figures concretes per trobar una regla i poder generalitzar a partir d'aquesta llei sinó que va calcular totes les quadratures de la taula alhora posant els coeficients convenients i així va poder demostrar que les àrees en l'interval (0,1) expressades com

$$y = (m+n+1) . \binom{m+n}{m} . x^m . (1-x)^n$$

valen igual que l'àrea del quadrat. Els coeficients d'aquestes formes són els inversos dels valors de les quadratures, per això pot demostrar que les àrees d'aquestes formes de la taula de quadratures valen totes 1. Mengoli utilitza el triangle aritmètic per trobar les taules dels valors de les quadratures corresponents les quals ja havia demostrat amb el mètode dels indivisibles. A més Mengoli va mostrar un mètode per construir noves taules de quadratures a partir d'aquesta, interpolant els valors i les formes. Va utilitzar les propietats dels nombres combinatoris i les regles de construcció de les taules triangulars per fer-ne de noves.

La novetat de Mengoli és principalment la utilització de les lletres per generalitzar o sigui l'aplicació de l'àlgebra en la seva geometria. Mengoli defineix les ordenades de les figures per mitjanes proporcionals establint com a lligam entre l'àlgebra i la geometria la teoria de proporcions d'Euclides. Mengoli busca una regla que permeti donar qualsevol figura en lletres i col.locar-la en la taula a fi que quedin determinades les seves propietats i la seva àrea. Mengoli classifica les formes en tres tipus: FOa^m, $FO(1-a)^n$ i $FOa^m.(1-a)^n$ i estudia alhora cada grup, la qual cosa no era usual a l'època. Quan Mengoli demostra les propietats d'aquestes formes altra vegada empra les propietats de la teoria de proporcions. També quan Mengoli fa la demostració de quadratures aquesta és independent de la figura i es pot fer servir sempre si sabem la quasi raó del sumatori de potències. O sigui que la utilització de l'Algebra en les quadratures de Mengoli és un tret característic i fonamental.

Recordem les paraules de Mengoli, la seva geometria és una conjunció de la d'Arquimedes, la de Cavalieri i l'àlgebra de Viète, és a dir, la demostració de la quasi raó d'igualtat de l'adscrita i la forma, la demostració de la quasi raó entre les figures i el teorema 42, el coneixement de les àrees pel mètode dels indivisibles i l'ús de les lletres per generalitzar els resultats, per qualsevol exponent natural, li proporcionen eines pel seu nou mètode de demostració de les quadratures.

No vull deixar d'esmentar que la figura que Mengoli sembla que vol quadrar és el cercle i per això primer intenta aplicar la suma de sèries infinites a la suma de quadratures, però per aquest camí no ho aconsegueix. En canvi, amb les taules de quadratures, com veurem en el capítol següent, sí. Podríem pensar que Mengoli elabora tot aquest artifici, taules especiosa, quadratriu, etc, i la relació "quasi", per obtenir nombroses quadratures i, en particular, la quadratura del cercle. Mengoli sap els valors d'aquestes àrees mitjançant els indivisibles de Cavalieri, però busca un altre camí per demostrar-les. Primer calcula el valor de les sumes de potències amb el triangle aritmètic, que juntament amb l'àlgebra de Viète li serveix per generalitzar. Segon, identifica els valors de les quadratures fent operacions amb els nombres combinatoris. Per fi, la teoria de quasi proporcions li serveix per demostrar que aquests valors són els de les quadratures. Tanmateix Mengoli redemostra aquests resultats amb els rectangles inscrits i circumscrits a la manera d'Arquimedes fent palès que no és necessari fer-ho.

CAPITOL CINC

LA QUADRATURA DEL CERCLE

1. Introducció.

Des l'antiguitat els científics intentaven resoldre geomètricament tres problemes: "la duplicació del cub", "la trisecció de l'angle" i "la quadratura del cercle". Els esforços dels grans pensadors matemàtics al llarg de la història per resoldre aquests problemes van fer avançar considerablement les matemàtiques.

Quan diem la quadratura del cercle no ens referim a trobar amb regle i compàs el costat d'un quadrat que tingui la mateixa àrea que un cercle donat sinó a trobar el valor de la raó de l'àrea del cercle a un quadrat de costat u. En la primera època, els matemàtics tractaven de trobar aquesta àrea mitjançant les àrees dels polígons inscrits i circumscrits, tot augmentant-ne el nombre de costats. També buscaven el valor del nombre pi, mitjançant el perímetre d'aquests polígons, fent la raó amb el diàmetre. Mengoli no està dins de cap d'aquests dos grups, ja que busca l'àrea compresa entre la corba $y = [x\ (1-x)]^{1/2}$ i l'eix d'abscisses i fa la computació del nombre pi amb dotze decimals, de manera aritmètica. Com veurem el seu camí és completament diferent, no fa polígons, ni calcula les seves àrees; fins i tot el seu camí és diferent del dels matemàtics que ell mateix diu haver llegit: Van Ceulen i Gregorie.[1] La llista de matemàtics que van intentar la quadratura del cercle sigui per aquest mètode o un altre és molt llarga. Podeu trobar referències als treball de Hobson, Goldstein, i altres, i també últimament han sortit molts articles sobre el càlcul del nombre pi i la quadratura del cercle feta pels xinesos.[2]

---

[1] En referència a Van Ceulen, vegeu: H. Bosmans, "Un émule de Viète: Ludolphe Van Ceulen, *Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles*, **34**, nº2, 1910, pp. 88-139; Dirk J. Struik, "Ceulen" al D. S. B. pàg. 181. Per Gregorie, vegeu: Gregorie, J. *Gregory Tercentenary Memorial Volume*. H. W. Turnbull ed. London, 1939; C. J. Scriba, "Gregory's converging double sequence" , *Historia Mathematica* **10** (1983), pp. 274-285.

[2] Vegeu: E. W. Hobson, *"Squaring the circle" A history of the problem*, (Cambridge, 1913), C. Goldstein, *"El uno es el otro: una historia del círculo"*, dins del llibre de M. Serres, *Historia de las Ciencias,* Ed Cátedra, Madrid, 1991; A. Volkov, "Calculation of pi in Ancient China: from Liu Hui to Zu Chongzhi, *International Journal of the History of Science Society of Japan,* 1994, pp. 139-157; A. Volkov, "Zhao Youqin and His Calculation of pi", *Historia Mathematica,* **24** (1997), pp. 301-331; L. Lay-Yong, "Circle Measurements in Ancient China", *Historia Mathematica* **13** (1986), pp. 325-340; A. J. E. M. Smeur, "On the Value Equivalent to pi in Ancient Mathematical Texts. A New Interpretation", *Archive for History of Exact Sciences,* Vol. 6, 1970, pp. 249-270; C. Jami, "Une histoire chinoise du nombre pi",

Com molts matemàtics, no ens estranya doncs que Mengoli anomeni aquest problema com un dels que l'ha preocupat des de jove:

> Vaig buscar, des de jovenet, el problema de la quadratura del cercle, el més desitjat de tota la Geometria, com ja vaig dir en el Prefaci del meu llibre de la *Quadrature Aritmetiche* l'any 1650.[3]

Com ja hem anat repetint al llarg de la tesi la quadratura del cercle creiem que era un dels objectius de l'obra matemàtica de Mengoli. Per fer-la, utilitza les sumes de sèries infinites, les quasi proporcions, les taules triangulars, les quadratures i els logaritmes, o sigui que aquí Mengoli justifica les investigacions que ha fet d'aquestes eines matemàtiques.

En aquest capítol, explicarem primer, els motius de Mengoli i les justificacions sobre la importància de l'obra; segonament, farem detalladament la construcció de la taula de quadratures interpolada de Mengoli amb l'expressió dels productes infinits que es dedueixen d'aquesta taula; finalment, després de fer una primera fitació d'aquests productes, mostrarem els teoremes que donen la computació del nombre pi amb dotze decimals.

A. H. E. S., vol. 38, 1, 1988, pp. 39-50; A. Seidenberg, "The ritual origin of the Circle and Square", *A. H. E. S.*, vol. 25, 1981, pp. 269-327; A. Seidenberg, "On the Area of a Semi-Circle", *A. H. E. S.*, vol. 9, 1972, pp. 171-211. Dhombres, J. "Un parcours baroque la quadrature du cercle: 1600-1775", a *Difussion du savoir et affrontement des idées 1600-1770*, Montbrison: Association du Centre Culturel, 1993, pp. 161-197.

[3] *Circolo*, pàg 1.

2. La quadratura del cercle de Mengoli.

Mengoli explica que havia trobat la quadratura del cercle quan va acabar la *Geometriae* dotze anys enrera,

> El vaig trobar, després d'haver enquadernat el llibre dels *Elementi della Geometria Speciosa,* que vaig imprimir l'any 1659, això és l'any següent 1660.[4]

Creiem que aquesta afirmació de Mengoli pot ser certa ja que en la introducció de l'*Elementum sextum* de la *Geometriae Speciosae Elementa,* Mengoli diu que hi utilitzarà unes proposicions sobre logaritmes però realment allà no les fa servir, sinó que les utilitza després aquí, en el *Circolo.* Per què Mengoli no va publicar la quadratura del cercle l'any 1660 i ho va fer després l'any 1672? És difícil de saber, encara que, al començament del *Circolo,* Mengoli dóna les seves raons:

> Però perque he canviat de pensament de no voler donar més al món, sinó la Geometria que necesitaré per les Coses Físiques, estimant inútils totes les altres coses; m'he acostumat a menysprear fins i tot les meves coses Geomètriques i només tenir-les en compte en quant em serveixin per explicar les coses naturals.
> És per això que mentre estic escrivint les regles dels Solsticis i dels Equinoccis, que he trobat i comunicat per escrit a alguns; havent concebut l'esperança de reduir,

[4] Ibid, 1.

> mitjançant aquest problema de la Quadratura del Cercle, la Teoria del Sol, a només tants principis com es llegeixen en el primer capítol del Gènesis, i potser encara tot el sistema: he cregut convenient treure de les tenebres el meu raonament i comunicar-lo.[5]

Sembla que no haver publicat el *Circolo* prové de la nova idea de Mengoli, ja esmentada en el capítol primer d'aquesta tesi, de només donar a coneixer investigacions que li serveixin per explicar la naturalesa.

Mengoli segueix explicant i diu que, per fer la quadratura del cercle, s'ha servit també dels càlculs ja fets per Lodolfo Van Ceulen (1540-1610) i James Gregorie (1638-1675).[6]

> És veritat, que en ordre al fi pel qual he fet aquests treballs, em serveixo dels càlculs ja fets de Sig. Lodolfo Van Ceulen, i del Sig. Giacomo Gregorij Scozzese (escocès), els dós avaladors dels mateixos nombres per maneres diferents d'apropament. Però no els hagués fet servir, sinó hagués primer especulat amb les obres incomparables de tots dos sobre el problema proposat, i començat en part a la seva manera els càlculs. I ja sé, que tots dos són

---

[5] Ibid, 1.

[6] Per Ceulen veure Bosmans, "Un émule de Viète" en *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,* 34, pt 2, amb una anàlisi de *Van den Cirkel* (1596, Van Ceulen), 1910, pp. 88-139. Referències sobre Gregory a Scriba, "Gregory's converging double sequence. A New Look at the Controversy between Huygens and Gregory over the "Analytical" Quadratura of the Circle", *Historia Mathematica*, 10, 1983, pp. 274-285 i Gregory, *Tercentenary Memorial Volume,* ed. H. W. Turnbull, London: Bell, 1939, pp. 465-478.

excel.lents geòmetres, i sobretot el Sig. Giacomo, del qual pronuncio que és el millor Geòmetra viu que jo havia llegit mai fins l'hora present. Amb tot això, perquè en llegir les altres especulacions, m'enrecordava de les meves, no he pogut resistir acabar-les.[7]

Ceulen va escriure *Van den Circkel* (1596) on calcula la raó de la circumferència amb el diàmetre, a través dels perímetres dels polígons inscrits i circumscrits i aconsegueix el nombre pi amb 35 decimals. Gregorie va fer *Vera Circuli et Hyperbolae quadratura* (1667) on calcula àrees fent la doble seqüència d'àrees dels poligons incrits i circumscrits i veient que convergeixen al límit que és l'àrea del cercle. Mengoli explica que els seus càlculs són més fàcils que els d'ells perquè exclouen les extraccions de les arrels i són practicables per logaritmes, ja que no procedeixen per addicció i subtracció sinó, únicament, per multiplicació i divisió:

> El meu càlcul certament és més fàcil, perque esquiva l'extracció de les arrels; i és practicable pels Logaritmes, ja que no procedeix per addicció, i subtracció sinó sòlament per multiplicació i divisió. Però és més llarg, sobretot per arribar a la mateixa sutilessa del Sig. Lodolfo [Van Ceulen].[8]

Tanmateix Mengoli, en els seus càlculs, quan necessita una eina

[7] Circolo, 2.

[8] Ibid, 2.

per operar, la desenvolupa i explica les seves propietats al màxim i Mengoli al començar aquesta obra ho fa notar:

> La meva especulació transcendeix els termes de la Geometria, i de la mateixa manera que les altres meves [especulacions] de la Geometria Speciosa, comprèn [altres] nombrosos teoremes i problemes. I, però, no crec que serà ingrat a ningú aquest afegit als altres treballs.[9]

Mengoli té problemes per trobar la quadratura del cercle, que ja coneix, amb càlculs més fàcils i busca un mètode, que anomena històric i teòric amb el qual no necessita demostració. La nostra interpretació és que la paraula històric ve relacionada en què es basa en la descripció de les quadratures que ja coneix i la paraula teòric vindria relacionada amb les regles d'interpolació que fa servir per trobar el valor de les àrees, a partir de les conegudes. O sigui, Mengoli no torna a fer quasi raons i demostracions a la manera d'Arquimedes o de Cavalieri per trobar les noves quadratures sinó que a partir de la taula de quadratures coneguda en construeix una de nova amb unes regles adients. La seva originalitat rau en l'aplicació de l'àlgebra a la geometria mitjançant les taules triangulars; la qual cosa li permet trobar, alhora, infinites àrees de figures planes ja que la taula de les quadratures de l'*Elementum sextum* i la del *Circolo* es poden estendre tant com vulguem. A més, Mengoli dóna unes regles per construir noves taules amb arrels cúbiques,

---

[9] Ibid, 2.

quartes,... que li dónen l'àrea en el cas d'arrel p quan m/p o n/p són naturals, en notació actual

$$\int (x^n . (1-x)^{(m-n)})^{1/p} = \frac{1}{(m/p+1) . \binom{m/p}{n/p}}$$

Tot i calcular infinites quadratures no trobem en el *Circolo* ni un sol dibuix, ni una sola figura, només taules, regles i nombres.

