REASEGURO
Y
PLANES DE PENSIONES

F$_{\underline{o}}$ JAVIER SARRASI VIZCARRA

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

DIVISION DE CIENCIAS JURIDICAS, ECONOMICAS Y SOCIALES

FACULTAD CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA ECONOMICA, FINANCIERA

Y ACTUARIAL

REASEGURO

Y

PLANES DE PENSIONES

Tesis Doctoral presentada por:

Fº Javier Sarrasí Vizcarra.

Director de la Tesis:

Dr. D. Antonio Alegre Escolano.

Barcelona Junio 1993.

Esta Tesis Doctoral ha contado con la ayuda económica concedida en el Concurso de " Ajuts a Proyectes de Recerca d'Investigadors Joves", en la convocatoria de 1988, que convoca la Comissió Interdepartamental de Recerca Tecnológica CIRIT, del Departament de la Presidència de la Generalitat de Catalunya.

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho la ocasión que me permite la presentación de este trabajo para dar mi más profundo agradecimiento al Director de esta Tesis Doctoral, Dr. Antonio Alegre Escolano, no sólo por la labor de dirección activa en el desarrollo de este trabajo, sino tambíen, porque él fue quién me abrió las puertas de esta gratificante profesión.

Hago también extensiva mi gratitud a los compañeros del departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial, quienes me han proporcionado su apoyo y colaboración.

Quiero agradecer a mi mujer Luisa, su paciencia y ayuda en los momentos difíciles, circunstancia que ha permitido llevar a buen fin este trabajo.

También quiero agradecer a mis padres y a mi hermano el apoyo que en todo momento he recibido de ellos. Este agradecimiento lo hago también extensivo a los demás familiares que se han interesado por el desarrollo del presente trabajo.

A Luisa.

Índice

Planteamientos, objetivos y estructura de la tesis

El trabajo que presentamos se centra en el estudio del aseguramiento (reaseguramiento) de un Plan de Pensiones que asume el riesgo derivado de las desviaciones de mortalidad en un colectivo de partícipes (personas físicas en cuyo interés se crea el Plan) y beneficiarios (personas físicas con derecho a la percepción de prestaciones) del plan.

Consideraremos como definición de un Plan de Pensiones la dada por el Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones (Real Decreto 1370/1988 de 30 de setiembre) que desarrolla la Ley 8/1987 de 8 de Junio sobre Planes y Fondos de Pensiones, según el cual (artículo 1, punto 1):

"Los planes de Pensiones definen el derecho de las personas, a cuyo favor se constituyen a percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez, las obligaciones de contribución a los mismos y las reglas de constitución y funcionamiento del patrimonio que al cumplimiento de los derechos que reconocen ha de afectarse."

La ventaja de esta definición es su generalidad, la cual puede ser adaptada a cualquier Plan de Pensiones, sin necesidad de que éste se adapte a todas las exigencias que con posterioridad realiza la Ley y el Reglamento que la desarrolla.

El objetivo de esta tesis es estudiar modalidades de reaseguro que garanticen la solvencia de los Planes de Pensiones. Las modalidades de reaseguro que plantearemos serán independientes de cualquier legislación.

Hemos elegido el tema de la solvencia de los Planes de Pensiones por que consideramos que éste es el objetivo principal de los mismos, a parte de la función social que desempeñan.

La necesidad de salvaguardar la solvencia en un Plan de Pensiones es fundamental, debido a sus características peculiares que le hacen más vulnerable que a una compañía de seguros. Algunas de estas características son: la ausencia de un capital social que respalde las desviaciones en el riesgo, o el reducido número de partícipes que pueden constituir el plan, que hace que las primas cobradas basadas en el criterio de la esperanza matemática y por tanto en la ley de los grandes números, puedan resultar en ocasiones insuficientes para poder garantizar las prestaciones de los partícipes.

La solución que proponemos es el reaseguro del Plan de Pensiones, y el objetivo es garantizar totalmente la solvencia del mismo, considerando como única fuente de ingresos las primas pagadas por los partícipes.

Junto con el reaseguro consideraremos también el recargo de seguridad, circunstancia que nos permitirá analizar combinaciones recargo reaseguro óptimas, en el sentido que minimizarán el coste total de la operación.[1]

Las modalidades de reaseguro que plantearemos son las siguientes:

La primera, que denominaremos Reaseguro del Percentil, el reaseguro cubrirá la pérdida que puede tener el plan, como consecuencia de las desviaciones en la mortalidad de los partícipes del colectivo. En esta modalidad supondremos que el Plan de Pensiones parte con un nivel de solvencia dado.

La segunda, que denominaremos Reaseguro de Diferencia de Siniestralidad, el reaseguro se encarga de cubrir en cada período las provisiones matemáticas y margenes de solvencia que pudieran establecerse, y el riesgo de fallecimiento.[2]

Estas dos modalidades de reaseguro las estudiaremos en un modelo que se caracterizará por ser actuarial (aunque puedan influir aspectos de índole económico, legal, etc) y estocástico, ya que trabajaremos con toda la aleatoriedad de los flujos monetarios que se valoran. De esta forma no sólo podremos calcular los valores medios o

[1] Este coste estará constituido por la prima recargada más la prima de reaseguro.

[2] El riesgo de supervivencia quedará cubierto al garantizarse la provisiones matemáticas en cada período.

esperanzas matemáticas de las variables aleatorias que aparecerán en el modelo, como sucede en los enfoques deterministas, sino que podremos también obtener cualquier otro momento de la variable aleatoria analizada, como la variaza, o la desviación tipo.

Este enfoque estocástico de la matemática actuarial, en el cual el enfoque determinista sería un caso particular de éste, se encuentra ya reflejado en varios trabajos como los de **POLLARD, A.H. et al. (1969)**[3], **BOWERS, N, L, et al. (1986)**[4] o **GERBER, H.U (1990)**[5]

A diferencia de las modalidades de reaseguro convencionales de vida, que como ya estudiaremos en el Capítulo 1, calculan la prima de reaseguro período a período (generalmente el año) a través del riesgo de la que presenta la operación en ese período, nuestro modelo obtendrá la prima de reaseguro considerando todo el período de la operación, determinando en qué momentos dentro del plazo de vigencia de la operación tendrá que intervenir el reasegurador, y los desembolsos de éste asociados a cada momento, de acuerdo con la modalidad contratada.

Esta circunstancia hace que consideremos como magnitudes relevantes de nuestro modelo, no solamente las propias del riesgo que cubre cada modalidad, sino también otras como el tipo de interés técnico del plan y el tipo de interés técnico del reaseguro.

La tesis se estructura en los siguientes capítulos:

- **CAPITULO 1**

  Análisis del Reaseguro

  En este capítulo daremos una visión general del Reaseguro, realizando una síntesis de los distintos trabajos que se han realizado en este tema, haciendo especial incidencia en el reaseguro vida.

[3] "A Stochastic Approach Actuarial Functions", Journal of the Institute of Actuaries, Vol.95, PartI, nº 400, pp.:79-113

[4] *Actuarial Mathematics*, Itasca Il. (1986)

[5] *Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag, Zurich, 1990

- **CAPITULO 2**

  Modelo estocástico de Reaseguro

  Este capitulo lo dedicaremos a la presentación del modelo que tendrá como objetivo el cálculo de la prima de reaseguro para cada modalidad. Poniendo de manifiesto las variables aleatorias que intervienen en el mismo y la metodología a seguir en el cálculo de la prima de reaseguro.

- **CAPITULO 3**

  Reaseguro en las operaciones individuales

  En este capítulo aplicamos el modelo al estudio de la prima de reaseguro en las operaciones individuales. En particular realizaremos el estudio sobre una operación de renta y seguro considerada de forma general.

  En este capítulo también nos propondremos sistematizar, en la medida que nos sea posible, la estrategia recargo reaseguro que minimice el coste total de la operación. Como ya veremos, para cada operación concreta puede existir una política óptima recargo reaseguro que garantice la solvencia del plan.

  Este capítulo será necesario como paso previo al estudio del reaseguro de un Plan definido sobre un colectivo, que se realiza en el Capítulo 5.

- **CAPITULO 4**

  Expresiones paticulares

  Este capítulo se destina a dar expresiones concretas de las variables aleatorias que interviene en el modelo para diversos tipos de prestaciones/aportaciones.

  Plantearemos para cada caso concreto y en la medida que sea formalmente posible, expresiones concretas que nos permitan determinar la estrategia óptima recargo reaseguro para las operaciones analizadas.

  Este capítulo nos permitirá cuantificar las diversas magnitudes que aparecen en el modelo y comprobar las diversas relaciones que se determinan teóricamente.

Estos cálculos, los expondremos en el anexo de este capítulo.

- **CAPITULO 5**

  Reaseguro en Colectivos

  En este capítulo aplicaremos el modelo tanto a colectivos cerrados como abiertos utilizando como herramienta de trabajo el método de simulación de Monte Carlo.

  Este capítulo vendrá acompañado de un anexo, en el cual cuantificaremos algunos casos concretos, analizando como afectará el tamaño del colectivo a la prima de reaseguro y a coste de la operación.

- **CAPITULO 6**

  Conclusiones

  En este capítulo se presentan las conclusiones de la tesis, haciendo una síntesis de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

- En último lugar, en la tesis incluimos la **BIBLIOGRAFIA** citada y un **APENDICE** con los nombres de los programas informáticos, en leguaje de programación FORTRAN, utilizados en los **ANEXOS** del Capítulo 4 y del Capítulo 5, cuyos listados se encuentran en el **DISKETTE** que incluimos en la tesis.

Capítulo 1

Análisis del Reaseguro

Capítulo 1

Análisis del Reaseguro

En el presente capítulo realizaremos un estudio del reaseguro con carater general. Posteriormente nos centraremos en el reaseguro del ramo de vida, realizando una descripción de los distintos trabajos que se han realizado en este campo.

Plantearemos en primer lugar cuales son los objetivos del reaseguro. Haremos un repaso de los antecedentes históricos del reaseguro , haciendo especial hincapié en el reaseguro del ramo de vida. Estudiaremos las modalidades más importantes de reaseguro, desde el punto de vista del cálculo de la prima de reaseguro. Abordaremos la problemática que supone la determinación del pleno de retención y la obtención de la modalidad de reaseguro óptima.

Por último, estudiaremos las modalidades de reaseguro que se dan en el ramo de vida.

El capítulo se estructurará en los apartados siguientes:

1.1 El Reaseguro y sus objetivos

1.2 Antecedentes del Reaseguro

1.3 Modalidades de Reaseguro

1.4 Elección de la modalidad de reaseguro y determinación del pleno

1.1 El Reaseguro y sus objetivos

El reaseguro podemos definirlo como un contrato o instrumento por el cual un asegurado (reasegurador), toma a su cargo total o parcialmente un riesgo ya cubierto por otro asegurador (cedente), sin alterar lo convenido entre éste y el asegurado.

A diferencia del seguro, en el reaseguro no existe relación contractual entre el tomador del seguro y las compañías reaseguradoras.

Otras definiciones de reaseguro son por ejemplo las de: **DINSDALE, W.A. (1963)**[1] que define el reaseguro como una operación en la que un asegurador , traspasa a otro asegurador (reasegurador) parte de un riesgo o responsabilidad aceptada.

[1] *Specimen Insurance Forms and Glossaries*,2a edition (Stone & Cox,1963)

GOLDING, C.E (1965)[2] define el reaseguro como una operación por la cual un asegurador distribuye sus riesgos, cediendo parte de éstos riesgos a otra u otras entidades (reaseguradoras), con el objeto de reducir el volumen de las pérdidas que pueda ocasionar un contrato, a unos límites soportables por su empresa.

Para **CARTER, R.L. (1979)**[3], el reaseguro constituye una modalidad de seguro, en la medida que lo que le interesa al reasegurador, es lo mismo que a los aseguradores, la cobertura de acontecimietos futuros e inciertos que producen pérdidas. El define el reaseguro como el seguro de las responsabilidades contractuales derivadas de los contratos de seguro directo o en el caso de retrocesión, de los contratos de reaseguro.

La necesidad del reaseguro para la entidad aseguradora tiene que ver con el aumento imprevisto que puede darse en el coste de los siniestros, el cual puede venir dado por varias razones no excluyentes:

1. El aumento general en los costes de los siniestros originados al aumentar la frecuencia y /o la gravedad de los mismos. Esta causa se debe a un problema de tarificación en las primas (insuficiencia de las primas cobradas).

2. Cuando dentro del intervalo de confianza, a un cierto nivel, del número de siniestros esperados, los siniestros acaecidos dan lugar a una indemnización total de gran cuantía en relación con las primas suscritas devengadas y las reservas, ya sea por el simple azar, o por la no homogeneidad de la cartera desde el punto de vista de la suma agregada.

3. Cuando el número de siniestros acaecidos se encuentra a la derecha del intervalo de confianza de la variable aleatoria número de siniestros.

El reasegurador fundamentalmente ofrece protección en los dos últimos casos, ya que respecto al primero siempre consideraremos primas equitativamente modeladas al riesgo cubierto, pues de no ser así, parte de las consecuencias económicas también recairían sobre el reasegurador.

[2] *The law and Practice of Reinsurance,(Stone & Cox,1965) edición corregida 1968*
[3] *El Reaseguro*, ed Mapfre S.A. 1979 pp.:6

Por consiguiente, el reaseguro desempeña una función técnica fundamental, que consiste en proteger a los aseguradores de la quiebra o dificultades financieras al reducir la amplitud del margen de variación de los costes, al pagar los costes de los seguros retenidos. Este efecto estabilizador fue descrito por **TUMA, F.L. (1933)**[4] del siguiente modo:

> "El objetivo del reasegurador es puramente técnico. Es un medio utilizado por las compañías de seguros para reducir, desde el punto de vista de las pérdidas materiales que puede surgir, los riesgos que ha aceptado. Cuando un vehículo provisto de una amortiguador circula por una calle cuyo pavimento está en mal estado, la calzada no será de repente más lisa, pero, el pasajero esperimenta menos sacudidas que serán absorbidas por el dispositivo instalado especialmente en el vehículo. Lo mismo ocurre con el reaseguro; no reduce las pérdidas de los siniestros, pero contribuye a paliar la carga que las consecuencias materiales representan para el asegurador".

El efecto estabilizador del reaseguro permite que las compañías de seguros puedan aumentar la capaciadad de suscripción, aceptando riesgos superiores a los que podrían aceptar normalmente, pudiendo servir a clientes que quieren contratar cierta clase de riesgos que de otra manera preferirían esquivar. Esta capacidad de suscripción y flexibilidad adicional que ofrece el reaseguro, es especialmente útil para las compañías de seguro más pequeñas que compiten en el mercado.

El reasegurador además de tener la función de estabilización técnica de la entidad aseguradora , presenta otras ventajas:

- El reaseguro puede contribuir a financiar las actividades de la empresa de seguros vía comisiones o claúsulas que se establezcan al respecto [5].

[4] "La teoria económica del reaseguro", Journal of the Insurance Institute of London 1933

[5] En este sentido cabe destacar en algunas modalidades de reaseguro del ramo de vida la "claúsula al contado", por la cual el reaseguro entrega a la cedente el dinero al contado, por la parte que le toca cuando el siniestro es demasiado elevado.

- Las compañías de reaseguros pueden suministrar asesoramiento técnico y servicios de gestión.[6]

Por tanto el reaseguro, como señala **BRUNO DE MORI (1961)**[7] "presenta un papel esencial como soporte fundamental de la institución del Seguro..."

En particular, *la demanda de reaseguro en el ramo de vida* tiene que ver con la peculiar naturaleza de las operaciones del ramo de vida con respecto a las operaciones de seguros realizadas en cualquier otro ramo, lo que ha dado lugar a una serie de modadidades de reaseguro propias del ramo de vida. Siguiendo a **CARTER, R,L (1979)** destacamos tres diferencias importantes entre las mencionadas operaciones:

- La mayoría de las operaciones asociadas al ramo de vida son a largo plazo y no pueden rescindirse por parte de las compañías de seguros.
- En el ramo de vida se utilizan primas niveladas que distribuyen el riesgo desigual de la mortalidad a lo largo del plazo proyectado de vigencia de la póliza; y originan la acumulación de provisiones durante el mencionado plazo, para cubrir el coste último de la indemnización.
- Proporciones variables entre los elementos de protección y de ahorro de las distintas clases de polizas de vida.

El reaseguro tendrá como objetivo suministrar protección en caso de desviaciones entre las indemnizaciones reales y las previstas, las cuales podrán deberse a:

---

[6]Sobre la función financiera y de asesoramiento del reaseguro, es de interés destacar los trabajos siguientes de **A. LASHERAS SANZ (1954)**:

- "Aportation a L'establissement d'une Theorie Mathematique de la Reasurance". Actas del Congreso de Actuarios de Madrid, 1954.
- "Algunas consideraciones sobre el Reaseguro", Actas del XVI Congreso de Actuarios,1960.

[7]"Problemas del Reaseguro" The Review, 6 de Enero de 1961

- Cambios en el nivel general de mortalidad. Desde hace unas décadas las compañías de seguros en la mayoría de los paises han salido beneficiadas con respecto a las operaciónes de seguros (seguros sobre la muerte), debido al descenso en las probabilidades de fallecimiento. Existiendo en este sentido un beneficio de mortalidad para la compañía de seguros, cuyas tablas, con frecuencia recogían una tasa de mortalidad mayor a la mortalidad real. Hoy en día se trabaja con tablas de mortalidad bastante ajustadas a la mortalidad real, e incluso en los paises más desarrollados se ha frenado o incluso a veces invertido la tendencia descendente de las tasas de fallecimiento, como consecuencia de la aparición y desarrollo de enfermedades como el S.I.D.A. , enfermedades cardiovasculares, o debido tambíen al crecimiento por ejemplo, de los accidentes de tráfico, etc. En este sentido es de interés destacar la tesis doctoral de **RUE, M.**(1992)[8]

  Nosotros supondremos en la presente tesis, que las tablas de motalidad utilizadas se ajustan a la mortalidad real.

- Aparición de epidemias, desastres naturales, guerras y acontecimietos semejantes, que pueden originar, con carater transitorio, un cúmulo de siniestros superiores a los normales.

- Fluctaciones aleatorias en la siniestralidad debidas al reducido número de asegurados.

Las fluctuaciones motivadas por el reducido número de asegurados, es la causa principal de demanda de reaseguros de vida. En particular el principal problema que tendrán los Planes de Pensiones vendrá dado por este motivo, por lo que el aseguramiento de los mismos (reaseguro) será clave para su solvencia.

[8] *Les lleis de Mortalitat. Un ajust parametric per a Catalunya i Espanya,* Tesis Doctoral de la Universidad de Barcelona (1992)

1.2 Antecedentes del Reaseguro

Se desconoce exactamente cuándo los suscriptores procuraron por primera vez "reasegurar" los riesgos que habían aceptado. Es de suponer que los primeros suscriptores limitaban los riesgos que suscribían a cantidades que podían cubrir por si mismos, y por consiguiente no necesitaban reasegurarlos.

Las primeros tratados de reaseguro datan del siglo XIV. En particular cabe destacar como fecha pionera conocida, el 12 de Julio de 1370, en la que se estableció en latín, un reaseguro marítimo que amparaba un viaje desde Génova a Sluys, donde el asegurador original reaseguraba la parte más peligrosa del viaje (desde Cádiz hasta Sluys). Como señala **GOLDING, E. (1927)**[9], no se trataba de un suscriptor original que reaseguraba un riesgo que no podía cubrir por si mismo, (como demuestra el hecho que durante el recorrido por el Mediterráneo, la parte más segura del viaje, el asegurador directo retuvo la totalidad del riesgo), sino que en este caso, utilizó el reaseguro para evitar el riesgo peligroso que no deseaba cubrir, pero que tenía que aceptarlo para conseguir la parte más provechosa del seguro o quizás, para atender a un cliente importante.

Otro tratado ya en el siglo XV, escrito en italiano, data del 16 de mayo de 1409, con éste se reaseguraba un cargamento por el valor de la lana, para la travesía Southampton (Inglaterra), Porto Pisano (Italia).

Los primeros documentos resultan un tanto confusos porque utilizan la palabra reaseguro para describir tanto transacciones entre dos aseguradores como casos en que, por alguna razón, el asegurado contrata de nuevo otro seguro sobre la misma propiedad, probablemente, porque el asegurador primitivo había muerto o bien había sido declarado en quiebra. Estos últimos casos eran, en realidad, seguros nuevos y, en algunos casos, un doble seguro.

Como declara **GOLDING, E** había mucha confusión en este asunto, sobre todo en las primeras épocas del seguro marítimo, tanto es así, que cuando el reaseguro

[9] *History of Reinsurance*, Sterling Offices, Ltd., 1927 pag 22

marítimo fue declarado ilegal (en Inglaterra) por el Acta de 1746, quedó exceptuado el caso en que el asegurador se declaraba en quiebra o moría. Pero, por supuesto, esta excepción sólo podía dar lugar a que el asegurado contratase un seguro nuevo dado que el seguro anterior carecía de valor. Este acta fue levantada en 1864, no obstante en el extranjero se seguían realizando este tipo de reaseguros en este período.

A pesar de la terminología confusa, los documentos demuestran que el reaseguro en su sentido verdadero, era un procedimiento aceptado generalmente entre los suscriptores de seguros marítimos a finales del siglo XVII.

Los primeros reaseguros fueron todos ellos de caracter facultativo y para casos individuales. Tuvo que ser en el siglo XIX, con el desarrollo de las compañías de seguros y con la necesidad de ofrecer coberturas cada vez más elevadas, cuando empezaron a aparecer los primeros tratados de reaseguro "modernos", sustituyendo a los viejos métodos facultativos. Así, el primer tratado de reaseguro conocido data del 15 de Diciembre de 1821 entre la Compagnie Royale en Francia y la Compagnie des Propietaires Reunis of Brusselles.

Fue en el continente europeo donde empezaron a establecerse las primeras compañías especialistas en reaseguro, la compañía más vieja que se conoce es "The Cologne Reinsurance Company" fundada en 1846. A ésta le sucedieron "The Swiss Reinsurance Company" creada en 1863 y "The Munich Reinsurance Company" establecida en 1880. En el caso concreto de Gran Bretaña, apenas se crearon compañías especialistas de reaseguro, y las que se crearon fracasaron, debido a que eran las propias compañías de seguro las que a su vez reaseguraban a otras.

De todas formas la práctica del reaseguro en el siglo XIX, dejaba mucho que desear, en este sentido **GOLDING, E.** destaca el caso de "Moskau Insurance Company" del año 1877 , la cual reaseguró el 74.15% de una prima de 2.975.000 rublos, cobrando una comisión de 377.000 rublos, cuando la comisión original ascendía a 130.000 rublos.

Si bien en el siglo XIX se empezaron a desarrollar los primeros tratados de reaseguro obligatorios (coverturas working), basados todos ellos sobre bases prorcionales, (en este sentido cabe destacar el publicado en 1878 por Cornelius Walford's Insurance

Cyclopaedia), el método facultativo seguía practicándose con bastante frecuencia, en los ramos de accidentes e incendios. De todas formas, el desarollo creciente del seguro a finales del siglo XIX y del siglo XX convirtió el método facultativo en una práctica de reaseguro cada vez más inadecuada a las nuevas necesidades.

La creación del reaseguro excess-loss, dió un ímpetu importante al uso de los tratados obligatorios de reaseguro. Según **GOLDING, E** la modalidad de reaseguro excess-loss fue introducida en el Lloyd's por C.E HEATH en 1890. De todas formas, recientes estudios [10] remontan a 1857 el origen del reaseguro excess-loss, fecha en la cual el Bergedorfer Feuercasse (cerca de Hamburgo) y el Leipziger FeuerVersicherungs-Anstalta efectuaron una cobertura working en exess-loss.

GERATHEWOHL, K. (1982) sitúa el origen del stop-loss en 1861 fecha en la cual se realizo el primer contrato de estas características entre el Preussusche NationalVersicherungsgesellschaft y la Feuer-Casse auβerhalb der Stadt Amburg.

De todas formas, las modalidades de reaseguro no proporcionales empezaron a extender su uso a partir de 1906, después del terremoto de San Francisco, momento en el cual las compañías de seguros vieron la necesidad de protegerse de riesgos catastróficos que daban lugar a una acumulación de pérdidas impredecibles.

Respecto al *reaseguro de vida*, sus orígenes tienen que ver con el aumento de la demanda de seguros de vida y la creación, en consecuencia, de compañías nuevas de seguros de vida surgidas durante la primera mitad del siglo XIX. En 1849 comienza a practicarse entre compañías escocesas bajo la modalidad de reaseguro basado en la prima de tarifa.

Hay testimonios de tratados de reaseguro de vida en 1858 y 1865 con las compañías "Frankfuter Reinsurance" y "Suiza de Reaseguro" respectivamente.

Sin embargo, en los primeros momentos, surgieron problemas derivados de las variaciones en las tarifas de primas y condiciones de las pólizas entre las distintas compañías, incluso los aseguradores originales no revelaban siempre las retenciones,

[10] **GERATHEWOHL, K.** *Reinsurance. Principles and Practice* Verlag Versicherungswirtschaft e. V. Karlsruhe, Volumen II (1982) pag 712

ni tan siquiera retenían por su cuenta una parte del riesgo.

Debido a estas dificultades, 17 compañías escocesas de seguros de vida firmaron en 1849 un convenio por el que se regulaba las actividades del reaseguro para crear algunos procedimientos normalizados que fueran aceptados por las empresas del ramo.

En aquel momento los reaseguros de vida eran contratados únicamente de manera facultativa y el pacto incluía, entre otros aspectos, las tarifas de primas, retenciones y rescates.

En 1873 se concluyó un acuerdo adicional que abarcaba retenciones, primas extraordinarias y escalas de comisiones. El acuerdo fue revisado y ampilado en 1887 para tratar con mayor amplitud los rescates.

En 1900, 46 compañías de seguros de vida británicas firmaron un pacto semejante al escocés. Este pacto, denominado Acuerdo sobre el reaseguro facultativo de vida[11] regulaba los procedimientos de los reaseguros de vida contratados de manera facultativa. El ánimo de este Acuerdo[12] consiste en lograr que el reasegurador comparta la fortuna de la compañía cedente, debiéndo ser la posición de ésta respecto al reasegurador, análoga a la de un asegurado de vida respecto a la entidad aseguradora. En este Acuerdo se contempla la circunstancia de que el reaseguro pueda contratarse en los términos y condiciones de la cedente o de acuerdo con las utilizadas por el reasegurador, y que la compañía cedente tiene derecho a rescindir el reaseguro, aunque la poliza original continúe en vigor.

Transcurrió bastante tiempo hasta que, en 1918, una compañía profesional de reaseguro, la "Mercantile and General", contrató reaseguros de vida en Gran Bretaña. Así mismo, los contratos de reaseguros de vida en Gran Bretaña no surgieron hasta el período posterior a la Primera Guerra Mundial, debiéndose el impulso más importante a la "Mercantile and General" que introdujo el sistema de tarifas de primas de riesgo en 1927.

---

[11]Podemos encontrar las estipulaciones generales de este acuerdo en R.L. CARTER (1979) *El Reaseguro* Ed. MAPFRE S.A. pag 726

[12]Siguiendo a STEEDS, A.J. (1954) "Life reassurance" Journal of the Institute of Actuaries Students' Society ol 12 Paerte 3 (marzo 1954)

En todo el mundo la práctica del reaseguro de vida está cambiando continuamente. En la mayoría de los paises, una característica tradicional del reaseguro de vida ha sido el intercambio recíproco de reaseguros facultativos de vida entre compañías aseguradoras. Aunque esta práctica se mantiene sobre todo en Gran Bretaña, la necesidad de reducir gastos administrativos ha motivado que fueran sustituidos por los contratos automáticos, de modo que actualmente, a escala mundial, la mayor parte de los reaseguros de vida se realizan con las compañías profesionales de reaseguro. Asimismo, los cambios en los reaseguros quedan reflejados por los avances registrados en las clases de contratos ofrecidos por los aseguradores vida.

1.3 Modalidades de Reaseguro

En este apartado estudiaremos las modalidades de reaseguro con carater general, realizando una descripción de cada una de ellas.

Las principales modalidades de reseguro se pueden resumir en las siguientes:

1. Modalidad de reaseguro proporcional o reaseguro de sumas o riesgos. Entre las cualeas caben destacar:
   - Reaseguro Cuota-parte
   - Reaseguro de Excedentes
2. Modalidades de reaseguro no proporcionales o reaseguro de pérdidas o siniestros. Se distinguen dos tipos:
   - Reaseguro Excess-loss
   - Reaseguro Stop loss
3. Otras formas de reaseguro.
   - Pool. Formación de consorcios reaseguradores (nacionales o internacionales) a los efectos de ampliar la capacidad de aceptación.

- Un hecho que ha dado lugar a nuevas modalidades ha sido la inflación. En este sentido caben destacar:
  - ECOMOR (excedentes de coste medio relativo)
  - EPNOC (excess premiuns related number of claims)

Antes de proceder al estudio de cada una de estas modalidades de reaseguro, señalar que desde un punto de vista jurídico el reaseguro puede ser facultativo u obligatorio. El reaseguro facultativo se practica caso por caso y es, por lo tanto, previo a la emisión de la póliza , de tal forma que la cedente propone el reaseguro a la futura reaseguradora y ésta decide o no tomarlo.

En cambio , en el reaseguro obligatorio o automático, mediante un acuerdo único para un período de uno o más años, la cedente se obliga a ceder y la reaseguradora a aceptar en los términos del contrato, todos los seguros que realice la compañía cedente. Los contratos de reaseguro obligatorios se instrumentalizan según las modalidades expuestas anteriormente, sin embargo los reaseguros facultativos suelen ser fruto de la negociación entre compañía y reasegurador.

1.3.1 Reaseguros proporcionales

Se caracterizan porque el reasegurador recibe una cierta proporción acordada de la prima original (deducida las comisiones), pagando la misma proporción de todas las pérdidas, por tanto la cesión es proporcional al riesgo corrido por la cedente.

Reaseguro Cuota Parte

La modalidad de reaseguro de cuota parte es la más sencilla entre todas las modalidades de reaseguro. Por ella se transfiere al reasegurador un coeficiente preestablecido de la cartera del ente asegurador o bien de los riesgos que este asuma en un determinado ramo para un ejercicio económico dado. Este coeficiente sirve asimismo para determinar la participación del reaseguro en las indemnizaciones, gastos y constitución de reservas.

Si denotamos por $\frac{1}{\gamma}$ (para $\gamma < 1$) la cuota de propia de retención de la entidad aseguradora y por tanto $(1 - \frac{1}{\gamma})$ la cantidad cedida en reaseguro, para un siniestro de cuantía X tenemos:

$\frac{1}{\gamma} X$ irá a cargo de la entidad de seguros (cedente).

$(1 - \frac{1}{\gamma}) X$ irá a cargo del reasegurador.

El reaseguro cuota parte afecta a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria coste por siniestro del la entidad de seguros, que simbolizaremos V(X), donde:

$$V(X) = P[\xi \leq X]$$

siendo: ξ la variable aleatoria coste del siniestro.

Al responsabilizarse el reasegurador de una proporción fija de todos los riesgos, la variable aleatoria ξ se dividirá en suma de dos variables aleatorias, la correspondiente a la cedente ξ_0 y la correspondiente al reasegurador ξ_r:

$$\xi = \xi_0 + \xi_r$$

donde:

-
$$\xi_0 = \frac{1}{\gamma}\xi$$

-
$$\xi_r = \xi - \xi_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\xi$$

Esta modificación en la variable alatoria conlleva a que la distribución de probabilidad del coste por siniestro para la entidad de seguros, una vez efectuado el reaseguro, se transforme en otra que simbolizaremos $V_0(X)$(función de distribución de coste retenido):

$$V_0(X) = P[\xi_0 \leq X] = P[\frac{1}{\gamma}\xi \leq X] = P[\xi \leq \gamma X] = V(\gamma X)$$

Siendo la función de distribución del coste por siniestro para el reasegurador $V_r(X)$:

$$V_r(X) = P[\xi_r \leq X] = P[\frac{\gamma-1}{\gamma}\xi \leq X] = P[\xi \leq \frac{\gamma}{\gamma-1}X] = V(\frac{\gamma}{\gamma-1}X)$$

Conocidas las distribuciones $V_0(X)$ y $V_r(X)$ podremos determinar la prima de la cedente (prima de propia retención) P^0 y la prima del reasegurador P^R para esta modalidad de reaseguro.

En general la prima total que cobrará la compañía de seguros en el intervalo $(0,t)$ vendrá dada por P:

$$P = N\,C_1$$

siendo:

- N : número medio de siniestros en el período considerado.
- $C_1 = \int_0^\infty dV(X)$: coste medio por siniestro.

Suponiendo que el número medio de siniestros en el intervalo considerado venga dado por t, $N = t$ entonces:

$$P^0 = t\,C_1^0 = t\int_0^\infty dV_0(X) = \frac{1}{\gamma}P$$

donde: C_1^0 es el coste medio de los siniestros retenidos.

$$P^R = t\,C_1^r = t\int_0^\infty dV_r(X) = \frac{\gamma-1}{\gamma}P$$

donde: C_1^r es el coste medio de los siniestros cedidos al reaseguro.

Puede comprobarse que $P = P^0 + P^R$

Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- La sencillez que supone calcular la prima de reaseguro, lo cual redunda en unos bajos gastos en gestión y administración del mismo. Esta ventaja se transforma en inconveniente cuando la primas de la cedente son insuficientes para el riesgo cubierto.

- El reasegurador al recibir una parte de todos los riesgos recibirá una cartera equilibrada.

- El reasegurador en esta modalidad suele satisfacer grandes comisiones a la cedente, de tal forma que en algunos casos, éstas cubren los costes de adquisición de la propia entidad de seguros.

- Permiten la práctica de la reciprocidad. De todas formas aquí se plantean dos grandes problemas:

  La valoración de la operaciones objeto de intercambio, para lo cual no sólo se tendrá en cuenta las primas.

  La dificultad para el reasegurador de poder satisfacer las exigencias de un asegurador directo, en relación con las operaciones intercambiadas.

Los inconvenientes que presenta esta modalidad son:

- No logra reducir las fluctuaciones en los resultados.

- La compañía de seguros al ceder al reasegurador una cuota de todos los riesgos que componen su cartera, con independencia de las sumas aseguradas, el reasegurador recibirá una parte de primas sobre riesgos que la cedente podría cubrir por su cuenta. Esta modalidad priva al asegurador directo de una suma de primas nada despreciable y de los consiguientes beneficios que de ellos pueden derivarse.

- Esta modalidad y en general todas las modalidades proporcionales, no son aptas cuando se trata del aseguramiento de los nuevos riesgos que acompañan al desarrollo económico y social (riesgos de aviación , atómicos, etc.). En el aseguramiento de estos riesgos, los porcentajes de primas que suele ceder las entidades de seguros son tan elevados, que pueden originar una responsabilidad potencialmente grave para la compañía en caso de inclumplimiento de algunos de los reaseguradores importantes.

- Este reaseguro presenta un grave riesgo en caso de primas insuficientes.

Reaseguro de Excedentes

El reaseguro de excedentes constituye una fórmula de reaseguro proporcional donde el reasegurador acepta cierta participación en un riesgo, cobrando una proporción equivalente de las primas e indemnizando de los siniestros en la misma proporción.

Se diferencia del reaseguro cuota parte en que la compañía cedente reasegura únicamente aquella parte de riesgos que supera su pleno de conservación, por tanto, la cuota de propia retención de la entidad aseguradora para aquellos riesgos que superen el mencionado pleno, $\frac{1}{\gamma}$ será variable.

Si M es el pleno de conservación de la entidad de seguro, y S_i, es el capital asegurado asociado al riesgo i, entonces:

Para $S_i \leq M$ no hay reaseguro, por tanto $\frac{1}{\gamma_i} = 1$

Para $S_i > M$ hay reaseguro y $\frac{1}{\gamma_i} = \frac{M}{S_i}$

Puede observarse como la cantidad retenida es inversamente proporcional a la suma asegurada S_i.

A continuación estudiaremos como quedará modificada la función de distribución del coste por siniestro $V(X)$ tanto para la cedente $V_0(X)$ como para el reasegurador $V_r(X)$.

Como en esta modalidad de reaseguro, la función de distribución del coste por siniestro dependerá del valor de S siempre y cuando $S > M$, el estudio de $V_0(X)$

y de $V_r(X)$, pasará por estudiar la función de distribución del coste por siniestro para cada póliza condicionada a la suma asegurada S, obteniendo posteriormente las distribuciones $V_0(X)$ y $V_r(X)$ aplicando el terorema de la probabilidad total.

Sea:

- $V(X/S)$ función de distribución del coste del siniestro condicionada a que la suma asegurada sea S:

$$V(X/S) = P[\xi_S \leq X]$$

siendo: ξ_S variable aleatoria coste del siniestro cuya suma asegurada es S.

