Un concepto generalizado de conjugación: aplicación a las funciones quasiconvexas

Juan Enrique Martínez Legaz

UN CONCEPTO GENERALIZADO DE CONJUGACION.
APLICACION A LAS FUNCIONES QUASICONVEXAS.

Memoria presentada por Juan Enrique Martínez Legaz para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona.

V° B°
El Director
Juan Augé

Juan E. Martínez Legaz

Barcelona, Septiembre de 1981

A María Gloria, mi esposa, con quien he compartido la ilusión por este trabajo.

Agradezco al Dr. Juan Augé Farreras, Director de esta Tesis, su constante ayuda y el interés con que ha atendido mis continuas consultas. Asímismo quiero expresar mi agradecimiento a mi compañero Javier Chavarriga, que siempre me ha animado y ha seguido de cerca la elaboración de este trabajo.

INTRODUCCION

La teoría de la conjugación de funciones del análisis convexo desempeña un papel importante en el estudio de la dualidad en programación matemática. Ultimamente se han dado varias extensiones de estas nociones que son útiles para algunas clases de funciones no convexas.(p.ej. en {3},{5}).

En el capítulo I se dan unas definiciones de H-convexidad y H-conjugación que tienen propiedades idénticas a las de los conceptos clásicos. Mediante éllas se construye en el capítulo II una teoría de la dualidad y se estudian los lagrangianos que se derivan.

En el capítulo III se obtienen como casos particulares nociones de conjugación quasiconvexa que coinciden en muchos aspectos con las dadas en {3}. Aparecen las funciones denominadas " quasiafines ", que desempeñan con respecto a las quasiconvexas el mismo papel que las afines en relación a las convexas.

Finalmente, en el capítulo IV se dan varias posibilidades de extensión que pueden ser aplicables a clases más generales de funciones. También se aborda la conjugación de multiaplicaciones en un marco en que no se requiere ninguna estructura sobre los conjuntos que intervienen,extendiéndose de esta forma los resultados de {10}.

NOTACION Y RESULTADOS PREVIOS

El producto escalar usual sobre R^n se representará por $< , >$ y la norma euclídea por $|| \ ||$. $\bar{R}$ será $R\cup\{+\infty,-\infty\}$.

Dado un conjunto ordenado $(C,\leq)$, el conjunto de aplicaciones de un conjunto cualquiera X en C se considerará a su vez ordenado por la relación: $f\leq g$ si $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in X$. El supremo y el ínfimo de una familia de aplicaciones de X en C se entenderá con respecto a esta relación de orden.

A una función $f:R^n\to\bar{R}$ se le asocian los siguientes conjuntos:

el dominio, $\mathrm{dom}(f)=\{x\in R^n/f(x)<+\infty\}$

el epígrafo, $\mathrm{epi}(f)=\{(x,\lambda)\in R^{n+1}/f(x)\leq\lambda\}$

el hipografo, $\mathrm{hipo}(f)=\{(x,\lambda)\in R^{n+1}/f(x)\geq\lambda\}$

los conjuntos de nivel, $S_\lambda(f)=\{x\in R^n/f(x)\leq\lambda\}$, $\lambda\in R$

$\mathring{S}_\lambda(f)$ representará el interior de S_λ (f). En cambio, $\dot{S}_\lambda(f)$ será $\{x\in R^n/f(x)<\lambda\}$ $\forall\lambda\in R\cup\{+\infty\}$.

f es semicontínua inferior en $x_0\in R^n$ si $\forall\lambda<f(x_0)$ existe U entorno de x_o tal que $\forall x\in U, f(x)<\lambda$. Si lo es en x_o, $\forall x_o\in R^n$ diremos que es semicontínua inferior (abreviadamente s.c.i.).

Las siguienfes definiciones y propiedades pueden encontrarse p.ej. en [2]: $f:X\to R$, X convexo de R^n, es quasiconvexa si y solo si $\forall x_1,x_2\in X$, $t\in[0,1]$, $f((1-t)x_1+tx_2)\le\max\{f(x_1),f(x_2)\}$. Es estrictamente quasiconvexa si la desigualdad es estricta cuando $x_1,x_2\in dom(f)$, $t\in(0,1)$, $f(x_1)\ne f(x_2)$. La quasiconvexidad de f es equivalente a la convexidad de todos sus conjuntos de nivel. También se verifica que f es s.c.i. si y solo si todos sus conjuntos de nivel son cerrados. f se llama quasicóncava si $\forall x_1,x_2\in X$, $t\in[0,1]$, $f((1-t)x_1+tx_2)\ge\min\{f(x_1),f(x_2)\}$. Es equivalente a que los conjuntos de nivel tengan complementario convexo. Se dice que f es inf-compacta si todos sus conjuntos de nivel son compactos.

Una función f puede deducirse de la familia de sus conjuntos de nivel a partir de la siguiente expresión: $f(x)=\inf\{\lambda/x\in S_\lambda(f)\}$. Recíprocamente, si dada una familia de subconjuntos de R^n, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in R}$ tal que $\lambda<\mu\Rightarrow S_\lambda\subset S_\mu$ se define f por $f(x)=\inf\{\lambda/x\in S_\lambda\}$, los conjuntos de nivel de f son $S_\lambda(f)=\bigcap_{\mu>\lambda}S_\mu$. Así, si los S_λ son convexos f es quasiconvexa, si son cerrados, es s.c.i.. Las envolventes quasiconvexa y quasiconvexa s.c.i. de f (es decir, las mayores funciones de ese tipo mayorantes de f) se obtienen por ese procedimiento de las familias $\{co(S_\lambda(f))\}_{\lambda\in R}$, $\{\overline{co}(S_\lambda(f))\}_{\lambda\in R}$, respectivamente,entendiendo por $co(S_\lambda(f))$ la envoltura convexa de $S_\lambda(f)$, $\overline{co}(S_\lambda(f))$ la envoltura convexa cerrada de $S_\lambda(f)$.

Una multiaplicación $F:E \lessdot A$ es una aplicación de E en el conjunto de partes de A.Las siguientes definiciones y propiedades se encuentran en {10}. El grafo de F, $G(F)= \{(x,a)/a\in F(x)\}$. Si A es un grupo abeliano completamente ordenado, de F se deriva la aplicación $l_F:E\to A$ dada por $l_F(x)= \inf\{a/a\in F(x)\}$.La multiaplicación epigráfica una aplicación $f:E\to A$ es $E(f):E\lessdot A$ tal que $E(f)(x)=\{a/f(x)\leq a\}$. Si E es otro conjunto y se considera dada una aplicación $E\ xE\to A$ denotada por $[\ ,\ ]$,la conjugada de F es $F^*:E \lessdot A$ tal que $F\ (x^*)= \{a'\in A/a\in F(x)\Longrightarrow[x^*,x]-a-a'\leq 0$. Se verifica que $F^*=E(l_F^*)$, siendo l_F^* la conjugada de l_F,definida como en el caso real utilizando $[\ ,\ ]$ en lugar de $<\ ,\ >$. x^* es un subgradiente de F en x_0 si existe $a_0\in F(x_0)$ tal que $\forall x\in E$, $a\in F(x)$ se tiene $a-a_0\geq [x^*,x]-[x^*,x_0]$.

La intersección y la inclusión de multiaplicaciones se definen a partir de las imágenes de los elementos del conjunto de partida,de manera natural.

CAPITULO I

NOCIONES GENERALES SOBRE H-CONVEXIDAD Y CONJUGACION

1. FUNCIONES H-CONVEXAS Y SUS SUBGRADIENTES

Sea H una familia de funciones reales a valores en R, cerrada para el supremo puntual, es decir, tal que $H'\subset H \Rightarrow \sup\{h/h\in H'\}\in H$: Una función $f:R^n\to\bar{R}$ se dirá que es H-convexa si puede expresarse como el supremo de funciones pertenecientes a $\Phi_H^n=\{\varphi:R^n\to\bar{R}/\varphi(x)=h(<x^*,x>)$ para algún $h\in H, x^*\in R^n\}$. Estas funciones coinciden con las Φ-convexas en el sentido de Dolecki y Kurcyusz {5}, tomando $\Phi=\Phi_H^n$, si bien en ese artículo las funciones de Φ son todas finitas.

Dada una función $f:R^n\to\bar{R}$ se define su H-soporte, $L_H(f)$ mediante: $L_H(f)=\{\varphi\in\Phi_H^n/\varphi(x)\le f(x)\ \forall x\in R^n\}$. La H-envolvente de f es la función $f^0=\sup\{\varphi/\varphi\in L_H(f)\}$.

Proposición 1.1: f^0 es la mayor función H-convexa minorante de f.

Demostración: Por definición, f^0 es H-convexa y minorante de f. Sea g una función H-convexa minorante de f, es decir, $g=\sup\{\varphi/\varphi\in\Phi'\}$ para cierto $\Phi'\subset\Phi_H^n$, $g\le f$. Para todo $\varphi\in\Phi$ se tiene $\varphi\le g\le f$. Por tanto $\varphi\in L_H(f)$. Es decir, $\Phi'\subset L_H(f)$. Entonces $g=\sup\{\varphi/\varphi\in\Phi'\}$ $\le\sup\{\varphi/\varphi\in L_H(f)\}=f^0$.

Corolario 1.2: f es H-convexa si y solo si $f = f^0$.

Definición: $f:R^n \to \overline{R}$ se dirá que es H-convexa en $x_0 \in R^n$ si se verifica $f(x_0) = f^0(x_0)$.

Evidentemente, una función es H-convexa si y solo si es H-convexa en todo $x_0 \in R^n$.

Definición: $x^* \in R^n$ es un H-subgradiente de $f:R^n \to \overline{R}$ en $x_0 \in R^n$ si y solo si existe $h_0 \in H$ tal que:

a) $h_0(<x^*, x>) \leq f(x) \quad \forall x \in R^n$

b) $h_0(<x^*, x_0>) = f(x_0)$

El conjunto de los H-subgradientes de f en x_0 se llamará el H-subdiferencial de f en x_0 y se representará por $\partial_H f(x_0)$.

Proposición 1.3:

a) $\partial_H f(x_0) \neq \emptyset \Rightarrow f$ es H-convexa en x_0

b) f es H-convexa en $x_0 \Rightarrow \partial_H f(x_0) = \partial_H f^0(x_0)$

Demostración:

a) Sea $x^* \in \partial_H f(x_0)$, h_0 tal como en la definición de H-subgradiente. La función φ_0 dada por $\varphi_0(x) = h_0(<x^*, x>)$ pertenece a $L_H(f)$, Por tanto:

$f^0(x_0) \leq f(x_0) = h_0(<x^*, x_0>) = \varphi_0(x_0) \leq \sup\{\varphi(x_0) / \varphi \in L_H(f)\}$ $= f^0(x_0)$.

b) Sea $x^* \in \partial_H f(x_0)$, h_0, φ_0 definidas como en la demostración de a). Puesto que $\varphi_0 \in L_H(f)$, también $\varphi_0 \leq f^0$. Por tanto también se cumplen las condiciones de definición de H-subgradiente sustituyendo f por f^0.

Recíprocamente, si $x^*\in\partial_H f^0(x_0)$, se tiene para algún $h_0\in H$: $h_0(<x^*,x>)\leq f^0(x)\leq f(x)\ \forall x\in R^n$

$$h_0(<x^*,x_0>)= f^0(x_0)= f(x_0),$$

es decir, $x^*\in\partial_H f(x_0)$.

Proposición 1.4: Sean $f:R^m\to\overline{R}$, $A:R^n\to R^m$ lineal, $A^*:R^m\to R^n$ la aplicación adjunta de A. Entonces $\partial_H(f\circ A)(x_0)\supset A^*\partial_H f(Ax_0)$ $\forall x_0\in R^n$.

Demostración: Sea $y^*\in\partial_H f(Ax_0)$. Existe $h_0\in H$ tal que $h_0(<y^*,y>)\leq f(y)\ \forall y\in R^m$ y además $h_0(<y^*,Ax_0>)=f(Ax_0)$. Entonces se tiene: $h_0(<A^*y^*,x_0>)= h_0(<y^*,Ax_0>)= f(Ax_0)$ $= (f\circ A)(x_0)$. Esto significa que $A^*y^*\in\partial_H(f\circ A)(x_0)$.

Corolario 1.5: Sean $f:R^n\to\overline{R}$, A un automorfismo de R^n. Entonces $\partial_H(f\circ A)(x_0)= A^*\partial_H f(Ax_0)$.

Demostración: $\partial_H(f\circ A)(x_0)= A\ A^{-1}\partial_H(f\circ A)(x_0)=$
$= A\ A^{-1}\ \partial_H(f\circ A)(A^{-1}Ax_0)\subset A^*\partial_H(f\circ A\circ A^{-1})(Ax_0)= A^*\partial_H(f\circ A)(x_0)$

2. CONJUGACION

Dada $f:R^n\to R$, su H-conjugada será $f^c:R^n\to H$ definida por: $f^c(x^*)= \sup\{h/h\in H, h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x\in R^n\}$. Inversamente, dada $g:R^n\to H$, su función conjugada $g^c:R^n\to\overline{R}$ se define mediante: $g^c(x)= \sup_x g(x^*)(<x^*,x>)$. La función g^c es siempre H-convexa. En particular, la segunda conjugada de f, f^{cc} es H-convexa.

Proposición 2.1:

a) $f_1\leq f_2$ $\quad f_1^c\leq f_2^c$

b) $f^c(x^*)(<x^*,x_0>)\leq f(x_0)$ $\forall x_0,x^*\in R^n$ (desigualdad de Fenchel)

c) $f^c = f^{0c}$

Demostración:

a) $f_1^c(x^*) = \sup\{h/h\in H, h(<x^*,x>)\leq f_1(x)\ \forall x\in R^n\}\leq$

$\leq \sup\{h/h\in H, h(<x^*,x>)\leq f_2(x)\ \forall x\in R^n\} = f_2^c(x^*)$

b) $f^c(x^*)(<x^*,x_0>) = \sup\{h(<x^*,x_0>)/h\in H, h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x\}$

$\leq f(x_0)$.

c) Por a), $f^{0c}\leq f^c$. Para la desigualdad inversa, basta considerar que si $h\in H$ es tal que $h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x$, también se verifica $h(<x^*,x>)\leq f^0(x)\ \forall x$.

Corolario 2.2: Sea $\{f_k\}_{k\in K}$ una familia de funciones $R^n\to\bar{R}$. Se verifica $(\inf_{k\in K} f_k)^c\leq \inf_{k\in K} f_k^c$. Si H es cerrada para el ínfimo , se cumple la igualdad.

Demostración: $k_0\in K$, $\inf_{k\in K} f_k\leq f_{k_0}$, de donde $(\inf_{k\in K} f_k)^c\leq$ $\leq f_{k_0}^c$ y, en consecuencia, $(\inf_{k\in K} f_k)^c\leq \inf_{k\in K} f_k^c$.

Si H es cerrada para el ínfimo, $\inf_{k\in K} f_k^c(x^*)\in H\ \forall x^*\in R^n$. Además, por la prop.2.1.b), $\inf_{k\in K} f_k^c(x^*)(<x^*,x>)\leq\inf_{k\in K} f_k(x)$ para todo x. Por tanto, $\inf_{k\in K} f_k^c(x)\leq \sup\{h/h\in H, h(<x^*.x>)\leq$ $\leq\inf_{k\in K} f_k(x)\ \forall x\} = (\inf_{k\in K} f_k)^c(x^*)\leq \inf_{k\in K} f_k^c(x^*)$.

Corolario 2.3: Sea $\{f_k\}_{k\in K}$ una familia de funciones $R^n\to\bar{R}$. Se verifica $(\sup_{k\in K} f_k)^c\geq \sup_{k\in K} f_k^c$.

Demostración: $\forall k_0\in K$, $f_{k_0}\leq \sup_{k\in K} f_k$, de donde $f_{k_0}^c\leq(\sup_{k\in K} f_k)^c$ y, en consecuencia, $\sup_{k\in K} f_k^c\leq(\sup_{k\in K} f_k)^c$.

Proposición 2.4: La segunda conjugada de cualquier función coincida con su H-envolvente.

Demostración: Por definición, $f^c(x^*)(<x^*,x_0>)=$
$= \sup\{h(<x^*,x_0>)/h\in H,\ h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x\}$. Así, $f^{cc}(x_0)$
$= \sup\{\varphi(x_0)/\varphi\in L_H(f)\}= f^0(x_0)$.

Corolario 2.5: $f:R^n\to\bar{R}$ es H-convexa si y solo si coincide con su segunda conjugada.

Demostración: Se utiliza el corolario 1.2 seguido de la proposición 2.4.

Corolario 2.6: f es H-convexa $\Longleftrightarrow g:R^n\to H/g^c= f$.

Proposición 2.7: $x^*\in \partial_H f(x_0)\Longleftrightarrow f^c(x^*)(<x^*,x_0>)=f(x_0)$.

Demostración: Si la igualdad se cumple, se puede tomar $h_0= f^c(x^*)$ en la definición de H-subgradiente, teniendo en cuenta la desigualdad de Fenchel. Recíprocamente, si $x^*\in \partial_H f(x_0)$, para la función h_0 adecuada se tiene: $f(x_0)= h_0(<x^*,x_0>)\leq \sup\{h(<x^*,x_0>)/h\in H,h(<x^*,x>)\leq$
$\leq f(x)\ \forall x\}= f^c(x^*)(<x^*,x_0>)\leq f(x_0)$.

Definición: H es completa en 0 si $\forall\alpha\in R\ \exists h_\alpha\in H/h_\alpha(0)=\alpha$

Proposición 2.8: $f^c(0)(0)\leq \inf_x f(x)$. Si H es completa en 0, se verifica la igualdad.

Demostración: $f^c(0)(0)= \sup\{h(0)/h\in H,h(0)\leq f(x)\ \forall x\}\leq$
$\leq f(x)\ \forall x$, de donde $f^c(0)(0)\leq \inf_x f(x)$. Si H es completa en 0, sea $\alpha= \inf_x f(x)$, $h_\alpha\in H$ tal que $h_\alpha(0)=\alpha= \inf_x f(x)$, es decir, $h_\alpha(0)\leq f(x)\ \forall x$. Entonces, $\inf_x f(x)=\alpha= h_\alpha(0)\leq$
$\leq \sup\{h(0)/h\in H,h(0)\leq f(x)\ \forall x\}= f^c(0)(0)$.

Corolario 2.9: $0\in\partial_H f(x_0)\Longrightarrow f$ alcanza su mínimo en x_0.

Si H es completa en 0, el recíproco es cierto.

Demostración: Basta considerar las proposiciones 2.7 y 2.8.

Proposición 2.10: Sea f: $R^n \to \bar{R}$, A un automorfismo de R^n. Entonces $(f\circ A)^c = f^c\circ A^{*-1}$, con A^* el adjunto de A.

Demostración: $(f\circ A)^c(x^*) = \sup\{h/h\in H, h(\langle x^*,x\rangle) \le (f\circ A)(x)\ \forall x\in R^n\} = \sup\{h/h\in H, h(\langle x^*,x\rangle) \le f(Ax)\ \forall x\in R^n\} =$
$= \sup\{h/h\in H, h(\langle x^*, A^{-1}y\rangle) \le f(y)\ \forall y\in R^n\} =$
$= \sup\{h/h\in H, h(\langle A^{*-1}x^*, y\rangle) \le f(y)\ \forall y\in R^n\} = f^c(A^{*-1}x\ ) =$
$= (f^c\circ A^{-1})(x^*)$.

Corolario 2.11: Si f es H-convexa, el grupo de transformaciones ortogonales que deja invariante f coincide con el que deja invariante f^c.

Demostración: A deja invariante $f \Rightarrow f\circ A = f \Rightarrow (f\circ A)^c = f^c$ $\Rightarrow f^c\circ A^{-1} = f^c \Rightarrow f^c\ A = f^c \Rightarrow$ A deja invariante f^c. Para la implicación recíproca, observemos previamente que si A es ortogonal se tiene: $(f\circ A)^{cc}(x) = \sup_{x^*}(f\circ A)^c(x^*)(\langle x^*,x\rangle)$
$= \sup_{x^*}(f^c\circ A^{-1})(x^*)(\langle Ax^*,Ax\rangle) = \sup_{x^*}(f^c\circ A)(x^*)(\langle Ax^*,Ax\rangle) =$
$= \sup_{x^*} f^c(Ax^*)(\langle Ax^*,Ax\rangle) = \sup_{y^*} f^c(y^*)(\langle y^*,Ax\rangle) = f^{cc}(Ax) =$
$= (f^{cc}\circ A)(x)$, es decir, $(f\circ A)^{cc} = f^{cc}\circ A$. Entonces, si A deja invariante f^c, $f = f^{cc} = (f^c\circ A)^c = (f^c\circ A^{-1})^c =$
$= (f\circ A)^{cc} = f^{cc}\circ A = f\circ A$. En consecuencia, A deja invariante f.

Corolario 2.12: Si $\phi(x) = f(\alpha x)\ \forall x$, con $\alpha \ne 0$, entonces

$\phi^c(x^*) = f^c(1/\alpha\ x^*)$.

Demostración: Basta tener en cuenta que $(\alpha I)^{*-1} = (1/\alpha)I$, siendo I el automorfismo identidad.

Proposición 2.13: Sea $\lambda \neq 0$ tal que $h \in H \Leftrightarrow h_\lambda \in H$, con h_λ definida por $h_\lambda(t) = h(\lambda t)$. Se verifica $f^c(\lambda x^*)(t) = f^c(x^*)(t/\lambda)\ \forall f, x^*, t$.

Demostración: $f^c(\lambda x^*)(t) = \sup\{h(t)/h \in H, h(<\lambda x^*, x>) \leq f(x)\ \forall x\}$
$= \sup\{h_\lambda(t/\lambda)/\ h_\lambda \in H, h_\lambda(<x^*, x>) \leq f(x)\ \forall x\} = f^c(x^*)(t/\lambda)$.

Proposición 2.14:

a) Supongamos que H es tal que $h \in H$, k función constante $\Rightarrow h+k \in H$. Sea ϕ obtenida a partir de f por $\phi(x) = f(x)+b$ para todo x. Entonces $\phi^c(x^*)(t) = f^c(x^*)(t)+b\ \forall x^*, t$.

b) Supongamos que H es tal que $h \in H$, $b \in R \Rightarrow h(\ +b) \in H$. Entonces, si ϕ se obtiene a partir de f por $\phi(x) = f(x+z)$ para todo x, $\phi^c(x^*)(t) = f^c(x^*)(t+<x^*, z>)\ \forall x^*, t$.

c) Supongamos que H es tal que $h \in H, a>0 \Rightarrow ah \in H$. Sea ϕ obtenida a partir de f por $\phi(x) = af(x)\ \forall x$. Entonces $\phi^c(x^*) \neq af^c(x^*)\ \forall x^*$.

