Ecología de la Modelización Matemática

en la enseñanza universitaria de las Matemáticas

Berta Barquero i Farràs

Memòria presentada per aspirar
al grau de Doctora en Matemàtiques

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Directors:
Dr. Josep Gascón Pérez
Dra. Marianna Bosch i Casabò

CERTIFIQUEM que la present Memòria ha estat realitzada per na Berta Barquero i Farràs,

sota la direcció del Dr. Josep Gascón Pérez

i la codirecció de la Dra. Marianna Bosch i Casabò.

Bellaterra, octubre de 2009

Dr. Josep Gascón Pérez

Dra. Marianna Bosch i Casabò

PRÓLOGO

Nuestra investigación, como bien indica el título de la memoria, aborda el problema de la *ecología* de la enseñanza universitaria de la modelización matemática. Tal vez en contra de lo que se podría suponer, el término "ecología" es el único que se mantendrá en la formulación que propondremos del problema de investigación que guiará el contenido de la memoria. En efecto, una vez situados en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que constituye el marco de referencia a la vez conceptual y metodológico de esta investigación, las nociones comunes de "enseñanza" y de "modelización matemática" serán cuestionadas, analizadas – en el sentido de "diseccionadas"– y reconstruidas, para poder formular y abordar el problema que nos planteamos sin tener que asumir acríticamente los puntos de vista dominantes de las instituciones consideradas, que son también instituciones a las que pertenecemos como profesores e investigadores (en este caso tanto la institución "matemática", como la "universidad" o, más en general, "el sistema de enseñanza de las matemáticas"). Esta necesaria "emancipación" que debe realizar todo investigador en didáctica respecto a la visión común de los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, requiere un distanciamiento conceptual que puede parecer extraño – cuando no innecesario – al neófito en la materia, pero que por otra parte es absolutamente normal en cualquier ámbito de estudio científico, artístico o técnico que se quiera considerar.

Antes pues de esbozar el contenido del trabajo que presentamos, aprovecharemos para introducir o, mejor dicho, abrir camino al significado del término "ecología", introducido en didáctica de las matemáticas por los trabajos de Chevallard y Rajoson a finales de los años 80 (Rajoson, 1988), que retoma metafóricamente, aunque ajustándola al ámbito de la didáctica, la noción de ecología entendida como la "biología de los ecosistemas" (Margalef, 1998). La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) recurre al término específico de "vida institucional" para referirse a aquellas actividades, maneras de hacer o maneras de pensar, que se desarrollan con normalidad en un entorno institucional dado. Así, por ejemplo, se podrá decir que las actividades de enseñanza relacionadas con las lenguas clásicas, como el latín y el griego, que tuvieron una "vida esplendorosa” en el pasado, son hoy día “especies en vías de extinción” – si no las podemos considerar ya como totalmente extintas… Del mismo modo, podemos decir que, desde el punto de vista de la sociedad actual, las condiciones ecológicas para la vida de la enseñanza del inglés, por ejemplo, pueden considerarse como altamente favorables, aunque la efectividad concreta de esta enseñanza en la educación obligatoria sea contestada por algunos. Y no está muy clara cuál es la situación de las actividades matemáticas que se llevan a cabo en la escuela, dada su creciente pérdida de sentido y de funcionalidad, lo que plantea serias dudas sobre las condiciones de vida de las matemáticas en la escuela actual. Pero el uso de la problemática ecológica no refiere únicamente a estas consideraciones generales que hemos introducido aquí a modo de ejemplo. El enfoque ecológico en didáctica de las matemáticas, tal como lo propugna la TAD, consiste en realizar una ampliación notable de la problemática didáctica que, a riesgo de simplificar, podríamos describir muy brevemente como sigue. En lugar de plantear los problemas de enseñanza y aprendizaje en términos de qué hacer para que tal o cual noción, actividad o problemática puedan enseñarse o aprenderse mejor y, en consecuencia, investigar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas buscando la manera de superarlas, la TAD se pregunta cuáles son las *condiciones* que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o “vivir”) en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las *restricciones* que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades. Como veremos a lo largo de esta memoria, la problemática ecológica en didáctica nos conducirá a tener que explorar terrenos que van mucho más allá del aula y que afectan la manera cómo la comunidad científica – e incluso la sociedad – considera las matemáticas en relación con las demás ciencias o lo que se entiende por enseñar y aprender en la universidad.

El punto de partida de nuestra investigación se sitúa en la enseñanza de las matemáticas en las facultades de Ciencias Experimentales (CCEE) y se centra, más concretamente, en el estudio de la *ecología de la modelización matemática* en este ámbito institucional, es decir el estudio de las *restricciones* que dificultan y de las *condiciones* que se requieren para que la actividad de modelización matemática pueda vivir con normalidad en los actuales sistemas en enseñanza universitarios.

El problema surgió a raíz de un proyecto de "Aula matemàtica" del Departamento de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona financiado por la Generalitat de Catalunya en el que se intentaba abordar el tremendo fracaso de la enseñanza de las matemáticas en las CCEE. Su objetivo fundamental era la mejora del aprendizaje de las matemáticas y, en consecuencia, la mejora de los resultados obtenidos por los estudiantes en las asignaturas de matemáticas de las titulaciones científicas que no son propiamente la licenciatura de matemáticas (Utzet, 2003). Ante esta cuestión nuestro interés se centró, desde el principio, en la problemática ecológica subyacente, esto es, en cuestionar hasta que punto las "dificultades de los estudiantes" no eran en realidad un reflejo o un resultado de determinadas "dificultades del sistema de enseñanza" debidas a restricciones ecológicas que debían ser analizadas.

El equipo de investigación español que trabaja en la TAD, y al que me acababa de incorporar como joven doctoranda, estaba desarrollando una línea de investigación sobre el papel de la modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar en la que se centraba el trabajo de tesis doctoral del investigador Fco. Javier García (García, 2005). De ahí surgió la idea de prolongar el estudio iniciado por este investigador hacia otro nivel de enseñanza, el de las facultades de CCEE que, pensábamos, debería formar un entorno institucional mucho más favorable a la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización imprescindible para el estudio de fenómenos científicos.

En el **primer capítulo,** que es en realidad la introducción a la memoria, describiremos la respuesta bastamente extendida que dan los actuales sistemas de enseñanza universitarios al *problema docente* de la enseñanza de las matemáticas en CCEE. En ella se observa que el propósito de integrar la modelización matemática se mantiene como una aspiración utópica que raramente llega a realizarse en la realidad de las aulas. Veremos, asimismo, como en realidad la "ideología imperante", junto a otros factores, lleva a reducir enormemente el posible papel de la modelización matemática hasta el punto de considerarla como una mera "aplicación de ciertos conocimientos preestablecidos". A continuación introduciremos la experiencia de la reforma docente que propone la universidad danesa de Roskilde (RUC) y que puede ser considerada como una propuesta de cambio al estado tan extendido.

La segunda parte del capítulo estudia el interés creciente por parte de la comunidad investigadora en educación matemática hacia el papel que la modelización matemática puede ejercer sobre la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos dentro del que se suele denominar como "*Modelling and applications*". Este interés ha ido en aumento en las últimas décadas llegando incluso a promover el impulso mundial para la inclusión en los currículum de matemáticas de contenidos o temas relacionados con las *aplicaciones de las matemáticas*. Presentaremos una visión panorámica de las principales investigaciones actuales en este ámbito para poder así destacar las características principales que las unen, las que las diferencian e incluso, aquellas con las que se complementan. Este trabajo ha sido posible, en parte, gracias a mi participación, durante estos últimos años, a los tres últimos congresos europeos del CERME (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*), donde pude trabajar en el grupo de "Modelling and Applications" en el que participaron la mayoría de investigadores europeos que trabajan hoy día en este ámbito.[1] Aunque la presentación de las investigaciones realizadas por nuestro grupo, y muy especialmente la forma en que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) interpreta la actividad de modelización matemática fueran acogida inicialmente con sorpresa y ciertas discrepancias, el trabajo cooperativo y la participación de investigadores de la TAD en proyectos europeos sobre la implantación de la enseñanza de la modelización[2] ha puesto de manifiesto tanto la pertinencia como la aceptación de los resultados obtenidos desde este enfoque.

En el **capítulo 2** de esta memoria nos situaremos ya explícitamente en el ámbito de la TAD para cuestionar la concepción común de los procesos de modelización y situarlos dentro del modelo general de las matemáticas y de la difusión de los conocimientos matemáticos que propone este marco teórico en términos de praxeologías matemáticas y didácticas. Esta reformulación nos permitirá formular el *problema didáctico de la modelización matemática* en términos del enfoque ecológico y que nos

---

[1] La participación en este congreso ha dado lugar a la publicación de dos trabajos estrechamente relacionados con esta memoria: Barquero, Bosch & Gascón (2007 y en prensa).

[2] Nos referimos a la participación de Fco. Javier García en el proyecto europeo LEMA ("Learning and Education in and through Mathematical Modelling"), dentro del programa SOCRATES 2006-2008 y en el proyecto COMPASS ("Common problem solving strategies as links between mathematics and science"), dentro del programa Lifelong Learning 2009-2011.

conducirá a la búsqueda de dispositivos didácticos que favorezcan la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria.

En los inicios del problema de *ingeniería didáctica universitaria* que debíamos abordar, contamos con unos trabajos previos de Marianna Bosch y Josep Gascón sobre el diseño e implementación de unos nuevos dispositivos didácticos llamados “Talleres de Prácticas Matemáticas” que se experimentaron en la Facultad de Ciencias de la UAB desde 1991 hasta 1998. Uno de estos talleres de prácticas se inició con la primera generación de Ciencias Ambientales de la Universitat Autònoma de Barcelona en el curso 1992/93 y, aunque su objetivo no fuera explícitamente el de indagar sobre la posible integración de la modelización matemática, sí partía del estudio de un problema relacionado con la dinámica de poblaciones cuya fecundidad dejó planteada la posibilidad de continuar este tema. Desde esta perspectiva, empezamos a trabajar desde el curso 2004/05 en el diseño de un posible taller de modelización matemática para estudiantes de licenciaturas de CCEE.

Ese mismo año, el investigador francés Yves Chevallard, creador de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuso introducir la noción de Recorrido de Estudio e Investigación (REI) como nuevo dispositivo didáctico que, en contra de un punto de vista “monumentalista” que pone en primer plano el estudio o “visita” de los saberes cristalizados, apuesta por la introducción de una nueva epistemología escolar que debería reemplazar y vienen a reemplazar el *paradigma escolar de “inventariar” los saberes* por un paradigma de *cuestionamiento del mundo*. En cierta manera, los REI representan la materialización de lo que la TAD considera como procesos didácticos basados en una enseñanza “funcional” de las matemáticas. Esta propuesta, que nosotros recibimos entonces en un estado muy preliminar, se ajustaba perfectamente a nuestra problemática de trabajo y decidimos empezar a elaborar el diseño matemático de un posible REI en torno al estudio de la dinámica de poblaciones, y experimentarlo en unas condiciones que estaban aún por determinar.[3]

[3] El diseño a priori del REI fue presentado y publicado en las actas de I Congreso Internacional sobre la TAD (Barquero, Bosch & Gascón, 2006). El análisis a posteriori y primera exploración de la ecología de este REI se presentó en el II Congreso Internacional sobre la TAD (Barquero, Bosch & Gascón, en prensa).

Antes de acabar el curso 2004/05 se abrió la posibilidad de empezar la asignatura de matemáticas dentro de una titulación que se iniciaba el curso 2005/06, la de ingeniería técnica industrial especialidad en química industrial (ETIQI) de la Universitat Autònoma de Barcelona. Vimos la oportunidad de poder disponer de un curso con diversas condiciones que eran ciertamente satisfactorias para la experimentación de los REI: se trataba de un curso anual a diferencia de muchos de los programas de estudio en CCEE que reducen la asignatura de matemáticas a un semestre; se contaba con un grupo bastante reducido de alumnos, alrededor de 40; y el profesor responsable de la asignatura es un especialista en biología matemática, de mentalidad abierta y dispuesto a colaborar con nuevas propuestas de innovación didáctica. Finalmente, la experimentación de los REI ha podido realizarse durante cuatro cursos académicos consecutivos (y sigue vigente este curso) de los que debemos destacar el sorprendente "voluntarismo" de los estudiantes en asistir semana tras semana a dichas experimentaciones, que nosotros hemos interpretado siempre como un signo de la pertinencia del tipo de trabajo propuesto en el taller. La descripción del diseño matemático del REI se presentará en el **capítulo 3** y los resultados del diseño didáctico a priori y de su experimentación están sintetizados en el **capítulo 4**. El análisis a posterior de esta experimentación aportará las primeras respuestas al problema de la ecología "local" de los REI en los sistemas de enseñanza universitaria de las matemáticas.[4]

Esta implantación de los REI bajo condiciones controladas por la investigación pondrá de manifiesto algunas de las principales condiciones y restricciones didácticas ligadas principalmente al contrato didáctico imperante en la enseñanza universitaria, permitiendo dar una primera aproximación de lo que designaremos como la "ecología local" de los REI. Para poder pensar en una integración generalizada de estos nuevos dispositivos bajo condiciones más normalizadas, necesitaremos indagar aquellas restricciones que podrían dificultar su desarrollo y que se encuentran en niveles más generales de especificación. Así, en el **capítulo 5**, retomando los resultados obtenidos tanto de las características de los REI como del estudio de su "ecología local", abordará aquellas restricciones que provienen de la epistemología y de la pedagogía dominantes en las instituciones universitarias, para así proponer una serie de condiciones,

[4] Nuestro trabajo de investigación de DEA realizado en el marco de la formación doctoral se centró en el diseño a priori, la experimentación y el análisis a posterior del primer de estos REI (Barquero, 2006).

dispositivos y gestos didácticos que parecen necesarios para que los REI, y a través de ellos las matemáticas como herramienta de modelización, puedan vivir con normalidad en la enseñanza de las CCEE.

En el **capítulo 6** de esta memoria, para finalizar, se hace un resumen del contenido de la misma y se enfatizan las principales conclusiones del trabajo poniendo claramente de manifiesto que tanto el problema didáctico abordado como las respuestas parciales que se proponen en este trabajo no hubiesen sido posibles fuera del ámbito de la TAD. Por fin se formula un conjunto de problemas abiertos que constituyen el punto de partida de desarrollos futuros de esta línea de investigación.

AGRAÏMENTS

Després d'aquests darrers mesos tan intensos de feina interminable, de clausura amb la companyia del meu ordinador (i el seu humor particular) i de les pobres persones que defallien en la intenció d'interactuar amb una ment tan ennuvolada, per fi ha arribat el moment de dipositar la tesi! La memòria està tancada, fins a tot impresa sobre la taula, però no sortirà del despatx de les CB fins que no tingui els seus esperats agraïments. Però ben pensat ara, no és una tasca gens fàcil, en aquest estat d'esgotament general, agrair a tantes persones i institucions que han participat en aquest projecte iniciat fa prop de sis anys. Quan penso en tots aquests anys, apareixen tants bons records i sentiments que amb aquestes paraules segur que em quedo curta en agrair a tots els qui hi heu participat.

El primer agraïment va especialment dedicat als meus directors de tesi, la Marianna Bosch i en Josep Gascón que tant admiro en l'àmbit professional i personal. Gràcies pel vostre entusiasme i dedicació inesgotable en tot i cada un dels projectes que hem iniciat aquests anys. Ha estat tot un honor compartir amb vosaltres des de les primeres trobades a l'Emblemàtic a les últimes correccions desesperants dels capítols. Cada trobada a la UAB, a EMI o a l'IQS ha estat un impuls d'energia per seguir en aquest viatge apassionant pel món de la recerca.

Al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona pel seu suport tots aquests anys. Per l'oportunitat des de l'inici de poder començar a donar classes com a associada, per la posterior beca PIF que m'ha permès donar la dedicació adequada a aquest treball i pel present curs que començo ple d'entusiasme. Gràcies també per deixar-me participar tots aquests anys en l'organització dels "Dissabtes de les matemàtiques" dels que, superada tota i cada una de les crisis inicials, tant n'he après gaudint de la companyia dels experts, coordinadors, monitors, estudiants de secundària i pares. Sense deixar d'agrair a la immillorable Secretaria del Departament que sempre amb un somriure d'orella a orella ens està ajudant en tot moment.

No em vull oblidar del "Institut for Naturfagenes Didaktik" de la Universitat de Copenhaguen que en aquest últim any com a doctoranda tan amablement em van acollir

en l'estada predoctoral. Segurament no vaig escollir els millors mesos per anar-hi, d'octubre a febrer, però la calidesa amb la que em van acollir tots els membres del departament no em va fer adonar ni del fred ni de les poques hores de llum que teníem. Molt en especial al professor Carl Winsløw amb qui vaig poder compartir tantes hores de discussió sobre la TAD i els REI. I al professor Kjeld Bagger Laursen que em va donar l'oportunitat d'iniciar una nova experimentació amb estudiants de tercer curs de la llicenciatura de matemàtiques a l'assignatura de modelització matemàtica. Com m'enyorava força de la meva estimada Barcelona, vaig decidir deixar de banda la dinàmica de poblacions per uns mesos i proposar l'estudi de la millorar del sistema del Bicing. L'experiència que vaig viure aquells quatre mesos no l'oblidaré mai.

A tots els meus companys i bons amics de doctorat repartits entre la torre de matemàtiques, la zona dels "barracons" i escampats per la resta del món. Amb tots vosaltres he compartit tants i tants bons moments aquests anys: les hores del dinar entre ciències, lletres i la gespa, les xerrades a la sala del cafè, les pissarres reflectint l'esbós de llargues hores de divagacions, els "semanaris", els amis invisibles i tions, ... Molt en especial, als meus estimats nois del despatx amb alguns dels qui he estat tots aquests sis anys des de la C-1 al CB. Us trobaré tant a faltar quan no us pugui trobar de reüll des de la taula o quan ja no soni el telèfon per decidir on anem a dinar. El més sincer agraïment per a tots els fantàstics moments compartits que segur que a les capses de "mudanzas el Pato" no hi cabran però en el meu cor sempre hi seran. Tots sabem que el futur no ens és molt favorable i que de dificultats n'hem viscut i més que en viurem, però gràcies per fer de les penes i alegries compartides tot un món de records inoblidables.

A tots els companys del grup d'investigació BAHUJAMA (Barcelona, Huesca, Jaén i Madrid) que any rere any a cop de tesis, seminaris i congressos hem pogut veure i viure l'evolució d'un grup cada cop més consolidat. Moltes gràcies per la vostra càlida benvinguda i per haver sabut transmetre als iniciants la passió pel món didàctic. En especial al meu company de lluites "modelitzadores" en Javi i a les inseparables noies: Esther, Lídia i Noemí. I a la fantàstica Ann Swinnen per la seva gran ajuda amb l'anglès.

Als meus alumnes d'Enginyeria Tècnica Industrial, especialitat en química industrial, que han participat des del curs 2005/06 al 2008/09 en l'experimentació dels REI i que van aguantar, amb molta nota, els tallers de modelització. Al professor Àngel

Calsina per donar-me la oportunitat d'iniciar tals experiments i pel seu suport incondicional tots aquests anys. Moltíssim n'he après de cada una de les experimentacions i de tots vosaltres.

I fora ja de l'entorn professional, a tots els meus amics de l'escola i de la llicenciatura. Molt en especial a tota la gran Colla de Gràcia, i al seu nouvingut, el Joelet. Com algú de nosaltres diria "ens estem fent grans i ja comencem a fer coses sèries". Sense la vostre ajuda i companyia no hagués pogut seguir endavant i superar els moments d'angoixa que s'han passat. A les noietes (companyes de professió i bones amigues) que estan ara vivint a Astúries, Lugo i Madrid, sí vosaltres: Fátima, María i Ju. Als nois i noies de Boston i de Copenhaguen que tant m'han cuidat quan he estat fora de casa, Sharika, Nina i Marco, gràcies. Espero poder tornar, ara ja sí sense la tesi, a visitar-vos a tots. I als de la colla, ara no me'n perdré una!

Finalment vull agrair a tota la meva família pel seu suport incondicional, i paciència davant de tants nervis fins l'últim moment. A tota la meva nova família Martínez de Albéniz i Margalef. Als meus pares, Mª Isabel i Miquel, al meu germà, en Dani i als meus tiets, Toni, Pere i Pepe i a vosaltres també avis, Mirri i Pi que segur que ja fa dies que us ha arribat la notícia allà dalt i ara, per fi, ja és oficial! A tu, Víctor que amb la teva comprensió, ànims i relectures has reduït el que hagués pogut ser l'interminable. Com ens va dir molt recentment el teu germà: "l'amor és gran quan es comparteix més la vida". A partir de demà, a compensar tot el temps que t'he robat aquests mesos. Moltes gràcies a tots, us estimo!

Fent balanç de tota l'experiència, crec poder afirmar que estic molt contenta d'haver iniciat i seguit endavant amb els estudis de doctorat. Quan fas una tesi, sobretot en un tema que t'apassiona, el viatge és ple d'aventures i de noves coneixences. Com diu el "Viatge a Ítaca": *Has de pregar que el camí sigui llarg, que siguin moltes les matinades que entraràs en un port que els teus ulls ignoraven i vagis a ciutats per aprendre dels que saben*.

No ha estat un camí fàcil, però qui ho havia dit, més que mai d'aquestes dificultats són de les que més n'he après. Moltes gràcies a tots, aquest és també el vostre premi!

Bellaterra, 13 d'octubre de 2009

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CHAPTER 6

CAPÍTULO 1

EL PAPEL DE LA MODELIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LAS MATEMÁTICAS

1. LA PROBLEMÁTICA DOCENTE EN TORNO A LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CIENCIAS EXPERIMENTALES

El punto de partida de nuestra investigación se sitúa en el problema de la enseñanza de las matemáticas en el primer curso universitario de las facultades de Ciencias Experimentales (CCEE) y se centra, más concretamente, en el *estudio de las condiciones necesarias para que la actividad de modelización matemática* pueda vivir con normalidad en estos sistemas de enseñanza.

Siguiendo a Josep Gascón (1999), consideramos como *problemática docente* al conjunto de cuestiones y problemas que se presentan a los profesores y que se pueden formular utilizando las nociones e ideas dominantes en la cultura de la institución docente considerada. Estos problemas no deben considerarse como dificultades personales que afectarían de manera variada a los distintos profesores, en función de sus características individuales y de su personalidad. Son, como indican Yves Chevallard y Gisèle Cirade (2006), *problemas de la profesión* – aquí de la profesión de profesor universitario – que deben abordarse y resolverse de forma colectiva. En particular, deben distinguirse de las cuestiones que integran nuestra *problemática de investigación*, que como tal se formula dentro de un marco teórico concreto – en nuestro caso, la Teoría Antropológica de lo Didáctico – y que pueden llegar a distanciarse bastante de los problemas de la profesión que le dan origen. Dicho distanciamiento no es más que una necesidad metodológica que consideramos inevitable para poder abordar y resolver con eficacia las complejas cuestiones que surgen en la *problemática docente*:

PROBLEMA DOCENTE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CCEE

¿Qué tipo de matemáticas se deben enseñar a los estudiantes de Ciencias Experimentales y cómo deben ser enseñadas?

Para describir la respuesta que se da a esta *problemática docente* en torno a la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de ciencias, empezaremos indicando cuáles son las matemáticas que se enseñan actualmente en estas instituciones y, paralelamente, cuáles son las nociones e ideas dominantes que encontramos en dichas instituciones en relación a las matemáticas y a su enseñanza. Disponemos para ello de dos tipos de datos empíricos. En primer lugar, los *programas* de la asignaturas de matemáticas que se han estado impartiendo durante estos últimos cursos académicos (del 2005/06 al 2007/08). Estos programas son un buen indicador de las matemáticas que se proponen para ser enseñadas en la actualidad. Nos centraremos, como ya hemos dicho, en el primer curso de matemáticas de las facultades de CCEE de geología, biología, química y ciencias ambientales. Nos situaremos inicialmente en la Facultad de Ciencias y Biociencias de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) y, posteriormente, extenderemos el estudio a diversas universidades españolas, cuya situación, como veremos, no divergirá mucho de la descrita previamente.

El segundo tipo de material empírico que utilizaremos proviene de los datos obtenidos a través del proyecto "Aula matemàtica" para la mejora de la calidad docente universitaria financiado por la Generalitat de Catalunya durante el período 2003-2005 y coordinado por el profesor Frederic Utzet del Departamento de Matemáticas de la UAB. El proyecto tenía como objetivo fundamental "la mejora del aprendizaje de las matemáticas y, en consecuencia, la disminución del número de no presentados y la mejora de los resultados obtenidos por los estudiantes en las asignaturas de matemáticas de las titulaciones que no son propiamente la licenciatura de matemáticas"[1]. Uno de los medios para conseguir estas mejoras fue la adaptación de un material de autoaprendizaje inspirado en el recurso *Math Emporium* de la universidad estadounidense Virginia Tech que no entraremos a detallar aquí. Lo que nos interesa destacar son las hipótesis previas de las que partía el proyecto y su análisis de las dificultades de los estudiantes de primer curso de la licenciatura de Geología. Este análisis se basó, entre otros datos, en la descripción detallada de los contenidos matemáticos de la asignatura, en entrevistas a profesores encargados de la docencia y en la elaboración, recogida de datos y análisis de un cuestionario administrado a los estudiantes que cursaban la asignatura. Esta colección de datos empíricos nos aportará información, a un nivel más detallado, de cómo los profesores y los alumnos formulan lo que ellos consideran que son las principales cuestiones problemáticas relativas a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Podremos completar así una primera presentación de la problemática docente en torno a la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario.

Como contrapunto a esta descripción de la problemática docente, analizaremos un proyecto de enseñanza que se sitúa, en cierta manera, en las antípodas de la enseñanza

[1] Utzet (2003), Memoria del proyecto "Aula Matemàtica" proyecto de Mejora de la Calidad Docente 2003-2005. p. 8.

tradicional universitaria de las matemáticas. Nos referimos al programa *Problem-oriented project work* que propone la universidad danesa de Roskilde desde principios de los años 70 dentro de un proyecto de transformación de la docencia universitaria tradicional.

La segunda parte del capítulo estudia el interés creciente por parte de la comunidad investigadora en educación matemática hacia el papel que la modelización matemática puede ejercer sobre la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos, lo que nos aportará una primera reformulación de la problemática docente dentro del ámbito conocido como "*Modelling and applications*". Antes de introducir, en el próximo capítulo, nuestra propia propuesta para abordar dicha problemática, presentaremos una visión panorámica de las principales investigaciones actuales en este ámbito para poder así destacar las características principales que las unen, las que las diferencian e incluso, aquellas con las que se complementan.

1.1. La enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de Ciencias Experimentales: un estudio exploratorio

1.1.1. Visión general de los programas de matemáticas para las CCEE

Partiremos de una muestra de los programas de la asignatura de matemáticas que, desde el curso 2005/06 al 2008/09, se vienen impartiendo en las licenciaturas de Biología, Geología, Química y Ciencias Ambientales de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) y de otras universidades españolas: Universitat d'Alacant (UA), Universitat de Barcelona (UB), Universidad Complutense de Madrid (UCM), Universidad de Granada (UDG), Universidad de Jaén (UJ), Universidad de Oviedo (UO), Universidad del País Vasco (UPV/EHU), Universidad de Salamanca (US) y Universidad de Vigo (UV)[2].

Después de comparar estos programas, se observa que todos ellos presentan una estructura y unos contenidos muy similares. Cabe señalar que, en el curso académico 2008/09, algunas carreras ya se han visto afectadas por la última reforma educativa universitaria dirigida a la construcción del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) y a la conversión de las licenciaturas en grados, lo que ha provocado un cambio

[2] Esta muestra de programas se presenta en el Anexo 1.1.

considerable en la formulación de los programas en términos de “competencias”. Pero, incluso en este caso, tanto la orientación de las asignaturas como la descripción de los contenidos específicos siguen siendo bastante invariables por ahora.

En cada programa se especifican primero cuáles son los objetivos de la asignatura, el número de créditos u horas de clase presencial que se le dedican y la distribución entre “créditos teóricos” (clases magistrales donde un profesor expone en la pizarra) y “créditos prácticos” (clases en grupos reducidos donde un profesor, generalmente diferente al que imparte las clases magistrales, ayuda a los alumnos a resolver problemas en clase). A esta presentación general le sigue una descripción de los contenidos específicos organizados en una lista de temas o de bloques temáticos de la asignatura y algún comentario sobre la metodología de la enseñanza y los dispositivos de evaluación.

Si nos centramos en los pequeños párrafos que indican los objetivos de cada asignatura, encontramos que, generalmente, se justifica el diseño del programa en base a un doble propósito: por un lado el de proporcionar a los estudiantes una *formación matemática básica* y, por otro, el de introducir a los estudiantes en la *modelización matemática* aplicada a la especialidad científica correspondiente (biología, geología, química o ciencias ambientales). Así, por ejemplo, en el programa de la licenciatura de Biología (2005/06) de la Universidad de Salamanca (US), encontramos especificados los objetivos siguientes:

> Se pretende conseguir de manera general que el alumno se familiarice con las herramientas matemáticas básicas que va a precisar a lo largo de la carrera. En particular se busca conseguir que el alumno comprenda los conceptos fundamentales involucrados en la Modelización Matemática, fundamentalmente en los modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias que tengan aplicación a procesos biológicos.

En la misma dirección, el programa de la licenciatura de Geología (2006/07) de la UAB propone[3]:

> Este programa pretende un doble objetivo. El primero y más importante es el de dar al estudiante una formación matemática básica, centrada en el álgebra lineal y en el cálculo de funciones de una variable, que le permita comprender el lenguaje de la Ciencia. El segundo es el de introducirle en el

[3] Original en catalán. La traducción es nuestra.

> campo de la Geología, es decir en la modelización matemática, por medio de ejemplos sencillos que puedan ser analizados con las herramientas matemáticas introducidas previamente.

Destacamos ya, como común denominador de la mayoría de los programas, que la parte que hace referencia a la modelización matemática se plantea siempre con *posterioridad* y como una *consecuencia* (o aplicación) de lo que se presenta como la formación matemática básica. Con la reciente transformación de los programas para ser adaptados al EEES, los objetivos tienden a formularse en términos de *capacidades* y *competencias* a desarrollar, con lo que se consigue hacer mucha más referencia al *uso de las matemáticas* dentro del estudio de cada disciplina. En el programa que presenta la licenciatura de Geología (2008/09) de la UB encontramos un buen ejemplo de ello:[4]

> Competencias que se desarrollan en la asignatura:
> - Capacidad de analizar e interpretar funciones matemáticas de variable real que aparecen en diferentes entornos geológicos,
> - Capacidad para poder aplicar el concepto de integración al cálculo de áreas y de volúmenes,
> - Poder modelizar diferentes situaciones en tiempo discreto usando los conceptos de sucesiones y de series.

La referencia a las "aplicaciones" queda más explícita al examinar la estructura de los programas en bloques temáticos y en contenidos, donde, aunque nos centremos en analizar los programas de cursos más recientes, a menudo se observa que la parte del programa dedicada al estudio de modelos matemáticos es pobre, cuando no inexistente. Así, por ejemplo, en un programa reciente (curso 2007/08) propuesto para la licenciatura de Biología de la UAB, podemos encontrar que éste está estructurado en dos secciones. La primera se dedica a lo que se denomina "Matemática Fundamental" con los temas de: "Funciones de una variables" (Tema 1); "Cálculo integral" (Tema 2); y "Álgebra lineal" (Tema 3). La segunda sección, con el título de "Biomatemática", integra los temas referentes a las respectivas aplicaciones: "Aplicación del álgebra lineal al crecimiento lineal de poblaciones" (Tema 4); "Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Ejemplos: crecimiento exponencial, desintegración radioactiva, ecuación logística" (Tema 6). Este hecho es menos explícito en el caso de la licenciatura de Geología de la misma universidad. Dentro del bloque de Álgebra Lineal encontramos el último apartado "2.4. Aplicaciones y ejemplos" y dos menciones menos específicas de

[4] Original en catalán. La traducción es nuestra.

aplicaciones en el apartado dedicado al cálculo diferencial ("Aplicaciones: problemas de optimización") y en el apartado de cálculo integral ("4.2. Técnicas elementales de integración. Aplicaciones").

Hay casos en los que las referencias a la modelización y aplicaciones son más importantes. Por ejemplo, en el programa de la universidad de Salamanca (US) aparece todo un tema dedicado a los "Modelos Matemáticos basados en E.D.O. de primer orden" y una lista de aplicaciones en el tema de "Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones": "modelos de crecimiento de poblaciones para dos especies que interaccionan", "modelos epidemiológicos", etc. cuya extensión contrasta con los pocos créditos de la asignatura, sólo 4,5. Insistimos en que, sobre el papel, el programa parece ser demasiado extenso: sólo 45 horas de clase presencial para 9 temas, partiendo del estudio de funciones, límites y continuidad, cálculo diferencial e integral en una variable hasta los sistemas de ecuaciones diferenciales pasando por los espacios vectoriales, las matrices y los determinantes, etc., lo que nos hace suponer que seguramente serán las "aplicaciones" lo que primero se sacrificará por falta de tiempo.

Queremos mencionar finalmente, también como caso excepcional dentro de la muestra de programas recogidos, el caso de la licenciatura de biología de la universidad de Jaén (cursos académicos 2005/06 y 2006/07). El programa también es bastante largo, está dividido en 9 temas, para una asignatura de 6 créditos (correspondiente a 60 horas de clase presencial). En 6 de estos 9 temas se hace referencia al estudio de modelos matemáticos aplicados a la biología. De forma bastante general, en el primer tema dedicado al estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales aparecen las siguientes "Aplicaciones: Programación lineal, administración de recursos". En los tres siguientes temas dedicados al álgebra lineal, se incluye la aplicación hacia "Modelos discretos en Biología. Cadenas de Markov. Aplicaciones en genética. Modelo de Leslie. Explotación racional de animales". En el tema de estudio de funciones de una variable se incluye el apartado de "Aplicación hacia modelos trigonométricos: Movimientos migratorios"; en el de derivación el de "Depredadores y presas. Metabolismo basal"; y, finalmente, en el tema 9 dedicado a las ecuaciones diferenciales, se incluye: "Modelos de interacción entre especies. Modelos continuos de crecimiento de poblaciones. Crecimiento exponencial. Modelos logísticos. Genética de población.". El programa más reciente, el del curso 2007/08, conserva una estructura muy similar aunque ahora se distribuyen en 10 temas, en lugar de 9, con los mismos contenidos y las respectivas aplicaciones.

Con los nuevos planes de estudio surgidos de la última reforma universitaria, encontramos ya para el curso 2008/09 algunas propuestas que las diversas facultades de ciencias empiezan a redactar ciñéndose a la nueva propuesta descriptiva de las asignaturas en base a: competencias que se deben desarrollar, objetivos de aprendizaje, bloques temáticos de la asignatura, metodología y organización general de la asignatura y evaluación acreditativa de los aprendizajes de la asignatura. Un buen ejemplo lo presenta el programa de la asignatura "Matemàtiques I – Anàlisi i càlcul" de la licenciatura en Geología de la Universitat de Barcelona (UB) en el cual encontramos incluidos dentro del bloque de "competencias a desarrollar" algunas referentes a la aplicación de conceptos y a la modelización (nuestra traducción): "*Capacidad de analizar e interpretar funciones matemáticas de variable real que aparezcan en diferentes entornos geológicos*. *Capacidad para poder aplicar el concepto de integración al cálculo de áreas y de volúmenes. Poder modelizar diferentes situaciones a tiempo discreto usando los conceptos de sucesión y serie*".

En general, lo que queda claro es que la organización habitual de los programas no se estructura en torno a los "problemas de modelización" o "aplicaciones", sino en torno a un listado de temas o bloques temáticos de naturaleza matemática cuya organización es muy estándar. Podríamos distinguir, en casi todos los programas, tres grandes bloques temáticos o áreas de contenido: *álgebra lineal, cálculo diferencial e integral en una variable y ecuaciones diferenciales*. En algunos casos encontramos la inclusión de una tercera área: probabilidad y estadística, que aquí no consideraremos.[5] Cabe destacar que la estructura detallada de los contenidos dentro de cada uno de los bloques temáticos no aparece siempre de forma explícita y, cuando lo hace, no siempre presenta las mismas subdivisiones. Por ejemplo, el álgebra lineal puede aparecer con esta denominación[6], o repartida en dos bloques[7] o, incluso, en tres[8]. Y lo mismo ocurre

[5] Lo más habitual es que aparezca como una asignatura distinta de la de matemáticas.

[6] Como es el caso de los programas de geología y biología de la UAB, biología de la UGR, biología de la UPV y ciencias ambientales de la UJ.

[7] Como es el caso de biología de la UPV "Vectores y matrices" y "Vectores y valores propios"; "Teoría de matrices. Sistemas de ecuaciones lineales" y "Espacios vectoriales. Transformaciones lineales" en el caso de química de la UGR.

con otros bloques temáticos. La subdivisión de estos bloques depende ligeramente de la asignatura considerada: en algunos casos, se mantiene a un nivel bastante general aunque, en otras ocasiones, puede llegar hasta niveles de concreción bastante detallados[9]. El común denominador de todos los programas es que los contenidos se describen siempre haciendo referencia a una *lista de conceptos matemáticos clave* que aparecen de forma invariante en cada programa. Al lado de esta lista de conceptos, sólo algunos de los programas detallan además las "aplicaciones" y hacen cierta referencia al tipo de cuestiones extra-matemáticas que se tratarán a lo largo del curso.

Esta organización tradicional de los contenidos de enseñanza tiene el inconveniente de *esconder las cuestiones problemáticas* que constituyen la *razón de ser* de los conceptos, propiedades, técnicas y teoremas que han acabado cristalizando en el saber matemático que se pretende enseñar. Debido a que esta organización sitúa los contenidos matemáticos (definiciones, propiedades, técnicas, teoremas, etc.) en el origen de la actividad matemática, los tipos de problemas matemáticos que los alumnos aprenderán a resolver deberán inscribirse siempre en uno de estos temas y, por lo tanto, mantendrán un carácter relativamente "cerrado" y "aislado". Y es muy probable que lo mismo ocurra con las "aplicaciones", que aparecen al final de cada tema como ejemplificaciones específicas de cada uno de los contenidos.

1.1.2. La problemática docente en boca de profesores y estudiantes

Una vez descrita brevemente la "respuestas espontánea" de los actuales sistemas de enseñanza a la problemática docente propuesta y para poder seguir caracterizando la problemática docente en el primer curso de CCEE en las instituciones universitarias, consideraremos los datos empíricos correspondientes a los resultados del estudio realizado dentro del proyecto "Aula matemàtica" para la mejora de la calidad docente universitaria (2003/05). En el desarrollo de este proyecto, se realizaron un total de 45 encuestas a estudiantes de la licenciatura de geología que cursaban la asignatura de matemáticas (ver anexo 1.2), además de cuatro entrevistas a los profesores encargados

[8] En el programa de química de la UGR encontramos las divisiones en temas: "Matrices", "Sistemas de ecuaciones" y "Determinantes"; en el caso de química de la US: "Espacios vectoriales", "Aplicación a la geometría" y "Transformaciones lineales", al cual le sigue un último tema de "Aplicación de la teoría de matrices a las ecuaciones diferenciales".

[9] Biología y ciencias ambientales de la UJ.

de su docencia (ver anexo 1.3). Presentamos a continuación, de forma bastante sintética, los resultados obtenidos en estos dos tipos de estudio en lo que hace referencia a los contenidos y estructura de la asignatura de matemáticas que se estaba impartiendo.

Algunas de las cuestiones planteadas en el cuestionario buscaban la opinión de los estudiantes de geología sobre la asignatura que estaban cursando o habían cursado y el papel de las matemáticas dentro de la licenciatura de geología. Se les preguntaba qué relación encontraban con otras asignaturas y si consideraban que era conveniente *modificar la orientación de la asignatura*. Los resultados de la encuesta fueron bastante contundentes. Frente a la pregunta de si era necesario modificar los contenidos de la asignatura, un 73% de los alumnos encuestados (33 de los 45) respondieron afirmativamente. Sobre su percepción del papel de las matemáticas dentro de la licenciatura de geología, sólo 17 de 45, un 38%, las consideran como un instrumento necesario, mientras que alrededor de un 47% (21 de 45) las consideran un *obstáculo* que se debe superar o incluso una asignatura *prescindible* (el restante 16%). Finalmente, frente a la pregunta de qué relación hay entre la asignatura de matemáticas y el resto de las asignaturas de la titulación, 11 de los 45 alumnos (25%) reconocen no ver ninguna relación entre las matemáticas estudiadas y los contenidos de las otras asignaturas, 33 (73%) ven sólo alguna relación y sólo 1 (2%) opina que hay mucha relación.

¿Crees que sería necesario reorientar los contenidos?	Frecuencia	%
1. Sí	33	**73.33**
2. No	12	26.67
Total	45	100%

¿Cómo ves las matemáticas dentro de la carrera de Geología?	Frecuencia	%
1. Un instrumento necesario	17	37.78
2. Un obstáculo que se debe superar	21	**46.67**
3. Una asignatura prescindible	7	**15.55**
Total	45	100%

¿Ves relación entre los contenidos de la asignatura de matemáticas y los de las otras asignaturas?	Frecuencia	%
1. Ninguna	11	24.45
2. Alguna	33	73.33
3. Mucha	1	**2.22**
Total	45	100%

En referencia a las entrevistas a los profesores de la asignatura (ver anexo 1.3), nos centraremos aquí en destacar algunas respuestas proporcionadas de las preguntas 2 a la

6 que son las que hacen referencia a los contenidos de la asignatura de matemáticas para un primer curso de geología. Resumimos brevemente a continuación algunas características de las respuestas obtenidas:

Pregunta 2: ¿Cuánto tiempo se dedica a la introducción de algunos temas elementales de modelización matemática en la licenciatura de Geología?

Respuestas:

- La mayoría de los profesores entrevistados están de acuerdo en que la parte de modelización matemática, aunque esté incluida en la descripción del programa, en la práctica real acaba por no impartirse.
- Todos los profesores mencionan la desaparición del programa del bloque más aplicado, el de ecuaciones diferenciales, argumentando como razón principal la falta de tiempo para su realización. Nos explican también que en cursos anteriores se hacían aplicaciones y ejemplos pero indican que actualmente han desaparecido excepto algunos casos puntuales y aislados (nos dan ejemplos concretos como, en el bloque de álgebra lineal, problemas referentes al estudio de dinámica de poblaciones), pero nunca aplicaciones de carácter geológico.
- Alguno de ellos dice introducir ejemplos "puntuales" de modelización o de aplicación con el objetivo de "motivar" a los alumnos.

Pregunta 4. ¿Por qué crees que se ha decidido enseñar estas matemáticas y no otras? ¿Los contenidos matemáticos que se introducen en la asignatura de matemáticas se utilizarán en otras asignaturas de la carrera? ¿Y en la futura profesión del geólogo?

Respuestas:

- Todos están de acuerdo en que las matemáticas que actualmente se enseñan forman parte de una formación matemática básica o elemental para todo científico. Por ejemplo, el entrevistado A afirma: "Un científico debe ser capaz de moverse con estas cuatro cosas básicas sea cual sea su futuro campo. Podríamos decir que el caso de geología es el denominador común mínimo de toda la facultad de ciencias".
- Reconocen que hay asignaturas en la licenciatura que requieren de matemáticas muy complejas que no se podrían cubrir en un primer y único curso de matemáticas.

Pregunta 5. Si el curso se justifica en términos de una formación matemática básica, ¿es posible presentar en clase las cuestiones o la problemática (matemáticas o extra-matemática) que dan sentido a las nociones, a los teoremas y a las técnicas que se estudian? ¿Con qué profundidad se pueden trabajar los temas? ¿Creen que sería necesario dedicar un curso completo para desarrollar adecuadamente el programa?

Respuestas:

- No hay mucho acuerdo entre las respuestas dadas, aunque la mayoría considera que no hay tiempo suficiente para poder desarrollar bien el programa.
- Dos de los entrevistados consideran que dedicar un curso completo para desarrollar el programa sería mucho más útil, dejando así tiempo para presentar aplicaciones, algunos ejemplos más y las cuestiones que dan sentido a las matemáticas que se enseñan.

Pregunta 6. ¿Hay tiempo y ocasión en la clase de problemas o de teoría para que los estudiantes lleguen a dominar las principales técnicas matemáticas y que puedan estudiar en profundidad algún tipo de problemas? ¿Es posible que los estudiantes lleguen a interpretar el curso como una sucesión de técnicas aisladas e independientes?

Respuestas:

- Todos opinan que es difícil que los alumnos lleguen a dominar técnicas y profundizar en el estudio de los problemas principalmente por cuestión de tiempo y que esto imposibilita que los alumnos aprendan a relacionar los diversos conceptos que estudian.
- Hacen de nuevo referencia al bajo nivel con el que llegan, hecho que dificultan enormemente poder profundizar en la materia. Así el entrevistado B afirma: "Creo que a veces los estudiantes deben tener la sensación que es un "cajón de sastre", creo que la sensación de unidad no la tendrán nunca. [...] Dar una visión global no es posible pero de cada una de les partes yo creo que sí."

Frente a las respuestas obtenidas, destacamos el acuerdo que presentan los profesores entrevistados en relación a que los cursos que se están impartiendo ofrecen la formación matemática básica e imprescindible para la formación de todo científico. En relación a la visión global que los alumnos pueden tener del curso, la mayoría opinan que en el transcurso de la asignatura es muy difícil dar un sentido global a las matemáticas que se enseñan. Finalmente, y como era de esperar, la parte de la asignatura que "teóricamente" se destinaba a la introducción de la modelización matemática no representa un objetivo realista para los profesores. Éstos añaden incluso que con el paso de los años algunas partes esenciales de aplicación de la matemática han ido desapareciendo de los programas. Ni la estructura que se da a los contenidos, ni la forma de desarrollarlos en clase permite llevar a cabo un trabajo de construcción de modelos matemáticos en relación con el estudio de cuestiones problemáticas que surgen en ámbitos científicos cercanos a la especialidad escogida por los estudiantes. La *razón de ser* (matemática o extramatemática) de los contenidos de esta formación matemática básica que deben adquirir los estudiantes no forma parte del programa de estudio. Y el tiempo destinado tampoco permite ver aplicaciones de las nociones básicas que no se limiten a simples ilustraciones o ejemplificaciones puntuales de las diferentes técnicas asociadas a cada tipo reducido de problema.

A pesar de que implícitamente se asume que todos los contenidos en los que se estructura el currículum forman parte de una organización matemática más amplia, en ningún momento se plantea el problema matemático-didáctico de cómo conseguir articular los contenidos matemáticos, incluso para poderlos utilizar como instrumentos de modelización en el estudio de cuestiones biológicas, geológicas o químicas. Se acepta implícitamente que los contenidos matemáticos se articulan por ellos mismos (aunque se enseñen y aprendan como contenidos aislados) o se tiende a aceptar que esta articulación ya se producirá posteriormente y espontáneamente cuando los contenidos se apliquen a problemas extra-matemáticos (químicos, biológicos, geológicos, etc.). Nunca se pone en cuestión el dogma de la ideología "*aplicacionista*": primero aprender las matemáticas básicas y después, si es necesario y si hay tiempo, ya se aplicarán. Tampoco se cuestionan los contenidos ni la forma de organizar el estudio de la denominada *formación matemática básica*.

1.2. Primera reformulación del problema docente en torno a la enseñanza de las matemáticas en CCEE

A partir de los programas de las asignaturas de matemáticas para las CCEE y de la visión de estas asignaturas que muestran los profesores y estudiantes, podemos afirmar que, en líneas generales, la enseñanza universitaria de las matemáticas para las CCEE en España no integra de forma sistemática y normalizada el desarrollo explícito de la actividad de modelización. En otras palabras, las matemáticas no se enseñan a partir de la necesidad de modelizar situaciones o cuestiones que surgen en el ámbito de las CCEE sino que se presentan como unas herramientas básicas que el estudiante debe aprender a manejar sin saber de antemano qué tipos de problemas estas herramientas le permitirán resolver. En el mejor de los casos, podrá ver al final del proceso de estudio (si el tiempo lo permite), algunas "aplicaciones puntuales" de las nociones y técnicas aprendidas. No es extraño entonces que las matemáticas que los estudiantes deben aprender se les acaben apareciendo como muy formales y poco útiles, e incluso como "un obstáculo que deben superar" más que como un instrumento necesario para estudiar las demás disciplinas de su especialidad.

El problema de las dificultades de los estudiantes universitarios para "entrar en la actividad matemática" y superar así el habitual "desapego" de las mismas, es un fenómeno general que no afecta únicamente la enseñanza universitaria española. Así lo indican los estudios realizados por la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI), sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario recogidos en el volumen especial editado en 2001 titulado "*The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*". El investigador de Nueva Zelanda, Derek Holton, editor del estudio, junto con el investigador danés Mogens Niss destacan, en el documento de discusión que precedió la conferencia celebrada en Singapur en 1998 (ICMI – Bulletin No. 43, December 1997), la motivación de la realización de este estudio:

> A number of changes have taken place in recent years, which have profoundly affected the teaching of mathematics at university level. Five changes which are still having considerable influence are (i) the increase in the number of students who are now attending tertiary institutions; (ii) major pedagogical and curriculum changes that have place at pre-university level; (iii) the increasing differences between secondary and tertiary mathematics education regarding the purposes, goals, teaching approaches and methods; (iv) the rapid development of technology; and (v) demands on university to be publicly accountable. Of course, all these changes are general and have had their influence on other disciplines. However, because of its pivotal position in education generally, and its compulsory nature for many students, it could be argued that these changes have had a greater influence on mathematics than perhaps on any other discipline. […] As a result of the changing world scene, ICMI feels that there is a need to examine both the current and future states of the teaching and learning of mathematics at university level. (Niss, 1997, 1-3)

Por su parte, la didacta francesa y actual presidenta del ICMI, Michèle Artigue, enfatiza, en el artículo recogido en la publicación que surgió del citado estudio, la importancia de la investigación didáctica en la enseñanza universitaria para ayudar a entender mejor algunas de las dificultades y resistencias que impide un aprendizaje de las matemáticas mucho más *articulado* y *funcional*:

> For instance, for more than twenty years, research has brought out the fact that the learning of mathematics is not a continuous process, that it necessitates reconstruction,

> reorganization, even sometimes veritable breaks with earlier knowledge and modes of thought. [...] More and more, research shows that learning rests, in quite decisive way, on the flexibility of mathematical functioning via articulation. (Artigue, 2001, p. 3)

Llegados a este punto, vamos a proponer una primera reformulación del *problema docente* relativo a la enseñanza de las matemáticas en el primer curso de las licenciaturas de CCEE ligado a la problemática de la *pérdida de sentido y desarticulación* de las matemáticas escolares que constituye hoy una de las cuestiones más acuciantes en todos los niveles educativos.

