Generadors de $L^p(\mathbb{R})$ amb translacions en temps i freqüència.

Gerard Ascensi Sala

Maig, 2007

Memòria presentada per
aspirar al grau de doctor
en Matemàtiques.

Certifico que la present memòria ha estat realitzada per en Gerard Ascensi Sala, sota la direcció del Dr. Joaquim Bruna Floris.

Bellaterra, Maig de 2007.

Firmat: Dr. Joaquim Bruna Floris.

Índex

Introducció ix

Agraïments xv

1 Preliminars. **1**

1.1 Sistemes de Generadors. 1
1.2 Generadors per translacions. 2
1.3 Generadors per a $L^2(\mathbb{R})$. 6
1.4 Bases i marcs. 8
1.5 Ondetes i Gabor. 14
1.5.1 Anàlisi Multiresolució. 24
1.6 Espais de Fase. 25
1.6.1 Traslladades. 25
1.6.2 Gabor. 28
1.6.3 Ondetes. 32

I Generadors per translacions. **37**

2 Generadors per a $L^1(\mathbb{R})$. **39**

2.1 Caracterització dels conjunts de generadors. 40
2.2 Integral logarítmica divergent. 42
2.3 Generadors quasi-analítics. 43
2.4 Generadors analítics. 52

3 Generadors tipus Poisson. **57**

3.1 Funció de Poisson. 57
3.2 Funcions tipus Poisson. 63
3.3 Funcions racionals. 67

4 Generadors per translacions amb la funció gaussiana. 73
4.1 Creixement i zeros de funcions enteres. 73
4.2 L'espai de Fock i el cas $L^2(\mathbb{R})$. 78
4.3 Conjunts amb ordre de convergència 2. 82
4.4 El cas $L^1(\mathbb{R})$. 84

II Marcs de $L^2(\mathbb{R})$. 87

5 Transformada de Gabor. 89
5.1 Discretització en espais de fase de Gabor. 89
5.2 Un altre cop l'espai de Fock. 94
5.3 Espais de fase de Gabor analítics. 97
5.4 Resultats de mostreig. 98
5.5 La condició necessària de Ramanathan-Steger. 111
5.6 Un resultat d'interpolació. 114
5.7 Àtoms amb acotació convexa. 117

6 Ondetes. 127
6.1 Discretització en espais de fase d'ondetes. 127
6.2 Rigidesa de la base de Haar. 131
6.3 L'espai de Bergman. 134
6.4 Espais de fase d'ondetes harmònics. 138
6.5 Resultats de mostreig. 141
6.6 Un resultat d'interpolació. 155

Bibliografia 159

Introducció

Comencem amb un exemple.

Agafem l'interval $[-\pi, \pi]$ i pensem en un espai de funcions definides en aquest interval. No serem gaire estrictes de moment. Pensem per comoditat que el nostre espai són les funcions contínues (i/o les acotades). Ara volem representar d'alguna manera una funció d'aquest espai. Una forma de fer-ho és donar tots els valors de la funció, però no sembla gaire bona.

Una altra manera és agafar unes quantes funcions concretes, i aproximar la nostra funció per combinacions lineals d'aquestes. Això ja té més bon aspecte. Per exemple, si volem guardar la nostra funció en un ordinador (o en un full de paper), tan sols hem de guardar els coeficients, i saber quines són les funcions que hem triat per representar. O també ens pot ser útil, des d'un punt de vista més teòric, per veure com actua un operador lineal sobre la nostra funció. Aplicant linealitat la imatge de la nostra funció serà la suma de les imatges de la combinació que estem fent servir per representar-la. Així tan sols ens cal conèixer la imatge del conjunt de generadors.

Bé, sense voler ja se'ns ha escapat la primera noció important. Quan volem representar funcions, el que estem buscant són generadors. Com que seran un conjunt de funcions, els podem anomenar a tots junts un sistema de generadors. No ho definim encara perquè ja hem dit que estem sent informals.

Molt bé, doncs estem buscant sistemes de generadors de l'espai de funcions contínues de $[-\pi, \pi]$. Ara hem de pensar quina classe de funcions volem que formin el nostre sistema. Aquesta tria depèn de quina classe de representació desitgem, però podem donar algun exemple senzill? No som els primers que ens plantegem aquest problema, això ja ho va fer Fourier amb la seva sèrie (o potser va ser algú altre?, bé, això no ens interessa ara).

Anem a mirar-nos aquest exemple. Triem com a funcions les exponencials complexes. No són tan maques com els sinus i cosinus, però son més senzilles d'explicar. Agafem el conjunt:

$$\mathcal{B} = \left\{ e^{in\xi} \ : \ n \in \mathbb{Z}, \xi \in [\pi, \pi] \right\}$$

Ja tenim el nostre primer sistema de generadors. Ara anem a representar funcions. Agafem una funció del nostre espai i la escrivim com una combinació lineal d'elements del sistema:

$$f(\xi) \approx \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\xi}$$

Aquí haurem de vigilar molt amb què vol dir aquesta aproximació. En general significarà que la norma en l'espai de la diferència de les dues funcions serà petita. Alguns cops fins i tot podrem pensar que té sentit la suma infinita:

$$f(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\xi}$$

on aquest sumatori serà un limit de les sumes parcials. Un dels principals problemes que ens apareixen en aquest context és saber si podrem representar qualsevol funció del nostre espai. És a dir, saber si un conjunt de funcions genera el nostre espai. Tornem-nos a mirar el nostre exemple, però canviant l'espai. En lloc de funcions contínues pensem en funcions de quadrat integrable. És conegut que $L^2(-\pi, \pi)$ és un espai de Hilbert, on tenim un producte escalar i una estructura pràcticament idèntica a la dels espai vectorials de dimensió finita. En aquest espai el sistema que hem donat és una base ortonormal. La idea és la mateixa que en dimensió finita. Podem representar qualsevol funció d'aquest espai com una combinació lineal infinita d'elements de la base, i a més de manera única. Normalment no obtindrem tan bons resultats.

Però continuem amb el nostre problema. Anem a donar-li una volta. Prenem anti-transformades de Fourier. Per comoditat pensem en $L^2(\mathbb{R})$. L'espai de funcions que ens apareix són les funcions de la recta que tenen transformada de Fourier amb suport a $[-\pi, \pi]$. Aquest espai es coneix com les funcions de banda limitada, i totes tenen una extensió entera al pla complex, de manera que obtenim l'espai de Paley-Wiener. Com que la transformada de Fourier és un isomorfisme, hauríem de mantenir els sistemes de generadors i les bases.

Si calculem la transformada del sistema veiem que va a parar al següent conjunt de funcions:

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \frac{\sin(t-n)}{t-n} \ : t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Aquest conjunt és una base ortonormal de l'espai de funcions de quadrat integrable i banda limitada sobre la recta. Si ens hi fixem més podem observar que totes les funcions són d'un mateix tipus. Totes provenen d'agafar una funció concreta i traslladar-la. Aquests són la classe de sistemes que estem buscant.

Ja n'hem trobat un per a aquest espai. Però aquest no és l'espai que tractarem en aquesta memòria. Volem fer això mateix però per a tot $L^2(\mathbb{R})$. Això serà un xic més complicat.

Els generadors que busquem seran del mateix tipus que hem mostrat ara. Agafarem una funció fixada i la traslladarem. Apareixen de manera natural moltes qüestions al voltant d'aquest problema. Primer de tot haurem d'intentar conèixer quines funcions podrem fer servir. No podrem generar tot l'espai amb translacions de qualsevol funció. També ens podem preguntar quin conjunt de translacions podem fer servir. I aquesta qüestió depèn de la funció que triem. Llavors ens podem preguntar per quins conjunts existeix una funció que dóna lloc a un sistema de generadors, o fixada una funció concreta, quins conjunts funcionaran amb aquesta.

I també podem intentar buscar bases de $L^2(\mathbb{R})$. Però aquí ens trobem amb un problema molt greu. No n'hi han. En lloc de quedar-nos amb els braços creuats podem optar per afegir alguna cosa més que translacions. Els dos camins que seguirem seran agafar translacions i modulacions d'una mateixa funció, o translacions i dilatacions. I també podem fer-nos un munt de preguntes, quines funcions, quins conjunts...

Però prou de fer-se preguntes i anem a donar alguna resposta.

Estructura de la memòria.

Aquesta memòria està estructurada en dues parts. La primera estudia els sistemes de generadors per translacions, els quals tenen sentit en qualsevol $L^p(\mathbb{R})$. Ens centrem sobretot en el cas $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, encara que també donem resultats en la resta d'espais.

La segona part estudia els marcs (una generalització de les bases) en $L^2(\mathbb{R})$ que provenen d'agafar traslladades i modulades d'una funció (Gabor), o traslladades i dilatades (ondetes). Anem a explicar-nos un xic més.

En el primer capítol donem les principals definicions dels conceptes que aniran apareixent al llarg del treball. També donem resultats que ens ajudaran a comprendre els problemes que ens plantegem i per què tenen sentit i són naturals les preguntes que ens fem. Alguns d'aquests resultats són coneguts i altres són nous, però la idea és que tinguin un sentit general de cara a enfrentar-nos als problemes concrets. En el cas d'ondetes i Gabor també donem varis resultats sobre xarxes regulars de punts (ja explicarem el que són). Aquestes xarxes han estat les més estudiades i hi ha un ampli coneixement del problema en aquest cas. Tot i que no ho farem servir, afegim aquest cas a títol informatiu. Nosaltres ens centrarem més en xarxes irregulars.

La darrera secció d'aquest capítol tracta d'un concepte de gran importància durant tot aquest estudi, els espais de fase. Aquests espais seran, informalment parlant, el conjunt de totes les transformades contínues de totes les funcions. I ens serveix de nexe d'unió entre les dues parts.

La manera habitual de treballar en qualsevol dels casos serà:

- Triar una funció per analitzar.
- Descriure més o menys el seu espai de fase.
- A partir de les propietats d'aquest intentar buscar els conjunts que ens interessen (d'unicitat o mostreig).

Aquest esquema és repetirà amb petites variacions en qualsevol dels problemes que ens plantegem.

La primera part estudiarà els generadors per translacions. Les tres primeres seccions dels preliminars ens donen les nocions necessàries, i d'aquí podem passar directament al seu subapartat corresponent dintre de la definició d'espai de fase.

El segon capítol es dedica integrament ha donar condicions per intentar caracteritzar les funcions que poden ser generadors per translacions. De moment aquest continua sent un problema obert. Estudiem un xic l'estat de la qüestió i ens dediquem a dos subconjunts concrets de generadors, els quasi-analítics i els analítics. Per aquests donem condicions necessàries i suficients molt properes per caracteritzar-los i estudiem una mica com poden ser els conjunts de punts que després donaran lloc a sistemes de generadors.

Els capítols 3 i 4 es dediquen a estudiar dos casos concrets de generadors, la funció de Poisson i la gaussiana respectivament. Aquestes dues funcions tenen un espai de fase amb bones propietats, que ens permet fer un bon estudi dels conjunts que podem fer servir per generar. En el cas de Poisson existia una caracterització d'aquests, i el que fem és generalitzar-la a casos similars. En els cas de la gaussiana l'únic que podem fer és millorar les condicions que ja es coneixien, ja que sembla difícil una caracterització completa.

Estudiar marcs i bases només té sentit en $L^2(\mathbb{R})$. Les definicions bàsiques les trobarem en les seccions 1.4 i 1.5, així com un breu resum de la situació quan la xarxa és regular. També haurem de llegir la subpart corresponent dels espais de fase.

Després d'això podem saltar indistintament al capítol 5 o 6. El primer s'ocupa dels marcs de Gabor i el segon dels d'ondetes. L'estudi és similar en els dos casos. Primer expliquem com discretitzar la transformada contínua. Després donem exemples concrets en casos molt particulars on l'espai de fase està composat per funcions holomorfes, i el problema és més senzill i ja ha estat resolt. En tots dos casos veiem que és pràcticament un accident que hi hagi un espai de fase enterament composat per funcions holomorfes.

Per a la resta de casos aconseguim donar alguns resultats de mostreig que ens permeten donar condicions suficients per obtenir un marc. També aconseguim algun resultat d'interpolació (el problema dual).

Finalment, en el cas de Gabor, inaugurem una nova via d'estudi, restringint-nos a una classe especial de funcions. Aconseguim veure que l'espai de fase té una extensió a funcions enteres en dues variables. Donem cotes sobre la varietat de zeros que sembla que poden donar lloc a resultats de mostreig millors dels que es coneixen fins ara.

Agraïments

Doncs aquest és el final d'un camí que va començar pels voltants de Setembre de l'any 2001. Va ser en aquelles dates quan vaig matricular-me per primer cop en el programa de doctorat del Departament de Matemàtiques de l'Autònoma. Al mateix temps firmava el meu primer contracte com a professor associat, que em covertia en una cosa en aquells moments molt aliena a mi anomedada PDI.

A plogut molt desde llavors, o millor dit, han passat moltes sequeres. I entre d'altres coses a mi m'ha donat temps de fer una tesi. No està malament, no?

Aquesta és la darrera part de la tesi que escric. Això no passa per correcció ortografica i tampoc ho penso repassar, o sigui que disculpeu els errors.

En aquest apartat es veu que t'has d'enrrecordar d'un munt de gent i agrair que t'hagin ajudat en aquest temps. Però aquest temps per mi són casi sis anys, i la meva memòria tampoc és cap prodigi. Per tant, si m'oblido d'algú, doncs les meves siceres disculpes.

Ja hem complert amb la primara part d'uns agraïments, que és disculpar-se pels que no citaràs. Ara ve una segona part, que és el que serien de debò uns agarïments. Es tracta de donar les gàcies a tota la gent que de manera més o menys directa t'ha ajudat a fer aquesta tesi.

Doncs comencem pel principi. I el principi va ser anar al despatx d'en Joaquim Bruna, ex-professor meu d'anàlisi harmònica, i dir-li que ja havia acabat la carrera i que volia fer el doctorat (normalment anava a veure'l per dir-li que no em sortia el problema tal i que la meva idea era fer el doctorat). Llavors va ser quan vaig descrobrir que això de fer una tesi era més complicat del que semblava. A part d'apendre a fer teoremes (que és el que jo em pensava), has de ser capaç de: 1.-Demanar beques, 2.-Presentar-te a places 3.-Omplir informes varis 4.-Fer projectes d'investigació 5.-Aprendre Latex 6.-Buscar algú que et solucioni els problemes de Linux 7.-Fer cues increibles per acoseguir un expedient compulsat 8.-Pujar i baixar de rectorat a 35 graus de temperatura 9.-Pujar i baixar de rectorat sota el diluvi universal 10.-etc. (Axiò és el que s'anomena competencies transversals en ESO).

Doncs bé, m'he desviat una mica del tema. Tornem on era. Vaig trucar a la porta del despatx d'en Joaquim Bruna i li vaig dir que volia fer la tesi. Des d'aquell moment ell es va convertir en el meu tutor (època pre-DEA) i més tart en el meu director de tesi (època post-DEA). A ell li puc agrair que m'omplis els papers de les beques, que em fes entrar en el grup d'investigació, una infinita paciencia amb mi al seu despatx amb la pissarra al davant, que encara no m'hagi matat per no escriure en paper les coses, i que quan les escric no les guardi, que em presenti com "aquest és el meu alumne, que és d'Andorra", etc. Però sobretot haver-me ensenyat unes matemàtiques, que a part de donar-me uns mal de caps increibles, i d'haver-me enganxat molt un cop, m'han agradat, i he disfrutat (i espero continuar disfrutant) molt amb elles.

A nivell matemàtic també voldira fer enfasi en el bon ambient de treball i les facilitats que he tingut al poder realitzar aquesta tesi en el Departament de Matemàtiques de la UAB. I la bona rebuda que vaig tenir per part de l'unitat d'anàlisi i el grup de teoria de Funcions de la UB-UAB. Això ha quedat molt formal, no? Bé, ja és el que toca, són uns agraïments. Destacaria dins d'aquest ampli grup, a en Julià, en Quim, en Xavi (M) i l'Artur, que sempre han tingut temps de contestar els meus dubtes matemàtics, i els n'hi he preguntat uns quants. També cal afegir aquí a la Marga, el Nacho, el Dani i sobretot l'Albert, amb qui hem intercambiat un munt d'idees, dubtes, desigualtats i algun que altre teorema fals.

Però fer una tesi no és tan sols matemàtiques, no, també s'ha d'escriure (veure comp. tran. 5). Aquí també he d'agrair moltes coses. Per començar, al qualsevol dels meus companys de despatx per aguantar els meus dubtes, i sobretot al Toni, i en més gran mesura (que hi passen més temps) a l'Anna i en Miquel, per solucionar quasi tots els meus problemes tipogràfics. A més cal recordar que l'Anna és l'autora de l'únic dibuix de la memòria, i que encara ningú ha estat capaç de colocar-lo al lloc que toca. I per una altra part, el Miquel ha estat el meu assessor linuxistic (comp. trans. 6) qu ha fet possible que sobrevisques al übuntu"durant quasi un any.

A nivell ortogràfic i estilistic, doncs s'han llegir versions preliminars d'aquesta tesi, han corregit, proposat, i la majoria de vegades millorat (potser alguna ho ha empitjorat) molta gent: L'Albert, l'Anna de Girona, l'Aura, en Marc i la Mònica (observeu que estan en ordre alfabètic). Aquí també caldria posar al Joaquim, que també se l'ha llegit, a corregit faltes i ha millorat la redacció. A tots ells agraixo molt l'esforç que han dedicat. Si alguna falta s'ha escapat, doncs no se, no demaneu miracles, que una cosa és corregir 4 faltes i l'altra corregir-me a mi.

Per finalitzar aquesta part, voldria agrair a en Joan Cerdà haver-se llegit aquesta memòria (que no és curteta) en 4 dies i haver redactat un informe sobre ella. Més que res perqué sense informe no hi ha presentació, i no l'hi he donat precissament el temps suficient.

Doncs bé, amb això hem acabat la primera part dels agraïments. Ara bé una segona part on la gent sol agrair a gent que no té a veure directament amb la tesi, però que l'han ajudat a sobreviure i ser més o menys una persona durant aquest temps.

De fet aquesta part és més en plan dedicatòria. I jo per dedicar, doncs li dedicaria a molta gent, i potser per començar ho faria a la Mònica, però no ho faré.

Començarem per la família, que ja se sap que és el primer. O sigui que dedico aquesta tesi als meus pares i els meus dos germans i la cunyada (darrera adquisició), i els agraeixo moltes coses que no em possaré a enumerar ara mateix perqué ja està quedant massa llarg aquest troç, i clar, la llista és llarga i de categoria.

També afegeixo els cusins tietes, oncles, cusinets i a la crema catalana.

Ja que estem amb temes familiars, vull dedicar-la als meus pares adoptius, aquí a Sabadell, que han acosseguit que em sentís com si fos a casa meva durant aquests 5 anys. I a ells també els hi puc agrair moltes coses que tampoc puc enumerar. Entre d'altres, que hagin fet que els seus voltants siguin els meus, i a ells faig extensiva la dedicatòria.

I finalitzem de moment dedicant-la també a la garn família en que s'ha convertit el Sabadell567, que va començar sent un pis d'estudiant i que ara que ens foten fora s'ha convertit en un lloc de difíl definició amb tres matricules d'Andorra, 5 nacionalitats diferents i un munt d'històries.

Un cop passada la frontera dels temes familiars, ens podem enrecordar dels companys de despatx, de tots, dels que han estat, dels que són, i perquè no, dels que vindran.

El despatx és molt petit, i cal fer extensiu l'agraiemnt a la resta de companys de doctorat, a la difunta paca, al tió de nadal i a l'spam massiu.

Continuem amb els que van ser companys abans de començar, i que encara ens veiem.

Ara ja podem sortir fora de la uni, i tornar als pirineus, que per algo és la meva terra, i agrair a la colla de la Seu, al megarroplec, als 3 partits polítics i al sindicats representats quan anem a sopar, al ..in the midle of.., Luke soy tu padre, Güat Japens for de estrit i connectats en general.

I ens podem possar en política, i recordar-se també de la gent de D-recreca, Precarios, de les 6 lliste de correu al mateix temps i dels 500 mails en un sol dia.

I jo crec que ja he acabat. Ah, no, calla, i al clau de l'Autònoma (perdò, el cargol), i també a les columnes que són més xules.

I a les estrelles.

I a la Mònica, ara si, aquí al final que queda més xulo.

I ara ja si. I a més sense possar noms, bueno, potser se m'ha escapat algun.

Capítol 1

Preliminars.

1.1 Sistemes de Generadors.

En aquest treball estudiarem diverses maneres de generar els espais $L^p(\mathbb{R})$. Aquests espais són el conjunt de funcions p-integrables respecte a la mesura de Lebesgue, amb la norma habitual:

$$\|f\|_p = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt < \infty$$

amb $1 \leqslant p < \infty$. El cas $L^\infty(\mathbb{R})$ no l'estudiarem ja que es tracta d'un espai no separable. En aquests espais podem pensar que les funcions prenen valors reals o complexos. Els dos casos són bastant similars, tot i que a vegades trobem diferències no tan sols tècniques i hem de tenir cura de quin cas estem tractant.

Quan parlem de generar el que volem és, a partir d'un conjunt reduït de funcions de l'espai, descriure la resta de funcions mitjançant combinacions lineals d'aquestes. Per descriure entendrem en alguns casos que tota funció es pot aproximar tan bé com es desitgi per aquestes combinacions lineals, o en d'altres que fins i tot podem escriure tota funció com una combinació lineal infinita.

Formalitzem el terme de generador, que utilitzarem al llarg de bona part d'aquest treball:

Definició. Donat un conjunt $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ de funcions de $L^p(\mathbb{R})$ direm que $\mathcal{F}$ és un **sistema de generadors** de $L^p(\mathbb{R})$ si per a tota funció $g \in L^p(\mathbb{R})$ i tot ε existeix una combinació lineal (finita) d'elements de $\mathcal{F}$ que aproxima amb error menor que ε la funció g:

$$\left\| g(t) - \sum{}' a_i f_i(t) \right\|_p \leqslant \varepsilon$$

Això és equivalent a dir que les combinacions lineals finites d'elements de $\mathcal{F}$ són denses a $L^p(\mathbb{R})$.

La família de funcions que fem servir per generar pot ser molt variada. En el nostre treball ens fixarem en conjunts formats per accions sobre una única funció i buscarem conjunts numerables.

La definició anterior és poc útil a l'hora d'esbrinar si una família de funcions és un sistema de generadors o no. Tenim una definició equivalent, que és la que farem servir per treballar.

Proposició 1.1. *Una família $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ genera $L^p(\mathbb{R})$ si i només si donada $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ (l'espai dual de $L^p(\mathbb{R})$),*

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{f_i(t)}\, dt = 0 \quad \forall i \in I \tag{1.1}$$

implica que $g = 0$.

Aquest resultat és una conseqüència del teorema de *Hahn-Banach*.

Una de les eines bàsiques més importants que farem servir al llarg d'aquest treball és la transformada de Fourier, que, per evitar confusions, definirem de la següent manera:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i t \xi}\, d\xi$$

1.2 Generadors per translacions.

Els primers sistemes de generadors que apareixen són famílies formades per translacions d'una funció fixada. Estem interessats en estudiar quan un conjunt de traslladades d'una funció fixada φ genera $L^p(\mathbb{R})$. Fixem la notació f_x per designar la traslladada de f per x. És a dir, $f_x(t) = f(t - x)$.

Definició. Sigui $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

- Direm que Λ és un conjunt **discret** si no té punts d'acomulació finits.
- Direm que Λ és un conjunt **uniformement disctret** o **separat** si existeix $\delta > 0$ tal que $|\lambda - \gamma| > \delta$ per a tot $\lambda \neq \gamma \in \Lambda$.

Les mateixes definicions són valides a $\mathbb{R}^n$ o a qualsevol espai mètric amb els canvis adients.

Un conjunt discret Λ és un conjunt numerable tal que per a tot $\lambda \in \Lambda$ existeix δ complint que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap \Lambda = \emptyset$. Els separats són conjunts discrets on aquest δ és independent de λ.

Sigui $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt numerable (pot tenir punts d'acumulació finits). Donada una funció φ, definim per a aquesta φ i aquest Λ el següent conjunt de funcions:

$$T(\varphi, \Lambda) = \big\{\varphi(t - \lambda_n) = \varphi_\lambda(t) : \lambda_n \in \Lambda\big\}$$

Estem interessats en conèixer per a quins conjunts (en principi discrets) Λ i quines funcions φ el conjunt $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$. Formalitzem aquest concepte.

Definició. Donat un conjunt $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ i una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ direm que el conjunt $T(\varphi, \Lambda)$ **genera** $L^p(\mathbb{R})$ si $T(\varphi, \Lambda)$ és un sistema de generadors de $L^p(\mathbb{R})$.

Definició. Direm que un conjunt $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ **admet generadors** per a $L^p(\mathbb{R})$ si existeix alguna funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ tal que $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$. En aquest cas direm que φ és un **Λ-generador**.

Definició. Direm que una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ és un **generador** si existeix un conjunt discret Λ tal que $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$.

Amb aquestes definicions ja podem introduir les qüestions que tractarem en la primera part d'aquest treball. D'una banda estem interessats en conèixer els conjunts Λ que admeten generadors en els diferents espais. Aquesta primera qüestió ha estat molt estudiada i ja està resolta a $L^1(\mathbb{R})$. Nosaltres ens interessarem més en saber per a quines funcions φ existeix un conjunt Λ tal que $T(\varphi, \Lambda)$ genera. En aquest cas també és interessant intentar descriure tots els conjunts Λ amb aquesta propietat. Per una altra banda, donat un conjunt Λ que admet generadors voldrem donar condicions perquè una funció φ sigui un Λ-generador. En aquest treball ens centrarem més en la descripció de les funcions que en els conjunts, encara que són dos conceptes intimament lligats.

Aquests tipus de qüestions són un tema d'estudi clàssic en la teoria de l'anàlisi harmònica. Els primers resultats interessants ens els dóna Wiener [Wie32], dintre d'una serie de teoremes de gran importància anomenats *tauberians*. Wiener es planteja quan un conjunt $T(\varphi, \mathbb{R})$ genera tot $L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$. El seu treball ens descriu el conjunt de funcions tals que totes les seves translacions (està considerant el cas $\Lambda = \mathbb{R}$) generen l'espai corresponent, i arriba a una descripció completa molt clara.

Teorema 1.2 (Wiener)**.** *Sigui $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. $T(\varphi, \mathbb{R})$ és un sistema de generadors si i només si $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per a tot $\xi \in \mathbb{R}$.*

Sigui $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. $T(\phi, \mathbb{R})$ és un sistema de generadors si i només si $\widehat{\phi}(\xi) \neq 0$ per a tot $\xi \in \mathbb{R}$ excepte, potser, un conjunt de mesura nul.la.

Demostració. Comencem pel cas $L^2(\mathbb{R})$. Fent servir 1.1, sigui $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} h(t)\overline{\phi(t-\lambda)}\, dt = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Prenem transformades de Fourier i utilitzem el teorema de Parseval per veure que això és equivalent a:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi)\widehat{\phi}(-\xi)e^{2\pi i\lambda\xi}\, d\xi = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Això és el mateix que dir que $\widehat{h}(\xi)\widehat{\phi}(\xi) = 0$ quasi per a tot ξ, que ens dóna la doble implicació del teorema.

La demostració en termes elementals del cas $L^1(\mathbb{R})$ és bastant més complexa i llarga. Una manera de provar aquest teorema és veure que la transformada de Fourier d'una funció de $L^\infty(\mathbb{R})$ és una distribució que pot estar soportada en punts discrets i utilitzar la mateixa idea de $L^2(\mathbb{R})$. També es pot fer servir un argument basat en àlgebres de Banach. Si no volem fer servir cap d'aquests argument, en [Wie32] es dona la demostració directa, sense fer servir dualitat. □

Observació. El problema equivalent per a $p \in (1, 2)$ o $p > 2$ encara no està resolt. El principal entrebanc és descriure el conjunt de transformades de Fourier de l'espai $L^p(\mathbb{R})$. De fet, un problema equivalent és caracteritzar quins conjunts soporten distribucions que tenen transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$. Molta gent ha estudiat aquest problema. A mode d'exemple, en [Beu50] Beurling prova per a $p \in (1, 2)$ que si la dimensió de Hausforff del conjunt de zeros de la transformada de Fourier de φ és menor que $2 - \frac{2}{p}$, aleshores $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$. En [RoS03] es construeixen funcions tals que $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ per a tot $p > r$ i no genra per a $p \leqslant r$. Per a més informació sobre aquest problema recomanem aquesta darrera referència i els els articles allí citats.

Podem enunciar ara un resultat que ens serà de gran utilitat al llarg de la primera part d'aquest treball,i que es despren de d'aquest teorema.

Lema 1.3. *Siguin $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ i $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{h}(\xi) \neq 0$ per a tot $\xi \in \mathbb{R}$. Suposem que:*

$$f * h = 0$$

Aleshores $f = 0$.

Demostració. Com que $f * h = 0$ també $f * h_x = 0$ per a qualsevol traslladada de h (la convolució conmuta amb les translacions). Per tant $f * g = 0$ per a qualsevol g que sigui convinació linela de traslladades de h. Com que $\widehat{h}(\xi) \neq 0$, el teorema de Wiener ens diu que $f * g = 0$ per a tota $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Prenem una aproximació de la identitat ϕ_ε, per exemple

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{[-\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon}]}$$

Aleshores $f * \phi_\varepsilon = 0$ per a tot ε. El teorema de Lebesgue ens diu que $f * \phi_\varepsilon \to f$ quan $\varepsilon \to 0$ quasi per tot. Això ens implica que $f = 0$. $\square$

El teorema de Wiener tanca el problema en $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$ quan el conjunt que considerem és tota la recta. Però nosaltres estem interessants en altres tipus de conjunts. Concretament ens interessen conjunts discrets, on el problema és complica enormement. Ens trobem, com ja hem comentat abans, amb dos problemes paral.lels, saber quins conjunts discrets Λ admeten generadors, i quins poden ser aquests generadors. El teorema de Wiener ens diu que una condició necessària perquè una funció sigui un generador és que la seva transformada no s'anul.li en cap punt si estem en $L^1(\mathbb{R})$ o gairebé per tot en el cas $L^2(\mathbb{R})$.

Ens centrarem sobretot en els casos $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, ja que són els més interessants, tant de cara a l'estudi teòric, com de cara a les aplicaccions.

Pel que fa als conjunts, de moment no hi ha cap resultat que ens descrigui quins conjunts discrets poden ser generadors en un $L^p(\mathbb{R})$, però hi han resultats parcials que donen molta llum al problema. Per un costat, a $L^1(\mathbb{R})$ tenim que en [Bru06] i [BOU06] trobem una descripció completa dels conjunts discrets Λ que admeten generadors en termes de la densitat de Beurling-Mallavin. De fet, en aquests dos treballs es veu que coincideixen amb conjunts d'unicitat de certes classes de funcions que ens permeten construir Λ-generadors que pertanyen a aquestes classes.

En la resta d'espais $L^p(\mathbb{R})$ no tenim cap descripció d'aquests conjunts, però hi han resultats parcials. Per exemple, a $L^2(\mathbb{R})$ és senzill provar que una xarxa regular ($\Lambda = \{a\mathbb{Z}\}$) no admet generadors, però en [Ole97] i [OlU04] es construeixen generadors per a petites pertorbacions d'aquestes conjunts. En canvi, per a $L^p(\mathbb{R})$ amb $p > 2$ si es poden construir $\mathbb{Z}$-generadors.

La idea general és que a mesura que augmenta p ens apareixen més conjunts que admeten generadors, resultat que formalitzem en el següent enunciat.

Teorema 1.4. *Sigui Λ un conjunt que admet generadors a $L^p(\mathbb{R})$. Aleshores Λ admet generadors per a $L^\alpha(\mathbb{R})$ per a tot $\alpha \geqslant p$.*

A més, si $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ aleshores $T(\varphi * h,\Lambda)$ genera $L^\alpha(\mathbb{R})$ per a tot $p \leqslant \alpha < \infty$, on h pot ser qualsevol funció de $L^1(\mathbb{R})$ acotada i tal que $\widehat{h}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ.

Demostració. Com que Λ admet generadors per a $L^p(\mathbb{R})$ sabem que existeix una funció $g \in L^p(\mathbb{R})$ tal que $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$. Això és equivalent a que si per a

$f \in L^{p'}(\mathbb{R})$ (p' l'exponent dual de p)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\varphi(t-\lambda)}\, dt = 0$$

per a tot $\lambda \in \Lambda$ aleshores $f = 0$. Prenem la funció $h(t) = e^{-t^2}$. Construirem una nova funció generadora mitjançant convolució de φ aquesta:

$$\phi(t) = (h * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x)g(t-x)\, dx$$

Per a tota $f \in L^q(\mathbb{R})$ el teorema de *Hausdorff-Young* en diu que $h * f \in L^\beta(\mathbb{R})$ per a tot $\beta \geqslant q$, ja que $h \in L^r(\mathbb{R})$ per a tot $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

Fent servir aquest raonament veiem que $\phi \in L^\alpha(\mathbb{R})$ per a tot $\alpha \geqslant p$. Per a comprovar que $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^\alpha(\mathbb{R})$ ho fem per dualitat. Així, si prenem $f \in L^{\alpha'}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\phi(t-\lambda)}\, dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{h * \varphi(t-\lambda)}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)h(x)\overline{\varphi(t-x-\lambda)}\, dx\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y+x)h(x)\overline{\varphi(y-\lambda)}\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f} * h(-y)\overline{\varphi(y-\lambda)}\, dy
\end{aligned}$$

on $\widetilde{f}(t) = f(-t)$. Ara observem que $\widetilde{f} * h \in L^{p'}(\mathbb{R})$ ja que $p' \geqslant \alpha'$. Si:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\phi(t-\lambda)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f} * h(-y)\overline{\varphi(y-\lambda)}\, dt = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Com que $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$, $\widetilde{f} * h = 0$. Recordem ara que $\widehat{h}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ i el lema 1.3 ens diu que $f = 0$. Per tant $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^\alpha(\mathbb{R})$. □

Observació. Observem que si $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ no podem dir que també genera $L^\alpha(\mathbb{R})$.

1.3 Generadors per a $L^2(\mathbb{R})$.

El cas $L^2(\mathbb{R})$ és interessant per diverses raons. La primera és que de cara a les aplicacions aquest espai es correspon amb les senyals d'energía finita. Però més enllà d'aquest fet, una de les particularitats d'aquest espai que no tenen la resta és que és un espai de Hilbert. Això ens diu que el seu dual és ell mateix. Per una altra banda tenim ben definit el concepte de base que ens permet generalitzar i donar més estructura als conjunts de generadors.

Una altra propietat important és que la transformada de Fourier és un isomorfisme de $L^2(\mathbb{R})$ en ell mateix. Aquest fet facilita molt el treball, com ja hem vist en el teorema de Wiener. Un altre exemple el podem trobar en la traducció del teorema 1.4 si ens mirem només el cas $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 1.5. *Suposem que $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$. Sigui $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{\phi}(\xi) \neq 0$ quasi per tot ξ, i a més compleix que:*

$$\left|\frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\widehat{\varphi}(\xi)}\right| \leqslant C$$

Aleshores $T(\phi, \Lambda)$ també genera $L^2(\mathbb{R})$

Demostració. Suposem que existeix $m \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} m(t)\overline{\phi(t-\lambda)}\, dt = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Aleshores, per dualitat:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\lambda\xi}\widehat{m}(\xi)\widehat{\phi}(-\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\lambda\xi}\widehat{m}(\xi)\frac{\widehat{\phi}(-\xi)}{\widehat{\varphi}(-\xi)}\widehat{\varphi}(-\xi)\, d\xi = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Com que $T(\varphi, \Lambda)$ genera i $\frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\widehat{\varphi}(\xi)}$ és acotada tenim que $m(\xi)\frac{\widehat{\phi}(\xi)}{\widehat{\varphi}(\xi)} \in L^2(\mathbb{R})$ i és igual a 0. Tenint en compte que $\widehat{\phi} \neq 0$ veiem que $m = 0$ i per tant $T(\phi, \Lambda)$ genera. □

En aquest teorema es veu molt clar que el realment important d'una funció, a l'hora d'estudiar els seus conjunts de generadors, és el mòdul de la seva transformada de Fourier. Com que tenim un isomorfisme podem traslladar el problema a la banda de les transformades i obtenir un enunciat equivalent. Si tenim un pes $P(\xi) > 0$ quasi per a tot ξ podem definir $L^2(\mathbb{R}, P)$ com el conjunt de funcions tals que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2 |P(\xi)|\, d\xi < \infty$$

Proposició 1.6. *Sigui $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ quasi per a tot ξ. El conjunt $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ si i només si el conjunt d'exponencials $\{e^{2\pi i\lambda\xi}\}_{\lambda\in\Lambda}$ generen $L^2(\mathbb{R}, |\widehat{\varphi}|^2)$.*

Observació. El teorema 1.5 és un corol.lari senzill d'aquest resultat. Només cal comparar els espais que ens surten al prendre transformada de Fourier. De fet els dos enunciats ens estan dient que la capcitat de generar de φ tan sols depen del mòdul de la seva transformda de Fourier $|\widehat{\varphi}|$ i els seu decreixement a l'infinit.

Per provar aquest resultat tan sols ens cal el teorema de Parseval i la definició de sitema de generadors.

Ja hem comentat en la secció anterior que una xarxa regular no admet generadors per a $L^2(\mathbb{R})$. Podem donar ara una prova molt senzilla d'aquest fet. Si $T(\varphi, \mathbb{Z})$ fos un sitema de generadors de $L^2(\mathbb{R})$ tindríem que totes les funcions de $L^2(\mathbb{R}, |\varphi|^2)$ són 2π-periòdiques i això és absurd.

L'estudi de quan un conjunt d'exponencials genera un cert espai és un tema clàssic de l'anàlisi harmònica. Està molt estudiat el cas en que l'espai considerat és $L^2(I)$, on I és un interval tancat. Aquest problema va ser resolt per Beurling i Mallavin mitjançant una densitat (la de Beurling-Mallavin) que també serveix per descriure els conjunts que admeten generadors per a $L^1(\mathbb{R})$.

1.4 Bases i marcs.

Fins ara hem comentat que l'estudi dels generadors per translacions en $L^2(\mathbb{R})$ és un xic més senzill degut a que la transformada de Fourier és un isomorfisme en aquest espai i el seu dual és ell mateix. Però un altre factor molt important del fet d'estar en un espai de Hilbert és que aquests tenen molta més estructura. En aquests espais podem definir bases i marcs. Aquests són sistemes de generadors especials que, sota unes condicions més fortes, ens permeten tenir fórmules estables de reconstrucció. Anem a definir aquest conceptes i donar-ne les propietats.

Definició. Sigui H un espai de Hilbert i $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq H$. Direm que $\{e_i\}_{i\in I}$ és una **base ortonormal** si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ $\forall i, j \in I$ i per a tota $f \in H$ és compleix que:

$$\|f\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle e_i, e_j\rangle|^2 \tag{1.2}$$

La primera part de la definició ens diu que els e_i són ortogonals dos a dos. La segona ens diu que generen tot H, és a dir, tenim independència lineal i completitud. Per tant les bases ortonormals són sistemes de generadors i la condició 1.2 ens dóna una estructura addicional que ens permet reconstruir de manera estable. Si $\{e_i\}_{i\in I}$ és una base ortonormal, tot element $f \in H$ es pot expressar de manera única com a combinació lineal dels elements de $\{e_i\}_{i\in I}$ a traves de la següent fórmula:

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, e_i\rangle e_i$$

El fet que tot element es pugui expressar com a combinació lineal dels elements de $\{e_i\}_{i\in I}$ implica que aquest conjunt genera tot l'espai. Que sigui de manera única prové de l'independència lineal, que en aquest cas és fruit de que els elements són ortonormals.

Un concepte més general de sistemes de generadors amb aquesta propietat (que tot element es pot expressar com una combinació lineal infinita) són els marcs. Aquests seran els conjunts més generals amb aquesta propietat. Seran de gran utilitat en bona part d'aquest treball.

Definició. Un conjunt $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en un espai de Hilbert H direm que és un **marc** si existeixen constants $A, B > 0$ tals que:

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

Les constants A i B s'anomenen les cotes o constants del marc.

En aquesta definició no hem dónat cap importància al concepte d'independència. Quan treballem amb marcs només ens importa que són capaços de generar de manera estable tot l'espai H. La manera de fer-ho és molt semblant a les bases ortonormals.

Proposició 1.7. *Sigui $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un marc per a un espai de Hilbert H. Existeix un conjunt $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle f_k \quad \forall f \in H$$

El conjunt $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ també és un marc. Com que no hi ha independència, aquest no té perqué ser únic. N'existeix, però, un de privilegiat, que s'anomena el marc dual. Aquest té la propietat de minimitzar la norma dels coeficients de la representació, que òbviament tampoc són únics. A més es pot calcular de manera explícita a partir del marc original $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mitjançant l'operador de marc. Els detalls els podem trobar en [Dau92]. Les cotes del marcs dual són $\frac{1}{B}$ i $\frac{1}{A}$ respectivament. Si $\{\widetilde{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ és el marc dual de $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, la fòrmula de reproducció per aquest queda:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle \widetilde{f_k} \quad \forall f \in H$$

que ens diu que els valors $\langle f, f_k\rangle$ ens determinen completament la funció.

Una de les característiques dels marcs és que poden ser redundants, és a dir, ens sobren vectors, però continuen sent de gran utilitat. De manera informal es correspondrien, en dimensió finita, amb un conjunt de vectors amb cardinal més gran que la dimensió de l'espai i que el generen tot.

Dintre dels marcs podem destacar-ne vàries classes particulars:

Definició. Sigui $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un marc per H amb cotes A i B. Direm que el marc és **rígid** si $A = B$.

Observació. Si un marc és rígid es pot veure que el marc dual és ell mateix multiplicat per $\frac{1}{A}$. La fórmula de reconstrucció queda pràcticament idèntica a la de les bases ortonormals. Aquest fet fa que aquests siguin els millors marcs de cara a les aplicaccions en processament del senyal, ja que no cal calcular el marc dual per recuperar la funció.

Una altra classe de marcs que és d'especial importància són les bases de Riesz. Aquests conjunts es poden caracteritzar de moltes maneres. La seva principal propietat és que les funcions que el conformen són linelament independents. Això fa que cada funció la puguem expresar d'una sola manera.

Definició. Un conjunt $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una **base de Riesz** de H si tot element $f \in H$ es pot expressar de manera única com a combinació lineal d'elements de $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k e_k \qquad a_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

de manera que existeixen $A, B > 0$ tals que:

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 \leqslant B\|f\|^2$$

El marc dual d'una base de Riesz també té propietats especials.

Definició. Dos conjunts de vectors $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ s'anomenen **biortogonals** si:

$$\langle f_i, g_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposició 1.8. *Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una base de Riesz per a H, existeix un únic conjunt $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en H tal que:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, g_k\rangle f_k, \quad \forall f \in H$$

$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és també una base de Riesz que anomenarem base dual. $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ són biortogonals i la sèrie convergeix incondicionalment.

L'existència d'un conjunt biortogonal pràcticament ens assegura que un conjunt serà una base de Riesz. Donem algunes definicions equivalents de cara a poder reconèixer les bases de Riesz.

Proposició 1.9. *Sigui H un espai de Hilbert separable. Aleshores són equivalents:*

1. *El conjunt $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una base de Riesz.*

2. *El conjunt* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és complet a* H *i existeixen constants positives* A, B *tals que per a qualsevol enter positiu* k *i escalars arbitraris* $c_1, \ldots, c_k$ *és compleix que:*

$$A\sum_{n=1}^{k}|c_n|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{k}c_n f_n\right\|^2 \leqslant B\sum_{n=1}^{k}|c_n|^2$$

3. *El conjunt* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és complet a* H *i té un conjunt biortogonal complet* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle f, f_n\rangle|^2 < \infty \qquad i \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle f, g_n\rangle|^2 < \infty$$

per a tota $f \in H$.

4. *El conjunt* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és de la forma* $\{Te_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *on* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *és una base ortonormal de* H *i* $T : H \to H$ *és un operador lineal acotat i bijectiu.*

5. *El conjunt* $\{f_n\}$ *és un marc i tot element de* H *és pot expressar de manera única com a combinació lineal d'elements de* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Les demostracions les podem trobar en [You01].

Un dels avantatges de les bases de Riesz respecte a les ortonormals és que tenim diferents resultats d'estabilitat, com per exemple:

Proposició 1.10. *Sigui* H *un espai de Hilbert separable i* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal. Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és un conjunt linealment independent tal que:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\|e_n - f_n\|^2 < \infty$$

Aleshores $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *és una base de Riesz.*

Aquesta proposició ens diu que les bases properes a una base ortonormal són bases de Riesz, ja que aconseguir l'ortonormalitat no és una qüestió de proximitat.

Però també tenim resultats que ens permeten dir que conjunts propers a bases de Riesz són bases de Riesz:

Teorema 1.11 (Paley)**.** *Sigui* $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una base de Riesz per a un espai de Hilbert separable* H. *Suposem que* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *és un conjunt d'elements de* H *que compleix que:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}c_i(e_i - f_i)\right\| \leqslant \lambda\left\|\sum_{i=1}^{n}c_i e_i\right\|$$

per alguna constant $0 \leqslant \lambda < 1$, *i per a tota tria d'escalars* $c_1, \ldots, c_n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Aleshores* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *és una base de Riesz per a* H.

Bases ortonormals, bases de Riesz i marcs són les tres nocions bàsiques pel que respecta a representació de funcions que utilitzarem en la segona part d'aquest treball. La principal diferència amb els sistemes de generadors en general ve donada per l'estabilitat dels coeficients, que dóna lloc a les fórmules de reconstrucció.

Quan parlàvem de sistemes de generadors el que demanàvem era que les combinacions lineals fossin denses a dins l'espai. Això també passa en el cas de les bases i els marcs. Però ara podem descriure tota funció com una combinació lineal dels elements de la base o el marc, cosa que no podíem assegurar en el cas dels sistemes de generadors.

Com es dedueix de les definicions, les bases ortonormals són també bases de Riesz, les de Riesz són marcs, concretament una classe de marcs que s'anomenen exactes, i les ortonormals són marcs rígids. Les bases de Riesz les podem pensar com marcs linealment independents, sense redundància.

Tant les bases ortonormals i de Riesz com els marcs ens defineixen operadors (que anomenarem operadors de síntesi) de la següent manera. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és un conjunt qualsevol a H, definim:

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow l^2 \\ v &\longmapsto T(v) = \{\langle v, e_k\rangle\}_{k\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Podem reconeixer quina classe de conjunt estem utilitzant observant com actua aquest operador. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una base ortonormal aquest operador T és una isometria. En les bases de Riesz l'operador és acotat i invertible, però ja no conserva la norma. Si el conjunt és un marc l'operador continua sent acotat, però deixa de ser exhaustiu, encara que és invertible en la seva imatge.

Més endavant, quan definim els espais de fase, veurem que aquest operador es correspon de manera directa amb l'operador de mostreig. Per a entendre millor la conexió que establirem és important entedre bé aquest operador. Per exemple, tant en les bases ortonormals com en les de Riesz aquest operador és bijectiu. Això vol dir dues coses. Per una banda els valors de $T(v)$ ens determinen completament v, i per una altra, per a qualsevol conjunt de valors $a \in l^2$ existeix un vector $v \in H$ tal que $T(v) = H$. En el primer cas hem solucionat el problema de mostreig (determinar v a partir de la seva imatge) i en l'altre resolem el d'interpolació (construir v amb una imatge donada. Aquest dos problemes són duals.

En el cas del marcs l'operador no és exhaustiu i ja no podem resoldre el problema d'interpolació. Tot i així, v queda totalment determinat a partir de la seva imatge.

Els conjunts per als quals es pot resoldre el problema d'interpolació són aquells linelament independents (en el sentit adequat). Per aquests l'operador és exhaustiu però pot no ser injectiu, ja que no han de ser obligatòriament complets. En aquest cas existeix la posivilitat de no poder resoldre el problema de mostreig.

Hem de tenir en compte que aquest operador T no ens dóna els coeficients amb els quals representem les funcions. Aquests coeficients serveixen per a recuperar els vectors però mitjançant la base o el marc dual.

La principal raó per la qual no hem parlat de bases i marcs fins aquest moment és el següent resultat.

Teorema 1.12. *Un sistema de generadors per translacions $T(\varphi, \Lambda)$ no pot ser mai una base o un marc. És a dir, no existeixen marcs o bases de traslladades en $L^2(\mathbb{R})$.*

Observació. Aquest resultat és cert en $L^2(\mathbb{R})$ però no ho és en general. Per exemple, en els espai de Paley-Wiener (banda limitada) si que hi han bases i marcs de traslladades d'una funció concreta.