Demostración:

a) $\phi^c(x^*)(t) = \sup\{h(t)/h \in H, h(<x^*, x>) \leq \phi(x)\ \forall x\} =$

$= \sup\{h(t)/h \in H, h(<x^*, x>) \leq f(x)+b\ \forall x\} =$

$= \sup\{h(t)+b/h(<x^*, x>) \leq f(x)\ \forall x\} = f^c(x^*)(t)+b$

b) $\phi^c(x^*)(t) = \sup\{h(t)/h \in H, h(<x^*, x>) \leq f(x+z)\ \forall x\} =$

$= \sup\{h(t)/h \in H, h(<x^*, x+z>-<x^*, z>) \leq f(x+z)\ \forall x\}$

$= \sup\{h(t+<x^*, z>-<x^*, z>)/h\ H, h(<x^*, y>-<x^*, z>) \leq f(y)\ \forall y\}$

$= \sup\{h(t+\langle x^*,z\rangle)/h\in H,\ h(\langle x^*,y\rangle)\le f(y)\ \forall y\}=$

$= f^c(x^*)(t+\langle x^*,z\rangle).$

c) $\phi^c(x^*)(t) = \sup\{h(t)/h\in H,\ h(\langle x^*,x\rangle)\le f(x)\ \forall x\}=$

$= \sup\{h(t)/h\in H, (1/a)h(\langle x^*,x\rangle)\le f(x)\ \forall x\}=$

$= \sup\{ah(t)/h\in H, h(\langle x^*,x\rangle)\le f(x)\ \forall x\}=$

$= af^c(x^*)(t).$

3. FUNCIONES A VALORES EN H. CONVEXIDAD. SUBGRADIENTES

Una función $g:R^n\to H$ diremos que es H-convexa si es la conjugada de alguna función real, es decir, si $g= f^c$ para alguna $f:R^n\to R$. Como consecuencia de esta definición, la segunda conjugada de cualquier función $g:R^n\to H$, g^{cc}, es siempre H-convexa.

Proposición 3.1:

a) $g_1\le g_2 \quad g_1^c\le g_2^c$

b) $g(x_0^*)(\langle x_0^*,x_0\rangle)\le g^c(x_0)\ \forall x_0, x_0^*\in R^n$ (segunda desigualdad de Fenchel).

c) $g\le g^{cc}$

Demostración:

a) $g_1^c(x)= \sup_{x^*} g_1(x^*)(\langle x^*,x\rangle)\le \sup_{x^*} g_2(x^*)(\langle x^*,x\rangle)= g_2^c(x)$

b) $g(x_0)(\langle x_0^*,x_0\rangle)\le \sup_{x^*} g(x^*)(\langle x^*,x_0\rangle)=g^c(x_0).$

c) Teniendo en cuenta b), $g(x^*)\le \sup\{h/h\in H, h(\langle x^*,x\rangle)\le$ $\le g^c(x)\ \forall x\}= g^{cc}(x^*)).$

Corolario 3.2: $g:R^n\to H$ es H-convexa $\Longleftrightarrow g^{cc}= g.$

Demostración: Si $g= g^{cc}$, se cumple la definición de H-convexidad co $f= g^c$. Si g es H-convexa, sea f tal que $f^c=g$. Entonces se tiene: $g^{cc}= f^{ccc}= f^{0c}= f^c= g$.

Corolario 3.3: g^{cc} es la menor función H-convexa mayorante de g.

Demostración: g^{cc} es H-convexa y, en virtud de prop.3.1.c) es mayorante de g. Si g_1 es H-convexa y mayorante de g, se cumple $g_1= g_1^{cc} \geq g^{cc}$.

Corolario 3.4: Sea $\{g_k\}_{k\in K}$ una familia de funciones $R^n \to H$. Se verifica: $(\sup_{k\in K} g_k)^c \geq \sup_{k\in K} g_k^c$. Si todas las funciones son H-convexas, se cumple la igualdad.

Demostración: La desigualdad se demuestra como en el corolario 2.3. Si todas las g_k son H-convexas,

$$(\sup_{k\in K} g_k)^c= (\sup_{k\in K} g_k^{cc})^c \leq (\sup_{k\in K} g_k^c)^{cc} \leq \sup_{k\in K} g_k^c.$$

Proposición 3.5: Sea $g:R^n \to H$, A un automorfismo de R^n, A^* su adjunto. Entonces $(g\circ A)^c= g^c\circ A^{*-1}$.

Demostración: $(g\circ A)^c(x)= \sup_{x^*}(g\circ A)(x^*)(\langle x^*,x\rangle)=$

$$= \sup_{x^*} g(Ax^*)(\langle x^*,x\rangle)= \sup_{y^*} g(y^*)(\langle A^{-1}y^*,x\rangle)=$$

$$= \sup_{y^*} g(y^*)(\langle y^*,A^{*-1}x\rangle)= g^c(A^{*-1})(x)= (g^c\circ A^{-1})(x).$$

Corolario 3.6: Si g es H-convexa, el grupo de transformaciones ortogonales que deja invariante g coincide con el que deja invariante g^c.

Demostración: A deja invariante $g \Rightarrow g\circ A= g \Rightarrow (g\circ A)^c= g^c \Rightarrow$ $\Rightarrow g^c\circ A^{*-1}= g^c \Rightarrow g^c\circ A= g^c \Rightarrow$ A deja invariante g^c.

Recíprocamente, si A deja invariante g^c, por el corolario 2.11 también deja invariante $g^{cc}= g$.

Corolario 3.7: Si $\psi(x)= g(\alpha x)\ \forall x$, con $\alpha\neq 0$,entonces $\psi^c(x^*)= g^c((1/\alpha)x^*)$.

Demostración: Como en el corolario 2.12.

De manera similar a lo que sucede en la teoría clásica de la conjugación {9} la teoría aquí expuesta puede considerarse comola de las mejores desigualdades del tipo $g(x^*)(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x,x^*$, donde $f:R^n\to\bar{R}$, $g:R^n\to H$. Sea $W=\{(f,g)/f:R^n\to\bar{R},\ g:R^n\to H, g(x^*)(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x,x^*\}$. Los ''mejores'' pares $(f,g)\in W$ son aquellos para los que la desigualdad no puede ser mejorada, es decir, aquellos tales que $(f',g')\in W, f'\leq f, g'\geq g \Rightarrow f'=f, g'=g$. Dada $f:R^n\to\bar{R}$, se tiene:

$$(f,g)\in W \Leftrightarrow g(x^*)(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x,x^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(x^*)\in\{h\in H/h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x\}\ \forall x^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(x^*)\leq \sup\{h\in H/h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x\}\ \forall x^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(x^*)\leq f^c(x^*)\ \forall x^* \Leftrightarrow g\leq f^c.$$

Análogamente, dada $g:R^n\to H$,

$$(f,g)\in W \Leftrightarrow f(x)\geq g(x^*)(<x^*,x>)\ \forall x^*,x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\geq \sup_{x^*} g(x^*)(<x^*,x>)\ \forall x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\geq g^c(x)\ \forall x \Leftrightarrow f\geq g^c.$$

Por tanto, los mejores pares de W sonaquellos (f,g) tales que $g= f^c$, $f= g^c$, es decir, aquellos en los que f es H-convexa y g es su conjugada o, equivalentemente, aquellos en que g es H-convexa y $f= g^c$.

Definición: Sea $g:R^n\to H$, $x_0^*\in R^n$, $x\in R^n$. Se dirá que x es subgradiente de g en x_0^* si $g(x_0)(<x_0^*,x>)=\sup\limits_{x^*} g(x^*)(<x^*,x>)$.

<u>Proposición 3.8:</u> x es subgradiente de g en x_0^* si y solo si $g(x_0^*)(<x_0^*,x>)= g^c(x)$.

<u>Demostración:</u> Basta utilizar la definición de g^c.

Las proposiciones 2.7 y 3.8 caracterizan los subgradientes como aquellos vectores para los que la correspondiente desigualdad de Fenchel se verifica co signo igual.

El conjunto de subgradientes de g en x_0^* se representará por $\partial g(x_0^*)$.

<u>Proposición 3.9:</u> $x_0^*\in \partial_H f(x_0) \Rightarrow x_0 \in \partial f^c(x_0^*)$. Si f es H-convexa en x_0, hay equivalencia.

<u>Demostración:</u> Sea $x_0^*\in\partial_H f(x_0)$. Entonces, por las proposiciones 2.7, 1.3a) y 2.4 se cumple: $f^c(x_0^*)(<x_0^*,x_0>)=$ $= f(x_0)= f^0(x_0)= f^{cc}(x_0)$, luego $x_0\in\partial f^c(x_0^*)$ en virtud de prop.3.8.

Recíprocamente, si f es H-convexa en x_0 y $x_0\in\partial f^c(x_0^*)$, resulta: $f^c(x_0^*)(<x_0^*,x_0>)= f^{cc}(x_0)= f^0(x_0)= f(x_0)$. Por tanto, $x_0^*\in\partial_H f(x_0)$.

<u>Proposición 3.10:</u> $x_0\in\partial g(x_0^*) \Rightarrow x_0^*\in\partial_H g^c(x_0)$. Si g es H-convexa en x_0^* (es decir, $g^{cc}(x_0^*)= g(x_0^*)$), hay equivalencia.

<u>Demostración:</u> Sea $x_0\in \partial g(x_0^*)$. Por las proposiciones 3.1c), 2.1b) y 3.8 resulta: $g(x_0^*)(<x_0^*,x_0>)\leq g^{cc}(x_0^*)(<x_0^*,x_0>)\leq$ $\leq g^c(x_0^*)= g(x_0^*)(<x_0^*,x_0>)$. Entonces $g^{cc}(x_0^*)(<x_0^*,x_0>)=$ $= g^c(x_0)$ y el resultado se sigue de prop.2.7.

Si g es H-convexa en x_0^*, y $x_0 \in \partial_H g^c(x_0^*)$, se tiene: $g(x_0^*)(\langle x_0^*, x_0\rangle) = g^{cc}(x_0^*)(\langle x_0^*, x_0\rangle) = g^c(x_0)$ Basta pues aplicar prop.3,8.

<u>Proposición 3.11:</u> Sean $g: R^m \to H$, $A: R^n \to R^m$ lineal, $A^*: R^m \to R^n$ la aplicación adjunta de A. Entonces $\partial(g \circ A)(x_0^*) \supset A^* \partial g(Ax_0^*)$ para todo x_0^*.

<u>Demostración:</u> Sea $y \in \partial g(Ax_0^*)$. Se verifica:

$$(g\circ A)(x_0^*)(\langle x_0^*, A^* y\rangle) \leq \sup_{x^*} (g\circ A)(x^*)(\langle x^*, A^* y\rangle) =$$
$$= \sup_{x^*} g(Ax^*)(\langle Ax^*, y\rangle) < \sup_{y^*} g(y^*)(\langle y^*, y\rangle) =$$
$$= g(Ax_0^*)(\langle Ax_0^*, y\rangle) = (g\circ A)(x_0^*)(\langle x_0, A^* y\rangle).$$ Laigualdad de los dos primeros términos significa que $A^* y \in \partial(g\circ A)(x_0)$.

<u>Corolario 3.12:</u> Sean $g: R^n \to H$, A un automorfismo de R^n. Entonces $\partial(g\circ A)(x_0^*) = A^* \partial g(Ax_0^*)$ $\forall x_0$.

<u>Demostración:</u> análoga a la del corolario 1.5.

<u>Proposición 3.13:</u> $\partial g(x_0^*) \subset \partial g^{cc}(x_0)$. Si g es H-convexa en x_0 se verifica la igualdad.

<u>Demostración:</u> Aplicando las prop.3.10 y 3.9 se obtiene: $x \in \partial g(x_0^*) \Rightarrow x_0^* \in \partial_H g^c(x) \Rightarrow x \in \partial g^{cc}(x_0^*)$. Recíprocamente, $x \in \partial g^{cc}(x_0^*) \Rightarrow x_0^* \in \partial g^c(x)$. Si g es H-convexa en x_0 esto último implica que $x \in \partial g(x_0^*)$.

<u>4.RELACIONES ENTRE LAS DIFERENTES NOCIONES DE H-CONVEXIDAD</u>

<u>Proposición 4.1:</u> $H_1 \subset H_2 \Rightarrow$ Toda función H_1-convexa es H_2-convexa.

Demostración:

$\Phi^n_{H_1}= \{\varphi:R^n\to\bar{R}/\varphi(x)= h(<x^*,x>)$ para algún $h\in H_1, x^*\in R^n\}\subset$
$\subset\{\varphi:R^n\to\bar{R}/\varphi(x)= h(<x^*,x>)$ para algún $h\in H_2, x^*\in R^n\}= \Phi^n_{H_2}$.

Si f es H_1-convexa, es el supremo de funciones pertenecientes a $\Phi^n_{H_1}$ y, por tanto, a $\Phi^n_{H_2}$, luego también es H_2-convexa.

Corolario 4.2: Sea F la familia de todas las funciones $h:R\to\bar{R}$. Condición necesaria y suficiente para que una función sea H-convexa para alguna familia H es que sea F-convexa.

Proposición 4.3: Sea $f:R^n\to\bar{R}$, f^c la F-conjugada de f. Entonces $f^c(x^*)(t)= \inf\{f(x)/<x^*,x>= t\}\ \forall x^*,t$.

Demostración: Sea $h_0:R\to\bar{R}$ dada por $h_0(t)= \inf\{f(x)/<x\ ,x>=t\}$. $h_0\in F$, y dados $x^*,x_0\in R^n$ se tiene: $h_0(<x^*,x_0>)=$
$= \inf\{f(x)/<x^*,x>= <x^*,x_0>\}\leq f(x_0)$. Por tanto,
$h_0\leq \sup\{h/h\in H,\ h(<x^*,x>)\leq f(x)\ \forall x\}= f^c(x^*)$. Por otra parte, si $<x^*,x>= t$, se cumple que $f^c(x^*)(t)= f^c(x^*)(<x^*,x>)$ $\leq f(x)$, luego $f^c(x^*)(t)\leq \inf\{f(x)/<x^*,x>= t\}= h_0(t)$, es decir, $f^c(x^*)\leq h_0$, de donde la igualdad.

Al ser F la familia de todas las funciones, cualquier número distinto de cero verifica la hipótesis de la prop.2.13. Asimismo F cumple las hipótesis de la prop.2.14.

Si es preciso especificar respecto de que familia se considera la función conjugada, se escribirá f^c_H.

Proposición 4.4; $H_1 \subset H_2 \Rightarrow f^c_{H_1} \leq f^c_{H_2}$, $\partial_{H_1} f(x_0) \subset \partial_{H_2} f(x_0)$ $\forall x_0$

Demostración: Dado $x^* \in R^n$, $f^c_{H_1}(x^*) \doteq \sup\{h/h \in H_1, h(\langle x^*,x\rangle) \leq$ $\leq f(x)\ \forall x\} \leq \sup\{h/h \in H_2,\ h(\langle x^*,x\rangle) \leq f(x)\ \forall x\} = f^c_{H_2}(x^*)$.

El enunciado relativo a los subdiferenciales es evidente a partir de la definición.

Corolario 4.5: $\forall H$, $f^c_H(x^*)(t) \leq \inf\{f(x)/\langle x^*,x\rangle = t\}$.

$x^* \in \partial_H f(x_0) \Rightarrow \inf\{f(x)/\langle x^*,x\rangle = \langle x^*,x_0\rangle\} = f(x_0)$.

Demostración: Se considera en la proposición $H_1 = H$, $H_2 = F$ y se aplican las prop.4.3 y 2.7.

Proposición 4.6: $H_1 \subset H_2 \Rightarrow f^c_{H_1}(x^*) = \sup\{h/h \in H_2, h \leq f^c_{H_2}(x^*)\}$ $\forall x^*$.

Demostración: En virtud de la definición de $f^c_{H_1}$, basta demostrar que para $h \in H_1$,

$$h \leq f^c_{H_2}(x^*) \Longleftrightarrow h(\langle x^*,x\rangle) \leq f(x)\ \forall x.$$

Si $h \in H_1$ es tal que $h \leq f^c_{H_2}(x^*)$, entonces para todo x se verifica: $h(\langle x^*,x\rangle) \leq f^c_{H_2}(x^*)(\langle x^*,x\rangle) \leq f(x)$. Recíprocamente, si $h \in H_1$ cumple $h(\langle x^*,x\rangle) \leq f(x)$ $\forall x$, por ser $H_1 \subset H_2$ se tiene: $h \leq \sup\{h/h \in H_2, h(\langle x^*,x\rangle) \leq f(x)\ \forall x\} =$ $= f^c_{H_2}(x^*)$.

Corolario 4.7: $\forall H, f^c_H(x^*)(t_0) = \sup\{h(t_0)/h \in H, h(t) \leq$ $\leq \inf\{f(x)/\langle x^*,x\rangle = t\}\ \forall t\}$.

Demostración: Basta aplicar la proposición con $H_1 = H$, $H_2 = F$, y tener en cuenta la fórmula que da la prop.4.3.

Proposición 4.8: $f: R^n \to \overline{R}$ es F-convexa si y solo si sus conjuntos de nivel son intersecciones de complementatarios de hiperplanos.

Demostración: Sea $f:R^n \to \overline{R}$ F-convexa. Sea $\lambda \in R$, $x_0 \notin S_\lambda(f)$. Esto significa que $\lambda < f(x_0) = f^{cc}(x_0) = \sup_{x^*} f^c(x^*)(<x^*, x_0>)$ $= \sup_{x^*} \inf\{f(x)/<x^*,x> = <x^*,x_0>\}$. Por tanto existe x^* tal que $\inf\{f(x)/<x^*,x>=<x^*,x_0>\} > \lambda$. El hiperplano de ecuación $<x^*,x> = <x^*,x_0>$ no corta a $S_\lambda(f)$ y pasa por x_0, de donde su complementario contiene a $S_\lambda(f)$ y no a x_0 (si $x^* = 0$, se deduce $S_\lambda(f) = \emptyset$ y puede tomarse cualquier hiperplano que pase por x_0).

Recíprocamente, si todos los conjuntos de nivel de f son intersección de complementarios de hiperplanos, dado $x_0 \in R^n$, $\lambda < f(x_0)$, por ser $x_0 \notin S_\lambda(f)$ existe $x_0^* \neq 0$ tal que el hiperplano de ecuación $<x_0^*,x> = <x_0^*,x_0>$ no corta a $S_\lambda(f)$. Entonces $f^{cc}(x_0) = \sup_{x^*} f^c(x^*)(<x^*,x_0>) \geq$ $\geq f^c(x_0^*)(<x_0^*,x_0>) = \inf\{f(x)/<x_0^*,x> = <x_0^*,x_0>\} \geq \lambda$. Por tanto, $f^{cc}(x_0) \geq f(x_0) \geq f^{cc}(x_0)$ y f es F-convexa en x_0.

Corolario 4.9: Si $f:R^n \to \overline{R}$ es H-convexa para alguna familia H, sus conjuntos de nivel son intersecciones de complementarios de hiperplanos.

Demostración: Se aplica el corolario 4.2 seguido de la proposición 4.8.

CAPITULO II

H-DUALIDAD EN PROGRAMACION MATEMATICA

1. PROBLEMAS DUALES

Dado un problema de programación matemática, ''minimizar f(x) sujeto a $x \in C \subset R^n$'', con $f: R^n \to R \cup \{+\infty\}$, $C \subset dom(f)$, siempre puede considerarse como un problema no restringido ''minimizar $\tilde{f}(x)$'' definiendo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$.
En la teoría de la dualidad convexa, los problemas duales se obtienen a partir del concepto de perturbación {1}. A cada vector $w \in R^k$ se le asocia un problema perturbado, ''minimizar $\tilde{f}_w(x)$'' de tal manera que el problema original corresponde a la perturbación 0, es decir, $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$. Su dual se obtiene considerando la función conjugada de ϕ, definida por $\phi(x,w) = \tilde{f}_w(x)$. En este párrafo se seguirá un esquema similar utilizando las funciones H-conjugadas introducidas rn el capítulo anterior.

La función H-conjugada de ϕ es $\phi^c: R^n x R^k \to H$, dada por:
$\phi^c(x^*,w^*) = \sup\{h/h \in H, h(<x^*,x>+<w^*,w>) \leq \phi(x,w)\ \forall (x,w) \in R^{n+k}\}$.
En virtud de la desigualdad de Fenchel se tiene:
$\phi^c(x^*,w^*)(<x^*,x>+<w^*,w>) \leq \phi(x,w)\ \forall x,w,x^*,w^*$.
Tomando $x^* = 0$, $w = 0$ resulta :

$$\phi^c(0,w^*)(0) \leq \phi(x,0)\ \forall x,w^*.$$

En lo sucesivo se llamará primal al problema ''minimizar $\phi(x,0)$'', y H-dual, o simplemente dual, al problema ''maximizar $\phi^c(0,w^*)(0)$''.La desigualdad anterior puede enunciarse entonces como el siguiente teorema:

Teorema 1.1: El valor óptimo del problema primal es menor o igual que el del primal, es decir,

$$\sup_{w^*} \phi^c(0,w^*)(0) \leq \inf_x \phi(x,0)$$

Corolario 1.2: Si $x_0 \in R^n$, $w_0^* \in R^k$ son tales que $\phi(x_0,0)=$ $= \phi^c(0,w_0^*)(0)$, entonces x_0 es una solución óptima del problema primal y w_0^* es una solución óptima del problema dual.

Definición: El primal se llamará consistente si existe x_1 tal que $\phi(x_1,0) < +\infty$. El dual se llamará consistente si existe w_1^* tal que $\phi^c(0,w_1^*)(0) > -\infty$. Un problema que no sea consistente se denominará inconsistente.

Corolario 1.3: $\inf_x \phi(x,0) = -\infty \Rightarrow$ el dual es inconsistente.

$\sup_{w^*} \phi^c(0,w^*)(0) = +\infty \Rightarrow$ el primal es inconsistente.

Definición: La función de perturbación será $P: R^k \to \bar{R}$ dada por: $P(w) = \inf_x \phi(x,w)$.

Según esta definición, el valor óptimo del problema primal coincide con el valor de la función de perturbación en 0.