3. Les taules triangulars de quadratures interpolades.

En el *Circolo,* Mengoli escriu primer la taula del valor de les quadratures que ha calculat en l'*Elementum sextum*,i després, la taula de les formes [FO], sense coeficients, associades a aquestes àrees.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1/2 && 1/2 &&& \\ && 1/3 && 1/6 && 1/3 && \\ & 1/4 && 1/12 && 1/12 && 1/4 & \\ 1/5 && 1/20 && 1/30 && 1/20 && 1/5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} &&&& FOu &&&& \\ &&& FOa && FOr &&& \\ && FOa^2 && FOar && FOr^2 && \\ & FOa^3 && FOa^2r && FOar^2 && FOr^3 & \\ FOa^4 && FOa^3r && FOa^2r^2 && FOar^3 && FOr^4 \end{array}$$

Mengoli explica les figures que obtindrà tot interpolant les formes de la taula de quadratures i construeix una nova taula de formes dins del quadrat de costat 1.

$$FOu$$

$$FOa^{1/2} \qquad FOr^{1/2}$$

$$FOa \qquad FO(ar)^{1/2} \qquad FOr$$

$$FOa^{3/2} \quad FO(a^2r)^{1/2} \quad FO(ar^2)^{1/2} \quad FOr^{3/2}$$

$$FOa^2 \quad FO(a^3r)^{1/2} \quad FOar \quad FO(ar^3)^{1/2} \quad FOr^2$$

$$FOa^{5/2} \quad FO(a^4r)^{1/2} FO(a^3r^2)^{1/2} \quad FO(a^2r^3)^{1/2} \quad FO(ar^4)^{1/2} \quad FOr^{5/2}$$

$$FOa^3 \quad FO(a^5r)^{1/2} \quad FOa^2r \quad FO(a^3r^3)^{1/2} \quad FOar^2 \quad FO(ar^5)^{1/2} \quad FOr^3$$

$$FOa^{7/2} FO(a^6r)^{1/2} FO(a^5r^2)^{1/2} FO(a^4r^3)^{1/2} FO(a^3r^4)^{1/2} FO(a^5r^2)^{1/2} FO(ar^6)^{1/2} FOr^{7/2}$$

$$FOa^4 \; FO(a^7r)^{1/2} FOa^3r FO(a^5r^3)^{1/2} \; FOa^2r^2 \; FO(a^3r^5)^{1/2} \; FOar^3 \; FO(ar^7)^{1/2} \quad FOr^4$$

En el vèrtex segueix representant-hi un quadrat, a la primera fila, $FOa^{1/2}$ i $FOr^{1/2}$, formes determinades per les corbes $y = x^{1/2}$ i $y = (1-x)^{1/2}$ respectivament, a la segona fila, FOa, $FO(ar)^{1/2}$ i FOr, formes determinades per les corbes $y = x$, $y = (x.(1-x))^{1/2}$ que és el semicercle i $y = 1-x$ respectivament, a la tercera fila, $FOa^{3/2}$, $FO(a^2r)^{1/2}$, $FO(ar^2)^{1/2}$i $FOr^{3/2}$, formes determinades per les corbes $y = x^{3/2}$, $y = (x^2(1-x))^{1/2}$, $y = (x(1-x)^2)^{1/2}$ i $y = (1-x)^{3/2}$ respectivament, a la quarta fila, FOa^2, $FO(a^3r)^{1/2}$, $FOar$, $FO(ar^3)^{1/2}$ i FOr^2, formes determinades per les corbes $y = x^2$,$y = (x^3(1-x))^{1/2}$, $y = x(1-x)$, $y = (x(1-x)^3)^{1/2}$ i $y = (1-x)^2$ respectivament,... Llavors, utilitzant les propietats dels nombres poligonals i les del triangle aritmètic, Mengoli interpola els valors de les àrees de la taula coneguda i construeix la taula dels valors de les àrees associades a aquestes formes interpolades. Comença posant asteriscs en els llocs on no coneix la quadratura:

1

*   *

1/2   *   1/2

*   *   *   *

1/3   *   1/6   *   1/3

*   *   *   *   *   *

1/4   *   1/12   *   1/12   *   1/4

Mengoli observa la simetria de la taula i recorda que per construir la primera taula de quadratures, ha partit de la taula dels nombres combinatoris on ha multiplicat cada fila per una unitat més que l'ordre de la fila que es correspon amb el grau de l'expressió algebraica de la forma que volia quadrar, o sigui, la primera fila, que té grau 1, l'ha multiplicat per 2, la segona per 3, la tercera per 4,... i tot seguit, ha fet els inversos. Llavors com per construir la taula anterior havia posat els inversos ara tornant enrera li queda la taula:

1

*   *

2   *   2

*   *   *   *

3   *   6   *   3

*   *   *   *   *   *

4   *   12   *   12   *   4

I també tornant enrera divideix cada fila per $m + 1$, sent m l'ordre de la fila, ja que abans les havia multiplicat i li queda una segona taula múltiple o de nombres combinatoris:

```
                 1
             *       *
         1       *       1
     *       *       *       *
 1       *       2       *       1
*    *       *       *       *       *
1    *   3       *       3       *       1
```

Mengoli comença a omplir els llocs buits dient que convé que el primer costat i l'últim siguin uns.

```
                 1
             1       1
         1       *       1
     1       *       *       1
 1       *       2       *       1
1    *       *       *       *       1
1    *   3       *       3       *       1
```

Cal assenyalar que Wallis a *Arithmetica Infinitorum* (1655) parteix del triangle aritmètic (Proposició 132, pàg. 424), interpola i arriba a una taula similar a aquèsta (Proposició 169, pàg. 442).[10] La diferència està en què Wallis no identifica tots

[10] Vegeu: D. Struik (ed), *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, (Princeton, Princeton Univ. Press, 1986), pp. 244-253; J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum,...;* T. P. Nunn, "The arithmetic of infinites", *Mathematical Gazette*, 5 1909-1911, pp. 345-356/ 377-386; J. F. Scott, *The Mathematical Works of John*

els elements de la taula directament amb valors de quadratures de les figures. Wallis només parla de raons que pot establir entre alguns valors de la taula i a partir d'aquests diu que interpolant trobarà l'àrea del cercle. La figura que vol quadrar entre 0 i 1, $y = (1 - x^2)^{1/2}$, també és diferent a la de Mengoli. Mengoli igual que Wallis fa la mitjana aritmètica dels valors del tercer i de l'antepenúltim costat que són simètrics. Però Mengoli ho argumenta amb les formes que ha interpolat fent la mitjana geomètrica. Així els extrems de la taula queden tots 1, i els valors entre 1 i 2, 3/2, els valors entre 2 i 3, 5/2, etc.

							1							
						1		1						
					1		*		1					
				1		3/2		3/2		1				
			1		*		2		*		1			
		1		p		5/2		5/2		p		1		
	1		*		3		*		3		*		1	
1		q		7/2		p'		p'		7/2		q		1

Mengoli es fixa ara amb els costats d'ordre senar que encara no té plens o sigui el cinquè, el setè, etc. i utilitza les propietats dels nombres poligonals que coneix molt bé,

> Igualment perquè en el cinquè costat, i en el cinquè per la cua, es veuen intervaladament posats els mateixos nombres del tercer i antepenúltim costat de la segona taula [taula

---

Wallis, D. D. F. R. S. (1616-1703) (1938) New York.

dels nombres combinatoris], que són els nombres Triangulars: 1, 3, 6, 10, 15, 21, meitat dels productes de 1 per 2, 2 per 3, 3 per 4, 4 per 5, 5 per 6, 6 per 7, posats en el tercer i antepenúltim costat d'aquesta última taula alternadament, i posats en el segon i penúltim costat de la segona taula successivament; he jutjat convenient omplir els llocs buits d'aquesta última taula del cinquè i del cinqué per la cua costat, amb les meitats dels productes de 3/2 per 5/2, 5/2 per 7/2, 7/2 per 9/2 &c, això és 15/8, 35/8, 63/8 &c.[11]

És a dir, els costats de la taula dels nombres combinatoris s'obtenen un a partir de l'altre, o sigui el primer costat és 1, 2, 3, 4, 5, ..., el segon costat el formen els nombres triangulars, 1, 3, 6, 10, 15,... que s'obtenen dels anteriors: $a_i = 1/2.i.(i+1)$. Mengoli aplica el mateix a aquesta taula però intervaladament:

p = 1/2. 3/2. 5/2 = 15/8; p'= 1/2. 5/2. 7/2 = 35/8.

Wallis troba també els nombres dels costats amb els nombres poligonals però després només utilitza aquesta sèrie de nombres per expressar el nombre pi com un producte infinit.[12] En canvi Mengoli segueix, ja que vol trobar totes les àrees de la taula.

El tercer costat del triangle aritmètic són els nombres tetraèdrics, 1, 4, 10, 20,.. que s'obtenen fent $1/6.\ i.\ (i+1).\ (i+2)$, del primer costat, o sigui:

q = 1/6. 3/2. 5/2. 7/2 = 105/48. I successivament diu Mengoli que

---

[11] Circolo, 10.

[12] *Arithmetica Infinitorum*, pàg. 460.

s'omplirien tots els costats senars en infinit:

1

1 1

1 *a* 1

1 3/2 3/2 1

1 * 2 * 1

1 15/8 5/2 5/2 15/8 1

1 * 3 * 3 * 1

1 105/48 7/2 35/8 35/8 7/2 105/48 1

Mengoli diu que convindrà de posar la lletra *a* al segon lloc de la fila segona. De fet és l'invers del doble de l'àrea del semicercle, ja que hem posat els inversos i hem dividit per 2 l'asterisc. Mengoli procedeix a calcular els termes dels costats d'ordre parell, el segon, el quart, el sisè,...

> Queden per omplir, els costats d'ordre parell; que d'altra banda de les files parelles [segona, quarta, sexta,...], contades sota el vèrtex, són els llocs parells. I com que en el segon costat el terme primer al tercer està com 2 a 3; el tercer al cinquè, com 4 a 5; el cinquè al setè, com 6 a 7: ens sembla convenient, que el segon al quart estigui com 3 a 4; el quart al sisè, com 5 a 6; el sisè al vuitè, com 7 a 8. I posat *a*, a manera provisional, en el segon lloc del segon i del penúltim costats, que és el segon i el penúltim de la segona base [fila] sota el vèrtex; obtindrem els termes quart del segon i del penúltim costat, que són

el segon i el penúltim de la quarta base [fila], $4a/3$: i seran els termes sisè del segon i del penúltim costat, que són el segon i penúltim de la sexta base [fila] $24a/15$. I així en infinit, amb la lletra *a*, nombre especiós, s'ompliran provisionalment, tots els llocs vacants del segon i penúltim costat, i el segon i penúltim de totes les files de la Taula triangular, com aquí es veu.[13]

Comparem-ho amb la taula dels nombres combinatoris, en el segon costat o segona diagonal trobem els valors 1, 2, 3, 4, 5, 6,....i les seves raons són 1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 5:6,...o sigui cada raó s'obté de l'anterior sumant una unitat a l'antecedent i una unitat al conseqüent. Així en la taula interpolada que estem construint, en el segon costat, la raó del primer al tercer és 2:3, la raó del tercer al cinquè és 4:5, llavors la raó del segon al quart serà 3:4, també la raó del quart al sisè serà 5:6 i successivament obtindrem les altres raons. Això permet omplir els llocs buits, per exemple de 2:3, la raó següent a:* ha de valer 3:4 i s'obté que en aquest lloc hem de posar 4a/3. També utilitza Mengoli la simetria de la taula per obtenir els termes col.locats a l'altra banda. En el quart costat, que també tenim llocs buits, partirem de la raó 2:5 i afegint una unitat a l'antecedent i una al conseqüent farem les altres raons i obtindrem els termes que encara no hem trobat. Igualment en el sisè costat i en els restants costats parells. Wallis fa un raonament similar per acabar d'escriure la taula i després diu que només es fixarà en el costat que conté la quadratura del cercle, en canvi Mengoli

[13] Circolo, pàg. 17.

segueix.[14]

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & a & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3/2 & & 3/2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4a/3 & & 2 & & 4a/3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 15/8 & & 5/2 & & 5/2 & & 15/8 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 24a/15 & & 3 & & 8a/3 & & 3 & & 24a/15 & & 1 & & \\
 & 1 & & 105/48 & & 7/2 & & 35/8 & & 35/8 & & 7/2 & & 105/48 & & 1 & \\
1 & & 192a/105 & & 4 & & 64a/15 & & 6 & & 64a/15 & & 4 & & 192a/15 & & 1
\end{array}
$$

Finalment, per a fer la taula de les quadratures utilitza els mateixos arguments que per a construir la *Tabula quadraturarum*. Es sumava una unitat als graus 1, 2, 3,..i es multiplicava cada fila per aquest valor, la primera per 2, la segona per 3, doncs ara es suma també una unitat als graus 1/2, 1, 3/2, 2,.... i es multiplica la primera per 3/2, la segona per 2, la tercera per 5/2,...

> De la mateixa manera es fa una nova taula, multiplicant el terme del vèrtex per 1, els termes de la primera base [fila] per 3/2 , els de la segona per 2, aquells de la tercera per 5/2, aquells de la quarta per 3, i així els altres en infinit.[15]

---

[14] *Arithmetica Infinitorum,* pàg. 462.

[15] *Circolo*, pàg. 17.

1

3/2 3/2

2 2*a* 2

5/2 15/4 15/4 5/2

3 12*a*/3 6 12*a*/3 3

7/2 105/16 35/4 35/4 105/16 7/2

4 96*a*/15 12 32*a*/3 12 96*a*/15 4

9/2 315/32 63/4 315/16 315/16 63/4 315/32 9/2

5 192*a*/21 20 64*a*/3 30 64*a*/3 20 192*a*/21 5

I tornant a posar els numeradors com a denominadors i viceversa ja ens queda la taula de quadratures de les arrels quadrades que voliem calcular:

1

2/3 2/3

1/2 1/ 2*a* 1/2

2/5 4/15 4/15 2/5

1/3 1/4*a* 1/6 1/4*a* 1/3

2/7 16/105 4/35 4/35 16/105 2/7

1/4 15/96*a* 1/12 3/32*a* 1/12 15/96*a* 1/4

2/9 32/315 4/63 16/315 16/315 4/63 32/315 2/9

1/5 21/192*a* 1/20 3/64*a* 1/30 3/64*a* 1/20 21/192*a* 1/5

Aquestes àrees corresponen a la taula de formes següent:[16]

[16] *Circolo*,7.

$FO\ u$	$y=1$
$FOa^{1/2}$ $FOr^{1/2}$	$y=x^{1/2}$ $y=(1-x)^{1/2}$
FOa $FO(ar)^{1/2}$ FOr	$y=x$ $y=(x(1-x))^{1/2}$ $y=(1-x)$
$FOa^{3/2}$ $FO(a^2r)^{1/2}$ $FO(ar^2)^{1/2}$ $FOr^{3/2}$	$y=x^{3/2}$ $y=(x^2(1-x))^{1/2}$ $y=(x(1-x)^2)^{1/2}$ $y=(1-x)^{3/2}$
Formes escrites per Mengoli.	Formes esteses per les ordenades.

