Convergència en llei cap a funcionals del procés de Wiener i una extensió de la fórmula d'Itô.

Xavier Bardina i Simorra

Convergència en llei cap a funcionals del procés de Wiener i una extensió de la fórmula d'Itô.

Xavier Bardina i Simorra

Memòria presentada per aspirar al grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Desembre del 1999.

CERTIFICO que aquesta memòria ha estat realitzada per en Xavier Bardina i Simorra, al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona sota la meva direcció.

Bellaterra, Desembre de 1999

Dra. Maria Jolis Giménez.

als meus pares

Agraïments.

Voldria donar les gràcies a tots els que m'han fet costat durant aquests anys.

En primer lloc als meus pares per la llibertat que sempre m'han donat per a poder escollir el meu propi camí. A ells dedico aquesta memòria.

A la Maria per tot el temps i tot l'esforç que m'ha dedicat. Ella és qui m'ha introduït en el món de la recerca i sense ella aquesta tesi no hauria estat possible.

A les *meues* padrines. Al Carles i a l'Anna. A Neus, Paco i la nova il.lusió de la família; David.

Al Frederic, a la Marta i al David perquè m'han donat moltes facilitats per assistir a cursos i congressos. Al Nicolas Bouleau per haver-me suggerit, durant un congrés a Turquia, el tema que ha donat lloc al capítol tercer d'aquesta memòria.

Al Jorge, al Samy i al Carles amb qui he tingut la sort de poder treballar també aquest últim any.

Als amics i amigues, companyes i companys d'unitat i del grup de probabilitats de Barcelona. Als de *l'estament Z* i als del departament.

Vull agrair doncs a gran part de la gent que m'envolta el fet de ser com és.

Índex.

Introducció.

Els dos processos bàsics de la teoria dels processos estocàstics són el moviment Brownià i el procés de Poisson. Aquests dos processos apareixeran diverses vegades al llarg de la memòria.

Es presenten resultats que s'emmarquen dins la teoria del càlcul estocàstic i de la convergència feble de mesures de probabilitat. Per a provar alguns d'aquests resultats utilitzarem tècniques del càlcul de Malliavin.

El *moviment Brownià* és el nom donat a l'irregular moviment del pol.len suspès en l'aigua observat pel botànic Robert Brown el 1828. Aquest moviment aleatori, actualment atribuït als xocs entre el pol.len i les molècules d'aigua, dóna lloc a una dispersió o *difusió* del pol.len en l'aigua.

A. Einstein (veure [E]) va començar a desenvolupar el 1905 una teoria física d'aquest concepte. El tractament matemàtic rigorós del moviment Brownià va començar amb N. Wiener el 1923 (veure [W1] i [W2]). A ell també es deu la primera prova d'existència. El treball més profund d'aquesta etapa inicial correspon però a P. Lévy, (veure [L1] i [L2]).

El camp d'aplicacions del moviment Brownià va, òbviament, molt més lluny de l'estudi de partícules microscòpiques en suspensió, i inclou models de preus d'accions, sorolls de circuits elèctrics, comportaments límit de sistemes de cua i pertorbacions aleatòries de molts altres sistemes físics, biològics i econòmics.

El moviment Brownià es pot presentar com l'exemple canònic de dos dels conceptes fonamentals de la teoria dels processos estocàstics: la propietat de Markov i la propietat de martingala.

El terme *martingala* fou introduït en la teoria de la probabilitat per J. Ville el 1939 (veure [V]). El concepte però, ja havia estat creat abans per P. Lévy el 1934, en un intent d'estendre la desigualtat de Kolmogorov i la llei dels grans nombres més enllà del cas d'independència.

El procés de Poisson és el procés més simple associat al compte de punts aleatoris. Tot i això es tracta d'un model prou acurat, amb moltes i variades aplicacions com trucades a una central telefònica, clients que arriben a una cua, arribada de partícules radioactives a un comptador Geiger, etc... D'altra banda forma part de la descomposició d'altres classes de processos com són els processos discontinus amb salts.

Una gran quantitat de problemes de la biologia i de les ciències naturals i socials van quedar inclosos en el domini de la teoria de funcions de variable real quan Newton i Leibniz van inventar el càlcul. La base del càlcul és l'ús de la diferenciació per descriure taxes de canvi, l'ús de la integració per passar al límit aproximant per sumes, i el teorema fonamental del càlcul que relaciona els dos conceptes. Tot això va portar al concepte d'equació diferencial ordinària i l'aplicació d'aquestes equacions per modelar problemes del món real mostra la potència del càlcul.

El càlcul estocàstic neix de la necessitat de donar significat a les equacions diferencials ordinàries que provenen de models físics quan apareixen perturbacions aleatòries.

Com que el procés continu més important, el moviment Brownià, no es pot diferenciar, el càlcul estocàstic pren el camí invers del càlcul ordinari: primer es defineix la integral estocàstica, i llavors es dóna sentit a la diferencial estocàstica a través del *teorema fonamental del càlcul.* Aquest *teorema* és en realitat una definició ja que, en el càlcul estocàstic, la diferencial només té el significat que se li assigna quan apareix com una integral.

Un exemple d'aplicació del càlcul estocàstic i les equacions diferencials estocàstiques a la matemàtica financera és la coneguda fórmula de Black i Scholes (veure [BS]).

El resultat central del càlcul estocàstic i una de les eines més important d'aquesta teoria és la fórmula d'Itô, que juga el paper del teorema del canvi de variable per a la integració estocàstica respecte semimartingales. Aquest resultat es deu a Itô pel cas d'un moviment Brownià i a Kunita i Watanabe pel cas general d'una semimartingala (veure [I] i [KW] respectivament). Considerem $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat, la fórmula d'Itô ens diu el següent:

Teorema *(Itô (1944), Kunita i Watanabe (1967))*

Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funció de classe* C^2 *i sigui* $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t \le \infty\}$ *una semimartingala contínua.*

Llavors P-quasi segurament,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < M >_s, \qquad 0 \le t \le \infty, \end{aligned}$$

on M *i* B *són respectivament la martingala local contínua i el procés de variació fitada que apareixen en la descomposició que admet tota semimartingala.*

En el primer capítol d'aquesta memòria presentem una extensió d'aquest resultat per a funcions no necessàriament de classe C^2.

Per a la integral de Stratonovich, la fórmula del canvi de variable és similar a la del càlcul clàssic.

El *temps local* també ens permet extendre la fórmula d'Itô per a funcions convexes que no són necessàriament dos cops diferenciables. Aquest concepte va ser introduït per P. Lévy (veure [L2]) i ens permet mesurar el temps que passa una trajectòria d'un procés al voltant d'un punt. La primera prova rigorosa de la seva existència per a un moviment Brownià es deu a Trotter (veure [T]). Aquest concepte també es pot definir per a mesurar el temps que passa un procés al voltant d'una corba contínua com veurem en el primer capítol d'aquesta memòria.

Una altra teoria que necessitarem és el càlcul estocàstic de les variacions, més conegut amb el nom de càlcul de Malliavin. Es tracta d'un càlcul diferencial infinito-dimensional en l'espai de Wiener que fou introduït per P. Malliavin en [M]. Posteriorment ha estat molt desenvolupat per diversos autors, com per exemple Stroock, Bismut, Watanabe, Nualart, Zakai,...

Aquesta teoria ens permet investigar propietats d'existència i de regularitat de la densitat per la llei de funcionals brownians com poden ser solucions d'equacions diferencials estocàstiques. La motivació inicial i una de les seves aplicacions més importants fou donar una demostració probabilística del teorema de Hörmander.

Nosaltres usarem en el primer capítol d'aquesta memòria el càlcul de Malliavin, per estimar la densitat de probabilitat, i la derivada de la densitat, de certs processos de difusió.

Gaveau i Trauber (veure [GT]) van provar que l'adjunt de l'operador derivada coincideix amb una extensió de la integral estocàstica d'Itô, introduïda per Skorohod. Aquest fet permet el desenvolupament d'un càlcul estocàstic per a processos no adaptats que és similar en alguns aspectes al càlcul estocàstic d'Itô. Per exemple, es pot deduir una fórmula de canvi de variables, que generalitza la fórmula d'Itô, i es pot definir també una extensió de la integral de Stratonovich.

Aquest càlcul estocàstic anticipatiu permet formular equacions diferencials estocàstiques on la solució no és adaptada a la filtració browniana.

En el darrer capítol de la memòria, usem aquest tipus de tècniques per a provar que certes funcions són integrables de Stratonovich.

Un dels conceptes fonamentals de la teoria de la probabilitat és el concepte de convergència feble o convergència en llei. En els capítols 2, 3 i 4 d'aquesta memòria estudiarem diferents casos de convergència en llei cap a funcionals del procés de Wiener.

Es diu que una successió de variables aleatòries $\{X_n\}$ convergeix en distribució cap a una altra variable X si convergeixen feblement les respectives lleis imatges. L'exemple més important de convergència en distribució és, sense cap mena de dubte, el teorema central del límit. Aquest resultat ens diu que si tenim $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes de mitjana zero i variància σ^2, aleshores les variables $\{G_n\}$ definides per

$$G_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

convergeixen en distribució cap a una variable aleatòria normal estàndard.

De la mateixa manera, una successió de passejos aleatoris, convenientment normalitzats, convergeix feblement cap a un moviment Brownià:

Considerem les sumes parcials de les variables aleatòries anteriors, $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{j=1}^{k}\xi_j$ per $j \geq 1$, i definim

$$Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1}, \qquad t \geq 0,$$

on $[t]$ denota la part entera de t.

Considerem ara la successió de processos $\{X^n\}$ definits per

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt}, \qquad t \geq 0.$$

Observem que si prenem $s = \frac{k}{n}$ i $t = \frac{k+1}{n}$, l'increment $X_t^n - X_s^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{k+1}$ és independent de la $\sigma-$àlgebra generada per $\xi_1, \ldots, \xi_k$. A més a més $X_t^n - X_s^n$ té mitjana zero i variància $t - s$. Això ens suggereix que $\{X_t^n; t \geq 0\}$ s'aproxima a un moviment Brownià quan n tendeix a infinit. En efecte, es pot demostrar que els processos $\{X^n\}$ convergeixen feblement cap a un moviment Brownià estàndard.

Aquest resultat és conegut com el principi d'invariància de Donsker (veure [D]) o Teorema Central del Límit Funcional . Nosaltres l'utilitzarem en el capítol quart d'aquesta memòria.

Presentació.

Aquesta memòria consta de quatre capítols. Cada un d'ells té una introducció del problema que tractarem, i una secció dedicada als preliminars que es necessiten per aquell capítol.

També hi ha uns preliminars generals on es recorden algunes definicions i alguns resultats del càlcul de Malliavin i de convergència en llei, que són usats en més d'un capítol.

La memòria està pensada de manera que cada capítol es pot llegir de forma independent dels altres. És a dir, en cap d'ells s'utilitzen conceptes introduïts en un altre capítol. Únicament es necessiten els preliminars generals.

En el primer capítol demostrem una extensió de la fórmula d'Itô per $F(X_t, t)$, on $F(x, t)$ és una funció absolutament contínua en x, amb derivada localment de quadrat integrable que satisfà una condició feble de continuïtat en t (veure Teorema 1.3.1), i X és una difusió unidimensional tal que la llei de X_t té una funció de densitat que satisfà certes condicions d'integrabilitat.

Seguint les idees d'un treball de Föllmer, Protter i Siryayev, on es prova una extensió anàloga pel cas en què X és un moviment Brownià, la prova es basa en l'existència d'una integral *backward* de $F'(X_\cdot, \cdot)$ respecte X.

En una altra secció d'aquest mateix capítol mostrem, usant tècniques del càlcul de Malliavin, que, sota certes condicions de regularitat dels coeficients, l'extensió de la fórmula d'Itô es pot aplicar a les difusions fortament el.líptiques i a les el.líptiques.

En el segon capítol es construeixen uns processos, a partir d'un procés de Poisson al pla, que convergeixen en llei cap a un drap Brownià.

Aquest resultat està inspirat en un resultat similar, per al cas uniparamètric, de Stroock.

El mètode de demostració de la convergència en llei que hem utilitzat és l'habitual: provem que la família de lleis és ajustada, i que la llei de tots els possibles límits febles és la llei límit que volem determinar. Per a això últim utilitzem un resultat per al cas de dos paràmetres equivalent al teorema de P. Lévy.

Aquest mateix mètode de demostració és utilitzat en el tercer capítol per a provar la convergència en llei d'uns processos construïts a partir d'un únic procés de Poisson uniparamètric cap a un moviment Brownià complex.

Aquest resultat és una generalització del resultat de Stroock que hem mencionat abans.

En el quart capítol d'aquesta memòria estudiem la convergència en llei cap a integrals múltiples de Stratonovich.

Concretament considerem una funció $f \in L^2([0,T]^n)$ i η_ϵ processos absolutament continus, feblement convergents cap a un moviment Brownià en l'espai de les funcions contínues de $[0,T]$. Considerem

$$I_\eta(f)_t = \int_0^t \cdots \int_0^t f(t_1, \ldots, t_n) d\eta(t_1) \cdots d\eta(t_n).$$

En aquest capítol volem estudiar la convergència en llei de $I_{\eta_\epsilon}(f)$.

Provem que aquests processos convergeixen cap a la integral múltiple de Stratonovich quan la funció f ve donada per una multimesura.

Imposant condicions sobre els processos η_ε també ho provem quan f és una funció contínua, i quan és un producte de funcions de l'espai $L^2([0,T])$ per un indicador que ordena les variables.

Finalment, abans de la bibliografia i de l'índex de matèries, trobem un Apèndix. Allí es demostren amb detall alguns resultats tècnics que s'han usat al llarg de la memòria, la demostració dels quals s'ha traslladat al final per claredat d'exposició.

Preliminars.

Nocions bàsiques del càlcul de Malliavin.

Recordarem tot seguit algunes nocions bàsiques i alguns resultats del càlcul de Malliavin que utilitzarem en alguns capítols d'aquesta memòria.

Considerem $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat complet on tenim definit un moviment Brownià estàndard, $\{W_t,\ 0 \leq t \leq 1\}$. Suposem també que $\mathcal{F}$ és la $\sigma-$àlgebra generada per aquest moviment Brownià. Considerem $H = L^2([0,1])$.

Sigui $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunt de les funcions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tals que f i totes les seves derivades parcials de tots els ordres són contínues i fitades. Definim la classe $\mathcal{S}$ com el conjunt de variables aleatòries $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forma

$$F = f(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}), \tag{1}$$

on $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$. $\mathcal{S}$ és un subconjunt dens de $L^p(\Omega)$, per a tot $p \in [1, \infty)$. Els elements de $\mathcal{S}$ s'anomenen funcionals regulars.

Si F és de la forma (1) es defineix la seva derivada de Malliavin com el procés donat per

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) I_{[0,t_i)}(t)\,.$$

Es pot considerar com un operador lineal no fitat definit en un subconjunt dens de $L^2(\Omega)$ i que pren valors en $L^2([0,1] \times \Omega)$. Aquest operador D és un operador tancable.

Si definim $\mathbb{D}^{1,2}$ com l'adherència de $\mathcal{S}$ en $L^2(\Omega)$ respecte la norma

$$\|F\|_{1,2}^2 = \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|DF\|_{L^2([0,1]\times\Omega)}^2\,,$$

l'espai $\mathbb{D}^{1,2}$ és un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = E\,(FG) + E\,(\langle DF, DG \rangle_H)\,.$$

Definim per iteració la $k-$èssima derivada d'un funcional regular F,

$$D_{\underline{t}}^k F = D_{t_1} D_{t_2} \cdots D_{t_k} F\,,$$

on $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k$.

Anàlogament al cas $k = 1$ es defineixen els espais $\mathbb{D}^{k,p}$, $k \geq 1$, $p > 1$, com l'adherència de $\mathcal{S}$ respecte la norma

$$\|F\|_{k,p}^p = \|F\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{k} \left\| \|D^i F\|_{L^2([0,1]^i)} \right\|_{L^p(\Omega)}^p .$$

Denotem per $\mathbb{D}^{k,\infty} = \bigcap_{p>1} \mathbb{D}^{k,p}$.

L'operador derivada compleix la següent regla de la cadena; sigui $\Psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua amb derivades parcials fitades. Suposem que $F = (F^1, \cdots, F^m)$ és un vector aleatori les components del qual pertanyen a l'espai $\mathbb{D}^{1,p}$ per algun $p \geq 1$ fixat.

Llavors $\Psi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$, i

$$D\left(\Psi(F)\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(F) DF^i .$$

Compleix també la següent fórmula de derivació d'un producte; siguin $F, G \in \mathbb{D}^{1,2}$, tals que $F \cdot G \in L^2(\Omega)$. Aleshores $F \cdot G \in \mathbb{D}^{1,2}$ i

$$D(FG) = DF \cdot G + DG \cdot F,$$

suposant que cada un dels sumands del segon membre pertany a $L^2([0,1] \times \Omega)$.

L'adjunt de l'operador D es denota per δ, s'anomena operador divergència o integral de Skorohod. L'operador δ és un operador lineal tancat i no fitat, de $L^2([0,1] \times \Omega)$ que pren valors en $L^2(\Omega)$ tal que;

- Domδ és el conjunt de processos $v \in L^2([0,1] \times \Omega)$ pels quals existeix una constant C, que només depèn de v, de manera que

  $$|E(< DF, v >_H)| \leq C \|F\|_{L^2(\Omega)} ,$$

  per a tot $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

- Si $v \in$ Domδ, $\delta(v)$ és l'element de $L^2(\Omega)$ caracteritzat per la fórmula d'integració per parts següent,

  $$E(F\delta(v)) = E(< DF, v >_H) , \qquad (2)$$

  per a tot $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Una altra forma habitual de denotar $\delta(v)$ és $\int_0^1 v_s dW_s$.

Per tal de poder donar algunes propietats addicionals de la integral de Skorohod introduïrem tot seguit una classe de processos continguda en el domini de δ; l'espai

$\mathbb{L}^{1,2}$. Definim $\mathbb{L}^{1,2}$ com la classe dels processos $v \in L^2([0,1]\times\Omega)$ tals que $v(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ quasi per a tot t, i existeix una versió mesurable del procés a dos paràmetres $D_s v_t$ que compleix

$$E\int_0^1\int_0^1 (D_s v_t)^2 ds\, dt < \infty\,.$$

$\mathbb{L}^{1,2}$ és un espai de Hilbert amb la norma

$$\|v\|_{1,2}^2 = \|v\|^2_{L^2([0,1]\times\Omega)} + \|Dv\|^2_{L^2([0,1]^2\times\Omega)}\,.$$

Tenim les propietats següents:

- *Fórmula de derivació d'una integral de Skorohod.* Suposem que $v \in \mathbb{L}^{1,2}$. Suposem també que quasi per a tot t el procés $\{D_t v_s\,, s\in[0,1]\}$ pertany al $\mathrm{Dom}\delta$ i hi ha una versió del procés $\left\{\int_0^1 (D_t v_s) dW_s\,, t\in T\right\}$ en $L^2([0,1]\times\Omega)$. Llavors la integral de Skorohod $\delta(v) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i tenim

$$D_t(\delta(v)) = v_t + \int_0^1 (D_t v_s) dW_s\,.$$

- *Fórmula del producte d'una v.a. per una integral de Skorohod.* Suposem que $v \in \mathrm{Dom}\delta$, sigui F una variable aleatòria de l'espai $\mathbb{D}^{1,2}$ tal que $E\big(F^2\int_0^1 v_t^2 dt\big) < \infty$. Llavors

$$\int_0^1 (Fv_t) dW_t = F\int_0^1 v_t dW_t - \int_0^1 (D_t F) v_t dt \tag{3}$$

en el sentit que $Fv_t \in \mathrm{Dom}\delta$ si i només si el terme de la dreta de (3) pertany a $L^2(\Omega)$.

La integral de Skorohod és una generalització de la integral d'Itô. En [NP] i en [N2] hom pot trobar un tractament extensiu de diverses qüestions relacionades amb el càlcul estocàstic associat a aquesta integral.

Suposem ara que $X = \{X_t, 0\le t\le 1\}$ és un procés de difusió solució de l'equació diferencial estocàstica,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s \tag{4}$$

on $X_0 \in \mathbb{R}$, i σ i b compleixen les hipòtesis habituals de Lipschitz i creixement lineal. Introduirem tot seguit un resultat bàsic del càlcul de Malliavin que necessitarem després al primer capítol d'aquesta memòria.

Teorema 0.0.1. *(Veure Teorema 2.2.1 de [N2]) Sigui $X = \{X_t\,, t \in [0,1]\}$ la solució de l'equació (4) on els coeficients σ i b compleixen les condicions habituals de Lipschitz i creixement lineal. Llavors X_t pertany a $\mathbb{D}^{1,\infty}$ per tot $t \in [0,1]$. D'altra banda,*

$$\sup_{0\le r\le t} E(\sup_{r\le s\le 1} |D_r X_s|^p) < \infty$$

i la derivada $D_r X_t$ satisfà la següent equació lineal,

$$\begin{aligned} D_r X_t &= \sigma(r, X_r) + \int_r^t \bar\sigma(s) D_r(X_s) dW_s + \\ &\quad + \int_r^t \bar b(s) D_r X_s ds \end{aligned}$$

per $r \le t$ quasi segurament, i

$$D_r X_t = 0$$

per $r > t$ quasi segurament, on $\bar\sigma$ i $\bar b$ són processos adaptats i fitats.

Si els coeficients σ, b són de classe C^1 respecte x, llavors

$$\begin{aligned} \bar\sigma(s) &= \sigma'(s, X_s) \\ \bar b(s) &= b'(s, X_s)\,. \end{aligned}$$

Aquest teorema s'utilitza per a donar una demostració probabilística del teorema de Hörmander que dóna condicions suficients per a l'existència de densitat de la llei d'una difusió.

Usant el càlcul de Malliavin es poden trobar també altres condicions suficients per l'existència i regularitat de la densitat d'una variable aleatòria $F \in L^2(\Omega)$.

En la secció 1.5 del capítol 1, utilitzem un criteri d'existència de densitat que ens dóna també una expressió de la densitat del nostre problema.

Convergència feble de probabilitats.

Tot seguit recordarem algunes definicions i propietats de la convergència feble de probabilitats i de la convergència en llei de variables aleatòries i de processos estocàstics.

Considerem un espai polonès G, és a dir, un espai mètric separable i complet, i considerem també la seva σ-àlgebra de Borel, $\mathcal{E}$. Denotarem per $\mathcal{P}(G)$ l'espai de les mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$, i prenem en aquest espai la topologia feble, és a dir, la topologia menys fina per la qual l'aplicació que a cada mesura μ li fa correspondre

$$\mu \longrightarrow \mu(f) := \int_G f d\mu$$

és contínua, per a tota funció contínua i fitada f de G. Existeixen a $\mathcal{P}(G)$ diverses mètriques compatibles amb aquesta topologia, que fan que $\mathcal{P}(G)$ sigui també un espai polonès.

Definició 0.0.2. *Es diu que una successió de mesures de probabilitat en $(G, \mathcal{E})$, $\{\mu_n,\ n \geq 0\}$, convergeix feblement cap a una mesura de probabilitat μ i ho denotarem per*

$$\mu_n \overset{w}{\Rightarrow} \mu$$

si

$$\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$$

per a tota $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada. És a dir, si hi ha convergència de μ_n cap a μ en la topologia que hem definit abans.

Definició 0.0.3. *Es diu que un conjunt $A \subset \mathcal{P}(G)$, és relativament compacte si tota successió d'elements d'aquest conjunt té una subsuccessió feblement convergent.*

Definició 0.0.4. *Un conjunt $A \subset \mathcal{P}(G)$ és ajustat si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un compacte K en G tal que per a tota $\mu \in A$, $\mu(G \setminus K) \leq \varepsilon$.*

En un espai mètric, una tècnica habitual per a provar la convergència d'una successió és demostrar que és relativament compacta i després, és suficient veure que tota parcial convergent convergeix cap al mateix límit. El Teorema de Prohorov descriu exactament quins són els subconjunts relativament compactes de $\mathcal{P}(G)$,

Teorema 0.0.5. *(Teorema de Prohorov) Un subconjunt A de $\mathcal{P}(G)$ és relativament compacte (per la topologia feble) si i només si és ajustat.*

Tot seguit recordarem la definició de convergència en llei per a variables aleatòries a valors en un espai polonès. Suposem que tenim en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ una variable aleatòria X, que pren valors en un espai polonès G. Anomenarem llei o distribució de X, la llei imatge $P \circ X^{-1}$. Aquesta mesura de probabilitat la denotarem per $\mathcal{L}(X)$ i pertany a $\mathcal{P}(G)$.

Definició 0.0.6. *Considerem una successió de variables aleatòries a valors en G, $\{X^n,\ n \geq 0\}$, definides en uns certs espais de probabilitat $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$, amb lleis $\mathcal{L}(X^n)$.*

Direm que $\{X^n,\ n \geq 0\}$ convergeix en llei cap a una altra variable aleatòria X en G, i ho denotarem per

$$X^n \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} X,$$

si $\mathcal{L}(X^n) \overset{w}{\Rightarrow} \mathcal{L}(X)$.

Si denotem per E_Q l'esperança matemàtica sota la probabilitat Q, aquesta definició és equivalent a que per a tota funció contínua i fitada $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E_{P^n}(f(X^n)) \longrightarrow E_P(f(X)).$$

Considerem ara que tenim una successió de processos estocàstics a valors en $\mathbb{R}$ parametritzats per un espai mètric compacte T, amb trajectòries contínues, $\{X^n(t);\ t \in T, n \geq 0\}$. Podem considerar els processos X^n com variables aleatòries a valors en l'espai de Banach de les funcions contínues $\mathcal{C}(T)$. Per demostrar la convergència en llei dels processos X^n cap a un cert procés X, en l'espai $\mathcal{C}(T)$, es pot fer servir el mètode següent,

- (i) Demostrar que la família de lleis $\{\mathcal{L}(X^n)\}$ és relativament compacta en $\mathcal{P}(\mathcal{C}(T))$, o el que és el mateix pel Teorema de Prohorov, demostrar que és ajustada.

- (ii) Demostrar que tota parcial $\{\mathcal{L}(X^{n_k})\}$ feblement convergent, convergeix cap al mateix límit, la llei $\mathcal{L}(X)$.

Aquesta segona condició es pot canviar per aquesta altra,

- (ii') Demostrar que per a tot $k \geq 1$ i per a tot $t_1, \ldots, t_k \in T$,

$$(X^n(t_1), \ldots, X^n(t_k)) \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} (X(t_1), \ldots, X(t_k))$$

  en $\mathbb{R}^k$.

Observem que per a qualsevol dels dos mètodes que hem introduït cal provar en primer lloc l'ajustament de la família de lleis. Per a provar això últim, habitualment s'utilitzen criteris basats en la caracterització dels compactes que ens dóna el teorema d'Arzelà-Ascoli.

Un exemple de convergència en llei de processos estocàstics, que utilitzarem en tres dels capítols d'aquesta memòria, són els processos que proposa Stroock (veure [St]), que convergeixen en llei cap al moviment Brownià.

Teorema 0.0.7. *(Stroock) Considerem un procés de Poisson estàndard, $\{N(t),\ t \geq 0\}$, i definim, per a tot $\varepsilon > 0$ el procés continu*

$$y_\varepsilon = \{y_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (-1)^{N(\frac{s}{\varepsilon^2})} ds,\ t \in [0, T]\}.$$

Si (P^ε) són les lleis dels processos y_ε en l'espai de Banach $\mathcal{C}([0, T])$ de les funcions contínues en $[0, T]$, llavors (P^ε) convergeix en llei, quan ε tendeix a zero, cap a la mesura de Wiener.

En el capítol 3 d'aquesta memòria donem una prova alternativa a la que ofereix Stroock, en [St], d'aquest resultat.

A part dels treballs [B] i [BJ3] que recullen respectivament els resultats principals dels capítols 3 i 4, aquests tipus de processos també han estat utilitzats en [DJ], on es prova que la llei de processos continus gaussians que es poden representar com la integral estocàstica d'un cert tipus de nuclis deterministes respecte el procés de Wiener, també es pot aproximar a partir de processos semblants als de Stroock. Un exemple de procés gaussià al qual es pot aplicar aquest resultat de [DJ] és el moviment Brownià fraccional.

En [BJ2] es dóna una versió a dos paràmetres d'aquest resultat de Stroock (veure el Teorema 2.1.1 d'aquesta memòria).

Aquest tipus de processos també es poden utilitzar per a aproximar difusions uniparamètriques. De la mateixa manera que pel cas de les aproximacions del moviment Brownià, usant les tècniques que es fan servir en aquesta memòria, també es pot donar una demostració alternativa a la que trobem en [St] d'aquest resultat,

Teorema 0.0.8. *Considerem*

$$Y_\varepsilon(t) = x + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{s}{\varepsilon^2})}\sigma(Y_\varepsilon(s))ds + \int_0^t b(Y_\varepsilon(s))ds,$$

on $t \in [0,T]$ i $N = \{N_s;\ s \geq 0\}$ és un procés de Poisson estàndard. Suposem que σ i b pertanyen a l'espai C_b^2 de les funcions contínues amb derivades de primer i segon ordre fitades.

Siguin P^ε les lleis d'aquests processos Y_ε en l'espai de les funcions contínues $C([0,T])$. Aleshores,

$$P^\varepsilon \overset{w}{\Rightarrow} P$$

quan ε tendeix a zero, on P és la llei en l'espai $C([0,T])$ de l'única solució de l'equació diferencial estocàstica,

$$Y_t = x + \int_0^t \sigma(Y_s) \circ dW_s + \int_0^t b(Y_s)ds,$$

on $W = \{W_t;\ t \in [0,T]$ és un moviment Brownià estàndard i la integral estocàstica és de tipus Stratonovich.

El procès $\{(-1)^{N_t}\}$, on N és un procés de Poisson estàndar, no és estacionari, però gairebé. Concretament es pot demostrar la següent propietat (veure p.349 de [GS]),

Proposició 0.0.9. *Sigui $N = \{N_s;\ s \geq 0\}$ un procés de Poisson. Considerem A una variable aleatòria de Bernouilli de paràmetre $\frac{1}{2}$ independent del procés N. Llavors,*

$$X_t := (-1)^{N_t + A}$$

és estrictament estacionari.

Prova: Denotarem per $Z_t := (-1)^{N_t}$. Considerem $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ per a tot $i = 1, \ldots, n$, i considerem també $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$. Volem veure que per a tot $h > 0$,

$$P\{(X_{t_1}, X_{t_2} \ldots, X_{t_n}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\} = P\{(X_{t_1+h}, X_{t_2+h} \ldots, X_{t_n+h}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\}.$$

Observem que

$$\begin{aligned}
& P\{(X_{t_1}, X_{t_2} \ldots, X_{t_n}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\} \\
= \; & P\{(Z_{t_1}, Z_{t_2} \ldots, Z_{t_n}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\} \cdot P\{A = 0\} \\
& + P\{(Z_{t_1}, Z_{t_2} \ldots, Z_{t_n}) = (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, -\varepsilon_n)\} \cdot P\{A = 1\}.
\end{aligned}$$

Però

$$\begin{aligned}
& P\{(Z_{t_1}, Z_{t_2} \ldots, Z_{t_n}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\} \\
= \; & P\{Z_{t_1} = \varepsilon_1, Z_{t_2 - t_1} = \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1, \cdots, Z_{t_n - t_{n-1}} = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1}\} \\
= \; & \frac{1}{2}\big(1 + \varepsilon_1 \exp(-2t_1)\big)\frac{1}{2}\big(1 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1 \exp(-2(t_2 - t_1))\big) \\
& \times \cdots \times \frac{1}{2}\big(1 + \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \exp(-2(t_n - t_{n-1}))\big) \\
= \; & \frac{1}{2^n} \prod_{i=2}^{n} \big(1 + \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i-1} \exp(-2(t_i - t_{i-1}))\big)\big(1 + \varepsilon_1 \exp(-2t_1)\big).
\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
& P\{(X_{t_1}, X_{t_2} \ldots, X_{t_n}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\} \\
= \; & \frac{1}{2^{n+1}}\Big[\prod_{i=2}^{n} \big(1 + \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i-1} \exp(-2(t_i - t_{i-1}))\big)\big(1 + \varepsilon_1 \exp(-2t_1)\big) \\
& + \prod_{i=2}^{n} \big(1 + \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i-1} \exp(-2(t_i - t_{i-1}))\big)\big(1 - \varepsilon_1 \exp(-2t_1)\big)\Big] \\
= \; & \frac{1}{2^n} \prod_{i=2}^{n} \big(1 + \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i-1} \exp(-2(t_i - t_{i-1}))\big),
\end{aligned}$$

que òbviament és igual també a la probabilitat

$$P\{(X_{t_1+h}, X_{t_2+h} \ldots, X_{t_n+h}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\}$$

per a tot $h > 0$.

□

Capítol 1

Una extensió de la fórmula d'Itô per a les difusions el.líptiques.

1.1 Introducció.

Sigui $X = \{X_t\,, 0 \leq t \leq 1\}$ un procés de difusió, solució de l'equació diferencial estocàstica,

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

on $\{W_t\,, 0 \leq t \leq 1\}$ és un moviment Brownià estàndard i σ i b satisfan les condicions habituals de Lipschitz i creixement lineal.

Sigui $F(x,t)$ una funció absolutament contínua en x, amb derivada $f(x,t)$ localment de quadrat integrable, que satisfà una condició feble de continuïtat en t que després especificarem. L'objectiu d'aquest capítol és provar una extensió de la fórmula d'Itô per $F(X_t, t)$, sota hipòtesis d'existència de densitat per X_t que compleix certes condicions d'integrabilitat, i donar condicions suficients sobre σ i b per tal que es compleixin aquestes hipòtesis.

Ens hem inspirat en les idees d'un article de Föllmer, Protter i Shiryayev (veure [FPS]). En aquest article demostren una extensió de la fórmula d'Itô pel cas en què X és un moviment Brownià. Basen la seva demostració en l'existència i les propietats de la densitat del Brownià, i en l'expressió com a semimartingala del procés a temps invertit $\bar{X}_t \equiv X_{1-t}$.

La idea d'utilitzar el temps invertit per estendre versions de la integral de Stratonovich i de la fórmula d'Itô també apareix en treballs de Lyons i Zhang (1994) i de Russo i Vallois (1994), sota fortes condicions de regularitat de la funció f (veure [LZ] i [RV]).

Per a processos de difusió hi ha resultats que garanteixen l'existència de densitat i en donen estimacions, basats en el càlcul de Malliavin. D'altra banda també es té que sota certes hipòtesis la propietat de difusió es conserva pel procés a temps invertit, (veure [MNS] i també [HP]).

Llavors podem seguir el mètode de la demostració de [FPS]. Així, una primera part del nostre treball consisteix en la demostració de la fórmula d'Itô suposant l'existència de densitat de X_t, $p_t(x)$ i certes condicions d'integrabilitat sobre aquesta densitat. En una segona part demostrem que si σ compleix certes condicions de no degeneració, llavors les hipòtesis de l'extensió de la fórmula d'Itô se satisfan (cal imposar també certa regularitat en els coeficients). En aquesta segona part utilitzem tècniques del càlcul de Malliavin per estimar la densitat $p_t(x)$ i també el quocient $\frac{p_t'(x)}{p_t(x)}$, on $p_t'(x)$ denota la derivada respecte x en el sentit de les distribucions de $p_t(x)$.

Concretament utilitzem arguments i estimacions similars als que s'obtenen en [CFN] per $p_t(x)$, i veiem que aquests també són suficients per estimar $\frac{p_t'(x)}{p_t(x)}$.

Rozkosz prova un resultat força relacionat amb el que presentem en aquest capítol (veure Teorema 3.3 de [R]). En aquell treball l'autor obté una fórmula d'Itô per a processos de difusió multidimensionals i funcions $F \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, amb $p > 2 \vee d$, on d és la dimensió de la difusió, i $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ denoten els espais de Sobolev usuals. La prova d'aquest resultat també segueix les idees de [FPS]. Observem que les hipòtesis de F (en el cas unidimensional) són més fortes que les nostres. D'altra banda, les hipòtesis sobre els coeficients del generador de la difusió no són comparables. En el Teorema 1.5.9 necessitem més condicions de regularitat que en el resultat de Rozkosz, però en aquell resultat es necessita que el terme de drift sigui fitat, i la matriu de difusió ha de ser uniformement definida positiva.

Els principals resultats d'aquest capítol estan recollits en el treball [BJ1]. Posteriorment a aquest treball d'altres autors han obtingut extensions de la fórmula d'Itô en línies semblants a la de [FPS] i la nostra. Aquest és el cas de [FP], [MN1], [MN2], [ERV] i [Ei].

Concretament en [FP] es dóna una extensió de la fórmula d'Itô per a un moviment Brownià d-dimensional amb $d \geq 2$ i una funció que no depèn del temps F i que pertany, almenys localment, a l'espai de Sobolev $W^{1,2}$. Proven que les integrals estocàstiques forward i backward d'una funció $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, es poden construir com a límits en probabilitat, sota la mesura P_{x_0}, del mateix tipus d'aproximacions que en el cas 1-dimensional. Però, contràriament al que passa en el cas $d = 1$, aquests resultats d'aproximació només són certs per tots els punts inicials x_0 tret d'un conjunt de mesura nul.la.

En la demostració es necessiten resultats multidimesionals de [HS] anàlegs a la llei 0-1 d'Engelbert-Schmidt.

També proven l'existència de les covariacions quadràtiques $[f_k(X), X^k]$ (on f_k són les derivades parcials de F) i l'expressen com la diferència entre les integrals backward i les forward.

En [MN1] es prova l'existència de covariació quadràtica $[f(X), X]$, on $f(x)$ pertany a l'espai $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ i X és un procés continu i adaptat de la forma $X_t = \int_0^t u_s dW_s$, on u satisfà localment certes condicions de regularitat en el sentit de Malliavin i que per a tot $t \in [0,T]$, $|u_t| \geq \rho > 0$.

L'existència d'aquesta covariació quadràtica també permet provar una extensió de la fórmula d'Itô per a X i per a funcions F (que no depenen del paràmetre temps) absolutament contínues amb derivada localment de quadrat integrable.

La principal diferència entre el mètode de demostració d'aquest resultat i el dels resultats de [FPS] i [BJ1] és que s'utilitzen tècniques del càlcul de Malliavin per tal d'evitar l'argument del temps invertit.

En [MN2] es prova l'existència de les covariacions quadràtiques $\left[\frac{\partial F}{\partial x_k}(X), X^k\right]$ (que permeten provar una extensió de la fórmula d'Itô), on F pertany localment a l'espai de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per algun $p > d$ i X és una martingala Browniana regular d-dimensional, no degenerada, amb una representació de la forma $X_t^k = \sum_{i=1}^d \int_0^t u_s^{k,i} dW_s^i$ per a tot $k = 1, \ldots, d$.

En [ERV] trobem una fórmula d'Itô per a funcions $F \in C^{1,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, l'espai de Fréchet de les funcions de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ les derivades de primer ordre de les quals són localment Hölder-contínues amb paràmetre $\lambda \in [0,1)$, i per $X = (X^1, \cdots, X^n)$ un procés càdlàg tal que $\sum_{s\leq 1} |\Delta X_s|^{1+\lambda} < \infty$ q.s. i les integrals $\int_{(0,\cdot]} f(X) d^- X^i$ i $\int_{(0,\cdot]} f(X) d^+ X^i$ (definides com a límits uniformement en probabilitat quan $\varepsilon \downarrow 0^+$ de $\int_0^t f(X_s) \frac{X^i_{s+\varepsilon} - X^i_s}{\varepsilon} ds$ i $\int_0^t f(X_s) \frac{X^i_s - X^i_{(s-\varepsilon)\vee 0}}{\varepsilon} ds$ respectivament) existeixen, per a tot $f \in C^{0,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i $1 \leq i \leq n$.

Entre els exemples de processos X pels quals val aquesta fórmula d'Itô hi ha semimartingales invertibles, com són els processos de Lévy càdlàg (veure Teorema 1.8 de [JP]), que compleixen que la funció $|x|^\lambda \wedge 1$ és integrable respecte la mesura de Lévy de X.

En [Ei] la covariació quadràtica $[f(X,\cdot), X]$, on X és un moviment Brownià i F una funció absolutament contínua amb $f = F'$, s'expressa com una integral estocàstica biparamètrica respecte el temps local L^a_t. També es prova que la fórmula d'Itô continua essent vàlida si existeix la derivada de F respecte de t, enlloc de la hipòtesi feble de continuïtat sobre f que suposen [FPS].

El capítol està organitzat en diverses seccions. Una primera secció de preliminars. En aquesta secció presentem el problema i introduïm alguns conceptes que més endavant, en les altres seccions, necessitarem. Aprofitem també aquesta secció per donar alguns resultats coneguts de temps invertit que utilitzarem en la secció 1.3.

La tercera secció està dedicada a provar l'extensió de la fórmula d'Itô. Allí donem condicions suficients per a que aquesta extensió valgui per un procés de difusió.

A continuació ve una secció on es relaciona la "covariació quadràtica" i el temps local. Tot seguit trobem una secció d'exemples. En aquesta secció provem que sota bones condicions, les difusions fortament el.líptiques i les el.líptiques compleixen les hipòtesis que hem trobat en la secció 1.3, i per tant val aquesta extensió de la fórmula d'Itô.

Al llarg d'aquest capítol les constants que apareixen a les demostracions són anomenades C o bé K, encara que puguin canviar de valor d'un lloc a un altre.

1.2 Preliminars.

Sigui $X = \{X_t,\ 0 \le t \le 1\}$ un procés continu. La forma estàndard de provar una fórmula d'Itô és considerar la descomposició

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} (F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i})), \tag{1.1}$$

on D_n denota una partició de la forma $\{0 = t_0 < \cdots < t_{k_n} = 1\}$, i D_n^t la partició que s'obté afegint a D_n el punt t.

Si suposem que F és una funció absolutament contínua de la forma

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y)dy\,,$$

on f és localment de quadrat integrable, llavors els increments que ens surten a la banda dreta de (1.1) es poden escriure, tal com fan [FPS], com

$$F(X_{t_{i+1}}) - F(X_{t_i}) = \int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}} f(y)dy = f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}} \{f(y) - f(X_{t_i})\}dy\,,$$

i també com

$$f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \{f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})\}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}} \{f(y) - f(X_{t_{i+1}})\}dy\,.$$

Sumant aquestes expressions dels increments, podem escriure la descomposició que hem considerat en (1.1) com

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \frac{1}{2}Q_n^t + R_n^t\,, \tag{1.2}$$

amb covariació quadràtica discreta

$$Q_n^t \equiv \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \{f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})\}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\,,$$

i reste

$$R_n^t \equiv \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}} [f(y) - \frac{1}{2}\{f(X_{t_i}) + f(X_{t_{i+1}})\}] dy \,.$$

Passem al límit ara (1.2) al llarg d'una successió de particions D_n, amb norma $|D_n|$ tendint a zero, que tingui el mateix ordre de convergència que t_1, és a dir, existeix una constant M tal que per a tot n

$$\frac{|D_n|}{t_1} \leq M < \infty. \tag{1.3}$$

Hem d'imposar aquesta condició per tal que convergeixin unes determinades sumes de Riemann, com veurem més endavant. Segons quines siguin les funcions $r(t)$ i $u(t)$ dels Teoremes 1.3.1 i 1.3.2, es poden donar condicions millors que (1.3) per a les successions de particions. Per exemple, si $r(t) = u(t) = Kt^{-1/2}$, com passa en el cas del moviment Brownià i en els nostres exemples, es poden considerar particions tals que

$$\sup_n \sup_{t_i > 0} \frac{t_{i+1}}{t_i} = M < \infty.$$

Direm que una successió de processos $Y^n = \{Y_t^n, 0 \leq t \leq 1\}$ convergeix uniformement en probabilitat (u.p.) cap a un procés $Y = \{Y_t, 0 \leq t \leq 1\}$ si el suprem de la norma de les diferències convergeix a 0 en probabilitat.

En [FPS] el resultat bàsic per provar la fórmula d'Itô, on X és un moviment Brownià estàndard és que existeix el límit u.p. de

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0 < t_i < t}} f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \,,$$

que coincideix amb la integral estocàstica *forward* ordinària (integral d'Itô)

$$\int_0^t f(X_s) dX_s \,,$$

i el límit u.p. de

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0 < t_i < t}} f(X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \,,$$

que coincideix amb la integral estocàstica *backward*

$$\int_0^t f(X_s) d^* X_s \,.$$

Aquesta integral es defineix com una integral forward del procés $f(\overline{X}_s)$ respecte $\overline{X}_s$, on $\overline{X}$ denota el procés a temps invertit, $\overline{X} = \{\overline{X}_t \equiv X_{1-t},\ 0 \leq t \leq 1\}$ que és també una semimartingala.

Per tal de motivar la definició de la integral *backward* en el nostre cas considerarem una situació més general. Suposem que F depèn també del temps t, és a dir $F = F(x,t)$ (aquest és també el cas estudiat en [FPS]). Suposem també que el nostre procés és un procés de difusió, que satisfà la següent equació diferencial estocàstica

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s\,,$$

on $W = \{W_t, \mathcal{F}_t;\ 0 \leq t \leq 1\}$ és un moviment Brownià estàndard , i σ i b satisfan les condicions habituals de Lipschitz i creixement lineal, concretament suposarem que existeix una constant $K > 0$ tal que per a tot $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sup_t[|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)|] \leq K|x - y| \tag{1.4}$$

$$\sup_t[|\sigma(t,x)| + |b(t,x)|] \leq K(1 + |x|). \tag{1.5}$$

El problema de la preservació de la propietat de difusió en invertir el temps d'un procés ha estat estudiat per diversos autors (veure per exemple [HP] , [MNS], [P], [J] i [Pr]). En [MNS] es donen condicions necessàries i suficients per tal de preservar la propietat de difusió sota la hipòtesi d'existència de densitat per a la llei de X_t, per a tot $t > 0$. Utilitzem el següent resultat:

Teorema 1.2.1. *(Veure Teorema 2.3 de [MNS].) Suposem que se satisfan les següents condicions,*

1. *Els coeficients σ i b satisfan les hipòtesis (1.4) i (1.5).*
2. *Per a tot $t > 0$, X_t té una densitat $p_t(x)$.*
3. *La derivada en el sentit de les distribucions de $\sigma^2(t,x)p_t(x)$ és una funció localment integrable, és a dir, satisfà*

$$\int_{t_0}^1 \int_D \left|\frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x))\right| dxdt < \infty\,,$$

per a tot obert fitat $D \subset \mathbb{R}$ i per a tot $t_0 > 0$.

Llavors el procés a temps invertit, $\{\bar{X}_t, 0 \leq t < 1\}$ és un procés de difusió, i existeix un moviment Brownià $\{\bar{W}_t, \bar{\mathcal{F}}_t, 0 \leq t \leq 1\}$ tal que el procés $\{\bar{X}_t, 0 \leq t < 1\}$ és $\bar{\mathcal{F}}_t$-adaptat i compleix l'equació diferencial estocàstica,

$$\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \bar{b}(s, \bar{X}_s)ds + \int_0^t \bar{\sigma}(s, \bar{X}_s)d\bar{W}_s, \tag{1.6}$$

on

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(1-t,x) &= \sigma(t,x), \\ \bar{b}(1-t,x) &= -b(t,x) + \frac{1}{p_t(x)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x)), \end{aligned}$$

amb el conveni que el terme $(p_t(x))^{-1} = 0$ *si* $p_t(x) = 0$.

Observació 1.2.2. *Aquest resultat implica que existeix un espai de probabilitat on estan definits el nou moviment Brownià,* $\bar{W} = \{\bar{W}_t, \bar{\mathcal{F}}_t;\ 0 \le t \le 1\}$, *i el que teníem,* W. *Aquest espai de probabilitat és una extensió de l'espai inicial on teníem definit* W.

Observació 1.2.3. *Si imposem la següent condició, més restrictiva, (3') enlloc de la condició (3) del teorema,*

$$\int_0^1 \int_D \left| \frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x)) \right| dxdt < \infty,$$

per a tot obert fitat $D \subset \mathbb{R}$, *tenim que la igualtat (1.6) és certa per a tot* $t \in [0,1]$.

