right) = \alpha_1\alpha_2 \min\{q_1, q_2\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} &Cov\left(X_1^U, X_2^U\right) = \alpha_1\alpha_2\left(\min\{q_1, q_2\} - q_1q_2\right) \\ &\geq \alpha_1\alpha_2\left(\Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2\right) - q_1q_2\right) = Cov\left(X_1, X_2\right). \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que

$$Cov\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right) \leq Cov\left(X_1, X_2\right) \leq Cov\left(X_1^U, X_2^U\right),$$

relación a la que podemos aplicar el teorema 4.11 para llegar al resultado buscado.

□

Así, en presencia de dependencia bivariante positiva, la relación más segura se da cuando los dos riesgos son mutuamente independientes y la más peligrosa cuando éstos son comonótonos. La ordenación de las parejas de riesgos que quedan entre estas dos coincide con la ordenación de sus respectivas covarianzas.

Interpretar, por último, cuál es la relación de dependencia que existe en este caso entre los dos riesgos que componen el par $\left(X_1^U, X_2^U\right)$.

Para contestar a esta pregunta asumiremos, sin pérdida de generalidad, que se cumple $\frac{1}{2} \leq p_1 \leq p_2$. En este caso de (4.19) se deducen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} &\Pr\left(X_2^U = 0/X_1^U = 0\right) = 1, \\ &\Pr\left(X_2^U = \alpha_2/X_1^U = 0\right) = 0, \\ &\Pr\left(X_1^U = 0/X_2^U = \alpha_2\right) = 0, \\ &\Pr\left(X_1^U = \alpha_1/X_2^U = \alpha_2\right) = 1. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Si $p_1 \leq p_2 \ (\Leftrightarrow q_1 \geq q_2)$, la primera de las relaciones presentadas nos indica que si el riesgo con mayor probabilidad de siniestralidad no da lugar a siniestro, aquél con menor probabilidad asociada tampoco lo dará. Igualmente, de la última de las relaciones se sigue que cuando el riesgo con menor probabilidad de siniestralidad de lugar a siniestro, el de mayor también lo dará. Así

$$\Pr\left(X_1^U = \alpha_1, X_2^U = \alpha_2\right) = \Pr\left(X_2 = \alpha_2\right) = q_2.$$

Estas conclusiones se siguen de la fuerte relación de dependencia positiva entre estos dos riesgos. En lo que se refiere a ésta, observar que los resultados de los teoremas 4.11 y 4.13 nos permiten afirmar que la correlación entre éstos dos riesgos es la máxima que puede existir fijadas sus marginales. La expresión de su covarianza resulta de (4.18),

$$Cov\left(X_1^U, X_2^U\right) = \alpha_1\alpha_2\left(\Pr\left(X_1^U + X_2^U = \alpha_1 + \alpha_2\right) - q_1q_2\right) = \alpha_1\alpha_2\, p_1q_2.$$

Así,

$$\rho_{X_1^U, X_2^U} = \frac{p_1q_2}{\sqrt{p_1p_2q_1q_2}} \geq \rho_{X_1,X_2}, \tag{4.22}$$

para cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2\left(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2\right)$.

Observemos que cuando $p_1 = p_2$, $\rho_{X_1^U, X_2^U} = 1$ y podemos afirmar para este caso, que el concepto de comonotonía entre dos riesgos (riesgos distribuidos según la cota superior de Fréchet) implica una correlación positiva perfecta entre los mismos.

4.3.5 Dominancia estocástica

Dentro de este apartado analizaremos, en primer lugar, si la ordenación de las covarianzas de dos elementos de la clase $R_2\left(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2\right)$ es equivalente a la ordenación que establece entre los mismos cualquier decisor cuya única restricción sea que sus decisiones se puedan modelizar a partir de una función de utilidad no decreciente o, alternativamente, una función de distorsión cualquiera. Nos planteamos, por tanto, si la ordenación entre covarianzas implica una relación de dominancia estocástica de aquel elemento con mayor covarianza entre sus componentes sobre el otro.

Sean (X_1, X_2) y (Y_1, Y_2) elementos de $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ para los cuales suponemos que se cumple la relación $Cov(X_1, X_2) \leq Cov(Y_1, Y_2)$. Definimos

$$\begin{aligned} V &= X_1 + X_2, \\ W &= Y_1 + Y_2. \end{aligned}$$

¿Se cumple la relación $V \leq_{st} W$? De (3.11) tenemos que ésta se cumplirá si

$$F_V(x) \geq F_W(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Por tratarse de elementos de la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, tenemos por el teorema 4.11 que $Cov(X_1, X_2) \leq Cov(Y_1, Y_2)$ es equivalente a $\Pr(V = \alpha_1 + \alpha_2) \leq \Pr(W = \alpha_1 + \alpha_2)$ y de la expresión deducida en el lema 4.10 para la función de distribución correspondiente a la suma de cualesquiera elementos en esta clase, tenemos

$$\left.\begin{array}{ll} F_V(x) \leq F_W(x) & \text{si } x < \max(\alpha_1, \alpha_2) \\ F_V(x) \geq F_W(x) & \text{si } x \geq \max(\alpha_1, \alpha_2) \end{array}\right\}$$

Así, V no está dominado estocásticamente por W y los resultados del apartado anterior no se pueden generalizar a este caso.

4.4 Generalización al caso de riegos con distribución arbitraria

4.4.1 Distribución bivariante

Sea $R_2(F_1, F_2)$ la clase de todas las parejas de riesgos con distribuciones marginales F_1 y F_2 dadas. Para cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(F_1, F_2)$ tenemos

$$F_1(x) = \Pr(X_1 \leq x), \; F_2(x) = \Pr(X_2 \leq x); \quad \forall x \geq 0, \tag{4.23}$$

siendo su función de densidad bivariante la dada en (4.1) y las de distribución bivariante acumulativa y desacumulativa las dadas en (4.2) y (4.3), respectivamente.

Al igual que antes, consideraremos en primer lugar todas las parejas incluidas en $R_2(F_1, F_2)$ y únicamente nos limitaremos a aquellas parejas con dependencia positiva cuando sepamos cuál es la relación de dependencia positiva que les debemos exigir para garantizar que están por encima de la independencia en lo que se refiere a su peligrosidad. Habíamos visto que en el caso particular en que F_1 y F_2 son distribuciones dicotómicas, el orden entre covarianzas de diferentes pares de riesgos implicaba orden stop-loss de los mismos. Analizaremos si esta conclusión se puede deducir también dentro de la clase más general de pares de riesgos con marginales arbitrarias dadas. Como veremos inmediatamente no será así y por ello introduciremos en el siguiente apartado una nueva relación de orden que, como veremos más adelante, implicará orden stop-loss y, por tanto, ordenación entre los diferentes pares de riesgos en función de su peligrosidad.

Consideremos dos elementos de la clase $R_2(F_1, F_2) : (X_1, X_2)$ e (Y_1, Y_2). Si se trata de encontrar una relación de orden entre estas parejas que implique orden stop-loss para el riesgo total que de cada una de ellas se deriva, podemos empezar comparando sus respectivas covarianzas. Consideraremos la inecuación

$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov(Y_1, Y_2)$$

e investigaremos si esta implica

$$X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2.$$

Aunque es habitual calcular covarianzas cuando se investiga la dependencia entre dos v.a., un único número no puede revelar la naturaleza de la dependencia adecuadamente y así, el orden entre las covarianzas no implicará, en general, orden stop-loss entre las diferentes sumas. Veámoslo con el siguiente contraejemplo

Contraejemplo

Consideremos la clase $R_2(F_1, F_2)$ con funciones de densidad de probabilidad $f_i \ (i = 1, 2)$, definidas por

$$f_i(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x = 0, 1, 2, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Sean$\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ y (X_1, X_2) elementos de $R_2(F_1, F_2)$ con $X_1^{\perp}$ y $X_2^{\perp}$ mutuamente independientes y con X_1 y X_2 cumpliendo

$$\Pr(X_2 = 0/X_1 = 0) = 1, \ \Pr(X_2 = 1/X_1 = 2) = 1, \ \Pr(X_2 = 2/X_1 = 1) = 1.$$

Definimos:

$$V = X_1^{\perp} + X_2^{\perp}$$

y

$$W = X_1 + X_2.$$

Por ser $X_1^{\perp}$ y $X_2^{\perp}$ independientes, se cumple

$$Cov\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right) = 0.$$

Si calculamos ahora la prima stop-loss para esta pareja bajo un nivel de retención igual, por ejemplo, a 3 resulta

$$E\left(V-3\right)_+ = \Pr\left(V=4\right) = \Pr\left(X_1=2\right)\Pr\left(X_2=2\right) = \frac{1}{9}.$$

Observemos que los riesgos X_1 y X_2 son los definidos en el contraejemplo presentado en la sección 4.2.1 (ver pág. 66). Habíamos visto entonces que

$$Cov\left(X_1, X_2\right) = \frac{1}{3}.$$

Observemos ahora que la prima stop-loss que para estos riesgos resulta bajo el mismo nivel de retención ($d=3$) es

$$E\left(W-3\right)_+ = \Pr\left(W=4\right) = \Pr\left(X_1=2, X_2=2\right) = 0.$$

Así

$$Cov\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right) \leq Cov\left(X_1, X_2\right)$$

pero

$$V \nleq_{sl} W.$$

En este caso más general no podemos, por tanto, analizar todos aquellos riesgos con covarianza no negativa, sino que deberemos exigir alguna condición más fuerte de dependencia positiva. Ésta se deduce en el siguiente apartado.

4.4.2 Un orden parcial para distribuciones bivariantes: Orden de correlación

4.4.2.1 Orden de correlación. Definición

Como acabamos de ver, si se trata de ordenar los diferentes elementos de la clase $R_2\left(F_1, F_2\right)$ debemos buscar alguna relación de orden alternativa a la ordenación de covarianzas. Introducimos para ello el denominado orden de correlación. Referencias al mismo se pueden encontrar en Barrow & Proschan (1975), Cambanis et al. (1976) y Tchen (1980). Para aplicaciones económicas ver también Epstein & Tanny (1980) y Aboudi & Thon (1993, 1995).

Definición 4.14
Sean (X_1, X_2) *e* (Y_1, Y_2) *dos elementos de* $R_2(F_1, F_2)$. *Diremos que* (X_1, X_2) *está menos correlacionado que* (Y_1, Y_2) *en orden de correlación,* $(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2)$, *si*

$$Cov\left(f\left(X_1\right), g\left(X_2\right)\right) \leq Cov\left(f\left(Y_1\right), g\left(Y_2\right)\right) \tag{4.24}$$

para todas las funciones f *y* g *no decrecientes para las cuales la covarianza exista.*

Damos a continuación una definición alternativa para el orden de correlación. Ésta fue deducida por Dhaene & Goovaerts (1996).

4.4.2.2 Una definición alternativa

A partir de las distribuciones bivariantes de los diferentes elementos de la clase $R_2(F_1, F_2)$, llegaremos ahora a una definición equivalente para el orden de correlación.

Teorema 4.15
Sean (X_1, X_2) *e* (Y_1, Y_2) *dos elementos de* $R_2(F_1, F_2)$. *Entonces los estamentos siguientes son equivalentes:*

(a) $(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2)$.

(b)

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq F_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \geq 0. \tag{4.25}$$

Demostración
$(a) \Rightarrow (b)$:
Supongamos que (a) se cumple, de (4.24) se sigue

$$Cov\left(f\left(X_1\right), g\left(X_2\right)\right) \leq Cov\left(f\left(Y_1\right), g\left(Y_2\right)\right)$$

para todas las funciones f y g no decrecientes para las cuales la covarianza exista. Para dos reales cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, elegimos las funciones no decrecientes $f(u) = I(u > x_1)$ y $g(u) = I(u > x_2)$, siendo I la función indicadora.

Entonces:

$$\begin{aligned} Cov\left(f\left(X_1\right),g\left(X_2\right)\right) &= E\left[I\left(X_1 > x_1, X_2 > x_2\right)\right] \\ &\quad -E\left[I\left(X_1 > x_1\right)\right]E\left[I\left(X_2 > x_2\right)\right] \\ Cov\left(f\left(Y_1\right),g\left(Y_2\right)\right) &= E\left[I\left(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2\right)\right] \\ &\quad -E\left[I\left(Y_1 > x_1\right)\right]E\left[I\ \left(Y_2 > x_2\right)\right]. \end{aligned}$$

y $Cov\left(f\left(X_1\right),g\left(X_2\right)\right) \leq Cov\left(f\left(Y_1\right),g\left(Y_2\right)\right)$ implica

$$E\left[I\ \left(X_1 > x_1, X_2 > x_2\right)\right] \leq E\left[I\ \left(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2\right)\right],$$

es decir,

$$\Pr\left(X_1 > x_1, X_2 > x_2\right) \leq \Pr\left(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2\right).$$

De donde

$$\begin{aligned} &\Pr\left(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\right) = \Pr\left(X_1 \leq x_1\right) - \Pr\left(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2\right) \\ &= \Pr\left(X_1 \leq x_1\right) - \Pr\left(X_2 > x_2\right) + \Pr\left(X_1 > x_1, X_2 > x_2\right) \\ &\leq \Pr\left(X_1 \leq x_1\right) - \Pr\left(X_2 > x_2\right) + \Pr\left(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2\right) \\ &= \Pr\left(Y_1 \leq x_1\right) - \Pr\left(Y_2 > x_2\right) + \Pr\left(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2\right) \\ &= \Pr\left(Y_1 \leq x_1, Y_2 \leq x_2\right). \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (a)$:
Supongamos que se cumple

$$F_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right) \leq F_{Y_1,Y_2}\left(x_1,x_2\right).$$

Entonces para cualesquiera dos funciones f, g no decrecientes

$$\Pr\left(f\left(X_1\right) \leq x_1, f\left(X_2\right) \leq x_2\right) \leq \Pr\left(f\left(Y_1\right) \leq x_1, f\left(Y_2\right) \leq x_2\right)$$

y aplicando (4.8) -ver lema 4.2-, encontramos

$$Cov\left(f\left(X_1\right),f\left(X_2\right)\right) \leq Cov\left(f\left(Y_1\right),f\left(Y_2\right)\right).$$

□

Observemos que la parte (b) del teorema indica que la probabilidad de que X_1 y X_2 tomen a la vez valores "pequeños" no es mayor que la probabilidad de que Y_1 e Y_2 tomen los mismos valores, sugiriendo así que Y_1 e Y_2 son positivamente más interdependientes que X_1 y X_2. Observar que ésta es equivalente a cada uno de los siguientes estamentos, válidos para todo $x_1, x_2 \geq 0$:

(c) $\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2) \geq \Pr(Y_1 \leq x_1, Y_2 > x_2)$.

(d) $\Pr(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2) \geq \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 \leq x_2)$.

(e) $S_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq S_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2)$.

Todos ellos se pueden interpretar de manera similar en términos de "más interdependencia positiva" entre Y_1 e Y_2 que entre X_1 y X_2, lo cual intuitivamente es lógico dada la equivalencia de los mismos con el orden de correlación existente entre estas dos parejas de riesgos

4.4.3 Orden de correlación y orden stop-loss

Estamos ahora en condiciones de demostrar que el orden de correlación entre diferentes elementos de la clase $R_2(F_1, F_2)$ implica orden stop-loss de los mismos. Así, el orden de correlación establecerá una ordenación dentro de la clase $R_2(F_1, F_2)$ válida para cualquier decisor adverso al riesgo. Para llegar a este resultado necesitamos del siguiente lema.

Lema 4.16
Para cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(F_1, F_2)$, se cumple

$$E(X_1 + X_2 - d)_+ = E(X_1) + E(X_2) - d + \int_0^d F_{X_1,X_2}(x, d-x)\, dx. \quad (4.26)$$

Demostración
Para cualquier v.a. X se cumple

$$E(X) = E(X)_+ + E(-X)_+ .$$

Así

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 - d) &= E(X_1) + E(X_2) - d \\ &= E(X_1 + X_2 - d)_+ + E(d - X_1 - X_2)_+ , \end{aligned}$$

con lo cual basta con demostrar

$$E(X_1 + X_2 - d)_+ = E(X_1) + E(X_2) - d - E(d - X_1 - X_2)_+ .$$

Sean x_1, x_2 y d reales cualesquiera no negativos y sea I la función indicadora. Observemos que se cumple

$$(d - x_1 - x_2)_+ = \int_0^d I(x_1 \leq x, x_2 \leq d - x)\, dx.$$

En efecto, si $(d - x_1 - x_2) < 0$, se cumplirá

$$x_1 + x_2 > d \Rightarrow \int_0^d I\left(x_1 \leq x, x_2 \leq d - x\right) dx = 0$$

mientras que si $(d - x_1 - x_2) \geq 0$, tenemos

$$\int_0^d I\left(x_1 \leq x, x_2 \leq d - x\right) = \int_{x_1}^{d - x_2} dx = d - x_1 - x_2.$$

Así, tomando esperanza matemática a ambos lados

$$E\left(d - X_1 - X_2\right)_+ = \int_0^d F_{X_1, X_2}\left(x, d - x\right) dx,$$

de donde resulta la expresión buscada.

$\square$

Es ahora inmediato demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.17
Sean (X_1, X_2) *y* (Y_1, Y_2) *dos elementos de* $R_2(F_1, F_2)$ *cumpliendo*

$$(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2),$$

entonces,

$$X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2.$$

Demostración
Por el teorema 4.15 sabemos que si $(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2)$, para todo $x_1, x_2 \geq 0$ se cumple

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \leq F_{Y_1, Y_2}(x_1, x_2)$$

y aplicando el lema 4.16 se obtiene inmediatamente el resultado buscado.

$\square$

De los resultados de este teorema podemos concluir que el orden de correlación es un buen instrumento para comparar el riesgo de los diferentes elementos de la clase $R_2(F_1, F_2)$. Éste resultará además fácil de comprobar en la mayoría de ocasiones prácticas a partir de la definición equivalente dada para este orden en el teorema 4.15.

4.4.4 La clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$

4.4.4.1 Definición

De los resultados del apartado anterior, se sigue que si queremos restringir la clase $R_2(F_1, F_2)$ a la subclase de parejas de riesgos que le suponen al asegurador un mayor riesgo global que en el caso independiente, subclase a la que llamaremos $R_{2,+}(F_1, F_2)$, deberemos exigir que cualesquiera dos riesgos, (X_1, X_2), incluidos en esta subclase cumplan

$$Cov\left(f\left(X_1\right), g\left(X_2\right)\right) \geq 0, \tag{4.27}$$

para todas las funciones f y g no decrecientes para las cuales la covarianza exista.

Dada una pareja de riesgos no parece ahora inmediato comprobar si pertenecen a la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$. El resultado del siguiente teorema nos facilitará esta tarea.

Teorema 4.18
Para $(X_1, X_2) \in R_2(F_1, F_2)$, las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $PQD(X_1, X_2)$.

(b) $Cov\left(f\left(X_1\right), g\left(X_2\right)\right) \geq 0$, *para todas las funciones f y g no decrecientes para las cuales la covarianza exista.*

Demostración
$(a) \Rightarrow (b)$:
Sean $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right) \in R_2(F_1, F_2)$ dos riesgos mutuamente independientes. De (4.4) se sigue que si existe $PQD(X_1, X_2)$, entonces

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)\ F_2(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \geq 0.$$

De donde por el teorema 4.15 resulta

$$Cov\left(f\left(X_1, X_2\right)\right) \geq Cov\left(f\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)\right) = 0,$$

siendo f y g dos funciones no decrecientes cualesquiera para las cuales la covarianza existe.

$(b) \Rightarrow (a)$:
Supongamos que para cualesquiera dos funciones f y g no decrecientes, se cumple

$$Cov\left(f\left(X_1\right), g\left(X_2\right)\right) \geq 0,$$

entonces se cumplirá también

$$E\left(f\left(X_1\right)\, g\left(X_2\right)\right) \geq E\left(f\left(X_1\right)\right)\, E\left(g\left(X_2\right)\right).$$

Para dos reales $x_1, x_2 \geq 0$ cualesquiera, elegimos las funciones no decrecientes

$$f\left(u\right) = I\left(u > x_1\right),\ g\left(u\right) = I\left(u > x_2\right),$$

siendo I la función indicadora. Entonces

$$\begin{aligned} E\left(I\left(X_1 > x_1\right), I\left(X_2 > x_2\right)\right) &= E\left(I\left(X_1 > x_1\right)\, I\left(X_2 > x_2\right)\right) \\ &\geq E\left(I\left(X_1 > x_1\right)\right)\, E\left(I\left(X_2 > x_2\right)\right), \end{aligned}$$

de donde

$$\Pr\left(X_1 > x_1, X_2 > x_2\right) \geq \Pr\left(X_1 > x_1\right) \Pr\left(X_2 > x_2\right).$$

$\square$

Así, la clase $R_{2,+}\left(F_1, F_2\right)$ es la clase de todas aquellas parejas de riesgos con dependencia cuadrática positiva. Obviamente, por los resultados del teorema 4.5, también están en esta clase aquellas parejas de riesgos asociados o con una relación de dependencia estocástica creciente.

4.4.4.2 Orden stop-loss

La ordenación de los diferentes pares de riesgos en $R_{2,+}\left(F_1, F_2\right)$ es inmediata a partir de los teoremas 4.15 y 4.17. En esta subclase, el orden de las respectivas funciones de distribución bivariantes es equivalente al orden stop-loss.

Para cada una de las parejas en la cartera con dependencia cuadrática positiva, si se trata de considerar su riesgo real, deberemos aproximar lo más exactamente posible sus respectivas probabilidades bivariantes asociadas. Se trata de garantizar que, en ningún caso, la distribución bivariante acumulativa/desacumulativa de probabilidad que resulte para cada pareja quede por debajo de la real.

4.4.4.3 Dependencia más segura y dependencia con más riesgo

Los resultados del apartado anterior nos permiten ahora deducir cuál es el elemento con más riesgo y cuál el más seguro dentro de la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$. Nuevamente entenderemos que el elemento más seguro es aquél que, para cualquier nivel de retención, minimiza la correspondiente prima stop-loss, mientras que el más peligroso es aquél que la maximiza El resultado será idéntico al obtenido en el caso de riesgos con distribución dicotómica. Así, el elemento más seguro de esta clase será el que se obtiene cuando los dos riesgos de la pareja son mutuamente independientes, siendo el más peligroso el obtenido en caso de comonotonía. Antes de llegar a este resultado, demostrar que la distribución bivariante de cualesquiera dos riesgos $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$ cumple

$$F_1(x_1) F_2(x_2) \leq F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}. \tag{4.28}$$

Todos los pares incluidos en $R_{2,+}(F_1, F_2)$ presentan dependencia cuadrática positiva. De la definición dada en (4.4) para esta relación de dependencia, se deduce la cota inferior de su distribución bivariante presentada en (4.28). En cuanto a la cota superior es inmediata puesto que independientemente de la distribución bivariante de esta pareja de riesgos, ésta siempre cumplirá

$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \leq \min\{\Pr(X_1 \leq x_1), \Pr(X_2 \leq x_2)\}, \ \forall x_1, x_2 \geq 0.$$

Observemos que la cota inferior de (4.28) es la función de distribución bivariante del par de riesgos incluidos en $R_{2,+}(F_1, F_2)$ y mutuamente independientes. Igualmente la cota superior es la distribución bivariante del par comonótono incluido en esta clase. Así, aplicando los teoremas 4.15 y 4.17 se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 4.19
Sean $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$, (X_1, X_2) y $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ elementos de la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$ con $X_1^{\perp}, X_2^{\perp}$ mutuamente independientes, PQD entre X_1, X_2 y X_1^U, X_2^U comonótonos. Entonces

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} \leq_{sl} X_1 + X_2 \leq_{sl} X_1^U + X_2^U. \tag{4.29}$$

De este teorema se deduce nuevamente que el elemento más seguro en la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$ es aquél con ambos riesgos mutuamente independientes, siendo el más peligroso el formado por dos riesgos comonótonos. La ordenación de las parejas que quedan entre estos dos pares coincide con la ordenación de sus respectivas funciones de distribución bivariantes acumulativas/desacumulativas.

Podemos ahora afirmar que, en general, cuando las distribuciones marginales están dadas, la comonotonía entre dos riesgos es la relación de dependencia más peligrosa. Observemos nuevamente que a este elemento le corresponde la máxima correlación que podemos encontrar entre dos riesgos incluidos en esta clase. En efecto, como acabamos de ver la distribución bivariante de cualquier otro elemento incluido en esta clase, $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$, tiene su distribución bivariante siempre por debajo de la correspondiente al elemento comonótono. Así, podemos aplicar el resultado del lema 4.2 y afirmar que

$$0 \leq Cov\left(X_1, X_2\right) \leq Cov\left(X_1^U, X_2^U\right),$$

donde la primera de las inecuaciones se cumple por presentar X_1 y X_2 dependencia cuadrática positiva.

Por tratarse de dos pares de riesgos con igualdad de marginales la inecuación anterior resulta equivalente a

$$0 \leq \varphi_{X_1, X_2} \leq \varphi_{X_1^U, X_2^U}. \tag{4.30}$$

Para el elemento comonótono podemos además deducir la expresión que, bajo cualquier nivel de retención, resulta para sus correspondientes primas stop-loss. Obviamente, ésta será la prima stop-loss máxima en la clase $R_2(F_1, F_2)$.

Por ser X_1^U y X_2^U comonótonos, de (4.12) se sigue

$$\left(X_1^U, X_2^U\right) \stackrel{d}{=} \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U)\right).$$

Así la cota superior de (4.29) es equivalente a

$$X_1 + X_2 \leq_{sl} F_1^{-1}(U) + F_2^{-1}(U) \tag{4.31}$$

De donde resulta la siguiente cota para las primas stop-loss de cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(F_1, F_2)$

$$E\left(X_1 + X_2 - d\right)_+ \leq \int_0^1 \left(F_1^{-1}(q) + F_2^{-1}(q) - d\right)_+ dq.$$

Consideremos ahora el caso particular en que las dos distribuciones marginales son iguales: $R_2(F_1, F_2) \equiv R_2(F, F)$. De (4.29) encontramos que el elemento con más riesgo de la clase $R(F, F)$ es $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ con

$$F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) = \min\left\{F(x_1), F(x_2)\right\}.$$

Observemos que la distribución bivariante de este elemento cumple

$$F_{X_1^U, X_2^U}(x, d-x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \leq d/2 \\ F(d-x) & \text{si } x > d/2, \end{cases}$$

de la cual se deduce aplicando el lema 4.16

$$\begin{aligned} & E\left(X_1^U + X_2^U - d\right)_+ = E(X_1) + E(X_2) - d + \int_0^{d/2} F(x)\, dx \\ & + \int_{d/2}^{d} F(d-x)\, dx = E(X_1) + E(X_2) - 2\int_0^{d/2} (1 - F(x))\, dx \\ & = 2\int_{d/2}^{\infty} (1 - F(x))\, dx = 2\, E(X_1 - d/2)_+ . \end{aligned}$$

De este resultado se deduce inmediatamente que para cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(F, F)$ se cumple

$$E(X_1 + X_2 - d)_+ \leq 2\, E(X_1 - d/2)_+ .$$

Aplicando este resultado al caso particular en que F es una distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$ resulta

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha\, x}.$$

En este caso particular, se cumplirá

$$E(X_1 + X_2 - d)_+ \leq 2\int_{d/2}^{\infty} e^{-\alpha\, x} dx = \frac{2}{\alpha}\, e^{-\alpha\, d/2}.$$

Esta cota superior para el caso exponencial fue deducida también por Heilmann (1986) utilizando algunas de las técnicas descritas en Meilijson & Nadas (1979).

4.4.5 Orden de correlación y dominancia estocástica

En este apartado trataremos de generalizar los resultados del apartado anterior al caso de un decisor cualquiera que no necesariamente sea adverso al riesgo, es decir, cuya única restricción sea que sus decisiones puedan ser modelizadas a partir de una función de utilidad/función de distorsión no decreciente.

En primer lugar investigaremos si el orden de correlación entre dos elementos de la clase $R_2(F_1, F_2)$ implica dominancia estocástica de uno sobre el otro.

Sean (X_1, X_2) y (Y_1, Y_2) dos elementos de la clase $R_2(F_1, F_2)$ tales que

$$(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2).$$

¿Significa esta relación que, para cualquier decisor, (X_1, X_2) es preferido a (Y_1, Y_2) por suponer el primero un menor riesgo? Para que esta afirmación fuera cierta $Y_1 + Y_2$ debería dominar estocásticamente a $X_1 + X_2$, es decir, para cualquier $x \geq 0$ se debería cumplir

$$F_{X_1+X_2}(x) \geq F_{Y_1+Y_2}(x).$$

Con el siguiente contraejemplo se demuestra que está desigualdad, en general, no tiene porque cumplirse.

Contraejemplo
Sean X_1, X_2, Y_1 e Y_2 v.a. uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 1]$ con

$$X_2 \equiv 1 - X_1 \qquad Y_1 \equiv Y_2.$$

Observemos que Y_1 e Y_2 son mutuamente comonótonos, con lo cual por los resultados vistos anteriormente, sabemos que se cumplirá

$$(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2).$$

Veamos ahora como se comportan las respectivas distribuciones de la suma. En el caso de la correspondiente a $X_1 + X_2$, tenemos que para cualquier $x \geq 0$,

$$F_{X_1+X_2}(x) = \Pr(X_1 + X_2 \leq x) = \Pr(1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

con lo que se cumplirá

$$\begin{array}{ll} F_{X_1+X_2}(x) \leq F_{Y_1+Y_2}(x) & \text{si } x < 1 \\ F_{X_1+X_2}(x) \geq F_{Y_1+Y_2}(x) & \text{si } x \geq 1. \end{array}$$

Así $X_1 + X_2$ no está estocásticamente dominado por $Y_1 + Y_2$ y ninguno de los resultados del apartado anterior se puede generalizar al caso de un decisor cualquiera que no necesariamente sea adverso al riesgo.

Capítulo 5

Ordenación multivariante

5.1 Introducción

En este capítulo queremos ampliar el análisis realizado en el capítulo anterior al caso multivariante. La justificación de esta pretensión es clara si tenemos en cuenta que la ruptura de la hipótesis de independencia no puede hacerse en base a la limitación al análisis de dependencias bivariantes. Así, siguiendo el mismo planteamiento, introducimos aquí la posibilidad de que en la cartera puedan existir dependencias entre dos o más riesgos. Extraeremos de la cartera una secuencia formada por m riesgos ($m \geq 2$) y para ésta analizaremos las diferentes relaciones de dependencia multivariantes que puedan darse entre los riesgos individuales que la componen. Resultarán, de nuevo, diferentes secuencias con idénticas distribuciones marginales para cada uno de los riesgos individuales.

La estructura de este capítulo es similar a la del capítulo anterior. Así, en el apartado 5.2 presentamos la generalización multivariante de algunos de los conceptos de dependencia bivariante positiva tratados en el capítulo anterior. En el caso de dependencias multivariantes positivas aparecerán conceptos tales como dependencia positiva de orden, dependencia cuadrática lineal positiva o la llamada dependencia positiva acumulativa que, como veremos, serán de gran utilidad para la obtención de nuestros resultados. La aplicación al campo actuarial de estos conceptos de dependencia multivariante positiva se debe a Denuit, Dhaene & Ribas (2000, 2001). En estos trabajos se demuestra que si queremos centrarnos en aquellas secuencias multivariantes con mayor riesgo global que en el caso independiente (en orden stop-loss) deberemos exigir que éstas presenten como mínimo dependencia acumulativa positiva. Para las secuencias de riesgos que cumplan con esta propiedad trataremos, al igual que en el capítulo anterior, de encontrar alguna relación que nos permita establecer la ordenación que de las mismas realizaría cualquier decisor adverso al riesgo. En el caso multivariante no resulta tan sencillo como en el bivariante encontrar alguna medida estadística que refleje la dependencia entre los diferentes riesgos que componen una secuencia y que a la vez nos ordene las diferentes secuencias en base al riesgo global de las mismas. Por ello, en el apartado 5.3, únicamente acotamos el riesgo de la secuencia considerada. Llegaremos a la relación de dependencia que da lugar a la secuencia con menor y mayor riesgo, respectivamente. Veremos que estas secuencias resultan ser la generalización multivariante de las obtenidas en el capítulo anterior. Estos resultados están basados en los trabajos de Dhaene & Goovaerts (1997), Dhaene, Wang, Young & Goovaerts (1997) y Denuit, Dhaene & Ribas (2000, 2001).

Por último, en el apartado 5.4, introducimos el orden supermodular considerado por Baüerle (1997a,b), Baüerle & Rieder (1997), Shaked & Shanthikumar (1997) y otros. Su introducción en la literatura actuarial se debe a Müller (1997) (ver también Baüerle & Müller (1998)). Este autor demuestra la efectividad del orden supermodular para ordenar las secuencias de riesgos que resultan bajo diferentes hipótesis de dependencia en función de su riesgo global. Como veremos, esta relación permitirá llegar a la ordenación que de estas secuencias multivariantes establecería cualquier decisor adverso al riesgo. Obviamente ésta nos servirá para ordenar las que a nosotros nos interesarán: aquellas con dependencia acumulativa positiva. Si bien este resultado es de gran interés desde un punto de vista teórico, presenta problemas en la práctica puesto que en la mayoría de ocasiones resulta difícil comprobar la existencia de orden supermodular entre dos secuencias de riesgos con idénticas distribuciones marginales para los riesgos individuales que las componen. Así, queda una gran línea de investigación abierta en lo que se refiere a la búsqueda de relaciones manejables que permitan esta ordenación tanto en el caso de carteras de riesgos con distribución dicotómica como en el caso más general de riesgos con distribuciones individuales arbitrarias. Especialmente interesante resultaría encontrar alguna definición equivalente del orden supermodular que fuera fácilmente manejable, tal como la obtenida por Dhaene & Goovaerts (1996) para el orden de correlación.

5.2 Algunos conceptos de dependencia multivariante positiva

En la literatura estadística, aparecen numerosos conceptos para modelizar la dependencia positiva entre v.a. multivariantes. Algunos de estos conceptos serán, como veremos, útiles en la ciencia actuarial. A partir de ellos seremos capaces de generalizar algunos de los resultados obtenidos en el capítulo anterior. En lo que sigue dentro de este apartado, presentamos los trabajos de Denuit, Dhaene & Ribas (2000, 2001).

En primer lugar recogemos algunos conceptos estadísticos de dependencia multivariante positiva. Éstos son válidos para v.a. cualesquiera aunque nosotros nos restringiremos al caso que nos interesa, secuencias formadas por m riesgos ($m \geq 2$). Llamaremos a éstos $X_1, \cdots, X_m$ siendo sus funciones de densidad de probabilidad $f_{X_1}, \cdots, f_{X_m}$ y sus respectivas funciones de distribución acumulativas y desacumulativas $F_{X_1}, \cdots, F_{X_m}$ y $S_{X_1}, \cdots, S_{X_m}$ -ver (3.1), (3.2) y (3.3)-. La función de densidad de probabilidad multivariante de la secuencia $(X_1, \cdots, X_m)$, $f_{X_1, \cdots, X_m}$, es

$$f_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = \Pr(X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m), \quad x_1, \cdots, x_m \geq 0. \quad (5.1)$$

La función de distribución bivariante acumulativa de $(X_1, \cdots, X_m)$, $F_{X_1,\cdots,X_m}$, será

$$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = \Pr(X_1 \leq x_1, \cdots, X_m \leq x_m), \quad x_1, \cdots, x_m \geq 0, \quad (5.2)$$

siendo la desacumulativa correspondiente, $S_{X_1,\cdots,X_m}$, la que se obtiene de

$$S_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = \Pr(X_1 > x_1, \cdots, X_m > x_m), \quad x_1, \cdots, x_m \geq 0. \quad (5.3)$$

Observemos que en el caso en que los riesgos $X_1, \cdots, X_m$ son independientes (5.1), (5.2) y (5.3) se reducen al producto de las respectivas funciones marginales, es decir, para cualesquiera $x_1, \cdots, x_m \geq 0$ se cumple

$$\begin{aligned} f_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \\ F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \\ S_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) &= \prod_{i=1}^{n} S_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

Veamos a continuación algunas de las características de estas funciones de distribución multivariante bajo ciertas medidas estadísticas de dependencia positiva.

En general, entenderemos que entre estos riesgos existe dependencia multivariante positiva, cuando la probabilidad de que los riesgos que componen una secuencia cualquiera tomen a la vez valores "grandes"/"pequeños" es mayor que en el caso en que son independientes. Esto nos lleva inmediatamente a definir el siguiente concepto.

5.2.1 Dependencia positiva de orden

Definición 5.1
Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ *una secuencia de riesgos cualesquiera.*

(a) *Diremos que* $\mathbf{X}$ *presenta dependencia positiva de orden inferior,* $PLOD$*, si para todo* $x_1, \cdots, x_m \geq 0$*, se cumple*

$$\Pr(X_1 \leq x_1, \cdots, X_m \leq x_m) \geq \prod_{i=1}^{m} \Pr(X_i \leq x_i). \tag{5.4}$$

(b) *Diremos que* $\mathbf{X}$ *presenta dependencia positiva de orden superior,* $PUOD$*, si para todo* $x_1, \cdots, x_m \geq 0$*, se cumple*

$$\Pr(X_1 > x_1, \cdots, X_m > x_m) \geq \prod_{i=1}^{m} \Pr(X_i > x_i). \tag{5.5}$$

Cuando las respectivas distribuciones multivariantes de $\mathbf{X}$ *cumplan* (5.4) *y* (5.5) *a la vez, diremos que* $\mathbf{X}$ *presenta dependencia positiva de orden,* POD*.*

Las inecuaciones presentadas en (5.4) y (5.5) se conocen como inecuaciones de Sidak. Un estudio de la precisión de las mismas se puede encontrar, por ejemplo, en Glaz & Johnson (1984).

Observemos que el concepto POD puede ser interpretado como una generalización multivariante de la dependencia cuadrática positiva definida para dos riesgos -ver (4.4) y (4.7)-. Otras tres generalizaciones de este concepto pueden ser recogidas de la literatura estadística. Las presentamos a continuación.

5.2.2 Dependencia cuadrática positiva por parejas

Definición 5.2

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ *una secuencia de riesgos cualesquiera. Diremos que* $\mathbf{X}$ *presenta dependencia cuadrática positiva por parejas, PQD por parejas, si para todo* $i, j = 1, \cdots, m,\ i \neq j$, *existe* $PQD\,(X_i, X_j)$. *Es decir, si para todo* $x_i, x_j \geq 0$ *se cumple*

$$\Pr(X_i > x_i, X_j > x_j) \geq \Pr(X_i > x_i)\Pr(X_j > x_j)$$

o alternativamente una cualquiera de las relaciones equivalentes dadas en (4.4), (4.5) *y* (4.6).

Obviamente, para $m = 2$, se cumple

$$\mathbf{X}\ POD \Leftrightarrow PQD \text{ en } \mathbf{X} \text{ por parejas,}$$

relación que deja de ser válida para $m \geq 3$.

En el siguiente teorema veremos que cuando existe PQD en $\mathbf{X}$ por parejas, la estructura de covarianzas revela mucha información sobre la dependencia que existe entre los riesgos $X_1, \cdots, X_m$.

Teorema 5.3

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ *con* PQD *en* $\mathbf{X}$ *por parejas, entonces*

(a) $Cov\,(X_i, X_j) \geq 0$, *para todo* $i \neq j$.

(b) *Dados dos conjuntos disjuntos* A *y* B, $A, B \subseteq \{1, \cdots, m\}$, *las secuencias* $\{X_k,\ k \in A\}$ *y* $\{X_k,\ k \in B\}$ *son mutuamente independientes si, y sólo si,*

$$Cov\,(X_i, X_j) = 0,\ \textit{para todo } i \in A,\ j \in B.$$

Demostración

(a) Para todo $i \neq j$ $(i, j = 1, \cdots, m)$, se cumple $PQD\,(X_i, X_j)$, de donde aplicando el teorema 4.5 se sigue el resultado buscado.

(b) Consideremos dos conjuntos disjuntos A y B, $A, B \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$.

$\Rightarrow$ Si las secuencias $\{X_k,\ k \in A\}$ y $\{X_k,\ k \in B\}$ son mutuamente independientes, entonces se sigue inmediatamente que $Cov\,(X_i, X_j) = 0$, para todo $i \in A$, $j \in B$.

$\Leftarrow$ Supongamos que para las secuencias $\{X_k,\ k \in A\}$ y $\{X_k,\ k \in B\}$ se cumple $Cov\,(X_i, X_j) = 0$, para todo $i \in A,\ j \in B$. Denuit, Lefèvre & Mesfioui (1999) demuestran que

$$E\,(X_i X_j) = \int_{x_i=0}^{+\infty} \int_{x_j=0}^{+\infty} \Pr\,(X_i > x_i, X_j > x_j)\, dx_i dx_j.$$

Por ser la covarianza entre X_i y X_j igual a 0, de esta expresión tenemos

$$\int_{x_i=0}^{+\infty} \int_{x_j=0}^{+\infty} [\Pr\,(X_i > x_i, X_j > x_j) - \Pr\,(X_i > x_i) \Pr\,(X_j > x_j)]\, dx_i dx_j = 0.$$

El integrando [.] de esta última expresión es no negativo para todo $x_i, x_j \geq 0$ (por cumplirse $PQD\,(X_i, X_j)$). Así

$$\Pr\,(X_i > x_i, X_j > x_j) = \Pr\,(X_i > x_i) \Pr\,(X_j > x_j)\,,\ \forall x_i, x_j \geq 0,$$

de donde se sigue que X_i y X_j son mutuamente independientes.

$\square$

5.2.3 Dependencia cuadrática lineal positiva

Newman (1984) propuso la siguiente extensión del concepto bivariante de dependencia cuadrática positiva.

Definición 5.4
Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ *una secuencia de riesgos tal que para cualesquiera constantes no negativas* $a_1, a_2, \cdots$ *y para cualesquiera conjuntos disjuntos* $A, B \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$ *se cumple*

$$\sum_{i \in A} a_i X_i \ \text{y} \ \sum_{i \in B} a_i X_i \ \text{son } PQD. \tag{5.6}$$

Entonces diremos que $\mathbf{X}$ *presenta dependencia cuadrática lineal positiva, LPQD.*

Observemos que $LPQD$ es una condición simétrica, en el sentido, que decir que $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ son $LPQD$ es equivalente a decir que $\left(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \cdots, X_{\pi(m)}\right)$ cumplen esta condición, para cualquier permutación π en $\{1, 2, \cdots, m\}$.

Es evidente que la dependencia cuadrática lineal positiva es una relación de dependencia más fuerte que la dependencia cuadrática positiva por parejas. Así

$$LPQD \text{ en } \mathbf{X} \Rightarrow PQD \text{ en } \mathbf{X} \text{ por parejas.}$$

A partir del concepto de $LPQD$ definimos, en el siguiente apartado, la que llamaremos relación de dependencia acumulativa positiva, PCD. Ésta indicará una relación de dependencia positiva más débil para los riesgos en $(X_1, \cdots, X_m)$ que la aquí tratada.

5.2.4 Dependencia acumulativa positiva

Definición 5.5
Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ *una secuencia de riesgos cualesquiera. Diremos que* $\mathbf{X}$ *presenta dependencia acumulativa positiva,* PCD, *si para cualquier conjunto* $I \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$ *y para todo* $j \notin I$

$$\sum_{i \in I} X_i \ \text{y} \ X_j \ \text{son } PQD. \tag{5.7}$$

Es inmediato comprobar que

$$LPQD \text{ en } \mathbf{X} \Rightarrow PCD \text{ en } \mathbf{X} \Rightarrow PQD \text{ en } \mathbf{X} \text{ por parejas.}$$

Con respecto a la relación de dependencia aquí tratada, observar que el concepto de PCD extiende la relación de PQD bivariante a cualquier dimensión arbitraria y, a su vez, mantiene el significado intuitivo de la PQD. Si los riesgos en $\mathbf{X}$ son PCD, la probabilidad de que $\sum_{i \neq j} X_i$ y X_j tomen a la vez valores "grandes"/"pequeños" es mayor que en el caso en que los riesgos en $\mathbf{X}$ son independientes. En particular, cuando los riesgos $X_1, \cdots, X_m$ son PCD, las inecuaciones

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\sum_{i \neq j} X_i > t_1 \,/\, X_j > t_2\right) &\geq \Pr\left(\sum_{i \neq j} X_i > t_1\right), \\
\Pr\left(\sum_{i \neq j} X_i \leq t_1 \,/\, X_j \leq t_2\right) &\geq \Pr\left(\sum_{i \neq j} X_i \leq t_1\right)
\end{aligned}$$

se cumplen para cualquier $j = 1, \cdots, m$ con $\Pr(X_j > t_2) > 0$ y $\Pr(X_j > t_2) > 0$, $t_1, t_2 \geq 0$. Éstas nos indican que el conocimiento de que uno de los riesgos de la secuencia, sea éste X_j, ha sido "grande"/"pequeño" incrementa la probabilidad de que los siniestros agregados producidos por los $m-1$ riesgos restantes en la secuencia sean también "grandes"/"pequeños".
Esta conclusión es válida también para secuencias de riesgos con $LPQD$.

Veremos a lo largo de este capítulo que basta una relación de dependencia acumulativa positiva entre los riesgos en $\mathbf{X}$ para que esta secuencia tenga más riesgo para el asegurador que en el caso independiente.

5.2.5 Asociación

Presentamos aquí la generalización multivariante del concepto de asociación entre dos riesgos propuesta en el capítulo anterior.

Definición 5.6
Sean $(X_1, \cdots, X_m)$ *una secuencia de riesgos cualesquiera. Diremos que* $X_1, \cdots, X_m$ *son riesgos asociados,* $A(X_1, \cdots, X_m)$, *si*

$$Cov\left(f\left(X_1, \cdots, X_m\right), g\left(X_1, \cdots, X_m\right)\right) \geq 0, \tag{5.8}$$

para cualquier par de funciones $f, g : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ *no decrecientes en cada uno de sus argumentos, para las cuales la covarianza exista.*

En lo que sigue hablaremos de funciones no decrecientes en $\mathbf{R}_+^m$ y entenderemos que el no decrecimiento se cumple en cada uno de los argumentos.

Presentamos a continuación, algunas de las principales propiedades que cumple la asociación multivariante de riesgos (para la demostración de las mismas, ver por ejemplo, Esary, Proschan & Walkup (1967)). Se trata de generalizaciones multivariantes de las recogidas para el caso bivariante.

1. Un conjunto con un sólo riesgo es asociado.
2. Funciones no decrecientes de riesgos asociados son asociadas.

   Sean $X_1, \cdots, X_m$ riesgos asociados y sean $h_1, \cdots, h_n : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ funciones no decrecientes cualesquiera. Entonces, $h_1(X_1, \cdots, X_m), \cdots, h_n(X_1, \cdots, X_m)$ son asociadas.
3. Cualquier subconjunto de riesgos asociados es asociado.
4. Si dos conjuntos de riesgos asociados son independientes, entonces su unión es un conjunto de riesgos asociados.

De las propiedades 1 y 4, se deduce inmediatamente la siguiente propiedad adicional.

5. Un conjunto de riesgos independientes es asociado.

Igualmente, de la propiedad 2 se deduce la siguiente relación entre las esperanzas de un conjunto de riesgos asociados.

Teorema 5.7
Sean $(X_1, \cdots, X_m)$ *un conjunto de riesgos asociados. Entonces,*

$$E\left(\prod_{i=1}^{m} X_i\right) \geq \prod_{i=1}^{m} E\left(X_i\right). \tag{5.9}$$

Demostración
Sean $X_1, \cdots, X_m$ riesgos asociados. Definimos las funciones no decrecientes $f, g : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$

$$f\left(x_1, \cdots, x_m\right) = x_1, \qquad g\left(x_1, \cdots, x_m\right) = \prod_{i=2}^{m} x_i.$$

X_1 y $\prod_{i=2}^{m} X_i$ son asociados, por ser funciones no decrecientes de riesgos asociados. Así por (5.8)

$$\begin{aligned} Cov\left(X_1, \prod_{i=2}^{m} X_i\right) &= E\left(X_1 \cdot \prod_{i=2}^{m} X_i\right) - E\left(X_1\right) E\left(\prod_{i=2}^{m} X_i\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow E\left(\prod_{i=1}^{m} X_i\right) \geq E\left(X_1\right) E\left(\prod_{i=2}^{m} X_i\right). \end{aligned}$$

Igualmente X_2 y $\prod_{i=3}^{m} X_i$ son riesgos asociados y para ellos se cumple

$$E\left(\prod_{i=2}^{m} X_i\right) \geq E\left(X_2\right) E\left(\prod_{i=3}^{m} X_i\right).$$

Siguiendo con el mismo procedimiento llegamos a

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{m} X_i\right) &\geq E\left(X_1\right) E\left(\prod_{i=2}^{m} X_i\right) \geq E\left(X_1\right) E\left(X_2\right) E\left(\prod_{i=3}^{m} X_i\right) \\ &\geq \cdots \geq \prod_{i=1}^{m} E\left(X_i\right). \end{aligned}$$

□

El resultado que sigue fue obtenido por Barlow & Proschan (1975) y es válido para v.a. de Bernoulli, es decir, v.a. bivariantes definidas en 0 y 1. Nos serviremos de él para resultados posteriores.

Teorema 5.8
Si $X_1, \cdots, X_m$ *son v.a. de Bernoulli asociadas, entonces* $1-X_1, \cdots, 1-X_m$ *son también v.a. de Bernoulli asociadas.*

Demostración
Sean $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$, $\mathbf{1} - \mathbf{X} = (1 - X_1, \cdots, 1 - X_m)$, con $X_1, \cdots, X_m$ asociadas. Por (5.8), se cumple

$$Cov\left(f\left(\mathbf{X}\right), g\left(\mathbf{X}\right)\right) \geq 0,$$

para cualquier par de funciones f y g no decrecientes en $\mathbf{R}_+^m$. Consideremos las funciones no decrecientes $f^*, g^* : \mathbf{R}_+^m \rightarrow \mathbf{R}$, definidas por

$$f^*\left(\mathbf{x}\right) = 1 - f\left(\mathbf{1} - \mathbf{x}\right), \quad g^*\left(\mathbf{x}\right) = 1 - g\left(\mathbf{1} - \mathbf{x}\right).$$

Para las v.a. de Bernoulli incluidas en $\mathbf{1} - \mathbf{X}$, se cumple

$$\begin{aligned} Cov\left(f\left(\mathbf{1} - \mathbf{X}\right), g\left(\mathbf{1} - \mathbf{X}\right)\right) &= Cov\left(1 - f^*\left(\mathbf{X}\right), 1 - g^*\left(\mathbf{X}\right)\right) \\ &= Cov\left(f^*\left(\mathbf{X}\right), g^*\left(\mathbf{X}\right)\right) \geq 0, \end{aligned}$$

donde la última de las inecuaciones se cumple por ser f^* y g^* no decrecientes y por la asociación de las variables incluidas en $\mathbf{X}$.

$\square$

A partir de los resultados anteriores, se deduce el siguiente teorema.

Teorema 5.9
Para cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m)$,

$$A\left(X_1, \cdots, X_m\right) \Rightarrow POD\left(X_1, \cdots, X_m\right).$$

Demostración
De la definición 5.1, tenemos que existe POD en $(X_1, \cdots, X_m)$ si para todo $x_1, \cdots, x_m \geq 0$, se cumplen a la vez las dos inecuaciones presentadas en (5.4) y (5.5), que recordemos son

$$\begin{aligned} \Pr\left(X_1 \leq x_1, \cdots, X_m \leq x_m\right) &\geq \prod_{i=1}^{m} \Pr\left(X_i \leq x_i\right), \\ \Pr\left(X_1 > x_1, \cdots, X_m > x_m\right) &\geq \prod_{i=1}^{m} \Pr\left(X_i > x_i\right). \end{aligned}$$

Para $(X_1, \cdots, X_m)$ asociados y para cualesquiera $x_1, \cdots, x_m$, definimos las funciones indicadoras

$$I(X_i > x_i), \ (i = 1, \cdots, m).$$

Por ser funciones no decrecientes en X_i, $I(X_1 > x_1), \cdots, I(X_m > x_m)$ son v.a. de Bernoulli asociadas (propiedad 2 de la asociación). Aplicando ahora (5.9), tenemos

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 > x_1, \cdots, X_m > x_m) = E(I(X_1 > x_1, \cdots, X_m > x_m)) \\
&= E\left(\prod_{i=1}^{m} I(X_i > x_i)\right) \geq \prod_{i=1}^{m} E(I(X_i > x_i)) = \prod_{i=1}^{m} \Pr(X_i > x_i).
\end{aligned}$$

Observemos ahora que por el teorema 5.8, las v.a. de Bernoulli

$$I(X_i \leq x_i) = 1 - I(X_i > x_i), \ (i = 1, \cdots, m).$$

son asociadas, por serlo $I(X_i > x_i), \ (i = 1, \cdots, m)$. Así, aplicando nuevamente (5.9), resulta

$$\begin{aligned}
&\Pr(X_1 \leq x_1, \cdots, X_m \leq x_m) = E(I(X_1 \leq x_1, \cdots, X_m \leq x_m)) \\
&= E\left(\prod_{i=1}^{m} I(X_i \leq x_i)\right) \geq \prod_{i=1}^{m} E(I(X_i \leq x_i)) = \prod_{i=1}^{m} \Pr(X_i \leq x_i).
\end{aligned}$$

$\square$

De este teorema, vemos que la asociación entre riesgos implica POD. Así, los riesgos individuales de secuencias de riesgos asociados presentan una mayor correlación positiva que en el caso en que son independientes. El siguiente resultado se deduce de la propiedad 2 de la asociación y refuerza esta conclusión.

Para cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m)$,

$$\begin{aligned}
A(X_1, \cdots, X_m) \ &\Rightarrow \ PLQD \text{ en } (X_1, \cdots, X_m) \\
&\Rightarrow \ PCD \text{ en } (X_1, \cdots, X_m) \\
&\Rightarrow \ PQD \text{ en } (X_1, \cdots, X_m) \text{ por parejas.}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Así, los resultados del teorema 5.3 pueden aplicarse también al caso de una secuencia de riesgos asociados.

5.2.6 Crecimiento condicional en secuencia

Definición 5.10
Sea $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ *una secuencia de riesgos cualesquiera. Diremos que los riesgos en* $\mathbf{X}$ *presentan un crecimiento condicional en secuencia,* $CIS\,(X_1, \cdots, X_m)$ *si para cualquier* $i \in \{2, \cdots, m\}$,

$$\Pr\left(X_i > x_i / X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}\right)$$

es no decreciente en el dominio de $X_1, \cdots, X_{i-1}$ *respecto a* $x_1, \cdots, x_{i-1}$, *para todo* $x_i \geq 0$.

Observemos que cuando $m = 2$ estamos ante el concepto de dependencia estocástica creciente entre dos riesgos. Así, el crecimiento condicional en secuencia puede ser considerado como una generalización multivariante de este concepto de dependencia bivariante.

Cohen & Sackrowitz (1995) dan definiciones equivalentes de este concepto. No se reproducen aquí sus resultados ya que superan nuestros propósitos.

Barlow & Proschan (1975, pág. 147) y Joe (1997, pág. 16) demuestran que el concepto de crecimiento condicional en secuencia es más fuerte que el concepto de asociación. De este resultado y del presentado en (5.10) podemos deducir las siguientes relaciones entre los conceptos de dependencia multivariante positiva tratados.
Para cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m)$ se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} CIS\,(X_1, \cdots, X_m) &\Rightarrow A\,(X_1, \cdots, X_m) \Rightarrow PLQD \text{ en } (X_1, \cdots, X_m) \\ &\Rightarrow PCD \text{ en } (X_1, \cdots, X_m) \\ &\Rightarrow PQD \text{ en } (X_1, \cdots, X_m) \text{ por parejas.} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Observemos que cuando $(X_1, \cdots, X_m)$ son mutuamente independientes

$$\Pr\left(X_i > x_i / X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}\right) = \Pr\left(X_i > x_i / X_1 = x_1', \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}'\right)$$

para $0 \leq x_j \leq x_j'$ $(j = 1, \cdots, i-1)$.

Así, una secuencia formada por riesgos mutuamente independientes presenta crecimiento condicional en secuencia y de (5.11) y el resultado del teorema 5.9, podemos afirmar que cumple todas las relaciones de dependencia positiva presentadas dentro de este apartado.

Al igual que en el capítulo anterior, queremos finalizar este apartado de conceptos de dependencia multivariante positiva con el análisis de la relación de dependencia que existe en caso de comonotonía. Ampliamos así el concepto de comonotonía al caso multivariante. Veremos a lo largo de este capítulo que ésta resulta ser de nuevo la relación de dependencia más "peligrosa" con que puede encontrarse el asegurador entre los riesgos de su cartera.

5.2.7 Riesgos comonótonos

Definición 5.11

Sean $(X_1, \cdots, X_m)$ riesgos cualesquiera. Diremos que $X_1, \cdots, X_m$ son mutuamente comonótonos si existe un riesgo cualquiera Z y unas funciones $u_1, \cdots, u_m$ no decrecientes en $\mathbf{R}_+$, tales que

$$(X_1, \cdots, X_m) \stackrel{d}{=} (u_1(Z), \cdots, u_m(Z)), \tag{5.12}$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ indica igualdad en la distribución multivariante de probabilidad.

Presentamos a continuación una generalización del teorema 4.7 al caso multivariante. Este resultado nos ayudará a interpretar la relación de dependencia que existe entre los que riesgos que componen una secuencia como la descrita.

Teorema 5.12

Sean $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m(F_1, \cdots, F_m)$. Diremos que los riesgos $X_1, \cdots, X_m$ son mutuamente comonótonos si se cumple una cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes

(1) *Existe un riesgo cualquiera Z y funciones $u_1, \cdots, u_m$ no decrecientes en $\mathbf{R}_+$, tales que*

$$(X_1, \cdots, X_m) \stackrel{d}{=} (u_1(Z), \cdots, u_m(Z)).$$

(2) *Su función de distribución multivariante, $F_{X_1,\cdots,X_m}$, viene dada por la cota superior de Fréchet, es decir, para todo $x_1, \cdots, x_m \geq 0$, se cumple*

$$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = \min\{F_{X_1}(x_1), \cdots, F_{X_m}(x_m)\}. \tag{5.13}$$

(3) *Para cualquier v.a. U uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$, se cumple*

$$(X_1, \cdots, X_m) \stackrel{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U), \cdots, F_{X_m}^{-1}(U)\right). \tag{5.14}$$

Demostración
La demostración es una generalización inmediata de la realizada en el teorema 4.7.

□

Destacar que también en el caso multivariante, los riesgos individuales resultan ser función no decreciente de una misma v.a. U uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$. Así, siguiendo con la nomenclatura del capítulo anterior, representaremos por $X_1^U, \cdots, X_m^U$ a la secuencia de riesgos con marginales $F_{X_1}, \cdots, F_{X_m}$ y mutuamente comonótonos. Analizaremos con mayor detalle esta relación de dependencia a lo largo de este capítulo.

5.3 Secuencias de riesgos multivariantes

Para una secuencia cualquiera formada por m riesgos dependientes $(m \geq 2)$ queremos, dentro de este apartado, deducir cuáles son las relaciones de dependencia que le supondrán al asegurador un mayor riesgo global que en el caso independiente, en el sentido que la distribución de la siniestralidad de estos m riesgos siempre esté por encima, en orden stop-loss, que la correspondiente en caso de independencia. El procedimiento para llegar a este resultado será similar al del capítulo anterior. Así consideraremos el conjunto de todas las secuencias de riesgos con marginales dadas (igualdad en las distribuciones de probabilidad de los riesgos individuales) y dentro de éste deduciremos cuál es la relación de dependencia positiva, de entre las presentadas en el anterior epígrafe, que debemos exigir para lograr nuestro propósito. Diferenciaremos de nuevo según se trate de una cartera de riesgos con distribuciones marginales dicotómicas o con cualquier otra forma. La nomenclatura utilizada será similar a la del capítulo anterior. En el caso de m riesgos procedentes de una cartera cuyos riesgos individuales presenten una distribución dicotómica, hablaremos de secuencias incluidas en $R_m\left(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m\right)$ para referirnos a las secuencias que resultan de todas las posibles relaciones de dependencia que pueden existir entre estos m riesgos. La clase $R_{m,+}\left(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m\right)$ será la de aquellas secuencias que cumplan con la condición de dependencia positiva que nos garantice una secuencia con mayor riesgo global que en el caso independiente.

En el caso de m riesgos procedentes de una cartera con cualquier otra forma en la distribución marginal de los riesgos individuales, hablaremos de las clases $R_m\left(F_1, \cdots, F_m\right)$ y $R_{m,+}\left(F_1, \cdots, F_m\right)$ respectivamente.

Definimos, a continuación, las distribuciones de probabilidad multivariantes que resultan en cada caso.

5.3.1 Distribución multivariante

5.3.1.1 Riesgos con distribución dicotómica

Para $i = 1, 2, \cdots, m$, sean α_i y p_i reales arbitrarios pero fijados, cumpliendo $\alpha_i > 0$ y $0 < p_i < 1$. Consideremos la secuencia de riesgos $X_1, \cdots, X_m$ con función de densidad de probabilidad de X_i $(i = 1, \cdots, m)$ dicotómica, es decir, definida por

$$\begin{aligned} f_{X_i}(0) &= \Pr(X_i = 0) = p_i, \\ f_{X_i}(\alpha_i) &= \Pr(X_i = \alpha_i) = q_i = 1 - p_i. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Sea $R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ la clase de todas las secuencias formadas por m riesgos con funciones marginales de densidad de probabilidad dadas por (5.15). La diferencia entre las secuencias de riesgos incluidas en esta clase viene marcada por sus respectivas distribuciones de probabilidad multivariantes ya que en el caso de las marginales son idénticas. Para una secuencia cualquiera incluida en esta clase, $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, la función de distribución acumulativa, $F_{X_1,\cdots,X_m}$, es la definida en (5.2), siendo la desacumulativa, $S_{X_1,\cdots,X_m}$, la dada en (5.3).

En el teorema 4.12 habíamos demostrado que en el caso bivariante, dos riesgos cualesquiera con covarianza no negativa cumplían también todas las relaciones de dependencia positiva entonces presentados. De este teorema es inmediato deducir que en el caso multivariante, la secuencia $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m) \in R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ que cumpla $Cov(X_i, X_j) \geq 0$ $(\forall i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j)$ presenta dependencia cuadrática positiva por parejas dada la equivalencia entre $Cov(X_i, X_j) \geq 0$ y $PQD(X_i, X_j)$. Así

$$PQD \text{ en } \mathbf{X} \text{ por parejas} \Leftrightarrow Cov(X_i, X_j) \geq 0 \ \ (\forall i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j).$$

No obstante, del siguiente contraejemplo se deduce que esta equivalencia no se cumple en el caso de dependencia acumulativa positiva.

Contraejemplo

Consideremos la clase $R_3(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con funciones marginales de densidad de probabilidad, f_i, $(i = 1, 2, 3)$, definidas por

$$f_i(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } x = 0, \\ 1/3 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Sean $(X_1, X_2, X_3) \in R_3(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con las siguientes relaciones de dependencia:

$$\Pr(X_2 = 1/X_1 = 1) = \Pr(X_3 = 1/X_1 = 1) = \Pr(X_3 = 1/X_2 = 1) = 1/2$$

y

$$\begin{aligned} \Pr(X_3 = 1/X_1 = 1, X_2 = 1) &= \Pr(X_2 = 1/X_1 = 1, X_3 = 1) \\ &= \Pr(X_1 = 1/X_2 = 1, X_3 = 1) = 0. \end{aligned}$$

De estas relaciones de dependencia se deduce inmediatamente que

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 1) = \Pr(X_1 = 1, X_3 = 1) = \Pr(X_2 = 1, X_3 = 1) = 1/6$$

y

$$\Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.$$

Aplicando ahora (4.14) tenemos

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_3) = 1/18 > 0.$$

Así podemos afirmar por los resultados del teorema 4.12 que estos riesgos presentan dependencia cuadrática positiva por parejas. No obstante observemos que esta dependencia no es acumulativa ya que si, por ejemplo, nos centramos en $X_1 + X_2$ y X_3 estos dos riesgos no presentan dependencia cuadrática positiva puesto que

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 + X_2 > 1, X_3 > 0) &= \Pr(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0 \\ &< 1/18 = \Pr(X_1 + X_2 > 1) \Pr(X_3 > 0). \end{aligned}$$

Veremos que la dependencia acumulativa positiva es la forma mínima de dependencia positiva para garantizar secuencias con más riesgo (en orden stop-loss) que en el caso independiente. Así, al tratar dependencias multivariantes no podremos definir la clase $R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ restringiéndonos a aquellas secuencias de riesgos cuyas respectivas covarianzas sean no negativas (como hacíamos en el caso bivariante) sino que deberemos limitarnos a aquellas con dependencia acumulativa positiva. Ésta será la misma condición que resulte para el caso más general de secuencias incluidas en $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ cuya definición procedemos a realizar en el apartado siguiente.

5.3.1.2 Riesgos con distribución arbitraria

Sea $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ la clase de todas las secuencias de riesgos con distribuciones marginales $F_1, \cdots, F_m$ dadas. Para cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m(F_1, \cdots, F_m)$, tenemos

$$F_i(x) = \Pr(X_i \leq x); \ \forall x \geq 0 \ \ (i = 1, \cdots, m), \tag{5.16}$$

siendo su función de densidad multivariante la dada en (5.1) y las de distribución multivariante acumulativa y desacumulativa las dadas en (5.2) y (5.3), respectivamente.

Estamos ahora en condiciones de deducir cuáles de los elementos de esta clase están por encima de la independencia en lo que se refiere a su peligrosidad. Este resultado se deduce en el siguiente apartado para el caso general de secuencias de riesgos incluidas en la clase $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ que acabamos de definir.

5.3.2 Las clases $R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ y $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$

En este apartado se demuestra que a aquellas secuencias de riesgos con dependencia acumulativa positiva, PCD, les corresponde una distribución de la suma que queda siempre por encima, en orden stop-loss, a la que resulta para el caso independiente. Este resultado está recogido en Denuit, Dhaene & Ribas (2001).

En el apartado anterior hemos visto que en el caso de riesgos dicotómicos, los conceptos de dependencia positiva más débiles que la dependencia acumulativa positiva no implicaban esta última. No existe, por tanto, justificación para tratar en este momento por separado a este tipo de riesgos y podemos limitarnos a demostrar este resultado en la clase general $R_m(F_1, \cdots, F_m)$.