Lema 1.13. *Si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és un marc de $L^2(\mathbb{R})$, aleshores:*

$$S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi_n(t)|^2 = \infty$$

quasi per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Demostració. Si $S(t) < \infty$ per a un conjunt de mesura positiva I, aleshores existeix $M > 0$ i un altre conjunt de mesura positiva J tal que

$$S(t) \leqslant M \qquad \forall t \in J$$

Si $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi_n}\rangle \varphi_n(t)$ és l'expressió de $f \in L^2(\mathbb{R})$ on $\{\widetilde{\varphi_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és el marc dual de $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, fent servir la desigualtat de Schwartz tenim que:

$$|f(t)|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \widetilde{\varphi_n}\rangle \varphi_n(t)\right|^2 \leqslant S(t) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\langle f, \widetilde{\varphi_n}\rangle\right|^2 \leqslant \frac{M}{A}\|f\|^2$$

per a tot $t \in J$, on A és la cota inferior del marc $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Això ens diu que tota funció de $L^2(\mathbb{R})$ és acotada en J, cosa que és absurda. $\square$

Demostració de 1.12. Suposem que $\{\varphi(t-\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és un marc de $L^2(\mathbb{R})$. Definim $h(\delta)$ el mòdul de continuïtat en $L^2(\mathbb{R})$ de φ:

$$h(\delta) = \sup_{|s|\leqslant\delta} \left\|\varphi(t) - \varphi(t-s)\right\| \tag{1.3}$$

que és decreixent i amb límit 0 quan $\delta \to 0$. Com que la norma és invariant per translacions tenim que:

$$\left\|\varphi(t-x) - \varphi(t-y)\right\| \leqslant h(|x-y|)$$

Suposem sense perdre generalitat que $\|\varphi\| = 1$. Si $x \in \mathbb{R}$ podem deduir que $\big|\langle\varphi(t-x), \varphi(t-\lambda_n)\rangle\big| \geqslant 1 - \frac{1}{2}h(|x-\lambda_n|)$. Com que $\{\varphi(t-\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és un marc tenim que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\langle\varphi(t-x), \varphi(t-\lambda_n)\rangle\big|^2 \leqslant B$$

D'aquestes dues relacions podem deduir que en qualsevol interval de la forma $[a, a+1]$ hi han com a molt N punts de Λ ja que:

$$\sum_{\lambda_n\in[a,a+1]} \left|\left\langle \varphi\left(t-a+\frac{1}{2}\right), \varphi(t-\lambda_n)\right\rangle\right|^2 \geqslant \Big|\{\lambda_n \in [a, a+1]\}\Big| \left(1 - \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Ara calculem:

$$\int_0^1 S(t)\,dt \leqslant \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-\lambda_n)|^2\,dt = \int_{-\lambda_n}^{1-\lambda_n} |\varphi(t)|^2\,dt$$

Com que cada interval de longitud 1 conté com a molt N punts també tenim que cada t estarà com a molt en N intervals de la forma $[-\lambda_n, 1-\lambda_n]$ i per tant:

$$\int_0^1 S(t)\,dt \leqslant N \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2\,dt < \infty$$

i $S(t)$ és integrable en $[0, 1]$. Això implica que és finita quasi per tot punt en aquest interval, amb el que tenim contradicció amb el lema anterior. □

1.5 Ondetes i Gabor.

Per tal d'aprofitar l'estructura que té $L^2(\mathbb{R})$ com a espai de Hilbert, i en vista del resultat negatiu que ens dóna 1.12, una de les solucions que s'ha utilitzat al llarg dels darrers anys és no tan sols restringir-se a fer servir traslladades d'una funció donada, sinó considerar també altres transformacions.

En aquest treball ens fixarem en dues alternatives que han estat bastant fructíferes els darrers anys. La primera és afegir modulacions, per donar lloc al que es coneix com transformada de Gabor. L'altra opció és prendre dilatacions a part de les translacions. En aquestt darrer cas ens trobarem amb la transformada en ondetes.

Donarem primer les definicions de transformades continues, que després, en discretitzar-les, donaran lloc a les bases i els marcs respectius. Comencem amb la transformada de Gabor[Gab46].

Definició. Fixada una funció $g \in L^2(\mathbb{R})$ amb $\|g\| = 1$, definim la **transformada de Gabor** d'una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ mitjançant g en el punt $z = x + yi$ com:

$$Gf(z) = \big\langle f(t), e^{2\pi iyt} g(t-x)\big\rangle$$

Podem escriure de manera més compacta aquesta transformada com $Gf(z) = \langle f, g_z \rangle$. Una de les principals propietats d'aquesta transformada és que podem reconstruir la funció f inicial a partir dels valors de la seva transformada de manera estable.

Teorema 1.14 (Gabor)**.** *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|g\| = 1$ i considerem $Gf(z) = \langle f, g_z \rangle$ com hem dit anteriorment. Aleshores es compleix que $Gf \in L^2(\mathbb{C}, dx\,dy)$ i $\|Gf\|_{\mathbb{C}} = \|f\|$. A més tenim fórmula de reconstrucció que ve donada per:*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Gf(z) g_z(t)\, dx\, dy \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{1.4}$$

Observació. La igualtat (1.4) l'hem d'entendre com una igualtat de funcions en $L^2(\mathbb{R})$, ja que pot no tenir sentit puntualment.

Demostració. Provarem primer la fórmula de reconstrucció. Si pensem $Gf(z) = Gf(x, y) = F_y(x)$ com a funció d'una variable real (pensem y com a paràmetre) observem que:

$$F_y(x) = e^{-2\pi ixy} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t-x)} e^{2\pi iy(x-t)}\, dt = e^{-2\pi ixy} \left(f * g_y \right)(x)$$

on $g_y(t) = \overline{g(-t)} e^{2\pi iyt}$. La seva transformada de Fourier respecte x és:

$$\widehat{F}_y(\xi) = \widehat{f}(\xi + y) \widehat{g}_y(\xi + y) = \widehat{f}(\xi + y) \overline{\widehat{g}(\xi)}$$

(1.4) es pot escriure com:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F_y(x) e^{2\pi iyt} g(t-x)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iyt} \int_{\mathbb{R}} F_y(x) \overline{\overline{g(t-x)}}\, dx\, dy \tag{1.5}$$

L'integral en x es pot pensar com un producte escalar. Tenint en compte que la transformada de Fourier de $\overline{g(t-x)}$ respecte x és $\overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-2\pi i\xi t}$, (1.5) queda:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iyt} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi + y) \overline{\widehat{g}(\xi)}\, \overline{\overline{\widehat{g}(\xi)} e^{-2\pi i\xi t}}\, d\xi\, dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi + y) e^{2\pi it(\xi + y)}\, dy\, d\xi = f(t)$$

En aquest últim pas hem fet servir el teorema de Fubini. Per tant hem provat la fórmula de reconstrucció quan $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per un argument de densitat i continuïtat de la transformada es pot estendre a tot $L^2(\mathbb{R})$.

Per provar que tenim isometria calculem:

$$\|Gf\|_{\mathbb{C}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F_y(x)|^2\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(\xi + y) \widehat{g}(\xi) \right|^2 d\xi\, dy = \|f\|_2^2$$

on hem fet servir Parseval i Fubini. D'aquesta manera ja tenim el que volíem. □

La transformada en ondetes es defineix d'una manera anàloga, però considerant dilatacions en lloc de modulacions. El paràmetre de dilatació només pren valors a $\mathbb{R}^+$, i de moment la definirem a l'espai $L^2(\mathbb{R})$ de funcions que prenen valors reals.

Definició. Donada una funció $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definim la **transformada en ondetes** (per l'ondeta ψ) de f en un punt $z = x + iy \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ com:

$$Wf(z) = \langle f, \psi_z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{y^{\frac{-1}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{y}\right)} \, dt$$

Igual que en el cas de Gabor, per a ondetes també tenim fórmula de reconstrucció contínua. Però aquesta fórmula tan sols serà vàlida quan l'ondeta pertanyi a una classe especial, que anomenarem admissibles.

Definició. Direm que una ondeta $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ és **admissible** si la següent integral és convergent:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} \, d\xi < \infty$$

De manera general considerarem ondetes normalitzades perque tant la norma com aquesta darrera integral siguin 1. Sota aquesta hipòtesi podem donar ja la fórmula de reconstrucció.

Teorema 1.15 (Calderon, Grossmann, Morlet)**.** *Fixem una ondeta admissible ψ en les condicions anteriors. Per a tota $f \in L^2(\mathbb{R})$ es compleix que $Wf \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \frac{dx\,dy}{y^2})$, $\|Wf\|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} = \|f\|_2$ i podem reconstruir f a partir dels valors de la seva transformada mitjançant la següent fórmula:*

$$f(t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wf(z) \psi_z(t) \, \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{1.6}$$

Observació. Igual que en el cas de Gabor, (1.6) també s'ha d'entendre com una igualtat en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostració. L'integral que ens dóna la fórmula de reconstrucció (1.6) és pot reescriure com una convolució de la següent manera. Passem a dues variables pensat $z = (x, y)$. Podem escriure en forma de convolució $Wf(x, y) = (f * \psi_y^*)(x)$, on fem servir la notació $\psi_y^*(t) = y^{\frac{-1}{2}} \overline{\psi(\frac{-t}{y})}$. D'aquesta manera l'integral de (1.6) queda:

$$\int_0^{\infty} \big(Wf(\cdot, y) * \psi_y\big)(t) \, \frac{dy}{y^2} = \int_0^{\infty} \big(f * \psi_y^* * \psi_y\big)(t) \, \frac{dy}{y^2} \tag{1.7}$$

on '$\cdot$' indica la variable respecte a la que estem calculant la convolució. Observem que (1.7) és una funció que depèn de t. Demostrarem que és igual a f veient que tenen la mateixa transformada de Fourier. Calculem la transformada de (1.7):

$$\int_0^{\infty} \widehat{f}(\xi) y^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{\psi}(y\xi)} y^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(y\xi) \, \frac{dy}{y^2} = \widehat{f}(\xi) \int_0^{\infty} |\widehat{\psi}(y\xi)|^2 \, \frac{dy}{y} \tag{1.8}$$

Fent el canvi $\omega = y\xi$ recuperem la condició d'admissibilitat, de manera que (1.8) pren la forma:

$$\widehat{f}(\xi)\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\,d\omega = \widehat{f}(\xi)$$

Això prova la fórmula de reconstrucció. Per provar l'isometria només cal observar que si prenem la transformada de Fourier de $Wf(x,y)$ respecte a la variable x ens queda $y^{\frac{1}{2}}\overline{\widehat{\psi}(y\xi)}\widehat{f}(\xi)$. Fent servir la fórmula de Plancharel i el teorema de Fubini podem veure que:

$$\begin{aligned}\|Wf(x,y)\|^2 &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty |Wf(x,y)|^2\,dx\,\frac{dy}{y^2} = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left|y^{\frac{1}{2}}\overline{\widehat{\psi}(y\xi)}\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\frac{dy}{y^2}\\ &= \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(y\xi)|^2}{y}\,dy\,d\xi = \|\widehat{f}\|^2 = \|f\|^2\end{aligned}$$

Que és el que volíem demostrar. □

Observació. L'igualtat (1.7) es coneix com la fórmula de Calderon, que en [Cal64] arrivà a la mateixa fórmula des d'una altra prespectiva. Anys més tard, Grossmann i Morlet, que desconeixien el treball de Calderon, la varen provar en [GrM84] des del punt de vista del processament del senyal.

Hem suposat, tant en la definició de transformada en ondetes com en la prova del teorema, que $\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}\,d\xi = c_\psi = 1$. Si això no fos cert, s'ha de definir la transformada en ondetes com:

$$Wf(z) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}\langle f, \psi_z\rangle$$

D'aquesta manera la fórmula de reconstrucció continua essent valida. Només cal tenir en compte la constant c_ψ a la demostració.

Comparem les fórmules de reconstrucció donades aquí amb el teorema de Wiener 1.2. En tots els casos, sota diferents condicions sobre la funció analitzant, podem generar tot l'espai $L^2(\mathbb{R})$ fent servir tota l'acció (totes les translacions, les translacions i modulacions o translacions i dilatacions en cada cas). La principal diferència respecte a utilitzar només translacions és que amb la transformada de Gabor o en ondetes tenim una fórmula explicita i estable (hi ha conservació de la norma) de reconstrucció.

Una manera d'interpretar els teoremes 1.14 i 1.15 és pensar que l'isometria ens diu que les dues transformades ens donen un marc rígid de $L^2(\mathbb{R})$. La fórmula de reconstrucció és l'equivalent continu a la fórmula de reconstrucció de marcs, amb el marc dual igual al marc original.

El teorema 1.12 ens diu que no hi han marcs discrets de traslladades, és a dir, que $T(\varphi,\Lambda)$ no pot ser un marc per a cap $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ i $\Lambda \subset \mathbb{R}$ discret. Aquest resultat continua sent cert en la versió contínua ($\Lambda = \mathbb{R}$), pensant en el concepte de marc continu.

Proposició 1.16. *No hi han marcs continus de traslladades. És a dir, no pot existir cap $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que per a tota $f \in L^2(\mathbb{R})$ tingui sentit la fórmula:*

$$f = \int_{\mathbb{R}} \langle f, \varphi_x \rangle \varphi_x \, dx$$

o de manera equivalent:

$$\|f\| = \big\|\langle f, \varphi_x \rangle\big\| = \left\| \int f(u)\overline{\varphi(u-x)}\, du \right\|$$

Demostració. Calculem directament:

$$\int_{\mathbb{R}} \langle f, \varphi_x \rangle \varphi_x(t) \, dx = \in_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u)\overline{\varphi(u-x)}\varphi(t-x)\, dt\, dx$$

La integral en x la podem pensar com un producte escalar. Prenem transformades de Fourier i apliquem Parseval. L'equació anterior ens queda:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi (t-u)} |\widehat{\varphi}(-\xi)|^2 \, d\xi \, du$$

La integral en U ens està calculant la transformada de Fourier de f. D'aquesta forma arrivem a:

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(-\xi)|^2 e^{-2\pi i \xi t} \widehat{f}(-\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega t}\, d\omega$$

És clar que la darrera equació no pot igualar en general a qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Que tampoc hi pot haver igualtat de normes es dedueix d'una manera semblant, o de la inexistència de fórmula de reconstrucció. $\square$

En aquestes dues definicions hem fet servir la notació $z = x + iy$. Hem de tenir clar en tot moment que això només és notació, és a dir, no estem pensant en que d'alguna forma tindrem funcions analítiques de variable complexa, sinó que és una manera més compacta d'escriure les coses. També cal tenir en compte que estem fent servir la mateixa notació per a dues coses diferents. El que volem dir és que g_z significarà coses diferents en funció de si parlem de transformada de Gabor o en ondetes. Fins i tot canvia el conjunt on està definida la z. Qualsevol dels dos casos serà consistent amb la definició de φ_x per a translacions. Normalment no hi haurà confusió i d'aquesta manera és molt més senzill veure les similituds i entendre els teoremes.

Aquestes dues definicions són casos particulars d'accions de grups sobre $L^2(\mathbb{R})$. En el cas de la transformada de Gabor el grup que està actuant és el de Weil-Heisenberg i en el cas d'ondetes és el grup afí. Les fórmules de reconstrucció es poden deduir directament de la teoria d'accions de grups sobre un espai de Hilbert, així com altres propietats que donarem més endavant.

Igual que en el cas de translacions, estem interessats en conjunts discrets de funcions que pugui generar $L^2(\mathbb{R})$. Donem per tant les definicions corresponents a aquests tipus de sistemes.

Definició. Sigui $\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ un conjunt discret i $g \in L^2(\mathbb{R})$ una funció que anomenarem àtom de Gabor analitzant. Definim el **sistema de Gabor** $G(g,\Lambda)$ com:

$$G(g,\Lambda) = \left\{ g_z(t) = e^{2\pi i y t} g(t-x); z = x+iy \in \Lambda \right\}$$

Definició. Sigui $\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ un conjunt discret i $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una funció admissible que anomenarem ondeta analitzant. Befinim el **sistema d'ondetes** $W(\psi,\Lambda)$ com:

$$W(\psi,\Lambda) = \left\{ \psi_z(t) = y^{\frac{-1}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{y}\right); z = x+iy \in \Lambda \right\}$$

De manera general considerarem funcions analitzans amb norma 1 i ondetes normalitzades tals que $\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}\, d\xi = c_\psi = 1$.

Com que les versions contínues d'aquests sistemes tenen molta més estructura que el seu equivalent en translacions, als conjunts discrets també els hi demanarem més. En lloc de preguntar-nos quan un sistema $G(g,\Lambda)$ o $W(\psi,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$, aquí buscarem més estructura. Demanarem quan pot ser base o marc. Les questions són similars a les que ens fèiem en conjunts de traslladades. És a dir, donar condicions sobre la funció analitzant i sobre el conjunt per tal de que puguem tenir una base o un marc.

El primers conjunts Λ en que ens fixarem són les xarxes regulars. En el cas de Gabor prenen la forma $\Lambda = \{am + ibn; n, m \in \mathbb{Z}\} = \{a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}\}$. Els sistemes de la forma $G(g, a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z})$ han estat molt estudiats en els darrers anys. Podem trobar diversos resultats que ens donen condicions necessàries o suficients per tal que aquests conjunts siguin bases o marcs. Per exemple, en [Dau92] trobem:

Teorema 1.17 (Daubechies)**.** *Sigui $G(g, a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z})$ un marc de Gabor. Aleshores:*

$$ab \leqslant 1 \tag{1.9}$$

Les constants A, B del marc han de complir necessàriament:

$$A \leqslant \frac{1}{ab} \leqslant B$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, A \leqslant \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(t-na)|^2 \leqslant B$$
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, A \leqslant \frac{1}{a}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi-mb)|^2 \leqslant B$$

El nombre $\frac{1}{ab}$ mesura la densitat de la xarxa. La condició (1.9) ens diu que no hi hauran marcs ni bases per a densitat menor que 1, i que tan sols tindrem bases ortonormals quan $ab = 1$. En el cas de bases ortonormals ens trobem amb un resultat que ens diu que la funció g no pot estar ben localitzada i ser suau al mateix temps.

Teorema 1.18 (Balian-Low)**.** *Si $G(g, a\mathbb{Z}\times b\mathbb{Z})$ és un marc amb $ab = 1$, aleshores:*

$$\int_{\mathbb{R}} t^2|g(t)|^2\,dt = \infty \quad o \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{g}(\xi)|^2\,d\xi = \infty$$

Aquest resultat, provat de manera independent per Balian[Bal81] i Low[Low85] en el cas de base, i generalitzat més tard a marcs per Daubechies i Janssen[DaJ93], és molt important de cara a les aplicacions, ja que ens diu que no podem trobar bases ortonormals ben localitzades en temps i freqüència al mateix temps. Haurem de triar entre bona localització o que no hi hagi redundància. Podem trobar vàries generalitzacions d'aquest teorema.

Pel que fa a condicions suficients també en podem trobar vàries. Per exemple:

Teorema 1.19 (Daubechies)**.** *Definim:*

$$\beta(u) = \sup_{0\leqslant t\leqslant a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(t-na)||g(t-na+u)|$$

i

$$\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}\left[\beta\Big(\frac{k}{b}\Big)\beta\Big(\frac{-k}{b}\Big)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Si a i b compleixen:

$$A_0 = \frac{1}{b}\left(\inf_{0\leqslant t\leqslant a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(t-na)|^2 - \Delta\right) > 0$$

i

$$B_0 = \frac{1}{b}\left(\inf_{0\leqslant t\leqslant a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(t-na)|^2 + \Delta\right) < \infty$$

aleshores $G(g, a\mathbb{Z}\times b\mathbb{Z})$ és un marc. Les constants A_0 i B_0 són cotes superior i inferior respectivament de les constants A i B del marc.

La demostració d'aquests resultats així com un estudi molt més acurat i profund dels marcs de Gabor regulars el podem trobar en [Dau92], o també podem citar [Chr03] dintre de l'extensa bibliografía sobre el tema.

Si busquem condicions suficients per a bases ortonormals en xarxes regulars podem donar un resultat curiós que no era conegut fins ara. Aquest resultat, que enunciarem en breu, ens diu que si el conjunt $G(g, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ és ortonormal aleshores és una base. És interessant perquè ens diu que l'ortonormalitat (independència de les funcions) ja ens dóna la capacitat de generar quan fem servir tota la xarxa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La clau ens la dóna la fórmula de Poisson.

Teorema 1.20 (Fórmula de sumació de Poisson)**.** *Sigui f una funció a la qual li podem calcular la transformada de Fourier. Aleshores:*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)$$

és valida quan els dos costats de l'igualtat tenen sentit.

La idea és aplicar aquesta fórmula a la transformada contínua de Gabor d'una funció, que està definida en dues variables. Donem un lema tècnic primer.

Lema 1.21. *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ un àtom de Gabor i sigui Gf la transformada de Gabor de $f \in L^2(\mathbb{R})$ respecte g. La transformada de Fourier (en dues variables) de Gf és:*

$$\mathcal{F}(Gf)(\xi_1, \xi_2) = \overline{\widehat{g}(\xi_1)} f(-\xi_2) e^{2\pi i \xi_1 \xi_2}$$

Demostració. Calculem directament:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(Gf)(\xi_1, \xi_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} Gf(x, y) e^{-2\pi i (x\xi_1 + y\xi_2)}\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i y t} \overline{g(t-x)}\, dt\, e^{-2\pi i (x\xi_1 + y\xi_2)}\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(t) e^{-2\pi i y(\xi_2 + t)} \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i x \xi_1}\, dx\, dy\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y \xi_2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i t y} e^{-2\pi i t \xi_1} \overline{\widehat{g}(\xi_1)}\, dt\, dy \\
&= \overline{\widehat{g}(\xi_1)} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y \xi_2} \widehat{f}(\xi_1 + y)\, dy = \overline{\widehat{g}(\xi_1)} f(-\xi_2) e^{2\pi i \xi_1 \xi_2}
\end{aligned}$$

que és el que volíem provar. □

Teorema 1.22. *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ un àtom de Gabor. Si el sistema $G(g, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ és ortonormal aleshores és una base ortonormal.*

Demostració. El que farem és aplicar la fórmula de Poisson a la funció $|Gf|^2$. Abans de calcular observem que $|Gf|^2 = Gf\overline{Gf}$. Fent servir el lema 1.21 tenim que:

$$\mathcal{F}\left(\overline{Gf}\right)(\xi_1,\xi_2) = \widehat{g}(-\xi_1)\overline{f(\xi_2)}e^{-2\pi i\xi_1\xi_2}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(|Gf|^2)(\xi_1,\xi_2) = \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\widehat{g}(\alpha_1)}\widehat{g}(\alpha_1-\xi_1)f(-\alpha_2)\overline{f(\xi_2-\alpha_2)}e^{-2\pi i\xi_1\xi_2}e^{2\pi i\xi_1\alpha_2}e^{2\pi i\xi_2\alpha_1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\end{aligned}$$

Ara apliquem la fórmula de Poisson a $|Gf|^2$:

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |Gf(m,n)|^2 &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\big(|Gf|^2\big)(m,n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\widehat{g}(\alpha_1)}\widehat{g}(\alpha_1-m)f(-\alpha_2)\overline{f(n-\alpha_2)}e^{-2\pi imn}e^{2\pi im\alpha_2}e^{2\pi in\alpha_1}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}(\alpha_1)}\widehat{g}(\alpha_1-m)e^{2\pi in\alpha_1}\,d\alpha_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(-\alpha_2)\overline{f(n-\alpha_2)}e^{2\pi im\alpha_2}\,d\alpha_2\right) \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle e^{2\pi imt}g(t+n),g(t)\rangle\langle f(t),e^{2\pi imt}f(t+m)\rangle \\ &= \|f\|^2\end{aligned}$$

on hem fet servir la condició d'ortonormalitat en el darrer pas. Tan sols queda recordar la definició de $Gf(m,n)$ per veure:

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f(t),e^{2\pi int}g(t+m)\rangle|^2 = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |Gf(m,n)|^2 = \|f\|^2$$

que és el que ens calia per a provar que $G(g,\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ és una base ortonormal. □

En el cas d'ondetes les xarxes regulars tenen la forma $\{a^j nb + ia^j\}_{j,n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, depenent dels dos parametres a, b. Aquestes xarxes les anomenarem hiperbòlicament regulars, ja que tenen la propietat de que la distància hiperbòlica entre els punts veïns d'aquesta xarxa és constant. També es corresponen amb els extrems de la partició en cubs diàdics del semiplà, que tenen mésura constant. En aquest cas aquests també han estat els conjunts més estudiats. Podem donar condicions necessàries semblants a les que hem donat en el cas de transformada de Gabor. Si prenem una ondeta ψ admissible i definim $c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}\,d\xi$ i $\Lambda = \{a^j nb + ia^j\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$, podem enunciar, per exemple:

Teorema 1.23 (Daubechies)**.** *Si $W(\psi,\Lambda)$ és un marc per a $L^2(\mathbb{R})$, aleshores les cotes del marc compleixen que:*

$$A \leqslant \frac{2\pi c_\psi}{b\log a} \leqslant B$$

$$\forall\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ ,\ A \leqslant \frac{1}{b}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j\xi)|^2 \leqslant B$$

Cal observar que, a diferència dels que ens passava amb Gabor, aquí no hi ha cap restricció pel que fa a la densitat de la xarxa. En general podem justificar aquest fet amb el següent argument; si $W(\psi,\Lambda)$ és un marc amb Λ una xarxa regular amb paràmetres a,b, definim $\widetilde{\psi}(t) = \gamma^{\frac{1}{2}}\psi(\gamma t)$. Aleshores $W\big(\widetilde{\psi},\widetilde{\Lambda}\big)$ serà un marc amb $\widetilde{\Lambda}$ una xarxa regular amb paràmetres $a, \frac{b}{\gamma}$. Aquest raonament no el podem fer quan ψ està normalitzada de manera que $c_\psi = 1$, però tampoc es coneix cap resultat que ens digui que no hi han marcs per sota d'una densitat determinada.

Pel que fa a condicions suficients, també podem donar exemples:

Teorema 1.24 (Daubechies)**.** *Definim:*

$$\beta(u) = \sup_{0\leqslant\xi\leqslant a}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j\xi)||\widehat{\psi}(a^j\xi+u)|$$

i

$$\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}\left[\beta\Big(\frac{k}{b}\Big)\beta\Big(\frac{-k}{b}\Big)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Si a i b compleixien:

$$A_0 = \frac{1}{b}\left(\inf_{0\leqslant\xi\leqslant a}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(a^j\xi)|^2 - \Delta\right) > 0$$

i

$$B_0 = \frac{1}{b}\left(\inf_{0\leqslant\xi\leqslant a}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(a^j\xi)|^2 + \Delta\right) < \infty$$

Aleshores $W(g,\Lambda)$ és un marc per a Λ una xarxa regular amb paràmetres a,b. Les constants A_0 i B_0 són cotes superior i inferior respectivament de les constants A i B del marc.

Les proves d'aquests resultats i un estudi més profund dels marcs de ondetes el podem trobar també a [Dau92]. En el cas d'ondetes les bases ortonormals han estat molt més estudiades. Pe una part no tenim cap restricció del tipus *Balian-Low*. Es poden construir bases ortonormals d'ondetes amb bones propietats de localització temps-frqüència. A més tenim unes estructures que ens permeten crear-ne de tan bones com vulguem de forma senzilla.

1.5.1 Anàlisi Multiresolució.

Els anàlisis multirresolució són unes estructures introduïdes per Mallat [Mal98], composades per una sèrie de subespais amb unes propietats que els relacionen. Aquestes estructures ens permet generar de manera explícita bases ortonormals d'ondetes. La majoria de bases d'ondetes ortonormals que és coneixen són fruit d'aquestes estructures que ara definirem i comentarem breument.

Definició. Una seqüència $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespais tancats de $L^2(\mathbb{R})$ és una **aproximació multirresolució** si es satisfan les següents sis propietats:

$$\forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2,\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t-2^j k) \in V_j \tag{1.10}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ V_{j+1} \subseteq V_j \tag{1.11}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \tag{1.12}$$

$$\lim_{j\to\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \tag{1.13}$$

$$\lim_{j\to-\infty} V_j = \overline{\left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j\right)} = L^2(\mathbb{R}) \tag{1.14}$$

$$\text{Existeix } \phi \text{ tal que } \{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ és una base ortonormal de } V_0 \tag{1.15}$$

Aquestes condicions no són independents entre elles ni són les mínimes que es poden demanar, però no ens n'ocuparem en aquest treball.

Anomenarem a ϕ l'ondeta pare o funció d'escala de l'anàlisi multirresolució. No hem de confondre ϕ amb una ondeta admissible, ja que en general no ho serà. El que sí que hem d'observar és que ϕ ens determina totalment l'aproximació multirresolució.

A partir d'aquesta estructura, fent servir (1.11), podem afirmar que existeixen subespais tancats $W_{j+1} \subseteq V_j$ de manera que $W_{j+1} \perp V_{j+1}$. Això implica:

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \tag{1.16}$$

A més obtenim que els W_j's són ortogonals entre si. Fent servir (1.13), (1.14) i (1.16) podem afirmar que:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \tag{1.17}$$

Utilitzant (1.12) veiem també que:

$$\forall j,k \in \mathbb{Z},\ f(t) \in W_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2^k}\right) \in W_{j+k} \tag{1.18}$$

Fent servir (1.15) podem veure que existeix $\psi(t)$ tal que:

$$\{\psi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ és una base ortonormal de } W_0 \tag{1.19}$$

Aquesta ψ es pot calcular explícitament a partir de ϕ. Ajuntem (1.17), (1.18) i (1.19) per veure que el conjunt:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j} \right) \right\}_{j,n\in\mathbb{Z}}$$

és una base ortonormal per a $L^2(\mathbb{R})$.

L'estructura formada pels W_j's i ψ l'anomenarem anàlisi multirresolució. És pot comprovar que ψ és una ondeta admissible. Hi han molts exemples d'ondetes provinents d'anàlisis multirresolució. Són una eina molt útil, sobre tot en el camp del tractament del senyal, i existeix una extensa literatura que els estudia. Els detalls d'aquesta construcció fent servir la mateixa notació els podem trobar a [Mal98].

Les bases que ens donen els Anàlisis Multirresolució és corresponen amb les traslladades afins de l'ondeta ψ per la xarxa regular:

$$\Lambda = \{2^j n + i2^j\}_{j,n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

Hem de comentar que les ondetes que construïm a traves dels anàlisis multiressolució no estan normalitzades de manera que $c_\psi = 1$ i no tenim cap contradicció amb el teorema 1.23.

1.6 Espais de Fase.

Les eines clàssiques de l'anàlisi harmònica només són útils per estudiar els conjunts regulars, ja sigui en el cas de translacions o en les transformades de ondetes i Gabor. Per estudiar la resta de casos haurem d'introduir nous conceptes que ens permetin utilitzar altres eines, com són l'anàlisi complexa o la teoria d'espais de Hilbert amb nucli reproductor. Els espais de fase són conjunts de funcions que seran de gran importància el llarg de tot el treball. De manera informal, aquests espais estan formats, fixada una funció analitzant, per les transformades contínues de totes les funcions.

1.6.1 Traslladades.

El nostre objectiu és definir un espai de funcions que estigui format per les transformades contínues de totes les funcions. Sota aquesta idea tan poc precisa el que busquem és un conjunt de funcions que ens permeti transformar la propisició 1.1 en resultats sobre conjunts d'unicitat i de zeros d'aquests espais.

Pensem que tenim un (candidat a) generador fixat $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$. Volem intentar conèixer per a quins conjunts discrets Λ el sistema $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$. Per dualitat això serà equivalent a mirar-se el producte escalar de les traslladades de φ amb funcions de l'espai dual $L^{p'}(\mathbb{R})$. La desigualtat de Hölder ens diu que per a tot x podem definir la següent funció:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\varphi(t-x)}\,dt$$

quan $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$. A més està acotada i és contínua. D'aquesta manera podem pensar que Tf és la transformada contínua de f per la funció analitzant φ. Ens hem de fixar que definim les transformades contínues de les funcions de l'espai dual del que volem generar. Això jaés consistent amb el que hem fet a l'hora de definir les transformades contínues de Gabor i ondetes, ja que $L^2(\mathbb{R})$ és un espai de Hilbert i el seu dual és ell mateix.

Definició. Donada una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$ definim el seu **espai de fase** $H_\varphi = H$ com:

$$H_\varphi = \left\{ F : \exists f \in L^{p'}(\mathbb{R}) \text{ amb } F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\varphi(t-x)}\,dt = \langle f(t), \varphi(t-x)\rangle \right\}$$

on p' és l'exponent dual de p.

Aquests espais ens seran molt útils per estudiar el nostre problema. Hi ha una relació molt directa entre les propietats de generació de $T(\varphi, \Lambda)$ i els valors que pot prendre una funció $F \in H$ en els punts de Λ. Ens calen un parell de definicions per formalitzar aquestes idees.

Definició. Donat un espai vectorial de funcions contínues H direm que un conjunt discret Λ és un **conjunt d'unicitat** per a H si els valors de qualsevol $F \in H$ en Λ determinen completament F.

Això és equivalent a que $F(\lambda) = 0$ per a tota $\lambda \in \Lambda$ impliqui F idènticament 0.

Definició. Donat un espai vectorial de funcions contínues H direm que un conjunt discret Λ és un **conjunt de zeros** per a H si existeix alguna funció $F \in H$ tal que $F(\lambda) = 0$ per a tota $\lambda \in \Lambda$ i $F(x) \neq 0$ si $x \notin \lambda$. És a dir, F s'anul.la en Λ i en lloc més.

Els següents resultats, encara que senzills, ens seran de gran utilitat, i posen de manifes la gran importància que tenen els espais de fase a l'hora d'estudiar els generadors per translacions.

Proposició 1.25. *Sigui H l'espai de fase per traslladades d'una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$. $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ si i només si Λ és un conjunt d'unicitat per a H.*

Demostració. Això és trivial si observem que la equivalència del final de la definició és la condició de dualitat 1.1. □

Proposició 1.26. *Sigui H l'espai de fase per traslladades d'una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$. $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ si i només si Λ no està inclós en cap conjunt de zeros de H.*

Demostració. Si Λ pertany a un conjunt de zeros existeix $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$ tal que $\langle f, \varphi_\lambda \rangle = 0$ per a tot $\lambda \in \Lambda$ i $f \neq 0$ (Tf es pot anul.lar en més punts). La condició de dualitat 1.1 ens diu que en aquest cas $T(\varphi, \Lambda)$ no pot generar $L^p(\mathbb{R})$. Aquesta condició també ens diu que si $T(\varphi, \Lambda)$ no genera $L^p(\mathbb{R})$, Λ pertany a un conjunt de zeros de H. □

Aquests dos resultats, encara que els hem provat de manera diferent, són equivalents. Si podem conèixer els conjunts d'unicitat o de zeros de l'espai de fase haurem resol el problema per a una φ fixada. Això no serà possible normalment. A més cal comentar que si Λ està en inclós en un conjunt de zeros, aleshores $T(\varphi, \Lambda)$ no pot generar. Però això no vol dir que Λ és un conjunt de zeros. Això serà un entrebanc més en el nostre estudi.

El primer pas per caracteritzar aquests conjunts és descriure els espais de fase, o més que descriure'ls, reconèixer-los. Això no serà possible en general. Però fins i tot en els millors casos encara no haurem acabat la feina, ja que caldrà saber després quins són els seus conjunts d'unicitat (o de zeros). Caracteritzacions d'aquests no seran senzilles gairebé mai. Els casos en que podrem afrontar aquest problema seran aquells que el seu espai de fase tingui molt bones propietats. Per exemple, si aquest espai està format per funcions analítiques (o fins i tot és un espai conegut) podrem intentar-ho, però això no és cap garantia d'exit. Veurem en els propers capítols que tant amb la funció de Poisson com amb la gaussiana ens apareixen espais de fase de funcions analítiques, i que en el primer cas caracteritzem els conjunts d'unicitat i en el segon tan sols podem donar resultats parcials.

Quan sigui difícil descriure l'espai de fase sempre tindrem l'opció d'incloure'l dins d'algun espai més tractable. O també podrem veure que conté algun conjunt de funcions que coneixem bé. Aquesta manera de treballar no ens podrà resoldre el problema completament, però ens ajudarà a donar resultats parcials. És a dir, sovint farem servir els següents resultats.

Proposició 1.27. *Sigui H l'espai de fase per traslladades d'una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$. Suposem que existeix un espai (conjunt) de funcions E tal que $H \subseteq E$. Si Λ és un conjunt d'unicitat per a E, aleshores $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$.*

Demostració. Si Λ és d'unicitat per a E, els valors en Λ determinen totes les funcions de E, i en particular totes les de H. $\square$

Proposició 1.28. *Sigui H l'espai de fase per traslladades d'una funció $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$. Suposem que existeix un espai (conjunt) de funcions E tal que $E \subseteq H$. Si Λ està contingut en un conjunt de zeros per a E, aleshores $T(\varphi, \Lambda)$ no genera $L^p(\mathbb{R})$.*

Demostració. Com que Λ està en un conjunt de zeros per a E, existeix $F \in E$ tal que $F(\lambda) = 0$ per a tot $\lambda \in \Lambda$. Aquesta F també pertany a H, i per tant Λ també està en un conjunt de zeros per a H. $\square$

1.6.2 Gabor.

En aquest cas, com que estem en un espai de Hilbert, serà més senzill definir l'espai de fase.

Definició. Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$. Definim l'**espai de fase** de l'àtom de Gabor g, H_g (o H) com:

$$H_g = \left\{F(z) \in L^2(\mathbb{C}) : \exists f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ amb } F(z) = Gf(z) = \langle f, g_z \rangle\right\}$$

Aquest espai té bones propietats. El teorema 1.14 ens diu que totes les seves funcions són de quadrat integrable a $\mathbb{C}$. A més és subespai de Hilbert i totes les seves funcions són contínues. Concretament és un espai de Hilbert amb nucli reproductor.

Teorema 1.29. *L'espai de fase H_g d'un àtom de Gabor $g \in L^2(\mathbb{R})$ és un subespai de Hilbert de $L^2(\mathbb{C})$ que està caracteritzat pel següent nucli reproductor:*

$$k_g(z, z_0) = k(z, z_0) = k_{z_0}(z) = \langle g_{z_0}, g_z \rangle$$

És a dir, $F \in H_g$ si i només si:

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{C}} F(z)\overline{k(z, z_0)}\, dx\, dy \tag{1.20}$$

La transformada de Gabor respecte a g és un isomorfisme de $L^2(\mathbb{R})$ en H_g.

Demostració. Introduïm la fórmula de reconstrucció en la definició de la transformada:

$$Gf(z_0) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{C}} Gf(z) g_z(t)\, dx\, dy \right) \overline{g_{z_0}(t)}\, dt$$

Intercanviant les integrals ens queda:

$$Gf(z_0) = \int_{\mathbb{C}} Gf(z) \left(\int_{\mathbb{R}} g_z(t)\overline{g_{z_0}(t)}\, dt \right) dx\, dy$$

Per tant k reprodueix totes les funcions de l'espai. Com que pertany a aquest espai ja podem afirmar que és el seu nucli reproductor.

L'isomorfisme es dedueix del teorema 1.14, ja que H_g hereta la norma de $L^2(\mathbb{C})$ i $\|f\| = \|Gf\|$. $\square$

Observació. La fórmula de reproducció (1.20) la podem pensar com una convolució. L'argument és el següent, si prenem la definició de k tenim que:

$$k(z, z_0) = \overline{\langle g_z, g_{z_0}\rangle} = \overline{e^{2\pi i x(y-y_0)}\langle g, g_{z_0-z}\rangle} = \overline{e^{2\pi i x(y-y_0)}k(z_0 - z)}$$

on hem definit $k(z) = \langle g, g_z\rangle = k(0, z)$. Si introduïm això a la fórmula de reproducció (1.20), aquesta pren la forma:

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{C}} F(z)e^{2\pi i x(y-y_0)}k(z_0 - z)\, dx\, dy$$

que és practicament una convolució, tret del factor exponencial, que té mòdul 1. Aquesta classe de convolucions s'anomenen convolucions cargolades (*twisted convolution* en anglès). Escriure la fórmula de reconstrucció d'aquesta manera ens serà molt més pràctic.

Hem de tenir en compte que estem fent servir k tant per designar el nucli reproductor pensat en dues variables com per el nucli de convolució, que només depèn d'una variable. S'ha d'estar una mica atent per evitar errors, encara que normalment no hi haurà confusió.

Com que l'espai en que treballarem està format per funcions contínues i té nucli reproductor, podem mostrejar les funcions en qualsevol punt. Donat un conjunt de punts de $\mathbb{C}$ podem considerar, per a cada $F \in H_g$, la successió de valors que pren F en aquest conjunt.

Definició. Donat un conjunt discret $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ direm que Λ és un **conjunt de mostreig** per a H_g si existeixen constants $A, B > 0$ tals que:

$$A\|F\|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F(\lambda_n)|^2 \leqslant B\|F\|^2 \quad \forall F \in H_g$$

Aquests conjunts ens interessen molt ja que es corresponen amb els marcs:

Proposició 1.30. *Sigui $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un conjunt discret i $g \in L^2(\mathbb{R})$ un àtom de Gabor. $G(g, \Lambda)$ és un marc de $L^2(\mathbb{R})$ si i només si Λ és un conjunt de mostreig per a H_g.*

Demostració. Aquest fet és clar observant que $Gf(z) = \langle f, g_z\rangle$ i que $\|Gf\| = \|f\|$. Com que tenim correspondència bijectiva entre H_g i $L^2(\mathbb{R})$ a traves de la transformada de Gabor, podem escriure:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |Gf(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle f, g_\lambda\rangle|^2$$

per a tota $f \in L^2(\mathbb{R})$ o per a tota $Gf \in H_g$. Per tant la condició de marc i la de mostreig són equivalents. $\square$

Amb aquest resultat, descriure els conjunts de mostreig de H_g és equivalent a descriure els conjunts Λ per als quals $G(g,\Lambda)$ és un marc. I si podem demostrar que per a un cert H_g hi han conjunts de mostreig, aleshores existeixen conjunts Λ per als quals $G(g,\Lambda)$ és un marc.

Relacionats amb els conjunts de mostreig tenim el que podríem anomenar el concepte dual, que són els conjunts d'interpolació:

Definició. Sigui $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ un conjunt discret. Direm que Λ és un **conjunt d'interpolació** per a H_g si per a tota successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix una funció $F \in H_g$ tal que:

$$F(\lambda_n) = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Diem que aquests dos conceptes són duals ja que si ens mirem l'operador de mostreig a H_g per a un conjunt $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} M : H_g &\longrightarrow l^2 \\ F &\longmapsto M(F) = \{F(\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Aquest operador és injectiu si Λ és de mostreig, i exhaustiu si és d'interpolació. Aquests operadors es corresponen amb els operadors de síntesi en $L^2(\mathbb{R})$ pels conjunts de funcions $G(g,\Lambda)$. Amb aquesta dualitat és fàcil veure que les bases de Riesz es corresponen amb els conjunts que són de mostreig i interpolació a l'hora.

Com que tenim isomorfisme entre $L^2(\mathbb{R})$ i H_g també tenim la següent equivalència, que és evident a partir de les definicions:

Proposició 1.31. *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ i $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un conjunt discret. $G(g,\Lambda)$ és un marc (o una base de Riesz) de $L^2(\mathbb{R})$ si i només si $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ és un marc (o una base de Riesz) de H_g.*

En vista d'aquests resultats, queda clar que conèixer bé l'espai de fase d'un àtom de Gabor ens serà molt útil per provar l'existència i descriure els conjunts que ens poden donar lloc a un marc o una base de Riesz. Ara volem trobar àtoms que tinguin un espai de fase amb bones propietats. En general aquests espais de fase ja són millors que un espai de Hilbert qualsevol. Només ens trobem amb funcions contínues i a més vénen caracteritzats per un nucli reproductor, que ens dóna molta estructura. Informalment parlant, podem dir que tot el que li passi al nucli ho hereta l'espai sencer.

Tot i aquestes bones propietats, no podrem millorar els resultats ja coneguts per a àtoms de Gabor qualssevol. El que farem és demanar al seu nucli reproductor (que és equivalent a posar condicions sobre g) que tingui bones propietats d'integració i de discretització.

Definició. Definim l'**àlgebra de Feichtinger** com el conjunt de funcions $g \in L^2(\mathbb{R})$ tals que:

$$k(z) = Gg(z) = \langle g, g_z \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i t y} \overline{g(t-x)}\, dt \in L^1(\mathbb{C})$$

Designarem aquest conjunt com $\mathcal{A}$.

Aquestes són les funcions que farem servir per analitzar, ja que ens donaran lloc a espais de fase amb les propietats desitjades. Aquest conjunt va ser introduït per Feichtinger i Gröchenig dintre de la teoria de representacions estudiada en [FeG89], [FeG89-2] i [Gro91]. Entre les propietats més interessants d'aquest conjunt podem enunciar que $\langle f, g_z \rangle \in L^1(\mathbb{C})$ si i només si $f, g \in \mathcal{A}$. Aquest fet ens dóna una manera senzilla de reconèixer l'àlgebra si coneixem alguna de les seves funcions.

Un exemple trivial de funció que pertany a l'àlgebra de Feichtinger és la funció gaussiana:

$$\phi(t) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi t^2}$$

Aquesta funció jugarà un paper molt important en aquest treball. L'avantatge d'aquesta funció és que podem calcular explícitament el nucli reproductor del seu espai de fase, que és $k(z)e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{-\pi i x y}$. També podrem descriure molt bé l'espai de fase. Ens apareixerà l'espai de Fock de funcions enteres, on podrem aplicar les téciques de l'anàlisi complexa. De fet en aquest espai particular ja s'havien descrit els conjunts de mostreig i interpolació, i per tant ja està resolt el problema que nosltres ens plantejem.

Per discretizar les fòrmules de reproducció i reconstrucció el que ens cal és poder controlar els valors puntuals a traves de valors continus de les funcions. Per fer això hem de definir el que anomenarem la funció maximal local, que ens dóna un control més gran de la funció:

Definició. Donada una funció contínua F definida en $\mathbb{C}$ definim la seva **maximal local** com:

$$MF(z) = \sup_{w \in B(z,1)} |F(w)|$$

on $B(z, 1)$ és la bola de centre z i radi 1 en $\mathbb{C}$ fent servir la distància euclidiana.

Aquesta funció amplifica els punts excepcionals de la funció F. Informalment parlant, si F és gran en un punt MF és gran en un conjunt de mesura positiva.

Els espais per els que podrem discretitzar les fòrmules de reproducció són aquells per als quals la funció maximal del nucli reproductor és integrable. Sorprenentment això passa si $g \in \mathcal{A}$.

Proposició 1.32. *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ un àtom de Gabor i k el nucli reproductor del seu espai de fase. Si $g \in \mathcal{A}$ aleshores Mk és integrable en $\mathbb{C}$. És a dir, Mk és integrable si k ho és.*

Aquest resultat confirma que el conjunt $\mathcal{A}$ és l'adient per a treballar.

La situació ideal ens la trobem si podem descriure perfectament l'espai de fase d'alguna manera que ens permeti coneixer els seus conjunts de mostreig. Aquests conjunts han estat molt estudiats en els espais de funcions harmòniques o holomorfes. En alguns d'ells s'han donat carcateritzacions completes dels seus conjunts d'interpolació i mostreig. Però com veurem més endavant, nosaltres només ens trobarem en aquest cas quan l'àtom de Gabor és la gaussiana. En aquest cas l'espai de fase es correspon de manera directa amb l'espai de Fock i comparteixen els conjunts de mostreig i interpolació.

1.6.3 Ondetes.

Pel que fa a ondetes ens trobem amb una situació molt semblant al que hem comentat aquí per a Gabor. Hem de tenir en compte que ara els espais de fase estaran definits a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ en lloc de $\mathbb{C}$.

Definició. Sigui $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una ondeta admissible. Definim l'**espai de fase** de l'ondeta ψ, H_ψ (o H) com:

$$H_\psi = \left\{F(z) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) : \exists f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ amb } F(z) = Wf(z) = \langle f, \psi_z \rangle\right\}$$

Igual que en el cas de Gabor, aquest espai també està format per funcions contínues, però ara de $L^2\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \frac{dx\,dy}{y^2}\right)$. També és un espai amb nucli reproductor:

Teorema 1.33. *L'espai de fase H_ψ d'una ondeta admissible $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ és un subespai de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ que ve caracteritzat pel següent nucli reproductor:*

$$k_\psi(z, z_0) = k(z, z_0) = k_{z_0}(z) = \langle \psi_{z_0}, \psi_z \rangle$$

És a dir, $F \in H_\psi$ si i només si:

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} F(z)\overline{k(z, z_0)}\frac{dx\,dy}{y^2} \tag{1.21}$$

i la transformada en ondetes respecte a ψ és un isomorfisme de $L^2(\mathbb{R})$ en H_ψ.

La demostració és idèntica a la del teorema 1.29 i no la repetirem.

La primera diferència significativa entre les dues transformades és que en aquest cas (1.21) si que és una convolució, però respecte al grup hiperbòlic (o afí). Si definim $z_0 \cdot z = y_0 z + x_0$ (on la juxtaposició és el producte habitual de $\mathbb{C}$) podem dotar d'una estructura de grup a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. En aquest grup l'element neutre serà $i = (0,1)$ i $z_0^{-1} \cdot z = \frac{z - z_0}{y_0}$. Aquest grup no és commutatiu. La seva mesura invariant (per translacions respecte al grup) és diferent per la dreta que per l'esquerra. Nosaltres treballarem només amb translacions per l'esquerra. En aquest cas aquesta la mesura invariant serà $dm(z) = \frac{dx\,dy}{y^2}$. D'aquesta forma podem escriure:

$$k(z, z_0) = \langle \psi_{z_0}, \psi_z \rangle = \langle \psi_{z^{-1} \cdot z_0}, \psi \rangle = \overline{k(z^{-1} \cdot z_0)}$$

on hem definit $k(z) = \langle \psi, \psi_z \rangle = k(0, z)$. Igual que en el cas de Gabor, introduïm això a la fórmula de reproducció (1.21):

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} F(z) k(z^{-1} \cdot z_0) \frac{dx\,dy}{y^2}$$

on ens trobem una fórmula de convolució no commutativa ja que el grup no ho és, però que tindrà la majoria de propietats que tenen les convolucions habituals.

A l'hora de donar condicions d'integrabilitat o definir la funció maximal també tindrà importància que l'estructura de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ és diferent de la de $\mathbb{C}$, però fins llavors tot és idèntic.