PRIMERA REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DOCENTE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CCEE

¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en los primeros cursos universitarios de CCEE no se reduzcan a un *conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido*, sino que aparezcan de *manera funcional* como herramientas para *dar respuesta a cuestiones problemáticas* dentro de las CCEE?

Dentro de esta problemática, se podría suponer que las facultades de CCEE deberían formar un entorno institucional mucho más favorable que, por ejemplo, la enseñanza obligatoria (primaria y secundaria). En efecto, si las licenciaturas citadas incorporan en su currículum asignaturas de matemáticas, es porque éstas representan una herramienta de modelización imprescindible para la comprensión, utilización y desarrollo de las ciencias consideradas. Así lo encontramos descrito, en los programas universitarios, como uno de sus objetivos principales. Aunque también vemos como este objetivo se mantiene muchas veces como un lejano propósito, casi una aspiración utópica que raramente llega a realizarse en las aulas.

No creemos muy exagerado afirmar que la "ideología" imperante en la enseñanza de las matemáticas en las facultades de CCEE es la que podríamos denominar de "*aplicación de conocimientos preestablecidos*": lo primero, y más importante, es aprender a manipular las herramientas matemáticas y los modelos matemáticos (fijados de antemano) básicos y después ya se verá como aplicarlos en cada ámbito particular de trabajo. Los modelos matemáticos se "fabrican" a partir de las nociones, propiedades y teoremas de cada tema y, una vez construidos, de forma completamente independiente de cualquier sistema potencialmente modelizable, se buscan las posibles aplicaciones de estos modelos que, por tanto, nunca pueden ser modificados (ni, aún menos, originados y construidos) por las necesidades internas y las posibles evoluciones o ampliaciones de los sistemas que se pretende estudiar.

No se tiene en cuenta que, en muchas ocasiones, el modelo matemático que se quiere utilizar proviene de la modelización previa de sistemas similares al de las futuras "aplicaciones". Podemos decir que la actividad de modelización "escolar" (incluyendo la universitaria) se reduce a una *actividad rutinaria de utilización algorítmica de modelos* previamente construidos, sin ningún cuestionamiento relativo al origen, pertinencia y eficacia de los modelos considerados, en relación al tipo de cuestiones que se quieren responder. Se enseñan conocimientos previamente matematizados, sin atribuir ningún protagonismo a los procesos de modelización de los sistemas (matemáticos o extramatemáticos) que han generado estos conocimientos. Y se acaba mostrando los usos o aplicaciones de estos conocimientos al final, de forma independiente de las problemáticas que les dieron origen.

Una de las principales consecuencias de esta visión es la *desaparición de la problemática explícita de la modelización matemática* globalmente considerada y el empobrecimiento de la actividad de modelización matemática en toda la enseñanza universitaria española. En esta institución las matemáticas continúan organizándose en base a criterios que reproducen la lógica de la construcción axiomática de los conceptos sin tener en cuenta las cuestiones que motivan la utilización de los modelos y de las técnicas que estos conceptos permiten elaborar.

En realidad, la situación no diverge mucho de la formación universitaria francesa que, hace ya algunos años, Chevallard (1998) describía de manera un tanto radical en los términos siguientes:

> Dans une telle formation, le souci des applications pratiques et même le simple contact entre le mathématique et le non mathématique est à peu près totalement absente, quand ils ne sont pas regardés avec hauteur […]. L'inintérêt, muet ou proclamé, de la plupart des formations universitaires de mathématiques pour l'extra mathématique fait que las notions nécessaires pour penser mathématiquement le non mathématique n'y reçoivent pas même un début de mathématisation […]. (*Ibid*., pp. 3-4)

La situación que conocemos hoy en día es el resultado de un largo proceso que Chevallard (2001) califica de *purificación epistemológica* de las matemáticas, consecuencia de la ruptura de una tradición de muchos siglos, totalmente olvidada, de *mestizaje cultural y de hibridación epistemológica*. Esta tradición de apertura y de mestizaje recibió el apoyo de las llamadas *matemáticas mixtas*. A través de los años el término, ya perdido, de matemáticas mixtas fue reemplazado por el de *matemáticas aplicadas*:

> À partir de 1800 environ, "mixte" est progressivement remplacé par "appliqué". La huitième Edition (1853-1860) de L'Encyclopédie Britannique subdivise encore las mathématiques en pures et mixtes; mais la neuvième édition (1875-1889) distingue désormais "mathématiques pures" et "mathématiques appliqués". En 1908 encore, L'Oxford English Dictionary mentionne l'expression "mixed science", mais c'est pour en dire qu'elle est devenue obsolète, «except for mixed mathematics». (*Ibid*., p. 10)

Pensar en términos de matemáticas *mixtas* es, según este autor, sinónimo de buscar el contacto con el mundo, no tener miedo a mezclarse, sino de buscar este mestizaje. Tal como hemos visto en el apartado anterior, la enseñanza de las matemáticas en primeros cursos universitarios, lejos de mezclarse con las otras disciplinas ni, aún menos, con la "realidad" en la que estas disciplinas se proponen intervenir, se centra en la lógica de las matemáticas "puras" como consecuencia de una epistemología escolar que lleva a defenderse de posibles intrusiones. El tratamiento "monodisciplinar" de las cuestiones tiende a ocultar las necesidades que tienen muchas disciplinas del uso de conocimientos matemáticos y, en la mayoría de ocasiones, oculta las razones de ser de estos conocimientos. En este sentido, Chevallard (2001, p. 19) afirma que se está cayendo en una "infra-utilización indígena de las matemáticas".

1.3. El "proyecto Roskilde" como respuesta a la primera reformulación del problema docente de la enseñanza de las matemáticas en CCEE

La situación que hemos descrito anteriormente es una de las consecuencias que tiene el "encierro disciplinar" de las matemáticas sobre su enseñanza. Aunque se vean recientemente esfuerzos por revalorizar y dar mayor visibilidad a las matemáticas "mixtas" tan necesarias como extendidas hoy día en el mundo de la industria y del desarrollo científico, la universidad española sigue organizando su enseñanza sobre la lógica de las "matemáticas puras". Pero existen experiencias de reformas docentes que han intentado cambiar este estado. Uno de ellos lo constituye la universidad danesa de Roskilde (RUC-Roskilde Universitetscenter).

Tal como explica el investigador Morten Blomhøj de dicha universidad: "*At Roskilde University we have 35 years of experience with problem based student projects. In particular from the two-year introductory study programme in natural science, we have extensive experience with interdisciplinary student project setting up, analysing, applying and criticising mathematical models.* […]" (Blomhøj, 2007, p. 1)

En los siguientes apartados describiremos con más detalle en qué consiste esta propuesta docente que, en contraposición a la organización más tradicional de los primeros cursos de CCEE, persigue romper las barreras que la tradición ha delimitado entre las diversas disciplinas. Parte clave de su propuesta es la de basar sus estudios en la realización de proyectos, el denominado "*problem-oriented project work*", que permite a los estudiantes "poner en práctica" una variedad de conocimientos científicos, en particular, matemáticos, que se introducen a los alumnos en cursos introductorios de carácter más tradicional. La incorporación de cursos sobre "Modelización matemática para las ciencias", cuyo objetivo explícitamente formulado es el de "enseñar a los estudiantes cómo formular una descripción matemática de un hecho científico usando ejemplos de la diversas disciplinas científicas", resulta ser una propuesta clave en estos primeros cursos de CCEE para conseguir que las matemáticas pasen a enseñarse y a usarse como herramientas de modelización de los situaciones científicas que los estudiantes deberán estudiar. Esta propuesta trae consigo muchas ventajas, pero también algunos "inconvenientes" que Blomhøj (2007, p. 5) describe como sigue:

> […] The project work and the focus on mathematical modelling competency come with a price: less time for teaching important and fundamental disciplines. However, in the programme mathematical modelling together with experimentation are seen as the two main constituents in a general introductory study programme in natural sciences – and for good reasons we think.

En la misma dirección Niss (2001) hace un balance de lo que ha significado la reforma propuesta por su universidad de la cual él ha sido uno de los principales promotores desde sus inicios. Aquí, en concreto, se refiere al papel que las matemáticas han tomado dentro de los proyectos a diferencia del papel que más tradicionalmente se les asignaba:

> […] Such projects work cannot stand alone, however. Only seldom does it seem to be an appropriate means for the acquisition of usual, systematically organised subject matter. For that purpose, classical courses organised and taught by academic teachers remain relevant – which certainly does not imply that the way such that courses are taught is of minor importance [...]. Mathematics programmes at RUC are designed to grasp the essence of mathematics by means of a pair of pinchers, with one jaw consisting of problem-oriented studies, cast in the form of project work, while the other consists of the study of systematically organised subject matter, typically through participation in courses. As was said before, this way of structuring and organising the programme has costs […]. However, any mathematics programme can contain only a small selection of branches and topics of contemporary mathematics. So, a selection has to be made anyway, and what matters at the end of the day is not so much how much food is being served but rather the selection and quality of the food, and how much is digested and how well. (*Ibid.*, p. 165).

Veamos sin embargo, que la nueva organización docente no renuncia al estudio de contenidos "sistemáticamente" organizados que está en la base de la enseñanza más tradicional.

1.3.1. El nuevo modelo docente propuesto por la universidad de Roskilde

El modelo docente universitario que propone la universidad danesa Roskilde supone un caso excepcional en comparación a lo que podemos considerar como modelos docentes tradicionales que encontramos de forma bastante generalizada en las facultades de CCEE de las universidades españolas y, tal como describen muchos autores (Blomhøj & Kjeldsen (2006 y 2009), Niss[10] (2001), Legge (1997), Mallow (2001), Vithal *et al.* (1995), entre otros), la situación es muy parecida en muchas de las universidades europeas.

La universidad de Roskilde fue fundada en 1972 con el propósito de proponer una alternativa a la enseñanza universitaria tradicional danesa. Pese a tener que superar diversas dificultades políticas como reacción a la reforma educativa que se proponía, diez años después la situación dio un giro y, hoy en día, no hay duda que la universidad de Roskilde (RUC) es una universidad muy bien establecida que usa métodos

[10] Mogens Niss fue uno de los miembros del equipo fundador de la universidad Roskilde. Actualmente, es profesor de matemáticas y de educación matemática en esta universidad en el departamento de "Science, Systems and Models".

radicalmente diferentes a la enseñanza tradicional y que permite que los alumnos desarrollen un tipo de actividad difícil de ser implementada en otros modelos docentes.

Desde sus inicios, cada una de las facultades de ciencias, humanidades y ciencias sociales diseñaron los programas básicos de estudio de carácter interdisciplinar de 2 años de duración (2-year introductory study programmes) cuya superación permite a los estudiantes cursar entonces un curso de especialización[11] (3r año de Bachelor). El diseño de los programas fue, desde sus inicios hasta la actualidad, realizado en base a cuatro principios pedagógicos básicos: interdisciplinariedad, orientado hacia el estudio de problemas (*problem-oriented project*), ejemplaridad (*exemplarity*) y organizado en proyectos en grupos (*participant directed*) (Illeris, 1999, p. 1-3).

Más detalladamente, Legge (1997, p. 5) nos describe que el estudio de problemas (*problem-oriented project*) se sitúa como eje principal para guiar a los estudiantes y docentes en el estudio de las correspondientes disciplinas. El hecho de dar el papel protagonista al estudio de problemas y a la búsqueda de respuestas a cuestiones más específicamente formuladas, se sitúa en contraposición directa al modelo docente tradicional en el que las asignaturas se organizan en torno a los contenidos conceptuales y los ejemplos o aplicaciones se enseñan como meras ilustraciones de lo mostrado previamente ("subject-oriented work"). En esta nueva orientación, los estudiantes desarrollan su trabajo en grupos bajo la guía de un profesor que se les asigna desde el inicio del proyecto. Los miembros de los grupos son los responsables de tomar decisiones colectivamente y de asumir las responsabilidades necesarias para el desarrollo del proyecto (*participant directed*). El papel del profesor-tutor se aleja ahora del papel de líder o experto de la materia que tradicionalmente se le otorga. El principio de "ejemplaridad" (*exemplarity*) significa que se puede aprender una materia a través del estudio profundo de algunos casos ejemplares. Durante el desarrollo de un proyecto,

[11] En la universidad RUC, todos los estudios empiezan con dos cursos de "Estudios Básicos" (Basic Studies) en alguna de las áreas: Ciencias, Humanidades o Ciencias Sociales. Por ellos solos no proporcionan ningún título así que al inicio del tercer curso los estudiantes eligen su área o áreas de especialización (Specialised degree programs) de diferente duración aunque actúan de forma complementaria: Bachelor's degree (3 años en total consistiendo en los 2 años de estudios básicos más la especialización que requiere cursar una asignatura anual o bien dos asignaturas de medio año), Master's degree (5 años de duración total, 2 años más después de Bachelor), Ph.D. (8 años de duración, 3 años más de investigación después del título de master).

como ocurre con el estudio de problemas reales, se tiende fácilmente a sobrepasar las fronteras establecidas entre las diferentes disciplinas. Es por esto que el concepto habitual de *interdisciplinariedad* se convierte en una realidad en la realización de estos proyectos y, en definitiva, para el modelo docente de la universidad.

Durante cada uno de los cuatro semestres de los que constan los dos cursos de estudios introductorios, los estudiantes deben completar un proyecto por semestre (15 ECTS) al mismo tiempo que deben cursar dos cursos por semestre (7.5 ECTS cada uno) de un listado que la universidad publica antes de iniciarse el curso académico. Los programas se diseñan de forma que los estudiantes destinen el 50% de su dedicación a los cursos ofrecidos y el restante 50% a trabajar en el proyecto que deben finalizar semestralmente.

Para facilitar el trabajo en los proyectos, es interesante resaltar que la universidad organiza a los estudiantes en casas que están equipadas con su propia secretaria, una sala de reuniones para cada grupo de trabajo, además de cocina, baños y duchas. Los grupos tienen acceso a aulas equipadas con ordenadores y pizarras, a la sala de actividades plenarias para los seminarios, presentación de proyectos y el resto de actividades sociales. Para supervisar los proyectos y organizar las diversas actividades académicas, se destina un equipo de 10 a 12 profesores a cada una de las casas. Al inicio del semestre, se forman los grupos de trabajo de entre 4 a 7 estudiantes a los que se les asigna un profesor tutor del proyecto. La evaluación final se hará en base a la memoria final del proyecto completada con pruebas orales individuales.

1.3.2. La propuesta educativa de la universidad de Roskilde para las facultades de Ciencias Experimentales

Para describir más concretamente el caso que aquí nos interesa, el de los estudios universitarios de CCEE, describiremos brevemente los programas introductorios de los estudios de *ciencias naturales* (*Nat-Bas programmes*) que propone esta universidad. Veamos a continuación la relación de asignaturas que se ofrece para el curso 2008-2009. Señalemos que, de las 8 asignaturas que cada estudiante debe escoger, dos de ellas deben ser necesariamente de matemáticas o de física:

Courses at the Basic Studies: The courses aim at giving the students fundamental knowledge of theories and methods in Natural Sciences in a systematic way. The student must choose eight out of the total number of courses available in English. The timetabled hours of courses in the Basic Programme are 3 hours twice a week for 13 weeks. Students will probably have to prepare for 3-6 hours for each lesson. Courses are taught in classes of 20-40 students. A typical lesson will be a mixture of lectures, problem solving work and discussions. Some courses include laboratory work or fieldwork.

Biology A - Cell Biology The course includes structure and function of animal and plant cells with a general view in cell biology, cellular respiration, classic and molecular genetics, evolution and cell communication.

Biology B - Environmental biology and ecology The course covers ecological and eco-toxicological processes and mechanisms at individual, population, community and ecosystem levels. The students are further introduced to ecological methods related to fieldwork, experimental methods and analysis of ecological data.

Chemistry A - General chemistry The main emphasis of the course is on structure and properties of compounds, stochiometry, chemical equilibrium, kinetics, thermodynamics, electrochemistry and chemical bonds.

Chemistry B - Organic chemistry The purpose of the course is to introduce the students to fundamental organic chemistry, modern concepts of structure of organic compounds, nomenclature and the significance of organic chemistry seen from a biological point of view. The course consists of a theoretical part and a laboratory part.

Computer Science A Introduction to programming. Control statements, variables and data types, data structure and objects.

Computer Science C Fundamental algorithms and data structures including sorting, searching, stacks, queues and hash tables. Design, analysis, verification and implementation (using Java) of further data structures and algorithms.

Environmental Studies This course presents interdisciplinary and problem-oriented approaches to investigating environmental issues. The course introduces and applies theories and methods from the natural sciences including field methods, experimental exercises and practice. Methods of group work and project planning are introduced as well.

Geography A Environmental geography. Course subjects include earth science: climate, soil, water and the impact of human activities on geological structures and cycles. Theories and methods applied in studies of landscape and the environmental impact of land use will be presented. The course includes field studies, excursions and experimental work.

Mathematics A - Intermediate calculus. Course subjects include the differentiation and integration of functions of several variables, complex numbers, and an introduction to ordinary and partial differential equations.

Mathematics B - Linear algebra with applications Linear algebra, finite-dimensional vector spaces, matrices and eigenvectors. Application to linear ordinary differential equations.

Mathematics Base I - Mathematical modelling in the Sciences This course is designed specifically for international students. The mathematical prerequisites kept at a minimum, the course focuses on teaching the student how to formulate a mathematical description of a phenomenon in science using examples from physics, chemistry, biology and medicine. Analysis of the models by analytical methods and computer simulation. The course is primarily taught through 3-4 large examples.

Mathematics Base II - Mathematical modelling continued Continuation of mathematical modelling for students who need more time to work with mathematical concepts and their applications.

Physics D - Physics for non-majors. Classical mechanics and thermodynamics. The course includes two major exercises: a computer simulation concerning classical mechanics and a laboratory mini project.

Website: http://www.ruc.dk/ruc_en/studying/list/bsc/nib/?print=1

La guía de estudios facilitada por esta universidad (The Basic Studies in Natural Sciences – Study Guide 2008 – 2009) explica que, aunque la selección de cursos es libre, se recomienda a los estudiantes cursar en el primer semestre los cursos de "Mathematical Modelling 1" y el de "Environmental Studies". La universidad supone, tal como explica la guía de estudios, que estos cursos van a proporcionar herramientas para que los estudiantes trabajen de forma más adecuada con sus proyectos.

La misma guía expone las características metodológicas y temáticas generales que deben seguir los proyectos que cada grupo de trabajo debe realizar por semestre: "Aplicaciones de la ciencias a la tecnología y a la sociedad" (semestre1); "Modelos, teorías y experimentos en ciencias" (semestre 2); "Reflexiones en ciencias y la difusión del conocimiento científico en el campo de las ciencias" (semestre 3) y temática libre (semestre 4); más concretamente:

Project work in Basic Studies

The project work gives students an opportunity to work with a problem of their own choice within any field of the natural sciences. Students learn to define science projects, gather information relevant to a problem, consider and evaluate different ways of resolving problems, and finally reach the solution to the specific problem chosen - and to communicate the results in both written and oral form.

Project-organised work contributes to giving students competencies very similar to those required in research jobs and problem solving assignments both in the private and the public sector. The philosophy governing all programmes at Roskilde University is that "learning by doing" is the most effective way to educate and prepare for the rapidly changing work conditions in modern society. Many of the most important discoveries in modern times have been the result of interdisciplinary studies of problems, and the project work carried out at Roskilde University benefits greatly from project collaboration between students with different backgrounds and interests.

Students must complete four projects during their first two years in the Natural Science Basic Programme. A group of students, typically comprising 4-6 students, will select a problem to work with, and an advisor will be assigned to each group. The advisor assists the group in its formulation of research questions and helps the group at every step towards finalisation of the project. The students hand in a report of the project work. The examination is based on the common report, but each student is evaluated individually with individual marks.

First-semester projects must illustrate how science is used to solve problems in technology or society. They should illustrate the important role science plays in solving problems in modern-day society.

Projects prepared in the *second semester* must illustrate how information is obtained and discoveries made within the scientific community and on the basis of scientific working traditions.

Projects in the *third semester* should reflect both the structure and cultural aspects of science or problems related to the teaching of natural sciences.

The theme or topic for the project work in the *fourth semester* can be chosen freely by the students, according to their study interests.

In connection with at least one of the four projects, students must collect and analyse their own data material. Most students choose to do so either through laboratory experiments or by field studies. The project-organised study form gives students an exceptional opportunity to work with and obtain hands-on experience of matters that interest them. In addition students are able to use the theoretical concepts covered in courses and learn to work as members of a group or team.

http://www.ruc.dk/natbas_en/

Como explican en su trabajo Blomhøj & Kjeldsen (2009, p. 5), en el desarrollo de un proyecto los estudiantes son los responsables de escoger y formular los problemas, decidir la metodología más pertinente a utilizar, buscar y estudiar las referencias más relevantes de acuerdo con su problemática escogida, etc.[12] Todo este trabajo se realiza bajo la supervisión de los tutores cuyas principales tareas son las de ayudar a su grupo con el estudio de la problemática escogida, ofrecerles un seguimiento continuo del estudio y problematizar los puntos clave durante el desarrollo del proyecto, papel que queda lejos del de liderar el grupo y controlar el estudio de la problemática. "The main task of supervisors is not to control the project work, but to challenge the students. It is important that the students feel they have the true responsibility for their own work. But on the other hand, no group or individual should be left totally on its/his/her own." (Beyer, 1993, p. 10).

Es interesante examinar con un poco más de detalle alguno de los proyectos realizados. Por ejemplo, en Blomhøj & Kjeldsen (2009, pp. 6 - 13) encontramos descritos seis casos de proyectos en los que la modelización matemática juega un papel especial: en el bloque 1 (primer semestre): "Presencia de flúor en el agua de grifo" y "Tú, yo y las clamidias"; en el bloque 2 (segundo semestre): "La implantación de energía renovable en el mercado eléctrico del oeste de Dinamarca" y "La gripe aviar"; en el bloque 3 (tercer semestre): "La teoría de la evolución *versus* el diseño inteligente: ¿qué es una teoría científica?" y "La influencia de las leyes de Hubble en la constante cosmológica". Nos detendremos brevemente en el segundo ("Tú, yo y las clamidias") que los autores mencionados destacan como un buen ejemplo de la estrecha relación que hay entre la matematización de los sistemas y el conocimiento científico que se puede obtener de dicho proceso. Los autores lo presentan en los términos siguientes:

> **Project: You, me and Chlamydia**
>
> A newly installed health care campaign against the sexually transmitted disease caused by Chlamydia was the theme of another first semester project made by a group of six students (Barfod *et al*. 2005). The campaign focused on young people between 16 and 25, building on the fact that this part of the population in average has a much higher sexual contact rate (number of new partners per year) than the rest of the population. Screening by home testing was the main strategy in the campaign. The students themselves were

[12] Para más detalles sobre las fases que sigue el desarrollo de un proyecto ver Illeris (1999) y Mallow (2001), dos investigadores americanos interesados por el proyecto docente que propone esta universidad.

in the target group of the campaign. They learned about the campaign when receiving, by ordinary mail information material from the health authorities, and a kit for home testing for Chlamydia infection by means of a urine test.

The group took the initiative to discuss with their supervisor the possibility of making a project, investigating the epidemic spread of Chlamydia and evaluating the campaign strategy of home testing. Since it was not possible to conduct an empirical investigation of the spread of Chlamydia within the frame of a student project, the only possible method for evaluating different strategies against Chlamydia was to build and analyse a mathematical model of the dynamical spread of the disease. Even though the students did not have previous experiences with setting up mathematical models themselves, they were very enthusiastic about using biology and mathematics to analyse a health care phenomena which was relevant for young people. This led to the formulation of the following questions that guided the project work:

What is the best strategy for screening against Chlamydia infection? And What effects can be expected on the prevalence of Chlamydia infections?

The group studied the biology behind Chlamydia infections. Chlamydia is a mycoplasma, which can be transmitted only by close contact between mucous membranes and therefore is only sexually transmitted. It is virus-like, in the sense that it infects human cells and needs the apparatus of the host cell to replicate and spread. […] Based on these biological characteristics, the group built a simple two-compartment model describing the flow between the susceptible and the infectious/infected. This model can be represented by two coupled non-linear differential equations. Using Danish data for the contact rate and data from the literature for the recovery rate (1/(the average infectious period)), the group applied the model to the population of 16–25 year olds in Denmark and yielded the result that the prevalence of Chlamydia decreases towards 0 even with unrealistic high contact rates (p. 18). However, the statistics show that the prevalence has been almost constant at 5% over the last 10 years. So the model needed to be developed further in order to explain this phenomenon. Following the idea from a well-known model for the spread of gonorrhoea, introduced to the students by the supervisor, the students divided the population of the model into two groups with very different contact rates; a small group of people with a very high frequency of unprotected sexual acts (approximate ten times the average contact rate) and a larger group with the average contact rate. Such approach can be supported by what is known about young peoples' sexual behaviour from interview investigations.

Using the constancy of the two population groups, this diagram gives rise to a system of two coupled, non-linear differential equations, which cannot be solved analytically. Three of the students had previously learned about first order differential equations and numerical methods. However, none of the students had experiences with systems of differential equations. Therefore, it was necessary for the supervisor to give a short course on systems of differential equations, emphasising numerical analysis using the MatLab software, which was already familiar to some of the students from a course on mathematical modelling.

> The students experimented with the model and showed that the model could reproduce the observed nearly constant prevalence of 5% with realistic parameter values of the rates of efficient contacts in the two groups and the recovery rate. So the model could in fact explain that the prevalence of Chlamydia infections was stabilised at a high level in the Danish population before the campaign.
>
> Hereafter, the students used their model to investigate the effects for three different health care scenarios for reducing Chlamydia infections. The scenarios were composed by different screening methods already installed or suggested by the authorities; namely screening by symptoms, screening of the target group in connection with visiting the doctor for other reasons, and screening by home testing. The group represented the scenarios in the model by means of different recovery rates, estimated from average infections periods found in the literature and the practical specifications of the screening methods.
>
> The scenario including all three screening methods was, of course, shown to give the largest reduction in the prevalence of Chlamydia infections. The model results indicated that it would be possibly to reduce the prevalence from 5% to 2.5% during a period of 4–5 years. Moreover, the model supported a campaign strategy that focus on the small group with a very high contact rate instead of the suggested general campaign targeting all people in the age group, 16–25 years. However, the students also indicated that there might be some practical and ethical problems with implementing differentiated strategies for different groups of people defined on the basis of their frequency of unprotected sexual relationship.
>
> Blomhøj & Kjeldsen (2009, pp. 6-8)
>
> http://www.springerlink.com/content/b288750621kv8180/fulltext.html

Señalemos para acabar que el bachelor “Nat-Bas” que acabamos de examinar con más detalle no parece ser el caso general de los bachelors de RUC. Los autores citados afirman que: “*The Nat-Bas programme is rather unique in this broad perspective on the natural sciences and in its consequent use of student-guided, problem-oriented project work.*” (Blomhøj & Kjeldsen, 2009). En su trabajo aportan alguna información sobre las resistencias que este tipo de organización de la enseñanza provoca en los profesores. Destacan que, por ejemplo, la interdisciplinariedad de los proyectos y el hecho que el supervisor no se sienta competente en las temáticas de algunos de los proyectos que debe supervisar constituye un obstáculo o “dilema” (según la terminología de los autores) para un desarrollo más generalizado de la experiencia:

> In general, project work as conducted in the Nat-Bas programme is heavily depending on a group of committed and flexible supervisors. This is probably one of the main reasons why in traditional science programmes the reform implemented project work often causes problems.

No se puede negar que la propuesta de la universidad de Roskilde resulta sumamente interesante y prometedora. De todos modos, no debemos ignorar que la generalización a otros centros de enseñanza de una innovación docente de este tipo debe superar un gran número de restricciones institucionales cuyo análisis está poco presente en los numerosos trabajos realizados sobre este proyecto docente. Volveremos más adelante (cap. 2 y 5) sobre el tema de las *condiciones institucionales* necesarias para que la enseñanza de la modelización matemática pueda existir de forma generalizada en la universidad.

1.4. Segunda reformulación del problema docente en torno a la enseñanza universitaria de las matemáticas en CCEE

Como acabamos de ver, el proyecto de la universidad de Roskilde aporta una respuesta a lo que hemos descrito y designado como la primera reformulación del problema docente (Cf. § 1.2) que hemos formulado en los términos siguientes:

PRIMERA REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DOCENTE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CCEE

¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en los primeros cursos universitarios de CCEE no se reduzcan a un *conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido*, sino que aparezcan de *manera funcional* como herramientas para *dar respuesta a cuestiones problemáticas* dentro de las CCEE?

La propuesta docente de la universidad de Roskilde (RUC) que, de acuerdo con lo que acabamos de examinar, apuesta por basar su modelo docente en lo que denominan "problem-oriented project work" propone una primera respuesta al problema docente que hemos reformulado. Según Niss (2001), la apuesta de su universidad por el modelo docente descrito ayuda a que las matemáticas recuperen su papel y desarrollen las funciones que les son propias para la ciencia, sociedad y cultura, dimensiones a las cuales raramente se es accesible en un modelo docente tradicional. En sus propias palabras:

> Problem-oriented project work has proved to be an excellent strategic tool to help students create a multi-faced and balanced perception of mathematics and its roles and functions in nature, society and culture. The different types of projects students carry out provide them

> with first hand experiences of different representative dimensions of and perspectives on mathematics which can hardly be accessed through traditional modes of teaching and study […]. (*Ibid*, p. 165)

Si nos referimos al caso de los estudios de CCEE, la propuesta docente de la RUC asume que para ayudar al buen desarrollo de los proyectos, éstos deben complementarse con cursos de carácter más tradicional como pueden ser los de álgebra lineal, de cálculo, etc. complementados siempre con las asignaturas de "Modelización matemática para las ciencias" cuyo objetivo explícitamente formulado es el de "enseñar a los estudiantes cómo formular una descripción matemática de un hecho científico usando ejemplos de la física, química, biología y medicina". Es aquí donde aparece un punto importante de inflexión que debemos subrayar: se pasa a asumir que la modelización matemática debe cambiar su papel y pasar a ser enseñada y usada como una herramienta explícita de estudio de hechos científicos.

Podemos proponer así una *segunda reformulación del problema docente* en torno a la enseñanza de las matemáticas en CCEE en unos términos que sitúan la problemática en el ámbito de la enseñanza de la modelización matemática. Esta reformulación se fundamenta en la hipótesis, sugerida en el proyecto de Roskilde, según la cual el uso sistemático de la herramienta de modelización para el estudio de problemas científicos aproximaría a la solución del *problema de la desarticulación de la matemática enseñada* y, sobre todo, permitiría mostrar la funcionalidad de ésta para responder a situaciones problemáticas que aparecen en diferentes ámbitos científicos.

SEGUNDA REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DOCENTE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CCEE

En los primeros cursos universitarios de CCEE, y una vez enseñados los contenidos matemáticos básicos, ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una *herramienta de modelización de situaciones* o *hechos científicos*, de tal forma que la enseñanza no se organice en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar?

Esta es precisamente una hipótesis similar a la que se formuló entre los años 80 y 90 dentro de la evolución del movimiento a favor de la *enseñanza de la resolución de problemas* que nació guiándose fundamentalmente de los trabajos de George Pólya y de las investigaciones de Allan Schoenfeld. Como se muestra en el trabajo de Bosch, Gascón & Rodríguez (2004), el movimiento introdujo, a nivel mundial, la resolución de problemas como un nuevo objetivo de enseñanza de las matemáticas. Este movimiento, cuyo máximo estandarte se sitúa en el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los EEUU, empezó recomendando que la resolución de problemas debía incorporarse como uno de los objetivos principales de la enseñanza matemática ("Agenda for Action" (1980)), hasta llegar a los *Principles and Standards for School Mathematics* en el 2000 donde queda ya formulada la hipótesis a la que nos referimos sobre el papel de la resolución de problemas como *eje integrador y articulador de las matemáticas*:

> Solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so […]. Problem solving is an integral part of all mathematics learning, and so it should not be an isolated part of the mathematics program. Problem solving in mathematics should involve all the five content areas described in these Standards (NCTM, 2000, p. 51)

Pero después de realizar un análisis de los textos oficiales españoles posteriores de la década de los 90, los autores citados concluyen que la resolución de problemas juega un papel paradójico en los curriculums y en las aulas. Por un lado, en los textos oficiales se le atribuye un papel *integrador* y *articulador* del curriculum, mientras que su tratamiento didáctico en el aula aparece totalmente *aislado* del resto de actividades matemáticas, hasta el punto que acaba convirtiéndose en un nuevo contenido de enseñanza en lugar de aparecer como el contenido común. De aquí el fracaso de este movimiento no sólo a nivel español sino a nivel mundial. Como indican estos mismos autores:

> Nuestra hipótesis es que la formulación de la resolución de problemas como objetivo general (a nivel de la sociedad, la escuela o las matemáticas) no puede concretarse en los niveles inferiores de determinación (áreas, sectores o temas concretos) sin aparecer como "desvirtuado" por desprovisto de su carácter general. Si enseñar a resolver problemas, a secas, es distinto de enseñar a resolver problemas de este o aquél tipo, o de este o aquél sector de las matemáticas, entonces el mandato curricular no puede concretarse en ningún bloque de contenido concreto. De ahí su aparición como "bloque alternativo", ya sea al lado de las demás áreas, ya sea como un nuevo tipo de bloque, "bloque de proceso" en oposición a "bloque de contenido" (ejemplo de los estándares estadounidenses). En este último caso, la necesidad de incorporar una dinámica perdida debido a la ausencia de organizaciones matemáticas intermedias requiere la incorporación de un nuevo proceso,

> las "conexiones", como nuevo instrumento de articulación curricular. (Bosch, Gascón & Rodríguez, 2004, p. 128)

El paralelismo entre la enseñanza de la resolución de problemas y la enseñanza de la modelización matemática, de cumplirse, podría conducir también en este caso a un deslizamiento semejante: del objetivo de enseñar la modelización matemática como herramienta de articulación de contenidos podría pasarse a su incorporación en el currículum como un contenido más, separado de los demás contenidos y, por lo tanto, perdiendo su supuesta capacidad articuladora. Veremos ahora que el tratamiento de la modelización matemática en el área de investigación en educación matemática refleja bastante esta situación.

2. LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2.1. El impulso reciente de la enseñanza de la modelización matemática

Durante muchos años, la enseñanza de la "*modelización y aplicaciones*" se ha limitado a la aplicación de conocimientos matemáticos previamente introducidos a determinadas situaciones más o menos "reales" con el objetivo de servir de motivación a los estudiantes. Como ya hemos indicado, este uso de la modelización sigue siendo aún el más extendido en los sistemas de enseñanza universitarios.

En el trabajo de tesis de Javier García (2005) se pone de manifiesto que durante los últimos 25 o 30 años ha aparecido un intento, por parte de la comunidad de investigadores en Educación Matemática y también de las sucesivas reformas educativas en los diversos niveles, de recuperar las matemáticas aplicadas o las relaciones entre las matemáticas y el mundo real. Parece imponerse así un acuerdo social, reforzado por programas internacionales como PISA (Programme for International Student Assessment) a nivel preuniversitario y los desarrollos del pacto de Bolonia para la enseñanza superior, sobre la conveniencia de introducir en todos los niveles de enseñanza aspectos relacionados con las aplicaciones de las matemáticas y con la modelización.

El interés de la comunidad investigadora en Educación Matemática por este dominio, al cual es usual referirse como "Modelización y aplicaciones", ha ido en aumento tal como se describe en diversos trabajos (ver, por ejemplo, Burkhardt, 2006). El movimiento parece iniciarse con el estudio de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI), celebrada a Kuwait el 1986, estudio que promovió el impulso mundial para la inclusión en los currículum de matemáticas de contenidos o temas relacionados con las *aplicaciones de las matemáticas*, tanto en relación a otras disciplinas como sus aplicaciones a la vida cotidiana. Lo reforzaron grupos de investigación internacionales como el ICTMA *(The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications)* cuyo primer congreso bienal se celebró en 1982 (www.ictma.net) y, más recientemente, el ICMI Study 10 coordinado por investigadores de reconocido prestigio como Mogens Niss, Werner Blum, Peter

Galbraith y Hans-Wolfang Henn, en el que han participado un número muy importante de investigadores (Blum *et al.*, 2007). Desde 2005, la sociedad europea de investigación en educación matemática ERME creó un grupo específico sobre el tema liderado por la investigadora alemana Gabriele Kaiser que, a su vez, es la editora de dos números especiales de la revista internacional ZDM dedicados exclusivamente a este tema (Kaiser *et al*., 2006a y 2006b).

Debemos destacar con especial atención los trabajos del investigador danés Mogens Niss que también es el precursor de introducir la noción de *competencia matemática* como herramienta de diseño y análisis de los actuales curriculums en todos los niveles educativos, rompiendo así con la descripción "conceptualista" tradicional. En Niss (1999), el autor introducía el término de competencia (o de ser competente) en el dominio particular de las matemáticas de la siguiente manera:

> […] *Mathematical competence* then means the ability to understand, judge, do, and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical context and situations in which mathematics plays or could play a role. Necessary, but certainly not sufficient, prerequisites for mathematical competence are lots of factual knowledge and technical skills, in the same way as vocabulary, orthography, and grammar are necessary but not sufficient prerequisites for literacy. (*Ibid*., p.7)

Él mismo lideró posteriormente el proyecto danés KOM: *Competences and the Learning of Mathematics* (Niss, 2003), proyecto iniciado por el ministerio de educación danés con el objetivo de impulsar una reforma en la enseñanza de la educación matemática desde primaria hasta la universidad. Sirvió para identificar e introducir un total de ocho competencias para describir la actividad matemática, entre las cuales se incluye la *competencia de la modelización* como una de las competencias que los estudiantes deben desarrollar. Más concretamente:

Modelizar matemáticamente (analizando y construyendo modelos), que incluye: ▪ Analizar las bases y propiedades de los modelos existentes, incluyendo la evaluación de su dominio de validez; ▪ Descifrar modelos existentes, es decir, traducir e interpretar los modelos elementales en términos de la "realidad moldeada"; Realizar modelización en un contexto dado que incluya:

- Estructurar el campo de estudio o la situación que se quiere moldear,
- Matematizar los diversos componentes de la realidad, traduciendo estos componentes en estructuras matemáticas,
- Trabajar con y en los modelos,
- Validar el modelo (internamente y externamente),
- Analizar y criticar las posibles limitaciones de los modelos (en ellos mismos o en comparación a posibles alternativas),
- Comunicar hechos relativos al modelo y a sus resultados,
- Controlar y dirigir el proceso global de modelización.

Más allá de la reforma en los diferentes niveles educativos daneses que resultó de este proyecto, cabe destacar el impacto e influencia que ha tenido, y sigue teniendo, en las reformas a diversos niveles educativos europeos que es consecuencia, en parte, de haber sido escogido como marco teórico del Programa Internacional de Evaluación de Alumnos PISA (OECD, 2003a y 2003b). Por no hablar del diseño de las asignaturas de los nuevos grados en las universidades españolas.

Al asumir este punto de vista, ampliamente aceptado actualmente por la sociedad y por la comunidad investigadora en educación matemática, el ámbito de la "modelización y aplicaciones" pasa a ser considerado un instrumento privilegiado para conseguir los objetivos que la enseñanza de las matemáticas se propone. En esta misma dirección y, en cierto sentido, fortaleciendo la hipótesis que ya hemos introducido en el anterior apartado sobre el papel privilegiado que tiene la modelización para hacer frente a la problemática de la desarticulación de la matemática enseñada, lo apuntan esta vez Muller & Burkhardt (2007):

> […] the multiple connections that are essential to robust understanding of mathematics do not arise naturally – they require learning activities specifically designed to develop them.
>
> Mathematical models of authentic situations do this well. They reveal more readily than do artificial textbook problems that, to be effective, mathematics must be approached holistically rather than as an accumulation of bits and pieces of de-contextualized knowledge. […] In "doing mathematics" the whole is much more than the sum of the parts. (*Ibid*., pp. 268 - 269)

En España, el interés por la enseñanza de la modelización es mucho más reciente y se ha sentido desde sus inicios en los diferentes niveles educativos y, en especial, en el nivel universitario. Como muestra de este interés, la revista de didáctica de las matemáticas UNO publicó en 2002 un número especial sobre "*Modelización y matemáticas*", donde encontramos textos representativos en la dirección mencionada, por ejemplo, el trabajo de Gómez & Fortuny (2002) contribuyendo al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. Otra muestra de dicho interés lo constituye la presentación de la primera revista electrónica *"Modelling in Science Education and Learning"* que publicó su primer volumen en 2008 cuyo objetivo es la difusión de trabajos relacionados con el uso de modelos matemáticos en la enseñanza de las ciencias[13].

2.2. La "modelización como contenido" versus la "modelización como instrumento"

Con el objetivo de aportar una visión panorámica de las principales investigaciones actuales en el ámbito de la "Modelización y aplicaciones" en Educación Matemática, hemos consultado un conjunto de publicaciones recientes sobre el tema: los números especiales 38(2) y 38(3) de la revista *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* editados por Gabriele Kaiser, Morten Blomhøj y Bharath Sriraman; las actas del grupo de trabajo "Modelling and Applications" de los dos últimos congresos europeos CERME - 4 y CERME - 5 (ermeweb.free.fr); las presentaciones del último congreso del ICTMA 13 (http://site.educ.indiana.edu/ictma-13/); y la publicación del ICMI Study 14 (Blum *et al.*, 2007).

En el documento de discusión preliminar que servirá después como texto introductorio al ICMI Study 14 publicado en 2007, Blum (2002) presentan lo que ellos consideran como el "*reality espace*" del campo de la "Modelización matemáticas y aplicaciones" estructurado según una organización bidimensional. A partir de esta presentación, se pueden distinguir (siguiendo a García, 2005) dos grandes líneas de investigación que difieren por la formulación de la problemática que tratan. Por un lado, encontramos aquellas que se centran en la enseñanza y aprendizaje de la modelización y en la resolución de problemas aplicados, cuyo objetivo general acaba siendo la

[13] Ver http://msel.impa.upv.es/cmsms/.

enseñanza explícita de los procesos de modelización matemática como un contenido más de la materia. Y, por otro lado, encontramos la segunda gran línea de investigación que se centra en utilizar la modelización matemática como una técnica didáctica, es decir, como una *herramienta de ayuda al estudio* (enseñanza y aprendizaje) *de las matemáticas*. Se abren aquí dos caras diferentes del papel que puede desarrollar la modelización matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: entender la *modelización matemática como un contenido* más y, considerar su enseñanza explícita como uno de los objetivos; o bien, entender la *modelización matemática como una herramienta de enseñanza* y usarla implícitamente en los procesos de estudio de las matemáticas. Andresen (2007, p. 2042) presenta esta distinción en los términos siguientes:

> A distinction is made between: 1) modelling at functional level, which means expressive modelling, aiming at problem solving and involving certain applications of modelling concepts, methods, etc. […] and 2) modelling at the level of concept formation, following the ideas of Realistic Mathematics Education (RME) like it is described in Gravemeijer *et al.* (2000).

En el mismo sentido, el investigador sudafricano Cyril Julie se referirá a ello como una concepción de la "modelización como contenido" frente a la "modelización como vehículo" (en Barbosa 2006, p. 293).

La modelización matemática como contenido a enseñar

La cuestión fundamental que abordan las investigaciones en este ámbito se centra en el problema de *la enseñanza y el aprendizaje de la modelización o resolución de problemas aplicados.* Dentro de esta problemática, aparecen distintos problemas de investigación con una orientación más o menos cognitiva (cuestiones centradas en las dificultades o los procesos de aprendizaje de los estudiantes), epistemológica (análisis y descripción del proceso general de modelización, caracterización de los problemas o situaciones por modelizar, estudio de las matemáticas activadas en el ámbito laboral, etc.) o didáctica (tomas de decisión por parte de los profesores, creencias de profesores y estudiantes sobre las matemáticas, dificultades en la enseñanza de la modelización).

Por ejemplo, dentro de la orientación más cognitiva, Borromeo (2006) aborda el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes cuando realizan tareas de modelización y los factores que influyen en estos procesos. En una orientación más epistemológica, aunque siempre centrados en el estudiante como objeto final de la investigación, Galbraith & Stillman (2006) construyen un modelo muy detallado del proceso de modelización para describir el trabajo de modelización de los estudiantes y Maaβ (2007) aborda el problema de la identificación de elementos clave en la competencia de modelización matemática. Con una mayor orientación didáctica, la misma Maaβ (2006) se plantea en un trabajo posterior la cuestión de cómo ayudar a los estudiantes con dificultades a desarrollar competencias de modelización, Kaiser & Schwarz (2006) y Blømhoj & Kjeldsen (2006) presentan experiencias de enseñanza de las matemáticas mediante un uso sistemático de la modelización.

En todas estas investigaciones se asume que la modelización y los problemas aplicados deben tener un papel central en la enseñanza de las matemáticas. Con el objetivo de dar respuesta a cuestiones del tipo *¿Cómo enseñar a los alumnos a modelizar y a resolver problemas aplicados?*, esta primera línea de investigación se centra en la búsqueda de "buenos" sistemas a modelizar, entendiendo que estos sistemas deben ser siempre "reales", es decir, no-matemáticos. Trata de identificar dentro del amplio universo de sistemas y modelos extra-matemáticos, aquellos que son más adecuados para introducir al estudiante en un "verdadero" proceso de modelización, lo que investigadores como Kaiser (2006) llaman "problemas auténticos":

> According to her [Kaiser-Messmer, 1993, p. 216], the importance of mathematics can only be shown to students by authentic problems. She considers an authentic situation to be an outside mathematical situation embedded in a certain field dealing with phenomena and questions which are relevant for this field and are also regarded as important by experts in this field. (Maaβ, 2006, p. 115)

Es importante señalar el acuerdo que existe en esta línea de investigación en educación matemática sobre la importancia de la *enseñanza explícita de los procesos modelización*, con el gran componente innovador que esto supone – de ahí la expresión de la "modelización como contenido" frente a la "modelización como vehículo" y la utilización de la terminología de las "competencias de modelización" que hemos detallado en la sección anterior.

Pero, dada la forma bastante habitual de interpretar la modelización matemática como modelización de sistemas aislados, podría suceder que, cuando se considera (o se utiliza) la modelización matemática como un contenido a enseñar, se la esté identificando en realidad con un procedimiento para resolver problemas "aplicados" ("reales", "auténtico", etc.) pero casi siempre aislados. Es por ello que, cuando se habla de enseñar explícitamente procesos de modelización, se podría estar intentando enseñar mediante la imitación y práctica, tal como proponía Pólya un "patrón de resolución" de problemas. De ahí el paralelismo entre modelización matemática y resolución de problemas que señalábamos al final del apartado anterior.

La modelización matemática como medio para enseñar matemáticas

Frente a la primera corriente que acabamos de describir y que, hoy día, es claramente dominante en el campo, se suele distinguir otro ámbito de trabajos que consideran la modelización como una *técnica didáctica* (o *vehículo*), asumiendo el hecho que relacionar la actividad matemática escolar con ciertos ámbitos de la realidad tiene un efecto positivo tanto en la motivación de los alumnos hacia las matemáticas como en su capacidad futura para utilizar estas matemáticas en los problemas que surgen en la vida cotidiana o profesional. Abordan cuestiones del tipo: *¿Cómo podemos utilizar la modelización matemática o los problemas aplicados para que los alumnos aprendan ciertos contenidos matemáticos prefijados?*

Por ejemplo, en el trabajo de Blomhøj & Kjeldsen (2009) explican cómo pueden las actividades de modelización matemática ayudar a los estudiantes a aprender conceptos matemáticos como, en el caso concreto que describen en este trabajo, el de integral de una función.

> One of the main reasons given for teaching mathematical modelling is to support students' learning of mathematics (Niss, 1989), (Blomhøj, 2004). In this line of argument mathematical modelling is seen as a didactic means for learning mathematics, and not as an objective in its own right. […] We are interested in researching modelling as a didactic tool for learning mathematics both for a better understanding of general aspects of mathematical learning and for developing our own teaching in mathematical modelling. (*Ibid*, p. 1)

En la misma dirección encontramos a Paulin Vos y Gerrit Roorda, dos investigadores de los Países Bajos de donde es originario el movimiento de la "Realistic Mathematical

Education" (RME) que se proponen diseñar *trayectorias didácticas* con el objetivo de construir conocimiento matemático empezando en ciertas "situaciones reales" y siguiendo por los procesos de matematización. En Vos & Roorda (2007), por ejemplo, encontramos un estudio sobre las dificultades de los estudiantes en la interpretación de modelos matemáticos, no habituales para ellos, en los que aparecen aspectos ligados al concepto de la derivada de una función. En este trabajo se muestran la complejidad de las relaciones entre los contextos ligados al primer proceso de matematización utilizado en la enseñanza del concepto y los nuevos contextos que los estudiantes deben aprender a modelizar.