Teorema 5.13
Sean $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m(F_1, \cdots, F_m)$ *con* PCD *en* $(X_1, \cdots, X_m)$, *entonces*

$$X_1^{\perp} + \cdots + X_m^{\perp} \leq_{sl} X_1 + \cdots + X_m,$$

donde $X_1^{\perp}, \cdots, X_m^{\perp}$ *son riesgos con marginales* F_i *de* X_i $(i = 1, \cdots, m)$ *y mutuamente independientes.*

Demostración
Sin pérdida de generalidad, los riesgos $X_i^{\perp}$ y X_j pueden ser considerados independientes $(\forall i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, m)$. Por ser $\left(X_1^{\perp}, \cdots, X_m^{\perp}\right)$ y $(X_1, \cdots, X_m)$ elementos de $R_m(F_1, \cdots, F_m)$, se cumple $X_i^{\perp} \overset{d}{=} X_i$ $(i = 1, \cdots, m)$ de donde surge inmediatamente el cumplimiento de la relación $X_1^{\perp} \leq_{sl} X_1$.
Supongamos ahora que

$$X_1^{\perp} + \cdots + X_k^{\perp} \leq_{sl} X_1 + \cdots + X_k$$

se cumple para $k = 1, \cdots, m-1$. Del teorema 3.10 tenemos que cada una de estas inecuaciones se mantiene bajo la convolución de ambas distribuciones con la de un tercer riesgo independiente. Así, la última de estas inecuaciones da lugar a

$$X_1^{\perp} + \cdots + X_{m-1}^{\perp} + X_m^{\perp} \leq_{sl} X_1 + \cdots + X_{m-1} + X_m^{\perp}. \tag{5.17}$$

Si tenemos en cuenta ahora que existe PCD en $(X_1, \cdots, X_m)$, tenemos que X_m y $X_1 + \cdots + X_{m-1}$ presentan PQD, de donde por el teorema 4.19 resulta

$$X_1 + \cdots + X_{m-1} + X_m^{\perp} \leq_{sl} X_1 + \cdots + X_{m-1} + X_m. \tag{5.18}$$

Combinando (5.17) y (5.18) llegamos al resultado buscado.

□

De la relación en (5.11), tenemos que este resultado se pueden generalizar al caso en que exista dependencia cuadrática lineal positiva, asociación o crecimiento condicional en secuencia de los riesgos incluidos en $(X_1, \cdots, X_m)$.

De este teorema se deduce inmediatamente que para cualquier decisor adverso al riesgo, aquellas secuencias de riesgos incluidas en $R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ y $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ que presenten PCD le suponen un mayor riesgo global que en el caso independiente. Así podemos reducir estas clases a las subclases de secuencias de riesgos incluidas en éstas con dependencia acumulativa positiva. Llamaremos $R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ y $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ a cada una de estas subclases. Cualquier secuencia de riesgos incluida en una de estas dos subclases presenta PCD y por los resultados del teorema 5.13 sabemos que la hipótesis de independencia para los riesgos individuales que la componen lleva a infravalorar el riesgo que realmente existe. Esto constituye, sin duda, una estrategia peligrosa puesto que de hecho se está sustituyendo la distribución real de los siniestros agregados que de estos riesgos se derivan por una menos peligrosa en términos de orden stop-loss. Esta conclusión generaliza la obtenida en el capítulo anterior cuando únicamente contemplábamos dependencias entre dos únicos riesgos.

Está claro que si nos restringimos a las clases $R_{m,+}(p_1,\cdots,p_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ y $R_{m,+}(F_1,\cdots,F_m)$ la relación de dependencia más segura la encontramos en aquellas secuencias formada por riesgos mutuamente independientes. Deducimos en los siguientes dos apartados cuál es la relación de dependencia más peligrosa en cada una de estas dos subclases. Nuevamente ésta la encontramos en caso de comonotonía, secuencia para la que, en cada caso, interpretaremos las relaciones de dependencia que surgen.

5.3.3 Dependencia más segura y dependencia con más riesgo en la clase $R_{m,+}(p_1,\cdots,p_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

Del resultado del teorema 5.13 es claro que en la clase $R_{m,+}(p_1,\cdots,p_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ el elemento más seguro es aquel formado por m riesgos mutuamente independientes. Por los resultados del apartado 5.2.6 podemos asegurar que este elemento forma parte de $R_{m,+}(p_1,\cdots,p_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ ya que en caso de independencia podemos garantizar crecimiento condicional en secuencia, propiedad que nos asegura la existencia de dependencia acumulativa positiva.

En cuanto al elemento con más riesgo será, como veremos, aquel formado por m riesgos mutuamente comonótonos. Antes de obtener este resultado, queremos analizar algunas de las relaciones de dependencia que resultan para una secuencia de riesgos mutuamente comonótonos. De éstas se seguirá inmediatamente la inclusión de esta secuencia de riesgos en la clase $R_{m,+}(p_1,\cdots,p_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$.

Sean $\left(X_1^U,\cdots,X_m^U\right) \in R_m(p_1,\cdots,p_m;\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ con X_i^U $(i=1,\cdots,m)$ mutuamente comonótonos. A efectos interpretativos asumimos, sin pérdida de generalidad, que los riesgos $X_1^U,\cdots,X_m^U$ están ordenados de manera que se cumple

$$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m, \tag{5.19}$$

lo cual significa que los riesgos con menor índice tienen una mayor probabilidad de dar lugar a siniestro.

Por ser la distribución multivariante de $\left(X_1^U,\cdots,X_m^U\right)$ la cota superior de

Fréchet, estos riesgos cumplen las siguientes relaciones válidas para todo i, j cumpliendo $1 \leq i < j \leq m$,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X_i^U = 0, X_j^U = 0\right) &= \Pr\left(X_k^U \leq \alpha_k, X_i^U = 0, X_j^U = 0\right)_{k=1,\cdots,m;\ k\neq i,j} \\
&= \min\{1, p_i, p_j\} = p_i = \Pr\left(X_i = 0\right), \\
\Pr\left(X_i^U = 0, X_j^U = \alpha_j\right) &= \Pr\left(X_i = 0\right) - \Pr\left(X_i^U = 0, X_j^U = 0\right) = 0, \\
\Pr\left(X_i^U = \alpha_i, X_j^U = \alpha_j\right) &= 1 - \Pr\left(X_i = 0\right) - \Pr\left(X_j = 0\right) \\
+\Pr\left(X_i^U = 0, X_j^U = 0\right) &= 1 - p_i - p_j + p_i = 1 - p_j = \Pr\left(X_j = \alpha_j\right).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Así, en este caso particular,

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X_j^U = 0 / X_i^U = 0\right) &= 1, \\
\Pr\left(X_j^U = \alpha_j / X_i^U = 0\right) &= 0, \\
\Pr\left(X_i^U = 0 / X_j^U = \alpha_j\right) &= 0, \\
\Pr\left(X_i^U = \alpha_i / X_j^U = \alpha_j\right) &= 1,
\end{aligned}$$

relaciones de dependencia que generalizan las obtenidas en (4.21) para el caso bivariante y que nos indican, ahora, que si un riesgo no da lugar a siniestro, todos aquellos con menor probabilidad de siniestralidad no lo darán. Igualmente, cuando un riesgo de lugar a siniestro, todos aquellos con mayor probabilidad de siniestralidad lo darán también.

A partir de las relaciones de dependencia que acabamos de obtener es ahora inmediato comprobar que $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right)$ presentan crecimiento condicional en secuencia. Recordemos que esta relación de dependencia positiva se da si para cualquier $i = 2, \cdots, m$, la probabilidad condicionada

$$\Pr\left(X_i^U > x_i / X_1^U = x_1, \cdots, X_{i-1}^U = x_{i-1}\right) \tag{5.21}$$

resulta no decreciente en el dominio de $X_1^U, \cdots, X_{i-1}^U$ respecto a $x_1, \cdots, x_{i-1}$, para todo $x_i \geq 0$. Por pertenecer $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right)$ a la clase $R_m\left(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m\right)$, la relación en (5.21) es equivalente a

$$\begin{aligned}
& \Pr\left(X_i^U > 0 / X_1^U = x_1, \cdots, X_{i-1}^U = x_{i-1}\right) \\
= \ & \Pr\left(X_i^U = \alpha_i / X_1^U = x_1, \cdots, X_{i-1}^U = x_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

expresión que en el dominio de $X_1^U, \cdots, X_{i-1}^U$ únicamente toma valor no nulo en $x_j = 0$ y $x_j = \alpha_j$ $(j = 1, \cdots, i-1)$. De la última relación presentada en (5.20), tenemos que en el dominio de $X_1^U, \cdots, X_{i-1}^U$

$$\Pr\left(X_1^U = x_1, \cdots, X_{i-1}^U = x_{i-1}, X_i^U = \alpha_i\right) = \begin{cases} 1 - p_i & \text{si } x_j = \alpha_j,\, j = 1, \cdots, i-1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

de donde se deduce inmediatamente el no decrecimiento de (5.21) en este dominio.

Así la secuencia de riesgos mutuamente comonótonos de la clase $R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ presenta crecimiento condicional en secuencia. De (5.11) y el resultado del teorema 5.9, podemos afirmar que cumple todas las relaciones de dependencia presentadas en el apartado 5.2 y garantizar su pertenencia a la subclase $R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. Veremos a continuación que éste es el elemento con mayor riesgo de los incluidos en esta clase. Este resultado fue obtenido por primera vez por Dhaene & Goovaerts (1997).

El riesgo total de $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \in R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ con X_i^U $(i = 1, \cdots, m)$ mutuamente comonótonos, vendrá dado por la v.a. suma

$$S^* = X_1^U + \cdots + X_m^U, \tag{5.22}$$

los valores de la cual se reducen, por los resultados vistos, al conjunto $0, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$.

Observemos que la distribución de probabilidad que resulta para la v.a. S^* es

$$F_{S^U}(s) = \Pr\left(S^U \leq s\right) = \begin{cases} p_1, & \text{si } 0 \leq s < \alpha_1, \\ \\ p_{i+1} & \text{si } \alpha_1 + \cdots + \alpha_i \leq s < \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i+1} \\ & \qquad i = 1, 2, \cdots, m-1, \\ \\ 1 & \text{si } s \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_m. \end{cases} \tag{5.23}$$

En efecto de las relaciones en (5.20), resulta

$$F_{S^U}(0) = \Pr\left(X_1^U = 0, \cdots, X_m^U = 0\right) = p_1.$$

Cuando $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \leq s < \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i+1};\ i = 1, 2, \cdots, m-1,$

$$
\begin{aligned}
F_{S^U}(s) &= \Pr\left(S^U = 0\right) + \Pr\left(S^U = \alpha_1\right) + \Pr\left(S^U = \alpha_1 + \alpha_2\right) \\
&+ \cdots + \Pr\left(S^U = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i\right) = \Pr\left(X_1^U = 0, \cdots, X_m^U = 0\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{i} \Pr\left(X_1^U = \alpha_1, \cdots, X_j^U = \alpha_j, X_{j+1}^U = 0, \cdots, X_m^U = 0\right) \\
&= p_1 + \sum_{j=1}^{i} \Pr\left(X_j^U = \alpha_j, X_{j+1}^U = 0\right) = p_1 + \sum_{j=1}^{i} (\Pr\left(X_{j+1} = 0\right) \\
&- \Pr\left(X_j^U = 0, X_{j+1}^U = 0\right)) = p_1 + \sum_{j=1}^{i} \left(p_{j+1} - p_j\right) = p_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Mientras que si $s \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$,

$$
\begin{aligned}
F_{S^U}(s) &= \Pr\left(S^U = 0\right) + \Pr\left(S^U = \alpha_1\right) + \cdots + \Pr\left(S^U = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m\right) \\
&= \Pr\left(X_1^U = 0, \cdots, X_m^U = 0\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \Pr\left(X_1^U = \alpha_1, \cdots, X_i^U = \alpha_i,\right. \\
&\left. X_{i+1}^U = 0, \cdots, X_m^U = 0\right) + \Pr\left(X_1^U = \alpha_1, \cdots, X_m^U = \alpha_m\right) \\
&= p_1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left(p_{i+1} - p_i\right) + \left(1 - p_m\right) = 1.
\end{aligned}
$$

Una vez deducida la distribución de la v.a. suma, sabemos el riesgo total que se deriva de una secuencia de riesgos mutuamente comonótonos. Nos planteamos ahora cuál es la "peligrosidad" de la misma en comparación con la que se deriva del resto de secuencias incluidas dentro de la clase $R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. En el siguiente teorema se demuestra que ésta es la relación de dependencia más peligrosa que puede existir en esta clase, en el sentido que, bajo cualquier nivel de retención, maximiza las correspondientes primas stop-loss.

Teorema 5.14
Sean $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \in R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ *con* X_i^U $(i = 1, \cdots, m)$ *mutuamente comonótonos. Entonces para cualesquiera* $(X_1, \cdots, X_m) \in R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, *se cumple*

$$S \leq_{sl} S^U,$$

donde $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$ *y* $S^U = \sum_{i=1}^{m} X_i^U$.

Demostración

Sean las v.a.

$$S_j^U = X_1^U + \cdots + X_j^U, \quad S_j = X_1 + \cdots + X_j; \quad j = 1, \cdots, m.$$

Denotaremos a sus respectivas funciones de distribución por $F_{S_j^U}$ y F_{S_j} respectivamente. De (5.23), tenemos

$$F_{S_j^U}(s) = \begin{cases} p_1, & \text{si } 0 \leq s < \alpha_1, \\ p_{i+1} & \begin{array}{r} \text{si } \alpha_1 + \cdots + \alpha_i \leq s < \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i+1} \\ i = 1, 2, \cdots, j-1, \end{array} \\ 1 & \text{si } s \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j. \end{cases}$$

Para $j = 1$, inmediatamente se deduce $S_1 \leq_{sl} S_1^*$.
Supongamos que se cumple $S_j \leq_{sl} S_j^U$, es decir,

$$E\left(S_j - d\right)_+ \leq_{sl} E\left(S_j^U - d\right)_+, \quad \forall d \geq 0.$$

En general,

$$E\left(S - d\right)_+ = \int_d^\infty \left(1 - F_S(s)\right) ds = E(S) - d + \int_0^d F_S(s)\, ds$$

y por cumplirse $E(S_j) = E\left(S_j^U\right)$ (al tratarse de riesgos con iguales distribuciones marginales), $S_j \leq_{sl} S_j^U$ equivale a

$$\int_0^d F_{S_j}(s)\; ds \leq \int_0^d F_{S_j^U}(s)\; ds.$$

Entonces encontramos que para $s < \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$,

$$F_{S_{j+1}}(s) = \Pr\left(S_j \leq s, X_{j+1} = 0\right) \leq F_{S_j}(s).$$

Así, cuando $d < \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$,

$$\int_0^d F_{S_{j+1}}(s)\, ds \leq \int_0^d F_{S_j}(s)\, ds \leq \int_0^d F_{S_j^U}(s)\, ds = \int_0^d F_{S_{j+1}^U}(s)\, ds,$$

de donde

$$E\left(S_{j+1} - d\right)_+ \leq E\left(S_{j+1}^U - d\right)_+, \quad 0 \leq d < \alpha_1 + \cdots + \alpha_j.$$

Con el fin de probar que la inecuación anterior se cumple también para $d \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$, observemos que

$$\begin{aligned}
&F_{S_{j+1}}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_j) = \Pr(X_1 + \cdots + X_{j+1} \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j) \\
&\geq \Pr(X_1 + \cdots + X_{j+1} \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j; X_{j+1} = 0) \\
&= \Pr(X_{j+1} = 0) \Pr(X_1 + \cdots + X_{j+1} \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j / X_{j+1} = 0) \\
&= \Pr(X_{j+1} = 0) = p_{j+1} = F_{S^U_{j+1}}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_j).
\end{aligned}$$

Evidentemente, para todo $s \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{j+1}$,

$$F_{S_{j+1}}(s) = F_{S^U_{j+1}} = 1.$$

Así, para $s \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$,

$$F_{S_{j+1}}(s) \geq F_{S^U_{j+1}},$$

de manera que para todo $d \geq \alpha_1 + \cdots + \alpha_j$

$$\begin{aligned}
E(S_{j+1} - d)_+ &= \int_d^\infty \left(1 - F_{S_{j+1}}(s)\right) ds \\
&\leq \int_d^\infty \left(1 - F_{S^U_{j+1}}(s)\right) ds = E\left(S^U_{j+1} - d\right)_+,
\end{aligned}$$

con lo que se completa la demostración por inducción.

$\square$

Observemos que el teorema se ha probado para la clase general $R_m(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. Así, independientemente de la relación de dependencia que exista entre los riesgos de una secuencia cualquiera, sus primas stop-loss quedan siempre por debajo de las que resultan al realizar la hipótesis de mutua comonotonía entre los riesgos del conjunto. En consecuencia, la hipótesis de comonotonía acota, por encima, el riesgo total de la secuencia. Obviamente esta conclusión también es válida para los riesgos de la clase $R_{m,+}(p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.

5.3.4 Dependencia más segura y dependencia con más riesgo en la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$

En este apartado queremos generalizar los resultados anteriores a la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$. Nuevamente del teorema 5.13 es claro que en esta clase el elemento más seguro es aquél formado por m riesgos mutuamente independientes.

Igualmente, por los resultados del apartado 5.2.6, podemos asegurar que este elemento forma parte de $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ ya que en caso de independencia podemos garantizar crecimiento condicional en secuencia, propiedad que nos asegura la existencia de dependencia acumulativa positiva.

En cuanto al elemento con más riesgo será nuevamente el formado por m riesgos mutuamente comonótonos. En base al trabajo de Dhaene, Wang, Young & Goovaerts (1997), analizaremos la relación de dependencia, así como el riesgo total que se deriva de una secuencia de riesgos mutuamente comonótonos. Estos autores encuentran sus resultados dentro del marco de la teoría dual de Yaari presentada en los capítulos 2 y 3. Nos restringiremos a este marco dentro de este apartado.

Comprobaremos, en primer lugar, que la secuencia de riesgos mutuamente comonótonos incluida en la clase $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ pertenece a la subclase $R_{m,+}$ $(F_1, \cdots, F_m)$ y además cumple todas las relaciones de dependencia positiva presentadas en el apartado 5.2. Este resultado se debe a Denuit, Dhaene & Ribas (2000).

Sea $\mathbf{X}^U = \left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \in R_m(F_1, \cdots, F_m)$ con X_i^U $(i = 1, \cdots, m)$ mutuamente comonótonos. De (5.14) tenemos que

$$\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \stackrel{d}{=} \left(F_1^{-1}(U), \cdots, F_m^{-1}(U)\right).$$

con U uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$. De esta igualdad en la distribución multivariante de probabilidad se sigue la asociación en $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right)$. En efecto, dadas dos funciones no decrecientes ϕ_1 y $\phi_2 : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$, tenemos que

$$Cov\left(\phi_1\left(\mathbf{X^U}\right), \phi_2\left(\mathbf{X^U}\right)\right) = Cov\left(\psi_1(U), \psi_2(U)\right),$$

siendo

$$\psi_i(U) = \phi_i\left(F_1^{-1}(U), \cdots, F_m^{-1}(U)\right),\ i = 1, 2.$$

Es inmediato comprobar que ψ_1 y ψ_2 son funciones no decrecientes por serlo ϕ_1, ϕ_2 y $F_1^{-1}, \cdots F_m^{-1}$. Así

$$Cov\left(\psi_1(U), \psi_2(U)\right) \geq 0$$

por ser U es un riesgo asociado (propiedad 1 de la asociación).

La asociación de $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right)$ nos permite afirmar que esta secuencia está incluida en la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ puesto que de las relaciones en (5.10) se deduce la existencia de dependencia acumulativa positiva. Obviamente también presentará dependencia cuadrática lineal positiva, dependencia cuadrática positiva por parejas y dependencia positiva de orden. Demostramos, por último, que los riesgos en $\mathbf{X}^U$ presentan incluso crecimiento condicional en secuencia. Recordemos que éste existirá si para cualquier $i \in \{2, \cdots, m\}$,

$$\Pr\left(X_i^U > x_i / X_1^U = x_1, \cdots, X_{i-1}^U = x_{i-1}\right) \tag{5.24}$$

resulta no decreciente en el dominio de $X_1^U, \cdots, X_{i-1}^U$ respecto a $x_1, \cdots, x_{i-1}$, para todo $x_i \geq 0$. De (5.14) tenemos que (5.24) resulta equivalente a

$$\begin{aligned} & \Pr\left(F_i^{-1}(U) > x_i / F_1^{-1}(U) = x_1, \cdots, F_{i-1}^{-1}(U) = x_{i-1}\right) \\ = \; & \Pr\left(F_i^{-1}(U) > x_i / F_j(x_j - 0) \leq U \leq F_j(x_j),\; j = 1, \cdots, i-1\right), \end{aligned}$$

donde U es una v.a. uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$ y $(x_j - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (x_j - \varepsilon)$.

Esta última expresión es claramente no decreciente en $x_1, \cdots, x_{i-1}$ puesto que a medida que éstos aumentan, aumenta el valor de U y mayor resulta $\Pr\left(F_i^{-1}(U) > x_i\right)$ para cualquier valor de $x_i \geq 0$.

Así, podemos concluir que el elemento de $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ formado por riesgos comonótonos cumple todas las relaciones de dependencia positiva presentadas en la sección 5.2. Obviamente pertenece a la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ y será, como veremos, el elemento más peligroso de los incluidos en esta clase. Para llegar a este resultado, necesitaremos de los siguientes dos teoremas válidos para cualquier secuencia de riesgos mutuamente comonótonos.

Teorema 5.15
Sean $X_1^U, \cdots, X_m^U$ riesgos mutuamente comonótonos. Entonces para $0 \leq p \leq 1$, se cumple

$$\begin{aligned} F^{-1}_{X_1^U + \cdots + X_m^U}(p) &= \sum_{i=1}^m F^{-1}_{X_i}(p), \\ S^{-1}_{X_1^U + \cdots + X_m^U}(p) &= \sum_{i=1}^m S^{-1}_{X_i}(p), \end{aligned} \tag{5.25}$$

siendo las funciones F_X^{-1} y S_X^{-1} las definidas en (3.4) *y* (3.5).

Demostración
Realizaremos la demostración para el caso en que las funciones $F_{X_1}, \cdots, F_{X_m}$, $F_{X_1 + \cdots + X_m}$ son estrictamente crecientes y continuas (en cuyo caso las respectivas funciones desacumulativas son estrictamente decrecientes y continuas). La

demostración para el caso general se encuentra en Dennenberg (1994) pág. 57 y siguientes.

Si $X_1^U, \cdots, X_m^U$ son riesgos comonótonos, de (5.14) tenemos que se cumple

$$\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \stackrel{d}{=} \left(F_{X_1}^{-1}(U), \cdots, F_{X_m}^{-1}(U)\right),$$

siendo U una v.a. cualquiera uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$.

Consideremos un real p, cumpliendo $0 \leq p \leq 1$. La función de distribución $F_{X_1+\cdot\cdot+,X_m}$, cumple

$$\begin{aligned} & F_{X_1^U+\cdots+X_m^U}\left(F_{X_1}^{-1}(p)+\cdots+F_{X_m}^{-1}(p)\right)=\Pr\left(X_1^U+\cdots+X_m^U \leq F_{X_1}^{-1}(p)+\cdot\cdot\right. \\ & \quad \left.\cdot+F_{X_m}^{-1}(p)\right)=\Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U)+\cdots+F_{X_m}^{-1}(U) \leq F_{X_1}^{-1}(p)+\cdots+F_{X_m}^{-1}(p)\right) \\ & =\Pr(U \leq p)=p. \end{aligned}$$

Así

$$F_{X_1^U+\cdots+X_m^U}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{m} F_{X_i}^{-1}(p).$$

Con el fin de demostrar la segunda de las igualdades, recordemos que por (5.12) se cumple $\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \stackrel{d}{=} \left(u_1(Z), \cdots, u_m(Z)\right)$, siendo Z un riesgo cualquiera y $u_1, \cdots, u_m$ funciones no decrecientes cualesquiera. Para una v.a. U uniformemente distribuida en $[0,1]$, consideremos las funciones no decrecientes $S_{X_i}^{-1}(1-U)$, $(i=1,\cdots,m)$. Entonces se cumple

$$\left(X_1^U, \cdots, X_m^U\right) \stackrel{d}{=} \left(S_{X_1}^{-1}(1-U), \cdots, S_{X_m}^{-1}(1-U)\right).$$

Consideremos un real p, cumpliendo $0 \leq p \leq 1$. La función de distribución desacumulativa $S_{X_1+\cdots+X_m}$, cumple

$$\begin{aligned} & S_{X_1^U+\cdots+X_m^U}\left(S_{X_1}^{-1}(p)+\cdots+S_{X_m}^{-1}(p)\right)=\Pr\left(X_1^U+\cdots+X_m^U > S_{X_1}^{-1}(p)+\cdots\right. \\ & \quad \left.+S_{X_m}^{-1}(p)\right)=\Pr\left(S_{X_1}^{-1}(1-U)+\cdots+S_{X_m}^{-1}(1-U) > S_{X_1}^{-1}(p)+\cdots\right. \\ & \quad \left.+S_{X_m}^{-1}(p)\right) \stackrel{1}{=} \Pr(1-U \leq p)=p. \end{aligned}$$

De donde,

$$S_{X_1^U+\cdots+X_m^U}^{-1}(p)=\sum_{i=1}^{m} S_{X_i}^{-1}(p).$$

□

A partir de este teorema se deduce el siguiente resultado.

[1]Por ser S_i^{-1} $(i=1,\cdots,n)$ funciones decrecientes

Teorema 5.16
Sean $X_1^U, \cdots, X_m^U$ *riesgos mutuamente comonótonos. Entonces,*

$$H_g\left(X_1^U + \cdots + X_m^U\right) = \sum_{i=1}^{m} H_g\left(X_i\right), \tag{5.26}$$

siendo $H_g(.)$ *el equivalente cierto que resulta para estos riesgos en la teoría dual de Yaari -dado en* (2.12)*- bajo una función de distorsión cualquiera.*

Demostración
De (3.9) y (5.25) tenemos

$$\begin{aligned} H_g\left(X_1^U + \cdots + X_m^U\right) &= \int_0^1 S^{-1}_{X_1+\cdots+X_m}(p)\, dg(p) = \int_0^1 \left(S^{-1}_{X_1}(p) + \cdots \right. \\ \left. + S^{-1}_{X_m}(p)\right) dg(p) &= H_g\left(X_1\right) + \cdots + H_g\left(X_m\right). \end{aligned}$$

□

De este teorema deduce el siguiente resultado, válido para cualquier secuencia de riesgos, independientemente de su relación de dependencia.

Teorema 5.17
Si la función de distorsión g *es cóncava, entonces para cualesquiera* $X_1, \cdots, X_m$ *se cumple*

$$H_g\left(X_1 + \cdots + X_m\right) \leq H_g\left(X_1\right) + \cdots + H_g\left(X_m\right). \tag{5.27}$$

Demostración
Recordemos la cota superior de (4.31) válida para dos riesgos X, Y cualesquiera y para cualquier v.a. U uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$

$$X + Y \leq_{sl} F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(U).$$

Aplicando el teorema 3.21, tenemos que para cualquiera función de distorsión g cóncava, se cumple

$$H_g(X+Y) \leq H_g\left(F_X^{-1}(U) + F_Y^{-1}(U)\right) = H_g(X) + H_g(Y).$$

donde la última de las igualdades se obtiene aplicando (5.26), aplicable por cumplirse $\left(F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)\right) \stackrel{d}{=} (X, Y)$ con X, Y mutuamente comonótonos. Para $j = 2, \cdots, m$, sean

$$X = X_1 + \cdots + X_{j-1},\ Y = X_j.$$

Para $j=2$, se cumple

$$H_g(X_1+X_2) \le H_g(X_1) + H_g(X_2).$$

Si $j=3$, tenemos

$$H_g(X_1+X_2+X_3) \le H_g(X_1+X_2) + H_g(X_3) \le H_g(X_1) + H_g(X_2) + H_g(X_3).$$

Haciendo $j=m$,

$$\begin{aligned} & H_g(X_1+\cdots+X_m) \le H_g(X_1+\cdots+X_{m-1}) + H_g(X_m) \\ & \le H_g(X_1+\cdots+X_{m-2}) + H_g(X_{m-1}) + H_g(X_m) \\ & \le \cdots \le H_g(X_1) + \cdots + H_g(X_m). \end{aligned}$$

□

Estamos ahora en condiciones de comparar el riesgo total que se deriva de la secuencia $\left(X_1^U,\cdots,X_m^U\right) \in R_m(F_1,\cdots,F_m)$ con el que resulta del resto de secuencias de riesgos incluidas en esta clase.

Teorema 5.18
Sean $\left(X_1^U,\cdots,X_m^U\right) \in R_{m,+}(F_1,\cdots,F_m)$ *con* X_i^U $(i=1,\cdots,m)$ *mutuamente comonótonos. Entonces, para cualesquiera* $(X_1,\cdots,X_m) \in R_{m,+}(F_1,\cdots,F_m)$ *se cumple*

$$S \le_{sl} S^U,$$

donde $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$ *y* $S^U = \sum_{i=1}^{m} X_i^U$.

Demostración
Realizaremos esta demostración bajo el marco de la teoría dual de Yaari. En éste, por el teorema 3.21, $S \le_{sl} S^U$, quedará demostrado si para cualquier función de distorsión g cóncava se cumple

$$H_g(X_1+\cdots+X_m) \le H_g\left(X_1^U+\cdots+X_m^U\right),$$

siendo $(X_1,\cdots,X_m)$, $\left(X_1^U,\cdots,X_m^U\right)$ elementos de $R_m(F_1,\cdots,F_m)$ con X_i^U $(i=1,\cdots,m)$ mutuamente comonótonos.
De (5.27) tenemos que si la función de distorsión g es cóncava, para $X_1,\cdots,X_m$ se cumple

$$H_g(X_1+\cdots+X_m) \le \sum_{i=1}^{m} H_g(X_i).$$

Igualmente, de (5.26) tenemos que por ser $X_1^U, \cdots, X_m^U$ mutuamente comonótonos, se cumple

$$H_g\left(X_1^U + \cdots + X_m^U\right) = \sum_{i=1}^{m} H_g\left(X_i\right),$$

para cualquier función de distorsión g.

Combinando estos dos resultados, encontramos que para cualquier función de distorsión g cóncava, se cumple

$$H_g\left(X_1 + \cdots + X_m\right) \leq \sum_{i=1}^{m} H_g\left(X_i\right) = H_g\left(X_1^U + \cdots + X_m^U\right).$$

□

De este teorema y de (5.14) se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 5.19

Para cualquier v.a. U *uniformemente distribuida en el intervalo* $[0,1]$ *y para cualesquiera riesgos* $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m(F_1, \cdots, F_m)$, *se cumple*

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^{m} F_i^{-1}(U).$$

Este resultado generaliza la cota superior obtenida en (4.31) para el caso bivariante.

Indicar que estos resultados son válidos para la clase general $R_m(F_1, \cdots, F_m)$. Así, independientemente de la relación de dependencia que exista entre los riesgos de una secuencia cualquiera, sus primas stop-loss quedan siempre por debajo de las que resultan al realizar la hipótesis de mutua comonotonía entre los riesgos del conjunto. De estos resultados y de los de los teoremas 5.13 y 5.14 es inmediato deducir que cuando existe PCD en $(X_1, \cdots, X_m)$ la distribución de los siniestros agregados que de esta secuencia se deriva queda acotada, en términos de riesgo, por las distribuciones de $X_1^{\perp} + \cdots + X_m^{\perp}$ y $F_1^{-1}(U) + \cdots + F_m^{-1}(U)$. Así, el elemento más seguro de la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ es el que se obtiene en caso de independencia, siendo el más peligroso el obtenido bajo la hipótesis de comonotonía.

Realizar la hipótesis de independencia para m riesgos que presenten dependencia acumulativa positiva implica estar infravalorando el riesgo global de esta secuencia. Esta conclusión generaliza la obtenida en el capítulo anterior cuando únicamente contemplábamos dependencias entre dos únicos riesgos. Señalar, al igual que entonces, que a pesar de que la hipótesis de comonotonía pueda parecer una solución prudente para salvar este riesgo, ésta es, en la mayoría de casos, aún más irreal que la independencia. Es necesario, por tanto, buscar alguna relación que nos permita ordenar las secuencias que quedan entre estos dos extremos.

5.4 Un orden parcial para distribuciones multivariantes: Orden supermodular

Una vez encontrado el elemento más seguro y el más peligroso dentro de la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$, nos plantemos encontrar una relación de orden que permita la ordenación del resto de secuencias de riesgos incluidas en esta clase.

En el capítulo anterior se había demostrado que el orden de correlación entre dos v.a. bivariantes implicaba orden stop-loss entre éstas. Así

$$(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2.$$

Aunque no existe una generalización del orden de correlación, $\leq_c$, a dimensiones superiores buscaremos, en primer lugar, caracterizaciones equivalentes que permitan su extensión a distribuciones multivariantes arbitrarias.

En el teorema 4.15 del capítulo anterior, habíamos visto la equivalencia de las siguientes definiciones, válidas para todo $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2) &\Leftrightarrow F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq F_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow S_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq S_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Estas dos definiciones alternativas, dan lugar a definiciones naturales de ordenes de dependencia multivariante llamados "orthant orders". Presentamos a continuación la definición de los mismos. Ésta se puede encontrar, por ejemplo, en Shaked & Shanthikumar (1994).

Definición 5.20
Para dos secuencias de riesgos $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m), \mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_m)$ *con funciones acumulativas de probabilidad* $F_{\mathbf{X}}$ *y* $F_{\mathbf{Y}}$ *y desacumulativas* $S_{\mathbf{X}}$ *y* $S_{\mathbf{Y}}$*, definimos*

(*a*) *"Upper orthant order",* $\leq_{uo}$*,*

$$\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y} \text{ } si \text{ } S_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leq S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^m.$$

(*b*) *"Lower orthant order"*, $\leq_{lo}$,

$$\mathbf{X} \leq_{lo} \mathbf{Y} \ \textit{si} \ F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}), \ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^m.$$

De los resultados de los teoremas 4.15 y 4.17 se deduce que para $m = 2$, $\mathbf{X} \geq_{lo} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$) implica $X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2$. Desafortunadamente, cuando $m \geq 3$ ninguno de estos órdenes implica orden stop-loss de las correspondientes carteras. En el siguiente contraejemplo veremos que incluso cuando $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$ y $\mathbf{X} \geq_{lo} \mathbf{Y}$ no se puede deducir $\sum_{i=1}^{m} X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^{m} Y_i$.

Contraejemplo
Sean $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ dos secuencias de riesgos tales que $\mathbf{X}$ está uniformemente distribuida en los siguientes seis puntos

$$(2,2,1) \quad (2,1,2) \quad (1,2,2) \quad (1,1,1) \quad (0,0,2) \quad (2,0,0)$$

e $\mathbf{Y}$ uniformemente distribuida en los seis puntos

$$(2,2,2) \quad (2,1,1) \quad (1,2,1) \quad (1,1,2) \quad (2,0,2) \quad (0,0,0)$$

Observemos que

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1/6 & 0 \leq x < 1 \\ 3/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \qquad F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1/6 & 0 \leq x < 1 \\ 3/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 1/3 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \qquad F_{Y_2}(x) = \begin{cases} 1/3 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 1/6 & 0 \leq x < 1 \\ 3/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \qquad F_{Y_3}(x) = \begin{cases} 1/6 & 0 \leq x < 1 \\ 3/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Así $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R_3(F_1, F_2, F_3)$ por cumplirse $X_i \stackrel{d}{=} Y_i, \ i = 1, 2, 3.$

Igualmente sencillos pero largos cálculos demuestran que $\mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$ y $\mathbf{X} \geq_{lo} \mathbf{Y}$. No obstante, $X_1 + X_2 + X_3 \nleq_{sl} Y_1 + Y_2 + Y_3$, ya que por ejemplo

$$E(X_1 + X_2 + X_3 - 4)_+ = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = E(Y_1 + Y_2 + Y_3 - 4)_+$$

Así se hace necesario buscar una relación de orden lo suficientemente fuerte como para implicar orden stop-loss. Encontraremos ésta en el orden supermodular. Introducimos en el siguiente apartado el concepto de función supermodular. A partir de ésta será posible definir el orden supermodular.

5.4.1 Función supermodular

Definición 5.21
Una función $\phi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ es supermodular si

$$\begin{aligned}&\phi(x_1, \cdots, x_i + \varepsilon, \cdots, x_j + \delta, \cdots, x_m) - \phi(x_1, \cdots, x_i + \varepsilon, \cdots, x_j, \cdots, x_m)\\ &\geq \phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j + \delta, \cdots, x_m) - \phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m)\end{aligned} \tag{5.28}$$

se cumple para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, $1 \leq i < j \leq m$ y todo $\varepsilon, \delta > 0$.

En nuestro caso nos restringiremos a funciones supermodulares definidas en $\mathbf{R}_+^m$.

¿Qué significa la supermodularidad de ϕ? Intuitivamente si consideramos que $x_1, \cdots, x_m$ son las cuantías individuales de siniestro correspondientes a m asegurados y $\phi(x_1, \cdots, x_m)$ es la pérdida de la compañía de seguros por estos siniestros, entonces la supermodularidad de la función ϕ significa que las consecuencias del incremento de un siniestro individual son peores cuanto mayores sean las correspondientes al resto de siniestros.

De (5.28) podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 5.22
Sea $\phi : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ una función como mínimo dos veces diferenciable, entonces ϕ es supermodular si, y sólo si, cumple

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^m, \ 1 \leq i < j \leq m.$$

Demostración
De (5.28) tenemos que ϕ es supermodular si para todo $\varepsilon, \delta > 0$ y para cualquier par de argumentos i, j con $1 \leq i < j \leq m$ se cumple

$$\begin{aligned}&\phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j + \delta, \cdots, x_m) - \phi(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m)\\ \leq\ &\phi(x_1, \cdots, x_i + \varepsilon, \cdots, x_j + \delta, \cdots, x_m) - \phi(x_1, \cdots, x_i + \varepsilon, \cdots, x_j, \cdots, x_m).\end{aligned}$$

Por ser $\varepsilon > 0$, esta condición equivale al no decrecimiento de

$$\phi\left(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j + \delta, \cdots, x_m\right) - \phi\left(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m\right),$$

en x_i para todo $x_j, \delta;\ \delta > 0$. Así

$$\frac{\partial \phi\left(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j + \delta, \cdots, x_m\right)}{\partial x_i} \geq \frac{\partial \phi\left(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m\right)}{\partial x_i}.$$

Por ser $\delta > 0$, esta última condición equivale al no decrecimiento de

$$\frac{\partial \phi\left(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_m\right)}{\partial x_i}$$

en x_j, de donde se deduce la condición dada en el teorema.

□

5.4.2 Orden supermodular

Dentro de este apartado introducimos el orden supermodular entre dos secuencias de riesgos y comprobamos algunas de sus propiedades.

Definición 5.23
Sean $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_m)$ dos secuencias de riesgos cualesquiera. Diremos que $\mathbf{X}$ precede a $\mathbf{Y}$ en orden supermodular, $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, si

$$E\left(\phi\left(\mathbf{X}\right)\right) \leq E\left(\phi\left(\mathbf{Y}\right)\right), \tag{5.29}$$

para todas las funciones supermodulares $\phi : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ para las cuales la esperanza exista.

De la definición de función supermodular parece poder intuirse que el orden supermodular es un orden de dependencia. Las siguientes propiedades nos permitirán confirmar este punto.

1. $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{uo} \mathbf{Y}$ y $\mathbf{X} \geq_{lo} \mathbf{Y}$.

   Observemos que para cualquier $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_m) \in \mathbf{R}_+^m$, las funciones indicadoras

   $$\phi_1\left(x_1, \cdots, x_m\right) = I\left(x_1 > t_1, \cdots, x_m > t_m\right)$$

   y

   $$\phi_2\left(x_1, \cdots, x_m\right) = I\left(x_1 \leq t_1, \cdots, x_m \leq t_m\right)$$

son funciones supermodulares, por ser

$$\frac{\partial^2 \phi_1 (x_1, \cdots, x_m)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi_2 (x_1, \cdots, x_m)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Para estas dos funciones, $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$ tal y como se ha definido en (5.29) tiene las siguientes dos implicaciones

(a)

$$E\left(I\left(X_1 > t_1, \cdots, X_m > t_m\right)\right) \leq E\left(I\left(Y_1 > t_1, \cdots, Y_m > t_m\right)\right)$$
$$\Rightarrow S_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \leq S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}_+^m$$

(b)

$$E\left(I\left(X_1 \leq t_1, \cdots, X_m \leq t_m\right)\right) \leq E\left(I\left(Y_1 \leq t_1, \cdots, Y_m \leq t_m\right)\right)$$
$$\Rightarrow F_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \leq F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}_+^m$$

De (a) y (b) se deduce inmediatamente la propiedad enunciada.

2. $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y} \Rightarrow X_i \stackrel{d}{=} Y_i$, $i = 1, \cdots, m$.

   Observemos que las funciones

$$\phi_i (x_1, \cdots, x_m) = f(x_i), \ i = 1, \cdots, m$$

   son supermodulares para cualquier $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, por ser

$$\frac{\partial^2 \phi_i (x_1, \cdots, x_m)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i = 1, \cdots, m.$$

   Así $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$ implica

$$E\left(f\left(X_i\right)\right) \leq E\left(f\left(Y_i\right)\right), \quad i = 1, \cdots, m,$$

   para cualquier $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$.

   Para un real $t \geq 0$ cualquiera, escogiendo las funciones indicadoras

$$f_1(x_i) = I(x_i > t) \quad \text{y} \quad f_2(x_i) = I(x_i \leq t)$$

   la desigualdad anterior implica

$$F_{X_i}(t) \leq F_{Y_i}(t), \ i = 1, \cdots, m,$$
$$S_{X_i}(t) \leq S_{Y_i}(t), \ i = 1, \cdots, m,$$

   relaciones que únicamente pueden cumplirse a la vez cuando las distribuciones marginales asociadas a cada uno de los riesgos en $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son iguales.

3. $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y} \Rightarrow Cov\left(X_i, X_j\right) \leq Cov\left(Y_i, Y_j\right),\ i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j.$

   La función
$$\phi\left(x_1, \cdots, x_m\right)) = x_i x_j$$
   es supermodular para cualesquiera $i, j = 1, \cdots, m$; $i \neq j$, por ser
$$\frac{\partial^2 \phi\left(x_1, \cdots, x_m\right)}{\partial x_i \partial x_j} = 1.$$
   Así, $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$ implica
$$Cov\left(X_i, X_j\right) \leq Cov\left(Y_i, Y_j\right),$$
   puesto que como acabamos de ver se cumple $X_i \stackrel{d}{=} Y_i,\ i = 1, \cdots, m.$

De la segunda de las propiedades se sigue que el orden supermodular únicamente se puede definir entre secuencias en $R_m\left(F_1, \cdots, F_m\right)$. Así, el orden supermodular es realmente un orden de dependencia tal y como intuíamos de su definición. Las propiedades 1 y 3 refuerzan esta conclusión. En el siguiente apartado veremos que el orden supermodular permite ordenar, en términos de riesgo, los diferentes elementos en $R_m\left(F_1, \cdots, F_m\right)$.

5.4.3 Orden supermodular y orden stop-loss

En el siguiente teorema se prueba que el orden supermodular entre dos secuencias de riesgos implica orden stop-loss para el riesgo total que se deriva de cada una de ellas. Esta demostración se debe a Müller (1997).

Teorema 5.24
Sean $\mathbf{X} = \left(X_1, \cdots, X_m\right),\ \mathbf{Y} = \left(Y_1, \cdots, Y_m\right) \in R_m\left(F_1, \cdots, F_m\right)$ *cumpliendo* $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, *entonces*
$$S \leq_{sl} S',$$
donde $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$ *y* $S' = \sum_{i=1}^{m} Y_i$.

Demostración
Si $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$
$$E\left(\phi\left(X_1, \cdots, X_m\right)\right) \leq E\left(\phi\left(Y_1, \cdots, Y_m\right)\right)$$
para todas las funciones supermodulares $\phi : \mathbf{R}_+^m \rightarrow \mathbf{R}$ para las cuales la esperanza exista.

Si elegimos

$$\phi(x_1, \cdots, x_m) = f(x_1 + \cdots + x_m),$$

por (5.28), ϕ es supermodular, si, y sólo si,

$$f(x + \varepsilon + \delta) - f(x + \varepsilon) \geq f(x + \delta) - f(x)$$

para todo $x \in \mathbf{R}$ y todo $\varepsilon, \delta > 0$, es decir, si, y sólo si, f es convexa.
Así, para toda función f no decreciente y convexa se cumple

$$E(f(X_1 + \cdots + X_m)) \leq E(f(Y_1 + \cdots + Y_m)),$$

de donde se deduce inmediatamente la relación de orden stop-loss buscada.

$\square$

De este teorema se sigue que el orden supermodular entre dos secuencias de riesgos incluidas en $R_m(F_1, \cdots, F_m)$ es un buen instrumento para comparar el riesgo total que de cada una de ellas se deriva. Obviamente también será válida para comparar las incluidas en la subclase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$. Así, encontramos en el orden supermodular la herramienta que permite llegar a la ordenación que realizaría cualquier decisor adverso al riesgo de todas aquellas que, por su relación de dependencia acumulativa positiva, han quedado entre la independencia y la comonotonía. Sin embargo, en la mayoría de situaciones prácticas resultará muy difícil comprobar la existencia de orden supermodular a partir de la definición dada para el mismo. Así, queda abierta una gran línea de investigación en lo que se refiere a la obtención de alguna definición equivalente para el orden supermodular que resulte más fácilmente manejable y que, en consecuencia, permita ampliar sus posibilidades de aplicación en situaciones prácticas hoy por hoy muy limitadas.

Parte II

Dependencia positiva. Su influencia en el riesgo de la cartera. Carteras de seguros de vida

Capítulo 6

Hipótesis de independencia

6.1 Introducción

Tradicionalmente cualquier compañía aseguradora ha tratado de estimar la distribución de probabilidad de la pérdida total asociada a cada una de sus carteras de riesgos durante un periodo específico, v.a. a la que llamaremos en los que sigue coste total. Con ella se tiene una medida del riesgo de la cartera. La determinación del coste total de los siniestros producidos en una cartera durante un cierto período de referencia puede realizarse dentro del modelo individual o del colectivo de la teoría del riesgo.

El modelo individual analiza los riesgos uno a uno, supone conocida la distribución de probabilidad de cada uno de ellos y en lo que se refiere a éstas supone que se trata de riesgos que como máximo pueden dar lugar a un siniestro, la cuantía del cual puede ser fija o aleatoria. La siniestralidad total de la cartera resulta entonces, de la suma de los diferentes siniestros individuales. Este modelo exige conocer las distribuciones individuales asociadas a cada uno de los riesgos individuales, circunstancia que ha limitado su utilización a carteras de seguros cuyas prestaciones estén relacionadas con la muerte del asegurado (seguros de vida, planes de pensiones,...) ya que en estos casos las distribuciones de probabilidad resultan de las tablas de mortalidad.

El modelo colectivo, por contra, trata globalmente los siniestros producidos en cada cartera. Para un determinado periodo, supone conocida la distribución de probabilidad del número de siniestros que se producirán y exige

que la cuantía de cada uno de ellos esté idénticamente distribuida de acuerdo a una determinada distribución de probabilidad también conocida. Con estos datos, la recurrencia de Panjer (1981) permite de una manera rápida y cómoda el cálculo de la distribución del coste total.
Este tipo de modelización ha sido mayoritariamente utilizada en seguros con alguna cobertura relacionada con daños materiales (seguros de automóviles, seguros de hogar, seguros de incendios,...).

Dedicaremos la segunda parte de este trabajo a determinar la distribución del coste total dentro del modelo individual de la teoría del riesgo. En este modelo, a pesar de su aparente simplicidad, este objetivo presenta una mayor complejidad matemática que en el caso colectivo. Por ello, la teoría del riesgo ha venido asumiendo tradicionalmente que dentro del modelo individual los diferentes riesgos que componen una cartera son mutuamente independientes. Esta hipótesis se creía hasta hace poco insalvable puesto que únicamente con ella parecían resultar modelos manejables a nivel teórico. Como hemos visto en la primera parte de este trabajo, si existen dependencias positivas entre los riesgos que componen la cartera, la hipótesis de independencia lleva a infravalorar el riesgo realmente existente. Así, cualquier política basada en la distribución del coste obtenida bajo la hipótesis de mutua independencia resulta peligrosa puesto que presupone un riesgo menor al real.

Aunque romperemos la hipótesis de independencia a partir del siguiente capítulo, en éste queremos mantenerla. Nuestro objetivo aquí no es otro que presentar algunas de las metodologías aparecidas en la literatura a finales de los 80 y principios de los 90 para llegar a determinar el impacto monetario del total de siniestros producidos en una cartera durante un período determinado. Coincidiendo con el avance de la informática, en esta época aparecieron gran cantidad de resultados teóricos que han dado lugar a nuevos procedimientos para la obtención numérica de soluciones exactas al problema que nos ocupa. Se trata de métodos recurrentes que reducen el volumen de cálculos necesarios para la obtención de resultados exactos, hasta entonces únicamente posibles por convolución. El primero de ellos se debe a De Pril quién, en 1986, derivó una fórmula recurrente que permite el cálculo exacto de la distribución del coste total en el modelo individual de vida (cartera compuesta por seguros de vida cuyo capital es pagadero en caso de muerte del asegurado). De Pril (1989) generalizó la recurrencia exacta al modelo individual de riesgo con cuantía aleatoria de los siniestros y propuso aproximaciones de orden r a la misma. Desde un punto de vista práctico, estas aproximaciones pueden resultar interesantes en carteras de gran tamaño, ya que en estos casos la obtención de la distribución exacta requiere de un número de cálculos a menudo prohibitivos aún con los recursos informáticos actuales. No obstante, estas aproximaciones no son nuevas. Anteriormente ya encontramos en la literatura recurrencias para aproximar la distribución del coste total dentro del modelo individual. Kornya (1983) propuso una recurrencia aproximada para el caso del modelo individual de vida. Ésta fue generaliza al caso de siniestros arbitrarios por Hipp (1986) quién, en el mismo año, propuso también una nueva recurrencia alternativa.

En lo que se refiere a recurrencias exactas, debemos señalar también los resultados de Waldmann (1994), quien reformuló el algoritmo de De Pril (1986) para la obtención de la distribución del coste total en el modelo individual de vida, reduciendo el número de cálculos necesarios para llegar a la misma. Finalmente, Dhaene & Vanderbroek (1995) presentan un nuevo algoritmo para llegar a la distribución exacta del coste total en el modelo individual. La recurrencia de Waldmann (1994) surge como caso particular del mismo.

Hasta ahora hemos mencionado los resultados obtenidos de manera natural dentro del modelo individual de la teoría del riesgo. Algunos autores han cuestionado la eficacia práctica de los algoritmos recurrentes que de él se derivan. Argumentan que no merece la pena malgastar mucho esfuerzo en el cálculo exacto de la distribución del coste total ya que los datos utilizados contienen errores en si mismos que hacen imposible llegar a tal exactitud en los resultados. Aunque a primera vista pueda parecer que el modelo individual únicamente asume como hipótesis la independencia entre los contratos, siendo el resto reflejo de la realidad, debemos tener en cuenta que toma como datos las probabilidades de unas tablas de mortalidad que aunque se actualizan periódicamente contienen errores y en ningún caso coincidirán exactamente con las de la población asegurada en la cartera. Incluso suponiendo que las probabilidades de siniestralidad pudieran conocerse con exactitud, la realidad se aleja del modelo individual en diferentes aspectos: Pueden existir dependencias entre los diferentes riesgos asegurados, riesgos duplicados y, en cualquier caso, es necesario redondear los capitales asegurados a unidades enteras y lo suficientemente pequeñas como para poder ser tratados con métodos de cálculo numérico. Por todo ello, muchos autores (ver por ejemplo, Kaas & Gerber (1994)) proponen aproximar el modelo individual a partir del modelo colectivo bajo el cual, la recurrencia de Panjer (1981) permite de manera rápida y cómoda el cálculo de la distribución del coste total.

En el mismo sentido, Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1988a,b, 1989) proponen una combinación entre el modelo individual y el colectivo. Surge así, un modelo mixto que propone el cálculo de la distribución del coste total utilizando una aproximación colectiva para la mayor parte de riesgos y tratando como individuales únicamente a aquellos riesgos que más incidirán sobre la siniestralidad total de la cartera (aquellos con mayor capital asegurado).

Tras describir el modelo individual de la teoría del riesgo, en este capítulo presentamos los diferentes métodos mencionados para el cálculo de la distribución del coste total. A pesar de las críticas existentes, creemos interesante incidir especialmente en las recurrencias exactas derivadas dentro del modelo individual ya los recursos informáticos actuales las hacen viables en la mayoría de los casos y, en un futuro, seguramente no tenga sentido plantearse limitaciones derivadas de problemas de cálculo. Creemos además, que si realizamos el esfuerzo de salvar la hipótesis de independencia debemos también ser capaces de reflejar lo más exactamente posible la realidad existente. Estas razones son las que nos llevan a realizar cálculos numéricos únicamente para las recurrencias exactas y a restringirnos a éstas en los capítulos que siguen.

6.2 El modelo individual de riesgo

Consideremos una cartera con n pólizas (riesgos), $X_1, \cdots, X_n$, las cuales como máximo pueden producir un siniestro durante un período determinado (por ejemplo, un año). Supondremos que la cuantía asegurada, pagadera en caso de que el siniestro se produzca en el período considerado, es un número entero múltiple de una unidad monetaria cualquiera.

Siguiendo la nomenclatura de De Pril (1989), reclasificaremos la cartera en $a \times b$ clases tal y como se muestra en la siguiente tabla

	Distribución de la cuantía					
Prob. siniestro	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\cdots$	$fi(x)$	$\cdots$	$f_a(x)$
q_1						
q_2						
$\cdots$						
q_j				n_{ij}		
$\cdots$						
q_b						

siendo

$f_i(x)$: Función de densidad de probabilidad de la cuantía que se pagará en caso de siniestro de una póliza en la columna i-ésima, $i = 1, 2, \cdots, a$; $x = 1, 2, \cdots, m_i$. Se trata de la distribución condicional de la cuantía en caso de siniestro con lo cual evidentemente se cumplirá $f_i(0) = 0$.

Supondremos que esta función es conocida.

q_j : Probabilidad de que una póliza en la fila j-ésima produzca siniestro, $j = 1, 2, \cdots, b$.

Esta probabilidad se considera también conocida.

n_{ij} : Número de pólizas en la columna i-ésima y fila j-ésima.

Definimos:

$p_j = 1 - q_j$: Probabilidad de que una póliza en la fila j-ésima no produzca siniestro.

$n_j = \sum_{i=1}^{a} n_{ij}$: Número de pólizas con probabilidad de siniestro igual a q_j.

$n = \sum_{j=1}^{b} n_j$: Número total de pólizas.

$m = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ m_i$: Cuantía máxima que puede pagar la compañía por los siniestros de la cartera.

Cada póliza supone el pago de una cuantía en caso de siniestro dada por la función $f_i(x)$, con lo que constituye para el asegurador un riesgo individual X_{ij} con función de densidad de probabilidad

$$f_{X_{ij}}(x) = \Pr(X_{ij} = x) = \begin{cases} p_j & \text{si } x = 0, \\ q_j \; f_i(x) & \text{si } x = 1, 2, \cdots, m_i. \end{cases} \tag{6.1}$$

Sea S la v.a. que recoge el coste total (riesgo total) de los siniestros producidos en la cartera durante el período considerado. Ésta vendrá determinada por la suma de las cuantías de los siniestros que se produzcan en cada póliza individual. Así

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} X_{ij}, \tag{6.2}$$

con

$$E(S) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} q_j \sum_{x=1}^{m_i} x f_i(x). \tag{6.3}$$

A lo largo de este capítulo supondremos que los riesgos individuales, $X_1, \cdots, X_n$, son mutuamente independientes, con lo que sabemos además que

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} q_j \sum_{x=1}^{m_i} x^2 f_i(x) - \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} q_j \sum_{x=1}^{m_i} x f_i(x) \right)^2. \tag{6.4}$$

En lo que sigue, trataremos de determinar la distribución de probabilidad de la v.a. S (función de densidad de probabilidad y función de distribución). Aún con la simplificación que supone la introducción de la hipótesis de independencia, la dificultad en la evaluación de la distribución del coste total subsiste. No obstante, cuando la cartera tiene un número pequeño de pólizas podemos calcular directamente la distribución del coste total de manera recurrente a partir de la distribución de los riesgos individuales dada en (6.1). Así, la función de densidad de probabilidad,

$$f_S(s) = \Pr(S = s) = \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = s), \quad s = 0, 1, 2, \cdots,$$

se obtiene mediante la convolución de las distribuciones individuales, es decir, calculando en primer lugar

$$f_S^{*1}(s) = \Pr(X_1 = s) = f_{X_1}(s) \tag{6.5}$$

y a partir de ésta aplicando la fórmula recurrente

$$f_S^{*k}(s) = \sum_{y=0}^{s} f_S^{*k-1}(s-y)\ f_{X_k}(y), \quad s = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.6}$$

Así con (6.6) podemos calcular $f_S^{*2}(s)$ a partir de (6.5), y a continuación $f_S^{*3}(s), f_S^{*4}(s), \cdots$ hasta obtener la n-ésima convolución que nos dará la función deseada, $f_S^{*n}(s) = f_S(s)$.

Para poder aplicar esta técnica de convolución es imprescindible que los diferentes riesgos individuales sean independientes.

A pesar de la simplicidad analítica en la formulación de esta técnica su uso no es nada recomendable en situaciones prácticas. Podemos hacernos una idea de ello a partir de los siguientes dos sencillos ejemplos en los que únicamente consideramos carteras con tres pólizas.

Ejemplo 6.1

Supongamos una cartera con tres asegurados a los que llamaremos X_1, X_2 y X_3. Cada uno de ellos tiene contratado un seguro de vida cuyo capital pagadero en caso de muerte es de 1, 2 y 3 u.m. respectivamente. El asegurador está interesado en conocer los pagos a que deberá enfrentarse durante un determinado período, supongamos, por ejemplo, un año. A partir de las tablas de mortalidad sabrá la probabilidad de muerte de cada uno de los asegurados durante ese año, sean éstas q_1, q_2 y q_3.

Siguiendo la nomenclatura anterior la cartera es la siguiente:

	Capital asegurado		
Prob. siniestro	1	2	3
q_1	1	0	0
q_2	0	1	0
q_3	0	0	1

En este caso $m = 6$ (cuantía máxima que pagará el asegurador, en caso de muerte de los tres asegurados).

Aplicando (6.6) y teniendo en cuenta que $f_S^{*1}(s) = f_{X_1}(s)$, tenemos

$$f_S(0) \;=\; f_S^{*3}(0) = f_S^{*2}(0)\, f_{X_3}(0) = f_S^{*1}(0)\, f_{X_2}(0)\, f_{X_3}(0) = p_1 p_2 p_3.$$

$$\begin{aligned} f_S(1) &= f_S^{*3}(1) = f_S^{*2}(1) f_{X_3}(0) + f_S^{*2}(0) f_{X_3}(1) = f_S^{*1}(1) f_{X_2}(0) f_{X_3}(0) \\ &\quad + f_S^{*1}(0) f_{X_2}(1) f_{X_3}(0) + f_S^{*1}(0) f_{X_2}(0) f_{X_3}(1) = q_1\, p_2\, p_3. \\ &\quad \ldots \end{aligned}$$

La función de densidad de probabilidad de S resulta ser

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$
0	$p_1p_2p_3$
1	$q_1p_2p_3$
2	$p_1q_2p_3$
3	$q_1q_2p_3 + p_1p_2q_3$
4	$q_1p_2q_3$
5	$p_1q_2q_3$
6	$q_1q_2q_3$
	$\sum_{s=0}^{6} f_S(s) = 1.$

Ejemplo 6.2

En el ejemplo anterior introduzcamos ahora una cobertura adicional. Supongamos que el capital que se paga a la muerte del asegurado se dobla si el asegurado muere por accidente. Sea la probabilidad condicional de muerte por accidente (condicionada a que la muerte se ha producido) constante para los tres asegurados e igual a α.

En este caso, la función de densidad de probabilidad de la cuantía en caso de siniestro viene dada por

$$f_i(x) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } x = i, \\ \alpha & \text{si } x = 2i, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

siendo ahora la cartera

	Distribución de la cuantía		
Prob. siniestro	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
q_1	1	0	0
q_2	0	1	0
q_3	0	0	1

Aplicando (6.1) tenemos la distribución que resulta para cada riesgo individual,

$$f_{X_{ij}}(x) = \begin{cases} p_j & \text{si } x = 0, \\ q_j (1-\alpha) & \text{si } x = i, \\ q_j\, \alpha & \text{si } x = 2i, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Si hacemos ahora la convolución según (6.6) llegamos a la distribución de probabilidad:

s	$f_S(s) = \Pr(S=s)$
0	$p_1p_2p_3$
1	$(1-\alpha)\, q_1p_2p_3$
2	$(1-\alpha)\, p_1q_2p_3 + \alpha q_1p_2p_3$
3	$(1-\alpha)\,[(1-\alpha)\, q_1q_2p_3 + p_1p_2q_3]$
4	$(1-\alpha)\, q_1\,[(1-\alpha)\, p_2q_3 + \alpha q_2p_3] + \alpha p_1q_2p_3$
5	$(1-\alpha)\,[(1-\alpha)\, p_1q_2q_3 + \alpha q_1\,(q_2p_3 + p_2q_3)]$
6	$\alpha\,(\alpha q_1q_2p_3 + p_1p_2q_3) + (1-\alpha)^3\, q_1q_2q_3$
7	$\alpha\,(1-\alpha)\, q_3\,(q_1p_2 + p_1q_2 + (1-\alpha)\, q_1q_2)$
8	$\alpha\,(1-\alpha)\, q_2q_3\,(1-\alpha q_1) + \alpha^2 q_1p_2q_3$
9	$\alpha\,(1-\alpha)\, q_1q_2q_3$
10	$\alpha^2 q_2q_3\,(1-\alpha q_1)$
11	$\alpha^2\,(1-\alpha)\, q_1q_2q_3$
12	$\alpha^3 q_1q_2q_3$
	$\sum_{s=0}^{12} f_S(s) = 1.$

Observemos que en este segundo ejemplo el cálculo directo de la distribución del coste total por convolución ya se ha complicado bastante a pesar de que se trata de una cartera con únicamente tres pólizas. Evidentemente cualquier cartera real tendrá bastantes más de tres pólizas aseguradas. Así, esta técnica no es viable y es necesario buscar otros métodos que pasamos a recoger en los siguientes apartados.

6.3 Distribución del coste total: Recurrencias para su cálculo exacto

6.3.1 Modelo individual de vida. Recurrencia de De Pril (1986)

En base al modelo individual de la teoría de riesgo descrito en el apartado anterior, queremos ahora reproducir la recurrencia de De Pril (1986). Con ésta llegaremos al cálculo exacto de la distribución de probabilidad del coste total de los siniestros de una cartera de seguros de vida con n contratos, cada uno de los cuales garantiza el pago de un capital $i,\ i = 1, 2, \cdots, a$, en caso de que se produzca el siniestro dentro del período considerado. La distribución de probabilidad de la cuantía a pagar en caso de siniestro es ahora

$$f_i(x) = I(x = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = i, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

Así, se trata de una cartera cuyos riesgos individuales tienen una distribución dicotómica definida por

$$f_{X_{ij}}(x) = \Pr(X_{ij} = x) = \begin{cases} p_j & \text{si } x = 0, \\ q_j & \text{si } x = i. \end{cases}$$

Observemos que estamos ante el tipo de riesgos que hemos venido definiendo como riesgos con distribución dicotómica. Remarcar ahora que este tipo de modelización se utiliza normalmente para reproducir el comportamiento de una cartera de seguros de vida cuyas pólizas garantizan a su tomador el pago de un capital constante (que consideramos entero y múltiple de una u.m. cualquiera) en caso que la muerte del mismo se produzca dentro del período considerado. En base a la nomenclatura introducida en este capítulo, estamos considerando la siguiente cartera

	Capital asegurado					
Prob. siniestro	1	2	$\cdots$	i	$\cdots$	a
q_1						
q_2						
$\cdots$						
q_j				n_{ij}		
$\cdots$						
q_b						

Para esta cartera podemos calcular la distribución de probabilidad del coste total S, f_S, a partir de la recurrencia obtenida por de Pril (1986) que presentamos en el siguiente teorema. Esta recurrencia generaliza la fórmula de White & Greville (1959) para la obtención de la distribución del número de siniestros. El desarrollo de la misma está inspirado en el algoritmo de Kornya (1983) y en la recurrencia de Panjer (1981) para el modelo colectivo.

Teorema 6.3
Sea

$$A\,(i,k) = (-1)^{k+1}\, i \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\; \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k , \tag{6.7}$$

entonces resulta la siguiente recurrencia para f_S :

$$f_S\,(0) = \prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_j} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_{ij}} , \tag{6.8}$$

$$s\; f_S\,(s) = \sum_{i=1}^{\min(a,s)} \sum_{k=1}^{[s/i]} A\,(i,k)\;\; f_S\,(s-ki)\,, \quad s = 1, 2, \cdots, m; \tag{6.9}$$

siendo [.] *la función parte entera.*

Demostración
Consideremos la función generatriz de probabilidad de la v.a. S

$$G_S\,(u) = \sum_{s=0}^{m} f_S\,(s)\;\, u^s = f_S\,(0) + \sum_{s=1}^{m} f_S\,(s)\;\, u^s.$$

Dado que $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, siendo $X_1, X_2, \cdots, X_n$ mutuamente independientes podemos reescribir la anterior función como

$$\begin{aligned} G_S(u) &= G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(u) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(u) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(G_{X_{ij}}(u)\right)^{n_{ij}} \\ &= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(p_j + q_j\, u^i\right)^{n_{ij}}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Haciendo $u = 0$ en (6.10) inmediatamente resulta (6.8).