Definició. Donat un conjunt discret $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ direm que Λ és un **conjunt de mostreig** per a H_ψ si existeixen constants $A, B > 0$ tals que:

$$A\|F\|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} |F(\lambda_n)|^2 \leqslant B\|F\|^2 \quad \forall F \in H_\psi$$

Proposició 1.34. *Sigui $\Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ un conjunt discret i $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una ondeta admissible. $W(g, \Lambda)$ és un marc de $L^2(\mathbb{R})$ si i només si Λ és un conjunt de mostreig per a H_ψ.*

La demostració és idèntica a la del cas de Gabor. La definició de conjunts d'interpolació i la simetria entre les bases generades per ψ i les generades pel nucli reproductor també són idèntiques.

Definició. Sigui $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ un conjunt discret. Direm que Λ és un **conjunt d'interpolació** per a H_ψ si per a tota successió $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ existeix una funció $F \in H_\psi$ tal que:

$$F(\lambda_n) = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposició 1.35. *Sigui $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una ondeta admissible i $\Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ un conjunt discret. $W(g,\Lambda)$ és un marc (o una base de Riesz) de $L^2(\mathbb{R})$ si i només si $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ és un marc (o una base de Riesz) de H_ψ.*

A l'hora de demanar condicions d'integrabilitat del nucli, en el cas d'ondetes tenim una noció equivalent a l'àlgebra de Feichtinger considerant aquelles ondetes per les quals el seu nucli és una funció integrable:

Definició. Definim les **ondetes amb nucli integrable** com aquelles ondetes admissibles $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tals que:

$$k(z) = W_\psi(z) = \langle \psi, \psi_z \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) y^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\big(\frac{t-x}{y}\big)}\, dt \in L^1\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \frac{dx\, dy}{y^2}\big)$$

Designarem el conjunt de totes les ondetes amb nucli integrable com $\mathcal{B}$.

Aquest conjunt conserva algunes de les propietats de l'àlgebra de Feichtinger, però no totes. Per exemple, si $\langle f, \psi_z \rangle \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ per a una $\psi \in \mathcal{B}$, aleshores $\langle f, \phi_z \rangle \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ per a qualsevol altra $\phi \in \mathcal{B}$. Però en canvi no podem assegurar que $\langle \phi, \psi_z \rangle \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Això passa perqué en el cas de Gabor $Gf(z)$ és integrable si i només si $Gf(-z)$ ho és. En canvi en ondetes $Wf(z)$ pot ser integrable i $Wf(z^{-1})$ no. Aquesta és una de les diferències de l'estructura del grup.

Pel que fa a discretitzacions, també ens caldrà definir la funció maximal local. Cal tenir en compte que a l'hora de definir la bola unitat haurem de fer servir la distància hiperbòlica.

Definició. Donada una funció contínua F definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ definim la seva **maximal local** com:

$$MF(z) = \sup_{w \in B(z,1)} |F(w)|$$

on $B(z,1)$ és la bola de centre z i radi 1 en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ fent servir la distància hiperbòlica.

El conjunt d'ondetes tals que la maximal local del seu nucli és integrable difereix de $\mathcal{B}$, i l'anomenarem $\mathcal{MB}$.

Igual que en el cas de Gabor, voldrem descriure tan bé com puguem l'espai de fase d'una ondeta, per poder descriure els seus conjunts de mostreig i d'interpolació. Casualment ens trobem un conjunt d'ondetes admissibles per a les quals l'espai de fase es correspon amb un espai de funcions holòmorfes. Les funcions són les ondetes tipus Poisson:

$$\psi(t) = \frac{1}{c_\alpha}(t+i)^{-\frac{\alpha+1}{2}}$$

i el seus espais de fase es corresponen amb els espais de Bergman del semiplà. Aquestes ondetes no són reals, però això només és una qüestió tècnica. Sempre podem prendre la seva part real o la seva part imaginària i donar els mateixos resultats, ja que la part reals d'una funció holomorfa determina directament la seva part imaginària.

Sota certes condicions també tindrem un resultat d'unicitat, encara que no serà tan bo com en el cas de Gabor.

Part I

Generadors per translacions.

Capítol 2

Generadors per a $L^1(\mathbb{R})$.

Hem comentat als preliminars que a l'hora d'estudiar els sistemes de generadors de la forma $T(\varphi, \Lambda)$ sorgeixen diferents questions. Les dues primeres que ens podem plantejar són quins conjunts Λ podrem fer servir, i quines funcions φ ens permetran generar. Aquestes questions es poden tranctar per separat, però estan molt relacionades.

La caracterització dels conjunts Λ que admeten generadors per a $L^1(\mathbb{R})$ la podem trobar en [BOU06] i [Bru06]. En aquest parell d'articles es descriuen aquests conjunts a traves de les densitats de Beurling-Malliavan, del radi espectral de Λ o com a conjunts d'unicitat de certes classes de funcions. En la primera secció donarem el resultat concret.

Pel que respecta a la caracterització dels generadors no tenim tan bones noticies. Aquest problema ha estat menys estudiat i no es coneix cap descripcció completa. El teorema de Wiener ja ens dóna una condició necessària que de moment és l'única que es coneix. Els exemples i resultats que es coneixen de moment ens porten a plantejar la següent conjectura:

Conjectura. Sigui φ un generador de $L^1(\mathbb{R})$. Aleshores $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per a tot $\xi \in \mathbb{R}$ i a més:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|\widehat{\varphi}(\xi)|}{1+\xi^2} = -\infty$$

Aquesta darrera integral és coneix com la integral logarítmica de $\widehat{\varphi}$. Apareix en diversos camps de l'analisi matemàtic. Per exemple, la monografia [Koo92] es dedica integrament a estudiar aquesta integral. Hi ha diverses raons que ens fan pensar que aquesta conjectura és certa. Per una part tenim dos cass especials (generadors φ amb transformada de Fourier decreixent o conjunts Λ continguts en una semirecta) en que ja se sap que és necessària la divergencia de la integral. Dediquem una secció a explicar breument aquests casos.

A més, tots els exemples que es coneixen de generadors per a $L^1(\mathbb{R})$ compleixen aquesta condició. De fet formen part d'una classe especial de generadors, que anomenarem quasi-analítics. Una altra secció d'aquest capítol es dedica a estudiar aquests generadors. Per aquest conjunt serem capaços de donar condicions suficients molt properes a les necessàries donades en [Bru06] (on ja van ser introduïts) a l'hora de construir-los.

També estudiarem una altra classe especial de generadors, anomenats analítics, i que són un subconjunt dels anteriors. Aquests són relevants perqué és senzill construir-los i tenen espais de fase amb molt bones propietats.

Un altre problema interessant és intentar descriure, si fixem φ, quins conjunts Λ fan que $T(\varphi, \Lambda)$ sigui un sistema de generadors. Enunciarem algunes condicions suficients quan el generador amb el que treballem és quasi-analític o analític.

Els dos propers capítols s'ocupen integrament a estudiar aquest problema en casos molt especials. En el capítol 3 expliquem la caracterització dels conjunts Λ que donen lloc a un sistema de generadors per a la funció de Poisson que s'obté en [BrM07]. Generalitzarem després aquesta descripció a altres funcions properes a la de Poisson.

El darrer capítol d'aquesta part estudia el mateix problema, però aquest cop per a la funció gaussiana. Per aquesta funció ja es coneixien alguns resultats parcials. Afinarem més les condicions tant necessàries com suficients perquè un conjunt doni lloc a un sistema de generadors amb la gaussiana, però no arrivarem a cap descripcció completa.

2.1 Caracterització dels conjunts de generadors.

Ja hem comentat que una de les primeres preguntes que ens podem plantejar és quan, donat un conjunt discret $\Lambda \subset \mathbb{R}$, existeix un Λ-generador de $L^1(\mathbb{R})$. Aquesta questió està resolta en [Bru06] i [BOU06]. El teorema que ens donen és el següent:

Teorema 2.1 (Bruna, Olevskii, Ulanovskii)**.** *Per a un conjunt discret $\Lambda \subset \mathbb{R}$, les següents condicions són equivalents:*

a) Existeix un Λ-generador φ per $L^1(\mathbb{R})$.

b) El radi espectral de Λ és $+\infty$.

c) Λ és un conjunt d'unicitat per a una classe quasi-analítica $C\{M_n\}$ amb $M_n^{1/n} \to \infty$.

d) Λ és un conjunt d'unicitat per a una classe generalitzada de Brenstein.

Observació. Les classes generalitzades de Brenstein [BOU06] i les quasi-analítiques són molt properes. En els dos casos, si Λ és un conjunt d'unicitat per alguna d'aquestes classes aleshores podem aconseguir un Λ-generador dintre de la classe corresponent.

El radi espectral de Λ es defineix com el següent suprem:

$$\sup\big\{T > 0 : \{e^{-i\lambda\xi}\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ genera } L^2(0,T)\big\}$$

És a dir, mesura la capacitat de generació que tenen les exponencials amb parametres a Λ. Per exemple, el radi espectral de $\mathbb{Z}$ és 2π. Aquest coincideix amb la densitat de Beurling-Mallavin. D'aquesta forma tenim una fórmula més geometrica de calcular el radi espectral. No entrarem en detalls sobre aquest tema.

Nosaltres estarem interessats en descriure les funcions que poden fer el paper de generadors de $L^1(\mathbb{R})$. Aquest problema és molt complicat de resoldre directament. En aquesta secció ens limitarem a estudiar un tipus especial de generadors. Els conjunts que admeten generadors estan descrits en 2.1 en termes de conjunts d'unicitat de certes classes de funcions. El que podem fer llavors és buscar condicions sobre φ perquè l'espai de fase d'aquesta funció estigui dins d'aquestes classes. Després podrem aplicar la proposició 1.27 per provar que existeixen conjunts discrets Λ tals que $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$. Ens centrarem en les classes quasi-analítiques. Fins ara, tots els generadors de $L^1(\mathbb{R})$ que es coneixen estan continguts en aquestes classes. Anomenarem a aquests generadors quasi-analítics.

La primera condició perquè una funció φ sigui un generador de $L^1(\mathbb{R})$ ens la dóna el teorema de Wiener 1.2. Aquest teorema ens diu en el cas $L^1(\mathbb{R})$ que la funció φ ha de tenir transformada de Fourier diferent de zero en tot punt. Aquesta condicció és necessària i independent de quina classe de generador busquem, per tant l'haurem de tenir sempre present.

La resta de condicions que donarem seran condicions de decreixement de la transformada de Fourier. Ens trobarem que com més decreixement tingui la transformada, més conjunts Λ admetrà per poder generar $L^1(\mathbb{R})$. És important comentar que per molt que decreixi haurem de tenir sempre present que pot prendre el valor zero. Això ens diu, per exemple, que no podem pensar en generador amb transformada de Fourier amb suport compacte.

Les condicions de decreixement de la transformada es corresponen de manera informal amb condicions de regularitat de la funció φ. Això fa que els generadors amb que treballarem tinguin molt bones condicions de derivació. A mode d'exemple d'aquest fet comentarem que els generadors quasi-analítics sempre són C^∞.

Quan parlarem de condicions necessàries aquí és important comentar que aquestes no seran condicions necessàries perquè una funció φ sigui un Λ-generador, sinó que seran necessàries perquè sigui un generador d'un cert tipus (concretament quasi-analític). De moment no s'han trobat condicions necessàries (tret del teorema de Wiener) perquè una funció sigui un generador de $L^1(\mathbb{R})$ en general, i com hem comentat anteriorment, tots els que es coneixen són del mateix tipus que descriurem.

2.2 Integral logarítmica divergent.

El teorema 2.5 ens dirà que si φ és un generador quasi-analític, aleshores:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|\widehat{\varphi}(\xi)|}{1+\xi^2}$$

De fent ens dirà més. No tan sols aquesta integral és divergent, sinó que existeix una majorant logarítmicament convexa amb la mateixa propietat. Aquesta condició és necessària perquè φ sigui un generador quasi-anaític. Ens podem plantejar si també és necessària en general. Aquest és ara per ara un problema obert, però existeixen dos casos en que és certa. Això ens fa pensar que la conjectura serà certa en general. A mé un dels casos posa restriccions sobre la funció i l'altre sobre el conjunt.

Anem a comentar-los ara per separat. El primer cas correspon a generadors φ tals que $\widehat{\varphi}$ és parella i decreixent en el semieix positiu. Aquest cas ja es comenta en [Bru06], i aquí reproduïm l'argumentació sense canvis importants. La idea és la següent, suposem que per a qualsevol ε existeix una funció $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f * \check{\varphi}$ està soportada en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Si això passa φ no pot ser un generador, ja que Λ hauria de ser un conjunt dens a tot arreu i no podria ser discret. Ara caldrà buscar condicions necessàries perquè això no passi. El criteri ens el dóona la teoria de multiplicadors de *Beurling-Malliavin.* Necessitem primer una definició.

Definició. Un pes $\omega(\xi) \geqslant 1$ direm que **admet multiplicadors** si existeix una funció entera G_ε de tipus exponencial ε arbitrari tal que $\omega(\xi)G_\varepsilon(\xi)$ és acotada o pertany a $L^p(\mathbb{R})$.

Proposició 2.2 (Bruna-Ulanovski)**.** *Si $|\widehat{\varphi}|^{-1}$ admet multiplicadors, aleshores φ no és un generador.*

Demostració. Per a $\varepsilon > 0$, sigui G_ε la funció que ens dóna la definició. Aleshores $G_\varepsilon(\xi) = h(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ amb h acotada. Aleshores:

$$G_\varepsilon(\xi)\left(\frac{\sin\varepsilon\xi}{\varepsilon\xi}\right)^2 = h(\xi)\left(\frac{\sin\varepsilon\xi}{\varepsilon\xi}\right)^2\widehat{\varphi}(\xi)$$

també està acotada. Com que $h(\xi)\left(\frac{\sin\varepsilon\xi}{\varepsilon\xi}\right)^2$ està a $L^1(\mathbb{R})$, la podem escriure com la transformada de Fourier d'una funció $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Això ens diu que $f * \check{\varphi}$ és la transformada de Fourier de $G_\varepsilon(\xi)\left(\frac{\sin\varepsilon\xi}{\varepsilon\xi}\right)^2$, que té tipus exponencial 2ε. Això fa que $f * \check{\varphi}$ tingui suport en $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)$, que prova el teorema. $\square$

Una condició necessària perquè un pes admeti multilicadors és:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log\omega(\xi)}{1+\xi^2} < \infty$$

Això a nosaltres no ens ajuda, encara que ens fa creure que la conjectura és certa. Però resulta que si ω és creixent i parella aquesta condició és també suficient. Els detalls els podem trobar en [Koo92]. Per tant, si $|\widehat{\varphi}|$ és una funció decreixent en el semieix positiu, la divergècia de l'integral logarítmica és condició necessària perquè φ sigui un generador. No és difícil veure que no cal exigir que la transformada sigui parella.

L'altre cas correspon a conjunts Λ continguts a la semirecta positiva. Suposem que tenim una funció $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|\widehat{\varphi}(\xi)|}{1+\xi^2} < \infty$$

i $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ quasi per tot ξ. Aleshores existeix una funció θ de $H^2(\mathbb{R})$ (l'espai de Hardy del semipla restringit a la recta real) tal que $|\widehat{\varphi}| = |\theta|$. Pel teorema 1.5 $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ si i només si $T(\widehat{\theta},\lambda)$ també genera $L^2(\mathbb{R})$. Però $\widehat{\theta}(t) = 0$ per a tot $t < 0$, i per tant no podem generar tot $L^2(\mathbb{R})$ només amb translacions positives, ja que qualsevol combinació lineal s'anul.larà en els negatius.

Per a $L^1(\mathbb{R})$ hem de fer ser vir el teorema 1.4 i fer convolució amb $\widehat{P}$ (la transformada de la funció de Poisson), que té integral logaritmica finita.

Aquest és un cas particular de l'estudi dels subespais invariants per translacions de $H^p(\mathbb{R})$ i $H^p(\mathbb{D})$. Aquest problema ha estat estudiat per molta gent, i encara avui continua sent un camp d'investigació important. La monografia [Nik86] serveix com a excelent referencia sobre aquest problema.

2.3 Generadors quasi-analítics.

Definició. Una **classe quasi-analítica** $C\{M_n\}$ associada als nombres positius (M_n) consisteix en el conjunt de funcions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tals que:

$$\left|f^{n)}(x)\right| \leqslant C_f \beta_f^n M_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, x \in \mathbb{R}$$

i a més es compleix, per a tota $f \in C\{M_n\}$, que $f^{n)}(0) = 0\,\forall n$ implica $f = 0$. Aquest és el cas si i només si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} = \infty$$

Podem assumir que els M_n són logarítmicament convexos. És a dir, $M_0 = 1$, $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$.

Observació. Prenent la normalització log-convexa tenim que la successió $M_n^{\frac{1}{n}}$ és creixent. Quan $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ és una successió acotada tenim les classes analítiques.

Quan $f^{n)}(0) = 0\,\forall n$ no implica $f = 0$ per a les funcions de la classe ens trobem amb les classes de *Denjoy-Carleman*.

Aquestes classes tenen típicament conjunts d'unicitat discrets. És per aquest fet que són interessants per a nosaltres. No hi ha, però, cap caracterització d'aquests conjunts per a una classe analítica general fixada. El teorema 3 de [Bru06] dóna una condició suficient que reproduïm a continuació.

Teorema 2.3 (Bruna). *Sigui $C\{M_n\}$ una classe quasi-analítica. Escrivim:*

$$\overline{M}[k] = \sum_{n=1}^{k} \frac{M_{n-1}}{M_n}$$

Sigui Λ un conjunt discret i $n_\Lambda(r) = |\Lambda \cap [-r, r]|$ la seva funció contadora. Si Λ compleix que:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{M}[n_\Lambda(r)]}{r} = \infty \tag{2.1}$$

aleshores Λ és un conjunt d'unicitat per a $C\{M_n\}$

A més, si $f \in C\{M_n\}$ compleix que $\|f^{n)}\|_\infty \leqslant C_f \beta_f^n M_n$. Aleshores:

$$\overline{M}[n_f(r)] \leqslant 2e\beta_f r$$

on $n_f(r)$ és la funció contadora dels zeros de f.

Demostració. La idea és reescalar el *lema de Bang* [Ban53]. Tal com es presenta en [NSV04] aquest lema ens diu que si $f \in C^\infty[-1, 1]$ compleix que $\|f^{n)}\|_\infty \leqslant M_n$, el cardinal del seu conjunt de zeros (contant multiplicitats) no pot superar el seu *nombre de Bang.* Aquest nombre és defineix com l'N més gran tal que:

$$\sum_{\log \|f\|_\infty^{-1} < n \leqslant N} \frac{M_{n-1}}{M_n} < 2e$$

Per a $f \in C\{M_n\}$, es compleix que $\|f^{n)}\|_\infty \leqslant C_f \beta_f^n M_n$. Si $n_f(r)$ és la funció contadora dels zeros de f, reescalant el lema de Bang tenim que:

$$\overline{M}[n_f(r)] \leqslant 2e\beta r$$

Això ja prova la segona part del teorema.

Per a la primera part només cal observar que si Λ compleix (2.1) no pot existir cap funció que s'anul.li en aquest conjunt i això demostra que és d'unicitat. $\square$

En [Hir50] també s'estudien els conjunts de zeros, però centrant-se en classes analítiques. La idea és generalitzar un resultat que diu que si f compleix:

$$|F^{n)}(x)| \leqslant C_F k^n n!$$

aleshores:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{2\log n_\Lambda(r)}{\pi t} \leqslant k$$

Les funcions que compleixen aquest tipus d'acotació tenen una extensió analítica a la banda $|\Im z| < \frac{1}{k}$. Aquestes seran la classe de funcions que ens apareixeran en la següent secció. Si ens mirem aquestes classes, 2.3 ja ens està donant una acotació similar, ja que per a $M_n = n!$ $\overline{M}[k] \sim \log k$, però s'ha de tenir molta cura amb les constants que poden apareixer. La ventatja de 2.3 radica en que és aplicable a classes quasi-analítiques generals.

La manera de veure la conexió entre aquestes classes i construir generadors és la següent. Comencem amb un conjunt discret Λ que admet generadors. El teorema 2.1 ens diu que Λ és d'unicitat per a una classe quasi-analítica $C\{M_n\}$. La manera d'obtenir el generdor és construir una funció $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi} \subset C\{M_n\}$$

on $\check{\varphi}(t) = \overline{\varphi(-t)}$. Suposem que això es compleix. Llavors l'espai de fase de φ està inclós en $C\{M_n\}$. Podem ara fer servir la proposició 1.27 o directament prenem una funció $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} h(t)\overline{\varphi(t-\lambda)}\,dt = 0, \quad \lambda \in \Lambda$$

La funció:

$$Th(x) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\overline{\varphi(t-x)}\,dt$$

pertany a $C\{M_n\}$. Com que Λ és d'unicitat per aquesta classe això implica que $Th = 0$. Com ja hem fet altres cops, apliquem el lema 1.3 per veure que $h = 0$.

Per dualitat aquest argument ens diu que φ és un Λ-generador.

Proposició 2.4. *Sigui $C\{M_n\}$ una classe quasi-analítica i $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. És equivalent*

$$L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi} \subset C\{M_n\} \tag{2.2}$$

a que

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi^{n)}(t)|\, dt \leqslant \beta^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

on $\varphi^{n)}$ és la derivada enèssima de φ.

Demostració. Comencem amb (2.3) implica (2.2). Per a $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ prenem

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\varphi(t-x)}\, dt$$

Per veure

$$\left|(Tf)^{n)}(x)\right| \leqslant C_f \beta^n M_n$$

només cal derivar sota l'integral i acotar per la f per la seva norma infinit.

Per veure l'altra implicació hem d'introduir una norma a $C\{M_n\}$ de la següent forma:

$$\|F\| = \sup_n \left(\frac{\sup|F|}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Si ara apliquem el teorema de la gràfica tancada veiem que:

$$\|\partial^n f * \check{\varphi}\|_\infty \leqslant A^n \|f\|_\infty M_n$$

Com que això és cert per a tota $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ i $\partial^n f * \check{\varphi} = f * (\partial^n \check{\varphi})$ ja tenim que φ ha de complir (2.3). □

Observació. Fixem-nos que si es compleix (2.3), per a qualsevol funció $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ tenim l'acotació:

$$|(Tf)^{n)}(x)| \leqslant \|f\|_\infty \beta^n M_n$$

Això vol dir que la mateixa β ens serveix per a totes les funcions de l'espai de fase, mentre que en la definició de classe quasi-analítica aquesta constant depenia de la funció. En particular veiem que no igualem la classe $C\{M_n\}$ i l'inclusió en (2.2) és estricta. Com ja hem comentat en el capítol anterior, això provoca que hi puguin haver conjunts d'unicitat de l'espai de fase de φ que no ho siguin de $C\{M_n\}$. De fet el teorema 2.3 ja ens dóna exemples d'aquest tipus.

En [Bru06] es construeix una funció φ complint (2.3) de la següent forma. Donada una classe quasi-anaítica $C\{M_n\}$ considerem la funció decreixent d'*Ostrowski*

$$0 < \Theta(\xi) = \inf_n \frac{M_n}{|\xi|^n} \leqslant 1$$

A aprtir d'aquesta definim

$$0 < \omega(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \Theta(s) e^{-s}\, ds$$

que compleix que $\omega(\xi), |\omega'(\xi)| \leqslant \Theta(\xi)$. El generador que estem buscant tindrà com a transformada de Fourier $\widehat{\varphi}(\xi) = \omega(\xi)e^{-\xi^2}$. Definida així φ és C^∞ ja que $\xi^n \widehat{\varphi}(\xi)$ és integrable per a tota n. A més $\widehat{\varphi^{n)}}(\xi) = (-2\pi i \xi)^n \widehat{\varphi}(\xi)$ compleix

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\varphi^{n)}}(\xi)\right| &\leqslant e^{-\xi^2}|2\pi\xi|^n \Theta(\xi) \leqslant (2\pi)^n M_n e^{-\xi^2} \\
\left|\widehat{\varphi^{n)}}'(\xi)\right| &\leqslant \big(n|2\pi\xi|^{n-1}\omega(\xi) + |2\pi\xi|^n \omega'(\xi) + |2\pi\xi|^{n+1}\omega(\xi)\big)e^{-\xi^2} \\
&\leqslant \big(n(2\pi)^{n-1}M_{n-1} + (2\pi)^n M_n\big)e^{-\xi^2} + (2\pi)^n M_n |\xi| e^{-\xi^2}
\end{aligned}$$

Això implica $\|\widehat{\varphi^{n)}}\|_1 \leqslant C(2\pi)^n M_n$ i $\|\widehat{\varphi^{n)}}\|_2 + \|\widehat{\varphi^{n)}}'\|_2 \leqslant C(2\pi)^n M_n$. Apliquem

$$\|\psi\|_1 \leqslant C\left(\|\widehat{\psi}\|_1 + \|(\widehat{\psi})'\|_2\right) \tag{2.4}$$

a $\psi = \varphi^{n)}$ i veiem que compleix (2.3).

Aquesta classe de generadors són els que volem estudiar, però en termes més generals.

Definició. Direm que φ és un **generador quasi-analític** si existeix una classe quasi-analítica $C\{M_n\}$ i un $\beta > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi^{n)}(t)|\, dt \leqslant \beta^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

o de manera equivalent:

$$L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi} \subset C\{M_n\}$$

Ja hem comentat que en [Bru06] es demostra que si Λ admet generadors per a $L^1(\mathbb{R})$, aleshores podem construir un Λ-generador quasi-analític. El que volem ara són condicions sobre φ de manera que aquest sigui un generador quasi-analític. La primera condició òbvia és que $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ pel teorema de Wiener 1.2. A part d'això es veu [Koo92][Bru06] que una condició necessària és la divergència de la integral logarítmica de la transformada de Fourier de φ:

$$\int_0^\infty \frac{\log|\widehat{\varphi}(\xi)|}{1+\xi^2} = -\infty$$

Aquesta és una condició de decreixement, ja que ens demana que el logaritme sigui gran i negatiu, que és equivalent a que la transformada de la funció sigui molt petita ($\widehat{\varphi}$ és contínua i està en $L^2(\mathbb{R})$). Però aquesta condició no és suficient, ja que podem trobar exemples de funcions f continues i en $L^1(\mathbb{R})$ tals que la integral logarítmica de $\widehat{f}$ és divergent però en canvi la funció no és C^∞. La nostra idea és arribar a una condició necessària una mica millor que aquesta, que ja s'obté en [Bru06] encara que no s'enuncia de manera explícita, i una condició suficient molt propera. L'enunciat concret és el següent:

Teorema 2.5. *Sigui $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Per a que φ sigui un generador quasi-analític és condició necessària que existeixi una funció $H(\xi) > 0$ amb $\frac{1}{H}$ logarítmicament convexa tal que:*

$$\int_0^\infty \frac{\log H(\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi = -\infty$$

de manera que:

$$0 < |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant H(|\xi|)$$

És condició suficient perquè φ sigui un generador quasi-analític que existeixi una funció $H(\xi)$ amb les anteriors propietats tal que:

$$\begin{aligned} 0 < |\widehat{\varphi}(\xi)| &\leqslant H(|\xi|) \\ |\widehat{\varphi}'(\xi)| &\leqslant H(|\xi|) \end{aligned}$$

Per provar aquest teorema el que farem és donar una sèrie de resultats que tenen interès per ells matéixos. Començarem seguint l'esquema de [HaJ94],que buscava condicions perquè una funció no tingués zeros d'ordre infinit.

Lema 2.6. *Donada una funció de $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ és condició suficient perquè $\varphi \in C^\infty$ amb derivades acotades que existeixi una funció creixent $\omega(\xi)$ amb límit infinit tal que:*

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant H(|\xi|)$$

amb H la funció definida com:

$$H(\xi) = e^{-p(\xi)} = e^{-A - \int_1^\xi \frac{\omega(u)}{u}\, du}$$

Aquesta condició també és necessària perquè $\varphi \in C^\infty$ amb $\varphi^{n)} \in L^1(\mathbb{R})$ per a tot n.

Observació. La funció H definida en el lema té la propietat que $\frac{1}{H}$ és una funció logarítmicament convexa. Com que ens interessen funcions estrictament positives amb límit zero, qualsevol funció logarítmicament convexa es pot escriure de manera anàloga a $\frac{1}{H}$.

Demostració. Si una funció φ és C^∞ amb derivades integrables la transformada de Fourier compleix que $|\xi^n \widehat{f}(\xi)|$ està acotat per a tot n. Com que les funcions en que estem interessats són sempre diferents de zero, podem prendre logaritmes per obtenir:

$$\log |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant K_n - n \log |\xi| \qquad \forall n$$

Si ara ens mirem la segona part d'aquesta desigualtat, podem definir $p(\xi) = \sup_n (n \log |\xi| - K_n)$, que serà una funció convexa de $\log \xi$ (e^p logaritmicament convexa). Aquesta funció es pot escriure com:

$$p(\xi) = A + \int_1^\xi \frac{\omega(u)}{u}\, du \tag{2.6}$$

on $\omega(u)$ serà una funció creixent amb límit infinit (estem pensant en $\xi > 0$). Per tant la condició necessària perque φ sigui C^∞ amb $\varphi^{n)} \in L^1(\mathbb{R})$ és que existeixi una funció $\omega(u)$ creixent cap a infinit de manera que:

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant e^{-p(\xi)}$$

amb p definida com a (2.6). Manca veure que aquesta condició és suficient perquè φ sigui C^∞. Observem que donat un n existeix c_n tal que $\omega(u) \geqslant n$ per a $u \geqslant c_n$, ja que ω creix cap a infinit. Això ens diu que si $\xi > c_n$:

$$\int_{c_n}^\xi \frac{\omega(u)}{u}\, du \geqslant n \int_{c_n}^\xi \frac{1}{u}\, du = n(\log \xi - \log c_n)$$

Tenint en compte això, si $\xi > c_n$ tenim que:

$$|\xi^n \varphi(\xi)| \leqslant \xi^n e^{-A - \int_1^\xi \frac{\omega(u)}{u}\, du} \leqslant e^{-A} e^{-\int_1^{c_n} \frac{\omega(u)}{u}\, du} c_n^n \leqslant e^{-A} c_n^n$$

Si $\xi < c_n$ (positiu), aleshores acotem directament:

$$|\xi^n \varphi(\xi)| \leqslant c_n^n e^{-A - \int_1^\xi \frac{\omega(u)}{u}\, du} \leqslant e^{-A} c_n^n$$

Unint les dues parts tenim l'acotació que buscàvem:

$$|\xi^n \widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant e^{-A} c_n^n$$

que ens diu que φ és C^∞ amb les derivades acotades. $\square$

Observació. Com que les acotacions en norma $L^1(\mathbb{R})$ ens donen acotacions en norma $L^\infty(\mathbb{R})$ de la transformada però no al inrevés, el resultat que hem donat no és simètric, i de fet no es pot millorar sense suposar alguna condició extra de la funció.

Nosaltres necessitem que les derivades estiguin a $L^1(\mathbb{R})$, i ara tan sols tenim l'existència de les derivades. Per obtenir l'acotació en $L^1(\mathbb{R})$ d'aquestes el que ens cal és una acotació del mateix tipus per a la derivada de $\widehat{\varphi}$ per tal d'utilitzar (2.4).

Lema 2.7. *Sigui $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ per a la qual existeix una funció H definida com a 2.6 tal que:*

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|, |\widehat{\varphi}'(\xi)| \leqslant H(|\xi|)$$

Aleshores $\varphi \in C^\infty$ i $\varphi^{n)} \in L^1(\mathbb{R})$ per a tot n. A més en aquest cas existeix $K > 0$ tal que:

$$\|\varphi^{n)}\|_1 \leqslant K^n c_{n+2}^{n+2}$$

on c_n compleix que $\omega(u) \geqslant n$ si $u \geqslant c_n$.

Demostració. Considerem $\psi = \varphi^{n)}$. Utilitzant les cotes que obtenim en la prova de 2.6 podem donar les següents desigualtats:

$$\|\widehat{\psi}\|_1 \leqslant e^{-A}(2\pi)^n \left(c_n^n + c_{n+2}^{n+2}\right) \left\| \frac{1}{1+|\xi|^2} \right\|_1$$
$$\|\widehat{\psi}'\|_2 \leqslant e^{-A}(2\pi)^n \left(n c_{n-1}^{n-1} + (n+1)c_n^n + c_{n+2}^{n+2}\right) \left\| \frac{1}{1+|\xi|} \right\|_2$$

i fent servir (2.4) tenim l'acotació que buscàvem:

$$\left\|\varphi^{n)}\right\|_1 \leqslant K^n c_{n+2}^{n+2}$$

$\square$

Ara cal recordar que per que φ sigui un generador quasi-analític s'ha de complir (2.5) per a una classe quasi-analítica $C\{M_n\}$. De manera òbvia haurem de triar $\beta = K$ i $M_n \geqslant c_{n+2}^{n+2}$. Però recordem que perque $C\{M_n\}$ sigui quasi-analítica necessitem que $\sum M_n^{-\frac{1}{n}}$ sigui divergent. Això ho podrem fer si i només si:

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{c_{n+2}^{1+\frac{2}{n}}} = \infty \tag{2.7}$$

Lema 2.8. *Suposem $a_n > 0$ per a tot n. Aleshores el caràcter de les sèries (a_n) i $\left(a_n^{1+\frac{2}{n}}\right)$ és el mateix. És a dir:*

$$\sum_n a_n < \infty \Longleftrightarrow \sum_n a_n^{1+\frac{2}{n}} < \infty$$

Demostració. Definim $\widetilde{a}_n = a_n^{1+\frac{2}{n}}$. És trivial que la convergència de (a_n) implica la de $\widetilde{a}_n$ ja que per a n prou gran $a_n < 1$. Ara suposem que $\sum a_n$ és divergent. Aquí hem de separar els a_n tals que $a_n \geqslant \frac{1}{2^n}$, que els anomenem b_n, amb $b_n = 0$ si $a_n < \frac{1}{2^n}$. D'aquesta manera:

$$\sum_n b_n b_n^{\frac{2}{n}} \geqslant \sum_n \frac{b_n}{4} = \frac{1}{4} \sum_n b_n$$

Per veure que aquest darrer sumatori és divergent definim c_n de manera complementària a b_n. És a dir, $a_n = b_n + c_n$. Es pot veure fàcilment que $\sum c_n$ és convergent, i com que $\sum a_n = \sum b_n + \sum c_n$ ja tenim que $\sum b_n$ és divergent. Amb això hem provat que $\sum \widetilde{a}_n$ és divergent, que completa la prova. $\square$

Demostració (del teorema 2.5). Comencem per provar la suficiència. El lema anterior ens serveix per a estudiar el caràcter de la sèrie $\sum \frac{1}{c_n}$ en lloc de (2.7). Si ens mirem aquesta sèrie tenim que:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{c_n} = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\sum_{n\geqslant 1} \chi_{[c_n,\infty)}(u)}{u^2}\, du$$

Aquesta darrera integral coincideix pel criteri de comparació amb:

$$\int_1^\infty \frac{\sum_{n\geqslant 1} \chi_{[c_n,\infty)}(u)}{u^2}\, du \approx \int_1^\infty \frac{\omega(u)}{u^2}\, du$$

Si recordem la definició de $H(\xi)$, fent integració per parts, veiem que el que estem estudiant és la convergència de la integral logarítmica de H:

$$\int_0^\infty \frac{\log H(\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi \approx -A \int_1^\infty \frac{\int_1^\xi \frac{\omega(u)}{u}\, du}{\xi^2}\, d\xi \approx \int_1^\infty \frac{\omega(\xi)}{\xi^2}\, d\xi$$

Per tant, $\sum \frac{1}{c_n}$ és divergent si i només si la integral logarítmica de $H(\xi)$ és divergent, i en aquest cas podrem trobar una classe quasi-analítica $C\{M_n\}$ tal que $L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi} \subset C\{M_n\}$.

Per veure la necessitat senzillament definim $H(\xi) = \inf_n \frac{M_n}{\xi^n}$ (l'anomenada funció d'*Ostrowski*). Aquesta funció ja és logarítmicament convexa, i la divergència de l'integral logarítmica és equivalent a la condició de quasi-analicitat [Koo92]. $\square$

El teorema 2.5 ens permet donar exemples de generadors de $L^1(\mathbb{R})$ de manera més o menys senzilla. Però la realitat és que la majoria de generadors que surten de manera directa són d'un tipus molt més bo, ja que, com veurem en la porpera secció, es corresponen amb classes analítiques. Per donar exemples de generadors quasi-analítics no analítics hem construir una $\omega(u) > 0$ tal que:

$$\int_1^\infty \frac{\omega(u)}{u^2}\, du$$

sigui divergent, però $\omega(u) << u$. Com a exemples senzills podem donar:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\int_1^{|\xi|} \frac{1}{\log u}\, du}$$

o bé

$$\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\int_1^{|\xi|} \frac{1}{\log^2 u}\, du}$$

Aquests dos exemples compleixen les condicions esmentades. En el segon cas podem triar $C\{M_n\}$ amb $M_n = (n \log n)^n$, que és l'exemple típic de classe quasi-analítica no analítica. Un altre mètode de donar exemples és calcular directament la funció d'*Ostrowski* per a una classe quasi-analítica donada. Per exemple:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \inf_n \frac{(n \log n)^n}{\xi^n}$$

Però tampoc sembla que es puguin trobar expresions senzilles de φ d'aquesta forma.

2.4 Generadors analítics.

Un cas especial de classes quasi-analítiques són les que anomenarem analítiques. Aquestes venen caracteritzades pel fet de que les seves funcions no son tan sols $\mathcal{C}^\infty$ sinó que són funcions analítiques.

La descripció d'aquestes classes ja l'hem donada en l'apartat anterior. Direm que una classe quasi-analítica $C\{M_n\}$ és analítica si $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ és una successió acotada.

Definició. Direm que φ és un **generador analític** si existeix una classe analítica $C\{M_n\}$ i un $\beta > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi^{n)}(t)|\, dt \leqslant \beta^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

o de manera equivalent:

$$L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi} \subset C\{M_n\}$$

El primer exemple de generador analític el trobem amb la funció de Poisson:

$$P(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

Els conjunts Λ per als quals $T(P, \Lambda)$ generen $L^1(\mathbb{R})$ estan descrits en [BrM07]:

Teorema 2.9 (Bruna-Melnikov). *Un conjunt discret $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ compleix que $T(P,\Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$ per a $P(t)$ la funció de Poisson si i només si:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda_n|} = \infty \tag{2.8}$$

El mateix és cert per a $L^p(\mathbb{R})$.

Tractarem aquest exemple amb molt més detall al següent capítol.

Anem ara a estudiar els generadors analítics en general. Centrem-nos en com pot ser la majorant H en el cas de classes analítiques.

Teorema 2.10. *Donada una funció $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, si φ és un generador analític aleshores existeixen $A, C > 0$ tals que:*

$$0 < |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant Ae^{-C|\xi|}$$

per a tot $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostració. Com que φ és un generador analític, existeix una classe analítica $C\{M_n\}$ i $\beta > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi^{n)}(t)|\, dt \leqslant \beta^n M_n$$

Prenent transformades de Fourier això implica que:

$$|(2\pi\xi)^n \widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant \beta^n M_n$$

Prenem logaritmes als dos costats de la desigualtat i arreglant les coses podem afirmar que:

$$\log|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant n\log\beta + \log M_n - n\log 2\pi|\xi| \tag{2.9}$$

Recordem que, pel teorema de Wiener, $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ i per tant el logaritme sempre està ben definit, tret potser del cas $\xi = 0$. Com que estem intentant provar una desigualtat assimptòtica això no serà un problema.

Si $C\{M_n\}$ és una classe analítica, $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ està acotat. Aplicant la fórmula de Stirling i prenent logaritmes podem donar la següent acotació:

$$\log M_n \leqslant \frac{1}{2}\log 2\pi n + n\log n + n\log k_1$$

Introduïm això a (2.9) per veure que:

$$\begin{aligned}\log|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant & n\log\beta + \frac{1}{2}\log 2\pi n + n\log n + n\log k_1 - n\log 2\pi|\xi| \\ \leqslant & \frac{1}{2}\log 2\pi - n\big(\log|\xi| - (k_2 + \log n)\big)\end{aligned}$$

Calculem $\sup_n n\log|\xi| - n(k_2+\log n)$, que es pren a $n = \frac{|\xi|}{e^{1+k_2}}$. D'aquesta forma podem acotar:

$$\begin{aligned}\log|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant & \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{|\xi|}{e^{1+k_2}}\left(\log|\xi| - \left(k_2 + \log\frac{|\xi|}{e^{1+k_2}}\right)\right)\\ = & \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{|\xi|}{e^{1+k_2}}\end{aligned}$$

Definim $C = \frac{1}{e^{1+k_2}}$ i prenem exponencials. Només ens cal afegir la constant A per solucionar problemes quan ξ és proper a zero i ja hem provat el teorema. □

Aquest resultat ens dóna la condició necessària per a obtenir un generador analític i ens informa de com ha de ser la majorant en aquest cas. A partir d'aquí és senzill trobar la condició suficient. Tan sols cal demanar el mateix control a la derivada de $\widehat{\varphi}$.

Teorema 2.11. *Donada una funció $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, si existeixen $A, C > 0$ tals que per a tot $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} 0 < & |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant Ae^{-C|\xi|}\\ & |\widehat{\varphi}'(\xi)| \leqslant Ae^{-C|\xi|}\end{aligned} \tag{2.10}$$

aleshores φ és un generador analític.

Demostració. La idea, igual que en el cas quasi-analític, és aplicar (2.4) a $\psi = \varphi^{n)}$. Fen servir (2.10) i aplicant el lema 2.7 amb $H(\xi) = Ae^{-C|\xi|}$ tenim que:

$$\|\varphi^{n)}\|_1 \leqslant K^n c_{n+2}^{n+2}$$

on en aquest cas $c_n = \frac{n}{C}$. Triem $M_n = \left(\frac{n}{C}\right)^{n+2}$ i utilitzem la fórmula de Stirling:

$$\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant k_1\left(\frac{n^{n+2}e^n}{C^{n+2}n^n\sqrt{2\pi n}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant k_1\frac{n^{\frac{2}{n}}e}{C^{1+\frac{2}{n}}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} \leqslant k_2$$

que ens diu que estem en una classe analítica. □

Els espais de fase dels generadors analítics tenen molt bones propietats. En particular són funcions que tenen una extensió holomorfa a una banda $|\Im z| < C$. A més estan inclosos en l'espai de fase d'una dilatada (concreta) de la Poisson. Per aquest cas concret (quan el generador és una dilatació de la Poisson) coneixem tots els conjunts d'unicitat del conjunt de transformades, que estan descrits en [BrM07] per la condició que ens dóna el teorema 2.9. Λ és un conjunt discret d'unicitat per a l'espai de fase d'una dilatada de la Poisson si i només si:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2C}|\lambda|} = \infty$$

on la constant C és el paràmetre de dilatació respecte a la Poisson. Així obtenim, per un argument d'inclusió d'espais, una condició suficient per a Λ per tal de que $T(\varphi, \Lambda)$ generi quan φ és un generador analític.

Corol.lari 2.12. *Sigui $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ un generador analític tal que $|\widehat{\varphi}(\xi)|, |\widehat{\varphi}'(\xi)| \leqslant e^{-C|\xi|}$. Sigui Λ un conjunt discret tal que:*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-\frac{\pi}{2C}|\lambda|} = \infty$$

Aleshores $T(\varphi, \Lambda)$ és un sistema de generadors de $L^1(\mathbb{R})$.

En el cas de la funció de Poisson aquesta condició era necessària i suficient, però en general no serà necessària. Per exemple, en el cas de la funció gaussiana ($\phi(t) = e^{-\pi t^2}$) estem sota aquestes condicions i en canvi té molts més conjunts que generen. Això és pot argumentar comentant que el conjunt de funcions amb extensió holomorfa a una banda és la pitjor classe analítica que ens podem trobar, en el sentit de que és la que té menys conjunts d'unicitat.

Aquest és un fet general en generadors quasi-analítics. Els conjunts d'unicitat de $L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi}$ coincideixen exactament amb els conjunts Λ tals que $T(\varphi, \Lambda)$ és un sistema de generadors de $L^1(\mathbb{R})$. Si sabem que $L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi} \subseteq C\{M_n\}$ podem afirmar que qualsevol conjunt d'unicitat de $C\{M_n\}$ ho serà també de $L^\infty(\mathbb{R}) * \check{\varphi}$. Però com que l'inclusió pot ser estricta no tenim una correspondència bijectiva entre els conjunts d'unicitat. És per aquesta raó que és molt complicat donar condicions necessàries sobre Λ perquè $T(\varphi, \Lambda)$ sigui un sistema de generadors de $L^1(\mathbb{R})$ quan hem fixat φ. Tampoc coneixem cap caracterització dels conjunts d'unicitat d'una classe quasi-analítica general, tret del cas en que la classe és analítica, i en aquest darrer supòsit tan sols en alguns casos concrets.

És per aquesta raó que el resultat 2.9 de [BrM07] és d'especial importància.

Capítol 3

Generadors tipus Poisson.

3.1 Funció de Poisson.

Ja hem comentat en el capítol anterior que un dels primers exemples de generadors analítics que ens trobem és la funció de Poisson:

$$P(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$$

Recordem que els conjunts Λ per als quals $T(P,\Lambda)$ generen $L^1(\mathbb{R})$ estan descrits en [BrM07]:

Teorema 3.1 (Bruna-Melnikov)**.** *Un conjunt discret $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ compleix que $T(P,\Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$ per a $P(t)$ la funció de Poisson si i només si:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda_n|} = \infty \tag{3.1}$$

El mateix és cert per a $L^p(\mathbb{R})$.

La funció de Poisson és un dels generadors analítics més senzill que es coneix. Per convolució amb $L^\infty(\mathbb{R})$ ens donarà lloc a una de les classes analítiques més generals que ens podem trobar. A més té la propietat de que s'han pogut caracteritzar tots els conjunts que generen. Aquest resultat s'assoleix gràcies a que s'ha pogut descriure molt bé el seu espai de fase. La demostració consta de dues parts (com és habitual sempre que s'obté una descripció total dels conjunts que donen lloc a sistemes de generadors). Primer es busca una descripció prou bona de l'espai de fase. En aquest cas veurem que aquest coincideix amb la restricció a una recta d'un espai de funcions holomorfes. Després s'han de caracteritzar els conjunts d'unicitat d'aquest espai dintre dels que ens interessen a nosaltres. Aquesta segona part la podem resoldre gracies a que estem en un espai tipus Hardy. Traslladant el problema al disc serem capaços de donar una descripció fent servir les eines de l'anàlisi complexa (principalment la fórmula de Jensen i els productes de Blaschke).

Comencem llavors per la descripció de l'espai de fase. La manera de fer-ho és la següent. Recordem que l'espai de fase de P per a $L^p(\mathbb{R})$ era:

$$H = \left\{ F : F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{f(t)}{(t-x)^2+1}\, dt, \text{ per alguna } f \in L^q(\mathbb{R}) \right\}$$

on q és l'exponent dual de p. Podem pensar sense perdre generalitat que f és real, ja que si provem que $T(P, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ real també tindrem el resultat per al complex.

Sigui $h^q(\mathbb{R}^2_+)$ l'espai de les funcions harmòniques i reals del semiplà superior tals que:

$$\|u\|_q^q = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |u(x+iy)|^q\, dx < \infty$$

i $h^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ l'espai de funcions harmòniques, reals i acotades. Una funció d'aquest espai es pot expressar com:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\, dt \qquad z = x+iy$$

amb $f \in L^q(\mathbb{R})$ i real, i a més és una correspondència bijectiva. Això prova que la restricció a la recta $\Im z = 1$ de $h^q(\mathbb{R}^2_+)$ coincideix amb l'espai de fase de la funció de Poisson. De manera informal podem pensar que són el mateix i estem buscant els conjunts d'unicitat de $h^q(\mathbb{R}^2_+)$ continguts en $\Im z = 1$.

Per determinar aquests conjunts anem a cambiar un altre cop d'espai. La idea és complexificar l'expresió d'una funció de l'espai de fase per trobar-nos amb un espai de funcions holomorfes en lloc d'harmòniques:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(t-z)^2+1}\, dt \tag{3.2}$$

Fent servir la correspondència de l'espai de fase amb $h^q(\mathbb{R}^2_+)$, podem donar una descripció del conjunt de funcions que ens apareixen al complexificar. Anomenem B a la banda $|\Im z| < 1$ i sigui $E^q(B)$ l'espai de funcions holomorfes a B que satisfan:

$$\sup_{|y|<1} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^q\, dx = \|F\|_q^q < \infty$$
$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)}, \quad z \in B$$

Per a $E^\infty(B)$ cambiem la primera condició per $\Re F$ acotada.

Teorema 3.2 (Bruna-Melnikov). *L'operador que fa coorespondre $u \mapsto F$ quan $u(x+i) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ és una correspondencia bijectiva entre $h^q(\mathbb{R}^2_+)$ i $E^q(B)$, $1 < q \leqslant \infty$.*

Nota. La prova d'aquest teorema és nova, i no coincideix amb la de [BrM07]. La idea d'aquesta prova va ser proposada per Joaquim Ortega Cerdà, a qui agraeixo permetre'm reproduir-la aquí.

Demostració. La injectivitat d'aquest operador és òbvia. Anem a veure que F definida com en (3.2) pertany a $E^q(B)$. F és holomorfa i està ben definida perque $\Re\big(1 + (z-t)^2\big) = 1 + (x-t)^2 - y^2 > 0$ per a tot $|y| < 1$. També és clar que $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$. Escrivim F de la següent forma:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} f(t)\left\{\frac{1}{t-z-i} - \frac{1}{t-z+i}\right\} dt = Cf(z+i) - Cf(z-i)$$

on Cf és la transformada de Cauchy

$$Cf(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-w}\, dt, \quad w \notin \mathbb{R}$$

Si $f \in L^q(\mathbb{R})$, $1 < q < \infty$, Cf està en l'espai de Hardy $H^q(\mathbb{R}^2_+)$ [Gar07] i compleix l'acotació:

$$\int_{\mathbb{R}} |Cf(x+iy)|^q\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\, dx$$

Amb això ja tenim que F sempre pertany a $E^q(B)$ si $f \in L^q(\mathbb{R})$.