En notació actual, l'àrea d'aquestes formes sent m o n parell:

$$\int_0^1 \sqrt{x^{n}(1-x)^{(m-n)}}\,dx = \frac{1}{(m/2+1)\,.\binom{m/2}{n/2}}$$

Després de fer les comprovacions que ja hem explicat al capítol anterior amb rectangles inscrits i circumscrits de les quadratures de primera classe i segona classe quan m o n són parells, també es dedica Mengoli a fer aquestes redemostracions amb quadratures de la tercera classe amb m i n senars. I així diu que el semicercle $FO.\ (ar)^{1/2}$ a la $FO.\ (a^3r^3)^{1/2}$ està com 1/2a a 3/32a, això és com 16 a 3. Si fem els càlculs dóna que l'antecedent és pi/8 i el conseqüent és 3pi/128, per tant la raó és 16 a 3. Mengoli ho demostra fent la raó de les figures inscrites al semicercle i circumscrites a l'altra figura amb 4 divisions, 8, 16 i 32. Mengoli comprova que aquesta raó s'apropa a la raó 16 a 3. També demostra que el semicercle és el doble de $FO.\ (a^3r)^{1/2}$.

Fixem-nos ara en la taula que ha trobat:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad a \quad 1 \\
1 \quad 3/2 \quad 3/2 \quad 1 \\
1 \quad 4a/3 \quad 2 \quad 4a/3 \quad 1 \\
1 \quad 15/8 \quad 5/2 \quad 5/2 \quad 15/8 \quad 1 \\
1 \quad 24a/15 \quad 3 \quad 8a/3 \quad 3 \quad 24a/15 \quad 1 \\
1 \quad 105/48 \quad 7/2 \quad 35/8 \quad 35/8 \quad 7/2 \quad 105/48 \quad 1 \\
1 \quad 192a/105 \quad 4 \quad 64a/15 \quad 6 \quad 64a/15 \quad 4 \quad 192a/15 \quad 1
\end{array}
$$

Aquesta és una taula de nombres combinatoris interpolats entre els ja coneguts, que si definíssim adientment els nombres combinatoris de racionals es pot identificar amb

$$
\begin{array}{c}
1 \\
\binom{1/2}{0} \quad \binom{1/2}{1/2} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1/2} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{3/2}{0} \quad \binom{3/2}{1/2} \quad \binom{3/2}{1} \quad \binom{3/2}{3/2} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1/2} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{3/2} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{5/2}{0} \quad \binom{5/2}{1/2} \quad \binom{5/2}{1} \quad \binom{5/2}{3/2} \quad \binom{5/2}{2} \quad \binom{5/2}{5/2}
\end{array}
$$

Aquests nombres valen una expressió finita quan n o bé m-n és enter. En els altres casos donen productes infinits i és quan apareix el nombre pi.

Mengoli subratlla que aquesta taula gaudeix de dues propietats (ell en diu avantatges).

1) Cada terme és suma dels dos posats en triangle damunt seu, però dues files més amunt, així 5/2 = 1 + 3/2, $8a/3 = 4a/3 + 4a/3$,.... És aplicar la propietat dels nombres combinatoris interpolada, i escrita en notació actual, seria:

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}$$

2) La segona propietat diu: així com a la taula dels nombres combinatoris, en cada fila, la raó del primer terme al segon dóna la raó dels altres termes afegint una unitat a l'antecedent i restant del conseqüent una unitat. També en aquesta última taula, en cada fila, del primer terme al tercer s'obtenen les altres raons afegint 1/2 a l'antecedent de la primera raó i restant 1/2 del conseqüent cada vegada. Veiem per exemple l'octava fila:

$$\frac{1+1/2}{4-1/2}=\frac{3/2}{7/2}=\frac{192a/105}{64a/15} \qquad \frac{1+1}{4-1}=\frac{2}{3}$$

En notació actual, la propietat que aplica dels nombres combinatoris és,

$$\frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}}=\frac{1+n}{m-n}$$

4. La quadratura del cercle expressada com un producte infinit

Com hem explicat a l'apartat 4 del capítol anterior, Mengoli després de fer les redemostracions de quadratures amb inscrits i circumscrits, explica que no necessitava fer-les, que en té prou amb les taules. A més, Mengoli enuncia que pot generalitzar les taules per trobar més quadratures i tot seguit torna al seu objectiu de la quadratura del cercle,

> 62. Però no necessitant per això altre, que la quadratura del cercle en ordre a la Teòrica del Sol, que jo medito, deixo les altres, fins a tant que em vingui la necessitat de fer-les servir, per algunes conclusions Físiques; i dic que la $FO.(ar)^{1/2}$a la $FO.\ u$, això és el semicercle al quadrat està com *1/2a* a 1, o bé com 1 a *2a*; d'on el cercle al quadrat circumscrit està com 1 a *a*.[17]

Mengoli calcularà el valor del nombre *a* de la taula, que és 4/pi, afitant-lo amb productes infinits. Com ell diu 1/2*a* correspon a la quadratura del semicercle de radi 1/2,
1/2*a* = pi/8 llavors aïllant *a* = 4/pi.

Wallis, partint del mateix costat, també troba el valor d'una expressió similar de pi/4, encara que no arriba a donar cap regla per expressar aquest producte infinit ni tampoc fa computacions del nombre pi. Se'ns fa difícil pensar que Mengoli no hagués llegit l'obra de Wallis encara que no la menciona. La nostra interpretació és que possiblement se la va llegir, però com que Mengoli es basa en les quadratures de la *Geometriae* per fer la

---

[17] *Circolo*, 26.

taula de quadratures, podem creure que Mengoli tenia ja la idea. Pel que fa al procediment, a diferència de Wallis, Mengoli és molt més rigorós i dóna regles per generalitzar.

Mengoli pren la taula dels nombres combinatoris interpolada on apareixia per primera vegada *a*. Parteix del costat que conté *a*, expressa la quadratura del cercle com un producte infinit però a més dóna dos corol.laris on explica com s'obtè. Recordem-la:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & a & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3/2 & & 3/2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4a/3 & & 2 & & 4a/3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 15/8 & & 5/2 & & 5/2 & & 15/8 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 24a/15 & & 3 & & 8a/3 & & 3 & & 24a/15 & & 1 & & \\
 & 1 & & 105/48 & & 7/2 & & 35/8 & & 35/8 & & 7/2 & & 105/48 & & 1 & \\
1 & & 192a/105 & & 4 & & 64a/15 & & 6 & & 64a/15 & & 4 & & 192a/15 & & 1
\end{array}
$$

Mengoli expressa així les relacions entre els termes de la taula:

> 63. Tornem a la taula del nombre 30, i en ella considerarem la sèrie dels termes del segon i penúltim costat; dels quals és manifest que els antecedents són menors dels subsegüents alterns; d'on convé encara que tots un a un els antecedents siguin més petits que els subsegüents; com és manifest encara que el primer és més petit que el segon, això és 1 més petit que *a*.[18]

[18] Ibid, 26.

Considera la sèrie de nombres del segon i penúltim costats i els escriu ordenats:

$1 < a < 3/2 < 4a/3 < 15/8 < 24a/15 < 105/48 < 192a/105 < \ldots$

D'aquestes desigualtats Mengoli obté: $a < 3/2$.

De $4a/3 < 15/8$ obté $a < (3.3.5) / (2.4.4)$.

De $24a/15 < 105/48$ obté $a < (3.3.5.5.7) / (2.4.4.6.6)\ldots$

I també utilitzant els valors on a és més gran,

de $3/2 < 4a/3$ obté $a > (3.3) / (2.4)$.

De $15/8 < 24a/15$ obté $a > (3.3.5.5) / (2.4.4.6)\ldots$

I Mengoli intentant generalitzar resumeix aquestes dues desigualtats en dos corol.laris:

> 67. D'aquestes dues reflexions es segueixen aquests dos corol.laris:
>
> Primer. Que a a 1, el quadrat [1] al cercle inscrit [pi/4] és més petit que no és el producte d'un nombre senar, per tots els quadrats dels nombres precedents senars, en relació al producte dels primer parell, que és el dos, per tots els quadrats dels altres nombres parells precedents [del senar].
>
> 68. Segon. Que a a 1, el quadrat [1] al cercle inscrit [pi/4], és més gran que no és el producte de tots els quadrats dels nombres senars, agafats fins a un cert parell, en relació al producte del dos i d'aquell últim parell, i de tots els quadrats dels altres nombres parells precedents.[19]

Com veiem Mengoli generalitza els seus resultats de manera que

---

[19] Ibid, 27.

es puguin estendre tot el que vulguem, així ens mostra el seu coneixement dels nombres. Per tant, la primera fitació de 4/pi és:

$$\frac{3.3.5.5.7.7.9.9...}{2.4.4.6.6.8.8.10...} < \frac{4}{pi} = \frac{a}{1} = \frac{Quadrat}{Cercle} < \frac{3.3.5.5.7.7.9...}{2.4.4.6.6.8.8...}$$

Fins un nombre senar de termes són més grans que *a* i fins un nombre parell de termes són més petits que *a*. I ara invertint totes les fraccions afitarem la quadratura del cercle (pi/4) prenent el quadrat circumscrit com 1. I els espais més petits que el cercle tindran ara un nombre de termes senar i els més grans que el cercle un nombre de termes parell:

2/3 < (2.4.4) / (3.3.5) < (2.4.4.6.6) / (3.3.5.5.7)<...< Cercle< ...(2.4.4.6.6.8.8.10) / (3.3.5.5.7.7.9.9) < (2.4.4.6.6.8) / (3.3.5.5.7.7) < (2.4.4.6) / (3.3.5.5) < (2.4) / (3.3).

Tot seguit Mengoli estableix raons entre aquests espais a fi de poder-los compondre, escriurem en lletres per facilitar els càlculs, els anomenarem els més petits A_i i els més grans B_i:[20]

$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 <....<$ Cercle $< ...< B_4 < B_3 < B_2 < B_1$

Mengoli primer, calcula les raons entre els espais més petits que el cercle:

$A_1:A_2 = (2/3) : [(2.4.4)/ (3.3.5)] = [3.5] : [4.4] = 15:16;$

$A_2:A_3 = [(2.4.4) / (3.3.5)] : [(2.4.4.6.6) / (3.3.5.5.7)] = [5.7] : [6.6] = 35:36;$

$A_3:A_4 = [7.9] : [8.8] = 63:64;...$ Generalitzant i escrit en

[20] Aquestes lletres que representen els espais els hem posat nosaltres a fi de fer-ho més entenedor.

notació actual:

$$[A_{(n-1)}:A_n] = [(2n)^2-1]:[(2n)^2]$$

Mengoli explica que troba convenient posar com a primer espai més petit el quadrat inscrit que és la meitat del quadrat circumscrit o sigui 1/2 i així

Quad. Inscr.: $A_1 = (1/2):A_1 = 1/2 : 2/3 = 3:4$.

Si volem fer la raó del quadrat inscrit a un determinat espai A_i més petit que el cercle haurem de calcular el producte finit de les *i* raons dels quadrats dels nombres parells menys una unitat als quadrats dels nombres parells. Generalitzant i en notació actual:

$$\textit{Quadrat inscrit} : A_i = \prod_{n=1}^{i} [(2n)^2-1]:[(2n)^2]$$

Per tant, fent la composició de les raons dels espais, la raó del quadrat inscrit al cercle serà un producte infinit d'aquestes raons:

(1/2) : (pi/4) = Quad. Inscr.: Cercle = $=[\text{Quad}:A_1].[A_1:A_2].[A_2:A_3]\ldots= [3:4].[15:16].[35:36].[63:64]\ldots =$ 1 : (pi/2). Generalitzant i escrit en notació actual:

$$\textit{Quadrat inscrit} : \textit{Cercle} = (1/2):(\pi/4) = \prod_{n=1}^{\infty} [(2n)^2-1]:[(2n)^2]$$

Mengoli calcula també les raons entre els espais més grans que el cercle, $B_1:B_2$ = 25:24; $B_2:B_3$ = 49:48; $B_3:B_4$ =81:80;...
Generalitzant i en notació actual:

$$[B_{(n-1)}:B_n] = [(2n+1)^2]:[(2n+1)^2-1]$$

Mengoli explica que troba convenient posar com a primer espai més gran que el cercle el quadrat circumscrit que és 1 i així Quad. Circums.: B_1 = 1:B_1 = 1: (8/9) = [9:8].
Si volem fer la raó del quadrat circumscrit a un determinat espai B_i més gran que el cercle, haurem de calcular el producte finit de les raons dels quadrats dels nombres senars a ells mateixos menys una unitat. Generalitzant i en notació actual:

$$\textit{Quadrat circumscrit} : B_i = \prod_{n=1}^{i} (2n+1)^2 : (2n+1)^2-1.$$

Per tant fent la composició de les raons dels espais més grans, la raó del quadrat circumscrit al cercle serà el producte infinit d'aquestes raons.
1 : (pi/4) = Quad. Circums. : Cercle = [Quad. Circums.:B_1]. [B_1:B_2].[B_2:B_3]...= [9:8].[25:24].[49:48].[81:80]... Escrivint aquests productes infinits en notació actual seria:

$$\textit{Quadrat circumscrit} : \textit{cercle} = 1:(\pi/4) = \prod_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 : (2n+1)^2-1$$

Mengoli dóna un paràgraf on generalitza verbalment tots aquests productes infinits de raons que ha plantejat

> Tindrà doncs el quadrat inscrit al cercle la raó composta de totes les raons al primer espai, al segon espai, al tercer i als altres infinits espais més petits, fins al mateix cercle, que són les infinites raons 3 a 4, 15 a 16, 35 a 36, 63 a 64, 99 a 100 &c. I tindrà doncs el quadrat circumscrit al cercle la raó composta de totes les raons al primer espai, al segon, al tercer, i a tots els altres infinits espais més grans fins al cercle, que són les infinites raons 9 a 8, 25 a 24, 49 a 48, 81 a 80, 121 a 120 &c.[21]

També més endavant calcula Mengoli la raó entre un espai més petit que el cercle i un espai més gran. Transcriurem com ho diu Mengoli per veure la generalització de la notació. Mengoli ho planteja en forma de problema:

> Problema segon. Donat el nombre d'ordre, trobar la raó dels espais igualment ordenats, del més petit al més gran. La solució és, duplicat el nombre d'ordre, afegeix-li després una unitat i el dos, es fan els dos termes de la raó que es busca.[22]

O sigui donat un n qualsevol busca la raó entre A_n i B_n. Mengoli diu que la solució del problema és: duplicar el nombre d'ordre

[21] Circolo, 29.

[22] Ibid, 41.

i afegir.li la unitat serà l'antecedent de la raó i el conseqüent s'obtindrà afegint-li el dos. En notació actual seria:

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{2n+1}{2n+2}$$

Mengoli resol a tall d'exemple per $n = 9$, $n = 99$ i $n = 999$ donant-li les raons: $A_9 : B_9 = 19 : 20$; $A_{99} : B_{99} = 199 : 200$; $A_{999} : B_{999} = 1999 : 2000$.

I Mengoli a partir d'aquestes expressions de productes infinits de raons i d'aquesta raó entre els espais més petits i més grans començarà el seu càlcul del nombre pi.

