CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

1. DISEÑO MATEMÁTICO, DISEÑO DIDÁCTICO A PRIORI Y EXPERIMENTACIÓN EFECTIVA DE LOS REI

1.1. Segundo nivel de análisis: diseño a priori del proceso didáctico (nivel de ingeniería didáctica)

Una vez descrito el mapa de posibles recorridos matemáticos (RM) en términos de una cuestión generatriz Q_0 y de la estructura arborescente que se genera que, recordemos, hemos denominado “primer nivel de análisis”, podremos pasar a describir el *nivel de ingeniería didáctica* que, siendo inseparable al anterior, retomará las unidades mínimas, esto es, la sucesión y composición de praxeologías matemáticas (OM) creadas en el primer nivel de análisis descrito en el capítulo anterior.

Este segundo nivel corresponde al diseño de las posibles formas de gestionar el estudio de los recorridos matemáticos descritos, tomando en consideración las restricciones didácticas que provienen de la institución docente en la que nos situamos. Deberán abordarse consecuentemente cuestiones como: *¿Qué instrumentos didácticos podemos facilitar a la comunidad de estudio para hacer posible el estudio de la cuestión generatriz y de sus derivadas? ¿Qué condiciones posibilitan y facilitan el desarrollo de la actividad matemáticas del estudio de cuestiones? ¿Cuáles son los medios y los media de los que se dispone o se debería disponer para llevar a cabo el estudio propuesto por los REI?*, etc.

Si el estudio de una cuestión Q_0 requiere la construcción o reconstrucción de organizaciones matemáticas, este proceso de reconstrucción requiere a su vez la puesta en marcha de una praxeología didáctica que es precisamente la que intentamos caracterizar mediante las cuestiones anteriores. Se debe completar con la descripción de la dinámica del proceso de estudio que propone la TAD en términos de los *momentos de estudio*: *¿Cómo se presenta la cuestión generatriz Q_0? ¿Cómo plantear y gestionar el momento del primer encuentro con las cuestiones? ¿En quien recae la responsabilidad de problematizar el trabajo realizado y plantear nuevas cuestiones derivadas del proceso de estudio llevado a cabo? ¿Qué nuevos gestos del estudio deben ser incorporados en el proceso de estudio? ¿Cómo surgirán y evolucionarán las técnicas? ¿Con qué media y qué medios? ¿Cómo surgirán y evolucionarán las* *necesidades tecnológico-teóricas? ¿Cómo y cuándo realizar la institucionalización? ¿Cómo realizar la evaluación del proceso?, etc.*

En particular, en el diseño de la *organización didáctica a priori* de cada unidad, nos centraremos en describir:

- Cómo se hacen evolucionar temporalmente las cuestiones, las respuestas y los momentos del estudio [*cronogénesis*].

  Notemos que las organizaciones matemáticas que han intervenido en la descripción del recorrido matemática (RM) han sido descritas en términos de diversas cuestiones (Q_i) y respuestas (R_i). Vamos aquí a heredar la nomenclatura que les hemos introducido en el capítulo 3 y así referirnos a ellas al describir la posible manera de hacerlas aparecer y evolucionar en los procesos de estudio. Cabe destacar además que la descripción del recorrido didáctico (RD) la vamos a estructurar además en base a los principales momentos del estudio que consideramos deben intervenir y "vivirse" por la comunidad de estudio durante el proceso.

- Cómo se gestionan las diferentes dialécticas y, en particular, cómo hacer evolucionar los *medios* y los *media* [*mesogénesis*].

  En particular, al inicio de cada unidad haremos referencia tanto a la *documentación* o *medios materiales* de los que se deben disponer al iniciar la unidad, así como las diversas *respuestas provisionales intermedias* y las *respuestas culturales previamente construidas* de las que la comunidad de estudio dispone $\left\{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m\right\}$ para la construcción de $R^\heartsuit$.

- Cómo se hace evolucionar el contrato didáctico, esto es, el nuevo *reparto de responsabilidades* entre los actores del proceso de estudio, el profesor y los estudiantes [*topogénesis*].

  Para indicar de quién es la responsabilidad de cada tarea en la gestión del proceso de estudio, distinguiremos y utilizaremos las siguientes *entidades*: el/la profesor/a [P], el estudiante individualmente considerado [EI], el/los grupo(s) de estudiantes en el que se divide la clase [GE] y la comunidad de estudio que incluye al grupo entero de estudiantes y al profesor [CE].

Más en concreto, al inicio de cada una de las unidades vamos a incluir una tabla en la que se sintetizan todos estos elementos. Estas tablas van a presentar la siguiente estructura: principales contenidos de la unidad, la referencia a la organización u organizaciones matemáticas que intervienen en el recorrido matemático (RM), los medios y los media disponibles, la evolución y gestión de los momentos didácticos y algunas observaciones importantes que pueden ayudar a la gestión de la unidad.

Si nos referimos al esquema de la transposición didáctica, en este nivel de diseño, nos estaríamos situando en la etapa en la cual disponemos de la *obra matemática para ser enseñada* en una institución didáctica concreta, y tenemos que seleccionar los ingredientes de esta obra que va a ser "trasladada" o "transpuesta" a la comunidad de estudio, así como la praxeología didáctica que se debería adoptar para hacer efectivo su estudio. Por último, queremos destacar que en este nivel sólo se tienen en cuenta las restricciones de nivel institucional (perfil de estudiantes previstos, número y duración de las sesiones previstas, recursos disponibles, etc.) y no se incluyen las restricciones más específicas que provienen de los sistemas didácticos concretos que surgirán en el momento de llevar a cabo el proceso de estudio (conocimientos disponibles para los estudiantes, aportaciones particulares del profesor, uso concreto y gestión de los medios y los media, etc.).

1.2. Tercer nivel de análisis: descripción, análisis y evaluación de los procesos de estudio efectivamente realizados

Para describir coherentemente la implantación de los REI en lo que denominamos como "Taller de modelización matemática" utilizaremos la estructura en unidades introducidas en el primer nivel de descripción (MER) y retomada en la descripción a priori del proceso didáctico. De cada unidad destacaremos:

- La ficha técnica de la unidad, que incluye: el número de sesiones de clase que el desarrollo de la unidad ha requerido y su duración y la distribución temporal de los principales momentos de estudio que han intervenido.

- El *diario* o *crónica sintetizada* de cada una de las unidades que se ayuda de algunos informes entregados por los estudiantes con las sucesivas respuestas intermedias elaboradas a lo largo de las sesiones.

- El *análisis "a posteriori"* en el que se incluyen las principales dificultades y discrepancias o desajustes entre los recorridos matemáticos y didácticos diseñados a priori (RM+RD) y el recorrido realmente experimentado (RE).

Adelantemos aquí que la experimentación de los REI se ha realizado durante cuatro cursos académicos, del 2005/06 al 2008/09, con estudiantes de *ingeniería técnica química industrial* (especialidad en química industrial) de la Escuela Técnica y Superior de Ingeniería (ETSE) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). En cada una de las experimentaciones participaron alrededor de 25 – 30 alumnos que seguían la asignatura de "*Fonaments matemàtics de l'Enginyeria*" que coordinó el Dr. Àngel Calsina, profesor del Departamento de Matemáticas de esta misma universidad.

La experimentación de los tres REI tuvo lugar dentro del dispositivo didáctico "*Talleres de modelización matemática*" que, de forma más o menos independientes a la evolución del curso usual de matemáticas, se desarrolló durante todo el curso, con la excepción de la última de las experimentaciones que se desarrolló solamente durante el último semestre debido a que la profesora-investigadora que se ocupaba de éste no estaba en la universidad durante el primer semestre.

2. INICIO DEL RECORRIDO: PRESENTACIÓN DE LA CUESTIÓN GENERATRIZ

Antes de empezar con el diseño didáctico a priori y la descripción, análisis y evaluación del recorrido efectivamente experimentado con los tres REI, vamos a presentar en este apartado la unidad introductoria (U0) que inauguró el recorrido efectivamente experimentado en las cuatro experimentaciones. Presentamos a continuación el dossier que se estregó a los estudiantes en el cual se presenta una población de faisanes junto con la cuestión generatriz que guiaría el proceso de estudio. Cabe destacar que el resto de materiales no fueron diseñados a priori sino que, respetando el carácter dinámico y abierto de los REI, se fueron modificando según la evolución de la problemática tratada durante el proceso de estudio. La muestra de los dossiers de trabajo de la última de las experimentaciones están incluidos en el anexo 4 (Cf. § 1).

Estudio del crecimiento de una población de faisanes en una isla

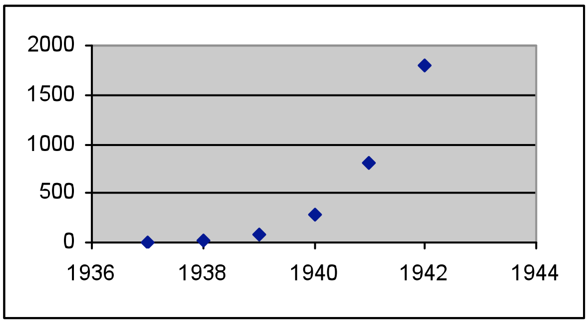
Comparando predicción y realidad

Los humanos han introducido muchas especies en nuevos hábitats, por accidente o intencionadamente, para poder estudiar su evolución. Algunas de éstas se han convertido en experimentos ecológicos muy interesantes. Por ejemplo, en 1937 ocho hembras faisán, de la especie *Phasianus colchicus torquatus*, fueron introducidas en una isla protegida delante de la costa del estado de Washington*. La isla tenía abundante comida y no vivía en ella ninguna especie predadora. Además, esta isla estaba suficientemente lejos de otras tierras para que los faisanes pudiesen escapar.

En la siguiente tabla, y su correspondiente gráfico, se muestran los datos referentes a la evolución del tamaño de esta población entre los años 1937 y 1942 que se tomaron cada año en el mismo periodo:

* Lack, D. (1967). *The Natural Regulation of Animal Numbers.* Oxford: Clarendon Press.

Año	Tamaño de la población
1937	8
1938	26
1939	85
1940	274
1941	800
1942	1800



PRINCIPALES CUESTIONES A ESTUDIAR

Dada una población de la que conocemos su tamaño en algunos periodos de tiempo, ¿Podemos predecir cómo evolucionará el tamaño de esta población después de *n* periodos? ¿Será siempre posible predecir el tamaño de la población a largo plazo? ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se pueden asumir? ¿Cómo podemos hacer estas predicciones y cómo las podemos validar?

Ejemplo de cuestiones intermedias que estudiaremos:

- Utilizando los datos que tenemos, ¿podríamos decir cuál será el tamaño de esta población de faisanes después de 1, 2, 3, 5, 10, 20 años, etc.?
- ¿Cómo podemos describir las variables tiempo y tamaño de la población? ¿Cómo podemos describir el crecimiento de esta población?
- Si se hubiesen introducido 20 faisanes al principio, ¿cómo se habría modificado la evolución de la población?

Otras cuestiones que pueden ser tratadas (a rellenar por cada grupo):

- ______________________________
  ____
- ______________________________
  ____
- ______________________________
  ____

	ORGANIZACIÓN
	UNIDAD 0: Presentación de la cuestión
Estructura y objetivos de **U0**	▪ Se presenta de la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_0}$ en torno al estudio de la dinámica de una p ▪ Primera delimitación del sistema a estudiar: formulación de hipótesis sobre la pobl población como de su crecimiento, selección de los datos más importantes a consic ▪ Se mostrará la necesidad de construir modelos matemáticos con el objetivo de abor faisanes ($\boldsymbol{Q_{0.2}}$, $\boldsymbol{Q_{0.3}}$).
Medios y medias	- Se entregará a los estudiantes el *Dossier* 1 (*faisanes*) que presenta la cuestión genera - La intervención del profesor y de los grupos de estudiantes se realizará en la pizarra
Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento del primer encuentro* – Presentación de la cuestión generatriz Q_0 - Se presentará la población de faisanes (X) y la cuestión inicial que se propone desco derivadas que puedan ser de ayuda para iniciar el estudio de Q_0. [P] - Los estudiantes se deberán distribuir en grupos de trabajo de 2 o 3 personas para tra los informes requeridos durante el desarrollo del mismo. ▪ *Trabajo exploratorio* – Trabajo en grupos para la redacción de la primera respuesta Los estudiantes, trabajando en cada uno de los grupos, empezarán a discutir sobre las c pertinentes. El objetivo principal será aquí el de fijar una notación para describir las va para hacer predicciones sobre los futuros tamaños de la población además de estrategia ▪ *Evaluación e institucionalización* de la primera respuesta provisional R_0 - Se pondrán en común las primeras respuestas R_0 de los diferentes grupos. Cada uno profesor se encargará de gestionar este momento y de ordenar, comparar y relaciona - Al finalizar la unidad se pedirá a cada uno de los grupos que redacte un primer info

2.1. Organización didáctica a priori de la unidad introductoria (U0): Presentación de Q_0 y de la población a estudiar

Ver tabla en la página anterior.

2.2. Recorrido efectivamente experimentado de la unidad introductoria (U0)

Horas destinadas a U0: 1.5 - 2 horas (1 sesión completa de taller, S1)
Distribución temporal de los momentos: Momento del primer encuentro con Q_0: 15', trabajo exploratorio: 60' y evaluación e institucionalización de R_0: 15'.

Se entrega a los estudiantes el *Dossier* 1 (*faisanes*). Generalmente, durante los diez primeros minutos la profesora presenta la descripción de la población de faisanes y la tabla de datos que contiene los tamaños reales de esta población entre los años 1937 y 1942. Se presenta además la cuestión generatriz Q_0 que aparece formulada en el primer dossier (que hemos incluido en este mismo apartado). A partir de la primera experimentación que puso en evidencia las dificultades de los estudiantes en trabajar directamente con la cuestión generatriz, se decidió incluir en este dossier algunas primeras cuestiones derivadas de Q_0 que podrían facilitar a los estudiantes iniciar su estudio. La profesora pide a los estudiantes que se distribuyan en grupos de 2 o 3 personas y que, una vez formados, trabajen durante la primera hora en el estudio de las cuestiones planteadas y en la formulación de posibles nuevas cuestiones que considerasen pertinentes.

En todas las experimentaciones ha resultado muy interesante que la profesora dedicase tiempo suficiente para la presentación de X y de Q_0, de esta forma se da pie a que los estudiantes formulen preguntas sobre algunas de las características generales de la población que no aparecían especificadas en el dossier de trabajo como, por ejemplo: *¿Cuál es el total de hembras y de machos en la población? ¿Cuál es la capacidad de espacio y de alimento de la isla? ¿Cuándo puede empezar a faltar alimento? ¿Habrá condiciones meteorológicas adversas? ¿Hay especies predadoras?, etc.* Se les propone entonces que, en base a estas primeras preguntas, empiecen a formular las primeras hipótesis sobre la población y su hábitat, con el objetivo de llegar a una primera delimitación de sistema extra-matemático a estudiar. Aparecen a menudo en este momento algunas observaciones muy interesante como, por ejemplo, que si no se incluían suposiciones sobre la posible falta de recursos, entonces se podía caer en el "error" de predecir el crecimiento infinito de la población.

Cuando los grupos acaban de formular estas primeras hipótesis de tipo más genérico, pasan habitualmente a analizar la tabla de datos incluida en el dossier. Principalmente trabajan en la búsqueda de herramientas para describir el crecimiento de esta población. La mayoría de los grupos empiezan utilizando la tasa absoluta de variación, la tasa relativa de variación y la que entonces llamamos "índice de variación". Veamos algunos ejemplos de los informes de algunos de los grupos (experimentación 1 y 2) en el que se muestra el análisis que realizaron de la tabla de datos:

Anys	No ànecs	Taxa creixement	Taxa variació abs.	Taxa variació rel.
1937	8		8	
1938	26	3'25	18	2'25
1939	85	3'27	59	2'27
1940	274	3'22	189	2'22
1941	800	2'92	526	1'92
1942	1800	2'25	1000	1'25
1944	1833	1'02	33	1'83 · 10⁻²
1946	1888	1'03	55	3 · 10⁻²
1948	1962	1'04	74	3'92 · 10⁻²
1950	2034	1'04	72	3'67 · 10⁻²
1952	2061	1'013	27	1'33 · 10⁻²

any	X	taxa variació relativa	taxa variació absoluta
1937	8		
1938	26	$= \frac{26-8}{8} = 2,25$	$= 26 - 8 = 18$
1939	85	= 2,27	= 59
1940	274	= 2,22	= 189
1941	800	= 1,9	= 526
1942	1800	= 1,25	= 1000

Figura 1. Análisis de la tabla de datos del Dossier 1

En varias ocasiones, algunos grupos realizaron el gráfico de la tasa relativa de variación, o del índice de variación, respecto del tamaño de X para poder así estudiar su variación. Incluso a partir de este gráfico, algunos grupos presentaron las primeras conjeturas sobre la evolución a largo plazo de X: "*Vemos representados los datos e ignoramos los tres primeros años porque no son representativos, podemos decir que la población llegará a un equilibrio entre la natalidad y mortalidad, lo que hará que (el índice de variación) tienda a 1, pero nunca sobrepasándola en una situación natural favorable* […]"

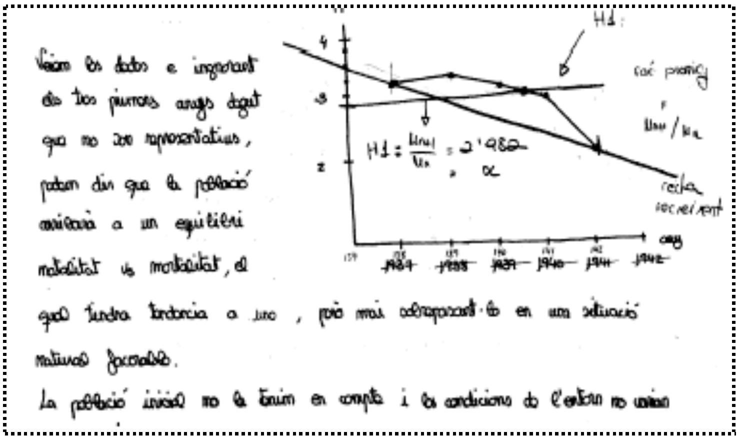


Figura 2. Representación del "índice de variación" respecto del tamaño de la población

Hasta este momento no se requiere escoger y utilizar una notación adecuada para describir las diversas variables que intervienen pero, frente al problema de la predicción de la evolución de la población a corto y largo plazo, formulados por las cuestiones $Q_{0.2}$ y $Q_{0.3}$, es cuando aparece la necesidad de construir modelos matemáticos que requieren escoger las variables, definir su notación y seleccionar los datos más relevantes.

Debemos destacar la gran riqueza de las respuestas construidas por los estudiantes en todas las experimentaciones realizadas. En todas las ocasiones, estas respuestas dieron lugar a la consideración de dos grandes familias de modelos: por un lado, dentro de los modelos continuos, la propuesta de modelos basados en *ajustes exponenciales* y modelos de *interpolación polinómica* y, por otro lado, dentro de los modelos discretos, la propuesta de modelos basados en *sucesiones recurrentes*. Vemos algún ejemplo de estas primeras propuestas en las figuras 3 - 5:

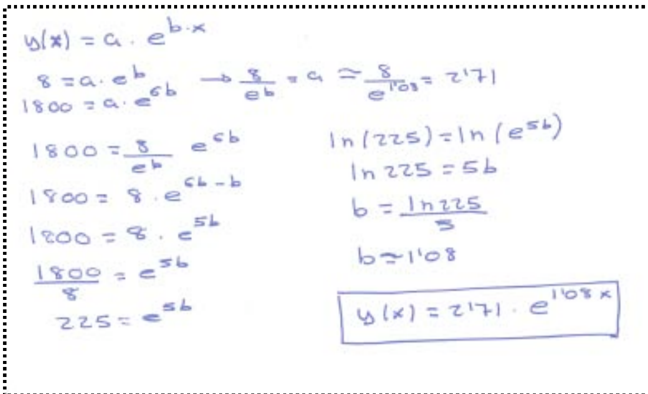
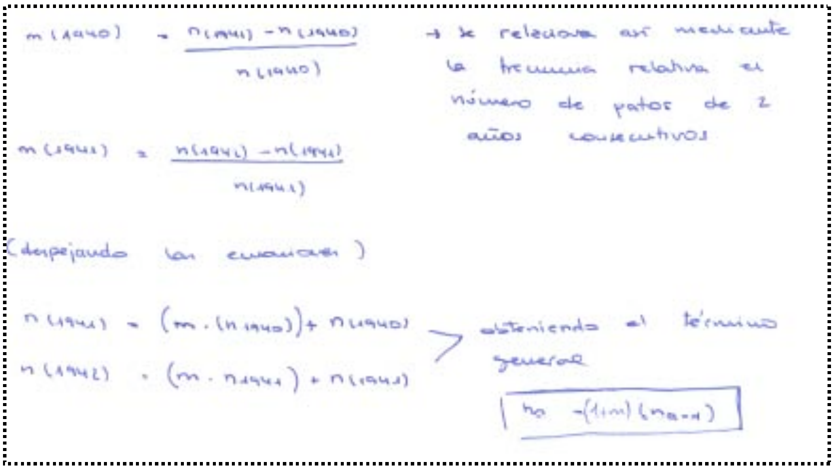


Figura 3. Ejemplo de propuesta de un ajuste exponencial (Experimentación 3)



$m(1940) = \dfrac{n(1941) - n(1940)}{n(1940)}$ → se relaciona así mediante la frecuencia relativa el número de patos de 2 años consecutivos

$m(1941) = \dfrac{n(1942) - n(1941)}{n(1941)}$

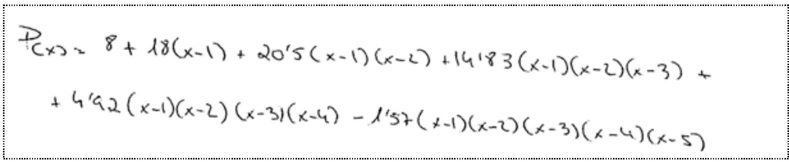
(despejando las ecuaciones)

$n(1941) = (m \cdot (n\,1940)) + n(1940)$

$n(1942) = (m \cdot n_{1941}) + n(1941)$ > obteniendo el término general

$\boxed{n_0 \cdot (1+m)^{(n_a - 1)}}$

Figura 4. Ejemplo de propuesta de sucesiones recurrentes (Experimentación 1)



$P(x) = 8 + 18(x-1) + 20'5(x-1)(x-2) + 14'83(x-1)(x-2)(x-3) + 4'92(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 1'57(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

Figura 5. Ejemplo de propuesta de polinomio interpolador (Experimentación 1)

En la última parte de esta primera sesión se hace una puesta en común del trabajo realizado hasta el momento. Todos los grupos (o un representante del grupo) explican sus propuestas mientras la profesora se encarga de apuntar en la pizarra aquello que cada grupo explica, centrándose principalmente en describir: *¿Qué terminología han utilizado para describir el tiempo, el tamaño de la población y el crecimiento de ésta? ¿Qué tipo de modelos han creado (discreto o continuo)? ¿Qué hipótesis que se están asumiendo (de forma más a menos explícita) en el modelo construido?*, etc. El esquema que se acabó finalmente reproduciendo en la 1ª experimentación fue parecido al que se muestra a continuación:

Q_0

Modelos discretos

Notación introducida:

n = años transcurridos desde 1937

M_n = tamaño de la población en tiempo n

Herramientas descriptivas del crecimiento de X:

$$M_{n+1} - M_n,\ \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n},\ \frac{M_{n+1}}{M_n}$$

Modelo construido:

$$M_{n+1} = c \cdot M_n$$

Modelos continuos

Notación introducida:

x = años transcurridos desde1937

y = tamaño de la población en tiempo x

Herramientas descriptivas del crecimiento de X: ??

Modelos construidos:

- *Interpolación polinómica*
- *Ajuste exponencial* a partir de la determinación de los parámetros a y b en la función: $y = a \cdot e^{bx}$

Llegados a este punto, los grupos proponen a menudo diversas cuestiones nuevas que, cada una a su turno, servirán para guiar el taller en las próximas sesiones:

> ***Q**$_a$*: ¿Qué relación hay entre los dos "tipos" modelos? En particular, ¿qué relación hay entre la aproximación exponencial y las sucesiones recurrentes?
>
> ***Q**$_b$*: ¿Cómo podemos encontrar la mejor aproximación de los parámetros que intervienen en los modelos matemáticos?
>
> ***Q**$_c$*: ¿Cómo podemos mejorar las predicciones que dan ambos modelos a la larga porque esta población no crecerá indefinidamente?

Llega el momento de decidir con qué cuestiones y con qué modelo seguir el estudio. En todas las experimentaciones, la mayoría de estudiantes estaban más habituados a trabajar con funciones elementales, como era el caso de la función exponencial, parecía, en cierto sentido, lógico seguir por el estudio del "mundo continuo". Pero la gran mayoría no conocían de ninguna herramienta para describir el crecimiento de X en tiempo continuo. Además, aunque algunos de los estudiantes habían intuido que se trataba de la derivada en el modelo continuo no disponían de herramientas matemáticas suficientes para ver la relación con el ajuste exponencial. En cambio, todos los grupos habían considerado suficientes herramientas de naturaleza "discretas" para analizar las tablas que presentaba el dossier y el modelo basado en sucesiones recurrentes se había construido directamente a partir de la formulación de hipótesis sobre la "tasa de variación relativa (r_n)" o "índice de variación (i_n)". Por este motivo se decidió seguir el proceso de estudio dentro del "mundo discreto" dejando para más adelante, para cuando se dispusiera de herramientas suficientes, el estudio de los modelos continuos.

La última parte de la sesión se dedica habitualmente a explicar más detenidamente el trabajo desarrollado por los grupos que han propuesto modelos discreto. Se decide que a partir de entonces, se denotaría por n los años transcurridos desde el 1937 y por M_n el tamaño de X en n. El problema del estudio de la evolución de la población de faisanes se vuelve equivalente a estudiar el comportamiento de la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se definen además las *tasas absoluta* y *relativa de variación* y el *índice relativo de variación*. Surge aquí una nueva cuestión que plantean los propios estudiantes:

Q_d: ¿Qué relación hay entre las tres tasas de variación consideradas? Y, especialmente, ¿qué relación hay entre la tasa relativa de variación $\frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}$ y el índice de variación $\frac{M_{n+1}}{M_n}$?

En el caso de la primera experimentación, y de forma muy similar en las posteriores, uno de los grupos explica que a partir de la siguiente hipótesis habían construido el modelo basado en ecuaciones recurrentes:

Suponemos que la tasa relativa de variación de X es constante (H_0)

Presentada esta primera hipótesis, se construye el primer modelo con el que se seguiría trabajando y que conduciría a la construcción y estudio de $OM_{\text{maltusiana}}$.

Para finalizar la sesión, la profesora avisa que cada grupo debe entregar un primer informe[1] en el que deben describir el trabajo realizado durante la primera sesión, esto es, la primera respuesta provisional a la cuestión inicial Q_0.

2.3. Análisis a posteriori de la unidad introductoria (U0)

En los momentos del *primer encuentro* y *exploratorio*, los estudiantes tienen en general muchas dificultades para empezar el estudio de Q_0 y solicitan constantemente a la profesora que les explique cómo tienen que proceder. Una vez puesta en evidencia esta dificultad durante la primera experimentación, y debido en parte a que Q_0 se describe en términos muy generales, se decidió incluir en el *Dossier* 1 algunas cuestiones derivadas, más sencillas, que podían ayudar a iniciar el estudio de Q_0. Además se incluyó, en este mismo dossier, un espacio para que los propios estudiantes rellenasen con más cuestiones, hecho que no surgió ni mucho menos espontáneamente y que desconcertó a menudo a los estudiantes. Transferir esta responsabilidad, que suele recaer sobre el profesor, supone muchas más dificultades de las previstas. Hasta el final de esta primera sesión, y con la ayuda de la profesora, no se empiezan a detectar y a formular algunas cuestiones concretas como, por ejemplo, las que hemos descrito con Q_a, Q_b, Q_c o Q_d del recorrido efectivamente experimentado.

[1] En el anexo del capítulo 4 (Cf. § 2) se puede encontrar una selección de estos documentos.

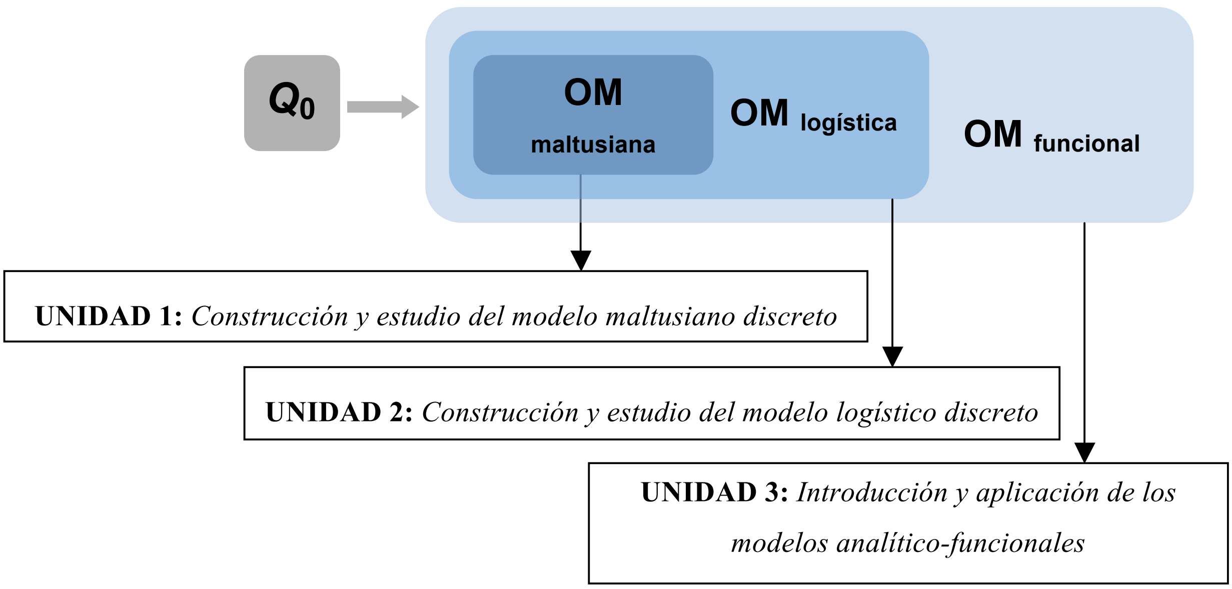
Cuando los grupos empiezan a trabajar con el problema de la predicción a corto y largo plazo de la población de faisanes, suelen centrarse en hacer primera instancia un análisis de carácter más cualitativo. La profesora siempre ha tenido que insistir mucho en la necesidad de buscar herramientas o estrategias concretas para poder predecir y contrastar los datos. Cuesta mucho que los estudiantes asuman que deben ser ellos mismos quienes propongan estas herramientas.

En la puesta en común, momentos de *evaluación* e *institucionalización* de las respuestas, se solicita a los grupos que expongan sus propuestas. Generalmente la profesora tiene que ayudarles mucho a describir las cuestiones concretas con las que han estado trabajando y a diferenciar entre aquellas cuestiones a las que han podido dar respuesta, aunque sea parcial, y las que están pendientes de ser estudiadas. Toda esta información, junto con las propuestas concretas de los grupos, queda plasmada en la pizarra, hecho que ayuda mucho en la parte de discusión. Destaquemos también la desorganización de los elementos que intervienen en la puesta en común: ¿se trata de nuevas cuestiones? ¿o de hipótesis? ¿o de modelos? ¿o de qué exactamente? Se ponía siempre de manifiesto que debía trabajarse en las próximas sesiones en establecer una nomenclatura para poder referirse a los diferentes elementos que intervenían.

Comentemos, por último, el desconcierto habitual de los estudiantes cuando se les pide la redacción del primer informe. La profesora avisa que no deben centrarse en describir solamente las herramientas matemáticas utilizadas, tal como los estudiantes piensan inicialmente. A partir de la primera experimentación, la profesora llegó a concretar la estructura del informe. Se les propone que estos informes contengan la siguiente estructura: (1) cuestiones estudiadas, (2) herramientas o estrategias construidas, (3) respuestas proporcionadas a las cuestiones y (4) cuestiones nuevas o que hayan quedado pendientes de estudiar para sesiones posteriores.

3. DISEÑO Y EXPERIMENTACIÓN DEL PRIMER REI: MODELOS DISCRETOS PARA EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES CON GENERACIONES SEPARADAS

Recordemos brevemente que el recorrido matemático (RM) que delimitaba la estructura matemática del primer REI se centraba en la construcción de modelos matemáticos discretos para el estudio de la dinámica de poblaciones con generaciones separadas. Finalmente, tal como hemos descrito en el capítulo 3, este primer RM ha quedado formado por tres organizaciones matemáticas (OM) que, lejos de ser independientes, conforman la siguiente estructura compuesta de OM de complejidad creciente que dan lugar a sus correspondientes unidades didácticas cuyo diseño o recorrido didáctico (RD) a priori, seguido de su recorrido realmente experimentado, vamos a describir en este apartado.



Podemos avanzar el desarrollo de este primer REI se realizó durante las cuatro experimentaciones que se han llevado a cabo. En las tres primeras experimentaciones, se realizó durante el primer semestre, momento en el que los estudiantes estaban tratando los temas de *cálculo diferencial e integral en una variable*[2]. En la cuarta experimentación se pospuso al inicio del segundo semestre.

[2] En el Anexo 4 incluimos el programa oficial de la asignatura de "*Fonament matemàtics de l'enginyeria*".

A diferencia de las tres primeras experimentaciones, en esta última se observaron bastantes diferencias en lo que se refiere al desarrollo de la primera unidad. Fue principalmente debido a que cuando se había estudiado el bloque de álgebra lineal (en el primer semestre), el profesor de teoría de la asignatura aprovechó para presentar a los estudiantes la cuestión generatriz Q_0[3] y, en particular, las cuestiones Q_1: ¿cuál es la dinámica de una población con tasa relativa de variación constante? que llevó, en el aula, a la construcción del modelo maltusiano discreto. Este hecho ayudó claramente a plantear posteriormente el objetivo del bloque de álgebra lineal que era el estudio de $Q_0^{'}$ (estudio de la dinámica de poblaciones estructurada en grupos o clases de edad) y que llevó a la construcción de OM $_{\text{Leslie}}$. Los estudiantes de esta cuarta experimentación mostraron más facilidad en la construcción de OM $_{\text{maltusiana}}$ que requirió bastante menos tiempo del taller, aunque se observaron pocas diferencias después en el estudio de las dos unidades siguientes.

En todo caso, este primer REI se experimentó dentro del llamado *Taller de modelización matemática* que se presentó a los estudiantes como una actividad de asistencia voluntaria con la posibilidad de sumar medio punto a la nota semestral de la asignatura. El diseño a priori de las unidades suponía que se requerían un total aproximado de 6 - 7 sesiones (de hora y media)[4].

[3] En adelante nos vamos a referir a las cuestiones problemáticas (Q_i) con la misma notación (esto es, enumeración) que se ha introducido durante el capítulo 3 y que ha permitido describir el posible recorrido matemático (RM) a desarrollar. Asimismo utilizaremos la misma notación en todo el capítulo cuando nos refiramos a las hipótesis introducidas (H_i), modelos contruidos (M_i), respuestas obtenidas (R_i), etc.

[4] En la primera experimentación las sesiones del taller eran de 2 horas con una pausa de 10 - 15 minutos. Cada sesión estaba programada el mismo día de la semana aprovechando la pausa de la facultad en las actividades lectivas en la comida (de las 13h a las 15h). A partir de la segunda experimentación se consideró más oportuno, por solicitud de los estudiantes, que las sesiones durasen una hora y media sin pausa.

	ORGANIZACIÓ
	UNIDAD 1: Construcción y es
Estructura y objetivos de **U1**	▪ Exposición y defensa en grupos del trabajo realizado en la unidad introductoria **U0** y e ▪ Toma de contacto con el *primer proceso de modelización matemática*: formulación de estudiar ($\boldsymbol{Q_1}$), construcción del modelo maltusiano discreto $\boldsymbol{M_1}$, desarrollo del trabajo t planteo de nuevas cuestiones problemáticas ($\boldsymbol{H_1} \rightarrow \boldsymbol{Q_1} \rightarrow \boldsymbol{M_1} \rightarrow \boldsymbol{R}_1$). ▪ Discusión, redacción y defensa de la *primera respuesta provisional* ($\boldsymbol{R_1}$) que aparece a ▪ Estudio del alcance y de las limitaciones de $\boldsymbol{M_1}$ en el estudio de la dinámica de poblac hipótesis presentadas por $\boldsymbol{H_1}$.
RM	OM
Medios y medias	- Se seguirá trabajando con el *Dossier* 1 (*faisanes*). Es posible que se requiera extender c predicción. Al inicio de la sesión, se recogerán los informes elaborados en la sesión ant
Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Evaluación e institucionalización* de las respuestas R_0 de la sesión introductoria - La unidad empezará haciendo un recordatorio de la puesta en común que ha servido par para trabajar con la primera familia de modelos con la que se ha decidido seguir el proc - Se presentará la primera hipótesis H_1 que dará lugar a la construcción del modelo mater discreto (M_1). [P] ▪ *Construcción del modelo maltusiano, trabajo técnico con este modelo y elaboración de* - Un vez presentada la hipótesis H_1, se procederá a la construcción general del modelo m estudiar el problema siguiente: ¿Cómo podemos encontrar la mejor aproximación del p faisanes? ¿Cómo medimos las diferencias entre las predicciones que nos dan los diferen ¿Cómo se puede medir dicho error para comparar así el grado de ajuste de las diferente

[5] Nos referimos al diseño matemático de la OM $_{\text{maltusiana}}$ que ha sido descrito en el capítulo 3 (Cf

Evolución y gestión de los momentos de estudio	- Se procederá entonces al estudio general del modelo M_1 para poder dar repuesta a Q una población que supuestamente "sigue" el modelo maltusiano? Se requerirá entonc según valores concretos de los parámetros a o r y de la condición inicial $x(0)$. [GE] - Finalmente, se espera que los propios estudiantes planteen cuestiones sobre la interpre y los datos reales ($Q_{0.3}$). El estudio de todas estas cuestiones deberán formar part formulábamos en los siguientes términos: ¿Cómo podemos superar la limitación qu infinitos? [GE] ▪ *Evaluación e institucionalización* de la segunda respuesta R_1 - Se hace una puesta en común del trabajo realizado con M_1 y las respuestas que éste no
Observaciones	- Es muy probable que los estudiantes no tengan un dominio suficiente de las técnicas d así como las técnicas de simulación numérica de los iterados de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y de su repre de convergencia, la aproximación y cálculo de su límite. - Será necesario que antes de acabar esta unidad quede muy claramente planteada la cue construcción y estudio de $\mathrm{OM}_{\text{logística}}$ con el fin de superar esta restricción. - Consideramos que serán necesarias aproximadamente 2 horas para el desarrollo de est

3.1. Unidad 1: Construcción y estudio del modelo maltusiano discreto

3.1.1. Organización didáctica a priori de U1

Ver tabla en la página anterior.

3.1.2. Recorrido efectivamente experimentado de U1

Horas destinadas a U1: 1.5 - 2 horas 1.5 - 2 horas (1 sesión completa de taller, S2)
Distribución temporal de los momentos: Evaluación e institucionalización de R_0: 15’, construcción del modelo maltusiano, trabajo técnico con este modelo y elaboración de R_1: 60’ y evaluación e institucionalización de R_1: 15’.

En la primera de las experimentaciones, la profesora se encarga de preparar un dossier en el que se sintetizan y relacionan algunas de las respuestas dadas por los diferentes grupos, para poder así ayudar en el momento de evaluación e institucionalización de R_0 (ver *Dossier* 2, anexo 1.1). En las posteriores experimentaciones, se decide escoger a un “*grupo secretario de la semana*” al que se le pide encargarse de hacer este trabajo. Así, al inicio de cada sesión, el grupo elegido se encarga de resumir cuáles han sido las cuestiones estudiadas hasta el momento, qué herramientas se han utilizado para su estudio y qué elementos de respuesta se han obtenido. También deben relacionar su respuesta con las del resto de grupos. Al final de la presentación del “grupo secretario”, se da al resto de la clase la posibilidad de intervenir y de explicar su aportación a esta primera respuesta, R_0. El “grupo secretario” es a la vez el responsable de sintetizar lo que se dice para que incluirlo en el “diario” del taller.

De todas las experimentaciones debemos destacar que alguno de los grupos propuso en la primera sesión la construcción de M_1, lo que hace muy “natural” seguir con el estudio de los modelos “discretos”. En esta sesión resulta ya imprescindible acordar una manera común como referirse a los elementos clave que intervienen en el proceso de modelización iniciado. Así, se pacta que se llamará suposiciones o *hipótesis* al hecho, por ejemplo, de asumir que no hay especies predadoras o que la tasa relativa de variación es constante, etc. Como se explica en el siguiente informe:

La primera hipòtesi vàlida ha estat trobar

$$\frac{M(n+1)}{M(n)} = c \ , \quad \forall\, c \in \mathbb{R} \ , \quad \text{on } c = \text{cte}$$

Així ens vam adonar que si trobàvem una c vàlida podríem definir la funció $M(n+1) = c\,M(n)$ útil per tots els casos.

Figura 6. Formulación de las primera hipótesis sobre el crecimiento de una población

Esta suposición da lugar a la construcción del primer *modelo* (M_1). En la primera experimentación la profesora introduce el nombre de "modelo maltusiano" para denotar a este modelo, pero en las experimentaciones posteriores nos referimos a éste como "el modelo con tasa relativa de variación constante" dejando bajo la responsabilidad de los estudiantes que buscaran el mismo y poder así nombrarlo de manera más concisa. En la siguiente sesión de estas experimentaciones, algunos de los estudiantes vuelven habiendo encontrado información relativa a este modelo que incluyen en la redacción de sus informes (ver anexo 2.1). A partir de aquí también denominamos a M_1 como modelo de Malthus" o "maltusiano".

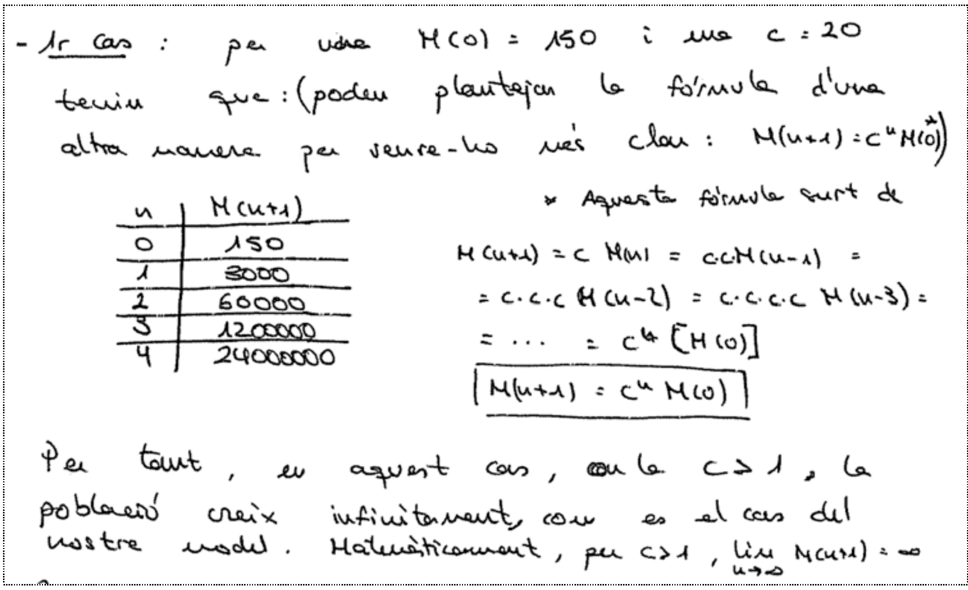
Gran parte de los estudiantes no recuerdan qué es una sucesión. Es necesario entonces introducir las herramientas necesarias para seguir con el estudio: la noción de sucesión y, en particular, de sucesión definida por recurrencia, técnicas para simular y representar gráficamente sus iterados y técnicas para calcular su límite en caso que se trate de una sucesión convergente.

Destacamos que el momento de trabajo técnico con el modelo queda a menudo fragmentado en dos partes. Una primera parte que se centra en la población de faisanes y se propone a los grupos tratar la cuestión de: *¿Cómo podemos encontrar la mejor aproximación del parámetro "c", esto es, el valor de "c" que determine el modelo que proporcione el mejor ajuste a la evolución real de la población de faisanes?*

A este trabajo en grupo le sigue la puesta en común de las diferentes propuestas. Pero, ¿quien daba realmente la mejor aproximación del parámetro *r*? Generalmente los mismos estudiantes proponen aquí programar una hoja de Excel para poder comparar los respectivos grados de ajuste de cada una de sus propuestas. Suele haber algún grupo que trabaja con ordenador portátil, la profesora les pide que se encarguen de realizar este trabajo. Si no la profesora lo realiza con el ordenador común del aula.

En la segunda parte del trabajo técnico con M_1, los estudiantes ya detectan que este primer modelo no es "válido" en las predicciones a largo plazo. La profesora plantea entonces si es que se trata que no es válido en el caso en particular de la población de faisanes o si se puede decir que ocurre lo mismo con otras posibles poblaciones. Se les propone para ello una nueva tarea: que hagan más simulaciones de los iterados de la sucesión $\{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con diferentes valores del parámetro c y de la condición inicial $M(0)$.

Después de este trabajo en grupos, se hace una puesta en común en la que quedan reflejadas las conjeturas acerca la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$. Veamos como lo explica uno de los grupos:


- 1r cas: per una $M(0) = 150$ i una $c = 20$ tenim que: (podem plantejar la fórmula d'una altra manera per veure-ho més clar: $M(n+1) = c^n M(0)$)

n	M(n+1)
0	150
1	3000
2	60000
3	1200000
4	24000000

* Aquesta fórmula surt de

$$M(n+1) = c\,M(n) = c\cdot c\,M(n-1) = c\cdot c\cdot c\,M(n-2) = c\cdot c\cdot c\cdot c\,M(n-3) = \dots = c^n\,[M(0)]$$

$$\boxed{M(n+1) = c^n M(0)}$$

Per tant, en aquest cas, com la $c > 1$, la població creix infinitament, com es el cas del nostre model. Matemàticament, per $c > 1$, $\lim_{n\to\infty} M(n+1) = \infty$

Figura 7. Ejemplificación de la simulación con $\boldsymbol{M_1}$ tomando los valores $c = 20$ y $M(0) = 150$

Se pone así en evidencia la "paradoja maltusiana" y se empieza a plantear posibles soluciones. En general los propios estudiantes descubren que debe modificarse las hipótesis H_1 según la cual la tasa relativa de variación es constante. Además disponen de la gráfica realizada en la sesión anterior de la tasa relativa de variación r_n respecto del tamaño $m(n)$ que ayudará mucho a esta reformulación en la próxima sesión.

La sesión acaba con la redacción en grupos del segundo de los informes que se centra en describir $\boldsymbol{R_1}$ y las propuestas de cómo superar la "paradoja maltusiana". Adjuntamos en el anexo 2.1 algunos de los informes más representativos que debían entregar al inicio de la siguiente sesión.

	ORGANIZACIÓN
	UNIDAD 2: Construcción y e
Estructura y objetivos de **U2**	▪ Discusión de las limitaciones que presenta **OM$_{\mathbf{maltusiana}}$** y propuesta de reformulación c ▪ Construcción del modelo logístico discreto $\boldsymbol{M_2}$, reformulación de la cuestión centra resultados obtenidos del trabajo técnico con este modelo y planteo de nuevas cuestione ▪ Discusión, redacción y defensa de la nueva respuesta provisional ($\boldsymbol{R_2}$) que aparece a pa
RM	OM
Medios y medias	- Al inicio de la sesión se recogerán los informes elaborados de la unidad anterior (que co - Se seguirá trabajando con el *Dossier* 1 (faisanes), centrándonos ahora en la construcción la unidad, se entregará el *Dossier de evaluación* parcial para evaluar individual del proc
Evolución y gestión de los momentos de estudio	La unidad empieza con un recordatorio y descripción general del proceso desarrollado hast ▪ *Momento exploratorio* – Propuestas de superación de la "paradoja maltusiana" - Trabajando en grupos, la profesora propondrá que piensen en posibles manera de supera - Al finalizar, cada grupo presentará sus propuestas. En el supuesto caso de que aparezca cuales son los candidatos a considera y cómo pueden calcularse. En este momento debe ▪ *Construcción del modelo logístico, trabajo técnico con este modelo y elaboración de R* - Construcción general para cualquier valor de a y b (donde a y b representan los coefici discreto M_2. Es muy importante aquí establecer relaciones entre los parámetros a, b necesario que el profesor haga notar también que el caso del modelo M_1 se trata de un ca - Se propondrá a los grupos que empiecen con el trabajo técnico de M_2. Se deberán distin el *Dossier* 1, y (2) el estudio generalizado de M_2 y búsqueda de conclusiones generales segundo modelo con α, K y x (0) valores cualesquiera. [GE con intervenciones de P]

[6] Nos referimos al diseño matemático de OM $_{\text{logística}}$ que ha sido descrito en el capítulo 3 (Cf. §

Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momentos de evaluación y institucionalización* – Redacción y defensa de R_2 - Se hace una puesta en común del trabajo realizado durante en el desarrollo del mome acaben surgiendo las dos cuestiones problemáticas: $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ frente a las que M_2, y ut requerirán de la consideración de un nuevo modelo en el que se pueda seguir trabajanc ▪ *Momento de evaluación* del proceso de estudio - Con la entrega del *Dossier evaluación* parcial se pretende evaluar el proceso desarro capaces de reproducir coherentemente y con herramientas suficientes: la formulació formulación de cuestiones problemáticas, etc. Los alumnos deberán entregar individua
Observaciones	- Las herramientas matemáticas necesarias aquí son las mismas que en la unidad ante posiblemente necesario explicar cómo hacerlo con calculadora numérica o programanc - Es importante notar el cambio de "naturaleza" de las cuestiones $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ que " naturaleza matemática. Forman parte de un sistema intramatemático que requerirá una - Consideramos que serán necesarias aproximadamente 4 horas para el desarrollo de est

3.2. Unidad 2: Construcción y estudio del modelo logístico discreto

3.2.1. Organización didáctica a priori de U2

Ver tabla en la página anterior.

3.2.2. Recorrido efectivamente experimentado de U2

Horas destinadas a U2: 3 horas (dos sesiones, S3 y S4 cada una de hora y media)
Distribución temporal de los momentos: Momento exploratorio: 30', construcción del modelo logístico, trabajo técnico con este modelo y elaboración de R_2: 1h30' y momentos de evaluación y institucionalización: 30'.

La primera sesión de esta unidad (S3 del taller) se inicia con el análisis del gráfico en el que se representa la *tasa relativa de variación* r_n, o el *índice relativo de variación* i_n, respecto del tamaño de la población M_n [7]. Finalmente se llega a la conclusión que se debe suponer que r_n o i_n decrece respecto de M_n y, en este caso, el decrecimiento lineal es la aproximación decreciente más sencilla a considerar. De este análisis se ha deducido habitualmente, y de forma bastante natural, cambiar la hipótesis H_1 por H_2. Además, como en la primera sesión ya se había estudiado la relación entre ambas tasas de crecimiento, r_n o i_n, se decide reformular las hipótesis en base a i_n debido a que entonces resultaba más sencilla la construcción del modelo. Siguiendo la explicación que dan algunos de los estudiantes, formulan así las nuevas hipótesis bajo las cuales se va a construir M_2:

Partint de les suposicions següents:

- r(Pn) és una funció decreixent
- r(Pn) ha de ser >0

[7] Esta consideración generó algunas dudas ya que varios de los grupos habían hecho la gráfica de r_n o i_n respecto de la variable año, n.

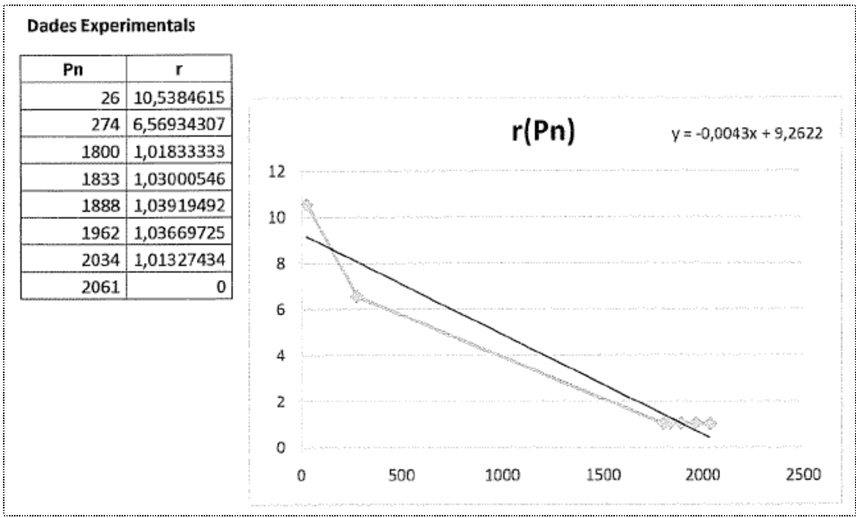


Figura 8. Reformulación de la hipótesis H_1 por H_2 y búsqueda de la recta decreciente que mejor ajusta (M_n, r_n)

Los grupos empiezan entonces a buscar la estimación de los parámetros a y b que mejor se ajusta al conjunto de puntos (M_n, r_n). Vuelve a abrirse aquí el problema de decidir cuál es la mejor propuesta. Generalmente se utiliza de nuevo el soporte de Excel para comparar las diferentes propuestas, finalmente incluso algunos grupos proponen utilizar la función *solver* de este mismo programa con el fin de minimizar el error cometido. Vemos el gráfico con contiene las diferentes propuestas de los grupos:

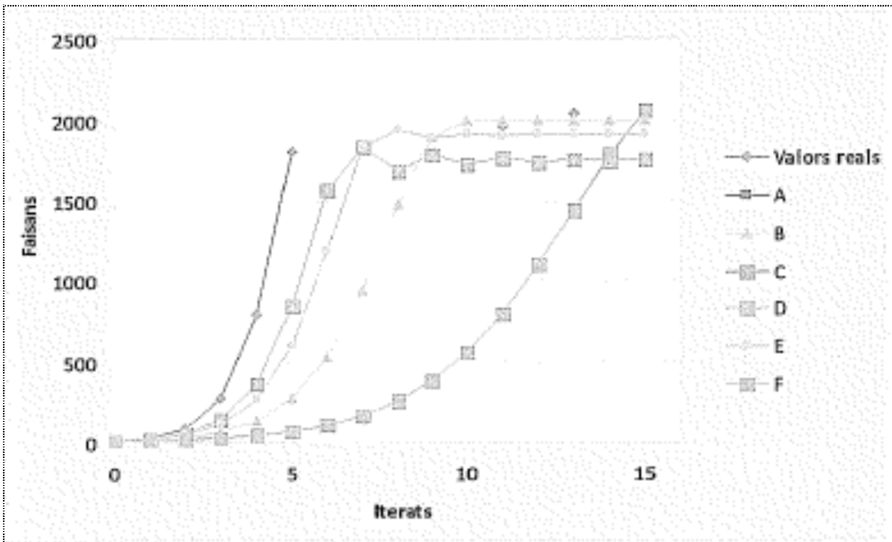


Figura 9. Comparación de las propuestas de cada grupo

Al finalizar este problema, los estudiantes detectan que los parámetros a y α deben de mantener alguna relación ya que estos valores son muy parecidos. En este momento, la profesora aprovecha para introducir la cuestión:

¿Qué relación hay entre los parámetros a y b con α y K respectivamente?

El estudio de esta cuestión suele requerir bastante tiempo, aunque finalmente este trabajo ayuda mucho a entender la relación entre el “modelo maltusiano” M_1 con el nuevo modelo M_2. M_1 es, en realidad, un caso particular de este segundo modelo.

Una vez finalizada esta parte del estudio, la profesora propone que el objetivo será hacer un “estudio generalizado” de M_2. En varias de las experimentaciones ocurre que los primero que intentan hacer varios estudiantes es intentar encontrar una “expresión cerrada” de este modelo como la que se había conseguido con M_1. Después de intentarlo de varias maneras, ya ven que en este caso no era posible. A partir de aquí, los grupos empiezan a trabajar con las tablas incluidas en el *Dossier* 3 en las que se propone simular numéricamente la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida por M_2, dando valores concretos a los parámetros a y K. Los resultados de este *trabajo exploratorio* quedarán pendiente para la puesta en común en la próxima sesión (ver anexo 2.1. – informes U2).

La segunda sesión dedicada a esta unidad (S4), los grupos siguen trabajando en qué conclusiones generales pueden conjeturar sobre M_2. Al final de la sesión los “secretarios” se encargan de exponer su propuesta de R_2 e, igual que la mayoría de grupos, proponen diferenciar tres casos según el valor del parámetro a: $0 < a < 1$, $1 < a < 3$ y $a > 3$ como explican a continuación:

CONCLUSIONS GENERALS

- El valor de K és indiferent, ja que no afecta al valor de l’estudi en cap dels valors “α”.

- Pels casos en que 1< α <3 es dona el cas que la població assoleix un valor estable (L), aquest valor és independent també de M(0).

- Pels casos en que 0 < α <1 s’extingeix la població ja que sempre s’arriben a uns valors molt pròxims a 0, aquest valor també és independent de M(0).

- Pels casos en que 3 ≤ α < 4 la població oscil·la entre 2 valors que finalment arriben a uns límits de estabilitat.

- Finalment, pels casos en que α > 4 la població arriba a uns valors que no tenen sentit (valors negatius), que poden tendir a infinit en un curt període de temps o variacions sense periodicitat.

Figura 10. Conjeturas generales extraídas de la simulación numérica de M_2

La institucionalización de estas conjeturas resulta muy pertinente para dejar claramente planteadas cuestiones $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ a las qué ni con M_2 ni con M_1 puede dar respuesta. Para finalizar la sesión, y antes de embarcarnos en considerar nuevas herramientas matemáticas, se les entrega el *Dossier* 4 (dossier de evaluación) para que los estudiantes individualmente elaboren su informe y lo entreguen en la siguiente sesión (ver anexo 1.1 – *Dossier* 4).

	ORGANIZACIÓN
	UNIDAD 3: Introducción y aplicaci
Estructura y objetivos de **U3**	▪ Dada la aparición en la unidad anterior de las cuestiones $\boldsymbol{Q_{2.1}}$ y $\boldsymbol{Q_{2.2}}$ cuya naturaleza es mediante la consideración y estudio del modelo analítico – funcional $\boldsymbol{M_3}$. Además de l ▪ Aplicación de $\boldsymbol{M_3}$, y de la nueva técnica, a los dos modelos estudiados previamente: $\boldsymbol{M}$ ▪ Discusión, redacción y defensa del nuevo informe que contenga las respuestas a $\boldsymbol{Q_{2.1}}$ y ▪ Síntesis de la nueva técnica introducida y posible generalización de $\boldsymbol{Q_3}$: ¿Cuál es la dinámica de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con
RM	OM anal
Medios y medias	- Se entrega un nuevo dossier de trabajo en el que se introduzca el nuevo modelo analític M_1 y M_2 y las cuestiones $Q_{3.1}$ y $Q_{3.2}$. - Los estudiantes disponen de los informes que han elaborado en las tres unidades anterio
Evolución y gestión de los momentos de estudio	La unidad empezará con un recordatorio y descripción general del proceso desarrollado has pendientes de estudiar y que dan origen a la construcción de M_3. ▪ *Momento tecnológico – teórico*: Presentación del modelo analítico – funcional y de la t El profesor se encargará de introducir M_3 para el estudio de sucesiones definidas a partir de se introduce la técnica de simulación gráfica, el método de la "tela de araña". [P] ▪ *Momento exploratorio y de trabajo de la técnica* – Aplicación de la nueva técnica de si - Se propondrá que cada estudiante [EI] trate primero las cuestiones particulares $Q_{3.1}$ y función lineal y función cuadrática respectivamente), comprobando que conducen a las - Se pondrán en común las respuestas encontradas por cada grupo y el profesor se enca $Q_{2.2}$. [CE]

[8] Nos referimos al diseño matemático de OM $_{\text{analítico-funcional}}$ que ha sido descrito en el capítulo 3

Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento de trabajo de la técnica y momento tecnológico – teórico*: Búsqueda de la p - Se propondrá a los estudiantes que sinteticen el proceso desarrollado durante el mome que han proporcionado las respuestas $R_{2.1}$ y $R_{2.2}$. Una vez esté bien descrito, se les p dinámica de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con f una funci ▪ *Momentos de evaluación e institucionalización* – Redacción y defensa de R_3 - Redacción y entrega del informe final de esta unidad [GE] que incluya tanto la apli generalización de la técnica utilizada.
Observaciones	- La introducción de las herramientas matemáticas necesarias requeridas en esta unidad - Consideramos que serían necesarias aproximadamente 6 horas (tres sesiones de dos ho

3.3. Unidad 3: Estudio de los modelos analítico-funcionales

3.3.1. Organización didáctica a priori de U3

Ver tabla en la página anterior.

3.3.2. Recorrido efectivamente experimentado de U3

Horas destinadas a U3: 3 horas (dos sesiones, S5 y S6 de hora y media cada una)
Distribución temporal de los momentos: Presentación de M_3 y de la nueva técnica de simulación gráfica: 30', momentos de trabajo de la técnica y tecnológico-teórico: 120' y momento de evaluación e institucionalización: 30

La unidad anterior (U2) ha finalizado con la formulación de las cuestiones problemáticas $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ frente a las cuales los propios estudiantes solicitan más herramientas para poder seguir estudiándolas. En la primera sesión dedicada a esta tercera unidad (S5), la profesora se encarga de introducir el nuevo modelo $\boldsymbol{M_3}$, que llamaremos modelo analítico-funcional cuyo objetivo es el de posibilitar el estudio general de la dinámica de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con f una función cualquiera de clase C^1.

Para ello, se prepara previamente el *Dossier* 5 (ver anexo 4, § 1.1) donde se introduce la *técnica de simulación gráfica* y se empieza proponiendo la aplicación del nuevo *medio experimental* al caso concreto del modelo maltusiano (M_1). La profesora es la encargada de introducir estas nuevas herramientas y toma como ejemplo, para desarrollar en la pizarra, el caso de $\alpha > 1$. Se propone entonces a los estudiantes que sigan con el estudio de las cuestiones $Q_{3.1}$ y $Q_{3.2.}$, esto es, la aplicación de M_3 al modelo maltusiano para los casos restante: $\alpha < 1$ y $\alpha = 1$ y al modelo logístico para algunos casos concretos de los valores de los parámetros α y K tal como se describe en dicho dossier. Veamos algunos ejemplos de realizados por los estudiantes que individualmente estudian los casos propuestos en este dossier:

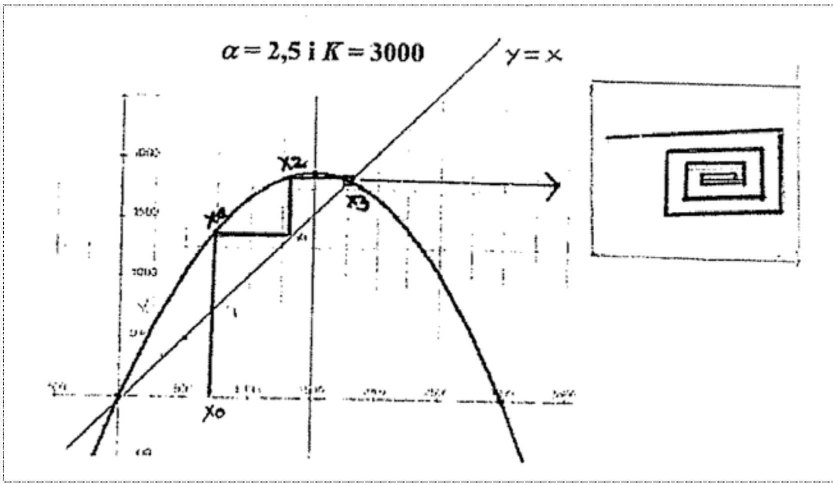


Figura 11. Simulación gráfica en el caso del modelo logístico para α = 2.5 y K = 3000

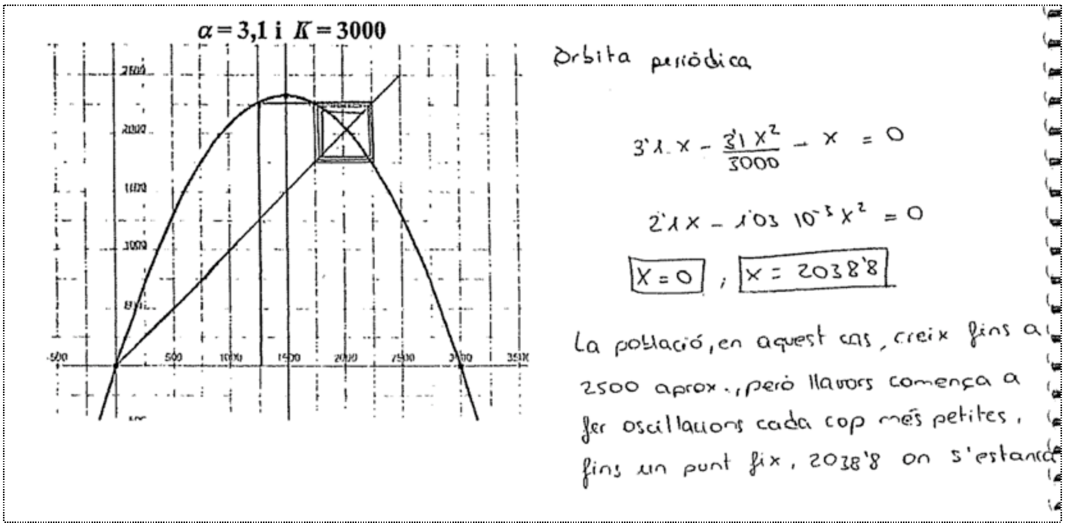


Figura 12. Simulación gráfica en el caso del modelo logístico para α = 3.1 y K = 3000

Para finalizar esta primera sesión se hace una puesta en común donde la profesora se encarga de recordar a cada grupo que las conclusiones provisionales que pueden ahora extraer con el nuevo medio experimental, deben complementarse con las que habían propuesto como respuestas provisionales en R_1 y R_2. Todo ello formará parte del informe semanal que deben entregar sobre esta tercera unidad (ver anexo 4 - Cf. § 2.1). A menudo, encontramos que los grupos se ayudan de algún aplicativo, como por ejemplo, uno de los grupos propone utilizar: http://www.geocities.com/exploracaos/v01n02/exploracaos.htm para poder simular más casos y completar de esta manera sus conjeturas.

Al iniciar la segunda sesión dedicada a esta unidad, y centrándose en el caso del modelo logístico M_2, la profesora plantea las siguientes cuestiones con las que se pretende completar el estudio de la cuestión $\boldsymbol{Q_{2.1}}$:

> $\boldsymbol{Q_{2.1.1.}}$: ¿Podemos eliminar algún caso que no tenga sentido? ¿Qué condiciones nos aseguran que la sucesión generada $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esté bien definida en el caso del modelo logístico?
>
> $\boldsymbol{Q_{2.1.2.}}$: ¿Qué regularidades encontramos en las trayectorias de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ según el valor de los parámetros α y K?
>
> $\boldsymbol{Q_{2.1.3.}}$: ¿Cómo se comporta la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "cerca" de los puntos fijos? Comparad los diferentes casos que aparecen. ¿Cómo podemos asegurar la convergencia de $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cerca de los puntos fijos?

El estudio de estas subcuestiones, que conduce al estudio paramétrico de la familia de funciones parabólicas que intervienen en la definición de M_2, llegamos al final de las sesiones dedicadas al desarrollo de esta tercera unidad. Los estudiantes, con bastantes indicaciones de la profesora, llegan finalmente a elaborar la respuesta $\boldsymbol{R_{2.1}}$. Por ejemplo, como acaba explicando este grupo (Cf. Anexo 4, § 2.1):

D'aquesta expressió podem deduir tres situacions:

1^a) $-\alpha+2>0 \rightarrow$ Per $\alpha<2$, $f'(p.f) > 0$

2^a) $-\alpha+2=0 \rightarrow$ Per $\alpha=2$, $f'(p.f) = 0$

3^o) $-\alpha+2<0 \rightarrow$ Per $\alpha>2$, $f'(p.f) < 0$

que a pesar de no ser del todo correcto, introduce la idea de utilizar la aproximación local de la función $f(x)$ a través de su derivada evaluada en el punto fijo para discutir, en un entorno de este punto fijo, la convergencia de la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se conseguirá finalmente distinguir entre los tres casos $\alpha>3$, $\alpha=3$ y $\alpha<3$, que ya se había detectado por simulación numérica, y con las respuestas obtenidas de $OM_{maltusiana}$ distinguir entre el caso de convergencia hacia el punto fijo (caso $\alpha<3$) del caso de "divergencia local" (caso $\alpha>3$).

En ninguna de las cuatro experimentaciones se pudo seguir más allá de este punto. Sea porque las sesiones del taller quedaban interrumpidas por las vacaciones de navidad y exámenes parciales del primer semestre o porque, muy probablemente, la problemática que se trataba requería de herramientas matemáticas que quedaban bastante alejadas de los objetivos del curso definidos antes de empezar con el taller. Dada la idoneidad de la temática tratada en el siguiente REI (modelos matriciales para el estudio de la dinámica de poblaciones) a la evolución del curso, se decidió acabar aquí con el estudio de esta primera familia de modelos y pasar a tratar la siguiente problemática.

3.4. Análisis a posteriori del primer REI

Al inicio de la experimentación de este primer REI ha resultado imprescindible, en todas las experimentaciones, acordar y fijar una manera como referirse a los elementos clave que intervienen en el proceso de modelización. Así, a partir de la primera unidad, se pacta cierta nomenclatura como, por ejemplo: "hipótesis sobre el sistema", "cuestiones a estudiar", "construcción del modelo", "respuestas obtenidas", etc. para referirse a las distintas etapas en un proceso de modelización y darles un papel oficial a estos elementos clave en la actividad de modelización.

Por otro lado, debemos destacar la importancia que han tenido para el desarrollo de los REI algunos de los dispositivos que, sin estar del todo previstos de antemano, ayudaron a asignar (o transferir) muchas de las responsabilidades que el contrato didáctico tradicional asigna en exclusiva al profesor. En el desarrollo de este primer REI se empezó con la puesta en marcha de estos dispositivos. Ésta acabó siendo mucho más dificultosa de lo previsto debido a la oposición de los estudiantes frente a las nuevas tareas y responsabilidades que se les asignaba. En concreto, nos estamos refiriendo a, por un lado, la entrega y posible defensa en grupos de los informes de cada una de las sesiones del taller. Por otro lado, y a partir de la segunda experimentación se decide escoger el "*grupo secretario de la semana*" al que se le pide que se encargue de sintetizar las cuestiones y las respuestas que habían sido tratadas sesión tras sesión y que lo presente al inicio de la sesión. Esta presentación del "grupo secretario" era generalmente complementada por la exposición del trabajo de algunos de los grupos.

Una tarea que también se asigna al "grupo secretario" es la de sintetizar lo que se dice al inicio de la sesión para que pueda ser incluido en el "diario" del taller. Esta tarea acaba fracasando en todas las experimentaciones ya que quien finalmente acaba haciendo el "diario del taller" es la profesora y no los estudiantes, para los cuales es muy difícil asumir la necesidad de "estudiar colectivamente" las cuestiones que guían el proceso de estudio y, en su responsabilidad como "secretarios de la semana", suelen centrarse en explicar lo qué ha realizado su grupo.

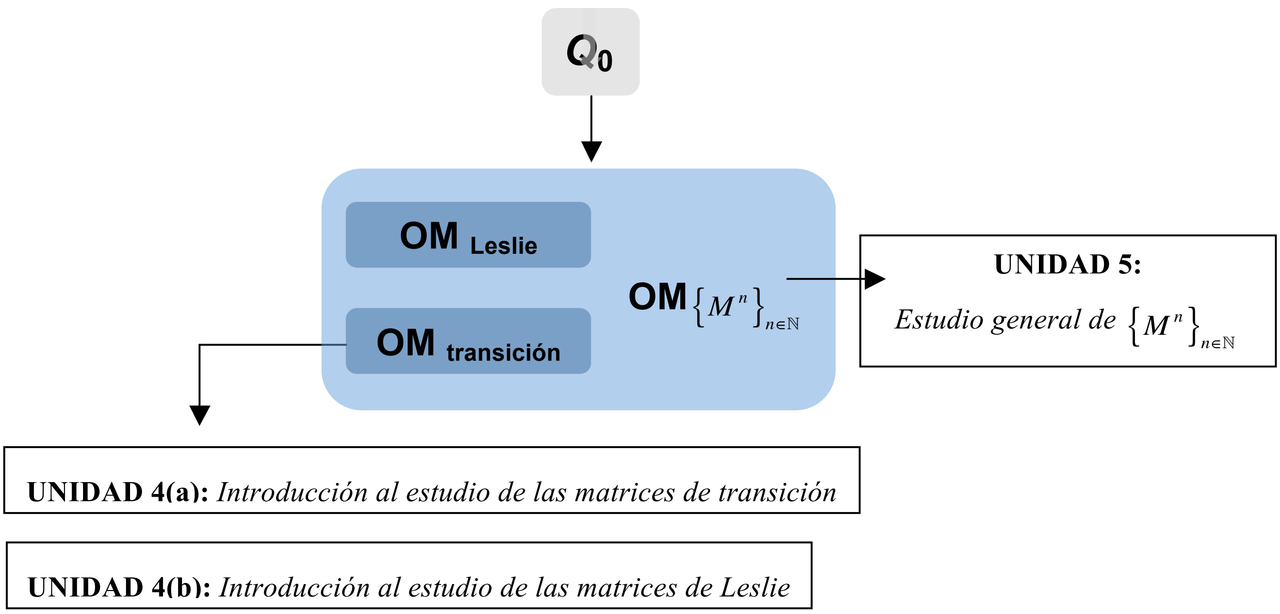
Otras de las tareas que se acaban asignando a los estudiantes, y que hemos anteriormente destacado en el paso de la unidad 1 a la unidad 2, es la búsqueda sistemática de información sobre los tipos de herramientas y de modelos considerados. Se trataba de buscar en los *media* (libros de texto, apuntes de clase, información en Internet, etc.) si los modelos que ya existían, qué resultados habían dado, y si se trataba de modelos a los que se les hubiera asignado un nombre.

Se ha puesto claramente de manifiesto en este primer REI la importancia del *contraste experimental* en la evolución del taller. Muy a menudo los propios estudiantes han propuesto y utilizado de forma espontánea herramientas informáticas, en particular, de Excel para el trabajo experimental de simulación numérica y de algunos programas de simulación gráfica. Además, en diversas ocasiones los estudiantes proponen programar una hoja de Excel para poder comparar las diferentes propuestas de los grupos y medir el grado de ajuste de cada una de éstas a los datos reales.

Por último, debemos destacar que en el transcurso de las unidades los estudiantes cada vez se acostumbran (o presentan menos resistencia que al principio) a "convivir" con cuestiones pendientes de ser estudiadas o con las respuestas "parciales" o "provisionales" que se van obteniendo. Este hecho, que al inicio de la experimentación generó tanto desconcierto, se va asumiendo por parte de los estudiantes que reciben constantes aclaraciones por parte de la profesora, que les va avisando del largo periodo de tiempo que estarían estudiando la cuestión generatriz. Un dispositivo que ha ayudado mucho a mantener viva dicha cuestión generatriz, y a tener un control de las cuestiones derivadas que se iban tratando, ha sido la utilización de dossiers de trabajo sin contenido fijado a priori y redactados en función de la evolución del taller. Estos dossiers (de cuya redacción se encargaba la profesora) se iban entregando al inicio de cada una de las sesiones del taller. No podemos negar la reticencia de algunos estudiantes a los que al final de este primer REI se les preguntó sobre los inconvenientes del taller y respondieron diciendo, por ejemplo, que habían encontrado: “Poca variedad de problemas”, “Demasiados faisanes” o “Demasiado trabajo con las tasas relativas de variación (r_n)”.

4. DISEÑO Y EXPERIMENTACIÓN DEL SEGUNDO REI: MODELOS DISCRETOS PARA EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES CON GENERACIONES MEZCLADAS

Recordemos brevemente el recorrido matemático (RM) que delimitaba la estructura del segundo REI se centraba en la construcción y estudio de modelos matriciales para el estudio de la evolución de diferentes fenómenos cuyos elementos están distribuidos en grupos o clases. Este RM quedaba finalmente formado por tres OM con la siguiente estructura:



Destaquemos antes de empezar que en gran parte gracias a que la temática de este segundo REI se adecuaba mucho a la programación anual del curso, y que el desarrollo del primer REI había tenido bastante aceptación por parte de los estudiantes, se decidió incorporar gran parte de la problemática de este REI a las clases habituales de teoría y problemas. Las *clases de teoría* se ocuparon de estudiar la problemática presentada en la unidad 4(b), introducción al estudio de las matrices de Leslie, y las sesiones de *problemas* y del *taller* se centraron en el estudio del caso de las *matrices de transición* (unidad 4(a),). Nos centraremos a continuación en describir lo que concierne al desarrollo del taller, esto es, la *Unidad* 4(a) seguida de la *Unidad* 5 cuyo estudio fue requerido por la problemática que acabó surgiendo tanto de las clases de teoría, con su estudio de las matrices de Leslie (*Unidad* 4(b) que aquí no describiremos), así como de las clases de problemas y del taller con su estudio de las matrices de transición.

	ORGANIZACIÓ
	UNIDAD 4: Introducción al e
Estructura y objetivos de **U4**	▪ Presentación de la cuestión generatriz $Q_2^{(2)}$ en torno al estudio de la evolución de la di ▪ Presentación de "poblaciones" concretas con estructura en dos o tres grupos cuya Búsqueda de herramientas matemáticas para la descripción de la evolución de esta transición, $M_{\text{transición}}$. ▪ Planteo de cuestiones relativas al estudio de la trayectoria de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nuevas hipótesis y formulación de las cuestiones relativas a estas trayectorias, en part
RM	OM
Medios y medias	- Se entrega el *Dossier* 1 (*modelización con matrices*) (Cf. Anexo 4, § 1.2).
Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento del primer encuentro y momento exploratorio* - Presentación de los sistemas El profesor presentará la cuestión $Q_2^{(2)}$ destacando las diferencias introducidas respecto propondrá a los estudiantes que, leyendo la información que se presenta en el dossier, tamaños de los diferentes grupos o clases de las que se compone el sistema estudiado. [G ▪ *Momentos de evaluación e institucionalización* – Introducción de las matrices de trans Finalizado el trabajo en grupos, se hace una puesta en común donde cada grupo expon construcción y uso de las matrices de transición [GE + P]. El profesor se encargará d propiedades. Se propone el estudio de $Q_{2.1}^{(2)}$: Estudio de la trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ defini

9 Recordemos que la noción de *población* no se restringe a considerar únicamente poblaciones de ser
extramatemáticos, como por ejemplo: la evolución de fenómenos geológicos, de cuotas de mercado, de v

10 Nos referimos al diseño matemático de OM $_{\text{transición}}$ que ha sido descrito en el capítulo 3 (Cf. § 2.2.2). P

Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento exploratorio y de evaluación* – Simulación numérica de iterados - Se propondrá a los estudiantes que simulen numéricamente los iterados de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ellos mismos para poder finalmente proponer la respuesta provisional $R_{2.1}^{(2)}$ a $Q_{2.1}^{(2)}$. [P + - Se pondrán en común los resultados obtenidos. De esta simulación numérica deberán las diferentes trayectorias simuladas. Este momento deberá acabar planteando la cuest ▪ *Momento tecnológico-teórico* – Cálculo a priori de los vectores fijos o situaciones de e - El profesor presentará la técnica de cálculo de estos vectores fijos (con algún ejemplo con *M* una matriz de transición. [P] - Los estudiantes deberán entonces calcular el "conjunto de vectores fijos" con algun finalmente llegar a justificar que los vectores fijos que numéricamente habían detec $M \cdot \boldsymbol{m}^e = \boldsymbol{m}^e$. Podrán así elaborar la respuesta $R_{2.2}^{(2)}$ a la cuestión previamente plantead - El profesor planteará la cuestión $Q_{2.3}^{(2)}$ y que requerirá el estudio de las propiedades de
Observaciones	- Será necesario que los estudiantes hayan adquirido instrumentos del *álgebra lineal* y con matrices y en especial, el producto de matrices para no encontrar problemas en el resolución de sistemas de ecuaciones lineales. - Antes de acabar esta unidad deberá quedar planteada la cuestión $Q_{2.3}^{(2)}$ que será la "razó de la introducción de las herramientas básicas para el cálculo de la potencia n - ésima - La duración de esta unidad dependerá mucho de si los alumnos disponen de los con estudio de esta unidad puede ser de aproximadamente 4 horas.

4.1. Unidad 4: Introducción al estudio de las matrices de transición

4.1.1. Organización didáctica a priori de U4

Ver tabla en la página anterior.

4.1.2. Recorrido efectivamente experimentado de U4

Horas destinadas a U4: 3.5 horas (2 sesiones de clase de problemas y una del taller)
Distribución temporal de los momentos: Las dos sesiones de *problemas* (2h) se centran en los momentos del primer encuentro, en la introducción de las matrices de transición, en la simulación numérica de iterados y en el cálculo de vectores fijos. La sesión del taller se centra en los dos últimos momentos citados.

El estudio de esta unidad se inicia con dos sesiones de clases de problemas previas a la realización de la sesión de taller. En estas sesiones de problemas, la profesora entrega el *Dossier* 1 (*Modelización con matrices*: *las matrices de transición*) (Cf. Anexo 4, § 1.2) donde aparece reformulada la cuestión $Q_2^{(2)}$ en los siguientes términos:

> ¿Cómo podemos predecir la evolución de la distribución de los "elementos" (materia, animales, individuos, acciones de bolsa, rendas, genes, enfermedades, etc.) entre dos periodos consecutivos? ¿Qué pasará a la larga? ¿Existen distribuciones estables? ¿Por qué? ¿Son únicas? ¿Cómo las podemos encontrar?, etc.

Una vez destacadas las especificidades de los nuevos fenómenos, se presentan los diferentes casos que se van a ser estudiados y la profesora escoge el primero, "Aplicación a fenómenos geológicos", en el que se describe un estudio realizado sobre la transformación de piedra en arena en periodos de 100 años.

