ALGUNS PUNTS D'ALGEBRA HOMOTOPICA

Agustí Roig Martí

Memòria presentada per a optar al grau
de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, novembre de 1991

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Agustí Roig Martí, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, novembre de 1991
Dr. Pere Pascual i Gainza

Amb el meu vist i plau

Dr. Manuel Castellet i Solanas

als meus pares i a l'olga

REPORT SUMMARY

On 1967 D. Quillen introduced the notion of *model category*, a structure adapted for the study of homotopical algebra. A model category structure in a given category consists in the election of three types of distinguished morphisms, subject to certain axioms, which allow to define an homotopy theory in the category and specific representations of the homotopy category. Also, a structure of model category provides with criteria for the existence and calculation of derived functors of functors defined among categories which share the above mentioned structure. This is the context to this report.

Regarding the model categories, we prove here that, usual categories in differential homological algebra and in rational homotopy, such as the category of dg-modules over a dgc-algebra, or the category of extensions of a fixed dgc-algebra have such a structure. As an application, we prove the existence of the derived functors of "tensorial product" and "indecomposables" (chapter II).

A particular type of models are minimal models, introduced in rational homotopy by Sullivan. In this report we suggest a categorical definition of these models, which includes other minimal models already written about (as, for example *Tate-Jozefiak minimal resolutions*). Also, we prove the existence of these models in the category of cochain complexes over a local ring and in the category of dg-modules over a dgc-algebra.

The central theme in this report is the study of the structures of model categories and of minimal models in bifibred categories. We owe the definition of these to Grothendieck. We can consider a bifibred category as a family of categories parametrized by another category. For example, the category of dg-modules over any dgc-algebra or the category of morphisms of dgc-algebras are bifibred categories. In the report we prove that such categories admit a natural structure of model category and we characterize their minimal models (chapters III and IV).

Among the diferent types of rational homotopy , Sullivan points out the formals as the ones being determinated entirely by the cohomology algebra. This notion derives from the existence of an homotopic obstruction to the existence of kälherian structures on a variety. In this report we give a categorical definition of formality. This

definition, applied to the above mentioned bifibred categories, allows a generalization of the results of Sullivan: formality of dgc-algebra morphisms does not depend on the ground field (chapter IV, theoreme V).

The last chapter centres on the differential tor, the derived functor of tensorial product of dg-modules and dgc-algebras. The main results are the comparison between the different definitions of this differential tor and the compatibility with the forgetful functor and the indecomposable functor (chapter V).

CHAPITRE I. FONCTEURS DERIVES ET CATEGORIES DE MODELES.

Souvent en algèbre homologique et homotopique on doit faire face à des situations comme la suivante: pour une catégorie $\mathcal{C}$ on a un foncteur (de *cohomologie*) H, le quel transforme certains morphismes de $\mathcal{C}$ en isomorphismes d'une autre catégorie. On appelle ces morphismes de $\mathcal{C}$ *quasi-isomorphismes (quis), isomorphismes homologiques, equivalences faibles,* ... et on a besoin de traiter avec des objets de $\mathcal{C}$ définis à quasi-isomorphisme près. Une façon satisfaisante de traiter ce genre de situations est de regarder ces objets comme objets de la catégorie localisée de $\mathcal{C}$ par rapport à l'ensemble des quasi-isomorphismes. Bref, la catégorie localisée de $\mathcal{C}$ par rapport à un ensemble S de $\mathcal{C}$ est une catégorie $\mathcal{C}_S$ avec les mêmes objets que $\mathcal{C}$ à la quelle on a ajouté d'une façon formelle les inverses des morphismes de S. Dans cette catégorie les objets définis à quasi-isomorphisme près deviennent isomorphes. Dans le § 1 on rappelle la définition de la catégorie localisée, ainsi que la relation avec la catégorie $\pi\mathcal{C}$ dans la quelle on a un représentation "calculistique" (*calcul de fractions*) des morphismes de $\mathcal{C}_S$.

Dans ce langage, un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est *exact* s'il transforme les quasi-isomorphismes en isomorphismes. Equivalentment, s'il factorize à travers de la catégorie $\mathcal{C}_S$. Si ce n'est pas le cas, pour un $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$, on se pose le problème de conserver toute l'information commune aux objets Fx pour ces $x \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ quasi-isomorphes à a. Ce qui nous mène à la définition du *foncteur dérivé*, le quel peut être caracterisé par une proprieté universelle.

Dans les chapitres ulterieures nous travaillerons avec des foncteurs divers (tor différentiel, groupes d'homotopie d'algèbres ...) définis comme les foncteurs dérivés d'autres foncteurs (produit tensoriel, indecomposables ...). Le contenu de § 2 a pour objet situer cette définition. Notamment, nous voulons montrer comment certains calculs adhoc de foncteurs dits "dérivés" (par exemple, du tor différentiel) sont des vrais foncteurs dérivés au sens de la proprieté universelle.

Les concepts de catégorie localisée et foncteur dérivé furent introduits pour les catégories de complexes d'une catégorie abelienne par Verdier ([Ver]). Les catégories avec les quelles on va travailler ne sont pas inclues dans ce genre de catégories. Une possible généralisation sont les *catégories de modèles* de Quillen ([Qui$_1$]). Comme dans les premières on a des "résolutions projectives" et "injectives" (ici appelées modèles cofibrants et fibrants, respectivemment), notions d'homotopie et des résultats pour le calcul des foncteurs dérivés que nous rappellons dans le § 3.

CHAPITRE II. SUR LES ALGEBRES DGC ET LES MODULES DG.

L'objectif de ce chapitre est douer d'une structure de catégorie de modèles fermée certaines des catégories qu'on retrouve en algèbre homologique diférentielle. Notamment, dans le § 2, pour un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique zéro et R une $\mathbf{k}$-algèbre, nous douons d'une telle structure la catégorie des R-algèbres différentielles graduées commutatives (R-*algèbres dgc*) et catégories du genre $\mathcal{C}(u)$ pour différents choix du morphisme $u \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ étant la catégorie précédente (voir le chapitre I, (3.4)). On fait la même chose pour la catégorie des A-modules dg pour une R-algèbre dgc A dans le § 3.

Dans ce chapitre, ces structures s'appliquent en deux sens: d'un côté, comme corollaire, on a des relations d'homotopie dans les catégories nommées (chapitre I, (3.2)), pour les quelles on donne des objets chemin explicites. De l'autre, on dispose des critères dependents de la structure de catégorie de modèles, pour l'existance et le calcul des foncteurs dérivés (chapître I, (3.3)), qu'on applique dans le § 4 à certains foncteurs entre les catégories nommées.

CHAPITRE III. CATEGORIES BIFIBREES.

Le langage des catégories bifibrées se montre approprié autant pour parler de formalité (chapitre IV) que du tor différentiel (chapitre V), problèmes dans les quels on doit travailler avec des objets appartenant à des catégories differentes, relationnés par des morphismes qui "circulent" d'une à autre catégorie. Dit sans précision, une catégorie bifibrée est une famille de catégories "parametrisée" par une autre catégorie. Par exemple, on peut penser à la famille des catégories $\{\mathbf{Mdg}(A)\}$ obtenue en variant l'algèbre dgc A. Le résultat principal de ce chapitre est de douer d'une structure de catégorie de modèles ces catégories à partir de telles structures dans les catégories qui forment les “fibres” (les $\mathbf{Mdg}(A)$) et la “base” ($\mathbf{Adgc}(R)$).

Pour être plus précis, dans le § 1, aprés avoir rappellé la définition de catégorie bifibrée, nous remarquons les deux décompositions d'un morphisme dans ces catégories en un morphime de la fibre et un morphisme de la base, ce qui sera essentiel pour ce qui suit, pour comparer des flêches parallèles, calcul des limites, définir les morphismes distingués ...

Le § 2 est destiné à l'énoncé et la preuve du théorème nommé. Comme corollaire, par exemple, les catégories des modules dg sur *toutes* les algèbres dgc et la catégorie des morphismes d'algèbres dgc sont des catégories de modèles. En particulier, on a des rélations d'homotopie et on n'explicite un objet chemin.

L'idée général de la structure de catégorie de modèles qu'on construit pour une catégorie bifibrée est la suivante: “la base” étant une catégorie de modèles, elle a des limites, relèvements, factorisations ... Par conséquent, on commence pour résoudre le problème dans la base et à l'aide des foncteurs d'images directes et inverses on “transfère” le problème a un “fibre” adéquate. Comme celle-ci est aussi une catégorie de modèles, la solution au problème y existe. On construit la solution dans la catégorie “totale” à avec la solution de la fibre et les morphismes apparus en faisant les images directes et inverses.

Pour finir, dans le § 3, nous étudions l'existence de décompositions M2 fonctorielles dans la catégorie $\mathbf{Adgc}(A)$. Pour tenir compte du fait que la fonctorialitée se trouve autant aux “coefficients” qu'à l'algèbre, on utilise une des catégories vues dans les § précédents: celle des morphismes de R-algèbres dgc. Les mêmes décompositions fonctorielles ont une autre proprieté intéressante: elles commutent aux colimites: si $\{A_i \longrightarrow A_j\}$ est un système inductif de R-algèbres dgc et $X_i \longrightarrow X_j$ un système de A_i-algèbres dgc, on a

$$C_{\varinjlim A_i} \varinjlim X_i = \varinjlim C_{A_i} X_i$$

$C_A X$ étant le modèle cofibrant de $A \longrightarrow X$ du chapitre II. Les deux résultats (fonctorialitée et commutation aux colimites) nous permetent une construction de modèles pour les faisceaux compatible avec celles des catégories où prennent les valeurs ces faisceaux.

CHAPITRE IV. MODELES MINIMAUX.

Ce chapitre s'ordonne de la façon suivante: dans le § 1, nous donnons une définition catégorique d'objet minimal. Cette définition produit les objets connus sur divers exemples. Nous montrons comment les proprietés usuelles (e.g., celles des algèbres dgc minimales de Sullivan) découlent de notre définition catégorique. En particulier, nous prouvons que dans les catégories de modèles fermées tout objet minimal est cofibrant. Dans le § 2, à titre d'illustration, nous étudions, premièrement, les objets minimaux de la catégorie de complexes de cochaînes de modules à coefficients dans un anneau quelconque. Dans ce cas, la description des objets minimaux n'est pas complète: on ne connait pat si tout complexe de cochaînes a un modèle minimal. Nous n'avons pas, non plus, une description explicite (outre que la définition catégorique abstraite) des objets minimaux de la catégorie. La situation est diferente pour certains anneaux particuliers. Par exemple les algèbres de groupe ou les corps. Un autre est celui des anneaux locaux noétheriens. A fin d'inclure les résolutions minimales d'Eilenberg-Tate-Jozefiak, nous montrons l'existence de telles "résolutions" pour les complexes de cochaînes. Dans les § 3, nous considerons la catégorie des algèbres dgc à coefficients dans un anneau R. Nous montrons que la généralisation des $\mathbf{Q}$-algèbres dgc minimales de Sullivan produit des objets minimaux au sens catégorique de § 1. Mais pas nécessairement tout objet a un de ces modèles minimaux. Dans le § 4, on voit comment dans la catégorie des modules dg à coefficients dans une algèbre dgc, les objets similaires à ceux de Sullivan, sont minimaux au sens catégorique et, sous hypothèses adéquates pour l'algèbre, sont tous les mimimaux de la catégorie. Dans le § 5 nous étudions le problème des objets minimaux dans les catégories bifibrées, en faisant attention aux cas particuliers des catégories de morphismes d'algèbres dgc, de modules dg à coefficients dans toutes les algèbres ... Finalement, dans le § 6, nous étudions la formalité dans ces catégories.

INDEX

INTRODUCCIO.

CAPITOL I. FUNCTORS DERIVATS I CATEGORIES DE MODELS.

Introducció.

§ **1. Localització.**

(1.1) La categoria localitzada 12
(1.2) Categories quocients i calcul de fraccions 13

§ **2. Functors derivats.**

(2.1) Extensions de Kan i functors derivats 15
(2.2) Límits i functors inicials 17
(2.3) Functors derivats segons Deligne 20
(2.4) Grupoïdes contràctils 21

§ **3. Categories de models.**

(3.1) Definicions 24
(3.2) Homotopia en les categories de models 27
(3.3) Functors derivats en les categories de models 28
(3.4) La categoria $\mathcal{C}(u)$ 29

CAPITOL II. SOBRE ALGEBRES DGC I MODULS DG.

Introducció.

§ **1. Les categories.**

(1.1) R-mòduls dg i R-àlgebres dgc 34
(1.2) A-mòduls dg i A-àlgebres dgc 36

§ **2. Estructura de categoria de models de $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$.**

(2.1) $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ són categories de models 39
(2.2) Alguns objectes camí 40
(2.3) Estructura simplicial 42

§ **3. Estructura de categoria de models de $\mathbf{Mdg}(A)$.**

(3.1) $\mathbf{Mdg}(A)$ és una categoria de models 42
(3.2) Demostració de (3.1) 43
(3.3) Alguns objectes camí 47
(3.4) Estructura simplicial 49
(3.5) Relació entre les estructures simplicials de $\mathbf{Adgc}(A)$ i $\mathbf{Mdg}(A)$ . . . 50

§ **4. Alguns functors derivats.**

(4.1) Derivat dels indescomponibles de $\mathbf{Adgc}_*(A)$ 51
(4.2) Derivat dels indescomponibles de $\mathbf{Mdg}(A)$ 53
(4.3) Derivat de $M \otimes_A \_$ 55

CAPITOL III. CATEGORIES BIFIBRADES.

Introducció.

§ **1. Generalitats.**

(1.1) Definicions i exemples: $\mathbf{Adgc}(R)^2$ i $\mathbf{Mdg}$ 58
(1.2) Factorització dels morfismes 62
(1.3) Límits i colímits 65

§ **2. Categories de models i categories bifibrades.**

(2.1) Enunciat del teorema i observacions 68
(2.2) Demostració del teorema 71
(2.3) $\mathbf{Adgc}(R)^2$ i $\mathbf{Mdg}$ són categories de models 77
(2.4) Homotopia en les categories bifibrades 78

§ **3. Existència de models functorials.**

(3.1) Models functorials d'àlgebres 80
(3.2) Commutació amb colímits 83
(3.3) Models de feixos 85

CAPITOL IV. MODELS MINIMALS.

Introducció.

§ **1. Definició categòrica d'objecte minimal.**

(1.1) Definicions 87

(1.2) Algunes propietats 90
(1.3) Dependència de S. Sumants directes acíclics 92
(1.4) Objectes minimals i càlcul de fraccions 94
(1.5) Objectes minimals i functors derivats 99
(1.5) Objectes minimals en les categories de models 102

§ **2. Complexos de mòduls minimals.**

(2.1) El cas d'un anell qualsevol 107
(2.2) El cas d'un anell local noetherià. Minimals de Tate 110
(2.3) Demostracions de (2.2) 112

§ **3. A-àlgebres dgc minimals.**

(3.1) Extensions de Hirsch i A-àlgebres dgc KS-minimals 116
(3.2) Els KS-minimals són minimals 117
(3.3) La filtració canònica 118
(3.4) Existència de suficients minimals 118

§ **4. A-mòduls dg minimals.**

(4.1) Extensions de Hirsch i A-mòduls dg KS-minimals 120
(4.2) Els KS-minimals són minimals 122
(4.3) La filtració canònica 125
(4.4) Existència de suficients minimals 130

§ **5. Minimals de categories bifibrades.**

(5.1) Caracterització 132
(5.2) Exemples 134

§ **6. Formalitat.**

(6.1) Formalitat: abstract non-sense 135
(6.2) Els dos teoremes de formalitat per a **Mdg** 138
(6.3) Grups algebraics i automorfismes de graduació 140
(6.4) Demostracions de (6.2) 143
(6.5) Els dos teoremes de formalitat per a $\mathbf{Adgc(k)}^2$ 145

CAPITOL V. EL TOR DIFERENCIAL.

Introducció.

§ **1. Tor diferencial de A-mòduls dg.**

(1.1) El tor diferencial via cofibrants i minimals 148
(1.2) El tor diferencial de Gugenheim-May 151
(1.3) El tor diferencial de **2Mdg** 157

§ **2. Tor diferencial de A-àlgebres dgc.**

(2.1) El tor diferencial via cofibrants i minimals 159
(2.2) Tor diferencial d'àlgebres i de mòduls 161
(2.3) Tor diferencial i grups d'homotopia 162

BIBLIOGRAFIA.

INTRODUCCIO.

Aquesta memòria és un intent d'entendre des d'una perspectiva unificadora alguns conceptes que ens han aparegut en àlgebra homològica diferencial i homotopia racional, com el tor diferencial i els grups d'homotopia d'àlgebres dgc. Aquesta visió unificadora es fa a partir dels functors derivats i dels models minimals. Passem a descriure-la.

(1) L'any 1956, Cartan i Eilenberg (vegi's [C-E]) introdueixen una nova teoria cohomològica per tal d'unificar les teories que la "invasió" dels mètodes topològics havia produït en el domini de l'àlgebra. Un dels objectes d'aquesta teoria era el *functor derivat* del producte tensorial de mòduls: *el tor.* Recordem-ne breument alguns trets.

Sigui R un anell, que suposarem commutatiu amb unitat per alleugerir l'exposició. El tor de dos R-mòduls M i N pot ser calculat mitjançant una resolució projectiva, per exemple de M:

$$\ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Aleshores

$$\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = H_n(P_\bullet \otimes_R N)$$

Com que la categoria de R-mòduls té suficients projectius, per a tot R-mòdul M existeix una resolució com (1). D'altra banda, pel teorema de comparació, dues resolucions projectives de M donen lloc al mateix objecte i per tant $\operatorname{Tor}_n^R(M,N)$ existeix i està ben definit.

(2) Grothendieck, en el seu article ([Gro]), per tal d'incloure-hi la cohomologia de feixos, generalitza l'anterior per a functors additius entre *categories abelianes* altres que la de R-mòduls.

(3) En el mateix [C-E], capítol XVII, trobem també la definició de la *hiperhomologia* d'un functor additiu F estés a la categoria de complexos de R-mòduls. Donat un complex de R-mòduls $M = \bigoplus_{q\in\mathbf{Z}} M^q$, una *resolució de Cartan-Eilenberg* per l'esquerra és un complex doble $P = \bigoplus_{p,q\in\mathbf{Z}} P^{p,q}$ tal que $P^{p,q} = 0$ per a tot $p > 0$ i una augmentació $\varepsilon : P \longrightarrow M$, de manera que, fixant l'índex q hom té resolucions projectives usuals de R-mòduls al nivell dels complexos, de les vores i de la cohomologia. Hom defineix el *n-èssim mòdul de hiperhomolgia* de $F(M)$ com el R-mòdul $H^n(F(P))$, on per cohomologia s'entén la del simple del complex doble.

Aquests mòduls estan relacionats amb els functors derivats anteriors via dues successions espectrals, de les quals l'obtinguda per la filtració $F^p = \bigoplus_{m\geq 0} P^{m,\bullet}$ és fortament convergent, segons la terminologia de [C-E].

Amb hipòtesi d'acotacions sobre M, Grothendieck ([EGA III], capítol 0) comprova que es tracta de functors derivats, en el sentit que poden obtenir-se mitjançant resolucions projectives *en la categoria de complexos*.

(4) En un altre sentit, Verdier a [Ver] (vegi's també [Hart]) emprén la generalització dels functors derivats a les categories de complexos de categories abelianes amb un primer canvi de punt de vista: la resolució (1) es converteix en un *quasi-isomorfisme*; és a dir, en un morfisme de complexos

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

que indueix un isomorfisme en homologia. Pel seu costat, si no prenem homologia, el "tor" és el complex

$$\dots \to P_n \otimes N \to P_{n-1} \otimes N \to \dots \to P_1 \otimes N \to P_0 \otimes N$$

que hom nota

$$M \overset{\mathbf{L}}{\underset{R}{\otimes}} N = P_\bullet \otimes N \tag{2}$$

D'aquesta manera, hom pot considerar el functor derivat com un functor entre categories de complexos i no pas com una successió de functors. De fet, el functor derivat és *exacte*, en el sentit que preserva els quasi-isomorfismes, i per tant està definit en la *categoria derivada*; és a dir, la categoria obtinguda a partir de la categoria de complexos afegint-hi formalment els inversos dels quasi-isomorfismes.

En el treball citat, Verdier defineix (2) en el cas en què tant M com N són complexos. Senyalem, però, que (2) no és la definició del functor derivat de Verdier, sinó *un càlcul*. Aquest functor derivat es defineix per una propietat universal i hom demostra, per a complexos acotats convenientment, que es pot calcular mitjançant "resolucions projectives". Hom remarcarà, però, que la propietat universal citada està enunciada tan sols per al cas additiu.

(5) Per a *functors no additius*, els primers passos en la teoria dels functors derivats són els treballs de Dold i Puppe (vegi's [Dold] i [D-P]). Una definició de functor derivat en termes d'*extensions de Kan*, comprenent el cas additiu i no additiu, apareix en el treball de Quillen [Qui_1], i és la definició 1 de (2.1), capítol I, d'aquest treball.

(6) Si bé la definició de Quillen del functor derivat està feta per a categories qualsevols, els resultats que fan referència a la seva existència estan enunciats per a *categories de models*. Aquestes categories són introduïdes per Quillen en el llibre esmentat per tal de definir una noció d'homotopia "in sufficient generality to cover in a uniform way the different homotopy theories encountered", segons les paraules de l'autor.

Una categoria de models és una categoria $\mathcal{C}$ junt amb tres classes de morfismes distingits *equivalències febles*, *fibracions* i *cofibracions* que satisfan uns certs axiomes, que recordem en la definició 1 de (3.1), capítol I, d'aquest treball. Per exemple, pel teorema 1, § 3, capítol II de [Qui_1], la categoria dels espais topològics i les aplicacions continues és una de tals categories, prenent com a morfismes distingits les equivalències homotòpiques febles, les fibracions en el sentit de Serre i les aplicacions que tenen una propietat d'aixecament respecte de les fibracions que són equivalències febles. Altres exemples de categories de models són les categories dels grups simplicials ([Qui_1]), de les àlgebres dgc ([B-G]), de les categories petites ([Thoma]), dels prefeixos simplicials ([Jar]), dels functors a valors en la categoria d'espais topològics ([Pia]) ...

(7) La importància de les categories de models en el terreny de la teoria d'homotopia d'espais topològics pot veure's a partir de les paraules de Whitehead: "The ultimate object (...) is to construct a purely algebraic theory, which is equivalent to homotopy theory (...)". En altres termes: es tracta de construir equivalències de categories entre categories d'espais topològics i categories algebraiques provistes d'una noció d'homotopia. Doncs bé, en tota categoria de models es tenen definides nocions d'homotopia i alhora resultats que permeten establir tals equivalències de categories. Exemples particularment agradables d'aquestes equivalències es troben en *homotopia racional.*

(8) Hom cita com a orígen de la homotopia racional el teorema de Serre ([Serre]), establint l'equivalència entre les aplicacions continues que indueixen isomorfismes en els grups d'homotopia racional i les que indueixen isomorfismes en l'homologia a coeficients racionals entre espais topològics simplement connexos. En altres termes: al localitzar respecte de qualsevols de les dues classes obtindrem categories equivalents.

En aquest context, un primer resultat en la línia de l'objectiu posat per Whitehead, és l'equivalència establerta a [Qui_2] entre les categories homotòpiques dels CW-complexos puntejats simplement connexos racionals i la de les àlgebres de Lie diferencials lliures reduïdes.

(9) Una altra és la teoria de Sullivan del *model minimal* d'un espai topològic. En una primera aproximació, amb aquesta construcció hom obté els grups d'homotopia racionals d'un espai topològic X a partir d'un *model* d'una $\mathbf{Q}$-àlgebra diferecial graduada commutativa ($\mathbf{Q}$-àlgebra dgc) A que calculi la seva cohomologia: $HA \cong HX$. Per exemple, si X és una varietat diferencial, hom pot prendre com a A el complex de De Rham $\Omega(X)$ i, per a un espai topològic qualsevol, l'àlgebra de les formes polinomials $A_{PL}(X)$. Un model de A vol dir una $\mathbf{Q}$-àlgebra dgc M i un morfisme $M \longrightarrow A$ que indueix un isomorfisme en cohomologia (*quasi-isomorfisme*). Entre tots aquests, Sullivan n'escull un que sigui una àlgebra graduada commutativa lliure, ben definit llevat d'isomorfismes no canònics, anomenat el model minimal de X. Sota hipòtesis adequades (veure, per exemple, [B-G]) el teorema de De Rham-Sullivan ens dóna un isomorfisme entre els generadors d'aquesta àlgebra i el dual de els grups d'homotopia racional de X.

De fet, a partir de l'àlgebra $A_{PL}(X)$ hom pot recuperar l'àlgebra de Lie d'homotopia, per exemple i, en general, el *tipus d'homotopia racional* de l'espai X. (Recordem que dos espais topològics simplement connexos X i Y es diu que tenen el mateix tipus d'homotopia racional si i només si existeix un tercer espai Z i aplicaciones continues $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ que indueixen isomorfismes en la cohomologia racional.) Aquest fet pot ser formalitzat en el context de les categories de models, dient que l'existència del model minimal M defineix un functor entre les categories homotòpiques d'espais topològics puntejats i d'àlgebres dgc augmentades

$$M : \mathrm{Ho}_{\mathbf{Q}}\mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(\mathbf{Q})$$

que es restringeix a una equivalència de categories per als espais nilpotents de $\mathbf{Q}$-tipus finit i àlgebres minimals de $\mathbf{Q}$-tipus finit (veure [B-G], [Tan]). Per la unicitat llevat d'isomorfismes dels models minimals, els tipus d'homotopia racional es corresponen amb les classes d'isomorfisme de les àlgebres dgc minimals.

(10) En un context aparentment distant les *resolucions minimals* foren introduïdes per Eilenberg i Nakayama (veure [E-N]) i tenen una llarga història en Algebra (veure, per exemple, [Eil], [Tate], [Bass], [Jo], [Avra] ...). Com és ben sabut, per a calcular (o definir) el tor de mòduls, hom pot prendre una resolució projectiva qualsevol, per exemple, la resolució canònica. Si hom vol parlar, però, de dimensions, com en el teorema de Serre que caracteritza els anells locals regulars, resolucions "més petites" resulten més adequades. Les resolucions minimals responen a aquesta necessitat.

(11) Hom troba els models minimals en altres contextos geomètrics. Per exemple, hom té també aquesta noció a partir de les àlgebres de Lie dg de (9). En el camp de la teoria de Hodge, Morgan (veure [Mor]) introdueix estructures de Hodge mixtes (EHM) canòniques i functorials en els grups d'homotopia racional d'una varietat algebraica llisa, a partir de la comprovació de que les filtracions que defineixen la mencionada estructura en l'àlgebra de les formes diferencials es "transporten" a través del model minimal. Aquesta línia ha estat continuada per V. Navarro Aznar a [Na_1] i [Na_2] on s'introdueixen EHM en d'altres invariants algebraics. En particular, en el darrer dels articles citats, hom estudia la variació de EHM en el grup fonamental de les fibres d'un morfisme propi i llis $f : X \longrightarrow S$ construïnt el model minimal del feix de les formes diferencials relatives del morfime.

(12) Per a certs espais, anomenats *formals* el model minimal (i per tant l'homotopia racional) pot ser calculat directament a partir de l'àlgebra de cohomologia. Un exemple d'espais formals són les varietats kählerianes compactes, com va ser demostrat a [D-G-M-S] per a coeficients reals. Més tard, Sullivan (veure [Sul]) demostrà la independència de la noció de formalitat del cos base, obtenint com a corol·lari el resultat anterior a coeficients racionals.

La demostració d'aquest fet es fa en dues parts: en primer lloc, hom caracteritza la formalitat per l'aixecament d'automorfismes de l'àlgebra de cohomologia del model minimal a aquest i seguidament es demostra que aquesta propietat és independent dels coeficients. Això ha estat estudiat per Felix i Tanré per als morfismes de **k**-àlgebres dgc (vegi's [F-T]).

(13) Tornant a la discussió dels functors derivats: una altra generalització del tor és la deguda a Moore ([Moore]). El problema topològic subjacent és el següent: sigui $p : E \longrightarrow B$ una fibració i $f : X \longrightarrow B$ una aplicació contínua. Donat el pull-back de **Top**,

$$\begin{array}{ccc} E_f & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

ens plantegem el problema de calcular la cohomologia de E_f en funció de les cohomologies de la base B, l'espai total E i l'espai X. El problema de, donada una fibració, calcular la cohomologia de la fibra en termes de la cohomologia de la base i de l'espai total és el cas particular en què X és un punt de B. La resposta donada per Eilenberg i Moore, suposant l'espai B simplement connex, és que $H^(E_f; R)$ és isomorf al *tor diferencial*

$$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E))$$

sent R un anell commutatiu amb unitat i $C^*(X), C^*(B), C^*(E)$ els complexos de cocadenes singulars dels espais X, B i E, respectivament. Des d'un punt de vista algebraic, el que es té és una R-àlgebra diferencial graduada $A = C^*(B)$ i dos A-mòduls dg $M = C^*(X)$ i $N = C^*(E)$. El nou objecte es defineix com

$$\mathrm{Tor}_A(M, N) = H(sX \otimes_A N)$$

on sX és el simple d'un complex de A-mòduls dg $\ldots \to X^p \to X^{p+1} \to \ldots \to X^{-1} \to X^0$, anomenat *resolució projectiva pròpia* de M, que és, en cert sentit, una resolució per projectius en la categoria de A-mòduls dg.

(14) De fet, però, bona part dels resultats referents al tor diferencial, com ara el balancejament, es dedueixen a partir del seu lligam amb el tor clàssic a través de la *successió espectral d'Eilenberg-Moore*, el terme E_2 de la qual és $\mathrm{Tor}_{HA}(HM, HN)$. El voler assegurar la convergència d'aquesta successió espectral ha provocat hipòtesis restrictives vàries: prendre com a anell R un cos o imposar condicions de platitud sobre A, considerar tan sols álgebres simplement connexes ...

(15) Aquests problemes desapareixen en la definició proposada per Guggenheim i May del tor diferencial que trobem a ([Gu-Ma]). Dit breument: es tracta d'acceptar com a vàlides aquelles resolucions per a les quals la successió espectral d'Eilenberg-Moore convergeix. Els autors citats demostren, sense necessitat de cap de les hipòtesis citades, l'existència de suficients resolucions d'aquesta mena i que el tor diferencial via aquestes és un functor ben definit. Els propis autors adverteixen, però, l'absència de justificació categòrica de la seva construcció.

Fins aquí una situació d'alguns dels conceptes que apareixen en el nostre treball. Passem a descriure breument quins són els nostres resultats. Hom trobarà descripcions complementàries en les introduccions dels capítols.

(A) Pel que fa als functors derivats, el nostre punt de vista ha estat partir de la definició esmentada de Quillen: un functor derivat és un functor caracteritzat per una certa propietat universal. A més a més, en la teoria de Quillen, hom disposa d'un criteri d'existència i un mètode de càlcul: donat un functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, on $\mathcal{C}$ és una categoria de models, el derivat per l'esquerra de F existeix si F transforma equivalències febles entre objectes cofibrants de $\mathcal{C}$ en isomorfismes de $\mathcal{D}$. En aquest cas el valor del derivat en un objecte a és Fc, on c és un model cofibrant de a.

(B) Hem volgut destacar quelcom obvi i present en aquesta definició; i és que el derivat d'un functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sols depèn del propi F i de la classe de morfismes que hom inverteix. El fet que la categoria $\mathcal{C}$ tingui una determinada estructura de categoria de models ens dóna un criteri per a l'existència del derivat i el seu valor sobre els objectes i morfismes, però aquesta estructura no és essencial per al functor derivat. Eventualment, una mateixa categoria pot tenir diferents estructures de categoria de models amb la mateixa classe de morfismes que s'inverteixen en la categoria localitzada. El teorema de Quillen, quan sigui aplicable, donarà per tant diferents càlculs del derivat, però aquest serà el mateix per a tots ells. Semblant reflexió és vàlida en aquells casos en què hom no disposa d'una estructura de categoria de models, però sí d'una classe de "quasi-isomorfismes" i d'unes "resolucions" "projectives", "F-acícliques", "distingides" ... Si s'entén que *la definició* del derivat és el seu valor en un tipus de resolució determinada, sorgeix el problema de comparar resolucions de caire diferent (vegi's, per exemple, [Chen], [H-S], [ViP]). Si es veu el derivat com un objecte que satisfà una determinada propietat, del que es tracta és de comprovar si el càlcul a través d'una resolució determinada satisfà aquesta propietat.

(C) En el capítol I, després de recordar la definició de categoria localitzada i de functor derivat, deduïm alguns criteris per a la derivabilitat d'un functor. Es tracta, de la proposició 1 de (2.1) i del corol·lari del teorema 4 de (2.2). Com a casos particulars, hom té els criteris de Verdier (exemple que segueix a la proposició 1 citada) i Quillen (proposició 3 i teorema 1 de (3.3)). Com a aplicació, a (4.1) del capítol II, veiem que els grups d'homotopia d'una àlgebra són un functor derivat.

(D) Hom notarà que en els dos resultats citats, no apareixen explícitament "resolucions" sobre les que avaluar el functor. La seva discussió s'enradereix a l'apartat (1.4) del capítol IV per raons que el lector descobrirà i que, en qualsevol cas, mencionarem un xic més endavant. Com a aplicació, en el capítol V veiem que el tor diferencial esmentat anteriorment és un functor derivat.

(E) Aquesta presa de partit per no limitar-nos a categories de models, no ens fa oblidar que força de les categories amb què hom treballa tenen aquesta estructura. El § 3 del capítol I està destinat a recordar uns pocs fets coneguts sobre aquestes categories i a la demostració del teorema 7 que generalitza un resultat de Quillen que permet deduir estructures de categories de models a partir d'una donada.

Així mateix, en el capítol II mostrem que les categories d'àlgebres dgc sobre una àlgebra donada i d'altres categories relacionades són categories de models tancades. Hom hi troba un resultat anàleg per a la categoria de A-mòduls dg, així com descripcions explícites de les relacions d'homotopia en aquestes categories.

(F) El capítol III està destinat a demostrar que, sota hipòtesis bastant naturals, es tenen estructures de categoria de models en les categories bifibrades. Exemples de tals categories són la categoria de morfismes de R-àlgebres dgc, la "família" de categories de A-mòduls dg obtinguda al variar l'àlgebra A, la categoria de feixos sobre espais topològics variables ...

Una aplicació són els teoremes 3 i 5 de § 6, capítol IV: per als A-mòduls dg i per als morfismes de $\mathbf{Q}$-àlgebres dgc la formalitat no depén del cos base, el qual generalitza el teorema de Sullivan per a les $\mathbf{Q}$-àlgebres dgc. Una altra, en el capítol V: un enunciat en llenguatge de functors derivats del conegut resultat que per calcular el tor diferencial hom pot derivar respecte dels mòduls o bé respecte de les tres variables alhora (vegi's [Moore], [Smith], [Gu-Ma]).

(G) L'objecte del capítol IV són els models minimals. En les situacions esmentades més amunt, els objectes minimals es defineixen "constructivament". Per exemple, en el cas de Sullivan, si X és simplement connex, un model M de l'àlgebra $A_{PL}(X)$ es diu que és *minimal* si M és lliure com a àlgebra graduada commutativa: $M = \Lambda Z$, on Z és un espai vectorial graduat, i la diferencial és *descomponible*; i.e., $dZ \subset Z^+ \cdot Z^+$. Hom demostra a partir d'aquesta descripció, o de la corresponent en la categoria en què es treballa, propietats anàlogues. En particular, que els quasi-isomorfismes entre objecte minimals són isomorfismes. El nostre punt de partida ha estat prendre aquest resultat com a definició (de fet, un d'equivalent sota certes condicions). A partir d'aquesta definició i sense necessitat d'apel·lar a construccions particulars es segueixen resultats "ben coneguts" dels objectes minimals particulars citats i d'altres.

(H) Una manera de llegir la definició d'objecte minimal és veure'l com el representant "més petit" del seu tipus d'homotopia. El fet de que sigui un representant del seu tipus d'homotopia es pot enunciar en forma d'una equivalència de categories (teorema

13 de (1.6)). La petitesa pot quedar reflexada en el fet que un objecte minimal no pot tenir subobjectes propis que siguin quasi-isomorfs al total (proposició 1 de (1.1)).

(J) Una lectura alternativa i poc rigorosa, però que acaba sent certa: restringit als objectes minimals tot functor és exacte. Sota hipòtesi de connexió adequades de la categoria i d'existència de suficients minimals, això implica que és derivable. Naturalment, les hipòtesis de connexió no s'acostumen a tenir en la categoria en la què originalment es troba definit el functor, sinó en una categoria quocient i per tant el functor ha de factoritzar a través d'aquesta. Un cop aquí, el nombre de minimals ha augmentat: retrobem les "resolucions projectives" -o "planes", amb una definició de la minimalitat relativa al functor.

(K) En el cas de les categories de models, els objectes minimals són cofibrants i per tant l'anterior es segueix del teorema de Quillen sobre l'existència i càlcul de functors derivats. Observem, però, que, la noció de minimal sols depén dels quasi-isomorfismes i no pas de la resta de l'estructura de categoria de models. Igual que la categoria localitzada i el functor derivat.

(L) Els resultats anteriors es troben en § 1. La resta del capítol està destinat a l'estudi dels minimals en certes categories concretes. En particular, els minimals de la categoria de A-mòduls dg. L'objectiu és inspirat en l'afirmació de Sullivan "We make the general claim that any reasonable geometric construction on spaces can be mirrored by a finite algebraic one with minimal models." En el nostre cas, la construcció geomètrica és la següent: donat un espai topològic X i un sistema local de coeficients $\mathcal{L}$, hom obté a partir dels *functors derivats de Thom-Whitney* de [Na_1] una àlgebra dgc $\mathbf{R}_{TW}\Gamma(X,\mathbf{C})$ i un $\mathbf{R}_{TW}\Gamma(X,\mathbf{C})$-mòdul dg: $\mathbf{R}_{TW}\Gamma(X,\mathcal{L})$.

Apart de les que s'hi troben, els resultats generals són aplicables a objectes "minimals" d'altres categories, com els conjunts simplicials minimals de Kan ([Kan], [May]) o les superfícies algebraiques minimals ([Stek]).

Agraïments.

La realització d'aquest treball ha estat possible gràcies a l'ajut i recolzament de moltes persones, a les quals manifesto la meva gratitud més sincera.

En primer lloc, al meu director de tesi, el professor Pere Pascual. Serveixin aquestes paraules per reconèixer el meu deute amb ell i els professors Vicens Navarro i Francisco Guillén.

El meu agraïment també al professor Daniel Tanré pel temps que m'ha dedicat en nombroses i profitoses converses. Agraïment que faig extensiu als altres membres de la UFR de Mathematiques de la UST de Lille.

Així mateix, als professors Guillermo Lusa i Gerard Gómez i als altres membres del departament de l'ETSEIB.

Finalment, però no en darrer lloc, als amics i amigues Paquita, Maria José, Cándida, José Ignacio, Eduardo, Pilar, Marisol, Socorro, Artur, Violant, Lali, Emili, Paula, Anna, Fina, Jesús, José Manuel, Albert, Pili, Josep Maria, Lali, Miquel i Sílvia.

CAPITOL I. FUNCTORS DERIVATS I CATEGORIES DE MODELS.

Introducció.

Sovint en àlgebra homològica i homotòpica hom es troba en situacions com la següent: per a una categoria $\mathcal{C}$ hom té definit un functor (de *cohomologia*), H que transforma certs morfismes de $\mathcal{C}$ en isomorfismes d'alguna altra categoria. Hom anomena aquests morfismes de $\mathcal{C}$ *quasi-isomorfismes (quis), isomorfismes homològics, equivalències febles* ... i hom es veu portat a tractar amb objectes de $\mathcal{C}$ definits llevat de quasi-isomorfismes. Una manera satisfactòria de tractar aquest tipus de situacions és veure tals objectes com a objectes de la *categoria localitzada* de $\mathcal{C}$ respecte del conjunt dels quasi-isomorfismes. Dit breument, la categoria localitzada de $\mathcal{C}$ respecte d'un conjunt de morfismes S de $\mathcal{C}$ és una categoria $\mathcal{C}_S$ amb els mateixos objectes que $\mathcal{C}$ a la qual s'ha afegit formalment els inversos dels morfismes de S. En aquesta categoria els objectes definits llevat de quasi-isomorfismes esdevenen isomorfs. En § 1 recordem la definició de la categoria localitzada, així com la relació amb la categoria $\pi\mathcal{C}$ en la qual els morfismes de $\mathcal{C}_S$ admeten una representació "calculística" (*càlcul de fraccions*).

En aquest llenguatge, un functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ és *exacte* si transforma quasi-isomorfismes en isomorfismes. Equivalentment, si factoritza a través de la categoria $\mathcal{C}_S$. Si no és aquest el cas, donat $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$, hom es planteja el problema de conservar tota la informació comú als objectes Fx per a aquells $x \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ quasi-isomorfs a a, arrivant a la definició de *functor derivat*, que pot ser caracteritzat per una propietat universal.

En capítols posteriors treballarem amb diversos functors (tor diferencial, grups d'homotopia d'àlgebres ...) definits com a functors derivats d'altres (producte tensorial, indescomponibles ...). El contingut de § 2 pretén situar aquesta definició. En concret, volem mostrar com en alguns càlculs adhoc de functors "derivats" (per exemple, del tor diferencial) que no fan explícit el caràcter de functor derivat, hi trobem aquest.

Els conceptes de categoria localitzada i functor derivat foren introduïts per a les categories de complexos d'una categoria abeliana per Verdier ([Ver]). Les categories amb les què hem de treballar no estan, però, incloses en les anteriors. Una possible generalització són les *categories de models* de Quillen ([Qui$_1$]). Com en elles, hom té "resolucions projectives" i "injectives" (que en aquest context s'anomen models cofibrants i fibrants, respectivament), nocions d'homotopia i resultats per al càlcul de functors derivats, que recordem en el § 3.

§ 1. Localització.

(1.1) La categoria localitzada. Càlcul de fraccions. Recordem les nocions de localització i càlcul de fraccions (veure [G-Z]).

Definició 1. Sigui $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor. Es diu que F *fa invertible* un morfisme s de $\mathcal{C}$ si Fs és invertible. La *categoria localitzada* de $\mathcal{C}$ respecte d'un conjunt $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$ és una categoria $\mathcal{C}_S$ junt amb un functor (*de localització*) $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$, amb la propietat universal següent:

(1) γ fa invertibles els morfismes de S, i
(2) si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fa invertibles els morfismes de S, aleshores existeix un únic functor $F' : \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F'\gamma = F$.

Observació. Sigui $\mathcal{A}$ una categoria abeliana i $\mathcal{C} = K^\bullet(\mathcal{A})$ la categoria que té per objectes els complexos de cocadenes (eventualment acotats) d'objectes de $\mathcal{A}$ i per morfismes les classes d'homotopia dels morfismes de complexos de $\mathcal{A}$. En aquest cas, la categoria localitzada de $\mathcal{C}$ respecte dels quasi-isomorfismes es sol anomenar la *categoria derivada de* $\mathcal{A}$ i es nota per $D^\bullet(\mathcal{A})$ ([Ver], [Hart], [Gri]). Si $\mathcal{C}$ és una categoria de models ([Qui$_1$], veure § 3 en aquest treball), la categoria localitzada respecte de les equivalències febles rep el nom de *categoria homotòpica* i es nota per $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$.

Una presentació de la categoria $\mathcal{C}_S$ és la següent: podem identificar els seus objectes amb els objectes de $\mathcal{C}$. Pel que fa als morfismes, els podem representar com a classes d'equivalència de successions de morfismes de $\mathcal{C}$ del tipus

$$a \xleftarrow{s_1} \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot \xleftarrow{s_2} \cdot \xrightarrow{f_2} \cdot \ldots \cdot \xleftarrow{s_n} \cdot \xrightarrow{f_n} b \qquad (1)$$

on $s_1, s_2, \ldots, s_n$ són morfismes de S, respecte de la relació d'equivalència generada per:

(i) per a $f, g \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot = \cdot \xrightarrow{gf} \cdot$, i
(ii) per a $s \in S$, $a \xrightarrow{s} b \xleftarrow{s} a = 1_a$ i $b \xleftarrow{s} a \xrightarrow{s} b = 1_b$.

Un problema no trivial és decidir quan dues d'aquestes representacions són equivalents. Un cas en què això pot ser dut a terme de manera senzilla és quan el conjunt S *admet un càlcul de fraccions*. Recordem la noció "per la dreta": invertint les fletxes hom obté la noció "per l'esquerra".

Definició 2. Es diu que S *admet un càlcul de fraccions per la dreta* si:

(a) $1_x \in S$ per a tot $x \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$.
(b) Si $s : x \longrightarrow y$ i $t : y \longrightarrow z$ són morfismes de S, aleshores $ts \in S$.

(c) Per a tot diagrama $y' \xrightarrow{s} y \xleftarrow{u} x$ de $\mathcal{C}$ en què $s \in S$, existeix un diagrama commutatiu de $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"'] & y' \arrow[d, "s"'] \\ x \arrow[r, "u"] & y \end{tikzcd}$$

en el qual $t \in S$.

(d) Si $f, g : x \longrightarrow y$ són morfismes de $\mathcal{C}$ i $s : y \longrightarrow y' \in S$ és tal que $sf = sg$, aleshores existeix un morfisme $t : x' \longrightarrow x \in S$ tal que $ft = gt$.

Si S admet un càlcul de fraccions per la dreta, la categoria $\mathcal{C}_S$ i el functor γ poden representar-se com segueix. Com a objectes hom pot prendre els de $\mathcal{C}$. Els morfismes són les classes d'equivalència de diagrames de $\mathcal{C}$,

$$x \xleftarrow{s} \cdot \xrightarrow{f} y \tag{2}$$

en els quals $s \in S$. Dos d'aquests diagrames, $x \xleftarrow{s} \cdot \xrightarrow{f} y$ i $x \xleftarrow{t} \cdot \xrightarrow{g} y$, representen el mateix morfisme de $\mathcal{C}_S$ si i només si existeix un diagrama commutatiu de $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} x & \cdot \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "f"'] \\ \cdot \arrow[u, "t"] \arrow[r, "g"] & y \end{tikzcd} \tag{3}$$

amb $su = tv \in S$. Hom notarà el morfisme representat pel diagrama (2) per f/s. La composició de morfismes de $\mathcal{C}_S$ resulta de (c): donats dos (representants de) morfismes de $\mathcal{C}_S$, $x \xleftarrow{s} \cdot \xrightarrow{f} y$ i $y \xleftarrow{t} \cdot \xrightarrow{g} z$, la seva composició és $(f/s) \circ (g/t) = gf'/st'$, on f' i t' són els morfismes del diagrama

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t'"'] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & z \\ x & \cdot \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] & y & \end{tikzcd}$$

Finalment, amb aquesta encarnació de $\mathcal{C}_S$, el functor γ ve donat per $\gamma a = a$ sobre els objectes i per $\gamma f = f/1$ sobre els morfismes.

(1.2) Categories quocients i càlcul de fraccions. Sovint es té que el conjunt S admet un càlcul de fraccions no pas en la categoria "original" $\mathcal{C}$ sinó mòdul una certa relació d'equivalència entre els morfismes de la categoria ("homotopia"). Veiem, però, que el resultat de locatitzar la categoria $\mathcal{C}$ o la categoria resultant de fer quocient per una relació d'equivalència "compatible" amb S, en un sentit que es precisarà, és el mateix.

Suposem que tenim en $\mathcal{C}$ una *congruència* que notarem per $\sim$ ([McL$_2$], pàgina 51). Es a dir, $\sim$ és una relació d'equivalència entre els morfismes de $\mathcal{C}$ compatible amb la composició: si $f \sim g : a \longrightarrow b$ són dos morfismes de $\mathcal{C}$, per a tots $u : b \longrightarrow c$ i $v : a \longrightarrow b$ es té $uf \sim ug$, i $fv \sim fv$. La condició de compatibilitat amb la composició permet definir una composició de classes de morfismes induïda per la composició de morfismes de $\mathcal{C}$ de manera evident. Notarem per $[a,b]$ el conjunt de les classes de morfismes de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ per aquesta relació. Notarem per $\pi\mathcal{C}$ la *categoria quocient* ([McL$_2$], pàgina 51) de $\mathcal{C}$ respecte de la congruència $\sim$. Una representació dels objectes i morfismes de $\pi\mathcal{C}$ és la següent: $\mathrm{obj}\,\pi\mathcal{C} = \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ i $\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}}(a,b) = [a,b]$. Hom té un functor evident $\delta : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}$, definit per $\delta a = a$ i $\delta f = \overline{f}$, sent $a \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}$ i $\overline{f}$ denota la classe de f per la relació $\sim$.

La categoria $\pi\mathcal{C}$ i el functor δ admeten una caracterització per una propietat universal anàloga a $\mathcal{C}_S$ i γ:

(1) si $f \sim g$, aleshores $\delta f = \delta g$, i
(2) si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ és un functor tal que per a tot parell $f \sim g$ es té $Ff = Fg$, aleshores existeix un únic functor $\overline{F} : \pi\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $\overline{F}\delta = F$.

Direm que un functor F com l'anterior és *compatible* amb $\sim$.

Definició 3. Direm que la relació $\sim$ *és compatible amb* S si és compatible amb el functor γ; és a dir, si $f \sim g$ implica $\gamma f = \gamma g$.

En aquest cas, notarem per $\overline{S}$ la imatge del conjunt S pel functor δ.

Proposició 1. *Les categories $(\pi\mathcal{C})_{\overline{S}}$ i $\mathcal{C}_S$ són canònicament isomorfes.*

Demostració. Siguin $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ i $\gamma_\pi : \pi\mathcal{C} \longrightarrow (\pi\mathcal{C})_{\overline{S}}$ els functors de localització. Com que $\sim$ és compatible amb S, γ indueix un únic functor $\overline{\gamma} : \pi\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ tal que $\overline{\gamma}\delta = \gamma$. Per definició $\overline{\gamma}$ transforma els morfismes de $\overline{S}$ en isomorfismes de $\mathcal{C}_S$: $\overline{\gamma s} = \gamma s$. Llavors, per la propietat universal de la categoria localitzada, existeix un únic functor $\overline{\gamma}' : (\pi\mathcal{C})_{\overline{S}} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ tal que $\overline{\gamma}'\gamma_\pi = \overline{\gamma}$. Recíprocament, el functor $\gamma_\pi\delta$ transforma morfismes de S en isomorfismes de $(\pi\mathcal{C})_{\overline{S}}$: $\gamma_\pi\delta(s) = \gamma_\pi\overline{s}$. Per tant, existeix un únic functor $\theta : \mathcal{C}_S \longrightarrow (\pi\mathcal{C})_{\overline{S}}$ tal que $\theta\gamma = \gamma_\pi\delta$. La unicitat i les igualtats anteriors impliquen que $\theta\overline{\gamma}' = 1_{(\pi\mathcal{C})_{\overline{S}}}$ i $\overline{\gamma}'\theta = 1_{\mathcal{C}_S}$. $\square$

Quan $\overline{S}$ admeti un càlcul de fraccions per la dreta, un cop escollits representants de les classes de morfismes, podem representar els morfismes de $\mathcal{C}_S$ per diagrames del tipus de (2) *de* $\mathcal{C}$, i, més generalment, podem suposar que el conjunt S admet un càlcul de fraccions en la pròpia categoria $\mathcal{C}$, sempre que substituïm les igualtats de la definició 2 per $\sim$.

Exemple . ([Ver], [Hart]) Sigui $\mathcal{C} = C^\bullet(\mathcal{A})$ la categoria de complexos de cocadenes d'una categoria abeliana $\mathcal{A}$ (eventualment acotats). Siguin $S = quis$ el conjunt dels quasi-isomorfismes i $\sim$ la relació d'homotopia de complexos de cocadenes. En aquest context, la categoria $\pi\mathcal{C}$ es nota per $K^\bullet(\mathcal{A})$. Com que l'homotopia de complexos és una congruència compatible amb el conjunt dels quasi-isomorfismes, es té $D^\bullet(\mathcal{A}) = K^\bullet(\mathcal{A})_{\overline{quis}} = C^\bullet(\mathcal{A})_{quis}$.

§ 2. Functors derivats.

(2.1) Extensions de Kan i functors derivats. Sigui

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}' & \end{tikzcd} \tag{1}$$

un diagrama de functors i categories. Recordem (veure [McL$_2$], pàgina 232) que l'*extensió de Kan per la dreta* de F al llarg de γ és un functor $Ran_\gamma F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{D}$ i un morfisme de functors $\varepsilon : (Ran_\gamma F)\gamma \longrightarrow F$ tals que per a tot functor $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{D}$ i tot morfisme de functors $\zeta : G\gamma \longrightarrow F$, existeix un únic morfisme de functors $\theta : G \longrightarrow Ran_\gamma F$ tal que $\zeta = \varepsilon \cdot (\theta\gamma)$.

Parlant imprecisament: cas d'existir, $Ran_\gamma F$ és el functor que està "més aprop" de fer commutatiu el diagrama (1). De la definició es segueix que $Ran_\gamma F$ está unívocament determinat per F i γ, llevat d'un únic isomorfisme de functors. El cas d'extensions de Kan que ens interessa és el següent (veure [Qui$_1$]).

Definició 1. Si $\mathcal{C}'$ és la categoria localitzada de $\mathcal{C}$ respecte d'un conjunt de morfismes $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$ i $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ el functor de localització, l'extensió de Kan per la dreta de F al llarg de γ s'anomena *el functor derivat per l'esquerra* de F al llarg de γ i se'l nota per $\mathbf{L}F$.