Al ser el reaseguro proporcional, la variable aleatoria ξ_S se desdoblara en dos, una correspondiente a la cedente ξ_S^0 (variable aleatoria asociada al coste retenido) y otra correspondiente al reasegurador ξ_S^r:

$$\xi_S = \xi_S^0 + \xi_s^r$$

siendo:

- $\xi_S^0 = \frac{M}{S}\xi_S$
- $\xi_S^r = \frac{S-M}{S}\xi_S$

La función de distribución del coste retenido por la cedente condicionado a la suma asegurada S ($M < S$) vendrá dada por $V_0(X/S)$:

$$V_0(X/S) = P[\xi_S^0 \leq X] = P[\frac{M}{S}\xi_S \leq X] = P[\xi_S \leq \frac{S}{M}] = V[\frac{S}{M}X/S]$$

si consideramos que S puede tomar cualquier valor (mayor o menor que M):

$$V_0(X/S) = \begin{cases} V(X/S) & \text{si} \quad S \leq M \\ V(\frac{S}{M}X/S) & \text{si} \quad S > M \end{cases}$$

La función de distribución del coste del siniestro del reasegurador condicionado a la suma asegurada S ($M < S$) vendrá dada por $V_r(X/S)$:

$$V_r(X/S) = P[\xi_S^r \leq X] = P[\frac{S-M}{S}\xi_S \leq X] = P[\xi_S \leq \frac{S}{S-M}] = V[\frac{S}{S-M}X/S]$$

si consideramos cualquier valor para S:

$$V_r(X/S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad S \leq M \\ V[\frac{S}{S-M}X/S] & \text{si} \quad S > M \end{cases}$$

Conocidas las distribuciones condicionadas $V_0(X/S)$ y $V_r(X/S)$ obtendremos $V_0(X)$ y $V_r(X)$ aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$V_0(X) = \int_0^\infty q(S)\, V_0(X/S) ds \quad (I)$$

$$V_r(X) = \int_0^\infty q(S)\, V_r(X/S) ds \quad (II)$$

siendo:

$q(S)$ probabilidad de que acaecido un siniestro, la suma asegurada está en el intervalo $(S,\, S + ds)$

sustituyendo $V_0(X/S)$ y $V_r(X/S)$ en las expresiones (I) y (II):

$$V_0(X) = \int_0^M q(S)\, V(X/S) ds + \int_M^\infty q(S)\, V(\frac{S}{M}X/S) ds$$

$$V_r(X) = \int_0^M q(S) ds + \int_M^\infty q(S)\, V(\frac{S}{S-M}X/S) ds$$

El cálculo de la prima es similar a la modalidad de cuota parte, con la salvedad de que ahora la cuota es variable.

La prima P_i^0 correspondiente a la cedente para una póliza de capital asegurado "i" vendrá dada por:

$$P_i^0 = \frac{M}{\gamma_i} P_i$$

donde P_i es la prima asociada al riesgo i.

y la prima de reaseguro P_i^R asociada a la póliza i será:

$$P_i^R = (1 - \frac{M}{\gamma_i}) P_i$$

Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- La compañía cedente puede retener por su cuenta la totalidad de las primas de los riesgos suscritos que se ajustan a su retención, esto permite a la cedente homogeneizar los plenos de propia retención, ya que M varía con la suma asegurada, reduciendo la variación relativa que pueden experimentar los costes de siniestralidad.

  En este sentido **REINARZ, R. (1969)**[13] afirmó que el contrato de excedentes permite "que actúe la ley de los grandes números con el máximo rendimiento" y agrega:

  > "El contrato de excedentes proporciona un límite de tamaño uniforme al asegurador primario producido por la retención. La retención, en realidad, elimina la variación por encima de cierto nivel de responsabilidad en cada clase y, por consiguiente, limita definitivamente la variación dentro de un margen más reducido. Los reaseguradores, por su parte, absorven las variaciones de tamaño más amplio".

- Al conseguir la compañía cedente con este contrato de reaseguro una cartera más estable de seguros retenidos, disminuirá la probabilidad de siniestros graves debidos al azar capaces de afectar gravemente a su situación financiera.

[13]it Property and Liability Reinsurance Managemente, (Greenwich, Conn: Mission Publishing Co., 1969)

- La compañía aseguradora estará en condiciones de suscribir riesgos mayores de los que podría aceptar en otro caso, dadas las limitaciones impuestas por sus recursos financieros.

- Al igual que en el contrato de cuota parte, si la cartera que la compañía suministra a sus reaseguradores es rentable, mediante el reaseguro logrará mayores beneficios vis a vis las primas retenidas y, por consiguiente, aumentarán sus reservas y capacidad de suscripción con el paso del tiempo.

Los inconvenientes que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- Las ventajas conseguidas por la cedente al reasegurar solamente los riesgos más importantes que ha suscrito, encierran varios inconvenientes al reasegurador. Así la compañía cedente procurará retener por su cuenta la mayor parte de lá clase o clases de seguros menos peligrosos que ha suscrito, de modo que en igualdad de condiciones, una cantidad desproporcionada de los riesgos más azarosos será cedida al reasegurador.

  Esto no significa (como señala **REINARZ, R. (1969)**) que el reasegurador tenga que soportar una parte desproporcionada de los seguros menos rentables suscritos por la cecente. Esto ocurriría solamente si las tarifas de primas originales son impropias, en el sentido que las primas que pagan los seguros de bajo riesgo son suficientes para producir beneficios, mientras que para los riesgos más peligrosos éstas son inadecuadas.

  Sin embargo, el inconveniente que el reasegurador no puede evitar en esta modalidad, es el desequilibrio que puede tener la cartera cedida debido a:

  1. que presentará una distribución más limitada de los seguros de modo que, si empeora la proyección de siniestralidad de un grupo de riesgos elevados, el reasegurador probablemente sufrirá más que la compañía cedente, porque estos seguros son mayoría en la cartera reasegurada.

2. la distribución de las pólizas que han sido reaeguradas según el tamaño del riesgo tiende a ser más amplia y, en consecuencia, la variabilidad de la proyección de siniestros tal vez sea mayor.

- Los costes de administración de los contratos de execedentes, tanto de la compañía cedente como del reasegurador, suelen ser mayores que en las restantes modalidades de reaseguro, ya que la compañía necesita comparar los seguros aceptados en cada riesgo suscrito con su límite de retención, para calcular qué cantidad ha de ceder.

- Tanto la modalidad de excedentes como la de cuota parte no suministran una protección perfecta contra la acumulación accidental de siniestros.

Con respecto a las modalidades proporcionales pueden darse modalidades mixtas de cuota parte y excedente.

1.3.2 Reaseguros no proporcionales

Las modalidades de reaseguro no proporcionales (también llamadas por **AMMETER, H. (1955)** semicolectivas o completamente colectivas, según se trate del excess-loss o el stop-loss respectivamente[14]) se caracterizan porque la participación del reasegurador en las indemnizaciones no se realiza tomando como referencia su participación respectiva en la prima, sino sobre una base determinada por la cuantía de la reclamación. En este sentido, y siguiendo a **PRIETO, E. (1969)**[15], cabe hacer referencia a la noción de reclamación, cuya interpretación es distinta según consideremos el reaseguro excess-loss o el stop-loss. En efecto, en la modalidad de excess-loss debe de entenderse por reclamación la cantidad a pagar a consecuencia de la ocurrencia de un siniestro por tal importe cubierto por el seguro. Sin embargo, en la modalidad de stop-loss la reclamación es el importe total de las indemnizaciones correspondientes

[14]"The calculation of premiums rates for excess of loss and stop loss reinsurance treaties", en *Non-proportional Reinsurance*, editado por S. Vajda (Arithbel, S.A. 1955)

[15]"El Reaseguro: Función Económica. Modalidades y equilibrio en el mercado", Revista Riesgo y seguro. Madrid 1969

al total de los siniestros acaecidos en un cierto período para el conjunto de los riesgos objeto de la relación de reaseguro.

Los objetivos que se desean conseguir con las modalidades no proporcionales son, por un lado evitar el riesgo derivado de la acumulación de siniestros y por otro lado reducir las cargas administrativas que llevan consigo las modalidades proporcionales.

Reaseguro de Excess-loss

La modalidad de reaseguro de excess-loss se caracteriza porque el reasegurador cubre lo que supera al pleno de conservación o retención fijado por la cedente M, por cada siniestro ya acaecido.

Por tanto, a diferencia de la modalidad de exedentes en la cual la cuantía del excedente venía fijada a priori por estar referida a la suma del capital asegurado, en este caso esta cuantía viene dada a posteriori por referirse al exceso de un límite de las consecuencias económicas de los siniestros. De tal forma que:

Si $X \leq M$ no hay reaseguro, todo va a cargo del asegurador directo.

Si $X > M$ entonces (X-M) va a cargo del reaseguro.

Siendo X la cuantía del siniestro.

Al igual que en las modalidades proporcionales de reaseguro, el reaseguro de excess-loss modifica la función de distribución del coste por siniestro de la entidad aseguradora $V(X)$, transformándola en otra $V_0(X)$ definida así:

$$dV_0(X) = \begin{cases} dV(X) & \text{si} \quad X \leq M \\ \int_M^\infty X\, dV(X) & \text{si} \quad X = M \end{cases}$$

La prima correspondiente a la cedente vendrá dada en esta modalidad por la siguiente expresión:

$$P^0 = t \int_0^\infty dV_0(X) = t \left[\int_0^M dV(X) + M \int_M^\infty dV(X) \right]$$

y la prima de reaseguro vendrá dada por:

$$P^R = t\left[\int_M^\infty (X)dV(X) - \int_M^\infty (M)dV(X)\right] = t\left[\int_M^\infty (X-M)dV(X)\right]$$

PRIETO, E. (1969) analiza la relación entre la prima de reaseguro P^R y la prima pura de la operación P siendo:

$$P = t\left[\int_0^\infty (X)dV(X)\right]$$

llegando a la siguiente conclusión:

$$\frac{dP}{dM} = -\frac{dP^R}{dM}$$

por tanto:

$$\frac{dP}{dP^R} = -1$$

es decir, las variaciones de P y P^R son de diferente signo, existiendo una relación lineal entre ellas.

Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- La modalidad de reaseguro de excess-loss resulta relativamente fácil de administrar, al ser muy raras las reclamaciones que superan las cifras de retención normalmente utilizadas.

- El reasegurador al no indemnizar los siniestros pequeños y más frecuentes, cuyo coste es inferior al límite más bajo del reaseguro de excess-loss, la compañía cedente retiene por su cuenta una proporción más elevada de las primas brutas suscritas.

- Reduce la variabilidad del coste de los siniestros para la compañía cedente con respecto a las modalidades propocionales.

Las desventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- El reaseguro de excess-loss protege a la compañía cedente principalmente contra la gravedad de los siniestros, pero no contra la frecuencia de los mismos, en particular si éstos se dan por debajo del límite de propia retención que ha elegido la cedente.

- Si la compañía busca protegerse de los aumentos en la frecuencia prevista de los siniestros, al elegir límites de retención bajos, el reasegurador tendrá que atender más siniestros, de modo que para ambas partes los gastos de administración podrán ser más elevados y, en consecuencia, se anularía una de las ventajas del reaseguro de exceso de pérdida.

- Son frecuentes los contratos expeciales para cubrir riesgos puntas o riesgos de gran cuantía porque su inclusión en un contrato de excess-loss aumentaría la variación en los resultados, hasta un nivel que tanto el reasegurador como la compañía cedente no podrían aceptar.

- No cubre el riesgo de ruina de la empresa.

- Los reseguros no proporcionales a diferencia de los proporcionales, poco ayudan a financiar las actividades de la compañía cedente. Es más, generalmente la compañía cedente tendrá que pagar la prima de reaseguro en depósito antes de cobrar las primas correspondientes al año o período protegido, aunque el reasegurador, para paliar hasta cierto punto esta carga, cobre una prima en depósito inferior a la prima definitiva prevista.

Reaseguro de Stop-loss

Modalidad de reaseguro no proporcional en donde el reasegurador se obliga a cubrir total o parcialmente el montante de las indemnizaciones correspondientes a un período de tiempo dado, siempre y cuando éste supere a un determinado límite o bien, que la relación entre siniestros y primas del período considerado supere un coeficiente preestablecido.

A cambio el reasegurador cobrará una prima modelada al riesgo cubierto.

Por referirse a la totalidad de la cartera, esta modalidad recibe el nombre de reaseguro totalmente colectivo.

El reaseguro stop-loss afecta, a diferencia del resto de modalidades de reaseguro, a la función de distribución del coste total $F(X,t)$ asociado al intervalo $(0,t)$.

En el caso de la cedente, esta función queda transformada en otra $F_0(X,t)$ (función de distribución del coste total retenido):

$$F_0(X,t) = \begin{cases} F(X,t) & \text{si} \quad X \leq M \\ \\ \int_M^\infty dF(X,t) = 1 - F(M,t) & \text{si} \quad X = M \end{cases}$$

La función de distribución del coste total en el intervalo $(0,t)$ asociado al reasegurador $F_r(X,t)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$F_r(X,t) = \begin{cases} F(M,t) & \text{si} \quad X = 0 \\ \\ F(M+X,t) & \text{si} \quad X > 0 \end{cases}$$

La prima de la compañía cedente P^0 viene por tanto dada en esta modalidad de reaseguro por la siguiente expresión

$$P^0 = \int_0^M (X)dF(X,t) + M \int_M^\infty dF(X,t)$$

donde M : es el pleno de retención o conservación de la cedente.

La prima de reaseguro en esta modalidad se obtiene aplicando la siguiente expresión:

$$P^R = \int_M^\infty (X-M)dF(X,t)$$

Las ventajas que presenta esta modalidad de reaseguro son:

- Cubre a la entidad de las fluctuaciones, tanto de grandes siniestros como de las pérdidas ocasionadas por un gran número de ellos, evitando de esta forma el inconveniente del excess-loss.

- Es el único que elimina el riesgo de ruina de la empresa.

La desventaja que presenta esta modalidad de reaseguro y en general las modalidades de reaseguro no proporcionales es el problema de la tarificación de la prima de reaseguro, ya que ésta se basa en la siniestralidad a posteriori de los riesgos cubiertos.

Desde un punto de vista práctico, la tarificación de las primas en los reaseguros no proporcionales se ha solucionado a través de técnicas que tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- La siniestralidad experimentada anteriormente.
- Cualquiera de los distintos factores que puedan influir en el futuro sobre la siniestralidad experimentada.
- Las posibles catástrofes que puedan recaer sobre los riesgos a reasegurar.
- Los costes del reasegurador para conseguir y administrar el negocio.
- La retención de la compañía cedente y los límites de reaseguro.

CARTER, R.L (1979) distingue tres métodos para tarificar primas en los reaseguros no proporcionales:

- Método de prima fija. El reasegurador cobra una cantidad fija de dinero. Este método se utiliza cuando la experiencia de la compañía cedente ofrece poca confianza en la orientación de los siniestros futuros. El problema de este método es que la primas cobradas no responden automáticamente a las variaciones en el volumen suscrito por la cedente ni a las condiciones de suscripción reflejadas en la siniestralidad de la compañía. Por lo tanto, la primas fijas suelen revisarse cada año, especialmente al utilizarlas en contratos con compañías nuevas que probablemente crecen con bastante rapidez.

  En este sentido es de destacar trabajos como los de **BENJAMIN, B. (1977)**,[16] quien analizando el coeficiente de siniestralidad y la distribución de siniestros,

[16] *General Insurance*, (London: Heinemann 1977)

calcula $H(X)$ = el número previsto de reclamaciones que supera la cantidad retenida X, y $M(X)$ = la reclamación por exceso promedio que supera la retención. Obteniendo la prima neta fija $P(X) = H(X) * M(X)$.

Este procedimiento necesita datos referentes al mercado para calcular los siniestros poco frecuentes. Varios son los actuarios que han estudiado el problema para ajustar curvas a los datos disponibles como **BENKTANDER, G. and SEGERDAHL, C.O. (1960)**[17] quienes han estudiado el cálculo de la distribución de siniestros en el reaseguro de exceso de pérdidas, llegando a la conclusión que las distribuciones teóricas que más se ajustan son las de Pareto y a veces la distribución Normal.

- La prima ajustable, qué utiliza una tasa de prima fija aplicada a las primas de la cartera de la compañía. Este método consiste en aplicar una tasa de prima fija al volumen de primas netas suscritas (primas brutas originales deducidos los extornos y cancelaciones y las primas de reaseguros que protegen el contrato) por la cedente durante el año del contrato. Evidentemente, esta tasa deberá de ser suficiente para cubrir el riesgo al cual está sujeto el reasegurador, siendo ésta distinta según sea la modalidad de excess-loss o de stop-loss. El método permite que la prima de reaseguro se reajuste ante cambios en las primas suscritas de la compañía. De todas formas como la relación entre el nivel de riesgo soportado por el reasegurador y las primas brutas netas suscritas puede variar con el tiempo, será necesario reajustar las tasas de las primas.

  Existen distintos métodos que permiten calcular esta tasa, entre ellos cabe destacar "the coded excesses method" y el "increased limit premium method" [18]

- La prima ajustable, que utiliza una tasa de prima variable aplicada a las primas de la cartera de la compañía. Este método permite reajustar de manera

[17] "On the analitycal representation of claims distributions with special reference to excess-loss reinsurance", Transactions of the XVI International Congress of Actuaries (1960)

[18] Ver CARTER, R.L. (1979), *El Reaseguro* ed:MAPRE S.A. 1979 pag. 284 – 285

paulatina y regular, las primas de reaseguros para adaptarlas a las variaciones de las siniestralidad prevista por el reasegurador, y basadas en la siniestralidad de la cedente. Esta tasa de prima variable vendrá dada por el "burning cost"(coeficiente de siniestralidad) del contrato, el cual permite expresar la siniestralidad experimentada a cargo del reasegurador, en forma de porcentaje de las primas suscritas por la cedente. Las estadísticas "burning cost" suelen basarse en las cifras de siniestros correspondientes a los últimos cinco años como máximo, no siendo conveniente considerar años anteriories a éstos, ya que cuanto más antiguos sean los datos, menor será su fiabilidad para utilizarlos en el cálculo de la prima debido al entorno dinámico al que está sujeta la compañía.

Existen distintos métodos que nos permiten obtener el "burning cost" entre ellos caben mencionar: "Método basado en el año contable", "Método basado en el promedio de los tres o cinco años anteriories," Método basado en la distribución de siniestros entre tres o cinco años,"Método basado en la prima móvil trienal". [19]

PRIETO, E (1969) justifica teóricamente un método práctico de tarificación para la modalidad de excess-loss basado en el "burning cost".

Otros trabajos interesantes a mencionar en este sentido son los de **KILN, R. (1981)**[20] y **GERATHEWOHL, K (1982)**[21]

Tenemos que hacer una observación. Todas las expresiones que hemos dado, tanto para la compañía cedente como para la prima de reaseguro en las modalidades estudiadas, han sido obtenidas aplicando el criterio de cálculo de prima de la esperanza matemática. En este sentido cabe mencionar los trabajos de **GERBER H.U. (1979-1980)**[22] donde se dan una serie de criterios o principios de cálculo de primas y su aplicación al reaseguro.

[19] Ver CARTER, R.L. (1979), *El Reaseguro*, ed:MAPRE S.A. 1979 pag. 290 – 294

[20] *Reinsurance in Practice*, ed Withesby (1981)

[21] *Reinsurance Principles and Practice*,Verlag Versicherungswirtschaft e. V. Karlsruhe (1982)

[22] *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Cap V. Monograph No.8 S.S Huebner Foundation for Insurance Education Wharton School University of Pennsylvania Philadelphia. Distibuted by

ECOMOR

El tratado ECOMOR (Le traité d'Excédent du Cout Moyen Relatif) fue propuesto por **THEPAUT, M. A. (1950)**[23]. Consiste en un perfeccionamiento del reaseguro excess-loss, en el cual se tiene en cuenta la influencia de la devaluación monetaria y el cambio (empeoramiento) en la siniestralidad que pueda darse en un determinado ramo, circunstancias que irían en perjuicio del reasegurador.

En el supuesto que se establezca una cota superior S, a las obligaciones del reasegurador ECOMOR, la prima de reaseguro para dicho tratado viene dada por [24]:

$$\Pi_M^S = \frac{D_M^S}{\eta_M\, M}$$

donde:

- D_M^S : montante de las reclamaciones a cargo del reasegurador comprendidas entre M y S.
- η_M : función que nos da el número de siniestros de consecuencias mayores a M.
- M : pleno de retención de la cedente, el cual viene dado por el montante del siniestro que ocupa el lugar η_M en razón de su cuantía. Por tanto, la compañía no conoce a priori exactamente la cuantía del pleno de retención M.

Observemos que la prima Π_M^S es independiente del número de siniestros que determina el pleno, del número de pólizas de la cartera y de las posibles perturbaciones monetarias.

Richard D. Irwing, Inc. Homewood, Illinois 60430 (1979)

"Principle of Premiums Calculation and Reinsurance", International Congress of Actuaries. Zurich (1980) Vol I pp.: 137 – 143

[23] "Une nouvelle forme de R. Le traité d'excédent du coût moyen relatif (Ecomor)", Bulletin Trimestral Vol. 49 (1950) Nº 192 pp.:273. París 1950

[24] **VILLALON, J. (1969)** "El reaseguro como estrategia alternativa del ente asegurador frente al problema de su ruina" Riesgo y Seguro (Madrid) pag 190

EPNOC

La modalidad de reaseguro EPNOC (excess premiuns related number of claims) se debe a **BENKTANDER, G. (1964)**[25] y se basa en una prima unitaria determinada a priori, pero con prima total pagada a posteriori, la cual coincide con la prima unitaria multiplicada por el número de siniestros cuyo valor superan un determinada cota Z.

Por esta modalidad el asegurador directo cubre hasta un determinado nivel a y el reasegurador garantiza los excedentes de los siniestros cuyas consecuencias económicas pertenecen al intervalo $[a, ka]$.

En el supuesto de que el número de siniestros sea independiente de las consecuencias económicas, la prima P viene dada por la siguiente relación [26]:

$$P = \frac{F(ak) - F(a)}{1 - F(z)}[F(ak) - F(a)]^{-1} \int_a^{ak} (y - a)dF(y)$$

siendo $F(y)$: función de distribución de probabilidad de las consecuencias económicas del siniestro.

1.4 Elección de la modalidad de reaseguro y determinación del pleno

En este apartado estudiaremos dos problemas básicos que se presentan en el reaseguro:

- Eleción de la modalidad de reaseguro óptima.
- Determinación del pleno de retención óptimo.

Estos problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio que permita tomar la mejor decisión posible.

---

[25] "New forms of excess of loss R", 17th International Congress of Actuaries. Vol 3 pp.:502

[26] VILLALON, J. (1969) "El reaseguro como estrategia alternativa del ente asegurador frente al problema de su ruina" Riesgo y Seguro (Madrid) pag 178

MORA, M.C (1983)[27] divide los criterios en tres tipos:

- Criterios de estabilidad.
- Criterios económicos.
- Criterios basados en un orden de preferencia.

A continuación haremos un repaso de cada uno de ellos.

1.4.1 Criterios de estabilidad

Este criterio supone obtener la modalidad de reaseguro óptima y el pleno óptimo atendiendo exclusivamente al índice de estabilidad de la empresa de seguros, ya sea maximizándolo o bien que no sea inferior a unas cotas "aceptables".

Varios son los criterios utilizados para medir el índice de estabilidad de la entidad aseguradora, los más utilizados son: el dado por la probabilidad de ruina de la entidad aseguradora obtenido, ya sea a través de la teoría del riesgo individual o de la teoría del riesgo colectivo, y el que utiliza la varianza de la variable que representa la siniestralidad de propia retención.

La asunción de la varianza como medida de este riesgo corresponde a la hipótesis de una función cuadrática. Sin embargo, como ha puesto de manifiesto **OHLIN, J. (1970)** [28], las conclusiones que se obtienen no varían en el supuesto de considerar una función de pérdida cualquiera siempre que sea convexa, continua, nula en el origen y no negativa.

Hay quienes han utilizado otros índices para medir el índice de estabilidad de la empresa de seguros, en este sentido cabe destacar a **LEMAIRE, J. (1973)** [29], quien toma como medida del índice de estabilidad el recorrido de la variable asociada a la siniestralidad del primer asegurador.

[27] *Análisis crítico de la Solvencia en las primcipales Entidades Financieras*, Universidad Complutense de Madrid 1983. Tesis Doctoral.

[28] "On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance", Astin Bulletin 1970

[29] "Sur la determinatión d'un contrat optimal de reasurance" Astin Bulletin (1973)

Sean cuales sean los índices utilizados, los resultados a la que se llega es que para un mismo volumen de primas de propia retención, la modalidad de reaseguro más estable viene dada por el stop-loss.

En este sentido caben destacar entre otros los trabajos de **KHAN, P.M. (1960)**[30] y **PESONEN, E. (1967)**[31] quienes llegan a la conclusión que dada la prima de reaseguro , la modalidad que proporciona varianza mínima para la siniestralidad a cargo de la entidad de seguros es la de stop-loss.

Siguiendo con este criterio, las modalidades menos estables son de menor a mayor: cuota-parte, excedentes y excess-loss.

Sin embargo, son de interés los trabajos de **VILLALON, J. G. (1969)** y **VEGAS J.M. (1976)** [32], quienes demuestran que si el reasegurador aplica un recargo de seguridad proporcional al riesgo que asume, (utilizando como medida del riesgo la varianza de la variable siniestralidad a cargo del reasegurador, la cual en la modalidad de stop-loss es más elevada que en el resto de modalidades dada una determinada cartera) entonces la modalidad óptima para la compañía cedente es el reaseguro proporcional.

BORCH, K. (1960)[33] señala que una política de reaseguro eficiente debe de conducir a maximizar la diferencia entre $V - V'$, en donde:

- V: varianza de la variable aleatoria importe total de las reclamaciones correspondientes a la entidad aseguradora , antes de aplicar reaseguro.

- V': varianza de la variable aleatoria importe total de las reclamaciones correspondientes a la entidad aseguradora , después de aplicar reaseguro.

BORCH, K llega a la conclusión de que para la modalidad de stop-loss, la varianza de la variable aleatoria siniestralidad total de la cartera que acepta el reasegurador,

---

[30] "Some Remarks on a Recent Paper by Borch", Astin Bulletin (1960)

[31] "On optimal propierties of the stop-loss Reinsurance", Astin Bulletin 1967

[32] "Modelos de decisión en el reaseguro" Anales del instituto de actuarios españoles nº 17 año 1976

[33] "An Attemt to Determine the Optimum Amount of Stop-loss Reinsurance", Actas del XVI Congreso Internacional de Actuarios. Bruselas 1960

es menor que la reducción experimentada en la varianza de dicha variable aleatoria del asegurador directo, por efecto de la cesión.

Respecto al cálculo del pleno óptimo **VILLALON, J.G. (1969)**[34], determina el pleno óptimo asociado a las modalidades proporcionales y al excess-loss, aplicando el criterio de minimización de la varianza de la variable aleatoria que representa la siniestralidad de la entidad aseguradora después de aplicar el reaseguro.

Siguiendo con el criterio de estabilidad, tal y como hemos comentado al principio de este apartado, otro índice utilizado para medir la estabilidad de la entidad viene dado por la probabilidad de ruina obtenido o bien a través de la teoría del riesgo individual o bien a través de la teoría del riesgo colectivo. A continuación expresaremos las formulaciones a las que se llega con cada una de las dos teorías del riesgo:

Teoría del riesgo individual

La teoría del riesgo individual partiendo de riesgos independientes y homogéneos llega las siguientes relaciones:

Si ξ : es la variable aleatoria coste total de los siniestros en un periodo $[0,t]$ y suponemos que se distribuye según una Normal de media m y de varianza σ^2:

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

entonces :

$$P\left[\frac{\xi - m}{\sigma} > \frac{S + \sum_{j=1}^{k} P_j \lambda_j n_j}{\sigma}\right] \leq \frac{1}{(2\Pi)^{1/2}} \int_{J(S,\lambda,\sigma,\epsilon)}^{\infty} e^{-\frac{X^2}{2}} dX = \epsilon$$

siendo:

- S : reservas de solvencia
- K : número de subcolectivos homogéneos, en que hemos dividido el colectivo general.

[34]El Reaseguro como estrategia alternativa del ente asegurador frente al problema de su ruina", Riesgo y Seguro, Madrid. nº28 II época año 1969 pp.: 170 -172 y 175-177

- n_j : número exacto de partícipes que son del subcolectivo homogéneo j.

- λ_j : recargo de seguridad asociado a los partícipes del subcolectivo homogéneo j.

- P_j : prima pura asociada a los partícipes del subcolectivo homogéneo j.

- ϵ : probabildad de ruina.

- $J(S,\lambda,\sigma,\epsilon)$: índice de riesgo dado por la expresión:

$$J(S,\lambda,\sigma,\epsilon) = \frac{S + \sum_{j=1}^{k} P_j \lambda_j n_j}{\sigma}$$

La introducción de una determinada política de reaseguro (R), modificará las anteriores expresiones, en las siguientes:

$$P\left[\frac{\xi(R) - m(R)}{\sigma(R)} > \frac{S + \sum_{j=1}^{k} P_j(R)\lambda_j n_j}{\sigma(R)}\right] \leq \frac{1}{(2\Pi)^{1/2}} \int_{J(S,\lambda,\sigma(R),\epsilon)}^{\infty} e^{-\frac{X^2}{2}} dX = \epsilon$$

donde:

- $P_j(R)$: prima pura retenida por la entidad asociada a los partícipes del subcolectivo homogéneo j, después de aplicar el reaseguro R.

- $\sigma(R)$: varianza de la variable aleatoria coste total retenido por la entidad en el período $[0,t]$

- $J(S,\lambda,\sigma(R),\epsilon')$: índice de riesgo después del reaseguro:

$$J(S,\lambda,\sigma(R),\epsilon) = \frac{S + \sum_{j=1}^{k} P_j(R)\lambda_j n_j}{\sigma(R)}$$

Teoría del riesgo colectivo

La teoría del riesgo colectivo de **LUNDBERG, F. (1909)**[35] y desarrollada entre otros por **LAURIN, I (1930)** [36] **CRAMER, H. (1930)** [37] y **ESSCHER, F. (1932)** [38] llega al establecimiento de las siguientes relaciones:

$$\epsilon \simeq e^{-\Psi S} \quad (I)$$

siendo Ψ, la única solución positiva que satisface:

$$e^{(1+\lambda)P\Psi} = \Phi_n(\Phi_V(\Psi)) = \int_0^\infty e^{\Psi X}\, dF(X,t) \quad (II)$$

donde:

- ϵ : la probabilidad de ruina
- S : reservas de estabilización o de seguridad
- P : Prima pura
- λ : recargo de seguridad
- $\Phi_n(\Phi_V(\Psi))$: función característica del daño total, en la cual:
  - Φ_n : función característica del número de siniestros.
  - Φ_V : función característica del coste por siniestro.

La función característica del daño total (expresión (II)) dependerá de las distribuciones particulares que sigan el número de siniestros y el coste de los mismos:

En el supuesto de que la distribución del número de siniestros siga una de Poisson :

[35]"Uber die Theorie der Rückversicherung", Congreso Internacional de Actuarios, 1909 pag 877-955

[36]"An introduction into Lundberg's theory of risk", Skandinavisk Aktuarietidskrift, Upsala 1930

[37]"On the mathematical theory of risk", Skandia-Fetskrift", Estocolmo 1930

[38]"On the probability function in the collective theory of risk" Skandinavisk Aktuarietidskrift, Upsala 1932

$$e^{(1+\lambda)P\Psi} = \Phi_n(\Phi_V(\Psi)) = e^{t[\Phi_V(\Psi)-1]}$$

de donde despejando $\Phi_V(\Psi)$:

$$\Phi_V(\Psi) = \int_0^\infty e^{\Psi X} dV(X) = \frac{t + (1+\lambda)P\Psi}{t}$$

Si la distribución del número de siniestros sigue una Binomial negativa:

$$e^{(1+\lambda)P\Psi} = \Phi_n(\Phi_V(\Psi)) = \left[1 - \frac{t}{h}(\Phi_V(\Psi) - 1)\right]^{-h}$$

de donde despejando $\Phi_V(\Psi)$:

$$\Phi_V(\Psi) = \int_0^\infty e^{\Psi X} dV(X) = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{P\Psi}{h}}}{\frac{t}{h}}$$

siendo:

- h : es el coeficiente de oscilación en el proceso de Polya. Cuando h $\rightarrow \infty$ se tiene el proceso de Poisson.

Por tanto, podemos expresar las ecuaciones que nos permiten estudiar la estabilidad de la empresa aseguradora mediante la teoría del riesgo colectivo a través del sistema:

$$\left.\begin{array}{c} \epsilon \simeq e^{-\Psi S} \\ \\ e^{(1+\lambda)P\Psi} = \int_0^\infty e^{\Psi X}\, dF(X,t) \end{array}\right\} \quad (A)$$

o bien a través del sistema:

$$\left.\begin{array}{c} \epsilon \simeq e^{-\Psi S} \\ \\ \int_0^\infty e^{\Psi X} dV(X) = \begin{cases} \frac{t+(1+\lambda)P\Psi}{t} & \text{Poisson} \\ 1 + \frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{P\Psi}{h}}}{\frac{t}{h}} & \text{Binomial negativa} \end{cases} \end{array}\right\} \quad (B)$$

en el cual se explicita la función de distribución de la cuantia del siniestro $V(X)$

Una determinada política de reaseguramiento R, conduce para la entidad de seguros, a una modificación de las funciones anteriores y por tanto de las ecuaciones que determinan su estabilidad, quedando éstas transformadas en las siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} \epsilon' \simeq e^{-\Psi_{0,R}S} \\ \\ e^{(1+\lambda)P_{0,R}\Psi_{0,R}} = \int_0^\infty e^{\Psi_{0,R}X}\,dF_{0,R}(X,t) \end{array}\right\} \quad (A')$$

$$\left.\begin{array}{c} \epsilon' \simeq e^{-\Psi_{0,R}S} \\ \\ \int_0^\infty e^{\Psi_{0,R}X} dV_{0,R}(X) = \begin{cases} \frac{t+(1+\lambda)P_{0,M}\Psi_{0,R}}{t} \\ \\ 1 + \frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{P_{0,R}\Psi_{0,R}}{h}}}{\frac{t}{h}} \end{cases} \end{array}\right\} \quad (B')$$

Siendo:

- ϵ_0 : la probabilidad de ruina de la entidad después de aplicar el reaseguro.
- $P_{0,R}$: prima retenida por la entidad dada la política de reaseguramiento R.
- $F_{0,R}(X,t)$: función de distribución del coste o daño total retenido dada la política de reaseguramiento R.
- $V_{0,R}(X)$: función de distribución de la cuantía del siniestro retenido dada la política de reaseguramiento R.

Si se pretende ver el efecto que sobre la estabilidad de una compañía de seguros tiene una política de reaseguramiento basada en la modalidad de stop-loss, como la mencionada modalidad afecta a la distribución del coste total de la entidad, utilizaremos para su estudio el sistema de ecuaciones (A'), en el cual se explicita $F_{0,R}(X,t)$.

Para las restantes modalidades de reaseguro, como sólo modifican la función de distribución de la cuantía del siniestro, el estudio de la estabilidad de la compañía de seguros dada una política de reaseguro, resulta más operativa estudiarla con el sistema (B').

A través de estas relaciones, ya sea las dadas por la teoría individual como por la colectiva , fijada una determinada cartera con sus correspondientes pólizas, volumen de primas y varianza, podemos determinar cualquier variable ϵ, λ, S, R conociendo las otras tres.

En particular , nos podemos plantear qué política de reaseguro R, reduce el nivel de riesgo ϵ a un cierto nivel ϵ_0 prefijado, manteniendo constantes el resto de variables, o bien, dada una determinada política de reaseguro R, como ésta a su vez dependerá del pleno de retención H[39], nos podemos plantear qué pleno H deberemos de aplicar si fijadas el resto de variables deseamos tener un riesgo ϵ_0.

En este sentido son de interés destacar entre otros los trabajos de **LAMBERT, H. (1960)**[40],**BÜLHMANN, H. (1970)**[41], **STRAUB, E. (1978)**[42],**ANDREAKIS, M. and WATERS, H.R. (1980)**[43] , **M. VAN WOUWE, F.DE VYLDER and M.GOOVAERTS (1984)** [44] y **MARC-HENRI AMSLER (1984)**[45]

En particular en la **modalidad de reaseguro vida**, muchos son los trabajos que aplicando la teoría clásica o la teoría colectiva del riesgo, han tenido como objetivo el cálculo del pleno óptimo. A continuación expondremos brevemente algunos de estos trabajos.

---

[39] $H = \frac{1}{\gamma}, oM$ según la modalidad de reaseguro.