Como es habitual, la profesora pide a los estudiantes que busquen las herramientas adecuadas para describir la evolución de ambos materiales, piedra y arena, entre periodos consecutivos de 100 años. Por ahora se trabaja sólo con el caso concreto del fenómeno geológico, dejando para más tarde (en la parte del taller) que cada uno de los grupos escoja uno de los otros casos o fenómenos que el dossier propone (sistemas electorales, cuotas de mercado, planes de movilidad laboral, entre otros).

En la puesta en común, los estudiantes proponen generalmente dos herramientas matemáticas. Por un lado, la propuesta de considerar sucesiones recurrentes de orden 2, y por otros lado, la de considerar matrices que contienen los porcentajes de "transición" que describe el enunciado. Se abre aquí la discusión de ver hasta qué punto ambas propuestas son equivalentes para poder así seguir trabajando con los modelos matriciales.

La profesora introduce entonces formalmente qué son las matrices de transición y algunas de sus propiedades más importantes, para así comprobar que el caso previamente tratado corresponde ciertamente a una matriz de transición. Se introduce así la formulación concreta de $H_2^{(2)}$ y la construcción de $M_{\text{transición}}$.

Los estudiantes, que previamente ya han estudiado la construcción del modelo maltusiano discreto, proponen de volver aquí a encontrar una "expresión cerrada" de este nuevo modelo que finalmente se sintetizan como:

$$\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1) = M^n \cdot \boldsymbol{m}(0),$$

y que servirá para tratar la cuestión $Q_{2.1}^{(2)}$. La profesora propone que para la próxima sesión de problemas, y centrados en el caso del fenómeno geológico, simulen numéricamente varios de los iterados de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para diferentes condiciones iniciales, tanto las incluidas en el dossier como de otras que ellos mismos propongan.

Al inicio de la segunda sesión de problemas de esta unidad, los estudiantes suelen traer de casa formuladas varias de las conjeturas que se esperaban, llegando así a formalizar la respuesta provisional $R_{2.1}^{(2)}$ (proceso completo descrito en cap.3 § 2.2.2). En esta puesta en común, y después que todos los grupos hayan observado que ciertamente la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ parece tender siempre a una "situación de equilibrio", la profesora les plantea si les podrían de calcular "a priori" o "analíticamente" este vector fijo o de equilibrio que detectan numéricamente. Se plantea así la cuestión $Q_{2.2}^{(2)}$ frente a la que los estudiantes son capaces de plantear que los vectores fijos se hallarán al resolver la ecuación matricial:

$$M \cdot \boldsymbol{m}^e = \boldsymbol{m}^e$$

aunque, a partir de aquí, es la profesora quien tiene que introducir que la resolución de este sistema equivale a discutir las soluciones del sistema:

$$\left(M - I\right) \cdot \boldsymbol{m}^e = 0 .$$

Los estudiantes finalmente resuelven el sistema y se discute entonces si las soluciones encontradas anteriormente con la simulación numérica corresponden a soluciones particulares del sistema de ecuaciones estudiado. La sesiones desarrolladas en las clases de problemas acaban aquí aunque la profesora propone la tarea de inventarse más matrices de transición (*M*) con diferentes condiciones iniciales (***m*** (0)) y ver si ocurre algo similar al calcular los iterados $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

En la sesión del *taller* la profesora pide que cada grupo escoja uno de los fenómenos descritos en el dossier entregado en la clase de problemas. Después de unos minutos se hace la asignación de cada caso a cada grupo. Trabajando en grupos deben reproducir el proceso que se ha hecho en las previas clases de problemas, esto es, construir la matriz de transición que satisface que $\boldsymbol{m}(n) = M \cdot \boldsymbol{m}(n-1)$, comprobar las propiedades introducidas para las matrices de transición, calcular los iterados de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ con diferentes condiciones iniciales y, finalmente, redactar las respuestas proporcionadas mediante la simulación numérica y del cálculo "a priori" de los vectores fijos o de equilibrio.

Destacamos que en todas las experimentaciones, y de forma bastante espontánea, los estudiantes proponen la utilización de herramientas informáticas para favorecer el cálculo, bastante pesado, de los iterados de la sucesión $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto favorecía mucho el *trabajo experimental* de simulación numérica además de la incorporación del estudio de casos con matrices de transición de ordenes superiores y la posibilidad de poder considerar muchas más condiciones iniciales para contrastar las hipótesis que se iban formulando.

En la primera de las experimentaciones, se trabajó en una aula en la que no se disponía de ordenadores, a pesar de lo cual la mayoría de los estudiantes no dudaron en redactar los informes semanales utilizando el programa Excel. En las siguientes experimentaciones, se solicitó cambiar de aula, y allí ya se disponía de ordenador y proyector lo que facilitó el trabajo tanto a la profesora como a los propios estudiantes en sus exposiciones en grupos o como secretarios de la semana. Destacamos que además del programa Excel, la profesora consideró adecuado introducir la calculadora simbólica WIRIS (www.wiris.com) con la que se mejoraba considerablemente el cálculo matricial: cálculo de potencias de matrices, resolución de sistemas de ecuaciones, etc. El uso de esta calculadora, combinándose con el programa Excel que aportaba ventajas en la simulación de iterados, favorecían enormemente los momentos exploratorios y de trabajo e la técnica, momentos clave en las primeras etapas del proceso de modelización.

Antes de acabar la unidad la profesora deja formuladas las cuestiones que surgen de la puesta en común de los resultados del trabajo de los grupos (que corresponde a $Q_{2.3}^{(2)}$):

> Si consideramos matrices de transición (en particular, con las que cada grupo está trabajando): ¿Toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún vector fijo $\boldsymbol{m}^e$? ¿Cuál es la dependencia entre el vector fijo $\boldsymbol{m}^e$, la matriz de transición M y la condición inicial $\boldsymbol{m}(0)$?

El estudio de estas cuestiones nos conduce al estudio de la potencia n-ésima de M: $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que nos conduce al estudio de la próxima unidad, la construcción de una nueva praxeología entorno al *cálculo de potencias de matrices* y, en particular, el cálculo de potencias de matrices de transición.

	ORGANIZACIÓN
	UNIDAD 5: Estudio gene
Estructura y objetivos de **U5**	▪ Recordatorio de las cuestiones $Q_{2.3}^{(2)}$ (y de $Q_{1.3}^{(2)}$ del estudio de las matrices de Leslie) q potencias *n*-ésimas de *M*. ▪ Estudio de $Q_{3}^{(2)}$ que llevará a la introducción de la técnica de diagonalización de matri ▪ Aplicación de las técnicas introducidas en esta unidad al caso concreto de: 1) *matr* pendientes $Q_{1.3}^{(2)}$ y $Q_{2.3}^{(2)}$ y poder elaborar una respuesta más completa a la cuestión $Q_{2}^{(2}$
RM	OM
Medios y medias	- Se seguirá trabajando con el *Dossier* 1 (*modelización con matrices*) en anexo 4, § 1.2. - Los estudiantes disponen del informe correspondiente a U4.
Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ <u>*Momento exploratorio* – Cálculo experimental de potencias *n* - ésimas de matrices (or</u> - La unidad empezará con el recordatorio de las cuestiones problemáticas que han que presente $Q_{2.3}^{(2)}$ (y de $Q_{1.3}^{(2)}$ del estudio de las matrices de Leslie). [P] - El profesor propondrá un listado matrices (de orden 2 y 3) para realizar el estudio de Q el caso de diagonales, de transición y de Leslie. El objetivo es que los estudiantes libre simulación numérica. [EI] ▪ <u>*Momento tecnológico – teórico* – Técnica de diagonalización de matrices y cálculo de</u> - Suponemos que los informes entregados por los estudiantes contendrán gran parte de entonces D^{n} también es diagonal. En la puesta en común de este resultado el profesor se

[11] Nos referimos al diseño matemático de OM $_{\{Mn\}}$ que ha sido descrito en el capítulo 3 (Cf. § 2.2.3). Par

Evolución y gestión de los momentos de estudio	- Presentada esta técnica y la nueva propuesta de calcular potencias de matrices que d pueden destacar de $\left\{M^{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, en particular, cómo se comporta esta sucesión en su lími ▪ *Momento del trabajo de la técnica* – Estudio de los casos concretos de las matrices d - A partir de aquí, se propondrá que los estudiantes se centren en los casos de las matric - Los estudiantes deberán entregar en grupo el informe final correspondiente al estu completa el estudio de la cuestión inicial $Q_{2}^{(2)}$ que ha iniciado el desarrollo de ambas u ▪ *Momentos de evaluación e institucionalización* – Defensa y debate de las respuestas - En la puesta en común, los diferentes grupos presentarán los resultados obtenidos respuestas para cualquier matriz de transición. [CE]
Observaciones	- La introducción de las herramientas matemáticas requeridas en esta unidad están conte - Consideramos que serían necesarias aproximadamente 4 o 5 horas para el desarrollo d

4.2. Unidad 5: Estudio general de la potencia *n* - ésima de *M*

4.2.1. Organización didáctica a priori de U5

Ver tabla en la página anterior.

4.2.2. Recorrido efectivamente experimentado de U5

Horas destinadas a U5: Dos horas de clases de problemas y dos sesiones de taller (de hora y media cada una).

En la primera clase de problemas dedicada a U5, la profesora libra un listado con diversas matrices de diferente tipo (incluyendo de diagonales) de las cuales los estudiantes deben calcular su potencia $n-$ésima para diferentes valores de n, esto es, estudiar la sucesión generada por $\{M^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

A medida que los estudiantes avanzan con estos cálculos, muchos de ellos ayudándose de portátil o de calculadoras numéricas, empiezan a detectar algunas características de M^n según de que tipo de matriz se trate. A este primer trabajo exploratorio le sigue la puesta en común en la se acaba institucionalizando la propiedad de las matrices diagonales: si la matriz D se trata de una matriz diagonal, entonces D^n también es diagonal.

A partir de este momento, se decide "abandonar" temporalmente el estudio de las matrices de transición iniciado en la unidad anterior, para introducir ahora las técnicas de diagonalización de matrices y de cálculo de la potencia n-ésima de éstas. A partir de aquí, los profesores de la asignatura habilitan algunas sesiones de teoría y de problemas (aproximadamente 6 horas) a introducir estas técnicas y su puesta en práctica.

Una vez se considera que los estudiantes han cogido suficiente dominio de estas técnicas, se reemprende el estudio de $\boldsymbol{Q}_{2.3}^{(2)}$ que había quedado pendiente de estudiar en la sesión anterior con las matrices de transición: ¿Toda trayectoria de $\{\boldsymbol{m}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a este vector fijo $\boldsymbol{m}^e$? ¿Cuál es la dependencia entre el vector fijo $\boldsymbol{m}^e$, la matriz de transición M y la condición inicial $\boldsymbol{m}(0)$?

En la sesión del taller, los grupos siguen con el estudio de los fenómeno habían escogido al final de la unidad anterior. Se deja el tiempo libre para que los estudiantes puedan aplicar las técnicas de diagonalización a las matrices de transición concretas para el estudio del su fenómeno escogido y puedan describir las propiedades de si potencia *n*-ésima. Durante el trabajo en grupos la profesora ofrece la posibilidad de utilizar la calculadora simbólica WIRIS mediante el ordenador del que dispone el aula. Los grupos utilizan de forma alternada esta herramienta para calcular los polinomios característicos, comprobar los valores y vectores propios, etc.

En acabar esta sesión queda pendiente que los grupos elaboren el informe completo correspondiente al trabajo realizado en el estudio de "su" fenómeno asignado. La siguiente sesión se dedica completa a que los grupos presenten los resultados y respuestas obtenidas en referencia a la cuestión inicial $Q_2^{(2)}$. La profesora se encarga de recoger estos informes, escanearlos y ponerlos en el campus (web) de la asignatura para que así el resto de grupos tengan acceso a estos para la preparación del examen de final de semestre.

4.3. Análisis a posteriori del segundo REI

Debemos destacar primeramente un hecho que, sin estar previsto de antemano, desde la primera experimentación y desde el inicio de este segundo REI, se acordó que se iría tratando paralelamente el estudio de fenómenos modelizables a través de matrices de Leslie, en las clases de teoría, y el estudio de fenómenos modelizables a través de matrices de transición, en las sesiones de problemas y del taller.

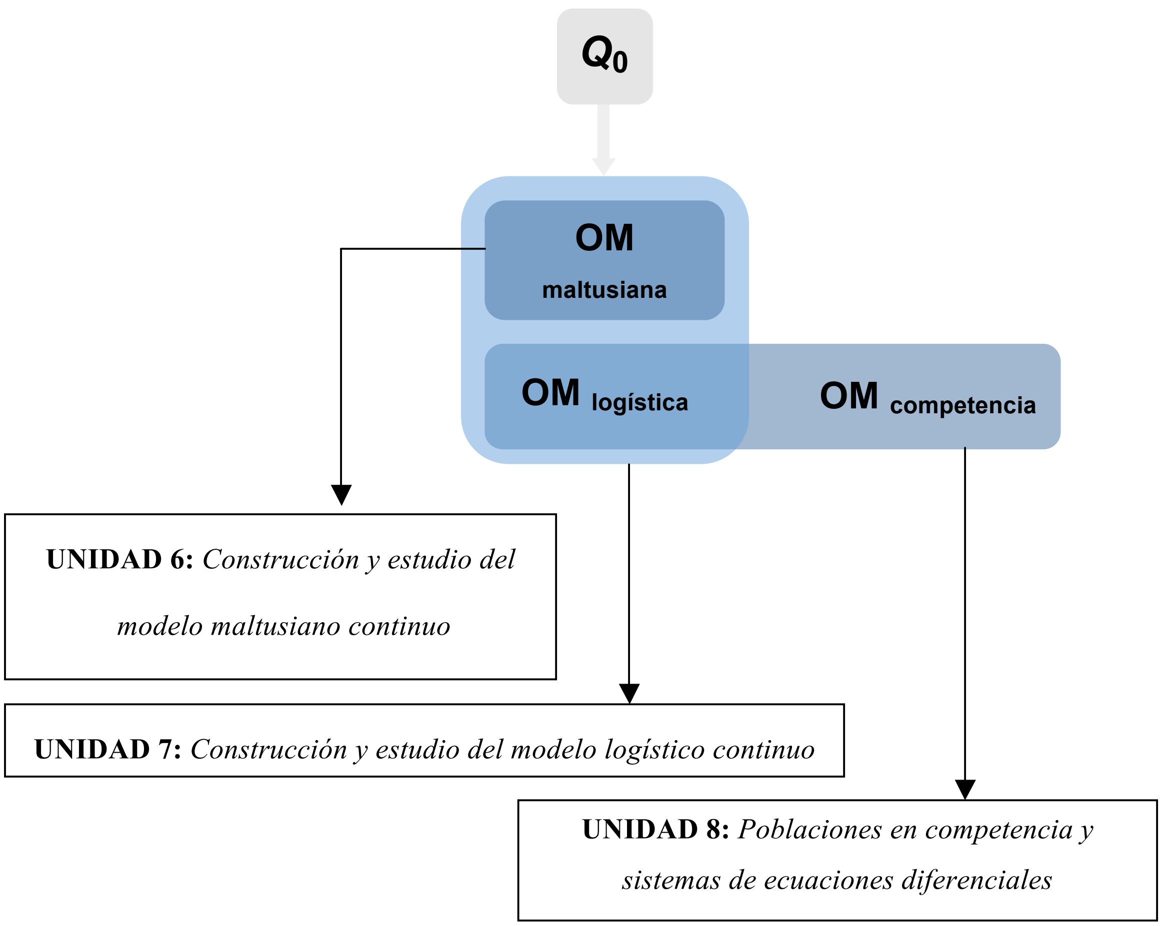
Así, la unidad 4(a), estudio de *matrices de transición*, y la unidad 4(b), estudio de las *matrices de Leslie*, fueron desarrollándose paralelamente desembocando finalmente en el planteo de cuestiones que requerían el estudio de la potencia *n*-ésima de una matriz y la necesidad de diagonalizarla (unidad 5). En ese momento, la profesora del taller junto con el profesor responsable de la asignatura dedicaron unas cuantas sesiones destinadas a trabajar la técnica de diagonalización de una matriz y el cálculo de su potencia *n*-ésima como preparación para la continuación del estudio. Se destaca la importancia que tomó el *trabajo de la técnica* dentro del proceso de estudio que permitió desarrollar en manos de los estudiantes un medio necesario para seguir con el proceso de estudio.

Recordemos que en todas las experimentaciones y de forma bastante espontánea por parte de los alumnos, se propuso la utilización de herramientas informáticas para favorecer el cálculo de los iterados de la sucesión de $\{\boldsymbol{m}(n)\}$ (unidad 4) y de $\{M^n\}$ (unidad 5). El uso de esta calculadora WIRIS, combinándose con el programa Excel que aportaba ventajas en la simulación de iterados, favorecían enormemente los *momentos exploratorios* y de *trabajo e la técnica*, momentos clave en las primeras etapas del proceso de modelización además de favorecer el *trabajo experimental* posibilitando la incorporación del estudio de casos con matrices de transición de órdenes superiores y la posibilidad de poder considerar una gran diversidad de condiciones iniciales para contrastar las hipótesis que se iban formulando.

Por último, queremos destacar los avances que hubo respecto a la experimentación del primer REI. La manera de organizar el estudio de las unidades durante este segundo REI, que permitió que en las clases de teoría, de problemas y taller se trabajasen en el mismo conjunto de cuestiones problemáticas dotó de mucho sentido a todo el proceso de estudio. Facilitó que los estudiantes se implicaran en el proceso de modelización, asumieran muchas de las responsabilidades que muy forzosamente se habían empezado a transferir en el primer REI y que cada vez fuesen más “autónomos” durante el transcurso de los REI.

5. DISEÑO Y EXPERIMENTACIÓN DEL TERCER REI: MODELOS CONTINUOS PARA EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES

Recordemos brevemente que el recorrido matemático (RM) que delimitaba la estructura matemática del tercer REI se centraba en la construcción de *modelos matemáticos continuos para el estudio de la dinámica de poblaciones*. Finalmente, tal como hemos descrito el capítulo 3, este RM ha quedado formado por tres organizaciones matemáticas (OM) que conforman la estructura que recordamos a continuación y dan lugar a sus correspondientes unidades didácticas cuyo diseño o recorrido didáctico (RD) a priori, seguido de su recorrido realmente experimentado vamos a describir en este apartado.



Podemos avanzar que la experimentación de este tercer REI, que se desarrolló durante las cuatro experimentaciones que se han llevado a cabo, se realizó durante el segundo semestre, momento en el que los estudiantes estaban tratando el bloque de *ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Este hecho permitió nuevamente articular los contenidos del curso con los del taller, trasladando a las clases de teoría y de problemas muchas de las cuestiones problemáticas que se iba apareciendo durante el taller. Por ejemplo, además del desarrollo de la unidad 8, estudio de la dinámica de poblaciones en competencia, en clase de teoría se fueron tratando otros casos como, por ejemplo: el estudio de la evolución de enfermedades (SIR) o el caso de *presa – predador*, entre otros, que también requerían de la construcción y estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales.

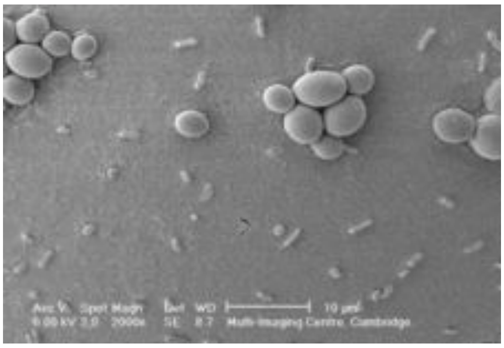
Incluimos a continuación el dossier - *Dossier* 1 (*levadura*) que inauguró este tercer REI en el que se presentan los datos referentes a un experimento con dos poblaciones de diferente tipo de levadura que se habían puesto en recipientes independientes bajo las mismas condiciones. El diseño a priori de las tres unidades indica que se requieren un total aproximado de 6 - 7 sesiones de hora y media. En todo caso, este tercer REI ofrece la posibilidad a los estudiantes de optar, junto con el segundo REI, a sumar medio punto a la nota semestral de la asignatura.

DOSSIER 1 (*levadura*)

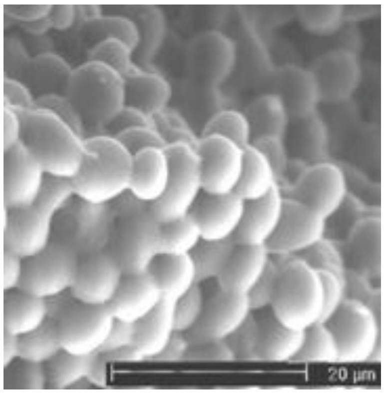
Estudio del crecimiento de levadura en recipientes cerrados

La levadura es un pequeño microbio de características vegetales que se utiliza en la elaboración del pan y de algunas bebidas alcohólicas, como el vino, la sidra o la cerveza. En 1859, Louis Pasteur, padre de la microbiología moderna, descubrió la manera cómo la levadura se reproduce. Al alimentarse de derivados del azúcar, este microorganismo produce dióxido de carbono. Este gas dilata las proteínas del gluten que contiene la harina produciendo que la masa del pan se expanda. En la actualidad, las bebidas alcohólicas, se elaboran a partir de frutas, cereales o miel, a las que se les añade otro tipo diferente de levadura para hacer fermentar los azúcares que hay en estos productos y obtener así el alcohol.

Una de las clases de levadura más conocidas es la especie ***Saccharomyces cerevisiae*** que tiene la facultad de crecer sin necesitar oxígeno (forma anaerobia) realizando así la fermentación alcohólica. Otro tipo de levadura muy utilizada en la elaboración de cerveza es el llamado ***Saccharomyces kefir***.



Saccharomyces cerevisiae



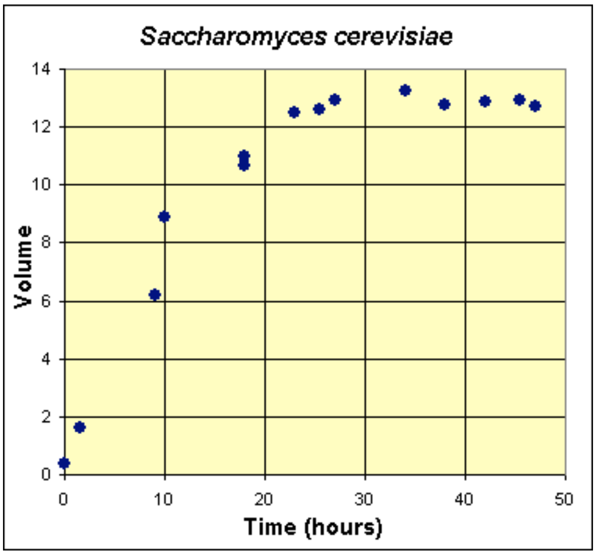
Saccharomyces kefir

A continuación presentamos las tablas[12] que contienen los datos recogidos de dos experimentos con estas dos clases de levadura citadas. Los experimentos consistieron en dejar en un recipiente cerrado y con suficientes nutrientes una muestra inicial de cada población (por separado). Las condiciones fueron idénticas en los dos casos. La primera tabla muestra los datos referentes a las observaciones tomadas sobre la evolución de la población de *S. cerevisiae* , y la segunda tabla presenta los datos referentes a *S. kefir*. Estos últimos datos fueron recogidos durante un periodo de tiempo más largo debido al crecimiento más lento de esta segunda clase de levadura.

[12] Datos obtenidos de Mahaffy, J. M. (2001). *http://www-rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/*

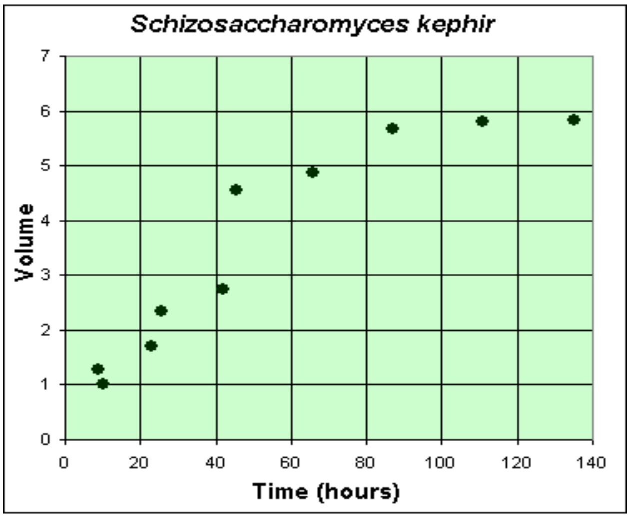
Saccharomyces cerevisiae

Horas	Tamaño
0	0,37
1,5	1,63
9	6,2
10	8,87
18	10,66
18,5	10,97
23	12,5
25,5	12,6
27	12,9
34	13,27
38	12,77
42	12,87
45,5	12,9
47	12,7



Schizosaccharomyces Kephir

Horas	Tamaño
9	1,27
10	1
23	1,7
25,5	2,33
42	2,73
45,5	4,56
66	4,87
87	5,67
111	5,8
135	5,83



CUESTIONES PRINCIPALES A ESTUDIAR

Dada una población de la que conocemos su tamaño en algunos periodos de tiempo, ¿Podemos predecir cómo evolucionará el tamaño de esta población después de *n* periodos? ¿Será siempre posible predecir el tamaño de la población a largo plazo? ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se pueden asumir? ¿Cómo podemos hacer estas predicciones y cómo las podemos validar?

	ORGANIZACIO
	UNIDAD 6: Construcción y
Estructura y objetivos de **U6**	▪ Se plantea el estudio de la cuestión generatriz $Q_0^{(3)}$ en torno al estudio de la dinámi ▪ Búsqueda de la notación apropiada para describir la variable tiempo como una mag ▪ Formulación de la primera hipótesis $H_1^{(3)}$ en el "mundo continuo", construcción d formalización de la primera respuesta provisional $R_1^{(3)}$ y estudio de las limitacione
RM	OM m
Medios y medias	- Entrega del *Dossier* 1 (*levadura*) (que hemos incluido al inicio de este apartado) do cuestión generatriz Q_0.
Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento del primer encuentro* – Presentación de la cuestión generatriz Q_0 en torn - Se presentarán los datos referentes a la evolución del tamaño de dos poblaciones de de la cuestión generatriz Q_0 del proceso [P]. Los estudiantes (distribuidos en grupo modelos discretos, deberían facilitar el primer encuentro con estas cuestiones y el tr ▪ *Trabajo exploratorio* – Búsqueda de notación y de herramientas matemáticas adec - Trabajando en grupos, los estudiantes empezarán a explorar los datos que las tabla poblaciones y su crecimiento. [GE] ▪ *Momento de institucionalización* – Formalización de la noción de derivada y de la - En la puesta en común se pactará la notación a utilizar en adelante (por ejemplo, diferenciales para construir los modelos matemáticos continuos [CE].

Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Construcción del modelo maltusiano continuo, trabajo técnico con este modelo y ela* - Un vez presentada la hipótesis $H_1^{(3)}$ se pasará a la construcción general del modelo autónoma de primer grado. [EI o GE] Una vez construido el modelo, se propondrán a nuevo el problema del ajuste de los parámetros r y $x(0)$ que caracterizan este primer m - Se procederá entonces al estudio general de $M_1^{(3)}$, esto es, para dar respuesta a $Q_1^{(3)}$: una población que supuestamente sabemos que $r(t) \equiv r$? [GE] ▪ *Institucionalización y evaluación* de las respuestas provisionales obtenidas a partir de - Se hará la puesta en común del trabajo realizado hasta el momento y cada grupo de "mundo continuo". [GE + P]
Observaciones	- Será necesario que los alumnos tengan conocimientos y dispongan de técnicas de re También será necesario el dominio en la representación de la familia elemental de fun - Antes de acabar la unidad debe plantearse la cuestión $Q_{1.1}^{(3)}$: ¿Cómo podemos superar recursos infinitos? - La duración de esta unidad va a depender mucho de si los alumnos disponen de los co que el estudio de esta unidad puede ser de aproximadamente 2 horas.

5.1. Unidad 6: Construcción y estudio del modelo maltusiano continuo

5.1.1. Organización didáctica a priori de U6

Ver tabla en la página anterior.

5.1.2. Recorrido efectivamente experimentado de U6

Horas destinadas a U6: 3 horas (2 sesiones de taller de hora y media cada una).
Distribución temporal de los momentos: Momento del primer encuentro: 15’, momento exploratorio: 30’, momento de institucionalización: 60’, construcción del modelo maltusiano continuo $M_1^{(3)}$, trabajo técnico con este modelo: 60’ y institucionalización y evaluación de las respuestas provisionales $R_1^{(3)}$: 15’.

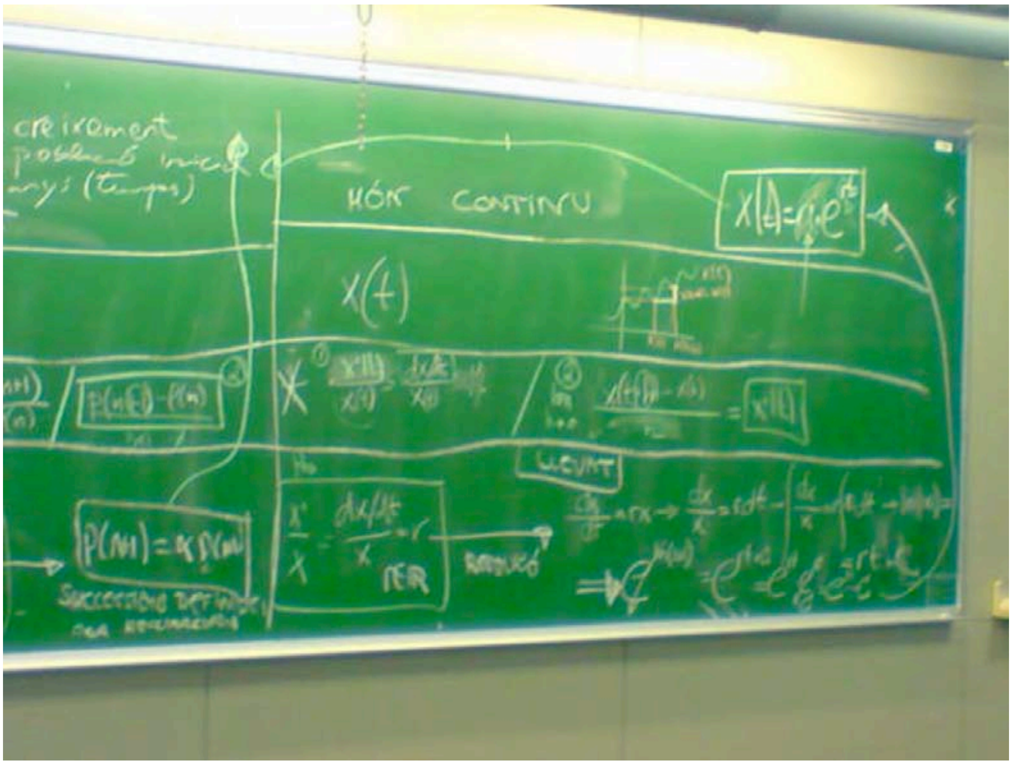
En la primera sesión dedicada a esta unidad (U6), y debido en parte a que (en las tres primeras experimentaciones) el primer REI centrado en el estudio “discreto” de la dinámica de poblaciones se realiza alrededor de 4 meses antes del estudio continuo, esta primera sesión se dedica a recordar lo que algunos de los grupos habían propuesto en la sesión introductoria (U0): la construcción de modelos basados en *funciones exponenciales*. De este modo, se aprovecha para plantear la problemática sobre la relación entre los *modelos discretos*, con los que se había estado trabajando, y las *propuestas continuas*.

> ***Q_a***: ¿Qué relación hay entre la propuesta de los modelos basados en funciones exponenciales y los modelos discretos construidos en la primera parte del taller?

En este momento se plantea el estudio de la relación que hay entre la tasa relativa de variación, r_n, y la derivada de la función $x(t)$ que indica la variación del tamaño de la población X respecto del tiempo $t \in \mathbb{R}$, $x'(t)$. Se aprovecha entonces para hacer una “puesta en común – recordatorio” del trabajo realizado en el primer REI (ver *Dossier resumen* en el anexo 1.3, el cual se redactó al finalizar esta sesión con la finalidad de institucionalizar las respuestas aportadas hasta el momento). Con esta primera sesión, que resulta muy interesante y poco prevista de antemano, se empieza a mostrar el "paralelismo" entre ambos mundos, hecho que ayudará mucho a la evolución de este tercer REI. A continuación mostramos una tabla comparativa que propone uno de los grupos en el que sintetizan las herramientas de las que se dispone en el mundo discreto y continuo para describir el tiempo, el tamaño y las tasas de crecimiento y que sirve para abrir la discusión en clase:

	Món discret (1ª Part)	**Món continu** (2ª Part)
Notació: Temps	n	t
Grandària	P(n)	x (t)
Taxa de creixement	Calculada de tres maneres: 1. $\frac{P(n+1)-P(n)}{P(n)}$ 2. $\frac{P(n+1)}{P(n)}$ 3. $P(n+1)-P(n)$	1. $\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{dx/dt}{x(t)}$ 2. $\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = x'(t)$

Figura 13. Tabla comparativa de las herramientas dentro del "mundo" discreto y continuo



Esta búsqueda de paralelismo entre ambos mundos lleva estudiar la equivalencia entre

$$r_n = \frac{M(n+1) - M(n)}{M(n)} \text{ y } \frac{x'(t)}{x(t)} = r(t),$$

que facilitará la comparación entre los modelos construidos en el mundo discreto, a partir de las sucesivas reformulaciones de las hipótesis sobre la tasa relativa de crecimiento de la población (r_n), y los modelos del mundo continuo que vamos empezar a construir a partir de la formulación de hipótesis sobre la tasa de variación descrita por $x'(t)/x(t)$.

Al finalizar la primera sesión de U6, se entrega a los estudiantes el *Dossier* 1 (*levadura*). La profesora explica brevemente los datos generales sobre ambas poblaciones de levadura y propone a los alumnos que empiecen a trabajar en $\boldsymbol{Q_0}$.

En la segunda sesión dedicada a U6, y gracias a que en la sesión anterior ya se ha formalizado el uso de $x'(t)/x(t)$ como la "versión continua equivalente" a r_n, los estudiantes formulan sin dificultad la primera de las hipótesis $H_1^{(3)}$ ayudándose del paralelismo que mantiene con la evolución del primer REI. En las clases de teoría y de problemas, que cada vez más articuladas con la problemática tratada en el taller, ya se habían introducido el concepto y técnicas de resolución de EDOs con variables separadas. Se puede así encontrar fácilmente la familia de funciones solución y pasar al problema del ajuste de sus parámetros en el caso concreto de las poblaciones de levadura.

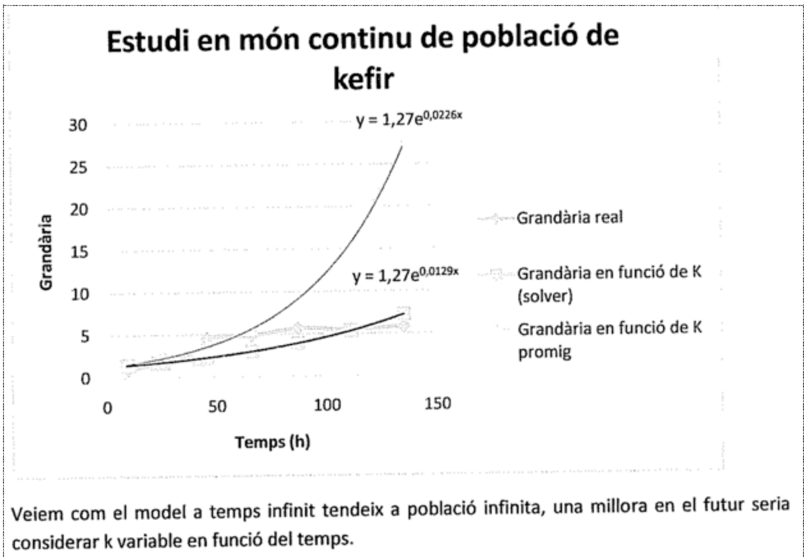


Figura 14. Ajuste del parámetro *r* y la condición inicial *x* (0) de $M_1^{(3)}$ para la primera población de levadura

Después de la puesta en común, se procede al estudio general de M_1 en el que los estudiantes fácilmente formulan la "paradoja" de suponer recursos infinitos y pasan a reformular las hipótesis con el fin de superar esta limitación. Destacamos aquí el dominio adquirido por los estudiantes en "dar nombre" a los diversos elementos que intervienen en el proceso de modelización: hipótesis, modelos, limitaciones del modelo, etc., vocabulario que se ha ido pactando e institucionalizando y forma parte de la cultura matemática de los estudiantes. Al finalizar esta unidad, los grupos deberán entregar dos informes que corresponden a las dos sesiones empleadas para esta unidad.

	ORGANIZACIÓN
	UNIDAD 7: Construcción y e
Estructura y objetivos de **U7**	▪ Reformulación de $H_1^{(3)}$ en $H_2^{(3)}$ para superar así la “paradoja maltusiana”, reformulaci ▪ Estudio general de $M_2^{(3)}$ incluyendo la resolución de la ecuación diferencial logística y ▪ Redacción en grupos de la segunda respuesta provisional $R_2^{(3)}$ y formulación de nueva
RM	OM $_{\text{log}}$
Medios y medias	- Se sigue trabajando con el *Dossier* 1 (*levadura*). Podrían entregarse un dossier adiciona
Evolución y gestión de los momentos de estudio	Se debe hacer un recordatorio del estudio general realizado con el modelo maltusiano $M_1^{(3)}$ ▪ *Momento exploratorio* – Propuestas para superar la “paradoja maltusiana” - De forma paralela al estudio desarrollado en la construcción de los modelos discret continuación, se pondrán en común las diferentes propuestas y se formalizará la nueva h ▪ *Construcción del modelo logístico, trabajo técnico con este modelo y elaboración de l* - Los estudiantes deberán plantear la ecuación diferencial que sintetiza las relaciones des en función de los parámetros *K* y *r*). Además se utilizará este modelo $M_2^{(3)}$ para predeci ▪ *Momento tecnológico – teórico* – Representación de la familia de funciones solución *x* Se propondrá que, a partir de la forma general del modelo $M_2^{(3)}$ se estudien las propieda introducir las herramientas necesarias para llevar a cabo este estudio, en particular, se $x'(t) = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - x(t)/K\right)$. [P] ▪ *Momentos de evaluación e institucionalización* - Redacción y defensa de respuesta pr - Los grupos deberán redactar el informe correspondiente a $R_2^{(3)}$ que incluya tanto el u general de éste para dar respuesta a $Q_2^{(3)}$. [GA]

5.2. Unidad 7: Construcción y estudio del modelo logístico continuo

5.2.1. Organización didáctica a priori de U7

Ver tabla en la página anterior.

5.2.2. Recorrido efectivamente experimentado de U7

Horas destinadas a U7: 3 horas (2 sesiones de hora y media).
Distribución temporal de los momentos: Momento exploratorio: 30', Construcción de $M_2^{(3)}$ y de trabajo técnico: 60', momento tecnológico – teórico y de evaluación e institucionalización de $R_2^{(3)}$: 90'.

En la primera de las sesiones dedicadas a U7, los estudiantes no tuvieron dificultad en proponer la reformulación de $H_1^{(3)}$ en $H_2^{(3)}$ por analogía al estudio desarrollado en el primer REI gracias a que, en la anterior unidad, se había destinado bastante tiempo a apuntar las relaciones entre ambos mundos. Vemos, por ejemplo, la explicación que nos da uno de los grupos:

> Aquest nou model anomenat logístic es basa en una taxa de variació relativa de creixement variable linealment front la població. Mentre abans dèiem:
>
> $$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = k$$
>
> Ara hem de plantejar una recta decreixent, donat que la població sempre tendeix a créixer molt al principi i cada cop menys.
>
> $$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = r = r_0 - \frac{r_0}{c} \cdot x$$
>
> On r : és la taxar relativa de creixement inicial de la població, c=Capacitat màxima de l'hàbitat, en aquell moment deixarà de créixer: r=0, i x= població de l'any en qüestió
>
> A pocs habitants la r esdevé constant i igual a r , mentre que per poblacions elevades quasi no creix

Figura 15. Reformulación de H_1 en H_2 para la construcción del modelo logístico continuo

A continuación, los diferentes grupos plantean la ecuación diferencial que define a $M_2^{(3)}$ y generalmente pasan a su resolución sin excesivas dificultades. E intentan encontrar, como explica el siguiente grupo, la forma más "simplificada" de su solución:

Podem deixar d'una forma més simplificada que queda:

$$x(t) = \frac{k}{\left(\left(\frac{k}{C}\right) - 1\right) \cdot e^{-r_0 t} + 1}$$

Figura 16. Familia de funciones solución de la ecuación $x' = r \cdot x \cdot (1 - x / K)$

Se pasa entonces a estudiar el problema de ajuste de los parámetros para las dos poblaciones de levadura, frente al cual tampoco tienen mucho problema. Otro hecho interesante ocurre si, por ejemplo en la primera de las experimentaciones, uno de los grupos envía al resto de la clase una hoja de Excel programada para encontrar el valor óptimo de los parámetros r y K. Se aprovecha este trabajo para abrir la discusión al inicio de la siguiente sesión y comparar así las otras propuestas, como por ejemplo (en este misma primera experimentación) la de otro grupo que proponía utilizar un ajuste exponencial para los cinco primeros datos y un ajuste logístico para las siguientes datos.

En el resto de la segunda sesión, la profesora plantea como objetivo estudiar las *propiedades generales de la familia de funciones solución* $x(t)$ para poder entonces generalizar cuándo se cumplen las propiedades de la gráfica obtenida en el caso concreto de las poblaciones de levadura. A continuación, se discute qué propiedades serían fundamentales y se llega a la siguiente decisión: (1) Dominio de $x(t)$, (2) zonas en las que $x(t)$ tiene sentido, (3) posibles asíntotas verticales y horizontales, (4) intervalos en los que $x(t) > 0$, (5) intervalos de crecimiento y decrecimiento de $x(t)$ y (6) intervalos de concavidad y convexidad.

Los estudiantes inician este estudio pero al llegar al estudio de las propiedades (5) y (6) las dificultades de trabajar con la derivada explícita de $x(t)$ a menudo se hacen insuperables. La profesora les explica entonces que disponen de la ecuación diferencial: $x'(t) = r \cdot x(t) \cdot (1 - x(t) / K)$ que proporciona implícitamente las propiedades de $x'(t)$ respecto de $x(t)$ y, a su turno, las propiedades de $x''(t)$ respecto de $x(t)$. Como sintetiza el siguiente informe de los estudiantes:

Així trobem l'expressió de primera derivada de la funció de la població:

$$x' = x \cdot r_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)$$

I els intervals de monotonia són:

- La funció té un punt crític a x=0 i x=C; però donat que x mai pot ésser negativa o igual a zero, descartem la primera solució.
- I creix (perquè la derivada és positiva) en l'interval: $0<x<C$; i decreix si la $x>C$.

Ara passem a estudiar la segona derivada que és:

$$x'' = r_0 \cdot \left(1 - \frac{2x}{c}\right)$$

Amb la què trobem les següents característiques de concavitat sobre x(t):

- Té un punt d'inflexió a x=c/2
- És convexa (derivada segona positiva) per $x<c/2$ i és còncava per $x>c/2$.

Figura 17. Estudio de las propiedades de $x(t)$ a partir de su relación implícita con $x'(t)$ y $x''(t)$

El proceso de estudio podría seguir con el estudio de más modelos basados en ecuaciones diferenciales pero en ninguna de las experimentaciones pudo ser así. De hecho, en las tres primeras experimentaciones, al terminar esta sesión la profesora preguntó sobre posibles extensiones de los modelos y algún grupo propuso extender el estudio incluyendo ahora el posible hecho de tener más de una población viviendo en el mismo hábitat. Es por ello que de decidió pasar a trabajar con la unidad 8.

Para finalizar esta unidad, los grupos entregaron dos informes que corresponden a las dos sesiones empleadas para U7. Ver anexo 2.3 para la recopilación de algunos de estos informes.

	ORGANIZACIÓ
	UNIDAD 8: Poblaciones en compet
Estructura y objetivos de **U8**	▪ Se presentará el problema del estudio de la dinámica de dos poblaciones (*X* e *Y*) que c ▪ Se formularán de las hipótesis $H_1^{(4)}$ sobre las velocidades relativas de crecimiento de ▪ Se introducirán los sistemas de ecuaciones diferenciales como modelos para el es necesarias para el estudio cualitativo de este modelo. ▪ Se propondrá el estudio de diferentes casos para valores particulares de los parámetro generales sobre $Q_1^{(4)}$, esto es, la respuesta $R_1^{(4)}$.
RM	OM
Medios y medias	- Se entregará el *Dossier* 3 (*levadura*) que incluye los datos reales sobre la evolución de que vivían separadas). Ahora se supondrá que viven en un mismo medio (ver anexo 4 -
Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento del primer encuentro* – Presentación del problema del estudio de la dinámic - Se proporcionarán los nuevos datos reales referentes a la evolución conjunta del tan grupos, formulen hipótesis sobre esta nueva población (que incluye ambas especies *X* e ▪ *Exploración del sistema y construcción del modelo* basado en sistemas de ecuaciones - En una primera puesta en común, los grupos deberán explicar cómo han abordado la hipótesis que se habían formulado en U6 y U7 (éstas son $H_1^{(3)}$ y $H_2^{(3)}$).A continuación, para la construcción de $M_1^{(4)}$ de acuerdo con las hipótesis acordadas con $H_1^{(4)}$. [CE] - En la segunda puesta en común se discutirán las diferentes propuestas y se acabará f deberán interpretar muy bien los parámetros que intervienen en la definición de las ecu poblaciones. [CE]

Evolución y gestión de los momentos de estudio	▪ *Momento tecnológico teórico* – Estudio cualitativo de sistema de ecuaciones diferencia - Con el objetivo de iniciar el estudio de $M_1^{(4)}$, el profesor se encargará de introducir las té ▪ *Momento del trabajo de la técnica* – Aplicación de la técnica descrita a diversos sistem - El profesor propondrá el estudio de diferentes casos particulares de sistemas de EDOs d estudiantes trabajarán entonces en la aplicación de estas técnicas en estos casos parti propiedades observan de la evolución de los tamaños $x(t)$ e $y(t)$ de las respectivas poblac - Por último, el profesor propondrá que estudien cómo ajustar los parámetros que definen (*levadura*). [GE] ▪ *Momento de evaluación e institucionalización* – Entrega y defensa de la respuesta prov - Se hará la puesta en común dirigida por el profesor en la que cada grupo expone el tra conclusiones a las que se ha llegado sobre la evolución a corto y largo plazo de $x(t)$ e levadura. [CE] - En último lugar, el profesor planteará la cuestión de intentar generalizar los resultad satisfacen $H_1^{(4)}$. Se finalizará así con el estudio general de $M_1^{(4)}$ ($Q_1^{(4)}$) diferenciando ca
Observaciones	- La introducción de las herramientas matemáticas necesarias para esta unidad está cont ya aquí de las herramientas que U6 y U7 requerían. - El *Dossier* 3 (*levadura*) sólo presenta algunos casos particulares, esto es, valores concr estudio de más casos para poder llegar así al objetivo, dar una respuesta a $Q_1^{(4)}$.

5.3. Unidad 8: Poblaciones en competencia y sistemas de ecuaciones diferenciales

5.3.1. Organización didáctica a priori de U8

Ver tabla en la página anterior.

5.3.2. Recorrido efectivamente experimentado de U8

Horas destinadas a U8: 3 horas (2 sesiones de taller de hora y media cada una).

A diferencia de lo previsto, al finalizar la anterior unidad ya se planteaba la problemática descrita por $Q_1^{(4)}$ como una posible extensión del proceso de estudio. Los mismos estudiantes, dado que en el desarrollo del curso "normal" se estaba introduciendo el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales, propusieron la construcción de modelos basados en sistemas de EDOs para abordar la cuestión planteada. Antes de seguir, se formula las hipótesis bajo las cuales se construiría formalmente $M_1^{(4)}$. La profesora tuvo que guiar bastante la formulación de $H_1^{(4)}$ ya que no resulta muy fácil para los estudiantes ligar la extensión que suponen estas hipótesis con las previamente formuladas por $H_1^{(3)}$ y $H_2^{(3)}$.

A partir de aquí, los grupos plantean fácilmente el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a $M_1^{(4)}$ pero se encuentran entonces sin herramientas para estudiarlo. En este momento, se entrega el *Dossier* 3 (*levadura*) en el que se propone el estudio de algunos casos particulares del sistema de EDOs definido por $M_1^{(4)}$. La profesora desarrolla uno de estos ejemplos para introducir y ejemplificar las técnicas necesarias para el "estudio cualitativo" de estos sistemas y, bajo estas instrucciones, los alumnos elaboran su "retrato de fase". A partir de aquí, la profesora propone que, trabajando en grupos, acaben de desarrollar los ejemplos propuestos en el dossier para coger así dominio de la nueva técnica introducida. La primera sesión dedicada a U8 acaba cuando cada uno de los grupos se encarga de explicar en la pizarra el retrato de fase de uno de los casos concretos junto con las conclusiones que se deducen de éste sobre la dinámica de una población que supuestamente sigue este modelo.

Antes de acabar la primera sesión, la profesora propone que los estudiantes empiecen (fuera de clase) a buscar la mejor aproximación de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d*, K_1 y K_2 para el caso de las dos poblaciones de levadura, prestando mucha atención a la posible relación que tienen estos parámetros con los que intervenían en la definición de $M_2^{(3)}$. La representación de los datos que se incluye en el *Dossier* 3 (*levadura*) ya aporta mucha información al respecto. Así, por ejemplo, los estudiantes observaron que no habrá ninguna población "ganadora", que existe punto de "equilibrio", etc. Se plantea entonces la cuestión de si las predicciones a partir de $M_1^{(4)}$ nos llevan a las mismas conclusiones.

Al inicio de la siguiente sesión (por ejemplo en la experimentación 2), el "grupo secretario" hace un resumen del trabajo realizado en la anterior sesión y propone un ajuste de los parámetros *a*, *b*, *c*, *d*, K_1 y K_2 para el caso de las poblaciones de levadura. Con la intervención de los otros grupos, se decide finalmente que la mejor aproximación de los parámetros corresponde a:

$$\left| \begin{array}{l} x' = 0{,}2586x\,[1-(x/13)] - 0{,}05711\,xy \\ y' = 0'05744y\,[1-(y/6)] - 0{,}004803\,xy \end{array} \right.$$

Figura 18. Sistema de EDOs propuesto por el "grupo secretario" para el estudio de las poblaciones de levadura en competencia

Se continúa entonces con el estudio cualitativo de este sistema y los estudiantes observan que se trata de un caso en el que las nulclinas se cortan y dan un punto de equilibrio que coincide aproximadamente con el que la "representación de los datos reales" nos indica. Efectivamente tienen razón aunque en grupos deberán trabajar un poco más y estudiar la tendencia a largo plazo respecto de este punto de equilibrio. Vemos sus conclusiones en el informe de uno de los grupos:

> La població x(t) al compatir hàbitat amb la població y(t) tendirà a una grandària de 9,74. De la mateixa manera la població y(t) al compatir hàbitat amb la població x(t) tendirà a una grandària de 1,11.

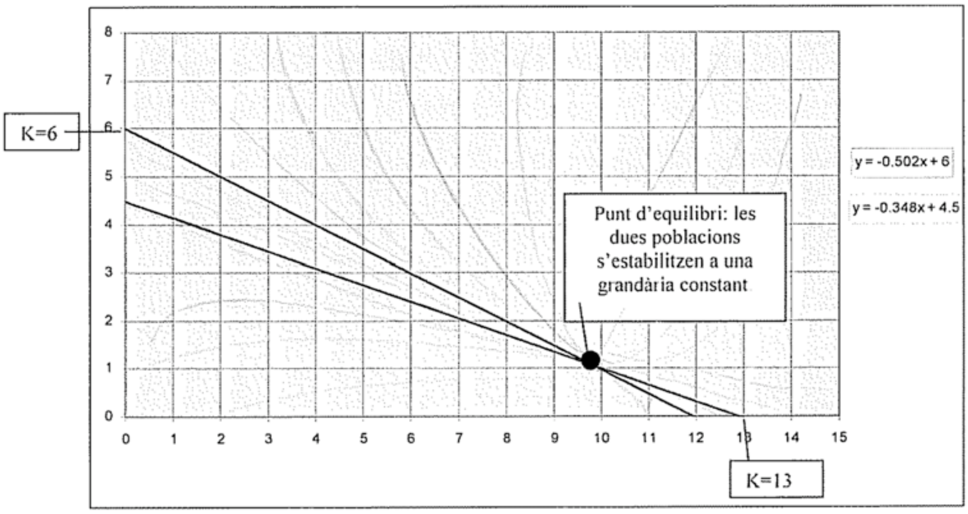


Figura 19. Retrato de fase de $M_1^{(4)}$ para la población de levaduras y conclusiones sobre su evolución a largo plazo

En ninguna de las experimentaciones se pudo dedicar más tiempo al estudio general de $M_1^{(4)}$ ya que coincidía con el final del curso. Cabe destacar que algunos de los grupos llegaron a la conclusión de que se podía diferenciar entre 3 posibles casos: dos casos en los que se detecta una "población dominante", por ejemplo, el caso en que X es la población dominante y lleva a Y a la extinción, y al revés. Y el caso estudiado con la población de levadura, en el que tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a un "punto de equilibrio" que aparece como intersección de las nulclinas. Faltaría aquí completar el estudio paramétrico de $M_1^{(4)}$ que permitiría diferenciar, en realidad, entre cuatro posibles casos según los valores de a, b, c, d, K_1 y K_2.

Queda entonces pendiente la entrega del informe sobre esta unidad, ver anexo 2.3 (U8). Dado que esta era la última sesión del taller, se pidió a los alumnos que individualmente entregaran, para el día del examen final de la asignatura, un "informe global" sobre todo el taller. Éste no debe tratarse de un "diario cronológico" de las sesiones del taller, sino que debe centrarse en sintetizar y ordenar las cuestiones estudiadas, la evolución de éstas durante el taller, la construcción de modelos para poder responder a ellas y las respuestas obtenidas durante todo el proceso.

5.4. Análisis a posteriori del tercer REI

En todas las experimentaciones este tercer REI se inicia recuperando una de las problemáticas abiertas y pendientes de estudiar en la unidad introductoria cuando los diferentes grupos habían propuesto la construcción de modelos discretos o de modelos continuos para poder predecir la evolución de poblaciones tal como presentaba la cuestión Q_0. Más en concreto, había quedado planteada la cuestión:

> ***Q*****a**: ¿Qué relación hay entre la propuesta de los modelos basados en funciones exponenciales y los modelos discretos construidos en la primera parte del taller?

El estudio de esta cuestión que suele ocupar, a diferencia de lo inicialmente previsto, toda la primera sesión del taller, facilita enormemente el estudio de las distintas unidades de las que consta este tercer REI. Mostrar el "paralelismo" entre ambos mundos: discreto y continuo, permite a los estudiantes tener una referencia para formular las sucesivas hipótesis sobre $x'(t)/x(t)$ que dan lugar a la construcción de los sucesivos modelos continuos tal como se había hecho en el primer REI con $r_n = \left(M_{n+1} - M_n\right)/M_n$. En otras palabras, las sucesivas cuestiones y respuestas generadas dentro del primer recorrido pasan ahora a formar parte de las fuentes de información (o *media*) disponibles para los alumnos.

Debemos destacar además que, habitualmente, la validación de los sucesivos modelos que se iban construyendo se basaba en los datos experimentales que se habían incluido en los dossiers: *Dossier* 1 y 3 (*levadura*). Como también mediante el uso de simulación numérica con Excel que tuvo de nuevo un gran protagonismo.

Por otro lado, en la experimentación de este último REI, se suele observar un avance muy significativo en el reparto de responsabilidades dentro del proceso de estudio. Los estudiantes sintiéndose más seguros y acostumbrados al tipo de actividad que se desarrolla durante el taller, toman mucho más protagonismo en muchos de los aspectos: selección de herramientas matemáticas apropiadas, uso de herramientas informáticas, planificacion del estudio, etc.

Siguiendo con la tónica del segundo REI, debemos destacar de nuevo la incidencia de la actividad del taller sobre el trabajo que se desarrolla en la clase de teoría y de problemas. A menudo, algunas de las cuestiones planteadas en el taller requerían la introducción de nuevas herramientas matemáticas, como por ejemplo: técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales autónomas, estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales, etc. La introducción de estas herramientas se realizaba normalmente en las clases de teoría y de problemas seguido del trabajo con las técnicas introducidas (*momentos del trabajo de la técnica*). Se consigue así que los estudiantes se afiancen en el uso de estas técnicas o modelos matemáticos para su uso posterior en el estudio de las cuestiones pendientes.

Para finalizar, debemos destacar la importancia de un dispositivo más que ayudó en los momentos de evaluación e institucionalización. Nos referimos al "informe global" o "informe final" de todo el taller que se pidió que los estudiantes entregaran individualmente y en el que debían sintetizar y ordenar las cuestiones estudiadas, las respuestas que se había ido obteniendo durante todo el proceso y, en especial, presentar la respuesta "final" a la cuestión generatriz inicialmente planteada.

6. RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN Y RETORNO AL PROBLEMA DIDÁCTICO PLANTEADO

6.1. Viabilidad de la modelización matemática a través de los REI y compatibilidad de éstos con la enseñanza tradicional

Un primer resultado que queremos destacar es que, tal como proponíamos con el diseño matemático de los REI, hemos podido comprobar que la evolución de la problemática presentada por la cuestión generatriz Q_0 en torno al estudio de la dinámica de poblaciones ha permitido recubrir lo esencial del currículum tradicional de un primer curso universitario de matemáticas para científicos y hasta han aparecido algunos contenidos nuevos como, por ejemplo, el estudio de sucesiones (y, en particular, las definidas por relaciones de recurrencia de orden uno y superior), el cálculo aproximado de soluciones de ciertos tipos de ecuaciones y el control del error, las matrices de transición, etc.

También debemos destacar un hecho inesperado que se fue acentuando en las sucesivas experimentaciones. A medida que avanzaban los talleres, la problemática de la modelización matemática tratada en los REI iba incidiendo cada vez más en la materia de la clases de teoría y en la clase de problemas hasta el punto que algunos de los contenidos a tratar en dichas clases se organizaron en función de las cuestiones abordadas en los REI y no al revés.

Un ejemplo muy claro lo encontramos en el desarrollo del segundo REI en el que, a diferencia de lo previsto de antemano, se acordó desde la primera experimentación que se iría tratando paralelamente el estudio de fenómenos modelizables a través de las matrices de Leslie, en la clase de teoría, y el estudio de fenómenos modelizables con matrices de transición, en la clase de problemas y del taller. Otro ejemplo de la incidencia del taller sobre el trabajo que se desarrollaba en los dispositivos clásicos (clase de teoría y clase de problemas) fue la progresiva integración de la problemática relativa a al bloque de ecuaciones diferenciales. La articulación entre los antiguos y el nuevo dispositivo fue en este caso especialmente remarcable hasta el punto que cuando una cuestión planteada en el taller requería la introducción de nuevas herramientas matemáticas, se utilizaban las clases de teoría y de problemas para proporcionar dichas herramientas a los estudiantes de manera que en las siguientes sesiones del taller pudieran ser utilizadas.

Ésta sería, de hecho, la relación "ideal" entre los dispositivos didácticos en un curso de matemáticas que integrase los REI como dispositivo didáctico esencial para hacer vivir la modelización matemática: subordinar la introducción de las OM del currículum a las necesidades que surgiesen del estudio de las cuestiones problemáticas que fueran apareciendo. Si analizamos el proceso desde la primera hasta la última de las experimentaciones, se observa un claro avance en esta dirección: progresivamente en las clases de teoría y en las clases de problemas se tratan más cuestiones especificas originadas en el taller, los dispositivos de evaluación recogen cuestiones cada vez más adaptadas a la problemática tratada en los REI (esto es, cuestiones que surgen en las actividades de modelización matemática), disminuyendo paralelamente las preguntas de examen resolubles mediante un procedimiento algorítmico.

Otro resultado importante de la experimentación es que ha sido posible mantener siempre presente la *cuestión generatriz* que se trataba. Ésta ha servido de *hilo conductor* de todo el proceso de estudio y de *motor generador* de las diversas cuestiones cruciales que lo estructuraban. De esta manera ha sido posible, en todas las experimentaciones, utilizar las herramientas matemáticas como instrumentos para dar respuesta a las sucesivas cuestiones generadas progresivamente y no como un objetivo de aprendizaje en sí mismo. Este resultado constituye un avance, aunque sea parcial, hacia una *enseñanza funcional* de las matemáticas en contraposición del *monumentalismo* tradicional. Creemos que éste es uno de los motivos por el cual las clases de teoría y las clases de problemas se fueron vinculando a los REI y a la actividad de modelización matemática que estos posibilitan y potencian. En efecto, la actividad de modelización matemática aparece como una fuente generadora de cuestiones y de *razones de ser* de los conocimientos que se introducen en los otros dispositivos y, en consecuencia, surge la necesidad de "coordinar" los REI con el resto de dispositivos. Podemos decir que en este sentido los REI tienen potencialmente una *función transformadora* e *integradora* de los diferentes dispositivos didácticos.

Estos resultados parecen contradecir la rigidez de los dispositivos didácticos que han dominado la enseñanza universitaria desde hace muchos años: la clase de teoría, la clase de problemas y el examen final. Pero debemos remarcar que la institución en la que se han llevado a cabo las experimentaciones cumplía unas condiciones muy especiales: se trataba de un único grupo de alumnos (no muy numeroso) y con un único profesor responsable de la asignatura lo que comportaba una relativa autonomía de la comunidad de estudio. Además, dado que los REI experimentados recubrían esencialmente el programa oficial y que se mantenían con el horario oficial las clases de teoría y las clases de problemas, puede decirse que se introducía una modificación muy local que perturbaba muy poco la ecología didáctica global de los estudios de ingeniería química y, en consecuencia, los de la facultad. Se tiene que reconocer el carácter puntual de las experimentaciones realizadas, sin pretender que esta modificación se pueda generalizar sin chocar con fuertes restricciones que no tardaríamos mucho en detectar y que provendrían tanto de los niveles pedagógicos más genéricos como de los matemático-didácticos más específicos.

6.2. Restricciones pedagógicas y didácticas a la vida de la modelización matemática a través de los REI

La aparente facilidad con la que se han podido integrar los tres REI en la asignatura de matemáticas de primer curso de ingeniería técnica química industrial no debe esconder la aparición de ciertas restricciones que han afectado a la realización de los REI y, que por tanto, han modificado algunas de las funciones que estos debían asumir.

Situándonos en el nivel genérico de la organización espacio-temporal de la enseñanza (*nivel pedagógico*), destacamos el voluntarismo tanto de la profesora del taller como de los estudiantes en poder encontrarse una vez por semana, durante una hora y media fueran del horario lectivo de la facultad, que les permitía optar a aumentar un punto sobre 10 a la nota final de la asignatura. Establecer los REI como una actividad “normalizada” supondría, además de profundos cambios en la epistemología y la didáctica escolares, romper con la distribución horaria actual de las asignaturas para poder dar cabida a sesiones de más larga duración, además de crear grupos más pequeños de no más de 20 alumnos. Se comprende ahora el carácter local de la modificación realizada y la “revolución” que significaría generalizar talleres como los experimentados, con la consiguiente reacción “homeostática” que provocaría en el sistema de enseñanza universitaria.

Si nos situamos en el nivel de la *disciplina matemática*, a pesar de que la experimentación se ha ajustado bastante a su diseño a priori, se debe observar que el primer REI quedó, principalmente en las primeras experimentaciones, parcialmente "truncado", debido a la necesidad de avanzar al mismo ritmo y tratando contenidos "semejantes" a los que se estudiaban en las clases de teoría y en las clases de problemas. Así, por ejemplo, en ninguna de las experimentaciones se ha podido seguir con el estudio de polinomios interpoladores (a pesar de que ésta era la dirección propuesta por varios grupos de alumnos y constituía una alternativa interesante para responder a la cuestión planteada) porque seguir por este camino hubiese apartado el taller del resto de los dispositivos. Esta es una restricción que fue aceptada a priori por los profesores de la signatura y por la propia investigadora puesto que se pretendía vincular tanto como fuese posible la actividad matemática desarrollada en los REI a la programación oficial de la asignatura entregada a los estudiantes a principio de curso.

6.3. Cambios hacia un nuevo contrato didáctico

Si nos centramos en el reparto de *responsabilidades* durante la gestión de los recorridos, tenemos que destacar el cambio enorme que se produjo en comparación con un curso usual. Desde el principio, la profesora intentó actuar como una verdadera directora del estudio, cediendo la máxima autonomía y responsabilidad a los alumnos y negociando explícitamente muchos de los aspectos que suelen quedar implícitos y bajo la responsabilidad exclusiva del profesor: planificación del estudio, tiempo dedicado a cada una de las actividades, selección de las herramientas matemáticas supuestamente apropiadas, uso de herramientas informáticas y bibliográficas, institucionalización de las respuestas parciales, evaluación de los resultados, etc.

A pesar de las reticencias iniciales mostradas por los alumnos, los cambios introducidos con los REI –trabajo en grupo, formulación de cuestiones, redacción y defensa de los resultados obtenidos en base a cuestiones estudiadas y respuestas obtenidas – fueron progresivamente aceptados por los alumnos. Esta *autonomía asumida por los estudiantes* durante el transcurso de los REI es una condición imprescindible para poder desarrollar la actividad de modelización matemática y, en consecuencia, constituye un resultado importante del problema didáctico abordado.

6.4. Retorno al problema didáctico planteado: funciones didácticas de los REI en relación a las condiciones de posibilidad de la modelización matemática

Recordemos que el problema didáctico de la modelización matemática, tal como lo formulamos en el ámbito de la TAD, se plantea las siguientes cuestiones: ¿Qué *condiciones se requieren y qué restricciones dificultan* o impiden que las matemáticas se enseñen, se aprendan, se estudien y se utilicen como herramientas de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para CCEE? ¿En qué nivel aparecen dichas *restricciones* y en qué nivel deberíamos situarnos para poder considerarlas como *condiciones* “modificables”? ¿Qué tipo de *dispositivos didácticos* facilitarían una integración global (en el sentido de más allá de una experimentación local) de la modelización matemática en los citados sistemas de enseñanza?

Hasta aquí hemos respondido parcialmente a estas cuestiones mediante la noción de REI interpretado como prototipo de las Organizaciones Didácticas funcionales. En este último apartado mostraremos las *funciones didácticas* de los REI en términos de los *momentos del proceso de estudio* para poner de manifiesto que los REI permiten y potencian una forma de vivir e integrar dichos momentos que aumenta enormemente las condiciones de posibilidad de la vida de la modelización matemática en las instituciones docentes.

Para empezar destacamos la importancia que ha tenido en la evolución de los REI, el *momento exploratorio* y el del *trabajo de la técnica* en la evolución del taller. En efecto, potenciar la “vivencia” de estos momentos permitió a los alumnos responsabilizarse de muchas tareas que en la cultura más “tradicional” están completamente ausentes (al menos entre las tareas que recaen bajo la responsabilidad de los alumnos):

(a) formulación de hipótesis,

(b) planteo de cuestiones problemáticas a tratar,

(c) contraste experimental,

(d) elección de las herramientas matemáticas adecuadas, etc.

Dado que todas estas tareas son imprescindibles para el desarrollo de la actividad de modelización matemática, podemos decir que los REI, incorporando estos elementos, hacen posible vivir las primeras etapas del proceso de modelización matemática, esto es, la delimitación del sistema, la construcción del modelo y el inicio del trabajo técnico con el modelo considerado.

Otro de los momentos fuertemente potenciado en los REI es el *momento de la institucionalización*. En efecto, desde las primeras sesiones de los talleres, se trabajaba con “objetos” del proceso de modelización (como, por ejemplo, “sistema”, “modelo”, “trabajo dentro del modelo”, “hipótesis que caracterizan el sistema”, etc.) que los estudiantes no podían nombrar ni, por tanto, reconocer como tales porque no tenían ni tan sólo las palabras para hacerlo. A lo largo del desarrollo de los REI, la comunidad de estudio, con las indicaciones de la profesora, fue pactando una forma común de nombrar dichos objetos y, en consecuencia, se fue otorgando un “papel oficial” (esto es, se fue institucionalizando) a todos estos elementos tan importantes para mantener viva la actividad de modelización matemática.

En lo que se refiere al *contraste experimental*, destacamos que la utilización espontánea por parte de los alumnos de herramientas informáticas que se dio en múltiples ocasiones en todas las experimentaciones del taller favoreció enormemente el desarrollo de los momentos *exploratorio* y del *trabajo de la técnica*. Este aspecto facilitó el trabajo con modelos cuya manipulación podía resultar muy pesada (cálculo matricial, resolución de ecuaciones polinómicas, representación gráfica, etc.) y, muy en especial, el *trabajo experimental de simulación numérica* a la que los alumnos han recurrido en numerosas ocasiones, principalmente en el primer y segundo REI, cuando se trataba de simular sucesiones recurrentes de orden uno o superior, cálculo de la potencia de matrices, etc. Los programas más utilizados para eso han sido Excel y WIRIS. Esta potenciación del trabajo exploratorio y experimental (basada en gran medida en el trabajo de la técnica) permite llevar a cabo un trabajo a largo plazo, sistemático y paciente, condición ésta imprescindible para la vida de la modelización matemática.

Cabe destacar también la implicación de los alumnos en los *momentos de evaluación y de institucionalización* durante todas las experimentaciones. Podemos citar tres dispositivos didácticos que facilitaron este cambio tan importante con el contrato didáctico imperante (hay que tener en cuenta que en la pedagogía tradicional dominante los momentos de evaluación e institucionalización se dejan exclusivamente bajo la responsabilidad del profesor):

- La *exposición en grupos* del trabajo realizado, seguida de la *entrega y defensa* de los informes en cada una de las sesiones de los talleres.
- La *entrega individual de un informe global* del “taller”.
- La *utilización del dossier* de trabajo sin contenido fijado a priori y redactado en función de la evolución de la problemática tratada.
- La tarea del “*secretario de la semana*” que se encargaba de sintetizar las cuestiones y respuestas que habían sido tratadas, semana tras semana, tanto por su propio grupo como por el resto. Este informe semanal debía situar en qué punto nos encontrábamos del proceso de estudio, refiriéndose a las cuestiones que habían quedado pendientes de estudiar y a las posibles nuevas cuestiones que se habían planteado.

La incidencia sobre la vida de la modelización matemática de este cambio de contrato asumido por los estudiantes es bien clara: el hecho de que los estudiantes asuman estas responsabilidades (aunque sea de forma parcial) facilita las etapas de *producción e interpretación del conocimiento sobre el sistema* así como el trabajo relativo al *contraste* y *estudio de las limitaciones* de los sucesivos modelos construidos y las relaciones entre ellos. Dada la importancia de estas etapas o fases de la actividad de modelización y la dificultad que muestra el sistema de enseñanza tradicional para hacerlas vivir, se pone de manifiesto una vez más el papel de los REI como dispositivo didáctico que impone condiciones muy favorables para la enseñanza de la modelización.

En términos generales, si nos fijamos en el trabajo realizado durante el transcurso de los REI con algún modelo matemático en particular, se observa que los estudiantes viven las *diferentes etapas de un proceso de modelización*. Parece claro que un tipo de organización didáctica que parte de una *cuestión generatriz* y que está estructurada por una cadena de cuestiones y de respuestas parciales que mantienen viva la cuestión inicial, resulta ser una estructura muy adecuada para potenciar la actividad de modelización matemática.

Pero si analizamos con más detalle el proceso de estudio que abarca todo un REI, y aún más, si consideramos el curso completo estructurado por los tres REI, entonces se pone claramente de manifiesto que una de las principales funciones didácticas de estos dispositivos está precisamente en su capacidad de provocar la *ampliación sistemática de los modelos* y, en definitiva, en el hecho de impulsar la *dinámica interna del proceso de modelización matemática* (entendido en el sentido propuesto por la TAD).

Este impulso depende de la medida en que, en la experimentación efectiva de los REI, la problemática de la modelización vaya tomando progresivamente el *estatus de objeto* (*matemático*) *de estudio* y no sólo el de *instrumento* (*didáctico*) para estudiar determinadas Organizaciones Matemáticas preestablecidas. Sólo así, los estudiantes podrán cuestionar las técnicas matemáticas y didácticas que guían el proceso de modelización globalmente considerado y asumir como propias determinadas responsabilidades tradicionalmente asignadas en exclusiva al profesor.

CAPÍTULO 5

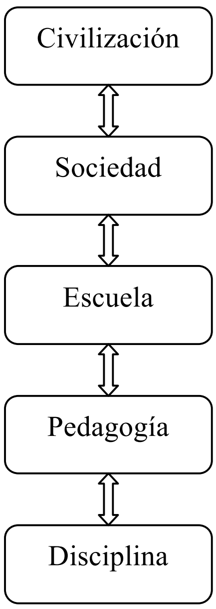
RESTRICCIONES QUE INCIDEN SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LOS SISTEMAS DE ENSEÑANZA UNIVERSITARIOS

1. INTRODUCCIÓN: LA ECOLOGÍA DIDÁCTICA DE LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

Hemos visto en el dos capítulos anteriores el tipo de respuesta que se puede aportar, desde la TAD, al problema didáctico de la enseñanza de la modelización matemática. Una vez establecido el papel de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como modelo de referencia para el análisis, diseño e implementación de organizaciones didácticas no "monumentalistas" (capítulo 2), el capítulo 3 se centraba en lo que hemos llamado el "diseño matemático" de uno de estos posibles recorridos centrado en el estudio de la dinámica de poblaciones. En él se exponían los distintos tratamientos que se pueden dar al estudio de una cuestión generatriz sobre la evolución de una población (de animales, organismos, personas, etc.) según el tipo de hipótesis formulada sobre la población y su crecimiento. Estos tratamientos consisten básicamente en la construcción de modelos matemáticos que responden a las hipótesis formuladas y que permiten elaborar elementos de respuesta a la cuestión generatriz y a sus derivadas. En efecto, el uso de cada modelo, si bien aporta soluciones parciales a los problemas que se plantean, también muestra limitaciones que se superan mediante la ampliación del modelo y la modificación de las hipótesis de partida. Se obtienen así distintas ampliaciones sucesivas de los modelos matemáticos considerados y distintas bifurcaciones según el tipo de población considerado, lo que da lugar a un "mapa de posibles trayectorias" para el estudio de la cuestión inicial. Este mapa de recorridos, elaborado desde la investigación didáctica, funcionará entonces como un modelo de referencia para el diseño, la gestión y la evaluación de los cuatro procesos de estudio efectivamente experimentados que presenta el capítulo 4.

Estos cuatro procesos de estudio corresponden a la puesta en práctica efectiva de tres REI centrados en la cuestión inicial del estudio de la dinámica de poblaciones, cada uno considerando un tipo de población o de dimensión temporal distinto: poblaciones con generaciones separadas o mezcladas y evolución en tiempo discreto o continuo. Estos tres REI se han experimentado durante 4 cursos académicos con estudiantes de primer curso de matemáticas de ingeniería técnica industrial, especialidad en química industrial, de la Universitat Autònoma de Barcelona. El carácter abierto de los REI y la secuenciación de las cuatro experimentaciones ya nos hacía prever que aparecerían diferencias considerables en el desarrollo o la "crónica" de cada proceso de estudio. En efecto, en cada curso se intentaban corregir las dificultades o deficiencias detectadas en el curso anterior, especialmente aquellas que afectaban más directamente el contrato didáctico tradicional de la enseñanza universitaria relativas a la (in)capacidad del profesor para gestionar el estudio de manera "no directiva". Pero, al margen de esta variabilidad en parte circunstancial y en parte debida a la evolución misma del trabajo experimental, las cuatro experimentaciones también ponen de manifiesto un conjunto de regularidades o invariantes que nos permiten una primera aproximación a la "ecología didáctica" de los REI, esto es, el conjunto de condiciones que posibilitan su desarrollo como organización de los procesos de estudio universitarios y el conjunto de restricciones que limitan este desarrollo y podrían, a la larga, poner en peligro su viabilidad.

Este capítulo aborda el problema de la ecología de los REI como propuesta didáctica para la enseñanza de la modelización matemática, centrándose en el análisis de restricciones que aparecen en los niveles más genéricos de codeterminación matemático-didáctica, aquellos que se sitúan más allá de la propia disciplina matemática: los niveles de la *pedagogía*, *escuela*, *sociedad* y *civilización*. En el capítulo 2, hemos introducido dos de las restricciones que surgen en estos niveles genéricos y que dificultan o incluso impiden la construcción, el desarrollo y la utilización de las matemáticas como instrumento de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de CCEE. En primer lugar hemos considerado la *incompletitud relativa de las organizaciones matemáticas locales* escolares tal como puso en evidencia Bosch, Fonseca & Gascón (2004), restricción que surge en primera instancia en el nivel disciplinar. En segundo lugar hemos descrito la denominada "pedagogía monumentalista" que, tal como hemos desarrollado en el capítulo 2, se caracteriza por proponer el estudio de obras matemáticas carentes de su "razón de ser", reduciendo así la enseñanza y aprendizaje de las diversas disciplinas (y, en particular, de las matemáticas) a la visita de obras matemáticas cristalizadas y, en cierto sentido, "muertas" (Chevallard, 2004 y 2005).



Basándonos en estas dos restricciones, hemos podido introducir una primera caracterización de los REI en la que, a pesar de su parcialidad, nos ha servido de base para diseñar, experimentar, describir y analizar los REI en torno al estudio de la dinámica de poblaciones que hemos presentado en los anteriores capítulos 3 y 4. Con el objetivo principal de *ampliar* y *refinar* la caracterización de los REI, nos proponemos seguir con el estudio de restricciones que provienen de los niveles más genéricos de codeterminación matemático-didáctica, éstas serán las restricciones que provienen de la *epistemología y de la ideología pedagógica dominantes en la comunidad científica universitaria*.

Así, en primer lugar, situándonos en los niveles de *sociedad* y *escuela*, nos proponemos indagar sobre la *epistemología dominante* en la institución docente considerada, la universidad, y sobre su incidencia en las posibles prácticas de enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de CCEE. Entendemos por "epistemología dominante" la forma concreta en la que las universidades como instituciones docentes y, más concretamente, la comunidad de "agentes" que intervienen en los procesos de estudio de las matemáticas, los profesores universitarios (y los estudiantes), interpretan qué son las matemáticas y cuál es su relación con las CCEE. Este estudio nos va a llevar a introducir, en primer lugar, la "epistemología lineal y acumulativa de los libros de texto científico" (Kuhn, 1979) que postulamos es uno de los factores que sustenta a la "pedagogía monumentalista" presente en las instituciones universitarias y que nos permitirá presentar una de las hipótesis cruciales de este capítulo relativa a la respuesta que proporciona la epistemología dominante en las instituciones universitarias a la cuestión de la relación que tienen las matemáticas con el resto de disciplinas científicas. Postulamos que la respuesta que prevalece en la cultura universitaria científica se puede caracterizar como *aplicacionista* en el sentido siguiente: se establece de entrada una separación rígida entre las matemáticas y las demás ciencias (en particular, las experimentales como la biología o la geología) de tal forma que las primeras, una vez construidas, "se aplican" a las segundas sin "contaminarse" por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática de las CCEE a cuyo estudio contribuyen. Así, por ejemplo, la dinámica de poblaciones o las leyes de calentamiento de los cuerpos aparecen como ejemplos de "aplicaciones" de las ecuaciones diferenciales, como si esta dinámica o estas leyes pudieran existir sin el instrumento matemático que les dé forma y como si, del mismo modo, las ecuaciones diferenciales tuvieran una existencia y un desarrollo independientes de cualquier problema extra-matemático. Así, desde esta interpretación que vamos a llamar "aplicacionista", la actividad de modelización se entiende (y se identifica con) una mera "aplicación" del conocimiento matemático previamente construido o, en el caso más extremo, como una simple "ejemplificación" de las herramientas matemáticas a ciertos sistemas extra-matemáticos artificialmente construidos para que se ajusten a la utilización de estas herramientas.

Una vez presentadas las que consideramos como hipótesis básicas del "aplicacionismo", vamos a introducir un conjunto de *indicadores* que utilizaremos para contrastar empíricamente hasta qué punto el "aplicacionismo" prevalece en las instituciones universitarias responsables de la formación en CCEE. Éstos nos servirán para analizar los principales materiales de enseñanza (programas de las asignaturas de matemáticas, prefacios de libros de referencia, materiales curriculares, etc.), además del diseño de un cuestionario y guión de unas entrevistas al profesorado universitario de departamentos de CCEE de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

En segundo lugar, situándonos en el nivel de la *pedagogía*, nos proponemos indagar sobre la "ideología pedagógica dominante" en la comunidad científica universitaria, esto es, la forma concreta y generalizada cómo se interpreta el *aprender* y *enseñar matemáticas* en los actuales sistemas de enseñanza universitarios.

Ambas caracterizaciones que sustentan al modelo docente que actualmente "vive" en las instituciones universitarias nos darán la base para poder introducir más concretamente, en el próximo apartado, las restricciones que dificultan (y hasta impiden) la posible integración de la modelización matemática en las instituciones universitarias. Dada la "consistencia" institucional de dichas restricciones y el hecho, innegable, de que responden a cierta "economía didáctica", hemos de reconocer que no serán fácilmente modificables.

2. RESTRICCIONES DEBIDAS A LA EPISTEMOLOGÍA DOMINANTE EN LA COMUNIDAD CIENTÍFICA UNIVERSITARIA

2.1. La epistemología lineal y acumulativa de los libros de texto científicos

Según Thomas S. Kuhn: "Tanto los científicos como los profanos toman gran parte de la imagen que tienen de las actividades científicas creadoras de una *fuente de autoridad* que disimula sistemáticamente – en parte, debido a razones funcionales importantes – la existencia y la significación de las revoluciones científicas" (Kuhn, 1979, p. 212). Kuhn se refiere especialmente a los *libros de texto científicos* aunque también incluye como componentes secundarios de la fuente de autoridad los textos de divulgación científica y las obras filosóficas moldeadas sobre ellos. Los libros de texto se escriben después de cada revolución científica e inevitablemente disimulan no sólo el papel desempeñado por dicha revolución sino incluso la existencia de la misma. Son "vehículos pedagógicos para la perpetuación de la ciencia normal" (*Ibid.*, p. 214).

