Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos

Norma Violeta Rubio Goycochea

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS
I DE LA MATEMÀTICA

BIENIO 2006-2008

COMPETENCIA DEL PROFESORADO EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

Tesis doctoral para optar al título de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada por

NORMA VIOLETA RUBIO GOYCOCHEA

Dirigida por

Dr. VICENÇ FONT MOLL

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, Septiembre de 2012

COMPETENCIA DEL PROFESORADO EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

Tesis Doctoral

MEMORIA realizada bajo la dirección del
Dr. D. Vicenç Font Moll, que presenta
D. **Norma Violeta Rubio Goycochea**
para optar al grado de Doctor

Fdo: Norma Violeta Rubio Goycochea

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo hubiese sido imposible de realizar sin la participación de personas e instituciones que han facilitado su culminación. A través de este mensaje, son a ellas a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo y confianza que me han mostrado durante estos años.

De manera muy especial y sincera mi agradecimiento al doctor Vicenç Font Moll. En primer lugar, por haber aceptado dirigir esta tesis doctoral. Su gran apoyo y gran capacidad para guiar el presente trabajo son imponderables, no solo en el desarrollo de mi tesis sino en mi formación como investigadora. Estaba convencida que la teoría se podía llevar a la práctica y lo hicimos posible. Su dedicación al explicar la teoría, de la cual es uno de los autores y que tomo como marco teórico en esta tesis, y su paciencia y respuesta ante cualquier pregunta que le formulase, hizo que crezca mi admiración y respeto hacia su persona. Le agradezco su apoyo incondicional al dedicarme gran parte de su valioso tiempo durante mis estancias en Barcelona y durante el desarrollo de la tesis en el Perú. Así también el haberme facilitado en todo momento los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de la presente tesis. Agradecerle, además, por haberme invitado a formar parte de los grupos de investigación GREAV y GRADEM y del proyecto EDU2009-08120/EDUC, proyecto en el que se ha realizado esta tesis y por el cual se hizo posible mi participación en congresos relevantes en Educación Matemática como el PME34 y el CERME 7. Gracias Vicenç, el que haya culminado mi trabajo, en gran parte te lo debo a ti y espero con sinceridad que los lazos académicos y de amistad perduren.

También expresar mi gratitud a dos compañeros de despacho de mi director de tesis en la Universitat de Barcelona, quienes no solo fueron compañeros de trabajo sino que se convirtieron en grandes amigos; sin su apoyo, quizás hubiese sido otra la historia. Me refiero a los profesores Montanuy y Codina, mis queridos Manel y Roser. A ellos, los llevaré por siempre en mi corazón. Entendieron lo que supone, emocionalmente hablando, estar alejada de la familia durante mis estancias en Barcelona. Me ofrecieron el soporte moral, afectivo y académico al brindarme su inestimable amistad y todas las facilidades para cumplir con mis tareas propias de la tesis. Me hicieron sentir parte de ellos; es decir, como si estuviera en casa. A ellos, les estaré eternamente agradecida por su acogida. Asimismo, quisiera agregar mi profundo agradecimiento a Roser no solo por darse el tiempo para mostrarme la belleza de Barcelona, sino además por haber revisado y corregido esta memoria, dando con ello muestras de su calidad de amiga, excelente docente y fraterna compañera de despacho. Mis queridos Manel y Roser, moltes gràcies.

Quiero agradecer también a dos de mis Jefes del Departamento Académico de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú, durante cuyas gestiones desarrollé mi trabajo. Me refiero a la doctora Nadia Gamboa y a la doctora Elizabeth Doig. A ellas les agradezco la confianza depositada en mi persona al gestionar y avalar las licencias que permitieron mis estadías en la UB.

Al doctor Joaquim Giménez, al doctor Juan. D. Godino y a la doctora María Trigueros, agradecerles los aportes y sugerencias que hicieron en diversas oportunidades, que fueron valiosos para la mejora del presente trabajo.

En Barcelona, agradecer a la doctora Carme Burgués por sus continuos consejos; a mis compañeras de piso, Nùria, Mònica y Magaly por haberme acogido durante mis cuatro últimas estancias; a mis compañeras de doctorado Yuly y Sabrina por sus comentarios y envío de artículos de interés y finalmente, pero no por ello menos importantes, a mis amigos Trini, Teresa, Rossi y Pere, quienes me mostraron parte de la cultura catalana.

En Perú, agradecer a mi familia, mi madre y hermanas, quienes a través del correo electrónico y el chat los fines de semana, estuvieron más cerca de mí cuando me encontraba en Barcelona, brindándome su apoyo y energías positivas, como suelen decir; a los amigos de la PUCP, muy especialmente a la profesora Rosa Cardoso quien fue quien me contactó con mi director de tesis y a los profesores Mariano González y Olga Chamorro, quienes fueron mis avales de las licencias otorgadas por la PUCP.

Finalmente, agradecer a la Pontificia Universidad Católica del Perú el otorgarme las licencias por estudios doctorales y ayudas económicas que posibilitaron mis estancias en Barcelona, y a la Universitat de Barcelona, en particular a la Jefa del Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica la doctora Paloma García, por las facilidades que me dio para finalizar la presente memoria.

Dedicada a la memoria de

Mi padre

y

Samuel y Víctor

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

PROBLEMA, RELEVANCIA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Resumen

En el apartado 1 se presentan el origen y las principales características del problema de investigación y se justifica su relevancia. En el apartado 2 se comenta la actual tendencia a organizar los currículos de matemáticas en la enseñanza secundaria por competencias, inspirados en las competencias del informe PISA 2003. En el apartado 3 se presenta un resumen del informe PISA 2003, mientras que en el 4 se comentan algunos aspectos problemáticos de dichas pruebas (relación entre procesos y competencias, solapamiento de competencias y dificultad para la evaluación analítica y global de competencias). En el apartado 5 se presenta el problema, las preguntas, el marco teórico y los objetivos de investigación. Por último, en el apartado 6 se comenta la estructura de la memoria de la investigación.

1. INTRODUCCIÓN

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituyen un campo de investigación científica y tecnológica que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores.

En el caso del sistema educativo peruano son bien conocidas las graves carencias de los actuales planes de formación de profesores de educación inicial y primaria en matemáticas y en su didáctica y en historia y contextos de aplicación de las matemáticas. Esta situación se explica en parte por el escaso número de este tipo de créditos exigidos en la formación inicial a los futuros profesores.

El Proyecto Educativo Nacional del Perú al 2021 abre nuevas posibilidades de mejorar la formación, en matemáticas y en su didáctica, de los futuros profesores de inicial y primaria.

Uno de los objetivos que se propone el Proyecto Educativo Nacional al 2021 (Consejo Nacional de Educación, 2006), para mejorar la educación del Perú, es conseguir un sistema integral de formación docente acorde a los avances pedagógicos y científicos, las prioridades educativas y la realidad del país y propiciar equipos docentes éticos y competentes que sean valorados por la sociedad y sus estudiantes. Para conseguir este objetivo se propone mejorar y reestructurar los sistemas de formación inicial y continua de los profesionales de la educación. Se proponen políticas dirigidas a fomentar cambios fundamentales en los sistemas de formación docente inicial y en ejercicio, así como de los diversos profesionales que ejercen labores en el sector, generando estándares para la calificación de la buena docencia y la acreditación de centros de formación magisterial e instancias de formación en servicio. Para ello, es necesario generar estándares claros sobre la buena docencia.

Al ser formadora de profesores siempre he estado interesada por el tipo de conocimiento que necesitan los profesores de formación básica regular (inicial, primaria y secundaria) para enseñar matemáticas y estoy de acuerdo con el objetivo planteado en el Proyecto Educativo Nacional al 2021 con relación a la formación inicial de los profesionales de la educación del Perú. Por esta razón, me interesa como tema de investigación la determinación y el desarrollo de las competencias que necesitan los futuros profesores para enseñar matemáticas. Por otra parte, soy de la opinión que en un país con tantas necesidades como es el Perú, la investigación en didáctica de las matemáticas, además de contribuir al desarrollo teórico de esta área de conocimiento, debe aportar conocimiento que sirva a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El problema de investigación que se presenta en este proyecto nace, pues, de mi interés por la mejora de la formación en matemáticas y su didáctica de los profesores de matemáticas. Se trata de un proyecto que pretende aportar conocimiento sobre cómo desarrollar la competencia profesional de los profesores que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas de sus alumnos. Se trata de una competencia que hay que englobar en la competencia profesional que permite a los profesores realizar el análisis didáctico de secuencias de enseñanza-aprendizaje de matemáticas que les permitan su descripción, explicación, valoración y su posible mejora.

En los últimos 15 años ha habido un incremento notable de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas como se refleja en las revisiones incluidas en los “handbooks” de investigación en educación matemática (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick & Laborde, 1996; 2003; English, Bartolini-Busi, Jones, Lesh & Tirosh, 2002; Llinares & Krainer, 2006; Ponte & Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007; Franke, Kazemi & Battey, 2007; Philipp, 2007; Sowder, 2007), y la publicación de revistas específicas como *Journal of Mathematics Teacher Education*. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Diversos autores han dado respuestas diferentes: "conocimiento pedagógico" (Moore, 1974), "conocimiento pedagógico del contenido" (Shulman, 1986) y "conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Thames, Sleep, Bass & Ball, 2008), entre otras.

También se han hecho esfuerzos en España para la recopilación y síntesis de esas investigaciones, que han conducido a la publicación de colecciones y monografías sobre los conocimientos de Didáctica de las Matemáticas (Giménez, Llinares & Sánchez, 1996). En este sentido debemos citar, además, la colección de 34 monografías editadas por Rico, Fortuny y Puig (1988-1991); los manuales para la formación matemática y didáctica de los profesores de educación primaria — Castro (Ed.), 2001; Chamorro, 2003; Godino (Ed.), 2004a y b — y la nueva colección "Formación del Profesorado. Educación Secundaria" coeditada por la Editorial Graó y el Ministerio de Educación, coordinada por J. M. Goñi.

Desde una perspectiva de investigación específica sobre formación de profesores destacan en España los grupos de investigación promovidos y coordinados por los doctores S. Llinares, Universidad de Alicante (Llinares, 1999 y 2002) y M. V. Sánchez, Universidad de Sevilla (Sánchez & Llinares, 2002; 2003; García, Sánchez, Escudero & Llinares, 2006; García, Sánchez & Escudero, 2007), así como los de J. Carrillo y Contreras, Universidad de Huelva (Carrillo, Climent, Contreras & Munoz-Catalán, 2007) y L. Blanco, Universidad de Extremadura (Blanco, 2001; 2003). Esta línea de investigación en formación de profesores de matemáticas está siendo potenciada por el Grupo de Investigación "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Otra línea importante es la del GRADEM (Grup de Recerca sobre Anàlisi Didàctica en Educació Matemàtica) coordinado por el doctor Vicenç Font que pretende desarrollar la competencia de análisis didáctico utilizando las herramientas teóricas que ofrece el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Font & Godino, 2006; Font, Godino & Contreras, 2008; Font, Planas & Godino, 2010; Font, 2011a; Font, 2011b; Vanegas &

Giménez, 2011; Font & Godino, 2011; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhelmi, 2006 y 2008; Ramos & Font, 2008).

Los resultados de toda esta investigación, si bien difieren en muchos aspectos, en nuestra opinión coinciden en el siguiente: una de las competencias profesionales que debe tener un profesor es aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje, pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico.

De acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Font et al., 2010) consideramos que el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos es uno de los componentes de la competencia profesional que permite la realización de análisis didácticos que, además, está relacionado con la tendencia actual, presente en muchos países, de diseño de currículos escolares en términos de competencias.

Los currículos por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores desarrollen la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas de sus alumnos. Dada la estrecha relación que hay entre "procesos matemáticos" y "competencias matemáticas" consideramos que fomentar la competencia del profesorado en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos es un paso necesario para desarrollar la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas.

Todas estas razones nos llevan a considerar que el desarrollo de la competencia profesional en el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos y su relación con el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas es un tema que merece ser investigado.

2. TENDENCIA ACTUAL A ORGANIZAR LOS CURRÍCULOS DE MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA POR COMPETENCIAS

La tendencia actual a organizar los currículos de matemáticas en la enseñanza secundaria por competencias hay que pensarla como una consecuencia más del "giro procesal" en el diseño de currículos de matemáticas (y también de otras materias) que ha tenido lugar a nivel internacional en las últimas décadas. Dicha tendencia está relacionada con la importancia que se ha dado recientemente a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática (Guzmán 2007; Font, 2008). Ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos.

Actualmente se considera que las matemáticas son una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello, se concede una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en especial a los megaprocesos "Resolución de Problemas" y "Modelización".

Este giro procesal ha significado pasar de concebir los currículos de matemáticas en términos de objetivos de aprendizaje (sobre todo de conceptos) a pensar en currículos cuya finalidad es el aprendizaje de procesos (antes) y de competencias (ahora).

Muchos de los currículos por competencias que se están proponiendo actualmente en diferentes países están inspirados en las pruebas PISA 2003. En el momento de iniciar la investigación que se describe a continuación, el Ministerio de Educación del Perú estaba trabajando en una propuesta de currículo de competencias que difería poco de las competencias PISA 2003, aunque todavía no teníamos el documento final. Por otra parte, el currículo de la enseñanza secundaria de la comunidad autónoma de Catalunya (España) tenía vigente un currículo inspirado en las competencias PISA 2003. Por dicho motivo optamos por tomar como referencia para nuestra investigación las competencias PISA 2003 ya que estas eran una base común a los dos currículos que se han tenido en cuenta en esta investigación.

3. COMPETENCIAS PISA 2003

En el año 2005 el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) editó una publicación que trataba de difundir la totalidad de las preguntas de Matemáticas y de Solución de problemas que la OCDE había hecho públicas de entre las utilizadas en las pruebas de PISA 2003. Así mismo, en esta publicación se resumen los marcos teóricos de Matemáticas, materia principal de la evaluación de 2003 y se indican, junto a cada pregunta, los porcentajes de acierto alcanzados por los alumnos españoles en comparación con los del conjunto de países de la OCDE (INECSE, 2005). Utilizaremos este documento como principal fuente de información sobre las pruebas PISA 2003.

El marco conceptual de matemáticas del proyecto OCDE/PISA provee la base y la descripción de una evaluación que establece en qué medida los estudiantes de 15 años están preparados para utilizar las matemáticas, aprendidas durante su escolaridad, de una manera correcta al enfrentarse a problemas del mundo real. El área de conocimiento evaluado se describe a través de tres elementos:

- Las *situaciones o contextos* en que se ubican los problemas, las cuales pueden ser personales, educativas o laborales, públicas y científicas.
- El *contenido matemático* que usan para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas* principales (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre).
- Las *competencias*, para resolver los problemas, que se activan para relacionar el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas. Se distinguen ocho competencias: Pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y; emplear soportes y herramientas.

Tomado de Marcos teóricos de PISA 2003 (2004, pp.33) Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

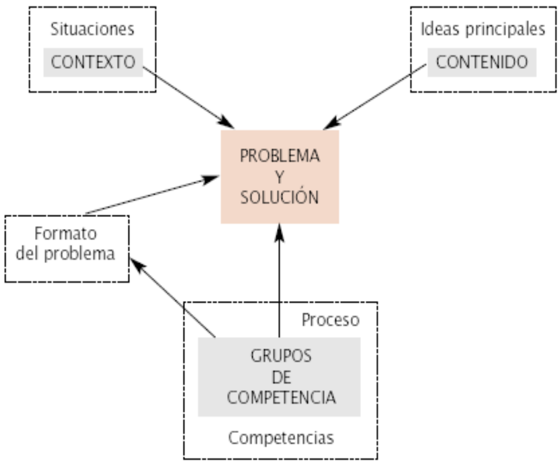


Figura 1.1 Elementos del área de conocimiento de matemáticas

Se definen *competencias matemáticas* como los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas (INECSE[1], 2004, p.34) y se distinguen tres *grupos de competencias*[2]:

- Reproducción: Se consideran en este grupo, las competencias que se utilizan más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas usuales, reconocimiento de equivalentes, empleo de propiedades y objetos matemáticos familiares, puesta en práctica de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de

[1] INECSE es el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo que editó en 2005 una publicación que trataba de difundir la totalidad de las preguntas de matemáticas y de solución de problemas que la OECD había hecho públicas de entre las utilizadas en las pruebas de PISA 2003.

[2] Estos grupos son llamados niveles de complejidad en INECSE (2005, pp. 22) cuando describen los criterios de evaluación.

algoritmos habituales, la aplicación de expresiones con símbolos y fórmulas instituidas y realización de cálculos.

- Conexión: Se consideran en este grupo las competencias que se apoyan sobre las del grupo de *reproducción*, llevando a situaciones de solución de problemas que ya no son de rutina solamente, sino que incluyen escenarios familiares o cercanos a estos.
- Reflexión: Las competencias de este grupo toman en cuenta un elemento de reflexión por parte del alumno en los procesos necesarios o utilizados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en contextos de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» o poco comunes que los del grupo de *conexión.*

En dicho informe se consideran las siguientes competencias:

- *Pensar y razonar*. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas … hay?”, “¿Cómo encontrar …?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- *Argumentación.* Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos.
- *Comunicación*. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
- *Construcción de modelos*. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.

- *Formulación y resolución de problemas*. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
- *Representación.* Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
- *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.* Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- *Empleo de soportes y herramientas.* Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TIC) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

4. ALGUNOS ASPECTOS PROBLEMÁTICOS DE LAS PRUEBAS PISA 2003

No pretendemos desarrollar aquí el análisis en profundidad de la ambigüedad del constructo "competencia", aspecto ya señalado por casi todos los autores que reflexionan sobre dicho constructo y que será analizado con detalle en el capítulo 4. Nos limitaremos a comentar ahora algunos aspectos problemáticos de las competencias contempladas en el informe PISA 2003, el primero de los cuales es la relación entre los "procesos" y las "competencias". Sin entrar a tratar las diferencias entre estos dos constructos, sólo queremos resaltar que, en los documentos en los cuales se explica la metodología de evaluación de las competencias evaluadas en el informe PISA 2003, se presentan como estrechamente relacionados e incluso, en algunos casos, se utilizan como términos análogos. Para mostrar un solo ejemplo, en la publicación del Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo se dice:

> El estudio PISA considera que los logros de los estudiantes en matemáticas se pueden expresar mediante este conjunto de competencias, ya que describen los

procesos que se requieren para un domino matemático general. (INECSE, 2005, p. 17).

El problema de la existencia de un “territorio compartido” entre los constructos “proceso” y “competencia” también se presenta con otros términos que se utilizan normalmente para describir las matemáticas realizadas por el sujeto (por ejemplo, práctica matemática o actividad matemática).

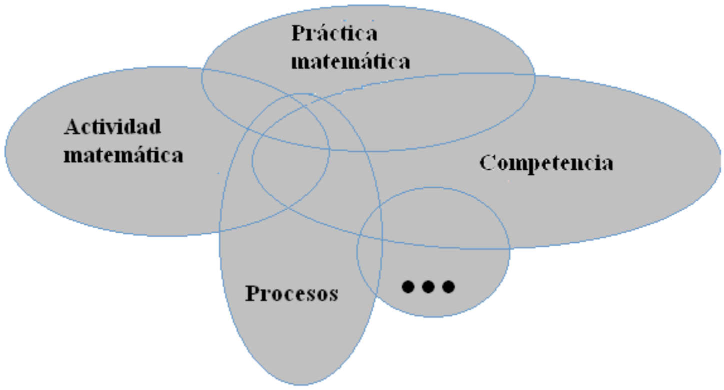


Figura 1.2. Términos matemáticos relacionados con el término competencia

El problema se amplía si se tiene en cuenta que el constructo “competencia” también tiene un territorio compartido con términos de tipo pedagógico (por ejemplo, objetivos o capacidades).

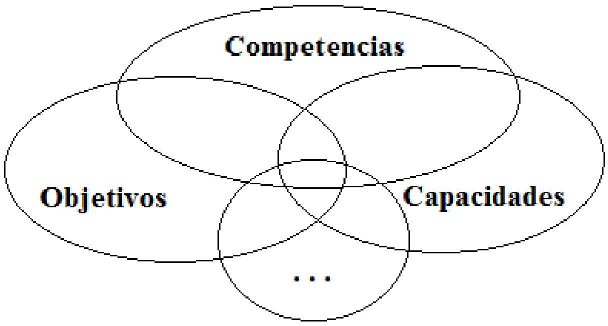


Figura 1.3. Términos pedagógicos relacionados con el término competencia

(…) en PISA 2003 se incide en la *competencia matemática, definida como la capacidad* de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria. Además, como nuevo elemento del proyecto PISA, se ha añadido la evaluación de la *capacidad de resolución de problemas, definida como la competencia* de los estudiantes a la hora de utilizar procesos cognitivos para resolver problemas interdisciplinarios sin una solución obvia. (INECSE, 2004, p. 14)

Otro aspecto que resulta problemático es el de la superposición de las competencias (casi todas tienen un “territorio en común”) y el hecho de que hay dos que, más que competencias, serían megacompetencias, nos referimos a la resolución de problemas y a la modelización.

También presenta dificultades el tipo de evaluación de las competencias que se hace en las pruebas PISA 2003. Utilizando la distinción entre evaluación sumativa y formativa, podemos decir que el informe PISA pone el énfasis en la primera. El proceso de evaluación de competencias es el siguiente: (1) dada una tarea, lo que se hace es determinar un nivel global de complejidad de la competencia en una escala de 1 a 3 (reproducción, conexión y reflexión) en función de la respuesta de un sujeto ideal o de un “experto”, y (2) dada una respuesta de un alumno a esta tarea, se le asigna una puntuación, de manera que, en función de la puntuación global obtenida en el conjunto de las tareas que se le propusieron resolver, permite situar al alumno en una escala de rendimiento (o nivel de de competencia) de 1 a 6 (INECSE, 2004).

Lo que no se explica en el informe PISA 2003 es cómo un profesor puede realizar una evaluación formativa de las competencias del alumno a partir tanto del análisis de la tarea como de la producción del alumno. No se dice cómo evaluar las competencias, por separado y/o globalmente, a fin y efecto de poder producir una retroalimentación al alumno y poder incidir en su proceso de aprendizaje.

La opción que toman los diseñadores de las pruebas PISA 2003 por este tipo de evaluación sumativa es lógica si se tiene en cuenta cuál es el objetivo de dichas pruebas. Ahora bien, el hecho es que el profesor que tiene que desarrollar un currículo por competencias no puede limitarse solo a este tipo de evaluación sumativa, necesita algún tipo de evaluación formativa de competencias.

En nuestra opinión, una evaluación formativa de competencias necesita poder realizar tanto una evaluación por separado de cada competencia, lo que aquí llamaremos una evaluación analítica de competencias, como una evaluación global de competencias. Al respecto hay que resaltar que las pruebas PISA 2003 no solo renuncian a la evaluación de competencias por separado por el tipo de objetivo que se plantean, sino que también lo hacen porque consideran que este tipo de evaluación por separado es artificial e incluso innecesaria:

> La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el

> intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área (INECSE, 2005, p. 40).

Si bien estamos de acuerdo con el informe PISA 2003, que no tiene sentido una evaluación de una sola competencia y que es necesario la evaluación global de la competencia matemática del alumno, consideramos que en el caso de una evaluación de tipo formativo que pretenda producir una retroalimentación al alumno y poder incidir en su proceso de aprendizaje, es necesario, además de la evaluación global de la competencias del alumno, una evaluación analítica de competencias que puede orientar con más precisión la retroalimentación al alumno. Dicho de otra manera, no tiene sentido evaluar sólo la competencia de argumentación, pero sí conviene saber que un alumno tiene menos desarrollada esta competencia que otra para guiar su aprendizaje.

5. PROBLEMA, PREGUNTAS, MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se presenta el problema, las preguntas, el marco teórico y los objetivos de investigación.

5.1. Primera formulación del problema de investigación

Las competencias PISA 2003, están inspirando currículos por competencias. Dicho tipo de currículo conlleva el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas de sus alumnos, señaladas en el currículo.

Nuestras primeras preguntas fueron las siguientes ¿Son competentes los profesores en la evaluación de las competencias del informe PISA 2003 con las herramientas teóricas que propone dicho informe? ¿Cuáles son los factores que inciden o condicionan esta competencia de los profesores? ¿Cómo se podría desarrollar dicha competencia? Estas preguntas nos llevaron a los siguientes objetivos:

1) Determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos.
2) Determinar algunos factores que están relacionados con el desarrollo de dicha competencia profesional.
3) Diseñar e implementar ciclos formativos que desarrollen dicha

competencia profesional.

Nos planteamos, por tanto, una investigación que pretende aportar nuevos conocimientos y propuestas de instrucción que sean útiles para el desarrollo de competencias profesionales de profesores de matemáticas. La investigación, por una parte es de tipo descriptivo, ya que se trata de observar un determinado fenómeno: el nivel de competencia de los profesores para evaluar las competencias del informe PISA 2003 con los constructos que propone dicho informe y, por otra parte, de tipo explicativo ya que buscamos determinados aspectos que pueden explicar este nivel de competencia profesional.

Para evaluar competencias matemáticas en los alumnos hay que considerar dos variables que están relacionadas. Por una parte, es necesario que el profesorado tenga competencia matemática y, por otra, tiene que tener la competencia profesional que le permita evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos.

Nuestra primera hipótesis es que nos podíamos encontrar con profesores que no tuviesen la competencia matemática necesaria para resolver los problemas propuestos. Nuestra segunda hipótesis era que, incluso para un profesor en ejercicio que tiene competencia matemática, no es fácil realizar la evaluación de competencias solo manejando la información que se presenta en las pruebas PISA 2003 (y por extensión en los currículos por competencias que se inspiran en ellas), es decir utilizando los constructos "niveles de complejidad" y la lista de las "competencias y subcompetencias" del informe PISA 2003.

5.2. Marco teórico

Entre las diferentes aproximaciones teóricas que se han interesado por determinar cuál es el conocimiento matemático-didáctico que necesita el profesorado para enseñar matemáticas, se han tenido en cuenta, como un marco teórico general en esta investigación, las siguientes: "conocimiento pedagógico" (Moore, 1974), "conocimiento pedagógico del contenido" (Shulman, 1986) y "conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Thames, Sleep, Bass & Ball, 2008).

Tal como se ha dicho, estos marcos teóricos coinciden al considerar como una de las competencias profesionales que debe tener un maestro aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje, pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas que necesitan los maestros para realizar este tipo de análisis didáctico. Ante esta situación, en esta investigación se ha optado por considerar los niveles de análisis y las herramientas propuestas en el Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). Por este motivo, como marco teórico más específico, se ha tenido en cuenta el EOS, en particular sus herramientas de análisis didáctico.

En diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Font & Godino, 2006; Font, Godino & Contreras, 2008; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhemi, 2006) se han propuesto cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio, cada uno de ellos con sus respectivas herramientas:

1) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

2) Análisis de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

4) Identificación del sistema de normas y metanormas.

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el Área de Didáctica de la Matemática. Este tipo de análisis didáctico tiene por objetivo realizar un análisis completo de los procesos de enseñanza-aprendizaje que permita describir, explicar y valorar dichos procesos. Para ello, es necesario desarrollar y aplicar, por una parte, herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para comprender y responder a la pregunta "¿qué ha ocurrido aquí y por qué?". Por otra parte, es necesario desarrollar y aplicar criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora.

5.3. Reformulación de las preguntas de investigación en el marco del EOS

Hemos partido de la hipótesis de que, tanto la competencia matemática, como la competencia en el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos son dos componentes de un "saber de fondo" que permite a los profesores la evaluación y el desarrollo de la competencia matemática de sus alumnos. Y que, además, dicho saber de fondo se nutre de una reflexión que va más allá de los estudios del grado de matemáticas o de la experiencia docente. Nos referimos a una reflexión profunda sobre la propia práctica profesional o bien a la reflexión desencadenada, por ejemplo, por unos estudios de máster sobre Didáctica de la Matemáticas.

A partir de esta hipótesis reelaboramos la primera formulación de las preguntas dentro del marco teórico del EOS de la siguiente manera:

1) ¿Cuáles son las limitaciones que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003 para realizar la evaluación analítica y global de las competencias consideradas en dicho proyecto?
2) ¿Es posible desarrollar una técnica de evaluación analítica, a posterori y global de competencias PISA 2003, basada en la técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas (APOPM) que propone el EOS?
3) ¿Cuál es el nivel de competencia que manifiestan los profesores en la evaluación analítica y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos, usando los constructos de PISA?
4) ¿Cómo diseñar e implementar ciclos formativos que desarrollen primero el APOPM y después la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas?

5.4. Objetivos de la investigación

A partir de las preguntas de la sección anterior se formularon los siguientes objetivos:

Objetivo 1: Determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003; mostrar el tipo de evaluación de competencias que se propone en dicho informe y, también, mostrar su posición contraria a la realización de una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas.

Objetivo 2: Desarrollar el marco teórico EOS mediante una tipología de procesos que permita hacer operativo el nivel de análisis de procesos propuesto en dicho enfoque.

Este objetivo se concretó en los siguientes objetivos específicos:

2.1 Revisar las diversas investigaciones sobre procesos realizadas en el marco del EOS.

2.2 Desarrollar la tipología de procesos propuesta en el EOS: 1) procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales, 2) otros procesos y 3) megaprocesos.

Objetivo 3: Desarrollar una propuesta de evaluación analítica, a posteriori y global de competencias PISA 2003 basada en la técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas que propone el Enfoque Ontosemiótico.

Este objetivo se concretó en los siguientes objetivos específicos:

3.1 Realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos de la solución de un estudiante a un problema PISA específico.
3.2 Realizar la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas de un estudiante, a partir del análisis realizado en el apartado anterior.

Objetivo 4: Determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos.

Para la consecución de este objetivo se diseñó un taller piloto con profesores de secundaria del Perú que puso de manifiesto que se debían considerar tipologías diferentes de profesores teniendo en cuenta los siguientes aspectos: competencia matemática, experiencia docente y Formación en Didáctica de las Matemáticas a nivel de postgrado (máster, magister o similar); lo cual nos llevó a plantear los siguientes objetivos específicos:

4.1 Determinar el nivel de competencia que manifiestan futuros profesores de España − con mucha competencia matemática, con nula experiencia docente y sin estudios de postgrado en Didáctica de las Matemáticas − en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.
4.2 Determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú − con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en Didáctica de las Matemáticas − en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.

Objetivo 5: Diseñar e implementar un ciclo formativo en el Máster de FPS de matemáticas que desarrolle primero el APOPM y después la evaluación analítica y global de competencias matemáticas.

5.1 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el Máster de FPS de matemáticas que desarrolle el APOPM.
5.2 Determinar si la inferencia de procesos que realizan, a partir de respuestas a tareas, los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona, en el marco de un proceso formativo que pretende

desarrollar su competencia en el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos, es coincidente, o como mínimo no contradictoria, con la se realiza utilizando la tipología de procesos matemáticos realizada a partir del marco teórico del EOS.

5.3 Determinar si hay alumnos con competencia matemática que después del ciclo formativo para el APOPM son capaces por propia iniciativa de realizar una evaluación analítica y global de competencias.

5.4 Determinar si los alumnos consideran que el APOPM es útil para la evaluación de competencias matemáticas.

5.5 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el máster de FPS de matemáticas que desarrolle la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM.

5.6 Determinar si los alumnos consideran que la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM es útil para la evaluación de competencias.

6. ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE INVESTIGACIÓN

Esta memoria de investigación se ha organizado en 13 capítulos y 50 anexos.

En el capítulo 1 se presentan el origen y las principales características del problema de investigación y se justifica su relevancia.

Uno de los objetivos, que se concreta en el capítulo 2, es resumir los constructos del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática utilizados en esta investigación. Dicho enfoque se ha tomado como el principal referente teórico de la investigación que se presenta. En este capítulo también se realiza una revisión de las investigaciones sobre formación de profesores, dedicando más atención a las que se han ocupado de esta temática usando como marco teórico el EOS y las que se han interesado por la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas del estado español y del Perú.

En el capítulo 3 se explica primero las fases en las que se ha desarrollado esta investigación: 1) Planteamiento del Problema, 2) Marco teórico, 3) Formulación definitiva de objetivos y diseño metodológico para cada objetivo, 4) Aportes teóricos, 5) Diseño e implementación de los experimentos de enseñanza, 6) Conclusiones.

El capítulo 4 tiene como principal objetivo determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003; mostrar el tipo de evaluación de competencias que se propone en dicho informe y, también, mostrar su posición contraria a la realización de una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas.

El capítulo 5 se relaciona, sobre todo, con el objetivo 2 de esta memoria de investigación. Se trata de un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo teórico del EOS, puesto que se pretende afrontar la problemática del encaje de los “procesos” dentro de dicho marco teórico.

El capítulo 6 es un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo teórico del EOS, puesto que se amplía dicho marco con una metodología para la evaluación analítica de competencias matemáticas, basada en un modelo de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Se trata de un método en el que la primera fase consiste en una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas que se infieren de las respuestas de los alumnos; mientras que la segunda fase consiste en un método a priori de desarrollo de una determinada competencia (la que el alumno debería desarrollar).

Los capítulos 7-10 explican el diseño e implementación de talleres cuyo objetivo es determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos. Se trata de cuatro talleres dirigidos a profesores (o futuros profesores) de secundaria con características diferentes según el taller.

Los capítulos 11 y 12 explican la implementación de dos ciclos formativos en el Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona. Se trata de dos experimentos de enseñanza para (1) poner a prueba ciertos constructos teóricos del EOS y (2) para confirmar (o no) algunas hipótesis relacionadas con la determinación de las competencias profesionales que requieren los profesores de secundaria para evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos. En particular la hipótesis de que la competencia profesional del profesor en el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas, es un “saber de fondo” que permite la evaluación y desarrollo de la competencia matemática de sus alumnos.

En el capítulo 13 se retoman los objetivos planteados aportando información sobre el grado de consecución de los mismos y se analizan las conclusiones alcanzadas sobre la hipótesis inicial planteada en el capítulo 1.

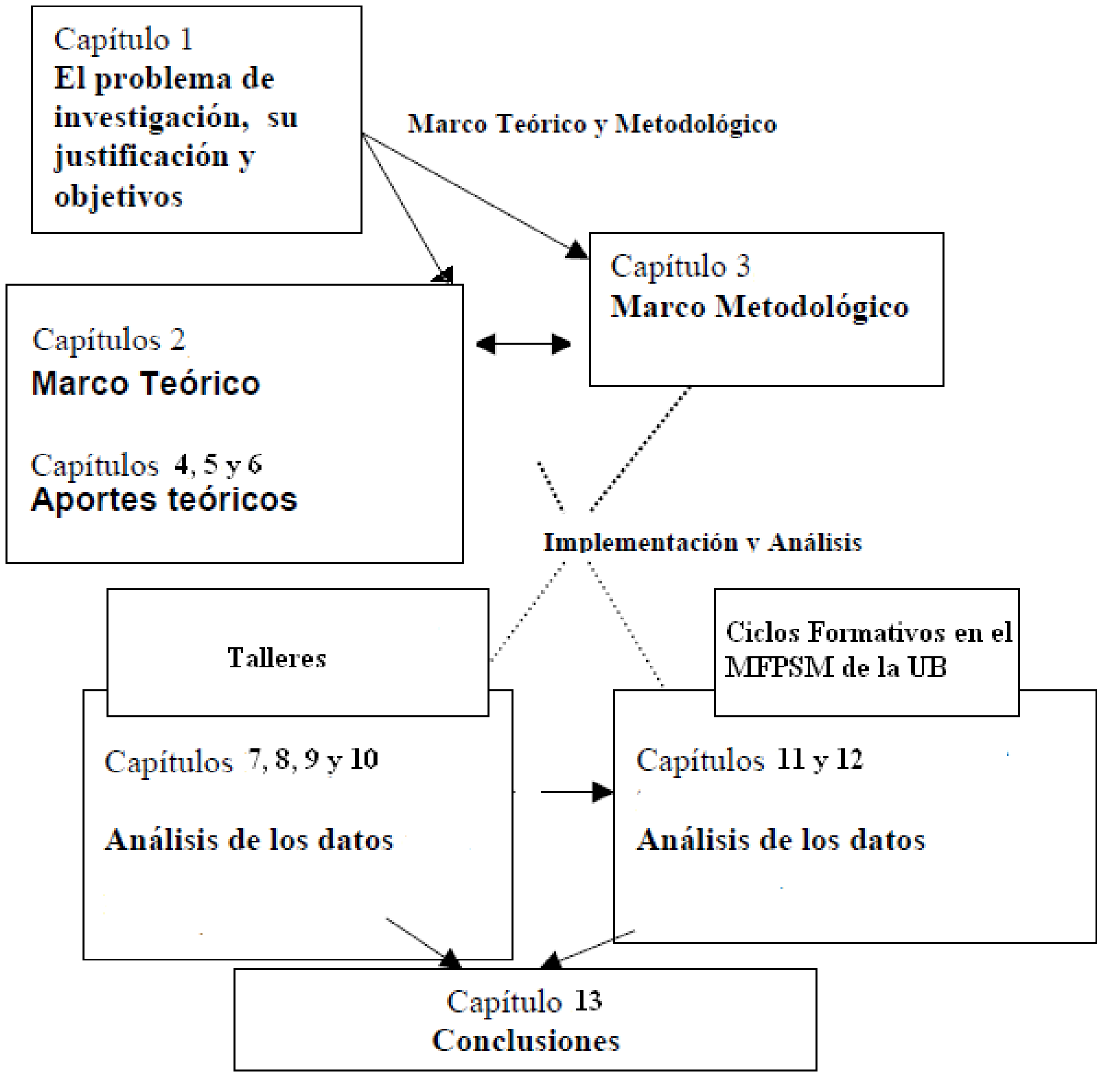


Figura 1.4. Esquema de la estructura de la memoria

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO: EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Resumen

Uno de los objetivos de este capítulo es resumir los constructos del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática utilizados en esta investigación. Dicho enfoque se ha tomado como el principal referente teórico de la investigación que se presenta.

En este capítulo también se realiza una revisión de las investigaciones sobre formación de profesores, dedicando más atención a las que se han ocupado de esta temática usando como marco teórico el EOS y las que se han interesado por la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas del estado español y del Perú.

En el apartado 1 se hace una revisión de las investigaciones sobre esquemas, creencias y concepciones de los profesores, se comenta la dificultad para distinguir estos constructos y, de acuerdo con Ramos (2006), se realiza su encaje en el marco del EOS. En el apartado 2 se hace una revisión de las investigaciones sobre el constructo conocimiento del profesor y se realiza su encaje en el marco del EOS.

En el apartado 3 se hace primero una revisión de investigaciones que, en nuestra opinión, se relación en mayor o menor medida con la competencia en análisis didáctico. A continuación, después de afirmar que una de las competencias profesionales del profesor de matemáticas es la competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción, se explica cómo se entiende dicho análisis en el marco del EOS y se comentan algunas investigaciones sobre dicha competencia que han usado este marco teórico. Presentamos, básicamente, una síntesis de cuatro artículos — Godino, Contreras & Font, 2006; D'Amore, Font & Godino, 2007; Font, Planas & Godino, 2010 — en los que consideramos que se hallan las ideas principales del modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS.

En el último apartado se hace una revisión de algunas investigaciones sobre la formación de profesores de secundaria, en España y en el Perú, y más específicamente sobre las relacionadas con el desarrollo de la competencia en análisis didáctico.

1. ESQUEMAS, CREENCIAS Y CONCEPCIONES DEL PROFESORADO EN EL MARCO DEL EOS

La línea de investigación sobre creencias, convicciones, concepciones, imágenes, esquemas, conocimientos, etc. del profesorado ha evolucionado desde perspectivas más cognitivas en las que se estudia el pensamiento del profesor (Shulman, 1986; Leinhardt & Greeno, 1986; Simon & Tzur, 1999; Moreno & Azcárate, 2003, Badillo, Azcárate & Font, 2011), hasta perspectivas más antropológicas y socioculturales en las que se estudia el conocimiento y práctica profesional del profesor (Espinoza & Azcárate, 2000; Lerman, 2001; Llinares, 2000; Sensevy, Schubauer-Leoni, Mercier, Ligozat & Perrot, 2005; Gavilán, García & Llinares, 2007; Ramos, 2006; Ramos & Font, 2008).

Algunos de los principales constructos utilizados para investigar el pensamiento del profesor son los mismos que se utilizan para investigar el de los sujetos. Nos referimos a los constructos esquema, creencia y concepción.

Los investigadores que utilizan el constructo esquema consideran la estructura cognitiva del sujeto como un conjunto de esquemas y que el aprendizaje está relacionado con la modificación e integración de los esquemas de conocimiento del sujeto. Por ejemplo, los profesores expertos poseen una estructura de conocimiento compuesta de esquemas de acción bien organizados y estables, que actúan flexiblemente ante las exigencias cambiantes del ambiente de clase, permitiéndole resolver el problema del aprendizaje del alumno.

Un ejemplo de este tipo de investigación se explica en Badillo, Azcárate y Font (2011). En este artículo se utiliza la teoría APOE (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews, & Thomas, 1996) para describir los niveles de comprensión de la relación entre $f'(a)$ y $f'(x)$ de cinco profesores de matemáticas. Los autores concluyen que los resultados muestran que la comprensión de la relación entre los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ está relacionada con la estructura de los esquemas gráfico y algebraico de los mismos, y con los conflictos semióticos asociados.

Una de las líneas de investigación más relevante en educación matemática es la que estudia el sistema de creencias del profesorado. Las investigaciones realizadas al respecto han distinguido diferentes subsistemas entre los que destacan los siguientes: (a) creencias sobre qué son las matemáticas, (b) creencias sobre cómo son los procesos de enseñanza y aprendizaje y (c) creencias sobre cómo deberían ser los procesos de enseñanza y aprendizaje (Ernest, 1989a y 1989b; Thompson, 1991). Además de los anteriores subsistemas se han investigado otro tipo de creencias más específicos (sobre calculadoras, uso de la informática, evaluación, currículum, contexto, etc.).

Según Ernest (1989b, 1991), se pueden diferenciar cinco tipologías de sistemas de creencias del profesorado: el entrenador, el tecnólogo, el humanista, el progresista y el crítico. Cada uno de ellos tiene un sistema de creencias que permite distinguirlo de los demás.

Por su parte, Khus y Ball (citado en Handal, 2003 y en Ramos, 2006) caracterizaron tres concepciones dominantes entre el profesorado sobre el proceso ideal de instrucción (la primera focaliza la atención sobre el aprendiz, la segunda sobre el contenido pero hace énfasis sobre su comprensión, y la tercera también sobre el contenido, pero hace énfasis sobre las reglas y los procedimientos). Otra clasificación fue la propuesta por Renne (citado en Handal, 2003 y en Ramos, 2006), dicho autor consideró dos tipologías de profesores, la primera está orientada hacia el conocimiento escolar, mientras que la segunda está orientada al desarrollo de los alumnos.

Las tres clasificaciones anteriores, más otras muchas que se han propuesto, han permitido llegar a un acuerdo bastante generalizado sobre el hecho de que el sistema de creencias del profesorado es un sistema complejo en el cual se pueden considerar subsistemas conectados en forma de red y que operan en función del contexto.

El interés por el estudio de los sistemas de creencias se debe al convencimiento de que éste tiene una gran influencia sobre la práctica del profesor. Este convencimiento, ha sido el motor de numerosas investigaciones sobre la relación entre los sistemas de creencias y la práctica del profesor. En dichas investigaciones hay un cierto acuerdo de fondo en considerar que las creencias serían el filtro a través del cual los profesores toman sus decisiones.

Con relación al origen del sistema de creencias, las diferentes investigaciones han destacado la importancia que tiene la formación inicial del profesorado de matemáticas para generar no sólo creencias sobre las matemáticas, sino también sobre su enseñanza y aprendizaje (Day, 1996; Foss & Kleinsasser, 1996; Kagan, 1992; Font, 2005; Llinares, Sánchez, García & Escudero, 1995; Nisbert &Warren, 2000). Otras investigaciones también han puesto de manifiesto que los profesores generan creencias, concepciones y conocimiento a partir de su práctica profesional (Escudero & Sánchez, 1999; Llinares, 1996 y 1999b; Marcelo, 2002).

Las investigaciones sobre la relación entre creencias y práctica profesional han puesto de manifiesto que la relación entre ellas sea compleja y dialéctica. Diferentes investigaciones (Thompson, 1992; Perry, Howard & Tracey, 1999; Moreno, 2001; Martínez, 2003) se han planteado la relación entre el sistema de creencias y la práctica profesional (por ejemplo: la incongruencia entre las creencias y la práctica).

Además de los términos esquema y creencia, en las investigaciones sobre el profesorado, se suele utilizar, entre otros, el de concepción, lo cual plantea el problema teórico de distinguir entre estos constructos. El constructo "creencias" es entendido, por algunos autores, como un saber que no se ha sometido a un análisis riguroso, en otras palabras es considerado como un constructo que tiene un componente cognitivo, pero que posee una condición más débil que el saber. Se trata de un saber, no problematizado, que es producto del proceso de formación inicial y de la práctica profesional de los profesores, mientras que las concepciones sería un saber más sólido. Otros investigadores han considerado las creencias desde la perspectiva de la acción que posibilitan. La caracterización de las creencias como *"disposición para la acción"* ha sido propuesta en la investigación en educación matemática por diferentes investigadores (por ejemplo, Brown & Cooney, 1982; Wilson & Cooney, 2002).

Si bien el término creencia resulta difícil de delimitar, el término concepción es tan difícil como el primero. Para algunos autores las diferencias entre estos dos constructos resultan tan tenues que pasan a considerarlas como sinónimos. Por ejemplo, Carrillo (2000) considera que concepción, creencias, visiones, etc., son términos que, si bien no son sinónimos, comparten amplias zonas de significados, mientras que Thompson (1992), si bien considera que existen pequeñas diferencias entre creencias y concepciones, sugiere no emplear tiempo en la tarea de realizar esta distinción.

Para Ponte (1992 y 1994), las concepciones pueden verse como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción, proporcionando puntos de vista del mundo y a modo de organizadores de conceptos. Otros investigadores, como por ejemplo Thompson (1992), utilizan el término como un paraguas conceptual, caracterizándolo como una estructura mental general, abarcando creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias y gustos.

Otros investigadores estiman, que el término concepción es más amplio que el de creencias, por lo cual la concepción sería una especie de conjunto superior que abarca a las creencias, es decir, la concepción se entiende como un sistema organizado de creencias (D´Amore, 2004). Por otra parte, Contreras (1998) considera las concepciones como conjunto de posicionamientos que un profesor tiene sobre su práctica en relación con los temas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el marco del EOS se han realizado diferentes investigaciones sobre concepciones y creencias del profesorado entre las cuales queremos resaltar las siguientes: Font y Ramos (2005), Ramos y Font, (2006) y Ramos (2006).

En Ramos (2006) se realiza un encaje de los constructos creencias y concepciones en el marco del EOS, en concreto se relacionan dichos constructos con el de objeto personal. Para ello, se adopta de entrada un cierto pragmatismo, puesto que se considera a los objetos personales como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto personal se le asigna un estatuto derivado.

Según este punto de vista, tener un objeto personal supone haber establecido una conexión entre acciones potenciales y fines, conexión que es inteligente y, por tanto, está mediada simbólicamente. Es decir, supone poder disponer de prácticas (las que se realizan y también aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares) con respecto al campo de experiencia que el objeto personal abarca. Dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas y van cobrando forma –va emergiendo– en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

El hecho de considerar al objeto personal como un “emergente” hace que lo que realmente sea relevante es la existencia de prácticas realizadas por el sujeto que son desencadenadas por dicho objeto. Por tanto, esta forma pragmática de entender el objeto personal postula unas entidades mentales, los objetos personales, que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las prácticas que se realizan por medio de una interacción en el marco de una institución escolar.

De lo dicho anteriormente se podría pensar que la relación entre el objeto personal y la práctica que desencadena se considera una relación de causa-efecto (parte superior de la figura 2.1) en la que el esquema personal sería la causa eficiente (dicho en términos aristotélicos). Contrariamente a este punto de vista, en Ramos (2006) se considera más conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha (parte inferior de la figura 2.1) puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después tiene que decidir qué acción es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, ha de mantener la acción desde el inicio hasta el final.

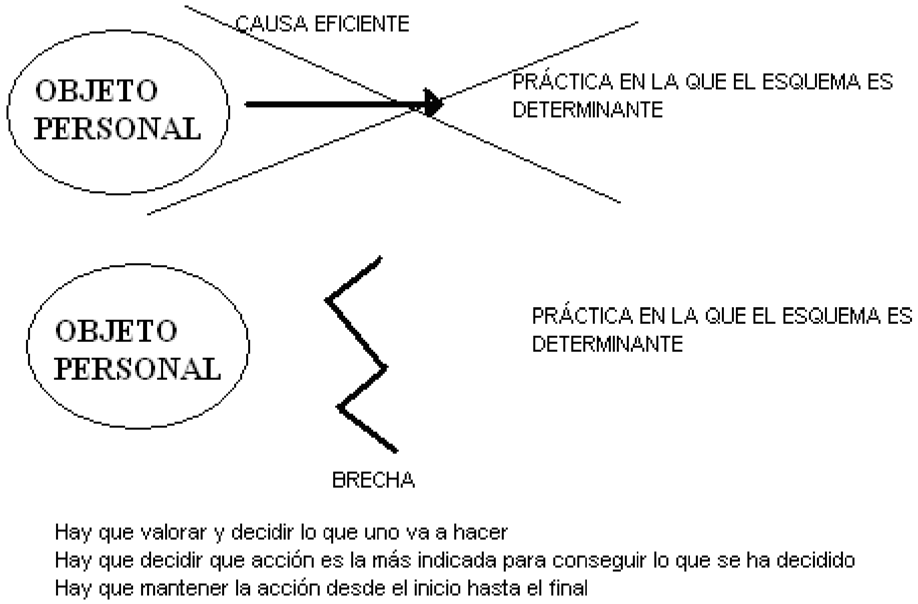


Figura 2.1. Relación entre objeto personal y práctica.

Fuente: Ramos (2006)

La consideración de la brecha implica la renuncia a la creencia de que el cerebro (1) funciona como un sistema conducido internamente y (2) y que funciona con independencia del contexto.

Reflexionar sobre cómo se supera esta brecha lleva a reflexionar sobre: a) qué es una práctica matemática y b) qué hay que entender por realización de una práctica matemática.

En el EOS se considera práctica matemática (Godino & Batanero 1994) a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, simbólica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Una vez asumida la centralidad del constructo "práctica" se distingue la práctica de la conducta. En el EOS se considera que no podemos interpretar las conductas observables de los alumnos si no les atribuimos una finalidad. Por tanto, se distingue entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que, en tanto que acción humana orientada a una finalidad, tiene una razón de ser, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta porque está sujeta a reglas.

Si entendemos la práctica como "acción sujeta a reglas orientada a un fin", se observa que en la definición de práctica que se ha dado anteriormente se pueden considerar tres intenciones diferentes, las cuales permiten considerar tres tipologías de prácticas que llamaremos: a) operativas o actuativas — toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos —, b) discursivas o comunicativas — comunicar a otros la solución, validar la solución — y c) regulativas o normativas — generalizarla a otros contextos y problemas. Aunque es más conveniente pensar en una práctica como una acción compuesta sujeta a reglas en la que puede primar el componente operatorio, el discursivo o bien el regulativo.

Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo nos permiten realizar "acciones" y "argumentaciones" cuya finalidad es la resolución de "situaciones problemas". Las prácticas discursivas (comunicativas) están relacionadas con el dominio y la creación del "lenguaje" así como en su uso para la realización de "argumentaciones" que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. Las prácticas regulativas (normativas) están orientadas básicamente a conseguir establecer "propiedades" (proposiciones) y definiciones de "conceptos".

La reflexión anterior sobre las prácticas hace necesario ampliar lo que se entiende por objeto matemático y no limitarnos a los conceptos. En el EOS, se entiende por objeto primario alguno de los siguientes elementos: lenguaje, procedimiento, argumento, definición-concepto, proposiciones y situación problema. Cada uno de estos elementos (excepto las situaciones problemas) se puede entender como un emergente de las prácticas cuya finalidad es la resolución de situaciones problemas. A su vez, las situaciones problemas se pueden entender como emergentes de otros tipos de prácticas (necesidad de contextualizar y aplicar las matemáticas, necesidad de generalizar, necesidad de resolver problemas, etc.).

En lo dicho anteriormente se ha considerado los objetos que emergen de las prácticas. Ahora bien, a su vez, para la realización de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente además de utilizar unas capacidades y habilidades de tipo general.

Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (dominio, puntos de corte, asíntotas, etc.), simbólico (por ejemplo la fórmula de la función) y gráfico (sistema de ejes de coordenadas, gráfica, etc.). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos-definición (función, gráfica, dominio, etc.), proposiciones (por ejemplo, si la derivada es positiva la función es creciente) y procedimientos (por ejemplo aplicar la regla de la derivada de un producto de funciones) que son necesarios para justificar las acciones que realizará el alumno (por ejemplo calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la argumentación (implícita o explícita) que realizará el alumno para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias.

Las consideraciones anteriores nos llevan a considerar que cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama configuración de objetos primarios. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos primarios personales) o epistémicas (conglomerado de objetos primarios institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional (Font & Godino, 2006).

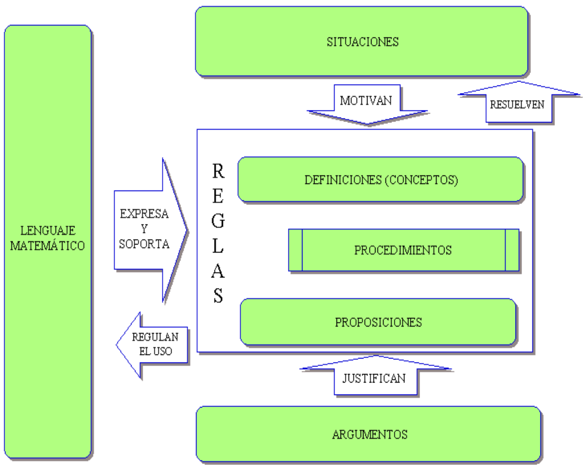


Figura 2.2. Configuración de objetos

Fuente: Font y Godino (2006)

Supongamos que el alumno ha generado a partir de prácticas realizadas anteriormente un objeto personal "función" que forma parte de su estructura mental. Dada una situación problemática en la que dicho objeto personal se tiene que poner en acción, hay que valorar y decidir lo que uno va a hacer, después tiene que decidir qué acción es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido y, por último, ha de mantener la acción desde el inicio hasta el final. Para que esto sea posible hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de objetos personales primarios. En esta configuración no aparece el objeto personal función, lo que aparece es una determinada representación, ciertas propiedades, una determinada definición, las cuales pueden ser diferentes cuando hay que resolver una situación problemática en un contexto diferente.

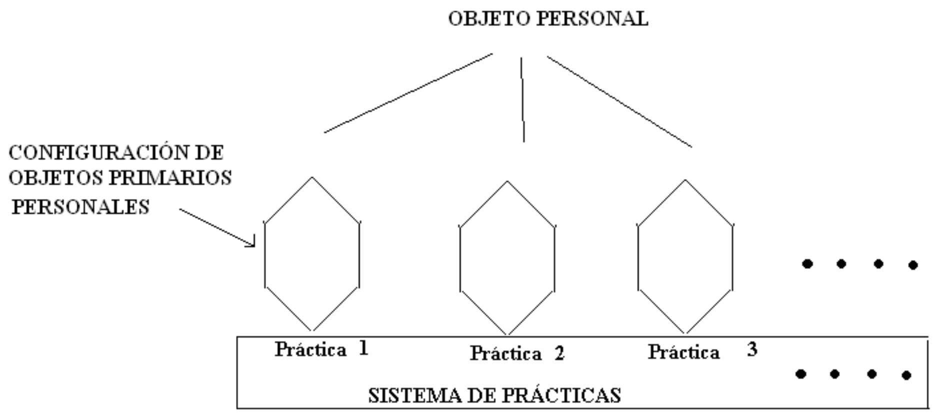


Figura 2.3. Objeto personal, configuración cognitiva y práctica matemática

Fuente: Ramos (2006)

En el EOS, además de considerar las prácticas se considera un constructo, el objeto personal, que es "aquello que posibilita la práctica". Después se considera el constructo configuración cognitiva de objetos primarios como "aquello que se activa en la realización práctica" (entre otros factores). Por último, también se considera que es indispensable tener en cuenta el papel que juega el contexto para explicar la activación de una configuración cognitiva u otra diferente.

1.1. Relación entre objeto personal, configuración cognitiva y esquema

En el marco del EOS el constructo objeto personal se puede equiparar al constructo esquema cuando éste se entiende como formando parte de la estructura mental del sujeto, mientras que el constructo configuración cognitiva de objetos primarios se puede equiparar al constructo esquema en acción.

1.2. Relación entre creencia y configuración cognitiva

Hay diversas interpretaciones de lo que es una creencia. Tomaremos una de las más importantes, la que proporciona Peirce, (citado en Faerna, 2006). Para Peirce la creencia se debe de entender como "disposición para la acción". Peirce denomina genéricamente "investigación" o "indagación" al proceso que desencadenan las irritaciones experimentadas por el organismo y cuyo fin es establecer un estado de creencia (Yo creo P). Vemos pues que al término "creencia" se le asocian "acciones", las cuales son respuestas a la "situación" que se le presenta al organismo, y "proposiciones" (yo creo P), las cuales, en muchos casos son "propiedades" que relacionan "conceptos". Según Peirce, el sujeto, ante "situaciones-problema", genera un proceso de "investigación" para establecer la creencia (Yo creo P). Ahora bien, si reflexionamos con más detalle sobre el mecanismo de fijación de creencias propuesto por Peirce, vemos que el paso de la "duda" a la "creencia" exige unos métodos de "razonamiento" que rigen las operaciones simbólicas que permiten tal paso. Tales métodos se desarrollan por imperativo de la experiencia y se refinan con el uso. Por otra parte, es evidente que todo lo anterior necesita expresarse por medio de un cierto "lenguaje". En otros términos, la práctica realizada por un sujeto, que genera (o está de acuerdo con) una determinada "creencia", se puede considerar como el resultado de la activación de algo parecido a lo que en el EOS se ha llamado "configuración cognitiva". Por ejemplo, si la creencia del sujeto es que "2+2=5", esta creencia se puede entender como una norma personal (cognitiva) que formará parte de la configuración cognitiva que el sujeto aplicará para realizar prácticas matemáticas en las que tenga que sumar y, de manera regular, se podrá observar que el alumno cuando suma dos más dos da como resultado 5.

1.3. Relación entre concepción y significado personal de un objeto matemático

Según Artigue (1990), la noción de concepción es uno de los constructos más usados en didáctica de las matemáticas. Este hecho sostien que se hayan propuesto muchas caracterizaciones diferentes del término concepción y que también se hayan propuesto diferentes criterios para distinguir entre creencia y concepción. Hay investigadores que consideran las creencias como verdades personales incuestionables que son idiosincráticas, un conocimiento que no se cuestiona, que se asume sin ser problematizado, mientras que las concepciones serían un conocimiento más elaborado, más racional y más proposicional, que tiene procedimientos para valorar su validez —por ejemplo, Gil & Rico, 2003; Martínez, 2003 —.

En la literatura sobre creencias y concepciones se han propuesto otras distinciones para diferenciar las creencias de las concepciones. Para algunos investigadores la diferencia está en la temática, las concepciones tendrían que ver con las matemáticas y las creencias con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas —por ejemplo en Moreno (2001) y Moreno & Azcárate (2003)—.

Otra opción consiste en diferenciar estos dos constructos en función de su complejidad —por ejemplo, D'Amore (2004) considera la concepción como un conjunto de creencias— o bien en función de su carácter más básico, lo que en cierta manera es equivalente — por ejemplo, Ponte (1994) las considera como un substrato conceptual que juega un papel importante en pensamiento y acción—. En esta clasificación, las concepciones son consideradas un conjunto de creencias o bien como componentes básicos de muchas creencias diferentes. De acuerdo con esta doble perspectiva, las concepciones, para diversos autores, serían estructuras muy básicas compuestas, además de creencias, por otros componentes. Por ejemplo, Thompson (1992), las caracteriza como una estructura mental general, abarcando creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias, y gustos.

Además hay otra clasificación que consiste en diferenciar las concepciones y creencias según que la temática sea particular o general. Por ejemplo, concepciones y creencias sobre las matemáticas o bien sólo sobre la resta.

Tal como se explica en Ramos (2006), el término "concepción" aparece también en la famosa máxima pragmática de Peirce: "Consideremos qué efectos, que puedan tener concebiblemente repercusiones prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de esos efectos es el todo de nuestra concepción del objeto", (citado en Faerna, 1996, p. 110).

En esta máxima el término "concepción" se utiliza para clarificar el "significado". En efecto, se trata de una máxima para analizar el significado de los objetos en tanto que concebidos (es decir, de conceptos). En segundo lugar, el significado de un concepto, de acuerdo con esta máxima queda enlazado a otros significados y a otros conceptos ya que en las prácticas no interviene sólo el objeto que es el centro de nuestro interés. En tercer lugar, la máxima afirma que la concepción del objeto es la concepción de sus efectos prácticos concebibles. Ahora bien, puesto que concebir algo consiste en anticipar hipotéticamente su repercusión sobre la experiencia bajo ciertas circunstancias, esta máxima identifica la concepción con los efectos prácticos (sobre todo los futuros).

Según Ramos (2006), cuando en el EOS se considera el significado de los objetos personales como el conjunto de prácticas, en la que el objeto en cuestión juega un papel determinante, se está recogiendo esta visión pragmática de la "concepción". Además, esta visión holística del significado propuesta en el EOS se relaciona, en cierta manera, con las investigaciones que consideran la concepción de un objeto como un sistema de creencias o como un substrato básico de las creencias. En efecto, si tomamos en cuenta la concepción de un objeto personal como equivalente al sistema de prácticas en la que el objeto juega un papel determinante, y dado que el objeto y cada práctica quedan relacionados por una configuración cognitiva que, en cierta manera, se puede considerar equivalente a la configuración asociada a una creencia, resulta que, en cierta forma, una concepción puede considerarse como un sistema de creencias.

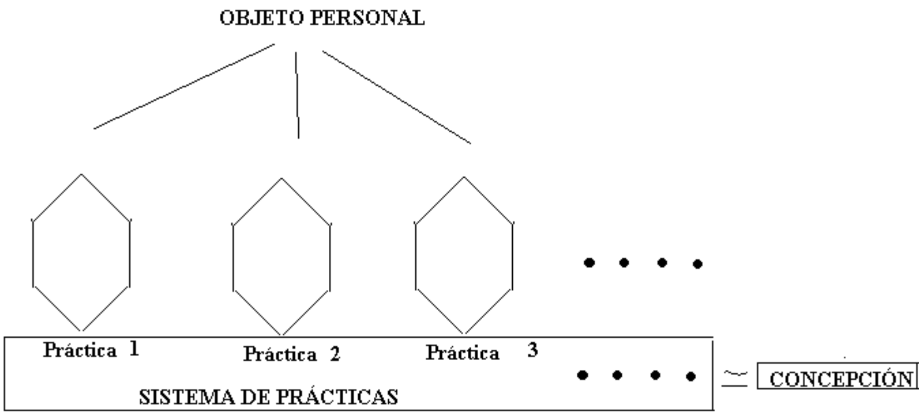


Figura 2.4. Relación ente significado personal y concepción

Fuente: Ramos (2006)

1.4. Emergencia de objetos personales matemático-didácticos a partir de prácticas profesionales

Hasta ahora hemos considerado básicamente objetos matemáticos y práctica matemáticas, pero en el caso de los profesores nos interesa su práctica como profesor de matemáticas. En el EOS se entiende la práctica del profesor de matemáticas como una práctica que posibilita que los alumnos realicen prácticas de matemáticas, lo cual nos lleva a diferenciar los tipos de prácticas (como mínimo, prácticas matemáticas y prácticas profesionales del profesor de matemáticas).

Las prácticas matemáticas enmarcadas en prácticas profesionales generan la emergencia de objetos matemático-didácticos personales en el profesorado.

En el EOS, el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado para un objeto matemático institucional, por ejemplo para el objeto “función”, se entiende como el conjunto de prácticas, operativas y discursivas, que realiza el profesor relacionadas con las funciones y con su enseñanza y aprendizaje.

Desde esta perspectiva, algunas de las prácticas que forman el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, de los profesores para un determinado objeto matemático institucional tratarán de cómo debería ser el proceso de instrucción y otras son las que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado. Dicho de otra manera, en el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, asociados a un objeto matemático institucional se puede considerar, entre otras, las siguientes componentes: (a) lo que hace, (b) lo que dice que hace, (c) lo que dice que ha acordado implementar con los otros compañeros y (d) lo que dice sobre cómo debería ser el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el EOS se entiende el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado como el conjunto de prácticas, operativas y discursivas, que realiza el profesor relacionadas con el objeto matemático en cuestión y con su enseñanza y aprendizaje. Si nos fijamos en estas prácticas profesionales podemos observar que para su realización el profesor implementa una configuración epistémica en el marco de una configuración didáctica, que en D’Amore, Godino y Font (2007) se representa por medio de la figura central del siguiente esquema:

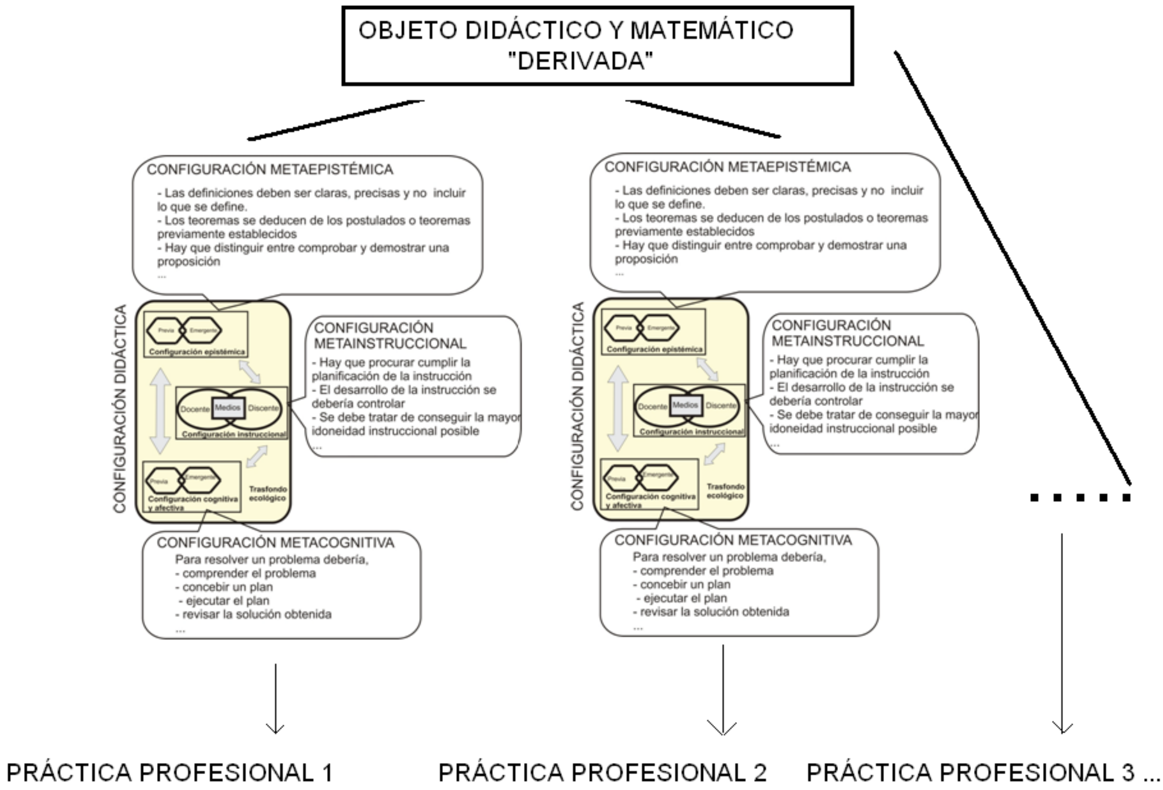


Figura 2.5. Objeto personal matemático y didáctico, configuración didáctica y práctica profesional.

Fuente: Elaboración propia a partir de una figura que se halla en D'Amore Godino y Font (2007)

2. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN EL MARCO DEL EOS

La pregunta ¿qué conocen los profesores? Ha interesado cada vez más a los investigadores. Los trabajos sobre el conocimiento práctico (Connelly & Clandinin, 1985; Escudero & Sánchez, 1999, entre otros), o sobre conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986; Marcelo, 1997), dejan claro el interés que se ha gestado sobre el constructor conocimiento del profesor. Sin embargo en la actualidad no hay un acuerdo entre los investigadores que clarifique el término. No obstante, en un intento por consolidar una conceptualización del término, es posible inferir que en la investigación didáctica se recoge una aproximación al conocimiento profesional del profesor como una integración cognitiva de conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de diferentes dominios científicos y prácticos.

El término "conocimiento" cobró fuerza cuando los estudios sobre el pensamiento del profesor – cuyos supuestos básicos eran: (1) el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias, y genera rutinas propias de su desarrollo profesional; (2) los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan –dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor. Este desplazamiento del interés de las investigaciones, en cierta manera, fue el resultado de un hecho evidente, que fue planteado inicialmente por Schön (1983 y 1987): los docentes son profesionales que generan y desarrollan un conocimiento sobre la enseñanza que debe ser investigado. Es decir, el convencimiento de que no sólo los procesos formales del pensamiento de los docentes median e influyen en el proceso de instrucción, sino también, los contenidos implícitos y explícitos en tal pensamiento ha dirigido la atención de los investigadores hacia la necesidad de comprender mejor las características del conocimiento de los profesores. Ahora bien, la dificultad de conceptualizar el término conocimiento del profesor ha dado paso a diferentes intentos por delimitarlo a través de sus diversos componentes (Shulman, 1986; Marcelo, 1993; Llinares, 1998; entre otros).

Shulman (1986) considera el conocimiento del contenido (conocimiento del objeto matemático con independencia de su enseñanza), el conocimiento del contenido pedagógico necesario para la enseñanza de un determinado objeto matemático y un conocimiento curricular que va más allá de una determinada materia. Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) propone siete categorías para el conocimiento del profesor: 1) conocimiento del contenido, 2) conocimiento pedagógico general, 3) conocimiento curricular, 4) conocimiento pedagógico del contenido, 5) conocimiento de los estudiantes y sus características, 6) conocimiento de los contextos educativos, y 7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Las investigaciones posteriores a los trabajos de Shulman han puesto de manifiesto que el conocimiento del contenido y el conocimiento del contenido pedagógico más que considerarse como dos componentes separados se tienen que considerar integrados (Llinares, 1996). Dichas investigaciones, han permitido poner de manifiesto que el conocimiento profesional del profesor de matemáticas está integrado y se genera a través de la práctica vinculada a problemas concretos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo cual no es inconveniente para que se puedan considerar diferentes componentes de este conocimiento integrado.

En la literatura no se encuentra una definición intencional de "conocimiento", lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intenta especificar los componentes de dicho conocimiento (conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido, etc.). Según Llinares (1998), la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor consideran que está formado por los siguientes componentes:

> a) Conocimiento de matemática (conceptos, procesos…) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática escolar). b) Conocimiento del currículum matemático. c) Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos…d) Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas, etc. e) Conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización de la enseñanza, evaluación." (Llinares, 1998, p. 57).

A partir de las ideas de Shulman, Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008), (concretamente en las nociones del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)" definido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 374).

Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, están conformadas por otras categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo).

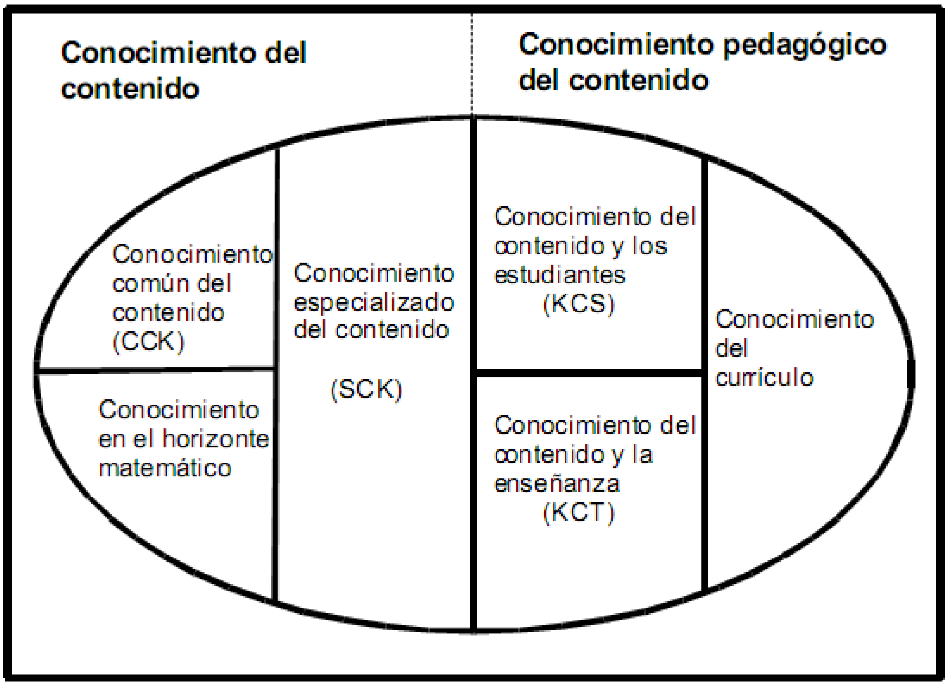


Figura 2.6. Componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

Fuente: Godino (2009)

El conocimiento del futuro profesor se pondrá en funcionamiento en la realización de prácticas profesionales realizadas para resolver tares profesionales. Se trata de situaciones dinámicas en las que un marco estático como el propuesto por Ball y colaboradores resulta poco operativo ya que, en nuestra opinión, se nota la falta de herramientas que posibilitan la realización de análisis detallados sobre la diversidad de procesos y entidades matemáticas involucradas en la realización de una tarea.

En el EOS (Godino, 2009) se considera más pertinente el uso de la expresión "conocimiento didáctico-matemático (CDM)" del profesor, para referir a la fusión de las nociones MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) y PCK (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que la expresión "Conocimiento matemático para la enseñanza" no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión "Conocimiento pedagógico del contenido".

El término "conocimiento" se usa en el sentido de constructo integrador que incluye comprensión, competencia y disposición (i/o capacidad). La disposición (y/o capacidad) se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal (aquello que posibilita la práctica). La competencia con la activación de la configuración didáctica adecuada al contexto en el que se desarrolla la práctica profesional y la comprensión con las relaciones que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la implementación de una configuración didáctica idónea para un contexto determinado.

Así, el CDM viene a ser la trama de relaciones que se establecen entre los objetos, que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Esta manera de entender el CDM en el EOS conlleva que en dicho marco teórico tenga sentido formularse preguntas como las siguientes:

¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas, por ejemplo, tenga la mayor idoneidad didáctica posible?

O bien preguntas relacionadas con competencias, si este constructo se entiende como un constructo integrador que relaciona capacidad con desempeño competente demostrado. Es decir, si se entiende la competencia como una capacidad (que se proyecta al futuro) de un buen desempeño en situaciones reales (demostrado ya en el pasado) que integra conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores. En este caso tiene sentido formularse preguntas como las siguientes

¿Qué competencias debería desarrollar un profesor para que su enseñanza de un determinado contenido matemático tenga la mayor idoneidad didáctica posible?

Con relación a estas dos preguntas se han realizado recientemente dos tesis en la Universidad de Granada usando el marco teórico de EOS. Nos referimos a la tesis de Konic (2011) sobre evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales, y a la tesis de Castro (2011) sobre la evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.

3. LA COMPETENCIA EN ANÁLISIS DIDÁCTICO

Los currículos por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículo de secundaria?, cuya respuesta, a su vez, está relacionada con la pregunta ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas?

Se han realizado diversas investigaciones relacionadas con estas dos preguntas, las cuales, en nuestra opinión, coinciden en mayor o menor medida en que una de las competencias profesionales que debe tener el profesor es la competencia en análisis didáctico de secuencias de actividades, es decir, diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediando técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. A continuación comentamos brevemente dichas investigaciones y después explicamos cómo se entiende el análisis didáctico en el marco del EOS

3.1. Investigaciones relacionadas con la competencia en análisis didáctico

En este apartado comentamos algunas investigaciones que, en mayor o menor medida, se relacionan con la competencia en análisis didáctico, según nuestra opinión.

Lesson Study

La metodología Lesson Study (Fernández & Yoshida, 2004) o en castellano Estudio de Clases es una metodología en la que los docentes trabajan juntos para reflexionar sobre los objetivos para el aprendizaje de sus alumnos. Por medio de él se estudian o se investigan las clases, con el fin de reformarlas; es decir, que el Estudio de Clases es una idea simple por si se desea mejorar la enseñanza, en colaboración con otros maestros para planificar, observar y reflexionar sobre las lecciones. Además, se observa si el alumno realmente aprendió de tal forma que éste pueda aplicar todo ese nuevo conocimiento obtenido en una nueva situación.

C*oncept Study*

El término “Concept study”, Estudio del Concepto en castellano, propuesto por Davis y colaboradores (2008) se refiere a una metodología de trabajo en la que los investigadores se comprometen con la práctica de los profesores en el examen y la elaboración de modelos sobre la comprensión matemática. El Estudio del Concepto combina elementos de dos enfoques relevantes en la investigación en educación matemática contemporánea:

"concept analysis" y "lesson study". Los estudios enmarcados en el "concept analysis" fueron relevantes en el área de la investigación en educación matemática durante el período 1960-1980. Ellos están focalizados sobre la explicitación y explicación de las estructuras lógicas y las asociaciones que son inherentes a los conceptos matemáticos. Usiskin, Peressini, Marchisotto y Stanley, (2003, p.1) describen este tipo de análisis como el análisis que trata de encontrar los orígenes y las aplicaciones de un concepto, mirando las diferentes maneras en las cuales éste aparece, tanto dentro como fuera de las matemáticas, examinando las diferentes representaciones y definiciones utilizadas para describirlo y sus consecuencias.

"Concept study" es guiado por los siguientes supuestos:

- En el nivel individual, la comprensión de los conceptos matemáticos y de las concepciones de las matemáticas son emergentes.
- En el nivel cultural, los profesores son participantes vitales en la selección de las tareas y en el énfasis dado a unas interpretaciones sobre otras.
- A nivel de colectivos sociales, el conocimiento del profesor de matemáticas es bastante tácito, pero los elementos críticos de éste pueden estar disponibles para la interrogación consciente en grupos.
- Los conocimientos individuales y colectivos no pueden ser separados; las posibilidades colectivas son envueltas y desenvueltas en las comprensiones individuales.

Conocimiento matemático para una enseñanza de las matemáticas de calidad

A partir de la noción de conocimiento matemático para la enseñanza el grupo de Deborah Ball y colaboradores se ha planteado cuáles son las características que ha de tener este conocimiento para conseguir una enseñanza de calidad. En Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep, & Ball (2008) se analizan cinco estudios de caso para relacionar el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores con la calidad matemática de la instrucción. Los autores encuentran que, aunque hay una significativa, fuerte y positiva asociación entre los niveles del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y la calidad matemática de la instrucción, hay un número de importantes factores que median esta relación, que también apoyan u obstaculizan el uso del conocimiento del profesor en la práctica.

Conocimiento del profesor activado durante la enseñanza de conceptos matemáticos

Rowland y colaboradores se han interesado en conocer la forma en que el conocimiento del contenido matemático de los profesores se hace evidente en sus clases. Rowland y colaboradores (2005) analizan clases videograbadas en el aula de matemáticas con el objetivo de caracterizar el conocimiento del profesor activado durante el proceso de instrucción. Para ello proponen las cuatro categorías de conocimiento siguientes:

1) Foundation: es la base teórica de referencia de los otros tres tipos de conocimiento que activa el profesor. Se refiere al conocimiento teórico sobre las matemáticas y su enseñanza que ha construido el profesor en su formación inicial y que reconstruye y aplica en su práctica profesional. Los componentes o descriptores que lo caracterizan son:

a) Conocimiento y comprensión de las matemáticas por sí mismas,

b) Conocimiento de los tratados sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más relevantes de la literatura que son el resultado de la investigación sistemática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,

c) Los sistemas de creencias sobre las matemáticas y sobre por qué y cómo se aprende las matemáticas,

d) El conjunto de valores y los ideales.

2) Transformation: es el tipo de conocimiento en la acción de enseñar, implícito tanto en la planificación como en la práctica y se caracteriza por,

- Capacidad de un profesor de transformar el contenido de la materia que posee en formes que sean potentes pedagógicamente.
- El uso y justificación de diferentes formas de representar los conceptos matemáticos.
- El uso de analogías, ilustraciones, metáforas, argumentaciones, demostraciones, ejemplos, contrajemplos, etc.

3) Connection: es el conocimiento que hace referencia a la coherencia entre la planificación y la enseñanza de los conceptos matemáticos a lo largo de un curso, lección o unidad didáctica. Alguno de los descriptores de este conocimiento son:

- La consciencia de las demandas cognitivas de los diferentes temes y tareas matemáticas.
- La secuenciación de los temes a desarrollar.
- La ordenación y secuenciación de las tareas o actividad matemática a realizar.

4) Contingency: es el conocimiento relacionado con la toma de decisiones durante el desarrollo de la clase. Es la habilidad de pensar y decidir en la acción. Algunos de los descriptores de este conocimiento son:

- Capacidad para responder a les ideas y demanda de los alumnos.
- Capacidad para desviarse de la programación para aprovechar las oportunidades de aprendizaje que se dan en el aula, etc.

Competencia mirar con sentido

Recientemente las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia de la competencia docente denominada "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Alsawie & Alghazo, 2010; Lin, 2005; Llinares & Valls, 2010; van Es & Sherin, 2002). La competencia docente "mirar con sentido" (Mason, 2002) permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Van Es y Sherin (2002) caracterizan la competencia docente "mirar con sentido" considerando tres destrezas: identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y realizar conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, Jacobs, Lamb & Philipp (2010) conceptualizan esta competencia como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir cómo responder (decisiones de acción) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

3.2. La competencia en análisis didáctico en el marco del EOS

En Font, Rubio, Giménez y Planas (2009); Font (2011a); Rubio, Font y Giménez (2010); y Rubio, Font, Giménez y Malaspina (2011) se afirma que la competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos se puede considerar compuesta por dos macro competencias: 1) La competencia matemática y 2) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática.

En el EOS se han realizado diferentes investigaciones sobre la competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción — Godino, Contreras & Font (2006); Godino, Font & Wilhelmi (2008); Godino (2009); Font, Rubio, Giménez & Planas (2009); Rubio, Font & Giménez (2010); Font, Planas & Godino (2010); Font (2011a); Rubio, Font, Giménez & Malaspina (2011); Castro, 2011. A continuación se presenta un resumen de cómo se entiende el análisis didáctico en el marco del enfoque ontosemiótico. Presentamos, básicamente, una síntesis de cuatro artículos en los que consideramos que se hallan las ideas principales del modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS. Dichos artículos son los siguientes:

1) Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

2) D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

3) Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76

4) Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

3.2.1. ¿Qué se propone el EOS mediante el análisis didáctico?

El EOS se propone realizar un análisis completo de los procesos de enseñanza-aprendizaje que permita describir, explicar y valorar dichos procesos. Por tanto, se propone desarrollar y aplicar, por una parte, herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para comprender y responder a la pregunta "¿qué ha ocurrido aquí y por qué?". Por otra parte, puesto que se considera que la didáctica de la matemática no debería limitarse a la mera descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio, se propone desarrollar y aplicar criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora.

En el EOS se considera que para responder a la pregunta “¿qué se debería mejorar?”, es necesario responder en primer lugar a la pregunta “¿qué ha ocurrido aquí y por qué?”. Se entiende, por tanto, que el estudio exhaustivo de aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar posteriormente valoraciones fundamentadas sobre esta situación. El modelo de análisis didáctico de procesos de estudio que se propone desarrollar y aplicar en el EOS permite establecer un puente entre una didáctica descriptiva-explicativa y su aplicación para la valoración de procesos de estudio.

3.2.2. ¿Desde qué marcos teóricos se realiza el análisis didáctico en el EOS?

Los marcos teóricos de referencia son básicamente dos:

1) El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (D’Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Font & Godino, 2006; Font, Godino & Contreras, 2008; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhemi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009; Font, Planas & Godino, 2010; Ramos & Font, 2008).

2) Los enfoques socioculturales en educación matemática (Civil & Planas, 2004; Cobb & McClain, 2006; Stephan, Cobb & Gravemeijer, 2003; Yackel & Cobb, 1996).

3.2.3. ¿Qué se analiza con este modelo de análisis didáctico?

En diversos trabajos realizados en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (D’Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Font & Godino, 2006; Font, Godino & Contreras, 2008; Font, Planas & Godino, 2010; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhemi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009) se han propuesto cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio:

1) Análisis de prácticas matemáticas.

2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos activados y emergentes de las prácticas matemáticas.

3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

4) Identificación del sistema de normas y metanormas.

5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el Área de Didáctica de la Matemática. En particular, el nivel 4 se propone para integrar (Font & Planas, 2008) aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática (Civil & Planas, 2004; Cobb & McClain, 2006; Stephan, Cobb & Gravemeijer, 2003; Yackel & Cobb, 1996).

El primer nivel de análisis pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza un *agente* que realiza la práctica y un *contexto* en el que dicha práctica se realiza (en este contexto puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, *objetos y procesos matemáticos*.

El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este segundo nivel de análisis es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos anecdóticos o consustanciales a su realización.

Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes, el análisis didáctico debiera progresar desde la situación-problema y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (análisis 1), a las configuraciones de objetos (configuraciones epistémicas/cognitivas) y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (análisis 2), que a su vez debiera progresar hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas (análisis 3). Este tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, los conflictos y su resolución y su relación con los aprendizajes de los estudiantes.

Las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas están condicionadas y soportadas por una compleja trama de normas y metanormas, que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (niveles 1 y 2 de análisis), sino que también regulan otras dimensiones de los procesos de estudio (cognitiva, afectiva, etc.).

El cuarto nivel de análisis considerado pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de instrucción. Este nivel de análisis es el resultado de tener en cuenta los fenómenos de interacción social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva – explicativa. Es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, "¿qué está ocurriendo aquí y por qué?". El quinto nivel de análisis se centra en la valoración de su *idoneidad didáctica*. Dicho análisis se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

3.2.4. ¿Cómo se realiza el análisis didáctico?

En diversas publicaciones se puede observar cómo se aplican los niveles de análisis de este modelo para describir, analizar y valorar procesos de instrucción concretos (Font & Contreras, 2008; Font & Godino, 2006; Font, Godino & Contreras, 2008; Font & Planas, 2008; Font, Planas & Godino, 2010; Font & Rubio, 2011; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhemi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011; Malaspina & Font, 2010; Rubio, Font & Planas, 2008; Pochulu & Font, 2011)

A continuación describimos brevemente cómo se aplica.

3.2.4.1. Identificación de prácticas matemáticas

Se parte de la hipótesis de que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica actuativa (de lectura y producción de textos) y, sobre todo, una práctica discursiva (de reflexión sobre la práctica actuativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Desde esta perspectiva, se entiende el discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar, en el estudiante, un tipo de práctica actuativa y una reflexión discursiva sobre ella, que el profesor en calidad de representante de la institución matemática, pueda considerar como matemática.

Prácticas

De acuerdo con lo anterior, se considera la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994).

Significados y sistemas de prácticas

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados que se resume en la figura 2.7. Con relación a los significados institucionales se proponen los siguientes tipos:

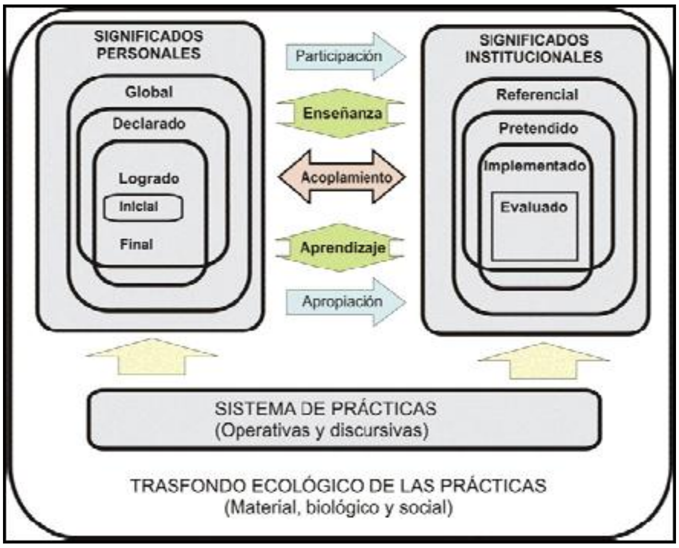
- Implementado: en un proceso de instrucción específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2007) del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico y epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del

cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

-



-

Figura 2.7: Tipos de significados institucionales y personales

Fuente: Godino, Font y Wilhelmi (2008)

En la parte central de la figura 2.7 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados (la realización de las prácticas por parte del estudiante).

El primer nivel de análisis pretende identificar prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción analizado (significado implementado). Este primer nivel de análisis se puede entender, en cierta manera, como la narración que haría un profesor para explicar a otro profesor lo que ha sucedido en la clase desde el punto de vista matemático.

3.2.4.2. Identificación de objetos y procesos matemáticos

Para realizar una práctica matemática, el agente necesita conocimientos que son básicos tanto para su realización como para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Si consideramos los componentes del conocimiento, que es necesario que el agente tenga para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación problema (e.g., primero plantear y después resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), vemos que ha de utilizar un determinado *lenguaje* verbal (e.g, solución, ecuación) y simbólico (e.g., x, =). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos* (e.g., ecuación, solución), *proposiciones* (e.g., si se suma el mismo término a los dos miembros de la ecuación se obtiene una ecuación equivalente) y *procedimientos* (e.g., resolución por sustitución, por igualación) que se utilizarán en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias. Cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos de los elementos citados anteriormente (o todos): situaciones-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos tipos de objetos se articulan formando la *configuración* de la Figura 2.2.

La aplicación de esta herramienta permite conocer los objetos activados en la práctica matemática del proceso de estudio analizado.

La configuración de la Figura 2.2 (hexágono interior de la figura 2.8) informa sobre la “anatomía” de la actividad matemática en un episodio de clase. Si además de la “estructura” interesa el “funcionamiento” (cómo interactúan los objetos) en una perspectiva temporal y dinámica, conviene utilizar la tipología de procesos propuestos por el enfoque ontosemiótico para el conocimiento matemático. La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas actuativas y discursivas. De estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), como se observa en el hexágono de la Figura 2.8. Estos tipos de objetos pueden considerarse en base a cinco dimensiones duales (ver decágono de la Figura 2.8): personal/institucional, unitaria/sistémica expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva. Estas dimensiones duales pueden analizarse desde una perspectiva de producto-proceso.

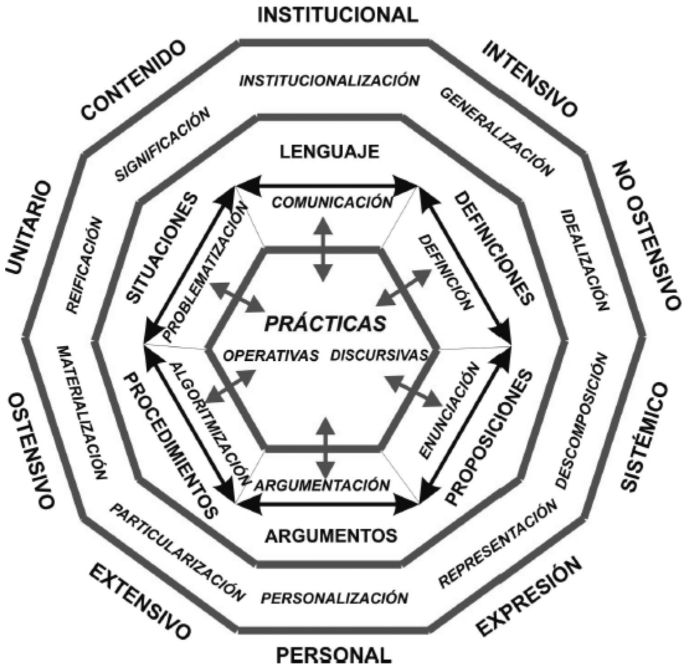


Figura 2.8. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático

Fuente: Font, Planas y Godino (2010)

En Font y Contreras (2008) y Font, Godino y Contreras (2008) se detallan los dieciséis procesos matemáticos de la Figura 8: procesos de generalización-particularización, institucionalización-personalización, representación-significación, descomposición-reificación, idealización-materialización (asociados a las cinco dimensiones duales) y procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización (asociados a los objetos matemáticos identificados en el proceso de estudio que se analiza). Esta lista es una selección de procesos que se consideran relevantes en la actividad matemática. Otros procesos, igualmente relevantes, como los procesos de comprensión, de modelización o de resolución de problemas, pueden entenderse como mega-procesos que incluyen algunos de los tipos anteriores.

La aplicación de esta tipología de procesos permite conocer los procesos activados en la práctica matemática del proceso de estudio analizado.

3.2.4.3 Interacciones y conflictos

Fijada una situación-problema (o tarea) y haciendo uso de una tecnología determinada, el profesor y los estudiantes emprenderán una secuencia de actividades en interacción mutua con el fin de lograr que los alumnos sean capaces de resolver esa tarea y otras relacionadas.

En el EOS se llama *configuración didáctica* a la secuencia interactiva que tiene lugar a propósito de una situación-problema (o tarea). Una configuración didáctica se compone de una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (definiciones, propiedades y procedimientos) y argumentos, que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien se distribuyen entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción (además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación.

La configuración didáctica se concibe como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática.

El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Configuraciones didácticas de referencia

El análisis de las configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso instruccional, y de las que potencialmente pueden diseñarse para su implementación, se verá facilitado si se dispone de algunos modelos teóricos que sirvan de referencia. En esta sección vamos a describir cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar ese papel y que, en el EOS, se designan como configuración *magistral*, *adidáctica*, *personal* y *dialógica*.

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) propone una manera de organizar el trabajo del profesor y los alumnos a propósito de un saber matemático pretendido, que se considera óptima en términos del aprendizaje de los alumnos. La secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización especifican los papeles del estudiante en interacción con el medio (en el que se incluye el profesor, unos conocimientos pretendidos y unos recursos materiales y cognitivos específicos) que podemos interpretar como un tipo de configuración didáctica de naturaleza teórica.

Este no es el único tipo de configuración didáctica que puede implementarse y que de hecho se implementa. Ni siquiera en el marco de la TSD se afirma que todos los saberes matemáticos pueden, ni deben, ser estudiados de esa manera. Basta tener en cuenta la manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas basada en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos y saberes presentados. Primero se presentan los objetos matemáticos (definiciones, enunciados, demostraciones, etc.), y se deja la responsabilidad de dar sentido al discurso a los propios estudiantes por medio de los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que se proponen. Se trata de una decisión topogenética: "primero, yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas". En realidad, en este tipo de configuración didáctica no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y validación, sino que quedan bajo la responsabilidad del estudiante, o bien se ponen en juego en momentos aislados de evaluación.

Una variante intermedia entre los tipos de configuraciones descritos (que se designan como adidáctica y magistral, respectivamente) puede definirse respetando el momento de exploración, pero asumiendo el profesor básicamente la formulación y validación. La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución.

Otro tipo básico de configuración didáctica se tiene cuando la resolución de la situación-problema (o la realización de una tarea) se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente. En la práctica esto es lo que ocurre cuando los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor, o están incluidos en el libro de texto y están capacitados para resolverlos. Se trata de un tipo de configuración didáctica en la que básicamente predomina el *estudio personal*.

En la figura 2.9 se representan en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones didácticas teóricas descritos.

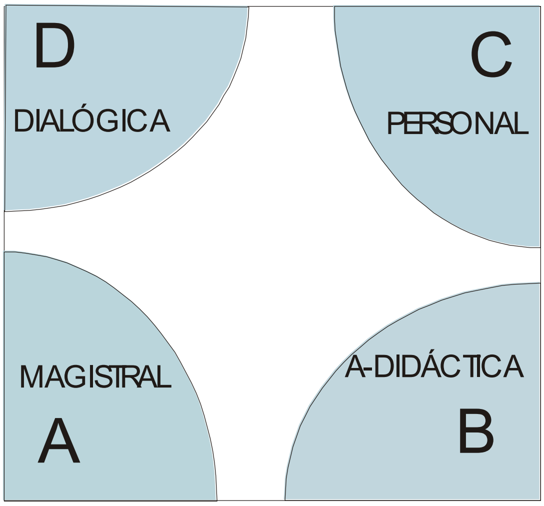


Figura 2.9. Configuraciones didácticas teóricas

Fuente: Godino, Contreras y Font (2006)

Las configuraciones didácticas empíricas que surgen en las trayectorias didácticas pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas. A lo largo de un proceso de instrucción matemática las configuraciones empíricas oscilarán en torno a estos tipos teóricos.

Trayectorías epistémica, docente, discente (y su interacción), mediacional y afectiva

En cada realización del proceso instruccional (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático) se produce una trayectoria de configuraciones didácticas, la cual a su vez se puede descomponer en trayectorías más específicas. Se distinguen seis tipos de trayectorías específicas:

1. Trayectoria epistémica: distribución a lo largo del tiempo de los componentes del significado institucional implementado: prácticas, objetos (problemas, procedimientos, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos) y procesos. Dichos componentes se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.
2. Trayectoria docente: distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
3. Trayectorias discentes: distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).

4. Trayectoria mediacional, que representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.).
5. Trayectorias cognitivas: cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.
6. Trayectorias afectivas: distribución temporal de los estados emocionales (actitudes, valores, afectos y sentimientos) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

A su vez estas seis trayectorias se pueden agrupar en tres: la trayectoria epistémica, la instruccional (trayectorias docente, discente y mediacional) y la cognitiva-afectiva (trayectorías cognitiva y emocional).

Conflictos semióticos

Dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de estudio, a veces es conveniente centrarse en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico de fácil identificación –en el sentido de ser fácilmente triangulable su identificación.

Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales, se habla de conflictos semióticos de tipo epistémico; mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, se designan como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) se habla de conflictos (semióticos) interaccionales.

3.2.4.4 Normas y metanormas

Para analizar los procesos de instrucción, en Godino, Contreras y Font (2006), se propone tomar en consideración las facetas *epistémica*, *cognitiva*, *mediacional*, *interaccional*, *afectiva* y *ecológica*. Siguiendo esta clasificación en Godino, Font, Wilhelmi y de Castro (2009) se propone considerar las normas según la faceta del proceso de estudio a que se refiere la norma. Esto permite fijar la atención en las normas que regulan:

- Las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución.
- La manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos.
- Las interacciones docente-discente y discente-discente.
- El uso de los recursos humanos, materiales y temporales.
- La afectividad (emociones, creencias, actitudes, valores) de las personas que intervienen en el proceso de estudio.
- La relación con el entorno (sociocultural, político, laboral,…) en el que se desarrolla el proceso de instrucción.

Las normas que regulan los procesos de estudio matemáticos también pueden ser categorizadas desde otros puntos de vista complementarios y distintos a las propuestas por el EOS. Así se tiene que se pueden clasificar según los *momentos* o fases de desarrollo de dichos procesos (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación); el *grado de coerción*/*rigidez* de las normas (aquellas que se presentan como verdades necesarias); convenciones de cumplimiento obligatorio; convenios basados en hábitos culturales; el *origen* de las normas (la administración educativa, la sociedad, la escuela, el aula, la disciplina).