[40] "Une application de la Theorie Collective du risque: La Reassurance", Bulletin A.R.A.B. (1960) y "Quelques aspects du probleme de la ruine. Bulletin A.A. Bruselles 1960)

[41] *Mathematical Methods in Risk Theory*, Berlin/New York

[42] "How to fix retention", Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

[43] "The effect of reinsurance on the degree of risk associated with an insurer's portofolio", Astin Bulletin

[44] "The influence of Reinsurance limits on infinite time ruin probabilities (1984) D. Reidel Publishing Company

[45] "Ruine et réassurance" Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker,Heft 2,1984

En el marco de la *teoría del riesgo individual o clásica del riesgo*, cabe destacar a:

LAURENT, H. (1873)[46] para quien el pleno L para un nuevo riesgo con probabilidades "p" (probabilidad de sobrevivir el asegurado un año más) y "q" (probabilidad de fallecimiento durante el año) y ganancia anual por unidad de capital en riesgo "g" vendrá dado por aquel que no exija el aumento de capital de garantía de la entidad K. En consecuencia el pleno resultará del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} K+G=\beta S \\ K+G+L g=\beta\left(S^2+L^2 p q\right)^{1/2} \end{array}\right\}$$

siendo:

- $S=\left(\sum C_i^2 p_i q_i\right)^{1/2}$: riesgo medio cuadrático.
- β : coeficiente de riesgo o de solvencia.
- $G=\sum C_i g_i$: ganancia anual para toda la cartera, donde C_i es el capital en rieso perteneciente al asegurado "i".

Donde la primera ecuación recoge la situación de riesgo de la entidad antes de la incorporación de la nueva operación, y la segunda ecuación recoge la situación de riesgo de la empresa después de la incorporación de la nueva operación.

Despejando L del sistema, **LAURENT, H** llega a la siguiente expresión del pleno:

$$L=\frac{2 S g}{\beta p q}$$

LANDRE, C. (1905)[47] afirma que el pleno para un nuevo riesgo no debe variar la relación entre el riesgo medio cuadrático S y la suma de capitales asegurados $C=\sum C_i$.

Este punto de vista le lleva a determinar el pleno L a partir de la siguiente expresión:

[46] "Journal des Actuaires Français", Paris
[47] "Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung", Jena 1901 y 1905

$$\frac{S^2}{C^2} = \frac{S^2 + L^2\,p\,q}{(C+L)^2}\}$$

donde despejado L:

$$L = \frac{2\,S^2\,C}{C^2\,p\,q - S^2}$$

Para **BÖHLMANN, G. (1909)**[48] el pleno para un nuevo riesgo no debe de variar la relación entre la ganancia y el riesgo medio cuadrático, afirmación que se traduce en la siguiente relación:

$$\frac{G^2}{S^2} = \frac{(G + L\,g)^2}{S^2 + L^2\,p\,q}$$

de la cual se obtiene para el pleno L, la fórmula:

$$L = \frac{2\,S^2\,G\,g}{p\,q\,G^2 - S^2\,g^2}$$

INSOLERA, F. (1950)[49] plantea como coeficiente de riesgo β el dado por la siguiente expresión:

$$\beta = \frac{(\sum C_i^2)^{1/2})}{\sum C_i^2}$$

Por lo que el pleno para un nuevo riesgo L, vendrá dado por aquel capital que no modifique el coeficiente de riesgo de la entidad, en consecuencia:

$$\frac{(\sum C_i^2)^{1/2})}{\sum C_i} = \frac{(\sum C_i^2 + L^2)^{1/2})}{\sum C_i + L}$$

relación que permite la siguiente fórmula del pleno:

$$L = \frac{2\sum C_i}{(\sum C_i)^2 - \sum C_i^2}$$

DUBOURDIEU, J. (1952)[50] aplica la teoría clásica a la determinación de los plenos relativos y absolutos. Los primeros resultan ser proporcionales al cociente

[48] "Congreso de Internacional de actuarios" pp.: 654

[49] *Curso de Matemática Económica Financiera y Actuarial*, Ed: Aguilar 1950

[50] "Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition", Paris 1952 pp.:136

entre "g" y "p q"; o sea que:

$$L = r\,\frac{g}{p\,q}$$

El valor r lo determina de modo que el coeficiente de solvencia β no sea menor de 3 ó 4, obteniendo de esta forma los penos absolutos.

Podemos observar que si la ganancia unitaria "g" es proporcional a la prima pura "q", el pleno sería inversamente proporcional a "p"; y como éste varía poco entre las edades usuales en el seguro de vida, podría decirse que el pleno sería independiente de la edad. Sin embargo si la ganancia es independiente de "q", la prima de riesgo retenida por el cedente $(L\,q)$ debería ser casi constante. A esta afirmación llega por otro camino **MICHALUP. E, (1954)**[51].

SAVIGNON, E. (1954)[52] calcula el pleno de conservación de una cartera constituida por seguros de fallecimiento temporales de duración un año e inmediatos, bajo la hipótesis de que éstos sean de igual cuantía e independientes. Estas hipótesis le permiten obtener la siguiente expresión del pleno de conservación aplicando el teorema de Poisson:

$$L = \frac{2\,\epsilon\,\sqrt{N}\,(\gamma\,-\,\gamma')}{1 - 2\,\epsilon\,\gamma'\,\sqrt{N}}$$

Siendo:

- C : capital asegurado.
- ϵ : probabilidad de ruina de la entidad.
- N : número de personas aseguradas.
- γ : recargo de seguridad aplicado por el asegurador sobre el total del capital asegurado $(N\,C)$ y que garantiza un probabilidad de ruina menor o igual a $\frac{\epsilon^2}{2}$
- γ' : recargo del reasegurador aplicado sobre el capital cecido $N\,(C\,-\,L)$.

[51] "Sobre el reaseguro a prima de riesgo" WestEast Insurance Monitor Nº 8 y 9,New York 1954

[52] "Sur un systéme de réassurance algebrique" Memorias de XIV Congreso internacional de Actuarios

Como la hipótesis de igualdad en las cuantías de los seguros no se da en la práctica, Savignon propone el siguiente sistema de reaseguramiento:

- Si un determinado capital asegurado $C_i > L$ entonces la compañía cederá en reaseguro la diferencia $C_i - L$, cobrando el reasegurador un determinado recargo γ'.

- Sin embargo, si $C_i > L$ el reasegurador complementará el seguro hasta el pleno , ya que éste actuará como asegurado satisfaciendo a la compañía la prima correspondiente a la diferencia $L - C_i$, recibiendo en contrapartida al fallecimiento del asegurado "i", dicha diferencia.

  En este caso, el recargo del reasegurador será negativo, para no perder así la posición de "jugador más favorecido".

De esta forma, la entidad aseguradora soportará para cada fallecimiento un importe igual a L.

Para este sistema, Savignon propone la siguiente expresión del pleno:

$$\epsilon > \frac{1}{2} \frac{L\sqrt{N}}{S(\gamma - \gamma') + \gamma' N L}$$

donde S es la suma de capitales asegurados; obteniendo el pleno por tanteo.

DEITZ, R. (1954)[53] partiendo de la hipótesis de independencia entre los riesgos asumidos por la entidad, propone cuatro expresiones para la determinación del pleno de retención:

$$L_1 = \frac{M_0^2 b}{A_0 m^2} \qquad L_1' = \frac{2 A_0 M_0^2 b}{A_0 m^2 - M_0^2 b^2}$$

$$L_2 = \frac{M_0 b}{m(k^2 m^2 - b^2)} \qquad L_2' = \frac{2 k M_0 b}{k^2 m^2 - b^2}$$

siendo:

[53] "Problemes d'actuariat que pose la reassurance sur la vie, specialemente determination des pleins de conservation" Memorias de XIV Congreso internacional de Actuarios

- M : riesgo medio total de la cartera.
- F : fondos de seguridad o de solvencia de la entidad.
- B : valor actual del beneficio probable de la cartera.
- $A = F + B$: fondos para hacer frente a los siniestros de la cartera.
- A_0, B_0 y M_0 hacen referencia a la cartera antigua.
- m : riesgo medio de la nueva póliza
- b : beneficio probable de la nueva póliza.
- k : recargo de seguridad aplicado sobre el riesgo medio total M.

Los criterios que utiliza para obtener las anteriores expresiones son los siguientes:

a) La fórmula del pleno L_1 la obtiene maximizando lo que él llama, cociente de estabilidad, el cual viene dado por la siguiene relación:

$$\frac{A}{k\,M}$$

b) La fórmula del pleno L_1' para un nuevo contrato, la obtiene como aquella cantidad que no haga disminuir el cociente de estabilidad para la cartera ampliada.

c) La fórmula del pleno L_2 la obtiene maximizando lo que él denomina reserva de riesgo, dado por la siguiente diferencia:

$$A - k\,M$$

d) La fórmula del pleno L_2' para un nuevo contrato, la obtiene como aquella cantidad que no haga disminuir la reserva de riesgo para toda la cartera ampliada.

DEITZ estudia las relaciones entre los distintos plenos obtenidos, siendo recomendables unos u otros en función de la estabilidad de la cartera inicial, y de la "edad" de las carteras.

LASHERAS-SANZ, A. (1954)[54] partiendo de la teoría individual del riesgo, **LASHERAS-SANZ** llegan a la siguiente expresión general del pleno :

$$\tau \leq \frac{\sum_x \sum_y N_{xy}\, C_{xy}(P' - \beta'_x) + R}{\sum_x \sum_y N_{xy}\, C_{xy}\left(\sum_{z=1}^{T} \gamma_{xz}\, \varphi_{zx} - \beta'_x\right) + 10\, t\, \sum_x \sum_y \sqrt{N_{xy}\, C_{xy}} \sqrt{\gamma_x} \sqrt{\sum_{z=1}^{T} \gamma_{xz}\, \varphi_{xz}}}$$

siendo:

- τ : coeficiente unitario de retención del asegurado.
- β'_x : prima de reaseguro para la parte de riesgo asumido que no puede cubrir por sí mismo el asegurador directo.
- R : recursos propios del reasegurador.
- P'_x : prima recargada del asegurador para una misma categoría de riesgo de características x
- C_{xy} : suma asegurada de cuantía de orden y, para un riesgo de característica x.
- N_{xy} : número de seguros homogéneos en cuanto a orden de cuantía y , y de característica x.
- S_{xyz} : cuantía del siniestro de intensidad z, para un riesgo de característica x y de suma asegurada de orden y
- n_{xyz} : número de siniestros de tales circunstáncias.
- $\gamma_{xy} = \frac{S_{xyz}}{C_{xy}}$:
- $\varphi_{xy} = \frac{n_{xyz}}{N_{xy}}$:

LASHERAS-SANZ deducen de esta expresión general, los plenos de retención para la entidad aseguradora según la modalidad de reaseguro:

[54]"Apportation á l'établissement d'une thérie mathématique de la reassurance", Memorias de XIV Congreso internacional de Actuarios 1954

- $C\,\tau$ daría lugar al pleno para toda la cartera de seguros de un ramo dado, a los efectos de reaseguro de excedentes de riesgos (cuota-parte y de excedentes).
- $(C\,\gamma)\,\tau$ sería el pleno para todo el ramo a los efectos de reaseguro excess-loss (considerado individualmente).
- $S\,\tau$ correspondería al pleno para todo el ramo a los efectos de reaseguro excess-loss (considerado colectivamente).
- $(N\,C\,\gamma)\,\tau$ sería el pleno para todo el ramo a los efectos de reaseguro en forma de "excess loss rate".
- $(N\,C\,P\,\gamma)\,\tau$ correspondería al pleno para todo el ramo a los efectos de reaseguro en forma de "excess loss ratio".

PENTIKÄINEN, T. (1954)[55] deduce una fórmula del pleno de retención para una entidad aseguradora, independiente de la distribución de probabilidad de la cuantía de los siniestros y por tanto independiente de la modalidad de reaseguro y válida para todos los ramos. Esta viene dada por la siguiente expresión:

$$L = 0.28\,\frac{(U + \lambda)^2}{P}$$

- U : reservas de solvencia de la entidad
- P : prima pura total de la cartera de la entidad.
- λ : recargo de seguridad de la entidad

MASJUAN, V (1966)[56] propone una fórmula práctica para calcular el pleno L. Para ello además de las notaciones ya introducidas, deben agregarse las siguientes:

[55] "On the reinsurance of an insurance company " Memorias de XIV Congreso internacional de Actuarios 1954

[56] "Algunos aspectos teóricos y prácticos del Reaseguro de Vida" Anales del Instituto de Actuarios Españoles 1966

- Q : tarifa del reasegurador.
- U_L : suma de los capitales en riesgo retenidos por la compañía y que dependerán del pleno L.
- W : suma de los capitales en riesgo para el total N de asegurados.
- $S_L = (\sum p_i\, q_i, L_i^2)^{1/2}$: riesgo medio cuadrático de la cartera retenida

Si la compañía reasegurara íntegramente su cartera pagaría por ello una suma anual igual a $Q\,W$. Sin embargo si fija un límite de retención L pagaría al reaseguador solamente $Q(W-U_L)$, teniendo por tanto un ahorro de importe $Q\,U_L$. Este ahorro tendría por contrapartida un gasto probable de $q\,U_L$ más una posible desviación desfavorable.

Para **MASJUAN, V** el pleno debe de ser tal que el ahorro neto que supone retener una determinada cantidad dado por $(Q\,U_L)-(q\,U_L)$, sea suficiente para cubrir el valor medio de las retenciones más la mayor desviación que verosímilmente puede esperarse. Con un alto margen de seguridad , estima que la desviación no debe seperar 3 ó 4 veces el riesgo medio cuadrático de la cartera retenida. Por tanto el pleno L debe de satisfacer la siguiene inecuación:

$$(Q\,U_L) - (q\,U_L) > 3\,S_L$$

Obteniendo el pleno por tanteo.

En el marco de la *teoría del riesgo colectivo* , cabe destacar entre otros a:

THEPAUT, A. (1953)[57] aplica la teoría del riesgo colectivo para la determinación del pleno en los seguros de vida, llegando a la siguiente solución para el pleno:

$$L = \frac{6g}{3q+2g}\,\frac{K}{B}$$

donde "B" es tal que e^{-B} expresa la probabilidad máxima de ruina para la compañía.

[57]"Esssai de détermination practique du plein de conservation", Bulletin 205 de l'Institut des Actuaires Français, Paris (1953)

WILHELMSEN, L. (1954)[58] estudia el efecto que sobre el pleno de retención tiene el considerar recargos de seguridad diferentes para grupos de seguros distintos, aplicando la teoría del riesgo colectivo.

Como señala **MORA, M.C. (1983)**, la determinación del pleno y del reaseguro óptimo en base a los criterios de estabilidad presenta los siguientes inconvenientes (independientemente de los particularmente presenta la teoría del riesgo individual o colectiva) :

- Las decisiones tomadas (reaseguro óptimo y pleno) sólo tienen en cuenta el ambiente técnico y no el económico, dándose ambas deciciones como independientes.
- No da entrada a los supuestos de racionalidad del sujeto económico (entidad aseguradora) quien lleva a cabo tales decisiones.
- No tiene en cuenta el ambiente en que la entidad toma sus decisiones (orden económico-social y mercado).

1.4.2 Criterios económicos

Estos criterios dan entrada al coste o beneficio del reasegurador mediante una función en la cual aparece el pleno como incógnita.

El pleno se elige con un criterio de óptimo económico (beneficio máximo o mínimo coste) y sujeto a una serie de restricciones impuestas por el grado de estabilidad deseado.

El modelo basado en este criterio es descrito por **MORA, M.C. (1983)** del siguiente modo: La función de beneficios B vendrá dada por:

$$B = \lambda P + (b P_c) + a(1+\lambda_r) P_r - (\lambda_c P_c - \lambda_r P_r) = \lambda P + b P - (\lambda_c P_c + \lambda_r^1 P_r)$$

[58] "On the stipulation of maximum net retentions" Memorias de XIV Congreso internacional de Actuarios 1954

Siendo:

- P_c : prima neta de reaseguro o retenida por el cedente.
- P_r : prima del reasegurador o retenida por el cedente.
- P : prima total de la operación, siendo:

$$P = P_c + P_r$$

- λ_c recargo de seguridad del cedente
- λ_r recargo de seguridad del reasegurador
- a : proporción de prima recargada cedida que se retorna como comisión de reaseguro.
- $b\,P_c$: beneficio técnico conservado por el cedente.
- $\lambda_r^1 = [b + \lambda_r - a(1 + \lambda_r)]$

El criterio consistirá en minimizar la función de costes C:

$$C = (\lambda_c\, P_c + \lambda_r^1 P_r)$$

condicionado a:

$$e^{(1+\lambda)\, P_{0,R}\, \Psi_{0,R}} = \int_0^\infty e^{\Psi_{0,R}\, X}\, dF_{0,R}(X,t) = \Phi_0(\Psi_{0,R})$$

MORA, M.C. (1983) aplica el modelo descrito a las distintas modalidades de reaseguro. Las conclusiones para cada una de ellas son las siguientes:

Reaseguro cuota parte

La cuota óptima γ viene dada por la siguiente expresión:

$$\int_0^{\infty} x e^{\Psi_{0,R}\frac{x}{\gamma}} dV(x) = \Pi(1+\lambda_r^1)\left[1 - \frac{t}{h}\left[V_0(\Psi_{0,R} - 1\right]\right]$$

Reaseguro de excess-loss

El pleno de retención óptimo M viene dada por :

$$e^{\Psi_{0,R}M} = (1+\lambda_r^1)\left[1 - \frac{t}{h}\left[\int_0^M e^{\Psi_{0,R}x} dV(x) + e^{\Psi_{0,R}M}\int_M^{\infty} dV(x) - 1\right]\right]$$

Cuando $h \rightarrow \infty$ tendremos el proceso de Poisson, siendo en este caso el pleno óptimo:

$$M = \frac{1}{\Psi_{0,R}\, ln(1+\lambda_r^1)}$$

resultado obtenido por **LAMBERT, H. (1963)**[59]

Reaseguro de stop-loss

El pleno de retención óptimo M viene dado en esta modalidad por la siguiente expresión:

$$\frac{e^{\Psi_{0,R}M}}{(1+\lambda_r^1)} = \int_0^M e^{\Psi_{0,R}x} dF(x,t) + e^{\Psi_{0,R}M}\int_M^{\infty} dF(x,t)$$

Dentro de este enfoque cabe destacar el trabajo de **VERBEEK, H.G. (1966)**[60], quien estudia la minimización de la función de costes totales de la modalidad de reaseguro stop-loss, sometida a la condición de mantenimiento de la desviación típica. La función resultante que obtiene le permite afirmar que el reaseguro stop-loss no minimiza el coste total del reaseguro. Un estudio análogo para la modalidad de excess-loss le lleva al mismo resultado, es decir, esta modalidad tampoco minimiza el coste total del reaseguro. Por último llega a la conclusión que una combinación de

[59] "Contribution à l'etude du comportement optimum de la cédante rt du réassureur dans le cadre de la théorie collective du risque", Astin Bulletin Vol 2. (1963)

[60] "On optimal Reinsurance" Astin Bulletin (1966)

ambas modalidades es la que minimiza la función de costes. En este sentido son de interés los trabajos de **VILLALON, J. G. (1969)**[61] y **MORA, M.C. (1983)**.

1.4.3 Criterios basados en un orden de preferencias

Estos criterios se basan en la incorporación de la función de utilidad y alguno de ellos dan entrada al mercado de reaseguro.

En general el problema se puede plantear en los siguienes términos:

Dada una determinada función de utilidad de la entidad aseguradora "u" el problema consistirá en determinar qué política de reaseguramiento R, maximiza la utilidad de la empresa aseguradora. Podemos formalizar esta idea del siguiente modo:

$$Max \quad U = \int u$$

Dentro de este enfoque, cabe destacar a **BORCH, K. (1962)**[62] para quien una entidad aseguradora, si actúa racionalmente "tratará de administrar sus operaciones de modo que alcance la distribución de beneficios G que de acuerdo con su política o norma de conducta particular sea la mejor entre las distribuciones a su alcance. Esto significa que el objetivo de la entidad será el de hacer máximo el índice de utilidad $U(G)$, dentro del conjunto de distribuciones de beneficios G, por ella controladas".

El papel del reaseguro consistirá en facilitar la obtención de una distribución de beneficios G^* tal que haga máximo:

$$U(G^*) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)dG^*(y)$$

- $y = S - x$
- x : importe de la siniestralidad.
- S : reservas de solvencia de la entidad

[61] "El reaseguro como estrategia alternativa del ente asegurador frente al problema de su ruina", Riesgo y Seguro nº 28-II época (1969)

[62] "Reformulation of some problems in the Theory of Risk", Proceding of the casuality actuarial society (1962)

- $G^*(y)$: función de distribución del beneficio de la entidad después de aplicar el reaseguro.

Otros trabajos que utilizan la teoría de la utilidad para calcular el pleno son los de **RÖBBERT, M. (1976)**[63], **BOYLE, P.P. and MAO, J. (1982)**[64] y **STUART, C. (1983)**[65]

Otro enfoque alternativo que utiliza la función de utilidad es el dado por el mismo **BORCH, K.**[66]

Este se encuadra dentro de la teoría del riesgo moderno [67]:

Consiste en estudiar la posibilidad, por parte de la entidad de seguros, de abonar una cantidad "s" del excedente que ésta presenta "S", en concepto de dividendos al final de cada periodo. El problema consistirá en determinar el dividendo a repartir "s" conocido "S", que suponga una situación de equilibrio entre la tendencia a que éste sea elevado y las consecuencias que ello pueda acarrearle a la entidad. Dentro de este marco, son de interés los trabajos de **FINETTI, B. (1957)**[68] **VILLALON, J.G. (1969)**[69] y de **PRIETO, E. (1969)**. Éste últtimo estudia el efecto del reaseguro en la política de distribución de dividendos.

Cuando los criterios dan entrada a la información que procede del ambiente del sistema, el reaseguro se podrá plantear como un juego cooperativo, contemplándose los efectos de la cooperación de los reaseguradores en el mercado. En este sentido son

[63] "Bewertung von rückversicherten Lebensversicherungsbeständen" Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherunsmathematik

[64] "Optimal risk retention under partial insurance" Insurance Mathematics and Economics (1982)

[65] "The case of homeowner insurance in Sweden" Insurance Mathematics and Economics (1983)

[66] "Payment of dividend by insurances companies" Actas del XVII Congreso Internacional de Actuarios

[67] En este sentido es de interés destacar el trabajo **VILLALON, J.G.** "La teoría del riesgo como base matemática del reaseguro" Riesgo y Seguro" Madrid. nº 27 II época 1969 pp.: 109

[68] "Su una impostatione alternativa della theoria collectiva del rischio" Transction XV International Congres of Actuaries 1957

[69] "Consideraciones sobre la política de distribución del excedente resultante propiedad de un asegurador de riesgos heterogrados", Estadística Española enero-marzo 1969

de destacar los trabajos de **BORCH, K (1960)**[70] y **LEMAIRE, J. (1979)**[71]

Otras formas de determinar el pleno son las desarrolladas por:

MOFFET, D. (1977)[72] basada en la teoría del consumidor.

HEILMANN, W.R. (1982)[73] quien obtiene el pleno de retención utilizando la experiencia de la siniestralidad de la entidad.

GIL, J.A. y BALBAS, A. (1988)[74] utilizan la programación multiobjetivo para determinar la política de reaseguro óptima, en particular, en el citado artículo se estudia cual debe ser la cuota óptima a retener en un reaseguro cuota parte de un ramo no vida, tal que maximice el beneficio esperado de la cedente y minimice la suma de las desviación típica de la cartera retenida, condicionado a las restricciones legales de solvencia.

En esta misma linea **HERAS, A. (1989)**[75] realiza un estudio paralelo utilizando como medida del riesgo , la varianza de la cartera retenida.

1.5 Estudio del Reaseguro en el ramo de vida

Hay diferencias muy importantes entre el reaseguro vida y las demás clases de reaseguros. La naturaleza de los riesgos aceptados por las compañías de seguros de vida han hecho necesario crear formas de reaseguros y métodos para tramitarlos que son exclusivos de dicho ramo.

Los riesgos cubiertos por el reaseguro de vida son:

- Riesgo de muerte prematura. Este riesgo tiene lugar en las operaciones de

[70]"Reciprocal reinsurance traties seen as two-person co-operative Game", SKAN AKT n o 12 (1960) y "Equilibrium in a reinsurance market" Económetrica (1962)

[71]"Reinsurance as a Cooperative Game", Physica-Verlag,Wuerzburg/Germany (1979)

[72]"Optimal deductible and consumption theory", Journal of Risk and Insurance

[73]"An approach to the retention problem based on claim experience", Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.

[74]"Una aplicación de la programación multiobjetivo al reaseguro" Anales del instituto de actuarios españoles nº 26 (1988)

[75]"Programación multiobjetivo estática y dinámica. Aplicaciones a la economía y a la empresa" Tesis doctoral Complutense (1989)

seguro, en las cuales la muerte del asegurado puede originar una pérdida a la compañía aseguradora cuando el pago supera la provisión matemática de la póliza.

- Riesgo de sobrevivencia prolongada. Este riesgo es propio de las operaciones de rentas y tiene que ver con las posibles pérdidas que puede ocasionar a la entidad, la prolongación de la vida del asegurado.

- Otro tipo de riesgos, como pueden ser la invalidez y la muerte accidental.

En la práctica actual, el reaseguro de vida se aplica casi exclusivamente para cubrir el riesgo de muerte prematura, aunque muchas pólizas al contener coberturas adicionales relativas a la muerte por accidente y a la invalidez, hace que también se reaseguren estos beneficios pero en forma similar al que se aplica a los "ramos generales".

1.5.1 Estudio del Reaseguro proporcional en ramo de vida

Los reaseguros en vida realizados bajo bases proporcionales, se caracterizan por ser incancelables por las partes contratantes mientras los respectivos riesgos estén en vigor. Es decir, que una vez que la compañía aseguradora ha cedido un riesgo no puede cancelarlo sino al término del mismo (anulación, rescate o vencimiento) o bien, por ser inferior a la retención convenida. Por su parte tampoco puede el reasegurador cancelarlo.

Pueden haber excepciones a esta regla que previamente han sido acordadas en el contrato, como por ejemplo si la póliza se modifica y el capital, ahora reducido, no sobrepasa un límite determinado que puede ser justamente la retención convenida.

Los contratos de reaseguro proporcionales en vida se aplican sobre personas aseguradas y no sobre pólizas, por la incidencia que puede tener la acumulación de pólizas sobre una sóla persona asegurada.

Las modalidades más importantes que se dan dentro del reaseguro proporcional en el ramo de vida son:

- Reaseguro a condiciones originales o prima de tarifa
- Reaseguro a prima de riesgo
- Otros métodos de reaseguro de vida

Reaseguro a condiciones originales o a prima de tarifa

Esta modalidad de reaseguro proporcional opera como los reaseguros proporcionales no vida. Puede contratarse ya sea facultativamente o mediante contrato , y en este último caso, funcionará como contrato de reaseguro cuota-parte o de exdecentes.

A cambio de aceptar la responsabilibdad de la parte convenida de un seguro, en las mismas condiciones aplicadas por la compañía cedente en la póliza original, el reasegurador recibe una parte proporcional de las primas originales. Pueden darse casos en los que se puede convenir pagar al reasegurador una prima unitaria diferente de la tarifa de la cedente, pero no es lo usual.

Con este método el reasegurador queda obligado a constituir las provisiones matemáticas, así como hacer frente a todos los desembolsos que realice la cedente por los pagos por siniestros, rescates y vencimientos, en las proporciones reaseguradas.

Por norma general, acostumbra el reasegurador a depositar las provisiones matemáticas que le corresponden en manos de la cecente, la que le abona un interés convenido en el contrato de reaseguro.

Es interesante destacar en esta modalidad de reaseguro las comisiones otorgadas por el reasegurador a la cedente, las cuales financian el esfuerzo comercial de ésta. El reasegurador suele calcular estas comisiones en función de las comisiones máximas pagadas por la compañía cedente. Estas suelen ser del orden del 100% en el primer año, 20% en el segundo y 10% en los siguientes.

Por norma general los reaseguros a condiciones originales se establecen mediante contratos de excedentes. Los contratos cuota parte en general, son utilizados exclusivamente para reasegurar planes de seguros colectivos de vida, por que en estos casos, al reasegurar una cuota parte de la totalidad del seguro, el reasegurador evita una selección adversa. Si la cobertura hubiese sido contratada según el excedente, los seguros cedidos al reasegurador tenderían a concentrarse en los miembros más antiguos y / o menos saludables integrados en el grupo.

El reaseguro a condiciones originales es utilizado por compañías en sus años iniciales, por el apoyo financiero que recibe la cedente del reasegurador, ya sea vía comisiones o vía provisiones que éste deja en depósito en manos de aquella.

También lo utilizan las compañías de gran volumen, para los riesgos con capitales asegurados muy elevados que sobrepasan sus retenciones.

Reaseguro a prima de riesgo

Este método ha sido diseñado para cubir el riesgo de muerte anual al que está sometido la cedente en las operaciones de seguros.

Consiste en la cesión de una parte del capital en riesgo, asumido por la aseguradora, y que exceda a su retención. En la práctica, la retención se fija en el respectivo contrato de reaseguro, y esta puede venir determinada de varias formas, por ejemplo:

a) Puede retener cierta parte del riesgo de mortalidad amparado por la póliza original durante toda su vigencia, de modo que el capital reasegurado disminuye cada año al aumentar el valor de las provisiones referentes a la suma reasegurada en principio.

En este caso el capital arriesgado reasegurado viene dado por:

$$\text{Capital reasegurado en t} \quad Z_t = (S - R)(1 - V_t)$$

- S : total de la suma original asegurada.
- R : retención de la entidad aseguradora.

- V : provisión matemática por unidad de la cantidad asegurada en el año t.

b) Puede retener un capital constante, de modo que el coste económico neto por un fallecimiento sea igual siempre a su retención. Por este motivo, el importe reasegurado disminuye cada año al aumentar las provisiones matemáticas que pertenezcan a la totalidad de la póliza, siendo el reaseguro necesario únicamente para una parte del plazo de vigencia de la póliza.

En este caso el capital reasegurador viene dado por [76]:

$$Z_t = S\,(1 - V_t) \; - \; R$$

c) El capital reasegurado sea una proporción k del capital en riesgo de cada período:

$$Z_t = k\,S\,(1 - V_t) \quad k < 1$$

d) Puede también retener de tal forma que el capital reasegurado disminuya en una cantidad arbitraria durante el número de años estipulados.

Generalmente el método más utilizado es el a), aunque los demás métodos también son practicados para cubrir necesidades especiales de las compañías cedentes.

Por el capital en riesgo reasegurado la cedente paga primas de reaseguro por anualidades anticipadas. Estas primas se calculan mediante una tarifa especial que se conviene y es el resultado de multiplicar la prima de riesgo correspondiente a la edad alcanzada por el asegurado, por el capital reasegurado para el año en referencia.

La prima de riesgo P_x asociada a un asegurado de edad x se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$P_x = V^{1/2}\,q_x$$

donde:

[76] A esta forma de calcular el capital reasegurado se la conoce como método Varma

- $V = (1+i)^{1/2}$: factor de actualización financiera al tipo de interés i.
- q_x : probabilidad de que una persona de edad actuarial x fallezca en el transcurso de un año.

Si a esta prima de riesgo (prima neta) le incorporamos recargos que permitan cubrir los gastos del reasegurador, ganancias y el margen para fluctuaciones de la mortalidad, llegaríamos a la determinación de la prima bruta de riesgo P'_x, para la cual **FOSTER G.T. (1946)**[77] dió la siguiente expresión:

$$P'_x = \frac{P_x + c}{1-k}$$

donde:

- c : recargo global para gastos en tanto por uno.
- k : recargo para gastos proporcionales a la prima de la compañía aseguradora.

STEEDS, H.J.(1954)[78] sugiere que el valor de $V^{1/2}$ resulta tan insignificante en comparación con el factor de recargo de la prima bruta de riesgo que puede pasarase por alto.

El método de prima de riesgo presenta la ventaja que las primas que han de pagarse al reasegurador son pequeñas en comparación con las primas originales, esta circunstacia hace que el método de prima de riesgo se utilice tradicionalmente para contratar reaseguros en el mercado internacional, dado que reduce al mínimo el volumen de primas que salen del país.

El método de prima de riesgo presenta dos tipo de desventajas con respecto al reaseguro a condiciones originales:

[77]"Some observations on life reinsurance", Journal of Institute of Actuaries, Vol LXXII, PARTE III 1946

[78]"Life reassurance", Journal of the Institute of Actuaries Students' Society, Vol 12, Parte 3 (marzo 1954)

a) Los reaseguradores no suelen otorgar comisiones por los reaseguros sobre las primas de riesgo, porque la comisión pagada a los agentes sobre las primas originales no influye directamente sobre el cálculo de las tarifas de la prima de riesgo.

b) El método de prima de riesgo exige que cada año se tenga que calcular de nuevo la prima de reaseguro, para tener en cuenta las variaciones en el riesgo que ha sido reasegurado.

Otras modalidades de reaseguro de vida

Para evitar los cálculos sobre cesiones individuales se han ideado métodos con el objeto de determinar, de una vez, el total de primas de reaseguro correspondientes a la cartera cedida. Entre otros caben destacar:

El sistema **SIMPLEMATIC RE**, aplicado por una compañía norteamericana de seguros. Este consiste en fijar la tarifa de reaseguro a partir del sexto año en forma global, es decir, independiente de las edades reaseguradas. Esta prima unitaria para aplicar al total de capitales en riesgo reasegurados, se determina según fórmulas de uso privado del reasegurador, por ajustes de las tasas de siniestralidad de los custro años anteriores.

El método de liquidación anual de **SMOLENSKY P. (1954)**[79]. Este se basa en la determinación de las primas de riesgo cobradas en el ejercicio anual por la cedente, que se pueden calcular como iguales a las primas puras más lo intereses correspondientes a esas primas y a la provisión matemática, menos el aumento de éstas respecto del ejercicio inmediatamente anterior.

[79] "Método de reaseguro de vida con liquidación anual", Revista de Ciencias Económicas, julio 1945, Buenos Aires

El método de generación de contratos propuesto por **ECHEVARRIA, P. (1954)**[80] consiste en una agrupación de pólizas por años de emisión, para cuyo conjunto determina una edad media tal que permita considerarlos, en virtud de la ley de envejecimiento uniforme, como un conjunto de contratos ingresados en riesgo a la misma edad, totalizando un capital igual a la suma de capitales, así como una prima suma también de todas ellas. La prima global de reaseguro se calcula por aplicación de la tarifa unitaria, relativa a la respectiva edad media del grupo, al total de capitales en riesgo.

BJORAA,S. J. (1954)[81] hace una descripción de los distintos métodos colectivos utilizados para deteminar el capital reasegurado en un reaseguro a prima de riesgo , para pasar al estudio de la prima de riesgo mediante una serie de aproximaciones.

En particular considera el estudio de la prima de riesgo utilizando como método colectivo de cálculo del capital reasegurado el método Varma, por el cual la cantidad reasegurada en cada período Z_t, viene dada por el capital en riesgo en ese período menos una cantidad constante que la entidad retiene en cada período:

$$Z_t = S\,(1 - V_t) - R$$

Teniendo en cuenta que la edad actuarial del asegurado es x y que la operación es un seguro mixto :

$$Z_t + R = S\,(1 - V_t) = S\,(d + P_{x:n})\,/_{n-t}\ddot{a}_{x+t}$$

siendo:

- $d = i\,V$
- $P_{x:n}$: prima pura anual del seguro mixto

[80] "Método de reaseguro de prima de riesgo por generación de contratos", XIV Congreso Internacional de Actuarios, Madrid 1954

[81] "Group method in connection with risk premium", XIV Congreso Internacional de Actuarios, Madrid 1954

- $/_{n-t}\ddot{a}_{x+t}$: renta prepagable de una persona de edad actuarial $x+t$ y temporal $n-t$ períodos.

BJORAA calcula la prima de reaseguro , utilizando dos tipos de aproximaciones:

a) $/_{n-t}\ddot{a}_{x+t} \simeq A - B(1+j)^{x+t} = A - B\,u^{x+t}$

en la que siendo $j = i - 0.25\%$, se obtiene resultados bastante aproximados (errores < 0.6) a las edades en que corrientemente se practica el reaseguro por el método Varma.

b) $q_{x+t} = \alpha + \beta c^{x+t}$

donde la prima de reaseguro en el momento t, P^R_{x+t}, puede obtenerse como:

$$P^R_{x+t} = Z_t\, q_{x+t}$$

Esta fórmula permite agrupar todas las cesiones realizadas con la misma fecha de vencimiento en el año.

Reaseguro de anualidades

Consiste en reasegurar las pérdidas ocasionadas en las operaciones de rentas debidas a la prolongación de la vida del beneficiario más allá de la edad prevista.

CARTER, R. L. (1979) [82] señala que este tipo de reaseguros suelen contratarse a condiciones originales. De todas formas cabe la posibilidad que el reaseguro pueda también contratarse a prima de riesgo, en este caso sería una prima de riesgo modificada en la cual el reasegurador se haría caso del riesgo de sobrevivencia dotando en cada período las provisiones matemáticas correspondientes.