Proposición 1.4: $\phi^c(0,w^*) = P^c(w^*)$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\phi^c(0,w^*) &= \sup\{h/h\in H, h(<0,x>+<w^*,w>) \leq \phi(x,w)\ \forall x,w\} = \\
&= \sup\{h/h\in H,\ h(<w^*,w>) \leq \phi(x,w)\ \forall x,w\} = \\
&= \sup\{h/h\in H, h(<w^*,w>) \leq \inf_x \phi(x,w)\ \forall w\} = \\
&= \sup\{h/h\in H,\ h(<w^*,w>) \leq P(w)\ \ \forall w\} = P^c(w^*).
\end{aligned}$$

Según esta proposición el problema dual también puede enunciarse ''maximizar $P^c(w^*)(0)$''.

Proposición 1.5: Los valores óptimos del primal y el dual coinciden si y solo si la función de perturbación es H-convexa en 0.

Demostración: $P(0)= \inf_x \phi(x,0)$. Por otra parte, $P^0(0)=$ $= P^{cc}(0)= \sup_{w^*} P^c(w^*)(<w^*,0>)= \sup_w \phi^c(0,w^*)(0)$. Basta pues tener en cuenta la definición de H-convexidad en 0.

Proposición 1.6: El conjunto de soluciones óptimas del problema dual coincide con el H-subdiferencial de la H-envolvente de la función de perturbación en 0.

Demostración: w_0 es solución óptima del dual

$$P^c(w_0)(0)= \sup_{w^*} P^c(w^*)(0) \Longleftrightarrow P^c(w_0^*)(0)= P^{cc}(0) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow P^{0c}(w_0^*)(0)= P^0(0) \Longleftrightarrow w_0^* \in \partial_H P^0(0).$$

Corolario 1.7: $w_0^* \in \partial_H P(0) \Longleftrightarrow w_0$ es solución óptima del dual y P es H-convexa en 0.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y de la prop.1.3 del capítulo I.

Teorema 1.8 (Dualidad fuerte): El problema dual tiene alguna solución óptima y los valores óptimos del primal y el dual coinciden si y solo si el H-subdiferencial de la función de prturbación en 0 no es vacío. En este caso, el conjunto de soluciones duales óptimas es dicho H-subdiferencial.

Demostración: Basta utilizar las prop.1.6,1.5 y cor.1.7.

2. LAGRANGIANOS

Dado $x \in R^n$, la función $\phi_x : R^k \to \bar{R}$ será la definida por: $\phi_x(w) = \phi(x,w)$.

Definición: El H-lagrangiano asociado a la familia de problemas perturbados definida por ϕ, será $L : C \times R^k \to \bar{R}$ dado por: $L(x,w^*) = \phi_x^c(w^*)(0)$.

Proposición 2.1: $\phi(x,0) \geq \sup_{w^*} L(x,w^*)\ \forall x \in C$. La igualdad se verifica si y solo si ϕ_x es H-convexa en 0.

Demostración: $\phi_x(0) = \phi(x,0)$. Por otra parte, $\phi_x^0(0) =$
$= \phi_x^{cc}(0) = \sup_{w^*} \phi_x^c(w^*)(\langle w^*,0\rangle) = \sup_{w^*} \phi_x^c(w^*)(0) = \sup_{w^*} L(x,w^*)$.

Corolario 2.2: $P(0) \geq \inf_x \sup_{w^*} L(x,w^*)$. Si todas las funciones ϕ_x son H-convexas en 0, se verifica la igualdad.

La proposición anterior sugiere averiguar en que condiciones las funciones ϕ_x son H-convexas en 0.

Dado $t_0 \in R$, sea $s_{t_0} : R \to R$ la función definida por: $s_{t_0}(t) = t_0 + t$. Diremos que H es cerrada por traslaciones si se verifica: $h \in H, t_0 \in R \Rightarrow h \circ s_{t_0} \in H$ (la implicación puede sustituirse por equivalencia ya que $h = h \circ s_{t_0} \circ s_{-t_0}$).

Lema 2.3: Si H es cerrada por traslaciones,

$$\phi^c(x^*,w^*) \circ s_{\langle x^*,x_0\rangle} \leq \phi_{x_0}^c(w^*)\ \forall x^*,w^*,x_0.$$

Demostración: $\phi^c(x^*,w^*) \circ s_{\langle x^*,x_0\rangle} =$

$= \sup\{h / h \in H, h(\langle x^*,x\rangle + \langle w^*,w\rangle) \leq \phi(x,w)\ \forall x,w\} \circ s_{\langle x^*,x_0\rangle} \leq$

$\leq \sup\{h / h \in H, h(\langle x^*,x_0\rangle + \langle w^*,w\rangle) \leq \phi(x_0,w)\ \forall w\} \circ s_{\langle x^*,x_0\rangle} =$

$= \sup\{h \circ s_{\langle x^*,x_0\rangle} / h \in H, h \circ s_{\langle x^*,x_0\rangle}(\langle w^*,w\rangle) \leq \phi_{x_0}(w)\ \forall w\} =$

$= \sup\{h / h \in H, h(\langle w^*,w\rangle) \leq \phi_{x_0}(w)\ \forall w\} = \phi_{x_0}^c(w^*)$.

Proposición 2.4: Si H es cerrada por traslaciones,

$(\phi^{cc})_{x_0} \leq (\phi_{x_0})^{cc} \forall x_0$.

Demostración: Dado $w \in R^k$, $(\phi^{cc})_{x_0}(w) = \phi^{cc}(x_0,w) =$

$= \sup\limits_{x^*,w^*} \phi^c(x^*,w^*)(<x^*,x_0>+<w^*,w>) =$

$= \sup\limits_{x^*,w^*} (\phi^c(x^*,w^*) \circ s_{<x^*,x_0>})(<w^*,w>) \leq$

$\leq \sup\limits_{w^*} \phi^c_{x_0}(w^*)(<w^*,w>) = (\phi_{x_0})^{cc}(w)$.

Corolario 2.5: Supongamos que H sea cerrada por traslaciones. Si ϕ es H-convexa en (x_0,w), entonces ϕ_{x_0} es H-convexa en w.

Demostración: $\phi_{x_0}(w) = \phi(x_0,w) = \phi^0(x_0,w) = \phi^{cc}(x_0,w) =$
$= (\phi^{cc})_{x_0}(w) \leq (\phi_{x_0})^{cc}(w) = (\phi_{x_0})^0(w) \leq \phi_{x_0}(w)$.

Corolario 2.6: Si H es cerrada por traslaciones y ϕ es H-convexa en $(x,0)$, entonces $\phi(x,0) = \sup\limits_{w^*} L(x,w^*)$.

Demostración: Se aplica el corolario 2.5 y la prop.2.1.

Corolario 2.7: Si H es cerrada por traslaciones y ϕ es H-convexa en $(x,0)$ $\forall x$, entonces $P(0) = \inf\limits_{x} \sup\limits_{w^*} L(x,w^*)$.

De la misma manera que en los enunciados anteriores se establecen las relaciones existentes entre el lagrangiano y la función objetivo del problema primal, a continuación se estudiarán las que hay entre el lagrangiano y la función objetivo del problema dual.

Proposición 2.8: $\phi^c(0,w^*) = \sup\{h/h \in H, h \leq \inf\limits_{x} \phi^c_x(w^*) \quad \forall w^*\}$.

Si H es cerrada para el ínfimo, $\phi^c(0,w^*) = \inf\limits_{x} \phi^c_x(w^*)$.

Demostración: Por definición, $\phi^c(0,w^*) \in H$. Además de la desigualdad de Fenchel se deduce:

$\phi^c(0,w^*)(<w^*,w>)= \phi^c(0,w^*)(<0,x>+<w^*,w>)\leq \phi(x,w)=\phi_x(w)\ \forall x,w.$ Por tanto, $\forall x\ \phi^c(0,w^*)\leq \sup\{h/h\in H, h(<w^*,w>)\leq \phi_x(w)\ \forall w\}= = \phi_x^c(w^*)$, de donde $\phi^c(0,w^*)\leq \inf_x \phi_x^c(w^*)$. Sea $h_0\in H$ tal que $h_0\leq \inf_x \phi_x^c(w^*)$. $\forall x_0,w_0$ se tiene: $h_0(<0,x_0>+<w^*,w_0>)= = h_0(<w^*,w_0>)\leq \inf_x \phi_x^c(w^*)(<w^*,w_0>)\leq \inf_x \phi_x(w_0)\leq \phi_{x_0}(w_0)= = \phi(x_0,w_0)$. Por tanto,

$h_0\leq \sup\{h/h\in H, h(<0,x>+<w^*,w>)\leq \phi(x,w)\ \forall x,w\}= \phi^c(0,w^*)$.

Si H es cerrada para el ínfimo, dado que $\phi_x^c(w^*)\in H\ \forall x$, también $\inf_x \phi_x^c(w^*)\in H$. En consecuencia, $\inf_x \phi_x^c(w^*)= = \sup\{h/h\in H, h\leq \inf_x \phi_x^c(w^*)\}= \phi^c(0,w^*)$.

__Corolario 2.9:__ $\phi^c(0,w^*)(0)\leq \inf_x L(x,w^*)\ \forall w^*\in R^k$. Si H es cerrada para el ínfimo, se verifica la igualdad.

__Demostración:__ $\phi^c(0,w^*)(0)= \sup\{h(0)/h\in H, h\leq \inf_x \phi_x^c(w^*)\}\leq \leq \inf_x \phi_x^c(w^*)(0)= \inf_x L(x,w^*)$. Si H es cerrada para el ínfimo, $\phi^c(0,w^*)(0)= \inf_x \phi_x^c(w^*)(0)= \inf_x L(x,w^*)$.

__Corolario 2.10:__ $P^0(0)\leq \sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*)$. Si H es cerrada para el ínfimo, se verifica la igualdad.

__Demostración:__ $P^0(0)= P^{cc}(0)= \sup_{w^*} P^c(w^*)(<w^*,0>)= = \sup_{w^*} \phi^c(0,w^*)(0)\leq \sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*)$. Si H es cerrada para el ínfimo, la última relación puede sustituirse por igualdad.

__Proposición 2.11:__ P es H-convexa en $0\Rightarrow \sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*)= = P(0)$. Si H es cerrada para el ínfimo, el recíproco es cierto.

__Demostración:__ Si P es H-convexa en 0, $P(0)= P^0(0)\leq$

$\sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*) \leq \inf_x \sup_{w^*} l(x,w^*) \leq P(0)$. Si H es cerrada para el ínfimo, por el corolario 2.10 resulta: $P(0) = \sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*) = P^0(0)$ y P es H-convexa en 0.

Proposición 2.12: $w_0 \in \partial_H P(0) \Rightarrow \inf_x L(x,w_0^*) = P(0)$. Si H es carrada para el ínfimo, el recíproco es cierto.

Demostración: Si $w_0^* \in \partial_H P(0)$, utilizando los cor.2.9 y 2.2 se obtiene: $P(0) = P^c(w_0)(\langle w_0^*,0\rangle) = \phi^c(0,w_0^*)(0) \leq$ $\leq \inf_x L(x,w_0^*) \leq \inf_x \sup_{w^*} L(x,w^*) \leq P(0)$. Recíprocamente, si H es cerrada para el ínfimo y $\inf_x L(x,w_0^*) = P(0)$, por el cor.2.9 $P(0) = \phi^c(0,w_0^*)(0) = P^c(w_0^*)(\langle w_0^*,0\rangle)$, con lo que $w_0^* \in \partial_H P(0)$.

Definición: (x_0,w_0^*) es un punto de silla de L si $\forall x,w$ $L(x_0,w^*) \leq L(x_0,w_0^*) \leq L(x,w_0^*)$, o equivalentemente si $\sup_{w^*} L(x_0,w^*) = \inf_x L(x,w_0^*)$ o, también, si $\sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*) = L(x_0,w_0^*) = \inf_x \sup_{w^*} L(x,w^*)$.

Teorema 2.13: $\phi(x_0,0) = \phi^c(0,w_0^*)(0) \Rightarrow (x_0,w_0)$ es un punto de silla de L. Si ϕ_{x_0} es H-convexa en 0 y H es cerrada para el ínfimo, el recíproco es cierto. Además, $L(x_0,w_0) = \phi(x_0,0) = \phi^c(0,w_0^*)(0)$.

Demostración: Por el cor.2.9 y la prop.2.1 se tiene: $\phi^c(0,w_0^*)(0) \leq \inf_x L(x,w_0^*) \leq L(x_0,w_0^*) \leq \sup_{w^*} L(x_0,w^*) \leq \phi(x_0,0)$. Entonces, $\phi(x_0,0) = \phi^c(0,w_0^*) \leq \inf_x L(x,w_0^*) = \sup_{w^*} L(x_0,w^*)$, que es la condición de punto de silla de L para (x_0,w_0^*). También se obtiene: $\phi^c(0,w_0^*)(0) = L(x_0,w_0^*) = \phi(x_0,0)$.

Recíprocamente, si (x_0,w_0^*) es un punto de silla de

L, ϕ_{x_0} es H-convexa en 0 y H es cerrada para el ínfimo, por el cor.2.9 y la prop.2.1 se concluye que

$\phi^c(0,w_0^*)(0)= \inf_x L(x,w_0^*)= \sup_{w^*} L(x_0,w^*)= \phi(x_0,0)$.

Corolario 2.14: Sea x_0 una solución óptima del problema primal. $w_0^* \in \partial_H P(0) \Rightarrow (x_0,w_0)$ es un punto de silla de L. Si H es cerrada para el ínfimo y ϕ_{x_0} es H-convexa en 0, el recíproco es cierto.

Demostración: Resulta del teorema anterior y del de dualidad fuerte.

3. LAGRANGIANOS EN EL CASO DE PERTURBACIONES VERTICALES

En todo este párrafo se supondrá que ϕ viene dada por perturbaciones verticales, es decir,

$$\phi(x,w)= \begin{cases} f(x) & \text{si } g(x)\geq w \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

donde $g: R^n \to R^k$ y la desigualdad en R^k significa componente a componente. Supondremos además que H verifica las siguientes condiciones:

a) Todas las funciones de H son crecientes.

b) Cualquier $h \in H$ es el supremo de funciones pertenecientes a H que no toman el valor $+\infty$ en 0.

c) $h \in H$, $k: R \to R$ constante $\Rightarrow h+k \in H$.

Sea $h_0= \inf\{h/h \in H, h(0)= 0\}$. Esta función no pertenece necesariamente a H en el caso de que H no sea cerrada para el ínfimo. No obstante, también es una función creciente.

Proposición 3.1: Bajo las hipótesis anteriores,

$$L(x,w^*)=\begin{cases} f(x)-h_0(\langle w^*,g(x)\rangle) & \text{si } w\geq 0 \\ f(x)-h_0^0(+\infty) & \text{si } w\not\geq 0 \end{cases}.$$

(Por definición, $h_0(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} h_0(t) = \sup_t h_0(t)$).

Demostración: $L(x,w^*)=\phi_x^c(w^*)(0)=\sup\{h(0)/h\in H, h(\langle w^*,w\rangle)\leq$
$\leq \phi_x(w)\ \forall w\}=\sup\{h(0)/h\in H, h(\langle w^*,w\rangle)\leq \phi(x,w)\ \forall w\}=$
$=\sup\{h(0)/h\in H, h(\langle w^*,w\rangle)\leq f(x) \text{ si } w\leq g(x)\}=$
$=\sup\{h(0)/h\in H, \sup_{w\leq g(x)} h(\langle w^*,w\rangle)\leq f(x)\}$. Por a),
$\sup_{w\leq g(x)} h(\langle w^*,w\rangle)=h(t_0)$, siendo $t_0=\begin{cases}\langle w^*,g(x)\rangle & \text{si } w^*\geq 0\\ +\infty & \text{en caso contrario}\end{cases}$.
Por b), $L(x,w^*)=\sup\{h(0)/h\in H, h(0)< +\infty, h(t_0)\leq f(x)\}$.
Por c), $L(x,w^*)=\sup\{c/h(t_0)+c\leq f(x)\}$ para algún $h\in H, h(0)=0\}$
$=\sup\{f(x)-h(t_0)/h\in H, h(0)=0\}=f(x)-h_0(t_0)$.

Por la condición a), tenemos que $h_0(\langle w^*,g(x)\rangle)\leq h_0(+\infty)$ $\forall x,w^*$. De aquí se sigue que $L(x,w_1^*)\geq L(x,w_2^*)$ si $w_1^*\geq 0$, $w_2\not\geq 0$. Según esto, $\sup_{w^*} L(x,w^*)=\sup_{w^*\geq 0} L(x,w^*)$.

En lo sucesivo se supondrá que existe en H alguna función h tal que $h(0)>-\infty$. Esto, junto con las condiciones b) y c) anteriores, garantiza que $h_0(0)=0$. La hipótesis contraria carece de interés, pues obligaría a h_0 a ser constante de valor $+\infty$ con lo que L también sería constante, de valor $-\infty$.

La siguiente proposición muestra como para un problema consistente con función de perturbación H-convexa en 0, cada solución dual óptima caracteriza el conjunto de soluciones óptimas del primal.

Proposición 3.2: Supongamos que P es H-convexa en 0.

Sea $w_0^* \geq 0$ una solución dual óptima, y sea x_0 tal que $g(x_0) \geq 0$. Entonces x_0 es una solución óptima del primal si y solo si es el mínimo absoluto de $f(x)-h_0(<w_0^*,g(x)>)$ y además $h_0(<w_0^*,g(x_0)>)= 0$.

Demostración: Por las prop.2.11 y 1.5, $\sup_{w^*} \inf_x L(x,w^*)= P(0)= \phi^c(0,w_0^*)(0)$. Si x_0 es una solución óptima del primal, se tiene: $f(x_0)- h_0(<w_0^*,g(x_0)>)= L(x_0,w_0^*) \leq$ $\leq \sup_{w^*} L(x_0,w^*) \leq \phi(x_0,0)= P(0)= \phi^c(0,w_0^*)(0) \leq \inf_x L(x,w_0^*) \leq$ $\leq L(x,w_0^*)= f(x)-h_0(<w_0^*,g(x)>)$ $\forall x$. Además, para $x= x_0$ todas las desigualdades anteriores han de verificarse con signo igual. De aquí se deduce que $f(x_0)-h_0(<w_0^*,g(x_0)>)$ $= \phi(x_0,0)= f(x_0)$, con lo que ha de ser $h_0(<w_0^*,g(x_0)>)=0$.

Recíprocamente, si x_0 minimiza la expresión $f(x)-h_0(<w_0^*,g(x\ )>)$ y satisface $h_0(<w_0^*,g(x_0)>)= 0$, dado cualquier x tal que $g(x) \geq 0$ se tiene: $f(x_0)=$ $= f(x_0)-h_0(<w_0^*,g(x_0)>)= \inf_x \{f(x)-h_0(<w_0^*,g(x)>)\} \leq$ $\leq f(x)-h_0(<w^*,g(x)>) \leq f(x)-h_0(0)= f(x)$. Por tanto, x_0 es una solución óptima del problema primal.

Proposición 3.3: Supongamos que h_0 no toma el valor $-\infty$. Entonces, si el problema dual es consistente la función de perturbación tampoco toma el valor $-\infty$.

Demostración: Sea $w \in R^k$, x_0 tal que $g(x_0) \geq w$. Por ser el dual consistente existe w_1^* tal que $\phi^c(0,w_1^*)(0) > -\infty$. Se tiene: $f(x_0)-h_0(<w_2^*,w>) \geq f(x_0)-h_0(<w_2^*,g(x_0)>)=$ $= L(x_0,w_2^*) \geq L(x_0,w_1^*) \geq \inf_x L(x,w_1^*) \geq \phi^c(0,w_1^*)(0) > -\infty$, siendo $w_2^* \geq 0$. Por la hipótesis sobre h_0, $f(x_0)-h_0(<w_2^*,w>)$ es un número real, de donde $f(x_0) \geq \phi^c(0,w_1^*)(0)+h_0(<w_2^*,w>)$. Finalmente, $P(w) = \inf_x \phi(x,w) = \inf\{f(x)/g(x) \geq w\} \geq$

$\geq \phi^c(0,w_1)(0)+h_0(<w_2,w>) > -\infty$.

CAPITULO III

APLICACIONES DE LA TEORIA DE LA H-CONJUGACIÓN

1. CONJUGACIÓN EN ANÁLISIS CONVEXO

En todo este párrafo H será la familia de funciones $h_b : R \to \bar{R}$, con $b \in \bar{R}$, $h_b(t) = t-b$ $\forall t$. Esta familia es cerrada para el supremo puntual, puesto que si $\{b_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de $\bar{R}$, se tiene $\sup\{h_{b_i}/i \in I\} = h_b$, con $b = \inf\{b_i/i \in I\}$. Φ_H^n es en este caso el conjunto de las funciones afines $R^n \to \bar{R}$, junto con las constantes de valor $\pm\infty$. Así pues, las funciones H-convexas son en este caso las convexas s.c.i. propias (admitiremos como tales las funciones constantes $\pm\infty$). La noción de H-subgradiente coincide en este caso con la de subgradiente del análisis convexo, así que los enunciados del párrafo 1 del capítulo I se convierten en los clásicos. 1 .

La definición general de H-conjugación proporciona:

$$
\begin{aligned}
f^c(x^*) &= \sup\{h_b/b \in \bar{R},\ h_b(\langle x^*, x\rangle) \leq f(x)\ \forall x \in R^n\} = \\
&= \sup\{h_b/b \in \bar{R},\ \langle x^*, x\rangle - b \leq f(x)\ \forall x \in R^n\} = \\
&= \sup\{h_b/b \in \bar{R},\ b \geq \langle x^*, x\rangle - f(x)\ \forall x\ R^n\} = \\
&= \sup\{h_b/b \in \bar{R},\ b \geq \sup_x\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\}\} = \\
&= \sup\{h_b/b \in \bar{R},\ b \geq f^*(x^*)\} = h_{f^*(x^*)},
\end{aligned}
$$

donde f^* es la conjugada de f habitual en análisis convexo.

Dado que H se identifica con R mediante la biyección

$b \leftrightarrow h_b$, las funciones $g: R^n \to H$ pueden considerarse funciones $g: R^n \to \bar{R}$ con la identificación $h_{\tilde{g}(x^*)} = g(x^*)$. De esta manera resulta: $\widetilde{f^c} = f^*$, $g^c(x) = \sup_{x^*} g(x^*)(\langle x^*, x\rangle) = $
$= \sup_{x^*} h_{\tilde{g}(x^*)}(\langle x^*, x\rangle) = \sup_{x^*}\{\langle x^*, x\rangle - \tilde{g}(x^*)\} = \tilde{g}^*(x)$, es decir, las H-conjugadas y las conjugadas convexas coinciden si se identifican las funciones a valores en H con las funciones reales asociadas a éllas. En particular se tiene: $f^{cc} = (\widetilde{f^c})^* = f^{**}$, o sea, que las biconjugadas de f coinciden.