Siguin $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor i $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$ i $T \subset \operatorname{mor}\mathcal{D}$. Anomenarem *functor derivat total per l'esquerra* de F al llarg de $\gamma_\mathcal{C}$ al functor derivat per l'esquerra de $\gamma_\mathcal{D} F$ al llarg de $\gamma_\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_\mathcal{C}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma_\mathcal{D}"'] \\ \mathcal{C}_S \arrow[r, "\mathbf{L}(\gamma_\mathcal{D} F)"'] & \mathcal{D}_T \end{tikzcd}$$

Sovint l'anomenarem, simplement, el "functor derivat per l'esquerra" de F i el notarem també $\mathbf{L}F$.

Observacions. (1) Els functors derivats *per l'esquerra* són extensions de Kan *per la dreta.*

(2) A [Qui_1] no es distingeix entre functor derivat i extensió de Kan.

Donem un primer criteri d'existència del functor derivat, aplicable en el cas que F factoritzi per alguna categoria $\pi\mathcal{C}$ convenient, que inclou el cas clàssic de càlcul del functor derivat d'un functor additiu entre categories de complexos de cocadenes d'una categoria abeliana via "resolucions projectives". El resultat es seguirà dels lemes següents d'extensions de Kan.

Lema 1. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i $\sim$ una congruència. Sigui $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ un functor compatible amb $\sim$. Aleshores $Ran_\delta F$ existeix i és igual a $\overline{F}$.*

Demostració. Prenem $\varepsilon = 1 : \overline{F}\delta \longrightarrow F$. Donat $G:\pi\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ i $\zeta : G\delta \longrightarrow F$, per a tot $a\in \operatorname{obj}\mathcal{C}$, definim $\theta_a : Ga \longrightarrow \overline{F}a$ com $\zeta_{\delta a} : G\delta a = Ga \longrightarrow Fa = \overline{F}a$. Comprovem que es tracta d'un morfisme de functors: per a $\overline{f} : a\longrightarrow b\in \operatorname{mor}\pi\mathcal{C}$ es té el diagrama commutatiu de $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} Ga = G\delta a & \xrightarrow{\zeta_{\delta a}} & \overline{F}a = Fa \\ {\scriptstyle G\overline{f}=G\delta a}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{F}\overline{f}=Ff}\Big\downarrow \\ Gb = G\delta b & \xrightarrow{\zeta_{\delta b}} & \overline{F}b = Fb \end{array}$$

Evidentment, $\zeta = \varepsilon\cdot(\theta\delta)$ i θ és únic amb aquesta propietat. $\square$

Lema 2. *Siguin $\mathcal{C}\xrightarrow{\gamma}\mathcal{C}'\xrightarrow{\gamma'}\mathcal{C}''$ i $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ functors tals que existeixen les extensions de Kan $Ran_\gamma F$ i $Ran_{\gamma'}Ran_\gamma F$. Aleshores $Ran_{\gamma'\gamma}F$ existeix i és igual a $Ran_{\gamma'}Ran_\gamma F$.*

Demostració. Siguin $\varepsilon : (Ran_\gamma F)\gamma \longrightarrow F$ i $\varepsilon' : (Ran_{\gamma'}Ran_\gamma F)\gamma' \longrightarrow Ran_\gamma F$ els morfismes de functors canònics. Aleshores el morfisme canònic per a $Ran_{\gamma'\gamma}F$ és $\varepsilon\cdot(\varepsilon'\gamma)$. $\square$

Lema 3. *Siguin $\gamma:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$ i $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ functors. Suposem que γ admet un adjunt per l'esquerra $\rho:\mathcal{C}'\longrightarrow\mathcal{C}$. Aleshores $Ran_\gamma F$ existeix i és igual a $F\rho$.*

Demostració. Si $\gamma:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'$ té un adjunt per l'esquerra $\rho:\mathcal{C}'\longrightarrow\mathcal{C}$ amb counitat $\varepsilon' : \rho\gamma \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$, aleshores, per [$\mathrm{McL}_2$], proposició 3, pàgina 245, $Ran_\gamma 1_{\mathcal{C}}$ existeix, és igual a ρ i el morfisme canònic $(Ran_\gamma 1_{\mathcal{C}})\gamma\longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ és ε'. A més a més, es tracta d'una extensió de Kan *absoluta*; i.e., és preservada per tot functor. Per tant $Ran_\gamma F = FRan_\gamma 1_{\mathcal{C}} = F\rho$ i $\varepsilon : (F\rho)\gamma\longrightarrow F$ és $F\varepsilon'$. $\square$

Proposició 1. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria, $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$ i $\sim$ una congruència compatible amb S. Sigui $\iota : \mathcal{C}' \longrightarrow \pi\mathcal{C}$ un functor tal que $\overline{\gamma}\iota : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}_S$ és una equivalència de categories, ρ el functor quasi-invers. Sigui $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor compatible amb $\sim$. Aleshores $\mathbf{L}F$ existeix i és igual a $\overline{F}\iota\rho$.*

Demostració. Aplicant, successivament, la definició de functor derivat i els lemes 2, 1 i 3, es té

$$\begin{aligned}\mathbf{L}F &= Ran_{\gamma}F = Ran_{\overline{\gamma}\delta}F \\ &= Ran_{\overline{\gamma}}Ran_{\delta}F = Ran_{\overline{\gamma}}\overline{F} \\ &= \overline{F}\iota\rho \quad \square\end{aligned}$$

Exemple . Sigui $\mathcal{A}$ una categoria abeliana amb suficients projectius, $\mathcal{C} = C^{-}(\mathcal{A})$ la categoria dels complexos de cocadenes de $\mathcal{A}$ acotats superiorment, $\pi\mathcal{C} = K^{-}(\mathcal{A})$ la categoria quocient per la relació d'homotopia de complexos i $\mathcal{C}' = K^{-}(\mathcal{P})$ la subcategoria plena de l'anterior formada pels objectes projectius grau a grau. La composició $K^{-}(\mathcal{P}) \hookrightarrow K^{-}(\mathcal{A}) \longrightarrow D^{-}(\mathcal{A})$ és una equivalència de categories. El functor quasi-invers $\rho : D^{-}(\mathcal{A}) \longrightarrow K^{-}(\mathcal{A})$ és "prendre una resolució projectiva".

(2.2)Límits i functors inicials. Hom tindrà ocasió d'aplicar el criteri de (2.1) en altres casos diferents del de l'exemple. Per a alguns, però, resultarà insuficient ja que no podrem assegurar que el functor que volem derivar sigui compatible amb la relació d'homotopia "a tot arreu". Per tal de tenir un criteri efectiu (teorema 4) també en aquest cas, veiem una caracterització de les extensions de Kan com a límits (teorema 2) i uns functors que ens permetran simplificar repetidament la fórmula del d'aquest.

Sigui $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un functor. Recordem ([McL$_2$], pàgina 46) que, si a és un objecte de $\mathcal{C}'$, la *categoria coma* $(a \downarrow \gamma)$ és la categoria que té per objectes els morfismes $a \longrightarrow \gamma x$ de $\mathcal{C}'$ i per morfismes els triangles commutatius de $\mathcal{C}'$ del tipus

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \gamma x \arrow[rr, "\gamma f"'] & & \gamma y \end{tikzcd} \tag{2}$$

on $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$. Hom té un *functor de projecció* $Q : (a \downarrow \gamma) \longrightarrow \mathcal{C}$ definit sobre els objectes per $Q(a \longrightarrow \gamma x) = x$ i que transforma els morfismes com (2) en f.

Amb aquesta notació, hom té la caracterització següent de les extensions de Kan ([McL$_2$], pàgines 233 i 234, veure també [SGA 4], exposé I, pàgina 25):

Teorema 2. (Extensions de Kan per la dreta com a límit puntual). *Sigui* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *un functor tal que la composició* $(a \downarrow \gamma) \xrightarrow{Q} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *té un límit en* $\mathcal{D}$*, aleshores* $Ran_\gamma F$ *està definit en* a *i val*

$$(Ran_\gamma F)(a) = \varprojlim \Big((a \downarrow \gamma) \xrightarrow{Q} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \Big) \tag{3}$$

Equivalentment

$$(Ran_\gamma F)(a) = \varprojlim_{a \to \gamma x} Fx$$

Observacions. (1) Si el límit de (3) està definit per a tot $a \in \operatorname{obj} \mathcal{C}'$, aleshores tot morfisme $f : a \longrightarrow a' \in \operatorname{mor} \mathcal{C}'$ indueix un únic morfisme

$$(Ran_\gamma F)(f) : \varprojlim_{a \to \gamma x} Fx \longrightarrow \varprojlim_{a' \to \gamma y} Fy \tag{4}$$

i les fórmules (3) i (4) defineixen un functor. Així mateix, les components del con límit

$$\varprojlim_{a \to \gamma x} Fx \longrightarrow Fa$$

corresponent als objectes $1_{\gamma a} \in (\gamma a \downarrow a)$ defineixen el morfisme de functors ε de la definició 1.

(2) En el cas dels functors derivats, el límit (3) es pren sobre tots els diagrames com

$$a \xleftarrow{s_1} \cdot \xrightarrow{f_1} \cdot \xleftarrow{s_2} \cdot \xrightarrow{f_2} \cdot \ldots \cdot \xleftarrow{s_n} \cdot \xrightarrow{f_n} x$$

per a $x \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ qualsevol.

Un concepte útil per al càlcul del límit anterior és el de functor *inicial* (corresponent al de *cofinal* en [SGA 4], exposé I, o [A-M]).

Definició 2. Un functor $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ s'anomena *inicial* si per a tot $j \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$ la categoria coma $(\varphi \downarrow j)$ és no buida i connexa.

Es a dir, per a tot $j \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$ existeix $i \in \operatorname{obj} \mathcal{I}$ i un morfisme $\varphi i \longrightarrow j$, i dos qualsevols d'aquests morfismes poden ser units per un diagrama commutatiu finit de $\mathcal{J}$ del tipus

$$\begin{tikzcd} j \arrow[r, equal] & j \arrow[r, equal] & j \arrow[r, equal] & j & j \arrow[r, equal] & j \\ \varphi i \arrow[u] \arrow[r, "\varphi f_1"] & \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[u] \arrow[l, "\varphi f_2"'] \arrow[r, "\varphi f_3"] & \cdot \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & \cdot \arrow[u] & \varphi i' \arrow[u] \arrow[l, "\varphi f_n"'] \end{tikzcd} \tag{5}$$

Una subcategoria $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{J}$ s'anomena *inicial* si el functor d'inclusió és inicial.

El resultat següent mostra el paper d'aquests functors en el càlcul de límits (veure [McL$_2$], pàgina 213).

Teorema 3. *Si* $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ *és inicial i* $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{X}$ *és un functor tal que* $\varprojlim_{\mathcal{I}} F\varphi$ *existeix, aleshores* $\varprojlim_{\mathcal{J}} F$ *existeix i són isomorfs per un únic isomorfisme.*

Observació. Remarquem dos fets trivials, però importants que ens diu aquest teorema:

(1) per calcular functors derivats basta un functor inicial $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow (a \downarrow \gamma)$, i
(2) *qualsevol* functor inicial serveix.

Donat un diagrama commutatiu de functors i categories com

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle \gamma'}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\Big\downarrow \\ \mathcal{E} & = & \mathcal{E} \end{array}$$

per a tot $a \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$, es té un functor

$$\varphi_a : (a \downarrow \gamma') \longrightarrow (a \downarrow \gamma)$$

que transforma $a \longrightarrow \gamma' x$ en $a \longrightarrow \gamma\varphi x$ i $\gamma' f$ en $\gamma\varphi f$ i que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (a \downarrow \gamma') & \xrightarrow{\varphi_a} & (a \downarrow \gamma) \\ {\scriptstyle Q}\Big\downarrow & & {\scriptstyle Q}\Big\downarrow \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C} \end{array}$$

Teorema 4. *Sigui*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ {\scriptstyle \gamma'}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\Big\downarrow & & \\ \mathcal{E} & = & \mathcal{E} & & \end{array}$$

un diagrama commutatiu de functors i categories. Suposem que existeix l'extensió de Kan $Ran_{\gamma'}(F\varphi)$ *i que per a tot* $a \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$ *el functor* φ_a *és inicial. Aleshores* $Ran_\gamma F$ *existeix i és igual a* $Ran_{\gamma'}(F\varphi)$.

Demostració. Sigui $a \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$. Aplicant el teorema 2, la definició de φ_a i el teorema 3, successivament, es té:

$$\begin{aligned} (Ran_{\gamma'} F\varphi)(a) &= \varprojlim \Big((a \downarrow \gamma') \xrightarrow{Q} \mathcal{C}' \xrightarrow{F\varphi} \mathcal{D} \Big) \\ &= \varprojlim \Big((a \downarrow \gamma') \xrightarrow{\varphi_a} (a \downarrow \gamma) \xrightarrow{Q} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \Big) \\ &= \varprojlim \Big((a \downarrow \gamma) \xrightarrow{Q} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \Big) \\ &= (Ran_\gamma F)(a) \qquad \square \end{aligned}$$

Corol·lari. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria, $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$, $\sim$ una congruència definida en una subcategoria plena $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ compatible amb $S' = S \cap \operatorname{mor}\mathcal{C}'$, φ el functor d'inclusió i $\gamma' = \gamma\varphi$. Suposem que existeix el functor derivat $\mathbf{L}(F\varphi)$ i que per a tot $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}'_{S'}$ el functor φ_a és inicial. Aleshores $\mathbf{L}F$ existeix i és igual a $\mathbf{L}(F\varphi)$.*

(2.3) Functors derivats segons Deligne. Anem a aprofitar la caracterització de (2.2) de les extensions de Kan per recuperar la definició de functor derivat de Deligne ([SGA 4], exposé XVII, cf. [Illu]). Hom farà ús dels resultats d'aquest apartat i el següent en el capítol IV, quan disposarem d'uns objectes amb els què calcular els functors derivats.

En aquest apartat suposarem que S admet un càlcul de fraccions per la dreta.

Senyalem que la hipòtesi sobre el conjunt S es tindrà en general en alguna categoria quocient $\pi\mathcal{C}$ de les categories amb què treballarem en aquest capítol i posteriors i per tant els resultats sobre functors derivats s'apliquen, en principi, a functors definits en aquesta categoria quocient. La primera simplificació en el límit de (3) es pot descriure de manera imprecisa així: si S admet un càlcul de fraccions per la dreta, els morfismes f_i "no compten".

Sigui $(S \downarrow a)$ la categoria que té per objectes els morfismes $x \longrightarrow a$ de S i per morfismes els triangles commutatius de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ & s \searrow \quad \swarrow t & \\ & a & \end{array} \tag{6}$$

on $s, t \in S$. Hom té un functor de projecció $(S \downarrow a) \longrightarrow \mathcal{C}$ anàleg al de les categories coma, que generalment sobreentendrem en el que segueix.

Teorema 5. *Si S admet un càlcul de fraccions per la dreta,*

$$(\mathbf{L}F)(a) = \varprojlim_{s} Fx$$

on el límit es pren per a tots els $s : x \longrightarrow a$ de $(S \downarrow a)$.

Demostració. Mostrarem que existeix un functor inicial

$$\varphi : (S \downarrow a) \longrightarrow (a \downarrow \gamma)$$

i el resultat es seguirà aleshores del teorema 2. Sigui φ el functor que sobre $s \in \operatorname{obj}(S \downarrow a)$ val

$$\varphi s = 1/s$$

i sobre els morfismes com (6)

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "1/s"'] \arrow[dr, "1/t"] & \\ x \arrow[rr, "f/1"'] & & y \end{tikzcd} \tag{7}$$

Observem que (7) és, efectivament, un morfisme de $(a \downarrow \gamma)$ ja que $(f/1) \circ (1/s) = f/s$ i aquest darrer, pel diagrama

$$\begin{tikzcd} a & x \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "f"'] \\ y \arrow[u, "t"] \arrow[r, "1"] & y \end{tikzcd}$$

és igual a $1/t$.

Lema. *φ és un functor inicial.*

Demostració del lema. Sigui $f/s : a \longrightarrow x \in \operatorname{obj}(a \downarrow \gamma)$. Aleshores $f/1$ és un morfisme de $(a \downarrow \gamma)$ de $1/s = \varphi s$ en f/s. Pel que fa a la connexió: hem de veure que donats dos representants $f/s = g/t$ d'un objecte de $(a \downarrow \gamma)$, existeix un diagrama del tipus de (5) que uneix φs amb φt. Per la representació dels morfismes de $\mathcal{C}_S$ (veure (2) de (1.2)), existiran u, v tals que $su = tv \in S$ i $fu = gv$. Aleshores

$$\begin{tikzcd} f/s \arrow[r, equal] & f/s \arrow[r, equal] & g/t \arrow[r, equal] & g/t \\ 1/s \arrow[u, "f/1"] & 1/su \arrow[l, "u/1"'] \arrow[u, "fu/1"] \arrow[r, equal] & 1/vt \arrow[u, "gv/1"] \arrow[r, "v/1"] & 1/t \arrow[u, "g/1"] \end{tikzcd}$$

és el diagrama cercat. $\square$

(2.4) Grupoïdes contràctils. Veiem alguns casos en què el límit del teorema 5 és igual a algun dels Fx. Per a tal fi necessitem introduir la categoria $\operatorname{im} F$ i els conceptes de grupoïde contràctil i functor essencialment constant.

Sigui $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ un functor i $S(F)$ el conjunt de morfismes de $\mathcal{J}$ que esdevenen invertibles per F. Evidentment, el functor F factoritza de manera única pel functor de localització $\mathcal{J}_{S(F)} \longrightarrow \mathcal{C}$. Sigui F' aquesta factorització. Notarem per $\operatorname{im} F$ la subcategoria de $\mathcal{C}$ els objectes de la qual són les imatges $F'j$ dels objectes de $\mathcal{J}_{S(F)}$ i els morfismes les imatges per F' de morfismes d'aquesta categoria. Altrament dit, són composicions de morfismes de $\mathcal{C}$ del tipus

$$F\alpha_{2n+1} \circ (F\alpha_{2n})^{-1} \circ \cdots \circ (F\alpha_2)^{-1} \circ F\alpha_1 \circ (F\alpha_0)^{-1}$$

per a alguns $\alpha_m \in \operatorname{mor} \mathcal{J}$, $m = 0, \ldots, n$ tals que els $F\alpha_{2m}$ són invertibles a $\mathcal{C}$. Hom observarà que no es tracta necessàriament d'una subcategoria plena.

Definició 3. Direm que una categoria $\mathcal{G}$ és un *grupoïde contràctil* si és un *grupoïde connex i simplement connex.* Es a dir, si per a tots $a, b \in \operatorname{obj} \mathcal{G}$, el conjunt $\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(a, b)$ té un únic element.

Equivalentment, dos objectes qualsevols de $\mathcal{G}$ poden ser units per un únic isomorfisme.

Pel que fa a l'altre concepte: donat $c \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, el *functor constant* $\Delta c : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ és el functor definit sobre els objectes per $j \mapsto c$ i sobre els morfismes per $\alpha \mapsto 1_c$.

Definició 4. (cf. [A-M]) Direm que un functor $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ és *essencialment constant* si existeix un functor inicial $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que $F\varphi$ és isomorf a algun functor Δc.

Proposició 6. *Per a un functor $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ les afirmacions següents són equivalents:*

(1) *Existeix un functor inicial $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que $\operatorname{im} F\varphi$ és contràctil.*
(2) *Existeix un functor inicial $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ tal que $\varprojlim F\varphi = F\varphi i$ per a tot $i \in \operatorname{obj} \mathcal{I}$.*
(3) *F és essencialment constant.*

Demostració. Hom pot reduir-se a demostrar l'equivalència dels enunciats "absoluts" corresponents:

(1') $\operatorname{im} F$ és contràctil.
(2') $\varprojlim F = Fj$ per a tot $j \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$.
(3') F és isomorf a un functor constant.

per a una categoria $\mathcal{J}$ connexa. En efecte, suposem, per exemple demostrat que (1') implica (2') i que existeix φ satisfent (1). Per hipòtesi $\varprojlim F\varphi = F\varphi i$ per a tot $i \in \mathcal{I}$; és a dir, φ satisfà (2).

Suposem doncs que F satisfà (1'). Aleshores, fixat un $i_0 \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$, per a tot $j \in \mathcal{J}$ existeix un isomorfisme únic de $\operatorname{im} F$

$$\nu_j : Fi_0 \longrightarrow Fj$$

Per unicitat, per a tot $\alpha : i \longrightarrow j$, es té $(F\alpha)\nu_i = \nu_j$. Es a dir, els ν_i ens defineixen un con $\nu : Fi_0 \longrightarrow F$. Veiem que és un con límit i haurem acabat. Sigui $\tau : d \longrightarrow F$ un altre con. Evidentment, tenim morfismes $d \longrightarrow Fi_0$: podem prendre qualsevol $(\nu_i)^{-1}\tau_i$. Veiem que són tots iguals: siguin $i, j \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$. Per ser $\operatorname{im} F$ contràctil, existeix un morfisme *de* $\operatorname{im} F$ que els uneix:

$$Fi \xrightarrow{(F\alpha_0)^{-1}} Fi_1 \xrightarrow{F\alpha_1} Fi_2 \longrightarrow \cdots$$

Per ser ν i τ cons, es té $(F\alpha_0)\nu_{i_1} = \nu_i$ i $(F\alpha_0)\tau_{i_1} = \tau_i$. D'on $(\nu_i)^{-1}\tau_i = (\nu_{i_1})^{-1}\tau_{i_1}$. De la mateixa manera es veu que $(\nu_{i_1})^{-1}\tau_{i_1} = (\nu_{i_2})^{-1}\tau_{i_2}$, etc ... D'on finalment, $(\nu_i)^{-1}\tau_i = (\nu_i)^{-1}\tau_j$. Sigui doncs $f = (\nu_i)^{-1}\tau_i : d \longrightarrow Fi_0$. Es té obviament que $\nu_i f = \tau_i$ per a tot $i \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$ i si $g : d \longrightarrow Fi_0$ satisfà també $\nu_i g = \tau_i$, aleshores $g = (\nu_i)^{-1}\tau_i = f$.

Suposem que F satisfà (2'). Aleshores els Fj són isomorfs per isomorfismes únics que commuten entre ells. Prenem-ne un qualsevol Fi_0: els isomorfismes $Fi_0 \longrightarrow Fj$ ens defineixen un con cap a la base F en què les components són isomorfismes. Per tant F és isomorf a un functor constant.

Suposem que F satisfà (3'). Sigui $\nu : \Delta c \longrightarrow F$ un isomorfisme. Veiem que F identifica fletxes paral·leles: si $\alpha : i \longrightarrow j \in \operatorname{mor} \mathcal{J}$, aleshores $(F\alpha)\nu_i = \nu_j$ i per tant $F\alpha = \nu_j(\nu_i)^{-1}$ i per tot $\beta : i \longrightarrow j$ es tindrà $F\alpha = F\beta$.

Es a dir, $\operatorname{Hom}_{\operatorname{im} F}(Fi, Fj)$ té, com a molt, un element i es tracta d'un isomorfisme. Veiem que $\operatorname{Hom}_{\operatorname{im} F}(Fi, Fj) \neq \emptyset$. Com que $\mathcal{J}$ és connexa, per a $i, j \in \operatorname{obj} \mathcal{J}$ arbitraris, existeix una successió de morfismes

$$i \xleftarrow{\alpha_0} i_1 \xrightarrow{\alpha_1} i_2 \xleftarrow{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \xleftarrow{\alpha_{2n}} i_n \xrightarrow{\alpha_{2n+1}} j$$

Com que $F\alpha_0 = \nu_i(\nu_{i_1})^{-1}$, $F\alpha_1 = \nu_{i_2}(\nu_{i_1})^{-1}$, etc ... , els $F\alpha_m$ són invertibles a $\mathcal{C}$ i $F\alpha_{2n+1} \circ (F\alpha_{2n})^{-1} \circ \cdots \circ (F\alpha_2)^{-1} \circ F\alpha_1 \circ (F\alpha_0)^{-1}$ és el morfisme de $\operatorname{im} F$ que uneix i amb j. $\square$

Observació. Per tant, si es té alguna de les afirmacions del teorema,

$$\varprojlim_{\mathcal{J}} F = Fj$$

per a tot $j \in \operatorname{obj} \operatorname{im} \varphi$. Un cas particular és aquell en què ja la categoria $\mathcal{I}$ és contràctil.

Corol·lari. *Suposem que existeix $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ inicial i que $\mathcal{I}$ és contràctil. Aleshores $\varprojlim_{\mathcal{J}} F = Fj$ per a tot $j \in \operatorname{obj} \operatorname{im} \varphi$.*

Demostració. Ho veurem demostrant que $\operatorname{im} F\varphi$ és contràctil. Com en la demostració del teorema, hom es redueix a provar que si $\mathcal{J}$ és contràctil aleshores $\operatorname{im} F$ també, el qual és evident. $\square$

§ 3. Categories de models.

(3.1) Definicions. Les *categories de models* de [Qui$_1$] poden ser vistes com una generalització de les categories de complexos d'una categoria abeliana. Com en elles, hom té resolucions projectives i injectives (models cofibrants i fibrants, respectivament), nocions d'homotopia i resultats per al càlcul de functors derivats. Recordem la seva definició.

Definició 1. Una *categoria de models* és una categoria $\mathcal{C}$ junt amb tres classes de morfismes de $\mathcal{C}$, anomenats fibracions (*fib*), cofibracions (*cof*) i equivalències febles (*we*), que satisfan els axiomes següents.

M0. $\mathcal{C}$ és tancada per límits i colímits finits.

M1. Donat un diagrama sòlid

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & x \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ b & \xrightarrow{\beta} & y \end{array} \tag{1}$$

on i és una cofibració, p és una fibració. Si

(i) i és una equivalència feble, o bé

(ii) p és una equivalència feble,

el morfisme puntejat existeix.

M2. Tot morfisme f pot ser factoritzat com:

(i) $f = pi$, on i és una cofibració i una equivalència feble i p és una fibració, o bé

(ii) $f = qj$, on j és una cofibració i q una fibració i una equivalència feble.

M3. Fibracions i cofibracions són estables per composició. Tot isomorfisme és tant una fibració com una cofibració. Les fibracions es preserven per pull-backs; i.e., donat un diagrama cartesià

$$\begin{array}{ccc} x \sqcap_z y & \longrightarrow & y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ x & \longrightarrow & z \end{array} \tag{2}$$

si p és una fibració, aleshores ho és q. Les cofibracions es preserven per push-outs; i.e., donat un diagrama cocartesià

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & c \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j} \\ b & \longrightarrow & b \sqcup_a c \end{array} \tag{3}$$

si i és una cofibració, aleshores ho és j.

M4. Si en (2) p és una fibració i una equivalència feble, aleshores q és una equivalència feble. Si en (3) i és una cofibració i una equivalència feble, aleshores j és una equivalència feble.

M5. Siguin $x \longrightarrow y \longrightarrow z$ morfismes de $\mathcal{C}$. Si dos dels morfismes f, g i gf són equivalències febles, també ho és el tercer. Tot isomorfisme és una equivalència feble.

Exemple . ([Qui$_1$]) Sigui $\mathcal{C} = C^-(\mathcal{A})$ la categoria de complexos de cocadenes acotats superiorment d'una categoria abeliana $\mathcal{A}$ amb suficients projectius. Aleshores $\mathcal{C}$ és una categoria de models tancada escollint com a *we* els quasi-isomorfismes, com a *fib* els morfismes de complexos exhaustius i com a cofibracions els morfismes de complexos injectius amb conucli projectiu grau a grau.

Hom anomena *fibracions* (resp. *cofibracions*) *trivials* les fibracions (resp. cofibracions) que són a la vegada equivalències febles. Per M0 tota categoria de models té un objecte inicial, e, i un objecte final, t. Direm que un objecte $a \in \mathcal{C}$ és *cofibrant* si $e \longrightarrow a$ és una cofibració i que és *fibrant* si $a \longrightarrow t$ és una fibració. Notarem per

$\mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_f$ i $\mathcal{C}_{cf}$ les subcategories plenes de $\mathcal{C}$ els objectes de les quals són els objectes de $\mathcal{C}$ cofibrants, fibrants i cofibrants i fibrants alhora, respectivament. Hom utilitzarà també les notacions $\mathcal{C}_{cof}$ i $\mathcal{C}_{fib}$ per a les dues primeres quan serà convenient per evitar confusions amb les categories-fibra del capítol III. La factorització M2(ii) aplicada als morfismes $e \longrightarrow a$ ens associa a cada objecte $a \in \mathcal{C}$ un objecte cofibrant i una fibració trivial, que notarem $Ca \longrightarrow a$ i anomenarem un *model cofibrant de* a. Les categories amb què treballem gaudeixen generalment de la propietat de que tot objecte és fibrant. Indicarem aquest fet per $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$.

Per a la següent definició, recordem el concepte de *retracte*. Donats $f : a \longrightarrow b$ i $g : c \longrightarrow d$ morfismes de $\mathcal{C}$, es diu que f és un *retracte* de g si existeix un diagrama commutatiu de $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccc} a & \longrightarrow & c & \longrightarrow & a \\ \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ b & \longrightarrow & d & \longrightarrow & b \end{array}$$

en el qual les composicions de les files són les identitats de a i b, respectivament.

Definició 2. Una categoria de models es diu *tancada* si tot retracte d'una *we, fib* o *cof* és al seu torn, una *we, fib* o *cof.*

En una categoria de models tancada, dues de les classes de morfismes distingits determinen la tercera ([Qui$_1$], capítol 1, § 5.1). Així per a les cofibracions i fibracions es té la següent caracterització: si en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & x \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ b & \xrightarrow{\beta} & y \end{array}$$

existeix $\widetilde{\beta} : b \longrightarrow x$ tal que $\widetilde{\beta} i = \alpha$ i $p\widetilde{\beta} = \beta$ es diu que i té la *propietat d'aixecament per l'esquerra* (LLP) respecte de p i que p té la *propietat d'aixecament per la dreta* (RLP) respecte de i. Si $\mathcal{C}$ és una categoria de models, per M1(ii), si i és una cofibració té la LLP respecte de les fibracions trivials. En una categoria de models tancada és cert el recíproc també: si un morfisme té la LLP respecte de les fibracions trivials, aleshores és una cofibració. Anàlogament, la RLP respecte de les cofibracions trivials caracteritza les fibracions.

(3.2) Homotopia en les categories de models. Tota categoria de models ve equipada amb dues nocions d'homotopia: homotopia per la dreta (amb objecte camí) i per l'esquerra (amb objecte cilindre). Recordem la definició de la primera (veure [Qui]).

DEFINICIÓ 2. Donats dos morfismes $f, g : a \longrightarrow b$ de $\mathcal{C}$ direm que f és *homòtop per la dreta* a g (notació $f \sim g$) si existeix un diagrama del tipus

$$\begin{tikzcd} \widetilde{b} & b \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\Delta_b"] \\ a \arrow[u, "h"] \arrow[r, "(f,g)"] & b \times b \end{tikzcd} \tag{5}$$

on s és una equivalència feble.

Un *objecte camí* per a b és un objecte b^I junt amb una factorització

$$b \xrightarrow{s} b^I \xrightarrow{(\,\partial_1,\, \partial_0\,)} b \times b \tag{6}$$

de Δ_b on s és una equivalència feble i (∂_1, ∂_0) una fibració.

Una *homotopia per la dreta* de f a g és un diagrama (5) en el qual (∂_1, ∂_0) és una fibració i per tant $\widetilde{b}$ és un objecte camí per a b.

Dualitzant, es tenen les nocions de *homòtop per l'esquerra*, *objecte cilindre* i *homotopia per l'esquerra*. Ambdues relacions coincideixen en la subcategoria plena $\mathcal{C}_{cf}$. Hom demostra ([Qui$_1$], lema 1, pàgina 1.6) que si $f \sim g$ aleshores existeix una homotopia de f a g. Generalment, hom defineix la relació d'homotopia mitjançant *un* objecte camí explícit. Això no és el mateix que la relació d'homotopia que aquí es considera. Hom té almenys el resultat següent (cf. [Tan], pàgina 43):

Lema. *Siguin $f, g : a \longrightarrow b \in \operatorname{mor} \mathcal{C}$, a cofibrant i $h : a \longrightarrow b^I$ una homotopia de f a g. Aleshores, per a tot altre objecte camí $b^{I'}$, existeix una homotopia $h' : a \longrightarrow b^{I'}$ de f a g.*

Demostració. Pel lema 5 (ii) de [Qui$_1$], pàgina 1.8, podem suposar que en la factorització del diagrama (6), s és una cofibració trivial. Hom té aleshores que en el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "s"'] & b^{I'} \arrow[d, "(\,\partial'_1\ \partial'_0\,)"] \\ b^I \arrow[r, "(\,\partial_1\ \partial_0\,)"] & b \times b \end{tikzcd}$$

$(\partial'_1, \partial'_0)$ és una fibració. Per M1(i), existeix $k : b^I \longrightarrow b^{I'}$ tal que $ks = s'$ i $(\partial'_1, \partial'_0)k = (\partial_1, \partial_0)$. Aleshores $h' = kh$ és l'homotopia cercada. $\square$

Com és fàcil de comprovar (veure, per exemple [Qui$_2$], pàgina 208), la relació d'homotopia és compatible amb la classe de les equivalències febles en el sentit de la definició 3 de (1.2): si $f \sim g$ aleshores $\gamma f = \gamma g$, on γ és la localització de $\mathcal{C}$ respecte de $S = we$.

Definició 3. Direm que un morfisme $f : a \longrightarrow b$ és una *equivalència homotòpica* (*he*) si existeix $g : b \longrightarrow a$ tal que $gf \sim 1_a$ i $fg \sim 1_b$.

Hom veu fàcilment que hi ha una cadena d'implicacions, en general estrictes, *isomorfisme* $\Rightarrow$ *he* $\Rightarrow$ *we*. En el cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$ es tenen, però, dos casos en què la darrera és una equivalència:

(1) si es tracta d'una cofibració trivial,

(2) si es tracta d'una fibració trivial entre objectes cofibrants.

El primer és conseqüència del dual del lema 7 ([Qui$_1$], pàgina 1.10). El segon del mateix lema 7, del 5 (i) i del seu dual.

(3.3) Functors derivats en les categories de models. Recollim alguns resultats sobre functors derivats:

Teorema 1. ([Qui$_1$]) *Sigui $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor, on $\mathcal{C}$ és una categoria de models. Suposem que F transforma equivalències febles de $\mathcal{C}_c$ en isomorfismes de $\mathcal{D}$. Aleshores $\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ existeix i sobre els objectes val $(\mathbf{L}F)a = Fc$, on c és un model cofibrant qualsevol de a.*

Sovint utilitzarem aquest resultat a través de:

Proposició 2. ([S-T]) *Sigui $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor entre categories de models tancades que admet un adjunt per la dreta $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ que preserva equivalències febles i fibracions. Aleshores F preserva cofibracions i equivalències febles de $\mathcal{C}_c$.*

Hom remarcarà que l'ús de la hipòtesi sobre F en el teorema 1 és tan sols permetre que F sigui compatible amb la relació d'homotopia entre morfismes de $\mathcal{C}_c$, deduïnt-se el teorema aleshores del corol·lari del teorema 4 de § 2. Hom en farà ús també directament sota aquesta forma:

Proposició 3. *Sigui* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *un functor, on* $\mathcal{C}$ *és una categoria de models. Suposem que* F *és compatible amb l'homotopia entre morfismes de* $\mathcal{C}_c$*. Aleshores* $\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *existeix i sobre els objectes val* $(\mathbf{L}F)a = Fc$*, on* c *és un model cofibrant qualsevol de* a*.*

En el cas que $\mathcal{C}$ sigui una categoria amb tots els objectes fibrants, tota cofibració trivial és una equivalència homotòpica i la hipòtesi de la proposició 3 és equivalent a la del teorema de Quillen.

Finalment, la preservació de cofibracions ens apareixerà a l'hora de derivar la composició de dos functors. En aquest context, tenim la següent versió de la *successió espectral de Grothendieck* ([Gro], teorema 2.4.1, cf. [Hart], proposició 5.4, capítol I, veure també més endavant el teorema 10 de (1.5), capítol IV).

Proposició 4. *Siguin* $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ *functors, on* $\mathcal{C}$ *i* $\mathcal{D}$ *són categories de models. Suposem que* F *preserva objectes cofibrants i que existeixen els functors derivats* $\mathbf{L}F$*,* $\mathbf{L}G$ *i* $\mathbf{L}(GF)$*. Aleshores el morfisme canònic de functors* $(\mathbf{L}G)(\mathbf{L}F) \longrightarrow \mathbf{L}(GF)$ *és un isomorfisme.*

(3.4) La categoria $\mathcal{C}(u)$. En la línia de [Qui$_1$], cap. II, prop. 6, pàg. 2.8, anem a veure com, una estructura de categoria de models (resp. de models tancada) en una categoria $\mathcal{C}$ indueix estructures anàlogues en certes categories relacionades amb $\mathcal{C}$.

Sigui $a \xrightarrow{u} b$ un morfisme fixat de $\mathcal{C}$. Sigui $\mathcal{C}(u)$ la categoria que té per objectes els triples $(\iota_x, x, \varepsilon_x)$,

$$a \xrightarrow{\iota_x} x \xrightarrow{\varepsilon_x} b$$

on $x \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ i $\iota_x, \varepsilon_x \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}$, són tals que $\varepsilon_x \iota_x = u$, i per morfismes els diagrames commutatius de $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\iota_x} & x & \xrightarrow{\varepsilon_x} & b \\ \| & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ a & \xrightarrow{\iota_y} & y & \xrightarrow{\varepsilon_y} & b \end{array} \tag{4}$$

La composició de morfismes és la induïda per la composició de $\mathcal{C}$. Hom té un functor d'oblit $U : \mathcal{C}(u) \longrightarrow \mathcal{C}$, definit sobre els objectes per $U(\iota_x, x, \varepsilon_x) = x$ i que sobre els morfismes com (4) val f. Generalment, farem l'abús de representar l'objecte $(\iota_x, x, \varepsilon_x)$ de $\mathcal{C}(u)$ per x, simplement, i un morfisme com el del diagrama (4) per f.

Observem que a (i.e., $a \xrightarrow{1} a \xrightarrow{u} b$) n'és l'objecte inicial i b (i.e., $a \xrightarrow{u} b \xrightarrow{1} b$) el final.

Si $\mathcal{C}$ és una categoria amb objecte final t tenim, com a cas particular de $\mathcal{C}(u)$, prenent $b = t$, la categoria *d'objectes sota de* a: $a\backslash\mathcal{C}$. Els seus objectes són els morfismes de $\mathcal{C}$ de domini a ("unitats") i els seus morfismes els triangles commutatius de $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ x & & \underset{f}{\longrightarrow} & & y \end{array}$$

L'objecte inicial és la identitat 1_a. L'objecte final és $a \longrightarrow t$. Hom té un functor d'oblit evident $U_a : \mathcal{C}(u) \longrightarrow a\backslash\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ té un objecte inicial e, prenent $a = e$ tenim la categoria dual de l'anterior *d'objectes damunt de* b: $\mathcal{C}/b$. Els seus objectes són els morfismes de $\mathcal{C}$ de codomini b ("augmentacions") i els seus morfismes els triangles commutius de $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccc} x & & \overset{f}{\longrightarrow} & & y \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & b & & \end{array}$$

L'objecte inicial és el morfisme $e \longrightarrow b$. El final la identitat 1_b. Hom té un functor d'oblit evident $U_b : \mathcal{C}(u) \longrightarrow \mathcal{C}/b$.

Finalment, prenent $a = b$ i $u = 1_a$ per a algun $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$, es té la categoria *d'objectes sota i damunt de* a: $\mathcal{C}(1_a)$. Els objectes són les successions de morfismes de $\mathcal{C}$, $a \longrightarrow x \longrightarrow a$, la composició dels quals és la identitat. L'objecte inicial i el final coincideixen: es tracta de a (i.e., $a \xrightarrow{1} a \xrightarrow{1} a$).

La primera de les propietats d'una categoria de models és l'existència de límits i colímits finits. Veiem com és el càlcul d'aquests en $\mathcal{C}(u)$. Recordem (veure [McL$_2$], pàgina 108) que un functor $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ *crea colímits* per a un functor $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ si:

(i) per al con límit $\upsilon : UF \longrightarrow x$ en $\mathcal{X}$ existeix un únic parell (a, σ) consistent en un objecte a de $\mathcal{A}$ tal que $Ua = x$ i un con $\sigma : F \longrightarrow a$ tal que $U\sigma = \upsilon$, i, a més a més,

(ii) $\sigma : F \longrightarrow a$ és un con límit en $\mathcal{A}$.

Dir que un functor $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ "crea colímits" significa que crea colímits per a tot functor $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que UF *ja* té un colímit en $\mathcal{X}$.

La noció dual, *creació de límits*, s'obté invertint els morfismes en la definició anterior. Com a exemples que ens interessen, el functor d'oblit $a\backslash\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ crea límits i $\mathcal{C}/b \longrightarrow \mathcal{C}$ colímits (veure *op.cit.*, pàgina 108). Més generalment, es té:

Proposició 5. *El functor $U_a : \mathcal{C}(u) \longrightarrow a\backslash\mathcal{C}$ crea colímits. El functor $U_b : \mathcal{C}(u) \longrightarrow \mathcal{C}/b$ crea límits.*

Es segueix de la proposició 5 i de [McL$_2$], teorema 2, pàgina 113 (o de la mateixa demostració de la proposició -veure més endavant) el

Corol·lari. *Sigui $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}(u)$ un functor. Aleshores:*

(1) *si existeix $\varinjlim U_aF$, també existeix $\varinjlim F$ i $U_a \varinjlim F = \varinjlim U_aF, \quad i,$*

(2) *si existeix $\varprojlim U_bF$, també existeix $\varprojlim F$ i $U_b \varprojlim F = \varprojlim U_bF$.*

Demostració de la proposició 5. Com que es tracta d'afirmacions duals, és suficient veure la que fa referència als colímits, per exemple.

Sigui $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}(u)$ un functor tal que U_aF té un colímit. Sigui $c = \varinjlim U_aF \in \operatorname{obj} a(\backslash\mathcal{C})$ aquest, i $\upsilon : U_aF \longrightarrow c$ el seu con límit. Per fer de c un objecte de $\mathcal{C}(u)$ ens cal tan sols definir la seva augmentació $\varepsilon_c : c \longrightarrow b$. Per a tal fi tenim les augmentacions $\varepsilon_i : Fi \longrightarrow b$, que defineixen un con de $a\backslash\mathcal{C}$. Prenem doncs com a ε_c l'únic morfisme d'aquesta categoria tal que $\varepsilon_c\upsilon_i = \varepsilon_i$ per a tot i. Aleshores $\varepsilon_c\iota_c = \varepsilon_c\upsilon_i\iota_i = \varepsilon_i\iota_i = u$ i per tant $(\iota_c, c, \varepsilon_c) \in \operatorname{obj} \mathcal{C}(u)$.

Així mateix, com que els υ_i comuten amb les augmentacions per definició i ja es tractava de morfismes de $a\backslash\mathcal{C}$, resulten ser morfismes de $\mathcal{C}(u)$. Per tant defineixen un con d'aquesta categoria $F \longrightarrow c$. Veiem que és un con límit: si $\tau : F \longrightarrow x$ és un altre con de $\mathcal{C}(u)$, aleshores $U_a\tau : U_aF \longrightarrow U_ax$ és un con de $a\backslash\mathcal{C}$. Per tant existeix un únic morfisme d'aquesta categoria $f : c \longrightarrow U_ax$ tal que $f\upsilon_i = \tau_i$ per a tot i. Comprovem que f satisfà $\varepsilon_x f = \varepsilon_c$ i haurem acabat. Però, per la definició de ε_c és suficient que $\varepsilon_x f\upsilon_i = \varepsilon_c\upsilon_i$ per a tot i. En efecte, $\varepsilon_x f\upsilon_i = \varepsilon_x\tau_i = \varepsilon_i$ perquè els τ_i són morfismes de $\mathcal{C}(u)$. $\square$

Els resultats anteriors redueixen el càlcul de colímits en $\mathcal{C}(u)$ al seu càlcul en la categoria més senzilla $a\backslash\mathcal{C}$ i el de límits a la categoria $\mathcal{C}/b$. Aquests, però, no són casos particulars dels resultats anteriors: si prenem $a = e$, per exemple, el que obtenim és que el functor d'oblit $\mathcal{C}/b \longrightarrow \mathcal{C}$ crea colímits. Ens cal doncs, un resultat de caire diferent per assegurar l'existència de límits en $\mathcal{C}/b$ i de colímits en $a\backslash\mathcal{C}$.

Per [McL$_2$], teoremes 1 i 2, pàgina 109, i els seus duals, és suficient demostrar l'existència d'alguns límits (resp., colímits). En concret, per a l'existència de colímits, és suficient l'existència de coproductes i equalitzadors.

Proposició 6. *El coproducte de dos objectes $a \longrightarrow x$ i $a \longrightarrow y$ de $a\backslash\mathcal{C}$ és el push-out de $\mathcal{C}$,*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\iota_x"] \arrow[d, "\iota_y"'] & x \arrow[d, "i_1"'] \\ y \arrow[r, "i_2"] & x \sqcup_a y \end{tikzcd}$$

El coequalitzador d'un parell de fletxes paral·leles $\alpha, \beta : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} a\backslash\mathcal{C}$ és el seu coequalitzador $\gamma : y \longrightarrow u$ en la categoria $\mathcal{C}$ sent $\iota_u = \gamma\iota_y$.

Finalment,

Teorema 7. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models (resp., de models tancada). Definim els morfismes distingits de $\mathcal{C}(u)$ com segueix: direm que $f \in \operatorname{mor}\mathcal{C}(u)$ és una equivalència feble, una fibració o una cofibració si i només si ho és $U(f) \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$. Aleshores $\mathcal{C}(u)$ és una categoria de models (resp., de models tancada).*

Demostració. **M0.** Les proposicions 5 i 6 redueixen l'existència de límits i colímits finits en $\mathcal{C}(u)$ a la seva existència en $\mathcal{C}$. Com que, per hipòtesi, aquesta és una categoria de models, existeixen.

M1. Donat un diagrama sòlid de $\mathcal{C}(u)$,

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & x \arrow[d, "p"] \\ d \arrow[r, "\beta"] & y \end{tikzcd}$$

el morfisme puntejat $f : d \longrightarrow x$ existeix a $\mathcal{C}$ i és un morfisme de $\mathcal{C}(u)$: $f\iota_d = fi\iota_c = \alpha\iota_c = \iota_x$ i $\varepsilon_x f = \varepsilon_y pf = \varepsilon_y \beta = \varepsilon_d$.

M2. Donat $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor}\mathcal{C}(u)$, les factoritzacions existeixen a $\mathcal{C}$: sigui $x \xrightarrow{\alpha} c \xrightarrow{\beta} y$ qualsevol de les dues. Per definició dels morfismes distingits de $\mathcal{C}(u)$, α

serà, per exemple, una cofibració trivial d'aquesta categoria si ho és de $\mathcal{C}$. Per tant, sols és necessari mostrar que són morfismes de $\mathcal{C}(u)$. Definim $\iota_c = \alpha\iota_x$ i $\varepsilon_c = \varepsilon_y\beta$. Comprovem, per exemple, que c és un objecte de $\mathcal{C}(u)$: $\varepsilon_c\iota_c = \varepsilon_y\beta\alpha\iota_x = \varepsilon_y f\iota_x = \varepsilon_x\iota_x = u$. O que $\alpha \in \operatorname{mor}\mathcal{C}(u)$: $\alpha\iota_x = \iota_c$, per definició de ι_c i $\varepsilon_c\alpha = \varepsilon_y\beta\alpha = \varepsilon_y f = \varepsilon_x$.

M3 i **M4.** L'estabilitat de les cofibracions i el que tot isomorfisme sigui una cofibració són evidents. Pel que fa a l'estabilitat per push-outs, observem que de la descripció dels colímits en $\mathcal{C}(u)$ es segueix que el push-out de $\alpha : x \longrightarrow y$ i $\beta : x \longrightarrow z$ a $\mathcal{C}(u)$ coincideix amb el push-out a $\mathcal{C}$, prenent les unitats i augmentacions que es segueixen de les proposicions 5 i 6.

L'estabilitat de les cofibracions i de les cofibracions trivials per push-outs es segueix d'aquest fet, de la definició d'aquests morfismes distingits en $\mathcal{C}(u)$ i de que $\mathcal{C}$ és una categoria de models.

Dualitzar per a les fibracions.

M5 i **Retractes.** Evidents a partir de les definicions dels morfismes distingits en $\mathcal{C}(u)$. $\square$

En particular, si $\mathcal{C}$ és una categoria de models (resp. de models tancada), $a\backslash\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}/b$, són categories de models (resp., de models tancades) amb les definicions anteriors dels morfismes distingits (cf. [Qui$_1$], proposició 6, pàgina 2.8).

Observació. La propietat “tots els objectes fibrants” es “preserva” sota hipòtesis que satisfaran la majoria dels nostres exemples. En efecte, suposem que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$. Aleshores és evident que $a\backslash\mathcal{C} = (a\backslash\mathcal{C})_f$. Més generalment, si u admet una secció $s : b \longrightarrow a$, aleshores per a tot x, ε_x també admet una secció: $\varepsilon_x(\iota_x s) = us = 1_b$. Per tant si la classe de les fibracions inclou els epimorfismes de $\mathcal{C}$, aleshores $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(u)_f$.

CAPITOL II. SOBRE ALGEBRES DGC I MODULS DG.

Introducció.

L'objectiu d'aquest capítol és dotar d'una estructura de categoria de models tancada algunes de les categories que hom retroba en àlgebra homològica diferencial. En concret, en § 2, per a $\mathbf{k}$ un cos de característica zero i R una $\mathbf{k}$-àlgebra, dotem de tal estructura la categoria de R-àlgebres diferencials graduades commutatives (R-*àlgebres dgc*) i categories del tipus $\mathcal{C}(u)$ per a diferents eleccions del morfisme $u \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, on $\mathcal{C}$ és la categoria anterior (veure (3.4), capítol I). El mateix fem, donada una R-àlgebra dgc A, per a la categoria de A-mòduls dg en § 3.

En aquest capítol, aquestes estructures de categoria de models són aprofitades en dos sentits: d'un costat, com a corol·lari, es tenen relacions d'homotopia en les categories esmentades (veure (3.2), capítol I), per a les quals donem objectes camí explícits. D'altra banda, hom disposa de criteris depenents de l'estructura de categoria de models, per a l'existència i càlcul de functors derivats (veure (3.3), capítol I), que apliquem en § 4 a alguns functors entre les categories esmentades.

§ 1. Les categories.

En aquest § recollim alguns fets de les categories amb què treballarem per a comoditat del lector i per tal de fixar les notacions.

(1.1) R-mòduls dg i R-àlgebres dgc. Sigui R un anell commutatiu amb unitat. Un R-*mòdul graduat* serà un R-mòdul graduat sobre els enters no negatius, $M = \bigoplus_{p\geq 0} M^p$.

Notarem per $|m|$ el *grau* de l'element $m \in M$. Considerarem el propi anell R com un R-mòdul graduat homogeni de grau zero. Donats dos R-mòduls graduats, M i N,

$M \otimes N = M \otimes_R N$ és el R-mòdul graduat definit per $(M \otimes N)^p = \bigoplus_{i+j=p}(M^i \otimes N^j)$. Donats un R-mòdul graduat, M i un enter $r \in \mathbf{Z}$, $M[r]$ és el R-mòdul graduat definit per $M[r]^p = M^{p+r}$.

Un *morfisme de grau* r és un morfisme de R-mòduls, $f : M \longrightarrow N$, tal que $f(M^p) \subseteq N^{p+r}$ per a tot p. Un *morfisme de* R-mòduls graduats és un morfisme de grau zero. Tot morfisme de grau r, $f : M \longrightarrow N$, pot ser considerat com un morfisme de R-mòduls graduats: $f : M \longrightarrow N[r]$. Tot morfisme de R-mòduls graduats, $f : M \longrightarrow N$ indueix un morfisme evident $f[r] : M[r] \longrightarrow N[r]$ per a tot r. Per a qualsevols R-mòduls graduats L, M i N hom té isomorfismes de R-mòduls graduats

$$\begin{array}{rl} L \otimes (M \otimes N) \cong (L \otimes M) \otimes N & \quad R \otimes M \cong M \cong M \otimes R \\ (M \otimes N)[r] \cong M \otimes (N[r]) & \quad \tau : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M \end{array}$$

sent $\tau(m \otimes n) = (-1)^{|m||n|} n \otimes m$.

Un *R-mòdul diferencial graduat* (R-mòdul dg) és un R-mòdul graduat, M, provist d'una *diferencial* de grau $+1$; és a dir d'un morfisme de R-mòduls graduats, $d_M : M \longrightarrow M[1]$ tal que $d_M^2 = 0$.

Considerarem R com un R-mòdul dg homogeni de grau zero i diferencial nul·la. Donat un R-mòdul dg, M, $M[r]$ és el R-mòdul dg definit per $d_{M[r]} = (-1)^r d_M$. Donats dos R-mòduls dg, M i N, hom defineix una diferencial en el R-mòdul dg $M \otimes N$ per $d_{M \otimes N} = d_M \otimes 1 + 1 \otimes d_N$; el què, d'acord amb les convencions usuals per als signes, significa $d(m \otimes n) = dm \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes dn$.

Un *morfisme de* R-mòduls dg és un morfisme de R-mòduls graduats, $f : M \longrightarrow N$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow{\scriptstyle d_M} & & \downarrow{\scriptstyle d_N} \\ M[1] & \xrightarrow{f[1]} & N[1] \end{array}$$

és commutatiu. Els isomorfismes anteriors són isomorfismes de R-mòduls dg.