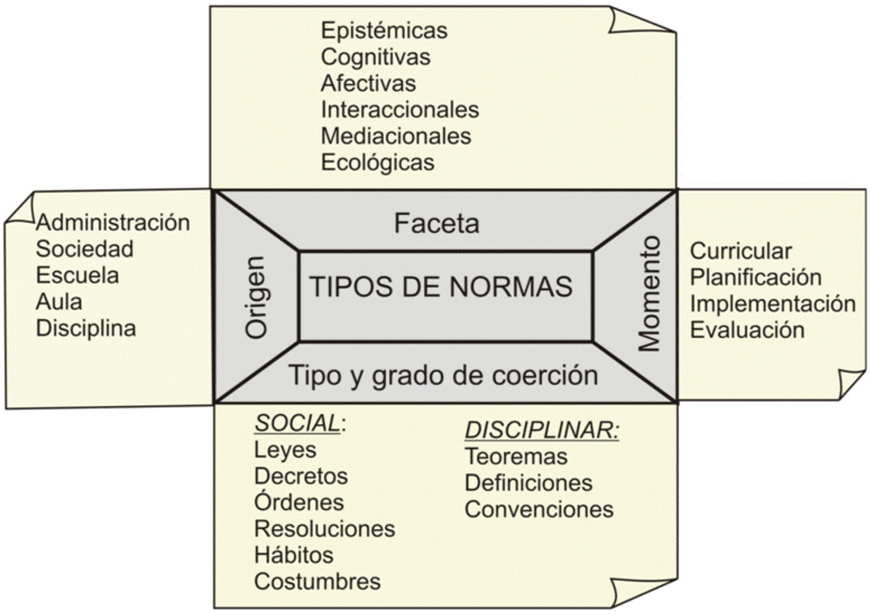


Figura 2.10. Dimensión normativa. Tipos de normas

Fuente: D’Amore, Font y Godino (2007)

Normas epistémicas

Se llama *faceta epistémica de la dimensión normativa* (o *normas epistémicas*, para abreviar) al conjunto de normas que determinan la actividad matemática, que es posible desarrollar en una determinada institución. Las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. Dicho en la terminología del EOS, las normas epistémicas son componentes de las configuraciones epistémicas (definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que regulan las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan en un marco institucional específico. En general, las configuraciones epistémicas llevan asociadas un sistema de normas, que pueden ser compartidas (*configuración metaepistémica*) o personales de los estudiantes involucrados en los procesos de aprendizaje correspondientes.

Las configuraciones metaepistémicas se generan y se mantienen durante un largo periodo de tiempo (por ejemplo, un curso o una etapa educativa) y coexisten con muchas configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo. En general, tienen un carácter implícito, hecho que explica la ruptura entre diferentes niveles educativos (primaria-secundaria, secundaria-universidad). Puesto que las configuraciones metaepistémicas son utilizadas para valorar la práctica matemática que se realiza, se puede considerar que las configuraciones metaepistémicas juegan, en cierta manera, un papel axiológico en la actividad matemática institucional.

Normas cognitivas

Se llaman normas cognitivas a las normas cuyo seguimiento permite conseguir que los sujetos aprendan lo que se les enseña. En el EOS se considera que la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. Para que esta apropiación sea posible, el referente ya no son las normas epistémicas que nos dicen "qué matemáticas se deben aprender" sino las ciencias que nos dicen "cómo aprenden los sujetos y cómo se les debe de enseñar". Estas ciencias han generado un cuerpo de conocimientos del cual se derivan las normas, que en el EOS se llaman cognitivas.

Las normas cognitivas desarrollan el principio de que el alumno debe aprender y que la institución escolar debe hacer lo posible para que ello sea posible. Entre este tipo de normas se tienen las que establecen que la institución debe asegurarse de, (1) que el alumno tiene los conocimientos previos necesarios, (2) que lo que se le va a enseñar está dentro de la zona de desarrollo próximo del alumno y (3) que la institución se adaptará a la diversidad del alumnado. Se tiene que tomar en cuenta que, como resultado del aprendizaje de los alumnos, quienes pueden generar sus propias interpretaciones de las reglas matemáticas, los posibles conflictos cognitivos que surgen deben ser validados y discutidos en clase para superarlos.

La herramienta *configuración cognitiva* permite describir la estructura de los objetos que han posibilitado la práctica matemática realizada por el alumno. A su vez, el par <configuración cognitiva, prácticas realizadas (o que posibilita)> es una herramienta útil para determinar el significado personal declarado en las pruebas de evaluación propuestas. La configuración cognitiva indica el grado de apropiación por el alumno de la configuración epistémica correspondiente al significado institucional implementado. De hecho, la evaluación sumativa puede definirse como el proceso educativo por el cual se valora el grado de adecuación entre las configuraciones cognitivas logradas y las configuraciones epistémicas implementadas.

Algunos de los constituyentes de las configuraciones cognitivas de los alumnos se pueden considerar como normas que regulan el comportamiento matemático de los alumnos; dichas normas personales (o cognitivas) pueden concordar o no con las normas epistémicas correspondientes.

Normas interactivas

Se llaman normas interactivas a aquellas normas que regulan los modos de interacción entre docentes y discentes, para el logro de los objetivos de enseñanza y aprendizaje, en los procesos de estudio matemático, teniendo en cuenta que estos modos de interacción están sujetos a reglas, hábitos, tradiciones, compromisos y convenios.

Muchas de las interacciones que se producen en el aula han sido gestadas en las acciones e interacciones producidas en otros contextos (la familia, el grupo de amigos, cursos anteriores). Las secuencias de interacciones por una parte están sujetas a reglas y, por otra parte, generan pautas de actuación, las cuales tienen sentido si son con referencia a otras pautas anteriores y posteriores en el tiempo. Un buen ejemplo de cómo los formatos o patrones de interacción en el aula están con frecuencia condicionados (normados) por agentes externos al propio sistema didáctico son los dispositivos "clase de teoría", "clase de prácticas", "sesiones de tutoría", etc. Ahora bien, a pesar de que el macro-contexto proyecta expectativas de comportamiento en alumnos y profesores, los comportamientos se (re)construyen por medio de procesos sociales del aula y deben interpretarse, en primer lugar, desde el micro-contexto del aula (Civil & Planas, 2004).

El objetivo central de las interacciones didácticas es conseguir el aprendizaje de los alumnos de la manera más autónoma posible, aprendizaje que en el EOS se concibe en términos de apropiación de significados, por medio de la participación en una comunidad de prácticas que permite identificar los conflictos semióticos y pone los medios adecuados para resolverlos. Los formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes muestran su relación con los objetos matemáticos y, por lo tanto, el profesor tiene indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada (según las restricciones matemático-didácticas asociadas a la situación).

La realización efectiva de un proceso de instrucción puede implicar cambios en las interacciones respecto a las modalidades inicialmente previstas, las cuales a su vez dependen del "paradigma educativo" asumido. Así, en un modelo constructivista social el profesor tiene como papel clave la búsqueda de buenas situaciones y crear un medio en el que el alumno construya el conocimiento trabajando cooperativamente con sus compañeros. En un modelo de enseñanza expositivo, el profesor asume el papel de presentar los contenidos y los estudiantes de retenerlos.

Las normas interactivas determinan el tipo de interacción y, en muchos casos, de la interacción desarrollada según dichas normas emergen nuevas normas epistémicas y metaepistémicas. Por ejemplo, en Font y Contreras (2008) se muestra cómo las normas que regulan el uso de elementos genéricos en el aula de matemáticas emergen de la interacción entre profesor y alumnos.

Normas mediacionales

El uso de medios técnicos y del tiempo, en los que se apoyan los procesos de enseñanza y aprendizaje, está gobernado por reglas que condicionan los procesos de estudio. Este sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales es lo que se designan en el EOS como normas mediacionales.

El uso apropiado de recursos (pizarra, tiza, borrador de pizarra, retroproyector, equipos multimedia, determinados materiales manipulativos, libros de texto de los alumnos y programas informáticos), en las escuelas, está sujeto a reglas técnicas específicas que el profesor debe conocer.

En la mayoría de los casos, el uso de los artefactos (manipulativos concretos o virtuales, programas de cálculo o de gráficas) requiere la apropiación por los estudiantes de configuraciones epistémicas (normas matemáticas) específicas de los tipos de problemas abordables con los mismos. Esta apropiación requiere la implementación de procesos de instrumentación (Artigue, 2002; Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2011) que conviertan tales artefactos en instrumentos de la actividad matemática.

El tiempo es un bien escaso; su gestión es básicamente responsabilidad del profesor, aunque una parte del tiempo de estudio está bajo la responsabilidad de los estudiantes. Tanto la duración de las clases como también el tiempo asignado al desarrollo total del programa de estudio en cada curso, está regulada casi de manera rígida por normas oficiales.

Debido al contrato mediacional, algunos medios como la calculadora, tienen un uso muy restringido en el aula; los apuntes y los libros de texto no pueden utilizarse en situaciones de evaluación; los materiales manipulativos están frecuentemente "prohibidos" en las etapas educativas superiores. Todas éstas son normas mediacionales que condicionan los procesos de estudio.

Lo mismo puede decirse del uso de los distintos espacios de un centro educativo, considerados también como medios. Ciertos conceptos geométricos y métricos pueden requerir para su desarrollo adecuado de un macroespacio, como el patio del colegio. Si el uso de ciertos espacios está restringido en el centro por las normas mediacionales, esto puede suponer una limitación para el aprendizaje matemático. Aún más, existe una regla mediacional según la cual "el alumno sólo puede emplear los medios que el profesor haya puesto antes a su disposición, sólo para el tipo de tareas en las que ha sido utilizado con anterioridad, y sólo del modo enseñado por el profesor".

Normas afectivas

En los procesos de estudio matemático, otra de las dimensiones a tener en cuenta, se refiere a la afectividad, la motivación, las emociones, las creencias y las actitudes. Se dice que el alumno debe estar motivado, tener una actitud positiva, no tener fobia a las matemáticas, lo cual parece obvio. Se dice que el profesor "debe" motivar a los estudiantes, elegir unos contenidos "atractivos" y crear un "clima" afectivo en la clase propicio para el aprendizaje. En el EOS, éstas serían cláusulas genéricas de la faceta afectiva de la dimensión normativa, que no indican el tipo de acciones específicas que pueden estar al alcance del profesor, en el caso de las matemáticas.

La principal motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas parece estar en la elección de los tipos de situaciones-problema matemáticas, las tareas, actividades concretas que el profesor propone a los alumnos, las cuales deben reunir unas características específicas. Además, el "modelo instruccional" que implementa en la clase —tipos de configuraciones y trayectorias didácticas que organiza y gestiona— condiciona las oportunidades de aprendizaje autónomo de los alumnos, y por tanto, su autoestima y compromiso con el estudio.

Una regla afectiva será que el profesor busque o cree situaciones matemáticas ricas, que pertenezcan al campo de intereses de los estudiantes. Otra cláusula afectiva se refiere a la creación de las condiciones para que el alumno acepte la responsabilidad de resolver los problemas, ya que la experiencia personal de resolver un problema es un factor importante que favorece la autoestima del resolutor, además de capacitarle para afrontar nuevos problemas no rutinarios. Este proceso se describe en la TSD como la *devolución* del problema al alumno (Brousseau, 1997) y está en la base de los modelos instruccionales de tipo socio-constructivista. Chevallard, Bosch y Gascón (1997) explican la "falta de motivación" en los siguientes términos: la enseñanza actual no legitima la actividad de los estudiantes y, por lo tanto, estos no se sienten responsables de las respuestas que dan a los problemas que el profesor les plantea. Las respuestas no "afectan" a los estudiantes puesto que no son partícipes ni de la construcción ni de la comunicación de los significados y, por lo tanto, en el mejor de los casos, una vez producida una respuesta, se desvinculan de ella esperando el mensaje de éxito o de fracaso del profesor.

El cumplimiento de estas normas afectivas no deja de tener inconvenientes. Si el profesor no se abstiene en ciertos momentos claves de dar la solución del problema, o de aportar una información específica, el frágil proceso de indagación personal iniciado por un alumno puede verse radicalmente perturbado, con lo que se le puede privar de la autoestima de la propia invención.

El logro de dar sentido a los aprendizajes depende de la influencia de los distintos agentes que participan en el proyecto educativo. El profesor y los estudiantes son sin duda los principales agentes, pero no los únicos, ya que la escuela, la familia, la administración educativa y la sociedad en su conjunto son factores condicionantes del estudio en las instituciones escolares, en sus distintas facetas, incluyendo la afectiva - emocional. Los padres son responsables de crear un ambiente agradable y propicio al estudio en la casa, de valorar positivamente las materias y tareas que proponen los profesores, etc. A nivel del centro educativo, un reglamento de régimen interno excesivamente rígido, o bien otro excesivamente laxo que no pone límite a los desmanes de algunos alumnos, puede desmotivar a otros alumnos. La escuela debe crear un ambiente material y un clima social agradable en la medida de sus posibilidades. Finalmente, la administración educativa y la sociedad en su conjunto también tienen una parte de las obligaciones del contrato afectivo (medios materiales, espacios, etc.). Por ejemplo, la falta de perspectivas de empleo en algunas carreras universitarias es, sin duda, un factor desmotivador para muchos estudiantes.

Como se ve hay una diversidad de factores que intervienen en la faceta afectiva de la dimensión normativa, y por tanto, la complejidad del logro de una alta idoneidad en esta dimensión de los procesos de estudio.

Normas ecológicas

En la perspectiva global que se adopta en el EOS sobre las normas que regulan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no se puede prescindir de aquellas que relacionan la escuela con la sociedad a cuyo servicio se constituye. Tener en cuenta la faceta ecológica de la dimensión normativa implica buscar información sobre el entorno social, político y económico donde se ubica la escuela, ya que éste influye sobre el tipo de prácticas matemáticas que se van a realizar en el aula.

Las normas ecológicas tienen como principal objetivo conseguir dos tipos de competencias en los alumnos. Por una parte, la sociedad encarga a la escuela educar a ciudadanos garantizando la adquisición de los valores de una sociedad democrática, garantizando los derechos de todos y fomentando los deberes cívicos. Por otra parte, el objetivo de la institución educativa es conseguir una formación inicial de profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional.

Las normas ecológicas tienen que ver con los contenidos que se van a enseñar ya que los significados pretendidos que se especifican en las directrices curriculares tratan de contribuir a la formación socio-profesional de los estudiantes. El cumplimiento de los programas es otro requisito que condiciona el trabajo del profesor ya que los aprendizajes logrados por sus estudiantes constituyen el punto de partida de los estudios en cursos posteriores. La obligación de asegurar un determinado nivel de conocimientos y la obligación de informar de él a la sociedad está en el origen de la obligación que tiene el profesor de matemáticas de hacer evaluaciones sumativas que informen a los padres y a la sociedad en general del nivel de logro matemático alcanzado por los estudiantes.

Si bien la obligación de realizar una evaluación sumativa puede considerarse una norma de índole ecológica, el tipo de evaluación elegido por el profesor implica cláusulas de las otras facetas. Un ejemplo se tiene con la incorporación de las nuevas tecnologías. Dicha incorporación es el resultado de la necesidad que tiene la sociedad de que sus ciudadanos sean profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional. Si bien la obligación de incorporar las TIC puede considerarse una cláusula normativa – ecológica el tipo de tecnología de la información, el momento de su uso, etc., implica cláusulas de las otras facetas.

Otro aspecto muy relacionado con la faceta ecológica de la dimensión normativa son las propuestas de cambio en el proceso de instrucción que están asociadas a proyectos de innovación más globales, ya que en la mayoría de los casos dichas reformas se justifican por la necesidad de adaptarse a los cambios sociales y profesionales que se han producido en la sociedad.

Uno de los programas de investigación en Educación Matemática que más ha puesto el acento en la faceta ecológica de las normas —de acuerdo con la clasificación que se propone en este trabajo— es la llamada “Educación Matemática Crítica” (Skovsmose, 1999). Este enfoque propone una agenda de investigación para el estudio de la relación entre educación matemática y democracia. Los aspectos que preocupan a la teoría crítica son, entre otros: 1) preparar a los estudiantes para ser ciudadanos; 2) introducir las matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica los hechos socialmente relevantes; 3) tener en cuenta los intereses de los estudiantes; 4) considerar los conflictos culturales en los que se desarrolla el proceso de instrucción; 5) contemplar los aspectos anteriores sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para que el conocimiento matemático se convierta en una herramienta crítica y 6) dar importancia a la comunicación en el aula, entendida como el conjunto de relaciones interpersonales que son la base de la vida democrática. Otro de los aspectos que más preocupa a la educación matemática crítica son las relaciones entre las matemáticas y la tecnología, la cual, al mismo tiempo que soluciona problemas, genera otros nuevos.

Por último, hay que destacar también las evaluaciones internacionales sobre la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana, como el informe PISA 2003 (OCDE, 2004). En la actualidad, la prensa se hace eco de este tipo de informes y extrae valoraciones sobre los sistemas educativos instando a las instituciones competentes “a tomar medidas ante una situación insostenible”.

Metanormas

En el EOS (D’Amore, Godino & Font, 2007) se propone contemplar también una dimensión metanormativa de los procesos de instrucción. En dicha dimensión se consideran tres grandes bloques: las normas metaepistémicas, las metainstruccionales y las metacognitivas. La figura 2.5 ilustra estos tres bloques de la dimensión metanormativa.

Según estos autores, el profesor quiere que los alumnos se apoyen en una configuración epistémica previa para realizar unas prácticas matemáticas de las que se obtendrá una configuración epistémica emergente; dicha realización estará regulada por la configuración metaepistémica (que coexiste con configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo). Para ello, implementará una configuración instruccional que, a su vez, también estará regulada por una configuración metainstruccional. Por otra parte, el profesor pretende que sus alumnos personalizen las configuraciones epistémicas en configuraciones personales, las configuraciones metaepistémicas en metacognición metamática y las configuraciones instruccionales en metacognición didáctica.

3.2.4.5 Criterios de idoneidad

La introducción en el marco teórico del EOS de la noción de significado de referencia y la adopción de postulados socio-constructivistas para el aprendizaje[1], permiten formular criterios de idoneidad para las distintas facetas implicadas en un proceso de estudio matemático. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) proponen los siguientes criterios:

[1] El aprendizaje como apropiación de significados, participación en comunidades de prácticas y acoplamiento mutuo entre los significados institucionales y personales.

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad interaccional*, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción; el principal indicador empírico de esta idoneidad puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados. Debemos resaltar que estos criterios orientan o “guían” la práctica educativa, pero no *aseguran* el logro de su idoneidad. A su vez, dichos criterios se pueden usar para valorar la idoneidad de procesos de estudio efectivamente implementados. Dicha valoración es el quinto de los niveles de análisis didáctico propuestos en el EOS; se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Los cinco niveles de análisis didáctico propuestos por el enfoque ontosemiótico están pensados para el desarrollo de un análisis didáctico completo que permita describir, explicar y valorar procesos de estudio. Este análisis plantea al menos dos cuestiones metodológicas que es necesario abordar:

1) *Tipo de episodio e información disponible*. ¿Es posible analizar y valorar cualquier proceso de estudio? El esquema propuesto presupone el acceso a

una información "global" del proceso de estudio que quiere ser descrito, explicado y valorado. Sin embargo, esto no será siempre posible, lo cual no excluye la realización de una valoración parcial de la idoneidad de un proceso de estudio. Por ejemplo, para un episodio breve de aula, se puede evaluar la idoneidad interaccional y consecuentemente las normas interaccionales que han regulado el proceso, siempre y cuando se mantenga una vigilancia sobre las conclusiones extraídas[2].

2) *Observación de los procesos de estudio*. La operatividad de los criterios de idoneidad reside en la posibilidad de definir un conjunto de indicadores que permitan valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas.

Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) aportan un sistema de indicadores empíricos que sirve de "guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica". Los criterios de idoneidad, junto con esta guía que los desarrolla, son herramientas útiles para orientar el diseño y la implementación de procesos de estudio y realizar su valoración. A continuación presentamos un breve resumen de estos indicadores:

Idoneidad epistémica

Se puede aumentar su grado presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; asegurando que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

Idoneidad cognitiva

Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por

[2] En el caso de un episodio breve, la identificación de normas no deja de ser cuestionable por no tener información de su recurrencia en el tiempo; a pesar de ello, se puede hacer una inferencia plausible (y una valoración posterior) teniendo en cuenta datos obtenidos al aplicar los niveles 1, 2 y 3 y asumiendo, a su vez, el carácter local de estos datos (como se hace, por ejemplo, en Font y Planas, 2008; Rubio, Font y Planas, 2008).

otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable); procurando incluir actividades de ampliación y de refuerzo; realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional

Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, ¿se le entiende cuando habla?, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.); procurando reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); utilizando diversos recursos retóricos argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos; procurando facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación) etc.

Idoneidad mediacional

Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad emocional

Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

Idoneidad ecológica

Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas.

Los criterios de idoneidad, y el sistema de indicadores que los desarrolla, se pueden utilizar de manera explícita para valorar un proceso de estudio (por ejemplo, en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; De Castro, 2007), pero también pueden estar presentes de manera implícita en la valoración. Ramos y Font (2008) muestran que los profesores en sus reuniones de trabajo, en sus conversaciones informales, cuando valoran los procesos de instrucción que realizan, cuando valoran una innovación, etc., de manera explícita o implícita, utilizan algunos de estos “criterios de idoneidad”.

3.2.5. ¿En qué instituciones se realiza el análisis didáctico?

El modelo de análisis que se pretende desarrollar permite analizar un abanico amplio de procesos de estudio, aunque está pensado, sobre todo, para el análisis de procesos de estudio presenciales realizados en un aula de matemáticas de una institución escolar. Dicha institución puede ser la escuela infantil, la escuela primaria, la escuela secundaria o bien la universidad.

Los participantes en este tipo de análisis didáctico son tanto el profesor como los alumnos en interacción. Para ello, se pretende realizar un estudio global (coral) que proporciona una visión general de las prácticas realizadas. Aunque el objetivo primordial no es proporcionar un análisis particular del significado personal de los objetos matemáticos de cada estudiante, no se renuncia a caracterizar, dentro de lo posible, el de algún alumno particular.

3.2.6. ¿Qué resultados se obtienen?

El principal resultado esperado es la valoración fundamentada de la idoneidad de un proceso de estudio implementado, mediante la aplicación de un modelo de análisis que permite un análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. Antes de responder a la pregunta “¿qué se ha hecho mal y cómo se debería mejorar?”, el tipo de análisis que se pretende desarrollar y aplicar permite responder en primer lugar a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’. Se entiende, por tanto, que el estudio exhaustivo de aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar posteriormente valoraciones fundamentadas sobre esta situación. La noción de idoneidad didáctica y las herramientas para su análisis y valoración que se han introducido permiten establecer un puente entre una didáctica descriptiva-explicativa y su aplicación para la valoración de procesos de estudio.

3.2.7. ¿Qué implicaciones tienen los resultados para la mejora de los procesos de instrucción?

El modelo de análisis didáctico aplicado en este trabajo es útil para la investigación sobre la práctica docente de los profesores de matemáticas. Por otra parte, también puede ser útil para el colectivo de profesores interesados en reflexionar sobre su propia práctica. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. Para el diseño de estos programas son necesarias herramientas para el análisis de la práctica docente.

4. LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA EN EL ESTADO ESPAÑOL Y EN EL PERÚ

En este apartado se hace una revisión de algunas investigaciones sobre la formación de profesores de secundaria, en España y en el Perú relacionadas con el desarrollo de la competencia en análisis didáctico.

4.1. Estudios realizados en España

La investigación sobre la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas de secundaria en el estado español es escasa, básicamente porque hasta el curso 2010-2011 no se ha implementado el máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria de Matemáticas[3] (máster de FPSM a partir de ahora)

[3] ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. BOE núm. 312 del 29 de diciembre de 2007.

Un buen indicador de la investigación realizada en España sobre la formación del profesorado de secundaria de matemáticas son las comunicaciones y ponencias presentadas a los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En la revisión que hace Font (2011c) de dichas comunicaciones y ponencias, se señalan dos líneas de investigación con relación a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. Por una parte, se observa una línea de investigación sobre concepciones y creencias del profesorado de secundaria, sobre todo del profesorado en activo (Contreras, 2001; Gámez, Moreno & Gil, 2003; Vicario & Carrillo, 2005; Pérez & Guillén, 2007; Pérez & Guillén, 2008) y, por otra parte, una línea de investigación sobre el desarrollo y evaluación de competencias profesionales en la formación inicial del profesorado de secundaria de matemáticas (Rico, Gómez, Moreno, Romero, Lupiáñez, Gil & González, 2003; Gómez & Rico, 2003; Flores, 2004; Azcárate, 2004; Ortiz, Rico & Castro, 2004; Peñas & Flores, 2004; Lupiáñez & Rico, 2006; González & Gómez, 2008). Con relación a esta última línea de investigación se observan algunas investigaciones que se han interesado por la enseñanza y aprendizaje de procesos concretos en la formación inicial de profesores de secundaria. Por ejemplo, Ortiz, Rico y Castro (2004) investiga sobre el proceso de modelización con calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal, mientras que Lupiáñez y Rico (2006) investiga sobre el análisis didáctico en la formación de profesores como herramienta para desarrollar y evaluar competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares.

La investigación sobre el desarrollo de la competencia en análisis didáctico en España en profesores de secundaria se desarrolla básicamente a partir de dos grupos de investigación. Por una parte, se tiene un grupo, cuyo principal representante es el Dr. Luis Rico de la Universidad de Granada, interesado en un análisis didáctico de procesos de instrucción que incluye el análisis del contenido matemático (Gómez, 2006) a partir de tres dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (situaciones-problemas). Por otra parte, tenemos otro grupo que utiliza como principal marco teórico el EOS tal como se ha descrito en el apartado anterior.

4.2. Estudios realizados en el Perú

En la revisión de estudios realizados en el Perú, que son muy pocos, podemos observar también dos líneas de investigación. Por una parte, se han realizado investigaciones sobre el rendimiento y dificultades de comprensión de los estudiantes para profesor o bien de los profesores en activo (Aparicio & Bazán, 2006; Aparicio, Bazán & Abdounur, 2004; Carreño & Climent, 2010) y, por otra parte, se han realizado investigaciones sobre concepciones y creencias del profesorado de secundaria (Zapata & Blanco, 2007; Zapata, Blanco, Lorenzo & Contreras, 2008). No hemos hallado en nuestra revisión ninguna investigación con profesores del Perú relacionada con el desarrollo de la competencia profesional en análisis didáctico de procesos de instrucción.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN DE LAS FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Resumen

En este capítulo se explican primero las fases en las que se ha desarrollado esta investigación: 1) Planteamiento del Problema, 2) Marco teórico, 3) Formulación definitiva de objetivos y diseño metodológico para cada objetivo, 4) Aportes teóricos, 5) Diseño e implementación de los experimentos de enseñanza, 6) Conclusiones. A continuación se explica con detalle el proceso seguido en las fases 1-3. Las fases 4-6 y la metodología utilizada para desarrollar cada una de ellas se explican con detalle en los capítulos 4-12 que tratan sobre los aportes teóricos (capítulos 4-6), el diseño e implementación de los experimentos de enseñanza (capítulos 7-12) y las conclusiones (capítulo 13).

1. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación se muestra un esquema metodológico general en el que se presentan las cinco fases desarrolladas en esta investigación:

Fases de la Investigación	**Funciones**
Fase 1. Planteamiento del Problema	Comunicar sobre el objeto de estudio, enunciar las preguntas de investigación y formular los objetivos de la investigación.
FASE 2. Marco teórico	Revisar y sintetizar, en forma reflexiva, la literatura pertinente al ámbito correspondiente (análisis didáctico y conocimiento del profesor).
FASE 3. Formulación definitiva de	Reformulación de los objetivos iniciales de acuerdo con el marco teórico adoptado y concreción de la metodología que sustenta la investigación realizada y le otorga validez

objetivos y diseño metodológico	epistemológica.
FASE 4. Aportes teóricos	- Determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003 y el tipo de evaluación de competencias que proponen en dicho informe. - Encajar los procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico (EOS). - Presentar la propuesta de una evaluación analítica de competencias matemáticas.
FASE 5. Diseño e implementación de los experimentos de enseñanza	Diseñar e implementar: - Experimentos de enseñanza o estudios de diseños sobre evaluación de competencias matemáticas usando constructos PISA. - Experimentos de enseñanza o estudios de diseños basados en análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (EOS) como paso previo para la evaluación de competencias matemáticas propuestas en los currículos oficiales.
FASE 6. Conclusiones	Sintetizar el trabajo realizado y recapitular en torno a las preguntas de investigación

Tabla 3. 1. Esquema metodológico general de la investigación

Fuente: Elaboración propia

1.1. Desarrollo de la Fase 1 de la investigación

La primera fase es la referente al planteamiento del problema de investigación. Un primer planteamiento en esta investigación se muestra en la tabla 3.2:

Ámbito temático	Problema de investigación	Preguntas de investigación	Objetivos generales
Competencias del profesorado (1) en el Análisis didáctico de prácticas,	Los currículos por competencias implican el conseguir que los profesores desarrollen la	¿Son competentes los profesores en la evaluación de las competencias del informe PISA 2003 con las	Determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores en la evaluación de las competencias

objetos y procesos matemáticos. (2) en la evaluación de la competencia matemática de los alumnos	competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas de sus alumnos.	herramientas teóricas que propone dicho informe?	matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos.
		¿Cuáles son los factores que inciden o condicionan esta competencia de los profesores?	Determinar algunos factores que están relacionados con el desarrollo de dicha competencia profesional.
		¿Cómo se podría desarrollar dicha competencia?	Diseñar e implementar ciclos formativos que desarrollen dicha competencia profesional.

Tabla 3. 2. Planteamiento del Problema: Preguntas de investigación (primera formulación) y objetivos

Fuente: Elaboración propia

Este planteamiento inicial fue ampliándose en la medida en que transcurrió esta investigación. Así un vez determinado el marco teórico, se pudieron redefinir y concretar los objetivos iniciales, se establecieron objetivos específicos que condujeron a tener que pensar en las unidades de estudio, los campos en los que se recolectarían los datos, los instrumentos y técnicas para la recolección de los datos y el análisis de los mismos.

1.2. Desarrollo de la Fase 2 de la investigación

En esta fase, correspondiente a la delimitación del marco teórico, se tomó como primera opción utilizar como principal referente teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

A continuación se realizó, por una parte, una síntesis de dicho enfoque y, por otra parte, una revisión de las investigaciones sobre formación de profesores, dedicando más atención a las que se han ocupado de esta temática usando como marco teórico el EOS y las que se han interesado por la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas del estado español y del Perú.

La metodología en esta fase ha consistido, básicamente, en un análisis y síntesis de fuentes documentales.

1.3. Desarrollo de la Fase 3 de la investigación

Hemos partido de la hipótesis de que, tanto la competencia matemática, como la competencia en el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos son dos componentes de un "saber de fondo" que permite a los profesores la evaluación y el desarrollo de la competencia matemática de sus alumnos. Y que, además, dicho saber de fondo se nutre de una reflexión que va más allá de los estudios del grado de matemáticas o de la experiencia docente. Nos referimos a una reflexión profunda sobre la propia práctica profesional o bien a la reflexión desencadenada, por ejemplo, por unos estudios de máster sobre Didáctica de la Matemáticas.

A partir de esta hipótesis reelaboramos la primera formulación de las preguntas y de los objetivos dentro del marco teórico del EOS de la siguiente manera:

Ámbito temático	**Problema de investigación**	**Preguntas de investigación**	**Objetivos generales**	**Objetivos específicos**	**Categorías**	**Tipo de metodología**
1) Competencias del profesorado en: El análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos 2) Evaluación de competencias matemáticas	Los currículos por competencias implican el conseguir que los profesores desarrollen la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas de sus alumnos.	1. ¿Cuáles son las limitaciones que presentan los constructos teóricos del informa PISA 2003 para realizar la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias consideradas en dicho proyecto?	1. Determinar las limitaciones que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003 para realizar la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias matemáticas consideradas en dicho proyecto.	1.1 Determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003.	Limitaciones Imprecisiones Críticas	Estudio teórico con aportaciones personales. Análisis de contenido
				1.2 Mostrar el tipo de evaluación de competencias que se propone en dicho informe y, también, su posición a la realización de una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas.	Tipos de evaluación	Estudio teórico con aportaciones personales. Análisis de contenido
		2. ¿Es posible desarrollar una técnica de evaluación analítica y global de competencias PISA 2003, basada en la	2. Desarrollar el marco teórico EOS mediante una tipología de procesos que permita hacer operativo el nivel de análisis de procesos propuesto en dicho enfoque.	2.1 Revisar las diversas investigaciones sobre procesos realizadas en el marco del EOS.	Definiciones/ Tipología Procesos: Algoritmización, significación, representación, particularización, generalización, personalización,	Estudio teórico con aportaciones personales

Ámbito temático	Problema de investigación	Preguntas de investigación	Objetivos generales	Objetivos específicos	Categorías	Tipo de metodología
		técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas (POPM) que propone el EOS?			institucionalización, idealización; etc. Megaprocesos: Resolución de Problemas; Modelización; Comunicación; Procesos de conexión.	
				2.2 Desarrollar la tipología de procesos propuesta en el EOS: 1) procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales, 2) otros procesos y 3) megaprocesos.	Tipificación: tabla de procesos	Estudio teórico con aportaciones personales
					Ejemplos: Prob. Mediatriz y Desierto	Estudio teórico con aportaciones personales
			3. Desarrollar una propuesta de evaluación analítica y global de competencias PISA 2003 basada en la técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas que propone el EOS.	3.1 Realizar el análisis de Prácticas, Objetos y procesos matemáticos de la solución de un estudiante a un problema PISA específico.	Análisis de Prácticas, Objetos y procesos matemáticos	Estudio teórico con aportaciones personales
				3.2 Realizar la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas de un estudiante.	Evaluación analítica y global de competencias PISA 2003	Estudio teórico con aportaciones personales

Ámbito temático	Problema de investigación	Preguntas de investigación	Objetivos generales	Objetivos específicos	Categorías	Tipo de metodología
		3. ¿Cuál es el nivel de competencia que manifiestan los profesores en la evaluación analítica y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos, con los constructos del informe PISA, teniendo en cuenta los siguientes aspectos: competencia matemática, experiencia docente y	4. Determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos	4.1 Determinar el nivel de competencia que manifiestan futuros profesores de España – con mucha competencia matemática, con nula experiencia docente y sin estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas – en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.	Estudiantes de la especialidad de Matemáticas (Futuros profesores de secundaria)	Experimento de enseñanza
				4.2 Determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú –con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas – en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.	Profesor de secundaria (Estudiantes de Maestría en la enseñanza de las Matemáticas)	

Ámbito temático	Problema de investigación	Preguntas de investigación	Objetivos generales	Objetivos específicos	Categorías	Tipo de metodología
		Formación en Didáctica de las Matemáticas a nivel de postgrado (máster, magister o similar)?				
		4. ¿Cómo diseñar e implementar ciclos formativos que	5. Diseñar e implementar un ciclo formativo en el Máster de FPS de matemáticas que desarrolle primero el análisis de POPM y después la evaluación analítica y global de	5.1 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el Máster de FPS de matemáticas que desarrolle el análisis de POPM.	Motivación Técnica POPM Evaluación de técnica Valoración	Experimento de enseñanza
				5.2 Determinar si la inferencia de procesos que realizan, a partir de respuestas a tareas, los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos		

Ámbito temático	Problema de investigación	Preguntas de investigación	Objetivos generales	Objetivos específicos	Categorías	Tipo de metodología
		desarrollen primero el análisis de POPM y después la evaluación analítica y global de competencias matemáticas?	competencias matemáticas.	matemáticos, es coincidente, o como mínimo no contradictoria, con la se realiza utilizando la tipología de procesos matemáticos realizada a partir del marco teórico del EOS.		Experimento de enseñanza
				5.3 Determinar si hay alumnos con competencia matemática que después del ciclo formativo para el análisis de POPM son capaces por propia iniciativa de realizar una evaluación analítica y global de competencias.		
				5.4 Determinar si los alumnos consideran que el análisis de POPM es útil para la evaluación de competencias matemáticas.		
				5.5 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el máster de FPS de matemáticas que desarrolle la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del análisis de POPM.		
				5.6 Determinar si los alumnos consideran que la evaluación		

Ámbito temático	Problema de investigación	Preguntas de investigación	Objetivos generales	Objetivos específicos	Categorías	Tipo de metodología
				analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del análisis de POPM es útil para la evaluación de competencias.		

Tabla 3.2. Problema, preguntas de investigación (reformulación), Objetivos generales y específicos, categorías y tipo de metodología
Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 4

INFORME PISA 2003. AMBIGÜEDADES Y FORMA DE EVALUACIÓN

Resumen

Este capítulo tiene como principal objetivo determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003; mostrar el tipo de evaluación de competencias que se propone en dicho informe y, también, mostrar su posición contraria a la realización de una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas (objetivo 1).

En este capítulo se justifican 1) dónde radica la ambigüedad en los constructos teóricos del informe PISA 2003, que se amplifica en la traducción al castellano y 2) que la técnica de evaluación de competencias que se realiza en las pruebas PISA 2003 permite realizar una evaluación a priori de la tarea y una evaluación global de la respuesta del alumno; pero no se plantea una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas directamente a partir del análisis de los protocolos de las respuestas abiertas de los alumnos.

El informe PISA 2003 ha generado numerosas voces críticas que han puesto de manifiesto algunas de sus limitaciones y ambigüedades. Hopmann y Brinek (2007) afirman que se han producido críticas relacionadas con aspectos sociopolíticos, como por ejemplo los que:

- Señalan que PISA no cubre todo el conjunto de la problemática educativa.
- Señalan el hecho de que PISA está financiada por compañías privadas que quieren unos trabajadores adaptados a las necesidades del mercado.
- Consideran que PISA se ha convertido casi como un representante en cada país de un gobierno de tipo neoliberal.

Ha habido debates sobre la validez metodológica del informe PISA, pero mayoritariamente han sido debates internos dentro de la comunidad que ha desarrollado dicho informe. En cambio se han producido menos debates sobre la metodología del informe PISA fuera de la comunidad que lo ha desarrollado. En este debate, el libro “PISA According to PISA” (Hopmann & Brinek, 2007) es probablemente el primer estudio internacional independiente enfocado a la discusión metodológica de PISA.

En este capítulo nos vamos a limitar a dos aspectos muy específicos. En concreto, se va a justificar que:

1) Hay una cierta ambigüedad en los constructos teóricos del informe PISA 2003, que se amplifica en la traducción al castellano.

2) La técnica de evaluación de competencias que se realiza en las pruebas PISA 2003 permite realizar un evaluación a priori y global; pero no se plantea una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas directamente a partir de los protocolos de las respuestas abiertas de los alumnos.

1. METODOLOGÍA

La metodología ha consistido, básicamente, en un análisis de fuentes documentales (Informe PISA 2003 en castellano y en inglés y otras referencias bibliográficas), realizando la doctoranda un análisis del contenido como técnica de interpretación de textos.

Según Andréu (2002), el análisis de contenido se basa en la lectura textual o visual de la información recolectada (escritos, trascripción de entrevistas, discursos, protocolos de observación, documentos, videos, etc.). Se trata de una técnica que combina la recolección de datos (documentos en nuestro caso) y la interpretación o análisis de los mismos.

El tipo de análisis de contenido que se realizó no quería comprobar ninguna hipótesis sino más bien explorar el significado o significados del término competencia en el informe PISA 2003 y los documentos relacionados con éste, así como el tipo de evaluación que propone dicho informe.

Se siguieron las siguientes etapas. En primer lugar, se llevó a cabo una lectura previa de los documentos para conocer el material, llamada lectura flotante por Bardin (1977) — citado por Gómez (2000) —. Se trata de una lectura atenta realizada varias veces, y a la vez rápida, mediante la cual, la doctoranda se familiarizó con el contenido del documento. En segundo lugar, de esta lectura, (1) se conjeturó que había más de un significado diferente del término competencia, (2) se recogió y organizó el material a través de una tabla previa a la presentada en este capítulo (Tabla 1: Distintos significados del término competencia) y se continuó con las lecturas, familiarizándose más con el material, (3) se seleccionaron los documentos a trabajar (sobre todo el marco teórico del proyecto PISA 2003, en español e inglés), y los indicadores sobre los cuales se basaría la interpretación final. Por último, se agruparon, las diferentes concepciones de competencia matemática en categorías y también las "ambigüedades", errores u omisiones del concepto competencia obteniéndose como resultado la tabla final (Tabla 1). Las unidades presentadas no fueron cuantificadas, ya que este no era el objetivo. No se usó un programa de texto ni ningún programa informático de análisis de contenido, sino que se siguió el método tradicional (lectura directa determinando los párrafos (con el número de página) que ilustraban los diferentes significados.

Se realizó un proceso de triangulación entre la doctoranda y el director de tesis que permitió concluir que eran pertinentes (1) los documentos escogidos (marco teórico del proyecto PISA 2003, en español e inglés), (2) las unidades escogidas (competencia y evaluación) y (3) las categorías propuestas por la doctoranda (significados, errores y omisiones para las competencias y a priori/posteriori, analítica/global y formativa/sumativa para la evaluación), puesto que los documentos escogidos corresponden al objetivo del análisis y todos los significados de competencia encontrados encajaban dentro de alguna de las categorías propuestas.

2. EL PROBLEMA DE LA TRADUCCIÓN

Nuestro documento de referencia principal es la traducción del documento *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematicas, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills* (Organisation for economic co-operation and development –OECD–, 2003). El motivo de optar por la traducción, y no por el original en inglés, es que la muestra de profesores que han participado en esta investigación es de habla castellana y su acceso a la información de las pruebas PISA 2003 es en esta lengua. Tal como ya ha sido señalado por diferentes autores (por ejemplo, Puig, 2006) una primera causa de la ambigüedad del marco teórico está relacionada con el hecho de que se maneja una traducción, que, como toda traducción, implica una cierta pérdida de precisión respecto del documento original.

La lectura directa y comparada de la versión original (OECD, 2003) y de la traducción nos ha permitido detectar errores de traducción que son fuente de confusión y de ambigüedad. Estos errores se han producido a pesar del esfuerzo que, según se explica en el propio documento, se han hecho para evitarlos: "El proyecto OCDE/PISA se basa en: i) mecanismos sólidos para garantizar la calidad de la traducción, (…)". (Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo –INECSE–, 2004, p. 16).

Y de la existencia de la figura de un coordinador nacional cuyas funciones eran:

> Los *países participantes* llevan a la práctica el proyecto OCDE/PISA a escala nacional a través de los Coordinadores Nacionales del Proyecto de acuerdo los procedimientos acordados. Los coordinadores nacionales desempeñan un papel fundamental a la hora de garantizar la máxima calidad en la aplicación del proyecto y verifican y evalúan los resultados de los estudios, análisis, informes y publicaciones. (INECSE, 2004, p.24).

2.1. El problema de la traducción del marco teórico

A continuación documentamos algunas de las ambigüedades de la traducción relacionadas con el uso del término *competencia* con distintos significados (polisemia) y también algunos errores que tienen cierta relevancia.

Texto en español	Texto en inglés	Observación
"…. en PISA 2003 se incide en la **competencia matemática**, definida como la capacidad de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria." (INECSE, 2004, p. 14)	"… the focus of PISA 2003 is now of **mathematical literacy**, defined as the capacity of the student to identify, understand and engage in mathematics and to make well-founded judgements about the role that mathematics plays in the life" (OECD, 2003, p. 7)	En la versión en castellano se define el término **competencia matemática** como capacidad de los estudiantes y en el documento original en inglés la **capacidad** es la referida a la alfabetización matemática. En este caso, se observa que se usa competencia matemática como una **finalidad de la enseñanza**, cuando se evalúa ésta (algo que se quiere alcanzar).
"Se dispusieron también sendas escalas de **competencia matemática** y de competencia científica, aunque sin ser divididas en niveles de dificultad, debido al menor volumen de datos recogidos en las áreas de conocimiento menores" (INECSE, 2004, p.23)	"**A proficiency** scale was also available for mathematical and scientific literacy, though without levels thus recognising the limitation of the data from minor domains" (OECD, 2003, p.18)	En la versión en castellano se hace uso del término competencia matemática cuando se evalúa el **nivel alcanzado** (rendimiento) por el estudiante, **señalando niveles de dominio** en las tareas de hacer matemáticas.

Texto en español	Texto en inglés	Observación
"El *proceso* matemático, definido mediante las competencias matemáticas generales" (INECSE, 2004, p.21) "Los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas se conocen como *competencias matemáticas*." (INECSE, 2004, p.34) "Este tipo de resolución de problemas exige a los estudiantes que se valgan de las **destrezas** y **competencias** que han adquirido a lo largo de su escolarización y sus experiencias vitales. En el proyecto OCDE/PISA, el **proceso** fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real se denomina *matematización*." (INECSE, 2004, p.39)	"The *process* of mathematics as defined by general mathematical competencies." (OECD, 2003, p.16) "The mathematical processes that the student apply as they attempt to solve problems are referred to as *mathematical competencies*." (OECD, 2003, p.31) "Such problem solving requires to student to use the skills and **competencies** they have acquired through schooling and life experiences In OECD/PISA the fundamental **process** that student use to solve real-life problems is referred as *mathematisation*." (OECD, 2003, p.38)	Tanto en las versiones en castellano como en inglés, se puede observar que el término competencias matemáticas, se definen como un **conjunto de procesos cognitivos** generales que caracterizan el **modo de entender el hacer matemáticas.**
"El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres *grupos de competencia*: el grupo de *reproducción*, el grupo de *conexión* y el grupo de *reflexión*." (INECSE, 2004, p.42)	"OECD/PISA has chosen to describe the cognitive activities that these competencies encompass according to three competency cluster: the *reproductions* cluster, the *connections* cluster and the *reflections* cluster." (OECD, 2003, p.41)	En ambas versiones se establecen tres grupos de competencia (niveles de complejidad) respecto de las competencias generales requeridas. El Informe PISA establece ***grupos de competencias***, y en este caso se distinguen estos grupos por **las demandas cognitivas de un alumno ideal implicadas en las tareas propuestas**.

Tabla 4.1. Distintos significados del término competencia
Fuente: Elaboración propia

Texto en español	Texto en inglés	Observación
“**Las matemáticas** se evalúan teniendo en cuenta los puntos siguientes: El *contenido* matemático, … El *proceso,*….matemático… Las *situaciones*……” (INECSE, 2004, pp. 20-21)	“**Mathematical literacy** is assessed in relation to: The mathematical *content*… The *process* of Mathematics… The *situations*…” (OECD, 2003, pp.15-16)	En la traducción en castellano, se observa que lo que se evalúa son las matemáticas, cuando lo que se propone evaluar es la alfabetización matemática (cultura matemática del alumno), según el informe OCDE/PISA.
El *proceso* matemático, definido mediante las competencias matemáticas generales. Éstas incluyen el empleo del lenguaje matemático, la construcción de modelos matemáticos y las **destrezas de solución de problemas**. No obstante, dichas destrezas no se evalúan mediante preguntas distintas… (INECSE, 2004, p.21)	The *process* of mathematics as defined by general mathematical competencies. This includes the use of mathematical language, modelling and problem solving skills. Such skills, however, are not separated out on different test items……(OECD, 2003, p.16)	En la traducción en castellano solo se hace referencia a las destrezas al resolver problemas, cuando debe mencionarse también las destrezas al usar el lenguaje matemático y al modelar.
“la competencia matemática no debe limitarse al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, aunque, lógicamente, debe incluirlos, ni a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con determinados métodos.” (INECSE, 2004, p. 28)	“…mathematical literacy cannot be reduced to, but certainly presupposes knowledge of mathematical terminology, facts and procedure as well as skills in performing certain operation or carrying out certain methods ” (p.25)	En la traducción del término “mathematical literacy” por competencia matemática, se observa que competencia matemática no solo son procesos sino también conocimiento de objetos matemáticos. (definiciones, procedimientos, propiedades, etc.). Esta es la definición que se ha adoptado en varios países.
“Las **matemáticas** (que se tratan en el Capítulo I) tienen que ver con la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y transmitir ideas de un	“**Mathematical literacy** (elaborated in Chapter I) is concerned to the ability of the students of analyse,	Claramente, se observa, que de manera errónea se “definen” las matemáticas al traducir mathematical literacy como

Texto en español	Texto en inglés	Observación
modo efectivo al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones" (INECSE, 2004, p. 20) "En este nuevo milenio, mucha gente considera las **matemáticas** como la ciencia de las regularidades (en un sentido general)". (INECSE, 2004, p.35)	reason, and communicate ideas effectively as they pose, formulate, solve, and interpret solutions of problems to mathematical problem in a variety of situations" (OECD, 2003, p.15) At the time of the new millennium, many see **mathematics** as the science of the pattern (as the general sense). (OECD, 2003, p.35)	matemáticas. En el mismo documento se vuelve a definir las matemáticas, con más sentido.
"Una manera de hacerlo sería analizar los requisitos de cada pregunta y luego considerar cada una de **las competencias** para la pregunta en cuestión: uno de los tres grupos proporcionará la descripción más ajustada de los requisitos de la pregunta en relación a esa competencia. " (INECSE, 2004, p.48)	"One way to do this would be to analyse the demands of the item, then to rate each of **the eight competencies** for that item, according to which of the three clusters provided the most fitting description of item demands in relation to that competency" (OECD, 2003, p. 49)	En la versión en castellano se omite la palabra ocho, que puede crear ambigüedad al identificarse también competencias como procesos cognitivos de la matematización.

Tabla 4.2. Algunos errores u omisiones en la traducción
Fuente: Elaboración propia

Es muy significativa la traducción que se hace de mathematical literacy como competencia matemática. En el caso de la traducción al catalán[1] se ha optado por alfabetismo matemático descartando explícitamente la traducción por competencia matemática. Nosotros estamos de acuerdo con esta última interpretación porque la palabra alfabetismo se deriva del adjetivo alfabeto creado por analogía con el sustantivo analfabeto y porque

[1] Acta del Consell Supervisor núm. 497 (29 d'octubre de 2009). TERMCAT, Centro de Terminología de la Direcció General de Política Lingüística del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya (España) y el Institut d'Estudis Catalans.

la palabra alfabetismo es contrapuesta a la de analfabetismo, manteniendo de esta manera el significado que se otorga en la palabra inglesa literacy.

2.2. El problema de traducción de los enunciados de los ítems

Un problema de traducción, diferente al anterior, es el de la traducción de los enunciados de los problemas propuestos a los alumnos.

Los autores del informe PISA reconocen el impacto que los problemas de lenguaje pueden tener sobre el desempeño y advierten del cuidado que se debe tener al traducir los enunciados de los problemas. Ahora bien en el caso de España. El problema de la traducción se ha producido en la traducción del enunciado de algún problema. Un buen ejemplo es el caso del problema del carpintero. Dicho problema se tradujo mejor al castellano que al catalán y los resultados en Cataluña fueron la mitad de los obtenidos en España (INECSE, 2005, p. 36).

Carpintero: pregunta 8

M266Q01		Aciertos	%
Subescala	Espacio y forma	*OCDE*	20,0
Situación	Educativa	*España*	12,9
Competencia	Conexiones	*Castilla y León*	15,4
Dificultad	687 (nivel 6)	*Cataluña*	7,0
		País Vasco	16,2

Figura 4.1. Resultados problema del carpintero

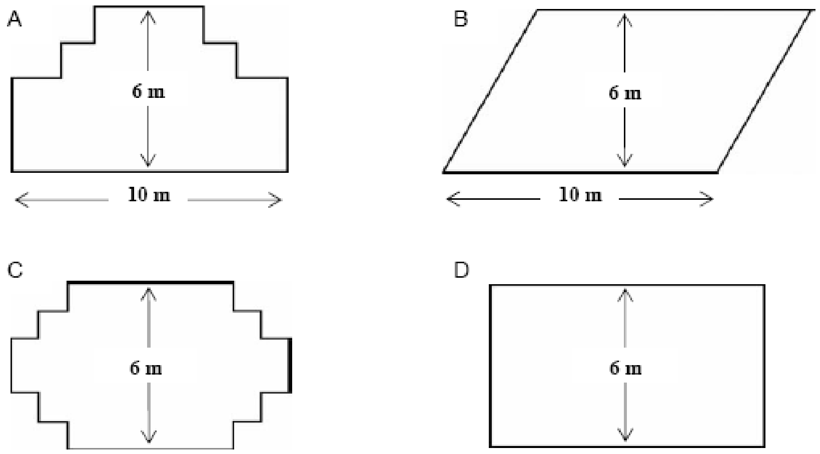
Fuente: INECSE (2005)

En la traducción al catalán (Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu –CSASE–, 2005, p. 23) no se tuvieron en cuenta las pautas que se dieron para la traducción, que si se respetaron en la traducción al castellano (INECSE 2005, p.36). En concreto, en las pautas de traducción se dice explícitamente que palabras como "contorno" o "rodear" tienen que aparecer en el enunciado (http://bildungsstandards.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/bss.bildung-rp.de/downloads/Disk/PISA/PISA-2003-Aufgaben/Mathematik/Math-Englisch/M266Crntr_Eng3.pdf)

CARPENTER

Question 1: CARPENTER *M266Q01*

A carpenter has 32 metres of timber and wants to make a border around a garden bed. He is considering the following designs for the garden bed.



Circle either "Yes" or "No" for each design to indicate whether the garden bed can be made with 32 metres of timber.

Garden bed design	**Using this design, can the garden bed be made with 32 metres of timber?**
Design A	Yes / No
Design B	Yes / No
Design C	Yes / No
Design D	Yes / No

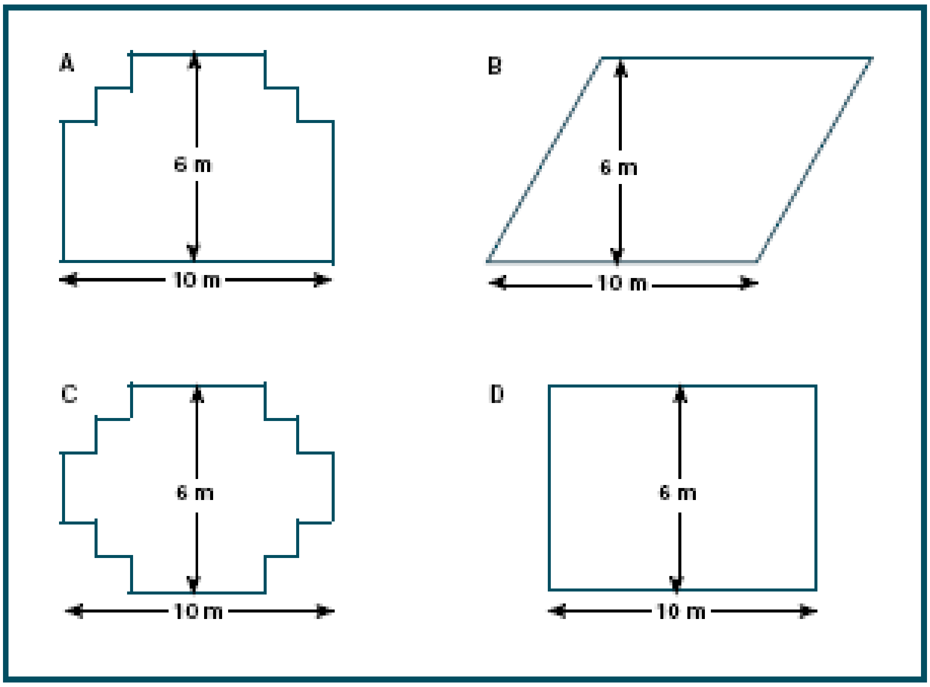
Translation note: If the term "garden bed" is unfamiliar to the students in your country, you can change this to other equivalent terms, e.g., "vegetable patch". But DO NOT change this term to a structure that is 3-dimensional such as "fence" or "shed" (i.e., objects with height as well as perimeter). You should also use words such as "around" or "enclose" to indicate that it is the perimeter that is under consideration.

Figura 4.2. Enunciado en catalán del problema del carpintero
Fuente: PISA/OECD (2004)

FUSTER

Pregunta 1: FUSTER (M266Q01)

Un fuster té 32 metres de fusta i vol construir un parterre en el jardí. Per fer-ho, imagina els dissenys següents:



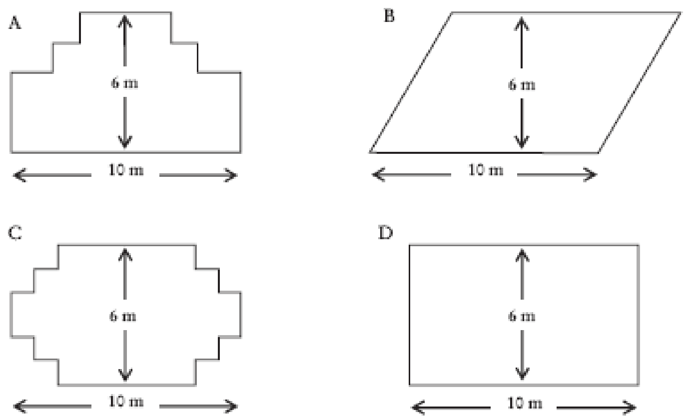
Encercla «sí» o «no» per a cada disseny per indicar si es pot tapiar o no el parterre amb els 32 metres de fusta.

Disseny del parterre	Amb aquest disseny es pot tapiar o no el parterre, amb els 32 metres de fusta?
Disseny A	sí / no
Disseny B	sí / no
Disseny C	sí / no
Disseny D	sí / no

Figura 4.3. Enunciado en catalán del problema del carpintero
Fuente: CSASE (2005)

Pregunta 8: CARPINTERO M266Q01

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Rodea con un círculo *Sí* o *No* para indicar si, para cada diseño, se puede o no se puede construir el parterre con los 32 metros de madera.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	*Sí / No*
Diseño B	*Sí / No*
Diseño C	*Sí / No*
Diseño D	*Sí / No*

Figura 4.4. Enunciado en castellano del problema del carpintero
Fuente: INECSE (2005)

3. AMBIGÜEDAD DE LOS CONSTRUCTOS TEÓRICOS DEL INFORME PISA 2003

En este apartado analizamos algunos aspectos ambiguos de los constructos teóricos contemplados en el informe PISA 2003

3.1. Competencias matemáticas y procesos matemáticos

Ya hemos comentado en el apartado 1 los diferentes significados que se conceden al término competencia, ahora nos queremos centrar en la interpretación de la competencia como proceso: "Los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas se conocen como *competencias matemáticas*." (INECSE, 2004, p.34)

Después de explicar cómo el contenido matemático del problema se clasifica de acuerdo a las siguientes categorías: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, incertidumbre, el documento explica que el proceso esencial de las matemáticas es el proceso de matematización que se descompone en los siguientes cinco pasos (subprocesos) (INECSE, 2004, p. 39):

> (1) Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
>
> (2) Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.
>
> (3) Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello potencia los rasgos matemáticos de la situación y transforma el problema real en un problema matemático que la representa fielmente.
> (4) Se resuelve el problema matemático.
> (5) Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

Los subprocesos 1, 2 y 3 permiten traducir el problema de la «realidad» a las matemáticas y este último subproceso se puede descomponer en otros (INECSE, 2004, p. 40):

> Este proceso engloba actividades como:
>
> - identificar lo elementos matemáticos pertinentes en relación a un problema situado en la realidad;
> - representar el problema de un modo diferente, organizándolo entre otras cosas de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones apropiadas;
> - comprender las relaciones entre el lenguaje utilizado para describir el problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para entenderlo matemáticamente;
> - localizar regularidades, relaciones y recurrencias;
> - reconocer aspectos que son isomórficos con relación a problemas conocidos;
> - traducir el problema en términos matemáticos, es decir, en términos de un modelo matemático (De Lange, 1987, pág. 43).

De la misma manera se descomponen en otros subprocesos los subprocesos 4 y 5 del proceso de matematización.

En nuestra opinión nos hallamos ante un hecho muy relevante que es la introducción del megaproceso de matematización como proceso esencial de las matemáticas y su descomposición en otros procesos. Dicho de otra manera, el informa PISA 2003 se basa en una reflexión profunda sobre los procesos matemáticos realizada, básicamente, por el grupo de investigadores relacionados con el instituto Freudenthal y, en cierta manera, obliga a la comunidad de investigadores en Educación Matemática a realizar una reflexión profunda sobre los procesos matemáticos. En nuestro caso dicha reflexión se realiza en el capítulo 5 utilizando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.

El problema de la existencia de un "territorio compartido" entre los constructos "proceso" y competencia" conlleva otros aspectos que resultan problemáticos. Así como hay una superposición entre los diferentes procesos, también hay una superposición entre las competencias (casi todas tienen un "territorio en común") y hay dos que, más que competencias, serían megacompetencias (la resolución de problemas y a la modelización).

3.2. Grupos de competencias o niveles de complejidad

A continuación el documento justifica la introducción del constructo "grupos de competencia" (llamados también niveles de complejidad en otros documentos) por razones de simplicidad y comodidad, debido a que se tratan de unas pruebas que se tienen que aplicar a muchos países diferentes (INECSE, 2004, p. 42):

> Para describir y transmitir de manera productiva las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, es necesaria cierta estructura. Un modo de ofrecerla de una manera comprensible y manejable es describir grupos de competencias a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos.

Después se definen los tres grupos (reproducción, conexión y reflexión) y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias. A continuación reproducimos lo que se dice del grupo de reproducción (INECSE, 2004, p. 42-43):

> *El grupo de reproducción*
>
> Las competencias de este grupo implican esencialmente a la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellas que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.
>
> 1. *Pensar y razonar.* Formular las preguntas más simples («¿cuántos...?», «¿cuánto es...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.
> 2. *Argumentación.* Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.

> 3. *Comunicación.* Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.
> 4. *Construcción de modelos.* Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.
> 5. *Formulación y resolución de problemas.* Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.
> 6. *Representación.* Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.
> 7. *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.* Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.
> 8. *Empleo de soportes y herramientas.* Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y procedimientos similares a los ya conocidos y practicados a lo largo del aprendizaje.

Es importante observar que, por ejemplo en el primer párrafo, se mezclan acciones que debe realizar el alumno (por ejemplo, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos, reproducción del conocimiento estudiado) con algunos de los “objetos” que se deben activar para realizarlas (conocimiento de hechos,…, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares) y con algunos procesos (reconocimiento de equivalentes)

Hay que resaltar que, a continuación de la descripción anterior, el texto formula las preguntas claves que permiten a un profesor considerar que lo que hace el alumno corresponde a este grupo de competencias (INECSE, 2004, p. 43):

> Las preguntas que miden las competencias del grupo de reproducción se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: reproducir material practicado y realizar operaciones rutinarias. (OECD, 2003, p. 43)

La reducción de todas las consideraciones anteriores a estos dos descriptores es otra de las causas de la ambigüedad del marco teórico.

Según esto, un mismo problema será de reproducción o no, dependiendo del tipo de problema que ha practicado el alumno (es decir, el que ha enseñado el profesor). Tampoco queda claro lo que se debe entender por "operaciones rutinarias".

Por ejemplo, supongamos que un alumno ha estudiado la derivada de la función $f(x) = x^n$ y la fórmula de la derivada de un producto de funciones y se le pregunta que calcule la derivada de la función $f(x) = 3x^3$, en este caso nos encontraríamos con un problema de reproducción. Ahora bien, si el alumno solo conoce la formula de la derivada de un producto, también puede responder al problema, haciendo las siguientes traducciones: $3x^3 = 3x \cdot x^2$; $x^2 = x \cdot x$; $3x = 3 \cdot x$, y aplicar repetidamente la fórmula de la derivada del producto. El hecho de que se haya realizado dicha traducción de expresiones simbólicas ya nos situaría en la categoría de conexión.

A continuación siguen una serie de preguntas que se proponen como correspondientes al grupo de reproducción, una de las cuales es la siguiente (INECSE, 2004, p. 43):

> Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco con un tipo de interés del 4%. ¿Cuántos zeds habrá en la cuenta al cabo de un año? (OECD, 2003, p. 43)

También se pone como contraejemplo la siguiente pregunta y se justifica por qué no pertenece al grupo de reproducción (INECSE, 2004, p. 35):

> Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco. Existen dos opciones: o bien obtener un interés anual del 4%, o bien obtener una prima inmediata de 10 zeds y un interés anual del 3%. ¿Qué opción es mejor al cabo de un año? ¿Y al cabo de dos años?

Hay que resaltar que esta justificación consiste en hacer observar que los alumnos deben realizar un proceso de razonamiento y una serie de acciones para realizar un cálculo, que los autores suponen que no son característicos de las competencias del grupo de *reproducción* (INECSE, 2004, p. 44):

> Este problema lleva a los alumnos más allá de la simple aplicación de un procedimiento de rutina, puesto que requiere la aplicación de un hilo de razonamiento y de una secuencia de pasos de cálculo que no son característicos de las competencias del grupo de *reproducción*.

Consideramos importante hacer observar que en esta justificación aparecen, de manera embrionaria, dos aspectos que después aparecen con más fuerza. Nos referimos a que (1) se hace una narración de las acciones (pasos de cálculos) que debe realizar el alumno para resolver el problema y (2) se comentan algunos de los procesos que debe realizar el alumno (hilo de razonamiento).

Otro aspecto destacable es que la noción clave para pasar del grupo de reproducción al de conexión es el objeto "problema", en concreto la distinción entre ejercicio y problema. En el grupo de reproducción no hay problemas, hay ejercicios, mientras que en el de conexión lo que hay son problemas que por una parte no se pueden considerar como ejercicios y, por otra parte no son complejos (INECSE, 2004, p. 44):

> Las competencias del grupo de *conexión* se apoyan sobre las del grupo de *reproducción*, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.

Después de dar unos descriptores para cada una de las ocho competencias, el texto formula las preguntas claves que permiten a un profesor considerar que lo que hace el alumno corresponde a este grupo de competencias (INECSE, 2004, p. 45):

> Las preguntas que miden las competencias del grupo de *conexión* se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: integración, conexión y ampliación moderada.

Tal como ya se ha visto para el grupo de reproducción, la introducción de estos descriptores es otra de las causas de la ambigüedad del marco teórico. En este caso son bastante más ambiguos que los del grupo de reproducción, ya que es relativamente más fácil decidir si un problema es un ejercicio que exige rutina que decidir si hay "integración" y "conexión". Es más, en este caso nos encontramos casi en un círculo vicioso ya que para determinar si un problema es de conexión lo que tenemos que preguntarnos es si hay conexión.

A continuación siguen una serie de tareas que se proponen como correspondientes al grupo de conexión. En este caso el análisis de prácticas objetos y procesos se reduce (1) a una reflexión sobre las características del "objeto problema" y (2) a señalar la necesidad de que se dé el proceso de modelización en la respuesta del alumno. Con relación al primer aspecto, los autores del informe reconocen explícitamente lo ambigua que es la clasificación (reproducción, conexión y reflexión) que se proponen al comentar respuestas de profesores (INECSE, 2004, p. 45):

> *Matemáticas, ejemplo 10:* DISTANCIA
>
> María vive a dos kilómetros de su colegio y Martín a cinco. ¿A qué distancia viven el uno del otro?
>
> Cuando se mostró este problema a los profesores, muchos de ellos lo rechazaron por considerarlo demasiado fácil (se ve rápidamente que la respuesta es 3). Otro grupo de profesores argumentaron que no era una pregunta adecuada, porque no había respuesta (querían decir que no hay una única respuesta numérica). Otros argumentaron que no era adecuado porque había varias respuestas posibles, dado que, sin más información, la mayoría de alumnos podían concluir que vivían a entre 3 y 7 kilómetros de distancia (una respuesta que no es deseable para una pregunta de evaluación). Unos pocos pensaron por el contrario que se trataba de una pregunta excelente, porque exige entender la pregunta, porque es un problema

> real dado que no incluye una estrategia conocida por el estudiante, y porque es una cuestión matemática preciosa aunque no se sepa cómo van a resolverla los estudiantes. Esta última interpretación es la que vincula el problema con el grupo de competencias de *conexión*.

Con relación al segundo aspecto se dice (INECSE, 2004, p. 45):

> En estos dos problemas los estudiantes deben traducir una situación del mundo real al lenguaje matemático, desarrollar un modelo matemático que les permita establecer una comparación adecuada, comprobar que la solución se ajusta al contexto de la pregunta inicial y comunicar el resultado. Todas estas actividades se incluyen dentro del grupo de *conexión.*

Para pasar del grupo de conexión al de reflexión la noción clave sigue siendo el objeto "problema", en concreto la distinción entre problema y problema complejo (INECSE, 2004, p. 46):

> Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del grupo de *conexión.* Además de las competencias descritas para el grupo de *conexión*, entre las competencias del grupo de *reflexión* se encuentran las siguientes: (…).

Después de dar unos descriptores para cada una de las ocho competencias, el texto formula las preguntas claves que permiten a un profesor considerar que lo que hace el alumno corresponde a este grupo de competencias (INECSE, 2004, p. 47):

> Las preguntas de evaluación que miden las competencias del grupo de reflexión se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: razonamiento avanzado, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.

Tal como ya se ha visto para los dos grupos anteriores, la introducción de estos descriptores es otra de las causas de la ambigüedad del marco teórico. En este caso también son bastante más ambiguos que los del grupo de reproducción. En concreto si bien hay dos descriptores que sugieren claramente el nivel más avanzado (razonamiento avanzado y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos) los otros (argumentación, abstracción, generalización) no está claro que no se produzcan en el nivel de conexión.

A continuación siguen una serie de preguntas que se proponen como correspondientes al grupo de reflexión. Es importante observar que, en la justificación de porqué los problemas 13 y 14 son del grupo de reflexión, se vuelven a mezclar acciones que debe realizar el alumno con algunos de los "objetos" y procesos que se deben activar para realizarlas (INECSE, 2004, pp. 47-48)

Ejemplo 13: CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN DE PECES

Se repobló con peces un canal fluvial. El gráfico muestra un modelo de cómo ha crecido el peso total de los peces en el canal fluvial.

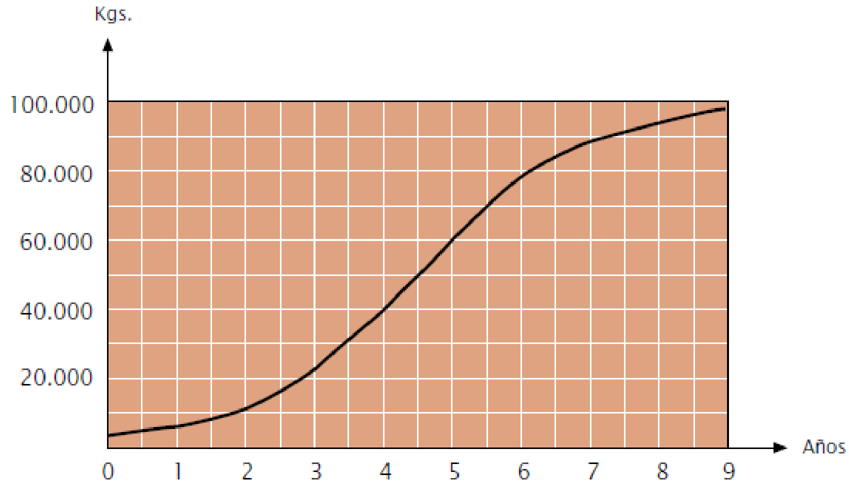


Figura 4.5. Problema sobre el peso de los peces
Fuente: INECSE

Supón que un pescador decide esperar unos años antes de empezar a pescar los peces del canal fluvial.

¿Cuántos años deberá esperar si desea maximizar el número de peces que pueda coger anualmente a partir de ese año? Razona tu respuesta.

Está claro que el Ejemplo 13 se ajusta a la definición de resolución de problemas de matemáticas en un contexto auténtico. Los estudiantes tendrán que encontrar sus propias estrategias y argumentación en un problema algo complejo e inusual. La complejidad radica en parte en la necesidad de combinar con esmero la información presentada de manera gráfica o textual. Además, la respuesta no resulta obvia para los estudiantes. Necesitarán interpretar el gráfico y darse cuenta, por ejemplo, de que la tasa de crecimiento alcanza su nivel máximo al cabo de unos cinco años. Para realizar el problema de manera satisfactoria, los estudiantes tienen que reflexionar sobre la solución a medida que la elaboran y considerar la adecuación de su estrategia. Además, el problema exige una explicación y una indicación de la «prueba». Una posibilidad es emplear el método de ensayo-error: ver qué pasa si sólo se espera 3 años, por ejemplo, y seguir a partir de ahí. Si se espera hasta finales del quinto año, se obtiene la mayor recolección: 20.000 kg de pescado. Si no se puede esperar tanto y se inicia la pesca un año antes, sólo se consiguen 17.000 kg, y, si se espera demasiado (seis años), sólo se pescarán 18.000 kg al año. Por tanto, los mejores resultados se obtienen cuando la recolección se inicia al cabo de cinco años.

Ejemplo 14: PRESUPUESTO

En un determinado país, el presupuesto nacional de defensa fue de 30 millones (en la moneda del país) en 1980. El presupuesto total de ese año fue de 500 millones. Al año siguiente, el presupuesto de defensa pasó a 35 millones, mientras que el presupuesto total fue de 605 millones. La inflación del período comprendido entre los dos presupuestos alcanzó el 10 por ciento.

a) Te invitan a dar una conferencia en una asociación pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este período. Explica cómo lo harías.

b) Te invitan a dar una conferencia en una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha aumentado en este período. Explica cómo lo harías.

El Ejemplo 14 se ha estudiando en profundidad con estudiantes de 16 años e ilustra muy bien los problemas del grupo de reflexión: los estudiantes reconocieron inmediatamente el aspecto matemático y con frecuencia supieron hacer algún tipo de generalización, puesto que el punto central de la solución radica en reconocer que los conceptos matemáticos clave aquí son el crecimiento absoluto y el crecimiento relativo. Por supuesto, la inflación podría dejarse a un lado para que el problema fuera más accesible para los estudiantes más jóvenes sin que por ello se perdieran las ideas conceptuales clave del problema, pero entonces se perdería complejidad y, de ese modo, parte de la matematización necesaria. Otra manera de facilitar la pregunta sería presentando los datos en una tabla o esquema. Estos aspectos de la matematización ya no son necesarios; los alumnos pueden empezar directamente por el punto central del asunto.

3.3. Asignación de un nivel de complejidad a un problema

A continuación (INECSE, 2004, pp. 48-49) se explica una posible manera para determinar si un determinado problema corresponde a un grupo o a otro:

El Cuadro 1.4 ofrece una representación gráfica de los grupos de competencia y resume las diferencias entre ellos. Las descripciones de competencia de las páginas anteriores podrían utilizarse para clasificar las preguntas de matemáticas y asignarlas así a uno de los grupos de competencia. Una manera de hacerlo sería analizar los requisitos de cada pregunta y luego considerar cada una de las competencias para la pregunta en cuestión: uno de los tres grupos proporcionará la descripción más ajustada de los requisitos de la pregunta en relación a esa competencia. Si se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de *reflexión*, entonces la pregunta se asigna a ese grupo de competencia. Si no ocurre eso, pero se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de *conexión*, entonces la pregunta se asigna a ese grupo. Si no se da ninguno de estos casos, la pregunta se asignaría al grupo de *reproducción*, puesto que se consideraría que todas las competencias que moviliza se ajustarían a la descripción de las competencias de ese grupo.

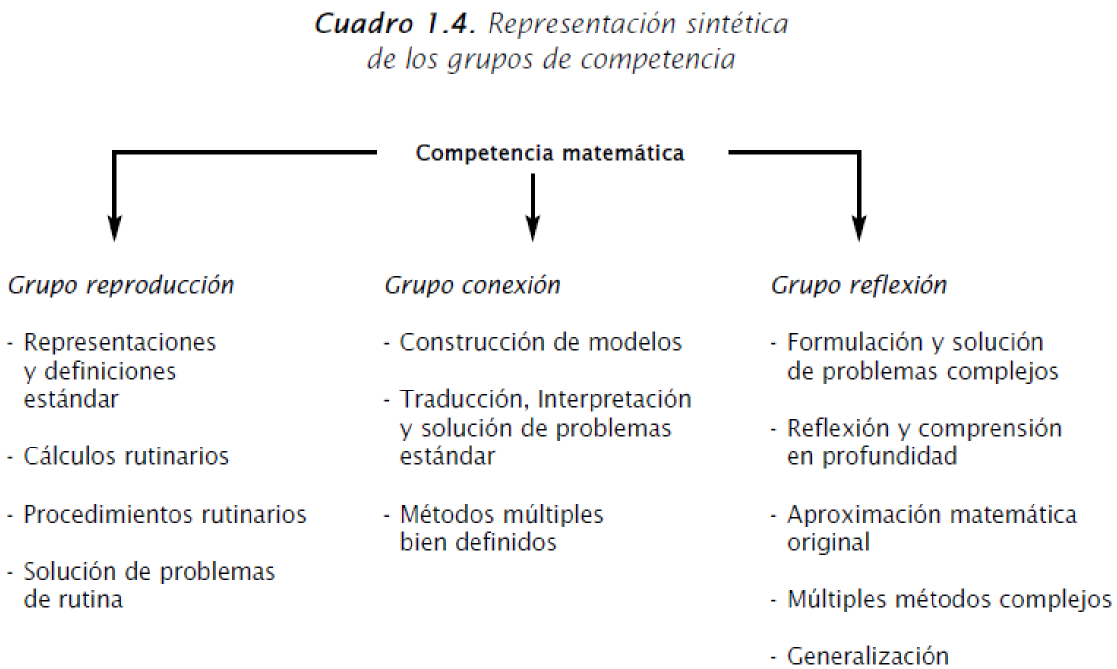


Figura 4.6. Representación sintética de los grupos de competencia
Fuente: INECSE (2004)

El esquema que se sugiere sería el siguiente:

1) Resolver el problema

2) Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos.

3) Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión

4) Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos determinado a las diferentes competencias,

Este esquema difiere de lo que se ha hecho al poner los ejemplos de cada grupo en los puntos 3 y 4, ya que lo que se ha hecho antes es saltarse estos dos últimos pasos. Del análisis de la respuesta realizado en el punto 2 se infiere que el problema está en un grupo u otro. Por otra parte, no se pone ningún ejemplo de cómo podría realizarse los pasos 3 y 4.

Por otra parte, este esquema resulta, en cierta manera, contradictorio con lo que se ha afirmado anteriormente (INECSE, 2004, pp. 42):

> La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el

intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área.

4. AUSENCIA DE EVALUACIÓN DIRECTA Y A POSTERIORI DE LOS PROTOCOLOS DE LOS ALUMNOS EN LAS RESPUESTAS ABIERTAS

Un aspecto que resulta problemático es el tipo de evaluación de las competencias que se hace en las pruebas PISA 2003. Utilizando la distinción entre evaluación sumativa y formativa, podemos decir que el informe PISA pone el énfasis en la primera. El proceso de evaluación de competencias es el siguiente: (1) dada una tarea, lo que se hace es determinar un nivel global de complejidad de las competencias en una escala de 1 a 3 (reproducción, conexión y reflexión) en función de la respuesta de un sujeto ideal o de un “experto”, y (2) dada una respuesta de un alumno a esta tarea, se le asigna una puntuación, de manera que, en función de la puntuación global obtenida en el conjunto de las tareas que se le propusieron resolver, permite situar al alumno en una escala de rendimiento (o nivel de de competencia) de 1 a 6 (INECSE, 2004).

La opción que toman los diseñadores de las pruebas PISA 2003 por este tipo de evaluación es lógica si se tiene en cuenta cuál es el objetivo de dichas pruebas. Ahora bien, el hecho es que el profesor que tiene que desarrollar un currículo por competencias no puede limitarse solo a este tipo de evaluación, necesita algún tipo de evaluación formativa de competencias que permita la retroalimentación al alumno.

Lo que no se explica en el informe PISA 2003 es cómo un profesor puede realizar una evaluación formativa de las competencias del alumno a partir tanto del análisis de la tarea como de la producción del alumno. No se dice cómo evaluar las competencias, por separado y/o globalmente, a fin y efecto de poder producir una retroalimentación al alumno y poder incidir en su proceso de aprendizaje.

En nuestra opinión, una evaluación formativa de competencias necesita poder realizar tanto una evaluación por separado de cada competencia, lo que aquí llamaremos una evaluación analítica de competencias, como una evaluación global de competencias. Al respecto hay que resaltar que las pruebas PISA 2003 no solo renuncian a la evaluación de competencias por separado por el tipo de objetivo que se plantean, sino que también lo hacen porque consideran que este tipo de evaluación por separado es artificial e incluso innecesaria:

> La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área (INECSE, 2005, p. 40).

Si bien estamos de acuerdo con el informe PISA 2003, que no tiene sentido una evaluación de una sola competencia y que es necesario la evaluación global de la competencia matemática del alumno, consideramos que en el caso de una evaluación de tipo formativo que pretenda producir una retroalimentación al alumno y poder incidir en su proceso de aprendizaje, es necesario, además de la evaluación global de la competencias del alumno, una evaluación analítica de competencias que puede orientar con más precisión la retroalimentación al alumno. Dicho de otra manera, no tiene sentido evaluar sólo la competencia de argumentación, pero sí conviene saber que un alumno tiene menos desarrollada esta competencia que otra, para guiar su aprendizaje.

En nuestra opinión, el siguiente esquema de cuatro pasos es el que nos puede permitir una correcta evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir de los protocolos de respuesta de los alumnos: 1) Resolver el problema; 2) Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos; 3) Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión; 4) Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos determinado a las diferentes competencias.

Se trata de un método de análisis que a priori presenta dos inconvenientes importantes: (1) se necesitan herramientas para el análisis de prácticas, objetos y procesos y (2) se trata de un procedimiento muy laborioso.

En esta investigación, tal como se ha explicado en el capítulo 1, nos hemos planteado el desarrollo de las herramientas que ofrece el EOS, en especial el desarrollo de los procesos en dicho marco, para poder desarrollar un método para el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos del cual se pueda derivar una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas.

Se trataría de desarrollar el esquema de la figura 4.7. Las competencias se muestran en la resolución de tareas matemáticas. Dada una tarea, el alumno la resuelve realizando prácticas matemáticas en las que activa objetos y procesos matemáticos. El profesor analiza a posteriori la actividad matemática del alumno y encuentra evidencias de un cierto grado de desarrollo de una o varias competencias.

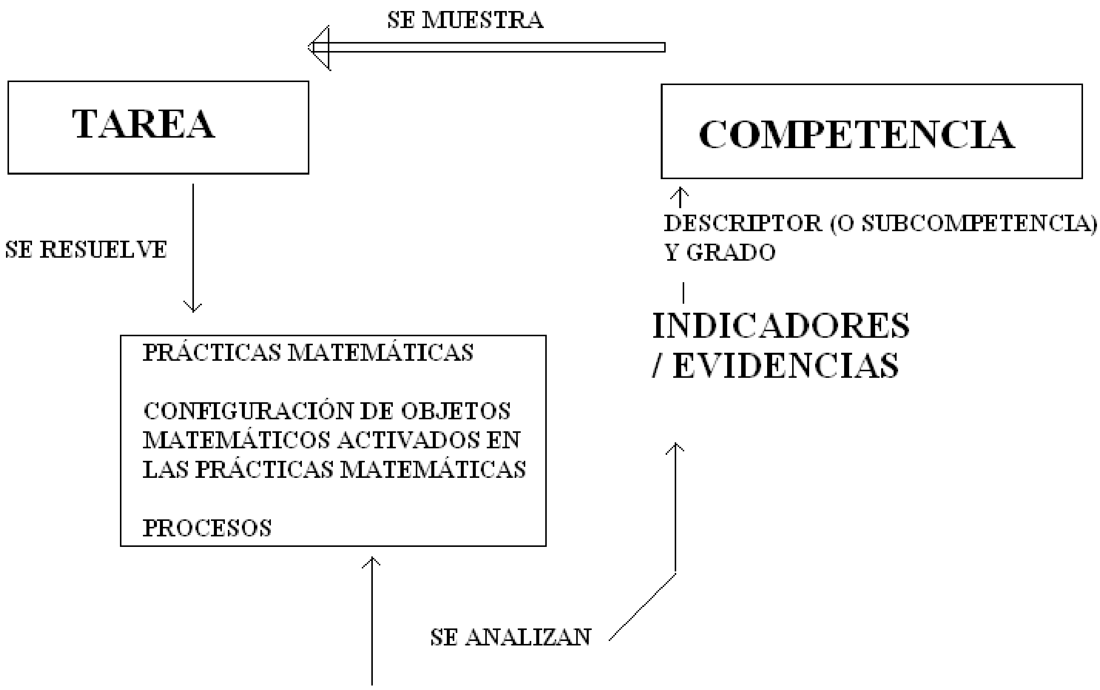


Figura 4.7. La evaluación a posteriori de competencias matemáticas
Fuente: Elaboración propia

En este esquema, las competencias y sus descriptores suelen estar fijados en los documentos oficiales. La actividad matemática muestra la competencia matemática del alumno y el análisis de dicha actividad, para hallar evidencias de que se cumplen los indicadores de un cierto grado de competencia, es una competencia profesional del profesor de matemáticas (figura 4.8).

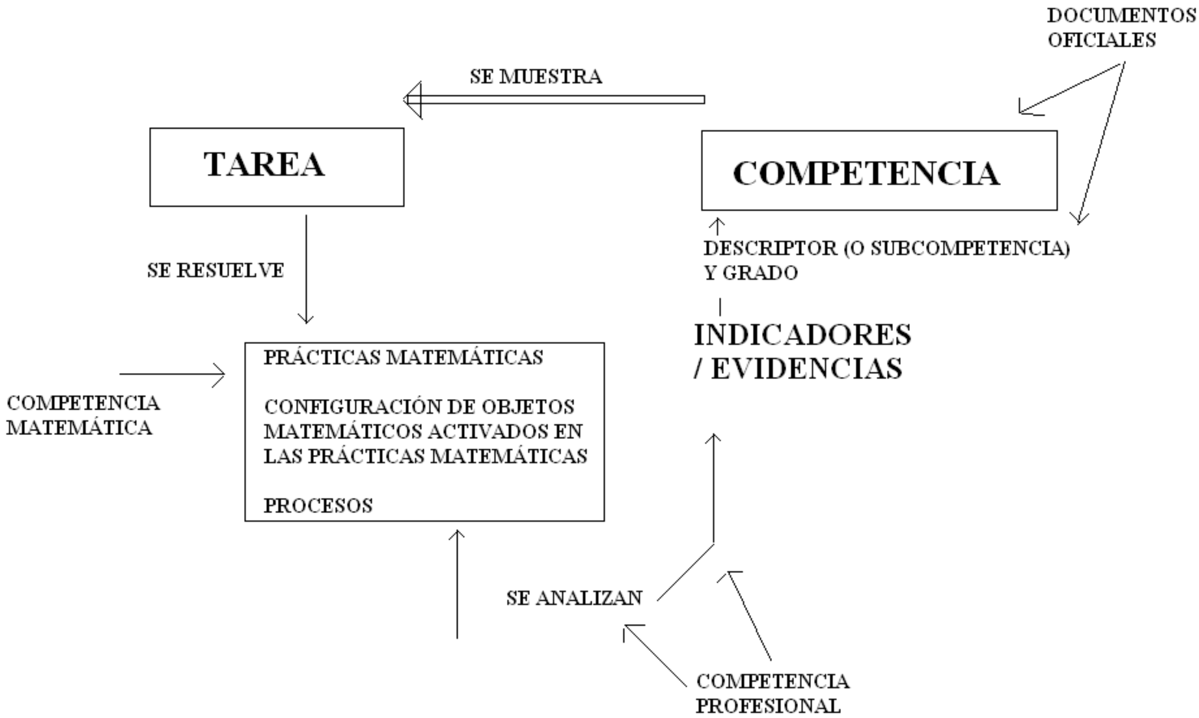


Figura 4.8 Competencia matemática y competencia en análisis didáctico
Fuente: Elaboración propia

5. VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DE LOS RESULTADOS

La validez y confiabilidad de los resultados y de las conclusiones se basa en dos triangulaciones: 1) una triangulación de datos (versiones en inglés y en castellano) y 2) una triangulación de expertos (doctoranda, director de tesis, profesor y expertos en Didáctica de las Matemáticas). Los análisis realizados se sometieron a la opinión de los expertos en Didáctica de las Matemáticas en el congreso *Mathematics and its didactics. Forty years of commitent*, celebrado en Bolonia (Italia) y fueron publicados, después de un proceso de revisión por pares, en las actas de este congreso:

- Font, V., & Rubio, N. (2011). Algunos aspectos problemáticos de las pruebas PISA 2003. En S. Sbaragli (Ed.), *Mathematics and its didactics. Forty years of commitment*, (90 – 92). Bologna, Italia: Pitagora editrece.

CAPÍTULO 5

LOS PROCESOS EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Resumen

Este capítulo se relaciona, sobre todo, con el objetivo 2 de esta memoria de investigación. Pretende ser un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo teórico del EOS, puesto que se pretende afrontar la problemática del encaje de los "procesos" dentro de dicho marco *teórico. En concreto, este capítulo desarrolla los siguientes objetivos específicos del objetivo 2:*

2.1 Revisar las diversas investigaciones sobre procesos realizadas en el marco del EOS.

2.2 Desarrollar la tipología de procesos propuesta en el EOS: 1) procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales, 2) otros procesos y 3) megaprocesos.

La estructura de este capítulo es la siguiente, en el apartado 1 se hace una referencia breve a la literatura sobre procesos y se resalta un hecho relevante, observable tanto en la investigación en educación matemática como en los currículos oficiales. Nos referimos (1) a la diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, (2) a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos y (3) a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos. En este apartado también se explica nuestro posicionamiento sobre este hecho. Con relación al término proceso se considera que es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada, es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada). Estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas. Con relación a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos, en este trabajo se ha considerado conveniente pensar en procesos más complejos (megaprocesos) y procesos más simples. Con relación a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos, en este trabajo se ha optado por considerar una lista de grupos de procesos agrupados en familias que tienen un aire de familia.

En el apartado 2 se afronta el encaje de los "procesos" en el EOS, primero se consideran los 16 procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales y se ponen ejemplos de cada uno de ellos, a continuación se consideran los megaprocesos, otros procesos y se contempla la relación entre procesos. En esta sección se reflexiona, utilizando como contexto de reflexión el caso del proceso de representación, sobre el hecho de que los procesos tomados en cuenta en el EOS no se pueden considerar de manera aislada y se propone que una de las maneras de estudiar esta relación es analizar el proceso en cuestión desde las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales.

En el apartado 3 se resumen brevemente algunas investigaciones realizadas en el marco del EOS sobre diferentes procesos.

En el apartado 4 se muestra cómo el uso del constructo "configuración epistémica de los objetos matemáticos", junto con los procesos considerados en el enfoque ontosemiótico, permite realizar un detallado análisis de tareas matemáticas, una de las competencias profesionales necesarias para el profesor. La herramienta "configuración epistémica" resulta muy útil para la descripción estática de la estructura (organización, configuración, anatomía, etc.) de un texto matemático, mientras que los procesos son herramientas que nos permiten explorar más a fondo el funcionamiento (dinámica, fisiología, etc.) de la configuración epistémica activada en la realización de la práctica matemática.

1. ALGUNAS CONSIDERACIONES INICIALES SOBRE EL TÉRMINO PROCESO MATEMÁTICO

La metodología que se ha seguido en este apartado ha consistido, básicamente, en un análisis de fuentes documentales sobre procesos, adoptando la doctoranda una serie de posicionamientos al respecto.

El término proceso tiene diferentes acepciones en el diccionario de la Real Academia Española (2001), entre las cuales queremos destacar las siguientes: "*... el concepto hace referencia a la acción de ir hacia adelante, al transcurso del tiempo, al conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial*…."

Para los informáticos, proceso es un programa en ejecución; para los biólogos, el proceso evolutivo es la continua transformación de las especies a través de cambios producidos en sucesivas generaciones; para los economistas, el proceso productivo supone la transformación de entradas (insumos) en salidas (bienes y servicios), por medios de recursos físicos, tecnológicos, humanos y otros; en enfermería, el proceso de enfermería o de atención de enfermería es un método sistemático de brindar cuidados humanistas eficientes centrados en el logro de resultados esperados, apoyándose en un método científico realizado por un profesional de enfermería. En otros casos, como en industrias alimentarias, a pesar de la diversidad de éstas (láctea, avícola, pesquera, de las bebidas, etc.), los procesos son clasificados, así se tienen los procesos de manipulación y almacenamiento de materias primas, extracción, elaboración, conservación y de envasado.

En el área de la educación matemática, proceso es un término sin definir pero al que se le ha dedicado mucha atención. Tal como se señala en Font, Rubio, Giménez y Planas (2009), en las últimas décadas se ha producido a nivel internacional un "giro procesal" en el diseño de currículos de matemáticas (y también de otras materias). Dicho giro ha significado pasar de concebir los currículos de matemáticas cuyos objetivos eran el aprendizaje, sobre todo, de conceptos a pensar en currículos cuyos objetivos son el aprendizaje, sobre todo, de procesos. Este giro se ha producido, entre otras razones, debido a que las matemáticas actualmente se ven como una ciencia en la cual el método domina claramente sobre el contenido. Por esta razón, recientemente se ha dado una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en particular los procesos de resolución de problemas y modelización.

En este giro ha tenido mucha influencia la Teoría de la Educación Matemática Realista (RME, Realistic Mathematic Education), sobre todo en el instituo Freudenthal, como desarrollo del punto de vista de Hans Freudenthal sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Freudenthal, 1991). En esta teoría se considera el proceso de modelización o matematización formado por otros dos procesos fundamentales: matematización horizontal y la matematización vertical (Treffers, 1987).

Podemos observar este giro procesal, entre otros, en los Principios y Estándares del The Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), donde se propone el aprendizaje de los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; en el Adding it Up Project (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001); en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, conocido con el acrónimo TIMSS (Mullis y otros, 2003), en el estudio PISA (OECD, 1999) y en las propuestas de los currículos de algunos países como es el caso de Suecia y, en cierta manera, en los currículos del Estado español derivados de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) y de la *Ley Orgánica de Educación* (LOE). De hecho, la actual propuesta de currículos de matemáticas por competencias de la LOE hay que pensarla como una consecuencia de este giro procesal.

El giro procesal que estamos comentando está presente en los dos currículos que hemos tenido en cuenta en esta investigación. En el caso de Cataluña, el Currículum de Educación Básica Obligatoria, propone trabajar con los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación y representación, y conexión. En el caso del Perú, en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular de 2009, se formulan como procesos transversales: razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles educativos.

Los currículos basados en procesos y competencias plantean la demanda de investigar el desarrollo y evaluación de procesos y competencias en los procesos de instrucción. Un buen indicador de la investigación realizada en España sobre esta temática son las comunicaciones y ponencias presentadas a los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En la revisión que hace Font (2011c) de dichas comunicaciones y ponencias para el nivel de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, se observa que las investigaciones no se han preocupado por desarrollar un marco teórico general sobre procesos matemáticos, sino que se han dedicado a realizar investigaciones concretas sobre determinados procesos, en especial sobre argumentacón, generalización y resolución de problemas. En las investigaciones citadas en Font (2011b) no hay una definición de proceso asumida mayoritariamente y los procesos particulares se pueden nombrar con términos diferentes.

Otra característica que se observa en la investigación sobre procesos es que estos se suelen descomponer en otros procesos. Por ejemplo, en la Teoría de la Educación Matemática Realista se considera el proceso de modelización, el cual se descompone en dos subprocesos: matematización horizontal y vertical. La matematización horizontal, lleva del mundo real al mundo de los símbolos y hace posible el tratar matemáticamente un conjunto de problemas. En este subproceso son característicos los siguientes procesos: 1) identificar las matemáticas en situaciones problemas. 2) esquematizar. 3) formular y visualizar un problema de varias maneras. 4) descubrir relaciones y regularidades. 5) reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas. 6) transferir un problema real a uno matemático. 7) transferir un problema real a un modelo matemático conocido. La matematización vertical, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones. Son característicos los siguientes procesos: 1) representar una relación mediante una fórmula, 2) utilizar diferentes modelos, 3) refinar y ajustar modelos, 4) combinar e integrar modelos, 5) probar regularidades, 6) formular un concepto matemático nuevo y 7) generalizar.

En esta investigación hemos partido de un hecho relevante de tipo empírico, observable tanto en la investigación en educación matemática como en los currículos oficiales. Nos referimos (1) a la diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, (2) a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos y (3) a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos.

Con relación a la diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, en este trabajo no se ha intentado establecer una definición, pero sí ciertas características de un proceso matemático. Un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada, es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada). Estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas.

Con relación a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos, en este trabajo se ha considerado conveniente pensar en procesos más complejos (megaprocesos) y procesos más simples. Ejemplos de megaprocesos son la resolución de problemas y la modelización.

Con relación a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos, es un hecho que hay una gran diversidad de procesos y que, además, muchos de ellos parecen sugerir la misma idea. Los procesos pueden aparecer con una cierta precisión dentro de un marco teórico como es el caso del EOS que aquí nos ocupa; pero también aparecen en otros marcos teóricos y en los documentos curriculares. Una opción que nos ha permitido avanzar en esta diversidad de procesos en este trabajo ha sido diferenciar primero entre procedimiento y proceso y, en segundo lugar, agrupar los procesos por aire de familia (Wittgenstein, 1953). Los procesos agrupados en una familia tienen alguna característica en común si los comparamos dos a dos; pero no hay ninguna característica común a todos ellos.

Además de agrupar los procesos en familias que tiene un parecido, cada uno de ellos también se puede considerar como una familia. Por ejemplo, hay muchos tipos de procesos de argumentación (reducción al absurdo, inducción completa, razonamiento por elemento genérico, etc.) o de generalización. Este hecho hace que un proceso como el de mecanización se pueda considerar como la realización repetida de muchos procedimientos diferentes.

En las clases de matemáticas, sobre todo en primaria y secundaria, se presentan a los alumnos muchos procedimientos (por ejemplo, en aritmética, multiplicación división, resta, etc.; en geometría muchos procedimientos de construcción (por ejemplo, la construcción de la mediatriz que se ha comentado, etc.) cuya aplicación se puede considerar un proceso. Consideramos conveniente distinguir entre el procedimiento que nos dice cómo se deben hacer las cosas (se trata claramente de un regla) y la aplicación del procedimiento, que no estimamos conveniente considerar como proceso. En nuestra opinión es más conveniente agruparlos en un solo proceso que se puede llamar algoritmización, mecanización (en el sentido de repetición), etc.

2. LOS PROCESOS EN EL EOS

La metodología que se ha seguido en este apartado y en el siguiente ha consistido, básicamente, en un análisis de fuentes documentales sobre procesos que ha utilizado el EOS como marco teórico, adoptando la doctoranda una posición personal sobre las diferentes fuentes (tipología de procesos, tareas para inferir procesos, etc.).

En el capítulo 2 se ha presentado una síntesis del estado de desarrollo actual de las herramientas teóricas del EOS para la realización de análisis didácticos. Queremos destacar la incorporación de determinados “procesos matemáticos” al marco teórico.

Tal como se ha dicho en el capítulo 2, en la figura 5.1 se sintetiza una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono), ya comentadas en el capítulo 2. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes maneras de “estar participando”, las cuales se agrupan en facetas o dimensiones duales (decágono).