Per veure l'altra inclusió prenem una funció $F \in E^q(B)$. La idea és escriure

$$F(z) = G(z) + \overline{G(\overline{z})} \tag{3.3}$$

amb G una funció de l'espai de Hardy $H^q(\Pi)$ del semplà $\Pi = \{\Im z > -1\}$. Una funció d'aquest espai de Hardy compleix que és holomorfa i a més

$$\|G\|^q_{H^q} = \sup_{y>-1}\int_{\mathbb{R}} |G(x+iy)|^q\, dx < \infty$$

Com que $\overline{G(\overline{z})}$ pertany a $H^q(\Pi^-)$, $\Pi^- = \{\Im z < 1\}$, és clar que una F com en (3.3) sempre pertany a $E^q(B)$. Si ens la mirem quan $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = G(x) + \overline{G(x)} = 2\Re G(x) = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Re G(t)}{(x-t)^2+1}\, dt$$

que és del tipus desitjat, ja que $\Re G(z+i) \in h^q(\mathbb{R}^2_+)$. Per tant, per provar l'inclusió només cal veure que tota $F \in E^q(B)$ es pot escriure com en (3.3). Aconseguirem una expresió d'aquest tipus pel procediment habitual. Primer farem la descomposició en la categoria C^∞ i després resoldrem un $\overline{\partial}$ per aconseguir la analicitat.

Definim una funció auxiliar $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$ decreixent tal que $\vartheta(t) = 1$ si $t \leqslant \frac{-1}{2}$, $\vartheta(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{2}$, i $\vartheta(-t) = 1 - \vartheta(t)$. D'aquesta manera, si prenem:

$$\widetilde{G}(z) = F(z)\vartheta(\Im z)$$

es compleix:

$$\widetilde{G}(z) + \overline{\widetilde{G}(\overline{z})} = F(z)\vartheta(\Im z) + \overline{F(\overline{z})}\vartheta(-\Im z) = F(z)\vartheta(\Im z) + F(z)\big(1 - \vartheta(\Im z)\big) = F(z)$$

A més $\widetilde{G}$ compleix les acotacions en norma desitjades, ja que les hereda de F i de que ϑ s'anul.la a partir de $\frac{1}{2}$. L'únic entrebanc és que no és holomorfa. Per resoldre aquest problema li afegirem un factor u fruit de resoldre $\overline{\partial}u = \overline{\partial}F\vartheta$. Aconseguim aquest factor fent convolució amb el nucli de Cauchy:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{F(w)\vartheta'(\Im w)}{z - w}\, dm(w)$$

on $dm(w)$ és la mesura d'àrea de $\mathbb{C}$. No hi ha problemes a l'hora de calcular aquesta integral ja que, encara que F tan sols està definida a la banda, ϑ' és 0 fora dde B. D'aquesta manera la G que estem buscant serà:

$$G(z) = F(z)\vartheta(\Im z) - u(z)$$

Anem a comprovar que es compleixen totes les condicions. Mirem primer:

$$\begin{aligned}\overline{u(z)} =& \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\overline{F(w)}\vartheta'(\Im w)}{\overline{z} - \overline{w}}\, dm(w) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{F(\overline{w})\vartheta'(\Im w)}{\overline{z} - \overline{w}}\, dm(w)\\ =& \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{F(s)\vartheta'(-\Im s)}{\overline{z} - s}\, dm(s) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{F(s)\vartheta'(\Im s)}{\overline{z} - s}\, dm(s)\\ =& - u(\overline{z})\end{aligned}$$

Això implica que la descomposició continua sent vàlida. Ens queda veure que $G \in H^q(\Pi)$. Veiem primer que és holomorfa:

$$\overline{\partial}G(z) = \frac{-1}{2i}F(z)\vartheta'(\Im z) - \overline{\partial}u(z) = 0$$

ja que hem definit u com l'integral de Cauchy de $F(z)\vartheta'(\Im z)$, que resol el $\overline{\partial}$. Per veure:

$$\|G\|_q = \sup_{y>-1}\left(\int_{\mathbb{R}} |G(x+iy)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

apliquem Minkovski. Si cada un dels sumands compleix aquesta acotació, també ho complirà G. La part corresponent a $F(z)\vartheta(\Im z)$ ja la teniem. Ens queda, per tant, acotar $u(z)$.

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+iy)|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{-1}{2\pi i} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(a+ib)\vartheta'(b)}{x+iy-(a+ib)} \, da \, db \right|^q dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \vartheta'(b) \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(a+ib)}{x+iy-(a+ib)} \, da \, db \right|^q dx$$

La integral en a coincideix amb la transformada de Cauchy de F en la recta $\Im z = b$. Fent un canvi de notació podem dir:

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+iy)|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \vartheta'(b) CF_b(x+i(y-b)) \, db \right|^q dx$$

Apliquem Hölder a la integral en b:

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+iy)|^q \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\vartheta'(b)|^p \, db \right)^{\frac{q}{p}} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} |CF_b(x+i(y-b))|^q \, db \, dx$$

Com que $\vartheta \in C^\infty$, la seva derivada està acotada i ens podem oblidar de la primera integral. Per a la segona apliquem Fubini i recordem que la integral de Cauchy estava acotada pels seus valors frontera:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} |CF_b(x+i(y-b))|^q| \, db \, dx \leqslant \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |F(x+ib)|^q \, dx \, db \leqslant \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_q^q \, db$$

ja que $b \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ i $F \in E^q(B)$. A més aquesta acotació és independent de y, i podrem acotar de la mateixa forma el suprem.

Amb això hem provat que $G \in H^q(\Pi)$ i hem vist la doble inclusió. Pel cas $E^\infty(B)$ cal fer servir la demostració original de [BrM07]. $\square$

Observació. El principal avantatge d'aquesta prova respecte a l'original de [BrM07] rau en que es pot generalitzar fàcilment a varies variables. També és bo observar que en aquest cas no ens restringim a la part real de la funció sinó que prenem mòdul de la funció al definir la norma i l'espai.

Demostració del teorema 3.1. Com que $|F|^q$ té una majorant harmònica a B, podem deduir que si ϕ és l'aplicació conforme de B al disc $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ definida per:

$$w = \phi(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}z} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}z} + 1}$$

aleshores tota funció $H(w) = F(\phi^{-1}(w))$ amb $F \in E^q(B)$ estarà a l'espai de Hardy del disc $H^q(\mathbb{D})$ (a l'inrevés no és cert). Per a $q = \infty$ definim $H(w) = \exp(F(\phi^{-1}(w))) - 1$.

Definim $\Gamma = \phi(\Lambda) \subset \mathbb{D}$. D'aquesta forma H s'anul.la en Γ. Podem veure també:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \log \frac{1}{|\gamma|} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{e^{\frac{\pi}{2}|\lambda|}+1}{|e^{\frac{\pi}{2}|\lambda|}-1|} \sim 2\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|}$$

Apliquem ara la fòrmula de Jensen:

$$\log|H(0)| + \sum_{\gamma\in\Gamma} \log\frac{1}{|\gamma|} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|H(e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \log\|H\|_q$$

Sense perdre generalitat podem pensar que $H(0) \neq 0$ i d'aquí obtenim l'acotació de (3.1) si Γ està contingut en un conjunt de zeros per alguna funció de $E^q(B)$.

Ens queda veure que si el sumatori en (3.1) està acotat, aleshores existeix una funció en $E^q(B)$ que s'anul.la en Λ.

La condició $\sum_{\gamma\in\Gamma}\log\frac{1}{|\gamma|} \sim \sum_{\gamma\in\Gamma} 1-|\gamma| < \infty$ és la condició de Balschke, que ens garanteix que el producte:

$$\beta(w) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{-\gamma}{|\gamma|}\frac{w-\gamma}{1-\gamma w}$$

és convergent (cal multiplicar per w si $0\in\Gamma$). Definit d'aquesta manera, $\beta(w) = 0$ si i només si $w\in\Gamma$, $|\beta(w)| \leqslant 1$ per a tot $w\in\mathbb{D}$ i $|\beta(w)| = 1$ per a quasi tot $w \in \partial\mathbb{D}$. Com que $\Im\gamma = 0$ per a $\gamma\in\Gamma$ també tenim que $\beta(\overline{w}) = \overline{\beta(w)}$.

Suposem que H és una funció holomorfa del disc. Si definim $F(z) = H(\phi(z))$ aleshores $g(s) = F(s\pm i) = H\left(\frac{ie^{\frac{\pi}{2}s}-1}{ie^{\frac{\pi}{2}s}+1}\right)$ estarà en $L^q(\mathbb{R})$ si:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(s)|^q\, ds = \frac{1}{\pi}\int_{|w|=1} |H(w)|^q \frac{|dw|}{|1-w^2|} < \infty$$

Si triem $H(w) = (1-w^2)\beta(w)$ ja estarem sota aquestes condicions i també tenim la condició de simetria. Amb això ja hem provat el teorema. □

Podem comparar aquest resultats amb el que obtindriem fent servir tan sols que aquest espai de fase està contingut en una classe analítica. La classe que hem de triar es correspon a prendre $M_n = n!$ o $M_n = n^n$ de manera indistinta. A més es pot veure que tota funció F de l'espai de fase compleix:

$$|F^{n)}(x)| \leqslant C_F n! \quad \forall n$$

ja que són restriccions de funcions analítiques en la banda $|\Im z| < 1$. Els resultats enunciats en [Hir50] ens diuen que el conjunt de zeros d'una funció F en aquesta classe ha de complir:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{2\log n_F(r)}{\pi t} \leqslant 1$$

A més aquesta condició és molt precisa, ja que si la desigualtat és estricta per a un conjunt sempre existeix una funció que s'anul.la en aquest.

Això ens diu que si existeix $\varepsilon > 0$ tal que $\log n_\Lambda(r) > (1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}r$ per a tot $r > r_0$ prou gran, Λ serà un conjunt d'unicitat per aquesta classe. Ordenem els elements de Λ per mòdul creixent. Mirant la desigualtat que compleix Λ podem dir que per a k prou gran s'haurà de complir:

$$\log k > (1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}|\lambda_k|$$

o de manera equivalent:

$$k^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} = e^{-\frac{\log k}{1+\varepsilon}} < e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda_k|}$$

Observem que aquesta condició, que serà suficient perquè $T(P,\Lambda)$ generi $L^1(\mathbb{R})$, implica que el sumatori en (3.1) sigui divergent. Si ens ho mirem bé les dues condicions són molt properes però no idèntiques. A més l'espai de fase està inclós en la classe analítica, però pot no igualar-la. Això fa que les condicions necessàries perquè un conjunt sigui d'unicitat per la classe no es transmetin a l'espai de fase.

3.2 Funcions tipus Poisson.

El nostre següent pas serà generalitzar aquest resultat a una classe especial de funcions que podem anomenar de tipus Poisson.

Teorema 3.3. *Sigui $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ un funció per a la qual existeixen constants $A, B > 0$ tals que:*

$$Ae^{-2\pi|\xi|} \leqslant |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant Be^{-2\pi|\xi|} \tag{3.4}$$

Suposem també que:

$$|\widehat{\varphi}'(\xi)| \leqslant Ce^{-2\pi|\xi|}$$

Aleshores el conjunt $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$ si i només si:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|} = \infty$$

Lema 3.4. *$T(P,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ si i només si $T(\psi,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ amb $\psi(t) = P * \widehat{P}(t)$.*

Observació. El teorema 3.1 ens diu que els conjunts discrets Λ per als quals $T(P,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ són els mateixos que en $L^1(\mathbb{R})$.

Demostració. Com que tenim descrits els conjunts Λ per als quals $T(P,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$, el que ens cal és provar que $T(\psi,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ si i només si:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|} = \infty$$

És clar que aquesta condició és suficient, ja que ψ és convolució de P amb una funció de $L^1(\mathbb{R})$ i podem aplicar el teorema 1.4. Per la necessitat el que fem és repassar la demostració del teorema 3.1. La idea és fer servir dualitat, i veure que si $\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|} < \infty$ aleshores podem trobar $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\langle f(t), \psi(t-\lambda)\rangle = 0$ per a tot $\lambda \in \Lambda$ amb $f \neq 0$.

Tornem a començar per $h^2(\mathbb{R}^2_+)$. Recordem que una funció d'aquest espai es pot expressar com:

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt \qquad z = x+iy$$

amb $f \in L^2(\mathbb{R})$ i real, i a més és una correspondència bijectiva.

El sistema $T(\psi,\Lambda)$ no generarà $L^2(\mathbb{R})$ si i només si existeix $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\psi(t-\lambda)\,dt = 0 \qquad \forall\lambda\in\Lambda$$

on podem pensar que g és real. Si desenvolupem aquesta integral tenim que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(t)\psi(t-\lambda)\,dt &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\big(P * \widehat{P}\big)(t-\lambda)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(t)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi|s|}}{1+(t-\lambda-s)^2}\,ds\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)e^{-2\pi|t-w|}}{1+(w-\lambda)^2}\,dw\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \big(g * \widehat{P}\big)(t)\frac{1}{1+(w-\lambda)^2}\,dw\end{aligned}$$

El que ens cal és trobar una funció harmònica

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

que s'anul.li a $\lambda+i$ per a $\lambda\in\Lambda$ i de manera que $f = g*\widehat{P}$. En [BrM07] es demostra que existeix $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $u(\lambda+i) = 0$ per a $\lambda\in\Lambda$. Del que es tracta és de veure que podem prendre aquesta f de la forma $g*\widehat{P}$ amb $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Recordem que si:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(t-z)^2+1}\,dt \tag{3.5}$$

el teorema 3.2 ens diu que l'aplicació $u \mapsto F$ quan $u(x+i) = F(x)$ és una correspondència bijectiva entre $E^2(B)$ i $h^2(\mathbb{R}^2_+)$.

Llavors el que volem és trobar $F \in E^2(B)$ tal que $F(\lambda) = 0$ per a tot $\lambda \in \Lambda$ i que s'escrigui com a (3.5) amb $f = g * \widehat{P}$ per alguna $g \in L^2(\mathbb{R})$. Podem pensar (3.5) com un producte escalar a $L^2(\mathbb{R})$. Fem servir la transformada de Fourier i apliquem el teorema de Parseval per veure que:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i x\xi}\, d\xi$$

Per continuació analítica també obtenim:

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i z\xi}\, d\xi$$

on nosaltres volem que $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\widehat{g}(\xi)}{1+\xi^2}$ amb $g \in L^2(\mathbb{R})$. És a dir, busquem $F \in E^2(B)$ que es pugui escriure com:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{g}(\xi)}{1+\xi^2} e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i z\xi}\, d\xi$$

amb $g \in L^2(\mathbb{R})$. Si $F'' \in E^2(B)$ la podem escriure com:

$$F''(z) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i z\xi}\, d\xi$$

amb $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Però per una altra banda veiem que:

$$F''(z) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)(2\pi i\xi)^2 e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i z\xi}\, d\xi$$

i per tant $\widehat{f}(\xi)(2\pi i\xi)^2 = \widetilde{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Això ens permet escriure:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{4\pi^2\widehat{f}(\xi) - \widetilde{f}(\xi)}{1+\xi^2}$$

amb $4\pi^2\widehat{f} - \widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$. D'aquesta manera hem reduït el problema a trobar $F \in E^2(B)$ tal que $F(\lambda) = 0$ per a $\lambda \in \Lambda$ i tal que $F'' \in E^2(B)$.

Ara la idea, igual que en la prova de 3.1, és traslladar el problema al disc. Recordem la definició de ϕ, l'aplicació conforme de B al disc:

$$w = \phi(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}z} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}z} + 1}$$

Definim igual que abans, $\Gamma = \phi(\Lambda) \subset \mathbb{D}$ i recordem que:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \log\frac{1}{|\gamma|} \sim 2\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|} < \infty$$

que és la condició de Balschke. Aquesta ens garanteix que el producte:

$$\beta(w) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{-\gamma}{|\gamma|}\frac{w-\gamma}{1-\gamma w}$$

és convergent (cal multiplicar per w si $0\in\Gamma$).

Suposem que H és una funció holomorfa del disc. Si definim $F(z) = H(\phi(z))$ aleshores $g(s) = F(s\pm i) = H\left(\frac{ie^{\frac{\pi}{2}s}-1}{ie^{\frac{\pi}{2}s}+1}\right)$ estarà en $L^2(\mathbb{R})$ si:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(s)|^2\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{|z|=1} |H(z)|^2 \frac{|dz|}{|1-z^2|} < \infty \tag{3.6}$$

Aquesta condició també s'havia de complir en 3.1, però ara necessitem demanar més a la funció. Calculem la segona derivada de F:

$$F''(z) = H''\big(\phi(z)\big)\left(\frac{\pi e^{\frac{\pi}{2}z}}{(e^{\frac{\pi}{2}z}+1)^2}\right)^2 + H'\big(\phi(z)\big)\frac{\pi^2}{2}\frac{e^{\frac{\pi}{2}z}(1-e^{\frac{\pi}{2}z})}{(e^{\frac{\pi}{2}z}+1)^3}$$

De manera equivalent, perquè $h(s) = \Re F''(s\pm i)$ estigui en $L^2(\mathbb{R})$ en tindrem prou amb:

$$\int_{|z|=1} \left| H''(z)\frac{\pi i(z+1)(z-1)}{\big(i(z+1)+(z-1)\big)^2}\right|^2 \frac{|dz|}{|1-z^2|} < \infty \tag{3.7}$$

$$\int_{|z|=1} \left| H'(z)\frac{\pi^2}{2}\frac{i(z+1)(z-1)\big((z-1)-i(z+1)\big)}{\big(i(z+1)+(z+1)\big)^3}\right|^2 \frac{|dz|}{|1-z^2|} < \infty \tag{3.8}$$

Per tant es tracta de trobar una funció H holomorfa al disc amb $H(\gamma) = 0$ per a $\gamma\in\Gamma$, $H(\overline{z}) = \overline{H(z)}$ i de manera que es compleixin (3.6), (3.7) i (3.8). El que farem és triar $H(z) = (1-z^2)^n\beta(z)$, que per a n prou gran ens servirà. Veiem primer les acotacions de les derivades de β:

$$\beta'(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{-\gamma}{|\gamma|}\frac{1-\gamma^2}{(1-\gamma z)^2}\prod_{\lambda\in\Gamma,\lambda\neq\gamma}\frac{-\lambda}{|\lambda|}\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}$$

El producte està acotat per 1 independentment de γ quasi per a tot z. A més, per a $|z| = 1$ tenim que $|1-\gamma z| \geqslant \frac{1}{2}|1-z^2|$ i $|1-\gamma^2| \leqslant 2(1-|\gamma|)$. Per tant:

$$|\beta'(z)| \leqslant \frac{2}{|1-z^2|^2}\sum_{\gamma\in\Gamma}|1-\gamma^2| \leqslant \frac{4}{|1-z^2|^2}\sum_{\gamma\in\Gamma}1-|\gamma| \leqslant \frac{2K}{|1-z^2|^2}$$

on ens hem tornat a trobar la condició de Blaschke. Per a la segona derivada tenim:

$$\beta''(z) = 2\sum_{\gamma_1\neq\gamma_2\in\Gamma} \frac{-\gamma_1}{|\gamma_1|}\frac{1-\gamma_1^2}{(1-\gamma_1 z)^2}\frac{-\gamma_2}{|\gamma_2|}\frac{1-\gamma_2^2}{(1-\gamma_2 z)^2}\prod_{\lambda\in\Gamma,\lambda\neq\gamma_1,\gamma_2}\frac{-\lambda}{|\lambda|}\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}+$$
$$+2\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{\gamma^2}{|\gamma|}\frac{1-\gamma^2}{(1-\gamma z)^3}\prod_{\lambda\in\Gamma,\lambda\neq\gamma}\frac{-\lambda}{|\lambda|}\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}$$

que podem acotar fent servir les mateixes idees que en el cas de la primera derivada:

$$|\beta''(z)| \leqslant \frac{12K^2}{|1-z^2|^4}$$

Si triem $H(z) = (1-z^2)^4\beta(z)$ ja estarem en les condicions abans esmentades. Tant $F(z) = H\big(\phi(z)\big)$ com $F''(z)$ estaran en $E^2(B)$ amb $F(\lambda) = 0$ per a tot $\lambda \in \Lambda$. D'aquesta forma hem provat que $T(\psi, \Lambda)$ no pot generar $L^2(\mathbb{R})$ si $\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{\frac{\pi}{2}|\lambda|} < \infty$ i obtenim la necessitat. □

Demostració del teorema 3.3. Que la condició és suficient es dedueix del teorema 2.11.

Per veure que és necessària suposem que $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$. Fent servir el teorema 1.4 tenim que $T(\varphi * \widehat{P}, \Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$. Si calculem la transformada de Fourier de $\varphi * \widehat{P}$ veiem que:

$$\left|\frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{1+\xi^2}\right| \approx \frac{e^{-2\pi|\xi|}}{1+\xi^2}$$

Fent servir 1.5, $\varphi * \widehat{P}$ i $P * \widehat{P}$ tenen els mateixos conjunts de generadors en $L^2(\mathbb{R})$. Pel lema anterior aquests coincideixen amb els de P i $T(P, \Lambda)$ també genera $L^2(\mathbb{R})$. Això ens diu que el sumatori ha de ser infinit. □

3.3 Funcions racionals.

Un cas especial en que podem fer servir 3.3 són algunes de les funcions racionals de $L^1(\mathbb{R})$. El cas de funcions del tipus:

$$\varphi(t) = \frac{1}{k^2 + (t-x)^2}$$

està resolt per dilatació i translació de P. Però el mateix podem dir de funcions del tipus:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{k_n^2 - (t-x_n)^2}$$

sempre que $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Si calculem la seva transformada de Fourier veiem que:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} c_n \frac{\pi}{k_n} e^{-2\pi k_n |\xi|} e^{-2\pi i x_n \xi}$$

Per a $|\xi|$ prou gran tindrem que $|\widehat{\varphi}(\xi)| \approx e^{-2\pi k|\xi|}$ si $k = \inf k_n$. Si $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$ per a tot ξ podem aplicar el teorema 3.3 i obtenim:

Teorema 3.5. *Sigui*

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{k_n^2 - (t - x_n)^2}$$

amb $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$, $k_i > 0$ per a tot i.

Suposem que $\widehat{\varphi}(t) \neq 0$ per a tot $\xi \in \mathbb{R}$. Aleshores $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$ si i només si:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-\frac{\pi}{2k}|\lambda|} = \infty$$

amb $k = \inf k_n$.

De fet en aquest teorema la condició $k_i \neq k_j$ només ens cal per al k_j més petit, ja que aquest serà el factor dominant. Quant aquest no està aïllat encara podem trobar casos en que podrem descriure els conjunts que generen. Considerem:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{1 + (t - x_n)^2}$$

La transformada de Fourier d'aquesta funció serà:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|} \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-2\pi x_n \xi} = e^{-2\pi|\xi|} P_\varphi(\xi)$$

Si tots els x_n són de la forma $x_n = i\alpha$ per a $i \in \mathbb{Z}$, aleshores P_φ és un polinomi trigonomètric periòdic, i per tant tan sols ens caldrà demanar que sigui diferent de zero en tot punt del periode. Si aquest no és el cas tindrem una funció quasi-periòdica que en general no podrem acotar inferiorment, encara que a vegades si serà possible. El resultat més general que podem donar és el següent:

Teorema 3.6. *Sigui*

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{c_{n,m}}{k_n^2 - (t - x_{n,m})^2}$$

amb $0 < k_i < k_j$ si $i \neq j$.

Suposem que $\widehat{\varphi}(t) \neq 0$ *i* $|P_1(\xi)| = |\sum_{m=1}^{M} c_{n,m} e^{-2\pi i x_{1,m}\xi}| > C > 0$ *per a tot* $\xi \in \mathbb{R}$*. Aleshores* $T(\varphi, \Lambda)$ *genera* $L^1(\mathbb{R})$ *si i només si:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2k_1}|\lambda|} = \infty$$

En la resta de casos serà difícil donar resultats, i s'haurà de mirar cada cas particular per separat. De manera general sempre que veiem que $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant Ae^{-k_1|\xi|}$ podrem donar condicions suficients sobre Λ i quan tinguem $|\widehat{\varphi}(\xi)| \geqslant Be^{-k_2|\xi|}$ en podrem donar de necessàries. Si $k_1 \neq k_2$ no podrem donar una caracaterització completa, però si que obtindrem resultats parcials.

Un exemple del mateix estil que aquests però on podrem donar un resultat complet és el següent. Prenem com a funció analitzant $\varphi = P - P''$. La transformada de Fourier d'aquesta funció és:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (1 + 4\pi^2\xi)\widehat{\varphi}(\xi) = (1 + 4\pi^2\xi)e^{-\pi|\xi|}$$

que és diferent de zero en tot punt. Els resultats abans esmentats ens diuen que perqué $T(\varphi, \Lambda)$ generi $L^p(\mathbb{R})$ és necessàri que:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2C}|\lambda|} = \infty$$

amb $C = 1$, i és condició suficient que passi per a $C > 1$. Millorarem ara aquesta darrera condició per tal de donar una caracterització completa per aquest cas. La forma de fer-ho és la mateixa que estem fent servir habitualment; veurem que l'espai de fase està contingut en un espai un xic més gran però amb els mateixos conjunts d'unicitat que $E^q(B)$, i obtindrem la suficiència. La necessitat ja la tenim, però també la podrem obtenir al veure que $E^q(B)$ està contingut en l'espai de fase.

Lema 3.7. *Sigui* $\varphi(t) = P(t) - P''(t)$ *amb* P *la funció de Poisson. L'espai de fase de* φ *per a* $L^p(\mathbb{R})$ *és la restricció a la recta de:*

$$E^q(B) - E^q(B)'' = \Big\{G : G(z) = F(z) - F''(z) \text{ amb } F \in E^q(B)\Big\}$$

amb q *l'exponent dual de* p *i* $E^q(B)$ *l'espai definit en 3.2.*

Demostració. Això és clar si tenim en compte la descripció de l'espai de fase de P. □

Teorema 3.8. *Sigui* $\varphi(t) = P(t) - P''(t)$ *amb* P *la funció de Poisson. Aleshores* $T(\varphi, \Lambda)$ *genera* $L^2(\mathbb{R})$ *si i només si:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|} = \infty$$

Demostració. Anomenem H l'espai de fase de φ per a $L^2(\mathbb{R})$. Si $F \in H$, aleshores existeix $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:

$$F(z) = \langle f, \varphi\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi(1 + 4\pi^2\xi^2)e^{-\pi|\xi|}$$

Si $G \in E^2(B)$ aleshores és clar que G pertany a H mirant l'equació anterior. Tan sols cal prendre $\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+4\pi^2\xi^2)}$ amb la g que dona lloc a G fent servir com a funció analitzant la Poisson. Això és vàlid quan $z \in \mathbb{R}$, però per extensió analítica ho tenim a tota la banda. D'aquí ja podem deduir la condició necessària. Si un conjunt Λ és de zeros per a $E^2(B)$ també ho serà per a H. Per tant, si el sumatori conevergeix, Λ no pot ser d'unicitat per a H.

Per a la suficiència anem a veure a quin espai pertany la segona derivada d'una funció de $E^2(B)$.

Primer de tot observem que per a una funció holomorfa en un disc de centre 0 i radi R es compleix que:

$$\int_{|z|\leqslant R} |f(z)|^2\, dA(z) = \int_0^R r \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\, dr = \int_0^R r \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$$

on c_n són els coeficients de Taylor de f i hem fet servir Parseval. Intercanviem el sumatori per l'integral i podem arrivar a:

$$\int_{|z|\leqslant R} |f(z)|^2\, dm(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \int_0^R r^{2n+1} \geqslant |c_2|^2 \frac{R^6}{6}$$

Aquest argument serveix per a qualsevol disc, encara que no estigui centrat en el zero, i c_2 és la segona derivada de f en el centre del disc. Això ens dona una cota puntual de f'' que de seguida podrem fer uniforme en el nostre cas.

Prenem $F \in E^2(B)$. Per a qualsevol $z \in B$ la bola de centre z i radi $\frac{1-|y|}{2}$ pertany a B i F és holomorfa en aquesta bola. Aplicant la desigualtat anterior podem dir que:

$$\int_B (1-|y|)^4 |F''(z)|^2\, dm(z) \leqslant 2^4 \int_B \frac{4}{(1-|y|)^2} \int_{B\left(z, \frac{1-|y|}{2}\right)} |F(w)|^2\, dm(w)\, dm(z)$$

Apliquem Fubini i l'equació anterior passa a ser:

$$\int_B |F(w)|^2 \int_{\left\{z : w \in B\left(z, \frac{1-|y|}{2}\right)\right\}} \frac{4\, dm(z)}{(1-|y|)^2}$$

Com que $\left\{z : w \in B\left(z, \frac{1-|y|}{2}\right)\right\} \subset B(w, 1 - |\Im w|)$ i en aquest conjunt

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-|\Im w|)^2} \geqslant \frac{1}{4\pi}\frac{1}{(1-|y|)^2}$$

podem acotar:

$$\int_{\left\{z:w\in B\left(z,\frac{1-|y|}{2}\right)\right\}} \frac{4\,dm(z)}{(1-|y|)^2} \leqslant \int_{B(w,1-|\Im w|)} \frac{16\pi\,dm(z)}{\pi(1-|\Im w|)^2} \leqslant 16\pi$$

Per tant podem afirmar:

$$\int_B (1-|y|)^4 |F''(z)|^2\,dm(z) \leqslant 2^8\pi \int_B |F(w)|^2\,dm(w)$$

Aquesta darrera integral està acotada, ja que:

$$\int_B |F(z)|^2\,dm(z) = \int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2\,dx\,dy \leqslant \int_{-1}^{1} \|F\|^2\,dy = 2\|F\|^2$$

(recordem que $\|F\|^2$ era el suprem de les normes en les rectes $y = const.$). Això ens diu que F'' està en un espai de tipus Bergman. Anem a passar aquesta integral al disc per donar els resultats.

Es pot comprovar que si $w = \phi(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}z}-1}{e^{\frac{\pi}{2}z}+1}$ aleshores $1-|y| \geqslant 1-|w|$. Definim $H(w) = F''(\phi^{-1}(w))$ i podem dir que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |H(w)|^2(1-|w|)^3\,dm(w) &\leqslant \int_D (1-|w|)^4|H(w)|^2 \frac{dm(w)}{|1-w^2|}\\ &\leqslant \int_B (1-|y|)^4|F''(z)|^2\,dm(z)\end{aligned}$$

Per tant H està en l'espai de Bergman del disc amb pes $(1-|w|)^3$. Un subconjunt de zeros contingut en un diametre d'una funció d'aquest espai ha de complir la condició de Blaschke [Kor75]. Recordem que $\Gamma = \phi(\Lambda)$ complia la condició de Blaschke en el disc si i només si:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{-\frac{\pi}{2}|\lambda|} < \infty$$

És fàcil veure que F també està en l'espai tipus Bergman de la banda. Com que el sumatori és infinit Λ no pot pertanyer a cap conjunt de zeros d'aquest espai, i per tant tapoc en cap de $E^2(b) - E^2(B)''$. Així hem completat la prova del teorema. $\square$

Observació. Podem donar el mateix enunciat per a $L^1(\mathbb{R})$. Com que la necessitat ja la teniem, només cla veure la suficiència, i per aquesta ens podem recolzar en el teorema 1.4.

Capítol 4

Generadors per translacions amb la funció gaussiana.

En aquest capítol ens fixarem en el cas concret de descriure per a quins conjunts Λ el conjunt $T(\varphi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ quan ens restringim a que la funció generadora sigui la gaussiana $\phi(t) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi t^2}$. Aquest cas resulta senzill de tractar perque ens trobarem un espai de funcions enteres, i poderem fer servir resultats d'anàlisi complexa, principalment la fórmula de Jensen, la representació de Hadamard i els teoremes de Lindelöf.

4.1 Creixement i zeros de funcions enteres.

En aquest apartat repassarem una sèrie de conceptes i resultats clàssics sobre funcions enteres. Aquests resultats ens relacionen el creixement a l'infinit d'aquestes funcions amb els seus zeros, concretament amb la quantitat d'aquests. Aquesta serà la base teòrica que farem servir per estudiar els conjunts de traslladades de la gaussiana que poden generar en els diferents $L^p(\mathbb{R})$.

Per aquest resum seguirem [Lev96]. Intentarem mantenir en la mesura del possible la notació. En aquesta referència podem trobar totes les proves dels resultats que aquí presentem sense demostració. Comencem amb unes definicions.

Definició. Sigui f una funció entera. Definim:

$$M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

Definició. Sigui f una funció entera. L'**ordre** (de creixement) de f es defineix com:

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}$$

Intuïtivament significa que f creix com e^{r^ρ}

Definició. Sigui f una funció entera d'ordre ρ. Definim el **tipus** de f com:

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}$$

Intuïtivament significa que f creix com $e^{\sigma r^\rho}$.

Definició. Donada una successió $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{C}$ amb $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, $a_n \neq 0\ \forall n$, l'**exponent de convergència** de $\{a_n\}$ (ρ_1) és l'ínfim λ tal que:

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^\lambda} < \infty$$

Si $n(r)$ és la funció contadora de $\{a_n\}$, aleshores l'exponent de convergència de $\{a_n\}$ coincideix amb l'ordre de $n(r)$:

$$\rho_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$$

Definició. Donada un conjunt discret $\Lambda \subset \mathbb{R}$ amb funció contadora $n(r)$, la **densitat superior** de Λ respecte de ρ es defineix com:

$$\Delta^+(\Lambda) = \limsup_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}$$

i la **densitat inferior** com:

$$\Delta^-(\Lambda) = \liminf_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^\rho}$$

$\Delta_f^\pm$ serà la densitat (superior o inferior) del conjunt de zeros de f.

Observació. Si l'exponent de convergència de Λ és menor que ρ, automàticament les dues densitats són infinit, i si és més gran són igual a 0. Per aquest motiu ρ no apareix en la notació. És fàcil provar que encara que l'exponent de convergència sigui igual a ρ, si $\sum 1/|\lambda_n|^\rho < \infty$, aleshores les dues densitats també són igual a 0.

El resultat fonamental que ens relaciona el creixement d'una funció amb el seu conjunt de zeros ens el dóna la **fórmula de Jensen**:

Teorema 4.1 (Jensen). *Sigui f una funció entera tal que $f(0) \neq 0$. Sigui $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ el seu conjunt de zeros i $n(r)$ la funció contadora d'aquest conjunt. Aleshores:*

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})|\, d\psi - \log|f(0)|$$

o de manera equivalent:

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\psi})|\, d\psi + \sum_{|a_m|<R} \log\frac{|a_m|}{R}$$

El primer corol.lari que s'extreu de manera trivial d'aquest resultat ens diu, suposant $f(0) = 1$, que:

$$\log M_f(er) \geqslant \int_0^{er} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqslant \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} \geqslant n(r)$$

i obtenim:

$$n(r) \leqslant \log M_f(er)$$

Aquesta desigualtat ens dóna una relació directa entre el conjunt de zeros d'una funció i el seu creixement. D'aquí es dedueix el teorema de Hadamard:

Teorema 4.2 (Hadamard)**.** *L'exponent de convergència del conjunt de zeros d'una funció entera no excedeix el seu ordre de creixement.*

Per millorar aquest resultat ens interessa construir funcions amb un conjunt de zeros fixat. Això ho podem fer amb els productes de Weierstrass:

Definició. Definim

$$G(u,p) = \begin{cases} 1-u, & p=0 \\ (1-u)\exp\bigl(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^p}{p}\bigr), & p>0 \end{cases}$$

Anomenem a aquestes funcions **factors primaris de Weierstass**.

Per a un conjunt $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum |a_n|^{-p-1} < \infty$ amb p enter no negatiu definim el **producte canònic de Weierstrass** associat a $\{a_n\}$ com:

$$\Pi(z) = \prod_n G\Bigl(\frac{z}{a_n}, p\Bigr)$$

Sota aquestes condicions el producte és convergent uniformement sobre discs tancats i per tant defineix una funció entera a $\mathbb{C}$ que tan sols s'anul.la en $\{a_n\}$.

L'ordre d'aquests productes ens el dóna el teorema de Borel:

Teorema 4.3 (Borel)**.** *L'ordre de convergència d'un producte canònic és igual a l'exponent de convergència del seu conjunt de zeros.*

Aquest tipus de funcions són pràcticament les úniques que ens interessaran. Això ho veiem gracies a la descomposició de Hadamard:

Teorema 4.4 (Hadamard)**.** *Una funció entera d'ordre finit ρ es pot representar com:*

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\Bigl(\frac{z}{a_n}, p\Bigr)$$

on $a_1, a_2, \ldots$ són les arrels de f diferents de zero, $p \leqslant \rho$, $P_q(z)$ és un polinomi en z de grau $q \leqslant \rho$, i m és la multiplicitat de l'arrel de l'origen.

Si multipliquem dues funcions enteres f i g, l'orde del producte resultant serà el màxim dels ordres de f i g. El teorema de Borel ens calcula l'ordre d'un producte canònic de Weierstrass, i el de l'exponencial d'un polinomi és trivial. D'aquesta forma no costa gaire calcular l'ordre d'una funció quan tenim la descomposició de Hadamard.

Calcular el tipus serà en general un xic més difícil. Si en la descomposició de Hadamard el grau de P_q és més gran que l'ordre del conjunt de zeros aleshores és trivial calcular el tipus, que és el coeficient de terme de grau màxim del polinomi. Si no estem en aquestes condicions necessitarem els teoremes de Lindelöf:

Teorema 4.5 (Lindelöf). *Sigui f una funció entera amb descomposicióó de Hadamard*

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n\in\mathbb{N}} G\Big(\frac{z}{a_n}, p\Big)$$

amb P_q un polinomi de grau q. Si el grau de P_q és menor o igual a $p+1$ (enter), l'ordre de convergència del conjunt de zeros de f ($\Lambda = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) també és $p+1$ i $\sum |a_n|^{-(p+1)} < \infty$, aleshores f és una funció d'ordre $p+1$ i típus mínim si $b_{p+1} = 0$ o de típus mig si $b_{p+1} \neq 0$, on $P_q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_q z^q$.

Teorema 4.6 (Lindelöf). *Sigui $f(z)$ una funció entera d'ordre enter p amb descomposició de Hadamard:*

$$f(z) = z^m e^{b_0 + b_1 z + \cdots + b_p z^p} \prod G\Big(\frac{z}{a_n}, p\Big)$$

tal que $\sum \frac{1}{|a_n|^p} = \infty$. Sigui:

$$\delta_f(r) = \Big| b_p + \frac{1}{p} \sum_{|a_n|<r} a_n^{-p} \Big|, \qquad \overline{\delta}_f = \limsup_{r\to\infty} \delta_f(r) \tag{4.1}$$

i $\gamma_f = \max(\Delta_f^+, \overline{\delta}_f)$. Aleshores el tipus de F i γ_f són simultàniament zero, infinit o nombres positius.

El segon teorema de Lindelöf ens relaciona el tipus de f amb la densitat del seu conjunt de zeros i la condició de compensació (4.1). Però tan sols obtenim que el tipus serà finit i positiu si la densitat i (4.1) també ho són. En [Lev96] podem trobar cotes explicites mirant la prova del resultat, però aquestes no són gaire bones. Per estudiar les funcions de tipus normal (finit i diferent de zero) ens serà molt útil la següent definició.

Definició. Sigui f una funció entera d'ordre finit ρ. La funció:

$$h_f(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

s'anomena la **funció indicadora** de f (respecte a l'ordre ρ).

No costa gaire veure que $h_{fg}(\theta) \leqslant h_f(\theta) + h_g(\theta)$, i també podem donar l'acotació $h_{f+g}(\theta) \leqslant \max\{h_f(\theta), h_g(\theta)\}$. Per a una funció de tipus normal també es pot provar [Lev80] que aquesta funció està acotada superior i inferiorment. Podem veure també que:

$$\sup_\theta h_f(\theta) = \sigma_f$$

Això ens diu que si coneixem h_f tenim el tipus de f. A més aquest acota la funció indicadora. Definim la funció auxiliar:

$$h_{f,r}(\theta) = \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}$$

Definició. Sigui f una funció entera d'ordre finit ρ. Direm que f té **creixement completament regular** si quasi per a tota θ existeix el següent límit:

$$\lim_{r\to\infty} h_{f,r}(\theta) = h_f(\theta)$$

o de manera equivalent, si:

$$\log |f(re^{i\theta})| = h_f(\theta) r^\rho + o(r^\rho)$$

La fórmula de Jensen 4.1 ens diu que:

$$\frac{N_f(r)}{r^\rho} = \int_0^{2\pi} h_{f,r}(\theta)\, d\theta - \frac{\log |f(0)|}{r^\rho}$$

on $N_f(r) = \int_0^r \frac{n_f(t)}{t}\, dt$, amb n_f la funció contadora del conjunt de zeros de f. Fent servir això podem donar [Lev80] els següents resultats per acotar la densitat del conjunt de zeros d'una funció de tipus normal.

Teorema 4.7 (Levin). *Sigui f una funció entera d'ordre $\rho > 0$ no idènticament nul.la. Aleshores:*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho} \leqslant \frac{e\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_f(\theta)\, d\theta$$

Teorema 4.8 (Levin). *Sigui f una funció entera d'ordre $\rho > 0$ no idènticament nul.la. Aleshores:*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho} \leqslant \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_f(\theta)\, d\theta$$

Tenim igualtat per a funcions de creixement completament regular i només en aquest cas.

Definició. Sigui Λ un conjunt discret de $\mathbb{C}$ d'ordre finit ρ. Sigui $n(r; \psi_1, \psi_2)$ el nombre de punts de Λ en el sector $\{z : |z| \leqslant r, \psi_1 \leqslant \arg z < \psi_2\}$. Definim la **densitat angular** de Λ a:

$$\Delta_\Lambda(\psi_1, \psi_2) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r; \psi_1, \psi_2)}{r^\rho}$$

quan aquest límit existeixi quasi per tot $\psi_1, \psi_2 \in [0, 2\pi)$. En aquest cas direm que Λ té densitat angular.

L'equació:

$$\Delta(\psi_1) - \Delta(\psi_2) = \Delta_\Lambda(\psi_1, \psi_2)$$

ens determina (llevat d'una constant) una funció $\Delta(\theta)$ que farà que ens servirà com a densitat angular a l'hora de treballar.

Es pot provar que una funció d'ordre no enter té creixement completament regular si i només si el seu conjunt de zeros té densitat angular. Per a funcions d'ordre enter (les que ens interessaran) el resultat és una mica més complicat, ja que ens cal la convergència de (4.1).

Teorema 4.9 (Levin,Pfluger)**.** *Sigui f una funció entera d'ordre enter p amb descomposició de Hadamard*

$$f(z) = z^m e^{b_0 + b_1 z + \cdots + b_p z^p} \prod G\Big(\frac{z}{a_n}, p\Big)$$

Suposem que el seu conjunt de zeros $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ té densitat angular i existeix el següent límit:

$$\delta_f = \lim_{r\to\infty} \delta_f(r), \qquad \delta_f(r) = b_p + \frac{1}{p} \sum_{|a_n|<r} a_n^{-p} \tag{4.2}$$

Aleshores f és té creixement completament regular i podem calcular la seva funció indicadora:

$$h_f(\theta) = \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi) \sin p(\psi - \theta)\, d\Delta(\psi) + \tau_f \cos p(\theta - \theta_f)$$

amb $b_p = \tau_f e^{i\theta_f}$. En aquestes condicions $\limsup_{r\to\infty} h_{f,r}(\theta)$ convergeix uniformement a $h_f(\theta)$ en quasi tot $[0, 2\pi]$.

És més, si f té creixement completament regular aleshores el seu conjunt de zeros compleix les condicions aquí esmentades.

4.2 L'espai de Fock i el cas $L^2(\mathbb{R})$.

Les eines que hem comentat en la secció anterior ens serviran per estudiar els conjunts de zeros de l'espai de Fock. Com ja hem enunciat en els preliminars, aquests estàn molt relacionats amb els conjunts Λ per als quals $T(\phi, \Lambda)$ és un sistema de generadors per a $L^2(\mathbb{R})$, que és el primer cas que tractarem. Comencem definint aquest espai.

Definició. Definim l'**espai de Fock** de funcions enteres com el conjunt de funcions:

$$\mathcal{F} = \left\{ f : f \text{ és entera i } \|f\|_{\mathcal{F}}^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\pi|z|^2}\, dm(z) < \infty \right\}$$

Aquest és un dels espais clàssics de funcions holomorfes. Ha estat molt estudiat des de diferents punts de vista. Per exemple estan caracteritzats els seus conjunts de mostreig i d'interpolació, que ens serà molt útil quan estudiem la transformada de Gabor. Però ara ens interessen els seus conjunts de zeros.

Definició. Direm que $\Lambda = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és un **conjunt de zeros** de l'espai de Fock si $\exists f \in \mathcal{F}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \qquad z \in \Lambda \\ f(z) &\neq 0 \qquad z \notin \Lambda \end{aligned}$$

És a dir, existeix $f \in \mathcal{F}$ tal que f s'anul.la a tot Λ i enlloc més.

La relació entre l'espai de Fock i els sistemes de traslladades de la gaussiana ens la dóna la transformada de Bargmann:

Definició. Donada $f \in L^2(\mathbb{R})$, definim la **transformada de Bargmann** de f com:

$$Bf(z) = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi tz - \pi t^2 - \frac{\pi}{2} z^2}\, dt$$

Teorema 4.10 (Bargmann)**.** *La transformada de Bargmann és un isomorfisme entre $L^2(\mathbb{R})$ i l'espai de Fock:*

$$\|Bf\|_{\mathcal{F}} = \|f\|_2$$

La demostració la podem trobar en [Fol89]. Si ara calculem aquesta transformada per a un valor $x \in \mathbb{R}$ veiem que:

$$Bf(x) = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi tx - \pi t^2 - \frac{\pi}{2} x^2}\, dt = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi\left((t-x)^2 - \frac{x^2}{2}\right)}\, dt$$

Per tant la transformada de Bargmann en l'eix real d'una funció f ens dóna el producte escalar d'aquesta funció amb una traslladada de la gaussiana ϕ, multiplicat per una constant que sempre és diferent de zero:

$$Bf(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{2} x^2} \langle f, \phi_x \rangle$$

Això ens diu que $Bf(x) = 0$ si i només si $\langle f, \phi_x \rangle = 0$. Com que $L^2(\mathbb{R})$ és un espai de Hilbert, fent servir dualitat podem provar el següent enunciat:

Proposició 4.11. *El conjunt $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ si i només si Λ no està inclós en un conjunt de zeros per a l'espai de Fock.*

Demostració. Fent servir dualitat tenim que $T(\varphi,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$ si i només si $\langle f,\varphi_\lambda\rangle = 0$ per a tot λ implica que $f = 0$. Com que la transformada de Bargmann és un isomorfisme, la darrera condició és equivalent a que $F(\lambda) = 0$ per a tot λ impliqui que $F = 0$ per a tota $F \in \mathcal{F}$. Però si Λ està en un conjunt de zeros tenim que existeix $F \in \mathcal{F}$, $F \neq 0$, amb $F(\lambda) = 0$ per a tot $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Aquesta relació justifica que ens interessem pels conjunts de zeros d'aquest espai. Zhu ja els va estudiar en [Zhu93], on provava els primers resultats que aquí enunciarem. També donava exemples que demostren que un subconjunt d'un conjunt de zeros no té perqué continuar sent-ho. Més tard, en [Tun05] es demostra que un conjunt d'interpolació tampoc és necessari que sigui de zeros per a Fock.

La fórmula de Jensen i la resta de resultats teòrics que hem recordat en la secció anterior ens relacionaven l'ordre de creixement d'una funció amb l'exponent de convergència i altres propietats del seu conjunt de zeros. La peça que ens manca per fer servir aquests teoremes ens la dóna el següent resultat.

Proposició 4.12 (Zhu)**.** *Si $f \in \mathcal{F}$ aleshores f té ordre com a molt 2 i si té ordre 2 té tipus com a molt $\frac{\pi}{2}$.*

Demostració. Definim:

$$f_w(z) = f(z+w)e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2-\pi z\overline{w}}$$

Amb aquesta definició tenim $f_w \in \mathcal{F}$ i a més $\|f_w\| = \|f\|$. Com que f_w és holomorfa tenim que $|f_w|^2$ és subharmònica i per tant:

$$\begin{aligned}
|f_w(0)|^2 = \left|f(w)e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2}\right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} &\left|f(re^{i\psi}+w)e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2-\pi re^{i\psi}\overline{w}}\right|^2 d\psi \\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty re^{-\pi r^2}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\psi}+w)e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2-\pi re^{i\psi}\overline{w}}\right|^2 d\psi \\
=&\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|f(z+w)e^{-\frac{\pi}{2}|w|^2-\pi z\overline{w}}\right|^2 e^{-\pi|z|^2}\,dz \\
=&\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}|f(z+w)|^2 e^{-\pi|z+w|^2}\,dz = \frac{1}{\pi}\|f\|^2
\end{aligned}$$

Per tant:

$$|f(w)| \leqslant \frac{1}{\pi^{1/2}}\|f\|e^{\frac{\pi}{2}|w|^2}$$

que ens demostra el resultat. $\square$

Observació. És fàcil veure que si una funció f té ordre menor estricte que 2 aleshores $f \in \mathcal{F}$, i si f té ordre 2 i tipus menor estricte que $\frac{\pi}{2}$ aleshores també pertany a $\mathcal{F}$. En canvi, entre les funcions d'ordre 2 i tipus $\frac{\pi}{2}$ n'hi han que estan a l'espai de Fock i altres que no.