5. Primera fitació dels productes infinits.

Mengoli utilitza eines per afitar aquests dos productes infinits. Per una banda, intentant calcular 1 : (pi/2), Mengoli demostra que la raó del quadrat inscrit al cercle és més petita que un producte finit d'aquestes raons, on la última raó determinada amb desigualtats logarítmiques està afectada per una arrel. Vegeu els càlculs en l'apèndix I, apartat a. Si volem escriure aquest resultat en notació actual seria:

$$1:(\pi/2) = \textit{Quad. insc.} : \textit{Cercle} < \prod_{n=1}^{(i-1)} [(2n)^2-1:(2n)^2]\,.\,[(2i)^2-1:(2i)^2]^{(i+1/2)}$$

En el cas dels espais més grans Mengoli pretén calcular 2 : (pi/2) i demostra que la raó del quadrat circumscrit al cercle és més gran que un producte finit d'aquestes raons, on la última raó, també determinada per desigualtats logarítmiques, està elevada a una potència. Vegeu els càlculs en l'apèndix I, apartat b. Escriurem aquest resultat en notació actual:

$$2:(\pi/2) = \mathit{Quad.\ circums.} : \mathit{Cercle} >$$
$$\prod_{n=1}^{(i-1)} [(2n+1)^2:(2n+1)^2-1] \, . \, [(2i+1)^2:(2i+1)^2-1]^{(i+1)}$$

I transcriurem ara el tros on Mengoli generalitza tots aquests càlculs que ha fet i que relaciona amb els productes infinits de parells i senars que tenia al principi:

> I per recollir tot allò que s'ha dit fins aquí, farem concepte d'una sèrie de totes les raons "superparticulars" infinites, en les quals els antecedents tenen una unitat menys que el conseqüents i són els conseqüents tots els quadrats dels parells per ordre, 3 a 4, 15 a 16, 35 a 36, 63 a 64, 99 a 100, i així successivament i es prenen d'aquesta sèrie quantes raons es vulguin, de la primera 3 a 4, totes fins alguna que serà la última de les raons presses; i diguis com jo he demostrat que el quadrat inscrit al cercle té raó més petita que la composta de la raó última tantes vegades múltiple sesquialtera quantes és l'ordre de la primera i de totes les raons precedents. És a dir, més petita de la sesquialtera de la primera, més

> petita de la composta de la primera i de la doble sesquialtera de la segona; més petita de la composta de la primera, de la segona i de la triple sesquialtera de la tercera; més petita de la composta de la primera, de la segona, de la tercera i de la quadruple sesquialtera de la quarta;...[23]

Per tant els productes infinits de les raons dels quadrats dels nombres parells menys una unitat als quadrats dels nombres parells estan afitats per aquestes raons però la última amb una arrel quadrada i a més elevada un nombre de vegades igual a l'ordre de la raó. Mengoli diu que la primera té exponent $3/2 = 1 + 1/2$, la segona, $5/2 = 2 + 1/2$, la tercera $7/2 = 3 + 1/2$,... Mengoli explica també tots els càlculs fets per les raons entre el cercle i el quadrat circumscrit.[24] I conclou,

> Amb aquestes dues sèries de raons serà possible apropar-se sempre a les raons dels quadrats inscrits i circumscrits al cercle sense mai tocar-lo.[25]

Després de donar aquestes desigualtats Mengoli les empra per definir uns altres espais més petits que el cercle que anomena:

---

[23] Ibid, pàg. 35.

[24] Fem notar que aquí Mengoli ha canviat els antecedents pels conseqüents en les raons. Ell ha demostrat que la raó del cercle al quadrat circumscrit és més petita que aquests productes i ara en generalitzar explica que la raó del quadrat circumscrit al cercle és més gran que els inversos d'aquests productes que ha explicat.

[25] *Circolo*, pàg. 35.

Hypocicles, és a dir, apropaments més petits del cercle que tenen la última raó amb arrel.

> I amb la primera sèrie de les [raons] superparticulars de desigualtat més petita [més petites que la unitat] als quadrats parells, serà possible apropar-se a la raó del quadrat inscrit al cercle. I per fer concepte d'aquest apropament, m'imagino una altra sèrie d'infinits espais; al primer dels quals, el quadrat inscrit té la raó sesquialtera de la primera raó; al segon, té la [raó] composta de la primera raó i de la doble sesquialtera de la segona raó; al tercer, té la [raó] composta de la primera raó, i [de la raó] segona, i de la [raó] triple sesquialtera de la tercera raó;... espais tots més petits que el cercle que jo anomeno *Hypocicli* [hipocicles], és a dir, apropaments més petits del cercle.[26]

Representant el primer d'aquests espais amb la lletra h i els corresponents subíndex d'ordre, així el primer: h_1, el segon h_2, el n-èsim h_n Mengoli demostra:

Quad. Inscr. : $h_1 = (3/4)^{3/2}$;

Quad. Inscr. : $h_2 = (3/4) . (15/16)^{5/2}$;

Quad. Inscr. : $h_3 = (3/4) . (15/16) . (35/36)^{7/2}$; ..

Escrit en notació actual per qualsevol h_i:

[26] Ibid, pàg. 36.

Quadrat Inscrit : $h_i =$

$$\left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n)^2-1 : (2n)^2\right] . [(2i)^2-1 : (2i)^2]^{(i+1/2)}$$

I tot seguit Mengoli estableix l'ordre entre aquests espais i calcula les raons entre ells, així veu que:

$h_1 < h_2 < h_3 < h_4 <\ldots$ i

$h_2 : h_1 = (3/4)^{1/2} : (15/16)^{5/2}$;

$h_3 : h_2 = (15/16)^{3/2} : (35/36)^{7/2}$;

$h_4 : h_3 = (35/36)^{7/2} : (63/64)^{9/2};\ldots$

Totes aquestes demostracions i càlculs els podeu trobar en l'apèndix II, apartat a, al final del capítol.

També Mengoli defineix uns altres espais més grans que el cercle emprant les desigualtats del quadrat circumscrit al cercle i els anomena *Hypercicles*, és a dir, apropaments més grans del cercle:

> Igualment amb l'altra sèrie de les [raons] superparticulars de desigualtat més gran [més grans que la unitat], dels quadrats dels senars, serà possible apropar-se a la raó del quadrat circumscrit al cercle. I per fer concepte d'aquests apropaments, m'imagino la sèrie d'infinits espais dels quals al primer, el quadrat circumscrit té la raó al quadrat de la primera raó; al segon, té la composta de la primera raó i de la [raó] segona al cub; al tercer, té la raó composta de la primera raó i de la segona [raó] i de la tercera [raó elevada] a la quarta;... espais tots més grans

que el cercle, que anomeno *Hypercicli* [Hipercicles], és a dir, apropaments més grans del cercle.[27]

Representant nosaltres el primer d'aquests espais amb la lletra H i els corresponents subíndex d'ordre, així el primer H_1, el segon H_2, el n-èsim H_n, Mengoli demostra:

Quad. Circums. : $H_1 = (9/8)^2$;

Quad. Circums. : $H_2 = (9/8) \cdot (25/24)^3$;

Quad. Circums. : $H_3 = (9/8) \cdot (25/24) \cdot (49/48)^4$;...

Escrit en notació actual per qualsevol H_i,

$$\textit{Quadrat Circumscrit} : H_i = [\prod_{n=1}^{i-1} (2n+1)^2 : (2n+1)^2-1] \cdot [(2i+1)^2 : (2i+1)^2-1]^{(i+1)}$$

També Mengoli estableix l'ordre entre aquests espais i calcula les raons entre ells, així veu que:

$H_1 > H_2 > H_3 > H_4 >$...i

$H_1 : H_2 = (25/24)^3 : (9/8)$;

$H_2 : H_3 = (49/48)^4 : (25/24)^2$;

$H_3 : H_4 = (64/63)^5 : (49/48)^3$;...

Tots aquests càlculs els podreu trobar em l'apèndix II, apartat b, al final del capítol.

---

[27] Ibid, pàg. 36.

6. La computació del nombre pi amb cinc decimals exactes.

Després de trobar les raons del quadrat inscrit als hipocicles, Mengoli explica que com que el seu càlcul és molt complicat, construirà una altra sèrie d'espais més petits que el cercle que siguin més fàcils de calcular:

> 104. Les dues sèries dels espais més grans i més petits que el cercle [parla de les primeres, A_i i B_i] no hi ha dubte que convergeixen al cercle, i les dues sèries encara dels hipocicles i dels hipercicles [h_i i H_i] també convergeixen al cercle. I és la convergència d'aquells espais [els primers] més llarga i més llunyana que la convergència dels hipocicles i dels hipercicles. D'on per arribar a qualsevol apropament de la quadratura del cercle, es necessita calcular molts més espais que els hipocicles i els hipercicles. Però no són menys esgotadors els càlculs dels pocs hipocicles i hipercicles, d'aquells [càlculs] que siguin els càlculs de molts espais. Ja que els càlculs dels hipocicles en afegir-hi les raons amb arrels, són bruts i irracionals, i comporten la recerca de l'extracció de les arrels quadrades.[28]

Mengoli no vol seguir el camí de les arrels quadrades perquè troba que es compliquen molt els càlculs. El seu objectiu, no és trobar la quadratura del cercle, que d'altres ja han calculat i que ja coneix, sinó fer-ho per un procediment més curt i més

[28] Circolo, pàg. 39.

senzill. Tot i que Mengoli creu que se n'ha sortit és molt complicat entendre totes les regles que utilitza per calcular el nombre pi. Veiem com Mengoli defineix aquests nous espais, a partir de les raons anteriors, que (segons ell) li portaran menys feina en el càlcul,

> Però si les raons de "superparticularitzar" en els hipocicles, i de multiplicar en els hipercicles, es dilatessin des dels seus termes posats al mig, a altres extrems aritmèticament ordenats, de tal manera que la diferència entre aquests a la diferència d'aquells dóni [la raó] entre els logaritmes de les raons superparticularitzades, o multiplicades, a les simples, podran les raons d'aquests extrems utilitzar-se, com [hem fet] per compondre els hipocicles, i els hipercicles, per compondre altres espais quasi hipocicles, i quasi hipercicles, que jo anomeno *Parhypocicli* [parhipocicles, *p*], i *Parhypercicli* [parhipercicles, *P*], de càlculs que no tinguin arrels, menys nombrosos, i més fàcils, i disposats en dues sèries convergents més depressa al cercle, al qual s'apropan, però no arriben mai.[29]

En comptes de posar l'arrel quadrada o una potència de la última raó, Mengoli vol canviar-la per una de càlcul més fàcil que pugui convergir més ràpidament al nombre pi. Hom es pregunta com se li ocurreixen les dues condicions que posa per dilatar la raó i a més, com és possible que li funcioni? Haurà fet milers

[29] Ibid, pàg. 39.

de càlculs?

Per fer la dilatació d'aquesta raó Mengoli especifica que s'han de cumplir dues condicions:

1) que estiguin ordenats aritmèticament amb els termes de la raó que volem dilatar, i

2) que les raons de les diferències dels termes de la raó dilatada a la primera valgui el mateix que les raons logarítmiques dels espais que ha creat anteriorment.

O sigui donats a_2, a_3 dos termes de la raó d'espais més petits d'ordre $n-1$ a l'ordre n, haig de trobar a_1 i a_4 de manera que la seva raó convergeixi més depressa i per tant els termes han de verificar:

1) $(a_4 - a_3) = (a_2 - a_1)$ i

2) $[(a_4 - a_1) : (a_3 - a_2)] = [\log(a_2 : a_3)^n] : [\log(a_2 : a_3)] = n$.

Mengoli aplica aquestes dues condicions i canvia la última raó per una altra que no té arrel i que a més convergeix més ràpidament al cercle. Vegeu els càlculs a l'apèndix III, apartat a. Hem generalitzat aquests resultats de Mengoli per qualsevol p_i. Escrita en notació actual, la raó del quadrat inscrit a p_i,

$$\text{Quadrat inscrit} : p_i = \prod_{n=1}^{i-1} [(2n)^2-1:(2n)^2] \cdot [4[(2i)^2-1/2]-(2i+1):4[(2i)^2-1/2]+(2i+1)]$$

Mengoli fa el mateix amb les raons més grans que el cercle i el quadrat circumscrit. I calcula la raó del quadrat circumscrit a qualsevol parhipercicle. Vegeu els càlculs a l'apèndix III, apartat b. Generalitzant per qualsevol P_i i en notació actual:

$$Quadrat\ Circumscrit : P_i = \left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n+1)^2 : (2n+1)^2-1\right] . \\ [4[(2i+1)^2-1/2]+(2i+2):4[(2i+1)^2-1/2]-(2i+2)]$$

Mengoli ara es marca dos objectius: el primer, trobar la raó entre qualsevol parhipocicle i parhipercicle, és a dir, donat n trobar la raó $p_n : P_n$ a fi de comprovar que quant més gran sigui n més tendirà la raó a la unitat, i segon, trobar la raó entre el quadrat inscrit i un parhipocicle d'ordre suficient gran a fi de compararla amb la raó del quadrat inscrit al cercle (el mateix amb els parhipercicles), veient que coincideixen 5 decimals del nombre pi.

Per aconseguir el primer objectiu Mengoli troba primer la raó entre un parhipocicle d'ordre donat i l'espai més petit que el cercle d'ordre una unitat menys, després la raó entre un espai qualsevol més petit que el cercle i un espai més gran i també la raó entre l'espai més gran i el parhipercicle següent. Mengoli compon totes aquestes raons i li dóna la raó que buscava: $p_n : P_n = [p_n : A_{n-1}] \cdot [A_{n-1} : B_{n-1}] \cdot [B_{n-1} : P_n]$.

Mengoli parteix de la raó entre el primer parhipocicle i el quadrat inscrit que és 17:11. Però com que el quadrat inscrit és la meitat del quadrat circumscrit la raó entre el primer parhipocicle i el quadrat circumscrit és 17:22. Aquesta raó composta amb la raó del quadrat circumscrit al primer parhipercicle que és 19:15 dóna la raó entre el primer parhipocicle i el primer parhipercicle:

$p_1 : P_1 = [p_1 : \text{Quad. Circums.}] . [\text{Quad. Circums.} : P_1] = [17:22] . [19:15] = 323 : 330 = 0.978.$

I de $p_2:A_1 = 67:57$; $A_1:B_1 = 3:4$; $B_1:P_2 = 26:23$ la composició dóna la raó entre el segon parhipocicle i el segon parhipercicle:

$p_2 : P_2 = [67:57] . [3:4] . [26:23] = 5226 : 5244 = 871 : 874 = 0.99686.$

Mengoli troba també les raons entre els parhipocicles i parhipercicles del mateix ordre per $n = 10$, $n = 100$ i $n = 1000$.