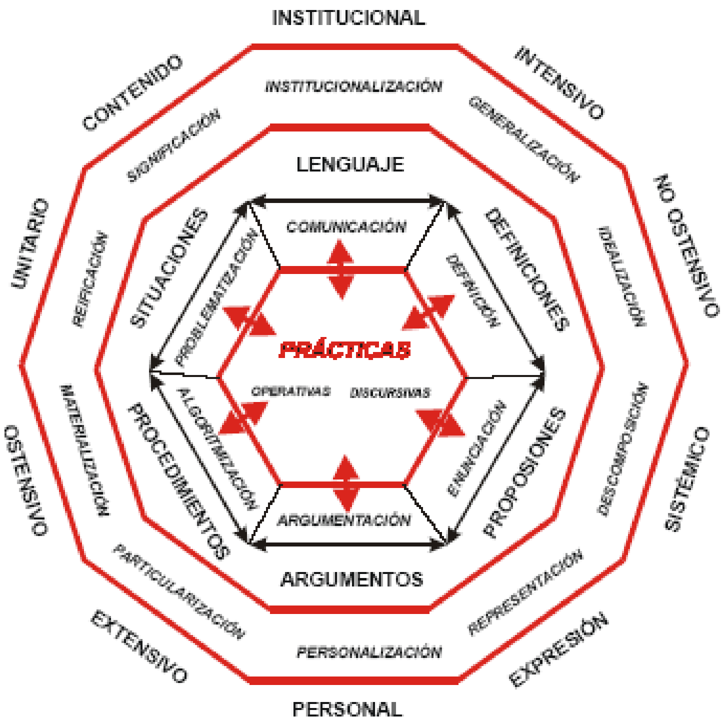


Figura 5.1. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos

Fuente: Font, Planas y Godino (2010)

Extensivo-intensivo

Constantemente nos empeñamos en descomponer de alguna manera la realidad en una multiplicidad de objetos identificables y discriminables a los que nos referimos mediante términos singulares y generales (esta silla, una mesa, etc.). Esto también sucede cuando se analiza la práctica matemática (la letra equis de la pizarra, la función $f(x) = 3x + 2$, etc.). Sobre estos objetos actúa la faceta extensivo/intensivo (ejemplar/tipo; particular/general).

Una de las modalidades de “estar” de los objetos matemáticos en la práctica matemática está relacionada con la dualidad extensivo-intensivo. Pueden estar participando como particulares o bien como generales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser particulares a generales o viceversa.

La dualidad extensivo-intensivo se utiliza en el EOS para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005, Font y Contreras, 2008). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.

Expresión-contenido

Otra modalidad de "estar" de los objetos matemáticos en la práctica matemática está relacionada con la dualidad expresión-contenido. Pueden estar participando como representaciones o bien como objetos representados y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser representaciones a ser objetos representados.

Si nos formulamos la pregunta: ¿Cómo se relaciona la expresión con el contenido?, nos encontramos con el problema de la clasificación entre representaciones internas y externas. Consideremos, por ejemplo, que tenemos un reloj de pared y un papel en el que se ha escrito la palabra "reloj". Normalmente se considera que la expresión escrita "reloj" se relaciona con el objeto físico "reloj" por medio del concepto (interpretante) que tiene el sujeto (el interprete). Además, se considera que tanto el concepto como la expresión son representaciones. También se considera que la palabra escrita "reloj" es una representación externa y que el concepto es una representación interna (mental).

En el EOS se considera que la dualidad interno/externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias graves para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modeliza adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje. En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone sustituirla por dos dualidades (o maneras de estar) que se consideran más útiles. Nos referimos a las personal – institucional y dualidades ostensivo - no ostensivo.

Personal-institucional

En el EOS se considera que la cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

Otra modalidad de "estar" de los objetos matemáticos en la práctica matemática está relacionada con la dualidad personal-institucional. Pueden estar participando como objetos personales o bien como objetos institucionales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser personales a ser institucionales. La dialéctica personal-institucional es esencial en los procesos de instrucción ya que en ellos se pretende que los alumnos se apropien de los objetos institucionales.

Ostensivo-no ostensivo

Otra modalidad de "estar" de los objetos matemáticos en la práctica matemática está relacionada con la dualidad ostensivo-no ostensivo. Estos dos modos de estar en la práctica matemática se han de tomar en sentido intersubjetivo: "algo" se puede mostrar a otro directamente versus "algo" que no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro "algo", que sí se puede mostrar directamente. Dicho de otra manera, los ostensivos matemáticos presentan una característica que es propia de las cosas como las naranjas, mesas, etc., que es la existencia real en el tiempo y en el espacio, mientras que a los objetos no ostensivos no se les atribuye este tipo de existencia, usualmente se considera que tienen una existencia ideal. Uno de los problemas de la filosofía de las matemáticas es precisar en qué consiste este tipo de existencia "ideal".

Unitario-sistémico

Cuando una entidad matemática es considerada como un objeto se está adoptando una perspectiva unitaria sobre dicho objeto. Ahora bien, hay momentos en que interesa adoptar una perspectiva sistémica sobre dicho objeto, por ejemplo considerando las acciones que se pueden hacer con él, o las partes que lo componen, etc.

En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que en otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En la enseñanza de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Otra modalidad de "estar" de los objetos matemáticos en la práctica matemática está relacionada con la dualidad unitario-sistémico. Pueden estar participando como objetos unitarios o bien como un sistema. Estas dos maneras de estar de los objetos matemáticos permiten interpretarlos como objetos que forman partes de otros objetos.

Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos que se recogen en la figura 5.1.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro participa en la determinación del siguiente". Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la figura 5.1), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de comprensión o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos:

> La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (s*upervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino, Batanero y Font, 2006, p. 9)

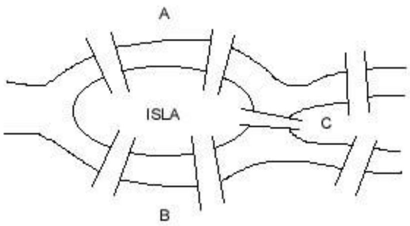
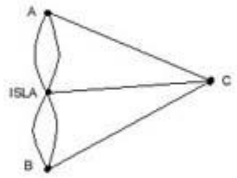
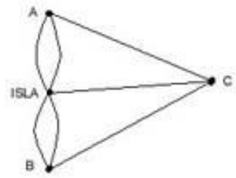
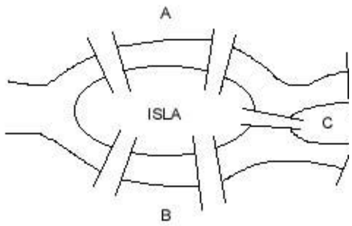
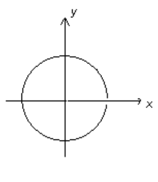
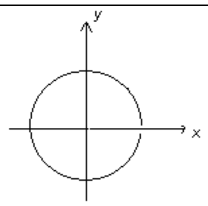
2.1. Procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales

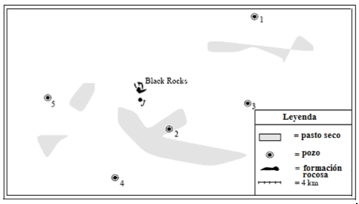
En este apartado ilustraremos con ejemplos los 16 procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales. Si bien en una misma tarea se puede inferir que intervienen muchos procesos y objetos primarios, consideramos que, según el contexto, se puede priorizar un solo proceso y un solo objeto primario. Dicho de otra manera, dado un texto matemático podemos priorizar un objeto primario y un proceso obteniendo una celda de la siguiente tabla:

Objetos Matemáticos / Procesos	Lenguaje	Situación Problema	Definiciones	Proposiciones	Procedimientos	Argumentos
Algoritmización						
Argumentación						
Particularización						
Generalización						
Idealización						
Materialización						
Representación						
Significación						
Reificación						
Descomposición						
Personalización						
Institucionalización						
Comunicación						
Significación						
Enunciación						
Problematización						

Tabla 5.1. Procesos y objetos matemáticos
Fuente: Elaboración propia

A continuación siguiendo a Font, Rubio y Contreras (2008), entre las 96 celdas de la tabla anterior, consideramos sólo 16 celdas, de manera que en cada caso destacamos uno de los 16 procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales y uno de los objetos de la configuración epistémica:

Entrada	Procesos	Salida	Objetos
Puentes de Königsberg Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con la tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida? 	**Idealización**	El problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas? 	Concepto (Grafo)
Idea de Grafo	**Materialización**	 	Lenguaje ostensivo (represntación geométrica)
 $x^2 + y^2 = r^2$	**Significación**	Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	Concepto (circumferencia)
Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	**Representación**	 $x^2 + y^2 = r^2$	Lenguaje (representación gráfica y algebraica)
Definición de límite	**Reificación**	$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Concepto (de límite/derivada)
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	**Descomposición**	Interpretamos el límite como el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h\to 0$, y después focalizamos nuestra atención en esta clase.	Concepto (de límite/derivada)

<table>
<tr><th>Entrada</th><th>Procesos</th><th>Salida</th><th>Objetos</th></tr>
<tr><td>
1. En el desierto.
En la figura de abajo, se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas esta mapa contigo.


a)¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?
No es difícil responder, por supuesto irías al pozo 2
b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.
c) Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos.
d) ¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios?
e) ¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0: trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos.
f) En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)?
g) La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras?
h) ¿Qué clase de líneas son las fronteras? ¿Rectas o curvas?
</td><td>Personalización</td><td></td><td>Propiedad (principio del Vecino más próximo)</td></tr>
<tr><td>En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del Vecino más próximo (…)</td><td>Institucionalización</td><td></td><td>Propiedad (principio del Vecino más próximo)</td></tr>
<tr><td>En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es
d(A_1 , A_2)=
$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$</td><td>Particularización</td><td>En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x-y)^2}$
En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es
d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$</td><td>Concepto (distancia en $\mathbb{R}$)</td></tr>
<tr><td>En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x-y)^2}$</td><td>Generalización</td><td>En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es</td><td>Concepto (distancia en $\mathbb{R}^n$)</td></tr>
</table>

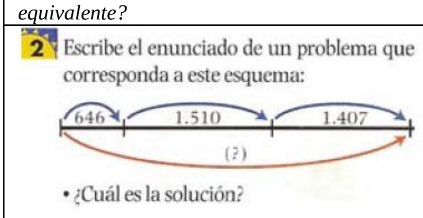
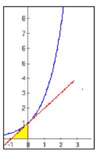
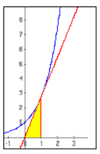
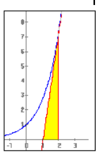
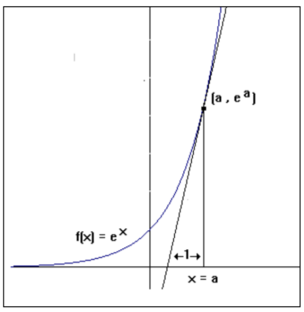
Entrada	Procesos	Salida	Objetos
En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$		d(A_1 , A_2)= $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$	
¿Es cierto que si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$? Justifica tu respuesta.	**Argumentación**	No es cierto, basta tomar $x = -5$ e $y = -2$	Concepto (Desigualdad)
Calcula la derivada de la función: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x-4}$	**Algoritmización**	$f(x)=\dfrac{(2x-3)\cdot(3x-4)-3(x^2-3x+2)}{(3x-4)^2}$	*Procedimiento (regla de la derivación de un cociente)*
(…) En los problemas anteriores has encontrado una relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Cuál?	**Enunciación**	*La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*	*Propiedad (teorema)*
La mediatriz de un segmento es la perpendicualr que pasa por el punto medio de dicho segmento. ¿Halla una definición equivalente?	**Definición**	*Todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento*	*Concepto (mediatriz)*
	**Problematización**	*María ha podido ahorrar en los meses de abril, mayo y junio 646; 1,510 y 1407 soles, respectivamente. ¿Cuánto ha ahorrado en total en estos tres meses?* *(solución: 3563)*	*Concepto (suma)*
Cuestionario En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad: a) Calcula $f´(0)$, $f´(1)$ y $f´(2)$    b) Calcula $f´(a)$  c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f´(x) = e^x$.	**Comunicación**	*Respuesta de Víctor al apartado c* La función derivada de $f(x) = e^x$ es $f´(x) = e^x$ porque la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en este punto. La pendiente se consigue dividiendo $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, en esta función $x_2 - x_1$ siempre da 1, y al dividir el aumento vertical, que es e^x por el aumento horizontal que es 1, nos da e^x	*Concepto emergente (derivada de la función* $f(x) = e^x$)

Tabla 5.2. Ejemplos de los 16 procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales
Fuente: Font, Rubio y Contreras (2008)

La primera columna es la propuesta de una tarea presentada a los alumnos (entrada), la tercera columna sería el resultado de la acción del sujeto, su respuesta (salida). La segunda columna sería el proceso que ha permitido pasar de la entrada a la salida y la cuarta columna sería la regla fundamental (objeto de la configuración de objetos primarios) que el sujeto ha tenido en cuenta en su respuesta.

2. 2. Megaprocesos

En el EOS se consideran megaprocesos (por ejemplo resolución de problemas o modelización) y procesos. Una manera de investigar sobre los megaprocesos es estudiar su relación con los procesos más simples que los componen. Esto es lo que se hace en la sección 4 al analizar una actividad que tiene por objetivo que los alumnos realicen un proceso de modelización.

La consideración de un proceso como un megaproceso es algo sobre lo que no hay consenso. Existe un consenso amplio en considerar que tanto la resolución de problemas como la modelización son megaprocesos, pero dicho consenso no es claro en otros casos.

2. 3. Otros procesos

En el EOS se consideran megaprocesos (por ejemplo, resolución de problemas o modelización) y procesos. En el caso de estos últimos se distingue entre los 16 de la figura 5.1 y otros procesos (por ejemplo, los procesos metafóricos).

2.4. Relación entre procesos

En el EOS, tanto el estudio de la relación entre algunos de los 16 procesos de la figura 5.1, como el estudio de otros procesos no considerados directamente en el grupo de los 16 procesos (sean considerados megaprocesos o no), consiste en situar el proceso que nos interesa en el centro de la figura 1 para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización / personalización; generalización / particularización; descomposición / reificación; materialización / idealización; representación/ significación). En Font (2007) se aplica dicha técnica a los procesos metafóricos, en Malaspina (2008) a los procesos intuitivos y en Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012) a los procesos de visualización.

La relación entre el proceso de representación y los otros procesos.

A continuación desarrollaremos este estudio para el proceso de representación tal como se ha hecho en Godino y Font (2010).

Se sitúa el proceso que nos interesa (el de representación en este caso) primero en el centro del hexágono para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y, segundo, colocarlo en el centro del decágono y analizarlo utilizando las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. A continuación, aplicaremos las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales al proceso de representación.

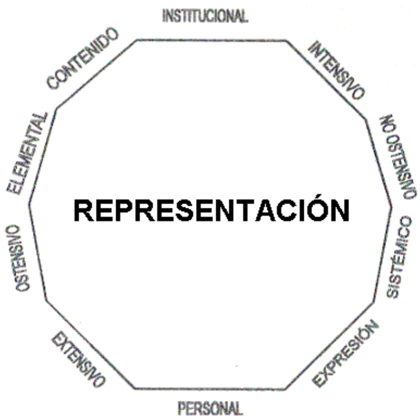


Figura 5.2. El proceso de representación visto desde las facetas duales

Fuente: Elaboración propia

El proceso de representación se relaciona claramente con el proceso de significación, por esta razón se consideran dos procesos que forman parte de la misma dualidad. Una cuestión menos clara es cómo se relaciona el proceso de representación con los procesos de las otras cuatro dualidades.

La representación con relación a la dimensión dual "extensivo / intensivo"

El proceso de representación está relacionado con los procesos de particularización y generalización asociados a la dualidad extensivo-intensivo ya que, constantemente, nos empeñamos en descomponer de alguna manera la realidad en una multiplicidad de objetos identificables y discriminables, a los que nos referimos mediante términos singulares y generales (esta silla, una mesa, la letra equis de la pizarra, la función $f(x) = 3x +2$, etc.). Sobre estos objetos actúa (de entrada) la faceta extensivo / intensivo.

Las explicaciones que se pueden dar para justificar la activación de dicha faceta son diversas. Por ejemplo, un foucaultiano diría que estos objetos ya han sido "dichos desde algún discurso", mientras que desde la filosofía de la ciencia se dirá que "toda percepción (observación) está cargada de teoría" ya que todo juicio de percepción supone la aplicación de conceptos (la proposición A es B). Desde la teoría contemporánea de la metáfora (Lakoff y Núñez, 2000) se dirá que uno de los orígenes de la aplicación de la dualidad extensivo/intensivo son las metáforas ontológicas, las cuales, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos.

La representación con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"

Para poder aplicar la faceta extensivo-intensivo a los objetos, estos necesitan un signo que los enuncie (acompañe). Imaginemos que un bebé ha balbuceado algo parecido a "pan". La madre interpreta que quiere "pan" y se lo proporciona al mismo tiempo que le dice "pan". El bebé recibe dos estímulos que se refuerzan mutuamente: (1) por una parte, la emergencia del objeto físico "pan" y (2) por otra parte, la palabra "pan" dicha por él mismo y por su madre.

Si bien puede ser que los niños pequeños no hagan la diferenciación entre signo y objeto, las personas adultas diferencian entre signo y objeto:

> *Un signo, o representamen, es algo que está para alguien, por algo, en algún aspecto o disposición (...)* 2.228, (The collected Papers), Charles, S. Peirce

Puesto que tanto el "signo" como el "objeto" son "algo", hay que tener presente que ambos son objetos. Ser objeto o signo es algo relativo. Por tanto, conviene distinguir entre los objetos y los signos. Es una distinción importante, ahora bien es una diferencia coyuntural y no sustancial, ya que lo que en un momento es signo en otro puede pasar a ser objeto y viceversa. Si bien en la fase de "no diferenciación" el sujeto identifica (confunde) el signo con el objeto, en la fase de "diferenciación" el sujeto está en condiciones, según convenga, de identificar o diferenciar el signo del objeto:

> *Estar en lugar de, es decir, situarse en una relación tal respecto a otro que, para ciertos fines, puede considerársele, en algún modo como si fuese ese otro.* 2.273, (The collected Papers), Charles, S. Peirce

La posibilidad de diferenciar entre signo y objeto permite que "alguien" pueda establecer una relación diádica (función semiótica) entre "dos objetos" ("algo" por "algo"). En esta relación ("algo" por "algo") normalmente se considera que uno de los objetos (el signo) es una "expresión" que se relaciona con un "contenido" (el otro objeto).

En el EOS se considera que la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Godino y Batanero (1998), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Los objetos inicial y final están constituidos por cualquier objeto matemático. En el EOS, las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schütz pasando por Husserl. La interpretación de las funciones semióticas que propone el EOS generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

La representación con relación a las dimensiones duales "ostensivo – no ostensivo" y "personal – institucional"

Si nos formulamos la pregunta: ¿Cómo se relaciona el signo con el objeto?, nos encontramos con el problema de la clasificación entre representaciones internas y externas. En el triángulo de la figura siguiente se considera que el signo escrito "reloj" se relaciona con el objeto físico "reloj" por medio del concepto (interpretante) que tiene el sujeto (el interprete).

Normalmente se considera que tanto el concepto como el signo son representaciones. También se considera que la palabra escrita "reloj" es una representación externa y que el concepto es una representación interna (mental).

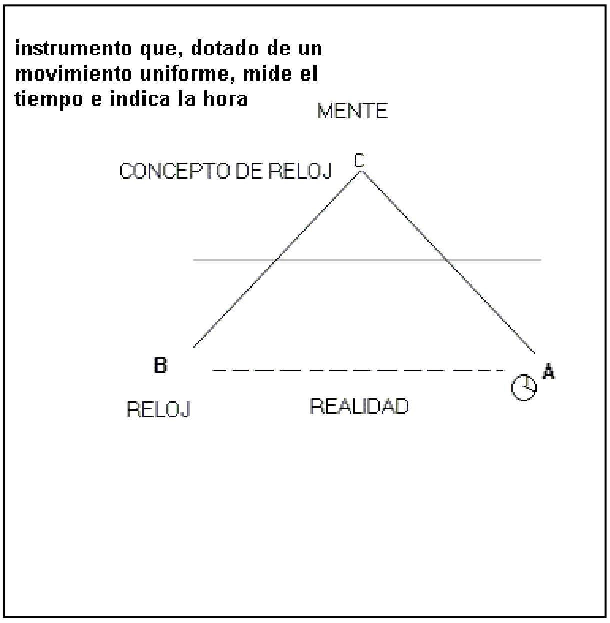


Figura 5.3. Relación entre signo y objeto
Fuente: Font (2001)

Esta primera clasificación en representaciones mentales o internas y representaciones externas no es en absoluto una clasificación transparente. El motivo es que los objetos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos con soporte material que forman parte del mundo real, y, puesto que se presupone que el sujeto se relaciona con el mundo real por medio de representaciones mentales, resulta que lo que se ha considerado como externo en cierta manera también es interno. La ambigüedad de la clasificación interna/externa ha sido señalada por diversos investigadores. Por ejemplo, Kaput con relación a esta clasificación se pregunta:

> *¿Qué es una representación mental? ¿Qué se quiere decir cuando decimos que <<representa>> a algo? ¿Para quién? ¿Cómo? ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y la correspondiente a una representación externa? ¿Una representación externa es un sistema constituido social o personalmente?* (Kaput, 1998, p. 267).

En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone reconvertirla en dos dualidades o atributos contextuales que se consideran más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo- no ostensivo y personal-institucional.

La distinción ostensivo – no ostensivo debe tomarse en sentido intersubjetivo: "algo" se puede mostrar a otro directamente versus "algo" que no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro “algo”, que si se puede mostrar directamente. Cuando se distingue entre los objetos matemáticos y sus representaciones, se considera a dichos objetos como no ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos tiene también una faceta ostensiva, esto es perceptible, ya que se usan en las prácticas por medio de sus ostensivos asociados.

Mediante el lenguaje ostensivo se “expresan” otros objetos no ostensivos. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). A su vez, las entidades no ostensivas necesitan a éstas entidades ostensivas para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello, en el enfoque ontosemiótico el lenguaje es considerado como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Un caso especial serán las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

Dependiendo del juego de lenguaje en que nos posicionemos, una misma expresión, por ejemplo “derivada”, puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de los objetos que intervienen en las prácticas que realiza un sujeto individual para resolver una actividad escolar, se entiende que se trata de un objeto personal. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, se considera que se ponen en juego objetos institucionales.

En el proceso de instrucción estamos interesados en la enseñanza de objetos institucionales. Estos objetos se presentan en la actividad matemática por medio de sus ostensivos asociados. Como resultado del proceso de instrucción los alumnos habrán construido sus objetos personales, los cuales se presentaran en su actividad matemática también por medio de ostensivos asociados

La representación con relación a la dimensión dual “elemental-sistémico”

Una de las posibles maneras de concebir el significado de una palabra es considerarlo como la abstracción o el universal que se asocia a esa palabra. A su vez, las cosas designadas por el término se consideran ejemplificaciones de ese mismo universal, o a la inversa, éste constituye la esencia de aquel. De esta manera, las palabras y las cosas quedan relacionadas a través de un tercer reino poblado de esencias y significados. Esta concepción, que se puede considerar platónica, se considera en el enfoque ontosemiótico como una manera "elemental" de plantear el problema. Desde este punto de vista, para especificar lo que una cosa es, su esencia, es necesario enumerar sus cualidades o los universales que ejemplifica.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde este nuevo punto de vista, conocer las cualidades de un objeto equivale a conocer su comportamiento posible, o sea, el conjunto de relaciones predicables de él. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. Se trata de una perspectiva "sistémica" ya que se considera que el significado de un objeto es el conjunto de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (o no).

Basta mirar con una perspectiva histórica un objeto matemático cualquiera para ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre: (1) un objeto matemático, (2) sus ostensivos asociados, (3) las prácticas que permiten manipular estos ostensivos y (4) las situaciones en las que se usa el objeto (juntamente a sus ostensivos y prácticas asociadas) para organizar fenómenos –por ejemplo, en Font y Peraire (2001) se hace este estudio para la cisoide. Esta mirada histórica también muestra que las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático son el resultado de una larga evolución en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación. Este hecho tiene implicaciones importantes. A continuación indicaremos tres que se consideran de las más relevantes:

1) La primera es que las representaciones ostensivas no se pueden entender de manera aislada:

> *Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras.* (Goldin y Stheingold, 2001, p. 2).

Por este motivo más que hablar de representaciones ostensivas o de signos es conveniente hablar de sistemas de signos.

2) La segunda es que el hecho de que el mismo objeto se pueda encuadrar en dos programas de investigación diferentes, cada uno con sus sistemas de representación, conlleva que "cada representación" se pueda convertir en "objeto representado" de la representación del otro programa de investigación.

3) La tercera es que una representación ostensiva, por una parte, tiene un valor representacional: es algo que se puede poner en lugar de algo distinto de él mismo y, por otra parte, tiene un valor instrumental: permite realizar determinadas prácticas que con otro tipo de representación no serían posibles. El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera elemental: "algo" por "algo". En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el "iceberg" de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita.

En el enfoque ontosemiótico, la introducción de la dualidad elemental-sistémica permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas en las que cada uno de los diferentes pares objeto/representación (sin segregarlos) posibilita un subconjunto de prácticas del conjunto de prácticas que son consideradas el significado del objeto. Dicho de otra manera, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con un significado holístico. Pero, en cada subconjunto de prácticas el par objeto/representación (sin segregar) es diferente, en el sentido de que posibilita prácticas diferentes.

Si bien las reflexiones anteriores permiten una visión holística sobre el proceso de representación, es evidente que con ellas no abarcamos toda la complejidad de este proceso. Para una mayor profundización remitimos al lector al trabajo de Font, Godino y D'Amore (2007) en el que se reflexiona sobre la naturaleza y diversidad de objetos que desempeñan el papel de representación y de objetos representados en la actividad matemática. En este trabajo se muestra como los instrumentos teóricos elaborados por el EOS permiten afrontar la siguiente problemática: 1) La naturaleza de los objetos que intervienen en la representaciones, 2) La distinción entre representaciones internas y externas. 3) El problema de la representación del elemento genérico. 4) El papel que desempeñan las representaciones de un mismo objeto en su emergencia y 5) Los procesos de comprensión y su relación con la traducción entre diferentes representaciones.

3. INVESTIGACIONES SOBRE PROCESOS EN EL MARCO DEL EOS

En el marco del EOS se han realizado diferentes investigaciones sobre procesos. En general las investigaciones realizadas en el marco del EOS focalizan su atención en los procesos de personalización e institucionalización ya que normalmente se interesan por la dialéctica entre significados personales e institucionales. También se han realizado investigaciones que tienen relación con otros procesos. Resumimos brevemente algunas de ellas.

3.1 Proceso de argumentación

Con relación al proceso de argumentación, Godino y Recio (1997), utilizando el marco ontosemiótico, analizaron los rasgos característicos del significado de la noción de prueba en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas. Su conclusión es que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la prueba en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas. Asimismo, se observa cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen los diversos significados institucionales de la prueba, lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con la prueba matemática.

3.2 Procesos de materialización e idealización

Con relación al problema de la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de materialización e idealización, en Font y Contreras (2008) se utilizan las dualidades ostensivo–no ostensivo y extensivo–intensivo — dos de las dualidades propuestas por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero & Font, 2007) — para tratar de manera separada los procesos de materialización e idealización y los de particularización y generalización. Se trata de una distinción importante que permite una mejor comprensión de cada proceso y, sobre todo, de su presencia conjunta en la actividad matemática.

Para Font y Contreras (2008) los procesos de materialización-idealización están asociados a la dualidad ostensivo-no ostensivo. Los objetos matemáticos son, en general, no perceptibles. Sin embargo, son usados en las prácticas públicas a través de sus ostensivos asociados (notaciones, signos, gráficos, etc.). La distinción entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) en el cual toman parte. Los objetos ostensivos también pueden ser pensados o imaginados por un sujeto o bien estar implícitos en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicación en la notación algebraica).

Font y Contreras (2008) ponen el siguiente ejemplo: el profesor ha dibujado en la pizarra la figura de la izquierda (figura 5.4) y habla sobre ella como si fuera la mediatriz del segmento que tiene por extremos los puntos A(3,4) y B(6,2) esperando, además, que los alumnos interpreten de esta manera dicha figura:

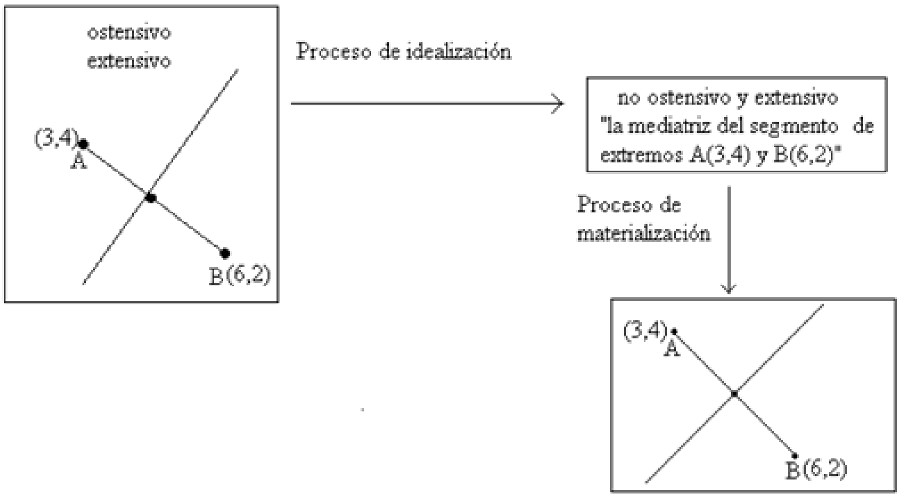


Figura 5.4. Procesos de idealización y de materialización
Fuente: Font y Contreras (2008)

Si se observa bien la parte izquierda se tiene que: (1) el segmento no es un segmento de línea recta, (2) la mediatriz no es una recta, ya que es sólo un segmento de la mediatriz, (3) además, dicho segmento tampoco es un segmento de línea recta, (4) el segmento no pasa exactamente por el punto medio, (5) los puntos A y B y el punto medio son muy gruesos, (6) el ángulo que forma la supuesta mediatriz con el segmento no es exactamente de 90º, etc.

Es evidente que el profesor espera que sus alumnos hagan el mismo proceso de idealización sobre la figura de la pizarra que él ha realizado y su discurso sobre ella omite los inconvenientes comentados en el párrafo anterior. Es decir, la figura de la pizarra se constituye en una figura ideal, explícita o implícitamente, por el tipo de discurso que el profesor realiza sobre ella. La figura de la pizarra es una figura concreta y ostensiva (en el sentido que está dibujada con el material “tiza” y es observable por cualquier persona que esté en el aula) y como resultado del proceso de idealización se tiene un objeto (la mediatriz del segmento AB) no ostensivo (en el sentido de que se supone que es un objeto matemático que no se puede presentar directamente si no es mediante ciertos ostensivos asociados). Por otra parte, este objeto no ostensivo es particular, a saber, es la mediatriz del segmento de extremos A(3,4) y B(6,2) y no es, por ejemplo, la mediatriz del segmento de extremos (4,4) y (8,7). A este tipo de objeto "individualizado" se le llama un extensivo. Por tanto, como resultado del proceso de idealización hemos pasado de un ostensivo que era extensivo a un no ostensivo que sigue siendo un extensivo.

La otra cara de la moneda es que para poder manipular los objetos no ostensivos necesitamos representaciones ostensivas, las cuales son el resultado de un proceso de materialización (y también de representación). Siguiendo con el ejemplo de la mediatriz dibujada en la pizarra, el profesor podría darse cuenta de que la figura no está muy bien hecha para después borrarla y sustituirla por una figura "más perfecta" (la figura de la derecha en la figura 5.4). El proceso de materialización sitúa el conocimiento matemático en el *"territorio del artefacto"* (Radford, 2006, p. 107) puesto que sus productos son artefactos culturales que mediatizan y materializan el pensamiento.

El proceso de idealización es un proceso que duplica entidades ya que, además del ostensivo que está en el mundo de las experiencias materiales humanas, se crea (como mínimo de manera virtual) un no ostensivo idealizado. La relación que se establece entre estas dos entidades es la de expresión-contenido y se puede caer en el error de segregar este par de objetos y dar vida independiente a los objetos no ostensivos (algo parecido a cuando se considera el espíritu como algo segregado del cuerpo), entre otros motivos porque el discurso objetual que se suele utilizar en las matemáticas induce a creer en la "existencia" del objeto matemático como algo independiente de su representación. Wittgenstein (1978) ha sido, probablemente, quien más claramente ha llamado la atención sobre este peligro, pues para este filósofo la asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

En el EOS se considera que los procesos de materialización e idealización son consustanciales a la actividad matemática. Dicho de otra manera sin la materialización en símbolos y artefactos no es posible realizar la actividad matemática y, por otra parte, en el discurso que se hace sobre estos símbolos se sugiere explícta o implícitamente que estos símbolos materiales están en representación de objetos ideales.

3.3. Procesos de particularización-generalización

Los procesos de particularización-generalización en el EOS están asociados a la dualidad extensivo-intensivo. Un objeto extensivo es usado como un caso particular (por ejemplo, la función $y = 2x + 1$), mientras que un intensivo es una clase (por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$). Los términos extensivo e intensivo están sugeridos por las dos maneras de definir un conjunto, por extensión (un extensivo es uno de los miembros del conjunto) y por intensión (se consideran todos los elementos a la vez). Por tanto, por extensivo entendemos un objeto particularizado (individualizado) y por intensivo una clase o conjunto de objetos.

Los mecanismos que nos ofrece el lenguaje para permitir la particularización o individualización de objetos matemáticos son variados (por ejemplo, los deícticos gramaticales –que sirven para indicar otros elementos–: éste, ése, aquel, ahí, allí, acá, etc. o los determinativos indefinidos: uno, alguno, cualquiera, etc.). También son variados los procesos de generalización (o abstracción) que permiten obtener intensivos. Font y Contreras (2008) consideran tres tipos de procesos: la abstracción reflexiva o constructiva, la eliminativa y la aditiva.

La abstracción reflexiva (Piaget, 2001) es un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Una de las características de la abstracción reflexiva es que es constructiva, en el sentido que construye intensivos a partir de la reflexión sobre la acción.

Ahora bien, podemos considerar otros mecanismos diferentes para obtener intensivos, uno de tipo eliminativo y otro de tipo aditivo. La abstracción empírica funciona por medio de un mecanismo eliminativo, se trata de eliminar o separar aspectos o notas de lo concreto. En este caso, se llega a un intensivo por la aplicación básicamente de la relación tipo/ejemplar, la cual se basa en la aplicación de un mecanismo de tipo eliminativo en base a la relación parte/todo, es decir el intensivo (tipo) se considera una de las partes que componen el extensivo (todo), ya que éste último es un ejemplar concreto que tiene muchas notas o atributos diferentes.

Otro mecanismo diferente para obtener intensivos consiste en la reunión en un mismo conjunto de diversos elementos. Por ejemplo, puedo considerar la mediatriz de la figura 5.4 como un miembro (un extensivo) que forma parte, junto a otras mediatrices, de una clase o conjunto (un intensivo). En este último caso se llega a un intensivo también por la relación parte/todo, pero entendida de manera inversa a como se entiende en el caso de la abstracción empírica, la parte (el extensivo) es un miembro de un todo, una clase (el intensivo).

Estas tres maneras de generar intensivos juegan un papel diferente en las matemáticas, la abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el "contexto de descubrimiento", mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el "contexto de justificación", puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas que se fundamenta sobre la teoría de conjuntos.

3.4 Procesos metacognitivos

En Gusmao (2006) se ha utilizado el enfoque ontosemiótico para analizar la resolución de problemas, dedicando especial atención a los procesos metacognitivos activados en las prácticas de resolución de problemas (RP). Gusmao afirma que los constructos elaborados por el EOS para explicar la "realización de una práctica" se deben complementar con la ayuda de herramientas teóricas que tienen su origen en las investigaciones sobre la metacognición.

Según Gusmao, para la realización de una práctica, como por ejemplo resolver un problema que le represente un grado de dificultad importante, un resolutor experto pondrá en funcionamiento una configuración cognitiva, pero para ello tiene que tomar una serie de decisiones de gestión de los componentes de la configuración a lo largo del proceso de resolución (coordinación, planificación/organización, supervisión/control, regulación y revisión/evaluación que pueden ser automáticas o declaradas en función del tiempo, instrumentos disponibles, etc.). Gusmao, si bien considera que para cada problema dichos procesos de gestión serán diferentes, propone una reconstrucción hipotética de una configuración metacognitiva general de referencia que describe de la siguiente forma:

Consideraciones para una Configuración Metacognitiva Institucional de Referencia
Gestiones primarias (metacognición primaria) Para empezar a resolver un problema, el resolutor experto, debe comprender primero lo que se pide en el enunciado, debe tomar conciencia

de todos los aspectos que se han de tener en cuenta para la resolución de la situación problema. Dichos aspectos guiarán el desarrollo de las acciones posteriores. Después, teniendo en cuenta las exigencias y condiciones impuestas por la tarea, debe decidir o elegir los pasos que supuestamente le llevarán a la solución. Dado que se supone que es experto en la materia, las decisiones que tomará en la mayoría de los problemas serán rápidas (e incluso en algunos casos automáticas); también sus argumentaciones sobre la bondad del plan adoptado serán precisas y de acuerdo con los conocimientos institucionales. Las gestiones para este primer nivel cubren desde la fase de ataque al problema hasta el ensayo de uno o más planes de resolución y, con ello un nivel relativamente semiautomático de procesos de supervisión, regulación y evaluación. Podemos decir de modo general que las acciones metacognitivas iniciales que se esperan para este nivel serán, sobre todo, de comprensión y de organización/planificación.
Gestiones secundarias (metacognición secundaria) La metacognición primaria en general va asociada a acciones del resolutor experto manifestadas de forma rápida (e incluso automática), dada la supuesta familiaridad que se le supone con los conocimientos necesarios para la resolución de la situación (tarea). Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación más reflexivas que las que se que se dan en la primera. 1) Dado un plan que puede ser el adecuado o no, una acción supervisiva es aquella en la que el resolutor, implícita o explícitamente, hace cuestionamientos del tipo “¿estoy siguiendo correctamente el plan previsto?”. Este tipo de pregunta da indicios de la existencia consciente de un proceso de supervisión puntual o constante de las acciones emprendidas. Tal supervisión le conduce (y garantiza) a un mayor rendimiento. 2) En una acción regulativa se supone que el resolutor implícitamente o explícitamente hace cuestionamientos del tipo “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, qué puedo corregir o qué nuevo camino puedo emprender”. Se da cuenta de que se equivocó y sobre todo se pregunta cuándo o dónde se equivocó. 3) En una acción evaluativa/verificativa se supone que el resolutor explícitamente hace cuestionamientos del tipo “¿estoy respondiendo correctamente a la tarea?” ¿La solución que doy es la que resuelve el problema?”. Este tipo de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de

evaluación/verificación final de las acciones emprendidas.
Gestiones para una metacognición ideal Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, tal como se ha dicho serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación. Lo que caracteriza este tercer nivel metacognitivo es el recurso deliberado de procesos cognitivos de características muy generales (pensamiento metafórico, analógico, particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambio de representación, resolución alternativa, una solución original, etc.), los cuales se proponen como nuevas alternativas (mucho más conscientes y reflexivas) a las demandas de supervisión, regulación y evaluación anteriores. Aunque hemos puesto los tres niveles de metacognición separados uno del otro, hay que pensarlos como un proceso continuo que se desarrolla en espiral. En muchos casos será suficiente el nivel primario de metacognición (cuando por ejemplo un resolutor experto se enfrenta a un problema que para él es simple).

Tabla 5.3. Configuración Metacognitiva Institucional de Referencia
Fuente: Gusmao (2006)

Sólo aparecerán explícitamente los niveles secundario y terciario descritos anteriormente cuando el resolutor se enfrente a una situación problema cuya complejidad le obligue a ponerlos en funcionamiento. La configuración metacognitiva institucional (de un resolutor ideal), se toma como referencia para evaluar las configuraciones metacognitivas personales de los estudiantes. En la confección de esta configuración ideal se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos: 1) la actividad metacognitiva de los profesores de matemáticas que resolvieron el conjunto de los problemas que posteriormente se propusieron a los alumnos, 2) la revisión de la literatura sobre la metacognición que se consultó y 3) la propia experiencia de los investigadores en la resolución de problemas en la formación continua de los profesores y 4) la opinión de expertos de la metacognición que fueron consultados. Posteriormente esta configuración se fue refinando teniendo en cuenta matices sugeridos por las respuestas de algunos estudiantes. Los niveles de metacognición necesarios para la resolución de un problema dependerán de la complejidad del problema y del nivel de conocimientos (cognitivos y metacognitivos) del resolutor.

Gusmao afirma que, para una mejor comprensión de las prácticas manifestadas por los estudiantes en el contexto de las tareas propuestas en su investigación, es necesario contemplar una unidad mínima de análisis compuesta por las configuraciones cognitiva y metacognitiva conjuntamente, las cuales se pueden analizar a partir de configuraciones epistémicas y metacognitivas de referencia. Según Gusmao, la perspectiva institucional, desde la cual se analizaría y valoraría la resolución de problemas de los alumnos, se puede representar mediante el siguiente esquema:

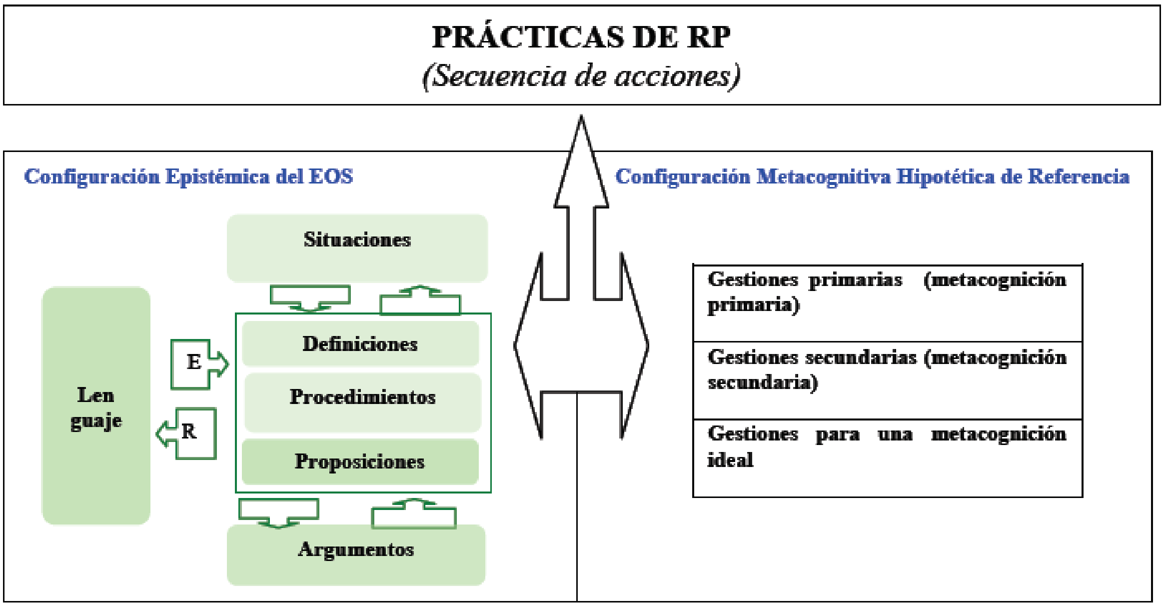


Figura 5.5. Configuración cognitiva y metacognitiva
Fuente: Gusmao (2006)

Con este esquema Gusmao quiere representar que si bien, por una parte conviene, para el análisis de las prácticas de RP de un alumno, considerar por separado los constructos configuración cognitiva y metacognitiva, que a su vez están descompuestas en sus elementos constitutivos, hay que "ver" estos constructos formando parte de un todo integrado que, en su conjunto, contribuye a explicar la realización de dicha práctica.

De la investigación de Gusmao hay que resaltar, por una parte, que propone un instrumento que muestra toda su potencia en los detallados análisis que hace en su investigación de los protocolos de resolución de problemas de los alumnos y, por otra parte, que algunos de los procesos considerados en la figura 5.1 son incorporados en el nivel de metacognición ideal de su herramienta de análisis.

3.5. Contextualización

Con relación al término contexto, según Ramos y Font (2006) hay básicamente dos usos. Uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro consiste en enmarcarlo en el entorno. En el primer caso, se trata de ver que la situación problema cae dentro del campo de aplicación de un objeto matemático. En el segundo caso, se trata de un "uso" que vamos a llamar, metafóricamente, "ecológico". La idea que interesa del uso ecológico del término contexto es que da a entender que hay diferentes "lugares" en los que se puede situar el objeto matemático.

Puesto que cada problema se enmarca dentro de una configuración epistémica diferente se puede entender, de manera metafórica, que la situación-problema "sitúa" el objeto que contextualiza en un "lugar" o en "otro" — es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentaciones, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades—. Desde esta perspectiva, cada situación problema sitúa al objeto que contextualiza en un determinado "nicho". De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo-intensivo y otra, de tipo "ecológico", al situar el objeto matemático que contextualiza en un "nicho" o bien en otro.

El hecho de contemplar la situación problema en el marco de la configuración epistémica asociada permite relacionar las dos maneras de entender el término "contexto": (1) como caso particular de un objeto matemático y (2) como entorno del objeto y entender que, de hecho, las dos actúan simultáneamente.

Uno de los dilemas que plantea el uso de la contextualización extra matemática, para conseguir la construcción de los objetos matemáticos, es el siguiente: los problemas contextualizados que se les presentan a los alumnos, una vez resueltos, permiten obtener casos particulares. Por ejemplo, del objeto matemático "función afín" (e.g., $y = 2x+3$), pero no el objeto matemático "función afín" ($y = ax+ b$). Es decir, después de resolver un problema contextualizado hemos pasado de una situación extra matemática a un extensivo (caso particular) de un objeto matemático, pero queda pendiente el problema de saber cómo este extensivo se puede considerar un caso particular de un objeto matemático OM, si OM todavía no se conoce. Para abordar este problema es necesario entender los procesos de descontextualización a partir de contextos extra matemáticos en términos de la siguiente quíntupla:

(S, R , S’, la relación extensivo-intensivo “es”, OM)

Se parte de una situación de contexto extra matemático S, que podemos poner en relación (R) con la situación S’, la cual, a su vez, se considera como un caso particular del objeto matemático OM. La relación R, que permite relacionar S con S’, puede ser de muchos tipos diferentes. Ahora bien, en todos los casos se suele terminar considerando R como una relación de representación. Por otra parte, S’ se considera un caso particular de un objeto matemático más general (S’ es OM).

La modelización es un proceso complejo que implica primero partir de la situación real para, gracias a un proceso descontextualizador, obtener un objeto matemático y después, gracias a un proceso de contextualización, aplicar este objeto a diferentes situaciones reales. En Ramos y Font (2006) se considera conveniente (1) utilizar el término “matemáticas contextualizadas” cuando se pretende que el alumno realice alguno –o ambos- de estos procesos, (2) utilizar el término “descontextualización” para referirnos al proceso que va de la realidad al objeto matemático y de “contextualización” para indicar el proceso que va del objeto matemático a la realidad y (3) de “modelización” cuando se presenta a los alumnos una situación suficientemente rica que tenga por objetivo la realización de los 5 pasos siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

3.6. Procesos intuitivos

En Malaspina (2008) y Malaspina y Font (2010) se utiliza una metáfora vectorial en la que el proceso intuitivo es un vector con tres componentes (alguna de ellas podría ser “cero” en determinados casos), en la que las tres componentes son procesos que pertenecen al grupo de los 16 procesos considerados en el EOS:

Intuición = (idealización, generalización, argumentación)

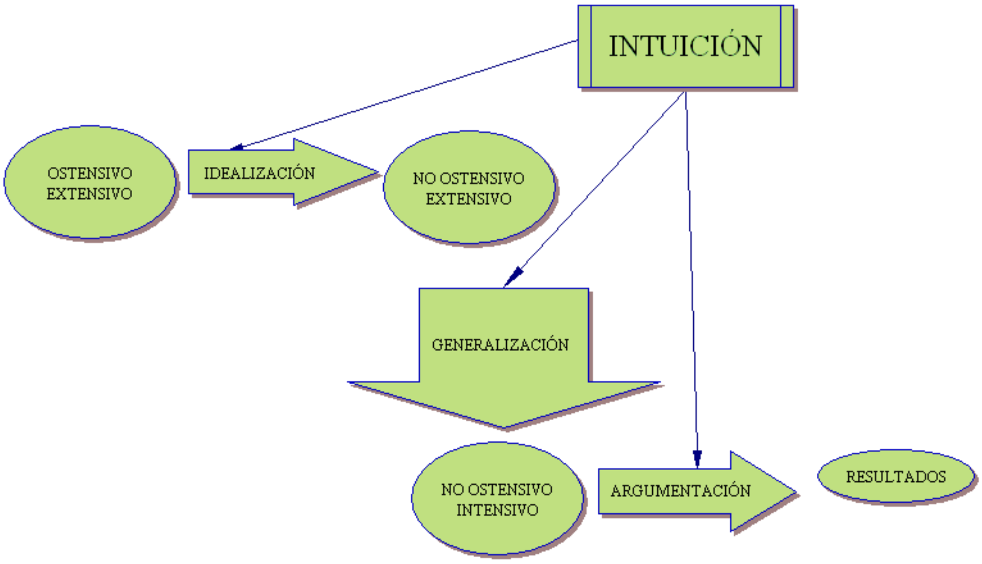


Figura 5.6. Componentes de la intuición
Fuente: Malaspina (2008)

Con este esquema (figura 5.6), se visualiza que la intuición actúa sobre ideas matemáticas universales (que están presentes por medio de sus ostensivos asociados), para llegar a resultados que se consideran verdaderos sin (o casi sin) una argumentación explícita. De hecho, las diferentes maneras de entender la intuición difieren en el énfasis que dan a cada una de las tres componentes del “vector intuición”.

Se trata de una caracterización de la intuición que participa de una serie de principios comunes o, al menos, no contradictorios con la caracterización que propone Fischbein (1987). En concreto, las propiedades de autoevidencia e inmediatez, certeza intrínseca e implicitez, consideradas por Fischbein en su caraterización de la intuición, están relacionadas con la componente argumentación del vector intuición. La característica de extrapolaridad está conectada con la componente idealización. La característca status de la teoría está relacionada con las componentes idealización y generalización.

3.7 Procesos metafóricos

En Acevedo, Font y Bolite Frant (2006) y Acevedo (2008) se realiza una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico (expresión-contenido, institucional-personal, elemental-sistémica, extensivo-intensivo y ostensivo-no ostensivo). Para ello, utilizan como contexto de reflexión el objeto matemático “función” y, más en concreto, su representación gráfica.

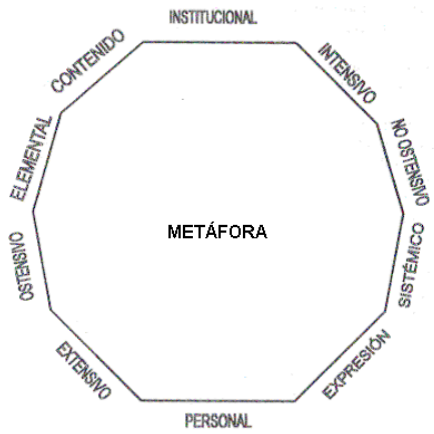


Figura 5.7. Los procesos metafóricos vistos desde las facetas duales

Fuente: Acevedo (2008)

La metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional"

El caso estudiado, las metáforas relacionadas con las gráficas de funciones, es un buen ejemplo para ilustrar cómo se sitúa la metáfora con relación a la dimensión dual "personal/institucional". Por una parte, la metáfora estática "la gráfica de una función $f(x)$ es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales y, por otra parte, la metáfora dinámica (la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre la gráfica) es un recurso utilizado por el profesor que resulta determinante en la estructuración de los objetos matemáticos personales de los alumnos. Puesto que las metáforas dinámicas y las estáticas estructuran de manera diferente la gráfica de una función es necesario preguntarse por el tipo de coexistencia que se produce entre ambas, enmarcando esta pregunta en la dimensión dual "personal/ institucional".

A partir de un análisis histórico, la respuesta es que, más que coexistencia en el plano institucional, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora estática conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual tenemos la desaparición de una a manos de la otra. Aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función.

Si nos preguntamos por la coexistencia de ambos tipos de metáfora en el proceso de instrucción, se observa una mayor presencia de las metáforas dinámicas.

Si nos preguntamos por la coexistencia en el plano personal, se constata que el uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la estructura del significado personal de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista. Mientras que un profesor experto puede manejar de manera coherente las dos metáforas, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas, hay alumnos que no logran hacerlo. Esta falta de coherencia es una de las causas importantes de conflictos semióticos relacionados con la representación gráfica de funciones.

La metáfora con relación a la dimensión dual "extensivo/intensivo"

Una objeción importante que se puede poner a la afirmación de que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora estática, consiste en afirmar que no se trata de una metáfora sino de una relación de tipo extensivo-intensivo. Esto es, afirmar que la gráfica es un ejemplo de conjunto y que no hay ningún tipo de metáfora, se trata simplemente de una subcategorización.

Se trata de una objeción importante ya que en muchos casos no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización. En el caso de las gráficas de funciones sólo un análisis histórico permite afirmar que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora que se ha convertido con el tiempo en una subcategorización.

Lakoff y Johnson (1991) consideran que tanto la subcategorización como la metáfora tienen una estructura del tipo A es B y que ambas son los puntos extremos de un continuum único. En el caso de algunas metáforas es claro que A y B son muy diferentes y nos situamos en un extremo de este continuum, mientras que en la subcategorización A se considera un extensivo de un intensivo B y también es claro que nos situamos en el otro extremo del continuum. Pero cuando no está claro si A y B son muy diferentes o bien si se pueden relacionar como extensivo e intensivo, entonces la relación A es B cae en algún punto de la mitad del continuum.

Por otra parte, metáforas que en el momento de su aparición se situaban claramente en un extremo del continuo con el paso del tiempo se han convertido en subcategorizaciones situadas en el otro extremo. En Font (2007) se ilustra este proceso de fosilización para una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjuntos de puntos que son solución de una ecuación.

La metáfora con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"

Con relación a la dimensión expresión/contenido la metáfora actúa de manera icónica (Otte, 2001), puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto. Una nueva metáfora (A es B') es una expresión que permite entender los elementos de B (partimos previamente de la relación extensivo/intensivo A es B) como elementos de B'. Es decir, A es B' permite estructurar los elementos A de B en términos de B'. Dicho de otra manera, la metáfora dota de una nueva estructura a B. Visto de esta manera la expresión A es B' se puede considerar que funciona de manera icónica con respecto al contenido B.

La metáfora con relación a la dimensión dual "elemental / sistémica

Si bien la metáfora se presenta de manera elemental (A es B), el hecho de que ahora B estructure A permite aplicar a A un conjunto de prácticas que son el significado de B. Dicho de otra manera, la metáfora es una manera compacta de generar un sistema complejo de nuevas prácticas.

La dualidad elemental/sistémica en el caso de la metáfora ha sido puesta de manifiesto por diferentes autores. Según Black (1966) cuando se utiliza una metáfora se tiene en una sola expresión dos pensamientos de cosas distintas en actividad simultánea. El significado de la expresión metafórica sería el resultante de la interacción de los dos elementos. En "Juan es una roca" los dos pensamientos activos a la vez serían el de la fortaleza de Juan y el de la de solidez de la roca. Para Black los dos elementos vendrían a ser uno, el foco de la metáfora -el enunciado efectivo- y otro, el marco que lo rodea. Este segundo elemento ha de ser considerado como un sistema más que como una cosa individual. Cuando se dice que "la sociedad es un mar", se está poniendo delante de nuestros ojos, proyectando sobre la sociedad, todo un sistema conceptual en el que hay tempestades, puertos seguros, piratas, tiburones, naufragios y muchas cosas más.

En los trabajos de Lakoff y Númez (2000) la dualidad elemental/sistémica también ocupa un lugar central. Por una parte, la metáfora es elemental (A es B), pero, por otra parte, nos permite generar un nuevo sistema de prácticas (perspectiva sistémica) como resultado de la comprensión del dominio de llegada en términos del dominio de partida. Lakoff y Núñez desarrollan la dualidad elemental sistémica para diferentes metáforas. Valga como ejemplo la metáfora del contenedor, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora que se usa para estructurar la teoría de clases. Para este autor se trata de una metáfora ontológica inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana (Núñez, 2000, p. 13):

Elemental: "Las clases son contenedores"

Sistémica:

Dominio de partida (Esquema del contenedor)	Domino de llegada (Clases)
Interior del contenedor	Clase
Objetos dentro del contenedor	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	La unión de clases
El exterior de un contenedor	El complementario de la clase

Tabla 4. Visión sistémica de la metàfora "Las clases son contenedores"

De hecho, la mayoría de las investigaciones sobre la metáfora se han dedicado principalmente al estudio de dicha dualidad.

La metáfora con relación a las dimensión dual "ostensivo / no ostensivo"

Con relación a la dimensión dual "ostensivo / no ostensivo" la metáfora actúa en ambos niveles ya que por una parte se presenta de manera ostensiva en los textos o en el discurso oral y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos permitiendo la realización de inferencias.

3.8. Procesos de visualización

En Godino, Cajaraville, Fenández y Gozato (2012) se analiza la noción de visualización aplicando las herramientas del EOS. Estos autores distinguen entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Para ello, fijan la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego la *percepción visual*.

Los "objetos visuales" y los procesos de visualización de donde provienen, forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relacionan los objetos constituyentes de la configuración).

En este trabajo, la visualización es analizada, en primer lugar, desde el punto de vista de los objetos primarios que en ella participan, esto es, los tipos de situaciones-problemas (tareas), elementos lingüísticos y materiales, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los cuales se dice que hay visualización. Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación.

En segundo lugar la visualización es analizada aplicando las dualidades o modalidades contextuales consideradas en el EOS desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados. En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos), e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados). Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido).

Como síntesis del análisis realizado en este trabajo sobre la visualización afirman que la configuración de objetos y procesos puestos en juego en la realización de una práctica matemática por un sujeto,

(1) Siempre involucra lenguajes analíticos en mayor o menor medida, aunque la tarea refiera a situaciones sobre el mundo perceptible. Esto es así por el carácter esencialmente regulativo-sentencial de los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos.

(2) Una tarea no visual puede ser abordada, al menos parcialmente, mediante lenguajes visuales los cuales permiten expresar de manera eficaz la organización o estructura de la configuración de objetos y procesos puestos en juego, especialmente mediante diagramas o con el uso metafórico de iconos e índices.

En consecuencia, la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente (figura 5.8). El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones. El grado de visualización puesto en juego en la solución de una tarea dependerá del carácter visual o no de la tarea y también de los estilos cognitivos particulares del sujeto que la resuelve.

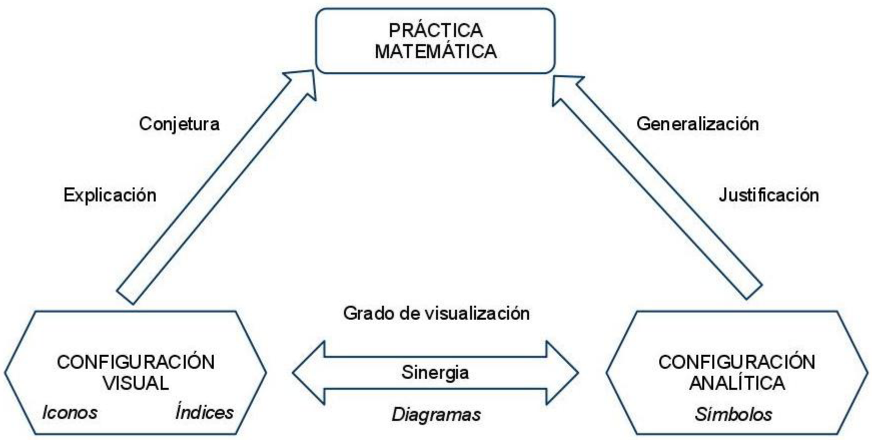


Figura 5.8. Sinergia entre configuraciones visuales y analíticas

Fuente: Godino, Cajaraville, Fenández y Gozato (2012)

4. PRESENCIA CONJUNTA DE PROCESOS Y OBJETOS EN LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS

En el apartado anterior se ha afirmado (1) que en una misma tarea se puede inferir que intervienen muchos objetos y procesos matemáticos y (2) que según el contexto se puede priorizar un solo proceso y un solo objeto. En este apartado, vamos a ver, utilizando una tarea concreta, la presencia conjunta de diversos objetos y procesos en la realización de prácticas matemáticas.

Nuestro objetivo en este apartado es mostrar cómo el uso del constructo "configuración epistémica de los objetos matemáticos", junto con los procesos considerados en el enfoque ontosemiótico, nos permite realizar un mejor análisis de tareas matemáticas y las prácticas, una de las competencias profesionales necesarias para el profesor. La herramienta "configuración epistémica" resulta muy útil para la descripción estática de la estructura (organización, configuración, anatomía, etc.) de un texto matemático, mientras que los procesos son herramientas que nos permiten explorar más a fondo el funcionamiento (dinámica, fisiología, etc.) de la configuración epistémica activada en la realización de la práctica matemática.

4.1 Ejemplo 1. La mediatriz

En este primer ejemplo, utilizaremos una tarea sobre la mediatriz propuesta en Font y Godino (2006), reformulando la configuración epistémica y realizando una ampliación, que consiste en mostrar los procesos activados en su solución:

Tarea

> La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por su punto medio. A partir de la siguiente construcción geométrica realizada con el programa Cabri-Géomètre:

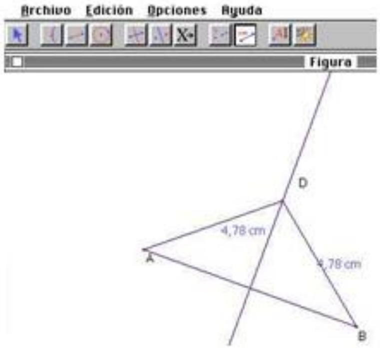


Figura 5.9. La mediatriz construida con el programa Cabri-Géomètre

a) Describe una propiedad que cumplan todos los puntos de la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ dado.
b) Demuestra la propiedad descrita en la parte a).
c) Escribe una nueva definición de mediatriz de un segmento.
d) Explica, a partir de las respuestas dadas a los apartados anteriores, un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.

Prácticas matemáticas

Entendemos en el EOS por práctica del alumno la lectura de la tarea y su resolución. La herramienta "configuración epistémica" nos permite ver la estructura de los objetos que posibilitan la práctica que debe realizar un alumno hipotético (para cada alumno concreto, tendríamos una configuración cognitiva).

En este caso, la práctica que realiza el alumno (hipotético) es la lectura del enunciado de la tarea y la producción de un texto de sus respuestas. Para ello, en primer lugar, debe utilizar el programa Cabri-Géomètre, de modo de conseguir trazar la mediatriz de un segmento y tomar las distancias de cualquier punto de ella hacia los extremos de dicho segmento, verificando que estas distancias sean iguales (emergencia de una propiedad). Luego, debe proporcionar: una demostración sobre su conjetura, usando congruencia de triángulos rectángulos; una definición sobre mediatriz, en base a su conjetura; y finalmente, una construcción con regla y compás, usando del mismo software.

Con el fin de llevar a cabo una práctica matemática, el agente debe tener los conocimientos básicos, tanto para llevar a cabo la práctica como para interpretar los resultados satisfactoriamente. Si se tiene en cuenta los componentes del conocimiento que el agente debe tener para desarrollar y evaluar la práctica que permite resolver un problema (por ejemplo, proponer y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), se puede observar ver que cierto lenguaje verbal (por ejemplo, solución) y simbólico (por ejemplo, x) deben ser utilizados. Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de *conceptos* (por ejemplo, la ecuación), *proposiciones* (por ejemplo, si el mismo término se añade a los dos lados de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente) y *procedimientos* (por ejemplo, la solución por sustitución) que se utilizarán en la producción de los *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, entendida como una acción compuesta, son satisfactorias. A continuación, se considera que cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, es necesario que se activen algunos de los elementos mencionados anteriormente (o todos): situación, problemas, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Al articular este tipo de objetos, se obtiene la configuración de la figura 5.10 (representada en forma de hexágono en la Figura 5.1), conocida como la "configuración epistémica" en el EOS. Esta configuración sirve como una herramienta, la cual nos permite ver la estructura de los objetos que facilitan la práctica que un estudiante hipotético tendrá que realizar de acuerdo con la solución prevista por los autores de la tarea (para cada estudiante en particular, se tiene una configuración cognitiva diferente). A continuación, vamos a aplicar esta herramienta para ver cuál de los objetos son activados en la resolución hipotética de la tarea.

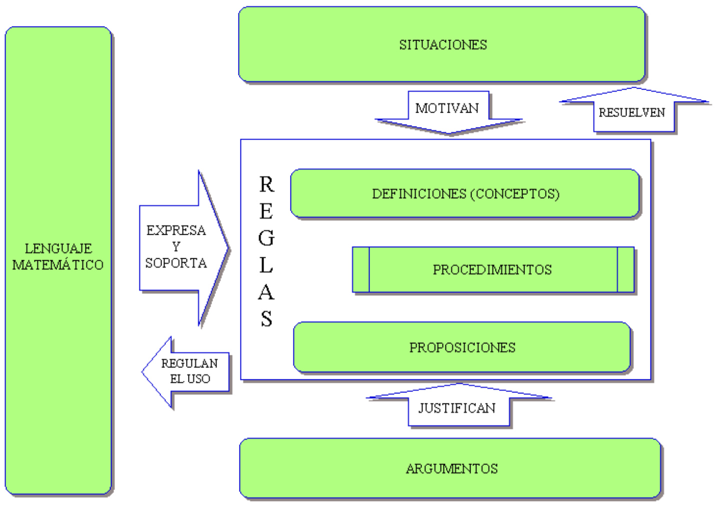


Figura 5.10. Configuración epistémica

Configuración Epistémica de la tarea. Objetos matemáticos

Una configuración epistémica “emergente” asociada a la mediatriz de un segmento es la siguiente:

Situación-Problema

Problema descontextualizado de construcción geométrica en el que se debe hallar y justificar una propiedad de la mediatriz.

Lenguaje[1]

- Términos y expresiones verbales: Mediatriz, segmento, extremos, recta perpendicular, punto medio, demostración, definición, procedimiento, construcción, regla, compás, radio, circunferencia, igual, longitud, equidistante, mayor que, ángulo recto, extremos del segmento, triángulo rectángulo, hipotenusa, cateto, pertenece, congruencia.
- Simbólico: *A*; *B*; *D*; 4,70cm; 6,50cm; 3,82cm; 90º; *D*; *M*; $\overline{AB}$; $\overline{AD}$; $\overline{BD}$; $\overline{AB}$; $\overline{DM}$; *BM; BMD; AMD; m;* $\angle AMD$ y $\angle BMD$.
- Gráfico:

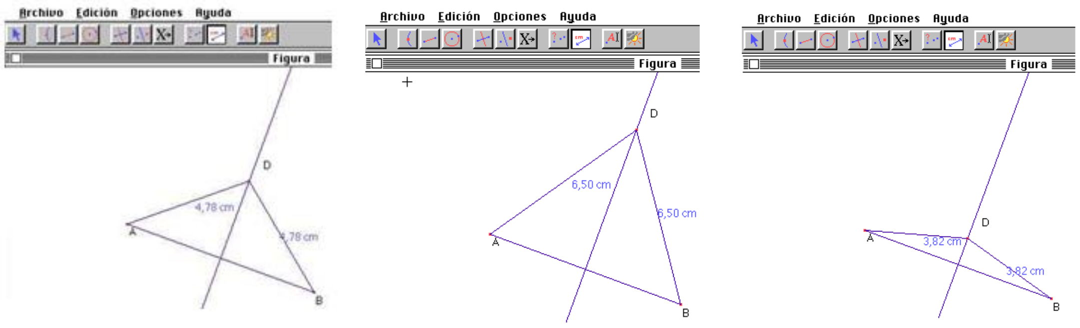


Figura 5.11. Construcción de la mediatriz para diferentes segmentos

Conceptos (Definiciones)

Previos

- Segmento, recta perpendicular, punto medio, radio, semicircunferencia, Triángulo rectángulo, congruencias.
- Mediatriz de un segmento (definida como la recta perpendicular que pasa por el punto medio de dicho segmento.)

Emergentes

- Mediatriz de un segmento (definida como recta formada por todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento.)

[1] Las frases son consideradas representaciones de las definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos, y no están incluidas en la categoría de "lenguaje" porque las definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos que representan estas frases aparecen en las siguientes categorías de la configuración epistémica.

Propiedades

Previas

- El punto medio divide al segmento en dos segmentos de igual longitud.

- La recta perpendicular a un segmento forma (cuatro) ángulos de 90º con dicho segmento.

- Teorema HC: Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y el cateto de uno de los triángulos tienen la misma medida que los correspondientes al otro.

Emergente

- Los puntos de la mediatriz de un segmento se hallan a igual distancia de los extremos del segmento.

Procedimientos

Previo

- Trazado de la mediatriz de un segmento usando el programa Cabri-Géométre: mediatriz o recta perpendicular que pasa por su punto medio.

Emergente

- Construcción con regla y compás de la mediatriz:

- Con un radio mayor a la mitad de la longitud del segmento $\overline{AB}$ y con centro en el punto *A*, se traza una semicircunferencia.
- Se repite el paso anterior, pero el centro de la semicircunferencia es el punto B.
- Se hallan los puntos de intersección de ambas semicircunferencias.
- Se traza la mediatriz que pasa por los puntos de intersección hallados en el paso anterior.

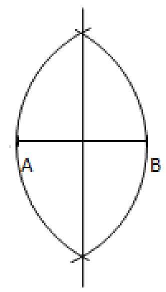


Figura 5.12

Argumentos

Tesis1: "Los puntos de la mediatriz un segmento se hallan a igual distancia de los extremos del segmento."

Justificación visual de la propiedad haciendo uso del software Cabri-Géométre (primera argumentación), proporcionando una conjetura.

Tesis 2: Los puntos de la mediatriz un segmento se hallan a igual distancia de los extremos del segmento

Justificación de la propiedad utilizando elementos genéricos.

(Demostración deductiva: Considerando la figura 5.9)

Por demostrar que las longitudes de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son iguales.

Procesos

En esta configuración destaca el papel central que juega la situación problema (de tipo intra matemático) y también que está orientada a la emergencia de nuevos objetos matemáticos (nueva definición de la mediatriz y nuevo procedimiento de construcción). Puesto que se trata de una configuración epistémica, cuyo objetivo es la emergencia de nuevos objetos, es evidente que propicia claramente algunos de los procesos que se hallan en el interior del hexágono de la figura 5.1.

En primer lugar, el alumno debe comprender el enunciado del problema (apartado a); es decir, realiza un primer *proceso de comunicación* (en el sentido de que “entiende enunciados matemáticos de otras personas”), que no se analizará. Para ello, ha tenido que entender el significado de la definición proporcionada de la mediatriz de un segmento (*proceso de significación*) y de todos los términos que aparecen: segmento, punto medio, construcción, etc., y sobre todo, comprende el texto globalmente. Además, debe usar el programa Cabri-Géométre para las construcciones geométricas (*procesos de materialización y de algoritmización*).

El alumno debe presentar una justificación de su respuesta al apartado a, pedido explícitamente en el apartado (b), realizando un *proceso de argumentación* (demostración deductiva). Para ello, debe empezar con un *proceso de particularización* al tomar un punto *D* de la mediatriz. Además, debe usar algunos de los objetos de la configuración epistémica como son el teorema de congruencia de los triángulos rectángulos y la propiedad emergente en la respuesta al apartado a. Además, el alumno realiza diversas representaciones: verbal, simbólica y gráfica. Finalmente, realizará un *proceso de generalización* al considerar implícitamente que el punto *D* puede ser cualquiera.

Para responder al apartado c, el alumno debe realizar un *proceso de definición*, utilizando la propiedad emergente “Los puntos de la mediatriz de un segmento se hallan a igual distancia de los extremos del segmento”.

Para responder el apartado d, debe realizar un *proceso de algoritmización*, que le permite hallar un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz de un segmento.

Además de los procesos anteriores, en la resolución de la tarea se activan algunos de los procesos asociados a las facetas duales (decágono exterior de la figura 5.1). En el caso de la figura de la pantalla del ordenador, actúan los *procesos de idealización* y *materialización* ya que se considera que la mediatriz de la pantalla es una materialización del objeto matemático "mediatriz del segmento AB".

Para responder a la tarea, una vez realizada con el ordenador la construcción de la mediatriz, el punto *D* se puede convertir en un objeto variable, es decir, en un objeto particular dinámico. Basta situar el puntero del ratón en el punto *D* y moverlo. El invariante que obtiene el alumno al mover el punto *D* es que este punto siempre cumple la condición de estar a igual distancia de los extremos *A* y *B* del segmento. Por lo tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos.

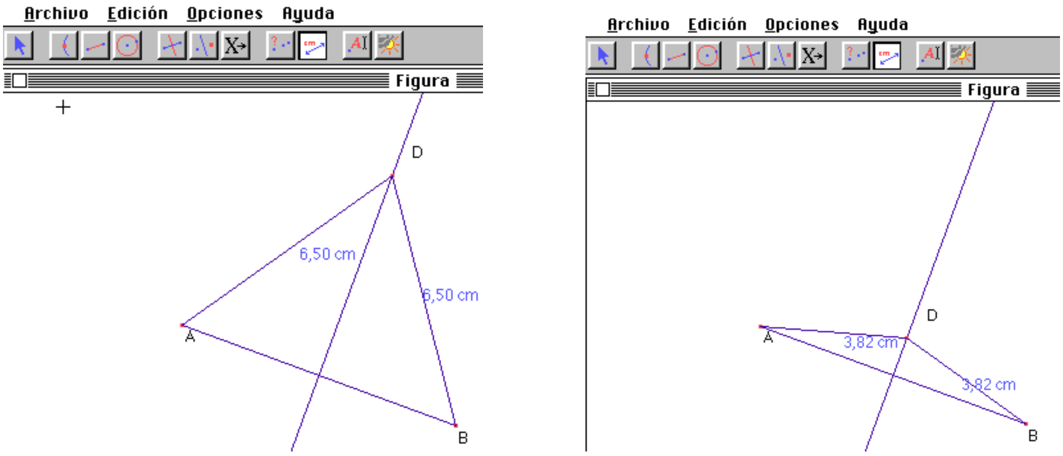


Figura 5.13. Invariantes de las acciones

Este resultado se puede simbolizar de la siguiente manera: los puntos de la mediatriz cumplen la siguiente condición: distancia *AD* = distancia *BD;* en otras palabras, los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ tienen igual longitud.

La resolución de la tarea permite la emergencia de "intensivos" (por ejemplo, una nueva definición de la mediatriz). Ahora bien, es importante observar que esta emergencia es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción "reflexiva" (en términos de Piaget). Se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que gana un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Hay que destacar que se llega a un intensivo (lo que no varía) a partir de (1) ignorar aspectos de lo concreto (lo que varia) y (2) de considerar que lo que es válido para un objeto (variable en esta caso, puesto que estamos trabajando con un programa dinámico) es válido para todos, es decir se razona con elementos genéricos (dinámicos en este caso). De hecho, la principal función que cumple la figura 3 es introducir un caso particular (variable en este caso) sobre el cual razonar.

El alumno, para cada una de sus respuestas a los apartados a, b, c y d del problema propuesto, debe realizar *un proceso de comunicación*. Esta comunicación implica un *proceso de argumentación* explícita basada en (1) justificación visual de la propiedad (conjetura): "Los puntos de la mediatriz un segmento se hallan a igual distancia de los extremos del segmento", después de haber utilizado el programa Cabri-Géométre (primera argumentación), para luego, (2) realizar un proceso de argumentación más rigurosa, realizando una demostración deductiva, la cual se menciona en la configuración epistémica. En la comunicación que debe hacer el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, puesto que utilizando el programa geométrico, grafica en la pantalla diferentes figuras; el registro verbal, por ejemplo, al escribir la definición de mediatriz; y el simbólico ya que utiliza las notaciones de segmentos, ángulos y las longitudes. Por tanto, el alumno debe realizar también un *proceso de representación*.

4.2 Ejemplo 2. Diagramas de Voronoi

Como un contexto de reflexión, usaremos la siguiente tarea, tomada de *Geometry with applications and proofs* (Goddijn, Kindt & Reuter, 2004, part. I, p. 5) publicado por el Instituto Freudenthal.

Tarea

En el desierto

En la figura de abajo, se muestra parte del un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.

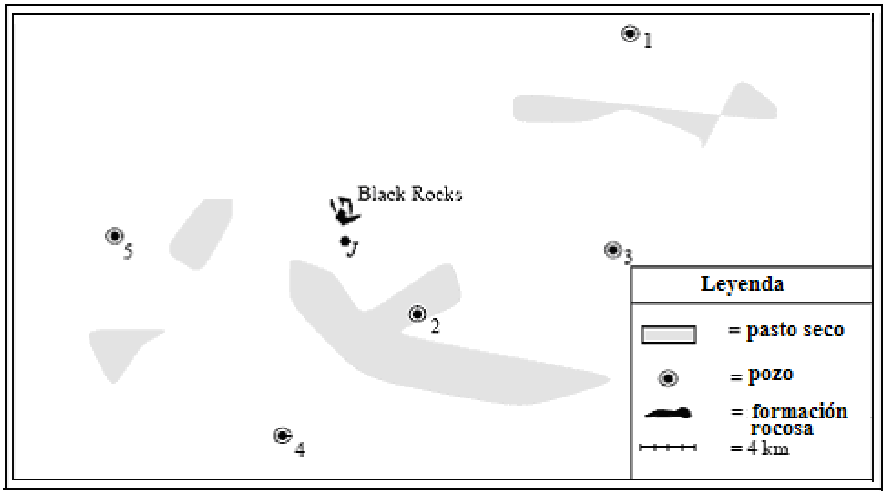


Figura 5.14. En el desierto

1.

a. *¿A cuál de los pozos irías a tomar agua*?

No es difícil responder, por supuesto irías al pozo más cercano.

b. *Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro*.

c. *Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte pertenece a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de este pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos*.

d. *¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos dominios diferentes*?

e. *¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son colindantes? 0*: *trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos*.

f. *En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)*?

g. *La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras*?

h. *¿Qué clase de líneas son las fronteras*? *¿Rectas o curvas*?

En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del ***Vecino más próximo****. Hoy en día, particiones similares son usadas en ciencias, por ejemplo, en geología, forestal, control de comercialización, astronomía, robótica, lingüística, cristalografía, meteorología, por nombrar algunos. A continuación estudiaremos el simple caso de dos pozos, o realmente dos puntos, puesto que no trataremos con* ***pozos*** *en otras aplicaciones.*

Solución de la tarea

La solución propuesta por los autores del libro (Goddijn, A., Kindt, M & Reuter, W., 2004, part I-91):

1: En el desierto

a. 2

b.

c. Ver figura.

(Esta figura no necesita ser exacta, esto se verá más adelante.)

d. Escoges a cual pozo ir.

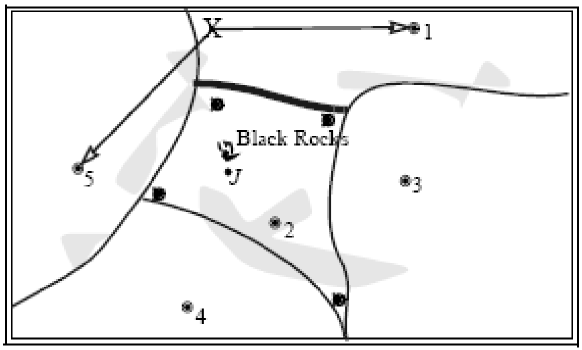


Figura 5.15. Solución

e. Sí. Ver el punto X. Las flechas son de igual longitud y las distancias a los pozos 2,3 y 4 son mayores.

f. Sí. Muy lejos al sureste.

g. No. No para 3 y 4. (Esto se mantiene para las extensiones de la frontera).

h. Rectas. (Esto se estudiará más adelante.)

El objetivo de los autores del libro "Geometría con aplicaciones y pruebas" es permitir a los estudiantes construir un objeto matemático "diagrama de Voronoi" sobre la base de la tarea mostrada arriba y las que le siguen. Un diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos *S* es una partición de un área en celdas, cada una de las cuales contiene los puntos más cercanos a un punto en particular de *S* que a cualquier otro.

Los diagramas de Voronoi son parte de lo que se conoce como Geometría Discreta. Las siguientes situaciones parecerían tener poco en común: un astrónomo estudiando la estructura del Universo, un arqueólogo intentando identificar las partes de una región bajo la influencia de diferentes clanes neolíticos, un meteorólogo estimando la precipitación en un instrumento de medida el cual ha fallado al operar, un planificador urbano ubicando escuelas en una ciudad, un fisiólogo examinando la fuente capilar para un tejido muscular. Sin embargo, todas estas situaciones juntas con muchas otras más, pueden ser resueltas usando aproximaciones desarrolladas de un solo objeto matemático. Dado un conjunto finito de puntos distintos del plano, puntos aislados en el plano, asociamos todos los puntos del plano con el miembro más cercano del conjunto de puntos. El resultado de este procedimiento es una partición del plano en un conjunto de regiones conocido como Diagrama de Voronoi. Las líneas o segmentos de líneas en la Figura 5.16 muestran un ejemplo.

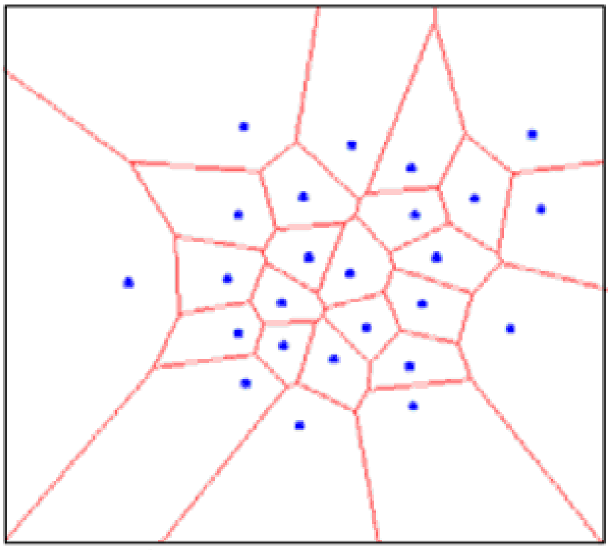


Figura 5.16. Diagrama de Voronoi

Los autores del libro proponen la introducción de elementos de la Matemática Discreta en el currículo de la enseñanza no universitaria. El método es el siguiente: El profesor propone una serie de problemas que los alumnos deben tratar de resolver, ellos también deben justificar sus respuestas (normalmente en grupos). En particular, los aspectos importantes de su desempeño son la realización de la tarea, la justificación de sus posibles respuestas, su representación, su reevaluación de la solución dada, y los argumentos que utilizan. Como las soluciones son agrupadas, así como la solución de los problemas, la unificación de conceptos son gradualmente construidos. Estos conceptos están relacionados entre sí y se aplican a los ejercicios, y se utilizan para resolver problemas contextualizados más complejos.

Este libro proporciona un papel preponderante a las situaciones problemáticas contextualizadas y claramente tiene como objetivo generar nuevos objetos matemáticos. El proyecto llevado a cabo en el Instituto Freudenthal "Educación Matemática Realista" (Gravemeijer, 1994; De Lange, 1996) propone un enfoque en la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje que concibe la disciplina como una actividad humana como cualquier otra, y por lo tanto considera que "saber matemáticas "es lo mismo que" hacer matemáticas", y como resultado, la solución de "problemas reales" debe ser una parte importante de su estudio. Uno de sus principios básicos es que, para que una actividad de matemáticas sea significativa, se debe partir de la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983). Otros principios importantes son que el estudiante debe tener la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos, y que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe ser altamente interactivo. De acuerdo con De Lange (1996), básicamente hay cuatro razones para la inclusión de los problemas contextualizados en el programa: a) facilitar el aprendizaje de las matemáticas, b) desarrollar competencias, c) desarrollar las competencias y actitudes generales asociadas a la solución de problemas y d) permitir a los estudiantes ver la utilidad de las matemáticas para resolver situaciones en las otras áreas, tales como las situaciones cotidianas.

Hoy en día las matemáticas son vistas como una ciencia en la que el método predomina claramente sobre el contenido. Por esta razón, se proporciona gran importancia al estudio de procesos matemáticos, en particular los megaprocesos: “resolución de problemas” y “modelización”. La tarea del desierto que estamos considerando es la primera de una serie de actividades que tienen como objetivo enseñar el proceso de modelización. El proceso de modelización se considera normalmente que sigue las cinco etapas siguientes: 1) La observación de la situación. 2) La descripción simplificada de la situación. 3) La Construcción de un modelo. 4) El trabajo matemático con el modelo. 5) La Interpretación de los resultados de la situación.

El proceso de modelización o proceso de matematización también puede entenderse como el resultado de otros dos procesos: la *matematización horizontal* y *matematización vertical*. La matematización horizontal conduce desde el mundo real al mundo de los símbolos, y hace que sea posible tratar una serie de problemas matemáticos. La matematización vertical es el tratamiento específicamente matemático de las situaciones.

Prácticas matemáticas

La práctica del alumno consiste en la lectura de la tarea y su resolución. El alumno debe dividir un mapa de acuerdo al concepto del vecino más próximo. Esto es, dados 5 pozos hay que dividir un mapa en cinco partes tal que cada una de éstas contenga un pozo, y cualquier lugar de este domino esté más cercano a este pozo que a los otros cuatro.

Configuración Epistémica de la tarra. Objetos matemáticos

Situación-Problema

El problema es el que se ha enunciado anteriormente *“En el desierto”*.

Lenguaje[2]

- Términos y expresiones: Leyenda, escala, mapa, punto, región o área, alejado, cerca, más cercano, más alejado, división de una región, contenga, dominio, frontera, igual distancia, mayor distancia, mitad, segmento de recta, cortar, intersecar, líneas, rectas, curvas.
- Representación gráfica:

Mapa Esbozo de la partición en dominios:

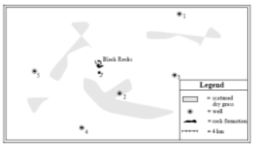


Figura 5. 17

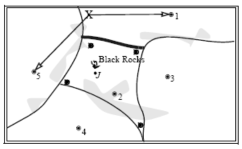


Figura 5.18

- Representación simbólica: J, 1, 2, 3, 4 y 5.

[2] Las frases son consideradas representaciones de las definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos, y no están incluidas en la categoría de "lenguaje" porque las definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos que representan estas frases aparecen en las siguientes categorías de la configuración epistémica.

Conceptos (Definiciones)

- Conceptos Previos o implícitos: segmento de recta, extremo de un segmento, mayor y menor (relación de orden), distancia, intersección, pertenencia a un conjunto, entorno de punto frontera, dominio acotado, dominio no acotado, punto medio, rectas, curvas.
- Conceptos emergentes: a) Vecino más próximo, b) Dado un conjunto de puntos del plano, el dominio de un punto es el conjunto de puntos del plano tal que su distancia a este punto es menor que su distancia a los otros puntos, c) Partición de una región de acuerdo al principio del vecino más próximo.

Propiedades

a) Dado el punto J y otros dos puntos, el punto más cercano a J es aquel que determina un segmento de menor longitud, b) La unión de todas las partes es el total, c) Dos dominios disjuntos tienen intersección vacía y d) Los puntos de la frontera están a igual distancia de los centros del dominio.

Procedimientos

a) Estimación de longitudes

b) Esbozo de la partición de una región

c) Uso de instrumentos como regla y compás

Argumentos

a) Iría al pozo 2, pues es el más cercano.

b) Usando compás hallamos los puntos pedidos.

c) Construcción gráfica

d) Iría a cualquiera de los dos pozos indistintamente, pues están a la misma distancia.

e) No, por ejemplo los dominios de los pozos 3 y 5.

f) Sí, extendiendo el dibujo, al sur.

g) No, para los pozos 3 y 4.

h) Son rectas.

Procesos

La tarea dada a los estudiantes es una situación extra-matemática, cuya resolución permite la emergencia de, entre otras cosas, un nuevo objeto matemático: la partición de una región de acuerdo con el *principio del vecino más próximo*. Los autores intentan presentar una situación de un contexto extra-matemático, la cual es comprendida por el estudiante como un caso particular de un objeto matemático. En este caso lo particular es extramatemático y lo general es un objeto matemático.

El análisis detallado de la actividad necesaria para resolver la tarea muestra que varios procesos son puestos en juego. La tarea que estamos analizando está dividida explícitamente en dos partes: 1) El planteamiento del problema y 2) El comentario que sigue al problema. Si miramos esto desde la perspectiva de los procesos, el planteamiento del problema tiene como objetivo generar un proceso de personalización (en el sentido de que el estudiante construye, entre otras cosas, el objeto matemático "*partición de una región de acuerdo con el principio del vecino más próximo*"). Por otro lado, el comentario posterior trata de institucionalizar este objeto matemático, en el sentido de que es algo conocido por toda la clase, es decir, se trata de "existir" como un objeto matemático en el aula.

Comentario

En el comentario que sigue al enunciado del problema, al tratar de lograr esta institucionalización, los autores primero generan un proceso oculto de idealización (el desierto se convierte en un área) y luego, ellos establecen la relación particular-general entre la situación idealizada y el objeto matemático: "En este ejercicio tú solo dividiste un área de acuerdo con el principio del vecino más próximo~~s~~". La manera de presentar lo general al estudiante es el resultado de una generalización aditiva, ya que se trata de una unión de elementos diferentes en el mismo grupo: "Hoy en día, particiones similares son utilizadas en varias ciencias, por ejemplo, en la geología, las ciencias forestales, la comercialización, la astronomía, la robótica, la lingüística, la cristalografía, la meteorología, por citar sólo algunas". Vamos luego a un proceso de particularización diciendo: "A continuación se investigará el caso simple de dos pozos", y uno de idealización explícita, cuando los pozos se convierten en los puntos: "(...) o en realidad dos puntos, ya que podría no tratarse de *pozos* en otras aplicaciones".

Resolución del problema

De entrada, suponemos que el alumno hipotético está capacitado para comprender el enunciado del problema. Es decir, damos por supuesto un primer proceso de "comunicación" (en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas") que no entraremos a analizar. Por tanto, damos por supuesto que un alumno hipotético entiende el significado (proceso de significación) de la representación de mapa y su leyenda, de los términos que aparecen y sobre todo, comprende el texto globalmente. Esta suposición implica que no vamos a entrar a analizar con detalle el proceso de significación. Por otra parte, se supone que los estudiantes leen inicialmente todos los elementos del texto y después los resuelven punto por punto.

Pregunta a: "¿A cuál de los pozos irías a tomar agua? No es difícil responder, por supuesto irías al pozo más cercano".

El alumno tiene que realizar el proceso de "comunicación" (entender el enunciado). En esta pregunta se espera que el alumno para responderla realice solamente un proceso de "enunciación" de una afirmación, en concreto se espera que responda "Iría al pozo 2". Para dar esta respuesta, en nuestra opinión, el alumno tiene que poner en funcionamiento, de manera explícita o implícita, algunos conceptos (segmento de recta, extremo de un segmento, mayor y menor distancia); algunas propiedades (dado el punto J y otros dos puntos, el punto más cercano a J es aquel que determina un segmento de menor longitud); algunos procedimientos (estimación de longitudes) y una argumentación (Tesis: El pozo 2 es el más cercano a J. Argumento: El punto 2 es el que está a menor distancia de J tal como se observa visualmente). Observamos, a partir del libro, que los autores no consideran el que los estudiantes justifiquen en este momento la elección del pozo 2.

Pregunta b: "Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro".

El alumno tiene que realizar el proceso de "comunicación" del enunciado (entender la tarea). En esta pregunta se espera que el alumno para responder realice solamente un proceso de "representación material". En concreto, tiene que realizar una representación externa (ostensiva) como la siguiente:

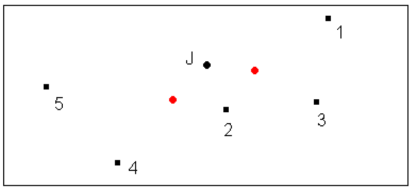


Figura 5.19

Para ello, el alumno debe realizar una argumentación, explícita o implícita, basada en (1) una estimación visual de que la distancia que separa los puntos rojos del pozo 2 es menor que la que los separan de los otros pozos y (2) que si la distancia entre los puntos rojos fuese mayor, entonces habría otro pozo diferente del 2 que quedaría más cerca de alguno de los puntos rojos.

Observamos, a partir del libro, que los autores no piden a los estudiantes que argumenten para justificar sus representaciones, pudiéndolo hacer, ya que los estudiantes, se asume, tienen este conocimiento previo y podrían dar su respuesta sin dificultad. Por ejemplo, el estudiante puede producir como respuesta una frase como: "cada par de puntos que pertenece a un círculo centrado en el pozo 2 con un radio menor que el mínimo de la distancia entre los pozos número 3 y número 4" y puede apoyar esta argumentación con una representación en donde se muestre dicho círculo.

Pregunta c: “Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte pertenece a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de este pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos.”

El alumno tiene que realizar el proceso de “comunicación” (entender el enunciado, aunque en este caso no es tan claro que la comprensión se pueda dar por supuesta). En esta pregunta se espera que el alumno para responder realice básicamente un proceso de “representación externa (materialización)”. Específicamente, se espera que realice una representación externa (ostensiva) como la siguiente:

a)

Figura 5.20

Sin embargo, los estudiantes pueden ofrecer otras representaciones externas (ostensivas) válidas tales como:

(b)

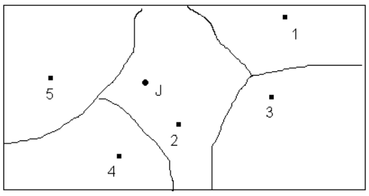


Figura 5.21

(c)

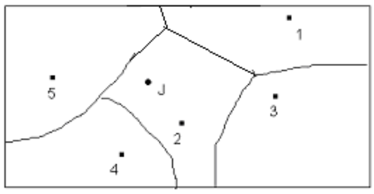


Figura 5.22

Como consecuencia de (1) la exploración del estudiante y (2) la interacción con el profesor y los demás estudiantes, el alumnado puede refinar su partición inicial (por ejemplo, c), dando nuevas representaciones (por ejemplo la b) hasta llegar a su última representación (por ejemplo, a).

Para realizar alguna de estas representaciones, en nuestra opinión, el alumno tiene que poner en funcionamiento, de manera explícita o implícita, algunos conceptos (intersección, pertenencia a un conjunto, entorno de punto, frontera) y se tiene que producir un proceso de "enunciación" que permita la emergencia de un nuevo término (dominio) y un nuevo concepto: el concepto de dominio (dado un conjunto de puntos del plano, el dominio de un punto es el conjunto de puntos del plano tal que su distancia a este punto es menor que su distancia a los otros puntos); algunas propiedades (la unión de todos las partes es el total, dos dominios disjuntos tienen intersección vacía, los puntos de la frontera están a la misma distancia de los dos pozos); algunos procedimientos (esbozar una partición de una región del plano) y una argumentación (ensayo y error).

Pregunta d: ¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos dominios diferentes"

En la pregunta previa, los alumnos como mínimo de manera explícita, han utilizado la propiedad de que los puntos de la frontera están a la misma distancia de los dos pozos. Con esta pregunta se pretende producir un proceso de "enunciación" que permita la emergencia de un nuevo término (frontera) y un nuevo concepto: el concepto de frontera entendida como la línea que separa dos dominios contiguos y una de sus propiedades (estar a la misma distancia de los dos pozos).

Pregunta e: "¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son colindantes? 0: Trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos."

La respuesta del alumno dependerá de su respuesta al apartado *c*. Por ejemplo, si su respuesta al apartado *c* es la representación *a* o *c*, es de esperar que responda al apartado *e* diciendo que los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos y que para hallar un punto que esté a igual distancia de los dos pozos señale un punto de la frontera el cual, a su vez, esté más alejado de los otros pozos. Este proceso de representación del punto X exige también un proceso de idealización del esbozo realizado. El alumno ha de entender que, aunque la frontera que separa los pozos 1 y 5 no haya quedado en su dibujo, exactamente a la misma distancia de los dos pozos, idealmente esto es así.

Ahora bien, si su respuesta es la representación *b*, es de esperar que responda que no son contiguos y que para hallar un punto que esté a igual distancia de los dos pozos utilice cualquier procedimiento de los que conozca para hallar un punto que está a la misma distancia de otros dos (por ejemplo, dibujando un punto sobre la mediatriz, o bien por ensayo y error utilizando una regla o un compás). Puesto que los puntos hallados estarán fuera de la figura (al tener que estar más lejos de los otros pozos) tendrá que realizar un proceso de idealización que le lleve a entender que el área a la que hay que hacer una partición es todo el plano y es de esperar que haga una nueva representación (ostensiva) del tipo siguiente:

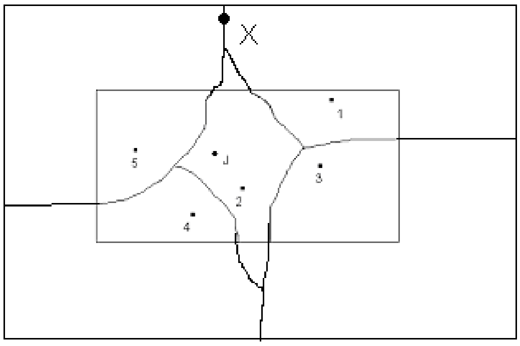


Figura 5.23

Otra posibilidad es la sugerida por la respuesta de la guía del profesor. Se espera que el alumno halle con cierta precisión un punto X que *esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos* y que este punto, previsiblemente, no esté sobre la frontera de la partición esbozada por el alumno (ya que esta es solo un esbozo). En este caso se producirá un conflicto semiótico que solo se puede resolver mediante un proceso de idealización de la partición esbozada que le permita suponer que X sería un punto de la frontera si la partición se hubiera realizado con precisión.

Pregunta f: "En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 son contiguos (limítrofes)?"

El alumno tiene que realizar el proceso de "comunicación" del enunciado (suponemos que el alumno hipotético está capacitado para entender el enunciado). En esta pregunta se espera que el alumno para responderla realice sólo el proceso de "enunciación" de una afirmación, en concreto se espera que responda "Sí, muy lejos al sureste". Pero para responderla, en nuestra opinión, el alumno debe haber realizado el proceso de idealización (tal como le sugiere el enunciado), que lo lleve a extender el plano; y proceso de representación (ostensiva o no ostensiva), para señalar la frontera que no se muestra en el esbozo.

En nuestra opinión, los alumnos que hubieran respondido al apartado *e* partiendo de la representación *b* habrían seguramente llegado por su cuenta a lo que se le pregunta en este apartado.

Pregunta g: "La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras?"

El alumno tiene que realizar el proceso de "comunicación" (entender el enunciado). En esta pregunta se espera que el alumno para responderla realice los proceso de "enunciación" de una afirmación, en concreto se espera que responda "No", y de argumentación, dando un contraejemplo como "No se cumple para los pozos 3 y 4". Para dar esta respuesta, en nuestra opinión, el alumno tiene que inspeccionar de manera visual la frontera que separa dos pozos y hacer la representación no ostensiva (o bien ostensiva) del punto medio que tiene por extremos los dos pozos para decidir si la frontera pasa por el punto medio. En el caso de que lo haga tiene que continuar hasta hallar un contraejemplo. Para hacer todo esto tiene que poner en funcionamiento, de manera explícita o implícita, algunos conceptos (punto medio de un segmento e intersección de curvas) y procedimientos (estimación visual del punto medio y del punto de corte).

Pregunta h: ¿Qué clase de líneas son las fronteras? ¿Rectas o curvas?"

El alumno tiene que realizar el proceso de "comunicación" (entender el enunciado). En esta pregunta se espera que el alumno para responderla realice el proceso de "enunciación" de una conjetura (que pueden ser "rectas" o "curvas"). Nuevamente los autores omiten pedir a los alumnos que argumenten la validez de la conjetura.

Los autores sugieren que el profesor les diga que la conjetura correcta es "rectas" y que esto se justificará más adelante.