Una *R-àlgebra diferencial graduada commutativa* (R-àlgebra dgc) és un R-mòdul dg, A, provist d'una *unitat* i d'un *producte* commutatiu, compatibles amb la diferencial; i.e., d'uns morfismes de R-mòduls graduats, $\eta : R \longrightarrow A$ i $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$, tals que els diagrames

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R\otimes A \arrow[r, "\eta\otimes 1"] \arrow[d, "\cong"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] & A\otimes R \arrow[l, "1\otimes\eta"'] \arrow[d, "\cong"] \\ A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

i

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "d_{A\otimes A}"] & A \arrow[d, "d_A"] \\ (A\otimes A)[1] \arrow[r, "\mu[1]"] & A[1] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau"] & A \arrow[d, equal] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

són commutatius. Si notem $\mu(a\otimes b)$ per ab, la commutativitat del tercer diagrama és equivalent a la igualtat $d(ab) = da\cdot b + (-1)^{|a|}a\cdot db$ (*regla de Leibnitz*). Considerarem R com una R-àlgebra dgc homogènia de grau zero amb $\eta_R = 1_R$, amb el producte com a anell i diferencial nul·la. Admetrem $A = 0$ com a R-àlgebra dgc. Per la R-linealitat i la regla de Leibnitz, tindrem que $d_A\eta_A = 0$. Donades dues R-àlgebres dgc, A i B, el R-mòdul dg $A\otimes B$ té una estructura natural de R-àlgebra dgc definida per $(A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \longrightarrow (A\otimes A)\otimes(B\otimes B) \xrightarrow{\mu_A\otimes\mu_B} A\otimes B$, on la primera fletxa és la composició de τ amb els isomorfismes que expressen l'associativitat del producte tensorial, i $\eta_{A\otimes B} = \eta_A\otimes\eta_B : R \longrightarrow A\otimes B$.

Un morfisme de R-àlgebres dgc és un morfisme de R-mòduls dg, $f : A \longrightarrow B$, tal que els diagrames

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta_A"] & R \arrow[d, "\eta_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"] & B\otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

són commutatius. Notarem per $\mathbf{Adgc}(R)$ la categoria amb els objectes i morfismes anteriors.

(1.2) A-mòduls dg i A-àlgebres dgc. Sigui A una R-àlgebra dgc. Un *A-mòdul (per l'esquerra) diferencial graduat* (A-mòdul dg) és un R-mòdul dg, M, provist d'un *producte per elements de A*; és a dir, d'un morfisme de R-mòduls graduats

$\lambda : A \otimes M \longrightarrow M$ tal que els diagrames

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes M & \xrightarrow{\mu\otimes 1} & A\otimes M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\lambda} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ A\otimes M & \xrightarrow{\lambda} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R\otimes M & \xrightarrow{\eta\otimes 1} & A\otimes M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \lambda}\Big\downarrow \\ M & = & M \end{array}$$

i tal que la seva diferencial satisfà la *regla de Leibnitz*; i.e., el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A\otimes M & \xrightarrow{\lambda} & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d_{A\otimes M}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d_M} \\ (A\otimes M)[1] & \xrightarrow{\lambda[1]} & M[1] \end{array}$$

és commutatiu. Si notem $\lambda(a\otimes m)$ per am la commutativitat del darrer diagrama s'escriu $d(am) = da\cdot m + (-1)^{|a|}a\cdot dm$.

Tot A-mòdul dg per l'esquerra és A-mòdul dg per la dreta amb el producte $M\otimes A \xrightarrow{\tau} A\otimes M \xrightarrow{\lambda_M} M$. Donats dos A-mòduls dg, M i N, $M\otimes_A N$ és el A-mòdul dg definit considerant en M l'estructura de A-mòdul dg per la dreta i en N l'estructura de A-mòdul dg per l'esquerra. Donat un A-mòdul dg, M i un enter r, $M[r]$ és el A-mòdul dg definit per $A\otimes M[r] \cong (A\otimes M)[r] \xrightarrow{\lambda[r]} M[r]$.

Un morfisme de A-mòduls dg és un morfisme de R-mòduls dg, $f : M \longrightarrow N$, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A\otimes M & \xrightarrow{1\otimes f} & A\otimes N \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_M} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \lambda_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

és commutatiu. Notarem per $\mathbf{Mdg}(A)$ la categoria amb aquests objectes i morfismes.

Observació. No es tracta de la categoria de complexos de cocadenes: per exemple, les diferencials no són morfismes de A-mòduls, llevat de casos trivials. Així i tot, es té el resultat següent:

Proposició 1. ([H-M-S]) $\mathbf{Mdg}(A)$ *és una categoria abeliana.*

En particular, es tenen sumes directes, nuclis, successions exactes ...

Sigui A una R-àlgebra dgc. En el que segueix, farem el següent abús de notació: posarem $\mathbf{Adgc}(A)$ per denotar la categoria de les R-àlgebres dgc sota de A:

$A\backslash\mathbf{Adgc}(R)$. Es a dir (veure capítol I) la categoria que té per objectes els morfismes de R-àlgebres dgc de domini A i per morfismes els triangles commutatius de $\mathbf{Adgc}(R)$,

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \swarrow & & \searrow \\ B & \underset{f}{\longrightarrow} & C \end{array}$$

Per abús de llenguatge, anomenarem $\mathbf{Adgc}(A)$ la categoria de les *A-àlgebres dgc.*

OBSERVACIÓ. Sigui S una R-àlgebra commutativa unitària homogènia de grau zero. Aleshores la categoria $\mathbf{Adgc}(S)$ (en el sentit de (1.1)) és efectivament $S\backslash\mathbf{Adgc}(R)$.

Sigui A una R-àlgebra dgc. Notarem per $\mathbf{Adgc}_*(A)$ la categoria $\mathbf{Adgc}(R)(1_A)$, que anomenarem categoria de les *A-àlgebres dgc A-augmentades.* Es a dir, la categoria els objectes de la qual són els triples

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$

on f i g són morfismes de R-àlgebres dgc tals que $gf = 1_A$, i els morfismes els diagrames commutatius de $\mathbf{Adgc}(R)$,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & A \\ \| & & \varphi\downarrow & & \| \\ A & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{k} & A \end{array}$$

Finalment, sigui A una R-àlgebra dgc *augmentada*; és a dir, A és una R-àlgebra dgc junt amb un morfisme de R-àlgebres dgc $\varepsilon_A : A \longrightarrow R$ (el qual implica que $\varepsilon_A\eta_A = 1_R$). Altrament dit: es tracta d'un objecte de la categoria $\mathbf{Adgc}(R)(1_R)$. Seguint amb els abusos de notació, posarem $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ per denotar la categoria $\mathbf{Adgc}(A)(\varepsilon_A)$. Els objectes d'aquesta categoria (veure capítol I) són els triples (f, B, ε_B), on B és una R-àlgebra dgc i f i ε_B són morfismes de R-àlgebres dgc tals que $\varepsilon_B f = \varepsilon_A$ i els morfismes diagrames commutatius de $\mathbf{Adgc}(R)$,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\varepsilon_B} & R \\ \| & & \varphi\downarrow & & \| \\ A & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\varepsilon_C} & R \end{array}$$

Per abús de llenguatge també, anomenarem $\mathbf{Adgc}_*(A)$ la categoria de les A-*àlgebres dgc* R-*augmentades*.

§ 2. Estructura de categoria de models de $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$.

En tot aquest § $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, R una $\mathbf{k}$-àlgebra commutativa unitària (homogènia de grau zero) i A una R-àlgebra dgc.

(2.1) $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ són categories de models. Per a les categories $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ definim els morfismes distingits com segueix:

(1) we : els quasi-isomorfismes,
(2) fib : els morfismes exhaustius, i
(3) cof : els morfismes que tenen la propietat LLP respecte de les fibracions trivials,

(veure (3.4), capítol I, per al significat d'aquestes definicions en les categories esmentades).

Teorema 1. *Amb les dades anteriors* $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ *i* $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ *són categories de models tancades.*

Demostració. Per [B-G], teorema 4.3, $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$ és una categoria de models tancada, amb els morfismes distingits anteriors. La resta es tracta de categories del tipus $\mathcal{C}(u)$, per a $u \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, sent $\mathcal{C} = \mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$. En concret, recordem que $\mathbf{Adgc}(R) = R\backslash\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$, $\mathbf{Adgc}(A) = A\backslash\mathbf{Adgc}(R)$, $\mathbf{Adgc}_*(A) = \mathbf{Adgc}(R)(1_A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A) = \mathbf{Adgc}(A)(\varepsilon_A)$. Per tant el resultat es segueix de l'elecció dels morfismes distingits i del teorema 7 del capítol I, § 3. $\square$

Observacions. (1) Per a les estructures de categoria de models anteriors tots els objectes són fibrants (veure capítol I, observació al final de (3.2)).

(2) En particular, les factoritzacions M2(ii) de $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ s'obtenen definint de manera natural unitats i augmentacions en els objectes de la factorització de $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$ (veure [B-G], (4.5)). En concret, donat el morfisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ d'alguna de les categories anteriors, la factorització $X \xrightarrow{j} C_X Y \xrightarrow{q} Y$,

on j és una cofibració i q una fibració trivial de $\mathbf{Adgc(k)}$, s'obté com a límit de factoritzacions

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & C_1Y & \rightarrow & C_2Y & \rightarrow & \cdots \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \cdots & & \\ & & Y & & & & \end{array}$$

on $C_1Y = X \otimes TY \otimes SZY$ i TY és la $\mathbf{k}$-àlgebra dgc lliure sobre el *conjunt graduat* Y, ZY el $\mathbf{k}$-mòdul dg dels cocicles de Y i SZY la $\mathbf{k}$-àlgebra dgc amb un generador s_z en grau $|z|$ per a cada $z \in ZY$ i diferencial $ds_z = 0$. Un cop es té el pas n-èssim, $X \xrightarrow{j_n} C_nY \xrightarrow{q_n} Y$, el següent es construeix mitjançant el push-out,

$$\begin{array}{ccc} SZq_n & \xrightarrow{\alpha} & C_nX \\ {\scriptstyle\Theta}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_{n+1}} \\ T(Zq_n[1]) & \longrightarrow & C_{n+1}X \end{array}$$

on Zq_n és el $\mathbf{k}$-mòdul dg dels cocicles relatius de q_n (cf. la demostració del teorema 1, (3.1), més endavant en aquest capítol). Hom pren $C_XY = \varinjlim C_nY$. Si, per exemple, $\varphi \in \operatorname{mor} \mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$, definim la A-"unitat" de C_XY per jf on $f : A \longrightarrow X$ és la A-"unitat" de X i l'augmentació com $\varepsilon_Y q$ (veure la demostració del teorema 7, capítol I, § 3).

Corol·lari. *Les inclusions de* $\mathbf{Adgc}(A)_c$, $\mathbf{Adgc}_*(A)_c$ *i* $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)_c$ *en* $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ *i* $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$, *respectivament, indueixen equivalències de categories*

$$\pi\mathbf{Adgc}(A)_c \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}(A)$$
$$\pi\mathbf{Adgc}_*(A)_c \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(A)$$
$$\pi\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)_c \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$$

Demostració. Es segueix del teorema anterior, del fet que tots els objectes siguin fibrants i de [Qui_1], teorema 1, § 1, capítol I. □

(2.2) Alguns objectes camí. Es segueix del teorema anterior i del capítol I § 3, que hom té una relació d'homotopia en $\mathbf{Adgc}(A)$, $\mathbf{Adgc}_*(A)$ i $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$. Veiem un objecte camí explícit per a algunes d'aquestes categories.

Sigui $R(t, dt)$ la R-àlgebra dgc lliure amb un generador t en grau zero. Si A és una R-àlgebra dgc, posarem $A(t, dt) = R(t, dt) \otimes_R A$ i per a un morfisme de R-àlgebres dgc $f : A \longrightarrow B$, $B(t, dt) = A(t, dt) \otimes_A B$. Siguin

$$\partial_0, \partial_1 : R(t, dt) \longrightarrow R \qquad \text{i} \qquad s : R \longrightarrow R(t, dt)$$

els morfismes de R-àlgebres dgc definits per $\partial_0 t = 1$, $\partial_1 t = 0$ i s la inclusió natural. Hom notarà amb les mateixes lletres els morfismes $\partial_i \otimes 1_B : B(t,dt) \longrightarrow B$, $i = 0,1$ i $s \otimes 1_B : B \longrightarrow B(t,dt)$. Hom té que $A \longrightarrow B \longrightarrow B(t,dt)$ és un objecte de $\mathbf{Adgc}(A)$ i els ∂_i, $i = 0,1$ i s són morfismes d'aquesta categoria. Amb aquestes definicions i convenis, es té:

Proposició 2. *Per a tot* $B \in \operatorname{obj} \mathbf{Adgc}(A)$*,*

$$B \xrightarrow{s} B(t,dt) \xrightarrow{(\,\partial_1,\ \partial_0\,)} B \times B$$

és un objecte camí de $\mathbf{Adgc}(A)$*.*

Per tant, dos morfismes $\varphi, \psi : X \longrightarrow Y$ de $\mathbf{Adgc}(A)$ són homòtops si existeix un morfisme de R-àlgebres dgc, $h : X \longrightarrow Y(t,dt)$ tal que $hf = sg$, on f i g són les A-"unitats" de X i Y, i tal que $\partial_1 h = \varphi$ i $\partial_0 h = \psi$.

Observació. Alguns autors (p.e. [Hal]) anomenen aquesta relació (o la corresponent definida per un objecte cilindre) *homotopia relativa* a A.

Pel que fa a la categoria $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$, per a tot objecte $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varepsilon_B} R$, definim un objecte camí com segueix (cf. [B-G], (6.10)):

$$B \xrightarrow{s} R \oplus (I_R B \otimes_R R(t,dt)) \xrightarrow{(\,\partial_1,\ \partial_0\,)} B \times B \tag{2}$$

on $I_R B = \ker \varepsilon_B$ és l'*ideal d'augmentació* de B, $sb = \varepsilon_B b + (b - \varepsilon_B b) \otimes 1$. Hom comprova fàcilment que tant s com (∂_1, ∂_0) són morfismes de A-àlgebres dgc i que, definint l'augmentació de $R \oplus (I_R B \otimes_R R(t,dt))$ com la identitat en el primer sumant i zero en el segon, es tracta de morfismes de $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ i, en definitiva, que (2) és un objecte camí.

Una homotopia amb aquest objecte camí entre dos morfismes $\varphi, \psi : B \longrightarrow C \in \operatorname{mor} \mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$ és doncs un morfisme d'aquesta categoria, $h : B \longrightarrow R \oplus (I_R C \otimes_R R(t,dt))$, tal que $\partial_1 h = \varphi$ i $\partial_0 h = \psi$. Equivalentment (cf. [Gr-M], pàgina 147), és un morfisme h de A-àlgebres dgc que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ h\ } & R(t,dt) \otimes_R C \\ {\scriptstyle \varepsilon_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \varepsilon_Y} \\ R & \longrightarrow & R(t,dt) \end{array}$$

(2.3) Estructura simplicial. L'objecte camí de $\mathbf{Adgc}(A)$ definit en (2.2) prové de la següent estructura simplicial: sigui L_n^* la $\mathbf{k}$-àlgebra dgc *de les formes polinomials del símplex ordinari* $\Delta^n \subset \mathbf{k}^n$. Es tracta de la $\mathbf{k}$-àlgebra dgc generada per $t_0, t_1, \dots, t_n$ en grau 0 i $v_0, v_1, \dots, v_n$ en grau 1, subjectes a les relacions $t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 1$, $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 0$ i $dt_i = v_i$ per a $i = 0, 1, \dots, n$. Hom pot veure-la també com la $\mathbf{k}$-àlgebra dgc lliure sobre $t_1, \dots, t_n$ (veure [B-G]; cf. [Swan], [Dup]). Per exemple, $L_1^* = \mathbf{k}(t, dt)$. Notarem de la mateixa manera la A-àlgebra dgc $L_n^* \otimes_{\mathbf{k}} A$. Tensorialitzant també per 1_A les cares i degeneracions, obtenim un objecte simplicial de la categoria de A-àlgebres dgc, $L_\bullet^* = \bigoplus_{n \geq 0} L_n^* \in \operatorname{obj} \Delta^\circ \mathbf{Adgc}(A)$.

Definició 1. Donades X ,$Y \in \mathbf{Adgc}(A)$, denotarem per $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbf{Adgc}(A)}(X, Y)$ el conjunt simplicial que té per grau n-èssim

$$\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathbf{Adgc}(A)}(X, Y)_n = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Adgc}(A)}(X, L_n^* \otimes_A Y)$$

i cares i degeneracions induïdes per les de $L_\bullet^*$.

A partir d'aquest conjunt simplicial hom pot comprovar el resultat següent, del qual no se'n farà cap ús en aquest treball (veure [Qui$_1$], capítol II, definició 1).

Proposició 3. $\mathbf{Adgc}(A)$ *és una categoria simplicial.*

§ 3 Estructura de categoria de models de $\mathbf{Mdg}(A)$.

Excepte en (3.5), en tot aquest § R és un anell unitari commutatiu i A una R-àlgebra dgc.

(3.1) $\mathbf{Mdg}(A)$ és una categoria de models. Per a la categoria $\mathbf{Mdg}(A)$ prendrem com a morfismes distingits:

(1) we : els quasi-isomorfimes; i.e., els morfismes que indueixen isomorfismes en cohomologia,
(2) fib : els morfismes exhaustius,
(3) cof : els morfismes que tenen la propietat d'aixecament per l'esquerra (LLP) respecte de les fibracions trivials.

Teorema 1. *Amb les dades anteriors* $\mathbf{Mdg}(A)$ *és una categoria de models tancada.*

Observacions. (1) Veurem la demostració en (3.2). Cal senyalar que no es tracta del resultat de que la categoria de complexos de cocadenes acotats superiorment és una categoria de models tancada ([Qui$_1$], capítol I, § 1, exemple B): com ja hem dit, $\mathbf{Mdg}(A)$ no és una categoria de complexos. Però, fins i tot si $A = R$, no es tracta de la mateixa categoria: aquella és la categoria dels complexos de cocadenes acotats superiorment, $C^+(\mathbf{Mod}(R))$ i aquesta la de complexos de cocadenes concentrats en graus no negatius: $\mathbf{Mdg}(R) = C^{\geq 0}(\mathbf{Mod}(R))$. Tampoc es tracta del cas dual de l'exemple de Quillen: les estructures de categoria de models són diferents: en el cas dual d'aquest exemple, les fibracions serien els morfismes exhaustius de nucli injectiu grau a grau i les cofibracions els morfismes injectius.

(2) A diferència de § 1, no es demana que R sigui una $\mathbf{k}$-àlgebra i $\mathbf{k}$ un cos de característica zero. El paper d'aquesta hipòtesi en el cas de les àlgebres dgc és el següent: cal que l'àlgebra dgc lliure sobre un generador en grau n, $T(n)$ (veure l'observació (2) que segueix a la demostració del teorema 1 de § 2), sigui *acíclica* en el sentit que $HT(n) = \mathbf{k}$. Si per exemple R fos un anell de característica $p > 0$ i t el generador de $T(0) = R(t, dt)$, aleshores $dt^p = pt^{p-1}dt = 0$ seria un cocicle que no seria una covora. L'objecte anàleg per a mòduls dg és acíclic (aquí en el sentit que té cohomologia nul·la) sense necessitat de trobar-nos en característica zero.

Corol·lari. *La inclusió de* $\mathbf{Mdg}(A)_c$ *en* $\mathbf{Mdg}(A)$ *indueix una equivalència de categories*

$$\pi\mathbf{Mdg}(A)_c \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)$$

(3.2) Demostració de (3.1). (cf. [B-G], [Mum]) Utilitzant la caracterització de categoria de models tancada de [Qui$_2$], són suficients les propietats M0, M1, M2, M5 i l'estabilitat dels morfismes distingits per retractes. M0, M1(ii), M5 i l'estabilitat per retractes són trivials. M1(i) es dedueix formalment de la resta, com a [B-G]. Veiem doncs M2.

Per a tot $n \geq 0$ definim els següents A-mòduls dg:

(1) $S(n) = A[-n]$ amb diferencial $d_{S(n)} = d_{A[-n]} = (-1)^n d_A$, i

(2) $T(n) = A[-n] \bigoplus A[-(n+1)]$ amb diferencial $d^p_{T(n)} : T(n)^p \longrightarrow T(n)^{p+1}$,

$$d_{T(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n d_A & 0 \\ 1 & (-1)^{n+1} d_A \end{pmatrix}$$

Altrament dit, $S(n)$ és el A-mòdul graduat lliure amb un generador $s \in S(n)$, $|s| = n$ i diferencial $d(s) = 0$. Pel que fa a $T(n)$, es tracta del A-mòdul dg lliure amb un generador $t \in T(n)$, $|t| = n$. Per tant, tot morfisme de A-mòduls dg, $f : S(n) \longrightarrow M$ resta determinat per $fs \in Z^n M$. Recíprocament, tot element $m \in Z^n M$ determina un únic morfisme $f : S(n) \longrightarrow M$ definit per $fs = m$. Pel que fa a $T(n)$, tot morfisme resta determinat per la imatge de t i qualsevol element de M^n determina un únic morfisme $T(n) \longrightarrow M$. Finalment, per a $n = -1$ definim $T(-1) = A$.

Lema 1. *Amb les anteriors definicions es té:*

(1) *$S(n)$ i $T(n)$ són cofibrants per a tot n.*

(2) *El morfisme $\theta = S(n) \longrightarrow T(n-1)$, definit per $\theta s = dt$ per a $n \geq 1$ i per $\theta s = 0$ si $n = 0$, és una cofibració per a tot $n \geq 0$.*

(3) *$H(S(n)) = (HA)[-n]$ i $H(T(n)) = 0$ per a tot $n \geq 0$.*

Demostració. $S(n)$ és cofibrant: donat un diagrama de A-mòduls dg,

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S(n) & \xrightarrow{\beta} & N \end{array}$$

on p és una fibració trivial, considerem $\beta s \in Z^n M$. Com que $p_* : HM \longrightarrow HN$ és un isomorfisme, existeix $m_0 \in Z^n M$ tal que $p_*[m_0] = [\beta s]$. Es a dir, existeix $n \in N^{n-1}$ tal que $pm_0 - \beta s = dn$. Com que p és exhaustiva, existeix $m_1 \in M^{n-1}$ tal que $pm_1 = n$. Definim $\widetilde{\beta} : S(n) \longrightarrow M$ per $\widetilde{\beta} s = m_0 - dm_1$. Hom té efectivament que $d\widetilde{\beta} s = dm_0 = 0$ i $p\widetilde{\beta} s = dn + \beta s - dpm_1 = \beta s$.

Quant a $T(n)$, observem que és un objecte lliure i els objectes lliures sempre són cofibrants si les fibracions són fletxes exhaustives.

Veiem que $\theta : S(n) \longrightarrow T(n-1)$ és una cofibració: donat el diagrama commutatiu de A-mòduls dg

$$\begin{array}{ccc} S(n) & \xrightarrow{\alpha} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T(n-1) & \xrightarrow{\beta} & N \end{array}$$

en el què p és una fibració trivial, es té que $p\alpha s = d\beta t$, d'on $p_*[\alpha s] = 0$ i per tant $[\alpha s] = 0$. Sigui $m_0 \in M^{n-1}$ tal que $dm_0 = \alpha s$. Aleshores $\beta t - pm_0$ és un cocicle i per tant existeixen $m_1 \in Z^{n-1}$ i $n \in M^{n-2}$ tals que $\beta t = pm_0 + pm_1 + dn$. Sigui $m_2 \in M^{n-2}$ tal que $n = pm_2$. Definim $\widetilde{\beta} t = m_0 + m_1 + dm_2$. Hom té efectivament que $p\widetilde{\beta} t = pm_0 + pm_1 + dn = \beta t$ i $\widetilde{\beta}\theta s = dm_0 = \alpha s$. $\square$

Per a tot conjunt graduat no negativament, W, definim els A-mòduls dg

$$SW = \bigoplus_{w\in W} S(|w|) \qquad \text{i} \qquad TW = \bigoplus_{w \in W} T(|w|)$$

(En el cas del segon, admetrem $W^{-1} \neq 0$.)

Lema 2. *A* $\mathbf{Mdg}(A)$ *es té que:*

(1) *Tot isomorfisme és una cofibració.*
(2) *Les cofibracions són estables per composició i per push-outs.*
(3) *Si* $X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \dots$ *és una successió de cofibracions, el morfisme* $X_1 \longrightarrow \varinjlim X_n$ *és una cofibració.*
(4) *Si* $\{f_j : X_j \longrightarrow Y_j\}_{j\in J}$ *és un conjunt de cofibracions,*

$$\bigoplus_{j\in J} f_j : \bigoplus_{j\in J} X_j \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} Y_j$$

és una cofibració.

Demostració. Totes les afirmacions es segueixen de la definició de les cofibracions com els morfismes que tenen la LLP respecte de les fibracions trivials. $\square$

Observem que, pels apartats (2) del lema 1 i l'apartat (4) del lema 2, el morfisme

$$\Theta_W = \bigoplus_{w\in W} \theta_w : SW \longrightarrow T(W[1])$$

és una cofibració. Així mateix, notarem per

$$R_W = \bigoplus_{w\in W} \rho_w : TW \longrightarrow W$$

l'aplicació definida per $\rho_w(t_w) = w$, on t_w és el generador de $T(|\, w\,|)$; i per

$$R'_W = \bigoplus_{w\in W} \rho'_w : SW \longrightarrow W$$

l'anàloga per a SW. Obviament, es tracta, en tots dos casos, d'aplicacions exhaustives.

Sigui doncs $f : X \longrightarrow Y$ un morfisme de $\mathbf{Mdg}(A)$. La seva factorització M2(i) és

$$X \xrightarrow{i} X \oplus TY \xrightarrow{p} Y$$

on $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p = (f, R_Y)$.

Observació. En TY sols s'està considerant l'estructura de Y com a *conjunt graduat.*

Pel que fa a la factorització M2(ii) de $f : X \longrightarrow Y$, l'obtenim com a límit de successives factoritzacions

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & C_1Y & \rightarrow & C_2Y & \rightarrow & \cdots \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \cdots & & \\ & & Y & & & & \end{array} \tag{2}$$

tals que per a tot $n \geq 1$, es té:

(i) $j_n : C_{n-1}Y \longrightarrow C_nY$ és una cofibració ($C_0Y = X$),
(ii) $q_n : C_nY \longrightarrow Y$ és una fibració,
(iii) $(q_n)_*$ és exhaustiu, i
(iv) $\ker(q_n)_* = \ker(j_{n+1})_*$.

Donada una successió com (2), complint (i)-(iv), definim

$$C_XY = \varinjlim_n C_nY$$

i comprovem que:

(1) j definit com la composició $X \longrightarrow C_1Y \longrightarrow C_XY$ és una cofibració: j_1 ho és per (i), $C_1Y \longrightarrow C_XY$ per (3) del lema 2 i la seva composició per (2) del mateix lema,
(2) $q = \varinjlim q_n$ és una fibració,
(3) $q_* : HC_XY \longrightarrow HY$ és un isomorfisme, ja que $HC_XY = H \varinjlim C_nY = \varinjlim HC_nY$ i per tant q_* és epimorfisme. Pel que fa a la injectivitat, si $[w] \in \ker q_*$, aleshores existeixen n i $[w_n] \in HC_nY$ tals que $[w_n] \mapsto [w]$ per $HC_nY \longrightarrow HC_XY$ i $0 = q_*[w] = (q_n)_*$, d'on, per (iv), $[w_n] \in \ker(j_{n+1})_*$ i per tant $[w] = 0$.

Construïm la successió de factoritzacions (2). Pel que fa a la primera, prenem:

$$C_1Y = X \oplus TY \oplus SZY$$

i

$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad q_1 = (f, R_Y, R'_{ZY})$$

on $ZY = \{z \in Y \mid dz = 0\}$ són els *cocicles* de Y.

Un cop construït el pas n-èssim complint (i)-(iv), hom construeix el següent així: si denotem el *mòdul dels cocicles relatius* de q_n per

$$Zq_n = \{(w, y) \in C_nY \oplus Y[-1] \mid q_n w = dy\}$$

$C_{n+1}Y$ i j_{n+1} s'obtenen mitjançant el push-out

$$\begin{array}{ccc} SZq_n & \xrightarrow{\alpha} & C_nY \\ \downarrow{\scriptstyle\Theta} & & \downarrow{\scriptstyle j_{n+1}} \\ T(Zq_n[1]) & \xrightarrow{\beta} & C_{n+1}Y \end{array}$$

en el què $\alpha s_{(w,y)} = w$ i $\Theta s_{(w,y)} = dt_{(w,y)}$. q_{n+1} com el morfisme induït per q_n i per $\Psi = \bigoplus_{(w,y)} \psi_{(w,y)} : TZq_n[1] \longrightarrow Y$, $\psi_{(w,y)}t_{(w,y)} = y$, on $t_{(w,y)}$ és el generador de $T(|(w,y)|)$. Hom té aleshores que

(i) j_{n+1} és una cofibració perquè Θ ho és i per (2) del lema 2,

(ii) q_{n+1} és una fibració ja que q_n ho és i $q_n = q_{n+1}j_{n+1}$,

(iii) $(q_{n+1})_*$ és exhaustiu per la mateixa raó, i

(iv) la inclusió $\supseteq$ és trivial. Pel que fa a l'altra, si $(q_n)_*[w] = 0$, aleshores existeix y tal que $q_n w = dy$. Per tant es té un element $(w, y) \in Zq_n$ i la imatge de $w = \alpha s_{(w,y)}$ per j_{n+1} és una covora de $C_{n+1}Y$: $j_{n+1}w = dt_{(w,y)}$. $\square$

(3.3) Alguns objectes camí. Es segueix del teorema anterior i de § 3 del capítol I que es té una relació d'homotopia a $\mathbf{Mdg}(A)$. Obviament per a tot $M \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}(A)$ com a objecte camí ens val l'anàleg de A-àlgebres dgc:

$$M \xrightarrow{s} M \otimes_R R(t, dt) \xrightarrow{(\,1\otimes\partial_1,\ 1\otimes\partial_0\,)} M \times M$$

En el cas $A = R$, hom pot obtenir l'homotopia usual de complexos de cocadenes composant amb el morfisme de A-mòduls dg (cf. [Gr-M], pàgines 120 i 121, i [Na$_2$])

$$\int_0^1 : R(t, dt) \otimes_R M \longrightarrow M$$

definit per $\int_0^1 t \otimes m = 0$ i $\int_0^1 t^i dt \otimes m = \dfrac{m}{i+1}$. Hom observarà, però, que està definit en característica zero.

Anem a donar un altre objecte camí explícit. En el cas $A = R$, la relació d'homotopia definida per aquest coincideix amb l'homotopia usual de complexos sense hipòtesi sobre la característica.

Sigui W_1 el A-mòdul dg generat per u, t_0, t_1 en grau zero i v_0, v_1 en grau ú, amb les relacions $t_0 + t_1 = u$, $v_0 + v_1 = 0$ i $du = 0$, $dt_i = v_i$ per a $i = 0, 1$. Siguin $\partial_i : W_1 \longrightarrow R$ per a $i = 0, 1$ i $s : R \longrightarrow W_1$ definits com segueix: $\partial_i(t_j) = 1$ si $i \neq j$, $\partial_i(t_j) = 0$ si $i = j$ i $s(1) = u$. Hom notarà amb les mateixes lletres els morfismes $\partial_i \otimes 1 : W_1 \otimes_R M \longrightarrow M$, $i = 0, 1$ i $s \otimes 1_M : M \longrightarrow M \otimes_R W_1$. Amb aquestes definicions i convenis, es té:

Proposició 2. *Per a tot* $M \in \operatorname{obj} \mathbf{Mdg}(A)$,

$$M \xrightarrow{s} W_1 \otimes_R M \xrightarrow{(\partial_1,\, \partial_0)} M \times M$$

és un objecte camí de $\mathbf{Mdg}(A)$.

Hom pot comprovar fàcilment que $t_0 \otimes y_0 + t_1 \otimes y_1 + dt_1 \otimes y_2 \mapsto (y_0, y_1, -y_2)$ defineix un isomorfisme de A-mòduls dg

$$W_1 \otimes M \longrightarrow M \oplus M \oplus M[-1]$$

sent

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ -1 & 1 & -d \end{pmatrix}$$

la diferencial de $M \oplus M \oplus M[-1]$. Si $h : M \longrightarrow W_1 \otimes N$ és una homotopia entre els morfismes $f, g : M \longrightarrow N$, aleshores, composant-la amb la projecció $N \oplus N \oplus N[-1] \longrightarrow N[-1]$ hom obté $h_c : M \longrightarrow N[-1]$ tal que $dh_c + h_c d = g - f$.

(3.4) Estructura simplicial. La relació d'homotopia anterior prové de la següent estructura simplicial de $\mathbf{Mdg}(A)$.

Sigui C_*^n el *complex de cadenes* del conjunt simplicial estricte ordinari $\Delta_{mon}[n]$; i.e., C_p^n és el R-mòdul lliure sobre el conjunt $\Delta_{mon}[n]_p$ i la diferencial és la suma $\sum(-1)^i\partial_i$ de les cares $\partial_i : C_p^n \longrightarrow C_{p-1}^n$ induïdes pels morfismes simplicials $\delta_i : \Delta[n]_{p-1} \longrightarrow \Delta[n]_p$.

Sigui W_n^* el *complex de les cocadenes* de $\Delta_{mon}[n]$. Es a dir,

$$W_n^p = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(C_p^n, R)$$

Sigui $A \in \mathbf{Adgc}(R)$. Notarem de la mateixa manera el A-mòdul dg $W_n^* \otimes_R A$. Per a tot $p \geq 0$, considerem el R-mòdul simplicial

$$W_\bullet^p = \bigoplus_{n\geq 0} W_n^p$$

Lema. $W_\bullet^* = \bigoplus_{p,n} W_n^p$ *és un* A*-mòdul dg simplicial.*

DEFINICIÓ 1. Donats $M,\ N \in \mathbf{Mdg}(A)$, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Mdg}(A)}(M,N)$ denotarà el conjunt simplicial que té per grau n-èssim

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Mdg}(A)}(M,N)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mdg}(A)}(M, W_n^* \otimes_A N)$$

amb cares i degeneracions induïdes per les de $W_\bullet^*$.

Amb aquest conjunt simplicial hom pot demostrar el resultat següent (del qual tampoc se'n farà cap ús en el que resta):

Proposició 3. $\mathbf{Mdg}(A)$ *és una categoria simplicial.*

Una presentació alternativa de W_n^* és com el complex de les cadenes normalitzades de $\Delta[n]$. Amb més precisió: sigui

$$W^* : \Delta^\circ\mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

el functor contravariant $W^* = \mathrm{Hom}_{\Delta^\circ\mathbf{Set}}(\_, W_\bullet^*)$ i sigui

$$N^* : \Delta^\circ\mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

el functor de les cocadenes normalitzades. Aleshores,

Proposició 4. *Els functors W^* i N^* són isomorfs.*

(3.5) Relació entre les estructures simplicials de $\mathbf{Adgc}(A)$ i $\mathbf{Mdg}(A)$. Les estructures simplicials de $\mathbf{Mdg}(A)$ i $\mathbf{Adgc}(A)$ estan relacionades per una altra reinterpretació de $W^*_\bullet$ com a submòdul dg simplicial de $L^*_\bullet$.

En aquesta secció, $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, R és una $\mathbf{k}$-àlgebra unitària commutativa i A una R-àlgebra dgc.

Definició 2. Sigui $\overline{W}^p_n$ el submòdul de L^p_n generat per les formes elementals de Whitney:

$$\omega_I = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s t_{i_s} dt_{i_0} \dots \widehat{dt}_{i_s} \dots dt_{i_p}$$

on $I = (i_0, \dots, i_p)$, $0 \leq i_0 < \cdots < i_p \leq n$. Anomenarem *mòdul de les formes elementals de Whitney del símplex ordinari* al A-mòdul dg

$$\overline{W}^*_n = \bigoplus_{p \geq 0} \overline{W}^p_n$$

Proposició 5. *$\overline{W}^*_\bullet$ és un A-submòdul dg simplicial de $L^*_\bullet$.*

Hom pot doncs definir un functor

$$\overline{W}^* = \mathrm{Hom}_{\Delta^\circ \mathbf{Set}}(\_, \overline{W}^*_\bullet) : \Delta^\circ \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

Anomenarem *mòdul de les formes elementals de Whitney* d'un conjunt simplicial $X_\bullet$ al A-mòdul dg $\overline{W}^*(X_\bullet)$. No és difícil de comprovar que

Proposició 6. *Els functors W^* i $\overline{W}^*$ són isomorfs.*

En particular doncs, $W^*(X_\bullet)$ i $\overline{W}^*(X_\bullet)$ són A-mòduls dg isomorfs per a tot conjunt simplicial $X_\bullet$. Els isomorfismes són les conegudes aplicacions I i E del teorema de De Rham (veure, per exemple, [Dup]). Notem, però, que I sols està definit en característica zero.

§ 4. Derivats d'alguns functors.

(4.1) Derivat dels indescomponibles de $\mathbf{Adgc}_*(A)$. Mostrem com els grups d'homotopia d'una àlgebra dgc poden ser vistos com la cohomologia d'un functor derivat.

En aquest apartat $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, R una $\mathbf{k}$-àlgebra unitària commutativa i A una R-àlgebra dgc.

Definició 1. Sigui $B \in \operatorname{obj} \mathbf{Adgc}_*(A)$, anomenarem *indescomponibles* de B al A-mòdul dg,

$$Q_A B = I_A B/(I_A B)^2$$

on $I_A B$, el nucli de l'augmentació $B \longrightarrow A$, és l'anomenat *ideal d'augmentació* de B, i $(I_A B)^2$ la imatge del morfisme $I_A B \otimes_A I_A B \longrightarrow I_A B$ induït pel producte de B.

Una presentació equivalent és mitjançant les successions exactes de A-mòduls dg:

$$0 \longrightarrow I_A B \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

i

$$(I_A B)^2 \longrightarrow I_A B \longrightarrow Q_A B \longrightarrow 0$$

Hom pot definir els *grups d'homotopia de* B o com segueix: sigui $C_A B \longrightarrow B$ un model cofibrant de B. Anomenarem *n-èssim grup d'homotopia de* B al $H^0 A$-mòdul

$$\pi^n_A(B) = H^n Q_A C_A B$$

Naturalment, s'ha de comprovar que la definició és correcta: és a dir, que no depèn del model cofibrant de B escollit i que és functorial. El que segueix és una presentació d'aquesta comprovació en llenguatge de functors derivats.

Els indescomponibles ens defineixen un functor

$$Q_A : \mathbf{Adgc}_*(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

En l'altre sentit podem definir un functor

$$N_A : \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Adgc}_*(A)$$

que anomenarem *functor de Nagata* perque generalitza el que hom troba a [Nag]. Consisteix en dotar a cada A-mòdul dg del producte trivial i afegir-li una unitat. Amb més precisió: si $M \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}(A)$, $N_A(M) = A \oplus M$ és la A-àlgebra dgc augmentada:

(1) com a A-mòdul dg és $A \oplus M$,

(2) el producte esta definit per:

$$(a,m)\cdot(b,n) = (ab, an + (-1)^{|b||m|}bm)$$

(3) l'augmentació és la projecció $(1 \quad 0) : A \oplus M \longrightarrow A$

Pel que fa als morfismes, si $f : M \longrightarrow N$ és un morfisme de A-mòduls dg,

$$N_A f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} : A \oplus M \longrightarrow A \oplus N.$$

Proposició 1. *El functor N_A és adjunt per la dreta de Q_A i preserva equivalències febles i fibracions.*

Demostració. La preservació d'equivalències febles i fibracions és evident ja que la diferencial de $A\oplus M$ és la suma de les diferencials de A i de M i sobre els morfismes es tracta de sumar la unitat de A, simplement.

Pel que fa a que sigui adjunt de Q_A, definim dues aplicacions naturals φ i ψ,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Adgc}_*(A)}(B, N_A M) \longleftrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{Mdg}(A)}(Q_A B, M)$$

com segueix: donat $f = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ f' \end{pmatrix} : B \longrightarrow A \oplus M$, on ε és l'augmentació de B, composem el morfisme de A-mòduls dg $f' : B \longrightarrow M$ amb la inclusió $I_A B \longrightarrow B$. El seguirem anomenant f'. Com que $f'((I_A B)^2) = 0$, indueix un morfisme $\phi(f) : Q_A B \longrightarrow M$ de A-mòduls dg.

Recíprocament, donat $g : Q_A B \longrightarrow M$ un morfisme de A-mòduls dg, notarem per g' la composició

$$B \xrightarrow{1-\eta\varepsilon} I_A B \to Q_A B \xrightarrow{g} M$$

on $\eta : A \longrightarrow B$ és la unitat de B. Aleshores, $\psi(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ g' \end{pmatrix}$ és un morfisme de A-àlgebres dgc augmentades. Hom comprova fàcilment que $\phi\psi = 1$. Quant a la igualtat $\psi\phi = 1$, s'ha de veure que $f' = (\phi(f))'$, però *sols sobre* $I_A B$. $\square$

Corol·lari. *Q_A preserva cofibracions i equivalències febles entre objectes cofibrants.*

Demostració. Es segueix de l'existència de l'adjunt per la dreta que preserva equivalències febles i fibracions i de la proposició 2, § 3, capítol I. □

Teorema 2. *El functor Q_A admet un functor derivat per l'esquerra*

$$\mathbf{L}Q_A : \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)$$

que sobre els objectes val $\mathbf{L}Q_A X = Q_A C_A X$, on $C_A X$ és un model cofibrant de X.

Demostració. Es segueix del corol·lari anterior i del teorema 1, § 3, capítol I. □

(4.2) Derivat dels indescomponibles de $\mathbf{Mdg}(A)$. Per a A-mòduls dg tenim un functor anàleg.

En aquest apartat R és un anell unitari commutatiu qualsevol i A una R-àlgebra dgc augmentada.

Siguin $\eta = \eta_A : R \longrightarrow A$, $\varepsilon = \varepsilon_A : A \longrightarrow R$ la unitat i l'augmentació de A. Sigui $IA = I_R A = \ker \varepsilon$ el seu ideal d'augmentació.

Definició 2. Anomenarem *indescomponibles* del A-mòdul dg M al R-mòdul dg

$$Q_A M = M / IA \cdot M$$

Observació. $Q_A M \cong R \otimes_A M$, on l'estructura de A-mòdul dg de R és la induïda per l'augmentació de A. Obviament, es tracta d'un functor

$$Q_A : \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(R)$$

Veiem que aquest functor, com l'anàleg de (4.1), té un adjunt per la dreta: sigui $\mathbf{Mod}(R)$ la categoria dels R-mòduls. Per a tot $V \in \mathrm{obj}\,\mathbf{Mdg}(R)$, hom pot definir una estructura de A-mòdul en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V)$ mitjançant la de R:

$$(a \cdot f)(\lambda) = f(\varepsilon a \cdot \lambda)$$

per a tot $a \in A$ i tot $\lambda \in R$. Així mateix, hi definim una graduació per:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V)^n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V^n)$$

Finalment, per a $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V)^n$, $df \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V)^{n+1}$ avaluat en $\lambda \in R$ val

$$(df)(\lambda) = d(f(\lambda))$$

Hom té d'aquesta manera un A-mòdul dg. De fet, no és més que $\varepsilon^* V$: el A-mòdul dg obtingut a partir de V per restricció d'escalars.

Proposició 3. *El functor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, \_) = \varepsilon^* : \mathbf{Mdg}(R) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

és adjunt per la dreta del functor Q_A i preserva equivalències febles i fibracions.

Demostració. Pel que fa a la primera afirmació, és suficient verificar que la bijecció natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R \otimes_A M, V) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(A)}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V))$$

definida per

$$\{\lambda \otimes m \mapsto g(\lambda \otimes m)\} \leftrightarrow \{m \mapsto g'(m)(\lambda) = g(\lambda \otimes m)\}$$

es restringeix a una bijecció

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mdg}(R)}(R \otimes_A M, V) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mdg}(A)}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}(R)}(R, V)) \ .$$

La preservació de les equivalències febles i de les fibracions resulta evident a partir de la segona presentació del functor. $\square$

Corol·lari. *El functor Q_A preserva cofibracions i equivalències febles entre objectes cofibrants.*

Demostració. Es segueix de l'existència de l'adjunt per la dreta que preserva equivalències febles i fibracions i de la proposició 2, § 3, capítol I. $\square$

Teorema 4. *El functor Q_A admet un functor derivat per l'esquerra*

$$\mathbf{L}Q_A = R \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ : \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(R)$$

que sobre els objectes val $\mathbf{L}Q_A M = Q_A C_A M$, on $C_A M$ és un model cofibrant de M.

Demostració. Es segueix del corol·lari anterior i del teorema 1, § 3, capítol I. $\square$

Per analogia amb el cas de les àlgebres dgc, anomenarem *grups d'homotopia* del A-mòdul dg M (o de A *a coeficients en* M, segons els gustos) a la cohomologia del functor derivat dels indescomponibles:

$$\pi_A M = H\mathbf{L}Q_A M$$

Veurem en el capítol V que aquest darrer functor coincideix amb el tor diferencial $\mathrm{Tor}_A(R, M)$.

(4.3) Derivat de $M \otimes_A \_$. La necessitat de l'existència del derivat de $M \otimes_A \_$ ens apareixerà en el capítol següent.

En aquest apartat, $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, R una $\mathbf{k}$-àlgebra unitària commutativa, A una R-àlgebra dgc i M un A-mòdul dg.

Mostrem que el functor

$$M \otimes_A \_ : \mathbf{Adgc}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

admet un derivat per l'esquerra. Per la proposició 3, § 3, capítol I, és suficient demostrar el següent:

Proposició 5. *Restringit als objectes cofibrants, el functor $M \otimes_A \_$ preserva la relació d'homotopia.*

Demostració. Com que l'afirmació sols involucra els objectes cofibrants, pel lema de (3.2), capítol I, és suficient demostrar-la per a un objecte camí particular. Siguin doncs $f, g : B \longrightarrow C$ morfismes de $\mathbf{Adgc}(A)$ i $h : B \longrightarrow C(t, dt)$ una homotopia de f a g (veure proposició 2, (2.2)). Aleshores $1 \otimes h : M \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A C(t, dt)$ és una homotopia de $1 \otimes f$ a $1 \otimes g$. En efecte,

$$M \otimes_A C \xrightarrow{1 \otimes s} M \otimes_A C(t, dt) \xrightarrow{(1 \otimes \partial_1,\, 1 \otimes \partial_0)} (M \otimes_A C) \times (M \otimes_A C)$$

és una factorització M2(i) de la diagonal de $M \otimes_A C$. $\square$

Teorema 6. *El functor $M \otimes_A \_$ admet un functor derivat per l'esquerra*

$$M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ : \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)$$

que sobre els objectes val $M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} B = M \otimes_A C$, on $A \longrightarrow C$ és un model cofibrant de $A \longrightarrow B$.

Demostració. Es segueix de la proposició anterior i de la proposició 3 de (3.3), capítol I. $\square$

En particular, $M \otimes_A \_$ preserva equivalències febles entre objectes cofibrants de $\mathbf{Adgc}(A)$.

CAPITOL III. CATEGORIES BIFIBRADES.

Introducció.

El llenguatge de les categories bifibrades es mostra adequat tant per parlar de formalitat (capítol IV) com del tor diferencial (capítol V), problemes en els quals hom es veu portat a treballar amb objectes pertanyents a diferents categories, relacionats per morfismes que "transiten" d'una a altra categoria. Dit sense precisió, una categoria bifibrada és una família de categories "parametritzada" per una altra categoria. Per exemple, podem pensar en la família de categories $\{\mathbf{Mdg}(A)\}$ obtinguda al variar l'àlgebra dgc A. El resultat principal d'aquest capítol és dotar d'una estructura de categoria de models aquestes categories a partir de tals estructures en les categories que formen les "fibres" (les $\mathbf{Mdg}(A)$) i la "base" ($\mathbf{Adgc}(R)$).

En concret, en el § 1, després de recordar la definició de categoria bifibrada, remarquem les dues descomposicions d'un morfisme en aquestes categories en un morfisme de la fibra i un morfisme de la base, que serà essencial en el que segueix, per comparar fletxes paral·leles, càlcul de límits, definir els morfismes distingits ...

El § 2 está destinat a l'enunciat i demostració del teorema abans esmentat. Com a corol·lari, per exemple, les categories de mòduls dg sobre *totes* les àlgebres dgc i la categoria de morfismes d'àlgebres dgc són categories de models tancades. En particular, hom hi té relacions d'homotopia de les quals n'explicitem un objecte camí.

La idea general de l'estructura de categoria de models que construim per a una categoria bifibrada és la seguent: pel fet de ser "la base" una categoria de models en ella existeixen els limits, aixecaments, factoritzacions ... Es comença doncs, resolent el problema en la base i pels functors imatges directes o recíproques "se'l traslllada" a una "fibra" convenient. Com que aquesta també és una categoria de models, el problema hi té solució. La solució en la categoria "total" es construeix a partir de la solució en la fibra i els morfismes que apareixen al fer imatges directes i recíproques.

Finalment, en § 3, estudiem l'existència de factoritzacions M2 functorials en la categoria $\mathbf{Adgc}(A)$. Per tal de tenir compte del fet que la functorialitat és tant en els "coeficients" com en l'àlgebra, utilitzarem una de les categories bifibrades que hem vist en els § anteriors: la categoria de morfismes de R-àlgebres dgc. Les mateixes factoritzacions functorials tenen una altra propietat interessant: commuten amb colímits: si $\{A_i \longrightarrow A_j\}$ és un sistema inductiu de R-àlgebres dgc i $\{X_i \longrightarrow X_j\}$ un sistema de A_i-àlgebres dgc es té

$$C_{\varinjlim A_i} \varinjlim X_i = \varinjlim C_{A_i} X_i ,$$

on $C_A X$ és el model cofibrant de $A \longrightarrow X$ del capítol II. Tots dos resultats (functorialitat i commutació amb colímits) ens permeten una construcció de models de feixos i el pas a la fibra en cada punt, tot i no tenir una estructura de categoria de models per als feixos (cf. [Brown], [Jar]).

§ **1. Generalitats.**

(1.1) Definicions i exemples. Per a aquest §, la nostra referència serà [SGA 1], exposé VI. Per fixar les idees, comencem desenvolupant amb un xic més de detall l'exemple esmentat en la introducció.

Exemple 1. Per a cada morfisme $f : A \longrightarrow B$ de R-àlgebres dgc, hom té un functor "imatge recíproca" $f^* : \mathbf{Mdg}(B) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$ (la restricció d'escalars) i un functor "imatge directa" $f_* : \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(B)$ (l'extensió d'escalars).

Sigui **Mdg** la categoria que té per objectes les parelles (A, M), on A és una R-àlgebra dgc i M un A-mòdul dg, i per morfismes les parelles $(f, \varphi) : (A, M) \longrightarrow (B, N)$, on $f : A \longrightarrow B$ és un morfisme de R-àlgebres dgc i φ és un f-*morfisme*, és a dir, un morfisme de R-mòduls dg tal que $\varphi(ax) = fa \cdot \varphi x$. Equivalentment, $\varphi : M \longrightarrow f^*N$ és un morfisme de A-mòduls dg.

Hom té un functor de projecció $P : \mathbf{Mdg} \longrightarrow \mathbf{Adgc}(R)$: $P(A, M) = A$, $P(f, \varphi) = f$. Per a una R-àlgebra dgc fixada A, hom pot considerar la categoria dels A-mòduls dg, $\mathbf{Mdg}(A)$, com la "fibra" de P en A.

Un altre exemple important d'aquestes categories és la categoria de feixos sobre espais topològics *variables* (veure *op.cit.*, pàgina 184).

Dit això, recordem algunes definicions i resultats. Sigui $\mathcal{E}$ una categoria. Una *categoria sobre* de $\mathcal{E}$ (o una $\mathcal{E}$*-categoria*) és un functor $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$. Sigui $x \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$. La *categoria-fibra* de $\mathcal{A}$ en x és la categoria obtinguda pel pull-back de **Cat**,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_x & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle P} \\ x & \longrightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

on x és la categoria amb un únic objecte (x) i un únic morfisme (1_x). Es a dir, $\mathcal{A}_x$ és la categoria que té per objectes aquells $a \in \operatorname{obj} \mathcal{A}$ tals que $Pa = x$ i per morfismes aquells $\varphi \in \operatorname{mor} \mathcal{A}$ tals que $P\varphi = 1_x$. Es clar que podem identificar $\mathcal{A}_x$ amb una subcategoria plena de $\mathcal{A}$. Sigui $f \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$; un f*-morfisme* (o un *morfisme* f*-equivariant*) és un morfisme ω de $\mathcal{A}$ tal que $P\omega = f$.

Definició 1. Sigui $\alpha : a \longrightarrow b$ un morfisme de $\mathcal{A}$ i siguin $x = Pa$, $y = Pb$, $f = P\alpha$. Es diu que el morfisme α és *cartesià* si per a tot $a' \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_x$ i tot f-morfisme $\omega : a' \longrightarrow b$, existeix un únic morfisme de $\mathcal{A}_x$, $\varphi : a' \longrightarrow a$, tal que $\alpha\varphi = \omega$.

Hom veu fàcilment que la composició de morfismes cartesians és un morfisme cartesià.

Exemple 1 (continuació). Sigui $f : A \longrightarrow B$ un morfisme de R-àlgebres dgc i M un B-mòdul dg. Aleshores la parella $(f, 1) : (A, f^*M) \longrightarrow (B, M)$ és un morfisme cartesià de **Mdg**.