Això és una conseqüència del fet que si *(3')* és certa, llavors el terme de la dreta de (1.6) és un procés continu en [0,1]. Certament, en aquest cas, pels habituals arguments de localització, podem suposar que

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx}\Big(\sigma^2(t,x)p_t(x)\Big) \right| dxdt < \infty,$$

és a dir,

$$E\Big\{ \int_0^1 \frac{1}{p_{1-t}(\bar{X}_t)} \left| \frac{d}{dx}\Big(\sigma^2(1-t,\bar{X}_t)p_{1-t}(\bar{X}_t)\Big) \right| dt \Big\} < \infty,$$

la qual cosa implica que

$$P\{ \int_0^1 \frac{1}{p_{1-t}(\bar{X}_t)} \left| \frac{d}{dx}\Big(\sigma^2(1-t,\bar{X}_t)p_{1-t}(\bar{X}_t)\Big) \right| dt < \infty \} = 1.$$

Per tal de motivar la definició de la integral *backward* $\int_0^t f(X_s,s)d^*X_s$ en el nostre cas, suposem per un moment que les sumes de Riemann

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} f(X_{t_{i+1}}, t_{i+1})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \tag{1.7}$$

convergeixen cap a un cert límit, i volem definir aquest límit com la integral *backward.*

Fent el canvi de notació

$$1 - t_{i+1} = s_j, \text{ amb } j = (k_n + 1) - (i + 1),$$

obtenim que (1.7) és igual a

$$- \sum_{\substack{s_j, s_{j+1} \in D_n^{1-t} \\ s_{j+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_j}, 1 - s_j)(\bar{X}_{s_{j+1}} - \bar{X}_{s_j}).$$

Llavors, és raonable definir la integral *backward*

$$\int_0^t f(X_s, s) d^* X_s,$$

com la següent integral *forward*

$$- \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1 - s) d\bar{X}_s.$$

Aquesta última integral la definim en el sentit habitual, utilitzant la descomposició (1.6) de $\bar{X}$ com a semimartingala.

1.3 Demostració de l'extensió de la fórmula d'Itô.

Recordem que $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$ és un procés de difusió solució de l'equació diferencial estocàstica,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

o bé, en forma diferencial,

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

on $\{W_t, 0 \leq t \leq 1\}$ és un moviment Brownià en $\mathbb{R}$. Suposem que X_0 és $\mathcal{F}_0$-mesurable.

En aquesta secció suposarem que el nostre espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és el que ens dóna l'Observacio 1.2.2 de la secció anterior, on ambdós moviments Brownians, W i $\bar{W}$ estan definits.

La prova de l'extensió de la fórmula d'Itô es basa, bàsicament, en dos resultats; els Teoremes 1.3.1 i 1.3.2, que donen, respectivament, condicions suficients per a la convergència de les sumes de Riemman *forward* i *backward* cap a les corresponents integrals estocàstiques.

1.3.1 Existència de la integral forward.

Teorema 1.3.1. *Suposem que $f(\cdot,t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ i que per a tot compacte T de $\mathbb{R}$ tenim que $\int_T f^2(x,t)dx$ és una funció contínua de t en $[0,1]$.*

Suposem també que

- **(H1)** *X_t és una difusió que compleix les condicions 1 i 2 del Teorema 1.2.1,*
- *La densitat de X_t, $p_t(x)$ compleix:*

$$\sup_x p_t(x) \leq r(t)$$

on $r(t)$ és una funció contínua de t en $(0,1]$, decreixent i integrable.

Llavors $f(X_\cdot,\cdot)$ té integral forward respecte X_t i a més a més, si prenem una successió de particions D_n tals que $|D_n| \to 0$ i que satisfan (1.3), aleshores el límit

$$\sum_{\substack{t_i,t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i},t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existeix com a límit uniformement en probabilitat, i és igual a

$$\int_0^t f(X_s,s)dX_s\,.$$

Prova: Seguirem l'esquema que s'utilitza en [FPS] per demostrar el mateix resultat pel cas particular on $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$ és un moviment Brownià.

Sabem que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s\,.$$

Per tant per veure que $f(X_\cdot,\cdot)$ és *forward* integrable respecte X n'hi ha prou provant,

i).

$$\int_0^1 |b(s,X_s)f(X_s,s)|ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

ii)

$$\int_0^1 (\sigma(s,X_s)f(X_s,s))^2 ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

Per veure i) hem de provar que $P\left\{\int_0^1 |b(s,X_s)f(X_s,s)|ds > N\right\}$ tendeix a zero quan $N \to \infty$.

Utilitzant arguments de localització podem suposar que b està fitada, que $f(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$ per a tot $t \in [0,1]$ i que $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ és una funció contínua de t en [0,1].

Per la desigualtat de Txebixev,

$$P\left\{\int_0^1 |b(s,X_s)f(X_s,s)|ds > N\right\} \leq \frac{1}{N^2}E\int_0^1 (b(s,X_s)f(s,X_s))^2 ds$$
$$\leq \frac{C}{N^2}E\Big(\int_0^1 f^2(X_s,s)ds\Big)$$

ja que podem suposar que b està fitada.

Aquesta última expressió podem escriure-la com

$$\frac{C}{N^2}\Big(\int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,s)p_s(x)dx\Big)ds\Big)$$
$$\leq \frac{C}{N^2}\int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,s)dx\Big)r(s)ds,$$

utilitzant que $r(s)$ fita la densitat. I aquesta darrera expressió convergeix a zero quan N tendeix a infinit.

ii) Cal veure també que

$$\int_0^1 (\sigma(s,X_s)f(X_s,s))^2 ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

Haurem de provar que $P\left\{\int_0^1(\sigma(s,X_s)f(X_s,s))^2 ds > N\right\}$ convergeix a zero quan $N \to \infty$.

Novament pels arguments de localització hom pot suposar σ fitada, $f(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$, per a tot $t \in [0,1]$ i tal que $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ és una funció contínua de t en [0,1].

Utilitzant la desigualtat de Txebixev i que podem suposar σ fitada,

$$P\Big\{\int_0^1 (\sigma(s,X_s)f(X_s,s))^2 ds > N\Big\} \leq \frac{1}{N}E\Big[\int_0^1 (\sigma(s,X_s)f(X_s,s))^2 ds\Big]$$
$$\leq \frac{K}{N}E\Big[\int_0^1 f^2(X_s,s)ds\Big]$$

i aquesta última expressió ja havíem vist que convergeix a zero en tendir N a infinit.

Hem de veure ara que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i},t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \int_0^t f(X_s,s)dX_s \qquad \text{u.p.}$$

Sabem que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s\,.$$

Per tant provarem dues coses,

(A1)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s)ds = \int_0^t f(X_s, s)b(s, X_s)ds \qquad \text{u.p.}$$

(A2)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s)dW_s = \int_0^t f(X_s, s)\sigma(s, X_s)dW_s \qquad \text{u.p.}$$

Per provar **(A1)** hem de veure que per a tot $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{ \sup_t \Big| \int_0^t f(X_s, s)b(s, X_s)ds - \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s)ds \Big| > \varepsilon \Big\} \longrightarrow 0\,.$$

Però,

$$P\Big\{ \sup_t \Big| \int_0^t f(X_s, s)b(s, X_s)ds - \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s)ds \Big| > \varepsilon \Big\}$$

$$\leq P\Big\{ \sup_t \int_0^t \Big| f(X_s, s) - \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n \\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big| \Big| b(s, X_s) \Big| ds > \varepsilon \Big\}$$

$$\leq P\Big\{ \int_0^1 \Big| f(X_s, s) - \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n \\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big| \Big| b(s, X_s) \Big| ds > \varepsilon \Big\}.$$

Per arguments de localització podem suposar que b està fitada, que $f(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$ per a tot $t \in [0,1]$ i que $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ és una funció contínua de t en [0,1].

Per tant només cal veure que

$$E\Big[\Big(\int_0^1 \Big| f(X_s, s) - \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n \\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big| ds \Big)^2\Big]$$

convergeix a zero quan $|D_n| \to 0$.

Definim

$$\begin{aligned}\Phi(\omega,t) &= f(X_t,t)\,,\\ \Phi_n(\omega,t) &= \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n\\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i},t_i)I_{[t_i,t_{i+1})}(t)\,.\end{aligned}$$

Per tant n'hi ha prou veient que

$$\lim_n \|\Phi-\Phi_n\|_2^2=0$$

on $\|\cdot\|_2^2=E\left(\int_0^1(\,\cdot\,)^2dt\right)$.

D'una banda,

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_2^2 &= E\left(\int_0^1 f^2(X_t,t)dt\right)\\ &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)p_t(x)dxdt\\ &\leq \int_0^1 r(t)\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dxdt<\infty.\end{aligned}$$

Definim

$$\|f\|_*^2=\int_{[0,1]}\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)r(t)dxdt=\int_0^1 r(t)\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dxdt\,,$$

que és una norma $L^2(\mathbb{R}\times[0,1])$ amb la mesura $r(t)dxdt$.

Per tant hem vist que

$$\|\Phi\|_2^2\leq\|f\|_*^2\,.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned}\|\Phi_n\|_2^2 &= \int_0^1 \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n\\ 0<t_i<1}} E\left(f^2(X_{t_i},t_i)I_{[t_i,t_{i+1})}(t)\right)dt\\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n\\ 0<t_i<1}} \int_{\mathbb{R}} f^2(x,t_i)I_{[t_i,t_{i+1})}(t)p_{t_i}(x)dxdt\\ &= \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n\\ 0<t_i<1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t_i)p_{t_i}(x)dx\right](t_{i+1}-t_i)\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[r(t_i) \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right] (t_{i+1} - t_i) .$$

Podem escriure aquesta darrera expressió de la següent manera

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[r(t_{i+1}) \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right] (t_{i+1} - t_i) +$$

$$+ \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right] (r(t_i) - r(t_{i+1}))(t_{i+1} - t_i) .$$

D'una banda, el primer sumand de la darrera expressió es pot escriure com,

$$\int_0^1 \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} r(t_{i+1}) \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) ds .$$

Però utilitzant que podem suposar $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ contínua com a funció de t en $[0,1]$ i que $r(t)$ és decreixent,

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} r(t_{i+1}) \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \leq K r(s) .$$

Com

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} r(t_{i+1}) \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right) I_{[t_i, t_{i+1})}(s)$$

convergeix per tot t cap a $r(t) \int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$, aplicant el teorema de la convergència dominada, tenim que

$$\lim_n \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[r(t_{i+1}) \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right] (t_{i+1} - t_i) = \int_0^1 r(t) \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t) dx dt .$$

D'altra banda, existeix una constant finita M, tal que $\frac{|D_n|}{t_1} \leq M$, per a tot n. Llavors,

$$\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right] (r(t_i) - r(t_{i+1}))(t_{i+1} - t_i)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K|D_n| \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} (r(t_i) - r(t_{i+1})) \\
&= K|D_n|(r(t_1) - r(1)) \\
&\leq K(Mt_1 r(t_1) - |D_n| r(1)) \\
&\leq K\left(M \int_0^{t_1} r(t)dt - |D_n| r(1)\right),
\end{aligned}
$$

que convergeix a zero en augmentar la partició. Hem utilitzat novament que $r(t)$ és decreixent i integrable en $(0,1)$.

Així doncs,

$$\limsup_n \|\Phi_n\|_2^2 \leq \|f\|_*^2 .$$

Sigui $\varepsilon > 0$. Prenem ara una funció $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times [0,1])$ amb suport compacte tal que

$$\|g - f\|_* \leq \varepsilon$$

i definim

$$
\begin{aligned}
\Psi(\omega, t) &= g(X_t, t), \\
\Psi_n(\omega, t) &= \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} g(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t).
\end{aligned}
$$

Tenim que

$$\lim_n \|\Psi - \Psi_n\|_2^2 = \lim_n \int_0^1 E[(g(X_t,t) - \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} g(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t))^2]dt = 0,$$

per ser g contínua amb suport compacte, aplicant convergència dominada.

Llavors,

$$\|\Phi - \Phi_n\|_2 \leq \|\Phi - \Psi\|_2 + \|\Psi - \Psi_n\|_2 + \|\Psi_n - \Phi_n\|_2 .$$

D'on

$$\limsup_n \|\Phi - \Phi_n\|_2 \leq \|g - f\|_* + \|g - f\|_* \leq 2\varepsilon .$$

Per tant,

$$\lim_n \|\Phi - \Phi_n\|_2^2 = 0$$

com volíem demostrar. Això acaba la prova de **(A1)**. Hem de veure ara,

(A2)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dW_s = \int_0^t f(X_s, s)\sigma(s, X_s) dW_s \qquad \text{u.p.}$$

Hem de provar que per a tot $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{ \sup_t \Big| \int_0^t f(X_s, s)\sigma(s, X_s) dW_s - \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dW_s \Big| > \varepsilon \Big\}$$

tendeix a zero quan n tendeix a infinit.

Però, com que $f(X_{t_i}, t_i)$ és $\mathcal{F}_{t_i}$−mesurable,

$$\begin{aligned} & P\Big\{ \sup_t \Big| \int_0^t f(X_s, s)\sigma(s, X_s) dW_s - \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0<t_i<t}} f(X_{t_i}, t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) dW_s \Big| > \varepsilon \Big\} \\ = \; & P\Big\{ \sup_t \Big| \int_0^t \sigma(s, X_s) \Big(f(X_s, s) - \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big) dW_s \Big| > \varepsilon \Big\} . \end{aligned}$$

Per provar que aquesta darrera expressió tendeix a zero n'hi ha prou veient que per a tot $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{ \int_0^1 \sigma^2(s, X_s) \Big(f(X_s, s) - \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big)^2 ds > \varepsilon \Big\} \to 0 .$$

Pels arguments de localització podem suposar σ fitada, $f(\cdot, t)$ de quadrat integrable i $\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t) dx$ contínua com a funció de t en $[0, 1]$. N'hi ha prou doncs demostrant que

$$P\Big\{ \int_0^1 \Big(f(X_s, s) - \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i}, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big)^2 ds > \varepsilon \Big\} \to 0 .$$

Però,

$$
P\Big\{\int_0^1 \Big(f(X_s,s) - \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n\\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i},t_i)I_{[t_i,t_{i+1})}(s)\Big)^2 ds > \varepsilon\Big\}
$$

$$
\leq \frac{1}{\varepsilon}E\Big[\int_0^1 \Big(f(X_s,s) - \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n\\ 0<t_i<1}} f(X_{t_i},t_i)I_{[t_i,t_{i+1})}(s)\Big)^2 ds\Big].
$$

I en la prova de **(A1)**, hem vist que aquesta esperança tendia a zero en augmentar la partició.

□

1.3.2 Existència de la integral backward.

Teorema 1.3.2. *Suposem que $f(\cdot,t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ i que per a tot compacte T de $\mathbb{R}$ tenim que $\int_T f^2(x,t)dx$ és una funció contínua de t en $[0,1]$.*

Suposem també que

- **(H1)** *X_t és una difusió que compleix les condicions 1 i 2 del Teorema 1.2.1,*
- **(H2)** *La densitat de X_t, $p_t(x)$ compleix:*

$$
\sup_x p_t(x) \leq r(t),
$$

$$
\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_t(x)}\Big(\frac{d}{dx}\left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right)\Big)^2 dx\Big)^{1/2} \leq u(t)
$$

on $r(t)$, $u(t)$ són funcions contínues com a funcions de t en $(0,1]$, decreixents, integrables i tals que $((r)^{1/2}u)(t)$ és també integrable.

Llavors $f(X_\cdot,\cdot)$ té integral backward respecte X_t i a més a més, si prenem una successió de particions D_n tals que $|D_n| \to 0$ i que satisfan (1.3), aleshores el límit

$$
\sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ 0<t_i<t}} f(X_{t_{i+1}},t_{i+1})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})
$$

existeix com a límit uniformement en probabilitat, i és igual a

$$
\int_0^t f(X_s,s)d^*X_s.
$$

Prova: Observem en primer lloc que estem en les condicions del Teorema 1.2.1, ja que la condició 3 es compleix en el nostre cas gràcies a la segona fita de la hipòtesi (H2) i la desigualtat de Hölder. De fet, es compleix la condició 3' que era més forta,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_D \left|\frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x))\right| dx dt \\
= & \int_0^1 \int_D \left| \left(\frac{1}{p_t(x)}\right)^{1/2} \frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x)) \, (p_t(x))^{1/2} \right| dx dt \\
\leq & \int_0^1 \left(\int_D \frac{1}{p_t(x)} \left(\frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x)) \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D p_t(x) dx \right)^{1/2} dt \\
\leq & \int_0^1 u(t) dt < \infty \, .
\end{aligned}$$

Considerem $\bar{X}_t \equiv X_{1-t}$. Recordem que per veure que $f(X_\cdot, \cdot)$ és *backward* integrable respecte X hem de provar que $f(\bar{X}_s, 1-s)$ és *forward* integrable respecte $\bar{X}_s$. Pel Teorema 1.2.1 sabem que existeix $\{\bar{W}_t, 0 \leq t \leq 1\}$ moviment Brownià, respecte la filtració del qual $\bar{X}_t$ és adaptat i compleix una equació diferencial estocàstica del tipus

$$\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \bar{b}(s, \bar{X}_s) ds + \int_0^t \bar{\sigma}(s, \bar{X}_s) d\bar{W}_s,$$

on

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(1-t, x) &= \sigma(t,x) \, , \\
\bar{b}(1-t, x) &= -b(t,x) + \frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x)) \, ,
\end{aligned}$$

amb el conveni que el terme $(p_t(x))^{-1} = 0$ si $p_t(x) = 0$.

Per tant, per veure que $f(X_s, s)$ és *backward* integrable respecte X cal provar que

i)

$$\int_0^1 |\bar{b}(s, \bar{X}_s) f(\bar{X}_s, 1-s)| ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

ii)

$$\int_0^1 (\bar{\sigma}(s, \bar{X}_s) f(\bar{X}_s, 1-s))^2 ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

Per veure i) haurem de provar que

$$\int_0^1 |b(1-s, \bar{X}_s) f(\bar{X}_s, 1-s)| ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

i que

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s, \bar{X}_s) p_{1-s}(\bar{X}_s)) f(\bar{X}_s, 1-s) \right| ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

Primer hem de veure que $P\left\{\int_0^1 |b(1-s,\bar{X}_s)f(\bar{X}_s,1-s)|ds > N\right\} \to 0$ quan $N \to \infty$. Però aplicant la desigualtat de Txebixev es redueix a provar que convergeix a zero la següent expressió:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^2}E\Big(\int_0^1 (b(1-s,\bar{X}_s)f(\bar{X}_s,1-s))^2\Big)ds \\
\leq\ &\frac{C}{N^2}E\int_0^1 f^2(\bar{X}_s,1-s)ds,
\end{aligned}$$

ja que pels arguments de localització podem suposar b fitada. Podem suposar també $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ contínua en [0,1] i per tant fitada en [0,1]. Recordem, per últim que $r(s)$ fita la densitat. Així aquesta última expressió ens queda

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{N^2}\int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,1-s)p_{1-s}(x)dx\Big)ds \\
\leq\ &\frac{C}{N^2}\int_0^1 r(1-s)ds \leq \frac{C}{N^2},
\end{aligned}$$

que convergeix a zero quan $N \to \infty$.

Hem de veure també que

$$P\left\{\int_0^1 |\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))f(\bar{X}_s,1-s)|ds > N\right\} \to 0$$

quan $N \to \infty$. Per la desigualtat de Txebixev es redueix a veure que

$$\frac{1}{N}E\Big[\int_0^1 |\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))f(\bar{X}_s,1-s)|ds\Big]$$

convergeix a zero quan $N \to \infty$. Aplicant la desigualtat de Schwarz

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}E\Big[\int_0^1 |\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))f(\bar{X}_s,1-s)|ds\Big] \\
\leq\ &\frac{1}{N}\int_0^1 \Big(E\Big(\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))\Big)^2\Big)^{1/2}\Big(E\Big(f^2(\bar{X}_s,1-s)\Big)\Big)^{1/2}ds \\
=\ &\frac{1}{N}\int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{p_{1-s}(x)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,x)p_{1-s}(x))\Big)^2 p_{1-s}(x)dx\Big)^{1/2} \\
&\times\Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,1-s)p_{1-s}(x)dx\Big)^{1/2}ds\,,
\end{aligned}$$

però aquest últim terme, recordant les fites que ens dóna la hipòtesi (H2) del teorema, es pot majorar per

$$\frac{1}{N}\int_0^1 \Big(u(1-s)(r(1-s))^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,1-s)dx\Big)^{1/2}\Big)ds$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^1 (u(r)^{1/2})(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx\Big)^{1/2} dt.$$

Pels arguments de localització $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ és contínua, i per tant fitada, en [0,1] i $u(r)^{1/2}$ és integrable en [0,1], així doncs això tendeix a zero en créixer N.

ii) Per provar que

$$\int_0^1 (\bar{\sigma}(s,\bar{X}_s)f(\bar{X}_s,1-s))^2 ds < \infty \qquad \text{q.s.}$$

n'hi ha prou veient que

$$\frac{1}{N}E\Big[\int_0^1 (\bar{\sigma}(s,\bar{X}_s)f(\bar{X}_s,1-s))^2 ds\Big]$$

convergeix a zero en tendir N a infinit. Però

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}E\Big[\int_0^1 (\bar{\sigma}(s,\bar{X}_s)f(\bar{X}_s,1-s))^2 ds\Big] &= \frac{1}{N}E\Big[\int_0^1 (\sigma(1-s,\bar{X}_s)f(\bar{X}_s,1-s))^2 ds\Big]\\ &\leq \frac{C}{N}E\Big[\int_0^1 f^2(\bar{X}_s,1-s)ds\Big],\end{aligned}$$

ja que pels arguments de localització σ es pot suposar fitada, i aquesta esperança ja hem vist que era finita, i per tant aquesta expressió tendeix a zero en tendir N a infinit.

Hem de veure ara que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ 0<t_i<t}} f(X_{t_{i+1}},t_{i+1})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) = \int_0^t f(X_s,s)d^*X_s \qquad \text{u.p.}$$

Recordem que $\bar{X}_t \equiv X_{1-t}$. Llavors

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ 0<t_i<t}} f(X_{t_{i+1}},t_{i+1})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})\\ =\ &\sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ 0<t_i<t}} f(\bar{X}_{1-t_{i+1}},t_{i+1})(\bar{X}_{1-t_{i+1}}-\bar{X}_{1-t_i}).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Fent ara el canvi de notació següent a la partició:

$$1-t_{i+1} = s_j \text{ amb } j = (k_n+1)-(i+1)$$

obtenim que l'expressió (1.8) és igual a

$$-\sum_{\substack{s_j,\, s_{j+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{j+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_j}, 1-s_j)(\bar{X}_{s_{j+1}} - \bar{X}_{s_j}).$$

D'altra banda,

$$\int_0^t f(X_s, s) d^* X_s := -\int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1-s) d\bar{X}_s .$$

Per tant hem de provar que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i)(\bar{X}_{s_{i+1}} - \bar{X}_{s_i}) = \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1-s) d\bar{X}_s$$

u.p.

Sabem pel Teorema 1.2.1 que existeix $\{\bar{W}_t, \bar{\mathcal{F}}_t, 0 \le t \le 1\}$ moviment Brownià, tal que el procés $\bar{X}_t$ és $\bar{\mathcal{F}}_t$-adapatat i compleix una equació diferencial estocàstica del tipus,

$$\bar{X}_t = \bar{X}_0 + \int_0^t \bar{b}(s, \bar{X}_s) ds + \int_0^t \bar{\sigma}(s, \bar{X}_s) d\bar{W}_s$$

on

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(1-t, x) &= \sigma(t, x), \\ \bar{b}(1-t, x) &= -b(t, x) + \frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(t, x) p_t(x)), \end{aligned}$$

amb el conveni que el terme $(p_t(x))^{-1} = 0$ si $p_t(x) = 0$.

Hem de provar per tant dues coses,

(B1)

$$\lim_n \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) \int_{s_i}^{s_{i+1}} \bar{b}(s, \bar{X}_s) ds = \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1-s) \bar{b}(s, \bar{X}_s) ds$$

u.p.

(B2)

$$\lim_n \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) \int_{s_i}^{s_{i+1}} \bar{\sigma}(s, \bar{X}_s) d\bar{W}_s = \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1-s) \bar{\sigma}(s, \bar{X}_s) d\bar{W}_s$$

u.p.

Per provar **(B1)**, com que sabem que

$$\bar{b}(1-t,x) = -b(t,x) + \frac{1}{p_t(x)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(t,x)p_t(x)),$$

haurem de veure dues coses,

(B1.1)

$$\lim_n \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i)\int_{s_i}^{s_{i+1}} b(1-s,\bar{X}_s)ds = \int_{1-t}^{1} f(\bar{X}_s, 1-s)b(1-s,\bar{X}_s)ds$$

u.p.

(B1.2)

$$\lim_n \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i)\int_{s_i}^{s_{i+1}} A(1-s,\bar{X}_s)ds = \int_{1-t}^{1} f(\bar{X}_s, 1-s)A(1-s,\bar{X}_s)ds$$

u.p., on

$$A(t,x) := \frac{1}{p_t(x)}\frac{d}{dx}\left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right).$$

Per demostrar **(B1.1)** caldrà provar que per a tot $\varepsilon > 0$,

$$P\Big\{\sup_t \Big| \int_{1-t}^{1} f(\bar{X}_s, 1-s)b(1-s,\bar{X}_s)ds - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i)\int_{s_i}^{s_{i+1}} b(1-s,\bar{X}_s)ds\Big| > \varepsilon\Big\}$$

convergeix a zero. Però,

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_t \Big| \int_{1-t}^{1} f(\bar{X}_s, 1-s)b(1-s,\bar{X}_s)ds \\
&\quad - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i)\int_{s_i}^{s_{i+1}} b(1-s,\bar{X}_s)ds\Big| > \varepsilon\Big\} \\
\leq\ & P\Big\{\sup_t \int_{1-t}^{1} \Big|f(\bar{X}_s, 1-s)
\end{aligned}$$

$$- \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1 - s_i) I_{[s_i, s_{i+1})} \Big| \Big| b(1 - s, \bar{X}_s) \Big| ds > \varepsilon \Big\}$$

$$\leq P\Big\{ \int_0^1 \Big| f(\bar{X}_s, 1 - s)$$

$$- \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1 - s_i) I_{[s_i, s_{i+1})} \Big| \Big| b(1 - s, \bar{X}_s) \Big| ds > \varepsilon \Big\}.$$

Pels arguments de localització podem suposar b fitada, $f(\cdot, t)$ de quadrat integrable i $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ contínua com a funció de t en $[0,1]$. Per tant n'hi ha prou veient que

$$E\Big[\Big(\int_0^1 \Big| f(\bar{X}_s, 1 - s) - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1 - s_i) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) \Big| ds \Big)^2 \Big]$$

convergeix a zero en augmentar la partició.

Definim

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, s) &= f(\bar{X}_s, 1 - s), \\ \Phi_n(\omega, s) &= \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1 - s_i) I_{[s_i, s_{i+1})}(s). \end{aligned}$$

Per tant hem de veure que $\lim_n \|\Phi - \Phi_n\|_2^2 = 0$. Observem que

$$\|\Phi\|_2^2 = E\left(\int_0^1 f^2(\bar{X}_s, 1 - s) ds \right) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1 - s) p_{1-s}(x) dx ds,$$

fent el canvi $1 - s = t$ aquesta última expressió ens queda

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x,t) p_t(x) dx dt \\ \leq &\int_0^1 r(t) \int_{\mathbb{R}} f^2(x;t) dx dt = \|f\|_*^2 . \end{aligned}$$

De la mateixa manera,

$$\|\Phi_n\|_2^2 = E\Big[\int_0^1 \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f^2(\bar{X}_{s_i}, 1 - s_i) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) ds \Big]$$

$$= \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1-s_i) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) p_{1-s_i}(x) dx ds,$$

desfent ara el canvi $1 - t_{i+1} = s_j$, on $j = (k_n + 1) - (i + 1)$, ens queda

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_{i+1}) I_{[1-t_{i+1}, 1-t_i)}(s) p_{t_{i+1}}(x) dx ds \\ = & \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_{i+1}) p_{t_{i+1}}(x) dx \right] (t_{i+1} - t_i) \\ \leq & \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[r(t_{i+1}) \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_{i+1}) dx \right] (t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

i per la continuïtat en $(0, 1]$ d'aquestes dues funcions, i utilitzant que $r(t)$ és decreixent i integrable, tenim que

$$\limsup_n \|\Phi_n\|_2^2 \leq \|f\|_*^2,$$

i seguint el mateix argument que a l'apartat **(A1)** del Teorema 1.3.1 tenim que

$$\lim_n \|\Phi - \Phi_n\|_2^2 = 0.$$

Passem doncs a provar **(B1.2)**, hem de veure que per a tot $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & P\Big\{ \sup_t \Big| \int_{1-t}^1 \Big(f(\bar{X}_s, 1-s) A(1-s, \bar{X}_s) - \\ - & \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) \Big) ds \Big| > \varepsilon \Big\} \end{aligned}$$

convergeix a zero. Però,

$$\begin{aligned} & P\Big\{ \sup_t \Big| \int_{1-t}^1 \Big(f(\bar{X}_s, 1-s) A(1-s, \bar{X}_s) \\ - & \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) \Big) ds \Big| > \varepsilon \Big\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq P\Big\{ \int_0^1 \Big| f(\bar{X}_s, 1-s) A(1-s, \bar{X}_s) \\
&\quad - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) \Big| ds > \varepsilon \Big\} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} E\Big[\int_0^1 \Big| f(\bar{X}_s, 1-s) A(1-s, \bar{X}_s) \\
&\quad - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) \Big| ds \Big] .
\end{aligned}
$$

Pels arguments de localització podem suposar $f(\cdot, t)$ de quadrat integrable i $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ contínua com a funció de t en $[0,1]$.

N'hi ha prou, doncs, veient que aquesta última esperança convergeix a zero o, el que és el mateix, veure que

$$\|\Phi - \Phi_n\|_1 \longrightarrow 0,$$

on $\|\cdot\|_1 = E\int_0^1 |\cdot| ds$ i

$$
\begin{aligned}
\Phi(\omega, s) &= f(\bar{X}_s, 1-s) A(1-s, \bar{X}_s), \\
\Phi_n(\omega, s) &= \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) .
\end{aligned}
$$

Quan hem demostrat que $f(X_\cdot, \cdot)$ és *backward* integrable respecte X, hem vist que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi\|_1 &= E\int_0^1 \left| f(\bar{X}_s, 1-s) A(1-s, \bar{X}_s) \right| ds \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx \right)^{1/2} u(t)\, (r(t))^{1/2} ds < \infty.
\end{aligned}
$$

Definim la norma

$$\|f\|_{**} = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx \right)^{1/2} u(t)\, (r(t))^{1/2} dt,$$

es comprova fàcilment que és una norma; per a provar la desigualtat triangular utilitzem la desigualtat de Minkowski:

$$\|f+g\|_{**} = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} (f+g)^2(x,t)dx \right)^{1/2} u(t)\, (r(t))^{1/2} dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \left(\left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} g^2(x,t)dx \right)^{1/2} \right) u(t)\,(r(t))^{1/2}\,dt \\
&= \|f\|_{**} + \|g\|_{**}\,.
\end{aligned}
$$

Hem provat doncs que

$$\|\Phi\|_1 \leq \|f\|_{**}\,.$$

D'altra banda,

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_n\|_1 &= E\Big[\int_0^1 \Big| \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) I_{[s_i,s_{i+1})}(s) \Big| ds\Big] \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} E\left(\left| f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) A(1-s, \bar{X}_s) \right| \right) I_{[s_i,s_{i+1})}(s) ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \left(E\left(f(\bar{X}_{s_i}, 1-s_i) \right)^2 \right)^{1/2} \left(E\left(A(1-s, \bar{X}_s) \right)^2 \right)^{1/2} I_{[s_i,s_{i+1})}(s) ds \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1-s_i) p_{1-s_i} dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} A^2(1-s, x) p_{1-s}(x) dx \right)^{1/2} I_{[s_i,s_{i+1})}(s) ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1-s_i) dx \right)^{1/2} u(1-s)\,(r(1-s_i))^{1/2}\, I_{[s_i,s_{i+1})}(s) ds \\
&= \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1-s_i) dx \right)^{1/2} (r(1-s_i))^{1/2} \int_0^1 u(1-s) I_{[s_i,s_{i+1})}(s) ds\,,
\end{aligned}
$$

utilitzant que u és decreixent, aquesta última expressió és menor o igual que

$$\sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1-s_i) dx \right)^{1/2} (r(1-s_i))^{1/2} u(1-s_{i+1})(s_{i+1}-s_i)\,, \tag{1.9}$$

desfent ara el canvi $1-t_{i+1}=s_j$, amb $j=(k_n)-(i+1)$, tenim que (1.9) és igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1}\in D_n \\ 0<t_i<1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t_{i+1})dx\right)^{1/2} (r(t_{i+1}))^{1/2} u(t_i)(t_{i+1}-t_i) \\
\le \; &\sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1}\in D_n \\ 0<t_i<1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t_{i+1})dx\right)^{1/2} (r(t_i))^{1/2} u(t_i)(t_{i+1}-t_i)\,.
\end{aligned}$$

Però podem suposar que $\int_{\mathbb{R}} f^2(x,t)dx$ és una funció contínua en $[0,1]$, i $(r(t))^{1/2}u(t)$ és decreixent i integrable en $(0,1)$, per tant, utilitzant el mateix argument que a l'apartat **(A1)** del Teorema 1.3.1,

$$\limsup_n \|\Phi_n\|_1 \le \|f\|_{**}\,.$$

Considerem ara $\varepsilon>0$ i prenem una funció $g\in C(\mathbb{R}\times[0,1])$ amb suport compacte tal que

$$\|g-f\|_{**}\le\varepsilon,$$

i definim

$$\begin{aligned}
\Psi(\omega,s) &= g(\bar{X}_s,1-s)A(1-s,\bar{X}_s)\,,\\
\Psi_n(\omega,s) &= \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1}\in D_n \\ 1>s_{i+1}>0}} g(\bar{X}_{s_i},1-s_i)A(1-s,\bar{X}_s)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\,,
\end{aligned}$$

llavors

$$\begin{aligned}
\|\Psi-\Psi_n\|_1 &= \int_0^1 E\Big(\Big|g(\bar{X}_s,1-s)A(1-s,\bar{X}_s)- \\
&\quad - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1}\in D_n \\ 1>s_{i+1}>0}} g(\bar{X}_{s_i},1-s_i)A(1-s,\bar{X}_s)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\Big|\Big)ds \\
&= \int_0^1 \left(E\left(A(1-s,\bar{X}_s)\right)^2\right)^{1/2} \\
&\quad \times\Big(E\Big(g(\bar{X}_s,1-s) - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1}\in D_n \\ 1>s_{i+1}>0}} g(\bar{X}_{s_i},1-s_i)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\Big)^2\Big)^{1/2} ds
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} A^2(1-s,x)p_{1-s}(x)dx\right)^{1/2}$$
$$\times\Big(E\Big(g(\bar{X}_s,1-s) - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} g(\bar{X}_{s_i},1-s_i)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\Big)^2\Big)^{1/2} ds$$
$$\leq \int_0^1 u(1-s)\Big(E\Big(g(\bar{X}_s,1-s) - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} g(\bar{X}_{s_i},1-s_i)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\Big)^2\Big)^{1/2} ds\,,$$

però g està fitada per ser contínua en $\mathbb{R} \times [0,1]$ i amb suport compacte, i d'altra banda $u(t)$ és integrable en $(0,1)$ per tant per convergència dominada aquest últim terme convergeix a zero. Tenim doncs,

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi - \Psi_n\|_1 = 0\,.$$

Llavors

$$\|\Phi - \Phi_n\|_1 \leq \|\Phi - \Psi\|_1 + \|\Psi - \Psi_n\|_1 + \|\Psi_n - \Phi_n\|_1\,.$$

D'on

$$\limsup_n \|\Phi - \Phi_n\|_1 \leq \|g - f\|_{**} + \|g - f\|_{**} \leq 2\varepsilon\,,$$

per tant,

$$\lim_n \|\Phi - \Phi_n\|_1 = 0\,.$$

Ens falta només demostrar **(B2)**, és a dir ens falta veure que

$$\lim_n \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_{i+1} > 1-t}} f(\bar{X}_{s_i},1-s_i)\int_{s_i}^{s_{i+1}} \bar{\sigma}(s,\bar{X}_s)d\bar{W}_s = \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s,1-s)\bar{\sigma}(s,\bar{X}_s)d\bar{W}_s$$

u.p., on $\bar{\sigma}(1-t,x) = \sigma(t,x)$.

Per veure això n'hi ha prou provant que

$$\int_0^1 \sigma^2(1-s,\bar{X}_s)f^2(\bar{X}_s,1-s)ds$$

és finita quasi segurament, que

$$\int_0^1 \sigma^2(1-s,\bar{X}_s) \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f^2(\bar{X}_{s_i},1-s_i)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)ds$$

és finita quasi segurament i que

$$\int_0^1 \sigma^2(1-s,\bar{X}_s)\Big(f(\bar{X}_s,1-s) - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i},1-s_i)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\Big)^2 ds$$

convergeix en probabilitat cap a zero.

Les dues primeres propietats són una conseqüència directa dels arguments de localització i de la desigualtat de Txebixev.

La convergència en probabilitat és conseqüència de fet que

$$E\Big[\int_0^1 \Big(f(\bar{X}_s,1-s) - \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_{s_i},1-s_i)I_{[s_i,s_{i+1})}(s)\Big)^2 ds\Big]$$

convergeix a zero, tal i com hem vist a l'apartat **(B1.1)**.

□

Corol.lari 1.3.3. *Sota les hipòtesis del Teorema 1.3.2, si prenem $\{D_n\}$ una successió de particions amb $|D_n| \to 0$ i que satisfaci (1.3), la "covariació quadràtica"*

$$[f(X,\cdot),X]_t \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0 < t_i < t}} \left\{f(X_{t_{i+1}},t_{i+1}) - f(X_{t_i},t_i)\right\}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existeix com a límit u.p. i és igual a

$$\int_0^t f(X_s,s)d^*X_s - \int_0^t f(X_s,s)dX_s.$$

A més a més, podem definir una integral tipus Stratonovich de $f(X,\cdot)$ respecte X com

$$\int_0^t f(X_s,s)\circ dX_s \equiv \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(X_s,s)dX_s + \int_0^t f(X_s,s)d^*X_s\right).$$

Aquesta integral és el límit u.p. de les sumes de Riemann,

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0 < t_i < t}} \left\{f(X_{t_{i+1}},t_{i+1}) + f(X_{t_i},t_i)\right\}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\Big).$$

1.3.3 Extensions de la fórmula d'Itô.

A continuació veurem una extensió de la fórmula d'Itô pel cas independent del temps.

Recordem que si $f \in C^1$ la fórmula d'Itô és de la forma

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t \left\{ b(s,X_s)f(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,X_s)f'(X_s) \right\} ds + \\ &+ \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s)dW_s\,. \end{aligned}$$

En aquest cas la covariació quadràtica existeix:

$$\begin{aligned} [f(X),X]_t &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in G_n \\ t_i<t}} \left(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})\right)\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) \\ &= \int_0^t \sigma^2(s,X_s)f'(X_s)ds \end{aligned}$$

segons trobem, per exemple, a [Pr], on G_n són particions qualssevol de l'interval $[0,1]$. Així doncs, en el cas en que $f \in C^1$,

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t b(s,X_s)f(X_s)ds + \frac{1}{2}[f(X),X]_t + \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s)dW_s\,.$$

Tot seguit veurem una extensió de la fórmula d'Itô pel cas en què $f \in L^2_{loc}$ i és independent del temps.

Teorema 1.3.4. *Sigui F absolutament contínua amb $f = F'$ i X_t en les condicions del Teorema 1.3.2. Llavors*

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t b(s,X_s)f(X_s)ds + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(X_s)d^*X_s - \int_0^t f(X_s)dX_s\right) + \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s)dW_s\,. \end{aligned}$$

Prova:

Pels arguments de localització podem suposar que f és de quadrat integrable i σ i b fitats. Prenem una successió de funcions $f_n \in C^1$ de manera que f_n convergeixin a f en L^2.

Pels comentaris anteriors

$$[f_n(X),X]_t = \int_0^t f_n(X_s)d^*X_s - \int_0^t f_n(X_s)dX_s\,,$$

i també, pels Teoremes 1.3.1 i 1.3.2

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_m^t \\ t_i < t}} \left(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})\right)\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)$$
$$= \int_0^t f(X_s) d^* X_s - \int_0^t f(X_s) dX_s ,$$

on D_m són particions de l'interval $[0,1]$ que satisfan (1.3).

Volem veure que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^t f_n(X_s) d^* X_s - \int_0^t f_n(X_s) dX_s \right)$$
$$= \int_0^t f(X_s) d^* X_s - \int_0^t f(X_s) dX_s .$$

Així doncs veurem que:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(X_s) dX_s = \int_0^t f(X_s) dX_s \qquad \text{u.p.}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(X_s) d^* X_s = \int_0^t f(X_s) d^* X_s \qquad \text{u.p.}$$

Per veure **a)** hem de provar dues coses,

a1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(X_s) b(s, X_s) ds = \int_0^t f(X_s) b(s, X_s) ds \qquad \text{u.p.}$$

Utilitzant la desigualtat de Txebixev és fàcil veure que n'hi ha prou comprovant la convergència a zero d'aquesta esperança,

$$E\left[\left(\int_0^1 |f(X_s)b(s,X_s) - f_n(X_s)b(s,X_s)|\, ds\right)^2\right]$$
$$\leq E\left[\left(\int_0^1 |b(s,X_s)|\, |f(X_s) - f_n(X_s)|\, ds\right)^2\right]$$
$$\leq KE\left[\int_0^1 |f(X_s) - f_n(X_s)|^2\, ds\right]$$
$$= K \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 p_s(x) dx ds$$
$$\leq K \int_0^1 r(s) ds \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f_n(x))^2\, dx,$$

i convergeix a zero en tendir n a infinit perquè les funcions f_n convergeixen a f en L^2 i $r(s)$ és integrable en $[0,1]$.

Hem de provar també que

a2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(X_s)\sigma(s,X_s)dW_s = \int_0^t f(X_s)\sigma(s,X_s)dW_s \qquad \text{u.p.}$$

Només cal provar que

$$\int_0^1 |f(X_s)\sigma(s,X_s) - f_n(X_s)\sigma(s,X_s)|^2\, ds$$

convergeix a zero en probabilitat.

Utilitzant els arguments de localització i la desigualtat de Txebixev es redueix a provar que

$$E\left[\left(\int_0^1 |f(X_s) - f_n(X_s)|^2\, ds\right)\right]$$

convergeix a zero, i això ho hem vist en l'apartat anterior.

Per veure **b)** hem de provar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(X_s)d^*X_s = \int_0^t f(X_s)d^*X_s \qquad \text{u.p.}$$

Per veure això cal provar tres coses,

b1)D'una banda cal veure que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1-t}^1 f_n(\bar{X}_s)b(1-s,\bar{X}_s)ds = \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s)b(1-s,\bar{X}_s)ds \qquad \text{u.p.}$$

igual que en el cas *forward* n'hi ha prou veient la convergència a zero de

$$\begin{aligned} & E\left[\left(\int_0^1 \left|f_n(\bar{X}_s)b(1-s,\bar{X}_s) - f(\bar{X}_s)b(1-s,\bar{X}_s)\right| ds\right)^2\right] \\ \leq\ & KE\left[\int_0^1 \left(f_n(\bar{X}_s) - f(\bar{X}_s)\right)^2 ds\right] \\ \leq\ & K\int_0^1 r(1-s)ds \int_{\mathbb{R}} \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx, \end{aligned}$$

i convergeix a zero en tendir n a infinit perquè les funcions f_n convergeixen a f en L^2 i $r(s)$ és integrable en $[0,1]$.

b2) Cal provar també que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1-t}^1 f_n(\bar{X}_s)\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)}\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))ds$$

$$= \int_{1-t}^{1} f(\bar{X}_s) \frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))ds \qquad \text{u.p.}$$

Però

$$\begin{aligned}
& P\left\{\sup_t \int_{1-t}^{1} \left|\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))\right| \left|f_n(\bar{X}_s) - f(\bar{X}_s)\right| ds > \varepsilon\right\} \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon} E\left[\int_0^1 \left|\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))\right| \left|f_n(\bar{X}_s) - f(\bar{X}_s)\right| ds\right] \\
=\ & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 E\left[\left|\frac{1}{p_{1-s}(\bar{X}_s)} \frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)p_{1-s}(\bar{X}_s))\right| \left|f_n(\bar{X}_s) - f(\bar{X}_s)\right|\right] ds \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_{1-s}(x)} \left(\frac{d}{dx}(\sigma^2(1-s,x)p_{1-s}(x))\right)^2 dx\right)^{1/2} \\
& \times \left(\int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))^2 p_{1-s}(x) dx\right)^{1/2} ds \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 u(1-s)\,(r(1-s))^{1/2} ds \Big(\int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
=\ & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 u(t)\,(r(t))^{1/2} dt \Big(\int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

i convergeix a zero en tendir n a infinit perquè les funcions f_n convergeixen a f en L^2 i $u(t)\,(r(t))^{1/2}$ és integrable en $[0,1]$.

b3) Per últim cal veure que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1-t}^{1} f_n(\bar{X}_s)\sigma(1-s,\bar{X}_s)d\bar{W}_s = \int_{1-t}^{1} f(\bar{X}_s)\sigma(1-s,\bar{X}_s)d\bar{W}_s \qquad \text{u.p.},$$

utilitzant arguments anàlegs a la prova de b2) del Teorema 1.3.1 es redueix de nou a provar que

$$E\left[\left(\int_0^1 |f_n(\bar{X}_s) - f(\bar{X}_s)|^2 ds\right)\right]$$

convergeix a zero, cosa que ja hem demostrat.

Utilitzant ara la fórmula d'Itô per funcions de classe C^2 aplicada a les funcions

$$F_n(x) \equiv F(0) + \int_0^x f_n(y)dy$$

tenim que

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^t f(X_s)d^*X_s - \int_0^t f(X_s)dX_s\right) = \lim_{n\to\infty} [f_n(X), X]_s$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(F_n(X_t) - F_n(X_0) - \int_0^t b(s,X_s)f_n(X_s)ds - \int_0^t \sigma(s,X_s)f_n(X_s)dW_s\right) \\
&= F(X_t) - F(X_0) - \int_0^t b(s,X_s)f(X_s)ds - \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s)dW_s \qquad \text{u.p.}
\end{aligned}$$

ja que en la demostració hem provat també que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t b(s,X_s)f_n(X_s)ds = \int_0^t b(s,X_s)f(X_s)ds \qquad \text{u.p.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \sigma(s,X_s)f_n(X_s)dW_s = \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s)dW_s \qquad \text{u.p.}$$

i per tant queda demostrat el Teorema 1.3.4.

□

Estem ja en condicions de demostrar el següent resultat pel cas dependent del temps.

Teorema 1.3.5. *Sigui $F(x,t)$ absolutament contínua en x i tal que la derivada $F_x(\cdot,t) \equiv f(\cdot,t)$ satisfà les condicions anteriors. Llavors tenim la següent extensió de la fórmula d'Itô:*

$$\begin{aligned}
F(X_t,t) &= F(X_0,0) + \int_0^t b(s,X_s)f(X_s,s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s,s)dW_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^t f(X_s,s)d^*X_s - \int_0^t f(X_s,s)dX_s\right) + \int_0^t F(X_s,ds)
\end{aligned}$$

on

$$\int_0^t F(X_s,ds) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} \left(F(X_{t_{i+1}},t_{i+1}) - F(X_{t_{i+1}},t_i)\right)$$

existeix uniformement en probabilitat.

Observació 1.3.6. *Utilitzant la integral tipus Stratonovich que hem definit abans, aquesta fórmula d'Itô ens queda*

$$F(X_t,t) = F(X_0,0) + \int_0^t f(X_s,s)\circ dX_s + \int_0^t F(X_s,ds).$$

Prova:(Teorema 1.3.5)
Podem escriure

$$F(X_t,t) - F(X_0,0) = A_t^n + B_t^n$$

on

$$A_t^n = \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} F(X_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - F(X_{t_{i+1}}, t_i)$$

i

$$B_t^n = \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} F(X_{t_{i+1}}, t_i) - F(X_{t_i}, t_i) .$$

Utilitzant la fórmula d'Itô pel cas on no hi ha dependència del temps,

$$F(X_{t_{i+1}}, t_i) - F(X_{t_i}, t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) f(X_s, t_i) ds +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) f(X_s, t_i) dW_s + \frac{1}{2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_s, t_i) d^* X_s - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_s, t_i) dX_s \right) .$$

Volem veure que

a)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_s, t_i) dX_s = \int_0^t f(X_s, s) dX_s ,$$

b)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_s, t_i) d^* X_s = \int_0^t f(X_s, s) d^* X_s .$$

a) Podem escriure

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_s, t_i) dX_s = \lim_{n \to \infty} \int_0^t \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ t_i < t}} f(X_s, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) dX_s ,$$

i hem de veure que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^t \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ t_i < t}} f(X_s, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) dX_s = \int_0^t f(X_s, s) dX_s .$$

La demostració és idèntica a la del Teorema 1.3.1. L'única diferència és que ara

$$\Phi_n(\omega, s) = \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} f(X_s, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) .$$

Però

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n\|_2^2 &= \int_0^1 \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) p_s(x) dx ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \int_{\mathbb{R}} r(s) f^2(x, t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(s) dx ds \\
&\leq \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[r(t_i) \int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i) dx \right] (t_{i+1} - t_i),
\end{aligned}$$

utilitzant que $r(t)$ és decreixent.