$p_{10} : P_{10} = [p_{10} : A_9] . [A_9 : B_9] . [B_9 : P_{10}] = [1619 : 1577]. [19 : 20] . [1784 : 1740] = 54877624 : 54879600 = 361037 : 361050 = 0.99996393 > 10000 : 10001.$

$p_{100} : P_{100} = [p_{100} : A_{99}] . [A_{99} : B_{99}] . [B_{99} : P_{100}] = [160199 : 159797] . [199 : 200] . [161804 : 161400] = 6480209749 : 6480210000 = 0.999999961 > 10^6 : 1000001.$

$p_{1000} : P_{1000} = 64080020997499 : 64080021000000 > 10^{10} : 10000000001.$

O sigui, els espais més petits i els espais més grans que el cercle estan més a prop de la unitat o més a prop a ser iguals, quant més nombre d'ordre. Mengoli aquí s'atura i fa una reflexió, com que ha trobat una molt bona aproximació de la quadratura, explica que ja podria deixar el text d'acord amb el que necessita per la seva teoria del Sol, però com veurem no ho fa:

En ordre al fi, pel qual m'he proposat trobar la quadratura del cercle, és a dir per la Teoria del Sol i dels planetes, algú podria contentar-se en calcular fins a la raó mínima sensible de desigualtat, que en els instruments més grans, com és la Meridiana de S. Petronio és de 10000 a 10001, és a dir, fins al dècim parhipocicle i parhipercicle, com si entre aquests fos el cercle quasi mitjana aritmètica.[30]

Veiem els càlculs de l'aproximació del nombre pi que Mengoli ha aconseguit. Mengoli calcula la raó entre el quadrat inscrit i el dècim parhipocicle fent la composició de la raó entre el quadrat i l'espai nové més petit que el cercle que ha demostrat anteriorment i la raó entre l'espai nové i el dècim parhipocicle.[31] Mengoli compara aquesta raó amb la raó entre el quadrat inscrit i el cercle que coneix i veu que els quatre primers valors coincideixen (Mengoli diu cinc).

Primer recorda que la raó entre el quadrat inscrit i l'espai d'ordre nové més petit que el cercle és la raó del producte de la segona potència de 11, 13 i 17 i de la primera potència de 25 i 19 a la trenta-dues potència de dos,

Quad. Inscr. : A_9 = [3:4] . [15:16] . [35:36] . [63:64] . [99:100] . [143:144] . [195:196] . [255:256] . [323:324].

Mengoli ho ha simplificat.

Quad. Inscr. : A_9 = $[(11^2.13^2.17^2.25.19) : (2^{32})]$ =

[30] Ibid, 42. La Meridiana de Sant Petroni de Bolonya va ser construit el 1653 per J. D. Cassini, servia per mesurar els solsticis i equinoccis a través d'ombres del sol projectades dins l'església a través d'un forat.

[31] Mengoli planteja aquesta raó en forma de problema i dóna la solució sense cap més explicació. Però es podria fer composant les raons *[Q : A_{n-1}]*. [p_n : *Q]*.

2807136475 : 4294967296 = 1 : 1.5300172735.

Fa la composició d'aquesta raó amb la raó del nové espai amb el dècim parhipocicle que és 1577 : 1619. Per tant li queda:

Quad. Inscr. : p_{10} = [Quad. Inscr. : A_9] . [A_9 : p_{10}] =

4426854221075 : 6953552052224 = 1 : 1.570765989.

Recordem que sabem que la raó entre el quadrat inscrit 1/2 i la quadratura del cercle de radi 1/2 és:

Quad. Inscr. : Cercle = [(1/2) : (pi/4)] = 1 : (pi/2) =

1 : 1.570796327.

Si ho comparem amb la meitat del nombre pi de Mengoli veiem que l'error és:

1.570796327 - 1.570765989 = 0.000030338

essent el resultat de Mengoli més petit en tres-centes mil.lèsimes.

Igualment calcula la raó entre el quadrat circumscrit i el dècim parhipercicle fent la composició de la raó entre el quadrat circumscrit i l'espai nové més gran que el cercle i la raó entre l'espai nové i el dècim parhipercicle. Mengoli compara aquesta raó amb la raó entre el quadrat circumscrit i el cercle i veu també que els cinc primers valors coincideixen.

Mengoli recorda que la raó entre el quadrat circumscrit i l'espai d'ordre nové més gran que el cercle és la raó del producte de la segona potència de 11, 13 i 17, 19 i de la primera potència de 5 a la trenta-tres potència de dos,

Quad. Circums. : B_9 = [9:8] . [25:24] . [49:48] . [81:80] . [121:120] . [169:168] . [225:224] . [289:288] . [361:360].

Mengoli ho ha simplificat.

Quad. Circums. : B_9 = [$(11^2.13^2.17^2.19^2.5)$: (2^{33})] =

10667118605 : 8589934592 = 2 : 1.6105444985.

Mengoli fa la composició d'aquesta raó amb la raó del nové espai amb el dècim parhipercicle que és [446 : 435]. Per tant li queda:

Quad. Circums. : P_{10} = [Quad. Circums. : B_9] . [B_9 : P_{10}] =

475753489783 : 373662154752 = 2 : 1.570822549.

Recordem que sabem que la raó entre el quadrat circumscrit 1 i la quadratura del cercle de radi 1/2 és:

Quad. Circums. : Cercle = [(1) : (pi/4)] = [2 : (pi/2)] =

2 : 1.570796327.

Si ho comparem amb la meitat del nombre pi veiem que l'error és:

1.570822549 - 1.570796327 = 0.000026222

essent el resultat de Mengoli més gran en 2 cent mil.lèsimes.

Ara Mengoli diu que es pot donar per veritable cercle amb sis nombres iguals als de la quadratura fent la mitjana aritmètica dels dos resultats i li dóna 1.570794269.(cinc decimals exactes)

(1.570765989 + 1.570822549)/ 2 = 3.141588538/ 2 = 1.570794269.

Si comparem aquest nou resultat amb el que ja sabem veiem que l'error és:

1.570796327 - 1.570794269 = 0.000002058

essent el resultat de Mengoli més petit en 2 milionèsimes.

7. La computació del nombre pi fins a 11 decimals exactes.

Mengoli calcula ara la raó del quadrat inscrit a l'espai més petit que el cercle d'ordre 99 a fi de trobar la raó entre el quadrat inscrit i l'espai més petit que el cercle d'ordre 100 i 101. Amb aquest resultat Mengoli farà unes noves aproximacions trobant la raó entre el quadrat inscrit i els parhipocicles d'ordre 100, 101 i 102 i també farà el mateix amb el quadrat circumscrit i els parhipercicles d'ordre 100, 101 i 102.

Per trobar la raó del quadrat inscrit a l'espai més petit que el cercle d'ordre 99 Mengoli calcula la raó que té per antecedent el producte de 199 i de tots els quadrats dels senars precedents i per conseqüent el producte de tots els quadrats dels parells precedents al 199. Mengoli ocupa tres pàgines explicant quants 2, quants 3, quants 5 tenen els antecedents i els conseqüents per simplificar al màxim. Mengoli arriba a que l'antecedent de la raó és: el producte de 199, pel quadrat de 197, 193, 191, 181, 179, 173, 167, 163, 157, 151, 149, 139, 137, 131, 127, 113, 109, 107, 103, 101, 61, 59, 53, 37, 17, 11, 3, per la quarta potència de 13 i per la sexta potència de 5. I el conseqüent és: 2^{308}. Mengoli calcula la raó amb 117 nombres i especifica que només cal prendre'n vint o sigui que la raó li dóna:

Quad. Inscr. : A_{99} = 40235520897586056712 : 63043209914233177320.

Mengoli dóna una taula de resultats dient que ha fet la composició d'aquesta raó amb la raó que ja ha calculat [A_{99} : A_{100}] = 39999 : 40000 i també amb la raó [A_{100} : A_{101}] = 40803 : 40804 per trobar la raó del quadrat inscrit als espais més petits que el cercle, d'ordre 100 i d'ordre 101. També junta la raó del quadrat inscrit a l'espai més petit d'ordre 99 amb la raó de l'espai més petit d'ordre 99 a l'espai més gran del mateix ordre, $[A_{99} : B_{99}] = 199 : 200$ i també amb la raó $[A_{100} : B_{100}] = 201 : 202$ i amb la raó $[A_{101} : B_{101}] = 203 : 204$.

Quadrat inscrit 1.

Quadrat circumscrit 2.

99 Espai més petit	1.5668545729705086395
99 Espai més gran	1.5747282140407122005
100 Espai més petit	1.5668937453141414930
100 Espai més gran	1.5746892365843611024
101 Espai més petit	1.5669321467489701610
101 Espai més gran	1.5746510243191621322[32]

Després d'explicar amb quines raons d'espais més petits als parhipocicles i d'espais més grans als parhipercicles juntarà les anteriors, Mengoli dóna una nova taula pels ordres 100, 101 i 102 d'aquests espais que ens dóna una nova aproximació al valor que busquem:

100 Parhipocicle	1.570796296146
100 Parhipercicle	1.570796356988
101 Parhipocicle	1.570796297047
101 Parhipercicle	1.570796356105
102 Parhipocicle	1.570796297914
102 Parhipercicle	1.570796354131

Fent la mitjana aritmètica del 102 parhipercicle i parhipocicle: (1.570796297914 + 1.570796354131) / 2 = (3.141592652045) / 2= 1.570796326027.

[32] Aquesta taula es troba igual en el *Circolo*, pàg. 53.

1.570796326794 - 1.570796326027 = 0.000000000767.

L'error de la mitjana aritmètica del 102 parhipercicle i parhipocicle és: $7.67 \cdot 10^{-10}$
i té nou decimals iguals als de la meitat del nombre pi. Mengoli no fa aquesta observació amb la mitjana aritmètica. Mengoli observa que els seus càlculs són menys complicats dels que fan els altres matemàtics mitjançant els poligons inscrits i circumscrits:

> 116. Serà no hi ha dubte, més fàcil, i serà (crec jo) no més esgotador el càlcul de la quadratura del cercle, pel centèsim parhipocicle i parhipercicle que pels inscrits i circumscrits segons la regla d'Arquimedes en la manera de calcular de Lodolfo i del Sig. Gregory. Però, deixo la molèstia a altres que vulguin fer-ne la prova. En lloc d'això he decidit donar regles de nombrosos apropaments al cercle, d'acord amb la manera dels parhicicles per fer front en quant és possible a la duració dels càlculs.[33]

Mengoli vol continuar fent dilatacions de les raons a fi que els càlculs no siguin tan llargs. Mengoli ho fa fent esmenes en les dues condicions de la regla que han de verificar els termes de la raó dilatada. Mengoli no es conforma amb el resultat i fa una nova dilatació de la raó entre els primers espais de manera que es pugui fer una aproximació més bona. Mengoli utilitza la quarta regla que anomena *Tetragonismi* i els espais més propers que formen aquestes noves raons els anomena *Hypociclici* i *Hyperciclici*. La regla esmenada és:

---

[33] Ibid, pàg. 43.

Donats a_2, a_3 dos termes de la raó dels espais més petit d'ordre $n-1$ a ordre n vull dilatar aquesta raó a la raó $a_1 : a_4$ sabent que els quatre termes nous han de verificar:

1) $(a_2 - a_1) : (a_4 - a_3) = [(2n) - 1] : [(2n) - 2]$ (tendeix a la unitat) i

2) $[(a_4 - a_1) : (a_3 - a_2)] = [(2n) + 1] : 2$.

Fa un exemple i calcula la dilatació de la raó de l'espai més petit d'ordre 99 a l'espai més petit d'ordre 100 a la raó de l'espai més petit d'ordre 99 a l'espai que anomenem tetripocicle i que representem amb la lletra t:

$A_{99} : A_{100} = 3999 : 40000$ a la $A_{99} : t_{100} = 31719605 : 31799402$.

Calcula més dilatacions per 101, per 102 i les opera amb les raons del quadrat inscrit als espais més petits que ha calculat abans. Per escriure en termes generals aquesta dilatació i amb notació actual per a qualsevol "tetripocicle", t_i

$$\textit{Quadrat Inscrit} : t_i =$$
$$\left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n)^2-1:(2n)^2\right].$$
$$[(2i)^2.(8i-6)-[(2i-1)^2]]:[[(2i)^2-1].(8i-6)+(2i-1).(2i-2)]$$

També calcula la dilatació de la raó de l'espai més gran d'ordre 99 a l'espai més gran d'ordre 100 a la raó de l'espai més gran d'ordre 99 a l'espai que anomenem tetripercicle i que representem amb la lletra T. Passa de

$B_{99}:B_{100} = [40.400 : 40.401]$ a la raó dilatada

$B_{99} : T_{100} = [16139899 : 16099600]$.

Tot seguit Mengoli fa la composició d'aquesta raó amb les raons que ja coneix la del quadrat inscrit a l'espai més petit d'ordre 99, amb la raó entre l'espai més petit d'ordre 99 i l'espai més gran del mateix ordre, o sigui: $A_{99} : B_{99} = 199 : 200$. Per escriure en termes generals aquesta dilatació i amb notació actual per a qualsevol tetripercicle, T_i

$$Quadrat\ Circumscrit : T_i = \left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n+1)^2 : (2n+1)^2-1\right] .$$
$$[[(2i+1)^2.(8i-2)+(2i-1).(2i)]:[[(2i+1)^2-1].(8i-2)-(2i)^2]]$$

Tot segui Mengoli escriu una taula on apareixen els nous espais amb noves aproximacions de la meitat de pi.

Hypociclici	100	1.570796308511
[Tetripocicle]	101	1.570796309048
	102	1.570796309563
Hyperciclici	102	1.570796343776
[Tetripercicle]	101	1.570796344282
	100	1.570796344809

Fent la mitjana aritmètica de l'espai més petit d'ordre 102 i l'espai més gran d'ordre 102 dóna un error de $1.25 \cdot 10^{-10}$ i nou decimals iguals. Aquí sí que Mengoli ja diu que ha trobat vuit nombres iguals, de fet si fem la mitjana aritmètica dels tetripocicle i tetripercicle d'ordre 100, en trobem 10 de nombres iguals. Mengoli segueix fent esmenes a les condicions de dilatació de les raons per arribar al seu objectiu de trobar dotze nombres iguals podeu veure-les en l'apèndix IV i V. Passarem a fer la última dilatació que Mengoli anomena òptima on aconsegueix aquest resultat, sempre amb espais d'ordre 100.

<u>Optima esmena.</u> Donats a_2, a_3 dos termes de la raó dels espais més petits d'ordre $n-1$ a ordre n, vull dilatar la raó a la raó a_1 :

a_4 sabent que els quatre termes nous han de verificar:

1) $(a_2 - a_1) = (a_4 - a_3)$

2) $[(a_4 - a_1) : (a_3 - a_2)] = [(2n) + 1 + 1/K] : 2$.

Aquí afegeix el terme nou K i explica que és l'arrodoniment del quart terme de la proporció establerta entre la raó del diàmetre a la circumferència, 7 : 22 i $2n$. Així:

7 : 22 = 200 : 629 = 201 : 632.

$A_{99} : O_{100} = 25128078 : 25191293$.

Mengoli fa la composició amb la raó del quadrat inscrit a l'espai més petit d'ordre 99 que ha calculat abans i li dóna: 1.57079632736.