Los libros de texto científicos y también muchas historias de la ciencia muestran únicamente aquellas partes del trabajo científico del pasado que pueden utilizarse para *enunciar y resolver* los "problemas paradigmáticos" (o ejemplos compartidos) que se utilizan para describir el estado actual de la ciencia. "En parte por selección y en parte por distorsión, los científicos de épocas anteriores son representados implícitamente como si hubieran trabajado sobre el mismo conjunto de problemas fijos y de acuerdo con el mismo conjunto de cánones fijos […]" (*Ibid.*, p. 215). Según Kuhn el espíritu no histórico de la comunidad científica y hasta la depreciación de los hechos históricos constituye una característica profunda y probablemente funcional de la ideología de la profesión científica. Todo ello da como resultado que la historia de la ciencia parezca *lineal* y *acumulativa*.

El punto central de esta concepción del desarrollo de la ciencia es el dogma implícito según el cual los "hechos" y los "problemas" (las cuestiones que los científicos se plantean) son esencialmente los mismos a lo largo de todo el desarrollo histórico y lo único que evoluciona son las respuestas que van acumulando de forma lineal y progresiva nuevos conocimientos científicos.

Kuhn explica, por ejemplo, que Newton atribuyó a Galileo la respuesta a una pregunta que los paradigmas de Galileo no permitían plantear, ocultando así una reformulación pequeña pero revolucionaria sobre *el tipo de preguntas* que planteaban los científicos anteriores en torno al movimiento y también el cambio sobre el *tipo de respuestas* que estaban dispuestas a aceptar. "Pero es justamente este cambio de formulación de las preguntas y las respuestas el que explica, mucho más que los descubrimientos empíricos nuevos, la transición de la dinámica de Aristóteles a la de Galileo y la de éste a la de Newton. Al disimular esos cambios, la tendencia que tienen los libros de texto a hacer lineal el desarrollo de la ciencia, oculta un proceso que se encuentra en la base de los episodios más importantes del desarrollo científico" (*Ibid.*, p. 217 - 218).

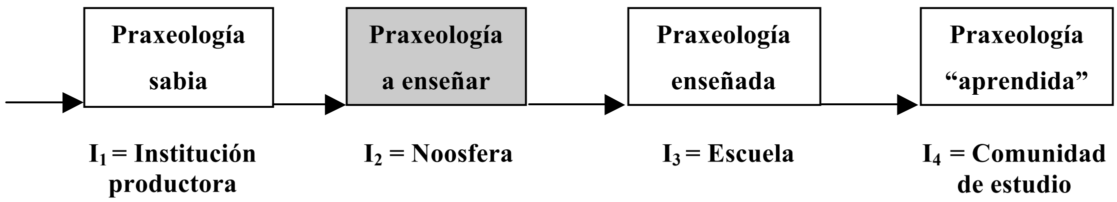
Pero no son sólo los tipos de preguntas posibles y los tipos de respuestas aceptables las que van cambiando con el desarrollo de la ciencia, también los "hechos" cambian y aparecen hechos completamente nuevos. Aunque los libros de texto sugieren que las teorías evolucionan para ir ajustándose gradualmente a los *hechos que se encontraban presentes en todo tiempo*, la realidad es que "[…] las teorías surgen al mismo tiempo que los hechos a los que se ajustan a partir de una reformulación revolucionaria de la tradición científica anterior […]" (*Ibid.*, p. 220). Así, los conceptos científicos, como "tiempo", "energía", "fuerza" o "partícula", transforman completamente su significado a medida que se relacionan con otros conceptos científicos, se integran en ciertos procedimientos de manipulación (que son esencialmente "matemáticos") y se aplican a la formulación y a la resolución de problemas paradigmáticos.

En resumen, la enseñanza escolar de la ciencia se acaba planteando a partir de un paradigma inamovible (que es bastante transparente) y donde no sólo las respuestas sino también las preguntas, las técnicas permitidas para abordar dichas cuestiones y los elementos tecnológico-teóricos que permiten justificar e interpretar dichas técnicas están completamente predeterminados. No se concibe, por tanto, ninguna posibilidad de que la propia actividad científica al intentar dar respuesta a una situación problemática permita plantear preguntas (y provoque la emergencia de respuestas) significativamente nuevas y no previstas de antemano ni, mucho menos, que dicha actividad comporte el desarrollo de las técnicas y provoque modificaciones importantes del significado, el alcance y las relaciones entre las nociones básicas de la teoría científica. En esta dirección Chevallard (2004, p. 4) añade:

> Un savoir *S* est une conséquence et une condition de la volonté d'apporter des réponses *R* à des questions *Q*, et c'est ainsi que l'École doit le faire apparaître – non comme un produit anhistorique, mais comme le résultat d'un processus de création et de recréation (par transposition) impulsé par une histoire vécue *hic et nunc*.

En esta forma de interpretar la ciencia por parte de los libros de texto, las teorías se presentan junto con sus "*aplicaciones ejemplares*" que se toman como "pruebas" de aquellas. Por lo tanto, estos ejemplos compartidos nunca pueden sugerir ni el más leve cuestionamiento de las teorías puesto que aparecen al servicio de ésta, a modo de ilustración. En una palabra, la *situación problemática* aparece inamovible, "muerta", sin ninguna posibilidad de desarrollo, por lo que *se hace transparente y acaba desvaneciéndose*.

Podemos pensar que, a pesar de su arraigo en todas las instituciones de nuestra cultura occidental, la *epistemología espontánea* se refuerza o manifiesta con mayor concreción en la primera etapa de la transposición didáctica, en el tránsito entre la institución productora del saber y la noosfera, en el bien entendido que, como sucede en todas las etapas, los procesos transpositivos no son unidireccionales:



De todos modos, la *epistemología de* "*libro de texto*" no hace más que reforzarse en las sucesivas etapas de la transposición y, en definitiva, acaba invadiendo de una u otra manera todas las instituciones a lo largo del proceso de transposición didáctica incluyendo la propia institución productora (o comunidad "sabia") y, desde luego, saturando la cultura escolar.

Mientras que en el caso de las ciencias "naturales" (física, química, biología, geología, etc.) esta epistemología está asociada al *inductivismo*, en el caso de las matemáticas lo está al *deductivismo*. En consecuencia, el problema del papel que juega la modelización matemática en la enseñanza de las matemáticas que se imparten en las licenciaturas de matemáticas, esto es, el análisis de la *ecología de la modelización matemática* en las instituciones universitarias responsables de la formación de los matemáticos, constituye un problema que presenta rasgos específicos importantes y que no podemos estudiar aquí. En Gascón (2002), siguiendo a William P. Thurston (1994) se ha descrito el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la comunidad matemática como el modelo "popular" de las matemáticas que reduce la "actividad matemática" a series del tipo "*definición-especulación-teorema-prueba*". Se ha mostrado que dicho "modelo popular" constituye una forma simplista de interpretar el conocimiento matemático y puede considerarse como una variedad del "*euclideanismo*" que pretende que los conocimientos matemáticos pueden deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) que constan de términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*). También se ha señalado que los modelos docentes universitarios sustentados por dicho modelo epistemológico de las matemáticas están próximos al *teoricismo* descrito en Gascón (2001) como un *modelo docente ideal*. Pero no se ha analizado con detalle el papel que juega la modelización matemática en dichos modelos docentes ni las consecuencias del aplicacionismo en estas instituciones. Éste continúa siendo, por tanto, un problema abierto.

Ambos "patrones" (inductivismo y deductivismo) lejos de contraponerse son gemelos y se caracterizan por *eliminar la problemática* y, en consecuencia, por *excluir cualquier evolución* de ésta. "Algunos libros de texto pretenden que no esperan que el lector posea ningún conocimiento previo, sino tan sólo cierta madurez matemática. Lo que eso significa frecuentemente es que esperan que el lector esté dotado por naturaleza de la "habilidad" de aceptar los argumentos euclídeos sin ningún interés antinatural en el trasfondo problemático y en la heurística que está tras el argumento" (Lakatos 1978, p. 165).

2.2. El "aplicacionismo" como forma de interpretar la modelización matemática

Una vez presentada brevemente la que consideramos la epistemología dominante en la comunidad científica, vamos ahora a centrarnos y a profundizar en el papel que ésta otorga a la modelización matemática en la actividad científica y en la enseñanza de las CCEE.

Tal como hemos introducido recientemente, nuestra hipótesis previa es que el papel que se otorga a la modelización matemática en la cultura universitaria científica se puede caracterizar como “aplicacionista”. A continuación vamos a caracterizar con más precisión lo que entendemos por esta aproximación “aplicacionista”, o “aplicacionismo”, para así centrarnos en estudiar la problemática que puede formularse en los siguientes términos:

¿De qué forma se interpreta, en la comunidad científica universitaria actual, el papel de la actividad matemática y, especialmente, de la modelización matemática en el desarrollo de las Ciencias Experimentales (CCEE)? ¿Hasta qué punto prevalece el “aplicacionismo”? ¿Cuál es la “economía” de la epistemología dominante (para qué sirve, qué facilita, qué funciones asume)? ¿Cuál es su “ecología” (por qué y cómo existe, cómo se puede hacer evolucionar)?

Centrándonos en la enseñanza de las CCEE, nos proponemos realizar un primer estudio exploratorio de este conjunto de cuestiones a partir de varios tipos de *media*[1]. Para ello vamos a presentar primeramente una serie de indicadores que utilizaremos para analizar algunos *discursos generales sobre las matemáticas* que se enseñan y que aparecen en los prefacios de libros de consulta universitarios y en los programas de las asignaturas. Nos proponemos ampliar el estudio con la realización de una serie de *entrevistas* y *encuestas a profesores universitarios* involucrados en la enseñanza universitaria de las CCEE.

2.2.1. Propuesta de caracterización del “aplicacionismo”

Pero, ¿cuál es el papel que asigna efectivamente la citada epistemología del “libro de texto” a la *modelización matemática* en el desarrollo de las CCEE? ¿Cómo condiciona dicha noción cultural de “modelización matemática” las posibles formas de utilizarla efectivamente en la organización universitaria del estudio de las CCEE?

Si postulamos que la epistemología del “libro de texto” es la epistemología dominante en las citadas instituciones universitarias, ¿qué indicadores utilizaremos para contrastar empíricamente esta hipótesis? ¿Existirán diferencias relevantes entre la

[1] La noción de *media* ha sido introducida en el Capítulo 2, §4.4.2.

comunidad de los "matemáticos" y la de los "científicos experimentales" (considerados todos ellos como miembros de la institución responsable de la formación de los futuros científicos experimentales) en cuanto a la forma de considerar el papel de la modelización matemática en el desarrollo y en la enseñanza de las ciencias experimentales? O, en otros términos, en la enseñanza de CCEE, ¿hemos de distinguir entre el papel que tiene la modelización matemática en el ámbito de las asignaturas de "matemáticas" y el que tiene en el resto de materias de dichas licenciaturas?

Digamos ante todo que la epistemología del "libro de texto" empieza por restringir extraordinariamente la noción misma de "modelización matemática" reduciéndola a una mera *aplicación* (y hasta a una simple "ejemplificación") de unas *técnicas matemáticas completamente predeterminadas* que se utilizan únicamente para resolver un conjunto de *problemas científicos prefijados de antemano*. Es por esta razón que denominaremos "*aplicacionismo*" a la forma específica de considerar y de utilizar la modelización matemática que emana como una consecuencia de la epistemología del "libro de texto".

La función didáctica de estos ejercicios de "modelización-aplicación-ejemplificación" no es la de "probar" las teorías científicas (que no se cuestionan en ningún momento) ni, tampoco, la de mostrar el estado actual de la ciencia normal, puesto que éste último sería un objetivo excesivamente genérico y no abordable por una enseñanza atomizada de la ciencia. Su función didáctica principal es mucho más específica, y hasta "puntual", y consiste en ejemplificar una forma estandarizada de utilizar determinadas herramientas matemáticas para resolver ciertos tipos estereotipados de problemas científicos que, como no podría ser de otra forma, coinciden con los que aparecerán posteriormente en los dispositivos de evaluación.

Se da por sentado que cada tipo de problemas T_i se resuelve aplicando una determinada técnica matemática τ_i y que dicha aplicación da origen a un tipo particular de modelo matemático M_i (cuyo carácter de "modelo" así como el correspondiente proceso de modelización suelen quedar implícitos) que permite resolver todas las cuestiones planteadas en T_i. No se consideran cuestiones problemáticas que vayan más allá de las cuestiones "internas" a cada aplicación particular de los modelos estandarizados. No se plantean, por tanto, preguntas sobre la "comparación" del *grado de adecuación* de dos o más modelos de un mismo sistema, ni sobre la necesidad de modificar progresivamente un modelo determinado para dar respuesta a las nuevas cuestiones problemáticas porque *el sistema se supone construido de una vez por todas* (no aparecen cuestiones "nuevas" no previstas de antemano), ni sobre la necesidad de elaborar *modelos de los modelos* (la *recursividad* de la modelización matemática es completamente ignorada en la práctica escolar).

Para contrastar empíricamente hasta qué punto en las instituciones escolares universitarias responsables de la formación en ciencias experimentales prevalece la epistemología del libro de texto y, en particular, el *aplicacionismo*, utilizaremos un conjunto de indicadores empíricos que describiremos en la sección 2.2.2. Antes, pero, especifiquemos algunos de los rasgos destacados e hipótesis que asumimos como una *caracterización provisional de la epistemología del libro de texto* y que nos servirá de guía para construir los indicadores empíricos:

1. *Se establece una distinción neta entre las matemáticas y las CCEE*. Las primeras permitirían construir modelos, y éstos modelizarían sistemas que pertenecen íntegramente al ámbito de las CCEE. Se destaca entonces la existencia de dos lógicas independientes y autónomas: por un lado, la lógica de las matemáticas y, por otro, la de las CCEE, sin reconocer ninguna interacción constitutiva entre ambas. No existe la idea de la matematización o modelización matemática progresiva de los sistemas. De ahí el "misterio" que la cultura nunca ha podido desvelar: *¿por qué las matemáticas sirven para representar, describir o modelizar el mundo empírico?* Es imposible responder a esta pregunta si se da por supuesto que la modelización matemática es un añadido que se crea para unir dos mundos (las matemáticas y las CCEE) de por sí independientes.

2. *Relación unidireccional (en tiempo y modo) entre las matemáticas que fabrican modelos y las CCEE que constituyen el ámbito de los sistemas en los que se usan.* El aplicacionismo supone que los modelos matemáticos preexisten a los sistemas científicos pero nunca al revés. Se supone que al "aplicar" las matemáticas a las CCEE únicamente se "concretan" y "cuantifican" fenómenos científicos ya conocidos de antemano. Así, por ejemplo, se podrá asignar a distintos sistemas de las CCEE un mismo modelo matemático, pero es mucho menos frecuente considerar distintos modelos matemáticos para el estudio de un mismo sistema

científico. Por otra parte, es difícilmente concebible que la utilización de un modelo matemático permita cuestionar algunos de los presupuestos científicos previos (planteando nuevas cuestiones científicas que no podían plantearse antes de trabajar dentro del modelo en cuestión) y, todavía más inconcebible que la utilización de un modelo matemático provoque la emergencia de nuevos fenómenos (físicos, químicos o biológicos).

3. *Las matemáticas no son una herramienta constitutiva de las CCEE.* No se considera que las matemáticas sean un componente esencial en la construcción del conocimiento científico. Se supone que los fenómenos podrán existir sin la matemática. La matemática se considera en la mayoría de ocasiones una *herramienta cuantificadora* de la cual se podría prescindir si nos quedamos con lo "esencial", esto es, con los aspectos *cualitativos* de los fenómenos científicos.

4. *Ni los modelos ni los sistemas evolucionan*. En los sistemas (científicos), que se proponen para estudiar, no aparecen cuestiones realmente nuevas a lo largo del proceso de estudio. Hay una clara rigidez de la problemática, los *sistemas científicos* estudiados se mantienen *invariantes a lo largo del proceso de estudio*. El "olvido" de que se está llevando a cabo un proceso de modelización matemática es un indicador del *aplicacionismo* puesto que impide modificar el modelo que se está utilizando para superar sus limitaciones.

2.2.2. Contraste empírico de los indicadores del "aplicacionismo"

Para poder contrastar empíricamente hasta qué punto en las instituciones universitarias responsables de la formación en CCEE prevalece el *aplicacionismo*, vamos a introducir primeramente un conjunto de indicadores empíricos que se utilizarán para el contraste de ciertos datos: por un lado, nos proponemos indagar algunos *discursos generales sobre las matemáticas* que se enseñan (o difunden) y que aparecen en los prefacios de los libros de texto y de consulta, en los programas u otros documentos oficiales y, por otro lado, analizaremos el punto de vista de los investigadores y profesores que forman parte de la comunidad científica responsable de la enseñanza de las CCEE en las instituciones universitarias.

I_1: Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas (purificación epistemológica)

Este primer indicador pretende constatar que *las matemáticas no se mezclan con los sistemas que modelizan ni se modifican al "aplicarse"* y, en consecuencia, son consideradas independientes de dichos sistemas y se aplican en todos los casos de la misma manera y sin contaminarse. El enfoque "monodisciplinar" de los problemas científicos tiende a ocultar las necesidades de estudio de los conocimientos matemáticos relevantes para abordar problemas que surgen en otras disciplinas y, en muchas ocasiones, oculta las "razones de ser" de estos conocimientos. En este sentido, Chevallard afirma que se llega a hacer una *infra-utilización indígena de las matemáticas* (Chevallard, 2005, p. 19).

I_2: Las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas científicos forman parte de una formación matemática *básica común* para todos los científicos

Se trata de un "lenguaje" básico que, en gran parte, constituye el currículum de la matemática de la Enseñanza Secundaria y que, por lo tanto, se considera absolutamente común para todas las CCEE. No se concibe ningún tipo de especificidad ni en las nociones matemáticas básicas ni, tampoco, en el tipo de técnicas y tecnologías matemáticas integrantes de dicha formación matemática básica.

I_3: La enseñanza de las matemáticas sigue la *lógica deductivista* (lógica de los modelos) (compartimentación)

La estructura de las matemáticas para CCEE es muy estereotipada y cristalizada en dos o tres bloques "universales". Se trata de un indicador global de la "independencia" entre las matemáticas y las CCEE a las que se "aplican". Viene a reforzar en el nivel disciplinar lo que el anterior indicador ponía de manifiesto en los niveles más específicos. Si la estructura global de los programas de matemáticas para biólogos, geólogos, químicos y físicos son esencialmente los mismos, se corrobora que la matemática no se modifica en ningún aspecto cuando se aplica a las diferentes CCEE. No existe una matemática específica para cada una de las CCEE. La "biomatemática" sólo existe en el ámbito de la investigación, no en el de la enseñanza.

I_4: Dado que las "aplicaciones" vienen después de una formación matemática básica, se destaca una *proliferación de cuestiones aisladas* con origen en distintos sistemas y que se mantienen fijas

Otro indicador del aplicacionismo lo constituye el progresivo desvanecimiento de una problemática general relativamente unificada que, en cierto sentido, genere inicialmente un conjunto de cuestiones relacionadas entre sí y que constituya, en primera instancia, la razón de ser y el motor del proceso de estudio de un tema científico. En su lugar aparece una proliferación de problemas aislados (que pueden surgir en sistemas distintos) que pone de manifiesto la ausencia de una problemática científica común. Encontramos aquí una característica señalada anteriormente según la cuál es mucho más probable encontrar distintos sistemas de CCEE asociados a un modelo matemático que ver cómo distintos modelos matemáticos se suceden, amplían y evolucionan para abordar un mismo sistema científico.

I_5: La enseñanza de las herramientas *matemáticas básicas* siempre es *anterior* al estudio de su *aplicación*

Lo *primero* es aprender a manipular los componentes de los modelos matemáticos más importantes y *después* ya se aprenderá a utilizarlos en cada ámbito de trabajo particular. Los modelos se fabrican a partir de las nociones, propiedades y teoremas de cada tema y, una vez construidos de forma totalmente independiente de cualquier sistema, se buscan sus posibles aplicaciones que, por tanto, nunca pueden ser modificadas por posibles evoluciones de los sistemas.

I_6: Se podrían enseñar los sistemas sin los modelos, es decir, se podrían enseñar Ciencias Experimentales *sin matemáticas* (Apagón Matemático)

Uno de los indicadores "extremos" de la independencia entre las matemáticas y las CCEE (especialmente en los casos de Biología y Geología) lo constituye la creencia de que, en última instancia, podría prescindirse de las matemáticas en la *enseñanza* de las CCEE. Postulamos que, cuando el aplicacionismo se lleva a su extremo, se tiende a considerar que las matemáticas sólo son útiles para ejemplificar los *aspectos "cuantitativos"* de ciertos fenómenos científicos que pueden explicarse *cualitativamente* sin hacer uso de las matemáticas. Esta ideología explicaría, en parte, la disminución progresiva del peso de las matemáticas en los programas de estudio de CCEE y el que sea posible, hoy en día, proponer, en casos extremos, la eliminación absoluta de las matemáticas en dichos programas.

2.2.2.1. *El "aplicacionismo" en los materiales didácticos: programas oficiales y libros de consulta*

Los *programas de las asignaturas de matemáticas* que se están impartiendo en los primeros cursos universitarios son un buen indicador de las matemáticas que se proponen para ser enseñadas. A fin de contrastar el grado en que estos indicadores están presentes en los materiales didácticos que se utilizan en CCEE, nos basaremos en gran parte de los datos que hemos introducido en el primer capítulo (Capítulo 1, Cf. § 1.1) donde hemos presentado un primer estudio exploratorio de las matemáticas que son enseñadas en los primeros cursos universitarios de CCEE. Nos hemos centrado en primera instancia en el caso de los estudios de CCEE (geología, biología, química y ciencias ambientales) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) pero hemos visto como este caso no diverge mucho de lo que encontramos en las otras facultades de ciencias de distintas universidades públicas del estado español e incluso europeas.

Si nos centramos en los párrafos introductorios en los que se presentan los objetivos de la asignatura, veremos que el diseño del programa persigue un doble objetivo: por un lado proporcionar una *formación matemática básica* [$\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$] y, por otro lado, introducir a los estudiantes en la *modelización matemática* aplicada a la especialidad científica que corresponda. Así, por ejemplo, en el programa de la licenciatura de Biología (2005/06) de la Universidad de Salamanca (US), encontramos especificados los objetivos siguientes:

> Se pretende conseguir de manera general que el alumno se familiarice con las herramientas matemáticas básicas que va a precisar a lo largo de la carrera. En particular se busca conseguir que el alumno comprenda los conceptos fundamentales involucrados en la Modelización Matemática, fundamentalmente en los modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias que tengan aplicación a procesos biológicos.

En la misma dirección, el programa de la licenciatura de Geología (2006/07) de la UAB propone[2]:

> Este programa pretende un doble objetivo. El primero y más importante es el de dar al estudiante una formación matemática básica, centrada en el álgebra lineal y en el cálculo de funciones de una variable, que le permita comprender el lenguaje de la Ciencia. El segundo es el de introducirle en el campo de la Geología, es decir en la modelización matemática, por medio de ejemplos sencillos que puedan ser analizados con las herramientas matemáticas introducidas previamente.

Al examinar la descripción de los contenidos de las asignaturas que nos describen los programas analizados, destacamos que los apartados que hacen referencia a la *modelización matemática* se plantean siempre *con posterioridad* y como una consecuencia de lo que se considera la introducción de la matemática básica o de los conceptos matemáticos básicos [$\mathbf{I_5}$]. Se observa también que la parte del programa que se dedica al estudio de los modelos matemáticos es muy pequeña, cuando ésta no es completamente inexistente o se reduce a introducir algunos ejemplos concretos. Por ejemplo, describimos aquí dos casos muy representativos de programas en los que, bajo el título de "aplicaciones" o de "ejemplo concretos", aparecen los apartados que, sobre el papel, se dedican a la modelización:

> Programa de Geología (2007/08) de la UB (nuestra traducción):
>
> III. Concepto y aplicaciones de la derivada
>
> 1. Concepto de derivada. Interpretación geométrica. Derivabilidad en un punto. Relación entre continuidad y derivabilidad.
> 2. Derivadas de las funciones elementales. Reglas de derivación. Derivadas de orden superior.
> 3. Teoremas sobre funciones derivables. Teorema de Rolle. Teorema de Cauchy. Teorema de Lagrange.
> 4. La regla de L'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados.
> 5. Aplicaciones de la derivada para el estudio y representación gráfica de una función y la resolución de problemas de extremos.
>
> Programa de Biología (2006/07) de la UAB
>
> Tema 4: Ecuaciones diferenciales
>
> 4.1 Ecuaciones de variables separadas. Ejemplos: crecimiento exponencial, desintegración radioactiva, ecuación logística.
>
> 4.2 Ecuaciones lineales. Ejemplos.

Destacamos así que salvo alguna excepción, la organización habitual de los programas no se estructura en torno a los problemas de modelización o "aplicaciones", sino en base

[2] Original en catalán. La traducción es nuestra.

a un listado de temas o bloques temáticos que siguen una organización muy estereotipadas. Se pueden distinguir tres grandes bloques temáticos o áreas de contenidos: á*lgebra lineal*, *cálculo diferencial e integral en una variable* y *ecuaciones diferenciales* [**I$_3$**]. Cabe destacar que esta estructuración en bloques temáticos no siempre aparece de forma explícita y, cuando aparece, no siempre presenta las mismas divisiones. Lo más importante a destacar, como común denominador de estos programas, es que todos los contenidos y nociones clave aparecen de forma invariante. En particular, no se hace ninguna mención a los tipos de cuestiones que se tratarán a lo largo del curso ni al tipo de problemas que se estudiarán.

Como ya hemos dicho, esta organización tradicional de los contenidos de enseñanza tiene el gran inconveniente de esconder las cuestiones problemáticas que constituyen la "razón de ser" de todas las nociones, propiedades, teoremas y técnicas que han acabado cristalizando en el saber matemático que se quiere enseñar. Podemos decir que esta organización sitúa de forma preferencial el *bloque tecnológico - teórico* en el origen de la actividad matemática y, en consecuencia, tiende a construir tipos de problemas muy cerrados y aislados para obtener así ejemplificaciones de cada una de las nociones o propiedades de cada tema [**I$_4$**, **I$_5$**]. Se tiende entonces a enseñar un conjunto de *contenidos aislados* y *desarticulados*, asumiendo implícitamente que la articulación de todos estos contenidos se producirá espontáneamente cuando sean aplicados a problemas extra-matemáticos. Nunca llega a plantearse entonces el problema matemático, y didáctico, de cómo *articular los contenidos matemáticos* para que éstos puedan ser utilizados como instrumentos necesarios e imprescindibles de modelización en el estudio de cuestiones biológicas, geológicas, químicas, etc. Esta situación puede llevar fácilmente a pensar en que estas herramientas matemáticas sólo proporcionan información "parcial" y generalmente "cualitativa" en el estudio de fenómenos científicos, e incluso llevar a creer en la posibilidad de que se podrían enseñar CCEE sin matemáticas [**I$_6$**].

La segunda fuente de material empírico que hemos utilizado para contrastar la presencia de los indicadores del aplicacionismo está constituida por algunos de los libros de consulta más recomendados y utilizados en las asignaturas de matemáticas de las licenciaturas de Biología y de Geología. Se trata de los libros de consulta que aparecen citados en los programas de las asignaturas para la introducción al ámbito del cálculo y del álgebra lineal como, por ejemplo, Salas & Hille (1995) y Anton (2003).

El propósito principal de estos libros se puede resumir en introducir a los estudiantes al "lenguaje básico común" para todos los científicos, propósitos que coinciden con los objetivos presentados por los programas de estudio de las asignaturas y, de nuevo, de forma totalmente independiente al resto de disciplinas [$\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{I_2}$]. Encontramos en el prólogo de Salas & Hille (1995) una descripción bastante clara de lo que se plantea como el objetivo del libro y del papel de las aplicaciones en éste:

> A lo largo de los años hemos escuchado un continuo murmullo crítico: SALAS/HILLE no tiene suficiente relación con la ciencia y la ingeniería, no tiene suficientes aplicaciones físicas. Hemos acabado por abordar este problema. En esta edición usted encontrará algunas aplicaciones físicas sencillas, repetidas a lo largo del texto y, aquí y allá, como temas opcionales, algunas aplicaciones que no son tan sencillas. Puede que algunas de éstas llame la atención de los estudiantes más serios. A pesar de la mayor presencia de aplicaciones, este libro sigue siendo un texto de matemáticas, no de ciencia o ingeniería. Trata del cálculo y el énfasis se pone en tres ideas básicas: el límite, la derivada, la integral. Todo lo demás es secundario; todo lo demás puede ser omitido.
>
> Salas & Hille (1995, p. 7)

La organización que presentan estos libros vuelve estructurarse en torno a ciertos bloques temáticos que se rigen a partir de la más pura lógica deductivista como, por ejemplo, en el caso de Salas & Hille (1995), encontramos distribuidos en varios capítulos lo que corresponde a los siguientes bloques temáticos (respetando los títulos): Límites y continuidad; Diferenciación; el Teorema del valor medio y aplicaciones; Integración; Algunas aplicaciones de la integral; Funciones transcendentes; Técnicas de integración; Secciones cónicas; Sucesiones; Series infinitas; entre algunos otros bloques sobre cuestiones adicionales (conjuntos, medidas e inducción) y algunas demostraciones adicionales [$\mathbf{I_3}$]. Las referencias a las aplicaciones, tal como aclaran los autores, cuando éstas no son nulas, aparecen en general al finalizar cada capítulo y como una ejemplificación de las herramientas matemáticas que han sido presentadas en cada una de los bloques. En la mayoría de los casos, estas aplicaciones aparecen en un apartado añadido bajo el nombre de "ejercicios adicionales" cuya naturaleza corresponde a una ampliación del campo de problemas tratables con las técnicas matemáticas introducidas en ese mismo capítulo [$\mathbf{I_4}$].

En el caso de Anton (2003) se centra más en la introducción de las herramientas del álgebra lineal que, como aclara el autor es, "*idóneo para estudiantes que están cursando el primer o segundo año de ciencias. Mi objetivo es presentar los fundamentos del álgebra lineal de la forma más clara posible* […]". La organización vuelve a presentarse estructurada en ciertos bloques temáticos sin que en ellos aparezca ninguna referencia a las aplicaciones. Aunque el autor aclara que, en la tercera y última edición editada, se ha añadido un capítulo extra ("Temas complementarios") que contiene, según el autor, las aplicaciones "selectas" del álgebra lineal que son esencialmente de naturaleza matemática, como por ejemplo: Geometría de los operadores lineales; formas cuadráticas; secciones cónicas; superficies cuadráticas; descomposición LU, entre otras.

Al margen de la organización presentada por estos libros clásicos que son unos de los más utilizados en la enseñanza formal de las matemáticas en CCEE, existen ciertos autores que proponen organizaciones menos "aplicacionistas" en los que la matemática es introducida de forma más específica para la biología (Batschelet, 1978), la geología (Waltham, 2000) o CCEE en general (Berry *et al*., 1989). Como contrapunto de los libros de consulta habituales, analizaremos brevemente algunos de los textos que intentan superar el aplicacionismo.

En el prólogo de Batschelet (1978), el autor explica que el libro está planteado principalmente para un curso introductorio de los procedimientos matemáticos que posteriormente serán aplicados a las diversas disciplinas particulares. Los contenidos de cada capítulo, en general mantienen la misma estructura: una primera parte introductoria del tema con alguna referencia a la motivación de las herramientas matemáticas y algunos ejemplos pendientes de resolver; en la parte principal del capítulo se presentan las herramientas matemáticas mínimas necesarias sin presentarlas con mucho rigor y, finalmente, una colección de ejemplos de sistemas biológicos, químicos, etc. en los cuales se pueden aplicar las herramientas introducidas.

En los trabajos de Waltham (2000) y Berry *et al.* (1989) aparecen propuestas de organizaciones matemática a enseñar nada usuales y que empiezan a superar algunos de los indicadores del aplicacionismo.

> The objectives of this book are to improve understanding of simple mathematics through the use of geological examples and improve ability to apply mathematics to geological problems [...] I believe that this is more helpful than a rigid, formal treatment since formality can often obscure the underlying simplicity of the ideas. (Waltham, 2000, p. 1)
>
> There is a growing awareness that we must not teach mathematics in isolation from its applications. In teaching mathematics to scientists, technologists and engineers, there is a plenty of opportunities to provide applications as part as the syllabus and teaching approach. There are a few textbooks which recognize this. One of the aims of writing this text has been to encourage the teaching of mathematics through its applications in science. (Berry *et al.*, 1989, p. 2)

Los primeros apartados de Waltham (2000), "*Mathematics as a tool for solving geological problems*" y "*Common relationships between geological variables*", se presenta una introducción a ciertos fenómenos geológicos cuyo estudio requerirá la introducción de ciertas herramientas matemáticas. En la misma dirección, Berry *et al.* (1989), dedica las primeras secciones de cada capítulo a dar algunos ejemplos que surgen en un contexto científico y que hacen referencia a las nuevas técnicas que se proponen introducir. Pero estas propuestas de organización que apuntan, en menor o mayor grado, hacia la superación de algunos de los indicadores más destacados del aplicacionismo, se enfrentan con enormes dificultades para ser integradas en el aula, lo que confirma una vez más la potencia del aplicacionismo como consecuencia de la epistemología dominante.

2.2.2.2. *El "aplicacionismo" en boca de profesores e investigadores en CCEE*

Nuestra hipótesis de que el aplicacionismo es la forma de interpretar la relación entre las matemáticas y las CCEE dominante en las instituciones docentes universitarias requiere otros datos empíricos a parte de los programas y los libros de texto que hemos examinado en el anterior apartado. Nuestra propuesta es indagar en los *discursos que elaboran los profesores e investigadores universitarios* cuando se les pregunta por los criterios utilizados para el diseño y la gestión de la enseñanza de matemáticas para las CCEE. Estos discursos constituirán así el tercer ámbito empírico en el que pretendemos contrastar nuestras hipótesis del aplicacionismo.

Dada la ausencia de discursos oficiales al respecto e incluso de un vocabulario específico para describir el tipo de matemáticas que se enseñan, utilizan o difunden en las distintas prácticas universitarias (docencia e investigación), nos proponemos pues hacer hablar a los *propios actores del sistema de enseñanza*. Para ello nos hemos visto forzados a distinguir entre distintas subinstituciones, según si consideramos investigadores en CCEE o en matemáticas, distinguiendo además entre las distintas ciencias, según el grado de matematización de las mismas (física y química, por una parte, biología y geología por otra).

En el capítulo 1 hemos introducido el análisis del primer conjunto de datos para describir la "respuesta espontánea" que dan los actuales sistemas de enseñanza al *problema docente* de la enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de CCEE. Estos primeros datos constan de un total de 45 encuestas a estudiantes de la licenciatura de geología que cursaban, en ese momento, la asignatura de matemáticas, además de cuatro entrevistas a profesores del Departamento de Matemáticas encargados de esta docencia. Frente a las respuestas obtenidas, se ha destacado el acuerdo de los profesores entrevistados en relación a que los cursos que se están impartiendo ofrecen la *formación matemática básica* e imprescindible para la formación de todo científico de la que nunca se cuestionan ni los contenidos ni la forma de organizar su estudio. Tampoco se pone en cuestión el dogma de la ideología "*aplicacionista*": lo primero es aprender las matemáticas básicas y después, si es necesario y si hay tiempo, ya se aplicarán al ámbito particular de trabajo de cada disciplina científica. Como era de esperar, la parte de la asignatura que "teóricamente" se destinaba a la introducción de la modelización matemática no acaba representando un objetivo *realista* (ni demasiado esencial) para los profesores (para más detalles: Cf. Capítulo 1, § 1.1.2).

Nos proponemos aquí ampliar la base empírica de la que disponemos y centrarnos en el caso de la *comunidad de docentes e investigadores en CCEE* que, aunque en el caso de la UAB, no se ocupen personalmente de la docencia de la asignatura de matemáticas, su visión sobre qué son las matemáticas y *qué papel deben éstas desarrollar dentro de las CCEE* influye de forma esencial en su enseñanza. Para ello podemos distinguir una primera fase que se centra en el diseño, recolección de datos y análisis de una encuesta que se ha elaborado en base a los indicadores que caracterizan al "aplicacionismo" (Cf. § 1.1.2 de este capítulo) y que se ha distribuido a 30 docentes e investigadores de los departamentos de biología, geología, química y ciencia ambientales. En la segunda fase se completan estos datos con cuatro entrevistas a docentes de los departamentos mencionados de CCEE de la UAB con el objetivo de darles la oportunidad de ampliar las respuestas que habían proporcionado a la encuesta.

Esta encuesta, diseñada en base a los cinco indicadores previamente introducidos constó finalmente de las siguientes afirmaciones. Se pedía a los encuestados que valorasen cada una de las siguientes afirmaciones en una escala del 1 al 5 según si se estaba totalmente en desacuerdo (1) o totalmente de acuerdo (5). Mostramos aquí el caso de la licenciatura de Biología:

1. Las matemáticas que se enseñan en el primer curso universitario de Biología son diferentes de las que se enseñan en el resto de las licenciaturas en Ciencias Experimentales.
2. En el ámbito de la enseñanza, en general las matemáticas se introducen de forma independiente a los sistemas biológicos que se pueden modelizar matemáticamente.
3. La enseñanza de las matemáticas en el primer curso de Biología está estructurada (temas, cuestiones y problemas) en base a una problemática de carácter matemático y no en base a una problemática biológica.
4. En la enseñanza de las matemáticas en el primer curso de Biología, se enseñan las matemáticas sólo después de que surja su necesidad en el estudio de un sistema biológico.
5. Las situaciones de Biología donde se aplican las matemáticas aparecen vinculadas a una problemática general (biológica) relativamente unificada y no a un conjunto de cuestiones bastante independientes entre ellas.
6. Se podría enseñar toda la carrera de Biología utilizando las matemáticas únicamente para analizar los aspectos cuantitativos de los fenómenos biológicos (en otras palabras, se podría hacer un estudio relativamente profundo de los fenómenos biológicos sin utilizar las matemáticas).

Los resultados obtenidos de la encuesta fueron, en la mayoría de las afirmaciones propuestas, bastante contundentes. A continuación vamos a sintetizar los principales resultados de la encuesta destacando a la vez algunas de las opiniones proporcionadas en las entrevistas posteriores. Antes de empezar, debemos destacar que podemos distinguir entre dos perfiles de docentes e investigadores, un primer perfil que responde al punto de vista más “aplicacionista” y que queda representado por tres de los entrevistados (Entrevistado A, B y C) y, en contraposición, el perfil que responde a un enfoque más “funcionalista” (Entrevistados D).

Frente a la primera de las afirmaciones, más de un 50% de los profesores encuestados (16 de los 30) se mostraron en desacuerdo al hecho que las matemáticas que se enseñan en sus correspondientes disciplinas científicas sean *diferentes* de las enseñadas para el resto de CCEE. Se admite así la *poca especificidad* que las matemáticas adoptan cuando éstas son enseñadas para una CCEE particular. Destacamos también el 20% (6 de los 30) que admite desconocer qué matemáticas son enseñadas en estos primeros cursos y si éstas son realmente diferentes o no. Este resultado soporta al segundo de los indicadores del aplicacionismo [$\mathbf{I_2}$] que pretendía contrastar que las herramientas matemáticas que se enseñan forman parte de lo que hemos denominado una "formación matemática común" para todos los científicos. Según el entrevistado A este hecho aporta unas claras ventajas: "*En teoría tiene que ser la misma para todos, incluso en la nueva planificación de los grados se pide que sean las mismas, comunes para todos y así facilitará la movilidad si se quiere cursar cualquier otro estudio científico* […]". Y aunque existieran diferencias, añade el entrevistado C: "*Creo que las diferencias que se pueden llegar a generar entre los programas no tienen porqué ser diferencias muy significativas, el lenguaje matemático es único y la atracción por las matemáticas puede venir desde perspectivas científicas muy distintas pero ésta siempre es la misma. Creo que sólo son los detalles los que marcan la diferencia, los ejemplos, las adaptaciones, el poder visualizar que aquellas ecuaciones tiene una plasmación en un estudio de fenómenos determinado* […]".

1	Frecuencia	%
1. Totalmente en desacuerdo	8	**26.67**
2. En desacuerdo	8	**26.67**
3. Neutro	4	13.33
4. De acuerdo	3	10
5. Totalmente de acuerdo	1	3.33
6. Lo desconozco	6	20
Total	30	100%

El acuerdo más claro que hemos encontramos ha sido frente a la segunda de las afirmaciones donde el 93% se muestra de acuerdo (un 50% de acuerdo y 43% totalmente de acuerdo) con el hecho que *las matemáticas se introducen de forma independiente a los sistemas científicos*. Este hecho nos indica la fuerte presencia del primer de los indicadores [$\mathbf{I_1}$] que enfatizaba la idea de que las matemáticas son consideradas independientes de los sistemas científicos y se aplican en todos los casos de la misma manera y sin

2	Frecuencia	%
3. Neutro	2	6.67
4. De acuerdo	15	**50**
5. Totalmente de acuerdo	13	**43**
Total	30	100%

contaminarse. En referencia a esta idea el entrevistado A muestra de nuevo su acuerdo con esta desvinculación: "*No creo que las matemáticas se tuvieran que introducir vinculadas a los sistemas geológicos, ¿cómo vincular unas matemáticas tan básicas? Es una pregunta que os tenéis que hacer vosotros* (los matemáticos). *No creo que sea ni conveniente ni oportuno ya que no tenemos que justificar porqué necesitamos las matemáticas en cada una de nuestras asignaturas, las matemáticas deben tener peso, pero por ellas mismas.*" En la misma dirección, añade el entrevistado C: "*Sería absurdo y simplificador que la vinculación se haga de entrada, que cuando entre un alumno se le diga "esto te servirá para esto", éste se perdería el hecho que* (las matemáticas) *tienen un valor por ellas mismas y tiene que entender este valor y que sus frutos ya los recogerá más tarde. No creo que sea bueno desde el primer día ir a referirse a casos concretos* […]". Debemos aquí referirnos al entrevistado D que aporta un punto de vista bastante contrapuesto a los anteriores y destaca la necesidad de romper con la desvinculación de las matemáticas con el resto de CCEE: "*La gran mayoría aparecen de forma totalmente independiente. Ahora tenemos la oportunidad de hacer una reforma seria de los planes de estudio, yo creo que las matemáticas deberían impartirse cuando éstas fueran necesarias, no como ahora que resulta muy decepcionante para la mayoría de los alumnos que entran en primero y encuentran unas matemáticas completamente desvinculas de la Biología que es lo que han venido a hacer* […]".

En referencia a la tercera de las afirmación, el 90% muestra su acuerdo (cerca de un 37% totalmente de acuerdo) sobre que las matemáticas que son enseñadas se *estructuran en base a un problemática de naturaleza matemática* y no de naturaleza científica: biológica, geológica, etc. Este hecho apoya a otras de las características introducidas por el tercer de los indicadores [$\mathbf{I_3}$] del aplicacionismo, indicador global de la "independencia" de las matemáticas con el resto de las CCEE con el que se suponía que la enseñanza de las matemáticas en CCEE seguía la lógica deductivista de los modelos matemáticos sin tomar ningún tipo de especificidad cuando se analiza su enseñanza en disciplina científica concreta. Sobre esta característica, el entrevistado C explica: "*Creo que* (la matemática enseñada) *aún está decantada hacia tratar una problemática matemática,*

3	Frecuencia	%
1. Totalmente en desacuerdo	0	0
2. En desacuerdo	3	10
3. Neutro	0	0
4. De acuerdo	16	**53.33**
5. Totalmente de acuerdo	11	**36.67**
Total	30	100%

pero no sé si esto es malo, me parece muy natural. Cuando decía que los programas no tenían que ser completamente diferentes y que las diferencias deberían estar en los ejemplos, implica que me parecía bien que los programas de matemáticas para físicos y para biocientíficos no establezcan grandes diferencias y compartan un cuerpo común, y éste no puede ser el físico, el químico o el biológico, éste tiene que ser el matemático […]”. Defendiendo el mismo punto de vista, el entrevistado B añade: “*Responde a una problemática matemática y no podría responder a una problemática geológica ya que si de matemáticas pueden saber poco de geología saben mucho menos, no saben nada* […]. *Pero tampoco no pueden ser trasladadas a cursos posteriores, los geólogos ya se encargarán posteriormente de transmitirlas, pero el lenguaje básico se debe fijar* […]”.

De nuevo, bastante claro ha sido el desacuerdo, cerca de un 47% totalmente en desacuerdo y un 40% en desacuerdo, frente a la afirmación de que *las matemáticas se enseñan sólo después de que surja su necesidad* en el estudio de fenómenos científicos. Este acuerdo, relacionado con el quinto de los indicadores [$\mathbf{I_5}$] del aplicacionismo, viene a reforzar la idea que lo primero es la enseñanza de los componentes de los modelos o herramientas matemáticas básicas dejando para después el estudio de su aplicación en cada ámbito particular de trabajo.

4	Frecuencia	%
1. Totalmente en desacuerdo	14	**46.67**
2. En desacuerdo	12	**40**
3. Neutro	3	10
4. De acuerdo	1	3.33
Total	30	100%

Refiriéndose a estas dos últimas afirmaciones, el entrevistado D muestra su desacuerdo: “*Lo que se hace debería ir en contra de la ética de la universidad, los alumnos ya han escogido lo que quieren hacer, entonces nunca van a entender porque se les da una matemática desvinculada de lo que a ellos le gusta. Así, ¡un curso más de matemáticas por la matemática! Esto no lo entienden.* […] *debería ser un curso con cuatro herramientas matemáticas que posiblemente no tienen bien adquiridas de etapas anteriores, pero con ejemplos y una razón de ser biológica* […].”

El claro desacuerdo de un 90%, un 40% totalmente en desacuerdo, lo muestran los encuestados frente a la idea de que las situaciones extramatemáticas

5	Frecuencia	%
1. Totalmente en desacuerdo	12	**40**
2. En desacuerdo	15	**50**
3. Neutro	3	10
Total	30	100%

donde se aplican las matemáticas aparecen vinculadas a una problemática general de CCEE relativamente unificada y no a un conjunto de cuestiones bastante independientes entre ellas. Esta idea introducida por **I$_4$** apoya al *progresivo desvanecimiento de una problemática general relativamente unificada*. En su lugar aparece una proliferación de problemas aislados (que pueden surgir en sistemas distintos) que pone de manifiesto la ausencia de una problemática científica común. Las opiniones aportadas por los entrevistados complementan este mismo resultado: "*Aparece un conjunto cuestiones aisladas y separadas, y debo añadir, lamentablemente. Pero esto es lo que se hace. No es que sólo no haya relación con las instrumentales sino que tampoco hay relación entre las descriptivas. Son satélites que van cada uno por su propia órbita aislada* […]. *Podríamos buscar razones muy serias pero siempre acabas en razones banales, que son la inercia y el poco corporativismo.*" (Entrevistado C). "*Cada uno parece tener su pequeño "reino de taifas" y explica sus cosas por separado, una visión global el alumno no la tendrá nunca pero me parece que los profesores tampoco la tenemos. No hay tradición de trabajar en comunidad, de sentarse y ponerse de acuerdo con el contenido de cada asignatura.* […] *Ni tampoco veo posible evitar esta tradición en un futuro, no veo la manera de salir de la inercia en la que hemos entrado.*" (Entrevistado A).

En referencia a la última de las afirmaciones, relacionada con uno de los indicadores más extremos del aplicacionismo, encontramos las opiniones divididas en dos grupos con sólo un 10% manteniéndose en la opción neutral. Cerca de un 47% lo encontramos en el grupo que se manifiestan en desacuerdo al hecho que *sería posible enseñar una carrera en CCEE reservando las matemáticas sólo para aquellos aspectos cuantitativos*. Pero lo sorprendente y, en nuestra opinión, ciertamente preocupante es que cerca del 44% se muestra de acuerdo con esta afirmación que induce al hecho de pensar que sería posible realizar un estudio relativamente completo y profundo de los fenómenos científicos sin utilizar matemáticas. Los entrevistados también se dividen en estas dos opiniones. Los que se manifiestan de acuerdo con la posibilidad nos añaden: "*Sí, se podría perfectamente. He comentado casos* (de alumnos) *que han hecho toda la carrera sin haber aprobado las*

6	Frecuencia	%
1. Totalmente en desacuerdo	5	16.7
2. En desacuerdo	9	**30**
3. Neutro	3	10
4. De acuerdo	10	**33.3**
5. Totalmente de acuerdo	3	10
Total	30	100%

matemáticas, aún peor, que ni lo han intentado." (Entrevistado A). "*De poder se podría pero quedaría algo coja, sería entonces una disciplina meramente descriptiva* […]. *Pero para realizar un estudio más profundizado o establecer relaciones entre fenómenos ya no se puede hacer descriptivamente, se necesitan matemáticas.*" (Entrevistado B). Y en clara contraposición se muestra en entrevistado C: "*Absolutamente que no. De hecho es que no se puede prescindir en ninguna carrera. Uno debe tener la capacidad de no asustarse frente a un planteo abstracto para cualquier disciplina, y en ciencias aún más, sería una barbaridad que alguien se planteara quitarlas o que dijera que no son necesarias, todo el mundo cuando se proponga hacer predicciones o modelaje lo necesitará.*" Y por último, el entrevistado D insiste de nuevo en el "error" de pensar en una matemática única: "*Diría que si las matemáticas que se enseñan y que se hacen en los temarios de secundaria y bachillerato estuviesen bien asumidas en un porcentaje muy alto de los alumnos, se necesitaría pocas más de matemática, pero me refiero a las asignaturas más generales. El problema es que esto no está hecho. Diferente es cuando se necesita algún otro tipo de especialización que puede requerir de otro tipo de herramienta matemática, lo que es una error es pensar que todo tipo de "biólogo" necesite el mismo tipo de matemática*".

2.3. Restricciones a la vida de la modelización matemática derivadas del aplicacionismo

Una vez mostrado el grado de influencia e impacto que tiene el "aplicacionismo" en la comunidad científica universitaria, su caracterización nos servirá para describir y analizar las *restricciones* a la vida de la modelización matemática que se derivan de la interpretación aplicacionista de la modelización matemática y del papel que ésta toma en la enseñanza de las matemáticas para las CCEE. Así, situándonos en el *nivel adecuado de la escala de niveles de codeterminación matemático – didáctica* en que aparecen estas restricciones, *podremos proponer las condiciones necesarias para conseguir una "real" integración de la modelización matemática*. Esto nos va a permitir seguir ampliando la caracterización y fundamentación de los REI que hemos iniciado en el capítulo 2 (Cf. § 4.4.2.) y que, no olvidemos, tiene por objetivo establecer condiciones para introducir en la escuela y, en particular, en la universidad, una nueva epistemología, esto es, una nueva forma de interpretar el papel de la actividad matemática y su relación con las CCEE.

Uno de los principales rasgos del "aplicacionismo", y que supone una de las restricciones más fuertes a la vida "normal" de la modelización matemática es que establece una *distinción neta entre las matemáticas y el resto de CCEE*. Se supone además que ambos "mundos" evolucionan con lógicas independientes y sin ninguna interacción. Este hecho, que se ha contrastado con los tres primeros indicadores del "aplicacionismo", lleva a reducir enormemente el posible papel de las *matemáticas como herramienta de modelización de los sistemas científicos* e incluso niega el papel de las matemáticas como herramienta clave para el estudio de problemas que aparecen en sistemas extra-matemáticos. En general, las matemáticas que son enseñadas presentan una estructura muy estereotipada y cristalizada que no se mezcla con los sistemas que se modelizan y, además, las matemáticas enseñadas nunca se "modifican" como consecuencia de ser aplicadas.

Esta separación radical entre matemáticas y CCEE impide considerar *las matemáticas como una herramienta constitutiva* de las CCEE. Podemos considerar esta característica extrema del "aplicacionismo" como una de las restricciones más genéricas que, apareciendo en los niveles de la *sociedad* y de la *escuela*, se basa en no considerar las matemáticas como una herramienta fundamental para la búsqueda de respuestas a cuestiones problemáticas que pueden aparecer en distintos ámbitos de la realidad.

En contraposición a estas fuertes restricciones, debemos hacer referencia al capítulo 2 en el que, después de introducir el modelo epistemológico propuesto por la TAD y de explicar en qué sentido se integra la modelización matemática en dicho modelo, se concluye que no se puede considerar que los procesos de modelización matemática sean *independientes* del resto de la actividad matemática y porqué la actividad matemática no puede interpretarse como un "añadido" para unir ambos mundos, el matemático y el de las CCEE. En el ámbito de la TAD y, por lo tanto, en esta memoria, las matemáticas son consideradas la herramienta clave de modelización de todo tipo de sistemas, esto es, de búsqueda de respuesta a cuestiones problemáticas y, por lo tanto, *constitutiva de la construcción de todo conocimiento científico*. Esto significa que determinados fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc. *se "construyen"* en el proceso de modelización matemática (no antes).

Recordemos también que en la *primera caracterización* propuesta de los REI, éstos respetaban e incorporaban algunas de las condiciones para que la *modelización matemática* pudiera desempeñar en la actividad científica escolar el pleno *papel* "*constitutivo*" que la TAD le otorga. Así, las cuestiones problemáticas "vivas" se (re)sitúan en el origen y núcleo de la actividad matemática[3] cuyo estudio va a requerir iniciar un proceso de modelización matemática para poder aportar una respuesta en "sentido fuerte", esto es, la construcción de toda una organización matemática como respuesta a dichas cuestiones problemáticas (Cf. Capítulo 2, § 4.4.2). Este "primer" proceso genera nuevas cuestiones, de naturaleza matemática o extra-matemática, que no deben ser abandonadas o ignoradas sino que deben generar nuevos procesos de modelización. En esta dinámica deja de tener sentido pensar en dos lógicas distintas e independientes que rigen ambos "mundos", el matemático y el del resto de disciplinas científicas. Se impone pensar en un único mundo, el de la actividad científica del que la modelización matemática forma parte de manera indisoluble.

Estrechamente relacionado con lo anterior, aparecen nuevas restricciones a la vida de la modelización matemática relacionadas con el "aplicacionismo": (a) suponer que *los modelos matemáticos preexisten y se aplican a los sistemas científicos*, cuyas dos realidades, las matemáticas que fabrican modelos y las CCEE que constituyen el ámbito de los sistemas, mantiene una relación unidireccional (en tiempo y modo). (b) Suponer que *ni los modelos ni los sistemas evolucionan*. Ambas "entidades", modelos y sistemas, son consideradas estáticas a lo largo del proceso de estudio, ni la problemática planteada en los sistemas científicos evoluciona ni los modelos se modifican lo más mínimo para poder ser utilizados.

En los procesos de modelización matemática, tal como recoge la primera característica de los REI, las cuestiones problemáticas se sitúan en el punto de partida de la actividad. A lo largo del proceso de estudio de la *cuestión generatriz* (Q_0), surgen

[3] Esta característica corresponde a la primera de las propiedades generales que hemos introducido de los REI: "1REI. Las cuestiones generatrices son el punto de partida de los procesos de estudio" (Cf. Capítulo 2, § 4.4.2).

y evolucionan muchas nuevas *cuestiones derivadas* de Q_0. La búsqueda constante de respuestas a dichas cuestiones va a conducir a la (re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas que no pueden estar fijadas de antemano, respetando el grado de apertura que los REI introducen. Por lo tanto, no tiene sentido limitar *a priori* la utilización de ciertas herramientas matemáticas preestablecidas, si no se quiere limitar a su vez la actividad de modelización matemática. Esta condición corresponde a la segunda característica de los REI anteriormente introducidas[4]. Hemos postulado que el trabajo de modelización matemática puede describirse como un arborescencia de cuestiones Q_i y de respuestas provisionales (R_i = OM_i) que van apareciendo a lo largo de un proceso recursivo que produce respuestas progresivamente más amplias y completas.

Otra de las restricciones del aplicacionismo sobre la vida de la modelización matemática se pone de manifiesto en la organización habitual de los programas de matemáticas que se imparten en los estudio de CCEE. En efecto, ni la estructura que se da a los contenidos, ni la forma de desarrollarlos en clase da la posibilidad de llevar a cabo un trabajo de construcción de modelos matemáticos en relación al estudio de cuestiones problemáticas que surgen en ámbitos científicos cercanos a la especialidad escogida por los estudiantes. La *razón de ser* (matemática o extramatemática) de los contenidos, que forman parte de esta formación matemática básica que deben adquirir los estudiantes, no forma parte del programa de estudio. La "actividad de modelización" se restringe y limita a la simple ilustración o ejemplificación puntual y anecdótica de ciertos modelos preestablecidos a sistemas dotados de una problemática fijada de antemano.

Este conjunto de restricciones, que limita enormemente la "naturaleza" y "estructura" de las posibles matemáticas a enseñar y, sobre todo, el papel de dichas matemáticas en el estudio de las CCEE, puede situarse en primera instancia en los niveles de la *pedagogía* y de la *disciplina* pero sin dejar de mencionar el gran impacto que tienen estas restricciones en los niveles específicos de codeterminación matemático - didácticos, esto es, en la forma concreta cómo se organiza la matemática enseñadas en *áreas*, *sectores*, *temas* y *cuestiones*.

[4] Ver segunda de las propiedades generales de los REI (2REI) que hace referencia a la estructura arborescente de estos dispositivos (Cf. Capítulo 2, § 4.4.2).

Todas estas restricciones provenientes del aplicacionismo dificultan fuertemente (y casi impiden) que la modelización matemática juegue el papel que se le otorga desde el modelo epistemológico que propone la TAD (Cf. Capítulo 2, § 2.2). En particular podemos decir que las actividades (aisladas y puntuales) que tienen relación con algunos aspectos del proceso de modelización matemática y que aparecen en los actuales sistemas universitarios de enseñanza de las CCEE, no pueden constituirse de ninguna manera en el *instrumento de articulación de la actividad científica* que la TAD le adjudica y que plasma en el tercero de los rasgos que se postula para los REI[5].

[5] Ver tercera de las propiedades generales de los REI: 3REI (Cf. Capítulo 2, § 4.4.2).

3. RESTRICCIONES DEBIDAS A LA PEDAGOGÍA DOMINANTE EN LAS INSTITUCIONES UNIVERSITARIAS

En este apartado nos situamos en el nivel de la *pedagogía* dentro de la escala de codeterminación didáctica y nos proponemos indagar sobre la "pedagogía dominante" en las instituciones universitarias, esto es, en la forma concreta y generalizada que tiene la comunidad universitaria de interpretar qué es aprender y enseñar en estos sistemas de enseñanza. Vamos a centrarnos en describir algunos de los rasgos de este modelo docente que se contrapone en muchos aspectos al modelo docente propuesto por la TAD y que está representado por los REI. Veremos que el modelo docente imperante en la enseñanza universitaria está íntimamente ligado a la pedagogía "monumentalista" a la que nos hemos referido en el capítulo 2 y que Chevallard (2009a) describe en los términos siguientes:

> Une pédagogie dans laquelle on attend seulement du professeur qu'il *expose* aux élèves la matière à étudier suppose ainsi une infrastructure dont l'essentiel se réduit à des «leçons», c'est-à-dire des exposés sur les différents thèmes et sujets prévus par le programme. Or même la création de ces exposés ne va pas de soi. Elle est facilitée lorsque, pour l'essentiel, elle reprend de façon à peine transposée un « texte du savoir » élaboré dans la sphère (mathématique) savante. (*Ibid.*, p. 13)

Postulamos que la implantación y el desarrollo generalizado de los REI en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no sólo la epistemología "aplicacionista" imperante, sino también las restricciones que impone la *ideología pedagógica dominante* en el sistema de enseñanza universitaria. Para ello será necesaria la introducción de nuevos dispositivos y "gestos" didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual.

Nos centraremos en este apartado en presentar de forma muy esquemática algunos de los rasgos destacados de la pedagogía dominante, que requerirán, en futuras investigaciones, de un estudio más sistemático. Junto a estos rasgos, introduciremos las condiciones (en forma de dispositivos o "gestos" didácticos) que postulamos necesarios para superar las restricciones creadas. Notemos que la "pedagogía dominante" que caracterizaremos a continuación es un modelo docente "ideal" en el sentido que no ha existido nunca en estado puro (Gascón, 2001). Postulamos que, en la medida que el modelo docente vigente en los sistemas de enseñanza universitaria de CCEE participe de dicha pedagogía, existirán serias restricciones (que describiremos a continuación) sobre la vida de la modelización matemática.

1. *Las cuestiones problemáticas Q, esto es, las "razones de ser" de las posibles praxeologías, no son centrales en los procesos de estudio y tienden a desaparecer.*

Ya hemos comentado ampliamente en qué sentido la pedagogía monumentalista muestra los *conocimientos cristalizados olvidando las cuestiones específicas* que los han generado. Esta dificultad para centrar el proceso didáctico en el estudio de cuestiones es una clara restricción a una enseñanza de las matemáticas como una actividad de modelización.

2. *El objetivo de los procesos de enseñanza se centra en un contenido establecido de antemano*.

La pedagogía monumentalista parte siempre de un objetivo de enseñanza *fijado de antemano* y formulado en términos de *contenidos del saber* que se debe enseñar.[6] En estos casos, y dadas las limitaciones temporales de todo proceso de estudio, se tiende a buscar el camino más corto y rápido que conduce, en la mayoría de ocasiones, a que los procesos de enseñanza y aprendizaje se reduzcan a la *introducción de los contenidos objetos de estudio*. A la larga, la escuela tiende a convertirse en un lugar donde el profesor muestra a sus estudiantes un conjunto de "artefactos" culturales que aparecen completamente inmotivados y que sólo se deberían conocer por cierta obligación social o cultural.

Recordemos aquí el formalismo que introdujimos en la presentación de la noción de los REI:

$$\left[S(X;Y;Q) \rightarrow \left\{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, \ldots, O_m\right\}\right] \rightarrow R^{\heartsuit}$$

[6] La actual reforma universitaria marcada por la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) pretende una renovación de esta pedagogía dominante, en particular mediante la introducción de la noción de "competencia" como herramienta de formulación de los objetivos de los grados y másters universitarios.

La restricción anterior se puede traducir diciendo que, en el proceso de estudio de Q, $R^{\blacktriangledown}$ está fijado de antemano. Esto significa que el modelo docente "ideal" que estamos caracterizando elimina prácticamente las respuestas provisionales intermedias O_j que constituyen el núcleo de todo proceso de modelización matemática e identifica $R^{\blacktriangledown}$ con alguna de las respuestas culturales $R_i^{\lozenge}$ previamente construidas. Queda así patente hasta qué punto esta característica de la pedagogía monumentalista limita la vida institucional de los procesos de modelización matemática (en los sistemas de enseñanza que participan de dicho modelo docente):

- No se consideran las sucesivas y diferentes respuestas provisionales $R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}$, sólo la que presenta el profesor: $R_{profesor}^{\lozenge} = R^{\blacktriangledown}$.

- No se da la oportunidad de defender las propias respuestas R producidas por los estudiantes y el profesor tiende a *imponer* las respuestas admisibles dentro de la institución escolar.

- Se da a los *conocimientos previamente disponibles* un papel decisivo (se les valora por sí mismos, no por su capacidad a aportar respuestas a las cuestiones consideradas) mientras que en la lógica del desarrollo de los REI se valora un *saber* o *conocimiento* en la medida en que sea *pertinente* en el proceso de construcción de $R^{\blacktriangledown}$.

3. *No se cuestiona la pertinencia del saber, sólo se contrasta a lo sumo su coherencia lógica.*

- No hay contraste con un medio $M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, ..., O_m\}$ salvo en el caso de la demostración formal que sirve ante todo para probar la coherencia interna de las respuestas introducidas. Incluso en este caso, el recurso al *medio* de la prueba formal es algo que suele recaer bajo la responsabilidad exclusiva del profesor (por lo menos en los estudios de CCEE, a diferencia de los de matemáticas).

4. *Durante el estudio de cuestiones problemáticas no se considera la existencia de posibles respuestas preestablecidas diferentes a las que aporta el profesor cuya validez y pertinencia estarían por contrastar.*

- No se plantea el problema de cómo gestionar el acceso a través de los diferentes medios de *comunicación y difusión*, *los media*, a posibles respuestas preestablecidas. Se destaca la escasez de diferentes tipos de *medios* para poner a prueba y "testar" la validez de estas respuestas.

- La tradición escolar apoya la recopilación formal de textos en los que se encuentran "*inscritas*" las respuestas preestablecidas $R^{\Diamond}$ aceptadas institucionalmente.

- El hábito de la tradición escolar muestra una escasez documental que termina por favorecer el trabajo con *medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio*.

5. *La pedagogía dominante tiene una concepción individualista del proceso de estudio*.

- Preponderancia del "trabajo individual" bajo las ordenes del profesor.

- Los estudiantes se encierran (o, mejor, se les encierra) en un comportamiento "autónomo" dirigido por las demandas del profesor (didactismo).

A la ideología monumentalista se le añade actualmente otra *ideología pedagógica* que llamaremos "*generalista*" y que se caracteriza por el hecho de enfatizar rasgos generales para todo proceso de enseñanza y aprendizaje. En particular, preconiza que la enseñanza debe ser cada vez más *individualizada* y *personalizada* para tomar en consideración la exigencia creciente de la *atención a la diversidad* de manera que el profesor debe individualizar los objetivos de los contenidos y hasta el método de enseñanza; etc. Se da por supuesto que son las diferencias individuales las que determinan principalmente el éxito o el fracaso del proceso didáctico, olvidando que todo proceso de estudio se desarrolla siempre en el seno de una *comunidad* (aunque ésta pueda ser virtual) y que la organización de la enseñanza debe basarse, esencialmente, en las *características compartidas* por los estudiantes, como alumnos, más que en las singularidades de cada individuo como persona. Esta concepción individualista del proceso de estudio constituye una nueva restricción a la vida "normal" de la modelización matemática puesto que ésta, como toda actividad científica, requiere que sea la comunidad la que se responsabilice del estudio de las cuestiones.

Otros rasgos de la ideología pedagógica generalista que, en la medida que van integrándose en el modelo docente dominante en las instituciones universitarias, dificultan la vida de la modelización matemática son las siguientes:

(a) La pedagogía generalista separa el *contenido* de la enseñanza de la *forma* de organizar el proceso de enseñanza que, al suponerse independiente de los contenidos a enseñar, pretende ser común a todos ellos. Como consecuencia se produce, en el caso de las matemáticas, una separación radical entre la *enseñanza de las matemáticas* y la *actividad generadora*[7] *de las matemáticas que se enseñan* (que está en el origen de éstas).

En la medida que en la matemática enseñada se eliminan todos los rasgos propios del "hacer matemáticas" (esto es, todos los rasgos de "estudio e investigación" en el sentido que después precisaremos) se está impidiendo llevar a cabo una genuina actividad de modelización matemática.

(b) La pedagogía generalista tiende a problematizar y, por lo tanto, a cuestionar, modificar y hacer evolucionar, la *forma* de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por el contrario, los *contenidos* de la enseñanza (matemático-científicos u otros cualesquiera) los supone *transparentes* y *no problemáticos*.

Dado que el carácter *problemático*, *provisional* y *parcial* de las sucesivas respuestas que pueden aportarse a una cuestión científica constituye el "nervio" de todo proceso de modelización matemática (en el sentido que la TAD la conceptualiza) este rasgo de la ideología pedagógica, en la medida que se está incorporando al modelo docente dominante en las instituciones responsables de la enseñanza universitaria de las CCEE, constituye un impedimento para la vida de la modelización matemática en dichas instituciones.

(c) A fin de evitar que los alumnos se alejen y separen de la institución escolar, la ideología pedagógica generalista tiende a eliminar aquellos aspectos *disciplinares* que por su especial dureza y exigencia dificultan, presuntamente, la vida escolar

[7] Entendemos por "hacer matemáticas" o "actividad generadora de las matemáticas", en sentido amplio, cualquier *actividad que utiliza las matemáticas* tanto para construir nuevas matemáticas como para construir conocimientos en cualquier otro ámbito.

de la mayoría de los alumnos. En base a este principio "proteccionista" hemos visto en la Enseñanza Primaria y en la Secundaria, y empezamos a observar en la enseñanza Universitaria, una fuerte tendencia a:

- Disminuir progresivamente los objetivos a largo plazo, al tiempo que toma fuerza el mito de la *comprensión inmediata y casi instantánea*.

- *Atomizar la matemática enseñada* (y, en general, los contenidos de la enseñanza) que lleva a convertirla en un conjunto de "anécdotas" independientes entre sí.

- Hacer desaparecer progresivamente *el trabajo sistemático*, paciente, a largo plazo, y de toda actividad que pueda ser considerada como "*rutinaria*", por considerarla repetitiva y aburrida.

- Sobrevalorar "lo concreto" como motivador frente a "lo abstracto" como aburrido y difícil.

Todos estos rasgos de la pedagogía generalista constituyen restricciones importantes a la vida de la modelización matemática puesto que ésta constituye el prototipo de *actividad sistemática*, *a largo plazo*, con periodos de *trabajo rutinario*, con respuestas siempre *provisionales* y una *comprensión permanentemente incompleta* y donde "lo concreto" se transforma en "abstracto" y "lo abstracto" se interpreta en el ámbito de "lo concreto".

4. HACIA UNA INTEGRACIÓN DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: CONDICIONES, GESTOS Y DISPOSITIVOS NECESARIOS

En las secciones anteriores hemos descrito las restricciones que provienen, respectivamente, de los modelos epistemológico y didáctico dominantes en las instituciones universitarias y que inciden sobre la vida de la modelización matemática. A este respecto habría que añadir que no se trata de dos tipos de restricciones que sean independientes entre sí. Tal como se ha mostrado en algunos trabajos anteriores realizados en el ámbito de la TAD, el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en una institución docente, esto es, la forma particular de interpretar y describir las matemáticas en dicha institución, condiciona fuertemente la manera de interpretar (por parte de los sujetos de dicha institución) en qué consiste enseñar y aprender matemáticas, esto es, el modelo docente vigente en la misma (Gascón, 2001).

Por lo tanto, si el objetivo es crear las *condiciones* apropiadas para que la modelización matemática pueda existir como actividad normalizada en la enseñanza universitaria de las matemáticas para CCEE, se podría pensar inicialmente en intervenir directamente sobre los modelos epistemológicos y didácticos de esta institución. Pero esta estrategia no parece muy prometedora porque conduce a intentar incidir directamente sobre unos modelos que están anclados en una cultura sólidamente establecida en la sociedad.

Propondremos entonces un camino distinto que, en cierta forma, es el camino inverso. Empezar cambiando los *gestos del estudio*, lo que requiere la introducción de nuevos *dispositivos didácticos* que posibiliten la realización de dichos gestos, para transformar la actividad científica escolar. Postulamos que este cambio en la actividad científica escolar provocará, de hecho, cambios en la pedagogía escolar y acabará modificando, a largo plazo, los modelos epistemológicos y didácticos dominantes en la institución docente universitaria.

Se trata de una estrategia metodológica para abordar un problema ecológico que, como todos, es de una gran complejidad. La formulación inicial de dicho problema podría ser la siguiente:

¿Qué condiciones se requieren para que sea posible que la modelización matemática viva con normalidad en la enseñanza universitaria de las matemáticas para CCEE?

Este problema ecológico podría plantearse de una forma un poco más precisa utilizando la noción de *Organización Didáctica* (OD).

¿Qué tipo de OD se requiere para hacer posible la vida normal de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE?

Y, utilizando los componentes de las OD, esto es, las tareas y las técnicas didácticas junto a las tecnologías y las teorías didácticas, podríamos expresar el problema como sigue:

¿Qué tareas y que técnicas didácticas (esto es, qué gestos didácticos o gestos del estudio y qué dispositivos para llevar a cabo dichos gestos) y que tecnología y qué teoría didácticas (en particular, qué modelos epistemológico y didáctico de las matemáticas) se requieren para que la modelización matemática viva con normalidad en la enseñanza universitaria de las CCEE?

A lo largo de esta memoria hemos descrito los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) como un modelo de referencia para el análisis, diseño y experimentación de organizaciones didácticas (o modelos docentes) no "monumentalistas". Las características principales de los REI que hemos destacado en el Cap. 2 (1REI, 2REI, 3REI y 4REI) pretenden responder principalmente a las restricciones que provienen del *modelo epistemológico dominante* (y, en parte, del "monumentalismo"), y que dificultan grandemente la vida de la modelización matemática.

Dado que el origen de estas restricciones se sitúa en los niveles de la *escuela* y la *sociedad*, es obvio, como ya hemos dicho, que no puedan modificarse directamente a través de cambios introducidos por el profesor en el aula. Dicho más claramente, no parece razonable pretender modificar directamente el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en una institución docente desde la posición institucional de "profesor" (individualmente considerado). Esto no significa que desde la *profesión docente* como tal (así como desde otras instituciones sociales en las que no entraremos aquí) no pueda actuarse, a largo plazo, sobre muchas de las restricciones que dependen del modelo epistemológico. Como hemos dicho anteriormente, postulamos que la introducción progresiva y generalizada de determinados "gestos de estudio" permitiría transformar el tipo de actividad científica que se lleva a cabo efectivamente en el aula y, al generalizarse, induciría un cambio de actividad de tal envergadura que acabaría provocando cambios en el modelo epistemológico dominante en la institución.

En esta sección propondremos de forma breve y esquemática algunos de los "*gestos de estudio e investigación*" que deberían ser introducidos en las instituciones docentes con el objetivo de responder a las *restricciones que la pedagogía dominante* impone sobre la vida "escolar" de la actividad científica en general y de la modelización matemática en particular.

Estos nuevos "gestos didácticos" (o gestos de estudio) que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación, deberán ser incluidos en los modelos docentes no monumentalistas y, por lo tanto, considerados como nuevas *características esenciales* de los REI. Chevallard (2004, 2006, 2007 y 2009b) designa algunos de estos "gestos" de estudio bajo el nombre de *dialécticas*. En lo que sigue describiremos brevemente algunas de estas dialécticas, mostrando su pertinencia como respuesta a las restricciones que la pedagogía dominante impone a la vida de la modelización matemática y relacionándolas con las experimentaciones presentadas en el capítulo anterior. En la medida de lo posible, propondremos algunos *dispositivos didácticos* que deberían formar parte de la *infraestructura matemático-didáctica* necesaria para que la modelización matemática – vía los REI – se pueda integrar plenamente en la enseñanza universitaria de las CCEE.

4.1. La dialéctica del individuo y el colectivo

Ya hemos enfatizado el hecho que la pedagogía dominante preconiza una enseñanza cada vez más individualizada y personalizada. Pero la integración plena de la modelización matemática en la actividad científica escolar requiere *potenciar el papel de la comunidad de estudio X* junto con el del *director* de estudio Y. Esta comunidad de estudio debe ser la encargada de estudiar *colectivamente* la cuestión Q y producir *solidariamente* una respuesta propia $R^{\heartsuit}$. En contraposición a la preponderancia de un "trabajo individual" y "personalizado" bajo las órdenes de Y, la colectividad de estudiantes con su director de estudio deben repartirse el conjunto de tareas y negociar las responsabilidades que debe asumir cada uno.

Este desplazamiento del “sujeto del estudio”, que pasa del individuo a la comunidad, tiene muchas consecuencias importantes en cuanto que posibilita otros gestos esenciales para la vida de la modelización matemática. En particular el estudio comunitario de las cuestiones da la oportunidad de *defender las respuestas R* producidas por la comunidad (aunque éstas aún tengan un carácter provisional y estén sujetas a un proceso de estudio en “activo”) en lugar de aceptar la *imposición de las respuestas oficiales* admitidas por la institución escolar. Si bien en las experimentaciones que hemos llevado a cabo se ha empezado a introducir de manera sistemática este nuevo gesto de estudio (ver apartados 4.5, a continuación), queda pendiente la integración oficial de dispositivos que lo institucionalicen.

4.2. La dialéctica de las preguntas y las respuestas

Otra dialéctica importante que esté en el corazón mismo del proceso de modelización y que incorporan los REI, es la del planteo de preguntas y la búsqueda de respuestas. En el contrato didáctico tradicional, recae generalmente sobre el profesor la responsabilidad de proponer preguntas que sean el motor del estudio, mientras que el estudiante sólo plantea dudas o interrogantes que, se supone, el profesor puede contestar rápidamente.

Como hemos visto en la experimentación de los REI el desarrollo de la actividad de modelización requiere que la comunidad de estudio se concentre durante un largo periodo de tiempo en el estudio de una misma cuestión, que la mantenga “viva” y “abierta” sesión tras sesión y que sea capaz, además, de derivar del estudio nuevas cuestiones. Además, la pertinencia de estas cuestiones y la oportunidad (o no) de su consideración debe aparecer a su vez como un gesto más del proceso de estudio, a negociar entre el profesor y los estudiantes.

La pedagogía “monumentalista” dista mucho de esta situación porque asigna sólo al profesor la capacidad de “enseñar” unos monumentos cuyo valor nadie contesta, y porque propone siempre recorridos perfectamente preestablecidos. Para superar las restricciones que aparecían durante la experimentación de los REI (pasividad de los alumnos, demanda de dirección estrechamente guiada al profesor, etc.), la profesora propuso a los estudiantes que, al final de cada sesión, plantearan por lo menos una cuestión o problema que hubiera surgido del trabajo realizado. Al principio de la sesión siguiente se ponían en común estas nuevas cuestiones y se discutía entre todos – bajo la dirección del profesor – el camino a seguir. Como ejemplo de nuevo dispositivo de refuerzo de esta dialéctica podemos citar el de las "*preguntas de la semana*" experimentado en al ámbito de la formación del profesorado de matemáticas (Cirade, 2006).

4.3. La dialéctica de los medios y los media

La actividad de modelización matemática tal como la hemos caracterizado en esta memoria sólo puede llevarse a cabo si los estudiantes disponen, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales R_i, de algunas respuestas preestablecidas $R^{\lozenge}$ accesibles a través de los diferentes medios de *comunicación y difusión: los media.* Estos *media* son cualquier fuente de información como, por ejemplo, los libros de texto, tratados, artículos de investigación, apuntes de clase, etc. Pero, las respuestas $R^{\lozenge}$ son construcciones que se han elaborado normalmente para dar respuesta a cuestiones diferentes a las que se pueden plantear a lo largo del proceso de modelización matemática y, por lo tanto, deben ser, en cierta manera, "deconstruidas" y "reconstruidas" en función de las propias necesidades. Por ello se van a necesitar otros tipos de *medios* como instrumentos indispensables para poner a prueba y "testar" la validez de estas respuestas.

Digamos, para resumir, que es esencial que el estudiante tenga acceso a respuestas $R^{\lozenge}$ que no se reduzcan a la respuesta "oficial" del profesor (o del libro de texto) así como a los medios para validarlas. Aparece aquí un enorme problema de investigación didáctica: ¿qué tipo de dispositivo didáctico posibilitaría llevar a cabo estos gestos y cómo puede integrarse dicho dispositivo en las actuales organizaciones didácticas escolares?

En nuestro trabajo experimental, a partir de la segunda experimentación, se pidió sistemáticamente a los estudiantes que buscaran información sobre los tipos de modelos que se proponían. En particular, debían buscar si ya existían y si eran lo suficientemente importantes como para que se les hubiera asignado un nombre particular (por ejemplo, el modelo maltusiano o el logístico). La validación de los modelos construidos o aportado se hacía a partir de los datos experimentales – que en nuestro caso había aportado la profesora – y mediante simulación numérica con Excel o la calculadora simbólica Wiris. Hemos descubierto recientemente un excelente "medio experimental" para el estudio de la dinámica de poblaciones elaborado por profesores investigadores de la Universidad Autónoma de México bajo el nombre de "Frijolárium" (Soberón, 2003) y que se basa en arrojar alubias blancas y pintas en un tablero de ajedrez que representa el hábitat en el que interactúan la poblaciones (representadas por las alubias).

4.4. La dialéctica de circunscribirse y salirse del tema

En todo proceso de modelización, cuando se parte de una cuestión científica Q a la que se pretende dar una respuesta en "sentido fuerte", es esencial integrar en la actividad científica escolar la posibilidad de *salirse del tema* al que inicialmente pertenece dicha cuestión y, según la evolución de las cuestiones que se derivan de Q, tener incluso la posibilidad de *salirse de la disciplina* de referencia. Por otra parte, es evidente que las cuestiones generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación rara vez pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único tema, sector o incluso disciplina.

La necesidad de "tomarse en serio" las cuestiones, es decir la necesidad de aportar respuestas que no sean un mero pretexto para mostrar la utilidad de los nuevos conocimientos enseñados, reclama la necesidad de incorporar el gesto de "*inspeccionar zonas de gran alcance*". Esta inspección, que casi nunca se adecúa de forma inmediata a lo que se busca, conduce a la posibilidad de encontrar cosas "inesperadas" y de poder así hallar aquellas pequeñas "semillas" que hacen posible progresar en la investigación. Es evidente que el encierro disciplinar en el que vive hoy día la enseñanza universitaria – incluso en las CCEE – dificulta mucho este gesto del estudio. Y éste también choca frontalmente con la preocupación del profesorado por conocer siempre de antemano el recorrido concreto del proceso de estudio de sus estudiantes.

Esta dialéctica, al igual que las anteriores, pretende modificar la tradición de la pedagogía escolar dominante que muestra una extraña escasez documental para "proteger" a los estudiantes de la "dispersión" y el "descontrol" y favorecer el trabajo con medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio. La integración de ambos gestos requeriría de nuevos dispositivos didácticos que los haga posibles más allá de su presencia puntual y anecdótica.

4.5. La dialéctica de la difusión y recepción de respuestas

Los procesos de estudio que se proponen como medio posibilitador de una enseñanza de las matemáticas basada en la modelización requieren, como hemos visto, dar importancia a las respuestas que la comunidad aporta a las cuestiones planteadas. Estas cuestiones no son conocimientos importantes por sí mismos (monumentalismo) sino por el tipo de respuesta que permiten aportar y el avance que su utilización supone. Contra la tentación de no dar la oportunidad de defender las propias respuestas R producidas y tender a imponer alguna respuesta admisibles dentro de la institución escolar, se debe invitar al grupo de estudiantes a *defender* las sucesivas respuestas R que aportan, aunque éstas aún tengan un carácter provisional y que estén sujetas a un proceso de estudio en "activo", pero de gran importancia para aquellos que las van a recibir.

En el caso de la experimentación presentada en el capítulo anterior, se introdujo un dispositivo relativamente ajeno a la cultura de la enseñanza de las matemáticas y que se designó como "Informes de resultados". Cada semana, los estudiantes por grupos debían redactar y entregar a la profesora un texto escrito en el que se recogían tanto los documentos aportados por la profesora como los resultados parciales del trabajo realizado en la sesión del taller, completado con sus comentarios personales y la información que, sobre el tema, hubieran podido recoger. Estos informes recogían por lo tanto las respuestas que cada grupo defendía y que aportaban al grupo clase al principio de cada sesión con vistas a un avance conjunto. Al final del taller, cada estudiante debía entregar su propio "Informe final" que ya no recogía la crónica del proceso de estudio sino que se centraba en presentar y defender una respuesta final a la cuestión inicialmente planteada.