Però aquesta expressió ja l'havíem tractat en aquell teorema, havíem vist que $\|\Phi_n\|_2^2 \leq \|f\|_*^2$ i tot segueix igual que en aquella demostració.

b) Fent els canvis habituals tenim

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_s, t_i) d^* X_s = - \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{s_i, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_i > 1-t}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(\bar{X}_s, 1 - s_{i+1}) d\bar{X}_s,$$

i d'altra banda,

$$\int_0^t f(X_s, s) d^* X_s = - \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1 - s) d\bar{X}_s .$$

Hem de provar per tant que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{s_i, s_{i+1} \in D_n^{1-t} \\ 1 > s_i > 1-t}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} f(\bar{X}_s, 1 - s_{i+1}) d\bar{X}_s = \int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s, 1 - s) d\bar{X}_s .$$

Novament la demostració segueix igual que al Teorema 1.3.2. En la part corresponent als apartats **(B1.1)** i **(B2)** l'única diferència és que ara

$$\Phi_n(\omega, s) = \sum_{\substack{s_i, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_s, 1 - s_{i+1}) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) .$$

Així

$$\|\Phi_n\|_2^2 = E\Big[\int_0^1 \sum_{\substack{s_i, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f^2(\bar{X}_s, 1 - s_{i+1}) I_{[s_i, s_{i+1})}(s) ds \Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f^2(x,t_i) I_{[1-t_{i+1},1-t_i)}(1-t) p_t(x)\,dx\,dt \\
&\leq \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left[r(t_i) \int_{\mathbb{R}} f^2(x,t_i)\,dx \right] (t_{i+1} - t_i),
\end{aligned}
$$

que és justament el que en el Teorema 1.3.1 havíem vist que estava fitat per $\|f\|_*^2$ i per tant tota la resta de la demostració segueix igual que al Teorema 1.3.2.

Pel que fa a la part corresponent a l'apartat **(B1.2)** del Teorema 1.3.2, l'única diferència és que ara

$$
\Phi_n(\omega, s) = \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} f(\bar{X}_s, 1 - s_{i+1}) A(1 - s, \bar{X}_s) I_{[s_i, s_{i+1})}(s)\,,
$$

refent la mateixa demostració arribaríem a

$$
\begin{aligned}
\|\Phi_n\|_1 &\leq \sum_{\substack{s_i,\, s_{i+1} \in D_n \\ 1 > s_{i+1} > 0}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, 1 - s_{i+1})\,dx \right)^{1/2} (r(1 - s_{i+1}))^{1/2} u(1 - s_{i+1})(s_{i+1} - s_i) \\
&= \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n \\ 0 < t_i < 1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x, t_i)\,dx \right)^{1/2} (r(t_i))^{1/2} u(t_i)(t_{i+1} - t_i)\,,
\end{aligned}
$$

però exactament els mateixos arguments del Teorema 1.3.2 demostren que això està fitat per $\|f\|_{**}$.

En aquesta demostració hem provat també que

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0 < t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, X_s) f(X_s, t_i)\,ds = \int_0^t b(s, X_s) f(X_s, s)\,ds \qquad \text{u.p.}
$$

i

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,\, t_{i+1} \in D_n^t \\ 0 < t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s, X_s) f(X_s, t_i)\,dW_s = \int_0^t \sigma(s, X_s) f(X_s, s)\,dW_s \qquad \text{u.p.}
$$

Tenim per tant

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} B_t^n &= \int_0^t b(s,X_s)f(X_s,s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s,s)dW_s \\ &+\frac{1}{2}\left(\int_0^t f(X_s,s)d^*X_s - \int_0^t f(X_s,s)dX_s\right) \qquad \text{u.p.}\end{aligned}$$

Per tant també A_t^n convergeix u.p., i definim

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} A_t^n &\equiv \int_0^t F(X_s,ds) \\ &= F(X_t,t)-F(X_0,0)-\int_0^t b(s,X_s)f(X_s,s)ds - \int_0^t \sigma(s,X_s)f(X_s,s)dW_s \\ &-\frac{1}{2}\left(\int_0^t f(X_s,s)d^*X_s - \int_0^t f(X_s,s)dX_s\right) \qquad \text{u.p.}\end{aligned}$$

□

Observació 1.3.7. *Si $F(x,\cdot)$ és absolutament contínua en t amb derivada $F_t(x,\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que per a tot compacte T de $\mathbb{R}$ tenim que $\int_T |F_t(x,t)|dx$ és contínua com a funció de t, llavors el darrer terme de la nostra extensió de la fórmula d'Itô es pot escriure de la manera habitual, i.e.,*

$$\int_0^t F(X_s,ds) = \int_0^t F_s(X_s,s)ds.$$

Prova:
Per definició

$$\int_0^t F(X_s,ds) \equiv \lim_{n\to\infty} A_t^n \qquad u.p.$$

on

$$\begin{aligned}A_t^n &= \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} F(X_{t_{i+1}},t_{i+1}) - F(X_{t_{i+1}},t_i) \\ &= \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F_s(X_{t_{i+1}},s)ds \\ &= \int_0^t \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} F_s(X_{t_{i+1}},s)I_{[t_i,t_{i+1})}(s)ds.\end{aligned}$$

Volem veure, per tant, que

$$\lim_{n\to\infty} A_t^n = \int_0^t F_s(X_s,s)ds \qquad u.p.$$

Hem de provar per tant que per a tot $\varepsilon > 0$

$$P\{\sup_t \Big| \int_0^t \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} F_s(X_{t_{i+1}},s)I_{[t_i,t_{i+1})}(s) - F_s(X_s,s)ds\Big| > \varepsilon\}$$

convergeix a zero quan la n tendeix a infinit. Però aquesta expressió és menor o igual que

$$P\{\sup_t \int_0^1 \Big| \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} F_s(X_{t_{i+1}},s)I_{[t_i,t_{i+1})}(s) - F_s(X_s,s)\Big|ds > \varepsilon\}$$

i per Txebixev n'hi ha prou veient la convergència a zero de

$$E\Big[\int_0^1 \Big| \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} F_s(X_{t_{i+1}},s)I_{[t_i,t_{i+1})}(s) - F_s(X_s,s)\Big|ds\Big].$$

Definim

$$\begin{aligned}\varphi(\omega,s) &= F_s(X_s,s)\\ \varphi_n(\omega,s) &= \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t \\ t_i<t}} F_s(X_{t_{i+1}},s)I_{[t_i,t_{i+1})}(s).\end{aligned}$$

Hem de provar que $\|\varphi-\varphi_n\|_1$ convergeix a zero quan la n tendeix a infinit. Però,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_1 &= E\Big(\int_0^1 |F_s(X_s,s)|ds\Big)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 |F_s(x,s)|p_s(x)dsdx\\ &\le \int_0^1 r(s)\int_{\mathbb{R}} |F_s(x,s)|dxds,\end{aligned}$$

i aquesta última expressió és finita perquè per arguments de localització podem suposar que $\int_{\mathbb{R}} |F_s(x,s)|dx$ és contínua com a funció de s en $[0,1]$, i per tant fitada.

Definim

$$\|f\|_+ = \int_{[0,1]}\int_{\mathbb{R}} |f(x,s)|r(s)dxds.$$

És una norma de $L^1(\mathbb{R} \times [0,1])$ amb la mesura $r(s)dxds$.

Tenim que $\|\varphi\|_1 \leq \|F_s\|_+$. D'altra banda,

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_n\|_1 &= \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{\mathbb{R}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |F_s(x,s)| p_{t_{i+1}}(x) ds dx \\
&\leq \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} r(t_{i+1}) \int_{\mathbb{R}} |F_s(x,s)| dx ds \\
&\leq \int_0^1 \sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} r(t_{i+1}) \int_{\mathbb{R}} |F_s(x,s)| dx I_{[t_i, t_{i+1})} ds.
\end{aligned}
$$

Però,

$$
\sum_{\substack{t_i, t_{i+1} \in D_n^t \\ t_i < t}} r(t_{i+1}) \int_{\mathbb{R}} |F_s(x,s)| dx I_{[t_i, t_{i+1})} \leq K r(s),
$$

i sabem que $r(s)$ és integrable en (0,1). D'altra banda, el terme de l'esquerra d'aquesta darrera expressió, convergeix per tot s cap a $r(s) \int_{\mathbb{R}} |F_s(x,s)| dx$ quan la n tendeix a infinit. Per tant, pel teorema de la convergència dominada,

$$
\limsup_n \|\varphi_n\|_1 \leq \|F_s\|_+.
$$

Seguint exactament els mateixos arguments que en la demostració de l'apartat **(A1)** del Teorema 1.3.1 arribem a

$$
\lim_n \|\varphi - \varphi_n\|_1 = 0
$$

com volíem demostrar.

□

1.3.4 La covariació quadràtica és un procés continu d'energia zero.

Per un procés $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ amb trajectòries contínues definim la variació quadràtica com

$$
[Y]_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{t_i, t_{i+1} \in D_n^t, t_i < t} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2
$$

en els punts on aquest límit existeix uniformement en probabilitat. Si $[Y]_t = 0$ q.s. es diu que Y és un procés d'*energia zero*.

A continuació, seguint les idees de [FPS] provarem que la covariació quadràtica $[f(X,.),X]$ és un procés d'energia zero.

La covariació quadràtica $Y_t = [f(X,.),X]_t$ es pot escriure com

$$Y_t = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$$

on

$$\begin{aligned} Y_t^{(1)} &= \int_0^t f(X_s,s)d^*X_s, \\ Y_t^{(2)} &= -\int_0^t f(X_s,s)dX_s. \end{aligned}$$

Tenim que

$$Y_t^{(2)} = -\int_0^t f(X_s,s)b(s,X_s)ds - \int_0^t f(X_s,s)\sigma(s,X_s)dW_s,$$

d'on

$$[Y^{(2)}]_t = \int_0^t f^2(X_s,s)\sigma^2(s,X_s)ds.$$

D'altra banda,

$$Y_t^{(1)} = \int_0^t f(X_s,s)d^*X_s = -\int_{1-t}^1 f(\bar{X}_s,1-s)d\bar{X}_s,$$

d'on

$$\begin{aligned} [Y^{(1)}]_t &= \int_{1-t}^1 f^2(\bar{X}_s,1-s)\sigma^2(1-s,\bar{X}_s)ds \\ &= \int_{1-t}^1 f^2(X_{1-s},1-s)\sigma^2(1-s,X_{1-s})ds \\ &= \int_0^t f^2(X_r,r)\sigma^2(r,X_r)dr. \end{aligned}$$

Llavors

$$[Y]_t \leq 2([Y^{(1)}]_t + [Y^{(2)}]_t) = 4\int_0^t f^2(X_s,s)\sigma^2(s,X_s)dr.$$

Prenem $f_n \in C^1(\mathbb{R} \times [0,1])$ tals que convergeixin a f en la norma $\|\cdot\|_*$. Definim

$$Y_t^n \equiv [f_n(X,.),X]_t = \int_0^t (f_n)_x(X_s,s)ds,$$

on $(f_n)_x$ denota la derivada de la funció f_n respecte x.

Els processos Y_t^n tenen trajectòries contínues de variació fitada, en particular tenen energia zero.

Però,

$$[Y]_t \leq 2([Y - Y^n]_t + [Y^n]_t) \leq 8 \int_0^t (f - f_n)^2(X_s, s)\sigma^2(s, X_s)ds.$$

Per arguments de localització podem suposar σ fitada, i prenent esperances, tenim que

$$E[Y]_t \leq K \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} (f - f_n)^2(x, s)r(s)dxds.$$

El terme de la dreta d'aquesta darrera expressió convergeix a zero en fer tendir la n a infinit, ja que les funcions f_n convergien a f en la norma $|| \cdot ||_*$. Per tant la variació quadràtica $[Y]_t = 0$ q.s. com volíem demostrar.

□

1.4 Covariació quadràtica i temps local.

Seguint les idees del treball de [FPS] relacionarem la covariació quadràtica que hem definit amb el *temps local.*

Sigui $a(t)$ una funció contínua en $[0, 1]$. La funció

$$f(x, t) = I_{[a(t),\infty)}(x)$$

és de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ com a funció de x i $\int_T f^2(x, t)dx$ és una funció contínua de t en $[0, 1]$ per tot compacte T de $\mathbb{R}$. Prenent aquesta funció particular s'obtenen resultats interessants sobre el *temps local* d'una difusió que satisfaci les hipòtesis del Teorema 1.3.2.

Definim el *temps local* d'un procés estocàstic X en la corba contínua $a(\cdot)$ com

$$L_t^{a(\cdot)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_0^t I_{(a(s)-\varepsilon_n, a(s)+\varepsilon_n)}(X_s)ds \qquad u.p.$$

on ε_n és una successió que decreix cap a zero, cas que existeixi aquest límit.

Definim la successió de funcions absolutament contínues

$$f_n(x, t) = \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_{-\infty}^x I_{(a(t)-\varepsilon_n, a(t)+\varepsilon_n)}(y)dy.$$

Es comprova fàcilment que les funcions f_n convergeixen a f en les normes $|| \cdot ||_*$ i $|| \cdot ||_{**}$.

Però llavors la mateixa demostració del Teorema 1.3.4 prova que

$$[f(X,\cdot),X]_t = \lim_{n\to\infty}[f_n(X,\cdot),X]_t \qquad u.p.$$

on X_t és la solució d'una equació diferencial estocàstica que compleix les hipòtesis del Teorema 1.3.2.

D'altra banda si $g(\cdot,t)$ és absolutament contínua amb derivada $g_x(\cdot,t)$ tenim que

$$[g(X,\cdot),X] = \int_0^t g_x(X_s,s)ds,$$

i per tant

$$[f_n(X,\cdot),X]_t = \frac{1}{2\varepsilon_n}\int_0^t I_{(a(s)-\varepsilon_n,a(s)+\varepsilon_n)}(X_s)ds,$$

d'on obtenim que

$$[f(X,\cdot),X]_t = L_t^{a(\cdot)}.$$

En particular, el *temps local* de X_t en la corba $a(\cdot)$ existeix.

1.4.1 Formes alternatives d'expressar el temps local.

Si la funció $a(\cdot)$ és constant i igual a $a\in\mathbb{R}$, prenent $f(x) = I_{[a,\infty)}(x)$,

$$\{f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})\}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|I_{C_{n,i}},$$

on $C_{n,i} = \{\text{sign}(X_{t_i}-a) \neq \text{sign}(X_{t_{i+1}}-a)\}$ amb $t_i \in D_n^t$. Per tant l'existència de covariació quadràtica implica aquesta forma alternativa de calcular el *temps local*:

$$L_t^a = \lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|I_{C_{n,i}}.$$

És fàcil demostrar que l'expressió (1.2) juntament amb els Teoremes 1.3.1, 1.3.2 i 1.3.4 impliquen les següents igualtats:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[f(X),X]_t &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}}\int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}}(f(y)-f(X_{t_i}))dy \qquad u.p.,\\
\frac{1}{2}[f(X),X]_t &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}}\int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}}(f(X_{t_{i+1}})-f(y))dy \qquad u.p.,
\end{aligned}$$

que ens donen dues formes alternatives d'expressar el *temps local.* Utilitzant la primera igualtat tenim que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}L_t^a &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} \int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}} (I_{[a,\infty)}(y) - I_{[a,\infty)}(X_{t_i}))dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} \left[(X_{t_{i+1}}-a)^+ - (X_{t_i}-a)^+ - I_{[a,\infty)}(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} |X_{t_{i+1}}-a| I_{C_{n,i}}.
\end{aligned}$$

De la mateixa manera, utilitzant la segona igualtat tenim que

$$\frac{1}{2}L_t^a = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} |X_{t_i}-a| I_{C_{n,i}}.$$

Tornem ara al cas general on $a(\cdot)$ era una corba contínua. Tornem a prendre, per tant, $f(x,t) = I_{[a(t),\infty)}(x)$. En la demostració del Teorema 1.3.5 provàvem que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} \big(F(X_{t_{i+1}},t_i) - F(X_{t_i},t_i)\big) = \int_0^t f(X_s,s)dX_s + \frac{1}{2}[f(X,\cdot),X]_t,$$

i en la demostració del Teorema 1.3.1 havíem vist que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} f(X_{t_i},t_i)(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) = \int_0^t f(X_s,s)dX_s.$$

Per tant

$$\frac{1}{2}[f(X,\cdot),X]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} \int_{X_{t_i}}^{X_{t_{i+1}}} (f(y,t_i) - f(X_{t_i},t_i))dy.$$

Aquesta darrera igualtat ens permet calcular, anàlogament al cas on a era constant, una forma alternativa d'expressar el temps local pel cas on $a(\cdot)$ és una corba contínua:

$$\frac{1}{2}L_t^{a(\cdot)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{t_i,t_{i+1}\in D_n^t\\ t_i<t}} |X_{t_{i+1}}-a(t_i)| I_{C_{n,i}},$$

on $C_{n,i} = \{\text{sign}(X_{t_i} - a(t_i)) \neq \text{sign}(X_{t_{i+1}} - a(t_i))\}$.

□

1.4.2 Fórmules de Tanaka.

La funció $f(x) = I_{[a,\infty)}(x)$ és la derivada de la funció absolutament contínua $F(x) = (x-a)^+$.

Així, el Teorema 1.3.4 ens dóna la següent fórmula

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{[a,\infty)}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}L_t^a \tag{1.10}$$

que es coneix amb el nom de *fórmula de Tanaka.*

Si considerem el procés $-X_t$ i calculem el seu *temps local* en el punt $-a$ es veu fàcilment que coincideix amb el *temps local* del procés X_t en el punt a, i.e.,

$$L_t^{-a}(-X) = L_t^a(X).$$

Aplicant ara el Teorema 1.3.4 al procés $-X_t$ i a la funció $F(x) = (x+a)^+$ obtenim

$$(-X_t + a)^+ = (-X_0 + a)^+ - \int_0^t I_{[-a,\infty)}(-X_s)dX_s + \frac{1}{2}L_t^a,$$

o, el que és el mateix,

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t I_{(-\infty,a]}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}L_t^a. \tag{1.11}$$

Sumant ara les expressions (1.10) i (1.11) obtenim

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sign}(X_s - a)dX_s + L_t^a.$$

Tant aquesta darrera expressió com (1.11) també es coneixen amb el nom de *fórmula de Tanaka.*

1.4.3 Una extensió de la fórmula de Tanaka.

Considerem ara la funció $F(x,t) = (x - a(t))^+$ on $a(t)$ és una funció contínua. Té per derivada parcial respecte x, $f(x,t) = I_{[a(t),\infty)}(x)$. Així, la nostra extensió de la fórmula d'Itô, Teorema 1.3.5, ens dóna que

$$(X_t - a(t))^+ = (X_0 - a(0))^+ + \int_0^t I_{[a(s),\infty)}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}L_t^{a(\cdot)} + \int_0^t F(X_s, ds). \tag{1.12}$$

Si considerem el cas on $a(t)$ té variació fitada,

$$\int_0^t F(X_s, ds) = -\int_0^t I_{[a(s),\infty)}(X_s)da(t),$$

i per tant la fórmula d'Itô es pot escriure com

$$(X_t - a(t))^+ = (X_0 - a(0))^+ + \int_0^t I_{[0,\infty)}(X_s - a(s))d(X - a(\cdot)) + \frac{1}{2}L_t^{a(\cdot)}. \quad (1.13)$$

En aquest cas particular $X - a(\cdot)$ és una semimartingala i $L_t^{a(\cdot)}$ és el *temps local* d'aquesta nova semimartingala en el nivell constant 0, i.e.,

$$L_t^{a(\cdot)}(X) = L_t^0(X - a(\cdot)).$$

Així doncs l'expressió (1.13) ens dóna la corresponent *fórmula de Tanaka*. Per tant, (1.12) és una extensió de la *fórmula de Tanaka* pel cas general on $a(\cdot)$ és una funció contínua.

□

Observació 1.4.1. *Podem comparar també el nostre Teorema 1.3.4 amb l'extensió de la fórmula d'Itô obtinguda per Bouleau i Yor [BY]. El seu teorema, per un procés X_t sota les condicions que hem imposat nosaltres, i prenent $F(x)$ una funció absolutament contínua amb derivada $f(x)$ localment fitada i Borel-mesurable, ens diu que:*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t f(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(a)d_aL_t^a.$$

Així doncs, si comparem aquest resultat amb el nostre Teorema 1.3.4, tenim una nova forma d'expressar la covariació quadràtica quan $f(x)$ és una funció localment fitada i Borel-mesurable:

$$[f(X), X]_t = -\int_{\mathbb{R}} f(a)d_aL_t^a.$$

1.5 Exemples de difusions per a les quals es compleix l'extensió de la fórmula d'Itô.

En aquesta secció demostrarem que, sota certes condicions de regularitat dels coeficients, les difusions fortament el.líptiques i les el.líptiques compleixen les hipòtesis del Teorema 1.3.2 i per tant l'extensió de la fórmula d'Itô que hem demostrat en el Teorema 1.3.5 es pot aplicar a aquests tipus de processos.

És a dir, hem de comprovar que en aquests casos existeix una funció de densitat de les variables aleatòries X_t, que anomenarem $p_t(x)$, i que compleix aquestes dues condicions:

$$\sup_x p_t(x) \leq r(t) \tag{1.14}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_t(x)} \left(\frac{d}{dx} \left(\sigma^2(t,x) p_t(x) \right) \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq u(t) \tag{1.15}$$

on $r(t)$, $u(t)$ són funcions contínues com a funcions de t en $(0,1]$, decreixents, integrables i tals que $((r)^{1/2}u)(t)$ és també integrable.

Partim de $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$, procés de difusió solució de l'equació diferencial estocàstica,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s, \tag{1.16}$$

amb X_0 determinista, és a dir $X_0 \in \mathbb{R}$. A la subsecció 1.5.2 donem un resultat pel cas X_0 no determinista.

Abans però, veurem uns resultats previs del càlcul de Malliavin que usarem per a provar les fites (1.14) i (1.15). Comencem per la següent proposició,

Proposició 1.5.1. *Sigui F una variable aleatòria de l'espai $\mathbb{D}^{1,2}$. Denotem per H l'espai de Hilbert $L^2([0,1])$. Suposem que existeix $v \in L^2([0,1] \times \Omega)$ tal que $\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H} \in$ Domδ. Llavors F té densitat i aquesta densitat ve donada per:*

$$p(x) = E\left[I_{\{F>x\}} \delta \left(\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H} \right) \right].$$

Per a la demostració veure la Proposició 1 de [CFN], o bé la Proposició 3.1.1 de [N1] o la Proposició 2.1.1 de [N2].

Un corol.lari immediat és el següent:

Corol.lari 1.5.2. *En la situació de la proposició anterior*

$$p(x) \leq \left\| \delta \left(\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H} \right) \right\|_p, \qquad \forall p \geq 1.$$

Nosaltres tenim

$$dX_t = \sigma(t,X_t)dW_t + b(t,X_t)dt.$$

Imposant les condicions de Lipschitz i de restricció en el creixement (veure (1.4) i (1.5)) tenim, segons el Teorema 0.0.1, que $X_t \in \mathbb{D}^{1,\infty}$.

Per tant, si trobem un procés v^t tal que $\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H} \in \mathrm{Dom}\delta$, la proposició anterior ens assegurarà l'existència de densitat, i aquest corol.lari ens dirà que

$$p_t(x) \leq \left\| \delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H}\right)\right\|_p, \qquad \forall p \geq 1\,.$$

Volem veure ara que podem aconseguir una fita similar per al membre esquerre de (1.15). Necessitem però, abans, un resultat previ:

Proposició 1.5.3. *En la situació de la Proposició 1.5.1, la derivada en el sentit de les distribucions $p'(x)$ de la densitat $p(x)$ és una funció integrable de la forma*

$$p'(y) = -h(y)p(y) \qquad q.p.t.,$$

on

$$h(y) = E\left(\delta\left(\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H}\right)|F=y\right)\,.$$

Prova: Hi ha un resultat similar a aquest en el cas multidimensional a la Proposició 4.2 de [MNS], però en el cas de dimensió 1 es pot donar una demostració més senzilla.

La Proposició 1.5.1 ens diu que

$$p(x) = E\left[I_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H}\right)\right]\,. \tag{1.17}$$

Precondicionant per la $\sigma-$àlgebra generada per F tenim que (1.17) és igual a

$$\begin{aligned} & E\left(E\left(I_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H}\right)|F\right)\right) \\ = \; & E\left(I_{\{F>x\}}h(F)\right)\,, \end{aligned}$$

on definim

$$h(y) = E\left(\delta\left(\frac{v}{\langle DF, v\rangle_H}\right)|F=y\right)\,.$$

La derivada en el sentit de les distribucions de la funció de densitat $p'(x)$, actua sobre les funcions de classe C^∞ a suport compacte C_0^∞, de manera que per a tota $\varphi \in C_0^\infty$

$$\langle p', \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} p(x)\varphi'(x)dx\,.$$

Si desenvolupem aquest darrer terme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p(x)\varphi'(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} E\left(I_{\{F>x\}}h(F)\right)\varphi'(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} I_{\{y>x\}}h(y)p(y)dy\right)\varphi'(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_x^\infty h(y)p(y)dy\right)\varphi'(x)dx\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Però $h(y)p(y)$ és una funció integrable ja que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(y)|p(y)dy = E|h(F)| < \infty.$$

Per tant pel Teorema de Fubini (1.18) és igual a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{y} \varphi'(x)dx \right) h(y)p(y)dy.$$

Però φ té suport compacte, per tant pel Teorema Fonamental del Càlcul aquesta última expressió és igual a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)h(y)p(y)dy\,.$$

Hem vist que $h(y)p(y)$ és una funció integrable, per tant tenim que

$$p'(y) = -h(y)p(y) \qquad q.p.t.$$

□

Utilitzant aquesta proposició obtenim el següent resultat per a difusions:

Lema 1.5.4. *Sigui X_t un procés de difusió donat per l'expressió (1.16), tal que b i σ satisfan les condicions de Lipschitz i de creixement lineal, i tal que $\sigma \in C^1$ en x. Suposem que per a tot $t \in (0,1]$ existeix un procés $v^t \in L^2([0,1] \times \Omega)$ tal que $\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t \rangle_H} \in Dom\delta$. Llavors, per a tot $p > 2$, tenim que*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2(t,x) p_t(x) \right) \right)^2 p_t(x)dx \leq C \left(1 + \left\| \delta \left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t \rangle_H} \right) \right\|_p^2 \right),$$

on la derivada és en el sentit de les distribucions i la constant C no depèn de t.

Abans de passar a la demostració provarem el següent lema:

Lema 1.5.5. *Siguin $g \in C^1(\mathbb{R})$ i $p \in L^1(\mathbb{R})$ tal que la derivada en el sentit de les distribucions p' també pertany a l'espai L^1. Aleshores*

$$(g(x) \cdot p(x))' = g'(x) \cdot p(x) + g(x) \cdot p'(x),$$

on $(\,)'$ denota la derivada en el cas de g i la derivada en el sentit de les distribucions en els altres casos.

Prova: Hem de veure que per a tota funció ϕ de classe C^∞ a suport compacte

$$< (g \cdot p)', \phi > = < g' \cdot p, \phi > + < g \cdot p', \phi > .$$

Prenem $\{g_n\}$ una successió de funcions de classe $\mathcal{C}^\infty$ a suport compacte tals que

$$\sup_{x\in \mathrm{sp}\phi} |g_n(x) - g(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{quan } n \to \infty \text{ i} \tag{1.19}$$

$$\sup_{x\in \mathrm{sp}\phi} |g'_n(x) - g'(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{quan } n \to \infty, \tag{1.20}$$

on $\mathrm{sp}\phi$ denota el suport de ϕ. Llavors

$$\begin{aligned} < (g_n \cdot p)', \phi > &= - < g_n \cdot p, \phi' > \\ &= - \int_{\mathbb{R}} g_n(x)p(x)\phi'(x)dx, \end{aligned} \tag{1.21}$$

però

$$(g_n(x)\phi(x))'p(x) = g'_n(x)\phi(x)p(x) + g_n(x)\phi'(x)p(x),$$

per tant (1.21) serà igual a

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}} (g_n(x)\phi(x))'p(x)dx + \int_{\mathbb{R}} g'_n(x)\phi(x)p(x)dx \\ = & - \int_{\mathbb{R}} (g_n(x)\phi(x))'p(x)dx + < g'_n \cdot p, \phi > . \end{aligned}$$

Sabem que $g_n \cdot \phi$ és de classe $\mathcal{C}^\infty$ a suport compacte, per tant

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} (g_n(x)\phi(x))'p(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\phi(x)p'(x)dx \\ &= < g_n \cdot p', \phi > . \end{aligned}$$

Així doncs hem vist que

$$< (g_n \cdot p)', \phi > = < g_n{}' \cdot p, \phi > + < g_n \cdot p', \phi > . \tag{1.22}$$

Però

$$\int_{\mathbb{R}} (g_n(x)p(x))'\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} (g(x)p(x))'\phi(x)dx$$

quan n tendeix a infinit. En efecte,

$$\int_{\mathbb{R}} (g_n(x)p(x))'\phi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} g_n(x)p(x)\phi'(x)dx$$

i aquesta darrera expressió convergeix cap a $- \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\phi'(x)dx$ ja que

$$\int_{\mathbb{R}} |(g_n - g)(x)||p(x)||\phi'(x)|dx \leq \sup_{x\in \mathrm{sp}\phi} |(g_n - g)(x)| \int_{\mathbb{R}} |p(x)||\phi'(x)|dx$$

que tendeix a zero usant (1.19), que ϕ' està fitada per tenir suport compacte i que $p \in L^1(\mathbb{R})$.

Així doncs $\int_{\mathbb{R}}(g_n(x)p(x))'\phi(x)dx$ tendeix cap a $-\int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\phi'(x)dx$ $= \int_{\mathbb{R}}(g(x)p(x))'\phi(x)dx$ tal i com volíem veure.

Per arguments del mateix tipus, usant (1.19), que ϕ està fitada i que $p' \in L^1(\mathbb{R})$ tenim que

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)p'(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x)p'(x)\phi(x)dx.$$

Per últim,

$$\int_{\mathbb{R}} g'_n(x)p(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} g'(x)p(x)\phi(x)dx,$$

usant (1.20), que ϕ està fitada i que $p \in L^1(\mathbb{R})$.

Així doncs, fent límits als dos costats de (1.22) obtenim

$$< (g \cdot p)', \phi > = < g' \cdot p, \phi > + < g \cdot p', \phi >,$$

tal i com volíem veure.

$\square$

Prova: (Lema 1.5.4)

Tenim que $\sigma^2 \in C^1(\mathbb{R})$ com a funció de x, que la densitat $p_t(x)$ com a funció de x pertany a $L^1(\mathbb{R})$ i, per la Proposició 1.5.3, la seva derivada en el sentit de les distribucions p'_t també pertany a l'espai $L^1(\mathbb{R})$.

Per tant pel lema anterior

$$\left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right)' = \left(\sigma^2(t,x)\right)' p_t(x) + \sigma^2(t,x)\left(p_t(x)\right)'.$$

Utilitzant això tenim que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p_t(x)}\frac{d}{dx}\left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right)\right)^2 p_t(x)dx \\ = & \int_{\mathbb{R}} \left(2(\sigma\sigma')(t,x) + \sigma^2(t,x)\frac{p'_t(x)}{p_t(x)}\right)^2 p_t(x)dx \\ \leq & \; 2\left[\int_{\mathbb{R}} 4(\sigma^2(\sigma')^2)(t,x)p_t(x)dx + \int_{\mathbb{R}}\left(\sigma^2(t,x)\frac{p'_t(x)}{p_t(x)}\right)^2 p_t(x)dx\right]. \end{aligned}$$

D'una banda, utilitzant que $\sigma'(t,x)$ està fitada, per ser $\sigma \in C^1$ en x i Lipschitz, i la restricció en el creixement de $\sigma(t,x)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (\sigma^2(\sigma')^2)(t,x)p_t(x)dx \;\leq\; K\int_{\mathbb{R}} \sigma^2(t,x)p_t(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^2 p_t(x)dx \\
&\leq K(1+E(\sup_{t\in[0,1]} X_t^2)) < \infty,
\end{aligned}
$$

pel Corol.lari 2.2.1 de [N2].

D'altra banda, utilitzant de nou la restricció en el creixement de $\sigma(t,x)$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\sigma^2(t,x)\frac{p_t'(x)}{p_t(x)}\right)^2 p_t(x)dx &\leq K\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)^4\left(\frac{p_t'(x)}{p_t(x)}\right)^2 p_t(x)dx \\
&= KE\left[(1+|X_t|)^4\left(\frac{p_t'(X_t)}{p_t(X_t)}\right)^2\right] \\
&\leq K\left(E\left[(1+|X_t|)^{4q'}\right]\right)^{\frac{1}{q'}}\left(E\left[\left|\frac{p_t'(X_t)}{p_t(X_t)}\right|^{2p'}\right]\right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}
$$

gràcies a la desigualtat de Hölder amb $p'=\frac{p}{2}$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$ i $p>2$. Ara, d'una banda

$$
\left[E\left((1+|X_t|)^{4q'}\right)\right]^{\frac{1}{q'}} \leq \left(K(1+E(\sup_{t\in[0,1]}|X_t|^{4q'}))\right)^{\frac{1}{q'}} < \infty
$$

pel Corol.lari 2.2.1 de [N2].

D'altra banda, per la Proposició 1.5.3,

$$
\begin{aligned}
\left(E\left|\frac{p_t'(X_t)}{p_t(X_t)}\right|^{2p'}\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(E\left|\frac{p_t'(X_t)}{p_t(X_t)}\right|^{p}\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left(E\left[\left|E\left(\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)|X_t\right)\right|^p\right]\right)^{\frac{2}{p}},
\end{aligned}
$$

i utilitzant la desigualtat de Jensen aquesta expressió és menor o igual que

$$
\begin{aligned}
&\left(E\left[E\left(\left|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right|^p|X_t\right)\right]\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left(E\left[\left|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right|^p\right]\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right\|_p^2, \qquad \forall p>2.
\end{aligned}
$$

Així doncs, per a tot $p>2$ podem trobar una constant C tal que

$$
\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{p_t(x)}\left(\frac{d}{dx}\left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right)\right)^2 dx \leq C\left(1+\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right\|_p^2\right),
$$

com volíem demostrar.

□

Hem vist que si som capaços de trobar un procés v^t tal que $\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H} \in \text{Dom}\delta$ podem fitar els membres esquerres de (1.14) i (1.15) per $\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right\|_p$ i per $\left[C\left(1+\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right\|_p^2\right)\right]^{1/2}$ respectivament. Per tant el nostre objectiu serà trobar aquest procés v^t i fitar $\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right\|_p$ de manera que ens permeti fitar (1.14) i (1.15) per funcions que compleixin les propietats desitjades. Necessitarem el següent resultat de [CFN](veure Teorema 1 de [CFN]):

Teorema 1.5.6. *(Caballero-Fernández-Nualart) Sigui $\{M_t, t \geq 0\}$ una martingala contínua que surt de zero. Llavors per tot $1 \leq p < q$ existeix una constant universal $C = C(p,q)$ tal que*

$$\left\|\frac{M_t}{\langle M\rangle_t}\right\|_p \leq C\left\|\langle M\rangle_t^{-1/2}\right\|_q,$$

on $<\ \ >_t$ denota la variació quadràtica.

Lema 1.5.7. *Sigui X un procés de difusió els coeficients del qual satisfan les condicions de Lipschitz i creixement lineal. Suposem també que $\sigma, b \in C^2$ en x, i que les seves derivades de segon ordre tenen creixement polinomial en x, uniformement en t. Per a cada $t \in (0,1]$ prenem $v_s^t = \sigma(s,X_s)I_{(0,t]}(s)$, i suposem que per a algun $r > 2$, $\left(E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{r}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$. Llavors $\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle} \in Dom\delta$, i per tot $q > p \geq 1$*

$$\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right\|_p \leq K\left(E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{q}},$$

on K és independent de t.

Prova: Considerem, per $s \leq t$, $s,t \in [0,1]$

$$N_{s,t} =: \exp\left\{\int_s^t \sigma'(r,X_r)dW_r + \int_s^t \left(b' - \frac{1}{2}(\sigma')^2\right)(r,X_r)dr\right\}.$$

Seguint els càlculs del Teorema 2 de [CFN] obtenim que

$$\left|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t,v^t\rangle_H}\right)\right| \leq \frac{\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s\right|}{\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds}S_t + \frac{1}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds}}\Psi_{v^t}$$

on

$$S_t = \left(\sup_{s\in[0,t]} N_{0,s}^{-1}\right)\left(\sup_{s\in[0,t]} N_{0,s}\right),$$

i

$$\Psi_{v^t} = (S_t)^4(2\|\sigma'\|_\infty + 2(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \sup_{0\le s\le t} \Big| \int_0^s \sigma''(r,X_r)N_{0,r}dW_r + \int_0^s (b'' - \sigma'\sigma'')(r,X_r)N_{0,r}dr \Big|).$$

A més a més, $E(S_t^m) < \infty$ per a tot $m \ge 2$ i Ψ_{v^t} té moments de tots els ordres. Utilitzant la desigualtat de Hölder, per a tot $p' > 1$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$

$$\begin{aligned}
\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H}\right)\right\|_p &= \left(E\left(\left|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H}\right)\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le K\Big[\left(E\left(S_t^{pq'}\right)\right)^{\frac{1}{pq'}}\left(E\left[\left(\frac{\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s\right|}{\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds}\right)^{pp'}\right]\right)^{\frac{1}{pp'}} \\
&\quad + \left(E\left(\Psi_{v^t}^{pq'}\right)\right)^{\frac{1}{pq'}}\left(E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds}}\right)^{pp'}\right]\right)^{\frac{1}{pp'}}\Big] \\
&\le K\left(\left\|\frac{M_t}{\langle M\rangle_t}\right\|_{pp'} + \left\|\langle M\rangle_t^{-1/2}\right\|_{pp'}\right),
\end{aligned}$$

on $M_t = \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$ i per tant la variació quadràtica és, $\langle M\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds$. Llavors pel Teorema 1.5.6, per a tot $q > pp'$

$$\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H}\right)\right\|_p \le K\left(\left\|\langle M\rangle_t^{-1/2}\right\|_q + \left\|\langle M\rangle_t^{-1/2}\right\|_{pp'}\right).$$

Això és cert per a tot $p' > 1$ i per a tot $q > pp'$, per tant

$$\left\|\delta\left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t\rangle_H}\right)\right\|_p \le K\left(E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \forall q > p \ge 2$$

com volíem demostrar.

□

1.5.1 Difusions el.líptiques i fortament el.líptiques.

Estem ja en condicions de veure que les difusions fortament el.líptiques, sota condicions de regularitat dels coeficients, compleixen les hipòtesis del Teorema 1.3.2 i per tant val l'extensió de la fórmula d'Itô que hem demostrat en la secció 1.3.

Teorema 1.5.8. *Sigui X_t una difusió els coeficients de la qual satisfan les condicions de Lipschitz i creixement lineal, tals que $\sigma, b \in C^2$ respecte x i tals que les derivades de segon ordre tenen creixement polinomial en x, uniformement en t. Suposem també que existeix una constant $\rho > 0$ tal que $|\sigma(s,x)| > \rho$, per a tot $s \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$.*

Llavors

$$\begin{aligned} p_t(x) &\leq \frac{K}{\sqrt{t}}, \\ \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right)\right)^2 p_t(x)dx\right)^{1/2} &\leq \frac{K}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Prova: Prenem $p \geq 2$, pel Corol.lari 1.5.2

$$p(x) \leq \left\| \delta \left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t \rangle_H} \right) \right\|_p,$$

prenent per a cada X_t, $v_s^t = \sigma(s, X_s) I_{(0,t]}(s)$, i pel Lema 1.5.7 tenim que és menor o igual que

$$K \left(E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds \right)^{-\frac{q}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.23}$$

per a tot $q > p \geq 2$. Utilitzant ara la fita $|\sigma(s, X_s)| > \rho$, per a tot $s \in [0,1]$, (1.23) està fitat per

$$K.(\rho^2 t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{\sqrt{t}}.$$

D'altra banda, pel Lema 1.5.4 per $p > 2$

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2(t,x)p_t(x)\right)\right)^2 p_t(x)dx\right)^{1/2} \\ \leq\ &\left(C \left(1 + \left\| \delta \left(\frac{v^t}{\langle DX_t, v^t \rangle_H} \right) \right\|_p^2 \right) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

prenent novament per a cada X_t, $v_s^t = \sigma(s, X_s) I_{(0,t]}(s)$. Pel Lema 1.5.7 i utilitzant la fita $|\sigma(s, X_s)| > \rho$, per a tot $s \in [0,1]$ tenim que aquest altre terme està fitat per

$$\left(C \left(1 + \left(\frac{K}{\sqrt{t}} \right)^2 \right) \right)^{1/2} \leq \frac{K}{\sqrt{t}}.$$

□

Clarament les funcions $r(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$ i $u(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$ compleixen les condicions del Teorema 1.3.2, és a dir són funcions contínues en (0,1], decreixents, integrables en (0,1) i tals que $\left((r)^{1/2}u\right)(t) = \frac{K}{t^{3/4}}$ és també integrable en (0,1). Per tant és vàlida l'extensió de la fórmula d'Itô que hem demostrat a la secció 1.3.

Per últim veurem hipòtesis sota les quals les difusions el.líptiques també estan en les condicions del Teorema 1.3.2 i per tant compleixen l'extensió de la fórmula d'Itô.

Teorema 1.5.9. *Sigui X_t una difusió els coeficients de la qual compleixen les condicions de Lipschitz i creixement lineal, tal que $\sigma, b \in C^2$ respecte x i tal que $\sigma \in C^1$ respecte t. Suposem també que σ'', b'' i $\left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,x)\right|$ tenen creixement polinomial en x, uniformement en t, i que $\sigma(0, X_0) = \rho \neq 0$.*

Llavors

$$
\begin{aligned}
p_t(x) &\leq \frac{K}{\sqrt{t}}, \\
\left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2(t,x) p_t(x)\right)\right)^2 p_t(x) dx\right)^{1/2} &\leq \frac{K}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}
$$

Prova: Suposem $\rho > 0$. Tal i com hem vist al Teorema 1.5.8 n'hi ha prou trobant una fita de la forma $\frac{K}{\sqrt{t}}$ per a $\left(E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{q}}$, per algun $q > 2$. Seguim els passos de la demostració de la Proposició 2 de [CFN], on es prova un resultat semblant pel cas on el coeficient σ no depèn del temps.

Definim el següent temps d'atur,

$$
\tau = \begin{cases} \inf\left\{0 < s \leq 1 : \sigma(s, X_s) \leq \frac{\rho}{2}\right\} \\ 1 \qquad \text{si el conjunt anterior és buit.} \end{cases}
$$

Podem escriure,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right] &= E\left[I_{\{\tau>t\}}\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right] \\
&\quad + E\left[I_{\{\tau\leq t\}}\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right].
\end{aligned}
$$

D'una banda,

$$
E\left[I_{\{\tau>t\}}\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right] \leq \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-q} t^{-\frac{q}{2}}.
$$

De l'altra,

$$
E\left[I_{\{\tau\leq t\}}\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\le E\left[I_{\{\tau\le t\}}\left(\int_0^\tau \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right]\\
&\le \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-q} E\left(I_{\{\tau\le t\}}\tau^{-\frac{q}{2}}\right)\\
&= \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-q} E\left(I_{\left\{\tau^{-1}\ge\frac{1}{t}\right\}}\left(\tau^{-1}\right)^{\frac{q}{2}}\right)\\
&= \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-q}\left[\int_{\frac{1}{t}}^\infty \frac{q}{2}y^{\frac{q}{2}-1}P\left\{\tau^{-1}>y\right\}dy+\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{q}{2}}P\{\tau^{-1}>\frac{1}{t}\}\right],
\end{aligned}
$$

en aquest últim pas hem utilitzat que per una variable aleatòria $Y \ge 0$, $E(Y^p)=\int_0^\infty py^{p-1}P\left\{Y>y\right\}dy$.

Observem que la variable d'integració y satisfà $y\ge\frac{1}{t}\ge 1$ i per tant $\frac{1}{y}\le t\le 1$.

Però

$$
\begin{aligned}
P\left\{\tau^{-1}>y\right\}=P\left\{\tau<\frac{1}{y}\right\} &= P\left\{\inf_{0<s\le\frac{1}{y}}\sigma(s,X_s)\le\frac{\rho}{2}\right\}\\
&\le P\left\{\sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}|\sigma(s,X_s)-\rho|\ge\frac{\rho}{2}\right\}\\
&\le \left(\frac{2}{\rho}\right)^r E\left(\sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}|\sigma(s,X_s)-\rho|^r\right),
\end{aligned}
$$

gràcies a la desigualtat de Txebixev, per a tot $r>0$.

La funció $\sigma(s,x)$ és contínua, amb derivades respecte t i respecte x contínues. Per tant, la fórmula de Taylor ens diu que

$$
\sigma(s,X_s)=\sigma(0,X_0)+\frac{\partial}{\partial s}(\sigma(s^*,\eta_s^*))s+\frac{\partial}{\partial x}(\sigma(s^*,\eta_s^*))(X_s-X_0),
$$

on $s^*\in(0,s)$ i η_s^* pertany a l'interval format per X_0 i X_s.

Per tant,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}|\sigma(s,X_s)-\rho|^r = \sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}|\sigma(s,X_s)-\sigma(0,X_0)|^r\\
&\le \sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}\left|\frac{\partial}{\partial s}(\sigma(s^*,\eta_s^*))s\right|^r+\sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(\sigma(s^*,\eta_s^*))(X_s-X_0)\right|^r\\
&\le K\left(\frac{1}{y}\right)^r\left(1+\sup_{0\le s\le 1}|X_s|^{pr}\right)+K\sup_{0\le s\le\frac{1}{y}}|X_s-X_0|^r,
\end{aligned}
$$

utilitzant la restricció en el creixement de $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ i que $\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ està fitada.

D'altra banda, si fem esperances, el segon terme ens queda

$$E\Big(\sup_{0\le s\le \frac{1}{y}} |X_s - X_0|^r\Big) = E\Big(\sup_{0\le s\le \frac{1}{y}} \Big|\int_0^s b(t,X_t)dt + \int_0^s \sigma(t,X_t)dW_t\Big|^r\Big),$$

que aplicant la desigualtat de Burkholder és menor o igual que

$$\begin{aligned} & K\big(\frac{1}{y}\big)^r E\big(\sup_{0\le t\le \frac{1}{y}} |b(t,X_t)|^r\big) + KE\big[\big(\int_0^{\frac{1}{y}} \sigma^2(t,X_t)dt\big)^{\frac{r}{2}}\big] \\ \le\ & K\big(\frac{1}{y}\big)^r E\big(\sup_{0\le t\le 1}(1+|X_t|)^r\big) + K\big(\frac{1}{y}\big)^{\frac{r}{2}} E\big(\sup_{0\le t\le 1}(1+|X_t|^2)^{\frac{r}{2}}\big). \end{aligned}$$

Utilitzant ara el Corol.lari 2.2.1 de [N2] ens queda,

$$\begin{aligned} E\big(\sup_{0\le s\le \frac{1}{y}} |\sigma(s,X_s) - \rho|^r\big) &\le K\big(\frac{1}{y}\big)^r + K\big(\frac{1}{y}\big)^r + K\big(\frac{1}{y}\big)^{\frac{r}{2}} \\ &\le K\big(\frac{1}{y}\big)^{\frac{r}{2}}, \end{aligned}$$

perquè $\frac{1}{y} \le 1$.

Així,

$$P\left\{\tau^{-1} > y\right\} \le K\left(\frac{2}{\rho}\right)^r \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{r}{2}}.$$

D'on

$$\begin{aligned} & E\left[I_{\{\tau\le t\}}\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right] \\ \le\ & K\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-q-r}\left[\int_{\frac{1}{t}}^{\infty} y^{\frac{q}{2}-1-\frac{r}{2}}dy + t^{\frac{1}{2}(r-q)}\right] \\ =\ & Kt^{\frac{1}{2}(r-q)} \qquad \text{prenent } q < r. \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} \left(E\left[\left(\int_0^t \sigma^2(s,X_s)ds\right)^{-\frac{q}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{q}} &\le K\left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}\left(\frac{r-q}{q}\right)}\right) \\ &= \frac{K}{\sqrt{t}}\left(1 + t^{\frac{r}{2q}}\right) \le \frac{K}{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

tal com volíem demostrar.