Fa el mateix amb els espais més grans i li dóna: 1.57079632623.

Mengoli un cop ha arribat aquí conclou dient que la mitjana aritmètica d'aquests dos resultats li dóna exactament la quadratura del cercle amb dotze figures (nombres) iguals a la quadratura de Lodolfo Van Ceulen.

Comprobem-ho:

(1.57079632736 + 1.57079632623) / 2 = 3.14159265359 / 2 = 1.57079632679.

Comparem aquest resultat amb la meitat del nombre pi: 1.570796326794 - 1.570796326790 = 0.000000000004,

hi ha un error de $4 \cdot 10^{-12}$ però com diu Mengoli dotze figures iguals o sigui onze decimals exactes.[34]

---

[34] Després de tantes dilatacions aritmètiques i fàcils de calcular Mengoli es complica fent una dilatació aproximada ja que 7 : 22 = 200 : 629 és una aproximació i quan hom vol fer uns càlculs tan exactes això és un error. Per tant Mengoli té la bona idea de les dilatacions de les raons per calcular el producte infinit però podríem dir que al final no se'n surt per fer onze decimals exactes.

APÈNDIX I. Càlculs de les fitacions.

a) Càlculs de la fitació per espais més petits que el cercle.

Les proposicions sobre logaritmes que Mengoli utilitza les ha explicat en l'*Elementum quintum* i les ha redemostrat en la introducció de l'*Elementum sextum*,

> *Teorema 87. Proposició 99.*
>
> Disposats quatre termes de la sèrie harmònica natural a partir de la unitat, disposats harmònicament,[la raó] del terme més gran de la raó més gran al terme més gran de la raó més petita és més gran que [la raó del] logaritme [de la raó primera a la segona] al logaritme [de la raó tercera a la quarta] i aquest mateix logaritme és més gran que [la raó] del terme més petit al terme més petit.[35]

I Mengoli posa un exemple amb els quatre termes 1/3, 1/4, 1/5 i 1/6; el logaritme de 1/3 a 1/4 al logaritme de 1/15 a 1/16 és més petit que 1/3 a 1/15 o sigui que cinc, i és més gran que 1/4 a 1/16 o sigui que quatre; dit en altres paraules de quatre nombres disposats aritmèticament i per ordre de més petit a més gran: el logaritme de la raó del primer al segon al logaritme de la raó del tercer al quart és més petita que el tercer al primer i és més gran que el quart al segon. I segueix Mengoli posant exemples que verifiquen aquesta proposició amb els nombres que tenim en

[35] "Quatuor terminorum è serie harmonica naturali ab unitate dispositorum harmonicè, altioris rationis maior terminus ad maiorem depressioris, maior est, quàm ut logarithmus ad logarithmum: & lpgarithmus ad logarithmum, maior, quàm ut minor ad minorem." [Geo, 325]

el producte infinit:

Quad. Inscr.: Cercle = [3:4] . [15:16] . [35:36] . [63:64] . [99:100] . [143:144]...

Mengoli suposa que log (Quad. Inscr. : A_1) = log (3:4) = 1/3 en una determinada base i demostra que en aquesta mateixa base, aplicant la proposició anterior, es verifica log (15:16) > 1/15. Aquesta base és més petita que la unitat ja que val 27/64.

O sigui, donats quatre nombres 3, 4, 15, 16, per la proposició 99, el logaritme de 3 a 4, al logaritme de 15 a 16 és més petit que cinc, o sigui com 15 a 3, i és més gran que quatre, o sigui com 16 a 4; per tant suposant que: log (3:4) = 1/3, tenim que [(1/3) : log (15:16)] < 5 i aïllant ens dóna:

log (15:16) > 1/15.

De la mateixa manera Mengoli demostra que log (35:36) > 1/35; log (63:64) > 1/63; log (99:100) > 1/99; log (143:144) > 1/143...

Mengoli conclou que el logaritme de la raó del quadrat inscrit al cercle és més gran que la suma de la serie infinita: 1/3, 1/15, 1/35, 1/63,...:

log (Quad. Inscr. : Cercle) = log (3:4 . 15:16 . 35:36...) > 1/3 + 1/15 + 1/35 + 1/63 +...

I ara recorda Mengoli que coneix relacions entre els termes d'aquesta sèrie infinita que ha calculat en la Proposició 43 de la *Novae*,[36]

> que [en les raons] de la unitat als nombres plans dels nombres disposats aritmèticament en infinit, cada raó a la

[36] La proposició 43 diu: "Unitatum, qua denominantur planis Arithmeticè dispositorum, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, ut differentia ad numerum ordinis assumpta inter Arithmeticè dispositos." [Novae, 56]

suma de totes les infinites següents, està com l'excès de la disposició aritmètica al nombre igualment ordenat des de la unitat: per exemple, si els termes de la disposició aritmètica són 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. i la unitat denominada dels seus plans són 1/3, 1/15, 1/35, 1/63, 1/99, &c. serà la primera 1/3 a [la suma de] totes les altres, com 2 a 1; la segona 1/15, a tots els subsegüents, com 2 a 3; la tercera 1/35, a tots els subsegüents, com 2 a 5; la quarta 1/63, a totes les subsegüents, com 2 a 7; la quinta 1/99, a tots els subsegüents, com 2 a 9, &c.[37]

Per tant, suposat que log (Quad. Insc. : A_1) = log (3:4) = 1/3 obtenim que:

log (A_1 : Cer) = log (15:16. 35:36..) > 1/15 + 1/35 +..= 1/6

I com que: (1/3) : (1/15 + 1/35 +...) = (1/3) : (1/6) = 2 : 1,

dóna log (A_1 : Cer) > 1/6 = 1/2. 1/3 = 1/2 log (3:4) per tant:

log (Quad. Insc. : Cer) = log (3:4. 15:16. 35:36..) > 1/3 + 1/15 + 1/35 + 1/63 +.....> 1/3 + 1/6 = log (3:4) + 1/2. log(3:4) = log $(3:4)^{3/2}$.

log (Quad. Insc. : Cer) > log $(3:4)^{3/2}$ i d'aquí treient els logaritmes, canvia el signe de la desigualtat ja que la base és més petita que la unitat:

$$\text{Quad. Insc. : Cer} < (3:4)^{3/2}.$$

Igualment suposant que el log (A_1 : A_2) = log(15:16) = 1/15 podríem demostrar que:

log (A_2 : Cer) = log (35:36. 63:64..) > 1/35 + 1/63 +..= 1/10.

I basant-se en:

---

[37] Circolo, 31.

$(1/15) : (1/35 + 1/63 + \ldots) = (1/15) : (1/10) = 2 : 3$, veu que:

$\log(A_2:Cer) > 1/35 + 1/63 + .. = 1/10 = 3/2 .\ 1/15 = 3/2 . \log(15:16)$.

Ara ho junta amb el logaritme de les dues raons següents:

$\log(A_1:Cer) = \log(A_1:A_2 .\ A_2:Cer) > 1/15 + 1/10 = \log(15:16) + 3/2 \log(15:16) = (3/2 + 1).\log(15:16) = 5/2 .\ \log(15:16) = \log(15:16)^{5/2}$.(Doble sesquialterata).[38]

$\log(A_1:Cer) > \log(15:16)^{5/2}$ I d'aquí fent la composició amb el logaritme de la raó del quadrat inscrit al primer espai dóna:

$\log(\text{Quad. Insc} : Cer) = \log(\text{Quad. Insc.} : A_1 .\ A_1:Cer) = \log(\text{Quad. Insc.} : A_1) + \log(A_1 : Cer) > \log(3:4) + \log(15:16)^{5/2}) > \log(3:4 .\ (15:16)^{5/2)})$.

Treient els logaritmes, canvia el signe de la desigualtat ja que la base és més petita que la unitat,

$$\text{Quad. Insc. : Cercle} < (3:4) .\ (15:16)^{5/2}$$

I diu Mengoli que igualment es demostraran:

$\text{Quad. Insc. : Cercle} < (3:4).\ (15:16).\ (35:36)^{7/2}$.

$\text{Quad. Insc. : Cercle} < (3:4).\ (15:16).\ (35:36).\ (63:64)^{9/2}$.

$\text{Quad. Insc. : Cercle} < (3:4).\ (15:16).\ (35:36).\ (63:64).\ (99:100)^{11/2}$

Que és el resultat que voliem demostrar. Si volem escriure aquest resultat en notació actual seria:

$$1:(\pi/2) = \mathit{Quad.\ insc.} : \mathit{Cercle} < \prod_{n=1}^{(i-1)} [(2n)^2-1:(2n)^2] . [(2i)^2-1:(2i)^2]^{(i+1/2)}$$

[38] A més Mengoli posa per justificar aquest pas:
$\log(A_1:Cer) : \log(15:16) > (1/15 + 1/35 + 1/63 + ..) : (1/15) = (1/6) : (1/15) = 5 : 2$

b) Càlculs de la fitació per espais més grans que el cercle.

Mengoli també aplica les mateixes regles pels espais més grans al cercle, recordem que ha vist que:

Quad. Circums. : Cercle = [Quad.Circums.:B_1].[B_1:B_2].[B_2:B_3]..= 9:8. 25:24. 49:48. 81:80..

Torna a aplicar la proposició de logaritmes:

Així el log(8/9) < 3. log (24/25), per tant suposat que el log(8/9) = 1 obtenim que log(24/25) > 1/3. Notem que altra vegada la base és més petita que la unitat.

I com que log(24/25) < 2. log(48/49) obtenim que log (48/49) > 1/2. log(24/25) > 1/2. 1/3 = 1/6.

També log(80/81) > 1/10; log(120/121) > 1/15 i succesivament amb totes les raons. Mengoli tot seguit ho identifica amb les raons entre els espais:

log(B_1:Quad. Circums . B_2:B_1 . B_3:B_2... Cercle:B_m) = log (8/9. 24/25. 48/49. 80/81..) > 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 +....> 1/3 + 1/6 + 1/ 10 + 1/15 +...

Igual que abans aplicant la proposició 43 de la *Novae* obtenim:

1 : (1/3 + 1/6 + 1/10 +...) = 1 : 1 = 1.

(1/3) : (1/6 + 1/10 + 1/15 +..) = (1/3) : (2/3) = 1/2.

(1/6) : (1/10 + 1/15 + 1/21 +..) = (1/6) : (1/2) = 1/3.

(1/10) : (1/15 + 1/21 + ..) = (1/10) : (2/5) = 1/4.

(1/15) : (1/21 + 1/28 +..) = (1/15) : (1/3) = 1/5 i així indefinidament.

I suposat que log (B_1: Quad. Circums.) = log(8/9) = 1 llavors com que log (24/25. 48/49. 80/81...) = log (B_2:B_1. B_3:B_2...Cercle:B_m) = log (Cercle: B_1) > 1/3 + 1/6 + 1/10 +..= 1

dedueix que:

log (Cercle : Quad. Circums.) > 1 + 1 = 2 = 2 log (8/9)

i treient els logaritmes en ser la base més petita que la unitat

$$\text{Cercle : Quad. Circums.} < (8/9)^2.$$

Igualment suposant que el log $(B_2:B_1)$ = log (24/25) = 1/3 com que log (48/49. 80/81. 120/121...) = log $(B_3:B_2.\ B_4:B_3...\text{Cercle}:B_m)$ = log (Cer.: B_2) > 1/6 + 1/10 +...= 2/3 = 2. 1/3 = 2. log (24/25) = 2 log $(B_2:B_1)$ = log $(B_2:B_1)^2$. I treient logaritmes, en ser la base més petita que la unitat:

$$\text{Cercle} : B_2 < (B_2 : B_1)^2 = (24/25)^2.$$

I continua fent la composició amb les raons que ja coneix a fi d'obtenir una nova fitació de la raó del cercle al quadrat circumscrit:

$$\text{Cercle}:B_1 = [\text{Cercle}:B_2] \,.\, [B_2:B_1] < (24/25)^2.\ (24/25) = (24/25)^3.$$

Cercle : Quad. Circums. = [Cercle:B_1] . [B_1:Quad. Circums.] < $(24/25)^3$. (8/9).

$$\text{Cercle : Quad. Circums.} < (8/9)\ .\ (24/25)^3.$$

De la mateixa manera es demostraran les fitacions amb més termes:

Cercle : Quad. Circums. < (8/9) . (24/25) . $(48/49)^4$.

Cercle : Quad. Circums. < (8/9). (24/25). (48/49). $(80/81)^5$.

Cercle : Quad. Circums. < (8/9).(24/25). (48/49). (80/81). $(120/121)^6$.

Canviant els antecedents pels conseqüents i escrita en notació actual la generalització seria:

$$2:(\pi/2) = \textit{Quad. circums. : Cercle} > \prod_{n=1}^{(i-1)} [(2n+1)^2:(2n+1)^2-1]\,.\,[(2i+1)^2:(2i+1)^2-1]^{(i+1)}$$

APÈNDIX II. Relacions dels hipocicles i dels hipercicles.

a) Càlculs de la relació dels hipocicles.

Demostració de $h_1 < h_2$ i càlcul de $h_2 : h_1$.

Per demostrar la primera desigualtat i la primera raó entre els dos primers hipocicles parteix de resultats anteriors. Així en les proposicions de logaritmes ha demostrat que la raó entre els logaritmes de dues raons determinades era més petita que la raó entre el terme més petit de la més gran i el més petit de la més petita (Proposició 99):

$\log (3:4) / \log (15:16) < 15/3 = 5.$

$\log (3:4) < 5. \log (15:16) = \log (15:16)^5.$

I treient els logaritmes en ser la base més petita que la unitat canvia el signe de la desigualtat

$(3:4) > (15:16)^5.$

Treu l'arrel quadrada i multiplica per 3:4, que és la raó primera, els dos membres de la desigualtat:

$(3:4)^{1/2} > (15:16)^{5/2};$

$(3:4) \cdot (3:4)^{1/2} > (3:4) \cdot (15:16)^{5/2};$

$(3:4)^{3/2} > (3:4) \cdot (15:16)^{5/2}$. O sigui que:

Quad. Insc. : $h_1 = (3:4)^{3/2} >$ Quad. Inscr. : $h_2 = (3:4) \cdot (15:16)^{5/2}$ i d'aquí $h_1 < h_2$.

Calculem la raó entre el segon i el primer hipocicle:

$h_2 : h_1$ = (Quad. Insc.: h_1) : (Quad. Insc.: h_2) =

$(3:4)^{3/2} : (3:4). (15:16)^{5/2} = (3:4)^{1/2} : (15:16)^{5/2}.$

Demostració de $h_2 < h_3$ i càlcul de $h_3 : h_2$.

Per calcular la segona desigualtat i la segona raó parteix de la raó dels logaritmes: log (15:16) : log (35:36) < 35/15 = 7/3.

3.log (15:16) < 7.log (35:36);

log $(15:16)^3$ < log $(35:36)^7$;

Treient els logaritmes, canvia de signe la desigualtat ja que la base és més petita que la unitat:

$(15:16)^3 > (35:36)^7$.