---

[82] pp.: 711

1.5.2 Estudio del Reaseguro no proporcional en ramo de vida

Las formas de reaseguros no proporcionales cuya popularidad aumenta sin cesar en los mercados de seguros de daños, no han tenido el mismo éxito en los reaseguros de vida. Las compañías de seguros, que ya conocen los costes de su reaseguro proporcional en vigor, parecen preferir la continuidad y conservación de estos costes que afrontar una nueva situación donde los costes son conocidos en el principio pero inciertos en el tiempo. La certeza del coste de reaseguro puede conseguirse con contratos proporcionales y además la compañía cedente sabe que sus seguros en vigor continuarán disfrutando de protección a un coste conocido y sin tener en cuenta lo que pueda suceder en el futuro. Esto no será así en las modalidades de reaseguro no-proporcionales.

No obstante, al aumentar el riesgo a que están expuestos las compañías aseguradoras, debido a la acumulación de posibles pérdidas por accidentes o desastres naturales, los reaseguros no proporcionales están siendo cada vez más solicitados.

Las modalidades más importantes que se dan dentro del reaseguro no proporcional en el ramo de vida son:

- Reaseguro de Excess-loss
- Reaseguro a Stop-loss
- Otros métodos no proporcionales de reaseguro de vida

Reaseguro Excess-loss

El reaseseguro Excess-los protege al asegurador directo de la acumulación de pérdidas causadas por un accidente o acontecimiento, o por una serie de accidentes o acontecimientos producidos por un sólo evento, que afecten al número pactado de vidas (usualmente tres o más de tres), y excedan el límite determinado previamente por la cedente. El reasegurador pagará el excedente hasta llegar al límite máximo de indemnización establecido.

La compañía cedente tiene que determinar el número mínimo de asegurados que comprenderá la cobertura, es decir, a partir de cuántas vidas (cabezas) se considera catástrofe [83], así como la suma que la compañía retendrá en cada accidente catastrófico [84], y la cantidad máxima que correrá a cargo del reasegurador.

En este tipo de contratos la responsabilidad del reasegurador se basa en la cantidad neta arriesgada de cada una de las pólizas afectadas por el evento, (también llamada siniestralidad neta agregada definitiva sufrida por la compañía cedente). La cantidad neta arriesgada de cada póliza es la suma asegurada en vigor menos, las provisiones matemáticas que conserva en su poder la compañía cedente para cubrir estas pólizas y cualquiera otras cantidades cedidas a otros posibles reaseguros.

En consecuencia, el reaseguro de excess-loss protege a la compañía cedente contra el coste de fallecimiento originado por siniestros múltiples derivados de un determinado evento. Este coste vendrá dado por la suma neta arriesgada que ha de pagar la compañía para liquidar estos siniestros, teniendo en cuenta en el desembolso del reasegurador, la cantidad retenida por la compañía cedente y el tope máximo de responsabilidad de éste establecido en el contrato.

Normalmente en este tipo de contratos de reaseguro existen una serie de limitaciones referentes no sólo a los límites de responsabilidad del reasegurador y de la cedente (retención) sobre la cantidad neta arriesgada, sino que también hay restricciones referentes a la posible concentración de riesgos (limitándose el número de vidas aseguradas en el caso que se reasegure planes de seguros colectivos) y al motivo del evento que produzca la catástrofe a cubrir; en este sentido suelen estar excluidos los riesgos originados por guerra, motín y riesgos nucleares, además de los que se establezcan en el contrato.

[83]Debido al elevado número de accidentes que originan dos fallecimientos, se considera como límite mínimo tres vidas.

[84]La cantidad retenida por la compañía cedente suele ser el doble de la cuantía de su retención en un seguro de vida cualquiera.

Los contratos de reaseguro de exess-loss se caracterizan por ser de corta duración. Hay contratos que duran dos o tres años, pero lo normal es que sean anuales. Esto es así sobre todo en las coberturas grandes donde el reasegurador tiene que retroceder el riesgo. Si la experiencia resulta peor que la prevista, el reasegurador tal vez no querrá renovar el contrato. En el mejor de los casos aumentará las primas, aunque estos contratos difieren de los seguros no vida, que se renuevan anualmente. Cualquiera de las partes podrá dar por cancelado el contrato previo aviso con una anticipación que suele ser de unos noventa días al cierre del ejercicio.

La tarificación de los reaseguros de excess-loss crea problemas muy parecidos a los de las coberturas de catástrofes en otras clases de seguros.

STRICKLER F. (1960) [85] ha señalado que la responsabilidad del reasegurador depende principalmente de dos factores:

1. La distribución de la frecuencia de los accidentes que originan la pérdida de M o más vidas (siendo M el límite mínimo del contrato).

2. La distribución de las sumas retenidas arriesgadas por la cartera de la compañía cedente.

Con referencia al punto 1., las encuestas realizadas por la Metropolitas Life Insurance Company of New York, sobre accidentes que produjeros fallecimientos múltiples, proporcionan información que permite derivar la función siguiente:

$$A(x) = 8\,(100)^{\frac{1}{x}}\, x^{\frac{-1}{3}}$$

donde $A(x)$ es el numero anual de fallecimientos por cada millón de habitantes originado por accidentes que producen el fallecimiento de x o más personas.

Por consiguiente, el número anual de acccidentes por cada millón de habitantes que produce exactamente x víctimas sería:

$$H(x) = \frac{(A(x) - A(x+1))}{x}$$

[85] "Rückversicherung des kumulrisikos in der Lebensversicherug", The Transactions of the Sixteenth International Congress of Actuaries, Vol I (1969) pp.: 666

y la probabilidad de producir x víctimas si el accidente se produce sería:

$$P(x) = \frac{H(x)}{\sum_{x=1}^{\infty} H(x)}$$

Según las funciones anteriores, y tomando la distribución de las cantidades retenidas y aseguradas respecto de la cifra promedio arriesgada en la cartera que ha de reasegurarse, y los límites superior e inferior del exceso de pérdida, **STRICKLER** pudo deducir: la prima neta de reaseguro (igual al coste proyectado de los siniestro reasegurados); y la prima bruta del reaseguro (excluido el recargo para gastos) basada en la prima neta, más una proporción especificada de la desviación típica respecto de los siniestros previstos y reasegurados.

Las primas obtenidas mediante la fórmula de **STRICKLER** tendrían que reajustarse para tener en cuenta los factores siguientes:

- A menos que la compañía asegurase la mayor parte de la población concentrada en cierta zona, la probabilidad de que todas las víctimas x fallecidas en un sólo accidente hubieran sido aseguradas por dicha compañía sería muy pequeña. Por lo tanto la prima del reaseguro para riesgos de catástrofes tendrá que reducirse en forma adecuada.

- Por otra parte, la cartera compuesta en su mayor parte por seguros colectivos justificaría un aumento en la prima, por el cúmulo de riesgo que se produce.

Caben destacar también en este sentido el trabajo de **DREW W. H. (1960)**[86]

En la práctica, si el riesgo que ha de reasegurarse es muy pequeño, de modo que el recargo de los gastos constituye una parte destacada de la prima total, o si los capitales asegurados no se supone que varien mucho, el reasegurador podrá exigir una prima fija no ajustable. Si la prima es ajustable, la compañía cedente paga al iniciarse cada año una prima mínima, a partir de dos tercios o más de la prima anula proyectada, y el saldo lo paga cuatro meses despúes. Posteriormente, la prima anual se ajusta al terminar el año, y el reajuste de la prima se calcula multiplicando la tasa

[86] "Excess-loss (life)", Transactions, Society of Actuaries, Vol 12 (1960) Nº 33 pp.:376

fija de la prima de reaseguro por la mitad de la variación en la suma neta arriesgada a fin de año.

Reaseguro Stop-loss

Por el contrato de Stop-loss el reasegurador acepta la responsabilidad de los siniestros netos agregados definitivos (tal y como se ha definido anteriormente en el caso de los contratos de exceso de pérdida) que superan un importe determinado para cada año, y sujeto a un límite superior. La responsabilidad del reasegurador también puede expresarse de acuerdo con las indemnizaciones que exceden un determinado porcentaje de las proyectadas (a este tipo de contratos **CARTER R. L. (1979)** lo denomina reaseguro de exceso de coeficiente de siniestralidad) sujeta a unos límites monetarios mínimos y máximos.

Casi nunca el reasegurador otorga una cobertura ilimitada (100% del exceso de siniestralidad) sino que por el contrario, restringe su responsabilidad a un porcentaje menor (suele ser del 90%). Con esta medida se pretende que la compañía cedente actúe de un modo correcto en la tarificación y en la selección de los negocios que han de componer su cartera reasegurada.

Si atribuimos al reaseguro la propiedad de ser la principal medida a adoptar para conseguir la estabilización de los resultados del asegurador directo, no cabe duda que la modalidad de stop-loss logra plenamente sus objetivos al conseguir la estabilización de la siniestralidad. Esta modalidad es adecuada para proteger a las compañías contra las fluctuaciones transitorias de siniestralidad debido, por ejemplo, a epidemias, desastres naturales y riesgos parecidos, circunstancia que les permite aumentar sus límites de retención.

Al igual que en los contratos de excess-loss, los contratos de stop-loss suelen revisarse cada año, circunstancia que da incertidumbre a la compañía cedente que no puede planificar a largo plazo los costes de reaseguro de la operación, a diferencia de lo que sucede con los contratos proporcionales cuyo costes son conocidos.

En este tipo de contratos también suele haber una lista de exclusiones entre las cuales suelen figurar aquellos siniestros en los que la muerte sea causada o contribuyan a ella, como puede ser la guerra.

Desde el punto de vista del reasegurador hay dos dificultades propias de los contratos de stop-loss:

- Los cambios posibles en las normas de suscripción de la compañía cedente. Estos cambios pueden influir sobre el riesgo que corre el reasegurador (modificaciones en los niveles de retención o emisión de nuevos tipos de pólizas), su solución sería reajustar las condiciones del contrato. Los problemas surgen si la compañía suaviza sus normas de suscripción sin que lo sepa el reasegurador.

- El problema de la tarificación de primas. A este problema dedicaremos las siguientes lineas.

El problema de la tarificación del stop-loss procede de la falta de seguridad en la siniestralidad experimentada y por tanto en la dificultad en obtener una estimación de la función de distribución del coste agregado de la compañía.

Esta circunstáncia no es propia del ramo de vida y por tanto los distintos modelos teóricos aplicados para otros ramos pueden ser también de aplicación al ramo de vida.

A continuación realizaremos un breve repaso de algunos de los trabajos teóricos que han habido en este sentido.

Los primeros trabajos teóricos que se empezaron a realizar para calcular la prima del reaseguro stop-loss, fueron los basados en la teoría matemática del riesgo. **AMMETER .H (1954)**[87] dió una serie de fórmulas matemáticas para calcular las primas de los reaseguros no proporcionales basadas en la teoría del riesgo colectivo.

AMMETER, H. demuestra que los elementos críticos en un modelo de tarificación son:

[87]"Risikotheoretische Methoden in der R", 14th International Congress of Actuaires, Vol.1 pp.:612 Madrid 1954
"*The calculation of premium rates for excess-of-loss and stop-loss reinsurance treaties* in: Nonproportional Reinsurance, ed.by S. Vajda, pp.:79 Brussels 1955

1. El valor medio del número de siniestros en un año dado.

2. La función de la frecuencia de siniestros que han de pagarse.

3. El nivel de fluctuación de los siniestros.

En esta línea caben también destacar, entre otros, los trabajos de **VAJDA (1951,1955)**[88] y de **KAHN P. H.(1962)**[89], éste último propone además un factor de recargo sobre la prima del reaseguro (pasando por alto los gastos) calculado según un porcentaje de la desviación típica de los siniestros pertenecientes al exceso.

Sin embargo, estos modelos basados en la teoría del riesgo colectivo presentan un problema en cuanto al cálculo numérico de la función de distribución del coste total.

La solución de este problema ha sido el caballo de batalla en las tres últimas décadas de los actuarios que se han dedicado al estudio del reaseguro stop-loss.

Distintas han sido las soluciones que se han adoptado para poder determinar numéricamente la función de distribución del coste total de los siniestros. A continuación citaremos algunas de estas soluciones y algunos de los trabajos que en este sentido se han realizado:

- Una forma de poder determinar la función de distribución del coste total y por tanto la prima de reaseguro de stop-loss ha sido a través de fórmulas aproximadas. En este sentido caben destacar los trabajos de:

  MEREU, J. A. (1972)[90], plantea que el verdadero problema que hay en el cálculo de la prima de un reaseguro stop-loss es la determinación de los valores de la función de distribución del coste total $F(X,t)$ que se encuentran en la "cola", es decir aquellos valores definidos en el intervalo $M \leq X \leq \infty$. Recordemos que la prima de un reaseguro stop-loss viene dada por la siguiente expresión:

[88] "Analytic studies in stop-loss reinsurance", Parts 1-2. Scandinavian Actuarial Journal (1951/1955)

[89] "An introduction to collective risk and its application to stop-loss reinsurance", Transactions of the Society of Actuaries, Vol 14, parte 1 (1962) pp.:400

[90] "An Algorithm for Computing Expecter Stop-Loss Claims under A Group Life Contract", T.S.A XXIV (1972) pp.:311-320

$$P^R = \int_M^\infty (X - M) dF(X,t)$$

MEREU propone la siguiente fórmula para calcular la prima de reaseguro stop-loss:

$$P^R = E(X) - M + \int_0^M (M - X) dF(X,t)$$

la cual sólo se requiere el conocimiento de la función $F(X,t)$ en el tramo $0 \leq X \leq M$.

GERBER, H.U. (1976) (1982)[91] investigó varios métodos de "aritmetización" de la distribución de probabilidad de la cuantía del siniestro. Una función de distribución de la cuantía del siniestro es aritmética cuando la cuantía de todos los siniestros pueden ser expresados como múltiplos de un determinado valor $d > 0$, por consiguiente, el montante de los mismos será igual a $id \quad i = 1, \ldots$. De esta manera **GERBER** tranformaba funciones continuas en discretas, más sencillas de trabajar, y estudió los errores que se podían cometer con estos métodos en la determinación de los valores de la "cola" de la distribución del coste agregado y su correspondiente repercusión en la prima de reaseguro stop-loss.

KUPPER,J. (1962)[92] y **BEARD,R.E et al (1977)**[93] estimaron la función de distribución del coste agragado a través de las series de Edgeworth.

---

[91] Gerber and Jones, D.A."Some practical consideration in connection with the calculation of stop-loss premiums. Transaction of the Society of Astuaries Nº 18, pp.:215-231 (1976)

"On the numerical evaluation of the distribution of agagate claims and stop-loss premiums", Mathematics and Economics (1982) pp.:13-18

[92] *Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung*, PartII: Schadenhöhe und Totalschaden, in Blätter der Deutsche gesellschaft für Versicherungsmathematik (Deutscher Aktuarverein) e. V., Köln Vol VI(1962) pp.:104

[93] *Risk theory* The Stochastic Basis of Insurance, 2nd Edition, London and New York 1977

KAUPPI,L and OJANTAKANEN (1969)[94] buscaron una fórmula aproximada de la función de distribución del coste agragado a través de una Normal Power.

ESSCHER, F. (1963)[95] obtiene la función de distribución del coste agregado a través de la transformación de Esscher.

Otros trabajos de interés en este sentido son los de **PESONEN, E. (1967)**[96] y **STRAUB,E. (1971)**[97]

- Otros estudios han ido encaminados a obtener métodos de cálculo numérico para determinar la función de distribución del coste total. En este sentido son de interés destacar entre otros los siguientes trabajos:

  BOHMAN, H. and ESSCHER, U. (1963)[98], **HOVINEN, E. (1967)**[99], **SEAL, H.L (1971)**[100],**KORNYA, P.S. (1983)**[101] y **DE PRIL, N. (1988)**[102]

- Otras investigaciones han ido encaminadas a obtener métodos recursivos para la determinación de la función de distribución del coste total. Estos métodos parten del supuesto de que la distribución de la cuantía del siniestro es aritmética.

[94]"Approximations of the Generalised Poisson Function", Astin Bulletin Vol V (1963)pp.:213

[95]"Approximate computation of Distribution Function when the Corresponding Characteristic Functions Are Known",in Scandinavian Actuarial journal 1963 pp.:78

[96]"On the calculation of the Generalised Piosson Function, in Astin Bulletin Vol IV (1967) pp.:120

[97]"Application of Reliability Theory to Insurance", Astin Bulletin Vol VI (1971)

[98]" Studis in Risk Theory witz Numerical Illustrations Concerning Distribution Function and Stop Loss Premiums", Part I Scandinavia Actuarial journal pp.:173

[99]"Procedure to Compute Values of the Generalised Poisson Funcition", Astin Bulletin Vol IV (1967) pp.:129

[100]"Numerical calculation of the bohmann-Esscher Family of Concolution-Mixed Negative Binomial Distribution Functions", Mitteilungen der Vereinigung schweizerrischer Versicherungsmathematiker, Bulletin de l'association des actuaires suisses (Bern) (1971) pp.:71

[101]"distributio of agregate claims in the risk theory model", Transactions of the Society of Actuaries 35, 823-836. Discussion 837-858.(1983)

[102]"Improved approximation for the agregate claims distribution of a life portofolio", Scandinavian Actuairal journal (1988)

En esta línea son de interés destacar los trabajos de **PANJER, H.H (1980)(1981)**[103] y **SUNDT,B. and JEWELL; W.S. (1981)**[104]. Estos trabajos fueron generalizados por **PANJER, H.H. and B.W. LUTEK (1983)**[105] y **WILLMOT, G.E. and PANJER, H.H. (1987)**[106]

- Hay quienes han estudiado un método alternativo al recursivo basado en la transformada Fast-Fourier, para calcular la función de distribución del coste total, destacar en este sentido los trabajos de **BÜHLMAN, H. (1984)**[107] y **HÜRLIMANN, W. (1986)**[108]

- Otros actuarios han calculado la prima de reaseguro stop-loss acotando los valores que puede tomar la mencionada prima. Es esta dirección se encuentran entre otros los tabajos de **BOWERS, N.L. (1969)**[109],**BÜHLMANN et al. (1974)**[110],**TAYLOR, G.C. (1977)**[111], **DE VYLDER and GOOVAERTS (1982a),(1982b),(1983)**[112] y **KASS R. et al (1986)**[113]

---

[103] "The agregate claims distributions and stop-loss reinsurance", Transactions of the Society of actuaries. (1980)

"Recursive evaluation of a family of compound distributions", Astin Bulletin (1981)

[104] "Further results on recursive evaluation of compound distributions. Astin Bulletin (1981)

[105] "Practical aspects of stop-loss calculations", Insurance: Mathematics and Economics Nº 2 pp.:159-177 (1983)

[106] "Difference equation approaches in evaluation of compound distribution", Insurance: Mathematics and Economics (1983)

[107] "Numerical evaluation of the compound Poisson distribution: Recursion or Fast-Fourier transform?", Scandinavian Actuarial Journal (1984)

[108] "Error bounds for stop-loss premiums calculated with the Fast Fourier transform. Scandinavian Actuarial Journal (1984)

[109] "An Upper bound on the stop-loss net premium", Transaction of the Society of actuaries (1969)

[110] Bühlman,H. Gagliardi, B., Gerber, H.U. and Straub, E. "Some inequalities for stop-loss premiums", Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker (1974)

[111] "Upper bounds on stop-loss premiums under the constraint on claim size distributio", Scandinavian Actuarial Journal (1977)

[112] "Analytic bes upper bounds on stop-loss premiums", Insurance: Mathematics and Economics (1982a)

"Upper and lower bounds on stop-loss premiums in case of konow expectation and variance of the risk variable", Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker (1982b)

"Best bounds on the stop-loss premium in case of know range, expectation, variance and mode of the risk", Insurance: Mathematics and Economics (1983)

[113] KASS R., Goovaerts, M.J. and Bauwelinckx,T. "Some Elementary Stop-loss Inequalities", Mit-

- Hay quienes han utilizado técnicas de simulación basadas en el método de Monte Carlo, para poder determinar la distribución del coste agregado. En este sentido destacar los trabajos de **HOVINEN, E.,(1967)**[114], **PESONEN, E. (1967)**[115] y **ERMAKOW, S.M. (1975)**[116]

Podemos concluir que no exite un método único para determinar la prima de reaseguro stop-loss. Si bien se han hecho muchos esfuerzos en este terreno, el tema de la tarificación del reaseguro stop-loss sigue siendo un tema abierto.

Respecto al reaseguro stop-loss en **el ramo de vida** son de interés destacar los trabajos de **MEREU, J. A. (1972)**, quien aplica el reaseguro stop-loss a partir de la fórmula aproximada anteriormente estudiada, a un colectivo de partícipes.

HOUGAARD, H. (1976)[117] determina la prima de reaseguro stop-loss por simulación de la cuantía del siniestro.

Teniendo en cuenta que el número de fallecimientos se distribuye según una ley de Poisson, obtiene la suma asegurada asociada a cada siniestro generando números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1. Calcula la prima pura anual de reaseguro P^{Rea}, aplicando la siguiente expresión:

$$P^{Rea} = P[y > p_I]\, S$$

siendo:

- p_I : valor medio anual del montante total de pérdidas en caso de fallecimiento

- S : suma reasegurada de la cartera.

---

teilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker (1986)

[114]"Procedure Values of the Generalised Poisson Function", Astin Bulletin Vol IV (1967) pp.:129

[115]"On the calculation of the Generalised Piosson Function, in Astin Bulletin Vol IV (1967) pp.:120

[116]*Die Monte- Carlo-Methode und verwandte Fragen*, München (1975)

[117]"Rating the stop-loss premium in life assurance (An experiment with double simulation)", 20th International Congress of Actuaries (1976)

OBREGON, I. (1980)[118] aplica el reaseguro stop-loss a una cartera en la cual se cubre el riesgo de fallecimiento y el riesgo por muerte accidental introduciendo en el cálculo de la prima de reaseguro la función de utilidad del reasegurador.

El proceso que sigue es el siguiente:

Define el importe del siniestro asociado a la i-ésima póliza Z_i a través de la siguiente función:

$$Z_i = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad} \quad (1 - q_{x_i}) \\ B_i & \text{con probabilidad} \quad q_{x_i}(1 - \gamma_{x_i}) \\ B_i + A_i & \text{con probabilidad} \quad q_{x_i}\gamma_{x_i} \end{cases}$$

donde:

- B_i : cobertura de muerte por accidente asociada a la póliza i.
- A_i : cobertura por muerte asociada a la póliza i
- γ_x : probabilidad que una persona de edad x fallezca en un accidente en el periodo de un año
- q_x : probabilidad que una persona de edad x fallezca en el período de un año.

siendo:

$$E(Z_i) = B_i\, q_{x_i} + A_i\, q_{x_i}\gamma_{x_i}$$

$$V(Z_i) = B_i^2 q_{x_i}(1 - q_{x_i}) + A_i^2 q_{x_i}\gamma_{x_i}(1 - q_{x_i}\gamma_{x_i}) + 2A_i + B_i q_{x_i}\gamma_{x_i}(1 - q_{x_i})$$

Suponiendo que los riesgos son independientes, supone que la distribución Z (distribución del coste total de los siniestros) se distribuye según una normal de media m y de varianza σ^2:

$$Z \sim N(m, \sigma^2)$$

[118] "Stop-loss Premiums in life Reinsurance", International Congress of Actuaries. Zurich 1980 pp.:257-261

donde:

$$m = \sum_i E(Z_i) \qquad \sigma^2 = \sum_i V(Z_i)$$

Si $\mu(Z)$ es la función de utilidad del reasegurador, **OBREGON** llega a la conclusión que la prima P debe de satisfacer la siguiente relación:

$$(1-\alpha)\mu(P) + \alpha E\left[\mu(P - Z - Z_0)/\ Z > Z_0\right] = \mu(0)$$

o bien

$$(1-\alpha)\mu(P) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{Z_0}^{\infty} \mu(P + Z_0 - Z) e^{-\frac{(Z-m)^2}{2\sigma^2}} dZ - \mu(0) = 0$$

siendo:

- Z_0 : pleno de retención de la compañía cedente
- $\alpha = p(Z > Z_0)$

A través de esta expresión puede obtenerse la prima P si la función de utilidad del reasegurador es conocida.

En el supuesto que la función de utilidad sea exponencial:

$$\mu(Z) = 1 - e^{-\frac{Z}{C}}$$

y siendo C una constante conocida, **OBREGON** llega a la siguiente espresión de la prima P:

$$P = C\, ln \left[\phi(n) + e^{\frac{-\sigma}{2C}\left(2n - \frac{\sigma}{C}\right)} \phi\left(\frac{\sigma}{C} - n\right)\right]$$

siendo:

- $n = \frac{(Z_0 - m)}{\sigma}$
- ϕ la función de distribución normal tipificada.

Por último, llega a la conclusión que la prima depende de :

1. la aversión al riesgo del reasegurador medido por la constate C.

2. la retención de la cedente Z_0

3. la desviación standar de la cartera σ.

HELD, R. P. (1982)[119] señala que el reaseguro stop-loss debe ser un contrato de corta duración por el gran coste que puede suponerle al plan y que sería deseable que los planes pequeños se uniesen a planes de mayores dimensiones para atomizar más el riesgo al cual están sujetos.

La prima de reaseguro stop-loss y la varianza las calcula aplicando las siguientes fórmulas recursivas:

$$E[u_{t+1}S] = SL(F;t+1) = SL(F;t) - (1 - F(t))$$

$$V[u_t(S)] = E[S^2] - 2\sum_{k=0}^{t-1} SL(F;k) - SL^2(F;t) + t - \sum_{k=0}^{t-1} F(k)$$

siendo:

- S : variable aleatoria siniestralidad anual de la cartera.
- F : función de distribución del coste total.
- $u_t(S)$: carga de siniestros del reasegurador.
- $SL(F;t)$: prima de reaseguro neta stop-loss, asociada a la función de distribución del coste total F, y con pleno de retención t.

donde la función de distribución del coste total asociado al k-ésimo riesgo viene dada por $F_k(x)$:

$$F_k(x) = (1 - q_k - i_k)I(x) + (q_k + i_k)P_k(x)$$

siendo:

[119] "Zur rekursiven Berechnung von Stop Loss-Prämiem für Pensionskassen", Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsnathermatiker, Heft 1, 1982

- q_k : probabilidad de fallecimiento anual asociado al partícipe "k".
- i_k : probabilidad que se invalide el partícipe "k" en el período de un año.
- $P_k(x)$: cuantía del siniestro para el k-ésimo riesgo.
- $I(x) = 0$ si $x < 0$ y $I(x) = 1$ si $x \geq 0$

Llegados a este punto **HELD, R.P.** señala que la función de distribución F puede ser calculada de dos formas:

a) *Aplicando el modelo individual*

Consiste en obtener la función de distribución del coste total de la cartera a través de las funciones de distribución de cada uno de los riesgos individuales:

$$F = F_1 * F_2 * \ldots * F_n$$

obteniendo cada una de las funciones de distribución individuales de forma recursiva a través del método de pliegues [120]

b) *Aplicando el modelo colectivo*

En este caso, suponiendo que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson de parámetro λ:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k} e^{-\lambda} H^{*k}(x)$$

donde

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} q_k + i_k$$

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k + i_k}{\lambda} P_k(x)$$

obtiene la función de distribución del coste total $F(x)$ aplicando el método de recursión de **PANJER, H.H. (1980)**

[120]Ver pp.:77 del artículo de **HELD, R.P.(1982)**

Por último, cálcula la prima stop-loss para un plan de pensiones formado por 230 partícipes, teniendo en cuenta los riesgos de muerte e invalidez, aplicando tanto el modelo individual (método de pligues) como el modelo colectivo (recursión de Panjer). Llega a la conclusión que el método recursivo de Panjer lleva a resultados muy similares al método de pligues, con la ventaja del primero en cuanto al menor número de operaciones que ha de efectuarse con respecto al segundo.

MÜLLER, H.H. (1985)[121] considera la problemática del reaseguro desde un punto de vista no excluxivamente técnico sino también financiero.

Plantea que todo plan de pensiones está sometido a dos tipos de riesgos, uno derivado de la inversión de las reservas "investment risk", y otro originado por las desviaciones entre la mortalidad teórica y la real "actuarial risk".

Esta circunstancia le lleva a diseñar un modelo donde se tengan en cuenta estos dos tipo de riesgo, determinando cual debe ser la política de inversión y el nivel de reaseguro óptimos que permitan al plan un equilibrio financiero permanente. Su modelo se basa en la teoría del riesgo de **BORCH, k. (1960)**[122] y en la teoría de capitales de **CASS, D. and STIGLITZ, J.E. (1970)**[123].

MÜLLER, H.H. parte de los siguientes supuestos:

a) Los n partícipes que constituyen el plan fijan sus prestaciones en términos de salarios. La tasa de salario de cada partícipe es l.

b) Hay en el mercado inversiones en activos sin riesgo con un tipo de interés ρ_0

c) En cada período el equilibrio financiero del plan se establece fijando una tasa de pago $\beta(x, \xi')$ la cual dependerá de la política de inversión de las reservas x y del reaseguro ξ':

---

[121] "Investment policies and reinsurance for pension", Insurance: Mathematics and Economics, 4 (1985) pp.:123-127

[122] "The safety loading of Reinsurance",Skandinavisk Aktuarietidskrift 43, pp.:163-184 (1960)

[123] "The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portofolio: A contribucion to the pure theory of mutual funds",Journal of Economics Theory 2, pp.:122-160 (1970)

$$\beta(x,\xi') = \alpha - [\rho(x) - \rho_0]k + \xi - \xi' + p(\xi')$$

- α : tasa de pago en el supuesto que el plan no tuviese riesgo actuarial ($n = \infty$) y todas las reservas fuese invertidas en activos sin riesgo.
- $\rho(x)$: variable aleatoria que indica la rentabilidad obtenida con las reservas dada una política de inversión x.
- $k = \frac{K}{nl}$: donde K son las reservas del plan calculadas con la tasa ρ_0.
- ξ : variable aleatoria que refleja el riesgo actuarial del plan.
- ξ' : variable aleatoria que refleja el riesgo actuarial que cubre el reaseguro.
- $p(\xi')$: prima de reaseguro.

MÜLLER determina la política de inversión y el reaseguro óptimo maximizando $E\{u[-\beta(x,\xi')]\}$. Para ello supone que tanto los partícipes del plan como el reasegurador tienen funciones de utilidad exponenciales:

$$u(w) = -e^{-aw} \quad a > 0 \text{ función de utilidad de los partícpes}$$

$$v(y) = -e^{-ry} \quad r > 0 \text{ función de utilidad del reasegurador}$$

y que las variables aleatorias ξ, ξ' y $\rho(x)$ son independientes.

Los resultados a los que llega son los siguientes:

La *política de inversión óptima* viene determinada por la expresión:

$$x^*(a) = \lambda^*(a)\bar{x} + [1 - \lambda^*(a)]\tilde{a}$$

donde:

- $\bar{x} = (\bar{x_0}, \bar{x_1}, \ldots, \bar{x_m})$

- $\sum_{h=0}^{m} \bar{x}_h = 1$
- $\tilde{a} = (1,0,\ldots,0)$
- $\lambda^*(a) = \frac{\text{constate}}{a} = \frac{c}{a}$ es el valor esperado del rendimiento de las inversiones.

Por consiguiente la política de óptima de inversión es independiente del tamaño del plan.

Respecto a la *política de reaseguro óptima*, ésta viene dada por:

$$\xi'^* = v^* \xi$$

donde:

$$v^* = \frac{c}{c + n\, r\, \lambda^*(a)}$$

La política de reaseguro óptima está relacionada inversamente con el tamaño del plan y con el rendimiento esperado de las inversiones.

DE PRIL, N. (1986)[124] a partir de una cartera de seguros de vida independientes donde:

- $c_{i,j}$:" es el número de pólizas con tasa de mortalidad q_j y de capital asegurado i unidades.
- $c_j = \sum_{i=1}^{a} c_{i,j}$: número de pólizas con tasa de mortalidad q_j.
- $m = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} i\, c_{i,j}$: montante máximo del siniestro agregado.
- S : variable aleatoria montante del siniestro en un determinado período t.

obtiene la función que da la probabilidad que la variable aleatoria S sea "s" unidades $p_S(s)$ aplicando la siguiente fórmula recursiva :

$$s\, p_S(s) = \sum_{i=1}^{min(a,s)} \sum_{k=1}^{[s/i]} A(i,k)\, p_S(s-ki) \quad s = 1,2\ldots,m$$

[124]"On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model", Astin Bulletin 16. Nº 2 (1986)

siendo:

$$A(i,k) = (-1)^{k+1}\, i \sum_{j=1}^{b} c_{i,j} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k$$

$$p_S(0) = \prod_{j=1}^{b} p_j^{c_j}$$

Otros trabajos de interés son los de **KAAS, R. , HEERWAARDEN, V. and GOOVAERTS, M.J.(1988)**[125] y **KREMER, E. (1989)**[126]

Otras modalidades no proporcionales de Reaseguro vida

Otras modalidades de reaseguro en el ramo de vida son:

Reaseguro Spread-loss o tambíen llamdado "Annual loss limit"

Como señala **PHELPS J. (1964)**[127] esta modalidad de reaseguro puede ser una alternativa a las modalidades de reaseguro convencionales. Se trata de una modalidad de reaseguro no proporcional [128] en la que el reasegurador cubre cada año la siniestralidad de la compañía cedente que exceda de un límite especificado. Sin embargo se diferencia de las modalidades convencionales en la forma de pago de la compañía, ya que ésta deberá satisfacer al reasegurador la siniestralidad cubierta por éste en un determinado periodo (suele ser el año), durante un plazo de tiempo estipulado (suele ser cinco años), más una comisión que se lleva el reasegurador cada año.

Este contrato no se acabará hasta que el reaseguro no se encuentre en una posición positiva respecto a la compañía cedente.

[125] "On stop-loss premiums for the individual model", Astin Bulletin Vol 18 Nº 1 (1988)

[126] *Stochatic life insurance mathematics*, Verein sur Förderung der angewandten mathematischen Statistik und Risikotheorie, e. V., Hamburg 1989

[127] "Practical aspects of non-proportional life reinsurance", Transaction International Congress of Actuaires Nº 17 London-Edimgurg (1964) Vol III pp.:623-624

[128] GERATHEWOHL k. la encuadra como un tipo especial de cobertura excess-loss.

PHELPS J. apunta que esta modalidad de reaseguro permite repartir los efecto financieros de una mala siniestralidad de la cedente, en un periodo relativamente largo de tiempo.

Reaseguro de Riesgo de Ruina (R.R.R)

Esta modalidad de reaseguro se debe a **AMSLER, M. H. (1991)**[129] y tiene como objetivo reasegurar el riesgo de ruina al que está sometido una entidad financiera debido a las fluctuaciones aleatorias de los siniestros. **AMSLER, M. H.** señala que esta modalidad de reaseguro está pensada sobre todo para planes de pensiones, donde el riesgo de ruina es mayor debido al reducido número de partícipes que forman el colectivo.

El mecanismo de este reaseguro es el siguiente. Sea:

- X_t : carga anual de siniestros asociados al período t.
- P_t : volumen de primas anuales asociadas al período $t : P_t = P =$ constante
- Q : recargo de seguridad de P. $Q = P - E(X) > 0$
- R_0 : provisión de fluctuación inicial.

entonces, las provisiones de fluctuación asociadas al período t pueden obtenerse a través de la siguiente expresión:

$$R_t = R_0 + t\,P - \sum_{s=1}^{t} X_s$$

El R.R.R tiene como objetivo cubrir las siguientes contingencias:

a) Si durante la duración del contrato la entidad entra en situación de ruina en el período t $(R_t < 0)$, el reasegurador la reembolsará al año siguiente, con un préstamo de importe $\|R_t\|$

[129] "Réassurance du risque de ruine", Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsnathermatiker , Heft 1, 1991

b) Si al finalizar el contrato (al cabo de n periodos), la provisión de fluctuación es inferior a la que había inicialmente ($R_n < R_0$), entonces el reasegurador dotará los fondos necesarios para que $R_n = R_0$.

El valor actual de las prestaciones del reaseguro vendrán por tanto dadas por:

- el valor actual en el origen $t = 0$ de los intereses sobre los préstamos cedidos por el reasegurador en cada periodo t, ${}_nA_x$:

$$ {}_nA_x = i' \sum_{t=0}^{n-1} E(\|R_t^-\|)\, v^t $$

donde:

- $x = R_0$
- i' : tipo de interés del préstamo.
- R_t^- : cantidad negativa de la provisión de fluctuación en t.
- v^t : factor de descuento calculado al tipo de interés técnico i.

- el valor actual en el origen $t = 0$ de la prestación condicionada al finalizar el contrato ${}_nE_x$:

$$ {}_nE_x = E\left[(R_0 - R_n)^+\right]\, v^n $$

donde: $(R_0 - R_n)^+$ es el valor positivo de la diferencia $R_0 - R_n$

en consecuencia, la prima de reaseguro Π^{Rea} viene dada por:

$$ \Pi^{Rea} = A_{x:n} = {}_nA_x + {}_nE_x $$

AMSLER, M. H. justifica la utilización de los símbolos clásicos para determinar la prima de reaseguro, por la analogía que existe en la estructura de un seguro mixto (vida, fallecimiento), y la cobertura efectuada por un reaseguro de riesgo de ruina.