El cas $\rho < 0$ es fa igual prenent com a temps d'atur

$$\tau = \begin{cases} \inf\left\{0 < s \le 1 : \sigma(s,X_s) \ge \frac{\rho}{2}\right\} \\ 1 \qquad \text{si el conjunt anterior és buit} \end{cases}$$

i tot funciona de la mateixa manera.

□

1.5.2 Cas de condició inicial no determinista.

Per a tractar aquest cas necessitarem situar-nos en un context una mica més general: Considerem H un espai de Hilbert real separable. Una variable aleatòria a valors en H, $F : \Omega \longrightarrow H$ es diu que és regular si és de la forma

$$F = \sum_{i=1}^{M} f_i(W_{t_1}, ..., W_{t_n})v_i \tag{1.24}$$

on $f_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $t_1, ..., t_n \in [0,1]$ i $v_1, ..., v_M \in H$.

I es defineix la seva derivada de Malliavin com el procés a valors en H donat per

$$D_t F = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(W_{t_1}, ..., W_{t_n}) I_{[0,t_j)}(t) v_i.$$

Considerem l'espai producte $(\Omega \times \Omega_0, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_0, P \times P_0)$ on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ és l'espai de Wiener i $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ és un espai de probabilitat separable.

Observem que podem identificar l'espai $L^2(\Omega \times \Omega_0)$ amb l'espai $L^2(\Omega; L^2(\Omega_0))$ així com l'espai $L^2([0,1] \times (\Omega \times \Omega_0))$ amb l'espai $L^2([0,1] \times \Omega; L^2(\Omega_0))$.

Prenent $H = L^2(\Omega_0)$ podem definir la derivada de Malliavin per a variables aleatòries de la forma (1.24).

Les identificacions anteriors ens permeten doncs definir una derivada de Malliavin per a variables $F : \Omega \times \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ de quadrat integrable i obtenim que $D_t F \in L^2([0,1] \times (\Omega \times \Omega_0))$.

A més a més, si ens restringim al cas on $F : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, l'operador derivada dóna idénticament zero, ja que aquest tipus de variables es poden escriure de la forma (1.24) amb f_i constants.

D'altra banda si tenim un funcional regular definit sobre l'espai de Wiener, podem suposar que les funcions v_i són constants i idénticament 1 totes elles. Per tant l'operador derivada que acabem de definir dóna el mateix, en aquest cas, que el que teníem definit només per l'espai de Wiener.

Pel que fa a l'operador δ podem fer un raonament semblant. Si tenim $v \in L^2([0,1] \times (\Omega \times \Omega_0))$, com que podem identificar aquest espai amb $L^2([0,1] \times \Omega; L^2(\Omega_0))$, podem calcular $\delta(u) \in L^2(\Omega; L^2(\Omega_0))$, i aquest últim espai el podem identificar altre cop amb $L^2(\Omega \times \Omega_0)$.

Suposem ara que $X = \{X_t,\ 0 \leq t \leq 1\}$ és un procés de difusió solució de l'equació diferencial estocàstica

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

on X_0 no és determinista sinó que és una variable aleatòria, independent del nostre moviment Brownià, definida en l'espai de probabilitat separable $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$. Suposem també que X_0 té moments de tots els ordres.

Tal com proven [MNS] continuen essent vàlids en aquest context la regla de la cadena i el Teorema 0.0.1.

Per tant, el Teorema 1.5.8 continua essent vàlid en aquest cas. (Observem que en aquest cas la hipòtesi del Teorema 1.5.9 no tindria sentit). Podem enunciar doncs el següent resultat:

Teorema 1.5.10. *Sigui X_t una difusió els coeficients de la qual satisfan les condicions de Lipschitz i creixement lineal, on X_0 és una variable aleatòria definida en un espai de probabilitat separable $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$, tal que $\sigma, b \in C^2$ respecte x i tal que les derivades de segon ordre tenen creixement polinomial en x, uniformement en t. Suposem també que existeix una constant $\rho > 0$ tal que $|\sigma(s,x)| > \rho$, per a tot $s \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$.*

Llavors

$$\begin{aligned} p_t(x) &\leq \frac{K}{\sqrt{t}}, \\ \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p_t(x)} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2(t,x) p_t(x) \right) \right)^2 p_t(x) dx \right)^{1/2} &\leq \frac{K}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

És a dir, en aquest cas també és cert que per les difusions fortament el.líptiques, sota bones condicions, val l'extensió de la fórmula d'Itô.

Capítol 2

Convergència feble cap a un drap Brownià a partir d'un procés de Poisson al pla.

2.1 Introducció i resultat principal.

L'objectiu d'aquest capítol és trobar uns processos construïts a partir del procés de Poisson al pla que convergeixin en llei cap a un drap Brownià. Busquem un resultat anàleg, per al cas de dos paràmetres, al resultat de Stroock que hem recollit en els preliminars d'aquesta memòria. Recordem-lo,

Teorema 0.0.7 *Considerem un procés de Poisson estàndard,* $\{N(t),\ t \geq 0\}$, *i definim, per a tot* $\varepsilon > 0$ *el procés continu*

$$y_\varepsilon = \{y_\varepsilon(t) := \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} (-1)^{N(s)} ds,\ t \in [0,T]\}.$$

Si (P^ε) *són les lleis dels processos* y_ε *en l'espai de Banach* $\mathcal{C}([0,T])$ *de les funcions contínues en* $[0,T]$, *llavors* (P^ε) *convergeix en llei quan* ε *tendeix a zero cap a la mesura de Wiener.*

Una motivació per a provar aquest tipus de resultats és que dóna exemples de processos de variació fitada que poden ser aproximats en llei pel procés de Wiener.

Un altre interés és que ens ofereix una relació entre els dos processos més importants al pla.

El nostre resultat és el següent,

Teorema 2.1.1. *Definim*

$$\{x_\varepsilon(s,t) := \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} \int_0^{s/\varepsilon} \sqrt{xy}(-1)^{N(x,y)} dxdy; \quad (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\},$$

on $\{N(x,y);\quad x,y\geq 0\}$ *és un procés de Poisson en el pla.*

Considerem P_ε *la llei imatge de* x_ε *en l'espai de Banach* $\mathcal{C}([0,S]\times[0,T])$ *de les funcions contínues en* $[0,S]\times[0,T]$. *Llavors,* (P_ε) *convergeix en llei quan* ε *tendeix a zero cap a la llei en* $\mathcal{C}([0,S]\times[0,T])$ *d'un drap Brownià.*

Un primer treball on es busca un resultat al pla a partir del resultat de Stroock és [Jo]. Allí es donen uns processos que convergeixen en llei cap al drap Brownià a partir de dues successions de còpies independents dels processos de Stroock.

Observem que els processos x_ε també es podem expressar com

$$x_\varepsilon(s,t)=\int_0^t\int_0^s\frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{xy}(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})}dxdy. \tag{2.1}$$

Una raó intuïtiva d'aquest tipus de resultats és que l'integrand $(-1)^{N(x,y)}$ canvia de signe molt ràpidament si hi ha molts punts al seu voltant. Així, quan ε tendeix a zero, $(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})}$ tendeix cap a quelcom amb valors independents en cada punt i que, convenientment normalitzat, és aproximadament un soroll blanc.

En principi, seria raonable esperar que el resultat pel cas de dos paràmetres fos que els processos definits per

$$Y_\varepsilon(s,t):=\varepsilon\int_0^{t/\varepsilon}\int_0^{s/\varepsilon}(-1)^{N(x,y)}dxdy, \tag{2.2}$$

convergissin en llei cap al drap Brownià.

Però no és difícil provar (veure Apèndix 5.3) que els processos $Y_\varepsilon(s,t)$ convergeixen a zero, quan ε tendeix a zero, en $L^2(\Omega)$, per a tot $(s,t)\in[0,S]\times[0,T]$. I això sembla que no es pot arreglar multiplicant per funcions que només depenguin del paràmetre ε.

Una raó intuïtiva d'aquesta aparent patologia és la següent;

Podem escriure els processos de Stroock com

$$y_\varepsilon(t)=\int_0^t\frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{s}{\varepsilon^2})}ds, \tag{2.3}$$

els processos definits en el Teorema 2.1.1 com (2.1) i finalment,

$$Y_\varepsilon(s,t)=\int_0^t\int_0^s\frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})}dxdy.$$

Si considerem la funció de covariància dels processos integrands en l'expressió dels processos y_ε,

$$K_\varepsilon(t,t') \;=\; E\big[\frac{1}{\varepsilon^2}(-1)^{N(\frac{t}{\varepsilon^2})}(-1)^{N(\frac{t'}{\varepsilon^2})}\big]-\frac{1}{\varepsilon^2}E\big[(-1)^{N(\frac{t}{\varepsilon^2})}\big]E\big[(-1)^{N(\frac{t'}{\varepsilon^2})}\big]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\exp[-\frac{2|t-t'|}{\varepsilon^2}] - \frac{1}{\varepsilon^2}\exp[-\frac{2(t+t')}{\varepsilon^2}],$$

està clar que, per a tot $t > 0$, com a funció de t', aquesta covariància convergeix feblement, quan ε tendeix a zero, cap a δ_t, la delta de Dirac al punt t (és a dir, la "funció de covariància" del soroll blanc).

D'altra banda, si calculem la covariància pels processos integrands en l'expressió dels processos Y_ε i dels processos x_ε, observem que si $s \cdot t \neq 0$, $K_\varepsilon^Y((s,t),(s',t'))$ com a funció de (s',t') convergeix feblement cap a zero, mentre que $K_\varepsilon^x((s,t),(s',t'))$ convergeix feblement cap a $\delta_{(s,t)}$. Aquests dos fets es poden demostrar usant arguments similars als que utilitzem en la prova del Lema 2.4.4.

Una altra motivació d'aquest tipus de resultats és la seva possible aplicació al problema d'aproximar en llei la solució d'una equació diferencial estocàstica al pla per la solució d'una equació diferencial ordinària.

Recentment s'han publicat alguns resultats en aquest sentit. Per exemple, considerem el procés simple en $\mathbb{R}_+^2$,

$$F(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} Z_{k,l} I_{[k-1,k)\times[l-1,l)}(s,t),$$

on $\{Z_{k,l}, k \geq 1, l \geq 1\}$ són variables aleartòries independents, idénticament distribuïdes, uniformement fitades i que tenen $E(Z_{k,l}) = 0$ i $Var(Z_{k,l}) = \gamma^2$.

Si definim el procés

$$Y_{s,t}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \int_0^t F(\frac{u}{\varepsilon},\frac{v}{\varepsilon})dudv,\ (s,t) \in [0,S]\times[0,T],\ \varepsilon > 0$$

com a conseqüència immediata del Teorema Central del Límit en $\mathcal{C}([0,S]\times[0,T])$, la llei de Y^ε convergeix feblement a la llei d'un drap brownià amb la variància multiplicada per γ^2.

Florit i Nualart demostren el següent resultat, (veure [FN]),

Teorema 2.1.2. *En aquesta situació, siguin $\{X_{s,t}^\varepsilon\}$ les solucions de les següents equacions integrals*

$$X_{s,t}^\varepsilon = x + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^s F(\frac{u}{\varepsilon},\frac{v}{\varepsilon})\sigma(X_{u,v}^\varepsilon)dudv + \int_0^t\int_0^s b(X_{u,v}^\varepsilon)dudv;$$

on $(s,t) \in [0,S]\times[0,T]$ i $\sigma, b \in C_b^3(\mathbb{R})$. Llavors les lleis de $\{X_{s,t}^\varepsilon\}$ convergeixen feblement quan $\varepsilon \to 0$, en $\mathcal{C}([0,S]\times[0,T])$, a la llei de l'única solució de l'equació integral estocàstica,

$$X_{s,t} = x + \int_0^t\int_0^s \gamma\sigma(X_{u,v})\circ dW_{u,v} + \int_0^t\int_0^s b(X_{u,v})dudv;$$

on la primera integral és una integral tipus Stratonovich.

El cas on σ és lineal i $b = 0$ havia estat provat per Carmona i Fouque a [CF].

També en [S] trobem el resultat corresponent per a processos de difusió generals pel cas uniparamètric, (veure el Teorema 0.0.8 dels preliminars d'aquesta memòria).

Observem que el procés $\sqrt{uv}(-1)^{N(u/\varepsilon,v/\varepsilon)}$ té algunes propietats semblants a les del procés $F(\frac{u}{\varepsilon},\frac{v}{\varepsilon})$: és un procés fitat i és gairebé centrat, en el sentit que l'esperança convergeix molt ràpidament a zero en tendir $\varepsilon \to 0$,

$$\sqrt{uv}E(-1)^{N(\frac{u}{\varepsilon},\frac{v}{\varepsilon})} = \sqrt{uv}\exp[-2\frac{uv}{\varepsilon^2}] \longrightarrow 0.$$

Però contràriament al procés $F(\frac{u}{\varepsilon},\frac{v}{\varepsilon})$ els salts del procés $\sqrt{uv}(-1)^{N(u/\varepsilon,v/\varepsilon)}$ passen en temps aleatoris, i la integral corresponent no es pot expressar com la suma de variables aleatòries independents. Això fa que la convergència en llei dels processos (2.1) cap a un drap brownià no sigui immediata.

Per tal de simplificar la notació denotarem per $N_\mu(x,y)$ la variable aleatòria $N(x\sqrt{\mu}, y\sqrt{\mu})$. Llavors $\{N_\mu(x,y); (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\}$ és un procés de Poisson d'intensitat μ. Observem que

$$x_\varepsilon(s,t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^s \sqrt{xy}(-1)^{N_{\frac{1}{\varepsilon^2}}(x,y)}dxdy.$$

Posant $n = \frac{1}{\varepsilon^2}$, estem buscant el límit feble quan $n \to \infty$ de

$$x_n(s,t) := n\int_0^t\int_0^s \sqrt{xy}(-1)^{N_n(x,y)}dxdy, \tag{2.4}$$

i denotarem per P_n la llei imatge dels processos x_n en l'espai $\mathcal{C}([0,S]\times[0,T])$.

El capítol està organitzat de la següent manera. En la secció 2.2 recordem alguns preliminars de la teoria de processos amb dos paràmetres. La prova de l'ajustament de la família de lleis (P_n) es troba en la secció 2.3. Finalment, en la secció 2.4 identifiquem tots els possibles límits de subsuccessions de (P_n) com la mesura de Wiener.

Al llarg del capítol usarem la lletra K per indicar constants que només depenen de T i de S. Usarem la mateixa lletra encara que el valor de la constant pot variar d'una expressió a una altra.

2.2 Preliminars.

El treball central de la teoria dé martingales al pla, és [CW]. Nosaltres utilitzarem la notació i les definicions d'aquell treball. Comencem recordant alguns dels conceptes que utilitzarem posteriorment.

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat complet i considerem $\{\mathcal{F}_{s,t};\ (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ una família de sub σ-àlgebres de $\mathcal{F}$ tals que satisfan la següent propietat:

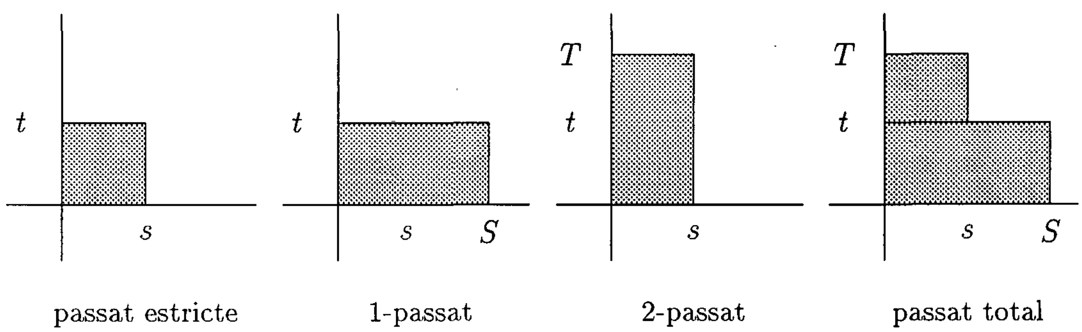
- i) $\mathcal{F}_{s,t} \subseteq \mathcal{F}_{s',t'}$ per a tot $s \leq s'$, $t \leq t'$.

Considerem a $\mathbb{R}^2_+$ la relació d'ordre parcial següent: $(s,t) < (s',t')$ si $s < s'$ i $t < t'$.

Donats $(s,t) < (s',t')$, denotem per $\triangle_{s,t} X_{s',t'}$ l'increment del procés X en el rectangle format per aquests dos punts, i.e.

$$\triangle_{s,t} X_{s',t'} = X_{s',t'} - X_{s,t'} - X_{s',t} + X_{s,t}.$$

Donat un punt $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$ podem definir quatre tipus diferents de passat. El passat estricte és el que està associat a l'ordre parcial que acabem de definir, és a dir són els punts $z \in \mathbb{R}^2_+$ tals que $z < (s,t)$. L'1-passat són els punts $z \in \mathbb{R}^2_+$ tals que $z < (S,t)$ mentre que el 2-passat el formen els punts $z \in \mathbb{R}^2_+$ tals que $z < (s,T)$. Finalment el passat total són els punts $z \in \mathbb{R}^2_+$ tals que o bé $z < (S,t)$ o bé $z < (s,T)$.



Dibuix1. Els quatre tipus de passats al pla.

Associats amb aquests diferents tipus de passat, podem definir diferents tipus de martingales:

Direm que un procés $\mathcal{F}_z$-adaptat, $X = \{X_z;\quad z \in [0,S] \times [0,T]\}$, tal que $E(|X_z|) < \infty$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$ és una *martingala* si

$$E(X_{s',t'} - X_{s,t} | \mathcal{F}_{s,t}) = 0, \qquad \text{per a tot } (s,t) < (s',t').$$

Direm que un procés $\mathcal{F}_z$-adaptat, $X = \{X_z;\quad z \in [0,S] \times [0,T]\}$, tal que $E(|X_z|) < \infty$ per tot $z \in [0,S] \times [0,T]$ és una *martingala forta* si $X_{s,0} = X_{0,s} = 0$ per a tot $s \geq 0$ i

$$E(\triangle_{s,t} X_{s',t'} | \mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{s,T}) = 0, \qquad \text{per a tot } (s,t) < (s',t').$$

De la mateixa manera es poden definir *1-martingales, 2-martingales* i *martingales febles* si condicionem respectivament per $\mathcal{F}_{S,t}$, $\mathcal{F}_{s,T}$ i $\mathcal{F}_{s,t}$.

Habitualment a les $\sigma-$àlgebres se'ls demana les següents propietats que nosaltres no necessitarem:

- ii) $\mathcal{F}_{0,0}$ conté tots els conjunts negligibles de $\mathcal{F}$.

- iii) Per a tot $z \in [0,S] \times [0,T]$, $\mathcal{F}_z = \cap_{z<z'}\mathcal{F}_{z'}$.

Finalment, sovint a la família de sub $\sigma-$àlgebres $\mathcal{F}_{s,t}$ se'ls demana encara una quarta propietat que es coneguda, en la literatura de processos al pla, com condició $F4$. En aquest capítol no presuposarem en cap moment que es compleix aquesta quarta propietat:

- iv) Per a tot $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$ les σ-àlgebres $\mathcal{F}_{S,t}$ i $\mathcal{F}_{s,T}$ són condicionalment independents donat $\mathcal{F}_{s,t}$. O, equivalentment, per tota variable aleatòria X fitada i per a tot $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$

$$E[E[X|\mathcal{F}_{S,t}]|\mathcal{F}_{s,T}] = E[X|\mathcal{F}_{s,t}].$$

Definició 2.2.1. *Direm que* $W = \{W_{s,t};\quad (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ *és un* $\mathcal{F}_{s,t}-$*drap Brownià si és un procés continu, adaptat, amb* $W_{s,0} = W_{0,t} = 0$ *q.s. i tal que, per a tot* $(s,t) < (s',t')$, *l'increment* $\triangle_{s,t}W_{s',t'}$ *és independent de* $\mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{s,T}$ *i té distribució normal de mitjana zero i variància* $(s'-s)(t'-t)$.

Si no especifiquem la filtració, entendrem que ens referim a la filtració generada pel propi procés.

Definició 2.2.2. *Sigui* $\{\mathcal{F}_{s,t}\}$ *una família de sub* σ*-àlgebres de* $\mathcal{F}$ *que satisfà les propietats anteriors per a tot* $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$. *Direm que* $N = \{N_{s,t};\quad (s,t) \in \mathbb{R}^2_+\}$ *és un* $\mathcal{F}_{s,t}-$*procés de Poisson si és un procés adaptat, càdlàg, amb* $N_{s,0} = N_{0,t} = 0$ *q.s. i tal que, per a tot* $(s,t) < (s',t')$, *l'increment* $\triangle_{s,t}N_{s',t'}$ *és independent de* $\mathcal{F}_{\infty,t} \vee \mathcal{F}_{s,\infty}$ *i té distribució de Poisson de paràmetre* $(s'-s)(t'-t)$.

Si no especifiquem la filtració, entendrem que ens referim a la filtració generada pel propi procés.

2.3 Prova de l'ajustament.

Per tal de demostrar el Teorema 2.1.1, hem de provar que la família de lleis P_n és ajustada i que qualsevol subsuccessió feblement convergent convergeix cap a la llei d'un drap Brownià. En aquesta secció provem que la família de lleis P_n és ajustada.

Usant els criteris de Bickel i Wichura [BW] o de Chentsov [C], i que els nostres processos x_n s'anul.len als eixos, n'hi ha prou provant el següent lema,

Lema 2.3.1. *Sigui $\{x_n\}$ la família de processos definits per (2.4). Existeix una constant K tal que per a tot $(s,t) < (s',t')$*

$$\sup_n E\big[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^4\big] \leq K(s'-s)^2(t'-t)^2.$$

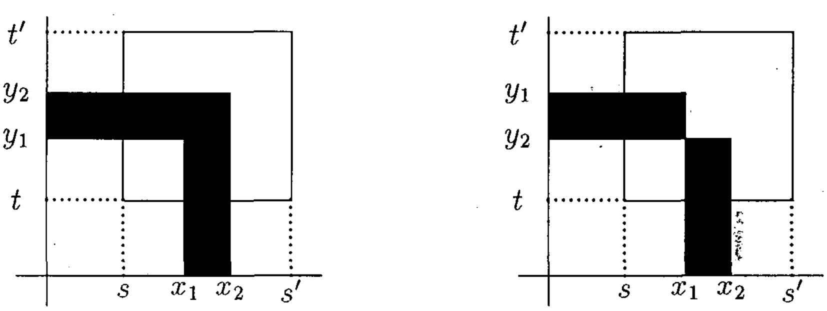
Per tal de provar el lema 2.3.1 ens serà útil el següent resultat que també utilitzarem en la secció 2.4,

Lema 2.3.2. *Sigui $\{x_n\}$ la família de processos definits per (2.4). Llavors si $(s,t) < (s',t')$*

$$E\big[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2\big] \leq 4(s'-s)(t'-t).$$

Prova: Observem que

$$\begin{aligned}
& E\big[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2\big] \\
= \;& n^2 E\Big[\Big(\int_t^{t'}\int_s^{s'} \sqrt{xy}(-1)^{N_n(x,y)}dxdy\Big)^2\Big] \\
= \;& n^2 E\Big[\prod_{i=1}^{2}\Big(\int_t^{t'}\int_s^{s'} \sqrt{x_iy_i}(-1)^{N_n(x_i,y_i)}dx_idy_i\Big)\Big] \\
= \;& n^2 \int_{[s,s']^2\times[t,t']^2} \sqrt{x_1x_2y_1y_2}E\big[(-1)^{N_n(x_1,y_1)+N_n(x_2,y_2)}\big]dx_1dx_2dy_1dy_2.
\end{aligned}$$



Dibuix 2. Els dos ordres possibles de dos punts en el pla.

Observem que $(-1)^{\sum_{i=1}^2 N_n(x_i,y_i)} = (-1)^{\sum_{i=1}^2 \Delta_{0,0}N_n(x_i,y_i)}$, i aquest darrer sumatori és igual al sumatori dels increments del procés de Poisson al llarg d'alguns rectangles disjunts. Cada un d'aquests últims increments apareix un sol cop o dos cops. Òbviament, els rectangles que contribuiran al valor de $(-1)^{\sum_{i=1}^2 \Delta_{0,0}N_n(x_i,y_i)}$ són aquells que tan sols apareixen un cop.

Si suposem que $x_1 \leq x_2$ hi ha dos ordres possibles en el pla per als punts (x_1,y_1), (x_2,y_2). (Veure el Dibuix 1, les zones fosques corresponen als rectangles que apareixen un sol cop en el sumatori $\sum_{i=1}^2 \Delta_{0,0}N_n(x_i,y_i)$.)

Ara, utilitzant que el procés de Poisson té increments independents, i que si $Z \sim \text{Poiss}(\lambda)$ llavors $E[(-1)^Z]) = \exp(-2\lambda)$, obtenim que

$$E\left[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2\right] = 2(I_1 + I_2),$$

on

$$\begin{aligned} I_1 &= n^2 \int_{[s,s']^2 \times [t,t']^2} \sqrt{x_1 x_2 y_1 y_2} \exp[-2n(x_2 y_2 - x_1 y_1)] \\ &\quad \times I_{\{x_1 \le x_2\}} I_{\{y_1 \le y_2\}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2, \\ I_2 &= n^2 \int_{[s,s']^2 \times [t,t']^2} \sqrt{x_1 x_2 y_1 y_2} \exp[-2n(x_2 - x_1) y_2 - 2n(y_1 - y_2) x_1] \\ &\quad \times I_{\{x_1 \le x_2\}} I_{\{y_2 \le y_1\}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Fent un canvi de variables per tal d'obtenir $y_1 \le y_2$ és fàcil veure que $I_1 \le I_2$. Llavors,

$$\begin{aligned} & E\left[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2\right] \\ \le\; & 4n^2 \int_{[s,s']^2 \times [t,t']^2} \sqrt{x_1 x_2 y_1 y_2} \exp[-2n(x_2 - x_1) y_1 - 2n(y_2 - y_1) x_1] \\ & \times I_{\{x_1 \le x_2\}} I_{\{y_1 \le y_2\}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Usant que $x_2 \le s'$, $y_2 \le t'$ i després integrant respecte aquestes dues variables, obtenim que la darrera expressió és menor o igual que

$$\begin{aligned} \sqrt{s'}\sqrt{t'} \int_s^{s'} \frac{1}{\sqrt{x_1}} dx_1 \int_t^{t'} \frac{1}{\sqrt{y_1}} dy_1 &= 4\sqrt{s'}(\sqrt{s'} - \sqrt{s})\sqrt{t'}(\sqrt{t'} - \sqrt{t}) \\ &\le 4(s'-s)(t'-t). \end{aligned}$$

□

Estem en condicions ara de provar el Lema 2.3.1.

2.3.1 Prova del Lema 2.3.1.

Pel lema 5.4.2 de l'Apèndix, és suficient provar el lema pel cas en que s i t són estrictament positius, i a més a més compleixen que $t' - t < t$ i $s' - s < s$. (Veure l'Apèndix 5.4 per a la prova d'aquest resultat).

Tenim que

$$E\left[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^4\right] = n^4 E\left[\left(\int_t^{t'} \int_s^{s'} \sqrt{xy}(-1)^{N_n(x,y)} dx dy\right)^4\right]$$

$$= \quad n^4 E\Big[\prod_{i=1}^{4}\Big(\int_t^{t'}\int_s^{s'}\sqrt{x_i y_i}(-1)^{N_n(x_i,y_i)}dx_i dy_i\Big)\Big].$$

Observem que $(-1)^{\sum_{i=1}^4 N_n(x_i,y_i)} = (-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{0,0}N_n(x_i,y_i)}$, i que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{4}\Delta_{0,0}N_n(x_i,y_i)\\ = \;&\sum_{i=1}^{4}\Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)+\sum_{i=1}^{4}\Delta_{s,0}N_n(x_i,t)+\sum_{i=1}^{4}\Delta_{0,t}N_n(s,y_i)+4\Delta_{0,0}N_n(s,t).\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}&(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{0,0}N_n(x_i,y_i)}\\ = \;&(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)}(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{s,0}N_n(x_i,t)}(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{0,t}N_n(s,y_i)}\end{aligned}$$

i aquests tres factors són independents. Si suposem $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ i $y_1 \le y_2 \le y_3 \le y_4$, tenim que

$$\begin{aligned}&E\big[(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{s,0}N_n(x_i,t)}\big]E\big[(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{0,t}N_n(s,y_i)}\big]\\ = \;&\exp[-2nt[(x_4-x_3)+(x_2-x_1)]\exp[-2ns[(y_4-y_3)+(y_2-y_1)],\end{aligned}$$

usant que $2t > t'$ i $2s > s'$, aquesta darrera expressió és menor o igual que

$$\begin{aligned}&\exp[-nt'[(x_4-x_3)+(x_2-x_1)]\exp[-ns'[(y_4-y_3)+(y_2-y_1)]\\ \le \;&\exp[-n[(x_4-x_3)y_3+(x_2-x_1)y_1]\exp[-n[(y_4-y_3)x_3+(y_2-y_1)x_1].\end{aligned}$$

Finalment podem fitar $E\big[(-1)^{\sum_{i=1}^4 \Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)}\big]$ per 1. Per tant,

$$\begin{aligned}&E\big[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^4\big]\\ \le \;&Kn^4\int_{[s,s']^4\times[t,t']^4}\prod_{i=1}^{4}\sqrt{x_i y_i}\exp[-n[(x_4-x_3)y_3+(x_2-x_1)y_1]\\ &\times I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}\exp[-n[(y_4-y_3)x_3+(y_2-y_1)x_1]I_{\{y_1\le y_2\le y_3\le y_4\}}dx_1\dots dy_4\\ \le \;&K\big(n^2\int_{[s,s']^2\times[t,t']^2}\sqrt{x_1x_2y_1y_2}\exp[-n(x_2-x_1)y_1-n(y_2-y_1)x_1]\end{aligned}$$

$$\times I_{\{x_1 \leq x_2\}} I_{\{y_1 \leq y_2\}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \Big)^2$$

$$\leq K\Big(n^2 \int_{[\frac{s}{2},\frac{s'}{2}]^2 \times [t,t']^2} \sqrt{x_1 x_2 y_1 y_2} \exp[-2n(x_2 - x_1)y_1 - 2n(y_2 - y_1)x_1]$$

$$\times I_{\{x_1 \leq x_2\}} I_{\{y_1 \leq y_2\}} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \Big)^2.$$

Usant els càlculs del Lema 2.3.2 aquesta darrera expressió està fitada per $K(t'-t)^2(s'-s)^2$.

□

2.4 Identificació de la llei límit.

Hem provat que la família de lleis P_n és ajustada. Ara, hem de veure que la llei de tots els possibles límits febles és la llei d'un drap Brownià.

Sigui $\{P_{n_i}\}_i$ una subsuccessió de $\{P_n\}_n$ (que, fent un abús de notació, la denotarem també per $\{P_n\}$) feblement convergent cap a una certa probabilitat P. Hem de veure que P és la mesura de Wiener, és a dir, que el procés canònic $\{X_{s,t}(x) =: x(s,t)\}$ és un drap Brownià sota la probabilitat P.

Existeixen diverses possibles caracteritzacions del drap Brownià, veure per exemple [Tu] o bé [FN]. En particular, en el Teorema 2.2 de [FN] es donen condicions necessàries i suficients per a què un procés sigui un drap Brownià respecte una filtració arbitrària. Si ens restringim al cas on la filtració que considerem és la filtració natural, generada pel propi procés, es poden afeblir lleugerament les hipòtesis del Teorema 2.2 de [FN]. Obtenim llavors la següent caracterització del procés de Wiener a dos paràmetres,

Teorema 2.4.1. *Sigui $X = \{X_{s,t};\ (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ un procés continu tal que $X_{s,0} = X_{0,t} = 0$. I sigui $(\mathcal{F}_{s,t})$ la filtració natural de X.*

Llavors, són equivalents:

- *(i) X és un drap Brownià,*
- *(ii) Per a tot $0 < s \leq s'$, $0 < t \leq t'$, $E\big(\Delta_{s,t}X_{s',t'} | \mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{s,T}\big) = 0$ i $E\big[(\Delta_{s,t}X_{s',t'})^2 | \mathcal{F}_{S,t} \vee F_{s,T}\big] = (s'-s)(t'-t)$,*
- *(iii) Per a tot $0 < s \leq s'$, $0 < t \leq t'$, $E\big(\Delta_{s,t}X_{s',t'} | \mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{s,T}\big) = 0$ i $E\big[(\Delta_{s,t}X_{s',t'})^2 | \mathcal{F}_{S,t}\big] = (s'-s)(t'-t)$,*
- *(iv) Per a tot $0 < s \leq s'$, $0 < t \leq t'$, $E\big(\Delta_{s,t}X_{s',t'} | \mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{s,T}\big) = 0$ i $E\big[(\Delta_{s,t}X_{s',t'})^2 | \mathcal{F}_{s,T}\big] = (s'-s)(t'-t)$.*

La diferència entre la condició (ii) i el Teorema 2.2 de [FN] és que per a obtenir un drap Brownià (respecte la seva filtració natural) n'hi ha prou comprovant les propietats de martingala forta i "variació quadràtica" per increments de rectangles que no intersecten els eixos.

Les condicions (iii) i (iv), ens donen que de fet n'hi ha prou provant la propietat de "variació quadràtica" condicionant per l'1-passat o be el 2-passat, però això no ens simplifica els càlculs en el nostre cas.

Nosaltres després aplicarem aquest resultat a la filtració natural d'un procés que, a priori, no sabem si compleix la condició $F4$, i per tant no podem suposar-la. Però si la filtració natural del procés té la propietat $F4$, afegint hipòtesis febles, és fàcil demostrar la mateixa caracterització del drap brownià, però condicionant pel passat estricte $\mathcal{F}_{s,t}$ en la propietat de la variació quadràtica, la qual cosa pot simplificar força els càlculs. Malauradament, com ja s'ha dit anteriorment, nosaltres no podem suposar a priori aquesta condició.

Prova: (Teorema 2.4.1)

És obvi que *(i)* implica *(ii)* i que *(ii)* implica *(iii)* i *(iv)*. Veurem tot seguit que *(iv)* implica *(i)*.

Fixats $(0,0) < (s,t) \le (s',t')$ considerem el procés $Y(u) := \Delta_{s,t} X_{u,t'}$, $u \in [s,S]$, i la σ-àlgebra $\mathcal{G}_u := \mathcal{F}_{u,T}$.

Observem que per a tot u i v tals que $s \le u \le v \le S$

$$\begin{aligned} E\big(Y(v) - Y(u)|\mathcal{G}_u\big) &= E\big(\Delta_{u,t} X_{v,t'}|\mathcal{F}_{u,T}\big) \\ &= E\big(E\big(\Delta_{u,t} X_{v,t'}|\mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{u,T}\big)|\mathcal{F}_{u,T}\big) = 0, \end{aligned}$$

per tant $\{Y(u), \mathcal{G}_u, u \in [s,S]\}$ és martingala.

D'altra banda,

$$\begin{aligned} E\big((Y(v) - Y(u))^2|\mathcal{G}_u\big) &= E\big((\Delta_{u,t} X_{v,t'})^2|\mathcal{F}_{u,T}\big) \\ &= (v-u)(t'-t). \end{aligned}$$

Així, pel teorema de Paul Lévy tenim que $\{Y(u), \mathcal{G}_u, u \in [s,S]\}$ és un procés de Wiener amb variància $(u-s)(t'-t)$.

Si considerem doncs els increments $\Delta_{s,t} X_{s',t'} = Y(s') - Y(s)$, tenen distribució normal amb mitjana nul.la i variància $(t'-t)(s'-s)$.

Suposem ara que almenys una de les dues coordenades del punt (s,t) és nul.la. Podem considerar $\Delta_{s+\varepsilon,t+\varepsilon} X_{s',t'}$ amb $\varepsilon > 0$. Aquests increments seran variables aleatòries gaussianes centrades i, si fem tendir ε a zero, usant la continuïtat de X tindrem que $\Delta_{s,t} X_{s',t'}$ també és una variable aleatòria gaussiana centrada amb variància $(t'-t)(s'-s)$.

Finalment, sabem que $E\big(\Delta_{s,t} X_{s',t'}|\mathcal{F}_{S,t} \vee \mathcal{F}_{s,T}\big) = 0$, per tant tots els increments són incorrelacionats i, com que són gaussians, independents.

De manera anàloga es pot provar que (iii) implica també (i).

□

Així doncs, en el nostre cas, per tal de provar que la llei límit és la mesura de Wiener, n'hi ha prou provant les dues proposicions següents.

Proposició 2.4.2. *Suposem que $\{P_n\}$ són les lleis en $C([0,S]\times[0,T])$ dels processos x_n definits en (2.4), i suposem també que P_{n_i} és una successió feblement convergent cap a P. Sigui X el procés canònic i sigui $\{\mathcal{F}_{s,t}\}$ la seva filtració natural. Llavors per a tot $0<s\le s'$, $0<t\le t'$, $E_P\big(\Delta_{s,t}X_{s',t'}|\mathcal{F}_{S,t}\vee\mathcal{F}_{s,T}\big)=0$.*

Proposició 2.4.3. *Sota les hipòtesis de la proposició anterior, tenim que*

$$E_P\big[(\Delta_{s,t}X_{s',t'})^2|\mathcal{F}_{S,t}\vee\mathcal{F}_{s,T}\big]=(s'-s)(t'-t),\qquad \text{per a tot } 0<s\le s',\quad 0<t\le t'.$$

2.4.1 Prova de la Proposició 2.4.2.

Hem de provar només que per a tot $(s_1,t_1),\ldots,(s_m,t_m)$ i $\delta>0$ amb $s_i\le S$, $t_i\le t-\delta$ o bé $s_i\le s-\delta$, $t_i\le T$, per a $i=1,\ldots,m$, i per a tota funció contínua i fitada $\varphi:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$

$$E_P[\varphi(X_{s_1,t_1},\ldots,X_{s_m,t_m})(\Delta_{s,t}X_{s',t'})]=0.$$

Del fet que $P_n\stackrel{w}{\Rightarrow}P$, i usant també el Lema 2.3.1, que ens dóna la integrabilitat uniforme de la família $\{\Delta_{s,t}x_n(s',t')\}$, tenim que

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}E_{P_n}[\varphi(x(s_1,t_1),\ldots,x(s_m,t_m))(\Delta_{s,t}x(s',t'))]\\ =\;& E_P[\varphi(x(s_1,t_1),\ldots,x(s_m,t_m))(\Delta_{s,t}x(s',t'))].\end{aligned}$$

Per tant, n'hi ha prou provant que

$$\lim_{n\to\infty}E_{P_n}[\varphi(x(s_1,t_1),\ldots,x(s_m,t_m))(\Delta_{s,t}x(s',t'))]=0.$$

Tenim que

$$\begin{aligned}&|E_{P_n}\big[\varphi(x(s_1,t_1),\ldots,x(s_m,t_m))(\Delta_{s,t}x(s',t'))\big]|\\ =\;&|E\big[\varphi(x_n(s_1,t_1),\ldots,x_n(s_m,t_m))(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))\big]|\\ =\;&|E\big[\varphi(x_n(s_1,t_1),\ldots,x_n(s_m,t_m))E\big[\Delta_{s,t}x_n(s',t')|\mathcal{G}^n_{s,t,\delta}\big]\big]|\\ \le\;&(E\big[\varphi^2(x_n(s_1,t_1),\ldots,x_n(s_m,t_m))\big]^{1/2}(E\big[Y_n^2\big])^{1/2}\le K(E\big[Y_n^2\big])^{1/2},\end{aligned}$$

on $\mathcal{G}^n_{s,t,\delta} = \mathcal{F}^n_{S,t-\delta} \vee \mathcal{F}^n_{s-\delta,T}$ i

$$Y_n := E\big[n \int_{[s,s']\times[t,t']} \sqrt{xy}(-1)^{N_n(x,y)} dxdy | \mathcal{G}^n_{s,t,\delta}\big].$$

Així doncs, és suficient provar que Y_n convergeix cap a zero en L^2 quan n tendeix a infinit.

Observem que $\Delta_{s-\delta,t-\delta} N_n(s,t)$ és independent de $\mathcal{G}^n_{s,t,\delta}$, i

$$\begin{aligned} & E\big[n \int_{[s,s']\times[t,t']} \sqrt{xy}(-1)^{N_n(x,y)} dxdy | \mathcal{G}^n_{s,t,\delta}\big] \\ = \; & E\big[(-1)^{\Delta_{s-\delta,t-\delta} N_n(s,t)}\big] \\ & \times E\big[n(-1)^{\Delta_{s-\delta,t-\delta} N_n(s,t)} \int_{[s,s']\times[t,t']} \sqrt{xy}(-1)^{N_n(x,y)} dxdy | \mathcal{G}^n_{s,t,\delta}\big], \end{aligned}$$

que clarament tendeix a zero en L^2 ja que aquesta esperança condicionada està fitada en L^2 pel Lema 2.3.2, i $E\big[(-1)^{\Delta_{s-\delta,t-\delta} N_n(s,t)}\big] = \exp[-2\delta^2 n]$ tendeix a zero quan $n \to \infty$.

□

2.4.2 Prova de la Proposició 2.4.3.

Hem de provar que per a tot $(s_1,t_1),\ldots,(s_m,t_m)$ amb $s_i \leq S$, $t_i \leq t$ o bé $s_i \leq s$, $t_i \leq T$, per a $i = 1,\ldots,m$, i per a tota $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua i fitada,

$$E_P\big[\varphi(X_{s_1,t_1},\ldots,X_{s_m,t_m})((\Delta_{s,t} X_{s',t'})^2 - (s'-s)(t'-t))\big] = 0.$$

Recordem que només calia provar-ho per $s, t > 0$.

Del fet que P_n convergeix feblement cap a P i utilitzant també el Lema 2.3.1 n'hi ha prou provant que

$$E\big[\varphi(x_n(s_1,t_1),\ldots,x_n(s_m,t_m))\big((\Delta_{s,t} x_n(s',t'))^2 - (s'-s)(t'-t)\big)\big]$$

convergeix a zero quan n tendeix a infinit.

Però aquesta darrera expressió és igual a

$$E\big[\varphi(x_n(s_1,t_1),\ldots,x_n(s_m,t_m))\big(E[(\Delta_{s,t} x_n(s',t'))^2 | \mathcal{F}^n_{S,t} \vee \mathcal{F}^n_{s,T}] - (s'-s)(t'-t)\big)\big].$$

Finalment, per tal de veure que aquesta expressió tendeix a zero, és suficient provar que

$$E[(\Delta_{s,t} x_n(s',t'))^2 | \mathcal{F}^n_{S,t} \vee \mathcal{F}^n_{s,T}] \xrightarrow{L^2} (s'-s)(t'-t) \quad \text{quan } n \to \infty. \tag{2.5}$$

Podem demostrar aquesta darrera convergència provant els dos fets següents:

- **1)** $E\big[E[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2|\mathcal{F}^n_{S,t}\vee\mathcal{F}^n_{s,T}]\big] = E[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2] \longrightarrow (s'-s)(t'-t)$, quan $n\to\infty$.

  Aquest resultat està demostrat al Lema 2.4.4.

- **2)** Existeixen unes constants C_n que convergeixen a $(s'-s)^2(t'-t)^2$, quan n tendeix a infinit, tals que

$$E\big[E[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2|\mathcal{F}^n_{S,t}\vee\mathcal{F}^n_{s,T}]\big]^2 \le C_n.$$

  Aquest resultat el provarem en el Lema 2.4.5.

Aquests dos fets impliquen la convergència (2.5) perquè si suposem que **1)** i **2)** són certs,

$$\begin{aligned} 0 &\le E[E[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2|\mathcal{F}^n_{S,t}\vee\mathcal{F}^n_{s,T}] - (s'-s)(t'-t)]^2 \\ &\le C_n - 2(s'-s)(t'-t)\,E[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2] + (s'-s)^2(t'-t)^2, \end{aligned}$$

i aquesta darrera expressió convergeix, òbviament, a zero. Això acaba la prova de la Proposició 2.4.3.

□

Veurem a continuació les proves dels Lemes 2.4.4 i 2.4.5.

Lema 2.4.4. *En la situació anterior*

$$\lim_{n\to\infty} E\big[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2\big] = (s'-s)(t'-t).$$

Prova:
En la prova del Lema 2.3.2 hem vist que

$$E\big[(\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2\big] = 2(I_1+I_2),$$

on

$$\begin{aligned} I_1 &= n^2\int_{[s,s']^2\times[t,t']^2}\sqrt{x_1x_2y_1y_2}\exp[-2n(x_2y_2-x_1y_1)] \\ &\quad\times I_{\{x_1\le x_2\}}I_{\{y_1\le y_2\}}dx_1dx_2dy_1dy_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = &\; n^2\int_{[s,s']^2\times[t,t']^2}\sqrt{x_1x_2y_1y_2}\exp[-2n(x_2-x_1)y_1-2n(y_2-y_1)x_1] \\ &\times I_{\{x_1\le x_2\}}I_{\{y_1\le y_2\}}dx_1dx_2dy_1dy_2. \end{aligned}$$

Podem escriure la integral I_2 com

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_s^{s'} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \int_t^{t'} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} \Big[\int_{y_1}^{t'} (2nx_1 \exp[-2nx_1(y_2 - y_1)]) \sqrt{y_2} dy_2 \\ &\times \int_{x_1}^{s'} (2ny_1 \exp[-2ny_1(x_2 - x_1)]) \sqrt{x_2} dx_2 \Big] dy_1 dx_1. \end{aligned}$$

L'última integral tendeix a $\sqrt{x_1}$ perquè $2ny_1 \exp[-2ny_1(x_2 - x_1)] I_{[x_1,\infty)}(x_2)$ és una densitat de probabilitat i ens dóna una aproximació de la identitat quan $n \to \infty$, així mateix, la penúltima integral tendeix a $\sqrt{y_1}$ quan $n \to \infty$. La convergència està dominada perquè ambdues integrals estan fitades per $\sqrt{s'}$ i $\sqrt{t'}$ respectivament i $\frac{1}{\sqrt{x_1 y_1}}$ és integrable, així doncs, pel teorema de la convergència dominada, obtenim que

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = \frac{1}{4} \int_s^{s'} \int_t^{t'} dy_1 dx_1 = \frac{(s'-s)(t'-t)}{4}.$$

De la mateixa manera,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_s^{s'} \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \int_t^{t'} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} \Big[\int_{y_1}^{t'} (2nx_2 \exp[-2nx_2(y_2 - y_1)]) \sqrt{y_2} dy_2 \\ &\times \int_{s}^{x_2} (2ny_1 \exp[-2ny_1(x_2 - x_1)]) \sqrt{x_1} dx_1 \Big] dy_1 dx_2. \end{aligned}$$

i tenim que

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = \frac{(s'-s)(t'-t)}{4}.$$

□

Lema 2.4.5. *En la situació anterior existeixen certes constants C_n que convergeixen cap a $(s'-s)^2(t'-t)^2$ quan n tendeix a infinit, tals que*

$$E\big[E((\Delta_{s,t} x_n(s',t'))^2 | \mathcal{F}^n_{S,t} \vee \mathcal{F}^n_{s,T})\big]^2 \leq C_n.$$

Prova:

Recordem que n'hi ha prou provant-ho pel cas en què $s,t > 0$. Així doncs, suposarem a partir d'ara que $s,t>0$. Per mesurabilitat i independència tenim que

$$\begin{aligned} & E((\Delta_{s,t} x_n(s',t'))^2 | \mathcal{F}^n_{S,t} \vee \mathcal{F}^n_{s,T}) \\ &= n^2 \int_{[s,s']^2 \times [t,t']^2} (-1)^{\sum_{i=1}^2 (\Delta_{0,t} N_n(s,y_i) + \Delta_{s,0} N_n(x_i,t))} \\ &\times \prod_{i=1}^2 \sqrt{x_i y_i} E\big[(-1)^{\sum_{i=1}^2 \Delta_{s,t} N_n(x_i,y_i)}\big] dx_1 \dots dy_2. \end{aligned}$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
&E\big[E((\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2|\mathcal{F}^n_{S,t}\vee\mathcal{F}^n_{s,T})\big]^2\\
=\ & E\big[n^4\int_{[s,s']^4\times[t,t']^4}(-1)^{\sum_{i=1}^4(\Delta_{0,t}N_n(s,y_i)+\Delta_{s,0}N_n(x_i,t))}\\
&\times\prod_{i=1}^4\sqrt{x_iy_i}E[(-1)^{\sum_{i=1}^2\Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)}]E[(-1)^{\sum_{i=3}^4\Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)}]dx_1\dots dy_4.
\end{aligned}
$$

Usant el mateix tipus d'arguments que en la prova del Lema 2.3.2 tenim que

$$
\begin{aligned}
&E[(-1)^{\sum_{i=1}^2\Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)}]\\
&\leq\exp[-2n(|x_2-x_1|(\min\{y_1,y_2\}-t)+|y_2-y_1|(\min\{x_1,x_2\}-s))],
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

i també que

$$
\begin{aligned}
&E[(-1)^{\sum_{i=3}^4\Delta_{s,t}N_n(x_i,y_i)}]\\
&\leq\exp[-2n(|x_4-x_3|(\min\{y_3,y_4\}-t)+|y_4-y_3|(\min\{x_3,x_4\}-s))].
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Així doncs,

$$
\begin{aligned}
&E\big[E((\Delta_{s,t}x_n(s',t'))^2|\mathcal{F}^n_{S,t}\vee\mathcal{F}^n_{s,T})\big]^2\\
\leq\ & 16[n^4\int_{[s,s']^4\times[t,t']^4}|E(-1)^{\sum_{i=1}^4(\Delta_{0,t}N_n(s,y_i)+\Delta_{s,0}N_n(x_i,t))}|\\
&\times\prod_{i=1}^4\sqrt{x_iy_i}\exp[-2n((x_2-x_1)(y_1-t)+(y_2-y_1)(x_1-s))] \qquad (2.8)\\
&\times\exp[-2n((x_4-x_3)(y_3-t)+(y_4-y_3)(x_3-s))]\\
&\times I_{\{x_1\leq x_2\}}I_{\{y_1\leq y_2\}}I_{\{x_3\leq x_4\}}I_{\{y_3\leq y_4\}}dx_1\dots dy_4.
\end{aligned}
$$

Podem dividir la darrera integral en dues parts:

- **1)** La integral sobre la regió $A=\big(\{y_1\leq y_2\leq y_3\leq y_4\}\cup\{y_3\leq y_4\leq y_1\leq y_2\}\big)\cap\big(\{x_1\leq x_2\leq x_3\leq x_4\}\cup\{x_3\leq x_4\leq x_1\leq x_2\}\big)$.
- **2)** La integral sobre la regió A^c.