4.3 Validación. Triangulación

La aportación realizada en este cuarto apartado es un desarrollo de la metodología de análisis de prácticas, objetos y procesos propuesta por el EOS para analizar la actividad matemática necesaria para resolver tareas matemáticas. Con relación a esta aportación se realizó un proceso de triangulación ya que consideramos, de acuerdo con Cerda (2000), que es una técnica útil para impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales:

> *La triangulación es una garantía para impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales y para lo cual utiliza múltiples fuentes, métodos e investigadores con la intención de ampliar el ámbito, densidad y claridad de los constructos desarrollados en el curso de la investigación y corregir los sesgos que aparecen cuando el fenómeno es examinado por un solo observador, con una técnica y desde un solo ángulo de observación.* (Cerda, 2000, p.50)

De acuerdo con esta manera de entender la triangulación, para validar los análisis de tipo teórico que llamaremos "análisis de prácticas, objetos y procesos" se planificó un proceso de *triangulación de investigadores*. Así, el primer tipo de análisis realizado por la doctoranda se sometió primero a la opinión del director de tesis, después se contó con la opinión de otro especialista en el enfoque ontosemiótico y, por último, los análisis realizados se sometieron a la opinión de los expertos en didáctica de las matemáticas que realizaron la revisión de las siguientes publicaciones arbitradas:

- Font, V., & Rubio, N. (2008). Onto-semiotic tools for the analisis of our own practice. En B. Czarnocha (ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment - A Tool for Teacher-Researchers* (pp. 165-180). University of Rzeszów: Rzeszów, Poland.
- Font, V., Rubio, N., & Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En Lestón P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21* (pp. 706-715). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

CAPÍTULO 6

PROPUESTA DE UN MÉTODO DE EVALUACIÓN ANALÍTICO, A POSTERIORI Y GLOBAL DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Resumen

Este capítulo se relaciona, sobre todo, con el siguiente objetivo de esta memoria de investigación.

Objetivo 3: Desarrollar una propuesta de evaluación analítica, a posteriori y global de competencias PISA 2003 basada en la técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas que propone el Enfoque Ontosemiótico.

3.1 Realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos de la solución de un estudiante a un problema PISA específico.

3.2 Realizar la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas de un estudiante.

Este capítulo pretende ser un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo teórico del EOS, puesto que se pretende ampliar dicho marco con una metodología para la evaluación de competencias matemáticas. Se trata de un método en el que la primera fase consiste en una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas que se infieren de las respuestas de los alumnos; mientras que la segunda fase consiste en un método a priori de desarrollo de una determinada competencia (la que el alumno debería desarrollar).

En el capítulo 4 se ha mostrado el tipo de evaluación de competencias que se propone en el informe PISA 2003 y, también, su posición contraria a la realización de una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas.

En el marco teórico del informe PISA 2003 se comenta, pero no se desarrolla, el siguiente método de evaluación de competencias que podría ser el germen de evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos:

1) Resolver el problema.

2) Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos.

3) Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión.

4) Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos determinado a las diferentes competencias.

En este capítulo nos proponemos utilizar el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos desarrollado en el capítulo 5, como herramienta para hacer operativo este método de evaluación de competencias matemáticas de manera que, además, sea posible realizar la retroalimentación al alumno. Nos proponemos pues desarrollar el método de evaluación de competencias siguiente:

1) Resolver el problema, obteniendo un protocolo de la solución del problema.

2) Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos, considerando las herramientas propuestas por el EOS. Siguiendo el esquema comentado en el capítulo 5.

3) Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión, siguiendo el esquema comentado en el capítulo 4.

4) Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos asignado a las diferentes competencias.

5) Retroalimentar al alumno.

Se trata en definitiva de desarrollar el siguiente esquema comentado en el capítulo 4.

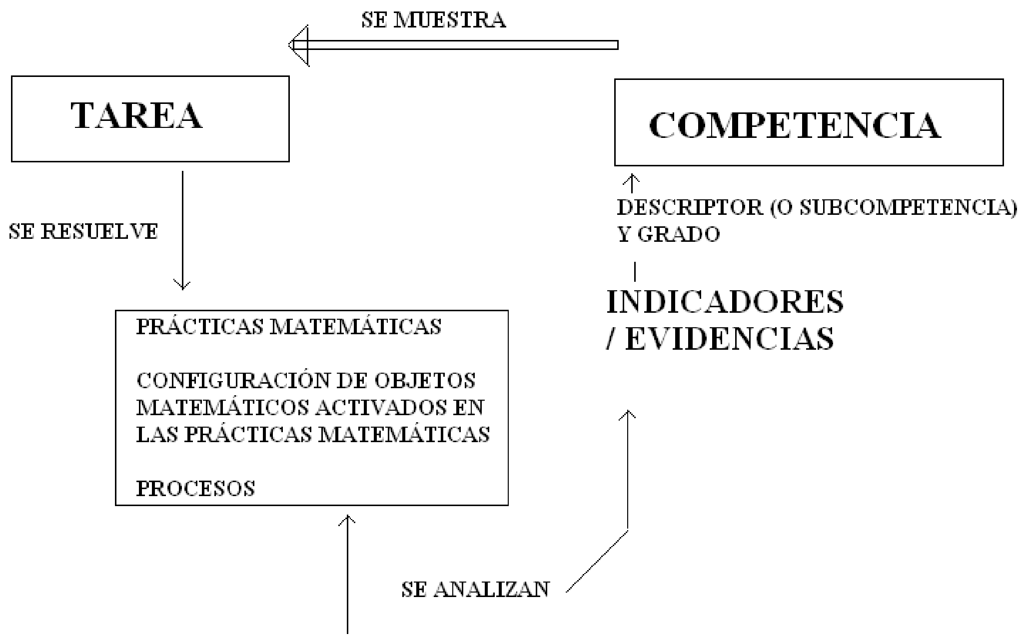


Figura 6.1. Evaluación de competencias

El primer paso, para hacer operativo este método, es disponer (punto 1) de un protocolo de la resolución del problema, puede ser el de un alumno real o bien el que haría un alumno ideal (en este caso el protocolo habría sido realizado por un profesor de matemáticas experto). El segundo paso es desarrollar el punto 2 realizando un análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM) de acuerdo a lo que se ha desarrollado en el capítulo 5. El tercer paso es hacer operativo el punto 3 construyendo una herramienta, coherente con lo que se dice en el informe PISA 2003, que permita valorar en una escala de 1 a 3 cada competencia (reproducción, conexión y reflexión) teniendo en cuenta el análisis realizado en el punto 2 y después asignar el problema a uno de los tres grupos de niveles de complejidad, según el nivel que hayamos asignado a las diferentes competencias. El último paso consiste en extraer conclusiones sobre las competencias, activadas o no, que se deberían intentar desarrollar en el futuro proceso de instrucción (feedback).

Se trata de un método que permite primero una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas y, después, el tratamiento de la competencia específica que se considere que el alumno debe desarrollar.

Puesto que el punto 2 ya se ha explicado en el capítulo 5, aquí vamos a desarrollar primero la herramienta que proponemos para el punto 3.

1. DESCRIPTORES DEL GRADO DE COMPETENCIA

La elaboración de la tabla de competencias matemáticas OCDE/PISA, que mostramos, ver tabla 1, después de una lectura minuciosa acerca de las competencias matemáticas y grupos de competencias propuestos en el informe PISA 2003, (INECSE, 2004) fue debido a dos motivos.

El primero de ellos, es que nos pareció poco práctico el querer comparar cada competencia en los diferentes niveles de complejidad o grupos de competencia, tal y cual era presentado en este informe. Así por ejemplo, la competencia Pensar y razonar (p.41)

> 1. *Pensar y razonar.* Formular preguntas características de las matemáticas («Hay…?», «En ese caso, ¿cuántos?», «Cómo puedo hallar…»); conocer los tipos de respuestas que dan las matemáticas a esas preguntas; diferenciar entre los diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aseveraciones condicionadas); y entender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados.

En el grupo de representación se encontraba en la página 42:

> 1. *Pensar y razonar.* Formular las preguntas más simples («¿cuántos…?», «¿cuánto es…?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.

Esta misma competencia, en el grupo de conexión, se encontraba en la página 44:

> 1. *Pensar y razonar.* Formular preguntas («¿cómo hallamos…? », «¿qué tratamiento matemático damos…?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.

Y en el grupo de reflexión en la página 46:

> 1, *Pensar y razonar*. Formular preguntas («¿cómo hallamos…? », «¿qué tratamiento matemático damos…?», «¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación…?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.

Requeríamos de una presentación más global tanto de las competencias como de los niveles de complejidad y sus descriptores, pero de modo de poder comparar las diferencias entre niveles.

El segundo motivo fue que requeríamos de un material, lo más fiel al original, pero que diera información sobre las competencias y sus descriptores y que sería utilizado por los profesores cuando evaluasen competencias matemáticas según el informe PISA. Para ello, era necesario hacer una presentación, lo más fiel al material original pero de manera más compacta.

Tabla 6.1. Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE

	Pensar y razonar. Formular preguntas características de las matemáticas («Hay…?», «En ese caso, ¿cuántos?», «Cómo puedo hallar…»); conocer los tipos de respuestas que dan las matemáticas a esas preguntas; diferenciar entre los diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aseveraciones condicionadas); y entender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados.	Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones	Tercer Nivel: Reflexión
Pensar y razonar	Formular preguntas características de las matemáticas («Hay…?»,«En ese caso, ¿cuántos?», «Cómo puedo hallar…» y conocer los tipos de respuestas que dan las matemáticas a esas preguntas.	Formular las preguntas más simples («¿cuántos…?», «¿cuánto es…?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»)	Formular preguntas («¿cómo hallamos…?», «¿qué tratamiento matemático damos…?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.);	Formular preguntas («¿cómo hallamos…?», «¿qué tratamiento matemático damos…?», «¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación…?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.)
	Diferenciar entre los diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aseveraciones condicionadas).	Distinguir entre definiciones y afirmaciones.	Distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas.	Distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones;
	Comprender y utilizar los conceptos matemáticos **en su extensión y sus límites.**	Comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.	Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.	Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

Argumentación. Saber lo que son las demostraciones matemáticas y en qué se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; seguir y valorar el encadenamiento de argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener un sentido heurístico («¿Qué puede o no puede pasar y por qué?»); y crear y plasmar argumentos matemáticos.		Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones	Tercer Nivel: Reflexión
Argumentación	Saber lo que son las pruebas matemáticas y en qué se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático.		Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento.	Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento.
	Crear y plasmar argumentos matemáticos.		Crear y expresar un razonamiento matemático de manera simple.	Seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos.
	Tener un sentido heurístico («¿Qué puede o no puede pasar y por qué?»).		Tener sentido de la heurística.	Emplear la heurística (p. ej., «¿qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?», «¿cuáles son las propiedades esenciales?», «¿cómo están relacionados los diferentes objetos?»).

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

Comunicación. Esto comporta saber expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático y entender las afirmaciones orales y escritas de terceras personas sobre dichos temas.		Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones .	Tercer Nivel: Reflexión
Comunicación	Expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático.	Comprender y expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones.	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas.
	Entender afirmaciones orales y escritas de otras personas sobre matemáticas.	Entender cuestiones matemáticas sencillas propuestas por otros (profesor, libro de texto, etc.) relacionadas con la aplicación de propiedades conocidas, realizar cálculos utilizando algoritmos conocidos, etc.	Entender cuestiones matemáticas propuestas por otros (profesor, libro de texto, etc.) cuya resolución no es inmediata ni se limita a la aplicación de propiedades y algoritmos ya conocidos y utilizados (por ejemplo, cuando se presentan problemas contextualizados que exigen un cierto proceso de descontextualización no inmediato) aunque el alumno puede tener una cierta idea de cómo abordarlo.	Entender cuestiones matemáticas cuya resolución no es inmediata ni se tiene de entrada una idea de cómo abordarlas.

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

		Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones	Tercer Nivel: Reflexión
Construcción de modelos. Estructurar el campo o situación que se quiere modelar; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar los modelos matemáticos en términos de "realidad"; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos.				
Construcción de modelos	Estructurar el campo o situación que se quiere modelar.		Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo.	Estructurar el campo o situación compleja del que hay que realizar el modelo.
	Interpretar los modelos matemáticos en términos de "realidad". Traducir la realidad a estructuras matemáticas.	Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados. Pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación.	Traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Saber interpretar alternando los modelos (y sus resultados) y la realidad.	Traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la «realidad ».
	Trabajar con **un modelo matemático.**	Trabajar con un modelo matemático muy simple, previamente conocido y que ya ha sido aplicado.	Trabajar con modelos matemáticos más o menos conocidos.	Un modelo matemático (construido) en contextos nuevos.
	Reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados. Comunicar opiniones acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).	Comunicar de manera elemental los resultados del modelo.	Comunicar los resultados del modelo.	Reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.
	Dirigir, controlar el proceso de construcción de modelos y validarlo.			Recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante.

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

Formulación y resolución de problemas. Representar, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, "puro", "aplicado", "abierto" y "cerrado"); y la resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras.		Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones	Tercer Nivel: Reflexión
Formulación y Resolución de Problemas	Representar, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, "puros", aplicados", "abiertos" y "cerrados").	Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada.	Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada.	Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada;
	Resolución de **diferentes tipos** de problemas matemáticos de diversas maneras.	Resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.	Resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).	Resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). Reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

	Representación. Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito.	Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones	Tercer Nivel: Reflexión
Representación	Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones.	Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado.	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos. Traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.	
	Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito.	El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.	Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos.	Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. Combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico y comprender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.	Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones	Tercer Nivel: Reflexión
Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico	Descodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y comprender su relación con el lenguaje natural.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos.	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos.
	Manejar afirmaciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.	Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.	Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.	Manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. Saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual.
	Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal.	Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal en situaciones y en contextos sobradamente conocidos.	Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal situaciones y en contextos menos conocidos.	Realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural en situaciones y en contextos desconocidos.

Descriptores de competencias matemáticas PISA/OCDE.

Empleo de soportes y herramientas. Tener conocimientos y ser capaz de utilizar diferentes soportes y herramientas (entre ellas, herramientas de las tecnologías de la información) que pueden ayudar en la actividad matemática; y conocer sus limitaciones.		Primer Nivel: Reproducción	Segundo Nivel: Conexiones .	Tercer Nivel: Reflexión
Empleo de soportes y herramientas	Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas (entre ellas, tecnologías de la información), que puedan ayudar en la actividad matemática.	Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y procedimientos similares a los ya conocidos y practicados a lo largo del aprendizaje.	Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y maneras diferentes a las introducidas y practicadas a lo largo del aprendizaje.	Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares o inusuales en contextos, situaciones y formas bastante diferentes a las ya introducidas y practicadas.
	Conocer las limitaciones de tales soportes y herramientas.			Reconocer las limitaciones de tales soportes y herramientas.

Nota. Elaborado en base a las competencias y descriptores del Informe PISA 2003

2. EVALUACIÓN ANALÍTICA EXPERTA DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. UN EJEMPLO

A continuación mostramos el análisis final de prácticas, objetos y procesos activados en la respuesta de un alumno al problema del carpintero PISA 2003. El análisis realizado es el resultado de un proceso de triangulación de expertos.

A continuación sigue el resultado de la aplicación de dicha técnica a la siguiente respuesta de un alumno al problema del carpintero:

Tarea

***CARPINTERO* (*adaptado*)**[1]

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.

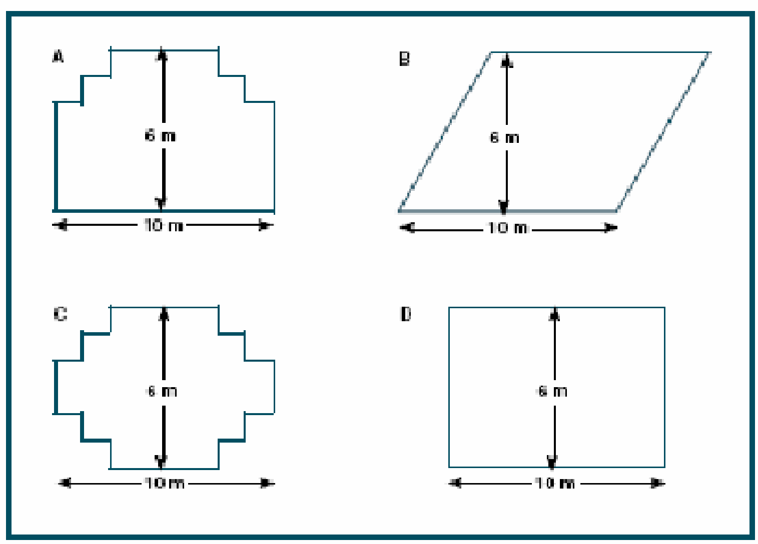
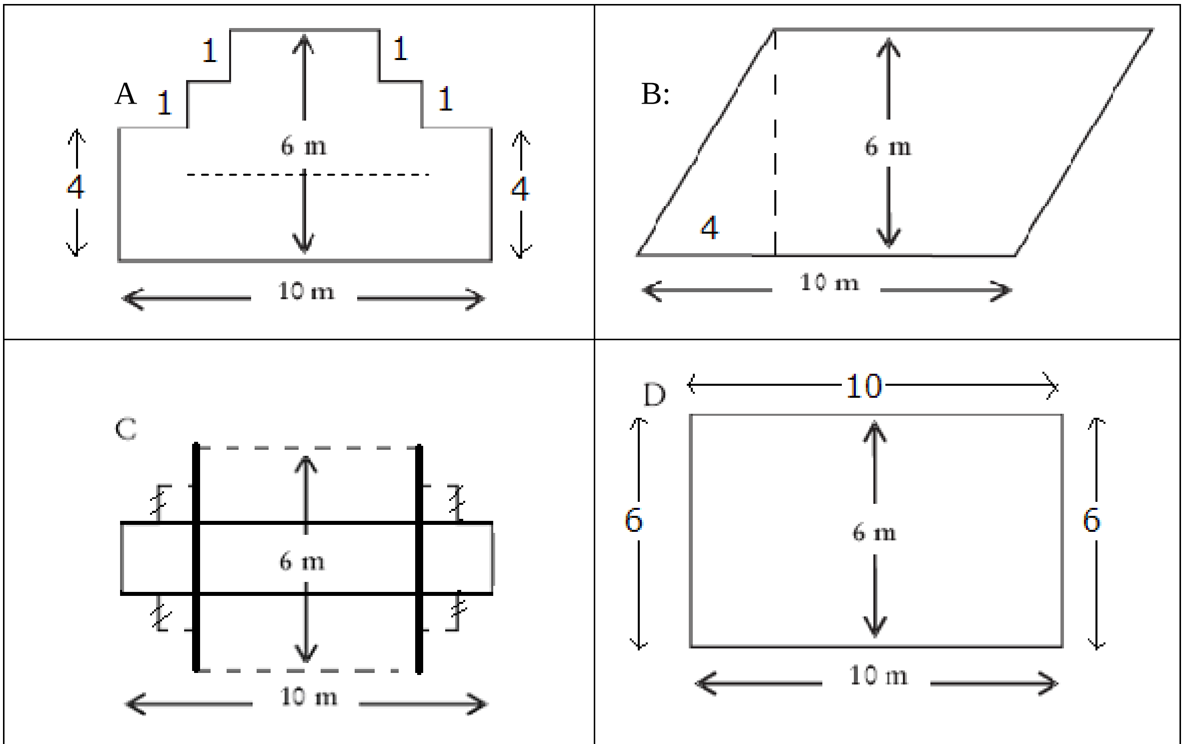


Figura 6. 2. Enunciado del problema del carpintero

Para cada uno de los diseños anteriores A, B, C, D explica si se puede tapiar o no el parterre con los 32 metros de madera. Debes responder con un ***sí*** *puedes hacerlo o un* ***no*** *puedes hacerlo, y por qué.*
¿A qué nivel crees que corresponda: reproducción, conexión o reflexión? Justifique su respuesta.

[1] El problema seleccionado, adaptación del problema del carpintero, y la solución de una de las soluciones de los alumnos a dicho problema se tomaron de la comunicación presentada en la Second Annual PDTR Conference, celebrada en Barcelona del 14 al 18 de Julio de 2007: I. Guevara, J. Comellas y V. Font (2008) PISA PROBLEM CARPENTER - An analysis of the competencies needed for solving the carpenter problema.

CARPINTERO (Solución de un alumno)



Los diferentes parterres (A, B, C, D) que podrían ser tapiados con 32m. *de madera:*	
A:	*Primero he calculado ~~el área~~ el perímetro del rectángulo principal* (4.2+10.2), *ya que aunque esta figura tiene elevaciones, las líneas horizontales acaban de completar el rectángulo interior.* *Después he sumado los cuatro metros de franja verticales, responsables de la "descomposición" del rectángulo* 28+4=32m.
B:	*En este no sería posible ya que faltarían los cálculos de la diagonal, esto sería más metros de los que tocaba para tapiar* $\sqrt{6^2+4^2} = \cancel{8{,}4m}$ 7,2*m*. *Los* ~~8,4m~~ *sumados a los* 10 *de longitud que ya dicen* ~~37~~ (7,2.2+10.2) 7,2*m* 34*m*
C:	*Aquí voy a aplicar el mismo sistema que en la figura A, será en este caso mediante* 2 *rectángulos diferentes y del más largo tomo y hago la suma de* 10*m* 2 *veces y del que falta tomo las verticales los* 6*m*, 32 *m.*
D:	*Es igual a sumar las distancias de los costados* (*perímetro*) 6 + 6 + 10 + 10 =32*m*.

Figura 6.3. Solución del alumno al problema del carpintero

Prácticas

La práctica que realiza el alumno es la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta. El alumno calcula el perímetro de cada figura de diferentes maneras, en la figura D aplica que el perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados, hace lo mismo en la figura B, pero en este caso tiene que aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de los dos lados de menor longitud. En la figura A y C aplica la propiedad de la preservación de la longitud bajo una traslación y transforma las figuras en otras de perímetro equivalente, aplicando a estas últimas que el perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados.

Configuración cognitiva de objetos matemáticos

SITUACIÓN-PROBLEMA

El problema del carpintero (ver enunciado)

LENGUAJE

1) Verbal:

Términos precisos: calcular, perímetro, rectángulo, figura, líneas horizontales, sumar, sumandos, cuatro, metros, verticales, igual, longitud, diferentes, interior, etc.

Otros términos: elevaciones, distancia, diagonal, sistema, más largo, descomposición de un rectángulo

2) Simbólico:

A, B, C, D, (4.2+10.2); 28 + 4 = 32m; $\sqrt{6^2+4^2}$, =, 6 + 6 + 10 + 10 =32m, etc.

3) Gráfico:

Las mostradas en la solución del alumno.

CONCEPTOS-DEFINICIÓN

- Conceptos explícitos: suma, multiplicación, raíz cuadrada; cuadrado de un número, perímetro, rectángulo, longitud de un segmento.
- Conceptos implícitos: polígono

PROPOSICIONES

- Propiedades implícitas utilizables: la longitud es una magnitud aditiva, preservación por traslaciones de la longitud de un segmento. Teorema de Pitágoras.

PROCEDIMIENTOS

- Procedimientos explícitos: identificar segmentos de la misma longitud; calcular el perímetro; estimar longitudes, calcular la raíz cuadrada (con calculadora), redondear, sumar, multiplicar, elevar al cuadrado.
- Procedimientos implícitos: obtener polígonos isoperimétricos.

ARGUMENTOS

Figura A:

El perímetro de la figura A se puede descomponer en la suma del perímetro de un rectángulo y de la longitud de 4 segmentos verticales.

El segmento horizontal formado por la unión de los segmentos horizontales de la figura A tiene la misma longitud que el lado horizontal (10m) del rectángulo de lados 10m y 4m.

De manera implícita responde que sí es posible un parterre con este diseño

Figura B:

De manera explícita responde que no es posible un parterre con este diseño porque el perímetro sería superior a 32m.

Da el argumento de que el lado menor sería de 7,2 metros como resultado de aplicar el teorema de Pitágoras y de estimar que la longitud de la proyección del lado menor sobre el lado mayor sería de 4m.

Figura C:

El perímetro de la figura C se puede descomponer en la suma de las longitudes de los lados horizontales de un rectángulo y de los lados verticales del otro rectángulo.

De manera implícita responde que sí es posible un parterre con este diseño.

Figura D:

De manera implícita responde que sí es posible un parterre con este diseño porque calcula el perímetro del rectángulo y obtiene 32m.

Para la solución de este problema el alumno ha tenido que activar algunos de los 16 procesos matemáticos que se han identificado en el EOS (idealización, materialización, representación, significación, encapsulación, desencapsulación, personalización, institucionalización, particularización, generalización, algoritmización, enunciación, definición, problematización, argumentación y comunicación).

Procesos

Enunciado:

El alumno ha comprendido el enunciado del problema. Es decir, ha realizado un primer proceso de "comunicación" (en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas") que no entraremos a analizar. Para ello, ha tenido que entender el significado (proceso de significación) de las cuatro figuras del enunciado del problema y de los términos que aparecen y, sobre todo, comprende el texto globalmente, entendiendo, además, que debe dar una justificación de su respuesta. Para entender las figuras como paralelogramos, rectángulos o polígonos el alumno ha de realizar un proceso de idealización (p. e., en el caso del paralelogramo suponer que los lados opuestos son de igual longitud, en el caso del rectángulo que los lados son perpendiculares, etc.)

Respuesta Figura A:

El alumno realiza un proceso de comunicación en tanto que da una respuesta (implícita) correcta al problema. Esta comunicación implica un proceso de argumentación explícita que no está bien comunicada, por ejemplo no usa los términos de manera correcta (dice franjas en lugar de segmentos) y no explica por qué los lados (verticales) de menor longitud del polígono dado tienen una longitud de un metro, utiliza términos ambiguos como "rectángulo principal", "elevaciones", etc. La argumentación está basada en (1) la realización de cálculos aritméticos (proceso de algoritmización), (2) una estimación visual de las longitudes de los lados menores del polígono, (3) que la figura es un polígono con lados adyacentes perpendiculares (proceso de idealización y de significación), (4) en la propiedad que el segmento horizontal formado por la unión de los segmentos horizontales (diferentes a los de la base) de la figura tiene la misma longitud que el lado horizontal mayor del polígono (proceso de materialización), (5) la definición de perímetro. En la comunicación que hace el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, puesto que escribe la longitudes de los lados verticales del polígono, dibuja una línea discontinua para representar que el segmento horizontal formado por los segmentos horizontales (diferentes de la base) de la figura tienen la misma longitud que la base; el verbal puesto que dice, por ejemplo, que calcula el perímetro (de manera implícita), y el simbólico, por ejemplo, escribe una igualdad numérica. Por tanto también, hay un proceso de representación.

Respuesta Figura B:

El alumno realiza un proceso de comunicación en tanto que da una respuesta correcta al problema. Ahora bien, esta comunicación implica un proceso de argumentación explícita que no está bien comunicada, por ejemplo no usa los términos de manera correcta (dice diagonal en lugar de lado) y no explica por qué la proyección del lado menor sobre el mayor es cuatro metros. La argumentación está basada en la realización de cálculos aritméticos (proceso de algoritmización) en los que se usa (1) una estimación visual implícita de la proyección del lado menor sobre el mayor, (2) que la figura es un paralelogramo (proceso de idealización y de significación), (3) el uso del teorema de Pitágoras (proceso de algoritmzación), (4) la definición de perímetro. En la comunicación que hace el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, puesto que escribe la longitud de la proyección del lado menor sobre el mayor, dibuja una línea discontinua para representar la altura del triángulo (y también del paralelogramo); el verbal puesto que dice, por ejemplo, que calcula el perímetro (de manera implícita), y el simbólico, por ejemplo, escribe una igualdad numérica que es el resultado de aplicar el teorema de Pitágoras. Por tanto, también, hay un proceso de representación.

Respuesta Figura C:

El alumno realiza un proceso de comunicación puesto que da una respuesta (implícita) correcta al problema. Esta comunicación implica dos fases. En la primera el alumno enuncia que el proceso de resolución de este apartado es similar al que ha seguido en el apartado A (proceso de enunciación y proceso de generalización implícito –el apartado A y el C pertenecen al mismo tipo de problemas). En la segunda realiza un proceso de argumentación explícita que no está bien comunicada, por ejemplo no usa los términos de manera correcta (dice sistema en vez de procedimiento, que en matemáticas tiene diferente significado). La argumentación está basada en (1) la realización de cálculos aritméticos (proceso de algoritmización), (2) que la figura es un polígono con lados adyacentes perpendiculares (proceso de idealización y de significación), (4) que el perímetro de la figura C se puede descomponer en la suma de las longitudes de los lados horizontales de un rectángulo y de los lados verticales del otro rectángulo (enunciación y materialización) y (5) la definición de perímetro. En la comunicación que hace el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, al trazar pares de segmentos paralelos; el verbal puesto que dice, por ejemplo, que calcula el perímetro (de manera implícita), y el simbólico, por ejemplo, escribe las sumas parciales obtenidas. Por tanto también, hay un proceso de representación.

Respuesta Figura D:

El alumno realiza un proceso de comunicación en tanto que da una respuesta al problema. Esta comunicación implica un proceso de argumentación explícita basada en (1) una estimación visual implícita de que la figura es un rectángulo (proceso de idealización y de significación) y (2) en la aplicación de la definición de perímetro de un rectángulo a la figura del problema. En la comunicación que hace el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, puesto que escribe la longitud de tres lados, el verbal, dice que calcula el perímetro pero el uso de los términos no es del todo adecuado (dice distancia en lugar de longitud), y el simbólico ya que escribe una igualdad numérica. Por tanto, también hay un proceso de representación.

Competencias

Este análisis de prácticas, objetos y procesos junto con la tabla de niveles de competencias permite inferir competencias del alumno cuando éste resuelve el problema que le han propuesto.

1) Pensar y razonar

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Comprender y utilizar los conceptos matemáticos *en su extensión y sus límites"*.

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de los objetos (configuración cognitiva) activados en la práctica que el alumno ha realizado (lectura del enunciado y producción de un texto) para resolver correctamente el problema. Dicho análisis nos permite precisar cuáles son estos objetos (perímetro, longitud, teorema de Pitágoras, etc.).

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Comprender y utilizar los conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después" (nivel de conexión).

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es el conocimiento del tipo de problemas que el alumno ha resuelto anteriormente, según el currículo. Dicho alumno ha resuelto problemas de cálculo de perímetros pero los apartados A y C son ligeramente diferentes a los que está acostumbrado a resolver.

2) Argumentación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Crear y plasmar argumentos matemáticos"

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de los procesos en el que se observan varios procesos de argumentación.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Crear y expresar razonamientos matemáticos simples" (nivel de conexión).

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es la argumentación que el alumno realiza al justificar su respuesta en la figura A y en menor medida la que ha hecho en la figura B (ver el apartado de procesos anterior).

En cambio la argumentación de la figura D la situaríamos en el nivel de reproducción (justificación de procesos de cálculo). También colocaríamos en este nivel la argumentación de la figura C ya que el mismo alumno así lo considera "Aquí voy a aplicar el mismo sistema que en la figura A (…)"

Siguiendo la filosofía del marco teórico PISA 2003 si al menos una de las argumentaciones es del nivel de conexión, éste es el nivel de complejidad que hay que atribuir a la solución del alumno.

3) Comunicación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso son dos:

"Expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático"

"Entender afirmaciones y enunciados orales y escritos de otras personas sobre matemáticas"-

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestran estas dos subcompetencias, es el análisis de los procesos en el que se observan varios procesos de comunicación en los que el alumno entiende lo que el problema pregunta y produce un texto con la respuesta correcta.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso serían los siguientes:

"Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones" (nivel de conexión).

"Entiende cuestiones matemáticas propuestas por otros (profesor, libro de texto, etc.), cuya resolución no es inmediata ni se limita a la aplicación de propiedades y algoritmos ya conocidos y utilizados (por ejemplo, cuando se presentan problemas contextualizados que exigen un cierto proceso de descontextualización no inmediato) aunque el alumno puede tener una cierta idea de cómo abordarlo." (nivel de conexión).

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es que (1) el alumno ha entendido el problema y ha escrito un texto correcto como respuesta en el que ha combinado el uso de figuras, texto verbal y símbolos; (2) se trata de un problema contextualizado cuya resolución no es inmediata en el caso de las figuras A, B y C; (3) el uso incorrecto de ciertos términos (elevaciones, descomposición de un rectángulo, costados, diagonal en lugar de lado de un polígono), a pesar de que globalmente la respuesta se puede considerar como correcta.

4) Construcción de un modelo

Consideramos que dicha competencia se muestra en la respuesta del alumno, tomando en cuenta que hay un trabajo con un modelo muy simple: los diseños del problema dado son un modelo geométrico de la situación extra- matemática.

5) Formulación y resolución de problemas

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras".

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es que el alumno ha resuelto correctamente el problema.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)" (nivel de conexión).

El indicador es que el alumno ha resuelto los cuatro casos por tres caminos diferentes (en A y C utiliza el mismo procedimiento) haciendo uso de diversas vías: ha resuelto cuatro situaciones diferentes y distintas formas de representación (gráfica, verbal y simbólica).

6) Representación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito"

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es que el alumno ha hecho uso de diferentes representaciones según la figura dada.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos"

El indicador es que el alumno ha resuelto los cuatro casos utilizando distintas formas de representación (gráfica, verbal y simbólica).

7) Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso son dos:

"Manejar afirmaciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos."

"Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal."

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestran estas dos subcompetencias es el análisis de la configuración cognitiva en el que se observan el lenguaje simbólico y gráfico y los procedimientos utilizados (calcular el perímetro; estimar longitudes, calcular la raíz cuadrada, etc.).

Se presenta una situación educativa con un contexto extramatemático que se tiene que traducir a contenidos de espacio y forma.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso serían los siguientes:

"Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares." (nivel de conexión).

"Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal en situaciones y en contextos menos conocidos" (nivel de conexión).

El indicador, en el caso de las figuras A y C, es que los cálculos son simples (realizar una suma) pero no se pueden considerar rutinarios ya que él ha tenido que seleccionar los sumandos, en el apartado B aplica un procedimiento familiar, aplica el Teorema de Pitágoras, pero no se puede considerar una rutina ya que debe buscar previamente la longitud de los catetos. En cambio en el caso D nos encontraríamos con un cálculo rutinario.

Es una situación familiar, debido a que se trata de encontrar perímetros de figuras poligonales, pero no rutinaria, dado que ha tenido que encontrar las longitudes de los lados haciendo uso de un procedimiento implícito que no se puede considerar rutinario, que es la obtención de polígonos isoperimétricos.

8) Empleo de soportes y herramientas

Esta última competencia consideramos que no ha sido activada por el alumno ya que, salvo papel, bolígrafo, reglas y calculadora (soportes usuales) no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema. Aunque también sería aceptable considerar que dicha competencia ha sido activada a un nivel de reproducción.

Ahora estamos en condiciones de asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hemos determinado a las diferentes competencias.

Nuestra conclusión es que se trata de una respuesta que permite situar la competencia del alumno en el nivel de conexión. Las razones para esta afirmación es que las siguientes competencias se presentan a este nivel: pensar y razonar, argumentación, comunicación, formulación y resolución de problemas, representación y empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico. El hecho de que las otras dos competencias (construcción de modelos y uso de soportes y herramientas) se presenten al nivel de reproducción no es causa suficiente para que la solución del alumno deje de considerarse en el grupo de conexión. Esta conclusión está de acuerdo a lo establecido por el marco teórico PISA (OCDE, 2004, p. 48-49):

> Las descripciones de competencia de las páginas anteriores podrían utilizarse para clasificar las preguntas de matemáticas y asignarlas así a uno de los grupos de competencia. Una manera de hacerlo sería analizar los requisitos de cada pregunta y luego considerar cada una de las competencias para la pregunta en cuestión: uno de los tres grupos proporcionará la descripción más ajustada de los requisitos de la pregunta en relación a esa competencia. Si se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de *reflexión*, entonces la pregunta se asigna a ese grupo de competencia. Si no ocurre eso, pero se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de *conexión*, entonces la pregunta se asigna a ese grupo. Si no se da ninguno de estos casos, la pregunta se asignaría al grupo de *reproducción*, puesto que se consideraría que todas las competencias que moviliza se ajustarían a la descripción de las competencias de ese grupo.

Evaluación formativa

La evaluación de competencias que hemos realizado, podemos considerarla como una evaluación formativa, ya que a través de ella obtenemos información sobre los conocimientos que tiene el alumno y los procesos que ha activado para resolver la tarea, para luego poder tomar decisiones que nos ayuden a mejorar el desarrollo de aprendizaje de dicho alumno. Dicha evaluación de competencias nos permite un feedback con el alumno sobre las competencias que podría desarrollar. Dicho de otra manera, además de saber el nivel en que se encuentra (nivel de conexión) obtenemos información relevante sobre: 1) las deficiencias, errores, logros y fallas que presentan los estudiantes en sus aprendizajes y 2) ofrece sugerencias relevantes y específicas sobre las competencias que puede desarrollar.

Tal como se ha explicado en el capítulo 4, el proceso de matematización es un proceso muy complejo que implica otros procesos. Este hecho conlleva una cierta jerarquía de procesos, lo cual no excluye su presencia conjunta en la resolución de una tarea. Ahora bien, cuando se da la lista de competencias (INECSE, 2004) se pone en primer plano la presencia conjunta y, en cierta manera, dicha jerarquía queda oscurecida.

Nosotros consideramos que para la evaluación formativa de las competencias del alumno conviene tener presente que hay un territorio en común entre las diferentes competencias que permite considerar la siguiente jerarquía (que puede variar dependiendo de las tareas analizadas):

1) Construcción de modelos y Formulación y resolución de problemas.

2) Comunicación y argumentación.

3) Representación; pensar y razonar; empleo de de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico; empleo de soportes y herramientas.

Consideramos que la competencia de construcción de modelos matemáticos, a partir de situaciones extramatemáticas, a nivel de reflexión implica la competencia de resolución de problemas. Por otra parte, la competencia de formulación y resolución de problemas no necesariamente implica la competencia de construcción de modelos.

La competencia de formulación y resolución de problemas implica la competencia de comunicación, a su vez podemos considerar que la competencia de argumentación está muy relacionada con la de comunicación.

Por último las otras cuatro competencias (representación; pensar y razonar; el empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico; empleo de soportes y herramientas) estarían en la base de la jerarquía ya que se presentan conjuntamente y forman parte de las de comunicación y argumentación.

Una vez establecida esta jerarquía, si la aplicamos al caso del problema del carpintero, nuestra primera conclusión es que el alumno muestra la competencia de formulación y resolución de problemas en el nivel de conexión. También están en éste las competencias de comunicación y de argumentación, pero nuestro análisis nos permite diagnosticar un aspecto relevante y bien delimitado que convendría mejorar. En el caso de la comunicación, el alumno tendría que manejar con más precisión los términos que ha usado, mientras que en el caso de la argumentación podría mejorarla explicitando, por ejemplo, claramente cuál es la tesis y la cadena de razonamientos.

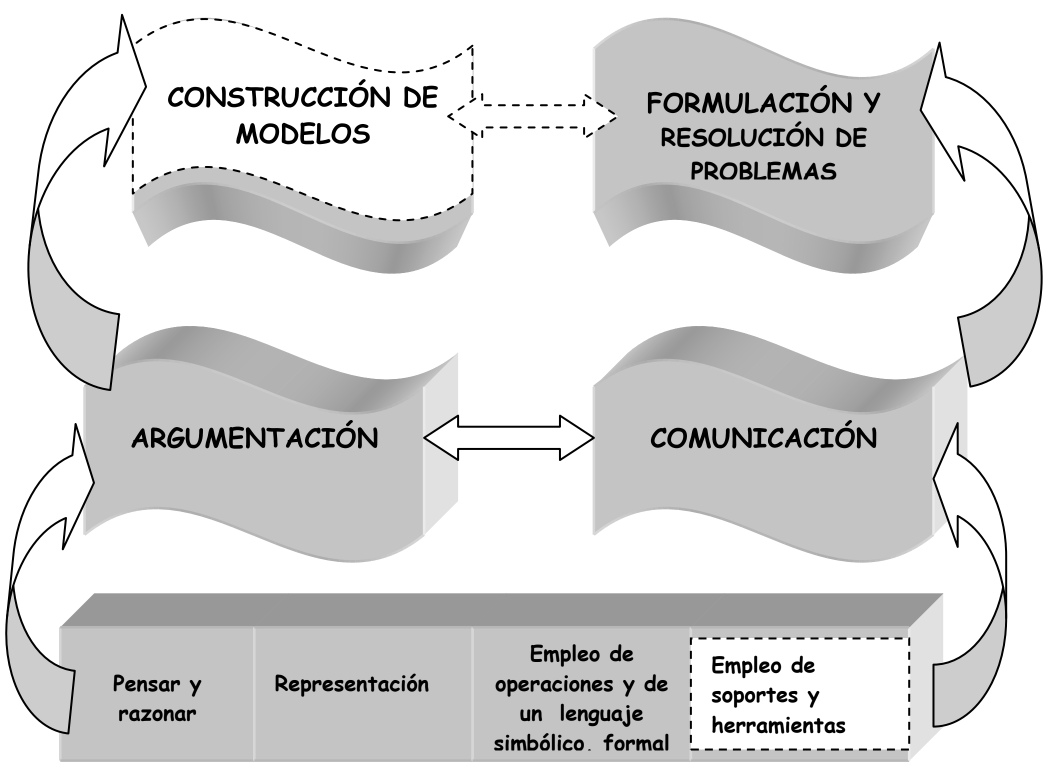


Figura 6.4. Jerarquía de competencias en el caso del carpintero

Fuente: Elaboración propia

En el caso de representación y empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico, su nivel sería el adecuado y el análisis desarrollado no sugiere un aspecto relevante y bien delimitado que convendría mejorar (por ejemplo, en la figura B se le podría sugerir que escribiese el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$, pero no sería una mejora especialmente relevante).

3. RETROALIMENTACIÓN. DESARROLLO DE UNA COMPETENCIA ESPECÍFICA

Si se quiere desarrollar una determinada competencia matemática (por ejemplo, la de argumentación en el caso del alumno que ha resuelto el problema del carpintero), se puede hacer de acuerdo con el siguiente esquema. La competencia, la subcompetencia y el grado/nivel están determinados por el informe PISA 2003 (o más en general por los documentos curriculares) (ver tabla1). A continuación se ha de diseñar una tarea en la que, para su resolución, sea necesario activar esta competencia y subcompetencia en el grado o nivel que interese. Seguidamente se debe proponer al alumno la resolución de la tarea. Dicha resolución exitosa se supone que permite encontrar evidencias que justifican la asignación de un determinado grado de desarrollo de la subcompetenica.

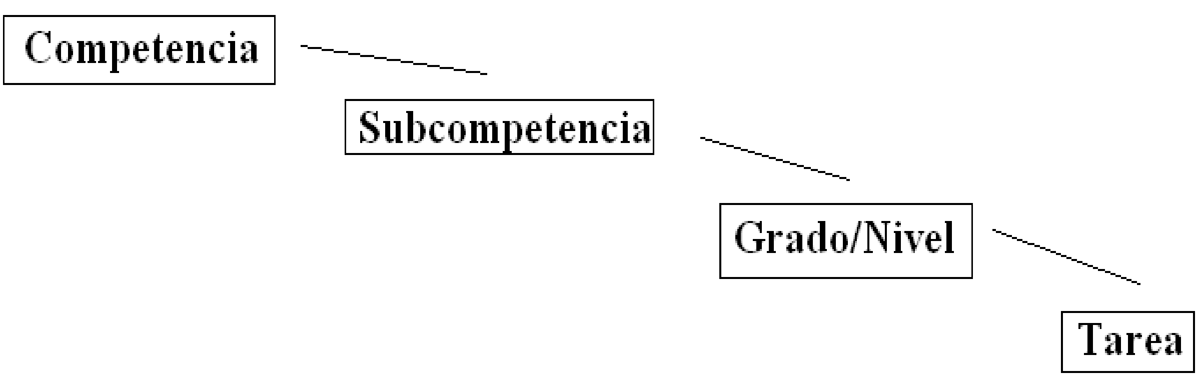


Figura 6.5. Desarrollo de una determinada competencia

Esta secuencia, de alguna manera, minimiza la importancia del análisis a posteriori de la actividad matemática del alumno. Es más, la estructura propuesta solo necesita saber que la resolución de la tarea es exitosa ya que se fija, de entrada, la variable competencia (o subcompetencia) y se supone que la resolución de la tarea propuesta desarrolla y activa dicha competencia y que, además, ofrece evidencias que sustenten afirmaciones sobre el grado de desarrollo de la competencia.

4. VALIDACIÓN. TRIANGULACIÓN

El marco teórico del enfoque ontosemiótico nos ha proporcionado los principales instrumentos teóricos (práctica matemática, objetos y procesos matemáticos) y el informe PISA 2003 los indicadores de grado de competencia. La propuesta de evaluación de competencias realizada en este capítulo se puede considerar como un aporte teórico que permite aplicar las herramientas EOS al problema de la evaluación y desarrollo de competencias matemáticas.

Con relación a este método se planificó un proceso de *triangulación de investigadores* para validarlo. El primer tipo de análisis realizado por la doctoranda se sometió primero a la opinión del director de tesis, después se contó con la opinión de otro especialista en el enfoque ontosemiótico y, por último, los análisis realizados se sometieron a la opinión de expertos en didáctica de las matemáticas en el taller "El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico" impartido en la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, en Sonora (México) en marzo de 2010 y su posterior publicación en actas después de un proceso de revisión:

- Font, V.; Rubio, N. (2011). El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico. En S. E. Ibarra y M. C. Villalva (Eds.), *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas* (197 – 199) Sonora (México): Universidad de Sonora.

CAPÍTULO 7

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN TALLER PILOTO CON PROFESORES PARTICIPANTES EN EL IV COLOQUIO INTERNACIONAL DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Resumen

Este capítulo se relaciona con el objetivo específico 4: Determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos.

Se diseñó e implementó un primer Taller (Piloto), con profesores de secundaria del Perú, relacionado con la evaluación de competencias matemáticas propuestas en el informe PISA 2003. Los principales resultados de este taller fueron que los profesores participantes, por una parte, no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían de la solución a los problemas propuestos, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron. Mostraron, además, tener dificultades para aplicar las matemáticas que saben a contextos extramatemáticos como los que se formulan en los problemas PISA propuestos. La mayoría de ellos piensa que no están capacitados para evaluar competencias matemáticas y que necesitan más herramientas para poder hacerlo.

1. METODOLOGÍA

Nuestro objetivo inicial era el de responder a la pregunta *¿Qué nivel de competencia manifiestan profesores de matemáticas de educación secundaria en la evaluación de las competencias matemáticas* (*del informe PISA 2003*).

La impresión inicial de la doctoranda, sobre lo que estaba sucediendo en el Perú, con relación a la evaluación de competencias, era que, dado que los constructos del informe PISA 2003 eran confusos, los profesores tendrían dificultades para realizar la evaluación de competencias matemáticas utilizando dichos constructos. Esta primera impresión había que validarla y, si fuese el caso, matizarla y corregirla. Para ello, se planificó, un primer proceso de triangulación con el objetivo de conocer cuál era realmente la competencia de los profesores.

Esta primera triangulación consistió en una triangulación de datos: (a) se estudió el informe PISA 2003 para confirmar la ambigüedad de los constructos (ver capítulo 4), (b) se diseñó un experimento de enseñanza (un taller piloto) en el que participaron asistentes al IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática de la PUCP para confirmar que los profesores tenían dificultades en la evaluación de las competencias matemáticas. El resultado de la triangulación nos obligó a matizar el supuesto inicial ya que observamos que la dificultad de los profesores no se podía explicar solo a partir de la ambigüedad de los constructos del informe PISA 2003.

Dado que no nos era posible realizar un estudio con una muestra representativa de profesores de secundaria del Perú, optamos por una muestra intencional a la cual teníamos fácil acceso. En concreto diseñamos un taller piloto en el que participarían asistentes al IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática. Se trató de un colectivo de profesores con diversos grados de competencia matemática, con experiencia docente y con escasos estudios de posgrado en Didáctica de las Matemáticas.

2. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO

El experimento de enseñanza consistió en la realización de un primer taller piloto (Taller cero) de formación permanente para profesores de matemáticas de educación secundaria, asistentes al IV Coloquio Internacional de la Enseñanza de las Matemática del Perú, cuyo análisis nos llevó a diseñar otros talleres: Taller 1, con estudiantes del último curso de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona; Taller 2, con profesores en activo del Perú que asistieron al coloquio de enseñanza de las matemáticas *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*; Taller 3, con estudiantes de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

El nombre del taller fue "Evaluación de las competencias matemáticas en las pruebas PISA 2003" y tuvo una duración de 4,5 horas distribuidas en tres sesiones de 1,5 horas cada una. Se implementó en Lima del 11al 13 de Febrero de 2009.

Organización del Taller

Las modalidades de trabajo previstas fueron: presentación del informe PISA 2003 por parte de la profesora y trabajo de los participantes en grupos de 3. El contenido principal de las sesiones fue:

a. Información y reflexión sobre los “niveles de complejidad” y la lista de las “competencias y subcompetencias” del informe PISA 2003, utilizando como ejemplos algunos de los problemas propuestos en estas pruebas.

b. Respuesta en grupo a un material diseñado para recoger información sobre su competencia en la evaluación de competencias matemáticas.

c. Respuesta individual a dos cuestionarios cuyo objetivo era tener información sobre su situación inicial antes de comenzar el taller y sobre su evaluación del taller.

Participantes

Los participantes fueron profesores, inscritos en el evento, que eligieron el taller. No hubo selección de la muestra, los participantes escogieron asistir a este taller por iniciativa propia teniendo en cuenta la información sobre el taller que aparecía en el programa del coloquio. En concreto se indicaba que el taller estaba dirigido a profesores de educación primaria y secundaria de educación básica regular. Si bien la muestra fue aleatoria no se puede considerar una muestra representativa. Desde el punto de vista de la extensión de los participantes en la investigación, se trata de un estudio de caso, y desde el punto de vista representativo, se trata de una muestra intencional.

Otras características de la investigación

Se trata de una investigación puntual ya que la información se obtuvo en un espacio de tres días. También consideramos que se trata de una investigación de campo ya que los espacios de formación permanente del profesorado los consideramos parte de los lugares de trabajo de los sujetos investigados. La investigación fue de tipo participativa ya que la doctoranda fue la persona que diseñó el taller y lo implementó.

Tipos de registro de la información

El registro de la información proporcionada por los asistentes fue la respuesta escrita al dossier sobre los problemas PISA 2003 y a dos cuestionarios (inicial y final).

Dossier y cuestionarios

Ver anexos 1-9

3. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

Los participantes inicialmente eran 55, de los cuales 40 asistieron a las tres sesiones. Eran profesores de diferentes regiones del Perú, de los cuales 7 eran profesores de educación primaria y 48 de educación secundaria; en su mayoría con una experiencia docente de más de 10 años y laborando en instituciones estatales (60%).

El taller se repartió en tres sesiones. A continuación describimos cada una de ellas:

Primera Sesión

Se presentó el taller y los objetivos del mismo a los asistentes. Dado que hubo una asistencia superior a la prevista (55 personas), se pensó que era conveniente que algunos de los asistentes asistiesen a otro taller. Como elemento para facilitar el cambio de taller se comunicó a los participantes que éste se orientaría suponiendo que los profesores tenían pocos conocimientos sobre las pruebas PISA 2003 y que en esta primera sesión se presentarían éstas y se trataría de familiarizarlos con sus constructos teóricos (niveles de complejidad, competencias matemáticas, etc.) y forma de evaluación. Para el análisis del primer cuestionario se tomaron en cuenta las respuestas de los 55 asistentes a la primera sesión.

Se les repartió a los profesores asistentes el cuestionario 1 (ver Anexo1. Material 1), para su respuesta individual, con el objetivo de recabar información sobre sus conocimientos previos de las competencias PISA 2003 y sobre su ejercicio profesional: grados en los que enseña (primaria o secundaria), años de su ejercicio profesional, tipo de institución en la que labora (estatal o privada) y la forma en que evalúan los aprendizajes de sus alumnos (objetivos o competencias).

A continuación, se hizo una presentación histórica breve de las pruebas PISA 2003. Después, se formaron grupos de tres profesores y se les entregó la hoja del problema PISA 2003 “chatear” con la respectiva solución y su evaluación según el Informe PISA 2003 (ver Anexo 2. Material 2). Se les entregó también información sobre cómo se entienden los niveles de complejidad en el informe PISA 2003 y se les dio una breve explicación (ver Anexo 3. Material 3). Se les entregó también otro ejemplo, el problema PISA “Nivel de CO_2” y se les preguntó sobre el nivel de complejidad (ver Anexo 4. Material 4). A continuación, se les entregó el problema del carpintero adaptado (otro ejemplo tomado de las pruebas PISA 2003) para que indicaran su nivel de complejidad (ver Anexo 5. Material 5).

En la respuesta que dieron los diferentes grupos sobre el nivel de complejidad no hubo una respuesta única, ya que asignaron el mismo problema a los diversos niveles (reproducción, conexión o reflexión). Para algunos de ellos era de reproducción, argumentando que ya habían trabajado con sus alumnos problemas parecidos, luego éste en particular se convertía en un ejercicio. Otros en cambio, en su mayoría, dijeron que se trataba de problemas de conexión (ver análisis de resultados).

Se terminó la primera sesión haciendo una reflexión sobre la dificultad de poder decidir a qué nivel corresponde el problema del carpintero adaptado, así como sobre el lenguaje utilizado en el enjunciado del problema, poco habitual en el contexto peruano.

Segunda Sesión

Se comenzó la sesión recordando los niveles de complejidad trabajados en la sesión anterior y en esta ocasión se les entregó la solución de un alumno al problema del “carpintero adaptado” (ver Anexo 6. Material 6). Se les entregó también la lista de competencias y subcompetencias PISA 2003 (ver Anexo 7. Material 7) y se les pidió que cada grupo hiciera una evaluación analítica de las competencias que se podían inferir de la respuesta del alumno.

Una vez los participantes dieron su respuesta se reflexionó sobre la siguiente pregunta ¿La lista de competencias y subcompetencias es una herramienta útil y suficiente para evaluar la competencia matemática de los alumnos? Hubo diversas reflexiones sobre la falta de precisión de los constructos PISA 2003 y se llegó a un cierto consenso sobre que las herramientas proporcionadas en el marco teórico de PISA 2003 no son suficientes para determinar las competencias matemáticas. Solo califican en una escala de 1 a 3 la solución. El alumno es competente si lo resuelve correctamente o no lo será en caso de resolverlo incorrectamente.

Dado que en la época en que se realizó el taller algunos de los profesores asistentes eran evaluados por parte del ministerio de educación sobre su competencia en la resolución de problemas, hubo comentarios sobre el hecho de que no se consideraban competentes para evaluar competencias matemáticas (aunque no se dijo claramente que esta falta de competencia estuviese relacionada con una falta de competencia matemática de los profesores).

La investigadora aprovechó el debate para comentar (1) la estrecha relación que hay entre los procesos y las competencias y (2) que un análisis de los objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas matemáticas podría ser un nivel previo al análisis de las competencias ya que dicho tipo de análisis permitía inferir competencias. También comentó que en la tercera sesión, si había tiempo, estaba previsto comentar este tipo de análisis.

Tercera Sesión

A continuación, se les entregó a los profesores participantes los problemas PISA 2003 “Niveles de CO2” y “Chatear” para su resolución en grupos de tres. Dada la premura de tiempo se decidió trabajar solo con el problema “Chatear”. Así, después de una lectura individual, cada uno de los grupos resolvió dicho problema. Se les propuso que cada grupo presentase sus soluciones para que fuesen evaluadas por otro grupo. Para ello, se les proporcionó a los participantes una nueva hoja de trabajo (ver Anexo 8. Material 8) en forma de tabla en las que en las filas aparecían las competencias y subcompetencias y en las columnas los niveles de complejidad. Se recogió las hojas de soluciones y respuestas a esta nueva hoja de trabajo de cada grupo.

Antes de que los grupos evaluaran las competencias, la investigadora escribió en la pizarra únicamente la respuesta que se da a las pruebas PISA 2003 a cada uno de los dos ítems que preguntaba el problema debido a que no todos los grupos los habían resuelto completamente.

Nueve de los trece grupos habían respondido correctamente al ítem 1, mientras que al ítem 2 sólo un grupo lo había hecho.

Antes de finalizar la sesión se les presentó el análisis experto de la respuesta al problema del carpintero, con la finalidad de ilustrar cómo un análisis previo a nivel de objetos y procesos matemáticos puede ayudar a inferir competencias (ver sección siguiente). Desafortunadamente no hubo tiempo para que los participantes intentaran hacer un análisis parecido con el problema “Chatear”.

Al final de la sesión, se les tomó a los participantes al taller, en forma individual, el cuestionario 2 de evaluación del taller (ver Anexo 9. Material 9).

4. ANÁLISIS EXPERTO DE LAS RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Para poder realizar el análisis y la discusión de las respuestas de los profesores a los problemas propuestos, previamente era necesario realizar una evaluación analítica experta de las competencias que se podían inferir de la solución del problema. De acuerdo a nuestro tercer objetivo, se trataba de aplicar las herramientas de análisis epistémico de objetos y procesos activados en las prácticas matemáticas que nos ofrece el EOS (ver capítulo anterior) y a partir de dicho análisis inferir las competencias que, en nuestra opinión, se manifiestan en la respuesta del alumno.

Se aplicó dicha técnica, entre otros, a los tres problemas utilizados en el taller (Niveles de CO_2, Chatear y Carpintero). Este primer análisis fue realizado primero por la doctoranda y revisado por el director de tesis, después se efectuó una triangulación[1] consultando a un experto, en la técnica propuesta por el EOS, sobre el análisis realizado —se trata de análisis similares a los realizados en el capítulo 5 (tarea de la mediatriz y tarea del desierto) y capítulo 6 (problema del carpintero adaptado). Por último, los análisis realizados se sometieron a la opinión de expertos en didáctica de las matemáticas en el taller “El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico” impartido en la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, en Sonora (México) en marzo de 2010.

[1] Para Cohen y Manion (1990) puede definirse la triangulación como: *(...) el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano*. (Cohen y Manion, 1990, p.331). Ahora bien, en esta investigación consideramos, de acuerdo con Cerda (2000), que el objetivo de la técnica de la triangulación es impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales: *La triangulación es una garantía para impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales y para lo cual utiliza múltiples fuentes, métodos e investigadores con la intención de ampliar el ámbito, densidad y claridad de los constructos desarrollados en el curso de la investigación y corregir los sesgos que aparecen cuando el fenómeno es examinado por un solo observador, con una técnica y desde un solo ángulo de observación.* (Cerda, 2000, p.50). Hay diferentes tipos de triangulación, puede ser de datos, de investigadores, de teorías o de métodos.

5. RESULTADOS DEL TALLER PILOTO

Cuestionario 1

Las primeras cuatro preguntas del cuestionario 1, (ver Anexo 1), estuvieron relacionadas con su labor docente y sirvieron para saber que los participantes eran profesores de diferentes regiones del Perú, que 7 eran profesores de educación primaria, 48 de educación secundaria, 15 de los cuales también impartían algún curso en la educación superior y que en su mayoría tenían una experiencia docente de más de 10 años laborando en instituciones estatales (60%). Las preguntas 5-10 del cuestionario 1 (ver Anexo 1) tenían como objetivo conocer las concepciones de los asistentes al taller sobre competencia matemática, evaluación de competencias y sobre sus conocimientos sobre las competencias matemáticas propuestas en el informe PISA 2003.

De sus respuestas a estas preguntas (ver Anexo 10. Registro de respuestas a las preguntas 5-10 del cuestionario 1) se obtuvo que, con relación a la pregunta 5 del cuestionario 1 ¿qué entiende por competencia matemática?, un 29% (16) o bien no contesta o escribe frases circulares o con poca relación con la idea de competencia que son difíciles de clasificar (p.e. "las formas distintas que desarrollan los estudiantes"; "competencias que debemos desarrollar con los alumnos")

En la Tabla 7.1 se resumen las respuestas sobre la pregunta ¿qué entiende por competencia matemática? Un 67% (38) contempla en su respuesta algunos de los componentes de la noción de competencia (habilidad, capacidad, contexto, etc.). Por ejemplo, "son las macrohabilidades que pretendemos desarrollar en nuestros estudiantes sobre situaciones problemáticas"; "conjunto de capacidades para desarrollar cualquier problema diario"). Solo una persona (1,8%) da una respuesta que se pueda considerar que contiene varios de los componentes esenciales de la competencia ("Es el saber hacer, el saber ser, el saber conocer de términos matemáticos). Sorprende en este colectivo que no se mencionara el aspecto conocimiento en el concepto de competencia.

Tabla. 7. 1. Concepción de competencia

Aspectos considerados en la definición de competencia		Frecuencia en que SÍ aparece aspecto	Frecuencia en que NO aparece aspecto
Saber		0	55
Saber hacer	Habilidad	22	33
	capacidad	20	35
Saber ser (actitud)		4	51
Contexto		22	33
Respuesta circular		1	54
Respuesta Sin relación		7	48
Respuesta en blanco		9	46

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

Con relación a la pregunta 7 del cuestionario 1 ¿Cree que está capacitado para evaluar competencias matemáticas?

La mayoría contestó que no o lo dejó en blanco 60% (33 profesores). Un 27% (15 profesores) contestó que sí y un 13% (7 profesores) dio respuestas en las que afirmó que tiene algún conocimiento sobre el tema, al decir: “no del todo”, “de forma gradual”, “todavía no”, “creo que hemos empezado progresivamente”, “aún tengo dificultades”, “en determinadas situaciones”, “estoy en proceso de aprendizaje”.

Con relación a la pregunta 8 del cuestionario 1 ¿Ha oído hablar de las competencias PISA y en caso afirmativo indique el contexto?

La mayoría contestó que sí 62% (34) pero hay un grupo importante que contestó que no o responde en blanco 38% (21).

Resulta significativo que el contexto más señalado fue la prensa o internet, en lugar de los canales informativos del ministerio de educación. Un 25% (14) indicó que los boletines, revistas, informes de divulgación e internet son algunos medios por los cuales han recibido información.

Con relación a la pregunta del cuestionario 1 ¿Conoce las competencias PISA 2003 y en caso afirmativo numérelas?

Solo un porcentaje bajo 7% (4) contesta que sí; sin embargo solo dos mencionan la competencia comunicación matemática, solo uno menciona la argumentación y otro las de representación y modelización. Todos coinciden en sus respuestas al mencionar la competencia resolución de problemas.

Con relación a la pregunta 10 del cuestionario 1 ¿Cómo evalúa los aprendizajes matemáticos de sus alumnos?

Doce profesores indican que evalúan por objetivos, 22 por competencias, doce por capacidades y ocho profesores responden en blanco. Un profesor responde que evalúa tanto por objetivos como por competencias. Los profesores que responden que evalúan por competencias indican como instrumentos de evaluación: prácticas, exámenes, pruebas escritas, pruebas orales, participación en clase, intervenciones orales – los cuales no difieren de aquellos profesores que manifiestan evaluar por objetivos –; además, señalan, guías de cotejo, registros anecdóticos, fichas de observación, entre otros instrumentos.

Conclusiones relacionadas con el problema del carpintero

De la determinación de los niveles de complejidad y competencias asignadas por los profesores, tabla 7.2 y gráfico 7.1 al problema del carpintero adaptado (que sigue siendo un problema de conexión), se observa que los profesores no concuerdan con respecto a los niveles de complejidad asignados en las pruebas PISA 2003 a dicho problema. De los trece grupos solo cinco lo consideran de conexión, dos lo consideran de reproducción y cinco de reflexión.

Tabla 7. 2. Niveles de complejidad asignados al problema del Carpintero

Nivel / Grupo	Reproducción	Conexión	Reflexión
G1		**x**	
G2			x
G3	x		
G4			x
G5	x		
G6			x
G7		**x**	
G8			x
G9		**x**	
G10		**x**	
G11		**x**	
G12		**x**	
G13			x

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009.
Fuente: Elaboración propia.

Los profesores de un grupo, a quienes se les pudo observar sus respuestas durante el taller, se les preguntó por qué habían elegido el nivel de reproducción y manifestaron que habían trabajado un problema parecido y que por ello éste era de rutina. Lamentablemente, no sé identificó al otro grupo que también le asignó el nivel de reproducción, para contrastar su respuesta.

En la Tabla 7.3 y el gráfico 7.1 se muestran las respuestas que los profesores asignan a las competencias activadas en la solución propuesta y el nivel de complejidad asignado al mismo.

Tabla 7. 3. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del Carpintero

Grupos	Reproducción	Conexión	Reflexión	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico
G1		**x**		-	-	x	x	x	x	x
G2			x	x	x	x	-	x	-	x
G3	x			x	-	x	-	x	x	x
G4			x	x	x	x	x	x	-	-
G5	x			x	x	-	-	x	x	x
G6			x	x	x	x	-	x	x	x
G7		**x**		x	x	x	-	x	x	-
G8			x	x	x	x	-	x	x	x
G9		**x**		x	x	x	-	x	x	-
G10		**x**		x	-	-	-	x	x	-
G11		**x**		x	x	x	x	x	x	x
G12		**x**		x	x	x	x	x	x	-
G13			x	x	x	x	x	-	-	-

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

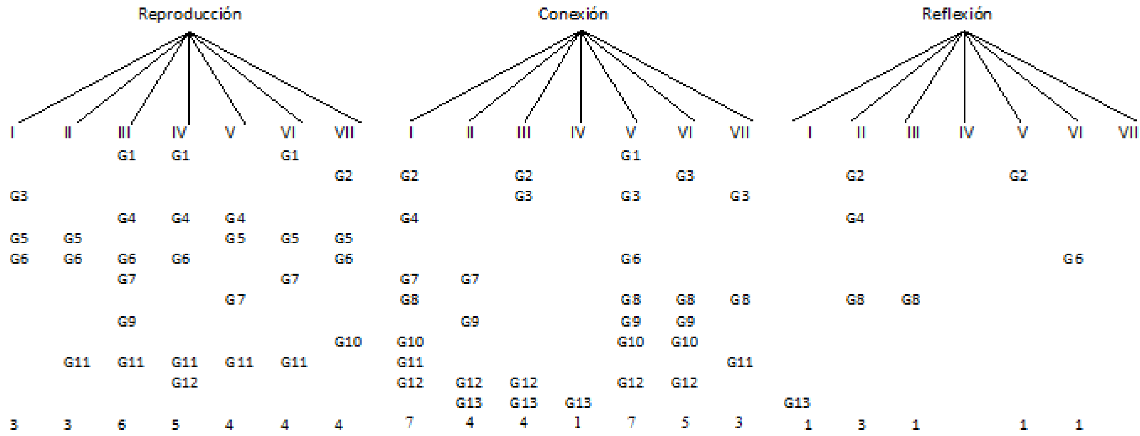


Gráfico 7.1. Resultados de los niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del CARPINTERO ADAPTADO.
Elaborado con los datos de la Tabla 7.2 Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del CARPINTERO ADAPTADO

De acuerdo con el análisis experto realizado, la hipótesis era que la competencia "*pensar y razonar*" debía ser considerada por todos los participantes debido a que, si se supone que el problema está bien resuelto, esto implica que el alumno tuvo que pensar y razonar para poder resolverlo. Esta hipótesis se cumplió en la mayoría de los casos. Solo un grupo no la señaló. En lo que no concordaron fue en la asignación de los niveles de complejidad: dos grupos señalaron el nivel de reproducción, seis el de conexión y cinco el de reflexión.

La hipótesis era que tanto la competencia de *argumentación* como la competencia de *comunicación* deberían estar presentes en las respuestas de los participantes porque la solución al problema del carpintero que da el alumno está correctamente argumentada y razonablemente bien comunicada.

Tres grupos no señalaron como activada la competencia de *argumentación*, de los cuales sin embargo, dos señalaron como activada la competencia de *comunicación*, al parecer estos grupos no consideraron que ambas competencias tienen un "territorio común" y no justificaron su elección; el otro grupo de estos tres consideró que ninguna de las dos competencias se había activado. Esta es una de las cuestiones que por limitaciones de tiempo no se pudo profundizar y que se debían tener en cuenta en futuros talleres. Tampoco concordaron en cuanto a los niveles de complejidad: tres grupos señalaron el nivel de reproducción, cuatro de conexión y tres de reflexión.

La hipótesis que la competencia de *construcción de modelos* se activó en la solución del alumno no fue corroborado por todos los grupos. Siete no la señalaron, y de las seis restantes, cinco la consideraron del nivel de reproducción y uno del nivel de conexión.

La hipótesis era que la competencia *resolución de problemas* tendría que aparecer en la mayoría de las respuestas a no ser que el problema se considerase un problema trivial o un ejercicio. Esto se corroboró en la mayoría de los grupos, solo uno no señaló nada. Tampoco hubo consenso en cuanto a niveles de complejidad: cuatro grupos indicaron el nivel de reproducción, siete el nivel de conexión y uno el nivel de reflexión.

La hipótesis era que la competencia de *representación* debería estar presente en casi todas las respuestas. Sin embargo, tres grupos no la indicaron, y los diez restantes consideraron diferentes niveles de complejidad: cuatro el nivel de reproducción, cinco el de conexión y uno el de reflexión.

La hipótesis era que la competencia de *empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* debería estar presente en casi todas las respuestas. Solo aquellos profesores que consideran esta competencia relacionada sólo con puro simbolismo formal no considerarían activada esta competencia porque solo hay texto o figura. Sin embargo, seis grupos no la señalan, y los restantes grupos consideran los diferentes niveles de complejidad: cuatro indican el nivel de reproducción y tres el de conexión.

La última competencia *uso de soportes y herramientas* no fue tomada en cuenta para la evaluación de competencias pues consideramos que salvo papel y bolígrafo no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema.

Se observa que es necesario pedirle al participante el por qué de su elección del nivel de complejidad, lo cual por cuestiones de tiempo no podía pedirse en este primer taller piloto, pero se debería tener en cuenta en el diseño e implementación de futuros talleres.

Resultados sobre el problema Chatear

El problema *Chatear* se resolvió en la tercera sesión. Hay que tener en cuenta que los grupos formados no fueron los mismos que en la sesión anterior. Algunos profesores tuvieron dificultades para resolver este problema.

Con relación a la primera cuestión del problema (Chatear 1), diez grupos la resolvieron correctamente (por ejemplo, la respuesta de la Figura 1), dos no contestaron y uno lo hizo incorrectamente. Resulta significativo que tres grupos no la resuelvan dada la sencillez de la pregunta. Una posible explicación sería que el contexto de diferencia horaria no resulta familiar para las personas que no viajan fuera del país.

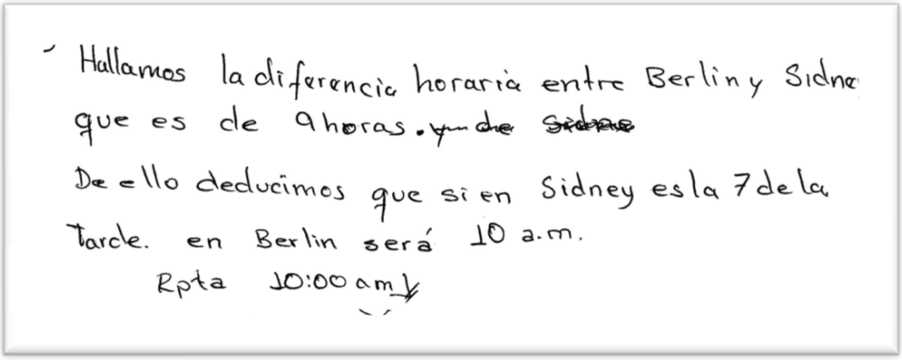

Hallamos la diferencia horaria entre Berlin y Sidne
que es de 9 horas. ~~y de Sidne~~
De ello deducimos que si en Sidney es la 7 de la
Tarde. en Berlin será 10 a.m.
Rpta 10:00 am

Figura 7.1. Solución de un grupo de profesores al problema PISA Chatear 1

Para realizar la evaluación analítica de competencias y la determinación del nivel de complejidad, el método que se siguió fue el siguiente: cada grupo analizó la respuesta dada por otro grupo. La tabla 7.4 y el gráfico 7.2 muestran los resultados.

Tabla 7.4. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema CHATEAR 1

Grupos	VB	Reproducción	Conexión	Reflexión	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico
G1	1		x		x		x	x	x	x	x
G2	1		x		x		x	x	x	x	x
G3	1		x		x	x	x	x	x	x	x
G4	1		x		x	x	x	x	x	x	x
G5	1		x			x				x	
G6	1		x		x	x	x			x	x
G7	1		x		x	x	x	x	x	x	x
G8	0										
G9	1		x		x	x	x				x
G10	-1		x		x	x		x	x	x	x
G11	1	x			x	x		x		x	
G12	1*										
G13	0		x		x	x			x		

VB	Observación
1	Respuesta correcta: *son las 10 a.m. en Berlín*
0	Una hora como respuesta dentro de los intervalos y con una diferencia horaria de 9 horas
- 1	Respuesta incorrecta
*	El grupo G12 no fue evaluado por otro grupo

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

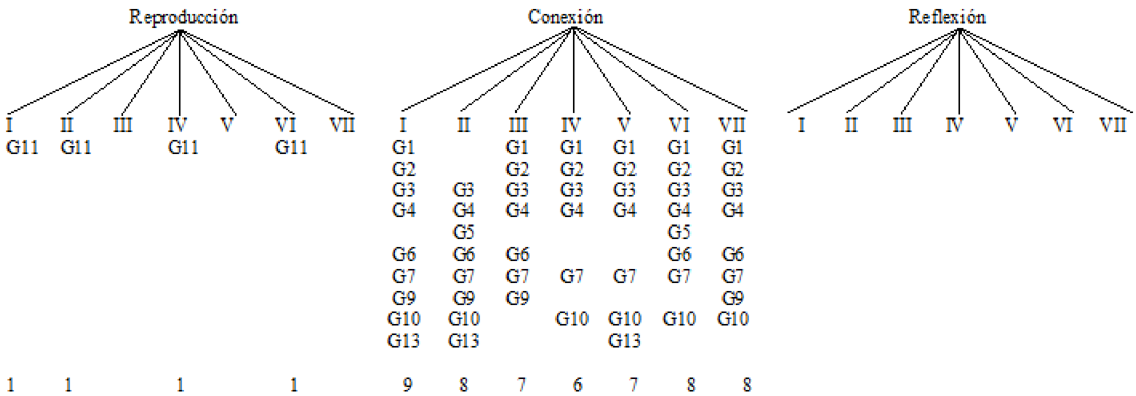


Gráfico 7.2. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema CHATEAR 1. Elaborado con los datos de la Tabla 7.3 Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema CHATEAR 1

Con respecto a la segunda cuestión (*Chatear* 2), de los trece grupos, ver Tabla 7.5 y gráfico 7.3, solo cinco lo resolvieron correctamente, (por ejemplo, la respuesta de la Figura 2), seis dieron una respuesta parcialmente correcta (dando solo uno de los intervalos de la solución, o bien indicando horas de los intervalos) y dos dieron una respuesta incorrecta.

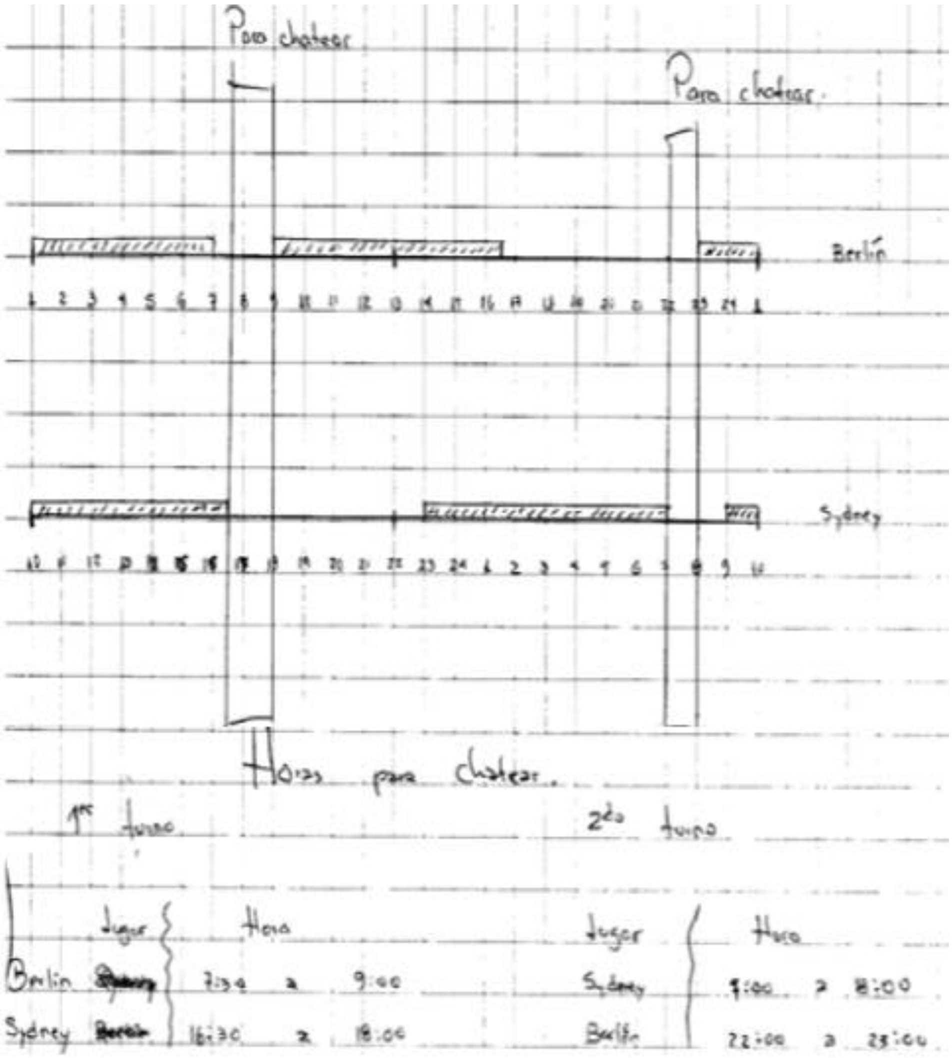


Figura 7.2. Solución de un grupo de profesores al problema PISA Chatear 2.

Tabla 7.5. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema CHATEAR 2

Grupos	VB	Reproducción	Conexión	Reflexión	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico
G1	1			x	x	x	x	x	x	x	x
G2	0										
G3	-1										
G4	2		x		x	x	x	x	x	x	x
G5	-1										
G6	2			x	x	x	x	x		x	x
G7	1		x		x	x	x	x	x	x	x
G8	2			x	x		x	x		x	
G9	1			x	x						
G10	0 y -1			x	x	x		x	x	x	x
G11	2	x			x		x	x		x	x
G12	2*										
G13	1			x	x	x	x		x		

VB		Lugar	Hora	
2	Respuesta correcta	Berlín Sydney	7:30a.m-9:00a.m y 10:00p.m -11:00p.m 4:30p.m-6:00p.m y 7:00a.m- 8:00a.m	
1	Respuesta parcial	Berlín Sydney	7:00a.m- 9:00a.m 4:30p.m-6:00p.m	10:00p.m-11:00p.m 7:30a.m-9:00a.m
0	Una hora como respuesta dentro de los intervalos y con una diferencia horaria de 9 horas.			
- 1	Respuesta incorrecta			
*	El grupo G12 no fue evaluado por otro grupo			

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

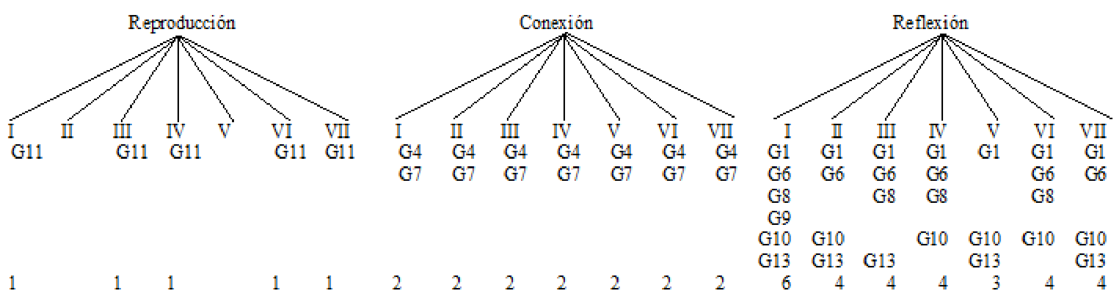


Gráfico 7. 3. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema CHATEAR 2. Elaborado con los datos de la Tabla 7.4 Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema CHATEAR 2.

Conclusiones relacionadas con el problema Chatear considerando todas las respuestas

Resulta significativo que profesores en activo no reconozcan la competencia de argumentación en la respuesta de compañeros que también son profesores en activo. La competencia argumentar no fue inferida en la respuesta de siete de los trece grupos. La competencia de comunicación solo se reconoció a siete grupos. Una explicación podría ser que dichos grupos o bien dieron una respuesta incorrecta o bien se limitaron a dar la respuesta sin ningún tipo de justificación. Resulta significativo que los compañeros que hicieron la evaluación considerasen que no argumentan ni comunican una tercera parte del profesorado. Dicho de otra manera, si los profesores no se muestran competentes en la argumentación y comunicación de sus respuestas difícilmente podrán desarrollar dichas competencias en sus alumnos. Si los alumnos consideran que lo importante es solo dar una respuesta, se debe en cierta manera a que un sector importante del profesorado también tiene, explícita o implícitamente, esta misma opinión.

Con relación a los niveles de complejidad, los profesores que evaluaron las respuestas de sus compañeros, dieron las siguientes valoraciones. En el caso del problema *Chatear 1* (que se trata, según el informe PISA 2003, de un problema de conexión) nueve respuestas lo consideraron de conexión. En el caso del problema *Chatear 2* (que se trata, según el informe PISA 2003, de un problema de reflexión) seis de las respuestas lo consideraron de conexión.

Solo cinco grupos contestaron correctamente la segunda parte del problema y seis dieron una respuesta parcial del problema. Consideramos significativa la falta de competencia matemática. De estos resultados se infiere que aproximadamente el 62% de los grupos participantes no tenía la competencia matemática necesaria para resolver el problema *Chatear 2*.

Podemos afirmar que un grupo significativo, de los profesores participantes en el taller, no muestra un nivel de competencia matemática suficiente para resolver problemas de las pruebas PISA 2003 (dicho de otra manera tienen dificultades para aplicar las matemáticas que saben a contextos extramatemáticos). Por otra parte, tampoco muestran la competencia profesional necesaria para evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos. En nuestra opinión, la falta de competencia matemática incide en la falta de competencia profesional para evaluar competencias matemáticas. Por esta razón, nos planteamos realizar el mismo experimento con colectivos que tuviesen asegurada la competencia matemática y estudiar su competencia profesional para evaluar competencias matemáticas utilizando únicamente los constructos teóricos que aparecen en el informe PISA 2003.

Aunque este colectivo de profesores no es una muestra representativa del profesorado de secundaria del Perú, no deja de ser un grupo interesado en su formación que está participando en uno de los eventos de formación permanente en Educación Matemática más importantes del país. Dicho de otra manera, en el caso de una muestra representativa del país serían de esperar resultados similares o inferiores. Estos resultados corroboran de alguna manera, las deficiencias que tiene una parte del profesorado en ejercicio del Perú en la competencia matemática, evidenciadas en las continuas evaluaciones a las que son sometidos los profesores como la evaluación Censal aplicada por el Ministerio de Educación (MED) en enero de 2007 y agosto de 2008.

Conclusiones del problema Chatear considerando solo las soluciones correctas

En primer lugar, tomaremos en cuenta solo los grupos cuyas soluciones al problema C*hatear 1* fueron correctas y sobre las cuales se evaluó las competencias.

De la determinación de los niveles de complejidad del problema y de las competencias inferidas de las soluciones correctas proporcionadas, Tabla 7.6, se puede observar que hay un mayor consenso al asignarle el nivel de conexión, lo cual es correcto, según el nivel que se asigna a este problema en el informe PISA. Aunque hay un grupo de profesores que calificaron el problema en el nivel de reproducción.

Tabla 7.6. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema CHATEAR 1

Grupos	Reproducción	Conexión	Reflexión	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico
G1		x		x		x	x	x	x	x
G2		x		x		x	x	x	x	x
G3		x		x	x	x	x	x	x	x
G4		x		x	x	x	x	x	x	x
G5		x			x				x	
G6		x		x	x	x			x	x
G7		x		x	x	x	x	x	x	x
G9		x		x	x	x				x
G11	x			x	x		x		x	

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

La hipótesis que la competencia *pensar y razonar* debía ser considerada por todos los grupos debido a que si se supone que el problema está bien resuelto, esto implica que el que lo resuelve tiene que pensar y razonar para poder resolverlo, casi se cumplió. Un solo grupo no la indicó como presente.

La hipótesis que tanto la competencia de *argumentación* como la competencia de *comunicación* debería presentarse en las soluciones que están correctamente argumentadas y correctamente comunicadas no se cumplió. Solo cinco de los nueve grupos consideraron ambas competencias presentes.

La hipótesis que la competencia *construcción de modelos* debía ser considerada por todos los grupos de profesores no se cumplió, ya que dicha competencia solo fue considerada por seis de los nueve grupos.

La hipótesis, que la competencia de *formulación y resolución de problemas* tendría que aparecer en la mayoría de las respuestas no se cumplió. Solo cinco de los nueve grupos consideraron que está presente. Una explicación es que el problema se considerase un problema trivial o un ejercicio.

La hipótesis que la competencia de *representación* debía ser considerada en las respuestas de los grupos se cumplió, un solo grupo no la indicó como presente en la solución del problema.

La hipótesis que la competencia de *empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* tendría que presentarse también se cumplió, solo dos grupos no la consideraron presente.

La última competencia de *empleo de soportes y herramientas* no fue considerada para la evaluación de competencias pues consideramos que, salvo papel, bolígrafo y reglas, no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema.

Para el caso del problema *Chatear 2* los resultados fueron los siguientes (ver tabla 7.7). Se observa que no hay consenso sobre el nivel de complejidad asignado al problema. (que es, según el informe PISA 2003, un problema de reflexión). Un grupo respondió que es de reproducción, otro de conexión y dos de reflexión.

Tabla 7.7. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema CHATEAR 2

Grupos	Reproducción	Conexión	Reflexión	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico
G4		x		x	x	x	x	x	x	x
G6			x	x	x	x	x		x	x
G8			x	x		x	x		x	
G11	x			x		x	x		x	x

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

La hipótesis que la competencia "*pensar y razonar*" debía ser considerada por todos los grupos debido a que si se supone que el problema está bien resuelto, esto implica que el que lo resuelve tiene que pensar y razonar para poder resolverlo, se cumplió. Todos los grupos la indicaron presente.

La hipótesis que tanto la competencia de *argumentación* como la competencia de *comunicación* debería presentarse en las soluciones que están correctamente argumentadas y correctamente comunicadas no se cumplió. Dos de los grupos consideraron ambas competencias y los otros dos solo indicaron la competencia de *comunicación*. Una posible explicación podría ser que las soluciones evaluadas no mostraban justificación alguna, solo las respuestas correctas.

La hipótesis que la competencia *construcción* de modelos debía ser considerada por todos los grupos de profesores se cumplió, al ser considerada por todos los grupos.

La hipótesis, que la competencia de *formulación y resolución de problemas* tendría que aparecer en la mayoría de las respuestas no se cumplió. Solo uno de los cuatro grupos consideró que está presente.

La hipótesis que la competencia de *representación* debía ser considerada en las respuestas de los grupos se cumplió, todos los grupos la consideraron como presente en la solución del problema.

La hipótesis que la competencia de *empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* tendría que presentarse también se cumplió, fue considerada por la mayoría de los grupos, solo un grupo no la tomó en cuenta.

La última competencia de *uso de soportes y herramientas* no fue considerada para la evaluación de competencias pues consideramos que, salvo papel, bolígrafo y reglas, no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema.

Respuestas al cuestionario 2

El cuestionario 2, que fue pensado como una evaluación del taller realizado, tenía cinco preguntas, pero se perdió información acerca de la especialidad a la cual pertenece el profesor que contestó, ya que sus respuestas fueron anónimas (ver Anexo 11. Registro de respuestas al cuestionario 2).

En relación a la pregunta 1. ¿Usted considera más claro el concepto de competencias matemáticas? , quince profesores considera que sí, trece que no, dos no saben/no opinan y nueve indican otros como: “Es más claro la competencia general pero no se ha explicado la competencia específica”, “He tratado de entender pero con más material aclararía mis ideas”, “Faltó tiempo y más material”, “con dudas”, “Faltó tiempo para ver con qué marco o fundamento se asume otra conceptualización de competencia matemática”, “nuevas ideas para investigar”, “se amplía el término y más estudio”.

En relación a la pregunta 2. ¿Qué entiende ahora por competencia matemática? Aunque el objetivo del presente taller no fue el de proporcionar un concepto de competencia, se quería determinar si los profesores reflexionaron sobre este concepto en el transcurso de taller. Se encuentran así profesores que siguen considerando solo aspectos parciales de la competencia como habilidades, capacidades o contextos. Lo que sí aparece es la idea de proceso en el concepto de competencia, ver Tabla 7.8.

Tabla. 7. 8. Concepción de competencia

Aspectos considerados en la definición de competencia		**Frecuencia en que SÍ aparece aspecto**	**Frecuencia en que NO aparece aspecto**
Saber		1	39
Saber hacer	Habilidad	5	35
	capacidad	12	28
Saber ser (actitud)			
Contexto		5	35
Proceso		3	37
Respuesta circular		0	0,0
Respuesta Sin relación		4	36
Respuesta en blanco		16	24

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al Taller Piloto realizado en el IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, 2009. Fuente: Elaboración propia.

En relación a la pregunta 3. ¿Cree que está más capacitado para evaluar de manera *sumativa* las competencias PISA en una respuesta de un alumno?, trece profesores respondieron que sí, diecisiete que no, seis no saben /no opinan, tres otros: "más o menos" y "lo empiezo a conocer", uno no contestó a la pregunta, señalando "no estuve presente los tres días"

En relación a la pregunta 4. ¿Cree usted útil hacer un análisis en términos de objetos y procesos matemáticos para evaluar de manera fo*rmativa* las competencias matemáticas? 33 profesores contestaron que sí, tres que no, tres no saben/no opinan, y solo un profesor no respondió.

En relación a la pregunta 5. ¿Cree usted que tiene herramientas para hacer un análisis de objetos y de procesos matemáticos? , quince profesores contestaron que sí, quince que no, nueve no saben/no opinan, y solo un profesor no respondió.

Análisis en base a los datos registrados en las hojas de respuesta. Análisis del contenido

Como se menciona en el diseño metodológico, ver capítulo 3, en este taller se realizó un análisis del contenido de las respuestas proporcionados por los profesores que fueron registradas en forma escrita en los dos cuestionarios y en las hojas de respuestas. La elección de este tipo de análisis fue debido, en primer lugar, a que se tuvo contacto con los profesores a través de sus producciones escritas (en este caso hojas de respuestas) de las cuales se extrajo la información. Las informaciones que se recabaron fueron mayormente expresiones verbales, más que datos numéricos y el objetivo era describir el nivel de competencia de los profesores al asignar los niveles de complejidad de los problemas planteados y las competencias inferidas de la solución a un problema PISA, teniendo en cuenta los constructos del informe PISA 2003.

La metodología utilizada para el análisis del contenido se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera primero la observación de variables cualitativas (tipo de competencia y nivel de complejidad) y, segundo, se realiza una cuantificación de la frecuencia de dichas variables. Por otra parte, la investigación tiene componentes de un experimento de diseño dado que se trata de investigar acerca de hipótesis planteadas previamente.

El motivo para recurrir al análisis del contenido de las respuestas al cuestionario 1 y 2 y las hojas de respuesta, ha sido conocer su competencia matemática, la competencia en la evaluación de competencias y los conocimientos generales previos sobre las competencias matemáticas propuestas en el informe PISA 2003.

Conclusiones del Taller Piloto

Se observó, al inicio del taller, cierta inquietud en los profesores por saber si se trataba de una evaluación dirigida a ellos. Los profesores manifestaron cierta incomodidad por las evaluaciones a que habían sido sometidos en la Evaluación censal de enero de 2007 y agosto de 2008 por parte del MED. Se consideró conveniente para su tranquilidad que las respuestas fuesen anónimas.

Nuestra expectativa era que los profesores en ejercicio tendrían mayor conocimiento sobre las pruebas matemáticas propuestas por PISA que las que se observó. Una primera conclusión es que es necesario explicarles más los constructos PISA 2003. Los profesores necesitan más información sobre los constructos de este informe.

Se observó que un grupo significativo, de los profesores participantes en el taller, no tenían un nivel de competencia matemática suficiente para resolver problemas de las pruebas PISA 2003 (tuvieron dificultades para aplicar las matemáticas que saben a contextos extramatemáticos). También se observó que tampoco mostraban la competencia profesional necesaria para evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos. En nuestra opinión, la falta de competencia matemática incide en la falta de competencia profesional para evaluar competencias matemáticas, por esta razón vimos que era necesario, para estudiar la competencia profesional en la evaluación de competencias matemáticas, buscar colectivos que tuviesen una buena competencia matemática.

Otra conclusión, para un nuevo diseño, fue que es preferible que todos los participantes evalúen una misma solución a un problema PISA. De esta manera todos los grupos analizarán el mismo protocolo. Otra conclusión es que en un taller de estas características no se puede pretender explicar la técnica de análisis de prácticas, objetos y procesos basada en el enfoque EOS. Esta técnica se debía reservar a cursos regulares tipo máster o maestrías en los que ese pudiese disponer de más tiempo.

Otra conclusión es que —en el caso de que la toma de datos sea en talleres de capacitación donde se les pida a los participantes justificar las elecciones de los niveles de complejidad y las competencias matemáticas— se debía mejorar el diseño de las hojas de respuestas de los profesores, ya que son colectivos a los cuales no se puede entrevistar posteriormente. Esto es debido a que en la mayoría de los casos prefieren el anonimato ante el temor de ser evaluados y también porque muchos de los participantes a estos coloquios no son de la misma región.

Sería interesante, salvando las limitaciones del tiempo y contando con participantes con una buena competencia matemática, que ellos formulen problemas tipo PISA, indicando el nivel y la justificación de su elección.

El hecho de que los cuestionarios fuesen anónimos implica que se pierde información (por ejemplo, acerca de la especialidad a la cual pertenece el profesor que contesta). Esto habría que considerarlo en un próximo estudio, buscando colectivos en los que no fuese necesario el anonimato.

Con relación al cuestionario 2, donde las dos primeras preguntas se referían al conocimiento que tienen los profesores sobre el concepto de competencia matemática, de los 40 profesores que las contestaron, 15 consideraron que sí les quedaba más claro el concepto de competencia después del taller, 13 que no, dos no saben no opinan y otros 10 responden otras respuestas (por ejemplo que faltó tiempo). Por otra parte, en sus respuestas sobre lo que entendían por competencia después del taller, siguen proporcionando solo algunos de los aspectos que caracterizan al término competencia (habilidades, capacidades, contexto) pero aparece un nuevo aspecto que es el de proceso.

Otro aspecto a resaltar es que la mayoría de ellos piensa que no están capacitados para evaluar competencias, lo que nos sugiere la idea de que faltan herramientas. Lo cual se corrobora con sus respuestas mayoritariamente afirmativas (33) con respecto a la utilidad de hacer un análisis previo en términos de objetos y procesos matemáticos.

CAPÍTULO 8

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN TALLER CON ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS QUE INICIAN SUS ESTUDIOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Resumen

Este capítulo se relaciona con el objetivo específico 4.1: Determinar el nivel de competencia que manifiestan futuros profesores de España − con competencia matemática, con nula experiencia docente y sin estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas − en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.

Se diseñó e implementó el Taller 1 relacionado con la evaluación de competencias matemáticas propuestas en el informe PISA 2003. Los principales resultados de este Taller fueron que los estudiantes participantes mostraron tener competencia matemática, tanto para resolver los problemas del informe PISA 2003 propuestos como para formular otros. Sin embargo, no coincidieron en las competencias activadas que se inferían de una solución a uno de los problemas propuestos, ni en los niveles de complejidad asignados en dicho informe a estos mismos problemas.

1. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO DEL TALLER

Para conseguir este objetivo se diseñó un experimento de enseñanza con estudiantes de la especialidad de Matemáticas del curso de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Barcelona del curso académico 2009-2010, que consistió en la realización de un taller (Taller 1).

El taller piloto (ver capítulo anterior) fue adaptado a este colectivo de participantes. Para ello, se seleccionó el material teórico (ver Anexo 12. Material teórico Taller 1) a utilizar y se elaboraron una nueva hoja de respuesta (ver Anexo 13. Hoja de respuesta del análisis de problemas de las pruebas PISA) y un cuestionario nuevo (ver Anexo 15. Cuestionario). Este taller tuvo una duración de 4 horas distribuidas en dos sesiones de dos horas cada una.

Organización del taller

Las modalidades de trabajo previstas fueron: presentación del informe PISA 2003 por parte del profesor de la asignatura y el trabajo individual de los estudiantes. El contenido principal de las sesiones fue:

a. Información y reflexión sobre los "niveles de complejidad" y la lista de las "competencias y subcompetencias" del informe PISA 2003, utilizando como ejemplos algunos de los problemas propuestos en estas pruebas.
b. Respuesta individual de los estudiantes que se registraría en una hoja de respuestas para recoger información sobre su competencia inicial en la evaluación de competencias matemáticas.
c. Respuesta individual a un cuestionario cuyo objetivo era profundizar en las respuestas proporcionadas por los estudiantes en hoja de respuesta.

Participantes

Un total de 22 estudiantes participaron en este experimento de enseñanza. Ellos cursaban el último año de formación en la especialidad de Matemáticas, lo cual nos aseguraba, por una parte, que tenían competencia matemática y, por la otra parte, que tenían muy poca competencia en la evaluación de competencias matemáticas, dada su inexistente formación didáctica previa. Desde el punto de vista de la extensión de los participantes en la investigación, se trató de un estudio de caso, y desde el punto de vista representativo, se trató de una muestra intencional.

Otras características de la investigación

Se trató de una investigación puntual ya que la información se obtuvo en un espacio de dos días de clase, un tercer y cuarto día en el que se entrevistó al profesor (entrevistas previa a las clases y posterior) y un quinto día en el que se pasó el cuestionario a los alumnos. También se consideró que se trataba de una investigación de campo ya que se realizó en el contexto habitual de los estudiantes participantes. La investigación fue básicamente de tipo observación no participativa, ya que la doctoranda no implementó el taller; sin embargo, después de la recolección y análisis de los primeros datos, fue ella quien elaboró el cuestionario (final) participando en su toma y en la entrevista al profesor que implementó el taller.

Tipos de registro de la información

El registro de la información proporcionada por los estudiantes fue la hoja de respuesta escrita que se hallaba en el dossier sobre los problemas PISA 2003, las entrevistas grabadas (previa y posterior) con el profesor y el cuestionario (final) que debieron contestar los estudiantes.

Dossier y cuestionarios

Ver anexos 12- 15

2. RESULTADOS

En la Tabla 8.1 se registran los niveles de complejidad, que cada uno de los estudiantes asignó –en las hojas de respuesta– a los problemas PISA propuestos: *Chatear*, pregunta 1 (Chat1) y pregunta 2 (Chat2); *Niveles de* CO_2, pregunta 1 (CO1) y pregunta 2 (CO2) y *Carpintero* (adaptado) (ver Anexo 12).