Teorema 4.13 (Zhu)**.** *Si $\Lambda = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és un conjunt de zeros per a l'espai de Fock, aleshores l'exponent de convergència de Λ és menor o igual a 2. És a dir:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^{2+\varepsilon}} < \infty \qquad \forall\varepsilon > 0$$

Demostració. Si l'exponent de convergènciade $\{a_n\}$ és més gran que 2, el seu producte de Weierstass tindrà també ordre més gran que 2. Per tant qualsevol funció d'ordre finit que s'anul.li en $\{a_n\}$ haurà de tenir ordre més gran que 2 i no podrà pertànyer a l'espai de Fock. □

Això ja ens dóna una condició necessària per que un conjunt sigui de zeros per a l'espai de Fock. Donar condicions suficients tampoc costa gaire.

Teorema 4.14. *Sigui $\Lambda = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$$

aleshores Λ és un conjunt de zeros per a l'espai de Fock.

Demostració. Prenem directament el producte canònic del conjunt Λ. Si l'ordre de convergència és menor estricte que 2 aleshores el teorema de Borel 4.3 ens diu que l'ordre d'aquesta funció és menor estricte que 2. Per tant està a l'espai de Fock. En canvi, si l'ordre de convergència de Λ és exactament 2, com que és enter, podem fer servir el primer teorema de Lindelöf 4.5 que ens diu que la funció tindrà ordre 2 i tipus 0 i per tant també estarà en l'espai de Fock. □

La traducció d'aquests resultats a traves de la transformada de Bargmann ens donen automàticament condicions necessàries i suficients perquè un conjunt Λ generi amb la gaussiana.

Teorema 4.15 (Zalik)**.** *Considerem un conjunt discret $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. És condició necessària perquè un conjunt de funcions $T(\varphi, \Lambda)$ generi que:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda_n|^2} = \infty$$

És condició suficient que per algun $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda_n|^{2+\varepsilon}} = \infty$$

Demostració. Prenem les condicions necessàries i suficients perque un conjunt sigui de zeros per a l'espai de Fock i fem servir 4.11. □

Aquest resultat ja el trobem en [Zal78], on es prova fent servir tècniques properes a aquestes, però sense utilitzar l'isomorfisme amb l'espai de Fock.

Resta per estudiar el cas en que $\sum \frac{1}{|\lambda_n|^{2+\varepsilon}} < \infty$ per a tot $\varepsilon > 0$ però $\sum \frac{1}{|\lambda_n|^2} = \infty$. Aquest cas s'ha de tractar amb més cura. Aquests darrers resultats ens diuen que si l'exponent de convergència de Λ és més gran que 2, aleshores $T(\phi, \Lambda)$ genera i no pot estar contingut en cap conjunt de zeros de l'espai de Fock. I si és menor, aleshores no genera i pot ser conjunt de zeros. Queda el cas igual a 2, que és el crític i fins ara no havia estat estudiat.

4.3 Conjunts amb ordre de convergència 2.

Per estudiar el cas crític hem d'introduir un concepte que ens permeti diferenciar uns conjunts discrets d'altres. Les densitats definides en la primera secció jugaran aquest paper.

Els teoremes 4.13, 4.14 i 4.15 ens classifiquen tots els cassos llevat d'exponent de convergència igual a 2 i densitat més gran que 0. Fent servir la factorització de Hadamard podem veure que donat un conjunt Λ amb exponent de convergència 2 sempre podrem construir una funció d'ordre 2 tal que el seu conjunt de zeros sigui Λ. Estem interessats en quin serà el tipus d'aquesta funció, ja que això ens ajudarà a saber si està o no a l'espai de Fock.

En aquest sentit l'espai de Fock es comporta d'una manera molt particular i que complica molt l'estudi d'aquest problema. El principal entrebanc prové del fet que un subconjunt d'un conjunt de zeros per a l'espai de Fock no té que ser necessàriament un conjunt de zeros de l'espai de Fock [Zhu93]. Tot i això, podem donar restriccions sobre la densitat que pot tenir un conjunt de zeros.

Teorema 4.16. *Si Λ és un conjunt de zeros per a l'espai de Fock, aleshores $\Delta^+(\Lambda) \leqslant e\pi$ i $\Delta^-(\Lambda) \leqslant \pi$.*

Demostració. La funció indicadora d'una funció de l'espai de Fock està acotada per $\frac{\pi}{2}$. Si introduïm això en les teoremes 4.7 i 4.8 obtenim les cotes per a la densitat superior i la inferior respectivament de manera automàtica. □

Això ens diu que si un conjunt Λ té densitats per sobre d'aquests valors no podrà ser un conjunt de zeros ni estar contingut en cap d'ells. D'aquesta forma podem enunciar el següent resultat referent a generadors:

Teorema 4.17. *Sigui $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un conjunt discret. Si $\Delta^-(\Lambda) > \pi$ o $\Delta^+(\Lambda) > e\pi$ aleshores $T(\phi, \Lambda)$ és un sistema de generadors per a $L^2(\mathbb{R})$.*

Per a obtenir condicions necessàries ens mirarem els conjunts amb densitat angular, ja que aquests ens permeten calcular la funció indicadora de qualsevol funció que s'anul.li en aquests conjunt.

Si tenim un conjunt discret $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta^+(\Lambda) = \Delta^-(\Lambda) \neq 0$ i calculem:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{\lambda^2} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{|\lambda|^2} = \infty$$

El segon teorema de Lindelöf 4.6 ens diu que aquest conjunt no podrà ser mai un conjunt de zeros d'una funció de l'espai de Fock. La manera d'actuar en aquest cas serà construir una funció amb un conjunt de zeros Γ que inclogui aquest primer i de manera que es compleixi la condició (4.2) (de fet farem que $\delta_f = 0$). D'aquesta manera podrem calcular la funció indicadora i saber si la funció està en l'espai de Fock o no. Això ens servirà per donar condicions necessàries perquè $T(\phi, \Lambda)$ generi $L^2(\mathbb{R})$.

Lema 4.18. *Sigui $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt discret tal que:*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n^+(r)}{r^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{n^-(r)}{r^2} = \Delta$$

on n^+ i n^- són les funcions contadores de la part positiva i negativa de Λ respectivament, i estem demanant tant l'existència del límit com la coincidència.

Aleshores existeix una funció f entera d'ordre 2 i tipus $\pi\Delta$ tal que $f(\lambda) = 0$ per a tota $\lambda \in \Lambda$.

Demostració. Construïm el conjunt $\Gamma = \Lambda \cup e^{\frac{\pi}{2}i}\Lambda$. En les condicions de l'enunciat aquest conjunt té densitat angular

$$\Delta(\theta) = \Delta \sum_{k=0}^{3} \chi_{[\frac{k\pi}{2}, 2\pi)}(\theta)$$

A més,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma, |\gamma|<r} \frac{1}{\gamma^2} = 0 \qquad \forall r$$

ja que en el sumatori cada terme de la forma λ^{-2} amb $\lambda \in \Lambda$ ens el trobem amb signe positiu i negatiu i tenim cancel.lació. Estem per tant en condicions de fer servir teorema 4.9 amb la funció

$$f(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma} G\Big(\frac{z}{\gamma}, 2\Big)$$

Per aquesta funció $d\Delta(\theta) = \sum_{k=0}^{3} \delta_{\frac{k\pi}{2}}$ (estesa de manera 2π-periòdica) i podem calcular la seva funció indicadora:

$$h_f(\theta) = 2\pi\Delta \sin\theta \cos\theta$$

quan $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, i esten de manera $\frac{\pi}{2}$-periòdica a la resta de $[0, 2\pi]$. Com que

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi]} h_f(\theta) = \pi\Delta$$

veiem que f compleix les condicions de l'enunciat i s'anul.la en Λ. $\square$

Teorema 4.19. *Sigui $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt discret tal que $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$. Aleshores:*

$$\Delta^+(\Lambda^+) \geqslant \frac{1}{2} \quad \textit{ó} \quad \Delta^+(\Lambda^-) \geqslant \frac{1}{2}$$

Demostració. Suposem que tant $\Delta^+(\Lambda^+)$ com $\Delta^+(\Lambda^-)$ són menors que $\frac{1}{2} - \varepsilon$. Afegint punts podem construïr $\widetilde{\Lambda}$ tal que:

$$\Delta^+(\widetilde{\Lambda}^+) = \Delta^+(\widetilde{\Lambda}^-) = \frac{1}{2} - \varepsilon$$

El lema anterior ens diu que existeix una funció en l'espai de Fock (té tipus menor que $\frac{\pi}{2}$) que s'anul.la en Λ. L'isomorfisme de la transformada de Bargmann ens diu llavors que existeix una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ ortogonal a $T(\phi, \Lambda)$ i aquest no pot ser un sitema de generadors. $\square$

4.4 El cas $L^1(\mathbb{R})$.

L'isomorfisme que ens dóna la transformada de Bargmann només ens serveix per estudiar els sistemes de generadors per traslladades de la gaussiana quan l'espai en que treballem és $L^2(\mathbb{R})$. Si volem generalitzar els resultats obtinguts a altres espais $L^p(\mathbb{R})$ ens trobarem amb dos casos clarament diferents en funció de si busquem condicions necessàries o suficients.

Podem definir la transformada de Bargmann per a qualsevol funció de $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant \infty$, i veur que les funcions que obtenim són enteres, d'ordre com a molt 2 i tipus acotat per $\frac{\pi}{2}$. Com que l'única propietat de l'espai de Fock que hem fet servir per donar condicions era que estàvem sota aquests supòsits de creixement, aquest raonament ens permetrà generalitzar les condicions de suficiència a tots els $L^p(\mathbb{R})$.

Si ens interessem per les condicions necessàries la situació no és tan bona. Per provar aquestes el que fèiem era construir una funció en l'espai de Fock que s'anul.lava en un conjunt que no complís aquestes propietats. L'isomorfisme de la transformada de Bargmann ens deia llavors que existia una funció ortonormal al conjunt de traslladades. Això tan sols ho podrem fer a $L^2(\mathbb{R})$. Podrem generalitzar les condicions necessàries al cas $L^1(\mathbb{R})$ fent servir el teorema 1.4 i observant que la convolució d'una gaussiana amb ella mateixa torna a ser una altra gaussina.

Lema 4.20. *Sigui $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant \infty$. Aleshores la funció*

$$Bf(z) = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi tz - \pi t^2 - \frac{\pi}{2}z^2}\, dt$$

és una funció entera i

$$|Bf(z)| \leqslant \|f\|_p \|\phi\|_q e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}$$

amb $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demostració. Si ens mirem la transformada de Bargmann de f tenim que:

$$Bf(z) = e^{\frac{\pi}{2}z^2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi(t-z)^2}\, dt$$

que és una convolució de f amb una funció entera. Com que les integrals sempre estaran ben definides aquesta convolució defineix una funció entera en z per a tota f.

Per a l'acotació observem que:

$$e^{2\pi tz - \pi t^2 - \frac{\pi}{2}z^2} = e^{\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{-\pi(t-x)^2} e^{2\pi ity - \pi ixy}$$

i per tant:

$$|Bf(z)| \leqslant e^{\frac{\pi}{2}|z|^2} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \left| e^{-\pi(t-x)^2} \right| dt$$

Aquí apliquem Hölder i tenim l'acotació de l'enunciat. $\square$

Teorema 4.21. *Sigui $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un conjunt discret. Si $\Delta^-(\Lambda) > \pi$ o $\Delta^+(\Lambda) > e\pi$ aleshores $T(\phi, \Lambda)$ és un sistema de generadors per a $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Demostració. Fixem $1 \leqslant p < \infty$ i suposem que existeix $f \in L^q(\mathbb{R})$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t-\lambda)\, dt = 0 \qquad \forall \lambda \in \Lambda$$

Això és equivalent a l'existència d'una funció entera d'ordre 2 i tipus $\frac{\pi}{2}$ (o menor) que s'anul.la en Λ. Però fent servir els teoremes 4.7 i 4.8 veiem que sota les condicions de l'enunciat aquesta funció ha de ser nul.la i $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$. $\square$

Com ja hem comentat, les condicions necessàries només les podrem generalitzar al cas $L^1(\mathbb{R})$. Observem primer que si definim:

$$\phi_a(t) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-a\pi t^2}$$

quan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, fent servir la transformada de Fourier, podem veure que:

$$\phi_a * \phi_b(t) = \frac{(1-a)^{\frac{1}{2}}}{a} \phi(t)$$

Teorema 4.22. *Sigui $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ un conjunt discret tal que $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$. Aleshores:*

$$\Delta^+(\Lambda^+) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \Delta^+(\Lambda^-) \geqslant \frac{1}{2}$$

Demostració. Si $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^1(\mathbb{R})$, per a qualsevol $a > 1$ $T(\phi_a, \frac{1}{a}\Lambda)$ també genera. Fent convolució amb ϕ_b el teorema 1.4 ens diu que $T(\phi, \frac{1}{a}\Lambda)$ genera qualsevol $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$. En particular genera $L^2(\mathbb{R})$ i el teorema 4.19 dóna la condició:

$$\Delta^+(\frac{1}{a}\Lambda^+) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \Delta^+(\frac{1}{a}\Lambda^-) \geqslant \frac{1}{2}$$

Però com que $\Delta^+(\frac{1}{a}\Lambda^+) = \frac{1}{a^2}\Delta^+(\Lambda^+)$ i el mateix passa amb Λ^-. Com que això s'ha de complir per a tota $a > 1$ ja tenim la prova de l'enunciat. □

Com veiem, arrivem a les mateixes condicions, tan necessàries com suficients, per a Λ que en el cas $L^2(\mathbb{R})$. Donada la complicada estructura del conjunt de zeros de l'espai de Fock sembla difícil arrivar a una descripció completa dels conjunts que permeten generar. Aquesta descripcció hauria de dependre de la densitat del conjunt. Podriem intentar una descripció parcial restringint-nos tan sols a conjunts on les dues densitats (la superior i la inferior) coincideixin, però això no ens ajuda gaire, ja que pot estar contingut en un conjunt de zeros on aquestes no coincideixin.

Un problema que si que sembla més abastable és el següent:

Questió. $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ independentment de p?

És a dir, els conjunts Λ per als quals $T(\phi, \Lambda)$ genera $L^p(\mathbb{R})$ són els mateixos que en $L^q(\mathbb{R})$ per a qualssevol $1 \leqslant p, q < \infty$?

Quan ens miravem la Poisson aquest resultat era cert, però aquí de moment no podem donar una resposta. La transformada de Bargmann, que ens permet coneixer l'espai de fase, només ens dona una bijecció en $L^2(\mathbb{R})$. Tot i així sembla que ens pot donar una valuosa informació sobre la resta de espais de fase, quan treballem en $L^p(\mathbb{R})$ amb $p \neq 2$.

Part II

Marcs de $L^2(\mathbb{R})$.

Capítol 5

Transformada de Gabor.

5.1 Discretització en espais de fase de Gabor.

Com ja hem comentat en el primer capítol, introduïm la transformada de Gabor per tal d'aprofitar millor l'estructura d'espai de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$. En aquest cas ens interessarem en trobar bases i marcs en comptes de conjunts de generadors, ja que per aquests darrers no ens cal introduir modulacions, sinó que amb translacions en tenim prou.

Comentem primer les notacions que farem servir en aquest capítol, i que ja hem enunciat als preliminars. Quan treballem amb transformades de Gabor prendrem $z = x + iy \in \mathbb{C}$ escriurem

$$\rho(z)f(t) = f_z(t) = e^{2\pi iyt}f(t-x)$$

També farem servir la notació $dm(z) = dx\,dy$ per designar la mesura planar de $\mathbb{C}$. D'aquesta manera definim la transformada de Gabor d'una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ per a un àtom de Gabor analitzant $g \in L^2(\mathbb{R})$ com:

$$Gf(z) = \langle f, g_z \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi ity}\overline{g(t-x)}\,dt$$

El teorema 1.14 ens diu que $Gf \in L^2(\mathbb{C})$ i $\|Gf\| = \|f\|$, amb la següent fórmula de reconstrucció:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} Gf(z)g_z(t)\,dm(z) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Un cop fixem l'àtom analitzant g, el teorema 1.29 ens diu que el conjunt de funcions de $L^2(\mathbb{C})$ que són transformada d'alguna $f \in L^2(\mathbb{R})$ formen un subespai de Hilbert caracteritzat per un nucli reproductor. De manera explicita això ens diu que si

$$H = \left\{F(z) \in L^2(\mathbb{C}) : \exists f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ amb } F(z) = Gf(z) = \langle f, g_z \rangle\right\}$$

aleshores:

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{C}} F(z) e^{2\pi i x(y-y_0)} k(z_0 - z)\, dm(z)$$

amb $k(z) = \langle g, g_z \rangle$.Ja hem comentat en els preliminars que aquesta fórmula és el que s'anomena una convolució cargolada (*twisted convolution*).

Fent servir aquestes notacions podem deduir de manera ràpida que:

$$Gf_{z_0}(z) = \langle f_{z_0}, g_z \rangle = e^{2\pi i x_0(y_0-y)} \langle f, g_{z-z_0} \rangle = e^{2\pi i x_0(y_0-y)} Gf(z - z_0)$$

D'aquesta manera, per ser consistents amb la notació i la definició de la transformada, hem de definir les translacions en $\mathbb{C}$ d'una funció $F \in H$ (o en $L^2(\mathbb{C})$ de manera general) com:

$$F_{z_0}(z) = e^{2\pi i x_0(y_0-y)} F(z - z_0)$$

ja que en general la funció $F(z - z_0)$ pot no pertànyer a H. Tenint en compte això la fórmula de reproducció ens queda escrita de manera un xic més compacta:

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{C}} F(z) k_z(z_0)\, dm(z)$$

i a més tenim invariància de les normes:

$$\|F\| = \|F_{z_0}\| = \|f\| = \|f_{z_0}\|$$

si $F = Gf$.

Cal observar que aquestes translacions no coincideixen generalment amb la translació habitual de $\mathbb{C}$. Però si ens fixem en el mòdul de la funció (amb el que treballarem habitualment) si que hi ha igualtat:

$$|F_{z_0}(z)| = |F(z - z_0)|$$

A part de ser invariant per aquestes translacions, l'espai de fase té molt bones propietats de continuïtat. De fet, aquestes dues característiques estan molt relacionades. La invariància per translacions fa que les funcions de l'espai siguin uniformement contínues, amb uniformitat no tan sols respecte la distància dels punts, sinó també respecte a de funció. Formalitzem aquesta idea amb el següent resultat:

Proposició 5.1. *El mòdul de la transformada de Gabor és uniformement continu. És a dir, donat ε existeix δ tal que si $|z_1 - z_2| < \delta$, per a tota $F \in H$:*

$$F(z) = \langle f, g_z \rangle$$

es compleix que

$$\big||F(z_1)| - |F(z_2)|\big| < \|F\|\varepsilon = \|f\|\varepsilon$$

Demostració. Calculant directament i fent servir les propietats del producte escalar veiem que:

$$\begin{aligned}\big||F(z_1)| - |F(z_2)|\big| =&\big||F_{z_2}(z_1 - z_2)| - |F_{z_2}(0)|\big| \\ \leqslant&|F_{z_2}(z_1 - z_2) - F_{z_2}(z)| \\ =&|\langle f_{z_2}, g_{z_1 - z_2}\rangle - \langle f_{z_2}, g\rangle| \\ \leqslant&\|f_{z_2}\|\|g_{z_1-z_2} - g\| = \|f\|\|g_{z_1-z_2} - g\|\end{aligned}$$

i el resultat es dedueix de la continuïtat dels operadors de translació i modulació en $L^2(\mathbb{R})$. □

Observació. Modificant un xic la demostració es pot comprovar que F és contínua, i com que $F(z) \to 0$ quan $|z| \to \infty$ (això es pot deduir de la definició de la transformada directament, o de manera més senzilla, de que $|F| \in L^2(\mathbb{C})$ i és uniformement contínua) també podrem provar que F és uniformement contínua, però δ dependrà de F i no obtindrem un resultat tan bo com l'enunciat aquí.

Una propietat curiosa d'aquests espais és que en cap cas contenen funcions amb suport compacte.

Proposició 5.2. *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ un àtom de gabor i $f \in L^2(\mathbb{R})$ una funció qualsevol diferent de zero. Aleshores $Gf(z)$ no pot tenir mai suport compacte.*

Demostració. Aquest resultat és molt fàcil de provar per reducció a l'absurd. Suposem que $Gf(t)$ té suport compacte contingut, per exemple, en $[0,1] \times [0,1]$. Si ens mirem la fórmula

$$Gf(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi ity}\overline{g(t-x)\,dt}$$

com que $Gf(z) = 0$ per a tot y si $x \notin [0,1]$, podem afirmar que:

$$f(t)\overline{g(t-x)} = 0$$

com a funció per a tot $x \notin [0,1]$, ja que la seva transformada de Fourier és nul.la. Això ens diu que tant f com g tenen suport compacte. Pel teorema de Parseval:

$$Gf(z) = e^{2\pi ixy}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\widehat{g}(-\xi - y)\,d\xi$$

Fent un raonament idèntic a l'anterior deduim que també tenen suport compacte tant $\widehat{f}$ com $\widehat{g}$. Això és contradictori amb que g i f en tinguin i ja hem provat el resultat. □

No farem servir directament aquest resultat durant el nostre estudi, però ens ajuda a entendre un xic més l'estructura d'aquests espais. A més ens diu que prendre conjunts separats té possibilitats d'exit. Si existis alguna funció en l'espai de fase amb suport compacte i prenem un conjunt $\Lambda \subset \mathbb{C}$ separat, tan sols un nombre finit de traslladades g_λ no serien ortogonals a una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$. Això fa molt difícil que puguem generar f a partir de les traslladades g_λ amb $\lambda \in \Lambda$.

Tot i que cap funció pot tenir suport compacte, si que podem trobar àtoms per als quals existeixin funcions en l'espai de fase amb suport en una banda. Per exemple, si tant l'àtom g com f tene suport compacte, Gf estarà suportada en una banda vertical. El mateix ens passa amb transformades de Fourier amb suport compacte. I podem trobar àtoms amb molt bona localitzacio en temps i freqüència (els que ens interessen) amb suport compacte.

Habitualment el conjunt de zeros d'una funció de l'espai de fase serà una unió de corbes. És a dir, podem pensar que té dimensió 1. En els exemples anteriors, dins la banda on està suportada la funció Gf els zeros també solen comportar-se d'aquesta manera. Per exemple, prenem l'expresió del nucli reproductor de l'espai de fase de la funció de Poisson $P(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$, que es pot calcular explicitament per residus:

$$k(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{x} e^{-2\pi|y|} \left(\frac{1}{x+2i} + \frac{e^{-2\pi i x y}}{x-2i} \right) & \text{si } y \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{x} e^{-2\pi|y|} \left(\frac{1}{x-2i} + \frac{e^{-2\pi i x y}}{x+2i} \right) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Observem que el conjunt de zeros del nucli són corbes molt properes a hipèrboles. Existeix un cas on el conjunt de zeros és discret. Es tracta de l'espai de fase de la gaussiana, que tractarem en la propera secció. Podem pensar informalment està composat integrament de funcions enteres (ja formalitzarem aquesta idea més endavant). Però aquest cas sembla ser un accident. No es coneixen altres casos on això passi. En la darrera secció d'aquest capítol veurem que per a una classe d'àtoms molt bons podem provar que els conjunts de zeros de l'espai de fase tenen com a molt dimensió 1 i no sembla que es pugui millorar aquest resultat tret d'exemples molt particualrs (que encara no es coneixen i no està gens clar que existeixin).

En aquesta part del treball buscarem marcs de $L^2(\mathbb{R})$, que són una classe especial de sistemes de generadors. Per tant els conjunts discrets Λ que construirem esquiven en certa menera els conjunts de zeros (no estan mai continguts en ells). Això no serà una tasca gens senzilla ja que, com podem intuir dels exemples anteriors, aquest conjunts són molt grans en comparació amb els conjunts discrets que ens trobavem en el cas de translacions.

Estem interessats en estudiar quan un sistema $G(g, \Lambda)$ és una base o un marc de $L^2(\mathbb{R})$ per a un àtom de Gabor $g \in L^2(\mathbb{R})$ i un conjunt Λ. En aquest cas el conjunt serà uniformement discret (o separat) i estarà contingut en $\mathbb{C}$. Més endavant veurem perquè ens restringim a aquesta classe de conjunts. Ja hem comentat en el primer capítol que fixat g, degut a que $Gf(z) = \langle f, g_z \rangle$, $G(g, \Lambda)$ és un marc si i només si Λ és un conjunt de mostreig per a l'espai de fase de g. El que farem és estudiar aquest tipus de conjunts. Donarem condicions necessàries i suficients perquè un conjunt Λ sigui de mostreig. També estudiarem al mateix temps els conjunts d'interpolació dels espais de fase. Mostreig i interpolació són conceptes duals. Fixar-nos també en els segons ens permetrà entendre millor tant l'estructura dels espais com les particularitats del problema que estem estudiant.

Si ens mirem la condició de mostreig veiem que ens interessa acotar per sobre i per sota el sumatori

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |F(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \int_{\mathbb{C}} F(z) k_\lambda(z)\, dm(z) \right|^2$$

on hem introduït la fórmula de reproducció, ja que la idea és acotar aquest sumatori de manera independent de F. El pas següent serà passar els valors absoluts a l'interior de l'integral. Però això ens donarà una desigualtat que tan sols ens serà útil en una de les dues acotacions. Gran part de la feina d'aquest capítol serà intentar controlar la pèrdua d'informació en fer aquest pas.

La idea general serà obtenir una equivalència del tipus:

$$\|F\|^2 = \int_{\mathbb{C}} \left| \int_{\mathbb{C}} F(z) k_\lambda(z)\, dm(z) \right|^2 dm(\lambda) \approx \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \int_{\mathbb{C}} F(z) k_\lambda(z)\, dm(z) \right|^2$$

on veiem un altre cop que la fórmula de reconstrucció ens porta al problema d'analitzar quanta informació perdem en discretitzar el nucli (és a dir, a mostrejar-lo en un conjunt discret). El que farem és buscar condicions sobre el nucli reproductor k (o de manera equivalent, sobre g) per poder assegurar l'existència de conjunts de mostreig. Ens haurem de restringir a àtoms per als quals el nucli sigui integrable. És a dir, aquells àtoms que pertanyin a l'àlgebra de Feichtinger $\mathcal{A}$.

Un cop hàgim fixat un àtom analitzant $g \in \mathcal{A}$, intentarem donar condicions necessàries i suficients perquè un conjunt Λ sigui de mostreig en el corresponent espai de fase. De fet, quan provem l'existència de conjunts de mostreig ja estarem donant condicions suficients perquè un conjunt ho sigui.

Pel que fa a condicions necessàries només reproduirem les ja obtingudes per Ramanathan i Steger en [RaS95]. Aquestes ens caracteritzen els conjunts que poden ser de mostreig per algun espai de fase a partir de les seves densitats uniforme (que definirem més endavant). Aquest és un resultat molt fort, ja que la condició necessària no depèn de l'àtom que utilitzem per analitzar, i és necessària per tots els àtoms de $L^2(\mathbb{R})$ i no tan sols per l'àlgebra de Feichtinger.

5.2 Un altre cop l'espai de Fock.

L'exemple que donarem a continuació és el millor cas que ens podem trobar quan estudiem les bases i marcs de Gabor d'un àtom particular. Com hem dit abans, l'estudi d'aquests conceptes es correspon amb l'estudi dels conjunts de mostreig i interpolació del corresponent espai de fase.

Aquests conjunts han estat molt estudiats en diferents espais de funcions holomorfes. En aquesta secció estudiarem el cas particular d'un àtom on l'espai de fase es correspon amb l'espai de Fock de funcions holomorfes, amb el que ja hem treballat al capítol anterior. En aquest espai estan descrits els conjunts de mostreig i d'interpolació. Ens servirà d'excel.lent exemple per a l'estudi general. Repetirem les definicions i algunes de les propietats enunciades anteriorment per millorar la comprensió i que no sigui necessari consultar el capítol anterior.

Ens tornem a fixar en la funció gaussiana normalitzada:

$$\phi(t) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi t^2}$$

Calculant directament veiem que:

$$\phi_z(t) = 2^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i y t} \phi(t-x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{2\pi i t y - \pi (t-x)^2}$$

Introduïm aquest càlcul en la definició de transformada de Gabor.D'aquesta forma obtenim, per a tota $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$Gf(z) = \langle f, \phi_z \rangle = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i t y - \pi (t-x)^2} \, dt \tag{5.1}$$

Aquestes funcions les podrem pensar dins de l'espai de Fock. Recordem la definició que hem donat d'aquest espai:

Definició. Definim l'**espai de Fock** com el conjunt de funcions:

$$\mathcal{F} = \left\{ F : F \text{ és entera i } \|F\|_{\mathcal{F}}^2 = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\pi |z|^2} \, dm(z) < \infty \right\}$$

La relació d'aquest espai i $L^2(\mathbb{R})$ ens la dóna la transformada de Bargmann, que recordem a continuació.

Definició. Donada $f \in L^2(\mathbb{R})$, definim la **transformada de Bargmann** de f com:

$$Bf(z) = 2^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi t z - \pi t^2 - \frac{\pi}{2} z^2} \, dt$$

Aquesta transformada ens dóna un isomorfisme entre $L^2(\mathbb{R})$ i $\mathcal{F}$ [Fol89]. Per aquesta raó aquest espai s'anomena també l'espai de Bargmann-Fock. Si ara ens tornem a mirar (5.1) veiem que:

$$Gf(x+iy) = e^{-\frac{\pi}{2}|x+iy|^2} e^{-\pi ixy} Bf(x-iy)$$

o el que és el mateix:

$$Gf(\overline{z}) = e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{\pi ixy} Bf(z)$$

Per tant tenim que $e^{\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{-\pi ixy} Gf(\overline{z}) \in \mathcal{F}$, i per a tota funció $F \in \mathcal{F}$ existeix $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $Gf(\overline{z}) = e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{\pi ixy} F(z)$. A més podem provar:

$$\begin{aligned}
\|Gf(\overline{z})\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} |Gf(z)|^2 \, dm(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left| e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{\pi ixy} F(z) \right|^2 dm(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dm(z) = \|F\|^2_{\mathcal{F}}
\end{aligned}$$

La correspondència anterior és una isometria. D'aquesta manera podem pensar informalment que l'espai de fase de la gaussiana és l'espai de Fock. D'especial importància és la correspondència entre nuclis reproductors. El nucli reproductor de l'espai de Fock és:

$$k_{\mathcal{F}}(z, z_0) = e^{\pi z \overline{z_0}}$$

i el nucli reproductor de l'espai de fase de ϕ és:

$$k_\phi(z, z_0) = e^{-\frac{\pi}{2}(|z|^2 + |z_0|^2)} e^{\pi i(x_0 y_0 - xy)} e^{-\pi \overline{z} z_0}$$

Pensem-lo en una sola variable:

$$k_\phi(z) = e^{-\frac{\pi}{2}|z|^2} e^{-\pi ixy}$$

i d'aquesta manera obtenim que:

$$k_\phi(z, z_0) = e^{2\pi i x_0 (y_0 - y)} k_\phi(z)$$

En l'espai de Fock tenim una caracterització completa dels conjunts de mostreig i d'interpolació, que ha estat provada de manera independent en [Sei92], [SeW92] i [Lyu92]. En aquests treballs s'utilitza un concepte de densitat per diferenciar uns conjunts dels altres.

La manera de definir aquestes densitats és la següent: donat un conjunt uniformement discret $\Gamma = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, fixem un conjunt Q de mesura 1 i frontera de mesura 0 (podem pensar en una bola). Denotem per $n^-(r)$ i $n^+(r)$ respectivament el mínim i el màxim nombre de punts de Γ que podem trobar en qualsevol traslladat de rQ.

Definició. Definim les **densitats uniformes inferior i superior** com:

$$D^-(\Gamma) = \liminf_{r\to\infty} \frac{n^-(r)}{\pi r^2} \qquad D^+(\Gamma) = \limsup_{r\to\infty} \frac{n^+(r)}{\pi r^2}$$

En [Lan67] es prova que aquesta definició és independent de l'elecció de Q. La diferencia entre aquestes densitats i les que feiem servir en l'estudi dels conjunts d'unicitat d'aquest mateix espai és que ara prenem suprem i ínfim en boles centrades en qualsevol punt de $\mathbb{C}$, i no tan sols en l'origen. El que s'aconsegueix d'aquesta manera és fer més uniformes els arguments per provar que un conjunt és d'unicitat. D'aquesta menra es pot demostrar que un conjunt uniformement discret Γ és de mostreig si i només si $D^-(\Gamma) > \pi$ i és d'interpolació si i només si $D^+(\Gamma) < \pi$.

Com a conseqüència directa d'aquests resultats tenim que no existeixen conjunts que siguin de mostreig i d'interpolació a l'hora. O el que és el mateix, no existeixen bases de Riesz fent servir traslladades i modulades de la gaussiana. Aquest fet no és gaire bo si tenim en compte que les bases són representacions mínimes. Ens trobem que qualsevol representació estable de $L^2(\mathbb{R})$ mitjançant la gaussiana serà sempre redundant. Comentarem més endavant que si volem una caracterització només en termes de densitat sembla obligat que no existeixin bases.

En aquest cas particular podem aprofitar els resultats del capítol anterior, quan estudiaven els sistemes de generadors per translacions de la forma $T(\phi, \Lambda)$. Si ens mirem les condicions que obteniem sobre els conjunts de zeros d'una funció de l'espai de Fock podem enunciar:

Teorema 5.3. *Sigui ϕ la funció gaussiana i Λ un conjunt discret (no necessàriament de manera uniforme). Aleshores, si:*

$$\Delta^-(\Lambda) > \pi$$

o

$$\Delta^+(\Lambda) > e\pi$$

$G(\phi, \Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$.

Aquests resultats estan en consonància amb els que hem donat de mostreig i interpolació (pensem en conjunts on la densitat superior i inferior coincideixen), però no són ni de bon troç tan bons. En el cas de mosterig existeix una caracterització completa, que no podem assolir al estudiar els conjunts d'unicitat. Una de les raons és que no es pot evitar la condició de compensació dels zeros quan busquem conjunts d'unicitat.

5.3 Espais de fase de Gabor analítics.

El cas de la gaussiana és excepcional no tan sols perquè el seu espai de fase està format per funcions holomorfes. El tret que la fa més especial és que és l'únic àtom (mòdul translacions) amb aquesta propietat.

Per comoditat, a l'hora de provar aquest resultat, farem servir l'espai conjugat. Aquest és el mateix espai de fase, però avaluat en $\overline{z}$ i fent servir $\overline{g}$ en lloc de g per analitzar. Si ens mirem el cas de la gaussiana, les funcions que ens apareixien eren anti-holomorfes. Treballant d'aquesta forma l'enunciat serà consistent amb el què hem dit a l'apartat anterior.

Aquest canvi no ens introduirà cap diferència substancial respecte al cas habitual.

Teorema 5.4. *Considerem el conjugat de l'espai de fase d'un àtom de Gabor $g \in L^2(\mathbb{R})$:*

$$\overline{H} = \{F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi ity} g(t-x)\,dt,\ f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Aleshores aquest espai està composat de funcions holomorfes respecte a un pes si i només si g és una traslladada de la funció gaussiana.

Demostració. Suposem que existeix un $M(z) = M(x,y)$ tal que:

$$M(z)F(z) \in Hol(\mathbb{C}) \qquad \forall F \in \overline{H}$$

Aleshores

$$\overline{\partial} MF(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\partial}\big(M(z)e^{2\pi ity}g(t-x)\big)\,dt = 0 \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Aquest fet és equivalent a:

$$\overline{\partial}\big(M(z)e^{2\pi ity}g(t-x)\big) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Podem calcular aquesta derivada,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\big(M(z)e^{2\pi ity}g(t-x)\big) = \overline{\partial}\big(M(x,y)\big)e^{2\pi ity}g(t-x) - \frac{1}{2}M(x,y)e^{2\pi ity}g'(t-x)\\ -\pi t M(x,y)e^{2\pi ity}g(t-x)\end{aligned}$$

Això ens diu:

$$2\big(\overline{\partial}M(x,y) - M(x,y)\pi t\big)g(t-x) = M(x,y)g'(t-x)$$

on se'ns planteja una equació diferencial en g que no és difícil de resoldre. Si fem el canvi $t - x = w$ obtenim:

$$\frac{g'(w)}{g(w)} = 2\frac{\overline{\partial}M(x,y)}{M(x,y)} - 2\pi(w+x)$$

La solució és de la forma

$$g(w) = Ce^{-\pi(w+x)^2 + 2\frac{\overline{\partial}M}{M}w} = Ce^{-\pi\left[(w+x-\frac{1}{\pi}\frac{\overline{\partial}M}{M})^2 - (\frac{1}{\pi}\frac{\overline{\partial}M}{M})^2 + \frac{2x}{\pi}\frac{\overline{\partial}M}{M}\right]}$$

que és una traslladada de la gaussiana. $\square$

Observació. El pes tampoc pot ser qualsevol. La solució de l'equació diferencial ja ens diu que :

$$x - \frac{1}{\pi}\frac{\overline{\partial}M}{M} = C_1 \qquad -\left(\frac{1}{\pi}\frac{\overline{\partial}M}{M}\right)^2 + \frac{2x}{\pi}\frac{\overline{\partial}M}{M} - \pi\log C = C_2$$

ja que la funció g no pot dependre de x ni de y. En el cas de la gaussiana centrada al zero el pes és:

$$M(z) = e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}e^{-\pi ixy}$$

on $\overline{\partial}M(z) = \pi x M(z)$ i s'anul.len ambdos factors prenent $C = e^{-\pi x}$.

Quan diem que la solució és una traslladada de la gaussiana hem de comentar que admetem translacions complexes, o de manera equivalent, que poden ser translacions i modulacions amb parametre real.

Nota. Aquest resultat continua sent cert si demanem que l'espai estigui format per funcions quasi-regulars.

Aquest resultat és molt negatiu de cara als nostres interessos. Ens trobem que tret d'aquest cas que ja ha estat resolt, no podrem aplicar les técniques de l'analisi complexa al nostre problema. Això fa que els resultats que obtenim no són ni molt menys tan bons com els que s'han provat per la gaussiana.

5.4 Resultats de mostreig.

A partir d'ara H serà l'espai de fase d'un àtom de Gabor fixat g normalitzat de manera que $\|g\| = 1$. Si no diem el contari establirem com a conveni que $z, w \in \mathbb{C}$, amb $z = x + iy$ i $w = a + ib$, de manera que $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Utilitzarem la notació equivalent quan tinguem subíndexs. Recordem la definició de conjunts uniformement discrets, que anomenarem habitualment separats, que hem donat al primer capítol, adaptant-nos al cas que estem tractant.

Definició. Sigui $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. Direm que Γ és **uniformement discret** o **separat** si existeix $\varepsilon > 0$ tal que $|z_i - z_j| > \varepsilon\ \forall i \neq j$.

Ens referirem a ε com la **constant de separació** de Γ.

Per poder treballar còmodament és necessari que tots els conjunts que fem servir siguin separats. Els següents resultats van encarats a provar que aquests són els únics que ens interessen.

Lema 5.5. *Sigui $F \in H$ tal que $F(w) = 0$. Sigui $z \in \mathbb{C}$, aleshores:*

$$|F(w)|^2 \leqslant \|F\|^2\big(1 - |k_w(z)|^2\big) = \|F\|^2\big(1 - |\langle g_w, g_z\rangle|^2\big)$$

Demostració. Considerem H_w el conjunt de funcions de H que s'anul.len en w. Aquest és un subespai de Hilbert amb el següent nucli reproductor:

$$\Phi_{z_0}(z) = k_{z_0}(z) - k_{z_0}(w)k_w(z)$$

Per veure-ho hem d'observar primer que $\Phi_{z_0} \in H$ ja que és combinació lineal de funcions de H i $\Phi_{z_0}(w) = 0$ per a tot $z_0 \in \mathbb{C}$. Per tant $\Phi_{z_0} \in H_w$.

Si ara prenem $h \in H_w$ veiem que:

$$\langle h, \Phi_{z_0}\rangle = \langle h, k_{z_0}\rangle - k_{z_0}(w)\langle h, k_w\rangle = h(z_0)$$

És a dir, Φ_{z_0} reprodueix les funcions de H_w. Com que pertany a l'espai, és el seu nucli reproductor.

Com que F pertany a H_w apliquem la fórmula de reproducció en aquest espai.

$$\begin{aligned}|F(z)|^2 =& |\langle F, \Phi_z\rangle|^2 \leqslant \|F\|^2\langle \Phi_z, \Phi_z\rangle = \|F\|^2\Phi_z(z)\\ =& \|F\|^2\left(k_z(z) - \frac{k_z(w)}{k_w(w)}k_w(z)\right) = \|F\|^2\big(1 - |k_w(z)|^2\big)\end{aligned}$$

i obtenim el resultat. □

Teorema 5.6. *Sigui $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. Si Γ és un conjunt d'interpolació per a H es compleix que Γ és separat.*

Demostració. Pel teorema de la gràfica tancada, si Γ és d'interpolació, existeix $M > 0$ tal que $\forall\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix $F \in H$ amb $F(z_n) = a_n$ i $\|F\|^2 \leqslant M^2\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$. És a dir, podem realitzar la interpolació amb norma acotada.

Sigui $z_i \neq z_j$. Existeix $F \in H$ tal que $F(z_i) = 1$ i $F(z_j) = 0$ amb $\|F\| \leqslant M$. Aplicant 5.5 tenim que:

$$\begin{aligned}&1 = |F(z_i)|^2 \leqslant \|F\|^2(1 - |k_{z_i}(z_j)|^2) \leqslant M^2(1 - |k_{z_i}(z_j)|^2)\\ &\Rightarrow 1 - |k_{z_i}(z_j)|^2 \geqslant \frac{1}{M^2} \Rightarrow |k_{z_i}(z_j)|^2 \leq 1 - \frac{1}{M^2} = C < 1\end{aligned}$$

Això vol dir que si $i \neq j$, $|\langle g_{z_i}, g_{z_j}\rangle|^2 \leqslant C < 1$. Com que el mòdul del nucli és uniformement continu, aquest fet ens implica la condició de separació, ja que C no depèn de z_i i z_j. □

Ara sabem que tots els conjunts d'interpolació són separats, i només ens queda analitzar el cas dels conjunts de mostreig. Aquí la situació és un pèl diferent.

Teorema 5.7. *Sigui* $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$. *Si* Γ *és un conjunt de mostreig per a* H *es compleix que* Γ *és una unió finita de conjunts separats.*

Demostració. Com que Γ és de mostreig, $\exists C > 0$ tal que:

$$\sum_{\Gamma} |F(z_j)|^2 \leqslant C\|F\|^2 \tag{5.2}$$

Només ens caldrà aquesta desigualtat per provar el resultat. Ho farem per reducció a l'absurd. Que Γ no sigui unió finita de conjunts separats és equivalent a que per a tot N i tot δ podem trobar una bola de radi δ, diguem-li B, tal que $|\Gamma \cap B| > N$.

Com que $|k_{z_0}(z)|$ és uniformement contínua, $\exists\delta$ tal que:

$$\big||k_{z_0}(z_1)| - |k_{z_0}(z_2)|\big| < 1/2$$

si $|z_1 - z_2| < \delta$, on aquest δ no depèn de z_0.

Prenem aquest δ i $N > 4C$. Sigui B la corresponent bola de radi δ que conté N punts del conjunt. Si w és el centre de B, per la funció $k_w(z) \in H$ s'ha de complir (5.2):

$$\sum_{\Gamma} |k_w(z_j)|^2 \leqslant C\|k_w\|^2 = C$$

però per altra banda:

$$\sum_{\Gamma} |k_w(z_j)|^2 = \sum_{\Gamma\cap B^c} |k_w(z_j)|^2 + \sum_{\Gamma\cap B} |k_w(z_j)|^2 \geqslant \sum_{\Gamma\cap B} (1-1/2)^2 \geqslant N\frac{1}{4} > C$$

i ja tenim la contradicció. $\square$

Aquest resultat és el millor que podem aconseguir en el cas de conjunts de mostreig ja que existeixen conjunts de mostreig que no són separats. Per exemple podem unir dues xarxes regulars amb paràmetres diferents, cada una d'elles formant un marc, de manera que no tinguem separació.

Fins ara no hem demanat cap condició especial a l'àtom analitzant g. Però a partir d'aquí, per tal d'obtenir condicions suficients perquè un conjunt sigui de mostreig i en particular provar que n'existeixen, haurem de suposar que $g \in \mathcal{A}$. És a dir, que $k \in L^1(\mathbb{C})$. Recordem que en [FeG89] i [FeG89-2] es prova que si $g \in \mathcal{A}$ obtenim de manera gratuïta que la maximal local de k:

$$Mk(z) = \sup_{w\in B(z,1)} |k(w)|$$

també pertany a $L^1(\mathbb{C})$. Per tant tenim un extra d'integració que ens permet discretitzar.

Lema 5.8. *Sigui k tal que $Mk \in L^1(\mathbb{C})$ i $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un conjunt separat amb constant de separació ε. Aleshores:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |k(\lambda)| < \frac{\varepsilon^{-2}}{4\pi}\|Mk\|_1$$

Demostració. Suposem sense perdre generalitat que $\frac{\varepsilon}{2} < 1$. Si prenem dos punts diferents $\gamma, \lambda \in \Lambda$, com que $B(\gamma, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(\lambda, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$ podem acotar:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |k(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{|B(0,\frac{\varepsilon}{2})|}\int_{B(\lambda,\frac{\varepsilon}{2})} Mk(z)\,dm(z) \leqslant \frac{\varepsilon^{-2}}{4\pi}\int_{\mathbb{C}} Mk(z)\,dm(z)$$

que és el que volíem provar. □

Observació. De manera informal podem pensar que la cota que obtenim és independent de Λ ja que només intervé la seva constant de separació i no els punts que formen el conjunt.

Els següents resultats van adreçats a provar que un conjunt proper a un de mostreig també serà de mostreig. Aquest resultat ja s'obté fent servir la teoria de representacions de Feichtinger i Groshenig [FeG89][FeG89-2], però aquí farem servir altres tècniques, adaptant les idees de [OlS92] al cas de Gabor, que ens permeten donar cotes explícites depenent només de les constants de separació i de $\|Mk\|_1$. Aquesta millora ens permetrà provar que tot conjunt de mostreig conté un subconjunt separat que també és de mostreig. Aquest problema també s'ha estudiat en [SuZ01], [SuZ02], i [FeS06], on s'obtenen resultats similars, però fent servir altres tècniques, i en els dos primers, canviant el conjunt d'àtoms analitzant.

A mode d'exemple donem el següent resultat, que ens diu que si un conjunt és separat ja tenim l'acotació superior de l'operador de mostreig. La prova és senzilla però il.lustra molt bé les tècniques que farem servir al llarg d'aquesta secció.

Proposició 5.9. *Donats un àtom de Gabor analitzant $g \in \mathcal{A}$ i Γ un conjunt separat existeix $B > 0$ tal que:*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |F(\gamma)|^2 \leqslant B\|F\|^2 \quad \forall F \in H$$

Demostració. Calculant directament tenim que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma} |F(\gamma)|^2 &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\left|\int_{\mathbb{C}} F(z)\overline{k_\gamma(z)}\,dm(z)\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2|k_\gamma(z)|\,dm(z)\right)\left(\int_{\mathbb{C}} |k_\gamma(z)|\,dm(z)\right) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} |k(z-\gamma)|\,dm(z)\int_{\mathbb{C}} |k(z)|\,dm(z) \leqslant B\|F\|^2
\end{aligned}$$

ja que $\int_{\mathbb{C}} |k(z)|\, dm(z) < \infty$ perquè el nucli és integrable i

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |k(z-\gamma)| = \sum_{\lambda\in(z-\Gamma} |k(\lambda)|$$

ja que $z - \Gamma$ té la mateixa constant de separació que Γ i podem aplicar 5.8 per acotar independentment de z. $\square$

Observació. Com veiem a la prova, la constant d'acotació depèn de k en termes del seu valor absolut i no del quadrat. És a dir, depèn de $\|k\|_1$, tant discreta com contínua. És per aquesta raó que ens hem de limitar a l'estudi d'àtoms de l'àlgebra de Feichtinger.

Fent servir les mateixes idees ja podem provar el resultat que hem anunciat anteriorment. L'única innovació aquí rau en la manera de provar-lo, que ens permet donar cotes un xic més explícites que ens seran de gran utilitat més endavant.

Teorema 5.10. *Sigui $g \in \mathcal{A}$ un àtom de Gabor de l'àlgebra de Feichtinger. Donat $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunt de mostreig per a H existeix $\delta > 0$ tal que si $\Gamma = \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ compleix que $|z_j - w_j| < \delta\ \forall j$, Γ també és un conjunt de mostreig.*

Aquest resultat es dedueix de manera trivial del següent parell de lemes.