Para demostrar (6.9) en primer lugar tomamos logaritmos a ambos lados de (6.10), de donde resulta,

$$\ln G_S(u) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ \ln\left(p_j + q_j\, u^i\right).$$

Derivando esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{G_S'(u)}{G_S(u)} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ i\ u^{i-1}\frac{q_j}{p_j + q_j u^i} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ i\ u^{i-1}\frac{q_j}{p_j}\left(\frac{p_j}{p_j + q_j u^i}\right) \\ &= \left\{\frac{p_j}{p_j + q_j u^i} = \frac{1}{1 + \frac{q_j}{p_j}u^i} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{q_j}{p_j}u^i\right)^k\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ i\ u^{i-1}\frac{q_j}{p_j}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{q_j}{p_j}u^i\right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ i\ u^{i-1}\frac{q_j}{p_j}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{q_j}{p_j}u^i\right)^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ i\ u^{i-1}\frac{q_j}{p_j}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\left(\frac{q_j}{p_j}u^i\right)^k\left(\frac{p_j}{q_j u^i}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ i\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k u^{ki-1} \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\, i\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\right)u^{ki-1} \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\infty} A(i,k)\ u^{ki-1}, \end{aligned}$$

donde $A(i,k)$ es la definida en (6.7). Así,

$$G_S'(u) = G_S(u)\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\infty} a(i,k)\ u^{ki-1}. \tag{6.11}$$

A fin de calcular la derivada de orden $s-1$ de esta última expresión en $u=0$, observemos el comportamiento de las derivadas sucesivas de $G_S(u)$ y $\sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(i,k)\cdot u^{ki-1}$ en $u=0$. Para la primera expresión tenemos

$$
\begin{aligned}
&G_S(0) = f_S(0)\,.\\
&G'_S(u) = \sum_{s=1}^{m} s\, f_S(s)\;\, u^{s-1} = f_S(1) + \sum_{s=2}^{m} s\, f_S(s)\;\, u^{s-1}, \quad G'_S(0) = f_S(1)\,.\\
&G''_S(u) = \sum_{s=2}^{m} s(s-1)\, f_S(s)\;\, u^{s-2} = 2f_S(2) + \sum_{s=3}^{m} s(s-1)\, f_S(s)\;\, u^{s-2},\\
&G''_S(0) = 2f_S(2)\,.\\
&\qquad\qquad \cdots\\
&G_S^{s-1)}(0) = (s-1)!\; f_S(s-1)\,.
\end{aligned}
$$

En cuanto a la segunda, haciendo $v(u) = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty} A(i,k)\;\, u^{ki-1}$ resulta

$$
\begin{aligned}
&v(0) = A(1,1)\,.\\
&v'(u) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\infty} (ki-1)\;\, A(i,k)\;\, u^{ki-2}, \qquad v'(0) = A(1,2) + A(2,1)\,.\\
&v''(u) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\infty} (ki-1)(ki-2)\;\, A(i,k)\;\, u^{ki-3}, \quad v''(0) = 2\;\left[A(1,3) + A(3,1)\right].\\
&v'''(u) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\infty} (ki-1)(ki-2)(ki-3)\;\, A(i,k)\;\, u^{ki-4},\\
&v'''(0) = 3!\;\left[A(1,4) + A(2,2) + A(4,1)\right].
\end{aligned}
$$

y, en general, la derivada de orden $s-1$ en $u=0$ es

$$
v^{s-1)}(0) = (s-1)! \sum_{i=1/\frac{s}{i}=\left[\frac{s}{i}\right]^{1}}^{\min(a,s)} A\left(s, \frac{s}{i}\right)
$$

Ya estamos ahora en condiciones de calcular la derivada de orden $s-1$ de (6.11) en $u=0$ a partir de la fórmula de Leibnitz. Recordemos antes esta fórmula que, en general, nos da la derivada de orden n de un producto de dos funciones. Sea l un entero cumpliendo $1 \leq l \leq n$. Entonces para dos funciones u, v como

[1] $i \in V(s)$, siendo $V(s) = \left\{ i \in \mathbf{N} \,/\, 1 \leq i \leq \min(a,s) \;\wedge\; \frac{s}{i} = \left[\frac{s}{i}\right] \right\}$

mínimo n veces derivables en sus respectivos dominios,

$$\begin{aligned}(u\,v)^{n)} &= u^{n)}v + \binom{n}{1}u^{n-1)}v' + \cdots + \binom{n}{l}u^{n-l)}v^{l)} + \cdots + u\,v^{n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k)}v^{k)}.\end{aligned}$$

La derivada de orden $s-1$ de (6.11) en $u=0$, aplicando Leibnitz resulta

$$s!\,f_S(s) = (s-1)! \sum_{k=1}^{\min(a,s)} \sum_{i=1/\frac{k}{i}=\left[\frac{k}{i}\right]}^{k} A\left(i,\frac{k}{i}\right) f_S(s-k),$$

de donde simplificando y reagrupando términos tenemos

$$s\,f_s(s) = \sum_{i=1}^{\min(a,s)} \sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{i}\right]} A(i,k)\ \ f_S(s-ik).$$

□

Haciendo $a=1$ en (6.8) y (6.9) inmediatamente obtenemos la recurrencia para el cálculo de la distribución de probabilidad del número de siniestros obtenida por White & Greville (1959).

Corolario 6.4
Sea

$$A(k) = A(1,k) = (-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{b} n_j\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k$$

entonces la distribución de probabilidad del número de siniestros se obtiene a partir de la recurrencia

$$f_N(0) = \prod_{j=1}^{b}(p_j)^{n_j}$$

$$sf_N(s) = \sum_{k=1}^{n} A(k)\,f_N(s-k), \quad s = 1,2,\cdots,n. \tag{6.12}$$

6.3.2 Modelo individual. Riesgos con distribución de cuantía arbitraria

Reproducimos a continuación, tres de las recurrencias propuestas en la literatura actuarial para el cálculo de la distribución del coste total en caso de que la cuantía a pagar en caso de siniestro se distribuya según una función f_i dada.

Las dos primeras son dos versiones de un mismo método recurrente recogido en De Pril (1989), la tercera fue obtenida por Dhaene&Vanderbroek (1995) y como veremos mejora a las anteriores en el caso de carteras que no sean muy heterogéneas. En cualquier caso, si seguimos la nomenclatura anterior nos encontramos ante la siguiente cartera:

	Distribución de la cuantía					
Prob. siniestro	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\cdots$	$fi(x)$	$\cdots$	$f_a(x)$
q_1						
q_2						
$\cdots$						
q_j				n_{ij}		
$\cdots$						
q_b						

y las recurrencias presentadas permitirán el cálculo de la función de densidad de probabilidad del coste total S, f_S.

6.3.2.1 Recurrencias de De Pril (1989)

Los teoremas 6.5 y 6.6 contienen dos versiones de un método recurrente que permite el cálculo exacto de la distribución de la siniestralidad agregada. El primero se basa en una fórmula recurrente en dos etapas mientras que el segundo, contiene convoluciones de orden superior a uno de la distribución de la cuantía en caso de siniestro y, en general, se trata también de una fórmula en dos etapas.

Teorema 6.5

Para el cálculo de f_S resulta la siguiente recurrencia:

$$f_S(0) = \prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_j} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_{ij}}, \tag{6.13}$$

$$s\ f_S(s) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{x=1}^{s} w_{ij}(x)\ f_S(s-x) \qquad s = 1, 2, \cdots, m, \tag{6.14}$$

donde las funciones auxiliares w_{ij} se obtienen a partir de la recurrencia

$$\begin{aligned} w_{ij}(1) &= \frac{q_j}{p_j}\ f_i(1), \\ w_{ij}(x) &= \frac{q_j}{p_j}\left[x\ f_i(x) - \sum_{k=1}^{x-1} f_i(k)\ w_{ij}(x-k)\right] \qquad x = 2, \cdots, m_i, \\ w_{ij}(x) &= -\frac{q_j}{p_j}\sum_{k=1}^{m_i} f_i(k)\ w_{ij}(x-k) \qquad\qquad x = m_i + 1, \cdots \end{aligned} \tag{6.15}$$

Demostración
La función generatriz de probabilidad de la v.a. S es

$$\begin{aligned} G_S(u) &= \sum_{s=0}^{m} f_S(s)\ u^s \\ &= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(p_j + q_j\ G_i(u)\right)^{n_{ij}} \end{aligned} \tag{6.16}$$

siendo $G_i(u)$ la función generatriz de probabilidad de f_i, es decir,

$$G_i(u) = \sum_{x=1}^{m_i} f_i(x)\ u^x \tag{6.17}$$

Haciendo $u = 0$ en (6.16) inmediatamente resulta (6.13).

Para demostrar (6.14) en primer lugar tomamos logaritmos a ambos lados de (6.16), de donde resulta

$$\ln G_S(u) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ \ln\left(p_j + q_j\ G_i(u)\right).$$

Derivando esta expresión tenemos

$$G_S'(u) = G_S(u)\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{q_j\ G_i'(u)}{p_j + q_j\ G_i(u)}.$$

Si tenemos en cuenta el comportamiento de la primera derivada de la función generatriz de probabilidad de la cuantía, dada en (6.17)

$$G_i'(u) = \sum_{x=1}^{m_i} x\ f_i(x)\ u^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} x\ f_i(x)\ u^{x-1} = \sum_{x=0}^{\infty}(x+1)\ f_i(x+1)\ u^x,$$

podemos definir

$$W_{ij}(u) = \frac{q_j\ G_i'(u)}{p_j + q_j\ G_i(u)} = \sum_{x=0}^{\infty} w_{ij}(x+1)\ u^x, \tag{6.18}$$

siendo w_{ij} una función auxiliar que posteriormente determinaremos.
Así
$$G'_S(u) = G_S(u) \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{x=0}^{\infty} w_{ij}(x+1)\ u^x. \tag{6.19}$$
Aplicaremos la derivada de orden $s-1$ a ambos lados de (6.19) en $u=0$ a partir de la fórmula de Leibnitz.
Sea
$$V(u) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{x=0}^{\infty} w_{ij}(x+1)\ u^x,$$
fácilmente se puede comprobar que para $t = 1, 2, \cdots,$
$$\begin{aligned} G_S^{t)}(0) &= t!\ f_S(t) \\ V^{t)}(0) &= t! \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} w_{ij}(t+1). \end{aligned}$$
Así, la derivada de orden $s-1$ de (6.19) en $u=0$, aplicando Leibnitz resulta
$$\begin{aligned} s! f_S(s) &= (s-1)! f_S(s-1) \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} w_{ij}(1) \right) + \binom{s-1}{1} (s-2)! \\ &\quad f_S(s-2) \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} w_{ij}(2) \right) + \binom{s-1}{2} (s-3)! f_S(s-3) \\ &\quad \left(2 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} w_{ij}(3) \right) + \binom{s-1}{3} (s-4)! f_S(s-4) \left(6 \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} w_{ij}(4) \right) \\ &\quad + \cdots + f_S(0)(s-1)! \left(\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} w_{ij}(s) \right) \\ &= (s-1)! \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{x=1}^{s} w_{ij}(x)\ f_S(s-x), \end{aligned}$$
de donde inmediatamente resulta (6.14).

Quedan por determinar los coeficientes w_{ij}, para ello observemos que de (6.18) resulta
$$q_j G'_i(u) = (p_j + q_j\ G_i(u)) \sum_{x=0}^{\infty} w_{ij}(x+1)\ u^x, \tag{6.20}$$
siendo
$$G_i(u) = \sum_{x=1}^{m_i} f_i(x)\ u^x,$$

$$G_i'(u) \quad = \quad \sum_{x=0}^{\infty}(x+1)\ f_i(x+1)\ u^x.$$

Haciendo $u=0$ inmediatamente resulta

$$q_j\ f_i(1) = p_j\ w_{ij}(1) \Rightarrow w_{ij}(1) = \frac{q_j}{p_j}\ f_i(1)\,.$$

Quedan por obtener las expresiones restantes de los coeficientes w_{ij}.
Si tenemos en cuenta que para $t=1,2,\cdots$

$$\begin{aligned} G_i^{t)}(0) &= t!\, f_i(t) \\ W_{ij}^{t)}(0) &= t!\, w_{ij}(t+1) \end{aligned}$$

y aplicamos Leibnitz para obtener la derivada de orden $x-1$ de la expresión (6.20) en $u=0$, tenemos

$$\begin{aligned} & q_j\ x!\ f_i(x) = q_j\,(x-1)! f_i(x-1)\, w_{ij}(1) + \binom{x-1}{1}(x-2)! \\ & \quad q_j f_i(x-2)\, w_{ij}(2) + \binom{x-1}{2} 2\ \ (x-3)!\ q_j f_i(x-3)\, w_{ij}(3) \\ & \quad + \cdots + \binom{x-1}{x-2}(x-2)!\ q_j f_i(1)\, w_{ij}(x-1) + (x-1)!\ p_j w_{ij}(x)\,. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} & q_j\, x\, f_i(x) = q_j f_i(x-1)\, w_{ij}(1) + q_j f_i(x-2)\, w_{ij}(2) \\ & \quad + q_j f_i(x-3)\, w_{ij}(3) + q_j f_i(1)\, w_{ij}(x-1) + \cdots + p_j w_{ij}(x)\,. \end{aligned}$$

Con lo cual,

(a) Si $x \le m_i$:

$$w_{ij}(x) = \frac{q_j}{p_j}\left[x\ f_i(x) - \sum_{k=1}^{x-1} f_i(k)\ \ w_{ij}(x-k)\right]$$

(b) Si $x > m_i$:

$$\begin{aligned} & 0 = q_j\ f_i(m_i)\, w_{ij}(x-m_i) + q_j\ f_i(m_i-1)\, w_{ij}(x-(m_i-1)) \\ & \quad + \cdots + q_j\ f_i(1)\, w_{ij}(x-1) + p_j w_{ij}(x)\,, \end{aligned}$$

$$w_{ij}(x) = -\frac{q_j}{p_j}\sum_{k=1}^{m_i} f_i(k)\ \ w_{ij}(x-k)\,.$$

$\square$

Teorema 6.6

Sea

$$A\left(i,k\right)=\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k},$$

entonces resulta la siguiente recurrencia para f_S *:*

$$f_S\left(0\right)=\prod_{j=1}^{b}\left(p_j\right)^{n_j}=\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(p_j\right)^{n_{ij}}, \tag{6.21}$$

$$s\ f_S\left(s\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s}A\left(i,k\right)\sum_{x=k}^{\min(s,km_i)}x\ f_i^{*k)}\left(x\right)\ f_S\left(s-x\right)\quad s=1,2,\cdots,m, \tag{6.22}$$

siendo $f_i^{*k)}$ *la convolución de orden* k *de* f_i*.*

Demostración

La demostración de (6.21) es idéntica a la realizada en el teorema anterior. Para demostrar (6.22), consideremos nuevamente la función definida en (6.18)

$$W_{ij}\left(u\right)=\frac{q_j\ G_i'\left(u\right)}{p_j+q_j\ G_i\left(u\right)}=\sum_{x=0}^{\infty}w_{ij}\left(x+1\right)\ u^x,$$

cuyos coeficientes w_{ij} son los explícitos en (6.15). Podemos redefinir esta expresión como

$$\begin{aligned}
W_{ij}\left(u\right)&=\frac{q_j\ G_i'\left(u\right)}{p_j+q_j\ G_i\left(u\right)}=\frac{q_j}{p_j}G_i'\left(u\right)\frac{p_j}{p_j+q_jG_i\left(u\right)}\\
&=\left\{\frac{p_j}{p_j+q_jG_i\left(u\right)}=\frac{1}{1+\dfrac{q_j}{p_j}G_i\left(u\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\left(G_i\left(u\right)\right)^k\right\}\\
&=\frac{q_j}{p_j}G_i'\left(u\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\left(G_i\left(u\right)\right)^k=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+1\right)\left(G_i\left(u\right)\right)^kG_i'\left(u\right)\right.\\
&\left.=\sum_{k=1}^{\infty}k\ \left(G_i\left(u\right)\right)^{k-1}G_i'\left(u\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{du}\left(G_i\left(u\right)\right)^k\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\\
&\frac{d}{du}\left(G_i\left(u\right)\right)^k=\frac{d}{du}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\left(\sum_{x=1}^{m_i}f_i\left(x\right)u^x\right)^k\right].
\end{aligned}$$

Dado que la cuantía de cada siniestro es independiente del resto, las diferentes funciones f_i son independientes y por tanto $\left(\sum_{x=1}^{m_i}f_i\left(x\right)u^x\right)^k$ es la función generatriz de probabilidad del coste de k siniestros, es decir

$$(G_i(u))^k = \left(\sum_{x=1}^{m_i} f_i(x) u^x\right)^k = \sum_{x=0}^{km_i} f_i^{*k)}(x)\ u^x = \sum_{x=k}^{km_i} f_i^{*k}(x)\ u^x.$$

Así,

$$\begin{aligned} W_{ij}(u) &= \frac{d}{du}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=k}^{km_i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x)\ u^x\right] \\ &= \frac{d}{du}\left[\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{k=\left[\frac{x}{m_i}+1\right]}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x)\ u^x\right] \\ &= \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k x\ f_i^{*k}(x)\ u^{x-1}, \end{aligned}$$

siendo $[x]$ la función parte entera y $]x[$ la función que da el menor entero mayor o igual a x.

Veamos como se comportan las derivadas sucesivas a ambos lados de la ecuación anterior en el punto $u = 0$. Es fácil comprobar que

$$W_{ij}^{t)}(0) = t! w_{ij}\ (t+1) \qquad t = 1, 2, \cdots$$

y en cuanto a la segunda parte de la igualdad tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{du}\left[\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k x\ f_i^{*k}(x)\ u^{x-1}\right] \\ = &\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k x(x-1)\ f_i^{*k}(x)\ u^{x-2}. \end{aligned}$$

Haciendo $u = 0$ resulta

$$2\sum_{k=\left]\frac{2}{m_i}\right[}^{2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(2).$$

Siguiendo el mismo procedimiento, tenemos en general que para $t = 1, 2, \cdots$, la derivada de orden t en el punto $u = 0$ es

$$(t+1)!\sum_{k=\left]\frac{t+1}{m_i}\right[}^{t+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(t+1).$$

Si hacemos la derivada de orden $x-1$ a ambos lados encontramos

$$\begin{aligned}(x-1)!\,w_{ij}(x) &= x! \sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x) \Rightarrow \\ w_{ij}(x) &= \sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k x\, f_i^{*k}(x)\end{aligned}$$

En el teorema anterior se había demostrado que

$$s\ f_S(s) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{x=1}^{s} w_{ij}(x)\ f_S(s-x)\,;$$

para la expresión de los coeficientes w_{ij} que acabamos de obtener resulta

$$s\ f_S(s) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{x=1}^{s} \sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k x\, f_i^{*k}(x)\ f_S(s-x)\,.$$

Observemos que

$$\sum_{x=1}^{s} \sum_{k=\left]\frac{x}{m_i}\right[}^{x} (.) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{x=k}^{\min(s,km_i)} (.)\,,$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}s\ f_S(s) &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k \sum_{x=k}^{\min(s,km_i)} x\, f_i^{*k}(x)\ f_S(s-x) \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s} A(i,k) \sum_{x=k}^{\min(s,km_i)} x\, f_i^{*k}(x)\ f_S(s-x)\,.\end{aligned}$$

□

Remarcar que las recurrencias presentadas en el teorema 6.3 y corolario 6.4 se obtienen como casos particulares de esta última. En efecto, en el caso de riesgos individuales con distribución de dos puntos, la distribución condicional de la cuantía en caso de siniestro se reduce como hemos visto anteriormente a

$$f_i(x) = I(x=i)\,,$$

siendo i el capital asegurado e I la función indicadora. Así

$$f_i^{*k}(x) = I(x=ki)$$

y sustituyendo esta expresión en (6.22) tenemos

$$\begin{aligned}
s\, f_S(s) &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s} A(i,k)\ ki\ f_S(s-ki) \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\ ki\ \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_S(s-ki) \\
&= \{\forall i > s \text{ y } \forall ki > s,\ f_S(s-ki) = 0\} \\
&= \sum_{i=1}^{\min(a,s)} \sum_{k=1}^{\left[\frac{s}{i}\right]} (-1)^{k+1}\, i \sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_S(s-ki),
\end{aligned}$$

expresión que coincide con la obtenida en (6.9).

En cuanto a la distribución del número de siniestros dada en (6.12), se obtiene de forma similar a la anterior haciendo además $i = 1$, es decir, sustituyendo en (6.22), $f_i^{*k}(x)$ por $f_1^{*k}(x) = I(x = 1)$.

Remarcar, por último, que en general la convolución de orden k de las funciones f_i que aparece en (6.22) se pueden calcular a partir de la definición recurrente habitual para las convoluciones -dada en (6.6)- o bien, a partir de la fórmula recurrente de De Pril (1986) para el caso de riesgos individuales con distribución de dos puntos -dada en (6.9)-. En algunos casos particulares, con funciones de distribución de la cuantía f_i definidas en pocos puntos, se podrá dar una expresión explícita para esta convolución y, por tanto, será posible obtener la distribución del coste total a partir de una fórmula en una sola etapa. Veremos un ejemplo de ello un poco más adelante -ver apartado 6.4.2-.

6.3.2.2 Recurrencia de Dhaene&Vanderbroek (1995)

En el siguiente teorema se da una nueva recurrencia exacta para el cálculo en dos etapas de la distribución del coste total cuando la cuantía a pagar en caso de siniestro es aleatoria.

Teorema 6.7
Para el modelo individual las probabilidades f_S se pueden calcular a partir de

$$f_S(0) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_{ij}}, \tag{6.23}$$

$$sf_S(s) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} v_{ij}(s), \quad s = 1, 2, \cdots, m \tag{6.24}$$

donde los coeficientes ν_{ij} vienen dados por la recurrencia

$$v_{ij}\left(s\right)=\frac{q_j}{p_j}\sum_{x=1}^{m_i}f_i\left(x\right)\left(x\ f_S\left(s-x\right)-v_{ij}\left(s-x\right)\right). \tag{6.25}$$

Demostración

La demostración de (6.23) es similar a la realizada para la misma expresión en el teorema 6.5.

Para demostrar (6.24) consideramos nuevamente el logaritmo de la función generatriz de probabilidad de la v.a. S,

$$\ln G_S\left(u\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\ \ln\left(p_j+q_j\ G_i\left(u\right)\right).$$

Derivando esta expresión tenemos

$$G_S'\left(u\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\ \frac{q_j\ G_i'\left(u\right)G_S\left(u\right)}{p_j+q_j\ G_i\left(u\right)}. \tag{6.26}$$

Si tenemos en cuenta el comportamiento de la primera derivada de la función generatriz de probabilidad de la cuantía,

$$G_i'\left(u\right)=\sum_{x=1}^{m_i}x\ f_i\left(x\right)\ u^{x-1}=\sum_{x=1}^{\infty}x\ f_i\left(x\right)\ u^{x-1}=\sum_{x=0}^{\infty}\left(x+1\right)\ f_i\left(x+1\right)\ u^{x},$$

podemos definir

$$V_{ij}\left(u\right)=\frac{q_j\ G_i'\left(u\right)\ G_S\left(u\right)}{p_j+q_j\ G_i\left(u\right)}=\sum_{x=0}^{\infty}v_{ij}\left(x+1\right)\ u^{x},$$

siendo v_{ij} una función auxiliar que posteriormente determinaremos.
Podemos ahora reescribir $G_S'\left(u\right)$ a partir de esta última expresión y resulta,

$$G_S'\left(u\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}V_{ij}\left(u\right).$$

Teniendo en cuenta que para $t=1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}G_S^{t)}\left(0\right)&=t!\ f_S\left(t\right)\\ V_{ij}^{t)}\left(0\right)&=\left(t-1\right)!v_{ij}\left(t\right)\end{aligned}$$

y haciendo la derivada de orden $s-1$ en $u=0$ a ambos lados de (6.26) resulta

$$
\begin{aligned}
s!\ f_S(s) &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ (s-1)! v_{ij}(s) \Rightarrow \\
s\ f_S(s) &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} v_{ij}(s).
\end{aligned}
$$

Queda por demostrar la expresión de los coeficientes v_{ij} dada en (6.25). Para ello reformulamos la expresión dada para la función V_{ij}

$$
\begin{aligned}
V_{ij}(u) &= \frac{q_j\ G_i'(u)\ G_S(u)}{p_j + q_j\ G_i(u)} = \frac{q_j}{p_j}\left(\frac{p_j\ G_i'(u)\, G_S(u)}{p_j + q_j\ G_i(u)}\right) \\
&= \frac{q_j}{p_j}\left[\frac{(p_j + q_j\ G_i(u))\, G_i'(u)\, G_S(u) - q_j G_i(u)\, G_i'(u)\, G_S(u)}{p_j + q_j\ G_i(u)}\right] \\
&= \frac{q_j}{p_j}\left[G_i'(u)\, G_S(u) - G_i(u)\, V_{ij}(u)\right].
\end{aligned}
$$

Sabiendo que

$$G_i^{t)}(0) = t!\ f_i(t)$$

y aplicando Leibnitz a ambos lados para obtener la derivada de orden $s-1$ de V_{ij} en $u = 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&(s-1)!\ v_{ij}(s) = \frac{q_j}{p_j}\left[s! f_i(s)\, f_S(0) - (s-1)! f_i(s-1)\, v_{ij}(1)\right. \\
&\quad + \binom{s-1}{1}\left((s-1)! f_i(s-1)\, f_S(1) - (s-2)! f_i(s-2)\, v_{ij}(2)\right) \\
&\quad + \binom{s-1}{2} 2\left((s-2)! f_i(s-2)\, f_S(2) - (s-3)! f_i(s-3)\, v_{ij}(3)\right) \\
&\quad + \binom{s-1}{3} 3! \left((s-3)! f_i(s-3)\, f_S(3) - (s-4)! f_i(s-4)\, v_{ij}(4)\right) \\
&\quad \left. + \cdots + (s-1)! f_i(1)\, f_S(s-1)\right].
\end{aligned}
$$

Simplificando resulta,

$$
\begin{aligned}
&v_{ij}(s) = \frac{q_j}{p_j}\left[s f_i(s)\, f_S(0) - f_i(s-1)\, v_{ij}(1) + (s-1)\, f_i(s-1)\, f_S(1)\right. \\
&\quad - f_i(s-2)\, v_{ij}(2) + (s-2)\, f_i(s-2)\, f_S(2) - f_i(s-3)\, v_{ij}(3) + \cdots + f_i(1) \\
&\quad \left. f_S(s-1)\right] = \frac{q_j}{p_j}\left[f_i(1)\, f_S(s-1) + 2 f_i(2)\, f_S(s-2) - f_i(1)\, v_{ij}(s-1)\right. \\
&\quad + 3 f_i(3)\, f_S(s-3) - f_i(2)\, v_{ij}(s-2) + \cdots + (s-1)\, f_i(s-1)\, f_S(1)
\end{aligned}
$$

$$-f_i(s-2)\,v_{ij}(2) + sf_i(s)\,f_S(0) - f_i(s-1)\,v_{ij}(1)]$$

$$= \frac{q_j}{p_j}\left[f_i(1)\left(f_S(s-1) - v_{ij}(s-1)\right) + f_i(2)\left(2f_S(s-2) - v_{ij}(s-2)\right)\right.$$

$$\left. + f_i(s-1)\left((s-1)\,f_S(1) - v_{ij}(1)\right) + sf_i(s)\,f_S(0)\right]$$

$$= \{\forall s > m_i, f_i(s) = 0\} = \frac{q_j}{p_j}\sum_{x=1}^{m_i} f_i(x)\left(xf_S(s-x) - v_{ij}(s-x)\right).$$

□

Como caso particular, podemos obtener una nueva fórmula recurrente para el cálculo de la distribución del coste total en el modelo individual de vida. Haciendo $f_i(x) = I(x=i)$ en (6.25), se sigue que ahora las probabilidades $f_S(s)$ se pueden calcular a partir de los coeficientes $v_{ij}(s)$ dados por

$$v_{ij}(s) = \frac{q_j}{p_j}\left(i\,f_S(s-i) - v_{ij}(s-i)\right), \quad s = 1, 2, \cdots, m.$$

Esta recurrencia coincide con la obtenida por Waldmann (1994).

Dhaene & Vanderbroek (1995) comparan la recurrencia general que acabamos de deducir con la presentada en el teorema 6.6 (De Pril, 1989). Dado que ambas son recurrencias exactas, los valores que resultan para f_S son iguales en cualquier caso y será mejor aquella que implique un menor tiempo de cálculo. La recurrencia aquí presentada implica aproximadamente $2b\left(a + \sum_{i=1}^{a} m_i\right)$ multiplicaciones para el cálculo de una probabilidad $f_S(t)$. Así el cálculo de $f_S(1)$, $f_S(2)$, $\cdots$, $f_S(m)$ supone aproximadamente

$$2b\left(a + \sum_{i=1}^{a} m_i\right)m \tag{6.27}$$

multiplicaciones.

Por otra parte la recurrencia de De Pril (1989) implica aproximadamente $3ab + b\sum_{i=1}^{a} m_i + t$ multiplicaciones para el cálculo de una probabilidad $f_S(t)$. En este caso el cálculo de $f_S(1)$, $f_S(2)$, $\cdots$, $f_S(m)$ necesita

$$\left(3ab + b\sum_{i=1}^{a} m_i\right)m + \frac{m(m+1)}{2} \tag{6.28}$$

multiplicaciones.

Comparando (6.27) y (6.28) llegamos a la conclusión que la recurrencia de Dhaene & Vanderbroek (1995) mejora a la de De Pril (1989) siempre que

$$m > 2b\left(\sum_{i=1}^{b} m_i - a\right) - 1, \tag{6.29}$$

condición que evidentemente también podremos garantizar cuando

$$m > 2b\sum_{i=1}^{b} m_i. \tag{6.30}$$

Para interpretar este resultado debemos considerar el grado de heterogeneidad de la cartera. Podemos hacernos una idea de esta grado comparando $b\sum_{i=1}^{b} m_i$ con m. En una cartera completamente homogénea todas las pólizas se pueden clasificar en una misma celda y $b\sum_{i=1}^{b} m_i$ será mucho menor a m con lo cual podremos asegurar el cumplimiento de (6.30). Por el contrario, si estamos ante una cartera completamente heterogénea, el número de clases igualará al número de pólizas y $b\sum_{i=1}^{b} m_i = m$, incumpliéndose (6.29). En la práctica, el grado de homogeneidad de la cartera estará entre estos dos valores y, por tanto, el teorema de Dhaene & Vanderbroek (1995) es una reformulación eficiente del de De Pril (1989) siempre que la cartera no sea demasiado heterogénea.

Remarcar también que el tiempo de cálculo que precisa la recurrencia alternativa presentada en el teorema 6.5 (De Pril, 1989) es aproximadamente el mismo que el necesario para desarrollar la recurrencia presentada en el teorema 6.6. Así, las conclusiones son similares a las expuestas.

6.4 Aplicaciones

6.4.1 Carteras de seguros de vida

Dentro de este apartado queremos servirnos de la recurrencia de De Pril (1986) presentada en el teorema 6.3 para llegar a determinar la distribución del coste total en tres carteras de seguros de vida. Las dos primeras son carteras teóricas. La primera fue propuesta por Gerber (1979) y está compuesta únicamente por 31 pólizas mientras que la segunda fue introducida por Kornya (1983) y contiene 322 pólizas. Introducimos, por último, una cartera real formada por 750 pólizas.

Los cálculos se han realizado programando la recurrencia en Mathcad (versión 8.0), ver programa A1. "Recurrencia de De Pril (1986)" en apéndice A.

Ejemplo 6.8 *Cartera de Gerber. Distribución del coste total*

La cartera propuesta por Gerber (1979), está formada por 31 contratos de seguros de vida. Cada contrato da lugar al pago de una cuantía fija positiva, i, en caso de que el asegurado muera dentro del periodo de referencia (igual a un año). La probabilidad de muerte de cada asegurado, q_j, se obtiene a partir de las tablas de mortalidad en función del sexo y edad del asegurado. Tomaremos esta probabilidad como un dato. En base a la nomenclatura establecida en el apartado 6.2, estamos ante la siguiente cartera

	Capital asegurado				
Prob. siniestro	1	2	3	4	5
0.03	2	3	1	2	-
0.04	-	1	2	2	1
0.05	-	2	4	2	2
0.06	-	2	2	2	1

Cartera de Gerber

Número total de pólizas:	31
Esperanza matemática del coste total:	$E(S) = 4.49$

La distribución de probabilidad que resulta para la v.a. coste total, S, que recoge los pagos a que deberá enfrentarse el asegurador por esa cartera dentro del período de referencia viene dada en las siguiente tabla. En ella presentamos la función de densidad de probabilidad, f_S, así como la función de distribución, F_S, cuya acumulación presentamos también gráficamente.

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$	$F_S(s) = \Pr(S \leq s)$
0	0.23819481328949	0.238194813289491
1	0.01473369979110	0.252928513080594
2	0.08773416103818	0.340662674118770
3	0.11318330473835	0.453845978857119
4	0.11070909138009	0.564555070237212
5	0.09632737359241	0.660882443829624
6	0.06154869397348	0.722431137803100
7	0.06902213171711	0.791453269520209
8	0.05481712975336	0.846270399273568
9	0.04314705902598	0.889417458299544
10	0.03010725707962	0.919524715379161
12	0.01828244448122	0.961336305259704
14	0.00871075795707	0.982556333400013
16	0.00415190429656	0.992619882808878
18	0.00174094279977	0.997075870715387
20	0.00071101544049	0.998904249464289
24	0.00009583008041	0.999870874653328
28	0.00001028663670	0.999987724583440
32	0.00000088711660	0.999999049820390

Ejemplo 6.9 *Cartera de Kornya. Distribución del coste total*

Análogamente, podemos considerar la cartera de Kornya (1983) que presentamos a continuación.

	Capital asegurado				
Prob. siniestro	1	2	3	4	5
0.00094	12	1	-	19	6
0.00191	23	-	3	32	14
0.00501	2	6	13	24	1
0.01320	14	7	31	5	36
0.03407	20	-	-	31	22

Cartera de Kornya

Número total de pólizas:	322
Esperanza matemática del coste total:	$E(S) = 14.2146$

Para esta cartera, resultan las siguientes funciones:

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$	$F_S(s) = \Pr(S \leq s)$
0	0.01544195345795	0.015441953457947
2	0.00880163323795	0.039038232990862
4	0.02961111702904	0.080062778320671
6	0.03492801527195	0.159827833068868
8	0.04169512757976	0.230866833367392
10	0.05842359110977	0.348223316863353
14	0.05850236213247	0.554676233430020
18	0.04352292063047	0.733375790792745
22	0.02662827145431	0.859888782220863
26	0.01418237074194	0.934886857843459
30	0.00675047558243	0.972947453002179
34	0.00288494300791	0.989837290257815
38	0.00110644737013	0.996515319483557
42	0.00038205289738	0.998901927085122
46	0.00011970163429	0.999680451245839
50	0.00003436884825	0.999913776770817
54	0.00000912772867	0.999978343924044
58	0.00000225819567	0.999994916978114
66	0.00000011362010	0.999999767999235
70	0.00000002322983	0.999999954594922

En el siguiente ejemplo consideramos, por último, una cartera real. Los datos de la misma se han tomado de Kuon, Reich & Reimens (1987).

Ejemplo 6.10 *Cartera real. Distribución del coste total*

Para la cual encontramos

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$	$F_S(s) = \Pr(S \leq s)$
0	0.013962642150538	0.013962642150538
1	0.002849613828967	0.016812255979505
2	0.005132291853873	0.021944547833378
3	0.004770040828426	0.026714588661804
4	0.003423288110315	0.030137876772119
5	0.002552785892133	0.032690662664252
10	0.013043904975125	0.082282834534273
20	0.018199414203272	0.229505321683212
30	0.019948649462357	0.420853848654120
40	0.017508156555807	0.609129600873915
50	0.013081944792995	0.761033008040890
60	0.008520580377453	0.866337474694972
70	0.004963617420077	0.930990395293131
80	0.002631089831375	0.966855722799338
90	0.001285124626235	0.985093955021588
100	0.000584059696686	0.993687756776447
110	0.000248822666805	0.997471162938967
120	0.000099963524505	0.999037681945289
130	0.000038056398319	0.999650959655480
140	0.000013784805630	0.999878971790245
150	0.000004766948738	0.999959776693261
160	0.000001578360750	0.999987157918460
170	0.000000501629294	0.999996053350950
180	0.000000153360591	0.999998830427490
190	0.000000045188257	0.999999665252287

6.4.2 Carteras de seguros de vida con doble indemnización en caso de muerte por accidente

Dentro de este apartado queremos considerar nuevamente el ejemplo 6.2. Se trataba, recordemos, de un seguro de vida con doble indemnización en caso de que la muerte del asegurado se produzca por accidente. Si la probabilidad condicional de muerte por accidente, condicionada a que la muerte se ha producido, es constante para todos los asegurados y viene dada por α, recordemos que la función de densidad de probabilidad de la cuantía en caso de siniestro venía dada por

$$f_i\left(x\right)=\begin{cases}1-\alpha & \text{si } x=i\\ \alpha & \text{si } x=2i\\ 0 & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}\tag{6.31}$$

Como habíamos visto, si tenemos una cartera con un número muy pequeño de asegurados que tengan contratada esta cobertura podemos hacer el cálculo directo de la distribución del coste total por convolución de las distribuciones resultantes para los riesgos individuales. Llegar mediante la técnica de convolución a la distribución del coste total que resulta para alguna de las carteras presentadas en los ejemplos 6.8, 6.9 o 6.10 suponiendo ahora que tienen esta cobertura adicional, es inviable desde un punto de vista práctico. Como veremos a continuación, este problema queda resuelto utilizando cualquiera de las recurrencias presentadas en el apartado 6.3.2.

Consideremos en primer lugar la recurrencia de De Pril (1989) presentada en el teorema 6.6.

La expresión que resulta para la convolución de orden k de la función $f_i\left(x\right)$ es

$$f_i^{*k)}\left(x\right)=\begin{cases}\binom{k}{h-k}\left(1-\alpha\right)^{2k-h}\alpha^{h-k} & \text{si } x=hi,\ h=k,k+1,\cdots,2k,\\ 0 & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Sustituyendo esta expresión en (6.22) tenemos

$$\begin{aligned}s\ f_S\left(s\right)=&\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sum_{h=k}^{2k}hi\binom{k}{h-k}\left(1-\alpha\right)^{2k-h}\alpha^{h-k}\\ &\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k}f_S\left(s-hi\right)=\left\{\sum_{k=1}^{s}\sum_{h=k}^{2k}\left(.\right)=\sum_{h=1}^{2s}\sum_{k=\left]\frac{h}{2}\right[}^{\min(h,s)}\left(.\right)\right\}\\ =&\sum_{i=1}^{a}\sum_{h=1}^{2s}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sum_{k=\left]\frac{h}{2}\right[}^{\min(h,s)}hi\binom{k}{h-k}\left(1-\alpha\right)^{2k-h}\alpha^{h-k}\\ &\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k}f_S\left(s-hi\right)=\left\{\forall h>\left[s/i\right],\ f_S\left(s-hi\right)=0\right\}\end{aligned}$$

$$
= \sum_{i=1}^{a} \sum_{h=1}^{[s/i]} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{k=\left]\frac{h}{2}\right[}^{h} hi \binom{k}{h-k} (1-\alpha)^{2k-h} \alpha^{h-k}
$$

$$
\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k} f_S(s-hi) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{[s/i]} ki \sum_{h=\left]\frac{k}{2}\right[}^{k} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \binom{h}{k-h}
$$

$$
(1-\alpha)^{2h-k} \alpha^{k-h} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{h} f_S(s-ki).
$$

Así, para este caso particular resulta una recurrencia en una sola etapa dada por

$$
f_S(0) = \prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_j} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_{ij}}, \tag{6.32}
$$

$$
s\ f_S(s) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{k=1}^{[s/i]} b(i,k)\ f_S(s-ki) \qquad s = 1, 2, \cdots, m, \tag{6.33}
$$

con

$$
b(i,k) = ki \sum_{h=\left]\frac{k}{2}\right[}^{k} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \binom{h}{k-h} (1-\alpha)^{2h-k} \alpha^{k-h} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{h}. \tag{6.34}
$$

Utilizando la recurrencia de Dhaene&Vanderbroek (1995) presentada en el teorema 6.7, en este caso particular únicamente tenemos que sustituir f_i -ver (6.31)- en la expresión que resulta para los coeficientes v_{ij} -ver (6.25)-, quedando la recurrencia como sigue.

$$
f_S(0) = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_{ij}},
$$

$$
s\ f_S(s) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} v_{ij}(s) \qquad s = 1, 2, \cdots, m
$$

siendo los coeficientes ν_{ij},

$$
v_{ij}(s) = \frac{q_j}{p_j} \left\{ (1-\alpha) \left[i f_S(s-i) - v_{ij}(s-i) \right] + \alpha \left[2i f_S(s-2i) - v_{ij}(s-2i) \right] \right\}.
$$

Presentamos, a continuación, la distribución del coste total que resulta para las carteras de Gerber, Kornya y real presentadas en los ejemplos 6.8, 6.9 y 6.10 respectivamente, considerando ahora que el pago del capital es doble en caso de muerte por accidente. Supondremos que en caso de muerte del asegurado, la probabilidad de que la misma se produzca por accidente es del 10%, es decir, $\alpha = 0.1$ constante para todos los asegurados de cada cartera.

Para su obtención hemos programado la recurrencia de De Pril (1989) que resulta para este caso particular, dada en (6.32) a (6.34), ver programa A2. "Recurrencia de De Pril (1989)" en apéndice A. Alternativamente llegaríamos a las mismas distribuciones a partir de la recurrencia de Dhaene & Vanderbroek que acabamos de deducir para este caso particular.

Ejemplo 6.11 *Cartera de Gerber con doble indemnización en caso de muerte por accidente. Distribución del coste total*

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$	$F_S(s) = \Pr(S \leq s)$
0	0.23819481328949	0.238194813289491
1	0.01326032981199	0.251455143101484
2	0.08041360924881	0.331868752350294
3	0.10141883700648	0.433287589356777
4	0.10701342602938	0.540301015386153
5	0.08356603912091	0.623867054507063
6	0.06347369939940	0.687340753906464
7	0.05990196297920	0.747242716885669
8	0.05953290170653	0.806775618592204
9	0.04069592782238	0.847471546414589
10	0.03689083138913	0.884362377803721
12	0.02224222063602	0.933268623436159
14	0.01313965856049	0.963944961950660
16	0.00738505520028	0.980976118347083
18	0.00406725425364	0.990430653725208
20	0.00205047630030	0.995281828385637
22	0.00102672299555	0.997764708497980
24	0.00049388218029	0.998969737740470
26	0.00023249396374	0.999538181284970
28	0.00010503377330	0.999798360848843
30	0.00004624347151	0.999914038531539
32	0.00001988955596	0.999964338821901
36	0.00000341267408	0.999994258201287
40	0.00000053159869	0.999999153628374

$$E(S) = 4.939$$

Ejemplo 6.12 *Cartera de Kornya con doble indemnización en caso de muerte por accidente. Distribución del coste total*

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$	$F_S(s) = \Pr(S \leq s)$
0	0.01544195345795	0.015441953457947
1	0.01331518166546	0.028757135123411
2	0.00878221522760	0.037539350351008
3	0.01099035247022	0.048529702821227
4	0.02666591679064	0.075195619611862
5	0.03892153036725	0.114117149979108
6	0.03061590422009	0.144733054199197
7	0.02653331026239	0.171266364461589
8	0.03735590894820	0.208622273409790
9	0.04957550297725	0.258197776387036
10	0.05038854476229	0.308586321149326
14	0.05151486777614	0.492742065462933
18	0.04190544488296	0.663428309017119
22	0.02922191861579	0.797116245919372
26	0.01847471914233	0.888076669959924
30	0.01074267052666	0.942929543177545
34	0.00572562576408	0.972859161672394
38	0.00280585701754	0.987884061541761
42	0.00127210729447	0.994898579999653
46	0.00053936978326	0.997966450961528
50	0.00021585422556	0.999229710313554
54	0.00008204476022	0.999721727333262
58	0.00002973042458	0.999903802366014
62	0.00001029552124	0.999968084922368
70	0.00000108845083	0.999996866080309
78	0.00000009897786	0.999999732310161

$$E(S) = 15.636$$

Ejemplo 6.13 *Cartera real con doble indemnización en caso de muerte por accidente. Distribución del coste total.*

s	$f_S(s) = \Pr(S = s)$	$F_S(s) = \Pr(S \leq s)$
0	0.01396264215054	0.013962642150538
1	0.00256465244607	0.016527294596608
2	0.00487932398715	0.021406618583756
3	0.00425035969468	0.025656978278434
4	0.00350293576505	0.029159914043482
5	0.00227945812929	0.031439372172770
10	0.01151626671258	0.076270030724414
15	0.01160835083535	0.130754668380098
20	0.01613322214287	0.206121459227607
25	0.01658526600301	0.286887889219005
30	0.01803347976198	0.376030175192602
40	0.01662645454086	0.549492408785824
50	0.01331483288178	0.698154167782637
60	0.00956725074493	0.810435558619543
70	0.00630479321850	0.887435123202677
80	0.00387566883329	0.936350113260645
90	0.00224905165508	0.965533105409371
100	0.00124214776979	0.982044916652182
110	0.00065713095677	0.990968204894264
120	0.00033461451904	0.995599362625094
130	0.00016464923031	0.997917660583511
140	0.00007853512397	0.999040932801191
150	0.00003640840392	0.999569238558893
160	0.00001644055331	0.999811013425879
170	0.00000724481484	0.999918893731549
180	0.00000312051171	0.999965907837596
190	0.00000131558520	0.999985948769661

$$E(S) = 40.668$$

6.5 Distribución del coste total: Recurrencias para su cálculo aproximado

6.5.1 Aproximaciones dentro del modelo individual

Salvo en el caso del modelo individual de vida, la obtención exacta de la distribución del coste total mediante cualquiera de las recurrencias presentadas hasta ahora necesita en la mayoría de los casos de una gran potencia de cálculo, especialmente cuando la cartera es muy heterogénea, es decir, con un valor de a y/o b alto y una función condicional de la cuantía en caso de siniestro f_i definida en más de unos pocos puntos. A pesar del gran avance de los programas informáticos en los últimos años, creemos que, desde un punto de vista práctico, actualmente es todavía interesante considerar algunas de las aproximaciones propuestas en la literatura las cuales, como veremos, reducen bastante el número de cálculos a realizar con una pequeña pérdida de precisión que en la mayoría de los casos es controlable. De entre todas las recurrencias propuestas dentro del modelo individual para aproximar la distribución del coste total recogemos la de Kornya (1983) generalizada por Hipp (1986), la de Hipp (1986) y la de De Pril (1989).

Con el fin de deducir las diferentes aproximaciones que acabamos de señalar, así como para cuantificar el error que las mismas cometen seguiremos la metodología utilizada por Dhaene & De Pril (1994). Consideremos nuevamente la función generatriz de probabilidad de la v.a. S cuyo rango, por conveniencia, ampliamos al conjunto de todos los enteros positivos,

$$G_S(u) = \sum_{s=0}^{m} f_S(s)\; u^s = \sum_{s=0}^{\infty} f_S(s)\; u^s = f_S(0) + \sum_{s=1}^{\infty} f_S(s)\; u^s. \tag{6.35}$$

Consideremos el logaritmo de la función anterior que redefinimos en base a unos coeficientes $t(x)$ tales que se cumpla

$$\ln G_S(u) = \sum_{x=0}^{\infty} t(x)\; u^x = t(0) + \sum_{x=1}^{\infty} t(x)\; u^x. \tag{6.36}$$

Así,

$$f_S(0) = e^{t(0)} \tag{6.37}$$

y derivando a ambos de (6.36) tenemos,

$$\frac{\sum_{s=1}^{\infty} s\ f_S\left(s\right)\ u^{s-1}}{\sum_{s=0}^{\infty} f_S\left(s\right)\ u^{s}} = \sum_{x=1}^{\infty} x\ t\left(x\right)\ u^{x-1}.$$

Se cumple por tanto

$$\begin{aligned} & f_S\left(1\right) + 2f_S\left(2\right)\ u + \cdots + sf_S\left(s\right)\ u^{s-1} + \cdots \\ & = \left(t\left(1\right) + 2t\left(2\right)\ u + \cdots + st\left(s\right)\ u^{s-1} + \cdots\right) \\ & \quad \left(f_S\left(0\right) + f_S\left(1\right)\ u + \cdots + f_S\left(s-1\right)\ u^{s-1} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes para un mismo grado de u, resulta la recurrencia

$$\begin{aligned} sf\left(s\right) &= t\left(1\right) f_S\left(s-1\right) + 2t\left(2\right) f_S\left(s-2\right) + \cdots + st\left(s\right) f_S\left(0\right) \\ &= \sum_{x=1}^{s} x\, t\left(x\right)\ f_S\left(s-x\right) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, t\left(x\right)\ f_S\left(s-x\right),\ s = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Así, la determinación de los coeficientes $t\left(x\right)$ se convierte en la clave para obtener una recurrencia exacta para la distribución del coste total. Cuando sean demasiado complejos para su aplicación práctica, podemos renunciar a la obtención exacta de los mismos y conformarnos con unos coeficientes aproximados a los que llamaremos $h\left(x\right)$. Basándonos en éstos llegaremos a aproximaciones de la distribución del coste total simplemente cambiando en (6.37) y (6.38) $t\left(x\right)$ por $h\left(x\right)$.

6.5.1.1 Aproximación de Kornya.

La recurrencia de Kornya (1983) para el cálculo aproximado de la distribución del coste total se formuló originalmente para el modelo individual de vida (riesgos individuales con distribución dicotómica). La generalización al modelo individual con distribución de la cuantía aleatoria se debe a Hipp (1986) y es la que queremos recoger en este apartado. A fin de derivar la expresión que resulta, reescribiremos el logaritmo de la función generatriz de probabilidad de la v.a.

S -dado en (6.36)- como sigue,

$$\ln G_S(u) = t(0) + \sum_{x=1}^{\infty} t(x)\, u^x = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ \ln\left(p_j + q_j G_i(u)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\ \ln\left[p_j + \left(\frac{q_j}{p_j} G_i(u)\right) p_j\right] = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \ln\left(\frac{1 + \dfrac{q_j}{p_j} G_i(u)}{\dfrac{p_j + q_j}{p_j}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left[\ln\left(1 + \frac{q_j}{p_j} G_i(u)\right) - \ln\left(1 + \frac{q_j}{p_j}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k (G_i(u))^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=k}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k \cdot$$

$$\cdot f_i^{*k}(x)\, u^x = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=k}^{\infty}(.) = \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{x}(.)\right\} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k$$

$$+ \sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{x} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\tfrac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x)\right)\ u^x.$$

De donde,

$$t(0) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k, \tag{6.39}$$

$$t(x) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k)}(x). \tag{6.40}$$

Sustituyendo estos coeficientes en (6.37) y (6.38) tendríamos una recurrencia exacta para el cálculo de la distribución del coste total en el modelo individual de riesgo. Observemos que salvo en el cálculo de $f_S(0)$, ésta es idéntica a la presentada en el teorema 6.6 (De Pril, 1989). Dado que ésta es la única diferencia (ya que ambas dan probabilidades exactas), será mejor aquella en la cual la obtención de $f_S(0)$ implique un menor número de operaciones y esto sucede en la de De Pril.

Hipp (1986) sugiere aproximaciones de orden r para la distribución del coste total, f_S^r, prescindiendo en (6.39) y (6.40) de aquellos valores de $k > r$. Así, para cualquier $r,\ r\in\{1,2,\cdots\}$, tendremos unos coeficientes aproximados dados por

$$h^{r}(0) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k}, \tag{6.41}$$

$$h^{r}(x) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\min(r,x)}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k}f_i^{*k}(x). \tag{6.42}$$

que sustituidos en (6.37) y (6.38) nos dan la siguiente aproximación:

$$f_S^{r,K}(0) = e^{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{k}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k}} \tag{6.43}$$

$$sf_S^{r,K}(s) = \sum_{x=1}^{s}x\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\min(r,x)}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k}f_i^{*k}(x)\ f_S^{r}(s-x). \tag{6.44}$$

6.5.1.2 Aproximación de Hipp

Hipp (1986) plantea también una recurrencia alternativa a la anterior. Al igual que antes, reformulamos el logaritmo de la función generatriz de probabilidad -ver (6.36)- para obtenerla.

$$\ln G_S(u) = t(0) + \sum_{x=1}^{\infty}t(x)\,u^{x} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\ln\left(p_j + q_jG_i(u)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\ln\left(1 + q_jG_i(u) - q_j\right) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\ln\left(1 + q_j\left(G_i(u) - 1\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}q_j^{k}\left(G_i(u) - 1\right)^{k}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}q_j^{k}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{l+1}}{(-1)^{k+1}}\binom{k}{l}\left(G_i(u)\right)^{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{q_j^{k}}{k} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_j^{k}}{k}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\binom{k}{l}\sum_{x=l}^{\infty}f_i^{*l}(x)\,u^{x}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{q_j^{k}}{k} + \sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{l+1}}{k}\binom{k}{l}q_j^{k}f_i^{*l}(x)\right)u^{x}.$$

Así,

$$t(0) = -\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_j^k}{k} \tag{6.45}$$

$$t(x) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l+1}}{k}\binom{k}{l} q_j^k f_i^{*l}(x) \tag{6.46}$$

y sustituyendo esta expresión en (6.37) y (6.38) llegaríamos a una nueva expresión exacta de la distribución del coste total. Si comparamos ésta con la de De Pril (1989) y la de Kornya (1983), vemos que se ha introducido un nuevo sumando y por tanto realiza un mayor número de operaciones para llegar a un mismo resultado, con lo cual podemos concluir que es peor para el cálculo de los valores exactos de f_S.

En cuanto al cálculo aproximado de esta distribución, Hipp (1986) propone no considerar en (6.45) y (6.46) los términos en k si $k > r$, $r \in \{1, 2, \cdots\}$, es decir, utilizar

$$h^r(0) = -\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{r} \frac{q_j^k}{k}, \tag{6.47}$$

$$h^r(x) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l+1}}{k}\binom{k}{l} q_j^k f_i^{*l}(x) \tag{6.48}$$

para llegar a una nueva secuencia de aproximaciones de orden r de la distribución del coste total,

$$f_S^{r,H}(0) = e^{-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{r} \frac{q_i^k}{k}}, \tag{6.49}$$

$$s\, f_S^{r,H}(s) = \sum_{x=1}^{s} x \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l+1}}{k}\binom{k}{l} q_j^k f_i^{*l}(x)\; f_S^{r}(s-x). \tag{6.50}$$

6.5.1.3 Aproximación de De Pril (1989)

Recordemos la recurrencia de De Pril (1989) para el cálculo exacto de las probabilidades $f_S(s)$ presentada en el teorema 6.6,

$$f_S(0) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b} (p_j)^{n_{ij}},$$

$$s\ f_S\left(s\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{s}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\sum_{x=k}^{\min(s,km_i)}x\ f_i^{*k}\left(x\right)\ f_S\left(s-x\right).$$

De Pril (1989) sugiere también realizar una aproximación de orden r para el cálculo de esta distribución para reducir el número de operaciones a realizar. Nuevamente se restringe el sumatorio de k a aquellos valores de $k>r$, $r\in\{1,2,\cdots\}$ y se llega a la siguiente aproximación de orden r

$$f_S^{r,P}\left(0\right)=\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(p_j\right)^{n_{ij}}, \tag{6.51}$$

$$sf_S^{r,P}\left(s\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{\min(r,s)}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\sum_{x=k}^{\min(s,km_i)}xf_i^{*k}\left(x\right)f_S^{r}\left(s-x\right). \tag{6.52}$$

Observemos que en este caso las $r+1$ primeras probabilidades así calculadas son exactas ($f_S^r\left(t\right),\ t=0,1,\cdots,r$), circunstancia que no se da en las dos aproximaciones anteriores.

Desde un punto de vista comparativo, es interesante reformular la recurrencia exacta y las aproximaciones de De Pril siguiendo la nomenclatura de Dhaene & De Pril (1994) que nos ha servido para presentar las de Kornya y Hipp. En cuanto a la segunda parte de la recurrencia exacta podemos reescribirla como

$$sf_S\left(s\right)=\sum_{x=1}^{s}x\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{x}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}\left(x\right)f_S\left(s-x\right).$$

Con lo cual

$$f_S\left(0\right)=e^{t(0)},$$

$$sf_S\left(s\right)=\sum_{x=1}^{s}xt\left(x\right)f_S\left(s-x\right),$$

siendo,

$$t\left(0\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\ln\left(p_j\right), \tag{6.53}$$

$$t\left(x\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}n_{ij}\sum_{k=1}^{x}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}\left(x\right). \tag{6.54}$$

La aproximación de orden r propuesta en (6.51) y (6.52) equivale a

$$\begin{aligned} f_S^{r,P}(0) &= e^{h^r(0)}, \\ s f_S^{r,P}(s) &= \sum_{x=1}^{s} x h^r(x) f_S^r(s-x), \end{aligned}$$

siendo,

$$h^r(0) = t(0) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \ln(p_j), \tag{6.55}$$

$$h^r(x) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\min(r,x)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x). \tag{6.56}$$

6.5.1.4 Comparación entre las aproximaciones propuestas

En este apartado queremos comparar las tres alternativas presentadas para la obtención de aproximaciones f_S^r de la función f_S dentro del modelo individual. En primer lugar, señalar que cualquiera de ellas es asintóticamente correcta si para cada póliza q_j, $(j = 1, 2, \cdots, b)$, es inferior a $\frac{1}{2}$. Sin duda esta condición se cumple en cualquier situación práctica que nos podamos encontrar. Así, a partir de este momento, podemos asumir sin pérdida de generalidad que en el modelo individual $q_j < \frac{1}{2}$.

Es ahora inmediato comprobar que para las tres aproximaciones propuestas

$$\lim_{r\to\infty} h^r(x) = t(x)$$

y, por tanto, las probabilidades que resultan de cualquiera de las recurrencias aproximadas de Kornya, Hipp o De Pril tienden a las probabilidades exactas a medida que hacemos aproximaciones de grado superior.

En cuanto al tiempo necesario para el cálculo de las mismas, vemos que para las de De Pril y Kornya es similar mientras que en el caso de la de Hipp es un poco superior ya que contiene un sumatorio adicional. En cualquier caso creemos que el criterio que nos debe llevar a utilizar una u otra aproximación debe ser la precisión obtenida a partir de la misma ya que, para valores de r moderados, cualquiera de las aproximaciones presentadas se puede obtener fácilmente con los recursos informáticos actuales.

A fin de acotar el error cometido con cada una de las secuencias de aproximaciones utilizaremos un resultado obtenido por Dhaene & De Pril (1994) que presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 6.14

Si existe un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{x=0}^{\infty} |t(x) - h^r(x)| \leq \varepsilon, \tag{6.57}$$

entonces,

$$\sum_{s=0}^{\infty} |f_S(s) - f_S^r(s)| \leq e^{\varepsilon} - 1. \tag{6.58}$$

Demostración

Dhaene & De Pril (1994), teorema 1, pág. 184-186.

□

Como aplicación de este teorema encontramos cotas para el error cometido por cada una de las aproximaciones consideradas.

Cotas de error para las aproximaciones de Kornya

Para un r fijado, $r = 1, 2, \cdots$, consideremos la aproximación de orden r de Kornya. Para la diferencia entre los coeficientes aproximados $h^r(x)$ -dados en (6.41) y (6.42)- y los coeficientes exactos $t(x)$ -dados en (6.39) y (6.40)-, encontramos

$$|t(0) - h^r(0)| = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k} \right.$$

$$\left. \left(-\frac{q_j}{p_j}\right)^k \right| = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \frac{1}{r+1} \left| \frac{\left(-\dfrac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}}{1 + \dfrac{q_j}{p_j}} \right| \leq \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \frac{1}{r+1} p_j \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}.$$

y

$$\sum_{x=1}^{\infty} |t(x) - h^r(x)| = \sum_{x=r+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left| \sum_{k=r+1}^{x} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k \right| \sum_{x=k}^{\infty} f_i^{*k}(x) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \left| \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k \right|$$

$$\leq \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k = \left\{ \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k = \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k \right\}$$

$$= \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}\frac{1}{1-\frac{q_j}{p_j}}$$

$$= \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{p_j}{p_j-q_j}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}.$$

Así la expresión ε que resulta para la aproximación de orden r es

$$\varepsilon_K(r) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(p_j + \frac{p_j}{p_j-q_j}\right)\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1} \tag{6.59}$$

y podemos garantizar que utilizando esta aproximación

$$\sum_{s=0}^{m}\left|f_S(s) - f_S^{r,K}(s)\right| \leq e^{\varepsilon_K(r)} - 1,$$

siendo las probabilidades $f_S^{r,K}(x)$ las dadas en (6.44).

Cotas de error para las aproximaciones de Hipp

Para un r fijado, $r = 1, 2, \cdots$, consideremos ahora la aproximación de orden r de Hipp. En este caso, haciendo la diferencia entre los coeficientes aproximados $h^r(x)$ -dados en (6.47) y (6.48)- y los coeficientes exactos $t(x)$ -dados en (6.45) y (6.46)- y suponiendo que $q_j < \frac{1}{2}$, $j = 1, \cdots, b$, encontramos

$$\sum_{x=0}^{\infty}|t(x) - h^r(x)| = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\sum_{k=r+1}^{\infty}\left|-\frac{1}{k}(q_j)^k\right| + \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}$$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\left|\frac{(-1)^{l+1}}{k}\binom{k}{l}q_j^k f_i^{*l}(x)\right| = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\left|\frac{(-1)^{l+1}}{k}\right.$$

$$\left.\binom{k}{l}q_j^k f_i^{*l}(x)\right| \leq \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{k}\binom{k}{l}q_j^k f_i^{*l}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{1}{k}q_j^k\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\sum_{x=l}^{\infty}f_i^{*l}(x) = \left\{\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} = 2^k\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{1}{k}(2q_j)^k \leq \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\sum_{k=r+1}^{\infty}(2q_j)^k$$

$$= \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{(2q_j)^{r+1}}{1-2q_j} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{(2q_j)^{r+1}}{p_j-q_j}.$$

Con lo que

$$\varepsilon_H(r) = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \frac{(2q_j)^{r+1}}{p_j - q_j} \tag{6.60}$$

y, en este caso,

$$\sum_{s=0}^{m} \left| f_S(s) - f_S^{r,H}(s) \right| \leq e^{\varepsilon_H(r)} - 1.$$

Cotas de error para las aproximaciones de De Pril

Para un r determinado, $r = 1, 2, \cdots$, consideremos finalmente la aproximación de orden r de De Pril. La diferencia que resulta en este caso entre los coeficientes aproximados $h^r(x)$ -dados en (6.55) y (6.56)- y los coeficientes exactos $t(x)$ -dados en (6.53) y (6.54)-, se deduce a continuación. Para esta aproximación se cumple

$$t(0) - h^r(0) = 0.$$

Así,

$$\sum_{x=0}^{\infty} |t(x) - h^r(x)| = \sum_{x=1}^{\infty} |t(x) - h^r(x)| = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}$$

$$\sum_{k=r+1}^{x} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x) \right| = \sum_{x=r+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=r+1}^{x} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right.$$

$$\left. \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x) \right| \leq \frac{1}{r+1} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=r+1}^{x} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k f_i^{*k}(x)$$

$$= \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k \sum_{x=k}^{\infty} f_i^{*k}(x)$$

$$= \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=r+1}^{\infty} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k = \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \frac{\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}}{1 - \frac{q_j}{p_j}}$$

$$= \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \frac{p_j}{p_j - q_j} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}.$$

Utilizando una aproximación de orden r de De Pril para el cálculo aproximado de la distribución del coste total, cometeremos un error global acotado por

$$\sum_{s=0}^{m} \left| f_S(s) - f_S^{r,P}(s) \right| \leq e^{\varepsilon_P(r)} - 1,$$

donde

$$\varepsilon_P\left(r\right) = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{p_j}{p_j - q_j}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{r+1}. \tag{6.61}$$

De (6.59), (6.60) y (6.61) tenemos que para cualquier r, $r \in \{1, 2, \cdots\}$

$$\varepsilon_P\left(r\right) < \varepsilon_K\left(r\right) < \varepsilon_H\left(r\right),$$

con lo que, las recurrencias aproximadas de De Pril parecen ser las más exactas ya que, en conjunto, la cota superior que resulta para el error cometido en el cálculo de las diferentes probabilidades que aproximan la distribución del coste total es inferior que si utilizamos las recurrencias de Kornya o Hipp. No obstante, debemos tener presente que todas las conclusiones a que lleguemos a partir de las funciones $\varepsilon\left(r\right)$ son relativas ya que están basadas en cotas superiores y no en el error exacto producido y no es posible, en general, afirmar cual de ellas da mejores resultados. A pesar de ello, no hay duda de la utilidad de las funciones $\varepsilon\left(r\right)$, ya que nos permiten controlar el error máximo que se cometerá en la estimación con cualquier aproximación de las presentadas. En la práctica, se debe escoger un grado de aproximación r que garantice un error total que en ningún caso sea superior al elegido. Supongamos, por ejemplo, que éste es igual a β, entonces el grado de la aproximación a utilizar será el que resulte de despejar r en la ecuación $\beta = e^{\varepsilon(r)} - 1$.

6.5.2 Aproximaciones a partir del modelo colectivo

6.5.2.1 Modelo colectivo para la aproximación de la distribución del coste total en el modelo individual

La recurrencia de Panjer (1981) para el cálculo de la distribución total en el modelo colectivo del riesgo supuso una auténtica revolución en el campo actuarial. La facilidad de cálculo de la misma (programable en algunos casos mediante una simple calculadora) hizo que durante los ochenta se convirtiera en la herramienta básica de cualquier actuario incluso para su utilización cuando no estaban ante el modelo colectivo sino ante el individual. Aún hoy se utilizan aproximaciones mediante el modelo colectivo de la distribución que resulta para el modelo individual esperando que el error, que inevitablemente ocurre, sea lo suficientemente pequeño. En este apartado queremos ocuparnos de estas aproximaciones. Definamos, en primer lugar, las principales características del modelo colectivo de riesgo.

El modelo colectivo de riesgo

En el modelo colectivo de riesgo la v.a. coste total, S^{col}, viene definida por

$$S^{col} = Z_1 + \cdots + Z_N = \sum_{k=1}^{N} Z_i,$$

donde $Z_1,\ Z_2, \cdots$ representan las cuantías de los sucesivos siniestros producidos y N representa el número de siniestros ocurridos dentro del periodo considerado (por ejemplo, un año).

Para $N = n$, se asume que las v.a. $Z_1, \cdots, Z_n$ son independientes y están idénticamente distribuidas. Llamaremos f_Z a la función de densidad de probabilidad que resulta para cada una de estas variables.

Recordemos que el modelo individual no exigía el tratamiento de los riesgos que componen la distribución del coste total como idénticamente distribuidos aunque necesitaba del conocimiento de la distribución individual de cada uno de ellos, condición que aquí no se da.

En la teoría colectiva del riesgo tradicionalmente se ha asumido que la distribución del número de siniestros es una Poisson de parámetro λ. En este caso resulta una distribución de Poisson compuesta para S, definida por

$$\begin{aligned} f_{S^{col}}(0) &= e^{-\lambda} \\ f_{S^{col}}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} f_Z^{*k}(k) \qquad s = 1, 2, 3, \cdots; \end{aligned} \tag{6.62}$$

para cuya obtención debemos primero calcular la distribución que resulta para las convoluciones f_Z^{*k}.

Se puede deducir una expresión alternativa a (6.62) para el cálculo de la distribución de S^{col}. Para ello, consideremos la función generatriz de probabilidad de esta v.a.

$$G_{S^{col}}(u) = f_{S^{col}}(0) + \sum_{s=1}^{m} f_{S^{col}}(s)\ u^s = e^{\lambda(G_Z(u)-1)} = e^{\lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_Z(k) u^k - 1\right)}.$$

Tomando logaritmo neperiano a ambos lados encontramos

$$\ln G_{S^{col}}(u) = \lambda\left(G_Z(u) - 1\right) = -\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\ f_Z(k)\ u^k, \tag{6.63}$$

y aplicando (6.37) y (6.38), resulta la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} f_{S^{col}}(0) &= e^{-\lambda}, \\ s\, f_{S^{col}}(s) &= \sum_{x=1}^{s} x\lambda\, f_Z(x)\; f_{S^{col}}(s-x) \quad s=1,2,3,\cdots \end{aligned} \tag{6.64}$$

Esta recurrencia fue obtenida por primera vez por Panjer (1981) y si la comparamos con (6.62) vemos que consigue reducir mucho el número de cálculos necesarios para la obtención de la distribución.