Treient les arrels quadrades i multiplicant per les raons anteriors, primera i segona, dóna: $(15:16)^{3/2} > (35:36)^{7/2}$;

$(3:4) \cdot (15:16) \cdot (15:16)^{3/2} > (3:4) \cdot (15:16) \cdot (35:36)^{7/2}$;

$(3:4) \cdot (15:16)^{5/2} > (3:4) \cdot (15:16) \cdot (35:36)^{7/2}$;

Quad. Insc. : h_2 > Quad. Insc. : h_3; I d'aquí: $h_2 < h_3$.

Calculem la raó entre el tercer i el segon hipocicle:

$h_3 : h_2$ = = (Quad. Insc.: h_2) : (Quad. Insc.: h_3) =

$(3:4) \cdot (15:16)^{5/2} : (3:4) \cdot (15:16) \cdot (35:36)^{7/2}$ =

$(15:16)^{3/2} : (35:36)^{7/2}$.

Igualment es demostraran les altres desigualtats i les altres raons entre els hipocicles.

b) Càlculs de la relació entre els Hipercicles.

Demostració de $H_1 > H_2$ i càlcul de $H_1 : H_2$.

Per demostrar la primera desigualtat i la primera raó entre els dos primers hipercicles parteix igual que abans de resultats anteriors. Així en les proposicions de logaritmes ha demostrat que: "..dels quatre nombres 8, 9, 24, 25, el logaritme de 8 a 9, al logaritme de 24 a 25, és més petit que 24 a 8, és a dir que 3 a 1" (Proposició 99). Parteix de la raó del logaritme de 9 a

8 al logaritme de 25 a 24, que és més petita que 3:

[log (9:8)] : [log (25:24)] < 24 / 8 = 3 / 1.

log (9:8) < 3. log (25:24) < log $(25:24)^3$.

I treient els logaritmes dóna: (9:8) < $(25:24)^3$.

Multiplicant els dos membres de la desigualtat per la primera raó (9:8), queda: (9:8) . (9:8) = $(9:8)^2$ < (9:8) . $(25:24)^3$.

O sigui que:

Quad. Circums. : H_1 = $(9:8)^2$ < Quad. Circums. : H_2 = (9:8) . $(25:24)^3$ i d'aquí $H_1 > H_2$.

Calculem la raó entre el primer i el segon hipercicle:

H_1 : H_2 = Quad. Circums. : H_2 / Quad. Circums. : H_1 =

(9:8) . $(25:24)^3$: $(9:8)^2$ = $(25:24)^3$: (9:8).

Demostració de $H_2 > H_3$ i càlcul de $H_2 : H_3$.

Per demostrar que el segon hipocicle és més gran que el tercer parteix també de la raó dels logaritmes:

[log (25:24)] : [log (49:48)] < 4 / 2.

2. log (25:24) < 4. log (49:48); log $(25:24)^2$ < log $(49:48)^4$.

I igual que abans treient els logaritmes dóna la desigualtat de les raons: $(25:24)^2$ < $(49:48)^4$.

Multiplicant els dos membres de la desigualtat per la primera raó (9:8) i la segona raó (25:24), queda:

(9:8) . (25:24) . $(25:24)^2$ < (9:8) . (25:24) . $(49:48)^4$.

(9:8) . $(25:24)^3$ < (9:8) . (25:24) . $(49:48)^4$.

O sigui que:

[Quad. Circums. : H_2] = [(9:8) . $(25:24)^3$] < [Quad. Circums. : H_3] = [(9:8) . (25:24) . $(49:48)^4$] i d'aquí $H_2 > H_3$.

Calculem la raó entre el segon i el tercer hipercicle:

$H_2 : H_3$ = [Quad. Circums. / H_3] : [Quad. Circums. / H_2] =

$[(9:8) \cdot (25:24) \cdot (49:48)^4] : [(9:8) \cdot (25:24)^3] =$

$(49:48)^4 : (25:24)^2$.

Igualment es demostraran les altres desigualtats i les altres raons entre els hipercicles.

APÈNDIX III. Dilatacions de raons.

a) Dilatació de la raó pels espais més petits que el cercle.

Per exemple, la raó 0.75 = 3:4 = Quad. Insc. : A_1 i la raó: 0.649 = $(3:4)^{3/2}$ = Quad. Insc. : h_1. En ser logaritmícament de raó 3/2, en voler dilatar la raó 3, 4, els nous termes han d'estar ordenats aritmèticament amb aquests i, a més, la raó de les seves diferències amb aquests ha de ser 3/2, que és la raó dels logaritmes dels espais corresponents. O sigui, trobarem la diferència d que hem de sumar i restar per formar la nova raó dilatada fent que la raó de les seves diferències ha de ser 3/2:

$[(4 + d) - (3 - d)] : [4-3] = 3/2;$

$d = 1/4;$

I d'aquí: (3 - 1/4) = 11/4 i (4 + 1/4) = 17/4, o sigui que la sèrie dilatada és: 11/4, 3, 4, 17/4 i la raó entre el quadrat inscrit i el primer parhipocicle, que denotaré p_1, és la raó de 11/4 a 17/4:

Quad. Insc. : p_1 = 11 : 17 = 1 : 1.5454545 = 0.647058842.

Hem passat de 3:4 = Quad. Insc. : A_1 = 0.75 a 11:17 = 0.647058842 molt més propera a la que busquem. Recordem que el quadrat inscrit al cercle és (1/2) : (pi/4) = 1 : pi/2 = 0.636619772.

Calculem ara la raó del quadrat inscrit al segon parhipocicle a partir del segon hipocicle i de la raó del primer espai més petit que el cercle al següent que és 15:16:

$A_1:A_2$ = 15:16; i A_1 : h_2 = $(15:16)^{5/2}$. O sigui que la raó dels logaritmes és 5/2, per tant, igual que abans trobem d:

$(16 + d) - (15 - d) = 5/2;$

$d = 3/4;$

I d'aquí:

(15 - 3/4) = 57/4 i (16 + 3/4) = 67/4;

O sigui que la sèrie dilatada és: 57/4, 15, 16, 67/4 i la raó entre el primer espai A_1 i el segon parhipocicle, que denotaré p_2, és la raó de 57/4 a 67/4. $A_1 : p_2 = 57 : 67$ i composta amb la raó del quadrat inscrit al primer espai que és 3:4 dóna la raó entre el quadrat inscrit i el segon parhipocicle:

Quad. Insc. : p_2 = [Quad. Insc. : A_1] . [A_1 : p_2] = 3:4. 57:67 = 1 : 1.5672514 = 0.638059726.

Hem passat de (3:4) . (15:16) = Quad. Insc. : A_2 = 0.75 . 0.9375 = 0.703125 a 0.638059726 = (3:4) . (57:67) = Quad. Insc. : p_2 molt més propera a la que busquem 0.636619772. Mengoli assenyala que quan més espais calculi més aprop del nombre pi ens trobarem. Generalitzant aquests resultats de Mengoli per qualsevol p_i i en notació actual:

$$\text{Quadrat inscrit} : p_i = \prod_{n=1}^{i-1} [(2n)^2-1:(2n)^2] \,.\, [4[(2i)^2-1/2]-(2i+1):4[(2i)^2-1/2]+(2i+1)]$$

b) Dilatació de les raons pels espais més grans que el cercle.

Mengoli fa el mateix amb les raons més grans que el cercle i el quadrat circumscrit. Per calcular la raó del quadrat circumscrit al primer parhipercicle, Mengoli empra la raó del quadrat circumscrit al primer hipercicle i al primer espai més gran.

Considera la raó 1.125 = 9:8 = [Quad. Circums.] : B_1 i la raó al primer hipercicle: 1.265022 = 2 : 1.581 = $(9:8)^2$ = [Quad. Circums.] : H_1, o sigui que la seva raó logaritmíca és 2. Igual que abans Mengoli explica que en voler dilatar la sèrie 9, 8 ha de verificar les dues condicions:

1) ser amb uns termes que estiguin ordenats aritmèticament amb la raó primera i

2) a més la raó de la diferència dels seus termes sigui 2 que és la raó dels logaritmes dels espais corresponents.

O sigui, trobarem la diferència d que hem de sumar i restar per formar la nova raó dilatada tot aplicant la raó de les diferències:

$[(9 + d) - (8 - d)] : [9 -8] = 2;$

$d = 1/2;$

I d'aquí 8 - 1/2 = 15/2 i 9 + 1/2 = 19/2, o sigui que la sèrie dilatada és: 15/2, 8, 9, 19/2 i la raó entre el quadrat circumscrit i el primer parhipercicle, que denotaré P_1, és la raó de 19/2 a 15/2:

[Quad. Circums.] : P_1 = 19 : 15 = 2 : 1.5789474 = 1.266666641.

Hem passat de 9:8 = [Quad. Circums.] : B_1 = 1.125 a 1.2666 = 19:15 = [Quad. Circums.] : P_1 que és més propera a 1.273239545.

Recordem que el quadrat circumscrit al cercle és (1) : (pi/4) = 2 : pi/2 = 2 : 1.570796327 = 1.273239545.

Igual que abans per calcular la raó del quadrat circumscrit al segon parhipercicle Mengoli empra la raó del primer espai més gran al segon hipercicle i la raó del primer espai més gran al segon espai més gran.

Considera la raó 25:24 = B_1 : B_2 i la raó del primer espai més gran al segon hipercicle $(25:24)^3$ = B_1 : H_2. O sigui que la raó dels logaritmes és 3, per tant, igual que abans trobem d:

$[(25 + d) - (24 - d)] : [25 : 24] = 3;$

$d = 1;$

I d'aquí $24 - 1 = 23$ i $25 + 1 = 26$.

O sigui que la sèrie és 26, 25, 24, 23 i la raó entre el primer espai B_1 i el segon parhipercicle, que denotaré P_2, és la raó de 26 a 23,

$B_1 : P_2 = 26 : 23$ i composta amb la raó del quadrat circumscrit al primer espai que és 9:8 dóna la raó entre el quadrat circumscrit i el segon parhipercicle:

[Quad. Circums.] : P_2 = [Quad. Circums.: B_1] . [$B_1 : P_2$] = (9:8) . (26:23) = 2 : 1.5726496 = 1.271739108.

Hem passat de (9:8) . (25:24) = [Quad. Circums.] : B_2 = (1.125) . (1.0416) = 1.1718 a 1.2717 = (1.125) . (1.1304) = [Quad. Circums.] : P_2 molt més propera a la que busquem 1.273239545. També Mengoli assenyala que quants més espais calculem més ens aproparem al nombre pi.

Generalitzant per qualsevol P_i i en notació actual:

$$\text{Quadrat Circumscrit} : P_i = \left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n+1)^2 : (2n+1)^2 - 1\right] . \; [4[(2i+1)^2 - 1/2] + (2i+2) : 4[(2i+1)^2 - 1/2] - (2i+2)]$$

APÈNDIX IV .Esmenes de les dilatacions de raons.

a) Primera esmena de les dilatacions de les raons.

Donats a_2, a_3 dos termes de la raó de dos espais més petits d'ordre $n-1$ a l'ordre n, vull dilatar-la a la raó $a_1 : a_4$ sabent que els quatre termes nous han de verificar:

1) $(a_2 - a_1) = (a_4 - a_3)$

2) $[(a_4 - a_1) : (a_3 - a_2)] = (n + 1)^2 : 2n$.

I li dóna escrit en forma general i notació actual, anomeno l'espai e:

$$\textit{Quadrat Inscrit} : e_i = \left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n)^2-1 : (2n)^2\right] .$$
$$[[(2i)^2-1] . (8i-4) - [(2i)^2-(4i-2)] : [(2i)^2 . (8i-4) + (2i)^2-(4i-2)]]$$

La raó 39999 a 40000 dilatada dóna 15899801 a 15939801. I els espais 100, 101 i 102 tant pels inscrits com pels circumscrits li donen la taula següent:

Hypociclici	100	1.570796394816
	101	1.570796392810
	102	1.570796390883
Hyperciclici	102	1.570796263642
	101	1.570796261753
	100	1.570796259787

Si fem la mitjana aritmètica entre l'espai més petit d'ordre 102 i l'espai més gran d'ordre 102 ens dóna:

(1.570796390883 + 1.570796263642) / 2 = 1.570796327262 que comparada amb la meitat del nombre pi dóna un error de $4.68 \cdot 10^{-10}$ i fins a vuit decimals iguals. Aquesta primera esmena no li millora els resultats i passa a fer.ne una segona.

b) Segona esmena de les dilatacions de raons.

Donats a_2, a_3 dos termes de la raó de dos espais més petits d'ordre $n-1$ a ordre n, vull dilatar-la a la raó $a_1 : a_4$ sabent que els quatre termes nous han de verificar:

1) $(a_2 - a_1) : (a_4 - a_3) = 2n : (2n) - 2$ (tendeix a la unitat).

2) $[(a_4 - a_1) : (a_3 - a_2)] = (2n + 1) : 2n$.

I li dóna escrit en forma general i notació actual, anomeno l'espai s:

$$\mathit{Quadrat\ Inscrit} : s_i = \frac{\left[\prod_{n=1}^{i-1} (2n)^2-1:(2n)^2\right].}{[[(2i)^2-1].4-2i]:[(2i)^2.4+(2i)-2]]}$$

La raó 39999 a 40000 dilatada dóna 79898 a 80099. I els espais 100, 101 i 102 tant pels inscrits com pels circumscrits li donen la taula següent:

Hypociclici	100	1.570796320814
	101	1.570796320988
	102	1.570796321156
Hyperciclici	102	1.570796332359
	101	1.570796332517
	100	1.570796332688

Fem la mitjana aritmètica entre l'espai més petit d'ordre 102 i l'espai més gran del mateix ordre:

(1.570796321156 + 1.570796332359) / 2 = (3.141592653515) / 2 = 1.570796326757 que comparada amb la meitat del nombre pi dóna un error de $3.7 \cdot 10^{-11}$ i fins a deu decimals iguals. Per tant aquesta segona esmena tot i que li millora els resultats no assoleix els objectius. Passa a fer-ne una tercera i una quarta fins la última que anomena òptima.

CAPITOL 6

ELS FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA DE MENGOLI: EUCLIDES, CAVALIERI I VIÈTE

1 Euclides com a font de Mengoli.

Encara que Mengoli va treballar amb l'àlgebra nova i en aquest sentit és modern era dels que considerava l'obra d'Euclides com la millor de les matemàtiques. Mengoli es va inspirar en Euclides i en el seu estil sobretot en la *Geometriae speciosae*. Els *Elements* d'Euclides és una de les seves fonts principals i Mengoli així ho recorda al llarg del seu llibre:

> i crec que no prenc res d'altres, excepte dels primers nou [llibres] *Elements* d'Euclides.[1]

[1] "ideoque nihil alienum sumpsi, praeterquam ex prioribus novem Elementis Euclidis." [Geo, 9]

També en un altre passatge deia:

> No prenc res d'altres, excepte certa cosa d'Euclides, en el cinquè i sisè, que cito al marge dels passatges on està.[2]

A través del seu llibre, Mengoli utilitza constantment les definicions i les proposicions dels *Elements* d'Euclides en la demostració de les seves pròpies proposicions. Quan en el marge d'una demostració escriu "11.5.", vol dir que en aquell pas ha utilitzat la proposició 11 del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides. Hi ha proposicions en les quals la demostració sencera és una explicació; tanmateix en el marge continua fent referències als *Elements* d'Euclides.