Lema 5.11. *Siguin $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ i $\Gamma = \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dos conjunts en $\mathbb{C}$. Aleshores es compleix que:*

$$\left| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(w_j)|^2\right)^{1/2} \right| \leqslant d_1 d_2 \|F\| \quad \forall F \in H$$

on d_1 i d_2 vénen definides per:

- $d_1^2 = \sup_j \int_{\mathbb{C}} |k_{z_j - w_j}(z) - k(z)|\, dm(z)$
- $d_2^2 = \sup_z \sum_{j\in\mathbb{N}} |k_{z_j}(z) - k_{w_j}(z)|$

Demostració. Calculant directament tenim que:

$$\left| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2\right)^{1/2} - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(w_j)|^2\right)^{1/2} \right| = \big|\|(F(z_j))_j\|_2 - \|(F(w_j))_j\|_2\big|$$

on $\|\cdot\|_2$ significa la norma de l^2, pensant $\big(F(z_j)\big)_j$ com a successió.

$$\begin{aligned}\big|\|(F(z_j))_j\|_2 - \|(F(w_j))_j\|_2\big| \leqslant & \big\|(|F(z_j)| - |F(w_j)|)_j\big\|_2 \\ = & \big\|(|F_{-w_j}(z_j - w_j)| - |F_{-w_j}(0)|)_j\big\|_2\end{aligned}$$

degut a la invariància per translacions de $|F|$. Introduïm ara la fórmula de reproducció,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(|F_{-w_j}(z_j-w_j)|-|F_{-w_j}(0)|\right)_j\right\|_2\\
&\qquad=\left\|\left(\left|\int_{\mathbb{C}}F_{-w_j}(z)\overline{k_{z_j-w_j}(z)}\,dm(z)\right|-\left|\int_{\mathbb{C}}F_{-w_j}(z)\overline{k(z)}\,dm(z)\right|\right)_j\right\|_2\\
&\qquad\leqslant\left\|\left(\int_{\mathbb{C}}F_{-w_j}(z)[\overline{k_{z_j-w_j}(z)}-\overline{k(z)}]\,dm(z)\right)_j\right\|_2\\
&\qquad\leqslant\left[\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{C}}|F_{-w_j}(z)||k_{z_j-w_j}(z)-k(z)|\,dm(z)\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

i d'aquesta forma hem transportat el problema a punts propers a 0 i afectant només al nucli reproductor. Podem ara utilitzar la desigualtat d'Schwartz,

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{C}}|F_{-w_j}(z)||k_{z_j-w_j}(z)-k(z)|\,dm(z)\right)^2\right]^{1/2}\\
&\leqslant\left[\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{C}}|F_{-w_j}(z)|^2|k_{z_j-w_j}(z)-k(z)|\,dm(z)\int_{\mathbb{C}}|k_{z_j-w_j}(z)-k(z)|\,dm(z)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Ara acotem per separat,

$$\int_{\mathbb{C}}|k_{z_j-w_j}(z)-k(z)|\,dm(z)\leqslant d_1^2$$

i per altra banda

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{C}}|F(z+w_j)|^2|k_{z_j-w_j}(z)-k(z)|\,dm(z)\\
&\qquad\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{C}}|F(z)|^2|k_{z_j-w_j}(z-w_j)-k(z-w_j)|\,dm(z)\\
&\qquad\leqslant\int_{\mathbb{C}}|F(z)|^2\sum_{j\in\mathbb{N}}|k_{z_j}(z)-k_{w_j}(z)|\,dm(z)\leqslant d_2^2\|F\|^2
\end{aligned}$$

i unint les dues cotes obtenim l'enunciat. □

Lema 5.12. *Sigui $\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunt separat, i suposem que $g\in\mathcal{A}$.*

Per a tot ε $\exists\delta$ tal que si $\Gamma=\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ compleix que $|z_j-w_j|\leqslant\delta$ $\forall j$ aleshores $d_1d_2\leqslant\varepsilon$, amb d_1 i d_2 definides com a 5.11.

Demostració. Primer veurem que podem fer d_1 tan petit com vulguem si Γ és prou propera a Λ. Per veure això escrivim:

$$\int_{\mathbb{C}} |k_{z_j-w_j}(z) - k(z)|\, dm(z) = \int_{\mathbb{C}} \Big| e^{2\pi i(x_j-a_j)(y_j-b_j-y)} k\big(z-(z_j-w_j)\big) - k(z)\Big|\, dm(z)$$

Com que k és integrable, existeix $R > 0$ tal que, si $|\alpha| < 1$,

$$\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |k(z-\alpha)| dm(z) < \frac{\varepsilon}{4}$$

D'aquesta manera, si assumim $\delta < 1$, tenim que:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} \Big| e^{2\pi i(x_j-a_j)(y_j-b_j-y)} k\big(z-(z_j-w_j)\big) - k(z)\Big|\, dm(z) \\
&= \int_{B(0,R)} \Big| e^{2\pi i(x_j-a_j)(y_j-b_j-y)} k\big(z-(z_j-w_j)\big) - k(z)\Big|\, dm(z) + \\
&\qquad + \int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} \Big| e^{2\pi i(x_j-a_j)(y_j-b_j-y)} k\big(z-(z_j-w_j)\big) - k(z)\Big|\, dm(z) \\
&\leqslant \int_{B(0,R)} \Big| e^{2\pi i(x_j-a_j)(y_j-b_j-y)} - 1\Big| \Big| k\big(z-(z_j-w_j)\big)\Big|\, dm(z) + \\
&\qquad + \int_{B(0,R)} \Big| k\big(z-(z_j-w_j)\big) - k(z)\Big|\, dm(z) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Per a la primera integral, fem servir que $|x_j - a_j|, |y_j - b_j| \leqslant |z_j - w_j|$. Com que $|y| < R$, triant δ prou petit podem aconseguir $\left| e^{2\pi i(x_j-a_j)(y_j-b_j-y)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{4\|k\|_1}$ per a tota $|y| < R$. Per a la segona integral només cal utilitzar que l'operador de translació és continu en $L^1(\mathbb{C})$.

Anem ara a acotar d_2. Si $\alpha = \sup_{i\neq j} |z_i - z_j|$ és la constant de separació de Λ, assumim $\delta < \frac{\alpha}{3}$, i és compleix que $|w_i - w_j| > \frac{\alpha}{3}$ $\forall i \neq j$. És a dir, $\frac{\alpha}{3}$ ens serveix de constant de separació tant per Λ com per Γ. De fet, $\Lambda_z = \{z - z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ i $\Gamma_z = \{z - w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ també tenen la mateixa constant de separació. Aquí podem aplicar 5.8 per provar que existeix $C = C(\frac{\alpha}{3})$ tal que $d_2 \leqslant 2C$.

Si ajuntem les dues parts veiem que d_2 està acotat per C quan prenem δ petit, i d_1 es pot fer tant petit com es desitgi agafant δ prou petit. Per tant $\exists\delta$ tal que si $|z_j - w_j| \leqslant \delta$ $\forall j$, es compleix que $d_1 d_2 < \varepsilon$. □

Podem comparar el teorema 5.10 amb els resultats d'estabilitat que teniem per bases de Riesz generals. Si ens fixem en 1.10 i 1.11 veiem que podem canviar el sistema, de manera que la suma de canvis no sigui gran. En 5.10 canviem una mica cada vector, però ho podem fer de manera uniforme. Això és molt millor, ja que la suma pot divergir i en canvi continuem tenint un marc. En aquest resultat no dfemanem independència perquè en lloc de bases tenim marcs.

Al teorema 5.7 vèiem que tot conjunt de mostreig era unió finita de conjunts separats, però els lemes anteriors ens permeten millorar bastant aquest resultat. La idea és que un conjunt de mostreig és una unió de varis conjunts molt propers, i els lemes 5.12 i 5.11 ens diuen que conjunts pròxims donen més o menys la mateixa informació sobre les funcions. És a dir, en un conjunt de mostreig no separat tenim informació repetida.

Teorema 5.13. *Suposem que* $g \in \mathcal{A}$ *i sigui* $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un conjunt de mostreig per a* H.

Γ *conté un subconjunt* $\widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ *tal que* $\widetilde{\Gamma}$ *és de mostreig i separat.*

Demostració. Com que Γ és de mostreig sabem per 5.7 que és una unió finita de conjunts separats, i que existeixen $A, B > 0$ tals que per a tota $F \in H$ es compleix que:

$$A\|F\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \leqslant B\|F\|^2$$

Per a tot δ (pensem en un δ molt petit) podem definir $\widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ de manera que si $\widetilde{\Gamma} = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es compleixi que:

- $B(w_i, \delta) \cap \widetilde{\Gamma} = \{w_i\}$
- $\cup_{i\in\mathbb{N}}\big(B(w_i,\delta) \cap \Gamma\big) = \Lambda$
- $|B(w_i, \delta) \cap \Gamma| \leqslant N$

on N és una constant que de fet es pot acotar pel nombre de conjunts separats que formen Γ. Tot això ho podem fer gràcies a que Γ és unió finita de separats. És a dir, el que fem és definir $\widetilde{\Gamma}$ de manera que $B(w_i, \delta)$ només conté a w_i dels punts de $\widetilde{\Gamma}$, tot $z_j \in \Gamma$ està contingut en alguna $B(w_i, \delta)$ per algun $w_i \in \widetilde{\Gamma}$, i cada una d'aquestes boles només conté un nombre finit acotat de punts de Γ. Podem pensar que cada z_j pertany només a una $B(w_i, \delta)$. Això no és cert, però podem assignar a cada z_j un únic w_i a l'hora de treballar.

Tenint en compte això podem escriure $\Gamma = \cup_{i\in\mathbb{N}}\{w_i^1, \dots, w_i^{N_i}\}$, de manera que:

- $w_i^1 = w_i \in \widetilde{\Gamma}$
- $w_i^k \notin \widetilde{\Gamma}$ si $k \neq 1$
- $w_i^k \in B(w_i, \delta)$
- $N_i \leqslant N \ \forall i$
- Els conjunts $\{w_i^k\}_{k=1}^{N_i}$ son disjunts en variar i

Amb aquesta notació calculem:

$$\begin{aligned}\sum_{z_j\in\Gamma}|F(z_j)|^2 &= \sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}\sum_{k=1}^{N_i}|F(w_i^k)|^2\\ &= \sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}\left[\sum_{k=1}^{N_i}\Big(|F(w_i^k)|^2-|F(w_i^1)|^2\Big)+N_i|F(w_i^1)|^2\right]\\ &\leqslant N\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i)|^2+\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}\sum_{k=1}^{N_i}\Big(|F(w_i^k)|^2-|F(w_i^1)|^2\Big)\end{aligned}$$

Si definim $w_i^k = w_i^1$ per a $N_i < k \leqslant N$ podem escriure:

$$\begin{aligned}&\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}\sum_{k=1}^{N_i}\Big(|F(w_i^k)|^2-|F(w_i^1)|^2\Big)\\ &\quad=\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}\sum_{k=1}^{N}\Big(|F(w_i^k)|^2-|F(w_i^1)|^2\Big)\\ &\quad=\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i^k)|^2-\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i^1)|^2\right]\\ &\quad=\sum_{k=1}^{N}\left[\Big(\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i^k)|^2\Big)^{1/2}+\Big(\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i^1)|^2\Big)^{1/2}\right]\\ &\qquad\qquad\left[\Big(\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i^k)|^2\Big)^{1/2}-\Big(\sum_{w_i\in\widetilde{\Gamma}}|F(w_i^1)|^2\Big)^{1/2}\right]\end{aligned}$$

El primer parèntesi el podem acotar per $2B^{1/2}\|F\|$, ja que són sumatoris de parcials de Γ. Per a acotar el segon parèntesi, en valor absolut, el que farem és aplicar 5.11 als conjunts $\{w_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{w_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$, que ens diu que:

$$\left|\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}}|F(w_i^k)|^2\Big)^{1/2}-\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}}|F(w_i^1)|^2\Big)^{1/2}\right|\leqslant d_1^k d_2^k\|F\|$$

on k no és un exponent sinó un índex, i d_1^k, d_2^k vénen definides per:

- $(d_1^k)^2 = \sup_{i\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{C}}|k_{w_i^k-w_i^1}(z)-k(z)|\,d\mu(z)$
- $(d_2^k)^2 = \sup_{z\in\mathbb{C}}\sum_{i\in\mathbb{N}}|k_{w_i^k}(z)-k_{w_i^1}(z)|$

Definim ara:

- $d_1 = \sup_k d_1^k$
- $d_2 = \sup_k d_2^k$

Podem acotar independentment de k:

$$\left| \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i^k)|^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i^1)|^2 \right)^{1/2} \right| \leqslant d_1 d_2 \|F\|$$

Si ajuntem totes les acotacions veiem que:

$$\begin{aligned} A\|F\|^2 \leqslant & \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \leqslant N \sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2 + \left| \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{N} \left(|F(w_i^k)|^2 - |F(w_i^1)|^2 \right) \right| \\ \leqslant & N \sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2 + 2NB^{1/2} d_1 d_2 \|F\|^2 \end{aligned}$$

Això implica

$$\frac{A - 2NB^{1/2} d_1 d_2}{N} \|F\|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2$$

Com que N, A i B són fixes, aplicant 5.9 i 5.12 tenim que existeix δ prou petit tal que $\widetilde{\Gamma}$, definida al principi, compleix que existeixen A', $B' > 0$ amb:

$$A'\|F\|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2 \leqslant B'\|F\|^2$$

és a dir, $\widetilde{\Gamma}$ és de mostreig. □

Observació. Aquest resultat ens diu que quan considerem àtoms de Gabor en l'àlgebra de Feichtinger, els únics conjunts discrets que ens interessen són els separats.

Els resultats que hem obtingut fins ara ens permeten comparar uns conjunts amb altres. Però no són útils a l'hora de dir-nos si un conjunt qualsevol és de mostreig o, sense demanar tant, provar-ne l'existència.

El següent pas és comparar la informació discreta amb la contínua, per acabar provant que conjunts que, parlant de manera informal, estan per tot el pla són de mostreig.

Lema 5.14. *Sigui $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que es compleix que $\forall j\ \exists V_j \subseteq \mathbb{C}$ (obert) de manera que $\mathbb{C} = \cup_{j\in\mathbb{N}} \overline{V_j}$, amb $z_j \in V_j$ i $\cup_{j\in\mathbb{N}}(V_j - z_j) \subseteq V$ compacte, $V_j \cap V_k = \emptyset$. Aleshores es compleix que:*

$$\left| \|F\| - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2 \right)^{1/2} \right| \leqslant d_1' d_2' \|F\|$$

on:

- $d_1' = \left(\sup_{z\in V}\int_{\mathbb{C}} |k_z(w) - k(w)|\, dm(w)\right)^{1/2}$

- $d_2' = \Big(\sup_{w\in\mathbb{C}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j} |k_w(z) - k_w(z_j)|\, dm(z)\Big)^{1/2}$

i c_j és l'àrea de V_j.

Demostració. Calculant directament:

$$\begin{aligned}
&\left|\|F\| - \Bigg(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j|F(z_j)|^2\Bigg)^{1/2}\right|^2 = \left|\|F\| - \left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{V_j}(z)|F(z_j)|\right\|\right|^2 \\
\leqslant &\left\| |F(z)| - \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{V_j}(z)|F(z_j)| \right\|^2 = \left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} (|F(z)| - |F(z_j)|)\chi_{V_j}(z)\right\|^2 \\
= &\int_{\mathbb{C}} \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} (|F(z)| - |F(z_j)|)\chi_{V_j}(z)\right|^2 dm(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} \big||F(z)| - |F(z_j)|\big|^2\, dm(z)
\end{aligned}$$

Ara hem de tenir en compte que V_j és un entorn de z_j, i per tant $V_j - z_j$ és un entorn de 0, que a més hem de recordar que està contingut en V. Escrivim $F_{-z_j}(z) = \langle f_{-z_j}, g_z\rangle$. Es compleix que $|F(z)| = |F_{-z_j}(z - z_j)|$ i $\|F\| = \|F_{-z_j}\|$. Si tenim en compte això, podem escriure:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} \big||F(z)| - |F(z_j)|\big|^2 dm(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j - z_j} \big||F_{-z_j}(z)| - |F_{-z_j}(0)|\big|^2 dm(z) \\
\leqslant &\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j - z_j} \big|F_{-z_j}(z) - F_{-z_j}(0)\big|^2 dm(z) \\
\leqslant &\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j - z_j} \left(\int_{\mathbb{C}} |F_{-z_j}(w)||k_z(w) - k(w)|\, dm(w)\right)^2 dm(z) \\
= &\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j - z_j} \left[\int_{\mathbb{C}} |F_{-z_j}(w)|^2 |k_z(w) - k(w)| dm(w) \int_{\mathbb{C}} |k_z(w) - k(w)| dm(w)\right] dm(z)
\end{aligned}$$

Acotem cada part per separat. Si tenim en compte que $z \in V_j - z_j$ i que $V_j - z_j \subseteq V$, podem escriure:

$$\int_{\mathbb{C}} |k_z(w) - k(w)|\, dm(w) \leqslant \sup_{z\in V} \int_{\mathbb{C}} |k_z(w) - k(w)|\, dm(w) = (d_1')^2$$

Només falta la segona part:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j-z_j}\int_{\mathbb{C}}|F_{-z_j}(w)|^2|k_z(w)-k(w)|\,dm(w)\,dm(z)\\
&\quad=\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j-z_j}\int_{\mathbb{C}}|F(w+z_j)|^2|k_z(w)-k(w)|\,dm(w)\,dm(z)\\
&\quad=\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j-z_j}\int_{\mathbb{C}}|F(w)|^2|k_z(w-z_j)-k(w-z_j)|\,dm(w)\,dm(z)\\
&\quad=\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j-z_j}\int_{\mathbb{C}}|F(w)|^2\left|e^{2\pi i x_j b}k_{z+z_j}(w)-e^{2\pi i x_j b}k_{z_j}(w)\right|\,dm(w)\,dm(z)\\
&\quad=\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j}\int_{\mathbb{C}}|F(w)|^2|k_z(w)-k_{z_j}(w)|\,dm(w)\,dm(z)\\
&\quad=\int_{\mathbb{C}}|F(w)|^2\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j}|k_w(z)-k_w(z_j)|\,dm(z)\,dm(w)\leqslant(d_2')^2\|F\|^2
\end{aligned}$$

que és el que volíem demostrar. □

En aquest lema podem pensar que V és una bola tancada de centre 0. Si el radi de V és prou petit, que significa que el conjunt és prou dens, estem en condicions de provar que Γ és de mostreig quan $g\in\mathcal{A}$.

Teorema 5.15. *Sigui H un espai de fase d'un àtom de Gabor $g\in\mathcal{A}$. Existeix δ tal que si $\Gamma=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ és un conjunt separat complint les condicions de 5.14 amb V contingut en $B(0,\delta)$, llavors Γ és de mostreig per H.*

Demostració. El que farem és acotar d_2' i fer d_1' tant petita com vulguem en 5.14. Per a d_2', fixem $w\in\mathbb{C}$ i tenim que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j}|k_w(z)-k_w(z_j)|\,dm(z) &\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j}|k_w(z)|\,dm(z)+\sum_{j\in\mathbb{N}}|V_j||k_w(z_j)|\\
&\leqslant\|k\|_1+\sum_{j\in\mathbb{N}}|V_j|\frac{1}{|V_j|}\int_{V_j}|Mk(z-w)|\,dm(z)\\
&=\|k\|_1+\|Mk\|_1
\end{aligned}$$

si $\delta\leqslant 1$. Per tant $d_2'\leqslant\left(\|k\|_1+\|Mk\|_1\right)^{1/2}$.

Per a d_1' fixem $z\in V$ i calculem:

$$\int_{\mathbb{C}}|k_z(w)-k(w)|\,dm(w)=\int_{\mathbb{C}}\left|e^{2\pi i b x}k(w-z)-k(w)\right|\,dm(w)$$

Com que $k \in L^1(\mathbb{C})$, existeix R prou gran de manera que, per a tot $z \in V$:

$$\int_{\mathbb{C}\setminus B(0,R)} |k(w-z)|\, dm(w) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} \tag{5.3}$$

D'aquesta manera tenim que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |k_z(w) - k(w)|\, dm(w) &\leqslant \int_{B(0,R)} \left| e^{2\pi i x(y-b)} k(w-z) - k(w) \right| dm(w) + \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &\leqslant \int_{B(0,R)} \left| e^{2\pi i x(y-b)} - 1 \right| |k(w-z)|\, dm(w) \\ &\quad + \int_{B(0,R)} |k(w-z) - k(w)|\, dm(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}\end{aligned}$$

Ara, com que $w \in B(0,R)$ tenim que $|b| < R$, i de manera equivalent $|x|, |y| < \delta$. Per tant, si agafem δ prou petit, tenim que $\left|e^{2\pi i x(y-b)} - 1\right| < \frac{\|k\|_1 \varepsilon^2}{4}$, que ens arregla la primera integral. La segona la podem fer més petita que $\frac{\varepsilon^2}{4}$ triant δ petit per la continuïtat de l'operador de translació en $L^1(\mathbb{C})$. Si ajuntem tot això es dedueix que si δ és prou petit podem aconseguir $d_1' < \varepsilon$ per a qualsevol $\varepsilon > 0$. Per tant, aplicant 5.14 veiem que:

$$\left| \|F\| - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2 \right)^{1/2} \right| < \varepsilon(\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2} \|F\|$$

Agafem δ tal que $\varepsilon\big(\|k\|_1 + \|Mk\|_1\big)^{1/2} < 1$ i obtenim:

$$\begin{aligned}\left(1 - \varepsilon(\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2}\right) \|F\| &\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(1 + \varepsilon(\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2}\right) \|F\|\end{aligned}$$

Ara només cal definir A i B de manera que

$$A = \frac{\big(1 - \varepsilon(\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2}\big)^2}{\sup_j\{c_j\}}$$

i

$$B = \frac{\big(1 + \varepsilon(\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2}\big)^2}{\inf_j\{c_j\}}$$

i ja ens queda que:

$$A\|F\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \leqslant B\|F\|^2$$

Tant $\sup_j\{c_j\}$ com $\inf_j\{c_j\}$ estan acotats i són més grans que 0. $\square$

Observació. No hem fet servir 5.9 per la desigualtat dreta.

Tan sols ens cal una manera més senzilla de reconèixer els conjunts que estan sota les condicions de 5.14, que són els conjunts separats que estan per tot arreu.

Lema 5.16. *Sigui* $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un conjunt separat tal que* $\exists\delta$ *amb la propietat que* $\forall z \in \mathbb{C}$, $B(z,\delta)\cap\Gamma \neq \emptyset$.

Aleshores Γ *compleix les condicions de 5.14*

Demostració. Com que Γ és separat només cal veure que $\exists V_j$ oberts, amb $V_j \cap V_k = \emptyset$ si $j \neq k$, $\mathbb{C} = \cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{V_j}$, $(V_j - z_j) \subseteq V$ compacte i $|\cap_{j\in\mathbb{N}}(V_j - z_j)| > 0$.

Per això definim, si ε és la constant de separació de Γ, $b_j = \overline{B(z_j, \frac{\varepsilon}{2})}$, $B_j = B(z_j,\delta)$. Definim ara els V_j:

- $V_1 = B_1 \setminus \cup_{j\neq 1} b_j$
- $V_k = B_i \setminus (\cup_{j\neq k} b_j) \bigcup \overline{\left(\cup_{j=1}^{k-1} B_i\right)}$

Observem primer que en cada compacte de $\mathbb{C}$ totes aquestes unions i interseccions són finites, i per tant la unió és tancada. Això ens diu que els V_j són tots oberts, i per construcció són disjunts.

Com que $B_j \subseteq \cup_{k=1}^{j}\overline{V_k}$, i tot z està en algun B_j, ja tenim que $\cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{V_j} = \mathbb{C}$. Com que $V_j \subseteq B_j \Rightarrow (V_j - z_j) \subseteq (B_j - z_j) = B(0,\delta) \subseteq \overline{B(0,\delta)}$ que és compacta. Per construcció, $B(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq (V_j - z_j)$ i obtenim la darrera condició. ☐

Unint els dos darrers resultats ens queda una condició totalment geomètrica suficient perquè un conjunt sigui de mostreig.

Teorema 5.17. *Sigui* H *l'espai de fase d'un àtom de Gabor* $g \in \mathcal{A}$. *Existeix* δ *tal que si* Γ *és un conjunt separat tal que* $B(z,\delta)\cap\Gamma \neq \emptyset$ $\forall z$ *aleshores* Γ *és de mostreig per a* H.

5.5 La condició necessària de Ramanathan-Steger.

El darrer resultat de la secció anterior ens diu que un conjunt prou dens, on qualsevol bola petita sempre conté algun punt del conjunt, és de mostreig. El resultat que donem a continuació, que podem trobar en [RaS95], va en l'altra direcció. Ramanathan i Steger obtenen un resultat de comparació que diu que tot conjunt de funcions complet (amb algunes restriccions) prové d'un conjunt de punts amb densitat més gran que qualsevol conjunt que generi una base de Riesz.

Una de les particularitats d'aquest resultat és que utilitza la mateixa noció de densitat que fèiem servir en l'espai de Fock, i que serveix per classificar els conjunts de mostreig i interpolació en aquell espai.

Donem aquí les definicions i resultats concrets, ometent les demostracions, a títol informatiu i per la gran importància que aquests tenen en l'estudi del problema que en aquest capítol tractem.

Recordem la definició de densitat d'un conjunt en $\mathbb{C}$ que ja hem donat quan ens miràvem l'espai de Fock. Donat un conjunt discret $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$, denotem per $n^+(r)$ el nombre màxim de punts de Γ que hi ha en una bola de radi $r\pi^{\frac{1}{2}}$ en fer variar el centre per tot $\mathbb{C}$, i $n^-(r)$ el nombre mínim (el factor $\pi^{\frac{1}{2}}$ és per mantenir la mateixa normalització que en [RaS95] però no és consistent amb la que hem donat a la secció 5.2).

Definició. Definim la **densitat superior uniforme** de Γ com:

$$D^+(\Gamma) = \limsup_{r\to\infty} \frac{n^+(r)}{r^2}$$

Definició. Definim la **densitat inferior uniforme** de Γ com:

$$D^-(\Gamma) = \liminf_{r\to\infty} \frac{n^-(r)}{r^2}$$

Si les dues densitats coincideixen direm que Γ té densitat uniforme. És fàcil veure que una xarxa regular de la forma $\{am + ibn\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ té densitat uniforme $\frac{1}{ab}$.

Per aquest tipus de xarxes sabem que no poden donar lloc a marcs (ser conjunts de mostreig) si $D^+(\Gamma) = D^-(\Gamma) < 1$. El que veurem és que aquest resultat es pot generalitzar a conjunts qualssevol.

Definició. Suposem que el conjunt $G(\varphi, \Gamma)$ és complet per a un àtom de Gabor $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ i un conjunt discret $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$. Direm que $G(\varphi, \Gamma)$ té la **propietat d'aproximació homogènia uniforme** si per a qualsevol f fixada i qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un $R > 0$ tal que per a qualsevol $z_0 \in \mathbb{C}$, f_{z_0} pot ser aproximada amb error menor que ε en norma L^2 per un vector de l'espai generat per:

$$\{f_z : z \in \Gamma \cap B(z_0, R)\}$$

Teorema 5.18 (Ramanathan-Steger)**.** *Siguin Γ i Λ conjunts discrets. Suposem que existeixen dues funcions $\phi, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tals que $G(\phi, \Gamma)$ és una base de Riesz i $G(\varphi, \Lambda)$ és complet i té la propietat d'aproximació uniforme.*

i) Si Γ i Λ tenen densitats superiors uniformes donades per $D^+(\Gamma)$ i $D^+(\Lambda)$ aleshores:

$$D^+(\Gamma) \leqslant D^+(\Lambda)$$

ii) Si Γ i Λ tenen densitats inferiors uniformes donades per $D^-(\Gamma)$ i $D^-(\Lambda)$ aleshores:

$$D^-(\Gamma) \leqslant D^-(\Lambda)$$

Aquest resultat és molt interessant perquè ens permet comparar sistemes de Gabor generats per dues funcions distinctes i dos conjunts discrets diferents. Observem que no s'ha demanat cap condició especial als àtoms de Gabor. La prova que trobem en [RaS95] tan sols utilitza àlgebra lineal i fa que el resultat sigui fàcilment exportable a altres camps similars.

Només cal saber ara quins sistemes compleixen la condició d'aproximació uniforme. En [RaS95] es donen varis resultats en aquesta direcció que reproduïm a continuació.

Teorema 5.19 (Ramanathan-Steger)**.** *Suposem que $G(\varphi, \Lambda)$ és complet per a $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ i Λ una xarxa regular. Aleshores $G(\varphi, \Lambda)$ té la propietat d'aproximació uniforme.*

Aquest resultat, juntament amb el fet que coneixem bases de Riesz generades per conjunts amb densitat 1, permet millorar els resultats existents. Podem afirmar que no tan sols no existeixen marcs provinents d'una xarxa amb $ab > 1$, sinó que tampoc trobarem sistemes complets.

Teorema 5.20 (Ramanathan-Steger)**.** *Sigui $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ un conjunt separat. Suposem que, per a $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $G(\varphi, \Gamma)$ és un marc. Aleshores $G(\varphi, \Gamma)$ té la propietat d'aproximació uniforme.*

Aquest resultat ens diu que tots els conjunts de mostreig tenen densitat més gran que 1. Obtenim també el següent corol.lari:

Corol.lari 5.21. *Sigui Γ un conjunt separat i $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $G(\varphi, \Gamma)$ és una base de Riesz. Aleshores Γ té densitat uniforme:*

$$D^+(\Gamma) = D^-(\Gamma) = 1$$

No podem afirmar que, si $D^+(\Gamma) = D^-(\Gamma) = 1$, Γ només generi bases de Riesz, ja que si a un conjunt li afegim un punt aquestes densitats no varien.

En [RaS95] és conjecturava que $D^+(\Gamma) < 1$ implicava que $G(\varphi, \Gamma)$ és incomplet per a tota $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, però això és fals, ja que els generadors per translacions són casos particulars de sistemes de Gabor i podem trobar exemples de conjunts complets amb $D^+(\Gamma) = D^-(\Gamma) = 0$.

Aquests resultats estan generalitzats en [CDH99] a vàries dimensions i amb unions de xarxes que fan servir diferents àtoms. També tenim extensions del concepte d'aproximació uniforme a altres tipus de marcs (per exemple el marc dual d'un marc de Gabor). Podem trobar un bon resum d'aquesta classe de conceptes i les seves aplicacions a [BCHL06].

5.6 Un resultat d'interpolació.

El que farem en aquest apartat és donar un resultat sobre interpolació en espais de fase, inspirat en [Dya94], on direm que un conjunt prou separat és d'interpolació.

Teorema 5.22. *Sigui g un àtom de Gabor de l'àlgebra de Feichtinger. Aleshores existeix R_0 tal que tot conjunt $\Gamma = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ amb constant de separació més gran que $2R_0$ és d'interpolació per H, l'espai de fase de g.*

Aquest R_0 és de fet el mínim R tal que:

$$\int_{B(O,R)} |k(z)|\, dm(z) \geqslant \frac{1}{2}\|k\|_1$$

Si $R = R_0$ la integral anterior val $\frac{1}{2}\|k\|_1$ per continuïtat.

Demostració. Recordem que un conjunt $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ era d'interpolació per a H si per a qualsevol successió de valors $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ existia una funció $F \in H$ tal que $F(z_j) = a_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Això és equivalent a veure que existeix $F \in H$ tal que:

$$\int_{\mathbb{C}} F(z)k(z, z_j)\, dm(z) = \langle F, k_{z_j}\rangle = a_j \qquad \forall j \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

Si prenem $\phi \in L^2(\mathbb{C})$ resulta que:

$$\widetilde{\phi}(z) = \int_{\mathbb{C}} \phi(w)\overline{k(z, w)}\, dm(w) \in H$$

De fet $\widetilde{\phi}$ és la projecció ortogonal de ϕ en H. Observem que:

$$\langle \phi, k_{z_j}\rangle = \langle \widetilde{\phi}, k_{z_j}\rangle \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

i resulta que resoldre el problema (5.4) per a una funció $F \in H$ és equivalent a trobar una $\phi \in L^2(\mathbb{C})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{C}} \phi(z)\overline{k(z_j, z)}\, dm(z) = \langle \phi, k_{z_j}\rangle = a_j \qquad \forall j \in \mathbb{N} \tag{5.5}$$

Això no és estrany, ja que el fet de que $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sigui un conjunt d'interpolació és equivalent a que el conjunt de funcions $\{k_{z_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ sigui linealment independent, i aquest fet no depèn de si ens ho mirem a H o a tot $L^2(\mathbb{C})$.

Per tant el que volem és veure que si Γ compleix les condicions de l'enunciat podem assegurar que per a tota successió $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ existeix $\phi \in L^2(\mathbb{C})$ que resol (5.5).

Per estudiar aquest problema anomenem:

$$\alpha = \int_{\mathbb{C}} |k(z)|\, dm(z) = \int_{\mathbb{C}} |k_w(z)|\, dm(z) = \|k\|_1$$

Donada una successió $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$, considerem la següent funció:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha} \frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} \chi_{B_k}(z)$$

on les B_k seran boles de centre z_k i radi $R > R_0$ la meitat de la constant de separació de Γ. Definim $\frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} = 1$ si $k_{z_k}(z) = 0$. Hem triat R de manera que les B_k són disjuntes. D'aquesta forma és clar que $f \in L^2(\mathbb{C})$. Si ara calculem tenim que:

$$\langle f, k_{z_j} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} c_k$$

amb els b_{jk} definits com:

$$b_{jk} = \int_{B_k} \frac{1}{\alpha} \frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} \overline{k_{z_j}(z)}\, dm(z)$$

Ara definim el següent operador:

$$\begin{aligned} T : l^2 &\longrightarrow l^2 \\ (c_k)_k &\longmapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} c_k \right)_j \end{aligned}$$

Per veure que aquest és un operador acotat només cal calcular:

$$\Big\| T\big((c_k)_k\big) \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} c_k \Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{jk}| \sum_{k=1}^{\infty} |b_{jk}| |c_k|^2 \Big)$$

Per una part tenim que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{jk}| = \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \int_{B_k} \frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} \frac{\overline{k_{z_j}(z)}}{\alpha}\, dm(z) \Big| \leqslant 1$$

Per una altra banda veiem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{jk}| |c_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |b_{jk}| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \int_{B_k} \frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} \frac{\overline{k_{z_j}(z)}}{\alpha}\, dm(z) \Big| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_k} \frac{|k(z - z_j)|}{\alpha}\, dm(z) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_k - z_j} \frac{|k(w)|}{\alpha}\, dm(w) \leqslant \|(c_k)_k\|^2 \end{aligned}$$

Per tant l'operador T té norma menor o igual a 1. El pas següent és comprovar que aquest operador és invertible. Ho farem veient que $\|Id - T\| < 1$.

$$\begin{aligned}\|Id - T\|^2 &= \sup_{\|(c_k)_k\|=1} \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_{jk} - b_{jk}) c_k \Big|^2 \\ &\leqslant \sup_{\|(c_k)_k\|=1} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{jk} - b_{jk}| \sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{jk} - b_{jk}| |c_k|^2 \Big)\end{aligned}$$

Ens hem de mirar aquesta expresió per parts. Observem primer que $b_{jj} \geqslant 0$ i no depèn de j i que $\sum_j |b_{jk}| \leqslant 1$ i $\sum_k |b_{jk}| \leqslant 1$. Tenint en compte això veiem que, fixat j:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{jk} - b_{jk}| = 1 - 2b_{jj} + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{jk}| \leqslant 2(1 - b_{jj})$$

Per una altra banda tenim, fixat k:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\delta_{jk} - b_{jk}| = 1 - 2b_{kk} + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{jk}| \leqslant 2(1 - b_{kk})$$

Anomenem $\beta = b_{jj}$, que recordem que no depèn de j. Ara sumem aquestes acotacions per arrivar a:

$$\|Id - T\| \leqslant 2(1 - \beta)$$

El que ens interessa és que $\beta > \frac{1}{2}$. Després de fer un canvi de variable, la definició de β és la següent:

$$\beta = \frac{1}{\|k\|_1} \int_{B(0,R)} |k(z)| \, dm(z)$$

És clar que si $R > R_0$ es compleix que $\beta = \beta(R) > \frac{1}{2}$. Si estem en aquestes condicions resulta que per aquest R l'operador T és invertible. És a dir, per a tota successió $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix una altra successió $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ tal que $T((c_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Això ens diu que per a tota successió $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix una funció $f \in L^2(\mathbb{C})$ tal que:

$$\langle f(z), k_{z_j}(z) \rangle = a_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

Pel que hem comentat anteriorment podem pensar que aquesta f pertany a H. $\square$

Aquests conjunts es corresponen amb bases de Riesz del subespai que generen, ja que poden no ser complets.

5.7 Àtoms amb acotació convexa.

Una classe d'àtoms de Gabor per als quals podem donar alguns resultats de generadors són aquells per als que podem extendre l'espai de fase a un espai de dues variables complexes. Això no és el mateix que fèiem en la secció 5.2. En aquell exemple l'espai era de funcions enteres en una sola variable. Aquí l'objectiu és més modest ja que en la secció següent veiem que aquest exemple era únic. La idea és aconseguir una estructura semblant per poder fer servir les eines de l'anàlisi complexa.

Aquests àtoms han de tenir molt bona localització tant en temps com en ferqüència. La manera de obtenir-la és treballant amb funcions convexes i les seves conjugades.

Definició. Donada una funció convexa $\phi(t)$ definim la seva **transformada de Legendre** com:

$$\widetilde{\phi}(x) = \sup_t xt - \phi(t)$$

$\widetilde{\phi}$ és també una funció convexa i direm que ϕ i $\widetilde{\phi}$ són funcions convexes conjugades.

Fent servir aquest concepte podem donar un resultat que ens diu a quina classe de funcions ens referim.

Teorema 5.23. *Sigui $g \in L^2(\mathbb{R})$ una funció tal que tan g com $\widehat{g}$ tenen una extensió holomorfa al pla complex complint:*

$$|g(z)| \leqslant Ce^{a\phi(\Im z)}e^{-b\phi(\Re z)}$$
$$|\widehat{g}(w)| \leqslant Ce^{a\widetilde{\phi}(\Im z)}e^{-b\widetilde{\phi}(\Re z)}$$

amb $a, b > 0$ i ϕ, $\widetilde{\phi}$ funcions convexes conjugades. Aleshores la transformada de Gabor de qualsevol funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ respecte a g admet una extensió holomorfa a $\mathbb{C}^2$ i compleix l'acotació:

$$|Gf(z,w)|^2 \leqslant \|f\|^2 \|e^{-b\phi}\|_1 Ce^{2a\phi(\Im z)}e^{b\widetilde{\phi}(\frac{4\pi}{b}\Im w)}e^{4\pi \Im w \Re z}$$

Demostració. Veïem primer com podem complexificar la primera variable. Escrivim directament:

$$Gf(z,u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i t u} g(t-z)\, dt$$

amb $u \in \mathbb{R}$ i $z \in \mathbb{C}$. Aquesta expresió sempre té sentit ja que $g \in L^2(\mathbb{R})$ en qualsevol recta $\Im z = const.$, i derivant sota el signe de la integral tenim que és holomorfa en z. Per veure l'extenció en l'altra variable es fa un argument simètric.

Anem ara a donar l'acotació. Per obtenr-la tan sols cal operar:

$$\begin{aligned}
|Gf(z,w)|^2 = & \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi itw} g(t-z)\,dt \right|^2 \leqslant \|f\|^2 \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-2\pi itw} g(t-z) \right|^2 dt \\
\leqslant & \|f\|^2 \int_{\mathbb{R}} e^{4\pi t \Im w} C e^{2a\phi(\Im z)} e^{-2b\phi(t-\Re z)}\,dt \\
\leqslant & \|f\|^2 C e^{2a\phi(\Im z)} \int_{\mathbb{R}} e^{4\pi(s+\Re z)\Im w} e^{-2b\phi(s)}\,ds
\end{aligned}$$

En aquesta darrera integral primer fem sortir el terme $e^{4\pi \Re z \Im w}$. Després recordem que:

$$\widetilde{\phi}(t) = \sup_x xt - \phi(x)$$

Ens quedem $e^{-b\phi(s)}$ per integrar i de l'equació anterior podem extreure l'acotació:

$$e^{4\pi s \Im w - b\phi(s)} \leqslant e^{b\widetilde{\phi}(\frac{4\pi}{b}\Im w)}$$

que completa la prova. □

Si comparem aquest cas amb l'estudiat en 5.2, on feiem servir la funció gaussiana, podem veure que:

$$Gf(z,w) = Bf(z-iw)e^{-\frac{\pi}{2}(z^2+w^2)}e^{-\pi izw}$$

on Bf era la transformada de Bargmann de f. D'aquesta manera veiem que en aquest cas concret la nostra funció entera en dues variables és de fet una funció entera en una variable (un xic modificada) evaluada en $z-iw$. Les acotacions es deprenen ràpidament d'aquesta fórmula. A més també podem observar (o recordar) que:

$$Gf(x,-u)e^{-\frac{\pi}{2}(x^2+u^2)}e^{\pi ixu}$$

serà entera en $x+iu$.

La manera d'obtenir funcions complint les condicions del teorema anterior és agafar $g(t) = e^{-p(t)}$ amb p un polinomi convex. Per obtenir les acotacions ens inspirem en [BNW88], on ja es donen alguns d'aquests resultats. D'aquesta manera prenem un polinomi positiu, convex i nul a l'origen $p(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n t^n$. Un polinomi convex i nul a l'origen és positiu si i només si la primera derivada al 0 també s'anul.la. Per tant podem pensar que els dos primers coeficients del polinomi són 0. A més un polinomi d'aquest tipus és practicament simètric, com es pot deduir del resultat següent:

Lema 5.24. *Fixat un grau màxim N existeix C només depenent de N tal que:*

$$p(t) \leqslant \sum_{n=2}^{N} |a_n||t|^n \leqslant Cp(t)$$

Demostració. La primera desigualtat és trivial. Per a la segona definim

$$\Psi = \left\{ p \text{ convex} : \text{grau de } p \leqslant N, p(0) = p'(0) = 0, \sum_{n=2}^{N} |a_n| = 1 \right\}$$

Aquest conjunt és compacte (acotat i dimensió finita). Prenem ara l'aplicació:

$$\begin{aligned} \Psi &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{R} \\ p &\longmapsto p(1) \end{aligned}$$

Com que p és convex i positiu, $p(1) = 0$ implica que $p = 0$. Així podem afirmar que:

$$m = \inf_{p \in \Psi} p(1) = \min \Phi(\Psi) > 0$$

D'aquí podem deduir que:

$$p(1) \geqslant m = m \sum_{n=2}^{N} |a_n|$$

per a tot $p \in \Psi$. Fixem ara un t qualsevol i definim $q(x) = p(tx) = \sum_{n=2}^{N} a_n t^n x^n$. Aleshores:

$$p(t) = q(1) \geqslant \sum_{n=2}^{N} |a_n||t|^n$$

i ja hem provat el lema. □

Lema 5.25. *Sigui p un polinomi de grau N positiu, convex i nul a l'origen. Aleshores:*

$$|\Re p(z) - p(\Re z)| \leqslant \varepsilon p(\Re z) + C_\varepsilon p(\Im z)$$

per a tot $\varepsilon > 0$, i C_ε una constant que tan sols depen de ε i del grau del polinomi.

Demostració. Comencem escrivint:

$$\left|\Re p(z) - p(\Re z)\right| \leqslant \left| \Re \sum_{n=2}^{N} a_n (x+iy)^n - \sum_{n=2}^{N} a_n x \right|$$

Anem a desenvolupar aquest sumatori:

$$\left|\sum_{n=2}^{N} a_n\left(x^n + \Re\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k(iy)^{n-k} + \Re(iy)^n\right) - \sum_{n=2}^{N} a_n x^n\right|$$
$$\leqslant C\sum_{n=2}^{N}|a_n|\left(\sum_{k=1}^{n-1}|x|^k|y|^{n-k} + |y|^k\right)$$

Prenem ara $\varepsilon > 0$ (molt petit). Si $|y| \leqslant \varepsilon|x|$ veiem que:

$$|x|^k|y|^{n-k} \leqslant |x|^n\varepsilon^{n-k} \leqslant \varepsilon|x|^n$$

d'aquesta manera podem afirmar que en aquest cas:

$$\sum_{k=1}^{n-1}|x|^k|y|^{n-k} \leqslant N\varepsilon|x|^n$$

En canvi, si $|y| \geqslant \varepsilon|x|$ acotem

$$\sum_{k=1}^{n-1}|x|^k|y|^{n-k} \leqslant \frac{N}{\varepsilon}|y|^n$$

Ho ajuntem tot i fem servir el lema anterior per arrivar a:

$$\left|\Re p(z) - p(\Re z)\right| =\leqslant CN\varepsilon p(\Re z) + C\left(\frac{N}{\varepsilon}+1\right)p(\Im z)$$

i hem provat el lema. □

Corol.lari 5.26. *Sigui p un polinomi positiu convex i nul a l'origen. Aleshores existeixen $a, b > 0$ tals que:*

$$-\Re p(z) \leqslant -ap(\Re z) + bp(\Im z)$$

Teorema 5.27. *Sigui p un polinomi convex, positiu i nul a l'origen. Sigui $g = e^{-p}$. Aleshores existeixen $a, b > 0$ tals que:*

$$|g(z)| \leqslant e^{-a_1 p(a_2\Re z)}e^{b_1 p(b_2\Im z)}$$
$$|\widehat{g}(w)| \leqslant e^{-a_1\widetilde{p}(a_2\Re z)}e^{b_1\widetilde{p}(b_2\Im w)}$$

Demostració. L'acotació de g és el corol.lari anterior. Per a l'acotació de $\widehat{g}$ prenem primer la funció:

$$g_\xi(z) = e^{-p(z)}e^{-2\pi i\xi z}$$

Integrem aquesta funció en el quadrat de vertexs t, $-t$, $t+ih$ i $-t+ih$ en sentit antihorari. Com que g_ξ és holomorfa aquesta integral és nul.la. Ara observem que:

$$\left|\int_0^h e^{-p(t+is)}e^{-2\pi i\xi(t+si)}\,ds\right| \leqslant e^{-ap(t)}\int_0^h e^{bp(s)}e^{2\pi\xi s} \to 0$$

quan $t\to\infty$ per a tot ξ. Per al segment de $-t$ a $-t+ih$ és fa de manera idèntica i d'aquesta manera veiem la coincidencia de les integrals:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p(t)}e^{-2\pi it}\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-p(t+hi)}e^{-2\pi i\xi(t+hi)}\,dt$$

Treballarem amb aquesta segona expresió per compleixificar la transformada de Fourier de g. Per tant:

$$\widehat{g}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p(t+hi)}e^{-2\pi iw(t+hi)}\,dt$$

Observem que aquesta fórmula és valida per a tot h. Podem ara acotar:

$$|\widehat{g}(w)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-ap(t)}e^{bp(h)}e^{2\pi(t\Im w+h\Re w)}\,dt = e^{bp(h)+h\Re w}\int_{\mathbb{R}} e^{-ap(t)+t\Im w}\,dt$$

per a tot h. Acotem el primer factor:

$$\inf_h e^{bp(h)+h\Re w} = e^{-b\sup_h \frac{-\Re w}{b}h-p(h)} = e^{-b\widetilde{p}(\frac{-\Re w}{b})}$$

Ara ja tenim un dels termes. Per obtenir l'altre el métode és similar:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ap(t)+t\Im w}\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{\sup_t t\Im w-\frac{a}{2}p(t)}e^{-\frac{a}{2}p(t)}\,dt \leqslant e^{-\frac{a}{2}\widetilde{p}(\frac{2}{a}\Im w)}\|e^{-\frac{a}{2}p}\|_1$$

I ja hem provat el teorema. □

Ara ja tenim clara l'existencia de funcions copmlint les condicions de 5.23. Aquest resultat ens deia que totes les funcions de l'espai de fase les podem pensar com holomorfes en dues variables. Es tracta ara d'aprofitar aquestes qualitats per donar condicions suficients perque un conjunt sigui d'unicitat.

Recordem com es fa això per a funcions holomorfes en una sola variable. El conjunt de zeros d'una funció holomorfa és discret i cada zero té assignada una multiplicitat. Si definim la mesura $\mu = \sum \lambda \in \Lambda m_\lambda \lambda$, és un resultat conegut que si f té zeros en Λ amb la multiplicitat donada, en el llenguatge de les distribucions podem dir que:

$$\Delta \log|f| = 2\pi\mu$$

Si ara prenem la segona identitat de Green:

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}$$

agafant $u = \log|f|$ i $v = 1 - |z|^2$ en el disc unitat obtenim:

$$4\int_{\mathbb{D}} \log|f| + 2\pi \sum_{\lambda\in\Lambda} \big(1 - |\lambda|^2\big) m_\lambda = 2\int_{|z|=1} \log|f|$$

Aquesta equació és la que ens permet donar condicions sobre el conjunt de zeros si tenim acotat el creixement de f.

El que farem és un raonament d'aquest tipus en dues variables. Els conjnts de zeros de funcions enteres de dues variables és una varietat analítica de dimensió 1 que té unes components irreductibles V_k amb multiplicitats m_k.

D'aquesta manera, si $\{V_k, m_k\}$ és la varitetat on s'anul.la f amb la seva multiplicitat és compleix que:

$$\partial\overline{\partial} \log|f| = \theta$$

on θ és un corrent tancat i positiu associat intrinsecament a la varietat que té com a expresió

$$\theta = \sum_{j,k} \theta_{jk} i dz_j \wedge d\overline{z_k}$$

de manera que $\sum \theta_{kk}$ és la mesura d'integració planar sobre la varietat. Aquestes fórmules les hem d'entendre en el sentit del corrents, que són la generalització de les distribucions. $\partial\overline{\partial}\log|f| = \theta$ és l'equivalent en dues variables a la fórmula $\Delta \log|f| = 2\pi\mu$.

Un cop hem posat el llenguatge necessàri podem passar a deduir la fórmula de Jensen que ens serà útil a noslatres. Definim primer la $(1,1)$-forma auxiliar:

$$\beta = i\partial\overline{\partial}\big(|z|^2 + |w|^2\big) = i(dz \wedge d\overline{z} + dw \wedge d\overline{w})$$

Aquesta forma compleix:

$$\theta \wedge \beta = \Big(\sum \theta_{kk}\Big)\ dM$$

i completa θ a una forma de volum de $\mathbb{C}^2$. Prenem R (gran) i δ (petit) i passem ara a definir el conjunt en que integrarem. Posem:

$$\rho = \frac{x^2}{R^2} + \frac{x^2}{\delta^2} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{v^2}{\delta^2}$$

on $z = x + iy$ i $w = u + iv$. D'aquesta manera $\rho = 1$ ens defineix un elipsoide en $\mathbb{C}^2$ que sbre les variables reals té radi R i sobre les imaginaries δ.