La desigualdad de Fenchel establecida en la prop.2.1a) del capítulo I puede escribirse en este caso:
$\langle x^*, x_0\rangle - f^*(x^*) \leq f(x_0)$, lo cual justifica el nombre. Todos los enunciados del párrafo 2 se traducen de esta manera en propiedades clásicas de la función f^*. Además la familia H es completa en 0.

Para las funciones $g: R^n \to H$, las biconjugadas verifican: $g^{cc} = (\tilde{g}^*)^c = h_{\tilde{g}^{**}}$, con loque g es H-convexa $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow g^{cc} = g \Longleftrightarrow h_{\widetilde{g^{cc}}} = h_{\tilde{g}} \Longleftrightarrow h_{\tilde{g}^{**}} = h_{\tilde{g}} \Longleftrightarrow \tilde{g}^{**} = \tilde{g} \Longleftrightarrow \tilde{g}$ es convexa s.c.i. propia. Así, las propiedades del párrafo 3 del capítulo I se convierten también en las de la conjugada convexa, habida cuenta de que los subgradientes de g coinciden con los clásicos de su función real asociada, como puede verse fácilmente interpretando la prop.3.8. Conviene observar que la H-conjugación conserva el orden en lugar de invertirlo como la conjuga-

da convexa. El motivo es que la identificación de $\bar{R}$ con H lo invierte. En cuanto a la segunda desigualdad de Fenchel (prop.3.1.b)), en términos de la función real asociada a g diría: $<x^*,x_0>-\tilde{g}(x^*)\leq \tilde{g}^*(x_0)$, que es otra vez la desigualdad clásica.

La función objetivo de nuestro problema dual es $\phi^c(0,w^*)(0)= 0-\phi^*(0,w^*)= -\phi^*(0,w^*)$, con lo que coincide con la formulación de {1}. Lo mismo sucede con el H-lagrangiano, que es $L(x,w^*)= \phi_x^c(w^*)(0)= -\phi_x^*(w^*)=$ $= -\sup_w\{<w^*,w>-\phi_x(w)\}=\inf_w\{\phi(x,w)-<w^*,w>\}$. Todas las propiedades del párrafo 2 del capítulo II son íntegramente aplicables ya que si $b\in\bar{R}$, $t_0\in R$, se tiene que $h_b\circ s_{t_0}=$ $= h_{b-t_0}$, es decir, que H es cerrada por traslaciones, y $\inf\{h_{b_i}/i\in I\}= h_b$ con $b= \sup\{b_i/i\in I\}$, o sea que H es cerrada para el ínfimo. Estas propiedades son asímismo las habituales de la dualidad convexa.

En el caso de perturbaciones verticales, se pueden aplicar los resultados del último párrafo del capítulo anterior ya que se cumplen las tres condiciones requeridas. La función h_0 es en este caso la inclusión canónica , con lo que el lagrangiano que resulta es el habitual: $L(x,w^*)= \begin{cases} f(x)-<w^*,g(x)> & \text{si } w^*\geq 0 \\ -\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$. Asímismo es aplicable la prop.3.3 por ser h_0 finita.

2. CASO EN QUE H ES LA FAMILIA DE LAS FUNCIONES CRECIENTES CONTÍNUAS POR LA IZQUIERDA

Esta familia es cerrada para el supremo, puesto que el supremo de funciones crecientes es creciente, y pa- y para tales funciones la continuidad por la izquierda es equivalente a la semicontinuidad inferior, que también se conserva por el paso al supremo.

En {8}, Martos define las funciones quasimónotonas (sobre un conjunto convexo X R^n) como aquellas que son quasiconvexas y quasicóncavas. Este nombre queda justificado por la siguiente proposición:

Proposición 2.1: $h:R\to\bar{R}$ es mónotona si y solo si es quasimonótona.

Demostración: Supongamos en primer lugar que h es monótona. Sean $x_1,x_2\in R$, $x_1< x_2$, $t\in[0,1]$. Si h es creciente, $\min\{h(x_1), h(x_2)\}= h(x_1)\leq h((1-t)x_1+tx_2)\leq h(x_2)=$ $= \max\{h(x_1),h(x_2)\}$. Si h es decreciente, $\min\{h(x_1),h(x_2)\}$ $= h(x_2)\leq h((1-t)x_1+tx_2)\leq h(x_1)= \max\{h(x_1),h(x_2)\}$. En cualquier caso, h es quasimonótona.

Recíprocamente, sea h quasimonótona. Si h es constante, es monótona. Supongamos que h no es constante. Existen $x_1< x_2$ tales que $h(x_1)\neq h(x_2)$. Examinemos el caso de que $h(x_1)< h(x_2)$. Sea $x<x'$. Si $x< x'\leq x_1< x_2$, ha de ser $h(x_1) \geq \min\{h(x'), h(x_2)\}$. Por tanto $h(x_1) \geq h(x')$, de donde $h(x') < h(x_2)$. Como también $h(x') \geq \min\{h(x), h(x_2)\}$ se obtiene $h(x') \geq h(x)$. Entonces h es creciente en la semirrecta $(-\infty, x_1]$. Si $x_1 \leq x < x' \leq x_2$, se tendrá $h(x') \geq$ $\geq \min\{h(x_1), h(x_2)\} = h(x_1)$. Además $h(x) \leq \max\{h(x_1), h(x')\} =$ $= h(x')$. Por tanto h es creciente en el intervalo $[x_1, x_2]$. Si $x_1 < x_2 \leq x < x'$, se ha de cumplir $h(x_2) \leq \max\{h(x_1), h(x)\}$, de donde $h(x_2) \leq h(x)$. Por tanto $h(x) > h(x_1)$. Por otra parte $h(x) \leq \max\{h(x_1), h(x')\}$. Esto obliga a que $h(x) \leq$ $\leq h(x')$, con lo que h es también creciente en la semirrecta $[x_2, +\infty)$.

Se ha visto pues que h es creciente. Si fuera $h(x_1) >$ $> h(x_2)$ se demostraría por análogo procedimiento que h es decreciente.

<u>Definición:</u> $f: R^n \to \bar{R}$ se llamará quasiafín si es quasimonótona sobre todo R^n.

<u>Proposición 2.2:</u> Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $\varphi \in \Phi_H^n$

b) φ es quasiafín s.c.i.

c) $\forall \lambda \in R$, $S_\lambda(\varphi)$ es un semiespacio cerrado (o bien $\emptyset$ o R^n).

<u>Demostración:</u>

a)$\Rightarrow$b)

Sea $\varphi(x) = h(\langle x^*, x\rangle)$ con $h \in H$, $x^* \in R^n$. Sean x_1, $x_2 \in R^n$, $t \in$

$\in [0,1]$. Supongamos $<x^*,x_1> \leq <x^*,x_2>$. Se verifica también: $<x^*,x_1> \leq <x^*, (1-t)x_1+tx_2> \leq <x^*,x_2>$. Aplicando h resulta: $\varphi(x_1) \leq \varphi((1-t)x_1+tx_2) \leq \varphi(x_2)$. Por tanto φ es quasiafín. También es s.c.i. por ser composición de h, que es s.c.i., con $<x^*,\cdot>$, que es contínua.

b)$\Rightarrow$c)

Dado que φ es quasiafín, cualquier conjunto de nivel $S_\lambda(\varphi)$ es convexo, al igual que su complementario $R^n-S_\lambda(\varphi)$. Si $S_\lambda(\varphi)$ no es $\emptyset$ ni R^n, tampoco lo es $R^n-S_\lambda(\varphi)$. Existe pues un hiperplano de separación entre $S_\lambda(\varphi)$ y $R^n-S_\lambda(\varphi)$, es decir, existen $x^* \neq 0$, $k \in R$ tales que:

$$x \in S_\lambda(\varphi) \Rightarrow <x^*,x> \leq k$$
$$x \in R^n-S_\lambda(\varphi) \Rightarrow <x^*,x> \geq k$$

Como φ es s.c.i., $S_\lambda(\varphi)$ es cerrado, de donde $R^n-S_\lambda(\varphi)$ es abierto y tiene que estar incluido en el interior del correspondiente semiespacio, es decir: $x \in R^n-S_\lambda(\varphi) \Rightarrow <x^*,x> > k$, o equivalentemente $<x^*,x> \leq k \Rightarrow x \in S_\lambda(\varphi)$. Según esto $S_\lambda(\varphi)$ es el semiespacio cerrado de ecuación $<x^*,x> \leq k$.

c)$\Rightarrow$a)

Supongamos en primer lugar que $\forall \lambda$ $S_\lambda(\varphi)$ fuera $\emptyset$ o R^n. Se tendría $\forall x \in R^n$, $\varphi(x) = \inf\{\lambda / x \in S_\lambda(\varphi)\} = \inf\{\lambda / S_\lambda(\varphi) = R^n\}$. Esto significa que φ es constante. Tomando cualquier $x \in R^n$ y h la función constante del mismo valor que φ, se expresa φ en la forma requerida para los elementos de Φ_H^n.

Sea ahora λ_0 tal que $S_\lambda(\varphi)$ es un semiespacio cerrado, es decir, $S_{\lambda_0}(\varphi)=\{x/\langle x^*,x\rangle\leq k_{\lambda_0}\}$ con $x^*\neq 0$, $k_{\lambda_0}\in R$. Sea $\lambda\leq\lambda_0$. Entonces $S_\lambda(\varphi)\subset S_{\lambda_0}(\varphi)$. Si $S_\lambda(\varphi)=\emptyset$ puede escribirse $S_\lambda(\varphi)=\{x/\langle x^*,x\rangle\leq -\infty\}$. Si $S_\lambda(\varphi)$ es un semiespacio cerrado, por una aplicación elemental del teorema de Farkas se ve que $S_\lambda(\varphi)=\{x/\langle x^*,x\rangle\leq k_\lambda\}$ con $k_\lambda\leq k_{\lambda_0}$. Análogamente, si $\lambda>\lambda_0$ se deduce que $S_\lambda(\varphi)=\{x/\langle x^*,x\rangle\leq k_\lambda\}$ con $k_\lambda\geq k_{\lambda_0}$ ($k_\lambda=+\infty$ si $S_\lambda(\varphi)=R^n$).

Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in R}$ la familia de semirrectas $C_\lambda=(-\infty,k_\lambda]$. Por construcción se tiene: $\lambda<\mu\Rightarrow k_\lambda\leq k_\mu\Rightarrow C_\lambda\subset C_\mu$. Por ser los C_λ cerrados la función h definida por $h(t)=\inf\{\lambda/t\in C_\lambda\}$ es s.c.i.. Además si $t\leq t'$ se tiene: $t'\in C_\lambda\Rightarrow t'\leq k_\lambda\Rightarrow t\leq k_\lambda\Rightarrow t\in C_\lambda$, luego $h(t)=\inf\{\lambda/t\in C_\lambda\}<\inf\{\lambda/t'\in C_\lambda\}=h(t')$, es decir que h es creciente y en consecuencia $h\in H$. Finalmente, $\forall x\in R^n\ \varphi(x)=\inf\{\lambda/x\in S_\lambda(\varphi)\}=\inf\{\lambda/\langle x^*,x\rangle\leq k_\lambda\}=$
$=\inf\{\lambda/\langle x^*,x\rangle\in C_\lambda\}=h(\langle x^*,x\rangle)$. Por tanto $\varphi\in\Phi^n_H$.

<u>Proposición 2.3:</u> La función conjugada de $f:R^n\to\bar{R}$ viene dada en este caso por:

$$f^c(x^*)(t)=\inf\{\lambda/t\leq\sup\{\langle x^*,x\rangle/x\in S_\lambda(f)\}\}$$

<u>Demostración:</u> Sea $h_0:R\to\bar{R}$ definida mediante:

$h_0(t)=\inf\{\lambda/t\leq\sup\{\langle x^*,x\rangle/x\in S_\lambda(f)\}\}$. Se cumple para $t\leq t'$: $t'\leq\sup\{\langle x^*,x\rangle/x\in S_\lambda(f)\}\Rightarrow t\leq\sup\{\langle x^*,x\rangle/x\in S_\lambda(f)\}$, de donde $h_0(t)\leq h_0(t')$. Así pues h_0 es creciente. Si llamamos $\{D_\lambda\}_{\lambda\in R}$ a la familia de semirrectas cerradas $(-\infty,\sup\{\langle x^*,x\rangle/x\in S_\lambda(f)\}]$ resulta: $\lambda\leq\mu\Rightarrow S_\lambda(f)\subset S_\mu(f)\Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\{<x^*,x>/x\in S_\lambda(f)\} \leq \sup\{<x^*,x>/x\in S_\mu(f)\} \Rightarrow D_\lambda \subset D_\mu$. h_0 es s.c.i. por ser $h_0(t) = \inf\{\lambda/t\in D_\lambda\}$ $\forall t$. Tenemos pues que $h_0 \in H$.

Sea $x_0 \in R^n$, $\lambda_0 > f(x_0)$, $\lambda_0 \notin R$. Dado que $x_0 \in S_{\lambda_0}(f)$, resulta: $<x^*,x_0> \leq \sup\{<x^*,x>/x\in S_{\lambda_0}(f)\}$. Entonces, $h_0(<x^*,x_0>) = \inf\{\lambda/<x^*,x_0> \leq \sup\{<x^*,x>/x\in S_\lambda(f)\}\} \leq \lambda_0$. De esto se deduce $h_0(<x^*,x_0>) \leq f(x_0)$.

Sea ahora $h\in H$ tal que $h(<x^*,x>) \leq f(x)$ $\forall x\in R^n$. Sea $t \leq \sup\{<x^*,x>/x\in S_\lambda(f)\}$, por ser h creciente contínua por la izquierda $h(t) \leq \sup\{h(<x^*,x>)/x\in S_\lambda(f)\} \leq \sup\{f(x)/x\in S_\lambda(f)\} \leq \lambda$. Por tanto $h(t) \leq \inf\{\lambda/t \leq \sup\{<x^*,x>/x\in S_\lambda(f)\}\} = h_0(t)$. Así pues, $h_0 = \sup\{h/h\in H,\ h(<x^*,x>) \leq f(x)\ \forall x\} = f^c(x^*)$.

<u>Proposición 2.4</u>: $f: R^n \to \bar{R}$ es H-convexa si y solo si es quasiconvexa s.c.i..

<u>Demostración:</u> Si f es H-convexa, es el supremo de funciones pertenecientes a Φ_H^n, que son quasiconvexas s.c.i. según la proposición 2.2. Entonces f es quasiconvexa s.c.i..

Recrípocamente, sea $f: R^n \to \bar{R}$ quasiconvexa s.c.i..Dado que $f^{cc} = f^0 \leq f$, para la H-convexidad de f basta probar que $f \leq f^{cc}$. Sea $x_0 \in R^n$, $\lambda_0 < f(x_0)$. Entonces $x_0 \notin S_{\lambda_0}(f)$. Como f es quasiconvexa s.c.i., S_{λ_0} es un convexo cerrado. Por tanto existe un hiperplano que separa estrictamente x_0 de $S_{\lambda_0}(f)$, es decir, existe $x_0^* \neq 0$ tal que $<x_0^*, x_0> > \sup\{<x_0^*,x>/x\in S_{\lambda_0}(f)\}$. Se cumplirá $f^{cc}(x_0) = \sup_{x^*} f^c(x^*)(<x^*,x_0>) \geq f^c(x_0^*)(<x_0^*, x_0>) =$

$= \inf\{\lambda / \langle x_0^*, x_0\rangle \leq \sup\{\langle x_0^*, x\rangle / x \in S_\lambda(f)\}\} \geq$
$\geq \inf\{\lambda / \sup\{\langle x_0^*, x\rangle / x \in S_{\lambda_0}(f)\} < \sup\{\langle x_0^*, x\rangle / x \in S_\lambda(f)\}\} \geq$
$\geq \inf\{\lambda / S_{\lambda_0}(f) \subsetneq S_\lambda(f)\} \geq \inf\{\lambda / \lambda_0 \leq \lambda\} = \lambda_0$. De aquí se deduce $f^{cc}(x_0) \geq f(x_0)$, lo que concluye la demostración.

Utilizando la prop. 2.7 del cap.I puede verse que $\partial_H f(x_0)$ coincide en este caso con $T_f(x_0)$, el tangencial de f en x_0 definido en {3}. Asimismo $f^c(x^*)(\langle x^*, x_0\rangle)$ coincide con $q(x^*)$, siendo q la conjugada de f en x_0 definida en el mismo artículo. De esta forma las propiedades esenciales de q y $T_f(x_0)$ dadas en {3} pueden obtenerse como casos particulares de la teoría general expuesta en el capítulo I.

El cor.2.2 del cap.I no es plenamente aplicable aquí por no ser H cerrada para el ínfimo. Teniendo en cuenta que H es completa en 0, el cor.2.9 del cap.I establece el siguiente resultado (establecido en {3}):

$0 \in T_f(x_0) \Longleftrightarrow$ f alcanza su mínimo en x_0. Asimismo H verifica las hipótesis de las proposiciones 2.13 (para $\lambda > 0$) y 2.14 del cap.I.

Sustituyendo en la prop.4.4 cap.I H_1 por la familia de funciones que aparece en el párrafo anterior y H_2 por la del párrafo actual se obtiene el resultado ({3}): $\partial f(x_0) \subset T_f(x_0)$.

Utilizando la fórmula de conjugación (prop.2.3) se obtiene la expresión de la función objetivo del problema dual:

$$\phi^c(0,w^*)(0)= \inf\{\lambda/0\leq \sup_{x,w}\{\langle w^*,w\rangle/(x,w)\in S_\lambda(\phi)\}\}=$$
$$= \inf\{\lambda/0\leq \sup_{x,w}\{\langle w^*,w\rangle/\phi(x,w)\leq \lambda\}\}.$$

Esta es precisamente la función objetivo del problema dual (Q) definido en {2}, estudiado exhaustivamente en ese trabajo. Las propiedades esenciales de (Q) pueden obtenerse como casos particulares de las expuestas en el oárrafo 1 del capítulo II.

El H-lagrangiano de un problema general está dado por:

$$L(x,w^*)= \phi_x^c(w^*)(0)= \inf\{\lambda/0\leq \sup_{w}\{\langle w^*,w\rangle/w\in S_\lambda(\phi_x)\}\}=$$
$$= \inf\{\lambda/0\leq \sup_{w}\{\langle w^*,w\rangle/\phi_x(w)\leq \lambda\}\}=$$
$$= \inf\{\lambda/0\leq \sup_{w}\{\langle w^*,w\rangle/\phi(x,w)\leq \lambda\}\}.$$

Como H es cerrada por traslaciones se pueden aplicar a L todas las propiedades 2.3 a 2.7 del capítulo II. En cambio, para la aplicabilidad de los enunciados 2.8 a 2.14 de ese capítulo, hay que tener en cuenta que H no es cerrada para el ínfimo.

En el caso de perturbaciones verticales, pueden aplicarse los resultados del párrafo 3 del cap.II por cumplir H las condiciones a), b), c) requeridas. Para la condición b) basta tener en cuenta que si $h\in H$, puede escribirse $h= \sup_{k\in R} h_k$, estando h_k definida por $h_k(t)= \min\{h(t),k\}$. Las funciones $h_k\in H$ y están acotadas superiormente.

La función $h_0= \inf\{h/h\in H,\ h(0)= 0\}$ es la dada por: $h_0(t)= \begin{cases}-\infty & \text{si } t< 0\\ 0 & \text{si } t\geq 0\end{cases}$. Así pues el H-lagrangiano es:

$$L(x,w^*)= \begin{cases} f(x) & \text{si } w^*\not\geq 0 \text{ o si } \langle w^*,g(x)\rangle\geq 0\\ +\infty & \text{si } w^*\geq 0 \text{ y } \langle w^*,g(x)\rangle< 0\end{cases}.$$

Este es una extensión del lagrangiano que aparece en {6}.

En cuanto a las propiedades del párrafo 2 del cap.II hay que señalar que en el caso de perturbaciones verticales las funciones ϕ_x son todas H-convexas (quasiconvexas s.c.i.) ya que sus conjuntos de nivelson:

$$S_\lambda(\phi_x)=\begin{cases}\{w/w\leq g(x)\} & \text{si } \lambda\geq f(x)\\ \emptyset & \text{si } \lambda< f(x)\end{cases}$$

que son conjuntos convexos cerrados.

La prop.3.2 cap.II establece en este caso que si P es H-convexa en 0, $w_0^*\geq 0$ es una solución dual óptima y x_0 es tal que $g(x_0)\geq 0$ y es solución óptima del primal, entonces x_0 es también solución óptima del problema (menos restringido en general que el primal) "minimizar f(x) sujeto a $<w_0^*, g(x)>\geq 0$". Además se verifica la condición de separación complementaria $<w_0^*, g(x_0)>= 0$.

La prop.3.3 no es aplicable aquí por no cumplir h_0 la condición requerida.

La siguiente proposición suple en parte la no aplicabilidad del teorema 2.13 cap.II.

<u>Proposición 2.5:</u> (x_0, w_0^*) es punto de silla de $L\Rightarrow x_0$ es solución óptima del primal. Además, $\phi(x_0,0)= L(x_0,w_0)$ y se verifica:

a) $L(x_0, w_0)< +\infty \Rightarrow$ el primal es consistente.

b) $w_0^*\not\leq 0\Rightarrow x_0$ es mínimo absoluto de f, $g(x_0)\geq 0$.

<u>Demostración:</u>

b) Sea $w_0\not\leq 0$, $x\in R^n$. De la fórmula de L y la definición de punto de silla se deduce: $f(x_0) = L(x_0, w_0^*) \leq L(x, w_0^*) = f(x)$, o sea que x_0 es mínimo absoluto de f. Por otra parte $\forall w^* \geq 0$ se tiene: $L(x_0, w^*) \leq L(x_0, w_0^*) = f(x_0) < +\infty$. Esto obliga a que $L(x_0, w^*) = f(x_0)$ lo que, a su vez, implica $<w^*, g(x_0)> \geq 0$. Por tanto $g(x_0) \geq 0$.

a) En la demostración de b) se ha visto que si $L(x_0, w_0^*) < +\infty$ el primal es consistente. Recíprocamente, supongamos que el primal es consistente. Si $w_0^* \not\geq 0$, se tiene $L(x_0, w_0^*) = f(x_0) < +\infty$. Si $w_0^* \geq 0$, dado que existe x_1 tal que $g(x_1) \geq 0$ y se ha de cumplir $<w_0^*, g(x_1)> \geq 0$, resulta: $L(x_0, w_0^*) \leq L(x_1, w_0^*) = f(x_1) < +\infty$.