La generalització d'aquest exemple a una $\mathcal{E}$-categoria qualsevol ens dóna tots els morfismes cartesians, llevat d'isomorfismes únics. En concret, si per a un morfisme $f : x \longrightarrow y$ de $\mathcal{E}$ i un objecte b de $\mathcal{A}_y$ donats existeix un morfisme cartesià $\alpha_f(b) : a \longrightarrow b$ tal que $P\alpha_f(b) = f$, aleshores a está determinat dins de $\mathcal{A}_x$ llevat d'isomorfimes únics. Hom anomena a la *imatge recíproca* de b per f i el nota f^*b. Així mateix, si existeix la imatge recíproca de $b' \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_y$, hom pot definir la imatge recíproca d'un morfisme $\varphi : b' \longrightarrow b$ de $\mathcal{A}_y$ com l'únic morfisme $f^*\varphi : f^*b' \longrightarrow f^*b$ de $\mathcal{A}_x$ que fa commutatiu el diagrama de $\mathcal{A}$,

$$\begin{array}{ccc} f^*b & \xrightarrow{\alpha_f(b)} & b \\ {\scriptstyle f^*\varphi}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \varphi} \\ f^*b' & \xrightarrow{\alpha_f(b')} & b' \end{array}$$

DEFINICIÓ 2. Una $\mathcal{E}$-categoria és *prefibrada* si per a tot $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$ existeix el functor *imatge recíproca*

$$f^* : \mathcal{A}_y \longrightarrow \mathcal{A}_x$$

Una categoria *fibrada* és una $\mathcal{E}$-categoria prefibrada en la què per a tot parell de morfismes $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ de $\mathcal{E}$, el morfisme canònic de functors

$$f^* g^* \longrightarrow (gf)^*$$

és un isomorfisme.

Hom té les corresponents nocions duals.

DEFINICIÓ 1^o. Sigui $\beta : a \longrightarrow b$ un morfisme de $\mathcal{A}$ i siguin $x = Pa$, $y = Pb$, $f = P\alpha$. Es diu que el morfisme β és *cocartesià* si per a tot $b' \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_x$ i tot f-morfisme $\omega : a \longrightarrow b'$, existeix un únic morfisme de $\mathcal{A}_y$, $\psi : b \longrightarrow b'$, tal que $\psi\beta = \omega$.

Anàlogament, si per a un morfisme $f : x \longrightarrow y$ de $\mathcal{E}$ i un objecte a de $\mathcal{A}_x$ donats existeix un morfisme cocartesià $\beta_f(a) : a \longrightarrow b$ tal que $P\beta_f(a) = f$, aleshores b està determinat dins de $\mathcal{A}_y$ llevat d'isomorfimes únics. Hom anomena a la *imatge directa* de a per f i el nota $f_* a$. La definició de f_* sobre els morfismes es fa de manera semblant.

DEFINICIÓ 2^o. Una $\mathcal{E}$-categoria és *coprefibrada* si per a tot $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$ existeix el functor *imatge directa*

$$f_* : \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathcal{A}_y$$

Una categoria *cofibrada* és una $\mathcal{E}$-categoria coprefibrada en la què per a tot parell de morfismes $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ de $\mathcal{E}$, el morfisme canònic de functors

$$g_* f_* \longleftarrow (gf)_*$$

és un isomorfisme.

DEFINICIÓ 3. Una $\mathcal{E}$-categoria és *bifibrada* si és fibrada i cofibrada a la vegada.

Veiem alguns exemples més de tals categories.

EXEMPLE 1 (continuació). En el cas que sols considerem R-àlgebres dgc augmentades, notarem la categoria bifibrada dels mòduls dg corresponents per $\mathbf{Mdg}_*$.

EXEMPLE 2. Sigui $\mathbf{Adgc}(R)^2$ la categoria dels morfismes de R-àlgebres dgc. Es tracta d'una categoria bifibrada sobre la categoria $\mathbf{Adgc}(R)$. Prenem com a functor P el functor *domini*: si $f : A \longrightarrow B$ és un morfisme de R-àlgebres dgc, $\mathrm{dom}(f) = A$. La categoria-fibra de $\mathbf{Adgc}(R)^2$ en $A \in \mathrm{obj}\,\mathbf{Adgc}(R)$ és la categoria de fletxes d'origen en A; és a dir, la categoria de R-àlgebres dgc sota de A, $\mathbf{Adgc}(A) = A\backslash\mathbf{Adgc}(R)$. Si $f : A \longrightarrow B$ és un morfisme de $\mathbf{Adgc}(R)$, el functor imatge recíproca es defineix per composició amb f: si $g : B \longrightarrow C \in \mathrm{obj}\,\mathbf{Adgc}(B)$, aleshores $f^*(g) = (gf : A \longrightarrow C) \in \mathrm{obj}\,\mathbf{Adgc}(A)$. I el functor imatge directa, per extensió d'escalars: si $g : A \longrightarrow C \in \mathrm{obj}\,\mathbf{Adgc}(A)$, aleshores $f_*(g) = 1 \otimes \_ : B \longrightarrow B \otimes_A C \in \mathrm{obj}\,\mathbf{Adgc}(B)$.

Anàlogament, es té que la categoria de morfismes de R-àlgebres dgc augmentades, $\mathbf{Adgc}_*(R)^2$, és una categoria bifibrada sobre $\mathbf{Adgc}_*(R)$. La fibra en $\varepsilon : A \longrightarrow R$ és la categoria $\mathbf{Adgc}_\varepsilon(A)$.

EXEMPLE 3. Més generalment, si $\mathcal{C}$ és una categoria en la qual existeix el push-out de qualsevol diagrama $a \longleftarrow b \longrightarrow c$, aleshores $\mathcal{C}^2$, la categoria dels morfismes de $\mathcal{C}$, és una categoria bifibrada sobre $\mathcal{C}$, sent P el functor *domini*.

EXEMPLE 4. Sigui **2Mdg** la categoria que té per objectes els triples (M, A, N), on A és una R-àlgebra dgc i M i N són A-mòduls dg, i per morfismes els triples $(\varphi, f, \psi) : (M, A, N) \longrightarrow (P, B, Q)$ en els quals $f : A \longrightarrow B$ és un morfismes de R-àlgebres dgc i $\varphi : M \longrightarrow f^*P$ i $\psi : N \longrightarrow f^*Q$ són morfismes de A-mòduls dg. Hom pot veure **2Mdg** com la **Mdg**-categoria obtinguda a partir de $P : \mathbf{Mdg} \longrightarrow \mathbf{Adgc}(R)$ per *canvi de base* al llarg del propi functor P. Altrament dit, es tracta del pull-back de **Cat**,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{2Mdg} & \longrightarrow & \mathbf{Mdg} \\ \big\downarrow & & {\scriptstyle P}\big\downarrow \\ \mathbf{Mdg} & \xrightarrow{P} & \mathbf{Adgc}(R) \end{array}$$

Es tracta d'una categoria bifibrada sobre $\mathbf{Adgc}(R)$: el functor de projecció es defineix sobre els objectes per $P(M, A, N) = A$. La categoria-fibra de **2Mdg** en A és el producte $\mathbf{Mdg}(A) \times \mathbf{Mdg}(A)$. Donat un morfisme $f : A \longrightarrow B$ de R-àlgebres dgc i un triple (P, B, Q) la seva imatge recíproca per f és el triple (f^*P, A, f^*Q); donat el mateix morfisme f i un triple (M, A, N) la seva imatge directa per f és el triple $(B \otimes_A M, B, B \otimes_A N)$.

(1.2) Factorització dels morfismes. Sigui $\omega : a \longrightarrow b$ un morfisme d'una categoria prefibrada $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ i siguin $f = P\omega$, $x = Pa$ i $y = Pb$. Mitjançant el functor imatge recíproca per f, anem a definir una factorització canònica de ω en un morfisme de la fibra en x i el morfisme cartesià $\alpha_f(b)$.

Considerem la imatge recíproca de b per f, $\alpha_f(b) : f^*b \longrightarrow b$, que notarem simplement α_ω. Per la propietat universal de la imatge recíproca, existeix un únic morfisme de $\mathcal{A}_x$, $\varphi_w : a \longrightarrow f^*b$, tal que

$$w = \alpha_\omega \varphi_\omega$$

Anomenarem aquesta la *factorització* $\alpha\varphi$ de ω.

Observació. Donat $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$ i $b \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_y$, la factorització anterior per a $\alpha = \alpha_f(b)$ dóna $\varphi_\alpha = 1_{f^*b}$ i $\alpha_\alpha = \alpha$. Així mateix, si $\varphi : a \longrightarrow b \in \operatorname{mor} \mathcal{A}_x$, posarem $\alpha_\varphi = 1_b$ i $\varphi_\varphi = \varphi$.

Exemple 5. Sigui $\mathcal{A} = \mathbf{Adgc}$ i $\mathcal{E} = \mathbf{Adgc}(R)$. Siguin $a : A \longrightarrow B$ i $b : C \longrightarrow D$ dos morfismes de R-àlgebres dgc i

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ C & \xrightarrow{b} & D \end{array} \tag{1}$$

un diagrama commutatiu de $\mathcal{E}$ (i.e., un morfisme $\omega : a \longrightarrow b$ de $\mathcal{A}$). La factorització $\alpha\varphi$ d'aquest és el diagrama commutatiu de $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ {\scriptstyle 1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A & \xrightarrow{bf} & D \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1} \\ C & \xrightarrow{b} & D \end{array} \tag{2}$$

en el qual el rectangle superior és el morfisme $\varphi_\omega : a \longrightarrow f^*b = bf$ i l'inferior $\alpha_\omega : f^*b \longrightarrow b$.

Lema 1. *Sigui* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ *una categoria bifibrada i* $\omega, \omega' : a \longrightarrow b$, $\theta : b \longrightarrow c$ *morfismes de* $\mathcal{A}$, $f = P\omega$ *i* $g = P\theta$. *Aleshores:*

(1) $\omega = \omega'$ *si i només si* $\alpha_\omega = \alpha_{\omega'}$ *i* $\varphi_\omega = \varphi_{\omega'}$ *(equivalentment,* $P\omega = P\omega'$ *i* $\varphi_\omega = \varphi_{\omega'}$*),*

(2) ω *és un isomorfisme de* $\mathcal{A}$ *si i només si* α_ω *i* φ_ω *són isomorfismes de* $\mathcal{A}$ *(equivalentment,* $P\omega$ *i* φ_ω *són isomorfismes de* $\mathcal{E}$ *i* $\mathcal{A}_{Pa}$*, respectivament),*

(3) $\alpha_{(\theta\omega)} = \alpha_\theta \alpha_f(g^* c)$ *i* $\varphi_{(\theta\omega)} = f^*(\varphi_\theta)\varphi_\omega$.

Demostració. (1) és evident a partir de la definició i (2) es segueix de (1) i (3). Pel que fa a (3), observem que és suficient demostrar la igualtat $\alpha_{(\theta\omega)} = \alpha_\theta \alpha_f(g^* c)$, ja que, si aquesta és certa, aleshores, com que $\theta\omega = \alpha_{(\theta\omega)} f^*(\varphi_\theta)\varphi_\omega$, per unicitat de la factorització, es segueix la segona.

Sigui $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ la imatge de $a \xrightarrow{\omega} b \xrightarrow{\theta} c$ per P. Verifiquem doncs, que $\alpha_\theta \alpha_f(g^* c)$ satisfà la propietat universal de $\alpha_{(\theta\omega)}$; és a dir, que donat un f-morfisme, $\rho : a' \longrightarrow c$, existeix un únic morfisme de $\mathcal{A}_x$, $\chi : a' \longrightarrow f^* g^* c$ tal que $\alpha_\theta \alpha_f(g^* c)\chi = \rho$. En efecte, considerem la imatge directa $g_* f_* a' \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_z$. Per la propietat universal d'aquesta, existeix un únic $\psi_1 : g_* f_* a' \longrightarrow c \in \operatorname{mor} \mathcal{A}_z$ tal que $\psi_1 \beta_{(gf)}(a') = \rho$. Per la propietat universal de la imatge recíproca, existeix un únic $\psi_2 : f_* a' \longrightarrow g^* c \in \operatorname{mor} \mathcal{A}_y$ tal que $\alpha_\theta \psi_2 = \psi_1 \beta_g(f_* a')$. Pel mateix, existeix un únic $\psi_3 : a' \longrightarrow f^* g^* c$ tal que $\alpha_\theta \alpha_{(\varphi_\theta \alpha_\omega)} \psi_3 = \psi_2 \beta_f(a')$. Finalment, prenem $\chi = \psi_3$. $\square$

Utilitzant la imatge directa, hom té una factorització dual de ω:

$$\omega = \psi_\omega \beta_\omega$$

en la qual $\beta_\omega = \beta_f(a) : a \longrightarrow f_* a$ és la imatge directa de a per f i $\psi_\omega : f_* a \longrightarrow b$ l'únic morfisme de $\mathcal{A}_y$ tal que $\omega = \psi_\omega \beta_f(a)$. Anomenarem aquesta la *factorització* $\psi\beta$ de ω.

Com per a la factorització $\alpha\varphi$, tenim el corresponent

Lema 1°. *Sigui* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ *una categoria bifibrada i* $\omega, \omega' : a \longrightarrow b$, $\theta : b \longrightarrow c$ *morfismes de* $\mathcal{A}$, $f = P\omega$ *i* $g = P\theta$. *Aleshores:*

(1) $\omega = \omega'$ *si i només si* $\beta_\omega = \beta_{\omega'}$ *i* $\psi_\omega = \psi_{\omega'}$ *(equivalentment,* $P\omega = P\omega'$ *i* $\psi_\omega = \psi_{\omega'}$*),*

(2) *ω és un isomorfisme de $\mathcal{A}$ si i només si β_ω i ψ_ω són isomorfismes de $\mathcal{A}$ (equivalentment, $P\omega$ i ψ_ω són isomorfismes de $\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}_{Pb}$, respectivament),*

(3) $\beta_{(\theta\omega)} = \beta_g(f_*c)\beta_\theta$ *i* $\psi_{(\theta\omega)} = \psi_\theta g_*(\psi_\omega)$.

Exemple 6. Per al morfisme ω de l'exemple 5, la factorització $\psi\beta$ és el diagrama commutatiu de $\mathcal{E}$ següent:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "1\otimes_"] \\
C \arrow[r, "_\otimes 1"] \arrow[d, "1"'] & C\otimes_A B \arrow[d, "b\otimes\varphi"] \\
C \arrow[r, "b"] & D
\end{tikzcd}$$

Exemple 7. Per a $(f,\varphi) : (A,M) \longrightarrow (B,N) \in \operatorname{mor}\mathbf{Mdg}$ les factoritzacions $\alpha\varphi$ i $\psi\beta$ són, respectivament,

$$(A,M) \xrightarrow{(1,\varphi)} (A, f^*N) \xrightarrow{(f,1)} (B,N)$$

i

$$(A,M) \xrightarrow{(f,1\otimes\_)} (B, B\otimes_A M) \xrightarrow{(1,1\otimes\varphi)} (B,N)$$

Es segueix del que s'ha dit, que en una categoria bifibrada f^* és l'adjunt per la dreta de f_*. Explícitament, la bijecció

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_x}(a, f^*b) \longleftrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_y}(f_*a, b)$$

associa $\varphi : a \longrightarrow f^*b$ amb $\psi : f_*a \longrightarrow b$ de manera que aquests són els únics morfismes tals que $\alpha_f(b)\varphi = \psi\beta_f(a)$. En particular, la unitat i la counitat d'aquesta adjunció estan relacionades amb les factoritzacions com segueix: sigui $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor}\mathcal{E}$, $a \in \operatorname{obj}\mathcal{A}_x$ i $b \in \operatorname{obj}\mathcal{A}_y$. Si $\varepsilon_b : f_*f^*b \longrightarrow b$ és la counitat de l'adjució, aleshores

$$\alpha_f(b) = \varepsilon_b\beta_f(f^*b)$$

és la factorització $\psi\beta$ de $\alpha_f(b)$, i si $\eta_a : a \longrightarrow f^*f_*a$ n'és la unitat,

$$\beta_f(a) = \alpha_f(f_*a)\eta_a$$

és la factorització $\alpha\varphi$ de $\beta_f(a)$.

(1.3) Límits i colímits. Donem una descripció dels límits (resp., colímits) d'una categoria bifibrada $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ en funció dels límits (resp., colímits) de $\mathcal{E}$ i de $\mathcal{A}_x$ per a $x \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$.

Dit ràpidament, un límit en $\mathcal{A}$ es calcula trobant el límit de la projecció per P en $\mathcal{E}$, traslladant per imatges recíproques el sistema del què es vol calcular el límit a la fibra en el límit trobat en $\mathcal{E}$ i calculant el límit del sistema trobat en la categoria-fibra. Veiem un exemple, del que farem ús en la demostració del teorema 3 de § 2.

Exemple 8. Sigui $a \xrightarrow{\omega} c \xleftarrow{\theta} b$ un diagrama de $\mathcal{A}$ i $x \xrightarrow{f} z \xleftarrow{g} y$ la seva imatge per P en $\mathcal{E}$. Sigui

$$\begin{array}{ccc} x \sqcap_z y & \xrightarrow{q} & y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ x & \xrightarrow{f} & z \end{array} \tag{3}$$

el seu pull-back. Considerem les imatges recíproques $c' = (fp)^*c = (gq)^*c$, $p^*(\varphi_\omega) : p^*a \longrightarrow c'$ i $q^*(\varphi_\theta) : q^*b \longrightarrow c'$ i

$$\begin{array}{ccc} p^*a \sqcap_{c'} q^*b & \xrightarrow{\xi} & q^*b \\ {\scriptstyle \zeta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q^*(\varphi_\theta)} \\ p^*a & \xrightarrow{p^*(\varphi_\omega)} & c' \end{array} \tag{4}$$

el seu pull-back en $\mathcal{A}_{x \sqcap_z y}$. Aleshores

$$\begin{array}{ccc} p^*a \sqcap_{c'} q^*b & \xrightarrow{\alpha_q(b)\xi} & b \\ {\scriptstyle \alpha_p(a)\zeta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ a & \xrightarrow{\omega} & c \end{array}$$

és el pull-back del diagrama original en $\mathcal{A}$.

En general, donat un functor $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ hom té un functor en $\mathcal{E}$ composant amb el functor P. Suposem que PF admet un límit $l = \varprojlim Pf$ en $\mathcal{E}$. Veiem primerament com podem definir un functor en la categoria-fibra $\mathcal{A}_l$.

Lema 2. *Sigui* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ *una categoria bifibrada.* $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ *un functor per al qual existeix* $l = \varprojlim PF$*. Sigui* $v : l \longrightarrow PF$ *el con límit. Aleshores, la correspondència* $i \longmapsto v_i^*(Fi)$ *defineix un functor*

$$v^*F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}_l$$

Demostració. Definim v^*F sobre els objectes segons l'enunciat: per a $i \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$, $(v^*F)i = v_i^*(Fi)$. Quant als morfismes, sigui $\iota : i \longrightarrow j \in \operatorname{mor}\mathcal{I}$. Considerem la factorització $\alpha\varphi$ de $F\iota$: $F\iota = \alpha_{F\iota}\varphi_{F\iota}$. Definim $(v^*F)\iota = v_i^*(\varphi_{F\iota})$ i comprovem que, efectivament, es tracta d'un functor: $(v^*F)(1_i) = v_i^*(\varphi_{1_i}) = v_i^*(1_i) = 1_{v_i^*(Fi)}$ i, si $\kappa : j \longrightarrow k \in \operatorname{mor}\mathcal{I}$, aleshores $(v^*F)(\kappa\iota) = v_i^*(\varphi_{F(\kappa\iota)}) = v_i^*((PF\iota)^*(\varphi_{F\kappa})\varphi_{F\iota}) = v_j^*(\varphi_{F\kappa})v_i^*(\varphi_{F\iota}) = ((v^*F)\kappa)((v^*F)\iota)$. □

Proposició 1. *Sigui* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ *una categoria bifibrada. Suposem que per a una certa categoria* $\mathcal{I}$ *existeixen els límits de functors qualsevols* $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ *i* $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}_x$ *per a tot* $x \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$*. Aleshores existeix el límit de qualsevol functor* $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ *i es té*

$$P \varprojlim F = \varprojlim PF \qquad \text{i} \qquad \varprojlim F = \varprojlim v^*F$$

on $v : \varprojlim PF \longrightarrow PF$ *és el con límit. A més a més, si* $\nu : \varprojlim F \longrightarrow F$ *és el con límit, per a tot* $i \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$*, es té que* $v_i = P\nu_i$ *i, si* $\nu' : \varprojlim v^*F \longrightarrow v^*F$ *és el con límit,* $\nu_i = \alpha_{v_i}(Fi)\nu_i'$*.*

Demostració. Siguin $l = \varprojlim PF$ i $v : l \longrightarrow PF$ el límit i el con límit de PF en $\mathcal{E}$. Siguin $\ell = \varprojlim v^*F$ i $\nu' : \ell \longrightarrow v^*F$ el límit i el con límit de v^*F en $\mathcal{A}_l$. Per a tot $i \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$, definim

$$\nu_i = \alpha_{v_i}(Fi)\nu_i'$$

Comprovem que $\nu : \ell \longrightarrow F$ és el con límit de F en $\mathcal{A}$. Sigui $\iota : i \longrightarrow j \in \operatorname{mor}\mathcal{I}$. Veiem que $(F\iota)\nu_i = \nu_j$. En efecte, $(F\iota)\nu_i = \alpha_{F\iota}\varphi_{F\iota}\alpha_{v_i}(Fi)\nu_i' = \alpha_{F\iota}\alpha_{v_i}((v^*F)j)(v^*F)(\iota)\nu_i' = \alpha_{v_j}(Fj)\nu_j' = \nu_j$.

Sigui $\tau : c \longrightarrow F$ un altre con de base F. Veiem que existeix un únic morfisme de $\mathcal{A}$, $\omega : c \longrightarrow \ell$ tal que $\nu_i\omega = \tau_i$ per a tot $i \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$. Aplicant el functor P, tenim un con $P\tau : Pc \longrightarrow PF$ i per tant un únic morfisme $f : Pc \longrightarrow l$ tal que $v_i f = P\tau_i$ per a tot $i \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$. Considerem les imatges directes $(P\tau_i)_*c \in \operatorname{obj}\mathcal{A}_{PFi}$. Per la propietat universal de la imatge directa, es tenen morfismes únics de $\mathcal{A}_{PFi}$, $\psi_{\tau_i} : v_i^*c \longrightarrow Fi$ tals que $\tau_i = \psi_{\tau_i}\beta_{P\tau_i}(c)$. Composant-los amb els $\beta_{v_i}(f_*c) : f_*c \longrightarrow (P\tau_i)_*c$ i aplicant la propietat universal de la imatge recíproca, tenim morfismes únics de $\mathcal{A}_l$, $\tau'_i : f_*c \longrightarrow v_i^*(Fi) = (v^*F)i$ tals que $\alpha_{v_i}(Fi)\tau'_i = \psi_{\tau_i}\beta_{v_i}(f_*c)$. Comprovem que els τ'_i defineixen un con de base v^*F; i.e., que $(v^*F)(\iota)\tau'_i = \tau'_j$ per a tot $\iota : i \longrightarrow j \in \operatorname{mor}\mathcal{I}$. Per al qual és suficient que $\alpha_{v_j}(Fj)(v^*F)(\iota)\tau'_i\beta_f(c) = \alpha_{v_j}(Fj)\tau'_j\beta_f(c)$. Calculem:

$$\begin{aligned}\alpha_{v_j}(Fj)(v^*F)(\iota)\tau'_i\beta_f(c) &= (F\iota)\alpha_{v_i}(Fi)\tau'_i\beta_f(c) = (F\iota)\psi_{\tau_i}\beta_{v_i}(f_*c)\beta_f(c)\\ &= (F\iota)\psi_{\tau_i}\beta_{P\tau_i}(c) = (F\iota)\tau_i = \tau_j\\ &= \alpha_{v_j}(Fj)\tau'_j\beta_f(c)\end{aligned}$$

Per tant existeix un únic morfisme $\omega' : f_*c \longrightarrow \ell$ tal que $\nu'_i\omega' = \tau'_i$. Prenem $\omega = \omega'\beta_f(c)$ i comprovem que $\nu_i\omega = \alpha_{v_i}(Fi)\tau'_i\beta_f(c) = \tau_i$. Hom pot comprovar també, que és l'únic $c \longrightarrow \ell \in \operatorname{mor}\mathcal{A}$ amb aquesta propietat. $\square$

Observació. La hipòtesi de l'existència dels límits *per a tots* els functors $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ i $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}_x$ és clarament excessiva, com es veu en la demostració.

Els enunciats per a colímits són els que segueixen.

Lema 2^o. *Sigui $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ una categoria bifibrada. $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ un functor per al qual existeix $c = \varinjlim PF$. Sigui $u : PF \longrightarrow c$ el con límit. Aleshores, la correspondència $i \longmapsto u_{i*}(Fi)$ defineix un functor*

$$u_*F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}_c$$

Proposició 1^o. *Sigui $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ una categoria bifibrada. Suposem que per a una certa categoria $\mathcal{I}$ existeixen els colímits de functors qualsevols $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ i $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}_x$ per a tot $x \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$. Aleshores existeix el colímit de qualsevol functor $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}$ i es té*

$$P\varinjlim F = \varinjlim PF \qquad \text{i} \qquad \varinjlim F = \varinjlim u_*F$$

on $u : PF \longrightarrow \varinjlim PF$ és el con límit. A més a més, si $v : F \longrightarrow \varinjlim F$ és el con límit, per a tot $i \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$, es té que $u_i = Pv_i$ i, si $v' : u_*F \longrightarrow \varinjlim u_*F$ és el con límit, $v_i = v'_i\beta_{u_i}(Fi)$.

§ 2. Categories de models i categories bifibrades.

(2.1) Enunciat del teorema i observacions. Volem dotar una categoria bifibrada $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ d'estructura de categoria de models a partir d'estructures donades del mateix tipus en les categories $\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}_x$, per a tot $x \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$. Una tal estructura és, essencialment, l'elecció d'unes certes classes de morfismes distingits (equivalències febles, fibracions i cofibracions). En cert sentit, els morfismes distingits de $\mathcal{A}$ estan determinats pels morfismes distingits de la base i els de les fibres. Veiem alguns exemples d'aquest fet per a **Mdg**.

Sigui doncs **k** un cos de característica zero, R una **k**-àlgebra i A una R-àlgebra dgc. Els functors de cohomologia de les diferents $\mathbf{Mdg}(A)$ indueixen de manera evident un functor de cohomologia en **Mdg**: si $(f, \varphi) : (A, M) \longrightarrow (B, N)$ és un morfisme d'aquesta categoria, definim $H(f, \varphi)$ com $(Hf, H\varphi) : (HA, HM) \longrightarrow (HB, HN)$. Hom comprova sense dificultat que $H\varphi$ és un Hf-morfisme de HA-mòduls graduats. Es natural doncs prendre com a equivalències febles de **Mdg** els morfimes que esdevenen isomorfismes per aquest H. Això equival a prendre com a equivalències febles aquells (f, φ) tals que f és una equivalència feble de $\mathbf{Adgc}(R)$ i φ ho és de $\mathbf{Mdg}(A)$. Si procedim de la mateixa forma, prenent com a fibracións de **Mdg** aquells (f, φ) tals que f és una fibració de $\mathbf{Adgc}(A)$ i φ és una fibració de $\mathbf{Mdg}(A)$, les cofibracions restaran caracteritzades de manera anàloga. En concret, si suposem que **Mdg** té una estructura de categoria de models en la qual les equivalències febles i les fibracions són els morfismes que hem escollit, a títol d'exemple tenim:

Proposició 1. *Si $(f, \varphi) : (A, M) \longrightarrow (B, N)$ és una cofibració de* **Mdg***, aleshores f és una cofibració de* $\mathbf{Adgc}(R)$*.*

Demostració. Sigui

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

un diagrama commutatiu de $\mathbf{Adgc}(R)$ en el qual p és una fibració trivial. Veiem que existeix un aixecament $\widetilde{\beta}$ de β. Considerem el diagrama commutatiu de $\mathbf{Mdg}$:

$$\begin{array}{ccc} (A,M) & \xrightarrow{(\alpha,0)} & (C,0) \\ {\scriptstyle (f,\varphi)}\big\downarrow & & {\scriptstyle (p,0)}\big\downarrow \\ (B,N) & \xrightarrow{(\beta,0)} & (D,0) \end{array}$$

Per les eleccions fetes de les equivalències febles i de les fibracions, $(p,0)$ és una fibració trivial. Com que (f,φ) és una cofibració i $\mathbf{Mdg}$ una categoria de models, existeix $(\widetilde{\beta},0) : (B,N) \longrightarrow (C,0)$ tal que $(p,0)(\widetilde{\beta},0) = (\beta,0)$ i $(\widetilde{\beta},0)(f,\varphi) = (\alpha,0)$. En particular, $p\widetilde{\beta} = \beta$ i $\widetilde{\beta}f = \alpha$. Per ser $\mathbf{Adgc}(R)$ una categoria de models tancada, f és una cofibració. $\square$

Proposició 2. *Si* $(1,\varphi) : (A,M) \longrightarrow (A,N)$ *és una cofibració de* $\mathbf{Mdg}$*, aleshores* φ *és una cofibració de* $\mathbf{Mdg}(A)$*.*

Demostració. Sigui

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & P \\ {\scriptstyle \varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \sigma}\big\downarrow \\ N & \xrightarrow{\beta} & Q \end{array}$$

un diagrama commutatiu de $\mathbf{Mdg}(A)$, en el què σ és una fibració trivial. Considerem el diagrama commutatiu de $\mathbf{Mdg}$:

$$\begin{array}{ccc} (A,M) & \xrightarrow{(1,\alpha)} & (A,P) \\ {\scriptstyle (1,\varphi)}\big\downarrow & & {\scriptstyle (1,\sigma)}\big\downarrow \\ (A,N) & \xrightarrow{(1,\beta)} & (A,Q) \end{array}$$

Per les eleccions fetes de les equivalències febles i de les fibracions, $(1,\sigma)$ és una fibració trivial. Com que $(1,\varphi)$ és una cofibració i $\mathbf{Mdg}$ una categoria de models, existeix $(f,\widetilde{\beta}) : (A,N) \longrightarrow (A,P)$ tal que $(1,\sigma)(f,\widetilde{\beta}) = (1,\beta)$ i $(1,\beta)(1,\varphi) = (1,\alpha)$. En particular, $f = 1$ i per tant $\widetilde{\beta}$ és un morfisme de $\mathbf{Mdg}(A)$. Alhora, $\sigma\widetilde{\beta} = \beta$ i $\widetilde{\beta}\varphi = \alpha$. Per ser $\mathbf{Mdg}(A)$ una categoria de models tancada, φ és una cofibració. $\square$

Serveixi l'anterior per justificar la naturalitat (ja que no la necessitat) de l'elecció dels morfismes distingits en el següent teorema.

Teorema 3. *Sigui* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ *una categoria bifibrada en la què:*

(1) $\mathcal{E}$ *és una categoria de models (resp., de models tancada),*

(2) *per a tot* $x \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$, $\mathcal{A}_x$ *és una categoria de models tancada,*

(3) *per a tot* $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor}\mathcal{E}$ *el functor* $f^* : \mathcal{A}_y \longrightarrow \mathcal{A}_x$ *preserva equivalències febles i fibracions, i*

(4) *si* $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor}\mathcal{E}$ *és una cofibració trivial, aleshores per a tot* $a \in \operatorname{obj}\mathcal{A}_x$ *la unitat de l'adjunció* $\eta_a : a \longrightarrow f^* f_* a$ *és una equivalència feble.*

Aleshores $\mathcal{A}$ *és una categoria de models (resp., de models tancada), escollint com a classes de morfismes distingits els següents: direm que un* f*-morfisme* $\omega \in \operatorname{mor}\mathcal{A}$ *és una*

(i) *we: si* f *i* φ_ω *són equivalències febles de* $\mathcal{E}$ *i* $\mathcal{A}_x$*, respectivament,*

(ii) *fib: si* f *i* φ_ω *són fibracions de* $\mathcal{E}$ *i* $\mathcal{A}_x$*, respectivament,*

(iii) *cof: si* f *i* ψ_ω *són cofibracions de* $\mathcal{E}$ *i* $\mathcal{A}_y$*, respectivament.*

Observacions. (1) Per l'elecció dels morfismes distingits, un morfisme cartesià α és una equivalència feble (resp., una fibració) si i només si $P\alpha$ és una equivalència febles (resp., una fibració) de $\mathcal{E}$. De la mateixa manera, un morfisme cocartesià β és una cofibració si i només si $P\beta$ és una cofibració de $\mathcal{E}$. Pel que fa als morfismes d'una categoria-fibra $\mathcal{A}_x$, són equivalències febles, fibracions o cofibracions de $\mathcal{A}$ si i només si són equivalències febles fibracions o cofibracions, respectivament, de $\mathcal{A}_x$.

(2) Per als objectes la caracterització és la següent: un objecte a de $\mathcal{A}$ és fibrant (resp., cofibrant) si i sols si $x = Pa \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$ és fibrant (resp., cofibrant) i ell mateix, com a objecte de $\mathcal{A}_x$, és fibrant (resp., cofibrant). En particular, si tots els objectes de $\mathcal{E}$ són fibrants i el mateix és cert per a totes les categories-fibra, aleshores tots els objectes de $\mathcal{A}$ són fibrants.

(3) El functor $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ preserva les equivalències febles, les fibracions i les cofibracions.

(4) Per la hipòtesi (3) i pel fet de ser adjunt per l'esquerra d'un functor que preserva equivalències febles i fibracions, f_* preserva les cofibracions. Senyalem que, per a la nostra demostració, aquest és un fet necessari; encara per demostrar que $\mathcal{A}$ és una categoria de models *no necessàriament tancada.* Com perquè sigui cert cal que les cofibracions estiguin caracteritzades per la LLP respecte de les fibracions trivials, sembla necessari que les categories-fibra siguin categories de models *tancades* en tota circumstància.

(5) Un parell de conseqüències de la hipòtesi (4). Si f és una cofibració trivial, per a tot $a \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_x$, el morfisme cocartesià $\beta_f(a) : a \longrightarrow f_* a$ és, per l'elecció dels morfismes distingits, una cofibració de $\mathcal{A}$, però també una equivalència feble, ja que $\beta_f(a) = \alpha_f(f_* a)\eta_a$ és la seva factorització $\alpha\varphi$. Un cop vist que les equivalències febles de $\mathcal{A}$ són estables per composició, hom pot deduir de manera senzilla que, si f és una cofibració trivial, aleshores f_* preserva les equivalències febles.

Senyalem finalment, que el teorema 3 no és, visiblement, autodual. Encara que no en farem cap ús, apuntem la seva versió dual.

Teorema 3^o. *Sigui $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ una categoria bifibrada en la què:*

(1) *$\mathcal{E}$ és una categoria de models (resp., de models tancada),*
(2) *per a tot $x \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$, $\mathcal{A}_x$ és una categoria de models tancada,*
(3) *per a tot $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$ el functor $f_* : \mathcal{A}_y \longrightarrow \mathcal{A}_x$ preserva equivalències febles i cofibracions, i*
(4) *si $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$ és una fibració trivial, aleshores per a tot $b \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_y$ la counitat de l'adjunció $\varepsilon_b : f_* f^* b \longrightarrow b$ és una equivalència feble.*

Aleshores $\mathcal{A}$ és una categoria de models tancada, escollint com a classes de morfismes distingits els següents: direm que un f-morfisme $\omega \in \operatorname{mor} \mathcal{A}$ és una

(i) *we: si f i ψ_ω són equivalències febles de $\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}_y$, respectivament,*
(ii) *cof: si f i ψ_ω són cofibracions de $\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}_y$, respectivament,*
(iii) *fib: si f i φ_ω són fibracions de $\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}_x$, respectivament.*

(2.2) Demostració del teorema. **M0.** L'existència de límits i colímits finits es segueix de (1.3) i de la seva existència en $\mathcal{E}$ i en $\mathcal{A}_x$ per a tot $x \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$, ja que aquestes són categories de models per hipòtesi. Per exemple, l'objecte final de $\mathcal{A}$ és l'objecte final de $\mathcal{A}_t$, sent t l'objecte final de $\mathcal{E}$.

M1. Els raonaments són anàlegs per a les dues propietats d'aixecament. Veiem, per exemple, M1(ii). Sigui

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\omega} & c \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ b & \xrightarrow{\theta} & d \end{array} \tag{1}$$

un diagrama commutatiu de $\mathcal{A}$, en el qual ι és una cofibració i ρ una fibració trivial. Hem de comprovar que existeix $\widetilde{\theta} : b \longrightarrow c$ tal que $\rho\widetilde{\theta} = \theta$ i $\widetilde{\theta}\iota = \omega$.

Considerem la imatge del diagrama (1) en $\mathcal{E}$: com que P preserva equivalències febles, fibracions i cofibracions, es té que en

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & z \arrow[d, "r"] \\ y \arrow[r, "g"] & u \end{tikzcd}$$

i és una cofibració i r una fibració trivial de $\mathcal{E}$. Per ser $\mathcal{E}$ una categoria de models, existeix $\widetilde{g} : y \longrightarrow z$ tal que $r\widetilde{g} = g$ i $\widetilde{g}i = f$. Per definició de les fibracions i cofibracions, φ_ρ és una fibració trivial de $\mathcal{A}_z$. Per la hipòtesi (3), $\widetilde{g}^*(\varphi_\rho) : \widetilde{g}^*c \longrightarrow g^*d \in \operatorname{mor}\mathcal{A}_z$ també ho serà. Així mateix, les corresponents factoritzacions ens donen morfismes ψ_ι i φ_θ, i observem que ψ_ι és una cofibració de $\mathcal{A}_y$ per definició de les cofibracions de $\mathcal{A}$. Finalment, prenem $\zeta = \varepsilon_{\widetilde{g}^*c} i_*(\varphi_\omega)$. Amb tot el qual tenim el diagrama de $\mathcal{A}_y$ següent:

$$\begin{tikzcd} i_*a \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\psi_\iota"'] & \widetilde{g}^*c \arrow[d, "\widetilde{g}^*(\varphi_\rho)"'] \\ b \arrow[r, "\varphi_\theta"] & g^*d \end{tikzcd}$$

Veiem que és un diagrama commutatiu. Per al qual és suficient que les dues fletxes coincideixin al compondre-les amb β_ι. Calculem:

$$\begin{aligned} \widetilde{g}^*(\varphi_\rho)\zeta\beta_\iota &= \widetilde{g}^*(\varphi_\rho)\varepsilon_{\widetilde{g}^*c}\beta_i(f^*c)\varphi_\omega = \widetilde{g}^*(\varphi_\rho)\alpha_i(\widetilde{g}^*c)\varphi_\omega \\ &= \alpha_i(g^*d)f^*(\varphi_\rho)\varphi_\omega = \alpha_i(g^*d)\varphi_{(\rho\omega)} \\ &= \alpha_i(g^*d)\varphi_{\theta\iota} = \alpha_i(g^*d)i^*(\varphi_\theta)\varphi_\iota \\ &= \varphi_\theta\alpha_\iota\varphi_\iota = \varphi_\theta\iota \\ &= \varphi_\theta\psi_\iota\beta_\iota \end{aligned}$$

Per tant, com que $\mathcal{A}_y$ és una categoria de models, existeix $\widetilde{\varphi}_\theta : b \longrightarrow \widetilde{g}^*c$ tal que $\widetilde{g}^*(\varphi_\rho)\widetilde{\varphi}_\rho = \varphi_\theta$ i $\widetilde{\varphi}_\theta\psi_\iota = \zeta$. Definim l'aixecament de θ com:

$$\widetilde{\theta} = \alpha_{\widetilde{g}}(c)\widetilde{\varphi}_\theta$$

Comprovem que $\rho\widetilde{\theta} = \theta$:

$$\begin{aligned} \rho\widetilde{\theta} &= \alpha_\rho\varphi_\rho\alpha_{\widetilde{g}}(c)\widetilde{\varphi}_\theta = \alpha_\rho\alpha_{\widetilde{g}}(r^*d)\widetilde{g}^*(\varphi_\rho)\widetilde{\varphi}_\theta \\ &= \alpha_\rho\alpha_{\widetilde{g}}(r^*d)\varphi_\theta = \alpha_\theta\varphi_\theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

De manera semblant, es veu que $\widetilde{\theta}\iota = \omega$.

M5. Siguin $a \xrightarrow{\omega} b \xrightarrow{\theta} c$ morfismes de $\mathcal{A}$. Veiem, per exemple, que si tots dos són equivalencies febles també ho és la seva composició. Per definició ω i θ són equivalencies febles de $\mathcal{A}$ si i només si $P\omega$ i $P\theta$ ho són de $\mathcal{E}$ i φ_ω i φ_θ ho són de les categories-fibra corresponents. Aleshores $P(\theta\omega) = (P\omega)(P\theta)$ és una equivalència feble de $\mathcal{E}$ perquè aquesta és una categoria de models. També $\varphi_{(\theta\omega)} = f^*(\varphi_\theta)\varphi_\omega$ es una equivalència feble: f^* les preserva i la composició d'equivalencies febles en una categoria-fibra és una equivalència feble perquè aquestes són categories de models.

M2. Sigui $\omega : a \to b \in \operatorname{mor} \mathcal{A}$. Construim-ne unes factoritzacions en cofibració trivial/fibració i cofibració/fibració trivial. Siguin $f = P\omega$, $x = Pa$ i $y = Pb$. Sigui

$$x \xrightarrow{i} z \xrightarrow{p} y$$

la primera de les factoritzacions esmentades per a f en la categoria $\mathcal{E}$. Fent imatges directes i recíproques de a i b per i i p de manera adequada, tenim el morfisme de $\mathcal{A}_z$ següent:

$$i_*a \xrightarrow{i_*(\varphi_w)} i_*i^*p^*b \xrightarrow{\varepsilon_{p^*b}} p^*b$$

on ε_{p^*b} és la counitat de l'adjunció entre i_* i i^*. Com que $\mathcal{A}_z$ és per hipòtesi una categoria de models, aquest morfisme admet una factorització en una cofibració trivial i una fibració d'aquesta categoria. Sigui

$$i_*a \xrightarrow{\chi} c \xrightarrow{\rho} p^*b$$

una de tals factoritacions. Considerem ara la factorització del ω original

$$a \xrightarrow{\chi\beta_i(a)} c \xrightarrow{\alpha_p(b)\rho} b$$

i comprovem que és la factorització cercada:

(1) En primer lloc, $\omega = (\alpha_p(b)\rho)(\chi\beta_i(a))$. En efecte,

$$\begin{aligned}\alpha_p(b)\rho\chi\beta_i(a) &= \alpha_p(b)\varepsilon_{p^*b}i_*(\varphi_\omega)\beta_i(a) = \alpha_p(b)\varepsilon_{p^*b}\beta_i(f^*b)\varphi_\omega \\ &= \alpha_p(b)\alpha_i(p^*b)\varphi_\omega = \alpha_\omega\varphi_\omega \\ &= \omega\end{aligned}$$

(2) En segon lloc, $\alpha_p(b)\rho$ és una fibració. Això és degut a que el morfisme està donat ja en la factorització $\alpha\varphi$. Com que $P(\alpha_p(b)\rho) = p$ és una fibració de $\mathcal{E}$ i ρ ho és de $\mathcal{A}_z$, el resultat es segueix de l'elecció de les fibracions de $\mathcal{A}$.

(3) Finalment, $\xi\beta_i(a)$ és una cofibració trivial. Aquest cop, el morfisme ens ve donat directament en la seva factorització $\psi\beta$. Com que $P(\xi\beta_i(a)) = i$ és una cofibració de $\mathcal{E}$ i χ ho és de $\mathcal{A}_z$, es tracta d'una cofibració de $\mathcal{A}$. Pel que fa a que sigui equivalència feble: χ ho és de $\mathcal{A}_z$ i per tant, també de $\mathcal{A}$. $\beta_i(a)$ ho és perquè i és una cofibració trivial de $\mathcal{E}$. La seva composició és una equivalència feble per M5.

Quant a l'altra factorització, hom comença factoritzant f en una cofibració i una fibració trivial:

$$x \xrightarrow{j} u \xrightarrow{q} y$$

De la mateixa manera, es factoritza el morfisme de $\mathcal{A}_u$, $j_*a \xrightarrow{j_*(\varphi_w)} j_*j^*q^*b \xrightarrow{\varepsilon_{q*b}} q^*b$ en una cofibració i una fibració trivial de $\mathcal{A}_u$:

$$j_*a \xrightarrow{\iota} d \xrightarrow{\sigma} q^*b$$

Aleshores

$$a \xrightarrow{\iota\beta_j(a)} d \xrightarrow{\alpha_q(b)\sigma} b$$

és la factorització M2(ii) de ω que es cercava.

M3. La demostració de que les fibracions són estables per composició és igual a la de la mateixa propietat de les equivalencies febles. La de les cofibracions també, canviant la factorització $\alpha\varphi$ per la $\beta\psi$. El fet que els isomorfismes siguin fibracions (resp., cofibracions) es segueix de (2) del lema 1 (resp., lema 1^o) de (1.2).

Quant a la preservació de les fibracions per pull-backs, suposem que en el diagrama de $\mathcal{A}$

$$a \xrightarrow{\omega} c \xleftarrow{\theta} b$$

θ és una fibració. Sigui

$$\begin{array}{ccc} a \sqcap_c b & \xrightarrow{\alpha_q(b)\xi} & b \\ {\scriptstyle \alpha_p(a)\zeta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ a & \xrightarrow{\omega} & c \end{array}$$

el seu pull-back, tal com l'hem calculat en l'exemple 8 de § 1. Per definició de les fibracions de $\mathcal{A}$, la g del diagrama (3) de (1.3) és una fibració i, per ser $\mathcal{E}$ una categoria de models, també ho és p. Per l'altre costat, també són fibracions φ_θ, $q^*(\varphi_\theta)$ i ζ, per raons anàlogues i perquè q^* preserva fibracions, per hipòtesi. També ho és $\alpha_p(a)$ ja que $P\alpha_p(b) = p$ és una fibració, com hem dit. Finalment, $\alpha_p(b)\zeta$ ens ve ja factoritzat en la forma $\alpha\varphi$. Pel que hem vist i per definició de les fibracions de $\mathcal{A}$, concloem que és una fibració, com volíem demostrar.

Dualment, veiem que si en el push-out de $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\theta} & b \\ {\scriptstyle\omega}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\chi\beta_j(b)} \\ a & \xrightarrow{\psi\beta_i(a)} & a \sqcup_c b \end{array}$$

θ és una cofibració, aleshores ho és $\psi\beta_i(a)$. En efecte, per definició de cofibració en $\mathcal{A}$, en el corresponent push-out de $\mathcal{E}$,

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{g} & y \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j} \\ x & \xrightarrow{i} & x \sqcup_z y \end{array}$$

g és una cofibració i com que $\mathcal{E}$ és una categoria de models, també ho serà i. Quant al push-out de $\mathcal{A}_{x\sqcup_z y}$,

$$\begin{array}{ccc} c' & \xrightarrow{j_*(\psi_\theta)} & j_*b \\ {\scriptstyle i_*(\psi_\omega)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\chi} \\ i_*a & \xrightarrow{\psi} & i_*a \sqcup_{c'} j_*b \end{array}$$

ψ_θ és una cofibració, per definició de les cofibracions de $\mathcal{A}$ i $j_*(\psi_\theta)$ perquè les imatges directes preserven les cofibracions entre categories de models *tancades*. Es segueix que ψ és una cofibració perquè la categoria-fibra és una categoria de models. Com que $\psi\beta_i(a)$ vé donat en la factorització $\psi\beta$ i hem vist que tant i com ψ són cofibracions, es segueix que ho és el morfisme que volíem.

M4. Per veure que les fibracions trivials es preserven per pull-backs, suposi's en la demostració de M3 que θ és una fibració trivial. Aleshores la g del diagrama (3) de (1.3) i φ_θ també per definició de les equivalències febles; $q^*(\varphi_\theta)$ del diagrama (4) també perquè les imatges recíproques preserven les equivalències febles; p i ζ dels diagrames (3) i (4) de (1.3) perquè les fibracions trivials són estables per pull-backs en les categories de models. Finalment $\alpha_p(a)\zeta$ és una equivalència feble de $\mathcal{A}$ perquè $P(\alpha_p(a)\zeta) = p$ ho és i la seva component φ, ζ, també, pel que s'ha dit.

Quant a les cofibracions trivials i push-outs, si en la demostració de M3 θ és a més a més una equivalència feble, també ho serà g i per tant i. Per tant (veure les observacions que precedeixen la demostració) $\beta_i(a)$ és una cofibració trivial. Per M2, també ho serà ψ_θ i la seva imatge per j_*, ja que les imatges directes preserven les cofibracions trivials. Es segueix que ψ és una cofibració trivial i també $\psi\beta_i(a)$.

Retractes. Suposem finalment, que tant $\mathcal{E}$ com les categories-fibra són categories de models *tancades*. Per a una categoria de models, això equival a que els retractes d'equivalències febles, fibracions i cofibracions siguin, respectivament, equivalències febles, fibracions i cofibracions. Veiem que $\mathcal{A}$ verifica aquesta propietat. Sigui

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\omega"'] & c \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\theta"'] & a \arrow[d, "\omega"'] \\ b \arrow[r, "\mu"] & d \arrow[r, "\lambda"] & b \end{tikzcd}$$

un retracte de $\mathcal{A}$. Siguin x, y, z i u les imatges per P de a, b, c i d, respectivament. Siguin f, g, r, s, l i m les imatges per P de $\omega, \theta, \rho, \sigma, \lambda$ i μ, respectivament. Aleshores

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & x \arrow[d, "f"'] \\ z \arrow[r, "m"] & u \arrow[r, "l"] & z \end{tikzcd}$$

és un retracte de $\mathcal{E}$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\varphi_\sigma"] \arrow[d, "\omega"'] & s^*c \arrow[r, "s^*(\varphi_\rho)"] \arrow[d, "s^*(\varphi_\theta)"'] & a \arrow[d, "\omega"'] \\ f^*b \arrow[r, "f^*(\varphi_\mu)"] & (mf)^*d \arrow[r, "(mf)^*(\varphi_\lambda)"] & f^*b \end{tikzcd}$$

és un retracte de $\mathcal{A}_x$, i

$$\begin{tikzcd} f_*a \arrow[r, "(fr)_*(\psi_\sigma)"] \arrow[d, "\psi_\omega"'] & (fr)_*c \arrow[r, "f_*(\psi_\rho)"] \arrow[d, "l_*(\psi_\theta)"'] & f_*a \arrow[d, "\psi_\omega"'] \\ b \arrow[r, "l_*(\psi_\mu)"] & l_*d \arrow[r, "\psi_\lambda"] & b \end{tikzcd}$$

és un retracte de $\mathcal{A}_y$. Utilitzant el primer i el segon, les definicions d'equivalència feble i fibració, i la seva preservació per les imatges recíproques, hom veu que els retractes de totes dues són equivalències febles i fibracions, respectivament. Utilitzant el primer i el tercer, la definició de cofibració i la seva preservació per imatges directes, hom veu que els retractes de cofibracions són cofibracions.

Amb el què acabem aquesta demostració. $\square$

(2.3) $\mathbf{Adgc}(R)^2$ i $\mathbf{Mdg}$ són categories de models . Veiem algunes conseqüències del teorema 3 de (2.1).

En aquest apartat, $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero i R una $\mathbf{k}$-àlgebra unitària commutativa.

Corol·lari 1. $\mathbf{Mdg}$ *(resp.,* $\mathbf{Mdg}_*$*) és una categoria de models tancada, escollint com a morfismes distingits els següents: direm que un parell* $(f, \varphi) : (A, M) \longrightarrow (B, N)$ *de* $\mathbf{Mdg}$ *(resp., de* $\mathbf{Mdg}_*$*) és una*

(i) *we: si* f *és una equivalència feble de* $\mathbf{Adgc}(R)$ *(resp., de* $\mathbf{Adgc}_*(R)$*) i* $\varphi : M \longrightarrow f^*N$ *és una equivalència feble de* $\mathbf{Mdg}(A)$*,*

(ii) *fib: si* f *és una fibració de* $\mathbf{Adgc}(R)$ *(resp., de* $\mathbf{Adgc}_*(R)$*) i* $\varphi : M \longrightarrow f^*N$ *és una fibració de* $\mathbf{Mdg}(A)$*, i*

(iii) *cof: si* f *és una cofibració de* $\mathbf{Adgc}(R)$ *(resp., de* $\mathbf{Adgc}_*(R)$*) i* $1 \otimes \varphi : (B, B \otimes_A M) \longrightarrow (B, N)$ *és una cofibració de* $\mathbf{Mdg}(B)$*.*

Demostració. Pels teoremes 1 de § 2 i § 3, capítol II, tant $\mathbf{Adgc}(R)$ com $\mathbf{Mdg}(A)$ són categories de models tancades per a tot $A \in \operatorname{obj} \mathbf{Adgc}(R)$. Es evident que per a tot $f : A \longrightarrow B \in \operatorname{mor} \mathbf{Adgc}(R)$ el functor de restricció d'escalars preserva fibracions i equivalències febles. Finalment, si f és una cofibració trivial, aleshores $M \longrightarrow B \otimes_A M$ és una equivalència feble de $\mathbf{Mdg}(A)$ pel teorema 6 de § 4, capítol II. Anàlogament per a $\mathbf{Mdg}_*$. $\square$

Corol·lari 2. $\mathbf{2Mdg}$ *és una categoria de models tancada, escollint com a morfismes distingits els anàlegs del corl·lari anterior.*

Demostració. Sols cal afegir a la demostració del corol·lari anterior el fet que si $\mathcal{C}$ és una categoria de models tancada, aleshores $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ho és també de manera evident. Per tant la fibra de $\mathbf{2Mdg}$ en $A \in \operatorname{obj} \mathbf{Adgc}(R)$, $\mathbf{2Mdg}_A = \mathbf{Mdg}(A) \times \mathbf{Mdg}(A)$ és una categoria de models tancada. $\square$

Corol·lari 3. *Sigui* $\mathcal{C}$ *una categoria de models. Per a tot* $x \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ *escollim en* $x \backslash \mathcal{C}$ *els morfismes distingits com en el teorema 7 de (3.4), capítol I. Aleshores* $\mathcal{C}^2$ *és una* *categoria de models tancada, escollint com a morfismes distingits els següents: direm que un diagrama commutatiu de* $\mathcal{C}$*,*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ C & \xrightarrow{b} & D \end{array}$$

és una:

(i) *we: si* f *i* φ *són equivalències febles de* $\mathcal{C}$*,*

(ii) *fib: si* f *i* φ *són fibracions de* $\mathcal{C}$*, i*

(iii) *cof: si* f *i* $b \sqcup_A \varphi : C \sqcup_A B \longrightarrow D$ *són cofibracions de* $\mathcal{C}$*.*

Demostració. Les hipòtesis (1)-(3) del teorema 3 de (2.1) són immediates i (4) es segueix de la propietat M4 de categoria de models que ens diu que les cofibracions trivials es preserven per push-outs. □

Corol·lari 4. $\mathbf{Adgc}(R)^2$ *i* $\mathbf{Adgc}_*(R)^2$ *són categories de models tancades, escollint com a morfismes distingits els donats pel corol·lari anterior.*

Corol·lari 5. *Sigui* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ *una categoria bifibrada que satisfà les hipòtesis del teorema 3. Suposem, a més a més, que tots els objectes de* $\mathcal{E}$ *i de les categories-fibra són fibrants. Aleshores la inclusió de* $\mathcal{A}_{cof}$ *en* $\mathcal{A}$ *indueix una equivalència de categories*

$$\pi\mathcal{A}_{cof} \cong \mathrm{Ho}\mathcal{A}$$

Demostració. Es segueix del teorema 3, del fet que tots els objectes de $\mathcal{A}$ són fibrants (veure l'observació 2 de (2.1)) i de [Qui$_1$], teorema 1, § 1, capítol I. □

Com a casos particulars, es tenen les categories dels corol·laris 1 a 4. Així, per exemple,

$$\pi\mathbf{Mdg}_{cof} \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}, \quad \pi\mathbf{2Mdg}_{cof} \cong \mathrm{Ho}\mathbf{2Mdg}, \quad \pi\mathbf{Adgc}_*(R)^2_{cof} \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(R)^2$$

etc.