Una vez caracterizados estos dos ámbitos o perspectivas, se podía hablar de una *dualidad* y posible *complementariedad* entre ambas (la modelización como "contenido" y como "vehículo" o "instrumento") que diversos investigadores han discutido. En este sentido, Blum (1991) afirman que algunas veces problemas más "artificiales" pero bien escogidos pueden ser más apropiados para la enseñanza que las aplicaciones genuinas a situaciones reales. Podría interpretarse que la enseñanza de modelos preestablecidos mediante su "aplicación" a situaciones artificiales puede entenderse como un uso de la modelización como "contenido" y utilizarse como un primer paso para que la modelización sea finalmente una herramienta o medio para la enseñanza de las matemáticas. Así, por ejemplo, Andresen (2007), en un estudio sobre la enseñanza de modelos basados en ecuaciones diferenciales, apuesta por una posible función precursora del trabajo exploratorio de modelos preestablecidos para el aprendizaje de la actividad de modelización. La autora afirma, por ejemplo:

> The two understandings of modelling are naturally linked together in the sense that modelling at the functional level offers possibilities of modelling for concept formation. (*Ibid*., p. 2044)

Y añade más adelante:

> Sequences of explorative work may serve to support the students' concept formation and at the same time prepare them for expressive modelling. (*Ibid*., p 2048)

Se debe destacar que esta deseada complementariedad a veces se produce de forma algo involuntaria o, incluso podríamos decir, accidental. Varios investigadores en didáctica han coincidido en señalar que la enseñanza "a través de modelos o aplicaciones" conduce a la larga a una situación "invertida" en la que los contextos o sistemas para modelizar acaban actuando como "indicadores" de las nociones matemáticas que los alumnos deben utilizar. Así por ejemplo, en el trabajo citado de Vos & Roorda (2007) se llega a la conclusión que en muchas ocasiones "the original concept and context hindered each other" y Barbosa (2006) describe la generalidad de esta situación que él llama "estrategia inversa". Comenta un caso en que se pedía a los estudiantes que plantearan y resolvieran un problema real:

> The students first thought of a mathematical content, and then developed a fictional situation around it. […] Analysis of this case led to the hypothesis that students were influenced by the school culture to adopt such a strategy. These findings provide clues regarding the role of the social context in students' cognition. (*Ibid*, p. 296)

La misma idea aparece mencionada por Peled (2007, p. 2140), más relacionada con los condicionantes que vienen impuestos por la formulación estándar de los programas de matemáticas en términos de conceptos y no de actividades de modelización:

> Since teachers viewed the construction of mathematical concepts as their ultimate goal, they could accept the implementation of modelling tasks as a tool but found it hard to accept modelling as a goal.

En otras palabras, la propia inercia del sistema condicionada por los actuales programas de estudio y los vigentes contratos pedagógicos, escolares y didácticos, provoca que la enseñanza de la modelización matemática tienda a reducirse a una excusa o pretexto para enseñar los conceptos matemáticos con los que están configurados los actuales programas de estudio, por lo que pretendiendo enseñar la modelización, se acaba utilizándola como un medio para enseñar los conceptos matemáticos del currículum tradicional.

Se entiende pues la fuerza que ha tomado el movimiento reciente de las "competencias" impulsado por Niss con el objetivo de modificar dicha inercia del sistema educativo e introducir en el debate curricular aspectos de la actividad matemática que no pueden expresarse fácilmente en los términos "conceptualistas" habituales: contenidos, conceptos, propiedades, etc. y pasar a incluir la competencia de la modelización matemática como herramienta principal o dimensión de la actividad matemática y objetivo como tal.

En la evolución del "Problem Solving" se observa una "dualidad" similar a la destacada previamente. Por un lado las tendencias más puramente modernistas (Gascón, 2001) enfatizaron la importancia central (y casi exclusiva) de aprender a resolver problemas ("auténticos", "reales", "aplicados", "olímpicos", etc.) como un contenido más, normalmente añadido como suplemento de los temas, y aquí aparecieron diversas metodologías para enseñar reglas heurísticas de diferente tipo. Pero los programas oficiales seguían existiendo, la epistemología dominante seguía teniendo un carácter "conceptualista" y las necesidades didácticas ineludibles (como, por ejemplo, la necesidad de que los alumnos aprendan técnicas rutinarias) no habían desaparecido. Esto obligó a intentar compaginar la resolución de problemas (que parecía un objetivo demasiado ambicioso quedando lejos de las posibilidades de la mayoría de los alumnos) con el resto de las necesidades matemático-didácticas. Pero las limitaciones de las organizaciones didácticas espontáneas no permitieron resolver adecuadamente este difícil problema didáctico. Por otro lado, aparecieron las tendencias de utilizar la resolución de problemas como un medio o instrumento para enseñar matemáticas. Buen ejemplo de ello lo encontramos en los materiales de renovación de los años 80 en los que la resolución de problemas se utilizaba como "excusa" para seguir enseñando los conocimientos previamente establecidos que aparecían en los curriculum. Esta tendencia también fracasó dado que, de nuevo, acabó imponiéndose y priorizándose la enseñanza tradicional de los conceptos.

2.3. La rigidez del sistema docente: ¿por qué se enseña tan poca modelización?

A pesar del desarrollo del campo de investigación sobre "Modelización y aplicaciones", junto con el impulso ya examinado de los movimientos de renovación para incorporar progresivamente una actividad matemática más orientada hacia los problemas profesionales y de la vida social, se constata un gran fracaso en lo que se refiere a la difusión efectiva de las prácticas de modelización en la escuela. Encontramos muchas manifestaciones de este hecho. Por ejemplo, en la introducción al estudio del ICMI, Blum (2002, p. 150) comenta:

> While applications and modelling also play a more important role in most countries' *classrooms* than in the past, there still exists a substantial gap between the ideals of educational debate and innovative curricula, on the one hand, and everyday teaching practice

> on the other hand. In particular, genuine modelling activities are still rare in mathematics lessons.

La investigadora alemana Gabriele Kaiser escribe un comentario del mismo estilo:

> Since the last decades the didactic discussion has reached the consensus that applications and modelling must be given more meaning in mathematics teaching. […] However international comparative studies on mathematics teaching carried out during the last years, especially in the PISA Study, have demonstrated that worldwide young people have significant problems with applications and modelling task. (Kaiser, 2006, p. (3)393)

Por su parte, el investigador inglés Hugh Burkhardt ofrece una perspectiva tan optimista de cara a los resultados de la investigación como pesimista en lo que refiere a su difusión en las aulas (Burkhardt, 2007, p. 2091):

> We know how to teach modelling, have shown how to develop the support necessary to enable typical teachers to handle it, and it is happening in many classrooms around the world. The bad news? "Many" is compared with one; the proportion of classrooms where modelling happens is close to zero.

Finalmente, Bharath Sriraman y Richard Lesh desde los Estados Unidos, en un artículo general sobre las concepciones acerca de la modelización (Sriraman & Lesh, 2006, p. 247), en el apartado "The Situation Today", describen el siguiente cuadro:

> Although the situation is encouraging in comparison to the *status quo* of previous decades, authentic modeling based curricula […] have been difficult to implement at a macro level due to the various reasons, namely systemic inertia, professional development constraints and general societal resistance to a curriculum which goes against popular conceptions and what constitutes school mathematics.

Debemos subrayar aquí que, en un primer momento, las investigaciones sobre la enseñanza de la modelización parecían centradas principalmente en el problema de la *descripción de la actividad de modelización* (en términos de "competencias" o mediante el llamado "modelling cycle" y sus múltiples variantes) y su utilización tanto para el diseño de actividades de enseñanza como para el análisis de las dificultades de los alumnos. Pero actualmente se observa una segunda fase en la que muchas investigaciones empiezan a abordar la problemática del estudio de *restricciones* que dificultan la generalización de la enseñanza de la modelización en los sistemas de enseñanza. Los autores se refieren a estas restricciones con diferentes expresiones como "counter-arguments" (Blum, 1991), "dilemmas" (Blomhøj y Kjeldsen, 2006), "barriers" (Burkhardt, 2006) o "obstacles" (Kaiser, 2006).

Se amplía así la base problemática, incorporando el estudio de restricciones y condiciones que parecen incidir tanto sobre la enseñanza como sobre el aprendizaje escolar de la modelización por ejemplo, considerando las creencias de los alumnos y profesores sobre las matemáticas y la modelización. En esta dirección, podemos destacar los trabajos de Blum (1991) que hace referencia a "counter-arguments" desde el punto de vista del estudiante y desde el punto de vista del profesor, o el trabajo de Kaiser (2006) en el que define diferentes perfiles de profesores concluyendo que:

> Scheme and formalism oriented beliefs build high obstacles for applications and modelling problems in mathematics teaching, because the nature of contextual and applied problems are not compatible with those beliefs. (*Ibid.*, p. (3) 399)

En los trabajos de Kaiser (2006) y Julie (2002) se llega a la conclusión, excesivamente optimista a nuestro parecer, de que la "buena" formación del profesorado sería una condición necesaria y hasta quizá suficiente para superar este obstáculo:

> In order to promote real world and modelling examples within mainstream mathematics education, the integration of applications and modelling into teachers education at universities and in-service-training for teachers seem to be necessary […]. (Kaiser 2006, p. (3)339)

Destacamos también el trabajo de Blomhøj & Kjeldsen (2006) que dan un paso más al considerar la existencia de tres "dilemmas" interrelacionados que se deben combatir para la enseñanza de la modelización matemática que en las propias palabras de los autores describen como:

> From a research point of view the in-service course already gives basis for describing and analysing the following three interrelated dilemmas of teaching mathematical modelling.
> (1) The understanding of mathematical modelling competency from a holistic point of view or as a set of subcompetencies. […] (2) Seeing mathematical modelling as an educational goal in its own right or as a mean for motivating and supporting the students' learning of mathematics. […] (3) The dilemma of teaching directed autonomy. (*Ibid*., pp. 175-176)

Situándose a un nivel más genérico en lo que hace referencia al análisis de restricciones, Burkhardt (2006) destaca y discute la existencia de ciertas barreras ("barriers") que dificultan la inclusión de la modelización matemática en los actuales currícula como, por ejemplo, la inercia del sistema de enseñanza, las mal recibidas introducciones del mundo real en algunas clases de matemáticas, el desarrollo profesional limitado de los profesores, el papel y la naturaleza de la investigación de las prácticas en el aula.

Para poder superar estas "barreras", el autor propone ciertas "palancas" ("levers") (como, por ejemplo, cambios en la descripción de los curriculum, materiales bien diseñados para poder llevar a cabo y evaluar los cambios introducidos, inversión en la formación y desarrollo profesional de los enseñantes, etc.) que pueden facilitar cierto progreso en la incorporación, a gran escala, de las actividades de modelización matemática en las prácticas escolares.

El investigador danés Claus Michelsen (2006) destaca a su vez que las fronteras que tradicionalmente se han establecido entre las diversas disciplinas supone una clara barrera para el desarrollo de actividades en un contexto multidisciplinar y afirma:

> The challenge is to replace the current monodisciplinary approach, where knowledge is presented as a series of static facts disassociated from time with an interdisciplinary approach, where mathematics, science, biology, chemistry and physics are woven continuous together. (*Ibid*, p. 269)

Destacamos finalmente el trabajo de Barbosa (2006) que situándose dentro de la perspectiva socio-crítica, propone una "tercera vía" para analizar la práctica matemática de los estudiantes mediante el análisis de las reflexiones y discusiones.

2.4. A modo de síntesis: de la problemática docente a la problemática de investigación en torno a la enseñanza de la modelización matemática

Hemos iniciado este primer capítulo con la formulación y descripción de la *problemática docente* en torno a la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de ciencias. Es aquí donde hemos analizado cuáles son las matemáticas que se enseñan actualmente en estas instituciones universitarias y cuáles son las nociones e ideas dominantes que encontramos en dichas instituciones en relación a las matemáticas, a la modelización matemática y a su enseñanza. Esto nos ha permitido proponer una *primera reformulación* del problema docente relativo a la enseñanza de las matemáticas en el primer curso de las licenciaturas de CCEE, problemática estrechamente relacionada con la *pérdida de sentido y desarticulación* de las matemáticas escolares que constituye hoy una de las cuestiones más acuciantes en todos los niveles educativos y en el universo de investigación en educación matemática:

> ¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en los primeros cursos universitarios de CCEE no se reduzcan a un *conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido*, sino que aparezcan de *manera funcional* como herramientas para *dar respuesta a cuestiones problemáticas* dentro de las CCEE?

Después de presentar la prometedora propuesta docente de la universidad danesa de Roskilde, ésta aporta una primera respuesta al problema planteado previamente que nos ha permitido reformular el problema en el ámbito de la enseñanza de la modelización matemática. Este salto, lejos de ser casual, se fundamenta en la hipótesis que formulamos según la cual el uso sistemático de la herramienta de modelización para el estudio de problemas científicos se aproximaría a la solución del problema de la desarticulación de la matemática enseñada y, sobre todo, permitiría mostrar la funcionalidad de ésta para responder a situaciones problemáticas que aparecen en diferentes ámbitos científicos.

> En los primeros cursos universitarios de CCEE, y una vez enseñados los contenidos matemáticos básicos, ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una *herramienta de modelización de situaciones* o *hechos científicos*, de tal forma que la enseñanza no se organice en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar?

Nos situamos así en una problemática de gran interés para la comunidad investigadora en Educación Matemática al cual suele referirse como “Modelización y aplicaciones”. Dicho interés ha aumentado en las últimas décadas y ha tenido un destacable desarrollo e impacto tanto en la comunidad de investigadores como en las actuales reformas escolares a todo nivel educativo.

Al proponer una breve descripción del desarrollo de este ámbito de investigación, hemos querido destacar la evolución que han ido mostrando las investigaciones dentro de este ámbito. Inicialmente éstas parecían centrarse más en el problema de la descripción de la actividad de modelización y su utilización tanto para el diseño de actividades de enseñanza como para el análisis de las dificultades de los alumnos. En los trabajos más recientes, destacamos la clara extensión de esta problemática hacia el estudio de las *restricciones* que dificultan la generalización de la enseñanza de la modelización en los sistemas de enseñanza y de las *condiciones* que deberían favorecer su integración.

En esta dirección, postulamos que es necesario y fundamental para que la modelización pueda vivir con normalidad en nuestros sistemas de enseñanza, profundizar en el estudio de las *condiciones* que requiere su inclusión y las *restricciones* que dificultan el desarrollo de la actividad de modelización en las actuales instituciones docentes. A este estudio nos vamos a referir como la *problemática ecológica* de la modelización matemática, y lo empezaremos a abordar en el próximo capítulo.

2

CAPÍTULO 2

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL ÁMBITO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

1. AMPLIACIÓN DEL PLANTEAMIENTO CLÁSICO DEL PROBLEMA DIDÁCTICO EN TORNO A LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Hemos iniciado el primer capítulo con la formulación y descripción del *problema docente* en torno a la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de CCEE. El desarrollo de este problema nos ha llevado a presentar dos reformulaciones sucesivas estrechamente relacionadas entre sí que finalmente nos han conducido al problema, dentro del ámbito de investigación en Educación Matemática, de la "enseñanza de la modelización matemática" o, más concretamente, del "*papel de la modelización en la enseñanza de las matemáticas*".

Cuando dicha problemática es transportada por la noosfera[1] al interior de los sistemas de enseñanza de las matemáticas, ésta se vuelve a plantear como un *problema docente*, esto es, vuelve a naturalizarse utilizando las nociones existentes y las ideas dominantes en la cultura de la institución docente considerada, por lo que su planteamiento adolece de limitaciones importantes. Dichas limitaciones son análogas a las que han sido descritas en trabajos anteriores en el caso de la geometría (Chevallard, 1990), del álgebra elemental (Bolea, Bosch & Gascón, 2001a) y de la demostración matemática (Arsac, 1988).

Desde el punto de vista del Sistema de Enseñanza, es decir, si nos situamos en el punto de vista de la institución docente de la que el profesor-enseñante es agente, se da por supuesto que el profesor conoce lo que tiene por misión enseñar. Así el *profesor se ve llevado a considerar todo objeto de enseñanza únicamente como tal objeto.* De esta forma, el profesor no se preguntará *¿qué es una construcción geométrica?*, *¿qué es el álgebra?*, *¿qué es una demostración?* ni, en el caso en el que nos centramos, *¿qué es la modelización matemática?* sino más bien se verá llevado a plantearse: *¿qué tengo que enseñar y cómo tengo que enseñar a mis alumnos a propósito o en relación con la modelización matemática?* En otros términos, como indica Chevallard (1990, p. 4):

> […] el profesor-enseñante, como agente de la institución docente, no formulará cuestiones a propósito del saber que tiene que enseñar más que poniendo entre paréntesis la cuestión del

[1] Chevallard (1985a) designa por "noosfera" la esfera "pensante" del sistema de enseñanza, formada por políticos, matemáticos y otros miembros del sistema de enseñanza (profesores en particular), refiriéndose a todos aquellos que actúan sobre la organización del "conocimiento a ser enseñado".

> saber y de su propia relación con el saber; o cuando menos, relativizando la cuestión: esta cuestión no se plantea porque hay alumnos, y hay que enseñar(les) […]. Esta manera de reaccionar permite ignorar un problema fundamental de la enseñanza: permitiendo evitarlo, se permite negarlo.

En muchos de los trabajos que se enmarcan en el ámbito de investigación denominado "modelización y aplicaciones" se utiliza un patrón más o menos explícito de la modelización matemática pero, a pesar de ello, se observa cierta confusión entre aquellas cuestiones que pueden ser tratadas como "problemas docentes específicos" formulables con las nociones de la cultura escolar y las que se pueden considerar propiamente como "problemas de investigación en didáctica". Así, en trabajos como el de Blum (2002), se pueden encontrar formulaciones de problemas docentes específicos como: ¿qué aplicaciones, modelos y procesos de modelización deberían estar incluidos en el currículo?, ¿es posible tratar las aplicaciones y la modelización como actividades interdisciplinares?, ¿puede la modelización ayudar a promover una concepción de las matemáticas que incluya el papel de las matemáticas como herramienta para estructurar otras áreas de conocimiento?, etc. En estas investigaciones no problematizan muchas de las nociones que forman parte de la cultura escolar como, por ejemplo, "aplicaciones", "problemas aplicados" y "actividades de modelización", aceptándolas como parte del lenguaje propio del ámbito de investigación. A lo sumo, como veremos más tarde, estas nociones se importan directamente de la descripción escolar de la matemática y se refinan posteriormente, como ocurre, por ejemplo, con la noción de "ciclo de modelización" tal como la presentan Blum & Leiß (2007) y Borromeo Ferri (2006).

De forma análoga a los tres casos antes citados (geometría, álgebra y demostración), podemos describir las limitaciones que conlleva abordar el problema del "papel de la modelización en la enseñanza de las matemáticas" cuando éste se plantea en un ámbito demasiado próximo al *problema docente*. Estas limitaciones se pueden resumir en dos "peligros" de simplificación abusiva del problema, que Arsac (1988) describió como una doble ingenuidad. En el caso de la modelización matemática, serían las siguientes:

(1) La ingenuidad del *punto de vista didáctico* "clásico" que plantea el problema de la enseñanza de la modelización matemática *sin interrogarse en profundidad sobre su estatuto epistemológico*. Esto es, no plantearse qué es la modelización

matemática y cuál es su papel en relación al modelo epistemológico general de las matemáticas.

(2) La ingenuidad del *punto de vista epistemológico* "clásico" que *ignora el fenómeno de la transposición didáctica* y pretende deducir directamente de los estudios epistemológicos tradicionales conclusiones aplicables a la enseñanza de la modelización matemática.

Cada una de estas "ingenuidades" consiste en considerar como transparente una de las dimensiones fundamentales del problema. La primera evita la dimensión *epistemológica* del problema (qué son las matemáticas que se enseñan) y la segunda no tiene en cuenta la *dimensión ecológica* del problema (qué condiciones se requieren para que ciertas actividades matemáticas puedan vivir con normalidad en la escuela). Para superar ambos peligros será preciso realizar dos ampliaciones del planteamiento clásico del problema didáctico relativo al papel de la modelización matemática, enfatizando estas dos "dimensiones" de los problemas didácticos habitualmente descuidadas por los enfoques de corte "cognitivo" (Gascón, 1998).

1.1. Integración de la modelización matemática en un modelo epistemológico general de las matemáticas

La primera ampliación respecto al planteamiento clásico, esto es, la inclusión de la *dimensión epistemológica*, va a requerir llevar a cabo un análisis epistemológico riguroso y preciso de la "modelización matemática", lo que requerirá situarla dentro de un *modelo epistemológico general de la actividad matemática*. Este hecho nos va a permitir reformular y, posteriormente, dar una respuesta bien fundamentada, al problema del papel de la modelización matemática en el desarrollo de la *actividad matemática*.

Nos vamos a situar explícitamente en la Teoría Antropológica de lo Didáctico[2] (TAD) dentro del Programa Epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas, cuya emergencia ha provocado la necesidad de considerar la *actividad*

[2] En el Anexo 2, se encuentra una descripción de las herramientas básicas y principales contribuciones de la TAD al campo de investigación de la didáctica de las matemáticas, cuyo origen se sitúa en la incorporación de los fenómenos de "transposición didáctica" en el paradigma de esta disciplina.

matemática institucionalizada como *objeto primario de investigación* y ha supuesto la necesidad de construir, desde la propia didáctica, modelos epistemológicos de esta actividad matemática institucional. Así, tratar la problemática de la modelización matemática dentro del Programa Epistemológico va a suponer reinterpretar y reformular los procesos de modelización para situarlos dentro de un modelo epistemológico general de la construcción y difusión institucional de los conocimientos matemáticos.

Esta reinterpretación se basa en un análisis epistemológico del *papel de la modelización matemática en la actividad matemática* y modifica dos aspectos importantes de la forma cómo se utiliza habitualmente la noción de "modelización matemática" en el ámbito de la Educación Matemática.

(a) *Se incluye la modelización intramatemática en la noción de "modelización"*

Mientras que la propia denominación del dominio de investigación "modelización y aplicaciones" lleva a identificar los sistemas a modelizar con los sistemas "extramatemáticos", eliminando así la *modelización intramatemática* (esto es, la modelización matemática de sistemas "matemáticos"), la TAD adopta un punto de vista más amplio y más coherente con el desarrollo histórico de las matemáticas. Propone una interpretación del proceso de modelización matemática que no sólo puede aplicarse indistintamente a todo tipo de sistemas (intramatemáticos o extramatemáticos) sino que incluso permite cuestionar la presuntamente nítida distinción entre unos y otros puesto que, como veremos, todo proceso de modelización matemática (aunque el sistema inicial sea extra-matemático) acaba conteniendo etapas de modelización intramatemática (Serrano, Bosch & Gascón, en prensa).

Proponemos pues una forma de interpretar la modelización matemática que incluye de manera esencial la *modelización matemática de sistemas matemáticos*, esto es, aquellos procesos que se llevan a cabo para responder a cuestiones problemáticas que surgen en un sistema matemático (como, por ejemplo, un sistema aritmético, geométrico o topológico) y cuya resolución requiere la construcción de un modelo matemático (que puede ser algebraico, analítico o de cualquier otro tipo) y un trabajo en dicho modelo.

Dado que la modelización intramatemática ha constituido históricamente (y sigue constituyendo) un instrumento esencial del desarrollo de las propias matemáticas, parece obvio que si la integramos dentro de la noción de "modelización matemática" será necesario utilizar explícitamente un modelo epistemológico general de la actividad matemática y que la nueva interpretación de lo que se entiende por "modelización matemática" deberá ser compatible con dicho modelo. Además, un análisis pormenorizado del *ciclo de modelización* (Serrano, Bosch & Gascón, en prensa) muestra que, en las diferentes idas y venidas entre el sistema a estudiar y el modelo de este sistema, aparece una matematización progresiva del sistema que conduce, bastante rápidamente, a trabajar con "*modelos de modelos*" del sistema inicial. Se muestra así, como ya hemos dicho, que la modelización intramatemática es una etapa necesaria de todo proceso de modelización matemática (aunque el sistema inicial sea extramatemático).

Una de las consecuencias más importantes de interpretar la modelización intramatemática como un aspecto esencial de la modelización matemática se manifiesta en el carácter *reflexivo* de ésta (el sistema puede hacer el papel de *modelo de su modelo*) y la potencial *recursividad* de la modelización matemática (podemos construir un modelo del modelo de un sistema para responder cuestiones que los modelos iniciales no permitían responder). Aparece así otra importante limitación de la noción de modelización si ésta excluye los sistemas "intramatemáticos": el proceso de estudio de un sistema extramatemático queda abortado a partir de la primera modelización.

Postulamos que la exclusión de la modelización intramatemática del ámbito de investigación "modelización y aplicaciones" está relacionada con dos motivos aparentemente contradictorios. Por un lado están los *obstáculos culturales* que impiden cuestionar el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución "sabia", que considera la modelización como "aplicación de las matemáticas a problemas externos a ellas" y pretende distinguir nítidamente el ámbito de las "matemáticas puras" del de las "matemáticas aplicadas". Por otro lado, está la reacción ante el fuerte condicionante histórico, por lo menos desde el auge de las matemáticas modernas, de una enseñanza de las matemáticas que no toma en consideración el universo extramatemático. Dicho en otras palabras, como la modelización extramatemática no forma parte de la epistemología dominante y, además, como lo que está claramente ausente de la enseñanza es la consideración de sistemas extramatemáticos, aparece un rechazo hacia la posibilidad de tomar en consideración la modelización intramatemática. Este rechazo se debe a que, en el ámbito de la "modelización y aplicaciones", se ha perseguido desde sus inicios el romper con el "purismo epistemológico" de la matemática sabia y su desprecio a todo lo que no sea "verdaderamente matemático". Parece como si la consideración de la modelización intramatemática fuera una concesión a la epistemología "purista" de la comunidad matemática sabia y quitara prominencia al proceso de matematización de sistemas no matemáticos.

(b) *Se interpreta la modelización matemática como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar*

La mayor parte de los trabajos que se llevan a cabo en el dominio de investigación "modelización y aplicaciones" que hemos descrito en el anterior capítulo se centran, o bien en un *nivel puntual* de las cuestiones aisladas (problemas de "aplicación"), o bien, consideran la modelización como una *competencia matemática general* situándola, por lo tanto, en el *nivel disciplinar* de la matemática escolar como un todo (Niss, 2002 y Michelsen, 2006). En cualquier caso no aparece claramente la relación entre las *actividades de modelización* y los *temas*, *sectores* o *áreas* del currículo de matemáticas[3]. En otros términos: la noción de "modelización matemática" que se desprende y que se utiliza en el citado ámbito de investigación no considera los "niveles intermedios" de la escala de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001, 2002a, 2002b y 2007) que estructuran la matemática escolar, situados entre las cuestiones puntuales y la disciplina matemática considerada como un todo.

Veremos en este capítulo cómo la interpretación de la modelización matemática, que incluye la modelización intramatemática y enfatiza el carácter *simétrico* y *progresivo* de las sucesivas modelizaciones de un sistema, constituye un instrumento de *articulación de la actividad matemática* escolar y la integra en un modelo epistemológico general de la actividad matemática.

[3] Los temas, sectores y áreas constituyen los niveles específicos de la escala de codeterminación matemático - didáctica, ver anexo 2 – Cf. § 3.5.

1.2. Ampliación del espacio institucional tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas: las restricciones transpositivas

Uno de los objetivos esenciales de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica es el de aportar una visión más clara de las *restricciones* que influyen sobre el acto de enseñanza. Como explica Chevallard (1990), el estudio sistemático de dichas *restricciones* es imprescindible para determinar el nivel adecuado de actuación desde el cual se puedan crear las *condiciones* necesarias a la difusión del conocimiento matemático.

Se plantea así una problemática *ecológica* de la enseñanza de la modelización matemática, esto es, el estudio de las restricciones que dificultan y las condiciones que se requieren para la integración de la modelización matemática en nuestros sistemas de enseñanza. Veremos ahora que esto requiere *ampliar el espacio institucional reservado tradicionalmente a la didáctica de las matemáticas*, el del diseño de actividades docentes en el aula.

Ampliar este espacio institucional va a requerir situar el problema didáctico de la modelización matemática en el ámbito de la *problemática de la transposición didáctica* para poder tomar en consideración restricciones que surgen en las diferentes etapas del proceso de transposición, desde las instituciones productoras del saber hasta las instituciones docentes. Todas ellas inciden sobre el papel que puede jugar la "modelización matemática" en el estudio de la matemática escolar.

Tal como hemos descrito en el capítulo 1, algunos de los trabajos del dominio de investigación "modelización y aplicaciones" toman en consideración ciertas dimensiones del problema que se originan más allá del estrecho ámbito del aula. Esto ha llevado últimamente a algunos investigadores a analizar determinadas restricciones que pesan sobre la enseñanza de la modelización en los sistemas de enseñanza y que designan como: "contra argumentos" (Blum, 1991), "dilemas" (Blomhøj & Kjeldsen, 2006), "barreras" (Burkhardt, 2006) o "obstáculos" (Kaiser, 2006). Nuestro punto de vista coincide parcialmente con esta visión pero amplía de una forma radical y sistemática el ámbito en el que se plantea:

(a) *Postulamos que todo problema didáctico es, en alguna medida, un problema relativo a las condiciones que se requieren y a las restricciones que inciden sobre la vida institucional y sobre la difusión intrainstitucional e interinstitucional de las organizaciones matemáticas y didácticas.* En este sentido, decimos abreviadamente que la problemática didáctica es una "problemática ecológica" (o contiene, una *dimensión "ecológica" esencial*) puesto que plantea el problema de las condiciones de "vida" y "difusión" de las organizaciones matemáticas y didácticas en las distintas instituciones.

(b) *Situamos el problema de la modelización matemática en el ámbito de la transposición didáctica*, esto es, en relación al estudio de las transformaciones que sufre la modelización matemática a lo largo del proceso de transposición a la escuela (entendida en un sentido amplio que abarca cualquier institución de enseñanza, desde la enseñanza obligatoria hasta la universitaria).

Tomar en consideración la transposición didáctica de la modelización matemática significa asumir el principio que las matemáticas son "manipuladas" y "transformadas" para poder ser enseñadas bajo un conjunto dado de restricciones. Partiendo del siguiente esquema (ver Figura 1), podemos destacar que:

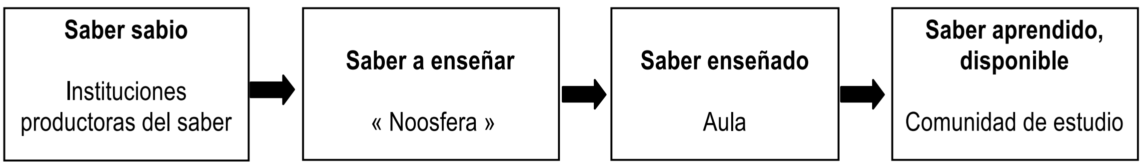


Figura 1. Etapas en el proceso de transposición didáctica (Bosch & Gascón, 2004)

- El saber que se enseña en la escuela proviene de distintas transformaciones de un "saber sabio" que es el que legitima y justifica su difusión (o "transposición") a otras instituciones.

- Dichas transformaciones se operan en instituciones intermedias como la "noosfera". Ésta actúa como membrana del sistema de enseñanza, haciéndola permeable a ciertos objetos y protegiéndola de otros. Es en esta institución intermedia donde se decide, determina y describe el "saber a enseñar", es decir aquellos objetos matemáticos que se propone transponer en la escuela y que se acaban oficializando en los programas oficiales, libros de texto, recomendaciones a profesores, materiales didácticos, etc.

- La escuela también impone restricciones (a nivel escolar, pedagógico o didáctico) para que los objetos matemáticos que se van a enseñar cumplan ciertos requisitos que las hagan "enseñables" de acuerdo a ciertos principios y modos de funcionamiento históricamente determinados. Esto provoca que el "saber efectivamente enseñado" no coincida con el "saber a enseñar", aunque las discrepancias deban mantenerse siempre relativamente ocultas o disimuladas para que el proceso de enseñanza no pierda su legitimidad (Chevallard, 1985a).

Son estas restricciones las que llamamos propiamente "restricciones transpositivas". En el caso de la modelización matemática, el problema que nos ocupa (el *problema ecológico de la modelización matemática*) hace referencia a las restricciones transpositivas que inciden sobre las actividades de modelización que se pueden llevar a cabo en la escuela teniendo en cuenta que estas restricciones provocan transformaciones tanto de los objetos matemáticos como de la forma de organizarlos y de reconstruirlos en la escuela. Si no se toman en consideración las "fuerzas institucionales" que provoca el proceso de transposición didáctica, no será posible describir las condiciones que se requieren para que la modelización matemática pueda vivir en el sistema de enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, la transposición puede facilitar la entrada en el sistema de enseñanza de ciertos objetos (los conceptos, modelos y sistemas conceptuales que tengan una existencia clara en la institución sabia) y dificultar la entrada de otros (en particular de los objetos "extramatemáticos" que no tengan una existencia clara en el saber sabio). Pueden aparecer entonces rasgos de *algoritmización de la modelización* que se manifiestan en la tendencia a cerrar las actividades de modelización convirtiéndolas en "resolución de problemas aplicados" relativamente aislados puesto que no suelen dar origen al estudio de un verdadero campo de problemas si estos problemas no están previamente "nombrados" en el saber sabio. Y puede resultar de ello una *pérdida de sentido* de la modelización cuando aparece independientemente de las necesidades de estudiar realmente un sistema, esto es, cuando el sistema modelizado no se toma realmente en serio sino que sólo sirve como "excusa" para llevar a cabo un proceso de modelización cuyo último objetivo sería la construcción de conceptos matemáticos más acordes con el "saber sabio" y sólo artificialmente "motivados".

En resumen, podemos destacar dos grandes limitaciones del planteamiento clásico del problema didáctico en torno a la modelización matemática que nuestro enfoque, desde el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), pretende superar. La primera está relacionada con la *incapacidad para cuestionar el modelo epistemológico dominante* en las instituciones docentes. Esta incapacidad está íntimamente ligada a la *no consideración del fenómeno de la transposición didáctica*, lo que impide llevar hasta las últimas consecuencias el análisis epistemológico de la noción de "modelización matemática". La segunda limitación proviene de la tendencia a *reducir la problemática didáctica a la problemática del profesor* centrada en su práctica docente en el aula, con la consiguiente delimitación del ámbito de actuación de la didáctica de las matemáticas (volveremos sobre este tema en el capítulo 5).

Presentamos a continuación la interpretación que propone la TAD de la modelización matemática y su relación con el modelo epistemológico general de la actividad matemática. Mostraremos que el hecho de situar el problema didáctico de la modelización matemática en el ámbito más comprensivo de la transposición didáctica provoca una ampliación radical de dicho problema y parece abrir una vía para abordarlo de forma más efectiva.

2. LA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA TAD

Situarse explícitamente en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para tratar la problemática de la modelización matemática supone reformular los procesos de modelización para interpretarlos dentro de un modelo general de la construcción y difusión institucional de los conocimientos matemáticos. Desde los primeros trabajos de Chevallard sobre la enseñanza del álgebra (Chevallard 1985b, 1989a y 1989b), la TAD sitúa la actividad de modelización matemática en el corazón de la actividad matemática. Chevallard, Bosch & Gascón (1997, p. 51) lo formulan en los términos siguientes:

> Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una *actividad de modelización matemática.*

Aparece aquí una hipótesis central de la TAD: la que asume que la modelización no es únicamente un aspecto de las matemáticas, sino que toda *actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización*. Pero es necesario aclarar primeramente que esta afirmación no significa que hacer matemáticas se reduzca a llevar a cabo procesos de modelización de situaciones no-matemáticas o extra-matemáticas. El trabajo citado anteriormente lo especifica en los siguientes términos:

> Hemos caracterizado el hacer matemáticas como un trabajo de modelización. Este trabajo convierte el estudio de un sistema no matemático o un sistema previamente matematizado en el estudio de problemas matemáticos que se resuelven utilizando adecuadamente ciertos modelos. Se pueden destacar tres aspectos en este trabajo: la utilización rutinaria de modelos matemáticos ya conocidos; el aprendizaje y, la eventual enseñanza, de modelos y de la manera de utilizarlos; y la creación de conocimientos matemáticos, es decir de nuevas maneras de modelizar los sistemas estudiados". (*Ibid*., p. 52)

De hecho, cualquier actividad matemática se puede describir en términos de la interrelación entre sistemas y modelos. Esto es, en toda actividad matemática se puede identificar un sistema en torno al cual se formulan cuestiones problemáticas que motivan, y dan origen, a la construcción de ciertos modelos. Esta construcción va a tener sentido siempre que permita aportar respuestas (aunque sean parciales) a las cuestiones problemáticas que le han dado origen. Y en este proceso de búsqueda de respuestas se van a generar nuevas cuestiones, posiblemente no formulables en etapas anteriores, que podrán requerir la búsqueda y construcción de nuevos modelos que puedan hacer avanzar el proceso. De esta forma concreta de interpretar la modelización matemática proviene su funcionalidad así como su capacidad para articular las organizaciones matemáticas que progresivamente se van construyendo.

Llegados aquí se nos platean nuevas preguntas: ¿Qué tipo de objetos pueden hacer el papel de sistemas y cuales pueden hacer el papel de modelos matemáticos? ¿Existen diferentes tipos de modelizaciones? ¿En qué consiste exactamente la actividad de modelización matemática? ¿Cómo describirla? En los próximos apartados vamos a indagar sobre estas cuestiones que nos van a permitir reinterpretar y reformular los procesos de modelización dentro del marco teórico de la TAD.

2.1. Los sistemas, los modelos y las fases de un proceso de modelización matemática

En Chevallard (1989a) se introduce un esquema simplificado de la actividad o proceso de *modelización elemental* en el cual intervienen esencialmente dos tipos de entidades: un sistema matemático o extramatemático y un modelo (matemático) de este sistema. Según el autor, el proceso de modelización queda descrito en las siguientes tres etapas:

> 1. Definimos el *sistema* que queremos estudiar, precisando aquellos "aspectos" del sistema que nos proponemos estudiar y simbolizándolos mediante un conjunto de variables.
> 2. Construimos el modelo propiamente dicho estableciendo y definiendo las relaciones entre las variables que se han tenido en cuenta en la primera etapa. El modelo del sistema a estudiar es el conjunto de estas relaciones.
> 3. Se "trabaja" con el modelo obtenido, con el objetivo de producir *conocimiento* relativo al sistema, conocimientos que toman la forma de nuevas relaciones entre las variables del sistema. Esta tercera etapa es siempre una fase propiamente matemática, en tanto que las etapas anteriores son competencia del dominio de realidad. (*Ibid*., p. 57)[4]

[4] Original en francés. La traducción es nuestra.

Siguiendo el esquema que propuso Yves Chevallard, en Gascón (2004) encontramos una esquematización paralela en cuatro estadios sin necesariamente una sucesión temporal lineal entre ellos:

Primer estadio: se caracteriza principalmente por la *delimitación del sistema*[5] o ámbito de la realidad en el que aparece una situación problemática que permite plantear preguntas y conjeturas con poca precisión. Esta "construcción" del sistema comporta la elección de ciertos aspectos del sistema que se simbolizan u operativizan mediante variables, formas geométricas, etc.

Segundo estadio: se describen algunas de las posibles *relaciones* entre las componentes del sistema. En este estadio, al disponer del lenguaje propio del modelo, se podrán formular con más precisión los problemas que se habían enunciado anteriormente de forma provisional.

Tercer estadio: incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la *interpretación de este trabajo* y de sus *resultados dentro del sistema*. En este estadio se decide sobre el interés, la fecundidad y la adecuación del modelo, en la medida en que éste permita generar conocimiento relativo al sistema que no sea fácil de producir sin el modelo.

Cuarto estadio: en este último estadio se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya resolución permitirá responder cuestiones que difícilmente se podían formular sin la elaboración y el trabajo en el modelo. Los problemas se pueden *independizar del sistema inicial* dando lugar a nuevas organizaciones matemáticas, nuevas cuestiones y nuevos modelos. En este punto aparece la recursividad de la modelización matemática tal como se la considera en la TAD.

Una vez introducidas las etapas o estadios en los que se propone describir el proceso de modelización matemática, mostraremos su relación con el "ciclo de modelización" ampliamente discutido y aceptado por la comunidad investigadora del ámbito de "modelización matemática". Citamos en lo que sigue dos versiones recientes

---

[5] Se considera que un *sistema modelizable matemáticamente* es cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricción, siempre que pueda ser aislado del resto – aunque sólo sea hipotéticamente. En esta noción de "sistema" se incluyen muy especialmente los *sistemas (intra)matemáticos*.

de este ciclo que han tenido una amplia aceptación en este ámbito de investigación. Nos estamos refiriendo a los ciclos de modelización que se proponen en los trabajos de Blum & Leiβ (2007) (Figura 2) y Blomhøj & Jensen (2003) (Figura 3) como herramienta para una descripción de la actividad de modelización matemática.

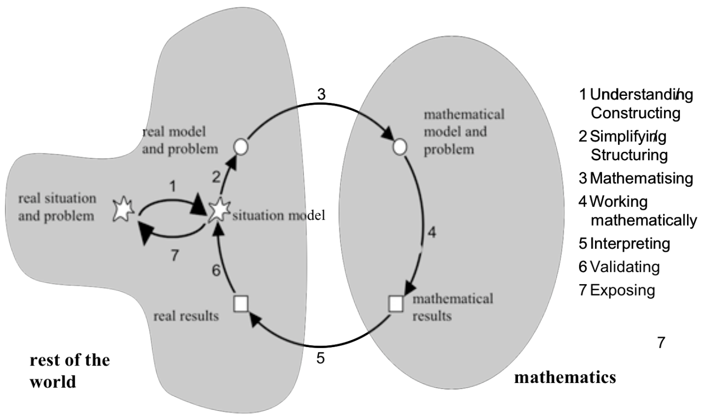


Figura 2. Representación de las fases en un proceso de modelización Blum & Leiβ (2007)

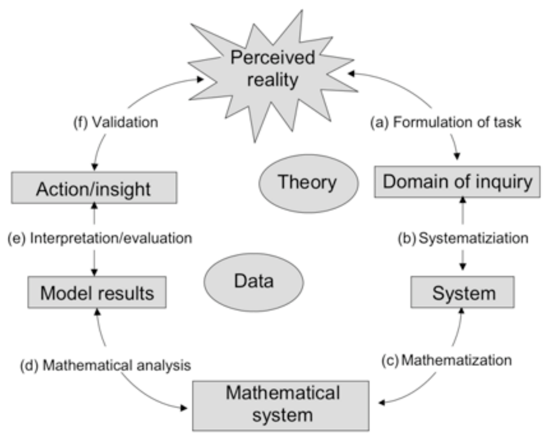


Figura 3. Representación de las fases en un proceso de modelización según Blomhøj & Jensen (2003)

Vemos que en los dos casos se establece una distinción neta entre lo matemático y "la realidad percibida" o "el resto del mundo". Los "estadios" o "etapas" de cada ciclo pueden variar sensiblemente pero los dos incluyen la fase de "delimitación del sistema" (nuestro primer estadio): "real model and problem" en Blum & Leiβ (2007) y "system" en Blomhøj & Jensen (2003). Nuestro segundo estadio corresponde a la fase de matematización mientras que "el trabajo dentro del modelo" se aproximaría a las fases de "working mathematically" o "mathematical analysis". Finalmente, la fase del nuevo cuestionamiento del sistema inicial (cuarto estadio) se considera aquí como una "vuelta" al mundo real, cerrándose así el bucle del ciclo.

Debemos señalar algunos presupuestos de la TAD en relación a la modelización matemática que ciertamente difieren de esta interpretación tradicionalmente aceptada y que, en nuestro caso, vamos a incluir de forma esencial en la ampliación de la problemática didáctica en torno a la enseñanza de la modelización matemática:

(a) *La naturaleza de los sistemas: ampliación de la propia noción de modelización*

De acuerdo con lo que hemos introducido como la primera de las ampliaciones del planteamiento clásico del problema didáctico de la modelización matemática (Cf. § 1.1), tradicionalmente, en la propia denominación del dominio de investigación "modelización y aplicaciones" se han considerado preferentemente *sistemas extra-matemáticos* como candidatos a ser modelizados, eliminando así la *modelización intramatemática* (la modelización matemática de sistemas "matemáticos"). En coherencia con la propia historia de las matemáticas en el que modelización ha constituido uno de los principales motores del avance del saber matemático, desde la TAD, adaptamos un punto de vista más amplio y más coherente proponiendo *incluir la modelización intramatemática en la propia noción de "modelización"*.

(b) *La naturaleza de los modelos: la búsqueda de respuestas y la necesidad de cuestionar la adecuación de los modelos*

En Chevallard (1989a), se subraya que no debemos caer en la ingenuidad de pensar que un *modelo* es una copia o reproducción de la realidad, sino que éste es un *añadido* a esta realidad, una *construcción artificial*, puesta en relación con la realidad de determinada manera que se supone adecuada. Se enfatiza así que la principal función del modelo no es la de "parecerse" al sistema que modeliza, sino la de *aportar conocimientos* sobre él y hacerlo de la forma más económica y eficaz posible.[6] Para superar esta falsa interpretación, Chevallard propone sustituir la metáfora del modelo como "imagen" del sistema por la del modelo como "máquina": "*Un modelo de un sistema es una máquina*

[6] La interpretación del modelo como "representación" o "imagen" del sistema que se quiere modelizar, es lo que Chevallard (1992) llama *ilusión representacionista* asegurando que esta creencia cultural de la imagen supone un verdadero obstáculo epistemológico para la construcción de conocimiento.

cuyo funcionamiento permite producir conocimiento relativo al sistema modelizado."[7] En este sentido, un modelo es interesante (o fecundo) cuando permite *producir conocimientos* que no conseguiríamos fácilmente por cualquier otra vía.

Pero el proceso no acaba aquí. Un proceso de modelización no debe ser considerado un proceso "cerrado", en el sentido de que se parte de cuestiones que surgen en la realidad de un sistema extramatemático para el cual se crea un modelo matemático que permite aportar respuestas con las que finaliza el proceso. Es importante subrayar que la problemática de la *adecuación* o *ajuste del modelo al sistema* supone debatir su validez y ésta es una tarea que está claramente en el corazón de la actividad de modelización. Dicha problemática nos va a llevar a realizar diversas idas y venidas en el "ciclo de modelización" y construcción, estudio del ajuste y *comparación de diferentes modelos* cada vez más complejos.

Vamos a volver sobre esta idea en el próximo apartado, pero es importante subrayar aquí que, en un proceso de modelización, aparecen generalmente diversos sistemas y modelos. Los sistemas van siendo cada vez más "matematizados" y los sucesivos "modelos" progresivamente construidos e integrados en los sistemas anteriores, van generando nuevas cuestiones problemáticas y provocando la necesidad de seguir con el proceso de modelización. Destacamos aquí el análisis ya citado de Serrano, Bosch & Gascón (en prensa) en el que se muestra que, en las diferentes idas y venidas en dicho ciclo, esto es, entre el sistema a modelizar y el modelo de este sistema, el sistema se va matematizando progresivamente, hecho que nos conduce, bastante rápidamente, a trabajar con "*modelos de modelos*" del sistema inicial. Se muestra así que, por un lado, la modelización intramatemática es una etapa necesaria de todo proceso de modelización extramatemática y, por otro lado, que el proceso de modelización es un *proceso continuo* y *progresivo* cuyo motor se encuentra en el cuestionamiento constante de la adecuación del modelo al sistema y de su capacidad para dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van apareciendo a lo largo del proceso de estudio.

No creemos muy desencaminado afirmar que sin esta manera de considerar y de utilizar los procesos de modelización matemática podrá haber una *enseñanza de los*

[7] Chevallard (1992, p. 13), la traducción es nuestra.

modelos, pero no una *enseñanza del proceso de modelización*. En efecto, la ausencia de un debate sobre la adecuación del modelo al sistema que se propone modelizar y de una evaluación crítica del tipo de conocimientos que los sucesivos modelos permiten construir, convierte la enseñanza de la actividad de modelización en una enseñanza "monumentalista" de los principales modelos utilizados y de sus formas de utilización. Lo que ha sucedido históricamente es que el *proceso de escolarización de la modelización matemática* ha acabado haciendo parecer como naturales, como si ya viniesen dados, la mayoría de los modelos que viven en las instituciones escolares, contribuyendo así a lo que algunos autores denominan el "fenómeno de la invisibilidad institucional de los objetos matemáticos" (Ruiz Higueras, 2001) e hipotecando, como afirmaba Chevallard (2005) la "apertura de la escuela a la vida".

2.2. La modelización matemática como instrumento de articulación de la matemática escolar

Con el objetivo de elaborar un modelo epistemológico explícito y contrastable de la actividad matemática, considerada dentro del conjunto de actividades humanas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones sociales, Chevallard introdujo a mediados de los años 90 la noción de *organización* o *praxeología matemática* que aparece actualmente como una de las nociones clave de la TAD (Chevallard, 1996, 1999, 2002a y 2002b).

La noción de praxeología (u organización) matemática (OM) constituye así una herramienta fundamental para modelizar tanto la actividad matemática como la actividad humana en general. Como toda obra humana, una OM surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas *tareas problemáticas*[8].

[8] No detallaremos aquí la noción de praxeología, que el lector encontrará explicada en el Anexo 2. Pero sí señalamos la estructura de toda organización praxeológica que puede simbolizarse como: $[T, \tau, \theta, \Theta]$. En toda praxeología se puede distinguir dos aspectos inseparables: el nivel de la práctica o "*praxis*" que consta de los tipos de tareas problemáticas (T) y de las técnicas (τ) y que se identifica genéricamente con el *saber-hacer*. Inseparablemente a este bloque, aparece el discurso razonado sobre la práctica o "*logos*" que consta de la tecnología (θ) y de la teoría (Θ) que se encargan de describir, explicar y justificar, respectivamente y a su turno, las técnicas y la tecnología.

En la conceptualización de la TAD, tanto las obras matemáticas como el propio proceso de estudio tiene una estructura praxeológica. En general, todo proceso de estudio genera tipos de problemas cada vez más amplios y complejos, el estudio de los cuales provoca nuevas necesidades teóricas que, a la vez, permiten construir y justificar nuevas técnicas capaces de resolver nuevos tipos de problemas e, incluso, problemas formulados en el nivel teórico respecto de la organización matemática inicial. Esta hipótesis antropológica puede sintetizarse diciendo que el *proceso de estudio de un tipo de problemas desemboca en la reconstrucción institucional de organizaciones o praxeologías de complejidad creciente*.

Pero, ¿cómo se relaciona esta estructura y dinámica praxeológica de la actividad matemática con la descripción de los procesos de modelización en términos de delimitación del sistema, construcción de modelos y trabajo del modelo? ¿Cómo articular las dos visiones de la actividad matemática (como *proceso de estudio*, que requiere el uso y producción de praxeologías y, por otro lado, como *actividad de modelización*? ¿Qué relación hay entre los sistemas, los modelos y las praxeologías? ¿Y entre el proceso de estudio y la actividad de modelización?

La propuesta provisional de la TAD es la de *describir los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente* (puntuales, locales, regionales) que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y para las que esta comunidad requiere respuestas. En realidad, estas cuestiones constituyen la "*razón de ser*" de la construcción de las organizaciones matemáticas que va a ser necesario (re)construir.