Si integrem sobre A,

$$
\begin{aligned}
&|E(-1)^{\sum_{i=1}^{4}(\Delta_{0,t}N_n(s,y_i)+\Delta_{s,0}N_n(x_i,t))}| \\
= \quad & \exp\big[-2ns[(y_4-y_3)+(y_2-y_1)]-2nt[(x_4-x_3)+(x_2-x_1)]\big],
\end{aligned}
$$

i la integral (2.8), sobre la regió A, es pot fitar per

$$
\begin{aligned}
&16\Big(n^2\int_{[s,s']^2\times[t,t']^2}\prod_{i=1}^{2}\sqrt{x_iy_i}\exp[-2n(x_2-x_1)y_1-2n(y_2-y_1)x_1] \\
&\times I_{\{x_1\le x_2\}}I_{\{y_1\le y_2\}}dx_1\dots dy_2\Big)^2
\end{aligned}
$$

que, tal i com hem vist en el Lema 2.4.4, convergeix cap a

$$16\left(\frac{(s'-s)(t'-t)}{4}\right)^2=(s'-s)^2(t'-t)^2.$$

Quan integrem sobre A^c, veurem tot seguit que la integral convergeix cap a zero. Si tenim $y_1\le y_3\le y_2\le y_4$ (o bé $y_1\le y_3\le y_4\le y_2$) podem fitar (2.6) per $\exp[-2n(y_2-y_3)(x_1-s)]$ (o bé $\exp[-2n(y_4-y_3)(x_1-s)]$) i (2.7) per 1.

Si, en canvi, tenim $y_3\le y_1\le y_4\le y_2$ (o bé $y_3\le y_1\le y_2\le y_4$) fitarem (2.7) per $\exp[-2n(y_4-y_1)(x_3-s)]$ (o bé $\exp[-2n(y_2-y_1)(x_3-s)]$) i (2.6) per 1.

Llavors, fent un canvi de variables per tal d'obtenir $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$ i $y_1\le y_2\le y_3\le y_4$ podem majoritzar la integral donada per (2.8), sobre $(\{y_1\le y_2\le y_3\le y_4\}\cup\{y_3\le y_4\le y_1\le y_2\})^c$, per

$$
\begin{aligned}
&Kn^4\int_{[s,s']^4\times[t,t']^4}\prod_{i=1}^{4}\sqrt{x_iy_i}\exp[-2nt[(x_4-x_3)+(x_2-x_1)] \\
&-2ns[(y_4-y_3)+(y_2-y_1)]-2n(y_3-y_2)(x_1-s)] \\
&\times I_{\{x_1\le x_2\le x_3\le x_4\}}I_{\{y_1\le y_2\le y_3\le y_4\}}dx_1\dots dy_4.
\end{aligned}
$$

Finalment, usant que $s,t>0$, aquesta integral és igual a

$$
\begin{aligned}
&K\frac{1}{s^2t^2}\int_s^{s'}\sqrt{x_1}\int_s^{s'}\sqrt{x_3}\int_t^{t'}\sqrt{y_2}\int_{y_2}^{t'}\sqrt{y_3}\Big\{\int_{x_3}^{s'}2nt\exp[-2nt(x_4-x_3)]\sqrt{x_4}dx_4 \\
&\times\int_{x_1}^{s'}2nt\exp[-2nt(x_2-x_1)]\sqrt{x_2}dx_2\int_{y_3}^{t'}2ns\exp[-2ns(y_4-y_3)]\sqrt{y_4}dy_4 \\
&\times\int_t^{y_2}2ns\exp[-2ns(y_2-y_1)]\sqrt{y_1}dy_1\Big\}\exp[-2n(y_3-y_2)(x_1-s)]dy_3dy_2dx_3dx_1,
\end{aligned}
$$

que convergeix a zero per convergència dominada.

Intercanviant els papers de les variables x_i i y_i per a $i = 1, \ldots, 4$ obtindrem una integral similar.

Això acaba la demostració.

$\square$

Capítol 3

El moviment Brownià complex com a límit feble de processos construïts amb un procés de Poisson.

3.1 Introducció i resultat principal.

Considerem els processos

$$\{x_\varepsilon^\theta(t) = \varepsilon \int_0^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} e^{i\theta N_s} ds, \quad t \in [0,T]\} \tag{3.1}$$

on $\{N_s,\ s \geq 0\}$ és un procés de Poisson estàndard.

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar els límits febles d'aquests processos segons el valor de θ quan ε tendeix a zero.

En el cas trivial, quan $\theta = 0$, els processos $x_\varepsilon^\theta(t)$ són deterministes i és obvi que tendeixen a infinit quan ε tendeix a zero.

Pel que fa al cas $\theta = \pi$, tenim que els processos x_ε^θ són reals, concretament

$$x_\varepsilon^\theta(t) = \varepsilon \int_0^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} (-1)^{N_s} ds.$$

Aquest cas va ser estudiat per Stroock en [St], i va provar que les lleis d'aquests processos en l'espai de les funcions contínues en $[0,T]$ convergien cap a la llei de $\sqrt{2}W_t$, on $\{W_t;\ t \in [0,T]\}$ és un moviment Brownià estàndard. (Vegeu el Teorema 0.0.7 dels preliminars d'aquesta memòria).

Volem doncs estudiar què passa pels casos en els quals $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$. El principal resultat d'aquest capítol, que a la vegada també dóna una manera alternativa de demostrar el cas $\theta = \pi$ provat per Stroock, és el següent:

Teorema 3.1.1. *Definim per a tot* $\varepsilon > 0$

$$\{x_\varepsilon^\theta(t) = \varepsilon \int_0^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} e^{i\theta N_s} ds, \quad t \in [0,T]\}$$

on $\{N_s,\ s \geq 0\}$ *és un procés de Poisson estàndard.*

Considerem P_ε^θ *la llei imatge de* x_ε^θ *en l'espai de Banach* $\mathcal{C}([0,T])$ *de les funcions contínues en* $[0,T]$. *Llavors, si* $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, P_ε^θ *convergeix feblement quan* ε *tendeix a zero cap a la llei d'un moviment Brownià complex en* $\mathcal{C}([0,T])$.

En canvi, si $\theta = \pi$, P_ε^θ *convergeix feblement cap a la llei de* $\sqrt{2}W_t$ *on* $\{W_t;\ t \in [0,T]\}$ *és un moviment Brownià estàndard.*

Entenem que $\{B_t,\ t \in [0,T]\}$ és un moviment brownià complex si pren valors en $\mathbb{C}$ i tant la part real com la part imaginària són moviments brownians estàndards i són independents entre elles.

Cal notar que els processos part real i part imaginària que integrem són funcionalment dependents, i tot i així, en fer les integrals i passar al límit, obtenim processos independents.

Aquests processos tenen propietats força diferents dels exemples clàssics que convergeixen en llei al procés de Wiener. Per exemple, els processos $\{\cos(\theta N_s)\}$ i $\{\sin(\theta N_s)\}$ no són estacionaris ni inclouen sumes de variables aleatòries independents. A més a més, els seus salts s'esdevenen en temps aleatoris i, segons el valor del paràmetre θ, la mida dels salts no és constant.

Per provar el teorema hem de veure que la família de lleis P_ε^θ és ajustada (veure secció 3.2) i hem d'identificar tots els possibles límits de subsuccessions de P_ε^θ com la llei d'un moviment Brownià complex quan $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, i com la llei de $\sqrt{2}W_t$ quan $\theta = \pi$(veure secció 3.3).

Al llarg d'aquest capítol K denotarà una constant positiva que només depèn de T i que pot variar d'una expressió a una altra.

3.2 Prova de l'ajustament.

Podem escriure

$$x_\varepsilon^\theta(t) = \varepsilon \int_0^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \cos(\theta N_s) ds + i\varepsilon \int_0^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \sin(\theta N_s) ds.$$

Hem de veure que tant les lleis corresponents a la part real, com les corresponents a la part imaginària, dels processos x_ε^θ són ajustades.

Usant el criteri donat per Billingsley (veure Teorema 12.3 de [Bi]), i que els nostres processos són nuls a l'origen, n'hi ha prou provant el següent lema:

Lema 3.2.1. *Existeix una constant K tal que per a tot $s < t$*

$$\sup_{\varepsilon} \left(E(\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \cos(\theta N_x) dx)^4 + E(\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \sin(\theta N_x) dx)^4\right) \leq K(t-s)^2.$$

Prova: Tenim que

$$\begin{aligned}
& E(\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \cos(\theta N_x) dx)^4 + E(\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \sin(\theta N_x) dx)^4 \\
= \ & 24\varepsilon^4 E \int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2}, \frac{2t}{\varepsilon^2}]^4} I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \big(\cos(\theta N_{x_4}) \cos(\theta N_{x_3}) \cos(\theta N_{x_2}) \cos(\theta N_{x_1}) \\
& + \sin(\theta N_{x_4}) \sin(\theta N_{x_3}) \sin(\theta N_{x_2}) \sin(\theta N_{x_1})\big) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\
= \ & 12\varepsilon^4 E \int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2}, \frac{2t}{\varepsilon^2}]^4} I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \cos(\theta(N_{x_4} - N_{x_3})) \cos(\theta(N_{x_2} - N_{x_1})) dx_1 \dots dx_4 \\
& + 12\varepsilon^4 E \int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2}, \frac{2t}{\varepsilon^2}]^4} I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} \cos(\theta(N_{x_4} + N_{x_3})) \cos(\theta(N_{x_2} + N_{x_1})) dx_1 \dots dx_4 \\
= \ & I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Quan $\theta = \pi$, I_1 i I_2 són iguals perquè llavors, per a tot $K \in \mathbb{N}$, $\cos(K\theta) = (-1)^K$.

Utilitzant que el procés de Poisson té increments independents podem escriure la primera integral com

$$\begin{aligned}
I_1 = \ & 12\varepsilon^4 \int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2}, \frac{2t}{\varepsilon^2}]^4} I_{\{x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4\}} E(\cos(\theta(N_{x_4} - N_{x_3}))) \\
& \times E(\cos(\theta(N_{x_2} - N_{x_1}))) dx_1 \dots dx_4 \\
\leq \ & 12\big(\varepsilon^2 \int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2}, \frac{2t}{\varepsilon^2}]^2} I_{\{x_1 \leq x_2\}} |E(\cos(\theta(N_{x_2} - N_{x_1})))| dx_1 dx_2\big)^2 \\
\leq \ & 12\big(\varepsilon^2 \int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2}, \frac{2t}{\varepsilon^2}]^2} I_{\{x_1 \leq x_2\}} \| E(e^{i\theta(N_{x_2} - N_{x_1})}) \| dx_1 dx_2\big)^2,
\end{aligned}$$

on $\|z\|$ és el mòdul del nombre complex z. Aquesta darrera expressió és igual a

$$\begin{aligned}
& 12\big(\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} e^{-(x_2 - x_1)(1 - \cos(\theta))} dx_1 dx_2\big)^2 \\
\leq \ & \frac{48}{(1 - \cos(\theta))^2} (t-s)^2.
\end{aligned}$$

Això prova ja el lema pel cas $\theta = \pi$. A partir d'ara, doncs, suposarem $\theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. Per aquest cas ens falta provar la fita per a la integral I_2, però, usant que $\{x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4\}$ i que el procés de Poisson té increments independents,

$$
\begin{aligned}
& E\big[\cos(\theta(N_{x_4}+N_{x_3}))\cos(\theta(N_{x_2}+N_{x_1}))\big] \\
= \; & E\big[\cos\big(\theta((N_{x_4}-N_{x_3})+2(N_{x_3}-N_{x_2})+2N_{x_2})\big)\cos(\theta(N_{x_2}+N_{x_1}))\big] \\
= \; & E\big[\cos\big(\theta((N_{x_4}-N_{x_3})+2(N_{x_3}-N_{x_2}))\big)\big]E\big[\cos(2\theta N_{x_2})\cos(\theta(N_{x_2}+N_{x_1}))\big] \\
& -E\big[\sin\big(\theta((N_{x_4}-N_{x_3})+2(N_{x_3}-N_{x_2}))\big)\big]E\big[\sin(2\theta N_{x_2})\cos(\theta(N_{x_2}+N_{x_1}))\big],
\end{aligned}
$$

i podem fitar aquesta darrera expressió per

$$
\begin{aligned}
& |E\big[\cos\big(\theta((N_{x_4}-N_{x_3})+2(N_{x_3}-N_{x_2}))\big)\big]| \\
& +|E\big[\sin\big(\theta((N_{x_4}-N_{x_3})+2(N_{x_3}-N_{x_2}))\big)\big]| \\
\le \; & \big(|E(\cos(\theta(N_{x_4}-N_{x_3}))|+|E(\sin(\theta(N_{x_4}-N_{x_3}))|\big) \\
& \times\big(|E(\cos(2\theta(N_{x_3}-N_{x_2}))|+|E(\sin(2\theta(N_{x_3}-N_{x_2}))|\big).
\end{aligned}
$$

Així doncs, I_2 és menor o igual que

$$
\begin{aligned}
& 12\cdot 4\varepsilon^4\int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2},\frac{2t}{\varepsilon^2}]^4} I_{\{x_1\le\cdots\le x_4\}}\|E(e^{i\theta(N_{x_4}-N_{x_3})})\|\cdot\|E(e^{2i\theta(N_{x_3}-N_{x_2})})\|dx_1\dots dx_4. \\
\le \; & 48\varepsilon^4\int_{[\frac{2s}{\varepsilon^2},\frac{2t}{\varepsilon^2}]^4} I_{\{x_1\le\cdots\le x_4\}}e^{-(x_4-x_3)(1-\cos(\theta))}e^{-(x_3-x_2)(1-\cos(2\theta))}dx_1\dots dx_4.
\end{aligned}
$$

Integrant respecte x_2 i després respecte x_3, aquesta expressió és menor o igual que

$$
\frac{48\varepsilon^4}{(1-\cos(\theta))(1-\cos(2\theta))}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_4} dx_1 dx_4 \le \frac{192(t-s)^2}{(1-\cos(\theta))(1-\cos(2\theta))}.
$$

□

3.3 Identificació de la llei límit.

Considerem primer que $\theta \in (0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. Sigui $\{P^\theta_{\varepsilon_n}\}_n$ una subsuccessió de $\{P^\theta_\varepsilon\}_\varepsilon$ (que continuarem denotant per $\{P^\theta_\varepsilon\}$) feblement convergent cap a alguna probabilitat

P^θ. Hem de veure que el procés canònic $\{X_t(x) =: x(t)\}$ és un moviment Brownià complex sota la probabilitat P^θ, és a dir, hem de veure que tant la part real com la part imaginària d'aquest procés són moviments brownians i que són independents entre ells.

Usant el teorema de Paul Lévy n'hi ha prou provant que, sota la llei P^θ, tant la part real com la part imaginària són martingales respecte la filtració generada pel propi procés, $\{\mathcal{F}_t\}$, amb variacions quadràtiques $< Re[X], Re[X] >_t = t$, $< Im[X], Im[X] >_t = t$ i covariació $< Re[X], Im[X] >_t = 0$.

També hem de veure que quan $\theta = \pi$ el procés canònic sota la llei límit segueix la llei de $\sqrt{2}W_t$ on $\{W_t;\ t \in [0,T]\}$ és un moviment Brownià estàndard. Haurem de provar per tant en aquest cas que X és martingala amb variació quadràtica $< X, X >_t = 2t$.

3.3.1 Propietat de martingala.

Quan $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ per veure que, sota P^θ, tant la part real com la part imaginària del procés canònic X són martingales respecte la filtració natural $\{\mathcal{F}_t\}$, hem de provar que per a tot $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq s$ i per a tota $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E_{P^\theta}\left[\varphi(X_{s_1}, ..., X_{s_n})(Re[X_t] - Re[X_s])\right] = 0,$$

$$E_{P^\theta}\left[\varphi(X_{s_1}, ..., X_{s_n})(Im[X_t] - Im[X_s])\right] = 0.$$

Quan $\theta = \pi$ el procés X és real i per tant n'hi ha prou provant la primera d'aquestes dues condicions.

Del fet que P_ε^θ convergeix feblement cap a P^θ, i usant la integrabilitat uniforme donada pel Lema 3.2.1, tenim que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \to 0} E_{P_\varepsilon^\theta}\left[\varphi(X_{s_1}, ..., X_{s_n})(Re[X_t] - Re[X_s])\right] \\ = \ & E_{P^\theta}\left[\varphi(X_{s_1}, ..., X_{s_n})(Re[X_t] - Re[X_s])\right], \end{aligned}$$

i el mateix passa amb la part imaginària. Per tant és suficient veure que

$$E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n))\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \cos(\theta N_x)dx\big)$$

i,

$$E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n))\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \sin(\theta N_x)dx\big)$$

convergeixen a zero quan ε tendeix a zero.

N'hi haurà prou provant que

$$\|E\big(\varphi(x^\theta_\varepsilon(s_1),...,x^\theta_\varepsilon(s_n))\varepsilon\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} e^{i\theta N_x}dx\big)\|$$

convergeix a zero en tendir ε a zero. Però aquesta expressió és igual a

$$\begin{aligned}
&\|E\big(\varphi(x^\theta_\varepsilon(s_1),...,x^\theta_\varepsilon(s_n))e^{i\theta N_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}}\big)\varepsilon\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} E(e^{i\theta(N_x-N_{\frac{2s}{\varepsilon^2}})})dx\| \\
\leq\ & K\varepsilon\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \|e^{-(x-\frac{2s}{\varepsilon^2})(1-e^{i\theta})}\|dx \\
=\ & K\varepsilon\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} e^{-(x-\frac{2s}{\varepsilon^2})(1-\cos(\theta))}dx \\
\leq\ & K\varepsilon\int_0^{\frac{2(t-s)}{\varepsilon^2}} e^{-x(1-\cos(\theta))}dx \\
=\ & \frac{K\varepsilon}{1-\cos(\theta)}(1-e^{-\frac{2(t-s)}{\varepsilon^2}(1-\cos(\theta))}),
\end{aligned}$$

que convergeix a zero quan fem tendir ε a zero.

3.3.2 Variacions quadràtiques i covariació.

Hem de provar el següent resultat,

Proposició 3.3.1. *Considerem $\{P^\theta_\varepsilon\}$ les lleis en $\mathcal{C}([0,T])$ dels processos x^θ_ε definits en (3.1), i suposem que $P^\theta_{\varepsilon_n}$ és una subsuccessió feblement convergent cap a P^θ. Sigui X el procés canònic i sigui $\{\mathcal{F}_t\}$ la seva filtració natural. Llavors, sota la llei P^θ, si $\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ tenim que les variacions quadràtiques $<Re[X],Re[X]>_t=t$, $<Im[X],Im[X]>_t=t$ i la covariació $<Re[X],Im[X]>_t=0$. En canvi si $\theta=\pi$, llavors la variació quadràtica $<X,X>_t=2t$.*

Per a provar aquesta proposició ens serà útil el següent lema,

Lema 3.3.2. *Considerem $\{\mathcal{F}^{\varepsilon,\theta}_t\}$ la filtració natural generada pels processos x^θ_ε. Llavors, per a tot $s<t$ i per a tota variable aleatòria real Y, $\mathcal{F}^{\varepsilon,\theta}_s$–mesurable i fitada, tenim que si $\theta\in(0,2\pi)$*

$$\text{a)}\quad \varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E[e^{i\theta(N_{x_2}-N_{x_1})}]dx_1dx_2=(t-s)(1+i\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)})+o(\varepsilon).$$

A més a més, per a tot $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$,

$$\textbf{b)} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \|\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E[e^{i\theta(N_{x_2}+N_{x_1})}Y]dx_1dx_2\| = 0.$$

Prova: Comencem provant l'apartat a),

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E[e^{i\theta(N_{x_2}-N_{x_1})}]dx_1dx_2 \\
= \;& \varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} e^{-(x_2-x_1)(1-e^{i\theta})}dx_1dx_2 \\
= \;& \varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \frac{1}{1-e^{i\theta}}(1-e^{-(x_2-\frac{2s}{\varepsilon^2})(1-e^{i\theta})})dx_2 \\
= \;& \frac{2(t-s)}{1-e^{i\theta}} + \frac{\varepsilon^2}{(1-e^{i\theta})^2}(e^{-\frac{2(t-s)}{\varepsilon^2}(1-e^{i\theta})}-1) \\
= \;& (t-s)(1+i\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Hem provat doncs l'apartat a). Recordem que per a l'apartat b) suposem $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Usant que el procés de Poisson té increments independents, tenim que

$$\begin{aligned}
&\|\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E[e^{i\theta(N_{x_2}+N_{x_1})}Y]dx_1dx_2\| \\
= \;& \|\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E[e^{i\theta(N_{x_2}-N_{x_1})}]E[e^{i2\theta(N_{x_1}-N_{\frac{2s}{\varepsilon^2}})}]E[Ye^{i2\theta N_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}}]dx_1dx_2\| \\
\le \;& K\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} \|e^{-(x_2-x_1)(1-e^{i\theta})}\| \cdot \|e^{-(x_1-\frac{2s}{\varepsilon^2})(1-e^{2i\theta})}\|dx_1dx_2 \\
= \;& K\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} e^{-(x_2-x_1)(1-\cos(\theta))}e^{-(x_1-\frac{2s}{\varepsilon^2})(1-\cos(2\theta))}dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

Observem que si $\cos(\theta) = \cos(2\theta)$ (és a dir, quan $\theta = \frac{2\pi}{3}$ o bé $\theta = \frac{4\pi}{3}$) és fàcil veure que aquesta integral convergeix a zero quan ε tendeix a zero. Altrament, tenim que l'última integral és igual a

$$K\varepsilon^2 \frac{1}{\cos(\theta)-\cos(2\theta)} e^{\frac{2s}{\varepsilon^2}(1-\cos(\theta))} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} e^{-x_2(1-\cos(\theta))}dx_2$$

$$-K\varepsilon^2 \frac{1}{\cos(\theta)-\cos(2\theta)} e^{\frac{2s}{\varepsilon^2}(1-\cos(2\theta))} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} e^{-x_2(1-\cos(2\theta))} dx_2.$$

La primera d'aquestes dues integrals és igual a

$$K\varepsilon^2 \frac{1}{(\cos(\theta)-\cos(2\theta))(1-\cos(\theta))}\left(1-e^{-\frac{2(t-s)}{\varepsilon^2}(1-\cos(\theta))}\right),$$

que convergeix a zero quan ε tendeix a zero. Així mateix, la segona és igual a

$$K\varepsilon^2 \frac{1}{(\cos(\theta)-\cos(2\theta))(1-\cos(2\theta))}\left(1-e^{-\frac{2(t-s)}{\varepsilon^2}(1-\cos(2\theta))}\right),$$

que també convergeix a zero.

□

Prova:(Proposició 3.3.1)

Quan $\theta \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ hem de provar que, sota la llei límit, $< Re[X], Re[X] >_t = t$ i $< Im[X], Im[X] >_t = t$. Igual que abans n'hi ha prou provant que per a tot $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq s$ i per a tota $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E\left[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1)..., x_\varepsilon^\theta(s_n))\left((Re[x_\varepsilon^\theta(t)] - Re[x_\varepsilon^\theta(s)])^2 - (t-s)\right)\right]$$

i

$$E\left[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1)..., x_\varepsilon^\theta(s_n))\left((Im[x_\varepsilon^\theta(t)] - Im[x_\varepsilon^\theta(s)])^2 - (t-s)\right)\right]$$

convergeixen a zero quan ε tendeix a zero.

Quan $\theta = \pi$ haurem de provar que

$$E\left[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1)..., x_\varepsilon^\theta(s_n))\left((x_\varepsilon^\theta(t) - x_\varepsilon^\theta(s))^2 - 2(t-s)\right)\right]$$

convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Però,

$$
\begin{aligned}
& E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))(\varepsilon\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\cos(\theta N_x)dx)^2\big) \\
= \;& 2\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))\cos(\theta N_{x_1})\cos(\theta N_{x_2})\big)dx_1dx_2 \\
= \;& \varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E(\cos(\theta(N_{x_2}-N_{x_1})))dx_1dx_2E[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))] \\
& +\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))\cos(\theta(N_{x_2}+N_{x_1}))\big)dx_1dx_2 \\
= \;& E[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))]Re\big[\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E(e^{i\theta(N_{x_2}-N_{x_1})})dx_1dx_2\big] \\
& +Re\big[\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))e^{i\theta(N_{x_2}+N_{x_1})}\big)dx_1dx_2\big]. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Si $\theta=\pi$ això és igual a

$$
2E[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))]Re\big[\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E(e^{i\theta(N_{x_2}-N_{x_1})})dx_1dx_2\big]
$$

i del fet que P_ε^θ convergeix feblement cap a P^θ i pel Lema 3.3.2 sabem que això convergeix a $2(t-s)E[\varphi(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})]$ i acaba la demostració pel cas $\theta=\pi$. A partir d'ara, doncs, suposarem $\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. En aquest cas el fet que P_ε^θ convergeix feblement a P^θ i el Lema 3.3.2 impliquen que (3.2) convergeix a $(t-s)E[\varphi(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})]$.

De la mateixa manera,

$$
\begin{aligned}
& E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))(\varepsilon\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\sin(\theta N_x)dx)^2\big) \\
= \;& 2\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))\sin(\theta N_{x_1})\sin(\theta N_{x_2})\big)dx_1dx_2 \\
= \;& \varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E(\cos(\theta(N_{x_2}-N_{x_1})))dx_1dx_2E[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))] \\
& -\varepsilon^2\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}}\int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1),...,x_\varepsilon^\theta(s_n))\cos(\theta(N_{x_2}+N_{x_1}))\big)dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

que hem vist que convergia a $(t-s)E[\varphi(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})]$.

Per últim hem de provar que, sota la llei P^θ, $< Re[X], Im[X] >_t = 0$. Però novament n'hi haurà prou provant que per a tot $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq s$ i per a tota $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E\big[\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1)..., x_\varepsilon^\theta(s_n))(Re[x_\varepsilon^\theta(t)] - Re[x_\varepsilon^\theta(s)])(Im[x_\varepsilon^\theta(t)] - Im[x_\varepsilon^\theta(s)])\big],$$

convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Però això és igual a

$$\begin{aligned}
& E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n))(\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \cos(\theta N_x) dx)(\varepsilon \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \sin(\theta N_x) dx)\big) \\
= \; & \varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n)) \cos(\theta N_{x_1}) \sin(\theta N_{x_2})\big) dx_1 dx_2 \\
& + \varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n)) \sin(\theta N_{x_1}) \cos(\theta N_{x_2})\big) dx_1 dx_2 \\
= \; & \varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n)) \sin(\theta(N_{x_2} + N_{x_1}))\big) dx_1 dx_2 \\
= \; & Im\big[\varepsilon^2 \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{\frac{2t}{\varepsilon^2}} \int_{\frac{2s}{\varepsilon^2}}^{x_2} E\big(\varphi(x_\varepsilon^\theta(s_1), ..., x_\varepsilon^\theta(s_n)) e^{i\theta(N_{x_2} + N_{x_1})}\big) dx_1 dx_2\big]
\end{aligned}$$

que hem vist que convergia a zero quan ε tendeix a zero al Lema 3.3.2.

□

Capítol 4

Convergència en llei cap a integrals múltiples de Stratonovich.

4.1 Introducció.

Considerem una successió de semimartingales X^ε que convergeixen en llei cap a una altra semimartingala X en l'espai de les funcions contínues $\mathcal{C}([0,T])$, i definim, per una semimartingala contínua Y, les següents integrals iterades tipus Itô,

$$J_k(Y)_t = \begin{cases} Y_t & \text{per } k=1 \\ \int_0^t J_{k-1}(Y)_s dY_s & \text{per } k \geq 2. \end{cases}$$

Es demostra fàcilment que, si anomenem $< Y, Y >$ la variació quadràtica de Y, són equivalents per $m \geq 2$

$$\mathcal{L}(X^\varepsilon, < X^\varepsilon, X^\varepsilon >) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X, < X, X >) \qquad \text{quan} \quad \varepsilon \downarrow 0 \qquad \text{i}$$

$$\mathcal{L}(J_1(X^\varepsilon), \ldots, J_m(X^\varepsilon)) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(J_1(X), \ldots, J_m(X)) \qquad \text{quan} \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

on la convergència és en els espais $\mathcal{C}([0,T])^2$ i $\mathcal{C}([0,T])^m$ respectivament. Això és així perquè si considerem $H_n(x,y)$ els polinomis d'Hermite en dues variables, és a dir per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(x,y) = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \exp\left(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y\right)\Big|_{\alpha=0} \quad ; x, y \in \mathbb{R},$$

tenim que

$$J_n(Y)_t = \frac{1}{n!} H_n(Y_t, < Y, Y >_t).$$

Llavors $(J_1(Y), \ldots, J_m(Y))$ és un funcional continu de $(Y, < Y, Y >)$, i també $(Y, < Y, Y >)$ és un funcional continu de $(J_1(Y), J_2(Y))$.

Avram estén aquest resultat en [A] per a semimartingales amb trajectòries en l'espai $\mathcal{D}([0,1])$ respecte la topologia $\mathcal{J}_1$ de Skorohod.

Aquest resultat ens diu que per tenir convergència conjunta de les integrals múltiples d'Itô de la funció més simple possible, es necessita que no només els processos X^ε convergeixin feblement cap a X, sinó també que convergeixi la seva variació quadràtica cap a la del procés X.

Ara bé, si ens centrem en el cas on $X = W$, el procés de Wiener, una gran quantitat de les aproximacions en llei de W que s'usen a la pràctica són processos de variació fitada, fins i tot absolutament continus, i per tant no hi ha convergència de les seves variacions quadràtiques cap a la del Wiener.

Llavors és natural considerar la següent variant del problema anterior. Sigui f una funció del $L^2([0,T]^n)$, i siguin $\eta_\varepsilon = \{\eta_\varepsilon(t); t \in [0,T]\}$ uns processos amb trajectòries en l'espai de Cameron-Martin, tals que η_ε convergeix feblement cap a un moviment Brownià estàndard en l'espai de les funcions contínues nul.les a l'origen, $\mathcal{C}_0([0,T])$. Considerem,

$$I_{\eta_\varepsilon}(f)_t = \int_0^t \cdots \int_0^t f(t_1,\ldots,t_n) d\eta_\varepsilon(t_1)\cdots d\eta_\varepsilon(t_n).$$

Volem estudiar la convergència en llei dels processos $I_{\eta_\varepsilon}(f)$ i, en cas que hi hagi convergència, identificar el límit.

Intuïtivament, podem pensar que, quan existeixi, el límit serà la integral múltiple de Stratonovich de f, ja que això és el que passa, per exemple, en les equacions diferencials estocàstiques quan s'aproxima el moviment Brownià per processos absolutament continus.

En la tercera secció estudiem quan la integral múltiple determinística d'una funció f respecte a una funció absolutament contínua η, com a funció de η, admet una extensió contínua a l'espai de les funcions contínues nul.les a l'origen $\mathcal{C}_0([0,T])$. Per tal d'admetre aquesta extensió contínua és necessari i suficient que f vingui donada per una multimesura. En aquest cas provem que $I_{\eta_\varepsilon}(f)$ convergeix en llei cap a la integral múltiple de Stratonovich.

En la quarta secció tractem el problema de la convergència en llei de $I_{\eta_\varepsilon}(f)$ per altres tipus de funcions que també són integrables de Stratonovich. Imposant condicions sobre els processos η_ε, provem que els processos $I_{\eta_\varepsilon}(f)$ convergeixen en llei cap a la integral múltiple de Stratonovich quan la funció f és contínua. Finalment, per alguns exemples de processos η_ε concrets, ho provem per a productes de funcions del $L^2([0,T])$ per un indicador que ordena les variables.

Començarem recordant algunes definicions i alguns resultats que utilitzarem més endavant.

4.2 Preliminars.

Al llarg d'aquest capítol considerarem processos absolutament continus que convergeixen en llei cap al moviment Brownià definits en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i un moviment Brownià estàndard, $W = \{W_t; t \in [0,T]\}$, definit en un espai de probabilitat $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$.

L'esperança matemàtica en aquests espais de probabilitat la denotarem per E i $\bar{E}$ respectivament.

D'ara en endavant π denotarà una partició de l'interval $[0,T]$ de la forma $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q = T\}$, denotarem per Δ_i un dels intervals d'aquesta partició, és a dir $\Delta_i = (t_i, t_{i+1}]$, i la longitud d'aquest interval la denotarem per $|\Delta_i| = t_{i+1} - t_i$. La norma de la partició $|\pi|$ vindrà definida per $|\pi| = \sup_i (t_{i+1} - t_i)$.

Definició 4.2.1. *Sigui $u = \{u_t,\ u \in [0,T]\}$ un procés mesurable tal que $\int_0^T |u_t| dt < \infty$ q.s. Direm que aquest procés és Stratonovich integrable si existeix el límit en $L^2(\Omega)$ de*

$$\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_s ds \Big) (W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

quan la norma $|\pi|$ tendeix a zero.

Quan aquest límit existeixi el denotarem per $\int_0^T u_t \circ dW_t$. Denotarem també per $\int_0^t u_s \circ dW_s$ la integral de Stratonovich, quan existeixi, del procés $u I_{[0,t]}$, on $t \in [0,T]$.

Definició 4.2.2. *Sigui f una funció de l'espai $L^2([0,T]^m)$. Direm que f és Stratonovich integrable si existeix el límit en $L^2(\Omega)$ de*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m} \frac{1}{|\Delta_{i_1}| \cdots |\Delta_{i_m}|} \Big(\int_{\Delta_{i_1} \times \cdots \times \Delta_{i_m}} f(t_1, \ldots, t_m) dt_1 \cdots dt_m \Big) W(\Delta_{i_1}) \cdots W(\Delta_{i_m}),$$

quan la norma $|\pi|$ tendeix a zero.

En cas d'existir denotarem per $I_m \circ (f)_T$ aquest límit. Denotarem també per $I_m \circ (f)_t$ la integral múltiple de Stratonovich, quan existeixi, de la funció $f I_{[0,t]^n}$, on $t \in [0,T]$.

Definició 4.2.3. *Donada una funció $f \in L^2([0,T]^m)$ direm que té traça d'ordre $j \in \{1, \ldots, [\frac{m}{2}]\}$ si existeix el límit en $L^2([0,T]^{m-2j})$ de*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}| \cdots |\Delta_{i_j}|} \int_{\Delta_{i_1}^2 \times \cdots \times \Delta_{i_j}^2} \tilde{f}(t_1, \ldots, t_{2j}, \cdot) dt_1 \cdots dt_{2j}$$

quan la norma $|\pi|$ tendeix a zero, on $\tilde{f}(t_1, \ldots, t_m)$ és la simetritzada de la funció f.

Quan aquest límit existeixi el denotarem per $T^j f(\cdot)$.

En aquest context introduirem a continuació el següent resultat de [SU] que és conegut com a fórmula de Hu-Meyer:

Teorema 4.2.4. *(Solé-Utzet) Sigui $f \in L^2([0,T]^n)$ una funció simètrica. Si per a tot $j \in \{1,\dots,[\frac{n}{2}]\}$ f té traça d'ordre j, llavors f és Stratonovich integrable i*

$$I_n \circ (f) = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!}{(n-2j)!j!2^j} I^i_{n-2j}(T^j f),$$

on I^i_{n-2j} representa la integral múltiple d'Itô d'ordre $n-2j$.

Una altra noció que cal introduir és la de multimesura.

Definició 4.2.5. *Considerem $(X_1,\mathcal{B}_1),\dots,(X_n,\mathcal{B}_n)$ espais mesurables. Una aplicació $\mu : \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu que és una multimesura si per a cada $i \in \{1,\dots,n\}$ fixat i per a cada $A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n$ fixats amb $A_j \in \mathcal{B}_j$ per a tot $j \in \{1,\dots,n\}\backslash\{i\}$, $\mu(A_1,\dots,A_{i-1},F,A_{i+1},\dots,A_n)$ és una mesura signada respecte la variable $F \in \mathcal{B}_i$, és a dir, μ és la diferència de dues mesures positives i finites respecte la variable F.*

Denotarem per $\{A^k_1,\dots,A^k_M\}$ una partició mesurable de X_k.

Definició 4.2.6. *Sigui μ una multimesura en $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$. La variació de Fréchet de μ, FV^n, es defineix com*

$$\|\mu\|_{FV^n} = \sup \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{M} \varepsilon_{i_1} \cdot \varepsilon_{i_2} \cdots \varepsilon_{i_n} \mu(A^1_{i_1},\dots,A^n_{i_n}),$$

on ε_i són o bé 1 o bé -1 per a tot $i \in \{1,\dots,n\}$, i el suprem és sobre $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, i sobre totes les particions finites dels X_k.

Per ser μ una multimesura tenim que $\|\mu\|_{FV^n} < \infty$. La classe de les multimesures amb la norma $\|\cdot\|_{FV^n}$ és un espai de Banach que el denotarem per F^n.

Necessitarem també usar el resultat següent: Siguin $f_i \in L^\infty(X_i)$ per a tot $i \in \{1,\dots,k\}$, aleshores

$$\mu_{f_1,\dots,f_k} = \int_{X_1\times\cdots\times X_k} f_1(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdots f_k(t_k)\mu(dt_1,\dots,dt_k,\cdot) \in F^{n-k},$$

i tenim que

$$\|\mu_{f_1,\dots,f_k}\|_{FV^{n-k}} \le \|f_1\|_\infty \cdots \|f_k\|_\infty \cdot \|\mu\|_{FV^n}. \tag{4.1}$$

Per a una discussió més detallada de la noció de multimesura i les seves propietats recomanem consultar el treball [NZ].

4.3 Cas d'integrals múltiples de funcions donades per una multimesura.

Considerem $\mathcal{H}$ l'espai de Cameron-Martin, és a dir

$$\mathcal{H} = \{\eta \in \mathcal{C}_0([0,T]) : \eta_t = \int_0^t \dot{\eta}_s ds,\ \dot{\eta} \in L^2([0,T])\}$$

on $\mathcal{C}_0([0,T])$ és l'espai de les funcions contínues en $[0,T]$ nul.les a l'origen.

Podem definir per a una funció $f \in L^2([0,T]^n)$ simètrica el següent funcional,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f: \ \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{C}_0([0,T]) \\ \eta & \longrightarrow & \varphi_f(\eta)_t = \int_0^t \cdots \int_0^t f(x_1,\ldots,x_n)d\eta(x_1)\cdots d\eta(x_n). \end{array}$$

Una primera questió que ens podem plantejar, relacionada amb el nostre problema, és per a quines funcions f, el funcional φ_f admet una extensió contínua a tot l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$, que a més a més serà única perquè $\mathcal{H}$ és dens en aquest espai.

Aquesta pregunta està òbviament relacionada amb el nostre problema, ja que si denotem per $\bar{\varphi}_f$ aquesta extensió, si sabem que $\dot{\eta}_\varepsilon$ convergeixen feblement cap a un moviment Brownià estàndard, $W = \{W_t;\ t \in [0,T]\}$, en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$, llavors, $I_{\eta_\varepsilon}(f) = \bar{\varphi}_f(\eta_\varepsilon)$ convergirà feblement cap a $\bar{\varphi}_f(W)$ en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$ quan ε tendeix a zero, i només caldrà identificar qui és $\bar{\varphi}_f(W)$.

La resposta a aquestes qüestions ens la donen els següents resultats:

Teorema 4.3.1. *Són equivalents,*

a) φ_f *admet una extensió contínua en* $\mathcal{C}_0([0,T])$.

b) Existeix una multimesura simètrica μ *en* $[0,T]^n$ *tal que* $f(x_1,\ldots,x_n) = \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])$ *q.p.t.*

Per demostrar aquest teorema usarem algunes idees d'un treball de Nualart i Zakai, [NZ], on s'estudia un problema diferent però que recorda al nostre. Concretament en aquell treball es planteja quan la integral estocàstica múltiple d'Itô, definida quasi segurament en l'espai de Wiener, es pot estendre de manera contínua a tot $\mathcal{C}_0([0,T])$. La resposta és la mateixa que per al nostre problema.

Abans de passar a la demostració del teorema veurem un resultat previ. Definim per $g \in L^2([0,T])$ (no necessàriament simètrica),

$$\begin{array}{rcl} \phi_g: \ \mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{C}_0([0,T]) \\ (\eta_1,\ldots,\eta_n) & \longrightarrow & \phi_g(\eta_1,\ldots,\eta_n)_t = \int_{[0,t]^n} g(x_1,\ldots,x_n)d\eta_1(x_1)\cdots d\eta_n(x_n). \end{array}$$

Teorema 4.3.2. *Són equivalents,*

a) ϕ_g *admet una extensió en* $\mathcal{C}_0([0,T]) \times \cdots \times \mathcal{C}_0([0,T])$ *que és contínua i multilineal.*

b) Existeix una multimesura μ *en* $[0,T]^n$ *tal que* $g(x_1,\ldots,x_n) = \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])$ *q.p.t.*

Prova:

Suposem que ϕ_g admet una extensió contínua que denotarem per $\bar{\phi}_g$ en $\mathcal{C}_0([0,T]) \times \cdots \times \mathcal{C}_0([0,T])$.

En particular el funcional:

$$\begin{array}{rccl} \Phi^* : & \mathcal{C}_0([0,T]) \times \cdots \times \mathcal{C}_0([0,T]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\eta_1,\ldots,\eta_n) & \longrightarrow & \bar{\phi}_g(\eta_1,\ldots,\eta_n)_T \end{array}$$

és continu i multilineal.

Per la generalització del teorema de representació de Riesz-Fréchet (veure Teorema 2.1 de [NZ]), existeix una multimesura μ en $[0,T]^n$ tal que

$$\Phi^*(\eta_1,\ldots,\eta_n) = \int_{[0,T]^n} \eta_1(x_1)\cdots\eta_n(x_n)\mu(dx_1,\ldots,dx_n),$$

per a tot $\eta_1,\ldots,\eta_n \in \mathcal{C}_0([0,T])$.

La integral per parts respecte multimesures funciona com en el cas ordinari (veure [NZ]). Integrant per parts és fàcil veure que aquesta expressió, per a qualssevol $\eta_1,\ldots,\eta_n \in \mathcal{H}$, és igual a

$$\int_{[0,T]^n} \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])d\eta_1(x_1)\cdots d\eta_n(x_n),$$

i d'altra banda era igual a

$$\int_{[0,T]^n} g(x_1,\ldots,x_n)d\eta_1(x_1)\cdots d\eta_n(x_n).$$

Per tant, $\mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T]) = g(x_1,\ldots,x_n)$ q.p.t.

Per veure el recíproc suposem que $g(x_1,\ldots,x_n) = \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])$.

Com que $\mathcal{C}_0([0,T])$ és un espai mètric complet i $\mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H}$ és dens en $\mathcal{C}_0([0,T]) \times \cdots \times \mathcal{C}_0([0,T])$, n'hi ha prou demostrant que

$$\phi_g : \mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H} \to \mathcal{C}_0([0,T])$$

és contínua, quan considerem en $\mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H}$ la mètrica de la convergència uniforme.

Integrant per parts, podem veure que

$$\int_{[0,t]^n} \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])d\eta_1(x_1)\cdots d\eta_n(x_n)$$

és igual a

$$\begin{aligned} = \; & (\prod_{j=1}^{n} \eta_j(t))\mu((t,T],\ldots,(t,T]) + \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,t]} \eta_i(x_i)\mu((t,T],\ldots,dx_i,\ldots,(t,T])(\prod_{j\neq i} \eta_j(t)) \\ & + \sum_{i<k} \int_{[0,t]^2} \eta_i(x_i)\eta_k(x_k)\mu((t,T],\ldots,dx_i,\ldots,dx_k,\ldots,(t,T])(\prod_{j\neq i,k} \eta_j(t)) \qquad (4.2) \\ & + \cdots + \int_{[0,t]^n} \eta_1(x_1)\cdots\eta_n(x_n)\mu(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n). \end{aligned}$$

D'aquesta expressió, utilitzant (4.1) podem demostrar que

$$\|\phi_g(\eta_1,\ldots,\eta_n)\|_\infty \leq K\|\mu\|_{FV^n} \cdot \|\eta_1\|_\infty \cdots \|\eta_n\|_\infty.$$

Com que ϕ_g és multilineal, aquesta última desigualtat ens dóna la continuïtat.

Finalment, observem que l'extensió de ϕ_g ve donada per (4.2), amb $\eta_1,\cdots,\eta_n \in \mathcal{C}_0([0,T])$.

$\square$

Prova:(Teorema 4.3.1)

Suposem que φ_f admet una extensió contínua en $\mathcal{C}_0([0,T])$. Provarem primer que el funcional

$$\begin{aligned} \phi_f: \; \mathcal{H}\times\cdots\times\mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{C}_0([0,T]) \\ (\eta_1,\ldots,\eta_n) & \longrightarrow \phi_f(\eta_1,\ldots,\eta_n)_t = \int_{[0,t]^n} f(x_1,\ldots,x_n)d\eta_1(x_1)\cdots d\eta_n(x_n), \end{aligned}$$

admet una extensió contínua i multilineal en $\mathcal{C}_0([0,T])\times\cdots\times\mathcal{C}_0([0,T])$.

Denotem per $\bar{\varphi}_f$ l'extensió contínua de φ_f. Pel Lema 2.6 de [NZ], podem expressar el producte $x_1\cdot x_2\cdots x_n$, per a tot $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$, com a combinació lineal de polinomis del tipus $(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)^n$, on $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ és un vector de norma unitat. Més precisament, podem escriure

$$x_1\cdot x_2\cdots x_n = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k(\alpha_1^k x_1+\cdots+\alpha_n^k x_n)^n$$

on $|\alpha^k|=1$ i $\lambda_k\in\mathbb{R}$ per a tot $k=1,\ldots,k_0$.

Llavors, per a una funció simètrica $f \in L^2([0,T]^n)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,t]^n} f(x_1,\ldots,x_n)d\eta_1(x_1)\cdots d\eta_n(x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k \int_{[0,t]^n} f(x_1,\ldots,x_n)d\eta^k(x_1)\cdots d\eta^k(x_n)
\end{aligned}$$

on $\eta^k = \alpha_1^k\eta_1 + \cdots + \alpha_n^k\eta_n$.

I per tant, per a $\eta_1,\ldots,\eta_n \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\phi_f(\eta_1,\ldots,\eta_n)_t &= \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k \int_{[0,t]^n} f(x_1,\ldots,x_n)d\eta^k(x_1)\cdots d\eta^k(x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k \varphi_f(\eta^k)_t.
\end{aligned}$$

Així, $\bar{\phi}_f(\eta_1,\ldots,\eta_n) = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k \bar{\varphi}_f(\eta^k)$ és una extensió contínua de ϕ_f, que a més a més és multilineal. Per tant, pel Teorema 4.3.2, $f(x_1,\ldots,x_n) = \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])$.