Si $\ddot{a}_{x:n}$ simboliza el valor actual de una renta anual prepagable de cuantía unitaria asociado al suceso "no estar en sutuación de ruina":

$$ \ddot{a}_{x:n} = \sum_{t=0}^{n-1} \text{prob}(R_t < 0)\, v^t $$

entonces la prima pura anual de reaseguro $P_{x:n}$ es:

$$P_{x:n} = \frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}}$$

Capítulo 2

Modelo estocástico de Reaseguro

Capítulo 2

Modelo estocástico de Reaseguro

2.1 Introducción

En este capítulo describiremos el esquema lógico del modelo que proponemos para calcular la prima de reaseguro de un Plan de Pensiones. Este se caracterizará por:

a) Ser un modelo estocástico en el sentido de que trabajaremos con toda la eleatoriedad que caracteriza tanto a las prestaciones como a las contraprestaciones, ya sea del plan de pensiones como del reaseguro, en lugar de reducir dicha aleatoriedad a los valores esperados de las variables aleatorias.

b) Ser un modelo general, en cuanto nos permitirá calcular el coste del reaseguro para las dos modalidades de reaseguro objeto de estudio:

Reaseguro del Percentil: Contrato de reaseguro por el cual el reasegurador se obliga a cubrir la pérdida del plan, suministrando a éste lös fondos necesarios en aquellos períodos en los cuales el plan no pueda atender a las obligaciones con los partícipes.

Supondremos que el plan parte con un nivel de insolvencia prefijado de antemano ϵ, el cual se conseguirá aplicando el recargo de seguridad correspondiente a ese nivel de riesgo a las primas puras.

Reaseguro de Diferencia de Siniestralidad: Contrato de reaseguro por el cual el reasegurador se obliga a cubrir periódicamente las provisiones matemáticas, los posibles márgenes de solvencia a los que esté obligado a constituir el plan y el riesgo de fallecimiento (en el supuesto de prestación de seguro). En particular supondremos que:

- El margen de solvencia en cada período viene dado por una determinada proporción de la provisión matemática correspondiente.
- El margen de solvencia en cada período viene dado por las reservas necesarias a añadir a la provisión matemática de cada período, para que el nivel de insolvencia del plan se mantenga en uno prefijado ϵ. Estas reservas las denominaremos reservas de solvencia asociadas al nivel de riesgo ϵ.

El hecho de que los planes no tengan ánimo de lucro, nos permite contemplar una nueva posibilidad de contrato de reaseguro basada en el reparto al reasegurador del beneficio esperado que pueda tener el plan en el momento de la extinción del colectivo. De esta manera conseguiremos reducir el coste del reaseguro en ambas modalidades.

Indicaremos las características y elementos básicos del modelo, así como los principales supuestos y limitaciones.

Nuestro modelo hace referencia al reaseguro de un plan de pensiones formado por un colectivo N que en el origen del plan estará formado por "n" partícipes, de los cuales conocemos la edad, el tipo de prestaciones y contraprestaciones así como las cuantías de las mismas y otros factores diferenciadores como pueden ser el sexo. Contemplaremos la posibilidad de entradas periódicas de nuevos partícipes al colectivo.

Supondremos que el Plan de Pensiones carece de capital social y por tanto consideraremos que éste sólo se financia por las aportaciones imputadas a los partícipes, ya sean satisfechas directamente por ellos y/o indirectamente a través de los promotores del plan. Estas aportaciones deberán de cubrir la prima de la prestación asegurada a cada partícipe y la prima de reaseguro correspondiente.

Nuestro estudio lo limitaremos a las prestaciones relacionadas con la vida y fallecimiento del partícipe, prescindiendo de otras contingencias como puede ser la invalidez.

Las prestaciones que consideraremos pueden ser cualquier tipo de rentas o seguros diferido-temporales o vitalicios. Respecto a las contraprestaciones o cotizaciones al plan pueden ser o bien una cuantía cierta (prima única) o una renta temporal de términos variables (primas periódicas variables). En este sentido el modelo contemplará la circunstáncia de que se aporte como primera prima, una aportación inicial totalmente distinta a la posible ley de variación que pueda tener el resto de primas. Esta circunstancia nos permitirá contemplar el caso del partícipe que cambia de plan de pensiones, dando como aportación inicial los derechos consolidados del anterior plan.

Las primas de reaseguro presentarán la misma periodicidad y ley de variación que las cotizaciones que realiza el partícipe al plan. Estas cubrirán totalmente las contingencias establecidas en las modalidades de reaseguro anteriores, de esta forma el plan no asumirá ningún riesgo de insolvencia frente a sus obligaciones con respecto a los partícipes, no siendo necesario calcular nigún pleno de retención.

Los elementos básicos de nuestro modelos son:

1. Una variable aleatoria que caraterizará el riesgo debido a las fluctuaciones aleatorias de la mortalidad.

   En nuestro caso dicha variable aleatoria vendrá simbolizada por T_i , y nos indicará el número de periodos enteros que permancerá con vida el partícipe "i". En este sentido decir que la única causa que consideraremos de salida dentro de un colectivo será el fallecimiento del partícipe.

2. Una serie de variables aleatorias que nos proporcionarán los valores actuales financieros de las corrientes monetarias, asociadas a las prestaciones y contraprestaciones del plan y del reaseguro. Estas estarán relacionadas con el

número entero de periodos que viva el partícipe "i", por tanto la aleatoriedad de las mismas vendrá inducida por la variable aleatoria T_i.

En la valoración intervienen dos variables fundamentales, tipo de interés de valoración del plan, y el tipo de interés de valoración del reaseguro. El tipo de interés del reaseguro será un dato exógeno al modelo y por tanto dado por el reasegurador.

El tipo de interés del plan podría se considerado como una variable aleatoria, reflejo de la rentabilidad de las inversiones del fondo. Nosotros lo consideraremos como cierto, no incluyendo directamente en el mismo las posibles dispersiones de la rentabilidad del fondo respecto de este valor cierto. En particular consideraremos como tipos de interés de valoración el técnico utilizado por el plan y el tipo de interés técnico del reaseguro. Esto no impide que pueda incluirse en el modelo el tipo de interés asociado a la rentabilidad realmente obtenida en aquellas valoraciones que así lo permitan.

Otras variables relacionadas con las corrientes monetarias y que pueden afectar a sus cuantias son:

- Los salarios
- Las prestaciones a la Seguridad Social
- La tasa de inflación.

Estas tres variable escapan al control del plan. Las dos primeras son basicamente inciertas, en el sentido de que no conocemos en el momento de valoración sus valores futuros, de todas maneras es difícil de considerarlas como variables aleatorias, básicamente por la falta de información y de desarrollo teórico sobre posibles modelos.

Respecto a la inflación , podríamos incluirla en el modelo para hacer las valoraciones de las cuantías teniendo en cuenta el cambio de valor en las unidades monetarias.

Las bases técnicas que utilizaremos para poder determinar las variables aleatorias mencionadas son:

- Tipo de interés técnico del plan y del reaseguro, considerados ciertos para todo el periodo de análisis. El tipo de interés técnico del plan será utilizado para las valoraciones financieras asociadas a las prestaciones y contraprestaciones del plan, mientras que el tipo de interés del reasegurador lo utilizaremos para la valoración de las prestaciones y contraprestaciones del reasegurador.

  Aunque trabajaremos con tipos de intereses fijos para todo el horizonte temporal, no habría problema de considerar tipos de intereses variables por periodos, siempre que fuese una variación conocida desde la fecha de valoración.

  Al no tener porque coincidir la periodicidad de las prestaciones con las de las contraprestaciones del plan, entonces podemos definir:

  - Ip_m: tanto efectivo de valoración correspondiente a la periodicidad de las prestaciones.
  - $Ip_{m'}$: tanto efectivo de valoración correspondiente a las contraprestaciones.

  Ambos han de ser equivalentes, por tanto en la formulación del modelo utilizaremos una misma periodicidad para las prestaciones y contraprestaciones, de forma que el tipo de interés técnico del plan lo simbolizaremos por Ip. Respecto al tipo de interés del reaseguro lo referiremos siempre a la periodicidad del tipo de interés del plan, y lo simbolizaremos por Ir.

  En los ejemplos numéricos utilizaremos siempre periodicidades anuales, sin embargo, podríamos trabajar con cualquier periodicidad sin entrañar dificultad teórica.

- Tablas de mortalidad que nos indicarán el comportamiento del colectivo respecto a la mortalidad. Esta tablas han de ser lo más ajustadas posibles al colectivo que pretendemos analizar, pues el coste del reaseguro tratará de cubrir desviaciones adversas respecto al promedio, suponiendo la validez del comportamiento aleatorio de la mortalidad indicado por las tablas. Las tablas de mortalidad del plan no tendrán porque coincidir con las que utilice el reaseguro. De todas formas , en los cálculos que realicemos utilizaremos las mismas tablas tanto para el cálculo de la prima del plan como para la prima de reaseguro.

Al trabajar con un horizonte temporal a largo plazo, puede darse el caso que el comportamiento de la mortalidad del colectivo al cabo de los años varie con respecto a la mortalidad dada por la tabla con la que trabajamos, este problema puede resolverse utilizando una tabla convenientemente corregida que recoga esta circuntancia.

Puede ocurrir que a los distintos partícipes correspondan tablas de mortalidad distintas, pues tengan características distintas que influyan de manera considerable en la mortalidad , como puede ser el sexo, existiendo tablas para hombre y para mujeres. Nosotros utilizaremos unas tablas comunes para todos los partícipes, de todas formas la introducción de varias tablas no supondría cambios teóricos importantes en el modelo que planteamos.

Nuestro modelo lo podemos dividir en tres partes:

1. Aquella que se destina al simple cálculo de la prima pura del plan, requisito imprescindible para llevar a cabo las otras dos partes. En la misma contemplaremos el cálculo del recargo de seguridad asociado a un determinado nivel de solvencia $(1-\epsilon)$, el cual será requisito indispensable para poder formular el coste del reaseguro en la modalidad del percentil y en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad en la que el margen de solvencia venga dado por las reservas de solvencia asociadas al nivel ϵ prefijado.

2. Una segunda parte en la cual calcularemos el coste del reaseguro en ambas modalidades.

3. Una última parte donde contemplamos las posibilidad del reparto del beneficio esperado del plan, calculando las nuevas primas de reaseguro asociadas a cada

modalidad. Estas las denominaremos primas ajustadas de reaseguro, por ser su cuantía menor a las anteriores.

Si bien nuestro objetivo es el estudio del coste de reaseguro en un colectivo de partícipes, aspecto que desarrollaremos en el capítulo cuarto, en el capítulo tres realizaremos el análisis del coste del reaseguro suponiendo que el plan esté formado por un sólo partícipe , que aunque no sea demasiado indicativo respecto al coste del reaseguro del colectivo, puesto que en la práctica no se realizan operaciones aisladas, es necesario dicho estudio para conocer las caraterísticas de las variables aleatorias que intervendrán al tratar el colectivo y porque las primas de reaseguro asociado a un partícipe del colectivo, las expresaremos como una proporción de su prima individual.

El presente capítulo se desarrollará en los siguientes apartados:

2.2 Estudio estocástico de la prima del plan

2.2.1 Variables aleatorias básicas

2.2.2 Cálculo de la prima pura del plan

2.2.3 Cálculo del recargo de seguridad

2.2.4 Cálculo de las reservas de solvencia

2.3 Estudio estocástico de la prima de reaseguro

2.3.1 Variables aleatorias básicas

2.2.2 Cálculo de la prima de reaseguro

2.4 Estudio estocástico de la prima ajustada de reaseguro

2.4.1 Variables aleatorias básicas

2.4.2 Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

2.2 Estudio estocástico de la prima del plan

En este apartado calculamos la prima pura de la operación describiendo previamente las variables aleatorias que intervienen en dicho cálculo.

2.2.1 Variables aleatorias básicas.

En lo sucesivo , consideraremos que el colectivo inicial de partícipes del plan "N" está formado por "n" partícipes (siendo n=cardinal(N)). Cada partícipe viene simbolizado por el índice "i", con $i \in N$.

Las variables aleatorias que intervendrán en el cálculo de la prima de la operación son:

ξ^p : variable aleatoria valor actual financiero de las prestaciones que realiza el plan al partícipe. El tipo de interés utilizado en la valoración será el tipo de interés técnico del plan. Si consideramos el caso individual, la correspondiente variable aleatoria para el partícipe "i" la simbolizaremos ξ_i^p. En el caso colectivo el símbolo será ξ_N^p, siendo:

$$\xi_N^p = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^p$$

ξ^c : variable aleatoria valor actual financiero de las contraprestaciones que realiza el partícipe al plan. Consideraremos como contraprestaciones las primas puras de la operación. El tipo de interés utilizado en la valoración será el tipo de interés técnico del plan.

Un caso particular a destacar es cuando todos los partícipes del colectivo, satisfacen una única contraprestación al plan en el origen de la operación (prima única). En este caso la variable aleatoria ξ^c deja de serlo para convertirse en una variable de cuantía cierta y de importe la contraprestación única.

En el caso individual, la variable aleatoria asociada al partícipe i la simbolizaremos ξ_i^p. En el caso del colectivo el símbolo que utilizaremos será ξ_N^p. La relación entre ξ_i^p y ξ_N^p es la siguiente:[1]

$$\xi_N^c = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^p$$

L :variable aleatoria valor actual financiero de la pérdida del plan. Se obtendrá como diferencia de las dos anteriores:

$$L = \xi^p - \xi^c$$

Siendo la pérdida asociada a la operación individual L_i y la correspondiente a todo el colectivo L_N.

Estas tres variables aleatorias centran su aleatoriedad en el hecho de que la mortalidad de los partícipes es aleatoria, no conociéndose a priori el período de fallecimiento de cada uno de los partícipes, lo que provoca que las corrientes de ingresos y pagos sea aleatoria.

2.2.2 Cálculo de la prima pura del plan

En los planes de prestación definida, las prestaciones son conocidas desde el principio de la operación, lo cual nos permite conocer totalmente (realizaciones y probabilidades asociadas) la variable aleatoria ξ^p. Por tanto las primas puras será la primera incógnita que tendremos que calcular.

La determinación de las primas puras, ya sea únicas o periódicas, la realizaremos aplicando el siguiente criterio de cálculo de primas:

$$E[\xi^p] = E[\xi^c]$$

o bien

$$E[L] = 0$$

De forma que las primas puras serán aquellas que anulen la esperanza de la variable aleatoria pérdida del plan.

[1]Esta relación sólo es válida en el caso de que las contraprestaciones estén formadas por las prima puras de la operación tal y como estamos suponiendo.

Como estamos trabajando con primas puras, resulta que si se mantiene este equilibrio para el colectivo

$$E[\xi_N^p] = E[\xi_N^c]$$

también se cumplirán los equilibrios individuales

$$E[\xi_i^p] = E[\xi_i^c]$$

debido a que la esperanza es un operador que mantiene la suma.

El procedimiento para calcular la prima del plan será el calcular las primas puras individuales que simbolizaremos por P^i o Π^i (prima periódica o prima única respectivamente), siendo la prima a cobrar en cada momento del colectivo suma de las primas individuales correspondientes.

En el caso de primas únicas:

$$\Pi^N = \sum_{i=1}^{n} \Pi^i$$

siendo Π^N la prima única total del colectivo.

Calculadas las primas podemos conocer las realizaciones y las probabilidades de la variable pérdida del plan, ya sea individual L_i o del colectivo L_N.

2.2.3 Cálculo del recargo de seguridad del plan

El recargo de seguridad del plan podrá venir dado, o bien de forma exógena al modelo, o bien a través de un determinado nivel sólvencia del plan. Siguiendo el criterio utilizado por **CLARAMUNT M.M. (1992)**[2] un Plan de Pensiones tendrá un nivel de solvencia α en un determinado momento t si, respecto a la cartera existente en t , los activos (contraprestaciones) a satisfacer a partir de t (junto con los que haya en t) son suficientes para hacer frente a las obligaciones (prestaciones) a partir de t (junto con las que el plan presente en t) con una probabilidad igual o superior a α.

[2] "Control dinámico estocástico de la solvencia de los planes de pensiones", Tesis doctoral Universidad de Barcelona (1992)

En consecuencia conocida la variable aleatoria L podemos calcular cual es la probabilidad $\beta = 1 - \alpha$ de insolvencia que lleva asociado el plan, mediante la siguiente inecuación:

$$P[L < 0] < 1 - \beta \leq P[L \leq 0]$$

El objetivo es modificar la variable aleatoria pérdida del plan (vía recargo de seguridad) en otra (que denominaremos L^{ϵ}), cuya probabilidad de insolvencia sea una deseada y que simbolizaremos ϵ, por tanto:.

$$P[L^{\epsilon} < 0] < 1 - \epsilon \leq P[L^{\epsilon} \leq 0]$$

- Siendo: $\epsilon < \beta$, la probabilidad de insolvencia que deseamos ha de ser menor a la que tiene el plan si éste cobra la prima pura de la operación.

- L^{ϵ} la variable aleatoria que nos da el valor actual de la pérdidas calculadas con las primas recargadas, resultando:

$$L^{\epsilon} = \xi^{p} - {}^{\epsilon}\xi^{c}$$

  donde ${}^{\epsilon}\xi^{c}$ es la variable valor actual de las contraprestaciones , estando estas formadas por las primas recargadas correspondientes.

El recargo que permite que el plan tenga una probabilidad de insolvencia ϵ lo simbolizaremos λ^{ϵ}.

No existe una expresión que nos permita encontrar λ^{ϵ}, por lo que el proceso que seguiremos para su cálculo es el siguiente:

1. Calcularemos el percentil ϵ de la variable aleatoria L (es decir el valor que acumula una probabildad de $1 - \epsilon$. Al ser la variable aleatoria L discreta el percentil no acumulará exactamente la probabilidad deseada $1 - \epsilon$, por tanto el percentil ϵ asociado a la variable aleatoria L vendrá definido como aquella realización de L, que denominaremos h, cuya probabildad acumulada es la mínima de aquellas que superan o igualan a $1 - \epsilon$, es decir:

$$Per_{\epsilon}[L] = \text{Min}[h/P[L \geq h] \geq \epsilon]$$

2. La modificación a introducir en la variable aleatoria pérdida via recargo de seguridad ha de ser tal que el percentil de la nueva variable aleatoria pase a ser cero:

$$Per_{\epsilon}[L^{\epsilon}] = 0$$

2.2.4 Cálculo de las reservas de solvencia

El cálculo de las reservas de solvencia en r, pasará por conocer la composición del colectivo en ese momento. Si se trata de una operación individual, el estudio del colectivo en r consistirá en ver si el partícipe está vivo o no en ese instante.

En cambio, si se trata de un colectivo inicial N de "n" partícipes, se tratará de determinar cuántos de los iniciales llegan vivos a r. En el caso de colectivos abiertos esta información la complementaremos con las entradas habidas al colectivo hasta el momento r.

Para llevar a cabo el estudio de las reservas de solvencia en r, será clave estudiar la variable aleatoria Pérdida Condicionada del plan en r, que simbolizaremos $L(r)$ y que se define como el valor actual en r de las pérdidas futuras a partir de r del plan respecto de los partícipes vivos en r. De aquí que reciba el nombre de condicionada, ya que dicha pérdida está condicionada a los partícipes vivos en r.

Siendo:

$$L(r) = \xi^{p}(r) - \xi^{c}(r)$$

donde:

- $\xi^{p}(r)$: la variable aleatoria valor financiero en r de las prestaciones del plan (pagos del plan) a realizar a partir de r, por los partícipes que están vivos en r.

- $\xi^{c}(r)$: la variable aleatoria valor financiero en r de las contraprestaciones (ingresos del plan) que recibe el plan a partir de r, por los partícipes que están vivos en r.

Debemos de matizar que si en r se ha producido un pago o un ingreso, éste estará incluido en el cálculo de $L(r)$ si corresponde al periodo $(r, r+1)$ y no al periodo $(r-1\ ,, r)$

Podemos observar que la variable aleatoria Pérdida del plan L no es más que un caso particular de la variable aleatoria Pérdida Condicionada $L(r)$, cuando $r = 0$, de forma que $L(0) = L$.

Las reservas de solvencia en el momento r asociadas al nivel de insolvencia ϵ la simbolizaremos RS^{ϵ} y vendrán dadas por aquella cantidad cierta que reestablece el equilibrio inicial:

$$P[L^{\epsilon} < 0] < 1 - \epsilon \leq P[L^{\epsilon} \leq 0]$$

que quedo roto al iniciarse el contrato [3].

La ecuación que nos permitirá determinar estas reservas vendrá por tanto dada por:

$$Per_{\epsilon}[L^{\epsilon}(r) - V(r) - RS^{\epsilon}(r)] = 0$$

donde despejando $RS^{\epsilon}(r)$ tenemos:

$$RS^{\epsilon}(r) = Per_{\epsilon}[L^{\epsilon}(r) - V(r)]$$

siendo $V(r)$ las provisiones matemáticas en r, las cuales pueden calcularse a partir de la variable aleatoria Pérdida Condicionada en r, pero calculadas las contraprestaciones con las prima puras y no con las recargadas como hemos hecho con las reservas de solvencia:

$$V(r) = E[L^{pur}(r)]$$

Si bien podemos obtener las provisiones matemáticas de un determinado colectivo H (siendo H el colectivo de partícicipes que están en r), en el periodo r, como suma de

[3]Esta definición puede encontrase en M.CLARAMUNT (1992) pag 227.
En H. WOLTHUIS y VAN HOECK (1986),"Stochastic models for life contingencies", Insurance: Mathematics and Economics,5, 1986 pag 237, puede encontrase una definición similar de la reserva de solvencia para el caso concreto en que la variable aleatoria L_i siga una distribución normal.

las provisiones matemáticas individuales de los partícipes que hay en r, por venir dado su valor por una esperanza matemática; no sucede asi con las reservas de solvencia para el colectivo H en r, cuyo valor no coincidirá con la suma de reservas de solvencia definidas para cada operación individual respecto a los partícipes que están vivos en r.

2.3 Estudio estocástico de la prima de reaseguro

En este apartado estudiamos las variables aleatorias que intervendrán en el cálculo de la prima de raseguro.

2.3.1 Variables aleatorias básicas

Las variables que tendremos que considerar serán aquellas relacionadas con los flujos de gastos e ingresos del reasegurador. Estas son:

$\xi^{p,R}$: variable aleatoria valor actual financiero de las prestaciones que realiza el reasegurador al plan como consecuencia de las contingencias que éste cubre. La estructura de esta variable aleatoria dependerá de la modalidad de reaseguro considerada. El tipo de interés utilizado en la valoración será el tipo de interés técnico del reaseguro.

Si consideramos el caso individual, la correspondiente variable aleatoria para el partícipe "i" la simbolizaremos $\xi_i^{p,R}$. En el caso colectivo el símbolo será $\xi_N^{p,R}$.

La variable aleatoria $\xi_N^{p,R}$ dependerá de la modalidad de reaseguro que estudiemos.

$\xi^{c,R}$: variable aleatoria valor actual financiero de las contraprestaciones del reasegurador o ingresos por primas que recibe éste. El tipo de interés utilizado en la valoración será el tipo de interés técnico de reaseguro. Si consideramos el caso individual, la correspondiente variable aleatoria para el partícipe "i" la simbolizaremos $\xi_i^{c,R}$. En el caso colectivo el símbolo será $\xi_N^{c,R}$.

En general:

$$\xi_N^{p,R} < \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{p,R}$$

y por tanto:

$$E[\xi_N^{p,R}] < \sum_{i=1}^{n} E[\xi_i^{p,R}]$$

Así, cuanto mayor sea el tamaño del colectivo menor resulta para cada partícipe la prima que ha de satisfacer en concepto de reaseguro, ya que menores serán las desviaciones entre la mortalidad real y la la mortalidad teórica dada por las tablas.

L^R :variable aleatoria valor actual financiero de las pérdidas del reasegurador. Se obtendrá como diferencia de las dos anteriores:

$$L^R = \xi^{p,R} - \xi^{c,R}$$

Siendo la pérdida de reaseguro de una operación individual L_i^R y la correspondiente a todo el colectivo L_N^R.

Estas tres variables aleatorias también centran su aleatoriedad en el hecho de que la mortalidad de los partícipes es aleatoria, no conociéndose a priori el periodo de fallecimiento de cada uno de los partícipes, lo que provoca que las corrientes de ingresos y pagos del reasegurador sea aleatoria.

2.3.2 Cálculo de la prima pura de reaseguro

El criterio que consideraremos a la hora de calcular la prima de reaseguro será el mismo que aplicamos al calcular la prima pura del plan. En este caso la prima de reaseguro ha de ser tal que anule la esperanza de la variable aleatoria pérdida del reasegurador, por tanto:

$$E[\xi^{p,R}] = E[\xi^{c,R}]$$

o bien

$$E[L^R] = 0$$

Cuanto mayor sea el tamaño de colectivo menor será la prima de reaseguro asociada a cada partícipe:

$$E[\xi_N^{c,R}] < \sum_{i=1}^{n} E[\xi_i^{c,R}]$$

La ventaja que presenta este método de cálculo de primas es el hecho de que podemos conocer, una vez calculadas las primas, las realizaciones y probabilidades asociadas a la variable aleatoria L^R, y por tanto podemos obtener cualquier momento asociado a la misma, como la varianza que daría idea al reasegurador, de las desviaciones que tendría en su pérdida respecto a su valor esperado. Este dato puede ser de mayor interés para el reasegurador a la hora de establecer sus recargos de seguridad, ya que éstos, por ejemplo, podrían ser proporcionales a la varianza.

En el caso de colectivos abiertos, trabajaremos con la variable pérdida del reasegurador asociado al colectivo que tenga en cuenta las correspondientes entradas. Como sólo permitiremos la entrada de partícipes al plan cuando éstos no aumenten el nivel de riesgo del mismo, el criterio que seguiremos será el siguiente:

Cobrar a los nuevos una prima de reaseguro mayor que la que les correspondería por el riesgo que ellos incorporan al plan. Esta prima vendrá dada por la que satisfacen los que ya estaban en el plan en el momento de la entrada; repartiendo el exceso que supone cobrarles una prima mayor a la que les correponde, en aumentar las prestaciones pendientes de cobro a partir del momento de la entrada, a todos los partícipes que hay vivos en dicho momento (incluyendo en éstos los partícipes que entran).

Por tanto, el problema del cálculo de la prima de reaseguro en colectivos abiertos se transformará en determinar las nuevas prestaciones que corresponderán a los partícipes pertenecientes al colectivo ampliado (incluidos los que entran) en el momento de la entrada.

Este criterio presenta varias ventajas:

- Ventaja en cuanto a simplificación, ya que la prima de reaseguro, vendrá dada para todos los partícipes que entran al plan, por la que correspondió al colectivo inicial N.
- No quedan discriminados a la hora de beneficiarse de la entrada de los nuevos, aquellos partícipes que ya han satisfecho sus primas en el momento de la entrada.

2.4 Estudio estocástico de la prima ajustada de reaseguro

En este caso contemplamos la posibilidad de recalcular la prima anterior, considerando el reparto del beneficio esperado del plan en el momento de extinción del colectivo, al reasegurador.

2.4.1 Variables aleatorias básicas

Estas son:

$\xi^{b,R}$: variable aleatoria valor actual financiero del beneficio que el plan cede al reasegurador, constituyendo ingresos para éste. El tanto de valoración utilizado será el tipo de interés técnico del reaseguro. Cuando la variable haga referencia al caso individual , la simbolizaremos $\xi_i^{b,R}$. En el caso del colectivo, el símbolo será $\xi_N^{b,R}$.

En el caso individual, el beneficio que consideraremos para calcular la variable aleatoria $\xi_N^{b,R}$ será el que tenga el plan a la muerte del patícipe.

En el caso de un colectivo cerrado, el beneficio que tendremos que considerar será el que tenga el plan en el momento de la extinción del colectivo. Si el colectivo es abierto, la variable aleatoria $\xi_N^{b,R}$ no estará definida, por no tener definido el momento de extinción del colectivo para calcular el beneficio, por estar éste sometido a sucesivas entradas de partícipes.

$L^{R,A}$: variable aleatoria valor actual de la nueva pérdida del reaseguro (pérdida ajustada de reaseguro), que resulta del reparto del beneficio por parte del plan. La obtendremos como:

$$L^{R,A} = \xi^{p,R} - \xi^{c,R} - \xi^{b,R}$$

Al igual que en los casos anteriores $L_i^{R,A}$ hará referencia a la pérdida ajustada en el caso individual y $L_N^{R,A}$ se referirá al colectivo.

Hay que tener presente que en este caso la variable aleatoria $\xi^{c,R}$ recoge el valor actual de las contraprestaciones del reasegurador que ahora estarán formadas por las primas ajustadas de reaseguro.

2.4.2 Cálculo de la prima ajustada de reaseguro

Las primas de reaseguro ajustadas vendrán dadas por aquellas que anulen la esperanza de la variable aleatoria pérdida ajustada del reasegurador, por tanto:

$$E[\xi^{p,R}] = E[\xi^{c,R}] - E[\xi^{b,R}]$$

o bien

$$E[L^{R,A}] = 0$$

El cálculo de esta prima tendrá sentido calcularla sólo en el caso individual o en el caso de un colectivo cerrado, por ser los únicos casos donde tenemos definida la variable aleatoria $\xi^{b,R}$.

Capítulo 3

Reaseguro en las operaciones individuales

Capítulo 3

Reaseguro en las operaciones individuales

En el presente capítulo aplicamos a las operaciones individuales el modelo descrito en el capítulo anterior.

El análisis se realiza sobre una operación mixta de renta y seguro, considerada de forma general, permitiendo así deducir de la misma el coste del reaseguro de cualquier tipo de operación concreta que pueda ofrecer un Plan de Pensiones, como pueden ser: rentas de jubilación, seguros temporales hasta la jubilación, seguros de vida entera o cualquier posible combinación entre ellos.

Estudiaremos las distintas variables aleatorias que intervienen en el modelo, las cuales nos permitirán determinar el coste del reaseguro, tanto en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad, como en la modalidad de reaseguro del percentil.

Por último realizaremos un análisis de las varibles que influyen en la determinación del coste de la operación incluido el reaseguro, e intentaremos determinar qué estrategia recargo-reaseguro minimiza dicho coste.

El presente capítulo se estructura en los siguientes apartados:

3.1 Descripción de la operación actuarial

3.2 Análisis de la variable aleatoria T_i

3.3 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del plan

3.3.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del plan

3.3.2 Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del plan

3.3.3 Cálculo de la prima pura del plan

3.4 Cálculo del Recargo de Seguridad

3.5 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del reasegurador

3.5.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador

3.5.1.1 Variable asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

3.5.1.2 Variable asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestraliadad

3.5.2 Variable asociada a las contraprestaciones del reasegurador

3.5.3 Cálculo de la prima pura del reaseguro

3.6 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida ajustada del reasegurador

3.6.1 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan

3.6.1.1 Variable asociada al beneficio del plan en la modalidad de reaseguro del percentil

3.6.1.2 Variable asociada al beneficio del planl en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestraliadad

3.6.2 Cálculo de la prima pura ajustada del reaseguro

3.7 Análisis del coste total de la operación

3.1 Descripción de la operación actuarial

La operación actuarial sobre la cual desarrollaremos el estudio del reaseguro presenta las siguientes caraterísticas:

- Las prestaciones están formadas por una combinación de renta y seguro, diferidas temporales y de cuantías variables.
- La prestación de seguro se satisface en el momento en que tiene lugar el fallecimiento del partícipe. En este sentido asumimos la hipótesis de distribución uniforme de la mortalidad dentro de cada período, lo que nos ha permitido valorar la prestación de seguro a mitad del período.
- Las contraprestaciones son periódicas y de cuantía variable.
- El tipo de interés utilizado es el técnico del plan, el cual vendrá expresado en tanto efectivo.
- La periodicidad de las prestaciones coincide con la periodicidad de las contraprestaciones.
- La periodicidad de capitalización del tanto efectivo de valoración debe coincidir con la periodicidad de las prestaciones y contraprestaciones. Si así no fuese, se tendría que calcular el tanto efectivo equivalente a esa periodicidad.
- El partícipe sobre el cual calculamos la operación (y que denominaremos "i"), tiene una edad actuarial x en el momento de contratar la operación.

La ecuación de equilibrio de la operación actuarial objeto de estudio es la siguiente:

$$C + \sum_{j=1}^{n-1} P_j \; {}_jE_x = \sum_{j=d_s+1}^{d_s+m_s} \alpha_j^s \; {}_{j-1/}q_x V^{j-1/2} + \sum_{j=d_r}^{d_r+m_r-1} \alpha_j^r \; {}_jE_x$$

donde:

$V = (1 + Ip)^{-1}$

${}_jE_x = \; {}_jP_x(1 + Ip)^{-j}$

Siendo:

C: aportación inicial desembolsada por el partícipe, en el origen de la operación.

P_j: prima satisfecha por el partícipe en el momento j.

n: número de primas satifechas, incluyendo en el cómputo la aportación inicial C.

${}_jP_x$: probabilidad de que una cabeza de edad actuarial x, viva j períodos más.

${}_{j-1/}q_x$: probabilidad de que una cabeza de edad actuarial x, fallezca en el período j-ésimo.

Ip: tanto efectivo de interés técnico del plan.

${}_jE_x$: factor de actualización actuarial calculado con el tipo de interés técnico del plan.

d_s: diferimiento, en número de períodos, de la operación de seguro.

m_s: temporalidad, en número de períodos, de la operación de seguro.

α_j^s: prestación de seguro que recibe el partícipe, si éste fallece en el período j-ésimo. La valoración de esta prestación se realiza a mitad de período.

En el supuesto que el partícipe no sea beneficiario en el período j de la prestación de seguro entonces $\alpha_j^s = 0$.

d_r: diferimiento, en número de períodos de la operación de renta.

m_r: temporalidad, en número de períodos de la prestación de renta.

α_j^r: importe de la renta que recibe el partícipe en el momento j.

Si el partícipe no es beneficiario de la prestación de renta en el momento j entonces $\alpha_j^r = 0$.

Las restricciones que se dan en la operación son las siguientes:

- $d_r \geq n$. La prestación de renta debe de darse con posterioridad al período de pago de primas. Esta restricción no tiene por qué darse con la prestación de seguro, pudiéndose solapar dicha prestación con el pago de primas.
- El plazo de vigencia de la operación actuarial, ya sea de renta como de seguro, no ha de superar el plazo máximo de vida que puede tener el partícipe. Deben por tanto cumplirse las siguientes restricciones:

  a) $d_s + m_s \leq w - x$.

  b) $d_r + m_r - 1 < w - x$. Siendo w, la primera edad no alcanzable en tablas.

Las ventajas que presenta el modelo expuesto son:

1ª El partícipe puede satisfacer en el momento inicial un importe C, que no tiene porque coincidir con la ley de variación de las primas periódicas. Esta circunstancia nos permite contemplar el caso del partícipe que cambia de plan, dando como aportación inicial al nuevo los derechos consolidados que disponía del anterior.

2ª El modelo recoge cualquier variación, tanto en las prestaciones de renta y seguro, como en las contraprestaciones.

3.2 Análisis de la variable aleatoria T_i

La principal variable aleatoria a partir de la cual se van a ir deduciendo todas las demás variables aleatorias que intervendrán en el modelo, la simbolizaremos T_i, y nos dará el número de períodos enteros que va a permanecer con vida el partícipe "i" (también medido en periodos enteros).

Nuestro modelo va a ser discreto, ya que las corrientes de ingresos y pagos en la práctica se producen de forma discreta. Podríamos haber utilizado el análisis continuo en el caso de seguros pagaderos en el momento del fallecimiento, donde el momento de pago hubiese sido una variable aleatoria continua. Sin embargo, el criterio que asumimos es el de aproximar el seguro continuo al seguro discreto pagadero a mitad de período, suponiendo para ello distribución uniforme de la mortalidad. De esta forma consideraremos la variable aleatoria T_i siempre discreta.

De todas formas, en muchos trabajos que analizan operaciones de seguros desde este punto de vista estocástico, la variable aleatoria básica T_i se define de entrada como una variable aleatoria continua, como así sucede en **GERBER, H.U. (1986)**[1], y **BOWERS, N.L. et al (1986)**[2] ; trabajándose luego en el campo discreto con otra variable aleatoria K_x, definida como restricción discreta de T_i.

La definición de T_i como variable aleatoria continua implica conocer la función analítica de l_x, y por tanto disponer del valor de l_x siendo x un número real positivo; mientras que en la práctica sólo son conocidos los valores de l_x para x enteras, precisándose de una serie de hipótesis y de la realización de ajustes para determinar la expresión analítica que permita calcular las l_x.

A continuación proceremos al estudio de la variable aleatoria T_i como variable aleatoria discreta, analizando su campo de variabilidad, y las probabilidades asociadas.

[1] *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Zurich, pp.:16 (1990). (La versión original en alemán se publicó en 1986 con el título *Levensversicherungsmathematik* por la misma editorial.