En este sentido, siguiendo el trabajo de tesis de García (2005), el análisis de la actividad de modelización nos conduce a considerar los sistemas y modelos como entidades con estructura necesariamente *praxeológica.* En efecto, la consideración de una cuestión problemática inicial surge siempre en el ámbito de una praxeología previamente disponible; la delimitación de un sistema no es más que la delimitación de esta praxeología. La construcción de un modelo matemático de este sistema comporta, de hecho construir una nueva praxeología (aunque al inicio sólo sea un *germen* de praxeología en construcción) que actuará como una máquina productora de conocimiento del sistema considerado. Así pues, el modelo epistemológico de la TAD no permite considerar la modelización de “conceptos” ni de “técnicas” ni de “problemas” aislados. Dada la naturaleza dinámica de las praxeologías, y la profunda interrelación que hay entre sus componentes, no podemos hablar de modelización de un componente de la praxeología independientemente del resto de los elementos. Postulamos, en consecuencia, que toda modelización matemática presupone la *modelización de una praxeología en su totalidad*, mediante una praxeología matemática. En resumen, desde el modelo epistemológico que propone la TAD:

- Se amplían las nociones de *modelo* y *sistema* reconociendo su estructura praxeológica.

- Consecuentemente, los *procesos de modelización* pasan a describirse ahora en términos de praxeologías y de vínculos entre estas praxeologías.

- No se consideran los *procesos de modelización* independientemente del resto de las actividades matemáticas, ni como *objetos* para ser enseñados, ni como *medios* para la enseñanza y el aprendizaje de determinados conocimientos matemáticos.

- Se sitúa en un primer plano, como objetivo primario, la *enseñanza funcional de las matemáticas*. Para ello se deberá partir de cuestiones problemáticas que se plantean en ciertos ámbitos de la realidad matemática o extramatemática y se va a requerir la construcción de modelos, es decir, de praxeologías matemáticas para poder aportar respuestas a dichas cuestiones. De este proceso, van a surgir nuevas cuestiones, que requerirán seguir con el proceso de modelización con el objetivo de seguir buscando respuestas a las mismas. “Seguir con este proceso de modelización” supone que las praxeologías construidas hasta el momento, junto con las cuestiones que han surgido en este proceso de estudio, puedan adoptar también el papel de sistemas a modelizar y se proceda así a la búsqueda y construcción de nuevas praxeologías más amplias y completas (nuevos modelos) integrando el proceso de construcción de sistemas y modelos previamente construidos.

En definitiva, desde la TAD, proponemos *reformular los proceso de modelización como procesos de construcción y articulación de praxeologías matemáticas de complejidad y* *completitud crecientes* (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004) con el objetivo de dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas con sentido que se han planteado en cierto ámbito de la realidad matemática o extra-matemática. De este proceso de modelización matemático se destaca, como ya hemos indicado, su carácter *reflexivo* y *recursivo*:

- La *recurrencia del proceso de estudio* significa que toda praxeología matemática surge como una ampliación de una praxeología anterior y que, a su vez, es susceptible de admitir un modelo más amplio en términos de una nueva praxeología que la complete.

- La *reflexividad del proceso de modelización* remite a la posible inversión del rol de *sistema* y del rol de *modelo* (cuando ambos son "matemáticos"), como se da, por ejemplo, entre la geometría y el álgebra lineal.

En consecuencia, la modelización matemática así interpretada constituye un *instrumento de articulación de la actividad matemática* escolar. Aunque cabe subrayar dos aspectos esenciales:

- En primer lugar, la modelización matemática no se considera un medio cuyo *objetivo último* sea el de construir praxeologías. En otras palabras, el hecho que se pueda describir el proceso de modelización matemática en términos de reconstrucción de praxeologías de complejidad creciente no significa que esta construcción sea el objetivo de la modelización matemática. El verdadero objetivo de toda actividad científica y, en particular, de la actividad matemática, es el de *resolver cuestiones problemáticas*. Dicho en otras palabras, las praxeologías (construidas a partir de un proceso de modelización) son interesantes y pertinentes en la medida en que nos ayuden a dar respuestas a las cuestiones que van surgiendo a lo largo de un proceso de estudio.

- En segundo lugar, y como consecuencia de todo ello, a partir de ahora, cuando nos refiramos a la *modelización matemática* debemos entender que se trata de una forma de interpretar *cualquier tipo de actividad matemática*. Podemos utilizar, por lo tanto, la expresión "matemática como herramienta de modelización" como equivalente a la más habitual de "modelización matemática".

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DIDÁCTICO DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

En referencia a la *problemática docente* de la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de Ciencias Experimentales (CCEE) que hemos descrito en el primer capítulo, hemos considerado una *primera respuesta* expresada por algunos profesores entrevistados, y documentada por los programas, que podemos considerar la respuesta espontánea de "la enseñanza tradicional" de las matemáticas para CCEE. Dicha respuesta se puede resumir en que primero se deben enseñar unos conocimientos elementales que, como tales, se dan a los estudiantes como instrumentos "ya construidos" sin especificar con claridad ni su origen, ni su razón de ser, ni su ámbito de aplicación para que, posteriormente, éstos puedan aprender a "utilizarlos" o, mejor, a "aplicarlos" a las situaciones problemáticas con las que se puedan encontrar. El tipo de adaptaciones o modificaciones que puedan requerir estos conocimientos para que puedan ser efectivamente "aplicables" se interpreta como un problema secundario (si no en prioridad, sí en cronología) en este nivel de enseñanza. Esta situación refuerza una enseñanza que prioriza el carácter generador de los *elementos teóricos* (teoremas, definiciones, etc.) de las organizaciones matemáticas, restándole fecundidad productiva a los *elementos prácticos* (problemas, técnicas, limitaciones de las técnicas, etc.).

Como ya hemos subrayado anteriormente, uno de los principales inconvenientes que tiene esta organización tradicional de los contenidos de la enseñanza es el de esconder las cuestiones problemáticas que constituyen la *razón de ser* de las nociones, propiedades, técnicas y teoremas que han acabado cristalizando en el saber matemático que se quiere enseñar. Además, debido a que esta organización sitúa las nociones y teoremas en el *origen de la actividad matemática*, se tiende a construir tipos de problemas muy "cerrados" y "aislados" para obtener aplicaciones y ejemplificaciones interesantes de cada una de las nociones o propiedades de cada tema. Dicho en otras palabras, se prioriza la "lógica deductiva" frente a la "lógica constructiva" de los saberes matemáticos. Al mismo tiempo, se relega a un segundo plano (cuando no desaparece totalmente) el proceso de matematización de las cuestiones que se plantean en las diferentes CCEE "desarraigando" así las matemáticas de las otras disciplinas y de los problemas que aportan a muchas construcciones matemáticas sus razones de ser.

En primera instancia, hemos propuesto reformular el problema docente de la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de CCEE en términos de la pérdida de sentido y desarticulación de las matemáticas escolares:

PRIMERA REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DOCENTE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CCEE

¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en los primeros cursos universitarios de CCEE no se reduzcan a un *conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido*, sino que aparezcan de *manera funcional* como herramientas para *dar respuesta a cuestiones problemáticas* dentro de las CCEE?

La respuesta a esta primera reformulación del problema docente consiste en dar una visión más instrumental de las matemáticas como herramienta de modelización (entendiendo la modelización matemática en el sentido como se interpreta en el ámbito de "modelización y aplicaciones"), situando en el corazón del proceso de estudio la actividad de modelización matemática y las cuestiones extramatemáticas (de CCEE) que la generan. Ésta es la propuesta que hace la Universidad de Roskilde con la que introduce un interesante punto de inflexión a la formulación de la problemática presentada hasta ahora basándose en la hipótesis según la cual el uso sistemático de herramientas de modelización nos puede aproximar a la solución del problema de la desarticulación y pérdida de sentido de la matemática enseñada.

En el caso paradigmático de la universidad de Roskilde, conviven en realidad dos respuestas distintas al problema de la enseñanza tradicional en forma de asignaturas (*courses)* de distinto tipo sin una clara conexión entre ellas: por un lado, seguimos teniendo los cursos de carácter tradicional, como por ejemplo, "Intermediate calculus", "Linear algebra with applications" (respuesta de la enseñanza tradicional) y, por otro lado, los cursos dedicados a la modelización matemática, "Mathematical modelling in the Sciences" (que constituye la aportación original de la respuesta de Roskilde). Por lo tanto, a lo que se está realmente aportando respuesta es a la segunda reformulación del problema:

SEGUNDA REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA DOCENTE DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN CCEE

En los primeros cursos universitarios de CCEE, y una vez enseñados los contenidos matemáticos básicos, ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una *herramienta de modelización de situaciones* o *hechos científicos*, de tal forma que la enseñanza no se organice en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar?

Esta respuesta “mixta”, aunque constituye un avance muy significativo en relación a la respuesta espontánea de la enseñanza tradicional, no resuelve de forma muy satisfactoria el problema de la “enseñanza de contenidos”, es decir, de los recursos matemáticos necesarios para llevar a cabo el trabajo de modelización. Surge lo que hemos designado como el *problema de la dualidad*: o bien se enseña la modelización matemática como “un contenido más” de forma separada de la enseñanza de los “contenidos básicos”, o bien se utiliza como un *medio* para la enseñanza de estos contenidos, provocando entonces en los estudiantes lo que Barbosa (2006) designa como la “estrategia inversa” (el problema de modelización no es más que la excusa para aprender un determinado contenido). La propia inercia del sistema condicionada por los programas oficiales redactados de acuerdo con la “infraestructura” pedagógica vigente, conduce a que la enseñanza de la modelización se reduzca a una excusa o pretexto para seguir enseñando los conceptos matemáticos.

La concepción de la modelización que propone la TAD implica que la enseñanza de la modelización matemática se convierta en “sinónimo” de la enseñanza funcional de la actividad matemática. Según la TAD, enseñar matemáticas es enseñar a modelizar o no es. Por lo tanto, desde esta perspectiva, *la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas*. Esta integración constituye un aspecto esencial de nuestro problema de investigación en el cual deja de tener sentido pensar en la enseñanza de la modelización matemática independientemente de la enseñanza de las matemáticas. *El problema de la enseñanza de las matemáticas* (que incluye sus dos sucesivas reformulaciones) *y, por lo tanto, el del papel de la modelización matemática en dicha enseñanza pasa a centrarse en el problema de la recuperación de las razones de ser y de la funcionalidad de la matemática para dar respuesta a cuestiones problemáticas*.

Frente a este problema se propugna la necesidad de buscar una nueva vía, proponer una *reforma en la epistemología escolar* (Chevallard, 2007) que, en contrapunto al “monumentalismo”, deberá poner en un primer plano la relación genuina entre el planteo de *cuestiones problemáticas* y la *búsqueda de respuestas* que está en el origen de la construcción de todo conocimiento científico, en general, y de la actividad matemática (y de la modelización matemática) en particular.

Como todo problema de investigación en didáctica, este problema presenta dos caras inseparables. Por un lado, se trata de un *problema de ingeniería matemática* relativo al análisis de las organizaciones matemáticas presentes en los programas de estudio y en la construcción de nuevas organizaciones matemáticas que surjan para dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas. Y, por otro lado, de un *problema de ingeniería didáctica* relativo al análisis de las organizaciones didácticas que hacen posible la reconstrucción de organizaciones matemáticas más amplias y completas permitiendo la recuperación de sus razones de ser.

Así, este doble problema planteado es un problema de *ecología praxeológica a la vez matemática y didáctica*, es decir, relativo al estudio de las condiciones necesarias y las restricciones que se imponen sobre la "vida" de un determinado tipo de organizaciones matemático–didácticas en el seno de determinadas instituciones y relativo al estudio de las condiciones y restricciones que pesan sobre las organizaciones didácticas que permiten hacer vivir y difundir el tipo de prácticas en cuestión.

Llegados aquí, formularemos que lo que vamos a considerar en esta memoria como *problema didáctico de la modelización matemática*, después de las sucesivas reformulaciones del problema docente. Es un problema de investigación didáctica que incorpora de manera esencial las dimensiones *epistemológica* y *ecológica*:

EL PROBLEMA DIDÁCTICO DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

¿Qué *condiciones se requieren y qué restricciones dificultan* o impiden que las matemáticas se enseñen, se aprendan, se estudien y se utilicen como *herramientas de modelización* en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para CCEE?

¿En qué nivel de la escala de codeterminación matemático-didáctica aparecen estas *restricciones* y en qué nivel deberíamos situarnos para poder considerarlas como *condiciones* "modificables"?

Otra posible formulación del problema, más concreta, se centraría en encontrar los *medios* (dispositivos didácticos) que permitirán esta enseñanza y estudiar su ecología o sus condiciones de vida y desarrollo:

> ¿Qué tipo de *dispositivos didácticos* posibilitarían una integración global (más allá de una experimentación local) de la modelización matemática (interpretada como la TAD propone) en los citados sistemas de enseñanza? ¿Cuál es la ecología de estos dispositivos?

Para responder al problema de la enseñanza funcional de las matemáticas la TAD introduce la noción de *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2005 y 2006) como referente para "pensar, describir e idear" posibles procesos de estudio, analizar los que efectivamente existen en nuestros sistemas de enseñanza y estudiar las "condiciones de posibilidad" de nuevos tipos de procesos. Se considera que un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de generar numerosas cuestiones derivadas, cuyo estudio va a llevar a la (re)construcción de un gran número de praxeologías matemáticas que aparecerán así para dar respuesta a las cuestiones que han requerido de su construcción, integrando en todo momento la modelización matemática como eje articulador del proceso de estudio.

Después de describir a grandes rasgos, en el próximo apartado, las características básicas de los REI, vamos a explicar el caso concreto del diseño y la experimentación de un REI en torno al *estudio de la dinámica de poblaciones* que se ha implementado durante cuatro cursos académicos con estudiantes universitarios de primer curso de ingeniería técnica química de la Universitat Autònoma de Barcelona. La experimentación "local" que hemos realizado, y que vamos a describir con detalle en los capítulos 3 y 4 de esta memoria, nos va a proporcionar la base empírica para empezar a analizar con cierto detalle algunas de las *condiciones* y *restricciones* que inciden sobre la modelización matemática y que aparecen en distintos niveles de codeterminación didáctica, desde los más genéricos hasta los más específicos.

Civilización ➡ Sociedad ➡ Escuela ➡ Pedagogía	➡ Disciplina ➡ Área ➡ Sector ➡ Tema ➡ Cuestión
Niveles genéricos	*Niveles específicos al ámbito matemático*

Figura 4. Los niveles de codeterminación didáctica

Utilizaremos estos *niveles de codeterminación didáctica* (ver Figura 4 y, para más detalles, Cf. Anexo 2, § 3.5) como marco de referencia para situar y analizar el conjunto de condiciones que, desde los niveles más específicos de la propia disciplina (de las cuestiones a las áreas y sectores) hasta los niveles más genéricos (de la escuela a la sociedad y la civilización), condicionan la "vida" y el desarrollo de los REI. Una "integración generalizada" de los REI requerirá extender este *estudio ecológico* a las condiciones y restricciones que aparecen en todos los niveles que influyen y afectan a las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este tema será tratado con detalle en el capítulo 5.

4. HACIA UNA NUEVA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA: LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

Para abordar el problema didáctico que hemos descrito en el apartado anterior proponemos el diseño y la implementación de un nuevo dispositivo didáctico, los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) introducidos por Chevallard (2004, 2005 y 2006) como referentes para el análisis y el diseño de los procesos didácticos. El objetivo de este apartado es el de caracterizar a grandes rasgos la noción de REI.

No es nuestra intención aquí dar una respuesta completa al *problema didáctico de la modelización matemática* que hemos formulado previamente. Dicha respuesta requerirá obtener y analizar diferentes conjuntos de datos empíricos (relativos a la experimentación de ciertos REI concretos, al análisis de materiales curriculares y a la interpretación de las respuestas de profesores sobre el papel de las matemáticas en las CCEE) cuya descripción y análisis serán desarrollados en el capítulo 4. Con la ayuda de estos análisis, propondremos en el capítulo 5 una respuesta más detallada al problema didáctico planteado.

En esta sección *nuestro objetivo es el de fundamentar los REI como un tipo genérico de dispositivos didácticos* cuyo objetivo es el de integrar mecanismos que permitan la "vida" institucionalizada de la actividad de modelización matemática. Más concretamente, mostraremos que los REI aparecen, en primera instancia, como una posible respuesta a dos de las principales restricciones que surgen en los niveles de codeterminación didáctica y que dificultan o incluso impiden la construcción, el desarrollo y la utilización de las matemáticas como instrumento de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de CCEE. En primer lugar, la *incompletitud relativa de las organizaciones matemáticas locales escolares* tal como se puso en evidencia en Bosch, Fonseca & Gascón (2004), restricción que surge en el nivel disciplinar. En segundo lugar, a un nivel más genérico, el de la sociedad-pedagogía, encontramos la denominada *pedagogía monumentalista* que se manifiesta por la ausencia de las "razones de ser" de la matemática escolar y por la consiguiente reducción de la enseñanza y aprendizaje de las diversas disciplinas (y, en particular, de las matemáticas) a la visita de obras cristalizadas y, en cierto sentido, "muertas" (Chevallard, 2004 y 2005).

4.1. El problema del desarrollo y fundamentación de las organizaciones didácticas: respuestas admisibles en el ámbito de la TAD

A lo largo de la historia podemos encontrar múltiples formas de organizar la enseñanza escolar de las matemáticas. Todas ellas se apoyan, en cierta medida, en una manera particular de interpretar las matemáticas – lo que denominamos un *modelo epistemológico* – y en una conceptualización concreta de lo que se entiende por "enseñar y aprender" matemáticas en cada momento histórico, en cada tradición cultural y en cada institución – lo que podemos considerar un *modelo didáctico*. En la medida que los citados modelos se mantienen implícitos, a salvo de todo cuestionamiento y, sobre todo, en la medida en que las citadas formas de organizar la enseñanza de las matemáticas se presentan como si no necesitaran de ningún tipo de justificación ni fundamentación explícita más allá de criterios genéricos que emanan principalmente del sentido común, diremos que se trata de *modelos docentes espontáneos*.

Con la emergencia relativamente reciente del problema de la Educación Matemática han aumentado las críticas a las formas tradicionales de organizar la enseñanza de las matemáticas y, consiguientemente, ha resurgido la necesidad de explicitar los principios que, presuntamente, las fundamentan o "justifican". De esta manera, los modelos docentes que se vienen proponiendo desde mediados del siglo pasado (al menos en los ámbitos relacionados con la innovación y con la investigación educativa) son más "deliberados" y menos "espontáneos" porque se plantean en base a criterios más manifiestos y potencialmente criticables.

Curiosamente la mayoría de los principios que se han esgrimido para fundamentar las propuestas de enseñanza escolar de las matemáticas, especialmente los que figuran en los documentos curriculares oficiales, se basan en postulados de origen *psicopedagógico* que no tienen suficientemente en cuenta ni la especificidad de la actividad matemática ni, por lo tanto, el modelo epistemológico de las matemáticas que implícitamente se está utilizando.

Desde el punto de vista de la TAD, las formas de organizar la enseñanza escolar de las matemáticas se describen en términos de *praxeologías didácticas* y, como tales, presentan una estructura compuesta por dos bloques inseparables: el bloque práctico-técnico (la *praxis* o "saber hacer" didáctico) y el bloque tecnológico-teórico (el *logos* o "saber" didáctico). Como sucede en todas las actividades humanas, la *praxis* didáctica, constituida por las *tareas* y las *técnicas didácticas*, sólo puede vivir con normalidad en una institución si en ésta hay disponible un *discurso "didáctico"* capaz de describirla, generarla (producir criterios para diseñarla y gestionarla), justificarla, interpretarla y desarrollarla. En caso contrario, dicha práctica envejece rápidamente, deja de tener sentido para los sujetos de la institución y acaba siendo reemplazada por otra.

En el trabajo de Bosch & Gascón (en prensa), los autores explican que, para poder abordar el problema de la *génesis, el desarrollo y la fundamentación de las prácticas didácticas*, es imprescindible clarificar la naturaleza del discurso específicamente "didáctico" y esta necesidad comporta, a su vez, reivindicar la autonomía relativa de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Para ello, siguiendo a los trabajos de Chevallard, empiezan situando la *Didáctica de las Matemáticas* en el universo de la *Antropología Cognitiva*[9] y, más concretamente, como parte nuclear de la *Antropología de las Matemáticas*, que toma como objeto primario de estudio las diferentes formas de manipulación social (creación, difusión, utilización y transposición institucional) de las "matemáticas".

En la medida en que podamos cumplir este objetivo estaremos esbozando lo que podríamos denominar un *modelo antropológico general de la cognición matemática*. Se trata, en definitiva, de empezar a determinar algunas condiciones necesarias para que los seres humanos puedan "hacer matemáticas" en las instituciones y, al mismo tiempo, establecer algunas de las restricciones que dificultan, y hasta pueden llegar a impedir, que dicha actividad se desarrolle con normalidad. La formulación de las citadas condiciones y restricciones (que constituyen los componentes del modelo antropológico

---

[9] En Antropología Cognitiva se toman como nociones primitivas las de *objeto*, *individuo*, *relación personal*, *persona*, *institución* y *relación institucional*. Se postula que la relación "personal" a un objeto cualquiera y, en particular, a una praxeología (la relación personal a una praxeología se llama a veces *praxeología personal*) es el fruto de la historia de las sujeciones institucionales pasadas y presentes de la persona en cuestión (lo que puede formularse diciendo que la praxeología personal emerge de una pluralidad de relaciones institucionales). Y, recíprocamente, una institución (tomada en un sentido amplio, no burocrático) así como las diferentes praxeologías a las que sirve de hábitat (denominadas *praxeologías institucionales*), no podrían existir sin sujetos. Éstos son los actores de la institución y, por tanto, los que permiten que las instituciones y sus praxeologías puedan continuar viviendo. Existe, en definitiva, una dialéctica entre las *instituciones*, las *praxeologías* y las *personas* (Chevallard 1985a y 1992).

general de la cognición matemática) dependerá en gran medida de lo se entienda en la TAD por "*hacer matemáticas*" y por "*entrar en el juego de hacer matemáticas*".

Múltiples investigaciones anteriores en el ámbito de la TAD (Bolea, Bosch & Gascón, 2001b; Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005; Bosch, Fonseca & Gascón, 2004; García, Gascón, Ruiz & Bosch, 2006; Sierra, 2006) utilizan una hipótesis básica y muy fecunda del Programa Epistemológico: toda Organización Didáctica (OD) que vive en una institución determinada está sustentada y fuertemente condicionada por el *modelo epistemológico de las matemáticas* dominante en dicha institución. Parte muy importante de estos trabajos ha consistido en explicitar los Modelos Epistemológicos de Referencia (MER) específicos de cada uno de los ámbitos matemáticos en cuestión. Estos MER se han utilizado, en cada caso, como instrumentos imprescindibles para describir y analizar el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución y como auxiliares para caracterizar los modelos docentes espontáneos que se sustentan en el citado modelo epistemológico. El MER ha sido asimismo imprescindible para diseñar, gestionar y evaluar las nuevas organizaciones didácticas propuestas. De hecho, tanto los "modelos epistemológicos ingenuos" como los MER que se han utilizado en las investigaciones citadas, no son puramente "epistemológicos" en el sentido clásico del término sino que deberían considerarse "epistemológico-didácticos" (dada la inseparabilidad entre lo "matemático" y lo "didáctico") o, simplemente "didácticos" en la nueva forma de entender "lo didáctico" que propone la TAD.

En coherencia con esta posición, la didáctica de las matemáticas debe elaborar sus propios *Modelos Didácticos de Referencia* (MDR) que pueden ser considerados como una ampliación de los ya citados Modelos Epistemológicos de Referencia (MER). Una de las funciones esenciales del uso de dichos modelos es la de constituir, para el investigador en didáctica y para la propia disciplina, un instrumento de emancipación de la excesiva sujeción a las diferentes instituciones que forman parte de su objeto de estudio. En particular deben servir para cuestionar, analizar y evaluar (en lugar de aceptar acríticamente):

(a) El *modelo epistemológico* de las matemáticas dominante en las instituciones estudiadas y, muy especialmente el que se toma como transparente e indiscutible en aquellas instituciones "nobles" que, por su prestigio o legitimidad social, aparecen como las encargadas de conformar la institución del "saber sabio" (pero que no por ello dejan de formar parte del objeto de estudio de la didáctica).

(b) Los *modelos didácticos* más o menos espontáneos que constituyen la forma aceptada culturalmente de interpretar la enseñanza y el aprendizaje escolar de las matemáticas y que, en consecuencia, tienen una gran preponderancia en las instituciones docentes. Para el didacta, tradicionalmente encerrado en el aula, es difícil tomar distancia de estos modelos pero se trata de un movimiento imprescindible dado que, de nuevo, los *modelos didácticos espontáneos* constituyen una parte de su objeto de estudio.

Digamos para concluir este apartado que la teoría de los *momentos didácticos* (Cf. Anexo 2, § 3.4), considerados como factores básicos o dimensiones de la actividad matemática institucionalizada, es el instrumento privilegiado de la TAD para describir la dinámica de las organizaciones didácticas. En esta dirección, los trabajos anteriores de Gascón (2001), Bosch & Gascón (2004) han utilizado los *momentos didácticos* para elaborar un "sistema de referencia" que permita construir ciertos *tipos ideales*[10] *de modelos docentes posibles*.

4.2. Marco de análisis de las organizaciones didácticas: primeras carencias de los modelos epistemológicos y didácticos dominantes

Con el objetivo de analizar los *modelos docentes* efectivamente existentes a lo largo de la historia, Gascón & Bosch (2004) eligen tres dimensiones (o momentos) que parecen suficientes para situar los modelos docentes (casi siempre espontáneos) efectivamente existentes a lo largo de la historia de la enseñanza escolar de las matemáticas. Estas tres

[10] Cualquier intento de analizar la extraordinaria complejidad de las organizaciones didácticas efectivamente existentes requiere el uso de ciertos "*tipos ideales*" de modelos docentes, en el sentido de los "*conceptos-tipo ideales*" que introdujo Max Weber para el análisis de los fenómenos de las Ciencias Sociales. Se trata de tipos "teóricos", esto es, los tipos "ideales" de modelos docentes nunca han existido en estado puro en ninguna institución docente, pero son muy útiles para describir los modelos docentes efectivamente existentes: "*La historia de las ciencias de la vida social es y será un permanente intento de ordenar los hechos mediante la construcción de conceptos científicos [o conceptos-tipo ideales]. En las ciencias de la cultura humana, la construcción de los conceptos depende de los problemas que se planteen* […]. (Weber, 1922)

dimensiones forman entonces el espacio tridimensional donde situar el resto de *tipos ideales de modelos docentes*.

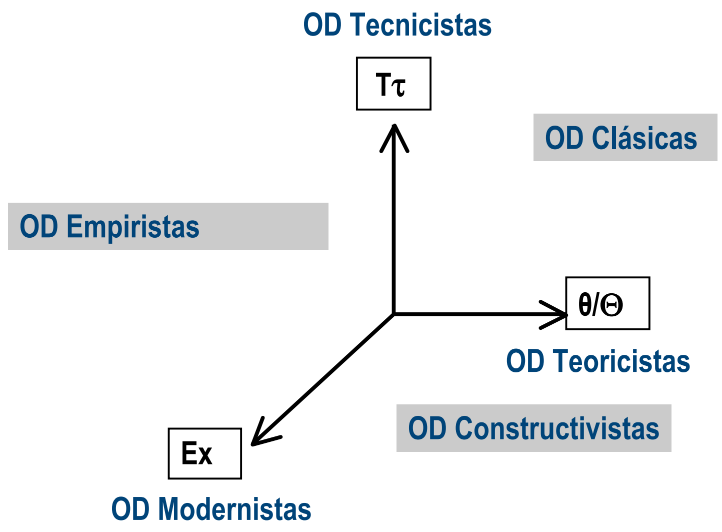


Figura 5. Espacio de los tipos ideales de modelos docentes

Los tres primeros tipos ideales de modelos docentes que se consideran son los que pueden denominarse *unidimensionales* porque cada uno de ellos está caracterizado por dar una prioridad casi absoluta a uno sólo de los momentos o dimensiones del proceso de estudio. Tenemos así, respectivamente, los modelos docentes *teoricistas* (centrados en el momento *tecnológico-teórico*), *tecnicistas* (centrados en el momento del *trabajo de la técnica*) y *modernistas* (centrados en el momento *exploratorio*).

El esquema anterior hace surgir otros tres tipos ideales de modelos docentes, en este caso *bidimensionales* porque integran dos de las dimensiones o momentos del proceso de estudio. Los han denominado respectivamente *clásicos* (centrados en los momentos tecnológico teórico y del trabajo de la técnica), *empiristas* (cuando toman en consideración los momentos del trabajo de la técnica y exploratorio) y *constructivistas* (cuando combinan los momentos exploratorio y tecnológico-teórico).

El análisis de los modelos docentes espontáneos efectivamente existentes a lo largo de la historia muestra que, en general, éstos acostumbran a *privilegiar únicamente dos dimensiones (o momentos) de la actividad matemática*, por lo que podrían situarse hipotéticamente en alguno de los tres "planos coordenados" del esquema anterior.

Aunque los factores que provocan que, en un momento histórico y en una institución docente determinada, se prioricen unas u otras dimensiones de la actividad matemática son muy complejos, podemos considerar en primera instancia su clara dependencia de la *ideología pedagógica dominante* en la institución y, en especial, del *modelo epistemológico* (de las matemáticas) subyacente en dicha ideología.

De hecho, un gran número de investigaciones dentro de la TAD han puesto de manifiesto importantes lagunas y disfunciones de la actividad matemática que es posible llevar a cabo en el seno de las instituciones docentes actuales, carencias que podemos considerar en primera instancia como restricciones vinculadas a la *ideología pedagógica dominante* en la institución y, en especial, del *modelo epistemológico* (de las matemáticas) y *didáctico* subyacente en dicha ideología. Su formulación nos permitirá introducir el *modelo didáctico de referencia* que propone la TAD para el análisis, diseño, gestión y evaluación de las praxeologías didácticas. Esquemáticamente podemos describir dos de estas carencias como sigue:

(a) La *incompletitud relativa* de las organizaciones matemáticas locales escolares en Secundaria (Fonseca, 2004 y Bosch, Fonseca & Gascón, 2004), ligada a las *restricciones escolares que impiden el desarrollo de algunos momentos didácticos*, como el tecnológico-teórico, el del trabajo de la técnica y, más parcialmente, el de la evaluación – muy centrada en los alumnos y que raramente afecta a las praxeologías matemáticas efectivamente construidas en el aula – o el de la institucionalización – que sólo alcanza de manera muy selectiva unos pocos ingredientes de dichas praxeologías.

(b) El llamado "*monumentalismo*" de las matemáticas enseñadas (Chevallard, 2004 y 2005), que en breve vamos a explicar con más profundidad, correlativo al "olvido" de la razón de ser de la mayoría de praxeologías que se construyen en el aula, olvido que se manifiesta en la ausencia escolar de las cuestiones (intramatemáticas o extramatemáticas) a las que responden las matemáticas enseñadas.

Podríamos considerar, en primera instancia, que las anteriores "carencias" son esencialmente de origen *epistemológico* al tratarse principalmente de características que afectan a los componentes de las praxeologías matemáticas. Pero, en realidad, los dos fenómenos didácticos brevemente descritos hacen referencia a las *condiciones de* *posibilidad* y a las *restricciones* que dificultan, o incluso impiden, la génesis y el desarrollo *institucional* de las praxeologías matemáticas. En consecuencia, alcanzan también los niveles superiores de la escuela, sociedad y civilización. En este sentido, podríamos continuar diciendo que son de origen "epistemológico" sólo con la condición de aceptar la ampliación radical de la epistemología que propone la TAD, al situarla en el ámbito de la *Antropología Cognitiva* (Chevallard, 1990 y Gascón, 1993, pp. 299 - 302).

Por lo tanto, la respuesta a las citadas disfunciones deberá venir dada por una forma de organizar las prácticas didácticas institucionalizadas que tome en consideración criterios no sólo epistemológicos (en el sentido restrictivo del término), sino también otros criterios antropológicos (didácticos, pedagógicos, escolares y sociales) capaces a superar las restricciones que hemos citado anteriormente. Este conjunto de criterios empezarán a conformar un discurso tecnológico de naturaleza "didáctica" que Bosch & Gascón (en prensa) presentan como un primer esbozo de un *modelo antropológico de la cognición matemática* en el sentido de modelo de las condiciones que requiere y las restricciones que dificultan la génesis y el desarrollo de la relación personal de los sujetos de una institución a las praxeologías matemáticas.

En las próximas secciones, empezaremos a esbozar la estructura y la dinámica de un nuevo tipo de *dispositivos didácticos* que pretenden superar las dos grandes restricciones que hemos descrito. Este nuevo tipo de dispositivos didácticos, cuya completa implantación en los actuales sistemas de enseñanza no deja de ser problemática, contiene, en cierta forma, un *modelo epistemológico* de las matemáticas, un modelo de la *enseñanza y del aprendizaje* de las matemáticas y hasta un modelo "*cognitivo*" en el sentido anteriormente mencionado. Empezaremos describiendo con más detalle el segundo de los fenómenos citados porque lo consideramos el más fundamental. Se trata de lo que Chevallard (2004) denomina el "monumentalismo" de las matemáticas enseñadas, cuya superación plantea un gran reto a nuestra sociedad: la necesidad de introducir una epistemología escolar renovada que luche contra esta monumentalización de los saberes y se dirija a establecer con ellos una relación menos "reverente" y más funcional.

4.3. Hacia una nueva epistemología escolar: contra la monumentalización de los saberes enseñados

Yves Chevallard (2007) subraya que cuando se examina un episodio de estudio siempre se puede identificar un *sistema didáctico* en el cual podemos reconocer diversas entidades: la comunidad *de estudio e investigación* (X), la comunidad de *ayuda al estudio* (Y) y, por último, el *proyecto común* que tienen ambas entidades que vamos a representar por ♥. Los sistemas didácticos quedan así formados por sus tres componentes principales que acabamos de describir: $S(X, Y; ♥)$ y están fuertemente determinados por ♥ y por la forma de organizar su estudio, es decir, por la organización didáctica OD(♥) asociada.

Una vez descritas estas condiciones, aparecen muchas cuestiones que hacen referencia a la *naturaleza* de ♥: ¿Qué designa ♥ como corazón o motor del funcionamiento de un sistema didáctico? ¿Cuáles deberían ser los resultados de un proyecto de estudio? Según Chevallard:

> L'enjeu didactique ♥ est une question Q – une question en *Comment?* ("Comment effectuer mentalement la division d'un entier par un entier que l'on sait décomposer en facteurs plus petits que 10?"), qui appelle en réponse une technique, ou une question en *Pourquoi?* ("Pourquoi peut-on "laisser tomber" les restes dans les divisions successives d'un entier par les différents facteurs d'une décomposition donnée du diviseur?"), qui appelle une réponse *technologico-theórique.* (*Ibid.,* p. 21)

En este sentido, podemos decir que lo que vive en el corazón de los proyectos de estudio son todas aquellas cuestiones problemáticas Q_0 cuyo estudio nos va a llevar a la construcción o reconstrucción de praxeologías para poderles dar respuesta. En coherencia con esta visión del estudio, un programa de estudios P debería estar formado por un cierto número de cuestiones, que podemos expresar como $P = (Q_i)_{1 \leq i \leq n}$, cuyo estudio nos lleva a la búsqueda y construcción de respuestas R aceptables y válidas para el sistema didáctico, para la escuela, la sociedad y la cultura. Así por ejemplo, si X es un grupo de estudiantes de una clase e Y un profesor que se proponen estudiar una cuestión problemática Q_0, su estudio les va a llevar a la reconstrucción de una respuesta R, esto es, $S(X, Y; Q_0) \rightarrow R$. En este sentido, lo que deberíamos encontrar en los programas de estudio es un conjunto de cuestiones que constituirían la "razón de ser" y otorgarían legitimidad a las respuestas que apareciesen, $P = (Q_i\,;R_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pero desafortunadamente esta situación difiere mucho de la que encontramos:

> Mais bientôt, par un court-circuit culturel et didactique, «étudier Q» est regardé comme un synonyme inutile d'une expression qui, institutionnellement, la supplante : «apprendre R» […] (*Ibid.*, p. 21)

Entonces, estas cuestiones Q_i, que han sido la motivación de la construcción de las respuestas R_i, tienden a ser ocultadas y finalmente desaparecen de los programas de estudio, quedando en ellos las respuestas R_i de las cuales acaba por no saberse ni cuál es su origen ni su función.

De esta manera, lo que en realidad encontramos en los programas es una conjunto de respuestas, $P = (?\,;R_i)_{1 \leq i \leq n}$, que dejan de ser vistas como tales puesto que ya no están presentes las cuestiones Q_i que les dieron origen y pasan a considerarse como "obras de la cultura" dotadas de algún valor en o por ellas mismas. Los programas $P = (\,R_i\,)_{1 \leq i \leq n}$, se reducen a una sucesión de obras R_1, R_2, …, R_n a estudiar, o mejor dicho, a "visitar", huérfanas de su "razón de ser".

Debemos subrayar que las respuestas R_i son, en realidad, praxeologías matemáticas que se construyeron en cierto momento como respuestas a un conjunto de cuestiones problemáticas que, demasiado a menudo, parecen haber desaparecido de la cultura escolar. Esto no quiere decir que no puedan existir nuevas cuestiones problemáticas que podrían dar a estas respuestas *nuevas razones de ser* ni, mucho menos, que estas cuestiones correspondan necesariamente ni prioritariamente a las razones históricas de creación de estas respuestas. Éste es, de hecho, uno de los principios de funcionamiento de los procesos transpositivos cuando *actualizan* los saberes a enseñar y los dotan de *nuevas condiciones para su enseñanza en la escuela*. Pero la evolución histórica de los procesos transpositivos nos ha conducido a una situación en la cual cierta tradición institucional ha llevado a considerar que los bloques del saber $S_i = [\theta_i, \Theta_i]$ se motivan por ellos mismo, es decir, incluyen su propia razón de ser. Chevallard lo explica en los términos siguientes:

> Alors que la réponse R était socialement précieuse parce que, précisément, elle répondait à la question Q, l'œuvre R est considérée maintenant *pour elle-même*: on la visite avec

> déférence comme un monument qui a perdu sa fonctionnalité, que l'on honore formellement, et qui n'a plus que de rares emplois, adventices, opportunistes, minuscules. C'est là une tendance que j'ai nommée la *monumentalisation* des savoirs (et, plus largement, des praxéologies), qui, de la part des institutions comme des personnes, peut aller jusqu'à une passion sombrement *fétichiste*. (*Ibid.*, p. 22)

De hecho, todas las praxeologías son "artificiales", esto es, productos o artefactos de la cultura humana que, muy a menudo, las clasifica en praxeologías "buenas" o "malas". En la plenaria de apertura del CERME 6, Chevallard (2006) apuntaba muy críticamente la necesidad de crear una nueva epistemología escolar y luchar así contra lo que él mismo denomina el régimen de la *epistemología monumentalista*, que tiende a menospreciar las praxeologías como un "todo" para valorar únicamente su componente teórico:

> The *bad* one is a praxeology as such, that is, an organised body of notions, ideas, statements, justifications and explanations – the logos part – and the way of performing a certain type of task (solving quadratic equations, blowing one's nose, composing a fugue, or archiving no matter what), which make up the "praxis" part. The *good* object is the praxeology once we have blanked out what it was here for, that is the praxeology deprived of its inbuilt uses. (*Ibid.*, p. 5)

Bajo esta concepción, las praxeologías rápidamente se convierten en *monumentos*,

> […] that is, things notable and great, fine and distinguished, but which, paradoxically, are effective in helping us to forget what they stand for – what was exactly was the thing "monumentalised". (*Ibid.*, p. 5)

Las praxeologías son estudiadas en el sistema de enseñanza no por lo que nos permitan hacer o responder sino por ellas mismas. Los estudiantes son invitados a "visitar" estos cuerpos de conocimiento (y, si es posible, a honrarlos y venerarlos). Pero ¿cuál es el modo usual de convertir una praxeología en un monumento? El modo usual es "arrancar" de estas praxeologías las auténticas situaciones matemáticas que *llevaron* o *podrían llevar* a la construcción de esta praxeología.

Es por ello que se propugna concentrar todos los esfuerzos en buscar una nueva vía, una nueva epistemología escolar, la que, en contrapunto al "monumentalismo", debe poner en primer plano la búsqueda de las *razones de ser* (Q) de las praxeologías, esto es, las razones por las cuales las praxeologías (R) serán exploradas, estudiadas y correctamente utilizadas con el fin de proporcionar herramientas útiles para resolver problemas que se plantean en la escuela y en nuestra sociedad.

4.4. Fundamentación epistemológica de las organizaciones didácticas propuestas en la TAD: de las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) a los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

4.4.1. Las Actividades de Estudio e Investigación: ¿cómo introducir el estudio de organizaciones matemáticas locales relativamente completas?

En contra de un punto de vista “monumentalista” que pone en primer plano el estudio o “visita” de los saberes y que rechaza, incluso olvidando, la dialéctica (Q, R) aparece en el punto de vista “funcional” que persigue resituar en el corazón de los procesos de estudio el estudio de cuestiones Q y la elaboración de respuestas R. Persiguiendo este propósito aparece aquí la reforma propuesta por la pedagogía de las *Actividades de Estudio e Investigación* (AEI) cuya esencia se fundamenta en la noción de las *situaciones fundamentales* propuestas en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Guy Brousseau (1997).

Esta primera propuesta de luchar contra la aproximación “monumentalista” consiste en tomar como punto de partida un programa de estudios organizado en forma de “temas” que se pueden asociar, en la institución escolar considerada, con organizaciones matemáticas locales (OML) más o menos interrelacionadas entre ellas en bloques o ámbitos temáticos particulares. El problema que se plantea el profesor es el de cómo enseñar, es decir cómo establecer, construir o “poner en marcha” en la clase la OML considerada de tal forma que ésta aparezca como la respuesta a una cuestión problemática que le aportará una *razón de ser*. La noción AEI aparece entonces como un nuevo dispositivo didáctico para aportar respuestas efectivas a este complejo problema del profesor y, en especial, para superar la primera de las restricciones que hemos señalado en el seno de las instituciones docentes actuales y que provoca importantes disfunciones en la actividad matemática que es posible desarrollar en su seno: nos referimos a la *incompletitud relativa* de las organizaciones matemáticas escolares (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004). Así, en cierta manera, las AEI retoman la preocupación de la reconstrucción funcional de los conocimientos matemáticos como respuesta a ciertos tipos de situaciones problemáticas y sitúan las cuestiones Q en primera línea, en el corazón de la construcción de conocimientos matemáticos. Tal como indica Chevallard (1999) toda AEI surge de una cuestión generatriz Q_0 que permite hacer surgir un tipo de problemas y una técnica de resolución, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se está desarrollando.

Las AEI introducen la *razón de ser* de la OML que se quiere construir a partir del estudio de una "situación del mundo" a la que se tiene que dar respuesta. No sólo supera la estructura binaria clásica: "teoría + problemas" basada en una epistemología euclidiana ("aplicacionismo") estrechamente vinculada al "monumentalismo" sino que, además, promueve una epistemología "funcionalista" que concibe las matemáticas como un instrumento para aportar respuestas a cuestiones problemáticas que se plantean "en el mundo" (y no únicamente en la escuela) y plantea como tarea del profesor el problema de la búsqueda de una "razón de ser" de las OML curriculares y la necesidad de considerarla como un elemento central de las organizaciones didácticas.

Así, dada una OML a enseñar previamente establecida, el profesor busca una "situación del mundo" en la que aparezca una cuestión problemática cuya resolución permita la reconstrucción de la OML en cuestión. Ahora, el momento del *primer encuentro*, se retrotrae a la cuestión generatriz, en bruto, en lugar de iniciarse con una tarea escolar ya depurada (carácter adidáctico de la situación). El momento *exploratorio* puede estar más o menos dirigido por el profesor pero, en todo caso, está "guiado" por la construcción e interacción con un *medio*. Se destaca en todos estos momentos un nuevo reparto de responsabilidades entre profesor y alumnos. Se incorpora ahora en el topos del alumno la posibilidad de participar en la gestión de casi todos los momentos incluidos los que complementan a los anteriormente citados: *tecnológico-teórico* y *evaluación*.

Llegados a este punto debemos destacar algunas limitaciones de las AEI: dado que el objetivo último de una AEI es la construcción de una OML previamente establecida, la cuestión generatriz es propuesta por el profesor en función de la OML "objetivo". Ésta es, por lo tanto, una cuestión impuesta por necesidades didácticas y corre el riesgo de perder sentido, de subordinarse a la OML. Debemos destacar también que los alumnos no participan en el planteamiento y formulación de la cuestión; esta responsabilidad recae en la figura del profesor que elige la cuestión generatriz en base a una OML que considera como objetivo.

Además la integración de OM puntuales que promueven las AEI no va más allá del nivel local y, por tanto, no permite superar del todo el "autismo temático" del profesor. Muchas veces las cuestiones que dan a la OML una razón de ser se hallan más allá del nivel local, regional, sectorial e incluso disciplinar. Por último, el paso de una AEI a otra AEI no está "motivado" funcionalmente por la propia actividad.

La escasa presencia de AEI en los actuales sistemas de enseñanza responde a la ausencia de una *infraestructura matemático – didáctica* que la haga posible. El análisis de esta infraestructura constituye un aspecto esencial de la *dimensión ecológica* del problema de la existencia de OML que será tratado con detalle en el capítulo 5 de esta memoria.

4.4.2. Los Recorridos de Estudio e Investigación como propuesta de procesos de estudio funcionales

Uno de los principales objetivos y, a la vez, características de los REI, siguiendo a Chevallard (2009b), es el de introducir una nueva epistemología en la escuela cuyo paradigma central viene a reemplazar el *paradigma escolar de "inventariar" los saberes* por un *paradigma de cuestionamiento del mundo* con el que se da sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, superando el autismo temático y transportando a la escuela una actividad de estudio de cuestiones más cercana al ámbito de la investigación:

> […] en lieu et place d'une lecture *inventoriante* de l'univers des savoirs, donc, une lecture *questionnante* du monde (y compris du monde des savoirs!). Dans ce paradigme, on va à l'école – tel est le contrat entre société et école – non pour visiter des savoirs regardés comme désirables en eux-mêmes mais pour interroger sur le monde et interroger le monde. (*Ibid.*, p. 12)

La formalización de la situación que acabamos de describir se puede representar como:

$$S(X;Y;Q) \to R^{\heartsuit}$$

donde el principal objetivo del "sistema didáctico" (esto es, de la comunidad de estudio e investigación (*X*) que desarrolla el estudio de la cuestión problemática *Q*, bajo la supervisión y dirección de *Y*) es el de aportar una respuesta $R^{\heartsuit}$ a *Q*. Toda puesta en marcha de un proceso de estudio requiere entonces de ciertos *media* adecuados para la recuperación de respuestas preestablecidas disponible y de los *medios*[11] para su reconstrucción y validación en aras a construir $R^{\heartsuit}$. Todos estos elementos son los que conforman el denominado *medio didáctico M* que se deberá identificar, aprender a usar y gestionar adecuadamente para que sea de utilidad en la búsqueda y construcción de $R^{\heartsuit}$. Este requisito se puede formalizar como sigue:

$$\left[S(X;Y;Q) \rightarrow M\right] \rightarrow R$$

El "medio didáctico", *M*, está formado por dos conjuntos de elementos clave:

$$M = \left\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\right\}$$

Un conjunto de "respuestas preestablecidas" y, en cierto sentido, "etiquetadas", $R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}$, que representan las respuestas previamente construidas en relación a *Q* a cuales podemos tener acceso. Se compone además de las necesarias "obras" $O_{n+1}, \ldots, O_m$ que resultan de utilidad para la "deconstrucción" de las respuestas $R_i^{\lozenge}$, esto es, las herramientas necesarias para "deconstruir" las respuestas preestablecidas, respuestas que fueron en su momento construidas para tratar cuestiones relativamente diferentes de las que se están ahora planteando. Estas respuestas deben ser finalmente "reconstruidas" e incorporadas de acuerdo con las propias necesidades de $R^{\heartsuit}$. En este sentido, cualquier respuesta preestablecida (u obra cultural) $R^{\lozenge}$ va a ser "buena" para nuestro proceso de

---

[11] En francés se utilizan los términos "*médias*" y "*milieux*". Se entiende por *médias* una generalización de la noción de "mass media", en el sentido de "medios de comunicación de masas" (así, un libro de texto es un *média*, como también lo es el curso que un profesor imparte, un programa de TV o una web disponible). La noción de *milieu*, utilizada inicialmente en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), se utiliza aquí para referirnos a cualquier sistema desprovisto de intención didáctica y que, por lo tanto, en relación a un proceso de estudio determinado se comporta como un "fragmento de naturaleza". Es importante subrayar la *relatividad* de las funciones de los *médias/milieux* dependiendo de la cuestión problemática que se trate, del proceso de estudio y de la institución en la cual este proceso se lleve a cabo.

estudio si nos permite producir un elemento de respuesta a $R^{\blacktriangledown}$ a partir de un proceso de deconstrucción o reconstrucción esencial. En resumen, podemos formalizar la noción de los REI con el esquema siguiente:

$$\left[S\left(X;Y;Q_0\right)\rightarrow\left\{R_1^{\lozenge},R_2^{\lozenge},\ldots,R_n^{\lozenge},O_{n+1},\ldots,O_m\right\}\right]\rightarrow R^{\blacktriangledown}$$

A continuación, vamos a clarificar el significado de este esquema y a describir algunas de las propiedades generales de los REI. Veremos que estas propiedades aparecen como una respuesta apropiada a las carencias que están en el origen de algunas de las restricciones que inciden sobre la integración de la modelización matemática.

1REI. *Las cuestiones generatrices son el punto de partida de los procesos de estudio*

El punto de partida de un REI debe ser una cuestión "viva" para la comunidad de estudio, que denotaremos por Q_0 y a la que llamaremos *cuestión generatriz* del proceso de estudio. Ésta no debe ser una cuestión impuesta por el profesor por ciertas necesidades didácticas que éste se proponga, en otras palabras, el objetivo de plantear Q_0 no es el de la construcción de cierta OM fijada de antemano sino que el objetivo de plantear Q_0 es su estudio, es decir, la búsqueda de respuestas a Q_0 se debe convertir en un fin en sí mismo.

Esta cuestión generatriz Q_0 debe ser "tomada en serio" por la comunidad de estudio ya que su respuesta debe permitir actuar en algún sentido importante (vital) durante el proceso de estudio. Esta respuesta buscada no se puede limitar a una simple "información", el estudio de Q_0 debe requerir la construcción de toda una organización matemática como respuesta, es decir, la construcción de un conjunto de tipos de problemas, de técnicas para resolver estos problemas, y de elementos tecnológico-teóricos que permitan explicar y justificar el trabajo realizado (Chevallard, 1999). Nos referiremos a ello diciendo que la cuestión Q_0 debe requerir una respuesta en "sentido fuerte".