Quins deurien ser els motius de Mengoli? Potser la resposta caldria buscar-la en un estudi més ampli del pensament de Mengoli i de la seva època però la nostra interpretació és que aquesta referència constant als *Elements* d'Euclides li serveix per legitimar les seves innovacions i fonamentar sòlidament les seves recerques ja que les bases del mètode dels indivisibles del seu mestre no són prou segures. Aquesta búsqueda de formulacions més rigorores és una constant en les obres de Mengoli.[3]

Quina edició dels *Elements* d'Euclides va llegir Mengoli? El nostre estudi ens ha portat a que va llegir la traducció de

---

[2] "Nihil alienum sumo; prater quaedam, ex Euclide, in quinto, & sexto: qua suis locis allego, in margine." [Geo,2]

[3] Giusti també remarca aquest tret de Mengoli quan analitza la *Novae*. "Le prime recerche di Pietro Mengoli:...", *Geometry and Complex Variables: Proceedings of an International...,* 1991.

Clavius de 1574: *Euclidis Elementorum libri XV.*[4] Les traduccions i edicions, que en aquells moments es trobaven a l'abast, escrites en ordre cronològic, eren: la llatina de Campanus el 1482, *Preclarissimus liber elementorum Euclidis*, la grega de Zamberti el 1505 i la llatina de Commandino el 1572, *Euclidis elementorum libri XV una cum scholiis a Federico Commandino urbinate in latinum conversi*. Referent a aquesta última Koelblen comenta que la seva influència va arribar fins a Newton a través dels estudis euclidians de la traducció de Commandino fets per Barrow. Però Mengoli potser no va llegir Clavius directament sinó a través d'Hérigone al qual cita en la *Geometriae*. En el primer tom de l'obra *Cursus mathematicus,* Hérigone dóna els quinze primers llibres dels *Elements* d'Euclides, trets de Clavius. Segons Cifoletti, Hérigone, quan parla de Clavius, en el seu catàleg de matemàtics, diu: "Hem seguit el seu ordre i el seu text [de Clavius] en els Elem. d'Euclide".[5]

Les raons per les quals crec que va llegir Clavius són: la coincidència en l'ordre de les definicions, que no coincideix amb el de Heath ni amb el de Commandino, les paraules llatines emprades i el significat de la definició 8.5, quan Mengoli

---

[4] Invitada a un col.loqui a Marsella l'Octubre de 1995 per parlar de la lectura dels antics:"Histoire de la lecture des anciens en mathématiques", vaig conèixer a Sabine Koelblen-Rommevaux que acabava de defensar la seva tesi dirigida per Jean D'Hombres: *Un jalon dans l'histoire de la théorie des proportions au XVI^e siècle: le commentaire de Clavius au livre V des Eléments d'Euclide*, sobre la traducció dels *Elements* feta per Clavius el 1574. Vam treballar plegades i vam esbrinar que Mengoli s'havia llegit aquella traducció.

[5] "Nous avons suivy son ordre et texte [de Clavius] aux Elem. d'Euclide" Cifoletti, *La méthode de Fermat: son statut et sa difussion*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle sèrie, 33, Paris, 1990, nota 22, pàg 148.

construeix l'*Elementum quartum* anàlogament al llibre cinquè dels *Elements*.

L'ordre de les definicions és diferent en les traduccions esmentades. En Clavius i en Mengoli després de definir la raó (def. 3) defineixen la proporció (def. 4), en canvi Commandino ho fa en el nº 8 després de definir la raó per múltiples.[6]

Els termes tècnics llatins emprats per Mengoli, *secundum altitudinem, proportio, se mutuò, duplicata,..* són similars als de Clavius, *secundum quantitatem, proportio, sese mutuò, duplicatam,..* i no als de Commandino, *quatenus, analogia, se invicem, duplam.*[7]

La definició 8.5 és explicada i anomenada per Mengoli en la introducció de l'*Elementum quartum* i correspon a la de Clavius i no a la que exposa Heath, que diu: "Una proporció en tres termes és la més petita possible", ja que aquesta no dóna la mesura de raons una més gran que l'altra. Tampoc serveix la de Commandino que diu: "Analogia és semblança (*similitudo*) de proporcions".[8]

La definició de proporció "ordenada" que dóna Mengoli no figura en el text grec, tampoc a Heath. És un altre argument bastant definitiu per pensar que Mengoli ha utilitzat Clavius. Encara que Koelblen anomena que aquesta definició apareix a Commandino, la

---

[6] Existeix un estudi referent a la influència de l'ordre de les definicions fet per Giusti el 1993 en el llibre *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola Galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino, pp. 5-13.

[7] He utilitzat la taula de termes tècnics comparats de la tesi doctoral de Koelblen, "*Un jalon dans l'histoire de la théorie....*", 1994, pàg. 576.

[8] "Analogia est proportionum similitudo" (Co, 8) [Koelblen, 561].

de Clavius s'hi assembla més.[9]

2. Mengoli llegeix Euclides.

En la dedicatoria de l'*Speculationi di Musica* (1670), Mengoli explica que va llegir per primera vegada els *Elements* d'Euclides quan tenia divuit anys:

> i com sempre he estat curiós de saber el perquè de les coses, de seguida que se'm va començar a obrir l'intel.lecte amb els *Elements*, quan tenia quasi divuit anys,...[10]

Més tard va continuar aquesta lectura que va deixar una empremta molt important en la seva obra. Distingirem tres facetes

---

[9] Commandino, 1659, fol. 60r. definició 20: "*Ordinata analogia* est quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam."
Mengoli, 1659, pàg. 154, definició 23: "*Ordinata proportio* logarithmica *est*, tribus positis rationibus, & alijs, vel quantitatibus, vel rationibus, quae sint his multitudine pares: *cum*, ut in primis rationibus, logarithmicè se habet *antecedens, ad consequentem; ita* in secundis, vel quantitatibus, vel rationibus, *antecedens ad consequentem:* & *ut* in primis, *consequens, ad* aliam quampiam; sic in secundis, *consequens, ad* aliam quampiam.
Clavius, 1574, pàg. 220, definició 18: "*Ordinata proportio est, cum* fuerit, quemadmodum *antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem:* fuerit etiam, *ut consequens ad* aliud quidpiam, ita *consequens ad* aliud quidpiam." Koelblen (pàg. LXXIII).

[10] *Proemio* de l'obra *Speculationi di Musica*, pàg. 5.

on és palesa la influència d'Euclides en la *Geometriae*: (1) en l'elaboració de la nova teoria de "quasi proporcions", en l'*Elementum tertium*; (2) en la construcció de les raons logarítmiques, en l'*Elementum quartum* i (3) en l'estil del llibre.[11]

El primer punt està extensament explicat al capítol tercer d'aquesta tesi. El podriem resumir dient que Mengoli defineix les quasi proporcions i comprova que les propietats de les proporcions del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides també es verifiquen per a les quasi proporcions. Mengoli conserva els noms *(componendo, dividendo,..)* i els significats euclidians. En un primer pas, Mengoli demostra que es poden aplicar a desigualtats les propietats certes per proporcions, i en un segon pas, que es continuaran verificant encara que la raó es faci tan gran o tan petita com es vulgui. Mengoli es basa totalment en la teoria de proporcions per construir la seva teoria de quasi proporcions.

La segona faceta és la construcció de les raons logarítmiques en l'*Elementum quartum*. Mengoli, que defineix les raons logarítmiques [logos= raó i rhythmus= mesura) com a mesura de raons, subratlla la utilització dels *Elements* d'Euclides en la introducció d'aquest element,

> L'element quart centra la seva atenció en la definició 10 del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides i en la definició 5 del llibre sisè, en les quals una mesura de les

[11] També podríem citar que Mengoli utilitza la teoria de proporcions, com assenyalarem més avall, per aplicar l'àlgebra a la geometria.

raons de quantitats és donada;[12] en aquell [element cinquè] certament es tracta còm s'anomenen les raons quan són més grans o més petites [entre sí], def. 8, llibre cinquè.[13] Com allà però força diferent, [tractarem còm] s'anomenem les raons segons estiguin més aprop o més lluny de la igualtat.[14]

Classifica les raons *[a:b]* en tres gèneres: d'igualtat *[a=b]*, de desigualtat tipus "més gran que" *[a>b]* i desigualtat tipus "més petita que" *[a<b]*.

I segueix Mengoli explicant que les raons composades de raons de

---

[12]Def. 10. llibre V.
Quan quatre magnituds són <contínuament> proporcionals, la primera es diu que té a la quarta la raó triplicada del que aquesta té a la segona i així contínuament, qualsevol que sigui la proporció.
a, b, c, d.
$a:b = b:c = c:d \quad a:d = a:b.b:c.c:d = (a:b)^3$.
Exemple: 4, 8, 16, 32.
$4:8 = 8:16 = 16:32 \quad 4:32 = (4:8)^3$.
Def. 5. llibre VI.
Una raó és dita ser composta de raons quan les mides de les raons multiplicades entre elles donen quelcom. (Koelblen 393, Heath, 189).

[13]"I quan entre els equimúltiples, el múltiple de la primera magnitud és superior al múlitiple de la segona, però el múltiple de la tercera no és pas superior al múltiple de la quarta, llavors la primera sera dita tenir en relació a la segona una raó més gran que la tercera en relació a la quarta." (8.5) (Koelblen lxvi). Aquesta definició 8 correspon a la de Clavius i no correspon a la que exposa Heath, que diu: "Una proporció en tres termes és la més petita possible", ja que no dóna la mesura de raons una més gran que l'altra.

[14] "Quartum, pro quarto elemento, est animadversio *def. 10. lib. 5. Elem. Eucl. & def. 5. lib. 6.* in quibus modus quantitatis rationum assumitur; illi quidem superinductus, secundum quaem maiores, vel minores rationes dicuntur, *def. 8. lib. 5.* sed ab illo longèalius; & secundum quem propiores aequalitati, aut remotiores ab aequalitate rationes dicimus." [Geo, 11]

desigualtat d'un mateix tipus seran d'aquest mateix tipus.

Mengoli intenta estudiar les raons logarítmiques entre raons de la mateixa manera que Euclides va estudiar les raons entre magnituds. Mengoli va desenvolupar aquesta idea després de llegir el llibre cinquè dels *Elements* i així ho explica en la carta-dedicatoria a D. Jacobo Tesino, de l'*Elementum quartum*

> (Els temes) que Euclides va demostrar en el cinquè [llibre] dels *Elements* per magnituds més grans, més petites, iguals, equimúltiples i que tenen la mateixa raó o més gran, tots ells poden ser demostrats per raons més elevades (*altioribus*), més baixes (*depressioribus*), d'igual altura (*aequealtis*), d'igual multiplicitat (*aequemultiplicatis*) i que tenen la mateixa raó logarítmica o més gran.[15]

Mengoli ho fa seguint camins paral.lels al d'Euclides i per això primer defineix els termes *altior, depressior* i raó logarítmica. Una raó $a : b$ que no sigui la d'igualtat $(a=b)$, pot ser de desigualtat de tipus "més gran que" $(a>b)$ o de tipus "més petit que" $(a<b)$. En els dos casos pot ser més o menys profondament desigual. Mengoli les diu més elevada *(altior)* o més baixa *(depressior)* segons s'allunyi més o menys de la raó d'igualtat. A tall d'exemple aclarem el terme *altior* que fa

---

[15] "Quae demonstrat Euclides in quinto elementorum, de magnitudinibus maioribus, minoribus, aequalibus, aequemultiplicibus, & eamdem, vel maiorem rationem habentibus: posse demonstrari de rationibus altioribus, depressioribus, aequealtis, aequemultiplicatis, & eamdem, vel maiorem logarithmicam rationem habentibus."[Geo, 149]

servir Mengoli. Entre dues raons de desigualtat del mateix tipus, serà una més elevada (*altior*) que l'altra, si la seva diferència, en valor absolut, amb la raó d'igualtat és més gran que la diferència de l'altra raó.

O sigui, per les raons de desigualtat de tipus "més gran que"

$a:b$ i $a>b$, $c:d$ i $c>d$,

$a:b$ és més elevada que $c:d$ si $(a:b)-(b:b) > (c:d)-(d:d)$, o sigui:

si $(a-b).d > (c-d).b$;

així $7:4$ és més elevada que $5:3$ si $(7-4).3 > (5-3).4$.

Per les raons de desigualtat de tipus "més petit que"

$a:b$ i $a<b$, $c:d$ i $c<d$, $a:b$ és més elevada que $c:d$

si $(b:b)-(a:b)> (d:d)-(c:d)$, o sigui:

si $(b-a).d > (d-c).\ b$;

així $4:9$ és més elevada que $3:5$ si $(9-4).5 > (5-3).\ 9$.

Les primeres definicions de l'*Elementum quartum* són[16]

DEFINICIO 1.

De dues raons de desigualtat, les dues de tipus "més gran que", o les dues de tipus "més petit que", es dirà, *més elevada (altior)*, la que està més allunyada de la raó d'igualtat.

---

[16] Els parèntesis amb un número després de les definicions corresponen als nombres de les definicions de la traducció anglesa de Heath.

DEFINICIO 2.

I, *més baixa [depressior],* la que està més aprop de la raó d'igualtat.[17]

DEFINICIO 5.

Es dirà raó logarítmica a una certa relació mutua de dues raons de desigualtat, les dues [desigulatats] de tipus "més gran que" o les dues de tipus "més petit que", segons siguin més elevades o més baixes [més lluny o més aprop de la igualtat].(3) (Clavius, def. 3).[18]

DEFINICIO 6.

Es dirà proporció logarítmica a una semblança [*similitudo*] de raons logarítmiques, o bé entre elles mateixes o bé en relació a altres raons.(Clavius, def. 4).[19]

DEFINICIO 7.

[Dues] Les raons es diran que tenen entre sí una raó logarítmica quan múltiples de cadascuna poden superar una a l'altra en elevació [o bé ser una més allunyada de la

---

[17] "Duarum rationum inaequalitatis, utrarumque maioris, vel utrarumque minoris, Altior, dicetur, ab aequalitate remotior." "Et Depressior, aequalitati propior."[Geo, 151]

[18] "Ratio logarithmica dicetur, duarum rationum inequalitatis, utrarumque maioris, vel utrarumque minoris, mutua quaedam; secundùm altitudinem, vel depressionem habitudo."(Mengoli, 5). "Ratio est duarum magnitudinem eiusdem generis mutua quaedam secundum quantitatem, habitudo." (Clavius, 3).

[19] "Proportio logarithmica, dicetur, similitudo logarithmarum rationum, vel ad invicem, vel ad alias rationes." [Geo, 151]