Demostremos ahora la primera parte del enunciado. Si $w_0^* \not\geq 0$, basta considerar la parte b). Si $L(x_0, w_0^*) = +\infty$, por a) el primal es inconsistente y cualquier x es solución óptima. Solo queda por considerar el caso $w_0^* \geq 0$, $L(x_0, w_0^*) < +\infty$. La parte final de la demostración de b) muestra que $g(x_0) \geq 0$. Sea x tal que $g(x) \geq 0$. Se ha de verificar $<w_0^*, g(x)> \geq 0$, con lo que $f(x_0) = L(x_0, w_0^*) \leq L(x, w_0^*) = f(x)$. Por tanto x_0 es solución óptima del primal.

3. PROPIEDADES DE LA CONJUGACIÓN RESPECTO DE LA FAMILIA H DEL PÁRRAFO ANTERIOR.

Para simplificar la notación, en todo este párrafo se escribirá $F_{x^*}(\lambda) = \sup\{<x^*, x> / x \in S_\lambda(f)\}$, siguiendo la notación de {2}. De esta manera la fórmula de conjugación resulta: $f^c(x^*)(t)= \inf\{\lambda/t\leq F_{x^*}(\lambda)\}$.

a) Continuidad de las funciones $f^c(x^*)$

En {3}, Crouzeix da la siguiente definición:

Definición: Sean $f: R^n\to\bar{R}$, $m= \inf f(x)$, $M>m$.

f es M-regular según $x^*\Longleftrightarrow \forall\lambda,\mu$ tales que $m\leq \lambda< \mu< M$

o bien $F_{x^*}(\lambda)= +\infty$

o bien $F_{x^*}(\lambda)< F_{x^*}(\mu)$.

f es M-regular$\Longleftrightarrow$f es M-regular según x^* $\forall x^*\neq 0$

f es regular según $x^*\Longleftrightarrow$ f es $+\infty$-regular según x^*

f es regular$\Longleftrightarrow$f es $+\infty$-regular

Proposición 3.1: f es M-regular según x^* si y solo si $f^c(x^*)$ es contínua en $f^c(x^*)^{-1}([-\infty,M))$.

Demostración: Supongamos que f es M-regular según x^*. Sea $t_0\in f^c(x^*)^{-1}([-\infty,M))$. $f^c(x^*)$ es contínua por la izquierda, por lo que basta demostrar la continuidad por la derecha en t_0, que, por el crecimiento de $f^c(x^*)$,es equivalente a la semicontinuidad superior. Supongamos que $\forall t> t_0$ se verifica $f^c(x^*)(t)\geq \alpha$. Sea λ_0 tal que $f^c(x^*)(t_0) < \lambda_0< M$. De la fórmula de $f^c(x^*)$ se deduce $F_{x^*}(\lambda_0)\geq t_0$. Sea λ_1 tal que $\lambda_0< \lambda_1< M$. Puesto que $f^c(x\ )(t_0)\geq m$, por la M-regularidad se cumple que $t_0< F_{x^*}(\lambda_1)$. Sea $t\in R$ tal que $t_0< t< F_{x^*}(\lambda_1)$. Por hipótesis $f^c(x^*)(t)\geq \alpha$, es decir, $\inf\{\lambda/t\leq F_{x^*}(\lambda)\}\geq \alpha$. En consecuencia, $\lambda_1\geq \alpha$. De aquí se deduce $\lambda_0\geq \alpha$ y, por último, $f^c(x^*)(t_0)\geq \alpha$.

Recrípocamente, si f no es M-regular según x^* existen λ_0, μ_0 tales que $m< \lambda_0< \mu_0< M$ y además $F_{x^*}(\lambda_0)= F_{x^*}(\mu_0)\in R$. Llamemos t_0 a este número. Se tiene entonces:

$f^c(x^*)(t_0)= \inf\{\lambda/t_0\leq F_{x^*}(\lambda)\}\leq \lambda_0< M$

$f^c(x^*)(t)= \inf\{\lambda/t\leq F_{x^*}(\lambda)\}\geq \mu_0 \ \forall t>t_0$.

Por tanto $f^c(x^*)$ no es contínua por la derecha en $t_0\in$ $\in f^c(x^*)^{-1}([-\infty,M))$.

<u>Corolario 3.2:</u> f es regular según x^* si y solo si $f^c(x^*)$ es contínua.

<u>Demostración:</u> Basta tener en cuenta que si $f^c(x^*)(t_0)= +\infty$, $f^c(x^*)$ es s.c.s. en t_0.

<u>b) Crecimiento estricto de las funciones $f^c(x^*)$</u>

Observación previa: $\forall t\in R$, $f^c(x^*)(t)= \inf\{\lambda/F_{x^*}(\lambda)\geq t\}\geq$ $\geq \inf\{\lambda/F_{x^*}(\lambda)> -\infty\}= m$, es decir, $f^c(x^*)^{-1}([m, +\infty])= R$. Si para algún t_0 se verificara $f^c(x^*)(t_0)= m$, la misma igualdad se tendría $\forall t< t_0$. Análogamente, si para algún t_0 fuera $f^c(x^*)(t_0)= +\infty$, lo mismo sucedería $\forall t< t_0$. En ambos casos el crecimiento estricto de $f^c(x^*)$ se tendría a lo sumo en $f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$.

<u>Proposición 3.3:</u> Si f es quasiconvexa inf-compacta y carece sobre su dominio de mínimos locales no globales, entonces $\forall x^*$ $f^c(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$.

<u>Demostración:</u> Dado x^*, sea $t\in f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$, es decir, $m< f^c(x^*)(t)< +\infty$. $x^*\neq 0$, puesto que para $x^*= 0$ se tiene

$F_0(\lambda)=\begin{cases}0 \text{ si } \lambda> m\\ -\infty \text{ si } \lambda< m\end{cases}$ y, en consecuencia, $f^c(0)(t)=$
$=\inf\{\lambda/t\le F_0(\lambda)\}=\begin{cases}m \text{ si } t\le 0\\ +\infty \text{ si } t> 0\end{cases}$. De la fórmula de $f^c(x^*)$
y el crecimiento de F_{x^*} se deduce la siguiente implicación:
$\lambda> f^c(x^*)(t)\Rightarrow F_{x^*}(\lambda)> t$, es decir,
$\inf\{F_{x^*}(\lambda)/\lambda> f^c(x^*)(t)\}\ge t$. Sea $t'<t$. $\forall\lambda> f^c(x^*)(t)$ se verifica $F_{x^*}(\lambda)> t'$. Por tanto existe x_λ tal que $x_\lambda\in S_\lambda(f)$, $\langle x^*,x_\lambda\rangle> t'$. Puesto que $f^c(x^*)(t)> m$, existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x})\le f^c(x^*)(t)$. Pueden darse varios casos:

a) $\langle x^*,\bar{x}\rangle\ge t'$. Entonces $F_{x^*}(f^c(x^*)(t))\ge \langle x^*,\bar{x}\rangle\ge t'$.

b) $\langle x^*,\bar{x}\rangle< t'$. Entonces existe y_λ en el segmento de extremos $\bar{x}$, x_λ tal que $\langle x^*,y_\lambda\rangle= t'$. Por ser f quasiconvexa, $f(y_\lambda)\le \max\{f(x),\ f(x_\lambda)\}\le \max\{f^c(x^*)(t),\ \lambda\}=\lambda$. Por tanto, $\inf\{f(x)/\langle x^*,\ x\rangle= t'\}\le f^c(x^*)(t)$.

b1) $\inf\{f(x)/\langle x^*,\ x\rangle= t'\}< f^c(x\ )(t)$. Entonces existe $\tilde{x}$ tal que $\langle x^*,\ \tilde{x}\rangle= t'$, $f(\tilde{x})< f^c(x^*)(t)$. Por tanto $F_{x^*}(f^c(x^*)(t))\ge \langle x^*,\tilde{x}\rangle= t'$.

b2) $\inf\{f(x)/\langle x^*,x\rangle= t'\}= f^c(x^*)(t)$. Por ser f inf-compacta, este ínfimo se alcanza en algún punto. Sea pues $\hat{x}$ tal que $\langle x^*,\hat{x}\rangle= t'$, $f(\hat{x})= f^c(x^*)(t)$. Así pues, $F_{x^*}(f^c(x^*)(t))\ge \langle x^*,\ \hat{x}\rangle= t'$.

En todos los casos se ha visto que $F_{x^*}(f^c(x^*)(t))\ge t'$. Como consecuencia se obtiene $F_{x^*}(f^c(x^*)(t))\ge t$.

De la fórmula de $f^c(x^*)$ se deduce también:

$\lambda< f^c(x^*)(t)\Rightarrow F_{x^*}(\lambda)< t$.

Sea x_0 tal que $f(x_0)\le f^c(x^*)(t)$. Pueden darse dos casos:

a) $f(x_0) < f^c(x^*)(t)$. Dado λ tal que $f(x_0) < \lambda < f^c(x^*)(t)$ se verifica $<x^*, x_0> \leq F_{x^*}(\lambda) < t$.

b) $f(x_0) = f^c(x^*)(t)$. Sea $t' < <x^*, x_0>$. Como $f^c(x^*)(t) > m$, x_0 no es mínimo global de f y, por hipótesis, tampoco lo es local. Entonces existe $x_{t'}$ tal que $||x_{t'} - x_0|| < (<x^*, x_0> - t')/||x^*||$, $f(x_{t'}) < f^c(x^*)(t)$. Sea $\lambda_{t'}$ tal que $f(x_{t'}) < \lambda_{t'} < f^c(x^*)(t)$. Se cumple: $<x^*, x_0 - x_{t'}> \leq \leq ||x^*|| \, ||x_0 - x_{t'}|| < <x^*, x_0> - t'$, de donde $<x^*, x_{t'}> > t'$. Por tanto, $t > F_{x^*}(\lambda_{t'}) \geq <x^*, x_{t'}> > t'$. De aquí se deduce que, al igual que en el caso anterior, $t \geq <x^*, x_0>$.

En ambos casos, $F_{x^*}(f^c(x^*)(t)) \leq t$. Dado que la desigualdad inversa se había obtenido anteriormente, tenemos:
$\forall t \in f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$, $F_{x^*}(f^c(x^*)(t)) = t$.
Si $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$, se verifica:
$F_{x^*}(f^c(x^*)(t_1)) = t_1 < t_2 = F_{x^*}(f^c(x^*)(t_2))$, de donde $f^c(x^*)(t_1) < f^c(x^*)(t_2)$ habida cuenta del crecimiento de F_{x^*}.

<u>Corolario 3.4:</u> f es estrictamente quasiconvexa inf-compacta $\Rightarrow f^c(x^*)$ es creciente estrictamente en $f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$ para todo x^*.

<u>Demostración:</u> Toda función estrictamente quasiconvexa carece sobre su dominio de mínimos locales no globales.

En este último corolario la quasiconvexidad estricta no es necesaria, como pprueba el siguiente contraejemplo:
$f: R^2 \to \overline{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x) & \text{si } x>0,\ x^2+y^2\leq 1\\ -\pi/2 & \text{si } x=0,\ y\leq 0,\ x^2+y^2\leq 1\\ \pi/2 & \text{si } x=0,\ y>0,\ x^2+y^2\leq 1\\ +\infty & \text{si } x<0 \text{ ó } x^2+y^2>1\end{cases}$$

f es quasiconvexa inf-compacta, carece de mínimos locales no globales y en cambio no es estrictamente quasiconvexa como puede verse observando su comportamiento sobre el eje vertical.

En cambio, la condición de carecer en su dominio de mínimos locales no globales es necesaria para funciones quasiconvexas, como se indica en la siguiente proposición.

Proposición 3.5: Sea f quasiconvexa. Si $\forall x^*$ $f^c(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$, entonces f carece sobre su dominio de mínimos locales no globales.

Demostración: Supongamos que existe algún x_0 del dominio de f que sea mínimo local no global. $m< f(x_0)< +\infty$. Sea $C=\{x/f(x)< f(x_0)\}$. Por ser f quasiconvexa, C es convexo. Además no es vacío por ser $f(x_0)> m$. Puesto que x_0 es mínimo local de f, x_0 no pertenece a la adherencia de C. Por tanto existe x^* tal que $\sup\{<x^*, x>/x\in C\}< <x^*,x_0>$. Si $\lambda< f(x_0)$, se tiene $F_{x^*}(\lambda)\leq \sup\{<x^*,x>/x\in C\}$, ya que $S_\lambda(f)\subset C$. Sea t tal que $\sup\{<x^*, x>/x\in C\}< t\leq <x , x_0>$. Sea λ tal que $F_{x^*}(\lambda)\geq t> \sup\{<x^*,x>/x\in C\}$. De lo observado al principio del párrafo se infiere que $\lambda\geq f(x_0)$. Entonces $f^c(x^*)(t)= \inf\{\lambda/F_{x^*}(\lambda)\geq t\}\geq f(x_0)\geq f^c(x^*)(<x^*,x_0>)$ $\geq f^c(x^*)(t)$. En consecuencia, $f^c(x^*)(t)= f(x_0)\in (m, +\infty)$

$\forall t \in (\sup\{<x^*, x>/x\in C\}, <x^*, x_0>]$, lo que contradice el crecimiento estricto de $f^c(x^*)$ en $f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$.

En la prop.3.3 y su corolario la inf-compacidad de f no es necesaria, comopuede verse en el siguiente ejemplo: f la función lineal $f(x) = <y^*, x>$ con $y^* \neq 0$. Para $x^* = ky^*$ con $k > 0$, $f^c(x^*)(t) = \inf\{\lambda / F_{x^*}(\lambda) \geq t\} = \inf\{\lambda / k\lambda \geq t\} = t/k$. Para $x^* \neq ky^*\ \forall k \geq 0$, $f^c(x^*)(t) = \inf\{\lambda / +\infty \geq t\} = -\infty$. Para $x^* = 0$, $f^c(0)$ solo toma los valores $\pm\infty$. Según esto $\forall x^*\ f^c(x^*)$ es creciente en $f^c(x^*)^{-1}(R)$. f es estrictamente quasiconvexa s.c.i. sin ser inf-compacta.

En cambio, si esta hipótesis de inf-compacidad se suprime sin añadir ninguna otra sustitutiva la proposición y su corolario son falsas, como prueba el siguiente contraejemplo:

$$f : R^2 \to \bar{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \max\{x,-y\} & \text{si } x \leq 0,\ y \geq 0 \\ x/\ln(1+y) & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ +\infty & \text{si } (x > 0,\ y = 0) \text{ o } y < 0 \end{cases}$$

Los conjuntos de nivel de f son:

para $\lambda \leq 0$, $S_\lambda(f) = \{(x,y)/x \leq \lambda,\ y \geq -\lambda\}$

para $\lambda > 0$, $S_\lambda(f) = \{(x,y)/(x \leq 0,\ y \geq 0) \text{ o } (x > 0, y > 0, y \geq e^{x/\lambda} - 1)\}$

$$= \{(x,y)/y \geq \max\{0, e^{x/\lambda} - 1\}\}.$$

Todos estos conjuntos son convexos cerrados (para $\lambda > 0$, $S_\lambda(f)$ es el epigrafo de una función convexa contínua). Por tanto f es quasiconvexa s.c.i.. Además, para $\lambda \leq 0$, $\mathring{S}_\lambda(f) = \{(x,y)/x < \lambda,\ y > -\lambda\} = \dot{S}_\lambda(f)$. Para $\lambda > 0$, $\mathring{S}_\lambda(f) =$

$= \{(x,y)/y > \max\{0, e^{x/\lambda}-1\}\}$, por tanto $\dot{S}_\lambda(f) =$
$= \mathring{S}_\lambda(f) \cup \{(x,y)/x \leq 0,\ y\ \ 0\}$.

Sean (x_1,y_1), (x_2,y_2) tales que $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2) < +\infty$, $t \in (0,1)$. Si $(x_1,y_1) \in \mathring{S}_{f(x_2,y_2)}(f)$, dado que $(x_2,y_2) \in$ $\in S_{f(x_2,y_2)}(f)$, ha de ser $(1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2) \in \mathring{S}_{f(x_2,y_2)}(f)$ y, en consecuencia, $f((1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)) < f(x_2,y_2)$. Si $x_1 \leq 0$, $y_1 = 0$ y $f(x_2,y_2) > 0$, ha de ser $x_2 > 0$, $y_2 > 0$ y también $(1-t)y_1+ty_2 > 0$. Si $(1-t)x_1+tx_2 > 0$, dado que $y_1 =$ $= 0 > e^{x_1/\lambda}-1$ con $\lambda = f(x_2,y_2)$ resulta que (x_1,y_1) pertenece al interior del epigrafo de la función convexa continua $h(x) = e^{x/\lambda}-1$. Dado que (x_2,y_2) pertenece a este mismo epigrafo, $(1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)$ pertenece a su interior, con lo que $(1-t)y_1+ty_2 > e^{((1-t)x_1+tx_2)/\lambda}-1$, o lo que es lo mismo:

$$f((1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)) = \frac{(1-t)x_1+tx_2}{\ln(1+(1-t)y_1+ty_2)} < \lambda = f(x_2,y_2).$$

Esto demuestra que f es estrictamente quasiconvexa. Sea ahora $x^* = (1,0)$. Fácilmente se comprueba que $F_{x^*}(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{si } \lambda \leq 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$ con lo que $f^c(x^*)(t) = \inf\{\lambda / t \leq F_{x^*}(\lambda)\} = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. Por otra parta $m = -\infty$, con lo que $f^c(x^*)$ no es estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$.

Para funciones de una sola variable el creciniento estricto de las funciones $f^c(x^*)$ es más fácilmente caracterizable, como se indica en la siguiente proposición.

<u>Proposición 3.6:</u> Sea $f: R \to \bar{R}$ quasiconvexa. f es estrictamentequasiconvexa si y solo si $\forall x^*$ $f^c(x^*)$ es estrictamen-

te creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$.

Demostración: En la prop.3.3 la inf-compacidad solo se utiliza para garantizar en el caso b2) de la demostración la existencia de x. Si f es función de una sola variable, $\hat{x}= t'/x^*$ sin necesidad de ninguna hipótesis sobre f.

Para el recíproco, teniendo en cuenta la prop.3.5, basta observar que si una función de una sola variable carece sobre su dominio de mínimos locales no globales, es estrictamente quasiconvexa (supuesta quasiconvexa). En efecto, si f no es estrictamente quasiconvexa existen x_1, $x_2 \in R$ tales que $f(x_1) < f(x_2) < +\infty$, $f((1-t)x_1+tx_2)=f(x_2)$ para algún $t\in(0,1)$. Para todo $t'\in[t,1]$ se tendría:

$f((1-t')x_1+t'x_2) \leq f(x_2)= f((1-t)x_1+tx_2) \leq$

$\leq \max\{f(x_1), f((1-t')x_1+t'x_2)\}= f((1-t')x_1+t'x_2)$

(la última igualdad se debe a que $f(x_1) < f(x_2)$).Entonces f sería constante y finita sobre el intervalo cerrado de extremos $(1-t)x_1+tx_2$, x_2. Por tanto cualquier punto del interior de este intervalo pertenece al dominio de f, es mínimo local de f y no es global por ser $f(x_1) < f(x_2)$.

c) Convexidad de las funciones $f^c(x^*)$

Proposición 3.7: Si f es convexa, las funciones $f^c(x^*)$ son todas convexas. Recíprocamente, si $\forall x^*$ $f^c(x^*)$ es convexa, la envolvente quasiconvexa s.c.i. de f es convexa.

Demostración: Si f es convexa todas las funciones F_{x^*} son cóncavas {2}. Sean (t_1,λ_1), (t_2,λ_2) pertenecientes al epigrafo de $f^c(x^*)$, $\alpha\in(0,1)$. Si fuera $f^c(x^*)((1-\alpha)t_1+\alpha t_2) > (1-\alpha)\lambda_1+\alpha\lambda_2$, también para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño sería $f^c(x^*)((1-\alpha)t_1+\alpha t_2) > (1-\alpha)(\lambda_1+\varepsilon)+\alpha(\lambda_2+\varepsilon)$. Según la fórmula de $f^c(x^*)$ ha de ser

$$F_{x^*}((1-\alpha)(\lambda_1+\varepsilon)+\alpha(\lambda_2+\varepsilon)) < (1-\alpha)t_1+\alpha t_2.$$

Como F_{x^*} es cóncava, o bien $F_{x^*}(\lambda_1+\varepsilon) < t_1$ o bien $F_{x^*}(\lambda_2+\varepsilon) < t_2$. Sea $i\in\{1,2\}$ tal que para λ_i, t_i se verifica dicha desigualdad. $f^c(x^*)(t_i) = \inf\{\lambda / t_i \leq F_{x^*}(\lambda)\} \geq \lambda_i+\varepsilon > \lambda_i$, lo que contradice que (t_i,λ_i) sea del epigrafo de $f^c(x^*)$.

Recíprocamente, dado que la envolvente quasiconvexa s.c.i. de f es f^{cc} dada por $f^{cc}(x) = \sup_{x^*} f^c(x^*)(\langle x^*, x\rangle)$, si todas las funciones $f^c(x^*)$ son convexas, al ser también crecientes sus composiciones con funciones lineales son convexas y por tanto f^{cc} es supremo de funciones convexas y, en definitiva, es convexa.

<u>d) Acotación de las funciones $f^c(x^*)$</u>

<u>Proposición 3.8:</u> Sea $f:R^n\to\bar{R}$ s.c.i.. f es inf-compacta si y solo si ninguna de las funciones $f^c(x^*)$ está acotada superiormente.

<u>Demostración:</u> Supongamos que f es inf-compacta. Sea $x^*\in R^n$, $k\in R$. $S_k(f)$ es compacto y por tanto acotado. Entonces $F_{x^*}(k) < +\infty$. Sea $t\in R$ tal que $F_{x^*}(k) < t$. Se tiene: $f^c(x^*)(t) = \inf\{\lambda / t \leq F_x(\lambda)\} \geq k$. Esto significa que $f^c(x^*)$ no está acotada superiormente.