Aproximación a la distribución del coste total en el modelo individual

Recordemos la función generatriz de probabilidad de la v.a. S en del modelo individual definida en (6.16)

$$G_S(u) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(p_j + q_j\; G_i(u)\right)^{n_{ij}}.$$

La expresión para el logaritmo neperiano de la anterior función es

$$\begin{aligned} \ln G_S(u) &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\; \ln\left(p_j + q_j\; G_i(u)\right) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \ln\left(1 + q_j\;\; (G_i(u)-1)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} q_j^k \left(G_i(u)-1\right)^k. \end{aligned}$$

Haciendo $k=1$ resulta la siguiente aproximación a esta función

$$\begin{aligned} \ln G_S(u) &\simeq \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j \left(G_i(u)-1\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j\, G_i(u)}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j} - 1\right). \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la dada en (6.63) vemos que la ahora obtenida se corresponde con el logaritmo neperiano de la función generatriz de momentos de una Poisson compuesta con

$$\lambda \;=\; \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j$$

$$G_Z(u) = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j\, G_i(u)}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j}.$$

Consecuentemente, podemos aproximar el modelo individual a partir de un modelo de Poisson compuesto de parámetro

$$\lambda = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j \tag{6.65}$$

y con función de densidad de la cuantía de cada siniestro definida por

$$f_Z(x) = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j f_i(x)}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j}. \tag{6.66}$$

Observemos que esta última es una media ponderada del conjunto de funciones de densidad condicionales de la cuantía a pagar en caso de siniestro en el modelo individual, siendo la ponderación el número esperado de siniestros que resulta del modelo colectivo.

Sustituyendo (6.65) y (6.66) en (6.64) llegamos a una de las aproximaciones más utilizadas para el cálculo de la distribución del coste total en el modelo individual

$$\begin{aligned} f_S^{cP}(0) &= e^{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j} \\ s\, f_S^{cP} &= \sum_{x=1}^{s} x \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j\, f_i(x)\;\; f_S^{cP}(s-x). \end{aligned} \tag{6.67}$$

Esta recurrencia coincide con la aproximación de primer orden de Hipp -ver (6.49) y (6.50)-.

Observemos que con la aproximación que acabamos de obtener, la esperanza matemática que resulta para la v.a. coste total es

$$E\left(S^{cP}\right) = \lambda E(Z) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j \sum_{x=1}^{m_i} x f_i(x), \tag{6.68}$$

expresión que coincide con la obtenida en (6.3). Así, el modelo de Poisson compuesto con parámetros dados por (6.65) y (6.66) coincide en esperanza con el modelo individual.

En cuanto a la varianza, tenemos que

$$Var\left(S^{cP}\right) = \lambda E\left(Z^2\right) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\, q_j \sum_{x=1}^{m_i} x^2 f_i\left(x\right). \tag{6.69}$$

Si comparamos ésta con la que resulta para el modelo individual –dada en (6.4)- vemos que esta aproximación "sobrevalora" el valor de la varianza en

$$\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} q_j \sum_{x=1}^{m_i} x f_i\left(x\right)\right)^2,$$

con lo que puede considerarse como una aproximación "conservadora" ya que asume una mayor dispersión en la distribución del total de siniestros de la que existe en realidad.

En cuanto al error máximo cometido por esta aproximación dado que ésta coincide con la aproximación de primer orden de Hipp, tenemos de (6.60) la siguiente cota

$$\sum_{s=0}^{m}\left|f_S\left(s\right) - f_S^{cP}\left(x\right)\right| \leq e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{\left(2q_j\right)^2}{p_j - q_j}} - 1. \tag{6.70}$$

De Pril & Dhaene (1992) mejoran esta cota ya que demuestran que

$$\sum_{s=0}^{m}\left|f_S\left(s\right) - f_S^{cP}\left(x\right)\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(q_j\right)^2. \tag{6.71}$$

Observemos que (6.71) mejora a (6.70), por cumplirse

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{\left(2q_j\right)^2}{p_j - q_j}} - 1 \geq 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{\left(2q_j\right)^2}{p_j - q_j} - 1$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\frac{\left(2q_j\right)^2}{p_j - q_j} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}\left(q_j\right)^2.$$

6.5.2.2 Modelo mixto para la aproximación de la distribución del coste total en el modelo individual

Sea

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

la v.a. coste total del modelo individual presentada en (6.2) y

$$S_3 = S^{col} = \sum_{k=1}^{N} Z_k, \tag{6.72}$$

la v.a. coste total de un modelo de Poisson compuesto con λ y f_Z dadas por (6.65) y (6.66) respectivamente.

Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1988a,b, 1989) proponen un modelo mixto que puede ser considerado como una combinación entre ambos modelos para el cálculo de la distribución del coste total. En concreto, proponen aproximar la mayor parte de riesgos de la cartera a partir de una Poisson compuesta y únicamente para aquellos riesgos "más peligrosos" (con mayores cuantías a pagar en caso de siniestro) utilizar el modelo individual. Así la v.a. coste total queda definida por

$$S_2 = \sum_{k \in V} Z_k + \sum_{k \notin V} Y_k, \tag{6.73}$$

siendo V el conjunto de índices, $V \subset \{1, 2, \cdots, n\}$, correspondiente a aquellos contratos que se aproximan a partir del modelo de Poisson compuesto.
Observemos que S_1 y S_3 son casos particulares de S_2. En efecto, $S_2 \equiv S_1$ si $V = \emptyset$, pero también $S_2 \equiv S_3$ si $V = \{1, 2, \cdots, n\}$.

En el modelo mixto, el cálculo de la distribución del coste total se hace mediante la convolución de las dos distribuciones que resulten para $\sum_{k \in V} Z_k$ y $\sum_{k \notin V} Y_k$. Para el cálculo de la distribución del conjunto de riesgos incluidos en V $\left(\sum_{k \in V} Z_k\right)$ utilizaremos una distribución de Poisson compuesta de parámetros

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{k \in V} q_k, \\ f_Z(x) &= \frac{\sum_{k \in V} q_k f_k(x)}{\sum_{k \in V} q_k}, \end{aligned}$$

mientras que para el cálculo de la distribución de $\sum_{k\notin V} Y_k$ podemos realizar la convolución de las distribuciones individuales de los riesgos que componen el conjunto, si éstos son pocos, o bien utilizar cualquiera de las recurrencias exactas obtenidas anteriormente.

En cuanto al valor esperado de los siniestros agregados que resulta bajo este modelo mixto, tenemos

$$E(S_2) = \sum_{k\in V} E(Z_k) + \sum_{k\notin V} E(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} q_k \sum_{x=1}^{m_k} x f_k(x), \tag{6.74}$$

con lo cual,

$$E(S_1) = E(S_2) = E(S_3).$$

Para la expresión de la varianza, resulta

$$\begin{aligned} Var(S_2) &= \sum_{k\in V} Var(Z_k) + \sum_{k\notin V} Var(Y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} q_k \sum_{x=1}^{m_k} x^2 f_k(x) - \left(\sum_{k\notin V} q_k \sum_{x=1}^{m_k} x f_k(x)\right)^2. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Si comparamos (6.75) con (6.4), vemos que el modelo mixto sobrevalora el valor de la varianza en

$$\left(\sum_{k\in V} q_k \sum_{x=1}^{m_k} x f_k(x)\right)^2,$$

con lo cual nuevamente se está asumiendo una mayor dispersión entre los riesgos de la que existe realmente. No obstante, esta dispersión es menor a la que resulta de una aproximación colectiva para todos los riesgos de la cartera -ver (6.69)-. Así,

$$Var(S_1) \le Var(S_2) \le Var(S_3).$$

Resulta nuevamente interesante controlar el error máximo cometido en el cálculo de las probabilidades que componen la distribución del coste total bajo esta aproximación mixta. Evidentemente el error sólo se comete en la aproximación de la distribución que resulta para aquellos riesgos incluidos en V. De la cota dada por De Pril & Dhaene (1992) -ver (6.71)-, tenemos que el error máximo cometido en este caso es

$$\sum_{s=0}^{m} \left| f_S(s) - f_{S_2}(x) \right| \le \frac{1}{2} \sum_{k\in V} (q_k)^2.$$

6.5.2.3 Comparación entre las diferentes aproximaciones

Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1988b) demuestran que para las v.a. S_1, S_2, S_3 definidas en (6.2), (6.72) y (6.73) resulta el siguiente orden stop-loss

$$S_1 \leq_{sl} S_2 \leq_{sl} S_3. \tag{6.76}$$

En el capítulo 3 habíamos visto que el orden stop-loss es el orden que sigue para la ordenación cualquier decisor adverso al riesgo, de manera que a aquellos riesgos más "peligrosos" (cuya realización implique una mayor disminución en su riqueza) les corresponde una mayor prima stop-loss bajo cualquier nivel de retención. Ya entonces razonábamos que, con toda seguridad, podemos incluir a cualquier asegurador dentro de este conjunto de decisores con lo que podemos concluir que cualquiera de los modelos aquí presentados (colectivo o mixto) lleva a una sobrevaloración de la cuantía total de los siniestros producidos en la cartera durante el periodo considerado. En este sentido, podemos afirmar que éstas son aproximaciones "conservadoras", puesto que cada una de ellas da lugar a una v.a. coste total con más riesgo que la que realmente corresponde a la cartera lo cual, por otra parte, es una condición deseable en cualquier aproximación utilizada. No obstante, también debemos tener en cuenta la precisión resultante de la aproximación elegida. Así, la combinación de ambos criterios nos lleva a la aproximación mixta, menos "conservadora" que la colectiva pero con una mayor precisión (menor error total en la diferencia entre las probabilidades aproximadas y las reales).

Capítulo 7

Hipótesis de dependencia bivariante positiva

7.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos presentado diferentes recurrencias para llegar a determinar la distribución del coste total en el modelo individual de la teoría del riesgo y, en particular, en el modelo individual de vida en el que nos centramos a partir de este momento. Si el asegurador está dispuesto a aceptar la hipótesis de mutua independencia entre los riesgos que componen una cualquiera de sus carteras, conociendo las distribuciones marginales de cada uno de los riesgos individuales y aplicando estas recurrencias conocerá el riesgo total que de su cartera se deriva. No obstante, es obvio, que la hipótesis de independencia no siempre refleja la realidad de carteras con alguna cobertura relacionada con la muerte del asegurado.

Los resultados de los capítulos 4 y 5, indican que si la cartera del asegurador está formada por riesgos con dependencia positiva, asumir la hipótesis de independencia implica estar infravalorando el riesgo global de la misma puesto que la v.a. coste total que bajo esta hipótesis resulta es menor en orden stop-loss a la que resultaría considerando las dependencias existentes. Está claro que ninguna cartera estará formada únicamente por riesgos dependientes pero sólo con que existan unos pocos riesgos de este tipo, siendo el resto independientes, por mantenerse el orden stop-loss bajo la convolución de riesgos independientes (ver teorema 3.11, capítulo 3) podemos asegurar que se está produciendo una infravaloración de la “peligrosidad” de la cartera.

Creemos poder afirmar que cualquier asegurador preocupado por llegar a unos resultados lo más exactos posibles tratará de tener en cuenta estas dependencias a la hora de determinar el riesgo global de su cartera. En este capítulo y en el que sigue queremos darle herramientas para ello. Nos restringimos aquí, a la modelización de dependencias bivariantes positivas. En lo que se refiere a éstas nos serviremos de los resultados del capítulo 4 para centrarnos únicamente en aquellas lo suficientemente fuertes como para garantizar parejas de riesgos con mayores primas stop-loss, bajo cualquier nivel de retención, que las correspondientes al caso independiente. Así nos centramos en el análisis de aquellos pares de riesgos más “peligrosos” que en el caso independiente para cualquier decisor adverso al riesgo. En el apartado 7.2 introducimos la posibilidad de que la cartera contenga un número determinado de parejas de riesgos con esta característica. Trataremos de determinar la distribución de la v.a. coste total que así resulte en dos casos particulares. En primer lugar, en el apartado 7.3, nos centraremos en el modelo individual de vida. Consideraremos una cartera compuesta por seguros de vida cuyo capital es pagadero en caso de muerte del asegurado. En el apartado 7.4 y bajo el modelo individual de la teoría del riesgo consideraremos una cartera de seguros de vida cuyo capital se dobla en caso de muerte por accidente del asegurado.

7.2 Una estructura de dependencia por parejas en el modelo individual

Retomemos el modelo individual de la teoría del riesgo definido en el apartado 6.2 del capítulo anterior. Introducimos ahora la hipótesis de que la cartera contiene un número k ($k \leq n/2$) de parejas de riesgos no independientes. Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar los riesgos de la cartera de manera que las diferentes parejas dependientes de la cartera sean (X_{2t-1}, X_{2t}), $t = 1, \cdots, k$. Así, podemos reescribir la v.a. coste total, S, definida en (6.2) como

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{k} (X_{2i-1} + X_{2i})^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i^{\perp}, \tag{7.1}$$

donde añadimos ahora el superíndice $^{\perp}$ para explicitar cuales de estos riesgos son tratados como independientes. Para cualesquiera i y j, $i, j = 1, 2, \cdots, n$; $i \neq j$, asumimos que X_i y X_j son riesgos independientes excepto si ambos forman parte de la pareja (X_{2t-1}, X_{2t}) . Así, las únicas dependencias que se dan en una cartera de este tipo se producen dentro de cada una de las parejas, siendo los riesgos fuera de éstas y las diferentes parejas mutuamente independientes. Para los dos riesgos que componen cada pareja asumiremos la existencia de una dependencia directa lo suficientemente fuerte como para garantizar que ésta tiene más riesgo para el asegurador que la correspondiente en caso de independencia.

Bajo estas hipótesis, conseguiremos modelizar las dependencias de la cartera en cuanto hayamos modelizando la dependencia en cada una de las parejas. En las dos secciones que siguen nos ocuparemos de este objetivo diferenciando según los riesgos individuales presenten una distribución de probabilidad dicotómica, modelo individual de vida, o bien definida en más de dos puntos, consideraremos el modelo individual de vida con doble indemnización en caso de muerte por accidente.

En cada caso, conocida la relación de dependencia de las diferentes parejas, (X_{2t-1}, X_{2t}), $t = 1, \cdots, k$, será posible llegar por convolución a la distribución de $\sum\limits_{i=1}^{k} (X_{2i-1} + X_{2i})^{\perp}$. A partir de ésta podremos obtener la correspondiente a la cartera añadiéndole nuevamente por convolución la de los riesgos independientes incluidos en la misma, cuya obtención será inmediata a partir de las recurrencias presentadas en el capítulo anterior.

7.3 Dependencia bivariante positiva en carteras de seguros de vida

7.3.1 Modelización de la dependencia bivariante positiva

Consideremos una cartera de seguros de vida formada por n pólizas, cada una de las cuales garantiza el pago de un capital fijo en caso de que la muerte del asegurado se produzca dentro del período de referencia, el cual consideramos igual a un año. En esta cartera suponemos que existe una estructura de dependencia por parejas como la que acabamos de definir.

Volviendo a la nomenclatura utilizada en la primera parte de este trabajo, podemos considerar que estamos ante una cartera cuyos riesgos individuales, $X_i \ (i = 1, \cdots, n)$, tienen una distribución de probabilidad dicotómica definida por (4.13), es decir,

$$\Pr(X_i = 0) \quad = \quad p_i,$$

$$\Pr(X_i = \alpha_i) \quad = \quad 1 - p_i = q_i$$

con $0 < p_i < 1$ y $\alpha_i > 0$ dados. Observemos que bajo el modelo individual éstos cobran ahora su propio significado. En lo que se refiere a q_i $(i = 1, \cdots, n)$ es la probabilidad de que el asegurado i-ésimo no sobreviva al año considerado, dato que se obtiene de las tablas de mortalidad. En cuanto a α_i $(i = 1, \cdots, n)$, es el capital que se pagará en caso de muerte del asegurado i-ésimo durante este período. Suponemos ahora que éste es un múltiplo entero de una u.m. cualquiera.

Si para esta cartera consideramos la estructura de dependencia por parejas definida en el apartado anterior, tenemos que el riesgo total que de la misma se deriva viene dado por la v.a. coste total definida en (7.1). Para llegar a su cálculo deberemos antes modelizar la relación de dependencia que existe entre los dos riesgos que componen cada uno de los pares (X_{2t-1}, X_{2t}), $t = 1, \cdots, k$. Para cada uno de estos pares suponemos que hemos podido probar la positividad de su covarianza, es decir, para $t = 1, \cdots, k$ suponemos que se cumple

$$Cov\,(X_{2t-1}, X_{2t}) \geq 0.$$

Así $(X_{2t-1}, X_{2t}) \in R_{2,+}(p_{2t-1}, p_{2t}; \alpha_{2t-1}, \alpha_{2t})$ y para cada uno de estos pares su distribución suma es superior, en orden stop-loss, a la correspondiente en caso de independencia.

Del teorema 4.13 resultan las siguientes cotas para la distribución de la suma de cada una de estas parejas de riesgos,

$$X_{2t-1}^{\perp} + X_{2t}^{\perp} \leq_{sl} X_{2t-1} + X_{2t} \leq_{sl} X_{2t-1}^{U} + X_{2t}^{U}, \;\; t = 1, \cdots, k, \tag{7.2}$$

siendo $\left(X_{2t-1}^{\perp}, X_{2t}^{\perp}\right)$ y $\left(X_{2t-1}^{U}, X_{2t}^{U}\right)$ las parejas independientes y comonótonas incluidas en cada una de estas clases.

Recordemos que hemos asumido independencia entre las diferentes parejas de riesgos incluidas en la cartera, así como para los riesgos fuera de éstas. Esta hipótesis nos permite ahora aplicar el resultado del teorema 3.11 a (7.2) y afirmar que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{\perp} \leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} (X_{2i-1} + X_{2i})^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i^{\perp} \leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X_{2i-1}^{U} + X_{2i}^{U}\right)^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i^{\perp}, \tag{7.3}$$

puesto que este teorema garantiza el mantenimiento de la ordenación stop-loss bajo la convolución de riesgos independientes.

De (7.3) se deduce la relación de dependencia más segura y la más peligrosa que puede existir en una cartera de este tipo según la ordenación que del riesgo de éstas establecería cualquier decisor adverso al riesgo. En cuanto a la más segura es la formada por riesgos mutuamente independientes. La más peligrosa es aquella cuyas parejas de riesgos no independientes sean comonótonas. Entre estas dos se encontrará, en términos de riesgo, la relación de dependencia de cada pareja si las hipótesis son las consideradas.

Dedicamos lo que sigue de este apartado a modelizar la relación de dependencia que existe entre los dos riesgos que componen uno cualquiera de los pares de la cartera cuya covarianza sea no negativa, sea éste el par $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$. A efectos simplificadores introducimos una nueva nomenclatura que utilizaremos para simbolizar las probabilidades bivariantes no nulas asociadas a este par, así como para referirnos a sus respectivas marginales. En cuanto a las probabilidades bivariantes, sean

$$\begin{aligned} p_{11} &= \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2), \\ p_{10} &= \Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = 0), \\ p_{01} &= \Pr(X_1 = 0, X_2 = \alpha_2), \\ p_{00} &= \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0). \end{aligned}$$

Cuando nos refiramos a los pares independientes y comonótonos incluidos en esta clase representaremos estas probabilidades bivariantes con los mismos subíndices pero añadiremos los superíndices $^{\perp}$ y ^{U}. Así las probabilidades $p_{--}^{\perp}$ se refieren al par independiente de $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ mientras que las simbolizadas por p_{--}^{U} se refieren al par comonótono.

En cuanto a las marginales asociadas a todos los pares de esta clase las simbolizaremos por

$$\begin{aligned} p_{1.} &= \Pr(X_1 = \alpha_1), \ \ p_{0.} = \Pr(X_1 = 0), \\ p_{.1} &= \Pr(X_2 = \alpha_2), \ \ p_{.0} = \Pr(X_2 = 0). \end{aligned}$$

En el apartado 4.3.4.3 del capítulo cuarto, habíamos interpretado la relación de dependencia que existe entre $\left(X_1^U, X_2^U\right)$. Recordemos ahora dos de la características deducidas en (4.21) para este par. Habíamos visto entonces que

$$\begin{aligned} \Pr\left(X_2^U = 0 / X_1^U = 0\right) &= 1, \\ \Pr\left(X_1^U = \alpha_1 / X_2^U = \alpha_2\right) &= 1. \end{aligned}$$

Dentro del modelo individual de vida éstas cobran ahora su propio significado. A efectos interpretativos habíamos asumido entonces que los riesgos de cada pareja estaban ordenados de manera que el riesgo con menor índice era el riesgo con mayor probabilidad de dar lugar a siniestro (recordemos que dentro de la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ asumimos que $\frac{1}{2} \leq p_1 \leq p_2$). Esta relación nos indica ahora que el riesgo con menor índice es el que mayor probabilidad tiene de morir y, en caso de comonotonía, si el asegurado de más edad no muere dentro del período considerado, el más joven tampoco lo hará. Igualmente con esta relación de dependencia, si el asegurado más joven muere el más viejo también morirá. Si se trata de dos asegurados con la misma distribución marginal de probabilidad, la muerte de uno de ellos únicamente se producirá si ha muerto el otro.

Entre esta relación y la mutua independencia, encontramos la de la pareja considerada. Observar que la hipótesis de comonotonía únicamente parece real cuando se trate de un duplicado en la cartera, es decir, un mismo asegurado con dos pólizas. En cualquier otro caso menos extremo tenemos que

$$0 \leq Cov\,(X_1, X_2) \leq Cov\left(X_1^U, X_2^U\right),$$

o equivalentemente

$$0 \leq \varphi_{X_1,X_2} \leq \varphi_{X_1^U,X_2^U},$$

puesto que se trata de riesgos con idénticas marginales.
Así, existe un real $s,\ s \in [0,1]$ tal que

$$\varphi_{X_1,X_2} = s\,\varphi_{X_1^U,X_2^U},\ 0 \leq s \leq 1, \tag{7.4}$$

es decir, podremos expresar el coeficiente de correlación de cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ en función del correspondiente al par de riesgos mutuamente comonótonos incluido en esta clase. Observemos que la relación anterior es equivalente a

$$Cov\,(X_1, X_2) = s\,Cov\left(X_1^U, X_2^U\right),\ 0 \leq s \leq 1, \tag{7.5}$$

expresión que nos permitirá expresar la función de densidad de probabilidad de cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ como combinación lineal convexa de las funciones de densidad de probabilidad correspondientes a la pareja independiente y a la comonótona de esta clase.
Si $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ su covarianza queda definida por (4.14). Así

$$Cov\,(X_1, X_2) = \alpha_1\alpha_2\,(p_{11} - p_{1.}\,p_{.1}) = \alpha_1\alpha_2\left(p_{11} - p_{11}^{\perp}\right).$$

Para el par comonótono resulta

$$Cov\left(X_1^U, X_2^U\right) = \alpha_1\alpha_2\left(p_{11}^U - p_{1.}\,p_{.1}\right) = \alpha_1\alpha_2\left(p_{11}^U - p_{11}^{\perp}\right).$$

Expresiones que sustituidas en (7.5) dan lugar a

$$\alpha_1\alpha_2\left(p_{11} - p_{11}^{\perp}\right) = s\,\alpha_1\alpha_2\left(p_{11}^U - p_{11}^{\perp}\right).$$

Así la probabilidad de que los riesgos X_1 y X_2 den ambos lugar a siniestro dentro del período considerado es

$$p_{11} = s\,p_{11}^U + (1-s)\;p_{11}^{\perp},\;\; 0 \leq s \leq 1 \tag{7.6}$$

y a partir de esta probabilidad queda totalmente determinada la función de densidad de probabilidad bivariante de este par de riesgos. Observemos que si se cumple (7.6) se cumplirán también las siguientes tres relaciones:

$$\begin{aligned} p_{10} &= p_{1.} - p_{11} = s\,\left(p_{1.} - p_{11}^U\right) + (1-s)\left(p_{1.} - p_{11}^{\perp}\right) \\ &= s\,p_{10}^U + (1-s)\;p_{10}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{01} &= p_{.1} - p_{11} = s\,\left(p_{.1} - p_{11}^U\right) + (1-s)\left(p_{.1} - p_{11}^{\perp}\right) \\ &= s\,p_{01}^U + (1-s)\;p_{01}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1 - p_{1.} - p_{.1} + p_{11} = s\left(1 - p_{1.} - p_{.1} + p_{11}^{\perp}\right) \\ &\quad + (1-s)\left(1 - p_{1.} - p_{.1} + p_{11}^{\perp}\right) = s\,p_{00}^U + (1-s)\;p_{00}^{\perp}. \end{aligned}$$

Así las probabilidades asociadas al par $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ con correlación dada por (7.4) cumplen las siguientes relaciones válidas para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= s\;\Pr\left(X_1^U = x_1, X_2^U = x_2\right) \\ &\quad + (1-s)\;\Pr\left(X_1^{\perp} = x_1, X_2^{\perp} = x_2\right), \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) &= s\;\Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U \leq x_2\right) \\ &\quad + (1-s)\;\Pr\left(X_1^{\perp} \leq x_1, X_2^{\perp} \leq x_2\right) \end{aligned} \tag{7.8}$$

siendo respectivamente $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ y $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ los pares de riesgos comonótonos e independientes incluidos en la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$.

Llegados a este punto creemos justificado remarcar la utilidad de las relaciones que acabamos de obtener. Observemos que de entre todas las distribuciones de probabilidad bivariantes correspondientes a los diferentes riesgos incluidos en $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, las únicas conocidas en la práctica son las de la pareja independiente y comonótona. A partir de éstas, si podemos estimar el grado de dependencia que puede existir entre los dos riesgos considerados como tanto por uno del que les corresponde a los mismos en caso de comonotonía, tendremos una estimación de su distribución bivariante de probabilidad.

Observar que el conocimiento del coeficiente de correlación existente entre X_1 y X_2, necesario para llegar a determinar el valor de s, pasa por el conocimiento de su distribución bivariante de probabilidad puesto que en su cálculo interviene el valor de $\Pr(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2)$. En la práctica, este valor será desconocido aunque podemos tener alguna idea sobre el grado de correlación que existe entre estos dos riesgos. Si, por ejemplo, sabemos que se trata de un duplicado en la cartera (un asegurado con dos pólizas) deberemos tratar a estos dos riesgos como uno sólo, es decir, será una pareja comonótona con idénticas marginales para los dos riesgos individuales y, en consecuencia, les asignaremos un valor de s igual a 1. En cualquier otro caso menos extremo, por ejemplo el que resulta de los matrimonios con pólizas de vida en una misma cartera, resulta necesario un análisis de la dependencia histórica que existe entre este tipo de riesgos para tratar de determinar el valor de s que les debemos asignar. Es evidente que para la mayor parte de parejas de riesgos que no permitan la hipótesis de mutua independencia tampoco resulta realista asumir comonotonía. Aunque no exista la posibilidad de determinar la relación exacta de dependencia que existe entre los riesgos que la componen, si se llega a poder determinar el grado máximo de la misma estaremos ante una nueva herramienta para conocer el riesgo de la pareja. Supongamos que para dos de estos riesgos hemos podido llegar a estimar que en ningún caso su correlación será mayor a la mitad de la correlación máxima que se puede dar entre los riesgos de esta clase. En este caso, suponiendo

$$\varphi_{X_1,X_2} = \frac{1}{2}\varphi_{X_1^U,X_2^U}$$

queda determinada su distribución bivariante de probabilidad que se obtiene sin ninguna dificultad haciendo $s = \frac{1}{2}$ en (7.7) y (7.8).

En base a este procedimiento podremos modelizar diferentes hipótesis de dependencia para cada una de las parejas de la cartera. Recordemos que nos centramos únicamente en modelizar aquellas dependencias que implican un riesgo mayor que en el caso independiente, es decir, suponemos que cada una de las parejas dependientes de la cartera son del tipo $(X_{2t-1}, X_{2t}) \in R_{2,+}(p_{2t-1}, p_{2t};$ $\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t})$, $t = 1, \cdots, k$ $(\Leftrightarrow Cov\,(X_{2t-1}, X_{2t}) \geq 0)$. Supongamos que para cada una de ellas hemos podido estimar el valor de s_t tal que se cumple

$$\varphi_{X_{2t-1},X_{2t}} = s_t\, \varphi_{X^U_{2t-1},X^U_{2t}}, \quad t = 1, \cdots, k, \tag{7.9}$$

donde $\left(X^U_{2t-1}, X^U_{2t}\right)$ son las respectivas parejas comonótonas de cada clase y $s_t \in [0, 1]$. Entonces a partir de (7.7) podemos obtener la función de densidad de probabilidad bivariante de cada una de estas parejas. A partir de éstas será inmediata la distribución de la suma que resulta para cada pareja. Convolucionando las distribuciones de sumas resultantes y a su vez añadiéndole por convolución la del resto de riesgos independientes incluidos en la cartera (obtenida a partir de alguna de las recurrencias presentadas en el capítulo anterior) llegaremos a la distribución de la v.a. coste total de una cartera con dependencia por parejas. De la relación obtenida en (7.3) podemos garantizar que la v.a. así obtenida está, en orden stop-loss, entre la independencia y la comonotonía.

Señalar, por último, que en caso de duda a la hora de asignar los coeficientes s_t a cada pareja siempre es mejor sobrevalorarlos en una pequeña cuantía ya que de esta manera garantizaremos una v.a. coste total para la cartera que en ningún caso infravalora el riesgo real existente. En efecto, para $t = 1, \cdots, k$, consideremos las parejas (X_{2t-1}, X_{2t}), $\left(X'_{2t-1}, X'_{2t}\right) \in R_{2,+}(p_{2t-1}, p_{2t}; \alpha_{2t-1}, \alpha_{2t})$ cuya única diferencia viene dada por el grado de dependencia existente en cada pareja. Supongamos, respectivamente, unos coeficientes s_t, s'_t cumpliendo $0 \leq s_t < s'_t$ ≤ 1 como indicadores del tanto por uno de dependencia que existe en cada pareja respecto a la máxima que se puede dar en cada clase. Entonces

$$Cov\,(X_{2t-1}, X_{2t}) \leq Cov\left(X'_{2t-1}, X'_{2t}\right), \; t = 1, \cdots, k \tag{7.10}$$

y por el resultado de los teoremas 4.11 y 3.11, se cumplirá

$$\sum_{i=1}^{k} (X_{2i-1} + X_{2i})^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i^{\perp} \leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X'_{2i-1} + X'_{2i}\right)^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i^{\perp}. \tag{7.11}$$

En el siguiente apartado ilustramos numéricamente los resultados hasta aquí obtenidos.

7.3.2 Aplicaciones

Nuestra intención ahora es modelizar las dependencias bivariantes descritas para la cartera de Gerber considerada en el ejemplo 6.8 del capítulo anterior. El objetivo final es llegar a la distribución del coste total que resulta para esta cartera bajo la hipótesis de que contiene una estructura de dependencia por parejas como la presentada en el apartado anterior. En primer lugar identificaremos los pares de riesgos con dependencia positiva de la cartera. Para cada uno de ellos trataremos de modelizar la relación de dependencia que presentan, objetivo que, en la práctica, será difícil de lograr ya que aunque conozcamos su naturaleza desconoceremos el grado exacto de la misma. Así, presentaremos resultados bajo diferentes hipótesis de dependencia para cada una de las parejas y estableceremos la ordenación stop-loss de las v.a. coste total que para la cartera surjan en cada caso particular. De entre todas las opciones deberemos elegir la más conveniente a cada caso en base a dos objetivos. Por una parte, debemos garantizar una alternativa "conservadora", en el sentido que en ningún caso infravalore el riesgo realmente existente. Por otra parte, debemos tratar de llegar a resultados lo más exactos posibles, resultados únicamente posibles en la medida en que dispongamos de información acerca de la relación de dependencia que existe entre los riesgos que componen la cartera.

Los resultados que de esta sección se deriven son fácilmente reproducibles para las carteras de Kornya y real presentadas anteriormente así como para cualquier otra cartera de seguros de vida con que en la realidad nos podamos encontrar.

En primer lugar presentamos nuevamente la cartera original de Gerber,

	Capital asegurado				
Prob. siniestro	1	2	3	4	5
0.03	2	3	1	2	-
0.04	-	1	2	2	1
0.05	-	2	4	2	2
0.06	-	2	2	2	1

Cartera de Gerber

Número total de pólizas 31

A fin de definir para esta cartera una estructura de dependencia bivariante positiva, etiquetamos los riesgos que la forman de 1 a 31, fila a fila. Así, los riesgos X_1 y X_2 tienen una probabilidad de morir igual a 0.03 y un capital pagadero en caso de que la muerte se produzca dentro del año considerado igual a 1 u.m.. Igualmente, los riesgos X_3, X_4 y X_5 tienen una probabilidad de morir igual a 0.03 pero éstos tienen un capital asegurado igual a 2 u.m.,$\cdots$

Supongamos ahora que esta cartera contiene 6 parejas de riesgos no independientes para cada una de las cuales suponemos hemos podido probar la positividad de su covarianza.
Concretamente, sean las parejas de riesgos no independientes

$$(X_1, X_2), (X_6, X_{25}), \ (X_7, X_{21}), \ (X_9, X_{17}), \ (X_{13}, X_{29}) \ \text{y} \ (X_{30}, X_{31}), \quad (7.12)$$

con

$$Cov\,(X_i, X_j) \geq 0$$

en cada una de las parejas.

Podemos, en primer lugar, acotar el riesgo de la cartera. Este riesgo vendrá dado por la v.a. coste total de la cartera, v.a. que representaremos ahora por $S^{\star}_{(2)}$ para indicar que la dependencia que asumamos bajo las hipótesis en el superíndice únicamente está referida a los dos riesgos en cada una de las parejas consideradas, siendo el resto de riesgos, así como las diferentes parejas mutuamente independientes en cualquier caso.

Los resultados de la sección anterior nos garantizan que este riesgo queda entre el que resulte para la cartera realizando la hipótesis de independencia y comonotonía entre los riesgos de cada una de las parejas. Así

$$S^{\perp}_{(2)} \leq_{sl} S^{\star}_{(2)} \leq_{sl} S^{U}_{(2)}$$

siendo $\star$ una hipótesis cualquiera que garantice la positividad de las covarianzas de las parejas en (7.12).

Deduzcamos estas dos distribuciones extremas.

$S^{\perp}_{(2)}$ se obtiene asumiendo independencia entre los riesgos de cada una de las parejas. En este caso la independencia se cumple para todos los riesgos de la cartera y estamos ante la v.a. coste total cuya distribución de probabilidad presentábamos en el apartado 6.4 del capítulo anterior (ver ejemplo 6.8 en pág. 165). A partir ésta, es inmediato obtener las primas stop-loss que resultan bajo los niveles de retención d que se presentan en la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|c} d & E\left(S_{(2)}^{\perp}-d\right)_{+} \\ \hline 0 & 4.49 \\ 2 & 2.981123326370080 \\ 4 & 1.775631979345970 \\ 6 & 1.001069493412810 \\ 8 & 0.514953900736114 \\ 10 & 0.250641758309224 \\ 12 & 0.113220334466866 \\ 14 & 0.048402215169515 \\ 16 & 0.019426527081849 \\ 18 & 0.007381337806338 \end{array} \tag{7.13}$$

Estas son las menores primas que pueden encontrarse para la cartera de Gerber con la estructura de dependencia bivariante propuesta. Paralelamente, bajo la hipótesis de comonotonía en cada una de las parejas no independientes, llegaremos a las primas stop-loss máximas de esta cartera. Estos resultados quedan garantizados por (7.3).

Para llegar a la distribución de $S_{(2)}^{U}$, debemos realizar la hipótesis de comonotonía entre los riesgos que componen las parejas señaladas como no independientes. A partir de (4.19), resultan las siguientes distribuciones bivariantes de probabilidad

(x,y)	$\Pr\left(X_1^U=x, X_2^U=y\right)$
$(0,0)$	$\min\{0.97,0.97\}=0.97$
$(1,0)$	$\max\{0.97-0.97,0\}=0$
$(0,1)$	$\max\{0.97-0.97,0\}=0$
$(1,1)$	$\min\{0.03,0.03\}=0.03$

(x,y)	$\Pr\left(X_6^U=x, X_{25}^U=y\right)$
$(0,0)$	$\min\{0.97,0.94\}=0.94$
$(3,0)$	$\max\{0.94-0.97,0\}=0$
$(0,2)$	$\max\{0.97-0.94,0\}=0.03$
$(3,2)$	$\min\{0.03,0.06\}=0.03$

(x,y)	$\Pr\left(X_7^U=x, X_{21}^U=y\right)$
$(0,0)$	$\min\{0.97,0.95\}=0.95$
$(4,0)$	$\max\{0.95-0.97,0\}=0$
$(0,4)$	$\max\{0.97-0.95,0\}=0.02$
$(4,4)$	$\min\{0.03,0.05\}=0.03$

(x,y)	$\Pr\left(X_9^U=x, X_{17}^U=y\right)$
$(0,0)$	$\min\{0.96,0.95\}=0.95$
$(2,0)$	$\max\{0.95-0.96,0\}=0$
$(0,3)$	$\max\{0.96-0.95,0\}=0.01$
$(2,3)$	$\min\{0.04,0.05\}=0.04$

(x,y)	$\Pr\left(X_{13}^U = x, X_{29}^U = y\right)$
$(0,0)$	$\min\{0.96, 0.94\} = 0.94$
$(4,0)$	$\max\{0.94 - 0.96, 0\} = 0$
$(0,4)$	$\max\{0.96 - 0.94, 0\} = 0.02$
$(4,4)$	$\min\{0.04, 0.06\} = 0.04$

(x,y)	$\Pr\left(X_{30}^U = x, X_{31}^U = y\right)$
$(0,0)$	$\min\{0.94, 0.94\} = 0.94$
$(4,0)$	$\max\{0.94 - 0.94, 0\} = 0$
$(0,5)$	$\max\{0.94 - 0.94, 0\} = 0$
$(4,5)$	$\min\{0.06, 0.06\} = 0.06$

Con éstas es ahora inmediato obtener la distribución de probabilidad de la v.a. suma que de cada una de estas parejas se deriva. Cada una de ellas refleja la siniestralidad total en cada pareja bajo la hipótesis de comonotonía.

s	$\Pr\left(X_1^U + X_2^U = s\right)$
0	0.97
2	0.03

s	$\Pr\left(X_6^U + X_{25}^U = s\right)$
0	0.94
2	0.03
5	0.03

s	$\Pr\left(X_7^U + X_{21}^U = s\right)$
0	0.95
4	0.02
8	0.03

s	$\Pr\left(X_9^U + X_{17}^U = s\right)$
0	0.95
3	0.01
5	0.04

s	$\Pr\left(X_{13}^U + X_{29}^U = s\right)$
0	0.94
4	0.02
8	0.04

s	$\Pr\left(X_{30}^U + X_{31}^U = s\right)$
0	0.94
9	0.06

Para llegar a la distribución de $S_{(2)}^U$, debemos convolucionar estas seis distribuciones con la que resulta para la v.a. coste total de la cartera de Gerber extrayendo estos 12 riesgos, es decir, considerando la subcartera

	Capital asegurado				
Prob. siniestro	1	2	3	4	5
0.03	-	3	-	1	-
0.04	-	-	2	1	1
0.05	-	2	3	1	2
0.06	-	1	2	-	-

Su distribución de coste total se obtiene a partir de la recurrencia de De Pril (1986) presentada en el teorema 6.3 del capítulo anterior y aplicable a este caso por ser todos los riesgos mutuamente independientes.

El resultado de esta distribución y su convolución con la de las parejas de riesgos comonótonas consideradas se realizan en el programa B1. "Cartera de Gerber con una estructura de dependencia bivariante. Hipótesis U" presentado en el apéndice A de este trabajo. La distribución de probabilidad resultante es:

s	$f_{S^U_{(2)}}(s) = \Pr\left(S^U_{(2)} = s\right)$	$F_{S^U_{(2)}}(s) = \Pr\left(S^U_{(2)} \leq s\right)$
0	0.301263680822852	0.301263680822852
1	0	0.301263680822852
2	0.097826095084850	0.399089775907702
3	0.114303646275621	0.513393422183322
4	0.064183333780150	0.577576755963472
5	0.103680790824958	0.681257546788430
6	0.036139032489427	0.717396579277858
7	0.045659871480859	0.763056450758716
8	0.059136402748297	0.822192853507013
9	0.041658648000452	0.863851501507465
10	0.026352133489692	0.890203634997157
12	0.020174554041185	0.935656094305217
14	0.012597428265108	0.965593677917202
16	0.007321601395205	0.980704307772110
18	0.003439891427558	0.990316810675342
20	0.002044951400518	0.995221241530017
24	0.000502918025075	0.998965446110303
28	0.000097491007033	0.999813969711963
32	0.000017899537298	0.999971366338398

(7.14)

Por (7.3) podemos garantizar que la v.a. cuya distribución acabamos de obtener es la más "peligrosa" que podemos encontrar para esta cartera si la estructura de dependencia bivariante es la definida. En consecuencia las primas stop-loss que de esta distribución de probabilidad resultan son las mayores que pueden existir. Éstas son:

d	$E\left(S^U_{(2)} - d\right)_+$
0	4.49
2	3.092527361645700
4	2.005010559736720
6	1.263844862488630
8	0.744297892525202
10	0.430342247539678
12	0.236027422800869
14	0.124679766758177
16	0.063656151052287
18	0.031237378072184

(7.15)

Entre estas primas y las obtenidas en caso de independencia -dadas en (7.13)- encontraremos las asociadas a la v.a. coste total que resulte bajo cualquier hipótesis sobre el grado de dependencia entre los riesgos de las diferentes parejas.

Nos planteamos ahora el análisis de dependencias bivariantes intermedias entre los riesgos que componen cada una de las parejas en (7.12). Supongamos que para cada uno de estos dos riesgos hemos podido estimar su grado de dependencia como % de la máxima que puede existir entre ellos. En el caso de las parejas (X_1, X_2) y (X_{30}, X_{31}) sabemos que se trata de dos duplicados en la cartera, es decir, los dos riesgos que componen cada una de estas parejas son uno solo. En este caso debemos tratar a estas dos parejas como dos parejas comonótonas con idénticas distribuciones marginales para cada uno de los riesgos que la componen. Así, para ellas, (7.9) resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1,X_2} &= \varphi_{X_1^U,X_2^U} = 1, \\ \varphi_{X_{30},X_{31}} &= \varphi_{X_{30}^U,X_{31}^U} = 1, \end{aligned} \tag{7.16}$$

puesto que en caso de igualdad en las marginales podemos garantizar un coeficiente de correlación igual a 1 para las parejas comonótonas.

La siniestralidad total en cada una de estas parejas se distribuye según la v.a. suma bivariante obtenida anteriormente bajo esta hipótesis (ver la distribución de $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$ en la pág. 205).

Para las cuatro parejas restantes en (7.12) hemos estimado los siguientes coeficientes s_t para las relaciones presentadas en (7.9),

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_6,X_{25}} &= 0.5\,\varphi_{X_6^U,X_{25}^U}, \\
\varphi_{X_7,X_{21}} &= 0.15\,\varphi_{X_7^U,X_{21}^U}, \\
\varphi_{X_9,X_{17}} &= 0.25\,\varphi_{X_9^U,X_{17}^U}, \\
\varphi_{X_{13},X_{29}} &= 0.6\,\varphi_{X_{13}^U,X_{29}^U}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Conocidos estos valores, de (7.7), tenemos que la función de densidad de probabilidad bivariante de estas parejas de riesgos queda definida a partir de las respectivas independientes y comonótonas. Las comonótonas son las anteriormente obtenidas dentro de este apartado (ver pág. 204 y 205). En cuanto a las independientes, se obtienen inmediatamente a partir del producto de las marginales. Así, de (7.7) resultan las siguientes funciones para cada una de las parejas

(x,y)	$\Pr(X_6 = x, X_{25} = y)$
$(0,0)$	$0.5 \cdot 0.94 + 0.5 \cdot 0.97 \cdot 0.94 = 0.9259$
$(3,0)$	$0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.03 \cdot 0.94 = 0.0141$
$(0,2)$	$0.5 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.97 \cdot 0.06 = 0.0441$
$(3,2)$	$0.5 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.03 \cdot 0.06 = 0.0159$

(x,y)	$\Pr(X_7 = x, X_{21} = y)$
$(0,0)$	$0.15 \cdot 0.95 + 0.85 \cdot 0.97 \cdot 0.95 = 0.925775$
$(4,0)$	$0.15 \cdot 0 + 0.85 \cdot 0.03 \cdot 0.95 = 0.024225$
$(0,4)$	$0.15 \cdot 0.02 + 0.85 \cdot 0.97 \cdot 0.05 = 0.044225$
$(4,4)$	$0.15 \cdot 0.03 + 0.85 \cdot 0.03 \cdot 0.05 = 0.005775$

(x,y)	$\Pr(X_9 = x, X_{17} = y)$
$(0,0)$	$0.25 \cdot 0.95 + 0.75 \cdot 0.96 \cdot 0.95 = 0.9215$
$(2,0)$	$0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0.04 \cdot 0.95 = 0.0285$
$(0,3)$	$0.25 \cdot 0.01 + 0.75 \cdot 0.96 \cdot 0.05 = 0.0385$
$(2,3)$	$0.25 \cdot 0.04 + 0.75 \cdot 0.04 \cdot 0.05 = 0.0115$

(x, y)	$\Pr(X_{13} = x, X_{29} = y)$
$(0, 0)$	$0.6 \cdot 0.94 + 0.4 \cdot 0.96 \cdot 0.94 = 0.92496$
$(4, 0)$	$0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.04 \cdot 0.94 = 0.01504$
$(0, 4)$	$0.6 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.96 \cdot 0.06 = 0.03504$
$(4, 4)$	$0.6 \cdot 0.04 + 0.4 \cdot 0.04 \cdot 0.06 = 0.02496$

Es inmediato a partir de estas distribuciones bivariantes, obtener las correspondientes a la suma de los siniestros derivados de cada una de las parejas anteriores. Éstas son:

s	$\Pr(X_6 + X_{25} = s)$
0	0.9259
2	0.0441
3	0.0141
5	0.0159

s	$\Pr(X_7 + X_{21} = s)$
0	0.925775
4	0.06845
8	0.005775

s	$\Pr(X_9 + X_{17} = s)$
0	0.9215
2	0.0285
3	0.0385
5	0.0115

s	$\Pr(X_{13} + X_{29} = s)$
0	0.92496
4	0.05008
8	0.02496

De la convolución de estas cuatro distribuciones con las resultantes para $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$, tendremos la distribución de la siniestralidad que se deriva de las parejas de riesgos no independientes de la cartera. Convolucionando ésta con la de la subcartera de Gerber formada por los riesgos independientes tendremos la distribución de la v.a. coste total de la cartera, v.a. a la que representaremos por $S_{(2)}^A$, siendo A el conjunto de hipótesis en (7.16) y (7.17). La obtención de la misma se ha realizado en el programa B2. "Cartera de Gerber con una estructura de dependencia bivariante. Hipótesis A" (ver apéndice A). La distribución resultante es:

s	$f_{S_{(2)}^A}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^A = s\right)$	$F_{S_{(2)}^A}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^A \leq s\right)$
0	0.276014364605351	0.276014364605351
1	0	0.276014364605351
2	0.102501095766897	0.378515460372247
3	0.117553352563514	0.496068812935761
4	0.086648877873891	0.582717690809652
5	0.091837088635663	0.674554779445315
6	0.049549626216221	0.724104405661536
7	0.054484718991637	0.778589124653173
8	0.048941021155915	0.827530145809088
9	0.046745103059341	0.874275248868429
10	0.023863973251630	0.898139222120060
12	0.020449960966313	0.943199252021157
14	0.011799338805445	0.970220637890791
16	0.006533293878189	0.984321393928907
18	0.003143815771691	0.992516658686747
20	0.001683267774743	0.996531169738343
24	0.000354835676323	0.999360128245808
28	0.000059857355875	0.999903277519256
32	0.000008543252838	0.999987972449325

(7.18)

siendo sus primas stop-loss:

d	$E\left(S_{(2)}^A - d\right)_+$
0	4.49
2	3.042028729210700
4	1.916613002518710
6	1.173885472773670
8	0.676579003088382
10	0.378384397765900
12	0.199272910940803
14	0.100893462047306
16	0.048902199988815
18	0.022596436832782

(7.19)

Es inmediato comprobar que las primas stop-loss aquí presentadas están acotadas por debajo por las dadas en (7.13) y por encima por las de (7.15). Así

$$S_{(2)}^{\perp} \leq_{sl} S_{(2)}^{A} \leq_{sl} S_{(2)}^{U}.$$

Remarcar que estas cotas quedan en cualquier caso garantizadas por (7.3), al ser las covarianzas de las parejas dependientes de la cartera positivas.

Queremos, por último, reconsiderar las hipótesis de dependencia realizadas en (7.17). Supongamos que para las parejas no comonótonas de la cartera, creemos haber podido infravalorar el grado de dependencia positiva existente. Si así es, resulta conveniente incrementar en una pequeña cuantía las hipótesis anteriores. Incrementaremos las correlaciones de las parejas (X_6, X_{25}), (X_7, X_{21}), (X_9, X_{17}) y (X_{13}, X_{29}) en un 10% respecto a las dadas en (7.17).

Para las parejas (X_1, X_2) y (X_{30}, X_{31}) seguimos asumiendo comonotonía. Así las relaciones presentadas en (7.16) siguen siendo válidas y las distribuciones de $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$ obtenidas en la pág. 205 nos dan el riesgo de estas parejas. Si incrementamos en un 10% las correlaciones definidas en (7.17) para el resto de parejas, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_6,X_{25}} &= 0.55\,\varphi_{X_6^U,X_{25}^U}, \\
\varphi_{X_7,X_{21}} &= 0.165\,\varphi_{X_7^U,X_{21}^U}, \\
\varphi_{X_9,X_{17}} &= 0.275\,\varphi_{X_9^U,X_{17}^U}, \\
\varphi_{X_{13},X_{29}} &= 0.66\,\varphi_{X_{13}^U,X_{29}^U}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Nuevamente a partir de (7.7), podemos llegar a la función de densidad de probabilidad bivariante de estas parejas de riesgos a partir de las respectivas independientes y comonótonas. Las funciones obtenidas son:

(x,y)	$\Pr(X_6 = x, X_{25} = y)$
$(0,0)$	$0.55 \cdot 0.94 + 0.45 \cdot 0.97 \cdot 0.94 = 0.92731$
$(3,0)$	$0.55 \cdot 0 + 0.45 \cdot 0.03 \cdot 0.94 = 0.01269$
$(0,2)$	$0.55 \cdot 0.03 + 0.45 \cdot 0.97 \cdot 0.06 = 0.04269$
$(3,2)$	$0.55 \cdot 0.03 + 0.45 \cdot 0.03 \cdot 0.06 = 0.01731$

(x,y)	$\Pr(X_7 = x, X_{21} = y)$
$(0,0)$	$0.165 \cdot 0.95 + 0.835 \cdot 0.97 \cdot 0.95 = 0.9262025$
$(4,0)$	$0.165 \cdot 0 + 0.835 \cdot 0.03 \cdot 0.95 = 0.0237975$
$(0,4)$	$0.165 \cdot 0.02 + 0.835 \cdot 0.97 \cdot 0.05 = 0.0437975$
$(4,4)$	$0.165 \cdot 0.03 + 0.835 \cdot 0.03 \cdot 0.05 = 0.0062025$

(x,y)	$\Pr(X_9 = x, X_{17} = y)$
$(0,0)$	$0.275 \cdot 0.95 + 0.725 \cdot 0.96 \cdot 0.95 = 0.92245$
$(2,0)$	$0.275 \cdot 0 + 0.725 \cdot 0.04 \cdot 0.95 = 0.02755$
$(0,3)$	$0.275 \cdot 0.01 + 0.725 \cdot 0.96 \cdot 0.05 = 0.03755$
$(2,3)$	$0.275 \cdot 0.04 + 0.725 \cdot 0.04 \cdot 0.05 = 0.01245$

(x,y)	$\Pr(X_{13} = x, X_{29} = y)$
$(0,0)$	$0.66 \cdot 0.94 + 0.34 \cdot 0.96 \cdot 0.94 = 0.927216$
$(4,0)$	$0.66 \cdot 0 + 0.34 \cdot 0.04 \cdot 0.94 = 0.012784$
$(0,4)$	$0.66 \cdot 0.02 + 0.34 \cdot 0.96 \cdot 0.06 = 0.032784$
$(4,4)$	$0.66 \cdot 0.04 + 0.34 \cdot 0.04 \cdot 0.06 = 0.027216$

Las distribuciones correspondientes a la suma de los siniestros derivados de cada una de las parejas son ahora

s	$\Pr(X_6 + X_{25} = s)$
0	0.92731
2	0.04269
3	0.01269
5	0.01731

s	$\Pr(X_7 + X_{21} = s)$
0	0.9262025
4	0.067595
8	0.0062025

s	$\Pr(X_9 + X_{17} = s)$
0	0.92245
2	0.02755
3	0.03755
5	0.01245

s	$\Pr(X_{13} + X_{29} = s)$
0	0.927216
4	0.045568
8	0.027216

De la convolución de estas cuatro distribuciones con las resultantes para $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$, tendremos la distribución de la siniestralidad que se deriva de las parejas de riesgos no independientes de la cartera. Convolucionando ésta con la obtenida para la subcartera de Gerber formada por los riesgos independientes tendremos la distribución de la v.a. coste total de la cartera, v.a. a la que representamos por $S_{(2)}^B$, siendo B el conjunto de hipótesis en (7.16) y (7.20). La obtención de la misma se realiza ahora en el programa B3. "Cartera de Gerber con una estructura de dependencia bivariante. Hipótesis B" (ver apéndice A). La distribución resultante ahora es:

s	$f_{S^B_{(2)}}(s) = \Pr\left(S^B_{(2)} = s\right)$	$F_{S^B_{(2)}}(s) = \Pr\left(S^B_{(2)} \leq s\right)$
0	0.277522695270462	0.277522695270462
1	0	0.277522695270462
2	0.102324501445857	0.379847196716319
3	0.117469585009160	0.497316781725480
4	0.085226737775094	0.582543519500574
5	0.092502075318659	0.675045594819233
6	0.048699970622469	0.723745565441702
7	0.053879249018011	0.777624814459713
8	0.049521942938955	0.827146757398669
9	0.046418235460147	0.873564992858816
10	0.023988247241432	0.897553240100248
12	0.020487957695351	0.942715260979978
14	0.011876973360629	0.969912860515447
16	0.006571425782322	0.984081634505903
18	0.003159118114124	0.992375631957305
20	0.001709075636144	0.996450120673946
24	0.000364486239126	0.999336866376094
28	0.000062169075253	0.999898343567083
32	0.000009029144932	0.999987164133241

(7.21)

siendo sus primas stop-loss asociadas

d	$E\left(S^B_{(2)} - d\right)_+$
0	4.49
2	3.045045390540920
4	1.922209368982720
6	1.179798483302530
8	0.681168863203942
10	0.381880613461425
12	0.201661156846302
14	0.102412304981096
16	0.049835374220127
18	0.023133522569209

(7.22)

Comparando éstas con la obtenidas en (7.19), podemos concluir que bajo cualquier nivel de retención las ahora presentadas son mayores, es decir,

$$S_{(2)}^{A} \leq_{sl} S_{(2)}^{B}.$$

A nivel teórico, esta conclusión se deduce de los resultados de la sección 7.3.1. En efecto, en (7.10) y (7.11) habíamos visto que bajo dos conjuntos de hipótesis sobre el grado de dependencia positiva de los componentes de cada una de las parejas no independientes, aquella que diera lugar a las correlaciones más altas implicaría una v.a. coste total con mayor riesgo, es decir, con unas primas stop-loss mayores bajo cualquier nivel de retención.

Queremos concluir destacando los principales resultados obtenidos dentro de este apartado. Para algunos de los riesgos que componen la cartera de Gerber (Gerber, 1979) hemos roto la hipótesis de mutua independencia. Esta ruptura se ha realizado considerando 6 parejas de riesgos con una estructura de dependencia positiva. En primer lugar hemos asumido la hipótesis de comonotonía entre los riesgos de cada una de las parejas existentes. Así hemos obtenido la v.a. coste total con mayor riesgo que se puede encontrar para la cartera si la estructura de dependencia es la definida. Conscientes de que esta hipótesis si bien nunca infravalorará el riesgo real resulta, en la mayor parte de los casos, incluso más irreal que la de independencia, hemos ejemplificado dos situaciones menos extremas de dependencia. Hemos dejado los riesgos en dos de las parejas como comonótonos, por considerar que se trataba de duplicados en la cartera. Para los que componen las cuatro restantes, sabíamos de los resultados del apartado 7.3.1 que nos bastaba con estimar el tanto por uno que relaciona su correlación con la que les correspondería en caso de comonotonía para conocer su distribución bivariante. Así en (7.17) hemos asumido unos tantos por uno para los riesgos en estas parejas. La distribución resultante para la v.a. coste total de la cartera es la presentada en (7.18). Las primas stop-loss, en este caso, quedan por encima de las obtenidas con la hipótesis de independencia y por debajo de las comonótonas -ver (7.13), (7.15) y (7.19)-.

Puede ser que existan dudas sobre si hemos considerado suficiente grado de dependencia como para garantizar que en ningún caso infravaloremos el riesgo real de la cartera. Si así es, podemos, como en (7.20), incrementar en un determinado % el tanto por uno que define el coeficiente de correlación de cada pareja con respecto a la máxima que puede existir en ella. Allí hemos considerado un incremento del 10%. La v.a. coste total obtenida es la dada en (7.21) y sus respectivas primas stop-loss las de (7.22). Es inmediato comprobar que al incrementar las respectivas correlaciones, incrementan las primas stop-loss, -ver (7.19) y (7.22)-. Así, podremos llegar a asegurar una v.a. coste total que en ningún caso infravalore el riesgo real de la cartera. Obviamente este objetivo debe ser compatible con el de llegar a unos resultados lo más exactos posibles.

Finalmente, en cuanto a los datos utilizados para llegar a estos resultados, señalar que somos conscientes de que en la realidad difícilmente podemos encontrar 12 riesgos no independientes dentro de un colectivo formado únicamente por 31 riesgos. Igualmente irreales son las elevadas correlaciones asumidas, así como una cartera con tan pocas pólizas como la de Gerber. Los resultados aquí presentados únicamente deben entenderse como ilustrativos de la metodología presentada en el apartado anterior para modelizar dependencias bivariantes en carteras de vida ya que éste ha sido nuestro único propósito al presentarlos.

7.4 Carteras de seguros de vida con doble indemnización en caso de muerte por accidente

7.4.1 Un modelo particular de dependencia bivariante positiva

Dentro de este apartado queremos analizar algunas de las dependencias bivariantes positivas que pueden encontrarse en una cartera de seguros de vida con doble indemnización en caso de que la muerte se produzca por accidente. En el capítulo anterior hemos analizado la distribución del coste total que para esta cartera resulta bajo la hipótesis de mutua independencia entre todos los riesgos que forman la cartera, -ver apartado 6.4.2-. Queremos ahora introducir en una cartera de este tipo una estructura de dependencia por parejas como la definida en el apartado 7.2.

Seguiremos la nomenclatura del apartado anterior. Así suponemos que se trata de una cartera cuyos riesgos individuales, $X_i \ \ (i = 1, \cdots, n)$, tienen un capital asegurado en caso de muerte por causas naturales igual a $\alpha_i \ \ (\alpha_i > 0)$ que es un entero múltiple de una u.m. cualquiera. Este capital se dobla en caso de que la muerte se produzca por accidente. El capital que corresponda se pagará en caso de que el asegurado i-ésimo no sobreviva el período considerado (igual a un año). La probabilidad de muerte del asegurado i-ésimo dentro del año considerado es q_i $(0 < q_i < 1)$, dato que se obtiene de las tablas de mortalidad. Al igual que en el capítulo anterior supondremos que la probabilidad condicional de muerte por accidente, condicionada a que la muerte se ha producido, es constante para todos los asegurados de la cartera y viene dada por el tanto por uno α $(0 < \alpha < 1)$.

Estamos, por tanto, ante una cartera cuyos riesgos individuales, X_i $(i = 1, \cdots, n)$, tienen una función de densidad de probabilidad definida en tres puntos. Ésta vendrá dada por

$$\begin{aligned}
\Pr(X_i = 0) &= p_i, \\
\Pr(X_i = \alpha_i) &= (1-\alpha)\,(1-p_i) = (1-\alpha)\,q_i \\
\Pr(X_i = 2\alpha_i) &= \alpha\,(1-p_i) = \alpha\, q_i,
\end{aligned}$$

con $0 < p_i < 1,\ 0 < \alpha < 1$ y $\alpha_i > 0$ conocidos.

Si suponemos que esta cartera contiene un número k $(k \leq n/2)$ de parejas de riesgos no independientes, la v.a. coste total que refleja la siniestralidad de la cartera es la definida en (7.1). Al igual que en el apartado anterior necesitamos previamente conocer la relación de dependencia que existe en cada pareja para llegar al cálculo de la distribución del coste total. Seguimos únicamente interesados en dependencias bivariantes positivas que den lugar a pares de riesgos cuya distribución de la suma esté por encima, en orden stop-loss, a la correspondiente en caso de independencia aunque estamos ahora ante riesgos individuales con densidad de probabilidad no nula en tres puntos. Como habíamos visto en el apartado 4.4 del capítulo cuarto, cuando las distribuciones marginales de probabilidad no son dicotómicas la positividad de la covarianza de cada uno de los pares no nos basta para garantizar que éste sea más "peligroso" que su homólogo independiente. Aplicando los resultados entonces obtenidos, podemos afirmar que la distribución de la suma de cada una de las k parejas de la cartera estará por encima, en orden stop-loss, de la correspondiente en caso de independencia si $(X_{2t-1}, X_{2t}) \in R_{2,+}(F_{2t-1}, F_{2t})$, $t = 1, \cdots, k$, donde en este caso particular

$$F_i(x) = \begin{cases} p_i & \text{si } 0 \leq x < \alpha_i \\ (1-\alpha)\,q_i & \text{si } \alpha_i \leq x < 2\alpha_i \\ 1 & \text{si } x \geq 2\alpha_i \end{cases} \qquad i = 1, \cdots 2k.$$

Recordemos que la condición dada para la pertenencia a cada una de estas clases es que los dos riesgos incluidos en una cualquiera de ellas presenten dependencia cuadrática positiva. Así supondremos que hemos podido probar que la distribución bivariante de cada una de las parejas no independientes de la cartera cumple la siguiente relación válida para cualesquiera $x, y \geq 0$:

$$F_{X_{2t-1},X_{2t}}(x,y) \geq F_{2t-1}(x)\, F_{2t}(y)\,,\ t = 1, \cdots, k,$$

es decir, la función de distribución bivariante de cada una de las parejas dependientes de la cartera está por encima de la que resulta para los dos riesgos que la componen en caso de independencia. En este caso, aplicando el resultado del teorema 4.19 podemos establecer las siguientes cotas para la distribución de la suma de cada una de estas parejas de riesgos,

$$X_{2t-1}^{\perp} + X_{2t}^{\perp} \leq_{sl} X_{2t-1} + X_{2t} \leq_{sl} X_{2t-1}^{U} + X_{2t}^{U},\ t = 1, \cdots, k, \tag{7.23}$$

siendo $\left(X_{2t-1}^{\perp}, X_{2t}^{\perp}\right)$ y $\left(X_{2t-1}^{U}, X_{2t}^{U}\right)$ las parejas independientes y comonótonas incluidas en cada una de estas clases.

Bajo la hipótesis de mutua independencia entre las parejas de riesgos incluidas en la cartera y entre los diferentes riesgos fuera de éstas, podemos aplicar el resultado del teorema 3.11 a (7.23) y afirmar que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{\perp} \leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X_{2i-1} + X_{2i}\right)^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i^{\perp} \leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X_{2i-1}^{U} + X_{2i}^{U}\right)^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_{i,}^{\perp} \tag{7.24}$$

puesto que este teorema garantiza el mantenimiento de la ordenación stop-loss bajo la convolución de riesgos independientes.

De (7.24) se deduce la relación de dependencia más segura y la más peligrosa que puede existir en una cartera de este tipo según la ordenación que del riesgo de éstas establecería cualquier decisor adverso al riesgo. Nuevamente la más segura es la formada por riesgos mutuamente independientes y la más peligrosa aquella cuyas parejas de riesgos no independientes sean comonótonas. Entre estas dos se encontrará la de nuestra cartera. Nuevamente estas dependencias deberán ser consideradas a la hora de calcular la distribución del coste total de la cartera si no queremos infravalorar su riesgo real. En base a este objetivo, dedicamos lo que sigue a modelizar la relación de dependencia que existe entre los dos riesgos que componen uno cualquiera de los pares de la cartera con dependencia cuadrática positiva, sea éste el par $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$. A efectos simplificadores seguimos con la nomenclatura introducida en el apartado anterior para simbolizar las probabilidades bivariantes no nulas asociadas a este par, así como para referirnos a sus respectivas marginales. En cuanto a las probabilidades bivariantes, sean ahora

$$\begin{aligned}
p_{22} &= \Pr\left(X_1 = 2\alpha_1, X_2 = 2\alpha_2\right), \\
p_{21} &= \Pr\left(X_1 = 2\alpha_1, X_2 = \alpha_2\right), \\
p_{12} &= \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = 2\alpha_2\right), \\
p_{20} &= \Pr\left(X_1 = 2\alpha_1, X_2 = 0\right), \\
p_{02} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = 2\alpha_2\right), \\
p_{10} &= \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = 0\right), \\
p_{01} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = \alpha_2\right), \\
p_{11} &= \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2\right), \\
p_{00} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = 0\right).
\end{aligned}$$

Al igual que antes, cuando nos refiramos a los pares independientes y comonótonos incluidos en esta clase representaremos estas probabilidades bivariantes con los mismos subíndices pero añadiremos los superíndices $^{\perp}$ y ^{U}. Así las probabilidades $p^{\perp}_{--}$ se refieren al par independiente de $R_{2,+}\left(F_1, F_2\right)$ mientras que las simbolizadas por p^{U}_{--} se refieren al par comonótono.
En cuanto a las marginales asociadas a todos los pares de esta clase las simbolizamos por

$$\begin{aligned}
p_{2.} &= \Pr\left(X_1 = 2\alpha_1\right), \ \ p_{1.} = \Pr\left(X_1 = \alpha_1\right), \ \ p_{0.} = \Pr\left(X_1 = 0\right), \\
p_{.2} &= \Pr\left(X_2 = 2\alpha_2\right), \ \ p_{.1} = \Pr\left(X_2 = \alpha_2\right), \ \ p_{.0} = \Pr\left(X_2 = 0\right).
\end{aligned}$$

Una vez hemos detectado dos riesgos en la cartera con dependencia cuadrática positiva, sean éstos $\left(X_1, X_2\right)$, sabemos que estamos ante un elemento de la clase $R_{2,+}\left(F_1, F_2\right)$. Si existen evidencias suficientes de que presentan una relación de dependencia positiva lo suficientemente fuerte como para no ser tratados como independientes estamos, en términos de riesgo, entre la independencia y la comonotonía. Salvo en caso de que se trate de un duplicado en la cartera, más irreal que la independencia resulta la hipótesis de comonotonía. Por ello debemos nuevamente encontrar una herramienta para modelizar la relación de dependencia que existe en esta pareja. La herramienta dada debe permitir interpretar fácilmente los resultados obtenidos al modificar la hipótesis realizada sobre el grado de dependencia puesto que será imposible determinar el grado de dependencia exacto de los dos riesgos considerados. Así, debemos poder modificar esta hipótesis y además llegar a garantizar que la distribución correspondiente a la suma de los siniestros que de la pareja se deriven en ningún caso infravalore el riesgo real. Para ello necesitaremos que los elementos que resulten bajo cada una de las hipótesis queden ordenados en base al orden stop-loss. Dentro de la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$ esta ordenación será posible en la medida en que queden ordenadas las respectivas distribuciones de probabilidad bivariantes que resulten para esta pareja en cada caso. Recordemos que los teoremas 4.15 y 4.17 del capítulo cuarto nos garantizan que para $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$ si $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq F_{Y_1,Y_2}(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \geq 0$, entonces $X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2$. Así, bajo dos hipótesis sobre el grado de dependencia que existe entre los riesgos de nuestra pareja, la que suponga una mayor dependencia debe dar lugar a una pareja cuya función de distribución bivariante quede siempre por encima de la resultante en el otro caso. Garantizaremos de esta manera que a mayor grado de dependencia mayor riesgo global.