Vegem ara el recíproc. Partim de

$$\int_{[0,t]^n} \mu((x_1,T],\ldots,(x_n,T])d\eta(x_1)\cdots d\eta(x_n).$$

Però integrant per parts obtenim la mateixa expressió (4.2) que hem obtingut en la demostració del recíproc del Teorema 4.3.2 però amb $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_n = \eta$. Per tant, igual que abans, φ_f admet una extensió contínua en $\mathcal{C}_0([0,T])$ tal i com volíem demostrar.

Aquesta extensió ve donada per l'expressió:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_f(\eta)_t \\
&= (\eta(t))^n\mu((t,T],\ldots,(t,T]) + \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,t]} \eta(x_i)\mu((t,T],\ldots,dx_i,\ldots,(t,T])(\eta(t))^{n-1} \\
&\quad + \sum_{i<k} \int_{[0,t]^2} \eta(x_i)\eta(x_k)\mu((t,T],\ldots,dx_i,\ldots,dx_k,\ldots,(t,T])(\eta(t))^{n-2} \\
&\quad + \cdots + \int_{[0,t]^n} \eta(x_1)\cdots\eta(x_n)\mu(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n),
\end{aligned}$$

per a tot $\eta \in \mathcal{C}_0([0,T])$.

□

Corol.lari 4.3.3. *Sigui $\{\eta_\varepsilon\}_\varepsilon > 0$ una família de processos estocàstics amb trajectòries en l'espai $\mathcal{H}$ que convergeix feblement cap a un moviment Brownià estàndard en l'espai de les funcions contínues nul.les a l'origen $\mathcal{C}_0([0,T])$. Si existeix una multimesura μ en $[0,T]^n$ tal que $f(x_1,\dots,x_n) = \mu((x_1,T],\dots,(x_n,T])$ aleshores $I_{\eta_\varepsilon}(f) = \varphi_f(\eta_\varepsilon)$ convergeix feblement cap a la integral d'ordre n de Stratonovich, $I_n \circ (f)$, en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$, quan ε tendeix a zero.*

Prova: Integrant per parts tenim que

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,t]^n} \mu((x_1,T],\dots,(x_n,T])d\eta_\varepsilon(x_1)\cdots d\eta_\varepsilon(x_n)\\
=\;& (\eta_\varepsilon(t))^n\mu((t,T],\dots,(t,T]) + \sum_{i=1}^n \int_{[0,t]} \eta_\varepsilon(x_i)\mu((t,T],\dots,dx_i,\dots,(t,T])(\eta_\varepsilon(t))^{n-1}\\
&+\sum_{i<k}\int_{[0,t]^2} \eta_\varepsilon(x_i)\eta_\varepsilon(x_k)\mu((t,T],\dots,dx_i,\dots,dx_k,\dots,(t,T])(\eta_\varepsilon(t))^{n-2}\\
&+\cdots+\int_{[0,t]^n} \eta_\varepsilon(x_1)\cdots\eta_\varepsilon(x_n)\mu(dx_1,dx_2,\dots,dx_n) = \bar{\varphi}_f(\eta_\varepsilon)_t.
\end{aligned}$$

Per tant, com que η_ε convergeixen en llei cap a un moviment Brownià estàndard W, en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$, aquest procés convergirà en llei cap a

$$\begin{aligned}
&(W(t))^n\mu((t,T],\dots,(t,T]) + \sum_{i=1}^n \int_{[0,t]} W(x_i)\mu((t,T],\dots,dx_i,\dots,(t,T])(W(t))^{n-1}\\
&+\sum_{i<k}\int_{[0,t]^2} W(x_i)W(x_k)\mu((t,T],\dots,dx_i,\dots,dx_k,\dots,(t,T])(W(t))^{n-2} \qquad (4.3)\\
&+\cdots+\int_{[0,t]^n} W(x_1)\cdots W(x_n)\mu(dx_1,dx_2,\dots,dx_n).
\end{aligned}$$

Podem ara definir una nova multimesura $\bar{\mu}_t$ com,

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_t(A_1,\dots,A_n) \;=\;& \mu((t,T],\dots,(t,T])\delta_t(A_1)\cdots\delta_t(A_n)\\
&+\sum_{i=1}^n \mu((t,T],\dots,A_i,\dots,(t,T])\prod_{j\neq i}\delta_t(A_j)\\
&+\sum_{i<k}\mu((t,T],\dots,A_i,\dots,A_k,\dots,(t,T])\prod_{j\neq i,k}\delta_t(A_j)\\
&+\cdots+\mu(A_1,A_2,\dots,A_n),
\end{aligned}$$

on δ_t és la delta de Dirac en el punt t.

Es comprova fàcilment que $\bar{\mu}_t$ és una multimesura i $\bar{\mu}_t$ compleix la següent propietat $\bar{\mu}_t((t_1,t],(t_2,t],\ldots,(t_n,t]) = \mu((t_1,T],(t_2,T],\ldots,(t_n,T])$ sempre que $t_i < t$ per a tot $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Utilitzant aquesta nova multimesura, podem escriure (4.3) com,

$$\int_{[0,t]^n} W_{x_1}\cdots W_{x_n}\bar{\mu}_t(dx_1,\ldots,dx_n)$$

i seguint els arguments que trobem a la demostració del Teorema 3.2 i a la Secció 4 de [NZ] es veu que aquesta última expressió és igual a $I_n \circ (f)(t)$.

□

4.4 Convergència en llei cap a integrals múltiples de Stratonovich d'altres tipus de funcions.

Pels resultats de la secció anterior, quan la funció f no vingui donada per una multimesura, no es pot esperar que per a tota família $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathcal{H}$, que convergeixi en llei cap a un moviment Brownià, es tingui convergència en llei dels processos $I_{\eta_\varepsilon}(f)$.

Malgrat això, si ens restringim a aproximacions concretes del moviment Brownià podrem trobar altres tipus de funcions que també són integrables de Stratonovich d'ordre n i tals que els processos $I_{\eta_\varepsilon}(f)$ convergeixin cap a la integral de Stratonovich d'ordre n.

Concretament presentarem alguns tipus de processos que convergeixen en llei cap al moviment Brownià, amb els quals podrem construir processos que convergiran en llei cap a les integrals de Stratonovich de funcions de l'espai de les funcions contínues de $[0,T]^n$, $\mathcal{C}([0,T]^n)$, i també funcions del tipus

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)I_{\{x_1\le\cdots\le x_n\}}$$

on $f_i(x) \in L^2([0,T])$ per a tot $i \in \{1,\ldots,n\}$.

En ambdós casos la funció f és Stratonovich integrable i la integral té una versió amb trajectòries contínues q.s. (veure Apèndix 5.1 i 5.2).

D'ara en endavant escriurem els processos η_ε que convergeixen en llei cap a un moviment Brownià estàndard, $W = \{W_t; t \in [0,T]\}$, en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$ de la forma

$$\eta_\varepsilon = \int_0^t \theta_\varepsilon(s)ds.$$

4.4.1 Convergència cap a integrals múltiples de Stratonovich de funcions contínues.

Introduïrem la següent condició sobre els processos $\{\theta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$:

(H) Suposem que existeix $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ amb $\theta_\varepsilon \in L^{p \cdot n}([0,T])$ i que existeix una funció F creixent i contínua i una constant $\alpha > 0$ tal que per a tot $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\int_{[s,t]^p \times [0,t]^{p(n-1)}} |E(\theta_\varepsilon(x_1) \cdots \theta_\varepsilon(x_{pn}))| I_{\{x_1 \leq \cdots \leq x_{pn}\}} dx_1 \cdots dx_{pn} \leq (F(t) - F(s))^{1+\alpha}.$$

Podem enunciar el següent resultat:

Teorema 4.4.1. *Sigui $f \in \mathcal{C}([0,T]^n)$ simètrica, i considerem una família de processos $\{\theta_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ que satisfan la condició (H). Aleshores els processos $I_{\eta_\varepsilon}(f)$ convergeixen feblement cap a la integral múltiple de Stratonovich de la funció f, $I_n \circ (f)$, en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$ quan ε tendeix a zero.*

Prova:

Comencem provant l'ajustament. Usant el criteri de Billingsley (veure el Teorema 12.3 de [Bi]), n'hi haurà prou provant que

$$\sup_\varepsilon E[|I_{\eta_\varepsilon}(f)_t - I_{\eta_\varepsilon}(f)_s|^\beta] \leq K(F(t) - F(s))^{1+\alpha} \tag{4.4}$$

amb $\alpha, \beta > 0$ i F una funció creixent i contínua.

Però per a l'enter $p \geq 2$ de la condició (H) tenim que

$$\begin{aligned}
& E[|I_{\eta_\varepsilon}(f)_t - I_{\eta_\varepsilon}(f)_s|^p] \\
\leq\ & E[|\int_{[0,t]^n \setminus [0,s]^n} f(x_1, \cdots, x_n)\theta_\varepsilon(x_1) \cdots \theta_\varepsilon(x_n) dx_1 \cdots dx_n|^p] \\
\leq\ & \|f\|_\infty^p K \int_{[s,t]^p \times [0,t]^{p(n-1)}} |E(\theta_\varepsilon(x_1) \cdots \theta_\varepsilon(x_{pn}))| I_{\{x_1 \leq \cdots \leq x_{pn}\}} dx_1 \cdots dx_{pn} \\
\leq\ & \|f\|_\infty^p K (F(t) - F(s))^{1+\alpha},
\end{aligned}$$

tal i com volíem demostrar.

Introduïm ara la següent notació:

$$\begin{aligned}
X_t &= I_n \circ (f)(t) \\
X_t^\varepsilon &= I_{\eta_\varepsilon}(f) = \int_{[0,t]^n} \theta_\varepsilon(x_1) \cdots \theta_\varepsilon(x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.
\end{aligned}$$

Volem veure que les distribucions en dimensió finita de X^ε convergeixen en llei cap a les de X. Considerem $h \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^m)$. Provarem que per a tot $t_1, \ldots, t_m \in [0,T]$

$$|E[h(X_{t_1}^\varepsilon, \ldots, X_{t_m}^\varepsilon)] - \bar{E}[h(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})]|$$

convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Definim

$$
\begin{aligned}
X_t^{\varepsilon,\pi} &= \int_{[0,t]^n} \theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_n) \sum_{i_1,\ldots,i_n} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_n}|} \\
&\quad \times\Big(\int_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}} f(y_1,\ldots,y_n)dy_1\cdots dy_n\Big) I_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}}(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n, \\
X_t^{\pi} &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \Big(\frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_n}|}\int_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}} f(y_1,\ldots,y_n)dy_1\cdots dy_n\Big) W(\Delta_{i_1})\cdots W(\Delta_{i_n}),
\end{aligned}
$$

on Δ_i són els intervals corresponents a una partició π de l'interval $[0,T]$ que conté els punts $t_1,\ldots,t_m$ i la norma d'aquesta partició, $|\pi|$, convergeix a zero. Tenim que

$$
|E[h(X_{t_1}^\varepsilon,\ldots,X_{t_n}^\varepsilon)] - \bar{E}[h(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})]| \le I_1 + I_2 + I_3,
$$

on,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= |E[h(X_{t_1}^\varepsilon,\ldots,X_{t_m}^\varepsilon) - h(X_{t_1}^{\varepsilon,\pi},\ldots,X_{t_m}^{\varepsilon,\pi})]| \\
I_2 &= |E[h(X_{t_1}^{\varepsilon,\pi},\ldots,X_{t_m}^{\varepsilon,\pi})] - \bar{E}[h(X_{t_1}^{\pi},\ldots,X_{t_m}^{\pi})]| \\
I_3 &= |\bar{E}[h(X_{t_1}^{\pi},\ldots,X_{t_m}^{\pi})] - \bar{E}[h(X_{t_1},\ldots,X_{t_m})]|.
\end{aligned}
$$

Observem que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= |E[h(X_{t_1}^\varepsilon,\ldots,X_{t_m}^\varepsilon) - h(X_{t_1}^{\varepsilon,\pi},\ldots,X_{t_m}^{\varepsilon,\pi})]| \\
&\le K \max_j E|X_{t_j}^\varepsilon - X_{t_j}^{\varepsilon,\pi}| \\
&\le K \max_j (E(X_{t_j}^\varepsilon - X_{t_j}^{\varepsilon,\pi})^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Però

$$
E(X_{t_j}^\varepsilon - X_{t_j}^{\varepsilon,\pi})^2 = E\Big(\int_{[0,t_j]^n} \theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_n) g(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n\Big)^2,
$$

on $g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) - f^\pi(x_1,\ldots,x_n)$ i

$$
f^\pi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_i \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_n}|}\int_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}} f(y_1,\ldots,y_n)dy_1\cdots dy_n
$$

$$\times I_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_n}}(x_1,\ldots,x_n).$$

Així doncs podem fitar $E(X^{\varepsilon}_{t_j} - X^{\varepsilon,\pi}_{t_j})^2$ per

$$\Big(E\Big(\int_{[0,t_j]^n} \theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_n)g(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n\Big)^p\Big)^{\frac{2}{p}} \le \|g\|^2_\infty K,$$

usant el mateix tipus d'arguments que ens han permès provar la desigualtat (4.4).

Finalment aquest darrer terme convergeix a zero quan la norma de la partició, $|\pi|$, tendeix a zero perquè la continuïtat de la funció f implica que f^π convergeix en $L^\infty([0,T]^n)$ cap a f quan $|\pi|$ tendeix a zero.

Així doncs I_1 es pot fer tant petita com calgui agafant la norma de la partició $|\pi|$ prou petita, independentment de ε.

D'altra banda, per a una partició fixada π, tenim que

$$I_2 = |E[h(X^{\varepsilon,\pi}_{t_1},\ldots,X^{\varepsilon,\pi}_{t_m})] - \bar{E}[h(X^{\pi}_{t_1},\ldots,X^{\pi}_{t_m})]|$$

convergeix a zero quan ε tendeix a zero perquè $\mathcal{L}(X^{\varepsilon,\pi}_{t_1},\ldots,X^{\varepsilon,\pi}_{t_m}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(X^{\pi}_{t_1},\ldots,X^{\pi}_{t_m})$, ja que els processos η_ε convergeixen en llei cap al moviment Brownià en l'espai de les funcions contínues $\mathcal{C}_0([0,T])$.

Per últim,

$$\begin{aligned} I_3 &= |\bar{E}[h(X^{\pi}_{t_1},\ldots,X^{\pi}_{t_m})] - \bar{E}[h(X_{t_1},\ldots,X_{t_m})]| \\ &\le K\max_j \bar{E}|X^{\pi}_{t_j} - X_{t_j}|, \end{aligned}$$

que es pot fer tan petit com calgui agafant la norma de la partició $|\pi|$ prou petita, ja que $X^\pi_t \xrightarrow{L^2(\bar{\Omega})} X_t$ quan $|\pi|$ tendeix a zero. (Veure Apèndix 5.1.)

□

A continuació veurem alguns exemples de nuclis θ_ε que compleixen les hipòtesis del teorema anterior, i que per tant serveixen per construir processos que convergeixen en llei cap a integrals múltiples de Stratonovich de funcions de l'espai $\mathcal{C}([0,T]^n)$.

Exemples: aproximacions de Donsker i Stroock.

Considerem per $t \in [0,T]$, i per $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(x)dx$$

on $\theta_\varepsilon(x)$ són o bé els nuclis clàssics que apareixen en el conegut Teorema Central del Límit Funcional (nuclis de Donsker),

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k I_{[k-1,k)}(\frac{x}{\varepsilon^2})$$

on ζ_k són variables aleatòries independents i idènticament distribuides, centrades, amb $E(\zeta_k^2) = 1$ i $E(\zeta_k^{4n}) < \infty$. O bé seran els nuclis introduïts per Stroock a [St],

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon^2})}$$

on $N = \{N_s; s \geq 0\}$ és un procés de Poisson estàndard. (Vegeu el Teorema 0.0.7 dels preliminars d'aquesta memòria).

Per veure que aquests tipus de processos compleixen la condició (H) provarem un resultat més fort que també ens servirà més endavant per provar l'ajustament per altres casos d'aproximacions d'integrals de Stratonovich que considerarem.

Lema 4.4.2. *Sigui g una funció positiva que pertany a $L^2([0,T])$. Existeix una constant K que només depèn de n i de la norma en $L^2([0,T])$ de la funció g tal que per a tot $0 \leq s < t \leq T$,*

$$\int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_{4n})|E\big(\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_{4n})\big)|I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{4n}\}}dx_1\cdots dx_{4n}$$
$$\leq K\Big(\int_s^t g^2(x)dx\Big)^2$$

on $\theta_\varepsilon(x)$ són tots o bé nuclis de Stroock o bé nuclis de Donsker.

Prova:

En el cas que els nuclis siguin els introduïts per Stroock, i.e. $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon^2})}$ on $N = \{N_s; s \geq 0\}$ és un procés de Poisson estàndard, tenim

$$\int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_{4n})|E\big(\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_{4n})\big)|I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{4n}\}}dx_1\cdots dx_{4n}$$

$$= \int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_{4n})\frac{1}{\varepsilon^{4n}}\prod_{j=1}^{2n}\exp\{-2(\frac{x_{2j}-x_{2j-1}}{\varepsilon^2})\}$$

$$I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{4n}\}}dx_1\cdots dx_{4n}$$

$$\leq \Big(\int_s^t\int_s^{x_2} g(x_1)g(x_2)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon^2})\}dx_1dx_2\Big)^2$$
$$\times\Big(\int_0^t\int_0^{x_2} g(x_1)g(x_2)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon^2})\}dx_1dx_2\Big)^{2(n-1)}. \qquad (4.5)$$

Però,

$$\begin{aligned}
&\int_s^t\int_s^{x_2} g(x_1)g(x_2)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon^2})\}dx_1dx_2\\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^{x_2} g^2(x_1)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon^2})\}dx_1dx_2\\
&+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^{x_2} g^2(x_2)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon^2})\}dx_1dx_2\\
\leq\ &\frac{1}{2}\int_s^t g^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Això ens permet fitar el primer terme de l'expressió (4.5). Pel que fa al segon terme d'aquella expressió, els mateixos càlculs ens diuen que el podem fitar per una constant que només dependrà de n i de la norma $\|g\|_2$. Així doncs, (4.5) és menor o igual que

$$K\Big(\int_s^t g^2(x)dx\Big)^2$$

tal i com volíem demostrar.

Demostrarem tot seguit el lema per als nuclis clàssics, i.e. $\theta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^\infty \zeta_k I_{[k-1,k)}(\frac{x}{\varepsilon^2})$ on ζ_k són variables aleatòries independents i idènticament distribuides, centrades, amb $E(\zeta_k^2)=1$ i $E(\zeta_k^{4n})<\infty$. En aquest cas tenim

$$\begin{aligned}
&\int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_{4n})|E\big(\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_{4n})\big)|I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{4n}\}}dx_1\cdots dx_{4n}\\
&=\int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_{4n})\frac{1}{\varepsilon^{4n}}|E\prod_{j=1}^{4n}\big(\sum_{k=1}^\infty \zeta_k I_{[k-1,k)}(\frac{x_j}{\varepsilon^2})\big)|\\
&\quad I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{4n}\}}dx_1\cdots dx_{4n}\\
&\leq\sum_{j=1}^{2n}\int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}}\prod_{\{l,i_l:i_l\geq 2\ \sum_{l=1}^j i_l=4n\}}\Big(\frac{1}{\varepsilon^{i_l}}\sum_{k=1}^\infty|E(\zeta_k^{i_l})|I_{[k-1,k)^{i_l}}(\frac{x_1^l}{\varepsilon^2},\ldots,\frac{x_{i_l}^l}{\varepsilon^2})I_{\{x_1^l\leq\cdots\leq x_{i_l}^l\}}\\
&\quad g(x_1^l)\ldots g(x_{i_l}^l)\Big)dx_1^1\ldots dx_{i_j}^j,
\end{aligned}\tag{4.6}$$

on per a cada j, $(x_1^1,\ldots,x_{i_1}^1,x_1^2,\ldots\ldots,x_{i_j}^j)=(x_1,\ldots,x_{4n})$.

Fixem-nos que per a tot $l\in\{1,\ldots,j\}$, sobre el conjunt que integrem, es compleix que $x_{i_l}^l-x_1^l<\varepsilon^2$, i per tant si $i_l\geq 4$

$$\sum_{k=1}^\infty I_{[k-1,k)^{i_l}}(\frac{x_1^l}{\varepsilon^2},\ldots,\frac{x_{i_l}^l}{\varepsilon^2})I_{\{x_1^l\leq\cdots\leq x_{i_l}^l\}}$$

$$\leq I_{[0,\varepsilon^2)}(x^l_{i_l} - x^l_1)I_{\{x^l_1\leq\cdots\leq x^l_{i_l}\}}$$

$$\leq \prod_{r=1}^{[\frac{i_l}{2}]-1} I_{[0,\varepsilon^2)}(x^l_{2r} - x^l_{2r-1})I_{\{x^l_{2r}\leq x^l_{2r-1}\}}I_{[0,\varepsilon^2)}(x^l_{i_l} - x^l_{2[\frac{i_l}{2}]-1})I_{\{x^l_{2[\frac{i_l}{2}]-1}\leq\cdots\leq x^l_{i_l}\}}.$$

Hem vist doncs que el producte d'indicadors de (4.6) es pot fitar sempre per una suma de productes d'indicadors del mateix tipus però amb només dues o tres variables. Per tant, l'expressió (4.6) està fitada per

$$K \sum_{\{l,\delta_m:\delta_m\in\{2,3\}\ \sum_{m=1}^l \delta_m=4n\}} \int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} \prod_{m=1}^{l} \Big(\frac{1}{\varepsilon^{\delta_m}} I_{[0,\varepsilon^2)}(x^m_{\delta_m} - x^m_1)I_{\{x^m_1\leq\cdots\leq x^m_{\delta_m}\}}\Big) \tag{4.7}$$

$$\times g(x^1_1)\cdots g(x^l_{\delta_l})dx^1_1\ldots dx^l_{\delta_l}.$$

Però d'altra banda,

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{\varepsilon}g(x_1)\frac{1}{\varepsilon}g(x_2)I_{[0,\varepsilon^2)}(x_2-x_1)I_{\{x_1\leq x_2\}}dx_1dx_2\\
&\leq \Big(\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{\varepsilon^2}g^2(x_1)I_{[0,\varepsilon^2)}(x_2-x_1)I_{\{x_1\leq x_2\}}dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\times\Big(\int_{[a,b]\times[c,d]} \frac{1}{\varepsilon^2}g^2(x_2)I_{[0,\varepsilon^2)}(x_2-x_1)I_{\{x_1\leq x_2\}}dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\int_a^b g^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_c^d g^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

I també,

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} \frac{1}{\varepsilon^3}g(x_1)g(x_2)g(x_3)I_{[0,\varepsilon^2)}(x_3-x_1)I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\}}dx_1dx_2dx_3\\
&\leq \int_a^b \frac{1}{\varepsilon}g(x_3)\int_{[\max\{c,x_3-\varepsilon^2\},\min\{x_3,d\}]\times[\max\{e,x_3-\varepsilon^2\},\min\{x_3,f\}]} (1/\varepsilon)g(x_1)(1/\varepsilon)g(x_2)I_{[0,\varepsilon^2)}(x_2-x_1)I_{\{x_1\leq x_2\}}dx_1dx_2dx_3,
\end{aligned}$$

usant altre cop la desigualtat de Schwarz i el càlcul anterior amb dues variables, això és menor o igual que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_a^b g^2(x_3)dx_3\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^b\Big(\int_{\max\{c,x_3-\varepsilon^2\}}^{\min\{x_3,d\}} g^2(x_2)dx_2\Big)\Big(\int_{\max\{e,x_3-\varepsilon^2\}}^{\min\{x_3,f\}} g^2(x_1)dx_1\Big)dx_3\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \Big(\int_a^b g^2(x_3)dx_3\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_c^d g^2(x_2)dx_2\int_e^f g^2(x_1)dx_1\int_{x_1}^{x_1+\varepsilon^2}\frac{1}{\varepsilon^2}dx_3dx_2dx_1\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_c^d g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_e^f g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

I per tant l'expressió (4.7) és menor o igual que

$$K\left(\int_s^t g^2(x)dx\right)^2$$

tal i com volíem demostrar.

□

Altres exemples.

Un altre exemple de processos que satisfan la condició (H) serien els següents processos, les integrals dels quals convergeixen en llei cap al moviment Brownià, proposats per Kurtz i Protter a [KP],

$$\theta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(W(\varepsilon([\frac{t}{\varepsilon}] + 1)) - W(\varepsilon[\frac{t}{\varepsilon}]))$$

on $W = \{W_t; t \in [0,T]\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Per a aquests processos és fàcil veure que també es compleix el Lema 4.4.2 seguint la demostració dels nuclis clàssics.

Finalment un altre exemple és considerar la convolució d'un moviment Brownià amb una aproximació de la identitat. Aquests processos aproximadors del moviment Brownià els proposen, per exemple, Ikeda i Watanabe (veure Exemple VI.7.3 de [IW]).

Sigui $\phi(x) \in \mathcal{C}^1([0,1])$ amb suport en $[0,1]$ i tal que $\int_0^1 \phi(x)dx = 1$.

Considerem $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$, d'on $\int_0^\varepsilon \phi_\varepsilon(x)dx = 1$.

Si considerem

$$\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(r)dr,$$

on

$$\theta_\varepsilon(r) = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty W(s)\phi'(\frac{s-r}{\varepsilon})ds$$

és fàcil veure que $\eta_\varepsilon(t)$ convergeix en llei a W_t en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$. De fet la convergència és uniforme en t q.s. ja que tenim la següent expressió alternativa per η_ε :

$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty W(s)\Phi(\frac{s-t}{\varepsilon})ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty W(s)\Phi(\frac{s}{\varepsilon})ds.$$

Veurem a continuació que aquests processos compleixen les hipòtesis del Teorema 4.4.1 i que per tant, si $f \in \mathcal{C}([0,T]^n)$,

$$I_{\eta_\varepsilon}(f)_t = \int_0^t \cdots \int_0^t f(t_1, \ldots, t_n) d\eta_\varepsilon(t_1) \cdots \eta_\varepsilon(t_n)$$

convergeix feblement cap a la integral múltiple de Stratonovich de la funció f, $I_n \circ (f)$, en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$.

N'hi ha prou provant que existeix una funció F creixent i contínua tal que

$$\int_{[s,t]^4 \times [0,t]^{4(n-1)}} |E(\theta_\varepsilon(r_1) \cdots \theta_\varepsilon(r_{4n}))| I_{\{r_1 \leq \cdots \leq r_{4n}\}} dr_1 \cdots dr_{4n} \leq (F(t) - F(s))^{1+\alpha},$$

amb $\alpha > 0$.

Però,

$$\begin{aligned} & \int_{[s,t]^4 \times [0,t]^{4(n-1)}} |E(\theta_\varepsilon(r_1) \cdots \theta_\varepsilon(r_{4n}))| I_{\{r_1 \leq \cdots \leq r_{4n}\}} dr_1 \cdots dr_{4n} \\ = & \int_{[0,t]^{4n}} |E(\theta_\varepsilon(r_1) \cdots \theta_\varepsilon(r_{4n}))| I_{\{r_1 \leq \cdots \leq r_{4n}\}} I_{[s,t]^4}(r_{4n-3}, \ldots, r_{4n}) dr_1 \cdots dr_{4n} \\ \leq & \int_{[0,t]^{4n}} |E(\theta_\varepsilon(r_1) \cdots \theta_\varepsilon(r_{4n}))| \tilde{I}_{s,t}(r_1, \ldots r_{4n}) dr_1 \cdots dr_{4n}, \end{aligned}$$

on $\tilde{I}_{s,t}$ és la següent simetrització,

$$\tilde{I}_{s,t}(r_1, \ldots, r_{4n}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{4n}} I_{\{r_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq r_{\sigma(4n)}\}} I_{[s,t]^4}(r_{\sigma(4n-3)}, \ldots, r_{\sigma(4n)}),$$

$\mathcal{P}_{4n}$ denota la col.lecció de totes les possibles permutacions dels $4n$ primers enters.

Farem tot seguit un càlcul previ amb només dues variables. Veurem la següent fita,

$$\int_{[s,t]^2} |E(\theta_\varepsilon(r_1)\theta_\varepsilon(r_2))| dr_1 dr_2 \leq K(t-s).$$

Obervem que,

$$
\begin{aligned}
E(\theta_\varepsilon(r_1)\theta_\varepsilon(r_2)) &= \frac{1}{\varepsilon^4}\int_{[0,\infty]^2} E(W(x_1)W(x_2))\phi'(\frac{r_1-x_1}{\varepsilon})\phi'(\frac{r_2-x_2}{\varepsilon})dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon^4}\int_{[0,\infty]^2} x_1 I_{\{x_1\le x_2\}}\phi'(\frac{r_1-x_1}{\varepsilon})\phi'(\frac{r_2-x_2}{\varepsilon})dx_1dx_2 \\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon^4}\int_{[0,\infty]^2} x_2 I_{\{x_2\le x_1\}}\phi'(\frac{r_1-x_1}{\varepsilon})\phi'(\frac{r_2-x_2}{\varepsilon})dx_1dx_2 \qquad (4.8) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty x_1\phi'(\frac{r_1-x_1}{\varepsilon})\phi(\frac{r_2-x_1}{\varepsilon})dx_1 \\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty x_2\phi'(\frac{r_2-x_2}{\varepsilon})\phi(\frac{r_1-x_2}{\varepsilon})dx_2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3}\int_0^\infty x\big(\phi'(\frac{r_1-x}{\varepsilon})\phi(\frac{r_2-x}{\varepsilon})+\phi(\frac{r_1-x}{\varepsilon})\phi'(\frac{r_2-x}{\varepsilon})\big)dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty \phi(\frac{r_1-x}{\varepsilon})\phi(\frac{r_2-x}{\varepsilon})dx.
\end{aligned}
$$

Així doncs,

$$
\begin{aligned}
&\int_{[s,t]^2} |E(\theta_\varepsilon(r_1)\theta_\varepsilon(r_2))|dr_1dr_2 \\
&= \int_{[s,t]^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\Big|\int_0^\infty \prod_{i=1}^2\big(I_{\{0<r_i-x<\varepsilon\}}\phi(\frac{r_i-x}{\varepsilon})\big)dx\Big|dr_1dr_2 \\
&\le K\int_{[s,t]^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\infty\prod_{i=1}^2 I_{\{0<r_i-x<\varepsilon\}}dxdr_1dr_2 \\
&\le K(t-s).
\end{aligned}
$$

En general necessitarem calcular el valor de $E(W(x_1)\cdots W(x_{4n}))$ per $x_1\le\cdots\le x_{4n}$. Per fer-ho calculem la funció generatriu de moments del vector $(W(x_1),\ldots,W(x_m))$,

$$
\begin{aligned}
&G(t_1,\ldots,t_m) \\
&= E(\exp[t_1W(x_1)+\cdots+t_mW(x_m)]) \\
&= E(\exp[\sum_{i=1}^m t_iW(x_1)])E(\exp[\sum_{i=2}^m t_i(W(x_2)-W(x_1))])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \cdots \times E(\exp[t_m(W(x_m) - W(x_{m-1}))]) \\
= &\exp[\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{m} t_i)^2 x_1] \exp[\frac{1}{2}(\sum_{i=2}^{m} t_i)^2 (x_2 - x_1)] \cdots \exp[\frac{1}{2} t_m^2 (x_m - x_{m-1})]) \\
= &\exp[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} x_i t_i^2 + \sum_{i=1}^{m-1} x_i t_i (\sum_{j=i+1}^{m} t_j)].
\end{aligned}
$$

Així doncs,

$$
E(W(x_1)\cdots W(x_m)) = \frac{\partial^m G(t_1,\ldots,t_m)}{\partial t_1 \cdots \partial t_m}\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0} = a_m(0),
$$

on

$$
\begin{aligned}
a_1(t) &= x_1 \cdot t \\
a_n(t) &= a_{n-1}(t) \cdot x_n \cdot t + \frac{\partial a_{n-1}(t)}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Observem que a cada pas afegim els mateixos termes multiplicats per $x_j \cdot t$ (on x_j és diferent de totes les anteriors), i també els mateixos termes derivats respecte t. Així doncs els únics termes que pot tenir $a_m(0)$ seran els que hem multiplicat $\frac{m}{2}$ cops per t i hem derivat també $\frac{m}{2}$ cops respecte t. En particular sempre que m sigui senar $a_m(0) = E(W(x_1)\cdots W(x_m)) = 0$.

Per tant tots els termes, si $m = 2j$ seran de la forma $K_{i_1,\ldots,i_j} \cdot x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_j}$ amb $i_l < i_{l+1}$, $i_l \in \{1,2,\ldots,2j\}$ i sortiran tots els que les distàncies entre els i_l no siguin més grans que el número de t acumulades, és a dir tals que $i_l < 2l$ (per exemple, tots començaran per x_1; si $j \geq 2$, x_1 sempre haurà d'anar multiplicat per x_2 o bé per x_3; i també degut a això mai sortirà l'últim terme x_{2j}).

Tenint en compte que aquesta constant $K_{i_1,\ldots,i_j}$ ens surt d'anar derivant respecte t, és fàcil calcular-la; $K_{i_1,\ldots,i_j} = \prod_{l=1}^{j}(2j - i_l - 2(j-l))$.

Així doncs si $x_1 \leq \cdots \leq x_{4n}$,

$$
E(W(x_1)\cdots W(x_{4n})) = \sum_{(i_1,\ldots,i_{2n})\in A(n)} K_{i_1,\ldots,i_{2n}} x_{i_1} \cdots x_{i_{2n}}
$$

on $A(n) = \{(i_1,\ldots,i_{2n}) : i_1 = 1, \& \forall\, l > 1, i_l < i_{l+1}, i_l \in \{1,2,\ldots,4n\}, i_l < 2l\}$.

Llavors,

$$
\int_{[0,t]^{4n}} |E(\theta_\varepsilon(r_1)\cdots\theta_\varepsilon(r_{4n}))| \tilde{I}_{s,t}(r_1,\ldots r_{4n}) dr_1 \cdots dr_{4n}
$$

$$= (4n)! \int_{[0,t]^{4n}} \frac{1}{\varepsilon^{8n}} \cdot \tilde{I}_{s,t} \cdot | \int_{[0,\infty]^{4n}} \sum_{(i_1,\ldots,i_{2n})\in A(n)} K_{i_1,\ldots,i_{2n}} x_{i_1} \cdots x_{i_{2n}} I_{\{x_1 \le \cdots \le x_{4n}\}}$$
$$\times \phi'(\frac{r_1 - x_1}{\varepsilon}) \cdots \phi'(\frac{r_{4n} - x_{4n}}{\varepsilon}) dx_1 \cdots dx_{4n} | dr_1 \cdots dr_{4n},$$

fent canvis de les variable r_i.

Observem que si considerem totes les ordenacions possibles de $x_1 x_2 \cdots x_{2n} I_{\{x_1 \le y_1\}} I_{\{x_2 \le y_2\}} \cdots I_{\{x_{2n} \le y_{2n}\}}$ i fem canvis de variables reordenant totes les variables, obtenim exactament el sumatori que teníem $(2n)!$ vegades. Per tant la darrera expressió és igual a,

$$\frac{(4n)!}{(2n)!} \int_{[0,t]^{4n}} \frac{1}{\varepsilon^{8n}} \tilde{I}_{s,t} | \int_{[0,\infty]^{4n}} x_1 \cdots x_{2n} I_{\{x_1 \le y_1\}} \cdots I_{\{x_{2n} \le y_{2n}\}}$$
$$\times \phi'(\frac{r_1 - x_1}{\varepsilon}) \phi'(\frac{r_2 - x_2}{\varepsilon}) \cdots \phi'(\frac{r_{2n} - x_{2n}}{\varepsilon})$$
$$\times \phi'(\frac{u_1 - y_1}{\varepsilon}) \cdots \phi'(\frac{u_{2n} - y_{2n}}{\varepsilon}) dx_1 \cdots dx_{2n} dy_1 \cdots dy_{2n} | dr_1 \cdots dr_{2n} du_1 \cdots du_{2n}$$
$$= \frac{(4n)!}{(2n)!} \int_{[0,t]^{4n}} \frac{1}{\varepsilon^{8n}} \tilde{I}_{s,t} | \int_{[0,\infty]^2} x_1 \phi'(\frac{r_1 - x_1}{\varepsilon}) \phi'(\frac{u_1 - y_1}{\varepsilon}) I_{\{x_1 \le y_1\}} dx_1 dy_1 \times \cdots$$
$$\times \int_{[0,\infty]^2} x_{2n} \phi'(\frac{r_{2n} - x_{2n}}{\varepsilon}) \phi'(\frac{u_{2n} - y_{2n}}{\varepsilon}) I_{\{x_{2n} \le y_{2n}\}} dx_{2n} dy_{2n} | dr_1 \cdots dr_{2n} du_1 \cdots du_{2n}.$$

Seguint els arguments del càlcul (4.8) per cada parell de variables això és menor o igual que

$$K \int_{[0,t]^{4n}} \frac{1}{\varepsilon^{4n}} \tilde{I}_{s,t} \prod_{i=1}^{2n} \int_{[0,\infty)} I_{\{0 < r_i - x_i < \varepsilon\}} I_{\{0 < u_i - x_i < \varepsilon\}} dx_i dr_1 \cdots dr_{2n} du_1 \cdots du_{2n}$$
$$\le K(t-s)^2 t^{2(n-1)},$$

tal i com volíem demostrar.

4.4.2 Convergència conjunta d'integrals de Stratonovich de funcions del $L^2([0,T])$.

D'ara en endavant ens centrarem en el cas on les aproximacions del moviment Brownià són o bé les de Donsker o bé les de Stroock que hem introduït en la secció 4.4.1.

És a dir, els processos que convergeixen en llei cap al moviment Brownià seran de la forma $\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(x)dx$ on $\theta_\varepsilon(x)$ són o bé els nuclis clàssics (o de Donsker),

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k I_{[k-1,k)}(\frac{x}{\varepsilon^2}),$$

on ζ_k són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, centrades, amb $E(\zeta_k^2) = 1$ i $E(\zeta_k^{4n}) < \infty$. O bé seran els nuclis introduïts per Stroock a [St],

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon^2})},$$

on $N = \{N_s; s \geq 0\}$ és un procés de Poisson estàndard.

En aquesta secció concretament provarem que si considerem per $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$Y_i^\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(x) f_i(x)dx,$$

on $f_i \in L^2([0,T])$ per a tot i, tenim convergència feble conjunta d'aquests processos cap a les corresponents integrals de Stratonovich (que en aquest cas coincideixen amb les integrals d'Itô) en l'espai $(C_0([0,T]))^n$.

Veurem però abans un resultat previ d'anàlisi estocàstica que ens servirà per demostrar aquesta convergència i que també usarem més endavant.

Lema 4.4.3. *Siguin $M^{(i)} = \{M_t; 0 \leq t \leq T\}$, $i = 1, \ldots, n$ martingales contínues en $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ i suposem que $< M^{(i)}, M^{(j)} >_t = \int_0^t G_s^{(i)} G_s^{(j)} ds$ per a tot i i tot j per uns certs processos $G^{(1)}, \ldots, G^{(n)}$ adaptats del $L^2([0,T] \times \Omega)$. Llavors existeix una extensió $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on tenim definit un moviment Brownià $W = \{W_t, \bar{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t \leq T\}$ tal que $\bar{P}-$quasi segurament*

$$M_t^{(i)} = \int_0^t G_s^{(i)} dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{per a tot } i = 1, \ldots, n.$$

Prova:

Estenent l'espai de probabilitat podem agafar un moviment Brownià $B = \{B_t, \bar{\mathcal{F}}_t; 0 \leq t \leq T\}$ independent de $M^{(i)}$ per tot i. Definim llavors per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} W_t^{(i)} &= \int_0^t \operatorname{sign}(G_s^{(i)}) I_{\{|G_s^{(i)}|>0\}} \frac{1}{|G_s^{(i)}|} dM_s^{(i)} \\ &+ \sum_{j=i+1}^{n} \int_0^t \operatorname{sign}(G_s^{(j)}) I_{\{G_s^{(i)}=0,\ldots G_s^{(j-1)}=0, |G_s^{(j)}|>0\}} \frac{1}{|G_s^{(j)}|} dM_s^{(j)} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^t \text{sign}(G_s^{(j)}) I_{\{G_s^{(i)}=0,\ldots,G_s^{(n)}=0,G_1^{(1)}=0,\ldots G_s^{(j-1)}=0,|G_s^{(j)}|>0\}} \frac{1}{|G_s^{(j)}|} dM_s^{(j)}$$
$$+ \int_0^t I_{\{G_s^{(1)}=0,\ldots,G_s^{(n)}=0\}} dB_s.$$

Les integrals estocàstiques anteriors estan ben definides perquè les variacions quadràtiques $< M^{(i)} >$ són absolutament contínues, i els processos integradors, denotem-los genèricament per X^i, són adaptats i satisfan $E\int_0^T (X_t^i)^2 d\left\langle M^{(i)}\right\rangle < \infty$. (Per a una discussió més detallada és pot consultar [KS] pp. 130/131).

Pel teorema de Paul Lévy són moviments Brownians, ja que per a tot i la variació quadràtica,

$$< W^{(i)} >_t = \int_0^t ds = t \qquad \text{per a tot } t \in [0, T].$$

D'altra banda,

$$\int_0^t G_s^{(i)} dW_s^{(i)} = \int_0^t I_{\{|G_s^{(i)}|>0\}} dM_s^{(i)} = M_t^{(i)},$$

ja que la martingala $\int_0^t I_{\{G_s^{(i)}=0\}} dM_s^{(i)}$ és idènticament nul.la perquè té variació quadràtica nul.la. En efecte,

$$\int_0^t I_{\{G_s^{(i)}=0\}} d < M^{(i)} >_s = \int_0^t I_{\{G_s^{(i)}=0\}} (G_s^{(i)})^2 ds = 0.$$

Falta doncs només provar que aquests moviments Brownians són indistingibles. Però per a tot i i j,

$$< W^{(i)}, W^{(j)} >_t = \int_0^t ds = t.$$

Per tant $W_t^{(i)} W_t^{(j)} - t$ és una martingala, que a més a més surt de zero. Així $E(W_t^{(i)} W_t^{(j)}) = t$ i llavors

$$E(W_t^{(i)} - W_t^{(j)})^2 = E(W_t^{(i)})^2 + E(W_t^{(j)})^2 - 2E(W_t^{(i)} W_t^{(j)}) = 0.$$

Per tant $W_t^{(i)} = W_t^{(j)}$ quasi segurament per a tot t. I com que es tracta de processos continus, seran indistingibles.

□

Passarem tot seguit a provar el següent resultat:

Proposició 4.4.4. *Definim per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$ i per a tot $\varepsilon > 0$*

$$Y_i^\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(x) f_i(x) dx,$$

on $t \in [0,T]$, $f_i \in L^2([0,T])$ per a tot $i \in \{1,\dots,n\}$ i $\theta_\varepsilon(x)$ són tots o bé els nuclis de Donsker o bé els nuclis de Stroock que hem introduït anteriorment.

Llavors,

$$\mathcal{L}(Y_1^\varepsilon(t),\dots,Y_n^\varepsilon(t)) \xrightarrow{w} \mathcal{L}\Big(\int_0^t f_1(x)dW_x,\dots,\int_0^t f_n(x)dW_x\Big)$$

en l'espai $\big(\mathcal{C}_0([0,T])\big)^n$, on $W=\{W_t;\, t\in[0,T]\}$ és un moviment Brownià estàndard.

Prova:

Per demostrar aquest resultat caldrà veure que les famílies de lleis són ajustades i caldrà identificar tots els possibles límits febles.

Per veure l'ajustament, usant el criteri donat per Billingsley (veure el Teorema 12.3 de [Bi]), n'hi ha prou provant que, per a tot $0 \le s \le t \le T$ i per a tot $i \in \{1,\dots,n\}$ existeix una constant K tal que

$$\sup_\varepsilon E\big[(Y_i^\varepsilon(t)-Y_i^\varepsilon(s))^4\big] \le K\Big(\int_s^t f_i^2(x)dx\Big)^2. \tag{4.9}$$

Però,

$$\begin{aligned} E\big[(Y_i^\varepsilon(t)-Y_i^\varepsilon(s))^4\big] &= E\Big[\Big(\int_s^t f_i(x)\theta_\varepsilon(x)\Big)^4\Big] \\ &\le K\int_{[s,t]^4} |f_i(x_1)|\cdots|f_i(x_4)||E(\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_4)| \\ &\quad I_{\{x_1\le\cdots\le x_4\}}dx_1\cdots dx_4, \end{aligned}$$

i aquesta última expressió és menor o igual que $K\big(\int_s^t f_i^2(x)dx\big)^2$ pel Lema 4.4.2 tal i com volíem demostrar.

Hem provat l'ajustament, passarem tot seguit a identificar el límit. Denotarem per $\{P_\varepsilon\}$ la família de lleis de $(Y_1^\varepsilon,\dots,Y_n^\varepsilon)$. Suposem que tenim una subsuccessió dins $\{P_\varepsilon\}$, que continuarem denotant igual, feblement convergent cap a un certa probabilitat P i hem de provar que el procés canònic (que denotarem per $(Y_1,\dots,Y_n)$), sota la llei límit, té la mateixa llei que

$$\Big(\int_0^t f_1(x)dW_x,\dots,\int_0^t f_n(x)dW_x\Big). \tag{4.10}$$

Usant el Lema 4.4.3, el que hem de veure és que, sota la llei límit P, les coordenades del procés canònic Y_i són martingales contínues respecte la seva filtració natural amb les variacions i covariacions quadràtiques de les components de (4.10).

Per veure que són martingales, n'hi ha prou provant que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, per a tot $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_m < s < t$ i per a tota $\varphi : \mathbb{R}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E_P\big[\varphi((Y_1(s_1), \dots, Y_n(s_1)), ..., (Y_1(s_m), \dots, Y_n(s_m)))(Y_i(t) - Y_i(s))\big] = 0.$$

Però del fet que $P_\varepsilon \overset{w}{\Rightarrow} P$ i usant la desigualtat (4.9) que ens ha permés provar l'ajustament, tenim que

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \to 0} E\big[\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), ..., (Y_1^\varepsilon(s_m), \dots, Y_n^\varepsilon(s_m)))(Y_i^\varepsilon(t) - Y_i^\varepsilon(s))\big] \\
= \;& \lim_{\varepsilon \to 0} E_{P_\varepsilon}\big[\varphi((Y_1(s_1), \dots, Y_n(s_1)), ..., (Y_1(s_m), \dots, Y_n(s_m)))(Y_i(t) - Y_i(s))\big] \\
= \;& E_P\big[\varphi((Y_1(s_1), \dots, Y_n(s_1)), ..., (Y_1(s_m), \dots, Y_n(s_m)))(Y_i(t) - Y_i(s))\big].
\end{aligned}$$

Per tant n'hi ha prou provant que

$$E\big[\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), ..., (Y_1^\varepsilon(s_m), \dots, Y_n^\varepsilon(s_m)))(Y_i^\varepsilon(t) - Y_i^\varepsilon(s))\big]$$

convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Pel cas dels nuclis de Stroock, usant que el procés de Poisson té increments independents tenim

$$\begin{aligned}
& E\big[\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), ..., (Y_1^\varepsilon(s_m), \dots, Y_n^\varepsilon(s_m)))(Y_i^\varepsilon(t) - Y_i^\varepsilon(s))\big] \\
\leq \;& \int_s^t |f_i(x)| \big|E\big[\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), ..., (Y_1^\varepsilon(s_m), \dots, Y_n^\varepsilon(s_m)))(-1)^{N(\frac{s}{\varepsilon^2})} \\
& \times \frac{1}{\varepsilon}(-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon^2}) - N(\frac{s}{\varepsilon^2})}\big]\big| dx \\
\leq \;& K \int_s^t |f_i(x)| \frac{1}{\varepsilon} \exp\{-2(\frac{x-s}{\varepsilon^2})\} dx.
\end{aligned}$$

Separant aquesta integral en els intervals $[s, s+\varepsilon]$ i $[s+\varepsilon, t]$ és fàcil veure que en tots dos casos convergeix a zero.