Recíprocamente, supongamos que todas las funciones

$f^c(x^*)$ están acotadas superiormente. Sea $k \in R$. Por ser f s.c.i. el conjunto $S_k(f)$ es compacto y por tanto acotado. Entonces $F_{x^*}(k) < +\infty$. Sea $t \in R$ tal que $F_{x^*}(k) < t$. Se tiene: $f^c(x^*)(t) = \inf\{\lambda / t \leq F_{x^*}(\lambda)\} \geq k$. Esto significa que $f^c(x^*)$ no está acotada superiormente.

Recíprocamente, supongamos que todas las funciones $f^c(x^*)$ están acotadas superiormente. Sea $k \in R$. Por ser f s.c.i. el conjunto $S_k(f)$ es cerrado. Para cada x^* existe $t \in R$ tal que $f^c(x^*)(t) > k$, es decir, $\inf\{\lambda / t \leq F_{x^*}(\lambda)\} \geq k$. En consecuencia $F_{x^*}(k) < t$. Al estar todas las funciones lineales acotadas superiormente sobre $S_k(f)$ estos conjuntos están acotados, luego son compactos y f es inf-compacta.

4. CASO EN QUE H ES LA FAMILIA DE TODAS LAS FUNCIONES CRECIENTES

Definición: Un conjunto convexo se llamará normal cuando sea intersección de semiespacios (abiertos o cerrados).

Puesto que un semiespacio cerrado es la intersección de todos los semiespacios abiertos que lo contienen, puede decirse equivalentemente que los convexos normales son las intersecciones de semiespacios abiertos. En otras palabras, son aquellos convexos C para los que se cumple la siguiente propiedad de separación:

$$\forall x_0 \notin C \ \exists x^* / \langle x^*, x \rangle < \langle x^*, x_0 \rangle \ \forall x \in C$$

Los conjuntos convexos cerrados son normales, ya que son intersección de semiespacios cerrados. Todos los subconjuntos convexos de R son asímismo normales. También se tiene:

Proposición 4.1: Todo conjunto convexo abierto es normal.

Demostración: Sea $C \subset R^n$ convexo abierto, $x_0 \notin C$. Si x_0 no pertenece a la adherencia de C, existe x tal que $\sup\{<x^*, x>/x \in C\} < <x^*, x_0>$, con lo que se verifica la ropiedad de separación característica de los convexos normales. En caso de que x_0 pertenezca a la adherencia de C, está en su frontera y existe un hiperplano que soporta C en x_0, es decir, para algún $x^* \neq 0$ se cumple: $<x^*, x> \leq <x^*, x_0>\ \forall x \in C$. Como C es abierto, está contenido en el interior del semiespacio definido por la desigualdad anterior, que es el correspondiente semiespacio abierto, de donde $<x^*, x> < <x^*, x_0>\ \forall x \in C$.

Como ejemplo de conjunto convexo no normal puede citarse la unión de un semiespacio abierto de R^n $(n > 1)$ con un punto (o cualquier subconjunto convexo) de su frontera.

Evidentemente la intersección de convexos normales es un convexo normal. Además R^n es un convexo normal. Por tanto, dado $C \subset R^n$ se puede considerar la "envolvente convexa normal" de C, que representaremos por $\tilde{C}$, es decir, el menor convexo normal que contiene a C, o, equivalentemente, la intersección de todos los convexoa normales que lo contienen. También es la intersección de todos los semiespacios abiertos que contienen a C.

<u>Definición:</u> Una función $f:R^n \to \bar{R}$ quasiconvexa se llamará normal cuando todos sus conjuntos de nivel sean convexos normales.

Toda función quasiconvexa s.c.i. es normal. Igualmente son normales todas las funciones quasiconvexas de una sola variable. Un ejemplo de función quasiconvexa no normal es la función indicador de un convexo no normal C, es decir, δ_C dada por $\delta_C(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in C \\ +\infty & \text{si } x\notin C \end{cases}$.

El supremo de una familia de funciones quasiconvexas normales es también normal, dado que sus conjuntos de nivel son las intersecciones de los correspondientes a las funciones de la familia. La función constante de valor $-\infty$ es quasiconvexa s.c.i., luego normal. En consecuencia, dada cualquier función $f:R^n \to \bar{R}$ existe la envolvente quasiconvexa normal $\tilde{f}$ de f, que es el supremo de todas las funciones quasiconvexas normales minorantes de f y, por tanto, es la mayor función quasiconvexa normal mayorada por f.

<u>Proposición 4.2:</u> Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in R}$ una familia de subconjuntos de R^n tal que $\lambda<\mu \Rightarrow C_\lambda \subset C_\mu$. Sea $f:R^n \to \bar{R}$ definida por: $f(x)=$ $=\inf\{\lambda/x\in C_\lambda\}$. Entonces, si los conjuntos C_λ son todos normales, f es quasiconvexa normal.

<u>Demostración:</u> Se reduce a comprobar que $\forall\lambda\in R$ $S_\lambda(f)=\bigcap_{\lambda<\mu} C_\lambda$.

Proposición 4.3: $\tilde{f}(x)=\inf\{\lambda/x\in\tilde{S}_\lambda(f)\}$.

Demostración: $\lambda<\mu\Rightarrow S_\lambda(f)\subset S_\mu(f)\subset\tilde{S}_\mu(f)\Rightarrow\tilde{S}_\lambda(f)\subset\tilde{S}_\mu(f)$. Sea f_0: $R^n\to\bar{R}$ la función dada por: $f_0(x)=\inf\{\lambda/x\in\tilde{S}_\lambda(f)$. En virtud de la prop. 4.2, f_0 es quasiconvexa normal. Sea $\lambda_0\in R$ tal que $f(x)\leq\lambda_0$. Entonces $x\in S_{\lambda_0}(f)\subset\tilde{S}_{\lambda_0}(f)$, de donde $f_0(x)=\inf\{\lambda/x\in\tilde{S}_\lambda(f)\}\leq\lambda_0$. De aquí se deduce $f_0(x)\leq f(x)$ $\forall x$, es decir, $f_0\leq f$ y, por tanto, $f_0\leq\tilde{f}$. Por otra parte $\forall\lambda\in R$ se tiene: $x\in S_\lambda(f)\Rightarrow f(x)\leq\lambda\Rightarrow\tilde{f}(x)\leq\lambda\Rightarrow x\in S_\lambda(\tilde{f})$, o sea, $S_\lambda(f)\subset S_\lambda(\tilde{f})$. Por ser $\tilde{f}$ quasiconvexa normal $S_\lambda(\tilde{f})$ es convexo normal, de donde $\tilde{S}_\lambda(f)\subset S_\lambda(\tilde{f})$. Así pues $\tilde{f}(x)=$ $=\inf\{\lambda/x\in S_\lambda(\tilde{f})\}\leq\inf\{\lambda/x\in\tilde{S}_\lambda(f)\}=f_0(x)$ $\forall x$. Entonces $\tilde{f}=f_0$.

La introducción de las funciones quasiconvexas normales en este párrafo está justificada por la siguiente proposición.

Proposición 4.4: Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $\varphi\in\Phi_H^n$

b) φ es quasiafín normal.

c) $\forall\lambda\in R$ $S_\lambda(\varphi)$ es un semiespacio abierto o cerrado (o bien $\emptyset$ o R^n).

Demostración: La demostración es casi idéntica a la de la prop. 2.2. Solo se expondrán los aspectos que ofrecen alguna novedad,

a)$\Rightarrow$b)

Basta ver que φ es normal. Sea $\varphi(x)=h(<x^*, x>)$ $\forall x$ con

$h\in H$, $x^*\in R^n$. Sea $\lambda\in R$, $x_0\notin S_\lambda(\varphi)$. Se verifica:

$x\in S_\lambda(\varphi)\Rightarrow h(<x^*, x>)= \varphi(x)\leq \lambda< \varphi(x_0)= h(<x^*,x_0>)\Rightarrow$
$\Rightarrow<x^*, x>< <x^*, x_0>$.

Es decir, $S_\lambda(\varphi)$ verifica la propiedad de separación característica de los convexos normales.

b)$\Rightarrow$c)

De las relaciones $x\in S_\lambda(\varphi)\Rightarrow<x^*,x>\leq k$

$$x\in R^n-S_\lambda(\varphi)\Rightarrow<x^*,x>\geq k$$

se deduce que $\{x/<x^*,x>< k\}\subset S_\lambda(\varphi)\subset\{x/<x^*,x>\leq k\}$. Vamos a ver que $S_\lambda(\varphi)$ es uno de los dos semiespacios (el abierto o el cerrado) entre los cuales está comprendido. En caso contrario existirían x_1, $x_2\in R^n$ tales que $<x^*,x_1>=$ $= <x^*, x_2>= k$, $x_1\in S_\lambda(\varphi)$, $x_2\notin S_\lambda(\varphi)$. Por ser φ normal, $S_\lambda(\varphi)$ es convexo normal y ha de haber un semiespacio abierto S tal que $x_2\notin S\supset S_\lambda(\varphi)$. Dado que $\{x/<x^*, x>< k\}\subset S$, puede escribirse $S= \{x/<x^*, x>< k'\}$ con $k'\geq k$. Por otra parte $x_2\notin S$ con lo que $k= <x^*,x_2>\geq k'$. Así pues, $k= k'$ con lo que $x_1\notin S$, lo que es contradictorio.

c)$\Rightarrow$a)

En el caso de existir λ_0 tal que $S_{\lambda_0}(\varphi)$ es un semiespacio abierto o cerrado ,razonando con las adherencias de los conjuntos de nivel en lugar de hacerlo con ellos mismos se llega a la conclusión de que $\forall\lambda\in R$ $\overline{S}_\lambda(\varphi)=$ $= \{x/<x^*, x>\leq k_\lambda\}$ con $k_\lambda\leq k_\mu$ si $\lambda< \mu$. Entonces $S_\lambda(\varphi)=$ $= \{x/<x^*, x>< k_\lambda\}$ o $\{x/<x^*, x>\leq k_\lambda\}$.

Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in R}$ la familia de smirrectas $C_\lambda = (-\infty, k_\lambda)$ si $S_\lambda(\varphi)$ es abierto, $C_\lambda = (-\infty, k_\lambda]$ si $S_\lambda(\varphi)$ es cerrado. Los C_λ son las imágenes de los $S_\lambda(\varphi)$ por la aplicación lineal $<x^*, \cdot>$. Así pues, $\lambda < \mu \Rightarrow S_\lambda(\varphi) \subset S_\mu(\varphi) \Rightarrow C_\lambda \subset C_\mu$. Sea h la función definida por: $h(t) = \inf\{\lambda / t \in C_\lambda\}$. Por ser los C_λ semirrectas de origen $-\infty$ tenemos que $t \leq t' \Rightarrow$ $\Rightarrow \{\lambda / t' \in C_\lambda\} \subset \{\lambda / t \in C_\lambda\} \Rightarrow h(t) = \inf\{\lambda / t \in C_\lambda\} \leq \inf\{\lambda / t' \in C_\lambda\} =$ $= h(t')$. Por tanto $h \in H$. Finalmente $\forall x \in R^n$ $\varphi(x) = \inf\{\lambda / x \in S_\lambda(\varphi)\}$ $= \inf\{\lambda / <x^*, x> \in C_\lambda\} = h(<x^*, x>)$, así que $\varphi \in \Phi_H^n$.

Las funciones quasiafines de más de una variable pueden no ser normales (por ejemplo, aquellas de dos variables en las que un conjunto de nivel es la unión de un semiplano abierto con una semirrecta de su frontera, como puede ser la función indicador de un tal subconjunto).

<u>Proposición 4.5:</u> La función conjugada de $f: R^n \to \bar{R}$ está dada en este caso por: $f^c(x^*)(t) = \inf\{f(x) / <x^*, x> \geq t\}$.

<u>Demostración:</u> Sea $h_0: R \to \bar{R}$ definida por $h_0(t) =$ $= \inf\{f(x) / <x^*, x> \geq t\}$; h_0 es creciente, es decir, $h_0 \in H$. Además $\forall x_0 \in R^n$ se tiene: $h_0(<x^*, x_0>) = \inf\{f(x) / <x^*, x> \geq <x^*, x_0>\}$ $\leq f(x_0)$.

Sea ahora $h \in H$ tal que $h(<x^*, x>) \leq f(x)$ $\forall x \in R^n$. Puesto que h es creciente se verifica: $<x^*, x> \geq t \Rightarrow h(t) \leq h(<x^*, x>) \leq f(x)$, es decir, $h(t) \leq \inf\{f(x) / <x^*, x> \geq t\} = h_0(t)$ $\forall t$, o sea $h \leq h_0$. Por tanto hemos demostrado que $h_0 = \sup\{h / h \in H, h(<x^*, x>) \leq f(x) \ \forall x\}$ $= f^c(x^*)$.

<u>Proposición 4.6:</u> $f:R^n \to \bar{R}$ es H-convexa si y solo si es quasiconvexa normal.

<u>Demostración:</u> Si f es H-convexa, es el supremo de funciones pertenecientes a Φ_H^n, que son quasiconvexas normales según la prop.4.4. Entonces f es quasiconvexa normal.

Recíprocamente, supongamos que f es quasiconvexa normal. Basta probar que $f \leq f^{cc}$. Sea $x_0 \in R^n$, $\lambda_0 < f(x_0)$. Entonces $x_0 \notin S_{\lambda_0}(f)$. Como f es quasiconvexa normal, $S_{\lambda_0}(f)$ es un convexo normal. Por tanto existe $x_0^* \neq 0$ tal que $x \in S_{\lambda_0}(f) \Longrightarrow \langle x_0^*, x \rangle < \langle x_0^*, x_0 \rangle$. Se cumplirá: $f^{cc}(x_0) =$

$= \sup_{x^*} f^c(x^*)(\langle x^*, x_0 \rangle) \geq f^c(x_0^*)(\langle x_0^*, x_0 \rangle) =$

$= \inf\{f(x)/\langle x_0^*, x \rangle \geq \langle x_0^*, x_0 \rangle\} \geq \inf\{f(x)/x \notin S_{\lambda_0}(f)\} =$

$= \inf\{f(x)/f(x) > \lambda_0\} \geq \lambda_0$. De aquí se deduce $f^{cc}(x_0) \geq f(x_0)$, lo que concluye la demostración.

La fórmula de la prop.4.5 permite observar que $f^c(x^*)(\langle x^*, x_0 \rangle)$ coincide con $q_G(x^*)$, la G-conjugada de f en x_0 mencionada en {3}, y f^{cc} es f^{GG}, la biconjugada quasiconvexa de f que allí se cita. Asímismo utilizando la prop.2.7 del cap.I puede verse que $\partial_H f(x_0)$ coincide en este caso con $\partial^* f(x_0)$, el quasisubgradiente de f en x_0. Las propiedades esenciales de estos conceptos pueden deducirse como casos particulares de los enunciados del capítulo I.

H tiene la ventaja de ser cerrada para el ínfimo. Además es completa en 0, ya que contiene a todas las funciones constantes. Así se obtiene también por aplicación del cor.2.9 cap.I: $0\in\partial^{*}f(x_0)\Longleftrightarrow f$ alcanza su mínimo en x_0, resultado que aparece en {3}. Asímismo H verifica las hipótesis de la prop.2.14cap.I y todo $\lambda > 0$ verifica la de la prop.2.13 cap.I.

Llamando H_0 a la familia de funciones que aparece en los párrafos anteriores, por aplicación de la prop.4.4 del cap.I se llega a que $f^c_{H_0}\leq f^c$, de donde $q_G(x^*)\leq q(x^*)$, y a la inclusión del tangencial en el quasisubgradiente, propiedades establecidas en {3}.

Utilizando la fórmula de conjugación dada por la proposición 4.5 se obtien la expresión de la función objetivo del problema dual de un problema de programación matemática general: $\phi^c(0, w^*)(0)= \inf_{x,w}\{\phi(x,w)/<w^*, w>\geq 0\}$. Esta es precisamente la función objetivo del problema dual (Q_G) definido en {2}, cuyas propiedades esenciales pueden obtenerse como casos particulares de las que aparecen en el párrafo 1 del capítulo II.

El H-lagrangiano de un problema general esA:
$L(x,w^*)=\phi^c_x(w^*)(0)=\inf_w\{\phi_x(w)/<w^*,w>\geq 0\}=\inf_w\{\phi(x,w)/<w^*,w>\geq 0\}$.
Todas las propiedades del párrafo 2 cap.II son plenamente aplicables en este caso, pues H es cerrada por traslaciones y también para el ínfimo.

En el caso de perturbaciones verticales, aplicando los resultados del párrafo 3 cap.II se obtienen h_0 y L exactamente iguales que en el caso de ser H la familia de las funciones crecientes contínuas por la izquierda. Las funciones ϕ_x también son aquí H-convexas, pues son quasiconvexas s.c.i., luego normales.

5. PROPIEDADES DE LA CONJUGACIÓN RESPECTO DE LA FAMILIA H DEL PÁRRAFO ANTERIOR.

En todo este párrafo H_0 designará la familia de las funciones crecientes contínuas por la izquierda y H la de todas las funciones crecientes. $f^c_{H_0}$ y f^c designarán respectivamente las conjugadas según estas familias.

a) Continuidad de las funciones $f^c(x^*)$.

Proposición 5.1: Sean $x^*\in R^n$, $t_0\in R$. $f^c_{H_0}(x^*)$ es contínua en t_0 si y solo si $f^c(x^*)$ es contínua en t_0. En este caso las dos funciones toman el mismo valor en t_0.

Demostración: Supongamos que $f^c_{H_0}(x^*)$ es contínua en t_0. Sea $h:R\to\bar{R}$ definida por: $h(t)=\begin{cases} f^c_{H_0}(x^*)(t) & \text{si } t\le t_0 \\ \inf\{f^c(x^*)(t)/t>t_0\} & \text{si } t>t_0 \end{cases}$.

$h\in H_0$, $h\le f^c(x^*)$. Por tanto de la prop.4.6 del cap.I se deduce $h\le f^c_{H_0}(x^*)$. De las siguientes relaciones se sigue la continuidad de $f^c(x^*)$ en t_0 así como la igualdad de las conjugadas en ese punto:

$$f^c_{H_0}(x^*)(t_0)=\sup\{f^c_{H_0}(x^*)(t)/t<t_0\}\le\sup\{f^c(x^*)(t)/t<t_0\}\le$$
$$\le f^c(x^*)(t_0)\le\inf\{f^c(x^*)(t)/t>t_0\}=\inf\{h(t)/t>t_0\}\le$$
$$\le\inf\{f^c_{H_0}(x^*)(t)/t>t_0\}=f^c_{H_0}(x^*)(t_0).$$

Recíprocamente, supongamos que $f^c(x^*)$ es contínua en t_0. Por ser $H_0 \subset H$ se tiene $f^c_{H_0}(x^*)(t_0) \leq f^c(x^*)(t_0)$. Sea $\lambda < f^c(x^*)(t_0)$. Sea $\delta > 0$ tal que $f^c(x^*)(t) > \lambda \ \forall t > t_0 - \delta$. Sea h la función definida por $h(t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } t \leq t_0 - \delta \\ \lambda & \text{si } t > t_0 - \delta \end{cases}$. Por construcción $h \in H_0$, $h \leq f^c(x^*)$. Según la prop.4.6 cap.I $h \leq f^c_{H_0}(x^*)$. Entonces $f^c_{H_0}(x^*)(t_0) \geq h(t_0) = \lambda$. De aquí se deduce $f^c_{H_0}(x^*)(t_0) = f^c(x^*)(t_0)$. Puesto que $f^c_{H_0}(x^*)$ es contínua por la izquierda basta demostrar la continuidad por la derecha, que es consecuencia inmediata de las siguientes relaciones:

$$f^c_{H_0}(x^*)(t_0) \leq \inf\{f^c_{H_0}(x^*)(t)/t > t_0\} \leq \inf\{f^c(x^*)(t)/t > t_0\} =$$
$$= f^c(x^*)(t_0) = f^c_{H_0}(x^*)(t_0).$$

<u>Corolario 5.2:</u> f es M-regular según $x^* \Longrightarrow f^c(x^*)$ es contínua en $f^c(x^*)^{-1}([-\infty, M))$. En este caso $f^c_{H_0}(x^*)$ coincide con $f^c(x^*)$ sobre $f^c(x^*)^{-1}([-\infty, M))$.

<u>Demostración:</u> Es consecuencia de las proposiciones 3.1 y 5.1 y de que $f^c_{H_0} \leq f^c$.

<u>Corolario 5.3:</u> f es regular según x si y solo si $f^c(x^*)$ es contínua. En este caso $f^c_{H_0}(x^*) = f^c(x^*)$.

<u>Demostración:</u> Resulta del cor.3.2 y la prop.5.1.

<u>b) Crecimiento estricto de las funciones $f^c(x^*)$</u>

<u>Proposición 5.4:</u> $f^c(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m, +\infty))$ si y solo si $f^c_{H_0}(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c_{H_0}(x^*)^{-1}((m, +\infty))$.

<u>Demostración:</u> Supongamos en primer lugar que $f^c(x^*)$ es

estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$. Sean $t_1,t_2 \in$ $\in f^c_{H_0}(x\ )^{-1}((m,+\infty))$, $t_1 < t_2$. Sea $\bar{t} \in (t_1,t_2)$ y consideremos la función h definida por:

$$h(t)=\begin{cases} f^c_{H_0}(x^*)(t) & \text{si } t \le \bar{t} \\ f^c(x^*)(t) & \text{si } t > \bar{t} \end{cases}.$$

Por ser $f^c_{H_0}(x^*)$ creciente y menor que $f^c(x^*)$, h es creciente. Además es contínua por la izquierda por serlo $f^c_{H_0}(x^*)$. Fácilmente se comprueba que $h \le f^c(x^*)$. Por la prop.4.6 cap.I $h \le f^c_{H_0}(x^*)$. Por tanto:

$$m < f^c_{H_0}(x^*)(t_1) \le f^c(x^*)(t_1) \le f^c(x^*)(t) = h(t_2) \le f^c_{H_0}(x^*)(t_2) < +\infty$$

En consecuencia $t_1 \in f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$ y de aquí se deduce finalmente:

$$f^c_{H_0}(x^*)(t_1) \le f^c(x^*)(t_1) < f^c(x^*)(t) = h(t_2) \le f^c_{H_0}(x^*)(t_2).$$

Recíprocamente, supongamos ahora $f^c_{H_0}(x^*)$ estrictamente creciente en $f^c_{H_0}(x^*)^{-1}((m,+\infty))$. Sean t_1, $t_2 \in$ $\in f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$, $t_1 < t_2$. Sea h la función definida por:

$$h(t)=\begin{cases} f^c_{H_0}(x^*)(t) & \text{si } t \le t_1 \\ f^c(x^*)(t_1) & \text{si } t > t_1 \end{cases}.$$

Razonando como en la primera parte de la demostración se obtiene: $h \le f^c_{H_0}(x^*)$. De esto se deduce:

$$m < f^c(x^*)(t_1) = h(t_2) \le f^c_{H_0}(x^*)(t_2) \le f^c(x^*)(t_2) < +\infty.$$

Es decir que $t_2 \in f^c_{H_0}(x^*)^{-1}((m,+\infty))$. Sea $\bar{t} \in (t_1,t_2)$. Por hipótesis $f^c_{H_0}(x^*)(\bar{t}) < f^c_{H_0}(x\ )(t_2)$. Por último:

$$f^c(x^*)(t_1) = h(t) \le f^c_{H_0}(x^*)(t) < f^c_{H_0}(x^*)(t_2) \le f^c(x^*)(t_2).$$

<u>Corolario 5.5:</u> Sea $f: R^n \to \bar{R}$ quasiconvexa. Si $\forall x^*$ $f^c(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$, entonces f carece sobre su dominio de mínimos locales no globales.