La cuestión Q_0, junto con las diversas cuestiones que se derivarán de su estudio, van a ser en realidad el *origen*, *motor* y *razón de ser* de todo el proceso de estudio. Q_0 deberá entonces estar presente durante todo el proceso de estudio y actuar como eje articulador de dicho proceso. La gran derrota sería que Q_0 se sustituyera por alguna cuestión alternativa (Q_0^*) con respuesta preestablecida y, en cierto sentido cerrada, con el peligro de que Q_0 se convirtiese entonces en un simple "artefacto" decorativo y oportunista y caer de nuevo en una "epistemología monumentalista de los saberes":

> Lorsqu'on tente de parcourir une autre voie [différente du monumentalisme épistémologique] en mettant les questions *Q* au point de départ et les réponses *R* au point d'arrivée, la pesanteur du passé se traduit par la domination à peine paradoxale d'une posture en vérité occasionnaliste. Peu importe alors, à la limite, la réponse *R* apportée à la question *Q*, pourrait-on dire ; il suffira que son élaboration soit l'occasion de rencontrer des savoirs reconnus et d'amorcer des apprentissages orthodoxes ! (Chevallard, 2004, p. 5)

Un programa de estudios coherente con una enseñanza basada en los REI debería permitir que el conjunto de las cuestiones generatrices Q_0 se pudiera organizar en torno a grandes tipos de cuestionamientos con un sentido y actualidad social.

2REI. *Los REI tienen una estructura "arborescente" como consecuencia de la búsqueda de respuesta a las cuestiones Q_0*

A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q_0 evoluciona y da lugar al planteo de muchas nuevas "cuestiones derivadas": Q_1, Q_2,…, Q_n cuya pertinencia debe ser constantemente cuestionada. En este sentido, el criterio esencial para decidir sobre la pertinencia y buena formulación de Q_i es su capacidad de proporcionar respuestas R_i que ayuden a elaborar una respuesta a Q_0.

El estudio de Q_0 y de sus respectivas cuestiones derivadas conduce a la búsqueda de respuestas y con ello a la construcción de un gran número de saberes que delimita el mapa y límites provisionales del "territorio" del proceso de estudio. Este proceso, que podremos sintetizar como un conjunto o cadena de cuestiones y de respuestas, contendrá las posibles trayectorias a "recorrer" generadas a partir del estudio de Q_0

$$Q_0 \rightarrow \begin{cases} (Q_0^{'}, R_0^{'}) \rightarrow (Q_1^{'}, R_1^{'}) \rightarrow \cdots \rightarrow (Q_p^{'}, R_p^{'}) \\ (Q_0^{''}, R_0^{''}) \rightarrow (Q_1^{''}, R_1^{''}) \rightarrow \cdots \rightarrow (Q_q^{''}, R_q^{''}) \\ \qquad\qquad \cdots \end{cases}$$

Postulamos entonces que el trabajo de producción o construcción de $R^{\heartsuit}$ podrá describirse como una arborescencia de cuestiones Q_i y de respuestas provisionales (R_i = OM$_i$) relacionadas entre sí por un *proceso de modelización progresiva y recursiva*.

Destacamos así la importancia del diseño matemático a priori para garantizar la fecundidad de las cuestiones generatrices iniciales. Aunque no se debe olvidar que en el desarrollo de un REI pueden aparecer nuevas cuestiones "cruciales" a estudiar no previstas de antemano. Se destaca así el *carácter abierto* (no cerrado) *y dinámico* (no estático) de los REI que, en muchas ocasiones, nos puede llevar a plantear cuestiones que traspasen los límites del marco de la propia disciplina que la tradición ha delimitado. Según Chevallard (2004, p. 7):

> Un PER (Parcours d'Etude et de Recherche) « en mathématiques » est ainsi presque nécessairement, de par son absence de normalisation épistémologique *a priori*, une affaire de mathématiques *mixtes*, où des objets mathématiques, majoritaires, se mêlent à des objets relevant d'autres univers de l'activité humaine.

3REI. *Los REI requieren el paso por diferentes AEI que provocan la integración de diferentes organizaciones matemáticas locales en estructuras más complejas y completas*

En cierto sentido, esta característica de los REI, lejos de ser independiente a las anteriores, responde en concreto a las limitaciones previamente destacada de las AEI. Uno de los propósitos de los AEI era el de integrar diferentes OM puntuales en una OM local, aunque hemos destacado que esta integración no llega a traspasar el nivel local y, además, el paso de una AEI a otra no está "motivado" funcionalmente por la propia actividad.

Podemos decir en esta dirección que, en un REI, la búsqueda de la respuesta $R^{\heartsuit}$ requerirá el "paso" (la construcción y el estudio) por diferentes AEI. Esto nos va a llevar a que las cuestiones que se derivan de Q_0 se planteen y requieran la construcción de OM cada vez más amplias y completas que acabarán conformando una estructura articulada de OM de complejidad creciente. Para ello, la *modelización matemática va a tener que tomar un papel esencial en este proceso*, situarse en el corazón de la actividad (o, mejor dicho, ser la propia actividad matemática) permitiendo así que se articulen las diferentes

OM y se integren en estructuras praxeológicas cada vez de más amplias y completas (pasando por la construcción de OM locales a la integración de éstas en OM regionales e incluso OM globales). Las OM son creadas con el objetivo de dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas que se han derivado del estudio de Q_0 y, a la vez, han surgido del trabajo realizado en la construcción de OM previas con las que no se han podido dar respuestas completas.

Una de las consecuencias de esta caracterización es que, en el caso concreto de partir de estudio de cuestiones que se plantean en sistemas extramatemáticos (veremos ejemplos concretos de ello en los próximos capítulos) la primera respuesta y las sucesivas respuestas a cuestiones que van apareciendo a lo largo del proceso, se estructuran en términos de praxeologías. Esto significa que estas OM son *constitutivas del conocimiento científico*. En otros términos, la posibilidad de proporcionar una respuesta científica no existía antes de la construcción de la praxeología matemática en cuestión.

4REI. *En un REI la construcción de la respuesta deseada $R^{\heartsuit}$ requiere que las sucesivas respuestas "externas" $R_i^{\Diamond}$, aportadas por los media, se contrasten experimentalmente con los medios O_j apropiados.*

Esta "*dialéctica de los medios y los media*" hace referencia, por un lado, a la necesidad de disponer, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales R_i, de algunas respuestas preestablecidas $R_i^{\Diamond}$ accesibles a través de los diferentes medios de *comunicación y difusión: los media.* En el caso de las matemáticas, estos *media* son cualquier fuente de información como, por ejemplo, los libros de texto, tratados, artículos de investigación, apuntes de clase, etc. Pero, las respuestas $R_i^{\Diamond}$ son construcciones que se han elaborado para dar respuesta a cuestiones relativamente diferentes a las que se pueden plantear durante el proceso de estudio y, por lo tanto, deben ser, en cierta medida, "deconstruidas" y "reconstruidas" en función de las propias necesidades. Para y por ello se van a necesitar otros tipo de *medios*, instrumento indispensable para poner a prueba la validez de estas respuestas.

Esta característica de los REI es coherente con el carácter recursivo de la modelización matemática. La cuestión Q_0 surge en el marco de un sistema inicial S_0 que se modeliza inicialmente con un conocimiento disponible $R_1^\lozenge$. Su desarrollo y contraste con un medio $\{O_{1i}\}$ provoca la aparición de nuevas cuestiones Q_i en un nuevo sistema S_1 que engloba $R_1^\lozenge$ y $\{O_{1i}\}$. El proceso sigue con la consideración de nuevos sistemas S_2, S_3, etc. cada vez más complejos y más matematizados.

Digamos para acabar, que los procesos de estudio basados en los REI requieren no caer en el error de defender las respuestas $R^\heartsuit$(y $R_i^\lozenge$) como respuestas "definitivas" e "incuestionables" a la cuestión Q. Por el contrario, el *cuestionamiento explícito* y *constante* de las "respuestas provisionales" que se van obteniendo debe incorporarse en todo momento a la actividad. Éste será en realidad el *motor del proceso de modelización* y, por lo tanto, de la estructura arborescente y articulada de los REI.

La introducción de la noción de los REI en los sistemas de enseñanza conduce, como ya hemos dicho, a plantear la necesidad de (re)definir los programas de estudio en términos de un conjunto de cuestiones "cruciales". En el caso que el currículo oficial haga obligatorio el estudio de ciertas organizaciones matemáticas locales (OML), entonces se plantea el problema de "organizar" dichas cuestiones de tal forma que los REI generados por ellas recubran las OML en cuestión.

El siguiente capítulo presenta una posible respuesta a esta situación. Mostraremos cómo un currículo oficial tradicional (como el de las matemáticas para un primer curso universitario de CCEE) puede "recubrirse" mediante un pequeño conjunto de REI basados, en nuestra propuesta, en la cuestión del estudio de la dinámica de poblaciones. El estudio de esta cuestión conduce a la consideración de diferentes REI según las propiedades del sistema que se consideren: poblaciones con generaciones separadas o mezcladas y tiempo discreto o continuo.

CAPÍTULO 3

DISEÑO MATEMÁTICO DE LOS REI

EN TORNO AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES

1. PROPUESTA DESCRIPTIVA DE LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

En el capítulo anterior hemos presentado las características básicas en las que se fundamenta la propuesta de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). En el momento de diseñar, poner en marcha y evaluar algunos de estos REI para un primer curso universitario de CCEE, es necesario tomar en consideración tres niveles de análisis. Los dos primeros corresponden a lo que llamamos *niveles de ingeniería matemática y didáctica*, esto es, al *diseño a priori* de los REI, primero desde el punto de vista de su "potencial matemático" y después especificándolos a una institución docente y unas condiciones de organización escolar particulares. El tercer nivel corresponde a lo que podemos designar como el *nivel empírico* o *experimental* en el que se presenta una descripción completada con un *análisis a posteriori* de una puesta en marcha real de los REI.

Este capítulo se centra en el primer nivel de análisis que corresponde a un trabajo de *ingeniería matemática* y que incluye una presentación de la cuestión inicial así como un "mapa" de posibles trayectorias a recorrer durante su estudio. Es lo que designamos como el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) del REI considerado. Este análisis de un "universo de los posibles" permite, por un lado, poner en evidencia el potencial de la cuestión inicial como cuestión generadora de un proceso largo de estudio. Y, por otro lado, constituye un punto de referencia tanto para el diseño de los recorridos concretos (nivel de *ingeniería didáctica*) como para el análisis de su puesta en marcha (nivel *experimental*).

1.1. Primer nivel de análisis: mapa de posibles recorridos (nivel de ingeniería matemática)

Toda investigación en didáctica supone que se fije, de manera explícita, una posición desde la cual *observar* e *interpretar* los hechos didácticos. Desde la TAD, esta condición va a requerir del estudio y construcción de la organización matemática de referencia o, lo que hemos introducido como *Modelo Epistemológico de Referencia* (MER) que va a constituir, para el investigador y para la propia disciplina, un instrumento de emancipación de la excesiva sujeción a las diferentes instituciones que forman parte de su objeto de estudio. La construcción del MER constituye un instrumento imprescindible para la descripción y el análisis de las diferentes Organizaciones Matemáticas (OM) que intervienen en el proceso de transposición didáctica (ver Figura 1):

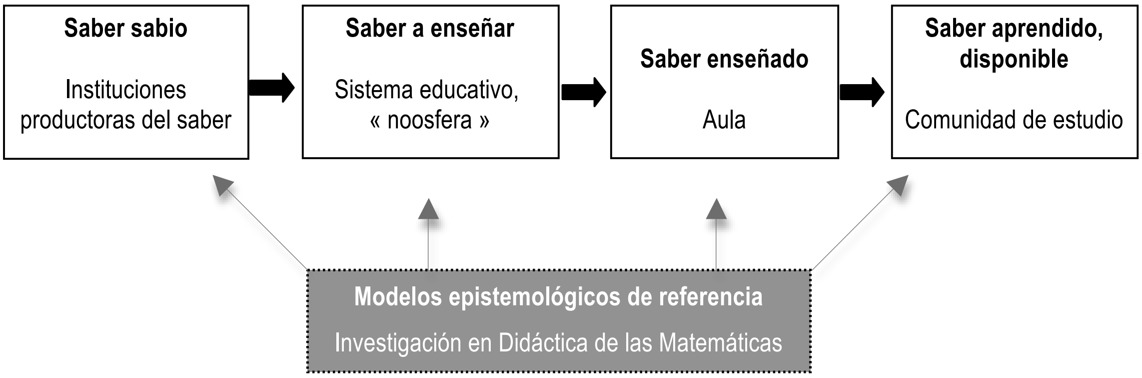


Figura 1. La posición 'externa' que deben asumir los investigadores en didáctica (Bosch & Gascón, 2006)

En el caso de los REI, el diseño del MER consistirá en el diseño matemático a priori de las OM que van apareciendo con el fin dar respuesta a la cuestión generatriz del proceso de estudio Q_0 y a sus correspondientes cuestiones derivadas, mostrando a la vez la relación que hay entre las diversas OM que pueden aparecer en el proceso de estudio de Q_0 y la manera como se van completando y articulando en estructuras de complejidad creciente.

Respetando las características de los REI, este "mapa" se formulará en términos *cuestiones* y de *respuestas* (Q_i, R_i), esto es, en términos de las posibles ramificaciones de la cuestión generatriz Q_0 (reformulaciones de Q_0 y cuestiones derivadas de ella) y de las respectivas respuestas intermedias o provisionales que la construcción de las OM correspondientes van proporcionando. Es aquí donde se van a detectar y describir aquellas cuestiones que van a aparecer durante o después de una "etapa" de modelización matemática, esto es, de construcción de una OM para poder dar respuesta a las cuestiones que se hayan planteado en un sistema matemático o extra-matemático, y que van a motivar y dar razón a un nuevo proceso de modelización con la construcción de una nueva OM más completa y articulada con la previamente construida.

En nuestro caso, partiremos de una *cuestión generatriz* (Q_0) en torno al *estudio de la dinámica de poblaciones* que servirá de hilo conductor de todo el proceso de estudio. Propondremos estudiar Q_0 mediante la construcción y manipulación de diferentes modelos matemáticos, para delimitar inicialmente la problemática e irla ampliando progresivamente. En efecto, al estudiar las relaciones entre el sistema considerado y el modelo inicial, aparecerán nuevas cuestiones que requerirán la construcción de nuevos modelos que, a su vez, generarán nuevas cuestiones que sólo podrán ser estudiadas mediante la construcción de modelos matemáticos cada vez más amplios y comprensivos. Se originará, en definitiva, un proceso de ampliaciones sucesivas de los modelos matemáticos considerados que, postulamos, permitirá recubrir y articular los diferentes contenidos matemáticos que conforman el programa de estudios considerado.

Nuestra propuesta describe los *recorridos matemáticos* (RM) en términos de: la *formulación de hipótesis* (H_i) sobre el sistema inicial X; *cuestiones problemáticas* (Q_i) centrales a estudiar bajo dichas hipótesis; la *construcción de modelos* (M_{i1}, M_{i2}, …) que permitan dar respuesta a estas cuestiones Q_i; el estudio y trabajo técnico con los modelos M_{ik} para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales R_{ik} a las correspondientes cuestiones Q_i.

Dada la reformulación que desde la TAD se propone de los *procesos de modelización en términos de integración de praxeologías de complejidad creciente*, el diseño del MER se analizará a su vez en términos de praxeologías matemáticas, principalmente locales[1], que irán integrándose las unas con las otras en estructuras cada vez más amplias, complejas y completas. Resultará muy importante dar nombre a estas *unidades mínimas de descripción* del proceso de estudio (en términos de OM) para poder así sintetizar el MER propuesto como una composición de estas unidades y poderlas utilizar en los niveles posteriores de diseño, descripción y análisis.

1.2. La cuestión generatriz de un REI sobre dinámica de poblaciones

Consideremos una población X y sea x_t su tamaño (número de individuos) en el instante de tiempo t, valor que evoluciona con el paso del tiempo. El *estudio de la*

[1] Considerando que partimos de una cuestión generatriz Q el estudio de la cual generará diversos tipos de problemas que requerirá el uso de diferentes técnicas. La respuestas a Q nos va a llevar a la construcción o reconstrucción de organizaciones matemáticas como mínimo locales OM = $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]_{1 \leq i \leq n}$ que quedarán caracterizadas esencialmente por la tecnología θ común a los diferentes tipos de problemas y a las técnicas requeridas (Bosch & Gascón, 2004).

evolución o *dinámica* de la población *X* plantea la siguiente cuestión inicial Q_0 que será la cuestión generatriz del proceso de estudio que vamos a describir en este capítulo:

> $\boldsymbol{Q_0}$: Si suponemos que conocemos el tamaño de una población *X* en algunos periodos de tiempo, ¿podemos predecir como evolucionará el tamaño de esta población después de *n* períodos? ¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de *X* a largo plazo? ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se tienen que asumir? ¿Cómo podemos hacer predicciones sobre la evolución del tamaño de *X* y cómo pueden ser validadas?

Podemos suponer inicialmente que el instante de tiempo *t* está medido en unidades *discretas* y que x_t depende, entre otras cosas, de los *d* estados anteriores, $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-d}$ $(0 < d \le t)$. Podemos suponer, además, que la población *X* es autónoma en el sentido que no sufre cambios debido a las condiciones externas. En esta situación, el estudio de la cuestión Q_0 nos lleva a considerar dos grandes tipos de modelos según si x_t sólo depende de x_{t-1} (población con *generaciones separadas*) o si x_t depende de las $d > 1$ generaciones anteriores $x_{t-1}, \ldots, x_{t-d}$ (población con *generaciones mezcladas*).

El primer tipo de modelos nos llevará al estudio de *sucesiones recurrentes de orden* 1 del tipo $x_{t+1} = f(x_t)$, con *f* función de variable real. El segundo tipo conducirá a considerar *sucesiones recurrentes de orden* $d > 1$ reducibles a *sucesiones recurrentes vectoriales* del tipo $X_{t+1} = f(X_t)$ donde $X_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1})$ es el vector de las *d* primeras generaciones y $X_i = (x_{id}, x_{id+1}, \ldots, x_{id+(d-1)})$ el *i*-ésimo vector de las *d* generaciones sucesivas con $0 < i \le n$.

Si, por otro lado, suponemos inicialmente que el tiempo *t* está medido en unidades *continuas*, pasamos entonces a estudiar la evolución continua de la población, estudio en el que encontramos una estructura análoga y, en cierta manera, paralela a la anterior con modelos matemáticos basados en *ecuaciones diferenciales* de orden 1 o superior.

2. MODELOS DISCRETOS PARA EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES

2.1. Poblaciones con generaciones separadas y no estructuradas en grupos

Denotamos por x_n el tamaño de la población *X* en la generación *n.* Por ahora, vamos a suponer que todos los individuos son iguales respecto a su capacidad reproductiva y de supervivencia. La evolución general de *X* quedará caracterizada[2] por el estudio de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por los sucesivos tamaños de *X*.

La hipótesis de *generaciones separadas* nos lleva a considerar dos posibles magnitudes para describir el crecimiento de *X*:

- *Tasa absoluta de variación* entre dos generaciones consecutivas:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \tag{1.1}$$

- *Tasa relativa de variación* entre dos generaciones consecutivas:

$$r_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \tag{1.2}$$

de la que se deriva, el *índice relativo de variación*:

$$i_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{1.3}$$

donde (1.2) y (1.3) satisfacen,

$$i_n = r_n - 1 \tag{1.4}$$

A partir de aquí vamos a empezar a presentar: las *hipótesis* sobre *X* y sobre su crecimiento (H_i), las *cuestiones problemáticas* centrales a tratar (Q_i) que se derivan de

[2] En adelante, consideraremos que en el valor de *x* (*t*) corresponde al número de *hembras* de la población *X*. En la mayoría de especies, la cantidad de hembras es prácticamente la misma que la de machos y éstas tiene, en definitiva, el papel determinante para la reproducción de la especie. En caso que las cantidades de individuos entre géneros no sean equivalentes, habría que considerar una restricción adicional para la construcción del modelo que por ahora no vamos a considerar.

nuestra cuestión generatriz Q_0 previamente formulada, la descripción de la *construcción de los modelos* (M_i), las sucesivas *respuestas* provisionales (R_i) a las cuestiones Q_i que se van obteniendo gracias al trabajo realizado con M_i y las nuevas cuestiones problemáticas que se generan a lo largo del proceso de estudio que, en muchas ocasiones, van a requerir la construcción, estudio y uso de nuevos modelos.

2.1.1. Del modelo maltusiano al modelo logístico

Los modelos que estudian el crecimiento de poblaciones independientemente de la densidad de dichas poblaciones, corresponden a los casos más simples que se pueden considerar. Empezaremos asumiendo algunas de las hipótesis más sencillas: (1) Todos los individuos de la población X son iguales (en lo que se refiere a la natalidad y a la supervivencia) y (2) los recursos disponibles son ilimitados. Establecidas estas suposiciones, vamos a formular la hipótesis que hace referencia al crecimiento de X y que nos va a guiar inicialmente en el estudio de la cuestión generatriz (Q_0):

$\boldsymbol{H_1}$:	Suponemos que la tasa relativa de variación de X es constante: $r_n \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{Q_1}$:	¿Cuál es la dinámica de una población con $r_n \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a corto y largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva esta evolución?

La situación descrita se puede modelizar mediante la siguiente relación:

$$r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = r,\ r \in \mathbb{R} \qquad (1.5)$$

que da lugar a la construcción del primer modelo (M_1) conocido como "*Modelo Maltusiano*"[3]. Este primer modelo resulta equivalente a considerar la ecuación recurrente:

[3] Modelo cuyo nombre hace referencia al economista y demógrafo inglés, Thomas Robert Malthus (1766-1834), conocido primordialmente por su teoría de poblaciones que fue expuesta por primera vez anómimamente en el trabajo: *An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society* (1798). En esta obra se puso de manifiesto la contradicción existente entre el crecimiento exponencial de la población humana y el crecimiento lineal de los recursos disponibles.

$$x_{n+1} = r \cdot x_n + x_n = (1+r) \cdot x_n = \alpha \cdot x_n \text{ con } \alpha = 1+r \qquad (1.6)$$

que es una ecuación lineal en diferencias de primer orden con coeficientes constantes donde el parámetro α se interpreta como el *coeficiente de reproducción* de *X*.

Si suponemos que esta relación es válida para cualquier pareja de generaciones consecutivas, podemos usar la relación recurrente (1.6) para todos los elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y obtenemos así la expresión cerrada equivalente de M_1:

$$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \Leftrightarrow x_n = \alpha^n \cdot x_0 \qquad (1.7)$$

De forma que, conociendo el tamaño de la población inicial $x_0 = c > 0$, podemos calcular x_n para cualquier generación *n*:

$$\begin{cases} x_n = \alpha^n \cdot x_0 \\ x_0 = c \end{cases} \qquad (1.8)$$

La construcción y estudio de este primer modelo, que corresponde a una población *X* con crecimiento geométrico, permite dar una primera respuesta R_1 a Q_1 donde se deben diferenciar tres casos según el valor del parámetro α $(\alpha \in \mathbb{R})$:

$\boldsymbol{R_1}$: Deben ser diferenciados tres posibles casos (ver Figura 2) según el valor de r :

- Si $0 < \alpha < 1$, que equivale al caso $r < 0$, entonces la población[4] tiende a la extinción: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,
- Si $\alpha = 1$, que equivale al caso $r = 0$, entonces la población se mantiene constante e igual a $x_0 = c$: $x_n \equiv c, \forall n \in \mathbb{N}$,
- Si $\alpha > 1$, que equivale al caso $r > 0$, entonces la población crece indefinidamente: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

[4] En adelante, utilitzaremos la palabra “población” para referirnos al número total de individuos o tamaño de la población *X*.

En la Figura 2 se ilustra la simulación numérica de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generadas al considerar respectivamente tres valores concretos del parámetro α (α_1 = 0.8, α_2 = 1 y α_3 = 1.2) representantes de cada uno de los tres casos que acabamos de distinguir:

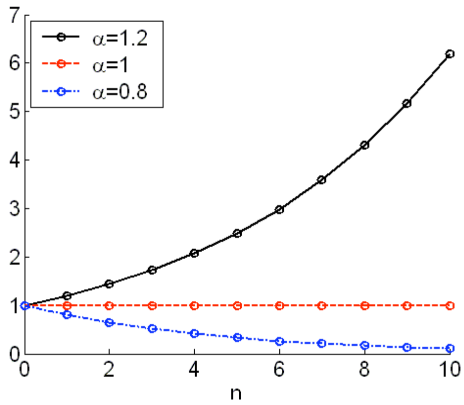


Figura 2. Iterados de la sucesión (x_n) según M_1 con valores del parámetro $\alpha > 0$

A pesar de que no tiene sentido aquí considerar poblaciones con tasas de reproducción α negativas, vamos a incluir el estudio matemático de las sucesiones que se generan al considerar valores del parámetro $\alpha < 0$ donde podemos distinguir dos casos (Figura 3):

- Si $-1 < \alpha < 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrece en valor absoluto hacia $l = 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$,
- Si $\alpha < -1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece en valor absoluto indefinidamente: $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$.

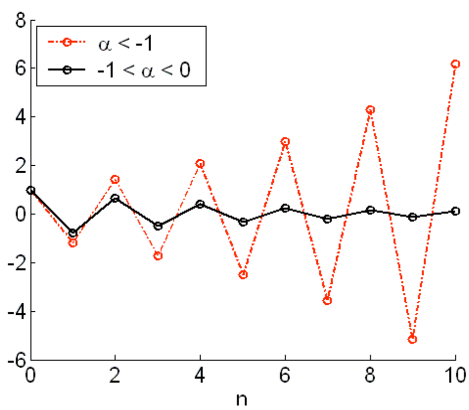


Figura 3. Iterados de la sucesión (x_n) según M_1 con valores del parámetro $\alpha < 0$

Situándonos de nuevo en el caso realista para los sistemas considerados, rápidamente encontramos que este primer modelo (M_1) presenta una clara limitación: el hecho que la población aumente de forma geométrica, para el caso $\alpha > 1$, cae en la *paradoja* *biológica de suponer la existencia de recursos infinitos*. De esta limitación, conocida como la *paradoja maltusiana*, surge la siguiente cuestión problemática no abordable con M_1:

$\boldsymbol{Q}_{1.1}$: ¿Cómo podemos superar la limitación que formula la paradoja maltusiana e introducir la restricción para X de no disponer de recursos infinitos?

Esta cuestión nos conduce a reformular la hipótesis H_1 e introducir ciertas suposiciones que la tengan en cuenta y se propongan superarla:

H_2: La tasa relativa de variación r_n varía respecto al tamaño de la población x_n. Además x_n no puede sobrepasar cierto valor máximo K que llamaremos *capacidad máxima del hábitat* en el que vive X.

Bajo esta suposición, r_n deja de suponerse constante y pasa a considerarse decreciente a medida en que X se aproxima a su capacidad máxima K. En concreto, uno de los casos más sencillos a estudiar sería suponer que r_n *decrece linealmente* en función de x_n.

Q_2: ¿Cuál es la evolución de una población cuya tasa relativa de variación decrece linealmente en función de x_n? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a corto y largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva esta evolución?

El caso en que r_n decrece linealmente equivale a considerar:

$$r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = a - b \cdot x_n \text{ con } a > 0 \text{ y } b > 0 \tag{1.9}$$

Si además suponemos que x_n no puede sobrepasar cierto *valor máximo* K, se debe cumplir que, a medida que x_n se aproxime a su valor máximo K, entonces r_n se aproxime a cero. Esto es:

$$r_n \simeq 0 \text{ cuando } x_n \simeq K \text{ o, equivalentemente, cuando } \frac{x_n}{K} \simeq 1 \tag{1.10}$$

El modelo lineal que satisface las condiciones impuestas por H_2 lo encontramos resumido en la siguiente ecuación:

$$r_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = a - \frac{a}{K} \cdot x_n = a\left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \text{ con } a > 0 \text{ y } K > 0 \tag{1.11}$$

que resulta de considerar el coeficiente $b = \frac{a}{K}$. Operando con la ecuación descrita en (1.9), llegamos a la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = x_n + a \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) = (1 + a) \cdot x_n - \frac{a}{K} \cdot x_n^2 \tag{1.12}$$

que equivale a considerar el *índice relativo de variación* (1.3) como:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1 + a) - \frac{a}{K} \cdot x_n \tag{1.13}$$

Mediante el cambio de variable,

$$N_n = \frac{a}{a+1} \cdot x_n \tag{1.14}$$

y definiendo el parámetro $\alpha = a + 1$, llegamos a la expresión equivalente[5]:

$$N_{n+1} = \alpha \cdot N_n \cdot \left(1 - \frac{N_n}{K}\right) \text{ con } \alpha > 0 \text{ y } K > 0 \tag{1.15}$$

conocida como la *ecuación logística discreta* o *modelo de Verhulst* [6] (***M*₂**) donde el parámetro α representa el *coeficiente de reproducción* de X cuando hay recursos infinitos y el parámetro K representa el número máximo de individuos que pueden vivir en el hábitat considerado, es decir, la *capacidad máxima del hábitat*.

---

[5] Para seguir con la notación utilizada hasta el momento, aunque la expresión descrita en (1.15) ha quedado definida por la sucesión N_n, en adelante, seguiremos utilizando la notación x_n.

[6] Hace referencia a Pierre François Verhulst (1804-1849) que, en el año 1838, dio una expresión matemática como respuesta a la paradoja maltusina en forma de ecuación logística. Verhulst transformó el crecimiento geométrico o exponencial en un crecimiento limitado, imponiendo la restricción de finitud de recursos disponibles.

Notemos aquí que si consideramos el cambio de variable:

$$y_n = \frac{a}{a+1} \cdot \frac{x_n}{K} \tag{1.16}$$

y si tomamos $\alpha = a + 1$, obtenemos:

$$y_{n+1} = \alpha \cdot y_n \cdot (1 - y_n) \tag{1.17}$$

Llegamos así a la ecuación recurrente a la que vamos a referirnos como caso *normalizado*. Se observa[7] que la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida en el intervalo [0, 1] para valores de $\alpha \in [0,4]$.

- **Propiedades y estudio general del modelo logístico M_2:**

Antes de seguir, es importante notar la *recursividad del proceso de modelización matemática*. En realidad, podemos decir que este segundo modelo M_2 constituye un "modelo de un modelo". En efecto, M_1 ha quedado incluido en M_2 ya que corresponde al caso particular de considerar que los recursos disponibles son ilimitados. En este sentido M_2 es un modelo más general que incluye el caso particular de M_1 al considerar $K = \infty$.

Otra propiedad que queremos destacar de M_2 es que la *variación absoluta de la tasa r_n respecto de la variación del tamaño de la población x_n es invariante*. Si consideramos la ecuación descrita en (1.11) y analizamos la variación absoluta de r_n, tenemos que:

$$\Delta r_n = r_{n+1} - r_n = a - \frac{a}{K} \cdot x_{n+1} - a + \frac{a}{K} \cdot x_n = -\frac{a}{K} \cdot \left(x_{n+1} - x_n\right) = -\frac{a}{K} \cdot \Delta x_n \tag{1.18}$$

De aquí que podamos asegurar que el cociente incremental $\Delta r_n / \Delta x_n$ es en realidad constante:

$$\frac{\Delta r_n}{\Delta x_n} = \frac{-a}{K} \tag{1.19}$$

[7] Más adelante justificaremos esta restricción.

Esta propiedad nos proporciona una manera sencilla de calcular el parámetro a en el supuesto de disponer de un valor aproximado de K:

$$a = -\frac{\Delta r_n}{\Delta x_n} \cdot K \tag{1.20}$$

Otra de las características a destacar es que, a diferencia del modelo maltusiano (M_1), la *ecuación logística no admite una expresión cerrada del tipo* $x_n = f(n)$. La *simulación numérica* para algunos valores particulares de los parámetros α y K constituye un primer *medio experimental* que nos va a permitir constatar la fuerte dependencia del comportamiento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respecto al parámetro α (ver Figura 4).

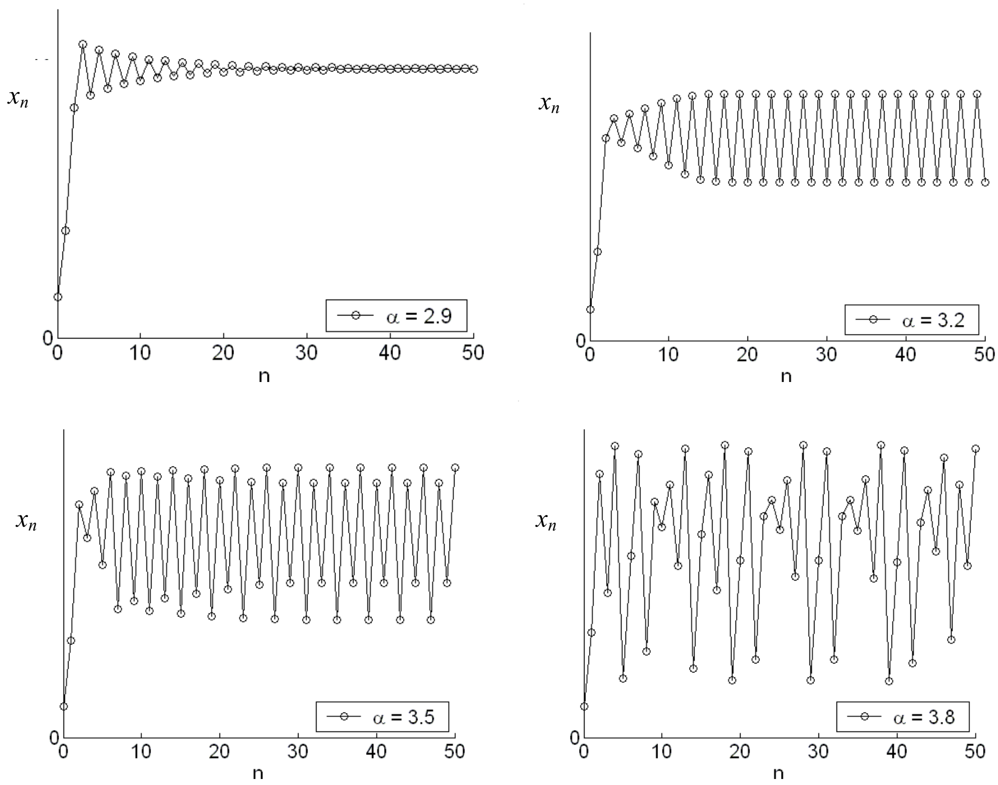


Figura 4. Iterados de la sucesión (x_n) según M_2 para diferentes valores del parámetro α

La simulación nos conduce a poder dar la siguiente respuesta provisional $\boldsymbol{R_2}$ a $\boldsymbol{Q_2}$ que, por ahora, queda pendiente de ser justificada:[8]

[8] En adelante no describiremos el caso $\alpha < 1$ (equivalente a $a < 0$) que corresponde al caso de *extinción de la población.*

$\boldsymbol{R}_2$: Debemos diferenciar tres posibles casos (ver Figura 4) según el valor de α:

- Si $1 < \alpha < 3$ (equivalente a $0 < a < 2$), la población tiende a una *situación de equilibrio* que denotamos por l, esto es, $\lim_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = l,\ l \in \mathbb{R}$. En este caso, podemos hallar el valor de l utilizando la ecuación descrita en (1.15) de la que se deduce que l debe satisfacer la ecuación:

$$l = \alpha \cdot l \cdot \left(1 - \frac{l}{K}\right) \tag{1.21}$$

  equivalente a la ecuación

$$l \cdot \left((\alpha - 1) - \frac{\alpha}{K} \cdot l\right) = 0 \tag{1.22}$$

  cuyas soluciones corresponden a $l = 0$ y $l = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot K$.

- Si $\alpha > 3$ (equivalente a $a > 2$), aparecen casos difíciles de analizar. Con la exploración numérica se detectan casos en que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oscila entre varios valores (existencia de órbitas periódicas), o bien, aparece un comportamiento que parece aleatorio y no reproducible. En este caso la evolución de las poblaciones pasa a ser impredecible y dependiente de los valores iniciales.

Se abren así nuevas cuestiones problemáticas en referencia al comportamiento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida a partir de M_2:

$\boldsymbol{Q_{2.1}}$: ¿Qué condiciones nos aseguran que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esté bien definida y que converja hacia su correspondiente límite l ?

Hasta ahora lo que hemos podido responder en R_2, es que a partir de la ecuación (1.15) podemos definir la función,

$$f(x) = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{1.23}$$

para hallar los candidatos a ser límite l de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto corresponde a encontrar los *puntos fijos* o *puntos de equilibrio*[9] de esta función $f(x)$. Surge entonces una segunda cuestión relativa a la *velocidad de convergencia* de la sucesión:

> ***Q*2.2** : Fijado un cierto margen de error $\varepsilon > 0$, ¿a partir de qué n podemos asegurar que $|x_n - l| < \varepsilon$?

Vemos entonces que, a pesar de la potencia de los *modelos algebraico-numéricos* que nos han permitido estudiar la dinámica de poblaciones que satisfacen las hipótesis formuladas en H_1 y H_2, han aparecido aquí dinámicas muy complejas a las que, con las herramientas matemáticas hasta ahora introducidas, no es posible dar respuesta. En particular, $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ no pueden ser tratadas con los modelos matemáticos hasta ahora considerados. Aparece, en definitiva, la necesidad de considerar un nuevo modelo que incluya a los anteriores y permita reformular (y responder a) las cuestiones que han quedado pendientes.

2.1.2. Un modelo funcional como generalización de los modelos maltusiano y logístico

Como síntesis del trabajo que hemos realizado hasta aquí, podemos expresar los modelos construidos en forma de ecuaciones o relaciones recurrentes del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$, ecuación autónoma en diferencias donde f representa la relación funcional que hay entre dos generaciones consecutivas. En el caso particular del modelo maltusiano M_1, f es una relación lineal y, en el caso logístico M_2, una relación cuadrática.

Una vía productiva para avanzar en nuestro estudio consiste en estudiar directamente el modelo general $x_{n+1} = f(x_n)$ del cual el modelo maltusiano (M_1) y el modelo logístico (M_2) son casos particulares. Pasamos así a considerar un *modelo analítico-funcional general* (M_3) formado por todas las ecuaciones recurrentes del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$. La cuestión general relativa al estudio de la evolución de cierta población X se puede formular en los siguientes términos:

[9] Definimos x como *punto fijo* o *punto de equilibrio* de la función f si es solución de la ecuación $x = f(x)$

***Q*3** : ¿Cuál es la dinámica de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con *f* función de clase C^1?

Para trabajar con este modelo funcional general (M_3) es necesario presentar técnicas de *simulación gráfica* que aparecen al considerar las curvas $y = f(x)$ e $y = x$ y simular gráficamente los iterados de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante, por ejemplo, el "método de la tela de araña". La introducción de esta técnica supone tomar en consideración un nuevo *medio experimental* que hasta aquí era sólo de carácter numérico. Cabe destacar que la nueva técnica introducida para el estudio de la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ será independiente a la naturaleza de la función *f*, hecho que provoca una considerable *ampliación* del *tipo de problemas* inicialmente considerados.

***Q*3.1**: ¿Cuáles son las principales conclusiones que nos proporciona M_3 si estudiamos el caso concreto de *f* una función lineal?

Tenemos ahora un segundo método para estudiar M_1 y comprobar la respuesta R_1 que éste proporcionaba. Este modelo equivale a considerar la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ con *f* función lineal del tipo $f(x) = \alpha \cdot x$.

Dado que el parámetro α es la pendiente de la recta, podemos diferenciar tres casos: (1) $0 < \alpha < 1$, (2) $\alpha = 1$ y (3) $\alpha > 1$, los cuales tienen un punto común de equilibrio en $x = 0$.

Escogiendo un representante de cada uno de los casos y mediante la técnica la "tela de araña" llegamos la conclusión que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $x = 0$ en el primer caso (si $0 < \alpha < 1$) independientemente de la condición inicial x_0 que se considere. El segundo caso ($\alpha = 1$) corresponde a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante para todo valor $n \in \mathbb{N}$, esto es, para cualquier condición inicial x_0, todo elemento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un punto fijo. Y, por último, en el tercer caso ($\alpha > 1$), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece indefinidamente.

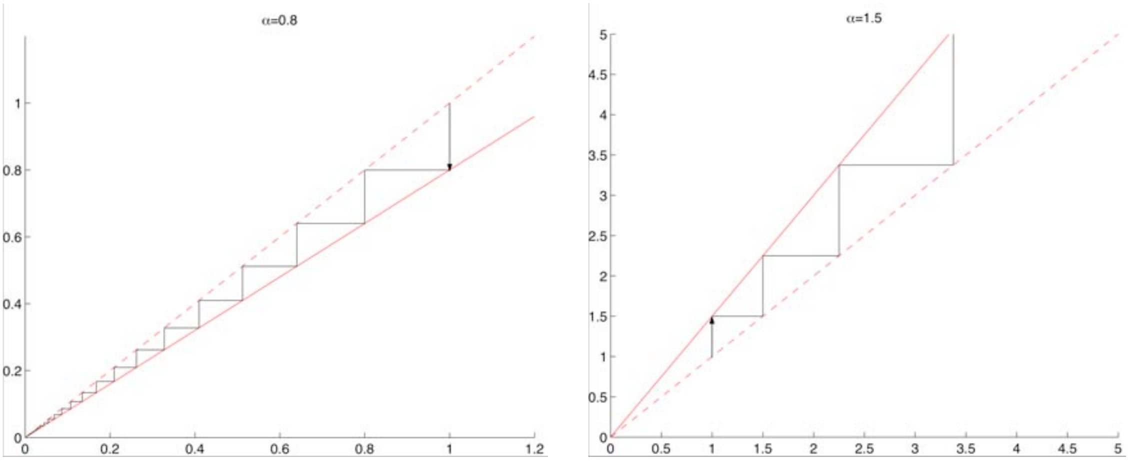


Figura 5. Técnica de simulación gráfica para el estudio de la sucesión definida por $x_{n+1} = \alpha\, x_n$

Llegados a este punto, una posible ampliación del tipo de problema tratado lo constituye la construcción de un modelo sobre una población bajo las hipótesis:

$\boldsymbol{H_{1.1}}$:	Al caso en que el tamaño de una población X en cierta generación es directamente proporcional al tamaño de la población en la generación anterior le añadimos factores constantes de inmigración (i) o emigración (e) que afectan a cada una de las generaciones.

En este caso y, considerando el caso concreto en el que interviene un factor i constante de inmigración, tenemos la siguiente relación recurrente entre dos generaciones consecutivas $x_{n+1} = f(x_n)$ donde f es una función afín del tipo

$$f(x_n) = \alpha x_n + i \text{ con } \alpha, i \in \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Su punto de equilibrio es ahora $x = \dfrac{i}{1-\alpha}$. Haciendo el cambio de variable

$$y_n = x_n - \frac{i}{1-\alpha}, \tag{1.25}$$

la ecuación (1.24) se transforma en la ecuación de M_1:

$$y_{n+1} = \alpha \cdot y_n \tag{1.26}$$

cuya solución viene dada por (1.8), de donde finalmente resulta:

$$x_{n+1} = \frac{i}{1-\alpha} + \alpha^n \left(x_0 - \frac{i}{1-\alpha} \right). \tag{1.27}$$

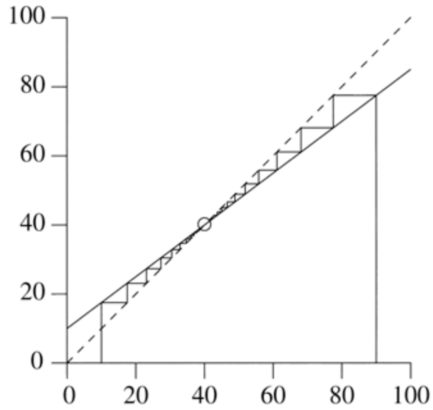


Figure 6. Iteración gráfica de la sucesión definida por $x_{n+1} = \alpha x_n + i$ con α = 0.75 e i =10

***Q*3.2**: ¿Cuáles son las principales conclusiones que nos proporciona M_3 si estudiamos el caso concreto de f una función cuadrática?

Para tratar el caso del *modelo logístico* o de *Verhulst* que ha quedado definido por la ecuación (1.15)[10], tenemos que considerar las funciones $y = x$ y la función cuadrática:

$$f(x) = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

que corresponde al caso de una función cuadrática cóncava con vértice en el punto

$$\left(\frac{K}{2}, \frac{\alpha K}{4} \right)$$

y con intersecciones con los ejes en los puntos (0, 0) y (K, 0). Con el objetivo de completar el estudio de ***Q*2.1** vamos a tratar las siguientes subcuestiones que vamos a estudiar, por ahora, centrándonos sólo en el caso del modelo logístico:

***Q*2.1.1**: ¿Podemos eliminar algún caso que no tenga sentido?

[10] Recordemos que hemos decidido seguir con la notación x_n.

Según las hipótesis formuladas en H_2, los términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen que $0 \le x_n \le K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, debemos restringirnos a funciones definidas en el intervalo invariante $I = [0, K]$[11]. Para que $f\left([0,K]\right) \subseteq [0,K]$, se debe satisfacer:

$$0 \le \frac{\alpha K}{4} \le K$$

que equivale a considerar $0 \le \alpha \le 4$.

***Q*2.1.2**: ¿Se pueden encontrar regularidades en las trayectorias de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dependiendo de los valores tomados por los parámetros α y K?

Por simulación gráfica y utilizando la técnica de la "tela de araña", podemos describir diversos casos que nos permitirá dar nuevas respuestas tentativas en los próximos punto:

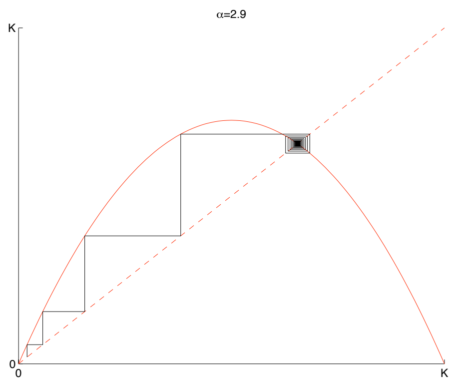


Figura 7. Método de iteración gráfica para α =2.9

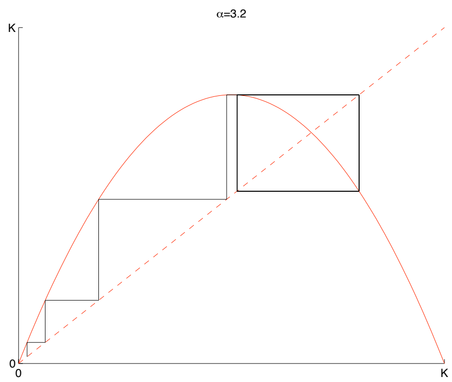


Figura 8. Método de iteración gráfica para α=3.2

[11] Decimos que I es un *intervalo invariante* para la función f si $f(I) \subseteq I$.

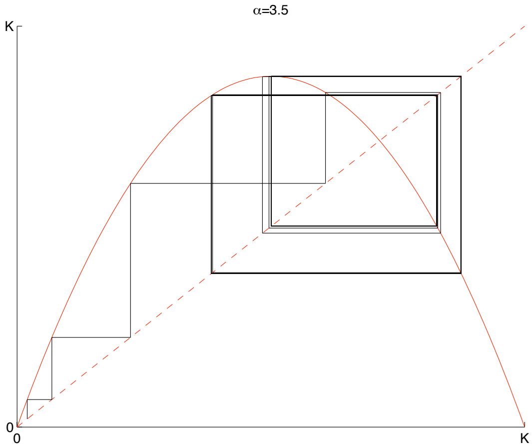


Figura 9. Método de iteración gráfica para α=3.5

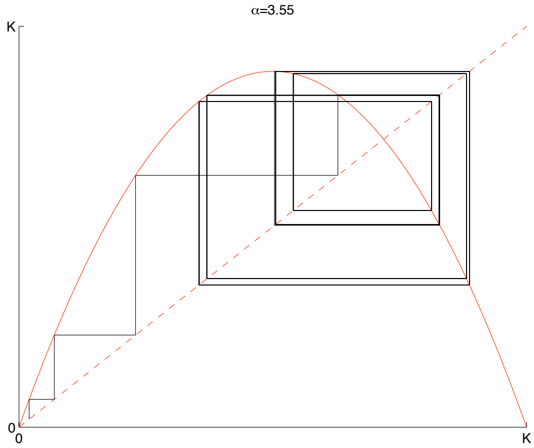


Figura 10. Método de iteración gráfica para α = 3.55

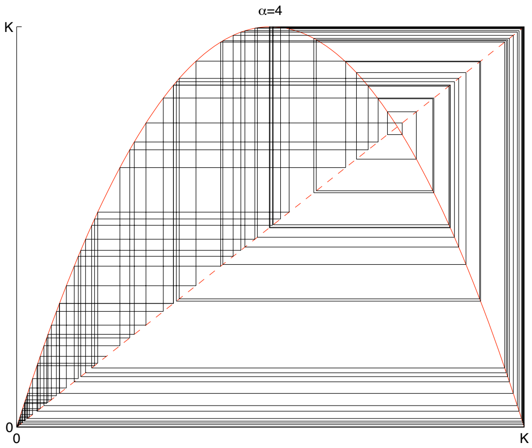


Figura 11. Método de iteración gráfica para α=4

***Q*2.1.3**: ¿Cómo se comporta la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cerca de los puntos fijos?

En nuestro caso, tenemos dos *puntos fijos*: el punto de equilibrio trivial $x_0^* = 0$ y el que incluye la capacidad máxima del hábitat, $x_1^* = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot K$. Sólo tiene sentido el caso de $x_1^* > 0$, condición que equivale a pedir que $\alpha > 1$. Por lo tanto, debemos distinguir dos casos:

- Si $0 < \alpha < 1$, la función cuadrática $f(x)$ se encuentra por debajo de la bisectriz $y = x$ y sólo tiene un punto fijo $x_0^* = 0$ que, por simulación gráfica, parece ser un *punto atractor*.

- Si $\alpha > 1$, la función $f(x)$ se sitúa por encima de la bisectriz $y = x$, caso en el que aparecen dos puntos fijos (x_0^* y x_1^*). La simulación gráfica sugiere que: x_0^* es un punto *repulsor* y alrededor del segundo punto fijo x_1^*, se detectan diferentes trayectorias que estudiaremos en la siguiente subcuestión $Q_{2.1.4}$.