Tabla 8.1. Niveles de complejidad asignados a los problemas PISA "Niveles de CO_2", "Chatear" y "Carpintero (adaptado)"

Nivel / Estudiante	Reproducción	Conexión	Reflexión
E1	CO1/ Chat2	**Chat1**/ **Carp**	CO2
E2	CO1/ Chat1	Chat2	CO2/ Carp
E3	CO1/ Chat1	Chat2	CO2/ Carp
E4	CO1/ Chat2	**Chat1**/ **Carp**	CO2
E5	CO1	**Chat1**/ **Carp**	CO2/ **Chat2**
E6	CO1/ Chat1	Chat2/ **Carp**	CO2
E7	CO1/ Chat1	Chat2/ **Carp**	CO2
E8	CO1	**Chat1**/ **Carp**	CO2/ **Chat2**
E9	Chat1/ Carp	**CO1**/ Chat2	CO2
E10	CO1/ Chat1	**CO2**/ Chat2/ **Carp**	
E11	CO1/ Carp		CO2/ Chat1/**Chat2**
E12	CO1/ Chat1	Chat2/ Carp	CO2
E13		**CO1**/ **Chat1/Carp**	CO2/ **Chat2**
E14	Carp	**CO1**/ **Chat1**	CO2/ **Chat2**

E15		**Chat1**	CO1/CO2/ **Chat2**/ Carp
E16	Carp	**Chat1**	CO1/CO2/ **Chat2**
E17	CO1	**Chat1**/Chat2/ **Carp**	CO2
E18	Chat1	**CO1**	CO2/**Chat2**/ Carp
E19	Chat1	**CO1/ CO2**/ Chat2	Carp
E20		**CO1**/ **Chat1**/ **Carp**	CO2/ **Chat2**
E21		**CO1**/ **Chat1**/ **Carp**	CO2/ **Chat2**
E22	CO1/ Chat1/Carp	Chat2	CO2

Nota: Respuestas de los estudiantes de la asignatura Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona del curso 2009-2010. Fuente: Elaboración propia.

Con relación al problema Chatear 1, que es un problema de conexión, según el informe PISA 2003, diez estudiantes le asignaron el nivel de reproducción, once el nivel de conexión y uno el nivel de reflexión.

Con relación al problema Chatear 2, que es un problema de reflexión, según el informe PISA 2003, dos estudiantes le asignaron el nivel de reproducción, diez el nivel de conexión y diez el nivel de reflexión.

Con relación al problema CO1, que es un problema de conexión según el informe PISA 2003, trece estudiantes le asignaron el nivel de reproducción, siete el nivel de conexión y dos el nivel de reflexión.

Con relación al problema CO2, que es un problema de conexión según el informe PISA 2003, dos estudiantes le asignaron el nivel de conexión y veinte el nivel de reflexión.

Por último, con respecto al problemas del Carpintero (adaptado), que es un problema de conexión según el informe PISA 2003, cinco estudiantes le asignaron el nivel de reproducción, doce el nivel de conexión y cinco el nivel de reflexión.

En la Tabla 8.2 y en el gráfico 8.1 se registran los niveles de complejidad, que cada estudiante asigna al problema del *Carpintero* (adaptado) y las competencias que infieren de la solución de un alumno a dicho problema.

Tabla 8.2. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del CARPINTERO ADAPTADO

Nivel y competencia / Estudiante	Reproducción (Rp)	Conexión (C)	Reflexión (Rf)	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico	VII. Empleo de soportes y herramientas
E1		x		x	x	x		x	x	x	
E2			x	x	x	x		x	x	x	
E3			x	x	x	x		x	x	x	
E4		x		x	x	x		x	x	x	
E5		x		x	x	x		x	x	x	
E6		x		x	x	x	x	x	x		
E7		x		x	x	x	x	x	x	x	
E8		x		x	x	x	x	x	x	x	
E9	x			x	x	x			x		x
E10		x		x		x			x		
E11	x			x	x					x	x
E12		x		x	x		x		x	x	
E13		x		x	x		x	x		x	
E14	x			x	x		x		x	x	x
E15			x	x	x	x		x		x	
E16	x			x	x			x		x	x
E17		x		x	x	x	x	x		x	
E18			x	x	x			x	x		
E19			x	x	x			x		x	
E20		x		x	x			x	x	x	
E21		x		x	x			x	x	x	
E22	x			x	x		x	x		x	x

Nota: Respuestas de los estudiantes de la asignatura Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona del curso 2009-2010. Fuente: Elaboración propia.

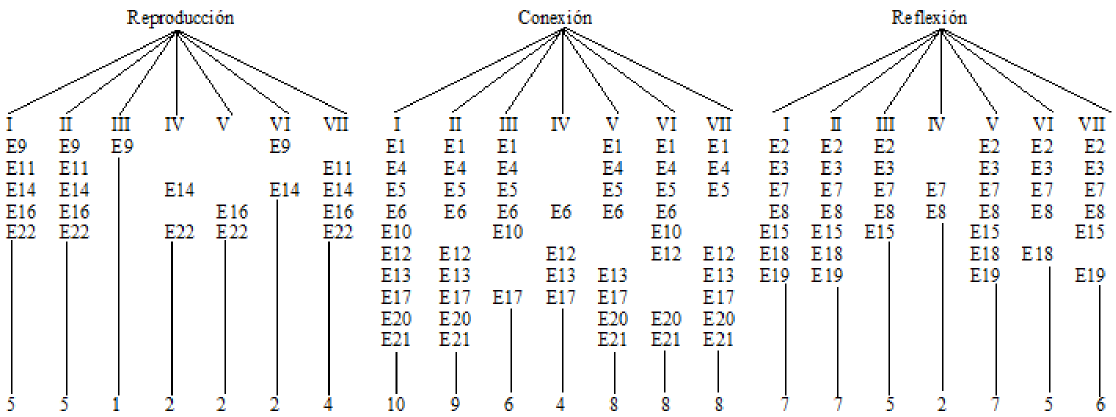


Gráfico 8.1. Resultados de los niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del CARPINTERO ADAPTADO**.**

Elaborado con los datos de la Tabla 8.2 Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del CARPINTERO ADAPTADO

3. ANÁLISIS EXPERTO DE LAS RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Para poder realizar el análisis y la discusión de las respuestas de los profesores a los problemas propuestos, se tomó en cuenta la evaluación analítica experta de las competencias que se podían inferir de la solución del problema, realizada ya en el diseño del taller piloto (ver capítulo 6).

4. PRIMEROS ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS. ANÁLISIS DEL CONTENIDO.

Como se menciona en el diseño metodológico, ver capítulo 3, en este taller se realizó un análisis del contenido de las respuestas proporcionados por los estudiantes que fueron registrados en forma escrita en las hojas de respuesta (ver Anexo 13). Se eligió realizar este tipo de análisis, primero, porque se tuvo contacto con los estudiantes a través sus producciones escritas (en este caso hojas de respuestas) de las cuales se extrajo la información. Las informaciones que se recabaron fueron mayormente expresiones verbales, más que datos numéricos y el objetivo era describir el nivel de competencia de los estudiantes para asignar los niveles de complejidad de los problemas planteados y las competencias inferidas de la solución de un alumno a un problema PISA. Se realizó también un estudio de las frecuencias de las variables cualitativas analizadas.

En la Tabla 8.3 y en el gráfico 8.2 se resume el nivel de complejidad asignado por estudiantes a los problemas PISA 2003 propuestos, observándose que los estudiantes no concordaron al asignar el nivel de complejidad en ninguno de los problemas PISA propuestos, con el señalado en el informe PISA.

Tabla 8.3 Niveles de complejidad

Problema Niveles	**Chatear 1**	**Chatear 2**	**Carpintero**	**Niveles de CO_2(1)**	**Niveles de CO_2(2)**
Reproducción	**10**	**2**	**5**	**13**	**0**
Conexión	**12**	**11**	**12**	**7**	**2**
Reflexión	**1**	**10**	**5**	**2**	**20**

Leyenda: Nivel asignado por expertos PISA

Nivel diferente al asignado por expertos PISA

Nota: Respuestas de los estudiantes de la asignatura Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona del curso 2009-2010. Fuente: Elaboración propia.

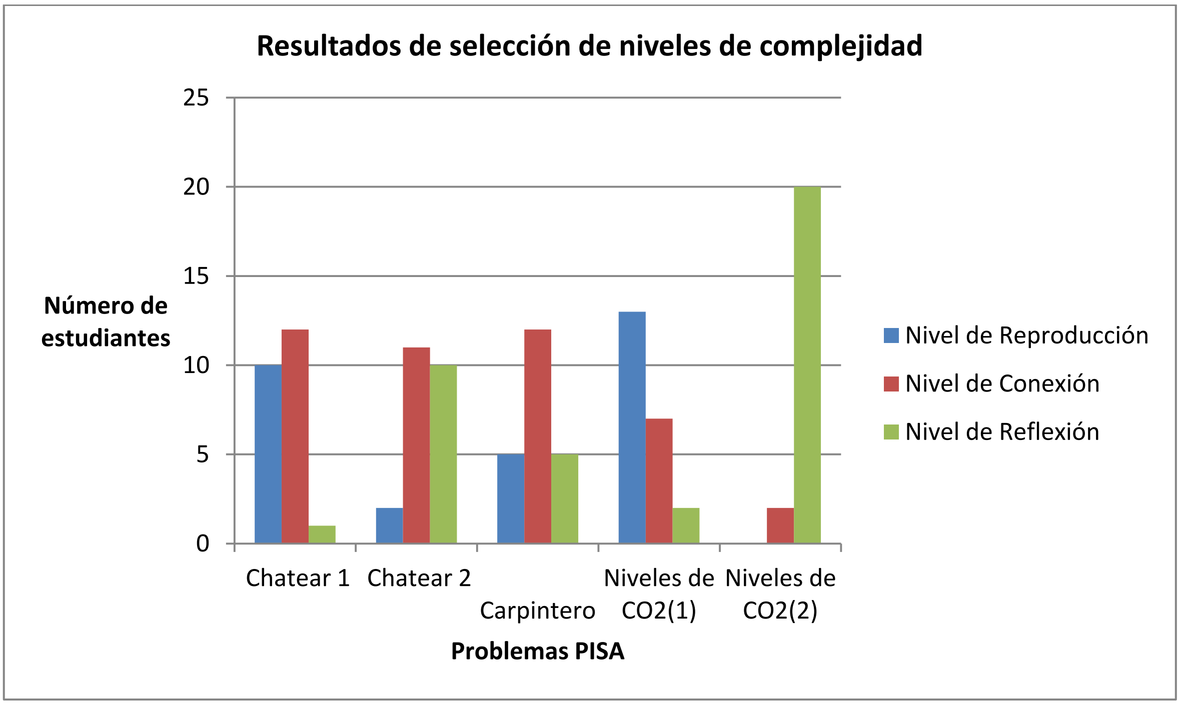


Gráfico 8.2. Resultados de los niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados a los Problema del CARPINTERO ADAPTADO. Elaborado con los datos de la Tabla 8.3 Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del CARPINTERO ADAPTADO.

Solo en los casos del problema Chatear 1 y carpintero adaptado la moda de los niveles de complejidad (de conexión en ambos casos según el informe PISA 2003), asignados por lo estudiantes, coincidió con los establecidos en dicho informe, no siendo éste el caso en los otros tres problemas planteados.

Dado el tipo de formación que tienen los estudiantes de la Facultad de Matemáticas nuestra conclusión es que los estudiantes que asignaron el nivel de reproducción a los problemas Chatear 1 (10); Chatear 2 (2); Carpintero Adaptado (5) y Niveles de CO_1, pregunta 1, (13) lo hicieron básicamente porque lo consideraron un problema fácil (un ejercicio) y no se pusieron en el lugar del alumnado que ha de resolver el problema.

En cuanto a la determinación de las competencias que se infieren en la solución de un alumno al problema del Carpintero adaptado, algunas de nuestras hipótesis se cumplieron.

La hipótesis que la competencia *pensar y razonar* debía ser considerada por todos los estudiantes –debido a que si se supone el problema bien resuelto, esto implica que el alumno pensó y razonó para poder resolverlo– se cumplió. Se observa que en todos los niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión), los estudiantes la señalaron como presente.

La hipótesis que tanto la competencia de *argumentación* como la competencia de comunicación deberían ser consideradas en las respuestas de los estudiantes –porque la solución propuesta está correctamente argumentada y razonablemente comunicada– no se cumplió. Lo que sorprende es que hay un grupo de 11 estudiantes (50% del total de estudiantes) que tomaron en cuenta solo una de estas competencias. Al parecer no consideraron que "tengan un territorio común". Esta es una de las cuestiones que se preguntaron a los estudiantes en el cuestionario.

La hipótesis que la competencia de *construcción de modelos* (a nivel de reproducción, para nosotros) tendría que aparecer en las respuestas de los estudiantes sucedió solo en ocho casos. Hay un número considerable que no la consideró. Una explicación sería que fue debido a la formación de los estudiantes que consideran que hay modelización solo cuando se formulan ecuaciones matemáticas que describen un fenómeno.

La hipótesis que la competencia *formulación y resolución de problemas* tendría que aparecer en la mayoría de las respuestas, se cumplió. De los diecisiete estudiantes que asignaron el nivel de conexión o reflexión a este problema, quince de ellos consideraron presente esta competencia y los otros dos no. De los cinco estudiantes que asignaron el nivel de reproducción a este problema, dos consideraron presente esta competencia. A estos últimos estudiantes se les preguntó sobre sus respuestas. Una posible explicación es que ellos consideraron el problema trivial o un ejercicio.

La hipótesis que la competencia de *representación* debería estar presente en casi todas las respuestas no se cumplió. Hay un número significativo de estudiantes, siete en total, que no consideraron presente esta competencia, por lo que también se les preguntó el por qué de su respuesta en el cuestionario.

La hipótesis que la competencia de *empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* debería estar presente en las respuestas de los estudiantes se cumplió en la mayoría de los casos. Dieciocho estudiantes contestaron que sí está presente. Una explicación del por qué los otros cuatro estudiantes no la consideraron presente es debido a que solo tomaron en cuenta, el simbolismo puro, como lenguaje y no los textos o figuras.

La última competencia de *empleo de soportes y herramientas* no fue tomada en cuenta para la determinación de competencias pues se consideró que salvo papel y bolígrafo no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema.

5. ENTREVISTAS CON EL PROFESOR

La primera entrevista con el profesor que implementó el taller se realizó con el fin de concordar sobre las sesiones a desarrollar, los materiales a utilizar y la información que se transmitiría a los estudiantes. Ésta se realizó previa a la implementación del taller 1.

La segunda entrevista se realizó con el fin de conocer su opinión acerca de las respuestas proporcionadas por sus alumnos sobre los niveles de complejidad asignados a los problemas PISA propuestos y las competencias inferidas de la solución de un alumno a un problema PISA. Esta entrevista tuvo las características de una entrevista individual, abierta, mixta y normal. Se preparó el “Guión de Entrevista” (ver Anexo 14. Guión entrevista) pensando en conocer su opinión sobre las hipótesis que nos habíamos formulado y sobre el motivo por el cual algunas no se habían cumplido. Así mismo, se quería conocer cuál fue la gestión del taller “Evaluación de las competencias matemáticas en las pruebas PISA 2003”, la duración de éste y la implementación del taller mismo y más detalles sobre el perfil de los estudiantes.

Durante la entrevista mostramos y entregamos al profesor las respuestas de sus estudiantes (Tablas 8.1 y 8.2) y le preguntamos su opinión sobre las hipótesis formuladas, los resultados obtenidos y las conclusiones a las que habíamos llegado.

El profesor estuvo completamente de acuerdo en que los niveles de complejidad son ambiguos y afirmó que no le sorprendía que los estudiantes tuvieran dificultades para aplicarlos correctamente, es más, afirmó que él también tuvo las mismas dificultades. También afirmó que el motivo por el cual determinados estudiantes consideraban un problema como de nivel de reproducción era debido a que lo consideraban muy fácil, y al hecho de que no se ponían en el lugar del alumno que tenía que resolverlo.

El profesor no se sorprendió de que la competencia “pensar y razonar” apareciera en la respuesta de todos sus estudiantes y manifestó que, en su opinión, era una competencia que no resultaba muy útil para discriminar respuestas ya que siempre se puede considerar que está presente, incluso cuando la respuesta es incorrecta.

Al profesor le causó también sorpresa que hubiese 11 estudiantes de los 22 que considerasen que el alumno argumenta pero no comunica. Él atribuyó este hecho a que para los futuros profesores argumentar está asociado al formalismo, mientras que la comunicación la asociaban a la verbalización escrita u oral. Su explicación es que los futuros profesores tienen una formación muy formalista y en el momento de responder el cuestionario estaban iniciando la primera asignatura en Didáctica de las Matemáticas de su formación inicial. Sus palabras fueron (ver Anexo 16. Transcripción entrevista):

> Es curioso, normalmente las competencias actúan muy integradamente, además que es bueno que lo hagan. Me sorprende que haya muchos alumnos que digan “ese alumno argumenta pero no comunica”. Es posible que ellos distingan argumentar, quizás, muy asociado al formalismo, y la comunicación más asociado a la verbalización escrita u oral. Son alumnos que llevan una carga formalista importante de matemática y en didáctica este tipo de fenómenos aparecen de manera más o menos reiterada. No sabemos si es de este tipo, estamos reflexionando ¿verdad? Es muy interesante este dato que habéis observado. Quizás ellos, probablemente, por la información, hacen equivalencia a formalizar o demostrar formalmente y ahí se ve el background que llevan.

El profesor estuvo de acuerdo con que la competencia de construcción de modelos no debía ser considerada como una de las competencias presentes en la solución del carpintero. Para él fue “una ligereza” esta respuesta por una parte de los futuros profesores. Sugirió preguntárselo a los propios alumnos. Sus palabras fueron:

> Para estos alumnos modelizar es algo diferente que para nosotros (para nosotros profesores de didáctica). Por eso me sorprende doblemente, porque yo hubiese pensado que ninguno de ellos hubiese considerado modelización. Incluso desde un punto de vista estrictamente matemático, mucho menos aún, porque a veces didácticamente entendemos por modelizar algo que un matemático estrictamente no lo entendería como tal. Me sorprende que hayan sido, digamos, tan "ligeros" en la aplicación de esa competencia. Hay que decir que la información que ellos tenían en clase era únicamente sobre esas competencias, en concreto sobre ésta, en ese momento, era estrictamente lo que decía la Prueba Pisa. Les habíamos pasado la semana anterior, siguiendo las instrucciones de la aplicación, las bases de Pisa, aquel documento del libro de PISA y luego nos limitamos a repetir la estructura de esta presentación (mostrando el material proporcionado para el taller). Ellos solo habían leído aquello. Me sorprende, no sabría encontrar una explicación, sino tal vez a una falta de meditar lo que colocan.

Con relación a la competencia resolución de problemas opinó que los futuros profesores que no la consideraron lo hicieron porque consideraron el problema como un ejercicio. Sus palabras fueron:

> Algunos lo han encontrado demasiado fácil, esta impresión es fiel realmente al perfil de nuestros alumnos. A continuación de este ejercicio me permití colocarles un foro en que intentarían formular un problema que podrían estar en las pruebas PISA o en las pruebas de competencias básicas, que eran las pruebas que se hacían antes en Cataluña, que ahora se han reformulado, quería ver que problemas proponían y me gustaría que los vieran, pues responden a la percepción que vosotros tenéis de que generalmente van hacia estructuras de matemáticas de orden más avanzado y se olvidan de trabajar cosas más básicas que pueden ser mucho más interesantes incluso didácticamente porque las otras las consideran como un ejercicio, eso pasa mucho. En clase nos encontramos que cuando hablas de la educación relacionada con expresiones algebraicas ellos piensan directamente en resolución de ecuaciones, no piensan en los procesos de traducción, el sentido de la incógnita, el propio sentido de la transformación algebraica, eso pasa desapercibido. Cuando se les pregunta que harías en una clase de funciones, ellos inmediatamente hablan de dominio, recorrido, derivadas, representación local de funciones. Se olvidan de todo lo que es interpretación de gráficos, o les explico esto, nos ha pasado este año en que debemos insistir mucho en las cuestiones de interpretación. Ha veces son como máquinas, van directo a unos núcleos supuestamente interesantes, en cambio se olvidan de lo más interesante, que son los que rodean al tema.

Al profesor también le sorprendió que hubiese alumnos que no hubieran considerado la competencia representar, dado que se había hablado, en las clases previas, de la competencia representar al comentar el currículo de secundaria de la comunidad autónoma de Catalunya (España). Sus palabras fueron:

> Eso también me sorprende. Nosotros cuando hablamos de currículum, habíamos hablado de la representación. En nuestro currículo, el actual aquí en Cataluña, hay ocho competencias, una de ellas la competencia matemática y en la competencia matemática se establecen lo que ellos llaman procesos, son estas competencias Pisa más o menos fusionadas, haciendo esto más complicado el tema. No sé si es la palabra más precisa
>
> En el currículo de Cataluña se fusiona representación y comunicación como un solo proceso, es curioso, y esto sí que lo habíamos hablado con los alumnos. No sé si esto pudo condicionar a que lo considerasen un proceso, en todo caso, lo que llamamos procesos en nuestro currículo, lo que en PISA serían partes de las competencias matemática de PISA. En el NCTM también esto sería un proceso. Se debería llegar a un acuerdo, los teóricos universitarios deberían proponer un modelo común.

El profesor estuvo de acuerdo con que la razón por la que los futuros profesores no consideraron la competencia "utilizar el lenguaje simbólico" fue que en la solución del problema que analizaron había pocos símbolos matemáticos. En su opinión, dado el perfil de los futuros profesores, estos podían llegar al extremo de que si veían una serie de símbolos matemáticos sin sentido respondiesen que "eso era matemáticas" mientras que si veían gráficos y expresiones verbales dirían que "eso no eran matemáticas". Sus palabras fueron:

> A estos cuatro alumnos los identificaría fácilmente, son muy matemáticos. Les muestras una serie de símbolos que no tengan ningún sentido y dirán que esas son matemáticas. Les muestras una cantidad de gráficos y expresiones verbales, que son matemáticas, y ellos dirán que no son matemáticas.

Al profesor se le comentó que con esta investigación se pretendía corroborar que a un futuro profesor, con poca formación en didáctica de las matemáticas y con una buena competencia matemática, al cual se le enseñan sólo los constructos teóricos del informe PISA 2003, tenía pocas posibilidades de poder evaluar las competencias matemáticas de sus estudiantes. También se le comentó que a esta afirmación se le podía objetar que a lo mejor estos mismos futuros profesores, con las mismas herramientas teóricas, con más práctica lo harían mejor. El profesor se mostró escéptico ante esta última posibilidad ya que consideró que se necesitaban otras herramientas además de los constructos teóricos del informe PISA 2003.

6. ANÁLISIS DE RESPUESTAS AL CUESTIONARIO (FUTUROS PROFESORES)

Para la triangulación de los datos proporcionados por los estudiantes en la hoja de respuestas, pensamos en un cuestionario, que contestarían los estudiantes, en que cada una de las preguntas proporcionaran respuesta a las hipótesis planteadas justificando el por qué de la elección de sus respuestas, (ver cuestionario, anexo 15).

Los estudiantes que calificaron el problema de reproducción lo hicieron porque lo consideraron un problema familiar y sencillo. Así lo muestran sus respuestas a las preguntas 1: "reproducción" y 2 del cuestionario: "Se trata del cálculo del perímetro de diferentes formas, es decir, la reiteración de un algoritmo conocido y familiar que únicamente requiere el manejo de expresiones y fórmulas sencillas", "Porque a partir de los posibles parterres siempre necesitas calcular el perímetro, una fórmula familiar", "Porque utiliza la fórmula del perímetro", "conceptualmente muy sencillo, verifican un ejercicio muy general", "El problema es sencillo y se puede resolver con procedimientos rutinarios".

Los estudiantes que consideraron que solo está presente la competencia de *argumentación*, pero no la de comunicación, indican que lo hicieron porque comunicar es transmitir un mensaje o información y argumentar requiere de explicaciones sólidas. Entre sus respuestas tenemos: "Comunicar es transmitir una información y en cambio argumentar es dar más motivos o expresarse más que el hecho de transmitir o dar a conocer", "comunicar es expresar algo que tu piensas y argumentar es hacer algo que tienes planteado y que haz de resolver", "No creo que sean totalmente independientes, cuando se comunica se ha de argumentar que se comunica. Pero en esta ocasión se considera más importante el hecho de una buena argumentación", "No creo que sean independientes porque para argumentar es muy importante comunicar antes" "Sí son independientes, porque el alumno explica a su manera el procedimiento de su ejercicio, pero no comunica". El alumno que considera presente la competencia de comunicación, y no la de argumentación, indica que para él "comunicar es saber transmitir un mensaje, mientras argumentar implica que los argumentos deben ser sólidos y no contradictorios".

Los estudiantes que consideraron presente la competencia de *construcción de modelos* manifestaron que el alumno traduce las figuras a estructuras matemáticas; así tenemos respuestas como: "la solución al problema que se nos muestra empieza con el modelo de parterre que el estudiante se hace para resolverlo", "el problema te hace traducir las figuras en una estructura matemática", "puesto que el alumno realiza un sistema para encontrar el perímetro, es decir, hace un modelo algorítmico”, “porque las figuras del problema se pueden descomponer en partes u otras figuras más simples y así facilitar la resolución del problema”. Mientras que otros dan respuestas circulares como “porque imaginariamente el alumno modela las figuras”.

Los dos estudiantes que consideraron el problema en el nivel de reproducción y que en la solución está presente la competencia de formulación y resolución de problemas respondieron: “Necesitas plantear que puedes utilizar y después encontrar la solución” y “dar la respuesta al problema del carpintero obviamente entra en la competencia de resolver problemas aunque la respuesta sea una mera reproducción”.

Los estudiantes que no consideraron la competencia de *representación* indicaron que no hay nada que representar. Entre sus respuestas tenemos: “la representación ya está dada en el enunciado, solo hay que hacer cálculos”, “para calcular el perímetro que es necesario no hace falta interpretar las diferentes representaciones”, “no se representa nada y no se dibuja nada”. Es decir, las representaciones verbales o los trazos auxiliares realizado por los estudiantes no es para ellos formas de representación.

Los estudiantes que consideraron la competencia *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* no está presente en la solución del alumno lo hicieron porque no hay formalismo en la solución (uso de símbolos, variables, operaciones algebraicas, etc.). Entre sus respuestas tenemos: “creo que hay bastantes sentencias que podrían haber estado descritas matemáticamente”, “solo hay unas pocas operaciones comunes”, “no hace falta usar ninguna herramienta algebraica ni formal para solucionarlo”.

7. CONCLUSIONES

En este colectivo de estudiantes, con competencia matemática, con nula experiencia docente y sin estudios de posgrado en Didáctica de las Matemáticas, también se muestra poco consenso al asignar a un problema los niveles de complejidad previstos en el informe PISA 2003. Por otra parte, no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían en la solución de un alumno al problema propuesto. Los participantes fueron capaces de crear problemas tipo PISA, los realizaron a través de un fórum, el cual no fue analizado en este estudio.

De la triangulación realizada y del perfil de los estudiantes que participaron en este taller podemos concluir que no es *condición suficiente* el tener competencia matemática para la evaluación de competencias matemáticas de los alumnos, Dado el tipo de formación que tienen los estudiantes de la Facultad de Matemáticas, nuestra conclusión es que los estudiantes que asignan el nivel de reproducción a los problemas Chatear 1; Chatear 2; Carpintero Adaptado y Niveles de CO_1, pregunta 1, lo hacen básicamente porque lo consideran un problema fácil (un ejercicio) y no se ponen en el lugar del alumnado que ha de resolver el problema. Esto podría ser indicio que un cierto tipo de competencia profesional es un factor necesario para realizar la evaluación de competencias matemáticas en los alumnos. ¿La cuestión es saber cuáles son las características de esta competencia profesional?

Se podría objetar a estas conclusiones que con un mayor tiempo en el estudio de los constructos PISA, los futuros profesores participantes podrían mejorar en la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. Nuestra opinión es que dada la ambigüedad de los constructos PISA 2003 esto no habría sido suficiente. La competencia profesional necesaria no se puede limitar a una mayor información sobre los constructos PISA 2003,

8. VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DE LOS RESULTADOS

La validez y confiabilidad de las resultados y de las conclusiones se basa en dos triangulaciones: 1) una triangulación de datos (hojas de trabajo, cuestionario y entrevista) recogidos, además, con técnicas diferentes y 2) una triangulación de expertos (doctoranda, director de tesis, profesor y expertos en Didáctica de las Matemáticas). Los análisis realizados se sometieron a la opinión de los expertos en Didáctica de las Matemáticas en dos congresos: Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education y VI Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (VI CIDUI) que fueron publicados, después de un proceso de revisión por pares, en las actas de dichos congresos:

- Rubio, N., Font, V., Giménez, J., & Malaspina, U. (2011). Pre-service teachers learning to assess mathematical competencies. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2838 – 2847). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.
- Font, V., & Rubio, N. (2010). Competencia profesional de los futuros profesores en la evaluación de competencias matemáticas. *Actas del VI Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (VI CIDUI)* (pp. 1-25). Barcelona, España: ICE UPC.

Los resultados también se publicarán en el siguiente capítulo de libro:

- Rubio, N. y Font, V. (2012). Competencia inicial de futuros profesores en la evaluación de competencias matemáticas. En V. Font, J. Giménez, V. Larios y L. F. Zorrilla (Eds.). *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato*. Barcelona: Publicaciones de la Universitat de Barcelona (en prensa).

CAPÍTULO 9

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN TALLER CON PROFESORES PARTICIPANTES DEL I COLOQUIO BINACIONAL Y III CURSO TALLER SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Resumen

Este capítulo se relaciona con el objetivo específico 4.2: Determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú − con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en Didáctica de las Matemáticas− en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos. En concreto, se trata de un taller piloto para preparar un segundo taller con profesores que cumpliesen todas las características del objetivo 4.2.

Los principales resultados de este Taller fueron que los profesores participantes, por una parte, no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían de la solución de un alumno a un problema propuesto, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron.

Otros resultados fueron: (1) los profesores participantes, a pesar de tener cierta experiencia docente, desconocían inicialmente y en su mayoría los constructos PISA, (2) Se encontraron evidencias de su limitada competencia matemática en la resolución de los problemas PISA 2003 propuestos (falta de soluciones o bien soluciones parciales), (3) se hizo evidente que una condición necesaria para la evaluación de competencias matemáticas, es el tener competencias matemáticas, (4) las limitaciones del tiempo, esta vez por cuestiones en la organización del coloquio donde se llevó a cabo este taller, podría seguir siendo la causa del poco consenso tanto al determinar los niveles de complejidad como las competencias matemáticas, (5) se debería realizar otro taller con un colectivo con mayores competencias matemáticas, con experiencia docente y con más conocimientos en Didáctica de las Matemáticas.

Los profesores de educación primaria que asistieron al taller mostraron más dificultades que los profesores de educación secundaria para aplicar

las matemáticas que saben a contextos extramatemáticos. La mayoría de ellos afirmaron que no estaban capacitados para evaluar competencias matemáticas y que necesitaban más herramientas.

1. METODOLOGÍA

La parte de nuestra investigación que se describe en este capítulo se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cualitativas (tipo de competencia inferida y nivel de complejidad competencial del problema); y también se hace un estudio cuantitativo (frecuencia con que aparecen las componentes de la competencia: conocimiento, habilidad, capacidad, contexto, actitud).

Se trata de una investigación puntual, puesto que la información se obtuvo en un espacio de tres días. También consideramos que se trata de una investigación de campo, ya que se realizó como una parte de las actividades de formación permanente a las cuales los profesores deben asistir como parte de su perfeccionamiento profesional continuo y los consideramos parte de los lugares de trabajo de los sujetos investigados.

Los *sujetos de estudio* fueron profesores de matemáticas en ejercicio, de educación secundaria, pertenecientes a la región de Tumbes. Al ser una muestra intencional, ya que se buscaba trabajar con profesores de secundaria en ejercicio con competencias matemáticas, no se puede considerar una muestra representativa. Desde el punto de vista de la extensión de los participantes en la investigación se trataría de un estudio de caso.

La *observación participante* fue la técnica usada para la recolección de datos. La doctoranda, además de diseñarlo, implementó el taller. Los datos se recogieron por medio de cuestionarios y por la toma de notas en un diario de campo.

Los *cuestionarios* 1 y 2 y las hojas de respuestas sirvieron como instrumentos para la recolección de datos.

Para el *análisis* de datos (respuestas a los dos cuestionarios) se tomó en cuenta el método de análisis de contenido.

Para el *análisis* de las respuestas nos apoyamos, por una parte, en los constructos que propone el marco teórico del informe PISA 2003 (OCDE, 2003), los cuales permiten describir tanto las competencias que se infieren de la actividad matemática realizada por un sujeto como el nivel de complejidad competencial de la tarea propuesta. Por otra parte, hemos utilizado la técnica de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos propuesta por el EOS para dar indicadores de las competencias (y sus niveles de complejidad) que se infieren de la respuesta del alumno de secundaria al problema del carpintero adaptado. Dicho análisis, explicado con detalle en el capítulo 6 nos ha permitido hacer hipótesis sobre las competencias (y sus niveles de complejidad) que podíamos esperar que infiriesen los sujetos de estudio.

Para la *validez* y la *confiabilidad* de los resultados y las interpretaciones realizadas, las respuestas a los dos cuestionarios y a las hojas de trabajo fueron organizadas y analizadas, en primer lugar, por la doctoranda, y en segundo lugar por el director de tesis (triangulación de expertos). Con relación a los talleres descritos en los capítulo 7 y 8, en este taller se amplió considerablemente la información sobre el informe PISA 2003, describiendo con detenimiento cada uno de sus constructos, así como ejemplificando cada una de las dimensiones (ideas principales, situaciones y contextos, niveles de complejidad).

2. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO DEL TALLER

Se diseñó un taller (Taller 2) de formación permanente para profesores de matemáticas de educación secundaria, asistentes al I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática. El nombre del taller fue "Evaluación de las competencias matemáticas de las pruebas PISA 2003", y tuvo una duración de 4,5 horas, distribuidas en tres sesiones de 1,5 horas. Se implementó en Tumbes (Perú) del 17 al 19 de febrero de 2010.

Organización del Taller

Las modalidades de trabajo previstas fueron: presentación del informe PISA 2003 por parte de la profesora y trabajo individual y en grupos de los participantes. El contenido principal de las sesiones fue:

a. Respuesta individual a un cuestionario cuyo objetivo era tener información sobre su situación laboral y académica y su nivel de información sobre las competencias matemáticas de PISA 2003.
b. Información y reflexión sobre los "niveles de complejidad" y la lista de las "competencias y subcompetencias" del informe PISA 2003, utilizando como ejemplos algunos de los problemas propuestos en estas pruebas.
c. Respuesta individual y en parejas a un material diseñado para recoger información sobre su competencia inicial en la

evaluación de competencias matemáticas contempladas en el informe PISA 2003.

d. Respuesta individual a un cuestionario para obtener información sobre su evaluación del taller.

Diseño de la Primera sesión

a.1. Diseño de cuestionario 1 (ver Anexo 17. Sesión 1-1. Cuestionario 1) que fue contestado por los asistentes al taller, para obtener información general de ellos (experiencia docente, años de servicio, grados y nivel en los que enseñaban y tipo de institución) y sobre sus conocimientos acerca de las competencias matemáticas planteadas en el informe PISA 2003.

a.2. Elaboración de una presentación con diapositivas para informar y reflexionar (ver Anexo 18. Sesión 1-2. Dimensiones y Anexo 20. Sesión 1-4. Análisis de dimensiones) sobre las dimensiones, componentes o variables consideradas en la elaboración de los problemas PISA 2003: Situaciones y contextos; subescala (ideas principales).

a.3. Elaboración de una presentación con diapositivas para informar y reflexionar sobre los “niveles de complejidad”: reproducción, conexión y reflexión (ver Anexo 19, Sesión 1-3. Niveles de complejidad) considerados en la elaboración de los problemas PISA 2003.

a.4. Diseño de la hoja 1 de respuesta de análisis (ver Anexo 21. Sesión 1-5. Análisis de dimensiones) en la que se recogería sus respuestas con respecto a las ideas principales, situaciones y contextos y niveles de complejidad de algunos problemas PISA.

Diseño de la segunda sesión

b.1. Elección de tres problemas PISA 2003 (ver Anexo 22. Sesión 2-1. Análisis de dimensiones) para ser resueltos por los profesores, asistentes al taller.

b.2. Diseño de la hoja 2 de respuestas de análisis de la resolución del problema utilizando los constructos de PISA 2003 (ver Anexo 23. Sesión 2-2. Análisis de dimensiones). Los profesores debieron determinar la subescala (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, incertidumbre); situación (personal, educativa o laboral, pública o científica); contexto (intramatemático o extramatemático); y el nivel de complejidad (reproducción, conexión o reflexión) correspondientes a cada uno de los problemas siguientes, propuestos por los expertos de PISA 2003: Chatear, el carpintero (adaptado) y Niveles de CO_2.

Diseño de la tercera sesión

c.1. Selección de la solución de un alumno de secundaria a un problema adaptado de PISA 2003 para su entrega a cada uno de los profesores asistentes al taller —ver Anexo 24. Sesión 3-1. Análisis de competencias (solución) y Anexo 26. Sesión 3-3. Análisis de competencias (hoja de respuestas)—, para que ellos, determinen qué competencias matemáticas ha desarrollado dicho alumno. Para ello, se le proporcionó a cada uno de los profesores — dado su poco o casi nulo conocimiento de las competencias matemáticas propuestas por PISA — un listado con las competencias PISA 2003, con sus respectivos descriptores o subcompetencias (ver Anexo 25. Sesión 3-2. Tabla de competencias).

Nuestra hipótesis, basada en la solución experta, presentada en el capítulo 6, fue que la respuesta correcta de los profesores asistentes al taller debían contemplar las siguientes competencias con los niveles de complejidad que se señalan en la tabla 9.1:

Tabla 9. 1 Competencias y nivel de complejidad

Competencia	Nivel de complejidad
Pensar y razonar	Conexión
Argumentación	Conexión
Comunicación	Conexión
Construcción de modelos	Reproducción
Formulación y resolución de problemas	Conexión
Representación	Conexión
Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico	Conexión
Empleo de soportes y herramientas	O bien nivel de Reproducción o bien no activada.

Nota: Resumen obtenido del capítulo 6 de la solución experta. Fuente: elaboración propia.

c.2. Diseño del cuestionario 2 (ver Anexo 27. Sesión 3-4. Cuestionario 2) que sería contestado por los profesores asistentes al taller, para obtener información acerca de su competencia en la determinación de las competencias matemáticas activadas en la solución del alumno de secundaria al problema del CARPINTERO (adaptado) — con la ayuda de la tabla del Anexo 25—. Se especificaría que explicasen sus respuestas.

c.3. Entrega a cada uno de los profesores asistentes al taller de la Tabla 2 de competencias y niveles de complejidad (explicada en el capítulo 6) o (ver Anexo 28. Tabla2. Competencias y niveles de complejidad PISA/OCDE). Dicha tabla muestra con mayor detalle los descriptores o subcompetencias y su correspondiente nivel de complejidad, formulados por los expertos PISA.

c.4. Diseño de la hoja 4 de respuestas (ver Anexo 29. Sesión 3-6. Análisis de competencias), para obtener información acerca de si los profesores consideraban que, si ellos hubiesen tenido mayor información sobre los constructos PISA, hubiesen cambiado sus respuestas al cuestionario 2.

3. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

En este apartado describiremos la implementación realizada de acuerdo al diseño explicado en apartado anterior.

Participantes

La asistencia de los participantes varió debido a que los organizadores del evento planificaron las sesiones del taller en horarios muy diferentes según el día. En la primera sesión (realizada en la tarde) asistieron 41 profesores (16 de educación primaria y 25 de secundaria), y en las dos sesiones restantes asistieron 30 profesores. Algunos de los profesores se disculparon manifestando que no podrían asistir en el horario de la mañana por motivos de trabajo. Se decidió considerar en este estudio solo a los profesores que asistieron a las dos últimas sesiones (30 profesores): 14 trabajaban en educación primaria y 16 en educación secundaria.

Cabe señalar que la asistencia fue libre, los participantes a este coloquio podían elegir el taller que más les interesaba. Por esta razón, aunque este taller estaba dirigido para profesores de educación secundaria y primeros años de educación superior, en él participaron un número considerable de profesores de educación primaria. Los participantes de instituciones estatales habían sido inscritos en el coloquio por un acuerdo entre los organizadores y el Presidente Regional.

Como en los talleres anteriores, también se observó cierta inquietud por parte de los profesores asistentes al taller por firmar la asistencia al taller y cierta desconfianza porque se trataba de evaluación de competencias. La razón era que recientemente habían sido evaluados, por parte del Ministerio de Educación, para contratos y promociones. Se les informó que sus respuestas nos ayudarían en la reflexión que estábamos realizando sobre la evaluación de las competencias matemáticas del informe PISA 2003 y que sus críticas y comentarios serían muy valiosos para este estudio.

Tipos de registro de la información

El registro de la información proporcionada por los asistentes fue la respuesta escrita a los dos cuestionarios y al dossier sobre los problemas PISA 2003.

Implementación de la Primera sesión

En esta primera sesión, la profesora presentó el taller y los objetivos del mismo. Se presentaron las pruebas PISA 2003, tratando de que los profesores se familiarizasen con sus constructos teóricos (niveles de complejidad, competencias matemáticas, etc.) y la manera de entender la evaluación de competencias matemáticas.

Se le entregó a cada uno de los profesores el cuestionario 1 (ver anexo 17, Sesión 1-1. Cuestionario 1), para su respuesta individual, con el objetivo de recabar información sobre sus conocimientos previos de las competencias PISA 2003 y sobre su ejercicio profesional: grados en los que enseñaba (primaria, secundario o superior), años de su ejercicio profesional o experiencia docente, tipo de institución en la que laboraba (estatal o privada) y la forma en que evaluaban los aprendizajes de sus alumnos (por objetivos o por competencias). Los resultados se presentan en el anexo 30 (ver Anexo 30. registro de respuestas a las preguntas 6-11 del cuestionario 1).

A continuación, se hizo una breve presentación histórica del Proyecto PISA, las características y los objetivos de las pruebas PISA 2003, incidiendo en la organización del área de conocimiento matemático y sus tres elementos, componentes o variables: 1) *situaciones* (Personal, Educativo o laboral, público y científico) y *contextos* (intramatemáticos o extramatemáticos), 2) *contenido matemático* o *ideas principales* (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, e incertidumbre) y 3) *procesos* o c*ompetencias*. Para analizar los dos primeros elementos, se utilizó la presentación de diapositivas descrito en el punto a.2 del apartado en el que se explica el diseño del taller (ver Anexo 18. Sesión 1-2. Dimensiones). Esta presentación, también se les repartió en papel impreso.

Este material contenía información sobre situaciones y contextos y contenido matemático y planteaba una primera actividad individual en la que los profesores debían determinar la situación y el contexto, y la subescala a las cuales correspondía cada uno de los problemas PISA propuestos (Interés y Distancia). Ambos problemas fueron tomados de los ejemplos dados en el marco teórico PISA 2003. Las respuestas escritas se recogieron en la hoja de respuestas (ver Anexo 21. Sesión 1-5. Análisis de dimensiones). Se reflexionó sobre sus respuestas, no habiendo unanimidad en ellas ni en las ideas principales ni en las situaciones. Tanto para el problema de "Interés" como el de "Distancia" se pidió voluntarios para explicar su respuesta en voz alta. Para cada problema la profesora preguntó a los asistentes si estaban de acuerdo con lo señalado por su colega, si no había acuerdo preguntaba cual era su elección y la escribía en la pizarra; de esta forma, se observaban las diversas respuestas a una misma dimensión pedida. Se les indicó que no había respuesta ni buena ni mala y que se debía, además, reflexionar el por qué de las diversas respuestas, y que al final de la sesión se haría una puesta en común de dicha reflexión. A continuación, la profesora, con ayuda de diapositivas, presentó los niveles de complejidad, cada uno con un ejemplo, entregando a cada uno de los asistentes el material de Niveles de complejidad (ver Anexo 19. Sesión 1-3- Niveles de complejidad), que contenía información sobre cómo se entienden dichos niveles en el informe PISA 2003. Se entregó también a cada profesor otros dos problemas PISA (tiempo de reacción 1, tiempo de reacción 2), para que ellos determinasen su nivel de complejidad (ver Anexo 20. Sesión 1-4. Análisis de Dimensiones).

Hasta este momento los profesores habían trabajado en forma individual y no se les había recogido ninguna producción escrita. A continuación se formaron nueve grupos (aunque solo seis grupos de cuatro profesores y dos grupos de tres fueron los que se consideraron en la tabulación de los resultados) para que consensuaran una respuesta en cada grupo sobre lo que se les pedía de los problemas interés, distancia, tiempo de reacción 1 y 2 y se les entregó una hoja de respuestas para ello (ver Anexo 21. Sesión 1-5 Análisis de dimensiones). Se pidió que en cada uno de los grupos se llegase a un acuerdo argumentado sobre el nivel de complejidad y que, en su argumentación, tuviesen en cuenta si habían trabajado este tipo de problemas con sus alumnos.

Cada uno de los problemas PISA propuestos fue tipificado en los diversos niveles: reproducción, conexión o reflexión (ver las tablas 9.2 hasta la 9.5).

Se cerró la primera sesión haciendo una reflexión sobre la dificultad de poder decidir a qué nivel corresponde cada uno de los problemas PISA proporcionados. Algunos de los profesores manifestaron que había cierta subjetividad al dar las respuestas. Ante la pregunta de si había sido necesario resolver los problemas, algunos asistentes manifestaron que para dar respuesta acerca de las ideas principales y las situaciones y contextos, no fue necesario; pero, que para señalar el nivel de complejidad, sí tuvieron que resolverlos.

Se observaron dificultades matemáticas en los profesores de primaria al tratar de resolver los problemas. Algunos de ellos manifestaron que éstos debían adecuarse para primaria. Se les indicó que en este taller se trabajaría con problemas PISA y que como se había comentado al inicio de la sesión, éstos estaban dirigidos a estudiantes de 15 años.

Segunda sesión

La profesora comenzó la sesión recordando, además de los niveles de complejidad trabajados en la sesión anterior, las otras dimensiones (situaciones y contextos e ideas principales). Debido a que se programó la segunda sesión en horario de la mañana y no en el horario de la tarde, como en la primera sesión, se tuvo que trabajar con un grupo profesores que no habían asistido a la primera sesión a los cuales se les pidió que respondieran el cuestionario 1. Además, un grupo de profesores, que sí asistieron a la primera sesión, no asistirían a ésta, por cuestiones de trabajo en sus respectivas instituciones. Por estas razones no fue posible mantener los grupos de la primera sesión.

Después de la introducción, se le entregó a cada participante una hoja con tres problemas PISA: Chatear, Carpintero adaptado y Niveles de CO_2 (ver Anexo 22. Sesión 2-1. Análisis de dimensiones). El objetivo era corroborar su competencia matemática, para ello, aprovechando que al cierre de la sesión anterior algunos de ellos manifestaron que requirieron el dar solución a los problemas planteados para determinar el nivel de complejidad, se le pidió resolver primero los problemas. Por otra parte, se quería que se familiarizasen con la solución del problema del carpintero adaptado, que sería utilizado en la siguiente sesión.

Si bien se mantuvo el mismo número de grupos que en la sesión del primer día, la composición de los grupos varió. A cada grupo se les entregó las hojas de respuestas 2 (ver Anexo 23. Sesión 2-2. Hoja de respuesta de Análisis de Dimensiones), en las que además de resolver el problema, debieron determinar las dimensiones: situación y contexto, contenido y niveles de complejidad. Luego, se recogieron sus respuestas para el problema Chatear 1 y 2 (ver tablas 9.6 y 9.7) y se les indicó los valores asignados a estos problemas por los expertos del proyecto PISA 2003.

Se les recordó que tuviesen en cuenta si ellos trabajaban este tipo de problemas o si consideraban que los alumnos de secundaria trabajaban este tipo de problemas. La conclusión general era que no era fácil el consenso.

Solo cuatro grupos resolvieron dos problemas ("Chatear 1 y 2" y el "Carpintero (adaptado)". Se observó que la mayoría de los profesores de educación primaria tuvo serias dificultades al tratar de resolver los problemas PISA propuestos (no llegaron a dar las respuestas o dieron respuestas erróneas). Es razonable pensar que aún proporcionándoles más tiempo, no hubiesen logrado responderlos. En el caso de los otros profesores de secundaria, podríamos considerar el factor tiempo como una limitación, pues también sus respuestas fueron incompletas, aunque un grupo sí lo resolvió completamente. Se decidió, que se analizarían y se recogerían solo las soluciones de los problemas Chatear y el Carpintero adaptado, por cuestiones de tiempo, ya que como se comentó, se tomó un cierto tiempo en recordar el trabajo de la primera sesión.

Se cerró la segunda sesión haciendo una reflexión sobre la dificultad de llegar a un consenso sobre el nivel de complejidad de los problemas PISA proporcionados. También se comentó que en el enunciado se utilizaban términos poco habituales en el contexto peruano (el término parterre, el tapiar, etc.). Se habló también que el contexto del cambio de horario era poco habitual en la región.

Tercera Sesión

Se indicó a los profesores que en esta sesión se tratarían las competencias matemáticas según el marco teórico PISA 2003. Se entregó a cada profesor la reproducción de la solución de un alumno al problema del carpintero (adaptado del propuesto en las pruebas PISA 2003) (ver Anexo. Sesión 3-1. Análisis de competencias) y una tabla conteniendo las competencias y subcompetencias o descriptores PISA 2003 (Anexo 25. Sesión 3-2. Tabla de competencias).

Se formaron ocho grupos de profesores y se les pidió que cada grupo hiciera una evaluación analítica de las competencias que se infieren de la respuesta del alumno. En la hoja 3 de respuestas (Anexo 26. Sesión 3-3. Análisis de competencias) indicaron cuáles eran las competencias activadas en la solución del alumno (ver resultados en la tabla 9. 10).

También se le entregó, a cada uno de los profesores, el cuestionario 2 para recoger su opinión sobre la utilidad de la tabla de descriptores de competencia (ver Anexo 25. Sesión 3-2. Tabla de competencias) para la evaluación analítica de competencias que se infieren de la solución del alumno al problema del Carpintero (adaptado).

Después de observar y comentar la disparidad de respuestas, se comentó que en el informe PISA se daban unos descriptores más detallados que estaban recogidos en la Tabla 2 (ver capítulo seis o bien ver Anexo 28, Sesión 3-5. Tabla de competencias y niveles de complejidad) que se les estaba entregando. Se les pidió que revisaran sus respuestas teniendo en cuenta esta tabla más detallada y si era conveniente modificaran su elección en la lista de competencias matemáticas. Los profesores valoraron positivamente el mayor nivel de precisión de esta nueva tabla, pero ninguno consideró conveniente modificar su respuesta con base a los descriptores de esta nueva tabla. La conclusión fue que la nueva tabla, a pesar de ser más precisa, no solucionaba el problema de la ambigüedad que habían tenido a la hora de determinar el nivel de complejidad de cada competencia.

Se cerró la sesión reflexionando sobre el hecho de que las tablas ayudaban a evaluar las competencias matemáticas, pero seguía habiendo una cierta ambigüedad que en cierta manera dependía de la experiencia del docente que utilizaba la tabla. En este caso la ambigüedad se manifestó en un debate sobre si la competencia construcción de modelos se activó o no, así como la de representación.

La profesora aprovechó el debate para comentar la estrecha relación que hay entre los procesos y las competencias. También, comentó que para poder realizar el análisis y la discusión de sus respuestas, previamente era necesario que se hubiera hecho su análisis experto, ya que podría servir como referente para evaluar las respuestas de los alumnos. Luego comentó, que un análisis de los objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas matemáticas podría ser un nivel previo al análisis de las competencias matemáticas ya que dicho tipo de análisis permitía inferir competencias.

Desafortunadamente no hubo tiempo para presentar el análisis experto de la respuesta al problema del carpintero, con la finalidad de ilustrar cómo un análisis previo a nivel de objetos y procesos matemáticos podía ayudar a inferir competencias (ver capítulo 6). Hay que resaltar que los participantes se mostraron muy interesados en esta técnica.

Al final de la sesión, se les entregó a los asistentes el cuestionario 2 de evaluación del taller.

4. RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIOS Y LAS HOJAS DE RESPUESTA DEL DOSSIER

En este apartado presentamos los resultados comentados en la implementación descrita en el apartado anterior.

Cuestionario 1

El cuestionario 1 sirvió para conseguir información acerca del ejercicio profesional de cada uno de los participante: grados (niveles) en los que enseñaba (primaria, secundario o superior), la cantidad de años de su desempeño profesional o experiencia docente, tipo de institución en la que laboraba (estatal o privada) y la forma en que evaluaban los aprendizajes de sus alumnos (por objetivos o por competencias); así como sus conocimientos previos sobre las competencias matemáticas PISA 2003.

De las primeras cinco preguntas del cuestionario 1 pudimos recoger la siguiente información: los profesores procedían no solo de la especialidad de Educación Secundaria, sino también de Educación Primaria, de Matemáticas, y de otras especialidades.

Los 14 profesores de educación primaria eran egresados de la especialidad de Educación Primaria, todos trabajaban en colegios estatales: cinco enseñaban en primer grado (alumnos de 6 años), uno enseñaba en primer y segundo grado, dos en segundo grado (alumnos de 7 años), dos en tercer grado (alumnos de 8 años), dos en cuarto grado (alumnos de 9 años) y dos en quinto grado (alumnos de 10 años). Ocho profesores tenían más de 20 años de experiencia profesional, cinco entre 11 y 20 años, solo uno tenía menos de tres años de experiencia profesional.

Entre los 16 profesores que trabajaban en educación secundaria, 4 eran egresados de la especialidad de Educación Secundaria con mención en Matemáticas y trabajaban en colegios estatales; 10 de la especialidad de Matemática, cinco de los cuales trabajaba en colegios estatales y los otros en colegios particulares; y 2 de otras especialidades, que trabajaban en instituciones particulares.

Con respecto a su experiencia docente, todos los profesores egresados de la especialidad de Educación Secundaria (PS) tenían más de 20 años de experiencia laboral. Los profesores egresados de la especialidad de Matemáticas (PM) tenían diversos años de experiencia docente, menos de tres años de experiencia: dos; entre tres y cinco: dos; más de cinco pero

menos de 10: dos; entre 10 y 20: dos y con más de 20 años de experiencia profesional: dos. De los dos profesores egresados de diferente especialidad (PO) uno tenía entre 10 y 20 años de experiencia mientras que el otro tenía menos de 3 años de experiencia.
De sus respuestas a las preguntas 6-11, registradas en el cuadro 9.1, (ver Anexo 30. Registro de respuestas a las preguntas 6-11 del cuestionario 1), se obtuvieron los resultados siguientes:

- Con relación a la pregunta 6 del cuestionario 1 ¿Usted considera "claro" el concepto de competencias matemáticas? Doce profesores indicaron que no era claro el concepto, doce que sí era claro y seis contestaron no saben o no opinan.
- Con relación a la pregunta 7 del cuestionario 1 ¿qué entiendes por competencia matemática? No todos los profesores respondieron a esta pregunta, cuatro de ellos dejaron en blanco dicha respuesta (dos PP y dos PS). Los que respondieron que sí (seis PP, dos PS, tres PM y un PO), escribieron expresiones sin relación como: "*Son todos los items que debemos desarrollar en todo el año*", "*Lo que el alumno aspira aprender*", "*concurso*"; o una expresión un tanto circular como: "*Recurso o estrategia que se emplea para mejorar los procedimientos pedagógicos para lograr que el alumno sea competente para resolver una situación cotidiana*". También respondieron afirmativamente, contemplando algunas de las componentes de la noción de competencia (habilidad, conocimiento, capacidad, contexto, etc.). Por ejemplo, "*Aquellas habilidades que deben ser desarrolladas en los educandos*", "*Todas las capacidades relacionadas al desarrollo del pensamiento lógico*", "*Es el conjunto de contenidos, capacidades que se programan para ser desarrolladas durante un mes, un trimestre o un año*", "*Habilidades para utilizar procesos y solucionar problemas determinado tema de matemáticas*".

  Cuatro profesores (PP) consideraron las competencias como: "Es el proceso para aprender matemáticas", "*Las competencias son los procesos que se realizan para desarrollar las diferentes actividades*", "*Son procesos para llegar a un fin", "La competencia es un proceso para alcanzar un objetivo o respuesta*"; y uno (PM) considera a los procesos como parte de la competencia: "*Habilidades para utilizar procesos y solucionar problemas*".

  No hay un solo profesor que proporcionara una respuesta en la que considerara varios de los componentes esenciales de la competencia (por ejemplo, es el conjunto de saberes, destrezas, habilidades y actitudes que un sujeto desarrolla para hacer matemáticas).

Ningún profesor tomó en cuenta la componente actitudinal al definir la competencia.

- Con relación a la pregunta 8 del cuestionario 1 ¿Cree que está capacitado para evaluar competencias matemáticas? Trece profesores respondieron que sí: (3PP, 3PS, 6PM, 1PO), tres profesores (PP) contestaron que no saben o no opinan y catorce indicaron que no.
- Con relación a la pregunta 9 del cuestionario 1 ¿Ha oído hablar de las competencias PISA y en caso afirmativo indique el contexto? Dieciocho profesores contestaron que no (9PP, 7PM y 2PO). Solo algunos de los que respondieron que sí, indicaron los contextos. Los medios de comunicación que los profesores señalaron como canales por los cuales habían recibido información acerca de PISA fueron: medios de comunicación. Ninguno de ellos mencionó como canal informativo el Ministerio de Educación.
- Con relación a la pregunta 10 del cuestionario 1 ¿Conoce las competencias PISA 2003 y en caso afirmativo numérelas? Solo un profesor (PM) contestó que sí, aunque no señaló cuáles eran. Un profesor (PM) dejó en blanco su respuesta. Los demás profesores contestaron que no.
- Con relación a la pregunta 11 del cuestionario 1 que pide cómo evalúa los aprendizajes matemáticos de sus alumnos. Dieciocho profesores indicaron que evaluaban por competencias (12PP, 1PS, 5PM) y entre los instrumentos que utilizaban para ello eran pruebas orales, pruebas escritas, prácticas, trabajos grupales, registros de evolución, hojas de evaluación).

  Cuatro profesores evaluaron por objetivos (3PM y 1PO) y entre los instrumentos que utilizaron para ello señalaron las pruebas o exámenes escritos; las intervenciones orales, tanto individuales como grupales.

  Ocho profesores evaluaron por otros criterios (2PP, 2PS, 3PM y 1PO). Por ejemplo, "*Indicadores- Razonamiento matemático, la reflexión crítica, intervenciones orales, pruebas escritas, practicas calificadas*", "*Capacidades. Pruebas objetivas y tablas de cotejo*", "*Capacidades. Pruebas objetivas, de desarrollo, orales, trabajos prácticos y las tecnologías*", "*Capacidades*". "*Intervenciones orales, trabajos en equipo, pruebas escritas*", "*Recursos informáticos, estrategias lúdicas, juegos competitivos"* y "*actitud.*

Resultados problemas PISA: Interés, Distancia y Tiempo de reacción.

En la tabla 9.2 se muestran las dimensiones que los profesores asignaron al problema "Interés", cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según los expertos PISA 2003: cantidad, publico-finanzas y reproducción, respectivamente.

Tabla 9.2. Dimensiones asignadas al problema de Interés

Problema: INTERÉS (Cantidad - Pública -Finanzas y Bancos - Reproducción)												
Gr	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
G1	**X**				x				Extramatemático		x	
G2	**X**				x				Extramatemático		x	
G3	**X**						**X**		Intramatemático		x	
G4	**X**					x			Intramatemático	**X**		
G5	**X**							x		**X**		
G6	**X**						**X**			**X**		
G7	**X**					x					x	
G8	**X**						**X**		Extramatemático		x	

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática,* 2010. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal o subescala, todos los grupos contestaron que era cantidad.
- En relación a la situación, solo tres grupos respondieron pública, dos personal, dos educativa o laboral y un grupo científica.
- En relación al nivel de complejidad, solo tres grupos respondieron que era del nivel de reproducción y los otros cinco del nivel de conexión.

Cabe mencionar que cuatro grupos manifestaron haber resuelto con sus propios alumnos un problema parecido.

En la tabla 9.3 se muestran las dimensiones que los profesores asignaron al problema, "Distancia", cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según los expertos PISA 2003: espacio y forma, educativo y conexión, respectivamente.

Tabla 9.3. Dimensiones asignadas al problema de Distancia

Problema: DISTANCIA (Espacio y forma - Educación - Conexión)												
Gr	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
G1		**X**				**X**			Extramatemático		**X**	
G2		**X**				**X**			Extramatemático	-	**-**	-
G3	x				x				Intramatemático			x
G4			x		x				Extramatemático			x
G5	x				x						**X**	
G6	x				x						**X**	
G7			x			**X**					**X**	
G8	x				x							x

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática,* 2010. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal o subescala, solo dos grupos contestaron que era espacio y forma, cuatro grupos manifestaron que era cantidad, y dos grupos cambio y relaciones.
- En relación a la situación, solo tres grupos respondieron que era educativa, los cinco restantes indicaron que era una situación personal.
- En relación al nivel de complejidad, solo cuatro grupos contestaron que era nivel de conexión, un grupo no dio respuesta y los otros tres grupos respondieron que era de reflexión.

En este caso tres grupos manifestaron que resolvieron un problema parecido con sus alumnos y cinco no lo hicieron.

En la tabla 9.4 se muestran las dimensiones que los profesores asignaron al problema "Tiempo de reacción 1" cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según PISA 2003: cantidad, científica y reproducción, respectivamente.

Tabla 9.4. Dimensiones asignadas al problema Tiempo de Reacción 1

Problema: TIEMPO DE REACCIÓN 1 (Cantidad - Científica - Reproducción)												
Gr	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
G1	**X**						x		Extramatemático		x	
G2		x					x				x	
G3	**X**						x		Extramatemático	**X**		
G4		x						**X**		**X**		
G5	**X**							**X**			x	
G6	**X**						x			**X**		
G7	**X**						x					x
G8	**X**						x		Extramatemático	**X**		

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal, seis grupos contestaron que era cantidad y dos que era de espacio y forma.
- En relación a la situación, solo dos grupos respondieron que era una situación científica, los seis restantes que era una situación pública.
- En relación al nivel de complejidad, solo cuatro de ellos respondieron que era del nivel de reproducción, otros tres grupos contestaron que era de conexión y uno que era de reflexión.

En este caso, dos grupos manifestaron que resolvieron un problema parecido con sus alumnos y los otros seis grupos no lo hicieron.

En la tabla 9.5 se muestran las dimensiones que los profesores asignaron al problema “Tiempo de reacción 2” cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según PISA 2003: cantidad, científica y conexión, respectivamente.

Tabla 9.5. Dimensiones asignadas al problema Tiempo de Reacción 2

Problema: TIEMPO DE REACCIÓN 2 (Cantidad - Científica - Conexión)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
G1	**X**						x		Extramatemático			x
G2	**X**						x		Extramatemático			x
G3	**X**						x		Extramatemático			x
G4		x						**X**	Extramatemático			x
G5	**X**						x		Extramatemático	-	-	-
G6	**X**						x			x		
G7	**X**						x		Extramatemático			x
G8	**X**						x		Extramatemático			x

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

Los resultados fueron los siguientes

- En cuanto a la idea principal, siete grupos contestaron que era cantidad y uno que era de espacio y forma.
- En relación a la situación, solo un grupo respondió que era una situación científica y los otros siete grupos respondieron que era pública.
- En relación al nivel de complejidad, ningún grupo contestó que era del nivel de conexión, uno de ellos que era del nivel de reproducción, seis grupos respondieron que era de reflexión y un grupo no respondió nada, al parecer porque no llegaron a la solución del problema planteado.

En este caso solo un grupo de profesores comentó que desarrollaron un problema parecido con sus alumnos y los otros siete grupos no lo hicieron.

Algunos profesores manifestaron que no fue necesario resolver los problemas para determinar la situación y contexto y la subescala de cada problema PISA propuesto; pero, para indicar el nivel de complejidad de estos mismos problemas, sí tuvieron que resolverlos.

Respuestas a los problemas "chatear" y "carpintero adaptado"

En las Tablas 9.6 y 9.7 se recogen las respuestas, por grupos, de los profesores a las preguntas relacionadas con el problema "chatear".

Con respecto a la pregunta 1, que está clasificada en el nivel de conexión por los expertos PISA 2003, solo dos grupos respondieron que era de conexión, otros dos indicaron que era de reproducción y cuatro grupos señalaron que era de reflexión. Justificaron el nivel de reproducción porque era de rutina: "*se justifica en la elección de una operación básica de rutina*", sin tomar en consideración que habían conexiones como las del concepto de cambio horario o de geografía, o de que Berlín o Sidney está más al Este. A pesar de pedirles que justifiquen la elección del nivel de complejidad, no todos los grupos de profesores escribieron el porqué de su elección.

Tabla 9.6. Dimensiones asignadas al problema Chatear 1

Problema: CHATEAR 1 (Cambio y relaciones - Personal - conexión)												
Gr	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
g1	x					x			Extramatemático (Sí)	x		
g2	x				**X**				(Sí)			x
g3	x				**X**				No	x		
g4			**X**			x			Extramatemático No			x
g5	x				**X**				(Sí)			x
g6			**X**				x		Extramatemático (Sí)		**X**	
g7			**X**		**X**				No		**X**	
g8	x					x			Extramatemático No			x

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática,* 2010. Fuente: Elaboración propia.

Con respecto al problema PISA Chatear, pregunta 2, (ver Tabla 9.7), que es un problema del nivel de reflexión, según los expertos de PISA 2003, seis grupos respondieron que era de reflexión y dos que era de conexión.

Ninguno de estos últimos grupos justificó por escrito su elección del nivel de complejidad del problema.

Tabla 9.7. Dimensiones asignadas al problema Chatear 2

Problema: CHATEAR 2 (Cambio y relaciones - Personal - Reflexión)												
Gr	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
g1	x					x			Extramatemático			**X**
g2			**X**		**X**				Extramatemático Sí			**X**
g3	x					x			Extramatemático			**X**
g4			**X**			x			Extramatemático			**X**
g5			**X**		**X**				Extramatemático No			**X**
g6			**X**				x		Extramatemático Sí		x	
g7			**X**		**X**				Extramatemático No		x	
g8	x					x			Extramatemático			**X**

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

Con relación al problema del Carpintero, tenemos que:

> *Esta pregunta de respuesta de elección múltiple se sitúa en un contexto educativo, ya que es el tipo de problema casi realista que podría darse con frecuencia en una clase de matemáticas, más que un problema genuino de los que podríamos encontrarnos en un entorno de trabajo. Aunque no cabe considerarlos típicos, sí se ha introducido un pequeño número de estos problemas en la evaluación PISA. Sin embargo, las habilidades necesarias para este problema son sin duda relevantes y forman parte de la competencia matemática. Esta pregunta ilustra el nivel 6 con una dificultad de 687 puntos; pertenece al área de contenido espacio y forma y encaja en el grupo de competencias de conexión, dado que no es un problema rutinario.* (*OCDE 2004, p.52*)

En la adaptación de esta pregunta se cambió las respuestas de elección múltiple por una abierta en la que se pidió justificar la respuesta. En las respuestas proporcionadas por los grupos de profesores (Tabla 9.9) sobre el nivel a que corresponde, cuatro de ellos indicaron que era del nivel de conexión, dos no respondieron y dos indicaron que era del nivel de reproducción. Uno de los grupos que respondió que era del nivel de reproducción da la siguiente justificación: "*porque estamos recopilando conocimientos que ya tenemos y realizando cálculos*". Los grupos que no respondieron, no llegaron a resolver el problema propuesto.

Tabla 9.8. Dimensiones asignadas al problema del Carpintero (Adaptado)

Problema: CARPINTERO adaptado (Espacio y forma - Educativa - conexión)												
Gru	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
g1		X				X			Extramatemático Sí		X	
g2		X				X			Sí		X	
g3		X				X			Extramatemático No		X	
g4		X				X			Extramatemático No	x		
g5		X				X			Extramatemático No		X	
g6		X				X			Extramatemático No		X	
g7		-				-			Extramatemático -		-	
g8		-				-			Extramatemático -		-	

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática,* 2010. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al tercer problema PISA 2003, Niveles de CO_2, lamentablemente, por cuestiones de tiempo, no fue resuelto por los profesores.

A la pregunta formulada a los asistentes sobre si habían resuelto con sus propios alumnos un problema parecido a los planteados, obtuvimos los siguientes resultados:

Con respecto al problema Chatear1, solo cuatro grupos contestaron que sí, aunque solo un grupo eligió el nivel de complejidad asignado por los expertos de PISA 2003; y de los que contestaron que no, uno asignó el mismo nivel de complejidad que dieron los expertos de PISA 2003. Con respecto al problema Chatear 2, solo dos grupos respondieron que sí y el nivel de complejidad que asignaron no coincidieron con el nivel que formulan los expertos de PISA 2003; mientras que un grupo de los que contestó que no, asignó el nivel de complejidad considerado en PISA 2003. Con respecto al problema Carpintero adaptado, solo dos grupos respondieron que sí, coincidiendo estas respuestas con el nivel que proponen los expertos de PISA 2003 y dos de los que respondieron que no, coincidieron también con el nivel asignado en el informe PISA 2003.

En la Tabla 9.9 se resume el nivel de complejidad asignado por cada grupo de profesores a los problemas comentados en la segunda sesión.

Tabla 9.9 Niveles de complejidad asignados al Problema del carpintero (Adaptado)

Nivel / Grupo	Reproducción	Conexión	Reflexión
g1	Chat1	**Carp**	**Chat2**
g2	Carp		Chat1/ **Chat2**
g3	Chat1	**Carp**	Chat2
g4	Carp		Chat1/**Chat2**
g5		**Carp**	Chat1/**Chat2**
g6		**Chat1**/Chat2/**Carp**	
g7		Chat1/ Chat2	
g8			Chat1/**Chat2**

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

De las respuestas proporcionadas por los grupos de profesores se observa que no tuvieron en cuenta el hecho de que sus alumnos hubieran resuelto o no problemas parecidos previamente como un factor influyente para determinar el nivel de complejidad.

Respuesta sobre la evaluación de competencias matemáticas a una solución dada por un alumno.

En la Tablas 9.10 y en el gráfico 9.1 se recogen las respuestas de los grupos de profesores sobre las competencias activadas en la solución del alumno de secundaria del problema del carpintero adaptado y el nivel de complejidad de cada competencia.

Tabla 9. 10. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado)

Nivel y competencia / Grupo	Reproducción (Rp)	Conexión (C)	Reflexión (Rf)	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico	VII. Empleo de soportes y herramientas
G1 (3PP)		**X**		Rp	Rp	C	C	C	Sí	Sí	Sí
G2 (3PP)			X	C	Rf	C	C	Rf	C	C	Rf
G3 (3P 1S)			X	C	Rf	NO	C	Rf	Rf	Rp	NO
G4 (3P 1S)		**X**		NP	C	C	NO	Sí	Sí	Sí	NP
G5 (2PP 2S)			X	Rf	Rf	Rp	C	Rf	C	NO	NO
G6 (4PS)			X	Rf	C	Rf	C	Rf	Rf	Rf	NO
G7 (4PS)			X	Rf	C	Rp	Sí	C	C	Rf	Rp
G8 (4PS)			X	C	Rf	Rp	C	Rf	C	Rf	Rp

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

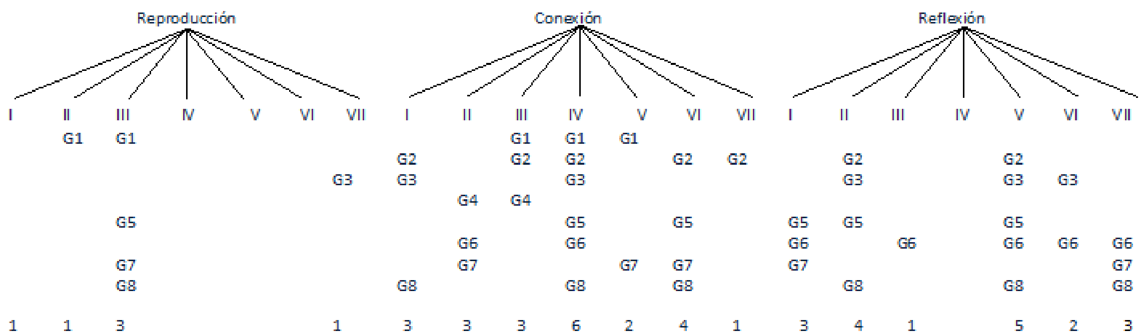


Gráfico 9. 1. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del Carpintero (Adaptado). Elaborado con las respuestas de la Tabla 9.10. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado).

Todos los grupos de profesores manifestaron que la competencia *pensar y razonar* se había activado en la solución dada por el alumno de secundaria que resolvió el problema del carpintero adaptado. Lo que no concordaron fue en el nivel, ya que uno de ellos lo clasificó en el nivel de reproducción, tres en el nivel de reflexión, tres de ellos en el nivel de conexión y un grupo no precisó el nivel.

Todos los grupos de profesores manifestaron que la competencia de *argumentación* se había activado, pero tampoco concordaron en el nivel: uno de ellos señaló el nivel de reproducción para esta competencia, cuatro el nivel de reflexión y tres el nivel de conexión.

Solo un grupo señaló que no se había activado la competencia de *comunicación*. Los siete grupos restantes tampoco concordaron en el nivel: tres señalaron el nivel de reproducción, tres el nivel de conexión y uno el nivel de reflexión.

Solo un grupo indicó que no se había activado la competencia de *construcción de modelos.* Aunque hay cierto consenso en el nivel ya que seis grupos señalaron conexión y solo uno no lo precisa.

Todos los grupos manifestaron que la competencia *formulación y resolución de problemas* se había activado en la solución. En cuanto al nivel no concordaron, señalando cinco de ellos el nivel de reflexión, uno de ellos no precisa el nivel y dos el de conexión.

Todos los grupos manifestaron que la competencia *representación* fue activada en la solución, dos de los cuales la clasificaron en el nivel de reflexión, dos no precisaron el nivel y el resto en el nivel de conexión.

Solo siete grupos indicaron que la competencia e*mpleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* se había activado en la solución, clasificándola uno de ellos en el nivel de reproducción, uno en el de conexión, dos no precisaron el nivel y tres en el nivel de reflexión. Un grupo de profesores manifestó que no había sido activada.

Tres grupos de profesores manifestaron que no ha sido activada la competencia *empleo de soportes y herramientas*. Los otros cinco grupos tampoco concordaron con el nivel, dos no lo precisaron.

Resumen de los resultados

A continuación se presenta un resumen de los resultados comentados en los apartados anteriores.

En la Tabla 9.11 y en el gráfico 9.2 se resume la subescala o ideas principales asignadas por los grupos de profesores a los problemas comentados en todo el taller.

Tabla 9.11. Ideas principales asignadas a los problemas PISA propuestos

Problema / Ideas Principales	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Cantidad	8	4	6	7	5	3	0
Espacio y forma	0	2	2	1	0	0	6
Cambio y relaciones	0	2	0	0	3	5	0
Incertidumbre	0	0	0	0	0	0	0

Leyenda: Nivel asignado por expertos PISA

Nivel diferente al asignado por expertos PISA

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

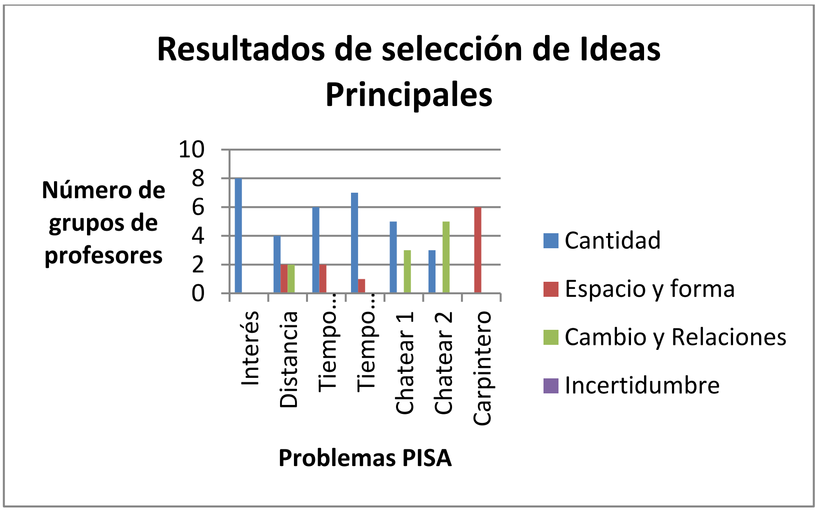


Gráfico 9. 2**.** Ideas Principales asignados a los Problemas PISA propuestos. Elaborado con las respuestas proporcionadas por los profesores asistentes al Taller 2 en el I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática, 2010. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 9.12 y en el gráfico 9.3 se resume el tipo de situación asignado por los grupos de profesores a los problemas comentados en todo el taller.

Tabla 9.12. Tipo de situaciones asignadas a los problemas PISA propuestos

Problema / Tipo de Situaciones	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Personal	2	5	0	0	4	3	0
Educativo/Laboral	2	3	0	0	3	4	6
Pública	3	0	6	7	1	1	0
Científica	1	0	2	1	0	0	0

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

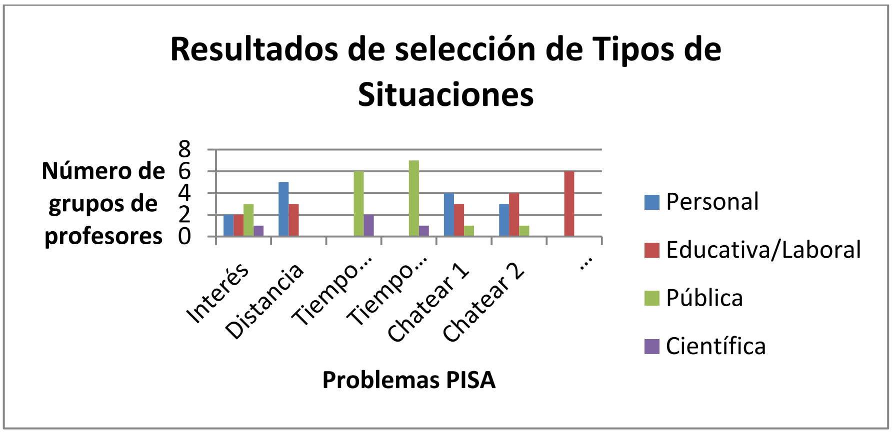


Gráfico 9. 3**.** Tipo de situaciones asignados a los Problemas PISA propuestos. Elaborado con las respuestas proporcionadas por los profesores asistentes al Taller 2 en el I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática, 2010. Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 9.13 y en el gráfico 9.4 se resume el nivel de complejidad asignado por los grupos de profesores a los problemas comentados en todo el taller.

Tabla 9.13. Niveles de Complejidad asignados a los problemas PISA propuestos

Problema Niveles	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Reproducción	3	0	4	1	2	0	2
Conexión	5	4	3	0	2	2	4
Reflexión	0	3	1	6	4	6	0

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

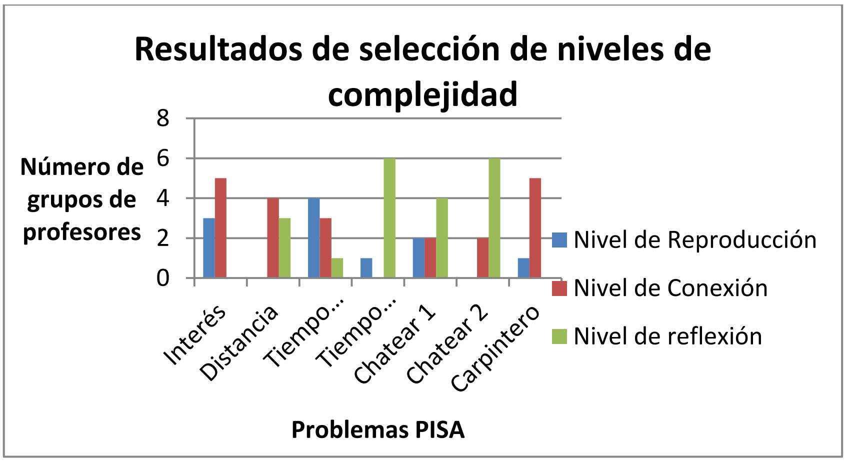


Gráfico 9. 4**.** Niveles de complejidad asignados a los Problemas PISA propuestos. Elaborado con las respuestas proporcionadas por los profesores asistentes al Taller 2 en el I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática, 2010. Fuente: Elaboración propia.

Cuestionario 2

El cuestionario 2 tenía tres preguntas, las dos primeras relacionadas con aspectos académicos y laborales de los participantes y la tercera fue la siguiente:

3. ¿Cree usted que pudo determinar, sin dificultades, las competencias activadas en la solución del alumno proporcionada, correspondiente al problema del CARPINTERO (adaptado), ayudado por la Tabla 1. Competencias PISA/OCDE. Explique su respuesta.

a.	Útil (los descriptores son claros y precisos)	b.	Poco útil (los descriptores no son claros ni precisos)

Explicación:

Aunque un gran número de los profesores no obtuvo una respuesta correcta y completa a los problemas PISA planteados, se creyó importante, conocer cómo critican estos problemas y qué necesidades manifiestan con respecto a la evaluación de las competencias matemáticas formuladas por PISA 2003, pues podría ayudar a tratar de dar solución a sus limitaciones desde algún ámbito: Universidad, Ministerio de Educación, Institutos Pedagógicos.

Para la mayoría de profesores de primaria (diez de los catorce profesores), ver tabla 11), quienes al responder no tomaron en cuenta que este taller estaba dirigido para profesores de Secundaria y de nivel básico de educación superior, les pareció poco útil, centrando sus comentarios en la complejidad del problema para alumnos de primaria, su falta de adecuación y manifestando la necesidad de ser capacitados en competencias matemáticas.

Aunque la mayoría de profesores que enseñaba en algún grado de Educación Secundaria respondió que sí es útil (nueve de los dieciséis), no coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA asigna a los problemas que se les propusieron.

Tabla 9.13. Respuestas a la pregunta 3 del Cuestionario 2

Profesor	a. Útil (los descriptores son claros y precisos)	b. Poco útil (los descriptores no son claros ni precisos)	Comentarios
Pp1		x	
Pp2		x	
Pp3	x		“Pero son para los que son de la especialidad”.
Pp4		x	“Porque para el alumno de primaria es un problema muy complejo y este problema debe darse al nivel secundario”.
Pp5		x	“Creo que para la Educación Primaria es poco útil porque no son claros ni precisos, además muy complejos”.

Profesor	a. Útil (los descriptores son claros y precisos)	b. Poco útil (los descriptores no son claros ni precisos)	Comentarios
Pp6		x	"Porque de acuerdo a nuestra especialidad de primaria, este tipo de problema es muy profundo para los alumnos".
Pp7	x		"Deberíamos ser capacitados en estas competencias para apoyar a los alumnos"
Pp8	x		"Deberíamos ser capacitados en base al desarrollo de estas capacidades, que en el DCN se incluyan para que podamos trabajarlas, previa preparación docente desde el nivel inicial"
Pp9		x	
Pp10		x	"El taller no es adaptado a Educación primaria"
Pp11		x	"El taller de matemática no es adecuado para el nivel primario, más ha sido desarrollado para el nivel secundario"
Pp12		x	"Porque los problemas para primaria son muy complejos"
Pp13		x	"No está adaptado a Educación Primaria, por lo tanto no entiendo".
Pp14	x		"Pero, somos profesores de primaria conocemos poco de estos temas"
Ps1	x		"Está explícita la teoría, pero hay dudas"
Ps2	x		"Los descriptores tienen sus propias capacidades que los diferencian, pero se dificulta el consenso."
Ps3	x		"Todas las explicaciones son útiles"
Ps4	x		"Hemos resuelto de acuerdo a nuestros conocimientos, ya que somos profesores de primaria."
Pm1	x		"Se nos presenta un cuadro de competencias con otra forma de expresión"
Pm2		x	"No estamos hablando el mismo lenguaje, la terminología debería ser la misma"
Pm3		x	"En evaluación se deben quedar a un lado las interpretaciones personales"
Pm4		x	
Pm5		x	"No logro entender si en el ejercicio del carpintero se dan las 8 capacidades"
Pm6		x	
Pm7	x		"Si utilizó las competencias el alumnos para resolver el problema, y lo ubico en el nivel de Reflexión porque el joven debió comprender con profundidad y utilizar los múltiples métodos para dar una solución".
Pm8	x		"No hubo dificultad, solo que necesito un poco de tiempo para poder determinar y precisar las competencias realizadas en el trabajo"
Pm9		x	
Pm10	x		"Se reduce a hallar el perímetro pero con

Profesor	a. Útil (los descriptores son claros y precisos)	b. Poco útil (los descriptores no son claros ni precisos)	Comentarios
			profundo análisis”
Po1	x		“Es una buena idea categorizar las competencias, ya que es un marco extenso y teórico”
Po2		x	

Nota: Respuestas de los profesores asistentes al *I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática*, 2010. Fuente: Elaboración propia.

Tal como se ha dicho en la implementación de la sesión 3, después de utilizar la tabla de descriptores de competencia (ver Anexo 25. Sesión 3-2. Tabla de competencias) para la evaluación analítica de competencias, la profesora les presentó unos descriptores más detallados que estaban recogidos en la Tabla 2 (ver capítulo seis o bien ver Anexo 28. Sesión 3-5. Tabla de competencias y niveles de complejidad) que fue bien valorada por los profesores por ser más precisa, pero su uso no implicó cambios sustanciales respecto a lo que habían hecho con la primera tabla.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Al diseñar el taller se pensó en participantes que tuvieran una buena competencia matemática (profesores con experiencia docente en educación secundaria o de los niveles básicos de educación superior con buena competencia matemática). Ahora bien, en el taller participaron profesores de educación secundaria, con diversos grados de competencia matemática, y profesores de educación primaria, que tuvieron dificultades para aplicar sus conocimientos matemáticos a los problemas contextualizados que se les propuso. Esto nos hizo pensar que se debía buscar un colectivo que garantizase a priori tanto una buena competencia matemática como una cierta experiencia docente.
En este estudio se vuelve a corroborar las deficiencias en matemáticas que tienen los profesores de primaria, lo cual era previsible. Más sorprendente fue observar dificultades matemáticas en el colectivo de profesores de secundaria.

En el diseño de este taller se tuvo en cuenta la hipótesis planteada en la discusión de los resultados del primer taller piloto (ver capítulo 7): con mayor conocimiento y práctica de los constructos PISA 2003, los participantes podrían “mejorar” en la evaluación analítica de competencias matemáticas. Por esta razón se proporcionó en este taller mayor información sobre los constructos PISA 2003 que en el primer taller piloto, así como ejemplos y actividades. A pesar de haber desarrollado más los siguientes constructos PISA 2003: *situaciones* y *contextos; escalas* y *niveles de complejidad*, no se consiguió consenso sobre estas dimensiones en las respuestas proporcionadas por los grupos de profesores asistentes al taller. Ahora bien, es cierto también, que (1) no se trabajó con los mismos grupos de profesores en cada sesión, lo cual se trató de subsanar repitiendo parte de las explicaciones de los constructos PISA en la segunda sesión, provocando que (2) el tiempo asignado para la resolución de los problemas PISA fuera menor en la segunda sesión.

Hubo consenso por parte de todos los profesores en que (1) para determinar las dimensiones: situaciones y contextos y las escalas no tuvieron necesidad de resolver los problemas PISA planteados, (2) para poder determinar los niveles de complejidad de cada uno de dichos problemas, fue necesario resolver los problemas PISA 2003 propuestos. Esto confirma la importancia de que los profesores tengan competencia matemática para poder evaluar competencias matemáticas de los alumnos.

Con relación a la evaluación de competencias matemáticas que son activadas en la solución proporcionada por un alumno al problema del carpintero adaptado, tenemos que:

- La hipótesis que la competencia *pensar y razonar* debía ser considerada por todos los profesores fue corroborada. Esto era de esperarse, entre otras razones, debido a que si se supone que el problema está bien resuelto, esto implica que el alumno tiene que pensar y razonar para poder resolverlo. Sin embargo, todos los grupos la contemplaron aunque sin consenso en cuanto al nivel: uno lo hizo en el nivel de reproducción, tres en el nivel de conexión, tres en el nivel reflexión y un grupo no precisó el nivel.
- La hipótesis que tanto la competencia de *argumentación* como la competencia de *comunicación* deberían presentarse en las respuestas de los profesores fue corroborada casi por todos. Esto era de esperarse, entre otras razones, porque la solución propuesta estaba correctamente argumentada y razonablemente bien comunicada. Ocho grupos contemplaron la competencia de argumentación y solo siete contemplaron la competencia de comunicación, aunque no todos les adjudicaran el nivel de conexión). Solo un grupo manifiesta que no se activa la competencia de argumentación indicando que "*En el ítem B se nota que el alumno desconoce algunos términos matemáticos, por ejemplo: diagonal*".
- La hipótesis que la competencia *construcción de modelos* debía ser considerada por todos los profesores fue corroborada casi por todos (un grupo contestó que no y los siete restantes que sí). Seis

grupos consideraron que era del nivel de conexión y un grupo no especificó el nivel. Algunas de sus respuestas fueron: "~~en~~ *nuestro grupo ha llegado a la conclusión se encuentra en dos niveles: conexión y reflexión*". El grupo que contestó "no", no justifica su respuesta.

- La hipótesis que la competencia de *formulación y resolución de problemas* fue activada por el alumno de secundaria fue corroborada, ya que todos los grupos contestaron que sí. Esto era de esperarse, entre otras razones, porque el problema estaba bien resuelto. Aunque, nuevamente, no coincidieron en cuanto al nivel de complejidad, (dos lo consideraron de conexión, cinco de reflexión y un grupo no precisa el nivel).
- La hipótesis de que la competencia de *representación* debería estar presente en casi todas las respuestas fue corroborada por todos los grupos. Aunque nuevamente, no coincidieron en cuanto al nivel de complejidad, (dos grupos señalaron el nivel de conexión, cuatro el nivel de reflexión y dos grupos no precisaron el nivel).
- La hipótesis que la competencia *empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* debía ser considerada por todos los grupos de profesores fue corroborada por casi todos, solo un grupo contestó que no fue activada. Aunque, un grupo la consideró en el nivel de reproducción, otro en el nivel de conexión, tres en el de reflexión y dos grupos no especificaron el nivel). Algunas de sus respuestas fueron: "No, porque no va a resolver problemas de ecuaciones", "a partir de ejemplos numéricos construye modelos con expresiones simbólicas". El grupo que no contempla esta competencia lo hace~~n~~ porque su prototipo de lenguaje matemático simbólico es un lenguaje con muchos símbolos, como en el caso de ecuaciones algebraicas. Parece ser que el lenguaje verbal o gráfico no es considerado lenguaje matemático por estos profesores.
- La hipótesis de que la competencia de *empleo de soportes y herramientas* no debería estar presente o bien solo a nivel de reproducción fue corroborada parcialmente por los profesores: solo cuatro grupos manifestaron que sí (dos en el nivel de reproducción, uno en el de reflexión y otro grupo no precisa). El resto indicó que no se activó, aunque el grupo que señaló el nivel de reflexión dijo "*utiliza diferentes herramientas para la solución del problema*".

Los profesores que eligieron correctamente las competencias y el nivel de competencias matemáticas, no fueron capaces de dar indicadores que justificaran su elección. Dicho de otra manera, no hicieron un análisis de la actividad matemática a partir del cual encontrar indicadores para justificar su elección de competencias y niveles. No es de sorprender porque, como ya se ha comentado, el colectivo de profesores en su mayoría manifestó limitaciones en sus conocimientos matemáticos, por un lado, y por otro, a pesar de su experiencia docente, tenían pocos conocimientos de Didáctica de las Matemáticas que podrían haberles ayudado para analizar la actividad matemática.

Los resultados recogidos tanto de las respuestas a los dos cuestionarios como a las hojas de respuestas diseñados para el taller 2 fueron organizados y analizados en primer lugar por la doctoranda, para luego ser sometidos a la opinión del director de tesis. De este análisis se pudo concluir que (1) los profesores participantes, teniendo cierta experiencia docente, desconocían inicialmente y en su mayoría los constructos PISA, (2) los profesores hicieron evidente su limitada competencia matemática en la resolución de los problemas PISA 2003 planteados, al no resolverlos por completo o resolverlos solo parcialmente, (3) se hizo evidente, como una *condición necesaria* para la evaluación de competencias matemáticas, el tener competencias matemáticas, (4) las limitaciones del tiempo, esta vez por cuestiones en la organización del coloquio donde se llevó a cabo este taller, podría seguir siendo la causa del poco consenso tanto al determinar los niveles de complejidad como las competencias matemáticas, (5) se tomarían datos de un colectivo con mayores competencias matemáticas, con experiencia docente y con conocimientos en Didáctica de las Matemáticas, mediante la organización de un nuevo taller.

Si se aplican los criterios de idoneidad propuestos en el EOS (ver capítulo 2) al diseño e implementación del presente taller, comparado con el primer taller piloto, se considera que en este taller hubo una mayor idoneidad epistémica, porque estuvo mejor diseñado; mayor idoneidad cognitiva por que los profesores aprendieron algo más que en los otros talleres y, sobre todo, menor idoneidad afectiva, porque se observó cierto “descontento” de los profesores de primaria por la no adecuación de los problemas al nivel de primaria; y una menor idoneidad mediacional, al contar con menor tiempo para su desarrollo y la variación en el horario de las sesiones.

CAPÍTULO 10

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN TALLER CON ESTUDIANTES DE LA MAESTRIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Resumen

Este capítulo se relaciona con el objetivo específico 4.2: Determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú − con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas − en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos. En concreto se trata del diseño e implementación de un taller, con profesores que eran estudiantes de la maestría en la enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, que cumplían todas las características descritas en el objetivo 4.2.

Los principales resultados de este taller fueron que los participantes, por una parte, no coincidieron entre ellos al asignar las competencias matemáticas que se inferían de la solución de un alumno a un problema propuesto, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron, aunque hubo mayor consenso en dos de de los siete propuestos. Ahora bien a diferencia de otros talleres, los participantes aplicaron las matemáticas que conocían a los problemas contextualizados sin mayores inconvenientes.

En este capítulo se realiza una reflexión global sobre los cuatro talleres realizados en esta investigación – capítulos 7, 8, 9 y 10– y se concluye que este último taller estuvo mejor diseñado e implementado, los asistentes tuvieron más motivación y aprendieron más. Una de las razones es que se trataba de un curso regular de una institución universitaria. Por esta razón, dado que los talleres realizados en congresos de profesores presentan, entre otros, el problema de que los participantes están disponibles por cortos períodos, decidimos continuar la investigación con un colectivo de cursos de grado o postrado con más permanencia en el tiempo.

1. METODOLOGÍA

La metodología aplicada fue, básicamente, la misma que la del taller 2, (ver capítulo anterior).

2. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO DEL TALLER

Se diseñó el taller, denominado "Evaluación de las competencias matemáticas de las pruebas PISA 2003", reestructurándose los cuestionarios y las hojas de respuestas del segundo taller piloto, capítulo 9, así como elaborándose nuevas hojas de respuestas. Este taller tuvo una duración de 6 horas y se realizó en el primer semestre académico 2010, durante tres sesiones de clase de la asignatura Análisis de Currículo de Matemáticas en la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas (MEM) de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

2.1 Organización del Taller

Las modalidades de trabajo previstas fueron: 1) presentación del informe PISA 2003 por parte de la profesora; 2) trabajo individual de los estudiantes y 3) trabajo en parejas.

El contenido principal de las sesiones sería:

i. Respuesta individual a un cuestionario cuyo objetivo era tener información sobre su situación laboral y académica y su nivel de información sobre las competencias matemáticas contempladas en el informe PISA 2003.

ii. Información y reflexión sobre los "niveles de complejidad" y la lista de las "competencias y subcompetencias" del informe PISA 2003, utilizando como ejemplos algunos de los problemas propuestos en estas pruebas.

iii. Respuesta individual y en parejas a un material diseñado para recoger información sobre su competencia inicial en la evaluación de competencias matemáticas PISA 2003.

2.2 Diseño de las sesiones

A continuación se explica el diseño de cada una de las tres sesiones

Primera sesión

Los cuestionarios y hojas de trabajo en este taller fueron las mismas que en el taller piloto descrito en el capítulo anterior (anexos 17-29).

a.1. Cuestionario 1 (ver Anexo 17. Sesión 1-1. Cuestionario 1) que sería contestado por los estudiantes de la MEM, para obtener información general de ellos (experiencia docente, años de servicio, grados y nivel en los que enseñaban y tipo de institución) y sobre sus conocimientos acerca de las competencias matemáticas planteadas en el informe PISA 2003.

a.2. Presentación con diapositivas para informar y reflexionar (ver Anexos 18. Sesión 1-2. Dimensiones y Anexo 20. Sesión 1-4. Análisis de dimensiones) sobre las dimensiones, componentes o variables consideradas en la elaboración de los problemas PISA 2003: Situaciones y contextos, subescala (ideas principales).

a.3. Presentación con diapositivas para informar y reflexionar sobre los "niveles de complejidad": reproducción, conexión y reflexión (ver Anexo 19. Sesión 1-3. Niveles de complejidad) considerados en la elaboración de los problemas PISA 2003.

a.4. Hoja 1 de respuesta de análisis (ver Anexo 21. Sesión 1-5. Análisis de dimensiones) que sería contestado por los estudiantes, en la que se recogería sus respuestas (con respecto a las ideas principales, situaciones y contextos y niveles de complejidad de algunos problemas PISA).

Segunda sesión

b.1. Presentación de tres problemas PISA 2003 (ver anexo 22. Sesión 2-1. Análisis de competencias) para ser resueltos por los estudiantes de la MEM (Chatear, el carpintero (adaptado) y Niveles de CO_2).

b.2. Hoja 2 de respuestas de análisis de la resolución de los problemas propuestos utilizando los constructos de PISA 2003 (ver Anexo 23. Sesión 2-2. Análisis de dimensiones). Los alumnos deberían determinar, para cada problema, la subescala (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, incertidumbre); situación (personal, educativa o laboral, pública o científica); contexto (intramatemático o extramatemático); y el nivel de complejidad (reproducción, conexión o reflexión).

Tercera sesión

c.1. Solución de un alumno de secundaria a un problema adaptado de PISA 2003 para su entrega a cada uno de los estudiantes de MEM (ver Anexo 24. Sesión 3-1. Análisis de competencias y Anexo 26. Sesión 3-3. Análisis de competencias) para que ellos, determinen qué competencias matemáticas ha desarrollado dicho alumno (Sesión 3-3. Hoja 3 de respuestas). Para ello, se le proporcionó a cada uno de los estudiantes, un listado conteniendo éstas con sus respectivos descriptores o subcompetencias (ver Anexo 25. Sesión 3-2. Tabla de competencias).

Nuestra hipótesis, basada en la solución experta, presentada en el capítulo 6 era que la respuesta correcta de los estudiantes de la MEM debería contemplar las siguientes competencias con los niveles de complejidad que se señalan en la tabla 10.1:

Tabla 10. 1 de competencias y nivel de complejidad

Competencia	Nivel de complejidad
Pensar y razonar	Conexión
Argumentación	Conexión
Comunicación	Conexión
Construcción de modelos	Reproducción
Formulación y resolución de problemas	Conexión
Representación	Conexión
Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico	Conexión
Empleo de soportes y herramientas	O bien nivel de Reproducción o bien no activada.

Nota: Resumen obtenido del capítulo 6 de la solución experta. Fuente: elaboración propia.

c.2. Cuestionario 2 (ver Anexo 27. Sesión 3-4. Cuestionario 2) que sería contestado por los estudiantes de la MEM, para obtener información acerca de su competencia en la determinación de las competencias matemáticas activadas en la solución del alumno de secundaria al problema del CARPINTERO (adaptado). Se les proporcionaría como ayuda la Tabla 1 (Anexo 25. Competencias PISA/OCDE) y se especificaría que explicasen sus respuestas.

c.3. Tabla 2 de competencias y niveles de complejidad (explicada en el capítulo 6). Dicha tabla muestra con mayor detalle los descriptores o subcompetencias y su correspondiente nivel de complejidad, formulados por los expertos PISA.

c.4. Hoja de respuestas (ver Anexo 29. Sesión 3-6. Análisis de competencias), para obtener información acerca de si los estudiantes, consideraban que si ellos hubiesen tenido mayor información sobre los constructos PISA hubiesen cambiado sus respuestas al cuestionario 2.

3. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

En este apartado describiremos la implementación realizada de acuerdo al diseño explicado en apartado anterior.

3.1 Participantes

Los participantes fueron 12 estudiantes de la MEM del curso de Análisis de Currículo de Matemáticas que cursaban su tercer semestre académico (2010-1) de los cuatro que consta esta maestría. Esto nos aseguraba, por una parte, que ellos tenían competencia matemática, cierta experiencia docente y, por otra parte, que tenían además cierta formación en Didáctica de la Matemática.

Los participantes eran de diferentes especialidades, ocho de ellos de la especialidad de Educación Secundaria, con mención en Matemáticas, de los cuales, siete enseñaban en educación secundaria y uno en una institución preuniversitaria; uno de la especialidad de Matemáticas y Ciencias, profesor de matemáticas y ciencias en educación secundaria; uno de la especialidad de matemáticas; y dos de la especialidad de ingeniería. Estos cuatro últimos enseñaban en los primeros ciclos de Universidad.

En cuanto a su experiencia docente, dos de ellos tenían una experiencia docente menor de 3 años, dos una experiencia docente entre 3 y menos de 5 años, seis una experiencia docente mayor de cinco años pero menor de 10 y, finalmente, dos tenían una experiencia docente de más de 10 años. Solo dos de ellos laboraban en instituciones estatales y uno en una institución religiosa. Los demás laboraban en instituciones privadas.

Incluso alguno de ellos tenía experiencia en cargos de gestión educativa como, por ejemplo, coordinador de área.

Por otro lado, a cada uno de los estudiantes se le preguntó si estaban de acuerdo en participar de este taller, que era parte de esta investigación y que no iba a ser calificado con una nota de la asignatura. Los participantes manifestaron su acuerdo con estas condiciones. En un principio, creímos que esto provocaría la deserción a clases, pues las tres sesiones de este taller se realizarían de 7:00p.m. a 9:00 de la noche, generalmente después de un par de horas de clase más y al final de una jornada de trabajo de ocho horas en sus respectivos centros de trabajo. Fue en verdad satisfactorio ver la asistencia de todo el alumnado.

Se observó durante estas sesiones que los estudiantes (1) tenían cierta motivación, distinta a la nota o calificación; (2) tenían seguridad de sus competencias matemáticas; (3) no tenían la presión por parte de su institución de trabajo por mostrar su asistencia al taller, sino que era algo personal (no siendo este el caso en algunos otros talleres realizados); (4) tenían competencias matemáticas y didácticas; (5) estaban interesados en la investigación y en el tema de evaluación de competencias matemáticas; y (6) contaban con cierta disposición de tiempo para este tipo de actividad.

En nuestra opinión se trataba de un colectivo que claramente cumplía con las características de los participantes idóneos al planificar este taller.

3.2 Tipos de registro de la información

El registro de la información se realizó mediante los dos cuestionarios y en las hojas de respuestas contenidas en el dossier entregado a los participantes.

3.3 Implementación

El taller se repartió en tres sesiones, como se había diseñado. A continuación describimos cada una de ellas.

Primera sesión

La profesora presentó el taller y los objetivos del mismo. En esta primera sesión se presentaron las pruebas PISA 2003, tratando de que los estudiantes se familiarizasen con sus constructos teóricos (niveles de complejidad, competencias matemáticas, etc.) y manera de entender la evaluación de competencias matemáticas.

Se le entregó a cada uno de los estudiantes el cuestionario 1 (ver Anexo 17. Sesión 1-1. Cuestionario 1), para su respuesta individual, con el objetivo de recabar información sobre sus conocimientos previos de las competencias PISA 2003 y sobre su ejercicio profesional: grados en los que enseñaba (primaria, secundario o superior), años de su ejercicio profesional o experiencia docente, tipo de institución en la que laboraba (estatal o privada) y la forma en que evaluaban los aprendizajes de sus alumnos (por objetivos o por competencias). Los resultados se presentan en el anexo 31 (ver Anexo 31. registro de respuestas a las preguntas 6-11 del cuestionario 1).

A continuación, se hizo una breve presentación histórica del Proyecto PISA, las características y los objetivos de las pruebas PISA 2003, incidiendo en la organización del área de conocimiento matemático y sus tres elementos, componentes o variables: 1) *situaciones* (personal, educativo o laboral, público y científico) y *contextos* (intramatemáticos o extramatemáticos), 2) *contenido matemático* o *ideas principales* (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, e incertidumbre) y 3) *procesos* o c*ompetencias*. Para analizar los dos primeros elementos, se utilizó la presentación con diapositivas descrito en el punto a.2 del apartado diseño del taller. Esta presentación también se les repartió en papel impreso.

Este material contenía información sobre los dos primeros elementos (situaciones y contextos, y contenido matemático) y planteaba una primera actividad individual en la que los estudiantes de la MEM debían determinar la situación y el contexto, y la subescala a las cuales correspondía cada uno de los problemas PISA planteados (Interés y Distancia). Ambos problemas fueron tomados de los ejemplos dados en el marco teórico PISA 2003. Se reflexionó sobre sus respuestas, no habiendo unanimidad en ellas ni en las ideas principales ni en las situaciones (ver respuestas en la Tabla 10.2 y 10.3.

A continuación, la profesora, con ayuda de diapositivas, presentó los niveles de complejidad, cada uno con un ejemplo, entregando a cada uno de los estudiantes el material de Niveles de complejidad (ver Anexo 19. Sesión 1-3. Niveles de complejidad), que contenía información sobre cómo se entienden dichos niveles en el informe PISA 2003. Se les entregó a cada estudiante otros dos problemas PISA más (tiempo de reacción 1, tiempo de reacción 2), para que los estudiantes de la MEM determinasen su nivel de complejidad (ver Anexo 20. Sesión 1-4- Análisis de Dimensiones)

En la respuesta individual que dieron los estudiantes y también durante la reflexión colectiva, no hubo una respuesta única. Cada uno de los problemas PISA propuestos fue tipificado en los diversos niveles:

reproducción, conexión o reflexión (ver resultado en la tabla 10.4 y 10.5). A continuación se les indicó las respuestas, dadas por los expertos de PISA.

Después se formaron parejas y se les entregó una hoja de respuestas (ver Anexo 21. Sesión 1-5 Análisis de dimensiones). Se pidió que cada uno justificase al compañero la elección del nivel de complejidad e intentaran llegar a un acuerdo entre ellos. En esta argumentación se les indicó que tuvieran en cuenta si habían trabajado este tipo de problemas con sus alumnos.

Se cerró la primera sesión con una reflexión sobre la dificultad de poder decidir a qué nivel corresponde cada uno de los problemas PISA proporcionados. Algunos de los estudiantes manifestaron que había cierta subjetividad al dar las respuestas. También, que para dar respuesta acerca de las ideas principales y las situaciones y contextos, no hubo necesidad de resolver los problemas proporcionados. Ahora bien, que al tratar de señalar el nivel de complejidad tuvieron que resolver o intentar resolver el problema.

Segunda sesión

La profesora comenzó la sesión recordando los niveles de complejidad trabajados en la sesión anterior. Después se le entregó a cada estudiante una hoja con tres problemas PISA: Chatear 1 y 2, Carpintero adaptado y Niveles de CO_2 (ver Anexo 22. Sesión 2-1. Análisis de dimensiones). El objetivo era corroborar su competencia matemática, para ello, aprovechando que al cierre de la sesión anterior manifestaron que requirieron el dar solución a los problemas planteados para determinar el nivel de complejidad, se le pidió a cada uno de ellos resolverlos. Por otra parte, se quería que se familiarizasen con la solución del problema del carpintero adaptado, que sería utilizado en la siguiente sesión.

Solo dos de los estudiantes resolvieron los tres problemas en el tiempo previsto. Dada la falta de tiempo, se decidió, que se analizarían y se recogerían solo las soluciones de los problemas Chatear y Carpintero adaptado.

Para dar sus respuestas individuales, se le proporcionó a cada estudiante la hoja de respuestas 2 (ver Anexo 23. Sesión 2-2. Hoja de respuestas de Análisis de Dimensiones), en la que, además, de resolver el problema, debían determinar las dimensiones: situación y contexto, contenido y niveles de complejidad. Luego, se recogieron sus respuestas (ver tabla 10.6 y 10.7) y se les comentó las respuestas a estos problemas dadas por los expertos de PISA.

Después se formaron parejas de estudiantes para que cada uno justificase la elección del nivel de complejidad e intentaran llegar a un acuerdo entre ellos. Se les recordó que tuviesen en cuenta si ellos trabajaban estos tipos de problemas o si consideraban que los alumnos de secundaria trabajaban este tipo de problemas. Si bien alguna pareja se puso de acuerdo, la conclusión general era que no era fácil el consenso.

Se cerró la segunda sesión haciendo una reflexión sobre los desacuerdos al asignar el nivel de complejidad de cada uno de los problemas PISA propuestos (Chatear y Carpintero adaptado), así como sobre la falta de adecuación del lenguaje utilizado (parterre, tapiar, etc.) al contexto peruano.

Tercera Sesión

Se indicó a los estudiantes que en esta sesión se tratarían las competencias matemáticas, según el marco teórico PISA 2003. Se entregó a cada estudiante de la MEM la reproducción de la solución de un alumno al problema del carpintero (adaptado) de PISA 2003 (ver Anexo 24. Sesión 3-1. Análisis de competencias) y una tabla conteniendo las competencias y subcompetencias o descriptores PISA 2003 (ver Anexo25. Sesión 3-2. Tabla de competencias).

Se le pidió a cada estudiante, en forma individual, que hiciera una evaluación analítica de las competencias que se infieren de la respuesta del alumno. En la hoja 3 de respuestas (ver Anexo 26. Sesión 3-3. Análisis de competencias) indicaron cuáles eran las competencias activadas en la solución del problema (ver resultados en la tabla 10.8).

También se le entregó, a cada uno de ellos, el cuestionario 2 para recoger información acerca de si pudo determinar, con la ayuda de la tabla que se les proporcionó, las competencias activadas en la solución del alumno.

Después de observar y comentar la disparidad de respuestas, se comentó que en el informe PISA se daban unos descriptores más detallados que estaban recogidos en la Tabla 2 (Anexo 28) que se les entregaba. Se les pidió que revisaran sus respuestas teniendo en cuenta esta tabla más detallada y si era conveniente modificaran su elección en la lista de competencias matemáticas. Los alumnos valoraron positivamente el mayor nivel de precisión de esta nueva tabla, pero ninguno consideró conveniente modificar su respuesta con base a los descriptores de esta nueva tabla. La conclusión fue que la Tabla 2 a pesar de ser más precisa no solucionaba el problema de la ambigüedad que habían tenido a la hora de determinar el nivel de complejidad de cada competencia

Se cerró la sesión reflexionando sobre el hecho de que las tablas ayudan a evaluar las competencias matemáticas, pero sigue habiendo una cierta ambigüedad que en cierta manera depende de la experiencia docente de la persona que utiliza la tabla. En este caso, la ambigüedad se manifestó en un debate sobre si la competencia construcción de modelos se activó o no, así como la de representación.

La profesora aprovechó el debate para comentar la estrecha relación que hay entre los procesos y las competencias. También, comentó para poder realizar el análisis y la discusión de sus respuestas, previamente era necesario que hubiera hecho su análisis experto, que le podía servir como referente para evaluar las respuestas de sus alumnos. Luego comentó, que un análisis de los objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas matemáticas podría ser un nivel previo a la evaluación de las competencias matemáticas.

Antes de finalizar la sesión se les presentó el análisis experto de la respuesta al problema del carpintero, con la finalidad de ilustrar cómo un análisis previo a nivel de objetos y procesos matemáticos puede ayudar a inferir competencias (ver capítulo 6). Desafortunadamente no hubo tiempo para entrar a explicar con mucho detalle esta técnica ni mucho menos para que los participantes intentaran hacer un análisis parecido con el problema "Chatear". Hay que resaltar que los participantes se mostraron muy interesados en esta técnica.

Al final de la sesión, se les tomó a los participantes al taller, en forma individual, el cuestionario 2 (ver anexo 27).

4. RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIOS Y LAS HOJAS DE RESPUESTA DEL DOSSIER

En este apartado presentamos los resultados de la implementación descrita en el apartado anterior.

4.1 Cuestionario 1

El cuestionario 1 sirvió para conseguir información acerca del ejercicio profesional de cada uno de los estudiantes: niveles educativos en los que enseñaba (primaria, secundario o superior), la cantidad de años de su desempeño profesional o experiencia docente, tipo de institución en la que laboraba (estatal o privada) y la forma en que evaluaban los aprendizajes de sus alumnos (por objetivos o por competencias); así como sus conocimientos previos sobre las competencias matemáticas PISA 2003.

De las primeras cinco preguntas del cuestionario 1 pudimos recoger la siguiente información: los estudiantes procedían no solo de la especialidad de Educación Secundaria, sino de otras especialidades. Ocho estudiantes eran profesores de matemática de educación secundaria, siete de ellos enseñaban en educación secundaria y uno en una institución preuniversitaria; un profesor, egresado de la especialidad de Matemáticas y Ciencias, de educación secundaria; uno de la especialidad de matemáticas y dos de la especialidad de ingeniería. Estos cuatro últimos enseñaban en los primeros ciclos de Universidad.

Con respecto a su experiencia docente, dos de ellos tenían una experiencia docente menor de 3 años, dos de ellos con una experiencia docente entre 3 y menos de 5 años, seis de ellos con una experiencia docente mayor de cinco años pero menor de 10 y dos con una experiencia docente de más de 10 años. Solo dos de ellos laboraban en instituciones estatales y uno en una institución religiosa. Los demás laboraban en instituciones privadas.

De sus respuestas a las preguntas 6-11 al cuestionario 1, registradas en el cuadro 10.1, (ver anexo 31), se obtuvieron los siguientes resultados:

Con relación a la pregunta 6, ¿*Usted considera "claro" el concepto de competencias matemáticas*?, seis estudiantes indicaron que no era claro dicho concepto, uno señaló que es más o menos claro y cinco que sí les pareció claro.

Con relación a la pregunta 7 ¿*Qué entiendes por competencia matemática*?, todos los estudiantes de la MEM respondieron a esta pregunta, esto debido a que, como mencionamos, tenían ciertos conocimientos por las asignaturas cursadas en la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas. Aunque, uno de ellos escribió una expresión un tanto circular: "Conjunto de destrezas y habilidades que mediante el desarrollo de capacidades hacen que las personas solucionen problemas matemáticos". Cada una de las respuestas de los estudiantes de la MEM, a esta pregunta, contempló algunas de las componentes de la noción de competencia (habilidad, conocimiento, capacidad, contexto, etc.). Por ejemplo, algunas de sus respuestas fueron "Es el conocimiento, habilidad y actitud del estudiante respecto a un determinado tema de matemáticas"; "Es el conjunto de habilidades y destrezas para desarrollar y resolver problemas desde el aspecto matemático." Solo un estudiante consideró varios de los componentes esenciales de la competencia en su respuesta: "Es el conjunto de saberes, destrezas y habilidades que un sujeto desarrolla para hacer matemáticas". Solo dos estudiantes tomaron en cuenta la componente actitudinal al definir competencia.

Con relación a la pregunta 8 ¿*Cree que está capacitado para evaluar competencias matemáticas*? Solo dos estudiantes contestaron que sí; nueve de ellos contestaron que no y un solo estudiante afirmó que tenía algún conocimiento sobre el tema “No por completo”.

Con relación a la pregunta 9 ¿*Ha oído hablar de las competencias PISA y en caso afirmativo indique el contexto*?, la mayoría de los estudiantes contestó que sí, solo dos estudiantes señalaron que no. Los medios de comunicación que los estudiantes señalaron como canales por los cuales recibieron información acerca de PISA fueron: internet, artículos, asignaturas de la maestría y congresos sobre Educación Matemática. Ninguno de ellos mencionó como canal informativo el Ministerio de Educación.

Con relación a la pregunta 10 ¿*Conoce las competencias PISA 2003 y en caso afirmativo numérelas*?, solo dos estudiantes respondieron que sí, pero ninguno de ellos las enumeró; uno de ellos señaló que no las recordaba. Diez estudiantes respondieron que no.

Con relación a la pregunta 11 *Indique cómo evalúa los aprendizajes matemáticos de sus alumnos*, ocho estudiantes indicaron que evaluaban por objetivos y, entre los instrumentos que utilizaban para ello, señalaron las pruebas o exámenes escritos y las intervenciones orales, tanto individuales como grupales. Un estudiante respondió que evaluaba tanto por objetivos como por competencias, pero no indicó los instrumentos que usaba. Un estudiante manifestó que no evaluaba, solo asesoraba. Dos de ellos indicaron que evaluaban a sus estudiantes por competencias; pero solo uno de ellos mencionó que los instrumentos utilizados en esta evaluación eran las fichas de aplicación y las pruebas orales.

4.2 Resultados problemas PISA: Interés, Distancia y Tiempo de reacción.

En la tabla 10.2 se muestran las dimensiones que los estudiantes asignan al problema “Interés”, cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según los expertos PISA 2003, respectivamente: cantidad, publico-finanzas y reproducción.

Tabla 10.2. Dimensiones asignadas al problema de Interés

Problema: INTERÉS (Cantidad - Pública -Finanzas y Bancos - Reproducción)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1	X						X		Ahorro en Banco	**X**		
M2			X				X		Ahorro en Banco	**X**		
M3	X						X		Cálculo de interés		**x**	
M4	X					X			Extramatemático	**X**		
M5			X				X		Institución bancaria	**X**		
M6	X						X		Cálculo de interés		**x**	
M7			X				X		Extramatemático	**X**		
M8	X				X				Ahorro en Banco	**X**		
M9			X				X		Institución bancaria	**X**		
M10	X						X		Sistema Bancario	**X**		
M11	X						X		Ahorros	**X**		
M12	X						X		Extramatemático	**X**		

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal o subescala, ocho estudiantes contestaron que era cantidad y cuatro de ellos cambio y relaciones.
- En relación a la situación, diez estudiantes contestaron pública, uno personal y otro educativo o laboral.
- En relación al nivel de complejidad, diez de ellos respondieron que era del nivel de reproducción y dos del nivel de conexión.

Cabe mencionar que cada uno de los estudiantes manifestó haber resuelto con sus propios alumnos un problema parecido.

En la tabla 10.3 se muestran las dimensiones que los estudiantes asignan al problema, “Distancia”, cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según los expertos PISA 2003, respectivamente: espacio y forma, educativo y conexión.

Tabla 10.3. Dimensiones asignadas al problema de Distancia

Problema: DISTANCIA (Espacio y forma - Educación - Conexión)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1	X						X		Distancia		**X**	
M2	X					X			Ubicación		**X**	
M3	X						X		Distancia	**x**		
M4	X	X			X				Extramatemático		**X**	
M5		X			X				Distancia	**x**		
M6	X				X				Intramatemático	**x**		
M7	X					X			Extramatemático			x
M8		X			X	X			Distancia			x
M9		X	X		X				Colegio y alrededores			**x**
M10		X					X		Distancia		**X**	
M11		X					X		Extramatemático		**X**	
M12	X	X					X		Extramatemático		**X**	

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal o subescala, cinco estudiantes contestaron que era cantidad, dos de ellos cantidad y espacio y forma a la vez y cinco espacio y forma.
- En relación a la situación, cuatro estudiantes contestaron personal, dos educativa o laboral, uno personal y educativo a la vez, y cinco pública.
- En relación al nivel de complejidad, tres de ellos respondieron que era del nivel de reproducción, nueve del nivel de conexión y tres del nivel de reflexión.

Los estudiantes que consideraron que este problema era del nivel de reproducción, indicaron que solo se trataba de medir distancias y sumar cantidades: "*aplicación de una fórmula y una operación inmediata*". Los que consideraron este problema del nivel de reflexión, indicaron que había una diversidad de formas de resolución y conocimientos involucrados.

En este caso solo dos estudiantes manifestaron que no resolvieron un problema parecido con sus alumnos y diez si lo hicieron.

En la tabla 10.4 se muestran las dimensiones que los estudiantes asignaron al problema “Tiempo de reacción 1” cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son según PISA 2003: cantidad, científica y reproducción, respectivamente.

Tabla 10.4. Dimensiones asignadas al problema Tiempo de Reacción 1

Problema: TIEMPO DE REACCIÓN 1 (Cantidad - Científica - Reproducción)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1	X					X			Competencia atlética	**X**		
M2			X				X		Extramatemático	**X**		
M3	X						X		Extramatemático	X		
M4			X				X		Extramatemático		x	
M5	X						X		Carrera de atletismo		**x**	
M6	X						X		Extramatemático	X		
M7	X						X		Extramatemático	**X**		
M8	X								Extramatemático	**X**		
M9	X						X		Carrera de atletismo		**x**	
M10			X				X		Extramatemático		x	
M11			X		X	X			Carrera de competencias		x	
M12	X				X		X		Competencia de carreras		x	

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal, ocho estudiantes contestaron que era cantidad y cuatro de ellos que era de cambio y relaciones.
- En relación a la situación, un estudiante respondió que era personal, otro que era personal y educativa o laboral, a la vez, un tercero educativa y nueve que era pública. Ninguno mencionó que era de tipo científica (considerado así en PISA 2003).
- En relación al nivel de complejidad, seis de ellos respondieron que era del nivel de reproducción y seis contestaron que era de conexión.

En este caso seis estudiantes de la MEM manifestaron que resolvieron un problema parecido con sus alumnos y los otros seis no lo hicieron.

En la tabla 10.5 se muestran las dimensiones que los estudiantes asignaron al problema "Tiempo de reacción 2" cuyas dimensiones: Ideas principales, situación y contexto y nivel de complejidad son, según PISA 2003, respectivamente: cantidad, científica y conexión.

Tabla 10.5. Dimensiones asignadas al problema Tiempo de Reacción 2

Problema: TIEMPO DE REACCIÓN 2 (Cantidad - Científica - Conexión)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1	X					X			Competencia atlética		**X**	
M2				X			X		Extramatemático		**X**	
M3	X						X		Extramatemático	x		
M4				X				X	Extramatemático			x
M5	X						X		Carrera de atletismo	-	-	-
M6	X						X		Extramatemático	x		
M7	X						X		Extramatemático		X	
M8	X								Extramatemático		X	
M9	X						X		Carrera de atletismo	-	-	-
M10			X					X	Extramatemático			x
M11			X		X		X		Extramatemático			x
M12				X			X		Extramatemático			x

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Los resultados fueron los siguientes:

- En cuanto a la idea principal, siete estudiantes contestaron que era cantidad, dos que era de cambio y relaciones, y tres contestaron que era de incertidumbre.
- En relación a la situación, un estudiante respondió que era personal y pública, a la vez; uno educativa; siete pública; dos científica y uno no respondió nada.
- En relación al nivel de complejidad, dos de ellos respondieron que era del nivel de reproducción, cuatro del nivel de conexión, cuatro del nivel de reflexión y dos estudiantes no contestaron

nada, pues no llegaron a resolver el problema, al parecer por falta de tiempo (llegaron tarde a la sesión de clase).

En este caso solo dos estudiantes desarrollaron un problema parecido con sus alumnos y los otros diez estudiantes no lo hicieron. Todos los estudiantes de la MEM estuvieron de acuerdo en que para determinar la situación y contexto y la subescala de cada problema PISA planteado no necesitaron resolver los problemas. En cambio, para indicar el nivel de complejidad de estos mismos problemas, sí tuvieron que resolverlos.

4.3 Respuestas a los problemas "chatear" y "carpintero adaptado"

En las Tablas 10.6 y 10.7 se recogieron las respuestas de los estudiantes de la MEM a las preguntas relacionadas con el problema "Chatear 1 y 2".

Tabla 10.6. Dimensiones asignadas al problema Chatear 1

Problema: CHATEAR 1 (Cambio y relaciones - Personal - conexión)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1	X				X				Extramatemático	x		
M2	X							X	Extramatemático		X	
M3	X				X						X	
M4			X			X					X	
M5	X					X			Extramatemático	X		
M6	X				X				Extramatemático		X	
M7			X			X						x
M8	X				X				Extramatemático	**x**		
M9			X		X				Extramatemático		**X**	
M10			X		X				Extramatemático		**X**	
M11			X		X				Extramatemático	x		
M12	X				X				Extramatemático		X	

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Con respecto a la pregunta 1, que está clasificada en el nivel de conexión por los expertos de PISA 2003, siete estudiantes de la MEM señalaron que era de conexión y cinco de ellos indicaron que era de reproducción. Los estudiantes justificaron que eligieron el nivel de reproducción porque se tenía que calcular una diferencia y luego sumarla a otra cantidad, y no consideraron que había conexiones como las del concepto de cambio horario o de geografía (Berlín o Sidney está más al Este). Algunas de sus respuestas fueron: "Calcular la diferencia entre dos cantidades y luego sumarla a otra cantidad", "Solo se requiere encontrar la diferencia horaria a través de una sustracción y la misma diferencia horaria aplicarla para el segundo caso", "Bastaría con ver la diferencia horaria para dar la respuesta", "Es cuestión de sumar de manera simultánea".

Con respecto al problema Chatear 2 (ver Tabla 10.7), que es un problema del nivel de reflexión, según los expertos de PISA 2003, ocho de los doce alumnos de la Maestría indicaron que era de conexión y cuatro de ellos que era de reflexión.

Tabla 10.7. Dimensiones asignadas al problema Chatear 2

Problema: CHATEAR 2 (Cambio y relaciones - Personal - Reflexión)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1			X		X				Extramatemático		x	
M2		X		X				X	Extramatemático			X
M3	X				X				Extramatemático		x	
M4			X			X			Extramatemático		x	
M5	X				X				Extramatemático		x	
M6			X		X				Extramatemático			X
M7			X			X			Extramatemático			X
M8	X				X				Extramatemático		x	
M9	X		X		X				Tiempo		**x**	
M10			X				X		Extramatemático			X
M11			X		X				Extramatemático		x	
M12			X		X				Extramatemático		x	

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Los estudiantes justificaron que era del nivel de conexión porque, según ellos, se debió relacionar horarios o diferencias horarias. Algunas de sus respuestas fueron: "El alumno debe trabajar con sistemas de tiempo referenciales que están relacionados por las diferencias horarias", "es cuestión de sumar y relacionar de manera simultánea", "hay que establecer un vínculo entre los horarios",

Con relación al problema del Carpintero, tenemos que

> *Esta pregunta de respuesta de elección múltiple se sitúa en un contexto educativo, ya que es el tipo de problema casi realista que podría darse con frecuencia en una clase de matemáticas, más que un problema genuino de los que podríamos encontrarnos en un entorno de trabajo. Aunque no cabe considerarlos típicos, sí se ha introducido un pequeño número de estos problemas en la evaluación PISA. Sin embargo, las habilidades necesarias para este problema son sin duda relevantes y forman parte de la competencia matemática. Esta pregunta ilustra el nivel 6 con una dificultad de 687 puntos; pertenece al área de contenido espacio y forma y encaja en el grupo de competencias de conexión, dado que no es un problema rutinario.* (OCDE 2004, p.52)

Como se explicó en el capítulo 9, en la adaptación de este problema, se cambió las respuestas de elección múltiple por una de abierta, en la que se pedía justificar la respuesta. En la tabla 10.8 se muestran las dimensiones que cada estudiante de la MEM asignó al problema propuesto.

Tabla 10.8. Dimensiones asignadas al problema del Carpintero (Adaptado)

Problema: CARPINTERO adaptado (Espacio y forma - Educativa - conexión)												
Pf	**Subescalas o Ideas Principales**				**Situación y contexto**					**Niveles de complejidad**		
	Cantidad	**Espacio y forma**	**Cambio y relaciones**	**Incertidumbre**	**Personal**	**Educativa o Laboral**	**Pública**	**Científica**		**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1		X					X		Extramatemático	x		
M2		X					X		Extramatemático	x		
M3		X				X			Extramatemático	x		
M4		X					X		Extramatemático		X	
M5		X				X			Extramatemático		**X**	
M6		X			X				Extramatemático		X	
M7		X				X			Extramatemático		X	
M8		X				X			Extramatemático			**x**
M9	X	X	X						Extramatemático			**x**
M10		X				X			Extramatemático		**X**	
M11		X					X		Extramatemático		X	
M12		X				X			Extramatemático		X	

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Con relación al nivel de complejidad del problema, siete estudiantes indicaron que era del nivel de conexión, tres indican que era del nivel de reproducción y dos del nivel reflexión. Ahora bien, no justificaron su elección.

En cuanto al tercer problema PISA 2003, Niveles de CO_2, lamentablemente, solo llegaron a resolverlo dos estudiantes de la MEM, por cuestión de falta de tiempo.

A la pregunta formulada a los estudiantes sobre si habían resuelto con sus propios alumnos un problema parecido a los planteados, obtuvimos los siguientes resultados:

Con respecto al problema Chatear 1, solo tres de los estudiantes de la maestría contestaron que sí, dos de las respuestas coincidieron con la respuesta formulada por los expertos de PISA 2003. Con respecto al problema Chatear 2, solo un estudiante respondió que sí y no coincide con el nivel que formulan los expertos de PISA 2003. Con respecto al problema Carpintero adaptado, solo cuatro estudiantes respondieron que sí y dos de estas respuestas no coinciden con el nivel que proponen los expertos de PISA 2003.

En la Tabla 10.9 se resume el nivel de complejidad asignado por cada estudiante de la MEM a los problemas comentados en la segunda sesión.

Tabla 10.9 Niveles de complejidad asignados al Problema del carpintero (Adaptado)

Nivel / Alumno	**Reproducción**	**Conexión**	**Reflexión**
M1	Chat1/Carp	Chat2/CO1	CO2
M2	Carp	**Chat1**/ CO1	**Chat2**/ CO2
M3	Carp	**Chat1**/Chat2	
M4		**Chat1**/Chat2/**Carp**	
M5	Chat1	Chat2/ **Carp**	
M6	Chat1	**Carp**	**Chat2**
M7		**Chat1/Carp**	**Chat2**
M8	Chat1	Chat2	Carp
M9		**Chat1**/Chat2	Carp
M10		**Chat1/Carp**	**Chat2**
M11	Chat1	Chat2/**Carp**	
M12		**Chat1**/Chat2/**Carp**	

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Los estudiantes de la MEM no tuvieron en cuenta el hecho de que sus alumnos hubieran resuelto problemas parecidos previamente como un factor influyente para determinar los niveles de complejidad.

4.4 Respuesta sobre la evaluación de competencias matemáticas a una solución dada por un alumno

En la Tablas 10.10 y en el gráfico 10.1 se recogen las respuestas de los estudiantes de la MEM sobre las competencias activadas en la solución del alumno de secundaria del problema del carpintero adaptado y el nivel de complejidad de cada competencia.

Tabla 10.10. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado)

	Reproducción (Rp)	Conexión (C)	Reflexión (Rf)	I. Pensar y razonar	II. Argumentación	III. Comunicación	IV. Construcción de modelos	V. Formulación y resolución de Problemas	VI. Representación	VII. Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico	VII. Empleo de soportes y herramientas.
M1		X		C	Rp	Rp	Rp	Rp	NO	Rp	NO
M2		X		C	C	C	C	Rp	Rp	Rp	NO
M3			X	Rp	Rf	C	NO	C	Rp	NO	NO
M4		X		C	C	C	SÍ	C	NO	C	NO
M5		X		C	NO	Rp	NO	C	Rp	NO	SI
M6		X		C	C	C	C	Rp	Rp	Rp	NO
M7		X		C	C	C	NO	C	C	NO	NO
M8			X	Rf	Rf	SÍ	NO	SÍ	C	NO	NO
M9	X			Rp	Rp	Rp	Rp	Rp	Rp	NO	NO
M10		X		C	C	C	C	C	C	C	NO
M11		X		C	C	C	C	C	C	-	-
M12		X		C	C	C	C	C	C	C	NO

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

Reproducción							Conexión							Reflexión						
I	II	III	IV	V	VI	VII	I	II	III	IV	V	VI	VII	I	II	III	IV	V	VI	VII
	M1	M1	M1	M1		M1	M1													
				M2	M2	M2	M2	M2	M2	M2										
M3					M3				M3		M3				M3					
							M4	M4	M4		M4		M4							
		M5			M5	M5	M5				M5									
				M6	M6	M6	M6	M6	M6	M6										
							M7	M7	M7		M7	M7								
														M8	M8					
M9	M9	M9	M9	M9	M9															
							M10	M10	M10	M10	M10	M10	M10							
							M11	M11	M11	M11	M11	M11								
							M12	M12	M12	M12	M12	M12	M12							
2	2	3	2	4	5	4	9	7	8	5	7	4	3	1	2					

Gráfico 10. 1. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al Problema del Carpintero (Adaptado). Elaborado con las respuestas de la Tabla 10.10 Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado).

Todos los estudiantes de la MEM manifestaron que la competencia *pensar y razonar* se presentó en la solución dada por el alumno de secundaria que resolvió el problema. Lo que no concordaron fue en el nivel de complejidad, ya que dos de ellos lo clasificaron en el nivel de reproducción, uno en el nivel de reflexión y nueve de ellos en el nivel de conexión.

Solo un estudiante señaló que la competencia *argumentación* no se presentó. Los once alumnos restantes tampoco concordaron en el nivel: dos de ellos señalaron el nivel de reproducción para esta competencia, dos el nivel de reflexión y siete el nivel de conexión.

Todos los estudiantes manifestaron que la competencia *comunicación* se presentó en esta solución. Nueve de ellos indicaron el nivel de conexión, tres de reproducción y uno no decidió el nivel.

Solo ocho estudiantes señalaron la *construcción de modelos* como una competencia que se presentó en esta solución. De estos estudiantes, dos de ellos señalaron el nivel de reproducción y uno no señaló ningún nivel. El resto de los estudiantes indicaron que dicha competencia no se presentó.

Todos los estudiantes manifestaron que la competencia de *formulación y resolución de problemas* se activó. En cuanto al nivel no concordaron, señalando cuatro de ellos el nivel de reproducción, uno de ellos no señaló el nivel y el resto el nivel de conexión.

Nueve de los estudiantes señalaron que la competencia de *representación* se presentó. En cuanto al nivel, cinco de los estudiantes señalaron el nivel de reproducción y el resto el nivel de conexión. Por otra parte, tres estudiantes indicaron que esta competencia no se presentó en la solución.

Solo seis estudiantes indicaron que la competencia e*mpleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* se presentó. Con relación al nivel de complejidad, tres de ellos indicaron el nivel de reproducción y otros tres el de conexión. Un alumno no respondió y los cinco restantes indicaron que no se presentó esta competencia en la solución.

Un estudiante manifestó que se podría considerar activada la competencia e*mpleo de soportes y herramientas* si el alumno hubiese utilizado TIC: “es capaz de usar una TIC para resolver los problemas, pues por sus respuestas en la hoja se ve que, hace traslación, lo cual puede hacerlo fácilmente con una TIC de geometría”. Para este estudiante de la MEM en este caso el nivel sería el de reproducción.

4.5 Resumen de los resultados

A continuación se presenta un resumen de los resultados comentados en los apartados anteriores.

En la Tabla 10.11 y en el gráfico 10.2 se resume la subescala o ideas principales asignada por los estudiantes de la MEM a los problemas comentados en todo el taller.

Tabla 10.11. Ideas principales asignadas a los problemas PISA propuestos

Problema / Ideas Principales	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Cantidad	8	7	8	7	7	4	1
Espacio y forma	0	7	0	0	0	1	12
Cambio y relaciones	4	1	4	2	5	8	1
Incertidumbre	0	0	0	3	0	1	0

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de Currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

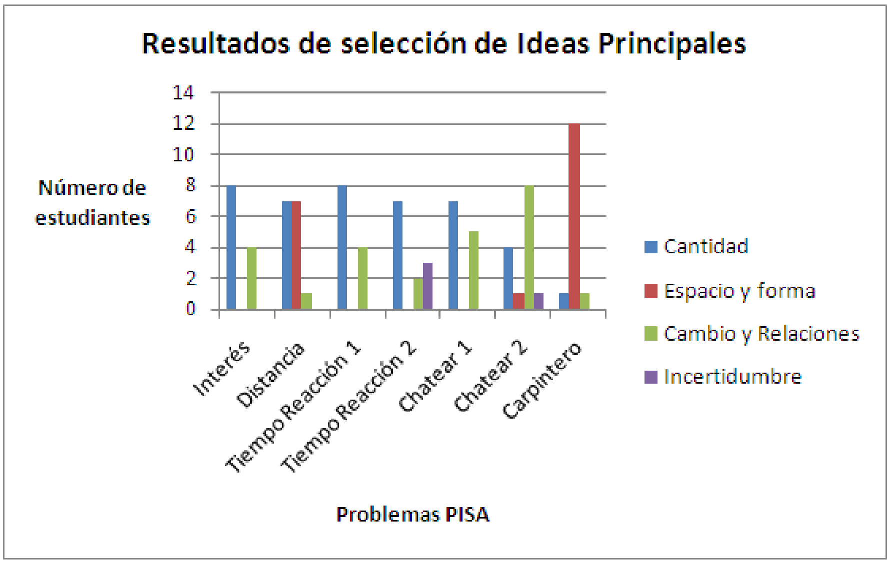


Gráfico 10. 2. Resultados de selección de Ideas Principales. Elaborado con las respuestas de la Tabla 10.11 Ideas principales asignadas a los problemas PISA propuestos.

En la Tabla 10.12 y en el gráfico 10.3 se resume la subescala o ideas principales asignada por los estudiantes de la MEM a los problemas comentados en todo el taller.

Tabla 10.12. Tipo de situaciones asignadas a los problemas PISA propuestos

Problema / Tipo de Situaciones	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Personal	1	5	2	1	8	8	1
Educativo/Laboral	1	3	2	1	3	2	6
Pública	10	5	9	8	0	1	4
Científica	0	0	0	2	1	1	0

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de Currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

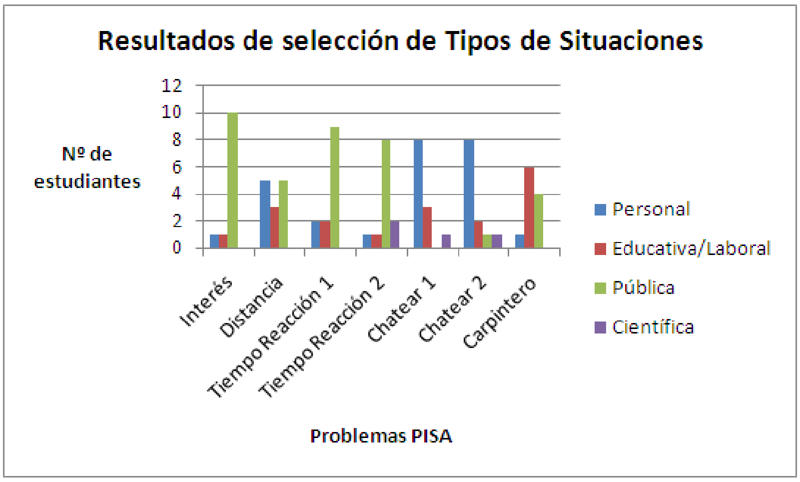


Gráfico 10.3. Resultados de selección de Tipos de Situaciones. Elaborado con las respuestas de la Tabla 10.12. Tipo de situaciones asignadas a los problemas PISA propuestos.

En la Tabla 10.13 y en el gráfico 10.4 se resume el nivel de complejidad asignado por los estudiantes de la MEM a los problemas comentados en todo el taller.

Tabla 10.13. Niveles de Complejidad asignados a los problemas PISA propuestos

Problema / Niveles	Interés	Distancia	Tiempo Reacción 1	Tiempo Reacción 2	Chatear 1	Chatear 2	Carpintero
Reproducción	10	3	6	2	4	0	3
Conexión	2	6	6	4	7	8	7
Reflexión	0	3	0	4	1	4	2

Nota: Respuestas de los estudiantes del curso de Análisis de Currículo de Matemáticas de la Maestría de la Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, 2010-1.

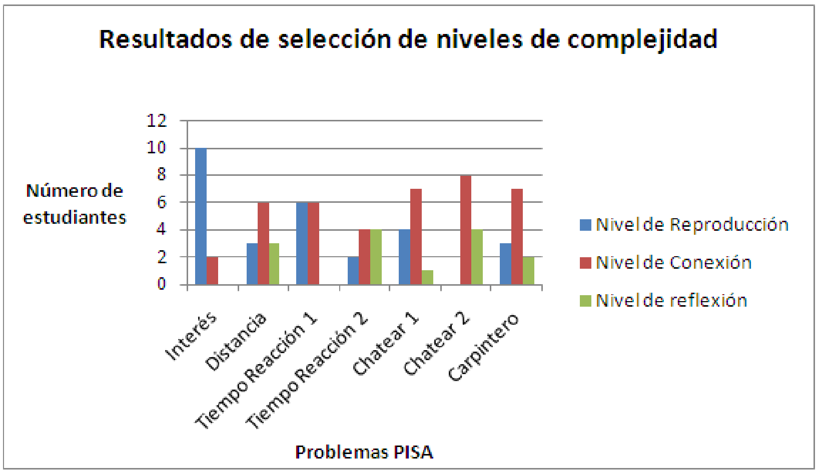


Gráfico 10.4. Resultados de selección de niveles de complejidad. Elaborado con las respuestas de la Tabla 10.13. Niveles de Complejidad asignados a los problemas PISA propuestos.

4.6 Cuestionario 2

El cuestionario 2 tenía tres preguntas, las dos primeras se referían a aspectos académicos y laborales de los participantes y la tercera fue la siguiente:

5. ¿Cree usted que pudo determinar, sin dificultades, las competencias activadas en la solución del alumno proporcionada, correspondiente al problema del CARPINTERO (adaptado), ayudado por la Tabla 1. Competencias PISA/OCDE? Explique su respuesta.

a.	Útil (los descriptores son claros y precisos)	b.	Poco útil (los descriptores no son claros ni precisos)

Explicación:

Las respuestas a las dos primeras preguntas ya fueron descritas en el análisis de los resultados del cuestionario 2. Con relación a la tercera pregunta, todos los estudiantes de la MEM marcaron la respuesta *a* con una cruz, pero hay que resaltar que en la explicación que dieron a continuación cinco de ellos manifiestan que no son claras, no dando mayor explicación.

Tal como se ha dicho en la implementación de la sesión 3, después de utilizar la tabla 1, la profesora presentó la Tabla 2 (Sesión 3-5. Tabla de competencias y niveles de complejidad), que fue bien valorada por los estudiantes de la MEM por ser más precisa, pero su uso no implicó cambios sustanciales respecto a lo que habían hecho con la Tabla 1(Sesión 3-2. Competencias PISA/OCDE).

5. CONSIDERACIONES FINALES

Al diseñar el taller se pensó en participantes que tuvieran una buena competencia matemática como punto de partida, lo cual era garantizado a priori por ser profesores de matemáticas en ejercicio de educación secundaria o primer año de educación superior (ver resultados cuestionario 1). Dicha competencia se verificó cuando los estudiantes de la MEM dieron las respuestas correctas a los problemas planteados. También se pensó en participantes que tuvieran experiencia docente y un cierto conocimiento en Didáctica de las matemáticas, lo cual también se cumplió.

Se tuvo en cuenta, en el diseño y en la implementación del taller, la hipótesis planteada en la discusión de los resultados del primer taller piloto: con mayor conocimiento y práctica de los constructos PISA 2003, los estudiantes podrían "mejorar" en la evaluación de competencias matemáticas. Para ello, proporcionamos en este taller mayor información sobre los constructos PISA 2003 que en el taller piloto, así como más ejemplos y actividades. Sin embargo, a pesar de haber dedicado más tiempo a los siguientes constructos PISA 2003: *situaciones* y *contextos;*

escalas y *niveles de complejidad*, no se consiguió consenso sobre estas dimensiones en las respuestas proporcionadas por los estudiantes de la MEM. En cambio, todos los participantes, estuvieron de acuerdo que para indicar las dimensiones: situaciones y contextos y las escalas no tuvieron necesidad de resolver los problemas PISA planteados.

Por otro lado, los estudiantes de la MEM manifestaron necesitar resolver los problemas PISA 2003 propuestos para poder determinar su nivel de complejidad. Esto confirma la importancia de que los profesores tengan competencia matemática para poder evaluar competencias matemáticas de los alumnos.

Con relación a la evaluación de competencias matemáticas que son activadas en la solución proporcionada por un alumno al problema del carpintero adaptado, tenemos que:

La hipótesis que la competencia *pensar y razonar* debía ser considerada por todos los estudiantes fue corroborada (todos la contemplaron aunque dos lo hicieron en el nivel de reproducción y uno en el nivel de reflexión). Esto era de esperarse, entre otras razones, debido a que si se supone que el problema está bien resuelto, esto implica que el alumno tiene que pensar y razonar para poder resolverlo. Por otra parte, el nivel de complejidad que esperábamos para esta competencia en la respuesta de los estudiantes de la MEM, fue señalado por nueve de ellos (9 conexión, 1 reproducción y 2 reflexión).

La hipótesis que tanto la competencia de *argumentación* como la competencia de *comunicación* deberían presentarse en las respuestas de los estudiantes de la MEM fue corroborada casi por todos (once contemplaron la competencia de argumentación y once contemplaron la competencia de comunicación, aunque no todos les adjudicaran el nivel de conexión). Esto era de esperarse, entre otras razones, porque la solución propuesta está correctamente argumentada y razonablemente bien comunicada. Solo un estudiante manifiesta que no se activa la competencia de argumentación indicando que "las justificaciones del alumno son simples pero exactas, sin embargo falta formalidad matemática para sus respuestas", aunque se observa una cierta contradicción en su respuesta.

La hipótesis que la competencia *construcción de modelos* debía ser considerada por todos los estudiantes de la MEM no fue del todo corroborada (un estudiante no contestó, cuatro consideraron que no se activó y siete la contemplaron, aunque dos de ellos consideraron que era del nivel de reproducción). Algunas de sus respuestas fueron: "teníamos duda si había o no modelación, pero aún con las tablas no nos pusimos de acuerdo y seguimos con la duda". "No usa ni se menciona ninguna expresión matemática, como modelo a usar, salvo el teorema de Pitágoras. Pero no se usó en términos de una realidad o situación física". "No hay acuerdo, faltaría precisar qué es un modelo matemático", "No hay una repetición que nos lleve a la construcción de modelos".

La hipótesis que la competencia de *formulación y resolución de problemas* fue corroborada, ya que todos menos un alumno que no contestó la consideraron. Aunque nuevamente, no coincidieron en cuanto al nivel de complejidad, (7 conexión, 4 reproducción y 1 no señala nada). Esto era de esperar, entre otras razones, porque el problema estaba bien resuelto.

La hipótesis de que la competencia de *representación* debería estar presente en casi todas las respuestas fue corroborada parcialmente puesto que dos estudiantes no la consideraron. Aunque nuevamente, no coincidieron en cuanto al nivel de complejidad, (5 conexión y 5 reproducción).

La hipótesis que la competencia *empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico* debía ser considerada por todos los estudiantes de la MEM no fue del todo corroborada (un estudiante no contestó; cinco consideraron que no se activó y seis que se activó, aunque tres de ellos consideraron que era del nivel de reproducción). Algunas de sus respuestas fueron: "El alumno da una solución escrita pero no de manera simbólica"; "No usa un lenguaje formal y técnico, pues el alumno convenientemente distribuye o asigna cantidades numéricas a los lados de las figuras, tratando de lograr su objetivo"; "No se utiliza registros algebraicos para un análisis lógico formal" "No hay un lenguaje formal".

Los estudiantes de la MEM que no contemplaron esta competencia lo hicieron porque su prototipo de lenguaje matemático simbólico es un lenguaje con muchos símbolos, como el que se usa por ejemplo, para resolver ecuaciones. Parece ser que el lenguaje verbal o gráfico no es considerado lenguaje matemático para algunos estudiantes de la MEM.

La hipótesis de que la competencia de *empleo de soportes y herramientas* no debería estar presente o bien solo a nivel de reproducción fue corroborada (un estudiante no contestó, diez la consideraron a nivel de reproducción y uno consideró que se activó, no indicando el nivel de complejidad).

Si consideramos que cada competencia matemática es una variable cualitativa que puede tomar dos valores (se activa o no se activa), vemos que la frecuencia relativa del valor de esta variable que coincide con la solución experta, proporcionada en nuestra propuesta (ver capítulo 6), es mayor en este taller (ver Tabla 10.14), para algunas competencias, que en los otros talleres realizados. En concreto, para las competencias comunicación, formulación y resolución de problemas y representación.

Tabla 10. 14 Comparación entre competencias que tuvieron mayor coincidencia con la solución experta

Comunicación	**Taller Piloto**	**Taller 1 FP**	**Taller 2 PP**	**Taller 3 MEM**
SI	11/13≈0,846	12/22≈0,545	7/8=0,875	1
NO	2/13≈0,154	10/22≈0,455	1/8=0,125	0

Formulación y resolución de problemas	**Taller Piloto**	**Taller 1 FP**	**Taller 2 PP**	**Taller 3 MEM**
SI	12/13≈0,923	17/22≈0,773	8/8 = 1	1
NO	1/13≈0,077	5/22≈0,227	0	0

Representación	**Taller Piloto**	**Taller 1 FP**	**Taller 2 PP**	**Taller 3 MEM**
SI	10/13≈0,769	15/22≈0,682	8/8= 1	10/12≈0,833
NO	3/13≈0,231	7/22≈0,318	0	2/12≈0,167

Nota: Elaborada con los resultados obtenidos del Taller Piloto, Taller 1 (Futuros profesores FP), Taller 2 (Profesores, PP), Taller 3 (Estudiantes de maestría, MEM)

Aunque no pasa lo mismo con las otras competencias

Tabla 10. 15 Comparación entre las otras competencias

Pensar y razonar	**Taller Piloto**	**Taller 1 FP**	**Taller 2 PP**	**Taller 3 MEM**
SI	12/13≈0,923	22/22= 1	8/8 = 1	12/12=1
NO	1/13≈0,077	0	0	0

Argumentación	**Taller Piloto**	**Taller 1 FP**	**Taller 2 PP**	**Taller 3 MEM**
SI	10/13≈0,769	21/22≈0,955	8/8 =1	11/12≈0,917
NO	3/13≈0,231	1/22≈0,045	0	1/12≈0,083

Construcción de modelos	Taller Piloto	Taller 1 FP	Taller 2 PP	Taller 3 MEM
SI	5/13≈0,385	8/22≈0,364	7/8=0,875	8/12≈0,667
NO	8/13≈0,615	14/22≈0,636	1/8=0,125	4/12≈0,333

Nota: Elaborada con los resultados obtenidos del Taller Piloto, Taller 1 (Futuros profesores FP), Taller 2 (Profesores, PP), Taller 3 (Estudiantes de maestría, MEM)

Por otra parte si consideramos la variable "nivel de complejidad de una competencia" con tres valores posibles (reproducción, conexión y reflexión) observamos que, en el caso del problema del carpintero adaptado, en el taller 3 aumenta la frecuencia relativa del valor de esta variable que coincide con la solución experta derivada del análisis realizado el capítulo 6 (ver Tabla 10.15) con relación al taller 2.

Tabla 10. 16 Comparación entre niveles de complejidad que tuvieron mayor coincidencia con la solución experta

Pensar y razonar	Taller 2 PP	Taller 3 MEM
Reproducción	1/8 = 0,125	1/12≈0,083
Conexión	3/8 = 0,375	9/12 = 0,75
Reflexión	3/8 = 0,375	2/12≈0,167
No señala	1/8 = 0,125	0

Argumentación	Taller 2 PP	Taller 3 MEM
Reproducción	1/8 = 0,125	2/11≈0,182
Conexión	3/8 = 0,375	7/11≈ 0,636
Reflexión	4/8 = 0,50	2/11≈ 0,182

Comunicación	Taller 2 PP	Taller 3 MEM
Reproducción	3/7≈0,4285	3/12 = 0,25
Conexión	3/7≈0,4285	8/12≈0,667
Reflexión	1/7≈0,143	0

No señala		1/12≈0,083

Construcción de modelos	**Taller 2** **PP**	**Taller 3** **MEM**
Reproducción	0	2/8 = 0, 25
Conexión	6/7≈0,857	5/8 = 0,625
Reflexión	0	0
No señala	1/7≈0,143	1/8 = 0,125

Formulación y resolución de problemas	**Taller 2** **PP**	**Taller 3** **MEM**
Reproducción	2/8 = 0,25	4/12 ≈ 0,333
Conexión	4/8 =0,50	7/12 ≈ 0,584
Reflexión	2/8 = 0,25	0
No señala	0	1/12 ≈ 0, 083

Representación	**Taller 2** **PP**	**Taller 3** **MEM**
Reproducción	0/8 = 0	5/10 = 0,5
Conexión	4/8 = 0,5	5/10 = 0,5
Reflexión	2/8 = 0,25	0
No señala	2/8 = 0,25	0

Nota: Elaborada con los resultados obtenidos del Taller 2 (Profesores, PP), Taller 3 (Estudiantes de maestría, MEM

Se puede considerar, de lo observado en las tablas 10.14 y 10.16 que, siguiendo los criterios de idoneidad del EOS ha habido una mayor idoneidad cognitiva.

Los estudiantes de la MEM que eligieron correctamente las competencias y el nivel de competencias matemáticas, no proporcionaron indicadores que justifiquen su elección. Dicho de otra manera, no hicieron un análisis de la actividad matemática a partir del cual encontrar indicadores para justificar su elección de competencias y niveles. Esto nos sorprendió porque considerábamos que, al tener ciertos conocimientos de Didáctica de las Matemáticas, podrían tener algunas herramientas para analizar la actividad matemática. Ahora bien, se mostraron muy interesados en tener dichas herramientas. En concreto, se mostraron muy interesados y motivados en conocer la técnica de análisis de prácticas matemáticas, objetos y procesos matemáticos, propuesta por el EOS, para después poder inferir competencias matemáticas. De alguna manera eran conscientes que la técnica que se les presentó superficialmente y muy rápidamente, tenía ciertas potencialidades.

Si se aplican los criterios de idoneidad propuestos en el EOS (ver capítulo 2) al diseño e implementación de los talleres 1, 2 y 3; consideramos que en este taller hubo una mayor idoneidad epistémica, porque estuvo mejor diseñado; mayor idoneidad cognitiva por que los alumnos aprendieron algo más que en los otros talleres y, sobre todo, mayor idoneidad afectiva, relacionada con la motivación; y una mayor idoneidad mediacional, al contar con mayor tiempo para su desarrollo.

Los talleres realizados en congresos de profesores presentan el problema de que los participantes están disponibles por cortos períodos de tiempo, lo cual dificulta la observación y recolección de datos. Nuestra conclusión fue que era necesario continuar la investigación con un colectivo de cursos de grado o postrado que tuviese más permanencia en el tiempo.

6. VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DE LOS RESULTADOS

La validez y confiabilidad de los resultados y de las conclusiones se basa en dos triangulaciones: 1) una triangulación de datos (hojas de trabajo, y cuestionario) y 2) una triangulación de expertos (doctoranda, director de tesis, y expertos en Didáctica de las Matemáticas). Los análisis realizados se sometieron a la opinión de los expertos en Didáctica de las Matemáticas en la XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, los cuales, después de un proceso de revisión por pares, serán publicados en las actas de este congreso (actualmente en prensa):

- Rubio, N., & Font, V. (2012). Competencia profesional de profesores de secundaria en la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. *Actas de la XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (en prensa).

CAPÍTULO 11

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CICLO FORMATIVO CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Resumen

En esta investigación hemos realizado un experimento de enseñanza para (1) poner a prueba ciertos constructos teóricos del EOS y (2) para confirmar (o no) algunas hipótesis relacionadas con la determinación de las competencias profesionales que requieren los profesores de secundaria para evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos. Previamente diseñamos e implementamos una serie de talleres (ver capítulos 7-10) que nos ayudaron a conjeturar hipótesis y a reformularlas hasta llegar al convencimiento de la plausibilidad de la siguiente hipótesis:

H1) La competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática se puede considerar compuesta por dos macro competencias que, a su vez, se pueden descomponer en otras: a) La competencia matemática y b) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción.

El siguiente paso fue interesarnos por la competencia en análisis didáctico, formulando la siguiente hipótesis:

H2) Hay un núcleo de la competencia en análisis didáctico que entendemos como: Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Y podemos encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia y de cómo se relaciona con las otras competencias profesionales del futuro profesor de matemáticas de secundaria (competencia digital, competencia en modelización, aprender a aprender, etc.). Uno de los componentes esenciales de esta competencia es la competencia en el análisis de las prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos (APOPM) activados en dichas prácticas.

Nuestro objetivo en esta investigación no era tanto corroborar (o no) esta hipótesis sino que estábamos interesados en otra hipótesis relacionada con ella:

H3: La competencia profesional del profesor en el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas, es un "saber de fondo" que permite la evaluación y desarrollo de la competencia matemática de sus alumnos

Dado que la hipótesis H2 se había tenido en cuenta (Font, 2011a) en el diseño del máster de Formación del Profesorado de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), como puede verse en los planes docentes de las diferentes asignaturas de dicho máster, decidimos implementar un Ciclo Formativo en este máster con el objetivo de comprobar (o no) la hipótesis H3. Para ello, nos planteamos el siguiente objetivo con sus correspondientes objetivos específicos:

Objetivo 5: Diseñar e implementar un ciclo formativo en el máster de FPS de matemáticas que desarrolle primero el APOPM y después la evaluación analítica y global de competencias matemáticas.

5.1 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el máster de FPS de matemáticas que desarrolle el APOPM.

5.2 Determinar si la inferencia de procesos que realizan, a partir de respuestas a tareas, los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas matemáticas, objetos y procesos matemáticos, es coincidente, o como mínimo no contradictoria, con la se realiza utilizando la tipología de procesos matemáticos realizada a partir del marco teórico del EOS.

5.3 Determinar si hay alumnos con competencia matemática que después del ciclo formativo para el APOPM son capaces, por propia iniciativa, de realizar una evaluación analítica y global de competencias.

5.4 Determinar si los alumnos consideran que el APOPM es útil para la evaluación de competencias matemáticas.

5.5 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el máster de FPS de matemáticas que desarrolle la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM.

5.6 Determinar si los alumnos consideran que la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM es útil para la evaluación de competencias.

En este capítulo se explica el diseño y la implementación del ciclo formativo contemplado en el objetivo específico 5.1. El punto de partida del experimento de enseñanza realizado ha sido el máster de FPSM de la Universitat de Barcelona. Se trata de un máster pensado para desarrollar la competencia de análisis didáctico de los futuros profesores, siendo una de sus componentes el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos activados en dichas prácticas. Se trata, pues, de un máster en el que el profesorado explica los constructos de práctica matemática, objeto matemático y proceso de acuerdo con la caracterización que hace de dichos constructos el EOS. Dicho de otra manera, ya se cumplía en cierta manera el objetivo específico 5.1.

El experimento diseñado se organizó sobre dos de las asignaturas del máster de FPSM de la UB: Innovación e investigación sobre la propia práctica y Didáctica de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato. En concreto, se propusieron dos modificaciones con relación a lo que se había explicado en el curso anterior: 1) Un explicación más amplia y sistemática de la noción y tipología de proceso matemático y 2) La incorporación de la explicación de una técnica de evaluación analítica de competencias matemáticas a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos. La primera modificación tenía por objetivo investigar si la inferencia de procesos propuesta en el enfoque ontosemiótico a partir de la actividad desarrollada para resolver determinadas tareas (Font, Rubio y Contreras, 2008) es similar a la que realiza un grupo de futuros profesores de secundaria de matemáticas (objetivo específico 5.2). La segunda modificación estaba relacionada, sobre todo, con los subobjetivos 5.3-5.6.

Nuestra conclusión a la pregunta formulada: ¿La inferencia de procesos matemáticos propuesta en el capítulo 5 —realizada a partir del marco teórico del EOS y validada por un procedimiento de triangulación de expertos—, es coincidente con la que realizan los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos? (objetivo específico 5.2)? es que, a pesar de la ambigüedad que se produce al inferir procesos, la moda de las respuestas de los alumnos coincide con la inferencia de procesos que se realiza en el capítulo 5. En nuestra opinión, se trata de un resultado que permite ser optimista con relación a la enseñanza de procesos ya que, dentro de la ambigüedad inevitablemente asociada a la enseñanza de este tipo de contenido, es posible llegar a un cierto consenso sobre su terminología y *conceptualización.*

Un aspecto que nos pareció muy relevante en la experimentación del ciclo formativo es que hay alumnos que, por propia iniciativa, infieren competencias a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos realizado para describir la actividad matemática realizada por un alumno. Se trata de un caso relevante para la investigación que se presenta ya que metafóricamente se puede considerar como un "teorema de existencia" para el objetivo específico 5.3 de esta investigación.

En el ciclo formativo implementado se enseñó a los alumnos a realizar un análisis de prácticas matemáticas, objetos y procesos matemáticos y después se les preguntó su opinión sobre la utilidad de este tipo de análisis para la evaluación de competencias matemáticas (objetivo específico 5.4). La conclusión es que los futuros profesores mayoritariamente consideraron que este tipo de análisis podía ser una ayuda para realizar la evaluación de competencias.

En el ciclo formativo implementado se enseñó a los alumnos a realizar una evaluación analítica de competencias a partir del análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos y después se les preguntó su opinión sobre la utilidad de este tipo de evaluación de competencias (objetivo específico 5.5). La conclusión es que los futuros profesores mayoritariamente consideraron que este tipo de evaluación podía ser útil y, además, manifestaron que se consideraban competentes para poder realizarla.

1. DISEÑO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

En este apartado se explica el diseño de las características del experimento de enseñanza.

1.1. Contexto institucional

El punto de partida del experimento de enseñanza realizado ha sido el máster de FPSM de la Universitat de Barcelona. Se trata de un máster pensado para desarrollar la competencia de análisis didáctico de los futuros profesores, siendo una de sus componentes el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos activados en dichas prácticas. Se trata pues de un máster en el que el profesorado explica los constructos de práctica, objeto matemático y proceso de acuerdo con la caracterización que hace de dichos constructos el EOS. Dicho de otra manera, ya se cumplía en cierta manera el subobjetivos 5.1.

El experimento diseñado se organizó en el contexto de dos de las asignaturas del máster de FPSM de la UB: *Innovación e investigación sobre la propia práctica* y *Didáctica de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato*. En concreto, se propusieron dos modificaciones con relación a lo que se había explicado en el curso anterior: 1) Una explicación más amplia y sistemática de la noción y tipología de proceso matemático y 2) La incorporación de la explicación de una técnica de evaluación analítica de competencias matemáticas a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Estas modificaciones estaban relacionadas con la consecución del objetivo 5 y de sus correspondientes objetivos específicos. La primera modificación tenía por objetivo investigar si la inferencia de procesos propuesta en el enfoque ontosemiótico a partir de la actividad desarrollada para resolver determinadas tareas (Font, Rubio y Contreras, 2008) era similar a la que realizaba un grupo de futuros profesores de secundaria de matemáticas (subobjetivos 5.2). La segunda modificación estaba relacionada, sobre todo, con los subobjetivos 5.3-5.6.

Se trataba de realizar un experimento de enseñanza que permitiese poner a prueba la teoría en la práctica, el trabajo con los futuros docentes en la construcción del conocimiento y el reconocimiento de los límites de la teoría.

1.2. Recolección de datos

Se observaron siete sesiones de clase, de dos horas de duración cada una, impartidas por el mismo profesor en el máster de FPSM de la UB del curso académico 2010-11, correspondientes a los siguientes bloques temáticos de la asignatura *Didáctica de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato*:

- *Tema 1: La actividad matemática.* Práctica matemática, objetos y procesos matemáticos. Resolución de problemas y modelización. Conexión de las matemáticas con otras disciplinas, con la vida cotidiana y aspectos transversales. Intuición, formalización y rigor. Características del razonamiento matemático de los alumnos de secundaria.
- *Tema 3: Desarrollo del currículo:* Currículos de matemáticas para la etapa de secundaria. Competencias matemáticas de la educación secundaria. Programación, secuenciación de contenidos y diseño de actividades. Evaluación. Dificultades de aprendizaje y atención a la diversidad. Utilización de recursos. Análisis de situaciones didácticas. Introducción a la didáctica de los diferentes bloques del currículo de la ESO y del bachillerato (geometría, análisis, números y medida, álgebra, organización e interpretación de la información y la probabilidad

Y a los siguientes bloques de la asignatura *Innovación e investigación sobre la propia práctica*

- La investigación destinada a favorecer los procesos de mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- La aplicación y difusión de los resultados de la investigación.

En este experimento de enseñanza el profesor que impartió las clases fue el director de tesis y la doctoranda asistió como observadora a todas las clases. No hubo un cambio de profesor ya que el director de tesis era el profesor asignado para impartir las sesiones de clase observadas. Lo que si se modificó fueron las sesiones de clase con respecto a las que se habían impartido el curso anterior.

Las modalidades de trabajo realizadas durante el desarrollo de las sesiones de clase variaron según el tema presentado, pero en líneas generales se llevó a cabo de la siguiente manera: las clases se iniciaban con reflexiones del profesor sobre un nuevo tema, o bien respecto de uno ya trabajado, seguían con presentaciones con diapositivas en las que se mostraba, teoría y ejercicios (episodios de aula videograbados, hojas de trabajo, manipulación de programas informáticos, etc.). Había momentos de trabajo, en pequeños grupos y en el gran grupo.

En las siete sesiones de clases participaron los 22 alumnos matriculados en las dos asignaturas. La mayoría de estos alumnos tenían estudios de grado que no aseguraban una competencia matemática de base, debido a que habían cursado pocos créditos de matemáticas en los estudios que les habían permitido acceder al máster de FPSM.

Las características del entorno en el que se desarrolló el ciclo formativo fueron clases presenciales con un uso importante de la plataforma Moodle. El Moodle es un Ambiente Educativo Virtual que ayuda a los educadores a crear comunidades de aprendizaje en línea. Este tipo de plataformas tecnológicas, conocidas también como LMS (Learning Management System), permite que el alumno tenga acceso remoto a documentos, videos, etc., y que pueda realizar tareas (propuestas en la plataforma), dando sus respuestas a través de la misma plataforma. Las clases presenciales fueron, aproximadamente, 10 horas por crédito ECTS de la asignatura (que representan un 40% del trabajo total del alumno).

La secuencia de las clases impartidas, documentos, tareas, etc., tal como quedó registrado en la plataforma moodle puede verse ordenado en las figuras 11.1, 11.2, 11.3, 11.4 y 11.5. Lo que aparece en color más claro, (por ejemplo, “tasca 1 – Lliurament de l’anàlisi de practiques”), está oculto para los alumnos hasta que el profesor lo hace visible en el momento que cree conveniente.

Figura 11.1. Ciclo Formativo. Actividad introductoria (Niveles de análisis didáctico)

Figura 11.2. Ciclo Formativo. Prácticas Matemáticas

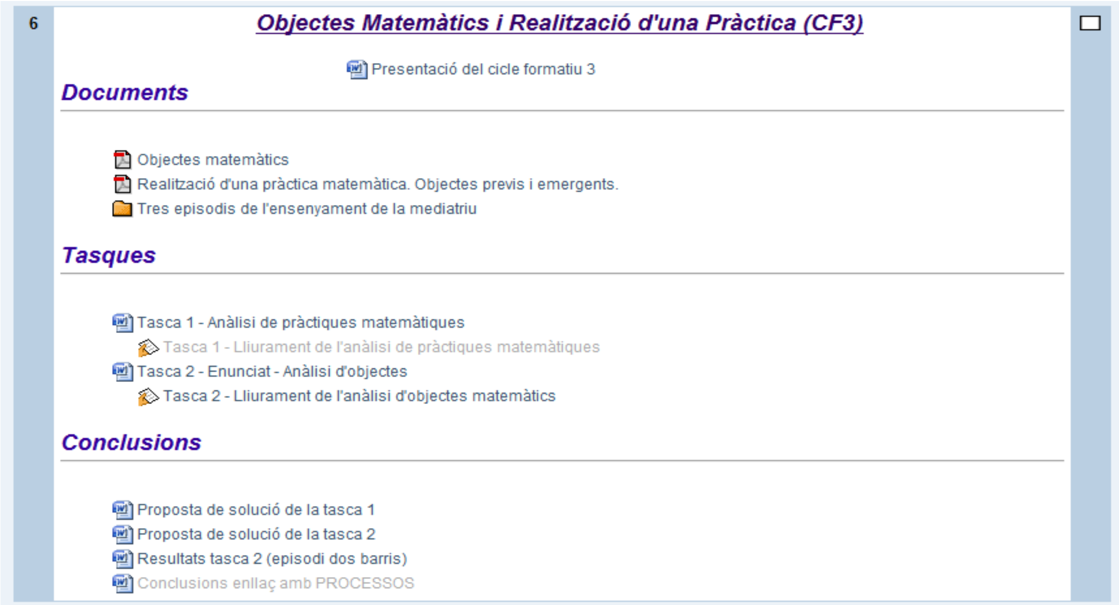


Figura 11.3. Ciclo Formativo. Objetos matemáticos y realización de una práctica

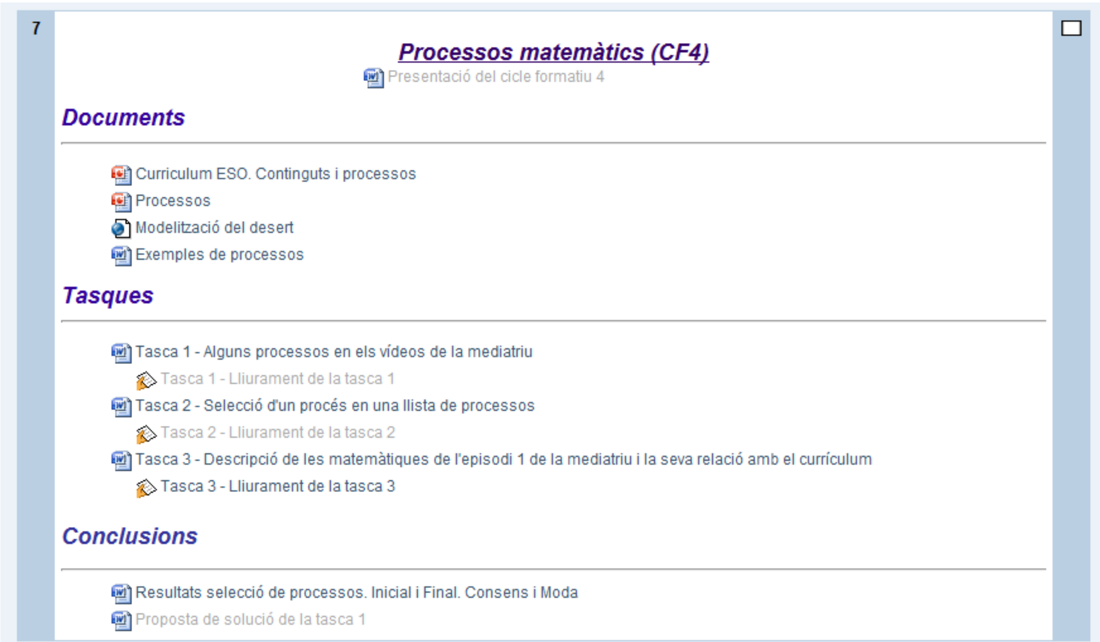


Figura 11.4. Ciclo Formativo. Procesos matemáticos

Figura 11.5. Ciclo Formativo. Evaluación Analítica de Competencias

El registro de la información fue: 1) la grabación en video de las cuatro primeras horas de clases, 2) la grabación en audio de las restantes, 3) los documentos repartidos por el profesor y las hojas de respuestas de cada uno de los asistentes (por ejemplo, la hoja de conclusiones sobre las prácticas realizadas en relación al problema de densidades, evaluaciones diagnóstica y final del tema de procesos, la tarea de la mediatriz, la tarea del carpintero, cuestionario final).

Para la validación y análisis de los resultados se realizaron triangulaciones de datos y de expertos. La triangulación de datos consistió en la recolección de datos diferentes en momentos diferentes, el uso de la misma actividad dos veces seguidas o la realización de entrevistas. La triangulación de expertos consistió en una opinión de un experto sobre la pertinencia, por ejemplo, del agrupamiento en familias de procesos, realizado por los investigadores y sobre el uso de la moda en este caso.

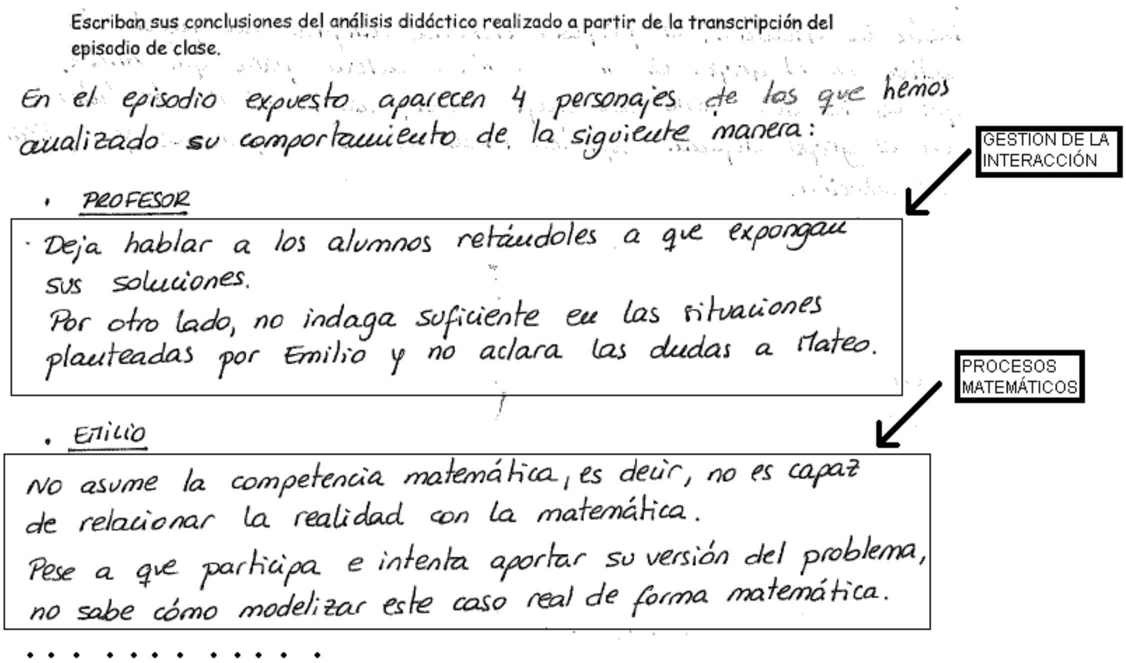
2. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS DOS PRIMERAS SESIONES DEL CICLO FORMATIVO

Las dos primeras sesiones del ciclo formativo se unificaron en una única sesión de cuatro horas, dos de las cuales correspondieron a la primera sesión de la asignatura de *Didáctica de la Matemáticas en la ESO y en el bachillerato* y las otras dos horas a la primera sesión de la asignatura de *Innovación e Investigación sobre su propia práctica*.

La sesión se inició proponiendo a los futuros profesores el análisis de un episodio sin explicación previa de elementos teóricos. El objetivo era conocer su competencia inicial en análisis didáctico de proceso de instrucción. En concreto, se les propuso la lectura y análisis de un episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010) — en este episodio un grupo de tres alumnos de 15-16 años resuelven un problema contextualizado en una clase de cuarto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) durante diez minutos—. Este primer análisis se debía realizar a partir de su experiencia previa. El proceso seguido fue el siguiente (en el Anexo 32. Materia l-Material 5, están las hojas de trabajo entregadas a los futuros profesores):

1. Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción.
2. Formación de grupos de 3-4 personas.
3. Análisis didáctico del episodio de clase en grupo.
4. Elaboración de conclusiones.
5. Presentación a los otros grupos de las conclusiones.

En el anexo 33 se encuentra, a modo de ejemplo, las conclusiones que elaboró uno de los grupos. A continuación siguen, a modo de ejemplo (ver figuras 11.6 y 11.7), partes de las respuestas de dos grupos de alumnos, en las que se pueden ver que los futuros profesores tuvieron en cuenta en sus análisis didácticos iniciales diferentes aspectos:


Escriban sus conclusiones del análisis didáctico realizado a partir de la transcripción del episodio de clase.

En el episodio expuesto aparecen 4 personajes de los que hemos analizado su comportamiento de la siguiente manera:

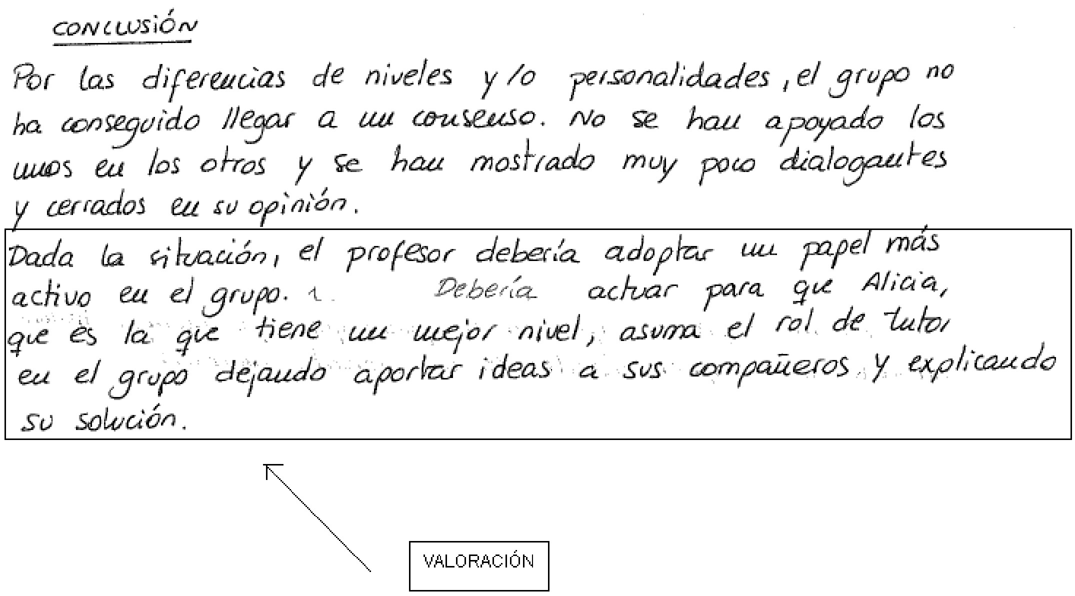
• PROFESOR

· Deja hablar a los alumnos retándoles a que expongan sus soluciones.
Por otro lado, no indaga suficiente en las situaciones planteadas por Emilio y no aclara las dudas a Mateo.

• EMILIO

No asume la competencia matemática, es decir, no es capaz de relacionar la realidad con la matemática.
Pese a que participa e intenta aportar su versión del problema, no sabe cómo modelizar este caso real de forma matemática.

. . . .


CONCLUSIÓN

Por las diferencias de niveles y/o personalidades, el grupo no ha conseguido llegar a un consenso. No se han apoyado los unos en los otros y se han mostrado muy poco dialogantes y cerrados en su opinión.

Dada la situación, el profesor debería adoptar un papel más activo en el grupo. Debería actuar para que Alicia, que es la que tiene un mejor nivel, asuma el rol de tutor en el grupo dejando aportar ideas a sus compañeros y explicando su solución.

Figura 11.6. Respuesta parcial del grupo A

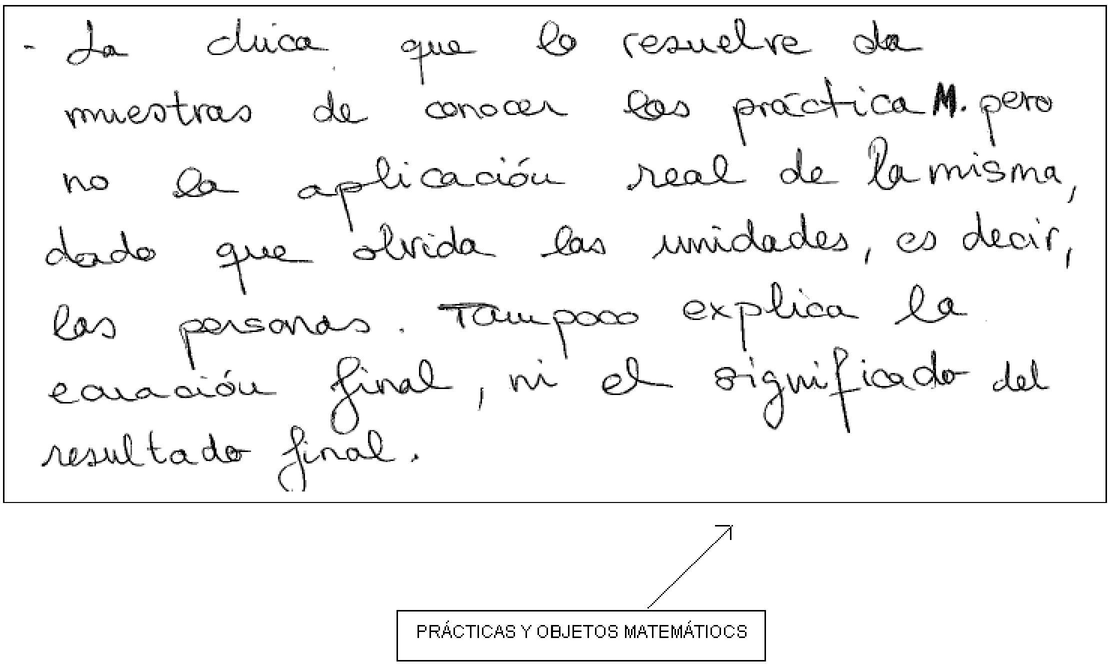

- La chica que lo resuelve da muestras de conocer las práctica M. pero no la aplicación real de la misma, dado que olvida las unidades, es decir, las personas. Tampoco explica la ecuación final, ni el significado del resultado final.

Figura 11.7. Respuesta parcial del grupo B

Así, por ejemplo, algunos centraron su atención en el hecho de que en el episodio de clase analizado el profesor realizaba un proceso de institucionalización de la resolución de un problema; otros fijaron su atención en algunos objetos matemáticos (proporcionalidad, ecuaciones, etc.) presentes, según ellos, en la transcripción. La mayoría expresó apreciaciones negativas en torno a la práctica profesional del profesor del episodio. Para argumentarlas, mencionaron, entre otros aspectos, el hecho de que el profesor no había gestionado bien algunas intervenciones de los alumnos o bien que había creado un clima emocional desfavorable para dos de ellos. También sugirieron cómo tendría que haber actuado el profesor del episodio.

En este primer análisis cada grupo de futuros profesores participantes utilizaron algunos de los niveles didácticos del modelo de análisis descrito en Font, Planas y Godino (2010) − 1) Análisis de las prácticas matemáticas; 2) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas; 3) Análisis de interacciones didácticas y de conflictos; 4) Identificación del sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de instrucción; 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción− y en la puesta en común del gran grupo se observó que, si bien cada grupo no utilizó todos estos niveles de análisis didáctico, todos ellos aparecieron, implícita o explícitamente, en la puesta en común porque fueron utilizados por alguno de los grupos.

El profesor les hizo observar que los niveles de análisis 1-4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender) que permite responder a la pregunta ¿Qué está pasando (y por qué) aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva (para evaluar y para indicar el camino a seguir) que permite responder a la pregunta ¿Qué se debería hacer?

El profesor en la puesta en común hizo observar que en los análisis realizados por algunos grupos se hacía referencia a las matemáticas del episodio, lo cual le permitió formular la siguiente pregunta: ¿Cómo describir las "matemáticas" del episodio? y propuso, utilizando como ejemplo los análisis realizados por algunos grupos, la siguiente respuesta: describiendo las prácticas, objetos y procesos matemáticos.

Con relación al término práctica el profesor comentó primero que se trata de un término que tiene un territorio compartido con otros términos también utilizados en la Didáctica de las Matemáticas como son, entre otros, los siguientes: actividad matemática, competencia matemática, procesos matemáticos. Después formuló la siguiente pregunta: ¿Qué se entiende por práctica matemática? y, utilizando algunos de comentarios de los alumnos, resaltó las siguientes ideas: 1) La realización de una práctica por una persona tienen un componente observable y un componente no observable directamente. 2) Si nos fijamos en la parte observable podríamos considerar, como primera caracterización, que la práctica matemática consiste en la lectura y producción de textos matemáticos, pero conviene matizar esta idea para no confundir práctica con conducta. 3) Hay que distinguir entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas, y práctica, que en tanto que acción humana orientada a una finalidad tiene un sentido, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta. En el caso de las prácticas matemáticas su sentido viene determinado por la función que esta práctica desempeña en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. 4) Esta manera de entender el sentido de las prácticas matemáticas implica que se las considera acciones sujetas a reglas. 5) Una segunda conceptualización de práctica matemática es la que proponen Godino y Batanero (1994): toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien (persona o institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. 6) Las prácticas matemáticas se suceden a largo del tiempo, por tanto una buena manera de describirlas es mediante la narración de lo sucedido. 7) De hecho la narración de prácticas matemáticas es el discurso que suele utilizar un profesor cuando quiere explicar con detalle a otro profesor lo que ha explicado en sus clases.

Después de esta explicación, el profesor analizó las prácticas matemáticas realizadas por Alicia, una de las participantes en el episodio, y propuso a los futuros profesores que analizaran las prácticas matemáticas realizadas por los otros participantes (Emilio, Mateo y el profesor) respondiendo a un cuestionario. En el anexo 34 se hallan, a modo de ejemplo, las respuestas de uno de los grupos (ver Anexo 34. Respuestas de los alumnos sobre las matemáticas en un episodio de clase). A continuación se comentaron las respuestas de los diferentes grupos entre sí y con las que el profesor había elaborado en la presentación con diapositivas de la sesión, que después los alumnos podían descargar del moodle de la asignatura (ver Anexo 35. Presentación de las sesiones 1 y 2).

Con relación al término objeto, el profesor hizo los siguientes comentarios: 1) De manera amplia se puede entender por objeto matemático todo aquello que, de alguna manera, está formando parte de la práctica matemática. Por tanto, *ser* objeto matemático es *estar participando*, de alguna manera, en la práctica matemática. 2) “Objeto matemático” es una metáfora que consiste en trasladar una de las características de las cosas físicas (la posibilidad de separación de otras “cosas”) a las matemáticas. Por tanto, de entrada, todo lo que se pueda “individualizar” en matemáticas será considerado como objeto (un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc.). 3) La afirmación de que todo lo que está participando en las prácticas matemáticas es objeto matemático se puede ir concretando. En un primer nivel tenemos una tipología de entidades que están participando (por ejemplo, se pueden observar en un texto matemático) en la práctica matemática (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos, representaciones y argumentos), que llamaremos objetos primarios. A continuación los alumnos respondieron a un cuestionario en el que tenían que completar una lista de objetos primarios del episodio que habían analizado inicialmente con base a su experiencia previa, en concreto los procedimientos y proposiciones. Por cuestiones de tiempo, se respondió oralmente y en gran grupo.

3. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA TERCERA SESIÓN DEL CICLO FORMATIVO

La tercera sesión del ciclo formativo, de dos horas de duración, correspondió a la segunda sesión de la asignatura *Didáctica de las Matemáticas en la ESO y en el bachillerato*. En esta sesión, el profesor expuso que en la clase anterior se había reflexionado sobre la siguiente pregunta: ¿cómo describir las "matemáticas" del episodio? y comentó que la respuesta dada en la clase anterior fue: describiendo las prácticas, objetos y procesos matemáticos. También señaló que en la clase anterior se había iniciado una reflexión sobre qué se debía entender por práctica y objeto matemático.

A continuación indicó que, para poder desarrollar y evaluar las competencias matemáticas prescritas en el currículo de la ESO, el profesorado debía de ser competente en el análisis de las matemáticas presentes en los episodios de aula. También comentó que para justificar esta afirmación era conveniente dedicar un tiempo a leer lo que dice el currículo de la ESO sobre la competencia matemática.

En el anexo 36 se adjunta las diapositivas de la presentación que el profesor utilizó para explicar cómo se entendía la competencia matemática en el currículo de la ESO (ver Anexo 36. Presentación de la sesión 3). En las diapositivas de la presentación del profesor se resumen lo que dice el currículo sobre materias curriculares, competencias básicas y objetivos generales y se resaltan, que la finalidad central de cada una de las materias curriculares, es el desarrollo de las competencias básicas y que cada una de ellas contribuye al desarrollo de diferentes competencias; y a la vez, cada una de las competencias básicas se adquiere como consecuencia del trabajo en distintas materias. También el profesor destacó que una de las competencias básicas era la competencia matemática y que, según el currículo de la ESO, dicha competencia es necesaria en la vida personal, escolar y social y que implica conocer determinados contenidos matemáticos y saberlos utilizar para resolver problemas, en especial problemas extramatemáticos. Otro aspecto en que incidió fue que la competencia matemática está estrechamente relacionada con la activación de ciertos procesos matemáticos.

El profesor continuó comentando que el término competencia tenía un territorio compartido con el término proceso matemático y también con otros términos que son utilizados para describir las matemáticas de un episodio de aula, tales como "práctica matemática" o "actividad matemática". También comentó que el constructo "competencia" tiene un territorio compartido con términos de tipo psicopedagógico (por ejemplo, objetivos, capacidades, habilidades, etc.).

A continuación el profesor situó en una perspectiva histórica la moda de organizar los currículos por competencias, resaltando que hay que pensarla como una consecuencia más del "giro procesal" en el diseño de currículos de matemáticas (y también de otras materias) que ha tenido lugar a nivel internacional en las últimas décadas. El profesor indicó que dicho giro ha significado pasar de concebir los currículos de matemáticas cuyos objetivos eran el aprendizaje, sobre todo, de conceptos a pensar en currículos cuyos objetivos son el aprendizaje, sobre todo, de procesos. Además, manifestó que este giro se ha producido, entre otras razones, debido a que las matemáticas actualmente se ven como una ciencia en la cual el método domina claramente sobre el contenido. Y que, por esta razón, recientemente se ha dado una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en particular los procesos de resolución de problemas y modelización. El profesor también señaló que se puede observar este giro procesal, entre otros, en los Principios y Estándares del NCTM (2003), donde se propone el aprendizaje de los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; en el Adding it Up Project (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001); en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, conocido con el acrónimo TIMSS (Mullis y otros, 2003), en el estudio PISA (OCDE, 1999) y en las propuestas de los currículos de algunos países como es el caso de Suecia y, en cierta manera, en los currículos del Estado español derivados de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) y de la Ley Orgánica de Educación (LOE).

Por último, el profesor comentó algunas conclusiones importantes relacionadas con la formación de los profesores que deben impartir currículos organizados por competencias. En concreto, comentó que un currículo en el que las competencias juegan un papel fundamental es un currículo muy ambicioso y que desarrollar y evaluar competencias es una tarea compleja que exige al profesor una formación profesional muy calificada.

También resaltó que los currículos por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dada la estrecha relación existente entre "procesos matemáticos" y "competencias matemáticas" afirmó que desarrollar la competencia del profesorado en el análisis de procesos y objetos matemáticos, activados en las prácticas matemáticas, es un paso necesario para desarrollar la competencia profesional que permita la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. Por otra parte, comentó que con relación con este problema se sabe que: 1) Para desarrollar y evaluar competencia matemática el profesor ha de tener competencia matemática. 2) No basta la competencia matemática, es necesaria una competencia en análisis didáctico, de la cual forma parte el análisis de la actividad matemática realizada en los procesos de instrucción.

A continuación, el profesor explicó que, por esta razón, en el programa de la asignatura Didáctica de las matemáticas en la ESO y el bachillerato se contempla el bloque temático I, previo al bloque temático de las competencias en el currículo (bloque III), con los siguientes contenidos:

Tema 1: *La Actividad matemática:* Práctica matemática, objetos y procesos matemáticas. Resolución de problemas y modelización. Conexión de las Matemáticas con otras disciplinas, con la vida cotidiana y aspectos transversales. Intuición, formalización y rigor. Características del razonamiento matemático del alumnado de secundaria.

Seguidamente, el profesor recordó algunas de las reflexiones realizadas en la sesión anterior sobre prácticas y objetos y se centró en la relación entre las prácticas y los objetos matemáticos que intervienen en dichas prácticas y propuso a los futuros profesores resolver un cuestionario, pensado para alumnos de bachillerato, en el que se tenía que hallar, por primera vez, la derivada de la función exponencial de base e a partir de una exploración inicial de un applet que permitía hallar una condición que cumplen todas las tangentes de dicha función (ver Anexo 37. Cálculo de la derivada de la función exponencial de base e).

Este cuestionario primero fue resuelto por los futuros profesores como si fuesen alumnos de bachillerato y después se les preguntó sobre los conocimientos previos y emergentes de esta actividad, lo cual permitió consensuar la lista de objetos previos y emergentes (ver anexo 38. Objetos previos y emergentes en el cálculo de $f'(x) = e^x$). La puesta en común sobre esta actividad permitió al profesor realizar las siguientes reflexiones sobre los objetos primarios intervinientes y emergentes en una práctica matemática: 1) La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). 2) Puesto que el sujeto realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos. 3) Para explicar cómo emergen nuevos objetos primarios a partir de las prácticas, nos será muy útil la metáfora "subir una escalera". Cuando subimos una escalera siempre nos estamos apoyando en un pie, pero cada vez el pie está en un escalón superior. La práctica matemática la podemos considerar como "subir la escalera". El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes. Estas reflexiones se concretaron en las diapositivas de una presentación que los alumnos pudieron descargar del moodle de la asignatura (ver Anexo 39. Realización de una práctica. Objetos previos y emergentes).

A continuación el profesor presentó tres videos de cinco minutos en los que se enseña la mediatriz, y su transcripción, y propuso a los alumnos que realizaran el análisis y comparación de prácticas y objetos matemáticos (en especial definiciones y procedimientos previos y emergentes) activados en los tres episodios. Eran episodios de la clase de tres profesoras que mostraban modelos diferentes de configuración de objetos primarios y también de gestión de la clase. También comentó que estos videos formaban parte del proyecto "Una perspectiva competencial sobre el Máster de Formación de Profesor de Secundaria de Matemáticas" (REDICE-1001-13) que tiene, entre otros, el objetivo de investigar cómo se relaciona la competencia en el análisis de procesos y objetos matemáticos con las competencias que permiten al profesor facilitar la transición del alumnado de primaria a la educación secundaria.

4. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA CUARTA Y QUINTA SESIONES DEL CICLO FORMATIVO

Nuestro objetivo al diseñar las dos sesiones el ciclo formativo, cuya implementación describimos a continuación, era conseguir primero una reflexión de los futuros profesores sobre procesos matemáticos en general para profundizar, en sesiones posteriores, en tres procesos: resolución de problema, modelización y argumentación. Estos contenidos forman parte del tema I de dicha asignatura que trata sobre l*a actividad matemática*.

Por otra parte, estábamos interesados en responder a la siguiente pregunta (subobjetivos 5.2): ¿La inferencia de procesos matemáticos propuesta en el capítulo 5 —realizada a partir del marco teórico del EOS y validada por un procedimiento de triangulación de expertos—, es coincidente con la que realizan los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos?

En el capítulo 5 de esta memoria de investigación se presenta un desarrollo del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática afrontando la problemática del encaje de los “procesos” dentro de dicho marco teórico. Primero se ilustran, con ejemplos, los 16 procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales considerados en dicho enfoque. A continuación se propone considerar a la resolución de problemas o a la modelización como megaprocesos y se reflexiona sobre la relación entre estos últimos y el grupo de 16 procesos considerado inicialmente.

La pregunta que nos hacemos es si la interpretación que se hace en el capítulo 5 sobre la inferencia de procesos, a partir de en una lista de 16 ejemplos en los que se da una tarea como entrada y una respuesta del alumno como salida, es coincidente con la que también hacen los alumnos del Máster de FPSM de la Universitat de Barcelona. Nuestra hipótesis era que, a pesar de la ambigüedad que se produce al inferir procesos, era de esperar que hubiera una cierta coincidencia.

Se ha realizado una triangulación de datos y de expertos. La triangulación de datos ha consistido en el uso del mismo cuestionario dos veces seguidas. Mientras que la triangulación de expertos ha consistido en una opinión de un experto sobre la pertinencia del agrupamiento en familias de procesos realizado por los investigadores y sobre el uso de la moda en este caso. Anteriormente, tal como se explica en el capítulo 5, se había realizado una triangulación de expertos sobre los ejemplos que ilustran los 16 procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales considerados en el EOS.

4.1. Implementación

Las clases 4 y 5 correspondieron a la asignatura de Didáctica de la Matemáticas en la ESO y el bachillerato. El profesor inició la clase recordando que al final de la clase anterior se habían visto tres videos de cinco minutos cada uno (de los cuales tenían la transcripción), y que se les había propuesto realizar el análisis de las prácticas y objetos matemáticos (en especial definiciones y procedimientos previos y emergentes) activados en los tres episodios (de enseñanza de la mediatriz). Recordó que se trataba de episodios de clase de tres profesoras que mostraban modelos diferentes de gestión de la clase y que hacían "matemáticas" diferentes.

A continuación el profesor volvió a presentar cada uno de los videos para que los futuros profesores opinaran sobre la definición de mediatriz y sobre el procedimiento de su construcción que se había enseñado en cada clase. Con relación al primer video, los alumnos dijeron que la mediatriz se definía como la perpendicular al segmento que pasa por el punto medio y que el procedimiento de construcción con regla y compás debía de seguir los pasos siguientes: 1) Con centro un extremo del segmento se dibuja la semicircunferencia de radio la longitud del segmento. 2) Se repite el punto 1 con el otro extremo del segmento. 3) Se determinan los dos puntos de corte de las dos semicircunferencias. 4) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos de corte.

El profesor estuvo de acuerdo y se limitó a comentar que la profesora había comenzado con la definición para explicar después el procedimiento, y que este último, de hecho, consistía en construir un triangulo equilátero de base el segmento dado y que es el que se podía encontrar en los Elementos de Euclides.

Con relación al segundo video los alumnos dijeron que no había definición de mediatriz y que el procedimiento de construcción con regla y compás debía de seguir los pasos siguientes: 1) Con centro un extremo del segmento se dibuja la semicircunferencia cuyo radio tenga una longitud superior a la mitad de la del segmento. 2) Se repite el punto 1 con el otro extremo del segmento. 3) Se determinan los dos puntos de corte de las dos semicircunferencias. 4) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos de corte.

El profesor comentó que, a diferencia de la primera profesora, en este caso se comienza por el procedimiento de construcción y se pretende que los alumnos lleguen a una definición de mediatriz (que, para ser coherentes con el procedimiento de construcción explicado debería ser la siguiente: la mediatriz es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento).

A continuación el profesor volvió a mostrar los cinco minutos de la clase de la tercera profesora sobre la mediatriz y los alumnos contestaron que en los cinco minutos observados no había ni definición ni procedimiento. El profesor les dio la razón y comentó que si se mostraba todo el video se podía observar que el objetivo de la tercera profesora era definir la mediatriz como, dados dos puntos, la frontera que separa el plano en dos regiones de manera que todos los puntos de una región estaban más próximos a uno de los dos puntos que al otro; y que el procedimiento que se explica se basa en el doblado de papel.