Si f es inf-compacta el recíproco es cierto.

Demostración: Es consecuencia inmediata de las proposiciones 5.4, 3.5 y 3.3.

Corolario 5.6: Si f es estrictamente quasiconvexa inf-compacta, $\forall x^* \; f^c(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c(x^*)^{-1}((m,+\infty))$.

Demostración: Basta utilizar cor.3.4 y prop.5.4.

Corolario 5.7: Sea $f:R\to\bar{R}$ quasiconvexa. f es estrictamente quasiconvexa si y solo si $\forall x^* \; f^c(x^*)$ es estrictamente creciente en $f^c(x^*)((m,+\infty))$.

Demostración: Por las prop.3.6 y 5.4.

c) Convexidad de las funciones $f^c(x^*)$

Proposición 5.8: Si f es convexa las funciones $f^c(x^*)$ son todas convexas. Recíprocamente, si $\forall x^* \; f^c(x^*)$ es convexa la envolvente quasiconvexa normal de f es convexa.

Demostración: Si f es convexa, dado x^* la función $\phi:R^{n+1}\to R$ dada por $\phi(x,t)=\begin{cases} f(x) & \text{si } <x^*, x>\geq t \\ +\infty & \text{en caso contrario}\end{cases}$ es convexa. Basta tener en cuenta que $f^c(x^*)(t)=\inf_x \phi(x,t)$ para ver la convexidad de $f^c(x^*)$.

Recíprocamente, si las funciones $f^c(x^*)$ son todas convexas, también lo son las funciones φ_{x^*} definidas por $\varphi_{x^*}(x)= f^c(x^*)(<x^*, x>)$. La envolvente quasiconvexa normal de f es $f^{cc}= \sup_{x^*} \varphi_{x^*}$ y por tanto es convexa.

d) Acotación de las funciones $f^c(x^*)$

Proposición 5.9: $f^c(x^*)$ está acotada superiormente si y solo si $f^c_{H_0}(x^*)$ está acotada superiormente.

Demostración: La parte "solo si" es inmediata por ser $f^c_{H_0}(x^*) \leq f^c(x^*)$. Supongamos entonces que $f^c_{H_0}(x^*)$ está acotada superiormente por k. Dado cualquier $t_0 \in R$, sea h la función definida por:

$$h(t)=\begin{cases} f^c_{H_0}(x^*)(t) & \text{si } t\leq t_0 \\ f^c(x^*)(t_0) & \text{si } t> t_0 \end{cases}.$$

Razonando como otras veces se ve que $h \leq f^c_{H_0}(x^*)$. Tomando $t > t_0$ se obtiene: $f^c(x^*)(t_0) = h(t) \leq f^c_{H_0}(x^*)(t) \leq k$, con lo que $f^c(x^*)$ también está acotada superiormente por k.

Corolario 5.10: Sea $f:R^n \to \bar{R}$ s.c.i.. f es inf-compacta si y solo si ninguna de las funciones $f^c(x^*)$ está acotada superiormente.

Demostración: Consecuencia inmediata de las proposiciones 3.8 y 5.9.

6. FUNCIONES SEMI-REGULARES

Al igual que en el párrafo anterior, en este f^c representará la conjugada respecto de la familia de funciones crecientes y $f^c_{H_0}$ la conjugada respecto de la familia de las crecientes contínuas por la izquierda.

La definición de función regular (párrafo 3), introducida en {3}, está motivada por la obtención de condiciones que aseguren la coincidencia de las conjugadas locales utilizadas en ese artículo, q y q_G. Según se ha comentado en los párrafos 2 y 4 estas conjugadas vienen dadas por: $q(x^*)= f^c_{H_0}(x^*)(<x^*, x_0>)$, $q_G(x^*)=f^c(x^*)(<x^*,x_0>)$. Así pues su igualdad es equivalente a la de $f^c_{H_0}(x^*)$ y $f^c(x^*)$. La siguiente definición de semiregularidad, como se verá más adelante, caracteriza la coincidencia de las conjugadas.

Definición: Sea $f:R^n\to\bar{R}$, $m=\inf f(x)$, $M>m$.

f es M-semi-regular según $x^* \Longleftrightarrow \forall\lambda,\mu/m<\lambda<\mu<M$

o bien $F_{x^*}(\lambda)=+\infty$

o bien $\exists x_\mu\in S_\mu(f)/<x^*,x>\geq F_{x^*}(\lambda)$

f es M-semi-regular $\Longleftrightarrow$ f es M-semi-regular según x^* $\forall x^*\neq 0$

f es semi-regular según $x^* \Longleftrightarrow$ f es $+\infty$-semi-regular según x^*

f es semi-regular $\Longleftrightarrow$ f es $+\infty$-semi-regular.

Se ve fácilmente que toda función M-regular según x^* es M-semi-regular según x^*.

Proposición 6.1: f es M-semi-regular según x^* si y solo si $f^c_{H_0}(x^*)(t)= f^c(x^*)(t)$ $\forall t\in f^c_{H_0}(x^*)^{-1}([-\infty,M))$.

Demostración: Supongamos que f es M-semi-regular según x^*. Sea $t\in f^c_{H_0}(x^*)^{-1}([-\infty,M))$. Puesto que $f^c_{H_0}(x^*)(t)\leq f^c(x^*)(t)$, basta demostrar la desigualdad inversa. Sea λ_0 tal que $f^c_{H_0}(x^*)(t)<\lambda_0<M$. De la fórmula de conjugación para H_0 se deduce que $F_{x^*}(\lambda_0)\geq t$. En particular, $F_{x^*}(\lambda_0)>-\infty$ con lo que $S_{\lambda_0}(f)\neq\emptyset$ y $\lambda_0\geq m$. Sean λ, μ tales que $m\leq\lambda_0<\lambda<\mu<M$. Por la semi-regularidad existe $x_\mu\in S_\mu(f)$ tal que $<x^*,x_\mu>\geq$ $\geq F_{x^*}(\lambda)\geq F_{x^*}(\lambda_0)\geq t$. Entonces, $f^c(x^*)(t)=\inf\{f(x)/<x^*,x>\geq t\}$ $\leq f(x_\mu)\leq\mu$. De aquí se deduce $f^c(x^*)(t)\leq\lambda_0$ y, finalmente, $f^c(x^*)(t) \leq f^c_{H_0}(x^*)(t)$.

Recíprocamente, sean λ_0, μ_0 tales que $m < \lambda_0 < \mu_0 < M$. Supongamos que $F_{x^*}(\lambda_0) < +\infty$. Por ser $\lambda_0 > m$, $S_{\lambda_0}(f)$ es no vacío y $F_{x^*}(\lambda_0) > -\infty$. Sea pues $t = F_{x^*}(\lambda_0) \in R$. Se verifica: $f^c_{H_0}(x^*)(t) = \inf\{\lambda / t \leq F_{x^*}(\lambda)\} \leq \lambda_0 < M$. Por hipótesis $f^c(x^*)(t) = f^c_{H_0}(x^*)(t)$. Aplicando la fórmula de f^c resulta: $\inf\{f(x)/<x^*, x> \geq t\} = f^c(x^*)(t) = f^c_{H_0}(x^*)(t) \leq \lambda_0 < \mu_0$. Según esto existe x_{μ_0} tal que $<x^*, x_{\mu_0}> \geq t$, $f(x_{\mu_0}) < \mu_0$, es decir, $x_{\mu_0} \in S_{\mu_0}(f)$ y además $<x^*, x_{\mu_0}> \geq F_{x^*}(\lambda_0)$, que es la definición de M-semi-regularidad en x^*.

<u>Corolario 6.2:</u> f es semi-regular según $x^* \Longleftrightarrow f^c_{H_0}(x^*) = f^c(x^*)$ $\Longleftrightarrow f^c(x^*)$ es contínua por la izquierda.

<u>Demostración:</u> Teniendo en cuenta la prop.4.6 cap.I y la prop.6.1 solo hay que considerar que si $f^c_{H_0}(x^*)(t) = +\infty$ también $f^c(x^*)(t) = +\infty$.

<u>Corolario 6.3:</u> f es semi-regular si y solo si $f^c_{H_0} = f^c$.

<u>Demostración:</u> En virtud del cor.6.2 basta comprobar que $f^c(0)$ es contínua por la izquierda. Ahora bien,

$$f^c(0)(t) = \inf\{f(x)/0 \geq t\} = \begin{cases} \inf f(x) & \text{si } t \leq 0 \\ +\infty & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

<u>Corolario 6.4:</u> Si f es M-semi-regular las envolventes quasiconvexas normal y s.c.i. de f coinciden sobre $S_M(f)$. En particular, si f es semi-regular son idénticas.

<u>Demostración:</u> Esas envolventes son, respectivamente, f^{cc} y $f^{cc}_{H_0}$. Sean $x \in S_M(f)$, $x^* \in R^n$. Si $x^* = 0$, $f^c_{H_0}(0)(<0, x>) = f^c(0)(<0, x>) = \inf f(x)$ por ser H_0 y H completas en 0

(prop.2.8 cap.I). Si $x^{*}\neq 0$ se verifica que $f^{c}_{H_0}(x^{*})(\langle x^{*},x\rangle) < f(x) < M$. Si $f^{c}_{H_0}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle) < M$, en virtud de prop.6.1 $f^{c}_{H_0}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle) = f^{c}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle)$. Si $f^{c}_{H_0}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle)=M$, la misma igualdad se obtiene a partir de $f^{c}(x^{*})(\langle x^{*},x\rangle)\leq$ $\leq f(x)\leq M= f^{c}_{H_0}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle)\leq f^{c}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle)$. Así pues $f^{cc}(x)= \sup_{x^{*}} f^{c}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle)= \sup_{x^{*}} f^{c}_{H_0}(x^{*})(\langle x^{*}, x\rangle)=f^{cc}_{H_0}(x)$.

<u>Proposición 6.5:</u> Si f es M-semi-regular según x^{*} también lo son sus envolventes quasiconvexa, quasiconvexa normal y quasiconvexa s.c.i..

<u>Demostración:</u> Hay que hacer notar en primer lugar que estas envolventes tienen el mismo ínfimo que f, m. Designemos por $\hat{f}$ una cualquiere de ellas. Dado que la función constante de valor m es quasiconvexa s.c.i. (y, por tanto,normal) se tiene $m\leq \hat{f}(x)\leq f(x)\ \forall x$, con lo que tomando ínfimos se obtiene $m\leq \inf \hat{f}(x)\leq \inf f(x)= m$.

Escribiremos $\hat{F}_{x^{*}}(\lambda)= \sup\{\langle x^{*}, x\rangle/x\in S_{\lambda}(\hat{f})\}$; $\hat{S}_{\lambda}(f)$ será la envolvente convexa, o convexa normal, o convexa cerrada de $S_{\lambda}(f)$ según $\hat{f}$ represente la envolvente quasiconvexa, o quasiconvexa normal, o quasiconvexa s.c.i., respectivamente, de f. Se verifica:

$\forall\lambda\in R\ F_{x^{*}}(\lambda)= \sup\{\langle x^{*}, x\rangle/x\in S_{\lambda}(f)\}= \sup\{\langle x^{*}, x\rangle/x\in\hat{S}_{\lambda}(f)\}$.

También se deduce de prop.4.3 y de {3} que $S_{\lambda}(\hat{f})=\bigcap_{\theta>\lambda}\hat{S}_{\theta}(f)$ $\forall\lambda$. Sean λ, μ tales que $m< \lambda< \mu< M$. Tomemos θ tal que $\lambda< \theta< \mu$. Se tiene: $S_{\lambda}(\hat{f})\subset\hat{S}_{\theta}(f)\subset\hat{S}_{\mu}(f)\subset S_{\mu}(\hat{f})$, de donde: $\hat{F}_{x^{*}}(\lambda)\leq F_{x^{*}}(\theta)\leq F_{x^{*}}(\mu)\leq \hat{F}_{x^{*}}(\mu)$. Supongamos $F_{x^{*}}(\lambda)<+\infty$.

Si fuera $F_{x}*(\theta)= +\infty$, también $\hat{F}_{x}*(\mu)= +\infty$, por lo que habría de existir $x_{\mu}\in S_{\mu}(\hat{f})$ tal que $<x^*, x_{\mu}>\geq \hat{F}_{x}*(\lambda)$. En caso contrario por hipótesis existe $x_{\mu}\in S_{\mu}(\hat{f})$ tal que $<x^*, x_{\mu}>\geq F_{x}*(\theta)$, con lo que el enunciado se deduce de las relaciones: $S_{\mu}(f)\subset S_{\mu}(\hat{f})$, $F_{x}*(\theta)\geq \hat{F}_{x}*(\lambda)$.

Proposición 6.6: Toda función inf-compacta es semi-regular.

Demostración: Sean λ, μ tales que $m< \lambda< \mu$, $x^*\neq 0$. Por ser $\lambda> m$, $S_{\lambda}(f)\neq \emptyset$ y así $F_{x}*(\lambda)> -\infty$. Si $F_{x}*(\lambda)< +\infty$, por la inf-compacidad existe $x_{\lambda}\in S_{\lambda}(f)$ tal que $<x^*, x_{\lambda}>= F_{x}*(\lambda)$. Basta pues tener en cuenta que $x_{\lambda}\in S_{\mu}(f)$ por ser $\mu> \lambda$.

En cambio las funciones inf-compactas no son necesariamente regulares. La función $f:R^n\to R$ definida por $f(x)= \begin{cases} ||x|| & \text{si } x\neq 0 \\ -1 & \text{si } x= 0 \end{cases}$ es quasiconvexa inf-compacta y no es M-regular según x^* para ningún x^* ni ningún M.

Proposición 6.7: Sea $f:R\to\bar{R}$. Si f es s.c.i., es semi-regular. Si f es quasiconvexa el recíproco es cierto.

Demostración: Para la primera parte, al igual que en la demostración anterior, si $x^*> 0$ se demuestra la existencia de $x_{\lambda}= \sup\{x/x\in S_{\lambda}(f)\}$. Si $x^*< 0$, $x_{\lambda}= \inf\{x/x\in S_{\lambda}(f)\}$.

Supongamos ahora que f es quasiconvexa semi-regular. Sea $\lambda_0\in R$. $S_{\lambda_0}(f)$ es convexo. Sean $\bar{x}= \sup\{x/x\in S_{\lambda_0}(f)\}$, $\underline{x}= \inf\{x/x\in S_{\lambda_0}(f)\}$. Para ver que $S_{\lambda_0}(f)$ es cerrado bastará con demostrar que $\{x, \underline{x}\}\cap R\subset S_{\lambda_0}(f)$. Supongamos que $\bar{x}\in R$. Esto implica que $S_{\lambda_0}(f)\neq \emptyset$ con lo que $\lambda_0\geq m$. Sea $\tilde{x}\in S_{\lambda_0}(f)$. Sean μ, λ tales que $\lambda_0< \lambda< \mu$. Por hipótesis f es semi-regular según 1. Entonces existe $x_\mu \in S_\mu(f)$ tal que $x_\mu \geq F_1(\lambda) \geq F_1(\lambda_0) = \bar{x}$. Dado que $\tilde{x} \leq \bar{x} \leq x_\mu$, por la quasi-convexidad de f se tiene: $f(\bar{x}) \leq \max\{f(\tilde{x}), f(x_\mu)\} \leq \max\{\lambda_0, \mu\} = \mu$. Esto obliga a que $f(\bar{x}) \leq \lambda_0$, es decir, $\bar{x} \in S_{\lambda_0}(f)$. Si $\underline{x} \in R$, la semi-regularidad según -1 garantiza la existencia de $x_\mu \in S_\mu(f)$ tal que $-x_\mu \geq F_{-1}(\lambda) \geq F_{-1}(\lambda_0) = -\underline{x}$, es decir, $\bar{x} \geq x_\mu$. Por ser $\tilde{x} \geq \underline{x} \geq x_\mu$ la demostración puede acabarse de la misma manera que para $\bar{x}$.

7. EXISTENCIA DE H-SUBGRADIENTES

En este párrafo f^c seguirá designando la conjugada respecto de la familia de todas las funciones crecientes y $f^c_{H_0}$ la conjugada respecto la familia de las crecientes contínuas por la izquierda.

Es un resultado conocido ({3}) que toda función convexa posee en cada punto del interior relativo de su dominio un subgradiente. En particular, toda función convexa finita posee un subgradiente en todo punto de R^n. Estos enunciados no pueden extenderse a las funciones quasiconvexas, aunque sean H-convexas, y sus H-subgradientes (es decir, quasi-subgradiente y tangencial) como puede verse mediante el siguiente contraejemplo:

$f: R^2 \to R$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/(x^2+y^2) & \text{si } x \leq 0,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1+x & \text{si } x \geq 0,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

Los conjuntos de nivel de esta función son:

para $\lambda < 0$, $S_\lambda(f) = \emptyset$

para $0 \leq \lambda < 1$, $S_\lambda(f) = \{(x,y)/\sqrt{\lambda}x+\sqrt{1-\lambda}y \leq 0,\ \sqrt{\lambda}x-\sqrt{1-\lambda}y \leq 0, x \leq 0\}$

para $\lambda \geq 1$, $S_\lambda(f) = \{(x,y)/x \geq \lambda-1\}$.

Al ser todos convexos cerrados f es quasiconvexa s.c.i. (luego normal, es decir, H-convexa). Incluso es contínua en todo punto distinto del origen. Sea $x_0 = (0,1)$. Sea $x^* = (\alpha,\beta)$. Según la fórmula de conjugación, $f^c(x^*)(<x^*,x_0>)$ $= \inf\{f(x,y)/\alpha x+\beta y \geq \beta\}$. Si $\beta > 0$, $f^c(x^*)(<x^*, x_0>) \leq f(-\beta,1+\alpha)$ $= (1+\alpha)^2/(\beta^2+(1+\alpha)^2) < 1$. Si $\beta \leq 0$, $f^c(x^*)(<x^*,x_0>) \leq f(0,0)=0<1$. Dado que $f(x_0) = f(0,1) = 1$, f no posee ningún H-subgradiente en x_0. Como $\partial_{H_0}f(x_0) \subset \partial_H f(x_0)$, tampoco tiene f ningún H_0-subgradiente en x_0 pese a ser quasiconvexa s.c.i. (es decir, H_0-convexa).

Las siguientes proposiciones tratan sobre la existencia de H-subgradientes para funciones quasiconvexas (obsérvese que $f(x_0) = -\infty \Rightarrow \partial_H f(x_0) = R^n$).

<u>Proposición 7.1:</u> Si $\dot{S}_{f(x_0)}(f)$ es un convexo normal, entonces $\partial_H f(x_0) \neq \emptyset$.

<u>Demostración:</u> Dado que $x_0 \notin \dot{S}_{f(x_0)}(f)$, por hipótesis existe $x^* \in R^n$ tal que $x \in \dot{S}_{f(x_0)}(f) \Longrightarrow <x^*, x> < <x^*, x_0>$. Entonces $<x^*, x> \geq <x^*, x_0> \Rightarrow x \notin \dot{S}_{f(x_0)}(f) \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)$ y, por tanto, $f^c(x^*)(<x^*, x_0>) = \inf\{f(x)/<x^*, x> \geq <x^*, x_0>\} = f(x_0)$, es decir, $x^* \in \partial_H f(x_0)$.

La proposición 7.1 sigue siendo cierta si se sustituye H por H_0 siempre que f sea M-semi-regular y $f(x_0) \leq M$, pues de la demostración del corolario 6.4 se sigue que en ese caso $\partial_{H_0} f(x_0)= \partial_H f(x_0)$. En cambio si f no es semi-regular con $M\geq f(x_0)$ la proposición no puede extenderse a H_0, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$f:R^2\rightarrow R$

$$f(x,y)= \begin{cases} xy \text{ si } x\leq 0,\ y\geq 0 \\ \max\{x,-y\} \text{ en caso contrario} \end{cases}.$$

Es fácil ver que f es quasiconvexa contínua. Sea $x_0= (0,1)$. $\dot{S}_{f(x_0)}(f)= \{(x,y)/x< 0,\ y> 0\}$ es un convexo abierto, luego normal. Sea $x^*=(\alpha,\beta)$; Si $\alpha< 0$, sea $x_1= \alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}< 0$, $y_1=$ $= 1+\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}> 0$, $\lambda_1= x_1y_1< 0$.

$F_{x^*}(\lambda_1)= \sup\{\alpha x+\beta y/f(x,y)\leq \lambda_1\}\geq \alpha x_1+\beta y_1= \beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}> \beta$.

Si $\alpha\geq 0$, $\beta> 0$ sea $x_1= -\beta< 0$, $y_1= 1+\alpha> 0$, $\lambda_1= x_1y_1< 0$.

$F_{x^*}(\lambda_1)\geq \alpha x_1+\beta y_1= \beta$.

Si $\alpha\geq 0$, $\beta< 0$ sea $x_1= \beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}< 0$, $y_1= 1-\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}> 0$, $\lambda_1= x_1y_1< 0$.

$F_{x^*}(\lambda_1)\geq \alpha x_1+\beta y_1= \beta$.

Si $\alpha= \beta= 0$, sea $\lambda_1<0$ cualquiera.

$F_{x^*}(\lambda_1)= 0= \beta$.

Si $\alpha> 0$, $\beta= 0$, sea $\lambda_1< 0$ cualquiera.

$F_{x^*}(\lambda_1)= \sup\{\alpha x/xy\leq \lambda_1,\ x\leq 0\}= \alpha\sup\{x/xy\leq \lambda_1,\ x\leq 0\}=\alpha 0=0=\beta$.