Aunque sabemos que en el caso que nos ocupa ahora, el orden de covarianzas no implica orden stop-loss, empezaremos con la idea seguida en el apartado anterior para tratar de modelizar la dependencia existente entre los riesgos $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$. De la expresión (4.30) presentada en el capítulo cuarto, sabemos que por tratarse de una pareja con dependencia cuadrática positiva su coeficiente de correlación cumple

$$0 \leq \varphi_{X_1,X_2} \leq \varphi_{X_1^U,X_2^U},$$

siendo $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ la pareja comonótona de la clase considerada. Nuevamente existe un real s, $s \in [0,1]$ tal que

$$\varphi_{X_1,X_2} = s\,\varphi_{X_1^U,X_2^U}. \tag{7.25}$$

Si bien resultará prácticamente imposible determinar el valor exacto de s en la práctica, podemos, al igual que en el apartado anterior, llegar a determinar el grado máximo de dependencia que existe como tanto por uno del que les correspondería a los mismos riesgos en caso de comonotonía. Recordemos que en el caso de riesgos con distribución dicotómica, el intervalo $[0,1]$ de posibles valores de s modelizaba todas las posibles relaciones de dependencia existentes y además éstas quedaban ordenadas en orden stop-loss con la ordenación de los diferentes parámetros s. Veremos a continuación que en el modelo que ahora tratamos, dependencias positivas en una cartera de seguros de vida con doble indemnización en caso de muerte por accidente, siguiendo este procedimiento únicamente llegaremos a modelizar algunos de los elementos de la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$ y ahora no será posible considerar todas las posibles relaciones de dependencia entre dos riesgos que presenten dependencia cuadrática positiva. A pesar de la limitación que esto supone creemos interesante seguir por este camino por la simplicidad de los resultados que de él surgen y porque éstos serán fácilmente ordenables en base al orden stop-loss.

Dado que $(X_1, X_2)\,, \left(X_1^U, X_2^U\right) \in R_{2,+}(F_1, F_2)\,,$ la expresión (7.25) resulta equivalente a

$$Cov\,(X_1, X_2) = s\,Cov\left(X_1^U, X_2^U\right), \quad 0 \leq s \leq 1. \tag{7.26}$$

Es fácil comprobar que para estos riesgos se cumple

$$\begin{aligned}
E\,(X_1) &= E\left(X_1^U\right) = \alpha_1\,(p_{1.} + 2p_{\,2.})\,,\\
E\,(X_2) &= E\left(X_2^U\right) = \alpha_2\,(p_{.1} + 2p_{\,.2})\,,\\
E\,(X_1\,X_2) &= \alpha_1\alpha_2\,(p_{11} + 2\,(p_{12} + p_{21}) + 4\,p_{22})\,,\\
E\left(X_1^U\,X_2^U\right) &= \alpha_1\alpha_2\left(p_{11}^U + 2\left(p_{12}^U + p_{21}^U\right) + 4\,p_{22}^U\right).
\end{aligned}$$

De donde la igualdad presentada en (7.26) equivale a

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2\left[\left(p_{11} - p_{11}^{\perp} + 2\left(p_{12} - p_{12}^{\perp} + p_{21} - p_{21}^{\perp}\right)\right) + 4\left(p_{22} - p_{22}^{\perp}\right)\right]\\
= \;& s\,\alpha_1\alpha_2\left[\left(p_{11}^U - p_{11}^{\perp} + 2\left(p_{12}^U - p_{12}^{\perp} + p_{21}^U - p_{21}^{\perp}\right)\right) + 4\left(p_{22}^U - p_{22}^{\perp}\right)\right].
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Observemos que se trata de una única ecuación con cuatro incógnitas. Estamos ahora ante infinitas soluciones de ahí que no podamos modelizar todas las relaciones de dependencia que pueden presentar dos riesgos con dependencia cuadrática positiva por esta vía. De entre todas las posibles soluciones de la ecuación presentada, nos centramos en la que surge cuando calculamos cada una de las probabilidades bivariantes asociada al par (X_1, X_2) como combinación lineal convexa de las correspondientes en caso de independencia y comonotonía de los riesgos involucrados. Así, consideramos la siguiente solución particular de (7.27):

$$\begin{aligned}
p_{22} &= s\,p_{22}^U + (1-s)\;p_{22}^{\perp},\\
p_{21} &= s\,p_{21}^U + (1-s)\,p_{21}^{\perp},\\
p_{12} &= sp_{12}^U + (1-s)\,p_{12}^{\perp},\\
p_{11} &= s\,p_{11}^U + (1-s)\;p_{11}^{\perp}.
\end{aligned}$$

Conocidas estas cuatro probabilidades quedan totalmente determinadas las cinco que completarán la función de densidad de probabilidad bivariante de estos riesgos. En efecto,

$$\begin{aligned} p_{20} &= p_{2.} - p_{21} - p_{22} = s\left(p_{2.} - p_{21}^{U} - p_{22}^{U}\right) + (1-s)\left(p_{2.} - p_{21}^{\perp} - p_{22}^{\perp}\right) \\ &= s\, p_{20}^{U} + (1-s)\, p_{20}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{02} &= p_{.2} - p_{12} - p_{22} = s\left(p_{.2} - p_{12}^{U} - p_{22}^{U}\right) + (1-s)\left(p_{.2} - p_{12}^{\perp} - p_{22}^{\perp}\right) \\ &= s\, p_{02}^{U} + (1-s)\, p_{02}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{10} &= p_{1.} - p_{11} - p_{12} = s\left(p_{1.} - p_{11}^{U} - p_{12}^{U}\right) + (1-s)\left(p_{1.} - p_{11}^{\perp} - p_{12}^{\perp}\right) \\ &= s\, p_{10}^{U} + (1-s)\ p_{10}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{01} &= p_{.1} - p_{11} - p_{21} = s\ \left(p_{.1} - p_{11}^{U} - p_{21}^{U}\right) + (1-s)\left(p_{.1} - p_{11}^{\perp} - p_{21}^{\perp}\right) \\ &= s\, p_{01}^{U} + (1-s)\ p_{01}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{00} &= p_{0.} - p_{01} - p_{02} = s\ \left(p_{0.} - p_{01}^{U} - p_{02}^{U}\right) + (1-s)\left(p_{0.} - p_{01}^{\perp} - p_{02}^{\perp}\right) \\ &= s\, p_{00}^{U} + (1-s)\, p_{00}^{\perp}. \end{aligned}$$

De esta manera todas las probabilidades que componen la función de densidad de probabilidad bivariante de $(X_1, X_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$ han quedado como combinación lineal convexa de las bivariantes resultantes en cada punto bajo la hipótesis de independencia y comonotonía. Por la facilidad de obtención de éstas dos últimas y por la fácil interpretación del parámetro s, nos restringimos a la subclase de riesgos incluida en $R_{2,+}(F_1, F_2)$ con esta propiedad. Llamaremos a esta subclase $R_{2,+}^{clx}(F_1, F_2)$, donde superíndice clx nos indica que calculamos las respectivas probabilidades bivariantes a partir de una combinación lineal convexa.

Es inmediato comprobar que para cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_{2,+}^{clx}(F_1, F_2)$ se cumplen las siguientes dos relaciones válidas para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= s\ \Pr\left(X_1^U = x_1, X_2^U = x_2\right) \\ &\quad + (1-s)\ \Pr\left(X_1^{\perp} = x_1, X_2^{\perp} = x_2\right), \end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) &= s\ \Pr\left(X_1^U \leq x_1, X_2^U \leq x_2\right) \\ &\quad + (1-s)\ \Pr\left(X_1^{\perp} \leq x_1, X_2^{\perp} \leq x_2\right), \end{aligned} \tag{7.29}$$

siendo respectivamente $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ y $\left(X_1^\perp, X_2^\perp\right)$ los pares de riesgos comonótonos e independientes incluidos en $R_{2,+}^{clx}(F_1, F_2)$ los cuales se obtienen dentro de esta clase haciendo $s = 0$ y $s = 1$ respectivamente.

En una cartera de seguros de este tipo, una vez hemos identificado una pareja de riesgos con dependencia cuadrática positiva podemos tratar de determinar el grado de dependencia que existe entre los riesgos que la componen como % del máximo que puede existir entre los mismos. En cuanto hayamos obtenido este valor, conoceremos el valor de s que aplicado a (7.28) y (7.29) nos dará la distribución de probabilidad de esta pareja que suponemos pertenece a la clase $R_{2,+}^{clx}(F_1, F_2)$. Está claro que podemos equivocarnos en la estimación del valor de s; ¿Qué sucede si infravaloramos este valor? Observemos que la función de distribución bivariante que resulta de (7.29) para dos riesgos cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_{2,+}^{clx}(F_1, F_2)$ puede reescribirse como

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1^\perp, X_2^\perp}(x_1, x_2) + s\left(F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) - F_{X_1^\perp, X_2^\perp}(x_1, x_2)\right).$$

De esta expresión se deduce inmediatamente que en cualquier punto considerado, F_{X_1,X_2} resulta ser no decreciente respecto a s puesto que la relación

$$F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) - F_{X_1^\perp, X_2^\perp}(x_1, x_2) \geq 0$$

es siempre válida por ser

$$F_{X_1^U, X_2^U}(x_1, x_2) \geq F_{X_1^\perp, X_2^\perp}(x_1, x_2).$$

Así, al incrementar el valor del parámetro s resulta una nueva distribución bivariante para la pareja de riesgos que queda siempre por encima de la primera. Como ya habíamos recordado, los resultados de los teoremas 4.15 y 4.17 del capítulo cuarto nos garantizan que fijadas las marginales, el orden de las funciones de distribución bivariantes equivale al orden stop-loss que para la distribución de la suma de dos riesgos resulta. Podemos concluir, por tanto, que para cualquier asegurador, incrementar el valor del parámetro s equivale a quedarse con una distribución bivariante con mayor riesgo. De esta manera si no estamos completamente seguros del valor de s a fijar podemos incrementarlo en una pequeña cuantía y asegurar de que en ningún caso se está infravalorando el riesgo real.

En el conjunto de la cartera, el procedimiento a seguir para las $k-1$ parejas restantes es similar al propuesto. Recordemos que en primer lugar debemos identificar la existencia de dependencia cuadrática positiva en las mismas. Ésta es fácilmente comprobable si se detecta una tendencia de los dos riesgos incluidos en cada pareja a moverse en el mismo sentido. Para cada una de las parejas con esta propiedad, deberemos tratar de determinar el valor de s_t tal que se cumple

$$\varphi_{X_{2t-1},X_{2t}} = s_t\,\varphi_{X^U_{2t-1},X^U_{2t}}, \quad t = 1, \cdots, k, \tag{7.30}$$

donde $\left(X^U_{2t-1}, X^U_{2t}\right)$ es la pareja comonótona de la clase $R_{2,+}\left(F_{2t-1},F_{2t}\right)$ y $s_t \in [0,1]$. Si asumimos ahora que ahora que las parejas $(X_{2t-1}, X_{2t}) \in R^{clx}_{2,+}\left(F_{2t-1}, F_{2t}\right)$, $t = 1, \cdots, k$, podemos calcular la distribución de probabilidad bivariante asociada a cada pareja como combinación lineal convexa de las que resultan para los mismos riesgos bajo las hipótesis de independencia y comonotonía. A partir de éstas será inmediata la obtención de la distribución de la suma que resulta para cada pareja. Convolucionando las distribuciones de sumas resultantes y, a su vez, añadiéndole por convolución la del resto de riesgos independientes de la cartera (obtenida a partir de alguna de las recurrencias presentadas en el capítulo anterior) llegaremos a la v.a. coste total de la cartera. De la relación obtenida en (7.24) podemos garantizar que la v.a. así obtenida está, en orden stop-loss, entre la independencia y la comonotonía.

Nuevamente recordar que en caso de duda a la hora de asignar los coeficientes s_t a cada pareja siempre es mejor sobrevalorarlos en una pequeña cuantía para poder garantizar una v.a. coste total que en ningún caso infravalore el riesgo real. En efecto, para $t = 1, \cdots, k$ consideremos las parejas (X_{2t-1}, X_{2t}), $\left(X'_{2t-1}, X'_{2t}\right) \in R^{clx}_{2,+}\left(F_{2t-1}, F_{2t}\right)$ cuya única diferencia viene dada por el grado de dependencia existente en cada pareja. Supongamos, respectivamente, unos coeficientes s_t, s'_t cumpliendo $0 \leq s_t < s'_t \leq 1$, como indicadores del tanto por uno de dependencia que existe en cada pareja respecto a la máxima que se puede dar en cada clase. Entonces para dos reales cualesquiera $x, y \geq 0$ las respectivas funciones de distribución bivariantes cumplen

$$F_{X_{2t-1},X_{2t}}(x, y) \leq F_{X'_{2t-1},X'_{2t}}(x, y), \quad t = 1, \cdots, k \tag{7.31}$$

y por el resultado de los teoremas 4.15, 4.17 y 3.11, se cumplirá

$$\sum_{i=1}^{k} (X_{2i-1} + X_{2i})^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X'_{2i-1} + X'_{2i}\right)^{\perp} + \sum_{i=2k+1}^{n} X_i. \tag{7.32}$$

En el siguiente apartado ilustramos numéricamente los resultados aquí obtenidos.

7.4.2 Aplicaciones

Finalizaremos este capítulo repitiendo el análisis realizado en el apartado 7.3.2 sobre la cartera de Gerber pero ahora considerando, al igual que en el ejemplo 6.11 del capítulo anterior, que ésta está formada por pólizas de seguros de vida que garantizan el pago del doble del capital asegurado en caso de que la muerte del asegurado se produzca por accidente. No reproducimos aquí la cartera de Gerber, ésta puede encontrarse en la pág. 202. La probabilidad que aparece en filas es la probabilidad de muerte por cualquier causa de cada uno de los asegurados, siendo el capital que aparece en columnas el pagadero en caso de muerte por causas naturales. Si la muerte se produce por accidente este capital se dobla. Al igual que en el capítulo anterior consideramos que la probabilidad de que la muerte se produzca por accidente es constante para todos los asegurados y supone un porcentaje del 10% sobre la probabilidad de muerte de cada uno de ellos, es decir, $\alpha = 0.1$ para todos los riesgos de la cartera. Al igual que antes etiquetamos los riesgos por filas y suponemos que las parejas no independientes de la cartera son las dadas en (7.12), las cuales recordemos son:

$$(X_1, X_2), (X_6, X_{25}), \ (X_7, X_{21}), \ (X_9, X_{17}), \ (X_{13}, X_{29}), \ \text{y} \ (X_{30}, X_{31}).$$

Para cada una de estas parejas suponemos ahora que hemos podido garantizar la existencia de dependencia cuadrática positiva, es decir, sus respectivas funciones de distribución bivariantes están siempre por encima de las correspondientes en caso de independencia.

Nuevamente podemos representar por $S^{\star}_{(2)}$ a la v.a. coste total de la cartera para indicar que la dependencia que asumamos bajo las hipótesis en el superíndice únicamente está referida a los dos riesgos en cada una de las parejas consideradas, siendo el resto de riesgos, así como las diferentes parejas mutuamente independientes en cualquier caso.

De (7.24), tenemos garantizado que el riesgo total de nuestra cartera se encuentra entre el que resulta realizando la hipótesis de independencia y comonotonía entre los riesgos de cada una de las parejas. Así

$$S^{\perp}_{(2)} \leq_{sl} S^{\star}_{(2)} \leq_{sl} S^{U}_{(2)}$$

siendo $\star$ una hipótesis cualquiera que garantice ahora una relación de dependencia cuadrática positiva entre los riesgos de cada una de las parejas en (7.12).

Obtengamos estas dos distribuciones extremas. En caso de independencia en las parejas, encontramos independencia entre todos los riesgos que componen la cartera. Así, $S_{(2)}^{\perp}$ es la v.a. coste total presentada en el ejemplo 6.11 del capítulo anterior, ver pág. 172. Presentamos en la siguiente tabla, las primas stop-loss asociadas a $S_{(2)}^{\perp}$ bajo diferentes niveles de retención (para su obtención ver el programa A2.“Cartera de Gerber con doble indemnización. Hipótesis de independencia”, apéndice A),

d	$E\left(S_{(2)}^{\perp}-d\right)_{+}$
0	4.939
2	3.428649956390970
4	2.193806298098040
6	1.357974367991260
8	0.792557838783388
10	0.446805003790181
12	0.242193784394039
14	0.126267711220368
16	0.063803736317830
18	0.031143254136484

(7.33)

Estas son las menores primas que pueden encontrarse en esta cartera con la estructura de dependencia propuesta. Paralelamente, bajo la hipótesis de comonotonía llegaremos a las primas stop-loss máximas.

Si para las parejas de riesgos no independientes de la cartera realizamos la hipótesis de comonotonía, podemos llegar a calcular sus respectivas funciones de densidad de probabilidad bivariantes desacumulando sus funciones de distribución. Estas últimas son inmediatas de obtener a partir de las marginales puesto que por definición

$$F_{X_i^U, X_j^U}(x,y) = \min\left\{F_i(x), F_j(y)\right\}, \ \forall x, y \geq 0.$$

Las funciones de distribución marginales de estos riesgos son:

	$F_1(x) = \Pr(X_1 \leq x)$
$0 \leq x < 1$	0.97
$1 \leq x < 2$	0.997
$x \geq 2$	1

	$F_2(x) = \Pr(X_2 \leq x)$
$0 \leq x < 1$	0.97
$1 \leq x < 2$	0.997
$x \geq 2$	1

	$F_6(x) = \Pr(X_6 \leq x)$
$0 \leq x < 3$	0.97
$3 \leq x < 6$	0.997
$x \geq 6$	1

	$F_{25}(x) = \Pr(X_{25} \leq x)$
$0 \leq x < 2$	0.94
$2 \leq x < 4$	0.994
$x \geq 4$	1

	$F_7(x) = \Pr(X_7 \leq x)$
$0 \leq x < 4$	0.97
$4 \leq x < 8$	0.997
$x \geq 8$	1

	$F_{21}(x) = \Pr(X_{21} \leq x)$
$0 \leq x < 4$	0.95
$4 \leq x < 8$	0.995
$x \geq 8$	1

	$F_9(x) = \Pr(X_9 \leq x)$
$0 \leq x < 2$	0.96
$2 \leq x < 4$	0.996
$x \geq 4$	1

	$F_{17}(x) = \Pr(X_{17} \leq x)$
$0 \leq x < 3$	0.95
$3 \leq x < 6$	0.995
$x \geq 6$	1

	$F_{13}(x) = \Pr(X_{13} \leq x)$
$0 \leq x < 4$	0.96
$4 \leq x < 8$	0.996
$x \geq 8$	1

	$F_{29}(x) = \Pr(X_{29} \leq x)$
$0 \leq x < 4$	0.94
$4 \leq x < 8$	0.994
$x \geq 8$	1

	$F_{30}(x) = \Pr(X_{30} \leq x)$
$0 \leq x < 5$	0.94
$5 \leq x < 10$	0.994
$x \geq 10$	1

	$F_{31}(x) = \Pr(X_{31} \leq x)$
$0 \leq x < 5$	0.94
$5 \leq x < 10$	0.994
$x \geq 10$	1

La función de distribución bivariante que resulta para la pareja $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ es

	$F_{X_1^U, X_2^U}(x, y) = \Pr\left(X_1^U \leq x, X_2^U \leq y\right)$
$0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$	$\min\{F_1(0), F_2(0)\} = 0.97$
$1 \leq x < 2,\ 0 \leq y < 1$	$\min\{F_1(1), F_2(0)\} = 0.97$
$x \geq 2,\ 0 \leq y < 1$	$\min\{F_1(2), F_2(0)\} = 0.97$
$0 \leq x < 1,\ 1 \leq y < 2$	$\min\{F_1(0), F_2(1)\} = 0.97$
$0 \leq x < 1,\ y \geq 2$	$\min\{F_1(0), F_2(2)\} = 0.97$
$1 \leq x < 2,\ 1 \leq y < 2$	$\min\{F_1(1), F_2(1)\} = 0.997$
$x \geq 2,\ 1 \leq y < 2$	$\min\{F_1(2), F_2(1)\} = 0.997$
$1 \leq x < 2,\ y \geq 2$	$\min\{F_1(1), F_2(2)\} = 0.997$
$x \geq 2,\ y \geq 2$	1

Desacumulando esta función, llegamos a las probabilidades bivariantes asociadas a estos riesgos, p^U_{--}. Éstas se obtienen a partir de

$$\begin{aligned}
p^U_{00} &= F_{X^U_1,X^U_2}(0,0)\,,\\
p^U_{10} &= F_{X^U_1,X^U_2}(1,0) - p^U_{00},\\
p^U_{20} &= F_{X^U_1,X^U_2}(2,0) - p^U_{10} - p^U_{00},\\
p^U_{01} &= F_{X^U_1,X^U_2}(0,1) - p^U_{00},\\
p^U_{02} &= F_{X^U_1,X^U_2}(0,2) - p^U_{01} - p^U_{00},\\
p^U_{11} &= F_{X^U_1,X^U_2}(1,1) - p^U_{10} - p^U_{01} - p^U_{00},\\
p^U_{21} &= F_{X^U_1,X^U_2}(2,1) - p^U_{20} - p^U_{11} - p^U_{10} - p^U_{01} - p^U_{00},\\
p^U_{12} &= F_{X^U_1,X^U_2}(1,2) - p^U_{02} - p^U_{11} - p^U_{10} - p^U_{01} - p^U_{00},\\
p^U_{22} &= F_{X^U_1,X^U_2}(2,2) - p^U_{21} - p^U_{12} - p^U_{20} - p^U_{02} - p^U_{11} - p^U_{01} - p^U_{10} - p^U_{00},
\end{aligned}$$

Así, la función de densidad de probabilidad que resulta para $\left(X^U_1, X^U_2\right)$ es:

(x,y)	$\Pr\left(X^U_1 = x, X^U_2 = y\right)$
$(0,0)$	0.97
$(1,0)$	0
$(2,0)$	0
$(0,1)$	0
$(0,2)$	0
$(1,1)$	0.027
$(2,1)$	0
$(1,2)$	0
$(2,2)$	0.003

Repitiendo este proceso para cada una de las parejas llegamos a las siguientes funciones de densidad de probabilidad

(x,y)	$\Pr\left(X_6^U = x, X_{25}^U = y\right)$
$(0,0)$	0.94
$(3,0)$	0
$(6,0)$	0
$(0,2)$	0.03
$(0,4)$	0
$(3,2)$	0.024
$(6,2)$	0
$(3,4)$	0.003
$(6,4)$	0.003

(x,y)	$\Pr\left(X_7^U = x, X_{21}^U = y\right)$
$(0,0)$	0.95
$(4,0)$	0
$(8,0)$	0
$(0,4)$	0.02
$(0,8)$	0
$(4,4)$	0.025
$(8,4)$	0
$(4,8)$	0.002
$(8,8)$	0.003

(x,y)	$\Pr\left(X_9^U = x, X_{17}^U = y\right)$
$(0,0)$	0.95
$(2,0)$	0
$(4,0)$	0
$(0,3)$	0.01
$(0,6)$	0
$(2,3)$	0.035
$(4,3)$	0
$(2,6)$	0.001
$(4,6)$	0.004

(x,y)	$\Pr\left(X_{13}^U = x, X_{29}^U = y\right)$
$(0,0)$	0.94
$(4,0)$	0
$(8,0)$	0
$(0,4)$	0.02
$(0,8)$	0
$(4,4)$	0.034
$(4,8)$	0
$(8,4)$	0.002
$(8,8)$	0.004

(x,y)	$\Pr\left(X_{30}^U = x, X_{31}^U = y\right)$
$(0,0)$	0.94
$(4,0)$	0
$(8,0)$	0
$(0,5)$	0
$(0,10)$	0
$(4,5)$	0.054
$(8,5)$	0
$(4,10)$	0
$(8,10)$	0.006

La distribución de probabilidad de la v.a. suma que de cada una de las parejas comonótonas se deriva es inmediata a partir de la bivariante correspondiente. Éstas son:

s	$\Pr\left(X_1^U + X_2^U = s\right)$
0	0.97
2	0.027
4	0.003

s	$\Pr\left(X_6^U + X_{25}^U = s\right)$
0	0.94
2	0.03
5	0.024
7	0.003
10	0.003

s	$\Pr\left(X_7^U + X_{21}^U = s\right)$
0	0.95
4	0.02
8	0.025
12	0.002
16	0.003

s	$\Pr\left(X_9^U + X_{17}^U = s\right)$
0	0.95
3	0.01
5	0.035
8	0.001
10	0.004

s	$\Pr\left(X_{13}^U + X_{29}^U = s\right)$
0	0.94
4	0.02
8	0.034
12	0.002
16	0.004

s	$\Pr\left(X_{30}^U + X_{31}^U = s\right)$
0	0.94
9	0.054
18	0.006

Para llegar a la distribución del coste total, debemos convolucionar estas seis distribuciones con la de la v.a. coste total que resulta para la cartera de Gerber extrayendo estas seis parejas de riesgos. La subcartera que resulta es la presenta en la pág. 205 para la que ahora consideramos que el capital asegurado se dobla en caso de que la muerte se produzca por accidente. Al igual que en el capítulo anterior, podemos llegar a la distribución del coste total de esta subcartera a partir de la recurrencia de De Pril (1989). El resultado de esta distribución y su convolución con la de las parejas de riesgos que acabamos de obtener se realizan en el programa B4. "Cartera de Gerber con doble indemnización y una estructura de dependencia bivariante. Hipótesis U" presentado en el apéndice A de este trabajo. La distribución que resulta para la v.a. coste total de la cartera bajo la hipótesis de comonotonía para las parejas en (7.12), $S_{(2)}^U$, es:

s	$f_{S_{(2)}^U}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^U = s\right)$	$F_{S_{(2)}^U}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^U \leq s\right)$
0	0.301263680822852	0.301263680822852
1	0	0.301263680822852
2	0.089004965408778	0.390268646231630
3	0.103190401312083	0.493459047543713
4	0.066881278389019	0.560340325932732
5	0.089115627911995	0.649455953844727
6	0.043195037714439	0.692650991559166
7	0.040945851670520	0.733596843229686
8	0.056993943657353	0.790590786887038
9	0.040811379030407	0.831402165917445
10	0.031277092952200	0.862679258869645
12	0.022081700333919	0.909746294626154
14	0.013966001359571	0.942413361408528
16	0.010465147259312	0.962931460929149
18	0.007360658969266	0.977412974182891
20	0.003798464594950	0.985827330294870
24	0.001453846112885	0.995087999879137
28	0.000549375509411	0.998432651026335
32	0.000159894556196	0.999518853409037

(7.34)

De esta distribución resultan las primas stop-loss máximas que pueden encontrarse para esta cartera bajo cualquier nivel de retención. Éstas son:

d	$E\left(S_{(2)}^U - d\right)_+$
0	4.939
2	3.541527361645690
4	2.425255055421040
6	1.635051335198490
8	1.061299169987350
10	0.683292122791830
12	0.433635975953711
14	0.271829630628821
16	0.166709305707188
18	0.099693081849960

(7.35)

Siguiendo con en el análisis realizado en el apartado 7.3.2 para la cartera original de Gerber, nos planteamos dependencias entre estos dos extremos cuando la cartera garantiza el pago del doble del capital asegurado si la muerte se produce por accidente. Las hipótesis sobre el grado de dependencia que existe entre los riesgos serán idénticas a las entonces consideradas. Así suponemos que los riesgos en las parejas (X_1, X_2) y (X_{30}, X_{31}) son duplicados. Bajo esta hipótesis tratamos a estas dos parejas como comonótonas y los siniestros que de ellas se deriven en la cartera vienen dados por las distribuciones $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$ obtenidas en la pág. 229. Para el resto de parejas incluidas en (7.12) suponemos que hemos podido determinar los coeficientes s_t dados en (7.17) para las relaciones presentadas en (7.30). Bajo estas hipótesis se cumple

$$\varphi_{X_6,X_{25}} = 0.5\,\varphi_{X_6^U,X_{25}^U}, \qquad \varphi_{X_7,X_{21}} = 0.15\,\varphi_{X_7^U,X_{21}^U},$$
$$\varphi_{X_9,X_{17}} = 0.25\,\varphi_{X_9^U,X_{17}^U}, \quad \varphi_{X_{13},X_{29}} = 0.6\,\varphi_{X_{13}^U,X_{29}^U}.$$

De entre todas las parejas que satisfacen estas relaciones suponemos ahora además que las de nuestra cartera pertenecen a las clases $R_{2,+}^{clx}$. Así sus respectivas funciones de densidad de probabilidad bivariantes se obtienen de (7.28), resultando las de distribución a partir de (7.29). Las relaciones en (7.28) y (7.29) nos indican que para cada una de las parejas, estas distribuciones bivariantes de probabilidad son combinación lineal convexa de las respectivas comonótonas e independientes.

Obtenemos las funciones de densidad de probabilidad de cada pareja de las que resultan bajo las hipótesis de independencia y comonotonía. En cuanto a las comonótonas son las obtenidas en la pág. 228. Las independientes son inmediatas a partir del producto de las marginales. Las funciones resultantes son:

(x, y)	$\Pr(X_6 = x, X_{25} = y)$
$(0, 0)$	$0.5 \cdot 0.94 + 0.5 \cdot 0.97 \cdot 0.94 = 0.9259$
$(3, 0)$	$0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.94 = 0.01269$
$(6, 0)$	$0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.94 = 0.00141$
$(0, 2)$	$0.5 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.97 \cdot 0.06 = 0.04119$
$(0, 4)$	$0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.97 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.00291$
$(3, 2)$	$0.5 \cdot 0.024 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.012729$
$(6, 2)$	$0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.000081$
$(3, 4)$	$0.5 \cdot 0.003 + 0.5 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.001581$
$(6, 4)$	$0.5 \cdot 0.003 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.001509$

(x,y)	$\Pr(X_7 = x, X_{21} = y)$
$(0,0)$	$0.15 \cdot 0.95 + 0.85 \cdot 0.97 \cdot 0.95 = 0.925775$
$(4,0)$	$0.15 \cdot 0 + 0.85 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.95 = 0.0218025$
$(8,0)$	$0.15 \cdot 0 + 0.85 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.95 = 0.0024225$
$(0,4)$	$0.15 \cdot 0.02 + 0.85 \cdot 0.97 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.0401025$
$(0,8)$	$0.15 \cdot 0 + 0.85 \cdot 0.97 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.0041225$
$(4,4)$	$0.15 \cdot 0.025 + 0.85 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.00478275$
$(8,4)$	$0.15 \cdot 0 + 0.85 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.00011475$
$(4,8)$	$0.15 \cdot 0.002 + 0.85 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.00041475$
$(8,8)$	$0.15 \cdot 0.003 + 0.85 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.00046275$

(x,y)	$\Pr(X_9 = x, X_{17} = y)$
$(0,0)$	$0.25 \cdot 0.95 + 0.75 \cdot 0.96 \cdot 0.95 = 0.9215$
$(2,0)$	$0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.95 = 0.02565$
$(4,0)$	$0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.95 = 0.00285$
$(0,3)$	$0.25 \cdot 0.01 + 0.75 \cdot 0.96 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.0349$
$(0,6)$	$0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0.96 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.0036$
$(2,3)$	$0.25 \cdot 0.035 + 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.009965$
$(4,3)$	$0.25 \cdot 0 + 0.75 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.000135$
$(2,6)$	$0.25 \cdot 0.001 + 0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.000385$
$(4,6)$	$0.25 \cdot 0.004 + 0.75 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.001015$

(x,y)	$\Pr(X_{13} = x, X_{29} = y)$
$(0,0)$	$0.6 \cdot 0.94 + 0.4 \cdot 0.96 \cdot 0.94 = 0.92496$
$(4,0)$	$0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.94 = 0.013536$
$(8,0)$	$0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.94 = 0.001504$
$(0,4)$	$0.6 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.96 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.032736$
$(0,8)$	$0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.96 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.002304$
$(4,4)$	$0.6 \cdot 0.034 + 0.4 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.0211776$
$(8,4)$	$0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.0000864$
$(4,8)$	$0.6 \cdot 0.002 + 0.4 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.0012864$
$(8,8)$	$0.6 \cdot 0.004 + 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.0024096$

A partir de estas distribuciones bivariantes tenemos las correspondientes a la suma de cada una de las parejas. Éstas son:

s	$\Pr(X_6 + X_{25} = s)$
0	0.9259
2	0.04119
3	0.01269
4	0.00291
5	0.012729
6	0.00141
7	0.001581
8	0.000081
10	0.001509

s	$\Pr(X_9 + X_{17} = s)$
0	0.9215
2	0.02565
3	0.0349
4	0.00285
5	0.009965
6	0.0036
7	0.000135
8	0.000385
10	0.001015

s	$\Pr(X_7 + X_{21} = s)$
0	0.925775
4	0.061905
8	0.01132775
12	0.0005295
16	0.00046275

s	$\Pr(X_{13} + X_{29} = s)$
0	0.92496
4	0.046272
8	0.0249856
12	0.0013728
16	0.0024096

De la convolución de estas cuatro distribuciones con las obtenidas para $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$ y con la que resulta para la subcartera de Gerber formada por los riesgos independientes llegaremos a la distribución de la v.a. coste total de la cartera, v.a. a la que representamos por $S_{(2)}^A$, siendo A, recordemos, el conjunto de hipótesis en (7.16) y (7.17). Los cálculos se realizan en el programa B5. "Cartera de Gerber con doble indemnización y una estructura de dependencia bivariante. Hipótesis A" (ver apéndice A). La distribución de probabilidad y las primas stop-loss asociadas a esta v.a. son:

s	$f_{S_{(2)}^A}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^A = s\right)$	$F_{S_{(2)}^A}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^A \leq s\right)$
0	0.276014364605351	0.276014364605351
1	0	0.276014364605351
2	0.092698141981230	0.368712506586580
3	0.105872899120675	0.474585405707255
4	0.086858832811372	0.561444238518627
5	0.078376279152076	0.639820517670703
6	0.054878526969099	0.694699044639802
7	0.047928992146940	0.742628036786742
8	0.052252612346082	0.794880649132824
9	0.044772670866164	0.839653319998988
10	0.029864540586600	0.869517860585587
12	0.022513812757082	0.917762133784940
14	0.013702796312641	0.949553332566148
16	0.008832913399984	0.968372845962891
18	0.006502599307647	0.981451724034794
20	0.003325446225938	0.988635438327887
24	0.001174347265406	0.996319205736755
28	0.000412127868678	0.998920467282694
32	0.000113636950057	0.999704307268372

(7.36)

d	$E\left(S_{(2)}^A - d\right)_+$
0	4.939
2	3.491028729210700
4	2.334326641504530
6	1.535591397693860
8	0.972918479120406
10	0.607452448252216
12	0.372218629865661
14	0.225831299904112
16	0.134924565033163
18	0.078246535723206

(7.37)

Es inmediato comprobar que las primas stop-loss ahora obtenidas están acotadas por debajo por las dadas en (7.33) y por encima por las de (7.35). Así

$$S_{(2)}^{\perp} \leq_{sl} S_{(2)}^{A} \leq_{sl} S_{(2)}^{U}.$$

Estas cotas quedan en cualquier caso garantizadas por (7.24) puesto que hemos supuesto dependencia cuadrática positiva en cada una de las parejas no independientes de la cartera.

Supongamos, por último, que para las parejas no comonótonas de la cartera tenemos dudas sobre si hemos considerado un grado de dependencia suficiente. Como hemos visto, si así es podemos incrementar las hipótesis relativas al tanto por uno de dependencia supuesto en cada una de las cuatro parejas consideradas y llegaremos a una v.a. coste total superior a la obtenida en orden stop-loss. Incrementando en un 10% las correlaciones estimadas, llegamos a las siguientes hipótesis de dependencia para los riesgos en las parejas (X_6, X_{25}), (X_7, X_{21}), (X_9, X_{17}) y (X_{13}, X_{29}):

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_6,X_{25}} &= 0.55\,\varphi_{X_6^U,X_{25}^U}, \\
\varphi_{X_7,X_{21}} &= 0.165\,\varphi_{X_7^U,X_{21}^U}, \\
\varphi_{X_9,X_{17}} &= 0.275\,\varphi_{X_9^U,X_{17}^U}, \\
\varphi_{X_{13},X_{29}} &= 0.66\,\varphi_{X_{13}^U,X_{29}^U}.
\end{aligned}$$

Éstas son las correlaciones estimadas para los mismos riesgos en (7.20) cuando considerábamos la cartera de Gerber sin doble indemnización.

Sustituyendo estos nuevos tantos por uno de dependencia en (7.28) llegamos a las siguientes funciones de densidad de probabilidad bivariantes para estas parejas:

(x,y)	$\Pr(X_6 = x, X_{25} = y)$
$(0,0)$	$0.55 \cdot 0.94 + 0.45 \cdot 0.97 \cdot 0.94 = 0.92731$
$(3,0)$	$0.55 \cdot 0 + 0.45 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.94 = 0.011421$
$(6,0)$	$0.55 \cdot 0 + 0.45 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.94 = 0.001269$
$(0,2)$	$0.55 \cdot 0.03 + 0.45 \cdot 0.9 \cdot 0.97 \cdot 0.06 = 0.040071$
$(0,4)$	$0.55 \cdot 0 + 0.45 \cdot 0.97 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.002619$
$(3,2)$	$0.55 \cdot 0.024 + 0.45 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.0138561$
$(6,2)$	$0.55 \cdot 0 + 0.45 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.0000729$
$(3,4)$	$0.55 \cdot 0.003 + 0.45 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.0017229$
$(6,4)$	$0.55 \cdot 0.003 + 0.45 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.0016581$

(x,y)	$\Pr(X_7 = x, X_{21} = y)$
$(0,0)$	$0.165 \cdot 0.95 + 0.835 \cdot 0.97 \cdot 0.95 = 0.9262025$
$(4,0)$	$0.165 \cdot 0 + 0.835 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.95 = 0.02141775$
$(8,0)$	$0.165 \cdot 0 + 0.835 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.95 = 0.00237975$
$(0,4)$	$0.165 \cdot 0.02 + 0.835 \cdot 0.97 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.03974775$
$(0,8)$	$0.165 \cdot 0 + 0.835 \cdot 0.97 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.00404975$
$(4,4)$	$0.165 \cdot 0.025 + 0.835 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.005139525$
$(8,4)$	$0.165 \cdot 0 + 0.835 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.000112725$
$(4,8)$	$0.165 \cdot 0.002 + 0.835 \cdot 0.9 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.000442725$
$(8,8)$	$0.165 \cdot 0.003 + 0.835 \cdot 0.1 \cdot 0.03 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.000507525$

(x,y)	$\Pr(X_9 = x, X_{17} = y)$
$(0,0)$	$0.275 \cdot 0.95 + 0.725 \cdot 0.96 \cdot 0.95 = 0.92245$
$(2,0)$	$0.275 \cdot 0 + 0.725 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.95 = 0.024795$
$(4,0)$	$0.275 \cdot 0 + 0.725 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.95 = 0.002755$
$(0,3)$	$0.275 \cdot 0.01 + 0.725 \cdot 0.96 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.03407$
$(0,6)$	$0.275 \cdot 0 + 0.725 \cdot 0.96 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.00348$
$(2,3)$	$0.275 \cdot 0.035 + 0.725 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.0107995$
$(4,3)$	$0.275 \cdot 0 + 0.725 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.05 = 0.0001305$
$(2,6)$	$0.275 \cdot 0.001 + 0.725 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.0004055$
$(4,6)$	$0.275 \cdot 0.004 + 0.725 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.05 = 0.0011145$

(x,y)	$\Pr(X_{13} = x, X_{29} = y)$
$(0,0)$	$0.66 \cdot 0.94 + 0.34 \cdot 0.96 \cdot 0.94 = 0.927216$
$(4,0)$	$0.66 \cdot 0 + 0.34 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.94 = 0.0115056$
$(8,0)$	$0.66 \cdot 0 + 0.34 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.94 = 0.0012784$
$(0,4)$	$0.66 \cdot 0.02 + 0.34 \cdot 0.96 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.0308256$
$(0,8)$	$0.66 \cdot 0 + 0.34 \cdot 0.96 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.0019584$
$(4,4)$	$0.66 \cdot 0.034 + 0.34 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.02310096$
$(8,4)$	$0.66 \cdot 0 + 0.34 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.9 \cdot 0.06 = 0.00007344$
$(4,8)$	$0.66 \cdot 0.002 + 0.34 \cdot 0.9 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.00139344$
$(8,8)$	$0.66 \cdot 0.004 + 0.34 \cdot 0.1 \cdot 0.04 \cdot 0.1 \cdot 0.06 = 0.00264816$

Las distribuciones correspondientes a la suma de los siniestros derivados de cada una de las parejas son ahora

s	$\Pr(X_6 + X_{25} = s)$
0	0.92731
2	0.040071
3	0.011421
4	0.002619
5	0.0138561
6	0.001269
7	0.0017229
8	0.0000729
10	0.0016581

s	$\Pr(X_9 + X_{17} = s)$
0	0.92245
2	0.024795
3	0.03407
4	0.002755
5	0.0107995
6	0.00348
7	0.0001305
8	0.0004055
10	0.0011145

s	$\Pr(X_7 + X_{21} = s)$
0	0.9262025
4	0.0611655
8	0.011569025
12	0.00055545
16	0.000507525

s	$\Pr(X_{13} + X_{29} = s)$
0	0.927216
4	0.0423312
8	0.02633776
12	0.00146688
16	0.00264816

Covolucionando éstas con las de $X_1^U + X_2^U$ y $X_{30}^U + X_{31}^U$, ver pág. 229, y con la que resulta para la subcartera formada por los riesgos independientes llegamos a la v.a. coste total de la cartera bajo estas nuevas hipótesis, $S_{(2)}^B$, siendo B el conjunto de hipótesis en (7.16) y (7.20). Su distribución de probabilidad se obtiene en el programa B6. "Cartera de Gerber con doble indemnización y una estructura de dependencia bivariante. Hipótesis B" (ver apéndice A). Ésta es:

s	$f_{S_{(2)}^B}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^B = s\right)$	$F_{S_{(2)}^B}(s) = \Pr\left(S_{(2)}^B \leq s\right)$
0	0.277522695270462	0.277522695270462
1	0	0.277522695270462
2	0.092585858601092	0.370108553871554
3	0.105805361335280	0.475913915206834
4	0.085587786838585	0.561501702045420
5	0.078969695717160	0.640471397762580
6	0.054163911427805	0.694635309190385
7	0.047461625424005	0.742096934614390
8	0.052501730899129	0.794598665513519
9	0.044527377966830	0.839126043480349
10	0.029909055699426	0.869035099179775
12	0.022508176305960	0.917244452914494
14	0.013734404064517	0.949079374190730
16	0.008934868952692	0.968006862559391
18	0.006557793875528	0.981178378298069
20	0.003362853435642	0.988451972586811
24	0.001191813065848	0.996240938601056
28	0.000420878040368	0.998890693063025
32	0.000116481204198	0.999693423718913

(7.38)

siendo ahora las primas stop-loss

d	$E\left(S_{(2)}^B - d\right)_+$
0	4.939
2	3.494045390540920
4	2.340067859619310
6	1.542040959427310
8	0.978773203232082
10	0.612497912225950
12	0.376269288014259
14	0.228858711054967
16	0.137010078852391
18	0.079637525834327

(7.39)

Si comparamos estas primas stop-loss con las de (7.37), las correspondientes a la v.a. $S_{(2)}^{A}$ obtenida bajo la primera estimación de las correlaciones en las parejas dependientes no comonótonas de la cartera, observamos que para cualquier nivel de retención las ahora obtenidas resultan mayores. Así

$$S_{(2)}^{A} \leq_{sl} S_{(2)}^{B},$$

es decir, hemos llegado a una nueva v.a. coste total que podemos asegurar cubre el riesgo real de la cartera si las correlaciones reales no superan el 10% de las inicialmente consideradas. A nivel teórico el resultado que acabamos de obtener se sigue de (7.31) y (7.32). Habíamos visto entonces que bajo dos conjuntos de hipótesis sobre el grado de dependencia positiva de los componentes de cada una de las parejas no independientes de la cartera, aquella que diera lugar a las correlaciones más altas implicaba funciones de distribución bivariantes superiores, en cualquier punto, para cada una de las parejas y, por tanto una v.a. coste total con mayor riesgo. Recordemos que este resultado únicamente es válido para parejas incluidas en las subclases $R_{2,+}^{clx}$.

Queremos finalizar remarcando la similitud de los resultados aquí obtenidos con los que resultaron para la cartera original de Gerber. Las conclusiones entonces expuestas siguen siendo válidas ahora. Señalar igualmente que el análisis aquí realizado podría reproducirse para cualquier cartera con las mismas coberturas. Sin embargo, al tratar carteras de vida con esta cobertura adicional, debemos ser conscientes en todo caso de la limitación del análisis realizado. Si seguimos el modelo aquí propuesto, de todas las relaciones de dependencia que pueden existir entre los riesgos de las parejas de la cartera con dependencia cuadrática positiva, únicamente habremos estado considerando una pequeña parte.

Capítulo 8

Hipótesis de dependencia trivariante positiva

8.1 Introducción

Siguiendo con el análisis del capítulo anterior, ampliamos aquí las hipótesis establecidas y suponemos que la dependencia se produce en grupos formados por tres riesgos. De esta manera abrimos la posibilidad a considerar dependencias en la cartera no solo referidas, por ejemplo, a los cónyuges de una pareja sino también a uno de sus descendientes/ascendientes.

Al igual que en el caso de dependencias bivariantes, nos limitaremos ahora a tratar dependencias positivas entre tres riesgos lo suficientemente fuertes como para garantizar que la distribución que resulta para su suma está por encima, en orden stop-loss, de la que les correspondería en caso de independencia. De esta manera trataremos únicamente por separado a aquellos tríos de la cartera de los que se deriva un mayor riesgo que bajo la hipótesis de independencia.

A nivel teórico, al hablar de dependencias entre tres riesgos deberemos seguir el análisis de dependencias multivariantes realizado en el capítulo quinto de la primera parte de este trabajo. Veíamos entonces que para un conjunto formado por dos o más riesgos, se puede garantizar una mayor "peligrosidad" que en el caso independiente si, como mínimo, se puede probar la existencia de dependencia acumulativa positiva entre los riesgos que forman el conjunto. Esta condición se cumplirá también para conjuntos de riesgos asociados o con una relación de crecimiento condicional en secuencia. Centrándonos en conjuntos de tres riesgos con esta característica, el desarrollo será paralelo al realizado en el capítulo anterior. Supondremos que la cartera contiene un determinado número de estos conjuntos y, en uno cualquiera de ellos, trataremos de modelizar la relación de dependencia existente. Deberemos llegar a un modelo que permita introducir una hipótesis de dependencia positiva entre tres riesgos y que a su vez, permita modificar fácilmente el grado de dependencia positiva considerado. Además el modelo debe ser tal que la modificación en el grado de dependencia asumido, permita llegar a una nueva distribución para la suma de los tres riesgos con unas mayores o menores primas stop-loss asociadas en función del signo de la modificación. De esta manera podremos variar las hipótesis de dependencia inicialmente establecidas hasta garantizar la consideración del riesgo existente en cada uno de los conjuntos no independientes de la cartera.

A diferencia del caso bivariante, no contamos ahora con una relación de orden fácilmente verificable en la práctica que nos permita establecer el orden stop-loss de las diferentes secuencias que quedarán entre la independencia y la comonotonía al considerar tres riesgos con dependencia acumulativa positiva. De los resultados del capítulo 5, tenemos que el orden supermodular cumple con esta propiedad. No obstante, la imposibilidad práctica de verificar la existencia de este orden bajo dos hipótesis de dependencia diferentes lo hacen inservible para nuestros propósitos. Esta dificultad y las asociadas al tratamiento de dependencias multivariantes son las que nos llevan a limitar el análisis de este último capítulo al modelo individual de vida, dejando para un futuro cercano, su ampliación al modelo individual de vida con doble indemnización en caso de muerte por accidente.

8.2 Dependencia trivariante positiva en carteras de seguros de vida

8.2.1 Una estructura de dependencia trivariante positiva en el modelo individual de vida

Consideremos nuevamente una cartera de seguros de vida formada por n pólizas, el riesgo de cada una de las cuales representamos por $X_1, \cdots, X_n$. La distribución de probabilidad de X_i $(i = 1, \cdots, n)$ es una dicotómica definida por

$$\begin{aligned} \Pr(X_i = 0) &= p_i, \\ \Pr(X_i = \alpha_i) &= 1 - q_i, \end{aligned}$$

con $0 < p_i < 1$ y $\alpha_i > 0$ dados, siendo q_i la probabilidad de que el asegurado i-ésimo no sobreviva el período considerado y α_i el capital asegurado que suponemos es múltiplo de una u.m. cualquiera.

En una cartera de este tipo, y siguiendo con el análisis del capítulo anterior, queremos ahora tratar aquellas dependencias que ocurren en grupos de tres riesgos. Así, consideraremos que en la cartera existe un número k, $k \leq n/3$, de conjuntos formados por tres riesgos no independientes. Nuevamente y, sin pérdida de generalidad, podemos reordenar los riesgos de la cartera de manera que los diferentes conjuntos dependientes sean $(X_{3t-2}, X_{3t-1}, X_{3t})$, $t = 1, \cdots, k$. De esta manera, para cualesquiera i y j, $i, j = 1, \cdots, n$; $i \neq j$, los riesgos X_i y X_j son independientes excepto si ambos forman parte del conjunto $(X_{3t-2}, X_{3t-1}, X_{3t})$. Así, podemos reescribir la v.a. coste total de la cartera definida en (6.2) como

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{k} (X_{3i-2} + X_{3i-1} + X_{3i})^{\perp} + \sum_{i=3k+1}^{n} X_i^{\perp}, \tag{8.1}$$

donde el superíndice $^{\perp}$ nos indica cuales de estos riesgos son tratados como independientes. Para los riesgos incluidos en diferentes conjuntos, así como para los que quedan fuera de éstos asumimos mutua independencia. Así, las dependencias en la cartera quedan localizadas dentro de cada uno de los k conjuntos definidos.

Para los riesgos que constituyen cada uno de los conjuntos no independientes de la cartera suponemos a partir de este momento que hemos podido probar la existencia de dependencia acumulativa positiva, PCD en lo que sigue. Así, asumimos que $(X_{3t-2}, X_{3t-1}, X_{3t}) \in R_{3,+}(p_{3t-2}, p_{3t-1}, p_{3t}; \alpha_{3t-2}, \alpha_{3t-1}, \alpha_{3t})$, $t = 1, \cdot\cdot\cdot, k$, siendo estas clases las definidas en el capítulo quinto para un conjunto de riesgos dicotómicos con esta relación de dependencia.

De los resultados de los teoremas 5.13 y 5.14 podemos establecer las siguientes cotas para la distribución de la suma de cada una de estas parejas de riesgos

$$X_{3t-2}^{\perp} + X_{3t-1}^{\perp} + X_{3t}^{\perp} \leq_{sl} X_{3t-2} + X_{3t-1} + X_{3t} \leq_{sl} X_{3t-2}^{U} + X_{3t-1}^{U} + X_{3t}^{U},\ t = 1, \cdots, k, \tag{8.2}$$

siendo $\left(X_{3t-2}^{\perp}, X_{3t-1}^{\perp}, X_{3t}^{\perp}\right)$ y $\left(X_{3t-2}^{U} + X_{3t-1}^{U} + X_{3t}^{U}\right)$ los tríos independientes y comonótonos incluidos en cada una de estas clases.

Dado que los riesgos incluidos en diferentes conjuntos y los que quedan fuera de éstos son mutuamente independientes, podemos aplicar el resultado del teorema 3.11 a (8.2) y afirmar que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\perp} &\leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X_{3i-2}+X_{3i-1}+X_{3i}\right)^{\perp} + \sum_{i=3k+1}^{n} X_i^{\perp} \\ &\leq_{sl} \sum_{i=1}^{k} \left(X_{3i-2}^{U}+X_{3i-1}^{U}+X_{3i}^{U}\right)^{\perp} + \sum_{i=3k+1}^{n} X_i^{\perp},\end{aligned} \tag{8.3}$$

puesto que este teorema garantiza el mantenimiento de la ordenación stop-loss bajo la convolución de riesgos independientes.

De la relación en (8.3) encontramos que nuestra cartera se encuentra, en términos de riesgo, entre la que resulta asumiendo la hipótesis de independencia para todos los riesgos que la forman y la que se obtendría realizando la hipótesis de comonotonía en cada uno de los conjuntos no independientes. Es obvio que si el asegurador realiza el esfuerzo de salvar la hipótesis de independencia en sus cálculos no puede limitarse a los que obtenga bajo la hipótesis de comonotonía, ya que éstos quedan, en la mayoría de los casos, aún más alejados de la realidad que los primeros. Así, debe llegar a poder modelizar relaciones intermedias de dependencia que se correspondan con diferentes posibilidades, siempre partiendo de que se trata de conjuntos de tres riesgos que presentan PCD. Éste será nuestro objetivo en el siguiente apartado.

8.2.2 Distribuciones de probabilidad asociadas a tres riesgos con PCD

8.2.2.1 Nomenclatura

Dentro de este apartado nos centramos en uno cualquiera de los conjuntos no independientes de la cartera, sea éste el conjunto $(X_1, X_2, X_3) \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Introducimos una nomenclatura similar a la del capítulo anterior para referirnos a las probabilidades asociadas a estos tres riesgos. En cuanto a las probabilidades trivariantes, sean

$$\begin{aligned} p_{111} &= \Pr\left(X_1=\alpha_1, X_2=\alpha_2, X_3=\alpha_3\right), \\ p_{110} &= \Pr\left(X_1=\alpha_1, X_2=\alpha_2, X_3=0\right), \\ p_{101} &= \Pr\left(X_1=\alpha_1, X_2=0, X_3=\alpha_3\right), \\ p_{011} &= \Pr\left(X_1=0, X_2=\alpha_2, X_3=\alpha_3\right), \\ p_{100} &= \Pr\left(X_1=\alpha_1, X_2=0, X_3=0\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{010} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = \alpha_2, X_3 = 0\right), \\
p_{001} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = \alpha_3\right), \\
p_{000} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0\right).
\end{aligned}$$

Para las probabilidades bivariantes involucradas, definimos

$$\begin{aligned}
p_{11.} &= \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2\right), \quad p_{10.} = \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = 0\right) \\
p_{01.} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = \alpha_2\right), \quad p_{00.} = \Pr\left(X_1 = 0, X_2 = 0\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{1.1} &= \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_3 = \alpha_3\right), \quad p_{1.0} = \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_3 = 0\right), \\
p_{0.1} &= \Pr\left(X_1 = 0, X_3 = \alpha_3\right), \quad p_{0.0} = \Pr\left(X_1 = 0, X_3 = 0\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{.11} &= \Pr\left(X_2 = \alpha_2, X_3 = \alpha_3\right), \quad p_{.10} = \Pr\left(X_2 = \alpha_2, X_3 = 0\right), \\
p_{.01} &= \Pr\left(X_2 = 0, X_3 = \alpha_3\right), \quad p_{.00} = \Pr\left(X_2 = 0, X_3 = 0\right).
\end{aligned}$$

Por último nos referiremos a las probabilidades marginales de estos tres riesgos como

$$\begin{aligned}
p_{1..} &= \Pr\left(X_1 = \alpha_1\right), \quad p_{0..} = \Pr\left(X_1 = 0\right), \\
p_{.1.} &= \Pr\left(X_2 = \alpha_2\right), \quad p_{.0.} = \Pr\left(X_2 = 0\right), \\
p_{..1} &= \Pr\left(X_3 = \alpha_3\right), \quad p_{..0} = \Pr\left(X_3 = 0\right).
\end{aligned}$$

Observemos que salvo en caso de independencia y comonotonía, de entre todas las probabilidades asociadas a estos tres riesgos, únicamente conocemos las marginales, distribuciones que resultan de las tablas de mortalidad. Para conocer las restantes deberemos realizar hipótesis referidas a la relación de dependencia existente. Este es el propósito de los siguientes dos apartados.

8.2.2.2 Distribuciones bivariantes

En principio, lo único que sabemos con certeza de los riesgos $(X_1, X_2, X_3) \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es su relación de dependencia acumulativa positiva. De la definición 5.5 dada en el capítulo 5 para este concepto, tenemos que si (X_1, X_2, X_3) presentan PCD, entonces para cualquier conjunto $I \subseteq \{1, 2, 3\}$ y para todo $j \notin I, j = 1, 2, 3$ se cumple

$$\sum_{i \in I} X_i \text{ y } X_j \text{ son } PQD. \tag{8.4}$$

De esta definición se sigue inmediatamente que, por parejas, los riesgos en (X_1, X_2, X_3) presentan dependencia cuadrática positiva. Así podemos afirmar que existe $PQD\,(X_1, X_2)$, $PQD\,(X_2, X_3)$ y $PQD\,(X_1, X_3)$. Recordemos que para riesgos con distribución dicotómica habíamos demostrado la equivalencia entre dependencia cuadrática positiva y positividad de la correspondiente covarianza en cada una de las parejas, ver teorema 4.12. De esta equivalencia se sigue la inclusión de estos pares de riesgos en las clases $R_{2,+}\,(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, $R_{2,+}$ $(p_2, p_3; \alpha_2, \alpha_3)$ y $R_{2,+}\,(p_1, p_3; \alpha_1, \alpha_3)$, respectivamente.

De los resultados del capítulo anterior, ver expresión (7.4), tenemos que si $(X_1, X_2) \in R_{2,+}\,(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, $(X_2, X_3) \in R_{2,+}\,(p_2, p_3; \alpha_2, \alpha_3)$ y $(X_1, X_3) \in R_{2,+}\,(p_1, p_3; \alpha_1, \alpha_3)$, existen tres reales s_1, s_2, s_3, cumpliendo $0 \leq s_i \leq 1,\ i = 1, 2, 3$, tales que

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1,X_2} &= s_1\,\varphi_{X_1^U,X_2^U}, \\ \varphi_{X_2,X_3} &= s_2\,\varphi_{X_2^U,X_3^U}, \\ \varphi_{X_1,X_3} &= s_3\,\varphi_{X_1^U,X_3^U}, \end{aligned} \tag{8.5}$$

siendo $\left(X_1^U, X_2^U\right)$, $\left(X_2^U, X_3^U\right)$ y $\left(X_1^U, X_3^U\right)$ los pares comonótonos de cada clase.

Así, los respectivos coeficientes de correlación asociados a cada uno de los pares de riesgos se pueden expresar como tanto por uno de los correspondientes en caso de comonotonía. Conocidos los valores de s_1, s_2, s_3 para los que se cumplen las relaciones en (8.5) conoceremos las distribuciones bivariantes de probabilidad asociadas a estos tres riesgos. En efecto, de las expresiones (7.7) y (7.8) del capítulo anterior, se deduce que las distribuciones de probabilidad bivariantes asociadas a cada uno de estos pares de riesgos se obtienen como combinación lineal convexa de las resultantes bajo independencia y comonotonía. Así, para los riesgos en $(X_1, X_2, X_3) \in R_{3,+}\,(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, las probabilidades bivariantes asociadas cumplen las siguientes relaciones válidas para dos reales cualesquiera $x, y \geq 0$,

$$\Pr\left(X_1{=}x, X_2{=}y\right) = s_1 \Pr\left(X_1^U{=}x, X_2^U{=}y\right) + (1 - s_1) \Pr\left(X_1^\perp{=}x, X_2^\perp{=}y\right), \tag{8.6}$$

$$\Pr\left(X_2{=}x, X_3{=}y\right) = s_2 \Pr\left(X_2^U{=}x, X_3^U{=}y\right) + (1 - s_2) \Pr\left(X_2^\perp{=}x, X_3^\perp{=}y\right), \tag{8.7}$$

$$\Pr\left(X_1{=}x, X_3{=}y\right) = s_3 \Pr\left(X_1^U{=}x, X_3^U{=}y\right) + (1 - s_3) \Pr\left(X_1^\perp{=}x, X_3^\perp{=}y\right). \tag{8.8}$$

Las distribuciones de probabilidad bivariantes asociadas a los riesgos en $(X_1, X_2, X_3) \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ se obtienen ahora estimando los respectivos coeficientes de correlación de los pares de riesgos incluidos en este conjunto. Aunque no podremos llegar a determinar con exactitud el valor de estas correlaciones podemos, al igual que en el capítulo anterior, tratar de estimarlas como tanto por uno sobre la máxima que puede existir entre dos riesgos de estas características, es decir, en función de la que resulta de la hipótesis de comonotonía.

Existe un dato muy importante a tener en cuenta a la hora de estimar los coeficientes s_1, s_2 y s_3 : Éstos no son ahora libres. En efecto, s_1, s_2 y s_3 están relacionados en la medida en que los riesgos a que se refieren, X_1, X_2 y X_3, no son independientes. Supongamos, por ejemplo, que hemos estimado los coeficientes s_1 y s_2 que nos determinan las correlaciones existentes entre (X_1, X_2) y (X_2, X_3). Está claro que algo tendrán que ver éstas con la correlación existente entre (X_1, X_3). Demostramos, a continuación, que una vez dos de los coeficientes están dados entre 0 y 1, existen limitaciones para el intervalo en que el tercero puede tomar valores. De no tenerlas en cuenta llegaríamos, en ocasiones, a probabilidades bivariantes negativas para algunos puntos.

Supongamos, por ejemplo, que hemos llegado a estimar los valores de s_1 y s_2 que definen las dos primeras relaciones en (8.5). Antes de estimar el valor de s_3 que completa las relaciones de dependencia bivariantes entre estos tres riesgos, debemos tener en cuenta que éste está relacionado con los dos anteriores. Esta relación condicionará la positividad en todos los puntos de la distribución de probabilidad que determina el coeficiente s_3, la correspondiente a (X_1, X_3). Recordemos que la distribución de probabilidad bivariante de esta pareja se puede definir a partir de las correspondientes marginales y el valor de $p_{1.1}$. Así, las condiciones que garantizan su positividad en todos los puntos serán condiciones para $p_{1.1}$, probabilidad relacionada con las ya obtenidas para las dos parejas restantes.

La positividad en la distribución de probabilidad bivariante de la pareja (X_1, X_3) queda garantizada si

$$\begin{aligned}
p_{1.1} &\geq 0, \\
p_{1.0} &= p_{1..} - p_{1.1} \geq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; p_{1.1} \leq p_{1..}, \\
p_{0.1} &= p_{..1} - p_{1.1} \geq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; p_{1.1} \leq p_{..1}, \\
p_{0.0} &= 1 - p_{1..} - p_{..1} + p_{1.1} \geq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; p_{1.1} \geq p_{1..} + p_{..1} - 1,
\end{aligned}$$

es decir, si se cumplen las siguientes cotas

$$\max\left\{p_{1..}+p_{..1}-1,0\right\} \leq p_{1.1} \leq \min\left\{p_{1..},p_{..1}\right\}. \tag{8.9}$$

El cumplimiento de éstas queda garantizado si se cumplen las siguientes dos relaciones

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=0\right)+\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=0\right)-1,0\right\}\\
&\leq \Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=0\right)\leq\\
&\min\left\{\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=0\right),\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=0\right)\right\}
\end{aligned} \tag{8.10}$$

y

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=\alpha_2\right)+\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right)-1,0\right\}\\
&\leq \Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right)\leq\\
&\min\left\{\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=\alpha_2\right),\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=0\right)+\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=0\right)-1 &= \frac{p_{10.}+p_{.01}-p_{.0.}}{p_{.0.}},\\
\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=0\right) &= \frac{p_{10.}}{p_{.0.}},\\
\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=0\right) &= \frac{p_{.01}}{p_{.0.}}.
\end{aligned}$$

Así, la expresión en (8.10) resulta

$$\begin{aligned}
\max\left\{\frac{p_{10.}+p_{.01}-p_{.0.}}{p_{.0.}},0\right\} &\leq \Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=0\right)\\
&\leq \min\left\{\frac{p_{10.}}{p_{.0.}},\frac{p_{.01}}{p_{.0.}}\right\},
\end{aligned}$$

expresión equivalente a

$$\begin{aligned}
\max\left\{p_{10.}+p_{.01}-p_{.0.},0\right\} &\leq \Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=0\right)\ p_{.0.}\\
&\leq \min\left\{p_{10.},p_{.01}\right\}.
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Igualmente se cumple

$$\begin{aligned}
\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=\alpha_2\right)+\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right)-1 &= \frac{p_{11.}+p_{.11}-p_{.1.}}{p_{.1.}}, \\
\Pr\left(X_1=\alpha_1/X_2=\alpha_2\right) &= \frac{p_{11.}}{p_{.1.}}, \\
\Pr\left(X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right) &= \frac{p_{.11}}{p_{.1.}},
\end{aligned}$$

de donde la expresión en (8.11) resulta

$$\begin{aligned}
\max\left\{\frac{p_{11.}+p_{.11}-p_{.1.}}{p_{.1.}},0\right\} &\leq \Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right) \\
&\leq \min\left\{\frac{p_{11.}}{p_{.1.}},\frac{p_{.11}}{p_{.1.}}\right\}
\end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned}
\max\left\{p_{11.}+p_{.11}-p_{.1.},0\right\} &\leq \Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right)\,p_{.1.} \\
&\leq \min\left\{p_{11.},p_{.11}\right\} \qquad (8.13)
\end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$p_{1.1}=\Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=0\right)\,p_{.0.}+\Pr\left(X_1=\alpha_1,X_3=\alpha_3/X_2=\alpha_2\right)\,p_{.1.}$$

Así, sumando las expresiones en (8.12) y (8.13) obtenemos las siguientes cotas para $p_{1.1}$

$$\begin{aligned}
&\max\left\{p_{10.}+p_{.01}-p_{.0.},0\right\}+\max\left\{p_{11.}+p_{.11}-p_{.1.},0\right\} \\
\leq\ & p_{1.1}\leq\min\left\{p_{10.},p_{.01}\right\}+\min\left\{p_{11.},p_{.11}\right\}. \qquad (8.14)
\end{aligned}$$

Éstas garantizan el cumplimiento de (8.9) y, por tanto, la positividad en todos los puntos de la distribución de probabilidad bivariante de los riesgos (X_1,X_3).