Sin duda debido a su similitud con otros dispositivos de estudio utilizados en otras disciplinas, la elaboración, lectura y defensa de informes fue fácilmente aceptada por los alumnos. De todos modos, el trabajo de redactado y presentación de resultados requería un periodo de madurez. Aunque los estudiantes no estaban acostumbrados a redactar resultados de matemáticas, con el tiempo y las correcciones aportadas por la profesora se notó una clara evolución, poniéndose de manifiesto la necesidad de un proceso de aprendizaje de este tipo de gestos.

4.6. La completitud de las respuestas y el trabajo de la técnica

Citaremos, para acabar, una de las restricciones más importantes que dificultan la vida de la modelización matemática en las instituciones docentes. Se trata de la *incompletitud relativa* de las organizaciones matemáticas locales que se estudian en Secundaria (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004), ligada a las *restricciones escolares que impiden el desarrollo de algunos momentos didácticos*, como el tecnológico-teórico, el de la evaluación, el de la institucionalización y, muy especialmente, el del *trabajo de la técnica*.

Es muy habitual que la estructura didáctica binaria tradicional de la enseñanza universitaria, basada en dos dispositivos centrales, la "clase de teoría" y la "clase de problemas" (en la que generalmente las horas destinadas a la "clase de teoría" suelen superar sensiblemente a las de la "clase de problemas"), conduzca a los estudiantes a ver desfilar en el aula un gran número de praxeologías nuevas, que *nunca se desarrollan en manos de los estudiantes*, con las que deben familiarizarse y que deben aprender a dominar por sí solos, a partir del trabajo personal fuera del aula. En definitiva, el "mensaje" general que transmite la institución con los dispositivos didácticos que propone no incluye ningún indicio sobre la importancia efectiva del *trabajo de la técnica* para la creación de nuevos objetos matemáticos, ni induce a los alumnos a sentirse "expertos" en alguno de los numerosos nuevos ámbitos que se les "muestran".

En la década de los 90 se introdujo un nuevo dispositivo didáctico, los Talleres de Prácticas Matemáticas (Bosch & Gascón, 1994) como complemento a esta organización didáctica binaria, con el objetivo de ofrecer un lugar en el que los estudiantes, con la ayuda de un profesor, pudieran llevar a cabo un *estudio profundizado* de un pequeño número de tipos de problemas con los que ya se habían familiarizado en clase. El análisis de su funcionamiento controlado permitió poner de manifiesto su capacidad de incidencia sobre los dispositivos didácticos existentes y sobre la vida del resto de las dimensiones del proceso de estudio. En particular, se evidenció su capacidad para integrar tres momentos didácticos que aparecen claramente desvinculados en la organización tradicional: el momento exploratorio, el tecnológico-teórico y el del trabajo de la técnica. De esta forma se mostró la posibilidad de construir praxeologías matemáticas locales progresivamente más completas (que requieren la integración funcional de todos los momentos del proceso de estudio), imprescindibles para el correcto desarrollo de la actividad de modelización matemática.

En el caso de la experimentación de los REI, y tal como ya mostró Rodríguez en un trabajo anterior, Rodríguez, Bosch & Gascón (2008), el hecho de basar la dinámica del estudio en la necesidad de aportar respuestas "fuertes" a cuestiones con gran poder generador, permite que el trabajo de la técnica surja como un medio necesario del proceso de estudio, ya sea como instrumento para construir respuestas "completas", ya sea como una manera de afianzarse en vistas a su uso posterior. Por ejemplo, cuando el estudio de las poblaciones con generaciones mezcladas en tiempo discreto condujo al estudio de la potencia n-ésima de una matriz y a la necesidad de diagonalizarla, la profesora del taller junto con el profesor responsable de la asignatura organizaron sesiones de ejercicios, estructuradas con la lógica similar al Taller de Prácticas Matemáticas, destinadas a trabajar la técnica de la diagonalización como preparación para la continuación del estudio. Del mismo modo, el trabajo de simulación (por ejemplo para estudiar el comportamiento de las sucesiones definidas por el modelo maltusiano y el logístico) también requiere la consideración de un gran número de casos y, por lo tanto, un trabajo técnico considerable difícil de evitar.

Dado el carácter limitado y local de la experimentación que hemos llevado a cabo, es evidente que el estudio del papel de estos nuevos gestos y la creación de dispositivos apropiados para que dichos gestos puedan vivir en las instituciones escolares constituye un problema abierto de gran envergadura que no podemos más que dejar para estudios posteriores.

6

CHAPTER 6

SUMMARY, CONCLUSIONS, OPEN PROBLEMS AND STUDY PERSPECTIVES

1. FORMULATING THE DIDACTIC PROBLEM OF TEACHING MATHEMATICAL MODELLING IN NATURAL SCIENCES

At the origin of any problem of research in Didactics of Mathematics we can always find a difficulty affecting the process of teaching and learning mathematics. This difficulty can create real dysfunctions in the educational system, or just be integrated in its normal functioning with more or less trouble, till new dysfunctions appear. When this difficulty becomes an object of research, the way of interpreting it, the kind of 'entities' that are taken into account and the empirical domain that is considered as the 'minimal unit' of the analysis may strongly vary depending on the chosen research framework, thus leading to completely different research problems and giving rise to distinct and even 'unconmensurable' results. This is the reason why the formulation of the problem of investigation (Chapters 1 and 2) represents an important first step of the research process and can be considered as one of the contributions of our work.

The 'difficulty' that is at the core of our research is a *teaching problem* that arises in the first university courses of Natural Sciences and can initially be formulated as follows:

INITIAL TEACHING PROBLEM

What kind of mathematics needs to be taught to first year university students of Natural Sciences degrees and how does it need to be taught?

The 'practical answer' given to this problem can be found in the description of both the mathematics currently taught in first year university courses of Natural Sciences degrees and the dominant notions with respect to mathematics and its teaching prevailing in the teaching institution. It may be synthesized by means of a process that consists of two steps: first, teaching some elementary mathematical knowledge; then, 'showing' its uses or applications. This elementary mathematical knowledge, as such, is given to the students as an organised set of 'already built' tools, without clearly specifying its origins, its raison d'être or its field of application. Once it is 'mastered', it can presumedly be 'applied' to certain problematic situations that arise (or could arise) in the field of Natural Sciences.

This first spontaneous answer of 'traditional university teaching' regularly creates some teaching and learning difficulties due to the 'disconnection' and 'lack in sense' of the taught mathematical contents, leading us to set forth *a first reformulation of the teaching problem*:

FIRST REFORMULATION OF THE TEACHING PROBLEM

How to achieve for mathematical knowledge taught in the first university courses of Natural Sciences not to be reduced to a *set of disconnected concepts and techniques lacking in sense*, but for them to appear *in a functional way* as tools to *offer an answer to problematic questions* arising in Natural Sciences?

Facing this problem, one would suppose that the faculties of Sciences should create favourable institutional conditions to teach mathematics as a modelling tool essential to the understanding, use and development of the Natural Sciences. However, reality is far away from this purpose as, although it appears in the study programmes, it is only a utopian aspiration that never reaches the classroom. One of the main consequences of the prevailing vision of teaching mathematics at the university level, which we have designated as 'application of pre-established knowledge', is the *disappearance of the explicit problem of mathematical modelling* and the impoverishment of the mathematical modelling activity in university teachings, at least in Spain.

The search for answers to the first reformulation of the teaching problem has led us to present an important teaching proposal put into practice at the Danish university of Roskilde, which has committed itself to basing their teaching model on what they call 'problem-oriented project work'. This proposal represents an interesting turning point to the spontaneous answer of traditional university teaching. It is based on the hypothesis according to which the systematic use of *modelling tools to study scientific problems would approach the solution of the problem of the disconnection and lacking in sense of the taught mathematical knowledge.* When focussing on the case of Natural Sciences studies, this teaching proposal assumes that, for the proper development of projects, courses of 'mathematical modelling for scientists' need to be complemented with 'traditional' courses (calculus, linear algebra, etc.) where the 'basic tools' of the modelling process can be introduced. The Danish proposal implies significant progress with respect to the spontaneous answer of traditional teaching and enables us to introduce the *second reformulation of the teaching problem*, which places the problem in the field of teaching mathematical modelling:

SECOND REFORMULATION OF THE TEACHING PROBLEM

In the first university courses of Natural Science, and once the basic mathematical contents have been taught, how is it possible to achieve that mathematics are taught as a *modelling tool of scientific situations or facts*, in such a way that teaching is not organized depending on the mathematical contents but on the problems or projects the students have to accomplish?

This reformulation of the problem clearly highlights the need to reintroduce 'live mathematics' in university teachings, understanding it as key modelling tool of scientific facts. Placing ourselves in the field of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), we have shown the need to take into account two essential dimensions of mathematics teaching and learning processes to formulate the *didactic problem of mathematical modelling*. On the one hand, what we may call the 'epistemological dimension' of the problem that implies reinterpreting and reformulating mathematical modelling processes within a *general epistemological model of mathematical activity*. On the other hand, there is the 'ecological dimension' of the problem, which refers to the necessity to take into account the institutional conditions and restrictions that allow or hinder the way mathematics is done in an educational setting. This dimension leads to an important expansion of the institutional space traditionally reserved to the didactic of mathematics, in such a way that the didactic problem of mathematical modelling will be placed in the field of the *problem of didactic transposition* and, in more general terms, in the field of the *ecological problem* of the diffusion of mathematical knowledge in social institutions.

According to the ATD and to the epistemological model it puts forward, mathematical modelling cannot be considered as an aspect or modality of mathematical activity but has to be placed at the core of it, 'teaching mathematical modelling' thus becoming a synonym of 'functional teaching of mathematics'. At last, it is postulated that, from this viewpoint, *mathematical modelling has to be an integral part of any study process of mathematics*. Therefore, the problem of teaching mathematics comes to *focussing on the problem of recuperating the raisons d'être of mathematical contents and of their functionality to give answers to problematic questions.*

Facing this problem, the need arises to introduce a *new epistemology* at schools, the main objective of which comes to replace the school paradigm of 'inventorying knowledge' by a paradigm of 'questioning the world'. The dialectic between the approach of problematic questions (*Q*) and the search for answers (*A*), which is at the origin of constructing all scientific knowledge and, in particular, of mathematical activity and mathematical modelling, will have to be put at the foreground.

It may be said that this problem is a problem of *mathematical-didactic ecology,* related to the study of the conditions necessary to the 'life' of certain types of mathematical-didactic organizations in teaching institutions and the restrictions hindering the evolution of these organizations. We thus come to introduce what we have called the *didactic problem of mathematical modelling*, which incorporates into the successive reformulations of the teaching problem their corresponding *epistemological and ecological* dimensions:

THE DIDACTIC PROBLEM OF MATHEMATICAL MODELLING

Which *conditions are required* and which *restrictions hinder* (or prevent) that mathematics is taught, learnt, studied and used as a *modelling tool* in current mathematics teaching systems for Natural Science degree courses?

At what level do said *restrictions* appear and at what level should we place ourselves so as to be able to consider them as 'modifiable' *conditions*?

What kind of didactic devices will make global integration of mathematical modelling (interpreted as the ATD proposes it) possible in the aforementioned teaching systems?

The evolution of our research problem, from the initial teaching problem to this last formulation of the didactic problem is the main objecto of chapters 1 and 2. The main elements of the ATD frameworks are described in chapter 2, with the notion of *Study and Research Courses* (SRC) set forth by the ATD as the 'ideal' didactic organization for integrating mathematical modelling in current teaching systems. We showed how SRC first appear to offer an answer to two big generic restrictions, in the first place, to the relative incompleteness of local school mathematical organizations and, secondly, to the ‘monumentalist pedagogy’ that introduces knowledge at school as a ‘monument to visit’ instead of an ‘instrument to question and improve our lives in society’. As a consequence of this analysis, we have started to characterize the potential of SRC as a new type of didactic organizations to allow the normal existence of mathematical modelling in current teaching institutions.

The experimental part of our research consists in the design and experimentation of a SRC based on the study of population dynamics for first year students of the Autonomous University of Barcelona. Chapter 3 presents the mathematical a priori design of the SRC, showing how the evolution of the study process is generated by the questions that arose within a biological system, which is progressively modelled. The didactic a priori design of the SRC and a description of its experimentation during four academic years are described in chapter 4. All this information is part of the *empirical base* that will make it possible for us to analyse and specify some necessary *conditions* and strong *restrictions* that affect the ‘local’ implantation of the SRC and, thus, have an influence on the integration of mathematical modelling in current university teaching.

The possibility of a ‘large-scale integration’ of SRC beyond their local integration under the specific conditions created in our experimentation, needs to extend this *ecological study*, considering the restrictions appearing at different levels of generality, especially in what concerns the prevailing ‘epistemological and pedagogical model’ (the way mathematics and its teaching are currently considered in university institutions). We have used the scale of mathematical and didactic co-determination as a frame of reference to detect the repercussion the different restrictions have and to determine how to change *restrictions* into ‘modifiable’ *conditions* (Chapter 5).

The main objective of our research is to define the *mathematical-didactic infrastructure* necessary for a general implantation of mathematical modelling in university teaching systems, or, in other terms, to describe in as much detail as possible the *conditions* required for mathematics to be studied as a modelling tool in the current university teaching of mathematics for Natural Sciences. Therefore, based on the first analysis of the empirical data of the experimentations we set forth in chapter 4, completed with the analysis of the prevailing ‘epistemological and pedagogical models’, we have proposed a more detailed answer to the *didactic problem of mathematical modelling*. We are now describing the results obtained and the new areas of investigation opened by our research.

2. RESULTS OBTAINED AND CONCLUSIONS

2.1. Design and experimentation of a university mathematical course for Natural Sciences based on modelling

An important result of our investigation is the design of a study process that places modelling at the heart of the mathematical work proposed to the students. It consists of a SRC composed by three branches (SRC1, SRC2 and SCR3) covering most of the mathematics taught in a first year university course for Natural Sciences degrees. In other words, we propose a different way of describing the mathematical contents of a first year university course for Natural Science: instead of prevailing the 'theoretical' organisation of concepts, properties and techniques, we put the questions and the production of answers by ways of modelling at the core of the process.

We start from a generative question Q_0 about the *study of population dynamics*. It constitutes the thread of the entire learning process. We propose to answer this question by constructing different mathematical models, which allow to frame the problems at first, and to broaden them progressively. Indeed, when studying the links between the system (the growth of a population) and the initial model, new questions appear that can only be addressed through the construction of more comprehensive mathematical models that, in turn, generate new questions, and so on. A sequence of successive enlargements of the considered mathematical models is thus generated. We have shown that this process helps connecting and making functional the different mathematical contents that are programmed in the course.

A priori mathematical design of the SRC

We consider a system X (population), where a given value x_t (population size) changes over time t. The study of the population evolution, i.e., the *dynamics of population X*, gives rise to the following *initial question:*

$\boldsymbol{Q_0}$: Given the size of population X over some time period, can we predict its size after n periods? Is it always possible to predict the long-term behaviour of the population size? What sort of assumptions on the population and its surroundings should be made? How can one create forecasts and test them?

Depending on whether we consider time in a discrete or continuous value, we develop two families of models: *discrete models* or *continuous models* in population dynamics. If we assume, initially, that time t is measured in discrete units, and that x_t depends, among other factors, on past states $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-d}$ $(0 < d \leq t)$, studying question $\boldsymbol{Q_0}$ leads us to consider two main types of models:

- When x_t only depends on x_{t-1} (population with independent generations), we study models based on *recurrent sequences of order* 1: $x_{t+1} = f(x_t)$, where f is a real valued function of one variable. We can thus cover the field of one variable calculus and the study of sequences. (First branch of the SRC: SRC1)

- When x_t depends on the $d > 1$ past generations $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-d}$ (population with mixed generations), we study recurrent sequences of order $d > 1$, which can be expressed as vector recurrent sequences with $X_{t+1} = f(X_t)$ where $X_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1})$ is the vector of the d initial generation sizes and $X_i = (x_{id}, x_{id+1}, \ldots, x_{id+(d-1)})$ is the *i-th* vector of d generations, $0 \leq i \leq n$. This second branch of the SRC (SRC2) covers the field of linear algebra.

If we assume that time t is measured as a continuous variable, we study the continuous evolution of the population, which has an analogous structure, in some sense parallel to the situations described above. This allows us to study mathematical models with *ordinary differential equations* (ODE) of an order bigger than 1 (Third branch of the SRC: SRC3).

We will not go into further detail with respect to the mathematical design described in chapter 3. We will only highlight the importance said design had for starting off the SRC and the a priori study of the 'mathematical generating power' of the initial question. This design made it possible to show in advance how an in-depth study of the initial question managed to cover all the contents of the programme of the subject, which were established beforehand, as well as some additional contents. Apart from offering a description and enabling the control of the successive questions derived from Q_0, which would be tracing out the possible routes to be followed in the effective experimentation of the SRC.

The following figures 1 and 2 show the different components of the three branches of the SRC. The first one focuses on the questions, systems and models used during the study process, the second one presents the mathematical organisations activated in the SRC.

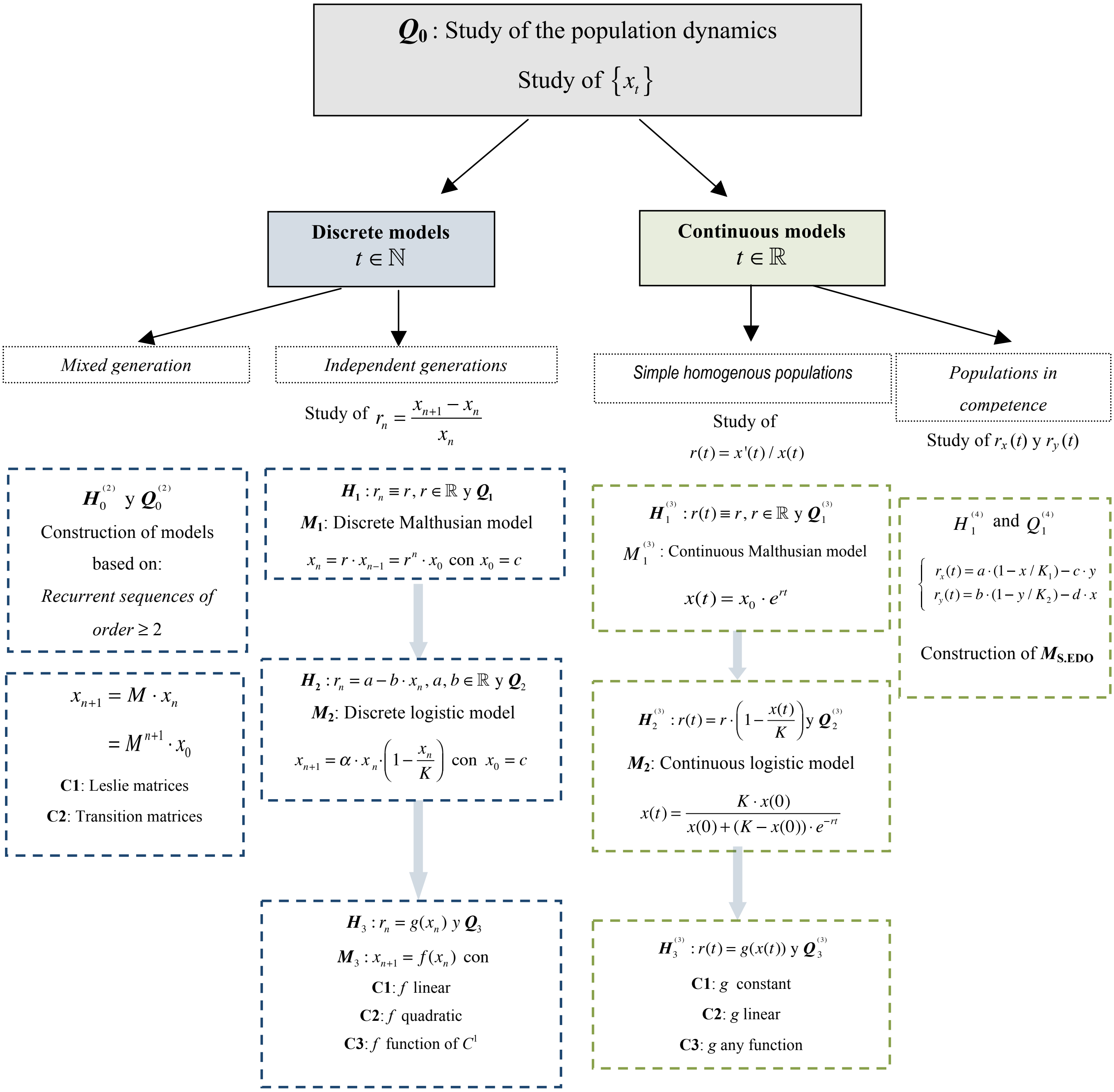


Figure 1. Summary of the three branches of the SRC

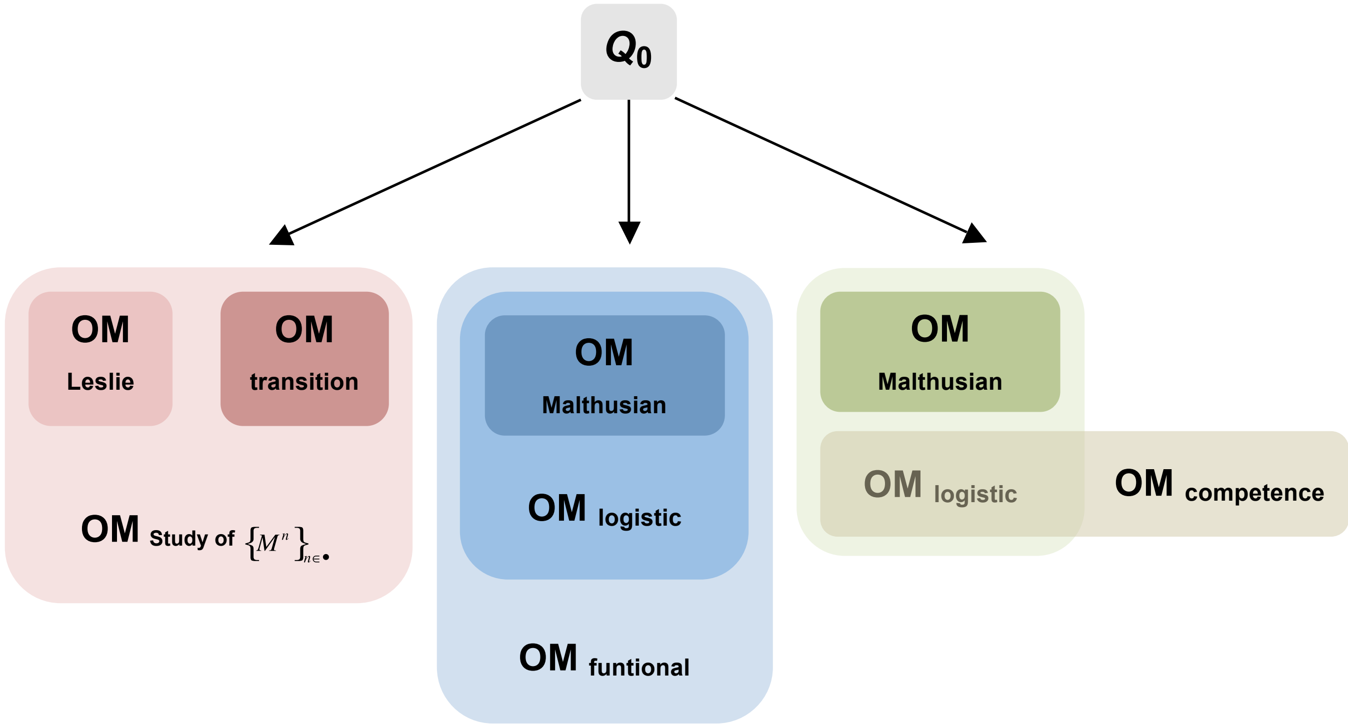


Figure 2. Mathematical Organization (MO) appearing during the SRC

2.2. *Local ecology* of mathematical modelling: Results from the experimentation

The RSC was experimented during the academic years of 2005/06, 2006/07, 2007/08 and 2008/09 with first year students of a technical engineering degree (3 year programme), in the Industrial Chemical Engineering department, at the Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). The testing took place within the one-year course 'Mathematical Foundations of Engineering' in what we called a 'Mathematical Modelling Workshop', this author always being the teacher of the workshop and having an average of 25-30 students per year. The main results of the experimentation presented hereafter, can be considered as a first description of the 'local ecology' of mathematical modelling, in the sense that they set forth some important conditions for the carrying out of RSC integrating mathematical modelling as a main tool of the study and research process.

2.2.1. Teaching mathematical modelling through SRC and their local compatibility with traditional teaching

As we proposed in the design phase, we verified that the sequence of questions arising from the generating question Q_0 cover most of the traditional curriculum of a first year mathematics university course, plus some additions. As the SRC were taking place, we observed that the issues arising from the SRC had more and more impact on the class lectures and problem sessions.

A very clear example was found in the development of the second SRC in which, unlike what was expected beforehand, it was agreed upon form the first experimentation that the study of modelizable phenomena would be treated parallely by means of Leslie matrices in the theory class, and the study of modelizable phenomena through transition matrices in the class dealing with problems and in the workshop. Another example of this incidence of the workshop activity on the work carried out in the traditional teaching devices (theory class and class dealing with problems) was the successive integration of the way of treating the workshop problems with respect to differential equations in the aforementioned classes. The coordination between the old and the new device was in this case especially remarkable, to the extent that when a question posed in the workshop required the introduction of new mathematical tools, both theory and problem classes were used to provide those tools to the students in such a way that said tools would be used in the subsequent workshop sessions.

As a matter of fact, this would be the ideal situation for a mathematics course that integrates the SRC as an essential didactic tool. The appearance of mathematical organisations in the course would then be subordinated to the needs appearing from the study of a small number of problematic questions. If we analyze the process from the first experimentation till the last one, considerable progress in that direction may be observed. Progressively, in the theory classes and in the classes dealing with problems, more specific questions originated in the workshop are dealt with, evaluation devices gathered questions that are more and more adjusted to the problems dealth with in the SRC (that is, questions arising in mathematical modelling activities) parallely reducing exam questions that can be solved by means of algorithmic procedures.

Another important result of the experimentation is that it has been possible at all times to keep in mind the *generating question* being dealt with. This has been the *leading thread* of the entire study process and the *driving engine* of the several essential questions that structured it. It has thus been possible, in all the experimentations, to use mathematical tools as instruments to provide an answer to the successive questions generated progressively and not as a learning objective in itself. This result means a step forward, though partial, towards *functional teaching* of mathematics in comparison to traditional *monumentalism*. We believe this to be one of the reasons why the theory classes and the classes dealing with problems started to get linked to the SRC and to the mathematical modelling activity the SRC make possible and promote. The mathematical modelling activity indeed appears as a generating source of questions and raisons d'être of the knowledge introduced in the other devices and, as a consequence the need arises to 'coordinate' the SRC with the rest of the devices. We may say that in this sense the SCR potentially have a *transforming and integrating function* of the different didactic devices.

The distribution of responsibilities during the management of the SRC was very different to the one of a traditional course. From the beginning, the instructor acted as the director of the study process instead of lecturing the students. She gave as much autonomy as possible to the students and explicitly negotiated some aspects that are usually under the responsibility of the teacher: scheduling the study process, selecting mathematical contents, using computer and bibliographical resources and evaluating partial results. This *increasing autonomy* taken on by the students during the SRC is a necessary condition to carry out the activity of mathematical modelling. In this sense, we observed the importance of always keeping in mind the generating question, which we used as the leading thread of the entire study process. This allowed us not to consider the mathematical tools as a goal in itself, but rather to give an answer to a certain question. We thus obtained a functional teaching of mathematics as opposed to the traditional 'monumentalism' (see Bosch & Gascón, 2006). The SRC can be seen as a generating source of modelling questions and a driving engine of the rationale of some of the knowledge presented through other didactical devices.

These results seem to contradict the stiffness of the didactic devices that have dominated university teaching for many years: the theory class, the class dealing with *problems and the final exam. However, we need to highlight that the institution in which the experimentations took place fulfilled special conditions: there was only one small group of students and one teacher in charge of the subject, which implied a certain independence of the study community. Furthermore, given the fact that the SRC experienced basically covered the official curriculum and that the official timetable for theory and problem classes was followed, it may be said that a very local modification was being introduced, which hardly disturbed the global didactic ecology of the engineering and chemistry studies and, subsequently, those of the faculty. However, the particular conditions of the experimentation carried out – especially the fact that the teacher of the RSC was a researcher in didactics of mathematics, amongst others things – suggest that this modification may not be generalized without encountering strong restrictions which would stem from both from the most generic pedagogical levels and from the most specific mathematical didactic ones.*

2.2.2. Pedagogical and didactic restrictions on the teaching of mathematical modelling through SRC

The apparent simplicity to integrate the three SRC into the subject of mathematics in the first university course of technical, chemical and industrial engineering must not hide the appearing of certain restrictions that have affected the carrying out of the SRC and, which therefore have modified some of the functions they were supposed to assume

If we place ourselves at the generic level of the space-time organization of teaching (pedagogical level), we need to highlight the willingness of both the workshop teacher and the students to meet up once a week for an hour and a half outside the university teaching hours, which offered the students the opportunity to increase their final mark of the subject by 1 point out of 10. Establishing the SRC as a 'normalized' activity would imply, at least, undoing the current timetable distribution of the subjects so as to be able to make room for longer sessions as well as creating smaller groups than usual.

If we situate ourselves at the level of mathematical discipline, despite the fact that the experimentation has adjusted quite well to their a priory design, we observe that, in the first experimentations, the first SRC mainly remained partially 'truncated', due to the need to progress at the same rhythm and dealing with similar contents as the ones studied in the theory classes. In none of the experimentations, for instance, has it been possible to continue with the study of interpolating polynomials (despite the fact that several groups of students suggested towards this direction and that it constituted an interesting alternative to answer the question posed) because in doing so it would have moved away the workshop from the mathematical content of the rest of the teaching devices. This restriction was accepted a priori by the teachers of the subject and by the researcher herself, as the idea was to try to link as much as possible the mathematical activity developed in the SRC to the official curriculum of the subject handed out to the students at the beginning of the school year. The way of managing the 'openness' of the SRC (in what concerns the kind of knowledge tools used) and its relation or compatibility with the traditional 'closeness' of the official syllabi (that pre-determines the contents to be taught independently of the kind of problems approached) remains an open problem. It does not seem to have an easy solution if we avoid touching the foundations of the curriculum definition: for example by defining it in terms of 'questions to study' instead of 'contents to learn'.

2.3. Going back to the didactic problem: didactic functions of the SRC and conditions for the survival of mathematical modelling

Let us not forget that the didactic problem of mathematical modelling, as we formulate it in the field of the ATD, is considered in the following questions:

> Which *conditions are required* and which *restrictions hinder* (or prevent) that mathematics is taught, learnt, studied and used as a *modelling tool* in current mathematics teaching systems for Natural Science degree courses? At what level of the scale of mathematical-didactic co-determination do said *restrictions* appear and at what level should we place ourselves so as to be able to consider them as 'modifiable' *conditions*? What kind of didactic devices will make global integration of mathematical modelling (interpreted as the ATD proposes it) possible in the aforementioned teaching systems?

Our answer to this problem is based on the notion of SRC interpreted as the prototype of 'functional didactic organisations'. As such, they appear as an appropriate teaching device to carry out a mathematical activity that is motivated by the study of open questions and, in the process of building up an answer to these questions, facilitates the construction of connected and complete enough mathematical organisations. Related to this last point, and always considering the specific RSC experimented, we have shown the *didactic functions* of the SRC in terms of their capacity of integrating the different *moments of the study process* so as to highlight that the SRC enable and promote the 'viability' of mathematical modelling in teaching institutions.

First, we have seen the importance, during the SRC, of the *exploratory* and *technological* moments. Indeed, promoting the 'experience' of these moments allowed the students to create hypotheses, formulate questions, compare experiments and reality and choose the relevant mathematical tools. All these 'study gestures' are essential in the first steps of mathematical modelling processes: delimitation of the system, construction of the model and technical work with the model. We can thus state that RSC, when they incorporate these didactic moments, facilitate the first steps of mathematical modelling.

Other moments strongly reinforced by SRC were the *evaluation* and *institutionalization* moments. Specifically, two didactic devices undoubtedly allowed changes in the ruling didactic contract: team presentations, followed by delivery and defence of the reports in each session; class materials without a priori fixed contents. These two moments helped conduct rather successfully the phases of production of knowledge and interpretation of the system, as well as the criticism and study of the limitations and links between each model constructed. These are crucial phases in the modelling process, which are not covered in traditional educational systems.

With respect to the *experimental contrast*, we highlight the spontaneous use on behalf of the students of computer tools, which occurred on numerous occasions in all the workshop experimentations and considerably favoured the development of the *exploratory* moments and of the *technical work*. This development facilitated the work with models, and, more particularly, the *experimental work of numerical simulation*, which could turn out to be very tedious without the technological tools (matrix calculus, high degree polynomial equations, graphic representation, etc.). The students resorted to it on numerous occasions, especially in the first and second SRC, when it was necessary to simulate recurrent sequences of order 1 or more, calculus of a matrix power, etc. This promoting of the exploratory and experimental work made it possible to carry out (a) ‘long term work’, a necessary condition for an effective process of mathematical modelling to exist.

The fact that the students take on new responsibilities (although only partially) during these different moments of the study process implies an increasing participation in the *production and interpretation of the knowledge about the system* as well as the work related to the *contrast and study of limitations* of the successive models constructed and the relations between them. Given the importance of these stages or phases of the modelling activity and the difficulty the traditional teaching system shows to make them live, the role of the SRC as a didactic device that imposes favourable conditions for the teaching of modelling becomes obvious.

In general terms, considering the work done by students in a particular model (the discrete logistic model, for instance) we have observed that students went through all the *different stages of the modelling process*. A didactic organisation starting from a *generative question* and structured by a sequence of questions and provisional answers not previously determined that helps keeping the initial question ‘alive’, seems appropriate to promote the mathematical modelling activity. Furthermore, if we analyse the whole course structured by the three SRC, it becomes clear that one of the main didactic functions of SRC consists in its capacity to produce a progressive enlargement of the models that are being built up, which helps the connection between models and, finally, promotes the internal dynamics of mathematical modelling activity. One of the main didactic functions of the SRC comes from their capacity of broadening and articulating different mathematical models, and hence giving momentum to the internal dynamics of mathematical processes. At this point we believe that this momentum can only be generated if, during the SRC, the modelling activity can progressively achieve the status of a *(mathematical) study object*, beyond the status of being a *(didactic) tool* to study a number of mathematical organisations. Only then will the students be able to formulate all the questions related to the study process without constraints, and to take responsibilities traditionally assumed by the teacher.

2.4. *Global ecology* of mathematical modelling

Apart from the variability of the four experimentations carried out with the SRC, a set of regularities or invariants have appeared that made it possible for us to offer a first approximation to the 'didactic ecology' of the SRC, that is, the set of conditions which enable their development as an organisation of the university study processes and the set of restrictions that limit this development and could, in the long run, put its viability at risk. However, in order to think of implementing the SRC in a 'generalized way' in university teaching it is necessary to continue investigating into the specific ecology required.

This has been the aim of chapter 5 which, focussing on the analysis of the restrictions that appear at the more generic levels of mathematical-didactic co-determination (see figure 3), analyzed the restrictions that come from the *epistemology and pedagogical ideology dominant in the scientific university community*.

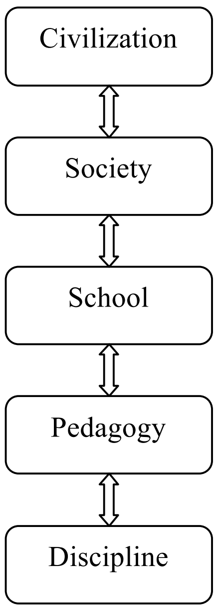


Figure 3. Generic level of didactic codetermination

First considering the levels of *society* and *school*, we investigated into the *dominant epistemology* in the teaching institution considered, the university, and into its effect on the possible mathematics teaching practices. By 'dominant epistemology' we understand the way our society, the university as an institution and, more concretely, the community of university teachers (and students) have to understand what mathematics is and what its relation is to natural sciences. Our first hypothesis was that the widespread understanding of mathematics and its relation to natural sciences is what we can call 'applicationism'. It has been depicted in the following way: a strict separation between mathematics and other disciplines (in particular natural sciences such as biology and geology) is established; when mathematical tools are built, they are 'applied' to solve problematic questions from other disciplines, but this application does not cause any relevant change in neither mathematics nor in the rest of disciplines where the questions to study appeared. For example, in the majority of the Spanish university courses we have examined, the study of population dynamics is a subject located in the sector of differential equations under the label of 'application', as if some dynamic laws could exist without any mathematical tool to describe them and, in the same way, as if differential equations could independently exist without any extra-mathematical problem to solve. We have shown that one of the main characteristics of this dominant epistemology at university level is that it extraordinarily restricts the notion of mathematical modelling. Under its influence, modelling activity is understood and identified as a mere 'application' of previously constructed mathematical knowledge or, in the extreme, as a simple 'exemplification' of mathematical tools in some extra-mathematical contexts artificially built in advance to fit these tools. To be more concrete, the main characteristics of 'applicationism' can be described using the following indicators:

> ***I*₁**: *Mathematics is independent of other disciplines* ('epistemological purification'): mathematical tools are seen as independent of extra-mathematical systems and they are applied in the same way, independently of the nature of the system considered.
>
> ***I*₂**: *Basic mathematical tools are common to all scientists*: all students can follow the same introductory course in mathematics, without considering any kind of specificity depending on their speciality.
>
> ***I*₃**: *The organisation of mathematics contents follows the logic of the models* instead of being built up from considering modelling problems that arise in the different disciplines. All occurs as if there were a unique way of organising mathematical contents and different ways of applying them.
>
> ***I*₄**: *Applications always come after the basic mathematical training*: the result is then a proliferation of isolated questions that have their origin in the different systems. The first thing is to learn how to manipulate the mathematical concepts and later learn about their use. The models are built from concepts, properties and theorems of each theme independently of any extra-mathematical system.
>
> ***I*₅**: *Extra-mathematical systems could be taught without any reference to mathematical models*, that is, there exists the belief that natural science can be taught without any mathematics.[1]

To empirically contrast to what degree 'applicationism' prevails in university institutions (see Barquero *et al.* in press), we used these indicators to analyse teaching

[1] This is an extreme indicator of the independence between mathematics and natural sciences (especially in the case of biology and geology) that is surprisingly widely shared to the point that, in most cases, people state that scientific systems could be studied without any mathematical tool.

materials (syllabi, textbooks' prefaces and curricular documents) and handed out an interview and a questionnaire to geology and biology teachers and students of a science faculty in Catalonia.

2.4.1. Restrictions on the life of mathematical modelling derived from 'applicationism'

The characterization of 'applicationism' has been useful to us to analyse the *restrictions* on the life of mathematical modelling which are derived from the applicationalist interpretation of mathematical modelling and of the role it takes on in mathematical teaching for natural sciences. Thus situating ourselves at the proper level of the scale of levels of mathematical-didactic co-determination in which these restrictions appear, we will be able to put forward the conditions necessary to achieve a 'real' integration of mathematical modelling.

One of the main characteristics of 'applicationalism', and that implies one of the strongest restrictions on the normal life of mathematical modelling, is that it establishes a *clear distinction between mathematics and the rest of natural sciences*. It is furthermore supposed that both 'worlds' evolve with independent logic and without any kind of interaction. This fact, which partly results from the first three indicators of applicationism, leads to greatly reduce the possible role of *mathematics as a modelling tool of scientific systems* and even denies the role of mathematics as a key tool to study the problems that arise in extra-mathematical systems. In general the mathematics taught present a highly stereotyped and crystallized structure that does not mingle with the systems that are modelled and, besides, the mathematics taught are never 'modified' as a consequence of being applied.

This radical separation between mathematics and natural sciences makes it impossible to consider *mathematics as a constituting tool* of natural sciences. We may consider this extreme characteristic of applicationalism one of the most generic restrictions that, appearing at the levels of *society* y *school*, is based on not considering mathematics as a fundamental tool for the search of answers to problematic questions that may appear in different fields of reality. With respect to these strong restrictions, it is also concluded that, if we place ourselves in an 'intramathematical' field, it cannot be considered that the processes of mathematical modelling are *independent* of the rest of the mathematical activity nor can the mathematical activity be interpreted as an ‘addition’ to unite both worlds, the mathematical one and the world of natural sciences. In this sense, mathematics are considered the key modelling tool of all kinds of systems, that is, the search for an answer to problematic questions and, therefore, are *constitutive of the construction of all scientific knowledge*. This means that certain physical, chemical, biological, etc. phenomena are ‘built’ during the process of mathematical modelling (and not before).

Thanks to incorporating SRC into the teaching system, we can see how scientific problematic questions are situated at the origin and core of the mathematical activity. Its study needs to start a process of mathematical modelling so as to provide an answer in the ‘strong sense’, that is, the building up of an entire mathematical organisation as an answer to said mathematical questions. This ‘first’ process generates new questions of an extra-mathematical nature that must not be abandoned or ignored but must generate new modelling processes. In these dynamics it no longer makes sense to think of two kinds of different and independent logic that rule both ‘worlds’, the mathematical one and the world of the rest of the scientific disciplines. It will be necessary to think of a single world, the world of scientific activity of which mathematical modelling is an integral part.

Closely related to the aforementioned, new restrictions appear on the life of mathematical modelling that are related to ‘applicationism’: (a) Assume that *the mathematical models pre-exist and are applied to scientific systems*, the two realities of which, the mathematics that produce models and the natural sciences that constitute the field of the systems, maintain a one-directional relation (in time and manner). (b) Assume that *neither the models nor the systems evolve*. Both entities, models and systems, are considered static throughout the study process: neither do the problems posed in the scientific systems evolve nor are the models modified in the least in order to be used.

In the mathematical modelling processes, as the first characteristic of the SRC establishes, the problematic questions are situated at the starting point of the activity, so the mathematical needs arise *a posteriori* (from questions in natural sciences) and throughout the mathematical ‘adventure’ of studying the generating question. In the course of the study process of the *generating question*, a lot of new *questions* arise and evolve. The continuous search for answers to those questions will lead to the (re)construction of a large amount of mathematical organizations that may not be established beforehand, respecting the degree of opening the SRC introduce. It therefore makes no sense to *a priori* limit the use of certain pre-established mathematical tools, if in turn the mathematical modelling activity is not being limited. We have postulated that the work of mathematical modelling may be described as an arborescence of questions and provisional answers that appear in the course of a recursive process, which produces answers, that are gradually larger and more complete.

Another restriction of ‘applicationism’ on the life of mathematical modelling shows up in the usual organisation of mathematical study programmes taught at natural science degrees. In fact, neither the structure given to the contents nor the way of developing them in class make it possible to carry out mathematical modelling work based on the study of problematic questions that arise in scientific fields which are close to the speciality chosen by the students. The *raison d’être* (mathematical or extra-mathematical) of the contents, which are part of this basic mathematical training the students need to acquire, is not part of the study programme. The ‘modelling activity’ is restricted and limited to the simple illustration or occasional and anecdotal exemplification of certain pre-established models to systems fitted out with pre-established problems.

This set of restrictions, which greatly limits the ‘nature’ and ‘structure’ of the possible mathematics taught in natural sciences, may first of all be situated at the levels of *pedagogy* and *discipline*. However, these restrictions have a great impact on the more specific levels, that is, on the specific way how mathematics taught are organized in *areas*, *sectors*, *themes* and *questions*. More generally, all restrictions coming form ‘applicationism’ make it very difficult (and almost prevent) that mathematical modelling plays the role it is being granted from the epistemological model the ATD puts forward. In particular we may say that the activities (isolated and occasional) that are related to some aspects of the mathematical modelling process and that appear in the current university teaching systems, may by no means introduce mathematics as an instrument of the scientific activity.

2.4.2. Restrictions derived from the dominant pedagogy in university institutions

The implementation and the generalized development of the SRC in the university teaching system present the need to overcome not only the restrictions that come from the prevailing 'applicationist' epistemology but also the restrictions imposed by the 'dominant pedagogical ideology' in the university teaching system.

We have also introduced and described some of the traits of this prevailing pedagogical model in university teaching that are closely linked to the 'monumentalist' pedagogy, which is in many aspects opposed to the teaching model proposed by the ATD and represented by the SRC. More specifically, we took down some of the characteristics of this dominant pedagogy that will require, in future investigations, a more systematic study. We postulate that, as the teaching model in force in the university teaching systems favours said pedagogy, serious restrictions (we will describe below) will exist on the life of mathematical modelling.

The main characteristics of this dominant pedagogy can briefly be described in the following points:

1. The problematic questions that constitute the raisons d'être of the curricular mathematical contents are not essential in the study processes and tend to disappear.

2. The aim of the teaching processes is based on contents established beforehand.

3. The pertinence and validity of knowledge is not questioned during the study process. At the most only its logical coherence is being contrasted.

4. During the study of problematic questions, the existence of possible pre-established answers different to the ones the teacher provides, are not taken into account, nor is its validity and appropriateness contrasted.

5. The dominant pedagogy has an individualistic conception of the study process, in opposition to the collective dimension of scientific research.

In order to overcome all the restrictions coming from the epistemological and pedagogical dominant models, we postulate the necessity to introduce new devices and didactic 'gestures' that have so far remained confined to the private field of investigation and that do not have an easy entry in the usual didactic contract. As we will see now, some of these devices and 'gestures' have shown their efficiency in our experimentation, even if others remained still unexplored. All of them have to be considered in the new 'didactic ecology' that should be created to integrate mathematical modelling in university teaching activities.

2.5. Conditions, gestures and devices to integrate mathematical modelling in university teaching

If the aim is to create the appropriate *conditions* for mathematical modelling to exist as a normalized activity in university teaching of mathematics for natural sciences, one could initially think of directly intervening in the epistemological and didactic models of that institution. This strategy, however, leads to try to directly influence some models that are anchored in deep-rooted practices and a strongly established culture in society. We will thus propose a different way, which, in a sense, is the opposite way: beginning to change the *gestures of the study*, which requires the introduction of new *didactic devices* which make the carrying out of said gestures possible, so as to transform the scientific school activity. We postulate that this change in the scientific school activity will, in fact, cause changes in school pedagogy and will, in the long run, end up modifying the epistemological and didactic models prevailing in the teaching university institution. This strategy tries only to deal with an ecological problem that is very complex. The initial formulation of said problem could be the following:

Which conditions are required for mathematical modelling to live in a normal way in university teaching of mathematics for natural sciences?

This ecological problem could be posed in a more precise way using the notion of *Didactic Organisation or praxeology* (DO).

What type of DO is necessary to make life of mathematical modelling normal in university teaching of natural sciences?

And, using the didactic praxeology components, that is, the didactic tasks and techniques along with the didactic technologies and theories, we could express the problem as follows:

Which didactic tasks and techniques (that is, which didactic gestures or gestures of the study and which devices to carry out said gestures) and which technology and didactic theory (in particular, which epistemological and didactic models of mathematics) are necessary for mathematical modelling to live normally in university teaching of natural sciences?

Throughout this paper we have described the Study and Research Courses (SRC) as a reference model for the analysis, design and experimentation of 'functional' (in the sense of 'non-monumentalist') didactic organisations (or teaching models). The main characteristics of the SRC intend to respond to the restrictions that come from the *dominant epistemological model* (and partly from 'monumentalism') and that make the life of mathematical modelling very difficult.

Given the fact that the origin of these restrictions is located at the levels of *school* and of s*ociety*, it is obvious, as we said earlier, that they are not to be directly modified through changes introduced by the teacher in the classroom. To put it more clearly, it does not seem reasonable to try to directly modify the dominant epistemological model of mathematics in a teaching institution from the institutional position of the 'teacher' (considered individually). This does not mean that from the *teaching profession* as such (as well as from other social institutions we will not comment on here), a lot of the restrictions that depend on the epistemological model may not be modified in the long run. As we mentioned earlier, we postulate that the progressive and generalized introduction of certain 'study gestures' could make it possible to transform the type of scientific activity carried out efficiently in the classroom.

We here briefly and schematically synthesize some of the '*study and research gestures*' that should be introduced in the teaching institutions with the aim of responding to the *restrictions that the dominant pedagogy* imposes on the school life of the scientific activity in general and of mathematical modelling in particular. These new 'didactic gestures' (or study gestures) that up to now remained confined in the private field of research, will need to be included in the non-monumentalist teaching models and will therefore need to be considered as *essential characteristics* of the SRC. Chevallard (2004b, 2006a, 2006b & 2009b) designates some of these study gestures under the name *dialectics*. In what follows we will succinctly describe some of these dialectics, showing their appropriateness as an answer to the restrictions the dominant pedagogy imposes on the life of mathematical modelling and relating them to the experimentation presented in the previous chapter. Insofar as it is possible we will put forward some of the *didactic devices* that should be part of the *mathematical-didactic infrastructure* necessary for mathematical modelling – through SRC – to be fully integrated into the university teaching of natural sciences.

2.5.1. The individual *VS* collective vision of study processes

We have highlighted the fact that the dominant pedagogy supports more and more individualized and personalized teaching. The full integration of mathematical modelling, however, in the scientific school activity needs to *promote the role of the study community X* along with the *director* of study *Y*. This study community has to be in charge of *collectively* studying question *Q* and *solidarily* producing an appropriate answer to *Q*. In contraposition with the dominance of 'individual' and 'personalized work' under the orders of *Y*, the group of students and their director of study have to share the set of tasks and negotiate the responsibilities each of them has to assume.

This displacement of the 'study subject', which goes from the individual to the community, has a lot of important consequences in the sense that it makes other essential gestures possible for the life of mathematical modelling. In particular, the group study of questions provides the opportunity of *defending answers* produced by the community (although they are still of a provisional nature and are subject to an 'active' study process) instead of accepting the *imposition of the official answers* admitted by the school institution.

2.5.2. The dialectic of questions and answers

An important dialectic at the very centre of both the modelling process and of the SRC is the proposing of questions and the search for answers. In the traditional didactic contract the fact of proposing questions as the driving force of the study generally falls on the teacher, while the student only comes up with doubts or questions the teacher can supposedly answer quickly. As we saw in the experimentation of the SRC, its development requires the study community to concentrate on the study of one and the same question for a long period of time, that has to remain 'alive' and 'open' session after session and that it is furthermore able to derive new questions to study. Furthermore, the pertinence of these questions and the opportunity (or not) of its consideration must appear as one more gesture of the study process to be negotiated between the teacher and the students. The 'monumentalist' pedagogy is far from this situation, for instance when it only attributes to the teacher the ability to 'teach' some contents the values of which nobody answers, and when perfectly pre-established courses are always being proposed. In order to overcome the restrictions that appeared during the experimentation of the SRC (students' passiveness, their request for a close supervision by the teacher, etc.), the teacher proposed to the students that, at the end of each session, they would at least pose one question or problem that arose from the work carried out. At the beginning of the following session these new questions were brought together and they all discussed – under the teacher's watchful eye– the way to continue. As an example of a new reinforcement device of this dialectic, we may mention the one of '*questions of the week*' experienced in the field of training mathematics teachers (Cirade, 2006).

2.5.3. The dialectic of the media and the *milieus*

The modelling mathematical activity as we have characterized it can only be carried out if the students have some pre-established answers accessible through the different means of c*ommunication and diffusion: the media,* to elaborate the successive provisional answers. These *media* are any source of information such as, for instance, textbooks, treatises, research articles, classnotes, etc. However, the answers provided are constructions that have usually been elaborated to provide answers to questions that are *different* to the ones that may be put forward throughout the mathematical modelling process and therefore they have to be in a certain manner 'deconstructed' and 'reconstructed' according to the new needs. Other types of *milieus* will therefore be necessary to put to the test and 'check' the validity of these answers.

To sum up, it needs to be mentioned that it is essential for the student to have access to answers that are not reduced to the 'official' answer of the teacher (or textbook) as well as to the means to validate them. An enormous problem of didactic research arises here: Which type of didactic device will make it possible to carry out these gestures and how can said device be integrated into the current didactic school organisations?

In our work the students were systematically asked to look for information about the types of models they provided. In particular they had to look whether they already existed and whether they were important enough so as to be assigned a specific name (for example the Malthusian or the logistic model). The validity of the models constructed or provided was carried out from data – which in our case the teacher had provided – and through numerical simulation with Excel or the symbolic calculator Wiris (www.wiris.com).

2.5.4. The dialectic of the 'topic' and the 'off-topic'

In every modelling process, when starting from a scientific answer Q to which one intends to provide an answer in the 'strong sense', it is essential to integrate the possibility of *going off-topic* to which said question initially belongs, into the scientific school activity and, according to the evolution of the questions derived from Q, and to even have the possibility of *getting away from the discipline* of reference. On the other hand it is obvious that the generating questions that may lead to large research study courses can rarely be confined to the limited field of a single theme, sector or even discipline.

The *true* taking into account of questions, that is, the need to provide answers that are not a mere pretext to show the use of new knowledge taught, claims the need to incorporate the gesture of '*inspecting great scope areas*'. This inspection, which hardly ever immediately adapts to what is being looked for, leads to the possibility of finding 'unexpected' things and thus encountering those little 'seeds' which make it possible to progress in the research. It is obvious that the disciplinary confinement in which current university teaching lives – even natural sciences– makes this situation very difficult. It also clashes with the concern of the teaching staff to always want to know the specific course of the students' study process.

This dialectic, like the previous ones, responds and intends to modify the tradition of the dominant school pedagogy, which shows an unusual documentary shortage to 'protect' the students against 'dispersion' and 'lack of control' and favours the work with means that are immediately adjustable to the study programmes. The integration of both gestures will require new didactic devices that make them possible beyond their occasional and anecdotal presence.

2.5.5. The dialectic of the diffusion and reception of answers

The study processes that are proposed for teaching mathematics based on modelling require, as we have observed, giving importance to the answers the community provides to the questions posed. The knowledge that has to be available or constructed during the study process is not important in itself (monumentalism) but because of the type of answer it can provide and the progress its use implies. Against the temptation of imposing some answers that are acceptable within the educational institution, the group of students needs to be invited to *defend* the successive answers they provide, although they may still be of a provisional nature.

In the case of the experimentation of our research, we introduce a device named ‘Report of results’, relatively foreign to the mathematical teaching culture. Each week, in groups, the students had to elaborate a written text in which they gathered both the documents provided by the teacher and the partial results of the work done in the workshop session completed with their personal comments and the information on the subject they would have been able to gather, after which they had to hand it in to the teacher. These dossiers thus contained the answers each group defended and provided the class at the beginning of each session with joint progress made. At the end of the workshop each student had to hand in their own ‘Final report’ that no longer contained the chronicle of the study process but focussed on presenting and defending a final answer to the question initially posed.

Undoubtedly, the students easily accepted elaborating, reading and defending the reports due to its similarity to other study devices used in other disciplines. Anyhow, it took the teacher some time to assume that the work of elaborating and presenting the results would need some time to mature. Although the students were not used to elaborating mathematics results, in the course of time and thanks to the corrections provided by the teacher, clear progress was observed, which showed the need of a learning process of this type of gestures.

2.5.6. The completeness of answers and the work of the technique

To conclude we will mention an important restriction that make the life of mathematical modelling difficult in teaching institutions. It deals with the *relative incompleteness* of local mathematical educational organisations studied in secondary school (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004), linked to the *school restrictions that prevent the development of certain didactic moments*, such as the technological-didactic one, the moment of the evaluation, the one of the institutionalization, and more especially the moment of the *work of the technique*.

It is very common that the traditional binary didactic structure of university teaching, based on two main devices, the ‘theory class’ and the ‘problems class’ (in which the hours destined to ‘theory class’ usually exceed the ones destined to the ‘problems class’), results in students having to see a great number of new praxeologies *never devoted by the students* in the classroom. They have to get familiar with them and learn to master them by themselves from the personal work carried out outside the classroom. In short, the general ‘message’ the institution transmits with these didactic devices does not include any indication on the effective importance of the *work of the technique* to create new mathematical objects, nor does it lead the students to make them feel ‘experts’ in some of the numerous new fields they are being introduced to.

In the decade of the 90s a new didactic device was introduced called Mathematical Practices Workshops (Bosch & Gascón, 1994) complementing this binary didactic organisation, with the aim of providing a room in which the students, with the help of a teacher, could carry out an *in-depth study* of a small number of types of problems they had already become familiar with in class. The analysis of its controlled functioning made it possible to show its capacity of impacting on the existing didactic devices and on the life of the rest of the dimensions of the study process. It more particularly showed its ability to integrate three didactic moments that appear clearly separate in the traditional organisation: the exploratory moment, the technological-theoretical one and the moment of the work of the technique. In this way the possibility was shown of constructing local mathematical praxeologies that were progressively becoming more complete (requiring the functional integration of all the moments of the study process), essential for the proper development of mathematical modelling activity.

In the case of the experimentation of the SRC, and as Rodríguez had already pointed out in previous work (Rodríguez, Bosch & Gascón, 2008), the fact of basing the study dynamics on the need to provide 'strong' answers to questions with great generating power, enables the work of the technique to arise as a necessary means of the study process, either as an instrument to construct 'complete' answers or as a way of consolidating a mathematical model with a view to its subsequent use. For instance, when the study of populations with mixed generations in discrete time led to the study of the nth power of a matrix and the need to diagonalize it, the teacher of the workshop along with the teacher in charge of the subject, organized sessions of exercises so as to work on the technique of diagonalización in preparation of the rest of the study. Likewise, the simulation work (for instance to study the behaviour of the sequences defined by the Malthusian and the logistic model) also requires taking into account a great number of cases and therefore a considerable amount of technical work difficult to avoid.

Given the limited and local nature of the experimentation carried out, it is obvious that the study of these new gestures and the creation of appropriate devices here turn out to be an open problem of great magnitude, which we can only leave for subsequent studies.

3. OPEN PROBLEMS AND NEW STUDY PERSPECTIVES

Now that the main results obtained in our research have been formulated, we here present to which extent the contributions of this paper make it possible to formulate new problems and thus serve as the starting point for future developments in this line of research.

3.1. Problems related to the epistemological and dominant teaching models

We have provisionally characterized *'applicationism'* as the way of interpreting the relation between mathematics and natural sciences on behalf of the *dominant epistemology* in university institutions. However, a lot of questions have remained open:

P_1: How to describe – with which categories, in which terms – the aforementioned *dominant epistemology* in university institutions? What is its relation with what the mathematician W. P. Thurston (1995) denominates the 'popular model of mathematics'? Which characteristics does it have in common with the 'deductivism' (or 'Euclideanism') Lakatos talks about?

To what extent does the epistemological model (and in particular the way of interpreting the relation between mathematics and natural sciences) depend on the scientific sub-community considered, it being either the sub-community of mathematicians, physicists, biologists, geologists or the sub-community of chemists? Could it not have happened that, due to the specific characteristics of the biological, geological, chemical, etc systems etc, and to the historical process of mathematization of this type of systems, a certain *experimental tradition* imposed itself for over twenty centuries and that the *mathematical tradition* only appeared very late (from the last quarter of the twentieth century onwards)?

Can this situation be generalised to other fields of knowledge, such as social sciences (economics, for instance)?

With respect to the pedagogical model dominant in university institutions, we have considered characteristics of the *monumentalist pedagogy* and what we have called *generalist pedagogy*. At this point new questions have remained open:

P_2: What does the *monumentalist* pedagogy (characterized by the absence of the 'raison d'être' of the mathematical contents that are to be studied) have in common with the *generalist* pedagogy (based on the psycho-pedagogical ideology currently dominating in educational institutions)? What are the relations between them? To what extent does the dominant *epistemological* model condition, and even determine in some aspects, the *pedagogical* one?

Finally, with respect to this first range of questions, we will mention a fundamental problem we already noted down in this paper and for which we have only set forth a partial and provisional answer. Given the fact that the origin of the restrictions coming form the epistemological model is situated at the level of *society* and *school*, we said earlier that they cannot be directly modified through changes introduced by the teacher in the classroom. We introduced the (optimistic) hypothesis according to which the progressive introduction of certain 'study gestures' would make it possible to transform the type of scientific activity carried out efficiently in the classroom and, by generalizing, would lead to a change of activity of such magnitude that it would end up generating changes in the way of interpreting (the functions of) mathematics in the institution. We can then ask:

P_3: How to experimentally contrast the impact of the changes introduced in the scientific activity carried out in the classrooms on the way of interpreting mathematics within the institution? Which levels of didactic co-determination will need to be influenced and in which manner so as to change the dominant epistemological model in a teaching institution towards a certain direction? To what extent does participation (either occasional or systematic) in a functional study process modify the way of interpreting the role of mathematics in natural sciences on behalf of the members of the study community?

3.2. The implementation of the SRC as an answer to the problem of the role of mathematical modelling in school teaching

Our research was centred on the *local ecology* of the SRC interpreted as the answer the ATD proposes to the problem of the role of mathematical modelling in university teaching of natural sciences. As the experimentation has been carried out under specific circumstances and with specific conditions, it seems logical to set forth the problem of dependence the experimental results of the aforementioned specific conditions could have.

P_4: How have the experimentations been conditioned by the fact that the teacher of the workshop was the researcher? Would the restrictions coming from the traditional didactic contract (with the subsequent restrictions on the life of mathematical modelling) have increased in case the workshop teacher did not have such a special relation with the experimentation?

How do the results obtained depend on the fact that the workshops took place with chemical engineering students and not with biology or geology students?

The fact of accepting the restriction of covering the official study programme of the mathematics course for chemical engineering with the three SRC, in which aspects has it prevented to carry out a truly functional study process? Which difficulties would the proposal imply of a completely *open* SRC that would start from the same generating question and would not have to cover any previously established study programme?

However, beyond the specific experimentation described in this paper, it turns out that from the ATD it is considered that the SRC constitute the prototype of functional didactic organisations and, subsequently, our experimentation may only be considered as an example of a (still partial and provisional) answer to the complex problem of *functional teaching of mathematics* in current educational systems. The scope of our questioning can be extend to the problem of elaborating the mathematics study programme for compulsory and post-compulsory teaching:

P_5: Is it possible to design a mathematics study programme (for one academic year, or a whole educational level) based on a 'small' number of SRC interpreted as devices that make the normal life of *mathematical modelling* possible at school? Should this type of teaching design respect the restriction of abiding by an official curriculum previously established in terms of lists of concepts, properties, theorems and themes? Or should it, on the contrary, be structured in terms of a set of 'big questions' a Society considers necessary for people to approach? How would this curriculum modify the relation between the different school disciplines?

Furthermore, in the case of teaching mathematics at all educational levels (from pre-school and primary school to teaching mathematics at university in degrees and postgraduates), the previous problem implicitly poses a question which is currently completely open:

P_6: Which role could or should mathematical modelling (of extra-mathematical systems, but also mathematical modelling of intra-mathematical systems) play in the teaching of mathematics at all educational stages? To what extent is it necessary to institutionalize the mathematical modelling activity itself (the notions of modelled system, of model, of hypotheses that characterize a model, of work done inside the model, of broadening the system, etc.) in school teaching of mathematics?

Thus situated in the general problem of the curriculum, which includes as specific cases the problem dealt with in this paper and the problem of teaching mathematics in the different teaching institutions, a lot of questions reappear that are related to the *mathematical-didactic infrastructure* essential to implement the SRC as an answer to the problem of teaching mathematics as a modelling activity. It concerns questions we have only approach in a specific case and that deserve to be dealt with in depth in future studies:

P_7: Which didactic devices and 'gestures' are needed to properly coordinate the students' individual work with the work done in small groups and with the teacher's interventions in large groups? Which kind of didactic device will make it possible for the students to have access to answers that are not limited to the 'official' answer of the teacher (or of the textbook) as well as to the *milieus* to validate them? How can said device be integrated in the current didactic educational organisations? And, finally, what are the correct rhythm and the most ecologically viable way to introduce these devices so that they make the usual didactic contract progressively evolve?

Chapter 3 of our investigation is a good example of the fact that the introduction of a new didactic organisation in established didactic infrastructures requires carrying out real work of *mathematical engineering.* This work constitutes a fundamental part of what Chevallard (2009) calls the *didactic-mathematical infrastructure.* It concerns original mathematical elaborations that are situated halfway between 'scholar' mathematics and 'school' mathematics.

3.3. The implementation of SRC as the answer to the problem of mathematics teachers' training

All the problems formulated so far, both the ones related to the need to modify school epistemology and pedagogy and the ones that refer to the implementation of SRC as the answer to the problem of the role of mathematical modelling in school teaching, require answers that are eventually destined to transform current educational systems. This transformation, however, requires the subjects of educational systems, students and teachers first of all, to have access to a certain extent and in a certain manner to said answers. In the particularly important case of the teachers, this access will be more efficient if they go through them in their training process. It is consequently obvious that some elements of these answers must be integrated in the processes of teacher training.

Furthermore, if we focus on what we could call *mathematical training for teaching mathematics* (which goes beyond the training based on the *mathematics to be taught)* we could propose the integration of SRC as (again) a 'prototype of didactic organisation' for mathematics teachers' training at any educational stage. Each one of these SRC will have to be generated by one or several mathematical questions the answer of which is crucial to teach mathematics at the educational stage in question.

We may thus take up again the problem of the curriculum in the case of mathematical training of mathematics teachers.

P_8: Is it possible to design a training programme for mathematics teachers based on a 'small' number of SRC interpreted as devices that make normal life of the dialectic between (mathematical-didactic) questions and their answers? Is it possible to design this training programme from the long-term systematic study of the crucial questions for the profession of mathematics teachers? How to detect the crucial questions for the training of mathematics teachers? How to interpret them and situate them in more understanding problematic fields?

Even if the value of a research can be measured both by the results obtained and by the kind of new questions opened, the 'size' and complexity of the problems formulated so far make our investigation appear as only a little step in a still very long way to go. The problem of teaching mathematics as a modelling tool, considered at university, secondary or primary education, and the correlated problem of introducing didactic devices such as the 'Study and Research Courses' nowadays need a huge effort to evolve from just an 'experimental stage' to becoming a 'generalised practice'. In the course of our work, we clearly showed that the formulated problem and the way of approaching it were fully generated by the theoretical and practical tools provided by the ATD. Both the didactic problem dealt with and the partial answers put forward would not have been possible outside the field of the ATD. However, the scope of the restrictions and the kind of social, epistemological and pedagogical changes necessary to overcome them – at least according to our way of approaching it – seem to require a long-term transformation of both the way of conceiving mathematics and the conceptual and practical tools used in its teaching and learning. This big 'adventure' will surely escape the ATD operational range, and even the field of action of didactics of mathematics, needing the cooperation of the whole school community, including the crucial participation of mathematicians.

B

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andresen, M. (2007). Understandings of "modelling. *In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.) Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2042-2049). Larnaca: University of Cyprus.

Anton, H. (2003). *Introducción al álgebra lineal.* Editorial Limusa. Grupo Noriega Editores.

Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 9* (3), 247 – 280.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? In D. Holton, *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 207-220). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 235-268.

Barbosa, J. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 293-301.

Barquero, B. (2006). *Els Recorreguts d'Estudi i Investigació (REI) i l'ensenyament de la modelització matemàtica en el primer curs universitari de Ciències.* Barcelona: Treball de recerca. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. In L. Ruiz Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Ed.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2008). Using Research and Study Courses for Teaching Mathematical Modelling at University Level. In D. Pitta-Pantazi, & G. Pilippou (Ed.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059). Larnaca: University of Cyprus.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (en prensa). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. *Actas del 2º Congreso de la TAD (Octubre 2007).* Uzès.

Batschelet, E. (1978). *Matemáticas básicas para biocientíficos.* Madrid Dossat.

Bauersfeld, H., & Skowronek, H. (1976). Research Related to the Mathematical Learning Process. En Athen & Kunle, Eds, 231-245.

Berry, J., Norcliffe, A., & Humble, S. (1989). *Introductory Mathematics through Science Applications.* Cambridge University Press.

Beyer, K. (1993). Teachers' role in project evaluation: control or challange? *Proceedings of the SEFI conference on project-organised curricula in Engineering Education.* Ballerup.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – a theory for practice. In B. Clarke *et al.* (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-160). Göteborg University: National center for mathematics education.

Blomhøj, M. (2007). Developing mathematical modelling competency through problem based project work - experiences from Roskilde University. *Proceedings of the Ninth International History, Philosophy & Science Teaching Conference.* Calgary: Calgary University.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*, 123-139.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 163-177.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2009). Project organised science studies at university level: exemplarity and interdisciplinarity. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41* (1-2), 183-198.

Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching – a review of arguments and instructional aspects. In Niss, Blum & Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-29). Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149–171.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Haines, C. *et al.* (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics.* (pp. 222-231). Ellis Horwood, Chichester.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40* (2), 337-340.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001a). ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática, 13* (3), 22-63.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001b). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21* (3), 247-304.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 86-95.

Bosch, M., & Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 12* (3), 314-332.

Bosch, M., & Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm*.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-63.

Bosch, M., & Gascón, J. (en prensa). Fundamentación antropológica de las Organizaciones Didácticas: del Taller de Prácticas Matemáticas a los Recorridos de Estudio e Investigación. *II Congreso de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* . Uzes.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24* (2-3), 205-250.

Bosch, M., Gascón, J., & Rodríguez, E. (2004). ¿Qué papel se asigna a la resolución de problemas en el actual currículum de matemáticas? In C. Castro, & M. Gómez, *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 95-118). Barcelona: Edebé.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire. In *APMEP* (pp. 428-442). Paris.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1970 - 1990.* (N. Balacheff, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 178-195.

Burkhardt, H. (2007). Making mathematical literacy a reality in classrooms. *In: D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2090-2100). Larnaca: University of Cyprus.

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné.* Grenoble: La pensée Sauvage. (Segunda edición, 1991).

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit X, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit X, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit X, 25*, 5-38.

Chevallard, Y. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Première partie. *Petit X, 27*, 41-76.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. *En R. Noirfalise y M-J. Perrin-Glorian (coord.), Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995)*, (pp. 83-122).

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A.

Chevallard, Y. (1998). Sur l'inadéquation de la formation première des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire français. *Etude préliminaire à la conférence préparatoire à l'ICMI Study on the Teaching and Learning of Mathematics at University Level (Singapour, 8-12 décembre 1998).*

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Les mathématiques et le monde : dépasser "l'horreur instrumentale". *Quadrature* (41), 25-40.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions. *Curso dado en la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 agosto 2001)* (pp. 3-32). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude : 3. Ecologie & régulation. *Curso dado en la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 de agosto de2001)* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002c). Les mathématiques dans les formations universitaires : un schéma alternatif. Trabajo presentado en el seminario de *Mathématiques et sciences humaines* de la Faculté des sciences de Luminy (Université de la Méditerranée). http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=55.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Texto preparado para una comunicación en* «*Journées de didactique comparée*». Lyon, 3-4 mayo de 2004. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Conferencia dada en la 3ª* «*Université d'été Animath*»*, Saint-Flour, 22-27 de Agosto de 2004.* Publicado en *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, APMEP,* 239-263.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Conferencia plenaria de apertura del 4º congreso de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 de Febrero de 2005. Publicado en los *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Universitat Ramon Llull, Barcelona, 2006, 21-30.

Chevallard, Y. (2007). La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. En Ruiz Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Chevallard, Y. (2009a, Avril 28). La notion de PER: problèmes et avancées. Toulouse, France.

Chevallard, Y. (2009b). La TAD face au professeur de mathématiques. Touluose.

Chevallard, Y., & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. *Conférence au CORFEM.* (http://yves.chevallard.free.fr).

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.* Marseille: Doctoral dissertation, Université de Provence.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis doctoral. Vigo: Universidad de Vigo.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 143-162.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Jaén: Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

García, F., Gascón, J., Ruiz, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 226-246.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico . *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13*, 295-332.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18* (1), 7-34.

Gascón, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. *En Ortega, T. (Editor): Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 5* (3), 673-698.

Gascón, J. (2004). El problema de la articulación del currículo de matemáticas. *Curso de doctorado, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona (inédito).*

Gascón, J., & Bosch, M. (2007). La miseria del generalismo pedagógico ante el problema de la formación del profesorado. En Ruiz Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 165-205). Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Gómez, J. V., & Fortuny, J. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *UNO: Revista de didáctica de las matematicas (Ejemplar dedicado a: Modelización y matemáticas)* (31), 7-23.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolising, Modeling and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on* *discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-274). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Holton, D. (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level - An ICMI Study (NEW ICMI STUDY SERIES Volume 7).* Kluwer Academic Publishers.

Illeris, K. (1999). Project Work in University Studies: Background and Current Issues" in. *In Olesen & Jensen (Ed.): Project Studies late modern university reform?*. Denmark: Roskilde University Press.

Julie, C. (2002). Making relevance relevant in mathematics teacher education. *Proceedings of the second international conference on the teaching of mathematics (at the undergraduate level) [CD]*. Hoboken, NJ: Wiley.

Kaiser, G. (2006). The mathematical beliefs of teachers about applications and modelling. In J. Novotná *et al*. (Eds.), *Mathematics in the centre. Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 3, pp. 393-400). Prague: Charles University.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*, pp. 196-208.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006a). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 82-85.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006b). A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 212-213.

Kuhn, T. (1979). *La estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Lack, D. (1967). *The Natural Regulation of Animal Numbers.* Oxford: Clarendon Press.

Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes* (Vol. Philosophical Papers Vol.11). Cambridge: Cambridge University Press.

Legge, K. (1997). Problem-Orientated Group Project Work at Roskilde University: What Is It, How Is It Performed, and Why?. *IMFUFA, TEKST , 336*.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (2), 113-142.

Maaß, K. (2007). Modelling tasks for low achieving students – first results of an empirical study. In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2120-2129). Larnaca: University of Cyprus.

Mahaffy, J. M. (2001). *http://www-rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/*.

Mallow, J. (2001). Student Group Project Work: A Pioneering Experiment in Interactive Engagement. *Journal of Science Education and Technology, 10* (2), 105-113(9).

Malthus, T. R. (1978). *An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr Godwin, M. Condorcet, and Other Writers (Reprint)*. London: Macmillan.

Margalef, R. (1998). *Ecología* (9ª edición). Barcelona: Omega.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 269-280.

Modelling in Science Education and Learning. (2008). Retrieved from http://msel.impa.upv.es/cmsms/ .

Muller, E., & Burkhardt, H. (2007). Applications and Modelling for Mathematics — Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 267-274). US: Springer .

National council of teachers of mathematics (1980): An agenda for action. Reston, VA: NCTM.

National council of teachers of mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Recuperable en http://standards.nctm.org

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In W. Blum & *et al*. (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics* (pp. 22–31). Chichester, UK: Horwood.

Niss, M. (1997). *Bulletin of the the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). No. 43*. Retrieved from http://www.emis.de/mirror/IMU/ICMI/bulletin/43/index.html

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 40* (1), 1-24.

Niss, M. (2001). University mathematics based on problem-oriented students projects: 25 years of experience with the Roskilde Model. In D. Holton, *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 153-165). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom project. *KOM project. http://www7.nationalacademies.org/mseb/*

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In Gagatsis, A. & Papastavridis, S. (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Athens (Greece): Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

OECD (2003a), Literacy Skills for the World of Tomorrow – Further Results from PISA 2003. París: OECD.

OECD (2003b), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OECD.

Peled, I. (2007). A meta-perspective on the nature of modelling and the role of mathematics. In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2140-2149). Larnaca: University of Cyprus.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique: trois études de cas.* Thèse de 3ème cycle. Marseille: Université d'Aix-Marseille 2.

Rodríguez, E., Bosch, M., & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the Anthropological Theory of the Didactic. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40* (2), 287-301.

Ruíz Higueras, L. (2001). La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos. En Chamorro, C. (Ed.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas, Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado, MEC*, (pp. 229-263).

Salas, S., & Hille, E. (1995). *Calculus. Vol I.* 3a. ed. Ed. Reverté, S.A.

Serrano, L., Bosch, M., & Gascón, J. (en prensa). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Lyon.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* Madrid: Memoria de Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Soberón, J. (1989). *Ecología de poblaciones.* Méjico, D.F: La ciencia para todos; 82 (3ª edición, 2003).

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38* (3), 247-254.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30* (2), 61-177.

UNO. (2002). *Modelización y matemáticas, Revista de Didáctica de las matemáticas* (Vol. 31).

Utzet, F. (2003). *Memoria del proyecto "Aula Matemática".* Millora de la Qualitat Docent (MQD). Barcelona: AGAUR.

Vithal, R., Christiansen, I., & Skovsmose, O. (1995). Project Work in University Mathematics Education - A Danish Experience: Aalborg University. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 199-223.

Vos, P., & Roorda, G. (2007). Interpreting velocity and stopping distance; complementarity, context and mathematics. In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2200-2209). Larnaca: University of Cyprus.

Waltham, D. (2000). *Mathematics. A simple tool for geologist.* Blackwell Science.

Weber, M. (1922). *Economía y Sociedad.* México: Fondo de Cultura Económica (FCE) (1ª edición en alemán, 1922. Primera edición en español, 1944).

ANEXO 1

1. MUESTRA DE PROGRAMAS DE LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS EN PRIMEROS CURSOS UNIVERSITARIOS DE CCEE

Llicenciatura de Biologia – Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Curso 2006/07 - http://biologia.uab.es/biologia/

MATEMÀTIQUES

Unitat Docent: Matemàtiques **Departament:** Matemàtiques **Cicle:** 1r **Tipus:** Troncal
Número de Crèdits: 6 **Teòrics:** 4 **Pràctics:** 2

Objectius:
Aquest programa pretén un doble objectiu. El primer i més important és el de donar a l'estudiant una formació matemàtica bàsica, centrada en l'àlgebra lineal i el càlcul de funcions d'una variable, que li permeti comprendre el llenguatge de la Ciència. El segon és el d'introduir-lo al camp de la Biologia Teòrica, és a dir a la modelització matemàtica de la Biologia, per medi d'exemples senzills que poden ser analitzats amb les eines matemàtiques introduïdes prèviament.

Programa Teòric:

Tema 1: Àlgebra lineal
1.1 Preliminars. Nombres racionals i reals. Aproximació. Notació exponencial.
1.2 Sistemes d'equacions lineals
1.3 Vectors de R^n.
1.4 Matrius i càlcul matricial. Determinants. Inversa d'una matriu.
1.5 Valors i vectors propis. Diagonalització.
1.6 Aplicació al creixement lineal de poblacions.

Tema 2: Funcions d'una variable
2.1 Valor absolut. Desigualtats.
2.2 Funcions. Límits i continuïtat. Exemples de funcions importants (lineals, polinòmiques, racionals, exponencial, logaritme, trigonomètriques).
2.3 Derivada. Interpretacions geomètrica i cinemàtica. Regles de derivació.
2.4 Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Màxims i mínims. Representació de funcions. Aplicacions: problemes d'optimització.
2.5 Solució aproximada d'equacions: mètode de la bisecció i mètode de Newton.
2.6 Polinomi de Taylor.

Tema 3: Càlcul integral
3.1 Primitives. Integral. Teorema fonamental del Càlcul.
3.2 Tècniques elementals d'integració. Aplicacions.
3.3 Integrals impròpies.

Tema 4: Equacions diferencials
4.1 Equacions de variables separades. Exemples: creixement exponencial, desintegració radioactiva, equació logística.
4.2 Equacions lineals. Exemples

Avaluació:
Consistirà en un examen final del total de l'assignatura

Licenciatura en Biología – Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Curso 2007/08 - http://biologia.uab.es/biologia/

Informació general

Aquest programa pretén un doble objectiu. El primer i més important és el de donar a l'estudiant una formació matemàtica bàsica, centrada en l'àlgebra lineal i el càlcul de funcions d'una variable, que li permeti comprendre el llenguatge de la Ciència. El segon és el d'introduir-lo al camp de la Biologia Teòrica, és a dir a la modelització matemàtica de la Biologia, per medi d'exemples senzills que poden ser analitzats amb les eines matemàtiques introduïdes prèviament.

Amb aquesta idea el programa es divideix en dues parts. Una primera part de matemàtica fonamental dirigida a l'afiançament dels coneixements de càlcul diferencial i integral i d'àlgebra matricial i una segona part de temes selectes de matemàtica aplicada a la biologia, en que es pretén donar una iniciació als models discrets i continus de la biologia.

Descripció programa teoria

Prerequisits

Per seguir l'assignatura amb aprofitament, es recomana el domini de temes de matemàtiques elementals que inclouen:

1. Nombres racionals i reals. Aproximació. Notació exponencial. Valor absolut. Desigualtats.
2. Funcions elementals: lineals, polinòmiques, racionals, exponencial, logaritme, trigonomètriques.

Aula Matemàtica: Aula Matemàtica és una plataforma d'aprenentatge virtual creada pel Departament de Matemàtiques. Conté exercicis per resoldre en línia sobre diferents temes tant del programa com dels prerequisits. Tots el estudiants de l'assignatura tindran accés mitjançant un usuari i contrasenya que es facilitarà. Les instruccions d'ús es publicaran al campus virtual.

Secció 1: Matemàtica Fonamental

Tema 1: Funcions d'una Variable. Derivades.

1.1 Funcions. Límits i continuïtat.

1.2 Derivada. Interpretacions geomètrica i cinemàtica. Regles de derivació.

1.3 Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Màxims i mínims. Representació de funcions.

Aplicacions: problemes d'optimització.

Tema 2: Càlcul Integral

2.1 Primitives. Integral. Teorema fonamental del Càlcul. Aplicacions.

Tema 3: Àlgebra Lineal

3.1 Sistemes d'equacions lineals

3.2 Matrius i c`alcul matricial. Determinants. Inversa d'una matriu.

3.3 Valors i vectors propis. Diagonalització.

Secció 2: Biomatemàtica

Tema 4: Aplicació al creixement lineal de poblacions

Tema 5: Solució aproximada d'equacions: mètode de la bisecció i mètode de Newton.

Tema 6: Equacions diferencials

II.1 Equacions de variables separades. Exemples: creixement exponencial, desintegració radiactiva, equació logística.

II.2 Equacions lineals. Exemples.

Bibliografia

No hi ha a la literatura cap text que s'adapti exactament al contingut del curs. Per aquest motiu es proposen dues obres de tipus general (1 i 4) que abasten la major part dels temes i en les que els conceptes matemàtics són introduïts de manera intuïtiva i il·lustrats amb nombrosos exemples pràctics. Aquestes dues obres estan complementades per dos llibres que permeten aprofundir en els dos grans temes del curs, l'àlgebra lineal (2) i el càlcul (3).