També cal observar que:

$$\partial\overline{\partial}\rho = \Big(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\delta^2}\Big)(dz \wedge d\overline{z} + dw \wedge d\overline{w})$$

I aquest també el podem completar per obtenir un element de volum:

$$\beta \wedge i\partial\overline{\partial}\rho = \Big(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\delta^2}\Big) dM$$

A més és compleix [GrL86]:

$$\beta \wedge i\overline{\partial}\rho_{|\rho=1} = dA$$

l'element d'area (en tres dimensions reals) de la superfície. Amb aquestes notacions el teorema de Stokes ens diu que:

$$\int_{\rho=1} G\beta \wedge i\overline{\partial}\rho = \int_{\rho<1} \partial G \wedge \beta \wedge i\overline{\partial}\rho + \int_{\rho<1} G\beta \wedge i\partial\overline{\partial}\rho$$

Tornem a aplicar aquest teorema per veure que:

$$\int_{\rho<1} \partial G \wedge \beta \wedge i\overline{\partial}\rho = \int_{\rho<1} \partial G \wedge \beta \wedge i\overline{\partial}(\rho - 1) = -\int_{\rho<1} (\rho - 1) i\partial\overline{\partial}G \wedge \beta$$

ja que $\rho - 1$ s'anul.la a la frontera. Amb això arrivem a:

$$\int_{\rho=1} G\beta \wedge i\overline{\partial}\rho = \int_{\rho<1} G\beta \wedge i\partial\overline{\partial}\rho + \int_{\rho<1} (1 - \rho) i\partial\overline{\partial}G \wedge \beta \tag{5.6}$$

Aquesta és l'equació que ens permetrà deduir una fórmula de Jensen en dues variables.

Teorema 5.28. *Suposem que tenim un àtom de Gabor complint les acotacions del teorema 5.23 (per exemple $g = e^{-p}$ amb p un polinomi com els que hem tractat). Sigui $F(z, w)$ l'extensió entera en dues variables d'una funció de l'espai de fase. Sigui V la varietat de zeros d'aquesta funció. Aleshores:*

$$\limsup_{\mathbb{R}\to\infty} \frac{H^1(V \cap \mathbb{R}^2 \cap B(0, R))}{R^2} \leqslant C_f$$

on H^1 és la mesura de Hausdorf 1*-dimensional, i estem fent intersecció de V amb el pla $\Im z = \Im w = 0$.*

Observació. Aquest resultat ens acota la mesura 1-dimensional de la varietat de zeros. Aquest ja és el tipus de resultat que podem esperar. Ja hem comentat en el primer capítol que l'habitual és que la varietat de zeros d'una funció de l'espai de fase sigui un conjunt de corbes (a vegades pot ser molt més gran, i en el cas de la gaussiana és un conjunt de punts). El que ens diu aquest teorema és que la quantitat de corbes (la suma de les seves longituds) no pot ser arbitrariament gran. Reocrdem que la fórmula de Jensen ja ens dóna una acotació del mateix tipus, però amb la mesura 0-dimensional, és a dir, acota el nombre de punts.

Demostració. El que farem és acotar les diferents integrals que apareixen en (5.6) per a $G = \log|F|$ amb F en l'espai de fase. Comencem per observar que:

$$G(z, w) \leqslant 2a\phi(\Im z) + b\widetilde{\phi}\Big(\frac{4\pi}{b}\Im w\Big) + 4\pi\Im w\Re z$$

Acotem primer la integral sobre $\rho = 1$. Si $\rho = 1$ Llavors $|\Re z|, |\Re w| \leqslant R$ i $|\Im z|, |\Im w| \leqslant \delta$. Per tant:

$$G(z,w) \leqslant C_F + 2a\phi(\delta) + b_1\widetilde{\phi}\Big(\frac{4\pi}{b}\delta\Big) + 4\pi\Im w\Re z$$

i obtenim, utilitzant que $\beta \wedge i\overline{\partial}\rho$ és positiva, que:

$$\int_{\rho=1} G\beta \wedge i\overline{\partial}\rho \leqslant \left(2a\phi(\delta) + b\widetilde{\phi}\Big(\frac{4\pi}{b}\delta\Big)\right)\int_{\rho=1}\beta \wedge i\overline{\partial}\rho$$

ja que la part corresponent a $4\pi\Im w\Re z$ val zero per qué estem integrant sobre un recinte simètric. Tornem a aplicar Stokes i arrivem a:

$$\int_{\rho=1} G\beta \wedge i\overline{\partial}\rho \leqslant \left(2a\phi(\delta) + b\widetilde{\phi}\Big(\frac{4\pi}{b}\delta\Big)\right)\int_{\rho<1}\beta \wedge i\partial\overline{\partial}\rho$$

Aquesta acotació serveix també per a la integral en $\rho < 1$. És evident que:

$$\int_{\rho<1}\beta \wedge i\partial\overline{\partial}\rho \leqslant R^2\delta^2\Big(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\delta^2}\Big)$$

I així obtenim la desigualtat:

$$\int_{\rho<1}(1-\rho)i\partial\overline{\partial}G \wedge \beta \leqslant 2\left(C + 2a\phi(\delta) + b\widetilde{\phi}\Big(\frac{4\pi}{b}\delta\Big)\right)R^2\delta^2\Big(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\delta^2}\Big) \tag{5.7}$$

La acotació inferior d'aquesta integral la podem trobar en [Ber78], que ens diu que:

$$\delta H^1\big(V \cap \mathbb{R}^2 \cap B(0,R)\big) \leqslant \int_{\rho<1} i\partial\overline{\partial}G \wedge \beta$$

Per tant, si acotem la integral en tot $\rho < 1$ per ella mateixa en $\rho < \frac{1}{2}$ tenim que:

$$\frac{\delta}{2}H^1\left(V \cap \mathbb{R}^2 \cap B\Big(0, \frac{R}{2}\Big)\right) \leqslant \int_{\rho<1} i(1-\rho)\partial\overline{\partial}G \wedge \beta \tag{5.8}$$

Ajuntem (5.8) amb (5.7) per obtenir la desigualtat:

$$\delta H^1(V \cap \mathbb{R}^2 \cap B(0,R)) \leqslant 2\left(C + 2a\phi(2\delta) + b\widetilde{\phi}\Big(\frac{4\pi}{b}2\delta\Big)\right)(2R)^2(2\delta)^2\left(\frac{1}{(2R)^2} + \frac{1}{(2\delta)^2}\right)$$

D'aquí arrivem a:

$$H^1\big(V \cap \mathbb{R}^2 \cap B(0,R)\big) \leqslant \inf_{\delta}\frac{C + 2a\phi(2\delta) + b\widetilde{\phi}(\frac{4\pi}{b}2\delta)}{\delta}8R^2$$

que prova el teorema. □

D'aquí podem extreure el següent resultat:

Teorema 5.29. *Sigui g un àtom de Gabor complint les condicions de 5.23. Si Λ és un conjunt separat tal que:*

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{|\Lambda \cap B(0,R)|}{R^2} = \infty$$

Aleshores $G(g,\Lambda)$ genera $L^2(\mathbb{R})$.

Per la demostració només cal fer servir el teorema 5.23 i l'acotació del nombre de zeros que pot tenir una funció d'aquest espai que hem donat anteriorment.

Auqest resultat no és ni de bon troç tan bo com el que podem donar per a l'espai de Fock, on les funcions eren analítiques d'una sola variable, però és més del que podem assegurar en la majoria de casos, ja que és un resultat assimpòtic.

Capítol 6

Ondetes.

6.1 Discretització en espais de fase d'ondetes.

La motivació per introduïr la transformada en ondetes és la mateixa que ens ha portat a considerar la transformada de Gabor. Volem aprofitar millor l'estructura d'espai de Hilbert que té $L^2(\mathbb{R})$, i buscar bases i marcs en lloc de sistemes de generadors, que era l'únic que aconseguíem considerant tan sols traslladades.

Quan estudiàvem la transformada de Gabor consideràvem traslladades i modulades d'una funció fixada. En el cas que ara ens ocupa canviem les modulacions per dilatacions. Aquesta modificació històricament va ser introduïda per salvar el problema que suposava el teorema 1.18 de Balian-Low, i que no ens permetia trobar bases ben localitzades en temps i freqüència a l'hora. Les bones propietats d'anàlisi que presenta aquesta transformada i l'aparició dels AMR l'han convertit en un important camp de treball (tant d'estudi com d'aplicació).

Les principals diferències que ens trobarem respecte a Gabor venen produïdes per aquesta modificació. La primera diferència important era la condició d'admissibilitat. La fórmula de reconstrucció només és vàlida per aquelles ondetes que compleixen:

$$c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}\, d\xi < \infty$$

Anomenem per comoditat $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Recordem les notacions que fèiem servir per la transformada en ondetes. Si $x + iy \in \mathbb{H}$, definíem per a $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f_z(t) = y^{-\frac{1}{2}} f\Big(\frac{t-x}{y}\Big)$$

Adoptem també $dm(z) = \frac{dx\,dy}{y^2}$ per designar la mesura hiperbòlica en $\mathbb{H}$. Si ψ és una ondeta admissible i f una funció qualsevol de $L^2(\mathbb{R})$, fent servir aquestes notacions, podem definir la transformada de f respecte a l'ondeta ψ com:

$$Wf(z) = \langle f, \psi_z \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{y^{-\frac{1}{2}} \psi\Big(\frac{t-x}{y}\Big)} \, dt$$

Si l'ondeta està normalitzada de manera que $\|\psi\| = c_\psi = 1$, el teorema 1.15 ens diu que $Wf \in L^2(\mathbb{H})$ i $\|Wf\| = \|f\|$. A més podem reconstruir f a partir dels valors de la seva transformada:

$$f(t) = \int_{\mathbb{H}} Wf(z) \psi_z(t) \, dm(z) \qquad \forall f$$

Aquí cal fer alguns comentaris sobre la validesa d'aquesta fórmula. Ja hem dit que la condició d'admissibilitat és necessària, però resulta que amb això no en tenim prou. Si $\psi \in H^2(\mathbb{R})$ ($\widehat{\psi}(\xi) = 0$ per a $\xi < 0$), aleshores la fórmula de reconstrucció només es vàlida per a funcions $f \in H^2(\mathbb{R})$. Per què les coses funcionin en tot $L^2(\mathbb{R})$ hem de prendre una ψ tal que $\psi(t) \in \mathbb{R}$. D'aquesta manera podem definir bé la transformada d'una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ que només pren valors reals, i la fórmula de reconstrucció és vàlida en aquest subespai. A partir d'aquí no costa gaire veure que podem estendre la transformada a tot $L^2(\mathbb{R})$ i tot funciona perfectament.

Tenint en compte això, podem definir la transformada en ondetes en $H^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ a valors reals o $L^2(\mathbb{R})$ a valors complexos, prenent les precaucions oportunes. Els resultats que donarem durant aquest capítol en general no depenen de en quin cas estem, i per tant no serà necessari indicar-ho. Les úniques diferències seran que els espais de fase no coincideixen, encara que estructuralment seran idèntics. D'aquí en endavant pensarem que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ a valors reals, i definirem la transformada per a $f \in L^2(\mathbb{R})$ a valors complexos, que és el cas més general de tots. Quan ψ és real, k també ho és i ens podem estalviar el conjugat en totes les fòrmules de reproducció i reconstrucció.

Les notacions que estem utilitzant són les mateixes que fèiem servir en el capítol anterior per a la transformada de Gabor. Això pot portar a confusió a vegades, però ajuda molt a veure les similituds i diferències entre els dos casos. També és més còmode a l'hora de treballar. Tan sols haurem d'estar atents i tenir clar quina transformada considerem en cada cas.

Igual que en Gabor, fixem una ondeta admissible (normalitzada). D'aquesta manera el teorema 1.33 ens diu que el conjunt de transformades de totes les funcions de $L^2(\mathbb{R})$ forma un subespai de Hilbert de $L^2(\mathbb{H})$:

$$H = \Big\{ F(z) \in L^2(\mathbb{H}) : \exists f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ amb } F(z) = Wf(z) = \langle f, \psi_z \rangle \Big\}$$

Aquest és un espai de Hilbert amb nucli reproductor $k(z) = \langle \psi, \psi_z \rangle$, de manera que:

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{H}} F(z) k(z_0^{-1} \cdot z) \, dm(z)$$

si i només si $F \in H$, amb $z_0^{-1} \cdot z = \frac{z-z_0}{y_0}$, com ja hem comentat en els preliminars. Si definim les translacions en $\mathbb{H}$ d'aquesta forma ($\tau_{z_0}(z) = z_0^{-1} \cdot z$), aquesta fórmula és una convolució de F amb k, amb la praticularitat que el grup de translacions no és commutatiu. Podem fer servir la mateixa notació per a traslladades d'una funció qualsevol de l'espai:

$$F_{z_0}(z) = F(z_0^{-1} \cdot z) = Wf_{z_0}(z)$$

si $F = Wf$. Aquesta és una altra de les diferències importants amb la transformada de Gabor. Allí no ens sortia una verdadera convolució, ja que apareixia un factor exponencial. Però en canvi les translacions eren commutatives. Aquestes diferències faran que alguns passos siguin més senzills. Al mateix temps provocaran que els resultats obtinguts no siguin tan bons com en el capítol anterior.

Hi ha però algun contraexemple. En el cas de continuïtat uniforme, el fet de que no ens aparegui el factor exponencial fa que el resultat sigui millor. En $\mathbb{H}$ farem servir la distància hiperbòlica $d(z_1, z_2)$, que és invarinat per translacions per l'esquerra. Per comoditat també podrem utilitzar la pseudohiperbòlica, que és més senzilla de calcular:

$$\overline{d}(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \overline{z_2}} \right|$$

La relació entre aquestes dues distàncies ens la dóna:

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \overline{d}(z_1, z_2)}{1 + \overline{d}(z_1, z_2)}$$

que a més ens permet calcular la distància hiperbòlica de manera senzilla.

Un cop tenim definida la distància en l'espai, ja podem donar el resultat de continuïtat.

Proposició 6.1. *La transformada en ondetes és uniformement contínua. És a dir, donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $d(z_1, z_2) < \delta$, per a tota $F \in H$,*

$$F(z) = \langle f, \psi_z \rangle$$

es compleix que $|F(z_1) - F(z_2)| \leqslant \|F\|\varepsilon = \|f\|\varepsilon$.

Demostració. Calculem directament:

$$\begin{aligned} |F(z_1) - F(z_2)| =& \left|\langle f, \psi_{z_1} \rangle - \langle f, \psi_{z_2} \rangle\right| = \left|\langle f, \psi_{z_1} - \psi_{z_2} \rangle\right| \\ \leqslant& \|f\| \left\|\psi_{z_1} - \psi_{z_2}\right\| = \|f\| \left\|\psi - \psi_{z_1^{-1} \cdot z_2}\right\| \end{aligned}$$

i el resultat es deduiex de la continuïtat dels operadors de translació i dilatació en $L^2(\mathbb{R})$. $\square$

Com veiem, el resultat és un xic millor que en el cas de Gabor. En aquell cas tan sols podíem donar aquest resultat per al mòdul de les funcions, degut a l'aparició del factor exponencial. Aquest serà, però, l'únic cas en que tindrem millor comportament en el cas d'ondetes. A vegades les demostracions seran més senzilles, però els resultats no milloraran els del capítol anterior.

A partir d'aquí la manera d'actuar és idèntica al cas de Gabor. Volem estudiar quan un sitema $W(\psi, \Lambda)$ és un marc per a $L^2(\mathbb{R})$. Sabem que això és equivalent a buscar els conjunts de mostreig de H. La manera de fer-ho és intentar discretitzar la fórmula de reproducció:

$$\int_{\mathbb{H}} \left| \int_{\mathbb{H}} F(z)k(\lambda^{-1} \cdot z)\, dm(z) \right|^2 dm(\lambda) \approx \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \int_{\mathbb{H}} F(z)k(\lambda^{-1} \cdot z)\, dm(z) \right|^2$$

En aquest cas, l'equivalent a l'àlgebra de Feichtiger seran les ondetes amb nucli integrable o fortament integrable, en funció del que necessitem, ja que ara aquest dos conjunts no coincideixen.

Les condicions suficients de mostreig que obtindrem seran idèntiques a les que hem trobat per Gabor. Conseguim provar que un conjunt que té punts en qualsevol traslladada d'una bola petita és de mostreig i per tant dóna lloc a un marc. Donem també cotes explícites de les constants del marc que depenen de la norma en $L^1(\mathbb{H})$ del nucli i de la seva maximal local. Aquests resultats també es poden aconseguir, sense cotes explícites, fent servir teoria de representacions, encara que el cas d'ondetes (que correspon a un grup no unimodular) no està tan estudiat. Per una altra banda, Sun i Zhou donen condicions suficients molt properes a les que donarem en aquest treball, també amb cotes explícites, però demanant a l'ondeta analitzant pertànyer a certs espais de Sobolev. Les cotes depenen de les normes en aquests espais i els mètodes que fan servir en [SuZ03] i [SuZ04] no tenen res a veure amb els nostres.

Pel que fa a condicions suficients, de moment sembla inabastable trobar un resultat similar a 5.20. Per una banda no està clara la definició de densitat en $\mathbb{H}$. Seip defineix en [Sei93] una densitat per l'espai de Bergman del disc que per aplicació conforme es pot traslladar al semiplà. Aquesta permet descriure els conjunts de mostreig i interpolació en aquest espai, que està molt relacionat amb la trasformada d'ondetes, com veurem més endavant.

Heil i Kutyniok també estudien en [HeK03] i [HeK06] els marcs irregulars d'ondetes fent servir una definició equivalent però amb diferents propietats estructurals. Els resultats que aconsegueixen són també propers als que aquí donem, però sense cotes explícites. En els seus treballs dedueixen un teorema del tipus 5.18. Introduint la noció d'aproximació uniforme homogènia proven que tot conjunt que doni lloc a un marc ha de tenir densitat positiva (amb certes restriccions sobre l'ondeta analitzant). Noslatres també donem un resultat proper, fent servir les mateixes idees. La principal diferència és la representació en ondetes que fem servir. Tot i que aquesta sembla que hauria de ser una qüestió menor, ja que en principi les dues representacions són equivalents, a l'hora de treballar resulta que el conjunt d'ondetes admissibles a les quals podem aplicar les tècniques són diferents en cada cas.

Sun i Zhou, en els articles abans comentats, també introdueixen una densitat diferent a les dues anteriors, que utilitzen per donar condicions necessàries que no difereixen gaire de la resta de treballs.

6.2 Rigidesa de la base de Haar.

En aquesta secció donarem un resultat curiós que ens dóna un exemple concret de la rigidesa de les bases ortogonals. Aquesta era una de les raons que ens portaven a estudiar bases de Riesz i marcs en lloc d'aquestes.

Ens fixarem en l'ondeta de Haar, que degut a la seva senzillesa facilita molt els càlculs. Aquesta ondeta es pot pensar com a provinent de l'Anàlisi Multirresolució generat per la funció d'escala $\phi(t) = \chi_{[0,1)}(t)$, tot i que no ho necessitarem. Per comoditat treballarem a $L^2(\mathbb{R})$ real. D'aquesta forma no cal tenir en compte el conjugat en el producte escalar.

Definició. Definim l'**ondeta de Haar** com:

$$\psi(t) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(t)$$

D'aquesta manera tenim que:

$$\psi_z(t) = y^{\frac{-1}{2}} \left(\chi_{[x,x+\frac{y}{2})}(t) - \chi_{[x+\frac{y}{2},x+y)}(t) \right)$$

Com que estem interessats en l'ortogonalitat, volem trobar els llocs on el producte escalar de l'ondeta amb una traslladada seva és 0. O el que és el mateix, els llocs on el nucli reproductor s'anul.la. És a dir, estem interessats en saber quan:

$$\langle \psi_z, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{-1}{2}} \left(\chi_{[x,x+\frac{y}{2})} - \chi_{[x+\frac{y}{2},x+y)} \right) \left(\chi_{[0,\frac{1}{2})}(t) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(t) \right) dt = 0 \quad (6.1)$$

Hi han varis casos clars on això es compleix. Veiem-los:

- $x + y \leqslant 0$
- $x \geqslant 1$
- $x \geqslant 0,\ x + y \leqslant \frac{1}{2}$

- $x \geqslant \frac{1}{2},\ x+y \leqslant 1$
- $x \leqslant 0,\ x+\frac{y}{2} \geqslant 1$
- $x+\frac{y}{2} \leqslant 0,\ x+y \geqslant 1$

Els dos primers casos corresponen al cas en que les dues ondetes tenen suport disjunt. Els altres quatre són deguts a que una de les ondetes està totalment continguda en un dels intervals on l'altra és constant. Però aquests no són els únics casos on s'anul.la el producte escalar anterior. Ens queda trobar dos casos més, que estan en els següents recintes:

- Si $x < 0,\ 0 < x+\frac{y}{2} < \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} < x+y < 1$ tenim que el producte escalar (6.1) queda de la següent forma:

$$y^{\frac{-1}{2}}\left(\int_0^{x+\frac{y}{2}} dt - \int_{x+\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x+y} dt\right) = y^{\frac{-1}{2}}(3x+2y-1) \tag{6.2}$$

  D'aquesta manera, si $y = \frac{1-3x}{2}$ amb x variant entre -1 i 0, (6.2) és 0.

- Si $0 < x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x+\frac{y}{2} < 1$ i $1 < x+y$ tenim que (6.1) ens queda així:

$$y^{\frac{-1}{2}}\left(\int_x^{\frac{1}{2}} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{y}{2}} dt + \int_{x+\frac{y}{2}}^{1} dt\right) = y^{\frac{-1}{2}}(2-3x-y) \tag{6.3}$$

  Per tant, quan $y = 2-3x$ amb x variant entre 0 i $\frac{1}{2}$, (6.3) és també 0.

Ara ja hem obtingut tots els casos en que (6.1) s'anul.la (és fàcil comprovar que no n'hi ha més). Calculant una mica més podem veure que la gràfica de signes del producte escalar és la representada en la **Figura 1**.

Podem observar que als primers casos les regions estan descrites per desigualtats, i tenen àrea hiperbòlica infinita. Els dos darrers vénen donats per equacions i corresponen a dos segments. Informalment anomenarem triangles als primers i diagonals als segons.

Lema 6.2. *Sigui $\mathcal{B} = \{\psi_{z_n}(t)\}_{z_n} \in \Lambda$ una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ tal que $\psi_i = \psi \in \mathcal{B}$. Aleshores $\psi_z \notin \mathcal{B}$ si z pertany a alguna de les diagonals.*

Demostració. Ho farem per reducció a l'absurd. Suposem que existeix ψ_z amb $z \in D$ la diagonal corresponent a $y = \frac{1-3x}{2}$ amb x entre -1 i 0. Per l'altra diagonal el raonament és el mateix. Prenem la funció:

$$f(t) = c_1\chi_{[0,x+\frac{y}{2})}(t) - c_2\chi_{[x+\frac{y}{2},\frac{1}{2})}(t)$$

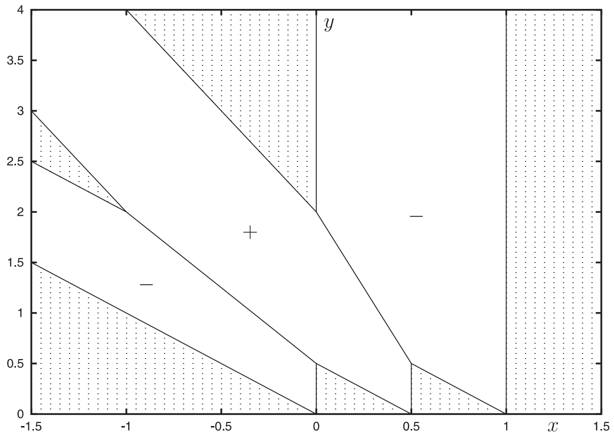

Figura 1. Nucli reproductor de l'ondeta de Haar.

agafant c_1, $c_2 > 0$ de manera que $\int f(t)\,dt = 0$ i $\|f\| = 1$. Anem a calcular ara $\langle f, \psi_{z_n}\rangle$. Com que $z \in D$ podem afirmar per ortogonalitat que no existeix cap altre $z_n \in D$. Si hi ha algun z_n en l'altra diagonal, el seu suport haurà de ser disjunt amb el de ψ_z, i per tant també amb f. També veiem que les ψ_{z_n} que tenen suport disjunt a ψ també el tenen disjunt a f, i les que són constants en tot el suport de ψ també ho són en tot el suport de f. Per tant, en tot aquest conjunt, es compleix que $\langle f, \psi_{z_n}\rangle = 0$ de manera trivial. Per una altra part, $\langle f, \psi_z\rangle = 0$ per construcció. Només ens queda mirar les ψ_{z_n} que tenen suport contingut en una de les dues meitats on ψ és constant, és a dir les que el z_n està en un dels triangles inferiors. Però com que $\psi_z \in \mathcal{B}$ podem dir que una ψ_{z_n} amb z_n en un d'aquest dos triangles també ha de tenir el seu suport contingut en un i només un dels quatre intervals següents:

- $I_1 = [0, x + \frac{y}{2}]$
- $I_2 = [x + \frac{y}{2}, \frac{1}{2}]$
- $I_3 = [\frac{1}{2}, x + y]$
- $I_4 = [x + y, 1]$

ja que si no, no poden ser ortogonals a ψ_z. Ara, les que tenen suport en I_1 o I_4 són automàticament ortogonals a f per tenir suport disjunt, i les que estan en I_2 o I_3 ho són perquè tenen suport en intervals on f és constant. Per tant l'únic element de la base que no és ortogonal a f és ψ, que és diferent de f, i per tant $|\langle f, \psi\rangle| < 1$. Això ens dóna la contradicció amb el fet de ser $\mathcal{B}$ base ortonormal. $\square$

Tenint en compte que $\langle\psi_z, \psi_{z_0}\rangle = \langle\psi_{z_0^{-1}\cdot z}, \psi\rangle$, aquest resultat es pot generalitzar a qualsevol element de la base, no exclusivament a ψ, i tampoc és necessari que aquesta hi pertanyi.

Lema 6.3. *Sigui $\mathcal{B} = \{\psi_{z_n}\}_{z_n\in\Lambda}$ una base ortonormal tal que $\psi \in \mathcal{B}$. Aleshores les seves dues filles $\psi_{i/2}$ i $\psi_{1/2+i/2}$ també pertanyen a $\mathcal{B}$.*

Demostració. Veurem només que la filla esquerra hi pertany. De les ψ_{z_n}'s que tenen suport contingut en la part esquerra de ψ, l'interval $[0, \frac{1}{2}]$ (és obvi que n'hi ha alguna), agafem una de les de resolució mínima, o el que és el mateix, una de les de suport amb longitud màxima. Anomenam-la ψ_z. Si aquesta és la filla esquerra ja estem. Si no, suposarem que $x > 0$ (es pot fer el mateix amb $x + y < \frac{1}{2}$). Prenem ara la funció:

$$f(t) = c_1\chi_{[0,x)}(t) - c_2\chi_{[x,x+\frac{y}{2})}(t)$$

amb c_1, $c_2 > 0$ de manera que $\int f\,dt = 0$ i $\|f\| = 1$, igual que en el lema anterior. Fent servir aquest lema i amb un raonament similar al d'abans podem veure que $\langle f, \psi_{z_n}\rangle = 0$ per a tots els z_n de Λ per al condició d'ortonormalitat, però això es contradiu amb el fet de ser $\mathcal{B}$ base. $\square$

Igual que abans, això es pot generalitza per a qualsevol element de la base. És a dir, aquest resultat ens està dient que si ψ_z pertany a una base ortonormal. Les seves dues filles $\psi_{x+i\frac{y}{2}}$ i $\psi_{x+\frac{y}{2}+i\frac{y}{2}}$ també han de pertànyer a la base. De fet, el que hem demostrat fent servir aquests dos enunciats i aquesta argumentació és:

Teorema 6.4. *Sigui $\mathcal{B} = \{\psi_{z_n}\}_{z_n\in\Lambda}$ una base ortonormal de traslladades de l'ondeta de Haar. Es compleix que Λ és una xarxa hiperbòlicament regular, és a dir, és fruit d'aplicar-li un moviment hiperbòlic a la xarxa diàdica comuna.*

Aquest exemple serveix per comprovar la rigidesa del concepte de base ortonormal. És per aquesta raó que en el nostre estudi posterior ens centrarem en bases de Riesz i marcs.

6.3 L'espai de Bergman.

En aquesta secció parlarem de les ondetes de Poisson. Aquesta és una família d'ondetes admissibles que tenen la propietat que els seus espais de fase es corresponen amb els espais de Bergman del semiplà. Aquests són una família d'espais de funcions holomorfes que jugaran el paper corresponent als espais de Fock en el cas de Gabor.

Igual que ens passava en aquell exemple, en els espais de Bergman tenim caracteritzacions dels conjunts de mostreig i d'interpolació. Tot i que les eines que es fan servir són pròpies de l'anàlisi complexa i no són aplicables directament a altres ondetes, ens donen un excel.lent exemple per a encarar el problema en el cas general.

En aquesta secció treballarem de manera excepcional amb la transformada d'ondetes definida en $H^2(\mathbb{R})$.

Definició. Per a $\alpha > 1$, definim l'**ondeta de Poisson** $\psi^\alpha(t)$ com:

$$\psi^\alpha(t) = \frac{1}{c_\alpha}(t+i)^{-\frac{\alpha+1}{2}}$$

on $c_\alpha = \left\|(t+i)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\right\|$.

Quan treballem pensarem només en α imparell, ja que són els casos en que es poden fer els càlculs. A mode d'exemple podem dir que per a $\alpha = 3, 5, 7$, $c_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{\frac{5\pi}{16}}$ respectivament. Hem de tenir en compte al treballar amb aquestes ondetes que no estan normalitzades. És a dir, $\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}^\alpha(\xi)|^2}{\xi}\,d\xi = \widetilde{c}_\alpha^2 \neq 1$

Definició. Per a $\alpha > 1$, definim l'espai de **Bergman** del semiplà $A_\alpha(\mathbb{H})$ com:

$$A_\alpha(\mathbb{H}) = \left\{F \text{ analítiques en } \mathbb{H} : \int_{\mathbb{H}} |F(z)|^2 y^\alpha\, dm(z) < \infty\right\}$$

La norma d'aques espai és:

$$|F\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{H}} |F(z)|^2 y^\alpha\, dm(z) \tag{6.4}$$

Veiem ara que els espais de fase de les ondetes de Poisson estan continguts en aquestos espais. És a dir, que la transformada d'una funció $f \in H^2(\mathbb{R})$ per una ondeta de Poisson ψ^α es pot pensar dintre de A_α.

Si mirem la transformada en ondetes per l'ondeta de Poisson ψ^α d'una funció $f \in H^2(\mathbb{R})$ veiem que:

$$\begin{aligned}
Wf(z) =& \frac{1}{\widetilde{c}_\alpha c_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) y^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{t-x}{y} - i\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}} dt \\
=& \frac{1}{\widetilde{c}_\alpha c_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) y^{\frac{-1}{2}}(t-x-iy)^{-\frac{\alpha+1}{2}} y^{\frac{\alpha+1}{2}}\, dt \\
=& \frac{1}{\widetilde{c}_\alpha c_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) y^{\frac{\alpha}{2}}(t-z)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\, dt = \frac{y^{\frac{\alpha}{2}}}{\widetilde{c}_\alpha c_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{\frac{\alpha+1}{2}}}\, dt
\end{aligned}$$

Definim:

$$F(z)=\frac{1}{\widetilde{c}_\alpha c_\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-z)^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dt$$

(F no és la transformada de f). La funció $F(z)$ és holomorfa de manera trivial. Fent servir que $Wf\in L^2(\mathbb{H})$ obtenim:

$$\int_{\mathbb{H}}|F(z)|^2y^\alpha\,dm(z)=\int_{\mathbb{H}}\left|y^{\frac{\alpha}{2}}F(z)\right|^2dm(z)=\int_{\mathbb{H}}|Wf(z)|^2\,dm(z)$$

i per tant $F(z)\in A_\alpha$ i més $\|F\|_\alpha=\|Wf\|=\|f\|$. Amb l'identificació $Wf(z)=y^{\frac{\alpha}{2}}F(z)$ podem identificar l'espai de fase d'una ondeta de Poisson dintre de l'espai de Bergman.

Per veure que tenim igualtat hem de comprovar que els nuclis reproductors són els mateixos. Això només ho farem per α imparell. Calculem primer el nucli reproductor dels espais de fase.

$$\begin{aligned}
k_\alpha(z,z_0)=\langle\psi^\alpha_{z_0},\psi^\alpha_z\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}y_0^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{t-x_0}{y_0}+i\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\overline{y^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{t-x}{y}+i\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}}\,dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}y_0^{\frac{\alpha}{2}}(t-x_0+y_0i)^{-\frac{\alpha+1}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}(t-x-yi)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\,dt\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}y_0^{\frac{\alpha}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}(t-\overline{z_0})^{-\frac{\alpha+1}{2}}(t-z)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\,dt\\
&=y_0^{\frac{\alpha}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\overline{z_0})^{-\frac{\alpha+1}{2}}(t-z)^{-\frac{\alpha+1}{2}}\,dt
\end{aligned}$$

Aquesta integral es pot calcular per residus quan α és imparell, i obtenim:

$$\langle\psi^\alpha_{z_0},\psi^\alpha_z\rangle=y_0^{\frac{\alpha}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}c'_\alpha 2\pi i(z-\overline{z_0})^{-\alpha}$$

on $c_{\alpha'}$ és una constant entera, que per a $\alpha=3,5,7$ és $-2,6,-20$ respectivament. El nucli reproductor ens diu que fixat un α:

$$\begin{aligned}
Wf(z_0)&=\int_{\mathbb{H}}y_0^{\frac{\alpha}{2}}y^{\frac{\alpha}{2}}c'_\alpha 2\pi i(z_0-\overline{z})^{-\alpha}Wf(z)\,dm(z)\\
&=y_0^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\mathbb{H}}c'_\alpha 2\pi i(z_0-\overline{z})^{-\alpha}y^{\frac{\alpha}{2}}Wf(z)\,dm(z)\\
&=y_0^{\frac{\alpha}{2}}\int_{\mathbb{H}}c'_\alpha 2\pi i(z_0-\overline{z})^{-\alpha}y^{\frac{-\alpha}{2}}Wf(z)y^\alpha\,dm(z)
\end{aligned}$$

Si tenim en compte que $y^{\frac{-\alpha}{2}}Wf(z)=F(z)\in A_\alpha$, veiem que les funcions de A_α que són transformada d'una funció de $H^2(\mathbb{R})$ estan caracteritzades per l'equació:

$$F(z_0)=\int_{\mathbb{H}}c'_\alpha 2\pi i(z_0-\overline{z})^{-\alpha}F(z)y^\alpha\,dm(z)$$

Però això és exactament la relació del nucli reproductor dels espais de Bergman. Per tant podem afirmar que, sota la correspondència $y^{\frac{-\alpha}{2}} W_f(z) = F(z)$, els dos espais són el mateix.

Normalment es treballa amb la versió al disc dels espais de Bergman, que per transformació conforme és equivalent a treballar al semiplà. D'aquesta manera definim els espais de Bergman del disc $A_\alpha(\mathbb{D})$ (mantenim la notació perquè estem parlant del mateix) com:

$$A_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ F(z) \text{ analítiques en } \mathbb{D} : \int_{\mathbb{D}} |F(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha \, d\mu(z) < \infty \right\}$$

on

$$d\mu(z) = \frac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}$$

que és la mesura que ens va bé en aquest cas. Com hem comentat, Seip caracteritza en [Sei93] els conjunts de mostrieg i els d'interpolació d'aquests espais. En el seu treball comenta el cas general (normes de L^p o L^∞), però aquí comentarem breument els seus resultats en el cas particular de L^2. És a dir, dels espais de Bergman que nosaltres hem definit.

En el disc es pot treballar amb la distància hiperbòlica o la pseupohiperbòlica, que és més pràctica. La segona es defineix de la següent forma:

$$\widetilde{d}(z,w) = \left| \frac{z-w}{1-\overline{z}w} \right|$$

La noció de separació d'un conjunt és exactament igual que al pla o al semiplà:

Definició. Direm que un conjunt $\gamma = \{z_j\}$ és **uniformement discret** si:

$$\inf_{j \neq k} \widetilde{d}(z_j, z_k) > 0$$

Aquests són els únics conjunts que ens interessaran en la classificació. Definim ara les densitats superiors i inferiors introduïdes per Seip per classificar els diferents conjunts.

Per a un conjunt uniformement discret $\Gamma = \{z_j\}$ i $\frac{1}{2} < r < 1$, sigui:

$$D(\Gamma, r) = \frac{\sum\limits_{\frac{1}{2} < |z_j| < r} \log \frac{1}{|z_j|}}{\log \frac{1}{1-r}}$$

Per a cada $z \in \mathbb{D}$, formem nous conjunts mitjançant translació:

$$\Gamma_z = \left\{ \frac{z_j - z}{1 - \overline{z} z_j} \right\}$$

Definició. Donat un conjunt $\Gamma = \{z_j\}$ definim les seves **densitats uniformes** inferior i superior com:

$$D^-(\Gamma) = \liminf_{r\to 1} \inf_{z\in\mathbb{D}} D(\Gamma_z, r)$$
$$D^+(\Gamma) = \limsup_{r\to 1} \sup_{z\in\mathbb{D}} D(\Gamma_z, r)$$

Si $D^-(\Gamma) = D^+(\Gamma)$ direm que Γ té densitat uniforme. El que es prova en [Sei93] són els següents enunciats:

Teorema 6.5 (Seip). *Un conjunt Γ de punts diferents en $\mathbb{D}$ és de mostreig per a A_α si i només si es pot expressar com a unió finita de conjunts uniformement discrets i conté un conjunt uniformement discret Γ' tal que $D^-(\Gamma') > \frac{\alpha-1}{2}$.*

Teorema 6.6 (Seip). *Un conjunt Γ de punts diferents en $\mathbb{D}$ és d'interpolació per a A_α si i només si és uniformement discret i $D^+(\Gamma) < \frac{\alpha-1}{2}$.*

Igual que passava en Fock, en aquests espais no hi han conjunts de mostrig i interpolació a l'hora. Per tant no podrem trobar bases de Riesz generades a partir de les ondetes de Poisson.

6.4 Espais de fase d'ondetes harmònics.

En aquesta secció caracteritzarem el conjunt d'ondetes admissibles per a les quals el seu espai de fase està composat per funcions harmòniques en z.

En aquest apartat treballarem per comoditat amb la transformada definida a l'espai $L^2(\mathbb{R})$ real. Si prenem una ondeta admissible ψ, volem conèixer quan existeix un pes $\omega(y)$ tal que $\omega(y)Wf(x,y)$ és una funció harmònica per a tota $f \in L^2(\mathbb{R})$ real. Aquesta restricció en el pes té a veure amb l'invariància per translacions de la transformada en ondetes, però no està clar que no existeixin altres pesos i ondetes harmòniques en el cas general.

Teorema 6.7. *Sigui ψ una ondeta admissible i real. Aleshores existeix un pes $\omega(y)$ tal que el conjunt de funcions de la forma $\omega(y)Wf(x,y)$ per a $f \in L^2(\mathbb{R})$ són harmòniques si i només si ψ és una combinació lineal de $\Re(t+i)^\alpha$ i $\Im(t+i)^\alpha$ amb $\alpha < -1$.*

Demostració. Hem d'estudiar quan $\Delta\omega(y)Wf(x,y) = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta\omega(y)Wf(x,y) =& \Delta \int_{-\infty}^{\infty} f(t) y^{\frac{-1}{2}} \omega(y)\psi\Big(\frac{t-x}{y}\Big)\, dt \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\Delta y^{\frac{-1}{2}} \omega(y)\psi\Big(\frac{t-x}{y}\Big)\right) dt = 0\end{aligned}$$

per a tot $f \in L^2(\mathbb{R})$. Això és equivalent a:

$$\Delta y^{\frac{-1}{2}} \omega(y) \psi\Big(\frac{t-x}{y}\Big) = 0$$

i com que ha de ser vàlid per a tot t, per canvi de variable arrivem a:

$$\Delta y^{\frac{-1}{2}} \omega(y) \psi\Big(\frac{x}{y}\Big) = 0$$

Si anomenem $\beta(y) = y^{\frac{-1}{2}} \omega(y)$, el que volem és trobar per a quines ondetes ψ existeix β tal que $\beta(y)\psi(\frac{x}{y})$ és una funció harmònica. Si calculem tenim que:

$$\Delta\left(\beta(y)\psi\Big(\frac{x}{y}\Big)\right) = 2\frac{x}{y^3}\beta(y)\psi'\Big(\frac{x}{y}\Big) + \beta''(y)\psi\Big(\frac{x}{y}\Big) \\ - 2\frac{x}{y^2}\beta'(y)\psi'\Big(\frac{x}{y}\Big) + \Big(\frac{x^2}{y^2}+1\Big)\frac{1}{y^2}\beta(y)\psi''\Big(\frac{x}{y}\Big)$$

Per tant volem:

$$2\frac{x}{y^3}\beta(y)\psi'\Big(\frac{x}{y}\Big) + \beta''(y)\psi\Big(\frac{x}{y}\Big) - 2\frac{x}{y^2}\beta'(y)\psi'\Big(\frac{x}{y}\Big) \\ + \Big(\frac{x^2}{y^2}+1\Big)\frac{1}{y^2}\beta(y)\psi''\Big(\frac{x}{y}\Big) = 0 \quad (6.5)$$

Fem ara el canvi $t = \frac{x}{y}$ i multipliquem (6.5) per y^2 de manera que obtenim:

$$2\beta(y)t\psi'(t) + y^2\beta''(y)\psi(t) - 2y\beta'(y)t\psi'(t) + \beta(y)(t^2+1)\psi''(t) = 0 \quad (6.6)$$

Introduïm el canvi $y = e^u$ (recordem que $y > 0$) i $\gamma(u) = \beta(e^u)$. D'aquesta manera tenim que:

- $\gamma'(u) = e^u\beta'(e^u) = y\beta'(y)$
- $\gamma''(u) = e^u\beta'(e^u) + (e^u)^2\beta''(e^u) = y\beta'(y) + y^2\beta''(y)$

i això fa que (6.6) quedi:

$$\gamma'(u)\psi(t) - \gamma'(u)\big(\psi(t) + 2t\psi'(t)\big) + \gamma(u)\big((t^2+1)\psi''(t) + 2t\psi'(t)\big) = 0$$

Aquesta darrera equació la podem pensar com un producte escalar a $\mathbb{R}^3$:

$$\langle\big(\gamma''(u), \gamma'(u), \gamma(u)\big), \big(\psi(t), -\psi(t) - 2t\psi'(t), (t^2+1)\psi''(t) + 2t\psi'(t)\big)\rangle = 0 \quad (6.7)$$

on aquesta igualtat és independent de t i de u.

Anomenem E al subespai generat per $\big(\gamma''(u), \gamma'(u), \gamma(u)\big)$ al variar u, i F al generat per $\big(\psi(t), -\psi(t) - 2t\psi'(t), (t^2)\psi''(t) + 2t\psi'(t)\big)$ al variar t. El que ens està dient (6.7) és que $E \perp F$. Com que els dos espais estan continguts en $\mathbb{R}^3$ podem dir que $\dim E + \dim F \leqslant 3$.

Aquesta desigualtat ens dóna un nombre molt petit d'opcions. Per començar estan els casos trivials, que no tenen sentit:

- $\dim F = 0$ es correspon amb $\psi(t) = 0$.
- $\dim E = 0$ es correspon amb $\gamma(u) = 0 \Rightarrow \omega(y) = 0$.

Per tant només ens queda considerar dos casos, $\dim F = 1$ ó $\dim E = 1$:

- **Cas** $\dim F = 1$**.**

  Això vol dir que existeixen un vector (c_1, c_2, c_3) i una funció $b(t)$ tals que:

  $$\big(\psi(t), -\psi(t) - 2t\psi'(t), (t^2+1)\psi''(t) + 2t\psi'(t)\big) = b(t)(c_1, c_2, c_3)$$

  És a dir:

  $$\left.\begin{aligned} \psi(t) &= c_1 b(t) \\ -\psi(t) - 2t\psi'(t) &= c_2 b(t) \\ (t^2+1)\psi''(t) + 2t\psi'(t) &= c_3 b(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\psi(t)}{-\psi(t) - 2t\psi'(t)} = \frac{c_1}{c_2}$$

  Els casos en que el denominador s'anul.la són trivials. L'igualtat anterior ens porta a:

  $$\Big(1 + \frac{c_1}{c_2}\Big)\psi(t) + \frac{c_1}{c_2} t\psi'(t) = 0 \Rightarrow \frac{\psi}{\psi'} = \frac{-2\frac{c_1}{c_2} t}{1 + \frac{c_1}{c_2}} = \alpha t$$
  $$\Rightarrow \log\psi = \frac{\alpha}{2} t^2 + c \Rightarrow \psi(t) = \mathrm{C} e^{\frac{\alpha}{2} t^2}$$

  Però aquest cas no ens interessa, ja que no seria ondeta admissible per a valors reals de α.

- **Cas** $\dim E = 1$**:**

  Igual que en el cas anterior això vol dir que existeixen un vector (c_1, c_2, c_3) i una funció $a(u)$ tals que:

  $$\big(\gamma''(u), \gamma'(u), \gamma(u)\big) = a(u)(c_1, c_2, c_3)$$

  És a dir:

  $$\left.\begin{aligned} \gamma''(u) &= a(u) c_1 \\ \gamma'(u) &= a(u) c_2 \\ \gamma(u) &= a(u) c_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\gamma(u)}{\gamma'(u)} = \frac{c_3}{c_2}$$
  $$\Rightarrow \log\gamma(u) = \frac{c_3}{c_2} u + c \Rightarrow \mathrm{C} e^{\frac{c_3}{c_2} u} = (e^u)^{\frac{c_3}{c_2}}\,\mathrm{C}$$

  Si ara desfem el canvi que hem fet en (6.6) i ens oblidem de la constant (no és important), tenim que $\beta(y) = y^{\frac{c_3}{c_2}} = y^{\alpha}$ ($c_2 \neq 0$ sempre).

  Per aquesta β, fent servir (6.6) i que:

- $\beta'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$
- $\beta''(y) = \alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2}$

veiem que ψ ha de complir:

$$2y^\alpha t\psi'(t) + \alpha(\alpha-1)y^\alpha\psi(t) - 2\alpha y^\alpha t\psi'(t) + y^\alpha\left(t^2+1\right)\psi''(t) = 0$$

Simplificant y^α i prenent $\psi(t) = (t+i)^\alpha$ veiem que:

$$\begin{aligned}(t+i)^\alpha\alpha(\alpha-1) + (t+i)^{\alpha-1}(2t\alpha - 2\alpha^2 t) + (t+i)^{\alpha-2}\alpha(\alpha-1)(t^2+1)\\ = (t+i)^{\alpha-2}\alpha(\alpha-1)(t^2-1+2ti-2t^2-2it+t^2+1) = 0\end{aligned}$$

Per tant $(t+i)^\alpha$ és solució de l'equació. Però nosaltres busquem solucions reals. En conseqüència hem de prendre $\Re(t+i)^\alpha$ i $\Im(t+i)^\alpha$, que per la linealitat del laplacià també seran solucions de l'equació. Com que aquesta té ordre 2 i tenim dues solucions, podem dir que la resta són combinació lineal d'aquestes.

Com que només ens interessen ondetes admissibles de $L^2(\mathbb{R})$, ens hem de restringir al cas $\alpha < -1$. □

Observació. Els espais de fase d'aquestes ondetes estaran molt relacionats amb els espais de Bergman, i podrem descriure els seus conjunts de mostreig i interpolació a partir de la descripció en aquell espai.

6.5 Resultats de mostreig.

Els resultats que donarem en aquesta secció són pràcticament idèntics als resultats de mostreig que hem donat en el cas de Gabor, i les idees són les mateixes. Les diferències entre les proves seran degudes a la diferent estructura de les dues transformades i els respectius espais de fase. Encara que sigui redundant, repetirem les demostracions i posarem èmfasi en les diferències que puguin aparèixer.

Com en el cas de Gabor, establim primer uns convenis de notació que simplificaran l'estudi. H serà sempre l'espai de fase d'una ondeta admissible ψ normalitzada de manera que $\|\psi\| = 1$ i $\int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}\,d\xi = 1$. Si no indiquem el contrari, $z, w \in \mathbb{H}$ amb $z = x+iy$, $w = a+bi$, complint $x, a \in \mathbb{R}$, $y, b \in \mathbb{R}^+$. Adoptem la mateixa notació quan apareguin subíndexs. Recordem que a l'hora de parlar de boles i de condicions de separació haurem de fer servir la distància hiperbòlica, que la podem calcular mitjançant la fórmula:

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\overline{z_2}}\right|}{1+\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-\overline{z_2}}\right|}$$

Amb aquesta distància la definició de separció queda:

Definició. Sigui $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{H}$. Direm que Λ és un conjunt **uniformement discret** o **separat** si existeix $\varepsilon > 0$ tal que $d(z_i, z_j) > \varepsilon \; \forall i \neq j$.

Anomenarem a ε la **constant de separació** de Λ.

Igual que en el cas de Gabor, per treballar còmodament necessitem que els conjunts siguin separats. Els primers resultats proven que aquests són els únics que ens interessen.

Lema 6.8. *Sigui $F \in H$ tal que $F(w) = 0$. Sigui $z \in \mathbb{H}$, aleshores:*

$$|F(w)|^2 \leqslant \|F\|^2\big(1 - |k_w(z)|^2\big) = \|F\|^2\big(1 - |\langle \psi_w, \psi_z\rangle|^2\big)$$

Demostració. Considerem H_w el conjunt de funcions de H que s'anul.len en w. Aquest és un subespai de Hilbert amb el següent nucli reproductor:

$$\Phi_{z_0}(z) = k_{z_0}(z) - k_{z_0}(w)k_w(z)$$

Per veure-ho hem d'observar primer que $\Phi_{z_0} \in H$ ja que és combinació lineal de funcions de H i $\Phi_{z_0}(w) = 0$ per a tot $z_0 \in \mathbb{C}$. Per tant $\Phi_{z_0} \in H_w$.