De la relación en (8.8) tenemos

$$\begin{aligned}
p_{1.1} &= s_3\min\left\{p_{1..},p_{..1}\right\}+(1-s_3)\,p_{1..}p_{..1} \\
&= p_{1..}p_{..1}+s_3\left(\min\left\{p_{1..},p_{..1}\right\}-p_{1..}p_{..1}\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$s_3=\frac{p_{1.1}-p_{1..}p_{..1}}{\min\left\{p_{1..},p_{..1}\right\}-p_{1..}p_{..1}}$$

y las cotas para este coeficiente, dados s_1 y s_2 se siguen directamente de (8.14). Éstas son:

$$\max\left\{\frac{\max\{p_{10.}+p_{.01}-p_{.0.},0\}+\max\{p_{11.}+p_{.11}-p_{.1.},0\}-p_{1..}p_{..1}}{\min\{p_{1..},p_{..1}\}-p_{1..}p_{..1}},0\right\}$$
$$\leq \quad s_3 \leq \frac{\min\{p_{10.},p_{.01}\}+\min\{p_{11.},p_{.11}\}-p_{1..}p_{..1}}{\min\{p_{1..},p_{..1}\}-p_{1..}p_{..1}} \tag{8.15}$$

Remarcar que el primero de los máximos en la cota inferior de (8.15) aparece para garantizar que únicamente estamos considerando dependencias positivas. Es fácil comprobar que la cota superior es siempre ≤ 1.

Observar que, en determinados casos particulares, el valor del coeficiente s_3 queda totalmente determinado a partir de los valores dados para s_1 y s_2. Como ejemplo, podemos considerar el caso en que hemos establecido $s_1 = s_2 = 1$. Este caso se corresponde con la asunción de mutua comonotonía entre (X_1, X_2) y (X_2, X_3). Esta hipótesis resultará totalmente real si estamos ante un único asegurado con tres pólizas en la misma cartera. Supongamos que así es, entonces

$$p_{1..} = p_{.1.} = p_{..1}$$

Intuitivamente ya podemos prever el valor de s_3. Por tratarse del mismo asegurado, las hipótesis de comonotonía consideradas nos indican que X_1 se comporta exactamente igual que X_2 y que esta igualdad en el comportamiento se cumple también entre X_2 y X_3. Obviamente, de estas dos afirmaciones se deduce que X_1 y X_3 se deberán comportar igual, es decir, que $s_3 = 1$. Este resultado se obtiene de forma inmediata haciendo en (8.15)

$$p_{11.} = p_{.11} = p_{.1.}$$

y

$$p_{10.} = p_{.01} = 0,$$

es decir, sustituyendo estas probabilidades bivariantes por su valor en caso de comonotonía e igualdad en las marginales.

En general, el valor de s_3 queda acotado por las cotas en (8.15). Si representamos por $s_3^{\min}$ a la cota inferior,

$$s_3^{\min} = \max\left\{\frac{\max\{p_{10.}+p_{.01}-p_{.0.},0\}+\max\{p_{11.}+p_{.11}-p_{.1.},0\}-p_{1..}p_{..1}}{\min\{p_{1..},p_{..1}\}-p_{1..}p_{..1}},0\right\} \tag{8.16}$$

y por $s_3^{\max}$ a la cota superior,

$$s_3^{\max} = \frac{\min\{p_{10.}, p_{.01}\} + \min\{p_{11.}, p_{.11}\} - p_{1..}p_{..1}}{\min\{p_{1..}, p_{..1}\} - p_{1..}p_{..1}}, \tag{8.17}$$

debemos ahora determinar la correlación en la pareja (X_1, X_3) estimando un valor de s, $s \in [0,1]$, tal que

$$\varphi_{X_1,X_3} = \left(s_3^{\min} + s\left(s_3^{\max} - s_3^{\min}\right)\right)\varphi_{X_1^U,X_3^U} = s_3\,\varphi_{X_1^U,X_3^U}. \tag{8.18}$$

Queremos finalizar destacando la variación que las probabilidades bivariantes referidas a la muerte de ambos asegurados en el período considerado, han sufrido por la ruptura de la hipótesis de independencia. De (8.6), (8.7), (8.8) y de la expresión de la función de densidad bivariante obtenida en (4.19) para un par de riesgos comonótonos, se deduce que

$$p_{11.} = p_{1..}p_{.1.} + s_1\left(\min\{p_{1..}, p_{.1.}\} - p_{1..}p_{.1.}\right), \tag{8.19}$$

$$p_{.11} = p_{.1.}p_{..1} + s_2\left(\min\{p_{.1.}, p_{..1}\} - p_{.1.}p_{..1}\right), \tag{8.20}$$

$$p_{1.1} = p_{1..}p_{..1} + s_3\left(\min\{p_{1..}, p_{..1}\} - p_{1..}p_{..1}\right), \tag{8.21}$$

con $s_1, s_2, s_3 \in [0,1]$ y compatibles. Así,

$$p_{11.} = p_{1..}p_{.1.} + \triangle p_{11.}, \qquad \triangle p_{11.} \geq 0, \tag{8.22}$$

$$p_{.11} = p_{.1.}p_{..1} + \triangle p_{.11}, \qquad \triangle p_{.11} \geq 0, \tag{8.23}$$

$$p_{1.1} = p_{1..}p_{..1} + \triangle p_{1.1}, \qquad \triangle p_{1.1} \geq 0, \tag{8.24}$$

relaciones que nos serán de gran utilidad para la interpretación de resultados futuros.

8.2.2.3 Distribución trivariante

Una vez estimados tres valores compatibles para s_1, s_2 y s_3, tenemos una aproximación de las probabilidades $p_{11.}$, $p_{.11}$ y $p_{1.1}$. Observemos que, con éstas, nos falta una estimación del valor de p_{111} para tener una aproximación de la distribución de probabilidad trivariante de los riesgos en (X_1, X_2, X_3). En efecto, dados $p_{1..}$, $p_{.1.}$, $p_{..1}$, $p_{11.}$, $p_{1.1}$, $p_{.11}$y p_{111} queda totalmente determinada esta distribución trivariante puesto que

$$p_{111} = p_{111}, \tag{8.25}$$

$$p_{110} = p_{11.} - p_{111}, \tag{8.26}$$

$$p_{101} = p_{1.1} - p_{111}, \tag{8.27}$$
$$p_{011} = p_{.11} - p_{111}, \tag{8.28}$$
$$p_{100} = p_{1..} - p_{11.} - p_{1.1} + p_{111}, \tag{8.29}$$
$$p_{010} = p_{.1.} - p_{11.} - p_{.11} + p_{111}, \tag{8.30}$$
$$p_{001} = p_{..1} - p_{1.1} - p_{.11} + p_{111}, \tag{8.31}$$
$$p_{000} = 1 - p_{1..} - p_{.1.} - p_{..1} + p_{11.} + p_{1.1} + p_{.11} - p_{111}. \tag{8.32}$$

A fin de dar una estimación para la probabilidad p_{111} y, ante la inexistencia de medidas estadísticas que nos cuantifiquen el grado de dependencia positiva que existe entre los tres riesgos, trataremos de acotar este valor con los datos teóricos de que disponemos.

En primer lugar, sabemos de la existencia de una relación de PCD entre estos tres riesgos. Veremos, a continuación, que de la consideración de la misma resultará un primer intervalo de posibles valores para p_{111}.

Si (X_1, X_2, X_3) presentan PCD, entonces para cualquier conjunto $I \subseteq \{1,2,3\}$ y para todo $j = 1,2,3$, $j \notin I$,

$$\sum_{i \in I} X_i \text{ y } X_j \text{ son } PQD. \tag{8.33}$$

Observemos que si $I = \{i\}, i = 1,2,3,$

$$X_i \text{ y } X_j \text{ son } PQD$$

dados tres valores compatibles de s_1, s_2, s_3.

Consideremos ahora las tres posibilidades restantes que resultan de (8.33) en nuestro caso.

1. Condiciones para que

$$X_1 + X_2 \text{ y } X_3 \text{ sean } PQD.$$

   Encontramos esta relación de dependencia si para dos reales cualesquiera $x, y \geq 0$ se cumple

$$\Pr(X_1 + X_2 > x, X_3 > y) \geq \Pr(X_1 + X_2 > x)\Pr(X_3 > y). \tag{8.34}$$

   Para garantizar el cumplimiento de esta condición en cualquier caso, debemos distinguir según sea la ordenación de los capitales asegurados.

(a) $0 \leq x < \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $0 \leq y < \alpha_3$.

En este caso particular,

$$\Pr(X_1 + X_2 > x, X_3 > y) = p_{101} + p_{011} + p_{111}$$

y

$$\Pr(X_1 + X_2 > x)\Pr(X_3 > y) = (p_{10.} + p_{01.} + p_{11.})\, p_{..1}$$

Así, el cumplimiento de (8.34) pasa por el cumplimiento de la relación

$$p_{101} + p_{011} + p_{111} \geq (p_{10.} + p_{01.} + p_{11.})\, p_{..1}$$

Observemos que

$$p_{101} + p_{011} + p_{111} = p_{1.1} + p_{.11} - p_{111}$$

y

$$p_{10.} + p_{01.} + p_{11.} = p_{1..} + p_{.1.} - p_{11.}$$

Así, la condición de PQD se cumplirá si

$$p_{111} \leq p_{1.1} + p_{.11} - (p_{1..} + p_{.1.} - p_{11.})\, p_{..1} \tag{8.35}$$

(b) Cuando $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq x < \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $0 \leq y < \alpha_3$ debemos distinguir según

i. $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$\Pr(X_1 + X_2 > x, X_3 > y) = p_{011} + p_{111}$$

y

$$\Pr(X_1 + X_2 > x)\Pr(X_3 > y) = (p_{01.} + p_{11.})\, p_{..1}$$

Así la relación en (8.34) se cumple si

$$p_{011} + p_{111} \geq (p_{01.} + p_{11.})\, p_{..1} \Leftrightarrow p_{.11} \geq p_{.1.}p_{..1}$$

relación cuyo cumplimiento queda garantizado por (8.23).

ii. $\alpha_1 > \alpha_2$:

$$\Pr(X_1 + X_2 > x, X_3 > y) = p_{101} + p_{111}$$

y

$$\Pr(X_1 + X_2 > x)\Pr(X_3 > y) = (p_{10.} + p_{11.})\, p_{..1}$$

Así la relación en (8.34) se cumple si

$$p_{101} + p_{111} \geq (p_{10.} + p_{11.})\, p_{..1} \Leftrightarrow p_{1.1} \geq p_{1..}p_{..1},$$

relación cuyo cumplimiento queda garantizado por (8.24).

(c) Si $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq x < \alpha_1 + \alpha_2$ y $0 \leq y < \alpha_3$ resultan, independientemente de la ordenación entre α_1 y α_2,

$$\Pr(X_1 + X_2 > x, X_3 > y) = p_{111}$$

y

$$\Pr(X_1 + X_2 > x) \Pr(X_3 > y) = p_{11.}p_{..1}$$

De donde la relación en (8.34) se cumplirá si

$$p_{111} \geq p_{11.}p_{..1} \tag{8.36}$$

(d) Por último, cuando $x \geq \alpha_1 + \alpha_2$ y/o $y \geq \alpha_3$

$$\Pr(X_1 + X_2 > x, X_3 > y) = 0$$

y

$$\Pr(X_1 + X_2 > x) \Pr(X_3 > y) = 0.$$

Así, en este caso particular la relación en (8.34) siempre se cumple.

Del análisis realizado se deduce que $X_1 + X_2$ y X_3 presentan dependencia cuadrática positiva, si las condiciones en (8.35) y (8.36) se cumplen a la vez. Es decir, si

$$p_{11.}p_{..1} \leq p_{111} \leq p_{1.1} + p_{.11} - (p_{1..} + p_{.1.} - p_{11.})\, p_{..1}$$

o, equivalentemente, cuando

$$p_{11.}p_{..1} \leq p_{111} \leq p_{11.}p_{..1} + \triangle\, p_{.11} + \triangle\, p_{1.1}, \tag{8.37}$$

siendo $\triangle\, p_{.11}, \triangle\, p_{1.1}$ los definidos en (8.23) y (8.24), es decir, los incrementos que estas probabilidades bivariantes han sufrido respecto al valor que tomaban en caso de independencia.

Observemos que las cotas en (8.37) están bien definidas, en el sentido que nunca cruzan. Esta propiedad es consecuencia inmediata de la no negatividad de $\triangle\, p_{.11}$ y $\triangle\, p_{1.1}$ y, de ella, se deduce como mínimo un valor para p_{111} tal que la existencia de PQD entre $X_1 + X_2$ y X_3 ($\Leftrightarrow PQD$ entre $X_1 + X_2$ y X_3) quede garantizada. Equivalentemente podemos decir que esta propiedad se cumple si

$$p_{111} = p_{11.}p_{..1} + t_3\, (\triangle\, p_{.11} + \triangle\, p_{1.1})\,,\ 0 \leq t_3 \leq 1. \tag{8.38}$$

Pasemos a interpretar la relación encontrada para la obtención de esta probabilidad. Si queremos garantizar PQD entre $X_1 + X_2$ y X_3, la probabilidad de que los asegurados (X_1, X_2, X_3) mueran dentro del período considerado resulta de considerar el efecto que el riesgo X_3 tiene sobre el grupo (X_1, X_2). Como mínimo, éste actuará como independiente sobre la probabilidad de muerte conjunta de los otros dos ($t_3 = 0$). No obstante además X_3 puede incorporar, total o parcialmente, el incremento de sus respectivas probabilidades conjuntas de muerte con X_1 y X_2, incremento debido a la condición de no independencia de este tercer riesgo con el grupo de los otros dos.

2. Condiciones para que

$$X_1 + X_3 \text{ y } X_2 \text{ sean } PQD.$$

Esta relación de dependencia se cumple, si para dos reales cualesquiera $x, y \geq 0$:

$$\Pr(X_1 + X_3 > x, X_2 > y) \geq \Pr(X_1 + X_3 > x) \Pr(X_2 > y). \qquad (8.39)$$

Realizando un análisis similar al del caso anterior, se llega al cumplimiento de esta relación para valores de p_{111} tales que

$$p_{1.1}.p_{.1.} \leq p_{111} \leq p_{11.} + p_{.11} - (p_{1..} + p_{..1} - p_{1.1})\, p_{.1.}$$

o, equivalentemente, cuando

$$p_{1.1}p_{.1.} \leq p_{111} \leq p_{1.1}p_{.1.} + \triangle\, p_{11.} + \triangle\, p_{.11}, \qquad (8.40)$$

siendo $\triangle\, p_{11.}, \triangle\, p_{.11}$ los definidos en (8.22) y (8.23), es decir, los incrementos que estas probabilidades bivariantes han sufrido respecto al valor que tomaban en caso de independencia.

Señalar nuevamente que las cotas en (8.40) están bien definidas, en el sentido que nunca cruzan. Así, existe como mínimo un valor de p_{111} tal que la relación de PQD entre $X_1 + X_3$ y X_2 se cumple. Esta propiedad queda garantizada siempre que

$$p_{111} = p_{1.1}p_{.1.} + t_2\,(\triangle\, p_{11.} + \triangle\, p_{.11}),\ 0 \leq t_2 \leq 1. \qquad (8.41)$$

En este caso, garantizar PQD entre $X_1 + X_3$ y X_2, equivale a hallar la probabilidad de que los asegurados (X_1, X_2, X_3) mueran dentro del período considerado estimando el efecto que el riesgo X_2 tiene sobre el grupo (X_1, X_3).

3. Por último, debemos analizar las condiciones para que

$$X_2 + X_3 \text{ y } X_1 \text{ sean } PQD.$$

Esta relación de dependencia se cumple, si para dos reales cualesquiera $x, y \geq 0$:

$$\Pr(X_2 + X_3 > x, X_1 > y) \geq \Pr(X_2 + X_3 > x) \Pr(X_1 > y). \qquad (8.42)$$

En base al procedimiento empleado en los dos casos anteriores, resulta el cumplimiento en cualquier caso de (8.42), para valores de p_{111} tales que

$$p_{.11} p_{1..} \leq p_{111} \leq p_{11.} + p_{1.1} - (p_{.1.} + p_{..1} - p_{.11}) p_{1..}$$

o, equivalentemente, cuando

$$p_{.11} p_{1..} \leq p_{111} \leq p_{.11} p_{1..} + \triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}, \qquad (8.43)$$

siendo $\triangle p_{11.}, \triangle p_{1.1}$ los definidos en (8.22) y (8.24), es decir, los incrementos que estas probabilidades bivariantes han sufrido respecto al valor que tomaban en caso de independencia.

Indicar que las cotas en (8.43) están bien definidas, en el sentido que nunca cruzan. Así, existe como mínimo un valor de p_{111} que garantiza una relación de PQD entre $X_2 + X_3$ y X_1. Esta propiedad queda garantizada si

$$p_{111} = p_{.11} p_{1..} + t_1 (\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}), \ 0 \leq t_1 \leq 1. \qquad (8.44)$$

Así, para garantizar una relación de PQD entre $X_2 + X_3$ y X_1, la probabilidad de que los asegurados (X_1, X_2, X_3) mueran dentro del período considerado resulta de incorporar el efecto que el riesgo X_1 tiene sobre el grupo (X_2, X_3).

Del análisis realizado se deduce que los riesgos en (X_1, X_2, X_3) presentan PCD si, y sólo si, las condiciones en (8.37), (8.40) y (8.43) se cumplen a la vez. Es decir, siempre que el valor de p_{111} cumpla

$$\max\{p_{11.}p_{..1}, p_{1.1}p_{.1.}, p_{.11}p_{1..}\} \leq p_{111} \leq \min\{p_{11.}p_{..1} + \triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11},$$
$$p_{1.1}p_{.1.} + \triangle p_{11.} + \triangle p_{.11},\, p_{.11}p_{1..} + \triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\} \tag{8.45}$$

Equivalentemente, podemos decir que en el intervalo $[0,1]$ existen tres valores para t_1, t_2, t_3 tales que las relaciones en (8.38), (8.41) y (8.44) se cumplen a la vez, es decir,

$$p_{111} = p_{11.}p_{..1} + t_3\,(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}) \tag{8.46}$$
$$= p_{1.1}p_{.1.} + t_2\,(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}) \tag{8.47}$$
$$= p_{.11}p_{1...} + t_1\,(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1})\,. \tag{8.48}$$

Observemos que tras estimar las relaciones dos a dos, queda únicamente libertad para estimar una t_i de entre las tres presentadas, $\{t_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$. Se trata, entonces, de escoger una de las tres parejas involucradas y tratar de cuantificar el efecto que añade el riesgo que ha quedado fuera, X_i, en p_{111} por el hecho de no ser independiente con los dos riesgos de la pareja escogida. Este incremento es función de los incrementos en las probabilidades bivariantes referidas a la muerte conjunta de X_i con cada uno de los otros dos riesgos. Fijado este incremento, quedan totalmente determinados los otros dos con lo que parece indiferente el riesgo escogido para la estimación. El análisis que sigue clarificará esta circunstancia.

Independientemente del parámetro t_i elegido señalar, en primer lugar, que no podemos fijar su valor de manera arbitraria en el intervalo $[0,1]$. Pongamos un sencillo ejemplo para aclarar este punto. Supongamos que hemos escogido el parámetro t_3 para llegar a la probabilidad conjunta p_{111}, es decir, en lo que se refiere a las probabilidades de muerte consideramos el efecto de X_3 sobre (X_1, X_2). Intuitivamente ya podemos prever que, en determinados casos particulares, este tercer riesgo no podrá actuar como independiente sobre los otros dos. Supongamos, por ejemplo, que para las relaciones bivariantes hemos estimado $s_1 = 0,\ s_2, s_3 > 0$. Está claro que, en este caso, no debe ser posible hacer $t_3 = 0$ y hallar

$$p_{111} = p_{11.}p_{..1} = p_{1..}p_{.1.}p_{..1}.$$

Así, deberán existir restricciones para el valor del parámetro t_3 en el intervalo $[0,1]$.

Para todo $i \in \{1,2,3\}$ existirán restricciones en cuanto al valor de t_i en el intervalo $[0,1]$. Éstas resultarán de garantizar la existencia de PCD en (X_1, X_2, X_3) y de asegurar, en cualquier punto, la no negatividad de la distribución de probabilidad trivariante resultante. En cuanto a este último punto, es muy importante en ningún caso perderlo de vista puesto que lo que hacemos en estos momentos es "construir" una distribución de probabilidad trivariante y no partir de ella.

Observemos que independientemente del valor de t_i estimado

$$p_{111} \geq 0 \tag{8.49}$$

se cumple. Sin embargo, debemos garantizar también la positividad de las siete probabilidades trivariantes restantes. Así,

$$\begin{aligned}
p_{110} &= p_{11.} - p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow p_{111} \leq p_{11.}, &(8.50)\\
p_{101} &= p_{1.1} - p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow p_{111} \leq p_{1.1}, &(8.51)\\
p_{011} &= p_{.11} - p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow p_{111} \leq p_{.11}, &(8.52)\\
p_{100} &= p_{1..} - p_{11.} - p_{1.1} + p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow p_{111} \geq p_{11.} + p_{1.1} - p_{1..}, &(8.53)\\
p_{010} &= p_{.1.} - p_{11.} - p_{.11} + p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow p_{111} \geq p_{11.} + p_{.11} - p_{.1.}, &(8.54)\\
p_{001} &= p_{..1} - p_{1.1} - p_{.11} + p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow p_{111} \geq p_{1.1} + p_{.11} - p_{..1}, &(8.55)\\
p_{000} &= 1 - p_{1..} - p_{.1.} - p_{..1} + p_{11.} + p_{1.1} + p_{.11} - p_{111} \geq 0 \Leftrightarrow &\\
& \quad p_{111} \leq 1 + p_{11.} + p_{1.1} + p_{.11} - p_{1..} - p_{.1.} - p_{..1} &(8.56)
\end{aligned}$$

Las condiciones en (8.49)-(8.56) se cumplirán a la vez si

$$\begin{aligned}
&\max\{p_{11.} + p_{1.1} - p_{1..},\, p_{11.} + p_{.11} - p_{.1.},\, p_{1.1} + p_{.11} - p_{..1}, 0\}\\
&\leq p_{111} \leq \min\{p_{11.},\, p_{1.1},\, p_{.11}, 1 + p_{11.} + p_{1.1} + p_{.11} - p_{1..} - p_{.1.} - p_{..1}\}
\end{aligned} \tag{8.57}$$

Si llamamos $p_{111}^{(1)\min}$ a la cota inferior para p_{111} en (8.57) y $p_{111}^{(2)\max}$ a su cota superior,

$$\begin{aligned}
p_{111}^{(1)\min} &= \max\{p_{11.} + p_{1.1} - p_{1..},\, p_{11.} + p_{.11} - p_{.1.},\, p_{1.1} + p_{.11} - p_{..1}, 0\}\\
p_{111}^{(1)\max} &= \min\{p_{11.},\, p_{1.1},\, p_{.11}, 1 + p_{11.} + p_{1.1} + p_{.11} - p_{1..} - p_{.1.} - p_{..1}\},
\end{aligned}$$

tenemos que el valor finalmente obtenido para p_{111} debe quedar, en cualquier caso, entre estos dos valores ya que, de otra manera, alguna de las probabilidades trivariantes resultaría negativa. Señalar, sin embargo, que una probabilidad p_{111} cualquiera en este intervalo no nos garantiza tres riesgos con dependencia acumulativa positiva aún cuando dos a dos presentan correlación positiva por la forma en que se han determinado sus distribuciones bivariantes. Así, debemos hacer compatibles estas condiciones con las de PCD.

Si llamamos $p_{111}^{(2)\min}$ a la cota inferior en (8.45), mínimo valor de p_{111} que garantiza tres riesgos con PCD y $p_{111}^{(2)\max}$ a su cota superior,

$$\begin{aligned}
p_{111}^{(2)\min} &= \max\{p_{11.}p_{..1}, p_{1.1}p_{.1.}, p_{.11}p_{1..}\}, \\
p_{111}^{(2)\max} &= \min\{p_{11.}p_{..1} + \triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}, \\
& \quad p_{1.1}p_{.1.} + \triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}, \, p_{.11}p_{1..} + \triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\}
\end{aligned}$$

tenemos que llegaremos a una distribución analíticamente correcta para (X_1, X_2, X_3) con PCD siempre que

$$p_{111}^{\min} \leq p_{111} \leq p_{111}^{\max}, \tag{8.58}$$

siendo

$$p_{111}^{\min} = \max\left\{p_{111}^{(1)\min}, p_{111}^{(2)\min}\right\} \tag{8.59}$$

y

$$p_{111}^{\max} = \min\left\{p_{111}^{(1)\max}, p_{111}^{(2)\max}\right\} \tag{8.60}$$

Así, cualquiera que sea el parámetro t_i elegido para estimar el valor de p_{111} a partir de (8.46), (8.47) ó (8.48), recordemos haciendo

$$\begin{aligned}
p_{111} &= p_{11.}p_{..1} + t_3\,(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}) \text{ ó} \\
p_{111} &= p_{1.1}p_{.1.} + t_2\,(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}) \text{ ó} \\
p_{111} &= p_{.11}p_{1...} + t_1\,(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}),
\end{aligned}$$

éste deberá dar lugar a un valor en el intervalo que resulta de (8.58).

Si el parámetro elegido es t_1 e $\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1} \neq 0$, deberemos estimar el valor de este parámetro en

$$\frac{p_{111}^{\min} - p_{.11}p_{1..}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}} \leq t_1 \leq \frac{p_{111}^{\max} - p_{.11}p_{1..}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}} \tag{8.61}$$

Se puede comprobar que estas cotas siempre dan lugar a valores de t_1 en $[0,1]$. Si llamamos $t_1^{\min}$ a la cota inferior que ha quedado para este parámetro y $t_1^{\max}$ a la cota superior,

$$t_1^{\min} = \frac{p_{111}^{\min} - p_{.11}p_{1..}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}},$$

$$t_1^{\max} = \frac{p_{111}^{\max} - p_{.11}p_{1..}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}}$$

llegaremos al valor de t_1 determinando un valor para t en el intervalo $[0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} p_{111} &= p_{.11}p_{1...} + \left(t_1^{\min} + t\left(t_1^{\max} - t_1^{\min}\right)\right)(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}) \qquad (8.62) \\ &= p_{.11}p_{1...} + t_1\,(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}) \end{aligned}$$

Observemos que de las relaciones dos a dos definidas, podemos asegurar que p_{111} ha incrementado su valor debido a la no independencia de X_1 con (X_2, X_3) en

$$t_1^{\min}(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1})$$

Así, el incremento adicional que puede o no producir el riesgo X_1 sobre p_{111} ha quedado limitado al intervalo

$$t\left(t_1^{\max} - t_1^{\min}\right)(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}),\ 0 \leq t \leq 1.$$

El objetivo será tratar de estimar el valor de t en $[0,1]$.

Cuando $\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1} = 0$ ($\Leftrightarrow \triangle p_{11.} = \triangle p_{1.1} = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_3 = 0$) estamos hablando de (X_1, X_2) independientes y de (X_1, X_3) independientes. No tiene sentido plantearse incorporar el efecto adicional de X_1 en (X_2, X_3) respecto al caso independiente ya que éste no existe. Por este motivo, diremos que, en este caso, t_1 no está definida y de (8.48) tendremos directamente

$$p_{111} = p_{.11}p_{1..}, \qquad (8.63)$$

resultado lógico dada la independencia de X_1 con X_2 y X_3.

Igualmente, si el parámetro elegido es t_2 e $\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11} \neq 0$, deberemos estimar el valor de este parámetro en

$$\frac{p_{111}^{\min} - p_{1.1}p_{.1.}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}} \leq t_2 \leq \frac{p_{111}^{\max} - p_{1.1}p_{.1.}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}} \qquad (8.64)$$

Se puede comprobar que estas cotas siempre dan lugar a valores de t_2 en $[0,1]$. Si llamamos $t_2^{\min}$ a la cota inferior que ha quedado para este parámetro y $t_2^{\max}$ a la cota superior,

$$t_2^{\min} = \frac{p_{111}^{\min} - p_{1.1}p_{.1.}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}},$$

$$t_2^{\max} = \frac{p_{111}^{\max} - p_{1.1}p_{.1.}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}}$$

obtendremos una estimación para t_2 estimando el valor de t, $t \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} p_{111} &= p_{1.1}p_{.1.} + \left(t_2^{\min} + t\left(t_2^{\max} - t_2^{\min}\right)\right)(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}) \qquad (8.65) \\ &= p_{1.1}p_{.1.} + t_2\,(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}) \end{aligned}$$

Cuando $\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11} = 0$ ($\Leftrightarrow \triangle p_{11.} = \triangle p_{.11} = 0 \Leftrightarrow s_1 = s_2 = 0$) estamos ante (X_1, X_2) independientes y (X_2, X_3) independientes. No tiene sentido ahora plantearse incorporar el efecto adicional de X_2 en (X_1, X_3) respecto al caso independiente ya que éste no existe. Por este motivo, diremos que, en este caso, t_2 no está definida y de (8.47) tendremos directamente

$$p_{111} = p_{1.1}p_{.1.}, \qquad (8.66)$$

resultado lógico dada la independencia de X_2 con X_1 y X_3.

Por último, cuando el parámetro elegido para la estimación es t_3 e $\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11} \neq 0$, deberemos estimar el valor de este parámetro en

$$\frac{p_{111}^{\min} - p_{11.}p_{..1}}{\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}} \leq t_3 \leq \frac{p_{111}^{\max} - p_{11.}p_{..1}}{\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}} \qquad (8.67)$$

Se puede comprobar que estas cotas siempre dan lugar a valores de t_3 en $[0,1]$. Si llamamos $t_3^{\min}$ a la cota inferior que ha quedado para este parámetro y $t_3^{\max}$ a la cota superior,

$$\begin{aligned} t_3^{\min} &= \frac{p_{111}^{\min} - p_{11.}p_{..1}}{\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}}, \\ t_3^{\max} &= \frac{p_{111}^{\max} - p_{11.}p_{..1}}{\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}} \end{aligned}$$

obtendremos una estimación para t_3 estimando el valor de t, $t \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} p_{111} &= p_{11.}p_{..1} + \left(t_3^{\min} + t\left(t_3^{\max} - t_3^{\min}\right)\right)(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}) \qquad (8.68) \\ &= p_{11.}p_{..1} + t_3\,(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}) \end{aligned}$$

Cuando $\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11} = 0$ ($\Leftrightarrow \triangle p_{1.1} = \triangle p_{.11} = 0 \Leftrightarrow s_2 = s_3 = 0$) estamos ante (X_1, X_3) independientes y (X_2, X_3) independientes. No tiene sentido ahora plantearse incorporar el efecto adicional de X_3 en (X_1, X_2) respecto al caso independiente ya que éste no existe. Por este motivo diremos que, en este caso, t_3 no está definida y de (8.46) tendremos directamente

$$p_{111} = p_{11.}p_{..1}, \tag{8.69}$$

resultado lógico dada la independencia de X_3 con X_1 y X_2.

En cuanto a la elección de t_i, observar que independientemente de la escogida, la aproximación que resulta para p_{111} es siempre

$$p_{111} = p_{111}^{\min} + t\left(p_{111}^{\max} - p_{111}^{\min}\right) \tag{8.70}$$

Así, es indiferente el parámetro t_i que utilicemos para la aproximación puesto que al estimar el valor de t en $[0,1]$ que lo define, estamos determinando la parte del incremento que un riesgo cualquiera de los tres puede o no incorporar en p_{111} y el intervalo en que se mide esta libertad es único una vez definidas las relaciones dos a dos. Sin embargo, es interesante tener en cuenta las siguientes consideraciones referidas a la elección de este parámetro.

- Si del análisis de las relaciones de dependencia dos a dos, la conclusión es mutua independencia dos a dos ($s_1 = s_2 = s_3 = 0 \Rightarrow \triangle p_{11.} = \triangle\, p_{1.1} = \triangle\, p_{.11} = 0$) ninguno de los parámetros t_i ha quedado definido.

  Observando el intervalo de posibles valores para p_{111} en (8.58), tenemos que la única posibilidad para que resulten (X_1, X_2, X_3) con PCD es la mutua independencia de los tres riesgos, es decir,

  $$p_{111} = p_{1..}p_{.1.}p_{..1} \tag{8.71}$$

  Señalar que si nos limitamos a considerar el intervalo de posibles valores de p_{111} tales que resulta una función de densidad de probabilidad trivariante positiva en todos los puntos, $\left[p_{111}^{(1)\min}, p_{111}^{(1)\max}\right]$, resulta un conjunto de posibles valores para esta probabilidad. Entre éstos se encuentra el que corresponde al caso de mutua independencia entre los tres riesgos, aunque también existen otros posibles valores para esta probabilidad. Así, es posible encontrar tres riesgos que no sean mutuamente independientes pero que lo sean por parejas. En el momento en que añadimos la condición de PCD es cuando este intervalo se reduce a un único punto, correspondiente al caso de mutua independencia para los tres riesgos. Recordemos que habíamos llegado a este mismo resultado en el teorema 5.3 del capítulo quinto.

- Cuando del análisis de las relaciones de dependencia dos a dos, se deduzca que existe independencia en dos de las tres parejas implicadas (dos de los tres parámetros s igual a 0) existe la posibilidad de estimar uno cualquiera de los dos parámetros t_i que quedan definidos. Sin embargo, resulta más realista definir el valor de p_{111} directamente a partir de la expresión en que el parámetro t_i no ha quedado definido, es decir, a partir de (8.63), (8.66) ó (8.69) según corresponda. En cualquier caso el resultado será idéntico. En efecto, supongamos por ejemplo, que del análisis de las relaciones dos a dos han resultado $s_1 = s_2 = 0,\ s_3 > 0$. Éste corresponde al caso en que X_2 es independiente de X_1 y X_3. Como habíamos visto anteriormente, el valor de t_2 no queda definido puesto que no tiene sentido incorporar incrementos que no se han producido. Es claro, que lo más lógico ahora es calcular la probabilidad p_{111} a partir de (8.66), recordemos haciendo

$$p_{111} = p_{1.1}p_{.1.}$$

Sin embargo, observar que también llegamos a este único valor para p_{111} a partir de t_1 y t_3. Si partimos de t_1 tenemos de (8.48):

$$p_{111} = p_{.11}p_{1..} + t_1\left(\Delta p_{11.} + \Delta p_{1.1}\right) = p_{1..}p_{.1.}p_{..1} + t_1\left(\Delta p_{11.} + \Delta p_{1.1}\right),$$

con t_1 cumpliendo (8.61), es decir,

$$t_1 = \frac{p_{1.1}p_{.1.} - p_{.11}p_{1..}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}} = \frac{p_{1.1}p_{.1.} - p_{1..}p_{.1.}p_{..1}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}}.$$

Igualmente llegaríamos al mismo valor de p_{111} a partir de (8.46) con t_3 cumpliendo (8.67).

Estos dos últimos resultados, aunque teóricamente correctos, no tienen demasiado sentido. En estos casos, trataremos al riesgo independiente del conjunto como tal y trabajaremos con la expresión en (8.63), (8.66) ó (8.69) según corresponda.

- Cuando del análisis de las relaciones dos a dos se deduzca mutua comonotonía por parejas $(s_1 = s_2 = s_3 = 1)$, el intervalo de posibles valores para la probabilidad p_{111} queda limitado a un único punto por las condiciones de positividad de la distribución trivariante de estos riesgos. En este caso, el intervalo de posibles valores para cualquier t_i en (8.61), (8.64) y (8.67) nos quedará reducido a un único punto. Es fácil comprobar, que independientemente de la ordenación de las marginales, las cotas en (8.57) determinan que, en este caso particular,

$$p_{111} = p_{111}^{(1)\,\min} = p_{111}^{(1)\,\max} = \min\left\{p_{1..}, p_{.1.}, p_{..1}\right\}. \tag{8.72}$$

Este resultado se obtiene, para cualquier ordenación de $p_{1..}, p_{.1.}$ y $p_{..1}$ sustituyendo las probabilidades bivariantes involucradas por su valor en caso de comonotonía, es decir:

$$p_{11.} = \min\left\{p_{1..}, p_{.1.}\right\},\ p_{1.1} = \min\left\{p_{1..}, p_{..1}\right\}\ \text{y}\ p_{.11} = \min\left\{p_{.1.}, p_{..1}\right\}.$$

Señalar que este valor ya se había obtenido en (5.20) al tratar el caso general de secuencias formadas por m riesgos dicotómicos y mutuamente comonótonos.

Comprobemos que éste es también el único valor resultante de nuestro modelo independientemente de la t_i escogida. En efecto, de (8.46), (8.47) y (8.48) tenemos

$$\begin{aligned} p_{111} &= p_{11.}p_{..1} + t_3\left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}\right) \\ &= p_{1.1}p_{.1.} + t_2\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}\right) \\ &= p_{.11}p_{1...} + t_1\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\right). \end{aligned}$$

con t_1, t_2 y t_3 cumpliendo (8.61), (8.64) y (8.67), cotas de las que como único posible valor para cada uno de estos parámetros resultan

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{\min\left\{p_{1..}, p_{.1.}, p_{..1}\right\} - p_{11.}p_{..1}}{\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}}, \\ t_2 &= \frac{\min\left\{p_{1..}, p_{.1.}, p_{..1}\right\} - p_{1.1}p_{.1.}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}}, \\ t_1 &= \frac{\min\left\{p_{1..}, p_{.1.}, p_{..1}\right\} - p_{.11}p_{1...}}{\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}}. \end{aligned}$$

Así, a partir de cualquiera de ellos obtenemos

$$p_{111} = \min\left\{p_{1..}, p_{.1.}, p_{..1}\right\}.$$

- Existen otros muchos casos particulares en que una vez definidas las relaciones dos a dos queda totalmente definida la relación entre los tres y, por tanto, el valor de p_{111} es único. Cuando esto suceda, encontraremos un único valor para la t_i escogida y con él, llegaremos al valor de p_{111} que allí corresponda.

Sin embargo, afrontar el estudio general de las relaciones de dependencia que existen entre $(X_1, X_2, X_3) \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pasa por elegir un parámetro $\{t_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ y estimar un valor de t en el intervalo $[0,1]$ que lo defina. Se trata, por tanto, de decidir qué parte del incremento que X_i puede o no producir en p_{111} consideramos.

Del análisis de las relaciones dos a dos tenemos totalmente cuantificado el mínimo y máximo efecto que este tercer riesgo puede incorporar. Así, podemos seguir con la idea desarrollada para modelizar la dependencia entre dos riesgos. En lo que se refiere a ese caso, asumiendo que es imposible llegar a conocer exactamente la correlación real en cada pareja, la estimamos en forma de tanto por uno sobre el rango de ésta, $\left[0, \varphi_{X_i^U, X_j^U}\right]$. Paralelamente, proponemos ahora estimar el efecto añadido del tercer riesgo como tanto por uno sobre el rango que para éste haya resultado,

$$\left[t_1^{\min}\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\right), t_1^{\max}\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\right)\right]$$

ó

$$\left[t_2^{\min}\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}\right), t_2^{\max}\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}\right)\right]$$

ó

$$\left[t_3^{\min}\left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}\right), t_3^{\max}\left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}\right)\right]$$

según el riesgo X_i elegido.

Si bien el desarrollo que proponemos es similar al propuesto para medir dependencias bivariantes, somos conscientes de la dificultad que conlleva ahora estimar uno cualquiera de estos parámetros. Teóricamente es posible, al igual que en el caso bivariante, basarse en las frecuencias de siniestralidad conjunta históricas para tratar de dar una estimación más o menos real de este parámetro. Sin embargo, este análisis parece mucho más laborioso que el necesario para llegar a determinar las relaciones dos a dos. Si bien es importante dedicarle el esfuerzo necesario para tratar de aproximarlo lo más exactamente posible, no debemos perder de vista que aquí no perseguimos resultados exactos en cuanto a distribuciones, sino que nos limitamos a intentar incorporar, en la medida de lo posible, el riesgo que añaden en la cartera las dependencias trivariantes de signo positivo. En lo que se refiere a este riesgo, veremos en el siguiente apartado que no se modifica cuando únicamente varía la estimación del parámetro t en $[0,1]$. Este hecho hace que creamos suficientes los datos hasta aquí aportados en cuanto a la estimación de su valor ya que, en última instancia, este valor no modificará la percepción del riesgo que de ese trío tenga el asegurador.

8.2.3 Orden stop-loss en la clase $R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

En este apartado seguimos con el análisis de tres riesgos extraídos de una cartera de seguros de vida y caracterizados por presentar una relación de PCD. Así, al igual que en el apartado anterior, nos centramos en cualesquiera $(X_1, X_2, X_3) \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. En este momento somos capaces de aproximar la distribución trivariante de estos tres riesgos puesto que podemos estimar los valores de s_1, s_2, s_3 y t [1] de los que resultarán las probabilidades $p_{11.}$, $p_{1.1}$, $p_{.11}$ y p_{111}; probabilidades de las que se obtiene directamente la función de densidad trivariante a partir de las expresiones en (8.25) a (8.32). En cuanto a los valores de los parámetros s_i, $i = 1, 2, 3$, recordar que se obtienen estimando la correlación de cada una de las parejas de riesgos con respecto a sus correspondientes comonótonas, mientras que para el parámetro t la estimación depende del efecto que supongamos incorpora el tercer riesgo sobre uno cualquiera de estos grupos de dos. Es obvio que, en cualquier caso, daremos valores aproximados y, si bien sabemos que estos tres riesgos se encuentran, en orden stop-loss, entre la independencia y la comonotonía, nos interesa llegar, además, a relaciones de orden stop-loss dentro de la clase $R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en función del valor asignado a s_1, s_2, s_3 y t. El objetivo perseguido es claro; si no estamos seguros de los coeficientes exactos a asignar (circunstancia que se dará en la realidad), debemos saber qué sucede, en términos de riesgo, cuando los modificamos. Dentro de este apartado demostraremos que para un valor de t fijo, incrementar el valor de s_1 y/o s_2 y/o s_3 supone un mayor riesgo de los tres elementos considerados. Así, el incremento de las correlaciones (covarianzas) dos a dos, lleva a una distribución de la suma para los tres riesgos considerados, superior a la que resulta bajo las hipótesis iniciales. Sin embargo, veremos que el incremento del

[1] t se refiere al valor en el intervalo $[0,1]$ que define a los parámetros t_1, t_2, t_3. Dentro de este apartado asumimos, sin pérdida de generalidad, que estos tres siempre quedan definidos. Observemos que en los únicos casos en que no lo quedan -ver (8.63), (8.66), (8.69) y (8.71)- podríamos asignarle un número cualquiera y obtendríamos igualmente el valor que le corresponde a la probabilidad trivariante.

valor de t no implica un mayor riesgo en el conjunto. Así, de la modificación del parámetro t no se seguirán relaciones de orden stop-loss o, equivalentemente, el asegurador no sabrá decidir, en términos de riesgo, entre dos conjuntos formados por tres riesgos que presenten marginales y distribuciones bivariantes idénticas y que únicamente se diferencien por los valores correspondientes a las probabilidades trivariantes.

Consideremos los elementos $(X_1, X_2, X_3), (X_1', X_2', X_3') \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ para los cuales hemos determinado los valores de $s_i, s_i', \ i = 1, 2, 3, \ t$ y t'. Es importante no perder de vista que lo que estamos considerando son tres únicos riesgos bajo dos hipótesis diferentes de dependencia y que lo que vamos a hacer es tratar de establecer relaciones de orden stop-loss para la distribución de la suma que de estos riesgos resulte en función de la hipótesis considerada. Para este propósito definimos las v.a. suma

$$S = X_1 + X_2 + X_3, \tag{8.73}$$

$$S' = X_1' + X_2' + X_3', \tag{8.74}$$

v.a. que, en este momento, no nos indican la siniestralidad del total de la cartera sino únicamente la que se deriva de estos tres riesgos. Nos referiremos a las probabilidades asociadas a estas v.a. como $p_S(s)$ y $p_{S'}(s)$, siendo aquí

$$p_S(s) = \Pr(S = s) = \Pr(X_1 + X_2 + X_3 = s), \quad s = 0, 1, 2, \cdots$$

y

$$p_{S'}(s) = \Pr(S' = s) = \Pr(X_1' + X_2' + X_3' = s), \quad s = 0, 1, 2, \cdots$$

En primer lugar, queremos tratar el caso en que

$$s_i = s_i', \ i = 1, 2, 3, \ \text{y } t \leq t', \tag{8.75}$$

es decir, estamos considerando dos conjuntos de tres riesgos con idénticas distribuciones marginales y bivariantes.

Por ser $s_i = s_i', \ i = 1, 2, 3$, se cumple $t_i^{\min} = t_i'^{\min}$ y $t_i^{\max} = t_i'^{\max}$. Así, de (8.62) ó (8.65) ó (8.68), según corresponda, $t \leq t'$ implica

$$p_{111} \leq p_{111}'$$

y podemos escribir

$$p_{111}' = p_{111} + \zeta, \ \ \zeta \geq 0. \tag{8.76}$$

La manera más fácil de tratar de demostrar la existencia de orden stop-loss, en caso de que éste exista, es tratar de probar que bajo estas hipótesis las respectivas funciones de distribución acumulativas (desacumulativas) correspondientes a S y S' únicamente cruzan una vez. De esta manera, dada la igualdad entre las esperanzas de ambas v.a., podríamos establecer una relación de orden de peligrosidad entre ellas (ver definición 3.12) y aplicar el resultado del teorema 3.13 para afirmar que aquella a la que le corresponda la función de distribución acumulativa con cola más gruesa es la menos peligrosa en términos de orden stop-loss.

Es fácil demostrar que, independientemente del orden considerado para los capitales asegurados α_i, las respectivas funciones de distribución que resultan para S y S' cruzan más de una vez bajo las hipótesis en (8.75). Así, no podemos utilizar el concepto de orden de peligrosidad para hacer ninguna afirmación/negación sobre la relación de orden stop-loss existente y no nos quedará más remedio que probar el cumplimiento/incumplimiento de esta relación en cada/algún punto para afirmar/negar su existencia.

Al considerar las respectivas primas stop-loss en cada punto, debemos tener en cuenta la ordenación de los capitales asegurados $\alpha_i, \ i = 1, 2, 3$. Para cualquier ordenación de los mismos, probamos seguidamente que bajo las hipótesis en (8.75)

$$S \nleq_{sl} S' \text{ y } S' \nleq_{sl} S,$$

es decir, no existe ningún tipo de relación de orden stop-loss entre estas dos variables.

La relación

$$S \leq_{sl} S'$$

se cumplirá si

$$E\left(S-d\right)_+ \leq E\left(S'-d\right)_+, \quad \forall d \geq 0.$$

Puesto que hemos supuesto que los capitales asegurados son múltiplos enteros de una u.m. cualquiera tenemos que

$$E\left(S-d\right)_+ = E\left(S\right) - d + \sum_{s=0}^{d} \left(d-s\right) \, p_S\left(s\right).$$

Además, estamos considerando igualdad en las marginales de los riesgos incluidos en S y S', por lo que sabemos que $E(S) = E(S')$. Así, $S \leq_{sl} S'$ si

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\, (p_{S'}(s) - p_S(s)) \geq 0, \quad \forall d \geq 0. \tag{8.77}$$

De forma similar, la relación $S \leq_{sl} S'$ quedará probada si

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\, (p_{S'}(s) - p_S(s)) \leq 0, \quad \forall d \geq 0. \tag{8.78}$$

Veamos si se cumple alguna de estas condiciones bajo las hipótesis en (8.75), es decir, con

$$p'_{111} = p_{111} + \zeta, \;\; \zeta \geq 0$$

tal y como se ha definido en (8.76), siendo las marginales y bivariantes idénticas para los riesgos de ambos conjuntos.

Supongamos, por ejemplo, que la ordenación de los capitales asegurados es tal que $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2$. En este caso, para un nivel de retención d, cumpliendo $0 < d < \alpha_1$, tenemos

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\, (p_{S'}(s) - p_S(s)) = d\,(p'_{000} - p_{000}) \underset{\text{ver (8.32)}}{=} -d\,\zeta \leq 0.$$

mientras que si consideramos un nivel de retención en $\alpha_1 + \alpha_2 \leq d < \alpha_1 + \alpha_3$, resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{d} (d-s)\, (p_{S'}(s) - p_S(s)) \;\; &= \;\; d\,(p'_{000} - p_{000}) + (d-\alpha_1)\,(p'_{100} - p_{100}) \\
&\quad\; + (d-\alpha_2)\,(p'_{010} - p_{010}) + (d-\alpha_3) \\
&\quad\; (p'_{001} - p_{001}) + (d-\alpha_1-\alpha_2)\,(p'_{110} - p_{110}) \\
&= \;\; \{\text{ver (8.32),(8.29),(8.30),(8.31),(8.26)}\} \\
&= \;\; -d\xi + (d-\alpha_1)\,\zeta + (d-\alpha_2)\,\zeta + (d-\alpha_3)\,\zeta \\
&\quad\; + (d-\alpha_1-\alpha_2)\,(-\zeta) = (d-\alpha_3)\,\zeta \geq 0.
\end{aligned}$$

Así, $S \nleq_{sl} S'$, $S' \nleq_{sl} S$ y el coeficiente t no dice nada acerca del orden stop-loss, conclusión que reduce, en cierta medida, la importancia de su aproximación exacta. Obviamente, ésta debe adaptarse en la medida de lo posible a la realidad, puesto que de otro modo estaríamos falseando la distribución trivariante de los riesgos. No obstante, también es cierto que cuando variamos el valor de este parámetro llegamos a una nueva distribución que no sabemos decidir si preferimos, en términos de riesgo, sobre la obtenida antes de la variación.

Dado que el parámetro t no aporta nada en términos de ordenación stop-loss, tiene sentido plantearse lo que sucede cuando

$$s_i \leq s_i',\ i = 1, 2, 3 \text{ y } t = t', \tag{8.79}$$

es decir, cuando las diferencias en las distribuciones trivariantes se deben a diferencias en las correspondientes bivariantes. En particular, asumimos que las tres covarianzas (correlaciones) que pueden encontrarse referidas a los riesgos en (X_1, X_2, X_3) son menores que las correspondientes a los riesgos en (X_1', X_2', X_3') . Bajo esta hipótesis demostraremos que

$$S \leq_{sl} S'. \tag{8.80}$$

Dada la igualdad en las esperanzas de ambas v.a., lo más sencillo sería demostrar este resultado a partir del orden de peligrosidad, es decir, probando que las funciones de distribución acumulativas de estas variables únicamente cruzan una vez y la correspondiente a S acaba por encima de la resultante para S' (ver definición 3.12 y teorema 3.13). Desafortunadamente, en muchos casos, esta afirmación no resulta cierta. Así, deberemos afrontar la demostración de la relación de orden stop-loss en (8.80) a partir de la definición de este orden. Como hemos visto, ésta se cumple si podemos probar (8.77) para cualquier nivel de retención $d \geq 0$, bajo cualquier posible ordenación de los capitales asegurados α_i. Sin pérdida de generalidad, podemos reordenar los riesgos en el conjunto de manera que

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3.$$

Así, resultan ocho posibilidades para la ordenación de los capitales asegurados. Éstas son,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &< \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2, && (8.81)\\
\alpha_1 &< \alpha_2 < \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, && (8.82)\\
\alpha_1 &< \alpha_2 = \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2, && (8.83)\\
\alpha_1 &= \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2, && (8.84)\\
\alpha_1 &= \alpha_2 < \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, && (8.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2, & (8.86)\\ \alpha_1 &< \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3, & (8.87)\\ \alpha_1 &= \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3 & (8.88) \end{aligned}$$

Señalar, sin embargo, que una vez probado el cumplimiento de la relación en (8.77) para las ordenaciones en (8.81) y (8.87), las cinco posibilidades restantes quedan demostradas por simetría. Así, nos podemos limitar a estos dos casos. En ambos, utilizaremos las probabilidades trivariantes tal y como se han definido en (8.25) a (8.32).

CASO (8.81): $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2$

En este caso particular queremos demostrar que bajo las hipótesis en (8.79) se cumple la relación de orden stop-loss en (8.77). Para probar este resultado podemos, en primer lugar, considerar el caso en que

$$s_1 \leq s_1',\ s_2 = s_2',\ s_3 = s_3' \text{ y } t = t' \tag{8.89}$$

es decir, la única diferencia entre los conjuntos (X_1, X_2, X_3) y (X_1', X_2', X_3') está en el valor del coeficiente de correlación (covarianza) asumido para la pareja (X_1, X_2).

Para este caso, de (8.19) y (8.22) tenemos

$$p_{11.} = p_{1..}p_{.1.} + \triangle p_{11.},$$

siendo

$$\triangle p_{11.} = s_1 \left(\min\left\{p_{1..}, p_{.1.}\right\} - p_{1..}p_{.1.}\right).$$

Al ser este incremento creciente en s_1, la hipótesis $s_1 \leq s_1'$, implica

$$p_{11.}' = p_{11.} + \varepsilon,\ \varepsilon \geq 0,$$

siendo las probabilidades bivariantes referidas a las otras dos parejas de riesgos idénticas, por la igualdad en sus respectivas correlaciones (covarianzas).
De (8.70), sabemos que, independientemente de la t_i elegida para estimar,

$$p_{111} = p_{111}^{\min} + t\left(p_{111}^{\max} - p_{111}^{\min}\right) = t\, p_{111}^{\max} + (1-t)\, p_{111}^{\min},\ 0 \leq t \leq 1$$

siendo $p_{111}^{\min}$ y $p_{111}^{\max}$ las definidas en (8.59) y (8.60), es decir,

$$\begin{aligned} p_{111}^{\min} &= \max\left\{p_{111}^{(1)\min}, p_{111}^{(2)\min}\right\} = \max\left\{p_{11.} + p_{1.1} - p_{1..},\ p_{11.} + p_{.11} - p_{.1.},\right.\\ &\quad \left. p_{1.1} + p_{.11} - p_{..1}, p_{11.}p_{..1}, p_{1.1}p_{.1.}, p_{.11}p_{1..}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{111}^{\max} &= \min\left\{p_{111}^{(1)\max}, p_{111}^{(2)\max}\right\} = \min\left\{p_{11.}, p_{1.1}, p_{.11}, 1 + p_{11.} + p_{1.1} + p_{.11}\right. \\ &\quad - p_{1..} - p_{.1.} - p_{..1}, p_{11.}p_{..1} + \triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}, p_{1.1}p_{.1.} + \triangle p_{11.} \\ &\quad \left. + \triangle p_{.11}, p_{.11}p_{1..} + \triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\right\}. \end{aligned}$$

Así, si $t' = t$, se cumple

$$p'_{111} = p_{111} + \zeta_1, \text{ con } 0 \leq \zeta_1 \leq \varepsilon.$$

Estamos ya en condiciones de demostrar que, bajo estas hipótesis, la relación en (8.77) se cumple para todo $d \geq 0$.

Para $d = 0$, el cumplimiento de (8.77) es trivial.

Cuando $0 < d < \alpha_1$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d - s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) = d\,(p'_{000} - p_{000}) = d\,(\varepsilon - \zeta_1) \geq 0.$$

Si $\alpha_1 \leq d < \alpha_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d - s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= d\,(p'_{000} - p_{000}) + (d - \alpha_1)\,(p'_{100} - p_{100}) \\ = d\,(\varepsilon - \zeta_1) + (d - \alpha_1)\,(\zeta_1 - \varepsilon) &= -\alpha_1\,(\zeta_1 - \varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_2 \leq d < \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d - s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= -\alpha_1\,(\zeta_1 - \varepsilon) + (d - \alpha_2)\,(p'_{010} - p_{010}) \\ &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)\,(\zeta_1 - \varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d - s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)\,(\zeta_1 - \varepsilon) + (d - \alpha_3)\,(p'_{001} - p_{001}) \\ &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)\,(\zeta_1 - \varepsilon) + (d - \alpha_3)\,\zeta_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq d < \alpha_1 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d - s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)\,(\zeta_1 - \varepsilon) + (d - \alpha_3)\,\zeta_1 \\ + (d - \alpha_1 - \alpha_2)\,(\varepsilon - \zeta_1) &= (d - \alpha_3)\,\zeta_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_3 \leq d < \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\,(p_{S'}(s) - p_S(s)) = (d-\alpha_3)\,\zeta_1 + (d-\alpha_1+\alpha_3)\,(-\zeta_1) = \alpha_1\zeta_1 \geq 0$$

Si $\alpha_2 + \alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\,(p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1\zeta_1 + (d-\alpha_2+\alpha_3)\,(-\zeta_1) \\ &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-d)\,\zeta_1 \geq 0.\end{aligned}$$

Por último, para $d \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\,(p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-d)\,\zeta_1 \\ +\,(d-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,\zeta_1 &= 0.\end{aligned}$$

Consideremos ahora el caso en que

$$s_2 \leq s_2',\ s_1 = s_1',\ s_3 = s_3' \text{ y } t = t'. \tag{8.90}$$

Haciendo un análisis similar al anterior, llegamos a que esta hipótesis implica:

$$\begin{aligned}p'_{.11} &= p_{.11} + \delta,\ \delta \geq 0, \\ p'_{11.} &= p_{11.}\,,\quad p'_{1.1} = p_{1.1}, \\ p'_{111} &= p_{111} + \zeta_2,\ \text{con } 0 \leq \zeta_2 \leq \delta.\end{aligned}$$

Para $d = 0$, el cumplimiento de (8.77) es trivial.

Cuando $0 < d < \alpha_1$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\,(p_{S'}(s) - p_S(s)) = d\,(p'_{000} - p_{000}) = d\,(\delta - \zeta_2) \geq 0.$$

Si $\alpha_1 \leq d < \alpha_2$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\,(p_{S'}(s) - p_S(s)) &= d\,(p'_{000} - p_{000}) + (d-\alpha_1)\,(p'_{100} - p_{100}) \\ &= d\,(\delta - \zeta_2) + (d-\alpha_1)\,\zeta_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_2 \leq d < \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d}(d-s)\ (p_{S'}(s)-p_S(s)) &= d(\delta-\zeta_2)+(d-\alpha_1)\zeta_2\\ +(d-\alpha_2)(-\delta+\zeta_2) &= (d-\alpha_1)\zeta_2+(-\alpha_2)(\zeta_2-\delta)\geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_3 \leq d < \alpha_1+\alpha_2$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d}(d-s)\ (p_{S'}(s)-p_S(s)) &= (d-\alpha_1)\zeta_2+(-\alpha_2)(\zeta_2-\delta)\\ +(d-\alpha_3)(\zeta_2-\delta) &= (d-\alpha_1)\zeta_2+(d-\alpha_2-\alpha_3)(\zeta_2-\delta)\geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_1+\alpha_2 \leq d < \alpha_1+\alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d}(d-s)\ (p_{S'}(s)-p_S(s)) &= (d-\alpha_1)\zeta_2+(d-\alpha_2-\alpha_3)(\zeta_2-\delta)(d-\alpha_1)\zeta_2\\ +(d-\alpha_1-\alpha_2)(\zeta_2-\delta) &= (d-\alpha_3)\zeta_2+(d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta)\geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_1+\alpha_3 \leq d < \alpha_2+\alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d}(d-s)\ (p_{S'}(s)-p_S(s)) &= (d-\alpha_3)\zeta_2+(d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta)\\ +(d-\alpha_1-\alpha_3)(-\zeta_2) &= \alpha_1\zeta_2+(d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta)\geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_2+\alpha_3 \leq d < \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d}(d-s)\ (p_{S'}(s)-p_S(s)) &= \alpha_1\zeta_2+(d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta)\\ +(d-\alpha_2+\alpha_3)(\delta-\zeta_2) &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-d)\zeta_2\geq 0\end{aligned}$$

Por último, para $d \geq \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d}(d-s)\ (p_{S'}(s)-p_S(s)) &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-d)\zeta_2\\ +(d-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\zeta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que

$$s_3 \leq s_3',\ s_1 = s_1',\ s_2 = s_2' \text{ y } t = t', \tag{8.91}$$

Haciendo un análisis similar al de los dos casos anteriores, llegamos a que esta hipótesis implica:

$$\begin{aligned}
p'_{1.1} &= p_{1.1} + \gamma,\ \gamma \geq 0, \\
p'_{11.} &= p_{11.}\,,\quad p'_{.11} = p_{.11}, \\
p'_{111} &= p_{111} + \zeta_3,\ \text{con } 0 \leq \zeta_3 \leq \gamma,
\end{aligned}$$

probabilidades de las que una vez más resultará el cumplimiento de (8.77) para todo $d \geq 0$.

Para $d = 0$, el cumplimiento de (8.77) es trivial.

Cuando $0 < d < \alpha_1$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) = d\,(p'_{000} - p_{000}) = d\,(\gamma - \zeta_3) \geq 0.$$

Si $\alpha_1 \leq d < \alpha_2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= d\,(p'_{000} - p_{000}) + (d-\alpha_1)\,(p'_{100} - p_{100}) \\
&= d\,(\gamma - \zeta_3) + (d-\alpha_1)\,(\zeta_3 - \gamma) \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_2 \leq d < \alpha_3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (\gamma - \zeta_3) + (d-\alpha_1)\,(\zeta_3 - \gamma) \\
+\,(d-\alpha_2)\,(\zeta_3) &= \alpha_1\,(\gamma - \zeta_3) + (d-\alpha_2)\,(\zeta_3) \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1\,(\gamma - \zeta_3) + (d-\alpha_2)\,(\zeta_3) + (d-\alpha_3)\,(\zeta_3 - \gamma) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_3 - d)\,(\gamma - \zeta_3) + (d-\alpha_2)\,\zeta_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq d < \alpha_1 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (\alpha_1 + \alpha_3 - d)\,(\gamma - \zeta_3) + (d-\alpha_2)\,\zeta_3 \\
+\,(d-\alpha_1-\alpha_2)\,(-\zeta_3) &= (\alpha_1 + \alpha_3 - d)\,(\gamma - \zeta_3) + \alpha_1\zeta_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_3 \leq d < \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\left(p_{S'}(s) - p_S(s)\right) &= (\alpha_1 + \alpha_3 - d)(\gamma - \zeta_3) \\ +\alpha_1\zeta_3 + (d - \alpha_1 - \alpha_3)(\gamma - \zeta_3) &= \alpha_1\zeta_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_2 + \alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\left(p_{S'}(s) - p_S(s)\right) &= \alpha_1\zeta_3 + (d - \alpha_2 + \alpha_3)(-\zeta_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\,\zeta_3 \geq 0\end{aligned}$$

Por último, para $d \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\left(p_{S'}(s) - p_S(s)\right) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\,\zeta_3 \\ +(d - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\,\zeta_3 &= 0.\end{aligned}$$

Combinando los resultados obtenidos bajo las hipótesis en (8.89), (8.90) y (8.91) concluimos que para esta ordenación de los capitales asegurados

$$S \leq_{sl} S'.$$

CASO (8.87): $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$

Para esta ordenación de los capitales asegurados, probaremos nuevamente que bajo las hipótesis en (8.79) se cumple la relación de orden stop-loss en (8.77). La demostración será similar a la que acabamos de realizar para la ordenación en (8.81).

Nuevamente, empezamos considerando únicamente las relaciones en (8.89), es decir,

$$s_1 \leq s_1',\ s_2 = s_2',\ s_3 = s_3' \text{ y } t = t'.$$

Como hemos visto, bajo estas hipótesis se cumple

$$\begin{aligned}p'_{11.} &= p_{11.} + \varepsilon,\ \varepsilon \geq 0, \\ p'_{1.1} &= p_{1.1}\,,\quad p'_{.11} = p_{.11}, \\ p'_{111} &= p_{111} + \zeta_1,\ \text{con } 0 \leq \zeta_1 \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

relaciones que permiten en este caso también probar el cumplimiento de (8.77) para todo $d \geq 0$.

Para $0 \leq d < \alpha_2$ sabemos de los resultados obtenidos para la ordenación en (8.81) que

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) \geq 0.$$

Cuando $\alpha_2 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2$, resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= -\alpha_1 (\zeta_1 - \varepsilon) + (d - \alpha_2)(p'_{010} - p_{010}) \\ &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)(\zeta_1 - \varepsilon) \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq d < \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)(\zeta_1 - \varepsilon) \\ + (d - \alpha_1 - \alpha_2)(p'_{110} - p_{110}) &= (d - \alpha_1 - \alpha_2)(\zeta_1 - \varepsilon) \\ + (d - \alpha_1 - \alpha_2)(\varepsilon - \zeta_1) &= 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_3$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) = (d - \alpha_3)\zeta_1 \geq 0.$$

Si $\alpha_1 + \alpha_3 \leq d < \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) = (d - \alpha_3)\zeta_1 + (d - \alpha_1 + \alpha_3)(-\zeta_1) = \alpha_1\zeta_1 \geq 0$$

Si $\alpha_2 + \alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1\zeta_1 + (d - \alpha_2 + \alpha_3)(-\zeta_1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\zeta_1 \geq 0.\end{aligned}$$

Por último, para $d \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\zeta_1 + (d - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\zeta_1 = 0.$$

Si consideramos ahora las relaciones en (8.90),

$$s_2 \leq s_2',\ s_1 = s_1',\ s_3 = s_3' \text{ y } t = t'.$$

tenemos

$$\begin{aligned} p'_{.11} &= p_{.11} + \delta,\ \delta \geq 0, \\ p'_{11.} &= p_{11.}, \quad p'_{1.1} = p_{1.1}, \\ p'_{111} &= p_{111} + \zeta_2,\ \text{con } 0 \leq \zeta_2 \leq \delta, \end{aligned}$$

probabilidades de las que se seguirá el cumplimiento de (8.77) para todo $d \geq 0$.

De los resultados obtenidos para la ordenación de los capitales asegurados en (8.81), tenemos que esta relación está probada cuando $0 \leq d < \alpha_2$.

Cuando $\alpha_2 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2$, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= d(\delta - \zeta_2) + (d-\alpha_1)\zeta_2 + (d-\alpha_2)(-\delta + \zeta_2) \\ &= (d-\alpha_1)\zeta_2 + (-\alpha_2)(\zeta_2 - \delta) \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq d < \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (d-\alpha_1)\zeta_2 + (-\alpha_2)(\zeta_2 - \delta) \\ +(d-\alpha_1-\alpha_2)(-\zeta_2) &= \alpha_2\delta \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_2\delta + (d-\alpha_3)(\zeta_2 - \delta) \\ &= (d-\alpha_3)\zeta_2 + (d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta) \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_3 \leq d < \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (d-\alpha_3)\zeta_2 + (d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta) \\ +(d-\alpha_1-\alpha_3)(-\zeta_2) &= \alpha_1\zeta_2 + (d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta) \geq 0. \end{aligned}$$

Si $\alpha_2 + \alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1\zeta_2 + (d-\alpha_2-\alpha_3)(-\delta) \\ +(d-\alpha_2+\alpha_3)(\delta - \zeta_2) &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-d)\zeta_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por último, para $d \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\,\zeta_2 \\ +\,(d - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\,\zeta_2 &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente, consideraremos

$$s_3 \leq s_3',\ s_1 = s_1',\ s_2 = s_2' \text{ y } t = t'.$$

En este caso, tenemos

$$\begin{aligned}p'_{1.1} &= p_{1.1} + \gamma,\ \gamma \geq 0, \\ p'_{11.} &= p_{11.}\,,\quad p'_{.11} = p_{.11}, \\ p'_{111} &= p_{111} + \zeta_3,\ \text{con } 0 \leq \zeta_3 \leq \gamma,\end{aligned}$$

relaciones para las que se cumplirá nuevamente (8.77) para todo $d \geq 0$.