$\boldsymbol{Q_{2.1.4}}$: ¿Podemos asegurar localmente la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia los puntos fijos x_0^* y x_1^*?

Para poder estudiar esta cuestión, vamos a utilizar la *aproximación local* de la función $f(x)$ en torno al punto fijo x_1^* que nos proporciona su derivada en dicho punto:

$$f(x) \simeq f'(x_1^*) \cdot (x - x_1^*)$$

Se obtiene así un modelo recurrente lineal del que, según el estudio que hemos desarrollado en el caso del modelo maltusiano (M_1), podemos concluir que:

- Si $\left|f'(x_1^*)\right| > 1$, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente,

- Si $0 < \left|f'(x_1^*)\right| < 1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Si evaluamos la derivada en este segundo punto fijo x_1^*,

$$f'\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot K\right) = 2 - \alpha .$$

unido a la información que nos ha proporcionado el estudio precedente con M_1, obtenemos:

- La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia el punto fijo x_1^* cuando $|2-\alpha| < 1$, equivalente a $1 < \alpha < 3$ (ver Figura 7).

- Si $\alpha > 3$, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente con oscilaciones que, en ciertos casos, presentan cierta periodicidad. A pesar de ser bastante más complejo, podemos empezar a describir este caso planteando $Q_{2.1.5}$.

***Q*2.1.5** :	¿Qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente en los casos en que $\alpha > 3$?

La simulación gráfica de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para valores concretos del parámetro $\alpha > 3$ permite formular diversas *conjeturas*:

- Si 3 < α < 3.449 la sucesión describe una trayectoria con un ciclo periódico de periodo 2 (ver Figura 8).
- Para valores de α ≥ 3.449 los ciclos se amplían de periodo y pasan a ser de periodo 4, hasta llegar a $\alpha = 3.544$ (ver Figura 9) valor en que cambia la periodicidad.
- Si seguimos aumentando el parámetro α, el ciclo de periodo 4 sigue ampliándose hasta que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ presenta una trayectoria de período 8 (ver Figura 10) y sigue así sucesivamente. En la Figura 12 se representan el diagrama de bifurcaciones del periodo de las trayectorias de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La Figura 11 nos sirve para introducir la aparición de *órbitas caóticas*, entendiendo el término “caótico” como sensibilidad respecto a condiciones iniciales y ausencia de periodicidad.

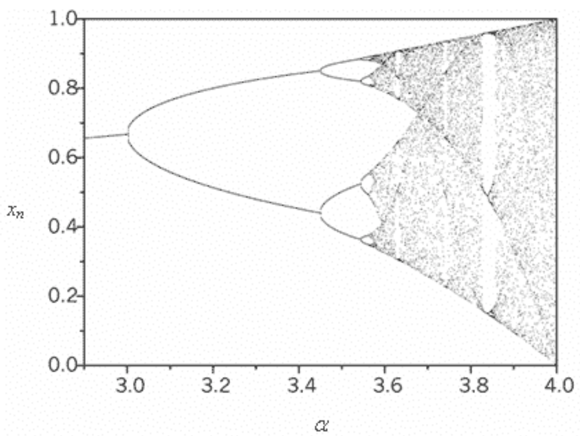


Figura 12. Diagrama de bifurcaciones

Recordemos que nos ha quedado pendiente el estudio de la cuestión $Q_{2.2}$ relativa al problema de descubrir, en caso que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente, cuantos iterados son necesarios para llegar a aproximar el límite de esta sucesión (el punto fijo l) con cierto margen de error fijado de antemano.

***Q*2.2**: Fijado un cierto margen de error $\varepsilon > 0$, ¿a partir de qué n podemos asegurar que $\lvert x_n - l \rvert < \varepsilon$?

Sea $M = \sup(\lvert f'(x) \rvert)$ para $x \in I = [0, K]$. Por el teorema del valor medio, tenemos que:

$$\lvert x_n - l \rvert \leq M^n \cdot \lvert x_0 - l \rvert < \varepsilon \;\Rightarrow\; M^n \cdot K < \varepsilon$$

Tomando logaritmos en la desigualdad encontrada, obtenemos un cota para n:

$$n > \frac{\ln(\varepsilon / K)}{\ln(M)}$$

Podemos así explicitar la técnica que nos permite tratar las cuestiones ***Q*2.1** y ***Q*2.2** y nos proporciona las respuestas buscadas:

R2.1

- Calcular los puntos fijos de la función $f(x)$, en nuestro caso, $f(x)$ función cuadrática,
- Encontrar el intervalo invariante I tal que $f(I) \subseteq I$,
- Determinar el subintervalo I' de I, $I' \subset I$, tal que $\lvert f'(x) \rvert < 1$ para todo valor de $x \in I'$,

R2.2

- Calcular $M = \sup_{x \in I}(\lvert f'(x) \rvert)$ con $I = [0, K]$,
- Determinar el número mínimo de iteraciones necesarias para encontrar una aproximación del límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con un margen de error fijado $\varepsilon > 0$.

Observemos que acabamos de describir una técnica para estudiar el comportamiento de una sucesión recurrente del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ tal como hemos planteado en la cuestión formulada anteriormente:

***Q*3**: ¿Cuál es la dinámica de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con f una función de clase C^1?

Hasta ahora nos hemos centrado en los casos concretos en que $f(x)$ es una función lineal (modelo maltusiano M_1) o cuadrática (modelo logístico M_2), pero la técnica empleada resulta ser independiente de la naturaleza de la función f mientras esté bien definida de I y sea de clase C^1. Es por ello que el trabajo realizado hasta ahora con M_3 permite una nueva ampliación del *tipo de problemas* que se puede estudiar.

***R*3**: Generalización de la técnica **R2.1** + **R2.2** para $f(x)$ una función cualquiera de clase C^1

2.1.3. Síntesis del posible recorrido matemático a través de los modelos discretos unidimensionales

Resumiendo a grades rasgos en qué ha consistido el proceso desarrollado, podemos distinguir diversas etapas que coinciden con las descritas en el capítulo 2 (Cf.§ 2) sobre los procesos de *modelización matemática* y sus respectivas etapas:

1) Podemos distinguir una primera etapa que se centra en la formulación de *hipótesis* y *conjeturas* (H_i) y en la formulación de *cuestiones problemáticas* (Q_i) que nos proponemos estudiar. Esta primera etapa se caracteriza por la *delimitación del sistema* o ámbito de la realidad y el planteo inicial de *cuestiones problemáticas a tratar*, lo cual comporta una selección de ciertos aspectos del sistema que se simbolizan mediante variables.

2) En una segunda etapa, nos centramos en la *construcción del modelo matemático* (M_i) a través de la descripción de las *relaciones matemáticas* entre las variables del sistema consideradas. Es usual que aparezca la reformulación de las cuestiones iniciales, planteadas en fases anteriores, en términos del lenguaje propio que se haya establecido.

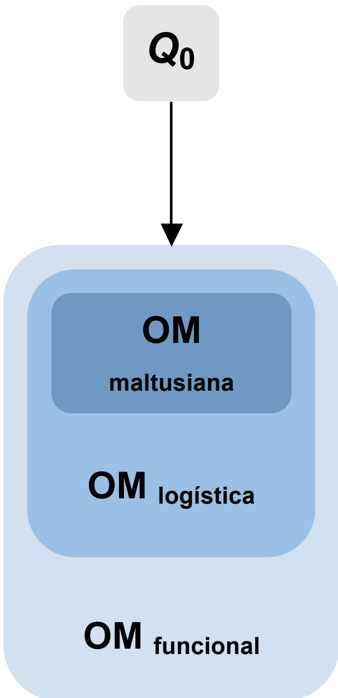
3) Pasamos entonces al *trabajo técnico* con el modelo e *interpretación* de los resultados obtenidos en relación a las cuestiones planteadas. La obtención de respuestas, aunque sean parciales o provisionales, es el interés principal en esta etapa.

4) En la última etapa, ligada al trabajo técnico con el modelo, aparece el planteamiento de *nuevas cuestiones problemáticas* que difícilmente podrían haber sido planteadas sin la construcción de los modelos y cuyo estudio va a

proporcionar nuevos conocimientos sobre el sistema. En el caso desarrollado, hemos visto cómo en esta etapa aparecen nuevas cuestiones difíciles de abordar con las herramientas construidas hasta el momento. Estas limitaciones de los modelos iniciales constituyen el motor del proceso y requerirán la elaboración de modelos cada vez más amplios y completos.

Comprobamos que el proceso descrito se puede caracterizar como un proceso de modelización el cual, a nuestro entender, se puede *reformular como un proceso de reconstrucción de organizaciones matemáticas de complejidad* y *completitud crecientes* (puntuales, locales, regionales) que necesariamente deben responder a las razones de ser de aquellas organizaciones matemáticas que deseamos (re)construir y recubrir.

Con el siguiente esquema queremos sintetizar el diseño descrito hasta ahora, indicando principalmente la evolución de las cuestiones problemáticas, la construcción de los modelos matemáticos y la completación progresiva de éstos. Podemos distinguir tres unidades principales que corresponde a las tres organizaciones matemáticas locales, cuyos elementos quedarán resumidos en las tablas que mostraremos a continuación para facilitar así al lector una síntesis del proceso desarrollado.



$\boldsymbol{Q_0}$

Generaciones separadas ($\boldsymbol{H_0}$):

x_t sólo depende de x_{t-1}

$\boldsymbol{H_1}: r_n \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{Q_1}$

$\boldsymbol{M_1}$: Modelo maltusiano discreto

$x_n = r \cdot x_{n-1} = r^n \cdot x_0$ con $x_0 = c$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{R_1}$

OM
maltusiana

$\boldsymbol{Q_{1.1}}$: Paradoja maltusiana

$\boldsymbol{H_2}: r_n = a - b \cdot x_n,\ a, b \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{Q_2}$

$\boldsymbol{M_2}$: Modelo logístico discreto

$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \cdot \left(1 - \dfrac{x_n}{K}\right)$ con $x_0 = c$

$\Downarrow$

$\boldsymbol{R_2}$

OM
logística

$\boldsymbol{Q_{2.1}}$: Problemática de la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{Q_{2.2}}$: Problemática de la velocidad de convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\boldsymbol{H_3}: r_n = g(x_n)$ y $\boldsymbol{Q_3}$

$\boldsymbol{M_3}: x_{n+1} = f(x_n)$ con

$\boldsymbol{Q_{3.1}}$: f lineal

$\boldsymbol{Q_{3.2}}$: f cuadrática

$\boldsymbol{Q_{3.3}}$: f función cualquiera de clase C^1

OM
funcional

<table>
<tr><th colspan="3">UNIDAD 1 - OM maltusiana</th></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos de la unidad</td><td>

- Elaboración de la primera respuesta a partir de la construcción y estudio del primer modelo matemático: el modelo maltusiano discreto.
- Primer proceso de modelización matemática: formulación de hipótesis sobre la población (***H*₁**), reformulación de la cuestión central a tratar (***Q*₁**), construcción del modelo maltusiano discreto (***M*₁**), desarrollo del trabajo técnico dentro del modelo, interpretación de los resultados en relación al sistema estudiado, redacción de la primera respuesta provisional (***R*₁**) y planteamiento de nuevas cuestiones problemáticas a estudiar.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Herramientas</td><td>

- Estudio de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por recurrencia, simulación numérica y representación gráfica de sus iterados.
- Estudio de la convergencia de sucesiones y, en caso de convergencia, aproximación numérica de su límite.

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)</td><td>Formulación Hi y Qi</td><td>

$\boldsymbol{H_1}$: Suponemos que la tasa relativa de variación de X es constante: $r_n \equiv r,\ r\in\mathbb{R}$

$\boldsymbol{Q_1}$: ¿Cuál es la dinámica de una población con $r_n \equiv r,\ r\in\mathbb{R}$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a corto y largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva esta evolución?

</td></tr>
<tr><td>Construcción del modelo matemático</td><td>

<u>Construcción del modelo maltusiano discreto (</u>$\boldsymbol{M_1}$):

Podemos sintetizar la hipótesis realizada como:

$$r_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n} = r,\ r\in\mathbb{R}$$

relación que equivale a considerar la ecuación recurrente:

$$x_{n+1} = (r+1)\cdot x_n = \alpha\cdot x_n$$

que admite la siguiente expresión cerrada del tipo $x_n = f(n)$ al suponer que la anterior ecuación recurrente es válida para cualquier generación:

$$\begin{cases} x_n = \alpha^n\cdot x_0 \\ x_0 = c \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>Trabajo técnico con Mi</td><td>

<u>Medio experimental utilizado:</u> Técnica de simulación numérica de sucesiones

<u>Respuesta R_1 a Q_1</u>: Se distinguen los siguientes casos según el valor del parámetro α:

- Si $0<\alpha<1$, la población tiende a su extinción: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Trabajo técnico con Mi</td><td>

- Si $\alpha = 1$, el tamaño de la población se mantiene constante independientemente del tiempo transcurrido: $x_n \equiv x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Si $\alpha > 1$, entonces la población crece indefinidamente: $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

</td></tr>
<tr><td>Nuevas cuestiones a estudiar</td><td>

Problemática de ajuste (***Q***$_{0.3}$): Se ajustan bien las predicciones realizadas con el modelo M_1 a la evolución de las poblaciones reales? ¿Cuáles son las principales diferencias que se observan? ¿Qué predicciones resultan más alejadas de la realidad?, etc.

De las cuestiones planteadas se deriva la <u>limitación principal de M_1</u>:

El caso $\alpha > 1$, supone la existencia de recursos infinitos, hecho que se conoce como la "paradoja maltusiana". Surge una nueva cuestión problemática no abordable con M_1:

$\boldsymbol{Q}_{1.1}$: ¿Cómo podemos superar la limitación que formula la paradoja maltusiana e introducir la restricción de no disponer de recursos infinitos?

</td></tr>
</table>

UNIDAD 2 - OM logística

Objetivos de la unidad

- Dadas las limitaciones que presenta $\boldsymbol{M_1}$ y que han quedado expresadas en la cuestión $\boldsymbol{Q}_{1.1}$, esta unidad se centra en la construcción y estudio de un nuevo modelo matemático ($\boldsymbol{M_2}$) que, incluyendo el estudio realizado en $OM_{maltusiana}$ consigue, después de reformular las hipótesis con $\boldsymbol{H_2}$, superar la limitación de no disponer de recursos infinitos.
- Será muy importante estudiar las relaciones que existen entre $\boldsymbol{M_1}$ y $\boldsymbol{M_2}$ y hasta qué punto $\boldsymbol{M_2}$ nos permite superar las limitaciones de $\boldsymbol{M_1}$.

Herramientas

- Estudio de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por recurrencia, simulación numérica y representación gráfica de sus iterados.
- Estudio de la convergencia de sucesiones y, en caso de convergencia, aproximación numérica de su límite.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

Hipótesis sobre el crecimiento de X ($\boldsymbol{H_2}$): Suponemos que la razón de variación r_n (o $i_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$) decrece linealmente en función de x_n y que la población x_n no puede sobrepasar un cierto valor máximo K.

Cuestiones problemáticas centrales a tratar ($\boldsymbol{Q_2}$): ¿Cuál es la dinámica de una población cuya tasa relativa de variación decrece linealmente en función de x_n? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a corto y largo plazo? ¿Qué factores son más importantes y determinan de forma más decisiva esta evolución?

Construcción del modelo matemático

Construcción del modelo logístico discreto ($\boldsymbol{M_1}$): (resumimos aquí el caso más sencillo)

Podemos sintetizar las hipótesis realizadas con la relación:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha - b \cdot x_n$$

Este modelo es equivalente a considerar la ecuación recurrente:

$$x_{n+1} = (\alpha - b \cdot x_n) \cdot x_n$$

donde, si consideramos que $b = \alpha / K$ se obtiene el modelo denominado *modelo logístico* o de *Verhulst*:

$$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

donde $\alpha > 0$ se interpreta como el *coeficiente de reproducción* de X y K la capacidad máxima del hábitat, esto es, el número máximo de individuos que pueden vivir en cierto hábitat.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Trabajo técnico con Mi</td><td>

Medio experimental utilizado: técnica de simulación numérica

Respuesta R_2 que proporciona M_2 a Q_2: La exploración numérica del modelo permite distinguir los siguientes casos:

- Si $1 < \alpha < 3$, la población tiende a una *situación de equilibrio* (l).
- Si $\alpha > 3$ aparecen situaciones difíciles de analizar que requerirán considerar otras herramientas. Por ahora, se detecta que: la sucesión puede oscilar entre varios valores (*órbitas periódicas*), o bien, puede presentar un comportamiento caótico en el que la dinámica de la población pasa a depender completamente de las condiciones iniciales (*sensibilidad respecto de las condiciones iniciales*).

Otras cuestiones derivadas y tratadas con M_2:

- ¿Qué relación hay entre los dos modelos matemáticos M_1 y M_2 hasta ahora construidos?
- ¿Qué propiedades podemos destacar de M_2?
- ¿Cuáles son los factores o parámetros que tienen mayor influencia en la posible dinámica de ciertas poblaciones? ¿Cuál es la interpretación de estos factores? ¿Cómo los podemos aproximar?
- ¿Se ajustan bien las predicciones (o simulaciones) realizadas con los modelos a los datos que pueden extraerse de la evolución de poblaciones "reales"? ¿A partir de qué modelo se generan las simulaciones más "realistas", las generadas por M_1 o por M_2?

</td></tr>
<tr><td>Nuevas cuestiones</td><td>

***Q*2.1**: En el caso del modelos logístico, ¿qué condiciones nos aseguran que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esté bien definida y sea convergente a cierto límite l ?

***Q*2.2**: Fijado cierto margen de error $\varepsilon > 0$, ¿a partir de qué n podemos asegurar que $|x_n - l| < \varepsilon$?

</td></tr>
</table>

UNIDAD 3 - OM funcional

Objetivos de la unidad

- Introducción del modelo analítico–funcional (***M*₃**) para el estudio de modelos discretos definidos por ecuaciones recurrentes. Introducción de técnicas de simulación gráfica.
- Aplicación de $\boldsymbol{M_3}$ al modelo maltusiano ($\boldsymbol{M_1}$) y comprobación de los resultados encontrados con la construcción de $\mathrm{OM}_{\mathrm{maltusiana}}$ y descritos en $\boldsymbol{R_1}$.
- Aplicación de $\boldsymbol{M_3}$ al modelo logístico ($\boldsymbol{M_2}$), comprobación de los resultados descritos en $\boldsymbol{R_2}$ y búsqueda de respuestas a las cuestiones $\boldsymbol{Q_{2.1}}$ y $\boldsymbol{Q_{2.2}}$.

Herramientas

- Representación gráfica de funciones elementales: lineales y cuadráticas.
- Método de aproximación numérica de puntos fijos, simulación gráfica y, fijado cierto margen de error, determinación del número de iterados necesarios para la aproximación de un punto fijo.
- Estudio general de funciones de clase C^1.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

<u>Cuestiones problemáticas centrales a tratar</u> ($\boldsymbol{Q_3}$):

¿Cuál es la dinámica de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con f una función de clase C^1?

- <u>Aplicación al modelo maltusiano</u> (M_1):

$\boldsymbol{Q_{3.1}}$: ¿Cuáles son las principales conclusiones que nos proporciona M_3 si estudiamos el caso concreto de f una función lineal?

- <u>Aplicación al modelo logístico</u> (M_2):

$\boldsymbol{Q_{3.2}}$: ¿Cuáles son las principales conclusiones que nos proporciona M_3 si estudiamos el caso concreto de f una función cuadrática?

$\boldsymbol{Q_{2.1}}$: ¿Qué condiciones nos aseguran, en el caso concreto del modelo logístico, que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esté bien definida y sea convergente con cierto límite l?

$\boldsymbol{Q_{2.1.1}}$: ¿Podemos eliminar algún caso que no tenga sentido?

$\boldsymbol{Q_{2.1.2}}$: ¿Se pueden encontrar regularidades en las trayectorias de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dependiendo de los valores tomados por los parámetros α y K?

$\boldsymbol{Q_{2.1.3}}$: ¿Cómo se comporta la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cerca de los puntos fijos?

$\boldsymbol{Q_{2.1.4}}$: ¿Podemos asegurar localmente la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia los puntos fijos x_0^* y x_1^*?

$\boldsymbol{Q_{2.1.5}}$: ¿Qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente en los casos en que $\alpha > 3$?

Formulación H_i y Q_i	***Q*₂.₂** : Fijado un cierto margen de error $\varepsilon > 0$, ¿a partir de qué n podemos asegurar que $\lvert x_n - l \rvert < \varepsilon$? ▪ Ampliación del tipo de problemas a estudiar: $\boldsymbol{Q_{3.3}}$: ¿Podemos generalizar alguno de los resultados encontrados y/o técnicas utilizadas para el estudio de los casos concretos de modelos maltusiano y logístico al caso de una función $f(x)$ cualquiera?
Construcción del modelo matemático	Construcción del modelo funcional (M_3): $x_{n+1} = f(x_n)$ con f una función de clase C^1 Nueva técnica de simulación de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Técnica de simulación gráfica (método de la tela de araña)
Trabajo técnico con M_i	Respuestas proporcionadas por M_3 a $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ ($\boldsymbol{R_{2.1}}$ y $\boldsymbol{R_{2.2}}$): 1) Calcular los puntos fijos de la función $f(x)$, en nuestro caso, $f(x)$ es una función cuadrática, 2) Encontrar el intervalo invariante I tal que $f(I) \subseteq I$, 3) Determinar el subintervalo I' de I, $I' \subset I$, tal que $\lvert f'(x) \rvert < 1$ para todo valor de $x \in I'$, 4) Calcular $M = \sup_{x\in I}\left(\lvert f'(x)\rvert\right)$ con $I = [0, K]$, 5) Determinar el mínimo número de iteraciones necesarias para encontrar una aproximación del límite de la sucesión con un error fijado $\varepsilon > 0$. $\boldsymbol{R_3}$: Generalización de la técnica principal $\boldsymbol{R_{2.1}} + \boldsymbol{R_{2.2}}$ con f cualquier función de clase C^1.

2.2. Poblaciones con generaciones separadas y estructuradas en grupos

Hasta aquí el proceso que hemos seguido, y el tipo de modelos que se ha requerido, han correspondido al estudio de la dinámica de *poblaciones autónomas con generaciones separadas*. El estudio de la cuestión generatriz Q_0 nos ha llevado a estudiar las sucesiones recurrentes de orden 1 definidas a través de la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ siendo f una función de variable real.

Es evidente que las hipótesis bajo las que hemos construido esta primera gran familia de modelos unidimensionales corresponde al estudio de un número limitado de casos. Aparece la necesidad de ampliar nuestras hipótesis e incluir nuevas hipótesis como, por ejemplo, que la tasa de mortalidad aumente con la edad de los individuos o bien que la tasa de fertilidad dependa de la edad de las hembras, etc. Nos planteamos así, como extensión natural del proceso realizado hasta ahora, la construcción de *modelos en los que se incluyan características particulares de los individuos que conforman la población X.*

Vamos entonces a plantear cuestiones relativas a la dinámica de poblaciones en las que se tomarán en consideración características particulares de los individuos de la población. Según estas características, agruparemos a los individuos en grupos o clases que supondremos homogéneas a efectos reproductivos y de supervivencia. Podemos reformular la cuestión generatriz Q_0 en los términos siguientes:

$\boldsymbol{Q_0^{(2)}}$: ¿Cómo predecir la evolución del tamaño de una población X estructurada en grupos, de un cierto periodo n al siguiente periodo $n+1$? ¿y la evolución a largo plazo?

El estudio de esta cuestión nos conducirá a la consideración de *sucesiones recurrentes de orden* $d > 1$ reducibles a *sucesiones recurrentes vectoriales* del tipo $X_{n+1} = f(X_n)$ donde $X_0 = (x_0, x_1, ..., x_{d-1})$ es el vector de las d primeras generaciones y $X_i = (x_{id}, x_{id+1}, ..., x_{id+(d-1)})$ corresponde al i-ésimo vector de las d generaciones sucesivas con $0 \le i \le n$. El estudio de $Q_0^{(2)}$, y de las cuestiones que se derivan de ésta, nos llevará a la construcción de *modelos matriciales* y al problema del cálculo de la potencia n-ésima de una matriz inmersos en el universo del álgebra lineal.

2.2.1. Las matrices de Leslie y el estudio de la dinámica de poblaciones estructuradas en grupos

Vamos a suponer, como resulta muy natural, que el número de descendientes y la tasa de supervivencia dependen de la edad de los individuos de cierta población X. Con el objetivo de incluir esta nueva hipótesis, será necesario introducir en el modelo una agrupación por edades que tienen asignadas diferentes tasas de fertilidad y de supervivencia que consideraremos homogéneas dentro de un mismo grupo-clase. Para facilitar las posibles maneras de agrupar X, vamos a clasificarla en intervalos de edad con la misma longitud[12].

Supongamos que la edad máxima que alcanza una hembra de X sea, en promedio, A años y que distribuimos X en d clases de edad de amplitud A/d años. Obtenemos las siguientes d clases:

1	2	…	d -1	d
$\left[0,\dfrac{A}{d}\right)$	$\left[\dfrac{A}{d},\dfrac{2A}{d}\right)$	…	$\left[\dfrac{(d-2)A}{d},\dfrac{(d-1)A}{d}\right)$	$\left[\dfrac{(d-1)A}{d},A\right)$

Si suponemos, que en el instante inicial ($n = 0$), conocemos cuál es la distribución inicial de la totalidad de individuos de X en cada uno de los intervalos, grupos o clases de edad, que acabamos de definir, podemos denotar por $X(0)$ al vector cuya componente $x_i(0)$ corresponde al número de hembras que hay en este momento inicial en el i-ésimo intervalo. Consideramos así el vector $X(0)$ conocido como el *vector de la distribución inicial en clases de edad*:

$$X(0) = \left(x_1(0), x_2(0), ..., x_d(0)\right) \tag{2.1}$$

[12] En el estudio de estas poblaciones X estructuradas en grupos seguiremos considerando, tal como hemos hecho en la primera sección, que cuando nos referimos a X sólo estamos considerando el estudio de la evolución de la población de hembras. Por lo general, el número de hembras y el de machos son muy similares en la mayoría de poblaciones y si esto no se da, esta condición supone una restricción al modelo que no vamos a considerar aquí.

Para estudiar la evolución de la población X nos proponemos estudiar cómo evoluciona el vector:

$$X(n) = \left(x_1(n), x_2(n), ..., x_d(n)\right) \tag{2.2}$$

Para ello vamos primero a formular las hipótesis bajo las cuales construiremos nuestro modelo:

$\boldsymbol{H}_1^{(2)}$: Sea X una población distribuida en d clases de edad que satisface las siguientes propiedades:

- Los individuos de X no se mantienen en una misma clase en tiempos consecutivos, cada uno cambia a la correspondiente clase de edad posterior, esto es, el grupo de individuos que en el instante n está en la clase i, en el instante $n+1$ estarán en la clase $i+1$.

- La transición entre dos clases de orden consecutivo están afectadas por la correspondiente *probabilidad de transición* que denotaremos por P_i, probabilidad de supervivencia de los individuos de la clase i a la clase $i + 1$ entre los tiempos n y $n + 1$.

- Denotamos por F_i el total de descendientes que, en promedio, tiene una hembra de la clase i entre los tiempos n y $n + 1$.

Reformulación de la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q}_0$ en $\boldsymbol{Q}_1^{(2)}$:

Si suponemos conocido el tamaño de una población X, con las características introducidas en las hipótesis previamente formuladas, en algunos periodos de tiempo:

¿Cómo podemos describir la evolución del tamaño de los diferentes grupos o clases de edad de los que se compone X? ($\boldsymbol{Q}_{1.1}^{(2)}$)

¿Será siempre posible predecir qué ocurrirá después de un determinado periodo de tiempo? ¿Y lo que ocurrirá a largo plazo? ($\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}$)

Vamos a empezar con el estudio de $\boldsymbol{Q}_{1.1}^{(2)}$. Bajo las hipótesis formuladas previamente, el número de individuos de *X* que hay en la *primera clase* en el instante de tiempo *n*, $x_1(n)$, vendrá dado por el total de nacimientos entre los tiempos $n-1$ y *n*. Podemos describir así la población correspondiente a la primera clase de edad en *n* como:

$$x_1(n) = F_1 \cdot x_1(n-1) + F_2 \cdot x_2(n-1) + \cdots + F_d \cdot x_d(n-1) \text{ con } F_i \geq 0 \tag{2.3}$$

Además, tenemos que el número de hembras en la clase de orden $i+1$ ($i = 1, \ldots, d-1$) en el instante *n* es igual al número de hembras en la clase *i* en tiempo $n-1$ afectadas por la probabilidad de supervivencia de su clase que hemos definido por P_i con $0 \leq P_i \leq 1$:

$$x_{i+1}(n) = P_i \cdot x_i(n-1) \text{ con } 1 \leq i \leq d-1 \tag{2.4}$$

Las expresiones descritas en (2.3) y (2.4) admiten la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_{d-1}(n) \\ x_d(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_{d-1} & F_d \\ P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \\ \vdots \\ x_{d-1}(n-1) \\ x_d(n-1) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

que equivale a considerar la siguiente ecuación matricial con *L* la denominada *matriz de Leslie*,

$$X(n) = L \cdot X(n-1) \tag{2.6}$$

Si suponemos además que *L* se mantiene *invariante con el paso del tiempo*, podemos aplicar *n* veces la relación (2.6) obteniendo así la expresión equivalente,

$$X(n) = L^n \cdot X(0) \tag{2.7}$$

donde *X*(0) es el vector de la distribución inicial de los individuos en clases de edad.

De esta forma, si conocemos el vector *X*(0) y la matriz de Leslie (*L*) que corresponda a cierta población *X*, podemos predecir la evolución de la distribución de *X* en sus correspondientes clases de edad, esto es, predecir la evolución de la sucesión generada por $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con el paso del tiempo n. Obtenemos así un modelo para describir la evolución del tamaño de los diferentes grupos o clases de edad en los que se compone $X(\boldsymbol{R}_{1.1}^{(2)})$.

Antes de seguir con el estudio más profundizado del modelo que acabamos de construir y que llamaremos $\boldsymbol{M}_{\mathbf{Leslie}}$, veamos un primer ejemplo:

Supongamos que estamos estudiando una determinada población animal en la que la edad máxima alcanzada por las hembras es de 10 años y que esta población se divide en dos grupos de edad iguales en intervalos de 5 años. Inicialmente hay 100 hembras en el primero de los grupos. Supongamos además que en cada periodo el 50% de la primera clase sobrevive y pasa a la segunda clase y que el promedio del número de crías hembra son respectivamente de 1 y de 1.5.

Para construir la matriz de Leslie necesitamos las probabilidades de supervivencia y la tasa de fertilidad de cada una de las dos clases. Así, la expresión matricial del modelo de Leslie (2.6) es:

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \end{pmatrix} \text{ con } X(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y con la distribución inicial que nos describe nuestro caso, podemos calcular las siguientes distribuciones futuras:

$$X(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$X(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 \\ 50 \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente podríamos seguir generando predicciones sobre la evolución de $X(n)$.

Para pasar ahora a estudiar la cuestión $\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}$, proponemos la siguiente tarea:

$\boldsymbol{T}_{\mathbf{1.2}}$: Dadas distintas matrices de Leslie y varias condiciones iniciales $X(0)$,

- Calcular algunos iterados que definen la trayectoria de $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para valores concretos de n.
- ¿Se puede destacar alguna característica general de las trayectorias calculadas $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$?

Vamos a simular un par de ejemplos, considerando dos casos particulares de matrices de Leslie con diferentes distribuciones iniciales *X*(0):

$$\text{Caso 1:} \quad \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{Caso 2:} \quad \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \\ x_3(n-1) \end{pmatrix}$$

Caso 1

M . *X*(0) =

		X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)
1	**1.5**	100	100	175	250	381	569	855	1281	1922
0.5	**0**	0	50	50	88	125	191	284	427	641

M . *X*(0) =

		X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)
1	**1.5**	75	113	169	253	380	570	854	1281	1922
0.5	**0**	25	38	56	84	127	190	285	427	641

M . *X*(0) =

		X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)
1	**1.5**	200	200	350	500	763	1138	1709	2563	3845
0.5	**0**	0	100	100	175	250	381	569	855	1281

M . *X*(0) =

		X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)
1	**1.5**	100	250	325	513	756	1141	1708	2563	3844
0.5	**0**	100	50	125	163	256	378	570	854	1282

Caso 2

M . *X*(0) =

			X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)	*X*(9)	*X*(10)	*X*(11)
0	**4**	**3**	40	940	200	1895	753	3865	2216	8012	5881	16855	14766	35916
0.5	**0**	**0**	160	20	470	100	948	376	1933	1108	4006	2940	8428	7383
0	**0.25**	**0**	100	40	5	118	25	237	94	483	277	1002	735	2107

M . *X*(0) =

			X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)	*X*(9)	*X*(10)	*X*(11)
0	**4**	**3**	50	900	213	1819	763	3717	2207	7720	5808	16268	14511	34715
0.5	**0**	**0**	150	25	450	106	909	381	1859	1104	3860	2904	8134	7256
0	**0.25**	**0**	100	38	6	113	27	227	95	465	276	965	726	2034

M . *X*(0) =

			X(0)	*X*(1)	*X*(2)	*X*(3)	*X*(4)	*X*(5)	*X*(6)	*X*(7)	*X*(8)
0	**4**	**3**	80	1880	400	3790	1505	7730	4431	16024	11761
0.5	**0**	**0**	320	40	940	200	1895	753	3865	2216	8012
0	**0.25**	**0**	200	80	10	235	50	474	188	966	554

La simulación numérica nos permite dar la siguiente respuesta provisional a $\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}$ que resume las posibles *conjeturas* sobre el comportamiento a largo plazo de $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$\boldsymbol{R}_{1.2}^{(2)}$: Dada cierta matriz de Leslie L, la trayectoria de la sucesión $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que (ver simulaciones del caso 1 y caso 2):

- Si partimos de cierta distribución inicial $X(0)$, la simulación numérica de los iterados de $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ muestra que existe cierto instante n_e (tiempo de "estabilización") a partir del cual $\{X(n+1)\approx c\cdot X(n),\, c\in\mathbb{R}\}$. Condición que equivalente a que para $n > n_e$ tenemos:

$$x_i(n+1)\approx c\cdot x_i(n) \;\Leftrightarrow\; \frac{x_i(n+1)}{x_i(n)}\approx c,\, 0\le i\le d,\, n\in\mathbb{N},\, c\in\mathbb{R} \qquad (2.8)$$

  Si consideramos $N(n)=\sum_{i=1}^{d} x_i(n)$, la propiedad anterior (2.8) equivale a:

$$\frac{N(n+1)}{N(n)}\approx c \qquad (2.9)$$

- Si partimos de distribuciones iniciales, $X_1(0)$ y $X_2(0)$, con el mismo volumen, esto es, el mismo número total de individuos en la población, la simulación numérica de los iterados de $\{X_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{X_2(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sugiere que estas sucesiones acaban "estabilizándose", esto es, existe cierto instante n_e a partir del cual:

$$\{X_1(n)\approx X_2(n),\, n>n_e\} \qquad (2.10)$$

- Si consideramos distribuciones iniciales con distintos volúmenes pero proporcionales entre ellas, $X_1(0)=C\cdot X_2(0)$, la simulación numérica de los iterados de $\{X_1(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{X_2(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sugiere que acaban estabilizándose de forma proporcional, esto es, que existe cierto n_e a partir del cual:

$$\{X_1(n)\approx C\cdot X_2(n),\, n>n_e\} \qquad (2.11)$$

Una vez descrita esta primera respuesta provisional, nos proponemos seguir con el estudio de la cuestión que se deriva:

$\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}$: ¿Es siempre posible encontrar una constante c y un instante de tiempo n_e a partir de la cual la trayectoria de la sucesión vectorial $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la relación (2.8), $\{X(n+1)\approx c\cdot X(n),\, n>n_e\}$?

Dada L una matriz de Leslie de orden d, nuestro objetivo es poder aproximar el valor de la constante $c\in\mathbb{R}$ y del instante de tiempo n_e a partir del que:

$$X(n+1)=c\cdot X(n) \tag{2.12}$$

Notemos que las propiedades (2.8) y (2.9), junto con la posibilidad de simular numéricamente la sucesión $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, proporcionan un *primer medio* para dar una primera aproximación de los valores de c y n_e.

Volvamos a simular el ejemplo introducido anteriormente - **Caso 2** - con más iterados para comprobar las propiedades introducidas en (2.8) y (2.9):

			$X(0)$	$X(1)$	$X(2)$	$X(3)$	$X(4)$	$X(5)$	…	$X(46)$	$X(47)$	$X(46)$	$X(46)$
0	**4**	**3**	40	940	200	1895	753	3865	…	42876063362	64537384750	96513787103	145153293260
0.5	**0**	**0**	160	20	470	100	948	376	…	14348880506	21438031681	32268692375	48256893552
0	**0.25**	**0**	100	40	5	118	25	237	…	2380620908	3587220127	5359507920	8067173094
		$N(n)$	300	1000	675	2112,5	1725	4478,125	…	59605564776	89562636557	1,34142E+11	2,01477E+11

$\mathbf{x_1(n+1)/x_1(n)}$	0.21	9.48	0.40	5.14	…	1.49	1.51	1.50	1.50
$\mathbf{x_2(n+1)/x_2(n)}$	23.5	0.21	9.48	0.40	…	1.51	1.49	1.51	1.50
$\mathbf{x_3(n+1)/x_3(n)}$	0.13	23.5	0.21	9.48	…	1.49	1.51	1.49	1.51

Fijémonos que, a partir de las simulaciones numéricas, encontramos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_i(n+1)}{x_i(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{N(n+1)}{N(n)}=1.5\ ,\ 0\le i\le 3$$

Obtenemos así una aproximación del valor de la constante c = 1.5 y de n_e > 46, a partir del que

$$\{X(n+1)\simeq 1.5\cdot X(n),\, n>n_e\}.$$

Para calcular analíticamente (en lugar de hacerlo de forma aproximada a partir de la simulación numérica) el valor de c para el cual se satisface la ecuación (2.12), es necesario resolver:

$$L \cdot X(n) = c \cdot X(n) \tag{2.13}$$

Esta ecuación equivale a tratar el problema de determinar el *valor propio c* asociado a la matriz de Leslie L y su *correspondiente vector propio* $X(n)$ para el que se satisface (2.13).

Así, para seguir con el estudio de la dinámica de una población X será necesario elaborar un estudio más detallado de la ecuación matricial que caracteriza esta evolución $X(n) = \boldsymbol{L}^n \cdot X(0)$ (2.7) y que requiere la construcción de una nueva praxeología entorno al estudio de la potencia n-ésima de L y de la sucesión generada por estas potencias $\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pero antes de empezar con la construcción de esta nueva praxeología, vamos a presentar un nuevo tipo de modelos matriciales para el estudio de la evolución de fenómenos a largo plazo que desembocará, de nuevo, en la problemática que acabamos de presentar.

2.2.2. Las matrices de transición y el estudio de la evolución de fenómenos a largo plazo

Sea X una población[13] que está dividida en d grupos o clases cuyos tamaños respectivos en el periodo de tiempo n son: $m_1(n), \ldots, m_d(n)$. Suponemos además que conocemos una distribución inicial de la población $\boldsymbol{m}(0) = (m_1(0), ..., m_d(0))$ y que tenemos la información referente al porcentaje de transición (o de traspaso) de los individuos de X de un grupo a otro grupo entre dos periodos consecutivos. Nos planteamos de nuevo el estudio de la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q}_0^{(2)}$ introducida en el apartado anterior.

[13] Notemos que aquí la noción de *población* no se restringe a considerar únicamente poblaciones de seres vivos sinó que va más allá y propone el estudio de la evolución de muchos otros tipos de sistemas extramatemáticos, como por ejemplo: la evolución de fenómenos geológicos, de cuotas de mercado, de valores bursátiles, etc.

$Q_2^{(2)}$: Si suponemos conocido el tamaño de una población X, con las características introducidas en las hipótesis previamente formuladas: ¿Cómo podemos describir la evolución del tamaño de los diferentes grupos de los que se compone X? ¿Será siempre posible predecir qué ocurrirá después de un determinado periodo de tiempo? ¿Y lo que ocurrirá a largo plazo?

Denotamos por $m_i(n)$ al número de individuos que hay en el instante n en la clase i. Si suponemos que hay d clases, podemos describir mediante el vector $\boldsymbol{m}(n)$ el total de individuos de cada uno de los grupos en que se divide X:

$$\boldsymbol{m}(n) = \begin{pmatrix} m_1(n) \\ m_2(n) \\ \dots \\ m_d(n) \end{pmatrix}$$

Si suponemos además que tenemos la información referente a los porcentajes de transición entre grupos, podremos construir la denominada ***matriz de transición*** asociada a la población X con las siguientes características:

1) Los elementos de la matriz de transición,

$$M = \left(m_{ij}\right)_{1 \le i \le d, 1 \le j \le d}$$

son las *probabilidades de transición entre grupos*,

$$m_{ij} \in \left[0, 1\right) \text{ con } 1 \le i, j \le d$$

Cada elemento m_{ij} es la probabilidad de que un individuo de X que en el instante $t = n$ está en la j-ésima clase, en el instante siguiente $t = n + 1$ haya cambiado a la i-ésima clase.

2) Los elementos de la k-ésima columna, m_{ik} con $1 \le i \le d$, nos describen cómo se distribuyen porcentualmente los individuos o elementos que en el instante $t = n$ estaban en el k-ésimo grupo, entre las d clases de las que se compone X en el instante $t = n + 1$.

Así, las columnas de la matriz M nos indican el "*estado anterior*", en el sentido de la distribución en tiempo $t = n$, mientras que sus filas nos dan la información sobre el "*estado siguiente*", esto es, cómo se ha distribuido la población de un mismo grupo entre los distintos grupos con el paso de una unidad de tiempo, de $t = n$ a $t = n+1$.

3) Como consecuencia de las dos primeras propiedades, la suma de los elementos de cada k-ésima columna será igual a 1:

$$\sum_{i=1}^{d} m_{ik} = 1 \text{ con } 1 \le k \le d$$

Veamos el caso concreto de matrices de transición de orden 2:

Sea X una población estructurada en dos grupos, que denotamos por A y B. Sea $\boldsymbol{p}$ el porcentaje de grupo A que en el período posterior se mantendrá en A y $\boldsymbol{q}$ el porcentaje del grupo B que el período posterior seguirá estando en B. Situación que podemos sintetizar en la siguiente tabla:

		Situación anterior	
		Grupo A	Grupo B
Situación posterior	Grupo A	***p***	**1 - *q***
	Grupo B	**1 - *p***	***q***

La matriz de transición M que corresponde a la situación descrita es:

$$M = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

Una vez introducida la notación necesaria con la que vamos a trabajar y las propiedades básicas de las matrices de transición, podemos describir la evolución de X en periodos de tiempo consecutivos (de $t = n$ a $t = n+1$) con la siguiente ecuación o relación matricial:

$$\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1) \tag{2.14}$$

Si suponemos además que los porcentajes de transición se mantiene constantes con el paso del tiempo n, entonces la relación descrita equivale a la expresión:

$$\boldsymbol{m}(n) = M^{n} \cdot \boldsymbol{m}(0) \text{ para } n > 0 \tag{2.15}$$

$Q_{2.1}^{(2)}$: Dada una matriz de transición M de orden d y una distribución inicial $\boldsymbol{m}(0)$, ¿Cómo podemos calcular y qué características podemos destacar de la trayectoria de la sucesión vectorial $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la ecuación matricial (2.14) y (2.15), $\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1) = M^n \cdot \boldsymbol{m}(0)$?

Para empezar a explorar y tratar $Q_{2.1}^{(2)}$ proponemos plantear el estudio de diversos casos particulares, considerando diferentes matrices de transición con diversas condiciones iniciales, y describir así las trayectorias de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se generan. Esta exploración nos permitirá formular nuevas hipótesis pertinentes al sistema que estamos estudiando.

$T_{2.1}$: Dadas distintas matrices de transición y varias condiciones iniciales $\boldsymbol{m}(0)$,

- Calcular algunos de los iterados que definen la trayectoria de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para valores concretos de n.
- ¿Se puede destacar alguna característica general de estas trayectorias?

Puede ser de gran utilidad aquí el uso de algunos programas, como por ejemplo, la hoja de cálculo Excel que vamos a utilizar en lo que sigue:

Un estudio geológico sobre la transformación de piedra en arena en periodos de 100 años, nos muestra lo siguiente: el 70% de la materia que es piedra después de 100 años seguirá siendo piedra y sólo el 10% de lo que era arena se convertirá en piedra. La siguiente tabla sintetiza la información que ha proporcionado el estudio descrito:

		Situación anterior	
		Piedra	Arena
Situación posterior	Piedra	0.7	0.1
	Arena	0.3	0.9

Si suponemos que los porcentajes de transición se mantienen constantes, podemos determinar la evolución después de 100, 200,..., 800 años, considerando las siguientes condiciones iniciales:

a. Al inicio hay 30 toneladas de piedra y 50 de arena
b. Al inicio hay 70 toneladas de piedra y 10 de arena
c. Al inicio hay 40 toneladas de piedra y 40 de arena
d. Al inicio hay 40 toneladas de piedra y 60 de arena
e. Al inicio hay 20 toneladas de piedra y 80 de arena

M **=**	**0.7**	**0.1**
	0.3	**0.9**

Evolución de *m*(*n*) en períodos de 100 años

a. Cálculo de los iterados con *m*(0) = (30, 50)

					en 100	**en 200**	**en 300**	**en 400**	**en 500**	**en 600**	**en 700**	**en 800**
		0.7	0.1	30	26	23.6	22.2	21.3	20.8	20.5	20.3	20.2
M . ***m***(0)	=	0.3	0.9	50	54	56.4	57.8	58.7	59.2	59.5	59.7	59.8

b. Cálculo de los iterados con *m* (0) = (70, 10)

					en 100	**en 200**	**en 300**	**en 400**	**en 500**	**en 600**	**en 700**	**en 800**
		0.7	0.1	70	50	38	30.8	26.5	23.9	22.3	21.4	20.8
M . ***m***(0)	=	0.3	0.9	10	30	42	49.2	53.5	56.1	57.7	58.6	59.2

c. Cálculo de los iterados con *m* (0) = (40, 40)

					en 100	**en 200**	**en 300**	**en 400**	**en 500**	**en 600**	**en 700**	**en 800**
		0.7	0.1	40	32	27.2	24.3	22.6	21.6	20.9	20.6	20.3
M . ***m***(0)	=	0.3	0.9	40	48	52.8	55.7	57.4	58.4	59.1	59.4	59.7

d. Cálculo de los iterados con *m* (0) = (40, 60)

					en 100	**en 200**	**en 300**	**en 400**	**en 500**	**en 600**	**en 700**	**en 800**
		0.7	0.1	40	34	30.4	28.2	26.9	26.2	25.7	25.4	25.3
M . ***m***(0)	=	0.3	0.9	60	66	69.6	71.8	73.1	73.8	74.3	74.6	74.7

e. Cálculo de los iterados con *m* (0) = (20, 80)

					en 100	**en 200**	**en 300**	**en 400**	**en 500**	**en 600**	**en 700**	**en 800**
		0.7	0.1	20	22	23.2	23.9	24.4	24.6	24.8	24.9	24.9
M . ***m***(0)	=	0.3	0.9	80	78	76.8	76.1	75.6	75.4	75.2	75.1	75.1

Observemos que todas las trayectorias que se han simulado parecen tender hacia una *situación o punto de equilibrio*. Los tres primeros casos tienen al mismo punto de equilibrio:

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix}$$

mientras que las dos siguientes tienden hacia otro punto de equilibrio:

$$\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Esto nos permite formular la siguiente conjetura: dada una matriz de transición *M*, todas las trayectorias tienden hacia un *punto de equilibrio* o *punto fijo* que parece depender del volumen inicial de piedra y arena ($V_i = a + b$) pero se mantiene independiente de la distribución inicial concreta ***m***(0) = (*a*, *b*), esto es, de los valores concretos de *a* y *b*.

La simulación numérica con Excel permite dar la siguiente *respuesta provisional* a $\boldsymbol{Q}_{2.1}^{(2)}$ que resume las posibles conjeturas sobre la evolución a largo plazo del fenómeno estudiado:

$\boldsymbol{R}_{2.1}^{(2)}$: Sea M una matriz de transición y $\boldsymbol{m}(0)$ la distribución inicial de la población, la trayectoria de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ parece siempre tender a un *vector fijo* o *distribución estable* o *de equilibrio* que denotaremos por $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$. Esta $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$ parece no depender de las componentes de la distribución inicial concreta de la población X sino del volumen total de esta distribución inicial, esto es, de la suma de todos los componentes del vector $\boldsymbol{m}(0)$.

Una vez descrita esta primera respuesta provisional, nos proponemos seguir con el estudio de la cuestión que se deriva:

$\boldsymbol{Q}_{2.2}^{(2)}$: ¿Cómo podemos demostrar la existencia de *vectores fijos* $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$ hacia los cuales parece tender toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la ecuación matricial $\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1) = M^n \cdot \boldsymbol{m}(0)$ con M una matriz de transición? En caso que existan, ¿cómo podemos calcular a priori $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$?

Dada M una matriz de transición de orden d, $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$ es el *vector fijo* o *distribución de equilibrio* (o *estable*) de la matriz M si satisface:

$$M \cdot \boldsymbol{m}^e = \boldsymbol{m}^e \tag{2.16}$$

que equivale a discutir las soluciones del sistema homogéneo:

$$\left(M - I_d\right) \cdot \boldsymbol{m}^e = 0 \tag{2.17}$$

Volvamos al caso concreto que hemos introducido, y empezado a estudiar previamente,

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$

el cálculo de los vectores fijos o distribuciones de equilibrio de *M* corresponde a resolver los sistemas descrito en (2.16) equivalente a (2.17):

$$(M-I)\cdot \boldsymbol{m}^e = \left(\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} m_1^e \\ m_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.1 \\ 0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1^e \\ m_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se trata así de un sistema compatible indeterminado (SCI) del cual nos quedamos con una de las dos ecuaciones que lo definen y escogemos, por ejemplo, la variable m_{e1} como parámetro libre. Resulta así:

$$0.3m_1^e - 0.1m_2^e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1^e = \lambda,\, m_2^e = 3\lambda$$

La solución resulta ser entonces,

$$\boldsymbol{m}^e = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Descrita aquí la familia de soluciones correspondientes a las distribuciones estables, podemos comprobar que las dos distribuciones estables que habíamos detectado anteriormente, mediante la simulación numérica, son soluciones particulares del sistema: $\boldsymbol{m}_1$ pertenece al espacio solución al considerar $\lambda = 20$ y $\boldsymbol{m}_2$ resulta de considerar $\lambda = 25$.