[2] *Actuarial Mathematics*, Itasca II. pp.: 47 (1986)

El campo de variabilidad de T_i viene definido por el conjunto discreto:

$$\{0, 1, \ldots, t \ldots, w - x - 1\}$$

Las probabilidades asociadas a dicha variable aleatoria, vienen determinadas por la ley de supervivencia elegida, a la cual supondremos que se adapta nuestro partícipe "i". Suponiendo que x es la edad actuarial del partícipe "i" cuando se contrató la operación, la probabilidad de que la variable aleatoria T_i sea igual a t es la siguiente:

$$P[T_i = t] = t/q_x = \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t}}{l_x}$$

Conocido el campo de variabilidad y las probabilidades o función de cuantía de la variable aleatoria T_i, estamos en condiciones de poder determinar algunos de los momentos representativos de la misma, como pueden ser la esperanza, la varianza y la desviación tipo.

La esperanza de T_i, también llamada esperanza de vida,[3] nos da el número medio o esperado de períodos que va a permanecer con vida un partícipe de edad actuarial x, su expresión es:

$$E[T_i] = \sum_{t=0}^{w-x-1} t\, P[T_i = t] = \sum_{t=0}^{w-x-1} t \quad t/q_x = e_x$$

La varianza y la desviación tipo de T_i nos indican la dispersión del número de períodos que va a permanecer con vida un partícipe de edad actuarial x respecto de su valor esperado, y vendrán dadas por:

$$Var[T_i] = \sum_{t=0}^{w-x-1} t^2\, P[T_i = t] - [E[T_i]]^2$$

$$D[T_i] = +[Var[T_i]]^{1/2}$$

[3]En caso de periodicidad anual, al utilizar para su cálculo la variable aleatoria discreta en lugar de la continua que reflejaría exactamente dicha esperanza de vida, se la suele denominar esperanza de vida abreviada.

3.3 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del plan

En este apartado estudiamos el cálculo de la prima del plan desde un punto de vista estocástico, mediante la variable aleatoria, Perdida del plan L_i asociada al partícipe "i". En los dos primeros apartados analizamos las dos variables aleatorias que nos permiten determinar la variable L_i (variable aleatoria asociada a las prestaciones del plan y la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del plan), y en el tercero procedemos a calcular la prima del plan.

3.3.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del plan

En el presente apartado estudiamos la variable aleatoria asociada a las prestaciones o pagos que realiza el plan al partícipe "i". La simbolizaremos por ξ_i^p y contempla el valor actual financiero de las prestaciones que realiza el plan al partícipe "i".

El caracter aleatorio de ξ_i^p viene dado por la variable aleatoria T_i, ya que cada realización dependerá del número de períodos enteros que viva el partícipe "i". El campo de variabilidad de la variable aleatoria ξ_i^p viene dado por el siguiente conjunto discreto:

$$\{\alpha(i,0),\ldots,\alpha(i,t),\ldots,\alpha(i,w-x-1)\}$$

siendo: $\alpha(i,t)$, el valor actual financiero de las prestaciones satisfechas por el plan al partícipe "i", si éste vive t períodos enteros desde el inicio de la operación.

A continuación determinaremos expresiones concretas de $\alpha(i,t)$, para el caso de la operación actuarial objeto de estudio. Ello nos obliga a imponer condiciones a la operación. Supondremos que:

a) $d_s < n$: La prestación de seguro empieza hacerse efectiva en el período de pago de primas.

b) $m_s + d_s < m_r + d_r$: El plazo de vigencia de la prestación de renta es superior al plazo de vigencia de la operación de seguro.

Hemos elegido estas condiciones porque son las que con mayor frecuencia cumplen las operaciones que ofrece un Plan de Pensiones en la práctica, de todas formas las mencionadas condiciones no restan generalidad al estudio.

Siendo $\alpha(i,t)$:

$$\alpha(i,t) = \begin{cases} 0 & t < d_s \\ \alpha^s_{t+1} V^{t+1/2} & d_s \leq t < d_r \\ \alpha^s_{t+1} V^{t+1/2} + \sum_{j=d_r}^{t} \alpha^r_j V^j & d_r \leq t < d_s + m_s \\ \sum_{j=d_r}^{t} \alpha^r_j V^j & d_s + m_s \leq t < d_r + m_r \\ \sum_{j=d_r}^{d_r+m_r-1} \alpha^r_j V^j & d_r + m_r \leq t < w - x \end{cases}$$

Como podemos observar, las realizaciones de ξ^p_i varían en función del número de períodos vividos por el partícipe "i".

La probabilidad de cada una de las realizaciones viene inducida por la variable T_i:

$$P[\xi^p_i = \alpha(i,t)] = P[T_i = t] = t/q_x$$

De esta manera, la variable aleatoria ξ^p_i, queda totalmente definida conocido su campo de variabilidad y sus probabilidades:

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$\alpha(i,t)$	t/q_x

$$t = 0, 1, \ldots, w - x - 1$$

lo que nos permite conocer cualquier momento de ξ^p_i como la esperanza, varianza o desviación tipo.

$$E[\xi^p_i] = \sum_{t=0}^{w-x-1} \alpha(i,t) t/q_x$$

$$Var[\xi^p_i] = \sum_{t=0}^{w-x-1} \alpha(i,t)^2 t/q_x - [E[\xi^p_i]]^2$$

$$D[\xi^p_i] = [Var[\xi^p_i]]^{1/2}$$

3.3.2 Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del plan

En este apartado estudiamos la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del plan o ingresos por primas que realiza el partícipe al plan. La simbolizaremos por ξ_i^c y contempla el valor actual financiero de las cotizaciones que realiza el partícipe al plan. El carater aleatorio de ésta variable aleatoria, también viene determinado por la variable aleatoria T_i, ya que cada realización dependerá del número entero de períodos que viva el partícipe.

El campo de variabilidad de ξ_i^c viene representado por el conjunto discreto:

$$\{P(i,0),\ldots,P(i,t),\ldots,P(i,w-x-1)\}$$

siendo: $P(i,t)$ el valor actual financiero de las primas puras satisfechas por el partícipe "i", si éste vive t-periodos enteros desde que se inicio la operación.

El valor de $P(i,t)$ depende de t, como puede mostrarse a continuación:

$$P(i,t) = \begin{cases} C & t = 0 \\ C + \sum_{j=1}^{t} P_j V^j & 1 \leq t < n \\ C + \sum_{j=1}^{n-1} P_j V^j & t \geq n \end{cases}$$

La probabilidad de cada una de las realizaciones, viene dada por la siguiente expresión:

$$P[\xi_i^c = P(i,t)] = P[T_i = t] = t/q_x$$

quedando la variable aleatoria ξ_i^c totalmente definida, conocido su campo de variabilidad y sus probabilidades:

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$P(i,t)$	t/q_x

$$t = 0,1,\ldots,w-x-1$$

lo que nos permite obtener cualquier momento de ξ_i^p como la esperanza, varianza o desviación tipo.

$$E[\xi_i^c] = \sum_{t=0}^{w-x-1} P(i,t)\, {}_{t/}q_x$$

$$Var[\xi_i^c] = \sum_{t=0}^{w-x-1} P(i,t)^2\, {}_{t/}q_x - [E[\xi_i^c]]^2$$

$$D[\xi_i^c] = [Var[\xi_i^c]]^{1/2}$$

Conocidas las variables aleatorias ξ_i^c y ξ_i^p, definimos la variable aleatoria Pérdida del plan L_i asociada al partícipe "i", como la diferencia entre la variable aleatoria asociada a las prestaciones (gastos para el plan), y la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones (ingresos para éste):

$$L_i = \xi_i^p - \xi_i^c$$

Algunos de los valores caraterísticos de ésta variable aleatoria, como pueden ser la esperanza, la varianza y la desviación tipo, pueden calcularse sin conocer su distribución de probabilidad, a partir de las correspondientes a las dos variables aleatorias que la forman:

$$E[L_i] = E[\xi_i^p] - E[\xi_i^c]$$

$$Var[L_i] = Var[\xi_i^p] + Var[\xi_i^c] - 2Cov[\xi_i^p \xi_i^c]$$

$$D[L_i] = [Var[L_i]]^{1/2}$$

La exitencia de covarianza entre ξ_i^p y ξ_i^c, se debe a la no independencia de éstas, puesto que ambas dependen de la mortalidad del partícipe "i".

3.3.3 Cálculo de la prima pura del plan

Nuestro objetivo es determinar el importe de la prima pura, sea cual sea la variación de ésta. El estudio lo realizaremos bajo dos supuestos:

1º) La aportación inicial C, es independiente de la ley de variación del resto de primas.

2º) La aportación inicial C, sigue la ley de variación del pago de primas.

1º) La aportación inicial C, es independiente de la ley de variación del resto de primas.

Para poder determinar el importe de las primas debemos conocer:

- El importe de la aportación inicial C, el cual debe ser inferior a la prima pura única de la operación.
- El importe de las prestaciones del plan, α_j^s , $j = d_s+1, \ldots, d_s+m_s$ y α_j^r , $j = d_r, \ldots, d_r + m_r - 1$.
- La ley de variación de primas, que vendrá definida por la función $f(t)$.

  Por ejemplo, si queremos que las primas varíen según un polinomio de grado n entonces:

  $f(t) = 1 + \beta_1(t-1) + \cdots + \beta_n(t-1)^n$

  si queremos una variación exponencial:

  $f(t) = \beta_1^{t-1}$

  o bien, si deseamos que las primas sean constantes:

  $f(t) = 1$

Expresaremos las primas puras como el producto entre su ley de variación $f(t)$, y una determinada constante k: [4]

$$P_t = f(t)\, k \quad \forall t = 1, \ldots, n-1 \quad (I)$$

La única condición que exigiremos a la función de variación $f(t)$ es que $f(1) = 1$, de esta manera, siempre la primera prima que sigue la ley de variación de primas P_1 satisface :

[4] Esta manera de definir las primas puras del plan conlleva a que si contemplamos una variación lineal de las mismas, siendo por tanto la función de variación :$f(t) = 1 + \beta_1 \quad (t-1)$, entonces la razón de variación de las primas no vendrá dado por β_1, sino por un porcentaje k, aplicado sobre β_1.

$$P_1 = k$$

Por consiguiente, cada realización $P(i,t)$ de ξ_i^c, podemos expresarla en función de k:

$$P(i,t) = \begin{cases} C & t = 0 \\ C + \sum_{j=1}^{t} f(j)\, k\,(1+Ip)^{-j} & 1 \leq t < n \\ C + \sum_{i=j}^{n-1} f(j)\, k\,(1+Ip)^{-j} & t \geq n \end{cases}$$

Nuestro objetivo es obtener el valor de k, ya que éste nos permitirá determinar el importe de las primas puras P_t, $\forall t = 1, \ldots, n-1$ sustituyendolo en la expresión (I).

El criterio de cálculo de primas que aplicaremos es el que éstas anulen el valor actual de las pérdidas futuras del plan, por tanto la condición que debe cumplir k, es que ha de ser un valor tal, que sustituido en (I), las primas resultantes anulen la esperanza de la variable aleatória Pérdida individual del plan L_i:

$$E[L_i] = 0$$

o:

$$E[\xi_i^p] - E[\xi_i^c] = 0 \quad (II)$$

Para poder despejar k de (II), introducimos una variable aleatoria intermedia que simbolizamos ξ_i^Q y cuyo campo de variabilidad viene dado por el siguiente conjunto discreto:

$$\{Q(i,0), \ldots, Q(i,t), \ldots, Q(i, w-x-1)\}$$

siendo: $Q(i,t)$

$$Q(i,t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \sum_{j=1}^{t} f(j)\,(1+Ip)^{-j} & 1 \leq t < n \\ \sum_{j=1}^{n-1} f(j)\,(1+Ip)^{-j} & t \geq n \end{cases}$$

La probabilidad de cada una de las realizaciones es:

$$P[\xi_i^Q = Q(i,t)] = P[T_i = t] = {}_{t/}q_x$$

Esta variable aleatoria intermedia nos permite expresar la esperanza de la variable aleatoria ξ_i^c, en función de la esperanza de ésta y de k:

$$E[\xi_i^c] = C + k\,E[\xi_i^Q]$$

por consiguiente, sustituyendo $E[\xi_i^c]$ en (II):

$$E[\xi_i^p] - C - k\,E[\xi_i^Q] = 0$$

de donde despejando k:

$$k = \frac{E[\xi_i^p] - C}{E[\xi_i^Q]}$$

El cálculo de la prima pura es inmediato sustituyendo el valor de k en la expresión :

$$P_t = f(t)\,k \quad \forall t = 1, \ldots, n-1$$

2º) La aportación inicial C sigue la ley de variación del resto de primas.

Los datos que necesitamos conocer son:

- El importe de las prestaciones del plan, α_j^s , $j = d_s + 1 \ldots d_s + m_s$ y α_j^r, $j = d_r, \ldots, d_r + m_r - 1$.
- La ley de variación de primas $f(t+1)$.

  En este caso, al incluir la aportación inicial en la ley de variación de primas, la función de variación f ha de estar centrada en el momento cero, que es donde se satisface la primera prima, corriéndose un período la variable t con respecto a la función de variación f del apartado anterior.

Al seguir C la ley de variación del resto de primas, podemos considerar el siguiente cambio de nomenclatura: $P_0 = C$, lo que nos permite expresar las primas del siguiente modo [5]:

$$P_t = f(t+1)\,k \quad \forall t = 0, \ldots, n-1$$

en consecuencia, la realizaciones $P(i,t)$ de la variable aleatoria ξ_i^c, pueden expresarse en función de k:

$$P(i,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{t} f(j+1)\,k\,(1+Ip)^{-j} & 0 \le t < n \\ \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1)\,k\,(1+Ip)^{-j} & t \ge n \end{cases}$$

Al igual que en el caso anterior, introducimos una variable aleatoria intermedia que simbolizaremos ξ_i^q, y cuyo campo de variabilidad viene dado por el conjunto discreto:

$$\{q(i,0), \ldots, q(i,t), \ldots, q(i, w-x-1)\}$$

donde:

$$q(i,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{t} f(j+1)\,(1+Ip)^{-j} & 0 \le t < n \\ \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1)\,(1+Ip)^{-j} & t \ge n \end{cases}$$

La probabilidad de cada una de las realizaciones, viene inducida por la variable aleatória T_i:

$$P[\xi_i^q = q(i,t)] = P[T_i = t] = t/q_x$$

La introducción de ésta variable aleatoria intermedia nos permite expresar la esperanza de ξ_i^c en función de la esperanza de la variable aleatoria ξ_i^q y de k :

$$E[\xi_i^c] = k\,E[\xi_i^q]$$

lo que nos permite obtener el valor de k de forma inmediata, tan sólo sustituyendo la expresión anterior en la condición:

[5] En este caso, también se satisface la condición $f(1) = 1$, siendo la primera prima que sigue la ley de variación de primas $P_0 = k$.

$$E[\xi_i^p] - E[\xi_i^c] = 0$$

siendo k:

$$k = \frac{E[\xi_i^p]}{E[\xi_i^q]}$$

Por último sustituyendo el valor de k, en la ecuación:

$$P_t = f(t+1)\,k \quad \forall t = 0, \ldots, n-1$$

tendremos calculadas las primas puras de la operación.

Si la operación es a *prima única* el proceso se simplifica bastante, ya que la variable aleatoria ξ_i^c deja de serlo, puesto que el partícipe satisface unicamente una prima cierta de importe C al inicio de la operación, y por tanto independiente del número de períodos vividos, en consecuencia:

$$\xi_i^c = E[\xi_i^c] = C = \Pi$$

Como la prima única debe de anular la esperanza del valor actual de las pérdidas futuras, ésta ha de cumplir:

$$E[\xi_i^p] - E[\xi_i^c] = 0$$

por tanto sustituyendo en la condición tenemos:

$$E[\xi_i^p] - \Pi = 0$$

de donde despejando Π:

$$\Pi = E[\xi_i^p]$$

La prima única Π coincide con la esperanza matemática de la variable aleatoria asociada a las prestaciones del plan.

Ahora ya podemos conocer las realizaciones de la variable aleatoria Pérdida del plan L_i asociada al partícipe "i", las cuales se obtendrán como diferencia entre las realizaciones de ξ_i^p y de ξ_i^c, estando calculada esta última variable aleatoria con las primas puras obtenidas.

Por consiguiente, las realizaciones de la variable aleatoria L_i vendrán dadas por el conjunto discreto:

$$\{l(i,0),\ldots,l(i,t),\ldots,l(i,w-x-1)\}$$

donde $l(i,t)=\alpha(i,t)-P(i,t)$: es el valor actual financiero de la pérdida del plan, si el partícipe "i" vive t períodos enteros desde que se inició la operación.

La probabilidad de L_i vendrá inducida también por T_i:

$$P[\mathrm{L}_i=l(i,t)]=P[T_i=t]=t/q_x$$

La variable aleatoria L_i queda por tanto definida como sigue:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$l(i,t)$	t/q_x

$t=0,1,\ldots,w-x-1$

Determinados los valores de L_i, podemos mediante su función de distribución, calcular la probabilidad de insolvencia del plan, como el complementario a uno de la probabilidad acumulada, correspondiente al menor valor positivo de L_i, o al cero , si éste es uno de los valores de dicha variable.

3.4 Cálculo del Recargo de Seguridad

El recargo de seguridad, según la modalidad de reaseguro que estudiemos, puede venir prefijado de antemano y por tanto dado de forma explícita , o bien puede venir dado implícitamente mediante el nivel de solvencia que éste ha de cubrir. En este último caso tendremos que calcular el recargo de seguridad, asociado al nivel de solvencia prefijado por el plan.

El objetivo en este apartado es encontrar el recargo a aplicar a la prima pura, que permita modificar la probabilidad de insolvencia a una prefijada ϵ, y que simbolizaremos λ^{ϵ} . El proceso que seguiremos para poder determinar λ^{ϵ} es el siguiente:

a) Ordenamos las realizaciones de la variable aleatoria L_i de menor a mayor, con sus correspondientes probabilidades. A la variable aleatória ordenada la simbolizamos L_i^*, siendo su campo de variabilidad y probabilidades las siguientes:

REALIZACIONES	PROBABILIDADES
$l(i,t_k)$	t_k/q_x

donde:

- $k = 0,\ldots,w-x-1$, indica el orden de menor a mayor en el que está situado cada una de las realizaciónes de L_i^*
- t_k, períodos enteros vividos por el partícipe "i", y por tanto comprendidos entre: 0 y $w-x-1$.
- $l(i,t_k)$, realización de la variable aleatoria L_i^* situada en el lugar $k+1$-ésimo.

Si la prestación del plan fuese una renta a prima única, $L_i^* = L_i$, ya que la ordenación temporal de los valores de la pérdida dada por la variable aleatoria L_i coinciden con la ordenación de menor a mayor.

b) Preestablecido el nivel de insolvencia ϵ, encontramos el percentil de la variable aleatoria L_i^*, que viene dado por:

$$Per_{\epsilon}[L_i^*] = Min[l(i,t_k)/P[L_i^* \geq l(i,t_k)] \geq \epsilon]$$

c) Definimos la variable aleatoria Pérdida recargada ${}^{Rec}L_i$, la cual viene dada por las realizaciones de variable aleatoria L_i^*, pero calculadas con las primas recargadas. En el caso particular que el recargo sea λ^{ϵ} entonces ${}^{Rec}L_i = L_i^{\epsilon}$.

El campo de variablidad y probabilidades de L_i^ϵ son las siguientes:

<u>REALIZACIONES</u>	<u>PROBABILIDADES</u>
$l(i,t_k)^\epsilon$	$_{t_k/}q_x$

$$t_k = 0, 1, \ldots, w - x - 1$$

siendo:

- $l(i,t_k)^\epsilon$ la realización ya ordenada de $l(i,t)^\epsilon$
- $l(i,t)^\epsilon = \alpha(i,t) - P(i,t)^\epsilon$
- donde:

$$P(i,t)^\epsilon = \begin{cases} C(1+\lambda^\epsilon) & t=0 \\ (1+\lambda^\epsilon)(C+\sum_{j=1}^{t} P_j V^j) & 1 \le t < n \\ (1+\lambda^\epsilon)(C+\sum_{j=1}^{n-1} P_j V^j) & t \ge n \end{cases}$$

Podemos observar que $P(i,t)^\epsilon = P(i,t)(1+\lambda^\epsilon)$

El recargo de seguridad λ^ϵ que garantiza un nivel de insolvencia ϵ, lo obtendremos como aquel tanto por uno a aplicar a la prima pura, que satisfaga la siguiente condición:

$$Per_\epsilon[L_i^\epsilon] = 0$$

Para ello necesitamos calcular el $Per_\epsilon[L_i^*]$. Supongamos que éste toma como valor la realización situada en el $(h+1)$-ésimo lugar de la variable aleatoria L_i^*:

$$Per_\epsilon[L_i^*] = l(i,t_h)$$

El recargo de seguridad debe de modificar la prima de tal forma que la realización $(h+1)$-ésima de la variable aleatoria L_i^ϵ sea cero:

$$Per_\epsilon[L_i^\epsilon] = 0 = l(i,t_h)^\epsilon$$

por tanto:

$$l(i,t_s)^\epsilon \geq 0 \quad \forall s \geq h$$

como:

$$l(i,t_h)^\epsilon = \alpha(i,t_h) - (1+\lambda^\epsilon)P(i,t_h)$$

entonces:

$$Per_\epsilon[L_i^\epsilon] = 0 = \alpha(i,t_h) - (1+\lambda^\epsilon)P(i,t_h)$$

en consecuencia, el recargo de seguridad viene dado por la siguiente expresión:

$$\lambda^\epsilon = \frac{\alpha(i,t_h) - P(i,t_h)}{P(i,t_h)} = \frac{Per_\epsilon[L_i^*]}{P(i,t_h)}$$

La hipótesis que conlleva esta forma de calcular el recargo, es que al pasar de las primas puras a las primas recargadas, la ordenación de los valores no ha de verse alterada, de tal manera que si ahora calculamos el percentil de la variable aleatoria L_i^ϵ, con el recargo obtenido, éste ha de ser cero. Si esto no es así, el recargo calculado no será el que permita que la probabilidad de insolvencia sea como máximo ϵ.

En aquellas operaciones en las que al calcular el recargo de la variable aleatoria pérdida con las primas recargas, la ordenación no se haya mantenido, será necesario aplicar iterativamente el proceso de cálculo, pero ahora sobre las nuevas primas y a partir de la nueva variable aleatoria pérdida tantas veces como sea necesario, hasta conseguir que el percentil de la variable aleatoria de la pérdida calculada con las primas recargadas sea cero. [6]

3.5 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida del Reasegurador

En esta sección estudiamos las variables aleatorias que nos permiten determinar la variable aleatoria Pérdida del reasegurador L_i^R asociada al partícipe "i", la cual viene definida como:

[6] CLARAMUNT, M.M. (1992) pp.:259

$$L_i^R = \xi_i^{p,R} - \xi_i^{c,R}$$

siendo:

- $\xi_i^{p,R}$, la variable aleatoria prestaciones del reasegurador asociada al partícipe "i".
- $\xi_i^{c,R}$, la variable aleatoria contraprestaciones del reasegurador asociada al partícipe "i".

Posteriormente calcularemos la prima de reaseguro a través de la variable aleatoria L_i^R.

3.5.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador

La variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ recoge el valor actual financiero al tipo de interés técnico del reasegurador Ir, de las prestaciones que tiene que satisfacer el reasegurador al plan.

El campo de variabilidad de $\xi_i^{p,R}$ viene definido por por el conjunto discreto:

$$\{M(i,0),\ldots,M(i,t),\ldots,M(i,w-x-1)\}$$

siendo $M(i,t)$: el valor actual financiero de las obligaciones del reasegurador, si el partícipe "i", vive t períodos enteros a contar desde el inicio de la operación.

La aleatoriedad de $\xi_i^{p,R}$ viene inducida por la variable aleatoria T_i, ya que las obligaciones del reasegurador dependen del número de períodos vividos por el partícipe "i", siendo la probabilidad asociada a cada realización:

$$P[\xi_i^{p,R} = M(i,t)] = P[T_i = t] = {}_{t/}q_x$$

La variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$ dependerá de la modalidad de reaseguro que contrate el plan, por tener ésta que ver con las contingencias que cubre el reasegurador. Por tanto procederemos a estudiar la variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en las dos modalidades de reaseguro objeto de estudio.

3.5.1.1 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro del percentil

En esta modalidad de reaseguro, el reasegurador sólo intervendrá cuando el plan se haya quedado sin recursos para hacer frente a sus obligaciones con el partícipe "i". Partiremos del supuesto que el plan inicia la operación con un nivel de insolvencia ϵ establecido, conseguido con un recargo de seguridad λ^{ϵ}. Por tanto en esta modalidad de reaseguro, el nivel de insolvencia o nivel de riesgo del plan ϵ, estará totalmente reasegurado.

La prima de reaseguro dependerá por consiguiente, del nivel de riesgo ϵ del plan, así, cuanto menor sea ϵ, mayor será él recargo de seguridad λ^{ϵ} asociado, y más barata será la prima de reaseguro, puesto que menor será la probabilidad de que el plan se quede sin recursos. Por el contrario, cuanto mayor sea ϵ, mayor será la prima de reaseguro.

En esta modalidad de reaseguro el campo de variabilidad de $\xi_i^{p,R}$ lo representaremos por el conjunto discreto [7]:

$$\{M(i,t_0),\ldots,M(i,t_k),\ldots,M(i,t_{w-x-1})\}$$

siendo $M(i,t_k)$ el valor actual de las obligaciones del reasegurador, si el partícipe "i" vive t_k períodos enteros a contar desde el inicio de la operación.

En esta modalidad de reaseguro, el reasegurador intervendrá sólo en aquellos períodos en los cuales el plan tenga una pérdida positiva. El valor actual de ésta vendrá determinado por las realizaciones positivas de la variable aleatoria L_i^{ϵ}, es decir, $l(i,t_k)^{\epsilon}$, $\forall k > h$, Nuestro objetivo es valorar la obligación del reasegurador en el

[7] El hecho de que tengamos que calcular las realizaciones de la variable $\xi_i^{p,R}$, a través de la variable aleatoria ordenada L_i^{ϵ}, exige un cambio de nomenclatura, en cuanto al número de periodos vividos por el partícipe t.

momento que tiene lugar, para después actualizarla con el tipo de interés técnico del reasegurador Ir.

Supondremos dos casos:

1º) Tipo de interés técnico del plan coincide con el tipo de interés técnico utilizado por el Reasegurador.

2º) Tipo de interés técnico del plan no coincide con el tipo de interés técnico utilizado por el Reasegurador.

1º) Tipo de interés técnico del Plan coincide con el tipo de interés técnico utilizado por el Reasegurador.

Si el tipo de interés técnico utilizado por el plan es el mismo que el tipo de interés técnico del reaseguro, las realizaciónes de $\xi_i^{p,R}$, vendrán dadas por:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ l(i,t_k)^{\epsilon} & k > h \end{cases}$$

Las idea es considerar sólo las realizaciones positivas de la pérdida del plan, las cuales ya dan el valor actualizado correcto. Por el contrario, las realizaciones negativas no supondrán pérdida para el reasegurador.

2º) Tipo de interés técnico del Plan no coincide con el tipo de interés técnico utilizado por el Reasegurador.

En este caso no podremos obtener las realizaciones $\xi_i^{p,R}$ directamente de las realizaciones positivas de la variable aleatoria L_i^{ϵ}. El proceso que seguiremos será el siguiente:

En primer lugar calcularemos el número entero de términos de la renta que a lo sumo puede hacerse cargo el plan con las primas recargadas cobradas s^{ϵ}, el cual vendrá determinado por:

$$\text{Max}\{s^{\epsilon}/s^{\epsilon} \in N \quad \text{y} \quad (1+\lambda^{\epsilon})(C + \sum_{j=1}^{n-1} P_j V^j) \geq \sum_{j=d_r}^{d_r+s^{\epsilon}-1} \alpha_j^r (1+Ip)^{-j}\}$$

En el caso de que sólo exista prestación de renta, la desigualdad anterior se transformará en igualdad.

En segundo lugar calcularemos la diferencia entre el valor actual de la primas recargadas satisfechas por el partícipe al plan, y el valor actual de las prestaciones enteras de renta que puede satisfacer el plan al partícipe. El valor de esta diferencia la llamaremos *remanente* y la simbolizaremos R_0^ϵ, siendo:

$$R_0^\epsilon = (1+\lambda^\epsilon)(C + \sum_{j=1}^{n-1} P_j V^i) - \sum_{j=d_r}^{d_r+s^\epsilon-1} \alpha_j^r (1+Ip)^{-j}$$

Por tanto R_0^ϵ, recoge el valor actual de aquella parte de primas recargadas no consumidas, después de satifacer s^ϵ términos de la renta al partícipe.

Como ya hicimos en el caso anterior, tenemos que tener en cuenta exclusivamente las realizaciones positivas de L_i^ϵ, considerando dos tipos:

1. Aquellas que vienen asociadas a períodos donde sólo se cubre la prestación de seguro, o bién, además de la anterior, también se cubra la prestación de renta en un número de términos igual o menor a s^ϵ

2. Aquellas realizaciones positivas, asociadas a períodos donde la prestación de renta se ha cubierto en un número de términos superior a s^ϵ, haya o no prestación de seguro.

1º Respecto a las primeras, el reasegurador sólo satisface una cantidad en el momento en el que se realiza la prestación de seguro, puesto que las prestaciones de renta, si las hay, han sido totalmente cubiertas con las primas cobradas. El desembolso que ha de satisfacer el reasegurador en estos períodos viene dado por la pérdida del plan ocasionada por el seguro, y valorada en el momento que tiene lugar el fallecimiento del partícipe, (suponemos a mitad de periodo), al tipo de interés técnico del plan, y actualizada con el tipo de interés del reasegurador. Por tanto, podemos expresar la realización de la pérdida que para este caso simbolizaremos $M_1(i,t_k)$ como:

$$M_1(i,t_k) = l(i,t_k)^\epsilon \left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} \qquad \forall t_k < d_r + s^\epsilon$$

2º Respecto al segundo tipo, el reasegurador se responsabilizará de las prestaciones de renta que no pueda hacerse cargo el plan y de la prestación del seguro en caso de que ésta exista. La problemática que aquí se plantea es que hay pagos del reasegurador al plan en distintos momentos de tiempo, circunstancia que hay que contemplar a la hora de calcular la pérdida del reaseguro actualizada. En consecuencia, la pérdida del reasegurador valorada en el momento que satisface la primera prestación de renta, (momento $d_r + s^\epsilon$), vendrá dada por:

- el valor financiero al tipo de interés del reasegurador de los términos de las prestaciones de renta satisfechas por el reasegurador si el partícipe vive t_k períodos enteros:

$$\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} \qquad \forall t_k \geq d_r + s^\epsilon$$

  como $\alpha_j^r = 0 \quad \forall j \geq d_r + m_r$ entonces:

$$\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} = \begin{cases} \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} & t_k < d_r + m_r \\ \sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{d_r+m_r-1} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} & t_k \geq d_r + m_r \end{cases}$$

- por la prestación de seguro satisfecha en el período $t_k + 1$ y valorada en $d_r + s^\epsilon$:

$$\alpha_{t_k+1}^s (1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon-t_k+1/2)}$$

- a la suma de las dos anteriores hay que detraerle el remanente $R_{d_r+s^\epsilon}^\epsilon$ que pueda disponer el plan en el período $d_r + s^\epsilon$, donde:

$$R_{d_r+s^\epsilon}^\epsilon = R_0^\epsilon (1+Ip)^{d_r+s^\epsilon}$$

Por tanto, podemos expresar la realización de las prestaciones del reasegurador, que para este caso simbolizaremos $M_2(i, t_k)$ como:

$$M_2(i,t_k) = \left[\sum_{j=d_r+s^\epsilon}^{t_k} \alpha_j^r (1+Ir)^{d_r+s^\epsilon-j} + \right.$$

$$\left. +\alpha_{t_k+1}^s (1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon-t_k+1/2)} - R_{d_r+s^\epsilon}^\epsilon \right] (1+Ir)^{-(d_r+s^\epsilon)}$$

$\forall t_k \geq d_r + s^\epsilon$

En consecuencia:

$$M(i,t_k) = \begin{cases} 0 & k \leq h \\ M_1(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k < d_r + s^\epsilon \\ M_2(i,t_k) & k > h \quad \text{y} \quad t_k \geq d_r + s^\epsilon \end{cases}$$

Conociendo las realizaciones $M(i,t_k)$ y las probabilidades asociadas a cada una:

$$P[\xi_i^{p,R} = M(i,t_k)] = P[T_i = t_k] = {}_{t_k/}q_x$$

podemos calcular cualquier momento de $\xi_i^{p,R}$, como la esperanza, varianza o desviación tipo:

$$E[\xi_i^{p,R}] = \sum_{t_k=0}^{w-x-1} M(i,t_k)\ {}_{t_k/}q_x$$

$$Var[\xi_i^{p,R}] = \sum_{t_k=0}^{w-x-1} M(i,t_k)^2\ {}_{t_k/}q_x - [E[\xi_i^{p,R}]]^2$$

$$D[\xi_i^{p,R}] = [Var[\xi_i^{p,R}]]^{1/2}$$

3.5.1.2 Variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador en la modalidad de reaseguro diferencia de siniestralidad

En esta modalidad de reaseguro, el reasegurador se compromete a cubrir :

1. Los márgenes de solvencia que puedan establecerse en cada período.

2. La provisión matemática asociada a cada período.

3. El riesgo de muerte si se trata de un seguro. El riesgo de supervivencia, en el caso de una renta, ya queda cubierto por la provisión matemática.

Dentro de esta modalidad de reaseguro, distinguiremos dos tipos o formas distintas de actuar el reasegurador:

Tipo A El reasegurador intervendrá siempre y cuando el plan con las primas recargadas cobradas, no tenga suficiente para poder hacer frente periódicamente a las tres contingencias antes señaladas.

Tipo B En este otro caso consideraremos que el reasegurador actúa de "equilibrador" de los márgenes de solvencia y de las provisiones matemáticas del plan en el sentido siguiente:

Al igual que en el caso anterior, el reasegurador se comprometerá a dotar al plan de los fondos necesarios para que pueda hacer frente, no sólo al riesgo propio de la operación, sino también para que tenga las provisiones matemáticas y los márgenes de solvencia correspondientes en aquellos períodos donde el plan no pueda cubrirlos por el mismo. Sin embargo, se diferenciará del caso anterior (Tipo A) en que en aquellos otros períodos donde el plan no requiera de financiación externa (reaseguro) para cubrir la provisión matemática y el margen de solvencia correspondiente, éste cederá al reasegurador aquella parte de sus fondos que excedan de dicha provisión matemática y del margen de solvencia del período.

Con este contrato de reaseguro, el reasegurador garantiza que los fondos o disponible que tenga el plan periódicamente, sean exactamente la provisión matemática más el margen de solvencia del periodo.

En esta modalidad de reaseguro (ya sea del Tipo A o del Tipo B), el reasegurador, a diferencia de la modalidad anterior, puede intervenir desde el primer momento de vigencia del plazo de la operación [8].

El recargo de seguridad puede venir dado como un dato exógeno al modelo, o bien, venir determinado por un nivel de solvencia prefijado de antemano. Sea de una manera o de otra, la función de éste será la de reducir el coste del reasegurador, pues se dirigirá a financiar las contingencias que cubre éste.

A continuación determinaremos las realizaciones de $\xi_i^{p,R}$, para lo cual requeriremos del cálculo de las siguientes funciones:

- $Z_{i,h}$: Función que recoge el disponible o fondos que presenta el plan al finalizar el período h-ésimo, siempre y cuando el partícipe "i" viva al finalizar dicho período. Estará constituida por las primas recargadas del partícipe "i", y por las aportaciones del reasegurador dirigidas a cubrir las contingencias previstas en la presente modalidad.

- $T_{i,h}$: Función que recoge el importe que ha de satisfacer el reasegurador en el periodo h, asociado al partícipe "i".

Una vez tengamos determinada la función $T_{i,h}$ estaremos en condiciones de calcular cualquier realización de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$.

A continuación estudiaremos cada una de las funciones descritas, determinando su expresión formal para la operación actuarial objeto de estudio [9]

[8]Ilustraremos esta idea con un sencillo ejemplo: si suponemos que el reasegurador ha de garantizar exclusivamente las provisiones matemáticas en cada período y la operación actuarial es una renta, con las primas puras cobradas y capitalizadas convenientemente, será dificil que podamos cubrir la provisión matemática de forma periódica, en este caso el reasegurador tendrá que actuar ya desde el primer momento, dando al plan el complemento suficiente para poder hacer frente a dichas provisiones.