1. Matemáticas básicas para biocientíficos de E. Batschelet (Editorial Dossat) és una obra de referència per a tot el curs.
2. Introducción al Álgebra Lineal de H. Anton (Editorial Limusa) cobreix el material del capítol 2.
3. Calculus, Tomo I de S. Salas i E. Hille (Editorial Reverté) és un primer curs de funcions en una variable i serveix de referència per als capítols 1, 3 i 4. Conté multitud d'exemples i exercicis resolts.
4. Mathematics for the Biological Sciences de J.C. Newby (Clarendon Press) pot servir de referència general excepte pel capítol 2 d'àlgebra lineal.

Licenciatura en Biología – Universitat de Barcelona (UB)

Curso 2007/08 - http://www.ub.edu/biologia/bio/programes/1cicle.htm

MATEMÀTIQUES - Tipus d'assignatura: Obligatòria de primer cicle

Distribució temporal: octubre-gener. Un total de 60 hores repartides de la manera següent: 30 hores teòriques més 30 hores de problemes.

OBJECTIUS

Que l'alumne conegui, a un nivell elemental, l'elaboració i ús de models bàsics amb aplicació al camp de la Biologia.
Desenvolupar, en l'alumne, l'habilitat d'analitzar problemes quantitativament a partir d'eines matemàtiques.
Desenvolupar la capacitat de raonament deductiu.

METODOLOGIA

Aquesta és una assignatura presencial que té el 50% d'hores de teoria i l'altre 50% de problemes.
La part de teoria es basa en un sistema de classes magistrals. El professor o professora exposa a classe els continguts bàsics de l'assignatura i dóna indicacions precises de com treballar-la (què cal llegir i de quines fonts per reforçar els conceptes, quins exercicis cal fer, etc.).
A les classes de problemes es van resolent els exercicis del llistat que estan penjats al dossier de l'assignatura. El professor o professora donarà indicacions de quins exercicis cal treballar cada setmana de manera que els alumnes hagin pogut resoldre'ls abans d'assistir a la classe i, si s'escau, dedicar-la a resoldre dubtes.

CRITERIS D'AVALUACIÓ

AVALUACIÓ CONTINUADA

L'avaluació continuada és l'avaluació per defecte i persegueix potenciar un treball continuat per part de l'estudiant, facilitant així el seguiment de l'assignatura i la interacció alumnat-professorat. L'avaluació continuada de l'assignatura, i per tant el càlcul de la qualificació final de l'alumne, es durà a terme de la següent manera:
- Un 25% de la qualificació s'obtindrà de la Prova1, la qual es realitzarà un cop tots els grups hagin finalitzat els temes 1 i 2 del temari.
- Un 25% de la qualificació s'obtindrà de la Prova2, la qual es realitzarà un cop tots els grups hagin finalitzat els temes 3, 4 i 5 del temari.
- Un 40% de la qualificació s'obtindrà de la Prova de Síntesi que es farà en la data programada pel Consell d'estudis, dintre del calendari d'exàmens.
- Un 10% de la qualificació s'obtindrà d'activitats que es poden programar en cada un dels grups.

AVALUACIÓ ÚNICA

Qui vulgui renunciar a l'avaluació continuada i acollir-se a l'avaluació única ho haurà de fer constar per escrit, amb una còpia per a l'estudiant i una altra per al professor.
La data de la Prova Única, serà la mateixa que la prova de síntesi.
La segona convocatòria, mentre existeixi, serà comú tant per als suspesos de l'avaluació continuada com per als suspesos de l'avaluació única, i es realitzarà també en la data programada pel Consell d'estudis, dintre del calendari d'exàmens.

PROGRAMA DE TEORIA

Tema 1. Introducció als nombres reals. Representació dels sistemes experimentals a través de models matemàtics. Concepte de variable i funció. Conceptes de límit, continuïtat i asímptotes.

Tema 2. Concepte i interpretació de la derivada. La funció derivada, aplicacions i propietats. Càlcul d'extrems.

Tema 3. Integració: Primitives. Integral definida, aplicacions i propietats. Integral impròpia.

Tema 4. Conceptes de successió i sèrie. Suma d'una sèrie. Equacions en diferències.

Tema 5. Desenvolupaments de Taylor.

Tema 6. Resolució analítica de models d'equacions diferencials a través de la funció primitiva.

Tema 7. Sistemes amb vàries variables. Derivades parcials. Aplicació al càlcul
d'extrems. Ajust mínim quadràtic.

BIBLIOGRAFIA

Bàsica

- AYRES, F. & MENDELSON, E. (2001) *Cálculo.* Mc. Graw Hill.
- BROWN, D. & ROTHERY, P. *Models in Biology: Mathematics, Statistics and*
- *Computing.* Ed. John Wiley & Sons. Chichester, England, 1993.
- EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology.* Random House/Birkhauser, 1988.
- LARSON, R.E., HOSTETLER, R.P. & EDWARDS, B.H. (1999) *Cálculo y Geometría Analítica.* Mc Graw Hill.
- SMITH, R.T. & MINTON, R.B. (2001) *Cálculo*. Mc. Graw Hill.

Opcional

- APOSTOL, T. (1983) *Calculus*. Reverté
- DEMIDOVIC, B.P. (1985) 5000 *Problemas de análisis matemático.* Paraninfo.
- GENTRY, R. (1978) *Introduction to calculus for the biological and health sciences*. Addison Wesley.
- GROSSMAN, S.I. (1996) *Algebra Lineal con aplicaciones.* Ed. Mc. Graw Hill, Madrid.
- KAPLAN, D. & GLASS, L. (1998) *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer.
- MURRAY, J.D. (1993) *Mathematical Biology.* Ed. Springer-Verlag. Berlín.
- PISKUNOV, N. (1978) *Cálculo diferencial e integral.* Ed. Montaner y Sim_n.
- RENSHAW, ERIC. (1991) *Modelling biological populations in space and time.* Cambridge University Press.

Licenciatura en Biología – Universidad de Salamanca (US)

Curso 2005/06 - http://biologia.usal.es/sitioweb/index.htm

Objetivos: Se pretende conseguir de manera general que el alumno se familiarice con las herramientas matemáticas básicas que va a precisar a lo largo de la carrera. En particular se busca conseguir que el alumno comprenda los conceptos fundamentales involucrados en la Modelización Matemática, fundamentalmente en los modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias que tengan aplicación a procesos biológicos.

Tema 1. Funciones, Límites y Continuidad
Contenidos del Tema: Breves nociones de topología de la recta real. Concepto de función real de variable real. Límites. Propiedades de los límites. Infinitos e infinitésimos. Indeterminaciones. Infinitésimos equivalentes. Continuidad. Propiedades de las funciones continuas. Tipos de discontinuidades. Teoremas importantes sobre la continuidad (Bolzano y Weierstrass).
Tema 2. Cálculo Diferencial
Contenidos del Tema: Concepto de derivada. Propiedades de las funciones derivables. Interpretación geométrica de la derivada. Diferencial de una función. Derivadas sucesivas. Cálculo de derivadas. Teoremas del valor medio (Rolle, Lagrange y Cauchy). Aplicaciones del Cálculo Diferencial: Regla de L'Hôpital, máximos y mínimos relativos, Representación de funciones. La fórmula de Taylor. Estimación y acotación de errores.
Tema 3. Cálculo Integral
Contenidos del Tema: Integral Indefinida. Propiedades. Cálculo de primitivas. Integral definida. Propiedades. Teorema del valor medio. Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Integrales impropias de primera y segunda especie. Algunas aplicaciones del cálculo integral.
Tema 4. Ecuaciones Diferenciales. Conceptos Generales
Contenidos del Tema: Concepto de ecuación diferencial ordinaria y de ecuación en derivadas parciales. Soluciones de una ecuación diferencial. Interpretación geométrica de las ecuaciones ordinarias de primer orden. Teorema de Picard. Métodos exactos y métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Método de Euler.
Tema 5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer orden
Contenidos del Tema: Ecuaciones en variables separadas y separables. Ecuaciones Lineales de primer orden. Ecuaciones de Bernoulli. Ecuaciones Homogéneas. Ecuaciones reducibles a homogéneas.
Tema 6. Modelos Matemáticos Basados en E.D.O. de Primer orden
Contenidos del Tema: Modelización Matemática. Características generales de un modelo matemático. Modelos de crecimiento de poblaciones: Modelo de Malthus, Modelo Logístico, Modelos con capturas. Análisis Compartimental. Modelos alométricos. Ley de Newton de Calentamiento o Enfriamiento.
Desintegración radioactiva.
Tema 7. Espacios vectoriales. Matrices y Determinantes
Contenidos del Tema: Concepto de Espacio Vectorial. Propiedades. Matrices. Operaciones con matrices. Determinantes.
Tema 8. Ecuaciones Diferenciales de orden superior al primero
Contenidos del Tema: Ecuaciones Lineales. Ecuaciones Lineales con coeficientes constantes. Solución de las ecuaciones homogéneas. Ecuaciones no homogéneas. Reducción del orden de algunos tipos de ecuaciones de orden superior al primero. Aplicaciones.
Tema 9. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
Contenidos del Tema: Tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas Lineales con coeficientes constantes: Sistemas Homogéneos y Sistemas No-homogéneos. Sistemas Autónomos. Ecuaciones de las órbitas de un sistema autónomo. Soluciones estacionarias y estabilidad lineal. Aplicaciones: Modelos de crecimiento de poblaciones para dos especies interaccionantes, Modelos epidemiológicos, Análisis compartimental, etc.

Metodología (material didáctico en teoría y prácticas):
Se seguirá una Metodología tradicional basada en las clases "de pizarra".
Se proporcionará a los alumnos colecciones de problemas de cada tema de la asignatura, algunos de los cuales serán resueltos en las clases prácticas. Se darán también a los alumnos una serie de apuntes relativos a la parte teórica de cada uno de los temas.

Licenciatura en Biología – Universidad del País Vasco (UPV)

Cursos 2005/06 y 2006/07 - http://ciencias.ehu.es/

MATEMÁTICAS

CRÉDITOS: 4 CURSO: Primero

Objetivos

Familiarizar al estudiante con los métodos del Cálculo, Algebra lineal y ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones en Biología. Se prestará especial atención a los modelos de poblaciones.

Programa

1. CALCULO DIFERENCIAL DE UNA VARIABLE: derivadas, interpretación dinámica y geométrica, crecimiento, decrecimiento y concavidad, máximos y mínimos, dibujo de curvas, desarrollo de Taylor.
2. CALCULO INTEGRAL DE UNA VARIABLE: integrales inmediatas, métodos elementales de integración, aplicación al cálculo de áreas, longitudes y volúmenes de sólidos de revolución.
3. VECTORES Y MATRICES: vectores y matrices, producto de matrices, determinante de una matriz cuadrada, matriz inversa, resolución de sistemas lineales.
4. VECTORES Y VALORES PROPIOS: valores y vectores propios, ecuación característica, diagonalización, aplicaciones: cadenas de Markov, modelos de población estructurada.
5. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN: ecuaciones de variables separadas, ecuaciones lineales, la ecuación de Bernouilli, aplicaciones: modelos de población.
6. ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN: ecuaciones homogéneas, la ecuación completa, el método de coeficientes indeterminados, vibraciones, resonancia.
7. SISTEMAS DE COEFICIENTES CONSTANTES: el método de eliminación, el método de vectores propios.

Bibliografía

S. L. SALAS y E. HILLE, Calculus de una y varias variables con Geometría analítica, Editorial Reverté, 1995.

M. BILBAO, F. CASTAÑEDA Y J.C. PERAL: Problemas de cálculo. Ediciones Pirámide. 1998.

Criterios de evaluación

Examen escrito

Licenciatura en Biología – Universidad de Granada (UG)

Cursos 2005/06 y 2006/07 - http://www.ugr.es/%7Ebiologia/

Créditos: 4.5 (2.5 teóricos/ 2 prácticos) **Curso: Primero**

PROGRAMA DE TEORÍA

1. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CÁLCULO. Métodos elementales. Modelos continuos de poblaciones. Ecuaciones logísticas. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Modelos continuos de interacción entre especies: presa-depredador, competencia y mutualismo y simbiosis.

2. ÁLGEBRA LINEAL. Matrices y sistemas lineales. Transformaciones elementales. Forma reducida de una matriz y resolución de sistemas.

BIBLIOGRAFÍA

1.- H. Anton. *Introducción al álgebra lineal*. Ed. Limusa, 1990.

2.- C. Rorres, H. Anton. *Aplicaciones de álgebra lineal*. Ed. Limusa, 1979.

3.- E. Yeargers, R. Shonkwiler, J. Herod. *An introduction to the mathematics of Biology*. Birkhauser, 1996.

4.- D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Grupo Ed. Iberoamérica, 1988.

SISTEMA DE EVALUACIÓN

- Un ejercicio en horario de clase al finalizar el primer tema y
- Un examen de toda la materia al finalizar el cuatrimestre.

Licenciatura en Biología – Universidad de Oviedo (UO)

Del curso 2005/06 al 2009/10 - http://directo.uniovi.es/catalogo/FichaAsignatura.ASP?asignatura=1

Plan de estudios:	LICENCIADO EN BIOLOGIA			**Centro:**	FACULTAD DE BIOLOGIA		
Tipo:	Troncal	**Créditos totales:**	6,5	**Teóricos:**	4	**Prácticos:**	2,5
Ciclo:	1º	**Curso:**	1º	**Período:**	CUATRI.1º		
Objetivos:	Familiarizar al alumno con las herramientas matemáticas que pueden resultar útiles en la formación y desarrollo profesional de un biólogo						
Contenido:	1. Funciones reales de una variable real. Continuidad. Derivabilidad. Representación gráfica de funciones. Funciones trigonométricas. Función exponencial y función logarítmica. Integración. 2. Espacios vectoriales. El espacio vectorial Rn. Sistemas de ecuaciones lineales.Matrices y determinantes. Vectores y valores propios. Diagonalización. 3. Introducción a las ecuaciones difereciales y sus aplicaciones en Biología. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ecuaciones diferenciales de variables separadas. El Modelo Exponencial de Malthus. El Modelo de Verhulst. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Método de variación de parámetros. Método del factor integrante. Modelo de Bernuilli 4. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden superior al primero. Ecuaciones diferenciales homogéneas. Cálculo de las soluciones de la ecuación completa: método de variación de parámetros y método de los coeficientes indeterminados 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Sistemas homogéneos. Cáculo de las soluciones del sistema completo: método de variación de parámetros y método de los coeficientes indeterminados. Conversión de ecuaciones en sistemas Prácticas de ordenador. Se dedicarán 0,5 créditos a prácticas de ordenador . 1. Introducción al manejo de Matlab. 2. Cálculo diferencial e integral. Representaciones gráficas. 3. Resolución de ecuaciones diferenciales.						
Metodología y Evaluación:	Se realizará un examen final de la asignatura y en la calificación final se valorará la asistencia y aprovechamiento de las clases prácticas de ordenador.						
Método:	Clases magistrales Prácticas problemas						
Sistemas de evaluación:	Examen escrito Períodos de prácticas Examen de practicas						

Licenciatura en Biología – Universidad de Jaén (UJ)

Cursos 2005/06 y 2006/07 - http://www.ujaen.es/

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA: Matemáticas

CARÁCTER : Troncal CRÉDITOS TEÓRICOS: 3 CRÉDITOS PRÁCTICOS: 3

CURSO ACADÉMICO: 2005/06 CICLO: Primer CURSO: Primer CUATRIMESTRE: Primero

OBJETIVOS:

1. Proporcionar a los estudiantes los conocimientos que les capaciten para tratar problemas matemáticos referentes a sistemas de ecuaciones lineales, matrices, vectores, funciones, derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, etc.
2. Proporcionar a los estudiantes algunos modelos matemáticos básicos utilizados en las ciencias biológicas.
3. Proporcionar formación al alumno que le permita asimilar otras asignaturas de la titulación.
4. Iniciar al alumno en el uso de software matemático.

TEORÍA:

Tema 1: Método de Gauss y de Gauss-Jordan. Interpretación de los sistemas lineales. Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales. Aplicaciones: Programación lineal; administración de recursos.

Tema 2: Matrices. Operaciones con matrices. Aplicaciones del producto de matrices: Contacto directo e indirecto en una enfermedad contagiosa. Matriz inversa. Relación con los sistemas lineales. Rango de una matriz. Teorema de Rouchè.

Tema 3: Determinantes. Evaluación de los determinantes por reducción en los renglones. Propiedades de los determinantes. Determinantes e inversas. Regla de Cramer. Aplicaciones: Ecuaciones de curvas y superficies que pasan por puntos dados.

Tema 4: Espacios vectoriales. Base y dimensión. Aplicaciones lineales. Matriz diagonalizable. Valores y vectores propios. Modelos discretos en Biología: Cadenas de Markov. Aplicaciones en genética. Modelo de Leslie. Explotación racional de animales.

Tema 5: Funciones reales de una variable. Dominio de una función. Ejemplos de funciones elementales. Continuidad. Teorema de Bolzano. Aplicaciones a los modelos trigonométricos: Movimientos migratorios.

Tema 6: Derivada de una función en un punto. Reglas de derivación. Derivadas de algunas funciones. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos de una función. Depredadores y presas. Metabolismo basal.

Tema 7: Integral indefinida. Métodos de integración. Integral definida. Teoremas fundamentales del Cálculo. Integrales impropias. Aplicaciones.

Tema 8: Funciones reales de varias variables. Curvas de nivel. Derivadas parciales. Máximos y mínimos. Diferencial total. Aplicaciones: Optimización. Método de los mínimos cuadrados.

Tema 9: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Concepto de solución. Condiciones iniciales. Problema de valores iniciales. Orden. Variables separadas. Análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales de primer orden autónomas. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Modelos de interacción entre especies. Modelos continuos del crecimiento de poblaciones. Crecimiento exponencial. Modelos logísticos. Genética de población.

Llicenciatura de Geologia – Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Curso 2007/08 - http://einstein.uab.es/Estudis/geocie1.htm

Objectius

Aquest programa pretén un doble objectiu. El primer i més important és el de donar a l'estudiant una formació matemàtica bàsica, centrada en l'àlgebra lineal i el càlcul de funcions d'una variable, que li permeti comprendre el llenguatge de la Ciència. El segon és el d'introduir-lo al camp de la Geologia, és a dir a la modelització matemàtica, per medi d'exemples senzills que poden ser analitzats amb les eines matemàtiques introduïdes prèviament.

Continguts

1. **Nombres**
    1. Nombres racionals i reals. Aproximació. Notació exponencial. Valor absolut. Desigualtats.
    2. Potències. Logaritmes.
    3. Combinatòria. Binomi de Newton.
2. **Àlgebra Lineal**
    1. Vectors. Independència Lineal. Bases. Canvis de base.
    2. Matrius i càlcul matricial. Determinants. Inversa d'una matriu.
    3. Valors i vectors propis. Diagonalització.
    4. Aplicacions i exemples.
3. **Funcions d'una variable. Derivades.**
    1. Funcions. Límits i continuïtat. Exemples de funcions importants (lineals, polinòmiques, racionals, exponencials, logarítmiques, trigonomètriques)
    2. Derivada. Interpretacions geomètriques i cinemàtica. Regles de derivació.
    3. Creixement i decreixement. Concavitat i convexitat. Màxims i mínims. Representació de funcions. Aplicacions: problemes d'optimització.
    4. Solució aproximada d'equacions: mètode de bisecció i mètode de Newton.
    5. Polinomi de Taylor.
4. **Càlcul integral**
    1. Primitives. Integral. Teorema fonamental de Càlcul.
    2. Tècniques elementals d'integració. Aplicacions.
    3. Integrals impròpies.

Llicenciatura de Geologia – Universitat de Barcelona (UB)

Curso 2006/07 - http://www.ub.es/geologia/geologia/programes/1c/131008.pdf

MATEMÀTIQUES CRÈDITS: 6 (3 de teòrics i 3 de problemes) CICLE: Primer

OBJECTIUS
L'objectiu bàsic de l'assignatura és proporcionar una sòlida base de coneixements en el camp de l'anàlisi real que permeti el posterior desenvolupament d'assignatures més complexes, com poden ser: l'anàlisi II (que incorpora, entre d'altres conceptes, la versió en varies variables dels conceptes introduïts en el present programa), el càlcul numèric, els mètodes estadístics, així com de qualsevol altra assignatura de la carrera de Geologia que faci ús de conceptes matemàtics.

PROGRAMA

I. Introducció a l'anàlisi real
1. Els nombres reals. Valor absolut d'un nombre real. Càlcul amb desigualtats.
2. Funcions reals de variable real. Diverses formes d'expressar funcions. Funcions inverses. Principals funcions elementals.
3. Funcions trigonomètriques. Relacions entre les principals funcions trigonomètriques.

II. Límits i continuïtat de funcions
1. Definició de límit d'una funció real. Límits laterals. Teoremes sobre límits.
2. Continuïtat d'una funció. Tipus de discontinuïtats. Operacions amb funcions contínues.
3. Teoremes sobre continuïtat. Teorema de Bolzano. Teorema dels valors intermedis.

III. Concepte i aplicacions de la derivada
1. Concepte de derivada. Interpretació geomètrica. Derivabilitat en un punt. Relació entre continuïtat i derivabilitat.
2. Derivades de les funcions elementals. Regles de derivació. Derivades d'ordre superior.
4. Teoremes sobre funcions derivables. Teorema de Rolle. Teorema de Cauchy. Teorema de Lagrange.
5. La regla de L'Hôpital pel càlcul de límits indeterminats.
6. Aplicacions de la derivada a l'estudi i representació gràfica d'una funció i la resolució de problemes d'extrems.

IV. Integració
1. Concepte i càlcul de primitives. Primitives immediates.
2. Canvi de variable. Integració per parts.
3. Integració de funcions racionals, trigonomètriques i irracionals.
4. Concepte d'integral definida. Teoremes fonamentals del càlcul. La regla de Barrow.
5. Integració per parts i canvi de variable en integrals definides.
6. Integrals impròpies.
7. Aplicacions de la integral definida al càlcul d'àrees planes, volums de sòlids i longituds d'arc.

V. Sèries de nombres reals
1. Concepte de successió i límit d'una successió de nombres reals.
2. Definició de sèrie. Suma d'una sèrie. Sèries convergents i divergents.
3. Sèries telescòpiques, geomètriques i hiperharmòniques.
4. Criteris de convergència de sèries de termes positius: Criteris de comparació. Criteri del quocient.
5. Sèries alternades. Criteri de Leibnitz.
6. Sèries de termes positius i negatius. Convergència absoluta i condicional.

VI. Aproximació polinòmica de funcions
1. Polinomis de Taylor.
2. Forma del terme complementari. Acotació de l'error.
3. Aplicacions de la fórmula de Taylor.
4. Sèries de potències.

Llicenciatura de Geologia – Universitat de Barcelona (UB)

Cursos 2007/08 y 2008/09 - http://www.ub.edu/geologia/geologia/programa.htm

---

Nom de l'assignatura: Matemàtiques I (Anàlisi i Càlcul)
Crèdits: 6 (Crèdits assig. només no-ECTS) - 1r semestre

Competències que es desenvolupen en l'assignatura

- Capacitat d'analitzar i interpretar funcions matemàtiques de variable real que apareguin en diferents entorns geològics.
- Capacitat per poder aplicar el concepte d'integració al càlcul d'àrees i volums.
- Poder modelitzar diferents situacions a temps discret usant els conceptes de successió i sèrie.

Objectius d'aprenentatge de l'assignatura

Referits a coneixements

- Conèixer les notacions i operacions amb nombres reals, a més de les raons trigonomètriques bàsiques.
- Conèixer els conceptes de límit, continuïtat i derivabilitat aplicats a l'estudi de funcions, així com la relació entre ells.
- Conèixer els conceptes de primitiva, integral definida, integral impròpia i els principals mètodes d'integració usats en el càlcul d'integrals, àrees i volums.
- Conèixer els conceptes de successió, límit d'una successió, sèries i els principals criteris de convergència per a sèries.
- Conèixer el concepte d'aproximació polinòmica de funcions mitjançant el polinomi de Taylor

Referits a habilitats, destreses

- Saber manipular equacions i expressions on apareguin valors absoluts, funcions trigonomètriques i altres funcions bàsiques.
- Saber fer l'estudi de funcions analitzant els límits i derivades adients, a més de ser capaç de fer la seva gràfica aproximada.
- Aplicar l'estudi de les derivades a la resolució de problemes de càlcul d'extrems i optimització.
- Saber usar els diferents mètodes d'integració per calcular primitives , integrals definides i impròpies. Aplicar-ho al càlcul concret d'àrees planes i volums de revolució.
- Saber aplicar els criteris de convergència adients per analitzar el comportament d'alguns tipus de sèries de nombres reals.
- Saber aplicar els polinomis de Taylor per aproximar funcions amb una precisió donada.

Referits a actituds, valors i normes

L'estudiant ha de d'assolir un mètode de treball sistemàtic i rigorós, així com una capacitat d'abstracció bàsica.

Blocs temàtics de l'assignatura

1. Introducció a l'anàlisi real.
1.1. Els nombres reals.
1.2. Funcions reals de variable real.
1.3. Funcions trigonomètriques i relacions entre elles.

2. Límits i continuïtat de funcions.
2.1. Límit d'una funció en un punt.
2.2. Continuïtat d'una funció.
2.3. Teoremes sobre continuïtat.

3. Concepte i aplicacions de la derivada.
3.1. Derivada d'una funció en un punt.
3.2. Funció derivada.
3.3. Teoremes sobre funcions derivables.
3.4. La Regla de L'Hôpital.
3.5. Aplicacions de la derivada.

4. Integració.
4.1. Concepte i càlcul de primitives.

4.2. Definició i càlcul d'integral definida.
4.3. Integrals impròpies.
4.4. Aplicacions de la integral definida.

5. Successions i sèries de nombres reals.
5.1. Concepte de successió i límit d'una successió de nombres reals.
5.2. Definició de sèrie i de suma d'una sèrie de nombres reals.
5.3. Criteris de convergència per a sèries de termes positius.
5.4. Sèries alternades: criteri de Leibnitz.
5.5. Sèries de termes positius i negatius: convergència absoluta i condicional.
6. Aproximació polinòmica de funcions.
6.1. Polinomis de Taylor.
6.2. Forma del terme complementari: acotació de l'error.
6.3. Aplicacions de la fórmula de Taylor.

Metodologia i organització general de l'assignatura
Aquesta és una assignatura presencial que té el 50% d'hores de teoria i l'altre 50% de problemes. La part de teoria es basa en un sistema de classes magistrals. El professor o professora exposa a classe els continguts bàsics de l'assignatura i dóna indicacions precises de com treballar-la (què cal llegir i de quines fonts per reforçar els conceptes, quins exercicis cal fer, etc.). A les classes de problemes es van resolent els exercicis del llistat que estan penjats al dossier de l'assignatura. El professor o professora donarà indicacions de quins exercicis cal treballar cada setmana de manera que els alumnes hagin pogut resoldre'ls abans d'assistir a la classe i, si s'escau, dedicar-la a resoldre dubtes.

Avaluació acreditativa dels aprenentatges de l'assignatura
L'avaluació continuada és l'avaluació per defecte i persegueix potenciar un treball continuat per part de l'estudiant, facilitant així el seguiment de l'assignatura i la interacció alumnat-professorat.
L'avaluació continuada de l'assignatura es durà a terme amb la realització de quatre proves, no eliminatòries de matèria, que es faran durant el curs i dins l'horari de l'assignatura. És a dir, en cada prova poden aparèixer continguts que ja hagin sortit en proves anteriors. Amb això es pretén no perdre la visió de conjunt de tota l'assignatura.
El període de realització d'aquestes proves s'anunciarà en el dossier de l'assignatura. Aquestes proves es podran ponderar de forma diferent, donat que a mesura que avanci el curs hi haurà més matèria a assolir. Els intervals que contindran el percentatge de ponderació de cada prova són: [10, 20], [15, 25], [25, 35] i [30, 40] per a la proves 1, 2, 3 i 4 respectivament.
El 100% de la qualificació final de l'assignatura vindrà donat per la suma ponderada de totes les proves realitzades durant el curs.

Avaluació única
Qui vulgui renunciar a l'avaluació continuada i acollir-se a l'avaluació única ho haurà de fer constar per escrit, amb una còpia per a l'estudiant i una altra per al professor.
La data màxima per acollir-se a l'avaluació única serà passades tres setmanes des de l'inici de curs i sempre abans de la realització de la primera prova. La segona convocatòria, mentre existeixi, serà comú tant per als suspesos de l'avaluació continuada com per als suspesos de l'avaluació única.

Fonts d'informació bàsiques de l'assignatura
APOSTOL, T.M. *Análisis Matemático.* 2a ed. Barcelona [etc.] : Reverté, cop. 1977.
AYRES, F.; MENDELSON, E. *Cálculo diferencial e integral.* 3a ed. Madrid: Ed. McGraw-Hill, 1991.
BURGOS, J. DE. *Cálculo infinitesimal de una variable.* Madrid : McGraw-Hill, cop. 1994.
LARSON, R.E.; HOSTETLER, R.P.; EDWARDS, B.H. *Cálculo y geometria analítica*. vol. 1 6a ed. Madrid [etc.] McGraw-Hill/Interamericana de España cop. 1999.
PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral.* México, D.F. [etc.] : Limusa, Noriega, [1994?].
PUIG, J. *Problemas de Matemáticas para COU y primer nivel universitario.* Madrid: Ed. Alhambra,1986.
SMITH, R.T.; MINTON, R.B. *Cálculo.* vol. 1. Santafé de Bogotá [etc.] McGraw Hill cop. 2000.

Llicenciatura de Geologia – Universidad del País Vasco (UPV)

Del curso 2005/06 al 2008/09 - http://ciencias.ehu.es/

CRÉDIT0S: 12 CICL0: Primero

OBJETIVOS
Enseñar los conceptos matemáticos y estadísticos útiles para el estudio de la Geología y los métodos básicos de cálculo.

PROGRAMA

1. NÚMEROS Y FIGURAS
Números enteros, racionales y reales. Expresión decimal y notación científica. Valor absoluto. Desigualdades. Figuras elementales planas y sólidas. La fórmula de Euler para poliedros. Medidas: áreas y volúmenes de las figuras elementales; medida de ángulos (grados y radianes). Localización de puntos en el plano (coordenadas cartesianas y polares) y en la esfera (longitud y latitud).

2. FUNCIONES
Qué es una función y qué es una gráfica. Funciones lineales, cuadráticas, polinómicas; exponenciales y logaritmos. Forma de sus gráficas. Escala logarítmica en las gráficas. Ecuaciones de figuras planas.

3. TRIÁNGULOS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
Triángulos semejantes. Triángulos rectángulos: seno, coseno, tangente. Funciones trigonométricas. Algunas fórmulas útiles. Otras propiedades de los triángulos.

4. DERIVADAS: LA MEDIDA DE LA VARIACIÓN
La derivada como velocidad de cambio. Interpretación gráfica. Crecimiento y decrecimiento. Derivadas de funciones elementales. Máximos y mínimos; problemas de extremos. Segunda derivada: aceleración y curvatura. El teorema del valor medio. Construcción y lectura de gráficas.

5. INTEGRALES
La integral como área. El teorema fundamental del Cálculo. Técnicas elementales de integración (cambio de variable e integración por partes). Cálculo de algunas áreas y volúmenes.

6. CÁLCULOS APROXIMADOS
Aproximación y error. Cálculo aproximado de raíces y de derivadas e integrales. El polinomio de Taylor como aproximación de funciones. Interpolación y extrapolación.

7. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
Funciones de dos y más variables. Representación de funciones de dos variables: curvas de nivel (mapas). Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas en el espacio. Derivadas parciales y gradiente. Interpretación de máximos, mínimos y puntos de silla (puertos).

8. ESTADÍSTICA BÁSICA
Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos: media, moda y mediana; varianza y desviación típica. Distribuciones bidimensionales: Correlación y regresión.

9. PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA
Probabilidad. Distribuciones de probabilidad: binomial y normal. Población y muestra. Intervalos de confianza. Contraste de hipótesis.

Llicenciatura de Geologia – Universidad de Granada (UG)

Curso 2006/07 - http://www.ugr.es/~decacien/Planes/Geologia/Plan%202000/programas.htm

MATRICES.
Definición de matriz. Operaciones con matrices: suma, producto por escalares y producto de matrices. Matriz identidad. Matriz inversa. Matriz transpuesta. Operaciones elementales de matrices. Matrices elementales. Forma escalonada y escalonada reducida de una matriz: forma normal de Hermite. Cálculo de la inversa de una matriz. Rango de una matriz. Matrices equivalentes.

SISTEMAS DE ECUACIONES.
Ecuación lineal. Sistemas de ecuaciones lineales. Soluciones de un sistema. Sistemas equivalentes. Matriz de un sistema y matriz ampliada. Resolución de un sistema de ecuaciones: método de Gauss y de Gauss
Jordan. Teorema de Rouché
Frobenius.

DETERMINANTES.
Determinante de una matriz cuadrada. Propiedades de los determinantes. Cálculo de un determinante. Determinante de la matriz transpuesta. Cálculo de la matriz inversa por determinantes. Rango de una matriz por determinantes. Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.
Función escalares de varias variables. Gráfica de una función. Derivadas parciales. Funciones con valores en Rm. Matriz Jacobiana. Regla de la cadena. Regla de la cadena para derivadas parciales. Derivadas parciales implícitas. Derivadas parciales de orden superior. Matriz Hessiana,. Simetría de la matriz Hessiana. Curvas y superficies de nivel. Derivada direccional. Gradiente. Matrices definidas positivas y negativas. Máximos y mínimos de funciones de *n* variables. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

INTEGRAL INDEFINIDA.
Primitivas de una función. Integral indefinida. Integrales inmediatas. Propiedades de la integral indefinida. Integración por sustitución. Integración por partes. Integraciones de funciones polinómicas. Descomposición de una función racional en fracciones simples. Integración de funciones racionales. Integración de funciones irracionales. Integrales binomias. Integración de funciones trigonométricas. Sustituciones trigonométricas.

INTEGRAL DEFINIDA.
Área definida por una función y el eje de abscisas. Integral definida. Regla de Barrow. Cambio de variables para integrales definidas. Integración por partes. Integrales impropias. Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares. Longitud del arco de una curva. Volumen de un cuerpo en función de las secciones paralelas. Volumen de un cuerpo de revolución. Superficie de un cuerpo de revolución

INTEGRALES MÚLTIPLES E INTEGRALES CURVILÍNEAS.
Integrales iteradas. Integrales dobles. Cálculo de la integral doble: determinación de los límites de integración. Coordenadas polares. Cambio de variable para integrales dobles. Cálculo de áreas y de volúmenes mediante integrales dobles. Integrales triples. Coordenadas cilíndricas y esféricas. Cambio de coordenadas. Cálculo de volúmenes. Integral de una función a lo largo de una curva. Trabajo de un campo escalar. Campos conservativos. Fórmula de Green. Aplicación al cálculo de longitudes y áreas.

ECUACIONES DIFERENCIALES.
Definiciones y ejemplos. Orden de una ecuación diferencial. Ecuaciones de primer orden. Ecuaciones de variables separadas. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones de variables separadas. Ecuaciones exactas. Factores integrantes. Ecuaciones lineales de primer orden. Ecuación de Bernoulli. Ecuaciones lineales homogéneas. Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Ecuaciones lineales homogéneas de orden *n* con coeficientes constantes. Ecuaciones lineales no homogéneas de orden *n* . Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Licenciatura en Geología – Universidad de Oviedo (UO)

Del curso 2005/06 al 2009/10 - http://directo.uniovi.es/catalogo/FichaAsignatura.ASP?asignatura=11814

Plan de estudios:	LICENCIADO EN GEOLOGIA			**Centro:**	FACULTAD DE GEOLOGÍA		
Tipo:	Troncal	**Créditos totales:**	9	**Teóricos:**	5	**Prácticos:**	4
Ciclo:	1º	**Curso:**	1º	**Período:**	ANUAL		
Contenido:	<u>Primera Parte: Cálculo y Álgebra</u> 1. Repaso de cálculo de una variable: funciones reales de una variable real. Límite, continuidad y derivación. Representación gráfica de funciones.2. Polinomios de Taylor.3. Cálculo de primitivas. La integral definida. Teorema fundamental del cálculo integral. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes. Introducción a las ecuaciones diferenciales.4. Espacios vectoriales. Dependencia e independencia lineal. Base de un espacio vectorial. Coordenadas de un vector en una base. Cambio de base.5. Matrices. Determinantes. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales: método de Gauss. Matriz inversa.6. Aplicaciones lineales. Diagonalización de operadores. Concepto de valor propio y vector propio. Se realizarán dos prácticas de ordenador en sesiones de dos horas. Se utilizará el programa MATLAB para ilustrar y afianzar algunos de los conceptos desarrollados en la primera parte de la asignatura. Primera práctica: Introducción al MATLAB. Gráficas en 2D. Polinomios de Taylor. Cálculo de límites. Derivación e integración. Segunda práctica: Resolución de ecuaciones diferenciales. Cálculos con matrices. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Diagonalización de matrices. <u>Segunda Parte: Estadística</u> 7. Introducción a la estadística. Etapas fundamentales de un proceso estadístico. Definiciones de estadística. Población y muestra. Noción de variable estadística. Representaciones gráficas más frecuentes. Percentiles. 8. Medidas de centralización, dispersión y posición. Medidas de tendencia central: media, mediana y moda. Ventajas e inconvenientes. Medidas de dispersión: rango, recorrido intercuartílico, desviación media, varianza y desviación típica. Coeficiente de variación. Valores tipificados. Coeficientes de asimetría y curtosis. 9. Distribuciones bidimensionales: distribuciones marginales. Distribuciones condicionadas. Covarianza. Independencia estadística. 10. Regresión y correlación: Conceptos. Recta de regresión lineal mínimo-cuadrática. Coeficiente de correlación lineal de Pearson. 11. Probabilidad: Introducción a las distribuciones de probabilidad. Distribuciones discretas y continuas. Función de distribución. 12. Distribuciones de probabilidad más usuales: distribución de Bernouilli, Binomial, Hipergeométrica, de Poisson, Normal. Distribuciones asociadas a la normal: Distribución chi-cuadrado; t-de Student; f de Snedecor. Características. 13. Estimación y contraste de hipótesis. Estimación puntual y por intervalos. Intervalos de confianza. Contrastes de hipótesis: hipótesis nula y alternativa, tipos de errores, región crítica, nivel de significación.						
Metodología y Evaluación:	Se realizará únicamente examen final. Al estar la asignatura dividida en dos partes, una primera parte de Cálculo y Álgebra y una segunda parte dedicada a la Estadística, el examen constará de dos partes, ambas deberán ser aprobadas para aprobar la asignatura. Si sólo se aprueba una parte, dicho aprobado se guardará hasta la convocatoria de septiembre.						
Método:	Clases magistrales.						

Licenciatura en Química – Universidad de Salamanca (US)

Curso 2006/07 - http://www3.usal.es/~ccquimicas/

Departamento: **Matemáticas** Carácter de la asignatura: Troncal Créditos totales: 12,0 (9,0 T + 3,0 P)

Objetivos:
Que los alumnos adquieran nociones básicas de cálculo diferencial e integral en una y varias variables.
Que sean capaces de reconocer los tipos elementales de ecuaciones diferenciales y aplicar estos conocimientos a la resolución de problemas relacionados con sus estudios.
Que se forme en el razonamiento matemático como modelo de estudio de las Ciencias.
Que alcance automatismos de cálculo en las operaciones matemáticas de Geometría lineal.

Plan de trabajo:
Clases de teoría y problemas. Se pondrán ejemplos que hagan ver a los alumnos la relación entre diversos aspectos de la física y la química y ciertos modelos matemáticos.
Teniendo en cuenta que se ha de dar este programa concentrado en 90 horas lectivas, el alumno se verá obligado a llevar a cabo un intenso trabajo personal, contando con la ayuda del profesor en las horas dedicadas a tutorías.

Evaluación:
Prueba escrita en la que los alumnos han de poner de manifiesto sus conocimientos teóricos así como su aplicación.

PROGRAMA:

TEMA 1. CÁLCULO DIFERENCIAL EN R
Límites y continuidad para funciones reales de una variable real. Teoremas de Bolzano y Weierstrass.
Derivabilidad. Propiedades de la derivada. Regla de la cadena. Derivadas de orden superior. Teorema de Rolle. Teorema de los incrementos finitos. Teorema del valor medio. Regla de l'Hôpital. Desarrollos de Taylor. Aplicaciones al cálculo de límites. Funciones crecientes y decrecientes. Extremos relativos. Concavidad y convexidad. Representación aproximada de funciones. Aproximación de raíces: Método de las cuerdas y método de Newton o de las tangentes.

TEMA 2. CÁLCULO INTEGRAL PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL
Integral de Riemann. Propiedades. Teorema fundamental del Cálculo Integral: Aplicaciones. Integrales Impropias. Funciones Gamma y Beta. Cálculo de Primitivas. Aplicaciones Geométricas de la Integral: Áreas, Volúmenes, Longitudes de curvas y Arreas de superficie.

TEMA 3. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL VARIAS VARIABLES
El espacio euclídeo de dimensión n. Normas. Límites y continuidad para funciones de varias variables
Normas. Nociones de topología. Límites y continuidad. Derivadas según un vector. Derivadas parciales. Diferencial. Propiedades. Regla de la cadena. Plano tangente. Gradiente. Integrales múltiples. Teorema de Fubini. Teorema de cambio de variables.

TEMA 4. ECUACIONES DIFERENCIALES
La noción de ecuación diferencial. Ejemplos clásicos. Noción de solución. Ecuaciones de Euler. Métodos clásicos de resolución de las ecuaciones de primer orden: ecuaciones lineales, de Bernoulli, de Riccati, de variables separadas y homogéneas. Ecuaciones que proceden de formas diferenciales exactas. Factor integrante. Ecuaciones de orden superior no lineales. Reducción del orden. Integración por medio de series. Ecuaciones de Ermite, Legendre y Bessel.

TEMA 5. ESPACIOS VECTORIALES
Espacios vectoriales. Subespacios. Teorema de la base. Fórmulas de la dimensión. Cambios de base. Espacio dual. Subespacio incidente.

TEMA 6. APLICACIÓN A LA GEOMETRÍA
Subvariedades afines. Ecuaciones paramétricas e implícitas. Posiciones relativas: corte, paralelismo,... Haces. Métricas euclídeas. Espacio euclídeo. Ortogonalidad, distancias y ángulos. Bases ortonormales. Método de ortonormalización de Gramm-Schmidt. Problemas métricos.

TEMA 7. TRANSFORMACIONES LINEALES
Transformaciones lineales. Aplicaciones lineales. Matrices de las aplicaciones lineales. Problemas de diagonalización. Descomposición del espacio. Valores y vectores propios. Polinomio característico. Caracterización de la diagonalización. Triangulación.

TEMA 8. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE MATRICES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.
Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. El operador D.

Llicenciatura de Química – Universidad del País Vasco (UPV)

Curso 2006/07 **-** http://ciencias.ehu.es/

CRÉDITOS: 12 CURSO: Primero

PROGRAMA

TEMA 1: CÁLCULO DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE
1.- Cálculo de límites
2.- Derivadas y serie de Taylor.
3.- Integrales.

TEMA 2: ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
1.- Vectores en el espacio.
2.- Matrices y determinantes. Valores y vectores propios.
3.- Producto escalar. Producto vectorial.
4.- Ecuaciones de rectas y planos.
5.- Superficies.

TEMA 3: CÁLCULO DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
1.- Continuidad.
2.- Derivadas parciales. Diferenciación.
3.- Máximos y mínimos condicionados.
4.- Funciones vectoriales.
5.- Integrales múltiples.

TEMA 4: ECUACIONES DIFERENCIALES
1.- Ecuaciones de primer orden. Separación de variables. Ecuaciones lineales.
2.- Ecuaciones de segundo orden.
3.- Sistemas de ecuaciones con coeficientes constantes.

TEMA 5: ANÁLISIS NUMÉRICO
1.- Sistemas de ecuaciones lineales.
2.- Resolución de ecuaciones no lineales.
3.- Interpolación.
4.- Integración numérica.
5.- Métodos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

TEMA 6: ESTADÍSTICA
1.- Estadística descriptiva.
2.- Probabilidad.
3.- Inferencia estadística.

Llicenciatura de Química – Universidad de Granada (UG)

http://www.ugr.es/~decacien/Planes/Quimica/Plan%201997/temarios/6711112.htm

CRÉDITOS: 12 (9 teóricos y 3 prácticos) **CURSO: Primero**

PROGRAMA DE TEORÍA

Capítulo 1: Teoría de matrices. Sistemas de ecuaciones lineales.
- Introducción.
- Vectores y matrices: conceptos básicos.
- Método de Gauss.
- Rango de una matriz.
- Matrices invertibles. Caracterización.
- Resolución numérica de sistemas lineales.

Capítulo 2: Espacios vectoriales. Transformaciones lineales.
- Definición. Ejemplos fundamentales. Subespacios.
- Sistemas de generadores y bases. Cambio de base.
- Producto escalar. Bases ortonormales.
- Transformaciones lineales. Matriz asociada. Interpretación geométrica en el caso 2x2.
- Valores y vectores propios. Diagonalización. Forma canónica de Jordan.
- Cálculo aproximado de valores y vectores propios. Aplicaciones.

Capítulo 3: Cálculo Diferencial
- Introducción.
- Repaso de conceptos: Números reales, Función, Límite funciona¡, Continuidad.
- Derivada y diferencia¡. Concepto e interpretación geométrica.
- Resultados principales.
- Aplicación: métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales.
- Funciones de varias variables: Concepto, Límite, Continuidad.
- Derivadas parciales. Diferencia¡ total. Gradiente.
- Extremos de funciones de varias variables.
- Ajuste numérico de datos: Conceptos básicos. Interpolación polinomial. Aproximación tipo Taylor. Ajuste por mínimos cuadrados.

Capítulo 4: Cálculo integral
- Introducción.
- Integral indefinida. Definición y propiedades.
- Técnicas elementales de integración.
- Integral definida. Definición y resultados fundamentales.
- Aplicaciones: cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.
- Integración múltiple. Definición y resultados fundamentales.
- Aplicación: cálculo de áreas y volúmenes.
- Métodos numéricos de integración.

Capítulo 5: Ecuaciones diferenciales
- Introducción. Modelos matemáticos de problemas de las ciencias experimentales.
- Ecuaciones de primer orden. Aplicaciones: crecimiento radiactivo, ley de acción de masas, mezclas.
- Ecuaciones lineales de orden superior.
- Aplicaciones de la ecuación lineal de segundo orden.
- Métodos numéricos básicos de resolución.

Licenciatura en Química – Universidad de Oviedo (UO)

http://directo.uniovi.es/catalogo/FichaAsignatura.ASP?asignatura=11832

Plan de estudios:	LICENCIADO EN QUIMICA			**Centro:**	FACULTAD DE QUÍMICA		
Tipo:	Troncal	**Créditos totales:**	12	**Teóricos:**	6	**Prácticos:**	6
Ciclo:	1º	**Curso:**	1º	**Período:**	ANUAL		
Contenido:	Algebra lineal. (1 crédito) Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. (2.5 créditos) Introducción al cálculo numérico y a la programación. (0.5 créditos) Cálculo diferencial de funciones de varias variables. (3 créditos) Cálculo integral de funciones de varias variables. (2 créditos) Integral de línea y de superficie. (2 créditos) Ecuaciones diferenciales. (1 crédito)						

Licenciatura en Ciencias Ambientales – Universidad de Barcelona (UB)

Cursos 2007/08 y 2008/09 - http://www.ub.edu/biologia/ccamb/programes/1cicle.htm

ÁLGEBRA Y CÁLCULO APLICADOS AL MEDIO AMBIENTE
Asignatura troncal de 6 créditos (4,5 de teoría y 1,5 de prácticas).

I. Programa:

1. Espacios vectoriales.
a) Definición y propiedades.
b) Dependencia lineal, base y dimensión.

2. Aplicaciones lineales.
a) Definición y propiedades básicas.
b) Núcleo e imagen de una aplicación.

3. Matrices.
a) Operaciones con matrices.
b) Matrices de cambio de base.
c) Matrices de aplicaciones lineales.
d) Diagonalización.

4. Series numéricas.
a) Definición de serie. Suma de una serie.
b) Series telescópicas y geométricas.

5. Aproximación polinómica de funciones.
a) Teorema de Taylor. Formas del resto.
b) Aplicaciones al cálculo aproximado de funciones.
6. Ecuaciones diferenciales.
a) Ecuaciones diferenciales. Teoremas de existencia.
b) Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
c) Aplicaciones.

II. Evaluación:

La asignatura se evaluará mediante dos opciones:
a) Evaluación continuada: Se realizarán tres exámenes voluntarios (60% de la nota final) y un examen final (40% de la nota final).
b) Examen final único (100% de la nota final).

2. CUESTIONARIO DISTRIBUIDO A LOS ESTUDIANTES DE GEOLOGÍA DE LA UAB

Aquest qüestionari pretén esbrinar les causes de les dificultats amb les que es troben els estudiants del primer curs de la llicenciatura de Geològiques a l'hora de fer matemàtiques. Volem entendre el que passa per tal d'actuar amb coneixement de causa. Moltes gràcies per la teva col·laboració.

PREGUNTES RELATIVES A L'ENSENYAMENT SECUNDARI

1. Quines matemàtiques vas cursar al Batxillerat? □ Ciències □ Humanístic □ No en vaig fer

2. T'agradaven les matemàtiques? □ gens □ poc □ força □ molt

3. Les trobaves fàcils? □ Sí □ No

4. Te'n sorties bé? □ Sí □ No

5. Quina nota de matemàtiques (global) vas tenir al Batxillerat? ………………….

6. Et vas examinar de matemàtiques a la prova de Selectivitat? □ Sí □ No

7. Per què no vas triar les matemàtiques a la selectivitat?

8. Quina qualificació vas tenir de matemàtiques a l'examen de Selectivitat? ………………….

9. Si vas suspendre per quines raons creus que va ser?:

10. Quina és la teva nota global de Selectivitat? ………………….

PREGUNTES RELATIVES A L'ENSENYAMENT UNIVERSITARI

11. Tens aprovada l'assignatura de matemàtiques? □ Sí □ No

12. A quantes convocatòries t'has presentat? ………………..

13. Quines notes vas treure? Hi a convocatòries a les quals no et vas presentar?

- Febrer 2002 nota ……….. / no presentat □
- Juliol 2002 nota ……….. / no presentat □
- Febrer 2003 nota ……….. / no presentat □
- Juliol 2003 nota ……….. / no presentat □

14. Quins temes que tu no havies estudiat al Batxillerat (o havies estudiat molt per sobre) el professor de matemàtiques ha donat per coneguts durant tot el curs.
(precisar) ………………………………………………………………………………………………

15. Quina part de les matemàtiques de primer de geològiques ha estat més difícil per a tú?
□ Álgebra Lineal □ Càlcul □ Altres (precisar) ……………………………………………

16. Quines diferències trobes en la manera com es plantegen les matemàtiques a la universitat amb relació a la secundària?

17. Quant de temps dedicaves cada setmana a estudiar matemàtiques fora de l'aula? ……………………

18. Si tenies dificultats, anaves a consultar al professor en hores de visita? □ Sí □ No
Quantes consultes vas fer al llarg del curs?

19. Creus que en matemàtiques el salt entre la secundària i la universitat és molt fort? □ Sí □ No

20. Per què?

21. Creus que fer un curs de reforç de matemàtiques abans d'iniciar els estudis de geologia t'hauria estat útil o necessari? □ Sí □ No

PER A CADASCUNA DE LES FRASES SEGÜENTS, INDICA EL TEU GRAU D'ACORD

Gens d'acord □□□□□□□□□□ Totalment d'acord

22. Amb els problemes que es fan a la classe de problemes en tenia prou per seguir l'assignatura de matemàtiques amb normalitat.	□□□□□□□□□□
23. Fent servir els apunts podia relacionar, sense massa dificultat, el contingut de les classes de teoria amb els problemes.	□□□□□□□□□□
24. Em costava entendre el perquè de les definicions, les demostracions i la necessitat de les hipòtesis dels teoremes.	□□□□□□□□□□
25. En la resolució de problemes quan començava a dominar una tècnica, havia de canviar d'activitat i aprendre a resoldre problemes diferents.	□□□□□□□□□□
26. Normalment em costava molt resoldre els problemes jo sol/a	□□□□□□□□□□

27. A les llistes, els problemes acostumaven a estar graduats per dificultats.	□□□□□□□□□□□
28. Els exàmens de matemàtiques a la universitat abasten més temes que a secundària	□□□□□□□□□□□
29. Les preguntes dels exàmens es corresponien amb el que s'havia fet a classe.	□□□□□□□□□□□
30. Per aprovar era suficient estudiar uns quants dies abans de l'examen.	□□□□□□□□□□□

Finalment,

22. Com veus les matemàtiques dins de la carrera de geologia?:

a. un instrument necessari □

b. un obstacle que cal superar □

c. una assignatura prescindible □

23. Veus relació entre els continguts de l'assignatura de matemàtiques i els de les altres assignatures?

□ gens □ alguna □ molta

24. Creus que caldria reorientat els continguts? □ Sí □ No

En quina direcció?

COMENTARIS PERSONALS:

Moltes gràcies per la teva col·laboració

3. ENTREVISTAS AL PROFESORADO DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS EN LA LICENCIATURA DE GEOLOGÍA

GUIÓN DE PREGUNTAS DE LAS ENTREVISTAS

[*Este guión de preguntas se entregó a los entrevistados con una semana de antelación a la realización de la entrevista*]

1. Creus que els estudiants de primer curs de Geologia estan preparats per estudiar el programa de matemàtiques? En cas contrari, creus que seria útil que fessin un curs propedèutic (o curs zero)?
2. Quant de temps es dedica a la introducció d'alguns temes elementals de modelització matemàtica en Geologia?
3. En cas que no es faci modelització, creus que s'hauria de fer? En quina mesura? Canviaries completament el programa en aquesta direcció?
4. Per què creus que s'han decidit fer aquestes matemàtiques i no unes altres? S'utilitzaran en altres assignatures de la carrera? I en la futura professió del geòleg?
5. Si el curs es justifica en termes d'una formació matemàtica bàsica, és possible presentar a classe les qüestions matemàtiques (la problemàtica) que donen sentit a les nocions, als teoremes i les tècniques que s'estudien? Amb quina profunditat es poden treballar els temes? Creus que seria necessari dedicar un curs complet per tal de desenvolupar adequadament el programa?
6. Hi ha temps i ocasió a la classe de problemes o de teoria perquè els estudiants arribin a dominar les principals tècniques matemàtiques i puguin estudiar en profunditat algun tipus de problemes? És possible que els estudiants arribin a interpretar el curs com una successió de tècniques deslligades i independents?
7. Quina relació de proximitat hi ha entre els problemes fets a classe i els exercicis que apareixen als exàmens? Són uns exàmens cada vegada més semblants al que es fa a classe o no?
8. Creus que per aprovar l'examen és suficient fer els exercicis de la llista? O, pel contrari, creus que és necessari una cert grau d'elaboració personal de les respostes i una certa interpretació global de la matèria?

Entrevistat A. 14/10/2004

Durada: aprox. 30'

E: La primera pregunta és si creus que els estudiants de Geologia estan preparats per estudiar el programa de matemàtiques? O en cas contrari, creus que seria convenient que fessin un curs propedèutic o curs 0?

A: Bé, la resposta natural és que sembla que no ho estiguin i llavors a la pràctica ja es veu que no ho estan, per tant, hauria de dir que no. Sobre un curs propedèutic, crec que si fos especialment dissenyat per a ells, llavors potser que sí, però bé, tampoc no tinc molt clar que el curs propedèutic sigui la solució. Ara, a tot arreu es fa... Ara bé, si fos una cosa molt ben dissenyada per a la situació concreta dels geòlegs, que tampoc no sé quina és... potser ara vosaltres ho arribeu a descobrir... aleshores potser sí.

E: Aquí al programa hem vist que hi ha com dues parts, teòricament, però en realitat també és així? La pregunta és: quant de temps es dedica durant el curs a la introducció d'alguns temes elementals de modelització matemàtica en geologia? S'arriba a fer, això?

A: Això hi diu el programa? Modelització? ... Ui sí que ho diu... Poquíssim... Això ha anat desapareixent... Fixa't que aquí tampoc gairebé ni hi surt [referint-se a l'esquema de continguts del curs]... Aplicacions i exemples. Abans sí que sortien en alguna cosa però no, no... abans hi havia un tema d'equacions diferencials... però clar que ara aquí això de modelització realment canta... A part, jo tinc potser alguna experiència personal així fent una classe, és a dir, una mica més geològica, i allò era realment el caos total... Són experiències puntuals...

E: I en el cas que no es faci modelització, creus que s'hauria de fer? En quina mesura? Canviaries totalment el programa en aquesta direcció?

A: No, no... No canviaria el programa... En realitat aquest programa el vaig fer completament jo... És que amb modelització, Geologia és un cas molt especial, si en lloc de Geologia fossin de Biologia aleshores les coses són diferents. En Biologia, modelització sí que es fa... Per exemple, jo aquest mateix programa l'he fet simultàniament a grups de Biologia i de Geologia, i a Biologia sí que era més fàcil posar algun exemple, com ara el de creixement de poblacions, tot lligat amb diagonalització de matrius. Però el món de la Geologia és una mica més complicat. Quan jo a classe havia intentat fer alguna cosa, o bé te n'anaves molt cap a la física, alguna vegada havia fet alguna cosa sobre l'efecte hivernacle, i els resultats més aviat van ser terrorífics... És a dir, que això de la Geologia i les matemàtiques, tot i que jo hi he dedicat molta estona a pensar-ho, encara ara no veig clarament quines matemàtiques necessiten realment els geòlegs, perquè és un camp molt complicat... Jo vaig parlant amb ells i tampoc no ho saben, és un camp molt ampli. Bé tots els camps són molt amplis, però jo he parlat amb geòlegs que fan servir 0 matemàtiques, cosa que amb altres ciències potser no passa, mentre que d'altres que en fan moltes més, com per exemple, quan fa molts anys vaig parlar amb geòlegs, van acabar sortint coses increïbles, a dins de la geologia hi ha la cristal·lografia i llavors em demanaven el que vulguis... des de grups fins a... tampoc no es tracta d'això... Després de donar-hi moltes voltes, al final vaig arribar a que ells el que necessitaven eren les bases més elementals de les matemàtiques que un científic ha de conèixer... des de la notació exponencial fins a que això de la derivada positiva indica que creix i que negativa decreix, coses molt, molt bàsiques, que de fet són coses de batxillerat, però amb la incisió de la universitat.

E: Això és més o menys la quarta pregunta, per què creus que s'han decidit fer aquestes matemàtiques i no unes altres?

A: Si... Això és el que acabo de contestar....

E: Si creus que és un curs bàsic, que és el que has dit, o altres coses que estem encara intentant aclarir, creus que ho faran servir en altres assignatures de la mateixa carrera?

A: És més aviat això... una formació bàsica... Un científic ha de ser capaç de moure's amb aquestes quatre coses bàsiques sigui quin sigui el seu futur camp. Podríem dir que el cas de geologia és el denominador comú mínim de tota la facultat de ciències.

E: La següent pregunta seria una mica més delicada. Si el curs es justifica, pel que es veu, en termes d'una formació matemàtica bàsica, la pregunta és si és possible presentar a classe les qüestions matemàtiques, és a dir, la problemàtica que els dóna sentit. És a dir, és possible presentar aquells problemes que donen sentit a aquests teoremes, a aquestes nocions que apareixen aquí? Amb quina profunditat es poden treballar els temes? Creus que seria necessari dedicar un curs complet per tal de desenvolupar aquest programa?

A: No, a mi em sembla que hi ha temps suficient. Amb això no sóc massa pessimista. És clar que sempre ens podem queixar de que... No, no necessitem més temps. Però jo no insistiria massa amb aquest tema... Amb un semestre, aquestes 4 coses, si ells tinguessin una base mínimament sòlida, aquí tindries temps de motivar, donar sentit i totes aquestes coses... No crec que sigui un problema de temps, jo acostumava a anar molt sobrat, jo crec que és un problema d'actitud...

E: I de les poques matemàtiques que saben?

A: Si, de les poques matemàtiques que saben i de l'actitud que tenen vers les matemàtiques que jo no l'he vista enlloc més, a Ciències Socials, però allò és un altre món...

E: Aquesta pregunta té una mica de relació amb l'anterior... Hi ha temps i ocasió a la classe de problemes o de teoria perquè els estudiants arribin a dominar les principals tècniques matemàtiques i que puguin estudiar en profunditat algun tipus de problemes? Ens ha semblat que amb el temps que tenen, unes 33 sessions, no és més possible que els estudiants arribin a interpretar el curs com una successió de tècniques deslligades i independents?

A: Clar, una mica sí... perquè clar és sols un semestre i el primer semestre quan arriben... clar, estudiar amb profunditat no, no... però em sembla que hi ha temps suficient per fer coses... És que clar, tot és molt elemental... Aquí a Geològiques el que m'he trobat, encara que això no contesta, són coses molt lamentables. I m'hi he trobat més casos que a cap altre camp. És que he hagut de suspendre a tothom, però fins i tot a la gent que ha treballat, ha estudiat i té ganes d'aprendre i d'aprovar i no aproven... I per què? Hi han dedicat tot un esforç i tenen ganes d'aprovar, de fer bé les coses, però al final arriben a i tatxen la x a dalt i a baix i els hi dóna 1... clar... i ja sap greu que aquests quatre o cinc que t'havien treballat a classe, estaven atents i estudiaven i tal... però, clar, és que no hi ha res a fer... A veure, això és molt dràstic però passa. Això que veus una gent que els veus que no faran res, però n'hi ha uns quants que segueixen i et trobes a l'examen que tampoc poden aprovar perquè com que hi ha una etapa intermitja que han perdut, encara que ells tinguin ganes de treure's el curs i t'hagin escoltat, i han vist el polinomi de Taylor, i l'han entès i saben com es fa... però després a la més mínima operació elemental aritmètica se'n va tot a...

E: Per tant, ara potser s'hauria de tornar a la pregunta 1, que ara la resposta hagués estat més contundent, no?

A: Sí, sí... Perquè no sé això del curs propedèutic, però aquí també començàvem per lo més mínim, la notació exponencial, estudiant 1050 o 10-50, que això són coses que han de saber, i és clar que ho han vist en algun moment, i resulta que ja no ho saben... El que passa que en unes setmanes els hi pots fer sentir, però en realitat ells ja ho han sentit, i tant... que ... ja ho han sentit. Però clar, potser ja ha passat un lapsus de temps i tot això ho han eliminat del seu currículum. Llavors, és clar que els hi resulta molt difícil... Estic parlant dels bons estudiants, cosa que no significa que la gent sigui tonta, perquè al cap d'un temps ells es treuen una carrera i són geòlegs, i són geòlegs excel·lents i alguns han vingut dient: "Jo ho tinc tot aprovat però em falten les matemàtiques" i clar que llavors et fa pensar en què passa ...És una situació gravíssima...

E: Una dada que tenim nosaltres de l'enquesta que hem passat és que el 75% d'aquests estudiants, bé de la nostra mostra, ja no es van presentar, van decidir no presentar-se a la prova de selectivitat de matemàtiques. És una dada molt important, que vol dir que ja durant el segon de Batxillerat van deixar bàsicament les matemàtiques per dedicar-se a les altres assignatures.

A: Sí, sí... el cas de Geologia és un cas molt especial en la facultat de Ciències, és que resulta molt difícil aconseguir res amb aquesta gent...

E: Tu que has fet les dues coses, el fracàs o números de suspesos és més gran a Geologia que a Biologia?

A: Sí, sí... clarament. A més a més, jo aquí tinc una experiència concreta, paral·lela. Fa cosa d'un any o de dos anys que vaig estar fent Biologia i Geologia i explicava el mateix, però exactament el mateix, la mateixa classe, anava feia una classe i llavors després d'una hora anava a l'altre i la reproduïa i la diferència era molt gran... Tampoc és que Biologia fos meravelles perquè ja sabeu que dins la facultat de Ciències els problemes hi són a tot arreu... Però bé, els resultats i experiències eren molt diferents. Tot igual, el mateix professor, el mateix programa, la mateixa llista de problemes, fins i tot hi havia el mateix examen...

E: Clar, tens una mostra gran que pots comparar. Ara ja l'última pregunta té a veure amb els exàmens: quina relació de proximitat hi ha entre els problemes fets a classe i els exercicis que apareixen als exàmens? Són uns exàmens cada vegada més semblants al que es fa a classe o no?

A: Sí, sí... són molt semblants. Com que el fracàs aquí és un greu problema, llavors el professor, encara que sigui el primer any, l'anterior professor ja t'adverteix, i com que el fracàs és un dels grans problemes, doncs ja t'ho planteges de facilitar l'aprovat encara que de totes maneres és legal que l'examen estigui a prop de les classes de problemes.

E: Tu diries que hi ha hagut un moviment d'apropament?

A: Sí, és clar

E: Hem vist exàmens dels últims anys i ens ha semblat que sí. I ja l'última part, creus que per aprovar l'examen és suficient fer els exercicis de la llista?

A: Crec que sí, torno a dir el d'abans però, lamentablement gent que anava a classe de problemes i que més o menys feia tot això, aleshores tenia tantes obstruccions de matemàtica bàsica... Però fer les llistes de problemes ja era una petita garantia d'èxit, o hauria d'haver sigut una garantia de poder aprovar el curs... Un any jo vaig fer classe de teoria i problemes i vaig adoptar un mètode una mica més actiu de fer participar a la gent, els feia fer problemes i llavors els recollia i els repassava i amb això hi havia un grupet de gent que aparentment treballava. Després, absentisme immens, molt gran...

E: Tant a les classes com als exàmens clar?

A: Sí, un absentisme que ja és gran a tot arreu però aquí molt més. Hi ha una prehistòria en que la Geologia no era això, no sé què ha passat... Bé, sí que sé què ha passat, totes aquestes reformes... Geologia era una "Maria" que tothom la volia fer fa uns anys i era un curs amable, senzill, el nivell no era molt alt perquè els Geòlegs no eren el mateix que els matemàtics o els físics, però era una assignatura amable en la que la gent anava a classe, aprenien les seves coses i ja...

E: I el programa era semblant?

A: Ja ha passat molt de temps, però jo diria que era semblant o lleugerament superior, poder sí que apareixien una mica d'equacions diferencials... Jo recordo que el tema d'equacions diferencials era un dels temes que rebien millor perquè era una cosa nova.

Entrevista B. 28 / 10 / 2004

Durada: 30' aprox.

E: Bé, doncs comencem, la primera pregunta diu: Creus que els estudiants de primer de Geologia estan preparats per estudiar el programa de matemàtiques que se'ls hi presenta?

B: Jo crec que tal i com està el programa ara sí. Jo crec que sí, perquè el van modificar fa un parell d'any, jo crec que tal i com està posat ara sí.

E: Molt bé, doncs ara no cal aquesta segona part, així que passem a la segona pregunta: Quant de temps, no sé si ho saps o està previst, el temps que dedicareu o que està previst dedicar a la introducció d'alguns temes elementals de modelització matemàtica en Geologia? És a dir, en el programa hi ha una part que diu això, però llavors en el desenvolupament no figura; per tant, tu què en penses, es farà o no?

B: A veure, jo en particular sí, segur, ja he començat a fer classes i ho vaig fent. Per exemple, per dir-te quins tipus de problemes es plantegen i quines idees matemàtiques surten... Per exemple, en aquest llibre, aquest llibre està posat a la bibliografia en el programa, potser el coneixeu? (E. Batschelet, "Matemáticas básicas para biocientíficos", Editorial Dossat, S.A.)

E: Sí... És el que em vas ensenyar, no? Sí...

B: És molt interessant...

E: Sí que me l'he estat mirant i apareixen exercicis molt interessants. Però en canvi cap d'ells apareix al llistat de problemes.

B: A veure, nosaltres hem agafat l'assignatura ara aquest any i l'hem agafada tal com està i de moment el punt de partida és el que hi ha, a veure, jo, a part del programa, tinc també unes notes que és com un guió més preparat pel professor, ara tenim el mateix que es va fer servir l'any passat i aquest llibre te'l mires i veus que el programa està molt basat en l'estructura del llibre, te'l mires i ja saps d'on ha sortit el programa... El programa es veu molt abstracte, però en canvi el llibre es veu molt bé... Per exemple jo els hi he parlat des de tants per cents, i els he dit que afegir un 12% és multiplicar per 1,12 o si el volem treure llavors dividim per 1,12, o fins parlar de pujar l'IVA fins al seu invers, de treure'l... He parlat també d'altres conceptes, com el de progressions geomètriques i calcular la suma d'aquestes, per exemple el problema que vaig posar, que està tret del llibre en el fons, és: Es calcula que la reserva mundial de petroli és tant, i el consum que en fem és tant, i suposem que cada any aquest consum puja un 5%, doncs, quan trigarem en consumir-lo tot? Es tracta de sumar una progressió geomètrica, i, bé, el que passa és que et puc dir el que he fet i he fet això... Ara he començat a parlar d'Àlgebra Lineal i bé, això ja em costarà més, perquè es vol fer tot molt elemental i pel que he vist fins ara sols parlar d'R2 i crec que a R2 tot està molt limitat, tot és massa abstracte i general, bé, ja veurem...

E: Al final del capítol de matrius del llibre també apareixen exemples molt interessants sobre matrius...

B: Sí, sobre dinàmica de poblacions... Sí, ja ho he fet altres vegades, a Biologia, i el que passa, ja ho he fet altres vegades a Biologia, és que com som dos grups t'has de coordinar, i a més ja tenim un ordre i l'ordre comença amb independència i dependència lineal... Jo per exemple hagués començat amb matrius per tal de motivar l'interès per a totes les següents eines...

E: I ara ja aquesta pregunta que sí que és una mica diferent, en quina mesura canviaries el programa? O de quina forma?

B: Jo, quan vaig veure el programa, del que està posat aquí, diguéssim el que són continguts, no els canviaria, el que sí que canviaria és en general l'orientació, a partir dels problemes anar motivant o a buscar la teoria per fer els problemes ... En canvi, ara el programa tal i com està escrit sembla una cosa molt àrida...

E: No se sap d'on venen les coses i on van ...

B: Sí. Per exemple, el que és l'expressió racional d'un nombre periòdic, s'explica que s'ha de fer una fracció i al denominador posar tants 9 com... Sembla un problema d'anar jugant amb els números. A més els hi he plantejat el problema de sumar una progressió geomètrica o una sèrie infinita, sense entrar amb detall del què vol dir i la noció suma infinita o la noció de límit i llavors pots dir que 0,999999... al final ho pots considerar com si fos 1. També, si recorres una distància i després cada vegada la meitat i la meitat i ... fins a on arribaria? Bé, i coses així... Què més hi ha?

E: La següent pregunta és: Per què creus que s'ha decidit fer aquestes matemàtiques i no unes altres? I si s'utilitzaran en altres assignatures de la carrera o en la futura professió de geòleg? O sinó simplement, per obtenir una formació matemàtica bàsica?

B: Bueno, jo suposo... Jo aquest llibre el coneixia des de fa temps, ja fa temps que volta per aquí i en el moment que va arribar ja ens el vam mirar i jo crec que, per un costat, el programa tal i com el veig s'ha fet bastant en base a aquest llibre que es veu una cosa que té una consistència...

E: Respecte de les matemàtiques que hi apareixen, diguéssim, no?

B: Sí, exacte... I veus que en aquest llibre es preocupa per explicar que certa cosa és interessant per les aplicacions que té, però d'altra banda, les matemàtiques són tan elementals que això, facin el que facin, això és l'últim, vull dir... Jo ho veig claríssim que, per exemple, per calcular el valor propi d'una matriu, facin el que facin, ha de sortir... De totes maneres, ens vam posar en contacte amb la coordinadora, ens vam trobar amb ella i li vam preguntar a veure si hi havia algun tema que fos especialment interessant, van enviar missatges... ens va arribar fins i tot un article on per exemple parlaven d'uns gràfics per parlar de la distribució del vent i resultava ser com una distribució de probabilitat però en realitat sobre un cercle. Potser és una cosa que no té res a veure amb el vent sinó que potser té a veure amb alguna propietat del terreny, però que és una cosa direccional, i llavors amb allò vam veure que potser convindria tractar el tema de coordenades polars, alguna cosa així, que de fet no està inclòs en el programa. Però bé... Per altra banda jo crec que la resposta bàsica és que la matemàtica que es fa és tant elemental que, bé, sí que es fa molt càlcul i molt poca matemàtica discreta però, la motivació és el càlcul, diguéssim la matemàtica "contínua".

E: Bé, llavors, si és així, una cosa que ens ha semblat, mirant el programa, és que les coses quedaven molt soltes i la pregunta és si és possible presentar a classe les qüestions problemàtiques que donen sentit a tot això? A part que tenim tota la problemàtica de que no es fa molta, o bé, massa modelització, es pot donar sentit a les tècniques matemàtiques, teoremes o nocions matemàtiques que apareixen?

B: Sí, jo crec que sí.

E: També, amb quina profunditat es poden treballar els temes? No creus que és necessari un curs complet per desenvolupar aquest programa?

B: Ah bé, ara t'entenc... Sí, jo seria més partidari d'un curs complet perquè, sobretot si es vol motivar-ho, és un procés molt més llarg, l'objectiu seria arribar a cert lloc i llavors des d'allà començar a desgranar-ho tot. Això és molt més llarg.

E: I una altra cosa relacionada amb tot això, si hi ha temps i ocasió a classes de problemes i de teoria perquè els estudiants arribin a dominar les principals tècniques, per exemple, fins i tot si se'ls diu diagonalitzar una matriu o qualsevol altra cosa, calcular els certs tipus d'integrals... Arriben a dominar-ho o en canvi fan un exercici de cada tipus i llavors ja ho han de deixar córrer?

B: Jo crec que no poden. En realitat... O sigui, a les classes de teoria no, a les classes de teoria, em sap greu dir-ho, però són molt magistrals, no vaig baixant a baix.

E: Clar és que no es pot, ja que ho em mirat i sols hi ha 30 hores més o menys, 33 potser...

B: Sí, sí... És això. A classe de teoria no es pot i a classes de problemes, també hi ha una llista de problemes però que és molt "justa"... És una llista curtíssima que aleshores fan aquells i clar llavors els repetidors es troben en què en volen més ja que aquests ja se'ls saben. I llavors jo crec que amb el temps que hi ha potser es pot relacionar amb allò del curs sencer, en aquest programa se li podria dedicar un curs sencer i tampoc no fer pas més...

E: Creus que és possible que els estudiants arribin a interpretar el curs com una successió de tècniques totalment deslligades i independents? Així formulat queda una mica bèstia, però...

B: No ho sé. A veure, ara m'hauria de mirar el programa... perquè ara nosaltres hem començat pel principi i... bé, em sembla que sí, que és molt possible que no vegin pas unitat amb tot això perquè clar, si un dia els hi parles d'àlgebra, un altre dia de derivades... Amb les derivades i integrals suposo que sí que les relacionarem. Però ara, per exemple, hem estat parlant del Binomi de Newton. Llavors hem aprofitat i parlat de combinatòria, després dels nombres combinatoris i la relació amb el binomi de Newton i... ells deuen tenir una sensació de que és un "calaix de sastre". Sí, sí... jo crec que sensació d'unitat no en tindran.

E: I ara ja de les últimes coses que té a veure amb els exàmens, quina relació de proximitat hi ha entre els problemes fets a classes amb els que apareixen als exàmens?

B: Ja, ja... Bé, el que passa es que jo encara no hi he arribat, però el que sé és que tinc a més d'un alumne i de dos i de tres que m'han dit que els exàmens són molt diferents als exercicis que surten a les llistes dels problemes, jo no ho he vist, però...

E: Nosaltres sí que en tenim d'altres anys i sí que són exercicis molt semblants als de la llista. Però aquesta pot ser una sensació permanent dels alumnes...

B: Clar, jo en sentir això els vaig dir que serien exercicis molt semblants però, clar, potser ho fem i igualment diran que són exercicis molt diferents...

E: Només hi ha alguna altra pregunta però, clar, si encara no heu fet exàmens... Bé, diu: creus que és necessària una certa interpretació global de la matèria?

B: Bé, a veure... Potser una visió global no és molt possible però de cada una de les parts, jo crec que sí, serà completament necessària. En l'examen, sí que serà un examen de problemes però això no voldrà dir que algun dels problemes no sigui per veure si han captat les nocions, que ja no serà la pràctica habitual amb problemes. La meva filosofia sí que és, encara que sigui amb alguna pregunta tipus test, per veure si han captat la idea clara del tema. M'ho imagino, clar, perquè encara no sé com anirà tot.

E: Les dades que tenim és que suspenen molts aquesta assignatura.

B: Sí, sí que tens raó... D'altra banda, l'any passat em sembla que van suspendre menys. Aquesta assignatura va tenir un canvi de pla, i aquest programa té poc temps, potser té dos anys, i amb la coordinadora em sembla que va detectar que el canvi de percentatges havia canviat amb el canvi de programa. Podeu anar a parlar amb ella perquè tenia les dades al davant l'altre dia.

E: Sí, en vam estar parlant amb el [responsable del projecte Aula] i es va encarregar de fer tot un anàlisi complet de les notes que han tingut tots aquests últims anys i tot això.

B: Sí, em sembla que hi havia alguna cosa així, i que el dia de la reunió la coordinadora amb les dades al davant se'n va adonar.

E: Bé, moltes gràcies per tot.

B: El problema és que jo no sóc gaire "típic". Potser sí que hauríeu de parlar amb d'altres. Altres anys, quan havia fet Biologia, el curs era d'un any i es feien més coses, com equacions diferencials, i jo m'hi trobava molt més a gust. Aquesta cosa de la motivació que ja hem parlat, per motivar les coses es necessita temps. Per exemple, avui he fet una classe que, perquè l'havia de fer, però ha estat una conferència, els havia d'explicar EDOs. Volia explicar coses generals, nocions, etc. Els hi he dit que potser acabarien sense escriure res, però els he volgut explicar tot això del problema del valor inicial i teorema d'existència i unicitat de les equacions diferencials i el problema del determinisme i l'efecte papallona. Coses més, diguem, de cultura científica. I una altra cosa que vaig fer un any, diguem que coses que intento, una altra cosa és que me'n surti... Responent a aquest problema de connectar amb les aplicacions... o no tant les aplicacions sinó la motivació, el sentit del per què faràs allò i l'interès, on la motivació pot ser matemàtica fins i tot... el que vaig fer en començar EDOs, que em va donar força resultat, va ser començar amb un objecte la classe, que és aquest objecte d'aquí, i vaig plantejar el problema de fer això... [Ens ensenya l'objecte que és un pes de ferro amb una corda lligada i el que fa és anar estirant la corda horitzontalment paral·lelament a la taula on està l'objecte.] El que havien de fer és trobar l'equació de la trajectòria que queda descrita, és a dir, del punt que es va movent, i em va semblar molt interessant ja que, encara que aquest és una problema clàssic, el de la "tractriu", i el fet de fer aquesta cosa, a part del teatre, però de fer això o posar per escrit un enunciat. Tu pots fer això o sinó, per escrit, descriure: "Un pes objecte es desplaça perquè tenim una corda de manera que la longitud es manté constant i l'estirem en línia recta..." Escrius això i ja has resolt gran part del problema!

E: Sí ja t'entenc, vols dir que posar les coses per escrit, l'enunciat escrit, és ja un primer model matemàtic...

B: Sí , sí... El posar les coses per escrit, en llenguatge ordinari... el fet d'ordenar el pensament per posar-lo en llenguatge ordinari, ja estàs resolent quasi completament el problema. Quan ens posen aquests enunciats, aquests problemes de planteig on ja ens ho especifiquen gairebé tot, ja tens el problema mig fet... Una altra cosa que faig jo és consultar molts llibres d'història, per exemple aquests: E.Hairer, G.Wanner, "Analysis and its history"; Even, "An introduccion to the history of Mathematics". Aquest llibre s'ajusta molt a la meva filosofia. És un llibre per aprendre els conceptes, per aprendre matemàtiques però veient els diversos tractaments que se'ls hi ha donat al llarg de la història.

Entrevistado C. 14/11/2004

Duración: aprox. 30'

E: La primera pregunta és si creus que els estudiants de Geologia estan preparats per estudiar el programa de matemàtiques? O en cas contrari, creus que seria convenient que fessin un curs propedèutic o curs 0?

C: Jo crec que la majoria no. Alguns sí, però la gran majoria no. I sí que estaria bé de fer algun curs introductori.

E: A la segona pregunta, quant de temps es dedica durant el curs a la introducció d'alguns temes elementals de modelització matemàtica en Geologia? Si s'arriba a fer això?

C: No. Això posa?

E: Al principi del programa sí que apareix, però als apunts que circulen ja no apareix....

C: Doncs no es fa pas... Alguna cosa que vam fer va ser un exemple sobre creixement de poblacions. Però ja... pràcticament res. El que pot haver passat és que a l'anterior programa hi havia la part d'equacions diferencials on es veia més... però ja ho vam treure.

E: Sobre la pregunta 3: en el cas que no es fa modelització, creus que s'hauria de fer? En quina mesura? Canviaries totalment el programa en aquesta direcció?

C: Jo no canviaria el programa en aquesta direcció. Alguna cosa seria interessant de fer-ho perquè es veiés una mica... Plantejar el curs en la línia de la modelització no, però algun exemple més sí. Però sí que crec que s'hauria de canviar el programa.

E: En quina direcció? Com?

C: A mi em dona la impressió que la majoria de coses que es fan al programa són ja coses que haurien de saber però en canvi no les saben. Potser això és el que s'hauria de fer en un curs 0.

E: De quina extensió llavors?

C: No ho sé... Però el que em sembla és que si sols fan aquest curs de matemàtiques, els hi haurien d'explicar coses més interessants, no sols quedar-se amb lo bàsic. Em sembla que el que s'explica... ja s'hauria d'haver fet. Potser no amb molta profunditat, i aquí ho tornem a repetir tampoc sense molta profunditat... És una cosa estranya... S'hauria de buscar explicar coses que els hi fossin més interessants i que fossin més per a ells. Haurien de tenir millor base matemàtica. El que m'he trobat és que no saben calcular res. Els estàs explicant alguna cosa i ja a la primera línia s'han perdut perquè no saben perquè ha desaparegut un 2 que hi havia... i ja estan perduts allà! Això abans quan la gent arribava a primer ja ho sabia, però ara no.

E: Què en penses de la primera part del programa sobre nombres reals? És una part molt coneguda per a ells?

C: Potser no és coneguda, o potser la coneixen però no l'han assumida. I dedicar tres sessions a això... a una cosa que ja haurien de tenir assimilada, doncs no crec que serveixi de res. Per a tot això segurament que hauria de servir el curs 0. És que això ho han de saber...

E: Una altra pregunta: per què creus que s'ha decidit fer aquestes matemàtiques i no unes altres?