El ejemplo anterior nos indica que la ecuación matricial descrita en (2.17) conduce a la resolución de un sistema compatible indeterminado. La generalización, explicación y justificación de este resultado queda resumido en el siguiente resultado tecnológico que presentamos como respuesta a la cuestión $\boldsymbol{Q}_{2.2}^{(2)}$ presentada anteriormente:

$\boldsymbol{R}_{2.2}^{(2)}$: Dado que la suma de todos los elementos de cada una de las columnas de la matriz de transición M suman 1,

$$\sum_{i=1}^{d} m_{ik} = 1 \text{ con } 1 \le k \le d\,,$$

entonces la suma de los elementos de cada columnas de la matriz $(M - I_d)$ es cero, por lo que, $\det(M - I_d) = 0$. Podemos afirmar entonces que el sistema matricial planteado en (2.17) es siempre un sistema compatible indeterminado con una familia infinita de soluciones.

Hasta ahora hemos conseguido probar que, para cualquier matriz de transición M, podemos hallar la *familia infinita de vectores fijos* o *distribuciones estables* ($\boldsymbol{m}^e$) que podemos *calcular a priori* resolviendo las ecuaciones matriciales planteadas en (2.16) y (2.17). En este punto podemos formular las siguientes nuevas cuestiones a indagar:

$\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}$: ¿Toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a este vector fijo $\boldsymbol{m^e}$? ¿Cuál es la dependencia entre el vector fijo $\boldsymbol{m^e}$, la matriz de transición M y la condición inicial $\boldsymbol{m}(0)$?

Para poder tratar estas cuestiones debemos pasar a estudiar directamente la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada a partir de la relación recurrente matricial descrita en (2.15) que nos conduce al estudio de la potencia n-ésima de M: $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Este hecho requiere, de la misma manera que nos ha requerido el estudio desarrollado en **OM$_{\text{Leslie}}$**, la construcción de una nueva praxeología entorno al *cálculo de potencias de matrices* y, en particular, el cálculo de potencias de matrices de transición.

2.2.3. Una segunda organización para el estudio del problema del cálculo de potencias de matrices

Surge aquí una nueva cuestión $\boldsymbol{Q}_{3}^{(2)}$:

$\boldsymbol{Q}_{3}^{(2)}$: Dada una matriz cuadrada M de orden d, nuestro objetivo es ahora el de estudiar la sucesión generadas por las potencias n-ésima de M: $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Más en concreto, nos proponemos tratar las siguientes cuestiones:

$\boldsymbol{Q}_{3.1}^{(2)}$: ¿Cuál es y cómo podemos determinar la expresión general de los términos de la sucesión $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

$\boldsymbol{Q}_{3.2}^{(2)}$: ¿Qué propiedades podemos destacar de $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Cómo podemos describir $\lim\limits_{n\to\infty}\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Hay algún caso en el que podamos asegurar que $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge? En caso que sea convergente, ¿podemos predecir cuál será este límite?

Una de las primeras tareas que se deben proponer para el estudio de $\boldsymbol{Q}_{3}^{(2)}$ es la que, mediante simulación numérica, se plantee el cálculo de las *potencias sucesivas de matrices* de diferente naturaleza. Con la exploración y simulación numérica que se realice, podremos introducir el siguiente resultado:

$\boldsymbol{R}_{3.1(1)}^{(2)}$: Si D es una matriz diagonal, entonces D^n sigue siendo una matriz diagonal que se obtiene al elevar a la potencia n-ésima los elementos $\{(d_{ii})\}_{1\leq i\leq d}$ de la diagonal principal de la matriz D.

Centrándonos en el caso de matrices diagonalizables, podemos introducir el siguiente resultado:

$\boldsymbol{R}_{3.1(2)}^{(2)}$: Si M es una *matriz diagonalizable* entonces se pueden encontrar las matrices D y K que satisfacen la siguiente relación:

$$M = K \cdot D \cdot K^{-1}\text{, equivalente a, } D = K^{-1} \cdot M \cdot K \tag{2.18}$$

donde D es una matriz diagonal que contiene los *valores propios* (λ_i) asociados a M y K la matriz de cambio de base que contiene los *vectores propios* (v_i) asociados a cada λ_i de M.

De esta forma, el problema del cálculo de la potencia n-ésima de M nos lleva al problema de encontrar las matrices D y K que satisfacen la relación descrita en (2.18) que, aplicando n veces, llegamos a la expresión equivalente para calcular M^n:

$$M^n = K \cdot D^n \cdot K^{-1} \tag{2.19}$$

Podemos reformular entonces la cuestión problemática $\boldsymbol{Q}_{3.1}^{(2)}$ en los términos siguientes según las propiedades (2.18) y (2.19):

¿Cómo podemos determinar la matriz diagonal D y la matriz de cambio de base K asociadas a M que satisfacen $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$ y obtener así $M^n = K \cdot D^n \cdot K^{-1}$?

Notemos que la respuesta a esta cuestión supone la elaboración de una organización matemática local entorno a la *diagonalización de matrices*. En esta organización, quedan incluidos, entre otros elementos: el cálculo del polinomio característico asociado a M, el cálculo de valores y vectores propios, la construcción y justificación de las matrices D, K y K^{-1}.

Relacionada con la cuestión $\boldsymbol{Q}_{3.2}^{(2)}$ relativa al estudio de la posible convergencia de la sucesión $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, recordemos que han quedado planteadas, y pendientes de ser estudiadas, las cuestiones que han motivado y requerido la construcción de esta segunda praxeología matemática. Primero, vamos a estudiar $\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}$ que ha surgido de la construcción de **OM$_{\text{transición}}$** para después pasar a completar el estudio de $\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}$ relativa a **OM$_{\text{Leslie}}$**. Fijémonos que estas cuestiones quedan incluidas en el estudio de $\boldsymbol{Q}_{3.2}^{(2)}$ presentada al inicio de este apartado.

- **El caso de las matrices de transición**:

Utilicemos las herramientas previamente descritas para acabar de estudiar el ejemplo concreto introducido en la sección anterior:

Considerando el caso particular de la matriz de transición:

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$

el *polinomio característico* asociado a *M* es:

$$p_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 0.7-\lambda & 0.1 \\ 0.3 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.6\cdot\lambda + 0.6$$

Los *valores propios* λ_i que resultan de discutir las soluciones de $p_M(\lambda)$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0.6$. Nos lleva a plantear que,

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hecho que provocará que M^n (para *n* suficientemente "grandes") esté formada por dos columnas iguales correspondientes al vector propio asociado a λ_1. Tenemos así que,

$$\lim_{n\to\infty} M^n = K\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot K^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Si consideramos cualquier condición inicial de la forma: $m(0) = (a, b)$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$, tenemos que la distribución en cualquier tiempo *n* suficientemente grande es, tiende a:

$$\lim_{n\to\infty} M^n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.75 & 0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}(a+b)$$

Con este resultado probamos que la evolución a largo plazo es independiente de las componentes *a* y *b* de la distribución inicial pero sí dependiente del volumen total de la distribución inicial $V = a + b$.

Vamos ahora a justificar los resultados que hemos observado al desarrollar nuestro ejemplo concreto e indagar sobre otras propiedades generales de las matrices de transición y de las consecuencias para el estudio de la sucesión matricial $\left\{M^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, consecuentemente, para la evolución de $\left\{\boldsymbol{m}(n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Centrémonos primero en estudiar el *caso general de matrices de transición de orden* 2 para, posteriormente, generalizar los resultados al caso de las matrices de cualquier orden.

$\boldsymbol{Q}_{3.2.1}^{(2)}$:	Consideramos el caso de M una matriz de transición de orden 2, ¿en qué casos podemos asegurar que $\left\{M^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge? En caso que sea convergente, ¿podemos predecir cuál será este límite?

Sea M una matriz de transición de orden 2,

$$M = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

el *polinomio característico* asociado a M es:

$$p_M(\lambda) = \begin{vmatrix} p-\lambda & 1-q \\ 1-p & q-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (p+q)\cdot\lambda + (p+q-1)$$

Los *valores propios* λ_i que resultan de discutir las soluciones de $p_M(\lambda)$ son:

$$\lambda = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4(p+q-1)}}{2} = \frac{(p+q) \pm \left((p+q)-2\right)}{2}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = p+q-1 \text{ donde } -1 \le p+q-1 \le 1$$

Obtenemos así que las matrices de transición de orden 2 siempre tienen: un valor propio $\lambda_1 = 1$ y un segundo valor propio λ_2 tal que $|\lambda_2| \le 1$. Esta propiedad nos permite asegurar que,

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p+q-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y dado que los vectores propios asociados a casa valor propio λ_1 y λ_2 son:

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} q-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \; y \; v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

podemos dar la expresión general de la matriz a la que tiende M^n introducida en (2.19),

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} q-1 & 1 \\ p-1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2-(p+q)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-p & q-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-(p+q)} \cdot \begin{pmatrix} 1-q & 1-q \\ 1-p & 1-p \end{pmatrix}$$

donde podemos observar que la suma de cada una de las columnas de M^n es 1 y además nos permite calcular $\boldsymbol{m}(n)$:

$$\lim_{n\to\infty} M^n \cdot m(0) = \frac{1}{2-(p+q)} \cdot \begin{pmatrix} 1-q & 1-q \\ 1-p & 1-p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2-(p+q)} \cdot \begin{pmatrix} 1-q \\ 1-p \end{pmatrix} \cdot (a+b)$$

Si consideramos y redefinimos el caso particular o solución particular de vector fijo:

$$\boldsymbol{m}^e = \frac{1}{2-(p+q)} \cdot \begin{pmatrix} 1-q \\ 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^e \\ m_2^e \end{pmatrix}$$

encontramos entonces la siguiente expresión equivalente:

$$\lim_{n\to\infty} M^n \cdot \boldsymbol{m}(0) = \begin{pmatrix} m_1^e & m_1^e \\ m_2^e & m_2^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^e \\ m_2^e \end{pmatrix} \cdot (a+b)$$

¿Podemos generalizar las propiedades obtenidas con el estudio de $\boldsymbol{Q}_{3.2.1}^{(2)}$ en el caso de considerar M matrices de transición de orden d ?

– Si consideramos M es una *matriz de transición* de orden d, entonces ésta siempre tiene asociados un *vector propio* de valor propio[14] $\lambda_1 = 1$, y el resto de *valores propios* λ_i de M satisfacen que $|\lambda_i| < 1$. Observemos además que el *vector propio* asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$, corresponde al cálculo del vector fijo o distribución estable: $\boldsymbol{m^e}$.

– Conociendo estas propiedades de los valores propios asociados a M, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

– Si definimos $\boldsymbol{m}^e = \left(m_1^e, m_2^e, ..., m_d^e\right)$ como las componentes del *vector propio* correspondiente al valor propio 1 o componentes del vector fijo $\boldsymbol{m^e}$ de M, tal que $\sum_{i=1}^{d} m_i^e = 1$, junto con (2.20), tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \lim_{n\to\infty} K \cdot D^n \cdot K^{-1} = \begin{pmatrix} m_1^e & \dots & m_1^e \\ m_2^e & \cdots & m_2^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_d^e & \cdots & m_d^e \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Con los resultados que acabamos de describir, podemos dar una respuesta a la cuestión que había quedado pendiente:

[14] Notemos que esta propiedad se demuestra utilizando la propiedad de las matrices de transición que hemos introducido en $\boldsymbol{R}_{2.2}^{(2)}$: Dado que la suma de todos los elementos de cada una de las columnas de la matriz de transición M suman 1, entonces la suma de los elementos de cada una de las columnas de la matriz $(M - Id)$ es 0, por lo que, *det*$(M - Id) = 0$. Esto nos dice que el valor $\lambda_1 = 1$ siempre es solución del polinomio característico de M, y, por tanto, *valor propio* de cualquier matriz de transición M.

$\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}$: ¿Toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a este vector fijo $\boldsymbol{m^e}$? ¿Cuál es la dependencia entre el vector fijo $\boldsymbol{m^e}$, la matriz de transición M y la condición inicial $\boldsymbol{m}(0)$?

$\boldsymbol{R}_{2.3}^{(2)}$: Dada cierta condición inicial $\boldsymbol{m}(0)=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ de (2.22) tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} M^n \cdot \boldsymbol{m}(0) = \begin{pmatrix} m_1^e & \dots & m_1^e \\ m_2^e & \dots & m_2^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_d^e & \dots & m_d^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^e \\ \vdots \\ m_d^e \end{pmatrix} \cdot (a_1 + ... + a_d) \qquad (2.22)$$

propiedad que nos permite asegurar que, a la larga, la población X siempre tiende a un *vector fijo* o *distribución de equilibrio* $\boldsymbol{m}^e$, que depende del volumen inicial $V_i = \sum_{i=1}^{d} a_i$, pero que es independiente de los componentes de la distribución inicial (concreta) de los elementos de $\boldsymbol{m}(0)$.

- **El caso de las matrices de Leslie**:

De nuevo, primero de todo, utilicemos las herramientas descritas al inicio de este apartado para acabar de estudiar el ejemplo introducido en la sección anterior, **OM$_{\mathbf{Leslie}}$**:

Considerando el caso particular de la matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

con la que la expresión matricial del *modelo de Leslie* quedaba expresado de la forma siguiente:

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \end{pmatrix}$$

Para estudiar el comportamiento a largo plazo de la sucesión generada por los iterados de $X(n)$, esto es, para estudiar su comportamiento en el límite es necesario en primer lugar hallar las soluciones del polinomio característico, es decir, hallar los valores propios de L:

$$|L - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1.5 \\ 0.5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1.5;\ \lambda_2 = -0.5$$

Si calculamos los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios de L,

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix};\ v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nos lleva a poder dar la expresión a la que se aproxima la n – ésima potencia de L, L^n:

$$\lim_{n\to\infty} L^n = K \cdot \begin{pmatrix} (1.5)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot K^{-1} = \frac{1}{4} \cdot (1.5)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Si consideramos como condición inicial: $X(0) = (a, b)$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$, tenemos que la distribución en cualquier tiempo n suficientemente grande se aproxima a:

$$\lim_{n\to\infty} X(n) = \lim_{n\to\infty} L^n \cdot X(0) = \lim_{n\to\infty} L^n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c \cdot (1.5)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \cdot (a+b) \text{ con } c = 1/4$$

Donde probamos que la evolución a largo plazo de la sucesión $X(n)$ viene completamente determinada por el hecho que hemos encontrado un valor propio λ_1=1.5 cuyo vector propio correspondiente (con todas sus componentes positivas) “domina” el comportamiento al límite de $X(n)$,

$$\lim_{n\to\infty} X(n) = c \cdot (1.5)^n \cdot v_{\lambda_1} \cdot (a+b)$$

Esto nos indica que, de encontrarnos en este caso (una valor propio mayor que 1 con vector propio con componentes positivas y otro valor propio menor que 1), ambos grupos de la población crecen siempre y además el comportamiento en el límite de cada componente de $X(n)$ es directamente proporcional a la n-ésima potencia del valor propio dominante multiplicada por la componente que le corresponda del vector propio dominante y por el volumen total de la distribución inicial $a + b$.

Vamos ahora a indagar sobre las posibles propiedades generales de las matrices de Leslie y de sus consecuencias para el estudio de la sucesión matricial $\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, consecuentemente, para la evolución de $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Igual que en el caso de las matrices de transición, centrémonos primero en estudiar el *caso general con matrices de Leslie de orden* 2 para, posteriormente, poder generalizar los resultados al caso de las matrices de Leslie de orden d.

$\boldsymbol{Q}_{3.2.2}^{(2)}$: En el caso concreto de las matrices de Leslie (L) de orden 2, ¿qué propiedades podemos destacar de $\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Qué forma tiene $\lim_{n\to\infty}\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

¿Podemos generalizar las propiedades y consecuencias en el caso de considerar L de orden d?

En el caso de considerar L una matriz de Leslie de orden 2 y así completar las conclusiones del estudio desarrollado con nuestro ejemplo concreto, tenemos que:

$$L = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sus valores propios se obtendrán al hallar las raíces del polinomio característico:

$$p_L(\lambda) = \begin{vmatrix} F_1 - \lambda & F_2 \\ p_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - F_1\lambda - F_2 p_1 = 0 \qquad (2.23)$$

que equivale a resolver la ecuación $q(\lambda) = 1$,

$$q(\lambda) = \frac{F_1}{\lambda} + \frac{F_2 p_1}{\lambda^2} = 1 \qquad (2.24)$$

La representación gráfica de esta función $q(\lambda)$ para $\lambda > 0$,

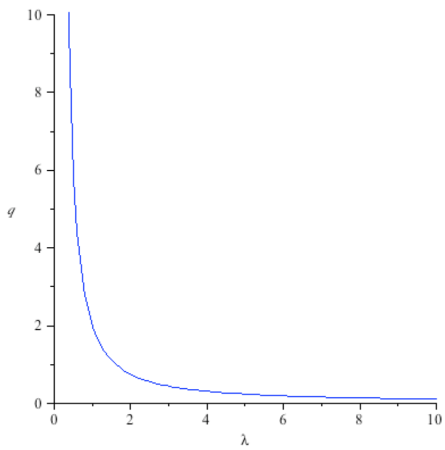


Figura 13. Respresentación de q (λ) para F_1 = 1, F_2 = 2 y p_1 = 0.5

nos asegura que existe un único valor de λ_1 *positivo*, tal que $q(\lambda_1) = 1$. Esto es, la matriz de Leslie L, tiene un único valor propio λ_1 para el cual $q(\lambda_1) = 1$. Además de que λ_1 es un valor propio simple, esto es, su grado de multiplicidad es 1. Si ahora calculamos el vector propio asociado al valor propio λ_1 resulta:

$$v_{\lambda_1} = \left(1, \ \frac{p_1}{\lambda_1} \right) \qquad (2.25)$$

cuyas coordenadas son positivas. Sobre el segundo valor propio λ_2 lo que podemos asegurar de la resolución de la ecuación planteada en (2.23) y en (2.24) es que,

$$|\lambda_2| \leq \lambda_1 \tag{2.26}$$

hecho que convierte al valor propio λ_1, y a su vector propio asociado v_{λ_1}, en el *valor propio dominante*, lo que nos lleva a la conclusión que de estar trabajando con el modelo definido a través de (2.6):

$$X(n) = L \cdot X(n-1)$$

o a su expresión equivalente (2.7),

$$X(n) = L^n \cdot X(0)$$

Para *n* suficientemente grande y $X(0) = \left(x_1(0), x_2(0)\right)$ tenemos que:

$$X(n) \approx a \cdot \left(\lambda_1\right)^n \cdot \left(1, \quad \frac{p_1}{\lambda_1} \right) \cdot \left(x_1(0) + x_2(0)\right) \tag{2.27}$$

En el caso de considerar L una matriz de Leslie de orden d, tenemos que:

$$L = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_{d-1} & F_d \\ P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios se obtendrán de resolver la siguiente ecuación:

$$p_L(\lambda) = \begin{vmatrix} F_1 - \lambda & F_2 & \cdots & F_{d-1} & F_d \\ P_1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{d-1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.28}$$

Si desarrollamos este determinante obtenemos,

$$\lambda^d - F_1\lambda^{d-1} - F_2 p_1 \lambda^{d-2} - F_3 p_1 p_2 \lambda^{d-3} - \ldots - F_d p_1 p_2 \ldots p_{d-1} = 0 \qquad (2.29)$$

Para resolver esta ecuación anterior, como hemos hecho en (2.23) y (2.24), es conveniente introducir la ecuación equivalente:

$$q(\lambda) = \frac{F_1}{\lambda} + \frac{F_2 p_1}{\lambda^2} + \frac{F_3 p_1 p_2}{\lambda^3} + \ldots + \frac{F_d p_1 p_2 \ldots p_{d-1}}{\lambda^d} = 1 \qquad (2.30)$$

cuya representación y propiedades nos indican que:

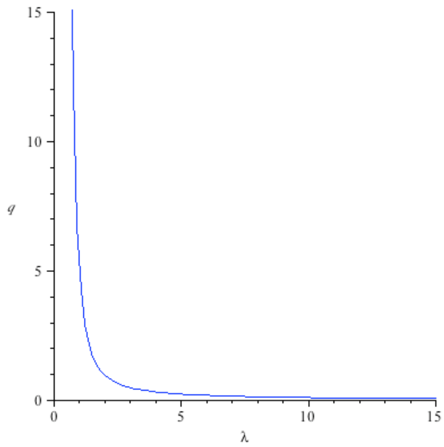


Figura 14. Representación de q (λ) para n = 5

con $F_1 = F_2\, p_1 = \ldots = F_5\, p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5 = 1$

- La función $q(\lambda)$ es monótonamente decreciente y positiva para valores de $\lambda > 0$ ya que si: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow q(\lambda_2) < q(\lambda_1)$,

- $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} q(\lambda) = +\infty$,

- $\lim\limits_{\lambda \to \infty} q(\lambda) = 0$.

Las propiedades de la función $q(\lambda)$ aseguran la existencia y unicidad de único valor de λ_1 *positivo*, tal que q (λ_1) = 1. Esto es, la matriz de Leslie L de orden n, tiene un único valor propio λ_1 para el cual $q(\lambda_1) = 1$. Además de que λ_1 es un valor propio simple, esto es, su grado de multiplicidad es 1. Si ahora calculamos el vector propio asociado al valor propio λ_1 resulta:

$$v_{\lambda_1} = \left(1, \quad \frac{p_1}{\lambda_1}, \quad \frac{p_1 p_2}{\lambda_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots p_{d-1}}{\lambda_1^{d-1}} \right) \tag{2.31}$$

cuyas componentes son todas positivas. En resumen, de las propiedades (2.28) a (2.31), tenemos que:

$\boldsymbol{R}^{(2)}_{3.2.2(1)}$: Una matriz de Leslie L de, tiene un único valor propio positivo λ_1, que obtenemos de solucionar las ecuación presentada en (2.28) o sus expresiones equivalente (2.29) y (2.30). Este valor propio λ_1 es simple y tiene un vector propio asociado v_{λ_1} (2.31) cuyas componentes son todas positivas.

$\boldsymbol{R}^{(2)}_{3.2.2(2)}$: Si λ_1 es el único valor propio positivo de una matriz de Leslie L, para cualquier otro valor propio (real o complejo) de L, tenemos que:

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1 \tag{2.32}$$

En este caso, λ_1 será el *valor propio dominante* de L.

Con los resultados que acabamos de obtener, podemos dar una respuesta a la cuestión pendiente:

$\boldsymbol{Q}^{(2)}_{1.3}$: ¿Es siempre posible encontrar una constante c y un instante de tiempo n_e a partir de la cual la trayectoria de la sucesión vectorial $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la relación (2.8), $\{X(n+1) \approx c \cdot X(n),\, n > n_e\}$?

Así, en caso que la matriz L tenga un valor propio dominante, entonces esto nos lleva a la conclusión que, de estar trabajando con el modelo definido a través de (2.6),

$$X(n) = L \cdot X(n-1)$$

o su expresión equivalente (2.7),

$$X(n) = L^n \cdot X(0)$$

Para n suficientemente grande tenemos y partiendo de cierta distribución inicial $X(0)$,

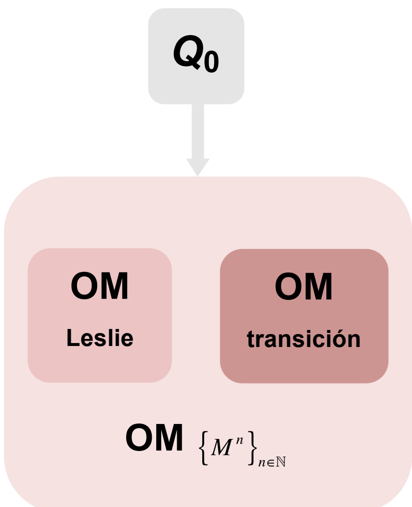
$$X(n) \approx a \cdot (\lambda_1)^n \cdot \left(1, \quad \frac{p_1}{\lambda_1}, \quad \frac{p_1 p_2}{\lambda_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots p_{d-1}}{\lambda_1^{d-1}} \right) \cdot V_{X(0)} \tag{2.33}$$

$$\text{con } a \in \mathbb{R} \text{ y } V_{X(0)} = \sum_{i=0}^{d} x_i(0)$$

que nos permite asegurar que, para n suficientemente grande, cada vector distribución de la sucesión vectorial $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, $\{X(n+1) \approx c \cdot X(n), c \in \mathbb{R}\}$ siendo esta constante c igual al valor propio positivo dominante λ_1 de la matriz de Leslie L.

2.2.4. Síntesis del posible recorrido matemático a través de modelos discretos d – dimensionales

Antes de pasar a presentar el *estudio continuo de la dinámica de poblaciones* y abandonar el mundo de *modelos discretos* que hemos desarrollado hasta aquí, vamos a sintetizar el trabajo desarrollado en este apartado sobre la cuestión $Q_0^{(2)}$. El estudio de esta cuestión que nos ha conducido a trabajar con modelos discretos basados en ecuaciones recurrentes de orden $d > 1$ ha completado el estudio de la dinámica de poblaciones a través de modelos discretos que hemos iniciado en el anterior apartado. Con el siguiente esquema queremos distinguir las tres unidades principales cuyos elementos quedarán resumidos en las tablas que mostraremos a continuación.



OM
Leslie

$$\boldsymbol{H}_1^{(2)} \text{ y } \boldsymbol{Q}_1^{(2)} \rightarrow \begin{cases} \left(\boldsymbol{Q}_{1.1}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{1.1}^{(2)}\right) \\ \left(\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{1.2}^{(2)}\right) \\ \boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H}_2^{(2)} \text{ y } \boldsymbol{Q}_2^{(2)} \rightarrow \begin{cases} \left(\boldsymbol{Q}_{2.1}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{2.1}^{(2)}\right) \\ \left(\boldsymbol{Q}_{2.2}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{2.2}^{(2)}\right) \\ \boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)} \end{cases}$$

OM
transición

$$\boldsymbol{Q}_3^{(2)} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Q}_{3.1}^{(2)} \rightarrow \boldsymbol{R}_{3.1(1)}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{3.1(2)}^{(2)} \\ \boldsymbol{Q}_{3.2}^{(2)} \begin{cases} \left(\boldsymbol{Q}_{3.2.1}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{3.2.1}^{(2)}\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{2.3}^{(2)}\right) \\ \left(\boldsymbol{Q}_{3.2.2}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{3.2.2}^{(2)}\right) \rightarrow \left(\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}, \boldsymbol{R}_{1.3}^{(2)}\right) \end{cases} \end{cases}$$

OM $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

UNIDAD 4(a) - OM Leslie

Objetivos de la unidad

- Presentación de cuestiones relativas a la dinámica de poblaciones X donde se toman en consideración características particulares de los individuos de la población: edad, tasa de reproducción y de supervivencia.
- Se introduce una agrupación por edades en “grupos” o “clases” que tienen asignadas diferentes tasas de fertilidad y de supervivencia que consideraremos homogéneas en un mismo grupo-clase.
- Reformulación de la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q}_0$ en $\boldsymbol{Q}_1^{(2)}$ sobre la evolución de la distribución de X bajo las hipótesis formuladas en $\boldsymbol{H}_1^{(2)}$.
- Construcción del modelo matricial ($\boldsymbol{M}_{\mathbf{Leslie}}$) con L matrices de Leslie.
- Simulación numérica de la trayectoria generada por la sucesión $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida a partir del modelo matricial $\boldsymbol{M}_{\mathbf{Leslie}}$.
- Formulación de nuevas cuestiones relativas a la trayectoria generada por la sucesión $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\boldsymbol{Q}_{1.1}^{(2)}$, $\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}$ y $\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}$) y de las respuestas provisionales $\boldsymbol{R}_{1.1}^{(2)}$ y $\boldsymbol{R}_{1.2}^{(2)}$.

Herramientas

- Operaciones básicas con matrices.
- Construcción e interpretación de modelos matriciales. Ecuaciones y relaciones recurrentes matriciales.
- Construcción de las matrices de Leslie y estudio de sus propiedades.
- Utilización de herramientas informáticas para la simulación numérica de los iterados de la sucesión $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

DESCRIPCIÓN DE RM A PRIORI

Formulación H_i y Q_i

$\boldsymbol{H}_1^{(2)}$: Sea X una población distribuida en d clases de edad que satisface las siguientes propiedades:

- Los individuos de X no se mantienen en una misma clase en tiempos consecutivos, cada uno cambia a su correspondiente clase de edad posterior, esto es, el grupo de individuos que en el instante n está en la clase i y sobreviven, en instante $n+1$ estarán en la clase $i+1$.

- La transición entre dos clases de orden consecutivo están afectadas por su correspondiente *probabilidad de transición* que denotaremos por P_i, probabilidad de supervivencia de los individuos de la clase i a la clase $i+1$ entre los tiempos n y $n+1$.

- Denotamos por F_i el total de descendientes que, en promedio, tiene una hembra de la clase i entre los tiempos n y $n+1$.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

$\boldsymbol{Q}_1^{(2)}$: Si suponemos que conocemos el tamaño de una población *X*, con las características introducidas en las hipótesis previamente formuladas, en algunos periodos de tiempo:

$\boldsymbol{Q}_{1.1}^{(2)}$: ¿Cómo podemos describir la evolución del tamaño de los diferentes grupos o clases de edad de los que se compone *X*?

$\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}$: ¿Será siempre posible predecir qué ocurrirá después de un determinado periodo de tiempo? ¿Y lo que ocurrirá a largo plazo?

Construcción del modelo matemático

Construcción del modelo matricial basado en matrices de Leslie ($\boldsymbol{M}_{\textbf{Leslie}}$):

Bajo las hipótesis formuladas previamente, podemos describir el tamaño de la población que corresponde a la primera clase de edad en tiempo *n* de la forma siguiente:

$$x_1(n) = F_1 \cdot x_1(n-1) + F_2 \cdot x_2(n-1) + ... + F_d \cdot x_d(n-1) \text{ con } F_i \geq 0$$

Por otro lado, el número de hembras en la clase de orden $i+1$ con $i = 1, \ldots, d-1$ en el instante *n* es igual al número de hembras de la clase de orden *i* en tiempo *n* - 1 afectado por la probabilidad de supervivencia de su clase que hemos definido por P_i con $0 \leq P_i \leq 1$:

$$x_{i+1}(n) = P_i \cdot x_i(n-1) \text{ con } 1 \leq i \leq d-1$$

Las expresiones anteriores pueden sintetizarse en la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_{d-1}(n) \\ x_d(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_{d-1} & F_d \\ P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \\ \vdots \\ x_{d-1}(n-1) \\ x_d(n-1) \end{pmatrix}$$

que equivale a considerar la ecuación matricial con *L* la denominada *matriz de Leslie*,

$$X(n) = L \cdot X(n-1)$$

Si suponemos además que *L* se mantiene invariante con el paso del tiempo, podemos aplicar esta relación *n* veces obteniendo así la expresión equivalente,

$$X(n) = L^n \cdot X(0)$$

donde *X*(0) es el vector de la *distribución inicial* de los individuos en clases de edad. De esta forma, si conocemos el vector *X*(0) y la matriz de Leslie (*L*) correspondiente a cierta población *X*, podemos predecir la evolución de la distribución de *X* en sus correspondientes clases de edad. Esto es, predecir la evolución de la sucesión generada por:

$$\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ con el paso del tiempo } n.$$

La simulación numérica nos permite dar la respuesta provisional $\boldsymbol{R}_{1.2}^{(2)}$ a $\boldsymbol{Q}_{1.2}^{(2)}$ que resume las posibles conjeturas sobre el comportamiento a largo plazo de $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

DESCRIPCIÓN DEL RM A PRIORI

Nuevas cuestiones a estudiar

$\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}$: ¿Es siempre posible encontrar una constante c y un instante de tiempo n_e a partir de la cual la trayectoria de la sucesión vectorial $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la relación $\{X(n+1) \approx c \cdot X(n), n > n_e\}$?

Algunas de las propiedades descritas por $\boldsymbol{R}_{1.2}^{(2)}$, junto con la posibilidad de simular numéricamente los iterados de la sucesión estudiada, nos proporciona un *primer medio para aproximar* c y n_e. Pero para calcular analíticamente el valor de c será necesario resolver:

$$L \cdot X(n) = c \cdot X(n)$$

que equivale a tratar el problema de determinar el *valor propio* c asociado a la matriz de Leslie L y su *correspondiente vector propio* $X(n)$. Se requiere así la construcción de una segunda organización centrada en el estudio de la potencia n - ésima de L.

UNIDAD 4(b) - OM transición

Objetivos de la unidad

- Presentación de una población X (notemos que no nos restringiremos al caso del estudio de la dinámica de poblaciones animales, incluimos aquí el estudio de la evolución de fenómenos geológicos, genéticos, económicos, etc.) con generaciones separadas y dividida en grupos o clases.
- Presentación de la reformulación de la cuestión generatriz en $\boldsymbol{Q}_2^{(2)}$ en torno al estudio de la evolución de la distribución de X bajo las hipótesis formuladas en $\boldsymbol{H}_2^{(2)}$.
- Construcción de modelos matriciales para el estudio de dicha evolución con M matrices de transición ($\boldsymbol{M}_{\text{transición}}$)
- Simulación numérica de la trayectoria generada por la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida a partir del modelo matricial $\boldsymbol{M}_{\text{transición}}$.
- Formulación de las nuevas cuestiones relativas a la trayectoria seguida por $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($\boldsymbol{Q}_{2.1}^{(2)}$ y $\boldsymbol{Q}_{2.2}^{(2)}$).
- Transformación de la problemática en torno al estudio de la dinámica de X a largo plazo a la problemática del cálculo de la potencia n-ésima de M, M^n.

Herramientas

- Operaciones básicas con matrices, expresión matricial de sistemas de ecuaciones lineales y su resolución.
- Construcción e interpretación de modelos matriciales. Ecuaciones matriciales y relaciones recurrentes matriciales.
- Construcción de las matrices de transición y estudio de sus propiedades.
- Utilización de herramientas informáticas para la simulación numérica de los iterados de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

DESCRIPCIÓN DEL RM

Formulación H_i y Q_i

$\boldsymbol{H}_2^{(2)}$: Sea X una población que está dividida en d grupos o clases cuyos tamaños respectivos en el periodo de tiempo n son: $m_1(n),\dots,m_d(n)$. Suponemos además que conocemos una distribución inicial de la población $\boldsymbol{m}(0)=(m_1(0),\dots,m_d(0))$ y que tenemos la información referente al porcentaje de transición (o de traspaso) de los individuos de X de un grupo a otro grupo entre dos periodos consecutivos.

$\boldsymbol{Q}_2^{(2)}$: Si suponemos conocido el tamaño de una población X, con las características introducidas en las hipótesis por $\boldsymbol{H}_2^{(2)}$: ¿Cómo podemos describir la evolución del tamaño de los diferentes grupos de los que se compone X? ¿Será siempre posible predecir qué ocurrirá después de un determinado periodo de tiempo? ¿Y lo que ocurrirá a largo plazo?

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Construcción del modelo matemático

Construcción del modelo matricial basado en matrices de transición ($\boldsymbol{M}_{\text{transición}}$):

Podemos describir la evolución de X en periodos consecutivos (de $t = n$ a $t = n + 1$) con la siguiente relación matricial:

$$\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1)$$

Si suponemos además que los porcentajes de transición se mantiene constantes con el paso del tiempo n, entonces la relación descrita equivale a:

$$\boldsymbol{m}(n) = M^{n} \cdot \boldsymbol{m}(0) \text{ para } n > 0$$

Trabajo técnico con M_i

$\boldsymbol{Q}_{2.1}^{(2)}$: Dada una matriz de transición M de orden d y una distribución inicial $\boldsymbol{m}$ (0), ¿Cómo podemos calcular y qué características podemos destacar de la trayectoria de la sucesión vectorial $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la ecuación matricial: $\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1) = M^{n} \cdot \boldsymbol{m}(0)$?

Medio experimental utilizado: Técnica de simulación numérica de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$\boldsymbol{R}_{2.1}^{(2)}$: Sea M una matriz de transición y $\boldsymbol{m}(0)$ la distribución inicial de la población, la trayectoria de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ parece siempre tender a un *vector fijo* o *distribución estable* o *de equilibrio* que denotaremos por $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$. Esta $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$ parece no depender de las componentes de la distribución inicial concreta de la población X sino del volumen total de esta distribución inicial, esto es, de la suma de todos los componentes del vector $\boldsymbol{m}(0)$.

$\boldsymbol{Q}_{2.2}^{(2)}$: ¿Cómo podemos demostrar la existencia de *vectores fijos* $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$ hacia los cuales parece tender toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la ecuación matricial $\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1) = M^{n} \cdot \boldsymbol{m}(0)$ con M una matriz de transición? En caso que existan, ¿cómo podemos calcular a priori $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{e}}$?

$\boldsymbol{R}_{2.2}^{(2)}$: Dado que la suma de todos los elementos de cada una de las columnas de la matriz de transición M suman 1, nos permite asegurar que la suma de los elementos de cada una de las columnas de la matriz $(M - I_d)$ es 0, por lo que, $det\ (M - I_d) = 0$.

Podemos afirmar entonces que el sistema matricial que define $\boldsymbol{M}_{\text{transición}}$ siempre se trata de un sistema compatible indeterminado con familia infinita de soluciones.

Nuevas cuestiones

$\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}$: ¿Toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a su vector fijo $\boldsymbol{m}^{e}$? ¿Cuál es la dependencia entre el vector fijo $\boldsymbol{m}^{e}$, la matriz de transición M y la condición inicial $\boldsymbol{m}(0)$?

UNIDAD 5 - OM $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Objetivos de la unidad

- El objetivo de esta unidad es el estudio de las propiedades y la posible convergencia de la sucesión $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Se introducirá la expresión general para el cálculo de la potencia *n*–ésima de *M*, M^n, en el caso de las matrices diagonalizables.
- Se utilizarán las herramientas introducidas en esta unidad sobre la diagonalización de matrices y la expresión general de M^n al caso concreto de: 1) las *matrices de transición* y 2) las *matrices de Leslie*. Para así resolver las cuestiones: $\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}$ y $\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}$ que han requerido la construcción de esta unidad.

Herramientas

- Cálculo de potencias de matrices y propiedades del cálculo de la potencia de matrices diagonales.
- Técnica de diagonalización de una matriz *M*: polinomio característico asociado a *M*, cálculo de sus valores y vectores propios, determinación de la matriz diagonal *D* y la matriz de cambio de base *K* que satisfacen $M = K \cdot D \cdot K^{-1}$.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

$\boldsymbol{Q}_{3}^{(2)}$: Dada una matriz cuadrada *M* de orden *d*, nuestro objetivo es ahora el de estudiar la sucesión generadas por las potencias *n*-ésimas de *M*. Más en concreto:

$\boldsymbol{Q}_{3.1}^{(2)}$: ¿Cuál es y cómo podemos determinar la expresión general de los términos de la sucesión $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

$\boldsymbol{Q}_{3.2}^{(2)}$: ¿Qué propiedades podemos destacar de $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Cómo podemos describir $\lim_{n\to\infty}\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Hay algún caso en el que podamos asegurar que $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge? En caso que sea convergente, ¿podemos predecir cuál será este límite?

Construcción del modelo matemático

$\boldsymbol{R}_{3.1(1)}^{(2)}$: Si *D* es una matriz diagonal, entonces D^n sigue siendo una matriz diagonal que se obtiene al elevar a la potencia *n*-ésima los elementos de la diagonal principal de *D*.

$\boldsymbol{R}_{3.1(2)}^{(2)}$: Si *M* es una *matriz diagonalizable* entonces se pueden encontrar las matrices *D* y *K* que satisfacen la siguiente relación:

$$M = K \cdot D \cdot K^{-1}, \text{ equivalente a, } D = K^{-1} \cdot M \cdot K$$

donde *D* es una matriz diagonal que contiene los *valores propios* (λ_i) asociados a *M* y *K* la matriz de cambio de base que contiene los *vectores propios* (v_i) asociados a cada λ_i de *M*.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Trabajo técnico con M_i

De esta forma, el problema del cálculo de la potencia n-ésima de M nos lleva al problema de encontrar las matrices D y K que satisfacen la relación $M = K{\cdot}D{\cdot}K^{-1}$ que aplicándola n veces, llegamos a la expresión equivalente para calcular M^n:

$$M^n = K \cdot D^n \cdot K^{-1} \tag{2}$$

El caso de las matrices de transición (OM$_{\textbf{transición}}$):

$\boldsymbol{Q}_{3.2.1}^{(2)}$: Consideramos el caso de M una matriz de transición de orden 2, ¿en qué casos podemos asegurar que $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge? En caso que sea convergente, ¿podemos predecir cuál será este límite?
¿Podemos generalizar las propiedades al caso de considerar M matrices de transición de orden d ?

Con las respuestas obtenidas podemos finalmente responder a la cuestión que había quedado pendiente $\boldsymbol{Q}_{1.3}^{(2)}$:

$\boldsymbol{R}_{1.3}^{(2)}$: Dada cierta condición inicial $\boldsymbol{m}(0) = (a_1, ..., a_d)$ tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} M^n \cdot \boldsymbol{m}(0) = \begin{pmatrix} m_1^e & \dots & m_1^e \\ m_2^e & \dots & m_2^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_d^e & \dots & m_d^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^e \\ \vdots \\ m_d^e \end{pmatrix} \cdot (a_1 + ... + a_N)$$

propiedad que nos permite asegurar que, para n suficientemente grande, la población X siempre tiende a un *vector fijo* o *distribución de equilibrio* $\boldsymbol{m}^e$, que depende del volumen inicial, pero que es independiente de la distribución inicial (concreta) de los elementos de X, $\boldsymbol{m}(0) = (a_1, ..., a_d)$.

El caso de las matrices de Leslie(OM$_{\textbf{Leslie}}$):

$\boldsymbol{Q}_{3.2.2}^{(2)}$: En el caso concreto de las matrices de Leslie (L) de orden 2, ¿qué propiedades podemos destacar de $\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Qué forma tiene $\lim_{n\to\infty}\{L^n\}_{n\in\mathbb{N}}$? ¿Podemos generalizar las propiedades y consecuencias en el caso de considerar L de orden d ?

En el caso de considerar L una matriz de Leslie de orden d, encontramos que los valores propios se obtendrán de resolver la siguiente ecuación:

$$\lambda^d - F_1\lambda^{d-1} - F_2 p_1 \lambda^{d-2} - F_3 p_1 p_2 \lambda^{d-3} - ... - F_d p_1 p_2 ... p_{d-1} = 0 \tag{1}$$

que resulta equivalente a la ecuación:

$$q(\lambda) = \frac{F_1}{\lambda} + \frac{F_2 p_1}{\lambda^2} + \frac{F_3 p_1 p_2}{\lambda^3} + ... + \frac{F_d p_1 p_2 ... p_{d-1}}{\lambda^d} = 1 \tag{2}$$

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Trabajo técnico con M_i

Del estudio de las propiedades de la función $q(\lambda)$ aseguran la existencia y unicidad de único valor de λ_1 positivo, tal que $q(\lambda_1) = 1$. Además de que λ_1 es un valor propio simple, esto es, su grado de multiplicidad es 1. Y si calculamos el vector propio asociado a λ_1,

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{p_1}{\lambda_1}, & \frac{p_1 p_2}{\lambda_1^2}, & \ldots, & \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots p_{d-1}}{\lambda_1^{d-1}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{R}^{(2)}_{3.2.2(1)}$: Una matriz de Leslie L de, tiene un único valor propio positivo λ_1, que obtenemos de solucionar las ecuación presentada en (1) o (2). Este valor propio λ_1 es simple y tiene un vector propio asociado v_{λ_1} (3) cuyas componentes son todas positivas.

$\boldsymbol{R}^{(2)}_{3.2.2(2)}$: Si λ_1 es el único valor propio positivo de una matriz de Leslie L, para cualquier otro valor propio (real o complejo) de L, tenemos que: $|\lambda_i| \leq \lambda_1$. En este caso, λ_1 se denomina el *valor propio dominante* de L.

Con las respuestas obtenidas podemos finalmente responder a la cuestión que había quedado pendiente $\boldsymbol{Q}^{(2)}_{2.3}$:

$\boldsymbol{R}^{(2)}_{2.3}$: En caso que la matriz L tenga un valor propio dominante, entonces esto nos lleva a la conclusión que para n suficientemente grande y cierta distribución inicial $X(0)$, tenemos:

$$X(n) \approx a \cdot (\lambda_1)^n \cdot \begin{pmatrix} 1, & \frac{p_1}{\lambda_1}, & \frac{p_1 p_2}{\lambda_1^2}, & \ldots, & \frac{p_1 p_2 p_3 \cdots p_{d-1}}{\lambda_1^{d-1}} \end{pmatrix} \cdot V_{X(0)}$$

$$\text{con } a \in \mathbb{R} \text{ y } V_{X(0)} = \sum_{i=0}^{d} x_i(0)$$

Nos permite asegurar que, para n suficientemente grande, cada vector distribución de la sucesión vectorial $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a un múltiplo escalar de la distribución inmediatamente anterior, siendo esta constante c igual al valor propio positivo dominante λ_1 de la matriz de Leslie L.

3. MODELOS CONTINUOS PARA EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES

3.1. Poblaciones simples homogéneas: del crecimiento exponencial al crecimiento logístico

Hasta ahora hemos desarrollado el estudio de una primera gran familia de modelos, los *modelos discretos para el estudio de la dinámica de poblaciones* que han aparecido de considerar en tiempo como una magnitud discreta. En primer lugar hemos considerado modelos basados en poblaciones con generaciones separadas y no estructuradas en grupo lo que ha dado origen a *sucesiones recurrentes de primer orden*. A continuación hemos estudiado poblaciones con generaciones separadas pero estructuradas en grupos apareciendo los modelos basados en *sucesiones recurrentes vectoriales* y el álgebra lineal.

Aquí nos vamos a centrar en desarrollar el estudio de Q_0 cuando consideramos que el tiempo es una *magnitud continua*. Pasaremos entonces al estudio de otra segunda gran familia de modelos, los *modelos continuos* para el estudio de la dinámica de poblaciones que, con una estructura en cierto sentido paralela a la que se ha desarrollado hasta ahora, nos va a llevar a la consideración de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales de orden 1 o superior.

Denotamos por $x(t)$ el tamaño de la población X en el instante de tiempo t ($t \in \mathbb{R}$). La evolución o dinámica de esta población quedará caracterizada por el estudio de la función $x(t)$ de variable real t. Situados en el mundo continuo, para describir el crecimiento o decrecimiento del tamaño de X en el instante t, utilizaremos la *variación* del tamaño de X en el instante t definida mediante la derivada:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \tag{3.1}$$

que nos permite definir la *razón o tasa instantánea de variación* por individuo de la forma siguiente,

$$r(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} \tag{3.2}$$

que llamaremos *velocidad relativa de variación*[15] *de* $x(t)$.

Será sobre esta velocidad relativa de variación sobre la que iremos formulando las diversas hipótesis que guiarán la construcción de los sucesivos modelos matemáticos, para ir respondiendo a las cuestiones que se irán derivando de Q_0 a lo largo del proceso de estudio.

3.1.1. Del modelo maltusiano al modelo logístico: reformulación continua de dos modelos de poblaciones con generaciones separadas

Empecemos asumiendo algunas de las hipótesis más sencillas que podemos considerar sobre la población X: (1) Todos los individuos de X son iguales (especialmente en los que hace referencia a la natalidad y a la supervivencia), (2) Los recursos disponibles son ilimitados y (3) X es una población cerrada, en el sentido que no incluimos factores de inmigración o emigración que afecten a la evolución de $x(t)$. Vamos a formular ahora las hipótesis referentes al crecimiento de X que guiarán la construcción del primer modelo frente al estudio de $\boldsymbol{Q}_1^{(3)}$:

$\boldsymbol{H}_1^{(3)}$: Suponemos que la velocidad relativa de variación $r(t)$ se mantiene constante con el paso del tiempo: $r(t) \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$, donde r se define como la diferencia entre la tasa de natalidad n de X y la tasa de mortalidad m. Así: $r = n - m$.

$\boldsymbol{Q}_1^{(3)}$: ¿Cuál es la dinámica de una población X con $r(t) \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $x(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva la evolución de $x(t)$?

La situación descrita por $H_1^{(3)}$ supone considerar:

[15] Notemos que la *velocidad relativa de variación*, $r(t)$, definida en los modelos continuos "equivale" a la que, en los modelos discretos, hemos introducido como la *tasa relativa de variación* de una población *X entre dos generaciones consecutivas* y que hemos denotado por r_n. En la realización efectiva de los REI, este hecho va a ser muy importante para mostrar el paralelismo entre ambos "mundos" ya que la construcción de los modelos continuos se derivará del estudio anterior de Q_0 y, en particular, de la reformulación de las hipótesis sobre las propiedades de las tasas relativas de variación de X.

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r \tag{3.3}$$

que equivale a,

$$x'(t) = r \cdot x(t)\,. \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4) es una ecuación diferencial autónoma[16] de primer orden, cuya solución queda definida por:

$$x(t) = C \cdot e^{rt} \tag{3.5}$$

si conocemos el tamaño inicial de la población $x(0) = x_0$, éste nos permite determinar el valor de la constante C en la función solución $x(t)$,

$$x(t) = x_0 \cdot e^{rt} \tag{3.6}$$

Este primer modelo se conoce como el modelo *maltusiano continuo* ($M_1^{(3)}$) donde el parámetro $r = n - m$ se define como el *coeficiente intrínseco de reproducción* de X.

La solución hallada, que corresponde a un crecimiento exponencial de X, proporciona una primera respuesta $R_1^{(3)}$ a $Q_1^{(3)}$:

$\boldsymbol{R_1^{(3)}}$: Debemos diferenciar tres posibles casos (ver Figura 15) según el valor del parámetro r :

- Si $r > 0$, que equivale al caso $n > m$, entonces la población crece indefinidamente: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = +\infty$,
- Si $r < 0$, que equivale al caso $n < m$, entonces la población tiende a la extinción: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$,
- Si $r = 0$, el caso en que $n = m$, entonces la población X se mantiene constante e igual al valor inicial x_0: $x(t) \equiv x_0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

[16] La ecuación $x'(t) = f(x(t))$ se llama *ecuación diferencial autónoma* si f no mantiene ninguna dependencia explícita respecto a la variable t.