Seguidamente el profesor comentó que eran tres modelos de clase muy diferentes, que la gestión era muy diferente, pero que si nos fijamos en las matemáticas podemos observar que la configuración de objetos que se presenta en cada clase para explicar la mediatriz es muy diferente ya que se dan definiciones diferentes, procedimientos diferentes, se argumenta de manera diferente, etc. Para ilustrar su explicación utilizó la siguiente figura:

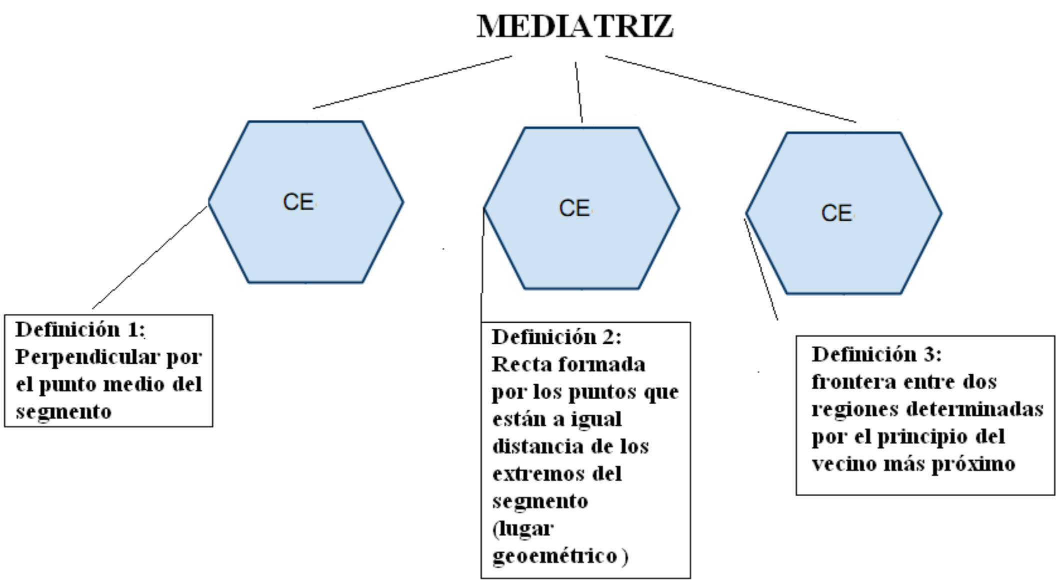


Figura 11.8. Diferentes configuraciones epistémicas de la mediatriz

A continuación comentó que la tercera profesora hacía una propuesta innovadora con relación a la manera habitual de enseñar la mediatriz en la transición de primaria a secundaria (profesoras 1 y 2). Se trataba de una propuesta innovadora por el tipo de gestión de la clase, pero también desde el punto de vista matemático. Resaltó el hecho de que se puede entender una innovación, en cuanto a la manera de presentar el contenido matemático, como un cambio de configuración de prácticas y objetos matemáticos.

Volvió a presentar los cinco primeros minutos de la clase de la tercera profesora. Comentó que se trataba de una secuencia didáctica que tenía como eje el planteamiento y la resolución, en pequeños equipos y de manera colectiva, de un problema contextualizado, que era una adaptación para dos pozos del problema de los cinco pozos, Figura 11.9, propuesto en el libro publicado por el Instituto Freudenthal: *Geometría con Aplicaciones y Pruebas* (Goddijn, Kindt y Reuter, 2004, parte. I, 5).

Tarea 1: En el desierto

En la figura de abajo, se muestra parte del un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.

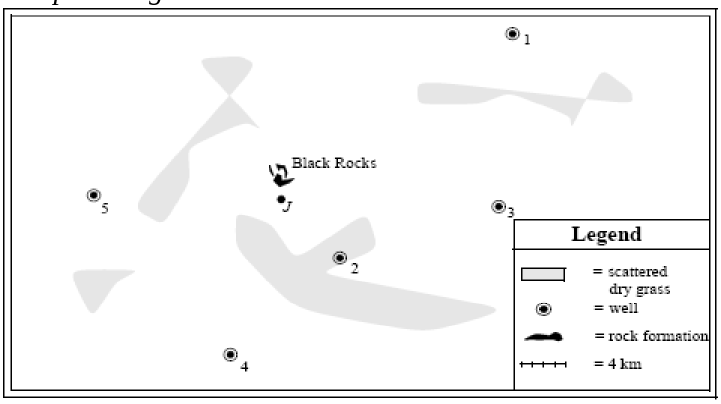


Figure 1: In the desert

1 a. To which well would you go for water?
That choice was not difficult. Of course you would go to the nearest well.
b. Point out two other places from where you would also go to well 2. Choose them far apart from each other.
c. Now sketch a division of the desert in five parts; each part belongs to one well. It is the domain around that particular well. Anywhere in this domain that special well must be the nearest.
d. What can you do when you are standing exactly on the edge of two different domains?
e. Do the domains of wells 1 and 5 adjoin? Or: try to find a point which has equal distances to wells 1 and 5 and has larger distances to all the other wells.
f. In reality the desert is much larger than is shown on this map. If there are no other wells throughout the desert than the five on this map, do the domains of wells 3 and 4 adjoin?
g. The edge between the domains of wells 2 and 3 crosses the line segment between wells 2 and 3 exactly in the middle. Does something similar apply to the other edges?
h. What kind of lines are the edges? Straight? Curved?

In this exercise you just partitioned an area according to the nearest-neighbour-principle. Nowadays similar partitions are used in various sciences, for instance in geology, forestry, marketing, astronomy, robotics, linguistics, crystallography,

> meteorology, to name but a few. We will revisit those now and then. Next we will investigate the simple case of two wells, or rather, two points, since we might not be dealing with wells in other applications.

Figura 11.9. Problema de los cinco pozos que fue adaptado a dos pozos en la secuencia 3 sobre la mediatriz

En este episodio la profesora se preocupó de que los alumnos comprendiesen el enunciado del problema. Para ello, se centró en que sus alumnos entendiesen el significado de la representación del mapa y su leyenda, de los términos que aparecen en el enunciado y sobre todo, que comprendiesen el texto globalmente.

El profesor comentó que si bien en estos cinco minutos no se explicó ninguna definición ni ningún procedimiento, si se pueden observar procesos y les preguntó a los futuros profesores qué procesos podían inferir en el episodio.

Las respuestas de los futuros profesores fueron del tipo: proceso de interpretación, de comunicación, de significación, etc. El profesor estuvo de acuerdo con esta inferencia y comentó (1) que los procesos sugeridos por ellos tenían un cierto aire de familia y (2) que los procesos eran un tipo de contenido contemplado en el currículo de la comunidad autónoma de Catalunya. A continuación explicó que, antes de comentar lo que dice el currículo sobre procesos, convendría hacer algunas reflexiones sobre la noción de “proceso” en general y que, para hacerlas, utilizaría, como contexto de reflexión, la tarea del libro *Geometría con Aplicaciones y Pruebas* que había sugerido la tarea “en el desierto” propuesta por la profesora.

La primera reflexión del profesor fue que una de las tendencias actuales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la importancia que se da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática. Ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos. Manifestó que se considera a las Matemáticas como una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello, se concede una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos. En especial a los megaprocesos *Resolución de Problemas* y *Modelización*. Como ejemplo paradigmático de esta tendencia se refirió a los principios y estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) en los Estados Unidos de Norteamérica.

Como ejemplo de esta tendencia el profesor señaló que tenían la tarea del desierto, la cual se trata de la primera actividad de un proceso de instrucción que pretende enseñar el proceso de modelización, entendiendo normalmente que el proceso de modelización seguiría las cinco fases o subprocesos siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad. También comentó que la Teoría de la Educación Matemática Realista (RME Realistic Mathematic Education) considera, de acuerdo con Treffer (1987) que la modelización se puede considerar compuesta de dos fases o subprocesos: la matematización horizontal y la matematización vertical. La *matematización horizontal*, lleva del mundo real al mundo de los símbolos y hace posible el tratar matemáticamente un conjunto de problemas. En este subproceso son característicos los siguientes procesos: 1) *identificar* las matemáticas en situaciones problemas. 2) *esquematizar*. 3) *formular* y *visualizar* un problema de varias maneras. 4) *descubrir* relaciones y regularidades. 5) *reconocer* aspectos isomorfos en diferentes problemas. 6) *transferir* un problema real a uno matemático. 7) *transferir* un problema real a un modelo matemático conocido. La *matematización vertical*, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, son característicos los siguientes procesos: 1) *representar* una relación mediante una fórmula. 2) *utilizar* diferentes modelos. 3) *refinar* y *ajustar* modelos. 4) *combinar* e *integrar* modelos. 5) *probar* regularidades. 6) *formular* un concepto matemático nuevo. 7) *generalizar*. La segunda reflexión fue que cuando se intenta caracterizar un proceso complejo, como es el caso de la modelización, lo descomponemos en otros procesos. Por tanto, conviene pensar en procesos más complejos (megaprocesos) y procesos más simples. Ejemplos de megaprocesos son la resolución de problemas y la modelización.

La tercera reflexión estuvo relacionada con la pregunta ¿qué es un proceso? Dicha pregunta fue utilizada por el profesor para comentar que no resulta fácil dar una definición de “proceso” ya que hay muchas clases diferentes de procesos. Se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. La idea de secuencia se puede descomponer en una serie de entradas y salidas. El profesor también comentó que entre una entrada y una salida se pude inferir que se ha producido un determinado proceso y presentó el siguiente esquema:

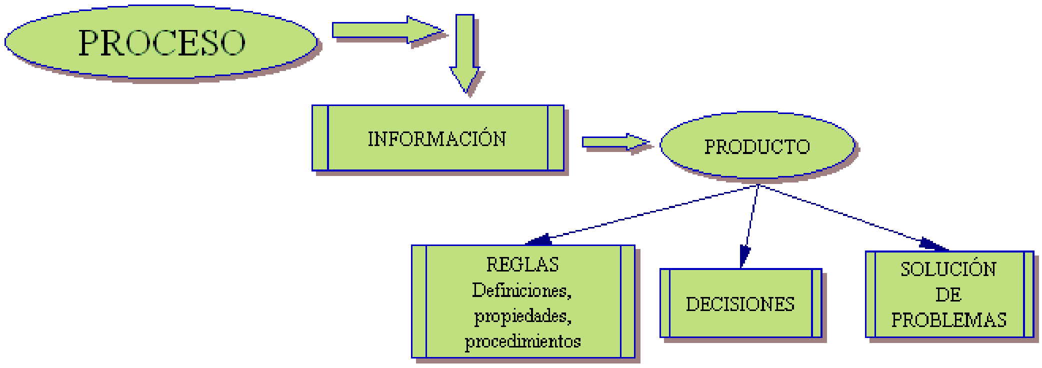


Figura 11.10. Caracterización de proceso

La tercera reflexión que hizo el profesor es que, dada la dificultad en llegar a un consenso sobre la definición de proceso, lo más conveniente para hacer un análisis de los procesos que se pueden inferir de la actividad matemática es utilizar una lista de procesos, algunos de los cuales serán megaprocesos. Una lista que, además, será incompleta.

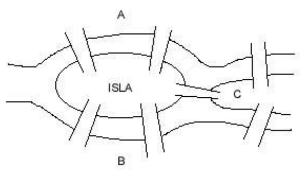
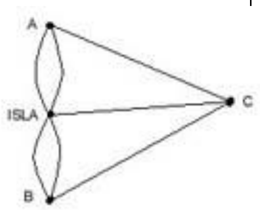
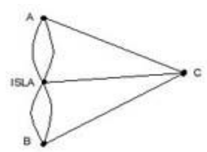
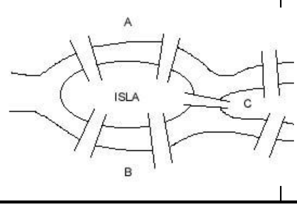
La cuarta reflexión del profesor estuvo relacionada con la metáfora de que los procesos son densos en la actividad matemática. Según sus palabras: "puedes pasar de no ver procesos a ver una gran cantidad de procesos". Para esta reflexión el profesor volvió a utilizar el problema de los cinco pozos (Figura 1) y comentó primero que el objetivo de los autores del libro "Geometría con aplicaciones y pruebas" es permitir a los estudiantes construir un objeto matemático "diagrama de Voronoi" sobre la base de la tarea mostrada en la figura 1 y las que le siguen. Un diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos *S* es una partición de un área en celdas, cada una de las cuales contiene los puntos más cercanos a un punto en particular de *S* que a cualquier otro. A continuación, seleccionó el comentario que sigue a las preguntas y les preguntó a los alumnos que señalasen algunos procesos activados. Un alumno comentó que había un proceso de abstracción (porque los pozos se convierten en puntos) y otro comentó que había una generalización cuando se menciona en el texto "particiones similares: geología, forestal, robótica, etc.". El profesor explicó que, en el comentario que sigue al enunciado del problema, los autores primero generan un proceso oculto de idealización (el desierto se convierte en un área) y luego, ellos establecen la relación particular-general entre la situación idealizada y el objeto matemático: "En este ejercicio tú solo dividiste un área de acuerdo con principio del vecino más próximos". La manera de presentar lo general al estudiante es el resultado de una generalización aditiva, ya que se trata de una unión de elementos diferentes en el mismo grupo: "Hoy en día, particiones similares son utilizadas en varias ciencias, por ejemplo, en la geología, las ciencias forestales, la comercialización, la astronomía, la robótica, la lingüística, la cristalografía, la meteorología, por citar sólo algunas". Vamos luego a un proceso de particularización diciendo: "A continuación se investigará el caso simple de dos pozos", y uno de idealización explícita, cuando los pozos se convierten en los puntos: "(...) o en realidad dos puntos, ya que podría no tratarse de *pozos* en otras aplicaciones". Una alumna preguntó si no era lo mismo idealización que abstracción y el profesor le comentó que tienen un aire de familia, pero que para muchos investigadores no se pueden considerar iguales, el proceso de idealización tiene su origen en Platón, mientras que el de abstracción lo tiene en Aristóteles y dichos filósofos los planteaban como diferentes.

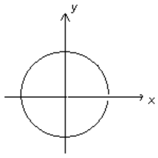
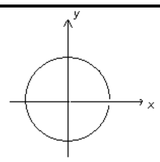
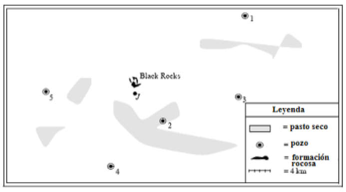
La quinta reflexión que hizo el profesor es que, además de agrupar los procesos en familias que tiene un parecido, cada uno de ellos también se puede considerar como una familia. Por ejemplo, hay muchos tipos de procesos de argumentación (reducción al absurdo, inducción completa, razonamiento por elemento genérico, etc.) o de generalización. En especial comentó que en matemáticas, sobre todo en primaria y secundaria, se presentan a los alumnos muchos procedimientos (por ejemplo, en aritmética, multiplicación división, resta, etc.; en geometría muchos procedimientos de construcción (por ejemplo, la construcción de la mediatriz que se ha comentado, etc.) cuya aplicación se puede considerar un proceso. En este caso afirmó que era conveniente agruparlos en un solo proceso que se puede llamar algoritmización, mecanización, práctica (en el sentido de repetición), etc. Continuó mencionando que también hay un territorio compartido entre las prácticas, procesos y procedimientos. En su opinión, un procedimiento nos dice cómo se deben hacer las cosas (se trata claramente de un regla) mientras que tanto práctica como proceso sugieren la idea de ejecución de la regla, secuencia de acciones en definitiva. Por otra parte, la noción de proceso sugiere nociones de tipo cognitivo y metacognitivo que no se suelen relacionar con la idea de práctica.

La sexta reflexión que hizo el profesor es que la tendencia de incorporar como contenido a los procesos está presente en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria de Cataluña. Según su opinión, los diseñadores se habían inspirado en los principios y estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) de los Estados Unidos de Norteamérica. En el currículo de Cataluña se consideran cinco bloques de contenidos: numeración y cálculo, cambio y relaciones, espacio y forma, medida y estadística y azar que se distribuyen durante los cuatro cursos. También se incluyen en los contenidos de cada curso los siguientes procesos matemáticos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación y representación, y conexión.

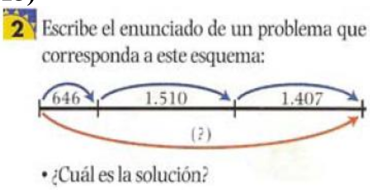
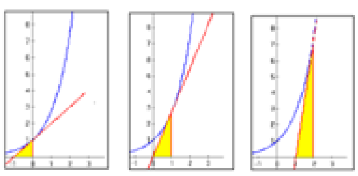
A continuación el profesor presentó dos documentos, el primero es el documento que sigue (Tabla 11.1) en el que se presenta una entrada y una salida y se selecciona un único objeto primario y un único proceso entre los que se podrían considerar. El profesor explicó la selección realizada en los ejemplos resueltos, después dijo que los que estaban en interrogante los tenían que responder ellos.

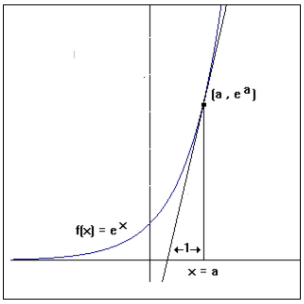
Tabla 11.1. Ejemplos de inferencia de procesos

Punto de Partida	**Procesos**	Punto de llegada	**Objetos**
1) Puentes de Königsberg Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con la tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida? 	????????????????	El problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas? 	Concepto (Grafo)
2) Idea de Grafo	**Materialización / Representación externa**	 	Lenguaje ostensivo (representación geométrica externa)

Punto de Partida	**Procesos**	Punto de llegada	**Objetos**
3)  $x^2 + y^2 = r^2$	??????????????	Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	Concepto (circunferencia)
4) Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	???????????????	 $x^2 + y^2 = r^2$	Lenguaje (representación gráfica y algebraica)
5) El límite es el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h \to 0$.	???????????????	$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Concepto (límite/derivada)
6) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	**Desencapsulación / Descomposición / Análisis**	Interpretamos el límite como el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando $h \to 0$, y después focalizamos nuestra atención en esta clase.	Concepto (límite/derivada)
7) ***En el desierto***. *En la figura de abajo, se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas esta mapa contigo.*  a)*¿A cuál de los pozos irías a tomar agua? No es difícil responder, por supuesto irías al pozo 2* *b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.* c) *Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos.*	**Personalización / Construcción**		Propiedad (*principio del Vecino más próximo*)

Punto de Partida	**Procesos**	Punto de llegada	**Objetos**
Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos. d) *¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios*? e) *¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0*: *trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos*. f) *En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)*? g) *La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras*? h) *¿Qué clase de líneas son las fronteras*? *¿Rectas o curvas*?			
8) *En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del Vecino más próximo (…)*	**Institucionalización**		*Propiedad (principio del Vecino más próximo)*
9) En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es $d(A_1, A_2)= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$	???????????????	En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es $d(A_1, A_2) = \sqrt{(x-y)^2}$ En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es $d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$	Concepto (distancia en $\mathbb{R}$)
10) En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es $d(A_1, A_2) = \sqrt{(x-y)^2}$ En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1	????????????	En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es	Concepto (distancia en $\mathbb{R}^n$)

Punto de Partida	**Procesos**	Punto de llegada	**Objetos**
y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$		d(A_1 , A_2)= $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots}$	
11) ¿Es cierto que si x < y, entonces $x^2 < y^2$? Justifica tu respuesta.	???????????????	No es cierto, basta tomar $x = -5$ e $y = -2$	Concepto (Desigualdad)
12) *Calcula la derivada de la función:* $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x-4}$	**Algoritmización**	$f'(x)=\dfrac{(2x-3)\cdot(3x-4)-3(x^2 -}{(3x-4)^2}$	*Procedimiento (regla de la derivación de un cociente)*
13) *(…) En los problemas anteriores has encontrado una relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Cuál?*	??????????	*La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*	*Propiedad (teorema)*
14) *La mediatriz de un segmento es la perpendicualr que pasa por el punto medio de dicho segmento. ¿Halla una definición equivalente?*	???????????’	*Todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento*	*Concepto (mediatriz)*
15) 	**Problematización**	*María ha podido ahorrar en los meses de abril, mayo y junio 646; 1,510 y 1407 soles, respectivamente. ¿Cuánto ha ahorrado en total en estos tres meses?* *(solución: 3563)*	*Concepto (suma)*
16) *Cuestionario* En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad: a) Calcula $f\,'(0)$, $f\,'(1)$ y $f\,'(2)$  b) Calcula $f\,'(a)$	**Comunicación (Entiende y expresa)**	*Respuesta de Víctor al apartado c* La función derivada de $f(x) = e^x$ es $f\,'(x) = e^x$ porque la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en este punto. La pendiente se consigue dividiendo $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, en esta función $x_2 - x_1$ siempre da 1, y al dividir el aumento vertical, que es e^x por el aumento horizontal que es 1, nos da e^x	*Concepto emergente (derivada de la función $f(x) = e^x$)*

Punto de Partida	**Procesos**	Punto de llegada	**Objetos**
 c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f´(x) = e^x$.			

Después, el profesor les presentó el segundo documento (tabla 11.2) y les comentó que en cada casilla de la primera fila se habían agrupado algunos procesos por parecido de familia. Utilizó el ejemplo de los “hermanos Smith”, según lo describen Gleitman, Armstrong y Gleitman (1983). Como se puede observar, todos los hermanos tienen alguna característica en común si se comparan dos a dos, pero no hay ninguna característica en común a todos ellos

Figura 11.11. Aire de familia de los hermanos Smith

Después comentó que los procesos seleccionados se habían dividido en procesos y megaprocesos y que se habían seleccionado entre los procesos que aparecen en el currículo de secundaria obligatoria de Cataluña y/o en artículos de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Tabla 11.2. Tabla de objetos y procesos matemáticos

Objetos Matemáticos / **PROCESOS**	**Lenguaje: Verbal, simbólico, gráfico...**	**Situación Problema**	**Definiciones Conceptos previos Conceptos emergentes**	**Propiedades Proposiciones Teoremas**	**Procedimientos Técnicas Métodos**	**Argumentos**
Algoritmització / Mecanización / Práctica (en el sentido de repetición) / Trabajo de técnica / . . .						
Particularización /Ejemplificación Identificación/ Distinción Aplicación / Contextualización Reconocimiento/Detección/ . . .						
Generalización						
Idealización / Esquematización / Abstracción						
Materialización / Representación externa (gráfica, expresión simbólica, etc., realizada en papel, pizarra, ordenador, etc.)						
Significación/ Comprensión/Interpretación						
Síntesis/ Reificación/ Unificación/Encapsulación						
Análisis/ Descomposición/ Desencapsulación						

Objetos Matemáticos / **PROCESOS**	**Lenguaje: Verbal, simbólico, gráfico...**	**Situación Problema**	**Definiciones Conceptos previos Conceptos emergentes**	**Propiedades Proposiciones Teoremas**	**Procedimientos Técnicas Métodos**	**Argumentos**
Personalización / Construcción/Representación interna						
Institucionalización						
Enunciación (expresar conjeturas, propiedades, dar definiciones, ...)						
Problematización						
Argumentación/ Justificación/ Demostración/ Explicación						
....						
MEGAPROCESOS						
Procesos de conexión (Procesos de analogía Procesos metafóricos Procesos de comparación Procesos de relación, ...)						
Resolución de problemas						
Comunicación						
Modelización						

Fuente: Elaboración propia

En total, se propusieron dieciséis ejemplos de los cuales nueve eran ejemplos completos. Así los ejemplos 7 y 8 fueron tomados de la tarea "En el desierto". A continuación, el profesor pidió a los estudiantes que seleccionasen el proceso activado en cada ejemplo de los nueve que quedaron sin ser seleccionados, con el objetivo de que sus respuestas sirviesen como evaluación diagnóstica de los procesos que los estudiantes conocían y podían inferir.

Ante esta actividad los alumnos tuvieron algunas inquietudes. Algunas de ellas fueron, si en cada celda solo debería ir un solo ejemplo o si un ejemplo podría ir en más de una casilla. El profesor insistió en que cada ejemplo debía ir en una sola casilla, considerando el proceso más representativo que se puede inferir. La sesión terminó con la recogida de las hojas de respuestas de los estudiantes.

Segunda sesión: En las siguientes dos horas programadas, el profesor consideró pertinente, tomar quince minutos de su clase para recordar las principales reflexiones sobre procesos realizadas en la sesión anterior y después pasó a comentar los resultados de la evaluación diagnóstica. En los siguientes veinte minutos el profesor realizó un análisis de la tabla de procesos, mencionando aquellos procesos que a los alumnos no les parecieron familiares. Como por ejemplo, el proceso de reificación (síntesis, encapsulación), para cuya explicación, el profesor señaló la metáfora del paquete turístico. Así también, revisó los megaprocesos de resolución de problemas, comunicación y modelización.

Después de explicar con más detalle algunos de los procesos que resultaron más desconocidos, el profesor entregó nuevamente la tabla de objetos y procesos y las hojas de respuesta con el objetivo de observar los cambios que se producían en las respuestas de los futuros profesores con respecto a la evaluación diagnóstica.

4.2. Análisis de las respuestas de los alumnos

Mostramos en la Tabla 11.3 y en la gráfica 11.12, los resultados de las coincidencias con la selección de procesos realizada en el capítulo 5, tanto de la primera evaluación (diagnóstica) como de la segunda (evaluación final). En ambas evaluaciones participaron los 22 alumnos matriculados en el máster de FPSM de la UB.

Tabla 11.3. Resultados de coincidencias en la selección de procesos

Ejemplos / Evaluaciones	Ejemplo1	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5	Ejemplo 9	Ejemplo 10	Ejemplo 11	Ejemplo 13	Ejemplo 14
Evaluación diagnóstica	**11**	**6**	**15**	**8**	**13**	**18**	**16**	**7**	**9**
Evaluación final	**10**	**12**	**18**	**12**	**19**	**20**	**18**	**13**	**10**

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011.
Fuente: Elaboración propia.

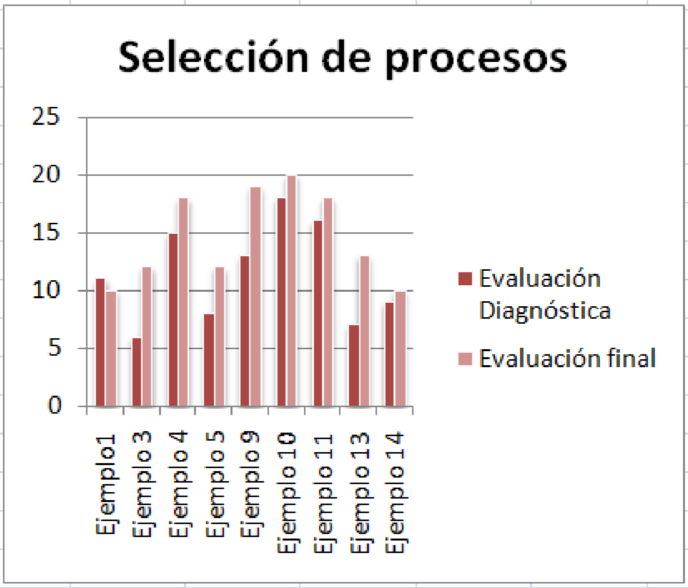


Figura 11.12. Resultados de coincidencias en la selección de procesos. Elaborado con los datos de la tabla 11.3
Fuente: Elaboración propia.

No todos los alumnos eligieron un proceso en la evaluación diagnóstica, mientras que en la evaluación final si lo hicieron (debido a la explicación del profesor posterior a la evaluación diagnóstica).

En la tabla 11.4 se recogieron las respuestas de los futuros profesores en la evaluación diagnóstica y en la final (números entre paréntesis), en color amarillo se indica la selección de procesos realizada en el capítulo 5 y las filas de color azul corresponden a los ejemplos que estaban solucionados en el cuestionario que se propuso a los futuros profesores. Por ejemplo, en el caso de los Puentes de Königsberg (ejemplo 1), cuyo punto de partida es el enunciado del problema y cuyo punto de salida es un grafo de esta situación, el proceso de idealización es el considerado en el capítulo 5. En la evaluación diagnóstica, 11 de los 22 alumnos indicaron que el proceso activado era el de idealización. Los restantes seleccionaron como procesos activados: Particularización (2), generalización (1), materialización (1), representación interna (1), significación (3), desencapsulación (1), procesos de conexión (1) y resolución de problemas (1). En la evaluación final 10 de los 22 alumnos indicaron como proceso el de idealización. Los restantes señalaron: Particularización (3), generalización (1), materialización (2), significación (2), desencapsulación (2), procesos de conexión (1) y modelización (1).

En el caso de la circunferencia (ítem 3), cuyo punto de partida es su gráfica y su ecuación y cuyo punto de llegada es el significado de estas representaciones, en el capítulo 5, de acuerdo con Font, Rubio Contreras (2008), se considera el proceso de significación. En la evaluación diagnóstica solo seis de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de significación. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: Particularización (4), generalización (2), materialización (2), representación interna (2), desencapsulación (1), enunciación (3) y dos alumnos no seleccionaron ningún proceso. En la evaluación final, 12 de los 22 alumnos indicaron como proceso el de significación. Los demás alumnos señalaron: Particularización (3), generalización (1), representación interna (4) y enunciación (2). Esta oportunidad, todos seleccionaron algún proceso.

En el caso de la circunferencia (ítem 4), el punto de partida es la representación verbal de una circunferencia y como punto de llegada sus representaciones gráfica y algebraica. En el capítulo 5, de acuerdo con Font et al. (2008), se señala como proceso el de materialización (o representación externa). En la evaluación diagnóstica quince de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de materialización. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: Particularización (1), generalización (1), idealización (1), representación interna (1), significación (1), personalización (1) y modelización (1). En la evaluación final, dieciocho de los 22 alumnos indicaron como proceso el de materialización. Los demás alumnos señalaron: Particularización (1), generalización (1), significación (1) y argumentación (1). Tanto en la evaluación diagnóstica como en la evaluación final, todos los alumnos seleccionaron un proceso para este ítem.

En el ítem 5, el caso del límite, el punto de partida es una definición de límite y el punto de llegada es la encapsulación de esta definición a través de una representación algebraica. En el capítulo 5, de acuerdo con Font et al. (2008), se señala como proceso el de encapsulación. En la evaluación diagnóstica ocho de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de encapsulación. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: Algoritmización (4), particularización (1), generalización (1), idealización (1), materialización (3), significación (1), institucionalización (1), enunciación (1) y modelización (1). En la evaluación final, doce de los 22 alumnos indicaron como proceso el de encapsulación. Los demás alumnos señalaron: Algoritmización (2), generalización (2), significación (1), personalización (1) institucionalización (3) y enunciación (1). Tanto en la evaluación diagnóstica como en la evaluación final, todos los alumnos seleccionaron un proceso para este ítem.

En el caso de la distancia, ítem 9, el punto de partida es la fórmula generalizada de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$, y el punto de llegada es la fórmula de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}$. En el capítulo 5, de acuerdo con Font et al. (2008), se señala como proceso el de particularización. En la evaluación diagnóstica trece de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de particularización. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: Idealización (1), encapsulación (2), desencapsulación (2), enunciación (1), procesos de conexión (1) y dos no seleccionaron ningún proceso. En la evaluación final, diecinueve de los 22 alumnos indicaron como proceso el de particularización. Los demás alumnos señalaron: Algoritmización (1), idealización (1) y desencapsulación (1). Aquí, todos los alumnos seleccionaron un proceso.

En el caso de la distancia, ítem 10, el punto de partida es la fórmula de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}$ y el punto de llegada es la fórmula generalizada de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$. Font et al. (2008) señalan como proceso el de generalización. En la evaluación diagnóstica dieciocho de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de generalización. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: encapsulación (1), desencapsulación (1), institucionalización (1) y enunciación (1. En la evaluación final, 20 de los 22 alumnos indicaron como proceso el de generalización. Los demás alumnos señalaron: Algoritmización (1), encapsulación (1). Tanto en la evaluación diagnóstica como en la evaluación final, todos los alumnos seleccionaron un proceso para este ítem.

En el caso de desigualdades en $\mathbb{R}$, ítem 11, el punto de partida es una proposición cuyo valor de verdad se desconoce y el punto de llegada es la calificación del valor de verdad de esta proposición, justificándola. Font et al. (2008) señalan como proceso el de argumentación. En la evaluación diagnóstica dieciséis de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de argumentación. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: particularización (3), materialización (1), significación (1) y personalización (1). En la evaluación final, dieciocho de los 22 alumnos indicaron como proceso el de argumentación. Los demás alumnos señalaron: Significación (2) y personalización (2). Tanto en la evaluación diagnóstica como en la evaluación final, todos los alumnos seleccionaron un proceso para este ítem.

En el caso del Teorema de Pitágoras (ítem 13), cuyo punto de partida es el pedido a los alumnos para hallar la relación entre la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo y cuyo punto de llegada es el de enunciación del teorema de Pitágoras; Font et al. (2008) consideran el proceso de enunciación. En la evaluación diagnóstica solo siete de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado es el de enunciación. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: Particularización (1), generalización (5), significación (4), encapsulación (2), institucionalización (1), argumentación (1) y procesos de conexión (1). En la evaluación final, trece de los 22 alumnos indicaron como proceso el de enunciación. Los demás alumnos señalaron: Particularización (2), generalización (1), idealización (1), encapsulación (1), personalización (1), institucionalización (2) y proceso de conexión (1). Tanto en la evaluación diagnóstica como en la evaluación final, todos los alumnos seleccionaron un proceso para este ítem.

En el caso de la mediatriz (ítem 14), el punto de partida es la definición de mediatriz (recta que pasa por el punto medio de un segmento) y el punto de llegada es la enunciación de otra definición alternativa (como lugar geométrico). En este caso, Font et al. (2008) señalan como proceso el de enunciación. En la evaluación diagnóstica nueve de los 22 alumnos señalaron que el proceso activado era el de enunciación. Los restantes alumnos, seleccionaron como procesos activados: Materialización (1), representación interna (1), significación (5), personalización (4) y dos alumnos no seleccionaron ningún proceso. En la evaluación final, diez de los 22 alumnos indicaron como proceso el de enunciación. Los demás alumnos señalaron: Representación interna (1), significación (7) y personalización (4). Esta oportunidad, todos seleccionaron algún proceso.

Tabla 11.4. Resumen de la elección de procesos en las Evaluaciones Diagnóstica y Final

Ejemplo / Procesos		Algoritmización	Particularización	Generalización	Idealización	Materialización	Representación interna	Significación	Encapsulación	Desencapsulación	Personalización	Istitucionalización	Enunciación	Problematización	Argumentación	Procesos de conexión	Resolución de Problema	Comunicación	Modelización
1	D		2	1	11	1	1	3		1						1	1		
	F		(3)	(1)	(10)	(2)		(2)		(2)						(1)			(1)
2	R																		
3	D		4	2		2	2	6		1			3						
	F		(3)	(1)			(4)	(12)					(2)						
4	D		1	1	1	15	1	1			1								1
	F		(1)	(1)		(18)		1							1				
5	D	4	1	1	1	3		1	8			1	2						1
	F	(2)		(2)				(1)	(12)		(1)	(3)	1						
6	R																		
7	R																		
8	R																		
9	D		13		1				2	2			1			1			
	F	(1)	(19)		(1)					(1)									
10	D			18					1	1		1	1						
	F	(1)		(20)					(1)										
11	D		3			1		1			1				16				
	F							(2)			(1)				(18)				
12	R																		
13	D		1	5				4	2			1	7		1	1			
	F		(2)	(1)	(1)				(1)		(1)	(2)	(13)			(1)			
14	D					1	1	5			4		9			1			
	F						(1)	(7)			(4)		(10)						
15	R																		
16	R																		

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011.
Fuente: Elaboración propia.

4.3 Conclusiones

Nuestra conclusión con relación a la pregunta formulada: ¿La inferencia de procesos matemáticos propuesta en el capítulo 5 —realizada a partir del marco teórico del EOS y validada por un procedimiento de triangulación de expertos—, es coincidente con la que realizan los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos? es que, a pesar de la ambigüedad que se produce al inferir procesos, la moda de las respuestas de los alumnos en la evaluación diagnóstica coincide con la inferencia de procesos que se realiza en el capítulo 5 y que, en la evaluación final, la moda de las respuestas de los alumnos, al mismo cuestionario utilizado como evaluación inicial, vuelve a coincidir con la inferencia de procesos que se realiza en el capítulo 5 y, además, se incrementa.

En nuestra opinión, se trata de un resultado que permite ser optimista con relación a la enseñanza de procesos ya que, dentro de la ambigüedad inevitablemente asociada a la enseñanza de este tipo de contenido, es posible llegar a un cierto consenso sobre su terminología y conceptualización.

Observamos que hay procesos más conocidos o familiares que otros para los alumnos. Entre ellos destacamos los de generalización, argumentación y representación. En nuestra opinión, esto es debido a que son los más citados, con este mismo nombre, en los documentos que utilizan los alumnos y también los que más se trabajan en las diferentes asignaturas del máster de FPSM de la UB. En cambio, otros procesos como el de particularización resulta poco familiar y los alumnos no tienen dificultad con él por el hecho de estar integrado en una familia donde hay otros procesos que les son más familiares (por ejemplo, el de ejemplificación).

Con relación al proceso de representación los alumnos tuvieron dificultades para distinguir entre el proceso de representación externa (gráfica, fórmula simbólica, etc., realizada en papel, pizarra, ordenador, etc.) y el de representación interna (representaciones mentales no materializadas en signos). En la tabla 11.2 se presentaron estos dos procesos como pertenecientes a dos familias diferentes porque se tuvo en cuenta la distinción entre noesis y semiosis. Dado que se trata de una agrupación de familias basada en un cierto consenso, una solución para experiencias futuras, sería dedicar un tiempo a conseguir un consenso local (en el grupo que se esté realizando el experimento de enseñanza) sobre la lista de familias y sobre los procesos que componen cada familia.

5. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SEXTA SESIÓN DEL CICLO FORMATIVO

La sexta sesión del ciclo formativo, de dos horas de duración, correspondió a la segunda sesión de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas en la ESO y el bachillerato. En el inicio de la sesión, el profesor comentó que para evaluar analíticamente las competencias matemáticas activadas por un alumno al resolver una tarea, debía hacerse un buen análisis de la actividad matemática realizada por el alumno. A continuación, recordó los niveles de análisis que habían surgido en el comentario en gran grupo sobre el episodio de los dos barrios (primera y segunda sesión). Resaltó (1) que los cuatro primeros niveles eran herramientas que describían y explicaban lo que está sucediendo y él último nivel permitía valorar el proceso de instrucción y que (2) en esa sesión de clase se centraría en la primera parte (descripción de las matemáticas presentes en el episodio).

Para ello, mostró a modo de ejemplo (Anexo 40. Presentación diapositivas de las prácticas matemáticas de Alicia, Emilio, Mateo y profesor) las prácticas realizadas por los sujetos que intervienen en el episodio de los dos barrios. También comentó brevemente, y sin profundizar mucho, algunos de los objetos de la configuración epistémica de dicho episodio: situación-problema, lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos (ver Anexo 41. Configuración epistémica de objetos matemáticos del episodio de los dos barrios) y recordó lo que se había dicha sobre la tarea (ya realizada) de análisis de las matemáticas activadas en el cálculo de la función exponencial.

Seguidamente el profesor, trató con más detalle el tema de procesos. Primero recordó que en uno de los tres videos en los que se explicaba la mediatriz, la profesora que había utilizado la tarea del desierto se preocupaba de que los alumnos realizaran el proceso de comprensión del enunciado del problema. A continuación recordó las ideas fundamentales que ya había explicado sobre procesos: 1) Una de las tendencias actuales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la importancia que se da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática. 2) Cuando se intenta caracterizar un proceso complejo, como es el caso de la modelización, lo descomponemos en otros procesos. Por tanto, conviene pensar en procesos más complejos (megaprocesos) y procesos más simples. 3) Dada la dificultad en llegar a un consenso sobre la definición de proceso, lo más conveniente para hacer un análisis de los procesos que se pueden inferir de la actividad matemática es utilizar una lista de procesos, algunos de los cuales serán megaprocesos. Una lista que, además, será incompleta. 4) Los procesos son densos en la actividad matemática. 5) Conviene agrupar los procesos en familias cuyos miembros tienen un parecido.

A continuación, el profesor explicó los resultados de la selección de procesos (tablas 11.1 y 11.2). Resaltó el hecho de que aunque ellos tenían la sensación que la selección de procesos era algo muy ambiguo, resultó habiendo un cierto consenso ya que el grupo mayoritario (la moda) había dado la misma respuesta dada por los expertos, lo cual había pasado en las dos veces que se contestó la tarea. Terminó su reflexión con el comentario de que tanto los procesos como las competencias se debían pensar en términos de “consenso”.

Después, el profesor explicó en qué consistía la tarea llamada “mediatriz” (Anexo 42. Tarea de la mediatriz). Los alumnos tenían en el moodle, el currículo de 1º de ESO, el video de la mediatriz de la primera profesora, la transcripción del video y un texto en el que se les explicaba la tarea a realizar. Los alumnos debían dar su respuesta por medio de la plataforma moodle en un plazo de tres semanas a partir de la fecha. Esta tarea consistió básicamente en: 1) Describir las matemáticas del episodio de clase 1 y 2) Explicar cuáles de estas matemáticas estaban contempladas en el currículo de 1º de la ESO.

En la segunda parte de esta sesión de clase, el profesor se focalizó en el quinto nivel de análisis didáctico: valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción. Comenzó con preguntas del tipo ¿Se puede valorar estrictamente por los resultados de los alumnos? Después de algunos comentarios de los alumnos, el profesor enfatizó que hay que valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje globalmente, es decir, si se prepara una sesión de clase o una unidad didáctica, se debe tener en cuenta, entre otros aspectos: presentar "buenas matemáticas", que la interacción sea la apropiada para resolver las dificultades de los alumnos, el uso de recursos tecnológicos adecuados, etc.

El profesor encargó a los alumnos la lectura de las páginas 24-31 del siguiente libro (que era la lectura básica de la asignatura) donde se explican los criterios de idoneidad del EOS:

- Font, V., y Godino, J. D. (2010). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en C. Coll (ed.), *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó

A continuación hizo el siguiente resumen de estos criterios:

Idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.

Se puede aumentar su grado presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; asegurando que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen;

estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.

Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable); procurando incluir actividades de ampliación y de refuerzo; realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, ¿se le entiende cuando habla?, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.); procurando reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); utilizando diversos recursos retóricos argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos; procurando facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación) etc.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.

Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etc.

A continuación, el profesor hizo varios comentarios con relación a los criterios de idoneidad: 1) Es fácil cumplir uno solo de ellos, lo que es difícil es cumplirlos todos razonablemente bien al mismo tiempo. 2) Un proceso de instrucción idóneo sería aquel en el que se cumplen todos los criterios a la vez (hexágono regular de la figura 11.13). En un proceso de instrucción normal se cumplen más unos criterios que otros (hexágono interior irregular de la figura 11.3).

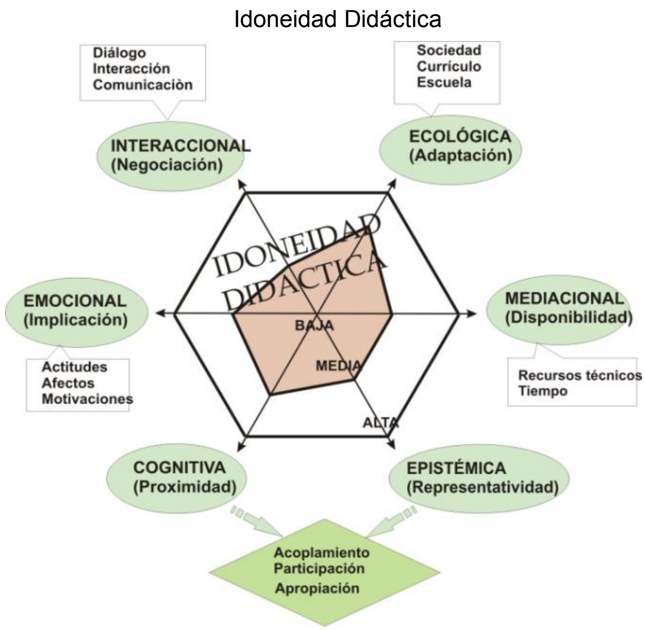


Figura 11.13. Criterios de idoneidad

El profesor entregó una tabla con los descriptores de los criterios de idoneidad (Anexo 43. Componentes y descriptores de los criterios de idoneidad) y les propuso la tarea de valorar el criterio de idoneidad interaccional para el episodio de los dos barrios teniendo en cuentos sólo dos descriptores: 1) ¿Se han resuelto los conflictos?, 2) ¿Ha habido inclusión o exclusión de los alumnos? La respuesta de los alumnos, después de una breve discusión en el gran grupo, fue (1) que el profesor del episodio no había gestionado bien la interacción ya que no se habían resuelto las dificultades de los alumnos y (2) que su gestión había facilitado la exclusión de los alumnos.

El profesor comentó que si se considera que la Didáctica de la Matemática debe aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se necesitan criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora. Indicó que se trataba de realizar una meta-acción (la valoración) que recaía sobre acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En consecuencia, había de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. En definitiva, el profesor manifestó que son necesarios criterios de idoneidad, los cuales permiten contestar a la pregunta genérica, "¿Sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora de los procesos de instrucción matemática?

A continuación el profesor comentó que los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción. También comentó que la aplicación de los criterios de idoneidad a un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas concreto, se puede entender como una metodología que permite la guía, la valoración y posible mejora de estos procesos de instrucción.

A continuación comentó que él había presentado una propuesta de criterios de idoneidad (la propuesta por el EOS) y que la propuesta más importante de este tipo eran los Principios y Estándares del NCTM (2000). El profesor comentó rápidamente cuáles eran estos principios (equidad, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología) y destacó que el proceso que se siguió tenía como objetivo elaborar un documento que pudiese conseguir el máximo consenso posible en la comunidad interesada en la

Educación Matemática. Propuso también la lectura de un documento sobre Principios y Estándares del NCTM (2000).

Seguidamente, el profesor se focalizó en el criterio de idoneidad epistémica y formuló la siguiente pregunta ¿qué entendemos por innovación? y recordó lo que ya se había comentado sobre los tres videos de la mediatriz: se podía entender una innovación (matemática) como un cambio de configuración de objetos matemáticos.

A continuación, el profesor relacionó el cambio de configuración epistémica con la noción de contexto. Señaló primero que se puede entender un contexto como un caso particular de algo más general e ilustró esta idea con el problema de los pozos del desierto como un caso particular que cae bajo el dominio de una noción más general (diagrama de Voronoi). Después hizo observar que había otra manera de entender el contexto, se podía entender como "entorno". Desde esta perspectiva cada configuración epistémica era un contexto diferente en el que situar la mediatriz (contexto euclidiano, contexto de lugar geométrico o contexto de los diagramas de Voronoi). Desde esta perspectiva se puede hablar de contexto geométrico, numérico, algebraico, etc.

El profesor comentó otro ejemplo que dio origen a la geometría analítica, el problema de Pappus, que se puede situar tanto en la geometría sintética como en la geometría analítica.

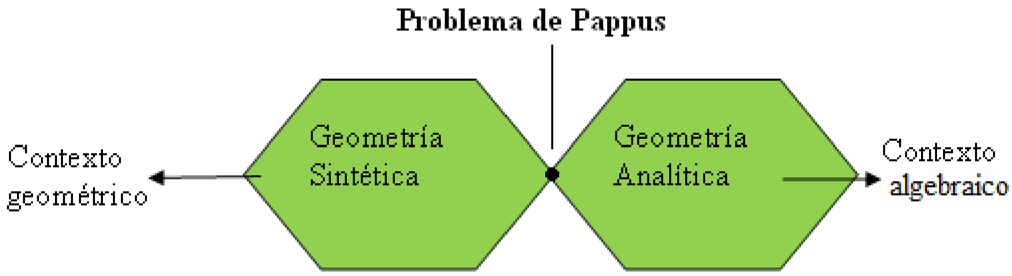


Figura 11.14. Problema de Pappus en dos contextos distintos

Una vez entendida la innovación matemática como un cambio de configuración epistémica, el profesor formuló la siguiente pregunta ¿cuál es la calidad de esta innovación propuesta? O bien ¿cómo aplicar los descriptores de la idoneidad epistémica en el caso de una innovación?

Para responder a esta pregunta el profesor propuso diferentes secuencias innovadoras para introducir la derivada o bien para calcularla sin que se haya de utilizar la definición por límites (ver Anexo 44. Secuencias innovadoras para calcular la función derivada sin límites). Después de un lapso en el que los alumnos estuvieron comentando entre ellos las propuestas innovadoras, el profesor introdujo dos criterios: 1) la falta de errores y 2) el criterio de representatividad. Con relación a este segundo criterio comentó que era necesario tener una referencia a partir de la cual valorar la representatividad de la propuesta innovadora. Comentó que esta referencia se podía considerar por las diferentes configuraciones epistémicas en las que se ha presentado la derivada a lo largo de la historia y les mostró el siguiente esquema que se halla en Pino, Godino y Font (2011):

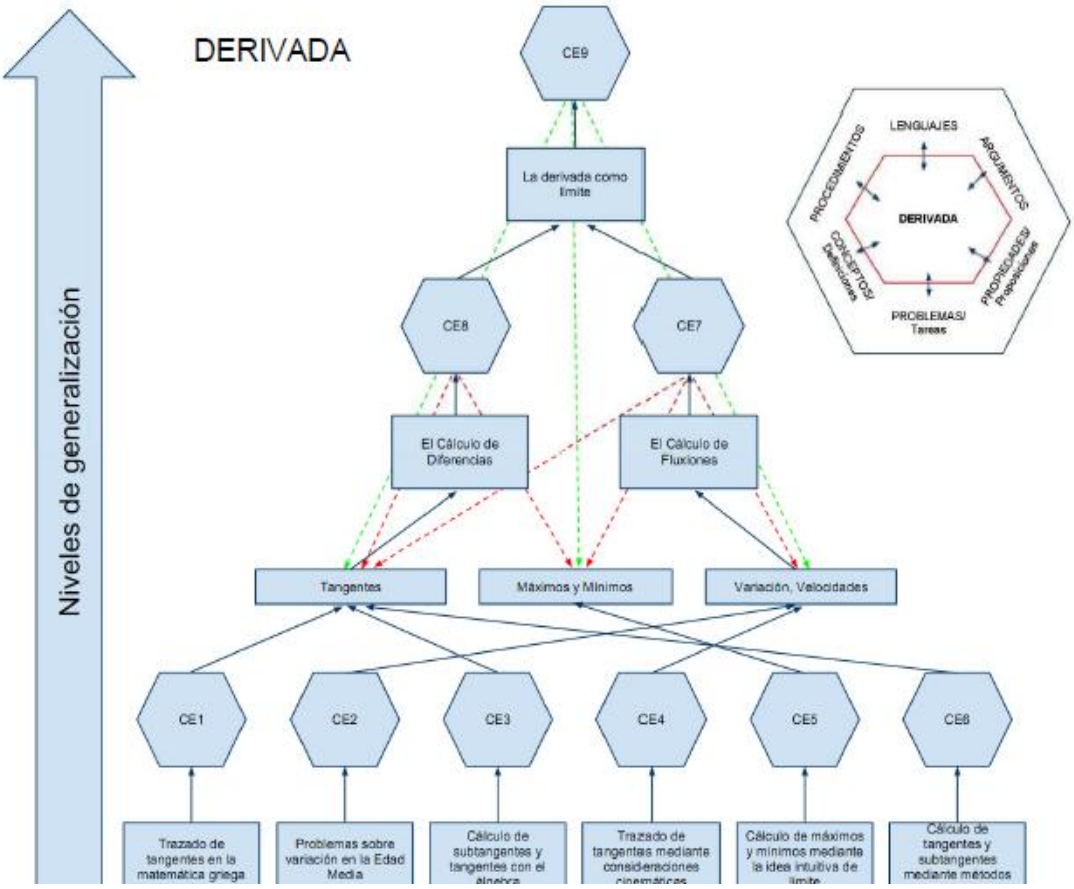


Figura 11.15. Significado holístico de la derivada.

A partir de dicho esquema su conclusión fue que las innovaciones que se habían presentado tendrían que completarse con la definición por límites, porque si no, se estaba dando un significado limitado del objeto derivada.

5.1 Resultados de la tarea de la mediatriz

Con relación a las respuestas de los estudiantes a la descripción de las matemáticas realizadas en el video 1 sobre la mediatriz, concretamente a la descripción de las prácticas realizadas, en la tabla 11.5 se muestran sus respuestas.

Tabla 11.5 Descripción de las Prácticas

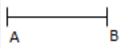
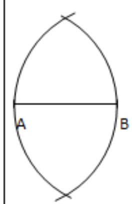
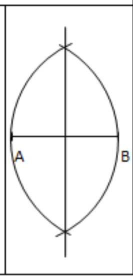
Práctica / Estudiante	Realizada por la profesora: Explicación de la construcción geométrica de la mediatriz	Realizada por el alumno: Repetición en la pizarra de la construcción aprendida
Responden	**22**	**16**
No responden	**0**	**6**

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011.
Fuente: Elaboración propia.

Cinco de los dieciséis estudiantes consideraron la repetición de la construcción aprendida por el alumno como proceso de mecanización, no tomándola en cuenta como práctica realizada por el alumno.

Con relación a la determinación de objetos matemáticos, se muestran las respuestas de los estudiantes en las tablas 11.6 – 11.19.

Tabla 11. 6 Objetos matemáticos: Lenguaje

LENGUAJE																			
Verbal													*Gráfico*			*Simbólico*			
Mediatriz	(Línea) recta	Segmento	Origen y final de segmento	Extremo opuesto	Longitud (amplitud) del segmento/radio	Recta perpendicular	Punto medio o centro de un segmento	Semicircunferencia	Punto de corte (intersección o cruzar)	Ángulo (recto)	Grados	Regla, compás y transportador				A	B	$\overline{AB}$ o segmento AB	m
22	22	22	21	13	22	22	21	22	18	22	19	22	16	18	18	16	16	19	17

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011.
Fuente: Elaboración propia.

Algunos alumnos no identificaron determinados términos verbales en la categoría de objetos matemáticos de tipo lingüístico. Ahora bien, dado que el término lo han utilizado, bien en la descripción de la práctica, bien en la categoría de definiciones o procedimientos, o bien en la descripción de los argumentos, se ha contabilizado también en la tabla 11.6. Por ejemplo, centro del segmento lo usaron algunos alumnos en la descripción del argumento, mientras que amplitud del segmento lo utilizaron en la descripción de la práctica. Por otra parte, todos los alumnos contabilizados en las columnas "Gráfico" y "Simbólico" de la tabla 11.6 sí consideraron estas figuras y símbolos como objetos lingüísticos. Hay que resaltar también que hay tres estudiantes que mencionaron el lenguaje gestual.

Tabla 11.7 Objetos matemáticos: Situación-problema y Definiciones.

SITUACIONES- PROBLEMA		**DEFINICIONES-CONCEPTOS**						
		Previos						*Emergentes*
(P) Construir la recta perpendicular a un segmento por su punto medio.	(A) Ejercicios para reproducir y mecanizar el procedimiento de construcción.	Segmento (Tiene origen y final)	Línea recta (no tiene ni principio ni fin)	Punto medio (divide al segmento en dos de igual longitud)	Semicircunferencia (Media circunferencia trazada con el compás dado el centro y el radio	Recta perpendicular (forma con el segmento cuatro ángulos de 90º)	Ángulo recto (mide 90 grados) perpendicularidad	(P) Mediatriz (definida como recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio)
21	15	22	21	20	21	22	22	21

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Doce de los 21 alumnos no consideraron que la situación-problema del episodio analizado sea "*construir la recta perpendicular a un segmento por su punto medio*", pero sí lo comentaron al describir la práctica realizada por la profesora. Lo mismo ocurre con trece alumnos de los quince que consideraron como situación-problema "ejercicios para reproducir y mecanizar el procedimiento de construcción". En cambio, una gran mayoría de las respuestas contabilizadas en las columnas "Definiciones-conceptos" de la tabla 11.7 sí consideraron estos enunciados como objetos primarios del tipo "definición-concepto".

Tabla 11.8 Objetos matemáticos: Procedimientos y propiedades

PROCEDIMIENTOS										**PROPIEDADES**		
Previos			*Emergentes*							*Emergentes*		
			Sugerido por alumno: Determinación del punto medio.		Explicado por la profesora: Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.							
Medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos con regla y transportador	Dibujar rectas y segmentos (Fijar dos puntos en la recta)	Identificación de rectas perpendiculares (Tomar el transportador, medir 90º	1) Medir la longitud del segmento con regla	2) Determinar con la regla el punto cuya distancia a un extremo del segmento sea la mitad de su longitud	1) Con centro en extremo del segmento se dibuja la semicircunferencia de radio la longitud del segmento.	2) Se repite el punto 1) con el otro segmento	3) Se determinan los dos puntos de corte de las dos semicircunferencias	4) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos de corte	División de un segmento en dos partes iguales	(P) La recta que se construye de esta manera corta al segmento en dos partes iguales	(A) La recta construida de esta manera tiene un punto que la une (común) con el segmento	(P) La recta construida de esta manera es perpendicular al segmento
20	22	20	5	3	20	20	18	20	7	21	0	20

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Solo hay un alumno que distinguió entre procedimientos previos y emergentes.

Algunos alumnos no identificaron muchos de los procedimientos contabilizados en la tabla 11.8 en el bloque de procedimientos. Ahora bien, dado que lo comentaron en la descripción de la práctica, o bien lo dieron en forma de definición-concepto (por ejemplo, consideraron como definición-concepto “división” pero no consideraron el procedimiento de “dividir”), o bien lo consideraron en la descripción de los argumentos, se ha contabilizado también en la tabla 11.8. Así por ejemplo, el procedimiento previo: “*Medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos con regla y transportador*” solo fue considerado como procedimiento por doce de los 20 alumnos, los demás alumnos lo describieron en la práctica. Lo mismo ocurre con el procedimiento: “*Dibujar rectas y segmentos* (*Fijar dos puntos en la recta*)” que fue identificado como procedimiento por quince de los 22 alumnos, los otros lo comentaron al describir la práctica.

Tabla 11.9 Objetos matemáticos: Argumentos

	ARGUMENTOS				
	Tesis: La recta construida con el procedimiento explicado es perpendicular al segmento (y esto es la mediatriz)		Tesis: La línea dibujada no es un segmento	Tesis: El centro de un segmento se obtiene utilizando la regla	Tesis opuesta: El centro del segmento se obtiene exactamente con el compás.
	1) Si es perpendicular los cuatro ángulos medirán 90 º (proposición)	2) Mido los cuatro ángulos con el transportador y compruebo que los cuatro miden 90 º (procedimiento)	(A) La línea dibujada no es un segmento porque hay un convenio que dice si no se marca el inicio ni el final entonces es una recta.	(A1)Proponente: Para conseguir el centro del segmento mido con una regla y .....(no es admitido en un inicio por imprecisión del intrumento de medida)	(P) No hay argumento. Criterio de autoridad implícito.
T y Arg	7	7	1	0	0
T o Arg	5	7	5	1	4

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011.
Fuente: Elaboración propia.

Solo siete alumnos distinguieron entre la tesis del argumento y sus dos justificaciones en el caso de la primera tesis: “*La recta construida con el procedimiento explicado es perpendicular al segmento* (*y esto es la mediatriz*)”. Cinco alumnos solo comentaron la primera justificación y siete dieron la segunda (cinco de los cuales proporcionaron también la justificación 1). Sobre la tesis 2 “*La línea dibujada no es un segmento*” solo un estudiante la consideró con su justificación y otros cinco tomaron en cuenta solo la justificación. Con relación a la tesis 3 “*El centro de un segmento se obtiene utilizando la regla*” solo un alumno consideró la justificación. Por último, con relación a la tesis 4 “*El centro del segmento se obtiene exactamente con el compás*” solo es cuatro solo tomaron en cuenta la justificación.

Con relación a la determinación de procesos matemáticos, se muestran las respuestas de los estudiantes en la tabla 11.10

Tabla 11.10 Procesos

PROCESOS MATEMÁTICOS											
Comunicación	Materialización	Institucionalización	Enunciación de definición	Algoritmización	Argumentación	Idealización	Reificación	Generalización	Particularización	Significación	Resolución de problemas
10	19	9	18	16	17	1	2	5	5	2	2

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que los alumnos identificaron con más facilidad las siguientes familias de procesos: materialización (representación externa) (19); enunciación de definiciones (18); argumentación (17) y algoritmización (16).

Quince alumnos hicieron una reflexión global del episodio, señalando que la profesora realizó una clase magistral y descontextualizada. Otros dos alumnos solo señalaron que se trató de una clase magistral y otros dos que era una clase descontextualizada.

5.2 Conclusiones sobre los resultados de la tarea de mediatriz

Nuestra primera conclusión es que los alumnos pudieron reproducir el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos que se les había propuesto como modelo.

Una segunda conclusión es que en los análisis realizados por los alumnos, siguiendo el modelo de análisis de prácticas objetos y procesos desarrollado por el EOS que se les había propuesto, se observan ciertas dificultades inherentes a este modelo de análisis: 1) Distinción entre definiciones y conceptos, 2) Duplicidad entre las definiciones-concepto, proposiciones y procedimientos 3) Las proposiciones se repiten en los argumentos. 4) La descripción de prácticas se solapa con la configuración de objetos y con la descripción de procesos, etc.

Un aspecto que nos parece muy relevante es que, sin que se les hubiese preguntado al respecto en el enunciado de la tarea, dos alumnos infirieron competencias a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos realizado. En el anexo 45 (Anexo 45. Respuesta de una alumna a la tarea de la mediatriz) se adjunta la respuesta completa de uno de estos dos alumnos y aquí reproducimos lo que dice sobre las competencias matemáticas:

> Contribució del problema proposat a l'adquisició de la ***competència matemàtica***:
>
> - Considero que no implica pensar matemàticament, ja que els alumnes es limiten a imitar un procediment de forma mecànica. Tot i que la professora tracta que els alumnes relacionin conceptes (punt mig, rectes perpendiculars,...) i que facin comprovacions amb la regla i el transportador.
> - Amb la repetició de l'exercici, els alumnes podrien arribar a generalitzar i per tant, raonar matemàticament. Però no és segur que aquest procés arribi a produir-se. Tampoc es demana als alumnes que argumentin res, ja que és la professora qui ha fet aquest procés.
> - El problema no suposa desenvolupar estratègies de resolució.
> - Tampoc suposa la interpretació de resultats matemàtics.
> - Dos punts els establerts en el currículum que si compleix el problema són: a) l'ús de tècniques i instruments per a fer matemàtiques: han de seguir un procés purament matemàtic i ho han de fer amb regla i compàs.
>   b) fer una representació gràfica així com emprar símbols (A, B, $\overline{AB}$, m).
> - Per acabar, tampoc suposa la comunicació oral ni escrita, ni amb la professora ni amb els companys, de cap mena de raonament matemàtic.

Se trata de un caso relevante para la investigación que se presenta ya que metafóricamente se puede considerar como un "teorema de existencia" para el objetivo específico 5.3 de esta investigación:

> 5.3. Determinar si hay alumnos con competencia matemática que después del ciclo formativo para el APOPM son capaces por propia iniciativa de realizar una evaluación analítica y global de competencias.

5.3 Resultados del cuestionario 1

Las respuestas al Cuestionario 1 sobre Tarea de la Mediatriz que se muestran en el anexo 46 (ver Anexo 46. Resultados del cuestionario sobre Tarea Mediatriz) fueron contestadas por los 22 estudiantes. Con relación a la pregunta 1 ¿*Entendiste lo que se pedía en la tarea*?, 21 estudiantes respondieron que sí y uno indicó que solo entendió parte de ella. Con relación al tiempo utilizado para realizar la tarea propuesta (preguntas 2 y 3) de este cuestionario, los estudiantes manifestaron haber dedicado como media aproximadamente 5 horas, de las cuales 3,5 horas fueron dedicadas al análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos y 1,5 horas para reflexionar sobre la relación entre las matemáticas del episodio con las que prescribe el currículo de la ESO. Se descartó una respuesta de una alumna que afirmó haber dedicado 20 horas de trabajo a la realización de la tarea.

Con relación al material utilizado para realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (pregunta 4), 20 estudiantes manifestaron haber utilizado la explicación de las clases y otros 20 estudiantes el ejemplo de análisis de la tarea de los cinco pozos (diagrama de Voronoi).

Con relación al grado de acuerdo o desacuerdo sobre la utilidad del ejemplo propuesto como modelo (pregunta 5). Cinco respondieron que les resultó muy útil, 15 respondieron que fue útil, uno contestó que le resultó indiferente y uno no uno no respondió al ítem.

Con relación a la pregunta 6 acerca del grado de acuerdo o desacuerdo (ver tabla 11.11) de los estudiantes sobre su calificativo y utilidad al análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM), –Muy en desacuerdo=1; En desacuerdo=2; Indiferente=3; De acuerdo=4; Muy de acuerdo=5– se obtuvieron las siguientes respuestas.

Tabla 11. 11. Respuestas a la pregunta 6 del cuestionario 1

Pregunta 6	6.a El APOPM es ambiguo					6.b El APOPM es laborioso					6.c El APOPM es útil para determinar los contenidos y procesos del currículo de la ESO					6.d El APOPM es útil para determinar las competencias desarrolladas en el episodio analizado				
Grado de acuerdo	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Nº de estudiantes	0	2	6	13	1	0	1	3	9	9	0	2	2	14	4	0	0	4	15	3

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Sobre la ambigüedad del modelo de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM), catorce estudiantes manifestaron que estaban de acuerdo con que era ambiguo, seis dijeron que indiferente y dos consideraron que no era ambiguo. Sobre lo laborioso de este análisis, dieciocho estudiantes indicaron que lo era, tres se mostraron indiferentes y uno no lo consideró laborioso. Con relación a la utilidad de este análisis dieciocho alumnos manifestaron estar de acuerdo con que era útil, tanto para determinar los contenidos y los procesos del currículo de la ESO como para determinar las competencias matemáticas presentes en el episodio analizado. Cuatro alumnos se mostraron indiferentes y ninguno consideró que no fuese útil

Con relación a la pregunta 7 "*Crees que sin haber realizado previamente el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos habrías contestado lo mismo en los apartados d y e de la tarea propuesta* (d. *Determinación de los contenidos y procesos que se establecen en el currículum de 1ro de ESO que se han trabajado en este episodio y e. Reflexión sobre las matemáticas del episodio descrito en a-c y de las descritas en el currículum de 1º de ESO*)." 21 estudiantes respondieron que no y uno que sí.

Con relación a la pregunta 8 "*Cuál(es) de los cinco apartados de la tarea propuesta te pareció el(los) más complejo(s) de contestar y por qué*", (ver tabla.12), catorce estudiantes manifestaron que fue el apartado 4) correspondiente a los procesos que se inferían en el episodio.

Tabla 11.12. Respuestas a la pregunta 8 del cuestionario 1

Apartados	1) Describe las prácticas matemáticas realizadas	2) Determina los objetos previos y emergentes (situación problema. Definiciones, procedimientos, definiciones, propiedades, representaciones y argumentos) activados en este episodio.	3) Determina los procesos que se pueden inferir en este episodio.	4) Determina los contenidos y los procesos que se establecen en el currículum de 1ro. de la ESO que se han trabajado en este episodio	5) Realiza una reflexión sobre las matemáticas en el episodio descrito en 1-3 y las que prescribe el currículum de 1ro. de la ESO.
Nº de estudiantes	5	5	14	3	3

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Algunas de sus respuestas sobre las dificultades para inferir procesos fueron "*La complejidad reside en que decidir qué proceso está actuando no es algo inmediato sino que interviene una cierta interpretación personal. Para ello es necesario leer y releer el texto así como los apuntes proporcionados en clase sobre este tema*", "Considero que no logro definir *o clasificar de un modo claro, todos los procesos del ejercicio. Alguno de ellos lo observo claramente, pero con otros tengo más dificultad*"; "*En concreto la detección de forma correcta de los procesos ya que es un* *apartado muy amplio y ambiguo que contempla muchas posibles opciones*".

5.4 Conclusiones sobre el cuestionario 1

Para la mayoría de los estudiantes (21) la tarea fue clara, tomándoles en promedio cinco horas en la resolución de la misma. La mayoría de los estudiantes (20) manifestó haber utilizado las explicaciones de clase y el ejemplo de la tarea de los cinco pozos.

Aunque los estudiantes (14) manifestaron que el análisis de prácticas, objetos y procesos era ambiguo y laborioso (18), lo consideraron útil (18) para determinar los contenidos y los procesos del currículo de la ESO y también (18) útil para determinar las competencias matemáticas presentes en el episodio analizado.

Nuestra conclusión es que se consiguió el objetivo específico 5.4: Determinar si los alumnos consideran que el APOPM es útil para la evaluación de competencias matemáticas. Y se determinó que a los alumnos les fue de utilidad el modelo de análisis de prácticas, objetos y procesos.

6. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE SÉPTIMA SESIÓN DEL CICLO FORMATIVO

La séptima clase del ciclo formativo, de dos horas de duración, correspondió a la asignatura *Investigación e innovación sobre la propia práctica*. El profesor realizó varios comentarios sobre los resultados de la tarea de la mediatriz y sobre las respuestas de los alumnos al cuestionario sobre dicha tarea. Primero comentó que habían realizado en general el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM) razonablemente bien. Después comentó el problema de solapamiento de las categorías utilizadas y de la dificultad para distinguir si se trataba de una definición, una propiedad o un procedimiento. Con respecto a esta última dificultad señaló que estaba relacionada con el problema filosófico de determinar cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos, pero que no quería entrar en esta problemática porque se corría el peligro de dedicar el resto del tiempo de la asignatura a esta cuestión.

Con relación a la valoración que hicieron los alumnos sobre la ambigüedad del modelo de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM), el profesor comentó que, desgraciadamente, era inevitable un cierto grado de ambigüedad en el área de educación matemática, más aún cuando se trataban de aspectos complejos como procesos o competencias.

Con relación a la utilidad del modelo de APOPM, comentó que la respuesta mayoritaria fue que se consideraba útil. También mencionó que mayoritariamente se consideró muy laborioso.

Su siguiente comentario fue que un currículo por procesos y competencias como el de Cataluña, era un currículo muy ambicioso que exigía una competencia profesional importante y que esta competencia implicaba realizar análisis de este tipo ya que, como ellos mismos indicaron en sus respuestas al cuestionario, resultaba útil para evaluar el cumplimiento de los contenidos del currículo.

También comentó que, sin que se les hubiese preguntado al respecto en el enunciado de la tarea, dos alumnos infirieron competencias a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos realizado. Y que en sus respuestas al cuestionario casi todos los alumnos consideraron que el APOPM era útil para la evaluación de competencias.

A continuación el profesor se centró en el problema de la evaluación de competencias y dijo que, dado que los currículos en varios países estaban diseñados en términos de competencias PISA 2003, tomaría como referencia las competencias de dicho informe.

Seguidamente mencionó que, en su opinión se debían cumplir tres condiciones para poder realizar la evaluación de competencias:

1) El profesor debía tener una buena competencia matemática, para poder diseñar y evaluar las tareas y las producciones de sus alumnos, pero no es suficiente.
2) El profesor debía ser capaz de tener un saber de fondo, es decir tener competencia para poder realizar un APOPM y
3) El profesor debía tener tiempo.

Resaltó que un currículo por competencias demandaba tiempo por parte del profesorado para poder evaluarlas y que si, desgraciadamente, la administración no le proporcionaba este tiempo, difícilmente el profesor podría evaluar las competencias de sus alumnos.

El profesor continuó explicando que les propondría un método de evaluación de competencias que, eso sí, inevitablemente exigía bastante tiempo. Con relación a este método lo primero que dijo fue que en el informe PISA 2003 se establecen ocho competencias y que para cada una de ellas se proporcionan descriptores o subcompetencias y que, a su vez, para cada subcompetencia se proponen indicadores que permiten determinar el grado de complejidad de la subcompetencia. Ilustró estos indicadores utilizando como ejemplo la competencia *pensar y razonar*. Después presentó a los alumnos la tabla de descriptores del grado de competencia (ver capítulo 6) y resaltó que se había extraído del informe PISA 2003, solo el formato era diferente.

Después comentó que tomaría un problema del informe PISA 2003 (el problema del carpintero) e hizo varios comentarios sobre dicho problema, en particular comentó el problema de la traducción del enunciado (ver capítulo 4) y la diferencia de resultados entre Cataluña y otras comunidades de España. Explicó que trabajarían con el problema del carpintero adaptado y que esta adaptación consistía en convertirlo en un problema de respuesta abierta que, además, pedía claramente a los alumnos que justificasen su respuesta. Después les enseñó una respuesta de un alumno al problema (ver capítulo 6) y se preguntó, si tenemos un alumno que ha contestado esto, ¿Qué competencias está demostrando? ¿Y cuál será el feedback necesario que se le debe dar? El mismo respondió "si tienes una buena competencia matemática, cierta práctica de APOPM y tiempo" puedes contestar a estas preguntas.

El profesor propuso las siguientes tareas:

TAREA DE EVALUACIÓN ANALÍTICA DE COMPETENCIAS PISA 2003

A continuación siguen las respuestas de cuatro alumnos de 3º de ESO al problema del carpintero (adaptado).

En el caso del alumno D hay que tener en cuenta que éste había resuelto problemas de cálculo del perímetro de rectángulos con anterioridad.

En el caso del alumno A hay que tener en cuenta que éste no había resuelto problemas de cálculo del perímetro de polígonos como el que se le propone, pero si que había resuelto problemas como los propuestos al alumno D.

En el caso del alumno C hay que tener en cuenta que éste no había resuelto problemas de cálculo del perímetro de polígonos como el que se le propone, pero si que había resuelto problemas como los propuestos a los alumnos D y A.

En el caso del alumno B hay que tener en cuenta que éste había resuelto problemas como el propuesto al alumno D y que ya conocía el teorema de Pitágoras, aunque no lo había aplicado al cálculo de perímetros.

Tarea 1: realiza la evaluación analítica de competencias para el alumno C a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos (ya realizado)

Tarea 2: realiza la evaluación analítica de competencias para el alumno B. Para ello realiza previamente el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos.

Estas tareas fueron acompañadas de los cuatro documentos siguientes, llamados Situación 1, Situación 2, Tarea 1 y Tarea 2 y también de la tabla de descriptores del grado de competencia (ver capítulo 6):

SITUACIÓN 1

****

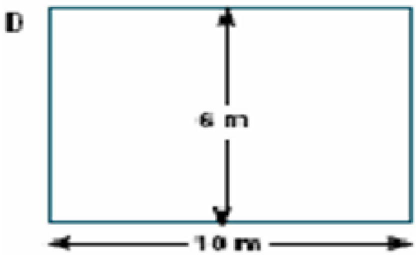
PROPUESTA DE EVALUACIÓN ANALÍTICA DE COMPETENCIAS PISA 2003

Considera el enunciado del siguiente problema PISA (adaptado) y la solución desarrollada por un alumno.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

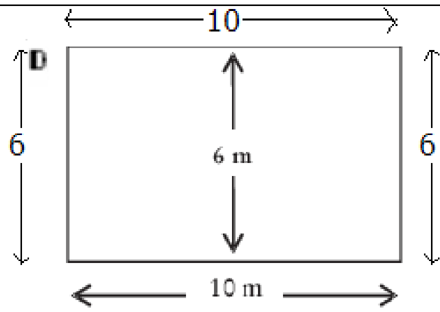
***CARPINTERO* (*Situación 1*)**

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Ha considerado el diseño D *para el parterre.*



Para este diseño, explica si se puede tapiar o no el parterre con los 32 metros de madera. Debes responder con un sí puedes hacerlo o un no puedes hacerlo, y por qué.

SOLUCIÓN DE UN ALUMNO



Es igual a sumar las distancias de los costados (*perímetro*) 6+6 +10+ 10=32*m*.

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

PRÁCTICAS

La práctica que realiza el alumno es la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta, calculando el perímetro de la Figura D. Para esta figura aplica que el perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados.

OBJETOS

SITUACIÓN-PROBLEMA: El problema del carpintero (*Situación* 1)

LENGUAJE

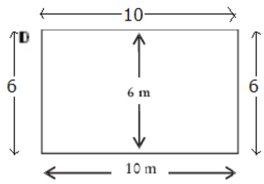
Verbal:

Términos precisos: sumar, perímetro

Otros términos: distancias, costados

Simbólico: D; 6 + 6 + 10 + 10 =32*m*.

Gráfico:



CONCEPTOS-DEFINICIÓN

- Conceptos explícitos: suma, perímetro
- Conceptos implícitos: longitud de un segmento, polígono.

PROPOSICIONES

- Propiedades implícitas utilizables: la longitud es una magnitud aditiva.

PROCEDIMIENTOS.

- Procedimientos explícitos: identificar segmentos de la misma longitud; calcular el perímetro, sumar.

ARGUMENTOS

Tesis: Es posible construir un parterre con este diseño.

De manera implícita responde que sí es posible un parterre con este diseño porque calcula el perímetro del rectángulo y obtiene 32 m.

Tabla 1. Configuración Cognitiva de Objetos Matemáticos

PROCESOS

El alumno ha comprendido el enunciado del problema. Es decir, ha realizado un primer proceso de "comunicación" (en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas") que no entraremos a analizar. Para ello, ha tenido que entender el significado (proceso de significación) de la figura D del enunciado del problema y de los términos que aparecen y, sobre todo, comprende el texto globalmente, entendiendo, además, que debe dar una justificación de su respuesta. Para entender la figura como rectángulo el alumno ha de realizar un proceso de idealización (p. e., en este caso del rectángulo supone que los lados son perpendiculares) y de particularización.

El alumno realiza un proceso de comunicación en tanto que da una respuesta al problema. Esta comunicación implica un proceso de argumentación explícita basada en (1) una estimación visual implícita de que la figura es un rectángulo (proceso de idealización y de significación) y (2) en la aplicación de la definición de perímetro de un rectángulo a la figura del problema. En la comunicación que hace el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, puesto que escribe la longitud de tres lados, el verbal, dice que calcula el perímetro pero el uso de los términos no es del todo adecuado (dice distancia en lugar de longitud), y el simbólico ya que escribe una igualdad numérica. Por tanto también, hay un proceso de representación.

EVALUACIÓN ANALÍTICA DE COMPETENCIAS PISA 2003

Pensar y razonar

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

“Comprender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites”

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de los objetos (configuración cognitiva) activados en la práctica que el alumno ha realizado (lectura del enunciado y producción de un texto) para resolver correctamente el problema. Dicho análisis nos permite precisar cuáles son estos objetos: perímetro, rectángulo, líneas horizontales, verticales, etc.

Luego, determinamos el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

“Comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente” (Reproducción).

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es el conocimiento del tipo de problemas que el alumno ha resuelto anteriormente, en base al currículo. Dicho alumno ha resuelto problemas de cálculo de perímetros de rectángulos.

Argumentación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

“Crear y plasmar argumentos matemáticos”

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de los procesos en el que se observan varios procesos de argumentación.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

“Crear y expresar razonamientos matemáticos simples” (Reproducción)

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es la argumentación que el alumno realiza al justificar su respuesta a este problema. La argumentación la situamos en el nivel de reproducción (justificación de procesos de cálculo).

Comunicación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso son dos:

“Expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático”

“Entender afirmaciones enunciados orales y escritas de otras personas sobre matemáticas”

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra estas dos subcompetencias es el análisis de los procesos en el que se observan varios procesos de comunicación en los que el alumno entiende lo que el problema pregunta y produce un texto con la respuesta correcta.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso serían los siguientes:

“Comprender y expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.” (Reproducción)

“Entender cuestiones matemáticas sencillas propuestas por otros (profesor, libro de texto, etc.) relacionadas con la aplicación de propiedades conocidas, realizar cálculos utilizando algoritmos conocidos, etc.” (Reproducción)

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es que:

(1) El alumno ha entendido el problema y ha escrito un texto correcto como respuesta en el que ha combinado el uso de figuras, texto verbal y símbolos;

(2) Se trata de un problema contextualizado cuya resolución es inmediata.

(3) El uso incorrecto de ciertos términos (costados), a pesar de que globalmente la respuesta se puede considerar como correcta.

Construcción de un modelo

Consideramos que dicha competencia se muestra en la respuesta del alumno, tomando en cuenta que hay un trabajo con un modelo matemático simple: el perímetro de un rectángulo, que es un modelo geométrico de la situación extra-matemática planteada.

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

“Trabajar con un modelo matemático”.

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de procesos, específicamente el de representación y de particularización: Aplicación de la noción de perímetro al caso particular de la situación contextualizada del enunciado.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Trabaja con un modelo matemático muy simple, previamente conocido y que ya ha sido aplicado." (Reproducción)

El indicador es que el alumno ha reconocido la longitud del contorno del parterre, como un caso particular de la noción matemática de perímetro de un rectángulo.

Formulación y resolución de problemas

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras"

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es que el alumno ha resuelto correctamente el problema.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera." (Reproducción)

El indicador es que el alumno ha resuelto el problema calculando el perímetro del parterre.

Representación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito"

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es que el alumno ha hecho uso de diferentes representaciones.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación." (Reproducción)

El indicador es que el alumno ha resuelto el problema cambiando de la representación verbal a la simbólica.

Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso son dos:

"Manejar afirmaciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos."

"Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal."

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra estas dos subcompetencias es el análisis de la configuración cognitiva en el que se observan el lenguaje simbólico y gráfico y los procedimientos utilizados (calcular el perímetro)

Se presenta una situación educativa con un contexto extramatemático que se tiene que traducir a contenidos de espacio y forma.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso serían los siguientes:

"Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios." (Reproducción)

"Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal en situaciones y en contextos sobradamente conocidos." (Reproducción)

El indicador, en el caso de la solución de este problema, es que los cálculos son simples y rutinarios (realizar una suma).

Empleo de soportes y herramientas

Esta última competencia consideramos que no ha sido activada por el alumno ya que, salvo papel, bolígrafo, reglas y calculadora (soportes usuales) no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema. Aunque también sería aceptable considerar que dicha competencia ha sido activada a un nivel de reproducción.

Conclusión

Nuestra conclusión es que se trata de una respuesta que permite situar la competencia del alumno en el nivel de reproducción.

****

SITUACIÓN 2

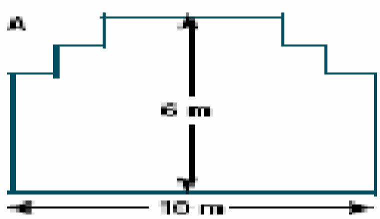
PROPUESTA DE EVALUACIÓN ANALÍTICA DE COMPETENCIAS PISA 2003

Considera el enunciado del siguiente problema PISA (adaptado) y la solución desarrollada por un alumno.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

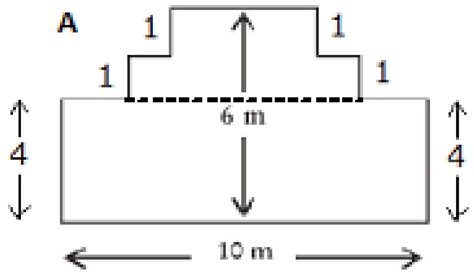
***CARPINTERO* (*Situación 2*)**

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Ha considerado el diseño A para el parterre.



Para este diseño, explica si se puede tapiar o no el parterre con los 32 metros de madera. Debes responder con un sí puedes hacerlo o un no puedes hacerlo, y por qué.

SOLUCIÓN DE UN ALUMNO



El parterre A puede ser tapiado con 32m*. de madera:*

Primero he calculado ~~el área~~ el perímetro del rectángulo principal (4.2+10.2), *ya que aunque esta figura tiene elevaciones, las líneas horizontales acaban de completar el rectángulo interior.*

Después he sumado los cuatro metros de franja verticales, responsables de la "descomposición" del rectángulo 28+4=32m.

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS

PRÁCTICAS

La práctica que realiza el alumno es la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta, calculando el perímetro de la Figura A. Para esta figura aplica la propiedad de la preservación de la longitud bajo una traslación y la transforma en otra figura de perímetro equivalente, aplicando a esta última, que el perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados.

OBJETOS

SITUACIÓN-PROBLEMA: El problema del carpintero (*Situación* 2)

LENGUAJE

Verbal:

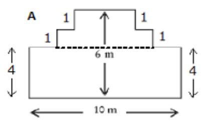
Términos precisos: calcular, perímetro, rectángulo, figura, líneas horizontales, sumar, cuatro, metros, verticales

Otros términos: elevaciones y descomposición de un rectángulo.

Simbólico:

A; (4.2+10.2); 28 + 4 = 32m;

Gráfico:



CONCEPTOS-DEFINICIÓN • Conceptos explícitos: suma, multiplicación, perímetro, rectángulo • Conceptos implícitos: longitud de un segmento y polígono. **PROPOSICIONES** • Propiedades implícitas utilizables: la longitud es una magnitud aditiva, preservación por traslaciones de la longitud de un segmento. **PROCEDIMIENTOS** • Procedimientos explícitos: identificar segmentos de la misma longitud; calcular el perímetro; estimar longitudes, sumar, multiplicar. • Procedimientos implícitos: obtener polígonos isoperimétricos. **ARGUMENTOS** *Tesis 1*: El segmento horizontal formado por la unión de los segmentos horizontales de la figura A tiene la misma longitud que el lado horizontal (10 m) del rectángulo de lados 10 m y 4 m. La longitud de los segmentos se conserva al ser trasladados (se infiere de la figura). *Tesis* 2: Es posible construir un parterre con este diseño. Lo indica, implícitamente al calcular el perímetro del polígono.

Tabla 2. Configuración Cognitiva de Objetos Matemáticos

PROCESOS

El alumno ha comprendido el enunciado del problema. Es decir, ha realizado un primer proceso de "comunicación" (en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas") que no entraremos a analizar. Para ello, ha tenido que entender el significado (proceso de significación) de la figura A del enunciado del problema y de los términos que aparecen y, sobre todo, comprende el texto globalmente, entendiendo, además, que debe dar una justificación de su respuesta. Para entender la figura como un polígono el alumno ha de realizar un proceso de idealización y de particularización.

El alumno realiza un proceso de comunicación en tanto que da una respuesta (implícita) correcta al problema. Esta comunicación implica un proceso de argumentación explícita que no está bien comunicada, por ejemplo no usa los términos de manera correcta (dice franjas en lugar de segmentos) y no explica por qué los lados (verticales) de menor longitud del polígono dado tienen una longitud de un metro, utiliza términos ambiguos como "rectángulo principal", "elevaciones", etc. La argumentación está basada en (1) la realización de cálculos aritméticos (proceso de algoritmización), (2) una estimación visual de las longitudes de los lados menores del polígono, (3) que la figura es un polígono con lados adyacentes perpendiculares (proceso de idealización y de significación), (4) la propiedad de que el segmento horizontal formado por la unión de los segmentos horizontales (diferentes a los de la base) de la figura tiene la misma longitud que el lado horizontal mayor del polígono (proceso de materialización), (5) la definición de perímetro. En la comunicación que realiza el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, puesto que escribe la longitudes de los lados verticales del polígono, dibuja una línea discontinua para representar que el segmento horizontal formado por los segmentos horizontales (diferentes de la base) de la figura tienen la misma longitud que la base; el verbal puesto que dice, por ejemplo, que calcula el perímetro (de manera implícita), y el simbólico, por ejemplo, escribe una igualdad numérica. Por tanto también, hay un proceso de representación.

EVALUACIÓN ANALÍTICA DE COMPETENCIAS PISA 2003

Pensar y razonar

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

“Comprender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites”

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de los objetos (configuración cognitiva) activados en la práctica que el alumno ha realizado (lectura del enunciado y producción de un texto) para resolver correctamente el problema. Dicho análisis nos permite precisar cuáles son estos objetos: perímetro, longitud, polígono, preservación de longitudes por traslaciones etc.

Luego, determinamos el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

“Comprender y utilizar los conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.” (Nivel de conexión)

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es el conocimiento del tipo de problemas que el alumno ha resuelto anteriormente, en base al currículo y al tipo de problemas que habitualmente se trabajan en los libros de texto y al conocimiento del trabajo escolar previo del alumno. Dicho alumno ha resuelto problemas de cálculo de perímetros, pero éste, difiere ligeramente a los que está acostumbrado a resolver.

Argumentación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

“Crear y plasmar argumentos matemáticos”

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de los procesos en el que se observan varios procesos de argumentación.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

“Crear y expresar razonamientos matemáticos simples.” (Nivel de conexión)

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es la argumentación que el alumno realiza al justificar su respuesta a este problema (ver el apartado de procesos anterior).

Comunicación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso son dos:

“Expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático”

“Entender afirmaciones enunciados orales y escritas de otras personas sobre matemáticas”

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra estas dos subcompetencias es el análisis de los procesos en el que se observan varios procesos de comunicación en los que el alumno entiende lo que el problema pregunta y produce un texto con la respuesta correcta.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso serían los siguientes:

“Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones.” (Conexión)

“Entiende cuestiones matemáticas propuestas por otros (profesor, libro de texto, etc.) cuya resolución no es inmediata ni se limita a la aplicación de propiedades y algoritmos ya conocidos y utilizados (por ejemplo, cuando se presentan problemas contextualizados que exigen un cierto proceso de descontextualización no inmediato) aunque el alumno puede tener una cierta idea de cómo abordarlo.” (Conexión)

El indicador utilizado para afirmar que nos encontramos en este nivel es que:

(1) El alumno ha entendido el problema y ha escrito un texto correcto como respuesta en el que ha combinado el uso de figuras, texto verbal y símbolos;

(2) Se trata de un problema contextualizado cuya resolución no es inmediata.

(3) El uso incorrecto de ciertos términos (elevaciones, descomposición de un rectángulo), a pesar de que globalmente la respuesta se puede considerar como correcta.

Construcción de un modelo

Consideramos que dicha competencia se muestra en la respuesta del alumno, tomando en cuenta que hay un trabajo con un modelo matemático simple: el perímetro de polígonos, que es un modelo geométrico de la situación extra-matemática planteada.

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Trabajar con un modelo matemático".

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es el análisis de procesos, específicamente el de representación y de particularización: Aplicación de la noción de perímetro al caso particular de la situación contextualizada del enunciado.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Trabaja con un modelo matemático muy simple, previamente conocido y que ya ha sido aplicado." (Reproducción)

El indicador es que el alumno ha reconocido la longitud del contorno del parterre, como un caso particular de la noción matemática de perímetro de un polígono.

Formulación y resolución de problemas

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras"

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es que el alumno ha resuelto correctamente el problema.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)" (Conexión)

El indicador es que el alumno ha resuelto el problema utilizando distintas formas de representación (gráfica: dibujo de la línea; verbal: calcula el perímetro de manera explícita y simbólica, igualdad numérica).

Representación

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso es:

"Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito"

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra esta competencia es que el alumno ha hecho uso de diferentes representaciones.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso sería el siguiente:

"Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos" (Conexión)

El indicador es que el alumno ha resuelto el problema utilizando distintas formas de representación (gráfica, verbal y simbólica).

Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico

Primero determinamos en la tabla de niveles de competencias el descriptor (o subcompetencia) que se infiere de la respuesta del alumno, en este caso son dos:

"Manejar afirmaciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos."

"Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal."

El indicador utilizado para afirmar que en la respuesta del alumno se muestra estas dos subcompetencias es el análisis de la configuración cognitiva en el que se observan el lenguaje simbólico y gráfico y los procedimientos utilizados (identificar segmentos de la misma longitud; calcular el perímetro; estimar longitudes, sumar; multiplicar) calcular la raíz cuadrada, etc.)

Se presenta una situación educativa con un contexto extramatemático que se tiene que traducir a contenidos de espacio y forma.

El siguiente paso consiste en determinar el nivel de complejidad. En este caso serían los siguientes:

"Manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares." (conexión)

"Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal situaciones y en contextos menos conocidos." (conexión)

El indicador, en el caso de la solución a este problema, es que los cálculos son simples (realizar una suma) pero no se pueden considerar rutinarios ya que él ha tenido que seleccionar los sumandos.

Es una situación familiar, debido a que se trata de encontrar perímetros de figuras poligonales, pero no rutinaria, dado que ha tenido que encontrar las longitudes de los lados haciendo uso de un procedimiento implícito que no se puede considerar rutinario, que es la obtención de polígonos isoperimétricos.

Empleo de soportes y herramientas

Esta última competencia consideramos que no ha sido activada por el alumno ya que, salvo papel, bolígrafo, reglas y calculadora (soportes usuales) no se utilizaron otras herramientas ni soportes en la solución del problema. Aunque también sería aceptable considerar que dicha competencia ha sido activada a un nivel de reproducción.

Conclusión

Nuestra conclusión es que se trata de una respuesta que permite situar la competencia del alumno en el nivel de conexión. Las razones para esta afirmación es que las siguientes competencias se presentan a este nivel: pensar y razonar, argumentación, comunicación, formulación y resolución de problemas, representación y empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico. El hecho de que las otras dos competencias (construcción de modelos y uso de soportes y herramientas) se presenten al nivel de reproducción no es causa suficiente para que la solución del alumno deje de considerarse en el grupo de conexión. Esta conclusión está de acuerdo a lo establecido por el marco teórico PISA.

****

TAREA 1

****

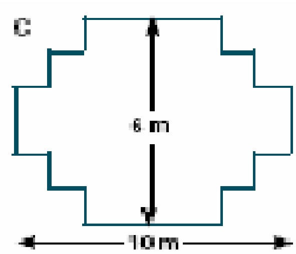
TAREA 1

Dados el problema PISA (adaptado), la solución desarrollada por un alumno y el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos, realiza una evaluación analítica de competencias matemáticas PISA 2003, como en los ejemplos propuestos anteriormente (*Situación* 1 y *Situación* 2).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

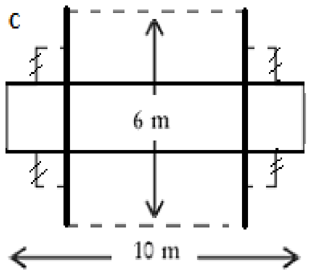
***CARPINTERO* (*Situación 3*)**

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Ha considerado el diseño C *para el parterre.*



Para este diseño, explica si se puede tapiar o no el parterre con los 32 metros de madera. Debes responder con un sí puedes hacerlo o un no puedes hacerlo, y por qué.

SOLUCIÓN DE UN ALUMNO



El parterre C puede ser tapiado con 32m *de madera:*

Aquí voy a aplicar el mismo sistema que en la figura A, será en este caso mediante 2 *rectángulos diferentes y del más largo tomo y hago la suma de* 10*m* 2 *veces y del que falta tomo las verticales los* 6*m*, 32*m.*

A continuación presentamos un análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos

ANÁLISIS DE PRÁCTICAS

La práctica que realiza el alumno es la lectura del enunciado del problema y la producción de un texto como respuesta, calculando el perímetro de la Figura C. Para esta figura aplica la propiedad de la preservación de la longitud bajo una traslación y la transforma en otra figura de perímetro equivalente, aplicando a esta última, que el perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados.

ANÁLISIS DE OBJETOS

SITUACIÓN-PROBLEMA: El problema del carpintero (*Situación* 3)

LENGUAJE

Verbal:

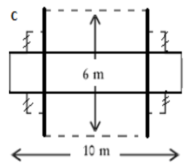
Términos precisos: calcular, perímetro, figura, rectángulo, líneas horizontales, verticales, sumar, metros, diferentes, más largo, etc.

Otros términos: sistema, descomposición de un rectángulo

Simbólico:

C; 10*m*; 6*m*; 32*m*

Gráfico:



CONCEPTOS-DEFINICIÓN

- Conceptos explícitos: perímetro, rectángulo
- Conceptos implícitos: longitud de un segmento, polígono.

PROPOSICIONES

- Propiedades implícitas utilizables: la longitud es una magnitud aditiva, preservación por traslaciones de la longitud de un segmento.

PROCEDIMIENTOS.

- Procedimientos explícitos: identificar segmentos de la misma longitud; calcular el perímetro
- Procedimientos implícitos: obtener polígonos isoperimétricos

ARGUMENTOS

Tesis 1. El perímetro de la figura C se puede descomponer en la suma de las longitudes de los lados horizontales de un rectángulo y de los lados verticales del otro rectángulo.

La longitud de los segmentos se conserva al ser trasladados (se infiere de la figura).

Tesis 2: Es posible construir un parterre con este diseño.

Lo indica, implícitamente al calcular el perímetro del polígono.

Tabla 3. Configuración Cognitiva de Objetos Matemáticos

ANÁLISIS DE PROCESOS

El alumno ha comprendido el enunciado del problema. Es decir, ha realizado un primer proceso de "comunicación" (en el sentido de que "entiende enunciados matemáticos de otras personas") que no entraremos a analizar. Para ello, ha tenido que entender el significado (proceso de significación) de la figura C del enunciado del problema y de los términos que aparecen y, sobre todo, comprende el texto globalmente, entendiendo, además, que debe dar una justificación de su respuesta. Para entender la figura como un polígono el alumno ha de realizar un proceso de idealización y de particularización.

El alumno realiza un proceso de comunicación puesto que da una respuesta (implícita) correcta al problema. Esta comunicación implica dos fases, en la primera el alumno enuncia que el proceso de resolución de este apartado es similar al que ha seguido en el apartado A (proceso de enunciación y proceso de generalización implícito −el apartado A y el C pertenecen al mismo tipo de problemas), en la segunda realiza un proceso de argumentación explícita que no está bien comunicada, por ejemplo no usa los términos de manera correcta (dice sistema en vez de procedimiento, que en matemáticas tiene diferente significado). La argumentación está basada en (1) la realización de cálculos aritméticos (proceso de algoritmización), (2) que la figura es un polígono con lados adyacentes perpendiculares (proceso de idealización y de significación), (4) que el perímetro de la figura C se puede descomponer en la suma de las longitudes de los lados horizontales de un rectángulo y de los lados verticales del otro rectángulo y (enunciación y materialización) y (5) la definición de perímetro. En la comunicación que hace el alumno se observa el uso combinado de tres registros: el gráfico, al trazar pares de segmentos paralelos; el verbal puesto que dice, por ejemplo, que calcula el perímetro (de manera implícita), y el simbólico, por ejemplo, escribe las sumas parciales obtenidas. Por tanto también, hay un proceso de representación.

EVALUACIÓN ANALÍTICA DE COMPETENCIAS PISA 2003

(Se debe responder en hoja aparte)

TAREA 2

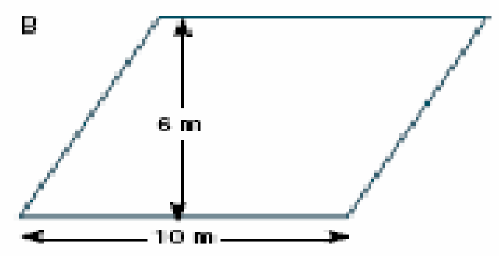
TAREA 2

Dados el problema PISA (adaptado) y la solución presentada por un alumno, realiza un análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos, y una evaluación analítica de competencias matemáticas PISA 2003, como en los ejemplos propuestos anteriormente (*Situación* 1 y S*ituación* 2).

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

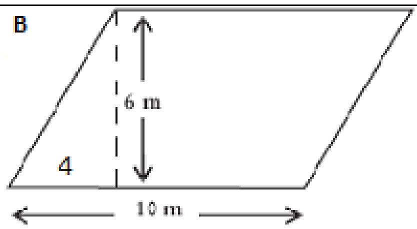
***CARPINTERO* (*Situación 4*)**

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Ha considerado el diseño B *para el parterre.*



Para este diseño, explica si se puede tapiar o no el parterre con los 32 metros de madera. Debes responder con un sí puedes hacerlo o un no puedes hacerlo, y por qué.

SOLUCIÓN DE UN ALUMNO



En este no sería posible ya que faltarían los cálculos de la diagonal, esto sería más metros de los que tocaba para tapiar $\sqrt{6^2+4^2} = \cancel{8{,}4m}$ 7,2*m*.