Pel que fa als nuclis clàssics tenim

$$E\big[\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), ..., (Y_1^\varepsilon(s_m), \dots, Y_n^\varepsilon(s_m)))\big(\int_s^t f_i(x) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k I_{[k-1,k)}(\frac{x}{\varepsilon^2}) dx\big)\big].$$

Tenim que $s_m < s$, per tant $\frac{s - s_m}{\varepsilon^2}$ tendeix a infinit quan ε tendeix a zero, i per tant per ε prou petit, $\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), ..., (Y_1^\varepsilon(s_m), \dots, Y_n^\varepsilon(s_m)))$ i $\int_s^t f_i(x) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k I_{[k-1,k)}(\frac{x}{\varepsilon^2}) dx$ són independents. Però sabem que $E(\zeta_k) = 0$ i que

$E\big[\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1),\dots,Y_n^\varepsilon(s_1)),...,(Y_1^\varepsilon(s_m),\dots,Y_n^\varepsilon(s_m)))\big]$ està fitada, per tant això convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Passem doncs a provar que les variacions quadràtiques i les covariacions són les mateixes que les de les components de (4.10), és a dir, que per a tot $i,j\in\{1,\dots,n\}$ i per a tot $t\in[0,T]$ sota la llei P

$$< Y_i, Y_j >_t = \int_0^t f_i(x)f_j(x)dx.$$

Igual que per la propietat de martingala, usant el mateix tipus d'arguments, n'hi haurà prou provant que per a tot $i,j\in\{1,\dots,n\}$, per a tot $s_1\le s_2\le\cdots\le s_m< s<t$ i per a tota $\varphi:\mathbb{R}^{n\times m}\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E\big[\varphi^\varepsilon[(Y_i^\varepsilon(t)-Y_i^\varepsilon(s))(Y_j^\varepsilon(t)-Y_j^\varepsilon(s))-\int_s^t f_i(x)f_j(x)dx]\big],$$

on $\varphi^\varepsilon=\varphi((Y_1^\varepsilon(s_1),\dots,Y_n^\varepsilon(s_1)),...,(Y_1^\varepsilon(s_m),\dots,Y_n^\varepsilon(s_m)))$, convergeix a zero quan ε tendeix a zero. Però aquesta expressió és igual a

$$\begin{aligned}
&E\big[\varphi^\varepsilon((\int_s^t f_i(x_1)\theta_\varepsilon(x_1)dx_1)(\int_s^t f_j(x_2)\theta_\varepsilon(x_2)dx_2)-\int_s^t f_i(x)f_j(x)dx)\big]\\
=\;& E\big[\varphi^\varepsilon\int_s^t\int_s^{x_2} f_i(x_1)f_j(x_2)\theta_\varepsilon(x_1)\theta_\varepsilon(x_2)dx_1dx_2\big]\\
&+E\big[\varphi^\varepsilon\int_s^t\int_s^{x_2} f_i(x_2)f_j(x_1)\theta_\varepsilon(x_1)\theta_\varepsilon(x_2)dx_1dx_2\big]\\
&-E\big[\varphi^\varepsilon\int_s^t f_i(x)f_j(x)dx\big]\\
=\;& I_1+I_2-I_3.
\end{aligned}$$

Per convergència feble sabem que l'última integral convergeix a

$$E\big[\varphi((Y_1(s_1),\dots,Y_n(s_1)),...,(Y_1(s_m),\dots,Y_n(s_m)))\big]\int_s^t f_i(x)f_j(x)dx.$$

En el cas dels nuclis de Stroock,

$$I_1=\int_s^t\int_s^{x_2}\frac{1}{\varepsilon^2}f_i(x_1)f_j(x_2)\exp\{-2\frac{x_2-x_1}{\varepsilon^2}\}dx_1dx_2E[\varphi^\varepsilon]$$

convergeix, utilitzant que tenim una aproximació de la identitat, a

$$\frac{1}{2}\int_s^t f_i(x)f_j(x)dxE\big[\varphi((Y_1(s_1),\dots,Y_n(s_1)),...,(Y_1(s_m),\dots,Y_n(s_m)))\big]$$

i el mateix passa amb I_2.

Pel que fa als nuclis clàssics usant la mateixa propietat que ens ha servit per provar la propietat de martingala i que $E(\zeta_j\zeta_k) = \delta_{jk}$ tenim que si ε és prou petit

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= E[\varphi^\varepsilon]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{k\varepsilon^2}\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{k\varepsilon^2} f_i(x_1)I_{[s,t]}(x_1)f_j(x_2)I_{[s,t]}(x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_0^1 [\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{k\varepsilon^2} f_i(x_1)I_{[s,t]}(x_1)dx_1\Big)I_{[(k-1)\varepsilon^2,k\varepsilon^2]}(x)] \\ &\quad\times[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{k\varepsilon^2} f_j(x_2)I_{[s,t]}(x_2)dx_2\Big)I_{[(k-1)\varepsilon^2,k\varepsilon^2]}(x)]\,dx. \end{aligned}$$

Però usant que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\big(\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{k\varepsilon^2} f(x)I_{[s,t]}(x)dx\big)I_{[(k-1)\varepsilon^2,k\varepsilon^2]}(y)$ convergeix en $L^2([0,T])$ cap a $f(y)$ quan ε tendeix a zero per a tota funció $f \in L^2([0,T])$, tenim que aquest darrer terme convergeix a

$$\int_0^1 I_{[s,t]}(x)f_i(x)f_j(x)dx$$

tal i com volíem demostrar.

□

Observació 4.4.5. *Aquest resultat (Proposició 4.4.4) també seria cert per altres tipus d'aproximacions del moviment Brownià amb algun tipus de condició que ens doni l'ajustament. La clau de la demostració està en dos fets, tenir alguna condició tipus "mixing", que ve a ser una independència asimptòtica entre el passat i el futur (veure la secció II.1.2 de [Sk]), i cal també que la integral $\int_0^s g(t)E[\theta_\varepsilon(s)\theta_\varepsilon(t)]dt$ convergeixi en $L^2([0,T])$ cap a $g(s)$ per a tota funció $g \in L^2([0,T])$.*

4.4.3 Convergència cap a integrals múltiples de Stratonovich de funcions tipus productes del $L^2([0,T])$.

Considerem una funció del tipus

$$f(x_1,\ldots,x_l) = f_1(x_1)\cdots f_l(x_l)I_{\{x_1\le\cdots\le x_l\}} \tag{4.11}$$

on $f_i(x) \in L^2([0,T])$ per a tot $i \in \{1,\ldots,l\}$. I considerem $\eta_\varepsilon(t) = \int_0^t \theta_\varepsilon(x)dx$ on $\theta_\varepsilon(x)$ són o bé els nuclis de Donsker o bé els nuclis de Stroock definits en la secció 4.4.1.

Provarem en aquesta secció que

$$I_{\eta_\varepsilon}(f)_t = \int_0^t\cdots\int_0^t f(x_1,\ldots,x_l)d\eta_\varepsilon(x_1)\cdots d\eta_\varepsilon(x_l)$$

convergeix feblement cap a la integral múltiple de Stratonovich de f, $I_l \circ (f)$ en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])$ i, a més a més, també provarem que tenim convergència conjunta de les integrals iterades.

El primer que cal veure és que aquest tipus de funcions són Stratonovich integrables.

A l'Apèndix 5.2 demostrem que per tot $n \in \{2, \cdots, l\}$ existeixen les següentes integrals iterades simples de Stratonovich

$$Y_n(t) = \int_0^t f_n(u) Y_{n-1}(u) \circ dW_u$$

on $Y_1(t) = \int_0^t f_1(u) \circ dW_u$, i que cada integral iterada Y_n coincideix amb la corresponent integral múltiple de Stratonovich. La fórmula de Hu-Meyer (veure Teorema 4.2.4) ens permet escriure la integral múltiple de Stratonovich com a suma d'integrals tipus Itô, la qual cosa ens garanteix l'existència d'una versió d'aquest procés amb trajectòries contínues.

Teorema 4.4.6. *Siguin $f_i(t) \in L^2([0,T])$ per a tot $i \in \{1, \ldots, l\}$, i considerem*

$$\begin{aligned} Y_1^\varepsilon(t) &= \int_0^t f_1(u)\theta_\varepsilon(u)du, \\ Y_n^\varepsilon(t) &= \int_0^t f_n(u) Y_{n-1}^\varepsilon(u)\theta_\varepsilon(u)du, \end{aligned}$$

per $n \in \{2, \ldots, l\}$ on $\theta_\varepsilon(u)$ són tots o bé els nuclis de Donsker o bé els nuclis de Stroock que hem introduït anteriorment.

Llavors,

$$\mathcal{L}(Y_1^\varepsilon, \ldots, Y_l^\varepsilon) \xrightarrow{w} \mathcal{L}(Y_1, \ldots, Y_l)$$

en l'espai de les funcions contínues $(\mathcal{C}([0,T]))^l$ quan ε tendeix a zero, on

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \int_0^t f_1(u)dW_u \qquad \text{i} \\ Y_n(t) &= \int_0^t f_n(u) Y_{n-1}(u) \circ dW_u, \end{aligned}$$

per $n \in \{2, \ldots, l\}$.

El mètode de demostració que utilitzarem consistirà en provar l'ajustament i que tots els possibles límits coincideixen amb la llei de $(Y_1, \ldots, Y_l)$. La unicitat en llei del procés límit $(Y_1, \ldots, Y_l)$ està clara pel fet que a l'Apèndix 5.2.1 provem que aquestes integrals iterades coincideixen amb les successives integrals múltiples de Stratonovich.

Abans de passar a la prova d'aquest teorema veurem un resultat que ens serà útil després. Amb els nuclis clàssics, seguint la prova de l'expressió (4.6) del Lema 4.4.2, és fàcil veure que si tenim una funció g positiva,

$$\int_{[s,t]\times[0,t]^{(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_n)|E\big(\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_n)\big)|I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_n\}}dx_1\cdots dx_n$$
$$\leq \sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}\int_{[s,t]\times[0,t]^{(n-1)}} \prod_{\{l,i_l:i_l\geq 2\ \sum_{l=1}^{j} i_l=n\}} \Big(\frac{1}{\varepsilon^{i_l}}\sum_{k=1}^{\infty}|E(\zeta_k^{i_l})|I_{[k-1,k)^{i_l}}\big(\frac{x_1^l}{\varepsilon^2},\ldots,\frac{x_{i_l}^l}{\varepsilon^2}\big)I_{\{x_1^l\leq\cdots\leq x_{i_l}^l\}}$$
$$g(x_1^l)\ldots g(x_{i_l}^l)\Big)dx_1^1\ldots dx_{i_j}^j$$

on per a cada j, $(x_1^1,\ldots,x_{i_1}^1,x_1^2,\ldots\ldots,x_{i_j}^j)=(x_1,\ldots,x_n)$.

Veurem però que tots els termes amb $i_l>2$ convergeixen a zero, i per tant hi haurà situacions en què només haurem de considerar els termes amb $i_l=2$, on tenim $E(\zeta_k^2)=1$.

Això és així perquè si considerem $k\geq 3$,

$$\begin{aligned}
&\int_{[s,t]\times[0,t]^{k-1}} g(x_1)\cdots g(x_k)\frac{1}{\varepsilon^k}I_{[0,\varepsilon^2)}(x_k-x_1)I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_k\}}dx_1\cdots dx_k\\
=&\ \frac{1}{\varepsilon^k}\int_s^t g(x_k)\Big(\int_{[x_k-\varepsilon^2,x_k]^{k-1}} g(x_1)\cdots g(x_{k-1})I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{k-1}\}}dx_1\cdots dx_{k-1}\Big)dx_k\\
=&\ \frac{1}{\varepsilon^k}K\int_s^t g(x_k)\Big(\int_{x_k-\varepsilon^2}^{x_k} g(x)dx\Big)^{k-1}dx_k\\
\leq&\ \frac{1}{\varepsilon^k}K\int_s^t g(x_k)\Big(\varepsilon^2\int_{x_k-\varepsilon^2}^{x_k} g^2(x)dx\Big)^{\frac{k-1}{2}}dx_k\\
=&\ \frac{1}{\varepsilon}K\int_s^t g(x_k)\Big(\int_{x_k-\varepsilon^2}^{x_k} g^2(x)dx\Big)^{\frac{k-1}{2}}dx_k. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Observem que com que $k\geq 3$ tenim que $\frac{k-1}{2}\geq 1$. Considerem ara,

$$G(y)=\int_0^y g^2(x)dx.$$

Com que $G(y)$ és una funció contínua existeix una constant que només dependrà de k i de la norma $\|G\|_\infty$ tal que

$$\big(G(x_k)-G(x_k-\varepsilon^2)\big)^{\frac{k-1}{2}}\leq K\big(G(x_k)-G(x_k-\varepsilon^2)\big).$$

Així doncs l'expressió (4.12) està fitada per $\frac{1}{\varepsilon}K\int_s^t g(x_k)\big(\int_{x_k-\varepsilon^2}^{x_k} g^2(x)dx\big)dx_k$. Però això és menor o igual que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon}K\Big(\int_s^t g^2(x_k)dx_k\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(2\int_s^t\int_{x_k-\varepsilon^2}^{x_k}\int_{x_k-\varepsilon^2}^{x_2} g^2(x_1)g^2(x_2)dx_1dx_2dx_k\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & \|g\|_2K\frac{1}{\varepsilon}\Big(2\int_0^t\int_0^{x_2} g^2(x_1)g^2(x_2)I_{[0,\varepsilon^2]}(x_2-x_1)\int_{x_2}^{x_2+\varepsilon^2} dx_kdx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & K\Big(\int_0^t g^2(x_2)\int_{x_2-\varepsilon^2}^{x_2} g^2(x_1)dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

i l'integrand d'aquest terme està dominat per $g^2(x_2)\int_0^T g^2(x)dx$ que pertany a $L^1([0,T])$, i d'altra banda el límit quan ε tendeix a zero de l'integrand és zero, per tant per convergència dominada convergeix a zero.

Prova:(Teorema 4.4.6)

Usant novament el criteri de Billingsley (Teorema 12.3 de [Bi]) per a provar l'ajustament serà suficient provar que

$$E(Y_n^\varepsilon(t)-Y_n^\varepsilon(s))^4 \leq K\Big(\int_s^t g^2(x)dx\Big)^2,$$

on $g(x)=\max_{1\leq j\leq n}|f_j(x)|$.

Però,

$$\begin{aligned} & E(Y_n^\varepsilon(t)-Y_n^\varepsilon(s))^4 \\ =\ & E\Big|\int_{[s,t]\times[0,t]^{n-1}} f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_n)I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_n\}}dx_1\cdots dx_n\Big|^4 \\ \leq\ & K(n)\int_{[s,t]^4\times[0,t]^{4(n-1)}} g(x_1)\cdots g(x_{4n})|E(\theta_\varepsilon(x_1)\cdots\theta_\varepsilon(x_{4n}))|I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{4n}\}}dx_1\cdots dx_{4n} \\ \leq\ & K\Big(\int_s^t g^2(x)dx\Big)^2, \end{aligned}$$

usant el Lema 4.4.2.

Denotarem per P_ε les lleis de $(Y_1^\varepsilon,\cdots,Y_l^\varepsilon)$ en l'espai $\mathcal{C}_0([0,T])^l$. Sigui $\{P_{\varepsilon_n}\}_n$ una subsuccessió de $\{P_\varepsilon\}_\varepsilon$ (que continuarem denotant per $\{P_\varepsilon\}_\varepsilon$) feblement convergent cap a una certa probabilitat P. Volem veure que el procés canònic de $\mathcal{C}_0([0,T])^l,(X_1(t),\ldots,X_l(t))$, sota la probabilitat P té la mateixa llei que $(Y_1(t),\ldots,Y_l(t))$.

Usant el Lema 4.4.3, el que hem de veure és que per a tot $n,m\in\{1,\ldots,l\}$, sota la llei P, els processos

$$X_n(\cdot)-\frac{1}{2}\int_0^\cdot f_n(u)f_{n-1}(u)X_{n-2}(u)du$$

són martingales, respecte la seva filtració natural, amb variacions quadràtiques i covariacions donades per

$$< X_n(\cdot)-\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} f_n(u)f_{n-1}(u)X_{n-2}(u)du, X_m(\cdot)-\frac{1}{2}\int_0^{\cdot} f_m(u)f_{m-1}(u)X_{m-2}(u)du >_t$$
$$= \int_0^t f_n(u)X_{n-1}(u)f_m(u)X_{m-1}(u)du,$$

on, per a que això tingui sentit per a tot $n, m \geq 1$, definim $X_{-1} \equiv 0$ i $X_0 \equiv 1$.

Per veure que sota P els processos X_n corregits són martingales respecte la seva filtració natural, usant el mateix tipus d'arguments que en la secció 4.4.2, és fàcil veure que n'hi ha prou provant que per a tot $n \in \{1, \dots, l\}$, per a tot $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m < s < t$ i per a tota $\varphi : \mathbb{R}^{n\times r} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E_P\big[\bar{\varphi}\big((X_n(t) - X_n(s)) - \frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)X_{n-2}(u)du\big)\big] = 0,$$

on $\bar{\varphi} = \varphi((X_1(s_1), \dots, X_n(s_1)), \dots, (X_1(s_r), \dots, X_n(s_r)))$.

Però com que P_ε convergeix feblement cap a P i tenint en compte la integrabilitat uniforme que hem vist a la demostració de l'ajustament, tenim que

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} E_{P_\varepsilon}\big[\bar{\varphi}\big((X_n(t) - X_n(s)) - \frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)X_{n-2}(u)du\big)\big]\\ =\ & E_P\big[\bar{\varphi}\big((X_n(t) - X_n(s)) - \frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)X_{n-2}(u)du\big)\big].\end{aligned}$$

Per tant n'hi ha prou demostrant que

$$E\big[\varphi^\varepsilon\big((Y_n^\varepsilon(t) - Y_n^\varepsilon(s)) - \frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)Y_{n-2}^\varepsilon(u)du\big)\big]$$

convergeix cap a zero quan $\varepsilon \downarrow 0$, on $\varphi^\varepsilon = \varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_n^\varepsilon(s_1)), \dots, (Y_1^\varepsilon(s_r), \dots, Y_n^\varepsilon(s_r)))$. Però aquest terme és igual a $I_1 - I_2$ amb

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_s^t \int_0^v f_n(v)f_{n-1}(u)E[\theta_\varepsilon(u)\theta_\varepsilon(v)\varphi^\varepsilon Y_{n-2}^\varepsilon(u)]dudv,\\ I_2 &= \frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)E[\varphi^\varepsilon Y_{n-2}^\varepsilon(u)]du.\end{aligned}$$

Observem que

$$I_1 = \int_s^t \int_0^s f_n(v)f_{n-1}(u)E[\theta_\varepsilon(u)\theta_\varepsilon(v)\varphi^\varepsilon Y_{n-2}^\varepsilon(u)]dudv$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_s^t\int_s^v f_n(v)f_{n-1}(u)E[\theta_\varepsilon(u)\theta_\varepsilon(v)\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-2}(u)]dudv\\
&= I_{1,1}+I_{1,2}.
\end{aligned}
$$

En el cas dels nuclis de Stroock, fent càlculs semblants als de la part d'identificació del límit de la Proposició 4.4.4 tenim que

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} &= \int_s^t f_n(v)\frac{1}{\varepsilon}\exp\{-2(\frac{v-s}{\varepsilon^2})\}E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-1}(s)(-1)^{N(\frac{s}{\varepsilon^2})}]dv\\
&\le K\int_s^t |f_n(v)|\frac{1}{\varepsilon}\exp\{-2(\frac{v-s}{\varepsilon^2})\}dv,
\end{aligned}
$$

i separant aquesta integral en els intervals $[s,s+\varepsilon]$ i $[s+\varepsilon,t]$ és fàcil veure que en tots dos casos convergeix a zero.

D'altra banda,

$$
\begin{aligned}
&I_{1,2}-I_2\\
&= \int_s^t f_{n-1}(u)E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-2}(u)]\Big(\int_u^t f_n(v)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{v-u}{\varepsilon^2})\}dv-\frac{1}{2}f_n(u)\Big)du\\
&= \int_s^t f_{n-1}(u)(E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-2}(u)]-\bar{E}[\bar{\varphi}X_{n-2}(u)])\\
&\quad\times\Big(\int_u^t f_n(v)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{v-u}{\varepsilon^2})\}dv-\frac{1}{2}f_n(u)\Big)du\\
&\quad+\int_s^t f_{n-1}(u)\bar{E}[\bar{\varphi}X_{n-2}(u)]\Big(\int_u^t f_n(v)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{v-u}{\varepsilon^2})\}dv-\frac{1}{2}f_n(u)\Big)du,
\end{aligned}
$$

on $\bar{\varphi}=\varphi((X_1(s_1),\ldots,X_n(s_1)),\ldots,(X_1(s_r),\ldots,X_n(s_r)))$.

El primer d'aquests dos termes convergeix a zero usant convergència dominada, que P_ε convergeix feblement cap a P i la integrabilitat uniforme que ens dóna la fita provada per a l'ajustament. Pel que fa al segon, la convergència cap a zero quan ε tendeix a zero se segueix del fet que $f_{n-1}(u)\bar{E}[\bar{\varphi}X_{n-2}(u)]\in L^2([0,T])$ i que per a tot parell de funcions $h_1,h_2\in L^2([0,T])$,

$$
\int_s^t h_1(u)\int_u^t h_2(v)\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{v-u}{\varepsilon^2})\}dvdu\longrightarrow\frac{1}{2}\int_s^t h_1(u)h_2(u)du.
$$

Pel que fa als nuclis clàssics, d'una banda l'integrand d'$I_{1,1}$ és idénticament nul a no ser que $s<v<s+\varepsilon^2$ i $s-\varepsilon^2<u<s$, perquè $E(\zeta_k)=0$. Però llavors usant els

càlculs de l'ajustament,

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= E[\varphi^\varepsilon(Y^\varepsilon_{n-1}(s) - Y^\varepsilon_{n-1}(s-\varepsilon^2))(\bar{Y}^\varepsilon_1(s+\varepsilon^2) - \bar{Y}^\varepsilon_1(s))] \\ &\leq (E[(Y^\varepsilon_{n-1}(s) - Y^\varepsilon_{n-1}(s-\varepsilon^2))^2])^{\frac{1}{2}}(E[(\varphi^\varepsilon)^2]E[(\bar{Y}^\varepsilon_1(s+\varepsilon^2) - \bar{Y}^\varepsilon_1(s))^2])^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K\Big(\int_{s-\varepsilon^2}^{s} g^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}(E[(\varphi^\varepsilon)^2])^{\frac{1}{2}}\Big(\int_s^{s+\varepsilon^2} g^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

on $\bar{Y}^\varepsilon_1(t) = \int_0^t f_n(x)\theta_\varepsilon(x)dx$. I aquest últim terme convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Pel que fa a $I_{1,2}$, recordant que $s_m < s$ i per tant per ε prou petit $s - s_m > \varepsilon^2$ i φ^ε és independent de $\theta_\varepsilon(u)$ i $\theta_\varepsilon(v)$, i que pel càlcul previ a la demostració d'aquest teorema és fàcil veure que els termes en els que hi intervenien moments de ζ_k d'ordre superior a dos convergeixen a zero, tenim que tret de termes que convergeixen a zero, $I_{1,2}$ és igual a

$$\int_s^t \int_s^v f_n(v) f_{n-1}(u)\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\sum_{k=1}^\infty I_{[k-1,k)^2}\big(\frac{u}{\varepsilon^2},\frac{v}{\varepsilon^2}\big)\Big)E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-2}(u)]dudv.$$

Així doncs tenim que tret de termes que convergeixen a zero, $I_{1,2} - I_2$ és igual a

$$\int_s^t f_{n-1}(u)E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-2}(u)]\int_u^t \Big(f_n(v)\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\sum_{k=1}^\infty I_{[k-1,k)^2}\big(\frac{u}{\varepsilon^2},\frac{v}{\varepsilon^2}\big)\Big)dv - \frac{1}{2}f_n(u)\Big)du$$

que convergeix a zero en tendir ε a zero pels mateixos arguments del cas dels nuclis de Stroock, ja que per a tot $h_1, h_2 \in L^2([0,T])$,

$$\begin{aligned} &\int_s^t h_1(u)\int_u^t h_2(v)\frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\sum_{k=1}^\infty I_{[k-1,k)^2}\big(\frac{u}{\varepsilon^2},\frac{v}{\varepsilon^2}\big)\Big)dvdu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{k\varepsilon^2}\Big(\int_{(k-1)\varepsilon^2}^{v} h_1(u)I_{[s,t]}(u)du\Big)h_2(v)I_{[s,t]}(v)dv \end{aligned}$$

que en (5.4) (dins l'Apèndix 5.2) provem que convergeix a

$$\frac{1}{2}\int_s^t h_1(u)h_2(u)du.$$

Passem doncs a provar que les variacions quadràtiques i les covariacions són les mateixes que les de les integrals iterades de Stratonovich.

Igual que per la propietat de martingala de nou n'hi haurà prou provant que per a tot $n, m \in \{1, \dots, l\}$, per a tot $s_1 \le s_2 \le \dots \le s_r < s < t$ i per a tota $\varphi : \mathbb{R}^{\max\{n,m\} \times r} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada,

$$E\big[\varphi^\varepsilon\big[\big((Y_n^\varepsilon(t) - Y_n^\varepsilon(s)) - \frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)Y_{n-2}^\varepsilon(u)du\big) \times\big((Y_m^\varepsilon(t) - Y_m^\varepsilon(s)) - \frac{1}{2}\int_s^t f_m(u)f_{m-1}(u)Y_{m-2}^\varepsilon(u)du\big) - \int_s^t f_n(u)Y_{n-1}^\varepsilon(u)f_m(u)Y_{m-1}^\varepsilon(u)du\big]\big],$$

on $\varphi^\varepsilon = \varphi((Y_1^\varepsilon(s_1), \dots, Y_{\max\{n,m\}}^\varepsilon(s_1)), \dots, (Y_1^\varepsilon(s_r), \dots, Y_{\max\{n,m\}}^\varepsilon(s_r)))$, convergeix a zero quan ε tendeix a zero.

Aquesta esperança és igual a la suma de les següents cinc integrals,

$$\begin{aligned}
I_1 &= E\big[\varphi^\varepsilon(Y_n^\varepsilon(t) - Y_n^\varepsilon(s))(Y_m^\varepsilon(t) - Y_m^\varepsilon(s))\big] \\
I_2 &= E\big[\varphi^\varepsilon(Y_n^\varepsilon(t) - Y_n^\varepsilon(s))\big(\frac{1}{2}\int_s^t f_m(u)f_{m-1}(u)Y_{m-2}^\varepsilon(u)du\big)\big] \\
I_{2'} &= E\big[\varphi^\varepsilon(Y_m^\varepsilon(t) - Y_m^\varepsilon(s))\big(\frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)Y_{n-2}^\varepsilon(u)du\big)\big] \\
I_3 &= E\big[\varphi^\varepsilon\big(\frac{1}{2}\int_s^t f_n(u)f_{n-1}(u)Y_{n-2}^\varepsilon(u)du\big)\big(\frac{1}{2}\int_s^t f_m(u)f_{m-1}(u)Y_{m-2}^\varepsilon(u)du\big)\big] \\
I_4 &= E\big[\varphi^\varepsilon\int_s^t f_n(u)Y_{n-1}^\varepsilon(u)f_m(u)Y_{m-1}^\varepsilon(u)du\big].
\end{aligned}$$

Comencem per la primera,

$$\begin{aligned}
I_1 &= E\big[\varphi^\varepsilon\big(\int_s^t\int_0^{u_2} f_n(u_2)f_{n-1}(u_1)Y_{n-2}^\varepsilon(u_1)\theta_\varepsilon(u_1)\theta_\varepsilon(u_2)du_1du_2\big) \\
&\quad \times\big(\int_s^t\int_0^{v_2} f_m(v_2)f_{m-1}(v_1)Y_{m-2}^\varepsilon(v_1)\theta_\varepsilon(v_1)\theta_\varepsilon(v_2)dv_1dv_2\big)\big] \\
&= I_{1,1} + I_{1,1'} + I_{1,2} + I_{1,2'}
\end{aligned}$$

on $I_{1,1}, I_{1,1'}, I_{1,2}, I_{1,2'}$ són l'esperança I_1 en les regions $\{v_1 < u_2 < v_2\}$, $\{u_1 < v_2 < u_2\}$, $\{u_2 < v_1 < v_2\}$, $\{v_2 < u_1 < u_2\}$ respectivament.

En el cas dels nuclis de Stroock tenim que

$$I_{1,1} = \int_s^t\int_s^{v_2}\frac{1}{\varepsilon^2}\exp\{-2(\frac{v_2-u_2}{\varepsilon^2})\}E[\varphi^\varepsilon Y_{n-1}^\varepsilon(u_2)Y_{m-1}^\varepsilon(u_2)]f_n(u_2)f_m(v_2)du_2dv_2,$$

i fent un canvi de variable intercanviant u_2 per v_2 tenim

$$I_{1,1'} = \int_s^t \int_s^{v_2} \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\{-2(\frac{v_2 - u_2}{\varepsilon^2})\} E[\varphi^\varepsilon Y_{n-1}^\varepsilon(u_2) Y_{m-1}^\varepsilon(u_2)] f_m(u_2) f_n(v_2) du_2 dv_2.$$

Però,

$$\begin{aligned}
& I_{1,1} + I_{1,1'} - I_4 \\
= & \int_s^t E[\varphi^\varepsilon Y_{n-1}^\varepsilon(u) Y_{m-1}^\varepsilon(u)] \Big(\int_u^t \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\{-2(\frac{v-u}{\varepsilon^2})\} \\
& \times (f_m(u) f_n(v) + f_m(v) f_n(u)) dv - f_n(u) f_m(u) \Big) du,
\end{aligned}$$

que convergeix a zero pel mateix argument de la prova de la propietat de martingala.

D'altra banda

$$\begin{aligned}
I_{1,2} = & \int_s^t \int_s^{v_2} \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\{-2(\frac{v_2 - v_1}{\varepsilon^2})\} f_{m-1}(v_1) f_m(v_2) \\
& \times E[\varphi^\varepsilon Y_{m-2}^\varepsilon(v_1)(Y_n^\varepsilon(v_1) - Y_n^\varepsilon(s))] dv_1 dv_2.
\end{aligned}$$

$I_{1,2'}$ serà igual intercanviant els papers de n i m.

Pel que fa a $I_3 = I_{3,1} + I_{3,1'}$ on

$$I_{3,1} = \frac{1}{4} \int_s^t \int_s^u f_{n-1}(u) f_n(u) f_{m-1}(v) f_m(v) E[\varphi^\varepsilon Y_{n-2}^\varepsilon(u) Y_{m-2}^\varepsilon(v)] dv du.$$

$I_{3,1'}$ serà igual intercanviant els papers de n i m.

$$\begin{aligned}
I_2 &= E\Big[\varphi^\varepsilon \Big(\int_s^t \int_0^{u_2} f_n(u_2) f_{n-1}(u_1) Y_{n-2}^\varepsilon(u_1) \theta_\varepsilon(u_1) \theta_\varepsilon(u_2) du_1 du_2 \Big) \\
& \quad \times \Big(\frac{1}{2} \int_s^t f_{m-1}(v) f_m(v) Y_{m-2}^\varepsilon(v) dv \Big) \Big] \\
&= I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}
\end{aligned}$$

on $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ són l'esperança I_2 en les regions $\{v < u_1 < u_2\}$, $\{u_1 < v < u_2\}$, $\{u_1 < u_2 < v\}$ respectivament.

De la mateixa manera $I_{2'}$ ens donarà $I_{2,1'}, I_{2,2'}, I_{2,3'}$ que són iguals a $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ respectivament, intercanviant els papers de n i m.

Observem que

$$
\begin{aligned}
& I_{2,1} \\
= & \int_s^t \int_s^{u_2} \int_s^{u_1} \frac{1}{2\varepsilon^2} \exp\{-2(\frac{u_2 - u_1}{\varepsilon^2})\} f_n(u_2) f_{n-1}(u_1) f_m(v) f_{m-1}(v) \\
& \times E[\varphi^\varepsilon Y_{n-2}^\varepsilon(u_1) Y_{m-2}^\varepsilon(v)] dv du_1 du_2.
\end{aligned}
$$

Però,

$$
\begin{aligned}
& I_{3,1} - I_{2,1} \\
= & \frac{1}{2} \int_s^t f_{m-1}(v) f_m(v) \int_v^t f_{n-1}(u_1) E[\varphi^\varepsilon Y_{n-2}^\varepsilon(u_1) Y_{m-2}^\varepsilon(v)] \\
& \times \big(\frac{1}{2} f_n(u_1) - \int_{u_1}^t \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\{-2(\frac{u_2 - u_1}{\varepsilon^2})\} f_n(u_2) du_2\big) du_1 dv,
\end{aligned}
$$

que convergeix a zero pel mateix argument de la prova de la propietat de martingala.

De la mateixa manera també hi convergirà $I_{3,1'} - I_{2,1'}$.

D'altra banda,

$$
\begin{aligned}
& I_{2,2} \\
= & \int_s^t \int_s^{u_2} \frac{1}{2\varepsilon^2} \exp\{-2(\frac{u_2 - v}{\varepsilon^2})\} f_n(u_2) f_{m-1}(v) f_m(v) \\
& \times E[\varphi^\varepsilon Y_{n-1}^\varepsilon(v) Y_{m-2}^\varepsilon(v) (-1)^{N(\frac{v}{\varepsilon^2})}] dv du_2 \\
\leq & K \int_s^t |f_{m-1}(v) f_m(v)| \int_v^t \exp\{-2(\frac{u - v}{\varepsilon^2})\} |f_n(u)| du dv,
\end{aligned}
$$

però convergeix a zero per convergència dominada.

De la mateixa manera també convergirà a zero $I_{2,2'}$.

Per últim,

$$
I_{2,3} = \frac{1}{2} \int_s^t f_{m-1}(v) f_m(v) E[\varphi^\varepsilon Y_{m-2}^\varepsilon(v) (Y_n^\varepsilon(v) - Y_n^\varepsilon(s))] dv.
$$

Així doncs,

$$
\begin{aligned}
& I_{1,2} - I_{2,3} \\
= & \int_s^t E[\varphi^\varepsilon Y_{m-2}^\varepsilon(v_1) (Y_n^\varepsilon(v_1) - Y_n^\varepsilon(s))] f_{m-1}(v_1)
\end{aligned}
$$

$$(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{v_1}^{t}\exp\{-2(\frac{v_2-v_1}{\varepsilon^2})\}f_m(v_2)dv_2-\frac{1}{2}f_m(v_1)\big)dv_1,$$

que convergeix a zero pel mateix argument que els altres. De la mateixa manera també convergirà a zero quan ε tendeix a zero $I_{1,2'}-I_{2,3'}$.

Això acaba la demostració pels nuclis de Stroock. Pel que fa als nuclis clàssics, si seguim exactament la mateixa demostració, tindrem que tret de termes que convergeixen a zero perquè hi intervindrien moments d'ordre superior a dos de les variables ζ_k, $I_{1,1}+I_{1,1'}-I_4$ és igual a

$$\int_s^t E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-1}(u)Y^\varepsilon_{m-1}(u)]\big(\int_u^t\frac{1}{\varepsilon^2}(\sum_k I_{[k-1,k)^2}(\frac{u_2}{\varepsilon^2},\frac{v_2}{\varepsilon^2}))$$
$$\times(f_m(u)f_n(v)+f_m(v)f_n(u))dv-f_n(u)f_m(u)\big)du,$$

que convergeix a zero pel mateix argument de la prova de la propietat de martingala. D'altra banda tenim també que tret de termes que ja sabem que convergeixen a zero, $I_{3,1}-I_{2,1}$ és igual a

$$\frac{1}{2}\int_s^t f_{m-1}(v)f_m(v)\int_v^t f_{n-1}(u_1)E[\varphi^\varepsilon Y^\varepsilon_{n-2}(u_1)Y^\varepsilon_{m-2}(v)]$$
$$\times\big(\frac{1}{2}f_n(u_1)-\int_{u_1}^t\frac{1}{\varepsilon^2}(\sum_k I_{[k-1,k)^2}(\frac{u_2}{\varepsilon^2},\frac{u_1}{\varepsilon^2}))f_n(u_2)du_2\big)du_1dv,$$

que convergeix a zero pel mateix argument de la prova de la propietat de martingala.

De la mateixa manera també hi convergirà $I_{3,1'}-I_{2,1'}$.

D'altra banda,

$$\begin{aligned}&I_{2,2}\\&=E\big[\varphi^\varepsilon\int_s^t\int_s^{u_2}f_n(u_2)Y^\varepsilon_{n-1}(v)\theta_\varepsilon(u_2)\frac{1}{2}f_{m-1}(v)f_m(v)Y^\varepsilon_{m-2}(v)dvdu_2\big].\end{aligned}$$

Però l'integrand és nul a no ser que $u_2-v<\varepsilon^2$. Així doncs, és igual a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}E\big[\varphi^\varepsilon\int_s^t\int_v^{v+\varepsilon^2}f_n(u_2)f_{m-1}(v)f_m(v)\theta_\varepsilon(u_2)Y^\varepsilon_{n-1}(v)Y^\varepsilon_{m-2}(v)du_2dv\big]\\=&\ \frac{1}{2}\int_s^t(E[(\varphi^\varepsilon)^2]E[(\bar{Y}^\varepsilon_1(v+\varepsilon^2)-\bar{Y}^\varepsilon_1(v))^2])^{\frac{1}{2}}f_{m-1}(v)f_m(v)(E[(Y^\varepsilon_{n-1}(v)Y^\varepsilon_{m-2}(v))^2])^{\frac{1}{2}}dv\end{aligned}$$

$$\leq K \int_s^t f_{m-1}(v) f_m(v) \Big(\int_v^{v+\varepsilon^2} g^2(x)dx \Big)^{\frac{1}{2}} dv,$$

usant els càlculs de l'ajustament, on $g(x) = \max_j |f_j(x)|$ i $\bar{Y}_1^\varepsilon(t) = \int_0^t f_n(x)\theta_\varepsilon(x)dx$.

Per convergència dominada, aquesta última integral convergeix a zero. De la mateixa manera també convergirà a zero $I_{2,2'}$. Per últim, seguint els passos del cas dels nuclis de Stroock, tenim que tret de termes que ja sabem que tendeixen a zero, $I_{1,2} - I_{2,3}$ és igual a

$$\int_s^t E[\varphi^\varepsilon Y_{m-2}^\varepsilon(v_1)(Y_n^\varepsilon(v_1) - Y_n^\varepsilon(s))] f_{m-1}(v_1)$$
$$\times \Big(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{v_1}^t \big(\sum_k I_{[k-1,k)^2}(\frac{u_2}{\varepsilon^2}, \frac{v_1}{\varepsilon^2}) \big) f_m(v_2)dv_2 - \frac{1}{2} f_m(v_1) \Big) dv_1,$$

que convergeix a zero pel mateix argument que els altres. De la mateixa manera també convergirà a zero quan ε tendeix a zero $I_{1,2'} - I_{2,3'}$. Això acaba la demostració del teorema.

$\square$

Observació 4.4.7. *Observem finalment que si considerem processos del tipus*

$$\int_{[0,t]^n} \big(\sum{}' f_{j_1}(t_1) \cdots f_{j_n}(t_n) \big) I_{\{t_1 \leq \cdots \leq t_n\}} \theta_\varepsilon(t_1) \cdots \theta_\varepsilon(t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

on el símbol $\sum'$ denota una suma finita arbitrària, $f_j \in L^2([0,T])$ per a tot j, i els processos θ_ε són els mateixos d'abans, aquest mètode de demostració també ens dóna la convergència d'aquests processos cap a

$$\int_{[0,t]^n} \big(\sum{}' f_{j_1}(t_1) \cdots f_{j_n}(t_n) \big) I_{\{t_1 \leq \cdots \leq t_n\}} \circ dW_{t_1} \circ \cdots \circ dW_{t_n}.$$

Això és així perquè en la prova que tenim per veure que els processos corregits tenen les variacions i covariacions corresponents, l'únic que canviaria seria la funció φ, que ara aniria de $\mathbb{R}^{n \times m \times r} \longrightarrow \mathbb{R}$, però tota la demostració continuaria de la mateixa manera. Cal observar que quan $n > m, Y_n$ depèn de f_m, però en aquesta demostració no hem usat enlloc aquesta dependència.

S'acabaria utilitzant que el Lema 4.4.3 ens donaria la convergència conjunta dels termes d'aquest sumatori.

Apèndix.

5.1 Tota funció de l'espai $C([0,T]^n)$ és Stratonovich integrable.

Veurem tot seguit que per a tota $f \in C([0,T]^n)$, $f \cdot I_{[0,t]^n}$ és Stratonovich integrable. Denotem per π una partició de l'interval $[0,T]$. Utilitzant el Teorema 4.2.4, és suficient provar que existeixen les traces, és a dir, per a tot $j = 1,\ldots,[\frac{n}{2}]$, el límit en $L^2([0,T]^{n-2j})$ quan $|\pi|$ tendeix a zero de

$$\sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|} \int_{\Delta_{i_1}^2\times\cdots\times\Delta_{i_j}^2} \tilde{f}(t_1,\ldots,t_{2j},\cdot) I_{[0,t]^{2j}}(t_1,\ldots,t_{2j}) I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot) dt_1\cdots dt_{2j}, \tag{5.1}$$

on $\tilde{f}$ és la simetritzada de la funció f.

Veurem que aquest límit és igual a

$$\int_{[0,t]^j} \tilde{f}(x_1,x_1,x_2,x_2,\ldots,x_j,x_j,\cdot) I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot) dx_1\cdots dx_j.$$

Observem que podem escriure aquesta última expressió com

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_j} \int_{\Delta_{i_1}\times\cdots\times\Delta_{i_j}} \tilde{f}(x_1,x_1,\ldots,x_j,x_j,\cdot) I_{[0,t]^j}(x_1,\ldots,x_j) dx_1\cdots dx_j I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot) \\
= &\sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|} \int_{\Delta_{i_1}^2\times\cdots\times\Delta_{i_j}^2} \tilde{f}(t_1,t_1,t_3,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j-1},\cdot) \\
&\times I_{[0,t]^j}(t_1,t_3,\ldots,t_{2j-1}) I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot) dt_1 dt_2\cdots dt_{2j}.
\end{aligned}$$

Llavors la diferència entre l'expressió (5.1) i aquesta última és igual a

$$\sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|} \int_{\Delta^2_{i_1}\times\cdots\times\Delta^2_{i_j}} (\tilde{f}(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j},\cdot)I_{[0,t]^{2j}}(t_1,\ldots,t_{2j})$$

$$-\tilde{f}(t_1,t_1,t_3,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j-1},\cdot))I_{[0,t]^j}(t_1,t_3,\ldots,t_{2j-1})I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot)dt_1\cdots dt_{2j}$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|} \int_{\Delta^2_{i_1}\times\cdots\times\Delta^2_{i_j}} (\tilde{f}(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j},\cdot)$$

$$-\tilde{f}(t_1,t_1,t_3,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j-1},\cdot))I_{[0,t]^{2j}}(t_1,\ldots,t_{2j})I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot)dt_1\cdots dt_{2j} \qquad (5.2)$$

$$- \sum_{i_1,\ldots,i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|} \int_{\Delta^2_{i_1}\times\cdots\times\Delta^2_{i_j}} \tilde{f}(t_1,t_1,\ldots,t_{2j-1},t_{2j-1},\cdot)I_{[0,t]^j}(t_1,t_3,\ldots,t_{2j-1})$$

$$\times I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot)I_{[0,T]^j\setminus[0,t]^j}(t_2,t_4,\ldots,t_{2j})dt_1\cdots dt_{2j}.$$

Pel que fa al primer sumand, per la continuïtat de f en $[0,t]^n$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un δ tal que si $|\pi| < \delta$ llavors, en els conjunts on integrem,

$$|\tilde{f}(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j},\cdot) - \tilde{f}(t_1,t_1,t_3,t_3,\ldots,t_{2j-1},t_{2j-1},\cdot)|I_{[0,t]^{n-2j}}(\cdot) < \varepsilon.$$

D'altra banda, és fàcil veure que el segon sumand de (5.2) es pot fitar per $K|\pi|$, on K és una constant que no depèn de la partició π.

Aquests dos fets ens donen el límit en $L^\infty([0,T]^{n-2j})$.

Utilitzarem tot seguit el criteri de Kolmogorov per veure que existeix una versió de $I_n \circ (f \cdot I_{[0,t]^n})$ amb trajectòries contínues. Per veure això hem de provar que existeixen constants α, β i K positives tals que per a tot $0 \le s \le t \le T$

$$E|I_n \circ (f \cdot I_{[0,t]^n}) - I_n \circ (f \cdot I_{[0,s]^n})|^\alpha \le K|t-s|^{1+\beta}.$$

D'una banda, usant la fórmula de Hu-Meyer (veure Teorema 4.2.4) tenim que

$$I_n \circ (f \cdot I_{[0,t]^n}) = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} K(n,j) I^i_{n-2j}(T^j(f \cdot I_{[0,t]^n})),$$

on $K(n,j)$ és una constant que només depèn de n i j.

D'altra banda, en un treball de Shigekawa (veure [S]) trobem que per a tot parell d'enters $m, p \ge 1$ i per a tota funció $g \in L^2([0,T]^p)$,

$$E|I^i_p(g)|^{2m} \le K(p,m)\|g\|^{2m}_{L^2([0,T]^p)}.$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
& E|I_n \circ (f \cdot I_{[0,t]^n}) - I_n \circ (f \cdot I_{[0,s]^n})|^4 \\
\leq\ & K \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} E|I^i_{n-2j}(T^j(f \cdot I_{[0,t]^n}) - T^j(f \cdot I_{[0,s]^n}))|^4 \\
\leq\ & K \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \Big(\int_{[0,T]^{n-2j}} (T^j(f \cdot I_{[0,t]^n}) - T^j(f \cdot I_{[0,s]^n}))^2 dx_{j+1} \cdots dx_{n-j} \Big)^2. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Però usant l'expressió que tenim de la traça,

$$
\begin{aligned}
& (T^j(f \cdot I_{[0,t]^n}) - T^j(f \cdot I_{[0,s]^n}))^2 \\
=\ & \Big(\int_{[0,T]^j} \tilde{f}(I_{[0,t]^{n-j}}(x_1, \dots, x_j, \cdot) - I_{[0,s]^{n-j}}(x_1, \dots, x_j, \cdot)) dx_1 \cdots dx_j \Big)^2 \\
\leq\ & K \int_{[0,T]^j} (I_{[0,t]^{n-j}}(x_1, \dots, x_j, \cdot) - I_{[0,s]^{n-j}}(x_1, \dots, x_j, \cdot)) dx_1 \cdots dx_j,
\end{aligned}
$$

usant la desigualtat de Schwarz.

Així doncs és fàcil veure que (5.3) és menor o igual que

$$
\begin{aligned}
& K \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} \Big(\int_{[0,T]^j} (I_{[0,t]^{n-j}}(x_1, \dots, x_j, \cdot) - I_{[0,s]^{n-j}}(x_1, \dots, x_j, \cdot)) dx_1 \cdots dx_j \Big)^2 \\
\leq\ & K \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} (t^{n-j} - s^{n-j})^2 \\
\leq\ & K(t-s)^2,
\end{aligned}
$$

tal i com volíem demostrar.

5.2 Les funcions tipus productes del $L^2([0,T])$ són Stratonovich integrables.

Volem veure que les funcions del tipus

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_n\}}$$

on $f_i(x)\in L^2([0,T])$ per a tot $i\in\{1,\ldots,n\}$ són integrables de Stratonovich. Anirem construint aquestes integrals de manera iterada i després provarem que la integral iterada coincideix amb la integral múltiple de Stratonovich.

Pel cas $n=1$ és obvi ja que la integral de Stratonovich coincideix amb la d'Itô. Ho veurem a continuació pel cas $n=2$ i després utilitzarem el mateix esquema de demostració i inducció per veure-ho en general. Considerem doncs $n=2$, volem veure que $f_2(t)I_1(t)$ és integrable de Stratonovich, on $I_1(t)=\int_0^t f_1(x)dW_x$.

Hem de veure que existeix el límit en $L^2(\bar{\Omega})$ quan $|\pi|$ tendeix a zero de

$$\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)I_1(t)dt\Big)(W(t_{i+1})-W(t_i)).$$

Però això es pot escriure com

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)I_1(t)dtdW_s\\ +\ &\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s(f_2(t)I_1(t))dtds,\end{aligned}$$

on hem utilitzat la fórmula del producte d'una variable aleatòria de $\mathbb{D}^{1,2}$ per una integral de Skorohod.