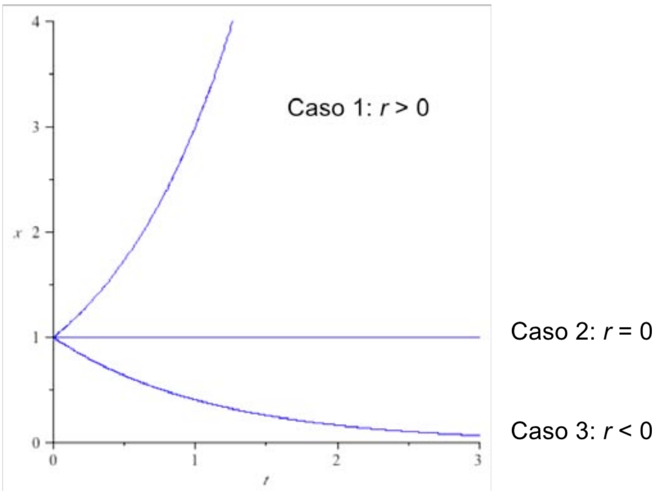


Figura 15. Soluciones de $x'(t) = r.x(t)$ según el valor del parámetro r

Este primer modelo $M_1^{(3)}$ presenta diversas limitaciones entre las cuales se destaca el poco realismo de considerar $r(t)$ constante, hecho que presupone la existencia de recursos infinitos. Con el objetivo de superar esta limitación, conocida como la *paradoja maltusiana* ($Q_{1.1}^{(3)}$), proponemos modificar la hipótesis $H_1^{(3)}$ en los términos siguientes:

$\boldsymbol{H_2^{(3)}}$: Suponiendo la existencia limitada de recursos y de espacio, denotamos por K la constante que describe la *capacidad máxima del hábitat*. Suponemos además que la velocidad relativa de variación de X, $r(t)$, decrece en función del tamaño de X, $x(t)$. En concreto, vamos a suponer que $r(t)$ decrece linealmente en función de $x(t)$ y que $x(t)$ no puede sobrepasar a K.

$\boldsymbol{Q_2^{(3)}}$: ¿Cuál es la dinámica de una población X con $r(t)$ una función lineal decreciente dependiente de $x(t)$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $x(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva a $x(t)$?

Esta suposición da lugar a la siguiente relación:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{3.7}$$

donde r y K son constantes positivas que representan respectivamente la *tasa* o *coeficiente intrínseco de reproducción de X* y la *capacidad máxima del hábitat*[17].

La relación descrita en (3.7) da lugar a la ecuación diferencial autónoma:

$$x'(t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) = r \cdot x(t) - r \cdot \frac{x^2(t)}{K} \tag{3.8}$$

Ahora el crecimiento instantáneo de $x(t)$ es una función cuadrática donde el término $r \cdot x(t)$ representa al crecimiento exponencial (modelo maltusiano) "amortiguado" por el término $-r \cdot \dfrac{x^2}{K}$.

La resolución de (3.8) nos conduce a un segundo modelo $M_2^{(3)}$ conocido como *modelo logístico continuo* o de *modelo de Pearl-Verhulst*,

$$\frac{x'}{x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)} = r\,. \tag{3.9}$$

Podremos resolver esta ecuación diferencial, después de descomponer en suma de fracciones simples el cociente planteado en (3.9):

$$\frac{1}{x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\,. \tag{3.10}$$

Así, utilizando (3.10), podemos descomponer (3.9) como:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right) dx = r\,dt\,. \tag{3.11}$$

E integrando a ambos lados (3.10):

$$\ln\left(\frac{x}{x(0)}\right) - \ln\left(\frac{K - x}{K - x(0)}\right) = rt \tag{3.12}$$

---

[17] Vemos en efecto que $r(t) = r \cdot (1 - x(t)/K)$ decrece linealmente con $x(t)$ y que $r(t) = 0$ cuando $x(t) = K$.

De donde obtenemos la forma explícita de la función $x(t)$ solución de (3.8):

$$x(t) = \frac{K \cdot x(0)}{x(0) + \left(K - x(0)\right) \cdot e^{-rt}}. \tag{3.13}$$

Ahora que tenemos la función solución $x(t)$, nos proponemos seguir respondiendo a Q_2: ¿Qué propiedades tiene la evolución de $x(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva a $x(t)$?

- Si calculamos el comportamiento en los límites de la función $x(t)$ (3.13) para $t \in [0, +\infty)$ resulta que, de forma coherente con la hipótesis H_2:

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = x(0) \text{ y } \lim_{t \to +\infty} x(t) = K \tag{3.14}$$

- Para realizar el estudio de variaciones de $x(t)$ vamos a utilizar la relación descrita por la ecuación diferencial (3.8). Esta relación nos muestra que la función $x'(t)$ es una función parabólica cóncava, respecto de $x(t)$, con intersección en los puntos $(0, 0)$ y $(K, 0)$, cuyo vértice está situado en el punto:

$$\left(\frac{K}{2}, \frac{rK}{2}\right) \tag{3.15}$$

- La representación gráfica de $x(t)$ (Figura 16) nos indica que:

  1. Si $x(t) \in (0, K)$, entonces $x'(t) > 0$,

  2. Si $x(t) > K$ entonces $x'(t) < 0$.

  Propiedad que nos indica que $x(t)$ es creciente mientras no supere la capacidad máxima del hábitat K, momento en el que pasa a ser decreciente.

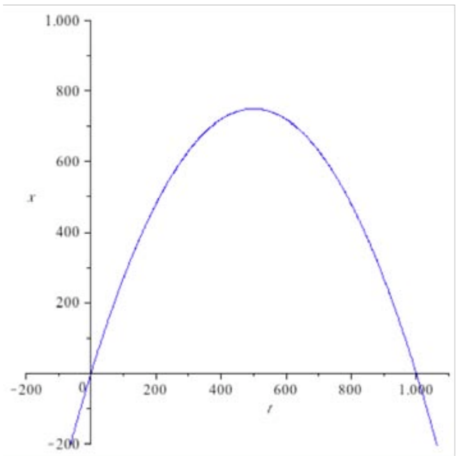


Figura 16. Representación de $x(t)$ con $r = 3$ y $K = 1000$

- A partir de la expresión de $x'(t)$ (3.8) podemos hallar la relación entre $x''(t)$ y $x(t)$:

$$x''(t) = r \cdot x' - \frac{2r}{K} \cdot x \cdot x' \tag{3.16}$$

donde, utilizando la expresión (3.8), se desprende que

$$x''(t) = r^2 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \cdot \left(1 - \frac{2rx}{K}\right) \tag{3.17}$$

de la que se deduce:

3. Si $x(t) \in \left(0, \frac{K}{2r}\right) \cup (K, +\infty)$, entonces $x''(t) > 0$,

4. Si $x(t) \in \left(\frac{K}{2r}, K\right)$ entonces $x''(t) < 0$.

Estas propiedades nos indica que para el valor de la función $x(t) = \frac{K}{2r}$, $x(t)$ pasa de ser una función convexa a cóncava. La recta $y = \frac{K}{2r}$ contiene todos los puntos de inflexión de las funciones descritas en (3.13).

En la Figura 17 encontramos el *diagrama de fases* de la ecuación diferencial (3.8) que indica la forma de la familia de funciones solución descrita por (3.13) cuyas propiedades acabamos de sintetizar:

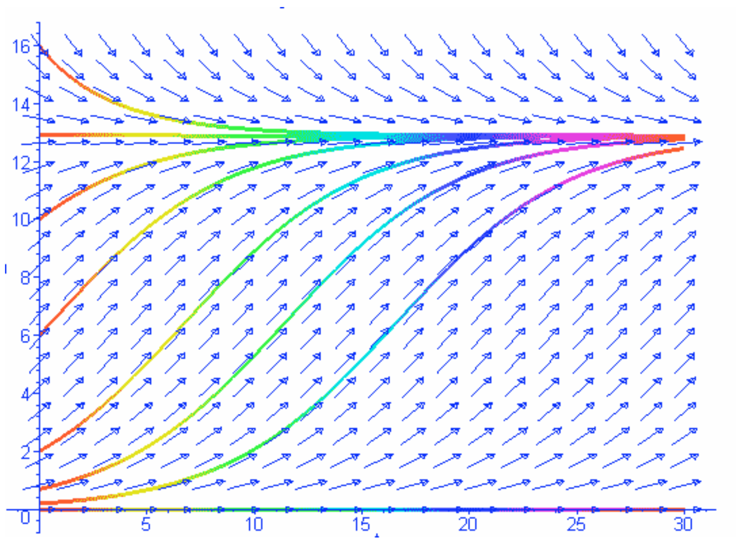


Figura 17. Diagrama de fases de la ecuación (3.8) donde están representados los vectores $(t, x'(t))$ tangentes a las trayectorias de las funciones solución $x(t)$.

A partir de aquí vamos a indicar, aunque sin desarrollar, la introducción de algunas nuevas hipótesis sobre el crecimiento de poblaciones que podría ayudar a seguir con el estudio de la cuestión generatriz Q_0 y con necesaria construcción de nuevos modelos matemáticos dentro del mundo continuo que permitirían superar posibles limitaciones de los modelos considerados hasta el momento:

- Hay muchas poblaciones que sufren de *extracciones*, ya sean constantes o variables. Por ejemplo, poblaciones de marinas con una tasa constante de pesca diaria, mensual, etc., o por arrastre que dependen siempre del tamaño de la población. Añadir estas hipótesis a nuestro sistema conduce a la construcción y estudio de modelos del tipo:

  1. Si suponemos que hay una *extracción instantánea constante* (h) de población, nos llevaría a una ecuación diferencial del tipo:

$$x'(t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h \qquad (3.18)$$

  2. Si suponemos un extracción proporcional a $x(t)$, $h(x) = cx(t)$, resulta:

$$x'(t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - c \cdot x(t) \qquad (3.19)$$

- En muchas poblaciones encontramos que cuando el tamaño de la población es muy pequeño, entonces es más difícil que la especie procree. Además, se pueden añadir más restricciones del tipo que los individuos de la población requieran de un tiempo hasta llegar a su madurez reproductiva. Queremos decir con ello, que son casos en los que la que $r(t)$ varia a un ritmo mucho más pequeño dependiendo del tamaño de la población o de las edades de sus individuos (*efecto Allee*). Estas restricciones del sistema no están contempladas en el modelo logístico M_2 que supone que $r(t)$ decrece linealmente para cualquier $x(t)$ y sin contemplar características individuales de X. La inclusión de estas hipótesis, y consecuente completación de las anteriores, nos llevarían al estudio de modelos del tipo:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = g\left(x(t)\right) \text{ con } g(x(t)) \text{una función decreciente.} \qquad (3.20$$

UNIDAD 6 - OM maltusiana continua

Objetivos de la unidad

- Introducción de la notación adecuada para describir el tiempo y el tamaño de la población *X*.
- Introducción de la derivada como tasa instantánea de variación del tamaño de *X*.
- Búsqueda de paralelismos con el "mundo discreto" para que sirva de referencia para facilitar la formulación de hipótesis sobre *X* y sobre su crecimiento. Aparecerá aquí la dificultad de relacionar la que hemos introducido como tasa relativa de variación (r_n – Ver OM maltusiana discreta) con la magnitud continua: $r(t) = x'(t) / x(t)$.
- Formulación de la primera hipótesis $H_1^{(3)}$, construcción del modelo maltusiano continuo $M_1^{(3)}$, estudio general del modelo considerado, formalización de la primera respuesta provisional $R_1^{(3)}$ y formulación de las limitaciones que presenta la OM maltusiana continua.

Herramientas

- Resolución de ecuaciones diferenciales autónoma de primer orden

$$a(t) \cdot x'(t) + b(t) \cdot x(t) = 0$$

y su técnica de resolución por variables separadas.

- Representación de la familia elemental de funciones exponenciales.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

$H_1^{(3)}$: Suponemos que la velocidad relativa de variación *r* (*t*) se mantiene constante con el paso del tiempo: $r(t) \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$. Donde *r* se define como la diferencia entre la tasa de natalidad *n* de *X* y la tasa de mortalidad *m*. Así: $r = n - m$.

$Q_1^{(3)}$: ¿Cuál es la dinámica de una población con $r(t) \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de *x*(*t*) a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva esta evolución?

Construcción del modelo matemático

Construcción del modelo maltusiano continuo ($M_1^{(3)}$):

La situación descrita por $H_1^{(3)}$ supone considerar:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r$$

que equivale a considerar $x'(t) = r \cdot x(t)$, cuya solución por la técnica de variables separadas nos lleva a:

$$x(t) = C \cdot e^{rt} \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

si conocemos $x(0) = x_0$ nos permite determinar el valor de la constante *C*,

$$x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$$

Este primer modelo se conoce como el modelo *maltusiano continuo* donde el parámetro $r = n - m$ se define como el *coeficiente intrínseco de reproducción* de *X*.

Trabajo técnico con M_i	Medio experimental utilizado: Representación de la familia elemental de funciones exponenciales y transformaciones de éstas según el valor de los parámetros r y x_0. Respuesta $R_1^{(3)}$: Se distinguen los siguientes casos según el valor del parámetro r: ▪ Si $r > 0$, entonces la población crece indefinidamente: $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$, ▪ Si $r < 0$, la población tiende a la extinción: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, ▪ Si $r = 0$, entonces la población X se mantiene constante igual a x_0.
Nuevas cuestiones a estudiar	Limitación principal de $M_1^{(3)}$: El caso $r > 0$, supone la existencia de recursos infinitos, hecho que se conoce como la paradoja maltusiana y a la formulación de la cuestión problemática no abordable con M_1: $Q_{1.1}^{(3)}$: ¿Cómo podemos superar la limitación que formula la paradoja maltusiana e introducir la limitación de no disponer de recursos infinitos?

UNIDAD 7 - OM logística continua

Objetivos de la unidad

- Reformulación de la hipótesis $\overset{(3)}{H_1}$ en $\overset{(3)}{H_2}$ con el objetivo de superar la paradoja maltusiana formulada con $\overset{(3)}{Q_{1.1}}$ como limitación de $OM_{\text{maltusiana continua}}$.
- Construcción, estudio del modelo logístico continuo $\overset{(3)}{M_2}$ y formalización de la segunda respuesta provisional $\overset{(3)}{R_2}$.
- Resolución de la ecuación diferencial logística y estudio de las características de sus funciones solución en base a la ecuación diferencial que la define.
- Detección de posibles limitaciones $\overset{(3)}{M_2}$ y propuestas de posibles extensiones.

Herramientas

- Resolución de ecuaciones diferenciales autónoma de primer orden

$$a(t)\cdot x'(t)+b(t)\cdot x(t)=0$$

y su técnica de resolución por variables separadas.

- Estudio global de funciones y su representación a partir de su expresión implícita.
- Diagrama de fases de una ecuación diferencial autónoma.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

$\overset{(3)}{H_2}$: Suponiendo la existencia limitada de recursos y de espacio, denotamos por K la constante que nos describe la *capacidad máxima del hábitat* ($K > 0$). Suponemos además que la velocidad relativa de variación de X, $r(t)$, decrece en función del tamaño de X, $x(t)$. En concreto, vamos a suponer que $r(t)$ decrece linealmente en función de $x(t)$ y que no $x(t)$ puede sobrepasar a K.

$\overset{(3)}{Q_2}$: ¿Cuál es la dinámica de una población X con $r(t)$ una función lineal decreciente dependiente de $x(t)$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $x(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva a $x(t)$?

Construcción del modelo matemático

<u>Construcción del modelo logístico continuo (</u> $\overset{(3)}{M_2}$):

Las hipótesis formuladas en $\overset{(3)}{H_2}$ dan lugar a la siguiente relación:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=r\cdot\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$$

equivalente a la ecuación diferencial autónoma,

$$x'(t)=r\cdot x(t)\cdot\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)=r\cdot x(t)-r\cdot\frac{x^2(t)}{K} \tag{1}$$

donde r y K son constantes positivas que representan respectivamente la *tasa* o *coeficiente intrínseco de reproducción de* X y la *capacidad máxima del hábitat*.

	Construcción de M_i	Resolviendo (1) obtenemos la forma explícita de la función solución $x(t)$: $$x(t) = \frac{K \cdot x(0)}{x(0) + \left(K - x(0)\right) \cdot e^{-rt}}.$$
	Trabajo técnico con M_i	Medio experimental utilizado: Representación de la función $f(x)$ a partir de las relaciones definidas por (1). Otras cuestiones derivadas y tratadas con $M_2^{(3)}$: ▪ ¿Cuál es el comportamiento de $x(t)$ en la frontera de su dominio? ▪ ¿Qué propiedades tiene $x'(t)$ definida a partir de (1) que sean útiles para el estudio de $x(t)$? ▪ ¿Cómo se interpretan los parámetros que intervienen en la definición de (1) y de su función solución $x(t)$? ▪ ¿Cómo influye en la dinámica de una supuesta población que sigue este modelo M_2 cambios en la condición inicial x_0 ? ¿y cambios en K? ¿y en r?

3.2. Poblaciones en competencia

Una de las posibles extensiones de $M_2^{(3)}$ con la que trabajaremos es la de considerar una población *Z* en la que conviven y compiten dos especies *X* e *Y*. Denotemos por $x(t)$ el tamaño de la población *X* en el instante de tiempo *t* e $y(t)$ el de la segunda. Sobre el crecimiento de las poblaciones *X* e *Y*, podemos considerar las respectivas *velocidades relativas de variación instantánea*,

$$r_x(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} \quad \text{y} \quad r_y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \tag{4.1}$$

sobre las que podemos formular las siguientes hipótesis cuando ambas poblaciones viven en el mismo medio y entran en competencia:

> $\boldsymbol{H}_1^{(4)}$:Suponemos que, en ausencia de su respectivo contrincante: $r_x(t)$ y $r_y(t)$ decrecen linealmente dependiendo de $x(t)$ e $y(t)$ y que no pueden sobrepasar la correspondiente capacidad máxima de hábitat. Esto es, las dos poblaciones siguen un modelo logístico con coeficientes *a* y *b* y capacidades máximas de hábitat K_1 y K_2 respectivamente.
>
> Suponemos además que, cuando $y(t) \neq 0$, ésta influye negativamente sobre $r_x(t)$ con constante de proporcionalidad *c*. De la misma forma lo hace $x(t) \neq 0$ influyendo negativamente sobre $r_y(t)$ con constante *d*.
>
> $\boldsymbol{Q}_1^{(4)}$: ¿Cuál es la dinámica de una población *Z* con las características introducidas en $\boldsymbol{H}_1^{(4)}$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $x(t)$ y de $y(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva ambas dinámicas?

Las hipótesis que acabamos de describir nos permiten introducir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{x} = a \cdot \left(1 - \dfrac{x}{K_1}\right) - c \cdot y \\ \dfrac{y'}{y} = b \cdot \left(1 - \dfrac{y}{K_2}\right) - d \cdot x \end{cases} \tag{4.2}$$

que resulta equivalente a,

$$\begin{cases} x' = a\,x\left(1 - \dfrac{x}{K_1}\right) - cxy \\ y' = b\,y\left(1 - \dfrac{y}{K_2}\right) - dxy \end{cases} \tag{4.3}$$

Este modelo matemático, que vamos a llamar $\boldsymbol{M}_{\mathbf{S.EDO}}$, introduce el sistema conocido como *modelo de Lotka – Volterra*. Debemos observar que en este sistema (4.3), no será posible determinar explícitamente las funciones solución $x(t)$ e $y(t)$. Lo que haremos será desarrollar el *estudio cualitativo* del sistema a partir de la construcción de su *retrato fase*. Este análisis incluirá, en primer lugar, el estudio del comportamiento de $x(t)$ y de $y(t)$ en ausencia la una de la otra, seguido del cálculo y estudio[18] de los puntos y rectas de equilibrio del sistema, para pasar finalmente a completar el estudio cualitativo de las trayectorias de $x(t)$ e $y(t)$.

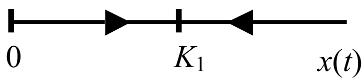
- Representación de las llamadas *líneas de fase* que representan el comportamiento de $x(t)$ en ausencia de $y(t)$. Y, al contrario, el comportamiento de $y(t)$ en ausencia de $x(t)$. Estas rectas formarán en realidad los ejes del plano fase. Estas son las rectas que formarán el plano de fase.

  - Caso $y(t) = 0$: la población X (en ausencia de Y) sigue un crecimiento logístico de acuerdo con la ecuación diferencial:

  $$x' = a \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K_1}\right)$$

  cuya solución vamos a representar de la forma siguiente:

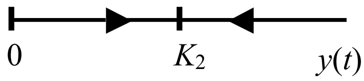
[18] Corresponde a estudiar las *isoclinas* de crecimiento nulo o también llamadas *nulclinas*.



- Caso $x(t)=0$: la población Y (en ausencia de X) sigue un crecimiento logístico de acuerdo con la ecuación diferencial:

$$y' = by\left(1-\frac{y}{K_2}\right)$$

que también vamos a representar como:



▪ Cálculo y estudio de los *puntos de equilibrio* y *rectas de equilibrio* o *nulclinas* de equilibrio definidas como las rectas sobre las cuales $x'(t)=0$ o $y'(t)=0$ y, en el caso de que $x'(t)=y'(t)=0$, se trata de los *puntos de equilibrio*.

- Si $x'(t)=0$, tenemos las rectas sobre las cuales $x(t)$ es constante,

$$\left[a\cdot\left(1-\frac{x}{K_1}\right)-c\cdot y\right]\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0;\; y=\frac{a}{c}\cdot\left(1-\frac{x}{K_1}\right) \qquad (4.4)$$

- Si $y'(t)=0$, tenemos las rectas sobre las que la función $y(t)$ es constante:

$$\left[b\cdot\left(1-\frac{y}{K_2}\right)-d\cdot x\right]\cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0;\; x=\frac{b}{d}\cdot\left(1-\frac{y}{K_2}\right) \qquad (4.5)$$

Por lo tanto, obtenemos un primer punto de equilibrio $(0,0)$ y dos nulclinas:

$$y=\frac{a}{c}\cdot\left(1-\frac{x}{K_1}\right) \text{ con intersecciones en los puntos } \left(0,\frac{a}{c}\right) \text{ y } \left(K_1,0\right) \qquad (4.6)$$

$$x=\frac{b}{d}\cdot\left(1-\frac{y}{K_2}\right) \text{ con intersecciones en los puntos } \left(\frac{b}{d},0\right) \text{ y } \left(0,K_2\right) \qquad (4.7)$$

que podemos representar sobre el plano de fase formado por los $(x(t), y(t))$.

Notemos que puede existir un segundo punto de equilibrio, en el caso que las dos rectas que nos han definido las nulclinas interseccionan en el primer cuadrante. Discutiremos este caso en el siguiente apartado al considerar diferentes casos dependiendo del valor de los parámetros a, b, c, d, K_1 y K_2.

- Estudio cualitativo de las trayectorias de $x(t)$ y $y(t)$ según el valor de los parámetros a, b, c, d, K_1 y K_2:

  - **Caso 1**: *Y* es la población dominante y lleva a *X* a su extinción.

Si $K_1 < \frac{b}{d}$ y $K_2 > \frac{a}{c}$, las dos nulclinas definidas en (4.6), (4.7) son paralelas. En este caso, la segunda población es dominante respecto la primera, $y(t)$ afecta al posible crecimiento $x(t)$ hasta el punto de llegar a eliminarla. Después de cierto tiempo, $x(t)$ tiende a la extinción mientras que $y(t)$ se acaba aproximando a su capacidad máxima de hábitat K_2.

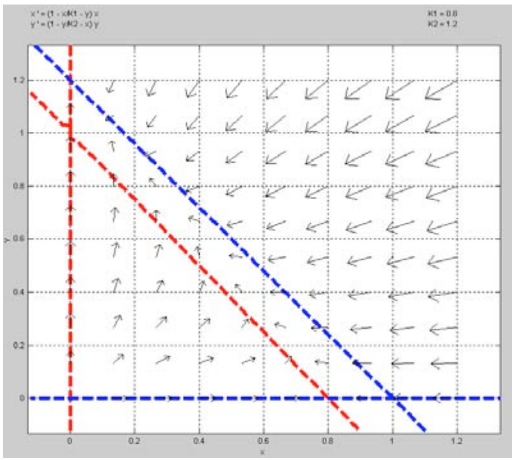


Figura 18. Retrato fase del sistema (4.3) para $K_1 = 0.8$, $K_2 = 1.2$ y $a = b = 1$

  - **Caso 2**: *X* es la población dominante y lleva a *Y* a su extinción

Si $K_1 > \frac{b}{d}$ y $K_2 < \frac{a}{c}$, es el caso en que la primera población es dominante respecto la segunda, $x(t)$ afecta al posible crecimiento $y(t)$ hasta el punto de llegar a eliminarla. Después de una cierto tiempo, $x(t)$ acaba aproximándose a su capacidad máxima de hábitat K_1 mientas que $y(t)$ tiende a su extinción.

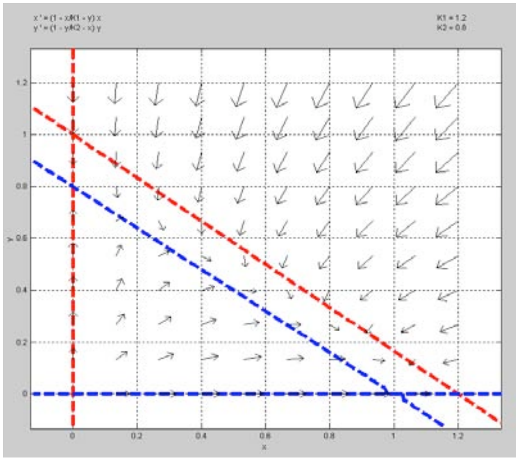


Figura 19. . Retrato fase del sistema (4.3) para $K_1 = 1.2$, $K_2 = 0.8$ y $a = b = 1$

- **Caso 3**: Competición débil entre *X* e *Y*, *x*(*t*) e *y*(*t*) tienden a un segundo punto de equilibrio (x_e, y_e) con $x_e > 0$ y $y_e > 0$.

  Si $K_1 < \frac{b}{d}$ y $K_2 < \frac{a}{c}$, los puntos de equilibrio $(0, K_1)$ y $(K_2, 0)$ son los dos inestables y las trayectorias de *x*(*t*) e *y*(*t*) tienden a un punto de equilibrio estable que hay en el primer cuadrante (Ver Figura 20).

- **Caso 4:** Extinción de una de las poblaciones dependiendo de (x_0, y_0).

  Si $K_1 > \frac{b}{d}$ y $K_2 > \frac{a}{c}$, entonces *x*(*t*) o *y*(*t*) llegarán a la extinción dependiendo del tamaño inicial de cada una de las poblaciones (Ver Figura 21).

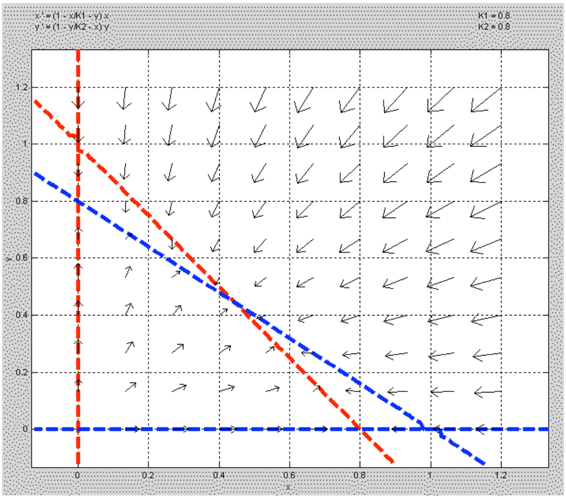


Figura 20. Retrato fase del sistema (4.3) para

$K_1 = 0.8$, $K_2 = 0.8$ y $a = b = 1$

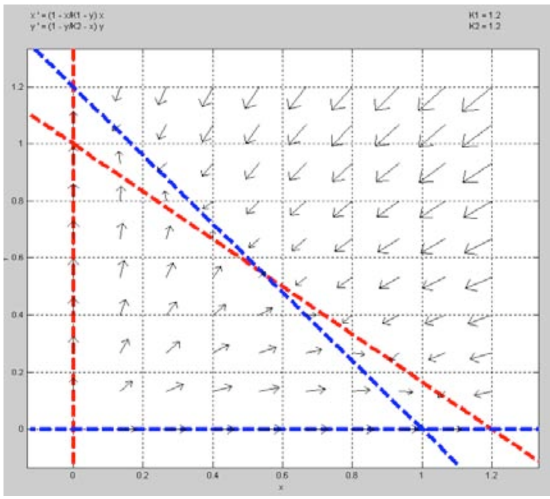


Figura 21. Retrato fase del sistema (4.3) para

$K_1 = 1.2$, $K_2 = 1.2$ y $a = b = 1$

UNIDAD 8 - OM competencia

Objetivos de la unidad

- Se presenta una población en la que conviven y compiten dos especies.
- Formulación de la hipótesis $H_1^{(4)}$ referente a las velocidades relativas de crecimiento de ambas poblaciones en ausencia o no de la otra población y formulación de $\boldsymbol{Q_3}$.
- Introducción de los sistemas de ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos $M_1^{(4)}$ para el estudio de poblaciones Z que satisfacen $H_1^{(4)}$.
- Estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales considerado en $M_1^{(4)}$ y formalización de las conclusiones o respuestas $R_1^{(4)}$ referentes a $Q_1^{(4)}$.

Herramientas

- Utilización e interpretación de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomas para el estudio de dinámica de poblaciones en competencia.
- Estudio cualitativo de sistemas de EDO y su retrato fase.

DESCRIPCIÓN DEL RECORRIDO MATEMÁTICO A PRIORI (RM)

Formulación H_i y Q_i

$H_1^{(4)}$: Suponemos que, en ausencia de su respectivo contrincante: $r_x(t)$ y $r_y(t)$ decrecen linealmente dependiendo de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, cada una de las cuales no puede sobrepasar su correspondiente capacidad máxima de hábitat. Esto es, las dos poblaciones siguen un modelo logístico con coeficientes a y b y capacidades máximas de hábitat K_1 y K_2 respectivamente. Suponemos además que, cuando $y(t) \neq 0$, ésta influye negativamente sobre $r_x(t)$ con constante de proporcionalidad c. De la misma forma lo hace $x(t) \neq 0$ influyendo negativamente sobre $r_y(t)$ con constante d.

$Q_1^{(4)}$: ¿Cuál es la dinámica de una población Z con las características introducidas en $H_1^{(4)}$? ¿Qué propiedades tiene la evolución de $x(t)$ y de $y(t)$ a corto y a largo plazo? ¿Qué factores determinan de forma más decisiva ambas dinámicas?

Construcción del modelo matemático

Construcción del modelo:

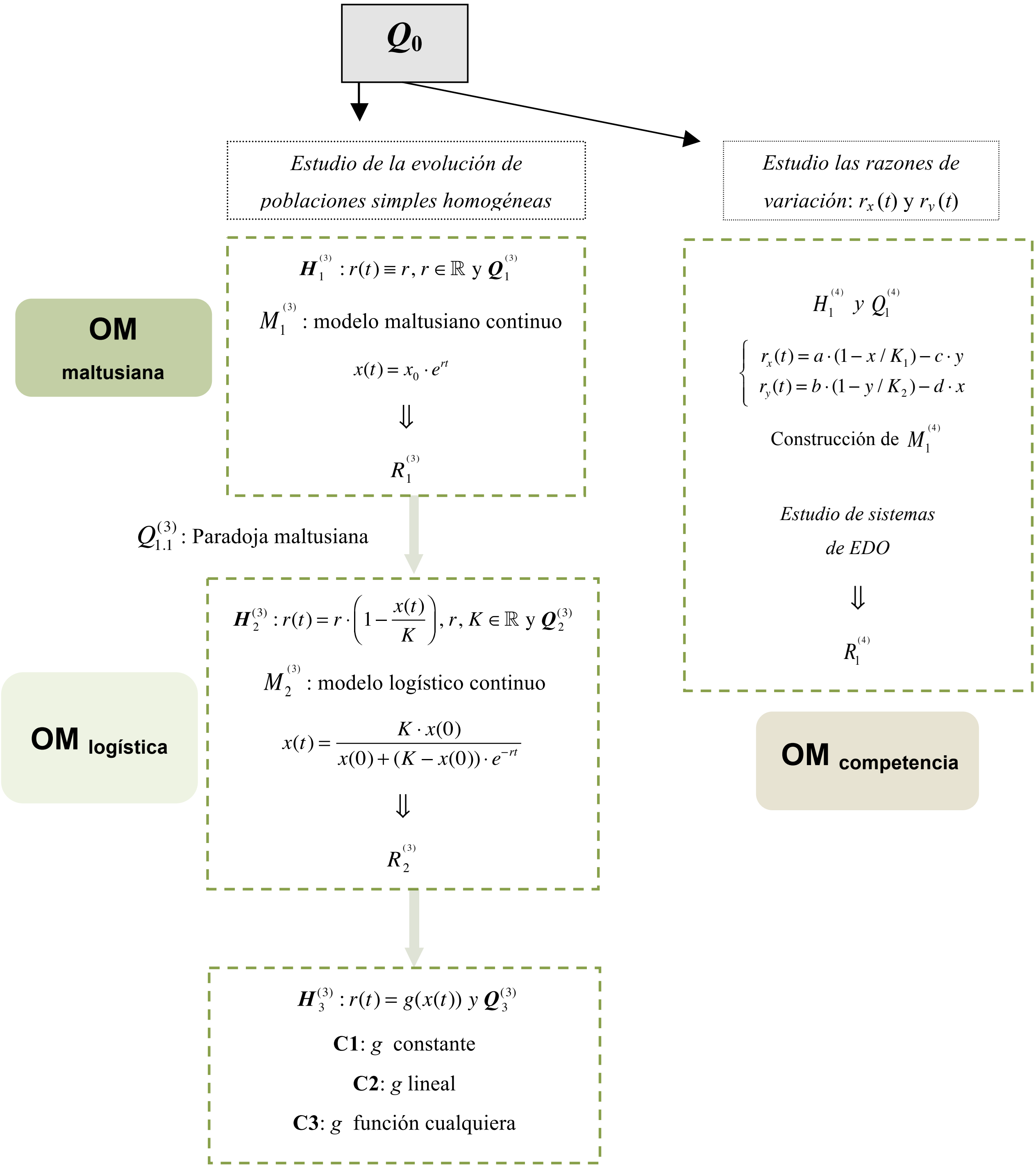
El modelo matemático $M_1^{(4)}$ queda finalmente expresado en los siguientes sistemas de EDO equivalente conocidas como las ecuaciones o modelo de Lotka - Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{x} = a\left(1 - \dfrac{x}{K_1}\right) - cy \\[2ex] \dfrac{y'}{y} = b\left(1 - \dfrac{y}{K_2}\right) - dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \left[a\left(1 - \dfrac{x}{K_1}\right) - cy\right] \cdot x \\[2ex] y' = \left[b\left(1 - \dfrac{y}{K_2}\right) - dx\right] \cdot y \end{cases}$$

Trabajo técnico con M_i

Se realiza entonces el estudio cualitativo del sistema definido por $M_1^{(4)}$ según el valor de los parámetros *a, b,* K_1 y K_2. Este estudio nos lleva a cuatro posibles casos:

- **Caso 1**: Si $K_1 < \frac{b}{d}$ y $K_2 > \frac{a}{c}$, entonces *Y* es la población dominante y lleva a *X* a su extinción,
- **Caso 2**: Si $K_1 > \frac{b}{d}$ y $K_2 < \frac{a}{c}$, entonces *X* es la población dominante y lleva a *Y* a su extinción,
- **Caso 3**: Si $K_1 < \frac{b}{d}$ y $K_2 < \frac{a}{c}$, entonces hay una competición débil entre *X* e *Y*, $x(t)$ e $y(t)$ tienden a un segundo punto de equilibrio,
- **Caso 4**: Si $K_1 > \frac{b}{d}$ y $K_2 > \frac{a}{c}$, entonces encontramos extinción de una de las poblaciones dependiendo de las condiciones iniciales.



Q_0
Estudio de la evolución de poblaciones simples homogéneas
Estudio las razones de variación: $r_x(t)$ y $r_y(t)$
OM maltusiana
$H_1^{(3)}: r(t) \equiv r,\ r \in \mathbb{R}$ y $Q_1^{(3)}$
$M_1^{(3)}$: modelo maltusiano continuo
$x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$
$\Downarrow$
$R_1^{(3)}$
$Q_{1.1}^{(3)}$: Paradoja maltusiana
OM logística
$H_2^{(3)}: r(t) = r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),\ r, K \in \mathbb{R}$ y $Q_2^{(3)}$
$M_2^{(3)}$: modelo logístico continuo
$x(t) = \frac{K \cdot x(0)}{x(0) + (K - x(0)) \cdot e^{-rt}}$
$\Downarrow$
$R_2^{(3)}$
$H_3^{(3)}: r(t) = g(x(t))$ y $Q_3^{(3)}$
C1: g constante
C2: g lineal
C3: g función cualquiera
$H_1^{(4)}$ y $Q_1^{(4)}$
$\begin{cases} r_x(t) = a \cdot (1 - x/K_1) - c \cdot y \\ r_y(t) = b \cdot (1 - y/K_2) - d \cdot x \end{cases}$
Construcción de $M_1^{(4)}$
Estudio de sistemas de EDO
$\Downarrow$
$R_1^{(4)}$
OM competencia

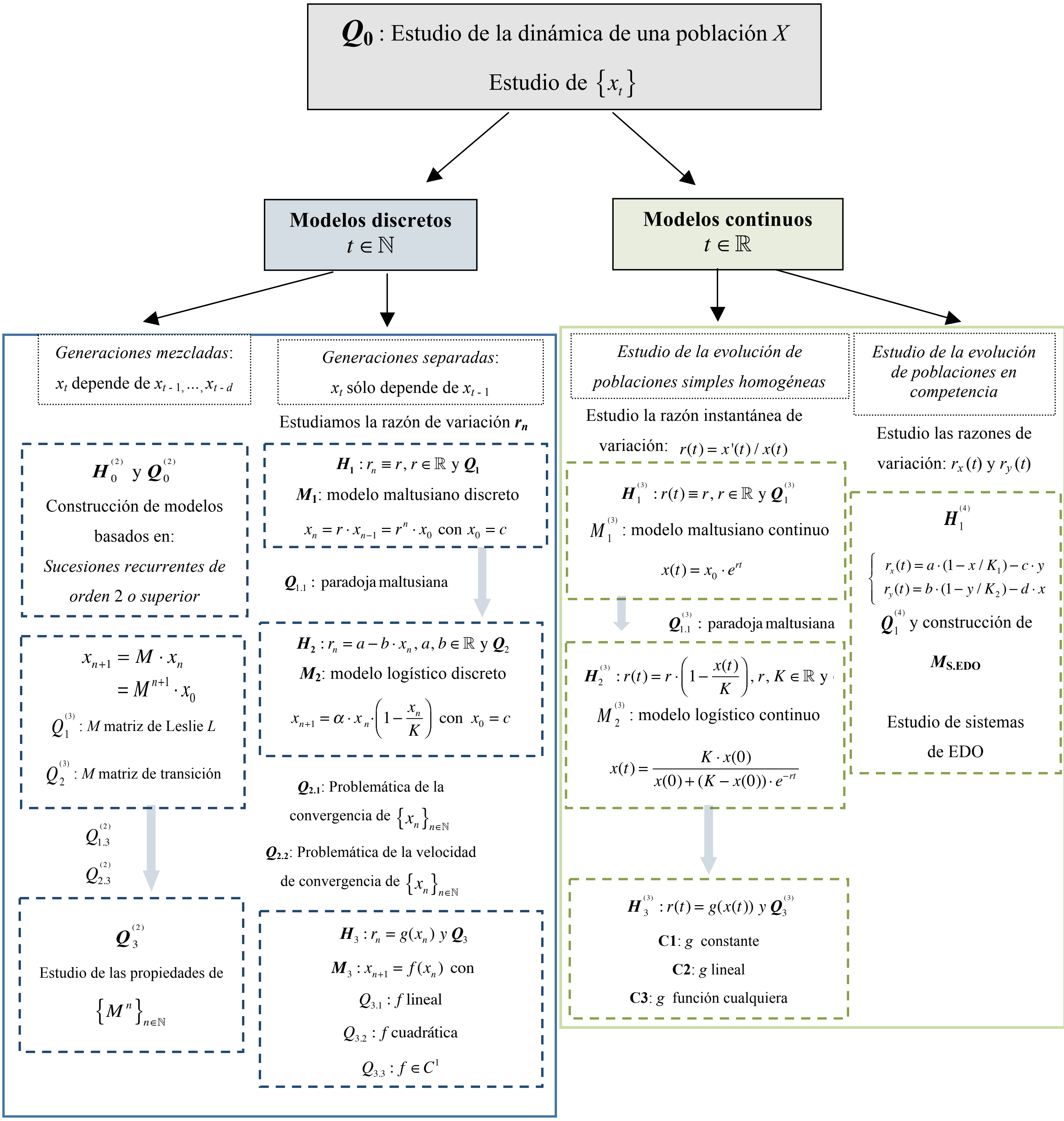
4. SÍNTESIS Y ESTRUCTURA DEL MAPA DE POSIBLES RECORRIDOS

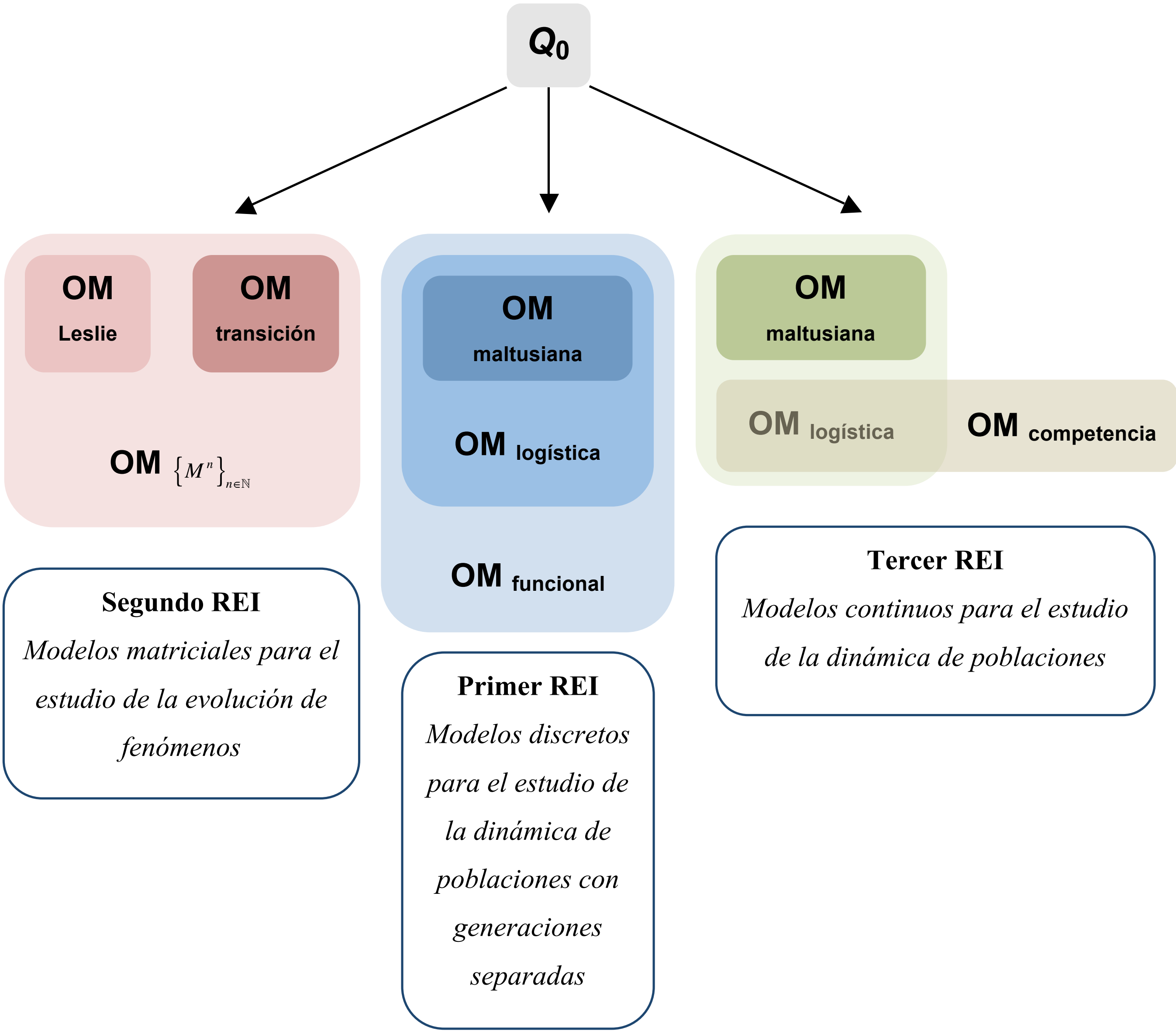
A modo de resumen del diseño matemático a priori de los posibles REI sobre dinámica de poblaciones, nos proponemos aquí introducir dos esquemas que sintetizan el mapa de posibles trayectorias a recorrer generadas a partir del estudio de la cuestión generatriz Q_0:

$\boldsymbol{Q_0}$: Si suponemos que conocemos el tamaño de una población X en algunos periodos de tiempo, ¿podemos predecir como evolucionará el tamaño de esta población después de n períodos? ¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de X a largo plazo? ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se tienen que asumir? ¿Cómo podemos hacer estas predicciones sobre la evolución del tamaño de X y cómo pueden ser validadas?

El primero de los esquemas se centra en describir los elementos clave dentro del proceso de modelización matemáticas que han estado en todo momento en el corazón de la actividad desarrollada y que se han usado para su descripción: la delimitación del sistema, las sucesivas reformulaciones de las hipótesis sobre el sistema, la formulación de cuestiones problemáticas que han llevado a la construcción de los modelos matemáticos más apropiados para poder aportarles una respuesta y, en especial, aquellas "cuestiones fronterizas" que han suscitado la construcción de nuevos modelos cada vez más amplios y completos. Este primer esquema pretende mostrar las relaciones que existen entre los diferentes modelos, es decir, cómo se relacionan, se completan y se complementan, a la vez, que se muestra el paralelismo existente entre las dos grandes familias de modelos considerados, el mundo de los modelos discreto y el de los modelos continuos.

El segundo de los esquemas indica la interpretación de los procesos de modelización matemática en términos de integración de praxeologías de complejidad creciente. Centrándonos en este último esquema, proponemos dividir el mapa de posibles recorridos en tres "esqueletos" matemáticos que, debido a su carácter relativamente autónomo, dará lugar a tres REI diferentes. Este esquema muestra claramente de qué manera los tres REI propuestos permiten "recubrir" el programa tradicional de matemáticas para las CCEE.


Q_0 : Estudio de la dinámica de una población X
Estudio de $\{x_t\}$
Modelos discretos
$t \in \mathbb{N}$
Modelos continuos
$t \in \mathbb{R}$
Generaciones mezcladas: x_t depende de $x_{t-1}, \ldots, x_{t-d}$
Generaciones separadas: x_t sólo depende de x_{t-1}
Estudiamos la razón de variación r_n
$H_0^{(2)}$ y $Q_0^{(2)}$
Construcción de modelos basados en:
Sucesiones recurrentes de orden 2 o superior
$H_1 : r_n \equiv r, r \in \mathbb{R}$ y Q_1
M_1: modelo maltusiano discreto
$x_n = r \cdot x_{n-1} = r^n \cdot x_0$ con $x_0 = c$
$Q_{1.1}$: paradoja maltusiana
$x_{n+1} = M \cdot x_n$
$= M^{n+1} \cdot x_0$
$Q_1^{(3)}$: M matriz de Leslie L
$Q_2^{(3)}$: M matriz de transición
$H_2 : r_n = a - b \cdot x_n, a, b \in \mathbb{R}$ y Q_2
M_2: modelo logístico discreto
$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \cdot \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$ con $x_0 = c$
$Q_{1.3}^{(2)}$
$Q_{2.3}^{(2)}$
$Q_{2.1}$: Problemática de la convergencia de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
$Q_{2.2}$: Problemática de la velocidad de convergencia de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
$Q_3^{(2)}$
Estudio de las propiedades de $\{M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$
$H_3 : r_n = g(x_n)$ y Q_3
$M_3 : x_{n+1} = f(x_n)$ con
$Q_{3.1}$: f lineal
$Q_{3.2}$: f cuadrática
$Q_{3.3}$: $f \in C^1$
Estudio de la evolución de poblaciones simples homogéneas
Estudio la razón instantánea de variación: $r(t) = x'(t) / x(t)$
$H_1^{(3)} : r(t) \equiv r, r \in \mathbb{R}$ y $Q_1^{(3)}$
$M_1^{(3)}$: modelo maltusiano continuo
$x(t) = x_0 \cdot e^{rt}$
$Q_{1.1}^{(3)}$: paradoja maltusiana
$H_2^{(3)} : r(t) = r \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), r, K \in \mathbb{R}$ y
$M_2^{(3)}$: modelo logístico continuo
$x(t) = \frac{K \cdot x(0)}{x(0) + (K - x(0)) \cdot e^{-rt}}$
$H_3^{(3)} : r(t) = g(x(t))$ y $Q_3^{(3)}$
C1: g constante
C2: g lineal
C3: g función cualquiera
Estudio de la evolución de poblaciones en competencia
Estudio las razones de variación: $r_x(t)$ y $r_y(t)$
$H_1^{(4)}$
$\begin{cases} r_x(t) = a \cdot (1 - x / K_1) - c \cdot y \\ r_y(t) = b \cdot (1 - y / K_2) - d \cdot x \end{cases}$
$Q_1^{(4)}$ y construcción de
$M_{S.EDO}$
Estudio de sistemas de EDO


Q_0
OM Leslie
OM transición
OM $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$
Segundo REI
Modelos matriciales para el estudio de la evolución de fenómenos
OM maltusiana
OM logística
OM funcional
Primer REI
Modelos discretos para el estudio de la dinámica de poblaciones con generaciones separadas
OM maltusiana
OM logística
OM competencia
Tercer REI
Modelos continuos para el estudio de la dinámica de poblaciones