Los ~~8,4m~~ *sumados a los* 10 *de longitud que ya dicen* ~~37~~ (7,2.2+10.2)

7,2*m* 34*m*

Lo siguiente que hizo el profesor fue comentar el documento Situación 1, en especial como se había utilizado el APOPM y la tabla de descriptores del grado de competencia (ver capítulo 6) para inferir competencias y niveles de complejidad para cada una de ellas. Después dibujó y comentó el siguiente esquema en la pizarra:

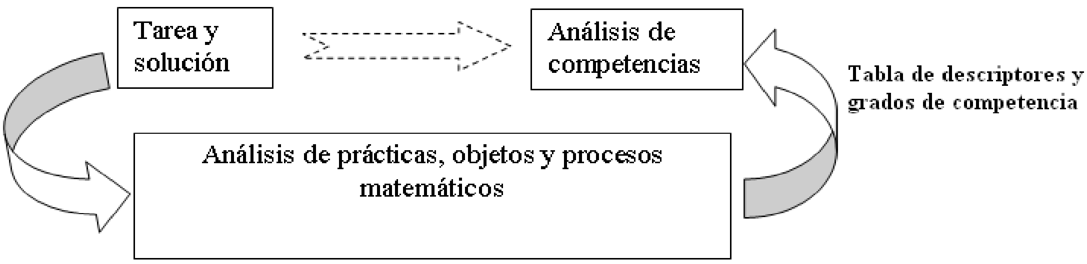


Figura 11.16. Evaluación de competencias

La clase continuó hasta su finalización con los alumnos leyendo los documentos y tareas que el profesor les había proporcionado. Las respuestas a las tareas fueron entregadas por los alumnos al cabo de 15 días mediante la plataforma moodle.

6.1. Resultados tareas 1 y 2 problema del carpintero

A continuación sigue la tabulación de las respuestas de los futuros profesores a las tareas 1 y 2. A modo de ejemplo, en el anexo 47 se adjunta la respuesta de una alumna a estas dos tareas 1 y 2 (ver Anexo 47. Respuestas de una alumna tareas 1 y 2, problema del Carpintero).

Resultados tarea 1 problema del carpintero

En la Tablas 11. 13 y en el gráfico 11. 17 se recogen las respuestas de los 22 estudiantes del máster de FPSM sobre las competencias activadas en la solución del alumno de secundaria al problema del carpintero adaptado (Tarea 1) y el nivel de complejidad asignado a cada competencia.

Se observa que:

- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *pensar y razonar* se podía inferir de la respuesta del alumno. Hubo un amplio consenso sobre el nivel de complejidad de esta competencia ya que 21 le asignaron el de conexión. Solo un alumno le asignó el nivel de reflexión.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *argumentación* se podía inferir de la respuesta del alumno. Hubo un amplio consenso sobre el nivel de complejidad de esta competencia ya que 21 le asignaron el de conexión. Solo un alumno le asignó el nivel de reflexión.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *comunicación* se podía inferir de la respuesta del alumno. Hubo un amplio consenso sobre el nivel de complejidad de esta competencia ya que 20 le asignaron el de conexión. Solo dos alumnos le asignaron el nivel de reproducción.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *construcción de modelos* se podía inferir de la respuesta del alumno. Hubo un amplio consenso sobre el nivel de complejidad de esta competencia ya que 18 le asignaron el de reproducción. Cuatro alumnos le asignaron el nivel de conexión.

- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *formulación y resolución de problemas* se podía inferir de la respuesta del alumno. Hubo un amplio consenso sobre el nivel de complejidad de esta competencia ya que 17 le asignaron el de conexión. Cuatro alumnos le asignaron el nivel de reproducción y uno no indicó el nivel.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *representación* se podía inferir de la respuesta del alumno. Hubo un amplio consenso sobre el nivel de complejidad de esta competencia ya que 17 le asignaron el de conexión. Tres alumnos le asignaron el nivel de reproducción, uno el nivel de reflexión y uno no indicó el nivel.
- Casi todos los estudiantes indicaron que la competencia e*mpleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* se podía inferir de la respuesta del alumno. Solo uno no consideró que no se podía inferir. Diecisiete estudiantes asignaron el nivel de conexión, dos el nivel de reproducción, uno el de reflexión y otro no indicó el nivel.
- Como en anteriores oportunidades no se consideró la competencia e*mpleo de soportes y herramientas* para este análisis ya que solo se usó papel y lápiz.
- 20 estudiantes asignaron a la respuesta del alumno un nivel global de conexión, de los cuales uno indica también el nivel de reproducción. Un alumno asignó el nivel de reproducción y otro no indicó ningún nivel.

Tabla 11.13. Resultados de Tarea 1. Niveles de complejidad y Competencias Matemáticas

Competencias	I. *Pensar y razonar*	II. *Argumentación*	III. *Comunicación*	IV. *Construcción de modelos*	V. *Formulación y resolución de Problemas*	VI. *Representación*	VII. *Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico*	
Sub-competencia / Estudiante	Comprender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites. (C)	Crear y plasmar argumentos matemáticos. (C)	Expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático. (C) Entender afirmaciones enunciados orales y escritas de otras personas sobre matemáticas.(C)	Trabajar con un modelo matemático. (Rp)	Resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras. (C)	Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito. (C)	_ Manejar afirmaciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas tales como utilizar resolver ecuaciones y realizar cálculos. _ Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal.(C)	Elección del nivel de complejidad
E1	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E2	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E3	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E4	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E5	C	C	C	C	C	C	Rf	C
E6	C	C	Rp	C	Rp	C	-	Rp-C
E7	C	C	Rp	Rp	Rp	Rp	Rp	Rp
E8	C	C	C	Rp	Rp	C	Rp	C
E9	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E10	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E11	C	C	C	C	C	C	C	C
E12	C	C	C	Rp	C	Rf	C	C
E13	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E14	C	C	C	Rp	Rp	Rp	C	C
E15	C	C	C	Rp	Sí	Sí	Sí	C
E16	C	C	C	Rp	C	C	C	-
E17	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E18	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E19	C	C	C	Rp	C	Rp	C	C
E20	C	C	C	C	C	C	C	C
E21	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E22	Rf	Rf	C	Rp	C	C	C	C

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Reproducción							Conexión							Reflexión						
I	II	III	IV	V	VI	VII	I	II	III	IV	V	VI	VII	I	II	III	IV	V	VI	VII
			E1				E1	E1	E1		E1	E1	E1							
			E2				E2	E2	E2		E2	E2	E2							
			E3				E3	E3	E3		E3	E3	E3							
			E4				E4	E4	E4		E4	E4	E4							
							E5	E5	E5	E5	E5	E5								E5
		E6		E6			E6	E6		E6		E6								
		E7	E7	E7	E7	E7	E7	E7												
			E8	E8		E8	E8	E8	E8			E8								
			E9				E9	E9	E9		E9	E9	E9							
			E10				E10	E10	E10		E10	E10	E10							
							E11	E11	E11	E11	E11	E11	E11							
			E12				E12	E12	E12		E12		E12						E12	
			E13				E13	E13	E13		E13	E13	E13							
			E14	E14	E14		E14	E14	E14				E14							
			E15				E15	E15	E15											
			E16				E16	E16	E16		E16	E16	E16							
			E17				E17	E17	E17		E17	E17	E17							
			E18				E18	E18	E18		E18	E18	E18							
			E19		E19		E19	E19	E19		E19		E19							
							E20	E20	E20	E20	E20	E20	E20							
			E21				E21	E21	E21		E21	E21	E21							
			E22						E22		E22	E22	E22	E22	E22					
		2	18	4	3	2	21	21	20	4	17	17	17	1	1				1	1

Figura 11.17. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado) de la Tarea 1**.** Elaborado con las respuestas de la Tabla 11.13. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado).

Conclusiones de los resultados de la tarea 1

Todos los estudiantes responden que sí se pueden inferir de la respuesta del alumno las seis primeras competencias: pensar y razonar, argumentación, comunicación, construcción de modelos, formulación y resolución de problemas, representación. Todos menos uno también consideran que se puede inferir la competencia e*mpleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* Se observa un amplio consenso al elegir los niveles de complejidad de cada competencia activada y también en la asignación del nivel de complejidad global a la respuesta del alumno.

Resultados de la tarea 2

A continuación siguen los resultados de las respuestas de los 22 estudiantes de la FPSM que contestaron la tarea 2. En la Tabla 11.14 se muestran las respuestas de los estudiantes a la descripción de las prácticas realizadas por el alumno.

PRÁCTICAS DEL ALUMNO					
Realiza la lectura del problema.	Produce un texto en respuesta.	Estima longitudes	Calcula longitudes	Calcula el perímetro de la figura B	Aplica el Teorema de Pitágoras.
22	22	15	22	22	22

Tabla 11. 14. Descripción de las Prácticas

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Los 22 estudiantes consideraron como las prácticas realizadas por el alumno las siguientes: (a) Realiza la lectura del problema, (b) Produce un texto de respuesta (c) Calcula longitudes, (d) calcula el perímetro de la figura B y (e) Aplica el teorema de Pitágoras. Quince estudiantes consideraron en su descripción que el alumno (f) estima longitudes y siete no lo tomaron en cuenta.

Con relación a la determinación de objetos matemáticos, se muestran las respuestas de los estudiantes en las tabla 11.15 – 11.18.

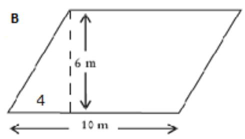
<table>
<tr><th rowspan="2">SITUACIÓN PROBLEMA</th><th colspan="8">LENGUAJE</th></tr>
<tr><th colspan="6">Verbal</th><th>Gráfico</th><th>Simbólico</th></tr>
<tr><td rowspan="2">El problema del carpintero (Situación 4)</td><td colspan="4">Términos precisos</td><td colspan="2">Otros términos</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">$\sqrt{6^2+4^2}$; =; 7,2;
(7,2.2+10.2);
7,2m; 34m; etc.</td></tr>
<tr><td>Cálculo</td><td>Sumados (sumar)</td><td>Longitud</td><td>Metros</td><td>Diagonal</td><td>Más</td></tr>
<tr><td>22</td><td>21</td><td>22</td><td>22</td><td>20</td><td>22</td><td>8</td><td>17</td><td>22</td></tr>
</table>

Tabla 11. 15. Objetos matemáticos: Situación Problema y Lenguaje

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Todos los estudiantes identificaron la situación problema y los términos sumandos o sumar, longitud, diagonal y lenguaje simbólico. Uno no consideró el término cálculo y dos no tomaron en cuenta el término verbal metro. Cinco de los estudiantes no consideraron el lenguaje gráfico.

Tabla 11.16. Objetos matemáticos: Definiciones

DEFINICIONES-CONCEPTOS										
Implìcitos						*Explícitos*				
Polígono (paralelogramo o romboide)	Perímetro	Hipotenusa y catetos	Triángulo rectángulo	Perpendicular	Distancia entre dos líneas paralelas (longitud de altura del paralelogramo)	Suma	Multiplicación	Diagonal (en lugar de lado inclinado o hipotenusa)	Longitud de un segmento	Raíz cuadrada
21	21	20	20	8	11	21	18	22	22	20

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Con relación a los objetos matemáticos primarios “definiciones”, algunos de los alumnos no los tomaron como tal explícitamente, así por ejemplo, de los 21 alumnos que consideraron la definición de polígono, uno de ellos la tomó en cuenta en la descripción de la práctica que realiza el alumno y otro al describir el proceso de idealización; cinco de los 21 estudiantes consideraron el término perímetro (no como una definición) sino al describir las prácticas que realiza el alumno y/o al señalar el procedimiento *calcular el perímetro*. Se observa que los términos que son mencionados explícitamente en la solución del alumno fueron tomados en cuenta por la gran mayoría de los estudiantes como un objeto matemático, pero aquellos que no fueron mencionados explícitamente como en el caso de *perpendicular*, o *distancia entre dos líneas paralelas* o *altura de un paralelogramo* fueron considerados por una cantidad menor o igual al 50%.

Tabla 11.17. Objetos matemáticos: Procedimientos y Propiedades

PROCEDIMIENTOS										PROPOSICIONES		
Estimar longitudes	Identificar segmentos de la misma longitud	Calcular el perímetro	Sumar	Multiplicar	Elevar al cuadrado (calcular potencias)	Calcular una raíz cuadrada (con calculadora)	Redondear	Restar	Comparación de números	La longitud es una magnitud aditiva.	Teorema de Pitágoras	La hipotenusa mide más que el cateto de mayor longitud
16	17	22	22	19	22	22	1	1	1	18	22	7

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Los procedimientos, sumar, multiplicar, elevar al cuadrado o extraer la raíz cuadrada fueron considerados implícitamente por 8, 6, 13, 14 estudiantes, respectivamente, al tomar en cuenta el Teorema de Pitágoras en su descripción de proposiciones. Solo una estudiante consideró los procedimientos redondear, restar y comparar números como procedimientos.

Con relación a las propiedades, todos los estudiantes determinaron como una propiedad el *Teorema de Pitágoras*, dieciocho estudiantes señalaron como propiedad que la *longitud es una magnitud aditiva* (seguramente influenciados por el hecho de que esta proposición aparece en uno de los ejemplos que usaron como modelo para hacer el APOPM) y solo siete estudiantes consideraron como propiedad que la *hipotenusa mide más que el cateto de mayor longitud.*

Tabla 11.18. Objetos matemáticos: Argumentos

ARGUMENTOS	
Tesis: No es posible construir un parterre con este diseño	*Tesis*: La base del triángulo rectángulo es 4
Porque el perímetro sería superior a los 32 metros.	La base de la figura es "descompuesta" en 6+4 (omitiendo el cálculo 10-6=4)
21	4

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Con relación a los argumentos, 21 alumnos describieron la tesis "*no es posible construir un parterre con este diseño*" y diecinueve de ellos describieron además su justificación. Cuatro alumnos señalaron la tesis "*La base del triángulo rectángulo es 4*" uno de los cuales, además, lo justificó.

Tabla 11.19 Procesos matemáticos

PROCESOS MATEMÁTICOS								
Comunicación	*Significación*	*Idealización*	*Particularización*	*Algoritmización*	*Argumentación*	*Representación*	*Resolución de problemas*	*Conexión*
21	**19**	**19**	**18**	**11**	**16**	**20**	**4**	**1**

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar de la Tabla anterior hay mayor consenso en las respuestas de los estudiantes en cuanto a los procesos de comunicación (21), representación (20), significación (19), idealización (19), particularización (18) y argumentación (16). Con relación al proceso de comunicación, los futuros profesores manifestaron que el alumno (a) *entiende el enunciado del problema* (lo que otra persona quiere comunicar) y (b) *responde al problema*. Con relación al proceso de representación, los estudiantes respondieron: "*Materialización: el alumno grafica una línea discontinua para representar el triángulo rectángulo y anota la longitud estimada del cateto menor", "Representación externa: Representa gráficamente el paralelogramo y la longitud de 3 segmentos", "La respuesta la da en forma gráfica", "Uso combinado de tres registros: gráfico, verbal o simbólico".*

En cuanto al proceso de significación, los futuros profesores manifestaron que el alumno *entiende el significado de la figura y el texto globalmente*. Con relación al proceso de idealización los futuros profesores respondieron: "*Identifica la figura como un romboide*", "*Abstracción: Asocia el concepto de parterre con la representación gráfica de un paralelogramo*", "*Reproduce el dibujo, idealizando en él un triángulo rectángulo*", *"A la hora de asociar el dibujo a la idea de polígono. Supone que el romboide tiene los lados y ángulos iguales dos a dos", "Supone que los lados son paralelos"*, "*Entiende la figura como un paralelogramo",* "*Entiende la figura como un polígono*".

Con relación al proceso de particularización los futuros profesores contestaron: "*Aplica concepto de perímetro a una figura concreta", "Por la estimación que hace de la cateto de longitud 4m", "Estima la medida del cateto menor del triángulo".*

Con relación al proceso de argumentación los futuros profesores indicaron: "*Argumentación explícita no bien comunicada", "Basada en estimación visual y aplicación de definición de perímetro", "Basada en otros procesos: algoritmización, idealizalización, significación*".

En la Tablas 11.20 y en el gráfico 11.18 se recogen las respuestas de los 21 estudiantes de la FPSM sobre las competencias activadas en la solución del alumno de secundaria al problema del carpintero adaptado (Tarea 2) y sobre el nivel de complejidad de cada competencia. Hubo un alumno que se confundió y, a pesar de que había realizado el APOPM, no evaluó competencias.

Se observa que:

- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *pensar y razonar* se podía inferir de la respuesta del alumno. Once le asignaron el nivel de conexión, siete el de reflexión y tres el de reproducción.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *argumentación* se podía inferir de la respuesta del alumno. Doce le asignaron el nivel de conexión, seis el de reflexión y tres el de reproducción.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *comunicación* se podía inferir de la respuesta del alumno. Diez le asignaron el nivel de conexión, cinco el de reflexión y cinco el de reproducción y uno no asignó ningún nivel.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *construcción de modelos* se podía inferir de la respuesta del alumno. Once le asignaron el nivel de reproducción, ocho el de conexión y dos el de reflexión.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *formulación y resolución de problemas* se podía inferir de la respuesta del alumno. Dieciséis le asignaron el nivel de conexión, cuatro el de reproducción y uno el de reflexión.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia *representación* se podía inferir de la respuesta del alumno. Catorce le asignaron el nivel de conexión, cuatro el de reproducción y tres el de reflexión.
- Todos los estudiantes de la FPSM manifestaron que la competencia e*mpleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico* se podía inferir de la respuesta del alumno. Catorce le asignaron el nivel de conexión, cinco el de reproducción, uno el de reflexión y uno no le asignó ningún nivel.
- Como en anteriores oportunidades no se consideró la competencia e*mpleo de soportes y herramientas* para este análisis ya que solo se usó papel y lápiz.
- 16 de los futuros profesores asignaron a la respuesta del alumno un nivel global de conexión, de los cuales cuatro indican también el nivel de reproducción. Un alumno asignó el nivel de reproducción y cuatro no indicaron ningún nivel.

Tabla 11.20 Tarea 2. Niveles de complejidad y Competencias Matemáticas

Competencias	**I.** ***Pensar y razonar***	**II.** ***Argumentación***	**III.** ***Comunicación***	**IV.** ***Construcción de modelos***	**V.** ***Formulación y resolución de Problemas***	**VI.** ***Representación***	**VII.** ***Empleo de operaciones y de un el lenguaje simbólico, formal y técnico***	
Sub-competencia / Estudiante	Comprender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites. (C)	Crear y plasmar argumentos matemáticos. (C)	Expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático. (C) Entender afirmaciones enunciados orales y escritas de otras personas sobre matemáticas.(C)	Trabajar con un modelo matemático. (Rp)	Resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras. (C)	Seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito. (C)	_ Manejar afirmaciones y expresiones que contienen símbolos y fórmulas tales como utilizar resolver ecuaciones y realizar cálculos. _ Traducir del lenguaje natural al simbólico/formal.(C)	Elección del nivel de complejidad
E1	C	Rf	-	Rp	C	C	-	Rp-C
E2	Rp	C	C	C	C	C	C	C
E3	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E4	C	C	C	C	Rp	Rp	Rp	Rp-C
E5	Rf	Rf	C	Rf	C	C	Rp	C
E6	Rp	Rp	Rp	C	Rp	Rp	Rp	-
E7	C	Rp	C	C	Rp	Rp	C	C
E8	Rf	Rf	Rf	C	Rp	C	C	-
E9	Rf	Rf	C	C	C	Rf	C	C
E10	C	C	Rp	Rp	C	C	C	Rp-C
E11	Rf	C	Rf	C	C	Rf	C	C
E12	C	C	Rp	Rp	C	C	C	C
E13	Rp	Rp	Rp	Rp	C	C	C	C
E14	C	C	C	C	C	C	Rf	C
E15	C	C	Rp	Rp	C	C	Rp	Rp
E16	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E17	Rf	C	Rf	Rp	C	C	C	C
E18	C	C	C	Rp	C	Rp	Rp	Rp-C
E19	Rf	Rf	Rf	Rf	Rf	Rf	C	-
E20	C	C	C	Rp	C	C	C	C
E21	Rf	Rf	Rf	Rp	C	C	C	-

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011. Fuente: Elaboración propia.

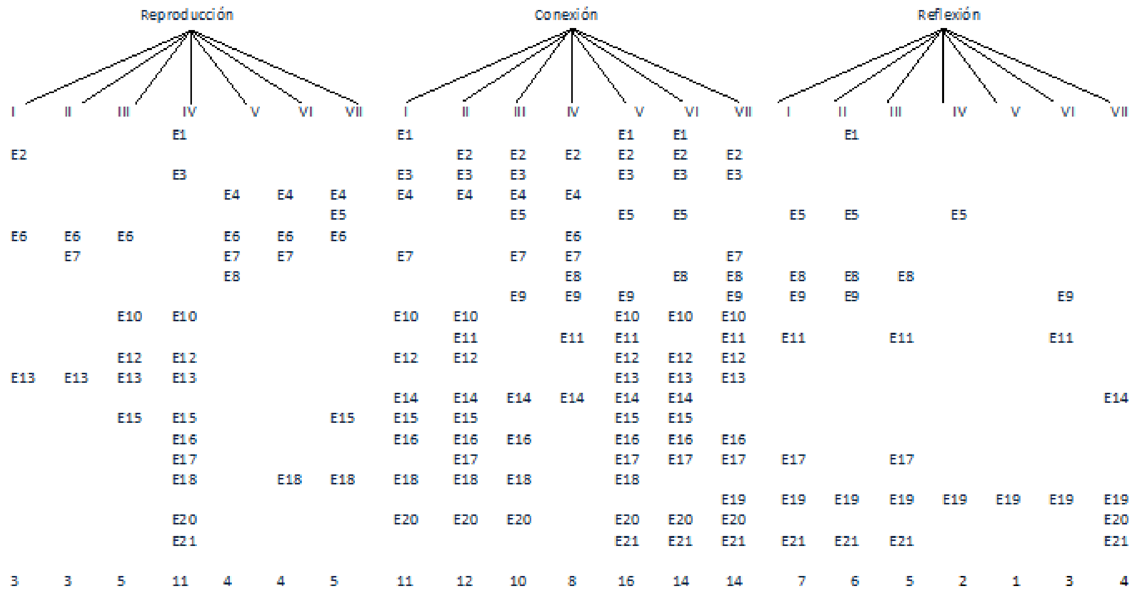


Figura 11.18. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados Problema del Carpintero (Adaptado) de la Tarea 2. Elaborado con las respuestas de la Tabla 11.20. Niveles de complejidad y competencias matemáticas asignados al problema del carpintero (Adaptado).

Conclusiones de los resultados de la tarea 2

Es esta tarea el alumno tuvo que realizar todo el proceso completo, primero debió analizar prácticas, objetos y procesos matemáticos y después evaluar competencias. La primera conclusión es que los alumnos realizaron la evaluación analítica de competencias razonablemente bien. Con relación al análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM) se volvieron a manifestar algunas de las dificultades inherentes al modelo, que ya se habían observado en su respuesta a la tarea de la mediatriz (por ejemplo, dificultad para distinguir entre definición, proposición y procedimiento).

Con relación a la evaluación de analítica de cada competencia, se observa que el consenso en la asignación del nivel de complejidad disminuye con relación a la tarea 1, pero en todas ellas el grupo mayoritario (la moda) asignó el mismo valor que se le asignó al realizar la evaluación experta. Esto era de esperarse si tenemos en cuenta que ahora no hubo APOPM común para todos los futuros profesores como en la tarea 1.

Nos sorprendió la diferencia de resultados en la asignación global del nivel de competencia a la respuesta del alumno entre la tarea 1 y la tarea 2. En el caso de la tarea 1 había un alumno que asignó dos valores (reproducción y conexión) y uno no asignó ningún valor, pero de los otros 20 alumnos, diecinueve determinaron el valor de la solución experta (conexión) y uno asignó el valor de reproducción. Ahora bien, en la tarea 2, cuatro no establecieron ningún valor y otros cuatro asignaron dos valores (conexión y reproducción). Por esta razón en el cuestionario que se les aplicó después para conocer su valoración sobre la utilidad de este método de evaluación analítica de competencias se les preguntó: (¿*Te quedó claro que si había una competencia en el nivel de conexión, aunque todas las demás fueran de reproducción, la competencia global es de conexión y si una competencia estaba en el nivel de reflexión, aunque las otras fueran de conexión o reproducción, la competencia global es de reflexión*?). Dieciséis estudiantes manifestaron que no y seis que sí.

En una sesión posterior se les preguntó a los futuros profesores sobre este aspecto y resultó que muchos de ellos no entendieron que bastaba, por ejemplo, una competencia en el nivel de reflexión para que a la respuesta global también se le asignase el valor de reflexión. Una vez que el profesor clarificó este aspecto, los alumnos manifestaron que si lo hubiesen tenido claro cuando contestaron las tareas 1 y 2, habrían dado la respuesta correcta. Algunos comentaron que asignaron, por ejemplo, el nivel global de conexión porque de las siete competencias las que tenían el nivel de conexión eran la mayoría. Revisamos las respuestas de la tarea 1 y observamos que aplicando cualquiera de los dos criterios anteriores se obtenía el mismo resultado. Por esta razón no se detectó la confusión en la respuesta a la tarea 1.

6.2 Resultados del cuestionario 2

Las respuestas al Cuestionario 2 sobre las tareas de evaluación analítica de competencias (Anexo 48. Cuestionario y resultados sobre las tareas de evaluación analítica de competencias) fueron contestadas por los 22 estudiantes. Con relación a la pregunta 1 ¿*Entendiste lo que se pedía en la tarea*?, 22 alumnos respondieron que sí. Con relación a la pregunta 2. ¿Cuánto tiempo has utilizado en cada una de las dos tareas?, los estudiantes en promedio manifestaron haber dedicado cinco horas entre las dos tareas.

Con relación a la pregunta 3, ver Tabla 11.21, en la que se le pide que indique el grado de acuerdo o desacuerdo (Siendo: Muy en desacuerdo=1; En desacuerdo=2; Indiferente=3; De acuerdo=4; Muy de acuerdo=5)

Tabla 11.21. Respuestas a la pregunta 3 del cuestionario

Pregunta 3	3.a Los ejemplos te han sido útiles					3.b El APOPM es útil como paso previo al uso de la Tabla de competencias matemáticas PISA/OCDE					3.c Podrías haber argumentado el nivel de complejidad de cada competencia sin El APOPM (solo con tablas)				
Grado de acuerdo	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Nº de estudiantes	0	0	1	3	18	0	1	3	15	3	2	10	4	6	0

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2010-2011.
Fuente: Elaboración propia.

Sobre (1) la utilidad de los ejemplos proporcionados, dieciocho estudiantes señalaron estar muy de acuerdo, tres de acuerdo y uno le fue indiferente. Sobre (2) la utilidad del análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM) como paso previo al uso de la Tabla de competencias matemáticas PISA/OCDE, quince contestaron estar de acuerdo, tres muy de acuerdo, tres indiferente y uno en desacuerdo. Por último, con relación a (3) si podría haber argumentado el nivel de complejidad de cada competencia sin El APOPM (solo con la tabla de descriptores y grados), las respuestas de los estudiantes fueron seis de acuerdo, cuatro indiferente, diez en desacuerdo y 2 muy en desacuerdo.

Con relación a la pregunta 4, (¿*Crees que sin haber realizado previamente este análisis completo habrías podido evaluar las competencias matemáticas desarrolladas por el alumno en su solución al problema del carpintero adaptado*?), diecinueve estudiantes indicaron que no y tres que sí.

Con relación a la pregunta 5, (¿*Tuviste dudas en la elección del nivel de complejidad (reproducción, conexión, reflexión*?), dieciocho estudiantes manifestaron que sí, cuatro que no.

Con relación a la pregunta 6, (¿*Te quedó claro que si había una competencia en el nivel de conexión, aunque todas las demás fueran de reproducción, la competencia global es de conexión y si una competencia estaba en el nivel de reflexión, aunque las otras fueran de conexión o reproducción, la competencia global es de reflexión*?), dieciséis estudiantes manifestaron que no y seis que sí.

Con relación a la pregunta 7, si se creía capaz de realizar el APOPM de un episodio o solución de alumno, los 22 estudiantes respondieron que sí.

Con relación a la pregunta 8, si creía que podía llevar a la práctica profesional este tipo de análisis para la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del currículo de la ESO, en caso que se requiriera, 21 estudiantes contestaron que sí, solo uno que no.

Conclusiones del cuestionario 2

Las repuestas de los futuros profesores al cuestionario 2 nos permite conseguir el objetivo específico 5.5: Determinar si los alumnos consideran que la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM es útil para la evaluación de competencias. Nuestra conclusión es que los alumnos ven la utilidad a este tipo de evaluación analítica de competencias.

7. VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DE LOS RESULTADOS

La validez y confiabilidad de los resultados y de las conclusiones se basa en dos triangulaciones: 1) una triangulación de datos (grabaciones, hojas de trabajo y cuestionarios) y 2) una triangulación de expertos (doctoranda, director de tesis/profesor y expertos en Didáctica de las Matemáticas). Los análisis realizados se sometieron a la opinión de los expertos en Didáctica de las Matemáticas en la XXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, los cuales, después de un proceso de revisión por pares, han sido publicados en las actas de este congreso:

- Rubio, N., Font, V., Aubanell, A., Benseny, A., & Ferreres, S. (2012). Competencia de los futuros profesores en el reconocimiento de procesos

matemáticos. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25, 1085-1092. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

CAPÍTULO 12

SEGUNDA IMPLEMENTACIÓN DEL CICLO FORMATIVO

Resumen

En este capítulo se explican algunas partes de la implementación, por segunda vez, del ciclo formativo cuyo objetivo era investigar sobre tres aspectos muy específicos:

1. *Corroborar que los alumnos tenían dificultades para distinguir entre definiciones, proposiciones y procedimientos, incluso en el caso que se les propusiera una tarea relativamente simple y muy pautada.*
2. *Determinar si en la tarea de la selección de procesos se volvía a obtener la moda en todas las preguntas.*
3. *Determinar la importancia de dar un ejemplo muy pautado como modelo de referencia de APOPM en el caso de la tarea de la mediatriz*

La conclusión con respecto a la cuestión 1 es que a los alumnos se les propone un método de APOPM que presenta problemas que son inherentes al método. Sobre todo, tienen dificultad para distinguir si se trata de una definición, una propiedad o un procedimiento. La conclusión con respecto a la cuestión 2 es que, en esta segunda implementación del ciclo formativo donde se trabajó el episodio de la selección de procesos de una manera muy similar a la del año anterior, se volvió a obtener la moda en todas las preguntas. Nuestra conclusión con respecto a la cuestión 3 es que los alumnos necesitan ejemplos pautados y completos de APOPM para poder después realizar una evaluación analítica de competencias.

En este capítulo se explican algunas partes de la implementación, por segunda vez, del ciclo formativo descrito en el capítulo anterior. Esta segunda experimentación se realizó en la misma institución y de una manera muy parecida a la que se ha descrito en el capítulo anterior. En esta ocasión, el curso estaba formado por 37 alumnos.

En esta segunda implementación estábamos interesados en investigar sobre tres aspectos muy específicos que son los siguientes:

1. Nos interesaba corroborar que los alumnos tenían dificultades para distinguir entre definiciones, proposiciones y procedimientos, incluso en el caso que se les propusiera una tarea relativamente simple y muy pautada.
2. Queríamos ver si en la tarea de la selección de procesos se volvía a obtener la moda en todas las preguntas.
3. Queríamos investigar sobre la importancia de dar un ejemplo muy pautado como modelo de referencia de APOPM en el caso de la tarea de la mediatriz

1. DIFICULTADES PARA DIFERENCIAR ENTRE DEFINICIONES, PROCEDIMIENTOS Y PROPOSICIONES

En este segundo año se trabajó el episodio de la comparación de la densidad entre dos barrios de una manera muy similar a la del año anterior. La diferencia fue que en la primera implementación se había previsto una tarea inicial para ser contestada de manera individual, mediante la plataforma moodle, que no se llegó a encargar a los alumnos. En esta segunda implementación, fue la primera tarea que se les propuso. En concreto, se les entregó la configuración epistémica del episodio de la comparación de la densidad de los dos barrios, en la que se había dejado en blanco algunos procedimientos (los más evidentes) y algunas proposiciones (que aparecían como tesis en el bloque de argumentos) (Anexo 49. Ejercicio para completar la configuración epistémica). Esta tarea se les propuso después de que el profesor explicólas nociones de práctica y configuración de objetos de una manera similar a la que se ha descrito en el capítulo anterior.

Las respuestas de los futuros profesores se hallan en el anexo 50 (Anexo 50. Respuestas de los alumnos para completar la CE de los dos barrios).

1.1 Resultados

La siguiente proposición *"En N1 vives más espaciosamente (E)"* fue la más contestada (22 alumnos). La proposición; *"65 075 no es múltiplo de 7; 65 072 sí lo es (T)"* también fue tomada en cuenta por 22 alumnos. La proposición *"9 296 es "más pequeño" que 38 006"* fue considerada por 20 alumnos. *"Si se trasladan 83 737 vecinos de N2 a N1 los dos vecindarios tendrían la misma densidad (A)"* por nueve alumnos y *"Si un número es* *múltiplo de otro, la división por este último es exacta (T)"* por seis alumnos.

Los alumnos también consideraron como proposiciones otros enunciados como: 1) *"En la última operación ella no encuentra múltiplos (E)"* (3 alumnos) que es la descripción de una acción. 2) *"La segunda pregunta está mal",* (8 alumnos) que se puede tipificar más bien como una opinión valorativa. 3)*"Puedes hacerlo por ensayo y error"* (12 alumnos) y *"Necesitamos calcular las densidades y que sean iguales"* (11 alumnos) que son sugerencias de uso de procedimiento.

Los alumnos no siempre tienen suficientemente en cuenta que una proposición es un enunciado que puede ser verdadero o falso. Y que las más relevantes en el episodio son las que necesitan argumentarse para determinar si son falsas o verdaderas. Por otra parte, hay confusión entre proposición y procedimiento.

Con relación al procedimiento: "*Traducción del lenguaje verbal al algebraico* (o bien planteamiento de ecuaciones)", quince alumnos lo tomaron en cuenta en sus respuestas. El procedimiento "*Resolución de ecuaciones*" fue considerado por 24 alumnos y "*Determinar si un número es múltiplo de otro*" fue tomado en cuenta solo por diez alumnos. Resulta significativo que trece alumnos confundieran procedimiento con definición-concepto y tres confundieran procedimiento con proceso.

1.2 Conclusión

Nuestra conclusión es que a los alumnos se les propone un método de APOPM que presenta problemas que son inherentes al método. Con relación al análisis de objetos, hay solapamiento en las categorías utilizadas y, sobre todo, dificultad para distinguir si se trata de una definición, una propiedad o un procedimiento. Con respecto a esta última dificultad hay que resaltar que más que un problema del método es un problema de las matemáticas, ya que está relacionado con el problema filosófico de determinar cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos.

2. SELECCIÓN DE PROCESOS Y MODA

En esta segunda implementación del ciclo formativo se trabajó el episodio de la selección de procesos de una manera similar a la del año anterior. Nuestro objetivo era ver si en esta tarea se volvía a obtener la moda en todas las preguntas.

2.1. Resultados

En la tabla 12.1 se recogen los resultados obtenidos en la segunda implementación del ciclo formativo:

Tabla 12.1. Resumen de la elección de procesos en las Evaluaciones Diagnóstica y Final

Ejemplo		Algoritmización	Particularización	Generalización	Idealización	Materialización	Representación interna	Significación	Encapsulación	Desencapsulación	Personalización	Istitucionalización	Enunciación	Problematización	Argumentación	Procesos de conexión	Resolución de Problema	Comunicación	Modelización
1	D		2	1	29	1	1	3		1						1	1		
	F		(3)	(1)	(23)	(2)		(2)		(2)						(1)			(1)
2	R																		
3	D		4	2		2	2	15		1			3						
	F		(3)	(1)			(4)	(13)					(2)						
4	D		1	1	1	20	1	1			1								1
	F		(1)	(1)		(25)		1							1				
5	D	4	1	1	1	3		1	14			1	2						1
	F	(2)		(2)				(1)	(20)		(1)	(3)	1						
6	R																		
7	R																		
8	R																		
9	D		19		1				2	2			1			1			
	F	(1)	(19)		(1)					(1)									
10	D			25					1	1		1	1						
	F	(1)		(25)					(1)										
11	D		3			1		1			1				21				
	F							(2)			(1)				(21)				
12	R																		
13	D		1	5				4	2			1	14		1	1			
	F		(2)	(1)	(1)				(1)		(1)	(2)	(14)			(1)			
14	D					1	1	5			4		15			1			
	F						(1)	(7)			(4)		(20)						
15	R																		
16	R																		

2.2 Conclusión

Con relación a la pregunta: ¿La inferencia de procesos matemáticos propuesta en el capítulo 5 —realizada a partir del marco teórico del EOS y validada por un procedimiento de triangulación de expertos—, es coincidente con la que realizan los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos? La conclusión es que en la segunda implementación del ciclo formativo la respuesta volvió a ser la misma que la obtenida en la primera experimentación. Es decir, a pesar de la ambigüedad que se produce al inferir procesos, la moda de las respuestas de los alumnos en la evaluación diagnóstica coincide con la inferencia de procesos que se realiza en el capítulo 5 y que, en la evaluación final, la moda de las respuestas de los alumnos, al mismo cuestionario utilizado como evaluación inicial, vuelve a coincidir con la inferencia de procesos que se realiza en el capítulo 5. La diferencia con respecto a la primera implementación es que, en la evaluación final, no se incrementa la moda en todas las preguntas.

3. MODELO DE ANÁLISIS DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS (APOPM)

En la primera experimentación del ciclo formativo se enseñó a los futuros profesores un método para realizar la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos (APOPM). En la primera experimentación concluimos que este método de evaluación daba resultados muy parecidos cuando los alumnos partían de un APOPM común para todos ellos, pero que el consenso en los resultados de la evaluación disminuía cuando cada uno de ellos tenía que realizar su propio APOPM. Dicho de otra manera, el elemento esencial del método de evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 es, precisamente, el APOPM. Podríamos decir, metafóricamente, que el APOPM es la piedra fundamental que aguanta los nervios de la bóveda.

Esta conclusión nos llevó a interesarnos por conocer la importancia que tuvo el ejemplo pautado de APOPM que se suministró en la primera experimentación cuando se les propuso la tarea de la mediatriz. En esta segunda experimentación no se les dio ningún ejemplo completo y pautado como el APOPM de la tarea de los cinco pozos del desierto, pero si se les dio pautas para el análisis de las prácticas y para el análisis de la configuración de objetos. Lo que no se les dio fue un ejemplo pautado de cómo analizar los procesos.

La tarea que se les propuso a los alumnos fue la siguiente:

Tarea

El objetivo de esta tarea es responder a las cuestiones siguientes:

a) Describe las matemáticas del episodio de la clase 1 (profesora L).

b) ¿Cuáles de estas matemáticas están contempladas en el currículum de 1º de ESO?

Para contestar a estas preguntas:

1) Describe las prácticas matemáticas realizadas.

2) Determina los objetivos previos y emergentes más relevantes (problemas, definiciones, procedimientos, propiedades, representaciones y argumentos) activados en este episodio.

3) Determina los procesos que se pueden inferir de este episodio.

4) Determina los contenidos y procesos establecidos en el currículum de 1º de ESO que se han trabajado en este episodio.

5) Reflexiona sobre la relación entre las matemáticas del episodio de la clase 1 (profesora L), descritas en los apartados 1-3 y las que prescribe el currículum de 1º de ESO.

6) En el caso del tercer episodio (profesora E), sin desarrollar con detalle los apartados 1-3, haz una reflexión semejante a la que se te pide para el primer episodio (apartado 5).

3.1. Resultados

Con relación a los resultados descritos en la primera experimentación, podemos decir que los de la segunda experimentación se mueven en la misma línea por lo que se refiere a las prácticas (aspecto sobre el que tenían un referente claro), y son un poco menos minuciosos y detallados por lo que respecta a los objetos (aspecto sobre los que también tenían un referente claro).

En la tabla 12.2 se muestra los resultados de la descripción de las prácticas.

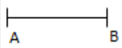
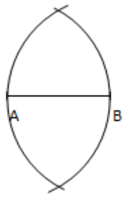
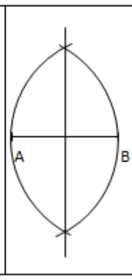
Tabla 12.2 Descripción de las Prácticas

Práctica / Estudiante	Realizada por la profesora: Explicación de la construcción geométrica de la mediatriz	Realizada por el alumno: Repetición en la pizarra de la construcción aprendida
Responden	37	19
No responden	0	18

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2011-2012. Fuente: Elaboración propia.

La descripción de objetos matemáticos se muestra en las tabla 12.3 – 12.6

Tabla 12. 3 Objetos matemáticos: Lenguaje

LENGUAJE																			
Verbal													*Gráfico*			*Simbólico*			
Mediatriz	(Línea) recta	Segmento	Origen y final de segmento	Extremo opuesto	Longitud (amplitud) del segmento/radio	Recta perpendicular	Punto medio o centro de un segmento	Semicircunferencia	Punto de corte (intersección o cruzar)	Ángulo (recto)	Grados	Regla, compás y transportador				A	B	$\overline{AB}$ o segmento AB	*m*
21	10	23	4	4	3	15	10	16	3	4	1	7	23	23	23	7	7	10	2

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2011-2012. Fuente: Elaboración propia

Tabla 12.4. Objetos matemáticos: Situación-problema y Definiciones

SITUACIONES- PROBLEMA		DEFINICIONES-CONCEPTOS						
		Previos						*Emergentes*
(P) Construir la recta perpendicular a un segmento por su punto medio.	(A) Ejercicios para reproducir y mecanizar el procedimiento de construcción.	Segmento (Tiene origen y final)	Línea recta (no tiene ni principio ni fin)	Punto medio (divide al segmento en dos de igual longitud)	Semicircunferencia (Media circunferencia trazada con el compás dado el centro y el radio	Recta perpendicular (forma con el segmento cuatro ángulos de 90º)	Ángulo recto (mide 90 grados) perpendicularidad	(P) Mediatriz (definida como recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio)
37	14	37	37	35	29	36	35	37

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2011-2012. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12.5 Objetos matemáticos: Procedimientos y propiedades

PROCEDIMIENTOS										PROPIEDADES		
Previos			*Emergentes*							*Emergentes*		
			Sugerido por alumno: Determinación del punto medio.		Explicado por la profesora: Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.							
Medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos con regla y transportador	Dibujar rectas y segmentos (Fijar dos puntos en la recta)	Identificación de rectas perpendiculares (Tomar el transportador, medir 90º	1) Medir la longitud del segmento con regla	2) Determinar con la regla el punto cuya distancia a un extremo del segmento sea la mitad de su longitud	1) Con centro en extremo del segmento se dibuja la semicircunferencia de radio la longitud del segmento.	2) Se repite el punto 1) con el otro segmento	3) Se determinan los dos puntos de corte de las dos semicircunferencias	4) Se dibuja la recta que pasa por los dos puntos de corte	División de un segmento en dos partes iguales	(P) La recta que se construye de esta manera corta al segmento en dos partes iguales	(A) La recta construida de esta manera tiene un punto que la une (común) con el segmento	(P) La recta construida de esta manera es perpendicular al segmento
32	35	31	0	0	31	32	30	33	23	25	2	33

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2011-2012 Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12.6. Objetos matemáticos: Argumentos

	ARGUMENTOS				
	Tesis: La recta construida con el procedimiento explicado es perpendicular al segmento (y esto es la mediatriz)		Tesis: La línea dibujada no es un segmento	Tesis: El centro de un segmento se obtiene utilizando la regla	Tesis opuesta: El centro del segmento se obtiene exactamente con el compás.
	1) Si es perpendicular los cuatro ángulos medirán 90 º (proposición)	2) Mido los cuatro ángulos con el transportador y compruebo que los cuatro miden 90 º (procedimiento)	(A) La línea dibujada no es un segmento porque hay un convenio que dice si no se marca el inicio ni el final entonces es una recta.	(A1)Proponente: Para conseguir el centro del segmento mido con una regla y .....(no es admitido en un inicio por imprecisión del intrumento de medida)	(P) No hay argumento. Criterio de autoridad implícito.
T y Arg	2	9	4	0	0
T o Arg	12	6	2	0	3

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2011-2012. Fuente: Elaboración propia.

Para realizar la tarea de selección de procesos (tabla 12.6), de los 37 alumnos que contestaron, 26 tomaron como referente los de la tabla de familias de procesos que se les había suministrado, 10 tomaron como referente los procesos que especifica el currículo de la ESO y uno hizo una combinación de ambos. En general, la parte de procesos es menos detallada que en la primera experimentación.

Tabla 12.7. Procesos

	PROCESOS MATEMÁTICOS										
	Comunicación	*Materialización*	*Instiucionalización*	*Enunciación*	*Algoritmización*	*Argumentación*	*Significación*	*Generalización*	*Particularización*	*Conexión*	*Resolución de problemas*
De Lista	8	22	4	18	11	14	10	13	7	-	1
De ESO	10	10	-	-	-	8	-	-	-	3	3
Ambas	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	18	33	4	18	11	22	10	13	7	3	4

Nota: Respuestas de los estudiantes de FPSM de la UB, año académico 2011-2012. Fuente: Elaboración propia.

3.2 Conclusión

Nuestra conclusión es que los alumnos necesitan ejemplos pautados y completos de APOPM para después realizar una evaluación analítica de competencias. En esta segunda experimentación, los alumnos tenían referentes a los que acudir para realizar partes del APOPM que se les pedía (explicaciones de clase, tarea de la configuración de objetos del episodio de los dos barrios, etc.), pero al no tener una pauta clara y experta del análisis de procesos, ni un modelo de APOPM completo para el mismo episodio, la calidad de su análisis disminuyó en comparación a los alumnos de la primera experimentación. Por otra parte, ningún alumno evaluó por propia iniciativa competencias matemáticas a partir del APOPM.

CAPÍTULO 13

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Resumen

En este capítulo se retoman los objetivos planteados en el capítulo 1, aportando información sobre el grado de consecución de los mismos, y se analizan las conclusiones alcanzadas sobre la hipótesis inicial planteada en el capítulo 1. También se detallan las publicaciones derivadas de esta memoria de investigación, se señalan algunas de sus implicaciones y algunas líneas de indagación que se han abierto.

1. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON EL OBJETIVO 1

En el capítulo 1 nos propusimos el siguiente objetivo:

Objetivo 1: Determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003; mostrar el tipo de evaluación de competencias que se propone en dicho informe y, también, mostrar su posición contraria a la realización de una evaluación analítica y global de las competencias matemáticas a partir del análisis a posteriori de las respuestas de los alumnos a tareas de respuesta abiertas.

En el capítulo 4 se ha justificado:

1) Dónde radican algunas de las ambigüedades de los constructos teóricos del informe PISA 2003, que, a su vez, se amplifican en la traducción al castellano.

Una fuente de ambigüedad son los diferentes significados que se asignan al término competencia en el documento en inglés. En la traducción al castellano esta ambigüedad aumenta ya que, por ejemplo, se traduce por competencia matemática el término “mathematical literacy”. El problema de la traducción aparece también en la traducción de algunos ítems.

Hay un problema relacionado con la existencia de un “territorio compartido” entre los constructos “competencia” y “proceso”, que también se presenta con otros términos que se utilizan normalmente para describir las matemáticas realizadas por el sujeto (por ejemplo, práctica matemática o actividad matemática). El problema se amplía si se tiene en cuenta que el constructo “competencia” también tiene un territorio compartido con términos de tipo pedagógico (por ejemplo, objetivos o capacidades).

Un fuente de ambigüedad derivada del "territorio compartido" entre competencia y proceso es que, así como hay una superposición entre los diferentes procesos, también hay una superposición entre las competencias (casi todas tienen un "territorio en común") y hay dos que, más que competencias, serían megacompetencias (la resolución de problemas y a la modelización).

En el informe PISA 2003 se formulan unos descriptores para cada una de las ocho competencias. Y además se proponen una serie de indicadores (o preguntas claves) que permiten a un profesor considerar que lo que hace el alumno corresponde a un determinado grupo de competencias. En el capítulo 4 hemos reflexionado sobre la ambigüedad de estos descriptores y preguntas clave.

2) Que la técnica de evaluación de competencias que se realiza en las pruebas PISA 2003 permite realizar un evaluación a priori de la tarea y global de la respuesta del alumno; pero no se plantea una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas directamente a partir del análisis de los protocolos de las respuestas abiertas de los alumnos (entre otros aspectos, porque este no es su objetivo).

En el informe PISA 2003 no se halla un modelo pautado y exhaustivo de análisis de la actividad matemática (sea del resolutor ideal del problema o bien del resolutor real). Lo que se puede encontrar son descripciones de la actividad matemática necesaria para resolver el problema propuesto. En estas descripciones se mezclan acciones que debe realizar el alumno con algunos de los "objetos" que se deben activar para realizarlas y también con algunos procesos. En nuestra opinión, esta falta de un modelo exhaustivo de análisis de la actividad matemática es una de las causas por la que no se explica en el informe PISA 2003 cómo un profesor puede realizar una evaluación formativa de las competencias del alumno a partir tanto del análisis de la tarea como de la producción del alumno. Tampoco se dice cómo evaluar las competencias, por separado y/o globalmente, a fin y efecto de poder producir una retroalimentación al alumno y poder incidir en su proceso de aprendizaje.

2. **CONCLUSIONES RELACIONADAS CON EL OBJETIVO 2**

En el capítulo 1 nos propusimos el siguiente objetivo:

Objetivo 2: Desarrollar el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) mediante una tipología de procesos que permita hacer operativo el nivel de análisis de procesos propuesto en dicho enfoque.

Este objetivo se concretó en los siguientes objetivos específicos:

2.1 Revisar las diversas investigaciones sobre procesos realizadas en el marco del EOS.

2.2 Desarrollar la tipología de procesos propuesta en el EOS: 1) procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales, 2) otros procesos y 3) megaprocesos.

Con relación a estos objetivos específicos, en el capítulo 5 se ha realizado, en el apartado 1, una referencia breve a la literatura sobre procesos y se resalta un hecho relevante, observable tanto en la investigación en Educación Matemática como en los currículos oficiales. Nos referimos (1) a la diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, (2) a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos y (3) a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos. En este apartado también se explica nuestro posicionamiento sobre este hecho. Con relación al término proceso se considera que es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada, es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada). Estas tareas están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas. Con relación a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos, en este trabajo se ha considerado conveniente pensar en procesos más complejos (megaprocesos) y procesos más simples. Con relación a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos, en este trabajo se ha optado por considerar una lista de grupos de procesos agrupados en familias que tienen un aire de familia.

En el apartado 2 del capítulo 5 se afronta el encaje de los “procesos” en el EOS, primero se consideran los 16 procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales y se presentan ejemplos de cada uno de ellos. A continuación, se toman en cuenta los megaprocesos, otros procesos y se contempla la relación entre procesos. En esta sección se analiza, utilizando como contexto de reflexión el caso del proceso de representación, sobre el hecho de que los procesos considerados en el EOS no se pueden considerar de manera aislada. Se propone, como una de las maneras de estudiar esta relación, analizar el proceso en cuestión desde las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales.

En el apartado 3 se resumen brevemente algunas investigaciones realizadas en el marco del EOS sobre diferentes procesos.

En el apartado 4, a diferencia del apartado 1 donde en cada tarea se prioriza un sólo objeto primario y un solo proceso, se presentan dos tareas, que son analizadas en términos de prácticas, configuración de objetos y algunos de los 16 procesos. El objetivo en este apartado es mostrar cómo el uso del constructo "configuración epistémica de los objetos matemáticos", junto con los procesos considerados en el enfoque ontosemiótico, permite realizar un mejor análisis de la actividad matemática, una de las competencias profesionales necesarias para el profesor. La herramienta "configuración epistémica" resulta muy útil para la descripción estática de la estructura (organización, configuración, anatomía, etc.) de un texto matemático, mientras que los procesos son herramientas que nos permiten explorar más a fondo el funcionamiento (dinámica, fisiología, etc.) de la configuración epistémica activada en la realización de la práctica matemática.

El trabajo desarrollado en el capítulo 5 es, por una parte, un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo teórico del EOS, puesto que se pretende afrontar la problemática del encaje de los “procesos” dentro de dicho marco teórico. Por otra parte, ofrece una propuesta de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos como modelo útil para realizar el análisis de la actividad matemática necesaria para resolver la tarea propuesta.

3. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON EL OBJETIVO 3

En el capítulo 1 nos propusimos el siguiente objetivo, concretado en dos objetivos específicos:

Objetivo 3: Desarrollar una propuesta de evaluación analítica, a posteriori y global de competencias PISA 2003 basada en la técnica de análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas que propone el Enfoque Ontosemiótico.

3.1 Realizar el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos de la solución de un estudiante a un problema PISA específico.

3.2 Realizar la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas de un estudiante a partir de análisis del apartado anterior.

En el capítulo 6 se ha utilizado el caso del problema del carpintero adaptado para realizar un análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos como el realizado en el capítulo 5 con el problema de los cinco pozos del desierto (objetivo específico 3.1). También se ha realizado una propuesta de evaluación analítica a posteriori y global de competencias matemáticas que permite completar el ciclo de la figura siguiente:

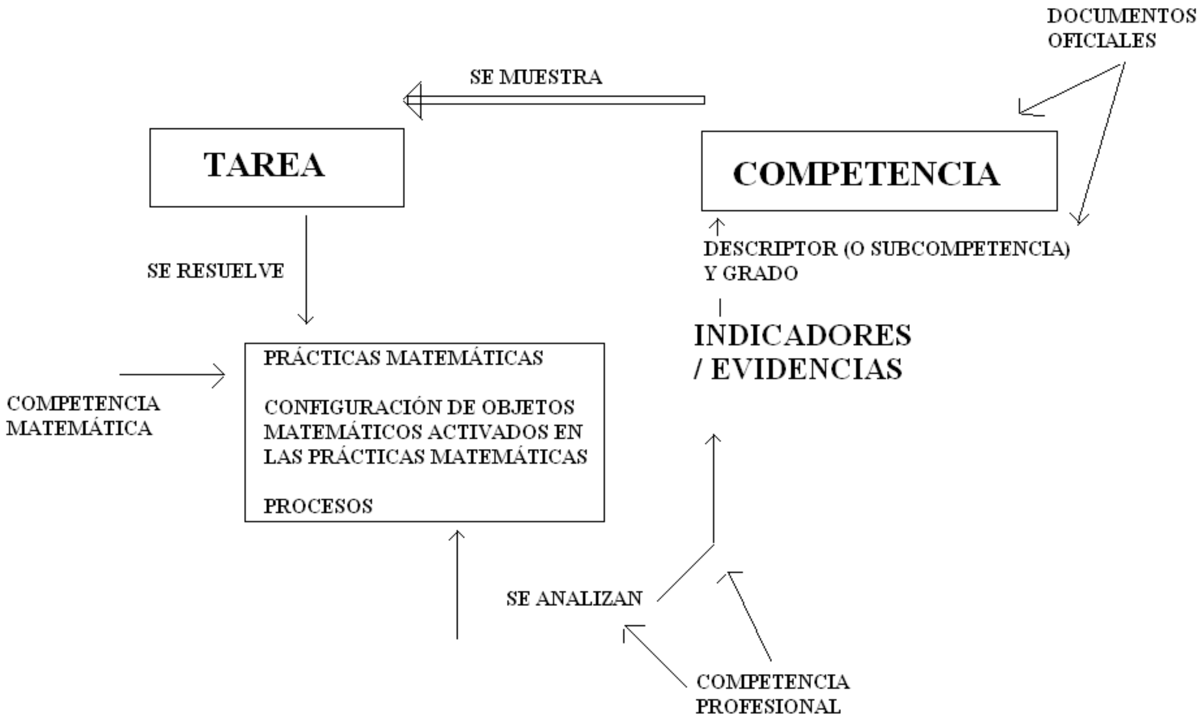


Figura 13.1 Competencia matemática y competencia en análisis didáctico

Fuente: Elaboración propia

El primer paso para hacer operativo este método es disponer de un protocolo de la resolución del problema, que puede ser la de un alumno real o bien la que contestaría un alumno ideal (en este caso el protocolo habría sido la respuesta de un profesor de matemáticas experto); a continuación se realiza un análisis de prácticas objetos y procesos de acuerdo a lo que se ha desarrollado en el capítulo 5. El tercer paso consiste en construir una herramienta, coherente con lo que se dice en el informe PISA 2003, que permita valorar en una escala de 1 a 3 cada competencia (reproducción, conexión y reflexión) teniendo en cuenta el análisis realizado en el paso 2 y después asignar el problema a uno de los tres grupos de niveles de complejidad, según el nivel que hayamos asignado a las diferentes competencias. El último paso consiste en extraer conclusiones sobre las competencias, activadas o no, que se deberían intentar desarrollar en el futuro proceso de instrucción (feedback).

El trabajo realizado en el capítulo 6 es un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo teórico del EOS, puesto que se pretende ampliar dicho marco con una metodología para la evaluación de competencias matemáticas. Se trata de un método en el que la primera fase consiste en una evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas que se infieren de las respuestas de los alumnos; mientras que la segunda fase consiste en un método a priori de desarrollo de una determinada competencia (la que el alumno debería desarrollar).

4. **CONCLUSIONES RELACIONADAS CON EL OBJETIVO 4**

En el capítulo 1 nos habíamos propuesto el siguiente objetivo:

Objetivo 4: Determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores de secundaria en la evaluación analítica, a posteriori y global de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de sus alumnos.

Tal como se ha descrito en el capítulo 7, se diseñó e implementó un primer Taller (Piloto), con profesores de secundaria del Perú, relacionado con la evaluación de competencias matemáticas propuestas en el informe PISA 2003. Los principales resultados de este taller fueron que los profesores participantes, por una parte, no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían de la solución a los problemas propuestos, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les propusieron. Mostraron, además, tener dificultades para aplicar las matemáticas que sabían a contextos extramatemáticos como los que se formulan en los problemas PISA propuestos. La mayoría de ellos manifestó que no estaban capacitados para evaluar competencias matemáticas y que necesitaban más herramientas.

En ese taller se puso de manifiesto (1) la necesidad de que el profesor tenga competencia matemática y (2) la ambigüedad de los constructos PISA 2003 cuando un profesor los quiere aplicar al análisis de la actividad matemática necesaria para resolver una tarea. Ahora bien, dentro de la ambigüedad observada en la asignación de los niveles de complejidad a un problema, había un aspecto que permitía ser optimista en cuanto a la posibilidad de poder sobrellevarla, y, por tanto, de una cierta convivencia pacífica con dicha ambigüedad. Nos referimos a que la moda coincidía con el nivel de complejidad asignado a los tres problemas propuestos en el informe PISA 2003 (Carpintero y Chatear 1 y 2).

Las principales conclusiones de este taller piloto fueron:

1) Para poder evaluar competencias matemáticas el profesor debe tener competencia matemática.

2) Se debían considerar tipologías diferentes de profesores teniendo en cuenta los siguientes aspectos: competencia matemática, experiencia

docente y formación en Didáctica de las Matemáticas a nivel de postgrado (máster, magister o similar); lo cual nos llevó a plantear los siguientes objetivos más específicos:

4.1 Determinar el nivel de competencia que manifiestan futuros profesores de España − con competencia matemática, con nula experiencia docente y sin estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas − en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.

4.2 Determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú − con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas − en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos.

3) Había que investigar si, a pesar de la ambigüedad que presentan los constructos PISA 2003, el grupo mayoritario coincide en su uso.

4.1. **Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 4.1**

En el capítulo 8 se explica el diseño e implementación de un taller relacionado con el objetivo específico 4.1. Se trató de un taller pensado para determinar el nivel de competencia que manifiestan futuros profesores de España en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos y dirigido a futuros profesores con competencia matemática, con nula experiencia docente y sin estudios de postgrado en Didáctica de las matemáticas.

Los principales resultados de este Taller fueron que los estudiantes participantes mostraron tener competencia matemática, tanto para resolver los problemas del informe PISA 2003 propuestos como para formular otros. También pudimos corroborar otra vez la ambigüedad de los constructos PISA 2003 ya que los participantes no coincidieron en las competencias activadas que se inferían de una solución a uno de los problemas propuestos, ni en los niveles de complejidad asignados en dicho informe a los mismos problemas. Pero en este caso, los resultados no permitían ser optimista en cuanto a la posibilidad de poder sobrellevar dicha ambigüedad, ya que la moda no coincidió con el nivel de complejidad asignado en el informe PISA 2003 en tres de los cinco problemas propuestos.

4.2. **Conclusiones relacionadas con el objetivo específico 4.2**

En el capítulo 9 se explica el diseño e implementación de un taller piloto relacionado con el objetivo específico 4.2. Se trató de un taller piloto pensado para diseñar un segundo taller, cuyo objetivo fuese determinar el nivel de competencia que manifiestan profesores de secundaria del Perú en la evaluación de las competencias matemáticas (del informe PISA 2003) de los alumnos, y dirigido a profesores de secundaria con competencia matemática, con experiencia docente y con estudios de postgrado en Didáctica de las Matemáticas.

El taller piloto se experimentó con asistentes al I Coloquio Binacional y III Curso Taller sobre la Enseñanza de la Matemática, ya que se había previsto que al menos cumplirían las dos primeras condiciones. Los resultados de este Taller fueron: (1) los profesores participantes, a pesar de tener cierta experiencia docente, desconocían inicialmente y en su mayoría los constructos PISA 2003, (2) se encontraron evidencias de su dificultad para aplicar las matemáticas que conocían a problemas de contexto extramatemático (falta de soluciones o bien soluciones parciales), (3) se hizo evidente que una condición necesaria para la evaluación de competencias matemáticas, es el tener competencias matemáticas, (4) también pudimos corroborar otra vez la ambigüedad de los constructos PISA 2003 ya que los participantes no coincidieron en las competencias activadas que se inferían de una solución a uno de los problemas propuestos, ni en los niveles de complejidad asignados en dicho informe a los mismos problemas. Pero en este caso, los resultados tampoco permitían ser optimistas en cuanto a la posibilidad de poder sobrellevar dicha ambigüedad, ya que la moda no coincidió con el nivel de complejidad asignado en el informe PISA 2003 en tres de los siete problemas propuestos.

Con relación al cuarto resultado se podía argumentar que las limitaciones del tiempo, esta vez por cuestiones en la organización del coloquio donde se llevó a cabo este taller, podría seguir siendo la causa del poco consenso tanto al determinar los niveles de complejidad como las competencias matemáticas. Por esta razón, era importante que en el taller definitivo no se tuviese los problema de falta de tiempo, organización, etc. y que, además, los participantes fueran un colectivo con mayores competencias matemáticas, con experiencia docente y con más conocimientos en Didáctica de las Matemáticas.

En el capítulo 10 se explica la implementación del taller que cumplía las condiciones comentadas en el párrafo anterior. En concreto, se explica el diseño e implementación de un taller, con profesores que eran estudiantes de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, los cuales cumplían todas las características del objetivo 4.2.

Los principales resultados de este taller fueron (1) que, a diferencia de los otros talleres, los participantes aplicaron las matemáticas que conocían a los problemas contextualizados sin mayores inconvenientes y (2) que los participantes, por una parte, no coincidieron entre ellos en las competencias matemáticas que se inferían de la solución de un alumno a un problema propuesto, y, por otra parte, tampoco coincidieron con los niveles de complejidad que el informe PISA 2003 asigna a los problemas que se les asigna a los problemas que se les propusieron, aunque hubo mayor consenso que en los dos talleres anteriores ya que la moda en seis de los siete problemas propuestos coincidió con los niveles asignados a los problemas propuestos en el informe PISA 2003.

En este momento de la investigación se realizó una reflexión global sobre los cuatro talleres realizados (ver capítulos 7, 8, 9 y 10) y se concluyó que este último taller estuvo mejor diseñado e implementado, y que los asistentes tuvieron más motivación y aprendieron más. Una de las razones es que se trataba de un curso regular de una institución universitaria. Por esta razón, dado que los talleres realizados en congresos de profesores presentan, entre otros, el problema de que los participantes están disponibles por cortos períodos, decidimos continuar la investigación con un colectivo de cursos de grado o postrado con más permanencia en el tiempo.

5. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON EL OBJETIVO 5

En el capítulo 1 nos habíamos propuesto el siguiente objetivo:

Objetivo 5: Diseñar e implementar un ciclos formativo en el máster de FPS de matemáticas que desarrolle primero el APOPM y después la evaluación analítica y global de competencias matemáticas.

5.1 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el Máster de FPS de matemáticas que desarrolle el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM).

5.2 Determinar si la inferencia de procesos que realizan, a partir de respuestas a tareas, los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos, es coincidente, o como mínimo no contradictoria, con la que se realiza utilizando la tipología de procesos matemáticos realizada a partir del marco teórico del EOS.

5.3 Determinar si hay alumnos con competencia matemática que después del ciclo formativo para el APOPM son capaces por propia iniciativa de realizar una evaluación analítica y global de competencias.

5.4 Determinar si los alumnos consideran que el APOPM es útil para la evaluación de competencias matemáticas.

5.5 Diseñar e implementar un ciclo formativo en el Máster de FPS de matemáticas que desarrolle la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM.

5.6 Determinar si los alumnos consideran que la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del APOPM es útil para la evaluación de competencias.

En el capítulo 11 se explica el diseño y la implementación del ciclo formativo contemplado en el objetivo específico 5.1. El punto de partida del experimento de enseñanza realizado ha sido el Máster de FPSM de la Universitat de Barcelona. Se trata de un Máster pensado para desarrollar la competencia de análisis didáctico de los futuros profesores, siendo una de sus componentes el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos activados sobre dichas prácticas. Se trata pues de un Máster en el que el profesorado explica los constructos de práctica, objeto matemático y proceso de acuerdo con la caracterización que hace de dichos constructos el EOS. Dicho de otra manera, ya se cumplía en cierta manera el objetivo específico 5.1.

El experimento diseñado se organizó a partir de sesiones de clase de dos de las asignaturas del Máster de FPSM de la UB: Innovación e investigación sobre la propia práctica y Didáctica de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato. En concreto, se propusieron dos modificaciones con relación a lo que se había explicado en el curso anterior (2009-2010): 1) Un explicación más amplia y sistemática de la noción y tipología de proceso matemático y 2) La incorporación de la explicación de una técnica de evaluación analítica de competencias matemáticas a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos. La primera modificación tenía por objetivo investigar si la inferencia de procesos propuesta en el enfoque ontosemiótico a partir de la actividad desarrollada para resolver determinadas tareas (Font, Rubio y Contreras, 2008) es similar a la que realiza un grupo de futuros profesores de secundaria de matemáticas (objetivo específico 5.2). La segunda modificación estaba relacionada, sobre todo, con los subobjetivos 5.3-5.6.

Nuestra conclusión a la pregunta formulada: ¿La inferencia de procesos matemáticos propuesta en el capítulo 5 —realizada a partir del marco teórico del EOS y validada por un procedimiento de triangulación de expertos—, es coincidente con la que realizan los alumnos del Máster de Formación Inicial de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona (FPSM), en el marco de un proceso formativo que pretende desarrollar su competencia en el análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos? (objetivo específico 5.2) es que, a pesar de la ambigüedad que se produce al inferir procesos, la moda de las respuestas de los alumnos coincide con la inferencia de procesos que se realiza en el capítulo 5. En nuestra opinión, se trata de un resultado que permite ser optimista con relación a la enseñanza de procesos ya que, dentro de la ambigüedad inevitablemente asociada a la enseñaza de este tipo de contenido, es posible llegar a un cierto consenso sobre su terminología y conceptualización.

Un aspecto que nos pareció muy relevante en la experimentación del ciclo formativo es que hay alumnos que, por propia iniciativa, infieren competencias a partir del análisis de prácticas, objetos y procesos realizado para describir la actividad matemática realizada por un alumno. Se trata de un caso relevante para la investigación que se presenta ya que metafóricamente se puede considerar como un "teorema de existencia" para el objetivo específico 5.3 de esta investigación.

En el ciclo formativo implementado se enseñó a los alumnos a realizar un análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos y después se les preguntó su opinión sobre la utilidad de este tipo de análisis para la evaluación de competencias matemáticas (objetivo específico 5.4). La conclusión es que los futuros profesores mayoritariamente consideraron que este tipo de análisis podía ser una ayuda para realizar la evaluación de competencias.

En el ciclo formativo implementado se enseñó a los alumnos a realizar una evaluación analítica de competencias a partir del análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos y después se les preguntó su opinión sobre la utilidad de este tipo de evaluación de competencias (objetivo específico 5.5). La conclusión es que los futuros profesores mayoritariamente consideraron que este tipo de evaluación podía ser útil y, además, manifestaron que se consideraban competentes para poder realizarla.

En el capítulo 12 se explican algunas partes de la implementación, por segunda vez, del ciclo formativo, cuyo objetivo era investigar sobre tres aspectos muy específicos:

1) Corroborar que los alumnos tenían dificultades para distinguir entre definiciones, proposiciones y procedimientos, incluso en el caso que se les propusiera una tarea relativamente simple y muy pautada.
2) Determinar si en la tarea de la selección de procesos se volvía a obtener la moda en todas las preguntas.
3) Determinar la importancia de proponer un ejemplo muy pautado como modelo de referencia de APOPM en el caso de la tarea de la mediatriz

La conclusión con respecto a la cuestión 1 es que a los alumnos se les propone un método de APOPM que presenta problemas que son inherentes al método. Sobre todo, tienen dificultad para distinguir si se trata de una definición, una propiedad o un procedimiento. La conclusión con respecto a la cuestión 2 es que, en esta segunda implementación del ciclo formativo donde se trabajó el episodio de la selección de procesos de una manera muy similar a la del año anterior, se volvió a obtener la moda en todas las preguntas. La conclusión con respecto a la cuestión 3 es que es que los futuros profesores necesitan ejemplos pautados y completos de APOPM para poder después realizar una evaluación analítica de competencias.

6. CONCLUSIONES RELACIONADAS CON LA HIPÓTESIS DE PARTIDA

En esta investigación hemos realizado un experimento de enseñanza para (1) poner a prueba ciertos constructos teóricos del EOS y (2) para confirmar (o no) algunas hipótesis relacionadas con la determinación de las competencias profesionales que requieren los profesores de secundaria para evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos. Diseñamos e implementamos una serie de talleres (ver capítulos 7-10) que nos ayudaron a conjeturar hipótesis y a reformularlas hasta llegar al convencimiento de la plausibilidad de la siguiente hipótesis:

H1) La competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática se puede considerar compuesta por dos macro competencias que, a su vez, se pueden descomponer en otras: a) La competencia matemática y b) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción.

El siguiente paso fue interesarnos por la competencia en análisis didáctico, formulando la siguiente hipótesis, tomada del proyecto en el cual se ha realizado esta investigación “Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato" (EDU2009-08120):

H2) hay un núcleo de la competencia en análisis didáctico que entendemos como: Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Y podemos encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia y de cómo se relaciona con las otras competencias profesionales del futuro profesor de matemáticas de secundaria (competencia digital, competencia en modelización, aprender a aprender, etc.). Uno de los componentes esenciales de esta competencia es la competencia en el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas.

Nuestro objetivo en esta investigación no era tanto corroborar (o no) esta hipótesis sino que estábamos interesados en otra hipótesis relacionada con ella:

H3) La competencia profesional del profesor en el análisis de prácticas matemáticas y de los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas, es un "saber de fondo" que permite la evaluación y desarrollo de la competencia matemática de sus alumnos.

Nuestra conclusión después de toda la experimentación realizada es que podemos confirmar esta hipótesis. Es más, nos atrevemos a afirmar que si los profesores no son competentes en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos, no lo serán en la evaluación de competencias.

En la primera implementación del ciclo formativo se enseñó a los futuros profesores un método para realizar la evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 a partir del análisis de prácticas objetos y procesos matemáticos (APOPM). En la primera implementación concluimos que este método de evaluación daba resultados muy parecidos cuando los alumnos partían de un APOPM común para todos ellos, pero que el consenso en los resultados de la evaluación disminuía cuando cada uno de ellos tenía que realizar su propio APOPM.

En la implementación de los dos ciclos formativos, se ha puesto de manifiesto que el modelo de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM), basado en el EOS (propuesto en el capítulo 5) es el elemento esencial del método de evaluación analítica y global de competencias matemáticas del informe PISA 2003 propuesto en esta memoria de investigación. Dicho metafóricamente, el APOPM es la piedra fundamental que aguanta los nervios de la bóveda de las iglesias góticas (“la clau de volta” en catalán).

El APOPM es un modelo de análisis no exento de ambigüedades, tal como se ha visto a lo largo de la experimentación, pero si a los alumnos se les enseña dicho método de manera muy pautada, se trata de una ambigüedad con la que se puede convivir ya que se consigue que el grupo mayoritario llegue a los mismos resultados en la evaluación de competencias.

7. PUBLICACIONES DERIVADAS

Del presente trabajo de investigación se han derivado las siguientes publicaciones en revistas, capítulos de libros, actas de congresos y presentaciones a congresos.

Artículos

- Font, V., Rubio, N., Giménez, J. y Planas, N. (2009). Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria, *UNO*, 51, 9-18.

Capítulos de libro

- Font, V. y Rubio, N (2008). Onto-semiotic tools for the analisis of our own practice, en B. Czarnocha (ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment - A Tool for Teacher-Researchers* (pp. 165-180). University of Rzeszów: Rzeszów, Poland.
- Font, V. y Rubio, N. (2012). El paso de la argumentación informal a la deducción, un aspecto clave en el desarrollo de la competencia argumentativa. *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. pp. 207 - 225. Venezuela: Talleres Gráficos Universitarios.
- Rubio, N. y Font, V. (2012). Competencia inicial de futuros profesores en la evaluación de competencias matemáticas. En V. Font, J. Giménez, V. Larios y L. F. Zorrilla (Eds.). *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato*. Barcelona: Publicaciones de la Universitat de Barcelona (en prensa).

Actas de congresos

- Font, V., Rubio, N y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica., en Lestón P. (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21* (pp. 706-715). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Rubio, N., Font, V. y Planas, N. (2008). Análisis didáctico, una mirada desde el enfoque Ontosemiótico. *Actas III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas*. En C. Gaita (Ed) .pp. 159 - 181. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Rubio, N. y Font, V. (2009). Evaluación de las competencias matemáticas en las pruebas PISA 2003. *Actas IV Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas*. En C. Gaita (Ed.). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Rubio, N., Font, V. y Giménez, J. (2010). Professional competence of future teachers in the assessment of mathematical competencies. In Pinto, M.M.F.& Kawasaki, T.F.(Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 100. Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Font, V. y Rubio, N. (2010). Competencia profesional de los futuros profesores en la evaluación de competencias matemáticas. *Actas del VI Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (VI CIDUI)* (pp. 1-25). Barcelona, España.
- Giménez, J.; Font, V.; Vanegas, Y.; Rubio, N.; Larios, V.; Gualdrón, E.; Vargas, C.; Malaspina, U. (2011). Análisis didáctico y evaluación de competencias profesionales. En Programa de Pos-graduaçao em Educaçao Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco (Eds.), *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (1-10). Recife (Brasil), EDUMATEC-UFPE.
- Font, V.; Rubio, N.; Giménez, J.; Aubanell, A.; Benseny, A.; Gómez, J.; Vanegas, Y.; Larios, V.; Barajas, M. (2011). Competencias profesionales de los futuros profesores de matemáticas de secundaria. En M. M. Moreno y N. Climent

(eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM. XIV Simposio de la SEIEM.* (333 – 342). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

- Font, V.; Rubio, N. (2011). El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico. En S. E. Ibarra y M. C. Villalva (Eds.), *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas* (197 – 199) Sonora (México): Universidad de Sonora.
- Font, V. y Rubio, N. (2011). Competencia profesional de los futuros profesores en la evaluación de competencias matemáticas. *Actas del VI Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación (VI CIDUI)* (1-25). Barcelona: UPC.
- Rubio, N.; Font, V. Giménez, J. y Malaspina, U. (2011). Pre-service teachers learning to assess mathematical competencies. En A M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2838 - 2847). Rzeszów, Polònia.
- Font, V. y Rubio, N. (2011). Algunos aspectos problemáticos de las pruebas PISA 2003. En S. Sbaragli (Ed.), *Mathematics and its didactics. Forty years of commitent* (90 – 92). Bologna, Italia: Pitagora editrece.
- Rubio, N., Font, V., Aubanell, A., Benseny, A, y Ferreres, S, (2012) Competencia de los futuros profesores en el reconocimiento de procesos matemáticos. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25, 1085-1092. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Font, V., Rubio, N., Vanegas, Y., Ferreres, S., Gómez, J, y Larios, V. (2012). Una perspectiva competencial sobre la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25, 1161-1168. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Comunicaciones presentadas a congresos con actas pendientes de publicación

- Rubio, N. y Font, V. (2012). Competencia profesional de profesores de secundaria en la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos. Reporte de Investigación presentado a la *XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Belo Horizonte, Brasil, julio de 2012.
- Rubio, N., Font, V., Malaspina, U., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2012). Competence in didactic analysis in the pre-service training of secondary school mathematics teachers in Spain. Comunicación presentada al Topic Study Group 24: Mathematical knowledge for teaching at the secondary level, en el *12th International Congress on Mathematical Education* (ICME12), Seúl, Korea, Julio de 2012.
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2012). What is a mathematical object? Looking to objects from two theoretical perspectives: APOS and OSA. Comunicación presentada al Topic Study Group 37: Theoretical issues in mathematics education, en el *12th International Congress on Mathematical Education* (ICME12), Seúl, Korea, Julio de 2012.
- Font, V., Badillo, E., Trigueros, M. y Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico. Comunicación presentada en el *XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Baeza, Septiembre de 2012.
- Font, V., Ferreres, S, Vanegas, Y., Rubio, N., Adán, M. y Carvajal, S. (2012). Desarrollo de la competencia en el análisis y valoración de la idoneidad de las matemáticas enseñadas. Comunicación presentada al *Congrés internacional de Docència Universitària i Innovació* (CIDUI) 2012, Barcelona, Julio 2012.

8. IMPLICACIONES Y LÍNEAS ABIERTAS DE LA INVESTIGACIÓN REALIZADA

El trabajo realizado en esta investigación tiene implicaciones para los investigadores interesados en la formación de los futuros profesores de matemáticas, tanto inicial como continua. Se trata de un campo de investigación relevante dado que el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes depende, de manera notable, de la formación de sus profesores.

La formación de futuros profesores, en estos momentos, está condicionada por el hecho de que, en muchos países, tanto los currículos de primaria como los de secundaria están (o previsiblemente estarán) organizados por competencias. Se trata de currículos ambiciosos, puesto que desarrollar y evaluar competencias son tareas complejas que exigen al profesor una formación muy calificada. Para conseguir este tipo de formación se ha (o se está) modificando tanto la formación inicial de maestros de primaria como la de profesores de secundaria.

La revisión de la formación inicial necesaria para el ejercicio de la profesión de profesor de secundaria, que, por ejemplo, se ha concretado en España en el Máster de Formación de Profesor de Secundaria de matemáticas (MFPSM), abre nuevas posibilidades de mejorar la formación, en matemáticas y en su didáctica, de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. Ahora bien, esta mejora debería estar orientada por investigaciones sobre la puesta en práctica de estos nuevos estudios, como la realizada en esta investigación.

Dado que el currículo de la enseñanza secundaria está organizado por competencias, entre ellas la matemática, y el currículo de la formación de futuros profesores lo está (o estará) por competencias profesionales, aparecen, entre otras, las siguientes cuestiones que merecen ser investigadas: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículo de secundaria? ¿Cómo desarrollarlas y evaluarlas? La respuesta a estas preguntas, a su vez, está relacionada con la respuesta que se dé a la siguiente pregunta más general: ¿Cuáles son las competencias profesionales que necesita el profesorado para enseñar matemáticas? La respuesta a la cual, a su vez, está relacionada con la respuesta que se dé a la pregunta: ¿Cuál es el conocimiento, que necesita el profesorado para enseñar matemáticas y cómo se caracteriza?

El conocimiento del futuro profesor se pone en funcionamiento en prácticas realizadas para resolver tareas profesionales, tomando como referente las prácticas de los docentes en ejercicio y las sugerencias de los grupos de investigación en el área. Se trata de situaciones dinámicas en las que un marco estático como el propuesto por Ball y colaboradores (2001) resulta poco operativo, por lo que consideramos que es necesario contemplar una formación, basada en la reflexión, que permita analizar prácticas e identificar las que son de calidad (sean propias o de otros).

En esta línea, en el área de la Educación Matemática se han realizado investigaciones para conocer la forma en que el conocimiento del contenido matemático de los profesores se hace evidente en sus clases en forma de buenas prácticas. Se trata de investigaciones que, en mayor o menor medida, se relacionan con la competencia en análisis didáctico. Nuestra investigación se relaciona directamente con el desarrollo de esta competencia del futuro profesor ya que, entre otros aspectos, hemos puesto de manifiesto que el análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM) es un componente esencial de la competencia en análisis didáctico y se han diseñado e implementado ciclos formativos para su desarrollo.

La investigación que se presenta sugiere varias líneas abiertas de ampliación que se espera desarrollar en el futuro. La primera sería ampliar la problemática de cómo desarrollar una técnica de evaluación analítica y global de competencias, basada en el APOPM, para la formación permanente de futuros profesores.

La segunda estaría relacionada con la transposición didáctica de esta técnica de evaluación analítica y global de competencias, de manera que el factor tiempo no la haga imposible de aplicar. Dicho de otra manera, los profesores además de tener herramientas para realizar el APOPM, necesitan tiempo para poder realizarlo.

La tercera línea que nos interesa desarrollar es la relación del APOPM con otros niveles de análisis didáctico propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, en particular, con la valoración de la idoneidad epistémica. Por ejemplo, nos interesa investigar, durante la enseñanza de un ciclo formativo, cómo en los futuros profesores aparecen, se conectan y se relacionan con el APOPM criterios sobre la calidad matemática del tipo: “representatividad de las matemáticas explicadas” “cumplir el currículo”, “riqueza de las matemáticas enseñadas”, etc. En particular, si este último criterio se formula de la siguiente manera: las secuencias didácticas “ricas” son aquellas que activan procesos matemáticos diferentes y relevantes; se tiene, por una parte, una manera de concretar un constructo ambiguo como es el de riqueza matemática y a su vez, de relacionarlo con el APOPM.

REFERENCIAS

Acevedo, J. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Tesis Doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Acevedo, J. I., Font Moll, V., & Bolite Frant, J. (2006). Metáforas y funciones semióticas. El caso de la representación gráfica de funciones. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Memorias Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 399-416). Jaén: Universidad de Jaén.

Andréu, J. (2002). *Las técnicas de Análisis de Contenido: una revisión actualizada*. Sevilla: Fundación centro de estudios andaluces.

Alsawie, O., & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of mathematics Teacher Education*, *13*, 223-241.

Aparicio, A., & Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19*. Editorial: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Aparicio, A., Bazan J., & Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relacao a statistica em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados. *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM)*. Universidade de Sao Paulo. Brasil. Disponible en www.sbempaulista/viiepem/anais Consulta 16 de mayo de 2010.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3, 243-285.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment : The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectic between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *2*, pp. 1-32.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). La Coruña: Universidad de la Coruña.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4º ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.). (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer A.P.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. and Leung, F. K. S. (Eds.). (2003). *Second International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Black, M. (1966). *Modelos y metáforas*. Madrid: Tecnos.

Blanco, L. J. (2001). La formación inicial del profesorado de primaria desde la educación Matemática. Retos actuales y de siempre. *Campo Abierto nº 19*, 145-161

Blanco, L.J. (2003). The Mathematical Education of Primary Teachers in Spain. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Disponible en http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/blanco1.pdf

Bolite Frant, J., Barto, M., Dallanece, C., & Mometti, A. (2004). *Reclaiming visualization: when seeing does not imply looking*. TSG 28. ICME 10. Denmark. Disponible en: http://www. icme-organisers.dk/tgs28/

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. Dordrecht: Kluwer.

Brown, C. A., & Cooney, T. J. (1982). Research on teacher education: A philosophical orientation. *Journal of Research and Development in Education*, *15*(4), 13-18.

Carreño, E. y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas. *PNA*, *5*(1), 11-23.

Carrillo, J. (2000). La formación del profesorado para el aprendizaje de las matemáticas. *UNO*, 24, 79-91.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(1), 33-44.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Cerda, H. (2000). *Los elementos de la investigación*. Bogotá: El Buho.

Civil, M., & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 7-13.

Chamorro, C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma/Horsori.

Cobb, P., & McClain, K. (2006). The collective mediation of a high stakes accountability program: Communities and networks of practice. *Mind, Culture, and Activity*, 13, 80-100.

Connelly, F. M. & Clandinin, D. J. (1985). Personal practical Knowledge and the modes of knowing: relevance for teaching an learning. En E. Eisner (Ed.), *Learning the ways of knowing. (The 1985 yearbook of the natural society for the study of education)* (pp. 174-198). Chicago: University of Chicago press.

Consejo Nacional de Educación. (2006). *Proyecto Educativo Nacional al 2021. La educación que queremos para el Perú*. Lima: Consejo Nacional de Educación.

Consell Superior d'avaluació del sistema educatiu (2005). *PISA 2003. Ítems alliberats.* Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya, Barcelona.

Contreras, L. C. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España.

Contreras, L. C. (2001). Un estudio cualitativo de corte interpretativo en el ámbito del pensamiento del profesor de secundaria. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas, J. D. Godino (Eds.), *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-82). Almería: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

D'Amore, B. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Epsilon,* 58, 25-43.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *28*(2), 49-77.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School* (NCTM), 14(2), 86-91.

Day, R. (1996). Case studies of preservice secondary mathematics teachers' beliefs: Emerging and evolving themes. *Mathematics Education Research Journal*, *8*(1), 5–22.

De Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 59 - 77.

Drijvers, P; Doorman, M; Boon, P.; Reed, H.; & Gravemeijer, K. (2011). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213-234.

English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R., & Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass.

Ernest, P. (1989a). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of art* (pp. 249–254). New York: Falmer.

Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15, 13–34.

Ernest. P. (1991). Mathematics teacher education and quality. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 16*(1), 56–65.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York, NY: State University of New York Press.

Escudero, I., & Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity. En Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of PME 23,* Vol 2, (pp. 305-312). Haifa, Israel.

Espinoza, L. & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), 355-368.

Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento.* Madrid: Siglo XXI.

Faerna, A. M. (2006). Significado y valor: La crìtica pragmatista al emotivismo. *Quaderns de filosofia i ciència*, 36, 27-39.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Flores, P. (2004). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 25-42). La Coruña: Universidad de la Coruña.

Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.

Font, V. (2005). Matemáticas y su Didáctica en la Formación Inicial. Conferencia inaugural del *XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística,* (tomo I, pp. 9-58). Bogotá: Gaia.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática, 19*(2), 95-128.

Font, V. (2008) Enseñanza de las Matemáticas. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (ed*.), Actas del III Coloquio internacional sobre enseñanza de las matemáticas*, 21-62. Lima, Perú: PUCP.

Font, V. (2011a). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN*, 26, 9-25.

Font, V. (2011b). La formación matemática y didáctica para ser profesor de matemáticas de secundaria en España. *Cuadernos de México*, 3, 25 - 39.

Font, V. (2011c). Investigación en didáctica de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. En M. Marín Rodríguez, G. García, L. Blanco, M. Medina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática, XV* (165-194). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Font, V. y Godino, J. D. (2010). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En C. Coll (Ed.), *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Godino, J. D., & Contreras, C. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture,* 157–173. Rotterdam: Sense Publishers.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics 27*(2), 1-7.

Font, V. & Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, *13*(2), 55-67.

Font, V. & Planas, N. (2008). Mathematical practices, semiotic conflicts, and socio-mathematical norms. In O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Conference PME32-PMENA XXX, Vol 3,* (pp.17-23). México: CINVESTAV.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Font, V., & Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, *338*, 309-346.

Font, V., Rubio, N., Giménez, J., & Planas, N. (2009). Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria. *UNO,* 51, 9-18.

Font, V., & Rubio, N. (2011). El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico. *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, (pp. 197 – 199). Hermosillo, México: Universidad de Sonora.

Foss, D. H., & Kleinsasser, R. C. (1996). Preservice elementary teachers' views of pedagogical and mathematical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, *12*(4), 429–442.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Riedel-Kluwer A.P.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gámez, C., Moreno, M. F., & Gil, F. (2003). Concepciones de los futuros profesores sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 213-225). Granada: Universidad de Granada.

García, M., Sánchez, M. V., & Escudero, I. (2007). Learning through reflection in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 64*(1), 1-17.

García, M., Sánchez, V., Escudero, I., & Llinares, S. (2006). The dialectic relationship between research and practice in Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 109-128.

Gavilán, J. M., García, M. M., & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(2), pp. 157-170.

Gil, F., & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(1), 27-47.

Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, M.V. (Eds.) (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática.* Comares. Granada.

Giménez, J., & Vanegas, Y. (2011). Competencias, aprendizaje y evaluación. En J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas. Formación del profesorado de secundaria en matemáticas*, (pp. 75 – 110). Barcelona: Editorial Graó/Ministerio de Educación.

Gleitman, L. R., Armstrong, S., & Gleitman, H. (1983). On doubting the concept "concept". En E.K. Scholnick (Ed.), *New trends in conceptual representation: challenges to Piaget's theory*?. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Goddijn, A., Kindt, M., & Reuter, W. (2004). *Geometry with applications and proofs*. The Netherlands: Freudenthal Institute.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31

Godino, J. D. (Ed.) (2004a). Matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Dpto de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D. (Ed.) (2004b). Didáctica de las Matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Dpto de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática (SIEM)*, (pp. 25-45). Guimaraes: Associaçao de Professores de Matemática.

Godino, J. D., Batanero, C. & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students, *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T., & Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 163-184.

Godino, J.D.; Contreras A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 189-210.

Godino, J. D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006), Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 9* (especial), 131-155.

Godino, J. D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,* 38, 25-49.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Godino, J. D., & Recio, A. M. (1997). Meanings of proof in mathematics education. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME Vol. 2*, (pp. 313-321). Lahti, Finland.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. *ICM 11, Topic Study Group 27: Mathematical Knowledge for Teaching.* [On line] 12 June 2008 <http://tsg.icme11.org/tsg/show/30>

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNIÓN* (20), 13-31.

Goldin, G., & Stheingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Gómez, M.A. (2000). Análisis de contenido cualitativo y cuantitativo: Definición, clasificación y metodología. *Revista Ciencias Humanas*, Nº 20.

Gómez, P., & Rico, L. (2003). De un conocimiento técnico a su puesta en práctica: desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 237-246). Granada: Universidad de Granada.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, P., Mª. J. González y M. Moreno (Eds.) Investigación en Educación Matemática: Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 15-35) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

González, M. J., & Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. En R. Luengo, Gómez, B. M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII /* Investigação em Educação Matemática XII (pp. 1-12). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß. Press / Freudenthal Institute.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19- 58.

Gusmão, T. C. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica.* Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, España.

Handal, B. (2003). Teacher’s Mathematical Beliefs: A Review. *The Mathematics Educator,* 13, 2, 47-57.

Hiebert, J., Morris, A. K., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: an "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 66,* 201-222.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 111-156). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M.; Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study**.** *Cognition and Instruction, 26* (4), 430-511.

Hopmann, S. T., & Brinek, G. (2007). Introduction: PISA according to PISA- Does PISA keep what it promises? In S. Hopmann, G. Brinek & M. Retzl (Eds.), *PISA According to PISA –Does PISA according to PISA- Does PISA Keep What it promises?* (pp.9-19). Berlin and Vienna: LIT Verlag.

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas.* Madrid: MEC.

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. (2005). *PISA 2003, Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*, Madrid: MEC.

Jacobs, V.R., Lamb, L.L., & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). "Mixed Methods Research: A Research Paradigm Whose Time Has Come". *Educational Researcher, 33* (7), 14-26.

Kagan, D. M. (1992). Professional growth among preservice and beginning teachers. *Review of Educational Research*, 62, 2, 129–169.

Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of Windows. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(2), 266-281.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education, en Bishop et al, *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, Kluwer A.P., pp. 49-97.

Leinhardt, G., & Greeno, J.G. (1986). The Cognitive Skill of Teaching. *Journal of Educational Psychology, 78*(2), 75-95.

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: a Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), 87-113.

Lin, P. (2005). Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education, 3,* 351-377.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En Ponte, J. y otros (Coord.). *Desenvolvimento profesional dos profesores de Matemática. ¿Qué formaçao?* (pp. 47-82). Lisboa: Sociedad de Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO*, 17, 51-63.

Llinares, S. (1999) Preservice elementary teachers and learning to teach mathematics. Relationship among context, task and cognitive activity. En N. Ellerton (Ed.), *Mathematics Teacher Development: International Perspectives.* Perth: Meridian Press, 107 – 119.

Llinares, S. (1999b). Conocimiento y práctica profesional del profesor de Matemáticas. Características de una agenda de investigación. *ZETETIKE*, 7, 12.

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge. A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice, 6*, 41-62.

Llinares, S. (2002). Participation and reifiction in learning to teach. The role of knowledge and beliefs. En G. Leder; E. Pehkonen & G. Torner (Eds.) *Beliefs: A Hidden variable in mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer, 195 – 210.

Llinares S., & Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psycholovgy of Mathematics Education*, (pp. 429 – 459). Rotherdam / Taipei: Sense Publichers.

Llinares, S.; Sánchez, V.; García, M. y Escudero, I. (1995). Creencias y aprender a enseñar Matemáticas. Una relación entre la reforma y la cultura matemática escolar. En L.M. Villar Angulo y J. Cabero (Coord.) *Aspectos críticos de una Reforma Educativa* (pp.149-166). Sevilla: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, P., M. J. González y M. Moreno (Eds.) Investigación en Educación Matemática: Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 225-236) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Malaspina, U., & Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107-130.

Marcelo, C. (1993). Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre Conocimiento Didáctico del Contenido, en L. Montero y J. Vez (orgs.), *Las Didácticas Específicas en la Formación del Profesorado* (pp. 151-186). Santiago: Tórculo.

Marcelo, C. (1997). *Formación del Profesorado para el cambio educativo.* Barcelona: PPU.

Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar. En Perafrán, G. A. y Adúriz-Bravo, A. (Eds.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales* (pp. 45-60). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional-Colciencias.

Martínez, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Moore, T.W. (1974): *Introducción a la Teoría de la Educación*. Madrid: Alianza Editorial.

Moreno, M. (2001). *El Profesor Universitario de Matemáticas. Estudio de las concepciones y Creencias Acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. Estudio de Caso.* Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Moreno, M. & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85-98.

Mullis, et. Al (2003). *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares de la educación matemática.* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nisbert, S., & Warren, E. (2000). Primary school teachers' beliefs relating to mathematics teaching and assessing mathematics and factors that influence these beliefs. *Mathematics Education Research Journal, 13*(2), 34–47.

Nuñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakaora y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.1, (pp.3-22). Hiroshima: PME.

Organisation for economic co-operation and development (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. París: OECD.

Organisation for economic co-operation and development (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo económico (2004) *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. OCDE.

Ortiz, J., Rico, L., & Castro, E. (2004). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica. Un estudio con profesores en formación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 273-282). La Coruña: Universidad de la Coruña.

Otte, M. (2001). Epistemología matemática de un punto de vista semiótico. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 3(2), 11-58.

Peñas, M., & Flores, P. (2004). Modo de uso del conocimiento profesional en procesos de reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 283-296). La Coruña: Universidad de la Coruña.

Pérez, S., & Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En M. Camacho, Flores, P. y P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 295-306). La Laguna: CajaCanarias y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Pérez, S., & Guillén, G. (2008). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria.. En R. Luengo, Gómez, B. M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII /* Investigação em Educação Matemática XII (pp. 1-12). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Peirce, C. S. (1978). *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce,* Cambridge, MA, The Belknap Press of Harvard University Press.

Piaget, J. (2001). *The Psychology of Intelligence.* London: Routledge.

Perry, B., Howard, P., & Tracey, D. (1999). Head mathematics teachers' beliefs about the learning and teaching of Mathematics. *Mathematics Education Research. Journal*, 11, 39–57.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En, F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-318). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pochulu, M. & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 14*(3), 361-394.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII*, Vol. I, (pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, P., M. J. González y M. Moreno (Eds.) Investigación en Educación Matemática: Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 107-126) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Radford. L. (2006). The anthropology of meaning, *Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.

Ramos, A.B. (2006). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.* Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona, España. [disponible en: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-0330106-090457]

Ramos, A.B., & Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemàtica. *Paradigma, XXVII* (1), 237-264.

Ramos, A. B., & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática Educativa, 11*(2), 233-265.

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española (22ª. Ed.). Consultado 20 abril 2010 en http:// www.rae.es/rae.html

Rico, L. y Gómez, P., Moreno, M. F., Romero, I., Lupiáñez, J. L., Gil, F. y González, M. J. (2003). Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática*: *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 289-297). Granada: Universidad de Granada.

Rowland, T., Huckstep, P. and Thwaites, A. (2005). 'Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi'. *Journal of Mathematics Teacher Education 8*(3), 255-281.

Rubio, N., Font, V., Aubanell, A., Benseny, A., & Ferreres, S. (2012). Competencia de los futuros profesores en el reconocimiento de procesos matemáticos. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25, 1085-1092. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Rubio, N., Font, V. & Planas, N. (2008). Análisis didáctico. Una mirada desde el enfoque ontosemiótico. En C. Gaita (Ed*.), Actas del III Coloquio internacional sobre enseñanza de las matemáticas*, 159-181. Lima, Perú: PUCP.

Rubio, N., Font, V., & Giménez, J. (2010). Professional competence of future teachers in the assessment of mathematical competencies. In Pinto, M.M.F.& Kawasaki, T.F.(Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 2*, (pp. 100). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Rubio, N., Font, V., Giménez, J., & Malaspina, U. (2011). Pre-service teachers learning to assess mathematical competencies. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (pp. 2838 – 2847). Rzeszów, Polonia.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2002). Imágenes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de secundaria y tareas matemáticas escolares. *Revista de Educación*, 329, 407-424.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). Four students' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(1), 5-25.

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner.* New York: Basic Books.

Schön, D. (1987). *Educating the* r*eflective Practitioner. Toward a new design for teaching and learning in the professions*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M.L., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher's Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 153-181.

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), pp. 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Simon, M. A. & Tzur, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal forResearch in Mathematics Education, 30*(3), 252-264.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente y Universidad de los Andes.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

Stephan, M., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2003). Coordinating social and psychological analyses: learning as participation in mathematical practices.

Journal for Research in Mathematics Education, 11, 67-102. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thames, M. H., Sleep, L., Bass, H., & Ball, D. L. (2008): "Mathematical knowledge for teaching (K-8):Empirical, theoretical, and practical foundations". ICME 11, TSG 27: *Mathematical knowledge for teaching*. [On line], descargado 23/10/08 de, http://tsg.icme11.org/document/get/572

Thompson, A. (1991). The development of teachers conceptions of mathematics teaching. *Proceedings of the 13th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (ERIC Document Reproduction Service Nº. ED 352274.)

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vanegas, Y., & Giménez, J. (2011). Futuros profesores de matemáticas y ciudadanía. En Programa de Pos-graduaçao em Educaçao Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco (Eds.). *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática,* (*pp.*1-12). Recife (Brasil): EDUMATEC-UFPE.

Usiskin, Z., Peressini, A., Marchisotto, E.A., & Stanley, D. (2003) *Mathematics for high school teachers: an advanced perspective*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

van Es, E. & Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571-596.

Vicario, V., & Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz, Gómez, B. y Torralbo, M. (Eds.), *Investigación en educación matemática: Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 145-152). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E., & Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 27(1), 77-120.

Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and devolepement. The Role of beliefs. En G.L.Leder, E. Pehkonen y G. Torner (Eds.), *Beliefs. A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 127-147). Dordrecht: Kluwer.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen/Philosophical Investigations*. New York: The MacMillan Company.

Wittgenstein, L. (1978). *Philosophical Grammar.* Oxford: Blackwell.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Zapata, M., & Blanco, L.J. (2007). Las Concepciones sobre las Matemáticas y su Enseñanza Aprendizaje de los Profesores en Formación. *Campo Abierto 26*(2), 83-108.

Zapata, M., Blanco, L., Lorenzo, J., & Contreras, L. (2008). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. *REIFOP*, 12(4), 109-122. (Enlace web:http://www.aufop.com/ - Consultada en fecha (16-05-2010).