C: El perquè... Suposo que això ho sap millor qui ha fet el programa, però suposo que és per a donar la formació més bàsica.

E: Tampoc ho fan en profunditat... Aquesta pregunta en fa relació... Si el curs es justifica, pel què es veu, en termes d'una formació matemàtica bàsica, la pregunta és si és possible presentar a classe les qüestions matemàtiques, és a dir, la problemàtica que els dóna sentit. És a dir, és possible presentar aquells problemes que donen sentit a aquests teoremes, a aquestes nocions que apareixen aquí?

Amb quina profunditat es poden treballar els temes? Creus que seria necessari dedicar un curs complet per tal de desenvolupar aquest programa?

C: Amb molt poca profunditat. Un curs veig que sí, però per sols desenvolupar aquest programa no. Si amb un curs propedèutic es pogués fer aquelles coses tan bàsiques que haurien de saber però no saben, llavors sí que podries fer el programa i les coses que han quedat pendents i encara més coses. De quedar-nos amb el programa que hi ha ara, és molt pobre... I fins i tot per la percepció dels alumnes... que deuen tenir la sensació de que ja ho han vist... d'avorriment, els veig poc interessats.

E: La següent pregunta: hi ha temps i ocasió a la classe de problemes o de teoria perquè els estudiants arribin a dominar les principals tècniques matemàtiques i que puguin estudiar en profunditat algun tipus de problemes? Ens ha semblat que amb el temps que tenen, unes 33 sessions, és més possible que els estudiants arribin a interpretar el curs com una successió de tècniques deslligades i independents, no?

C: Jo tinc la sensació de que encara que vulguis aprofundir, en la majoria dels casos, els estudiants passen olímpicament. Ells volen que els hi diguis quins problemes, què han de fer per aprovar... Si intentes explicar relacions, doncs ja no els interessa. Tres hores de teoria ja em semblen bé, però potser haurien de tenir més hores de problemes.

E: Ara ja l'última pregunta té a veure amb els exàmens: quina relació de proximitat hi ha entre els problemes fets a classe i els exercicis que apareixen als exàmens? Són uns exàmens cada vegada més semblats al que es fa a classe o no?

C: Jo diria que és total.

E: Hem vist exàmens dels últims anys i ens ha semblat que sí. I ja l'última part, si creus que per aprovar l'examen és suficient fer els exercicis de la llista?

C: És suficient saber-los fer més que fer-los i entendre'ls.

E: Creus que per aprovar han d'aconseguir una visió global del curs? I un cert gran d'elaboració personal de les respostes per aprovar?

C: Si s'han après les tres o quatre tècniques ja està, no se'ls demana fer res més. I tot i així hi ha un fracàs total.

Entrevistado D. 14/11/2004

Duración: aprox. 30'

[E aclareix que anem a parlar una mica sobre l'assignatura, sobre el programa, problemes que troba a l'assignatura.]

D: Bé. El programa tinc entès que el van modificar professors anteriors, em sembla que el van simplificar una mica. Abans s'explicaven equacions diferencials i ara ja no s'expliquen. I també han simplificat altres aspectes, et pots mirar les llistes de problemes i la veritat és que son molt faciletes, que acaben estan a l'abast dels alumnes finalment, cosa que trobo bé que ens posem a un nivell més assequible.

[Clarifica ara que és la primera vegada que fa l'assignatura...]

E: La primera pregunta és si creus que els estudiants de Geologia estan preparats per estudiar el programa de matemàtiques? O en cas contrari, creus que seria convenient que fessin un curs propedèutic o curs 0?

D: Crec no tots els programes estan ben adaptat... Encara que crec que a la majoria no els agraden les matemàtiques i per això estudien Geologia i no Química o Física. I estan allà a classe que veus que no estan gaire a gust. Si comences a fer arguments doncs aleshores ho troben ja molt pesat i feixuc. És un tipus d'alumne molt especial, si els hi presentes tot molt mastegat aleshores més o menys la van agafant, però en principi no tenen una actitud positiva. Tampoc no del tot negativa. Però són alumnes que mai els han agradat les matemàtiques tampoc.

E: Una altra pregunta: del total de matriculats quants et venen a classe?

D: Van començar sobre uns 40 i ara crec que ja s'han reduït a la meitat: uns 20. I el nombre de matriculats encara és superior, al voltant de 60. I ara ja portem un mes de classe. Ara just hem fet un parcial que conta una mica per a la nota final. Encara que conto que la majoria dels que ja no venen són repetidors ja que hi ha molta gent que es deixa l'assignatura.

D: Podria estar bé un curs 0 però, clar, fora del primer semestre, abans de començar amb l'assignatura com a tal. Encara que n'hi ha alguns que necessitarien més que això. Tinc dos o tres a classe que ja el primer dia em van dir que no havien fet res de matemàtiques al Batxillerat i aquests realment necessiten alguna cosa més, un professor particular, alguna persona que els guiï perquè són casos que tampoc no pots tenir absolutament en compte a classe. En general hi ha un problema de maduresa matemàtica i la impressió general que no es senten massa còmodes amb les matemàtiques.

E: A la segona pregunta, quant de temps es dedica durant al curs a la introducció d'alguns temes elementals de modelització matemàtica en geologia? Si s'arriba a fer això?

D: Amb els apunts que ens van passar la veritat és que no hi ha res. Bé, hi pot haver alguna cosa de modelització, però no exactament per a Geologia, com pot ser el creixement de poblacions, coses de Biologia que estan més a l'abast. Hi ha un llibre de Geologia... de Ferguson... però que està deixat i no hi ha manera de veure'l. I n'hem localitzat un altre, de Walham, Matemàtiques per a Geòlegs... que ara l'hem demanat encara que està en anglès. Per ara no tenim exemples de Geologia, en canvi a Biologia amb l'estudi de poblacions queda més clar. Estem fent algun exemple amb lo de matrius i potències de matrius. Però tampoc no hi ha molt de temps per fer aquestes coses si has d'explicar posteriorment tota la part de funcions elementals.

E: Sobre la pregunta 3... I en el cas que no es faci modelització, creus que s'hauria de fer? En quina mesura? Canviaries totalment el programa en aquesta direcció?

D: Jo no ho veig que es pugui canviar el programa completament. Si tinguéssim bona base potser sí que podríem fer-ho. Però com no és així... També estem allà per donar la base matemàtica. I si a més podem donar les pinzellades aquestes de modelització, molt millor, perquè això li dona més "vidilla"... sobretot perquè es motivin. Però tampoc no vol dir canviar el programa completament. Es pot canviar una mica l'enfocament. I també s'ha de pensar que darrere ve una assignatura d'estadística.

E: Bé. La quarta pregunta que més o menys ja has contestat: per què creus que s'han decidit fer aquestes matemàtiques i no unes altres?

D: Sembla que són unes matemàtiques força bàsiques, és el que es fa en totes les carreres. S'ha tret la part d'equacions diferencials, no perquè no fos maco i útil sinó per falta de temps i perquè no acabaven entenent res. Si no s'entén, perquè ho has de fer?

E: També el nombre de sessions, d'hores, és molt reduït...

D: A més se'n van una setmana... i dos dies els dediquem a fer els exàmens parcials... I amb això de si són importants les matemàtiques... vam parlar amb la coordinadora de Geologia i va semblar que deia que sí, que cada vegada més, es pot veure en articles i treballs que van demanant més model matemàtic i cosa numèrica. Abans agafaven un parell de fòssils, els estudiaven i ja està. Però ara ja els demanen estudis amb mostres més grans, amb eines estadístiques... Sembla que amb treballs publicats hi ha cada vegada més un tractament matemàtic de la informació. I també hi ha alguna de les assignatures seves que sí que tenen més a veure amb les matemàtiques, la bioquímica, la cristal·lografia, amb models matemàtics. La coordinadora va dir que ja li semblava bé el que fèiem. I una preparació cap a l'estadística. Es pretén una formació bàsica.

E: La següent pregunta seria (una mica més delicada): si el curs es justifica, pel que es veu, en termes d'una formació matemàtica bàsica, la pregunta és si és possible presentar a classe les qüestions matemàtiques, és a dir, la problemàtica que dóna sentit. És a dir, és possible presentar aquells problemes que donen sentit a aquests teoremes, a aquestes nocions que apareixen aquí? Amb quina profunditat es poden treballar els temes? Creus que seria necessari dedicar un curs complet per tal de desenvolupar aquest programa?

D: Sí, potser un curs complet però amb el doble d'hores. No repartides! Podries anar amb més calma... anant més a poc a poc... fer més modelització...

E: La pregunta es refereix al sentit matemàtic. Si ells poden entendre per què diagonalitzen una matriu o per què les multipliquen?

D: Almenys els hi dius. Espero que t'entenguin alguna cosa.

E: Aquesta pregunta té una mica de relació amb l'anterior: hi ha temps i ocasió a la classe de problemes o de teoria perquè els estudiants arribin a dominar les principals tècniques matemàtiques i que puguin estudiar en profunditat algun tipus de problemes? Ens ha semblat que amb el temps que tenen, unes 33 sessions, és possible que els estudiants arribin a interpretar el curs com una successió de tècniques deslligades i independents?

D: Podria ser. De fet hi ha temes diferents que no tenen res a veure. Potser si es fessin equacions diferencials, llavors es podria veure l'analogia. Però de la manera que està, és normal que ho vegin així.

E: En cada bloc, per exemple quan apareixen diferents tècniques, ells arriben a relacionar-les, a lligar-les...

D: En la part d'àlgebra lineal, amb la resolució de sistemes, està apareixent a tot problema... aquí sí que relacionen.... el canvi de base queda una mica a part. Bé, sí que és veritat que les coses queden deslligades. Però per qüestions de temps has de saltar a altres coses. En diagonalització acabes havent de fer els casos 2x2 perquè ja no dona temps d'ampliar a més...

E: Clar, tens una mostra gran que pots comparar. Ara, ja, l'última pregunta que té a veure amb els exàmens: quina relació de proximitat hi ha entre els problemes fets a classe i els exercicis que apareixen als exàmens? Són uns exàmens cada vegada més semblats al que es fa a classe o no?

D: Crec que hi haurà força relació, seran molt propers els exercicis fets a classe amb els de l'examen. Problemes de la llista.

E: Diries que hi ha hagut un moviment d'apropament?

D: Sí, ja que així ho poden preparar millor, encara que el que per nosaltres és proper per a ells potser no.

E: Hem vist exàmens dels últims anys i ens ha semblat que sí. I ja l'última part: si creus que per aprovar l'examen és suficient fer els exercicis de la llista?

D: En principi és suficient dominar les tècniques bàsiques, treure el mínim. Si un vol nota doncs llavors ja és diferent. També és degut al fracàs que hi ha. Per treure l'aprovat amb els exemples pràctics fets a classe i hi haurà potser preguntes per a destacar demanant una mica més enllà

ANEXO 2

1. EVOLUCIÓN DEL PUNTO DE VISTA CLÁSICO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Tradicionalmente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, en consecuencia, difícilmente susceptible de ser analizado, controlado y sometido a las reglas de la práctica científica. Esta forma de considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas fue evolucionando a medida que aumentaba el interés por explicar los fenómenos didácticos. Desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, se fue consolidando lo que Guy Brousseau (1986) llamó el *enfoque clásico* en didáctica de las matemáticas. Este autor caracterizó esta primera aproximación como aquella que postula que la actividad cognitiva del sujeto juega un papel esencial y que puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los otros aspectos de la relación didáctica. Se considera así que el aprendizaje en general, y el de las matemáticas en particular, es un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales, afectivos y sociales. En Gascón (1998) encontramos enunciadas dos características generales de este enfoque:

(a) *Toma como problemática didáctica una ampliación bastante limitada de la problemática espontánea del profesor*. Esto significa que recoge, reformula, amplia y sintetiza las cuestiones que constituyen inicialmente la *problemática docente del profesor*, que acostumbran a estar muy condicionadas por las *ideas dominantes en la cultura escolar*.

(b) *Presenta el saber didáctico como un saber técnico*, en el sentido de aplicación de otros saberes fundamentales importantes de otras disciplinas, como la psicología, la pedagogía, las ciencias cognitivas, etc.

Desde el punto de vista clásico, la didáctica de las matemáticas tiene como objetivo principal proporcionar al profesor los recursos profesionales que éste necesita para desarrollar su tarea profesional de la forma más satisfactoria posible y, en último extremo, conseguir que el proceso de enseñanza obtenga unos resultados óptimos en términos de aprendizaje de los alumnos.

En esta primera etapa, se pueden distinguir dos enfoques sucesivos en el desarrollo de la problemática didáctica. El primero está centrado en el *aprendizaje del alumno* y su objeto primario de investigación es el *conocimiento matemático del alumno* y su evolución. En este caso delega explícitamente a la *psicología* la fundamentación científica de la didáctica. El segundo enfoque amplia la problemática didáctica introduciendo *cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional*. El objeto primario de investigación es, por tanto, la *actividad y el pensamiento del profesor*. En este caso, se necesita una base multidisciplinar mucho más amplia que incluya, entre otras cosas, la *psicología educativa*, la *sociología* y la *epistemología de las matemáticas* para poder fundamentar la investigación.

Lo que caracteriza el enfoque clásico en didáctica de las matemáticas es la suposición acrítica de que los *saberes matemáticos no son problemáticos* y que los saberes que se utilizan para describir e interpretar los hechos didácticos *no forman parte de la problemática didáctica* que se plantea: estos saberes pueden ser “aplicados” pero no pueden ser modificados como consecuencia de esta aplicación.

2. EL PARADIGMA COGNITIVO Y EL NACIMIENTO DEL PROGRAMA EPISTEMOLÓGICO

Una de las consecuencias de la juventud de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica es la falta de uniformidad respecto a las cuestiones problemáticas que se deben tratar frente a la diversidad de marcos teóricos que conviven o coexisten actualmente. Según Gascón (1999), una vez superada la etapa pre-científica centrada en la problemática espontánea de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en la que los problemas didácticos se formulan en términos de las "ideas dominantes" de la institución didáctica, es posible distinguir dos programas de investigación en didáctica de las matemáticas: el *programa cognitivo* y el *programa epistemológico*.

Históricamente la evolución inicial del programa cognitivo estuvo condicionada explícitamente por limitaciones claras de la noción general de *aprendizaje humano* y de los medios que estaban a disposición de los investigadores para describir el *conocimiento matemático del alumno.* El primer punto de inflexión surgió en el ámbito del *International Group of the Psychology of Mathematics* (PME) *Education* (Bauersfeld & Skowronek, 1976), donde se reivindicó la necesidad de tomar en consideración un tipo de *aprendizaje específicamente matemático*. Los investigadores de este grupo comenzaron a tomar como nuevos objetos primarios de investigación los *procesos cognitivos relativos al aprendizaje matemático* y empezaron a construir instrumentos metodológicos para poder describir estos procesos. Cabe decir que, en la mayoría de las investigaciones enmarcadas en este enfoque, no se realiza un cuestionamiento del modelo epistemológico general de las matemáticas que se asume implícitamente. El programa cognitivo queda caracterizado, por tanto, por los hechos siguientes:

- Considera el aprendizaje de las matemáticas como un proceso psico-cognitivo, fuertemente influido por factores motivacionales, afectivos y sociales.

- Su objeto primario de investigación está centrado en los procesos cognitivos relativos al conocimiento matemático del individuo, es decir, en la actividad cognitiva del individuo, asumiendo el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en las instituciones escolares.

De manera contemporánea al enfoque cognitivo en didáctica, surgió un nuevo punto de vista cuando Guy Brousseau, con las primeras formulaciones de la *Teoría de Situaciones Didácticas* en los años 70 (Brousseau, 1972), intuyó la necesidad, para la didáctica, de crear un modelo propio, explícito y contrastable de la actividad matemática que no la reduzca al estudio de los procesos cognitivos de los alumnos. Este es el origen de lo que Brousseau denominó *epistemología experimental* o *didáctica fundamental* (Brousseau, 1986).

Con el nacimiento de la didáctica fundamental se postula que el objeto de la didáctica no es el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes en el aprendizaje de un concepto, ni tampoco la problemática del profesor con la enseñanza de este concepto, sino la *situación didáctica* mediante la cual uno o varios alumnos consiguen apropiarse de un *saber matemático específico* ya construido o en vías de construcción. Se pasa así a considerar el *proceso de enseñanza-aprendizaje en un entorno*, *en situación*, entendiéndose por situación el conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los diversos elementos que la componen: el *alumno* o el grupo de alumnos, el *medio,* entendido como el conjunto de objetos e instrumentos *sin intención didáctica*, y el o los profesores, portadores ellos sí de la intención de hacer que el grupo de alumnos se apropie de un saber matemático.

El nacimiento de la Teoría de Situaciones Didácticas provocó un cambio radical en la concepción de la naturaleza de las matemáticas y de la didáctica de las matemáticas como disciplina. La principal revolución fue postular la necesidad de una modelización explícita y contrastable del *saber matemático.* O dicho de forma más simplificada, ahora los alumnos y el profesor pasan a un segundo plano, para que la didáctica pueda centrarse en el estudio de las *condiciones de difusión del conocimiento matemático*. En términos generales, podemos decir que, en toda problemática didáctica existen siempre, aunque algunas veces de forma implícita, tres componentes fundamentales: una *institución didáctica* en la que se plantea la problemática, un *contenido matemático específico* y un *proceso de enseñanza-aprendizaje* relativo a este contenido matemático. Así que, la ampliación clave formulada por la didáctica fundamental fue el postulado de Brousseau (1986) de que *todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático esencial*, lo cual comporta la problematización del conocimiento matemático y la necesidad de elaborar *modelos epistemológicos* de este conocimiento por parte de la didáctica. De aquí que la didáctica fundamental también sea conocida como *aproximación epistemológica* o *programa epistemológico* en didáctica de las matemáticas, en contraposición al programa cognitivo que citábamos anteriormente.

3. PREREQUISITOS: ELEMENTOS DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

3.1. El enfoque antropológico dentro del programa epistemológico

Dado que la Teoría de Situaciones Didácticas plantea la necesidad, para la didáctica, de redefinir los conocimientos matemáticos que son objeto de enseñanza y aprendizaje, surgió la necesidad de incluir en la problemática didáctica un *macroanálisis* que englobara el *carácter institucional* tanto de las prácticas de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en el interior del sistema didáctico, como el de las mismas prácticas matemáticas que se tratan de enseñar y aprender y que no se circunscriben en el marco escolar. Se pone de manifiesto entonces, la necesidad de estudiar las condiciones de creación y difusión del conocimiento matemático en las diferentes instituciones sociales, desde las que son productoras y creadoras de conocimiento, hasta las que lo utilizan como instrumento, pasando por las instituciones más propiamente didácticas, es decir, centradas en el estudio de las matemáticas.

Esta ampliación del objeto de estudio de la didáctica que va más allá de las prácticas estrictamente escolares es el punto de partida del llamado *enfoque antropológico* inaugurado por Yves Chevallard (1992 y 1999). Este enfoque nace con las primeras teorizaciones del proceso de *transposición didáctica* (Chevallard, 1985a), que ponen de manifiesto que no es posible interpretar la *matemática* ni la *actividad matemática* que se estudia en la escuela sin tomar en consideración el estudio de fenómenos relacionados con los procesos de *(re)construcción de las matemáticas* que tienen el origen en la institución productora de los saberes matemáticos. En la traducción al castellano del libro "*La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*" podemos leer:

> ¿Qué es entonces aquello que, en el sistema didáctico, se coloca bajo el estandarte del Saber? El "saber enseñado" que concretamente encuentra el observador, ¿qué relación entabla con lo que se proclama de él fuera de ese ámbito? ¿Y qué relación entabla entonces con el "saber sabio", el de los matemáticos? ¿Qué distancias existen entre unos y otros? (Chevallard, 1997, p. 15).

Según explican Bosch & Gascón (2006) en el artículo conmemorativo de los 25 años de transposición didáctica:

> El proceso de transposición didáctica comienza lejos de la escuela, en la elección de los cuerpos de conocimiento que se desea transmitir. Una vez realizada la elección, se genera un tipo de trabajo claramente creativo – no una mera "transferencia", adaptación o simplificación – que se puede describir como un proceso de deconstrucción y reconstrucción de los diferentes elementos de esos conocimientos, con el objetivo de hacerlos "enseñables", preservando su potencia y funcionalidad. El trabajo transpositivo lo llevan a cabo una pluralidad de agentes –la "noosfera"– incluyendo los responsables de diseñar e implementar los planes de estudio, los matemáticos o científicos productores del conocimiento matemático, los miembros del sistema de enseñanza (profesores en particular), y todo esto bajo unas condiciones históricas e institucionales que no son siempre fáciles de discernir. Es un trabajo necesario para que la enseñanza sea posible, pero es también la fuente de muchas restricciones sobre el tipo de enseñanza que se puede impartir, sobre las actividades matemáticas que es posible o imposible llevar a cabo en la escuela.

Y añaden, en relación a las *restricciones transpositivas* que afectan la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos:

> La limitación más fuerte ocurre cuando el proceso de transposición no es capaz de mantener o recrear una posible "razón de ser" de los conocimientos que la escuela se propone transmitir. ¿Por qué son tan importantes los triángulos? ¿Para qué sirven los límites de funciones? ¿Por qué necesitamos los polinomios? Una enseñanza que no toma en consideración estos interrogantes se convierte rápidamente en lo que Chevallard (2004) denomina una educación "monumentalista", donde se invita a los estudiantes a contemplar unos instrumentos que la humanidad construyó con esfuerzo, que sirvieron para grandes propósitos y que hay que conocer y admirar aunque ya no se sepa cuál es su utilidad. En estos casos se requiere un trabajo permanente de revisión o "retoma" de los procesos transpositivos que debe traspasar el ámbito genérico en el que se desarrollan habitualmente las decisiones curriculares para adentrarse hasta el nivel más concreto de las actividades matemáticas que realizan los alumnos en el aula.

La Teoría de la Transposición Didáctica distingue así diferentes tipos de "saberes" o "regimenes epistemológicos" de las matemáticas según si se considera el saber matemático "original" o "sabio", tal como lo producen los matemáticos y otros investigadores; el saber matemático "a enseñar" tal como se designa oficialmente en los programas y libros o tratados por la enseñanza; el saber matemático tal como es realmente enseñado por los profesores en el aula y el saber matemático "aprendido" en el sentido de "disponible" para los alumnos al final de los procesos de aprendizaje (ver Figura 1).

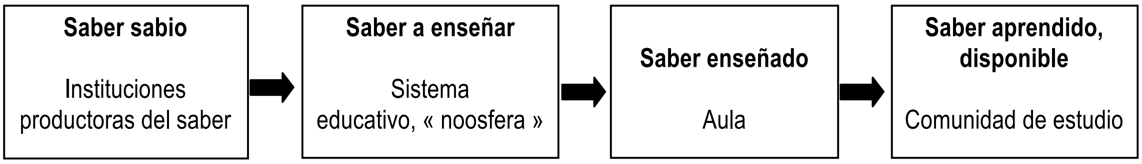


Figura 1. Etapas en el proceso de transposición didáctica

Una vez puesto en evidencia el proceso de transposición didáctica, con la consecuente ampliación del objeto de estudio de la didáctica que esto supone, aparece la necesidad de un modelo epistemológico lo suficientemente rico para poder describir el saber matemático tanto si se sitúa en la institución "sabia" como si se trata de la práctica de un estudiante universitario o de un alumno de primaria.

3.2. Modelo de la actividad matemática: la noción de praxeología matemática

Con el objetivo de encontrar la modelización explícita y contrastable de la actividad matemática, considerada dentro del conjunto de actividades humanas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones sociales, Chevallard introdujo a mediados de los años 90 la noción de praxeología u organización matemática (OM) que es una de las nociones clave de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1996, 1999, 2002a y 2002b). Como uno de sus postulados básico, la TAD introduce la noción de praxeología, negando la visión particularista del mundo social e incluyendo la actividad matemática dentro de un modelo más amplio de actividad humana:

> Toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie. […] L'on part ainsi d'une hypothèse qui ne spécifie *nullement* l'activité *mathématique* parmi les activités humaines : c'est *autrement* que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité. (Chevallard, 1999, p. 223)

La noción de praxeología permite considerar al mismo tiempo y, atribuyéndoles importancia equivalente, tanto la dimensión teórica como la dimensión práctica del saber. En un artículo reciente Chevallard lo expone en los términos siguientes:

> Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general. [...] ¿Qué es exactamente una praxeología? Podemos confiar en la etimología para guiarnos aquí –uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: *praxis*, i.e. la parte práctica, por un lado, y el

> *logos*, por el otro. *"Logos"* es una palabra griega que, desde los tiempos pre-Socráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano – particularmente sobre el cosmos. [...] [De acuerdo con] un principio fundamental de la TAD – la teoría antropológica de lo didáctico-, no pueden existir acciones humanas sin ser, al menos parcialmente, "explicadas", hechas "inteligibles", "justificadas", "contabilizadas", en cualquier estilo de "razonamiento" que pueda abrazar dicha explicación o justificación. La *praxis,* por tanto, implica el *logos* que, a su vez, implica volver a la *praxis.* En efecto, toda *praxis* requiere un apoyo en el logos porque, a la larga, ningún quehacer humano permanece sin cuestionar. Por supuesto, una praxeología podría ser deficiente, por ejemplo porque su "praxis" se compone de una técnica ineficaz –"técnica" es aquí la palabra oficial para designar una "forma de hacer"– y su componente "logos" consta casi completamente de puro sinsentido –¡al menos desde el punto de vista del praxeólogo!. Chevallard (2007)

La noción de praxeología o de organización matemática (OM) constituye así una herramienta fundamental para modelizar tanto la actividad matemática como la actividad humana en general. Como toda obra humana, una OM surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas. Más precisamente, las OM son el resultado final de una actividad matemática que, como en toda actividad humana, es posible distinguir dos aspectos inseparables:

- El nivel de la práctica o "*praxis*" que consta de *tareas* materializadas en *tipos de tareas o de problemas*[1] (**T**) y de *técnicas* ($\boldsymbol{\tau}$) o maneras de hacer sistemáticas y compartidas, en cierta institución, que son útiles para realizar las tareas T. Este primer bloque designado por [T / τ] se denomina bloque práctico-técnico y se identifica genéricamente por el denominado *saber-hacer*.

- El discurso razonado sobre la práctica o "*logos"* (*saber*), en el que se sitúan, en un primer (sub)nivel el discurso que describe, explica y justifica la técnica: la *tecnología* ($\boldsymbol{\theta}$). Y en una segundo (sub)nivel de descripción, explicación y justificación, que desarrollando un papel similar que la tecnología hace para las técnicas, la ahora llamada *teoría* ($\boldsymbol{\Theta}$) lo hace para la tecnología.

[1] Cabe destacar que las tareas o tipos de tareas (T) no son datos que nos proporciona la naturaleza, éstos son "obras" que provienen de cierta construcción institucional y cuya reconstrucción en cierta institución es un objeto de estudio de la didáctica. Lo mismo puede decirse del resto de componentes de las praxeologías.

Las *tareas* problemáticas o cuestiones asociadas a una OM acaban cristalizando en uno o más *tipo de problemas*, generados por el desarrollo de la actividad matemática del estudio de las cuestiones iniciales. En general, podemos decir que si un *tipo de problemas* T es considerado en cierta institución *I* es porque en *I* existe una *técnica matemática* que permite, no sólo resolver estos problemas, sino también generar muchos más problemas del mismo tipo.

En una institución *I*, en relación a cierto tipo de tarea T, suele existir en general una sola técnica (técnica canónica) o un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas que pueden existir en otras instituciones. Esta exclusión tiene relación con la ilusión de "naturalidad" de las técnicas institucionales en *I*. Ninguna técnica puede vivir con normalidad en una institución si no aparece como una manera de hacer o proceder correcta, comprensible y justificada. Por lo tanto, la existencia de una *técnica* supone que existe en su entorno un *discurso interpretativo y justificativo de la técnica*, que es lo que llamamos una *tecnología* que además de justificarla y hacerla inteligible, tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con la finalidad de ampliar su alcance para poder superar sus limitaciones y hacer posible la producción de nuevas técnicas[2]. También forman parte de la tecnología asociada a una técnica las proposiciones que describen su alcance, su relación con otras técnicas, las posibles generalizaciones y las causas de sus limitaciones. La tecnología asociada a una técnica es un discurso matemático que requiere una interpretación y justificación institucional. Denominamos *teoría* (asociada a una tecnología) a la tecnología de esta tecnología. Digamos, para acabar, que la decisión de tomar dos niveles de interpretación-justificación es, obviamente, una decisión metodológica relativamente arbitraria y basada en un principio de "economía" de los términos teóricos.

Esta breve descripción de los componentes de una OM pone de manifiesto que, lejos de ser independientes, estos componentes están fuertemente relacionados entre sí. Con ello queremos decir que, por ejemplo, el desarrollo de las técnicas genera nuevos tipos de problemas y provoca nuevas necesidades tecnológicas, o más en general, el

[2] De la tecnología se han destacado varias funciones, primeramente, la de justificar "racionalmente" las técnicas, así como, la de explicar, hacer inteligible y aclarar la técnica y, por último, la función de *producción de técnicas*. Se señala el fenómeno de la *sub-explotación de las tecnologías* disponibles tanto desde el punto de vista de la explicación como de la producción.

bloque práctico-técnico no puede vivir aisladamente en una institución, requerirá la existencia del "discurso racional" que justifique la técnica y muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas. El sistema formado por estos dos bloques, o cuatro componentes[3], constituye una praxeología (organización) matemática que consideramos la *unidad mínima en que puede ser descrita la actividad matemática*. Simbólicamente lo denotaremos por **OM** = [$\mathbf{T} / \boldsymbol{\tau} / \boldsymbol{\theta} / \boldsymbol{\Theta}$].

3.3. Clases de praxeologías: estructuras de complejidad creciente

Posteriormente, con el objetivo de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo la distinción entre diferentes tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes:

- Alrededor de un *único tipo de tareas* T considerado en una institución *I*, se encuentra la tripleta que hemos descrito en el punto anterior. El total descrito como [$T / \tau / \theta / \Theta$] constituye lo que se denominan *praxeologías u organizaciones matemáticas puntuales* (OMP). En este primer tipo de organización los tipos de problemas y las técnicas tiene un claro papel predominante, hasta el punto que la praxeología puntual queda caracterizada a partir de su bloque práctico-técnico [T / τ].

De hecho raramente se encuentran las praxeologías puntuales ya que generalmente, una teoría Θ responde a varias tecnologías θ_j, cada una de las cuales a su vez justifica y hace inteligible varias técnicas τ_{ij} correspondientes a varias tipos de tareas T_{ij}. Las praxeologías puntuales irán así combinándose integrando cada vez una estructura más compleja y relativamente más completa de sus componentes:

[3] Es necesario destacar que todas las nociones introducidas: "tipos de problemas", "técnicas", "tecnología" y "teoría" son *doblemente relativas*. Son *relativas a la institución de referencia* (así, por ejemplo, una determinada técnica matemática utilizada en la universidad, no tiene porqué vivir en secundaria). Y también son relativas a la *función que desarrollan como objetos matemáticos* en una actividad matemàtica determinada. Un ejemplo sería el de la regla de l'Hôpital que puede ser justificación en Secundaria de una técnica de cálculo de límites (función tecnológica) o bien formar parte de una tarea matemática en la universidad, como por ejemplo la que requiere justificar su aplicación bajo ciertas condiciones.

- Las *praxeologías locales* es el primer resultado de la integración de diversas *praxeologías puntuales*. Esta integración comporta que el discurso tecnológico θ asuma protagonismo, ya que algunas técnicas pierden el carácter autotecnológico. Cada praxeología *local* está caracterizada por una *tecnología* θ que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías *puntuales* que la integran. Siendo coherentes las podemos denotar por $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$. En general, las praxeologías puntuales se integran en praxeologías locales para poder dar respuesta a cuestiones problemáticas que no podían ser resueltas con ninguna de las praxeologías puntuales de partida. Dado que este hecho es uno de sus principales funciones, cabe destacar un fenómeno que paradójicamente aparece muy a menudo en determinadas instituciones: a medida que las OMP se integran para construir praxeologías más complejas, la relación entre las cuestiones que les dan sentido y la respuesta tiende a invertirse hasta el punto de que las cuestiones que las han originado (o razones de ser de estas) tienden a desaparecer (Chevallard, 1999).

- Las *praxeologías regionales* se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración, en torno a una *teoría matemática común* Θ, de diversas praxeologías *locales*. Esta *integración* comporta que el discurso teórico Θ tome el papel central. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar y producir las diferentes tecnologías (θ_j) de las praxeologías locales que acaban constituyendo la praxeología regional $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_i / \Theta]$.

- Más allá de las praxeologías regionales aparecen las denominadas *praxeologías globales* que nacen de agrupar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

De nuevo, para acabar, debemos subrayar la *relatividad institucional* de las nociones de praxeología “puntual”, “local”, “regional” y “global”.

3.4. El proceso de estudio de una organización matemática: organizaciones didácticas y momentos de estudio

En la sociedad constantemente aparecen situaciones que requieren una respuesta por parte del individuo y, sobretodo, por parte de las instituciones que estructuran la sociedad. Puede haber una simple demanda de información o una *cuestión en sentido débil* frente a la cual la persona conoce la respuesta o la puede conocer fácilmente. Pero la situación cambia cuando aparecen cuestiones frente a las que la persona no conoce su respuesta, es decir, no dispone de alguna técnica conocida para abordar la situación, esta situación se transforma en *problemática* y puede dar origen a una *cuestión en sentido fuerte*. En este caso la respuesta que buscamos no es una simple información, sino que para poder responder eficientemente será necesaria la elaboración de una técnica y, más concretamente, de una praxeología completa relativa al tipo de problema planteado. Así que el estudio de cuestiones en sentido fuerte requerirá la creación o construcción de *respuestas en sentido fuerte*, es decir, la *construcción de toda una nueva organización praxeológica*.

Se podría imaginar un mundo o realidad institucional en la que las actividades humanas estuviesen regidas por praxeologías bien adaptadas que permitiesen realizar de forma "instantánea" las tareas que fueran surgiendo, pero esta realidad no existe, las instituciones son recorridas por una dinámica praxeológica que resulta de un trabajo complejo y continuo en las instituciones. Constantemente, en el universo de las tareas a realizar en una institución, surgen tareas problemáticas que requerirán la producción o reproducción de nuevas praxeologías que, en la medida que ya existan en otra institución, se podrá proponer importarlas.

Cuando una comunidad X, que se propone estudiar una cierta cuestión problemática Q relativa a cierto tipo de tarea T, forma lo que se denomina un *sistema de estudio* o *sistema didáctico*, denotado por $S(X; Q_T)$. En la mayoría de los procesos de estudio, aparece la figura del *ayudante al estudio* o *director de estudio* (Y) y el sistema didáctico se designará entonces por $S(X; Y; Q_T)$. Se entra así en la *dimensión específica de la didáctica*.

En el desarrollo y análisis de la actividad matemática, aparecen dos aspectos inseparables: por un lado, la obra matemática que puede construirse con el estudio de las cuestiones problemáticas y, por otro lado, la manera en que puede ser construida la obra matemática, es decir, la manera en que puede organizarse el *proceso de estudio* de las cuestiones. El primer aspecto (el producto) es de hecho el resultado de la construcción, es decir, la *praxeología u organización matemática* (OM). Y el segundo aspecto es el proceso de estudio y construcción, lo que se denominará *organización didáctica* (OD). Se trata, en efecto, de dos aspectos inseparables porque *no hay organizaciones matemáticas sin un proceso de estudio que las genere, pero tampoco hay un proceso de estudio sin organizaciones matemáticas en construcción*.

Como en toda organización praxeológica, una OD se articula en tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías *didácticas*, pero ¿cómo se describe dicha organización? La consideración de diversos procesos de estudio permite detectar varios aspectos o tipos de situaciones que necesariamente están presentes en todos ellos, es decir, dimensiones que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática independientemente de las características culturales, sociales, individuales, etc. Denominaremos a este tipo de aspectos con la noción de *momentos de estudio* o *momentos didácticos.* Dicha noción se utiliza, no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de *dimensión de la actividad*. Chevallard (1999) postula que el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos, sin presuponer una estructura lineal de los procesos de estudio.

Cada momento puede ser vivido con diferentes intensidades, en tiempos diversos, tantas veces como se necesite a lo largo del proceso de estudio e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que sí es importante destacar es que cada uno de los seis momentos de estudio tiene una función específica necesaria para llevar a cabo correctamente el proceso y que existe una dinámica interna global que se manifieste en el carácter invariante de ciertas relaciones entre los citados momentos. En otras palabras, lo que es importante no es el orden en que se realicen los diferentes momentos del proceso de estudio, sino la estructura interna de las relaciones que tiene que establecerse entre ellos.

Los seis momentos didácticos pueden ser descritos mediante las siguientes etiquetas: el momento del *primer encuentro*, el momento *exploratorio,* el momento del *trabajo de la técnica*, el momento *tecnológico-teórico*, el momento de la *institucionalización* y el momento de la *evaluación*. Siguiendo a Chevallard (1999, pp. 250 - 255), los 6 momentos del estudio de una organización praxeológica O se pueden describir en los términos siguientes:

> El *primer momento* del estudio es el del *primer encuentro* con la organización O que está en juego. Tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro - o de "reencuentro" - inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra O, es el que consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de O. Este "primer encuentro" con el tipo de tareas T_i puede a su vez tener lugar *en varias veces*, en función sobre todo de los entornos matemáticos y didácticos en los que se produce: se puede *volver a descubrir* un tipo de tareas como se vuelve a descubrir una persona que se creía conocer. [...]
>
> El *segundo momento* es el de la *exploración* del tipo de tareas T_i y de la *elaboración de una técnica* τ_i relativa a este tipo de tareas. […] En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema *particular*, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un *medio* para la constitución de una técnica de resolución. Se trama así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas de un mismo tipo, técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de ese tipo.
>
> El *tercer momento* del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con *cada uno* de los otros momentos. Así, desde el primer encuentro con el tipo de tareas, se establece generalmente una relación con el entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, o con gérmenes de un entorno por crear que se precisará mediante una relación dialéctica con la emergencia de la técnica. Sin embargo, por razones de economía didáctica global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la *primera etapa* del estudio […].
>
> El *cuarto momento* es el del *trabajo de la técnica*, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable (lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces), y acrecentar la maestría que se tiene de ella: este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular uno o unos corpus de tareas adecuados

> tanto cualitativamente como cuantitativamente. […]
>
> El *quinto momento* es el de la *institucionalización*, que tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la Organización Matemática elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la Organización Matemática considerada –distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no "que saberlo". […]
>
> El *sexto momento* es el de la *evaluación*, que se articula con el momento de la institucionalización […]. En la práctica, llega siempre un momento en el que se debe "hacer balance": porque este momento de reflexividad donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina el *valor* de lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana.

La integración progresiva de las dimensiones didáctica y matemática queda así modelizada mediante las nociones de *praxeologías matemáticas* y *didácticas* y, sobre todo, mediante el postulado antropológico que afirma que, en la contingencia, en la historia de las instituciones, las praxeologías matemáticas y didácticas no pueden vivir por separado. De esta manera, todo proceso de estudio de las matemáticas como proceso de construcción o reconstrucción de OM, consiste en la utilización de una determinada OD, con su componente práctico (formado por *tipos de tareas y técnicas didácticas*) y su componente teórico (formado por *tecnologías* y *teorías didácticas*).

En definitiva, y aunque a veces se considera el producto (la praxeología matemática) como si fuera independiente de todo proceso, en realidad se trata de una abstracción. En la historia de las instituciones sociales no hay productos sin procesos y, por lo tanto, lo que se analiza son *procesos didácticos* cuya unidad mínima de análisis son las *praxeologías didácticas* (relativas a ciertas praxeologías matemáticas).

3.5. Relaciones entre OM y OD: los niveles de codeterminación didáctica

Llevar a cabo el estudio de las condiciones de existencia y evolución de las OM y OD muestra que, cuando el profesor y los alumnos se enfrentan a un saber que se debe enseñar o aprender, lo que puede suceder está muy determinado por un conjunto de condiciones y de restricciones que no se pueden reducir a aquellas inmediatamente identificables dentro del aula (conocimiento previo de los alumnos, material didáctico del que se dispone, etc.). Bien es cierto que estos aspectos son muy importantes, pero no debemos olvidar la existencia de muchas otras condiciones que se requieren y que surgen más allá del espacio de la clase y del conocimiento o tema que se quiere estudiar.

En esta dirección, Chevallard (2001, 2002b & 2007) propone una *escala* o *jerarquía de niveles de codeterminación* entre las organizaciones matemáticas (OM) escolares y las correspondientes organizaciones didácticas (OD), es decir, entre las OM que viven o pueden vivir en una institución y la forma que tiene esta institución para (re)construirlas. Consiste en una escala que se estructura mediante una sucesión de niveles desde el más genérico – la Civilización –, hasta el más específico – el de las cuestiones matemáticas concretas –.

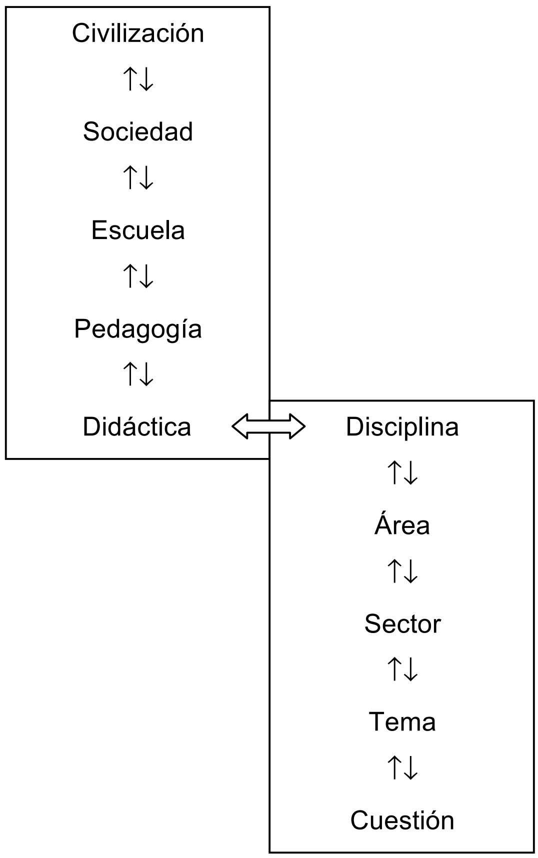


Figura 2. Escala de niveles de codeterminación entre OM y OD

Para que una cuestión sea estudiada en una institución, es necesario que en esta institución se construya toda una jerarquía de niveles que contengan dicha cuestión. En cada nivel se producen restricciones mutuas entre las OM y OD, es decir, la estructura de las OM en cada nivel de la jerarquía condiciona las formas posibles de organizar el estudio y, recíprocamente, la naturaleza y las funciones de los dispositivos didácticos existentes en cada nivel determinan el tipo de OM que será posible reconstruir en la institución escolar.

Aunque cabe destacar que tampoco el hecho que se construya esta jerarquía nos asegura la calidad de su proceso de estudio. Siguiendo a Gascón (2004), diremos que para que una cuestión matemática pueda ser estudiarse con "sentido" en cierta institución, es necesario que:

- Provenga de *cuestiones* que la Sociedad proponga para ser estudiadas (*legitimidad cultural o social*),

- Aparezca en ciertas *situaciones* "umbilicales" de las matemáticas, esto es, situadas en la raíz central de las matemáticas (*legitimidad matemática*).

- Su estudio *lleve a alguna parte*, es decir, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian, sean matemáticas o relativas a otras disciplinas (*legitimidad funcional*).

Para terminar, vamos a referirnos al trabajo de Bosch & Gascón (2006) donde encontramos citadas una de las principales funciones de esta escala de niveles que utilizaremos ampliamente en esta memoria:

> ¿Por qué una nueva ampliación del objeto de estudio con la correspondiente complejidad del marco teórico? La respuesta es siempre la misma: para liberarse de las concepciones espontáneas del conocimiento matemático que, al analizar su objeto de estudio, los investigadores podrían asumir sin cuestionarlas previamente. Las praxeologías "puntuales", "locales", "regionales" y "globales" se corresponden con los niveles inferiores: los de la cuestión, el tema, el sector y el ámbito. Quizá debido a su familiaridad con el "problema del profesor" ("dado un contenido matemático para ser enseñado, ¿cuál es la mejor forma de hacerlo?"), a menudo los didactas asumen como incuestionable la delimitación de contenidos que ofrecen las instancias educativas o académicas. Hay que situarse en un nivel de generalidad superior para preguntarse, por ejemplo, y dada una organización curricular concreta, por qué están divididos los contenidos en estos bloques temáticos y no en otros, o cuáles son los criterios para determinar esta división y qué tipo de restricciones causa sobre la actividad concreta que pueden realizar profesores y estudiantes. (*Ibid.*, p. 55, la traducción es nuestra).

ANEXO 4

1. DOSSIERS DE TRABAJO DEL TALLER DE MODELIZACIÓN

1.1. Material entregado en la experimentación del primer REI

DOSSIER 1

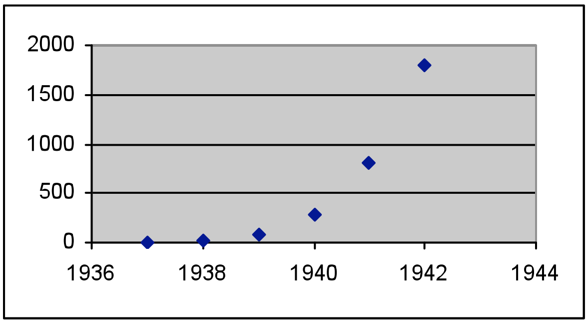
Estudi del creixement d'una població de faisans en una illa

Comparant predicció i realitat

Els humans han introduït moltes espècies en nous habitats, per accident o intencionadament, per a poder-les estudiar. Algunes s'han convertit en experiments ecològics molt interessants. Per exemple, el 1937, vuit faisans femelles (*Phasianus colchicus torquatus*) van ser introduïdes en una illa protegida davant de la costa de l'estat de Washington*. L'illa tenia abundant menjar i no hi havia espècies predadores. A més, estava massa lluny d'altres terres per a què els faisans poguessin escapar-ne.

A la següent taula i el seu corresponent gràfic es mostren les dades referents a l'evolució de la grandària de la població entre els anys 1937 i 1942 que es van prendre cada any i en el mateix període:

Anys	Grandària de la població
1937	8
1938	26
1939	85
1940	274
1941	800
1942	1800



* Lack, D. (1967) *The Natural Regulation of Animal Numbers*. Clarendon Press, Oxford.

QÜESTIONS PRINCIPALS A ESTUDIAR

Donada la població (*X*) de la que coneixem la seva grandària en algunes dates:
Com podem predir com evolucionarà la grandària de la població després d'*n* períodes de temps?
Serà sempre possible de predir la grandària de poblacions a llarg termini?
Quin tipus d'hipòtesis sobre la població i el seu entorn es poden o s'han d'assumir?
Com podem posar a prova (validar) les nostres prediccions?

Exemples de qüestions intermèdies que estudiarem:

- Utilitzant les dades que tenim de la població d'ànecs, podem fer alguna prediccions de l'evolució de la grandària de la població després d'un cert període de temps (1, 2, 3, 5, 10, 20 anys, etc.)?
- Com descrivim el temps transcorregut i la grandària de la població de faisans? Com descrivim el creixement d'aquesta població?

Altres qüestions que proposeu tractar:

- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____
- ____

DOSS

QÜESTIONS PRINC

Donada la població (X) de la que conei

Com podem predir com evolucionarà la grandàr

Serà sempre possible de predir la gra

Quin tipus d'hipòtesis sobre la població i

Com podem posar a prova (va

PREDICCIONS SOB

Anys	Mida real de la població	Proposta 1	
1937	8		
1938	26		
1939	85		
1940	274		
1941	800		
1942	1800		

A.

A continuació trobem descrites més dades d'anys posteriors sobre l'evolu
prediccions amb més dades reals:

Anys	Mida real de la població	Proposta 1	
1937	8		
1938	26		
1939	85		
1940	274		
1941	800		
1942	1800		
1944	1833		
1946	1888		
1948	1962		
1950	2034		
1952	2061		

***Q**$_a$*: S'ajusten bé les vostres prediccions (o simulacions) a les dades reals

***Q**$_b$*: Quines són les principals diferencies que s'observen? ¿Com es pode seria acceptable?

***Q**$_c$*: Podríeu proposar algun tipus d'explicació a què poden ser degudes a

DOSSIER 3

Estudi del creixement d'una població de faisans en una illa

Comparant predicció i realitat

***Q*₀**: Donada la població (*X*) de la que coneixem la seva grandària en algunes dates:

- Com podem predir com evolucionarà la grandària de la població després d'*n* períodes de temps? Serà sempre possible de predir la grandària de poblacions a llarg termini?
- Quin tipus d'hipòtesis sobre la població i el seu entorn es poden o s'han d'assumir?
- Com podem posar a prova (validar) les nostres prediccions?

En la *Sessió* 1 i *Sessió* 2, vam estudiar diverses qüestions ($\boldsymbol{Q_i}$) i vam proposar diverses primeres respostes provisionals: Sigui n = el nombre d'anys transcorreguts des del 1937 i $P(n)$, o bé, P_n = la grandària de la població en n. La variació de la grandària de la població ens queda aleshores descrita a través de les següent raons:

$\frac{P_{n+1}}{P_n}$ que anomenem "índex de variació de la grandària de la població";

$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$ taxa de variació relativa de la població.

- Varem construir el primer model matemàtic $\boldsymbol{M_1}$:

<u>*Hipòtesi de la població*</u>: L'índex de variació de la població és constant (a):

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = a, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ a \in \mathbb{R}$$

<u>*Construcció del model:*</u> Aquest model és equivalent a l'equació recurren

$$P_{n+1} = a \cdot P_n$$

on el paràmetre a s'interpreta com el *coeficient de reproducció* de la població que estudiem. Si apliquem aquesta relació recurrent a tots els elements de la successió, s'obté:

$$P_{n+1} = a \cdot P_n \Leftrightarrow P_n = a^n \cdot P_0, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

De manera que, si coneixem la grandària de la població inicial $P(0) = P_0 = c > 0$, aleshores calcular P_n per a qualsevol generació n:

$$\begin{cases} P_n = \alpha^n \cdot P(0) \\ P_0 = c > 0 \end{cases}$$

- Llavors vam estudiar com generalitzar l'estudi d'aquest primer model i treure'n així conclusions sobre la possible evolució de diverses poblacions que s'ajustessin a aquest model:
  - *Quin creieu que és el factor més important que determina l'evolució de X ?*
  - *Quines conclusions de caire general es poden treure de l'evolució de X?*
  - *Quin és el principal inconvenient d'aquest model?*

- Varem crear un segon model ($\boldsymbol{M_2}$):

Hipòtesi sobre el creixement de la població: L'índex de variació de la població decreix linealment:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \left(a - b \cdot P_n\right),\ \forall n \in \mathbb{N},\ a,b \in \mathbb{R}$$

Construcció del model: Aquest model és equivalent a a l'equació recurrent:

$$P_{n+1} = \left(a - b \cdot P_n\right) \cdot P_n\ \ \forall n \in \mathbb{N}, a,b \in \mathbb{R}$$

Considerem X una població l'evolució de la qual suposem que segueix aquest model:

- *Com podem trobar valors de a i de b que millor s'ajustin a la població que estem estudiant?*
- *Quins són els factors més importants que determinen l'evolució de X?*
- *Com s'interpreten aquests factors?*
- *Quin dels dos models estudiats s'ajusta millor a les dades reals?*
- *Quina relació hi ha entre els dos models que hem considerat fins ara?*

Doneu diferents valors als paràmetres a i b que intervenen en la definició del model creat i simuleu[1] la dinàmica de les poblacions que suposadament segueixen aquests models concrets.

- *Podeu treure alguna conclusió generals sobre l'evolució d'una població X que segueix aquest model?*

Estudi del creixem

Models discrets i s

a				
b				

n	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
...				
A la llarga				

A.

K				
a				

n	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
…				
A la llarga				

DOSSIER 4 - Avaluació

Estudi del creixement de la mosca del vinagre (drosophila)

Construcció dels models i simulació numèrica

L'estudi sobre una població de mosques del vinagre (*drosophiles*)* mostra que es reprodueixen amb molta rapidesa (cicles d'entre 10 i 11 hores). En un recipient preparat amb suficients recursos es van introduir 22 mosques i es va observar l'evolució de la grandària de la població. A la següent taula es mostren les dades reals de l'evolució d'aquesta població:

Dies	Grandària
0	22
9	39
12	105
18	225
21	390
25	499
29	618
33	791
36	877
39	938

Algunes de les possibles qüestions a tractar a l'informe:

- *Quins models matemàtics ens ajuden a descriure l'evolució de la grandària de la població de mosques? Com els creem i utilitzem?*
- *Com es pot aprofitar la descripció d'aquest augment per estimar mides posteriors de la població?*
- *Quina serà l'evolució de la grandària de la població de mosques a llarg termini (com a mínim després de 50 anys)?*
- *S'ajusten bé les vostres prediccions (o simulacions) a les dades reals?*
- ...

DOSSIER 5

Estudi de la dinàmica de poblacions

Simulació gràfica: El mètode de la teranyina

El treball que hem realitzat fins ara es pot sintetitzar a través de la definició d'equacions o relacions recurrents definides com: $P(n+1) = f(P(n))$ on *f* representa la relació funcional (lineal o quadràtica) que hi ha entre dues generacions consecutives de la població considerada.

Considerant aquest model funcional ens permetrà realitzar *simulació gràfica* amb les corbes $y = f(x)$ i $y = x$ mitjançant el *mètode de la teranyina* i així estudiar el comportament de la successió generada en relació als corresponents punts fixos[2] (diem que x és un *punt fix* de la $y = f(x)$ si és solució de l'equació $x = f(x)$). En que consisteix doncs el **mètode de la teranyina?**

1) Dibuixem en uns mateixos eixos $y = x$ i $y = f(x)$ i calculem els punts fixos de $f(x)$.

2) Escollim un punt inicial $x_0 = c$ amb el que començar el càlcul d'iterats.

3) Resolem gràficament l'equació recurrent: $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = c \end{cases}$

- ***Estudi del model Maltusià (M_1)*:**

L'equació $P(n+1) = \alpha \cdot P(n)$ equival a considerar l'equació $x = \alpha \cdot x$, és a dir, considerar les rectes $y = x$ i $y = \alpha \cdot x$ on el paràmetre α és el pendent de la segona recta. Haurem doncs de distingir tres casos: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ i $\alpha < 1$. En els dos primers casos sols tenim un punt fix que correspon al punt $x = 0$, i en el cas $\alpha = 1$, tot punt és un punt fix. La gràfica de $y = \alpha \cdot x$ dels dos primers casos és la que trobem a continuació, apliqueu ara el mètode descrit. A quines conclusions s'arriba?

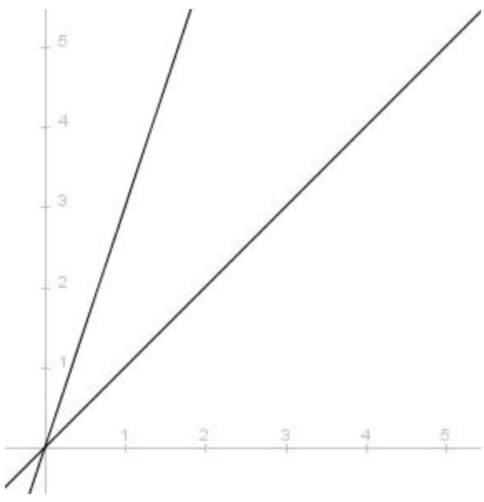


Figura 1 - Cas $\alpha > 1$

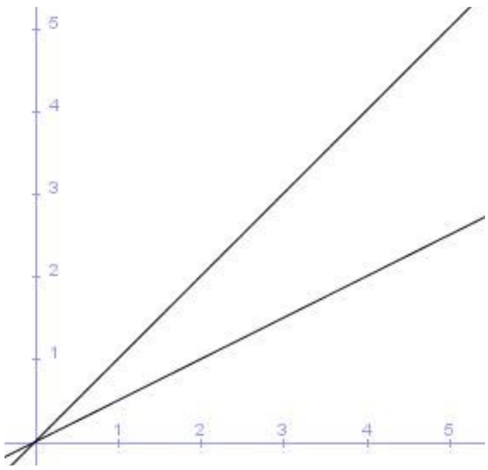


Figura 2 - Cas $\alpha < 1$

- ***Estudi del segon model* (M_2):**

El segon model estudiat va quedar definit a través de l'equació recurrent:

$$P(n+1) = \left(a - b \cdot P(n)\right) \cdot P(n)$$

on $a = \alpha$ representa el *coeficient de reproducció* de la població X i $b = \alpha - 1/K$ on K és la capacitat de l'habitat. L'equació recurrent descrita equival a considerar l'equació:

$$P(n+1) = \left(\alpha - \frac{\alpha}{K} \cdot P(n)\right) \cdot P(n)$$

Per tant, hem de considerar les funcions $y = x$ i,

$$y = f(x) = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

a) Característiques de la funció: $y = f(x) = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$

b) Càlcul dels punts fixes com a solucions de l'equació: $x = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$

Utilitzeu ara la nova ***tècnica d'iteració gràfica*** per a cada un dels casos que trobeu representats, corresponents a certs valors concrets dels paràmetres K i α i condicions inicials $N(0)$. Per a simplificar l'estudi ens reduirem al cas normalitzat de K=1.

Aprofiteu tota la informació que aconseguiu amb la utilització d'aquesta nova tècnica per a entendre millor la dinàmica de possibles poblacions segons aquests segon model amb el que hem estat treballant.

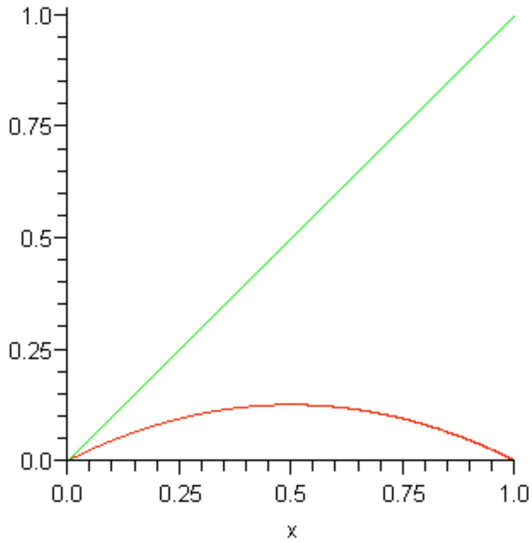


Figura 3 - Cas a = 0.5

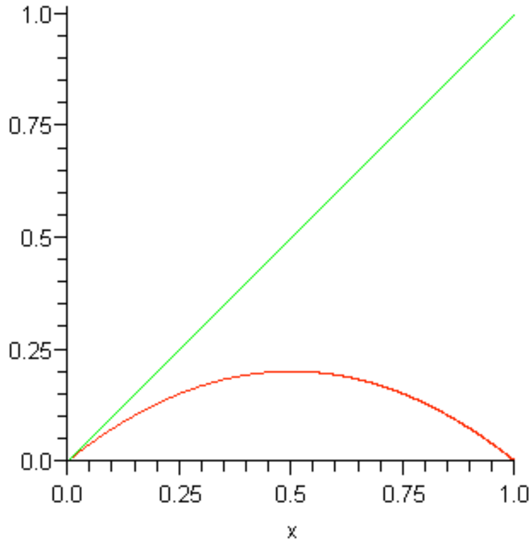


Figura 4 - Cas a = 0.8

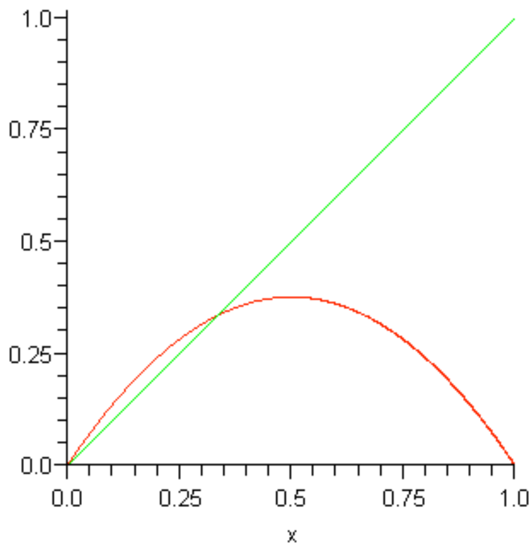


Figura 5 - Cas a = 1.5

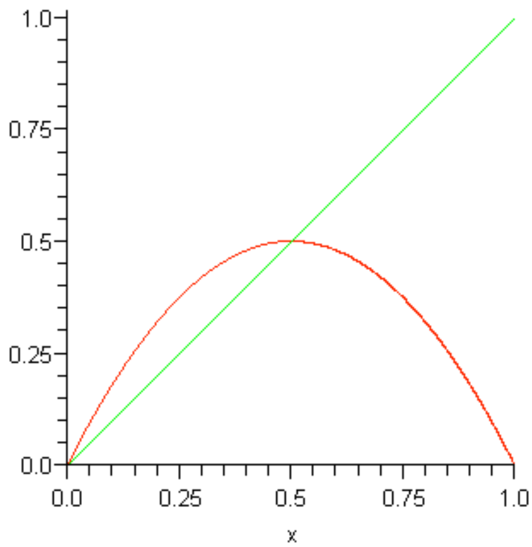


Figura 6 - Cas a = 2

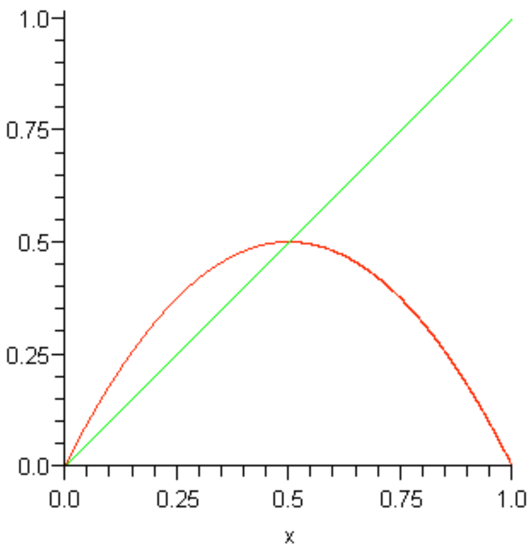


Figura 7 - Cas a = 2.5

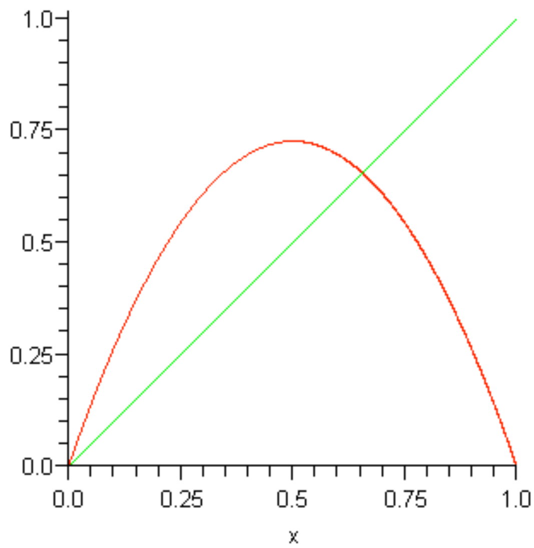


Figura 8 - Cas a = 2.9

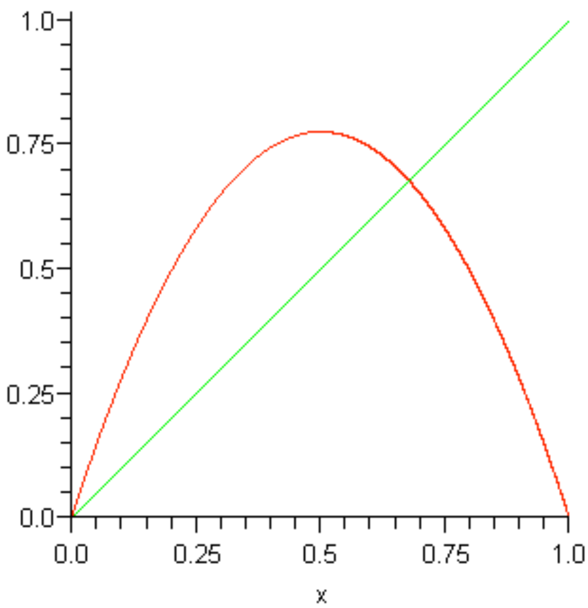


Figura 10 - Cas a = 3.3

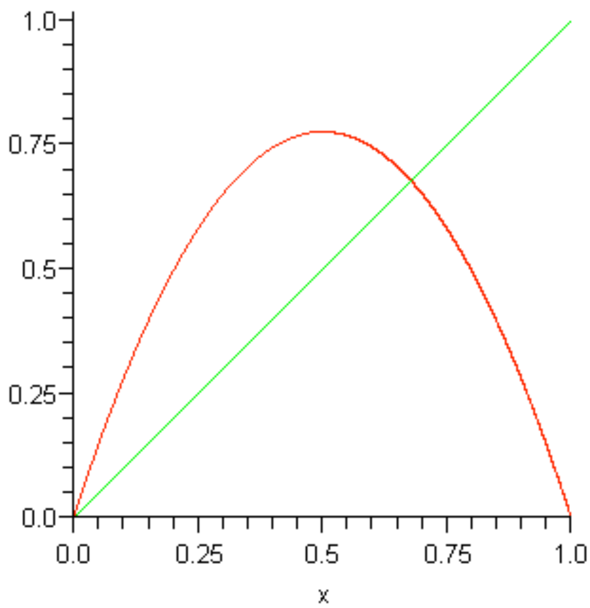


Figura 11 - Cas a = 3.5

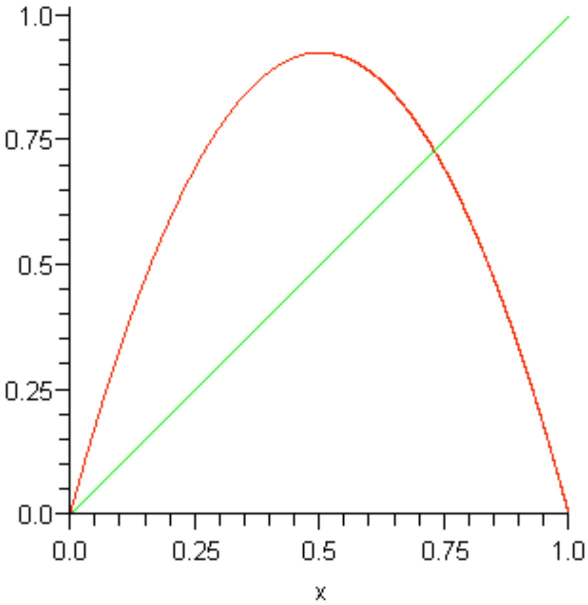


Figura 12 - Cas a = 3.7

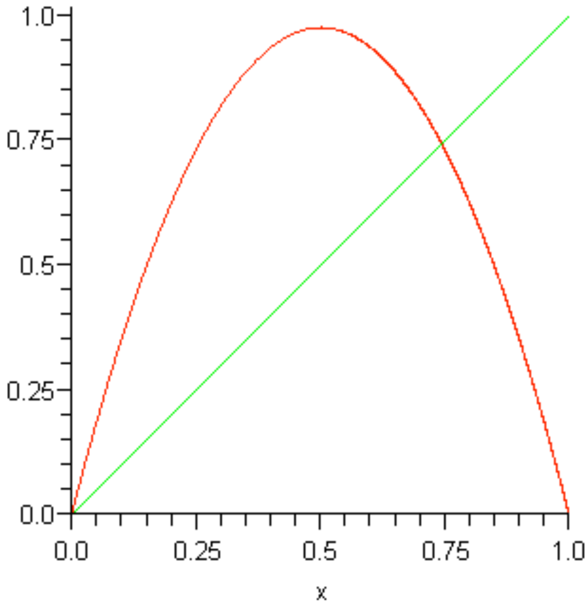


Figura 13 - Cas a = 3.9

De què depèn la convergència de la successió $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$?

Quines condicions ens asseguren que $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ estigui ben definida?

Quines condicions ens asseguren que $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeixi?

- Es poden eliminar alguns casos que no tinguin sentit?
- Compareu els diferents casos proposats a prop dels punts fixos.
- Com podem assegurar la convergència cap al punt fix localment?[3]
- ____
- ____

1.2. Material entregado en la experimentación del segundo REI

Modelització matemàtica amb matrius:

Les matrius de transició

En aquest llistat d'exercicis es descriurà l'ús de les *matrius de transició* per a l'estudi de l'evolució de fenòmens de la nostra societat actual. L'objectiu serà poder donar resposta a la següent qüestió:

Com podem predir l'evolució de la distribució dels "elements" (matèria, animals, individus, accions de borsa, rentes, gens, malalties, etc.) entre dos periodes consecutius? I què pasarà a la llarga? Existeixen distribucions estables? Per què? Són úniques? Com les podem trobar?, etc.

Observació: Fixeu-vos en la descomposició de la qüestió central a tractar feta en els dos primers fenòmens per a tenir un guió orientatiu per tractar l'estudi dels altres fenòmens.

<u>Aplicació a fenòmens geològics:</u>

Un estudi geològic sobre l'evolució de la pedra i de la sorra en períodes de 100 anys mostra el següent: El 70% del que era pedra després de 100 anys seguirà sent pedra i sols el 10% del que era sorra esdevindrà pedra.

(a) Completeu la matriu ***A*** amb la informació que ha proporcionat l'estudi descrit:

	Pedra	Sorra
Pedra		
Sorra		

(b) Suposant que els percentatges d'evolució es mantenen constants en cada període de 100 anys, determineu l'evolució en 100, 200 i 300 anys, considerant els següents casos:

(i) Al principi hi ha 30 tones de pedra i 50 de sorra.

(ii) Al principi hi ha 20 tones de pedra i 60 de sorra

(iii) Al principi hi ha 50 tones de pedra i 50 de sorra

(iv) Al principi hi ha 70 tones de pedra i 30 de sorra

(c) Calculeu els punts fixos de la matriu de transició considerada, ¿sortia algun d'aquests punts fixos en els apartats anteriors?

(d) Calculeu el valors i vectors propis associats a la matriu ***A***.

(e) Determineu la matriu ***D*** associada a ***A*** en aquesta nova base.

(f) Determineu l'evolució després de 2000 anys d'una quantitat inicial qualsevol (a, b) de pedra i sorra.

(g) Podem afirmar que sempre hi haurà a llarg termini més d'un 70% de matèria que s'haurà convertit a pedra? Per què?

Aplicació a afers polítics:

Sistemes electorals: Un país amb sistema electoral democràtic té dos grans partits amb representació parlamentària: **A** i **B**. Un estudi mostra que la probabilitat de canvi del vot entre els electors de cada partit entre unes eleccions i les següents. El resultat és el següent:

	A	**B**
A	0,96	0,16
B	0,04	0,84

(a) Si considerem 100 votants del país i suposem que es reparteixen el 50% entre els dos partits, calculeu l'evolució del vot en les 10 eleccions següents suposant que la probabilitat de canvi de vot es manté constant.

(b) Repetiu l'apartat anterior en els dos casos següents: suposant que el partit **A** té un 25% de votants i el **B** té el 75% restant. I suposant després que el partit **A** té un 90% dels votants i el **B** un 10%, com varien els resultats?

(c) Calculeu els punts fixos de la matriu de transició considerada, ¿sortia algun d'aquests punts fixos en els apartats anteriors? ¿Per què?

(d) Calculeu el valors i vectors propis associats a la matriu ***A***.

(e) Determineu la matriu ***D*** associada a ***A*** en aquesta nova base.

(f) Prediu la repartició dels vots en les n-éssimes eleccions si els votants es reparteixen inicialment al 50% entre els dos partits.

(g) Expliqueu per què l'evolució a llarg termini no depèn de la distribució inicial de los votants.

Aplicació a afers empresarials:

Quotes de mercat: Dos marques de tabac A i B controlen el mercat, repartint-se el 60% i el 40% respectivament. Aquest any es preveu en el mercat un moviment de 13 milions d'€. Suposem que els consumidors de la marca A es mantenen fidels a la marca en un 30% i es canvien de marca en l'altre 70%, mentre que un 40% dels consumidors de B es mantenen fidels i la resta passa a A. Com es repartiran el mercat en 5 anys si suposem que les condicions actuals i el volum de ventes es mantenen? I en 20 anys?

Borsa de valors: El valor d'una acció fluctua cada dia. Quan la borsa es troba estable, l'increment d'un valor en un dia acostuma a provocar un descens del mateix valor al dia següent, i a l'inrevés. Suposem que la matriu de transició per a una determinada acció és la següent:

AVUI ↓ *AHIR* →	***Augment***	***Descens***
Augment	0,15	0,90
Descens	0,85	0,10

Pla de mobilitat laboral: Una companyia multinacional té 3 oficines principals: una a Atlanta (A), una altra a Barcelona (B) i una tercera a Canberra (C). Per a que l'equip de treballadors de la companyia es mantinguin al dia i amb un bon nivell d'eficiència, s'ha dissenyat un pla de mobilitat laboral que els obliga cada any a canviar d'oficina. Els treballadors que no s'atenen a aquest pla han d'abandonar l'empresa. En una reunió de direcció, el cap de Recursos Humans va presentar les dades següents:

– A l'any 2000, dels 1000 treballadors de la companyia, 400 estaven a Atlanta, 300 en Barcelona i 300 en Canberra.
– La planificació per el 2001 va ser: el 40% de los treballadors d'Atlanta es van destinar a Barcelona, el 10% a Canberra i el 10% van marxar de l'empresa.
– Dels treballadors de Barcelona, 0% van anar a Atlanta, 10% a Canberra i 20% van marxar.
– Dels treballadors de Canberra, 50% van marxar a Atlanta, 10% a Barcelona i 10% van marxar.

Distribució de les rentes: En una determinada comunitat autònoma espanyola el 20% de les rentes familiars són inferiors a 6000€, el 70% estan compreses entre 6000€ i 12000€ i sols en 10% superen aquesta xifra. Aquests tres grups de renta els anomenem renta *baixa*, *mitjana* i *alta* respectivament.
Hi ha molts estudis que informen que d'un any a un altre, un 70% de les famílies amb renta baixa es manté amb aquest tipus de renta, mentre que un 20% passen a renta mitjana i un 10% a restant a renta alta. De les famílies amb renta mitjana, es mantenen amb aquesta renta un 60%, passen a renta baixa un 30% i a alta un 10%. Per últim, el 60% de les rentes altes ho segueixen sent , un 30% passa a mitjana i un 10% a baixa.
Les autoritats de la citada Comunitat Autònoma estan molt preocupades per la distribució futura de la renta i estan pensant en aplicar mides correctores ja que es creu que la situació pot empitjorar en un futur. Existeix una distribució de rentes estable? Quin % de famílies estan en cada grup de renta?

Aplicació a fenòmens genètics i d'epidemiologia:

Cultiu de plantes i descendència genotípica: Un pagès té una plantació de flors de color vermell, rosa i blanc que ve determinat pels genotips *AA*, *Aa* i *aa* respectivament. El pagès decideix fertilitzar totes les flors amb una de color rosa ja que li interessa aconseguir que un 75% de la seva producció sigui de flors roses que són les millor pagades. Ho aconseguirà? O sinó, quins canvis en la plantació hauria de fer?

– Inicialment hi ha 100 flors vermelles, 200 roses i 300 blanques,
– Amb una flor vermella (*AA*) quan s'aparella amb una de rosa (*Aa*) té una probabilitats del 50% que la generació següent sigui *AA* o *Aa*.
– Amb una flor rosa (*Aa*) quan s'aparella amb una de rosa (*Aa*) té una probabilitats del 50% que la generació següent sigui *Aa* i una probabilitat d'un 25% de que sigui tant *AA* o bé *aa*.
– Amb una flor blanca (*aa*) quan s'aparella amb una de rosa (*Aa*) té una probabilitats del 50% que la generació següent sigui *Aa* o *aa*.

Herència genètica de malalties: Entre les persones, moltes de les malalties genètiques són regides per l'herència auto-somàtica. En la seva transmissió, sempre intervé un gen normal (A) i un gen denominat anormal (a). El genotip AA és el d'un individu no portadors de la malaltia, mentre que un Aa és el d'un portador encara que no la pateix i el aa és el d'un que la pateix segur. S'ha fet un estudi per identificar als portadors d'una de les malalties i estudiar la seva evolució.

- L'experiment es comença amb 1000 no portadors, 200 portadors i 10 malalts
- Primer s'experimenta de manera que tots els individus es reprodueixin amb individus sans, és a dir, AA .
- Un segon experiment fa que es reprodueixin amb portadors Aa.

S'aconseguirà amb els dos experiments reduir a un 0.5% la proporció dels individus que pateixen la malaltia? En quantes generacions?

Es pot controlar una epidèmia? Durant l'any 2003 es van recollir dades referents a l'evolució d'un brot detectat de legionel•la. Es va fer l'estudi en un mateix barri on hi havia hagut el brot i es van distingir tres grups de persones: sans, portadors (que encara no havien desenvolupat la malaltia) i malalts. L'experiment es comença amb 200 persones residents en el mateix barri, a l'inici de les proves hi havia 170 sans, 27 portadors i 3 malalts. Es va aconseguir eliminar el brot de legionel•la? En quants dies? S'estimava que d'un dia per l'altre l'evolució es mantenia constant de la següent manera:

- Un 9% dels sans es convertien en portadors i un 1% desenvolupava directament la malaltia,
- Un 18% dels portadors desenvolupava la malaltia cada dia,
- Dels malalts, un 13% es recuperava i passava ja a ser sa.

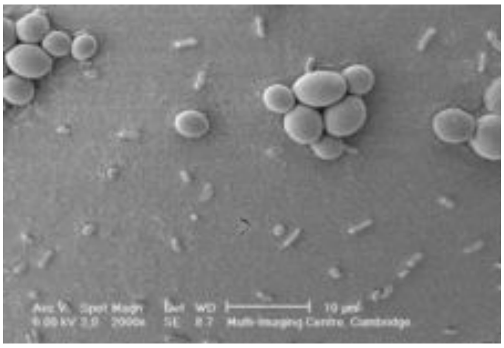
1.3. Material entregado en la experimentación del tercer REI

DOSSIER 1 (*llevat*)

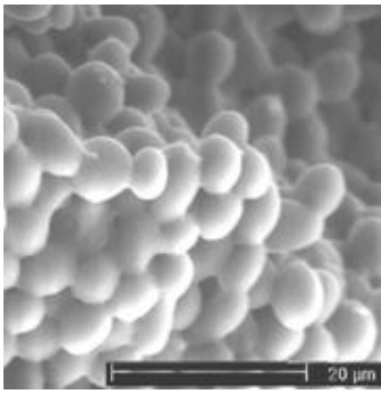
Estudi del creixement del llevat en recipients tancats

El llevat és un petit microbi de característiques vegetals que s'utilitza per l'elaboració del pa i d'algunes begudes alcohòliques, com el vi, la sidra i la cervesa. Al 1859, Louis Pasteur, pare de la microbiologia moderna, va descobrir la manera de reproduir-se del llevat. En alimentar-se de sucres derivats, aquest microorganisme produeix diòxid de carboni. Aquest gas dilata les proteïnes del gluten que conté la farina produint que la massa del pa s'expandeixi. A l'actualitat, les begudes alcohòliques, s'elaboren a partir de fruites, cereals o mel, als que s'afegeix diferents tipus de llevat per fer fermentar els sucres presents en aquests productes i obtenir així l'alcohol.

Un dels llevats més coneguts és l'espècie ***Saccharomyces cerevisiae*** que té la facultat de créixer sense necessitar d'oxigen (forma anaeròbia) realitzant la fermentació alcohòlica. Un altre tipus de llevat molt utilitzat per l'elaboració de cervesa és l'anomenat ***Saccharomyces kefir***.



Saccharomyces cerevisiae



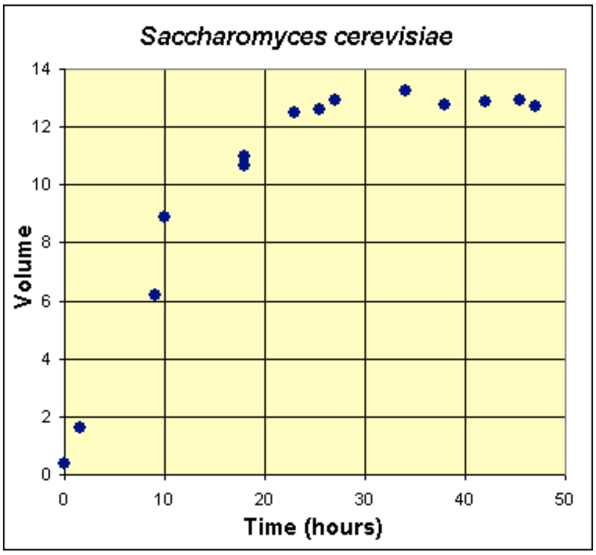
Saccharomyces kefir

A continuació es presenten les taules[4] referents a les dades recollides en dos experiments amb els dos tipus de llevat citats. Els experiments van consistir en deixar en un recipient independent tancats i amb prou nutrients una població inicial d'ambdós llevats. Les condicions van ser idèntiques en els dos casos. La primera de les taules mostra dades referents a les observacions preses sobre la població de *S. cerevisiae* , i la segona taula presenta les dades referents a *S. Kefir*. Aquestes últimes dades van ser recollides durant un període més llarg de temps degut al creixement més lent d'aquest tipus de llevat.

2.

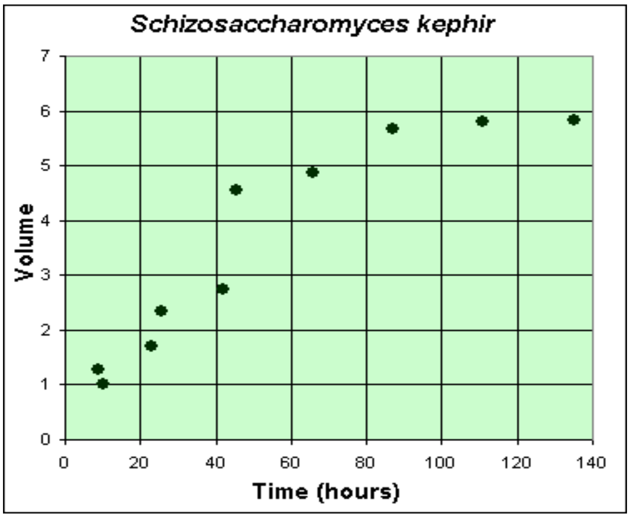
Saccharomyces cerevisiae

Hores	Grandària
0	0,37
1,5	1,63
9	6,2
10	8,87
18	10,66
18,5	10,97
23	12,5
25,5	12,6
27	12,9
34	13,27
38	12,77
42	12,87
45,5	12,9
47	12,7



Schizosaccharomyces Kephir

Hores	Grandària
9	1,27
10	1
23	1,7
25,5	2,33
42	2,73
45,5	4,56
66	4,87
87	5,67
111	5,8
135	5,83



QÜESTIONS PRINCIPALS A ESTUDIAR

Donada la població (*X*) de la que coneixem la seva grandària en algunes dates:

Com podem predir com evolucionarà la grandària de la població

després d'*n* períodes de temps?