Si ara prenem $h \in H_w$ veiem que:

$$\langle h, \Phi_{z_0}\rangle = \langle h, k_{z_0}\rangle - k_{z_0}(w)\langle h, k_w\rangle = h(z_0)$$

És a dir, Φ_{z_0} reprodueix les funcions de H_w. Com que pertany a l'espai ja podem afirmar que és el seu nucli reproductor.

Com que F pertany a H_w apliquem la fórmula de reproducció en aquest espai.

$$\begin{aligned}|F(z)|^2 =& |\langle F, \Phi_z\rangle|^2 \leqslant \|F\|^2\langle \Phi_z, \Phi_z\rangle = \|F\|^2\Phi_z(z)\\ =& \|F\|^2\left(k_z(z) - \frac{k_z(w)}{k_w(w)}k_w(z)\right) = \|F\|^2\big(1 - |k_w(z)|^2\big)\end{aligned}$$

i obtenim el resultat. □

Teorema 6.9. *Sigui $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{H}$. Si Λ és un conjunt d'interpolació per a H es compleix que Λ és separada.*

Demostració. Pel teorema de la gràfica tancada, si Λ és d'interpolació existeix $M > 0$ tal que $\forall\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix $F \in H$ tal que $f(z_n) = a_n$ i $\|F\|^2 \leqslant M^2\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$. És a dir, podem realitzar l'interpolació amb norma acotada.

Sigui $z_i \neq z_j$. Existeix $F \in H$ tal que $F(z_i) = 1$ i $F(z_j) = 0$ amb $\|F\| \leqslant M$. Aplicant 6.8 tenim que:

$$\begin{aligned}&1 = |F(z_i)|^2 \leqslant \|F\|^2(1 - |k_{z_i}(z_j)|^2) \leqslant M^2\big(1 - |k_{z_i}(z_j)|^2\big)\\ &\Rightarrow 1 - |k_{z_i}(z_j)|^2 \geqslant \frac{1}{M^2} \Rightarrow |k_{z_i}(z_j)|^2 \leq 1 - \frac{1}{M^2} = C < 1\end{aligned}$$

Això vol dir que si $i \neq j$, $|\langle \psi_{z_i}, \psi_{z_j} \rangle|^2 \leqslant C < 1$, i com que el nucli és uniformement continu ens implica la condició de separació, ja que C no depèn de z_i i z_j. $\square$

Els conjunts de mostreig també és comporten de manera anàloga al cas de Gabor.

Teorema 6.10. *Sigui $\Lambda = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{H}$. Si Λ és conjunt de mostreig per a H es compleix que Λ és una unió finita de conjunts separats.*

Demostració. Com que Λ és de mostreig, $\exists C > 0$ tal que:

$$\sum_{\Lambda} |F(z_j)|^2 \leqslant C \|F\|^2 \tag{6.8}$$

Només ens caldrà aquesta desigualtat per provar el resultat. Ho farem per reducció a l'absurd. Que Λ no sigui unió finita d'uniformement discrets és equivalent a que per a tot N i tot δ podem trobar una bola hiperbòlica de radi δ, diem-li B, tal que $|\Lambda \cap B| > N$.

Com que $k_{z_0}(z)$ és una funció uniformement contínua, $\exists \delta$ tal que $|k_{z_0}(z_1) - k_{z_0}(z_2)| < \frac{1}{2}$ si $d(z_1, z_2) < \delta$, on aquest δ no depèn de z_0.

Agafem aquest δ i $N > 4C$. Sigui B la corresponent bola de radi δ que conté N punts de la successió. Sigui a el centre de B i considerem la funció $k_a(z) \in H$, per la qual s'ha de complir (6.8):

$$\sum_{\Lambda} |k_a(z_j)|^2 \leqslant C \|k_a\|^2 = C$$

Però per altra banda:

$$\sum_{\Lambda} |k_a(z_j)|^2 = \sum_{\Lambda \cap B^c} |k_a(z_j)|^2 + \sum_{\Lambda \cap B} |k_a(z_j)|^2 \geqslant \sum_{\Lambda \cap B} \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^2 \geqslant N\frac{1}{4} > C$$

i ja tenim la contradicció. $\square$

Observació. Encara que de manera anecdòtica, aquí hem fet servir que podem fer $|k_z(z_1) - k_z(z_2)|$ petit independentment de z, mentre que en Gabor havíem de considerar el valor absolut del nucli.

Ens tornem a trobar que aquest resultat no és millorable, ja que existeixen conjunts de mostreig que no són separats.

Per continuar donant resultats ens cal restringir el conjunt d'ondetes que fem servir. Aquí ens troben una de les principals diferències amb el cas de Gabor.

Les cotes que donarem a l'hora d'acotar els sumatoris dependran de la norma en $L^1(\mathbb{H})$ del nucli reproductor k i de la seva maximal local integrable:

$$Mk(z) = \sup_{w \in B(z,1)} |k(w)| \in L^1(\mathbb{H})$$

on $B(z,1)$ és la bola hiperbòlica de centre z i radi 1. L'àrea d'aquesta bola per la mesura invariant per l'esquerra és $4\pi\sinh^2(\frac{1}{2})$.

A diferència del que passava en Gabor, el conjunt d'ondetes admissibles amb nucli integrable no coincideix amb aquelles que el seu nucli té maximal local integrable (les anomenarem **ondetes amb nucli fortament integrable**). Aquestes darreres són les que ens aniran bé per discretitzar.

Recordem també que la funció $k(z^{-1}) \in L^1(z)$ i a més la seva integral coincideix amb la de $k(z)$. De fet $k(z^{-1}) = k(z)$ ja que $\langle\psi,\psi_z\rangle = \langle\psi_z,\psi\rangle$. Això no passa en general amb les altres funcions de H, on $F(z)$ pot estar en $L^1(\mathbb{H})$ o $L^2(\mathbb{H})$ i $F(z^{-1})$ no.

Lema 6.11. *Sigui k tal que $Mk \in L^1(\mathbb{H})$ i $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un conjunt separat amb constant de separació ε. Aleshores:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |k(\lambda)| < \frac{(\sinh\frac{\varepsilon}{4})^{-2}}{4\pi}\|Mk\|_1$$

Demostració. Suposem sense perdre generalitat que $\frac{\varepsilon}{2} < 1$. Si prenem dos punts diferents $\gamma,\lambda \in \Lambda$, com que $B(\gamma,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B(\lambda,\frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$ podem acotar:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |k(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{|B(0,\frac{\varepsilon}{2})|}\int_{B(\lambda,\frac{\varepsilon}{2})} Mk(z)\,dm(z) \leqslant \frac{(\sinh\frac{\varepsilon}{4})^{-2}}{4\pi}\int_{\mathbb{C}} Mk(z)\,dm(z)$$

que és el que volíem provar. □

Observació. Veiem altre cop que la cota només depèn de la constant de separació de Λ.

La forma d'actuar a partir d'aquí és la mateixa que en Gabor. Donarem una sèrie de resultats encaminats a provar que un conjunt és de mostreig si és proper a un que ja ho és. Utilitzarem les idees de [OlS92], que ens permetran conèixer les cotes de manera prou explícita com per acabar provant que tot conjunt de mostreig conté un subconjunt de mostreig i separat.

Proposició 6.12. *Donats una ondeta ψ amb nucli fortament integrable i Λ un conjunt separat existeix $B > 0$ tal que:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |F(\lambda)|^2 \leqslant B\|F\|^2 \quad \forall F \in H$$

Demostració. Calculant directament tenim que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\Lambda} |F(\lambda)|^2 &= \sum_{\lambda\in\Lambda} \left| \int_{\mathbb{C}} F(z)k(z^{-1}\cdot\lambda)\, dm(z) \right|^2 \\
&\leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 |k(z^{-1}\cdot\lambda)|\, dm(z) \right) \left(\int_{\mathbb{C}} |k(z^{-1}\cdot\lambda)|\, dm(z) \right) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 \sum_{\lambda\in\Lambda} |k(z^{-1}\cdot\lambda)|\, dm(z) \int_{\mathbb{C}} |k(z)|\, dm(z) \leqslant B\|F\|^2
\end{aligned}$$

ja que $\int_{\mathbb{C}} |k(z)|\, dm(z) < \infty$ perqué el nucli és integrable i

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |k(z^{-1}\cdot\lambda)| = \sum_{\gamma\in\Gamma} |k(\gamma)|$$

amb $\Gamma = z^{-1}\cdot\Lambda$, que té la mateixa constant de separació que Λ. Podem ara aplicar 6.11 per acotar independentment de z. $\square$

Observació. Com veiem en la prova, la constant d'acotació depen de k en termes del seu valor absolut i no del quadrat. És a dir, depenen de $\|k\|_1$, tant discreta com contínua. És per aquesta raó que ens hem de limitar l'estudi d'ondetes amb nucli fortament integrable.

Teorema 6.13. *Considerem una ondeta admissible amb nucli fortament integrable. Donat $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunt de mostreig per a H existeix $\delta > 0$ tal que si $\Gamma = \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ compleix que $|z_j - w_j| < \delta\ \forall j$, Γ també és un conjunt de mostreig.*

Aquest resultat es dedueix de manera trivial del següent parell de lemes.

Lema 6.14. *Siguin $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ i $\Gamma = \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dos conjunts en $\mathbb{H}$, aleshores es compleix que:*

$$\left| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(w_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leqslant d_1 d_2 \|F\| \quad \forall F \in H$$

on d_1 i d_2 vénen definides per:

- $d_1^2 = \sup_j \int_{\mathbb{H}} |k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)|\, dm(z)$
- $d_2^2 = \sup_z \sum_{j\in\mathbb{N}} |k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)|$

Demostració. Calculant directament tenim que:

$$\left| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |F(w_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| = \big| \|(F(z_j))_j\|_2 - \|(F(w_j))_j\|_2 \big|$$

on $\|\cdot\|_2$ significa la norma de l^2, pensant $\big(F(z_j)\big)_j$ com a successió.

$$
\begin{aligned}
\big|\|(F(z_j))_j\|_2 - \|(F(w_j))_j\|_2\big| &\leqslant \|(F(z_j)-F(w_j))_j\|_2 \\
&= \left\| \left(\int_{\mathbb{H}} F(z)k(z^{-1}\cdot z_j)\,dm(z) - \int_{\mathbb{H}} F(z)k(z^{-1}\cdot w_j)\,dm(z) \right)_j \right\|_2 \\
&= \left\| \left(\int_{\mathbb{H}} F(z)\big[k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)\big]\,dm(z) \right)_j \right\|_2 \\
&\leqslant \left[\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{H}} |F(z)|\big|k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)\big|\,dm(z) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

on hem entrat els valors absoluts a l'interior per utilitzar Schwartz. L'equació anterior la podem acotar per:

$$
\left[\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{H}} |F(z)|^2\big|k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)\big|\,dm(z) \int_{\mathbb{H}} \big|k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)\big|\,dm(z) \right]^{\frac{1}{2}}
$$

Acotem per separat,

$$
\int_{\mathbb{H}} \big|k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)\big|\,dm(z) \leqslant d_1^2
$$

Per altra banda,

$$
\int_{\mathbb{H}} |F(z)|^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \big|k(z^{-1}\cdot z_j) - k(z^{-1}\cdot w_j)\big|\,dm(z) \leqslant d_2^2\|F\|^2
$$

Unint les dues cotes obtenim l'enunciat. □

Lema 6.15. *Sigui* $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *un conjunt separat, i suposem que* ψ *té nucli fortament integrable.*

Per a tot ε $\exists\delta$ *tal que si* $\Gamma = \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *compleix que* $d(z_j, w_j) \leqslant \delta$ $\forall j$ *aleshores* $d_1 d_2 \leqslant \varepsilon$*, amb* d_1 *i* d_2 *definides com a 6.14.*

Demostració. Primer veurem que podem fer d_1 tant petit com vulguem si Γ és prou propera a Λ. Però això és trivial, ja que només cal observar que si $|k(z)|$ és integrable $|k(z^{-1})|$ també, i que l'operador de translació és uniformement continu en $L^1(\mathbb{H})$.

Anem ara a acotar d_2. Si $\alpha = \sup_{i\neq j} d(z_i, z_j)$ és la constant de separació de Λ, assumim $\delta < \frac{\alpha}{3}$, i és compleix que $d(w_i, w_j) > \frac{\alpha}{3}$ $\forall i \neq j$. És a dir, $\frac{\alpha}{3}$ ens serveix de constant de separació tant per Λ com per Γ. De fet $\Lambda_z = \{z^{-1}\cdot z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$

i $\Gamma_z = \{z^{-1} \cdot w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ també tenen la mateixa constant de separació. Aquí podem aplicar 6.11 per provar que existeix $C = C(\frac{\alpha}{3})$ tal que $d_2 \leqslant 2C$.

Si ajuntem les dues parts veiem que d_2 està acotat per C quan prenem δ petit, i d_1 es pot fer tant petit com es desitgi agafant δ prou petit. Per tant $\exists\delta$ tal que si $d(z_j, w_j) \leqslant \delta\ \forall j$, es compleix que $d_1 d_2 < \varepsilon$. □

Observació. En aquestes demostracions ja veiem que per una part els càlculs es simplifiquen degut a que les translacions en $\mathbb{H}$ coincideixen exactament amb les que apliquem a les funcions. Però per altra banda són més confuses fruit de que aquestes no són commutatives i l'estructura de $\mathbb{H}$ no és tan senzilla com la de $\mathbb{C}$.

En el teorema 6.10 vèiem que tot conjunt de mostreig era una unió finita de conjunts separats. Fent servir els resultats anteriors podem millorar bastant aquest enunciat. Igual que en Gabor, la idea és que un conjunt de mostreig és una unió de varis conjunts molt propers. Els lemes 6.15 i 6.14 ens diuen que conjunts propers donen més o menys la mateixa informació sobre les funcions. És a dir, en un conjunt de mostreig no separat hi ha informació repetida.

Teorema 6.16. *Sigui $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunt de mostreig per a l'espai de fase d'una ondeta amb nucli fortament integrable.*

Λ conté un subconjunt $\widetilde{\Lambda} \subseteq \Lambda$ tal que $\widetilde{\Lambda}$ és de mostreig i separat.

Demostració. Com que Λ és de mostreig sabem per 6.10 que és unió finita de separats, i que existeixen $A, B > 0$ tals que per a tota $F \in H$ es compleix que:

$$A\|F\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \leqslant B\|F\|^2$$

Per a tot δ (pensem en un δ molt petit) podem definir $\widetilde{\Lambda} \subseteq \Lambda$ de manera que si $\widetilde{\Lambda} = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es compleixi que:

- $B(w_i, \delta) \cap \widetilde{\Lambda} = \{w_i\}$
- $\cup_{i\in\mathbb{N}} (B(w_i, \delta) \cap \Lambda) = \Lambda$
- $|B(w_i, \delta) \cap \Lambda| \leqslant N$

on N és una constant que de fet es pot acotar pel nombre de conjunts separats que formen Λ. Tot això ho podem fer gràcies a que Λ és unió finita de separats. És a dir, el que fem és definir $\widetilde{\Lambda}$ de manera que $B(w_i, \delta)$ només conté a w_i dels punts de $\widetilde{\Lambda}$, tot $z_j \in \Lambda$ està contingut en alguna $B(w_i, \delta)$ per algun $w_i \in \widetilde{\Lambda}$, i cada una d'aquestes boles només conté un nombre finit acotat de punts de Λ. Podem pensar que cada z_j pertany només a una $B(w_i, \delta)$. Això no és cert, però podem assignar a cada z_j un únic w_i a l'hora de treballar.

Tenint en compte això podem escriure $\Lambda = \cup_{i\in\mathbb{N}}\{w_i^1, \ldots, w_i^{N_i}\}$, de manera que:

- $w_i^1 = w_i \in \widetilde{\Lambda}$
- $w_i^k \notin \widetilde{\Lambda}$ si $k \neq 1$
- $w_i^k \in B(w_i, \delta)$
- $N_i \leqslant N \ \forall i$
- Els conjunts $\{w_i^k\}_{k=1}^{N_i}$ son disjunts al variar i

Amb aquesta notació calculem:

$$\begin{aligned}\sum_{z_j\in\Lambda} |F(z_j)|^2 &= \sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} \sum_{k=1}^{N_i} |F(w_i^k)|^2 \\ &= \sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} \left[\sum_{k=1}^{N_i} \left(|F(w_i^k)|^2 - |F(w_i^1)|^2\right) + N_i|F(w_i^1)|^2\right] \\ &\leqslant N \sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i)|^2 + \sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} \sum_{k=1}^{N_i} \left(|F(w_i^k)|^2 - |F(w_i^1)|^2\right)\end{aligned}$$

Si definim $w_i^k = w_i^1$ per a $N_i < k \leqslant N$ podem escriure:

$$\begin{aligned}&\sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} \sum_{k=1}^{N_i} \left(|F(w_i^k)|^2 - |F(w_i^1)|^2\right) = \sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} \sum_{k=1}^{N} \left(|F(w_i^k)|^2 - |F(w_i^1)|^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i^k)|^2 - \sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i^1)|^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left[\left(\sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i^k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i^1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\qquad \left[\left(\sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i^k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{w_i\in\widetilde{\Lambda}} |F(w_i^1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

El primer parèntesi el podem acotar per $2B^{\frac{1}{2}}\|F\|$, ja que són sumatoris de parcials de Λ. Per a acotar el segon parèntesi en valor absolut, el que farem és aplicar 6.14 als conjunts $\{w_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{w_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$. Això ens diu que:

$$\left|\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i^k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i^1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leqslant d_1^k d_2^k \|F\|$$

on k no és un exponent si no un índex, i d_1^k, d_2^k vénen definides per:

- $(d_1^k)^2 = \sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{H}} |k(z^{-1}\cdot w_i^k) - k(z^{-1}\cdot w_i^1)|\, d\mu(z)$
- $(d_2^k)^2 = \sup_{z\in\mathbb{H}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |k(z^{-1}\cdot w_i^k) - k(z^{-1}\cdot w_i^1)|$

Definim ara:

- $d_1 = \sup_k d_1^k$
- $d_2 = \sup_k d_2^k$

i podem acotar independentment de k:

$$\left|\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i^k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i^1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leqslant d_1 d_2 \|F\|$$

Per tant, si ajuntem totes les acotacions obtenim:

$$\begin{aligned} A\|F\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \leqslant N\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2 + \left|\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{N}\Big(|F(w_i^k)|^2 - |F(w_i^1)|^2\Big)\right| \\ \leqslant N\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2 + 2NB^{1/2} d_1 d_2 \|F\|^2 \end{aligned}$$

Això implica

$$\frac{A - 2NB^{1/2}d_1 d_2}{N}\|F\|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2$$

Com que N, A i B són fixes, aplicant 6.12 i 6.15 veiem que existeix δ prou petit tal que $\widetilde{\Lambda}$, definida al principi, compleix que existeixen A', B' amb:

$$A'\|F\|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |F(w_i)|^2 \leqslant B'\|F\|^2$$

És a dir, $\widetilde{\Lambda}$ és de mostreig. □

D'aquesta manera arrivem al mateix resultat que ja haviem obtingut en el cas de Gabor. El següent pas és comparar el discret amb el continu per tal de demostrar l'existència de conjunts de mostreig i donar com a condició suficient que un conjunt estigui per tot arreu.

Lema 6.17. *Sigui $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunt que compleix que $\forall j\ \exists V_j \subseteq \mathbb{H}$ (obert) de manera que $\mathbb{H} = \cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{V_j}$, amb $z_j \in V_j$ i $\cup_{j\in\mathbb{N}} z_j^{-1}\cdot V_j \subseteq V$ compacte i simètric (al voltant de i), $V_j \cap V_k = \emptyset$. Aleshores es compleix que:*

$$\left|\|F\| - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leqslant d_1' d_2' \|F\|$$

on:

- $d_1' = \left(\sup_{\xi\in V}\int_{\mathbb{H}} |k(z\cdot\xi) - k(z)|\, d\mu(z)\right)^{1/2}$
- $d_2' = \left(\sup_{w\in\mathbb{H}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{V_j} |k(w\cdot z) - k(w\cdot z_j)|\, d\mu(z)\right)^{1/2}$

i c_j és l'area (hiperbòlica) de V_j.

Demostració. Calculant directament:

$$\begin{aligned}
&\left|\|F\| - \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2 = \left|\|F\| - \left\|\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{V_j}(z)|F(z_j)|\right\|\right|^2 \\
\leqslant &\left\|F(z) - \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{V_j}(z)|F(z_j)|\right\|^2 = \left\|\sum_{j\in\mathbb{N}}\big(F(z) - F(z_j)\big)\chi_{V_j}(z)\right\|^2 \\
= &\int_{\mathbb{H}}\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}\big(F(z) - F(z_j)\big)\chi_{V_j}(z)\right|^2 dm(z)
\end{aligned}$$

Introduïm aquí la fórmula de reproducció per escriure aquest darrer terme com:

$$\int_{\mathbb{H}}\left|\sum_{j\in\mathbb{N}}\left[\int_{\mathbb{H}} F(w)\big(k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big)\, dm(w)\right]\chi_{V_j}(z)\right|^2 dm(z)$$

Aplicant Schwartz podem acotar per:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}}\Bigg[\sum_{j\in\mathbb{N}}&\left(\int_{\mathbb{H}} |F(w)|^2 \big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big|\, dm(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\left(\int_{\mathbb{H}}\big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big|\, dm(w)\right)^{\frac{1}{2}}\chi_{V_j}(z)\Bigg]^2 dm(z)
\end{aligned}$$

Com que els V_j són disjunts, podem entrar el quadrat dins de l'integral i simplifiquem una mica l'expresió:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\Bigg[&\int_{\mathbb{H}} |F(w)|^2 \big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big|\chi_{V_j}(z)\, dm(w) \\
&\int_{\mathbb{H}}\big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big|\chi_{V_j}(z)\, dm(w)\Bigg]\, dm(z)
\end{aligned}$$

Separem per parts. La segona integral es pot acotar per:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}}\big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big|\, dm(w) &= \int_{\mathbb{H}}\big|k(t^{-1}\cdot z_j\cdot z) - k(t^{-1})\big|\, dm(t) \\
&\leqslant \sup_{\xi\in V}\int_{\mathbb{H}} |k(t\cdot\xi) - k(t)|\, dm(t) = (d_1')^2
\end{aligned}$$

Per a la primera fem

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{H}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(w)|^2 \big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big| \chi_{V_j}(z)\, dm(w)\, dm(z) \\
&\quad = \int_{\mathbb{H}} |F(w)|^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} \big|k(w^{-1}\cdot z) - k(w^{-1}\cdot z_j)\big|\, dm(z)\, dm(w) \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbb{H}} |F(w)|^2 \sup_{w\in\mathbb{H}} \Big[\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} \big|k(w\cdot z) - k(w\cdot z_j)\big|\, dm(z)\Big]\, dm(w) \\
&\quad \leqslant (d_2')^2 \|F\|^2
\end{aligned}
$$

que és el que volíem demostrar. $\square$

Teorema 6.18. *Sigui H un espai de fase d'una ondeta ψ amb nucli fortament integrable. Existeix δ tal que si $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ és un conjunt separat complint les condicions de 6.17 amb V contingut en $B(0,\delta)$, llavors Λ és de mostreig per H.*

Demostració. El que farem és acotar d_2' i fer d_1' tant petita com vulguem en 6.17. Per a d_2', fixem $w \in \mathbb{H}$ i tenim que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} \big|k(w\cdot z) - k(w\cdot z_j)\big|\, dm(z) &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{V_j} |k(w\cdot z)|\, dm(z) + \sum_{j\in\mathbb{N}} |V_j||k(w\cdot z_j)| \\
&\leqslant \|k\|_1 + \sum_{j\in\mathbb{N}} |V_j| \frac{1}{|V_j|} \int_{w^{-1}\cdot V_j} |Mk(z)|\, dm(z) \\
&= \|k\|_1 + \|Mk\|_1
\end{aligned}
$$

si $\delta \leqslant 1$. Per tant $d_2' \leqslant (\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2}$.

De la continuïtat de l'operador de translació en $L^1(\mathbb{H})$ es dedueix que si δ és prou petit podem aconseguir $d_1' < \varepsilon$ per a qualsevol $\varepsilon > 0$. Per tant aplicant 6.17 tenim que:

$$
\left| \|F\| - \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \right| < \varepsilon\big(\|k\|_1 + \|Mk\|_1\big)^{\frac{1}{2}} \|F\|
$$

Agafem δ tal que $\varepsilon(\|k\|_1 + \|Mk\|_1)^{1/2} < 1$ i obtenim:

$$
\begin{aligned}
\Big(1 - \varepsilon\big(\|k\|_1 + \|Mk\|_1\big)^{\frac{1}{2}}\Big) \|F\| &\leqslant \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j |F(z_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(1 + \varepsilon\big(\|k\|_1 + \|Mk\|_1\big)^{\frac{1}{2}}\Big) \|F\|
\end{aligned}
$$

Ara només cal definir A i B de manera que

$$A = \frac{\left(1-\varepsilon\left(\|k\|_1+\|Mk\|_1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\sup_j\{c_j\}}$$
$$B = \frac{\left(1+\varepsilon\left(\|k\|_1+\|Mk\|_1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\inf_j\{c_j\}}$$

per obtenir:

$$A\|F\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |F(z_j)|^2 \leqslant B\|F\|^2$$

Tant $\sup_j\{c_j\}$ com $\inf_j\{c_j\}$ estan acotats i són més grans que 0. □

Observació. No hem fet servir 6.12 per la desigualtat dreta.

Tan sols ens cal una manera més senzilla de reconèixer els conjunts que estan sota les condicions de 5.14, que són els conjunts separats que estan per tot arreu.

Lema 6.19. *Sigui $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunt separat tal que $\exists\delta$ amb la propietat que $\forall z \in \mathbb{C}$, $B(z,\delta)\cap\Lambda \neq \emptyset$.*

Aleshores Γ compleix les condicions de 6.17

Demostració. Com que Λ és separat només cal veure que $\exists V_j$ oberts, amb $V_j \cap V_k = \emptyset$ si $j \neq k$, $\mathbb{H} = \cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{V_j}$, $z_j^{-1}\cdot V_j \subseteq V$ compacte simètric, amb $|\cap_{j\in\mathbb{N}} z_j^{-1}\cdot V_j| > 0$.

Per això definim, si ε és la constant de separació de Λ, $b_j = \overline{B(z_j, \frac{\varepsilon}{2})}$, $B_j = B(z_j,\delta)$. Definim ara els V_j:

- $V_1 = B_1 \setminus \cup_{j\neq 1} b_j$
- $V_k = B_i \setminus (\cup_{j\neq k} b_j) \bigcup \overline{\left(\cup_{j=1}^{k-1} B_i\right)}$

Observem primer que en cada compacte de $\mathbb{H}$ totes aquestes unions i interseccions són finites, i per tant la unió de tancats és tancada. Això ens diu que els V_j són tots oberts, i per construcció són disjunts.

Com que $B_j \subseteq \cup_{k=1}^{j}\overline{V_k}$, i tot z està en algun B_j, ja tenim que $\cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{V_j} = \mathbb{H}$, i com que $V_j \subseteq B_j \Rightarrow z_j^{-1}\cdot V_j \subseteq z_j^{-1}\cdot B_j = B(i,j) \subseteq \overline{B(i,\delta)}$ compacte i simètric, i també per construcció tenim que $B(i\varepsilon/2) \subseteq z_j^{-1}\cdot V_j$ i ja tenim la darrera condició. □

Unint aquests dos darrers resultats tornem a obtenir una condició totalment geomètrica suficient perquè una seqüència sigui de mostreig, idèntica a la del cas de Gabor.

Teorema 6.20. *Sigui H l'espai de fase d'una ondeta ψ amb nucli fortament integrable. Existeix δ tal que si Λ és un conjunt separat tal que $B(z,\delta)\cap\Lambda \neq \emptyset$ $\forall z$ aleshores Λ és de mostreig per a H.*

El que hem arribat a provar és que un conjunt prou dens (amb punts per tot arreu) és de mostreig, però no tenim cap noció de a partir de quan (de quina densitat) pot ser-ho. És a dir, sabem que un conjunt molt dens genera un marc, però ens preguntem si un conjunt que generi un marc ha de ser obligatòriament una mica dens.

Des del punt de vista de xarxes regulars hem vist que podem trobar marcs per a qualsevol tria de paràmetres, la qual cosa ens fa pensar que no tindrem un resultat de densitat mínima, però tot i això, alguna cosa podrem dir.

El que veurem és l'anàleg del teorema 5.18, que ens permetia comparar sistemes de Gabor provinents de funcions i conjunts diferents. La situació, però, no és tan bona en el cas d'ondetes.

Cal observar també que, tot i que estem fent servir la noció de densitat de manera informal i intuïtiva, no hem donat cap definició formal d'aquest concepte (només en el cas de l'ondeta de Poisson). De fet tampoc la donarem, de manera que els resultats que tindrem no seran directament de comparació entre densitats.

No ens preocuparem de la condició d'aproximació homogènia uniforme, ja que compararem sistemes provinents de la mateixa funció, i no ens farà falta.

Teorema 6.21. *Sigui ψ una ondeta amb nucli fortament integrable i suposem que $W(\psi,\Gamma)$ és una base de Riesz i $W(\psi\Lambda)$ un marc de $L^2(\mathbb{R})$ amb $\Gamma = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ i $\Lambda = \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ conjunts separats de $\mathbb{H}$.*

Aleshores per tot a, r, ε existeix R tal que:

$$(1-\varepsilon)|B(a,r)\cap\Gamma| \leqslant |B(a,r+R)\cap\Lambda| \tag{6.9}$$

Demostració. Seguint la demostració de 5.18 considerem $a \in \mathbb{H}$. Definim $V_r(a)$ com l'espai generat per:

$$\{\psi_{z_j} : z_j \in B(a,r)\cap\Gamma\}$$

i definim $W_r(a)$ com l'espai generat per:

$$\{\psi_{w_k} : w_k \in B(a,r)\cap\Lambda\}$$

Les boles i els radis que estem considerant són hiperbòlics.

Considerem l'operador autoadjunt i positiu $T : V_r(a) \to V_r(a)$ definit com la composició de projeccions:

$$T = P_{V_r(a)} \circ P_{W_{r+R}(a)}$$

Com que $W(\psi,\Gamma)$ és una base de Riesz, existeixen funcions $\phi_j \in \mathcal{H}$ tals que:

$$\langle \psi_{z_j}, \phi_l \rangle = \delta_{j,l}$$

Aquestes ϕ_j formen també una base de Riesz. Per tant estan uniformement acotades en norma. Els arguments anteriors impliquen que:

$$\begin{aligned} Tr(T) &= \sum_{z_j \in B(a,r)\cap\Gamma} \langle T(\psi_{z_j}), \phi_j\rangle \geqslant \sum_{z_j \in B(a,r)\cap\Gamma} \langle \psi_{z_j}, \phi_j\rangle - |\langle T(\psi_{z_j}) - \psi_{z_j}, \phi_j\rangle| \\ &\geqslant \big(1 - C\sup_j \|T(\psi_{z_j}) - \psi_{z_j}\|\big)|B(a,r)\cap\Gamma| \end{aligned}$$

on C és la cota superior de les normes de les ϕ_j i $|A|$ és el cardinal de A si A és finit.

Observem ara que el rang de T no pot ser més gran que la dimensió de $W_{r+R}(a)$ i tenim l'estimació:

$$Tr(T) \leqslant \dim W_{r+R}(a) \leqslant |B(a, r+R| \cap \Lambda)$$

Per tant arribem a la desigualtat:

$$\big(1 - C\sup_j \|T(\psi_{z_j}) - \psi_{z_j}\|\big)|B(a,r)\cap\Gamma| \leqslant |B(a, r+R)\cap\Lambda|$$

El que ens queda per veure és que si triem R prou gran podem fer $\sup_j \|T(\psi_{z_j}) - \psi_{z_j}\|$ tan petit com vulguem. Per veure això observem que:

$$\|T(\psi_{z_j}) - \psi_{z_j}\| = \left\|P_{V_r(a)}\big(P_{W_{r+R}(a)}(\psi_{z_j})\big) - P_{V_r(a)}(\psi_{z_j})\right\| \leqslant \|P_{W_{r+R}(a)}(\psi_{z_j}) - \psi_{z_j}\|$$

És a dir, hem de fer petit $\|P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j})\|$. Si fem servir que $\{\psi_{w_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ és un marc, podem veure que, fent servir el marc dual, $P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j})$ es pot escriure com:

$$P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j}), \psi_{w_k}\rangle \widetilde{\psi}_k$$

on les $\widetilde{\psi}_k$'s són els elements del marc dual. Ara observem que:

$$\langle P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j}), \psi_{w_k}\rangle = 0$$

si $w_k \in B(a, r+R)$. D'aquesta manera la suma anterior ens queda:

$$\sum_{w_k\in\Lambda, w_k\notin B(a,r+R)} \langle P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j}), \psi_{w_k}\rangle \widetilde{\psi}_k$$

Les $\widetilde{\psi}_k$'s estan acotades en norma, per tant tenim l'acotació:

$$\|P_{(W_{r+R}(a))^\perp}(\psi_{z_j})\| \leqslant \sum_{w_k\in\Lambda, w_k\notin B(a,r+R)} |\langle \psi_{z_j}, \psi_{w_k}\rangle| = \sum_{w_k\in\Lambda, w_k\notin B(a,r+R)} |k(z_j^{-1}\cdot w_k)|$$

Com que ψ té nucli fortament integrable obtenim la següent desigualtat:

$$\sum_{w_k\in\Lambda, w_k\notin B(a,r+R)} |k(z_j^{-1}\cdot w_k)| \leqslant \widetilde{C}\left\|Mk_{|(B(i,R))^c}\right\|_1$$

on $\widetilde{C}$ només depèn de Λ i de ψ, però no de z_j. També hem fet servir que $z_j \in B(a,r)$. Ara, si agafem R prou gran ja tenim l'acotació que volíem.

Per tant arribem a que per tot a, r, ε existeix R tal que:

$$(1-\varepsilon)|B(a,r)\cap\Gamma| \leqslant |B(a,r+R)\cap\Lambda|$$

que és el que voliem demostrar. □

Si ara intentem deduir a partir d'aquí un resultat de densitat com en 5.18 ens trobem amb el problema de que l'àrea hiperbòlica d'una bola de radi r és $4\pi(\sinh\frac{r}{2})^2$ i veiem que:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{(\sinh\frac{r}{2})^2}{(\sinh\frac{r+R}{2})^2} \neq 1$$

Això no ens permet transformar (6.9) en una desigualtat entre densitats com s'entén en el cas de Gabor. Tot i això, (6.9) ens permet dir que en boles prou grans i tindrem sempre un mínim de punts.

6.6 Un resultat d'interpolació.

El que farem en aquest apartat és donar un resultat sobre interpolació en espais de fase identic a 5.22, inspirat també en [Dya94], on direm que un conjunt prou separat és d'interpolació.

Teorema 6.22. *Sigui ψ una ondeta admissible amb nucli reproductor k integrable. Aleshores existeix R_0 tal que tot conjunt $\Lambda = \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ amb constant de separació més gran que $2R_0$ és d'interpolació per H, l'espai de fase de ψ.*

Aquest R_0 és de fet el mínim R tal que:

$$\int_{B(i,R)} |k(z)|\,d\mu(z) \geqslant \frac{1}{2}\|k\|_1$$

i si $R = R_0$ l'integral anterior val $\frac{1}{2}\|k\|_1$ per continuïtat.

Demostració. Recordem que un conjunt $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{H}$ era d'interpolació per a $H_\psi = H$ si per a qualsevol successió de valors $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ existia una funció $F \in H$ tal que $F(z_j) = a_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Això és equivalent a veure que existeix $F \in H$ tal que:

$$\int_{\mathbb{H}} F(z)k(z^{-1}\cdot z_j)\,dm(z) = \langle F, k_{z_j}\rangle = a_j \qquad \forall j\in\mathbb{N} \tag{6.10}$$

Si tenim una funció $\phi \in L^2(\mathbb{H})$ resulta que:

$$\widetilde{\phi}(z) = \int_{\mathbb{H}} \phi(w)k(w^{-1} \cdot z)\, dm(w) \in H$$

De fet $\widetilde{\phi}$ és la projecció ortogonal de ϕ en H. Si observem que:

$$\langle \phi, k_{z_j} \rangle = \langle \widetilde{\phi}, k_{z_j} \rangle \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

veiem que resoldre el problema (6.10) per a una funció $F \in H$ és equivalent a trobar una $\phi \in L^2(\mathbb{H})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{H}} \phi(z)k(z^{-1} \cdot z_j)\, dm(z) = \langle \phi, k_{z_j} \rangle = a_j \qquad \forall j \in \mathbb{N} \tag{6.11}$$

Això no és estrany, ja que el fet de que $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sigui una successió d'interpolació és equivalent a que el conjunt de funcions $\{k_{z_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ sigui linealment independent. Aquest fet no depèn de si ens ho mirem a H o a tot $L^2(\mathbb{H})$.

Per tant hem de comprovar que si Λ compleix les condicions de l'enunciat podem assegurar que per a tota successió $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ existeix $\phi \in L^2(\mathbb{H})$ que resol (6.11).

Per estudiar aquest problema anomenem:

$$\alpha = \int_{\mathbb{H}} |k(z)|\, dm(z) = \|k\|_1$$

Donada una successió $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$, definim la següent funció:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha} \frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} \chi_{B_k}(z)$$

on les B_k seran boles de centre z_k i radi $R > R_0$ la meitat de la constant de separació de Λ. Definim $\frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} = 1$ si $k_{z_k}(z) = 0$. Com que les B_k són disjuntes és clar que $f \in L^2(\mathbb{H})$. Si ara calculem tenim que:

$$\langle f, k_{z_j} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} c_k$$

amb els b_{jk} definits com:

$$b_{jk} = \int_{B_k} \frac{1}{\alpha} \frac{|k_{z_k}(z)|}{\overline{k_{z_k}(z)}} \overline{k_{z_j}(z)}\, dm(z)$$

Definim ara el següent operador:

$$\begin{aligned} T : l^2 &\longrightarrow l^2 \\ (c_k)_k &\longmapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} c_k \right)_j \end{aligned}$$

Per veure que aquest operador és acotat només cal calcular:

$$\|T((c_k)_k)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}c_k\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_{jk}|\sum_{k=1}^{\infty}|b_{jk}||c_k|^2\right)$$

Ara, per una part veiem que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{jk}| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{B_k}\frac{|k(z_k^{-1}\cdot z)|}{\overline{k(z_k^{-1}\cdot z)}}\frac{\overline{k(z_j^{-1}\cdot z)}}{\alpha}\,dm(z)\right| \leqslant 1$$

Per una altra banda tenim que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{jk}||c_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\sum_{j=1}^{\infty}|b_{jk}| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_{B_k}\frac{|k(z_k^{-1}\cdot z)|}{\overline{k(z_k^{-1}\cdot z)}}\frac{\overline{k(z_j^{-1}\cdot z)}}{\alpha}\,dm(z)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\sum_{j=1}^{\infty}\int_{B_k}\frac{|k(z_j^{-1}\cdot z)|}{\alpha}\,dm(z) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\sum_{j=1}^{\infty}\int_{z_j^{-1}\cdot B_k}\frac{|k(w)|}{\alpha}\,dm(w) \leqslant \|(c_k)_k\|^2
\end{aligned}$$

Per tant l'operador T té norma menor o igual a 1. El pas següent és comprovar que aquest operador és invertible. Això ho veurem comprovant que $\|Id - T\| < 1$.

$$\begin{aligned}
\|Id - T\|^2 &= \sup_{\|(c_k)_k\|=1}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_{jk} - b_{jk})c_k\right|^2 \\
&\leqslant \sup_{\|(c_k)_k\|=1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\delta_{jk} - b_{jk}|\sum_{k=1}^{\infty}|\delta_{jk} - b_{jk}||c_k|^2\right)
\end{aligned}$$

Ens hem de mirar aquesta expresió per parts. Observem primer que $b_{jj} \geqslant 0$ i no depèn de j i que $\sum_j |b_{jk}| \leqslant 1$ i $\sum_k |b_{jk}| \leqslant 1$. Tenint en compte això veiem que, fixat j:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\delta_{jk} - b_{jk}| = 1 - 2b_{jj} + \sum_{k=1}^{\infty}|b_{jk}| \leqslant 2(1 - b_{jj})$$

Per una altra part, podem acotar, fixat k:

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\delta_{jk} - b_{jk}| = 1 - 2b_{kk} + \sum_{j=1}^{\infty}|b_{jk}| \leqslant 2(1 - b_{kk})$$

Anomenem $\beta = b_{jj}$, que recordem que no depèn de j. Ara sumem aquestes acotacions per arrivar a:

$$\|Id - T\| \leqslant 2(1-\beta)$$

Per tant el que ens interessa és que $\beta > \frac{1}{2}$. Després de fer un canvi de variable, la definició de β és la següent:

$$\beta = \frac{1}{\|k\|_1} \int_{B(i,R)} |k(z)|\, dm(z)$$

Com que havíem triat $R > R_0$ es compleix que $\beta = \beta(R) > \frac{1}{2}$. Si estem en aquestes condicions resulta que per aquest R l'operador T és invertible, és a dir, per a tota successió $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix una altra successió $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2$ tal que $T((c_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Això ens diu que per a tota successió $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ existeix una funció $f \in L^2(\mathbb{H})$ tal que:

$$\langle f(z), k(z_j^{-1} \cdot z)\rangle = a_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}$$

Pel que hem comentat anteriorment podem pensar que f pertany a H. $\square$

Igual que en el cas de Gabor, aquests conjunts es corresponen amb bases de Riesz del subespai que generen.

Bibliografia

[BCHL06] Balan,R., Casazza,P.G., Heil,C., Landau,Z., *Density, overcompleteness, and localization of frames. I. Theory.* J. Fourier Anal. Appl. **12** (2006), no. 2, 105–143.

[Bal81] Balian,R. *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér II, **292** (1981), 2353–2366.

[Ban53] Bang,T., *The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions.* Math. Scand. **1**, (1953). 137–152.

[Ber78] Berndtsson,B., *Zeros of analytic functions of several variables.* Ark. Mat. **16** (1978), no. 2, 251–262.

[Beu50] Beurling,A., *On a closure problem.* Ark. Mat. **1** (1950), no. 20, 301–303.

[Bru06] Bruna,J., *On Translation and Affine Systems Spanning* $L^1(\mathbb{R})$*.* J. Fourier Anal. Appl. **12** (2006), no. 1, 71–82.

[BrM07] Bruna,J., Melnikov,M., *On Translates of the Poisson Kernel and Zeros of Harmonic Functions.* Bull. London Math. Soc. **22** (2007), 317–326.

[BNW88] Bruna,J., Nagel,A., Wainger,S., *Convex hypersurfaces and Fourier transforms.* Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 2, 333–365.

[BOU06] Bruna,J., Olevskii,A., Ulanovskii,A., *Completeness in* $L^1(\mathbb{R})$ *of discrete translates.* Revista Mat. Iberoamericana **22** (2006), no. 1, 1–16.

[Cal64] Calderon,A.P. *Intermediate spaces and interpolation, the complex method.* Stud. Math., **24** (1964), 113–190.

[Chr03] Christensen,O., *An introduction to frames and Riesz bases.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[CDH99] Christensen,O., Deng,B., Heil,C., *Density of Gabor frames.* Appl. Comput. Harmon. Anal. **7** (1999), no. 3, 292–304.

[Dau92] Daubechies,I., *Ten lectures on wavelets.* SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[DaJ93] Daubechies,I., Janssen,A., *Two theorems on lattice expansions.* IEEE Trans. Inform. Theory **39** (1993), 3–6.

[Dya94] Dyakonov,K., *Moment problems for bounded functions.* Comm. Anal. Geom. **2** (1994), no. 4, 533–562.

[FeG89] Feichtinger,H.G., Gröchenig,K. *Banach spaces related to integrable grup representations and their atomic decomposition.* J. Funct. Anal. **86** (1989), no. 2, 307–340.

[FeG89-2] Feichtinger,H.G., Gröchenig,K., *Banach spaces related to integrable grup representations and their atomic decomposition II.* Monatsh. Math. **108** (1989), no. 2-3, 129–148.

[FeS06] Feichtinger,H.G., Sun,W., *Stability of Gabor frames with arbitrary sampling points.* Acta Math. Hungar. **113** (2006), no. 3, 187–212.

[Fol89] Folland,G.B., *Harmonic Analysis in Phase Space.* Ann. of Math. Stud. **122** Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1989).

[Gab46] Gabor,D., *Theory of communication.* J. IEE, **93** (1946), 429–457.

[Gar07] Garnett,J.B., *Bounded analytic functions. Revised first edition.* Graduate Texts in Mathematics, 236. Springer, New York, (2007).

[Gro91] Gröchenig,k., *Describing functions: Atomic decomposition versus frames.* Monatsh. Math. **112** (1991), no. 1, 1–42.

[GrM84] Grossmann,A., Morlet,J., *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape.* SIAM J. of Math. Anal., **15** (1984), no. 4, 723–736.

[GrL86] Gruman,L., Lelong,P., *Entire functions of several complex variables.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **282**, Springer-Verlag, Berlin, (1986).

[HaJ94] Havin,V., Jöricke,B., *The uncertainty principle in harmonic analysis.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **28**, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[HeK03] Heil,C., Kutyniok,G., *Density of weighted wavelet frames.* J. Geom. Anal. **13** (2003) 479–493.

[HeK06] Heil,C., Kutyniok,G., *The homogeneus Aproximation Property for wavelet frames.* J. Aprox. Theory, *to apear* (2006).

[Hir50] Hirschman,I.I., *On the distributions of the zeros of functions belonging to certain quasi-analytic classes.* Amer. J. Math. **72**, (1950). 396–406.

[Koo92] Koosis,P., *The Logarothmic Integral.* Vol. I-II, Cambridge Stuidies in Avanced Mathematics **12-21**. Cambridge Univ. Press (1988-1992).

[Kor75] Korenblum,B., *An extension of the Nevanlinna theory.* Acta Math. **135** (1975), no. 3-4, 187–219.

[Lan67] Landau,H.J., *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions.* Acta Math. **117** (1967) 37–52.

[Lev80] Levin,B.Ja., *Distribution of zeros of entire functions.* Transl. Math. Monogr. **5** Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1980).

[Lev96] Levin,B.Y., *Lectures on Entire Functions.* Transl. Math. Monogr. **150** Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996).

[Low85] Low,F., *Complete sets of wave packets.* In ‘A Passion for Physics– Essays in Honor of Geoffrey Chew”17–22, World Scientific, Singapore, 1985.

[Lyu92] Lyubarskii,Y., *Frames in the Bargmann space of entire functions.* Entire and subharmonic functions, 167–180, Adv. Soviet Math., 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Mal98] Mallat,S., *A wavelet tour of signal processing.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1998.

[NSV04] Nazarov,F., Sodin,M., Volberg,A., *Lower bounds for quasianalytic functions. I. How to control smooth functions.* Math. Scand. **95** (2004), no. 1, 59–79.

[Nik86] Nikol'skiĭ,N.K., *Treatise on the shift operator.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **273** Springer-Verlag, Berlin, (1986).

[Ole97] Olevskii,A., *Completeness in $L^2(\mathbb{R})$ of almost integer translates.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math. **324** (1997), no. 9, 987–991.

[OlU04] Olevvskii,A. Ulanovskii,A., *Almost Integer Translates. Do Nice Generators Exist?* J. Fourier Anal. Appl. **10** (2004), no. 1, 93–104.

[OlS92] Olsen,P.A., Seip,K., *A note on irregular discrete wavelet transforms.* IEEE Trans. Inform. Theory **38** (1992), no. 2, part 2, 861–863.

[RaS95] Ramanathan,J., Steger,T., *Incompleteness of sparse coherent states.* Appl. Comput. Harmon. Anal. **2** (1995), no. 2, 148–153.

[RoS03] Rosenblatt,J.M., Shuman,K.L., *Cyclic functions in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$.* J. Fourier Anal. Appl. **9** (2003), no. 3, 289–300.

[Sei92] Seip,K., *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space I.* J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 91–106.

[Sei93] Seip,K., *Beurling type density theorems in the unit disk.* Invent. Math. **113** (1993), no. 1, 21–39.

[SeW92] Seip,K., Wallsten,R., *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II.* J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 107–113.

[SuZ01] Sun,W., Zhou,X., *On the stability of Gabor frames.* Adv. in Appl. Math. **26** (2001), 181–191.

[SuZ02] Sun,W., Zhou,X., *Irregular wavelet/Gabor frames.* Appl. Comput. Harmon. Anal. **13** (2003), 63–76.

[SuZ03] Sun,W., Zhou,X., *Density and stability of wavelet frames.* Appl. Comput. Harmon. Anal. **15** (2003), 117–133.

[SuZ04] Sun,W., Zhou,X., *Density of irregular wavelet frames.* Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 8, 2377–2387.

[Tun05] Tung,J., *Zero sets and interpolating sets in Fock spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 1, 259–263

[Wie32] Wiener,N., *Tauberian Theorems.* Ann. of Math. (2) **33** (1932), no. 1, 1–100.

[You01] Young,R.M, *An Introduction to Nonhamonic Fourier Series. Reviser First Edition.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2001.

[Zal78] Zalik,R.A., *On Approximation by Shifts and a Theorem of Wiener.* Trans. Amer. Math Soc. **243** (1978), 299–308.

[Zhu93] Zhu,K., *Zeros of Functions in Fock Spaces.* Complex Variables **21** (1993), 87–98.