[9]Renta prepagable diferida temporal y seguro diferido temporal, caracterizada por:

Estudio de la función $Z_{i,h}$

Para poder determinar la función $Z_{i,h}$, necesitamos saber:

a) $V_{i,h}$. Función que recoge la provisión matemática en el momento h, asociada al partícipe "i".

b) $R_{i,h}$. Función que recoge el margen de solvencia que el plan debe tener disponible en cada momento h asociado al partícipe "i". Este margen dependerá de los responsables del plan y de las exigencias legales que existan en este sentido.[10]

Respecto a los margenes de solvencia contemplaremos dos casos:

a) El margen de solvencia sea un porcentaje p de la provisión matemática:

$$R_{i,h} = p\, V_{i,h}$$

En este caso supondremos que el recargo de seguridad del plan viene dado exógenamente por los responsables del plan.

b) El margen de solvencia sea:

$$R_{i,h} = RS_h^\epsilon$$

donde RS_h^ϵ es la reserva de solvencia asociada al nivel de riesgo ϵ, y la definimos como aquella cantidad que debe de añadirse a las reservas matemáticas para garantizar que a partir de "h" la solvencia de la operación tenga un riesgo máximo prefijado ϵ.

El concepto de reservas de solvencia asociadas al nivel de riesgo ϵ, es consecuencia del desequilibrio que existe en cada período h, entre el nivel de riesgo existente en h,

---

a) $d_s < n$

b) $m_s + d_s < m_r + d_r$

[10]El Reglamento de Planes y Fondos de Pensiones del 30 de septiembre de 1988, exige en su artículo 19 para aquellos planes de pensiones que asuman la cobertura de un riesgo, la constitución de una reservas patrimoniales que se destinarán a la cobertura del margen de solvencia, cuya cuantía mínima se detalla en el citado artículo.

y el nivel de riesgo que se desea mantener ϵ. En el supuesto que el recargo del plan sea λ^ϵ, entonces en el origen de la operación sí que quedará garantizado el nivel de riesgo ϵ, sin embargo, si en los sucesivos períodos no dotamos al plan de unas reservas adicionales a las provisiones matemáticas, el nivel de solvencia del plan dejará de ser ϵ.

El objetivo del reasegurador en esta modalidad de reaseguro será garantizar que en cada período el plan tenga las reservas suficientes para que el nivel de solvencia del plan sea ϵ en cualquier momento h.

En este caso exigiremos que el recargo aplicado por el plan sea λ^ϵ, de esta forma garantizamos el nivel ϵ en el origen de la operación sin necesidad de que el reasegurador actúe en dicho momento.

El cálculo de RS_h^ϵ requiere que definamos la variable aleatoria Pérdida Condicionada del plan que simbolizaremos ${}^{Rec}L_{i,h}$ y nos recoge el valor actual en h de las pérdidas futuras (definidas como pagos menos ingresos futuros) (a partir de h) , conocidas las primas recargadas que debe de pagar en cada momento el partícipe "i" y que se calcularon en el momento 0, origen de la operación. Por tanto:

$${}^{Rec}L_{i,h} = \xi_{i,h}^P + {}^{Rec}\xi_{i,h}^C$$

donde $\xi_{i,h}^P$ representa el valor actual financiero en h de las prestaciones del plan a realizar a partir de h al partícipe "i", y ${}^{Rec}\xi_{i,h}^C$ representa lo mismo pero referente a las cotizaciones al plan formadas por las primas recargadas calculadas en el origen de la operación.

Hay que matizar que la variable alatoria ${}^{Rec}L_{i,h}$ incluirá aquellas prestaciones realizadas en el momento h, siempre y cuando éstas correspondan al período $(h, h+1)$.

La condición que deben de satisfacer las reservas de solvencia RS_h^ϵ para mantener el nivel de riesgo ϵ en el momento h, es que éstas satisfagan la siguiente ecuación:

$$Per_\epsilon[\,{}^{Rec}L_{i,h} - V_{i,h} - RS_h^\epsilon] = 0$$

Al ser RS_h^ϵ una cantidad cierta y única (no es una variable aleatoria) su cálculo es sencillo, pues:

$$RS_h^\epsilon = Per_\epsilon[\,^{Rec}L_{i,h}] - V_{i,h}$$

Como el recargo de seguridad aplicado por el plan es λ^ϵ, entonces:

$$^{Rec}L_{i,h} = L_{i,h}^\epsilon$$

por tanto:

$$RS_h^\epsilon = Per_\epsilon[L_{i,h}^\epsilon] - V_{i,h}$$

Si el partícipe "i" realiza sus aportaciones en forma de prima única, para $h > 0$ tendremos:

$$RS_h^\epsilon = Per_\epsilon[\xi_{i,h}^P] - V_{i,h}$$

En las operaciones de seguros que no sean vida entera, cuanto menor sea el riesgo prefijado ϵ, mayor es la probabilidad de que para los últimos períodos h, el percentil de la pérdida condicionada del plan sea menor que la provisión matemática correspondiente, es decir, $Per_\epsilon[L_{i,h}^\epsilon] < V_{i,h}$. En estos casos, supondremos que las reservas de solvencia $RS_h^\epsilon = 0$, de esta forma garantizamos que el reasegurador mantenga como mínimo la provisión matemática del plan para estos periodos h que de la otra manera no quedaría cubierta.

A continuación determinaremos la expresión de $Z_{i,h}$ para los dos tipos de reaseguro.

La expresión formal de la función $Z_{i,h}$ para la operación objeto de estudio si el reaseguro es del Tipo A viene dada por la siguiente expresión:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} (P_0^{Rec})(1+Ip) & h=1 \\ & \\ (Z_{i,h-1}+P_{h-1}^{Rec})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P_{h-1}^{Rec})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & 1 < h \leq n \\ & \\ (Z_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & n < h \leq d_r \\ & \\ (Z_{i,h-1}-\alpha_{h-1}^r)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha_{h-1}^r)(1+Ip) & \text{si} \quad Z_{i,h-1} < R_{i,h-1}+V_{i,h-1} \\ & d_r < h \leq d_r+m_r \end{cases}$$

siendo P_h^{Rec} la prima recargada de la operación:

$$P_h^{Rec} = P_h(1+\lambda) \quad h = 0,\ldots,n-1$$

A continuación explicaremos la función disponible $Z_{i,h}$ por tramos:

- Si $h = 1$, el disponible al finalizar dicho período estará constituido por la prima inicial recargada (si existe recargo de seguridad) y capitalizada un período al tipo de interés técnico del plan.

  En el supuesto que $d_r = 0$, el disponible al finalizar el primer período, tendrá que tener en cuenta el importe del primer término de la renta α_0^r, por tanto:

  $$Z_{i,1} = (P_0^{Rec} - \alpha_0^r)(1+Ip)$$

- Si $1 < h \leq n$, la función $Z_{i,h}$ o disponible al final del periodo h adoptará dos tramos:

  1. Si el disponible al final del período $h-1$, cubre el margen de solvencia y la provisión matemática correspondiente ($Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1} + V_{i,h-1}$), el disponible al final del período h estará consitituido por el disponible al

final del periodo h-ésimo $Z_{i,h-1}$, más la prima recargada satisfecha por el partícipe en el momento $h-1$, P_{h-1}^{Rec}, y todo ello capitalizado un período al tipo de interés técnico del plan. En este caso, el reasegurador no interviene ya que el plan ha sido autosuficiente para poder cubrir el margen y la provisión matemática correspondiente.

2. Sin embargo, cuando el disponible asociado al final del período $h-1$ no cubre el margen de solvencia y/o la provisión matemática correspondiente $(Z_{i,h-1} < R_{i,h-1} + V_{i,h-1})$, el reasegurador si intervendrá satisfaciendo la diferencia entre lo que dispone el plan y la provisión matemática más el margen de solvencia correspondiente al final del periodo $h-1$; por tanto, el disponible al final del periodo h, está formado por la provisión matemática y el margen de solvencia correspondientes al momento $h-1$, más la prima recargada satisfecha por el partícipe en dicho momento P_{h-1}^{Rec}, todo ello capitalizado un período al tipo de interés técnico del plan.

   Como podemos observar, en los períodos de pago de primas incorporamos la prima recargada cobrada por el plan P_{h-1}^{R} al disponible, ya que ésta se tuvo en cuenta en el cálculo de la provisión matemática.

- Si $n < h \leq d_r$, la función $Z_{i,h}$ tendrá el mismo comportamiento que en el caso anterior, con la diferencia de que el partícipe ya no satisface primas.

- Si $d_r < h \leq d_r + m_r$, tenemos que tener presente en este caso, el importe de la renta α_h que satisface el plan al partícipe en el momento h, detrayéndolo del disponible que presente el plan en el momento de pago del mismo.

Si el reaseguro es del Tipo B, la expresión formal de la función $Z_{i,h}$ para la operación objeto de estudio vendrá dada por:

$$Z_{i,h} = \begin{cases} (P_0^{Rec})(1+Ip) & h=1 \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}+P_{h-1}^{R})(1+Ip) & 1<h\leq n \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1})(1+Ip) & n<h\leq d_r \\ (R_{i,h-1}+V_{i,h-1}-\alpha_{h-1}^{r})(1+Ip) & d_r<h\leq d_r+m_r \end{cases}$$

En este caso la función $Z_{i,h}$ adoptará una sóla expresión para cada tramo de valores de h, ya que no tendrá sentido plantearse el caso en el que $Z_{i,h-1} \geq R_{i,h-1} + V_{i,h-1}$

El hecho de que la función disponible esté sólo definida para aquellos períodos dentro del plazo de la operación donde viva el partícipe, hace que ésta (tanto la asociada al Tipo A como al Tipo B) sea independiente de la cuantía del seguro.

El tipo de interés utilizado en la valoración de la función $Z_{i,h}$ debiera de ser el tipo de interés del rendimiento de las inversiones del plan. Nosotros hemos supuesto que este tipo de interés coincide con el tipo de interés técnico de la operación.

Estudio de la función $T_{i,h}$

La función $T_{i,h}$ recoge el importe que ha de satisfacer el reasegurador en el período h, asociado al partícipe "i".

Hay que señalar que en el caso de las rentas, la cobertura por parte del reasegurador de la provisión matemática en cada período, nos permite cubrir el riesgo de supervivencia del partícipe, por ser el importe de dicha provisión mayor o a lo sumo igual (en el último periodo de la operación) al término de renta que debe satisfacer el plan al partícipe en ese período. Por consiguiente, el reasegurador sólo efectuará un desembolso al final de cada período h siempre y cuando viva el partícipe.

Sin embargo, en las operaciones de seguros, el riesgo de fallecimiento en un determinado período, no tiene por qué quedar cubierto con la provisión matemática más el margen de solvencia asociado a ese período, esta circunstancia conlleva a que el reasegurador, además de poder intervenir al final de cada período h, si el partícipe vive al final del mismo para garantizar las correspondientes provisiones, debe también de actuar en el momento en el que fallezca el partícipe "i", si el plan no dispone de fondos para cubrir el fallecimiento del mismo. Como suponemos que el fallecimiento del partícipe tiene lugar a mitad de período, entonces los posibles desembolsos que debe de realizar el reasegurador en el período h, pueden estar dados en distintos momentos dentro de ese período. Uno al final del periodo h si vive el partícipe para garantizar las provisiones y márgenes de solvencia, y otro a mitad de dicho período, si el partícipe fallece en el mismo, para cubrir el riesgo de fallecimiento en caso necesario.

Esta circuntancia hace que descompongamos los términos que tiene que pagar el reasegurador en dos, según el momento donde se efectue el pago:

$$T_{i,h} = \begin{cases} T^1_{i,h} & h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1 \\ T^2_{i,h} & h = d_s + 1, \ldots, d_s + m_s \end{cases}$$

donde:

$T^1_{i,h}$ recoge el importe que tiene que satisfacer el reasegurador al final del período h. Si el colectivo está formado por un sólo partícipe, éste sólo será satisfecho si el partícipe vive al final del período h. Su cuantía esta formado por las desviaciones entre las provisiones matemáticas, más el margen de solvencia asociado al periodo h, y el disponible de la operación correspondiente a ese período.

Si el reasegurador es del **Tipo A** entonces:

$$T^1_{i,h} = \max\{0, \quad V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h}\} \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$$

Consideraremos exclusivamente las desviaciones positivas.

Si el reasegurador actúa según el **Tipo B** entonces:

$$T^1_{i,h} = V_{i,h} + R_{i,h} - Z_{i,h} \quad h = 1, \ldots, d_r + m_r - 1$$

Lo valores positivos de $T^1_{i,h}$ supondrán desembolsos del reasegurador por esa cuantía y en el período h correspondiente. Sin embargo, los valores negativos de $T^1_{i,h}$ recogerán el importe que el plan cede al reasegurador en el período h.

$T^2_{i,h}$ recoge el importe que tiene que satisfacer el reasegurador a mitad del período h, si el partícipe i fallece en dicho período. El término $T^2_{i,h}$ sólo tendrá sentido plantearlo en la operación de seguro, y su importe viene dado por el capital en riesgo asociado al periodo de fallecimiento del partícipe. Por capital en riesgo en el período h entenderemos la diferencia entre el importe del seguro y el disponible valorado a mitad del período h.

En este caso la expresión de $T^2_{i,h}$ será la misma tanto para el reaseguro Tipo A como para el Tipo B:

$$T^2_{i,h} = \max\{0, \alpha^s_h - Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2}\} \quad h = d_s+1, \ldots, d_s+m_s$$

Al suponer distribución uniforme de la mortalidad, actualizamos medio periodo la función $Z_{i,h}$, para referirla al mismo momento de tiempo en el que se da α^s_h.

Conocida la función $T_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones $M(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$:

$$M(i,t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & 0 \le t < d_s \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} + T^2_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-1/2} & d_s \le t < d_s + m_s \\ \sum_{s=1}^{t} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & d_s + m_s \le t < d_r + m_r \\ \sum_{s=1}^{d_r+m_r-1} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} & t \ge d_r + m_r \end{cases}$$

siendo para $t = 0$, $\quad \sum_{s=1}^{0} T^1_{i,s}(1+Ir)^{-s} = 0$

La expresión formal de $M(i,t)$, depende del número entero de años vividos por el partícipe, así:

- Si $t = 0$, y $d_s > 0$ el reasegurador no tendrá que satisfacer desembolsos en el momento 1, por estar extinguida la operación, por tanto $M(i, 0) = 0$.
- Si $t = 0$, y $d_s = 0$ el reasegurador tendrá que satisfacer exclusivamete el capital en riesgo correspondiente a dicho período, siendo $M(i, 0)$ el valor actual al tipo de interés del reaseguro de dicho capital en riesgo.
- Si $0 < t \leq d_s$, la responsabilidad del reasegurador al no haber operación de seguro, es la de garantizar que el plan tendrá exclusivamente en cada período las provisiones matemáticas y margenes de solvencia correspondientes, por tanto $M(i, t)$ vendrá dado por el valor actual al tipo de interés del reaseguro de los términos dados por la función $T^1_{i,h}$.
- Si $d_s < t < d_s < m_s$ tendremos que tener en cuenta en el valor actual de las prestaciones que realiza el reasegurador, el capital en riesgo cuyo importe viene dado por la función $T^2_{i,h+1}$.
- Si $d_s + m_s < t < d_r + m_r$, la operación de seguro se ha extinguido, y por lo tanto de nuevo $M(i, t)$ vendrá dado por el valor actual al tipo de interés del reaseguro de los términos dados por la función $T^1_{i,h}$.
- $t \geq d_r + m_r$ $M(i, t)$ coincidirá con el que realizaría si el partícipe viviese $d_r + m_r - 1$ períodos enteros.

Conocidas las realizaciones $M(i, t)$ y las probabilidades asociadas a cada una de ellas, podemos calcular cualquier momento de la variable aleatoria $\xi_i^{p,R}$, como la esperanza, varianza o desviación tipo:

$$E[\xi_i^{p,R}] = \sum_{t=0}^{w-x-1} M(i,t)\ {}_{t/}q_x$$

$$Var[\xi_i^{p,R}] = \sum_{t=0}^{w-x-1} M(i,t)^2\ {}_{t/}q_x - [E[\xi_i^{p,R}]]^2$$

$$D[\xi_i^{p,R}] = [Var[\xi_i^{p,R}]]^{1/2}$$

Una forma alternativa de calcular la $E[\xi_i^{c,R}]$, es através de la función $T_{i,h}$.

Siendo la $E[\xi_i^{c,R}]$, para la operación objeto de estudio, el valor actual actuarial al tipo de interés del reaseguro de una renta vencida inmediata y temporal de d_r+m_r-1 términos de cuantía $T_{i,h}^1 \quad h=1,\ldots,d_r+m_r-1$, más el valor actual al tipo de interés del reaseguro, de un seguro diferido d_s períodos y temporal de m_s términos variables de cuantía $T_{i,h}^2 \quad h=d_s+1,\ldots,d_s+m_s$:

$$E[\xi_i^{c,R}] = \sum_{t=1}^{d_r+m_r-1} T_{i,t}^1 \, {}_tP_x(1+Ir)^{-t} + \sum_{t=d_s+1}^{d_s+m_s} T_{i,t}^2 \, {}_{t-1/}q_x(1+Ir)^{-t+1/2}$$

3.5.2 Variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador

En este apartado estudiamos la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reaseguro, o ingresos por primas que satisface el plan al reasegurador, como contrapartida de las contingencias cubiertas por éste.

$\xi_i^{c,R}$ recoge el valor actual financiero al tipo de interés técnico del reaseguro, de las primas satisfechas al reasegurador por el plan.

Supondremos que el coste del reaseguro lo soporta el partícipe, vía incremento de la prima que tiene que pagar al plan. Por consiguiente, la periodicidad de las primas que satisface el partícipe al plan, coincidirá con la periodicidad de la prima que cobre el reaseguro.

El caracter aleatorio de $\xi_i^{c,R}$ también viene dado por la variable aleatoria T_i, ya que cada realización dependerá del número entero de períodos que viva el partícipe "i".

El campo de variabilidad de $\xi_i^{c,R}$, lo representamos por el siguiente conjunto discreto:

$$\{P^R(i,0),\ldots,P^R(i,t),\ldots,P^R(i,w-x-1)\}$$

donde $P^R(i,t)$ es el valor actual financiero valorado al tipo de interés técnico del reasegurador, de las primas de reaseguro satisfechas por el plan al reasegurador, si el partícipe "i" vive t períodos enteros a contar desde que se inicio la operación.

Siendo:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{t} P_j^R(1+Ir)^{-j} & 0 \leq t < n \\ \sum_{j=0}^{n-1} P_j^R(1+Ir)^{-j} & t \geq n \end{cases}$$

donde: $P_0^R, \ldots, P_{n-1}^R$, son las n primas de reaseguro.

La probabilidad de cada una de estas realizaciones es:

$$P[\xi_i^{c,R}] = P^R(i,t)] = P[T_i = t] = \ {}_{t/}q_x$$

La obtención de la esperanza, varianza y desviación tipo de $\xi_i^{c,R}$ es ya inmediata como se muestra a continuación:

$$E[\xi_i^{c,R}] = \sum_{t=0}^{w-x-1} P_t^R(i,t)\, t/q_x$$

$$Var[\xi_i^{c,R}] = \sum_{t=0}^{w-x-1} P^R(i,t)^2\, t/q_x - [E[\xi_i^{c,R}]]^2$$

$$D[\xi_{i(x)}^{c,R}] = [Var[\xi_{i(x)}^{c,R}]]^{1/2}$$

Conocidas las variables aleatorias $\xi_i^{c,R}$ y $\xi_i^{p,R}$, podemos calcular la esperanza, la varianza y la desviación tipo de la variable aleatoria pérdida del reasegurador L_i^R :

$$E[L_i^R] = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}]$$

$$Var[L_i^R] = Var[\xi_i^{p,R}] + Var[\xi_i^{c,R}] - 2Cov[\xi_i^{p,R}\xi_i^{c,R}]$$

$$D[L_i^R] = [Var[L_i^R]]^{1/2}$$

La exitencia de covarianza entre $\xi_i^{p,R}$ y $\xi_i^{c,R}$, se debe a la no independencia de las mismas, puesto que ambas dependen de la mortalidad del partícipe "i".

3.5.3 Cálculo de la prima pura de reaseguro

Conocida la $E[L_i^R]$, podemos calcular, al igual que hicimos con las primas puras del plan, las primas puras a satisfacer al reasegurador. Como éstas repercuten en la prima a pagar por el partícipe, podemos por tanto suponer:

- La primas de reaseguro tienen la misma periodicidad y temporalidad que las primas del plan.
- Las primas de reaseguro se ajustan a la misma ley de variación de las primas del plan f. Podría también contemplarse el caso de que las primas de reaseguro sigan una variación distinta f^R, circunstancia que no complicaría el modelo, ya que tan sólo se trataría de sustituir f^R por f.

El proceso es totalmente paralelo al que se siguió en el cálculo de la prima pura del plan.

El estudio se realizará bajo dos supuestos:

1. La primera prima satisfecha al reasegurador P_0^R, es independiente de la ley de variación de primas f.
2. P_0^R, sigue la ley de variación del resto de primas.

1º) La primera prima satisfecha al reasegurador P_0^R, es independiente de la ley de variación de primas

En este caso debemos conocer la ley de variación $f(t)$, y el importe de la primera prima P_0^R que simbolizaremos por C^R,(para reflejar que es independiente de la variación del resto de primas).

Como es evidente C^R, no puede superar la prima única que costaría reasegurar el riesgo ϵ. Un caso interesante que podría contemplarse es aquel en el que C^R es una proporción determinada h de la aportación inicial C:

$$C^R = h\,C$$

Las primas a determinar vendrán recogidas por la siguiente expresión:

$$P_t^R = f(t)\, k^R \quad \forall t = 1, \ldots, n-1$$

Por tanto, cada realización $P^R(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$ puede expresarse en función de k^R como sigue:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} C^R & t = 0 \\ \sum_{j=1}^{t} f(j)\, k^R (1+Ir)^{-j} + C^R & 1 \leq t < n \\ \sum_{j=1}^{n-1} f(j)\, k^R (1+Ir)^{-j} + C^R & t \geq n \end{cases}$$

Para poder calcular k^R, introduciremos una variable aleatoria intermedia que simbolizaremos $\xi_i^{Q,R}$, cuyo campo de variabilidad vendrá dado por el siguiente conjunto discreto:

$$\{Q^R(i,0), \ldots, Q^R(i,t), \ldots, Q^R(i, w-x-1)\}$$

donde

$$Q^R(i,t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \sum_{j=1}^{t} f(j)\, (1+Ir)^{-j} & 1 \leq t < n \\ \sum_{j=1}^{n-1} f(j)\, (1+Ir)^{-j} & t \geq n \end{cases}$$

La probabilidad de cada una de las realizaciones es:

$$P[\xi_i^{Q,R} = Q^R(i,t)] = P[T_i = t] = t/q_x$$

Por tanto, podemos expresar la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$, en función de la esperanza de la variable aleatoria intermedia $\xi_i^{Q,R}$:

$$E[\xi_i^{c,R}] = C^R + k^R E[\xi_i^{Q,R}] \quad (I)$$

Como la prima de reaseguro debe de anular la esperanza del valor actual de las pérdidas futuras de éste, entonces k^R, debe de ser un valor que satisfaga:

$$E[L_i^R] = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] = 0 \quad (II)$$

sustituyendo (I) en (II):

$$E[\xi_i^{p,R}] - C^R - k^R E[\xi_i^{Q,R}] = 0$$

despejando k^R:

$$k^R = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - C^R}{E[\xi_i^{Q,R}]}$$

El cálculo de la prima pura es inmediato sustituyendo el valor de k^R en la expresión
:

$$P_t^R = f(t)\, k^R \quad \forall t = 1, \ldots, n-1$$

2º) P_0^R, sigue la ley de variación del resto de primas

En este caso las primas a satisfacer al reasegurador las podemos expresar:

$$P_t^R = f(t+1)\, k^R \quad \forall t = 0, \ldots, n-1$$

por tanto, la realizaciones $P^R(i,t)$ de la variable aleatória $\xi_i^{c,R}$ podemos expresarlas en función de k^R:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{t} f(j+1)\, k^R (1+Ir)^{-j} & 0 \le t < n \\ \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1)\, k^R (1+Ir)^{-j} & t \ge n \end{cases}$$

Igual que en el caso anterior, introducimos una variable intermedia $\xi_i^{q,R}$, cuyo campo de variabilidad viene dado por el conjunto discreto:

$$\{q^R(i,0), \ldots, q^R(i,t), \ldots, q^R(i, w-x-1)\}$$

donde:

$$q^R(i,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{t} f(j+1)\, (1+Ir)^{-j} & 0 \le t < n \\ \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1)\, (1+Ir)^{-j} & t \ge n \end{cases}$$

siendo la probabilidad de cada una de las realizaciones la inducida por la variable aleatoria T_i:

$$P[\xi_i^{q,R} = q^R(i,t)] = P[T_i = t] = {}_{t/}q_x$$

La introducción de esta variable intermedia, nos permite expresar la esperanza de $\xi_i^{c,R}$ en función de la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{q,R}$ y de k^R :

$$E[\xi_i^{c,R}] = k^R \, E[\xi_i^{q,R}]$$

como k^R, debe de satisfacer la condición:

$$E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] = 0$$

sustituyendo y despejando k^R tenemos:

$$k^R = \frac{E[\xi_i^{p,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

por último sustituyendo el valor de k^R en la expresión:

$$P_t^R = f(t+1)\, k^R \quad \forall t = 0, \ldots, n-1$$

tendremos calculadas las primas puras del reasegurador.

Si la *prima es única*, al igual que sucedía con la prima única del plan, la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones, en este caso del reasegurador $\xi_i^{c,R}$, deja de serlo, siendo su valor cierto el importe de la prima pura únida de reaseguro C^R, por tanto:

$$\xi_i^{c,R,e} = C^R = \Pi^R$$

Como la prima única a satisfacer al reasegurador Π^R debe de anular el valor actual de la pérdida futura del reasegurador,

$$E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] = 0$$

entonces sustituyendo,

$$E[\xi_i^{p,R}] - \Pi^R = 0$$

despejando Π^R:

$$\Pi^R = E[\xi_i^{p,R}]$$

Conclusión: el valor de la prima única de reaseguro coincide con la esperanza del valor actual de las prestaciones asociadas a éste.

3.6 Análisis de la variable aleatoria: Pérdida ajustada del reasegurador

Tanto en la modalidad de reaseguro del percentil como en la modalidad de reaseguro de diferencia de siniestralidad, cabe la posibilidad que al fallecimiento del partícipe, el plan tenga un beneficio dado por los fondos no consumidos en la operación.

Como sabemos, los Planes de Pensiones no persiguen ánimo de lucro, por lo que un posible destino de este beneficio podría ser reducir la prima de reaseguro a satisfacer por el partícipe.

Nuestro objetivo es plantear la posibilidad de un nuevo contrato de reaseguro que consista en ceder al reasegurador el posible beneficio que pueda tener el plan a la muerte del partícipe. La prima de reaseguro resultante de esta nuevo contrato, al ser menor que la prima de reaseguro calculada en el apartado anterior, la denominaremos prima ajustada de reaseguro.

El beneficio del plan supondrá un ingreso para el reaseguro, quedando modificada la variabe aleatoria pérdida del reasegurador, en otra que denominaremos Pérdida Ajustada del reasegurador y que simbolizaremos $L_i^{R,A}$ siendo:

$$L_i^{R,A} = \xi_i^{p,R} - \xi_i^{c,R} - \xi_i^{b,R}$$

donde:

$\xi_i^{b,R}$, es la variable aleatoria beneficio del plan asociada al partícipe "i", la cual será estudiada a continuación.

$\xi_i^{c,R}$, es la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador, en este caso las realizaciones de la misma estarán formadas por el valor actual financiero, valorado al tipo de interés del reaseguro de las primas ajustadas de reaseguro, satisfechas por el plan al reasegurador.

$\xi_i^{p,R}$, es la variable aleatoria asociada a las prestaciones del reasegurador, estudiada en el apartado anterior.

Podemos determinar la esperanza, la varianza, y la desviación tipo de $L_i^{R,A}$, mediante las variables aleatorias que la forman:

$$E[L_i^{R,A}] = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] - E[\xi_i^b]$$

$$Var[L_i^{R,A}] = Var[\xi_i^{p,R}] + Var[\xi_i^{c,R}] + Var[\xi_i^b]$$

$$+2Cov[\xi_i^{c,R}, \xi_i^b] - 2Cov[\xi_i^{c,R}, \xi_i^{p,R}] - 2Cov[\xi_i^b, \xi_i^{p,R}]$$

$$D[L_i^{R,A}] = [Var[L_i^{R,A}]]^{1/2}$$

3.6.1 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan

La variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ recoge el valor actual financiero del beneficio asociado al plan en el momento del fallecimiento del partícipes y valorado al tipo de interés técnico del reaseguro.

La aleatoriedad de $\xi_i^{b,R}$ viene inducida, como el resto de variables aleatorias estudiadas, por la variable aleatoria T_i, ya que el beneficio del plan dependerá del número de períodos enteros vividos por el partícipe "i" de edad x. Las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$, vendrán dadas por el siguiente conjunto discreto:

$$\{b(i,0), \ldots, b(i,t), \ldots, b(i, w - x - 1)\}$$

donde $b(i,t)$ es el valor actual del beneficio que presenta el plan, si el partícipe "i" vive t-períodos enteros a contar desde el inicio de la operación.

La probabilidad de $b(i,t)$ viene por tanto dada por:

$$P[\xi_i^{b,R} = b(i,t)] = P[T_i = t] = \ _{t/}q_x$$

La variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$ dependerá de la modalidad de reaseguro que contratemos. A continuación procederemos al estudio de la misma para las dos modalidades de reaseguro que nos ocupa.

3.6.1.1 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan para la modalidad de reaseguro del percentil

Las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$, vienen dadas en esta modalidad de reaseguro por el siguiente conjunto discreto:

$$\{b(i,t_0),\ldots,b(i,t_k),\ldots,b(i,t_{w-x-1})\}$$

donde $b(i,t_k)$ es el valor actual financiero del beneficio que presenta el plan, si el partícipe "i" vive t_k-períodos enteros a contar desde el inicio de la operación.

La probabilidad de $b(i,t_k)$ es:

$$P[\xi_i^{b,R} = b(i,t_k)] = P[T_i = t_k] = \ _{t_k/}q_x$$

Las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$, pueden calcularse fácilmente conociendo las realizaciones de la variable aleatoria L_i^{ϵ}. Siendo:

$$b(i,t_k) = \begin{cases} -l(i,t_k)^{\epsilon}\left(\frac{1+Ip}{1+Ir}\right)^{t_k+1/2} & k \leq h \\ 0 & k > h \end{cases}$$

Consideramos por tanto las realizaciones negativas, (cambiadas de signo), de la pérdida recargada del plan, valoradas en el momento en que tiene lugar el fallecimiento del partícipe "i" al tipo de interés técnico del plan Ip y posteriormente actualizadas al tipo de interés técnico del reasegurador Ir.

3.6.1.2 Variable aleatoria asociada al beneficio del plan para la modalidad de reaseguro diferencia de siniestralidad

En este apartado estudiaremos la forma de calcular las realizaciones $b(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$, en la modalidad de reaseguro diferencia de siniestralidad. Para ello tendremos que deteminar el excedente que presente el plan a la muerte del partícipe. Este viene definido por una nueva función que simbolizamos $H_{i,h}$ y recoge el excedente positivo que presenta el plan valorado a mitad del período h-ésimo[11] si el partícipe "i" fallece en dicho período. La expresión formal de $H_{i,h}$ viene dada por:

$$H_{i,h} = \begin{cases} Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & 1 \leq h < d_s \\ & \\ Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s > 0 \\ 0 & \text{si} \quad Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} - \alpha_h^s \leq 0 \\ & d_s < h \leq d_s + m_s \\ & \\ Z_{i,h}(1+Ip)^{-1/2} & d_s + m_s < h < d_r + m_r \\ & \\ Z_{i,d_r+m_r}(1+Ip)^{-1/2} & h \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Conocida la función $H_{i,h}$ podemos determinar las realizaciones $b(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{b,R}$:

$$b(i,t) = \begin{cases} H_{i,t+1}(1+Ir)^{-t-\frac{1}{2}} & 0 \leq t < d_r + m_r \\ & \\ H_{i,d_r+m_r}(1+Ir)^{-d_r-m_r-\frac{1}{2}} & t \geq d_r + m_r \end{cases}$$

Conocidas las realizaciones de $\xi_i^{b,R}$, sea cual sea la modalidad de reaseguro y sus

[11] Asumimos la hipótesis que el partícipe fallece a mitad de período.

probabilidades, podemos determinar su esperanza, varianza y desviación tipo :

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{t=0}^{w-x-1} b(i,t)\, {}_{t/}q{x}$$

$$Var[\xi_i^{b,R}] = \sum_{t=0}^{w-x-1} b(i,t)^2\, {}_{t/}q_x - [E[\xi_i^{b,R}]]^2$$

$$D[\xi_i^{b,R}] = [Var[\xi_i^{b,R}]]^{1/2}$$

Alternativamente, podemos calcular la $E[\xi_i^{b,R}]$ como el valor actual actuarial valorada al tipo de interés del reaseguro de un seguro inmediato y vitalicio, y de cuantía la dada en cada período por la función $H_{i,h}$:

$$E[\xi_i^{b,R}] = \sum_{h=1}^{w-x-1} H_{i,h}\; {}_{h-1/}q_x (1+Ir)^{-h+0.5}$$

3.6.2 Cálculo de la prima ajustada de Reaseguro

Nuestro objetivo es determinar el importe de las primas ajustadas que han de satisfacerse al reasegurador. Las simbolizaremos $P_0^{R,A}, \ldots, P_{n-1}^{R,A}$ y su cálculo es totalmente paralelo al que ya se hizo, cuando estudiamos el importe de las primas de reaseguro: $P_0^R, \ldots, P_{n-1}^R$.

Supondremos:

- La primas de reaseguro ajustadas tienen la misma periodicidad y temporalidad que las primas del plan.
- Éstas se ajustan a la misma ley de variación de las primas puras del plan ,f.

Contemplaremos también los siguientes casos:

1. La primera prima satisfecha $P_0^{R,A}$, no sigue la ley de variación del resto de primas.
2. La primera prima sigue la ley de variación del resto de primas.

1º) La primera prima satisfecha $P_0^{R,A}$, no sigue la ley de variación del resto de primas

En este caso tenemos que conocer el importe de $P_0^{R,A}$ que simbolizaremos $C^{R,A}$ y que ha de ser menor a la prima única ajustada de reaseguro, y la ley de variación $f(t)$. EL resto de primas a determinar las expresaremos como :

$$P_t^{R,A} = f(t)\, k^{R,A} \quad \forall t = 1, \ldots, n-1$$

Las primas $P_t^{R,A}$, $\forall t = 1, \ldots, n-1$, deben de anular el valor actual de las pérdidas que tiene el reasegurador, teniendo en cuenta en éstas, el ingreso que recibe éste por el posible beneficio que puede tener el plan a la muerte del partícipe.

Por consiguiente, $k^{R,A}$ debe ser un valor tal, que sustituido en $P_t^{R,A} = f(t)\, k^{R,A}$, $\forall t = 1, \ldots, n-1$, las primas resultantes anulen la esperanza de la variable aleatoria pérdida ajustada del reasegurador.

Cada realización $P^R(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$ podemos expresarla en función de $K^{R,A}$:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} C^{R,A} & t = 0 \\ C^{R,A} + \sum_{j=1}^{t} f(j)\, k^{R,A} (1+Ir)^{-j} & 1 \leq t < n \\ C^{R,A} + \sum_{j=1}^{n-1} f(j)\, k^{R,A} (1+Ir)^{-j} & t \geq n \end{cases}$$

Para poder calcular $k^{R,A}$, haremos uso de la variable aleatoria intermedia $\xi_i^{Q,R}$, la cual nos permite expresar la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{c,R}$, en función de la esperanza de la variable aleatoria $\xi_i^{Q,R}$ y de $K^{R,A}$:

$$E[\xi_i^{c,R}] = C^{R,A} + k^{R,A} E[\xi_i^{Q,R}]$$

Como la prima de reaseguro debe de anular la esperanza del valor actual de las pérdidas futuras de éste, entonces

$k^{R,A}$, debe de ser un valor que satisfaga:

$$E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] - E[\xi_i^{b,R}] = 0$$

sustituyendo tenemos:

$$E[\xi_i^{p,R}] - C^{R,A} - k^{R,A} E[\xi_i^{Q,R}] - E[\xi_i^{b,R}] = 0$$

despejando $k^{R,A}$:

$$k^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - C^R - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{Q,R}]}$$

El cálculo de la prima pura ajustada es inmediato, sustituyendo el valor de $k^{R,A}$ en la expresión :

$$P_t^{R,A} = f(t)\, k^{R,A} \quad \forall t = 1, \ldots, n-1$$

2º) $P_0^{R,A}$, sigue la ley de variación del resto de primas

En este caso las primas a satisfacer al reasegurador las podemos expresar:

$$P_t^{R,A} = f(t+1)\, k^{R,A} \quad \forall t = 0, \ldots, n-1$$

por tanto, la realizaciones $P^R(i,t)$ de la variable aleatoria $\xi_i^{c,R,e}$, pueden definirse así:

$$P^R(i,t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{t} f(j+1)\, k^{R,A} (1+Ir)^{-j} & 0 \leq t < n \\ \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1)\, k^{R,A} (1+Ir)^{-j} & t \geq n \end{cases}$$

Haciendo uso de la variable aleatoria $\xi_i^{q,R}$ podemos expresar la esperanza de $\xi_i^{c,R}$ en función de la esperanza de ésta y de $k^{R,A}$:

$$E[\xi_i^{c,R}] = k^{R,A} E[\xi_i^{q,R}]$$

como $k^{R,A}$ debe de anular la esperanza de la pérdida ajustada de reaseguro , entonces:

$$E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] - E[\xi_i^{b,R}] = 0$$

sustituyendo y despejando $k^{R,A}$ tenemos:

$$k^{R,A} = \frac{E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]}{E[\xi_i^{q,R}]}$$

Por último, sustituyendo el valor de $k^{R,A}$, en la expresión:

$$P_t^{R,A} = f(t)\, k^{R,A} \quad \forall t = 0, \ldots, n-1$$

tendremos calculadas las primas puras ajustadas de reaseguro.