De los resultados obtenidos para la ordenación de los capitales asegurados en (8.81), tenemos que esta relación está probada cuando $0 \leq d < \alpha_2$.

Cuando $\alpha_2 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2$, resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (\gamma - \zeta_3) + (d - \alpha_1)\,(\zeta_3 - \gamma) \\ +\,(d - \alpha_2)\,(\zeta_3) &= \alpha_1\,(\gamma - \zeta_3) + (d - \alpha_2)\,(\zeta_3) \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 \leq d < \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1\,(\gamma - \zeta_3) + (d - \alpha_2)\,(\zeta_3) \\ +\,(d - \alpha_1 - \alpha_2)\,(-\zeta_3) &= \alpha_1 \gamma \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1 \gamma + (d - \alpha_3)\,(\zeta_3 - \gamma) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3 - d)\,\gamma + (d - \alpha_3)\,\zeta_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_3 \leq d < \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= (\alpha_1 + \alpha_3 - d)\,\gamma + (d - \alpha_3)\,\zeta_3 \\ + (d - \alpha_1 - \alpha_3)(\gamma - \zeta_3) &= \alpha_1 \zeta_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha_2 + \alpha_3 \leq d < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) &= \alpha_1 \zeta_3 + (d - \alpha_2 + \alpha_3)(-\zeta_3) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\,\zeta_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Por último, para $d \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$:

$$\sum_{s=0}^{d} (d-s)\ (p_{S'}(s) - p_S(s)) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - d)\,\zeta_3 + (d - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\,\zeta_3 = 0.$$

Combinando los resultados obtenidos en cada caso, llegamos a establecer la relación

$$S \leq_{sl} S'.$$

también para esta ordenación de los capitales asegurados.

Una vez probada la relación de orden stop-loss para estas dos ordenaciones queda probada también para las cinco restantes en (8.81) a (8.88). Así, cuando

$$s_i \leq s_i',\ i = 1, 2, 3 \text{ y } t = t',$$

se cumple

$$S \leq_{sl} S'.$$

De este resultado se sigue el importante papel que juegan las correlaciones (covarianzas) cuando se trata de analizar el efecto que tienen las dependencias de signo positivo sobre la siniestralidad que se deriva de un conjunto de tres riesgos con una estructura de PCD.

Los resultados hasta ahora encontrados nos permitirán modelizar diferentes hipótesis de dependencia para cada uno de los tríos de la cartera. Recordemos que nos centramos únicamente en modelizar aquellas dependencias que implican un riesgo mayor que en el caso independiente, es decir, en cada uno de los conjuntos supondremos que hemos podido probar una relación de PCD, $(X_{3t-2}, X_{3t-1}, X_{3t}) \in R_{3,+}(p_{3t-2}, p_{3t-1}, p_{3t}; \alpha_{3t-2}, \alpha_{3t-1}, \alpha_{3t})$, $t = 1, \cdots, k$; $k \leq n/3$. Acabamos de ver que fijado el valor de t en $R_{3,+}(p_{3t-2}, p_{3t-1}, p_{3t}; \alpha_{3t-2}, \alpha_{3t-1}, \alpha_{3t})$, aquellos conjuntos con mayores correlaciones son los más peligrosos. Así deberemos tratar de estimar los valores de las respectivas covarianzas (correlaciones) con la mayor precisión posible. En cualquier caso, parece una estrategia prudente, tratar de sobrevalorarlas en una pequeña cuantía cuando no estemos seguros del valor a asignarles.

Combinando estos resultados con los obtenidos en el capítulo anterior, estamos ya en condiciones de tratar dependencias bivariantes y trivariantes de signo positivo en una cartera de seguros de vida. Éste será nuestro objetivo en el siguiente apartado.

8.3 Aplicaciones

Dentro de este apartado queremos ampliar las hipótesis de dependencia positiva asumidas en el apartado 7.3.2 del capítulo anterior para la cartera de seguros de vida de Gerber.

	Capital asegurado				
Prob. siniestro	1	2	3	4	5
0.03	2	3	1	2	-
0.04	-	1	2	2	1
0.05	-	2	4	2	2
0.06	-	2	2	2	1

Recordemos que en el capítulo anterior identificamos como dependientes a los riesgos en las parejas

$$(X_1, X_2), (X_6, X_{25}), (X_7, X_{21}), (X_9, X_{17}), (X_{13}, X_{29}) \text{ y } (X_{30}, X_{31}), \quad (8.92)$$

siendo las diferentes parejas independientes entre si.

Supongamos ahora que de un análisis más detallado de las relaciones de dependencia hemos encontrado que la pareja (X_9, X_{17}) no es independiente con el riesgo X_3. Éste podría ser el caso de un matrimonio, (X_9, X_{17}), y su hijo, X_3. En caso de que así fuera, debe extrañar la pequeña diferencia entre la probabilidad de muerte de los padres y la del hijo. Recordemos que estamos trabajando con una cartera teórica con muy pocos datos con la única intención de ejemplificar de manera sencilla la metodología propuesta. Creemos que aunque irreal aquí, resulta interesante tratar este caso ya que fácilmente podrá encontrarse en una cartera real donde, con toda seguridad, los datos se ajustarán más a las hipótesis establecidas.

Supongamos, además, que la pareja (X_{30}, X_{31}) que, recordemos, habíamos identificado como un duplicado, ha resultado ser también dependiente con X_{23}. Este tipo de relación de dependencia puede darse, por ejemplo, en seguros de vida ligados a tarjetas de crédito. Es frecuente en el momento de contratar una tarjeta de crédito con una entidad bancaria que el titular obtenga, de forma gratuita, un seguro de vida. Si todas las pólizas de una entidad van a parar a una misma cartera, es posible encontrar en esa cartera tres seguros de vida de un matrimonio en el que uno de los cónyuges posea dos tarjetas, duplicado (X_{30}, X_{31}), y el otro una, X_{23}.

Supongamos que para los riesgos en (X_3, X_9, X_{17}) y (X_{23}, X_{30}, X_{31}) hemos podido probar una relación de PCD.

De los resultados del capítulo anterior y de (8.3) sabemos que, en términos de riesgo, la distribución coste total de nuestra cartera se encuentra entre la que resulte realizando la hipótesis de independencia para todos los riesgos de la cartera y la que se obtenga bajo la hipótesis de comonotonía entre los riesgos de cada uno de los conjuntos dependientes. Observemos, sin embargo, que tras el análisis realizado en el capítulo anterior podemos acotar un poco más el riesgo de nuestra cartera. Entonces llegamos a la conclusión que tras incrementar en un 10% las hipótesis iniciales referidas al grado de dependencia en cada una de las parejas, recordemos asumiendo el conjunto de hipótesis B,

$$\begin{array}{ll} \varphi_{X_1,X_2} = \varphi_{X_1^U,X_2^U} = 1 & \varphi_{X_6,X_{25}} = 0.55\,\varphi_{X_6^U,X_{25}^U} \\ \varphi_{X_7,X_{21}} = 0.165\,\varphi_{X_7^U,X_{21}^U} & \varphi_{X_9,X_{17}} = 0.275\,\varphi_{X_9^U,X_{17}^U} \\ \varphi_{X_{13},X_{29}} = 0.66\,\varphi_{X_{13}^U,X_{29}^U} & \varphi_{X_{30},X_{31}} = \varphi_{X_{30}^U,X_{31}^U} = 1 \end{array} \tag{8.93}$$

resultaba una v.a. coste total para la cartera que, en ningún caso, infravaloraba el riesgo real. Esta v.a. es la que llamamos $S_{(2)}^B$. Su distribución de probabilidad y sus respectivas primas stop-loss asociadas son las dadas en (7.21) y (7.22), ver pág. 213.

Si entonces consideramos suficiente el grado de dependencia asumido para estas parejas no existe motivo ahora para modificarlo. Así, podemos seguir con las hipótesis en (8.93), y, únicamente, deberemos analizar cómo afecta el hecho de que se haya introducido un tercer riesgo en las parejas (X_9, X_{17}) y (X_{30}, X_{31}) y éstas se hayan convertido ahora en los conjuntos (X_3, X_9, X_{17}) y (X_{23}, X_{30}, X_{31}), conjuntos para los que suponemos hemos podido probar una relación de PCD.

De la definición de PCD se sigue que X_3 y $X_9 + X_{17}$ presentan una relación de PQD. Así, podemos aplicar el resultado del teorema 4.19 y afirmar que

$$X_3^{\perp} + (X_9 + X_{17})^{\perp} \leq_{sl} X_3 + X_9 + X_{17} \leq_{sl} X_3^{U} + (X_9 + X_{17})^{U} \tag{8.94}$$

donde $X_3^{\perp}, (X_9 + X_{17})^{\perp}$ y $X_3^{U}, (X_9 + X_{17})^{U}$, indica que X_3 es, respectivamente, independiente y comonótono, con el riesgo $X_9 + X_{17}$.

Igualmente, X_{23} y $X_{30} + X_{31}$ presentan PQD y nuevamente se cumplirá

$$X_{23}^{\perp} + (X_{30} + X_{31})^{\perp} \leq_{sl} X_{23} + X_{30} + X_{31} \leq_{sl} X_{23}^{U} + (X_{30} + X_{31})^{U}, \tag{8.95}$$

indicando ahora $X_{23}^{\perp}, (X_{30} + X_{31})^{\perp}$ y $X_{23}^{U}, (X_{30} + X_{31})^{U}$ que X_{23} es, respectivamente, independiente y comonótono, con el riesgo $X_{30} + X_{31}$.

Siguiendo con la nomenclatura utilizada en el capítulo anterior, simbolizaremos por $S_{(1,2)}^{\star,B}$ a la distribución del coste total de la cartera. Añadimos ahora un 1 al subíndice de esta v.a. para indicar que existe un riesgo adicional en algunas de las parejas en (8.92). En el superíndice encontramos las hipótesis de dependencia asumidas en cada uno de los conjuntos dependientes. Éste nos indica que para los dos riesgos en cada una de las parejas de (8.92) seguimos asumiendo las hipótesis B, hipótesis en (8.93), mientras que el símbolo $\star$ representa el conjunto de hipótesis realizadas en cada uno de los tríos sobre la relación de dependencia del riesgo que ha entrado con cada uno de los otros dos.

Observemos que la única diferencia entre las diferentes v.a. $S_{(1,2)}^{\star,B}$ que podamos encontrar para la cartera, viene por el conjunto de hipótesis en $\star$, hipótesis referidas a la relación de dependencia de X_3 con (X_9, X_{17}) y X_{23} con (X_{30}, X_{31}). Dado que hemos asumido independencia entre los conjuntos (X_3, X_9, X_{17}) y (X_{23}, X_{30}, X_{31}), podemos aplicar el resultado del teorema 3.11 (resultado que, recordemos, nos garantiza el mantenimiento de la relación de orden stop-loss bajo la convolución de riesgos independientes) a las relaciones en (8.94) y (8.95) para afirmar que

$$S_{(1,2)}^{\perp,B} \leq_{sl} S_{(1,2)}^{\star,B} \leq_{sl} S_{(1,2)}^{U,B}, \tag{8.96}$$

siendo $\star$ una hipótesis cualquiera que garantiza PCD en los dos tríos.

Es interesante deducir estas dos distribuciones extremas ya que, a partir de ellas, sabremos en qué grado pueden llegar a afectar las dependencias trivariantes sobre el riesgo total de la cartera y podremos decidir si merece la pena tenerlas en cuenta.

Lógicamente

$$S_{(1,2)}^{\perp,B} = S_{(2)}^{B},$$

puesto que en $S_{(2)}^{B}$ la hipótesis considerada para los riesgos X_9 y X_{23} es la de independencia.

Así, bajo las hipótesis ahora definidas, la v.a. $S_{(2)}^{B}$, v.a. cuya distribución tenemos en (7.21), acota por debajo el riesgo de la cartera. En consecuencia, sus primas stop-loss asociadas, son las menores que pueden encontrarse. Éstas son las dadas en (7.22).

Para llegar a la distribución de la v.a. con más riesgo, $S_{(1,2)}^{U,B}$, necesitaremos obtener antes las distribuciones de probabilidad de $X_3^U + (X_9 + X_{17})^U$ y $X_{23}^U + (X_{30} + X_{31})^U$. Llegaremos a estas distribuciones a partir de las distribuciones bivariantes de $\left(X_3^U, (X_9 + X_{17})^U\right)$ y $\left(X_{23}^U, (X_{30} + X_{31})^U\right)$. Éstas no presentan ningún problema en su obtención, puesto que, como sabemos, bajo la hipótesis de comonotonía se cumple

$$F_{X_i^U, X_j^U}(x, y) = \min \left\{ F_{X_i}(x), F_{X_j}(y) \right\}, \ \forall x, y \geq 0,$$

siendo F_{X_i}, F_{X_j} las respectivas funciones de distribución acumulativas.

Las respectivas funciones de densidad de probabilidad de $X_{30} + X_{31}$ y $X_9 + X_{17}$ son las halladas en las pág. 205 y 212. A partir de éstas es inmediato obtener sus correspondientes funciones de distribución acumulativas,

s	$\Pr(X_9 + X_{17} \leq s)$
0	0.92245
2	0.95
3	0.98755
5	1

s	$\Pr(X_{30} + X_{31} \leq s)$
0	0.94
9	1

Las funciones de distribución acumulativas de los riesgos X_3 y X_{23} son:

s	$\Pr(X_3 \leq s)$
0	0.97
2	1

s	$\Pr(X_{23} \leq s)$
0	0.95
5	1

Así, la función de distribución acumulativa de $\left(X_3^U, (X_9 + X_{17})^U\right)$ es

	$\Pr\left(X_3^U \leq x, (X_9 + X_{17})^U \leq y\right)$
$0 \leq x < 2,\ 0 \leq y < 2$	$\min\{0.97, 0.92245\} = 0.92245$
$x \geq 2,\ 0 \leq y < 2$	$\min\{1, 0.92245\} = 0.92245$
$0 \leq x < 2,\ 2 \leq y < 3$	$\min\{0.97, 0.95\} = 0.95$
$x \geq 2,\ 2 \leq y < 3$	$\min\{1, 0.95\} = 0.95$
$0 \leq x < 2,\ 3 \leq y < 5$	$\min\{0.97, 0.98755\} = 0.97$
$0 \leq x < 2,\ y \geq 5$	$\min\{0.97, 1\} = 0.97$
$x \geq 2,\ 3 \leq y < 5$	$\min\{1, 0.98755\} = 0.98755$
$x \geq 2,\ y \geq 5$	1

Desacumulando esta función de distribución, llegamos a la función de densidad de probabilidad para estos riesgos,

(x, y)	$\Pr\left(X_3^U = x, (X_9 + X_{17})^U = y\right)$
$(0, 0)$	0.92245
$(2, 0)$	0
$(0, 2)$	0.02755
$(2, 2)$	0
$(0, 3)$	0.02
$(0, 5)$	0
$(2, 3)$	0.01755
$(2, 5)$	0.01245

(8.97)

Igualmente, la función de distribución acumulativa de $\left(X_{23}^U, (X_{30} + X_{31})^U\right)$ es

	$\Pr\left(X_{23}^U \leq x, (X_{30} + X_{31})^U \leq y\right)$
$0 \leq x < 5,\ 0 \leq y < 9$	$\min\{0.95, 0.94\} = 0.94$
$x \geq 5,\ 0 \leq y < 9$	$\min\{1, 0.94\} = 0.94$
$0 \leq x < 5,\ y \geq 9$	$\min\{0.95, 1\} = 0.95$
$x \geq 5,\ y \geq 9$	1

función, que desacumulada da lugar a la función de densidad de probabilidad

(x,y)	$\Pr\left(X_{23}^U = x, (X_{30}+X_{31})^U = y\right)$
$(0,0)$	0.94
$(5,0)$	0
$(0,9)$	0.01
$(5,9)$	0.05

(8.98)

A partir de (8.97) y (8.98) es inmediato llegar a la distribución de probabilidad de $X_3^U + (X_9 + X_{17})^U$ y $X_{23}^U + (X_{30} + X_{31})^U$. Éstas son:

s	$\Pr\left(X_3^U + (X_9+X_{17})^U = s\right)$
0	0.92245
2	0.02755
3	0.02
5	0.01755
7	0.01245

s	$\Pr\left(X_{23}^U + (X_{30}+X_{31})^U = s\right)$
0	0.94
9	0.01
14	0.05

Ya estamos en condiciones de llegar a la distribución de probabilidad de $S_{(1,2)}^{U,B}$. Ésta se obtiene de convolucionar las dos distribuciones de suma que acabamos de obtener, con las que habían resultado para $X_1+X_2, X_6+X_{25},\ X_7+X_{21}, X_{13}+X_{29}$ bajo las hipótesis en B, ver pág. 205 y 212, y la que resulta a partir de la recurrencia de De Pril (1986) para la suma de los riesgos independientes que han quedado en la cartera,

	Capital asegurado				
Prob. siniestro	1	2	3	4	5
0.03	-	2	-	1	-
0.04	-	-	2	1	1
0.05	-	2	3	1	1
0.06	-	1	2	-	-

(8.99)

La convolución se realiza en el programa C1. "Cartera de Gerber con una estructura de dependencia bivariante y trivariante. Hipótesis U, B" (apéndice A). La distribución resultante es

s	$f_{S_{(1,2)}^{U,B}}(s) = \Pr\left(S_{(1,2)}^{U,B} = s\right)$	$F_{S_{(1,2)}^{U,B}}(s) = \Pr\left(S_{(1,2)}^{U,B} \leq s\right)$
0	0.301164075171418	0.301164075171418
1	0	0.301164075171418
2	0.101726885842075	0.402890961013493
3	0.121746715979034	0.524637676992527
4	0.089340772141720	0.613978449134247
5	0.080489546573530	0.694467995707777
6	0.047893414726494	0.742361410434271
7	0.053062710890387	0.795424121324658
8	0.044800644993887	0.840224766318545
9	0.028850621938837	0.869075388257382
10	0.021290738487806	0.890366126745188
12	0.012782135461325	0.921019696658444
14	0.022086873710676	0.952292843215466
16	0.008571152067255	0.965329415300954
18	0.006119777697262	0.980037859697947
20	0.003176074124272	0.988418751914737
24	0.001235621717464	0.997030025973344
28	0.000291373954871	0.999388494785538
32	0.000059931861064	0.999900354908160

(8.100)

siendo sus primas stop-loss asociadas:

d	$E\left(S_{(1,2)}^{U,B} - d\right)_+$
0	4.49
2	3.092328150342830
4	2.019856788348850
6	1.328303233190870
8	0.866088764949803
10	0.575388919525730
12	0.373992607468036
14	0.225218273631274
16	0.134269380080436
18	0.073516877382076

(8.101)

Entre estas primas y las correspondientes a $S_{(2)}^{B}$ -dadas en (7.22)- encontraremos las asociadas a la v.a. coste total que resulte bajo cualquier hipótesis sobre el grado de dependencia entre los riesgos de los diferentes conjuntos dependientes. Comparando estas primas stop-loss vemos que, bajo cualquier nivel de retención, queda un amplio rango de valores entre ellas, sobre todo si tenemos en cuenta que éstas están calculadas para capitales unitarios. Así, es interesante analizar relaciones intermedias de dependencia en los conjuntos (X_3, X_9, X_{17}) y (X_{23}, X_{30}, X_{31}) para tratar de acotar más el riesgo de nuestra cartera.

Independientemente de cuál sea el grado exacto de dependencia entre los riesgos de estos conjuntos, sabemos que cada uno de ellos presenta una relación de PCD. Así, debemos estimar, en cada conjunto, valores compatibles para los parámetros s_1, s_2, s_3 y t definidos en la sección anterior. Los parámetros s_1, s_2 y s_3 nos dan el tanto por uno que relaciona la correlación en cada una de las tres parejas involucradas con la que les correspondería en caso de comonotonía. Utilizaremos el parámetro s_1 para referirnos al primer y segundo riesgo en cada conjunto, s_2 se referirá al segundo y tercero y s_3 al primero y tercero. Del conjunto de hipótesis B, ver (8.93), sabemos el valor del coeficiente s_2 en cada uno de los conjuntos. De los riesgos del conjunto (X_3, X_9, X_{17}), sabemos

$$\varphi_{X_9,X_{17}} = 0.275\,\varphi_{X_9^U,X_{17}^U},$$

así $s_2 = 0.275$ en este conjunto.

Igualmente, para los riesgos en (X_{23}, X_{30}, X_{31}), sabemos

$$\varphi_{X_{30},X_{31}} = \varphi_{X_{30}^U,X_{31}^U},$$

de donde $s_2 = 1$ en este conjunto.

Analicemos los valores del resto de parámetros en cada uno de estos conjuntos. Los cálculos referidos a los riesgos en (X_3, X_9, X_{17}) se realizan dentro del programa C2. "Dependencia trivariante positiva en (X_3, X_9, X_{17}). Hipótesis C", mientras que para los cálculos referidos a los riesgos en (X_{23}, X_{30}, X_{31}) se utiliza el programa C3. "Dependencia trivariante positiva en (X_{23}, X_{30}, X_{31}). Hipótesis C". Ambos se encuentran en el apéndice A de este trabajo.

En (X_3, X_9, X_{17}) habíamos mencionado la posibilidad de que el riesgo X_3 que acabamos de añadir se tratara del hijo de la pareja (X_9, X_{17}). Es de esperar entonces que s_1 y s_3 resulten ser menores a s_2. Además, en general, podemos prever un mayor grado de dependencia entre la madre y el hijo que entre el padre y el hijo. Si X_9 es la madre, supongamos que hemos estimado

$$\varphi_{X_3,X_9} = 0.15\,\varphi_{X_3^U,X_9^U}, \tag{8.102}$$

es decir $s_1 = 0.15$. Recordemos que antes de fijar el valor de s_3 debemos ver si las relaciones dos a dos ya definidas reducen su intervalo de posibles valores. Con los valores de s_1 y s_2 definidos, $s_3^{\min} = 0$ y $s_3^{\max} = 1$ (ver programa referido). Así, no existen restricciones para el valor de este parámetro en $[0,1]$. Supongamos que hemos estimado $s_3 = 0.1$,

$$\varphi_{X_3,X_{17}} = 0.1\,\varphi_{X_3^U,X_{17}^U}. \tag{8.103}$$

Nos queda por elegir t_1, t_2 ó t_3 y estimar el valor de t en $[0,1]$ que lo define. Se trata, por tanto, de escoger una de las parejas y medir el efecto que el riesgo fuera de ella añade a la probabilidad conjunta de muerte de los tres por su no independencia con los riesgos en la pareja. Supongamos que el riesgo elegido es X_3. En este caso resulta

$$p_{111} = p_{.11.}p_{1..} + t_1\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\right) = 0.0003735 + t_1\,(0.00717)$$

con

$$t_1 = t_1^{\min} + t\left(t_1^{\max} - t_1^{\min}\right) = 0.55460251\,t$$

Hemos visto que, independientemente de la t_i elegida, la estimación del valor de t depende del incremento que creamos conveniente añadir en la probabilidad conjunta de muerte de los tres asegurados una vez hemos incorporado el incremento mínimo que las relaciones dos a dos definidas determinan. Observemos que, en este caso particular, del bajo grado de dependencia de X_3 con X_9 y X_{17} ha resultado $t_1^{\min} = 0$. Así, si estimáramos $t = 0$ estaríamos considerando a X_3 como independiente de (X_9, X_{17}) en el cálculo de p_{111}. De esta manera, la correlación positiva detectada entre el hijo y cada uno de sus padres no incrementaría la probabilidad de muerte conjunta de los tres en el período considerado. Esta hipótesis, aunque teóricamente correcta, no nos parece muy realista. Si incorporamos esta correlación para reflejar el incremento que la probabilidad conjunta de muerte de hijo/padre e hijo/madre ha sufrido respecto al caso independiente, parece lógico considerar una parte de este incremento en la probabilidad de muerte de los tres.

Supongamos que estimamos

$$t = 0.5, \tag{8.104}$$

es decir, estamos incorporando la mitad del efecto que podemos o no añadir a p_{111} con las relaciones dos a dos definidas.

Bajo estas hipótesis, la distribución de probabilidad trivariante de (X_3, X_9, X_{17}), así como la del riesgo que de este trío se deriva, $X_3 + X_9 + X_{17}$, se deducen en el programa informático referido a este conjunto, ver apéndice A. La distribución de la suma de estos tres riesgos es

s	$\Pr(X_3 + X_9 + X_{17} = s)$
0	0.89995825
2	0.0468835
3	0.03556175
4	0.00315825
5	0.0120765
7	0.00236175

(8.105)

Para llegar a la distribución del coste total de la cartera, nos queda por analizar la siniestralidad total que se deriva del conjunto (X_{23}, X_{30}, X_{31}). En este conjunto hemos detectado que X_{30} y X_{31} es un mismo asegurado con dos pólizas en la cartera, $s_2 = 1$, mientras que X_{23} es el cónyuge de este asegurado. Bajo estas hipótesis es claro que los valores estimados para s_1 y s_3 deben coincidir. En cuanto a este valor, podemos utilizar el mismo grado de dependencia estimado para el matrimonio (X_9, X_{17}). Así,

$$\begin{aligned} \varphi_{X_{23},X_{30}} &= 0.275\, \varphi_{X_{23}^U,X_{30}^U}, \\ \varphi_{X_{23},X_{31}} &= 0.275\, \varphi_{X_{23}^U,X_{31}^U}, \end{aligned} \tag{8.106}$$

es decir, $s_1 = s_3 = 0.275$. Señalar que una vez estimado $s_1 = 0.275$, el intervalo en que puede tomar valor s_3 queda reducido a un único punto, $s_3^{\min} = s_3^{\max} = 0.275$, (ver programa referido).

Intuitivamente ya podemos prever que, en este caso, las relaciones dos a dos definidas determinan una única posibilidad para la distribución trivariante de los riesgos definidos. Por ser X_{30} y X_{31} un duplicado, únicamente existen dos asegurados en este conjunto y, por tanto, la única posibilidad para determinar la probabilidad de que la muerte de los tres se produzca dentro del período considerado, es

$$p_{111} = p_{11.} = p_{1.1} = 0.015925$$

Observemos que en nuestro modelo éste es el único valor posible de p_{111}, independientemente de la t_i elegida.

A partir de t_1 encontramos

$$p_{111} = p_{.11.}p_{1..} + t_1 \left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{1.1}\right) = 0.003 + t_1 \left(0.02585\right)$$

con

$$t_1 = t_1^{\min} + t\left(t_1^{\max} - t_1^{\min}\right) = 0.5 + t\left(0.5 - 0.5\right) = 0.5.$$

Así

$$p_{111} = 0.003 + 0.5\ \left(0.02585\right) = 0.015925.$$

En cuanto a t_2 y t_3 son, en este caso, el mismo parámetro por ser X_{30} y X_{31} un duplicado. Bajo las hipótesis establecidas resulta,

$$\begin{aligned} t_2 &= t_2^{\min} + t\left(t_2^{\max} - t_2^{\min}\right) = 0.2159322, \\ t_3 &= t_2. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} p_{111} &= p_{1.1}p_{.1.} + t_2\left(\triangle p_{11.} + \triangle p_{.11}\right) \\ &= p_{11.}p_{..1} + t_3\left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}\right) \\ &= 0.0009555 + 0.2159322\left(0.069325\right) = 0.015925. \end{aligned}$$

Observar que, en este caso particular, $\forall i \in \{1,2,3\}$, $t_i^{\min} = t_i^{\max}$. Esta igualdad indica que las relaciones dos a dos definen totalmente la relación de dependencia en el conjunto y, por tanto, no es ahora necesaria la hipótesis adicional sobre el valor de t para explicar el comportamiento conjunto de los tres riesgos.

Bajo las hipótesis $s_1 = s_3 = 0.275$ y $s_2 = 1$, la distribución de probabilidad trivariante de (X_{23}, X_{30}, X_{31}), así como la del riesgo que de este trío se deriva, $X_{23}+X_{30}+X_{31}$, se deducen en el programa informático referido a este conjunto, ver apéndice A. La distribución de la suma de estos tres riesgos es

s	$\Pr(X_{23} + X_{30} + X_{31} = s)$
0	0.905925
5	0.034075
9	0.044075
14	0.015925

(8.107)

Ya estamos en condiciones de llegar a la distribución del coste total de la cartera, v.a. a la que bajo las hipótesis aquí realizadas sobre el grado de dependencia en las parejas y los tríos no independientes representamos por $S_{(1,2)}^{C,B}$, siendo C el conjunto de hipótesis en (8.102), (8.103), (8.104) y (8.106). Su distribución de probabilidad se obtiene de convolucionar las distribuciones de la suma que han resultado para los dos tríos, dadas en (8.105), (8.107), las cuatro parejas, dadas en las pág. 205, 212 y la que resulta de los riesgos independientes que han quedado en la cartera, ver (8.99), a partir de la recurrencia de De Pril (1986). Esta convolución se realiza en el programa C4. "Cartera de Gerber con una estructura de dependencia bivariante y trivariante. Hipótesis C, B". La distribución resultante es:

s	$f_{S_{(1,2)}^{C,B}} = \Pr\left(S_{(1,2)}^{C,B} = s\right)$	$F_{S_{(1,2)}^{C,B}} = \Pr\left(S_{(1,2)}^{C,B} \leq s\right)$
0	0.283169897441244	0.283169897441244
1	0	0.283169897441244
2	0.101943436794758	0.385113334236002
3	0.119522411023009	0.504635745259011
4	0.086934698752062	0.591570444011073
5	0.088706896288980	0.680277340300053
6	0.049079200968638	0.729356541268692
7	0.053439564152393	0.782796105421084
8	0.048354727413150	0.831150832834234
9	0.041607986912228	0.872758819746462
10	0.023110920288185	0.895869740034647
12	0.018360808435181	0.936951453170618
14	0.014509436758502	0.965055768863671
16	0.007173641366998	0.978922602795263
18	0.003970123824895	0.988994064278192
20	0.002154780113770	0.994291714993386
24	0.000599538903031	0.998729135721761
28	0.000122358607733	0.999769534722508
32	0.000021648108709	0.999966191630354

(8.108)

siendo sus primas stop-loss asociadas

d	$E\left(S_{(1,2)}^{C,B} - d\right)_+$
0	4.49
2	3.056339794882480
4	1.946088874377490
6	1.217936658688620
8	0.730089305378399
10	0.433998957959096
12	0.248459342729180
14	0.135957128004964
16	0.072761858296902
18	0.036708401545463

(8.109)

Es inmediato comprobar que las primas stop-loss aquí presentadas están acotadas por debajo por las dadas en (7.22) y por encima por las de (8.101). Así,

$$S^{\perp,B}_{(1,2)} \leq_{sl} S^{C,B}_{(1,2)} \leq_{sl} S^{U,B}_{(1,2)}.$$

Remarcar que estas cotas quedan en cualquier caso garantizadas por (8.96), puesto que el conjunto de hipótesis añadidas (hipótesis en C) aseguran PCD entre los riesgos que componen cada uno de los dos tríos.

Queremos, por último, reconsiderar las hipótesis en C referidas al grado de dependencia de X_3 y X_{23} con cada uno de los riesgos en (X_9, X_{17}) y (X_{30}, X_{31}). Supongamos que, en cada uno de los dos tríos, creemos haber podido infravalorar los coeficientes s_1 y s_3 que definen este grado de dependencia positiva. Si así es, resulta conveniente incrementarlos en una pequeña cuantía puesto que, como hemos visto, de su valor depende también el riesgo de la cartera. Los cálculos de las hipótesis que siguen se realizan en los programas C5. "Dependencia trivariante positiva en (X_3, X_9, X_{17}). Hipótesis D" y C6. "Dependencia trivariante positiva en (X_{23}, X_{30}, X_{31}). Hipótesis D", ver apéndice A.

En el conjunto (X_3, X_9, X_{17}) habíamos estimado $s_1 = 0.15$ y $s_3 = 0.1$. Éstos definen el grado de correlación entre hijo/madre, (X_3, X_9) , e hijo/padre, (X_3, X_{17}). Tras el análisis realizado, supongamos que intuimos que ambos podrían estar infravalorados, aunque percibimos una infravaloración menor en la estimación de la correlación hijo/madre que en la referida a la correlación hijo/padre. Si así es, podemos considerar suficiente un incremento de, por ejemplo, el 5% en s_1 y del 10% en s_3, para garantizar que las correlaciones reales no queden en ningún caso infravaloradas. Estimamos, por tanto,

$$\varphi_{X_3,X_9} = 0.1575\, \varphi_{X_3^U,X_9^U}, \tag{8.110}$$

$$\varphi_{X_3,X_{17}} = 0.11\, \varphi_{X_3^U,X_{17}^U}, \tag{8.111}$$

Indicar que estos valores de s_1 y s_3 son compatibles con $s_2 = 0.275$ (ver programa referido).

Respecto al parámetro t, seguimos con la estimación dada en (8.104),

$$t = 0.5,$$

puesto que únicamente ha variado nuestra percepción sobre el grado de dependencia de un riesgo con cada uno de los otros dos, pero no en lo que se refiere al comportamiento conjunto de los tres.

Con estas nuevas hipótesis, el riesgo que se deriva del conjunto (X_3, X_9, X_{17}) es

s	$\Pr(X_3 + X_9 + X_{17} = s)$
0	0.90031675
2	0.0464515
3	0.03541925
4	0.00323175
5	0.0120765
7	0.00250425

(8.112)

En el conjunto (X_{23}, X_{30}, X_{31}), una vez detectado a X_{30}, X_{31} como un duplicado quedaba por determinar el grado de correlación de este asegurado con su cónyuge, X_{23}. En una primera estimación hemos considerado que éste se podía definir a través del mismo parámetro utilizado para medir el grado de correlación entre los cónyuges (X_9, X_{17}). Así estimábamos $s_1 = s_3 = 0.275$. Si éste era suficiente para creer que no se infravaloraba la correlación entre X_9 y X_{17}, en principio podemos suponer que tampoco infravalorará la existente entre X_{23} y X_{30}. Sin embargo, debemos ser conscientes de que una pequeña infravaloración podría producirse y, en caso de que así fuera, sería mayor para la pareja (X_{23}, X_{30}) que para (X_9, X_{17}), puesto que de (4.22) se deduce

$$\begin{aligned} \varphi_{X_9^U, X_{17}^U} &= 0.889756521, \\ \varphi_{X_{23}^U, X_{30}^U} &= \varphi_{X_{23}^U, X_{31}^U} = 0.908053634. \end{aligned}$$

Así, puede ser conveniente sobrevalorar un poco más la estimación del parámetro s que define la correlación entre X_{23} y X_{30}. Supongamos que la incrementamos en un 5%, es decir,

$$s_1 = s_3 = 0.28875. \tag{8.113}$$

Estas dos nuevas hipótesis, junto con $s_2 = 1$, determinan como único valor posible para p_{111},

$$p_{111} = p_{11.} = p_{1.1} = 0.01657125.$$

Nuevamente las relaciones dos a dos, definen totalmente la relación entre los tres y no son necesarias hipótesis adicionales sobre el parámetro t. En el programa referido a estos tres riesgos, puede comprobarse que también ahora, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $t_i^{\min} = t_i^{\max}$.

El riesgo que se deriva de (X_{23}, X_{30}, X_{31}) bajo estas nuevas hipótesis, viene dado por

s	$\Pr(X_{23} + X_{30} + X_{31} = s)$
0	0.90657125
5	0.03342875
9	0.04342875
14	0.01657125

(8.114)

Los resultados de la sección 8.2.3 nos garantizan que las distribuciones obtenidas bajo estas nuevas hipótesis para $X_3 + X_9 + X_{17}$ y $X_{23} + X_{30} + X_{31}$ superan, en orden stop-loss, a las obtenidas bajo el conjunto de hipótesis C. Si llamamos ahora hipótesis D al conjunto de hipótesis en (8.104), (8.110), (8.111) y (8.113), es claro que

$$S_{(1,2)}^{C,B} \leq_{sl} S_{(1,2)}^{D,B}.$$

Así, bajo este nuevo conjunto de hipótesis, hemos incrementado un poco más el riesgo de la cartera y podemos confiar en que la siniestralidad real de la cartera no supere la que prevemos a través de $S_{(1,2)}^{D,B}$. Deduzcamos su distribución de probabilidad.

La distribución de $S_{(1,2)}^{D,B}$ resulta de convolucionar las distribuciones en (8.112) y (8.114) con las correspondientes a la suma de los riesgos en cada una de las cuatro parejas, dadas en las pág. 205, 212 y con la que resulta para la suma de los riesgos independientes que han quedado en la cartera, ver (8.99), a partir de la recurrencia de De Pril (1986). Esta convolución se realiza en el programa C7. "Cartera de Gerber con una estructura de dependencia bivariante y trivariante. Hipótesis D, B". La distribución obtenida es:

s	$f_{S^{D,B}_{(1,2)}}(s) = \Pr\left(S^{D,B}_{(1,2)} = s\right)$	$F_{S^{D,B}_{(1,2)}}(s) = \Pr\left(S^{D,B}_{(1,2)} \leq s\right)$
0	0.283484781023292	0.283484781023292
1	0	0.283484781023292
2	0.101914891996333	0.385399673019625
3	0.119605989569808	0.505005662589433
4	0.087010422198351	0.592016084787784
5	0.088524861445108	0.680540946232892
6	0.049081117201616	0.729622063434508
7	0.053424240030036	0.783046303464544
8	0.048292609208513	0.831338912673056
9	0.041368310052510	0.872707222725566
10	0.023070283215321	0.895777505940887
12	0.018254915234613	0.936656889668044
14	0.014644976665431	0.964811117879259
16	0.007202755283271	0.978662580491580
18	0.004011453236597	0.988824109073209
20	0.002176695691507	0.994182377260842
24	0.000611391251188	0.998698158236215
28	0.000125429264675	0.999762887027415
32	0.000022302182753	0.999965093512111

(8.115)

siendo sus primas stop-loss

d	$E\left(S^{D,B}_{(1,2)} - d\right)_+$
0	4.49
2	3.056969562046580
4	1.947374897655640
6	1.219931928676310
8	0.732600295575367
10	0.436646430973989
12	0.250825911348304
14	0.137648942230179
16	0.073919885317741
18	0.037395121645936

(8.116)

Queremos concluir destacando los principales resultados obtenidos dentro de este apartado para la cartera de Gerber. Éstos están totalmente ligados a los obtenidos en el apartado 7.3.2 del capítulo anterior, donde únicamente consideramos dependencias bivariantes. Entonces, analizamos la relación de dependencia entre los riesgos de seis parejas que identificamos como no independientes. Incrementamos el grado de correlación entre los componentes de cada una de las parejas hasta garantizar la consideración del riesgo real de la cartera.

En este apartado, hemos incluido un tercer riesgo en dos de las seis parejas y, éstas se han convertido ahora en dos tríos, en los que, suponemos, hemos podido probar una relación de PCD. En cada trío, la dependencia positiva del riesgo añadido con cada uno de los dos que formaban la pareja inicial, hace que las hipótesis anteriores no sean ahora suficientes. De hecho éstas, al asumir independencia respecto a éste, acotan ahora inferiormente el riesgo del total de la cartera. La cota superior se obtiene realizando, en cada conjunto, la hipótesis de comonotonía entre el riesgo que ha entrado y el que resulta de la pareja ya existente (dado a través de su suma). Bajo estas hipótesis, llegamos a la v.a. coste total con mayor riesgo que puede encontrarse para la cartera, si la estructura de dependencia es la definida. Su distribución de probabilidad es la dada en (8.100). Entre ésta y la dada en (7.21), se encuentra, en términos de riesgo, nuestra cartera. Así, las primas stop-loss reales, quedarán entre las asociadas a cada una de estas dos distribuciones, es decir, entre las de (7.22) y las de (8.101).

Si las únicas dependencias trivariantes en la cartera fueran las descritas, podría no resultar exagerado asumir la hipótesis de comonotonía propuesta y quedarnos con la v.a. coste total que acota superiormente el riesgo de la cartera. No obstante, en la realidad, si nos preocupamos de analizar dependencias trivariantes, será porqué hemos detectado más de dos. El grado de dependencia entre los riesgos de los tríos dependientes será seguramente pequeño pero no lo suficiente como para despreciar el análisis. En estos casos, esta hipótesis de comonotonía resultará incluso más irreal que asumir la de independencia. Por ello, resulta interesante el análisis de relaciones de dependencia intermedias. Sabemos que la percepción del riesgo que tengamos de cada uno de los tríos no independientes, depende únicamente del tanto por uno que define la correlación en cada una de las tres parejas: $s_i,\ i = 1, 2, 3$. Por ello, el esfuerzo del análisis debe centrarse en la estimación de estos parámetros para garantizar que las correlaciones finalmente estimadas en ningún caso infravaloren las reales.

En nuestro caso, teníamos del capítulo anterior, una estimación suficientemente alta para el parámetro s_2 que define la correlación entre los riesgos que formaban antes una pareja y ahora han quedado incluidos en cada uno de los dos tríos. Si nos quedamos con este valor, nos quedan por estimar los parámetros s_1 y s_3 que, en cada conjunto, definirán la correlación del riesgo añadido con cada uno de estos dos. Damos una estimación inicial para estos parámetros en (8.102), (8.103) y (8.106). La distribución resultante para la v.a. coste total de la cartera es la presentada en (8.108). Sus primas stop-loss asociadas, dadas en (8.109), quedan entre las de (7.22) y las de (8.101).

Puede ser que existan dudas sobre si hemos considerado suficientemente altos estos dos nuevos coeficientes definidos como para garantizar que en ningún caso se infravalore el riesgo real de la cartera. Si es así, podemos como en (8.110), (8.111) y (8.113), incrementarlos en un determinado %. La v.a. coste total que resulta tras el incremento es la dada en (8.115) y sus respectivas primas stop-loss las de (8.116). Es inmediato comprobar que al incrementar las respectivas correlaciones, incrementan las primas stop-loss, ver (8.109) y (8.116). Así, podremos llegar a asegurar una v.a. coste total que en ningún caso infravalore el riesgo real de la cartera. Obviamente este objetivo debe ser compatible con el de llegar a unos resultados lo más exactos posibles. En este sentido, y en los casos en que sea necesario, debemos lograr además la estimación de un parámetro t que no nos aleje demasiado de la realidad que percibimos para cada trío.

Señalar, finalmente, que el análisis hasta aquí realizado podría reproducirse fácilmente a cualquier cartera. Indicar que, en ella, para las dependencias trivariantes de signo positivo, pueden aprovecharse los resultados teóricos deducidos en la primera parte de este capítulo. De esta manera podemos afrontar directamente el estudio de la dependencia en el conjunto, sin previamente ocuparnos de analizar únicamente una de las tres dependencias bivariantes que en él aparecen.

Capítulo 9

Conclusiones

El objetivo de este último capítulo es exponer las conclusiones a las que hemos llegado tras la realización de esta tesis doctoral. En primer lugar, y tras revisar el marco en que hemos trabajado, presentamos las conclusiones referidas al tratamiento separado de un grupo de riesgos individuales procedentes de una cartera cualquiera que presenten una estructura de dependencia positiva suficientemente fuerte como para garantizar que su riesgo global es superior al que les correspondería en caso de independencia. En segundo lugar, y para la segunda parte de este trabajo, enumeramos las conclusiones relativas al efecto que supone introducir algunas de estas formas de dependencia sobre el riesgo de una cartera de seguros de vida. Por último, respecto a las posibles líneas a seguir, y en lo que se refiere a la influencia de dependencias de signo positivo en el riesgo de este tipo de carteras, indicamos los puntos que, a nuestro entender, no han quedado aquí suficientemente desarrollados y que, sin embargo, sería conveniente tratar. A su vez, indicamos otros posibles enfoques referidos al tratamiento de dependencias entre riesgos en el contexto actuarial.

9.1 Marco de trabajo

Esta tesis doctoral se ha desarrollado dentro del contexto de la teoría de ordenación de riesgos. Ésta se dedica a buscar relaciones de orden equivalentes a las que resultan de la teoría de la utilidad y de la teoría dual de Yaari, pero definidas a partir de las funciones de distribución de los riesgos.

En el capítulo 2, hemos revisado la ordenación que resulta de dos riesgos X e Y cualesquiera bajo la teoría de la utilidad, así como en el marco de la teoría dual de Yaari. En ambos casos, el riesgo X será preferido al riesgo Y, si, y sólo si, la pérdida que ocasione la realización de X es inferior a la que ocasione la realización de Y. En el caso de la teoría de la utilidad, esta pérdida se traduce en una disminución de la riqueza del decisor valorada a través de la esperanza de su función de utilidad. Así, X es preferido a Y, si, y sólo si,

$$E\left(u\left(-X\right)\right) \geq E\left(u\left(-Y\right)\right), \tag{9.1}$$

siendo u una función de utilidad no decreciente. En el caso de decisores adversos al riesgo, esta función de utilidad es cóncava.

Bajo la teoría dual de Yaari, el equivalente cierto de la pérdida ocasionada por un riesgo X, $H_g\left(-X\right)$, se corresponde con la esperanza matemática que resulta tras aplicar una función de distorsión a su distribución de probabilidad. Así, X es preferido a Y, si, y sólo si,

$$H_g\left(-X\right) \geq H_g\left(-Y\right), \tag{9.2}$$

siendo g una función de distorsión no decreciente que, en el caso de decisores adversos al riesgo, es convexa.

Los resultados recogidos en el capítulo 3, relativos a la teoría de la ordenación de riesgos, prueban la equivalencia entre el orden stop-loss de dos riesgos y la ordenación que de los mismos realiza cualquier decisor adverso al riesgo. Este resultado es válido en el marco de la teoría de la utilidad, así como bajo la teoría dual de Yaari. Así, las relaciones en (9.1) y (9.2), cuando u es una función de utilidad cóncava y g una función de distorsión convexa, son ambas equivalentes a

$$X \leq_{sl} Y, \tag{9.3}$$

donde $\leq_{sl}$ indica la relación de orden entre las primas stop-loss correspondientes a estos dos riesgos,

$$E\left(X-d\right)_+ \leq E\left(Y-d\right)_+, \ \ \forall d \geq 0.$$

Recordemos, asimismo, que el orden stop-loss se mantiene bajo la convolución de riesgos independientes.

9.2 Dependencia positiva. Su influencia en el riesgo del grupo

Dentro de este apartado queremos revisar los principales resultados relacionados con el impacto que determinadas formas de dependencia positiva provocan sobre la siniestralidad del grupo de riesgos individuales en que se producen. Como ya adelantábamos en la introducción, se trata de evitar que la siniestralidad en estos grupos quede infravalorada por la hipótesis de independencia y que, por consiguiente, se traslade esta infravaloración a la cartera de la que forman parte. En base a este objetivo, nos hemos centrado en la identificación y tratamiento de aquellas relaciones de dependencia positiva que incrementan el riesgo global del grupo con respecto al caso independiente. Este análisis se ha realizado diferenciando según el grupo esté formado por dos o más riesgos. El caso bivariante es el tratado en el capítulo 4. Recordemos sus principales resultados.

9.2.1 Parejas de riesgos con dependencia positiva

Para tratar este caso, hemos recogido, en primer lugar, algunos conceptos estadísticos de dependencia bivariante positiva. Por su importancia, cabe destacar al más fuerte de todos ellos. Hablamos del concepto de comonotonía entre dos riesgos tratado en el apartado 4.2.5. Además de ésta, hemos considerado relaciones de dependencia positiva menos extremas, como la dependencia estocástica creciente, la asociación, la dependencia cuadrática positiva o, simplemente, la positividad de la covarianza de los dos riesgos implicados. Se trata, a continuación, de identificar cuáles de estas relaciones provocan un incremento del riesgo de la pareja con respecto al caso independiente. El resultado será diferente según la pareja esté formada por riesgos individuales con distribución dicotómica, o bien por riesgos con cualquier otra forma en sus distribuciones marginales.

Parejas de riesgos con distribución dicotómica

En el caso de una pareja de riesgos, (X_1, X_2), cuyas respectivas distribuciones de probabilidad sean dicotómicas (riesgos procedentes, por ejemplo, de una cartera de seguros de vida), X_i $(i = 1, 2)$ tiene una distribución de probabilidad definida en 0 y $\alpha_i > 0$ por

$$\Pr(X_i = 0) = p_i \text{ y } \Pr(X_i = \alpha_i) = 1 - p_i, \quad 0 < p_i < 1. \tag{9.4}$$

Fijadas las dos distribuciones marginales, la relación de dependencia que exista entre X_1 y X_2 determinará la forma de la distribución bivariante de probabilidad que mide el comportamiento conjunto de estos dos riesgos. Hemos simbolizado por $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ a la clase de todos los pares de riesgos cuyas distribuciones marginales vienen dadas por (9.4). Con ello nos referimos siempre a la pareja objeto de análisis y únicamente estamos considerando todas sus posibles relaciones de dependencia. De esta manera, el problema se reduce a determinar en la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, la subclase de parejas de riesgos con mayor riesgo global que el correspondiente en caso de independencia de sus componentes. El riesgo de cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ viene dado por la v.a. suma que determina el coste total de los siniestros que de la pareja se derivan,

$$X_1 + X_2.$$

Si $\left(X_1^\perp, X_2^\perp\right)$ es la pareja mutuamente independiente de $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, podemos por (9.3) garantizar un mayor riesgo de (X_1, X_2) que en el caso independiente si

$$X_1^\perp + X_2^\perp \leq_{sl} X_1 + X_2. \tag{9.5}$$

En este caso particular, hemos encontrado que basta con probar la no negatividad de la covarianza entre X_1 y X_2 para garantizar el cumplimiento de (9.5). Así, reducir la clase $R_2(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ a la subclase de parejas con covarianza mayor o igual que cero, subclase que hemos simbolizado por $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, implica considerar únicamente aquellas relaciones de dependencia que le supondrán un mayor riesgo global al asegurador que en el caso independiente. Para una pareja cualquiera en $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$ podemos garantizar, además de la no negatividad de su covarianza, una relación de dependencia cuadrática positiva entre sus componentes, así como una relación de dependencia estocástica creciente y una relación de asociación, puesto que para el caso de riesgos con distribución dicotómica hemos podido probar, en el teorema 4.12, una equivalencia entre estos cuatro conceptos.

Respecto al orden, en función de su riesgo global, de los diferentes elementos incluidos en la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$, se ha probado que éste se corresponde con el orden de sus respectivas covarianzas. En concreto, para cualesquiera $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$,

$$Cov(X_1, X_2) \leq Cov(Y_1, Y_2) \Leftrightarrow X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2. \tag{9.6}$$

Así, el orden de covarianzas resulta equivalente al orden stop-loss de las respectivas v.a. suma que determinan el riesgo en cada pareja. Puesto que, en todo caso, se trata de la misma pareja y únicamente varía la hipótesis relativa a su grado de dependencia, de (9.6) podemos concluir que cuanto mayor sea su covarianza mayor peligro representa ésta para el asegurador. Asimismo este resultado nos permite afirmar que la relación de dependencia más peligrosa que puede existir entre dos riesgos es aquella que maximiza su covarianza, siendo la más segura aquella que la minimice. En el caso que nos ocupa, estos dos elementos son, respectivamente, la pareja comonótona e independiente de la clase $R_{2,+}(p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2)$.

De este análisis se desprenden las siguientes consideraciones, válidas para una pareja formada por riesgos dicotómicos, y para la cual hayamos podido comprobar la positividad de su covarianza.

1. Asumir la tradicional hipótesis de independencia entre los riesgos que forman la pareja conlleva una infravaloración de su riesgo real.

2. En términos de riesgo, esta pareja se encuentra entre la independencia y la comonotonía. La hipótesis de comonotonía, en ningún caso infravalorará su riesgo real aunque se trata de una hipótesis totalmente irreal que debemos evitar salvo cuando se trate de un duplicado (un mismo asegurado con dos pólizas en la cartera).

3. Para este tipo de riesgos, basta con estimar lo más exactamente posible la covarianza de la pareja para cubrir su riesgo real. Por muy precisa que sea nuestra estimación, ésta nunca será exacta, por lo que, parece una estrategia prudente, tratar de sobrevalorarla en una pequeña cuantía.

Generalización al caso de riesgos con distribución arbitraria

Si la pareja cuya relación de dependencia pretendemos analizar procede de una cartera formada por riesgos con cualquier otra forma en sus distribuciones marginales de probabilidad, las conclusiones anteriores pierden su validez. Para tratar este caso, hemos ampliado la clase anterior a la clase más general de todas las parejas con distribuciones marginales de probabilidad dadas por F_1 y F_2, clase que hemos simbolizado por $R_2(F_1, F_2)$, siendo F la función de distribución acumulativa de probabilidad. Nuevamente estamos hablando siempre de la misma pareja y la única diferencia entre los distintos elementos de esta clase es su relación de dependencia, relación que condiciona la forma de su distribución bivariante de probabilidad. El contraejemplo presentado en la pág. 86 muestra que una pareja incluida en esta clase con covarianza positiva presenta menos riesgo que su homóloga independiente. Así, en este caso más general, la positividad en la covarianza no es suficiente para garantizar un mayor riesgo de la pareja que en el caso independiente y deberemos exigir alguna condición más fuerte de dependencia positiva entre sus componentes. Concretamente, será suficiente con probar una relación de dependencia cuadrática positiva entre cualesquiera $(X_1, X_2) \in R_2(F_1, F_2)$ para asegurar que

$$X_1^{\perp} + X_2^{\perp} \leq_{sl} X_1 + X_2, \tag{9.7}$$

siendo ahora $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ la pareja independiente de $R_2(F_1, F_2)$.

Reducir la clase $R_2(F_1, F_2)$ a la subclase de parejas de riesgos con dependencia cuadrática positiva, subclase simbolizada por $R_{2,+}(F_1, F_2)$, implica nuevamente considerar únicamente aquellas relaciones de dependencia que le supondrán un mayor riesgo global al asegurador que en el caso independiente. Del teorema 4.5, se sigue la inclusión en $R_{2,+}(F_1, F_2)$ de todas aquellas parejas que presenten asociación o dependencia estocástica creciente entre sus componentes, puesto que éstas son relaciones más fuertes que la dependencia cuadrática positiva que, en todo caso, garantizan esta última.

La ordenación, en función de su riesgo global, de las diferentes parejas en la clase $R_{2,+}(F_1, F_2)$ coincide con el orden de correlación de las mismas. En concreto, para cualesquiera $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in R_{2,+}(F_1, F_2)$

$$(X_1, X_2) \leq_c (Y_1, Y_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \leq_{sl} Y_1 + Y_2, \tag{9.8}$$

siendo $\leq_c$ el orden de correlación entre estos dos pares, orden que se cumple cuando la relación

$$Cov\left(f(X_1), g(X_2)\right) \leq Cov\left(f(Y_1), g(Y_2)\right) \tag{9.9}$$

es válida para todas las funciones f y g no decrecientes para las cuales la covarianza exista.

El orden de correlación entre dos pares de riesgos cualesquiera en $R_{2,+}(F_1, F_2)$ resulta equivalente al orden de sus respectivas distribuciones bivariantes de probabilidad. En particular, la relación en (9.9) es equivalente a

$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \leq \Pr(Y_1 \leq x_1, Y_2 \leq x_2), \ \forall x_1, x_2 \geq 0, \tag{9.10}$$

desigualdad que a su vez es equivalente a cada uno de los siguientes estamentos válidos para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 > x_2) &\geq \Pr(Y_1 \leq x_1, Y_2 > x_2), \\
\Pr(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2) &\geq \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 \leq x_2), \\
\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) &\leq \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2).
\end{aligned}$$

La expresión en (9.10) o, alternativamente, una cualquiera de las tres definiciones equivalentes que acabamos de recordar, nos permitirán ordenar los diferentes pares de riesgos en $R_{2,+}(F_1, F_2)$ sin necesidad de recurrir a la definición de orden de correlación, dada en (9.9) que, a efectos prácticos, resultaría difícil de probar. Observemos que ahora la ordenación depende de la tendencia de los riesgos en la pareja a tomar a la vez valores "grandes"/"pequeños". Es de esperar que cuanto mayor sea esta tendencia, superiores resulten, en todos los puntos, las correspondientes distribuciones bivariantes acumulativas/desacumulativas de probabilidad de la pareja y, por consiguiente, mayor peligro represente ésta para el asegurador.

La cota superior de las distribuciones bivariantes de probabilidad acumulativas/desacumulativas, correspondientes a los distintos elementos en $R_{2,+}(F_1, F_2)$, es la asociada al par comonótono de esta clase, siendo la cota inferior, la asociada al par independiente. Así, éstas son, respectivamente, la relación de dependencia más peligrosa y más segura que podemos encontrar entre dos riesgos con dependencia cuadrática positiva, independientemente de la forma que presenten sus distribuciones marginales.

Respecto al análisis del riesgo derivado de una pareja cualquiera para la cual hayamos podido probar una relación de dependencia cuadrática positiva entre sus componentes, concluir realizando las siguientes consideraciones:

1. Asumir la tradicional hipótesis de independencia entre los riesgos que forman la pareja conlleva una infravaloración de su riesgo real.

2. En términos de riesgo, esta pareja se encuentra entre la independencia y la comonotonía. La hipótesis de comonotonía, en ningún caso infravalorará

su riesgo real aunque se trata de una hipótesis totalmente irreal que debemos evitar salvo cuando se trate de un duplicado (un mismo asegurado con dos pólizas en la cartera).

3. Si queremos incorporar el incremento de riesgo de esta pareja debido a la no independencia de sus componentes, deberemos tratar de aproximar lo más exactamente posible sus respectivas probabilidades bivariantes asociadas. Se trata de garantizar que, en ningún caso, la distribución bivariante acumulativa/desacumulativa de probabilidad que resulte para la pareja quede por debajo de la real.

9.2.2 Riesgos multivariantes con dependencia positiva

Si queremos ampliar el grupo a más de dos riesgos y analizar el efecto que determinadas formas de dependencia positiva pueden provocar sobre la siniestralidad del mismo, debemos referirnos a los resultados del capítulo 5. Paralelamente al desarrollo del capítulo anterior, hemos iniciado el análisis recopilando algunos conceptos de dependencia multivariante positiva de entre los aparecidos en la literatura estadística. Todos ellos son generalizaciones multivariantes de algunos de los conceptos de dependencia bivariante anteriormente tratados. Al igual que en el caso bivariante, la comonotonía será la relación de dependencia más fuerte que pueda producirse en el grupo. Si nos ocupamos de relaciones de dependencia más débiles, encontramos en los conceptos de dependencia positiva de orden, dependencia cuadrática positiva por parejas, dependencia acumulativa positiva y dependencia cuadrática lineal positiva, extensiones multivariantes del concepto de dependencia cuadrática positiva entre dos riesgos. Asimismo podemos ampliar la asociación al caso multivariante, así como generalizar el concepto de dependencia estocástica creciente entre dos riesgos a un conjunto más amplio, en cuyo caso, hablaremos de riesgos que presentan un crecimiento condicional en secuencia.

Seguidamente nos hemos ocupado de identificar cuales de estas relaciones son suficientes para afirmar que el riesgo del grupo es superior al correspondiente en caso de independencia de todos sus componentes. Las conclusiones a que en este caso hemos podido llegar son independientes de la forma de las respectivas distribuciones marginales asociadas a cada uno de los riesgos en el grupo.

En el caso multivariante, hemos extendido la clase $R_2(F_1, F_2)$, a la clase $R_m(F_1, \cdots, F_m)$, $m \geq 2$. En ella incluimos todas las posibles relaciones de dependencia que puedan producirse entre m riesgos procedentes de una cartera cualquiera. Fijadas las distribuciones marginales de cada uno de los riesgos individuales, $F_1, \cdots, F_m$, la relación de dependencia existente determinará la forma de la distribución multivariante de probabilidad que mide el comportamiento del grupo. Entre todas ellas, se trata de identificar aquellas con mayor riesgo asociado que el correspondiente al elemento independiente. El riesgo de cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m (F_1, \cdots, F_m)$ viene dado por su v.a. suma,

$$X_1 + \cdots + X_m.$$

Si $\left(X_1^{\perp}, \cdots, X_m^{\perp}\right)$ es el elemento independiente de la clase $R_m (F_1, \cdots, F_m)$, podemos por (9.3) garantizar un mayor riesgo de $(X_1, \cdots, X_m)$ que en el caso independiente si

$$X_1^{\perp} + \cdots + X_m^{\perp} \leq_{sl} X_1 + \cdots + X_m. \tag{9.11}$$

La relación de dependencia mínima que garantiza el cumplimiento de (9.11) es una relación de dependencia acumulativa positiva entre $X_1, \cdots, X_m$. Así, reducir la clase $R_m (F_1, \cdots, F_m)$ a la subclase de secuencias con dependencia acumulativa positiva, subclase que hemos simbolizado por $R_{m,+} (F_1, \cdots, F_m)$, implica considerar únicamente aquellas relaciones de dependencia que le supondrán al asegurador un mayor riesgo global que en el caso independiente. En $R_{m,+} (F_1, \cdots, F_m)$ encontramos también todas aquellas secuencias con crecimiento condicional en secuencia, asociación o dependencia cuadrática lineal positiva, puesto que éstas son relaciones más fuertes que la dependencia cuadrática positiva que, en todo caso, garantizan esta última.

Si nos restringimos a un grupo de m $(m \geq 2)$ riesgos, $X_1, \cdots, X_m$, con distribuciones dicotómicas (procedentes, por ejemplo, de una cartera de vida), la distribución de probabilidad de X_i $(i = 1, \cdots, m)$ queda definida en 0 y $\alpha_i > 0$ por

$$\Pr (X_i = 0) = p_i \;\text{ y }\; \Pr (X_i = \alpha_i) = 1 - p_i, \;\; 0 < p_i < 1$$

Considerando todas sus posibles relaciones de dependencia trabajamos en la subclase de $R_m (F_1, \cdots, F_m)$ simbolizada por $R_m (p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots \alpha_m)$. Cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m) \in R_m (p_1, \cdots, p_m; \alpha_1, \cdots \alpha_m)$ con $Cov (X_i, X_j) \geq 0$ $(\forall i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j)$ presentan también dependencia cuadrática positiva por parejas puesto que, en esta clase, estas dos relaciones resultan ser equivalentes. La dependencia cuadrática positiva por parejas es condición necesaria pero no suficiente para probar una relación de dependencia acumulativa positiva. Así, cuando se trate de riesgos con distribución dicotómica, la relación mínima de dependencia que garantiza un mayor riesgo del grupo que en el caso independiente es igualmente una relación de dependencia acumulativa positiva entre sus componentes y, para su comprobación, no basta ahora con asegurar la positividad de sus respectivas covarianzas.

La distribución suma del elemento comonótono de la clase $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ es superior, en orden stop-loss, a la de cualquier otro elemento en la misma. Así, independientemente de la forma de las respectivas distribuciones marginales de probabilidad, el riesgo de un grupo que presente una relación de dependencia acumulativa positiva se encuentra entre el que resulta realizando, respectivamente, las hipótesis de independencia y comonotonía entre sus componentes.

La ordenación, en función de su riesgo global, del resto de elementos en $R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$ coincide con el orden supermodular de los mismos. En concreto, para cualesquiera $(X_1, \cdots, X_m), (Y_1, \cdots, Y_m) \in R_{m,+}(F_1, \cdots, F_m)$

$$(X_1, \cdots, X_m) \leq_{sm} (Y_1, \cdots, Y_m) \Rightarrow X_1 + \cdots + X_m \leq_{sl} Y_1 + \cdots + Y_m.$$

siendo $\leq_{sm}$ el orden supermodular entre estos dos pares, orden que se cumple cuando

$$E(\phi(X_1, \cdots, X_m)) \leq E(\phi(Y_1, \cdots, Y_m)) \tag{9.12}$$

para todas las funciones supermodulares $\phi : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}$ para las cuales la esperanza exista.

La supermodularidad de ϕ nos indica que las consecuencias de un incremento en la siniestralidad de uno de los riesgos sobre la siniestralidad del grupo, son peores cuanto mayor sea la siniestralidad del resto de sus componentes.

Recordemos que el orden supermodular únicamente es posible entre vectores aleatorios con idénticas marginales. Si hablamos de secuencias de riesgos con idénticas marginales, estamos ordenando en función del grado de dependencia y el orden supermodular entre dos secuencias cualesquiera con esta propiedad nos indica que el grado de dependencia es superior en aquella que resulte mayor en orden supermodular. En efecto, $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R_m(F_1, \cdots, F_m)$ señala que, en términos esperados, el incremento en la siniestralidad del grupo provocada por un incremento en la siniestralidad de uno cualquiera de sus riesgos, es superior en $\mathbf{Y}$ que en $\mathbf{X}$, independientemente del comportamiento del resto de riesgos en el conjunto. Esta propiedad exige que el grado de interdependencia entre los diferentes riesgos individuales que forman el conjunto sea superior en $\mathbf{Y}$ que en $\mathbf{X}$. Condiciones necesarias para el cumplimiento de $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$ son:

1.
$$Cov\,(X_i, X_j) \leq Cov\,(Y_i, Y_j)\,,\ \forall i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j. \tag{9.13}$$

2.
$$\begin{aligned} &\Pr\left(X_1 \leq x_1, \cdots, X_m \leq x_m\right) \leq \Pr\left(Y_1 \leq x_1, \cdots, Y_m \leq x_m\right), \\ &\Pr\left(X_1 > x_1, \cdots, X_m > x_m\right) \leq \Pr\left(Y_1 > x_1, \cdots, Y_m > x_m\right),\ \forall x_1, \cdots x_m \geq 0. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Desafortunadamente, ninguna de estas condiciones es suficiente para probar la existencia de orden supermodular.

A diferencia del caso bivariante, las relaciones en (9.13) y (9.14) no son tampoco suficientes para probar

$$X_1 + \cdots + X_m \leq_{sl} Y_1 + \cdots + Y_m$$

(ver contraejemplo en pág. 130).

Así, la única posibilidad para la ordenación, en función de su riesgo global, de las diferentes secuencias en $R_{m,+}\left(F_1, \cdots, F_m\right)$, parece estar en la búsqueda de relaciones de orden supermodular entre las mismas. El orden supermodular es un orden sobre el grado de dependencia; sin embargo, medidas cuantitativas de dependencia fácilmente verificables, tales como las definidas en (9.13) y (9.14), no son suficientes para probar su existencia. Probar la existencia de orden supermodular a partir de la definición dada en (9.12) resultará difícil en la mayoría de situaciones prácticas, por lo que sus posibilidades de aplicación son, hoy por hoy, muy limitadas.

Concluir con las siguientes consideraciones, válidas para un grupo formado por m ($m \geq 2$) riesgos con una relación de dependencia acumulativa positiva.