(2.4) Homotopia en les categories bifibrades.En aquest darrer corol·lari, ens ha aparegut l'homotopia en categories bifibrades. Veiem-la amb més detall. Sigui $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$

una categoria bifibrada amb una estructura de categoria de models com la donada pel teorema 3. Per [Qui$_1$], hom té relacions d'homotopia entre els morfismes de $\mathcal{A}$. Explícitament, un objecte camí per a $b \in \operatorname{obj}\mathcal{A}$ es construeix factoritzant la diagonal de b, $\Delta_b : b \longrightarrow b \times b$, a $\mathcal{A}$ en una equivalència feble i una fibració (veure § 3, capítol I).

Construïm una de tals factoritzacions: si $y = Pb$ i $y \xleftarrow{p} y \times y \xrightarrow{q} y$ és el producte en $\mathcal{E}$, aleshores el producte $b \times b$ a $\mathcal{A}$ és

$$b \xleftarrow{\alpha_p(b)\zeta} b \times b \xrightarrow{\alpha_q(b)\xi} b$$

on $p^*b \xleftarrow{\zeta} p^*b \times q^*b \xrightarrow{\xi} q^*b$ és el producte de p^*b i q^*b en la categoria-fibra $\mathcal{A}_{y\times y}$. Sigui

$$y \xrightarrow{s} y^I \xrightarrow{(\partial_1,\partial_0)} y \times y$$

un objecte camí per a y; i.e., una factorització M2(i) de Δ_y: s és una cofibració trivial i (∂_1, ∂_0) una fibració de y. Aleshores, per la construcció de la factorització M2(i) en una categoria de models bifibrada, una tal factorització per a Δ_b a $\mathcal{A}$ s'obté factoritzant el morfisme de $\mathcal{A}_{y^I}$

$$s_*b \xrightarrow{s_*\varphi_{\Delta_b}} s_*s^*(\partial_1,\partial_0)^*(p^*b \times q^*b) \xrightarrow{\varepsilon_{(\partial_1,\partial_0)^*(p^*b\times q^*b)}} (\partial_1,\partial_0)^*(p^*b \times q^*b) \qquad (3)$$

o, el que és el mateix,

$$s_*b \xrightarrow{s_*\Delta_b} s_*(b \times b) \xrightarrow{\varepsilon_{(\partial_1^*b\times\partial_0^*b)}} \partial_1^*b \times \partial_0^*b \qquad (4)$$

(Observació: a (3) Δ_b és la diagonal de b a $\mathcal{A}$; a (4) la del mateix objecte, però a $\mathcal{A}_y$.)

Sigui

$$s_*b \xrightarrow{\chi} b^I \xrightarrow{\rho} \partial_1^*b \times \partial_0^*b$$

una factorització M2(i) de (4) a $\mathcal{A}_{y^I}$. Aleshores la factorització cercada de Δ_b a $\mathcal{A}$ és

$$b \xrightarrow{\sigma} b^I \xrightarrow{(\delta_1,\delta_0)} b \times b$$

on $\sigma = \chi\beta_s(b)$ i $(\delta_1, \delta_0) = \alpha_{(\partial_1,\partial_0)}(b \times b)\rho$.

Una homotopia per aquest objecte camí entre dos morfismes $\omega, \theta : a \longrightarrow b$ de $\mathcal{A}$ és un morfisme

$$\Gamma : a \longrightarrow b^I$$

tal que $(\delta_1, \delta_0)\Gamma = (\omega, \theta)$. En particular, si $x = Pa$ i $y = Pb$, es té una homotopia a $\mathcal{E}$,

$$P\Gamma : x \longrightarrow y^I$$

entre $f = P\omega$ i $g = P\theta$.

Exemple . Siguin $(f, \varphi), (g, \psi) : (A, M) \longrightarrow (B, N)$ dos morfismes de $\mathbf{Mdg}$. Per (2.2), capítol II, un objecte camí per a B és

$$B \xrightarrow{s} B(t, dt) \xrightarrow{(\partial_1, \partial_0)} B \times B$$

i el morfisme (4) de $\mathbf{Mdg}(B(t, dt))$ que hem de factoritzar

$$B(t, dt) \otimes_B N \xrightarrow{\Delta_N \otimes \Delta_N} B(t, dt) \otimes_B N \times B(t, dt) \otimes_B N \xrightarrow{\varepsilon} \partial_1^* N \times \partial_0^* N$$

on ε és el morfisme de $B(t, dt)$-mòduls dg definit per les avaluacions en 0 i 1. En aquest cas, $(\delta_1, \delta_0) = \varepsilon(\Delta_N \otimes \Delta_N)$ és ja una fibració i per tant una homotopia de (f, φ) en (g, ψ) és un morfisme de $\mathbf{Mdg}$,

$$(h, \Phi) : (A, M) \longrightarrow (B(t, dt), B(t, dt) \otimes_B N)$$

tal que $h : A \longrightarrow B(t, dt)$ és una homotopia de $\mathbf{Adgc}(R)$ de f en g i $\Phi : M \longrightarrow h^*(B(t, dt) \otimes_B N)$ és un morfisme de $\mathbf{Mdg}(A)$ tal que $\delta_1 \Phi = \varphi : M \longrightarrow f^* N$ i $\delta_0 \Phi : M \longrightarrow g^* N$.

§ 3. Existència de models functorials.

En aquest § $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero i R una $\mathbf{k}$-àlgebra unitària commutativa.

(3.1) Models functorials d'àlgebres. Enunciem i demostrem els resultats tant sols per a la factorització M2(ii) i per a àlgebres dgc, deixant al lector la traducció evident per a la factorització M2(i), àlgebres dgc augmentades i mòduls dg.

Sigui $\varphi : A \longrightarrow X$ un morfisme de R-àlgebres dgc. Com hem vist en el capítol I, aquest morfisme admet un model cofibrant; i.e., es té un diagrama commutatiu de R-àlgebres dgc,

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ C_A X \arrow[rr, "\rho"'] & & X \end{tikzcd}$$

on ι és una cofibració i ρ una fibració trivial. Aquesta factorització, tal com es fa en el capítol I, és natural en φ.

Teorema 1. *Les correspondències $\varphi \mapsto \iota$ i $\varphi \mapsto \rho$ defineixen un functor*

$$C : \mathbf{Adgc}(R)^2 \longrightarrow \mathbf{Adgc}(R)^2$$

i un morfisme de functors

$$q : C \longrightarrow 1_{\mathbf{Adgc}(R)^2} \ ,$$

respectivament.

Demostració. Ja hem vist la definició del functor i del morfisme de functors sobre els objectes. Pel que fa als morfismes: donat un morfisme de $\mathbf{Adgc}(R)^2$ de $\varphi : A \to X$ en $\psi : B \to Y$, és a dir, un diagrama commutatiu de $\mathbf{Adgc}(R)$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\omega"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd}$$

considerem el primer estadi de les factoritzacions M2(ii) de φ i ψ (veure [B-G] i l'observació que segueix al teorema 1, § 2, capítol II; cf. amb la demostració del teorema 1, § 3 del mateix capítol):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\omega"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

on $C_1 = C_1X$ i $C'_1 = C_1Y$ i $j_1a = a\otimes 1\otimes 1$, $q_1(a\otimes t_x\otimes s_z) = \varphi(a)\cdot x\cdot z$. Anàlogament per a j'_1 i q'_1.

Definim $\chi_1 = C_1(f,\omega)$ per

$$\chi_1(a\otimes t_x\otimes s_z) = fa\otimes t_{\omega x}\otimes s_{\omega z}$$

Observem que:

(1) χ_1 està ben definit: si $z\in ZX$ aleshores $\omega z\in ZY$,
(2) (f,χ_1) és un morfisme de $\mathbf{Adgc}(R)^2$; i.e., el quadrilàter de l'esquerra de (1) és commutatiu, i
(3) (χ_1,ω) és un morfisme de $\mathbf{Adgc}(R)^2$; i.e., el quadrilàter de la dreta de (1) és commutatiu, com hom comprova fàcilment:

$$\begin{aligned} q'_1\chi_1(a\otimes t_x\otimes s_z) &= q'_1(fa\otimes t_{\omega x}\otimes s_{\omega z}) = \psi(fa)\cdot\omega x\cdot\omega z \\ &= \omega(\varphi a\cdot x\cdot z) = \omega q_1(a\otimes t_x\otimes s_z) \end{aligned}$$

Construït χ_n de manera que els dos quadrilàters

$$\begin{tikzcd} C_{n-1} \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "\chi_{n-1}"'] & C_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "\chi_n"'] & X \arrow[d, "\omega"'] \\ C'_{n-1} \arrow[r, "j'_n"] & C'_n \arrow[r, "q'_n"] & Y \end{tikzcd}$$

commutin, definim $\chi_{n+1} : C_{n+1}\longrightarrow C'_{n+1}$: per la propietat universal del push-out

$$\begin{tikzcd} SZq_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Theta"'] & C_n \arrow[d, "j_{n+1}"'] \\ T(Zq_n[1]) \arrow[r, "\beta"] & C_{n+1} \end{tikzcd}$$

basta tenir morfismes $C_n\longrightarrow C'_{n+1}$ i $T(Zq_n[1])\longrightarrow C'_{n+1}$ de manera que les composicions amb α i Θ commutin: hom prendrà $\lambda = \lambda(f,\omega) : SZq_n\longrightarrow SZq'_n$ i $\mu = \mu(f,\omega) : TZq_n\longrightarrow TZq'_n$ com $\lambda s_{(w,x)} = s_{(\chi_n w,\omega x)}$ i $\mu t_{(w,x)} = t_{(\chi_n w,\omega x)}$. Observem que ambdues definicions són correctes: si $(w,x)\in Zq_n$ aleshores $(\chi_n w,\omega x)\in Zq'_n$.

Lema. *Amb les definicions anteriors, es té*

(1) $\alpha'\lambda = \chi_n\alpha$
(2) $\Theta'\lambda = \mu\Theta$

Demostració del lema. Pel que fa a la primera igualtat:

$$\alpha'\lambda s_{(w,x)} = \alpha' s_{(\chi_n w, \omega x)} = \chi_n w = \chi_n \alpha s_{(w,x)}$$

i quant a la segona:

$$\Theta'\lambda s_{(w,x)} = \Theta' s_{(\chi_n w, \omega x)} = dt_{(\chi_n w, \omega x)} = d\mu t_{(w,x)} = \mu dt_{(w,x)} = \mu\Theta s_{(w,x)}$$

Llavors $\beta'\mu$ i $j'_{n+1}\chi_n$ són els morfismes que ens induiran χ_{n+1} ja que, com és fàcil de veure, $\beta'\mu\Theta = j'_{n+1}\chi_n\alpha$. Hom comprova sense dificultat que χ_{n+1} així definit verifica les hipòtesis d'inducció: $j'_{n+1}\chi_n = \chi_{n+1}j_{n+1}$ i $\omega q_{n+1} = q'_{n+1}\chi_{n+1}$ i definim

$$C(f,\omega) = \varinjlim \chi_n$$

Es segueix immediatament de la construcció que tant (f,χ) com (χ,ω) són morfismes de $\mathbf{Adgc}(R)^2$. Quant a la functorialitat, finalment, per la functorialitat de $\varinjlim$, basta comprovar les igualtats

$$C(1,1) = 1$$
$$C(gf,\theta\omega) = C(g,\theta)C(f,\omega)$$

sobre cada etapa de la construcció. Per exemple la segona per a $n=1$ es veu així

$$\begin{aligned} C_1(gf,\theta\omega)(a\otimes t_x\otimes s_z) &= (gfa)\otimes t_{\theta\omega x}\otimes s_{\theta\omega z} = C_1(g,\theta)(fa\otimes t_{\omega x}\otimes s_{\omega x}) \\ &= C_1(g,\theta)C_1(f,\omega)(a\otimes t_x\otimes s_z) \end{aligned}$$

Suposem-ho cert per a n i demostrem-ho per a $n+1$: hom es redueix a comprovar la igualtat per a μ: $\mu(gf,\theta\omega) = \mu(g,\theta)\mu(f,\omega)$ i aquesta es segueix de les definicions dels morfismes i de la hipòtesi d'inducció. $\square$

En particular, si fixem l'àlgebra dgc A, tenim l'operació *objecte* $\mapsto$ *model* definida com un functor al nivell de les categories:

$$C_A : \mathbf{Adgc}(A) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(A)$$

(3.2) Commutació amb colímits. L'afirmació fa intervenir novament les dues variables del functor. Per aquesta raó utilitzarem el resultat sobre colímits en categories bifibrades de (1.3).

Proposició 2. *El functor model cofibrant de B-G preserva colímits filtrats.*

Demostració. Sigui I una categoria filtrant i $F : I \longrightarrow \mathbf{Adgc}(R)^2$ un functor. Sigui $F(i) = \varphi_i : A_i \longrightarrow X_i$ la imatge de $i \in \operatorname{obj} I$. Pel que fa a l'etapa 1 de la construcció del model cofibrant de B-G, per la proposició 1^o de (1.3), la projecció del colímit és el colímit dels A_i,

$$P \varinjlim C_1 Fi = \varinjlim PC_1 Fi = \varinjlim A_i = A$$

i el colímit dels models cofibrants, el que obtenim traslladant-los a la fibra en $\varinjlim A_i$: si $u_i : A_i \longrightarrow A$ són les components del con límit, aleshores

$$\begin{aligned}
\varinjlim C_1 F(i) &= \varinjlim u_* C_1 Fi = \varinjlim u_{i*} C_1 Fi = \varinjlim A \otimes_{A_i} C_1 X_i \\
&= \varinjlim A \otimes_{A_i} A_i \otimes TX_i \otimes SZX_i = A \otimes \varinjlim TX_i \otimes \varinjlim SZX_i \\
&= A \otimes T(\varinjlim X_i) \otimes SZ(\varinjlim X_i) \\
&= C_1 \varinjlim Fi
\end{aligned}$$

ja que $\otimes$ és un colímit i per tant commuta amb colímits i el functor àlgebra graduada lliure T té el functor d'oblit com a adjunt per la dreta. Pel que fa a SZ, observem que per a un conjunt graduat qualsevol W, SW es calcula amb colímits: $SW = TW/B \cdot TW$, on $B = \operatorname{im} d_{TW}$ i $B \cdot TW$ és la sub-àlgebra dgc generada per B. Per acabar amb l'etapa 1, $ZX_i = \ker d_{X_i}$ és un límit, però finit i per tant també commuta amb colímits filtrats.

Suposada la commutació de C_n amb $\varinjlim$, el push-out que ens defineix $C_{n+1}X_i$ és un colímit i per tant $\varinjlim C_{n+1}X_i$ ve donat pel push-out

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim SZq_{n,i} \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim C_n X_i \\
\varinjlim T(Zq_{n,i}[1]) &
\end{tikzcd}$$

i per tant $\varinjlim C_{n+1}F(i) = C_{n+1} \varinjlim F(i)$. Finalment, $C_{A_i}X_i$ és també un colímit: $\varinjlim_n C_n X_i$, i per tant commuta amb $\varinjlim_i$. $\square$

(3.3) Models de feixos. Sigui $(X, \mathcal{O}_X)$ un espai anellat, on $\mathcal{O}_X$ és un feix de $\mathbf{k}$-àlgebres unitàries commutatives. Sigui $\mathcal{A}$ un feix de $\mathcal{O}_X$-àlgebres dgc augmentades. Com a conseqüència de (3.1), per a cada obert $U \subset X$, la correspondència

$$U \mapsto C_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{A}(U))$$

defineix un prefeix i per tant també

$$U \mapsto \pi^p{}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{A}(U)) = H^p Q_{\mathcal{O}_X(U)} C_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{A}(U))$$

(deixem com a exercici per al lector comprovar que Q és també un functor en les dues variables).

DEFINICIÓ 1. Anomenarem p-èssim *grup d'homotopia* del feix $\mathcal{A}$ al feix de $\mathcal{O}_X$-mòduls $\pi^p{}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{A}$ associat al prefeix $U \mapsto \pi^p{}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{A}(U))$.

Es segueix de (3.2) la commutació d'aquests grups d'homotopia amb el prendre la fibra del feix en un punt.

Proposició 3. *Per a tot feix $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_X$-àlgebres dgc augmentades, $x \in X$ i $p \geq 0$, es tenen isomorfismes de $\mathcal{O}_{X,x}$-mòduls*

$$(\pi^p{}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{A})_x \cong \pi^p{}_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{A}_x$$

naturals en $\mathcal{O}_X$ i en $\mathcal{A}$.

OBSERVACIÓ. Excepte pel functor de cohomologia, la nostra definició coincideix amb la de [Na2] per a feixos de $\mathcal{O}_X$-àlgebres dgc augmentades provistos d'una connexió integrable. En el seu cas, la definició es fa a partir de models minimals de les $\mathcal{O}_X(U)$-àlgebres dgc augmentades $\mathcal{A}(U)$ i la hipòtesi de la connexió permet assegurat la existència de tals models.

CAPITOL IV. MODELS MINIMALS.

Introducció.

Aquest capítol s'ordena de la manera següent: en el § 1, donem una definició categòrica d'objecte minimal. Aquesta definició produeix els objectes coneguts en diversos exemples. Mostrem com les propietats usuals (e.g., les que hom troba per a les àlgebres dgc minimals de Sullivan) es segueixen de la nostra definició categòrica. En particular, demostrem que en les categories de models tancades tot objecte minimal és cofibrant. En el § 2, a títol d'exemple, estudiem en primer lloc, els objectes minimals de la categoria de complexos de cocadenes de mòduls a coeficients en un anell qualsevol. En aquest cas, la descripció dels objectes minimals és incompleta: no sabem si tot complex de cocadenes té un model minimal, ni coneixem una descripció explícita (altra que la definició categòrica general) dels objectes minimals de la categoria. La situació és diferent, per a certs anells particulars. Per exemple les àlgebres de grup o els cossos. Un altre és el d'anell local noetherià: per tal d'incloure les resolucions minimals de Eilenberg-Tate-Jozefiak mostrem l'existència de tals "resolucions" per a complexos de cocadenes. En el § 3, considerem la categoria d'àlgebres dgc a coeficients en un anell R. Mostrem con la generalització de les $\mathbf{Q}$-àlgebres dgc minimals de Sullivan produeix objectes minimals en el sentit categòric de § 1. A diferència del cas $R=\mathbf{Q}$, en aquesta categoria, no tot objecte té un model minimal dels esmentats. En el § 4, hom veu com en la categoria de mòduls dg a coeficients en una àlgebra dgc, els objectes similars als de Sullivan són minimals en el sentit categòric i,sota hipòtesis adequades per a l'àlgebra de coeficients, són tots els minimals de la categoria. En el § 5 estudiem el problema dels objectes minimals en categories bifibrades, aplicant-ho a les categories de morfismes d'àlgebres dgc, de parelles mòduls dg/àlgebres dgc i triples. Finalment, en § 6 estudiem la formalitat en les dues primeres categories. En concret, després de proposar una definició categòrica de formalitat, mostrem que és independent del cos base, generalitzant el conegut resultat de Sullivan.

§ 1 Definició categòrica d'objecte minimal.

(1.1) Definicions. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$ un subconjunt dels morfismes de la categoria. Si $a \longrightarrow b \in S$, posarem $a \stackrel{\sim}{\longrightarrow} b$.

Definició 1. Direm que dos objectes, $a, b \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ són S-*equivalents* si existeix una successió de morfismes de S

$$a \stackrel{\sim}{\longleftarrow} \cdot \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \cdot \stackrel{\sim}{\longleftarrow} \cdot \ldots \cdot \stackrel{\sim}{\longrightarrow} b \tag{1}$$

unint a i b. Notarem aquest fet per $a \simeq b$.

Si S inclou els isomorfismes de $\mathcal{C}$, aleshores $a \cong b$ implica $a \simeq b$. Les nocions conegudes de minimalitat tenen com a conseqüència el fet que, si a i b són minimals, aquesta implicació és una equivalència. Altrament dit, es té una bijecció

$$\{\text{tipus de } S\text{-equivalència de minimals}\} \leftrightarrow \{\text{tipus d'isomorfisme de minimals}\} \tag{2}$$

Com veurem, la definició següent comporta aquesta bijecció. Així mateix, a (1.4), (1.5) i (1.6), li donarem un sentit més precís.

Definició 2. Un objecte m de $\mathcal{C}$ és *minimal per l'esquerra* si per a tot $x \stackrel{s}{\longrightarrow} m \in S$, existeix $m \stackrel{s'}{\longrightarrow} x$ morfisme de $\mathcal{C}$, tal que $ss' = 1_m$.

Direm que $m \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ és un objecte *minimal per la dreta*, si és un objecte minimal de la categoria oposada $\mathcal{C}^o$. Equivalentment,

Definició 2^o. Un objecte m de $\mathcal{C}$ és *minimal per la dreta* si per a tot $x \stackrel{s}{\longleftarrow} m \in S$, existeix $m \stackrel{s'}{\longleftarrow} x$ morfisme de $\mathcal{C}$, tal que $s's = 1_m$.

En el que segueix, desenvoluparem la teoria tan sols per als objectes minimals *per l'esquerra*, que anomenarem simplement *minimals* i ens limitarem a enunciar els enunciats en el cas dels minimals per la dreta. Veiem un primer resultat que ens parla de la "petitesa" del objectes minimals i que, apart del seu propi interès, utilitzarem en més d'un cop en el § 6 d'aquest capítol.

Recordem que un *subobjecte* d'un objecte b de $\mathcal{C}$ és la classe formada per un monomorfisme $u : a \longrightarrow b$ i tots els obtinguts d'ell per composició amb isomorfismes

$\theta : a' \longrightarrow a$. Hom es refereix als monomorfismes $u\theta$ com els *representants* del subobjecte. Si $u \in S$ per a algun dels representants, aleshores $u\theta \in S$ per a qualsevol representant. Veiem que un objecte minimal no pot tenir subobjectes "estrictes" que li siguin S-equivalents. Amb més precisió,

Proposició 1. *Si* $s : a \longrightarrow m$ *és (un representant de) un subobjecte d'un objecte minimal* m *i* $s \in S$, *aleshores* s *és un isomorfisme.*

Demostració. Per ser m minimal, existeix $s' : m \longrightarrow a \in S$ tal que $ss' = 1_m$. Aleshores $s(s's) = s$ i, per ser s un monomorfisme, es segueix que $s's = 1_a$. Es a dir, s és un isomorfisme. □

La versió relativa de la noció de minimalitat és la següent (cf. [B-G], [Hal] i [H-T]): donada una categoria $\mathcal{C}$, un objecte a de $\mathcal{C}$ i $S \subset \operatorname{mor}\mathcal{C}$, considerem el conjunt de morfismes de $a\backslash\mathcal{C}$, que notarem $a\backslash S$, format per aquells triangles commutatius de $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b \arrow[rr, "s"'] & & c \end{tikzcd}$$

en el qual $s \in S$.

Definició 3. Un morfisme $a \longrightarrow b$ de $\mathcal{C}$ és *minimal* si és $a\backslash S$-minimal com a objecte de la categoria d'objectes sota de a: $a\backslash\mathcal{C}$. Per abús de llenguatge, direm també que b és un objecte a-*minimal* o *minimal relatiu* a a.

De manera anàloga, podem definir els objectes *minimals augmentats* sobre $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ com els objectes minimals de la categoria d'objectes sobre a: $\mathcal{C}/a$ i els a-*minimals augmentats* com els objectes minimals de $\mathcal{C}(1_a)$. Més generalment, donat un morfisme $u : a \longrightarrow b \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$, direm que el diagrama $a \xrightarrow{\iota} m \xrightarrow{\varepsilon} b$ en què $\varepsilon\iota = u$ (o, per abús de llenguatge, l'objecte m) és u-*minimal* si és minimal com a objecte de la categoria $\mathcal{C}(u)$ (veure capítol I). Més explícitament, estem considerant com a conjunt de morfismes $S(u)$ els diagrames commutatius de $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\iota_x"] \arrow[d, equal] & x \arrow[r, "\varepsilon_x"] \arrow[d, "s"'] & b \arrow[d, equal] \\ a \arrow[r, "\iota_m"] & m \arrow[r, "\varepsilon_m"] & b \end{tikzcd}$$

en els quals $\varepsilon_x \iota_x = u = \varepsilon_m \iota_m$ i $s \in S$. El diagrama $a \xrightarrow{\iota} m \xrightarrow{\varepsilon} b$ és minimal doncs si existeix $s' : m \longrightarrow x$ tal que $s' \iota_m = \iota_x$, $\varepsilon_x s' = \varepsilon_m$ i $ss' = 1_m$.

Exemples. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria amb objecte inicial e.

(1) Per a qualsevol elecció de S, e és minimal. En efecte, donat $x \xrightarrow{s} e$ de S, per ser e inicial, existeix $e \xrightarrow{s'} x$ i, per unicitat, $ss' = 1_e$.

(2) $m \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ és un *objecte* minimal si i només si el *morfisme* $e \longrightarrow m$ és minimal. Si a no és l'objecte inicial, el fet que $a \longrightarrow m$ sigui un morfisme minimal no implica que m sigui un objecte minimal, com és ben sabut per al cas de les KS-extensions minimals de la categoria de les $\mathbf{k}$-àlgebres dgc, on $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero (veure [Hal]).

Definició 4. Un S*-model per l'esquerra* (o, simplement, un *model*) d'un objecte a de $\mathcal{C}$ és un morfisme $m \xrightarrow{s} a$ amb $s \in S$. Direm que és un S*-model minimal per l'esquerra* (un *model minimal*) si m és un objecte minimal.

Observacions. (1) Senyalem que la nostra definició d'objecte minimal no coincideix amb la que hom troba en [H-T] per a la categoria de (R, r)-àlgebres. Aquests autors demanen als objectes minimals (de fet, a les fletxes), a més a més d'una condició anàloga a la nostra, de ser cofibrants. Com veurem, si $\mathcal{C}$ és una categoria de models tancada, això darrer es dedueix de la nostra definició.

(2) Tampoc coincideix amb la noció d'*objecte cofibrant* de [Baues] per a categories fibrants: el morfisme s de la definició 2 en *op.cit* ha de ser una fibració trivial.

(3) Finalment, si $a \simeq b$ aleshores $a \cong b$ a $\mathcal{C}_S$. La implicació contrària no és necessàriament certa, com demostra el següent exemple. Senyalem, però, que si $\mathcal{C}$ és una categoria de models i S el seu conjunt d'equivalències febles, aleshores les nocions de S-equivalents i isomorfs en la categoria $\mathcal{C}_S$ coincideixen.

Exemple 3. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria generada per tres objectes a, b, c i quatre morfismes f, s, u, v tals que el diagrama

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & a \\ a & a \arrow[l, "1"] \arrow[u, "1"'] \end{tikzcd}$$

és commutatiu. Prengui's $S = \operatorname{mor} \mathcal{C} \backslash \{f\}$. Aleshores S admet un càlcul de fraccions per la dreta. Per tant (veure (1.1), capítol I) $f/s = 1_a$. En particular, f/s és un isomorfisme de $\mathcal{C}_S$, però $f \notin S$.

(1.2) Algunes propietats. Per tal de veure que la nostra definició d'objecte minimal implica la bijecció (2), ens calen certes hipòtesis sobre el conjunt S, que hom troba en els exemples que veurem i que suposarem vàlides en tot el que segueix:

(i) els isomorfismes de $\mathcal{C}$ estan inclosos dins S, i

(ii) si en el diagrama de $\mathcal{C}$, $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$, dos dels morfismes $\{f, g, gf\}$ són de S, també ho és el tercer.

Aquestes hipòtesis es verifiquen si, p.e., $\mathcal{C}$ és una categoria de models i $S = we$ és el conjunt de les seves equivalències febles.

Proposició 2. *Si m_1 i m_2 són objectes minimals i $m_1 \xrightarrow{s} m_2$ és un morfisme de S, aleshores, s és un isomorfisme.*

Demostració. Per ser m_2 minimal, existeix $s' : m_2 \longrightarrow m_1$ tal que $ss' = 1_{m_2}$. Per (i) i (ii), $s' \in S$. Com que m_1 és minimal, existeix $s'' : m_1 \longrightarrow m_2$ tal que $s's'' = 1_{m_2}$. D'on $s = ss's'' = s''$ i per tant és un isomorfisme. $\square$

Observació. Per a aquest resultat seria suficient suposar, enlloc de (i), la condició més feble de que tan sols les identitats fossin dins de S. Però aleshores, la condició de minimalitat no seria estable per isomorfismes.

Definició 5. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria amb objecte inicial e. Un objecte x de $\mathcal{C}$ és *S-acíclic* si $x \simeq e$.

Corol·lari. *Un objecte x de $\mathcal{C}$ és minimal i acíclic si i només si és inicial.*

Demostració. El fet que inicial impliqui minimal i acíclic, es segueix de l'exemple 1 i del fet que per (i) $1_e \in S$.

Recíprocament, sigui x minimal i acíclic. Aleshores la fletxa $e \longrightarrow x$ és de S per (i), (ii) i la unicitat de la fletxa entre l'objecte inicial i cada objecte. Com que e i x són minimals, per la proposició 1, es tracta d'un isomorfisme. $\square$

El resultat següent demostra l'equivalència de la definició 2 amb la bijecció (1). Alhora, ens dóna un criteri de minimalitat amb el qual hom pot mostrar que els objectes generalment anomenats *minimals*, són minimals en el sentit de la nostra definició.

Proposició 3. *Si $\mathcal{C}$ admet una classe d'objectes $\mathcal{M}$ tal que:*

(a) *tot objecte de $\mathcal{C}$ admet un model (per l'esquerra) dins $\mathcal{M}$, i*
(b) *tot morfisme de S entre objectes de $\mathcal{M}$ és un isomorfisme,*

aleshores:

(1) *els objectes de $\mathcal{M}$ són minimals, i*
(2) *tot objecte minimal de $\mathcal{C}$ és isomorf a algun objecte de $\mathcal{M}$.*

Demostració. Sigui $m \in \mathcal{M}$, veiem que m és minimal. Sigui $x \xrightarrow{s} m$ amb $s \in S$ i $m \in \mathcal{M}$. Per (a), existeix $m' \xrightarrow{t} x$ amb $t \in S$ i $m' \in \mathcal{M}$. Per (b), $st \in S$ és un isomorfisme: sigui u el seu invers. Aleshores, per a $s' = tu$ es té $ss' = 1_m$ i per tant m és minimal.

Quant a (2), sigui $m \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ un objecte minimal. Per (a), existeix $m' \in \operatorname{obj} \mathcal{M}$ i $m' \xrightarrow{s} m \in S$. Per (1) i per la proposició 1, s és un isomorfisme. $\square$

Definició 6. Si $\mathcal{C}$ té una classe d'objectes $\mathcal{M}$ que compleix les condicions (a) i (b) de la proposició 2, es diu que $\mathcal{C}$ *té suficients minimals.*

Observació. Sigui $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ la subcategoria de $\mathcal{C}$ que té per objectes els mateixos de $\mathcal{C}$ i per morfismes els de S. Les condicions (a) i (b) de la proposició 2 equivalen a dir que $\mathcal{M}$ és una subcategoria *inicial* (no necessàriament connexa) -veure [McL]- de $\mathcal{C}'$, en la qual tots els morfismes són isomorfismes. D'altra banda, si $\mathcal{C}'$ admet una subcategoria inicial (no necessàriament connexa), $\mathcal{P}$, les demostracions de minimalitat poden reduir-se a aquesta subcategoria (de fet, això ja ha estat utilitzat en la demostració de la proposició 2). Es a dir, en el diagrama $x \xrightarrow{\sim} m$, sempre podem suposar $x \in \operatorname{obj} \mathcal{P}$. Per exemple, si $\mathcal{C}$ és una categoria de models, sempre podem suposar, si cal, que x és cofibrant.

Exemple 4. ([Hal]) Sigui A una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc cohomologicament connexa. Les KS-extensions minimals $A \longrightarrow B$ són tots els objectes minimals de la categoria $\mathbf{Adgc}_{hc}(A)$. Això es segueix de la proposició anterior i dels teoremes 6.2 i 6.3 de *op.cit.*

Exemple 5. ([B-L]) Les àlgebres de Lie de cadenes minimals són tots els objectes minimals d'aquesta categoria.

Mostrarem d'altres exemples del fet que la definició 2 no afegeix més minimals dels coneguts. Els anomenarem *KS-minimals*, *minimals de Tate*, etc..., per distingir-los dels de la definició 2 (a priori, no necessàriament coincidents).

(1.3) Dependencia de S. Sumants directes aciclics. Fins al moment, hem suposat el conjunt S fix. Tractem breument de la dependència del conjunt d'objectes minimals respecte del conjunt de morfismes S. Obviament, els objectes minimals d'una categoria estan determinats unívocament un cop hem escollit aquest conjunt (de la mateixa manera, que ho està la categoria $\mathcal{C}_S$). Així i tot, diferents conjunts S poden donar lloc a un mateix conjunt d'objectes minimals. Un cas particularment interessant d'aquest fet és el del conjunt d'objectes minimals d'un conjunt de morfismes S i el del seu saturat. Recordem les definicions.

Definició 6. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria. Un conjunt de morfismes S de $\mathcal{C}$ és *saturat* si per a tot $f \in \operatorname{mor}\mathcal{C}$ es té que γf és invertible si i només si $f \in S$. Anomenarem *saturat* de S al conjunt

$$\overline{S} = \{f \in \operatorname{mor}\mathcal{C} \mid \gamma f \in \mathcal{C}_S \text{ és invertible}\}$$

Observacions. Hom té òbviament que $\overline{S}$ és saturat, que $S \subseteq \overline{S}$ i que $S = \overline{S}$ si i només si S és saturat. Senyalem també que la condició de saturat implica les condicions (i) i (ii) de (1.2), almenys en el cas en què S admeti un càlcul de fraccions i que una condició suficient perquè un conjunt sigui saturat és que estigui definit com el conjunt de morfismes de la categoria que es fan invertibles a l'aplicar-los algun functor.

La condició de saturat ens permet conèixer quins són exactament els morfismes invertibles de la categoria $\mathcal{C}_S$ -en el cas de càlcul de fraccions, almenys. La proposició següent ens diu que, al treballar amb objectes minimals, sempre podem suposar que el conjunt S és saturat (propietat que, d'altra banda, es té per al conjunt d'equivalències febles d'una categoria de models *tancada* per [Qui], proposició 1, pàgina 5.5).

Notació. $\mathcal{M}(S) = \{m \in \operatorname{obj}\mathcal{C} \mid m \text{ és } S\text{-minimal}\}$.

Proposició 4. $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(\overline{S})$.

Demostració. En general, si $S_1 \subset S_2$ aleshores $\mathcal{M}(S_1) \supset \mathcal{M}(S_2)$, com és fàcil de comprovar. Per tant basta comprovar que $\mathcal{M}(S) \subset \mathcal{M}(\overline{S})$. Sigui doncs, $m \in \mathcal{M}(S)$ i $f : x \longrightarrow m \in \overline{S}$. Per definició, $\gamma f \in \operatorname{mor} \mathcal{C}_S$ és invertible. Sigui $x \xleftarrow{t} \cdot \xrightarrow{g} m$ el seu invers. Un exercici senzill de càlcul de fraccions per la dreta ens mostra que això darrer és equivalent a que existeixin $f' \in \operatorname{mor} \mathcal{C}$ i $t', u, v \in S$ tals que $gf'u = t'u$ i $fgv = tv$. Aleshores, com que m és S-minimal i $tv \in S$, existeix s tal que $tvs = 1_m$ i per tant gvs és una secció de f: $fgvs = tvs = 1_m$. Es a dir, m és $\overline{S}$-minimal. $\square$

Per acabar amb aquestes generalitats, veiem un resultat en el cas de les categories additives. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria additiva. Notarem el biproducte per $\oplus$. Suposarem també que S és *estable per biproductes*, és a dir:

$$x_1 \xrightarrow{f_1} y_1,\ x_2 \xrightarrow{f_2} y_2 \ \in S \implies x_1 \oplus x_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}} y_1 \oplus y_2 \ \in S$$

Aquest és el cas, per exemple, si $\mathcal{C}$ és la categoria de complexos d'una categoria abeliana i $S = quis$, els morfismes que indueixen isomorfismes en homologia.

En aquesta situació es té:

Proposició 5. *$m \oplus n$ minimal $\Rightarrow$ m i n minimals.*

Demostració. Sigui $x \xrightarrow{r} m \in S$. Aleshores

$$x \oplus n \xrightarrow{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}} m \oplus n$$

també és de S i per tant existeix $\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ tal que

$$1_{m \oplus n} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs & rt \\ u & v \end{pmatrix}$$

En particular, $rs = 1_m$ i per tant m és minimal. $\square$

Corol·lari. *Un objecte minimal no admet sumants directes propis acíclics.*

(1.4) Objectes minimals i càlcul de fraccions. La proposició 2 no implica que dos objectes minimals S-equivalents siguin isomorfs: cal que siguin units per *un* morfisme de S.

EXEMPLE 6. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria generada per tres objectes a, b, c i dos morfismes $s : a \longrightarrow b$ i $t : c \longrightarrow b$. Sigui $S = \operatorname{mor} \mathcal{C}$. Aleshores els objectes a i c són minimals, però no són isomorfs.

Aquest cas no es pot donar si S admet un càlcul de fraccions per la dreta. Es té aleshores que tota successió del tipus (1) es redueix a

$$a \overset{\sim}{\longleftarrow} \cdot \overset{\sim}{\longrightarrow} b \tag{3}$$

(veure [G-Z]). En aquesta situació, si a és minimal, existeix $a \longrightarrow \cdot$, secció de la primera fletxa de (3). Per (i) i (ii) de (1.2), és de S. Composant-la amb la segona fletxa de (3), tenim un morfisme de S que uneix a i b.

La proposició 2 implica aleshores

Proposició 6. *Sigui S un conjunt de morfisme de $\mathcal{C}$ que verifiqui (i), (ii) i admeti un càlcul de fraccions per la dreta. Si a, $b \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, $a \simeq b$ i a i b són minimals, aleshores $a \cong b$.*

De fet, en el cas en què S admeti un càlcul de fraccions per la dreta, podem donar un sentit més precís a la bijecció (2) en termes d'equivalències de categories.

En aquest apartat suposarem que S satisfà les condicions de (i) i (ii) de (1.2) i que admet un càlcul de fraccions per la dreta.

Proposició 7. *Siguin $\rho : a \overset{\sim}{\longrightarrow} b \in S$ i $f : m \longrightarrow b$ un morfisme amb m minimal. Aleshores existeix un únic $\overline{f} : m \longrightarrow a$ tal que $\rho \overline{f} = f$.*

Demostració. Per les propietats de càlcul de fraccions per la dreta, per a tot diagrama de $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\rho"', "\sim"] \\ m \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

existeixen $x \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ i morfismes $\rho' : x \xrightarrow{\sim} m$ i $f' : x \to a$ que fan commutatiu el diagrama. Com que m es minimal, ρ' té una secció $s : m \longrightarrow x$ tal que $\rho' s = 1_m$. Hom pren $\overline{f} = f's$ i es té: $\rho\overline{f} = \rho f' s = f\rho' s = f$.

Pel que fa a la unicitat, sigui $g : m \longrightarrow a$ un altre morfisme tal que $\rho g = f$. Aleshores $\rho\overline{f} = \rho g$. Com que $\rho \in S$, per càlcul de fraccions, existeix $r : z \longrightarrow m \in S$ tal que $\overline{f} r = gr$. Com que m és minimal, aquest morfisme té una secció $s : m \longrightarrow z$, $rs = 1_m$. Aleshores $g = grs = \overline{f} rs = \overline{f}$. $\square$

Observació. Obviament el recíproc també és cert: si un objecte m satisfà la propietat d'aixecament de la proposició 7, aleshores és minimal, amb l'afegit que la secció s' és única.

Exemple 7. Els minimals de la categoria $K^-(\mathcal{A})$ són els complexos projectius grau a grau.

Corol·lari. *Dos models minimals d'un mateix objecte a són isomorfs per un isomorfisme únic de $\mathcal{C}/a$.*

Demostració. Siguin $m_1 \xrightarrow{\rho_1} a \xleftarrow{\rho_2} m_2$ dos models minimals de a. Per la proposició anterior, existeixen morfismes únics $\rho'_1 : m_1 \longrightarrow m_2$ i $\rho'_2 : m_2 \longrightarrow m_1$ tals que $\rho_2\rho'_1 = \rho_1$ i $\rho_1\rho'_2 = \rho_2$. Aleshores $\rho_1\rho'_2\rho'_1 = \rho_2\rho'_1 = \rho_1$. Per unicitat, $\rho'_2\rho'_1 = 1_{m_1}$ i, anàlogament, $\rho'_1\rho'_2 = 1_{m_2}$. $\square$

La proposició següent ens permetrà definir el functor model minimal sobre els morfismes, quan $\mathcal{C}$ tingui suficients minimals.

Proposició 8. *Sigui $f : a \longrightarrow b$ un morfisme de $\mathcal{C}$ i $\rho_a : m_a \longrightarrow a$ i $\rho_b : m_b \longrightarrow b$ dos models minimals. Aleshores existeix un morfisme únic $m_f : m_a \longrightarrow m_b$, tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} m_a & \xrightarrow{\rho_a} & a \\ {\scriptstyle m_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ m_b & \xrightarrow{\rho_b} & b \end{array} \tag{4}$$

és commutatiu. Direm que m_f és el model minimal de f corresponent als models minimals $\rho_a : m_a \xrightarrow{\sim} a$ i $\rho_b : m_b \xrightarrow{\sim} b$.

Demostració. Com que S admet un càlcul de fraccions es té un diagrama commutatiu,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\sim", "\rho'_b"'] \arrow[d, "f'"] & a \arrow[d, "f"] \\ m_b \arrow[r, "\sim", "\rho_b"'] & b \end{tikzcd}$$

en el qual $\rho'_b \in S$. Per la mateixa raó, es té un segon diagrama commutatiu,

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "\sim", "\rho''_b"'] \arrow[d, "\rho'_a", "\sim"'] & m_a \arrow[d, "\rho_a", "\sim"'] \\ x \arrow[r, "\sim", "\rho'_b"'] & a \end{tikzcd}$$

Per tant, existeix $s : m_a \longrightarrow y$ tal que $\rho''_b s = 1_m$. Posem $m_f = f'\rho'_a s$. Es té, $\rho_b m_f = \rho_b f'\rho'_a s = f\rho'_b\rho'_a s = f\rho_a\rho''_b s = f\rho_a$.

Sigui $\varphi : m_a \longrightarrow m_b$ un altre morfisme que faci commutatiu el diagrama (4): $\rho_b\varphi = f\rho_a = \rho_b m_f$. Com que $\rho_b \in S$, per càlcul de fraccions, això implica que existeix $r : z \longrightarrow m_a \in S$ tal que $\varphi r = m_f r$. Com que m_a és minimal, existeix $s : m_a \longrightarrow z$ tal que $rs = 1_{m_a}$. Aleshores, $\varphi = \varphi rs = m_f rs = m_f$. $\square$

OBSERVACIÓ. m_f no és necessàriament el model minimal de f *en tant que objecte de* $a\backslash\mathcal{C}$. Per exemple, llevat de que a no sigui minimal, m_f no té perquè ser un objecte d'aquesta categoria. D'altra banda, si a i b fossin tots dos minimals, podríem escollir $m_f = f$. Però no tot morfisme entre dos objectes minimals és un morfisme minimal, com ens mostra l'exemple següent.

EXEMPLE 8. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria generada per tres objectes a, b, c i quatre morfismes f, g, s, s' com en el diagrama,

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "f"] \\ c \arrow[r, "s"] & b \end{tikzcd}$$

amb les relacions $sg = f$ i $ss' = 1_b$. Aleshores a i b són objectes minimals, però f no és un morfisme minimal ja que $s'f \neq g$.

Fins aquí no hem suposat pas l'existència d'un model minimal per a tot objecte de la categoria. Suposem que $\mathcal{C}$ tingui suficients minimals: per a tot $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$, escollim un model minimal i el notem per $\rho_a : M(a) \to a$. Així mateix, notem per $\mathcal{C}_m$ (o per $\mathcal{C}_{min}$ quan hi hagi perill de confondre-la amb una categoria-fibra) la subcategoria plena de $\mathcal{C}$ formada pels objectes minimals de $\mathcal{C}$. Del resultat anterior es segueix el

Corol·lari. *Es té un functor*

$$M : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_m \ ,$$

definit sobre els objectes per $M(a) = m_a$ *i sobre els morfismes per* $M(f) = m_f$*; i un morfisme de functors*

$$\rho : M \longrightarrow 1_{\mathcal{C}_m}$$

definit per $\rho_a : m_a \longrightarrow a$*.*

Demostració. Malgrat que es tinguin diferents eleccions per a $M(a)$, totes són isomorfes per *un sol* isomorfisme. $\square$

Pel que hem vist, és clar que el functor M transforma els morfismes de S en isomorfismes de $\mathcal{C}_m$, ja que si, en el diagrama (4), $f \in S$, aleshores $f\rho_a : m_a \longrightarrow b$ és un model minimal de b. Per tant existeix un isomorfisme de $\mathcal{C}/b$, $\varphi : m_a \longrightarrow m_b$ el qual, per unicititat, és igual a m_f; i.e., m_f és un isomorfisme de $\mathcal{C}_m$. Per tant, M factoritza de manera única a través del functor de localització $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$. Altrament, es té un diagrama commutatiu de functors

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \mathcal{C}_m \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\ \mathcal{C}_S & & \end{array}$$

Notarem també per M aquesta factorització. L'anomenarem el functor *model minimal.*

Teorema 7. *El functor* $M : \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{C}_m$ *és una equivalència de categories.*

Demostració. Notarem per $\iota : \mathcal{C}_m \longrightarrow \mathcal{C}_S$ el functor obtingut composant la inclusió $\mathcal{C}_m \hookrightarrow \mathcal{C}$ i el functor de localització $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$. Anem a veure que ι és l'adjunt per l'esquerra de M i que la unitat $\eta : 1_{\mathcal{C}_m} \longrightarrow M\iota$ i la counitat $\varepsilon : \iota M \longrightarrow 1_{\mathcal{C}_S}$ d'aquesta adjunció són isomorfismes de functors.

Clarament, $M\iota = 1_{\mathcal{C}_m}$ ja que podem escollir $M(m) = m$ i definir $\eta_m = 1_m$ si m és minimal. Quant a l'altra composició, $\iota Ma = Ma$ per a tot $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}_S$, hom defineix

$$\varepsilon_a = \rho_a : Ma \xrightarrow{\sim} a$$

Per definició, ρ_a és un isomorfisme a $\mathcal{C}_S$. Finalment, si hom té un diagrama de $\mathcal{C}_S$, com el següent:

$$\begin{tikzcd} \iota Ma \arrow[r, "\rho_a"] & a \\ & \iota m \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

sempre pot suposar que la fletxa de $\mathcal{C}_S$, $f : \iota m \longrightarrow a$ és, de fet, un morfisme de $\mathcal{C}$, ja que ιm és minimal. Per la proposició 4, existeix un únic morfisme $\overline{f} : m \longrightarrow Ma$ tal que $\rho_a \overline{f} = f$. El qual implica $\rho \circ \iota\overline{f} = \iota f$. Per tant, $\rho : \iota M \longrightarrow 1_{\mathcal{C}_S}$ és una counitat. $\square$

Exemple 9. El functor M en el cas $D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow K^-(\mathcal{A})$ és el functor “prendre una resolució projectiva”.

Observacions. (1) Els resultats duals dels vistos fins al moment s'enuncien fàcilment, tenint en compte, per exemple, que les condicions (i) i (ii) de (1.2) per al conjunt S són autoduals i que cal substituir la d'existència de càlcul de fraccions per la dreta per la de càlcul de fraccions per la dreta.

(2) En els resultats obtinguts fins aquí hem utilitzat dos tipus de propietats de S (les propietats (i) i (ii) de (1.2) i el càlcul de fraccions) que acostumen a verificar-se en la pràctica. Cal senyalar, però, que són propietats independents, com mostren els exemples següents.

Exemple 10. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria formada per un únic objecte i un únic morfisme f diferent de la identitat i tal que $f^2 = 1$. Aleshores el conjunt $S = \{1\}$ admet un càlcul de fraccions per la dreta i no inclou tots els isomorfismes de $\mathcal{C}$.

Exemple 11. Sigui $\mathcal{C}$ la categoria formada per un únic objecte i dos morfisme $\{s, f\}$ diferents de la identitat i diferents entre ells, tals que $fs = sf = s$. Aleshores $S = \{1, s, s^2, \dots, s^n, \dots\}$ admet un càlcul de fraccions per la dreta i hom té que $s = fs \in S$, però $f \notin S$.

EXEMPLE 12. Un exemple no trivial d'independència entre ambdues condicions és el de les categories de models: el conjunt de les equivalències febles d'una categoria de models verifica les condicions (i) i (ii) de (1.2), però no necessàriament admet un càlcul de fraccions en la pròpia categoria $\mathcal{C}$ sinó en $\pi\mathcal{C}_f$.

(1.5) Objectes minimals i functors derivats. En el capítol I, a partir de la caracterització de les extensions de Kan mitjançant límits (teorema 2, § 2), havíem vist que perquè el valor del functor derivat en un objecte a es pogués calcular com el valor del functor en algun model de l'objecte era que existís un functor inicial $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow (S \downarrow a)$ tal que $\operatorname{im} F\varphi$ fos un grupoïde contràctil (proposició 6, § 2). Anem a veure com l'existència de suficients minimals és una condició suficient per tenir un tal φ. De fet necessitem una noció menys forta que la de minimalitat: com hem observat, si S admet un càlcul de fraccions, la definició 2 és equivalent a que en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle s} \\ m & \xrightarrow{f} & y \end{array}$$

en el què $s \in S$, existeixi un únic aixecament de f. Per derivar un functor particular F tan sols que aquesta propietat d'aixecament es tingui en la categoria $\operatorname{im} F$.

En aquest apartat seguim suposant que S satisfà les condicions de (i) i (ii) de (1.2) i que admet un càlcul de fraccions per la dreta.

DEFINICIÓ 7. Sigui $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor. Direm que un objecte m de $\mathcal{C}$ és *F-minimal per l'esquerra* (o, simplement, *F-minimal*) si per a tot diagrama de $\mathcal{C}$ com

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle s} \\ m & \xrightarrow{f} & a \end{array}$$

en el què $s \in S$, existeix un únic diagrama commutatiu de $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccccc} Fa & = & Fa & = & Fa \\ {\scriptstyle Ff}\big\uparrow & & {\scriptstyle Fu}\big\uparrow & & {\scriptstyle Fs}\big\uparrow \\ Fm & \xleftarrow{Ft} & \cdot & \xrightarrow{Fg} & Fx \end{array}$$

en el qual $t \in S$ i Ft és un isomorfisme.

Observacions. (1) El sentit de la paraula “únic” en la definició anterior és que $Fg(Ft)^{-1}$ és l'únic morfisme de $\operatorname{im} F$ tal que $(Fs)(Fg)(Ft)^{-1} = Ff$.

(2) Un objecte minimal és, per tant, un objecte F-minimal per a tot functor F.

(3) En el cas de les categories de complexos de categories abelianes, els objectes F-minimals s'acostumen a anomenar F-*acíclics* ([Hart], [Gri] -veure l'exemple que segueix la proposició següent). Els objectes F-minimals són F-*desplegats* en el sentit de Deligne ([SGA 4], exposé XVII) i [Illu], però mentres que la condició de F-minimalitat és una condició *suficient* per al resultat del teorema 9 més endavant, els objectes F-desplegats són els que *per definició* satisfan la conclusió del teorema esmentat.