Serà sempre possible de predir la grandària de poblacions a llarg termini?

Quin tipus d'hipòtesis sobre la població i el seu entorn es poden o s'han d'assumir?

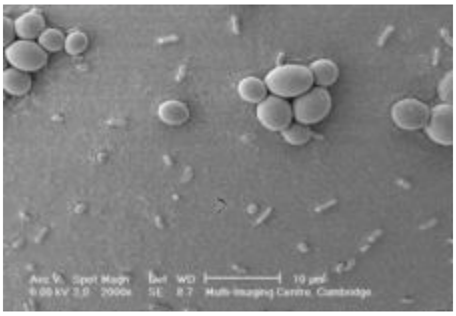
Com podem posar a prova (validar) les nostres prediccions?

DOSSIER 2 (*llevat*)

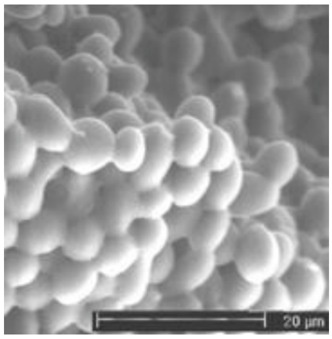
Estudi del creixement de les dues espècies del llevat

En les anteriors sessions, hem estat construint els models matemàtics que millor ens descriuen el creixement del dos tipus de llevat que s'utilitzen per l'elaboració de cervesa:

Saccharomyces cerevisiae



Saccharomyces kefir



✓ **Com s'ha descrit la variació i l'evolució de la mida d'aquestes dues poblacions?** Quins són els principals factors, sobre la població, entorn o creixement que intervenen?

Per construir el model logístic, es va suposar que la raó de variació relativa decreix amb la mida de la població $x(t)$:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

Per tant, el segon model a estudiar, bé donar per l'equació diferencial autònoma:

$$x'(t) = a \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

Equació diferencial de la que podem trobar-ne la seva solució analítica exacte pel mètode de variables separades:

$$\frac{x'(t)}{x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)} = a \quad \leftrightarrow \quad \frac{K \cdot x'(t)}{x(t) \cdot \left(K - x(t)\right)} = a$$

Com que podem descompondre $\dfrac{K}{x\,(K-x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{K-x}$ acabem obtenint que:

$$x(t) = \frac{K}{C \cdot e^{-a \cdot t} + 1} \quad \text{on} \quad x(0) = x_0$$

Substituint la condició inicial donada ens queda que

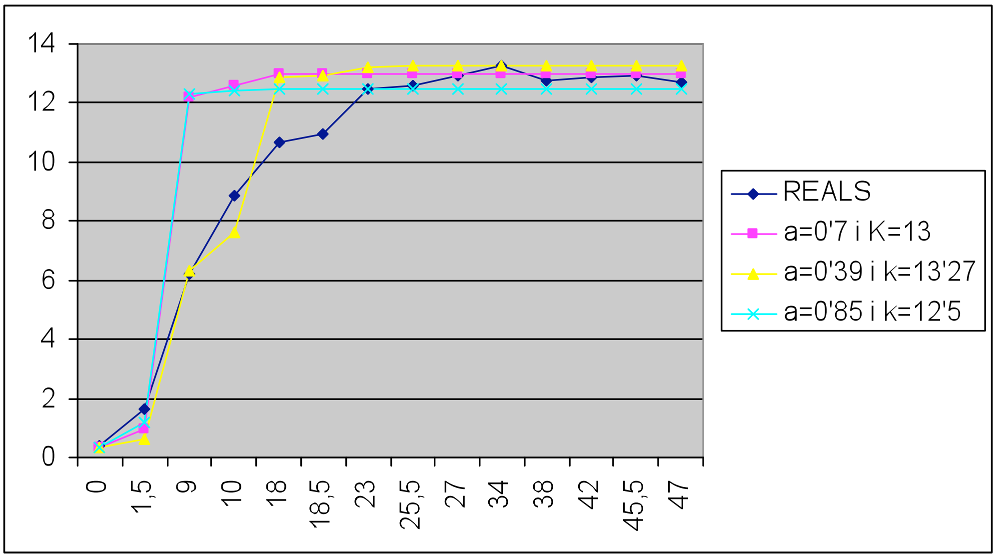
$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} + 1\right) \cdot e^{-a \cdot t} + 1}$$

- ✓ **Com heu ajustat el model creat a les vostres dades?** Heu considerat algunes dades com més rellevant a l'hora de descriure el creixement? Heu hagut de prescindir d'alguna informació sobre la població?

- ✓ **S'ajusten bé les prediccions que generen els models a les dades que tenim reals?** Quin és el millor ajust que es pot fer?

- ✓ **Quines característiques tenen les funcions solució *x*(*t*) d'aquest model que estem estudiant?** Quina és la gràfica d'aquestes funcions, segons els paràmetres *a* i *K*?

Algun exemple que es poden simular ...



DOSSIER 3 (*llevat*)

Estudi del creixement de dues espècies en competència

Davant de la qüestió plantejada: **Quin és el model matemàtic, o els models, amb el que poden descriure i determinar com evolucionen les espècies que conviuen i lluiten pels recursos existents?** Vam començar a treballar amb el sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{x} = a \cdot (1 - \dfrac{x}{K}) - c \cdot y \\ \dfrac{y'}{y} = b \cdot (1 - \dfrac{y}{K}) - d \cdot x \end{cases} \qquad (1)$$

en el que es suposa que la raó de variació per individu: $\frac{x'}{x}$ que decreix linealment segons la grandària de la primera població $x(t)$ però ara la població $y(t)$ influeix negativament en aquesta raó de variació amb constant c. El mateix s'està suposant per a la raó referent a la segona de les poblacions $\frac{y'}{y}$.

El sistema plantejat (1) és equivalent a:

$$\begin{cases} x' = a \cdot (1 - \dfrac{x}{K}) \cdot x - c \cdot y \cdot x = \left(a \cdot (1 - \dfrac{x}{K}) - c \cdot y \right) \cdot x \\ y' = b \cdot (1 - \dfrac{y}{K}) \cdot y - d \cdot x \cdot y = \left(b \cdot (1 - \dfrac{y}{K}) - d \cdot x \right) \cdot y \end{cases} \qquad (2)$$

Cal observar que, com que no podrem trobar les solucions analítiques de ***x*(*t*)** i de ***y*(*t*),** el que farem és intentar treure tota la informació possible del sistema d'equacions plantejat, és a dir, de la variació conjunta de les mides d'ambdues poblacions. Aquesta informació la sintetitzarem en el que s'anomena: **retrat de fases**.

Per a construir el *retrat de fases*, cal primer que considerem el pla format pels eixos on hi trobem ***x*(*t*)** i ***y*(*t*)**, per tant cada punt d'aquest pla té components **(*x*, *y*)**.

Donat que tenim molt ben descrits en (2) *x'* i *y'* respectivament, l'objectiu ara serà portar sobre el pla de fases la informació proporcionada per **(*x'*, *y'*)** vector que ens descriu els creixements d'ambdues poblacions i que és tangent a les trajectòries d' $f(x(t), y(t))$.

Aquest estudi el podem anar fent punt a punt, però no resulta ser una forma molt econòmica de tractar la informació. Podem llavors analitzar casos extrems que ens permet sintetitzar gran part de la informació. Per exemple: Casos en que $x = 0$ o bé $y = 0$, anàlisi de les situacions d'equilibri $x' = 0$ i/o $y' = 0$.

Anem a fer un exemple: $\begin{cases} x' = x\,(1-x) - \frac{1}{2}xy \\ y' = \frac{1}{2}\,(1-y)y - xy \end{cases}$

Altres exemple per seguir practicant: $\begin{cases} x' = x\,(1-x) - xy \\ y' = \frac{1}{2}(1-y)y - \frac{1}{4}xy \end{cases}$

I exemples ja que ens portaran a solucionar el problema del llevat:

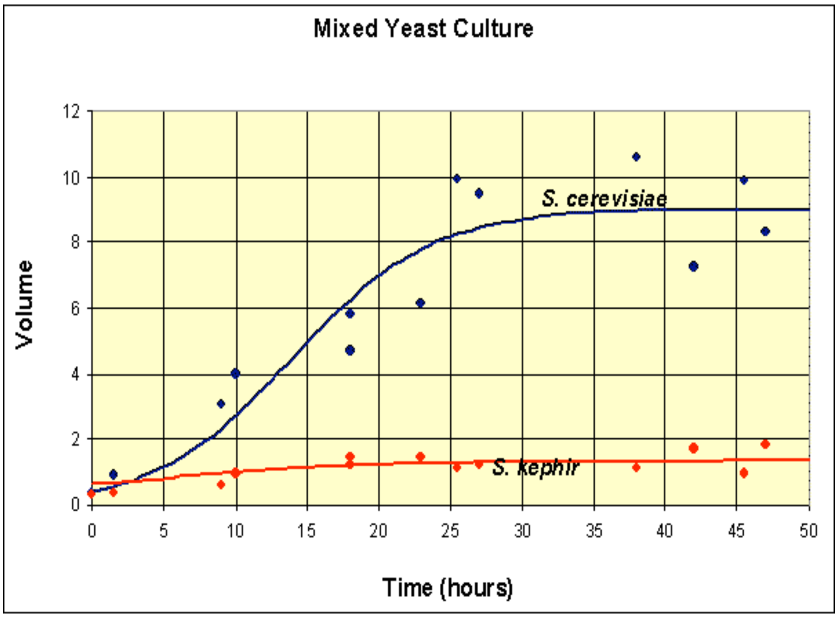
$$\begin{cases} x' = 0.35x\,(1-\frac{x}{13}) - 0.02xy \\ y' = 0.1(1-\frac{y}{13})y - 0.008xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 0.35x\,(1-\frac{x}{13}) - 0.05xy \\ y' = 0.1(1-\frac{y}{13})y - 0.004xy \end{cases}$$

Estudi del creixement de les espècies de llevat

Davant del cas del llevat que s'havia començat a estudiar:

	S.C.	S.K.
Hores	**Grandària1**	**Grandària2**
0	0,375	0,28
1,5	0,92	0,37
9	3,08	0,63
10	3,99	0,98
18	4,69	1,47
18,5	5,78	1,22
23	6,15	1,46
25,5	9,91	1,11
27	9,47	1,225
38	10,57	1,1
42	7,27	1,71
45,5	9,88	0,96
47	8,3	1,84



El sistema d'equacions diferencial que millor l'ajusta és:

$$\begin{cases} x' = 0.2586x\,(1-\dfrac{x}{13}) - 0.05711xy \\ y' = 0.05744(1-\dfrac{y}{6})y - 0.004803xy \end{cases}$$

➡ **Estudiant el retrat de fases d'aquest sistema plantejat, es pot deduir d'aquest que la gràfica de $x(t)$ i $y(t)$ en funció del temps és la que observem en el gràfic?**

2.1. Informes del primer REI: Unidades 0, 1, 2 y 3

UO

· Podem predir què passarà després determinat període de temps ?

Si, tenint en compte la condició de l'hàbitat (aliments, clima, etc.) i les dades donades a la taula podríem predir que la mida de la població inicial no afectaria la mida de la població futura, ja que s'arribarà a un equilibri entre població - recursos.

· Quin tipus d'hipòtesis sobre la població i el seu entorn s'han d'assumir.

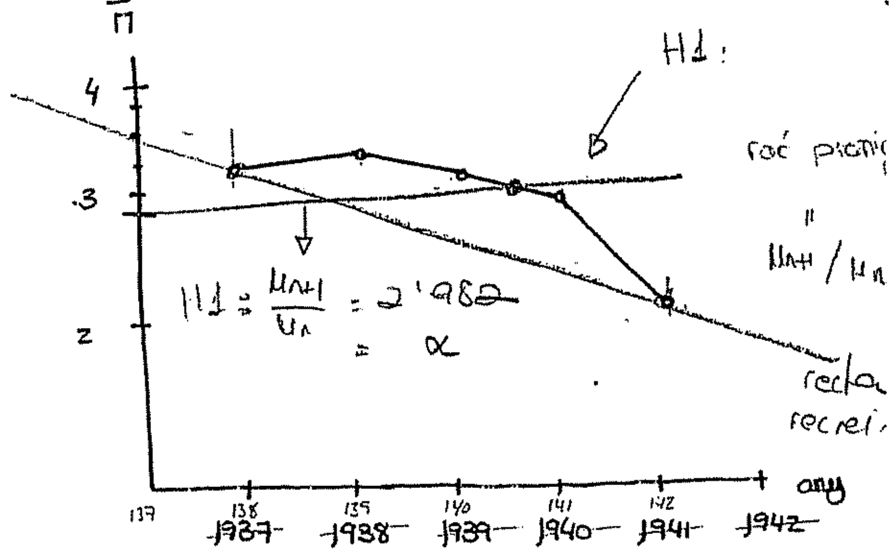
Durant els 6 primers anys :

anys	n	Mida de la població		Mitja de femelles / femelles any anterior
1937	0	nº.	8	$= \frac{26}{8} =$ 3,25
1938	1	nº	26	3,27
1939	2	nº	85	3,22
1940	3	nº	274	2,92
1941	4	nº	800	2,25
1942	5	nº	1800	

raó promitg = 2,982

Quocient entre natalitat vs mortalitat

taxa natalitat - taxa mortalitat = constant



Veiem les dades e ingnorant els tres primers anys degut que no son representatius, podem dir que la població arribarà a un equilibri natalitat vs mortalitat, el qual tindrà tendència a uno, però mai sobrepassant-lo en una situació natural favorable.

La població inicial no la tenim en compte i les condicions de l'entorn no varien amb el temps

any	X	taxa variació relativa	taxa variació absoluta
1937	8		
1938	26	$= \frac{26-8}{8} = 2,25$	$= 26 - 8 = 18$
1939	85	$= 2,27$	$= 59$
1940	274	$= 2,22$	$= 189$
1941	800	$= 1,9$	$= 526$
1942	1800	$= 1,25$	$= 1000$

- A mesura que la població creix el territori per individus serà + petit i per la qual cosa n'hi haurà − aliment x arec.
- El creixement exponencial s'ajusta al creixement de la població d'arecs.

Predicció:

x = anys = dif. (any − 1937)

y = Tamany de la població

Model exponencial:

$$y = a \cdot e^{bx} \longrightarrow \text{molt complicat.}$$

Model successions:

tamany de la població

$$\text{Estudia } \left\{ \underset{X_0}{8}, \underset{X_1}{26}, \underset{X_2}{85}, \ldots \right\} \left\{ X_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

any − 1937

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = ct.$$

Hipòtesis

Model Malthusià Discret.

$$\boxed{\begin{array}{l} X_{n+1} = 3,1^{n+1} \cdot X_0 \\ X_0 = 8 \end{array}}$$

$$\left[X_{n+1} = ct. \cdot X_n + X_n \right] \Rightarrow \text{vàlid x qualsevol valor de } n.$$

Modelització matemàtica

Informe 1

Informe 1
UO

En l'estudi del creixement d'óvels en una illa, podem predir que la població s'estancarà arribat a un punt desconegut, ja que es depèn dels recursos de l'hàbitat, les possibles malalties i/o epidèmies, la consanguinitat, els canvis climàtics, etc.

Davant d'aquests factors que dificulten les nostres suposicions, podem fer dues hipòtesis:

1) L'entorn és, al llarg dels anys, estable, és a dir, l'entorn no patirà cap canvi climàtic ni la població patirà cap malaltia.

2) Cal considerar que hi ha competència amb altres poblacions animals, pel que prescindim de l'espai que poden ocupar i de la manca dels recursos naturals.

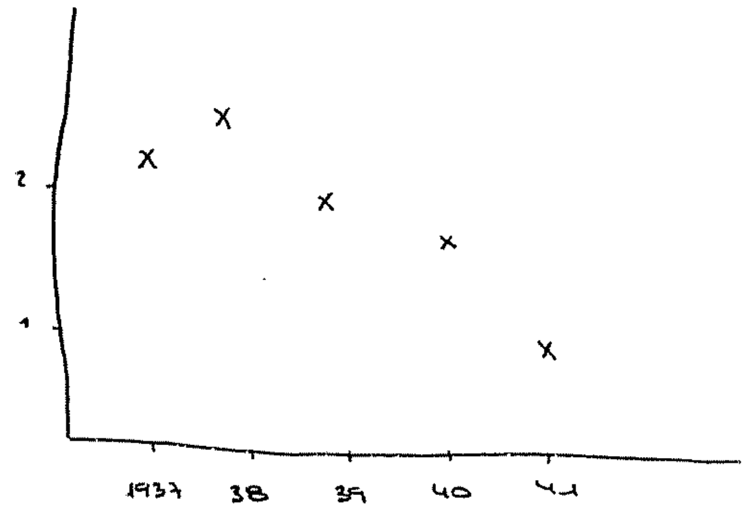
A l'hora de predir el creixement de la població a partir de les dades experimentals, hem realitzat el polinomi de Newton per veure com creix la població; per tant, realitzant les operacions corresponents, deduïm l'equació següent:

$$P(x) = 8 + 18(x-1) + 20'5(x-1)(x-2) + 14'83(x-1)(x-2)(x-3) +$$
$$+ 4'92(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 1'57(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Tot i això, hem de saber que aquest creixement "matemàtic" no és real, ja que no podem predir, com ja hem comentat anteriorment, totes les variables anteriors.

= INFORME 1 =   UO

→ Para predecir qué pasará después de un tiempo: consideramos la población de patos como una progresión creciente de datos relacionados entre sí; Una manera de relacionarlos es mediante la tasa de variación relativa



m = tasa de variación relativa

AÑO	m
1937	2'25
1938	2'26
1939	2'22
1940	1'91
1941	1'25

→ Según la gráfica al principio la población crece muy rápido pero conforme pasan los años cada vez crece más despacio aunque nunca llegaría a ser 0.

→ En nuestra opinión una vez pasado el periodo de adaptación de los patos en el medio (en el que crecen muy rápido) llega un momento en el que se estabiliza el crecimiento. Hemos partido de esta hipótesis ya que sería improbable que los animales continuarán con este ritmo de crecimiento ya que llegaría un momento en que aparecerían problemas de alimentación o de espacio

M.

→ Considerando todos los datos no valloramos una relación lógica entre ellos. Por las razones anteriores hemos decidido que los datos más relevantes son los del año 1941 y 1942 en los que el crecimiento ya está estable

$m(1940) = 1'92$

$m(1941) = 1'25$

→ suponiendo que siempre crece con la misma tendencia tomamos como tasa de variación relativa la media entre estos 2 años $m = \frac{1'92 + 1'25}{2} = 1'58$

n_a → nº de patos en el año a

$$m(1940) = \frac{n(1941) - n(1940)}{n(1940)}$$

$$m(1941) = \frac{n(1942) - n(1941)}{n(1941)}$$

→ se relaciona así mediante la frecuencia relativa el número de patos de 2 años consecutivos

(despejando las ecuaciones)

$$n(1941) = (m \cdot (n_{1940})) + n(1940)$$

$$n(1942) = (m \cdot n_{1941}) + n(1941)$$

obteniendo el término general

$$\boxed{n_a = (1+m)(n_{a-1})}$$

→ ~~Ya~~ Tenemos una ecuación por la que podemos calcular el nº de patos en cualquier año posterior.

UO Informe 1

Mitjançant el transcurs del temps i la quantitat d'ànecs que hi havien a l'illa per any, hem obtingut la descripció del creixement de la població, coneixent així, la natalitat i la taxa de variació absoluta i relativa (terminologia estadística):

Anys	Nº ànecs	Taxa creixement	Taxa variació abs	Taxa variació rel.
1937	8		8	
		3'25		2'25
1938	26		18	
		3'27		2'27
1939	85		59	
		3'22		2'22
1940	274		189	
		2'92		1'92
1941	800		526	
		2'25		1'25
1942	1800		1000	
		1'02		$1'83 \cdot 10^{-2}$
1944	1833		33	
		1'03		$3 \cdot 10^{-2}$
1946	1888		55	
		1'04		$3'92 \cdot 10^{-2}$
1948	1962		74	
		1'04		$3'67 \cdot 10^{-2}$
1950	2034		72	
		1'013		$1'33 \cdot 10^{-2}$
1952	2061		27	

→ Interpretació de les dades:

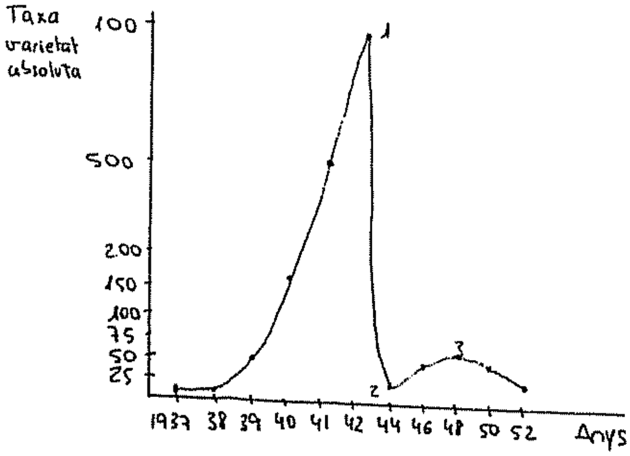
Des del 1937 fins el 1942 veiem un fort creixement de la població d'ànecs femella. Aquest creixement pot ser degut a que l'hàbitat on es porta a terme l'estudi tingui molts recursos alimentaris i d'espai, per tant, queda afavorit el fet.

Aquest creixement té la forma d'una funció exponencial.

Entre 1942 i 1944 veiem un descens molt fort del creixement de la població

A partir del 1944 ens adonem que el creixement de població va oscil·lant al llarg dels anys, uns cops creix més i d'altres menys. Aquesta oscil·lació veiem que cada cop serà més petita fins que s'estancarà; aquest punt serà quan la quantitat d'ànecs i l'hàbitat el qual es troben, quedin en equilibri.

Hem fet un gràfic en el qual podem apreciar el que acabem de comentar.



Interpretació del gràfic:

1. Aquest punt ens mostra la màxima taxa de varietat absoluta i per tant el màxim creixement de la població que hi haurà afavorit pels recursos de l'illa.

2. És un punt de mínim creixement, possiblement degut a la falta d'aliment, d'espai, i per causa de la mortalitat que hagi pogut haver.

3. Tornem a tenir un punt de màxim, aquest cop més petit, possiblement degut al augment de recursos per causa de la disminució del nombre d'habitants.

Per a poder realitzar la interprètació d'aquestes dades, només hem tingut en compte la població femella, ignorant el mascles, i hem hagut de menyspreear els depredadors, canvis climàtics, epidèmies, actuació de l'home...

TALLER DE MODELITZACIÓ MATEMÀTICA.

[11.12.07] INFORME DE LA II SESSIÓ

Continuant el que van extreure de la sessió anterior, tenim les dades tabulades i una fórmula que se'ns ajusta, més o menys, al model que busquem. La fórmula és la següent:

$$M(n+1) = c \cdot M(n)$$

On $M(n+1)$ és la dade a predir, la immediatament després; c és la capacitat de reproducció i $M(n)$ és la dada presa, la ~~real~~ anterior.

Per determinar la c, hem près les dades que van obtenir la sessió anterior, i hem fet la mitjana aritmètica de la raó que van extreure de dividir $M(n+1)$ entre $M(n)$, ja que després de provar nombrosos valors, el que més s'ajustava a la realitat era aquest. Ho podem veure a la taula a continuació:

n	Valors reals	Dades predites *
0	8	8
1	26	24'87
2	85	74'23
3	274	226'10
4	800	688'67
5	1800	2097'68

* Dades predites a partir de la fórmula $M(n+1) = c \cdot M(n)$, per $\boxed{c = 3'046}$.

c és la mitjana aritmètica de les "raons promig" que es poden trobar a les taules de l'informe anterior.

Ara que ja sabem que passa en aquest cas concret, podem plantejar-nos altres.

- <u>1r cas</u>: per una $M(0) = 150$ i una $c = 20$ tenim que: (podem plantejar la fórmula d'una altra manera per veure-ho més clar: $M(n+1) = c^n M(0)$*)

n	M(n+1)
0	150
1	3000
2	60000
3	1200000
4	24000000

* Aquesta fórmula surt de

$M(n+1) = c\,M(n) = c \cdot c\,M(n-1) =$
$= c \cdot c \cdot c\,M(n-2) = c \cdot c \cdot c \cdot c\,M(n-3) =$
$= \dots = c^n [M(0)]$

$\boxed{M(n+1) = c^n M(0)}$

Per tant, en aquest cas, on la $c > 1$, la població creix infinitament, com és el cas del nostre model. Matemàticament, per $c > 1$, $\lim_{n \to \infty} M(n+1) = \infty$

- <u>2n cas</u>: per una $c < 0$ no té sentit, és a dir, no podem agafar valors de c negatius.

- <u>3r cas</u>: per $c = \frac{1}{2}$ i $M(0) = 8$, a llarg termini la població s'extinguirà:

n	M(n+1)
0	8
1	4
2	2
3	1
4	0'5

Matemàticament:

si $0 < c < 1$, $\lim_{n \to \infty} c^n M(0) = 0$

<u>Conclusió</u>: per a que una població creixi, la c ha de ser major a 1

Ara expliquem breument com hem trobat el nostre model.

Nosaltres volíem poder predir la dinàmica d'una població, per això hem buscat relacions entre el temps i la grandària de la població (així vam trobar la taxa absoluta i relativa de variació) i entre les mides a temps n i a temps (n+1).

La primera hipòtesi vàlida ha estat trobar

$$\frac{N(n+1)}{N(n)} = c \quad , \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{on } c = \text{cte}$$

Així ens vam adonar que si trobàvem una c vàlida podríem definir la funció $N(n+1) = c\,N(n)$ útil per tots els casos.

<u>Conclusions generals</u>:

Com a conclusió general podem extreure que aquest model no és del tot vàlid, ja que té restriccions importants.

Una restricció important és que no es poden prendre valors negatius per la c; un altre problema gran i evident és que aquest model és molt llunyà del real, ja que no preveu que els recursos siguin finits o qualsevol tipus de problema que pugui ocasionar mortalitat a la població estudiada. Només el podem prendre com un model estrictament teòric.

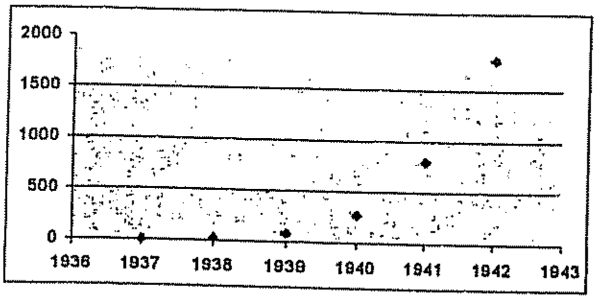
El señor Thomas Matthus ~~Matthus [illegible]~~ ja el va fer servir un model semblant, però per aquest motiu va ser refusat.

INFORME DOSSIER 2.

U1

Anys	Mida de la població
1937	8
1938	26
1939	85
1940	274
1941	800
1942	1800

Taula 1



Gràfica 1

A partir d'aquestes dades, a la primera sessió vam intentar desenvolupar un model que descrigués matemàticament el creixement de la població al llarg del temps. Vàrem provar ajustant un polinomi. No obstant, aquest es desviava enormement al intentar fer prediccions.

En la segona sessió, es van treballar conjuntament els models discrets, fonamentalment el model maltusià. Aquest permet predir la mida d'una població a partir de la mida anterior segons

$M_n = \alpha^n M_0$ on:

- M_n representa la mida de la població l'any n
- α representa la raó promig (M_{n+1}/M_n)
- M_0 representa la mida de la població inicial

Per poder treballar amb aquest model hem de suposar $\alpha = cnt$, cosa que, evidentment, s'allunya força de la realitat. Tot i això, cal assumir aquesta hipòtesis tan forta per poder acotar mínimament el problema.

En el cas dels ànecs, l'expressió maltusiana per les dades de què disposàvem es podia calcular de la següent manera:

Diferència d'anys	Mida pob. (M_n)	Raó promig (M_{n+1}/M_n)
0	8	---
1	26	3,2500
2	85	3,2692
3	274	3,2235
4	800	2,9197
5	1800	2,2500
	Mitjana	2,9825

Taula 2

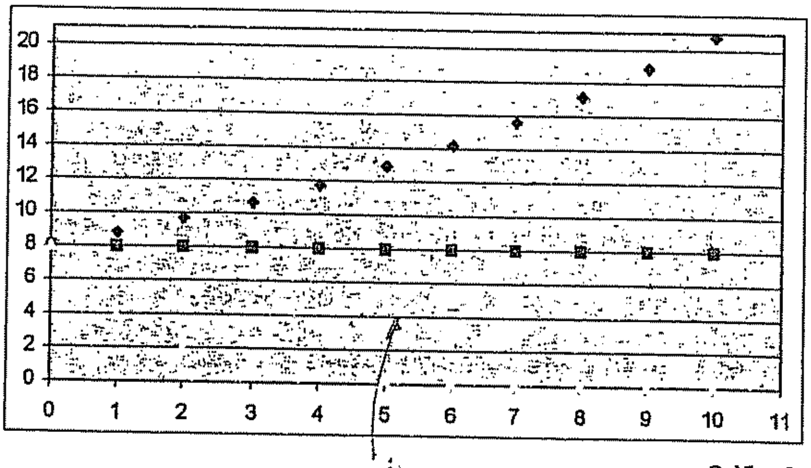
El model de Maltus corresponent a les dades de la *Taula 2* resulta: $M_n = 2{,}9825^n \cdot 8$

També, però, aquest model presenta problemes. En particular, vam estudiar el comportament (*Gràfica 2*) segons si:

- $\alpha > 1$
- $\alpha = 1$
- $\alpha < 1$

Com es pot apreciar, per $\alpha > 1$, la població tendeix a infinit; per $\alpha = 1$, s'estanca i per $\alpha < 1$, la població s'extingeix ràpidament.

Per tant, cal desenvolupar un altre model que corregeixi aquests errors.



Gràfica 2

El següent pas va ser la introducció del model logístic. Aquest té la forma

$M_{n+1} = M_n(a\text{-}bM_n)$ on: M_{n+1} representa la mida de la població l'any n+1
M_n representa la mida de la població a l'any n
a i b són els coeficients de la recta que millor s'ajusta als valors de la raó promig vs M_n

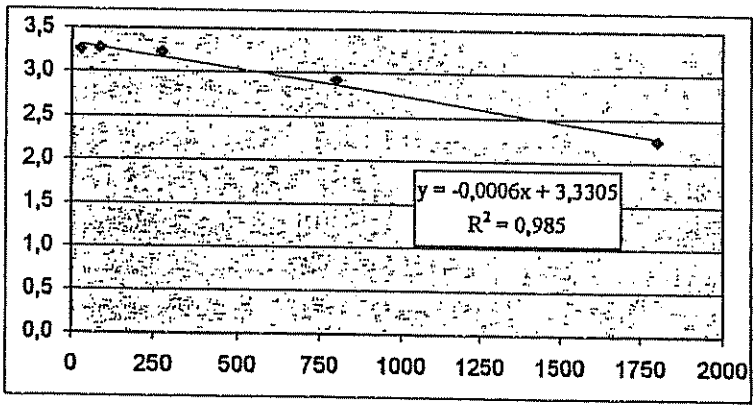
$a - b \cdot M_n$

M_{n+1}/M_n

Així doncs, a partir de les dades de la *Taula 2*, i calculant els coeficients a i b gràcies a la *Gràfica 3* inferior, vam desenvolupar el model logístic corresponent.

Model logístic:

$$M_{n+1} = (3{,}33 - 6\cdot 10^{-4}M_n)M_n$$

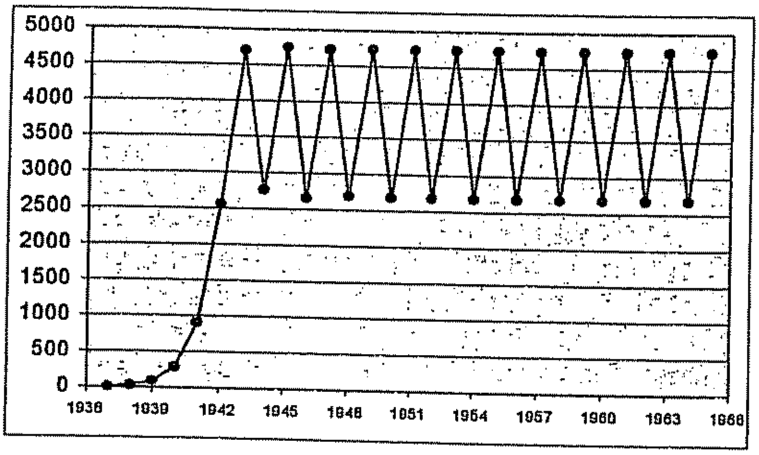


Gràfica 3

A.104

El següent pas va ser comprovar, ja no el seu ajust més o menys correcte, sinó si amb períodes llargs de temps, es comportava racionalment. El resultats d'aquesta comprovació es mostren en la *Gràfica 4*.

Com es pot veure, el comportament de la població que descriu el model logístic és completament fals, i fins i tot ridícul, a llarg termini.



Gràfica 4

Com a conclusió, podem afirmar que cap dels models trobats (polinòmic, exponencial, maltusià o logístic) és capaç de descriure amb una mínima cura la dinàmica de poblacions del cas estudiat.

A. 105

	TAXA DE VARIACIÓ ABSOLUTA $u_{n+1} - u_n$	TAXA DE VARIACIÓ RELATIVA $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$
37	—	—	—
38	18	2'25	3'25
39	59	2'27	3'27
40	189	2'22	3'22
41	526	1'92	2'92
42	1000	1'25	2'25

Agafem com a vàlides les 2 últimes dades i fem la mitja x saber quina serà la nostra taxa de variació relativa

$$\frac{1'92+1'25}{2} = 1'59$$

Suposem aquesta TVR com a cte i l'apliquem a la fórmula general.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = 1'59;\quad u_{n+1} - u_n = 1'59\, u_n \rightarrow \boxed{u_{n+1} = 2'59\, u_n}$$

Com q la TVR és cte :

$$u_{n+1} = 2'59\, u_n$$

$$u_n = 2'59\, u_{n-1} \rightarrow u_{n+1} = 2'59 \cdot 2'59 \cdot u_{n-1} = 2'59^2\, u_{n-1}$$

$$u_{n-1} = 2'59\, u_{n-2} \rightarrow u_{n+1} = 2'59^3\, u_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$u_2 = 2'59\, u_1 \rightarrow u_{n+1} = 2'59^n\, u_1$$

$$2'59\, u_0 \rightarrow \boxed{u_{n+1} = 2'59^{n+1} \cdot u_0}$$

Aquest model suposa, una taxa de reproducció, un creixement cte
En el nostre cas hem suposat q. la població d'ànecs creix en un 2'59 vegades la població q. hi havia l'any anterior.
En realitat el creixement no és cte, sinó q va disminuint.
Aquest model suposa recursos infinits

A continuació comparem les nostres prediccions amb la realitat.
$u_{n+1} = 2'601 \cdot u_n$

anys	població real	predicció
u_0 37	8	
u_1 38	26	21
u_2 39	85	54
u_3 40	274	140
u_4 41	800	363
u_5 42	1800	940

Com q hem agafat els 2 últims valors x treure la TVR model, i aquests 2 últims valors eren els q la tenien + petita (la TVR), veiem q les prediccions estan x sota de la realitat, però si continuem es veurà com la predicció es dispara

$u_{n+1} = 2'54^2 u_{n-1}$

44	1833	6.306
46	1888	42.301
48	1962	283.759
50	2034	∞
52	2061	

Efectivament la predicció es dispara.

* El q ve ara suposo q no està bé

~~Agafant com a valides les 2 últimes dades, traiem q del penúltim a l'últim any hi ha hagut una disminució de 0'67. (dades de la 1ª part). Aquest 0'67 l'agafem cte~~

~~$u_4 = 2'92\, u_3$~~

~~$u_5 = 2'25\, u_4$~~

Aquest model, a més de suposar recursos infinits, no compta amb la mortalitat de la població. Si vam treure q el creixement de la població era una funció exponencial, suposo q la mortalitat tmb ho serà. Però aquest cop, en comptes d'anar augmentant, ha d'anar disminuint, ja q si cada cop el creixement relatiu és menor, la mortalitat tmb ho ha de ser. Per tant, si abans hem posat un exponent a la e + gran q 1 (xq vagi creixent), x per la mortalitat li hem de posar un exponent menor q 0* xq vagi decreixent.
Però en això no m'hi fico xq no ho hem tractat.

$* \; e^x < 1; \; e^x - 1 < 0; \; e^x - 1 = 0; \; x = \ln 1 = 0$

Ara fem q el creixer no sigui cte, sinó q disminueixi linealment com ja hem tret abans:

$\frac{u_1 - u_0}{u_0} = a; \; u_1 - u_0 = a u_0 \rightarrow u_1 = (a+1) u_0$

$\frac{u_2 - u_1}{u_1} = a; \; u_2 - u_1 = a u_1 \rightarrow u_2 = (a+1) u_1 = (a+1)^2 u_0$

$\vdots$

$a+1$ li diem α, x tant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \rightarrow$ ha de decréixer

suposem un decreixement lineal

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha - b u_n \rightarrow \boxed{u_{n+1} = (\alpha - b u_n) u_n}$

Com q tinc 2 incògnites, amb 2 equacions no puc resoldre.
A partir de 1942 va de 2 en 2, x tant:

$u_{n+1} = (\alpha - b u_n) \cdot u_n \qquad u_n = (\alpha - b u_{n-1}) u_{n-1}$

$u_{n+1} = \alpha u_n - b u_n^2 = \alpha [(\alpha - b u_{n-1}) \cdot u_{n-1}] - b [(\alpha - b u_{n-1}) \cdot u_{n-1}]^2 =$

$= \alpha [\alpha u_{n-1} - b u_{n-1}^2] - b [\alpha u_{n-1} - b u_{n-1}]^2 =$

$= \alpha [\alpha u_{n-1} - b u_{n-1}^2] - b [\alpha^2 u_{n-1}^2 + b^2 u_{n-1}^2 - 2\alpha u_{n-1} b \cdot u_{n-1}] =$

$= \alpha^2 u_{n-1} - \alpha b u_{n-1}^2 - [b \alpha^2 u_{n-1}^2 + b^3 u_{n-1}^2 - 2 b^2 \alpha u_{n-1}^2] =$

$= \alpha^2 u_{n-1} - \alpha b u_{n-1}^2 - b \alpha^2 u_{n-1}^2 - b^3 u_{n-1}^2 + 2 b^2 \alpha u_{n-1}^2$

Però això és molt feina, així q agafo els intervals cada 2 anys, començant en 1942:

$u_0 = 1800 \quad u_1 = 1833 \quad u_2 = 1888 \quad u_3 = 1962 \quad u_4 = 2034 \quad u_5 = 2061$

trauré les α i b corresponents i faré la mitja

2

$$\boxed{u_{n+1} = (\alpha - b u_n) \cdot u_n}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = (\alpha - b u_0) u_0 \\ u_2 = (\alpha - b u_1) u_1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1833 = (\alpha - b \cdot 1800)\, 1800 \\ 1888 = (\alpha - b\, 1833)\, 1833 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1833 = 1800\alpha - 1800^2 b \\ 1888 = 1833\alpha - 1833^2 b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \alpha = \dfrac{1833 + 1800^2 b}{1800} \\ \to \alpha = \dfrac{1888 + 1833^2 b}{1833} \end{array}$$

$$\frac{1833 + 1800^2 b}{1800} = \frac{1888 + 1833^2 b}{1833}$$

$$1833\,(1833 + 1800^2 b) = 1800\,(1888 + 1833^2 b)$$
$$1833^2 + 1833 \cdot 1800^2 b = 1800 \cdot 1888 + 1800 \cdot 1833^2 b$$
$$1800 \cdot 1833^2 b - 1833 \cdot 1800^2 b = 1833^2 - 1800 \cdot 1888$$
$$b\,(1800 \cdot 1833^2 - 1833 \cdot 1800^2) = 1833^2 - 1800 \cdot 1888$$

$b = -3'537 \cdot 10^{-4}$ Com q surt negatiu l'he equivocat en l'ordre

$$1833 \cdot 1800^2 b - 1800 \cdot 1833^2 b = 1800 \cdot 1888 - 1833^2$$
$$b\,(1833 \cdot 1800^2 - 1800 \cdot 1833^2) = 1800 \cdot 1888 - 1833^2$$

$b = -3'537 \cdot 10^{-4}$ Doncs dóna el mateix: lògic

$\alpha = 0'382$

Tornaré a fer el sistema amb les dades següents xq no entenc aquest resultat havia de ser positiu

$$\left.\begin{array}{l} u_3 = (\alpha - b u_2) u_2 \\ u_4 = (\alpha - b u_3) u_3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1962 = (\alpha - b\, 1888)\, 1888 \\ 2034 = (\alpha - b\, 1962)\, 1962 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1962 = 1888\alpha - 1888^2 b \\ 2034 = 1962\alpha - 1962^2 b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \alpha = \dfrac{1962 + 1888^2 b}{1888} \\ \to \alpha = \dfrac{2034 + 1962^2 b}{1962} \end{array}$$

$$\frac{1962 + 1888^2 b}{1888} = \frac{2034 + 1962^2 b}{1962}$$

$$1962\,(1962 + 1888^2 b) = 1888\,(2034 + 1962^2 b)$$
$$1962^2 + 1962 \cdot 1888^2 b = 1888 \cdot 2034 + 1888 \cdot 1962^2 b$$
$$1888 \cdot 1962^2 b - 1962 \cdot 1888^2 b = 1962^2 - 1888 \cdot 2034$$
$$b\,(1888 \cdot 1962^2 - 1962 \cdot 1888^2) = 1962^2 - 1888 \cdot 2034$$

$\boxed{b = 3'375 \cdot 10^{-5}}$ Això sí q és lògic

$\boxed{\alpha = 1'103}$

$$\left.\begin{aligned} u_4 &= (\alpha - b u_3) u_3 \\ u_5 &= (\alpha - b u_4) u_4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2034 &= (\alpha - b\, 1962)\, 1962 \\ 2061 &= (\alpha - b\, 2034)\, 2034 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2034 &= 1962\alpha - 1962^2 b \\ 2061 &= 2034\alpha - 2034^2 b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \alpha = \frac{2034 + 1962^2 b}{1962} \\ &\to \alpha = \frac{2061 + 2034^2 b}{2034} \end{aligned}$$

$$\frac{2034 + 1962^2 b}{1962} = \frac{2061 + 2034^2 b}{2034}$$

$$2034(2034 + 1962^2 b) = 1962(2061 + 2034^2 b)$$

$$2034^2 + 2034 \cdot 1962^2 b = 1962 \cdot 2061 + 1962 \cdot 2034^2 b$$

$$2034^2 b \cdot 1962 - 2034 \cdot 1962^2 b = 2034^2 - 1962 \cdot 2061$$

$$b(2034^2 1962 - 2034 \cdot 1962^2) = 2034^2 - 1962 \cdot 2061$$

$$\boxed{b = 3'253 \cdot 10^{-4}}$$
$$\boxed{\alpha = 1'675}$$

Ara faig el sistema amb el u_2 i el u_3 q no l'he salcat.

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= (\alpha - b u_1) u_1 \\ u_3 &= (\alpha - b u_2) u_2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 1888 &= (\alpha - b\, 1833)\, 1833 \\ 1962 &= (\alpha - b\, 1888)\, 1888 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1888 &= 1833\alpha - 1833^2 b \\ 1962 &= 1888\alpha - 1888^2 b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \alpha = \frac{1888 + 1833^2 b}{1833} \\ &\to \alpha = \frac{1962 + 1888^2 b}{1888} \end{aligned}$$

$$\frac{1888 + 1833^2 b}{1833} = \frac{1962 + 1888^2 b}{1888}$$

$$1888(1888 + 1833^2 b) = 1833(1962 + 1888^2 b)$$

$$1888^2 + 1888 \cdot 1833^2 b = 1833 \cdot 1962 + 1833 \cdot 1888^2 b$$

$$1833 \cdot 1888^2 b - 1888 \cdot 1833^2 b = 1888^2 - 1833 \cdot 1962$$

$$b(1833 \cdot 1888^2 - 1888 \cdot 1833^2) = 1888^2 - 1833 \cdot 1962$$

$b = -1'671 \cdot 10^{-4}$ Torna a sortir negativa. En un ppi havia pensat de descartar-les, però les faré servir x a fer la mitja a veure q tal.

$\alpha = 0'724$

$$\bar{\alpha} = \frac{0'332 + 1'103 + 1'675 + 0'724}{4} = 0'971$$

$$\bar{b} = \frac{-3'537 \cdot 10^{-4} + 3'375 \cdot 10^{-5} + 3'253 \cdot 10^{-4} - 1'671 \cdot 10^{-4}}{4} = -4'044 \cdot 10^{-5}$$

Com dóna negatiu, descarto les 2 primeres solucions, les dels sense u_1, u_2 i u_2, u_3, q són els q hem donen negatiu i faig la mitja amb les 2 últimes

$$\bar{b} = \frac{3'375\cdot10^{-5} + 3'253\cdot10^{-4}}{2} = \boxed{1'795\cdot10^{-4}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1'103 + 1'675}{2} = \boxed{1'389}$$

Crec q no és una bona manera de fer prediccions anar escollint les dades q ens convenen, però no ho sé, és q la b m'havia de sortir positiva xq sortís un decreixement.

Anem a comprovar si la nova predicció s'acosta millor a la realitat.

$M_{n+1} = (\alpha + b M_n) M_n$; $M_{n+1} = (1'389 - 1'795\cdot10^{-4} M_n) M_n$

Any	Realitat	Predicció
42	1800	—
44	1833	1.919
46	1838	2.004
48	1962	2063
50	2034	2102
52	2061	2127

Com es pot observar la predicció s'acosta més a la realitat q amb els altres models de creixement cte.

x continuar predint hem de tenir en compte q els anys són parells

x poder treure la fórmula general a partir de la població inicial s'hauria de continuar treballant amb el carro tant llarg q he fet anteriorment, però seria impossible fer-ho a mà.

Segons aquest model, hi haurà una mida de la població a partir de la qual aquesta es mantindrà cte, és a dir, q no hi haurà creixement ni decreixement de la població. Això serà quan $M_{n+1} = M_n$

En aquest cas: $1'389 - 1'795\cdot10^{-4} M_n = 1$

$$M_n = \frac{1 - 1'389}{-1'795\cdot10^{-4}} = \boxed{2.167}$$

ho ens quedava igual x arribar al màxim de població

U2

Taller de Modelització matemàtica

1. Qüestions o problemes tractats

Partint de les suposicions següents:

- r(Pn) és una funció decreixent
- r(Pn) ha de ser >0

Tractem de resoldre certes qüestions

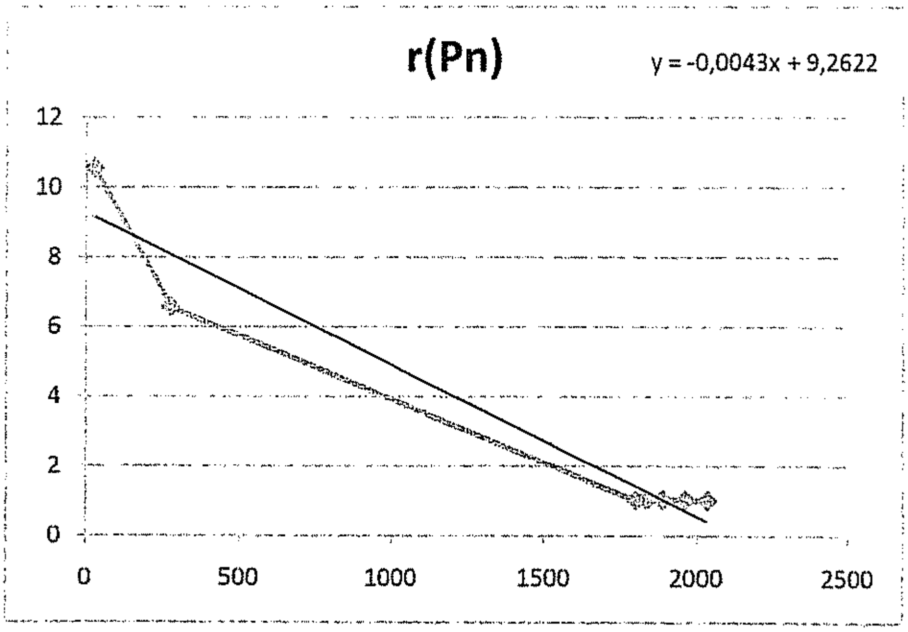
QA:

Hem calculat les dades predites amb el model lineal del coeficient "r". Primer hem fet la regressió lineal de les dades experimentals adjustant "r" a una recta. Utilitzant només les dades cada 2 anys. r=pn+2/pn

Prenent com a equació de "r": r(Pn)=b-a·Pn

Dades Experimentals

Pn	r
26	10,5384615
274	6,56934307
1800	1,01833333
1833	1,03000546
1888	1,03919492
1962	1,03669725
2034	1,01327434
2061	0



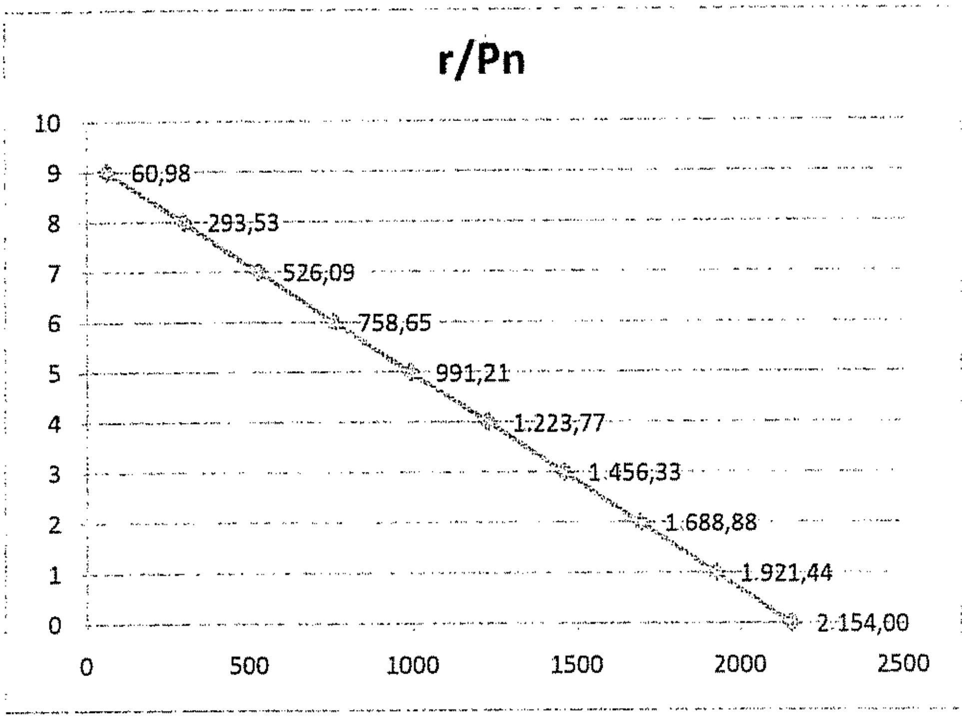
La corba blava són les dades experimentals. La recta negra és l'aproximació lineal de "r" en funció de Pn. Un cop obtinguda l'equació de la recta, calcular una determinada població Pn en funció de r. Aïllant Pn de l'equació anterior:

Pn(r)=r-9,2622 / -0,0043

Hector Farras
Antonio Matarín
Ricard Sánchez

A partir de la meitat dels valors de "r" presos, arbitràriament de 9 fins a 0 (ja que la nostra restricció és que la raó "r" no pot ser menor que zero) els valors de la població Pn són semblants als que tenim experimentalment. No s'adjusten igual perquè la funció amb valors experimentals no és lineal exactament, sembla decréixer de forma corba.

r teor	Pn calc.
9	60,9767442
8	293,534884
7	526,093023
6	758,651163
5	991,209302
4	1223,76744
3	1456,32558
2	1688,88372
1	1921,44186
0	2154



$Q_{8,c}$

Les diferències són, que la Població calculada per la nostra funció aproximada de Pn(r) és una recta i per tant la població creix igualment a mesura que r es fa més petita.

El valor de Pn podria ser acceptat en la part central de la recta, ja que per els extrems no s'ajusta a la gràfica experimental. Per tant Pn(r) és quasi una recta en un interval. Entre poblacio (500 – 1500) aprox. Podem considerar-la una recta.

El comportament lineal de Pn(r) és irreal ja que a r=0 segons el que sabem, la població serà zero, per l'equacio. El model es contradiu.

$Pn=(r)^n \cdot P_0$

Hector Farras
Antonio Matawin
Ricard Sánchez

2. Propostes de possibles qüestions

Havent vist que el model es contradiu, sorgeix la proposta de que r(Pn) potser no és una recta, es probable que tendeixi asimptòticament a un valor ct. per a poblacions grans.

Les prediccions que es facin amb aquest model no serán certes ja que Pn(r) és una funció que creix i per tant no es cert dir que per "r" més petit que 1 la població creixi, segons l'equació anterior.

Es necessita saber més sobre els paràmetres que afecten a Pn en funció del temps. Necessitem saber una formula associada a la variació de Pn respecte el temps. Ja que la taxa de variació absoluta de Pn hem vist que no pot ser constant perquè ens porta a un resultat contradictori.

En l'útima sessió, vem arribar a observar dos problemes:

*Amb les dades que tenim de la població de faissans trobem la millor aproximació "**α**" i "C" per a que les prediccions del segon model sigui el millor possible

Segon model→ $P_{n+1}=(\alpha-(\alpha-1/C)\cdot P_n)\cdot P_n$

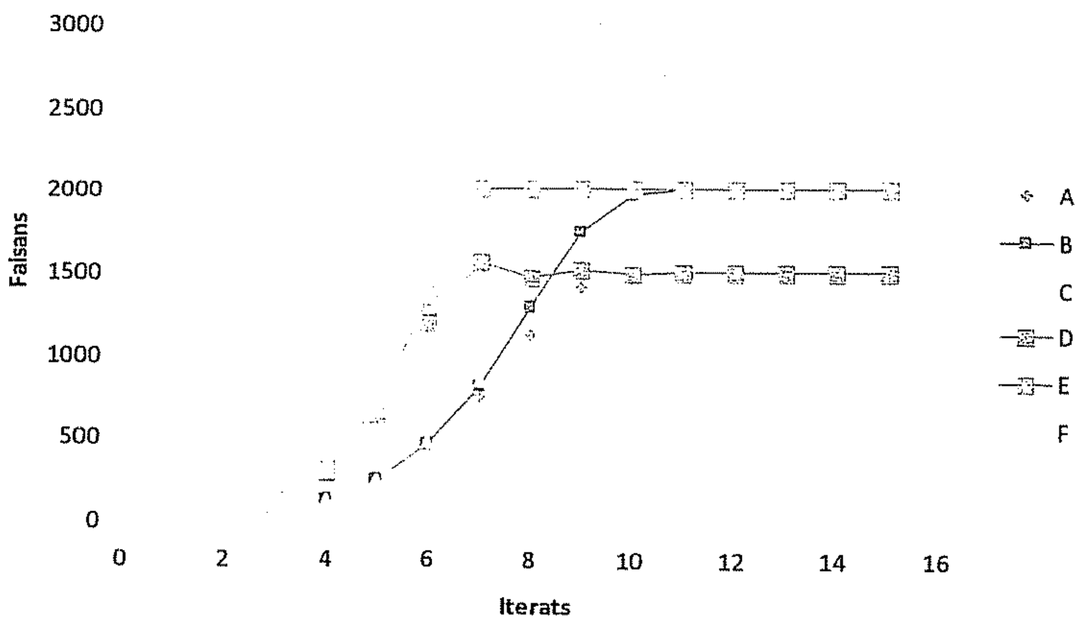
*Ajustem mitjançant el Solver diferents valors **α i C per tal de treure conclusions.**

VALORS EXPERIMENTALS

Iterats	Valors reals
0	8
1	26
2	85
3	274
4	800
5	1800
6	
7	1833
8	
9	1888
10	
11	1962
12	
13	2034
14	
15	2061

[illegible]						
Iterats	A	B	C	D	E	F
0	8	8	8	8	8	8
1	16	16	16	20	20	20
2	32	32	32	49	50	50
3	63	63	63	121	122	123
4	123	124	125	288	294	298
5	236	241	244	637	670	691
6	435	453	464	1187	1339	1441
7	743	803	841	1559	2003	2357
8	1118	1283	1399	1467	1999	2559
9	1403	1743	2016	1515	2001	2468
10	1494	1967	2406	1492	2000	2515
11	1500	1999	2496	1504	2000	2492
12	1500	2000	2500	1498	2000	2504
13	1500	2000	2500	1501	2000	2498
14	1500	2000	2500	1500	2000	2501
15	1500	2000	2500	1500	2000	2500
α	2	2	2	2,5	2,5	2,5
C	1500	2000	2500	1500	2000	2500

Creixement amb diferents α i C



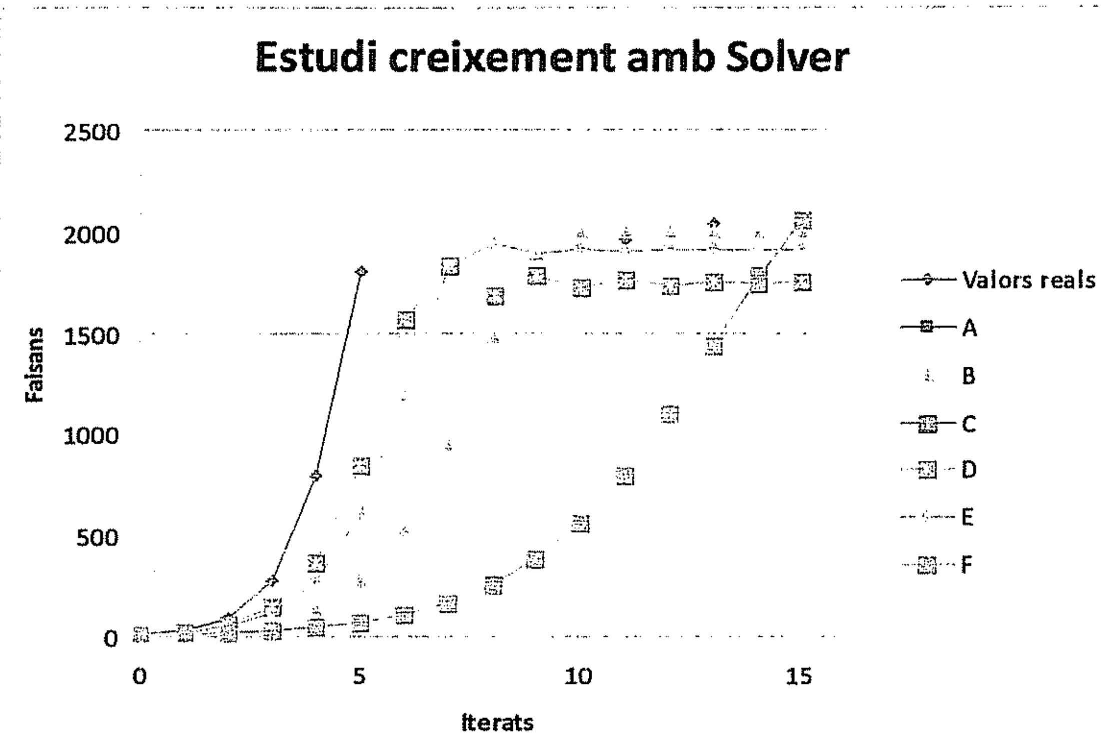
Observem que inicialment els valors de cada prova (A, B, C, D, E, F) són similars per a α iguals, però a mesura que augmenta el nombre d'iterats podem observar que els valors que s'apropen són els de igual valor de C, ja que tendeixen a aquest valor.

CALCUL D'EUROS

Iterats	A	B	C	D	E	F
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	4,81	9,53	13,59	4,81	6,53	13,59
2	29,12	51,18	65,76	29,14	37,80	65,76
3	128,50	204,86	244,19	128,58	160,53	244,19
4	433,54	659,95	753,90	433,78	532,91	753,89
5	953,80	1521,57	1728,86	954,42	1202,28	1728,86
6	1568,81	533,07	109,38	1567,90	1188,43	109,38
7	0,00	884,51	1665,76	0,00	0,00	1665,75
8	1682,25	1478,31	253,58	1682,00	1935,30	253,59
9	103,51	0,00	1508,36	103,65	5,86	1508,34
10	1719,86	2000,33	557,78	1719,70	1912,55	557,80
11	198,97	37,97	1164,48	199,15	57,56	1164,45
12	1735,07	1999,99	1097,99	1734,93	1908,02	1098,03
13	280,42	34,01	595,34	280,60	127,55	595,30
14	1741,50	1999,99	1776,57	1741,35	1907,15	1776,59
15	311,54	61,01	0,00	311,72	154,16	0,00
Promig	680,73	717,27	720,97	680,73	696,04	720,97

VALORS AMB SOLVER

Iterats	A	B	C	D	E	F
0	8	8	8	8	8	8
1	21	16	12	21	19	12
2	56	34	19	56	47	19
3	145	69	30	145	113	30
4	366	140	46	366	267	46
5	846	278	71	846	598	71
6	1569	533	109	1568	1188	109
7	1833	948	167	1833	1833	167
8	1682	1478	254	1682	1935	254
9	1784	1888	380	1784	1894	380
10	1720	2000	558	1720	1913	558
11	1763	2000	798	1763	1904	798
12	1735	2000	1098	1735	1908	1098
13	1754	2000	1439	1753	1906	1439
14	1741	2000	1777	1741	1907	1777
15	1749	2000	2061	1749	1907	2061
α	2,65675667	2,062463	1,55324062	2,65629649	2,4394758	1,55324957
C	1746,31495	1999,99321	2500,05938	1746,15218	1906,9344	2499,97316



En aquests gràfic podem observar que inicialment no n'hi ha cap opció que s'aproximi a la real, però a mesura que augmenta el nombre d'iterats, l'opció que més s'aproxima és B

De manera que observant la taula de dades dels valors amb el solver, el valor de C no hi ha percepció de canvi en variar α de manera que creiem que té més pes el valor C. En els valors A i D és son s'oserva millor.

Taula A

α=2	2,65675667
C=1500	1746,31495

Taula D

α=2.5	2,65629649
C=1500	1746,15218

La població calculada que més s'aproxima més a la experimental i que s'observa bé en el gràfic es la B i en les dades calculades.

Comparant amb la E com hem fet anteriorment:

Taula B

α=2	2,062463
C=2000	1999,99321

Taula E

α=2.5	2,4394758
C=2000	1906,9344

Fixant-nos en la taula del Solver en iterats per tal de comparar amb les dades experimentals, el que té dades més semblants és B, E és distància a la llarga dels valors experimentals.

Iterats	Valors reals	B	E
0	8	8	8
1	26	16	19
2	85	34	47
3	274	69	113
4	800	140	267
5	1800	278	598
6		533	1188
7	1833	948	1833
8		1478	1935
9	1888	1888	1894
10		2000	1913
11	1962	2000	1904
12		2000	1908
13	2034	2000	1906
14		2000	1907
15	2061	2000	1907

A. 119

U2

Estudi del creixement de poblacions

Models discrets i simulació numèrica

Tot seguit presentem una sèrie de proves purament numèriques, relacionades amb el creixement o decreixement de diferents poblacions d'éssers vius. Per a realitzar els càlculs, partim del mètode logístic estudiat anteriorment, el qual pren la fórmula següent:

$$M_{n+1} = M_n\,(\alpha - b \cdot M_n)$$

Amb les dades següents, ja podem resoldre els casos següents:

K	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
α	0,5	1,2	1,8	2	2,5	3,1	3,4	3,7	4
b	0,0002	0,0004	0,0007	0,0007	0,0009	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015

n	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
0	8	8	8	8	8	8	8	8	8
1	4	10	14	16	20	25	27	30	32
2	2	11	26	32	49	76	91	108	126
3	1	14	46	63	122	229	301	383	481
4	0	16	81	123	291	653	913	1212	1576
5	0	20	141	235	650	1555	2104	2428	2579
6	0	23	240	431	1245	2161	1841	731	341
7	0	28	392	732	1718	1563	2193	1956	1189
8	0	33	598	1089	1639	2158	1686	1881	2635
9	0	39	826	1348	1680	1567	2321	2006	123
10	0	46	1009	1424	1660	2157	1426	1788	471
11	0	55	1104	1429	1670	1569	2408	2139	1552
12	0	64	1134	1429	1665	2156	1229	1508	2595
13	0	76	1141	1429	1668	1571	2366	2396	278
14	0	89	1142	1429	1666	2155	1327	829	996
15	0	103	1143	1429	1667	1571	2399	2105	2496
...									
70		500							
A la llarga	S'extingeix	S'estanca en 500	S'estanca en 1143	S'estanca en 1429	S'estanca en 1667	Oscil·la en 2155 i 1573	Oscil·la en 2388 i 1281	Oscil·la en 3 valors	Oscil·la en 3 valors

A 120

A continuació, prendrem els mateixos valors d'α i k, però com a M_n inicial prendrem el valor 20 (anteriorment era 8), per observar si, el fet de variar el número inicial, pot fer variar la tendència a la llarga de la població

k	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
α	0,5	1,2	1,8	2	2,5	3,1	3,4	3,7	4
b	0,0002	0,0004	0,0007	0,0007	0,0009	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015

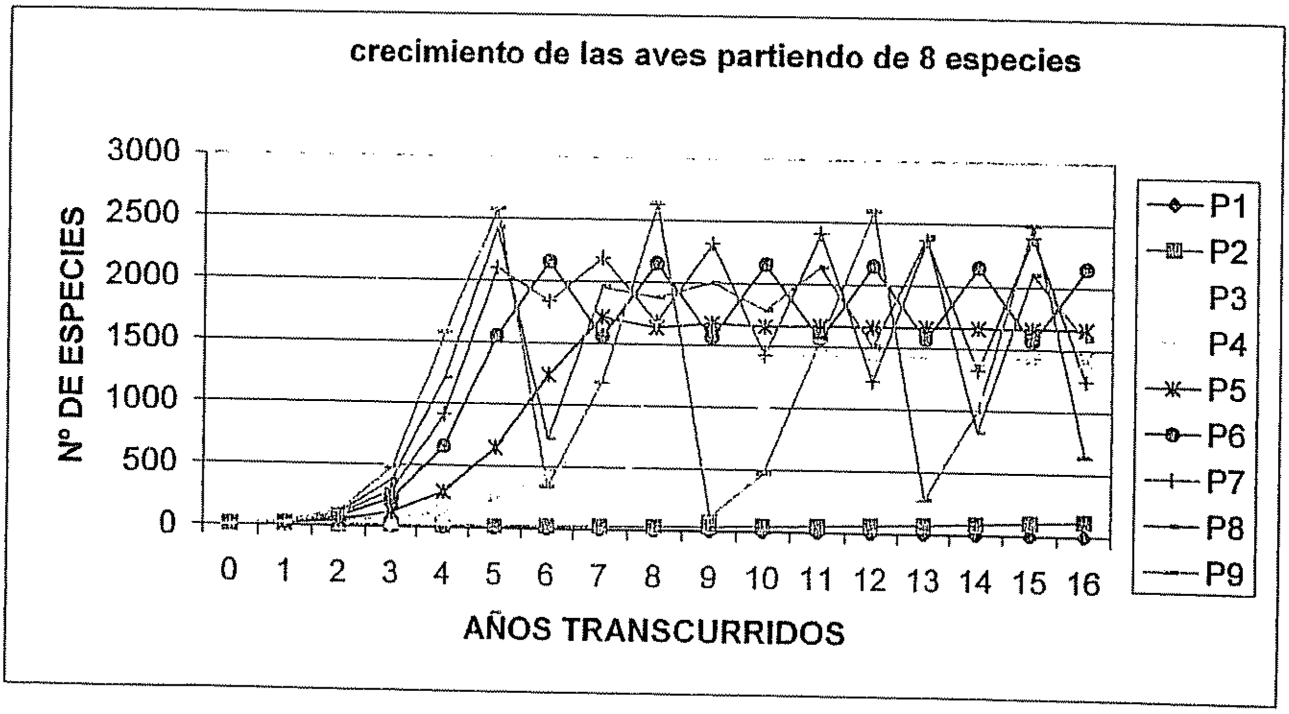
n	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20
1	10	24	36	40	50	62	68	73	79
2	5	28	63	78	122	187	224	264	308
3	2	34	111	152	291	540	702	880	1090
4	1	40	192	288	652	1354	1795	2172	2578
5	1	47	319	519	1247	2181	2237	1433	343
6	0	56	503	849	1718	1529	1601	2427	1196
7	0	66	729	1194	1639	2168	2367	733	2638
8	0	77	940	1390	1680	1550	1324	1959	113
9	0	90	1073	1428	1660	2162	2398	1875	431
10	0	105	1126	1429	1670	1560	1253	2016	1446
11	0	122	1139	1429	1665	2159	2376	1770	2648
12	0	140	1142	1429	1668	1566	1304	2163	75
13	0	160	1143	1429	1666	2157	2393	1452	293
14	0	182	1143	1429	1667	1569	1264	2421	1043
15	0	205	1143	1429	1667	2156	2381	753	2541
16	0	230	1143	1429	1667	1570	1294	1992	481
...									
70		500							
A la llarga	S'extingeix	S'estanca en 500	S'estanca en 1143	S'estanca en 1429	S'estanca en 1667	Oscil·la en 2166 i 1673	Oscil·la en 2386 i 1281	Oscil·la en 3 valors	Oscil·la en 3 valors

Efectivament, observem que els valors no varien massa, i que la tendència de totes les poblacions calculades en les taula de dades anterior no pateix cap variació respecte la taula de dades inicial, on el valor inicial d'M_n era 8.

Informe 28

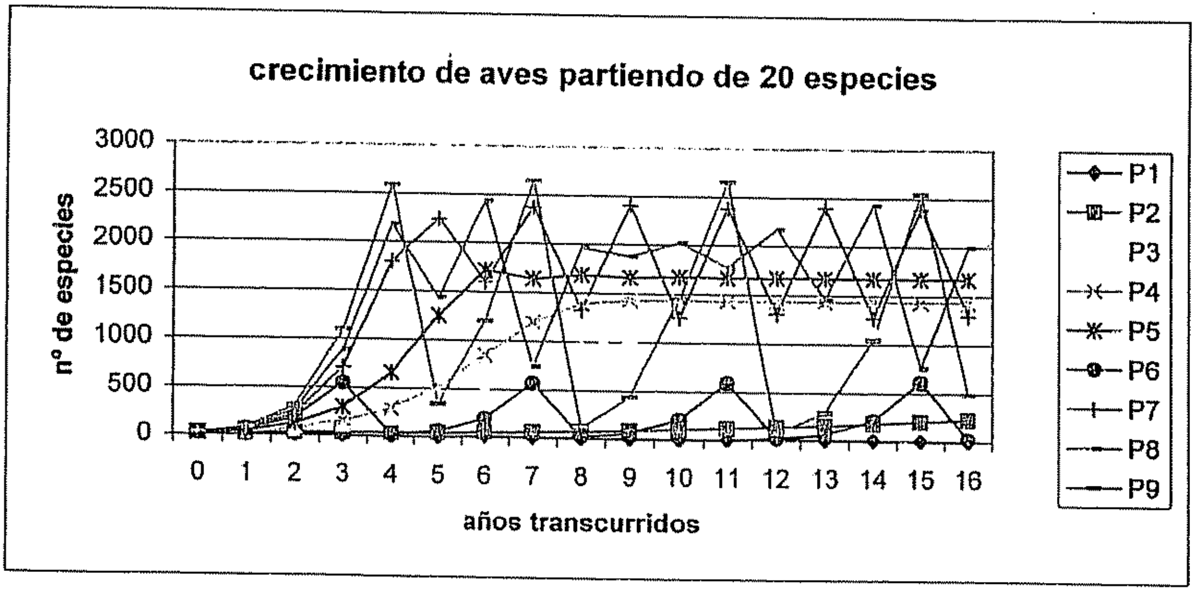
K	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
ALFA	0,5	1,2	1,8	2	2,5	3,1	3,4	3,7	4	1	3
B	0,0002	0,0004	0,0007	0,0007	0,0009	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0003	0,001

N	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
0	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
1	4	10	14	16	20	25	27	30	32	8	24
2	2	11	26	32	49	76	91	108	126	8	71
3	1	14	46	63	122	229	301	383	481	8	209
4	0	16	81	123	291	653	913	1212	1576	8	582
5	0	20	141	235	650	1555	2104	2428	2579	8	1408
6	0	23	240	431	1245	2161	1841	731	341	8	2242
7	0	28	392	732	1718	1563	2193	1956	1189	8	1700
8	0	33	598	1089	1639	2158	1686	1881	2635	8	2210
9	0	39	826	1348	1680	1567	2321	2006	123	8	1746
10	0	46	1009	1424	1660	2157	1426	1788	471	8	2189
11	0	55	1104	1429	1670	1569	2408	2139	1552	8	1775
12	0	64	1134	1429	1665	2156	1229	1508	2595	8	2175
13	0	76	1141	1429	1668	1571	2366	2396	278	8	1795
14	0	89	1142	1429	1666	2155	1327	829	996	8	2163
15	0	103	1143	1429	1667	1571	2399	2105	2496	8	1810
16	0	119	1143	1429	1667	2155	1251	1586	639	8	2154



K	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
ALFA	0,5	1,2	1,8	2	2,5	3,1	3,4	3,7	4
B	0,0002	0,0004	0,0007	0,0007	0,0009	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015

N	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
0	20	20	20	20	20	20	20	20	20
1	10	24	36	40	50	62	68	73	79
2	5	28	63	78	122	187	224	264	308
3	2	34	111	152	291	540	702	880	1090
4	1	40	192	288	652	21	1795	2172	2578
5	1	47	319	519	1247	65	2237	1433	343
6	21	56	503	849	1718	196	1601	2427	1196
7	10	66	729	1194	1639	565	2367	733	2638
8	5	77	940	1390	1680	22	1324	1959	113
9	3	90	1073	1428	1660	68	2398	1875	431
10	1	105	1126	1429	1670	205	1253	2016	1446
11	1	122	1139	1429	1665	589	2376	1770	2648
12	22	140	1142	1429	1668	23	1304	2163	75
13	11	160	1143	1429	1666	71	2393	1452	293
14	5	182	1143	1429	1667	214	1264	2421	1043
15	3	205	1143	1429	1667	612	2381	753	2541
16	1	230	1143	1429	1667	24	1294	1992	481



-Observando los graficos deducimos que alfa el es valor mas determinante en la evolución de la pobláció.las conclusiones son las siguientes:

-Si 0< alfa <1 la población tiende a extinguirse.

-Si alfa = 1 la poblacion se mantiene en el numero inicial de especies

-Si 1< alfa < 3 la población crece hasta llegar a un valor fijo

-Si 3=< alfa < 3,5 la población crece hasta llegar a un punto en el q oscila entre 2 valores es decir se comporta como una orbita periódica.

-Si alfa > 3,5 el comportamiento es caótico.

-El número inicial de especies no influye en la evolucion del crecimiento ya q como hemos dicho antes el factor determinante es la alfa.

SIMULACIÓN GRÁFICA DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES: MÉTODO DE LA TELARAÑA

Buscamos algún modelo matemático que nos de una estimación del comportamiento del crecimiento de las poblaciones a lo largo de los años.
Inicialmente deducimos un modelo de Malthus, que sigue el comportamiento dado por la ecuación $M(n+1)=\alpha\cdot Mn$.
El valor de crecimiento viene dado por el coeficiente de reproducción α.

Si $0<\alpha<1$ la población se extinguiría, por ello se descarta este intervalo para α
Si $\alpha=1$, la población sería constante
Si $\alpha>1$, la población crecería infinitamente

En este modelo se presentan algunas incoherencias dependiendo del valor de α
Malthus no es del todo fiel al comportamiento real de la población. Si bien el valor de α más válido para describir el crecimiento es $\alpha>1$, ello implica la existencia de recursos infinitos, ya que el valor de $M(n+1)$ crece ilimitadamente.

Se entiende que la población no puede crecer infinitamente porque no habría espacio suficiente para todos, ni alimento. Por equilibrio natural debe llegar un punto en que el crecimiento de la población se estanca por falta de recursos y se mantiene constante en tamaño, y es en ese momento, cuando la población adquiere una cantidad de individuos (aproximadamente) estable, o tamaño de estabilidad de la población L.

Para explicar este 'freno' del crecimiento, se busca otro modelo que consigan ajustarse mejor al crecimiento de la población.
Se deduce el modelo logístico de Verlburst, que responde a la siguiente ecuación:
$M(n+1) = \alpha\cdot M(n)\cdot(1-M(n)/K)$, siendo K la capacidad del hábitat.

Para este modelo se observa que
Si $0\leq\alpha<1$ la población se extinguiría, por ello se descarta este intervalo para α
Si $1\leq\alpha<3$, la población crecería, hasta llegar a un valor constante L.
Si $3<\alpha<4$, el crecimiento responde a un comportamiento repetitivo de período 2, para

3.1<α<3.4, o de período 4 para α=3.7.

Si α≥4 el tamaño M(n+1) adquiere un comportamiento aleatorio inexplicable.

Numéricamente no sabríamos prever el comportamiento aleatorio, y para intentar comprenderlo mejor, se recurre a técnicas gráficas que representen algún tipo de bucle o sistema gráfico que explique la trayectoria de los resultados.

El método de la telaraña es un método muy útil para dar seguimiento a las órbitas de mapas unidimensionales (rectas) es la gráfica de la telaraña. Para crearlo se grafica la función f(x) = M(n+1) que representa al mapa junto con la línea y=x.

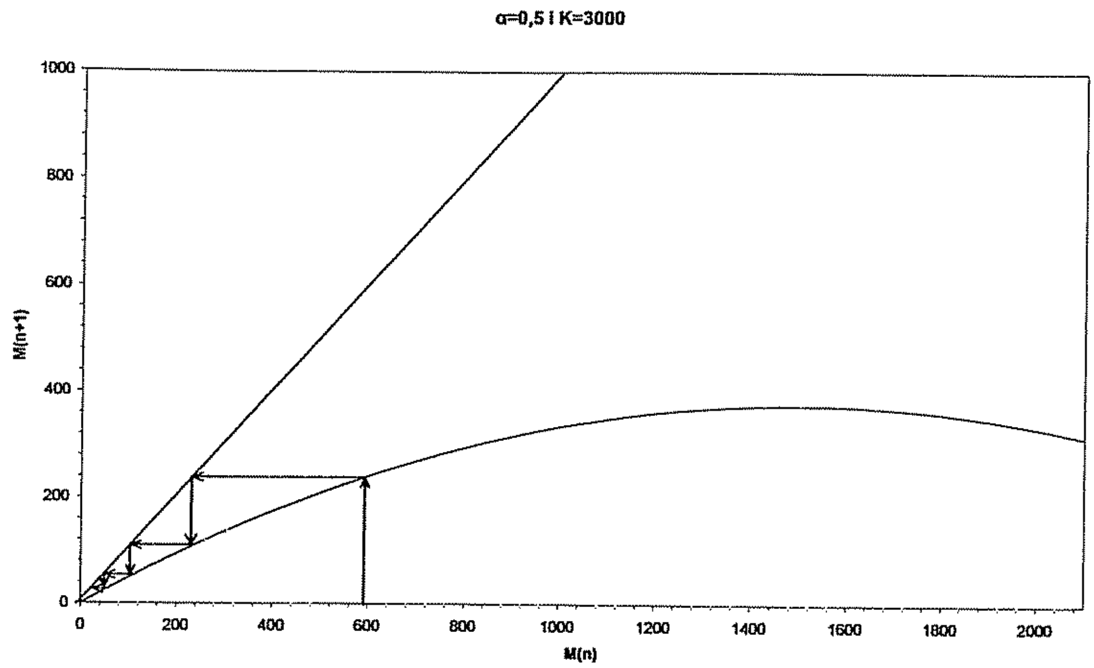
Esta gráfica nos es útil para seguir las órbitas, de este modo: Un valor inicial x, al ser iterado nos da f(x), que se puede leer en la gráfica de f(x) Normalmente querremos visualizar una órbita con múltiples iteraciones, no con una sola. Nos gustaría saber qué sigue al seguir iterando. Tenemos ahora un valor de f(x). Podríamos leerlo como en el caso anterior, comenzando desde el eje x. Pero no es necesario, gracias a y=x, que actúa como un espejo.

1. Se grafican M(n+1) e y=x.
2. Se traza una línea vertical desde el punto inicial en el eje x, hasta la curva M(n+1) (dondequiera que esté esta curva, arriba o abajo del eje x).
3. De punto de cruce en la curva M(n+1) se traza una línea horizontal hasta y = x (dondequiera que esté, ya sea a la derecha o a la izquierda de M(n+1).
4. Se traza una vertical desde el punto donde se tocó a y = x hasta donde esté M(n+1).
5. Se repiten los pasos 3 y cuatro cuantas veces sea necesario.