Si la *prima es única*, al igual que sucedía con la prima única del reaseguro, la variable aleatoria asociada a las contraprestaciones del reasegurador $\xi_i^{c,R}$, deja de serlo, puesto que ésta pasará a ser un valor cierto de cuantía $C^{R,A}$, por tanto:

$$\xi_i^{c,R} = E[\xi_i^{c,R}] = C^{R,A} = \Pi^{R,A}$$

Como la prima única a satisfacer al reasegurador $\Pi^{R,A}$ debe de anular el valor actual de la pérdida futura de reasegurador, es decir:

$$E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{c,R}] - E[\xi_i^{b,R}] = 0$$

entonces sustituyendo :

$$E[\xi_i^{p,R}] - \Pi^{R,A} - E[\xi_i^{b,R}] = 0$$

y despejando $\Pi^{R,A}$:

$$\Pi^{R,A} = E[\xi_i^{p,R}] - E[\xi_i^{b,R}]$$

En consecuencia, el valor de la prima única de reaseguro, no es más que la diferencia entre la esperanza del valor actual de las prestaciones asociadas al reasegurador y la esperanza de la variable aleatoria del beneficio que le entrega el plan a éste.

Puede darse el caso, de que las primas ajustadas de reaseguro sean negativas, esto es debido a que el valor esperado del beneficio cedido al reaseguro, es mayor que el coste esperado de las contingencias que cubre.

3.7 Análisis del coste total de la operación

El coste total viene dado por las primas puras del plan recargadas con el recargo del plan λ [12] y por las primas de reaseguro recargadas, en este caso, con el recargo del reasegurador λ^R que para nosotros será un dato exógeno.

El valor actual actuarial del coste total valorado al tipo de interés del plan Ip, $VACT$ vendrá dado por:

$$VACT = VAPREC + VAPREA$$

donde:

$VAPREC = \Pi^{Rec} + \sum_{j=1}^{n-1} P_j^{Rec} {}_jE_x$: valor actual actuarial de las primas puras recargadas.

$VAPREA = \Pi^{REA}(1+\lambda^R) + \sum_{j=1}^{n-1} P_j^{REA}(1+\lambda^R) {}_jE_x$:valor actual actuarial de las primas satisfechas al reaseguro.

Si la modalidad de reaseguro es sin reparto beneficios al reasegurador entonces: $\Pi^{REA} = \Pi^R$ y $P_i^{REA} = P_i^R$.

Si la modalidad es con reparto de beneficios al reasegurador: $\Pi^{REA} = \Pi^{R,A}$ y $P_i^{REA} = P_i^{R,A}$

A continuación pondremos de manifiesto los elementos que afectan al coste total y que quedan implícitamente recogidos en las expresiones anteriores.

Estos elementos son:

- Los tipos de intereses técnicos aplicados por el plan y por el reasegurador, Ip e Ir respectivamente.
- La estructura de las prestaciones, que vendrán dadas por la temporalidad, diferimiento y cuantía de la renta,$(m_r, d_r \alpha^r)$ y por la temporalidad diferimiento e importe del seguro, (m_s, d_s, α^s).

[12]En el supuesto que λ venga asociada a un determindado nivel de riesgo ϵ, entonces $\lambda = \lambda^\epsilon$

- La edad actuarial del partícipe x.
- El recargo del reasegurador λ^R.
- El recargo aplicado por el plan λ .

Por consiguiente, podemos expresar el valor actual actuarial del coste total como un función f de:

$$VACT = f(Ip, Ir, m_s, d_s, \alpha^s, m_r, d_r, \alpha^r, x, \lambda^R, \lambda)$$

De todas formas, la única variable que puede controlar el plan, dado un determinado contrato de reaseguro, es el recargo de seguridad λ, o bien directamente o vía modificación del riesgo de insolvencia del plan ϵ (si éste viene dado por dicho riesgo), ya que el resto de variables vendrán fijadas, ya sea por las caraterísticas propias de la operación $m_s, d_s, \alpha^s, m_r, d_r, \alpha^r, x$, por la coyuntura financiera Ip, o por el contrato de reaseguro Ir, λ^R.

Por tanto, desde el punto de vista de las variables que puede controlar el plan, podemos expresar el valor actual actuarial del coste total como una función de una sóla variable independiente λ , siendo el resto de variables parámetros dados:

$$VACT = f(\lambda) = VACT(\lambda)$$

La sensibilidad de $VACT(\lambda)$ con respecto a λ dependerá del resto de variables que intervienen en el coste total. De todas formas, fijadas éstas, existirá un determinado comportamiento entre λ y $VACT(\lambda)$.

Analizaremos este comportamiento viendo como afecta una variación en el recargo del plan λ , sobre los valores de $VACT(\lambda)$, $VAPREC(\lambda)$ y $VAPREA(\lambda)$ estando fijadas el resto de variables. Para ello, consideraremos dos recargos del plan cualesquiera λ_t y λ_{t+1}, tales que $\lambda_{t+1} > \lambda_t$.

El valor actual del coste total de la operación asociada al recargo de seguridad λ_t es:

$$VACT(\lambda_t) = VAPREC(\lambda_t) + VAPREA(\lambda_t)$$

Si consideramos el recago de seguridad λ_{t+1}:

$$VACT(\lambda_{t+1}) = VAPREC(\lambda_{t+1}) + VAPREA(\lambda_{t+1})$$

al ser $\lambda_{t+1} > \lambda_t$, entonces:

$$VAPREC(\lambda_{t+1}) > VAPREC(\lambda_t)$$

es decir, cuanto mayor sea el recargo de seguridad aplicado por el plan, mayor será el valor actual actuarial de la prima recargada.

Sin embargo, al destinarse el recargo de seguridad del plan a financiar las contingencias que cubre el reaseguro, cuanto mayor sea éste, menor será la prima pura de reaseguro y por tanto menor será el valor actual actuarial de dicha prima:

$$VAPREA(\lambda_{t+1}) < VAPREA(\lambda_t)$$

Por tanto, el valor actual actuarial del coste total de la operación asociado a λ_t puede ser mayor, menor o bién igual al valor actual actuarial del coste total asociado al recargo de seguridad λ_{t+1}. Ya que, cuanto mayor sea el recargo de seguridad λ, menor será la prima de reaseguro y mayor la prima recargada, existiendo un efecto de compensación entre el menor coste del reaseguro y el mayor coste por recargo.

Esta circunstancia hace que, aún garantizando totalmente el reaseguro sus obligaciones en las dos modalidades estudiadas , el valor actual actuarial del coste total de la operación pueda ser diferente según el recargo que aplique el plan. Puede darse el caso, según sea la estructura de las prestaciones y de los tipos de interés de la operación estudiada, que el coste total sea menor cuando no se aplique recargo de seguridad, ya que éste puede encarecer la operación, o bien, puede ocurrir lo contrario y por tanto que la política idónea sea cubrir vía recargo de seguridad las contingencia que cubre el reasegurador.

Nuestro objetivo será determinar qué estrategia recargo-reaseguro es la adecuada para minimizar el coste de la operación, sin menoscabo en los objetivos del reasegurador.

Esta estrategia la determinaremos calculando aquel recargo de seguridad del plan, que minimice el valor actual actuarial del coste total. Este recargo lo simbolizaremos λ_*.

El recargo óptimo del plan λ_* debe de satisfacer la siguiente restricción:

$$\lambda_{min} \leq \lambda_* \leq \lambda_{max}$$

siendo:

$\lambda_{min} = 0$

λ_{max} dependerá de la modalidad de reaseguro. En aquellas modalidades donde el recargo venga dado por el nivel de riesgo ϵ,(modalidad del percentil, o modalidad de diferencia de siniestralidad en el que el margen de solvencia coincide con las reservas de solvencia RS^{ϵ}, λ_{max} vendrá dado por aquel recargo asociado al nivel de riesgo $\epsilon = 0$, coincidiendo por tanto éste, con aquel que aplicado sobre la prima pura, la transforme en financiera. Sin embargo si el recargo de seguridad viene dado exógenamente (reaseguro de diferencia de siniestralidad en la que el margen de solvencia no venga dado por las reservas de solvencia), el recargo λ_{max} vendrá fijado por el propio plan. De todas formas, nosotros consideraremos que λ_{max}, en éste último caso, debe de coincidir con aquel recargo que aplicado a la prima pura de la operación la transforme en financiera.

Si $\lambda_* = \lambda_{max}$, en este caso el reaseguro encarece la operación, siendo la estrategia óptima financiar, en la medida que lo permita cada modalidad de reaseguro, las contingencias a cubrir por el reasegurador vía recargo de seguridad.

Si $\lambda_* = \lambda_{min}$, estariamos en el caso contrario, la estrategia óptima sería no recargar la operación, ya que en este caso, a diferencia del anterior, el recargo encarece el coste total de la operación.

Si $\lambda_{min} < \lambda_* < \lambda_{max}$ la estrategia que minimiza el coste será mixta, por un lado se aplicará un recargo de seguridad λ_*. El resto, hasta cubrir las contingencias previstas en cada contrato de reaseguro, será reasegurado.

El problema que nos planteamos puede formalizarse de la siguiente forma, se trata de buscar aquel recargo λ_* que:

$$\text{Min} \quad VACT(\lambda)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$$

Teniendo presente que $VACT(\lambda)$ será mínimo para un recargo λ_*, si la primera prima que tiene que satisfacer el partícipe y que sigue la ley de variación de primas asociado a λ_* es mínima, [13] entonces, podemos reformular de nuevo el problema en los siguientes términos:

Si simbolizamos por $VCT(\lambda)$ el coste total dado por la primera prima que sigue la ley de variación de primas asociada al recargo λ, el recargo λ_* que es solución de:

$$\text{Min} \quad VACT(\lambda)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$$

también lo será de:

$$\text{Min} \quad VCT(\lambda)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} \qquad (A)$$

siendo $VCT(\lambda) = VPREC(\lambda) + VPREA(\lambda)$
donde:

- $VPREC(\lambda) = P_t(1+\lambda) = P_t^{Rec}$ es la primera prima pura del plan recargada con el recargo de seguridad λ que sigue la ley de variación de primas.

[13] Esta implicación queda garantizada al exigir que la función f asociada a la primera prima que sigue la ley de variación de primas sea 1.

- $VPREA(\lambda) = P_t^{REA}(1+\lambda^R)$, es la primera prima pura de reaseguro recargada con el recargo de seguridad λ que sigue la ley de variación de primas.

- Siendo $t = 1$ si existe aportación inicial independiente de la ley de variación de primas, o bien, $t = 0$ en caso contrario.

Si la operación es a primas periódicas constantes:

$VPREC(\lambda) = P(1+\lambda) = P^{Rec}$

$VPREA(\lambda) = P^{REA}(1+\lambda^R)$

Si la operación es a prima única:

$VPREC(\lambda) = \Pi(1+\lambda) = \Pi^{Rec}$

$VPREA(\lambda) = \Pi^{REA}(1+\lambda^R)$

En el supuesto que el recargo de seguridad del plan venga dado por el nivel de riesgo ϵ, es decir, $\lambda = g(\epsilon)$, podremos expresar VACT en función de ϵ pues:

$$VCT(\lambda) = VCT(g(\epsilon)) = VCT(\epsilon)$$

siendo $VCT(\epsilon) = VPREC(\epsilon) + VPREA(\epsilon)$
donde:

- $VPREC(\epsilon) = P_t(1+\lambda^\epsilon) = P_t^\epsilon$ es la primera prima pura del plan recargada con el recargo de seguridad λ^ϵ que sigue la ley de variación de primas.

- $VPREA(\epsilon) = P_t^{REA}(1+\lambda^R)$, es la primera prima pura de reaseguro recargada con el recargo de seguridad λ^ϵ que sigue la ley de variación de primas.

- Siendo $t = 1$ si existe aportación inicial independiente de la ley de variación de primas, o bien, $t = 0$ en caso contrario.

La incógnita a determinar en este caso es aquel nivel de riesgo ϵ que perteneciendo al conjunto de soluciones factibles minimice $VACT(\epsilon)$. Este nivel de riesgo lo simbolizaremos ϵ^*.

El conjunto de soluciones factibles vendrá dado por el el intervalo $[\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$ donde:

ϵ^{max} : nivel de riesgo al cual está sujeto el plan si exclusivamente cobra las primas puras, por tanto $g(\epsilon^{max}) = \lambda^{min} = 0$ debido a la relación inversa que existe entre λ y ϵ.

$\epsilon^{min} = 0$ por no asumir el reasegurador nigún riesgo. En este caso $g(\epsilon^{min}) = \lambda^{max}$

Por tanto el problema que nos planteamos puede formalizarse en este caso de la siguiente forma, se trata de buscar aquel nivel de riesgo ϵ^* que:

$$\text{Min} \quad VCT(\epsilon)$$

$$\text{sujeto a:} \quad \epsilon^{min} \leq \epsilon \leq \epsilon^{max} \qquad (B)$$

Tanto en un caso como en otro (problema (A) y problema (B)), la dificultad con la que nos encontramos para poderlos resolver es que no disponemos de una expresión analítica sencilla que nos permita conocer la función objetivo a minimizar VCT, lo cual nos obliga a obtener el recargo óptimo o el riesgo óptimo, calculando directamente VCT para cada recargo λ o riesgo ϵ perteneciente al conjunto de soluciones factibles.

En el caso que la variable a determinar sea *el recargo de seguridad óptimo* λ^*, sabemos que el conjunto de soluciones factibles vendrá dado dado por el intervalo continuo $[0, \lambda^{max}]$. El problema es que infinitos son los recargos del plan candidatos a óptimo, por ello, el proceso de búsqueda del recargo óptimo que utilizamos consistirá en particionar sucesivamente el intervalo de soluciones factibles hasta llegar a una aproximación del recargo óptimo, cuya precisión venga dada por la amplitud del último intervalo particionado. El proceso de búsqueda del recargo óptimo es el siguiente:

Consideramos el recargo de seguridad λ como una variable discreta. Para ello particionamos el intervalo de soluciones factibles $[0, \lambda_{max}]$ en un número de subintervalos dado t_1, siendo la amplitud de los mismos $A_1 = \frac{\lambda_{max}}{t_1}$, esto nos permite definir como campo de variación de la variable λ el siguiente conjunto discreto:

$$B_1 = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_{t_1}\}$$

$$\text{siendo} \quad \lambda_i = i\, A_1 \quad i = 0, \ldots, t_1$$

Como cada λ tiene asociado un determinado valor de $VCT(\lambda)$, podremos entonces obtener, comparando los valores de $VCT(\lambda) \quad \forall\lambda \in B_1$, qué recargo perteneciente al conjunto B_1 minimiza $VCT(\lambda)$. El recargo óptimo calculado lo simbolizaremos $\lambda_{1,*}$.

En el supuesto que $\lambda_{1,*}$ coincida con λ_{max} o con λ_{min}, ese recargo ya será el óptimo, debido al comportamiento monótono que presenta VCT con respecto al recargo y el proceso lo daremos por terminado. Si no es así, el recargo calculado nos permite reducir el conjunto de soluciones factibles, al intervalo abierto (λ_m, λ_M) donde:

$$\lambda_m = \lambda_{1,*} - A_1$$

$$\lambda_M = \lambda_{1,*} + A_1$$

De nuevo volvemos a particionar el conjunto de soluciones factibles (λ_m, λ_M), en un número dado de subintervalos t_2, siendo la amplitud de los mismos $A_2 = \frac{\lambda_M - \lambda_m}{t_2}$. El nuevo conjunto discreto asociado al nuevo intervalo de soluciones factibles es :

$$B_2 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_{t_2 - A2}\}$$

$$\text{siendo} \quad \lambda_i = \lambda_m + i\, A2 \quad i = 0, \ldots, t2$$

A través del mismo, determinamos por comparación el recargo óptimo $\lambda_{2,*}$ asociado al conjunto $B2$, el cual nos volverá a reducir el conjunto de soluciones factibles, siendo ahora éste el intervalo abierto (λ_m, λ_M) donde:

$$\lambda_m = \lambda_{2,*} - A_2$$

$\lambda_M = \lambda_{1,*} + A_2$

El proceso se repetirá tantas veces como precisión queramos dar al recargo óptimo, en general si repetimos el proceso n-veces la precisión del recargo $\lambda_{n,*}$ vendrá dada por la amplitud del último intervalo particionado A_n

Si la variable a determinar es *el nivel de riesgo óptimo* ϵ^*, y la modalidad de reaseguro es la del percentil, el conjunto de soluciones factibles $[\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$ podemos considerarlo directamente discreto, por existir en dicho intervalo un número finito de recargos asociados al posible abanico de riesgos ϵ, debido al caracter discreto de la variable aleatoria Pérdida del plan.

Por consiguiente, en este caso no tendrá sentido particionar el intervalo , obteniendo ϵ^* empiricamente comprobando todos los valores $VACT(\epsilon)$ asociados al intervalo $[\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$.

Sin embargo, si la modalidad de reaseguro es la de diferencia de siniestralidad y el margen de solvencia viene dado por las reservas de solvencia RS^{ϵ}, el conjunto de soluciones factibles $[\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$ vuelve a ser continuo, ya que a pesar de que la variable aleatoria pérdida del plan sea discreta y exista un determinado número de recargos de seguridad asociados a ese intervalo, en este caso cada valor de ϵ lleva asociado un valor distinto de VCT, aunque el recargo de seguridad para dos niveles de riesgo distintos sea el mismo, debido a que en el cálculo de la prima de reaseguro tenemos en cuenta el percentil de la variable pérdida del plan condionada. Por tanto, de nuevo tendremos que particionar el intervalo utilizando el mismo mecanismo explicado en el caso anterior.

A continuación expondremos un método alternativo de encontrar el óptimo, (λ_* o ϵ^*) basado en un proceso iterativo de comparación.

Razonaremos dicho proceso suponiendo que:

1. La variable a determinar es el nivel de riesgo del plan.

2. La variable a determinar es el recargo de seguridad del plan.

La variable a determinar es el nivel de riesgo del plan

Este método consiste en fijar un riesgo arbitrario ϵ^t, tal que $0 \leq \epsilon^t < \epsilon^{max}$, y determinar si beneficia o perjudica en términos de prima (VCT), aumentar el riesgo reasegurado de ϵ^t a ϵ^{t+1}, siendo $\epsilon^{t+1} > \epsilon^t$.

Este análisis de comparación, lo realizaremos a través de una función que simbolizaremos $K(\epsilon^t)$, y que vendrá definida por la siguiente expresión:

$$K(\epsilon^t) = -\frac{\Delta VPREA(\epsilon^t)}{\Delta VPREC(\epsilon^t)} \quad (I)$$

siendo:

$\Delta VPREA(\epsilon^t) = VPREA(\epsilon^{t+1}) - VPREA(\epsilon^t)$ y recoge la variación que experimenta la prima recargada de reaseguro, cuando aumentamos el riesgo a reasegurar de ϵ^t a ϵ^{t+1}. Tenemos que señalar que $\Delta VPREA(\epsilon^t) > 0$ puesto que $\epsilon^{t+1} > \epsilon^t$.

$\Delta VPREC(\epsilon^t) = VPREC(\epsilon^{t+1}) - VPREC(\epsilon^t)$ y recoge la variación que experimenta la prima recargada del plan, cuando aumentamos el riesgo a reasegurar de ϵ^t a ϵ^{t+1}. En este caso $\Delta VPREC(\epsilon^t) < 0$

En consecuencia, el aumento experimentado en la prima de reaseguro al incrementar el riesgo reasegurado de ϵ^t a ϵ^{t+1} lo expresaremos como una proporción $K(\epsilon^t)$ de la disminución que sufre la prima recargada. Por tanto, cuando el riesgo reasegurado pasa de ϵ^t a ϵ^{t+1}, por cada pts ahorrada en la prima recargada del plan, aumenta $K(\epsilon^t)$ pts la prima de reaseguro.

El valor de $K(\epsilon^t)$ nos permitirá deteminar si es preferible o no en términos de coste total, reasegurar el nivel de riesgo ϵ^{t+1}, dado el nivel de riesgo ϵ^t, debido a que podemos relacionar $K(\epsilon^t)$ con $\Delta VCT(\epsilon^t)$, a través de la siguiente expresión:

$$\Delta VCT(\epsilon^t) = \Delta VPREA(\epsilon^t) + \Delta VPREC(\epsilon^t) \quad \text{(II)}$$

si sustituimos (I) en (II):

$$\Delta VCT(\epsilon^t) = \Delta VPREC(\epsilon^t)(1 - K(\epsilon^t))$$

como $\Delta VPREC(\epsilon^t)$ es siempre negativo, entonces el signo de $\Delta VCT(\epsilon^t)$ dependerá exclusivamente del valor de $K(\epsilon^t)$, pudiéndose dar tres casos:

- Si $K(\epsilon^t) < 1$, entonces $\Delta VCT(\epsilon^t) < 0$ y por tanto $VCT(\epsilon^{t+1}) < VCT(\epsilon^t)$.

  Esto es debido a que el incremento producido en la prima de reaseguro, al aumentar el riesgo reasegurado de ϵ^t a ϵ^{t+1}, es más pequeño en términos absolutos, que la disminución producida en la prima recargada, por tanto al plan le interesará más reasegurar el nivel de riesgo ϵ^{t+1}, que el nivel de riesgo prefijado ϵ^t, ya que este último supone mayor coste total.

- Si $K(\epsilon^t) > 1$ entonces $\Delta VCT(\epsilon^t) > 0$ y por tanto $VCT(\epsilon^{t+1}) > VCT(\epsilon^t)$.

  En este caso, el incremento que se produce en la prima de reaseguro es más grande en valores absolutos, que la disminución producida en la prima recargada, en consecuencia no le interesa reasegurar al plan ϵ^{t+1}, ya que le supondría mayor coste total.

- Si $K(\epsilon^t) = 1$, entonces $\Delta VCT(\epsilon^t) = 0$ y por tanto $VCT(\epsilon^{t+1}) = VCT(\epsilon^t)$.

  El aumento de la prima de reaseguro queda totalmente compensado con la disminución producida en la prima pura recargada, siendo para el plan indiferente reasegurar ϵ^t que ϵ^{t+1}.

Está claro pues, que el riesgo óptimo ϵ^* dependerá del comportamiento que presente la función $K(\epsilon)$, $\forall\epsilon \in [\epsilon^{min},\epsilon^{max}]$. A continuación estudiaremos los cuatro supuestos de comportamiento que pueden darse en la función $K(\epsilon)$, con sus respectivas estrategias óptimas recargo-reaseguro, aplicando el proceso de comparación iterativamente:

1. Si $K(\epsilon) \leq 1 \quad \forall\epsilon \in [\epsilon^{min},\epsilon^{max}]$ la estrategia óptima para minimizar el coste total de la operación es considerar como riesgo óptimo a reasegurar ϵ^*, el mayor riesgo posible ϵ^{max}. El razonamiento es el siguiente, fijado un riesgo cualquiera ϵ^t perteneciente al intervalo discreto $[\epsilon^{min},\epsilon^{max})$, estudiaremos si es preferible

reasegurar ϵ^{t+1}. Para ello calculamos el valor de K asociado a dicho riesgo $K(\epsilon^t)$, pudiendo suceder dos cosas, que $K(\epsilon^t) = 1$, resultando indiferente reasegurar ϵ^t que ϵ^{t+1}, o bien que $K(\epsilon^t) < 1$ interesando al plan reasegurar ϵ^{t+1}. Si volvemos a repetir el proceso pero ahora con ϵ^{t+1}, para ver si es conveniente reasegurar ϵ^{t+2}, veríamos por el mismo motivo que si sería conveniente o a lo sumo indiferente reasegurar ϵ^{t+2}, según el valor de $K(\epsilon^{t+1})$ fuese menor o igual a uno.

Siguiendo esta lógica podemos concluir que siempre será mejor o por lo menos indiferente reasegurar, dado un riesgo cualquiera ϵ^t tal que $0 \leq \epsilon^t < \epsilon^{max}$, su siguiente ϵ^{t+1}; por tanto el riesgo óptimo vendrá dado por el mayor riesgo posible, es decir: $\epsilon^* = \epsilon^{max}$.

En este caso la política óptima recargo reaseguro que tendrá que llevar a cabo el plan para minimizar el coste total de la operación será no recargar la prima pura.

2. Si $K(\epsilon) \geq 1 \quad \forall \epsilon \in [\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$ la estrategia óptima para minimizar el coste total de la operación en este caso es considerar como riesgo óptimo a reasegurar ϵ^* el menor riesgo posible $\epsilon^{min} = 0$. La idea es la misma que en el caso anterior, fijado un riesgo cualquiera ϵ^t perteneciente al intervalo discreto $[\epsilon^{min}, \epsilon^{max})$, al ser $K(\epsilon^t) \geq 1$ no interesará al plan reasegurar ϵ^{t+1}, resultándole a lo sumo indiferente, reasegurar dicho riesgo si $K(\epsilon^t) = 1$.

   Si volvemos a repetir el proceso, pero ahora con ϵ^{t-1} para ver si es conveniente reasegurar ϵ^t, la conclusión volverá a ser la misma que en el caso anterior, no siéndolo si $K(\epsilon^t) > 1$ o bien puede ser indiferente si $K(\epsilon^t) = 1$.

   Siguiendo este razonamiento siempre será mejor o por lo menos indiferente reasegurar, dado un riesgo cualquiera ϵ^t tal que $0 \leq \epsilon^t < \epsilon^{max}$, éste ,que su siguiente ϵ^{t+1}; por tanto , el riesgo óptimo vendrá dado por el menor riesgo susceptible de ser reasegurado, es decir, $\epsilon^* = \epsilon^{min} = 0$.

   En este caso, la política óptima recargo reaseguro que tendrá que llevar a cabo el plan para minimizar el coste total de la operación será recargar la prima pura hasta cubrir totalmente el riesgo de insolvencia , coincidiendo el coste total de la operación con la prima financiera que resultase de aplicar el tipo de interés técnico del plan, siempre y cuando no se reparta el beneficio al reasegurador.

En consecuencia, aquellas operaciones que presenten valores de $K(\epsilon) \geq 1 \quad \forall \epsilon \in [\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$, y no se reparta beneficio al reasegurador, no dispondrán de una combinación de reaseguro que asegure totalmente la solvencia del plan y cuyo coste total sea inferior a la prima financiera. Por tanto, en este caso, el plan de pensiones no supondrá ahorro para el partícipe, con respecto a una entidad financiera que ofreciese el mismo interés técnico del plan.

3. Si $K(\epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon \in [\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$ $VCT(\epsilon)$ será independiente del nivel de riesgo del plan ϵ.

4. En el supuesto de que existan riesgos ϵ pertenecientes al intervalo $[\epsilon^{min}, \epsilon^{max}]$ tales que $K(\epsilon) < 1$ y $K(\epsilon) > 1$, es decir, que la función $K(\epsilon)$ presenta un corte con el eje $K = 1$, distinguiremos dos casos:

4.1 *La función $K(\epsilon)$ es creciente, cuando corta al eje $K = 1$.* Vamos a ver que en este caso sea cual sea el riesgo inicial considerado como semilla para iniciar el proceso iterativo, éste será convergente hacia un único valor de riesgo que denominaremos ϵ^s y que minimizará el coste total de la operación.

Dado un riesgo ϵ^t si $K(\epsilon^t) < 1$ la estrategia óptima es considerar riesgos mayores a éste hasta aquel nivel de riesgo $\epsilon^s \in (0, \epsilon^{max}]$ tal que $K(\epsilon^{s-1}) < 1$ y $K(\epsilon^s) \geq 1$, siendo los valores de K asociados a los riesgos que van desde ϵ^t hasta ϵ^{s-1} menores que uno, por ser creciente la función $K(\epsilon)$.

Sin embargo, si el riesgo inicial fijado $K(\epsilon^t) > 1$, iremos considerando riesgos menores a éste hasta aquel nivel de riesgo $\epsilon^s \in (0, \epsilon^{max}]$ tal que $K(\epsilon^s) \geq 1$ y $K(\epsilon^{s-1}) < 1$, siendo en este caso los valores K asociados a los riesgos que van desde ϵ^t hasta ϵ^{s-1} mayores que uno.

Por tanto, el proceso de tanteo converge hacia un único óptimo $\epsilon^s = \epsilon^*$ que satisface $K(\epsilon^s) \geq 1$ y $K(\epsilon^{s-1}) < 1$; ya que al ser $K(\epsilon^{s-1}) < 1$ interesará reasegurar ϵ^s, sin embargo, si ahora probamos si reasegurar el nivel de riesgo ϵ^{s+1} es más conveniente que reasegurar el riesgo ϵ^s, veremos que no, pues si $K(\epsilon^s) = 1$, sería indiferente reasegurar ϵ^{s+1} que ϵ^s, y si $K(\epsilon^s) > 1$, resultaría más costoso reasegurar el nivel de riesgo ϵ^{s+1}.

En este caso la política óptima recargo reaseguro que minimiza el coste total de la operación puede basarse si $\epsilon^* < \epsilon^{max}$ en una estrategia mixta recargo reaseguro, recargando la operación con un recargo de seguridad dado por λ^{ϵ^*} y reasegurando el riesgo de insolvencia ϵ^*.

4.2 *La función $K(\epsilon)$ es decreciente cuando corta al eje $K = 1$.* En este caso tendremos problemas de convergencia, ya que dependerá del valor de la semilla que introduzcamos. Así si el riesgo inicial fijado $\epsilon^t > 1$ la trayectoria óptima será ir eligiendo riesgos menores a éste, pero como es decreciente la función $K(\epsilon)$, un posible candidato a óptimo vendrá dado por ϵ^{min}.

Sin embargo, si el riesgo $\epsilon^t < 1$, se irán considerando riesgos mayores a éste hasta el nivel de riesgo ϵ^{max}. Por tanto tendremos dos candidatos a óptimos, ϵ^{min} y ϵ^{max}. El riesgo óptimo que tendremos que considerar, será aquel de los dos, que lleve asociado un coste total de la operación más pequeño. En consecuencia:

$$\epsilon^{min} = \epsilon^* \quad \text{si y sólo si} \quad VCT(\epsilon^{min}) < VCT(\epsilon^{max})$$

$$\epsilon^{max} = \epsilon^* \quad \text{si y sólo si} \quad VCT(\epsilon^{max}) < VCT(\epsilon^{min})$$

5. Si la función $K(\epsilon)$ presentase varios puntos de corte, con el eje $K = 1$, (que como ya veremos no será lo normal), tendríamos que analizar concretamente la función; de todas maneras aplicando la misma lógica, llegariamos a varios candidatos a óptimos, eligiendo como tal a aquel que minimizase el coste total de la operación.

La variable a determinar es el nivel de riesgo del plan

La idea es la misma que en el caso anterior, consiste en fijar en este caso un recargo arbitrario λ_t, tal que $0 \leq \lambda_t < \lambda_{max}$, y determinar si beneficia o perjudica en términos de prima (VCT), aumentar el recargo de λ_t a λ_{t+1}. Consideraremos que $\lambda_{t+1} > \lambda_t$. La comparación la realizaremos a través de la función $K(\lambda_t)$, viniendo dada por la siguiente expresión:

$$K(\lambda_t) = -\frac{\Delta VPREA(\lambda_t)}{\Delta VPREC(\lambda_t)} \quad (I)$$

siendo:

$\Delta VPREA(\lambda_t) = VPREA(\lambda_{t+1}) - VPREA(\lambda_t)$ y recoge la variación que experimenta la prima recargada de reaseguro, cuando aumentamos el recargo del plan de λ_t a λ_{t+1}. En este caso $\Delta VPREA(\epsilon_t) < 0$.

$\Delta VPREC(\lambda_t) = VPREC(\lambda_{t+1}) - VPREC(\lambda_t)$ y recoge la variación que experimenta la prima recargada del plan, cuando aumentamos el recargo del plan de λ_t a λ_{t+1}. En este caso $\Delta VPREC(\lambda_t) > 0$

Cuando el recargo del plan pasa de λ_t a λ_{t+1}, por cada peseta ahorrada en la prima reaseguro ,incrementa $K(\lambda_t)$ ptas la prima del plan. Observemos que el concepto de la función $K(\lambda_t)$, difiere en su interpretación sensiblemente de $K(\epsilon^t)$

Teniendo presente que podemos expresar :

$$\Delta VCT(\lambda_t) = \Delta VPREC(\lambda_t)(1 - K(\lambda_t))$$

y que $\Delta VPREC(\lambda_t)$ es siempre positivo, vemos que el signo de $\Delta VCT(\lambda_t)$ dependerá exclusivamente del valor de $K(\lambda_t)$, pudiéndose dar tres casos:

- Si $K(\lambda_t) < 1$, entonces $\Delta VCT(\lambda_t) > 0$ y por tanto $VCT(\lambda_{t+1}) > VCT(\lambda_t)$.

  En este caso no interesera recargar λ_{t+1}. Recordemos que cuando $K(\epsilon^t) < 1$ interesaba fijar el nivel de riesgo ϵ^{t+1}. En ambos casos se elige aquella opción que suponga un mayor nivel de reaseguro.

- Si $K(\lambda_t) > 1$, entonces $\Delta VCT(\lambda_t) < 0$ y por tanto $VCT(\lambda_{t+1}) < VCT(\lambda_t)$.

  Interesará recargar la operación con el recargo λ_{t+1}.

  Cuando $K(\epsilon^t) < 1$ no interesaba fijar el nivel de riesgo ϵ^{t+1}. En ambos casos se elige aquella opción que suponga un menor nivel de reaseguro.

- Si $K(\lambda_t) = 1$, entonces $\Delta VCT(\lambda_t) = 0$ y por tanto $VCT(\lambda_{t+1}) = VCT(\lambda_t)$.

  La disminución de la prima de reaseguro queda totalmente compensado por el aumento producido en la prima pura recargada, siendo para el plan indiferente recargar λ_t que λ_{t+1}, al igual que sucedía cuando $K(\epsilon^t) = 1$.

Por tanto, el comportamiento de $K(\lambda_t)$ con respecto a la estategia óptima es el mismo que argumentamos con $K(\epsilon^t)$.

Como en las operaciones que estudiaremos $K(\lambda_t)$ será independiente de λ, sólo se podrán dar tres casos:

1. $K(\lambda_t) < 1$, en este caso la estrategia óptima es no recargar la operación.

2. $K(\lambda_t) > 1$, en este caso cuanto mayor sea el recargo de seguridad del plan menor es el valor actual del coste total de la operación $VCT(\lambda_t)$.

3. $K(\lambda_t) = 1$ en este caso el recargo de seguridad del plan es independiente de $VCT(\lambda_t)$.

Nuestro objetivo será determinar la expresión analítica de la función K para la operación que estemos estudiando.

Las ventajas que presenta este método son:

1. El conocimiento de la expresión analítica de la función K nos permite determinar o por lo menos dar información sobre la estrategia óptima a priori, sin necesidad de calcular el coste total VCT empíricamente para todos los riesgo o recargos susceptibles de solución.

2. Conocer la expresión analítica de la función K, también nos permite hacer un análisis sistematizado entorno a qué variables influyen en la determinación de la estrategia óptima, así como analizar la sensibilidad de cada una de ellas en la obtención de dicha estrategia.

La desventaja que presenta este método, es que no siempre nos es posible encontrar una expresión operativa de la función K. En la modalidad de reaseguro del percentil habrá operaciones en las que no podamos encontrar expresiones que nos permitan calcular $VPREA(\epsilon)$ y/o $VPREC(\epsilon)$. Esta circunstancia se nos dará en aquellas operaciones que por sus características, no podamos conocer a priori la ordenación de menor a mayor de las realizaciones de la variable aleatoria L_i, ya que los valores de la cola de dicha variable, son los que nos permiten determinar $VPREA(\epsilon)$ y $VPREC(\epsilon)$.

Este problema nunca aparecerá en las operaciones de renta, en las cuales siempre conoceremos a priori L_i^* , sin embargo no sucederá lo mismo en aquellas operaciones en las que intervenga el seguro, donde el conocimiento a priori de la variable aleatoria L_i^* dependerá de la variación que presente las prestaciones.

En la modalidad de diferencia de siniestralidad, la falta de expresiones operativas que nos permitan obtener $VPREA(\lambda)$, hará que sólo podamos determinar la función K en las operaciones a prima única, cuando el margen de solvencia sea una proporción de la provisión matemática y el reaseguro sea del tipo B, o bien sea del tipo A, pero en este último caso cuando se cumplan una serie de condiciones.