Per als F-minimals l'anàleg de la proposició 3 de (1.2) és:

Proposició 8. *Sigui $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor i $\mathcal{M}$ una classe d'objectes de $\mathcal{C}$ tal que:*

(i) *tot objecte de $\mathcal{C}$ admet un model dins $\mathcal{M}$, i*

(ii) *F fa invertible tot morfisme de S entre objectes de $\mathcal{M}$,*

aleshores:

(1) *els objectes de $\mathcal{M}$ són F-minimals, i*

(2) *tot objecte F-minimal de $\mathcal{C}$ és isomorf a algun objecte de $\mathcal{M}$.*

Demostració. Sigui $m \in \mathcal{M}$. Veiem que és F-minimal. Donat un diagrama de $\mathcal{C}$ $m \xrightarrow{f} a \xleftarrow{s} x$ en el què $s \in S$, com que S admet un càlcul de fraccions, existeix un diagrama commutatiu de $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} n & \xrightarrow{g} & x \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ m & \xrightarrow{f} & a \end{array}$$

amb $t \in S$. Per (i) podem suposar que $n \in \mathcal{M}$. Aplicant F a aquest darrer diagrama, tenim un diagrama commutatiu de $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccccc} Fa & = & Fa & = & Fa \\ {\scriptstyle Ff}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F(ft)=F(sg)} & & \uparrow{\scriptstyle Fs} \\ Fm & \xleftarrow{Ft} & Fn & \xrightarrow{Fg} & Fx \end{array} \tag{5}$$

en el què, per (ii), Ft és un isomorfisme. Aplicant les propietats del càlcul de fraccions i la F-minimalitat de m i n, hom veu que $Fg(Ft)^{-1}$ és únic. Hom comprova (2) de manera anàloga a la proposició 3 de (1.2). $\square$

EXEMPLE 13. Els objectes F-acíclics de [Hart], teorema 5.1, són F-minimals. La primera condició d'aquest teorema és la nostra (i). Pel que fa a la segona, si $\mathcal{C}$ és una categoria de complexos d'una categoria abeliana i $\mathcal{P}$ una subcategoria plena tal que per a tot $P^\bullet \in \operatorname{obj}\mathcal{P}$ *acíclic* (i.e., $H^i(P^\bullet) = 0$ per a tot i) es té que $F(P^\bullet)$ és també acíclic, es segueix que per a tot *quis* $s : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet \in \operatorname{mor}\mathcal{P}$, el morfisme Fs és un isomorfisme; és a dir la condició (ii) de la proposició 8.

El paper dels objectes F-minimals en la derivabilitat del functor F es troba en el següent teorema.

Teorema 9. *Si per a tot $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ existeix un model F-minimal, aleshores existeix el functor $\mathbf{L}F$ i sobre els objectes val*

$$(\mathbf{L}F)(a) = Fm$$

on m és un model F-minimal de a qualsevol.

Demostració. Veiem que per a tot $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ existeix un functor inicial $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow (S \downarrow a)$ tal que $\operatorname{im} FQ\varphi$ és contràctil. El resultat es seguirà de la proposició 6, § 2, capítol I i del seu corol·lari.

Prenem com a $\mathcal{I}$ la subcategoria plena de $\mathcal{J} = (S \downarrow a)$ formada pels morfismes $m \longrightarrow a$ en els què m és F-minimal i com a φ el functor d'inclusió. Comprovacions:

(i) $(\varphi \downarrow \mathcal{J})$ és no buida. En efecte, donat $s : x \longrightarrow a \in (S \downarrow a)$, prenem un model F-minimal de x, $t : m \longrightarrow x$. Aleshores $st \in \operatorname{obj}\mathcal{I}$ i t defineix un morfisme de st a s.

(ii) $(\varphi \downarrow \mathcal{J})$ és connexa: donats dos models F-minimals de a es té un diagrama com (5). Però aquest diagrama prové d'un diagrama de $\mathcal{J}$.

(iii) $\operatorname{im} FQ\varphi$ és contràctil. El morfisme de $\operatorname{im} FQ\varphi$ que uneix dos models F-minimals és únic, per definició de F-minimal. $\square$

Corol·lari. *Si per a tot $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ existeix un model minimal, aleshores, per a tot functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, existeix el functor $\mathbf{L}F$ i sobre els objectes val*

$$(\mathbf{L}F)(a) = Fm$$

on d és un model minimal de a qualsevol.

En termes d'objectes F-minimals podem donar la següent versió de la successió espectral de Grothendieck ([Gro], teorema 2.4.1, cf. [Har], proposició 5.4, capítol I i, en aquest treball, proposició 4, § 3, capítol I).

Teorema 10. *Siguin $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$. Suposem que tot objecte de $\mathcal{C}$ té un model minimal i que tot objecte de $\mathcal{D}$ té un model G-minimal. Suposem a més a més, que F transforma objectes minimals en G-minimals. Aleshores els functors derivats $\mathbf{L}F$, $\mathbf{L}G$ i $\mathbf{L}(GF)$ existeixen i el morfisme canònic de functors $(\mathbf{L}G)(\mathbf{L}F) \longrightarrow \mathbf{L}(GF)$ és un isomorfisme.*

Demostració. Sigui $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$ i $m \longrightarrow a$ un model minimal. Per hipòtesi Fm és G-minimal. D'on, pel teorema 9, es té

$$(\mathbf{L}G)(\mathbf{L}F)(a) = (\mathbf{L}G)(Fm) = GFm = (\mathbf{L}GF)(a) \qquad \square$$

(1.6) Objectes minimals en les categories de models. Per a una categoria de models, no es té generalment que $S = we$ admeti un càlcul de fraccions per la dreta. Hom pot, però, restringir-se als objectes fibrants de la categoria i considerar la imatge del conjunt de les equivalències febles entre objectes fibrants en la categoria $\pi\mathcal{C}_f$, que seguirem notant S. Per [Qui$_1$], corol·lari 2, pàgina 1.16, en aquest cas S admet un càlcul de fraccions per la dreta. Veiem què significa això en la categoria $\mathcal{C}$.

Per a les categories amb què treballem, la restricció als objectes fibrants, no suposa cap problema: com hem vist en els capítols II i III, es tracta de categories de models tancades en les quals tots els objectes són fibrants; i.e., $\mathcal{C} = \mathcal{C}_f$. En el cas en què no es disposés d'una estructura de categoria de models satisfent aquesta condició, hom prendria models fibrants per treballar en la categoria $\mathcal{C}_f$.

Quant al fet que el càlcul de fraccions es tingui mòdul homotopia, això significa, per exemple, que al reduir una successió de tipus (1) a una de tipus (3), obtindrem diagrames *homotòpicament* commutatius. Tot i així, es tindrà finalment una successió de tipus (3) *de* $\mathcal{C}$.

Finalment, com és evident, els objectes minimals de $\mathcal{C}$ i $\pi\mathcal{C}$ no coincidaran, en general. Però els minimals de la primera són minimals en la segona i si la primera té suficients minimals, també la segona. Dit això, passem a enunciar els resultats de (1.4) i (1.5) amb les modificacions necessàries.

En aquest apartat $\mathcal{C}$ és una categoria de models amb tots els objectes fibrants.

Pel que fa al primer resultat, en una categoria de models podem donar-ne una versió relativa.

Proposició 11. *Sigui*

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & x \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ b & \xrightarrow{\beta} & y \end{array}$$

un diagrama commutatiu de $\mathcal{C}$ en el què a és un objecte minimal i i un morfisme minimal. Aleshores, si p és una equivalència feble, existeix $\widetilde{\beta} : b \longrightarrow x$, únic llevat d'homotopies, tal que $p\widetilde{\beta} \sim \beta$ i $\widetilde{\beta}i \sim \alpha$.

Demostració. Factoritzem p en una cofibració $j : x \longrightarrow z$ i una fibració $q : z \longrightarrow y$, ambdues trivials. Considerem el pull-back de β i q:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\beta'} & z \\ {\scriptstyle q'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ b & \xrightarrow{\beta} & y \end{array}$$

Com que les fibracions trivials es preserven per pull-backs, q' és una fibració trivial, que ens podem mirar com una fibració trivial en $a\backslash\mathcal{C}$ del morfisme induït per $j\alpha$ i i, $\gamma : a \longrightarrow c$ en i. Com que aquest morfisme és minimal, existeix $s : b \longrightarrow c$ tal que $q's = 1_b$ i $si = \gamma$. Així mateix, com que j és una cofibració trivial, és homotòpicament invertible: sigui r tal que $rj \sim 1_x$ i $jr \sim 1_z$. Aleshores $\widetilde{\beta} = r\beta's$ és l'aixecament cercat: $\widetilde{\beta}i = r\beta'si = r\beta'\gamma = rj\alpha \sim \alpha$ i $p\widetilde{\beta} = qjr\beta's \sim q\beta's = \beta q's = \beta$.

Quant a la unicitat, suposem que $\overline{\beta} : b \longrightarrow x$ sigui un altre morfisme tal que $\overline{\beta}i \sim \alpha$ i $p\overline{\beta} = \beta$. Com que $p\overline{\beta} = p\widetilde{\beta}$, per càlcul de fraccions existeix $r : d \longrightarrow b \in we$

tal que $\overline{\beta}r \sim \widetilde{\beta}r$. Factoritzem aquest r en una cofibració $k : d \longrightarrow b'$ i una fibració $s : b' \longrightarrow b$ trivials. Prenem el pull-back de s' i i:

$$\begin{array}{ccc} d' & \xrightarrow{\delta} & b' \\ {\scriptstyle s'}\downarrow & & {\scriptstyle s}\downarrow \\ a & \xrightarrow{i} & b \end{array}$$

Com abans, s' és una fibració trivial. Com que a és minimal, existeix una secció de s'. Composant-la amb δ, podem interpretar s com una equivalència feble de $a\backslash\mathcal{C}$ entre aquest morfisme i i. Com que aquest és minimal, existeix $t : b \longrightarrow b'$ tal que $st = 1_b$. D'altra banda, com que k és una cofibració trivial, és homotòpicament invertible. Sigui l el seu invers. Aleshores $\overline{\beta} \sim \overline{\beta}rlt \sim \widetilde{\beta}rlt = \widetilde{\beta}$.

Corol·lari 1. *Siguin $\rho a : \stackrel{\sim}{\longrightarrow} b \in we$ i $f : m \longrightarrow b$ un morfisme amb m minimal. Aleshores existeix un morfisme $\overline{f} : m \longrightarrow a$, únic llevat d'homotopies,tal que $\rho\overline{f} \simeq f$.*

Demostració. Prengui's $a = e$ en la proposició anterior. $\square$

Corol·lari 2. *Dos models minimals d'un mateix objecte són isomorfs per un isomorfisme únic llevat d'homotopies.*

La resta es modifiquen anàlogament:

Proposició 12. *Sigui $f : a \longrightarrow b$ un morfisme de $\mathcal{C}$ et $\rho_a : m_a \longrightarrow a$ i $\rho_b : m_b \longrightarrow b$ dos models minimals. Aleshores existeix un morfisme $m_f : m_a \longrightarrow m_b$, únic llevat d'homotopies, tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} m_a & \xrightarrow{\rho_a} & a \\ {\scriptstyle m_f}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ m_b & \xrightarrow{\rho_b} & b \end{array}$$

és homotòpicament commutatiu. Direm que m_f és el model minimal de f corresponent als models minimals $\rho_a : m_a \stackrel{\sim}{\longrightarrow} a$ i $\rho_b : m_b \stackrel{\sim}{\longrightarrow} b$.

Suposem que la categoria $\mathcal{C}$ tingui suficients minimals. Donat $a \in \operatorname{obj}\mathcal{C}$, escollim un model minimal: $\rho_a : M(a) \rightarrow a$. Com que els resultats anteriors estan enunciats "llevat d'homotopies", la correspondència

$$a \mapsto M(a)$$

no és, en general functorial i les equivalències febles ρ_a no defineixen, tampoc en general, un morfisme de functors

$$M \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

Hom té, però, un functor *model minimal* ben definit i un morfisme de functors si pren com a imatge la categoria $\pi\mathcal{C}_m$, que té per objectes els minimals de $\mathcal{C}$ i per morfismes les classe d'homotopia de morfismes de $\mathcal{C}$.

Corol·lari. *Es té un functor*

$$M : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_m \ ,$$

definit sobre els objectes per $M(a) = m_a$ *i sobre els morfismes per* $M(f) = m_f$*; i un morfisme de functors*

$$\rho : M \longrightarrow 1_{\pi\mathcal{C}_m}$$

definit per $\rho_a : m_a \longrightarrow a$*.*

Com en (1.4), M factoritza de manera única a través del functor de localització $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{M} & \pi\mathcal{C}_m \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \\ \mathrm{Ho}\mathcal{C} & & \end{array}$$

Factorització que seguirem notant M i anomenarem també functor *model minimal.* Un cop fetes les modificacions oportunes, el teorema 7 de (1.4) esdevé

Teorema 13. *El functor* $M : \mathrm{Ho}\mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_m$ *és una equivalència de categories.*

I el corol·lari del teorema 9 de (1.5),

Teorema 14. *Sigui* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *un functor entre categories de models que preservi la relació d'homotopia a* $\mathcal{C}_m$*. Aleshores* F *té un functor derivat per l'esquerra que sobre els objectes val* $\mathbf{L}F(x) = Fm$*, on* m *és un model minimal de* x*.*

Finalment,

Proposició 15. *Si $\mathcal{C}$ és una categoria de models i $S = we$, els morfismes minimals tenen la LLP respecte de les fibracions trivials. En particular, són cofibracions si la categoria és de models tancada.*

Demostració. Sigui $i : a \longrightarrow b$ una fletxa minimal, i

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\alpha} & x \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ b & \xrightarrow{\beta} & y \end{array}$$

un diagrama commutatiu, en el qual p és una fibració trivial. Hom factoritza i per M2(ii) en $a \xrightarrow{j} c \xrightarrow{q} b$, on q és un fibració trivial i j una cofibració. Com que j és una cofibració, existeix $\tilde{\beta} : c \longrightarrow x$ tal que $\tilde{\beta} j = \alpha$ i $p\tilde{\beta} = \beta q$. D'altra banda, q és, en particular, una *we* de $a\backslash\mathcal{C}$ i $i : a \longrightarrow b$ és minimal. Per tant admet una secció $s : b \longrightarrow c$ tal que $qs = 1_b$ i $si = j$. Composant-la amb $\tilde{\beta}$, hom obté l'aixecament volgut: $p(\tilde{\beta}s) = \beta qs = \beta$ i $(\tilde{\beta}s)i = \tilde{\beta}j = f$. □

Corol·lari. *Si $\mathcal{C}$ és una categoria de models, tot objecte minimal té la LLP respecte de les fibracions trivials. Si és una categoria de models tancada, aleshores tot objecte minimal és cofibrant.*

Observacions. (1) Observem que aquests dos darrers fets són independents de la classe de fibracions escollida. Així doncs, fixada la classe de les *we*, totes les possibles estructures de categoria de models tancada tenen, suposant que existeixin, uns objectes cofibrants en comú, els minimals per l'esquerra i unes cofibracions comunes: els morfismes minimals. Hom pot preguntar-se en quins casos existeix una estructura de categoria de models amb "tan sols" aquestes cofibracions.

(2) Per a dualitzar els resultats d'aquest §, subtituïm "cofibració" per fibració, $\mathcal{C}_f$ per $\mathcal{C}_c$, homotopia per la dreta per homotopia per l'esquerra ...

§ 2. Complexos de mòduls minimals.

Sigui R un anell commutatiu amb unitat. En aquest §, $\mathcal{C}$ serà una categoria de complexos de cocadenes de R-mòduls (també anomenats, R-mòduls diferencials graduats amb diferencial de grau $+1$) i S serà el conjunt dels quasi-isomorfismes (*quis*); és a dir, els morfismes que indueixen isomorfismes en cohomologia.

(2.1) El cas d'un anell qualsevol. Les resolucions projectives d'un R-mòdul són complexos de cocadenes de graus no positius. Aquest fet comporta que en la categoria dels complexos no negatius $\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(R)$ els objectes concentrats en grau zero siguin minimals.

Proposició 1. *Sigui M un R-mòdul dg homogeni de grau zero. Aleshores M és minimal.*

Demostració. Sigui $X \xrightarrow{\sim} M$ un *quis*. Hom té doncs, un isomorfisme $Z^0X = H^0X \longrightarrow H^0M = M$, l'invers del qual ens dóna una secció del *quis*. $\square$

Aquesta situació desapareix en les categories de complexos on sí hi ha resolucions projectives: $\mathbf{Mdg}(R)$, $\mathbf{Mdg}^{\leq 0}(R)$, ó $\mathbf{Mdg}^{-}(R)$ (categories de R-mòduls diferencials graduats, idem. no positius, idem. acotats superiorment, respectivament). Indicarem per $\mathbf{Mdg}^{\alpha}(R)$ qualsevol d'elles. El primer resultat mostra com, si hom oblida l'existència de la diferencial, la noció de minimal en aquestes categories coincideix amb la de projectiu en cada grau.

Proposició 2. *Sigui $M \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}^{\alpha}(R)$ de diferencial nul·la. Aleshores, M és minimal si i només si M^i és projectiu per a tot i.*

Demostració. Suposem que M és projectiu en cada grau i sigui $X \xrightarrow{\sim} M$ un *quis*. Podem escollir seccions de $Z^iX \longrightarrow H^iX \cong M^i$ per a tot i, que ens donen un morfisme de R-mòduls dg $M \longrightarrow X$, que és una secció del *quis*.

Recíprocament, suposem que M és minimal. Observem que un R-mòdul, P, és projectiu si i només si tot epimorfisme de R-mòduls, $Y \longrightarrow P$, admet una secció. Sigui $X \xrightarrow{f} M^i$ un epimorfisme de R-mòduls. Considerem el morfisme de R-mòdul dg,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & M^{i-2} & \xrightarrow{0} & M^{i-1}\oplus \ker f & \xrightarrow{(0\quad j)} & X & \xrightarrow{0} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \Vert & & \big\downarrow (1\quad 0) & & \big\downarrow f & & \Vert & & \\
\dots & \longrightarrow & M^{i-2} & \xrightarrow{0} & M^{i-1} & \xrightarrow{0} & M^{i} & \xrightarrow{0} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

(on les línies horitzontals són les diferencials dels R-mòduls dg i j és la inclusió $\ker f \hookrightarrow X$). Obviament es tracta d'un quasi-isomorfisme. Per ser M minimal, té una secció. En particular, f té una secció. $\square$

Corol·lari. *Sigui M un R-mòdul. Considerat com a R-mòdul dg homogeni de diferencial nul·la de $\mathbf{Mdg}^\alpha(R)$, és minimal si i només si és projectiu.*

En general, la caracterització dels objectes minimals de $\mathbf{Mdg}^\alpha(R)$, o l'existència de prous models minimals, semblen problemes força complicats sense hipòtesis suplementàries sobre l'anell. En el cas general, tenim almenys:

(a) condicions necessàries de minimalitat, i
(b) una condició suficient per a l'existència de model minimal.

Proposició 3. *Si existeix un $i \in \mathbf{Z}$ per al qual es verifica una de les condicions següents:*

(1) *$B^iM \neq 0$ és un factor directe de M^i, o bé*
(2) *$Z^iM \neq M^i$ és un factor directe de M^i, o bé*
(3) *$H^iM \neq Z^iM$ és un factor directe de Z^iM,*

aleshores M no és minimal.

Demostració. (1) Sigui $M^i = B^iM \oplus N$ per a algun i. Sigui

$$d^i = (0\ \delta^i) : B^iM \oplus N \longrightarrow M^{i+1}$$

Aleshores

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & M^{i-2} & \xrightarrow{d^{i-2}} & \ker d^{i-1} & \xrightarrow{0} & N & \xrightarrow{\delta^i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \Big\| & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \Big\| & & \\
\dots & \longrightarrow & M^{i-2} & \xrightarrow{d^{i-2}} & M^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & B^iM \oplus N & \xrightarrow{d^i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

és un *quis* que no admet cap secció i per tant M no pot ser minimal. En efecte, si existís una secció, en particular tindríem $(\alpha\ \beta) : B^iM \oplus N \longrightarrow N$ tal que

$$1_{M^i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\,\alpha \quad \beta\,) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

el qual és impossible, excepte si $N = M^i$.

(2) Si $M^i = Z^i M \oplus N$, la demostració és com en el cas anterior:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & Z^iM & \xrightarrow{0} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \Vert & & \downarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & & \Vert & & \\
\dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & Z^iM \oplus N & \xrightarrow{d^i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

és un *quis* de complexos que no admet cap secció, llevat de que $N = 0$.

(3) Finalment, si $Z^iM = H^iM \oplus N$,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{0} & H^iM & \xrightarrow{0} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \Vert & & \downarrow & & \Vert & & \\
\dots & \longrightarrow & M^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & M^i & \xrightarrow{d^i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

és un *quis* de complexos que no admet cap secció, tret que $N = 0$. □

Proposició 4. *Sigui M un R-mòdul dg tal que H^iM és un R-mòdul projectiu per a tot i. Aleshores, HM és un model minimal de M.*

Demostració. Sigui $Z^iM \longrightarrow H^iM$ la projecció natural i $s^i : H^iM \longrightarrow Z^iM$ una secció seva qualsevol. Aleshores $s = (s^i) : HM \longrightarrow M$ és un *quis* de R-mòduls dg i per tant HM és un model de M. Per la proposició 2, és un model minimal. □

El qual ens permet descriure els objectes minimals i assegurar l'existència de prous minimals en el cas en què tot R-mòdul sigui projectiu (e.g., si R és semisimple; per exemple un cos o un àlgebra de grup $\mathbf{k}[G]$ on $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero i G un grup finit).

Corol·lari 1. *Si R és tal que tot R-mòdul és projectiu, aleshores:*

(1) *Tot R-mòdul dg té un model minimal.*
(2) *M és minimal si i només si M té diferencial nul·la.*

Demostració. (1) Obvi per la proposició 4.

(2) Per hipòtesi, M^i és projectiu per a tot i. Si té diferencial nul·la, per la proposició 2, és minimal.

Recíprocament, suposem qu M és minimal. Com que H^iM és projectiu per a tot i, per la proposició 4, HM és un model minimal de M. Com que M ja és ell minimal, $HM \cong M$ i per tant M té diferencial nul·la. $\square$

Encara que més endavant hem de parlar de formalitat, notem aquí el resultat següent. Com en el cas de les $\mathbf{k}$-àlgebres dgc, direm que un R-mòdul dg és *formal* si és del mateix tipus d'homotopia que la seva cohomologia.

Corol·lari 2. *Tot R-mòdul dg amb cohomologia projectiva grau a grau és formal.*

(2.2) El cas d'un anell local noetherià. Minimals de Tate. Per tal de tenir condicions necessàries i suficients a la vegada (i.e., caracteritzacions dels objectes minimals de la categoria de complexos de mòduls) i assegurar l'existència de prous minimals, sembla necessari imposar condicions sobre l'anell R. Un cas conegut d'existència de *resolucions* minimals per a R-mòduls (desprovistos de diferencial) és aquell en què R és un anell local noetherià. (Per a condicions més generals, veure [Eil] o [Bour], capítol X.)

En aquest §, generalitzem les construccions d'Eilenberg-Tate-Jozefiak al cas de mòduls graduats *amb diferencial.* Com a conseqüència, en particular, aquestes resolucions són objectes minimals de la categoria de R-mòduls dg. Sigui doncs, R un anell local noetherià, m el seu ideal maximal i $\mathbf{k} = R/m$ el seu cos residual.

Definició 1. Un complex de R-mòduls dg, M, és *minimal de Tate* si

(1) per a tot i, M^i és lliure, i
(2) $dM \subseteq mM$

Observació. Aquesta és la definició de *resolució* minimal que hom troba a [Tate]. En el seu cas, les resolucions tenen una estructura multiplicativa que a nosaltres no ens interessarà. La definició de [Tate] està motivada pel següent fet: si M és un complex minimal (de Tate), aleshores el complex $M/mM = M \otimes_R \mathbf{k}$ té diferencial nul·la i per tant, si $M \longrightarrow \mathbf{k}$ és una resolució minimal de Tate del R-mòdul $\mathbf{k}$, $\mathrm{Tor}^i_R(\mathbf{k},\mathbf{k}) = M^i/mM^i$.

Els teoremes 5 i 6 mostren com, en la categoria $\mathbf{Mdg}^-_{fg}(R)$, que té per objectes els complexos de cocadenes de R-mòduls acotats superiorment i finit generats grau a grau, els minimals de Tate són tots els objectes minimals de la categoria, en el sentit de la definició 2 de § 1. Amb més precisió, mostren que els minimals de Tate formen una subcategoria inicial en la qual els *quis* són isomorfismes.

Teorema 5. *Sigui* $L \xrightarrow{f} M$ *un quis entre complexos minimals de Tate finit generats grau a grau i acotats superiorment. Aleshores,* f *és un isomorfisme.*

Teorema 6. *Tot* R*-mòdul dg amb cohomologia acotada superiorment i finit generada grau a grau, admet un model minimal de Tate acotat superiorment i finit generat.*

Com a conseqüències immediates es tenen els

Corol·lari 1. *Els minimals de Tate són tots els minimals de* $\mathbf{Mdg}^-_{fg}(R)$.

Demostració. Pels teoremes 5 i 6 anteriors, estem en les hipòtesi de la proposició 2 de § 1. □

Corol·lari 2. *El functor* $\mathbf{k} \otimes_R \_ : \mathbf{Mdg}^-_{fg}(R) \longrightarrow \mathbf{Mdg}^-_{fg}(\mathbf{k})$ *preserva objectes minimals. A més a més, restringit als complexos lliures grau a grau, els reflexa.*

Demostració. Els minimals de $\mathbf{Mdg}^-_{fg}(\mathbf{k})$ són els de diferencial nul·la. □

Corol·lari 3. *La inclusió* $\mathbf{Mdg}^-_{fg}(R)_m \hookrightarrow \mathbf{Mdg}^-_{fg}(R)$ *indueix una equivalència de categories*

$$\pi\mathbf{Mdg}^-_{fg}(R)_m \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}^-_{fg}(R)$$

Demostració. Es segueix dels resultats anteriors i del teorema 13 de (1.6). □

Observació. La hipòtesi de cohomologia acotada no és suficient en el teorema 5, com es veu a l'exemple següent.

Exemple . L'anell $\mathbf{Z}/(4)$ és un anell local noetherià. El complex no acotat superiorment següent

$$\ldots \rightarrow \mathbf{Z}/(4) \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/(4) \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/(4) \rightarrow \ldots$$

és minimal de Tate i acíclic (i per tant, amb cohomologia superiorment acotada), però el *quis* evident amb el complex nul (aquest també minimal de Tate) no és un isomorfisme. Altrament dit, és acíclic, però no és l'element inicial de la categoria; el corol·lari de la proposició 1, § 1, implica que no pot ser minimal. Per tant els minimals de Tate que no són superiorment acotats no tenen perquè ser objectes minimals de $\mathbf{Mdg}(R)$.

(2.3) Demostracións de (2.2). DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5. Podem suposar, que $L^i = M^i = 0$ per a tot $i > 0$. Per hipòtesi, en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
L^0 & \longrightarrow & L^0/B^0L & \longrightarrow & L^0/mL^0 \\
\big\downarrow{\scriptstyle f^0} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}^0} & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{\widetilde{f}^0}} \\
M^0 & \longrightarrow & M^0/B^0M & \longrightarrow & M^0/mM^0
\end{array}$$

la columna del mig és un isomorfisme de R-mòduls i per tant la de la dreta, $\overline{\widetilde{f}^0} = f^0 \otimes_R k = \widetilde{f}^0 \otimes_R \mathbf{k}$, un isomorfisme de $\mathbf{k}$-espais vectorials de dimensió finita. Aleshores, com que L^0 i M^0 són lliures i de tipus finit, f^0 ve definit per una matriu quadrada T amb $\det T \notin m$ i per tant f^0 és un isomorfisme.

Pel que fa a f^i per a $i < 0$, és suficient veure que el morfisme induït entre els complexos truncats,

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{d^{i-2}} & L^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & L^i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{i-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^i} & & \\
\dots & \xrightarrow{d^{i-2}} & M^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & M^i & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

és un *quis* i, aplicant el raonament fet per a $i = 0$, concloure que f^i és un isomorfisme de R-mòduls.

Suposem que:

(a)$_{i+1}$ $\quad f^{i+1} : L^{i+1} \longrightarrow M^{i+1}$, i

(b)$_{i+1}$ $\quad \widetilde{f}^{i+1} : L^{i+1}/B^{i+1}L \longrightarrow M^{i+1}/B^{i+1}M$

són isomorfismes de R-mòduls.

Pel que fa als graus $j < i$, $H^j f$ és isomorfisme per hipòtesi. Quant al grau i, es tenen les successions exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^iL & \longrightarrow & L^i/B^iL & \longrightarrow & L^i/Z^iL & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle H^i f} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}^i} & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^iM & \longrightarrow & M^i/B^iM & \longrightarrow & M^i/Z^iM & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

La primera columna és un isomorfisme de R-mòduls per hipòtesi. Pel que fa a la tercera, es tracta de $f^{i+1} : B^{i+1}L \longrightarrow B^{i+1}M$. Per tant sols resta comprovar que f^{i+1} restringit a les vores és un isomorfisme. El què es dedueix del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B^{i+1}L & \longrightarrow & L^{i+1} & \longrightarrow & L^{i+1}/B^{i+1}L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{i+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}^{i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & B^{i+1}M & \longrightarrow & M^{i+1} & \longrightarrow & M^{i+1}/B^{i+1}M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

en el qual les files són exactes i la segona i tercera columnes isomorfismes per hipòtesi. En definitiva, veiem com:

(a)$_i$ $\quad f^i : L^i \longrightarrow M^i$, i

(b)$_i$ $\quad \widetilde{f}^i : L^i/B^iL \longrightarrow M^i/B^iM$

són isomorfismes de R-mòduls i per tant hem comprovat la hipòtesi d'inducció. $\square$

Demostració del teorema 6. Sigui X un R-mòdul dg, de cohomologia acotada i finit generada grau a grau. Suposem, per exemple, que $H^iX = 0$ per a tot $i > 0$. Aleshores, el subcomplex $\tau_{\leq -1}X \hookrightarrow X$ (*truncació canònica de* X), definit per

$$(\tau_{\leq -1}X)^i = \begin{cases} X^i & \text{si } i < 0 \\ B^iX & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

és quasi-isomorf a X i és acotat superiorment. Podem doncs suposar que $X^i = 0$ per a tot $i > 0$. En la construcció del model minimal de Tate farem ús del següent lema (veure [Mat], pàgina 136):

Lema. *Sigui X un R-mòdul finit generat, L un R-mòdul lliure sobre una base minimal de X i $\varepsilon : L \longrightarrow X$ el morfisme canònic. Aleshores* $\ker \varepsilon \subseteq mL$.

Sigui M^0 un R-mòdul lliure sobre una base minimal de H^0X i $\varepsilon : M^0 \longrightarrow H^0X$ el morfisme canònic. Sigui s^0 un aixecament de ε:

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z^0X \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\
M^0 & \xrightarrow[\varepsilon]{} & H^0X
\end{array}$$

i $M(0)$ el R-mòdul dg
$$M(0)^i = \begin{cases} M^0 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Aleshores, el morfisme de complexos $s(0) : M(0) \longrightarrow X$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^0} \\
\dots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & X^0
\end{array}$$

verifica:

(a)$_0$ $M(0)$ és minimal i finit generat grau a grau,

(b)$_0$ $s(0)^i_*$ és un isomorfisme per a tot $i > 0$ i exhaustiu per a $i = 0$, i

(c)$_0$ $\ker s^0_* \subseteq mM^0$, pel lema abans citat.

Suposem construïts un R-mòdul dg $M(p+1)$ i un morfisme de R-mòduls dg $s(p+1) : M(p+1) \longrightarrow X$,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M^{p+1} & \xrightarrow{d^{p+1}} & M^{p+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s^{p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle s^{p+2}} & & \\
\dots & \longrightarrow & X^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & X^p & \xrightarrow{d^p} & X^{p+1} & \xrightarrow{d^{p+1}} & X^{p+2} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

de manera que

(a)$_{p+1}$ $M(p+1)$ és minimal i finit generat grau a grau,

(b)$_{p+1}$ $(s(p+1))^i_*$ és un isomorfisme per a tot $i > p+1$ i exhaustiu per a $i = p+1$, i

(c)$_{p+1}$ $\ker s(p+1)^{p+1}_* \subseteq mM^{p+1}$.

Aleshores, prengui's

(1) L^p_1 un R-mòdul lliure sobre una base minimal de $\ker s^{p+1}_*$ i $\varepsilon_1 : L^p_1 \longrightarrow \ker s^{p+1}_*$ el morfisme canònic. Observem que $\ker s^{p+1}_*$ és finit generat perquè tant M^{p+1} com $H^{p+1}X$ ho són i perquè R és noetherià, i per tant L^p_1 també és finit generat.

(2) d^p_1 la composició $L^p_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} \ker s^{p+1}_* \hookrightarrow H^{p+1}M \hookrightarrow M^{p+1}$,

(3) s^p_1 un aixecament de $s^{p+1}d^p_1$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X^p \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d^p} \\
L^p_1 & \xrightarrow[s^{p+1}d^p_1]{} & \operatorname{im} d^p
\end{array}$$

(4) L_2^p un R-mòdul lliure sobre una base minimal de $\operatorname{coker}(s_1^p)_*$ i $\varepsilon_2 : L_2^p \longrightarrow \operatorname{coker}(s_1^p)_*$ el morfisme canònic, i

(5) s_2^p un aixecament de ε_2:

$$\begin{tikzcd} & Z^pX \arrow[d] \\ L_2^p \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & \operatorname{coker}(s_1^p)_* \end{tikzcd}$$

Amb aquestes dades construïm el R-mòdul dg $M(p)$:

$$M(p)^i = \begin{cases} M^i & \text{si } i \geq p+1 \\ M^p = L_1^p \oplus L_2^p & \text{si } i = p \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

i el morfisme de complexos $s(p) : M(p) \longrightarrow X$,

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & L_1^p \oplus L_2^p \arrow[r, "d^p = (\, d_1^p \ 0\,)"] \arrow[d, "s^p = (\, s_1^p \ s_2^p\,)"] & M^{p+1} \arrow[r, "d^{p+1}"] \arrow[d, "s^{p+1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & X^{p-2} \arrow[r, "d^{p-2}"] & X^{p-1} \arrow[r, "d^{p-1}"] & X^p \arrow[r, "d^p"] & X^{p+1} \arrow[r, "d^{p+1}"] & \dots \end{tikzcd}$$

els quals verifiquen

(a)$_p$ $M(p)$ és minimal i finit generat grau a grau, ja que $\operatorname{im} d^p = \operatorname{im} d_1^p = \ker s_*^{p+1} \subseteq mM^{p+1}$ per (c)$_{p+1}$,

(b)$_p$ $(s(p))_*^i$ és un isomorfisme per a tot $i > p$ i exhaustiu per a $i = p$,

(c)$_p$ $\ker s_*^p \subseteq mM^p$ ja que $(x, y) \in Z^pM$ equival a que $x \in \ker \varepsilon_1 \subseteq mL_1^p$. Per tant és suficient verificar que si $s_*^p[(x, y)] = 0$ aleshores $y \in mL_2^p$. Per al qual és suficient que $\varepsilon_2 y = 0$; igualtat que es segueix de l'anterior aplicant-li la projecció en $\operatorname{coker}(s_1^p)_*$.

Amb el qual hem acabat el procés d'inducció. Per acabar, hom pren $M = \varinjlim_p M_p$. $\square$

§ 3. A-àlgebres dgc minimals.

Com hem vist en §1, l'existència d'una subcategoria inicial en la qual els *quis* són isomorfismes ens assegura que els objectes d'aquesta subcategoria són objectes minimals en el sentit de la definició 2. Encara més, que són *tots* els objectes minimals de la categoria. En la categoria de les R-àlgebres dgc, $\mathbf{Adgc}(R)$, es té una subcategoria d'objectes minimals, les *àlgebres nilpotents generalitzades minimals* (veure [Mor]), també anomenades *KS-complexos minimals* (veure [Hal]). Malhauradament, no es tracta necessàriament s'una subcategoria *inicial* (excepte per a anells particulars, per exemple, els cossos). Altrament dit, no tota R-àlgebra dgc té un model nilpotent generalitzat minimal: si bé l'estructura de categoria de models tancada de $\mathbf{Adgc}(R)$ es dedueix formalment de la de $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$ (veure teorema 1,§ 2, capítol II), no succeeix el mateix amb el model minimal: si hom intenta fer-ho *a la Sullivan*, en el moment que s'afegeixen els *nous generadors* no es pot estendre, almenys automàticament, el quasi-isomorfisme i la diferencial de manera que siguin R-lineals.

En aquest § ens limitem a enunciar els resultats. Les demostracions poden traduir-se de les del següent sense dificultad.

(3.1) Extensions de Hirsch i A-àlgebres DGC KS-minimals. Sigui R un anell commutatiu amb unitat.

Definició 1. Sigui A una R-àlgebra dgc i $n \geq 0$ un enter. Una *extensió de Hirsch de A de grau n* és una inclusió

$$A \longrightarrow A \otimes_R \Lambda(V)_n$$

de R-àlgebres dgc on:

(1) V és un R-mòdul projectiu homogeni de grau n,
(2) $\Lambda(V)_n$ és la R-àlgebra graduada lliure sobre V, i
(3) la diferencial de $A \otimes_R \Lambda(V)_n$ aplica V dins A.

Definició 2. (cf. [Na$_2$]) Sigui A una R-àlgebra dgc. Una *extensió de Hirsch generalitzada de A* és una inclusió

$$A \longrightarrow B$$

de R-àlgebres dgc, on B admet una filtració exhaustiva $\{B(\alpha)\}_{\alpha\in I}$ indexada per un conjunt ben ordenat I, tal que:

(1) $B(0) = A$, on $0 = \min I$,

(2) si α té com a predecessor β, $B(\alpha)$ és una extensió de Hirsch de $B(\beta)$,

(3) si α no té predecessor, aleshores

$$B(\alpha) = \varinjlim_{\beta<\alpha} B(\beta)$$

Una A-àlgebra dgc és *nilpotent generalitzada* si és una extensió de Hirsch generalitzada de A. Una A-àlgebra dgc B és *KS-minimal* si és nilpotent generalitzada i la filtració $\{B(\alpha)\}_{\alpha\in I}$ verifica:

(4) $I = \{(n,q),\ n \geq 1,\ q \geq 0\}$ ordenat lexicogràficament, i

(5) per a tot $q > 0$, $B(n,q)$ és una extensió de Hirsch de grau n de $B(n,q-1)$.

Una tal filtració s'anomena una *KS-filtració*. Una A-àlgebra dgc és KS-minimal si i només si admet una KS-filtració.

Un *model KS-minimal* d'una A-àlgebra dgc $A \longrightarrow B$ és una A-àlgebra dgc KS-minimal $A \longrightarrow C$ i un *quis* de $\mathbf{Adgc}(A)$ $C \xrightarrow{\rho} B$.

Observació. Per a $A = R = \mathbf{k}$ un cos de característica zero, la definició de [B-G] de $\mathbf{k}$-àlgebra dgc minimal és la que més endavant anomenarem KS-minimal canònicament filtrada. Per a $R = \mathbf{k}$, la definició de [Hal] de KS-extensió minimal de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc coincideix amb la nostra de A-àlgebres dgc KS-minimals, excepte que aquesta no precisa de l'axioma de l'elecció, ja que no hem d'escollir cap base.

(3.2) Els KS-minimals són minimals. Per a R un anell commutatiu unitari qualsevol els KS-minimals no tenen perquè ser una subcategoria inicial. La seva minimalitat no es segueix doncs, com en el cas $R = \mathbf{k}$, un cos de característica zero, de la proposició 3 § 1 (cf. exemple 4, (1.2)). Tot i així, són minimals en el sentit de la definició 2 de §1, però cal una demostració particular d'aquest fet. El resultat següent és, essencialment, el cas $r = 0$ del teorema 8.7 de [H-T] (cf. teorema 1, (4.2)).

Teorema 1. *Sigui B una A-àlgebra dgc KS-minimal i $\rho : C \xrightarrow{\sim} B$ un quis de A-àlgebres dgc. Aleshores existeix un morfisme de A-àlgebres dgc $\sigma : B \longrightarrow C$ tal que $\rho\sigma = 1_B$.*

Corol·lari. *Dos models KS-minimals d'una mateix A-àlgebra dgc són isomorfs per un isomorfisme, únic llevat d'homotopies.*

(3.3) La filtració canònica. Per a certs resultats és convenient triar una KS-filtració particular.

DEFINICIÓ 3. Sigui B una A-àlgebra dgc. Anomenarem *filtració canònica* de B a la filtració $\{B[n,q]\}_{n,q\geq 0}$ següent: notarem per $B_{\leq n} \subset M$ la A-subàlgebra dgc generada pels elements de grau $\leq n$. Posarem $B_{\leq -1} = A$. Hom té aleshores una filtració exhaustiva de B:

$$A = B_{\leq -1} \subset B_{\leq 0} \subset B_{\leq 1} \subset \cdots \subset B$$

Sigui $B[n,0] = B_{\leq n-1}$; per a tot $q > 0$ definim $B[n,q]$ de manera recurrent: es tracta de la A-subàlgebra dgc de B generada per $B[n,q-1]$ i el R-mòdul

$$\{x \in B^n \mid dx \in B[n,q-1]\}$$

DEFINICIÓ 4. Direm que una A-àlgebra dgc KS-minimal B està *canònicament filtrada* si $B(n,q) = B[n,q]$ per a tota parella (n,q).

Proposició 3. *Sigui $\varphi : B \longrightarrow C$ un morfisme de A-àlgebres dgc canònicament filtrades. Aleshores, per a tota parella (n,q), $\varphi(B(n,q)) \subseteq C(n,q)$.*

Corol·lari. *Tot quis entre KS-minimals canònicament filtrades és un isomorfisme filtrat.*

Teorema 4. *Una A-àlgebra dgc B KS-minimal està canònicament filtrada si i només si per a tot $n \geq 0$ i tot $q > 0$*

(6) *la inclusió $B(n,q) \hookrightarrow B$ indueix un isomorfisme $H^iB(n,q) \longrightarrow H^iB$ per a $i = 0,\ldots,n$, i*

(7) *el morfisme $H^{n+1}(B(n,q-1),B) \longrightarrow H^{n+1}(B(n,q),B)$ de la successió llarga de cohomologia del triple $B(n,q-1) \hookrightarrow B(n,q) \hookrightarrow B$ és el morfisme nul.*

(3.4) Existència de suficients minimals. Sota certes restriccions, hom pot assegurar l'existència d'un model KS-minimal canònicament filtrat per a tota A-àlgebra dgc.

Teorema 5. *(*[Hal]*) Sigui $R = \mathbf{k}$ un cos de característica zero, $A \longrightarrow B$ un morfisme de R-àlgebres dgc cohomològicament connexes. Aleshores $A \longrightarrow B$ té un model KS-minimal canònicament filtrat.*

Corol·lari 1. *(*[Sul]*) Sigui $\mathbf{k}$ un cos de característica zero i A una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc cohomològicament connexa. Aleshores A té un model KS-minimal canònicament filtrat.*

Sigui $\mathbf{Adgc}_{hc}(A)$ la categoria de les A-àlgebres dgc cohomològicament connexes. Els resultats anteriors, junt amb la proposició 3 de (1.2), impliquen

Corol·lari 2. *Els KS-minimals són, llevat d'isomorfismes, tots els objectes minimals de $\mathbf{Adgc}_{hc}(A)$.*

De fet, hom pot posar "KS-minimal canònicament filtrat" en la proposició anterior, obtenint el *Teorema d'estructura de les KS-extensions minimals* de [Hal].

Corol·lari 3. *La inclusió de $\mathbf{Adgc}_{hc}(A)_m$ en $\mathbf{Adgc}_{hc}(A)$ indueix una equivalència de categories*

$$\pi\mathbf{Adgc}_{hc}(A)_m \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_{hc}(A)$$

Demostració. Es segueix del teorema anterior i del teorema 13 de (1.6). $\square$

En general, però, la categoria $\mathbf{Adgc}(R)$ no té suficients KS-minimals. Veiem a continuació alguns exemples d'aquest fet.

Exemple 1. Si $\mathbf{k}$ és un cos i R una $\mathbf{k}$-àlgebra commutativa unitària augmentada, en particular $\mathbf{k}$ és una R-àlgebra dgc (concentrada en grau zero). Com en el cas de $\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(R)$, $\mathbf{k}$ resulta ser minimal, però, òbviament, no és KS-minimal.

El següent exemple ens mostra com el problema no és tan sols la no existència de resolucions de $\mathbf{k}$ en la categoria dels complexos de cocadenes no negatius.

Exemple 2. Sigui A la $R = \mathbf{k}[x]$-àlgebra dgc

$$A^i = \begin{cases} \mathbf{k}[x] & \text{si } i = 0 \\ \mathbf{k} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, 1 \end{cases}$$

amb diferencial nul·la i producte definit per

$$x \wedge y = \begin{cases} x \cdot y & \text{si } |x| = |y| = 0 \\ \varepsilon(x) \cdot y & \text{si } |x| = 0,\ |y| = 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

On, en el primer cas, es tracta del producte de $\mathbf{k}[x]$ i, en el segon, del de $\mathbf{k}$. Aquesta $\mathbf{k}[x]$-àlgebra dgc no admet cap model KS-minimal. En efecte, suposem que $M \xrightarrow{\sim} A$ ho fos. Per definició,

$$\begin{aligned} M(1,0) &= R \\ M(2,0) &= \Lambda(V_0)_1 \otimes_R \Lambda(V_1)_1 \otimes_R \dots \end{aligned}$$

on $(V_q)_1$ és un R-mòdul lliure homogeni de grau 1 per a tot q. Per definició, la diferencial de M verifica

$$\begin{aligned} d(V_1) &= 0 \\ d(V_q) &\subset \bigotimes_{p<q} \Lambda(V_p)_1 \end{aligned}$$

Per tant $V_1 \subset \ker d^1 = H^1 M = H^1 A = \mathbf{k}$. D'on $\mathbf{k}$ admetria un sub $\mathbf{k}[x]$-mòdul lliure.

§ **4.** A-**mòduls dg minimals.**

Llevat de (4.4), en tot aquest § R un anell commutatiu amb unitat qualsevol i A una R-àlgebra dgc.

(4.1) Extensions de Hirsch i A-mòduls dg KS-minimals. Seguint la construcció de Sullivan, construïrem els models minimals de A-mòduls dg per un procés anàleg a l'adjunció de cel·les en espais topològics.

Definició 1. Sigui M un A-mòdul dg i $n \geq 0$ un enter. Una *extensió de Hirsch de* M de grau n és una inclusió de A-mòduls dg

$$M \longrightarrow M \oplus_d (A \otimes_R (V)_n)$$

on:

(1) V és un R-mòdul projectiu homogeni de grau n,
(2) $A \otimes_R (V)_n$ és el A-mòdul graduat lliure sobre V, i
(3) la diferencial de $M \oplus_d (A \otimes_R (V)_n)$ aplica V dins M.

Observació. Un morfisme de A-mòduls dg,

$$M \oplus_d (A \otimes_R (V)_n) \longrightarrow N$$

és el mateix que:

(1) un morfisme de A-mòdul dg, $\varphi : M \longrightarrow N$, i
(2) un morfisme de R-mòduls, $f : V \longrightarrow N^n$, tal que

$$\varphi(dv) = d(fv)$$

Els objectes minimals de la categoria de A-mòduls dg seran, en les hipòtesis adequades, els obtinguts mitjançant extensions de Hirsch successives.

Definició 2. Una *extensió de Hirsch generalitzada de* M és una inclusió de A-mòduls dg,

$$M \longrightarrow N$$

tal que N admet una filtració exhaustiva $\{N(\alpha)\}_{\alpha \in I}$, indexada per un conjunt ben ordenat I tal que:

(1) $N(0) = M$, on $0 = \min I$,
(2) si α té com a predecessor β, $N(\alpha)$ és una extensió de Hirsch de $N(\beta)$, i
(3) si α no té predecessor,

$$N(\alpha) = \varinjlim_{\beta < \alpha} N(\beta)$$

Un A-mòdul dg es diu *nilpotent generalitzat* si és una extensió de Hirsch generalitzada del mòdul 0. Un A-mòdul dg M es diu *KS-minimal* si és nilpotent generalitzat i la filtració $\{M(\alpha)\}_{\alpha \in I}$ verifica:

(4) $I = \{(n,q),\ n \geq 0,\ q \geq 0\} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, ordenada lexicogràficament, i
(5) per a tot $q > 0$, $M(n,q)$ és una extensió de Hirsch de grau n de $M(n, q-1)$.

Una tal filtració s'anomena una *KS-filtració*. Un A-mòdul dg és KS-minimal si i només si admet una KS-filtració.

Un *model KS-minimal* d'un A-mòdul dg X és un A-mòdul dg KS-minimal M i un *quis* $M \xrightarrow{\rho} X$.

OBSERVACIONS. (1) A diferència del cas de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc, l'índex n comença en 0 i no en 1 perquè els A-mòduls dg no tenen perquè ser necessàriament connexos.

(2) Un A-mòdul dg pot ser nilpotent generalitzat per diferents filtracions $\{M(\alpha)\}$, com ens mostra l'exemple següent.

EXEMPLE 1. Sigui $A = R = \mathbf{Q}$ i $M = Au \oplus Av$ el A-mòdul graduat lliure sobre dos generadors, $|u| = |v| = 0$ i diferencial $du = dv = 0$. Hom pot mostrar que és KS-minimal prenent com a filtració: $M(0,1) = Au$ i $M(0,2) = M$. Però també $M(0,1) = M$ és una KS-filtració.

(4.2) Els KS-minimals són minimals. Anàlogament als objectes "minimals" que hem trobat en els § anteriors, els A-mòduls dg KS-minimals són minimals (per l'esquerra) en el sentit de la definició 2 de § 1. Pel que fa a la diferencial, hom retroba la propietat de "descomponible", característica de les $\mathbf{Q}$-àlgebres dgc minimals simplement connexes de Sullivan, i dels R-mòduls dg minimals de Tate.

Teorema 1. *Sigui M un A-mòdul dg KS-minimal i $\rho : X \xrightarrow{\sim} M$ un quis de A-mòduls dg. Aleshores existeix un morfisme de A-mòduls dg $\sigma : M \longrightarrow X$ tal que $\rho\sigma = 1_M$.*

Demostració. Sigui $\sigma_{(0,0)} : M(0,0) = 0 \longrightarrow X$ el morfisme zero. Evidentment, $\rho\sigma_{(0,0)} = 1_{M(0,0)}$. Suposem construït

$$\sigma_{(m,0)} : M(m,0) \longrightarrow X$$

de manera que per a tot $m \leq n$

(i)$_{(m)}$ $\quad \rho\sigma_{(m,0)} = 1_{M(m,0)}$

(ii)$_{(m)}$ $\quad \sigma_{(m,0)|M(m',0)} = \sigma_{(m',0)}$, per a tot $m' \leq m$

Definirem $\sigma_{(n+1,0)} : M(n+1,0) \longrightarrow X$ que satisfarà (i)$_{n+1}$ i (ii)$_{n+1}$. Aleshores $\sigma = \varinjlim_n \sigma_{(n,0)}$ serà una secció de ρ. A tal fi, estendrem $\sigma_{(n,0)}$ a morfismes

$$\sigma_{(n,q)} : M(n,q) \longrightarrow X$$

de manera que per a tot $p \leq q$

(i)$_{(n,p)}$ $\quad \rho\sigma_{(n,p)} = 1_{M(n,p)}$

(ii)$_{(n,p)}$ $\quad \sigma_{(n,p)|M(n,p')} = \sigma_{(n,p')}$, per a tot $p' \leq p$

Un cop definits els $\sigma_{(n,q)}$ per a tot $q \geq 0$, prendrem $\sigma_{(n+1,0)} = \varinjlim_q \sigma_{(n,q)}$.

Comencem la construcció dels $\sigma_{(n,q)}$: per a $q = 0$, $\sigma_{(n,0)}$ existeix per hipòtesi d'inducció. Suposem construït $\sigma_{(n,p)}$ per a tot $p \leq q$. Considerem el A-submòdul dg de X següent:

$$F = \operatorname{im}\big(\sigma_{(n,q)} : M(n,q) \longrightarrow X\big)$$

Com que $\rho\sigma_{(n,q)} = 1_{M(n,q)}$, $\sigma_{(n,q)}$ és injectiu i per tant $\sigma_{(n,q)} : M(n,q) \longrightarrow F$ és un isomorfisme. Aplicant el lema dels cinc a la cohomologia del diagrama de A-mòduls dg

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\sigma^{-1}_{(n,q)}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & X/F \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\rho}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M(n,q) \arrow[r] & M \arrow[r] & M/M(n,q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es té que $\overline{\rho}$ és un *quis* de A-mòduls dg. Sigui V el R-mòdul lliure tal que

$$M(n,q+1) = M(n,q) \oplus_d (A \otimes_R (V)_n)$$

i sigui j la composició $V \overset{i}{\hookrightarrow} M \longrightarrow M/M(n,q)$, on i és la inclusió. Com que $dV \subset M(n,q)$, aleshores $jV \subset Z(M/M(n,q))$ i per tant tenim un morfisme R-lineal $Hj : V \longrightarrow H(M/M(n,q))$, que aixequem a $Z(X/F)$ per ser V un R-mòdul lliure:

$$\begin{tikzcd}
 & & Z(X/F) \arrow[d, "p"'] \\
V \arrow[r, "Hj"'] & H(M/M(n,q)) & H(X/F) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

i.e., $(H\overline{\rho})p\lambda = Hj$. De fet, $M/M(n,q)$ és un A-mòdul dg concentrat en graus $\geq n$ i per tant hom té que $B^n(M/M(n,q)) = 0$. Per tant el diagrama anterior en grau n és:

$$\begin{tikzcd}
 & Z^n(X/F) \arrow[d, "\overline{\rho}"'] \\
V \arrow[r, "j"] & Z^n(M/M(n,q))
\end{tikzcd}$$

D'on $\overline{\rho}\lambda = j$. Considerem el pull-back en la categoria de A-mòduls dg,

$$\begin{array}{ccc} (X/F) \times_{M/M(n,q)} M & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/F & \xrightarrow{\overline{\rho}} & M/M(n,q) \end{array}$$

i el morfisme $(\pi,\ \rho) : X \longrightarrow (X/F) \times_{M/M(n,q)} M$ induït per $\pi : X \longrightarrow X/F$ i $\rho : X \longrightarrow M$. Es tracta d'un morfisme exhaustiu: si $(\tilde{x}, m) \in (X/F) \times_{M/M(n,q)} M$, aleshores $\rho x - m \in M(n,q)$. Aleshores, $(\pi,\ \rho)(x - \sigma_{(n,q)}(\rho x - m)) = (\tilde{x} - 0,\ \rho x - (\rho x - m)) = (\tilde{x},\ m)$. Aixequem $(\lambda,\ i)$ en f:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle (\pi,\ \rho)} \\ V & \xrightarrow{(\lambda,\ i)} & (X/F) \times_{M/M(n,q)} M \end{array} \tag{1}$$

Aleshores f i $\sigma_{(n,q)}$ indueixen un morfisme de A-mòduls dg

$$\sigma_{(n,q+1)} : M(n,q+1) \longrightarrow X$$

En efecte, per l'observació de (6.2), és suficient verificar que

$$\sigma_{(n,q)} dv = dfv$$

per a tot $v \in V$: per (1), $\pi f v = \lambda v \in Z^n(X/F)$. El qual és equivalent a $0 = d\pi f v = \pi d f v \;\Leftrightarrow\; dfv \in F = \operatorname{im} \sigma_{(n,q)}$. Sigui $w \in M(n,q)$ tal que $dfv = \sigma_{(n,q)} w$. Aplicant ρ als dos membres d'aquesta igualtat, obtenim, d'un costat, $\rho dfv = d\rho fv$, el qual, pel diagrama (1), és igual a dv. D'altra banda, $\rho\sigma_{(n,q)} w = w$, per $(\mathrm{ii})_{(n,q)}$. Per tant, $dv = w$ i hem demostrat l'existència de $\sigma_{(n,q+1)}$.