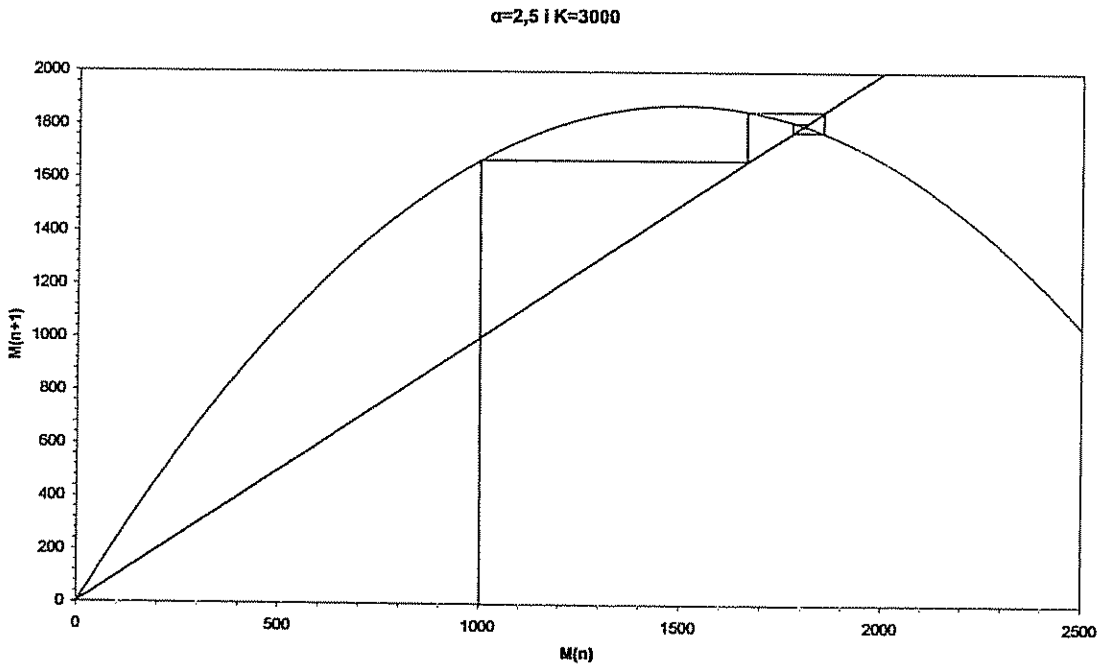
Un detalle importante que podemos observar es que para la familia de mapas f(x) = ax, rectas, como el modelo de Malthus, sucede que la convergencia de M(n+1) depende del valor que adquiera α.

Cuando α < 1, al iterar desde un punto inicial positivo, observamos que las órbitas tienden hacia el cero que es la extinción de la población.

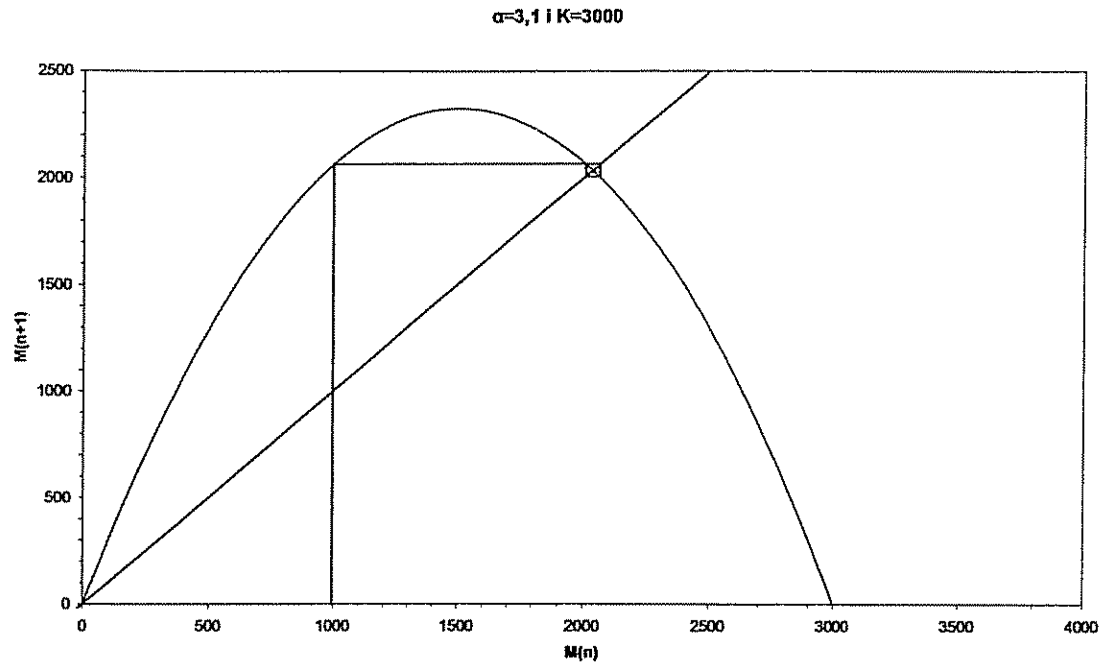
Algo similar ocurre con el modelo logístico de Verlburst:



Si 0≤α<1 la población se extinguiría, por ello se descarta este intervalo para α

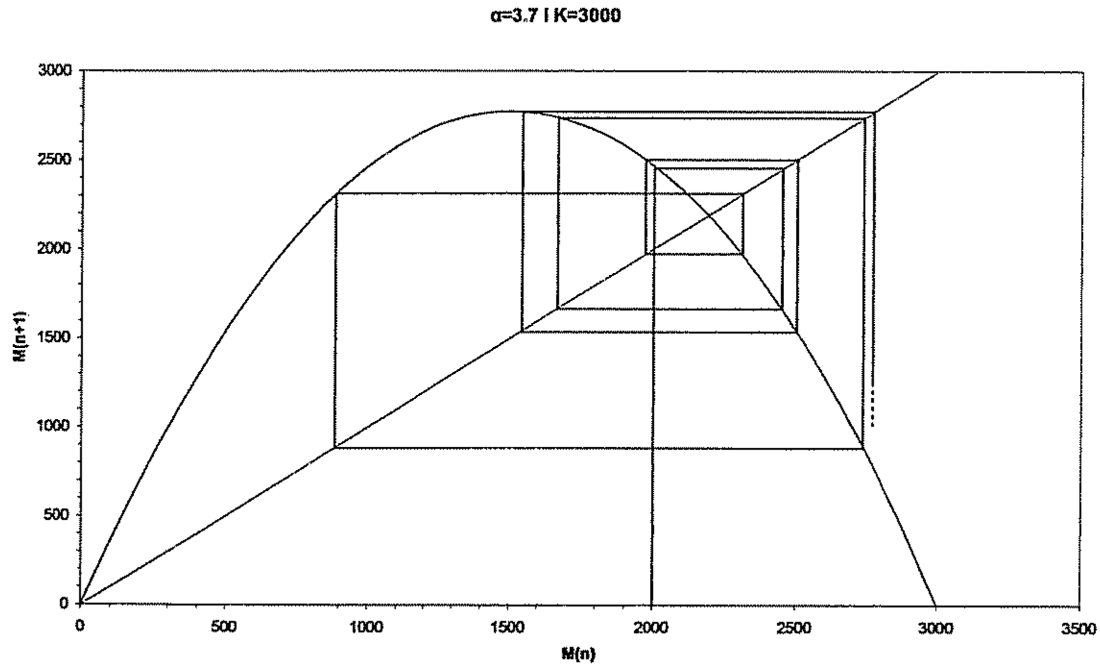


Si 1≤α<3, la población crecería, hasta llegar a un valor constante L. para α=2.3, L se acerca a 1800.



Si 3<α<4, el crecimiento responde a un comportamiento repetitivo.

Este comportamiento es de período 2, para 3.1<α<3.4,



Conforme nos alejamos de α=3, M(n+1) empieza a comportarse de manera aleatoria o impredecible. Entonces deducimos que la convergencia de M(n) depende del valor de α, y vemos que las condiciones que aseguran que M(n) esté bien definida, o tenga convergencia, que es lo mismo que acercarse a un valor estable L, depende de que 1<α≤3. Gracias al método de la telaraña podemos ver de forma gráfica el comportamiento del modelo logístico de Verlburst, y entender su trayectoria en cada iteración.

BIBLIOGRAFIA Y REFERÉNCIAS

- Dossier 1, 2, 3 y 4 del Estudio del crecimiento de poblaciones.
- http://www.geocities.com/exploracaos/v01n02/exploracaos.htm

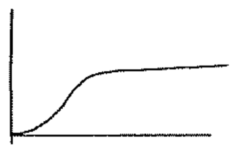
Hem arribat a l'ultim dossier d'aquest estudi on finalment hem tret uns càlculs aproximats I gràcies a ells podrem trobar el nombre d'anecs que continuaria la taula que ens van proposar al començament.

Fins ara hem tret equacions com: $M_{n+1} = f(M_n)$ on s'ens representa la relació funcional ja sigui lineal o quadràtica que hi ha entre dues generacions consecutives de la població considerada.
Amb aquesta consideració podem realitzar una simulació gràfica amb les corbes $y = f(x)$ i $y = x$ mitjançant el métode de la teranyina que consistia en lo següent:

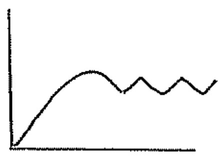
<u>Mètode de la Teranyina</u>

$M(n+1) = \alpha \left(1 - \frac{1}{K} Mn \right) \cdot M(n)$ Així estudiem el comportament de la successió generada en la relació als corresponents puntos fixos.

- Si $0 < \alpha < 0$ → S'extingueix independentment de la mida de Mn

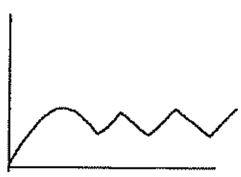


- Si $1 < \alpha < 3$ → L = Estabilitat. Situacio d'equilibri



→ $3 <= \alpha <= 3{,}7$ Es repetia cada dos anys.
Órbita periòdica de periode 2.

- Si $\alpha <= 3$



→ $3 <= \alpha <= 3{,}4$ Es repetia cada quatre anys.

→ 3 <= α <= 3,9 No detectem cap periode. Comportament aleatori
Es l'anomenat Caos o comportament caótic.

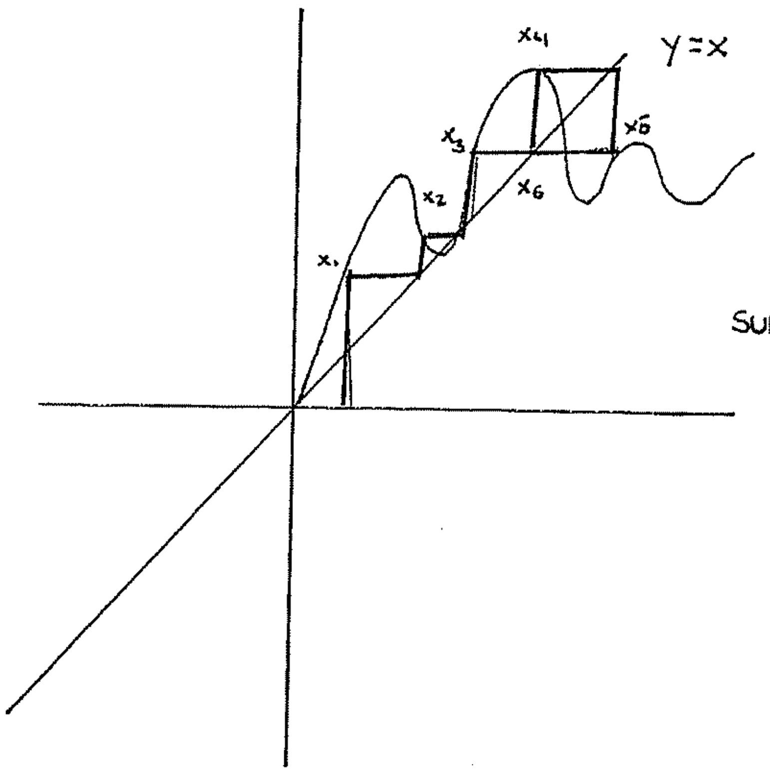
A continuació farem per pasos el mètode de les gràfiques per poder representar els valors obtinguts i treure noves conclusions:

Mètode de les Gràfiques:

$M_{(n+1)} = f(M_{(n)})$

1. Dibuixem en els mateixos eixos y = x i y = f(x)
2. Escollim un punt Xo
3. Calculem els iterats Xn (X1,X2,X3...)

Ho explicaré millor gràficament:



SURT UN QUADRAT

Per ultim abans de resoldre les darreres questions farem una petita representacio de l'aplicacio del model Malthusià ja que més endavant tant aquest com el de gràfiques son els que farem servir per treure conclusions de les gràfiques proposades:

Model Malthusià

$M_{(n+1)} = \alpha(M_{(n)})$

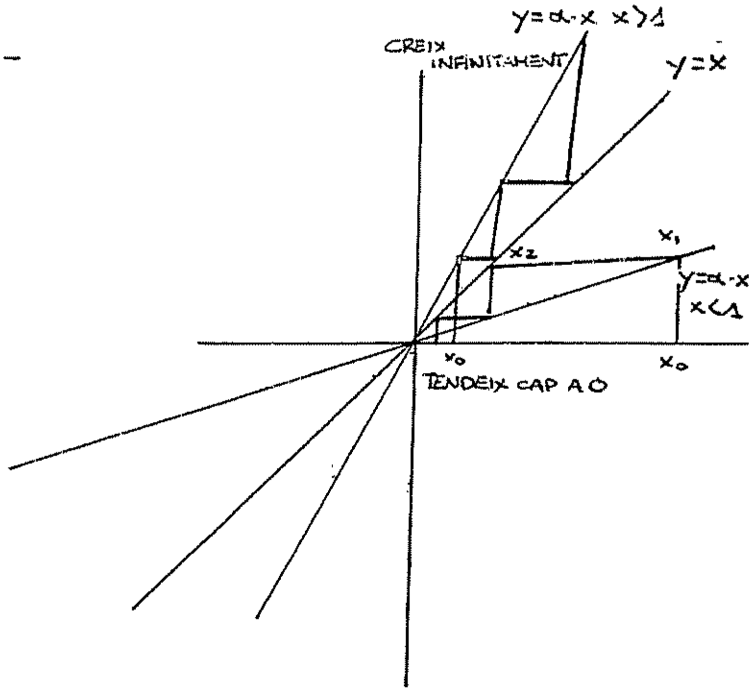
$y = x$

$f(x) = \alpha x$ on α és el pendent de la recta.

$M_{(n+1)} = \alpha\left(1 - \frac{1}{K} Mn\right) \cdot M_{(n)}$

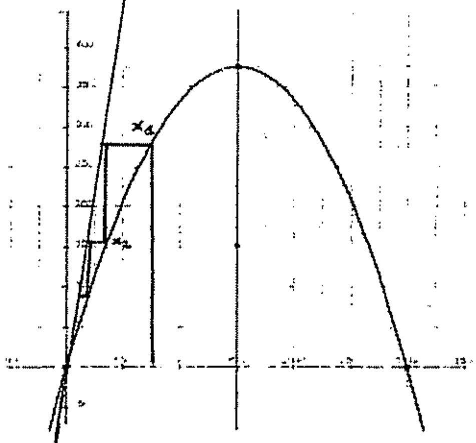
$y = x$

$y = \alpha\left(1 - \frac{1}{K} x\right) \cdot x = \alpha \cdot x - \frac{\alpha}{K} \cdot x^2$ Parábola



Apliquem ara les tècniques mencionades anteriorment per certs valors de K y α i Així aprofitarem per redactar noves conclusions.

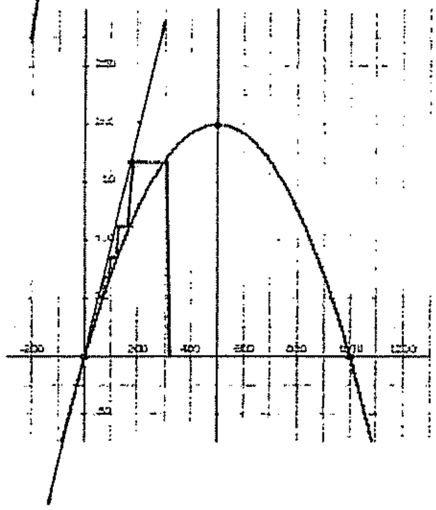
$\alpha = 0,5$ **i** K**=3000**



H(n) TENDEIX A O
EXTINCIÓ

X	Y
0	0
500	500

$\alpha = 0,8$ **i** K**=1000**

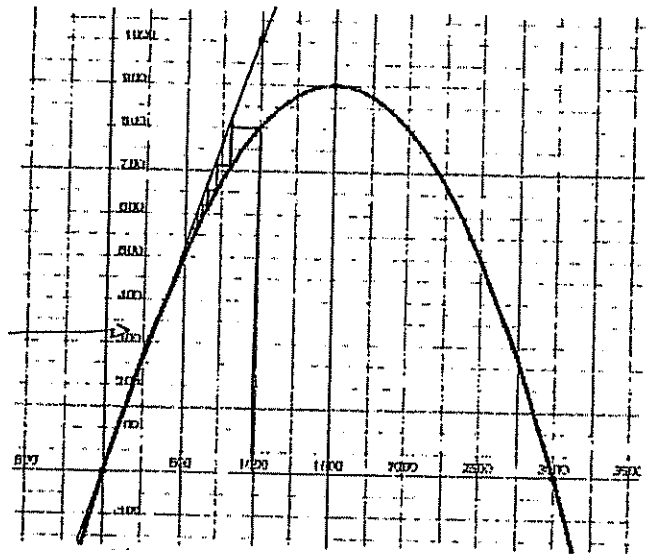


X	Y
0	0
200	200

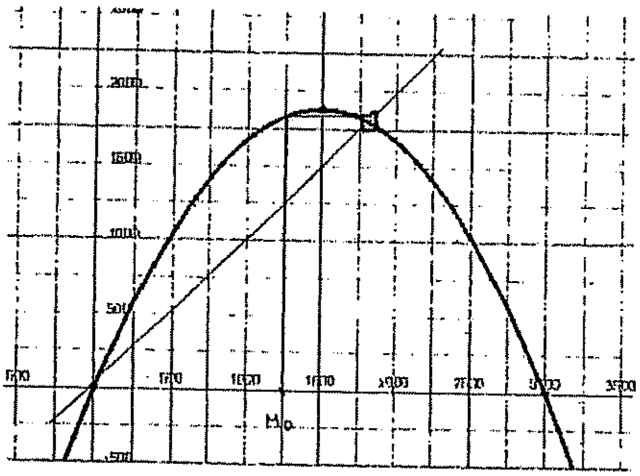
H(n) TENDEIX A O
EXTINCIÓ

Com podem observar en els dos primers casos tendeix a zero i la recta s'ens va per sobre de la paràbola. Per tant no ens serveixen.

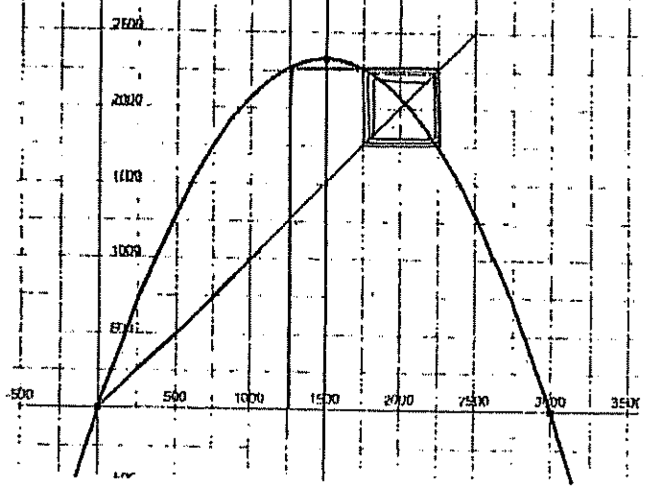
$\alpha = 1{,}2$ i $K = 3000$



$\alpha = 2{,}5$ i $K = 3000$



$\alpha = 3{,}1$ i $K = 3000$



OBSERVACIONS

$$x\alpha - \frac{\alpha x^2}{k} - x = 0$$

$$x \cdot 1'2 - \frac{1'2\,x^2}{3000} - x = 0$$

$$-0'0004x^2 + 0'2x = 0 \rightarrow -0'0004x =$$

$x = 0$, $x = 500$ } Punts fixos

De 0 a 500 creix la població. Si posem + de 500 ànecs, decr la població fins a 500. En 500 l població queda estancada pq és 1 punt fix.

$M_n \rightarrow 0$

$$x \cdot 2'5 - \frac{2'5\,x^2}{3000} - x = 0$$

$$-8'3\,10^{-4}x^2 + 1'5x = 0 \rightarrow -8'3\,10^{-4}x + 1$$

$\boxed{x = 0 \;;\; x = 1807'2}$

Punts fixos.

La població, en aquest cas creixerà fins a poc més de 1800 i allà mateix quedarà estancada.

Òrbita periòdica

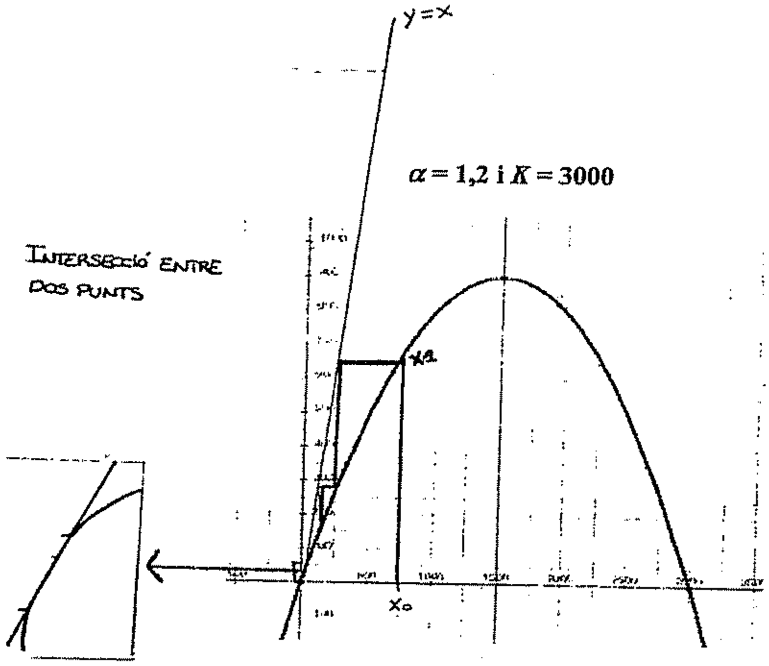
$$3'1 \cdot x - \frac{3'1\,x^2}{3000} - x = 0$$

$$2'1x - 1'03 \cdot 10^{-3}x^2 = 0$$

$\boxed{x = 0}$; $\boxed{x = 2038'8}$

La població, en aquest cas, creix fins a 2500 aprox., però llavors comença a fer oscil·lacions cada cop més petites, fins un punt fix, 2038'8 on s'estan

$\alpha = 1,2$ i $K = 3000$

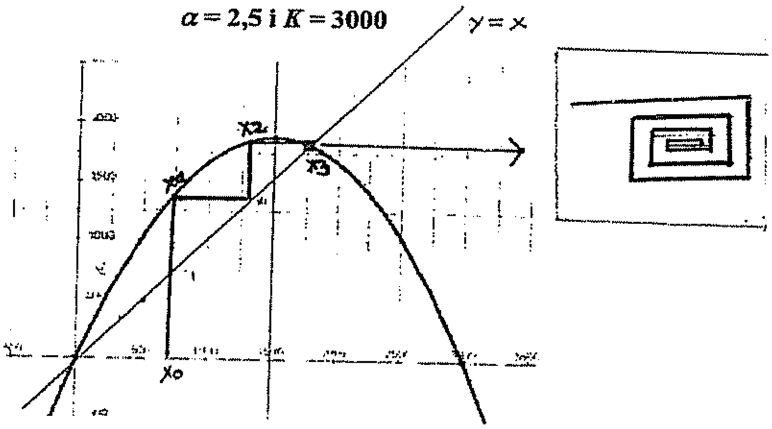


OBSERVACIONS

M(n) TENDEIX A 0
EXTINCIÓ

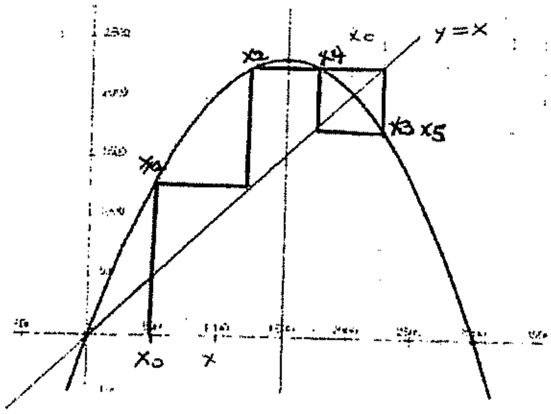
X	Y
0	0
1500	1500

$\alpha = 2,5$ i $K = 3000$



X	Y
0	0
2000	2000

$\alpha = 3,1$ i $K = 3000$



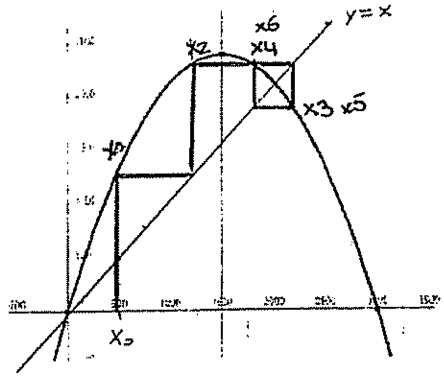
ES FORMA UN QUADRAT ORDRE 2

X	Y
0	0
500	500

En els cas 3 tendim a la siuació d'equilibri. En el 4 es forma una mena de cargol cada cop més petit i finalment en el cas 5 es forma un quadrat d'ordre 2.

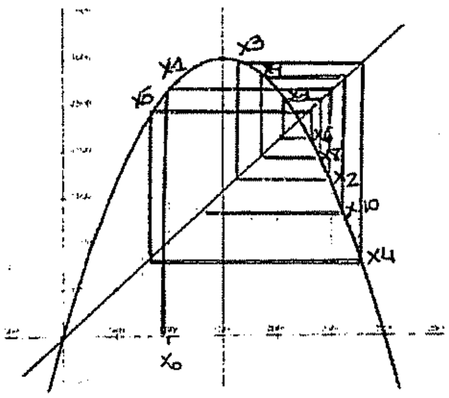
$\alpha = 3{,}2$ i $K = 3000$

OBSERVACIONS



X	Y
0	0
500	500

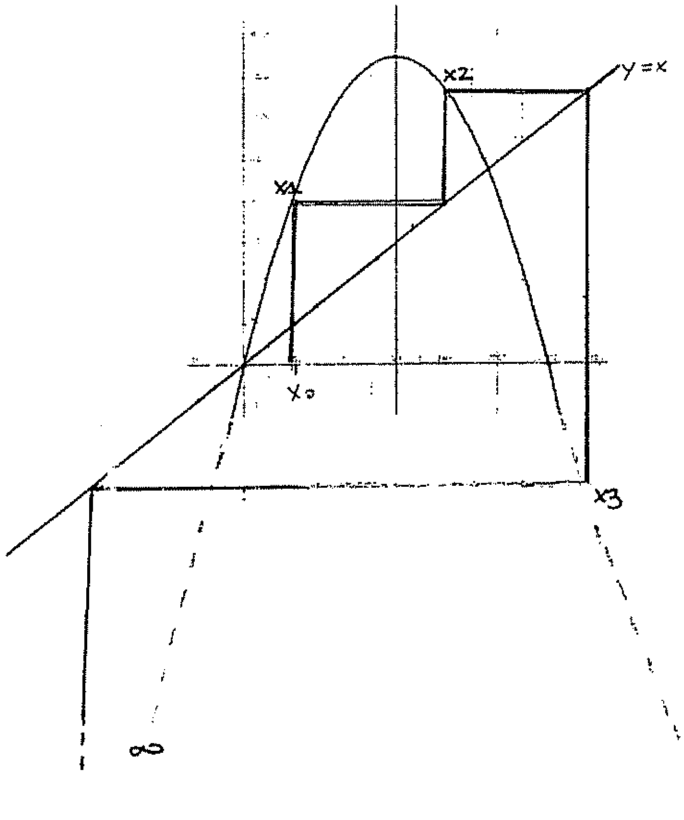
$\alpha = 4$ i $K = 3000$



X_5-X_6 ES COMENÇA A REPETIR LA FIGURA PERO EN DIFERENTS MIDES

X	Y
0	0
500	500

$\alpha = 5$ i $K = 3000$



X	Y
0	0
500	500

NO HI HAURA X5 PERQUE ARRIBA UN COP ON NO ES POT CREUAR AMB LA CORVA

No existeix.

Un altre cop es forma un quadrat d'ordre 2 en el cas 6. El cas 7 forma una estructura rara com en forma de "teranyina" o una mena de cargol pero sense seguir cap ordre.
Per ultim el cas 7 no te cap sentit perque arriba un punt on no es pot creuar amb la corba.

Quan estudiem els casos per a K = 3000 veiem que la convergencia de (Mn) depen de α que es la que varia i suposem que tambe depen d'ella la convergencia i la definició de les corbes.

Questions Finals:
Es poden eliminar alguns casos que no tinguin sentit? Si, quan $\alpha = 5$.
Compareu els diferents casos proposats a prop dels punts fixos.
Punts d'intersecció recta paràbola. Punt fix.
Caràcteristiques principals: Vèrtex
Punt de tall 0,K
Sempre mira cap avall…
Com podem assegurar la convergencia cap al punt fix localment?

Al final d'aquest taller hem descobert molts mètodes per intentar arribar a una conclusió exacta. Setmana tras setmana hem estat posant dades en comú i pensaments propis de cada grup per treure la fórmula, métode o equació correcte que ens portes a la solcució buscada.
Amb l'ajuda de tots i cadascun dels grups hem arribat fins a lo explicat en aquest ultim dossier veient que el creixement d'una població depen no tan sols d'unes dades principals sino també d'uns certs paràmetres que, depenen del valors que preguin podrà ocòrrer una cosa o un altre i així hem estat adaptant els nostres resultats a les dades del primer dossier ja que teniem les bases de que la pablació creixia progressivament i no s'extiguia.
Esperem que a tothom li hagui quedat prou clar els procediments seguits i que estiguin satifets amb els resultats obtinguts.

2.2. Informes del segundo REI: Unidades 4 y 5

U4 y U5

CULTIU DE PLANTES I DESCENDÈNCIA GENOTÍPICA

MODELITZACIÓ: MATRIUS DE TRANSICIÓ

La matriu A té el següent significat: sempre creuem les flors roses, però depenent amb quin tipus les creuem — vermella, rosa o blanca (significat de les *columnes*) — tenim una determinada probabilitat, expressada en tant per 1, que les flors resultants siguin d'un o altre color (significat de les *files*).

$$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.25 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}$$

	Vermelles	Roses	Blanques
Vermelles	0.5	0.25	0
Roses	0.5	0.5	0.5
Blanques	0	0.25	0.5

Per estudiar l'evolució de la població inicial, cal calcular A^n, així que la diagonalitzem. Obtenim els valors propis $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0{,}5$; $\lambda_3 = 1$ i els vectors propis associats $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Així, obtenim les matrius D, P i P^{-1}.

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & -0.25 & 0.25\\ 0.5 & 0 & -0.5\\ 0.25 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$$

Llavors, cal fixar-se en el següent:

$$(1)\ D^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (2)\ P\cdot D^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (3)\ D^n\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0.25 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$$

D^n (per $n \to \infty$) (1) elimina la informació de totes les columnes excepte la de l'1 ($1^{\infty} = 1$). Això, al seu torn, provoca que el producte de $P\cdot D^n$ (2) sigui una matriu amb totes les columnes nul·les excepte aquella que correspon al valor propi 1 i que, a més, és precisament el vector propi associat a ell. Finalment, $D^n \cdot P^{-1}$ (per $n \to \infty$) (3) elimina la informació de totes les files excepte la corresponent a l'1.

Aquests dos fets són els que fan evolucionar la matriu A^n cap a els valors $A^n = \begin{pmatrix}0.25 & 0.25 & 0.25\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.25 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$. És a dir, les columnes de A^n tenen una relació entre els seus elements $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ amb valors que venen donats per $(0.25\ \ 0.25\ \ 0.25)$.

Definim la matriu A

$$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0.25 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0.5 & 0.25 & 0.\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0. & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}$$

Si calculem la seva diagonal, obtenim

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0. & 0. & 0.\\ 0. & 0.5 & 0.\\ 0. & 0. & 1.\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

El comportament a llarg termini és $A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$

$$A^{100} \Rightarrow \begin{pmatrix}0.25 & 0.25 & 0.25\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.25 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$$

El vector població a llarg termini resulta de la següent forma

$p_n=\begin{pmatrix}0.25\\ 0.5\\ 0.25\end{pmatrix}\cdot(a+b+c)$ de manera que sempre obtindrem la mateixa distribució a llarg termini, sigui quina sigui la població inicial.

Cal notar que :

$$P\cdot D^{1500} \Rightarrow \begin{pmatrix}0. & 0. & 1.\\ 0. & 0. & 2.\\ 0. & 0. & 1.\end{pmatrix}$$

$$D^{1500}\cdot P^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}0. & 0. & 0.\\ 0. & 0. & 0.\\ 0.25 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$$

La primera operació elimina la informació de les columnes 1 i 2, deixant només el vector propi associat a 1 i la segona elimina la informació de les files 1 i 2.

Experimentació de diferents potències de la matriu A :

$$A=\begin{pmatrix}0.5&0.25&0\\0.5&0.5&0.5\\0&0.25&0.5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.5&0.25&0.\\0.5&0.5&0.5\\0.&0.25&0.5\end{pmatrix}$$

$$A^2\rightarrow\begin{pmatrix}0.375&0.25&0.125\\0.5&0.5&0.5\\0.125&0.25&0.375\end{pmatrix}$$

$$A^3\rightarrow\begin{pmatrix}0.3125&0.25&0.1875\\0.5&0.5&0.5\\0.1875&0.25&0.3125\end{pmatrix}$$

$$A^4\rightarrow\begin{pmatrix}0.28125&0.25&0.21875\\0.5&0.5&0.5\\0.21875&0.25&0.28125\end{pmatrix}$$

$$A^5\rightarrow\begin{pmatrix}0.26563&0.25&0.23438\\0.5&0.5&0.5\\0.23438&0.25&0.26563\end{pmatrix}$$

$$A^6\rightarrow\begin{pmatrix}0.25781&0.25&0.24219\\0.5&0.5&0.5\\0.24219&0.25&0.25781\end{pmatrix}$$

$$A^7\rightarrow\begin{pmatrix}0.25391&0.25&0.24609\\0.5&0.5&0.5\\0.24609&0.25&0.25391\end{pmatrix}$$

$$A^8\rightarrow\begin{pmatrix}0.25195&0.25&0.24805\\0.5&0.5&0.5\\0.24805&0.25&0.25195\end{pmatrix}$$

$$A^9\rightarrow\begin{pmatrix}0.25098&0.25&0.24902\\0.5&0.5&0.5\\0.24902&0.25&0.25098\end{pmatrix}$$

$$A^{10}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25049&0.25&0.24951\\0.5&0.5&0.5\\0.24951&0.25&0.25049\end{pmatrix}$$

$$A^{11}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25024&0.25&0.24976\\0.5&0.5&0.5\\0.24976&0.25&0.25024\end{pmatrix}$$

$$A^{12}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25012&0.25&0.24988\\0.5&0.5&0.5\\0.24988&0.25&0.25012\end{pmatrix}$$

$$A^{13}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25006&0.25&0.24994\\0.5&0.5&0.5\\0.24994&0.25&0.25006\end{pmatrix}$$

$$A^{14}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25003&0.25&0.24997\\0.5&0.5&0.5\\0.24997&0.25&0.25003\end{pmatrix}$$

$$A^{15}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25002&0.25&0.24998\\0.5&0.5&0.5\\0.24998&0.25&0.25002\end{pmatrix}$$

$$A^{16}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25001&0.25&0.24999\\0.5&0.5&0.5\\0.24999&0.25&0.25001\end{pmatrix}$$

$$A^{17}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25&0.25&0.25\\0.5&0.5&0.5\\0.25&0.25&0.25\end{pmatrix}$$

$$A^{18}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25&0.25&0.25\\0.5&0.5&0.5\\0.25&0.25&0.25\end{pmatrix}$$

$$A^{19}\rightarrow\begin{pmatrix}0.25&0.25&0.25\\0.5&0.5&0.5\\0.25&0.25&0.25\end{pmatrix}$$

Càlcul de punts fixos. Sabem que els punts fixos verifiquen la següent equació :

$P\cdot v=v$ on $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Per tant, només cal resoldre el sistema d'equacions que resulta de realitzar la operació de $P\cdot v$ i resoldre'l en funció de x

$$\begin{pmatrix}0.5&0.25&0\\0.5&0.5&0.5\\0&0.25&0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0.5\cdot x+0.25\cdot y\\0.5\cdot x+0.5\cdot y+0.5\cdot z\\0.25\cdot y+0.5\cdot z\end{pmatrix}$$

Si resolem el sistema en funció de x, obtenim la següent relació :

$$\text{resol}\begin{bmatrix}0.5\cdot x+0.25\cdot y=x\\0.5\cdot x+0.5\cdot y+0.5\cdot z=y\\0.25\cdot y+0.5\cdot z=z\end{bmatrix}\rightarrow\{\{x=z,y=2\cdot z,z=z\}\}$$

Així, el vector de punts fixos queda :

$$v=\begin{pmatrix}x\\2x\\x\end{pmatrix}$$

Per tant, per la matriu A tractada, sigui quina sigui la població inicial, arribarà a un punt d'equilibri quan la relació entre els diferents tipus de flors sigui $v=\begin{pmatrix}x\\2x\\x\end{pmatrix}$

Es pot controlar una epidèmia ?

Tenim una matriu inicial de transició:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0'9 & 0 & 0'13 \\ 0'09 & 0'82 & 0 \\ 0'01 & 0'18 & 0'87 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Sans} \\ \text{Portadors} \\ \text{Malalts} \end{array} \\ \text{Sans} \quad \text{Portadors} \quad \text{Malalts} \end{array}$$

Tot i això, a l'hora de trobar les arrels del polinomi característic del determinant de la matriu $(A - \lambda Id)$ ens han sortit arrels complexes, pel que hem fet una variant de la matriu A per poder treballar amb números reals:

$$A = \begin{pmatrix} 0'9 & 0'1 & 0'03 \\ 0'09 & 0'72 & 0'1 \\ 0'01 & 0'18 & 0'87 \end{pmatrix}$$

Comencem determinant les arrels del polinomi característic per a trobar els elements de la matriu diagonal (els vaps):

$$\begin{vmatrix} 0'9-\lambda & 0'1 & 0'03 \\ 0'09 & 0'82-\lambda & 0'1 \\ 0'01 & 0'18 & 0'87-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2'59\lambda^2 - 2'33\lambda + 0'64 = 0$$

$$\left[\lambda_1 = 0'62 \ ; \ \lambda_2 = 0'86 \ , \ \lambda_3 = 1 \right]$$

✓

Aquests són els tres vaps, pel que procedim a calcular els veps associats a aquests valors:

$$\lambda_1 \Rightarrow \begin{array}{l} 0'28x + 0'1y + 0'03z = 0 \\ 0'09 + 0'1y + 0'1z = 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} x = 0'402\mu \\ y = -1'4\mu \\ z = \mu \end{array}$$

$\lambda_1 = 0'62$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0'402 \\ -1'4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \begin{array}{l} 0'03x + 0'1y + 0'03z = 0 \\ 0'09x - 0'05y + 0'1z = 0 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} x = -1'11\mu \\ y = 0 \\ z = \mu \end{array}$$

$\lambda_2 = 0'86$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1'11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 \Rightarrow$ fent els càlculs corresponents, obtenim $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1'21 \\ 0'91 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1$

16-3-06

Un cop calculats els vaps i els veps, calculem la matriu P^{-1}

$$P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 0'402 & -1'11 & 1'21 \\ -1'14 & 0 & 0'91 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0'2 & -0'5 & 0'22 \\ -0'5 & 0'17 & 0'45 \\ 0'3 & 0'33 & 0'34 \end{pmatrix}$$

Finalment, trobem l'equació general per a calcular com evolucionarà la epidèmia al llarg del temps:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0'9 & 0'1 & 0'3 \\ 0'09 & 0'72 & 0'1 \\ 0'01 & 0'18 & 0'87 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0'402 & -1'11 & 1'21 \\ -1'14 & 0 & 0'91 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0'62 & 0 & 0 \\ 0 & 0'86 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0'2 & -0'5 & 0'22 \\ -0'5 & 0'17 & 0'45 \\ 0'3 & 0'33 & 0'34 \end{pmatrix}$$

Al llarg del temps, i fet els càlculs corresponents, veiem que l'epidèmia tendirà a extingir-se progressivament, amb una relació ← ? igual a,

$$\begin{pmatrix} 0'4 \\ 0'3 \\ 0'3 \end{pmatrix}(a+b+c) = 0'4a + 0'3b + 0'3c$$

on a, b, c són els valors inicials dels sans, portadors i malalts.

S'acabarà extingin? NO, sempre es mantindrà ... malalts

2.3. Informes del tercer REI: Unidades 6, 7 y 8

U6

DOSSIER 2

Estudi del creixement del llevat en recipients tancats

En aquest cas hem d'analitzar dos exemples de població de dos tipus de llevat.

Per realitzar aquest anàlisi poblacional haurem de buscar una nova fórmula amb la qual serem capaços, de manera aproximada, de predir com evolucionarà la població al llarg del temps.

Per tal de trobar aquest nou mètode farem servir el que ja hem estudiat, però ho aplicarem al "*món discret*":

Fins ara (a la 1a part del taller) hem estudiat el creixement d'una població de faisans durant un temps **n**, on n era un *número natural {1, 2, 3..15...2500...}* →**MÓN DISCRET**.
(Representàvem la població com **P(n)** , funció que depèn de n.)

En aquest cas, se'ns planteja un nou cas en el qual haurem d'estudiar la població on el temps (**t**) vindrà donat com un *número real (podrem calcular la població a qualsevol)* → **MÓN CONTINU.**
(Representarem la població com a **x(t)**.)

Comparem els dos mons i, desprès de realitzar un seguit de càlculs (full 4), arribem a la conclusió que:

	Món discret (1ª Part)	**Món continu** (2ª Part)
Notació: Temps	n	t
Grandària	P(n)	x (t)
Taxa de creixement	Calculada de tres maneres: 1. $\frac{P(n+1)-P(n)}{P(n)}$ 2. $\frac{P(n+1)}{P(n)}$ 3. $P(n+1)-P(n)$	1. $\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{dx/dt}{x(t)}$ 2. $\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = x'(t)$

A. 147

Predicció de poblacions futures	Mètode de Malthus $P(n+1) = r.P(n)$ ó $P(n) = \alpha^n.Po$	Nou métode $x = e^{r.t}.k$

Si comparem els resultats de les prediccions per a tots dos mons:

Món discret (1ª Part)	**Món continu** (2ª Part)
$P(n) = \alpha^n.Po$	$x = e^{r.t}.k$

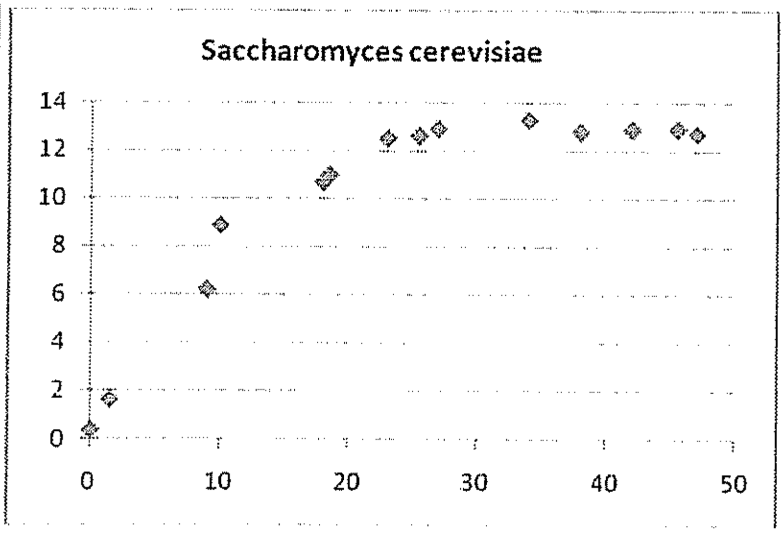
Podrem deduir les equivalències entre els dos mons:

	Món discret (1ª Part)	**Món continu** (2ª Part)
Creixement	α $\ln\alpha$	e^r r
Població inicial	Po	k
Temps	n	t

Aplicant el que ara coneixem podrem procedir a realitzar l'estudi de les dues poblacions donades:

1. Saccharomyces cerevisiae

Hores (t)	Grandària (x)
0	0,37
1,5	1,63
9	6,2
10	8,87
18	10,66
18,5	10,97
23	12,5
25,5	12,6
27	12,9
34	13,27
38	12,77
42	12,87
45,5	12,9
47	12,7

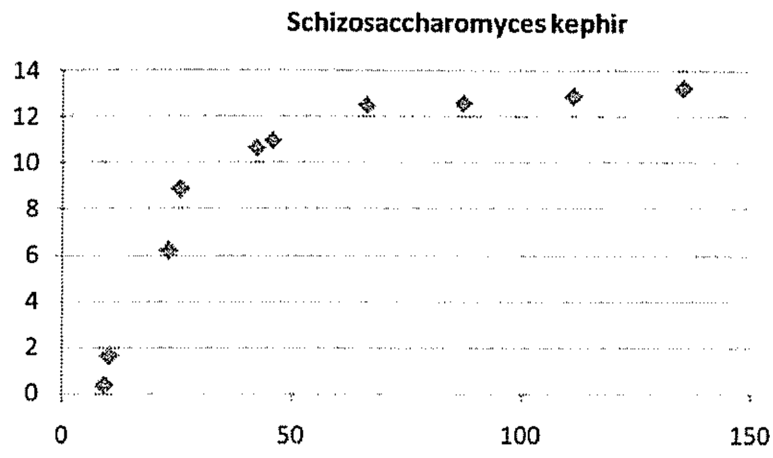


A.148

2. Schizosaccharomyces Kephir

Dades donades:

Hores (t)	Grandària (x)
9	0,37
10	1,63
23	6,2
25,5	8,87
42	10,66
45,5	10,97
66	12,5
87	12,6
111	12,9
135	13,27



Hem intentat calcular r, considerant-la constant, per diversos mètodes(com ara derivant la funció que podem obtenir de les dades anterior) però a l'hora de comprovar no hem trobat cap valor constant que s'ajusti.

Com que no hem trobat cap valor per a r, no podrem calcular les futures poblacions.

Suposem que r serà una variable que encara no sabem calcular.

A-149

Món discret:

$$\frac{P(n+1)-P(n)}{(n+1)-n}$$

Món continu:

$$x'(t)=\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

→ On:

$t=t_0$

$t_f= t+h$

(h= variació entre temps inicial i temps final)

Si treballem sobre la hipòtesi que el creixement de la població es constant (c).

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=r$$

$$\frac{dx/dt}{x}=r$$

Si resolem aquest sistema:

$$\frac{dx}{dt}=r.x$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int r\,dt$$

$$ln|x|=r.(t_f-t_o)+C$$

(considerem t_o=0)

$$ln|x|=r.t+C$$

$$x=e^{r.t}.e^{c}$$

$$e^{c}=constant=K$$

Arribem a la conclusió:

$$x=k.e^{r.t}$$

A.160

Per fer la predicció de l'evolució de poblacions hi ha dos tipus de models: el model discret i el model continu.

MODELS DISCRETS

Utilitzem la següent nomenclatura:

n= anys transcorreguts $n \in \mathbb{N}$

M_n= grandària de la població en n

Per determinar el creixement de la població usàvem:

$M_{n+1}-M_n$ (Taxa de variació absoluta)

$\frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}$ (Taxa relativa de variació TRV)

El model discret que vam començar a estudiar per descriure l'evolució de la població d'ànecs era el model maltusià. Aquest model partia de la hipòtesi que la TRV era igual a una constant.

$$\frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}=a$$

A partir d'això proposava la fórmula següent per a predir la grandària d'una determinada població un cert any:

$$M_{n+1}=\alpha^n \cdot M_0$$

El gran inconvenient d'aquest model és que no tenia en compte la capacitat del medi ni la competència entre els éssers que hi viuen i donava un creixement ilimitat i incondicionat de la població, cosa que és obvi que no és realista. Per corregir aquest creixement infinit i ajustar-lo a uns paràmetres semblant als naturals s'usa una modificació del model maltusià, també pertanyent als models discrets, el model logístic. Aquest model rebutja que la TRV sigui igual sempre a una constant i li afegeix una correcció relacionant la població a un moment determinat (M_n) i la capacitat del medi (k) segons la fórmula:

$$\frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}=a\cdot\left(1-\frac{M_n}{k}\right)$$

Aquest és un model, doncs, més realista que el maltusià ja que contempla paràmetres que regulen el creixement d'una determinada població. Si Mn s'acosta a zero a serà constant, si Mn tendeix a k, Mn no creix ja que es troba en el límit de la capacitat del medi.

Però per a predir l'evolució d'una població hi ha uns models alternatius els discrets i més precisos, els models continus dels que ara n'esmentarem algunes característiques.

MODELS CONTINUS

Utilitzem la següent nomenclatura:

t= temps(segons, hores, instants...) $t \in \mathbb{R}$

x(t)= grandària de la població en el temps t

Per determinar la grandària de la població s'usa el concepte de derivada x'(t), que dóna una informació molt més precisa sobre el creixement que qualsevol altre model discret aplicat a una població.

El model continu es basa en el model maltusià però el modifica, com en dit abans, fent aparèixer el concepte de derivada. Al model maltusià teníem que $\frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}=a$.

Doncs bé, per traslladar aquesta expressió a un model continu s' introdueix la derivada a partir del terme Mn+1-Mn del model maltusià proposant en comptes de xifres puntuals, establir una funció grandària de la població x(t) i fixant-se que la diferencia Mn+1-Mn és un interval que si fem la diferencia entre els instants en que els mesurem sigui infinitèssima, tindrem el concepte de derivada introduït, al donar-nos la velocitat de canvi de la grandària de la població.
Així doncs:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=a \quad ; \quad x'(t)=a\cdot x(t) \quad \frac{dx}{dt}=a\cdot x \quad \int\frac{dx}{x}=\int a\cdot dt$$

$$x(t)=C\cdot e^{at}$$

I aquesta serà la funció que ens permetrà descriure la grandària de la població d'una manera més exhaustiva. Però aquest model maltusià continu té la mateixa mancança que en el model discret, no preveu la capacitat del medi (k). Per solucionar això d'alguna manera, s'usa el model logístic continu per retocar la constant del quocient entre la derivada i la funció:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=a\cdot\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)$$

Igual que en el model logístic discret tenim que si s'acosta a zero a serà constant, si tendeix a k, no creix ja que es troba en el límit de la capacitat del medi.
Ara ens falta determinar de quina forma es x(t), la funció que ens donarà la grandària de la població en un instant determinat. Per fer això em d'operar amb la equació diferencial de variables separades i autònoma anterior:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=\frac{\frac{dx}{dt}}{x}=a\cdot\left(1-\frac{x(t)}{k}\right) \quad ; \quad \frac{dx}{dt}=a\cdot\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x \quad ; \quad \frac{dx}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}=a\cdot dt$$

$$\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}=\int a\cdot dt=a\cdot t$$

$$\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}\to\frac{1}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)}=\frac{A\cdot\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)+B\cdot x}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}=\frac{(B-A/k)\cdot x+A}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}$$

$$\begin{cases} B-A/k=0\to \quad B=1/k \\ A=1 \end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)\cdot x}=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1/k}{1-\frac{x}{k}}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{-1/k}{1-\frac{x}{k}}dx=\ln|x|-\ln|1-x/k|=\ln\left(\left|\frac{x}{1-x/k}\right|\right)$$

$$\ln\left(\left|\frac{x}{1-x/k}\right|\right)=a\cdot t+C \quad ; \quad \frac{x}{1-x/k}=e^{a\cdot t+C}=a^{at}\cdot e^{c} \qquad \text{si fem } e^{c}=D$$

$$x = D\cdot e^{at} - \frac{D\cdot e^{at}\cdot x}{k} \quad ; \quad x + \frac{D\cdot e^{at}\cdot x}{k} = D\cdot e^{at} \quad ; \quad x\cdot\left(1+\frac{D\cdot e^{at}}{k}\right) = D\cdot e^{at}$$

$$x = \frac{D\cdot e^{at}}{1+\frac{D\cdot e^{at}}{k}} = \frac{\frac{D\cdot e^{at}}{D\cdot e^{at}}}{\frac{1}{D\cdot e^{at}}+\frac{D\cdot e^{at}}{D\cdot e^{at}\cdot k}} = \frac{1}{\frac{1}{D\cdot e^{at}}+\frac{1}{k}} \quad \text{fent } \frac{1}{D} = A$$

$$x = \frac{1}{A\cdot e^{-a\cdot t}+\frac{1}{k}}$$

Aquesta funció amb els paràmetres A i a, que vindran determinats per la població que estem investigant, ens donarà la funció que descriu la grandària de la població.

Funció per a la població de Saccharomyces cerevisiae

Prenem k=13 ja que sembla ser–ho pel gràfic per aquesta població: $x = \frac{1}{A\cdot e^{-a\cdot t}+\frac{1}{13}}$

$$x(0) = 0.37 = \frac{1}{A\cdot e^{-a\cdot 0}+\frac{1}{13}} = \frac{1}{A+\frac{1}{13}} \quad \rightarrow A = 2.62578$$

$$x(1.5) = 1.63 = \frac{1}{2.62578\cdot e^{-a\cdot 1.5}+\frac{1}{13}} \quad \rightarrow a = 1.05862$$

La funció amb els paràmetres A i a queda:

$$x = \frac{1}{2.62578\cdot e^{-1.05862\cdot t}+\frac{1}{13}}$$

Funció per a la població de Saccharomyces cerevisiae

Prenem k=6 ja que sembla ser–ho pel gràfic per aquesta població: $x = \frac{1}{A\cdot e^{-a\cdot t}+\frac{1}{6}}$

$$\begin{cases} x(9) = 1.27 = \dfrac{1}{A\cdot e^{-a\cdot 9}+\frac{1}{6}} \\ x(10) = 1 = \dfrac{1}{A\cdot e^{-a\cdot 10}+\frac{1}{6}} \end{cases}$$

D'on surt A=0.713647 i a=0.015504

La funció amb els paràmetres A i a queda:

$$x = \frac{1}{0.713647\cdot e^{-0.015504\cdot t}+\frac{1}{6}}$$

U7

Taller de Modelització matemàtica:

Partint de l'estudi de dues poblacions de llevat amb un model continu basat en el de Malthus, és a dir, un creixement de raó constant entre un any i el següent i que esdevé exponencial ens veiem en la necessitat d'elaborar un nou model que suposi recursos no infinits.

Aquest nou model anomenat logístic es basa en una taxa de variació relativa de creixement variable linealment front la població. Mentre abans dèiem:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = k$$

Ara hem de plantejar una recta decreixent, donat que la població sempre tendeix a créixer molt al principi i cada cop menys:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = r = r_0 - \frac{r_0}{c} \cdot x$$

On r.: és la taxar relativa de creixement inicial de la població; c=Capacitat màxima de l'hàbitat, en aquell moment deixarà de créixer: r=0; i x= població de l'any en qüestió.

A pocs habitants la r esdevé constant i igual a r., mentre que per poblacions elevades quasi no creix.

Si resolem l'equació diferencial ens acabarà donant:

$$x(t) = \frac{cke^{r_0 \cdot t}}{c + ke^{r_0 \cdot t}}$$

On c= capacitat; k= constant d'integració indefinida; r.= taxa de creixement incial; t= temps; X= població.

Per tant, aquesta serà la funció amb la que treballarem a parir d'ara:

Procurarem ajustar-la a les poblacions de llevat que tenim i esmentar les característiques d'aquesta curiosa funció

Hector Farras
Ricard Sànchez
Sara Saez

Cas d'estudi saccharomyces cervisiae:

En aquesta darrera sessió obtenim uns resultats teòrics gràcies a la nostra funció de x(t) contínua, com s'ha explicat anteriorment. Però la fórmula és útil per a un cas general, i nosaltres volem un cas concret de condició inicial. Per tant com a equació diferencial hem de trobar el valor de la constant d'integració per aquest cas d'estudi.

C.I. (condició inicial): t=0 C=12,9

Després de substituir el temps i tenint en compte que disposem de la resta de valors podem trobar la relació que ens permet cercar la constant d'integració K per a qualsevol població estudiada:

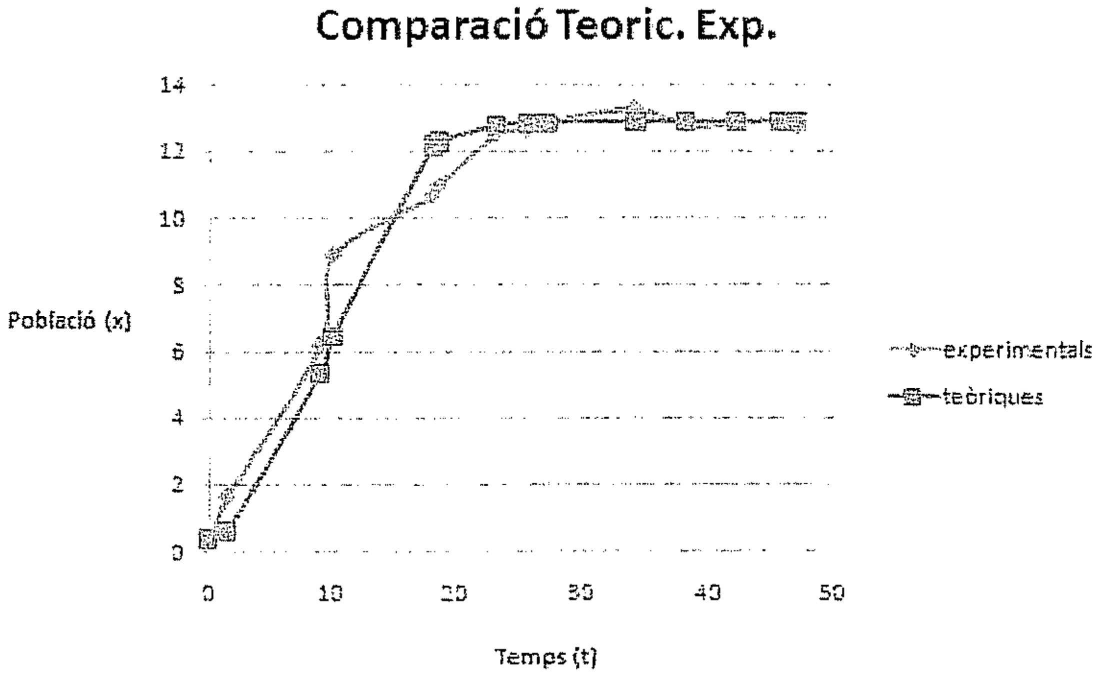
$$K = \frac{x_O \cdot C}{C - x_O}$$

El resulta tés igual a K≈0,38...

Amb la nostra constant K, la capacitat C, i una segona condició imposada per dades experimentals t=10 , x(t)=8,87 , C=12,9 , K=0,38.

Aïllem de l'equació x(t) el valor de r_0 i obtenim un valor de r_0= 0,35.

Calculem amb la nostra funció x(t) i els paràmetres constants calculats amb condicions inicials, valors teòrics del nostre segon model continu de poblacions, i obtenim els següents resultats comparats amb les dades experimentals.



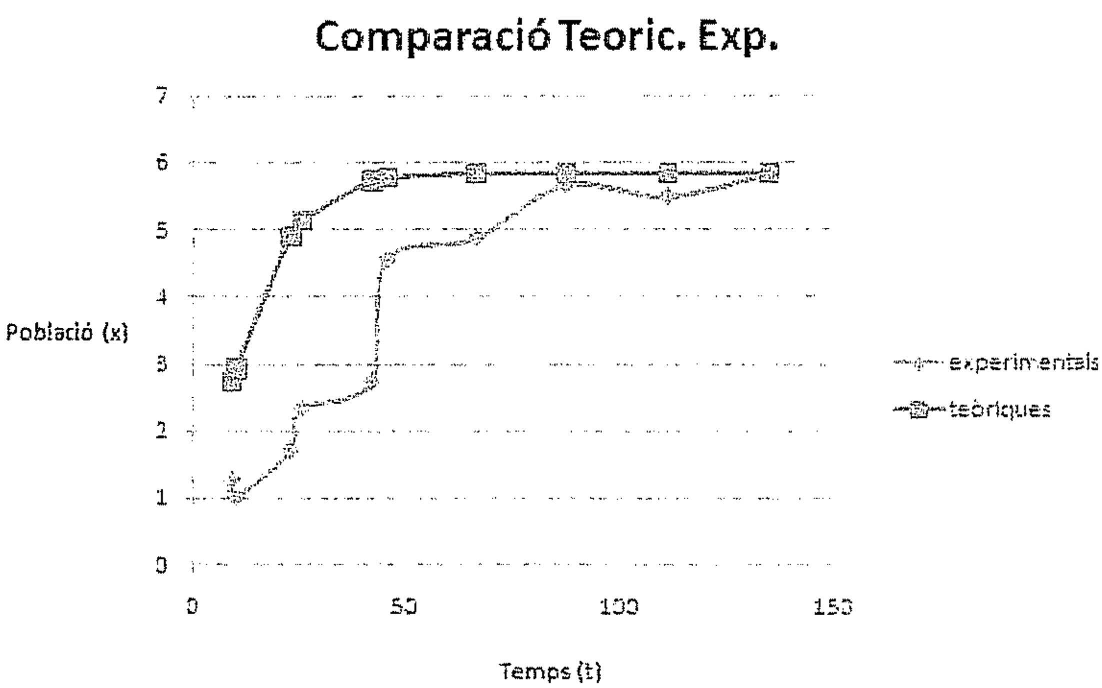
Podem veure clarament que inicialment els valors són propers a la població, i que a diferencia del nostre model anterior , considerant el coeficient *r* constant, aquest model és més fiable i s'adjusta més per a temps molt grans. És a dir , que a la llarga el model presenta coherencia amb les dades experimentals.

Cas del Kéfir:

La K la trobem com en el cas del llevat de la cervesa posant condició inicial t=0, tenint en compte que partim d'unes dades inicials, la Capacitat la preveiem a partir de les dades experimentals i la r_0, l'obtenim amb una segona condició t=10. D'aquesta forma ens queda l'expressió:

$$X(t) = \frac{5{,}83 \cdot 1{,}62 \cdot e^{0{,}13 \cdot t}}{5{,}83 + 1{,}62 \cdot e^{0{,}13 \cdot t}}$$

I la comparació d'ambdues gràfiques:



Les dades experimentals trontollen bastant per aquest motiu sembla que l'adjust de la funció no sigui molt exacte.

Conclusions finals:

Podem concluir que en aquesta predicció mitjançant el model continu, s'han obtingut uns resultats més fiables que qualsevol altre model plantejat anteriorment.

Hector Farras
Ricard Sànchez
Sara Saez

Taller de Modelització matemàtica:

Partint de l'equació logística en el món continu que trobàrem:

$$X(t) = \frac{cke^{r_0 \cdot t}}{c + ke^{r_0 \cdot t}}$$

Podem deixar d'una forma més simplificada que queda:

$$x(t) = \frac{k}{\left(\left(\frac{k}{C}\right) - 1\right) \cdot e^{-r_0 \cdot t} + 1}$$

Estudiarem les seves característiques de monotonia i concavitat a partir de l'expressió de què vam partir el darrer dia:

$$\frac{x'}{x} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)$$

Així trobem l'expressió de primera derivada de la funció de la població:

$$x' = x \cdot r_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)$$

I els intervals de monotonia són:

- La funció té un punt crític a x=0 i x=C; però donat que x mai pot ésser negativa o igual a zero, descartem la primera solució.
- I creix (perquè la derivada és positiva) en l'interval: 0<x<C; i decreix si la x>C.

Ara passem a estudiar la segona derivada que és:

$$x'' = r_0 \cdot \left(1 - \frac{2x}{c}\right)$$

Amb la què trobem les següents característiques de concavitat sobre x(t):

- Té un punt d'inflexió a x=c/2
- És convexa (derivada segona positiva) per x<c/2 i és còncava per x>c/2.

ESTUDI DE RETRAT DE FASES E LES ESPÈCIES DE LLEVAT

$$\begin{cases} x' = 0{,}2586x\,[1-(x/13)] - 0{,}05711\,xy \\ y' = 0'05744y\,[1-(y/6)] - 0{,}004803\,xy \end{cases}$$

Analitzem els casos extrems del sistema d'equacions:

1) En primer lloc fem **y = 0** $\quad x' = 0{,}2586x\,[1-(x/13)]$
   x = 0 $\quad y' = 0'05744y\,[1-(y/6)]$

2) En segon lloc fem **y' = 0**

$$0 = (0'05744\,[1-(y/6)] - 0{,}004803\,x)\,y$$

$$\begin{cases} 0 = y \\ 0 = 0'05744 - (0'05744/6) - 0{,}004803\,x \end{cases}$$

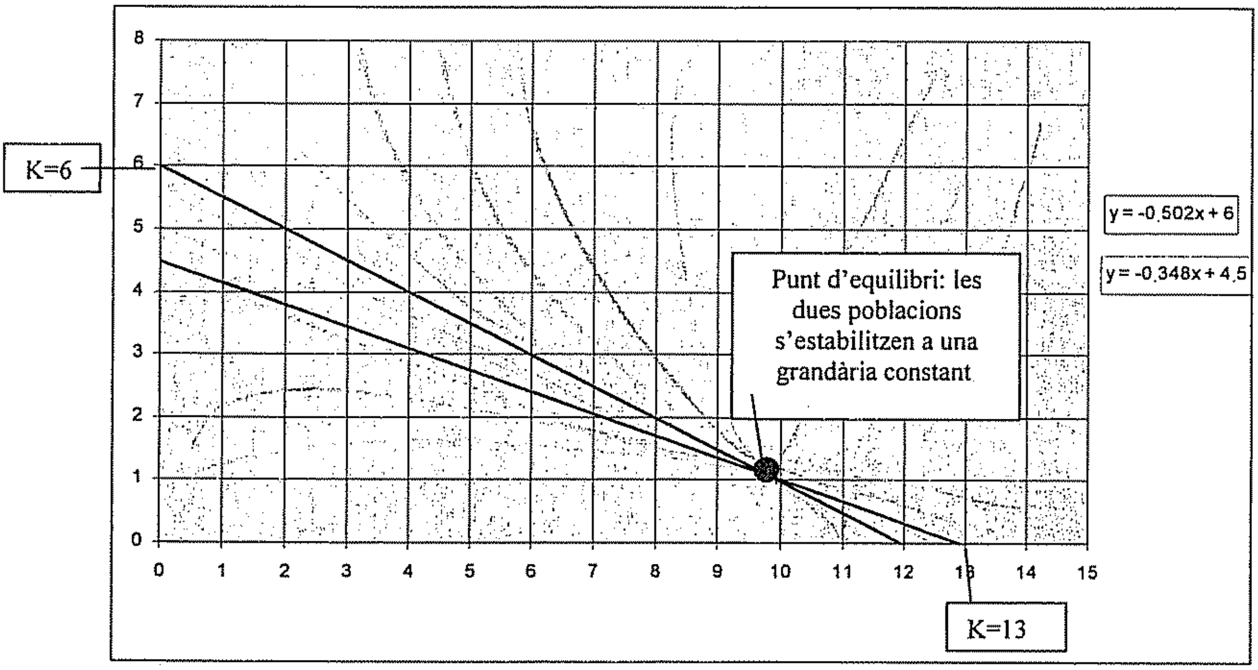
y = - 0,502 x + 6 passa pels punts (0,6) i (11.95,0)

x' = 0

$$0 = (0{,}2586\,[1-(x/13)] - 0{,}05711\,y)\,x$$

$$\begin{cases} 0 = x \\ 0 = 0{,}2586 - (0{,}2586/13)] - 0{,}05711\,y \end{cases}$$

y = - 0,348 x + 4,5 passa pels punts (0,4.5) i (12.93,0)



Busquem aquest punt analíticament:

$y = y \longrightarrow \; -0{,}348\,x + 4{,}5 = -0{,}502\,x + 6$

$x\,(t) = 9{,}74 \qquad y\,(t) = 1'11$

La població x(t) al compatir hàbitat amb la població y(t) tendirà a una grandària de 9,74. De la mateixa manera la població y(t) al compatir hàbitat amb la població x(t) tendirà a una grandària de 1,11.

L'espècie x(t) té una capacitat d'hàbitat K=13, però al compartir el medi amb l'espècie y(t) aquesta descendeix fins a 9,74.
L'espècie y(t) té una capacitat d'hàbitat K=6, però al compartir el medi amb l'espècie x(t) aquesta descendeix fins a 1,11.

Observem que cap de les dues poblacions desapareix de manera que podrien compartir un medi sense que cap de les s'extingís. No obstant, les espècies interfereixen entre elles ja que competeixen per uns mateixos recursos de manera que la grandària de ambdues poblacions es menor a la que tindrien si estiguessin soles en el medi

ANEXO 5

1. CUESTIONARIO DISTRIBUIDO AL PROFESORADO DE CCEE SOBRE EL "APLICACIONISMO"

Si us plau valoreu entre 1 (= totalment en desacord) i 5 (= totalment d'acord) les següents afirmacions. Marqueu la vostre resposta amb una * (o x) a la dreta del valor escollit. En acabar, ompliu els espais referents al Departament on treballeu i anys d'experiència docent.

1. Les matemàtiques que s'ensenyen en el primer curs universitari de Biologia són diferents de les que s'ensenyen en la resta de les llicenciatures de Ciències Experimentals.

1 2 3 4 5 Ho desconec

2. En l'àmbit de l'ensenyament, en general les matemàtiques s'introdueixen de forma independent dels sistemes biològics que es poden modelitzar matemàticament.

1 2 3 4 5

3. L'ensenyament de les matemàtiques en primer curs de Biologia està estructurada (temes, qüestions, problemes) en base a la problemàtica matemàtica i no a la problemàtica biològica.

1 2 3 4 5

4. En l'ensenyament de les matemàtiques en primer curs de Biologia, s'ensenyen les matemàtiques sols després que en sorgeixi la seva necessitat per estudiar un sistema biològic.

1 2 3 4 5

5. Les situacions de Biologia on s'apliquen les matemàtiques apareixen vinculades a una problemàtica general (biològica) relativament unificada i no a un conjunt de qüestions bastant independents entre elles.

1 2 3 4 5

6. Es podria ensenyar tota una carrera de Biologia fent servir les matemàtiques únicament per analitzar els aspectes quantitatius dels fenòmens biològics (o en altres paraules, es podria fer un estudi relativament profund dels fenòmens biològics sense fer servir les matemàtiques).

1 2 3 4 5

Departament: ______________________________

Anys que fa que té docència a la universitat: ______

2. RESUMEN ENTREVISTAS AL PROFESORADO DE CCEE SOBRE EL "APLICACIONISMO"

1. Las matemáticas que se enseñan en el primer curso universitario de Biología[1] son diferentes de las que se enseñan en el resto de las licenciaturas en Ciencias Experimentales.

- En teoría tiene que ser la misma para todos, incluso en la nueva planificación de los grados se pide que sean las mismas, comunas para todos y así facilitará la movilidad si se quiere cursar cualquier otro estudio científico […]. La diferencia es que en Geología todo se ha ido simplificando para ajustarse al nivel de los estudiantes. Hay una incultura matemática muy grande por parte de los alumnos y también un rechazo hacia las matemáticas como también hacia la física y la química, defienden que son "alienas" a la geología. (Entrevistado A)
- Creo que sí que hay un programa común para todos los científicos basado en términos clásicos y lo que varía es la profundidad en la que se da. […] Algunos compañeros (del departamento) me comentan que las matemáticas que se enseñan son las mismas que hace muchos años, aunque creo que lo que se ha hecho es irlas "dulcificando" y "descafeinando" para hacerlas más fáciles. Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia, así, está bien explicar y querer enseñar este lenguaje básico. Cuando intenten modelizar, esto es diferente, ya cada uno se buscará la vida y se formará extra. (Entrevistado B)
- Creo que sí que hay una adaptación, que no sé si implica grandes diferencias en los programas, en los diferentes estudios ya que tenéis que hacer cosas básicas y que repetís en un caso y en otro. […] Si preguntases a la totalidad de la comunidad de biociencias, te saldrían con todo tipo de opiniones seguramente porque hay una concepción bastante estereotipada y simplificada de lo que hacéis […]. Hay una opinión difusa de que lo "hacen" todo igual y no se "preocupan" de a quien le dan clase, esto puede que fuese cierto hace 20 años cuando yo estudiaba que no había diferencias en los programas, ahora creo que sí que las hay. […] Creo que las diferencias que se pueden llegar a generar entre los programas no tiene porque ser diferencias muy significativas, el lenguaje matemático es único y la atracción por las matemáticas puede venir desde perspectivas científicas muy distintas pero ésta [las matemáticas] siempre es la misma. Creo que sólo son los detalles, los ejemplos, las adaptaciones, el poder visualizar que aquellas ecuaciones tiene una plasmación en un estudio de fenómenos determinado. Son los detalles los que los diferencian, no creo que tengamos que hablar de programas con contenidos completamente

[1] Nos referimos aquí al caso de biología aunque cabe destacar que se entrevistó a dos profesores del departamento de geología, un tercero del departamento de microbiología y uno más del departamento química de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

diferentes, es un ajuste en los ejemplos seguramente lo que se necesita […]. (Entrevistado C)

- Creo que son más a menos lo mismo, aunque también creo que depende del profesor que se encarga. […] Pienso que debería ser una matemática dirigida a lo que se necesita. Es muy diferente la matemática que se necesita en una biotecnología, de la que requiere la biología, o lo que hace uno de ambientales. [...] ahora tenemos más o menos lo mismo y depende de cómo el profesor decide explicarlo, creo que debería hacerse un análisis serio de los contenidos de estas asignaturas […] (Entrevistado D)

2. En el ámbito de la enseñanza, en general las matemáticas se introducen de forma independiente a los sistemas biológicos que se pueden modelizar matemáticamente.

- No creo que [las matemáticas] se tuvieran que introducir vinculadas a los sistemas geológicos, ¿cómo vincular unas matemáticas tan básicas? Es una pregunta que os tenéis que hacer vosotros [los matemáticos]. No creo que sea ni conveniente ni oportuno ya que no tenemos que justificar porqué necesitamos las matemáticas en cada una de nuestras asignaturas, las matemáticas deben tener propio peso pero por ellas mismas. (Entrevistado A)
- Las matemáticas se introducen primero pero el resto de Geología se transmite en el lenguaje propio geológico, así que al final hay como un tipo de “gap” entre las matemáticas y el resto de asignaturas. […] Hay un problema que es que las ciencias naturales siempre se han identificado como las ciencias de la observación y el lenguaje que éstas tienen asociado no es el lenguaje matemático sino el de la observación y experimentación. (Entrevistado B)
- Es una situación muy típica que también observamos en los libros de consulta, la gran mayoría no se expresan en lenguaje matemático sino con lenguaje desarrollado por la propia geología. A veces encontramos apéndices con las explicaciones concretas matemáticas pero que pueden ser obviadas. Cada ciencia se especializa en algún territorio, y con ello, se aísla del resto. Es una limitación pero es una fuerte tradición […]. (Entrevistado B)
- No tengo datos para responder con seguridad pero creo que no se puede decir ni que sí ni que no, sino que estáis yendo hacia la segunda opción (que sí aparecen vinculados) al vincularlo a problemas reales. Aunque es absurdo y simplificador que se haga de entrada, que cuando entren los alumnos se le diga “esto te servirá para esto”, éstos se perderán el hecho que “eso”, por él mismo, tiene un valor y tiene que entender ese valor y que sus frutos ya los recogerá más tarde. No creo que sea bueno desde el primer día ir referirse a casos concretos […]. Primero hay la tradición que en biociencias las matemáticas se dan en primero y la tradición a veces acierta y otras veces se equivoca, así que el porqué es así no creo que haya muchas respuestas concretas. […] Creo que una opinión que tenemos [los profesores] es la de que cualquier estudiante de cualquier carrera cuanto más avance en la carrera, más temas específicos se le irá

introduciendo. Y esto lo que presupone, sin quererlo, es que las herramientas como más abstractas, más básicas y más al inicio mejor, creo que es la opinión mayoritaria que tenemos. (Entrevistado C)

- La gran mayoría aparecen de forma totalmente independiente […]. Ahora tenemos la oportunidad de hacer una reforma seria de los planes de estudio, yo creo que las matemáticas deberían impartirse cuando éstas fueran necesarias, no como ahora que resulta muy decepcionante para la mayoría de los alumnos que entran a primero y encuentran las matemáticas completamente desvinculas de la Biología que es lo que han venido a hacer. […] Y un grave problema es que hacen la misma matemática que en secundaria, este es una problema grave, una matemática muy sencilla y básica, ¿pero lo debemos cubrir en la universidad o no? […]. (Entrevistado D)

3. La enseñanza de las matemáticas en el primer curso de Biología está estructurada (temas, cuestiones y problemas) en base a una problemática de carácter matemático y no en base a una problemática biológica.

4. En la enseñanza de las matemáticas en el primer curso de Biología, se enseñan las matemáticas sólo después de que surja su necesidad en el estudio de un sistema biológico.

- Está estructurada en base a una problemática matemática y eso es lo que se necesita, en un principio […]. El objetivo es establecer una manera común de entenderse, como mínimo las mismas matemáticas que todo científico debería tener o como mínimo entender […]. (Entrevistado A)
- Creo que aún está decantado hacía una problemática matemática, pero no sé si esto es malo, me parece muy natural. Cuando te decía que los programas no tenían que ser completamente diferentes y que la diferencia estuviese en los ejemplos, implica que me parecía bien que los programas de matemáticas para físicos y biocientíficos no establezcan grandes diferencias y compartan un cuerpo común, y este no puede ser el físico, el químico o el biológico, este tiene que ser el matemático. (Entrevistado C)
- Responde a una problemática matemática y no podría responder a una problemática geológica ya que si de matemáticas pueden saber poco [al empezar la carrera] de geología saben menos, no saben nada […]. Pero tampoco no pueden ser trasladadas [a cursos posteriores], los geólogos ya se encargarán de transmitirlas pero el lenguaje básico se debe fijar. (Entrevistado B)
- Yo creo que es más matemática. Debería ser un curso en la que los alumnos pudiesen ver la utilidad, que vean que es lo que tienen de estudiar para lo que quieren estudiar. Esto debería ir en contra de la ética de la universidad, los alumnos ya han escogido lo que quieren hacer,

entonces nunca va a entender porque se le da una matemática desvinculada a lo que a él le gusta. Así un curso de matemáticas, ¡por las matemáticas! Esto no lo entienden. Debería ser un curso en la que ellos psicológicamente viesen la utilidad para lo que ellos realmente quieren estudiar, entonces debería ser un curso con cuatro herramientas matemáticas que posiblemente no tienen bien adquiridas anteriormente, pero con ejemplos y una razón de ser biológica. […] No es nada fácil e implicaría que los matemáticos, con todo el resto, trabajaran juntos. (Entrevistado D)

- De forma totalmente independiente. El alumno ya ha escogido, no ahora mucho antes. Y cuando llega a la universidad, después de todo lo que les puede haber costado, se encuentran una matemática independiente de lo que ellos quieren. Esto nunca tendrá éxito, siempre será una asignatura que no se entenderá si sigue así […]. (Entrevistado D)

5. Las situaciones de Biología donde se aplican las matemáticas aparecen vinculadas a una problemática general (biológica) relativamente unificada y no a un conjunto de cuestiones bastante independientes entre ellas.

- Los alumnos tienen mucha dificultad en relacionar una asignatura con otra pero creo que nosotros tampoco lo favorecemos. Cada uno parece tener su pequeño “reino de taifas” y explicar sus cosas por separado, una visión global el alumno no la tendrá nunca pero me parece que los profesores tampoco la tenemos [...]. No hay tradición de trabajar en comunidad, de sentarse y ponerse de acuerdo con el contenido de cada asignatura. […] Ni tampoco veo posible evitar esta tradición en un futuro, no veo la manera de salir de la inercia en la que hemos entrado. (Entrevistado A)
- Aquí debo añadir que aparece un conjunto cuestiones aisladas y separadas, y quiero añadir, lamentablemente. Pero esto es lo que se hace. No es que sólo no haya relación con las instrumentales sino que tampoco hay relación entre las descriptivas. Son satélites que van cada uno por su propia órbita aislada. No hay nada más lejano que un botánico y un ecólogo, por ejemplo, ni los discursos ni los intereses, en eso sí que no podemos ir dando lecciones a nadie […]. Podríamos buscar razones muy serías pero siempre acabas en razones banales, que son la inercia y el poco corporativismo. (Entrevistado C)
- Tal como es ahora los alumnos trabajan en compartimentos no trabajan de forma integrada nada, entre otras cosas, trabajar integradamente lo que sea les sería imposible, los estudiantes están entrenados y acostumbrados durante muchos años a verlo así y que lo que tiene que aprender es aquello que entra el examen. Ya no están acostumbrados a una actividad de estudio, el sistema educativo actual se basa en fichas, resúmenes y en copiar y pegar, no en realmente estudiar y pensar. (Entrevistado D)

6. Se podría enseñar toda la carrera de Biología utilizando las matemáticas únicamente para analizar los aspectos cuantitativos de los fenómenos biológicos (en otras palabras, se podría hacer un estudio relativamente profundo de los fenómenos biológicos sin utilizar las matemáticas).

- Sí, se podría perfectamente. He comentado casos [de alumnos] que han hecho toda la carrera sin haber aprobado las matemáticas, aún peor, que ni lo han intentado […]. (Entrevistado A)
- De poder se podría pero quedaría algo coja, sería entonces una disciplina meramente descriptiva […] pero para realizar un estudio más profundizado o establecer relaciones entre fenómenos ya no se puede hacer descriptivamente, se necesitan matemáticas. No sería nada conveniente prescindir de las matemáticas. (Entrevistado B)
- Absolutamente que no. De hecho es que se puede prescindir en ninguna carrera. Uno debe tener la capacidad de no asustarse frente a un planteo abstracto para cualquier disciplina, y en ciencias aún más, sería una barbaridad que alguien se planteara quitarlas o que dijera que no son necesarias, todo el mundo cuando se proponga hacer predicciones o modelaje lo necesitará. (Entrevistado C)
- Yo diría que si las matemáticas que se enseñan y que hacen en los temarios de secundaria y Bachillerato estuviesen bien asumidas en un porcentaje muy alto por parte de los alumnos, se necesitaría poco más de matemática, me refiero a las asignaturas más generales. El problema es que esto no está hecho. Diferente es cuando se necesita algún otro tipo de especialización que puede requerir de otro tipo de herramienta matemática, lo que es una error es pensar que todo tipo de biólogo necesite el mismo tipo de matemática, según el tipo de especialización que se hagan, entonces lo que intentaremos en los nuevos planes de estudio es resolverlo porque esta supuesta “Biología única” no existe y lo que haremos es diversificarla en varias titulaciones y podría ser que correspondiese dar diferentes tipo de matemáticas en cada una de las especializaciones. (Entrevistado D)