1. Asumir la tradicional hipótesis de mutua independencia entre los riesgos individuales en el grupo conlleva una infravaloración de su siniestralidad conjunta.

2. Este grupo se encuentra, en términos de riesgo, entre la independencia y la comonotonía, puesto que su distribución suma queda acotada, en orden stop-loss, entre las distribuciones que resultan de la suma de sus homólogos independientes y comonótonos.

3. Incorporar el incremento de riesgo de este conjunto debido a la no independencia de sus componentes pasa por estimar un grado suficiente de

dependencia entre los mismos como para garantizar que, en ningún caso, su distribución multivariante de probabilidad quede por debajo de la real, en orden supermodular. La falta de medidas de dependencia fácilmente verificables y, a su vez, suficientes para probar la existencia de orden supermodular limitan las posibilidades de este análisis.

9.3 Dependencia positiva. Su influencia en el riesgo de la cartera

No podíamos dejar los resultados de la primera parte de este trabajo sin plantearnos alguna aplicación práctica de los mismos. En la segunda parte, nos hemos ocupado de analizar el efecto que provocan algunas de las formas de dependencia positiva anteriormente tratadas, sobre el riesgo de una cartera de seguros de vida. El modelo individual de vida presenta dos ventajas básicas que motivaron su elección,

1. Por una parte, las relaciones de dependencia positiva que puedan existir entre diferentes pólizas en una misma cartera parecen fácilmente identificables,

   (a) Pueden existir diferentes pólizas sobre una misma vida. Esta circunstancia se dará, por ejemplo, en carteras que incluyan seguros de vida ligados a tarjetas de crédito. Es frecuente en el momento de contratar una tarjeta de crédito con una entidad bancaria que el titular obtenga, de forma gratuita, un seguro de vida. Si todas las pólizas de una entidad van a parar a una misma cartera, es posible encontrar en esa cartera varias pólizas sobre una misma vida cuando un mismo titular posea más de una tarjeta de crédito.

   (b) Si existen varios miembros de una misma unidad familiar con pólizas en la cartera, debemos prever un cierto grado de dependencia positiva entre su mortalidad puesto que todos ellos están expuestos, en mayor o menor grado, a factores de riesgo comunes.

   Es habitual encontrar un determinado número de matrimonios con pólizas en una misma cartera. Entre otras razones, esta circunstancia se sigue de la contratación de un seguro de vida por parte de cada uno de los cónyuges en el momento de formalizar un préstamo hipotecario.

Es frecuente que la contratación se efectúe con la entidad bancaria que realiza el préstamo y, en general, ambos van a parar a una misma cartera.

(c) Pueden existir pólizas asociadas a trabajadores de una misma compañía. Según sea la actividad de esta compañía es claro que, en determinadas ocasiones, sus respectivas probabilidades de muerte no pueden ser consideradas independientes puesto que existirán factores de riesgo elevados y comunes a todos los trabajadores.

(d) En una cartera con gran densidad de asegurados en una misma área geográfica, incendios, explosiones o catástrofes naturales derivadas de tormentas, huracanes, terremotos,$\cdots$ provocarán una acumulación de siniestros y, por tanto, deberemos considerar un cierto grado de dependencia positiva entre estos asegurados.

2. Por otra parte, las recurrencias aparecidas en la literatura actuarial desde la segunda mitad de los ochenta, permiten cuantificar de una manera bastante exacta la distribución coste total de una cartera de seguros de vida cualquiera bajo la hipótesis de independencia entre todos sus riesgos.

Así, centrando el análisis en carteras de seguros de vida, sabremos cuáles son los posibles grupos con una relación de dependencia positiva entre sus componentes y, cuando seamos capaces de aproximar sus respectivas distribuciones multivariantes de probabilidad, no sólo podremos considerar el incremento de riesgo que se ha producido en una cartera cualquiera por la no independencia en estos grupos, sino que además, dispondremos de una medida del riesgo total asumido en la misma. Si admitimos que las relaciones de dependencia se localizan dentro de cada uno de estos grupos, siendo los riesgos en diferentes grupos, así como los que quedan fuera de éstos mutuamente independientes, la distribución coste total de la cartera resulta de la convolución de las respectivas distribuciones suma en cada uno de los grupos no independientes con la distribución suma de la masa de riesgos que hayan quedado como independientes en la cartera. En cuanto a las distribuciones suma asociadas a cada uno de los grupos detectados, serán inmediatas a partir de las correspondientes distribuciones multivariantes encontradas, mientras que la asociada al grupo independiente resultará de alguna de las recurrencias antes señaladas.

9.3.1 El riesgo en carteras de seguros de vida. Hipótesis de independencia

Si el objetivo en esta segunda parte, pasa por aproximar la distribución del coste total en carteras de seguros de vida que presenten dependencias de signo positivo entre algunos de sus riesgos, parecía lógico empezar revisando algunas de las metodologías aparecidas en la literatura para el cálculo de la distribución del coste total en el modelo individual de la teoría del riesgo. Éste ha sido el planteamiento del capítulo 6. Bajo la hipótesis de mutua independencia para todos los riesgos de la cartera, la recurrencia de De Pril (1986), -ver teorema 6.3-, permite el cálculo exacto de la distribución del coste total de una cartera de seguros de vida cualquiera que garantice el pago de un capital fijo a la muerte de cada uno de sus asegurados. De Pril (1989) generalizó esta recurrencia exacta a una cartera de seguros de vida cualquiera, -ver teoremas 6.5 y 6.6-. La novedad de éstas es que contemplan la posibilidad de que la cuantía a pagar en caso de muerte del asegurado sea aleatoria. Dhaene & Vanderbroek (1995) presentan un algoritmo alternativo para el cálculo exacto de la distribución del coste total en cualquier tipo de cartera de vida, -ver teorema 6.7-. Cuando la cartera es poco heterogénea este algoritmo mejora a los de De Pril (1989).

Además de estas recurrencias exactas, hemos considerado también las diferentes aproximaciones propuestas dentro del modelo individual para el cálculo de la distribución del coste total. Se trata de las aproximaciones de Kornya (1983), Hipp (1986) y De Pril (1989). Todas ellas han sido deducidas en el apartado 6.5.1, donde también hemos acotado su error máximo. Igualmente, en el apartado 6.5.2, hemos recogido las diferentes aproximaciones propuestas a partir del modelo colectivo de la teoría del riesgo, así como las aproximaciones a través del modelo mixto propuestas por Kaas, van Heerwaarden & Goovaerts (1988 a,b, 1989).

Salvo en el caso de la recurrencia de De Pril (1986), las propuestas señaladas permiten el cálculo de la distribución del coste total a través del modelo individual de cualquier cartera de seguros, no necesariamente de vida. Si las distribuciones individuales de probabilidad asociadas a cada uno de los riesgos son conocidas, basta con tratar los siniestros que cada riesgo individual pueda producir en el período como uno solo. Desde este punto de vista, pueden resultar especialmente interesantes las aproximaciones propuestas cuando las distribuciones de la cuantía a pagar en caso de siniestro queden definidas en más de unos pocos puntos puesto que, esta circunstancia, unida al elevado número de pólizas en cualquier cartera real, convierten a las recurrencias exactas en inoperativas en muchas situaciones prácticas. Sin embargo, si nos centramos en carteras de seguros de vida, las dos modalidades básicas en el mercado ofrecen el pago de un capital fijo a la muerte del asegurado y la posibilidad de contratar, además, el doble del capital asegurado pagadero en caso de que la muerte se produzca por accidente. Éstas han sido las dos únicas posibilidades contempladas en el análisis que sigue. En cada caso, las recurrencias exactas de De Pril (1986) y De Pril (1989) o Dhaene & Vanderbroek (1995) se han mostrado perfectamente aplicables para las tres carteras consideradas: Cartera de Gerber (1979), Kornya (1983) y una cartera real recogida de Kuon, Reich & Reimens (1987), -ver apartado 6.2 -, por lo que los resultados numéricos en este trabajo se han obtenido únicamente a partir de estas recurrencias. Señalar, sin embargo, que los resultados serían bastante similares a partir de cualquiera de las aproximaciones propuestas dentro del modelo individual, si consideramos un grado suficiente de aproximación, o bien a través del modelo mixto, evaluando los riesgos con mayor capital asegurado a través del modelo individual.

9.3.2 El riesgo en carteras de seguros de vida. Hipótesis de dependencia bivariante y trivariante positiva

En los capítulos que siguen (capítulos 7 y 8), ampliamos el análisis iniciado, y nos ocupamos de la determinación de la distribución del coste total en carteras de seguros de vida que presenten relaciones de dependencia de signo positivo entre algunos de sus riesgos. De entre las relaciones de dependencia señaladas en las pág. 312 y 313 por ser habituales en este tipo de carteras, nos hemos limitado a las que ocurran en grupos de dos y/o tres riesgos. Así, de los cuatro puntos entonces apuntados, nos limitamos al tratamiento de los dos primeros. En el caso de un mismo asegurado, consideramos que como máximo tiene tres pólizas en la misma cartera. Creemos que esta hipótesis es suficiente, aunque no existiría problema en su ampliación, puesto que las diferentes pólizas son, en este caso, comonótonas y fácilmente tratables a partir de los resultados del capítulo 5, independientemente de cuántas sean. En el tratamiento de relaciones de dependencia entre miembros de una misma unidad familar, limitamos el análisis a que éstas se produzcan entre los cónyuges y uno de sus descendientes/ascendientes.

Carteras de seguros de vida con pago único de capital

Supongamos, en primer lugar, que una cartera de seguros de vida con pago único de capital contiene un determinado número de duplicados/triplicados y matrimonios, algunos de ellos con un descendiente/ascendiente que convive con ellos. Supongamos también que en algunas de estas parejas, uno de los cónyuges es además un duplicado. ¿Cómo podemos determinar el riesgo asumido en la cartera evitando la infravaloración que inevitablemente conlleva la hipótesis de independencia para todos los riesgos que la componen? Los resultados de los capítulos 6 y 7 dan respuesta a esta pregunta. Los principales pasos a seguir son:

1. En primer lugar, debemos plantearnos si la relación de dependencia entre los riesgos de cada uno de los grupos señalados es suficiente como para ser considerada. Lo serán en la medida en que incrementen el riesgo de la cartera, es decir, siempre y cuando la v.a. coste total que resulta para la cartera considerando estas dependencias supere, en orden stop-loss, a la que resulta de no considerarlas.

   El orden stop-loss se mantiene bajo la convolución de riesgos independientes, -ver teorema 3.11-. Así, de los resultados de los capítulos 4 y 5, sabemos que basta con probar la positividad en la covarianza de cada una de las parejas y una relación de dependencia acumulativa positiva en cada uno de los tríos, para que éstos incrementen el riesgo de la cartera con respecto al caso independiente. Cuando se trate de duplicados/triplicados, estamos ante riesgos comonótonos y podemos garantizar la positividad en su covarianza en el caso bivariante y una relación de dependencia acumulativa positiva en el trivariante (y, en general, en el multivariante). En el resto de casos, esta comprobación debe realizarse en base a la experiencia histórica de siniestralidad causada por grupos similares. Si históricamente los matrimonios se han caracterizado por presentar una correlación positiva y cuando además en el conjunto existe un ascendiente/descendiente los tres riesgos presentan dependencia acumulativa positiva, no existen motivos para pensar que ahora su comportamiento será diferente.

2. Si asumimos que los diferentes grupos detectados presentan una positividad en su covarianza, en el caso bivariante, y una relación de dependencia acumulativa positiva, en el trivariante, la distribución coste total de la cartera se encuentra, en términos de riesgo, entre la que resulta de rea-

lizar la hipótesis de independencia y comonotonía, respectivamente, en cada uno de los grupos no independientes, -ver (7.3) y (8.3)-. Es interesante deducir estas dos distribuciones extremas puesto que acotan, en orden stop-loss, la que finalmente corresponda a la cartera.

La distribución coste total bajo la hipótesis de independencia para todos los riesgos en la cartera se obtiene fácilmente a partir de la recurrencia de De Pril (1986).

En cuanto a la distribución coste total que acota superiormente la correspondiente a nuestra cartera, se obtendrá de la siguiente manera:

(a) En cada una de las diferentes parejas/tríos realizamos la hipótesis de comonotonía. Su distribución acumulativa de probabilidad es, en general,

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = \min\{F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n)\}, \forall x_1,\cdots,x_n \geq 0,$$

siendo n el número de riesgos comonótonos (en nuestro caso $n = 2$ o $n = 3$, según se trate de una pareja o un trío).

(b) Desacumulando cada una de las funciones resultantes, tendremos las respectivas funciones de densidad de probabilidad bivariantes/trivariantes.

(c) De las funciones de densidad de probabilidad anteriores, resultarán de forma inmediata las distribuciones suma que indican el comportamiento de la siniestralidad conjunta de cada pareja/trío.

(d) La distribución suma correspondiente a los riesgos que han quedado como independientes resultará a partir de la recurrencia de De Pril (1986).

(e) Convolucionando las distribuciones suma resultantes de (c) con la obtenida en (d) llegaremos a la distribución coste total de la cartera.

Resulta interesante comparar la diferencia entre las primas stop-loss asociadas a ambas distribuciones. Si ésta es pequeña, será porque existen muy pocos riesgos dependientes y, en tal caso, quizá no es necesario continuar el análisis. Tenemos la opción de asumir la hipótesis de independencia que, creemos es la más realista o, alternativamente, podemos asumir la hipótesis de comonotonía si estamos extremadamente preocupados por no infravalorar el riesgo real.

Si la estructura de dependencia es la definida, las diferencias serán importantes y debemos plantearnos aproximaciones más realistas de la distribución coste total de nuestra cartera.

3. Los diferentes duplicados/triplicados que puedan existir en la cartera son riesgos comonótonos y sus respectivas distribuciones suma son las halladas en 2.(c) para éstos.

4. Para cada una de las parejas detectadas, deberemos tratar de aproximar lo más exactamente posible sus respectivas correlaciones si se trata de considerar su riesgo real. De (9.6) se sigue que a medida que incrementan las respectivas covarianzas (correlaciones), incrementa el riesgo de cada pareja. Así, se trata de garantizar que, en ningún caso, éstas queden infravaloradas puesto que la infravaloración se trasladaría inevitablemente al total de la cartera.

   La estimación de la correlación en cada pareja deberá realizarse una vez más en base a la experiencia histórica de siniestralidad en grupos similares, puesto que ésta será nuestra única información al respecto. Ésta dependerá de factores tan variados como la edad de los cónyuges, si trabajan o no juntos, la frecuencia con que viajan en un mismo vehículo, $\cdots$

   Nuestra propuesta pasa por estimar el tanto por uno que define el coeficiente de correlación de cada pareja sobre la máxima que puede existir entre los dos riesgos que la componen. Para una pareja cualquiera, sea ésta (X_1, X_2), su correlación máxima es la que resulta de realizar la hipótesis de comonotonía. Así, proponemos estimar el valor de s en el intervalo $[0,1]$ tal que

$$\varphi_{X_1,X_2} = s\,\varphi_{X_1^U,X_2^U}, \tag{9.15}$$

   donde $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ indica que la hipótesis de dependencia asumida para esta pareja es la de comonotonía.

   El valor de s finalmente estimado será, en todo caso, una aproximación. Está claro que no dispondremos de datos suficientes para determinar el valor exacto de este parámetro y de lo que se trata es de llegar a determinar el grado máximo de correlación que a nuestro entender pueden presentar estos dos riesgos.

   Una vez estimado el valor de s, no sólo habemos incorporado el incremento de riesgo en esta pareja debido a su no independencia, sino que además conoceremos su distribución bivariante de probabilidad. En el apartado 7.3.1 hemos probado que ésta queda definida, en cualquier punto, como combinación lineal convexa de las respectivas funciones de densidad de probabilidad asociadas al par comonótono, $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ y al independiente, $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$. Concretamente, para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, se cumple

$$\begin{aligned}\Pr\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) = s \ &\Pr\left(X_1^U = x_1, X_2^U = x_2\right) \\ &+ (1-s)\Pr\left(X_1^{\perp} = x_1, X_2^{\perp} = x_2\right),\end{aligned}$$

siendo s el parámetro que define (9.15).

Repitiendo este análisis para cada una de las parejas en la cartera, conoceremos sus respectivas funciones de densidad bivariantes. De éstas resultarán de forma inmediata las distribuciones suma que indican el comportamiento de la siniestralidad conjunta de cada pareja no comonótona.

5. Cuando se trate de un trío formado por un duplicado y su cónyuge, estamos ante dos únicos riesgos. Si representamos por (X_1, X_2, X_3) a este trío, siendo (X_1, X_2) el duplicado y X_3 su cónyuge, se trata de estimar el valor de s que define el coeficiente de correlación entre los dos riesgos,

   $$\varphi_{X_1,X_3} = s\,\varphi_{X_1^U, X_3^U}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

   Su distribución trivariante de probabilidad es:

   $$\Pr\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right) = \begin{cases} \Pr\left(X_1 = x_1, X_3 = x_3\right) & \text{si } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

   donde

   $$\begin{aligned}\Pr\left(X_1 = x_1, X_3 = x_3\right) = s\,&\Pr\left(X_1^U = x_1, X_2^U = x_2\right) \\ &+ (1-s)\Pr\left(X_1^{\perp} = x_1, X_2^{\perp} = x_2\right), \ \forall x_1, x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

   Para cada uno de los conjuntos en la cartera con estas características lograremos, de esta forma, aproximar sus respectivas funciones de densidad de probabilidad trivariantes. De éstas resultarán de forma inmediata las correspondientes distribuciones suma.

6. En cuanto al análisis de los grupos dependientes señalados, nos quedan únicamente por tratar aquellos tríos formados por una pareja con uno de sus descendientes/ascendientes. Puede ser que tengamos dudas sobre si la relación de dependencia de los descendientes/ascendientes es suficiente

como para ser considerada. En este caso, podemos acotar primero el riesgo que éstos pueden provocar y, analizar, si merece la pena considerarlos como dependientes.

Consideremos uno cualquiera de estos tríos, sea éste (X_1, X_2, X_3), siendo X_1, X_2 la pareja y X_3 su descendiente/ascendiente. De la relación de dependencia acumulativa positiva entre estos tres riesgos, se sigue que como mínimo X_3 actuará como independiente con (X_1, X_2) y como máximo como comonótono. Así, el riesgo mínimo que X_3 puede provocar en la cartera viene dado por la distribución suma

$$\Pr\left((X_1{+}X_2)^{\perp} + X_3^{\perp}{=}z\right) = \sum_{\forall x,y\geq 0/x+y=z} \Pr\left(X_1{+}X_2{=}x\right)\Pr\left(X_3{=}y\right), \forall z \geq 0,$$

donde la distribución de $X_1 + X_2$ será la que corresponda tras proceder según 4.

En cuanto al riesgo máximo, se obtiene asumiendo comonotonía entre (X_1, X_2) y X_3. Su función de distribución acumulativa de probabilidad es

$$\Pr\left((X_1{+}X_2)^{U} \leq x, X_3^{U} \leq y\right) = \min\left\{\Pr\left(X_1{+}X_2\right) \leq x, \Pr\left(X_3 \leq y\right)\right\}, \forall x, y \geq 0.$$

Desacumulando esta función resultará su función de densidad de probabilidad y de ésta se obtiene de forma inmediata la distribución suma de $\left((X_1 + X_2)^{U} + X_3^{U}\right)$que indica el riesgo máximo que X_3 puede incorporar a la cartera.

Si para cada uno de los tríos en la cartera con estas características, procedemos de esta manera tendremos sus respectivas distribuciones suma bajo las hipótesis de independencia y comonotonía. Si incorporamos éstas a 7 (paso siguiente), tendremos la distribución coste total que resulta para la cartera bajo estas dos hipótesis. Se trata, a continuación, de comparar las respectivas primas stop-loss asociadas a ambas distribuciones y, si la diferencia es pequeña, parece lógico quedarnos con la que resulta asumiendo independencia para los descendientes/ascendientes, puesto que su escasa dependencia es la que nos ha llevado al análisis realizado. La infravaloración del riesgo de esta v.a. coste total será mucho menor que la que ha resultado de asumir la hipótesis de comonotonía para estos riesgos y, por consiguiente, la infravaloración real será escasa.

Cuando la diferencia entre las primas stop-loss resultantes sea considerable, parece necesario analizar la relación de dependencia de los tres riesgos que componen cada uno de los conjuntos señalados. Consideremos nuevamente el conjunto (X_1, X_2, X_3), donde (X_1, X_2) era, recordemos, la pareja y X_3 su descendiente/ascendiente. De los resultados del capítulo 5, tenemos que debemos tratar de considerar un grado de dependencia suficiente entre estos tres riesgos como para garantizar que, en ningún caso, su distribución trivariante de probabilidad quede por debajo de la real, en orden supermodular. Observar que, aunque podamos llegar a aproximar la distribución de probabilidad asociada a estos tres riesgos estableciendo hipótesis sobre su relación de dependencia, resultará muy difícil probar el orden supermodular de las distribuciones que resulten bajo diferentes hipótesis de dependencia. Esta dificultad nos impide seguir por esta vía y restringirá el análisis de relaciones de dependencias en carteras de vida con doble indemnización al caso bivariante. Sin embargo, en el caso que ahora nos ocupa, hemos conseguido, en el capítulo 8, establecer relaciones de orden basadas en las distribuciones trivariantes de probabilidad que bajo cada hipótesis resulten, suficientes para garantizar orden stop-loss.

Para aproximar la distribución trivariante de (X_1, X_2, X_3) es necesario, en primer lugar, estimar las respectivas correlaciones que en este conjunto se pueden definir. Al igual que en el caso bivariante, se trata ahora de estimar en el intervalo $[0, 1]$, los parámetros s_1, s_2, s_3 que definen los coeficientes de correlación que dos a dos presentan los riesgos en este conjunto sobre la máxima que, en cada caso, puede existir,

$$\varphi_{X_1,X_2} = s_1 \varphi_{X_1^U, X_2^U}, \tag{9.16}$$

$$\varphi_{X_2,X_3} = s_2 \varphi_{X_2^U, X_3^U}, \tag{9.17}$$

$$\varphi_{X_1,X_3} = s_3 \varphi_{X_1^U, X_3^U}. \tag{9.18}$$

A la hora de estimar estos tres parámetros debemos tener en cuenta que únicamente dos de ellos son libres. Una vez éstos estimados, el intervalo en que el tercero puede tomar valores queda reducido al dado en (8.15).

Estimados los valores de s_1, s_2 y s_3, tenemos una aproximación de las probabilidades bivariantes asociadas a estos tres riesgos. Para cualesquiera $x, y \geq 0$, éstas quedan definidas como

$$\Pr(X_1{=}x, X_2{=}y) = s_1 \Pr\left(X_1^U{=}x, X_2^U{=}y\right) + (1-s_1) \Pr\left(X_1^\perp{=}x, X_2^\perp{=}y\right),$$
$$\Pr(X_2{=}x, X_3{=}y) = s_2 \Pr\left(X_2^U{=}x, X_3^U{=}y\right) + (1-s_2) \Pr\left(X_2^\perp{=}x, X_3^\perp{=}y\right),$$
$$\Pr(X_1{=}x, X_3{=}y) = s_3 \Pr\left(X_1^U{=}x, X_3^U{=}y\right) + (1-s_3) \Pr\left(X_1^\perp{=}x, X_3^\perp{=}y\right).$$

Conocidas estas probabilidades bivariantes, basta, en este caso, con aproximar una de las ocho probabilidades trivariantes definidas, para que la distribución conjunta de probabilidad asociada a estos tres riesgos quede totalmente determinada. Concretamente, proponemos aproximar

$$p_{111} = \Pr\left(X_1 = \alpha_1, X_2 = \alpha_2, X_3 = \alpha_3\right)$$

y entonces las siete probabilidades trivariantes restantes, resultan de sustituir las respectivas probabilidades bivariantes en las expresiones de (8.25) a (8.32).

Es claro que para llegar a aproximar la probabilidad conjunta de muerte de los tres en el período considerado, deberemos decir algo sobre su grado de interdependencia. Definidas las relaciones dos a dos y asumiendo que estos tres riesgos presentan dependencia cuadrática positiva, el intervalo en que p_{111} puede tomar valores, queda reducido a $\left[p_{111}^{\min}, p_{111}^{\max}\right]$, siendo éstos los definidos en (8.59) y (8.60). Se trata, entonces de estimar el valor de t en el intervalo $[0,1]$ que define

$$p_{111} = p_{111}^{\min} + t\left(p_{111}^{\max} - p_{111}^{\min}\right). \tag{9.19}$$

En cuanto a la estimación del parámetro t, proponemos elegir uno de los tres pares en el conjunto y tratar de cuantificar el efecto que añade el riesgo que ha quedado fuera, X_i, $i \in \{1,2,3\}$, en p_{111} por el hecho de no ser independiente con los dos riesgos que componen el par elegido. Supongamos que la pareja escogida es (X_1, X_2). Definidas las relaciones dos a dos, el incremento mínimo y máximo en esta probabilidad por la no independencia de X_3 son, respectivamente,

$$t_3^{\min}\left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}\right),$$
$$t_3^{\max}\left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11}\right),$$

siendo $t_3^{\min}, t_3^{\max}$ los definidos en (8.67) e

$$\triangle p_{1.1} = p_{1.1} - p_{1..}p_{..1} = \Pr\left(X_1{=}\alpha_1, X_3{=}\alpha_3\right) - \Pr\left(X_1{=}\alpha_1\right)\Pr\left(X_3{=}\alpha_3\right),$$
$$\triangle p_{.11} = p_{.11} - p_{.1.}p_{..1} = \Pr\left(X_2{=}\alpha_2, X_3{=}\alpha_3\right) - \Pr\left(X_2{=}\alpha_2\right)\Pr\left(X_3{=}\alpha_3\right).$$

Estimando el valor de t en $[0,1]$ que define el parámetro t_3 que mide la parte de incremento que X_3 puede o no añadir a la probabilidad conjunta de muerte de los tres,

$$t_3 = t_3^{\min} + t\left(t_3^{\max} - t_3^{\min}\right) \tag{9.20}$$

la probabilidad

$$p_{111} = p_{11.}p_{..1} + t_3 \left(\triangle p_{1.1} + \triangle p_{.11} \right)$$

resulta equivale a la definida en (9.19) siendo t el estimado en (9.20).

Observar que, independientemente del riesgo escogido, la estimación del valor de t en $[0,1]$ es única, puesto que estamos determinando la parte del incremento que un riesgo cualquiera de los tres puede o no incorporar en p_{111} y el intervalo en que se mide esta libertad queda totalmente determinado una vez definidas las relaciones dos a dos. Para consideraciones adicionales acerca de la estimación de este valor remitimos el lector a las pág. 262 a 266.

Estimados los valores de s_1, s_2, s_3 y t, no sólo conoceremos la distribución trivariante de probabilidad correspondiente a (X_1, X_2, X_3), sino que además habremos incorporado el incremento de riesgo en esta pareja debido a su no independencia. En el apartado 8.2.3, hemos probado que fijado un valor de t, $t \in [0,1]$, en la clase $R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, aquellos conjuntos con mayores correlaciones son los más peligrosos. Concretamente, si $(X_1, X_2, X_3), (X_1', X_2', X_3') \in R_{3,+}(p_1, p_2, p_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y

$$t = t',\ s_i \leq s_i',\ i = 1, 2, 3,$$

entonces

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq_{sl} X_1' + X_2' + X_3'.$$

Así, para los riesgos en (X_1, X_2, X_3) debemos tratar de estimar lo más exactamente posible sus respectivas correlaciones. Cuando no estemos seguros del valor a asignarles, parece una estrategia prudente tratar de sobrevalorarlas en una pequeña cuantía. En cuanto a la estimación del parámetro t, debemos tratar de que se ajuste en la medida de lo posible a la realidad. Sin embargo, éste no modifica nuestra percepción sobre el riesgo en este trío circunstancia que reduce, en parte, la importancia de su determinación exacta.

Si repetimos este análisis para cada uno de los tríos en la cartera con estas características, tendremos una aproximación de sus respectivas funciones de densidad de probabilidad trivariantes. De éstas resultarán de forma inmediata las distribuciones suma de cada conjunto. Éstas incorporan el incremento de riesgo en cada conjunto por la no independencia de sus componentes.

7. Convolucionando la distribución suma hallada en 2 (d) para los riesgos independientes, con las que hayan resultado de 3, 4, 5 y 6 tendremos una aproximación más o menos real de la distribución coste total de la cartera. Señalar que aunque finalmente ésta quede infravalorada hemos considerado una parte del incremento producido por la relación de dependencia positiva en los grupos señalados y, en cualquier caso, la infravaloración será menor que la que resulta de asumir la hipótesis de independencia para todos los riesgos en la cartera.

El análisis apuntado se ha realizado sobre la cartera de Gerber en los apartados 7.3.2 y 8.3. En el primer caso, apartado 7.3.2, hemos considerado únicamente dependencias bivariantes para, posteriormente, en el apartado 8.3, ampliar algunos de estos grupos con un riesgo adicional. Las principales conclusiones a que en cada caso hemos llegado son las apuntadas en las pág. 214 a 215 y 298 a 299, respectivamente.

Carteras de seguros de vida con doble indemnización en caso de muerte por accidente

Supongamos ahora que las dependencias señaladas se producen en una cartera de seguros de vida con doble indemnización en caso de que la muerte se produzca por accidente. Este ha sido el caso tratado en el apartado 7.4, donde nos hemos limitado a considerar dependencias bivariantes. De sus resultados, se sigue el procedimiento a seguir en el tratamiento de duplicados y parejas en la cartera. Aunque no hemos apuntado esta posibilidad, los resultados del capítulo 5 nos permiten incorporar sin problema a los triplicados y a aquellas parejas en las que uno de los cónyuges es además un duplicado. En cuanto a las parejas con un ascendiente/descendiente, si bien no podremos incorporar una hipótesis concreta de dependencia, podemos, al igual que en el caso anterior, acotar el riesgo mínimo y máximo que pueden añadir a la cartera. Señalamos, a continuación, los principales puntos a seguir para llegar a aproximar la distribución coste total de la cartera. A fin de no resultar repetitivos y en la medida en que éstos son paralelos a los señalados para el caso de carteras de vida con pago único señalamos aquí las diferencias y remitimos a una lectura conjunta de los que siguen con los anteriores.

1. Al igual que en el caso anterior, debemos empezar probando que la relación de dependencia en cada grupo es suficiente como para ser considerada. Puesto que ahora la distribución de probabilidad de los riesgos individuales queda definida en tres puntos, deberemos probar que la relación de dependencia en las parejas es, como mínimo, de dependencia cuadrática positiva, mientras que la condición para los tríos sigue siendo de dependencia acumulativa positiva.

2. Si asumimos que los diferentes grupos detectados presentan dependencia cuadrática positiva, en el caso bivariante, y una relación de dependencia acumulativa positiva en el trivariante, la distribución coste total de la cartera se encuentra, en términos de riesgo, entre la que resulta de realizar la hipótesis de independencia y comonotonía, respectivamente, en cada uno de los grupos no independientes. Este resultado se sigue de los teoremas 4.19, 5.13 y 5.14, puesto que como sabemos, el orden stop-loss se mantiene bajo la convolución de riesgos independientes. Señalar nuevamente el interés en la obtención de estas dos distribuciones extremas puesto que acotan el riesgo de la cartera.

   La distribución coste total bajo la hipótesis de independencia para todos los riesgos de la cartera resulta ahora a partir de la recurrencia de De Pril (1989) o, alternativamente, de la de Dhaene & Vanderbroek (1995).

   En cuanto a la distribución coste total que acota superiormente la correspondiente a la cartera, se obtendrá procediendo según 2 (a) a 2 (e) en el caso anterior, utilizando ahora la recurrencia de De Pril (1989) o la de Dhaene & Vanderbroek (1995) en 2 (d). Nuevamente proponemos comparar las primas stop-loss asociadas a cada una de las dos distribuciones resultantes para analizar si merece la pena continuar con los puntos que siguen.

3. Los diferentes duplicados/triplicados son riesgos comonótonos y sus respectivas distribuciones suma las que ahora hayan resultado para estos conjuntos.

4. En cada una de las parejas detectadas, debemos tratar de aproximar lo más exactamente posible sus correspondientes distribuciones bivariantes de probabilidad. Se trata de garantizar que, en ningún, la distribución bivariante acumulativa/desacumulativa de probabilidad que resulte para cada pareja quede por debajo de la real.

A fin de aproximar las respectivas probabilidades bivariantes asociadas a una pareja cualquiera, sea ésta (X_1, X_2), proponemos estimar el valor de s que define su coeficiente de correlación como tanto por uno sobre la máxima que puede existir,

$$\varphi_{X_1,X_2} = s\,\varphi_{X_1^U,X_2^U},\ 0 \leq s \leq 1. \tag{9.21}$$

De la relación de dependencia cuadrática positiva entre estos dos riesgos, podemos garantizar que también ahora $\varphi_{X_1,X_2} \in \left[0, \varphi_{X_1^U,X_2^U}\right]$. Si ésta es nuestra única estimación, tal y como proponemos, será necesaria ahora una hipótesis adicional.

La relación en (9.21) no determina, en este caso, de manera única la distribución de probabilidad bivariante asociada a esta pareja, ver (7.27). De entre todas las posibles distribuciones que cumplen (9.21) nos quedamos con la definida, nuevamente, en cada punto, como combinación lineal convexa de las respectivas funciones de densidad de probabilidad asociadas al par comonótono, $\left(X_1^U, X_2^U\right)$ y al independiente, $\left(X_1^\perp, X_2^\perp\right)$. Concretamente, para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, suponemos que se cumple

$$\Pr\left(X_1{=}x_1, X_2{=}x_2\right) = s\,\Pr\left(X_1^U{=}x_1, X_2^U{=}x_2\right) + (1-s)\Pr\left(X_1^\perp{=}x_1, X_2^\perp{=}x_2\right), \tag{9.22}$$

siendo s el parámetro que define (9.21).

Observar que en el caso de seguros de vida con pago único de capital ésta era la única posibilidad, mientras que ahora resulta de considerar como solución particular de (9.21), esta relación para las probabilidades bivariantes referidas a la probabilidad de muerte de ambos en el período considerado por cualquier causa, ver pág. 220.

De (9.22) se sigue que para cualesquiera $x_1, x_2 \geq 0$, la función de distribución acumulativa asociada a estos riesgos es

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1^\perp,X_2^\perp}(x_1,x_2) + s\left(F_{X_1^U,X_2^U}(x_1,x_2) - F_{X_1^\perp,X_2^\perp}(x_1,x_2)\right).$$

de donde se deduce inmediatamente el no decrecimiento de F_{X_1,X_2} en s puesto que la relación

$$F_{X_1^U,X_2^U}(x_1,x_2) - F_{X_1^\perp,X_2^\perp}(x_1,x_2) \geq 0$$

es siempre válida por ser

$$F_{X_1^U,X_2^U}(x_1,x_2) = \min\left\{F_1(x_1), F_2(x_2)\right\} \geq F_1(x_1)\,F_2(x_2) = F_{X_1^\perp,X_2^\perp}(x_1,x_2).$$

Así, se trata nuevamente de estimar lo más exactamente posible el coeficiente de correlación asociado a esta pareja, tratando de sobreestimarlo ligeramente cuando existan dudas sobre su valor exacto. Si asumimos que la probabilidad de muerte conjunta, por cualquier causa, resulta como combinación convexa de las respectivas probabilidades independiente y comonótona, esta pequeña sobrevaloración nos garantiza que estamos considerando una hipótesis suficiente en lo que se refiere al riesgo de esta pareja.

Repitiendo este análisis para cada una de las parejas en la cartera, conoceremos sus respectivas funciones de densidad bivariantes. De éstas resultarán de forma inmediata las distribuciones suma que indican el comportamiento de la siniestralidad conjunta de cada pareja no comonótona.

5. En el tratamiento de los tríos formados por un duplicado y su cónyuge, procederemos como en el caso de seguros con pago único de capital, ver punto 5. La distribución de probabilidad asociada a la pareja se obtiene según (9.22) de igual manera que entonces. Recordemos que este procedimiento, exige la hipótesis adicional señalada en el punto anterior.

6. En cuanto a los tríos formados por una pareja con uno de sus ascendientes/descendientes, no ha sido posible generalizar los resultados hallados para seguros de vida con pago único de capital. Sin embargo, podemos, igualmente, acotar el riesgo que estos tríos pueden provocar en la cartera. El procedimiento a seguir es el indicado en el punto 6 del caso anterior, siendo las respectivas distribuciones suma bivariantes, las obtenidas ahora en 4.

   Incorporando al punto que sigue, las distribuciones suma que resulten de asumir, en cada trío, independencia y comonotonía entre el ascendiente/descendiente y la pareja tendremos la distribución coste total de la cartera que bajo cada una de estas hipótesis resulta. Se trata, a continuación, de comparar las respectivas primas stop-loss asociadas a ambas distribuciones. Si la diferencia es pequeña, la hipótesis de independencia para los descendientes/ascendientes en la cartera aproximará de manera bastante exacta el riesgo real de la cartera. Cuando resulten diferencias significativas entre las primas stop-loss bajo cualquier nivel de retención, la hipótesis de independencia probablemente conlleve a una infravaloración significativa del riesgo real, aunque ésta siempre será menor que la sobrevaloración derivada de la hipótesis de comonotonía. Ante la imposibilidad de tratar hipótesis intermedias, parece lógico asumir la independencia de estos riesgos y ser conscientes de la infravaloración que, en cada caso, esta hipótesis puede provocar.

7. Convolucionando la distribución suma hallada ahora en 2 (d) para los riesgos independientes, con las que hayan resultado de 3, 4, 5 y 6 tendremos una aproximación más o menos real de la distribución coste total de la cartera. Señalar, nuevamente, que aunque esta distribución quede finalmente infravalorada, en la medida en que afecten las las dependencias no consideradas de ascendientes/descendientes y/o cuando hayamos infravalorado las correlaciones estimadas, la infravaloración será menor que la que resuta de asumir la hipótesis de independencia para todos los riesgos en la cartera.

Sobre la cartera de Gerber e incluyendo doble indemnización cuando la muerte del asegurado se produzca por accidente, hemos introducido hipótesis de dependencia bivariante entre algunos de sus riesgos. Para este caso, en el apartado 7.4.2, hemos seguido un análisis paralelo al aquí propuesto, obviando las dependencias trivariantes. Observar que no existe problema en considerar también las relaciones trivariantes ahora señaladas y si éstas no se han incluido ha sido únicamente para evitar una excesiva repetición de procedimiento.

Finalizar indicando las limitaciones del análisis realizado, máxime cuando en el análisis de relaciones de dependencia intermedias referidas a tres riesgos únicamente consideramos carteras de seguros de vida con pago fijo de capital, sin contemplar doble indemnización para el caso en que la muerte se produzca por accidente. Incluso reduciendo la dependencia a grupos formados por dos riesgos, en este último caso, es necesario asumir, además, que la probabilidad de muerte conjunta por cualquier causa resulta, en cada pareja, como combinación lineal convexa de las respectivas probabilidades independientes y comonótonas. Estas limitaciones se siguen de la metodología utilizada, que nos impide ampliar el análisis y contemplar otras posibilidades tanto o más reales que las aquí planteadas. Aunque existen metodologías alternativas, algunas apuntadas en el siguiente apartado, tampoco están exentas de problemas e hipótesis restrictivas, y si alguna ventaja tiene la elegida es la sencillez con que se formulan las hipótesis de dependencia, característica que motivó su elección.

9.4 Líneas de investigación abiertas

Durante la elaboración de esta tesis doctoral, han surgido temas directamente relacionados con el aquí tratado pero que por su magnitud creemos exigen un estudio aparte y seguramente suficiente para el desarrollo de un trabajo de similares características. En primer lugar, es clara la necesidad de un análisis empírico que permita contrastar las hipótesis aquí asumidas. A través de un análisis de la siniestralidad histórica en carteras de vida, debería probarse la positividad de la covarianza entre cónyuges con pólizas de vida en una misma cartera. Cuando en el contrato se incluya además doble de indemnización para el caso en que la muerte se produzca por acccidente, es necesario probar una relación de dependencia cuadrática positiva entre estos riesgos. En ambos casos, tras probar estas relaciones es necesario tratar de cuantificar el grado de dependencia histórico en estas parejas a fin de aproximar lo más exactamente posible sus respectivos coeficientes de correlación. En el caso de carteras con doble indemnización, resultaría interesante comprobar qué sucede con el riesgo derivado de aquellas parejas que presentan correlaciones positivas y, sin embargo, sus probabilidades conjuntas de muerte no resultan como combinación lineal convexa de las respectivas independientes y comonótonas.

Cuando se trate de grupos formados por tres riesgos no comonótonos, el análisis de la relación de dependencia histórica en conjuntos de estas características, debe probar la existencia de una relación de dependencia acumulativa positiva entre sus componentes. Si estamos ante carteras de vida con pago único de capital, se trata además de cuantificar el grado de dependencia que, dos a dos, presentan los riesgos en estos grupos, así como el valor del parámetro t que en cada grupo define el grado de interdependencia entre los tres riesgos. Estos datos son suficientes para aproximar la distribución trivariante en cada grupo, distribución que además incorpora el incremento de riesgo en el grupo debido a la no independencia de sus componentes.

Si se trata de carteras de vida con doble indemnización, sabemos que, en términos de riesgo, estos grupos se encuentran entre la independencia y la comonotonía. Aunque tal vez la experiencia histórica podría darnos alguna idea sobre la distribución trivariante de probabilidad asociada a cada uno de estos grupos, la imposibilidad práctica de verificar una relación de orden supermodular entre dos distribuciones que resulten bajo dos hipótesis diferentes sobre el grado de dependencia entre estos riesgos, nos impiden garantizar que la distribución finalmente escogida incorpora al menos una parte del incremento de riesgo en el grupo debido a la relación de dependencia positiva entre sus componentes. Esta conclusión se puede generalizar a grupos formados por más de tres riesgos con dependencia positiva y no comonótonos, independientemente de que provengan de carteras de vida con pago único de capital o de carteras con doble indemnización.

Así, en carteras de vida y en lo que se refiere al tratamiento de relaciones de dependencia positiva no comonótonas entre tres o más riesgos, quedan dos grandes temas abiertos. Por una parte, es necesario definir de una manera más precisa el procedimiento a seguir en la determinación de la distribución multivariante de probabilidad asociada a estos riesgos. La experiencia histórica parece suficiente para probar relaciones de dependencia cualitativas, tales como la dependencia cuadrática positiva o la dependencia acumulativa positiva, así como para aproximar medidas de dependencia cuantitativas como la correlación que dos a dos les corresponde a los riesgos en el grupo. Sin embargo, no creemos que ésta sea suficiente para determinar la distribución de probabilidad asociada a cada grupo particular. A nuestro entender, la solución de este problema está en las cópulas. Marceau et al. (1999) utilizan la cópula de Cook-Johnson (1981) para modelizar en el modelo individual relaciones de dependencia entre 40 riesgos idénticamente distribuidos. Sus resultados podrían adaptarse a las carteras de vida tratadas, aunque sería necesario que los riesgos en un mismo grupo estuvieran idénticamente distribuidos, lo cual no parece muy realista.

Tras resolver el problema de la determinación de la distribución multivariante de probabilidad asociada a estos grupos parece necesario, por otra parte, encontrar una definición equivalente para el orden supermodular que resulte más fácilmente manejable, tal como la obtenida por Dhaene & Goovaerts (1996) para el orden de correlación. De otra manera, parece difícil garantizar que la distribución multivariante finalmente estimada incorpore el riesgo real de sus componentes.

Por último queremos señalar algunas aplicaciones aparecidas en la literatura referidas al tratamiento de relaciones de dependencia entre riesgos actuariales en el modelo individual para carteras de no vida. En base a los trabajos de Tong (1989) y Baüerle (1997a), Baüerle & Müller (1997) consideran dos posibilidades para modelizar dependencias en carteras de riesgo. En el primer modelo asumen que la cartera se puede dividir en diferentes grupos, de manera que existe un elevado grado de dependencia entre los riesgos de un grupo, siendo éste mucho menor entre riesgos en diferentes grupos. Cada riesgo en la cartera está influido por tres factores: un factor de riesgo común a todos los riesgos en la cartera, un factor de riesgo específico para cada grupo y un factor de riesgo individual. Los tres factores se modelizan a través de v.a. mutuamente independientes y las v.a. correspondientes a los diferentes factores de riesgo individuales, así como las correspondientes a cada grupo se suponen idénticamente distribuidas. En base al orden supermodular, estos autores demuestran que a medida que aumenta el número de riesgos en un mismo grupo incrementa el riesgo de la cartera. Este modelo se puede utilizar, por ejemplo, para aproximar el riesgo de una cartera de seguros de hogar en la que todos los riesgos estén localizados en un área propensa a grandes tormentas de nieve o hielo. En esta área, las viviendas situadas cercanas a un río tienen una gran probabilidad de sufrir inundaciones en primavera, mientras que los grupos de viviendas adosadas están más expuestas a sufrir un incendio. Estos dos grupos de viviendas, formarán dos clases expuestas en diferente grado a incendios e inundaciones. Marceau et al. (1999) aproximan la distribución del coste total de una cartera de estas características utilizando distribuciones de Pareto para la distribución de la cuantía a pagar en caso de siniestro.

La segunda propuesta de Baüerle & Müller (1997), pasa por considerar algunos mecanismos externos, descritos por v.a., con influencia sobre todos los riesgos de la cartera. Una vez definidos estos parámetros ambientales, los riesgos individuales en la cartera son independientes. Los parámetros se pueden corresponder a algún estado de la naturaleza (condiciones ambientales, huracanes, ...) así como a circunstancias económicas o legales (inflación, sentencias judiciales, ...). Los mismos autores, proponen este modelo para aproximar el riesgo de una cartera de seguros de vida modelizando a traves de distribuciones normales tanto el comportamiento de los riesgos individuales como la influencia de los factores externos. Consideran dos situaciones, en la primera únicamente incorporan un factor externo, mientras que en la segunda introducen dos. En este último caso la v.a. coste total de la cartera resulta superior en orden stop-loss y, por tanto, presenta más riesgo. Este resultado se prueba nuevamente a partir del orden supermodular. Este modelo parece válido para considerar las relaciones de dependencia señaladas como (c) y (d) en la pág. 313 y que han quedado sin tratar. Exige, sin embargo, que la cartera esté exclusivamente formada por trabajadores en una misma empresa o bien por asegurados en una misma área geográfica.

Bibliografía

[1] Aboudi, R. and D. Thon (1993). Expected utility and the Siegel paradox: A generalization. *Journal of Economics* **57(1)**, 69-93.

[2] Aboudi, R. and D. Thon (1995). Second degree stochastic dominance decisions and random initial wealth with applications to the economics of insurance. *Journal of Risk and Insurance* **62(1)**, 30-49.

[3] Adelson, R. M. (1966). Compound Poisson distributions. *Operations Research Quarterly* **17**, 73-75.

[4] Albers, W. (1999). Stop-loss premiums under dependence. *Insurance Mathematics and Economics* **24(2)**, 173-185.

[5] Allains, M. (1953). Le comportement de l'home rationel devant le risque: critique des axioms et postulates de l'école Americaine. *Econometrica* **21(4)**, 503-546.

[6] Ambagaspitya, R. S. (1998). On the distribution of a sum of correlated aggregate claims. *Insurance Mathematics and Economics* **23(1)**, 15-19.

[7] Bacelli, F. and A. M. Makowsky (1989). Multidimensional stochastic ordering and associated random variables. *Operations Research* **37,** 478-487.

[8] Barlow, R. E. and F. Proschan (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing.* Holt, Rinehart and Winston. New York.

[9] Baüerle, N. (1997a). Inequalities for stochastic models via supermodular orderings. *Communications in Statistics - Stochastic Models* **13**, 181-201.

[10] Baüerle, N. (1997b). Monotonicity results for MR/G1/1 queues. *Journal of Applied Probability* **34**, 514-524.

[11] Baüerle, N. and U. Rieder (1997). Comparison results for Markov modulated recursive models. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **11**, 203-217.

[12] Baüerle, N. and A. Müller (1998). Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *ASTIN Bulletin* **28(1)**, 59-76.

[13] Beard, R.E. and W. Perks (1949). The relation between the distribution of sickness and the effect of duplicates on the distribution of deaths. *Journal of the Institute of Actuaries* **75**, 75-86.

[14] Beard, R. E., T. Pentikäinen and E. Pesonen (1984). *Risk theory, the sthocastic basis of insurance.* Chapman and Hall, London.

[15] Birkel, T. (1993). A functional central-limit theorem for positively dependent random variables. *Journal of Multivariate Analysis* **44,** 314-320.

[16] Borch, K. (1968). *The economics of uncertainty.* Princenton University Press, Princenton, New Jersey.

[17] Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt (1982). *Study note in risk theory.* The Society of Actuaries, Chicago.

[18] Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt (1997). *Actuarial mathematics.* The Society of Actuaries, Itasca, I11.

[19] Bülmann, H. (1970). *Mathematical methods in risk theory.* Springer Verlag, Berlin.

[20] Bühlmann, H., B. Gagliardi, H. U. Gerber and E. Straub (1977). Some inequalities for stop-loss premiums. *ASTIN Bulletin* **9(1)**, 75-83.

[21] Bülmann, H. (1984). Numerical evaluation of the compound Poisson distribution: Recursion or Fast Fourier Transform? *Scandinavian Actuarial Journal* **1984**, 116-126.

[22] Cambanis, S., G. Simons and W. Stout (1976). Inequalities for $Ek\,(X,Y)$ when marginals are fixed. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **36**, 285-294.

[23] Carrie, J.F and L. K. Chan (1986). The bounds of bivariate distributions that limit the value of last-survivor annuities. *Transactions of the Society of Actuaries* **38**, 51-74.

[24] Chan, F. Y. (1984). On a family of aggregate claims distributions. *Insurance Mathematics and Economics* **3(2)**, 151-155.

[25] Cohen, A. and H. B. Sackrowitz (1995). On stochastic ordering of random vectors. *Journal of Applied Probability* **32,** 960-965.

[26] Cook, R. D. and M. E. Johnson (1981). A family of distributions for modeling non-elliptical multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society* **43**, 210-218.

[27] Dennerberg, D. (1994). *Non-Additive measure and integral.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[28] Denuit, M., Cl. Lefèvre and M. Mesfioui (1999). A class of bivariate stochastic orderings with applications in actuarial sciences. *Insurance Mathematics and Economics* **24(1)**, 31-50.

[29] Denuit, M., J. Dhaene and M. van Wouve (1999). The economics of insurance: a review and some recent developments. *Mitteilungen der Schweizerischer Aktuarvereinigung:* **1999(2)**, 137-175.

[30] Denuit, M., J. Dhaene and C. Ribas (2000). Some positive dependence notions with applications in actuarial sciences.*Research Report* 9942. Department Toegepaste Economische Wetenschappen. K. U. Leuven.

[31] Denuit, M. (2000). Stochastic analysis of duplicates in life insurance portfolios. *Bläter der Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik* **24**, 507-514.

[32] Denuit, M., J. Dhaene and C. Ribas (2001). Does positive dependence between individual risks increase stop-loss premiums? *Insurance Mathematics and Economics.* To appear.

[33] De Pril, N. (1985). Recursions for convolutions of arithmetic distributions. *ASTIN Bulletin* **15(2)**, 135-139.

[34] De Pril, N. (1986). On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model. *ASTIN Bulletin* **16(2)**, 109-112.

[35] De Pril, N. and M. Vanderbroek (1987). Recursions for the distribution of a life portfolio: A numerical comparation. *Bulletin of the Royal Association of Belgian Actuaries, dedicated to the 80th birthday of Prof. E. Franck,* 47-64.

[36] De Pril, N. (1988). Improved approximations for the aggregate claims distribution of a life insurance portfolio. *Scandinavian Actuarial Journal* **1988(1)**, 61-68.

[37] De Pril, N. (1989). The aggregate claims distribution in the individual model with arbitrary positive claims. *ASTIN Bulletin* **19(1)**, 9-24.

[38] De Pril, N. and J. Dhaene (1992). Error bounds for compound Poisson approximations of the individual risk model. *ASTIN Bulletin* **22(2)**, 135-148.

[39] Dhaene, J. (1990). Distributions in life insurance. *ASTIN Bulletin* **20(1)**, 81-92.

[40] Dhaene, J. (1991). Approximating the compound negative binomial distribution by the compound Poisson distribution. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherunsmathematiker:* **1991(2)**, 117-122.

[41] Dhaene, J. and N. De Pril (1994). On a class of approximative computation methods in the individual risk model. *Insurance Mathematics and Economics* **14(2)**, 181-196.

[42] Dhaene, J. and M. Vanderbroek (1995). Recursions for the individual model. *Insurance Mathematics and Economics* **16(1)**, 31-38.

[43] Dhaene, J, B. Sund and N. De Pril (1996). Some moment relations for the Hipp approximation. *ASTIN Bulletin* **26(1)**, 117-121.

[44] Dhaene, J. and M. J. Goovaerts (1996). Dependency of risks and stop-loss order. *ASTIN Bulletin* **26(1)**, 201-212.

[45] Dhaene, J. and M. J. Goovaerts (1997). On the dependency of risks in the individual life model. *Insurance Mathematics and Economics* **19(3)**, 243-253.

[46] Dhaene, J., S. Wang, V. R. Young and M. J. Goovaerts (1997). Comonotonicity and maximal stop-loss premiums. *Research Report* 9730. Department Toegepaste Economische Wetenschappen. K. U. Leuven.

[47] Dhaene, J. and B. Sund (1998). On approximating distributions by approximating their De Pril transforms. *Scandinavian Actuarial Journal* **1998(1)**, 1-23.

[48] Dhaene, J., G. Willmot, and B. Sundt (1999). Recursions for distribution functions and stop-loss transforms. *Scandinavian Actuarial Journal* **1999(1)**, 52-65.

[49] Dhaene, J. and M. Denuit (1999). The safest dependence structure among risks. *Insurance Mathematics and Economics* **25(1)**, 11-21.

[50] Esary, J.D., F. Proschan and D.W. Walkup (1967). Association of random variables, with applications. *The Annals of Mathematical Statistics* **38**, 1466-1474.

[51] Embrechts, P., P. McNeil and D. Strauman (1999). Correlation and dependency in risk management. *Proceedings of the XXXth International ASTIN Colloquium, Tokio, Japan,* 227-250.

[52] Epstein, L. and S. Tanny (1980). Increasing generalized correlation: a definition and some economic consequences. *Canadian Journal of Economics* **8(1)**, 16-34.

[53] Feilmeier, M. and G. Segerer (1980). Einige Anmerkungen zur Ruckversicherung von Kumulrisiken nach dem "Verfahren Strickler". *Blatter der DGVM* 1980, 611-630.

[54] Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. 1. (3^a edición). Willey, New York.

[55] Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon Sect. A. Séries, 3,* **14**, 53-77.

[56] Frees, E. W. and E. A. Valdez (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal* **2,** 1-25.

[57] Frees E. W., E. A. Valdez and J. F. Carriere (1995). Annuity valuation with dependent mortality. *Actuarial Research Clearing House:* **1985(2)**, 31-80.

[58] Gerber, H. U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory.* S. S. Huebner Foundation, Philadelphia.

[59] Gerber, H. U. (1982). On the numerical evaluation of the distribution of aggregate claims and its stop-loss premiums. *Insurance Mathematics and Economics* **1(1)**, 13-18.

[60] Gerber, H. U. (1984). Error bounds for the compound Poisson approximations. *Insurance Mathematics and Economics* **3(2)**, 191-194.

[61] Glaz, J. and B. McK. Johnson (1984). Probability inequalities for multivariate distributions with dependence structures. *Journal of the American Statistical Association* **79,** 436-440.

[62] Goovaerts, M. J., F. De Vylder and J. Haezendonck (1984). *Insurance Premiums.* Insurance series, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo.

[63] Goovaerts, M. J., R. Kaas, A. van Heerwaarden and T. Bauwelinckx (1986). *Effective actuarial methods.* Insurance series, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo.

[64] Goovaerts, M. J. and R. Kaas (1991). Evaluating compound generalized Poisson distributions recursively. *ASTIN Bulletin* **21(2)**, 193-198.

[65] Goovaerts, M. J. and J. Dhaene (1996). The compound Poisson approximation for a portfolio of dependent risks. *Insurance Mathematics and Economics* **18(1)**, 81-85.

[66] Goovaerts, M. and J. Dhaene (1999). Supermodular ordering and stochastic annuities. *Insurance Mathematics and Economics* **24(3)**, 281-290.

[67] Goovaerts, M. J., J. Dhaene and A. De Schepper (2000). Stochastic upper bounds for present value functions. *Journal of Risk and Insurance* **67(1)**, 1-14.

[68] Hadar, J. and W. R. Rusell (1969). Rules for ordering uncertain prospects. *American Economic Review* **59(1)**, 25-34.

[69] Hardly, G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya (1929). Some simple inequalities satisfied by convex functions. *Messenger of Mathematics* **58,** 145-152.

[70] Heilmann, W. R. (1986). On the impact of the independence of risks on stop-loss premiums. *Insurance Mathematics and Economics* **5(2)**, 197-199.

[71] Heilmann, W. R. (1988). *Fundaments of risk theory.* Verlag Versicherungswirtschaft E.V., Karlsruhe.

[72] Hipp, C. (1986). Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model. *ASTIN Bulletin* **16(1)**, 89-100.

[73] Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante Korrelations-Theorie. *Schr. Math. Inst. Univ. Berlin,* **5**, 181-233.

[74] Hürlimann, W. (1998). On stop-loss order and the distortion pricing principle. *ASTIN Bulletin* **28(1)**, 119-134.

[75] Jewell, W.S. and B. Sundt (1981). Improved approximations for the distribution of a heterogeneus portfolio. *Mitteilungen der Schweizerischer Aktuarvereinigung* **1981(2)**, 221-240.

[76] Joe, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts.* Chapman & Hall, London.

[77] Kaas, R. (1987). *Bounds for some risk theorical quantities.* PhD Thesis. University of Amsterdam, Amsterdam.

[78] Kaas, R., A. E. van Heerwaarden and M. J. Goovaerts (1988a). On stop-loss premiums for the individual model. *ASTIN Bulletin* **18(1)**, 91-97.

[79] Kaas, R., A. E. van Heerwaarden and M. J. Goovaerts (1988b). Between individual and collective model for the total claims. *ASTIN Bulletin* **18(2)**, 169-174.

[80] Kaas, R., A. E. van Heerwaarden and M. J. Goovaerts (1989). Combining Panjer's recursion with convolution. *Insurance Mathematics and Economics* **8(1)**, 19-21.

[81] Kaas, R. (1993). How to (and how not to) compute stop-loss premiums in practice. *Insurance Mathematics and Economics* **13(3)**, 241-254.

[82] Kaas, R. and H. U. Gerber (1994). Some alternatives for the individual model. *Insurance Mathematics and Economics* **15(2)**, 127-132.

[83] Kaas, R., A. E. van Heerwaarden and M. J. Goovaerts (1994). *Ordering of actuarial risks.* Caire education series, vol. 1, Brussels.

[84] Kahneman, D. and A. Tversky (1979). Prospect Theory: An analysis of Decision under Risk. *Econometrica* **47**, 263-291.

[85] Kling, B. and H. Wolthuis (1992). Ordering of risks in life insurance. *Insurance Mathematics and Economics* **21(2)**, 219-224.

[86] Kornya, P. S. (1983). Distribution of aggregate claims in the individual risk model. *Transactions of the society of actuaries* **35**, 823-836. Discussion 837-858.

[87] Kremer, E. (1983). Ein Modell zur Tarifierung von Kumulschadenexzedenten-Vertragen in der Unfallversicherung. *Mitteilungen der Schweizerischer Aktuarvereinigung* **1983 (1)**, 53-61.

[88] Kuon, S., A. Reich and L. Reimens (1987). Panjer versus Kornya versus De Pril: A comparation from a practical point of view. *ASTIN Bulletin* **17(2)**, 183-191.

[89] Kuon, S., M. Radtke and A. Reich (1993). An appropiate way to switch from the individual risk model to the collective one. *ASTIN Bulletin* **23(1)**, 23-54.

[90] Lefèvre, C. and S. Utev (1996). Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables. *Journal of Applied Probability* **33**, 285-310.

[91] Machina, M. (1982). Expected Utility analysis without the independence axiom. *Econometrica* **50(2)**, 277-323.

[92] Marceau, E., H. Cossette, P. Gaillardetz and J. Rioux (1999). Dependence in the individual risk model. *Working paper. Université Laval, Québec, Canada.*

[93] Marshall, A. W. and I. Olkin (1979). *Inequalities: Theory of majorization and its applications.* Academic Press, New York.

[94] Mas-Colell, A., M. D. Whinston and J. R. Green (1995). *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, Inc.

[95] Meilijson, I. and A. Nadas (1979). Convex majorization with an application to the length of critical paths. *Journal of Applied Probability* **16**, 671-677.

[96] Michel, R. (1987). An improved error bound for the compound Poisson approximation. *ASTIN Bulletin* **17(2)**, 165-169.

[97] Müller, A. (1996). Ordering of risks: a comparative study via stop-loss transforms. *Insurance Mathematics and Economics* **17(2)**, 215-222.

[98] Müller, A. (1997). Stop-loss order for portfolios of dependent risks. *Insurance Mathematics and Economics* **21(2)**, 219-223.

[99] Newman, C. M. (1984). Assimptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. Inequalities in Statistics and Probability*. IMS Lecture Notes* **5,** 127-140.

[100] Nielsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas.* Lecture Notes in Statisitics **139**. Springer-Verlag, New York.

[101] Norberg, R. (1989). Actuarial analysis of dependent lives. *Mitteilungen der Schweizerischer Aktuarvereinigung* **1989(2)**, 243-255.

[102] Panjer, H. H. (1980). The aggregate claims distributions and stop-loss reinsurance. *Transactions of the Society of Actuaries* **XXXII**.

[103] Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin* **12(1)**, 22-26.

[104] Panjer, H. H. and G. E. Willlmot (1986). Computational aspects of recursive evaluation of compound distributions. *Insurance Mathematics and Economics* **5(1)**, 113-116.

[105] Panjer, H.H. and G. E. Willmot (1992). *Insurance risk models.* The Society of Actuaries, Schaumburg IL, USA.

[106] Reimers, L. (1988). Letter to the Editor. *ASTIN Bulletin* **18(1)**, 113-114.

[107] Ribas, C., J. Dhaene and M. J. Goovaerts (1998). A note on the stop-loss preserving property of Wang's premium principle. *Mitteilungen der Schweizerischer Aktuarvereinigung* **1998(2)**, 237-241.

[108] Röell, A. (1987). Risk adversion in Quiggin and Yaari's rank-order model of choice under uncertainty. *The Economic Journal* **97**, 255-261.

[109] Rothschild, M. and J. E. Stiglitz (1970) Increasing risk I: A definition. *Journal of Economic Theory* **2**, 225-243.

[110] Schmeidler, D. (1982). *Subjective probability without additivity.* Working paper. Foerder Institute for Economic Research, Tel Aviv University.

[111] Schmeidler, D. (1989). Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica* **57**, 571-587.

[112] Seal, H. L. (1947). A probability distribution of deaths at age x when policies are counted instead of lives. *Skand. Aktuar. Tidskr.* **1947**, 18-43.

[113] Seal, H. L. (1969). *Sthocastic theory of a risk business.* Willey, New York.

[114] Seal, H. L. (1983). The Poisson process: Its failure in risk theory. *Insurance Mathematics and Economics* **2(3)**, 287-290.

[115] Shaked, M. and J. G. Shanthikumar (1994). *Stochastic Orders and their Applications.* Academic Press, London.

[116] Shaked, M. and J. G. Shanthikumar (1997). Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors. *Journal of Multivariate Analysis* **61**, 86-101.

[117] Stickler, P. (1960). Ruckversicherung des Kumulrisikos in der Lebensversicherung. *Transactions of the XVIth ICA.* Vol. 1, 666-679.

[118] Sundt, B. and W. S. Jewell (1981). Further results on recursive evaluation of compound distributions. *ASTIN Bulletin* **12(1)**, 38-45.

[119] Sundt, B. (1985). On approximations for the distribution of a heterogeneous risk portfolio. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherunsmathematiker:* **1985(2)**, 189-203.

[120] Sundt, B. (1992). On some extensions of Panjer's class of counting distributions. *ASTIN Bulletin* **22(1)**, 61-80.

[121] Sundt, B. (1993). Book review: Insurance risk models. *ASTIN Bulletin* **23(1)**, 157-160.

[122] Sundt, B. (1995). On some properties of De pril transforms of counting distributions. *ASTIN Bulletin* **25(1)**, 19-31.

[123] Sundt, B. (1998). A generalisation of the De Pril transform. *Scandinavian Actuarial Journal* **1998(1)** 41-48.

[124] Sundt, B., J. Dhaene and N. De Pril (1998). Some results on moments and cumulants. *Scandinavian Actuarial Journal* **1998(1)** 24-40.

[125] Taizhong, H. and W. Zhiqiang (1999). On dependence of risks and stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics* **24(3),** 323-332**.**

[126] Tchen, A. (1980). Inequalities for distributions with given marginals. *Annals of Probability* **8**, 814-827.

[127] Tong, Y. (1980). *Probability Inequalities in Mutivariate Distributions.* New York. Academic Press.

[128] Tong, Y. L. (1989). Inequalities for a class of positively dependent random variables. *Annals of Probability* **17**, 429-435.

[129] van Heerwaarden, A. E. (1991). *Ordering of Risks - Theory and Actuarial Applications.* Thesis Publishers, Amsterdam.

[130] von Neumann, J. and O. Mongenstern (1947). *Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton University Press, Princeton, N.J.

[131] Waldmann, K. (1994). On the exact calculation of the aggregate claims distribution in the individual risk model. *ASTIN Bulletin* **24(1)**, 89-96.

[132] Wang, S. (1995a). On two-sided compound binomial distributions. *Insurance Mathematics and Economics* **17(1)**, 35-41.

[133] Wang, S. (1995b). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance Mathematics and Economics* **17(1)**, 43-54.

[134] Wang, S. (1996a). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin* **26(1)**, 71-92.

[135] Wang, S. (1996b). Ordering of risks under PH transforms. *Insurance Mathematics and Economics* **18(2)**, 109-114.

[136] Wang, S. and V. R. Young (1997). Risk-adjusted credibility premiums using distorted probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal* **1998(2)**, 143-165.

[137] Wang, S., V.R. Young and H. H. Panjer (1997). Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance Mathematics and Economics* **21(2),** 143-183.

[138] Wang, S. (1998). Aggregation of correlated risk portfolios. Models and Algorithms. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* **LXXXV**.

[139] Wang, S. and J. Dhaene (1998). Comonotonicity, correlation order and stop-loss premiums. *Insurance Mathematics and Economics* **22(3)**, 235-243.

[140] Wang, S. and V. R. Young (1998). Ordering risks: expected utility theory versus Yaari's dual theory of risk. *Insurance Mathematics and Economics* **22(2)**, 145-161.

[141] White, R. P. and T. N. E. Greville (1959). On computing the probability that exactly k of n independent events will occur. *Transactions of the society of actuaries* **11**, 88-95. Discussion 96-99.

[142] Yaari, M.E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica* **55**, 95-115.