Pel que fa a $(\mathrm{i})_{(n,q+1)}$, es segueix de $(\mathrm{i})_{(n,q)}$ i del diagrama (1) i $(\mathrm{ii})_{(n,q+1)}$ és evident per la construcció de $\sigma_{(n,q+1)}$. $\square$

Corol·lari. *Dos models KS-minimals d'un mateix A-mòdul dg són isomorfs per un isomorfisme, únic llevat d'homotopies.*

Demostració. Es segueix del teorema anterior i del corol·lari 2 de la proposició 11, §1. $\square$

Proposició 2. *Si M és KS-minimal, la diferencial és descomponible; i.e.,*

$$dM \subset IA \cdot M$$

Demostració. Hom procedeix per inducció. Suposem que per a $n-1$ i per a tot $q \geq 0$ es verifica que $dM(n-1,q) \subset IA \cdot M(n-1,q)$. Aleshores

$$\begin{aligned} dM(n,0) &= d\varinjlim_q M(n-1,q) = \varinjlim_q dM(n-1,q) \subset \varinjlim_q IA \cdot M(n-1,q) \\ &= IA \cdot \varinjlim_q M(n-1,q) = IA \cdot M(n,0) \end{aligned}$$

(on hem fet servir el fet que M és minimal, la hipòtesi d'inducció i el fet que $\varinjlim_q$ és un colímit filtrant).

Suposem que per a (n,q) es verifica que $dM(n,q) \subset IA \cdot M(n,q)$. Sigui $x = y + a \otimes v \in M(n,q+1) = M(n,q) \oplus_d (A \otimes_R (V)_n)$. Aleshores $dx = dy + da \otimes v + (-1)^{|a|} a \cdot dv$ i

$$\begin{aligned} dy &\in dM(n,q) \subseteq IA \cdot M(n,q+1) \\ da \otimes v &\in IA \cdot V \subseteq IA \cdot M(n,q+1) \end{aligned}$$

Pel que fa a $dv \in M(n,q)^{n+1}$, es tracta d'un element descomponible, ja que $M(n,q)$ està generada per elements en graus $\leq n$. $\square$

Corol·lari 1. *Si M és KS-minimal, $\pi_A M = Q_A M$.*

Demostració. Per ser KS-minimal, és minimal en el sentit categòric. Per (1.4), $\pi_A M = HQ_A M$. Per la proposició anterior, M té diferencial descomponible. D'on $HQ_A M = Q_A M$. $\square$

Anàlogament al functor dels indescomponibles d'àlgebres dgc, i al functor $\mathbf{k} \otimes_R \_$ en el cas de R-mòduls dg, es té

Corol·lari 2. $Q_A : \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(R)$ *preserva minimals.*

(4.3) La filtració canònica. Observem que en la demostració del teorema anterior hem utilitzat una KS-filtració qualsevol del A-mòdul dg KS-minimal M. Per a resultats posteriors convé, però, escollir una filtració particular (cf. [Hal], [B-G]).

DEFINICIÓ 3. Sigui M un A-mòdul dg. Anomenarem *filtració canònica* de M a la filtració $\{M[n,q]\}_{n,q\geq 0}$ següent: notarem per $M_{\leq n}\subset M$ el A-submòdul dg generat pels elements de grau $\leq n$. Posarem $M_{\leq -1}=0$. Hom té aleshores una filtració exhaustiva de M:

$$0=M_{\leq -1}\subset M_{\leq 0}\subset M_{\leq 1}\subset\cdots\subset M$$

Sigui $M[n,0]=M_{\leq n-1}$; per a tot $q>0$ definim $M[n,q]$ de manera recurrent: es tracta del sub A-mòdul dg de M generat per $M[n,q-1]$ i el R-mòdul

$$\{x\in M^n \mid dx\in M[n,q-1]\}$$

OBSERVACIÓ. Aquesta filtració no té res a veure amb la filtració d'un complex que hom anomena usualment "canònica" τ i que nosaltres hem utilitzat a (2.3).

Sigui M un A-mòdul dg KS-minimal i $V(n,q)$, $n\geq 0$, $q>0$, uns R-mòduls projectius homogenis de grau n, tals que

$$M(n,q)=M(n,q-1)\oplus_d (A\otimes_R V(n,q))$$

(suprimirem el subíndex n en aquest cas, per reiteratiu). Hom té

$$M(n,0)=M[n,0]$$

donat que els generadors de $M(n,0)=\varinjlim_q M(n-1,q)$ es troben en graus $\leq n-1$ i alhora $M(n,0)$ inclou tots els generadors en graus $\leq n-1$ per ser KS-minimal. En general, no és cert, però, que

$$M(n,q)=M[n,q]$$

per a tot $q>0$, com mostren els exemples següents.

EXEMPLE 1 (continuació). En l'exemple 1 anterior, la segona és la filtració canònica.

EXEMPLE 2. Sigui $R=\mathbf{Q}$ i $A=\Lambda x$ la $\mathbf{Q}$-àlgebra graduada lliure sobre un generador, $|x|=1$, i diferencial $dx=0$. Sigui $M=Au\oplus Av\oplus Aw$ el A-mòdul graduat lliure sobre generadors $|u|=|v|=|w|=0$, i diferencial $du=0$, $dv=dw=xu$. Hom pot mostrar que és KS-minimal prenent com a KS-filtració la formada pels A-submòduls dg: $M(0,1) = Au$, $M(0,2) = Au \oplus Av$ i $M(0,3) = M$. En canvi, la filtració canònica és: $M[0,1] = Au \oplus A(v-w)$ i $M[0,2] = Au \oplus A(v-w) \oplus A(v+w) = M$.

Observem com, en tots dos exemples, la filtració canònica compleix les condicions (1)-(5) de (4.1). El qual significa en aquests casos que és una filtració exhaustiva i $0 \longrightarrow M[0,1]$ i $M[0,1] \longrightarrow M[0,2]$ són extensions de Hirsch. Per tant, podríem haver pres $M(n,q) = M[n,q]$. Això, però, no és necessàriament cert per a tot A-mòdul dg KS-minimal, com ens mostra el següent exemple.

EXEMPLE 3. Sigui $R = \mathbf{k}[x]/(x^2)$ i $A = \Lambda e$ la R-àlgebra graduada commutativa lliure amb un generador, $|e| = 2$ i diferencial $de = 0$. Sigui $M = A \oplus Au$, on $|u| = 3$ i $du = xe^2$. M és KS-minimal: una KS-filtració de M és la següent: $M(0,1) = \cdots = M(1,0) = M(1,1) = \cdots = M(2,0) = R$, $M(2,1) = \cdots = M(3,0) = A$ i $M(3,1) = M$. En canvi, la filtració canònica no és una KS-filtració: per a (n,q) anteriors a $(3,1)$, coincideix amb la filtració donada. Però $M[3,1] = A(xu)$ i $A \longrightarrow A(xu) = A \otimes_R R(xu)$ no és una extensió de Hirsch ja que $R(xu)$ no és un R-mòdul projectiu: l'epimorfisme $R \longrightarrow R(xu)$ definit per $1 \mapsto xu$ no admet cap secció que sigui morfisme de R-mòduls.

Veurem que, quan és aplicable, l'algorisme per construir un model KS-minimal d'un A-mòdul dg (anàleg al de Sullivan per a $\mathbf{Q}$-àlgebres dgc) produeix KS-minimals en els quals la KS-filtració és la filtració canònica.

DEFINICIÓ 4. Direm que un A-mòdul dg KS-minimal M està *canònicament filtrat* si $M(n,q) = M[n,q]$ per a tota parella (n,q).

Hom té de manera òbvia el següent resultat:

Proposició 3. *Sigui $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfisme de A-mòduls dg KS-minimals canònicament filtrats. Aleshores, per a tota parella (n,q), $\varphi(M(n,q)) \subseteq N(n,q)$.*

Corol·lari. *Tot quis entre KS-minimals canònicament filtrats és un isomorfisme filtrat.*

En general, però, no tot KS-minimal, entés com a A-mòdul dg més una KS-filtració, està canònicament filtrat: les condicions (1)-(5) de (4.1) no impedeixen que els “nous generadors" s'adjuntin de manera "incorrecta": per "matar" cocicles que ja eren vores (exemple 1) o en etapes anteriors a la darrera de la filtració (exemple 2). En tots dos exemples, però, és possible escollir com a KS-filtració la filtració canònica. La possibilitat de "reestructurar", en la terminologia de [Hal], un KS-minimal depèn de l'existència de suficients KS-minimals canònicament filtrats: en aquest cas, si M és un KS-minimal, potser no canònicament filtrat, n'escollim un KS-model minimal canònicament filtrat $\rho : M' \xrightarrow{\sim} M$. Com que tots dos són minimals pel teorema 1, ρ és un isomorfisme. Aleshores filtrem canònicament M per la imatge de la filtració de M' per ρ. El fet que aquest procediment no sempre és possible ens ho demostra l'exemple 3. En particular, ens diu que per a la A escollida $\mathbf{Mdg}(A)$ no té suficients minimals.

Finalment, donem una caracterització cohomològica dels KS-minimals canònicament filtrats (cf. [Na$_2$]). Dit ràpidament, la primera de les condicions demana que, llevat dels primers, els nous generadors no alterin la cohomologia en el grau en que s'afegeixen. La segona condició ens diu que si un cocicle d'una etapa de la filtració és una covora en el A-mòdul dg total, aleshores ha de ser una covora en l'etapa següent.

Teorema 4. *Un A-mòdul dg M KS-minimal està canònicament filtrat si i només si per a tot $n \geq 0$ i tot $q > 0$*

(6) *la inclusió $M(n,q) \hookrightarrow M$ indueix un isomorfisme $H^iM(n,q) \longrightarrow H^iM$ per a $i = 0, \dots, n$, i*

(7) *el morfisme $H^{n+1}(M(n,q-1), M) \longrightarrow H^{n+1}(M(n,q), M)$ de la successió llarga de cohomologia del triple $M(n,q-1) \hookrightarrow M(n,q) \hookrightarrow M$ és el morfisme nul.*

Demostració. Suposem que M és KS-minimal canònicament filtrat. Veiem que la filtració canònica satisfà les condicions (6) i (7). Per a $q = 1$, (6) és equivalent a que en la successió llarga de cohomologia del parell $M[n,1] \hookrightarrow M$,

$$H^n(M[n,1], M) \to H^nM[n,1] \to H^nM \to H^{n+1}(M[n,1], M)$$

el primer i el tercer dels morfismes siguin nuls. Pel que fa al primer d'ells, si $[(x,y)] \in H^n(M[n,1], M)$ aleshores $dx = 0$ i $x = dy$, sent $x \in M[n,1]^n$ i $y \in M^{n-1} \subset M[n,1]$. Per tant, la seva imatge en $H^nM[n,1]$, $[x]$, és igual a $[dy] = 0$. Quant a l'altre, es tracta de $[x] \longmapsto [(0,x)] = [d(x,0)] = 0$. Observem que podem afirmar que

$x \in M[n,1]$ perquè $dx = 0$ i es tracta de la filtració canònica. Anàlogament, es veu que les inclusions $M(n,q) \hookrightarrow M(n,q+1)$ indueixen isomorfismes $H^n M(n,q) \cong H^n M(n,q+1)$ per a tot $q > 0$. D'on també les inclusions de l'enunciat.

El morfisme de (7) no és més que $[(x,y)] \longmapsto [(x,y)]$, sent $x \in M[n,q-1] \subset M[n,q]$ tal que $dx = 0$ i $y \in M$ tal que $x = dy$. Com que $dy \in M[n,q-1]$, per definició de la filtració canònica, implica $y \in M[n,q]$, es té $[(x,y)] = [d(y,0)] = 0$ a $H^{n+1}(M[n,q],M)$.

Recíprocament, suposem que M és KS-minimal i la KS-filtració satisfà les condicions (6) i (7) de l'enunciat. De (6) es segueix immediatament el

Lema 1. *Per a tot $n \geq 0$ i tot $q > 0$ el morfisme induït per la inclusió $M(n,q) \hookrightarrow M(n,q+1)$ indueix un isomorfisme $H^i M(n,q) \longrightarrow H^i M(n,q+1)$ per a tot $i = 0,\ldots,n$.*

Així mateix, el cas de l'exemple 1 no es pot donar: les diferencials dels nous generadors no poden ser covores que ja existissin en l'etapa anterior de la filtració.

Lema 2. *Per a tot $n \geq 0$ i tot $q > 0$, $dV(n,q+1) \cap B^{n+1}M(n,q) = \{0\}$.*

Demostració del lema 2. En efecte, si existíssin $v \in V(n,q+1)$, $v \neq 0$ i $x \in M(n,q)$ tals que $dv = dx$, aleshores, $x - v \in Z^n M(n,q+1)$ i per tant tenim una classe de cohomologia en $H^n M(n,q+1)$, el qual, pel lema 1, és isomorf a $H^n M(n,q)$. Per tant existeixen $y \in Z^n M(n,q)$ i $z \in M(n,q)^{n-1}$ tals que $y-(x-v) = dz$. Es segueix que $v = dz + x - y \in M(n,q)$, el qual és impossible.

Per a les KS-filtracions que satisfan (6) i (7) tampoc és possible que la diferencial apliqui nous generadors més enllà de l'etapa anterior de la filtració.

Lema 3. *Per a tot $n \geq 0$ i tot $q \geq 1$, $dV(n,q+1) \cap M(n,q-1) = \{0\}$.*

Demostració del lema 3. Suposem que existís $v \in V(n,q+1)$, $v \neq 0$ tal que $dv \in M(n,q-1)$. Aleshores, (dv,v) defineix una classe no nul·la tant en $H^{n+1}(M(n,q-1),M)$ com en $H^{n+1}(M(n,q),M)$, ja que si es tingués $(dv,v) = d(x,y) = (dx, x-dy)$ amb $x \in M(n,q)$ i $y \in M$, aleshores $dv = dx$, el qual és impossible pel lema 2. Però això contradiu la condició (7), ja que $[(dv,v)]$ és la imatge de $[(dv,v)]$ pel morfisme

$H^{n+1}(M(n,q-1),M) \longrightarrow H^{n+1}(M(n,q),M)$ i per tant aquest no seria el morfisme zero.

Observem que les afirmacions dels lemes 2 i 3 segueixen sent certes si substituïm $V(n,q+1)$ per $A \otimes_R V(n,q+1)$. Veiem que les condicions (6) i (7) impliquen que la KS-filtració és la filtració canònica. Es a dir, $M(n,q) = M[n,q]$. Com sabem, $M(n,0) = M[n,0]$ per a qualsevol KS-filtració. Suposem que $M(n,q-1) = M[n,q-1]$. Aleshores, la igualtat $M(n,q) = M(n,q-1) \oplus_d (A \otimes_R V(n,q))$ implica que $M(n,q) \subset M[n,q]$. Recíprocament, si $x \in M[n,q]$ és un generador, pot ser que $x \in M[n,q-1]$ i aleshores, per hipòtesi d'inducció, hem acabat. Si $x \notin M[n,q-1]$, aleshores $|x| = n$ i $dx \in M[n,q-1]$. Veiem que x no té components més enllà de l'etapa (n,q) de la filtració. Podem suposar que

$$x = x_{n,q} + x_{n,q+1} + \cdots + x_{n,s+1}$$

amb $x_{n,r} \in V(n,r)$ i, de fet, que $x_{n,q} = 0$. Però aleshores

$$dx = dx_{n,q+1} + dx_{n,q+2} + \cdots + dx_{n,s+1} \in M(n,q-1)$$

implica

$$\begin{aligned} dx_{n,s+1} &= dx - dx_{n,q+1} - dx_{n,q+2} - \cdots - dx_{n,s} \\ &= d(x - x_{n,q+1} - x_{n,q+2} - \cdots - x_{n,s}) \\ &\in M(n,s-1) \end{aligned}$$

El qual contradiu el lema 3. $\square$

(4.4) Existència de suficients minimals. Sota certes restriccions en l'àlgebra de coeficients A, hom pot assegurar l'existència d'un model KS-minimal canònicament filtrat per a tot A-mòdul dg.

Teorema 5. *Sigui $R = \mathbf{k}$ un cos de característica zero i A una R-àlgebra dgc tal que $H^0 A = \mathbf{k}$. Aleshores tot A-mòdul dg té un model KS-minimal canònicament filtrat.*

Demostració. Sigui X un A-mòdul dg. Construïrem un KS-model minimal $\rho : M \longrightarrow X$ seguint les etapes $\rho_{(n,q)} : M(n,q) \longrightarrow X$ de la KS-filtració. Per veure que es tracta de la filtració canònica, utilitzarem la caracterització cohomològica d'aquesta que hem vist en el teorema 3 sota la forma equivalent: per a tot $n \geq 0$ i tot $q > 0$,

(6')$_{(n,q)}$ $(\rho_{(n,q)})^i_*$ és un isomorfisme per a $i = 0, \ldots, n$, i

(7')$_{(n,q)}$ $H^{n+1}(M(n, q-1), X) \longrightarrow H^{n+1}(M(n,q), X)$ és el morfisme nul.

Suposem construïts els $\rho_{(m,q)}$ satisfent les condicions anteirors per a $m < n$ i $\rho_{(n,0)} : M(n,0) \longrightarrow X$ tal que

(i)$_n$ $(\rho_{(n,0)})^m_*$ és un isomorfisme per a $m = 0, \ldots, n-1$, i

(ii)$_n$ $(\rho_{(n,0)})^n_*$ és injectiu.

Amb aquestes hipòtesis, prenem $V(n,1) = H^{n+1}(M(n,0), X)$ i una secció $\mathbf{k}$-lineal σ de la projecció $Z^{n+1}((M(n,0), X)) \longrightarrow V(n,1)$. Per a tot $v \in V(n,1)$ hom té

$$\sigma(v) = (m_v, x_v) \in M(n,0)^{n+1} \oplus X^n$$

tals que $dm_v = 0$ i $\rho_{(n,0)} m_v = dx_v$. Definim

$$M(n,1) = M(n,0) \oplus_d (A \otimes_{\mathbf{k}} V(n,1))$$

amb diferencial $dv = m_v$. Definim també

$$\rho_{(n,1)} : M(n,1) \longrightarrow X$$

com el morfisme induït per $\rho_{(n,0)}$ i $f : V(n,1) \longrightarrow X^0$, $fv = x_v$. Es tracta d'un morfisme de A-mòduls dg per l'obsevació de (6.1) ja que $\rho_{(n,0)} dv = \rho_{(n,0)} m_v = dx_v = dfv$. Comprovem que

(6')$_{(n,1)}$ $(\rho_{(n,1)})^i_*$ és un isomorfisme per a $i = 0, \ldots, n$, i

(7')$_{(n,1)}$ $H^{n+1}(M(n,0), X) \longrightarrow H^{n+1}(M(n,1), X)$ és el morfisme nul.

En efecte: per a $i < n$, $\rho_{(n,1)}$ coincideix amb $\rho_{(n,0)}$ i per tant el morfisme induït en cohomologia és un isomorfisme per (i)$_n$. Pel que fa al grau n, la inclusió $M(n,0) \hookrightarrow M(n,1)$ indueix un monomorfisme en cohomologia. Per tant, com que $\rho_{(n,1)|M(n,0)} = \rho_{(n,0)}$ i, per (ii)$_n$, aquest darrer indueix un monomorfisme en cohomologia en grau n, es segueix que $(\rho_{(n,1)})^n_*$ és injectiu.

Comprovem que també és exhaustiu. Si $[x] \notin \operatorname{im}(\rho_{(n,0)})^n_*$, aleshores es té un element no nul $v = [(0,x)] \in V(n,1)$. Per definició, de $v = [(dv, \rho_{(n,1)} v)]$, això vol dir que existeix $(m,y) \in M(n,1)^n \oplus X^{n-1}$ tal que $(dv, \rho_{(n,1)} v - x) = (dm, \rho_{(n,0)} m - dy)$. Es a dir, $v - m$ és un cocicle de $M(n,1)$ i $[x] = (\rho_{(n,1)})^n_* [v - m]$.

Quant a la condició (7')$_{(n,1)}$, si $(m,x) \in M(n,0)^{n+1} \oplus X^n$ és un cocicle relatiu, dins el simple de $\rho_{(n,1)}$ és una covora: sigui $v = [(m,x)] \in V(n,1)$, aleshores $d(v,0) = (dv, \rho_{(n,1)} v) = (m,x)$.

Hom suposa construïts $\rho_{(n,p)} : M(n,p) \longrightarrow X$ de manera que satisfacin (6') i (7') corresponents per a $0 \leq p < q$. Hom pren aleshores $V(n,q) = H^{n+1}(M(n,q-1),X)$, una secció de la projecció $Z^{n+1}(M(n,q-1),X) \longrightarrow V(n,q)$ i defineix $M(n,q)$ i $\rho_{(n,q)}$ de manera anàloga al cas $q = 1$.

Finalment, per completar la inducció, prenem

$$M(n+1,0) = \varinjlim M(n,q) \qquad \text{i} \qquad \rho_{(n+1,0)} = \varinjlim \rho_{(n,q)}$$

i es té que $(\rho_{(n+1,0)})_*^i$ és:

(i)$_n$ un isomorfisme per a $i = 0, \ldots, n1$, ja que tots els $(\rho_{(n,q)})_*^i$ ho són, i

(ii)$_n$ és injectiu per a $i = n+1$, ja que si $x \in Z^{n+1}M(n+1,0)$ és tal que $[\rho_{(n+1,0)}x] = 0$, aleshores $x \in M(n,q)$ per a algun q i la seva imatge serà una covora. $\square$

Corol·lari 1. *Si A és una* $\mathbf{k}$*-àlgebra dgc homològicament connexa, els KS-minimals canònicament filtrats són tots els objectes minimals de* $\mathbf{Mdg}(A)$*, llevat d'isomorfismes.*

Demostració. Ens trobem en les hipòtesis de la proposició 3 de § 1. $\square$

Corol·lari 2. *Si A és una* $\mathbf{k}$*-àlgebra dgc homològicament connexa, la inclusió de* $\mathbf{Mdg}(A)_m$ *en* $\mathbf{Mdg}(A)$ *indueix una equivalència de categories*

$$\pi\mathbf{Mdg}(A)_m \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)$$

Demostració. Es segueix del teorema anterior i del teorema 13 de (1.6) $\square$

§ 5. Minimals de categories bifibrades.

(5.1) Caracterització. Sigui $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ una categoria bifibrada. En el capítol III, hem vist condicions perquè $\mathcal{A}$ sigui una categoria de models. Com hem observat algun cop, això no és, però, una condició necessària per parlar d'objectes minimals:

com la categoria localitzada, aquests tan sols depenen del conjunt de morfismes que hom vol invertir.

En el que segueix, suposarem donats $S_{\mathcal{E}} \subset \operatorname{mor} \mathcal{E}$ i $S_x \subset \operatorname{mor} \mathcal{A}_x$ per a tot $x \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$ de manera que per a tot $f : x \longrightarrow y \in \operatorname{mor} \mathcal{E}$ es tingui $f^*(S_y) \subset S_x$. Considerem aleshores el següent conjunt de morfismes de $\mathcal{A}$ (cf. definició d'equivalència feble del teorema 3, § 2, capítol III):

$$S = \{\rho : a \longrightarrow b \in \operatorname{mor} \mathcal{A} \mid P\rho \in S_{\mathcal{E}} \text{ i } \varphi_\rho \in S_{Pa}\}$$

En aquesta secció sols es suposa que els conjunts S satisfan les condicions (i) i (ii) de (1.2).

Obviament, degut a l'elecció del conjunt S, els minimals de $\mathcal{A}$ estan unívocament determinats pels de $\mathcal{E}$ i els de les fibres.

Teorema. *Sigui $m \in \operatorname{obj} \mathcal{A}$. Aleshores m és un objecte minimal de $\mathcal{A}$ si i només si $m \in \operatorname{obj} \mathcal{A}_{Pm}$ i $Pm \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$ són minimals.*

Demostració. Suposem que m és un objecte minimal de $\mathcal{A}$. Veiem que aleshores, ho és en $\mathcal{A}_{Pm}$. Sigui $\sigma : a \longrightarrow m \in S_{Pm}$. Aleshores $\sigma \in S$ i, per ser m minimal en $\mathcal{A}$, existeix $\sigma' : m \longrightarrow a \in \operatorname{mor} \mathcal{A}$ tal que $\sigma\sigma' = 1_m$. Cal veure tan sols que $\sigma' \in \operatorname{mor} \mathcal{A}_{Pm}$: aplicant P a la darrera igualtat, resta $P\sigma' = 1_{Pm}$; i.e., σ' és un morfisme de $\mathcal{A}_{Pm}$.

Veiem que també $Pm \in \operatorname{obj} \mathcal{E}$ és minimal. Sigui $s : x \longrightarrow Pm \in S_{\mathcal{E}}$. Considerem el morfisme canònic $\alpha_s(m) : s^*m \longrightarrow m$. Com que $P\alpha_s(m) = s$, es té $\alpha_s(m) \in S$. D'on, per ser m minimal, existeix σ tal que $\alpha_s(m)\sigma = 1_m$. D'on $sP(\sigma) = 1_{Pm}$.

Recíprocament, suposem que m és minimal en $\mathcal{A}_{Pm}$ i que Pm ho és en $\mathcal{E}$. Veiem que m és minimal en $\mathcal{A}$: sigui $\sigma : a \longrightarrow m \in S$. Aleshores $s = P\sigma : Pa \longrightarrow Pm \in S_{\mathcal{E}}$ i, com que Pm és minimal, existeix $t : Pm \longrightarrow Pa$ tal que $st = 1_{Pm}$. Considerem la descomposició $\sigma = \alpha_\sigma \varphi_\sigma$. Hom té $\varphi_\sigma \in S_{Pa}$. Aleshores $t^*\varphi_\sigma : t^*a \longrightarrow t^*s^*m = m \in S_{Pm}$ i, per ser m minimal en $\mathcal{A}_{Pm}$, es té una secció $\psi : m \longrightarrow t^*a$. Aleshores, $\alpha_t(a)\psi : m \longrightarrow a$ és una secció de σ. $\square$

Com a conseqüència, tenim una condició suficient perquè $\mathcal{A}$ tingui suficients minimals i, a la vegada, un algorisme per calcular models minimals en $\mathcal{A}$ si els tenim en $\mathcal{A}_x$ i $\mathcal{E}$.

Corol·lari 1. *Si per a tot* $x \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$, $\mathcal{A}_x$ *i* $\mathcal{E}$ *tenen suficients minimals, aleshores* $\mathcal{A}$ *té suficients minimals.*

Demostració. Suposem que $\mathcal{E}$ i $\mathcal{A}_x$ tenen suficients minimals. Sigui $a \in \operatorname{obj}\mathcal{A}$. Sigui $s : m' \longrightarrow x$ un model minimal de $x = Pm$. Considerem la imatge recíproca de a per s. Sigui $\sigma_1 : m \longrightarrow s^*a \in \operatorname{mor}\mathcal{A}_{m'}$ un model minimal d'aquesta. Aleshores $\sigma = \alpha_s(a)\sigma_1 : m \longrightarrow a$ és un model minimal de a en $\mathcal{A}$. $\square$

Corol·lari 2. *Sigui* $\mathcal{A}$ *una categoria de models amb una estructura com la del teorema 3 § 2, capítol II. Si per a tot* $x \in \operatorname{obj}\mathcal{E}$, $\mathcal{A}_x$ *i* $\mathcal{E}$ *tenen suficients minimals, aleshores la inclusió de* $\mathcal{A}_{min}$ *en* $\mathcal{A}$ *indueix una equivalència de categories*

$$\pi\mathcal{A}_{min} \cong \mathrm{Ho}\mathcal{A}$$

(5.2) Exemples. EXEMPLE 1. Un morfisme de R-àlgebres dgc $f : A \longrightarrow B$ és minimal com a objecte de **Adgc** si i només si A és una R-àlgebra dgc minimal i f és un morfisme minimal (i.e., un objecte minimal de $\mathbf{Adgc}(A)$).

Donat $f : A \longrightarrow B \in \operatorname{obj}\mathbf{Adgc}$, un model minimal es construeix seguint la demostració del corol·lari 1. Es a dir, hom pren un model minimal de A dins $\mathbf{Adgc}(R)$, $\rho : M_A \longrightarrow A$ i un model minimal de $f\rho : M_A \longrightarrow B$ en la categoria $\mathbf{Adgc}(M_A)$: és a dir, un diagrama commutatiu de $\mathbf{Adgc}(R)$,

$$\begin{tikzcd} & M_A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M_{f\rho} \arrow[rr, "\sigma"'] & & B \end{tikzcd}$$

on σ és un *quis* de R-àlgebres dgc.

Un model d'aquest tipus existeix, per exemple, si $R = \mathbf{k}$ i $H^0A = H^0B = \mathbf{k}$: veure [Hal], capítol 9 (cf. [ViP], [Tho]). En la terminologia de *op.cit.* $M_A \longrightarrow M_{f\rho}$ és una Λ-extensió Λ-minimal. Hom té doncs, com a cas particular del corol·lari 2 de (5.1),

$$\pi\mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})^2_{min} \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})^2$$

EXEMPLE 2. En general, un morfisme $f : x \longrightarrow y$ d'una categoria $\mathcal{C}$ amb tots els push-out és minimal com a objecte de $\mathcal{C}^2$ si i només si x és un objecte minimal i f és un morfisme minimal (i.e., si és minimal com a objecte de $x\backslash\mathcal{C}$).

Exemple 3. Una parella $(A, M) \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}$ és minimal si i només si A és una R-àlgebra dgc minimal i M és un A-mòdul dg minimal.

L'algorisme per calcular un model minimal en aquesta categoria és com segueix: donat $(A, X) \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}$, hom pren un model minimal de A com a R-àlgebra dgc, $\rho : M_A \longrightarrow A$, i un model minimal de $\rho^* X$ com a M_A-mòdul dg, $\sigma : M_{\rho^* X} \longrightarrow \rho^* X$. El model minimal resultant és el morfisme de parells $(\rho, \sigma) : (M_A, M_{\rho^* X}) \longrightarrow (A, X)$.

Si $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, $\mathcal{E} = \mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})$ té suficients minimals i, pel teorema 5 de § 4, per a tota $\mathbf{k}$-àlgebra dgc cohomològicament connexa A, $\mathbf{Mdg}_A = \mathbf{Mdg}(A)$ té suficients minimals. Per tant es té una equivalència de categories:

$$\pi\mathbf{Mdg}_{min} \cong \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}$$

Exemple 4. Un triple $(M, A, N) \in \operatorname{obj}\mathbf{2Mdg}$ és minimal si i només si A és una R-àlgebra dgc minimal i M i N són A-mòduls dg minimals.

Deixem a cura del lector enunciar condicions suficients per a l'existència de suficients minimals en les categories $\mathbf{Adgc}_*(R)^2$, $\mathbf{Mdg}_*$ i $\mathbf{2Mdg}$, així com les equivalències de categories que se'n dedueixen.

§ 6. Formalitat.

En aquest § ens ocupem bàsicament de la formalitat de A-mòduls dg. Els resultats i demostracions per a morfismes d'àlgebres dgc són essencialment els mateixos i ens limitem a enunciar-los, senyalant les diferències on pugui haver-les.

(6.1) Formalitat: abstract non-sense. Comencem per donar una definició categòrica de formalitat, que ens permetrà enunciar i demostrar per "abstract non-sense" una de les implicacions (proposició 3, més endavant) del conegut resultat d'aixecament de morfismes de [Sul] per a la categoria de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc (veure també [F-T] per al resultat anàleg per a la categoria dels morfismes).

Siguin $\mathcal{D} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathcal{D}$ un parell de functors tals que $H\iota = 1_{\mathcal{D}}$. Per fixar les idees, el lector pot pensar que $\mathcal{C}$ és la categoria de $\mathbf{Q}$-àlgebres dgc, H és el functor de cohomologia, i ι el functor resultant de pensar tota $\mathbf{Q}$-àlgebra graduada commutativa com una $\mathbf{Q}$-àlgebra dgc amb diferencial nul·la. Amb les notacions de capítol I, § 1, prenem

$$S = \{s \in \operatorname{mor} \mathcal{C} \mid Hs \text{ és un isomorfisme}\}$$

DEFINICIÓ 1. Un objecte x de $\mathcal{C}$ és (H,ι)-*formalitzable* (o, simplement, *formalitzable*) si és isomorf a ιHx en la categoria $\mathcal{C}_S$.

Anomenarem *formalització* de x a tota successió de morfismes de $\mathcal{C}$ (veure capítol I, § 1),

$$x \longleftarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longleftarrow \cdot \ldots \cdot \longrightarrow \iota Hx$$

que sigui una S-equivalència. Obviament, si x i y són objectes S-equivalents, x és formalitzable si i sols si ho és y. Recordem (veure (1.1) que les nocions de S-equivalència i d'isomorfisme en la categoria $\mathcal{C}_S$ no són exactament coincidents, però sí si es tracta d'una categoria de models.)

D'ara endavant $\mathcal{C}$ serà una categoria de models tancada amb tots els objectes fibrants i S el conjunt de les seves equivalències febles.

Aleshores S admet un càlcul de fraccions per la dreta en $\pi\mathcal{C}$ i, en aquesta categoria, tota formalització es redueix a una successió de dos morfismes de $\overline{S}$ (veure (1.6)),

$$x \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \iota Hx$$

Prenent-ne representants, podem considerar el diagrama en $\mathcal{C}$ i els morfismes de S. Si $\mathcal{C}$ té suficients minimals, el fet que x sigui formalitzable equival a que x i ιHx tinguin el mateix model minimal:

$$x \xleftarrow{s} m \xrightarrow{\theta} \iota Hx$$

A més a més, hom pot triar θ de manera que $H\theta = Hs$, substituïnt-lo, si cal, per $\theta' = (\iota Hs)(\iota H\theta)^{-1}\theta$. En particular, si $m \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ és minimal, és formalitzable si i només si existeix un morfisme $s : m \longrightarrow \iota Hx \in S$, que podem escollir de manera que $Hs = 1_{Hm}$.

EXEMPLE 1. Sigui $\mathbf{k}$ un cos de característica zero i $\mathcal{C} = \mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})$ la categoria de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc cohomològicament connexes. La noció de formalitzable de la definició

1 coincideix amb la de $\mathbf{k}$-àlgebra dgc *formal* de [Sul]: $A \in \mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})$ és formal si i només si existeix un *quis* $M \longrightarrow HA$, on M és un model minimal de A.

EXEMPLE 2. Un parell de functors H, ι tals que $H\iota = 1_{\mathcal{D}}$ com els de la definició 1, indueixen de manera evident functors $\mathcal{D}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{D}^2$, que hom notará igual, i tals que $H\iota = 1_{\mathcal{D}^2}$. Aleshores el conjunt

$$S = \{\rho : f \longrightarrow g \in \operatorname{mor} \mathcal{C}^2 \mid H\rho \text{ és un isomorfisme de } \mathcal{D}^2\}$$

coincideix amb el conjunt de les equivalències febles de $\mathcal{A} = \mathcal{C}^2$ tal com el definíem en el teorema 3 de (2.1), capítol III, i per tant són vàlides les simplificacions del càlcul de fraccions per a $\mathcal{C}^2$. Per tant la nostra definició per a un objecte de $\mathcal{C}^2$ ens diu que $f : a \longrightarrow b \in \operatorname{obj} \mathcal{C}^2$ és formalitzable si existeix un diagrama commutatiu *de* $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \\ m \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "s'"'] & n \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "t'"'] \\ \iota Ha \arrow[r, "\iota Hf"] & \iota Hb \end{tikzcd}$$

en el qual $s, t, s', t' \in S$. En aquest cas, podem escollir s' i t' de manera que $Hs' = Hs$ i $Ht' = Ht$. Si hi ha suficients minimals a $\mathcal{C}$ i a $m \backslash \mathcal{C}$, podem prendre com a m un model minimal de a i com a f' un model minimal de fs dins $m \backslash \mathcal{C}$.

EXEMPLE 3. Comparem la nostra noció de morfisme formalitzable amb la de [Tho] i de [F-T] per a la categoria $\mathcal{C} = \mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})$. Com que en $\mathcal{C}^2 = \mathbf{Adgc}_{hc}(\mathbf{k})^2$ hi ha suficients minimals, la nostra noció de formalitzable per a un morfisme de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc cohomològicament connexes $f : A \longrightarrow B$ equival a l'existència d'un diagrama commutatiu de $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ M_A \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\rho'"'] & M_{f\rho} \arrow[u, "\sigma"'] \arrow[d, "\sigma'"'] \\ HA \arrow[r, "Hf"] & HB \end{tikzcd} \tag{1}$$

(hom sobreentén el functor ι en el diagrama anterior). Els autors citats demanen tan sols que el diagrama anterior sigui homotòpicament commutatiu (observi's que [F-T] parlen de "model minimal" de f en el sentit de la proposició 8 de (1.4)). Les dues nocions són, però, equivalents: per exemple, si el rectangle superior de (1) és homotòpicament commutatiu, es té un diagrama commutatiu de $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$,

$$\begin{array}{ccc} M_A & \xrightarrow{h} & B(t,dt) \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle \partial_1}\downarrow \\ M_{f\rho} & \xrightarrow{\sigma} & B \end{array}$$

en el qual ∂_1 (l'avaluació en el zero) és una fibració trivial. Com que f' és un morfisme minimal, per la proposició 15 de (1.6) és cofibrant i per la LLP, existeix $\sigma' : M_{f\rho} \longrightarrow B(t,dt)$ tal que $\sigma' f' = h$ i $\partial_1 \sigma' = \sigma$. Substituïnt σ per $\partial_0 \sigma'$ en (2), es té un diagrama commutatiu: $\partial_0 \sigma' f' = \partial_0 h = f\rho$. Anàlogament per al rectangle inferior.

Hom pot demostrar, en aquest context, el fet que tot automorfisme de Hm s'aixeca en un automorfisme de m (veure [Sul]). Amb més precisió,

Proposició 3. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models tancada, en la què el conjunt de les equivalències febles són aquells morfismes invertibles per un cert functor H donat. Sigui m un objecte minimal formalitzable de $\mathcal{C}$. Aleshores l'aplicació*

$$\begin{array}{rcl} H : \mathrm{Aut}\,(m) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\,(Hm) \\ \varphi & \longmapsto & H\varphi \end{array}$$

és exhaustiva.

Demostració. Sigui $\phi \in \mathrm{Aut}\,(Hm)$ i $s : m \longrightarrow \iota Hm \in S$ tal que $Hs = 1_m$. Aleshores $(\iota\phi)s : m \xrightarrow{\sim} \iota Hm$ és un model minimal de ιHm. Com que els models minimals són únics llevat d'isomorfismes que commuten, llevat d'homotopies, amb els morfismes de S, existeix $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(m)$ tal que $s\varphi \simeq (\iota\phi)s$; és a dir, $H\varphi = H\iota\phi = \phi$. $\square$

(6.2) Els dos teoremes de formalitat per a **Mdg**. Sigui $\mathbf{k}$ un cos de característica zero, A una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc i M un A-mòdul dg, ambdós minimals. Pel teorema 2 de § 5, (A,M) és un objecte minimal de **Mdg**. Com que aquesta és una categoria de models tancada pel corol·lari 1, § 2, capítol III, dir que (A,M) és un objecte formalitzable de **Mdg** és equivalent a dir que existeix un *quis* d'aquesta categoria

$$(g,\psi):(A,M)\longrightarrow(HA,HM)$$

Es a dir, $g:A\longrightarrow HA$ és un *quis* de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc i $\psi:M\longrightarrow g^*HM$ és un *quis* de A-mòduls dg.

Observacions. (1) Si $f:A\longrightarrow B\in\operatorname{obj}\mathbf{Adgc}$ és formalitzable, aleshores $(A,B)\in\operatorname{obj}\mathbf{Mdg}$ és formalitzable.

(2) Com en el cas de **Adgc** això no implica que per a tota formalització de A, $g:A\longrightarrow HA$, existeixi una “formalització” de M (i.e., un morfisme de $\mathbf{k}$-mòduls dg $\psi:M\longrightarrow HM$ que sigui un g-morfisme).

Pel que hem vist (proposició 1), el fet que (A,M) sigui minimal i formalitzable implica que els automorfismes de (HA,HM) s'aixequen en automorfismes de (A,M). Els objectius dels apartats (6.3) i (6.4) són, d'una banda, demostrar el recíproc d'aquest resultat. En concret,

Teorema 2. *Suposem que (A,M) és un objecte minimal de* **Mdg**, *A una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc finit generada i M un A-mòdul dg finit generat. Si tot automorfisme $(\widetilde{f},\widetilde{\varphi})$ de (HA,HM) s'aixeca en un automorfisme (f,φ) de (A,M), aleshores (A,M) és formalitzable.*

Es a dir, si per a tot $\widetilde{f}\in\operatorname{Aut}(HA)$, existeix $f\in\operatorname{Aut}(A)$ tal que $H\widetilde{f}=f$ i per a tot $\widetilde{f}$-morfisme $\widetilde{\varphi}\in\operatorname{Aut}(HM)$ existeix un f-morfisme $\varphi\in\operatorname{Aut}(M)$ tal que $H\widetilde{\varphi}=\varphi$, aleshores (A,M) és un objecte formalitzable.

En segon lloc, demostrar que la formalitat no depèn del cos base. Es a dir, si $\mathbf{k}\subset\mathbf{K}$ és una extensió de cossos de característica zero, A una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc i M un A-mòdul dgc i posem

$$A_{\mathbf{K}}=A\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{K}\qquad\text{i}\qquad M_{\mathbf{K}}=M\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{K}$$

aleshores es té

Teorema 3. *Suposem que A és una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc finit generada i M un A-mòdul dg finit generat. Aleshores $(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}})$ és formalitzable si i només si (A, M) és formalitzable.*

Observació. En el que segueix, podem suposar que $\mathbf{K}$ és algebraicament tancat, ja que si el teorema 3 és cert en aquest cas, també és cert en general.

(6.3) Grups algebraics i automorfismes de graduació. La nostra referència per als grups algebraics serà [Bor]. El seu paper en la demostració dels teoremes anteriors és, d'una banda, mostrar que, sota la hipòtesi d'aixecament d'automorfismes del teorema 2, es té un subobjecte de (A, M) quasi-isomorf a l'objecte total per al qual la formalitat és fàcil de comprovar. Per la minimalitat, aquest subobjecte és l'objecte total. Un cop vist que la formalitat és equivalent a l'exhaustivitat del morfisme H, hom comprova que aquesta caracterització és independent del cos base (teorema 3) utilitzant resultats de racionalitat de grups algebraics.

Lema 1. $H_{\mathbf{K}} : \mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(HA_{\mathbf{K}}, HM_{\mathbf{K}})$ *és un $\mathbf{k}$-morfisme de $\mathbf{k}$-grups que sobre els $\mathbf{k}$-punts coincideix amb $H : \mathrm{Aut}\,(A, M) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(HA, HM)$.*

Demostració. Suposem $A_{\mathbf{K}}$ i $M_{\mathbf{K}}$ generats en graus $\leq n-1$ i $\leq m-1$. Aleshores $\mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}})$ és un subgrup de $\bigoplus_{i\leq n} GL(A^i_{\mathbf{K}}) \times \bigoplus_{j\leq m} GL(M^j_{\mathbf{K}})$. Veiem que les equacions que el defineixen són polinomials. En efecte, perquè $(f, \varphi) \in \bigoplus_{i\leq n} GL(A^i_{\mathbf{K}}) \times \bigoplus_{j\leq m} GL(M^j_{\mathbf{K}})$ sigui un morfisme de **Mdg** és necessari i suficient que

(1) $dfa = fda, d\varphi x = \varphi dx$,

(2) $f(aa') = fa \cdot fa'$ i $\varphi(ax) = fa \cdot \varphi x$

per a $a, a' \in A_{\mathbf{K}}$ i $x \in M_{\mathbf{K}}$ per als quals les igualtats anteriors tinguin sentit. Prenent bases de $A_{\mathbf{K}}$ i $M_{\mathbf{K}}$ com a $\mathbf{K}$-espais vectorials i escrivint les igualtats anteriors en forma matricial, hom veu que les equacions (1) són lineals i les equacions (2) són de segon grau en les coordenades de f i φ en aquestes bases.

Pel que fa a l'aplicació $\mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(HA_{\mathbf{K}}, HM_{\mathbf{K}})$, descomponent $A_{\mathbf{K}}$ i $M_{\mathbf{K}}$ en suma dels subespais vectorials,

$$A_{\mathbf{K}} = HA_{\mathbf{K}} \oplus BA_{\mathbf{K}} \oplus BA_{\mathbf{K}}[+1] \qquad \text{i} \qquad M = HM_{\mathbf{K}} \oplus BM_{\mathbf{K}} \oplus BM_{\mathbf{K}}[+1]$$

hom veu que es tracta d'una aplicació lineal en els coeficients de f i φ.

Finalment, els coeficients de (1) i (2) provenen de les diferencials $d\otimes 1$, de $A_{\mathbf{K}}$ i $M_{\mathbf{K}}$ i dels productes $A_{\mathbf{K}}\otimes_{\mathbf{K}} A_{\mathbf{K}} = (A\otimes_{\mathbf{k}} A)\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{K} \longrightarrow A\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{K} = A_{\mathbf{K}}$ i $(A\otimes_{\mathbf{k}} M)\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{K} \longrightarrow M\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{K}$. Per tant pertanyen a $\mathbf{k}$. Anàlogament per al morfisme $H_{\mathbf{K}}$. Per tant estan definits sobre $\mathbf{k}$ i els seus $\mathbf{k}$-punts són els esmentats. $\square$

Observació. Es clar que $\mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}})\times\mathrm{Aut}\,(M_{\mathbf{K}})$ és també un morfisme de grups algebraics lineals i per tant preserva les parts semi-simple i unipotent de les descomposicions de Jordan multiplicatives. Com a conseqüència, per a tot $(f,\varphi)\in \mathrm{Aut}\,(A,M)$ hom té que en la descomposició anomenada $(f,\varphi) = (f,\varphi)_s(f,\varphi)_u$ tant $(f,\varphi)_s$ com $(f,\varphi)_u$ són morfismes de **Mdg** i $(f,\varphi)_s = (f_s,\varphi_s)$ i $(f,\varphi)_u = (f_u,\varphi_u)$. Així mateix, per [Bor], teorema (4.4), si $(f,\varphi)\in \mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}})(\mathbf{k}) = \mathrm{Aut}\,(A,M)$, aleshores $(f,\varphi)_s$ i $(f,\varphi)_u \in \mathrm{Aut}\,(A,M)$.

Pel que fa al teorema 4, veurem que, seguint la demostració del teorema anàleg de [Sul] (cf. [F-T]), de fet, és suficient amb l'aixecament d'un *automorfisme de graduació*.

Definició 2. Sigui $\alpha\in\mathbf{k}$ no nul i que no sigui una arrel de la unitat. L'*automorfisme de graduació* de (HA, HM) definit per α és el parell d'aplicacions $\widetilde{f} = \widetilde{f}_\alpha : HA \longrightarrow HA$ i $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_\alpha : HM \longrightarrow HM$,

$$\widetilde{f}_\alpha(a) = \alpha^{|a|}a \qquad \text{i} \qquad \widetilde{\varphi}_\alpha(x) = \alpha^{|x|}x$$

Lema 2. $(\widetilde{f},\widetilde{\varphi})\in \mathrm{Aut}\,(HA,HM)$.

Demostració. Evidentment, $\widetilde{f}$ és un morfisme de $\mathbf{k}$-àlgebres graduades i $\widetilde{\varphi}$ un morfisme de $\mathbf{k}$-mòduls graduats. Per exemple, $\widetilde{f}(ab) = \alpha^{|ab|}ab = (\alpha^{|a|}a)(\alpha^{|b|}b) = \widetilde{f}a\cdot\widetilde{f}b$. Veiem que $\widetilde{\varphi}$ és un $\widetilde{f}$-morfisme: $\widetilde{\varphi}(ax) = \alpha^{|ax|}(ax) = (\alpha^{|a|}a)(\alpha^{|x|}x) = \widetilde{f}(a)\widetilde{\varphi}(x)$ $\square$

Sigui $(f,\varphi)\in \mathrm{Aut}\,(A,M)$ un aixecament de l'automorfisme de graduació definit per α, $(\widetilde{f},\widetilde{\varphi})$. Considerem les parts semi-simples de f i φ, que seguirem notant de la mateixa manera (veure l'observació de (6.4)). Hom té descomposicions de A i M en subespais vectorials,

$$A = \left(\bigoplus_{j\geq 0} A_j\right)\oplus B \qquad \text{i} \qquad M = \left(\bigoplus_{j\geq 0} M_j\right)\oplus N \tag{2}$$

sent

$$A_j = \ker(f - \alpha^j I) \qquad \text{i} \qquad M_j = \ker(\varphi - \alpha^j I)$$

i B i N són els subespais invariants complementaris dels anteriors.

Lema 3. *Per a tot* i, j ,

(i) $dA_j \subset A_j$, $dM_j \subset M_j$,

(ii) $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$, $A_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$,

(iii) $dB \subset B$ *i* $dN \subset N$.

Demostració. Veiem (i) per a A: si $a \in A_j$, aleshores $f(da) = d(fa) = d(\alpha^j a) = \alpha^j(da)$. Veiem (ii) per a M: si $a \in A_i$ i $x \in M_j$, aleshores $\varphi(ax) = (fa)(\varphi x) = (\alpha^i a)(\alpha^j x) = \alpha^{i+j}(ax)$.

Quant a (iii), $B_{\mathbf{K}} = B \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{K}$ és estable per la diferencial $d \otimes 1$, ja que, sobre un cos algebraicament tancat, $B_{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\lambda \in K} \ker(f - \lambda I)$, per a $\lambda \neq \alpha^j$ i aleshores s'aplica la mateixa demostració que per a (i). Però si $(d \otimes 1)B_{\mathbf{K}} \subset B_{\mathbf{K}}$, aleshores $dB \subset B$. □

El fet que A i M siguin minimals, junt amb els resultats sobre subobjectes de minimals, implica el lema següent.

Lema 4. $A = \bigoplus_j A_j$ *i* $M = \bigoplus_j M_j$.

Demostració. Pel lema 3, $\bigoplus_j A_j$ és una subàlgebra dgc de A i, com que B és un submòdul dg, $HA = \left(\bigoplus_{j \geq 0} HA_j\right) \oplus HB$. Però HA es redueix als subespais de vectors propis de valors propis α^j. Per tant $HB = 0$ i $\bigoplus_j A_j \hookrightarrow A$ és un *quis*. Com que A és minimal, no pot tenir subobjectes estrictes quasi-isomorfs (proposició 1 de (1.1)) i es segueix la primera de les igualtats.

Pel que fa a $\bigoplus_j M_j$, pel lema 3, és un $\bigoplus_j A_j$-mòdul dg i, pel que acabem de veure, un A-mòdul dg. Hom veu de manera anàloga a A que la inclusió $\bigoplus_j M_j \hookrightarrow M$ és un *quis*. Altre cop, per ser M minimal, $M = \bigoplus_j M_j$. □

Per a tot i, j, siguin

$$A_j^i = A_j \cap A^i \qquad \text{i} \qquad M_j^i = M_j \cap M^i \tag{3}$$

i

$$A' = \left(\bigoplus_{i<j} A_j^i\right) \oplus \left(\bigoplus_j A_j \cap Z^j A\right) \qquad \text{i} \qquad M' = \left(\bigoplus_{i<j} M_j^i\right) \oplus \left(\bigoplus_j M_j \cap Z^j M\right) \tag{4}$$

Lema 5. *$A = A'$ i $M = M'$.*

Demostració. En primer lloc, A' és una subàlgebra dgc de A, pel lema 3. En segon lloc, la inclusió $A' \hookrightarrow A$ és un *quis* ja que, per definició, tots els elements de $H^i A$ són vectors propis de valor propi α^i i, per tant, $A_i \cap Z^i A \longrightarrow H^i A$ és exhaustiu. La injectivitat en cohomologia és conseqüència del lema 3. La igualtat es segueix novament de la minimalitat de A. Anàlogament per a M. $\square$

Siguin

$$J = \left(\bigoplus_{i<j} A_j^i \right) \oplus \left(\bigoplus_j dA_j^{j-1} \right) \qquad \text{i} \qquad K = \left(\bigoplus_{i<j} M_j^i \right) \oplus \left(\bigoplus_j dM_j^{j-1} \right)$$

Lema 6. *J és un ideal dg de A, K és un A-submòdul dg de M i $J \cdot M \subset K$.*

Demostració. Les tres afirmacions són semblants: es tracta d'aplicar novament el lema 3, tenint en compte que $A = A'$ pel lema 4 en les dues primeres. Veiem la segona: siguin $a + b \in A$ i $x + dy \in K$, sent $a \in A_j^i$, $b \in A_k \cap Z^k A$ i $x \in M_m^l$, $y \in M_n^{n-1}$ amb $i < j$ i $l < m$. Aleshores $(a+b)(x+dy) = ax + a \cdot dy + bx + b \cdot dy$ és de K, ja que, pel lema 3, $ax \in M_{m+j}^{l+i}$, $a \cdot dy \in M_{n+j}^{n+i}$ i $bx \in M_{m+k}^{l+k}$, amb $l + i < m + j$, $n+i < n+j$ i $l+k < m+k$. Pel que fa al darrer sumant: $b \cdot dy = \pm d(by) \in dM_{i+k}^{i+k-1}$, ja que b és un cocicle.