Aquesta darrera expressió és igual a

$$\begin{aligned}&\delta\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)I_1(t)dtI_{[t_i,t_{i+1})}(s)\Big)\\ +\ &\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)f_1(s)I_{[0,t]}(s)dsdt\\ =\ &A+B.\end{aligned}$$

Veurem que el primer d'aquests dos termes, A, convergeix en $L^2(\bar{\Omega})$ cap a $\int_0^T f_2(t)I_1(t)dW_t$. Per veure això n'hi ha prou provant que

$$\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)I_1(t)dtI_{[t_i,t_{i+1})}(s)$$

convergeix en $\mathbb{L}^{1,2}$ cap a $f_2(t)I_1(t)$. Però segons el Lema 4.2 de [NP] per veure això últim n'hi ha prou provant que $f_2(t)I_1(t) \in \mathbb{L}^{1,2}$. Però,

$$\begin{aligned} & \bar{E}\int_0^T f_2^2(t)I_1^2(t)dt + \bar{E}\int_0^T\int_0^T [D_s(f_2(t)I_1(t))]^2 dtds \\ = \ & 2\int_0^T f_2^2(t)\int_0^t f_1^2(s)dsdt \end{aligned}$$

i això és finit perquè f_1 i f_2 pertanyen a $L^2([0,T])$.

També veurem que l'expressió B

$$\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)f_1(s)I_{[0,t]}(s)dsdt$$

convergeix cap a $\frac{1}{2}\int_0^T f_1(t)f_2(t)dt$ quan $|\pi|$ tendeix a zero.

Però,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_2(t)f_1(s)I_{[0,t]}(s)dsdt \\ = \ & \int_0^T \Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{\int_{t_i}^t f_1(s)ds}{t_{i+1}-t_i}I_{[t_i,t_{i+1})}(t)\Big)f_2(t)dt. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Per tant n'hi ha prou provant que per a tota $g \in L^2([0,T])$,

$$\int_0^T F^\pi(t)g(t)dt$$

convergeix cap a $\frac{1}{2}\int_0^T f_1(t)g(t)dt$ on $F^\pi(t) = \sum_{i=0}^{q-1}\frac{\int_{t_i}^t f_1(s)ds}{t_{i+1}-t_i}I_{[t_i,t_{i+1})}(t)$.

Ho provarem primer per indicadors, i després veurem que es pot estendre a qualsevol funció de $L^2([0,T])$. Considerem doncs $g(t) = I_{[a,b]}(t)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{\int_{t_i}^t f_1(s)ds}{t_{i+1}-t_i}I_{[t_i,t_{i+1})}(t)\Big)I_{[a,b]}(t)dt \\ = \ & \int_0^T \sum_{t_i,t_{i+1}\in[a,b]}\frac{\int_{t_i}^t f_1(s)ds}{t_{i+1}-t_i}I_{[t_i,t_{i+1})}(t)dt + \int_0^T \frac{\int_{t_{j-1}}^t f_1(s)ds}{t_j-t_{j-1}}I_{[a,t_j)}(t)dt \\ & + \int_0^T \frac{\int_{t_{k-1}}^t f_1(s)ds}{t_k-t_{k-1}}I_{[t_k,b)}(t)dt, \end{aligned}$$

on j i k són els que compleixen que $t_{j-1} \leq a \leq t_j$ i $t_{k-1} \leq b \leq t_k$. Però el segon terme és menor o igual que

$$\frac{t_j - a}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f_1(s)|ds \leq \frac{t_j - a}{t_j - t_{j-1}} (t_j - t_{j-1})^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} f_1^2(s)ds \Big)^{\frac{1}{2}}$$

que convergeix a zero quan $|\pi|$ tendeix a zero, i el mateix passa amb el darrer terme.

Pel que fa al primer sumand

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{t_i, t_{i+1} \in [a,b]} \frac{\int_{t_i}^t f_1(s)ds}{t_{i+1} - t_i} I_{[t_i, t_{i+1})}(t)dt \\ = &\int_a^b \Big(\sum_i \frac{t_{i+1} - s}{t_{i+1} - t_i} I_{[t_i, t_{i+1})}(s) \Big) f_1(s)ds - \int_a^b \frac{t_j - s}{t_j - t_{j-1}} I_{[a, t_j)}(s) f_1(s)ds \\ &- \int_a^b \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} I_{[t_k, b)}(s) f_1(s)ds. \end{aligned}$$

Novament el segon terme es pot fitar per $(t_j - a)^{\frac{1}{2}} \big(\int_a^{t_j} f_1^2(s)ds \big)^{\frac{1}{2}}$ que convergeix a zero i de manera semblant es veu que hi convergeix el darrer terme. Mentre que el primer sumand convergeix a $\int_a^b \frac{1}{2} f_1(s)ds$ quan la norma de la partició tendeix a zero.

Comprovem finalment l'extensió d'aquest resultat a tota funció $g \in L^2([0,T])$. Per linealitat tenim que per a tota funció h esglaonada, $\int_0^T F^\pi(t)h(t)dt$ convergeix cap a $\frac{1}{2} \int_0^T f_1(t)h(t)dt$ quan $|\pi|$ tendeix a zero.

Si $g \in L^2([0,T])$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una funció esglaonada g^ε tal que $\|g^\varepsilon - g\|_2 < \varepsilon$. Llavors

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T F^\pi(t)g(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t)g(t)dt \Big| \leq &\Big| \int_0^T F^\pi(t)g(t)dt - \int_0^T F^\pi(t)g^\varepsilon(t)dt \Big| \\ &+ \Big| \int_0^T F^\pi(t)g^\varepsilon(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t)g^\varepsilon(t)dt \Big| \\ &+ \Big| \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t)g^\varepsilon(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t)g(t)dt \Big|. \end{aligned}$$

El darrer sumand es pot fitar per $\frac{1}{2}\|f_1\|_2\|g^\varepsilon - g\|_2$, i el segon sumand també es pot fer tant petit com volguem si $|\pi|$ és prou petita.

Pel que fa al primer sumand es pot fitar per $\|F^\pi\|_2\|g^\varepsilon - g\|_2$, per tant, si $\|F^\pi\|_2$ està uniformement fitada ja haurem acabat. Però,

$$\int_0^T (F^\pi(t))^2 dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\big(\int_{t_i}^t f_1(s)ds \big)^2}{(t_{i+1} - t_i)^2} dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_{i+1}-t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_1^2(s)ds}{(t_{i+1}-t_i)^2} dt \\ &= \int_0^T f_1^2(s)ds. \end{aligned}$$

Hem demostrat per tant que pel cas $n=2$, $f_1(t)I_1(t)$ és Stratonovich integrable. En general volem provar que $f_n(t)I_{n-1}(t)$ és Stratonovich integrable, on I_{n-1} és la integral iterada de Stratonovich d'ordre $n-1$.

Hem de veure que existeix el límit en $L^2(\bar{\Omega})$ quan $|\pi|$ tendeix a zero de

$$\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)I_{n-1}(t)dt\Big)(W(t_{i+1})-W(t_i)).$$

Però aquest sumatori es pot escriure com

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)I_{q-1}(t)dtdW_s \\ &+\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_s(f_n(t)I_{n-1}(t))dtds \\ = \;& \delta\Big(\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)I_{n-1}(t)dtI_{[t_i,t_{i+1})}(s)\Big) \\ &+\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)D_sI_{n-1}(t)dsdt \\ = \;& A+B. \end{aligned}$$

Veurem que aquests dos termes, convergeixen en $L^2(\bar{\Omega})$ cap a

$$\int_0^T f_n(t)I_{n-1}(t)dW_t \qquad \text{i}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T f_n(t)f_{n-1}(t)I_{n-2}(t)dt$$

respectivament, quan $|\pi|$ tendeix a zero.

Usarem arguments inductius per a provar això per un n en general. Suposem per tant que per a tot $m<n$ es té que $f_m(t)I_{m-1}(t) \in \mathbb{L}^{1,2}$ i que existeix la integral iterada d'ordre m de Stratonovich i és igual a

$$I_m(t) = \int_0^t f_m(s)I_{m-1}(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_m(s)f_{m-1}(s)I_{m-2}(s)ds,$$

on definim $I_{-1} \equiv 0$ i $I_0 \equiv 1$.

Hem demostrat això en el cas $m = 2$.

Per veure la convergència de A, n'hi ha prou provant, igual que en el cas $n = 2$ que $f_n(t)I_{n-1}(t) \in \mathbb{L}^{1,2}$, és a dir hem de veure que

$$\bar{E}\int_0^T f_n^2(t)I_{n-1}^2(t)dt + \bar{E}\int_0^T\int_0^T [D_s(f_n(t)I_{n-1}(t))]^2 dtds < \infty.$$

Però

$$\begin{aligned}\bar{E}\int_0^T f_n^2(t)I_{n-1}^2(t)dt &\leq 2\int_0^T f_n^2(t)\bar{E}\Big(\int_0^T f_{n-1}^2(s)I_{n-2}^2(s)ds\Big)dt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T f_n^2(t)dt\int_0^T f_{n-1}^2(s)ds\bar{E}\Big(\int_0^T f_{n-2}^2(s)I_{n-3}^2(s)ds\Big)\end{aligned}$$

i això és finit per hipòtesi d'inducció. Pel que fa al segon sumand, usant que

$$\begin{aligned}D_sI_{n-1}(t) &= f_{n-1}(s)I_{n-2}(s)I_{\{s\leq t\}} + \frac{1}{2}\int_s^t f_{n-1}(r)f_{n-2}(r)D_sI_{n-3}(r)dr \\ &+\int_s^t f_{n-1}(r)D_sI_{n-2}(r)dW_r,\end{aligned}$$

tenim que

$$\begin{aligned}&\bar{E}\int_0^T\int_0^T [D_s(f_n(t)I_{n-1}(t))]^2 dtds \leq K\int_0^T f_n^2(t)dt\bar{E}\int_0^T (f_{n-1}(s)I_{n-2}(s))^2 ds \\ &+K\int_0^T f_n^2(t)dt\int_0^T f_{n-1}^2(r)dr\bar{E}\Big(\int_0^T\int_0^T (D_s(f_{n-2}(r)I_{n-3}(r)))^2 drds\Big) \\ &+K\int_0^T f_n^2(t)dt\bar{E}\Big(\int_0^T\int_0^T (D_s(f_{n-1}(r)I_{n-2}(r)))^2 drds\Big),\end{aligned}$$

que també és finit per hipòtesi d'inducció.

Per veure la convergència de B, és suficient veure que

$$\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)D_sI_{n-1}(t)dsdt$$

convergeix en $L^2(\bar{\Omega})$ cap a $\frac{1}{2}\int_0^T f_n(t)f_{n-1}(t)I_{n-2}(t)dt$.

Recordem que

$$D_sI_{n-1}(t) = f_{n-1}(s)I_{n-2}(s)I_{\{s\leq t\}} + \frac{1}{2}\int_s^t f_{n-1}(r)f_{n-2}(r)D_sI_{n-3}(r)dr$$

$$+\int_s^t f_{n-1}(r)D_sI_{n-2}(r)dW_r.$$

Usant els mateixos arguments que pel cas $n=2$ sabem que

$$\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)f_{n-1}(s)I_{n-2}(s)I_{\{s\le t\}}dsdt$$

convergeix q.s. cap a $\frac{1}{2}\int_0^T f_n(t)f_{n-1}(t)I_{n-2}(t)dt$.

Usant convergència dominada i que $f_{n-1}I_{n-2}\in\mathbb{L}^{1,2}$ per hipòtesi d'inducció, aquesta convergència també la tenim en $L^2(\bar\Omega)$, ja que $\left(\frac{1}{2}\int_0^T f_n(t)f_{n-1}(t)I_{n-2}(t)dt\right)^2$ està dominat per $\frac{1}{4}\int_0^T f_n^2(t)dt\int_0^T f_{n-1}^2(t)I_{n-2}^2(t)dt$ que pertany a $L^1(\bar\Omega)$, i usant la desigualtat de Schwarz,

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)f_{n-1}(s)I_{n-2}(s)I_{\{s\le t\}}dsdt\Big)^2\\
\le\ &\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)|dt\Big)^2\Big)\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_{n-1}(s)I_{n-2}(s)|ds\Big)^2\Big)\\
\le\ &\int_0^T f_n^2(t)dt\int_0^T f_{n-1}^2(s)I_{n-2}^2(s)ds, \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

que també pertany a $L^1(\bar\Omega)$.

Pel que fa als altres termes,

$$\begin{aligned}
&\bar E\Big|\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)I_{\{s\le t\}}\frac{1}{2}\int_s^t (f_{n-1}(r)f_{n-2}(r)D_sI_{n-3}(r))drdsdt\Big|^2\\
\le\ &\bar E\Big[\int_0^T\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)||f_{n-1}(r)|I_{[t_i,t_{i+1}]}(r)dt\Big)^2\Big)dr\\
&\times\int_0^T\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{2}|f_{n-2}(r)||D_sI_{n-3}(r)|ds\Big)^2\Big)dr\Big].
\end{aligned}$$

Però,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)||f_{n-1}(r)|I_{[t_i,t_{i+1}]}(r)dt\Big)^2\Big)dr\\
\le\ &\int_0^T f_n^2(t)dt\int_0^T f_{n-1}^2(r)dr<\infty.
\end{aligned}$$

I d'altra banda,

$$
\begin{aligned}
& \bar{E}\int_0^T \Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{2}|f_{n-2}(r)||D_sI_{n-3}(r)|ds\Big)^2\Big)dr \\
\leq\ & \bar{E}\sum_{i=0}^{q-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\frac{1}{2}|f_{n-2}(r)||D_sI_{n-3}(r)|)^2 dsdr \\
\leq\ & K\int_0^T f_1^{\pi}(s)ds,
\end{aligned}
$$

on $f_1^{\pi}(s) = \sup_i \big(\bar{E}\int_{t_i}^{t_{i+1}}(D_s(f_{n-2}(r)I_{n-3}(r)))^2dr\big)$ i això convergeix a zero quan $|\pi|$ tendeix a zero ja que $f_{n-1}I_{n-2} \in \mathbb{L}^{1,2}$.

Per últim anem a tractar l'altre terme que ens queda. Si tenim un procés $u \in L^2([0,T]^2 \times \bar{\Omega})$ i $\int_0^T\int_0^T u(s,t)dW_tdr \in L^2(\bar{\Omega})$ aleshores es pot aplicar el teorema de Fubini i intercanviar l'ordre d'integració. Aplicarem doncs aquesta propietat i usarem la isometria de la integral estocàstica,

$$
\begin{aligned}
& \bar{E}|\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)I_{\{s\leq t\}}\int_s^t D_s(f_{n-1}(r)I_{n-2}(r))dW_r dsdt|^2 \\
\leq\ & \bar{E}|\int_0^T\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_n(t)I_{\{s\leq r\leq t\}}I_{[t_i,t_{i+1}]}D_s(f_{n-1}(r)I_{n-2}(r))dsdtdW_r|^2 \\
\leq\ & \bar{E}\int_0^T\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)|I_{\{s\leq r\leq t\}}I_{[t_i,t_{i+1}]}D_s(f_{n-1}(r)I_{n-2}(r))dsdt\Big)^2 dr \\
\leq\ & \bar{E}\int_0^T\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)|I_{\{r\leq t\}}I_{[t_i,t_{i+1}]}dt\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
& \times\Big(\sum_{i=0}^{q-1}\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|f_n(t)|I_{\{s\leq r\}}I_{[t_i,t_{i+1}]}(D_sf_{n-1}(r)I_{n-2}(r))ds\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}dr,
\end{aligned}
$$

i igual que abans convergeix a zero quan la norma de la partició $|\pi|$ tendeix a zero.

5.2.1 Coincidència entre la integral iterada i la integral múltiple de Stratonovich.

Veurem a continuació que aquestes integrals iterades que hem construït, Y_k, coincideixen amb la integral múltiple de Stratonovich $I_k \circ (f)$. En [SU] es demostra un teorema de Fubini pel cas $k = 2$. D'altra banda en [DS] trobem també un resultat que ens dóna la coincidència entre la integral iterada i la integral múltiple de processos que poden ser no adaptats, però cal que les integrals de Skorohod de les traces compleixin una condició de regularitat que no compleixen les nostres funcions. Per veure-ho en el nostre cas, usarem el resultat de [SU] que hem recollit en el Teorema 4.2.4.

Usant el teorema de Fubini entre la integral estocàstica i la de Lebesgue, podem escriure les integrals iterades que hem construït de la següent forma

$$
\begin{aligned}
&Y_k(f)(t)\\
&=\sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}\frac{1}{2^j}\sum_{\{l_1<\cdots<l_{2j}:\forall r, l_{2r}=l_{2r-1}+1\}} I^i_{k-2j}\Big(\int_{[0,t]^j} f(t_1,\ldots,t_k)\Big|_{\substack{t_{l_1}=t_{l_2}=s_1\\ \cdots\\ t_{l_{2j-1}}=t_{l_{2j}}=s_j}} ds_1\cdots ds_j\Big),
\end{aligned}
$$

on $f(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)I_{\{x_1\le\cdots\le x_n\}}$ i I^i_{k-2j} és la integral d'Itô d'ordre $k-2j$.

Per tant, usant el Teorema 4.2.4 per veure que coincideix amb la integral múltiple de Stratonovich només cal veure que

$$
\begin{aligned}
&\frac{k!}{(k-2j)!j!}T^j f\\
&=\sum_{\{l_1<\cdots<l_{2j}:\forall r, l_{2r}=l_{2r-1}+1\}}\Big(\int_{[0,t]^j} f(t_1,\ldots,t_k)\Big|_{\substack{t_{l_1}=t_{l_2}=s_1\\ \cdots\\ t_{l_{2j-1}}=t_{l_{2j}}=s_j}} ds_1\cdots ds_j\Big).
\end{aligned}
$$

Considerem la funció simetritzada de f,

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(x_1,\ldots,x_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_k} f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)})\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_k} f_1(x_{\sigma(1)})\cdots f_n(x_{\sigma(k)})I_{\{x_{\sigma(1)}\le\cdots\le x_{\sigma(k)}\}},
\end{aligned}
$$

on $\mathcal{P}_k$ denota la col.lecció de totes les possibles permutacions dels k primers enters.

Llavors,

$$
\begin{aligned}
T^j f(\cdot) &= \lim_{|\pi|\downarrow 0}\sum_{i_1,\ldots,i_j}\frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|}\int_{\Delta^2_{i_1}\times\cdots\times\Delta^2_{i_j}}\tilde{f}(t_1,\ldots,t_{2j},\cdot)dt_1\cdots dt_{2j}\\
&= \frac{1}{k!}\lim_{|\pi|\downarrow 0}\sum_{i_1,\ldots,i_j}\frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_j}|}\sum_{\{l_1,\cdots,l_{2j}:l_r\in\{1,\ldots,k\}\forall r\}}\int_{\Delta^2_{i_1}\times\cdots\times\Delta^2_{i_j}}\\
&\qquad f_1(x_1)\cdots f_n(x_k)I_{\{x_1\le\cdots\le x_k\}}dx_{l_1}\cdots dx_{l_{2j}}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Recordem que en (5.4) hem provat que si $h_1, h_2 \in L^2([0,T])$, llavors

$$\sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\Delta_i^2} h_1(s)h_2(t)I_{\{s\leq t\}}dsdt$$

convergeix cap a $\frac{1}{2}\int_0^T f_1(t)f_2(t)dt$ quan $|\pi| \downarrow 0$.

Provarem per inducció un resultat semblant amb un nombre parell arbitrari de variables. Considerem per a tot i, $h_i \in L^2([0,T])$. Suposem que

$$\sum_{i_1,\dots,i_n} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_n}|} \int_{\Delta_{i_1}^2\times\cdots\times\Delta_{i_n}^2} h_1(x_1)h_2(x_2)\cdots h_{2n}(x_{2n})I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{2n}\}}dx_1\cdots dx_{2n}$$

convergeix cap a

$$\frac{1}{2^n}\int_{[0,T]^n} h_1(y_1)h_2(y_1)h_3(y_2)h_4(y_2)\cdots h_{2n-1}(y_n)h_{2n}(y_n)I_{\{y_1\leq\cdots\leq y_n\}}dy_1\cdots dy_n.$$

Llavors,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\dots,i_{n+1}} \frac{1}{|\Delta_{i_1}|\cdots|\Delta_{i_{n+1}}|} \int_{\Delta_{i_1}^2\times\cdots\times\Delta_{i_{n+1}}^2} h_1(x_1)h_2(x_2)\cdots h_{2n+2}(x_{2n+2})\\
&\quad\times I_{\{x_1\leq\cdots\leq x_{2n+2}\}}dx_1\cdots dx_{2n+2}\\
&= \sum_{i_2,\dots,i_{n+1}} \frac{1}{|\Delta_{i_2}|\cdots|\Delta_{i_{n+1}}|} \int_{\Delta_{i_2}^2\times\cdots\times\Delta_{i_{n+1}}^2} h_3(x_3)h_4(x_4)\cdots h_{2n+2}(x_{2n+2})\\
&\quad\times I_{\{x_3\leq\cdots\leq x_{2n+2}\}}\left(\frac{1}{2}\int_0^{x_3} h_1(x)h_2(x)dx\right)dx_3\cdots dx_{2n+2}\\
&\quad+\sum_{i_2,\dots,i_{n+1}} \frac{1}{|\Delta_{i_2}|\cdots|\Delta_{i_{n+1}}|} \int_{\Delta_{i_2}^2\times\cdots\times\Delta_{i_{n+1}}^2} h_3(x_3)h_4(x_4)\cdots h_{2n+2}(x_{2n+2})\\
&\quad\times I_{\{x_3\leq\cdots\leq x_{2n+2}\}}\Big(\sum_{i_1}\frac{1}{|\Delta_{i_1}|}\int_{\Delta_{i_1}^2} h_1(x_1)h_2(x_2)I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\}}dx_1dx_2\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_0^{x_3} h_1(x)h_2(x)dx\Big)dx_3\cdots dx_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Del fet que $h_3(x_3)\int_0^{x_3} h_1(x)h_2(x)dx \in L^2([0,T])$ es dedueix per hipòtesi d'inducció que el primer sumand convergeix a

$$\frac{1}{2^{n+1}}\int_{[0,T]^{n+1}} h_1(y_1)h_2(y_1)\cdots h_{2n+1}(y_{n+1})h_{2n+2}(y_{n+1})I_{\{y_1\leq\cdots\leq y_{n+1}\}}dy_1\cdots dy_{n+1}.$$

Hem de veure que el segon sumand convergeix a zero. Observem que

$$\sum_{i_j}\frac{1}{|\Delta_{i_j}|}\int_{\Delta_{i_j}}|h_{2j}(x_{2j})|dx_{2j}\int_{\Delta_{i_j}}|h_{2j-1}(x_{2j-1})|dx_{2j-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \Big(\sum_{i_j}\frac{1}{|\Delta_{i_j}|}\Big(\int_{\Delta_{i_j}}|h_{2j}(x_{2j})|dx_{2j}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i_j}\frac{1}{|\Delta_{i_j}|}\Big(\int_{\Delta_{i_j}}|h_{2j-1}(x_{2j-1})|dx_{2j-1}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \Big(\int_0^T h_{2j}^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T h_{2j-1}^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Considerem també,

$$G^\pi(x_3) = \Big(\sum_{i_1}\frac{1}{|\Delta_{i_1}|}\int_{\Delta_{i_1}^2} h_1(x_1)h_2(x_2)I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\}}dx_1dx_2 - \frac{1}{2}\int_0^{x_3} h_1(x)h_2(x)dx\Big).$$

Podem fitar el segon sumand per

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_2}\frac{1}{|\Delta_{i_2}|}\int_{\Delta_{i_2}}|h_4(x_4)|dx_4\int_{\Delta_{i_2}}|h_3(x_3)||G^\pi(x_3)|dx_3\\
&\times\prod_{j=3}^{n+1}\sum_{i_j}\frac{1}{|\Delta_{i_j}|}\int_{\Delta_{i_j}}|h_{2j}(x_{2j})|dx_{2j}\int_{\Delta_{i_j}}|h_{2j-1}(x_{2j-1})|dx_{2j-1}\\
\leq\ &\prod_{k=4}^{2n+2}\Big(\int_0^T h_k^2(x)dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T h_3^2(x)(G^\pi(x))^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\
\leq\ &K\Big(\int_0^T h_3^2(x)(G^\pi(x))^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Sabem que $G^\pi(y)$ convergeix a zero quan $|\pi|$ tendeix a zero. D'altra banda $h_3^2(y)(G^\pi(y))^2$ està dominat ja que

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i_1}\frac{1}{|\Delta_{i_1}|}\int_{\Delta_{i_1}^2} h_1(x_1)h_2(x_2)I_{\{x_1\leq x_2\leq y\}}dx_1dx_2\Big)^2\\
\leq\ &\int_0^T h_1^2(x)dx\int_0^T h_2^2(x)dx,
\end{aligned}
$$

i també

$$\Big(\frac{1}{2}\int_0^y h_1(x)h_2(x)dx\Big)^2 \leq \frac{1}{4}\int_0^T h_1^2(x)dx\int_0^T h_2^2(x)dx.$$

Així $h_3^2(y)(G^\pi(y))^2 \leq Kh_3^2(y)$ que pertany a $L^1([0,T])$, i s'acaba usant convergència dominada.

D'altra banda, observem que si tenim un sumatori de la forma

$$\sum_i\frac{1}{|\Delta_i|}\int_{\Delta_i^2} h_1(x_1)h_2(x_2)h_3(x_3)I_{\{x_1\leq x_2\leq x_3\}}dx_1dx_3$$

convergeix a zero quan $|\pi| \downarrow 0$. Això és així perquè si diem $[t_k, t_{k-1})$ l'interval tal que $t_k \leq x_2 < t_{k-1}$, tenim que aquest sumatori és igual a

$$\begin{aligned} & h_2(x_2)\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{x_2} h_1(x_1)dx_1 \int_{x_2}^{t_{k+1}} h_3(x_3)dx_3 \\ \leq\ & h_2(x_2)\Big(\int_{t_k}^{x_2} h_1^2(x_1)dx_1\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{x_2}^{t_{k+1}} h_3^2(x_3)dx_3\Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

que convergeix a zero quan $|\pi| \downarrow 0$.

Això implicarà que sempre que tinguem algun terme d'aquest estil, com que hem vist que els termes amb dues variables consecutives es poden fitar, el límit serà zero.

Hem vist doncs que en el sumatori (5.6) tots els termes convergiran quasi per tot a zero tret dels que tinguin $l_1, \ldots, l_{2j} \in \{1, \ldots, k\}$ consecutius dos a dos (i.e. que per a tot $r \in \{1, \ldots, j\}$, $l_{2r} = l_{2r-1} + 1$). En aquests casos el límit serà, quasi per tot,

$$\frac{1}{2^j}\int_{[0,t]^j} f(t_1, \ldots, t_k)\Bigg|_{\substack{t_{l_1} = t_{l_2} = s_1 \\ \cdots \\ t_{l_{2j-1}} = t_{l_{2j}} = s_j}} ds_1 \cdots ds_j.$$

Observem que els límits que hem vist quasi per tot, també són en $L^2([0,T]^{k-2j})$, ja que

$$\begin{aligned} & \Bigg(\frac{1}{2^j}\int_{[0,t]^j} f(t_1, \ldots, t_k)\Bigg|_{\substack{t_{l_1} = t_{l_2} = s_1 \\ \cdots \\ t_{l_{2j-1}} = t_{l_{2j}} = s_j}} ds_1 \cdots ds_j\Bigg)^2 \\ \leq\ & \prod_{r \neq l_1, \ldots, l_{2j}} f_r^2(x_j) \prod_{r=1}^{2j} \int_0^T f_{l_r}^2(r)dr, \end{aligned}$$

que pertany a $L^1([0,T]^{k-2j})$.

I usant la desigualtat de Schwarz, com hem fet anteriorment en (5.5), també es té que per a tot $\{l_1, \ldots, l_{2j}\}$ contingut en $\{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned} & \Big(\sum_{i_1, \ldots, i_j} \frac{1}{|\Delta_{i_1}| \cdots |\Delta_{i_j}|}\int_{\Delta_{i_1}^2 \times \cdots \times \Delta_{i_j}^2} f_1(x_1) \cdots f_n(x_k) I_{\{x_1 \leq \cdots \leq x_k\}} dx_{l_1} \cdots dx_{l_{2j}}\Big)^2 \\ \leq\ & \prod_{r \neq l_1, \ldots, l_{2j}} f_r^2(x_j) \prod_{r=1}^{2j} \int_0^T f_{l_r}^2(r)dr, \end{aligned}$$

que pertany a $L^1([0,T]^{k-2j})$.

Si els suposem ordenats, observem que cada $\{l_1 < \cdots < l_{2j}\,; \forall r,\, l_{2r} = l_{2r-1} + 1\}$ correspon exactament a $2^j j!(k-2j)!$ termes del sumatori (5.6). Així doncs,

$$
\begin{aligned}
& T^j f(\cdot) \\
= \; & \frac{j!(k-2j)!}{k!} \sum_{\{l_1 < \cdots < l_{2j} : \forall r, l_{2r} = l_{2r-1}+1\}} \int_{[0,t]^j} f(t_1, \ldots, t_k) \Bigg|_{\substack{t_{l_1} \;= t_{l_2} \;= s_1 \\ \cdots \\ t_{l_{2j-1}} = t_{l_{2j}} = s_j}} ds_1 \cdots ds_j .
\end{aligned}
$$

tal i com volíem demostrar.

5.3 Prova de la convergència en $L^2(\Omega)$ a zero dels processos (2.2).

Considerem

$$Y^\varepsilon_{s,t} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_0^s (-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})} dx dy,$$

on $N = \{N(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2_+\}$ és un procés de Poisson estàndard al pla, $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$ i $\varepsilon > 0$.

Volem veure que

$$Y^\varepsilon_{s,t} \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0,$$

quan $\varepsilon \to 0$.

Podem considerar que s i t són diferents de zero, ja que en cas contrari no cal provar res.

Per a provar això calcularem alguns límits usant la regla de l'Hôpital. Sovint, resultarà complicat comprovar que s'està sota les hipòtesis del teorema de l'Hôpital. El lema següent ens permetrà evitar aquestes comprovacions:

Lema 5.3.1. *Suposem que $f : [M,\infty) \to \mathbb{R}$ és una funció derivable tal que f' és contínua en $[M,\infty), M \geq 0$ i suposem també que $\lim_{u\to\infty} f'(u) = a < \infty$.*

Llavors

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = a.$$

La prova d'aquest lema és una simple aplicació del teorema del valor mitjà.

Recordem que hem de veure que,

$$E\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_0^s (-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})} dx dy\Big)^2$$

tendeix a zero quan $\varepsilon \to 0$.

Però per raonaments semblants als del Lema 2.4.4

$$\begin{aligned} & E\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \int_0^s (-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon},\frac{y}{\varepsilon})} dx dy\Big)^2 \\ = \; & 2\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_0^{y_2} \int_0^s \int_0^{x_2} \exp[-\frac{2}{\varepsilon^2}x_2y_2 + \frac{2}{\varepsilon^2}x_1y_1] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \\ & +2\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \int_0^{y_2} \int_0^s \int_0^{x_2} \exp[-\frac{2}{\varepsilon^2}(y_2-y_1)x_1 - \frac{2}{\varepsilon^2}(x_2-x_1)y_1] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Fem el canvi de variables $x'_i = \frac{x_i}{s}$, $y'_i = \frac{sy_i}{\varepsilon^2}$ per $i = 1,2$ i anomenem $u = \frac{st}{\varepsilon^2}$. Farem un abús de notació i continuarem anomenant x_i i y_i a les variables x'_i i y'_i. Tenim que la darrera expressió és igual a

$$
\begin{aligned}
& 2\frac{st}{u}\int_0^u\int_0^{y_2}\int_0^1\int_0^{x_2}\exp[-2x_2y_2+2x_1y_1]dx_1dx_2dy_1dy_2 \\
& +2\frac{st}{u}\int_0^u\int_0^{y_2}\int_0^1\int_0^{x_2}\exp[-2(y_2-y_1)x_1-2(x_2-x_1)y_1]dx_1dx_2dy_1dy_2 \\
\leq\ & 4\frac{st}{u}\int_0^u\int_0^{y_2}\int_0^1\int_0^{x_2}\exp[-2(y_2-y_1)x_1-2(x_2-x_1)y_1]dx_1dx_2dy_1dy_2.
\end{aligned}
$$

Per tant n'hi ha prou veient que

$$
\frac{st}{u}\int_0^u\int_0^{y_2}\int_0^1\int_0^{x_2}\exp[-2(y_2-y_1)x_1-2(x_2-x_1)y_1]dx_1dx_2dy_1dy_2
$$

convergeix a zero quan $u \to \infty$.

Aplicant el lema 5.3.1, el límit d'aquesta darrera expressió, cas d'existir, seria igual a

$$
\lim_{u\to\infty} st\int_0^u\int_0^1\int_0^{x_2}\exp[-2(u-y_1)x_1-2(x_2-x_1)y_1]dx_1dx_2dy_1.
$$

Fent ara un canvi de variables tenim

$$
\begin{aligned}
& \lim_{u\to\infty}\frac{st}{u}\int_0^1\int_0^u\int_0^{x_2}\exp[-2(1-y_1)x_1-2(x_2-x_1)y_1]dx_1dx_2dy_1 \\
=\ & \lim_{u\to\infty} st\int_0^1\int_0^u\exp[-2(1-y_1)x_1-2(u-x_1)y_1]dx_1dy_1,
\end{aligned}
$$

aplicant de nou el lema 5.3.1. Fent de nou un canvi de variables obtenim

$$
\begin{aligned}
& \lim_{u\to\infty} stu\int_0^1\int_0^1\exp[-2(1-y)xu-2(1-x)yu]dxdy \\
=\ & \lim_{u\to\infty} st\int_0^1\frac{1}{2(1-2y)}\big(\exp[-2yu]-\exp[-2(1-y)u]\big)dy \\
=\ & \lim_{u\to\infty}\frac{st}{2}\frac{\int_0^1\frac{1}{(1-2y)}\big(\exp[-u(2y-1)]-\exp[-(1-2y)u]\big)dy}{\exp[u]}.
\end{aligned}
$$

Apliquem ara la regla de l'Hôpital,

$$
\lim_{u\to\infty}\frac{st}{2}\frac{\int_0^1\big(\exp[-u(2y-1)]+\exp[-(1-2y)u]\big)dy}{\exp[u]}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{u\to\infty} \frac{st}{2}\int_0^1 \big(\exp[-2yu] + \exp[-2(1-y)u]\big)dy \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{st}{2}\frac{1}{u}(1-\exp[-2u]),
\end{aligned}
$$

que òbviament convergeix a zero quan u tendeix a infinit, tal i com volíem demostrar.

En general, si considerem

$$
Y^{\varepsilon}_{s,t} = \frac{1}{\varepsilon^p}\int_0^t\int_0^s (-1)^{N(\frac{x}{\varepsilon^q},\frac{y}{\varepsilon^q})}dxdy
$$

per poder fer el canvi de variable que ens permet separar $E[(Y^{\varepsilon}_{s,t})^2]$ en st per dues integrals independents de s i t, cal que $p = q$. Per tant, no sembla que es pugui obtenir d'aquesta manera l'estructura del moment de segon ordre d'un drap brownià per a cap possible valor de p i q.

$\square$

5.4 Lema d'ajustament.

Passarem tot seguit a provar que en la demostració de l'ajustament en el capítol 2 d'aquesta memòria n'hi havia prou considerant punts de la forma $0 < (s,t) < (s',t') < (2s,2t)$.

Veurem primer l'argument per al cas uniparamètric i després passarem a provar el cas que ens interessa, amb dos paràmetres.

Lema 5.4.1. *Sigui* $X = \{X_t; t \in [0,T]\}$ *un procés continu. Suposem que per a qualssevol* $0 < t < t'$ *tals que* $t' < 2t$,

$$E(X_{t'} - X_t)^4 \leq K(t'-t)^2. \tag{5.7}$$

Aleshores existeix una altra constant K *amb la qual la propietat (5.7) es compleix per a tot* $0 \leq t < t'$.

Prova: Si sabem que es compleix aquesta propietat sempre que $t' < 2t$, també es complirà, canviant la constant K, sempre que $t' < 4t$ ja que podem escriure

$$X_{t'} - X_t = X_{t'} - X_{\frac{t'+t}{2}} + X_{\frac{t'+t}{2}} - X_{\frac{t'+3t}{4}} + X_{\frac{t'+3t}{4}} - X_t$$

i usant que $(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4$ tenim que

$$\begin{aligned} E(X_{t'} - X_t)^4 &\leq 8E(X_{t'} - X_{\frac{t'+t}{2}})^4 + 8^2 E(X_{\frac{t'+t}{2}} - X_{\frac{t'+3t}{4}})^4 \\ &\quad + 8^3 E(X_{\frac{t'+3t}{4}} - X_t)^4 \\ &\leq K[8\left(\frac{t'-t}{2}\right)^2 + 8^2\left(\frac{t'-t}{4}\right)^2 + 8^3\left(\frac{t'-t}{4}\right)^2] \\ &= 38K(t'-t)^2. \end{aligned}$$

Suposem doncs que (5.7) es compleix sempre que $t' < 4t$ i ho provarem, usant això, per a qualssevol $t < t'$. Gràcies a la continuïtat del procés X, podem escriure

$$\begin{aligned} E(X_{t'} - X_t)^4 &= E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(X_{\frac{t'+(4^k-1)t}{4^k}} - X_{\frac{t'+(4^{k+1}-1)t}{4^{k+1}}})\Big)^4 \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 8^{k+1} E\big(X_{\frac{t'+(4^k-1)t}{4^k}} - X_{\frac{t'+(4^{k+1}-1)t}{4^{k+1}}}\big)^4 \\ &\leq K\sum_{k=0}^{\infty} 8^{k+1}\left(\frac{3(t'-t)}{4^{k+1}}\right)^2 \\ &= 9K(t'-t)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$= \quad 9K(t'-t)^2.$$

□

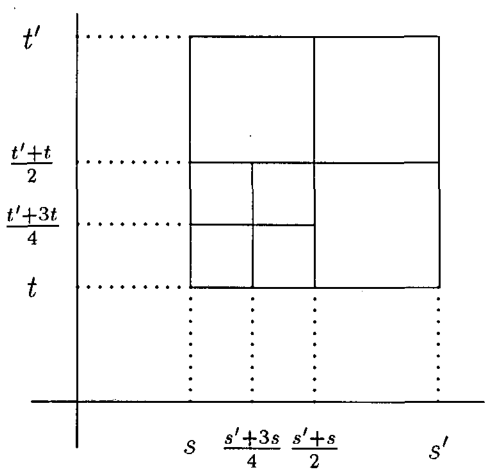
Vegem ara el resultat pel cas biparamètric.

Lema 5.4.2. *Sigui* $X = \{X_{s,t}; (s,t) \in [0,S] \times [0,T]\}$ *un procés continu. Suposem que per a qualssevol* $0 < s < s'$, $0 < t < t'$ *tals que* $s' < 2s$ *i* $t' < 2t$,

$$E(\Delta_{s,t}X(s',t'))^4 \leq K(s'-s)^2(t'-t)^2. \tag{5.8}$$

Aleshores existeix una altra constant K *amb la qual la propietat (5.8) es compleix per a tot* $0 \leq s < s'$, $0 \leq t < t'$.

Prova: Si sabem que es compleix la propietat (5.8) sempre que $t' < 2t$ i $s' < 2s$, també sabem que es complirà, canviant la constant, sempre que $t' < 4t$ i $s' < 4s$, perquè podem dividir l'increment $\Delta_{s,t}X(s',t')$ en la suma dels increments en 7 rectangles, tal com mostra el dibuix, i en cada un d'ells podem aplicar la propietat (5.8).



Dibuix 3. Divisió en increments que compleixen la propietat (5.8).

Suposem doncs que la propietat (5.8) es compleix per a qualssevol $t < t'$, $s < s'$ tals que $s' < 4s$ i $t' < 4t$. Provem que també és certa en general. Usant que el procés X és continu, podem escriure,

$$\Delta_{s,t}X(s',t') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \Delta_{\frac{s'+(4^{k+1}-1)s}{4^{k+1}}, \frac{t'+(4^{j+1}-1)t}{4^{j+1}}} X\left(\frac{s'+(4^k-1)s}{4^k}, \frac{t'+(4^j-1)t}{4^j}\right).$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
& E(\Delta_{s,t}X(s',t'))^4 \\
\leq\ & \sum_{k=0}^{\infty} 8^{k+1} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 8^{j+1} E\big[\Delta_{\frac{s'+(4^{k+1}-1)s}{4^{k+1}}, \frac{t'+(4^{j+1}-1)t}{4^{j+1}}} X\left(\frac{s'+(4^k-1)s}{4^k}, \frac{t'+(4^j-1)t}{4^j}\right)\big]^4\Big) \\
\leq\ & K \sum_{k=0}^{\infty} 8^{k+1} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 8^{j+1} \left(\frac{3(s'-s)}{4^{k+1}}\right)^2 \left(\frac{3(t'-t)}{4^{j+1}}\right)^2 \Big) \\
\leq\ & 81K(s'-s)^2(t'-t)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \\
=\ & 81K(s'-s)^2(t'-t^2)
\end{aligned}
$$

tal i com volíem demostrar.

□

Bibliografia.

[A] Avram, F. Weak convergence of the variations, iterated integrals and Doléans-Dade exponentials of sequences of semimartingales. *Ann. Prob.* **16** (1998), 246-250.

[B] Bardina, X. The complex Brownian Motion as a weak limit of processes constructed from a Poisson process. Apareixerà als *Proceedings of the 7-th Workshop on Stochastic Analysis and Related Fields, Kusadasi 1998*(2000)

[BJ1] Bardina, X., Jolis, M. An extension of Itô's formula for elliptic diffusion processes. *Stochastic Processes and their Applications* **69** (1997), 83-109.

[BJ2] Bardina, X., Jolis, M. Weak approximation of the Brownian Sheet from a Poisson process in the plane. Apareixerà a *Bernoulli.* (2000)

[BJ3] Bardina, X., Jolis, M. Aproximacions en llei a integrals múltiples d'Stratonovich. *Prepublicacions Departament de Matemàtiques, U.A.B.* **21** (1999).

[BW] Bickel, P.J., Wichura, M.J. Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications. *Ann. Math. Statist.* **42** (1971), 1656-1670.

[Bi] Billingsley, P. Convergence of Probability Measures. *John Wiley & Sons* (1968).

[BS] Black, F., Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Economy* **81** (1973), 637-659.

[BY] Bouleau, N., Yor, M. Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semimartingales, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292** (1981), 491-494.

[CFN] Caballero, M.E., Fernández, B., Nualart, D. Estimation of densities and applications. *Journal of Theoretical Probability* **3(11)** (1998), 831-851.

[CW] Cairoli, R., Walsh, J.B. Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.* **134** (1975), 111-183.

[CF] Carmona, R., Fouque, J.P. A diffusion approximation result for two parameter processes. *Probability Theory and Related Fields* **98** (1994), 277-298.

[C] Centsov, N.N. Limit theorems for some classes of random functions. *Selected Translations in Math. Statistics and Probability.* **9** (1971), 37-42.

[DS] Delgado, R., Sanz-Solé, M. A Fubini theorem for generalized Stratonovich integrals. *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications (Ascona, 1993)* Progr. Probab.,36 Birkhauser, Basel, (1995), 99-110.

[DJ] Delgado, R., Jolis, M. Weak approximation for a class of gaussian processes. Apareixerà a *Journal of Applied Probability.*

[D] Donsker, M.D. An invariance principle for certain probability limit theorems. *Mem. Amer. Math. Soc.* **6** (1951), 1-12.

[E] Einstein, A. On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. *Ann. Physik* **17** (1905).

[Ei] Eisenbaum, N. Integration with respect to local time. *Prepublicació, Laboratoire de Probabilités de Paris 6* (1998).

[ERV] Errami, M., Russo, F., Vallois, P. Itô formula for $C^{1,\lambda}$-functions of a càdlàg process and related calculus. *Prepublicació* (1999).

[FN] Florit, C., Nualart, D. Diffusion aproximation for hyperbolic stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.* **65** (1996), 1-15.

[FP] Föllmer, H. Protter, P. On Itô's formula for d-dimensional Brownian motion. *Prepublicació.*

[FPS] Föllmer, H. Protter, P., Shiryayev, A. Quadratic covariatiom and an extension of Itô's formula, *Bernoulli*, **1** (1995), 149-169.

[GT] Gaveau, B., Trauber,P. L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel. *J. Functional Anal.*46(1982), 230-238.

[GS] Grimmett, G.R., Stirzaker, D.R. Probability and random processes. *Oxford University Press*, (1992).

[HP] Haussmann, U.G., Pardoux, E. Time reversal of diffusions, *Annals of Probability*, **14** *núm.4* (1986), 1188-1205.

[HS] Höhnle, R., Sturn, K. A multidimensional analogue to the 0-1 law of Engelbert and Schmidt. *Stochastics and Stochastics Reports*, **44** (1993), 27-41.

[IW] Ikeda, N., Watanabe, S. Stochastic differential equations and diffusion processes. *North-Holland Mathematical Library.* **24** Tokyo (1981)

[I] Itô, K. Stochastic integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo* **20** (1944), 519-524.

[J] Jacod, J. Groissement initial, hypothèse H' et théorème de Girsanov. *Lecture Notes in Math.* **1118**, *Springer* (1985), 15-35.

[JP] Jacod, J., Protter, P. Time reversal on Lévy processes. *Ann. Probab.* **16(2)** (1988), 620-641.

[Jo] Jolis, M. Weak convergence to the law of the Brownian sheet. *Ann. Scientifique de l'Université Blaise Pascal.* **92** (1988), 75-82.

[KS] Karatzas, I., Shreve, S.E. Brownian motion and stochastic calculus. (Second edition) *Springer-verlag* (1991).

[KW] Kunita, H., Watanabe, S. On square-integrable martingales. *Nagoya Math. J.* **30** (1967), 209-245.

[KP] Kurtz, T.G., Protter, P. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. *Stochastic analysis* Academic Press, Boston, (1991), 331-346.

[L1] Lévy, P. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Math.* **7** (1939), 283-339.

[L2] Lévy, P. Processus stochastiques et mouvement Brownien. *Gauthier-Villars*, Paris (1948).

[LZ] Lyons, T.J., Zhang, T.S. Decomposition of Dirichlet processes and its application. *Annals of Probability*, **22** *núm.1* (1994), 494-524.

[M] Malliavin, P. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. *Proc. Inter. Symp. on Stoch. Diff. Equations Kyoto 1976* Wiley (1978), 195-263.

[MNS] Millet, A., Nualart, D. Sanz, M. Integration by parts and time reversal for diffusion processes, *Annals of Probability*, **17** *núm.1* (1989), 206-238.

[MN1] Moret, S., Nualart, D. Quadratic covariation and Itô's formula for smooth nondegenerate martingales. Apareixerà a *J. Th. Probability.*

[MN2] Moret, S., Nualart, D. Generalization of Itô's formula for smooth nondegenerate martingales. *Prepublicacions Facultat de Matemàtiques de l'U.B.* **263** (1999).

[N1] Nualart, D. Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus. *Lecture Notes in Math.* **1690**, *Springer* (1998).

[N2] Nualart, D. The Malliavin Calculus and Related Topics, *Springer Verlag*, (1995).

[NP] Nualart, D., Pardoux, E. Stochastic Calculus with anticipating integrands, *Prob. Th. Rel. Fields*, **78** (1988), 535-581.

[NZ] Nualart, D., Zakai, M. Multiple Wiener-Itô integrals possessing a continuous extension. *Prob. Theory Related Fields* **85** (1990), 131-145.

[P] Pardoux, E. Groississement d'une filtration et retournement du temps d'une diffusion. *Lecture Notes in Math.* **1204** *Springer* (1986), 48-55.

[Pr] Protter, P. Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach, *Springer, Berlin, New York*, (1990).

[R] Rozkosz, A. Stochastic representation of diffusions corresponding to divergence form operators. *Stochastic Processes Appl.* **63** (1996), 11-33.

[RV] Russo, F., Vallois, P. Itô formula for C^1-functions of semimartingales, *Prob. Theory Related Fields.* **104** (1996), 27-41.

[S] Shigekawa, I. Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced mesures.*J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980), 263-289.

[Sk] Skorohod, A.V. Asymptotic methods in the theory of stochastic differential equations. *Transl. Math. Monographs. Amer. Math. Society.* Vol 78. (1989).

[SU] Solé, J.L., Utzet, F. Stratonovich integral and trace. *Stochastic Stochastics Rep.* **29** (1990), 203-220.

[St] Stroock, D. Topics in Stochastic Differential Equations (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.) *Springer Verlag.* (1982).

[T] Trotter, H.F. A property of Brownian motion paths. *Ill. J. Math.* **2** (1958).

[Tu] Tudor, C. Remarks on the martingale problem in the two dimensional time parameter. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **25** (1980), 1551-1556.

[V] Ville, J. Étude critique de la notion du collectif. *Gauthier-Villars*, Paris (1939).

[W1] Wiener, N. Differential space. *J. Math. Phys.* **2** (1923), 131-174.

[W2] Wiener, N. Un problème de probabilités denombrables. *Bull. Soc. Math. France* **52** (1924), 569-578.

Índex de matèries.