La demostració de la tercera és anàloga: faci's ús del lema 3, ara tenint en compte que $M = M'$, pel lema 4 també. $\square$

(6.4) Demostracions de (6.2). Demostració del teorema 2. Com a corol·lari del lema 6, l'estructura de A-mòdul dg de M indueix una estructura de A/J-mòdul dg en M/K. Així mateix,

$$A/J = \bigoplus_j H^j A_j \qquad \text{i} \qquad M/K = \bigoplus_j H^j M_j$$

Siguin g i ψ les projeccions

$$A \longrightarrow A/J \qquad \text{i} \qquad M \longrightarrow M/K$$

respectivament. Per la definició de l'estructura de A/J-mòdul dg de M/K,

$$(g, \psi) : (A, M) \longrightarrow (A/J, M/K)$$

és un morfisme de **Mdg**. Comprovem que és un *quis* i haurem acabat (en particular, $HA = A/J$ i $HM = M/K$). Això es segueix de que, pels lemes 3(i) i 4,

$$(HA, HM) = \left(\bigoplus_j HA_j, \bigoplus_j HM_j \right)$$

i pel lema 5 i la seva demostració,

$$\begin{aligned} &= \left(\bigoplus_j H^j A_j, \bigoplus_j H^j M_j \right) \\ &= (A/J, M/K). \end{aligned}$$

Demostració del teorema 3. (cf. [Mor], demostració del lema 10.2) Evidentment, podem reduir-nos al cas (A, M) minimal. Pel lema 1 i per [Bor], pàgina 181,

$$N = \ker\left(H_{\mathbf{K}} : \operatorname{Aut}(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(HA_{\mathbf{K}}, HM_{\mathbf{K}})\right)$$

és un $\mathbf{k}$-grup i $N(\mathbf{k}) = \ker(H : \operatorname{Aut}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Aut}(HA, HM))$.

Lema 7. *N és un grup unipotent.*

Demostració. Sigui $\omega \in N$. Descomponem-lo en les seves parts semisimple i unipotent: $\omega = \omega_s \cdot \omega_u$. Es tracta de veure que $\omega_s = 1$. Com que $H\omega = 1$ i un morfisme de grups algebraics preserva les parts semi-simple i unipotent, $1 = H\omega = (H\omega_s) \cdot (H\omega_u) = (H\omega)_s \cdot (H\omega)_u$. D'on, per unicitat de la descomposició, $H\omega_s = H\omega_u = 1$. Per tant l'únic valor propi de $H\omega_s$ és 1. Veiem que el mateix és cert per a ω_s: sigui $\omega = (f, \varphi)$. Per l'observació que segueix al lema 1 de (6.3), $\omega_s = (f_s, \varphi_s)$. Siguin

$$A_1 = \ker(f_s - I) \qquad \text{i} \qquad M_1 = \ker(\varphi_s - I)$$

Descomponem A i M en subespais invariants:

$$A = A_1 \oplus B \qquad \text{i} \qquad M = M_1 \oplus N$$

Com que A i M són minimals, per raonaments de subobjectes quasi-isomorfs, anàlegs als de (6.3), hom conclou que $A = A_1$ i $M = M_1$. D'on $\omega_s = 1$. $\square$

El fet que (A, M) formal impliqui $(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}})$ formal és trivial. Pel que fa a la implicació contrària, si $(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}})$ és formal, hom té una successió exacta de $\mathbf{k}$-morfismes de $\mathbf{k}$-grups

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}}, M_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(HA_{\mathbf{K}}, HM_{\mathbf{K}}) \longrightarrow 1$$

en la qual N és un $\mathbf{k}$-subgrup connex, resoluble i $\mathbf{k}$-escindit pel fet de ser unipotent. Aleshores per *op.cit.*, corol·lari (15.7),

$$H_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = H : \mathrm{Aut}\,(A, M) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(HA, HM)$$

és exhaustiva i per tant, pel teorema 4, (A, M) és formalitzable. $\square$

(6.5) Els dos teoremes de formalitat per a $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})^2$. Traduïm els resultats anteriors per a la categoria $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})^2$ (cf. [F-T] per al teorema 5). Sigui $m : A \longrightarrow B$ un objecte minimal de $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})^2$. Per § 5, això és equivalent a dir que A és una $\mathbf{k}$-àlgebra dgc minimal i m és un objecte minimal de $A\backslash\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$.

Teorema 4. *Suposem que $m : A \longrightarrow B$ és un objecte minimal de $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})^2$ i A i B $\mathbf{k}$-àlgebres dgc finit generades. Si tot automorfisme $(\widetilde{f}, \widetilde{\varphi})$ de Hm s'aixeca en un automorfisme (f, φ) de m, aleshores m és formalitzable.*

Siguin $\mathbf{k} \subset \mathbf{K}$ com en (6.3). Posem

$$m_{\mathbf{K}} = m \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{K} : A_{\mathbf{K}} \longrightarrow B_{\mathbf{K}}$$

Teorema 5. *Suposem que $m : A \longrightarrow B$ és un morfisme de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc finit generades. Aleshores $m_{\mathbf{K}}$ és formalitzable si i només si m és formalitzable.*

Pel que fa a la demostració, segueix els mateixos passos:

Lema 8. $\mathrm{Aut}\,(m_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(Hm_{\mathbf{K}})$ *és un* $\mathbf{k}$*-morfisme de* $\mathbf{k}$*-grups i* $H_{\mathbf{K}}(\mathbf{k}) = H$.

Demostració. Sigui $(f, \varphi) \in \mathrm{Aut}\,(m_{\mathbf{K}})$; és a dir, $f \in \mathrm{Aut}\,(A_{\mathbf{K}})$, $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(B_{\mathbf{K}})$ i $m_{\mathbf{K}} f = \varphi m_{\mathbf{K}}$. Es tracta d'un element de $\bigoplus_{i \leq n} GL(A^i_{\mathbf{K}}) \times \bigotimes_{j \leq m} GL(B^j_{\mathbf{K}})$ sotmès a satisfer les condicions:

(1) $dfa = fda$, $d\varphi b = \varphi db$,
(2) $f(aa') = fa \cdot fa'$, $\varphi(bb') = \varphi b \cdot \varphi b'$, i $m_{\mathbf{K}} fa = \varphi m_{\mathbf{K}} a$.

etc ... $\square$

Hom té els automorfismes de graduació anàlegs,

DEFINICIÓ 3. Sigui $\alpha \in \mathbf{k}$ no nul i que no sigui una arrel de la unitat. L'*automorfisme de graduació* de Hm definit per α és el parell d'aplicacions $\widetilde{f} = \widetilde{f}_\alpha : HA \longrightarrow HA$ i $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_\alpha : HB \longrightarrow HB$,

$$\widetilde{f}_\alpha(a) = \alpha^{|a|} a \qquad \text{i} \qquad \widetilde{\varphi}_\alpha(b) = \alpha^{|b|} b$$

I, com en el lema 2 de (6.3), es té $(\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}) \in \mathrm{Aut}\,(Hm)$. Considerant les parts semi-simples d'un aixecament de l'automorfisme de graduació definit per un α, s'obtenen les descomposicions (2) per a A i B:

$$A = \left(\bigoplus_{j \geq 0} A_j \right) \oplus C \qquad \text{i} \qquad B = \left(\bigoplus_{j \geq 0} B_j \right) \oplus D$$

en les què (veure lema 3, (6.5)) els subespais A_i, B_j, C i D són invariants per les respectives diferencials, $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$, $B_i \cdot B_j \subset B_{i+j}$ i $m(A_i) \subset B_i$, per a tot $i, j \geq 0$.

Lema 9. $m = m_{| \bigoplus_j A_j} : \bigoplus_j A_j \longrightarrow \bigoplus_j B_j$.

Demostració. Com en el lema 4, $A = \bigoplus_j A_j$. Ara, però, el subobjecte que cal considerar és $m_{| \bigoplus_j A_j}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \bigoplus_j B_j & & \hookrightarrow & & B \end{array}$$

en la categoria $A \backslash \mathbf{Adgc}(\mathbf{k})$. Com que m és minimal en aquesta categoria i la inclusió $\bigoplus_j B_j \hookrightarrow B$ és un *quis*, $m = m_{| \bigoplus_j A_j}$. $\square$

Per a tot i, j, definim A^i_j, B^i_j, A' i B' de manera anàloga als $A's$ i $M's$ de (3) i (4). Com és fàcil de veure $m(A') \subset B'$. Sigui

$$m' = m_{|A'} : A' \longrightarrow B'$$

El resultat corresponent al lema 5 de (6.3) és

Lema 10. $m = m'$.

Hom defineix també J i K com en (6.3) i es té

Lema 11. *J i K són ideals dg de A i B, respectivament i $m(J) \subset K$.*

Per tant m indueix un morfisme de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc, $\widetilde{m} : A/J \longrightarrow B/K$ que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{m} & B \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi}\big\downarrow \\ A/J & \xrightarrow{\widetilde{m}} & B/K \end{array}$$

i per tant el parell (g, ψ) defineix un morfisme $\mathbf{Adgc}(\mathbf{k})^2$ que resulta ser el *quis* entre m i $Hm = \widetilde{m}$.

Finalment, per al teorema 5, prenem

$$N = \ker(\mathrm{Aut}\,(m_{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(Hm_{\mathbf{K}}))$$

que serà un $\mathbf{k}$-grup unipotent, etc ... El qual, com en la demostració del teorema 3, ens permetrà aixecar els automorfismes de m, suposant que s'aixequen els de $m_{\mathbf{K}}$.

CAPITOL V. EL TOR DIFERENCIAL.

Introducció.

Aquest capítol vol ser una descripció del tor diferencial en termes de functors derivats, en el sentit de Quillen (veure la definició 1 de (2.1), capítol I), seguint la línia de [Ver], [Qui_1], [Hart], [SGA 4], [Ill] ... Senyalem tres dels problemes que ens hem plantejat.

El primer és comparar aquesta definició amb d'altres que no fan palesa la propietat universal del functor derivat. En concret, en (1.2) mostrem com aquest punt de vista inclou els functors d'hipercohomolgia de [C-E] i [EGA III] i les definicions de [Moore], [E-M], [Smith] i [G-M], per citar només aquelles que ens semblen més significatives. En un altra direcció, aquest és també l'objectiu de Grothendieck ([EGA III], capítol 0), quan demostra que els functors d'hipercohomologia de Cartan i Eilenberg poden calcular-se (sota hipòtesis d'acotacions adequades) mitjançant resolucions projectives (o injectives) *de la categoria de complexos.*

Un altre problema, del què ens ocupem en § 2, és la relació entre el tor diferencial d'àlgebres dgc i el tor diferencial de mòduls dg, en la línia dels resultats de [Chen], [H-S], [ViP], [Tho], [H-T] ...

Finalment, en (2.3), estudiem la relació entre el tor diferencial i els grups d'homotopia d'àlgebres dgc.

§ 1. Tor diferencial de A-mòduls dg.

(1.1) El tor diferencial via cofibrants i minimals. En aquest apartat definim el tor diferencial aprofitant l'estructura de categoria de models tancada de $\mathbf{Mdg}(A)$ que hem vist a § 3, capítol II, així com els criteris de derivabilitat de functors en aquestes categories de (3.3), capítol I. Hom comprova que, amb modificacions menors de la demostració del teorema 1 de (3.2), capítol II, $\mathbf{Mdg}(A)$ és una categoria de models tancada amb els morfismes distingits d'aquest teorema, sense necessitat de les hipòtesis d'acotació sobre A i els A-mòduls dg.

En aquest apartat, R és un anell commutatiu amb unitat, A una R-àlgebra dgc. Llevat de que es digui el contrari, no es fa cap hipòtesi d'acotació sobre A ni sobre els A-mòduls dg.

Per a tot $N \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}(A)$ considerem el functor

$$\_ \otimes_A N : \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

Proposició 1. *Restringit als objectes cofibrants, el functor $\_\otimes_A N$ preserva la relació d'homotopia.*

Demostració. Anàlogament a la proposició 5 de (4.3), capítol II, com que l'afirmació sols involucra els objectes cofibrants, pel lema (3.2), capítol I, és suficient demostrar-la per a un objecte camí particular. Siguin doncs, $\varphi, \psi : M \longrightarrow M'$ morfismes de $\mathbf{Mdg}(A)$ i $h : M \longrightarrow M' \otimes_R W_1$ una homotopia de φ a ψ (veure proposició 2 de (3.3), capítol II). Aleshores $h\otimes 1 : M\otimes_A N \longrightarrow (M'\otimes_R W_1)\otimes_A N = (M'\otimes_A N)\otimes_R W_1$ és una homotopia de $\varphi \otimes 1$ a $\psi \otimes 1$. $\square$

Teorema 2. *El functor $\_ \otimes_A N$ admet un functor derivat per l'esquerra*

$$\_ \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N : \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)$$

que sobre els objectes val $M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N = M' \otimes_A N$, on M' és un model cofibrant de M.

Demostració. Es segueix de la proposició anterior i de la proposició 3 de (3.3), capítol I. $\square$

Definició 1. Anomenarem *tor diferencial* a la cohomologia del functor derivat per l'esquerra de $\_ \otimes_A N$. Per a tot $M \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}(A)$, posarem

$$\mathrm{Tor}_A(M,N) = H\left(M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N\right)$$

Considerem ara el producte tensorial com un functor de dues variables:

$$\_ \otimes_A \_ : \mathbf{Mdg}(A) \times \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

Proposició 3. *Restringit als objectes cofibrants, el functor* $\_\otimes_A\_$ *preserva la relació d'homotopia.*

Demostració. Com en la proposició 1, és suficient demostrar-ho per a un objecte camí particular. Siguin

$$(\varphi, \psi), (\lambda, \mu) : (M, N) \longrightarrow (P, Q)$$

morfismes de $\mathbf{Mdg}(A) \times \mathbf{Mdg}(A)$ i

$$(\Phi, \Psi) : (M, N) \longrightarrow (P \otimes W_1, Q \otimes W_1)$$

una homotopia entre ells; i.e., $\delta_1\Phi = \varphi$, $\delta_0\Phi = \lambda$, $\delta_1\Psi = \psi$ i $\delta_0\Psi = \mu$. Aleshores

$$\Phi \otimes_A \Psi : M \otimes_A N \longrightarrow (P \otimes_A Q) \otimes W_1^{\otimes 2}$$

és una homotopia de $\varphi \otimes \psi$ a $\lambda \otimes \mu$: $\delta_1^{\otimes 2}(\Phi \otimes \Psi) = \varphi \otimes \psi$, $\delta_0^{\otimes 2}(\Phi \otimes \Psi) = \lambda \otimes \mu$ i, per a $M \in \operatorname{obj} \mathbf{Mdg}(A)$ qualsevol,

$$M \xrightarrow{1 \otimes s^{\otimes 2}} M \otimes W_1^{\otimes 2} \xrightarrow{(1 \otimes \delta_1^{\otimes 2}, 1 \otimes \delta_0^{\otimes 2})} M \times M$$

és una factorització M2(i) de la diagonal de M. $\square$

Teorema 4. *El functor* $\_\otimes_A\_$ *admet un derivat per l'esquerra*

$$\_ \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ : \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \times \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)$$

que sobre els objectes (M, N) *val* $M' \otimes_A N'$, *on* M' *i* N' *són models cofibrants de* M *i* N, *respectivament.* $\square$

Demostració. Es segueix de la proposició anterior i de la proposició 3 de (3.3), capítol I. $\square$

Per distingir-la de l'anterior, en aquesta §, notarem per $\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(A)$ la categoria dels A-mòduls dg concentrats en graus no negatius, sent A una R-àlgebra dgc concentrada també en graus no negatius. En aquesta situació es tenen resultats anàlegs a la proposició 1 i el teorema 2. Els functors obtinguts en aquesta categoria no són, però, en general, les “restriccions” dels anteriors. Hom els notarà per

$$\_ \overset{\mathbf{L}^{\geq 0}}{\underset{A}{\otimes}} N : \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(A)$$

$$\_ \overset{\mathbf{L}^{\geq 0}}{\underset{A}{\otimes}} \_ : \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(A) \times \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}^{\geq 0}(A)$$

i

$$\mathrm{Tor}_A^{\geq 0}(M,N)$$

respectivament. Veurem en (1.4) la relació entre ells, almenys en alguns casos particulars. D'altra banda, si $M' \longrightarrow M$ és un model minimal, pel corol·lari de la proposició 15, capítol IV, és un model cofibrant. Per tant es té el

Corol·lari. *Si $R = \mathbf{k}$ és un cos de característica zero i A una R-àlgebra dgc tal que $H^0A = \mathbf{k}$,*

$$\mathrm{Tor}_A^{\geq 0}(M,N) = H(M' \otimes_A N)$$

on M' és un model minimal de M.

(1.2) El tor diferencial de Gugenheim-May. En aquest apartat mostrem que la definició de [G-M] del tor diferencial és la cohomologia del functor derivat del producte tensorial, en el sentit d'extensió de Kan. Es a dir, que, per exemple, coincideix amb el calculat amb l'estructura de categoria de models tancada. Per a això no és necessari procedir a comparar els objectes emprats a [G-M] per definir-lo amb els objectes cofibrants de la nostra estructura de categoria de models tancada.

Escollim la versió de *op.cit.* del tor diferencial “via resolucions” per la seva generalitat (de les que coneixem, és la que permet més tipus de resolucions) i, a la vegada, per la seva senzillesa. Segons els seus autors, aquesta és deguda a l'absència de justificació categòrica de les seves definicions. El que segueix, junt amb els capítols anteriors és una justificació possible.

En aquest apartat, R és un anell commutatiu amb unitat, A una R-àlgebra dgc. No es fa cap hipòtesis d'acotació sobre A ni sobre els A-mòduls dg.

Sigui M un A-mòdul dg. Una *filtració* de M és una filtració decreixent per A-submòduls dg

$$M = \bigcup_p F^p M \supset \cdots \supset F^p M \supset F^{p+1} M \supset \cdots \supset F^{-1} M \supset F^0 M \supset F^1 M = 0$$

Un A-mòdul dg *filtrat* és un A-mòdul dg M amb una filtració F de les anteriors. Quan sigui necessari, el notarem per (M, F). Un morfisme de A-mòduls dg filtrats és un morfisme de A-mòduls dg $f : M \longrightarrow N$ que respecta les filtracions; és a dir, $f(F^p M) \subset F^p N$ per a tot $p \in \mathbf{Z}$. Notarem per $\mathcal{F}\mathbf{Mdg}(A)$ la categoria amb aquests objectes i morfismes.

Exemple 1. Sigui $A = R$ i $M = sP$ el simple d'un complex doble P tal que $P^{pq} = 0$ per a tot $p > 0$ (e.g., el simple d'una *resolució de Cartan-Eilenberg per l'esquerra*; vegi's [C-E], o també [EGA III], fent atenció al canvi de paper dels índexos). Prenent com a filtració

$$F^p(sP) = \bigoplus_{m \geq p} P^{m,\bullet}$$

es té $(sP, F) \in \operatorname{obj} \mathcal{F}\mathbf{Mdg}(R)$.

Exemple 2. Sigui $M \in \mathbf{Mdg}(A)$. La *filtració trivial* de M es defineix com la filtració decreixent tal que

$$G^0 M = M \quad \text{i} \quad G^1 M = 0$$

Aleshores $(M, G) \in \operatorname{obj} \mathcal{F}\mathbf{Mdg}(A)$.

Definició 1. Una *resolució* d'un A-mòdul dg M és un morfisme de A-mòduls dg filtrats

$$\alpha : (X, F) \longrightarrow (M, G)$$

que indueix un *quis* en els termes E_1 de les successions espectrals

$$E_1\alpha : E_1 X \longrightarrow E_1 M$$

Hom pot enunciar la condició anterior de les maneres equivalents següents:

(1) α és un morfisme de A-mòduls dg filtrats tal que la successió de HA-mòduls

$$\ldots \to E_1^p X \xrightarrow{d} E_1^{p+1} X \to \ldots \to E_1^{-1} X \xrightarrow{d} E_1^0 X \xrightarrow{E_1\alpha} HM \to 0$$

és exacta, sent d el morfisme induït per la diferencial de X.

(2) α és un morfisme de A-mòduls dg filtrats que indueix un isomorfisme entre els termes E_2 de les successions espectrals

$$E_2^0\alpha : E_2^0 X \longrightarrow HM$$

Exemple 1 (continuació). Sigui $\varepsilon : P \longrightarrow M$ una resolució de C-E per l'esquerra. Per definició, el terme E_1

$$\ldots \to H^\bullet(P^{p,\bullet}) \to H^\bullet(P^{p+1,\bullet}) \to \ldots \to H^\bullet(P^{-1,\bullet}) \to H^\bullet(P^{0,\bullet}) \xrightarrow{H^\bullet\varepsilon} H^\bullet M \to 0$$

és una successió exacta de R-mòduls i per tant $\varepsilon : (sP, F) \longrightarrow (M, G)$ és una resolució.

Les successions espectrals provinents d'objectes de $\mathcal{F}\mathbf{Mdg}(A)$ són *regulars*, en el sentit de [C-E], pàgina 324; és a dir, per a tot n existeix $u(n) \in \mathbf{Z}$ tal que $H^n(F^pM) = 0$ per a tot $p > u(n)$. En el nostre cas, basta prendre $u(n) = 0$ per a tot n. Per tant, sempre en la terminologia de [C-E], les successions espectrals són *fortament convergents*. En particular, pel teorema 3.2, capítol XV, *op.cit.*

$$\alpha_* : HX \longrightarrow HM$$

és un isomorfisme. Per tant, hem demostrat la

Proposició 1. *Si $\alpha : X \longrightarrow M$ és una resolució, aleshores α és un quis de* $\mathbf{Mdg}(A)$.

Observació. Hom pot comparar aquest resultat amb l'anàleg de [E-M], on es demana a la resolució de ser *afusada* ("tapered"), amb [Hart], que imposa condicions d'acotació per als complexos o per a les resolucions perquè el simple d'una resolució de C-E sigui quasi-isomorf a l'objecte que resol, o també amb [Spal].

La definició de [G-M] del tor diferencial es fa a partir de les resolucions anteriors que són "planes". Amb més precisió:

Definició 2. Direm que un A-mòdul dg filtrat (K, F) és un *objecte de Künneth* si per a tot p, E_1^pK és un HA-mòdul pla i, per a tot $N \in \operatorname{obj}\mathbf{Mdg}(A)$, el *morfisme de Künneth*

$$\kappa : E_1K \otimes_{HA} HN \longrightarrow E_1(K \otimes_A N)$$

definit per $[x] \otimes [n] \mapsto [x \otimes n]$, és un isomorfisme. Una *resolució de Künneth* d'un A-mòdul dg M és una resolució $\alpha : (K, F) \longrightarrow (M, G)$ en la qual (K, F) és un objecte de Künneth.

EXEMPLE 1 (continuació). Sigui $\varepsilon : P \longrightarrow M$ una resolució *projectiva* de C-E per l'esquerra. Aleshores $\varepsilon : (sP, F) \longrightarrow (M, G)$ és una resolució de Künneth.

Si $M, N \in \operatorname{obj} \mathbf{Mdg}(A)$, la definició de [G-M] del tor diferencial és:

$$\operatorname{Tor}_A(M, N) = H(K \otimes_A N) \tag{1}$$

on K és una resolució de Künneth qualsevol de M. En el que segueix, mostrem que els objectes de Künneth són $\otimes$-minimals, en el sentit de la definició 7 de (1.5) del capítol IV i per tant la definició anterior és "correcta". La demostració d'aquest fet és una reinterpretació dels teoremes d'existència i comparació de resolucions de *op.cit.*, junt amb el fet que el functor definit pel membre de la dreta de (1) és *balancejat*. Comencem per aquesta darrera afirmació.

Proposició 3. *Sigui (K, F) un objecte de Künneth i $s : M \longrightarrow N$ un quis de A-mòduls dg. Aleshores $1 \otimes s : K \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A N$ és un quis.*

Demostració. En el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
E_1(K \otimes_A M) & \xrightarrow{E_1(1 \otimes s)} & E_1(K \otimes_A N) \\
{\scriptstyle \kappa}\big\downarrow & & {\scriptstyle \kappa}\big\downarrow \\
(E_1 K) \otimes_{HA} HM & \xrightarrow{1 \otimes Hs} & (E_1 K) \otimes_{HA} HN
\end{array}$$

les fletxes verticals són isomorfismes per definició d'objecte de Künneth. La fletxa inferior també, perquè els $E_1^p K$ són HA-mòduls plans. Per tant, també ho és la superior. Com en la demostració de la proposició 1, per la convergència de les successions espectrals, es segueix que $H(1 \otimes s) : H(K \otimes_A M) \longrightarrow H(K \otimes_A N)$ és un isomorfisme. $\square$

Com a corol·lari, el tor diferencial de Gugenheim-May pot ser calculat tant mitjançant resolucions de la primera variable com de la segona, com de totes dues alhora (veure el corol·lari 2 de la proposició 4 més endavant).

Necessitarem també uns objectes de Künneth particulars, que fan el paper de les resolucions projectives (veure [G-M], definicions 1.2 i 1.4).

DEFINICIÓ 3. Direm que un A-mòdul dg filtrat X és un *objecte distingit* si existeix un R-mòdul bigraduat P, amb $P^{pq}=0$ per a $p>0$, tal que:

(1) $X = A\otimes(sP)$, com a A-mòdul,
(2) $F^pX = A\otimes\bigoplus_{m\geq p}P^{m,\bullet}$,
(3) P^{pq} és un R-mòdul projectiu per a tot (p,q), i
(4) en la descomposició de la diferencial

$$d=\bigoplus_{r\geq 0}d_r:\bigoplus_{p+q=n}X^{pq}\longrightarrow\bigoplus_{p+q=n+1}X^{pq}$$

on $d_r: X^{pq}\longrightarrow X^{p+r,q-r+1}$, $d_0=0$ sobre P; i.e., $d_0=d_A\otimes 1$.

Una resolució $(X,F)\longrightarrow(M,G)$ en la què (X,F) sigui un objecte distingit serà anomenada una *resolució distingida.*

Per [G-M], lema 1.5, tot objecte distingit és de Künneth.

Proposició 4. *Per a tot* $N\in\operatorname{obj}\mathbf{Mdg}(A)$ *tot objecte de Künneth és un objecte* $\_\otimes_A N$*-minimal de la categoria* $\pi\mathbf{Mdg}(A)$.

Demostració. Suposem que en el diagrama de $\mathbf{Mdg}(A)$,

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "s"'] \\ (K,F) \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

s és un *quis* i (K,F) és un objecte de Künneth. Per [G-M], teorema 2.1, existeix una resolució distingida $(X,F')\xrightarrow{u}K$ com a A-mòdul dg (oblidant-nos de la filtració F de X). El *quis* s pot ser considerat com una resolució prenent la filtració trivial. Aleshores el teorema 1.7 de [G-M] ens assegura que existeix un morfisme g que fa homotòpicament commutatiu el diagrama

$$\begin{tikzcd} (X,F') \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & (Y,G) \arrow[d, "s"] \\ K \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

A més a més, g és únic amb aquesta propietat, llevat d'homotopies. Per tant sols resta comprovar que $u \otimes_A 1_N$ és un *quis* per a tot $N \in \operatorname{obj} \mathbf{Mdg}(A)$. Més generalment, podem suposar que tant (K, F) com (X, F') són tan sols objectes de Künneth i u una resolució. Prenem una resolució de Künneth de N: $\alpha : K(N) \longrightarrow N$. En el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
X \otimes_A N & \xrightarrow{u\otimes 1} & K \otimes_A N \\
{\scriptstyle 1\otimes\alpha}\big\uparrow & & {\scriptstyle 1\otimes\alpha}\big\uparrow \\
X \otimes_A K(N) & \xrightarrow{u\otimes 1} & K \otimes_A K(N)
\end{array}$$

pel lema anterior, tant les fletxes verticals com la inferior són *quis*. Per tant també ho és la superior. $\square$

Corol·lari 1. *Siguin $M, N \in \operatorname{obj} \mathbf{Mdg}(A)$ i $(K, F) \longrightarrow M$ una resolució de Künneth. Aleshores*

$$M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N = K \otimes_A N$$

Demostració. Es segueix de la proposició anterior i del teorema 9 de (1.5), capítol IV. $\square$

Pel que fa al balancejament,

Corol·lari 2. *Per a tot $N \in \mathbf{Mdg}(A)$ el diagrama de functors i categories*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) & \xrightarrow{_\overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N} & \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \\
{\scriptstyle _\times N}\big\downarrow & & \big\| \\
\mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \times \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) & \xrightarrow[_\overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}}_]{} & \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A)
\end{array}$$

és commutatiu (i.e., hi ha un isomorfisme de functors entre ambdues composicions).

Per tant no hi ha cap ambigüetat en la notació $M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N$.

(1.3) El tor diferencial de **2Mdg**. En els apartats anteriors hem considerat el producte tensorial de A-mòduls dg com un functor d'una variable

$$\_ \otimes_A N : \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

a l'haver fixat una R-àlgebra dgc A i un A-mòdul dg N, o de dues variables

$$\_ \otimes_A \_ : \mathbf{Mdg}(A) \times \mathbf{Mdg}(A) \longrightarrow \mathbf{Mdg}(A)$$

i hem vist que, degut al fet de ser balancejat, els derivats de tots dos coincideixen. Hom pot, però, considerar el producte tensorial com un functor de tres variables utilitzant el llenguatge de les categories bifibrades: es tracta del functor

$$\otimes : \mathbf{2Mdg} \longrightarrow \mathbf{Mdg}$$

definit sobre els objectes per

$$(M, A, N) \mapsto (A, M \otimes_A N)$$

i sobre els morfismes $(\varphi, f, \psi) : (M, A, N) \longrightarrow (P, B, Q)$ per

$$(\varphi, f, \psi) \mapsto (f, \varphi \otimes_f \psi)$$

on $\varphi \otimes_f \psi : M \otimes_A N \longrightarrow f^*(P \otimes_B Q)$ és el morfisme de A-mòduls dg definit per $(\varphi \otimes_f \psi)(m \otimes n) = \varphi m \otimes \psi n$.

Un resultat ben conegut de [Moore] (cf. [Smith], [G-M]) ens diu que, donat un morfisme de R-àlgebres dgc $f : A \longrightarrow A'$ i dos f-morfismes de mòduls dg $\varphi : M \longrightarrow M'$ i $\psi : N \longrightarrow N'$ tals que $Hf, H\varphi$ i $H\psi$ són isomorfismes, aleshores

$$\mathrm{Tor}_f(\varphi, \psi) : \mathrm{Tor}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{M'}(A', N')$$

és un isomorfisme. Equivalentment,

Proposició 5. *Sigui* $(\varphi, f, \psi) : (M, A, N) \longrightarrow (M', A', N')$ *un quis de* **2Mdg**. *Aleshores*

$$M \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} N \cong M' \overset{\mathbf{L}}{\underset{A'}{\otimes}} N'$$

Veurem que $\otimes : \mathbf{2Mdg} \longrightarrow \mathbf{Mdg}$ és un functor derivable utilitzant les estructures de categoria de models tancada de **2Mdg** i **Mdg** i que el derivat es calcula "resolent" les tres variables. Com a corol·lari de la proposició anterior, però, no és necessari resoldre l'àlgebra i per tant el derivat d'aquest functor coincideix amb $\_ \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_$ (veure el teorema 8, més endavant).

En el que resta d'aquest apartat, R és una $\mathbf{k}$-àlgebra commutativa amb unitat, A una R-àlgebra dgc concentrada en graus positius. No es fa cap hipòtesis d'acotació sobre els A-mòduls dg, tret de que es digui el contrari.

Proposició 6. *Restringit als objectes cofibrants, el functor* $\otimes : \mathbf{2Mdg} \longrightarrow \mathbf{Mdg}$ *preserva la relació d'homotopia.*

Demostració. Anàlogament a l'exemple (2.4) del capítol III, hom pot veure que una homotopia entre morfismes de **2Mdg**,

$$(\varphi, f, \psi), (\lambda, g, \mu) : (M, A, N) \longrightarrow (P, B, Q)$$

es pot definir per un morfisme de **2Mdg**,

$$(\Phi, h, \Psi) : (M, A, N) \longrightarrow (B(t, dt) \otimes_B P, B(t, dt), B(t, dt) \otimes_B Q)$$

tal que $h : A \longrightarrow B(t, dt)$ és una homotopia de $\mathbf{Adgc}(R)$ de f a g i $\Phi : M \longrightarrow h^*(B(t, dt) \otimes_B P)$ i $\Psi : N \longrightarrow h^*(B(t, dt) \otimes_B Q)$ són morfismes de $\mathbf{Mdg}(A)$ tals que $\delta_1 \Phi = \varphi : M \longrightarrow f^* P$, $\delta_0 \Phi = \lambda : M \longrightarrow g^* P$, $\delta_1 \Psi = \psi : N \longrightarrow f^* Q$ i $\delta_0 \Psi = \mu : N \longrightarrow g^* Q$. Com en casos anteriors, hom pot restringir-se a comprovar que el functor $\otimes$ preserva la relació d'homotopia per aquest objecte camí tan sols. En efecte,

$$(h, \Phi \otimes_h \Psi) : (A, M \otimes_A N) \longrightarrow (B(t, dt), B(t, dt) \otimes_B (P \otimes_B Q))$$

és una homotopia de $(f, \varphi \otimes_f \psi)$ a $(g, \lambda \otimes_g \mu)$. $\square$

Teorema 7. *El functor* $\otimes : \mathbf{2Mdg} \longrightarrow \mathbf{Mdg}$ *admet un functor derivat per l'esquerra*

$$\overset{\mathbf{L}}{\otimes} : \mathrm{Ho}\mathbf{2Mdg} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}$$

que sobre els objectes (M, A, N) *val* $(A', M' \otimes_{A'} N')$, *on* $s : A' \longrightarrow A$ *és un model cofibrant de* A *en la categoria* $\mathbf{Adgc}(R)$ *i* M', N' *són models cofibrants de* s^*M *i* s^*N *en la categoria* $\mathbf{Mdg}(A)$, *respectivament.*

Demostració. Es segueix de la proposició anterior i de la proposició 3 de (3.3), capítol I. $\square$

Teorema 8. *Per a tota* $A \in \operatorname{obj} \mathbf{Adgc}(A)$, *el diagrama de functors i categories*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) \times \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) & \longrightarrow & \mathbf{2Mdg} \\ {\scriptstyle - \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} -}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overset{\mathbf{L}}{\otimes}}\big\downarrow \\ \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) & \longrightarrow & \mathbf{Mdg} \end{array}$$

és commutatiu, sent les fletxes horitzontals les induïdes per les inclusions de les fibres.

Deixem a cura del lector enunciar els resultats anàlegs per a $\overset{\mathbf{L}^{\geq 0}}{\otimes}$.

§ 2. Tor diferencial de A-àlgebres dgc.

(2.1) El tor diferencial via cofibrants i minimals. En aquest apartat definim el tor diferencial *d'àlgebres* aprofitant, com en (1.1), l'estructura de categoria de models de $\mathbf{Adgc}(A)$ que hem vist a § 2, capítol II.

> **En aquest apartat, $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, R és una $\mathbf{k}$-àlgebra commutativa amb unitat i A una R-àlgebra dgc concentrada en graus positius.**

Sigui $f : A \longrightarrow B$ un morfisme de R-àlgebres dgc. Considerem el functor d'extensió d'escalars

$$f_* = B \otimes_A \_ : \mathbf{Adgc}(A) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(A)$$

que a cada A-àlgebra dgc $\varphi : A \longrightarrow C$ li associa la B-àlgebra dgc definida pel push-out de R-àlgebres dgc

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & C \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\varphi} \\ B & \xrightarrow{1\otimes\varphi} & B \otimes_A C \end{array}$$

El functor de restricció d'escalars

$$f^* : \mathbf{Adgc}(B) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(A)$$

que transforma $\psi : B \longrightarrow D$ en la A-àlgebra dgc $\psi f : A \longrightarrow D$, és adjunt per la dreta de l'anterior. Alhora, és evident que f^* preserva les fibracions i equivalències febles de l'estructura de categoria de models tancada del teorema 1 de (2.1), capítol II. Per la proposició 2 de (3.3), capítol I, $B \otimes_A \_$ preserva cofibracions i equivalències febles entre objectes cofibrants de $\mathbf{Adgc}(A)$. Pel teorema 1 de (3.3), capítol I, es té el

Teorema 1. *El functor $B \otimes_A \_$ admet un functor derivat per l'esquerra*

$$B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ : \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}(B)$$

que sobre els objectes val $B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} C = B \otimes_A D$, on $A \longrightarrow D$ és un model cofibrant de $A \longrightarrow C$.

Definició 1. Anomenarem *tor diferencial d'àlgebres* a la cohomologia del functor derivat per l'esquerra de $B \otimes_A \_$. Per a tot $(A \longrightarrow C) \in \operatorname{obj} \mathbf{Adgc}(A)$, posarem

$$\mathrm{Tor}_A(B, C) = H\left(B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} C\right)$$

Com en el cas del tor diferencial de mòduls, en el cas que $\mathbf{Adgc}(A)$ tingui suficients minimals, aquest functor pot ser calculat mitjançant models d'aquests. Així mateix, es tracta d'un functor balancejat. En aquest cas, però, aquest fet és conseqüència directa de les propietats de categoria de models (cf. corol·lari 3 de (2.3), capítol III).

Proposició 2. *Si $f : A \longrightarrow B$ és una cofibració trivial, aleshores $B \otimes_A \_$ és un functor exacte; i.e., si $\varphi : C \longrightarrow D$ és una equivalència feble de A-àlgebres dgc, aleshores $1 \otimes \varphi : B \otimes_A C \longrightarrow B \otimes_A D$ és una equivalència febles de B-àlgebres dgc.*

Demostració. Per la preservació de les cofibracions trivials per push-outs, tant $C \longrightarrow B \otimes_A C$ com $D \longrightarrow B \otimes_A D$ són equivalències febles. Aleshores, en el diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \otimes_A C & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & B \otimes_A D \end{array}$$

tant φ com les fletxes verticals són equivalències febles. D'on també $1 \otimes \varphi$. $\square$

Finalment, hom pot considerar $B \otimes_A C$ com a A-àlgebres dgc; i.e., la composició

$$\mathbf{Adgc}(A) \xrightarrow{B \otimes_A \_} \mathbf{Adgc}(B) \xrightarrow{f^*} \mathbf{Adgc}(A)$$

En aquest cas, la derivabilitat es pot deduir de la preservació d'homotopies, com en el cas dels functors de § 1. El derivat d'aquest darrer functor "coincideix" amb l'anterior, via el functor f^* de manera evident, o, si es vol, per la proposició 4 de (3.3), capítol I, ja que $B \otimes_A \_$ preserva objectes cofibrants. En concret,

$$\mathbf{L}(f^* \circ (B \otimes_A \_)) = f^* \circ \left(B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ \right)$$

on, donat que f^* és exacte, fem servir el conveni de notar el functor induït en les categories localitzades per f^*, simplement.

Com en el cas de mòduls dg, hom veu que

$$\_ \otimes_A \_ : \mathbf{Adgc}(A) \times \mathbf{Adgc}(A) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(A)$$

és derivable i que el seu derivat es pot calcular prenent models cofibrants en cada variable. Per la proposició 2 i el teorema anterior, la seva cohomologia coincideix amb el tor diferencial d'àlgebres de la definició 1.

(2.2) Tor diferencial d'àlgebres i de mòduls. Els dos productes de torsió diferencials definits fins aquí "coincideixen" en el sentit següent: donades dues A-àlgebres dgc $A \longrightarrow B$ i $A \longrightarrow C$, hom pot calcular el tor diferencial com en (2.1) o bé el tor diferencial dels A-*mòduls dg* B i C de § 2. Com a mòduls, es tracta del mateix objecte. En llenguatge de functors derivats, això es pot escriure com segueix.

En aquest apartat, $\mathbf{k}$ és un cos de característica zero, $R = \mathbf{k}$.
Totes les R-àlgebres dgc estan concentrades en graus positius
i són cohomològicament connexes.

Teorema 4. *Per a tot morfisme de* $\mathbf{k}$*-àlgebres dgc cohomològicament connexes, el diagrama de functors i categories*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}(A) & \xrightarrow{B\overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}}\_} & \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}(B) \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & {\scriptstyle U}\downarrow \\ \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) & \xrightarrow[B\overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}}\_]{} & \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(B) \end{array}$$

és commutatiu, sent U *els functors induïts pels functors d'oblit del producte.*

Demostració. El resultat es seguix de [Tho], II.6, on es demostra que per a tot morfisme $\mathbf{k}$-àlgebres dgc cohomològicament connexes $A \longrightarrow C$ existeix un *model de Eilenberg-Moore*; i.e., un *quis* de A-àlgebres dgc $C' \longrightarrow C$ on C' és a la vegada cofibrant com a A-àlgebra i una resolució de Künneth del A-mòdul dg C. □

(2.3) Tor diferencial i grups d'homotopia. Sigui $f : A \longrightarrow B$ un morfisme de R-àlgebres dgc. Hom té definit un functor "extensió d'escalars"

$$B \otimes_A \_ : \mathbf{Adgc}_*(A) \longrightarrow \mathbf{Adgc}_*(B)$$

de manera evident. De manera anàloga a § 1, es té

Proposició 1. *El functor* $B \otimes_A \_$ *preserva cofibracions i és compatible amb l'homotopia entre morfismes de* $\mathbf{Adgc}_*(A)$.

Teorema 2. *El functor* $B \otimes_A \_$ *admet un functor derivat per l'esquerra*

$$B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ : \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(A) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(B)$$

que sobre els objectes val $B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} X = B \otimes_A X'$, *on* X' *és un model cofibrant de* X.

Demostració. Es segueix de la proposició anterior i de la proposició 3 de (3.3), capítol I. □

Observació. Les afirmacions de l'anterior proposició no es segueixen, com en el cas de l'extensió d'escalars entre les categories no augmentades, per l'existència d'un adjunt per la dreta (la restricció d'escalars) que preservi *we* i *fib*. Aquest functor no té perquè existir entre les categories *augmentades*, com mostra l'exemple següent.

Exemple . Siguin $A = \mathbf{k}[x]$ i $B = \mathbf{k}[x]/(x^2)$ $\mathbf{k}$-àlgebres dgc homogènies de grau zero i diferencial nul·la i $f : A \longrightarrow B$ un morfisme de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc. En aquest cas, no hi ha cap morfisme de $\mathbf{k}$-àlgebres dgc $g : B \longrightarrow A$ tal que $gf = 1_A$; i.e., que faci de B una A-àlgebra dgc *augmentada*.

Teorema 3. *El diagrama de functors i categories*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(A) & \xrightarrow{B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} _} & \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(B) \\
{\scriptstyle \mathbf{L}Q_A}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{L}Q_B}\downarrow \\
\mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(A) & \xrightarrow[B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} _]{} & \mathrm{Ho}\mathbf{Mdg}(B)
\end{array}$$

és commutatiu (i.e., les dues composicions són functors isomorfs).

Demostració. Tant l'extensió d'escalars com els indescomponibles preserven els objectes cofibrants, per la proposició 1 anterior i el corol·lari de la proposició 1 de (4.1), capítol I. Aleshores, per la proposició 4 de (3.3), capítol I, es tenen els isomorfismes canònics de functors:

$$\left(B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ \right) \circ (\mathbf{L}Q_A) = \mathbf{L}\left((B \otimes_A \_) \circ Q_A \right)$$

$$\mathbf{L}Q_B \circ \left(B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} \_ \right) = \mathbf{L}(Q_B \circ (B \otimes_A \_))$$

Per a $X \in \operatorname{obj} \mathrm{Ho}\mathbf{Adgc}_*(A)$ el valor d'aquestes dos darrers és, respectivament,

$$B \otimes_A (Q_A X') \qquad \text{i} \qquad Q_B(B \otimes_A X')$$

on X' és un model cofibrant de X. Per tant hom es redueix a demostrar el lema següent.

Lema. *Hom té un isomorfisme de B-mòduls dg*

$$B \otimes_A Q_A X \cong Q_B(B \otimes_A X)$$

natural en X*.*

Demostració del lema. La successió exacta de A-mòduls dg

$$0 \longrightarrow I_A X \longrightarrow X \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

és escindida ja que la unitat $A \longrightarrow X$ és una secció de l'augmentació ε. Per tant, romandrà exacta al tensorialitzar. Hom té doncs, en el diagrama següent, que les files són successions exactes de B-mòduls dg. D'altra banda, el quadrat de la dreta commuta i per raonaments de diagrama-caçador, hom té que existeix un *únic*, f, morfisme de B-mòduls dg *multiplicatiu*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \otimes_A I_A X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \otimes_A X \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \otimes_A A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_B(B \otimes_A X) \arrow[r] & B \otimes_A X \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

que fa commutatiu el quadrat de l'esquerra.

La successió exacta

$$(I_A X) \otimes_A (I_A X) \longrightarrow I_A X \longrightarrow Q_A X \longrightarrow 0$$

segueix sent-ho després de tensorialitzar-la per B perquè $B \otimes_A \_$ és un functor exacte per la dreta. A més a més, hom té l'isomorfisme

$$B \otimes_A (I_A X \otimes_A I_A X) \cong (B \otimes_A I_A X) \otimes_B (B \otimes_A I_A X)$$

Es segueix que en el diagrama següent les files són successions exactes i, pel fet que f és multiplicatiu, que el quadrat de l'esquerra és commutatiu. Altre cop per arguments de diagrama-caçador, hom dedueix l'existència d'un *únic* isomorfisme de B-mòduls dg, g, que fa commutatiu el quadrat de la dreta.

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes_A I_A X) \otimes_B (B \otimes_A I_A X) \arrow[r] \arrow[d, "f\otimes f"'] & B \otimes_A I_A X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \otimes_A Q_A X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
I_B(B \otimes_A X) \otimes_B I_B(B \otimes_A X) \arrow[r] & I_B(B \otimes_A X) \arrow[r] & Q_B(B \otimes_A X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pel que fa a la naturalitat, es segueix de la unicitat dels morfismes f i g. □

Corol·lari. *Per a tot* $X \in \mathbf{Adgc}_*(A)$ *es té un isomorfisme de* HB*-mòduls gradualts*

$$\mathrm{Tor}_A(B, \mathbf{L}Q_A X) \cong \pi_B(B \overset{\mathbf{L}}{\underset{A}{\otimes}} X).$$

natural en X*.*

Demostració. Prengui's cohomologia en les dues composicions del diagrama del teorema anterior. □

Bibliografia

[**A-M**] Artin, M., Mazur, B., *Etale homotopy*, Springer LNM 100, 1969.

[**Avra**] Avramov, L., *Local algebra and rational homotopy*, Homotopie algebrique et algebre local, Asterisque 113-114, 1984.

[**B-G**] Bousfield, A.K., Gugenheim, V.K.A.M., *On Pl De Rham theory and rational homotopy type*, Mem. AMS, **179**, 1976.

[**B-L**] Baues, H.J., Lemaire, J.M., *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann. **225** (1977).

[**Bass**] Bass, H., *Injective dimension in noetherian rings*, Trans. AMS **102** (1962).

[**Baues**] Baues, H.J., *Algebraic homotopy*, Cambridge University Press, 1989.

[**Bo**] Borel, A., *Linear algebraic groups*, Benjamin, 1969.

[**Bour**] Bourbaki, N., *Elements de mathématique*, Masson.

[**Brown**] Brown, K.S., *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*, Trans. AMS **186** (1973).

[**C-E**] Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[**Chen**] Chen, K.-T., *Circular bar construction*, J. of Algebra **57** (1979).

[**D-G-M-S**] Deligne, P., Griffiths, P., Morgan, J., Sullivan, D., *The real homotopy theory of Kähler manifolds*, Inv. Math. **29** (1975).

[**Du**] Dupont, J.L., *Curvature and characteristic classes*, Springer LNM 640, 1978.

[**EGA III**] Grothendieck, A., *Elements de Géometrie Algébrique III*, Publ. Math. IHES, **11**, 1961.

[**Ei**] Eilenberg, S., *Homological dimensions and syzygies*, Ann. of Maths **64** (1956).

[**F-T**] Felix, Y., Tanré, D., *Formalité d'une application et suite spectrales d'Eilenberg-Moore*, Algebraic topology. Rational homotopy, Springer LNM 1318, 1988.

[**Gr-M**] Griffiths, P.A., Morgan, J.W., *Rational homotopy theory and differential forms*, Birkhaüser, 1981.

[**Gu-Ma**] Guggenheim, V.K.A.M., May, J.P., *On the theory and applications of differential torsion products*, Mem. AMS, **142**, 1974.

[**G-Z**] Gabriel, P., Zisman, M., *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.

[**Gri**] Grivel, P.-P., *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*, Algebraic D-modules, Academic Press, 1987.

[**Gro**] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. **9** (1957).

[**H-M-S**] Husemoller, D., Moore, J.C., Stasheff, J., *Differential homological algebra and homogeneous spaces*, J. of PA Algebra **5** (1974).

[**H-K**] Huebschmann, J., Kadeishvili, T., *Minimal models for chain algebras over a local ring*, preprint (1988).

[**H-S**] Halperin, S., Stasheff, J., *Obstructions to homotopy equivalences*, Ad. in Math. **32** (1979).

[**H-T**] Halperin, S., Tanré, D., *Homotopie filtrée et fibrés* C^∞, Ill. J. of Maths. **34** (1990).

[**Hal**] Halperin, S., *Lectures on minimal models*, Mem. SMF, nouvelle série, 9/10, 1983.

[**Hart**] Hartshorne, R., *Residues and duality*, Springer LNM 20, 1966.

[**Ill**] Illusie, L., *Complexe cotangent et déformations*, Springer LNM 239 i 283, 1971/72.

[**Jar**] Jardine, J.F., *Simplicial presheaves*, preprint Univ. of Western Ontario (1985).

[**Jo**] Jozefiak, J.T., *Tate resolutions for commutative graded algebras over a local ring*, Fund. Math. **74** (1972).

[**Kan**] Kan, D., *Minimal free CSS groups*, Ill. J. of Maths. **2** (1958).

[**Mat**] Matsumura, H., *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.

[**May**] May, J.P., *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.

[$\mathbf{McL}_1$] MacLane, S., *Homology*, Springer, 1975.

[$\mathbf{McL}_2$] MacLane, S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

[**Moore**] Moore, J.C., *Algèbre homologique et homologie des espaces classifiants*, Séminaire H. Cartan, **7**, 1959/60.

[**Mor**] Morgan, J.W., *The algebraic topology of smooth algebraic varieties*, Publ. IHES **48** (1978).

[**Mun**] Munkholm, H.J., *DGC algebras as a Quillen model category. Relations to shm maps.*, J. of PA Algebra **13** (1978).

[**Nag**] Nagata, M., *Local rings*, Interscience Publishers, 1962.

[$\mathbf{Na}_1$] Navarro Aznar, V., *Sur la théorie de Hodge-Deligne*, Inv. Math. **90** (1987).

[$\mathbf{Na}_2$] Navarro Aznar, V., *Sur la connexion de Gauss-Manin en homotopie rationnelle* (1991), preprint.

[**Pia**] Piancenza, R.J., *Homotopy theory of diagrams and CW-complexes over a category* **43** (1991), Can. J. Math..

[**Qui**]$_1$ Quillen, D.G., *Homotopical algebra*, Springer LNM 47, 1967.

[$\mathbf{Qui}_2$] Quillen, D.G., *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. **90** (1969).

[**S-T**] Sheerer,H., Tanré, D., *Exploring W.G. Dwyer's tame homotopy theory*, Pub. IRMA, Lille **16** (1988).

[**SGA 1**] Grothendieck, A., *Séminaire de Géometrie Algébrique 1*, Springer LNM 224, 1971.

[**SGA 4**] Grothendieck, A. *et al.*, *Séminaire de Géometrie Algébrique 4*, Springer LNM 305, 1973.

[**Smi**] Smith, L., *Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Trans. AMS **129** (1967).

[**Spa**] Spaltenstein, N., *Resolutions of unbounded complexes*, Com. Math. **65** (1988).

[**Stek**] Members of the seminar of I.R. Safarevic, *Algebraic surfaces*, American Mathematical Society, 1967.

[**Sul**] Sullivan, D., *Infinitesimal computations in topology*, Publ. IHES **47** (1977).

[**Swan**] Swan, R.G., *Thom's theory of differential forms on simplicial sets*, Topology **14** (1975).

[**Tan**] Tanré, D., *Homotopie rationnelle: modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Springer LNM 1025, 1983.

[**Tate**] Tate, J., *Homology of noetherian rings and local rings*, Ill. J. of Maths. **1** (1957).

[**Tho**] Thomas, J.C., *Eilenberg-Moore models for fibrations*, Trans. AMS **274** (1982).

[**Thoma**] Thomason, R.W., **Cat** *as a closed model category*, Cahiers de Top. et Geom. dif. **21** (1980).

[**Ver**] Verdier, J.-L., *Catégories dérivées*, SGA 4 1/2, Springer, 1963.

[**ViP**] Vigué-Poirrier, M., *Réalisation de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrales d'Eilenberg-Moore*, Trans. AMS **265** (1981).