Resumiendo, en cualquier caso resulta:

$f^c_{H_0}(x^*)(<x^*, x_0>)= \inf\{\lambda/<x^*, x_0>\leq F_{x^*}(\lambda)\}=\inf\{\lambda/\beta\leq F_{x^*}(\lambda)\}\leq$ $\leq \lambda_1< 0= f(x_0)$. Es decir, $\partial_{H_0} f(x_0)= \emptyset$.

<u>Proposición 7.2:</u> $\partial_H f(x_0)\neq \emptyset\ \forall x_0\notin\dot{S}_\lambda(f)\Rightarrow\dot{S}_\lambda(f)$ es convexo normal.

Demostración: Si $x_0 \notin \dot{S}_\lambda(f)$, sea $x^* \in \partial_H f(x_0)$. Entonces se tiene:

$x \in \dot{S}_\lambda(f) \Rightarrow f(x) < \lambda \leq f(x_0) = f^c(x^*)(<x^*, x_0>) = \inf\{f(x) / <x^*, x> \geq <x^*, x_0>\}$
$\Rightarrow <x^*, x> < <x^*, x_0>$.

Dado que $H_0 \subset H$, la anterior proposición es válida si se reemplaza H por H_0 ya que $\partial_{H_0} f(x_0) \subset \partial_H f(x_0)$.

Corolario 7.3: $\partial_H f(x_0) \neq \emptyset \; \forall x_0 \Leftrightarrow \dot{S}_\lambda(f)$ es convexo normal $\forall \lambda \in R \cup \{+\infty\}$.

Por lo observado después de la prop.7.1, si f es semi-regular el cor.7.3 sigue siendo válido sustituyendo H por H_0.

Para funciones de una sola variable se tiene la siguiente proposición:

Proposición 7.4: Sea $f: R \to \overline{R}$. Sea $\tilde{H} \in \{H, H_0\}$. Entonces f es $\tilde{H}$-convexa en $x_0 \Leftrightarrow \partial_{\tilde{H}} f(x_0) \neq \emptyset$.

Demostración: Si f es $\tilde{H}$-convexa en x_0 se tiene $f(x_0) =$
$= \sup_{x^*} f^c_H(x^*)(x^* x_0)$. Dado que por la prop.2.13 cap.I se tiene para $x^* \neq 0$ que

$f^c(x^*)(x^* x_0) = f^c(\pm |x^*|)(x^* x_0) = f^c(\pm 1)((x^*/|x^*|)x_0) =$
$= f^c(\pm 1)(\pm x_0)$, resulta:

$$f(x_0) = \max\{f^c(1)(x_0),\; f^c(-1)(-x_0),\; f^c(0)(0)\}.$$

Entonces $f(x_0) = f^c(x^*)(x^* x_0)$ para algún $x^* \in \{1, -1, 0\}$, de donde se deduce el enunciado (para el recíproco basta ver prop.1.3a) cap.I).

8. OTROS EJEMPLOS

a) H consta de dos funciones: la identidad y $-\infty$

H es evidentemente cerrada para el supremo. Φ_H^n está formada por las funciones lineales junto con la constante $-\infty$. Por tanto las funciones H-convexas son en este caso las convexas s.c.i. propias positivamente homogéneas y la constante $-\infty$. Las fórmulas de conjugación resultan en este caso:

para $f:R^n \to \bar{R}$, $f^c(x^*) = \begin{cases} \text{identidad si } \langle x^*, x\rangle \leq f(x)\ \forall x \\ -\infty \text{ en caso contrario} \end{cases}$

para $g:R^n \to H$, $g^c(x) = \sup\{\langle x^*, x\rangle / g(x^*) \text{ es la identidad}\}$.

Las funciones $g:R^n \to H$, al tomar dos valores, pueden identificarse con los subconjuntos de R^n. Diremos que g es la función indicador de $\{x^*/g(x^*)$ es la identidad$\}$. Según esto sus conjugadas son precisamente las funciones soporte de dichos subconjuntos. Si g es la función indicador de C, g^{cc} responde a:

$g^{cc}(x^*) = \begin{cases} \text{identidad si } \langle x^*, x\rangle \leq \sup\{\langle x^*, x\rangle / x \in C\}\ \forall x \\ -\infty \text{ en caso contrario} \end{cases}$,

es decir, que g^{cc} es la función indicador de la envolvente convexa cerrada de C. Así pues g es H-convexa si y solo si es la función indicador de un convexo cerrado.

$x^* \in \partial_H f(x_0)$ si $f(x_0) = -\infty$, en cuyo caso $\partial_H f(x_0) = R^n$, o si $x^* \in \partial f(x_0)$ y además $\langle x^*, x_0\rangle = f(x_0)$. Para g, función indicador de C, los subgradientes en x^* son: todos los $x_0 \in R^n$ si $C = \emptyset$, o aquellos $x_0 \in C$ para los cuales la función lineal asociada a x_0 alcanza su supremo sobre C en x^*.

b) H es la familia de todas las funciones crecientes s.c.i. positivamente homogéneas

En otros términos, $H=\{h_{a,b}/a,b\in[0,+\infty]\}\cup\{\pm\infty\}$, donde las funciones $h_{a,b}$ están definidas mediante:

$h_{a,b}(t)=\begin{cases} at \text{ si } t\leq 0 \\ bt \text{ si } t>0 \end{cases}$. En el caso $a=+\infty$ se considerará $h_{+\infty,b}(0)=-\infty$.

Φ_H^n está formada por las funciones quasiafines s.c.i. positivamente homogéneas. Las funciones H-convexas son en este caso las quasiconvexas s.c.i. positivamente homogéneas, pues de la fórmula de conjugación para la familia de las funciones crecientes contínuas por la izquierda se deduce fácilmente que si f es positivamente homogénea también lo son las $f^c(x^*)$ $\forall x^*$.

Las fórmulas de conjugación son en este caso las siguientes: para $f\equiv+\infty$, $f^c\equiv+\infty$. Para cualquier otra función:

$f^c(x^*)=\begin{cases} -\infty \text{ si } \inf\{f(x)/<x^*,x>>0\}<0 \\ h_{\alpha,\beta} \text{ en caso contrario, con } \alpha,\ \beta \text{ dadas por:} \end{cases}$

$\alpha=\begin{cases} +\infty \text{ si } \inf\{f(x)/<x^*,x>=0\}<0 \\ \max\{0,\ \sup\{f(x)<x^*,x>^{-1}/<x^*,x><0\}\} \text{ en caso contrario} \end{cases}$

$\beta=\inf\{f(x)<x^*,x>^{-1}/<x^*,x>>0\}$.

c) H es la familia de todas las funciones crecientes positivamente homogéneas

Ahora $H=\{h_{a,c,b}/a,b\in[0,+\infty],c\in\{-\infty,0,+\infty\}\cap[-a,b]\}\cup\{\pm\infty\}$, donde las funciones $h_{a,c,b}$ están dadas por:

$h_{a,c,b}(t)=\begin{cases} at \text{ si } t<0 \\ c \text{ si } t=0 \\ bt \text{ si } t>0 \end{cases}$.

Análogamente a lo que sucede en el caso anterior Φ_H^n está formado por las funciones quasiafines normales positivamente homogéneas y las H-convexas son las quasiconvexas normales positivamente homogéneas.

Las fórmulas de conjugación resultan: para $f\equiv +\infty, f^c\equiv +\infty$. Para cualquier otra función:

$$f^c(x^*)=\begin{cases} -\infty \text{ si } \inf\{f(x)/\langle x^*, x\rangle > 0\} < 0 \\ h_{\alpha,\gamma,\beta} \text{ en caso contrario, con } \alpha,\ \gamma,\ \beta \text{ dadas por:} \end{cases}$$

$$\beta = \inf\{f(x)\langle x^*, x\rangle^{-1}/\langle x^*, x\rangle > 0\}$$

$$\gamma = \max\{c/c\in\{-\infty,0,+\infty\},\ c\le \beta,\ c\le \inf\{f(x)/\langle x^*, x\rangle = 0\}\}$$

$$\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \gamma = -\infty \\ \max\{0,\sup\{f(x)\langle x^*, x\rangle^{-1}/\langle x^*, x\rangle < 0\}\} \text{ si } \gamma > -\infty. \end{cases}$$

CAPÍTULO IV

DIVERSAS EXTENSIONES

1. EXTENSIÓN A FORMAS NO BILINEALES

la proposición 4.9 del capítulo I establece una limitación importante en la aplicabilidad de la teoría de la H-convexidad. El origen de esta limitación reside en la utilización de la forma bilineal $<x^*, x>$ en todos los conceptos esenciales de la teoría.

En {5} Dolecki y Kurcyusz han extendido las nociones clásicas de convexidad y conjugación a partir de una familia de funciones reales finitas Φ, de la siguiente manera: $f:R^n \to \bar{R}$ es Φ-convexa si es el supremo de funciones pertenecientes a Φ; $C \subset R^n$ es Φ-convexo si es intersección de conjuntos de nivel de funciones de Φ. Las envolventes Φ-convexa de una función f y de un conjunto A son, respectivamente, la mayor función Φ-convexa mayorada por f y la intersección de todos los conjuntos Φ-convexos que contienen a A. La conjugada de $f:R^n \to \bar{R}$ es $f^*:\Phi \to \bar{R}$ dada por: $f^*(\varphi) = \sup_{x \in R^n} \{\varphi(x) - f(x)\}$. La de $g:\Phi \to \bar{R}$ es $g^*:R^n \to \bar{R}$ dada por: $g^*(x) = \sup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(x) - g(\varphi)\}$. f es Φ-convexa en x_0 si $f(x_0) = f^{**}(x_0)$. $\varphi \in \Phi$ es subgradiente de f en x_0 si $\varphi \leq f$ y $\varphi(x_0) = f(x_0)$. Resulta pues natural la siguiente definición:

Definición: $f:R^n \to \bar{R}$ es Φ-quasiconvexa si todos sus conjuntos de nivel son Φ-convexos.

De esta definición se deduce fácilmente que toda función Φ-convexa es Φ-quasiconvexa y que el supremo de una familia de funciones Φ-quasiconvexas es también Φ-quasiconvexa, por lo que cabe considerar la envolvente Φ-quasiconvexa de una función cualquiera ya que, además, la función constante de valor $-\infty$ es Φ-quasiconvexa.

Siendo H, como de costumbre, una familia de funciones de variable real a valores en $\bar{R}$, cerrada para el supremo, consideremos $\Phi_H=\{h\circ\varphi / h\in H,\ \varphi\in\Phi\}$. Dada $f:R^n\to\bar{R}$, su Φ_H-soporte será $L_{\Phi_H}(f)=\{h\circ\varphi\in\Phi_H / h\circ\varphi\leq f\}$. f se dirá Φ_H-convexa si es el supremo de funciones pertenecientes a Φ_H, en otras palabras, si $f=f^0=\sup\{h\circ\varphi / h\circ\varphi\in L_{\Phi_H}(f)\}$. f^0 es la Φ_H-envolvente de f, o sea, la mayor función Φ_H-convexa minorante de f. f es Φ_H-convexa en $x_0\in R^n$ si $f(x_0)=f^0(x_0)$. $\varphi\in\Phi$ es un Φ_H-subgradiente de f en x_0 si existe $h_0\in H$ tal que $h_0\circ\varphi\leq f$ y $h_0(\varphi(x_0))=f(x_0)$.

Las nociones adecuadas de conjugación son en este caso las siguientes:

para $f:R^n\to\bar{R}$, $f^c:\Phi\to H$, $f^c(\varphi)=\sup\{h/h\in H,\ h\circ\varphi\leq f\}$

para $g:\Phi\to H$, $g^c:R^n\to\bar{R}$, $g^c=\sup\limits_{\varphi} g(\varphi)\circ\varphi$.

Con estas definiciones g^c y, en particular, f^{cc} son siempre Φ_H-convexas. $g:\Phi\to H$ es H-convexa si existe $f:R^n\to\bar{R}$ tal que $f^c=g$. x es un subgradiente de g en φ_0 si $(g(\varphi_0)\circ\varphi_0)(x)=\sup\limits_{\varphi}(g(\varphi)\circ\varphi)(x)$.

Todas las proposiciones del capítulo I y sus corolarios siguen siendo válidos si se sustituyen en ellos los coceptos de H-convexa y H-envolvente por los de ϕ_H-convexa y ϕ_H-envolvente respectivamente, $\partial_H f(x_0)$ por $\partial_H^{\phi}(x_0)=$ $=\{\varphi\epsilon\phi/\varphi$ es un ϕ_H-subgradiente de f en $x_0\}$, $\partial g(x_0^*)$ por $\partial g(\varphi_0)=\{x\epsilon R^n/x$ es un subgradiente de g en $\varphi_0\}$, x^* por φ y $<x^*, x>$ por $\varphi(x)$, excepto las proposiciones 1.4, 2.8, 2.10, 2.14b), 3.5 y 3.11 y sus corolarios, en las cuales la linealidad es esencial. En las prop.4.8 y 4.9 hay que interpretar los hiperplanos como las clases de la relación de equivalencia inducida por φ sobre R^n, es decir, $x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \varphi(x_1)=\varphi(x_2)$.

Dado el problema de programación matemática "minimizar $\phi(x,0)$", donde $\phi: R^n x R^k \rightarrow \bar{R}$, a partir de la familia Φ de funciones reales finitas sobre R^k construimos $\tilde{\Phi}=\{\tilde{\varphi}: R^n x R^k \rightarrow \bar{R}/\exists\varphi\epsilon\Phi,\ \tilde{\varphi}(x,w)=\varphi(w)\ \forall x,w\}$, es decir, la familia de composiciones de funciones de Φ con la proyección de $R^n x R^k$ sobre su segunda componente. De esta manera surge el problema dual "maximizar $\phi^c(\tilde{\varphi})(\tilde{\varphi}(0))$". Este problema se llamará consistente si existe $\varphi_1\epsilon\tilde{\Phi}$ tal que $\phi^c(\tilde{\varphi}_1)(\tilde{\varphi}_1(0))>-\infty$. Todos los resultados del párrafo sobre problemas duales son completamente válidos con las correspondientes adaptaciones de vocabulario y notación (w^* debe sustituirse por φ, $\phi^c(0,w^*)$ por $\phi^c(\tilde{\varphi})$ y $\phi^c(0,w^*)(0)$ por $\phi^c(\tilde{\varphi})(\tilde{\varphi}(0))$). El lagrangiano debe ahora definirse por: $L(x,\varphi)=\phi_x^c(\varphi)(\varphi(0))$; (x_0,φ_0) es punto de silla de L si $L(x_0,\varphi)\leq L(x_0,\varphi_0)\leq L(x,\varphi_0)$

x R^n, $\psi \in \Phi$. Todos los enunciados del párrafo sobre lagrangianos son aplicables aquí. En la proposición 2.4 y sus corolarios puede suprimirse de ser H cerrada por traslaciones aplicando el siguiente lema, sustitutivo del 2.3.

Lema: $\phi^c(\tilde{\varphi}) \leq \phi^c_{x_0}(\varphi)$ $\forall \varphi$, x_0.

Demostración: Sea $h \in H$ tal que $h \circ \tilde{\varphi} \leq \phi$. Dado $w \in R^k$ se tiene: $(h \circ \varphi)(w) = h(\varphi(w)) = h(\tilde{\varphi}(x_0, w)) = (h \circ \tilde{\varphi})(x_0, w) \leq \phi(x_0, w) = \phi_{x_0}(w)$, es decir, $h \circ \varphi \leq \phi_{x_0}$. Entonces $\phi^c(\tilde{\varphi}) = \sup\{h / h \in H, h \circ \tilde{\varphi} \leq \phi\} \leq \sup\{h / h \in H, h \circ \varphi \leq \phi_{x_0}\} = (\phi_{x_0})^c(\varphi)$.

El hecho de que en este marco más general el lagrangiano goce de propiedades más fuertes es solo aparente. Se debe a que Φ_H y $\tilde{\Phi}_H$ son esencialmente la misma familia. En cambio en el caso lineal Φ_H^{n+k} incluye estrictamente a Φ_H^k.

Los resultados relativos a lagrangianos de problemas con perturbaciones verticales no son extensibles directamente al caso actual.

En el caso de tomar H la familia de funciones h_b con $h_b(t) = t - b$, $b \in \bar{R}$, las conjugadas resultan equivalentes a las que aparecen en {5} en el mismo sentido que se ha expuesto al tratar la conjugación en análisis convexo.

Si H representa la familia de funciones crecientes continuas por la izquierda, de manera similar a lo que sucede en el caso lineal, la fórmula de conjugación para $f: R^n \to \bar{R}$ resulta: $f^c(\varphi)(t) = \inf\{\lambda / t \leq \sup\{\varphi(x) / x \in S_\lambda(f)\}\}$

y la Φ_H-convexidad es equivalente a la Φ-quasiconvexidad.

En {5} la noción de Φ-convexidad resulta útil al tomar Φ la familia de fynciones del tipo $\varphi(x)= -\rho||x-z||$ $\forall x$ con $\rho> 0$, $z\in R^n$, para la interpretación del lagrangiano aumentado de Buys y Rockafellar. Al intentar aplicar a esta familia la conjugación que da lugar a la Φ-quasiconvexidad solo se obtienen resultados triviales en cuanto a dualidad, inútiles en la práctica.

2. OTRAS GENERALIZACIONES

Siguiendo las ideas del párrafo anterior pueden considerarse familias Φ de funciones $\varphi:R^n\to C$, con C un conjunto arbitrario. Ahora H debe ser una familia de funciones $h:C\to\bar{R}$ cerrada para el supremo. Las nociones y propiedades generales se mantienen en este caso.

Por último, teniendo en cuenta que en el contexto anterior la composición de funciones solo desempeña el papel de transformar funciones a valores en C en funciones reales, puede darse también la siguiente generalización, que engloba a todas las anteriores: Φ es un conjunto arbitrario, H una familia de aplicaciones de Φ en el conjunto de las funciones de R^n en $\bar{R}$, cerrada para el supremo puntual. Todo sigue siendo válido escribiendo $h(\varphi)$ en lugar de $h\circ\varphi$.

3. CONJUGACIÓN DE MULTIAPLICACIONES

En {10} Volle da una noción de multiaplicación conjugada de una multiaplicación de un conjunto en un grupo abeliano ordenado completo. Esta noción resulta útil en el caso de multiaplicaciones epigráficas, dado que la conjugada de una multiaplicación cualquiera resulta ser siempre una multiaplicación epigráfica. En este párrafo daremos un concepto de conjugación de multiaplicaciones que incluye al anterior como caso particular y es aplicable en contextos más generales. Además no requiere ninguna estructura algebraica ni de orden sobre los conjuntos que intervienen.

E, E^*, T, A serán conjuntos arbitrarios. Consideraremos dada una aplicación $\begin{array}{c} E^*\times E \longrightarrow T \\ (x^*,x)\longmapsto [x^*,x] \end{array}$. H será una familia de multiaplicaciones de T en A cerrada para la intersección, es decir, tal que $h_i\in H \;\forall i\in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} h_i\in H$.

Una multiaplicación $F:E \lessdot A$ diremos que es H-convexa si puede expresarse como intersección de multiaplicaciones φ del tipo $\varphi(x)= h([x^*, x])$ para algún $x^*\in E^*$, $h\in H$. Obviamente la intersección de multiaplicaciones H-convexas es H-convexa. La H-envolvente de F será F^0, la intersección de todas las multiaplicaciones H-convexas que la contienen.

<u>Definición:</u> Dada $F:E\lessdot A$, su conjugada será $F^c:E\rightarrow H$ definida por: $F^c(x^*)=\bigcap\{h/h\in H,\ F(x)\subset h([x^*, x])\ \forall x\}$.

Dada $G:E^{*}\to H$, su conjugada será $F^{c}:E \prec A$ definida por:

$$G^{c}(x)=\bigcap_{x^{*}} G(x^{*})([x^{*}, x])$$

<u>Proposición 3.1:</u> La segunda conjugada de cualquier multiaplicación coincide con su H-envolvente.

<u>Demostración:</u> Por definición, $F^{cc}(x)=\bigcap_{x^{*}} F^{c}(x^{*})([x^{*}, x])\ \forall x$. Dado que $F^{c}(x^{*})\in H$, F^{cc} es H-convexa. Además de la fórmula para F^{c} se deduce que $F(x)\subset F^{c}(x^{*})([x^{*}, x])\ \forall x$, con lo que $F(x)\subset\bigcap_{x^{*}} F^{c}(x^{*})([x^{*}, x])= F^{cc}(x)$, es decir, $F\subset F^{cc}$ y, por tanto, $F^{0}\subset F^{cc}$. Sea $x_0\in E$, $a\notin F^{0}(x_0)$. Existen $h\in H$, $x_0^{*}\in E$ tales que $a\notin h([x_0^{*}, x_0])$, $F(x)\subset h([x_0^{*}, x])\ \forall x$. De aquí, $a\notin F^{c}(x_0^{*})([x_0^{*}, x_0])$, con lo que $a\notin F^{cc}(x_0)$ y se deduce $F(x_0)= F^{cc}(x_0)$.

<u>Corolario.3.2:</u> $F:E\prec A$ es H-convexa $\Longleftrightarrow F= F^{cc}$.

<u>Definición:</u> $F:E\prec A$ diremos que es H-convexa en $x_0\in E$ si se verifica $F(x_0)= F^{cc}(x_0)$.

$x^{*}\in E^{*}$ se dirá que es un H-subgradiente de $F:E\prec A$ en $x_0\in E$ si existe $h_0\in H$ tal que $F(x)\subset h_0([x^{*}, x])\ \forall x$, $F(x_0)= h_0([x^{*},x_0])$

El H-subdiferencial de F en x_0 será $\partial_H F(x_0)=$

$=\{x^{*}/x^{*}$ es H-subgradiente de F en $x_0\}$.

<u>Proposición 3.3:</u>

a) $\partial_H F(x_0)\neq \emptyset \Rightarrow F$ es H-convexa en x_0.

b) F es H-convexa en $x_0 \Rightarrow \partial_H F(x_0)= \partial_H F^{cc}(x_0)$

c) $x^{*}\in\partial_H F(x_0) \Longleftrightarrow F^{c}(x^{*})([x^{*}, x_0])= F(x_0)$

<u>Demostración:</u>

a) Sea $x^{*}\in\partial_H F(x_0)$, $h_0\in H$ tal como en la definición de H-subgradiente. Se tiene: $F^{cc}(x_0)= F^0(x_0)\subset h_0([x^*, x_0])= F(x_0)\subset$ $\subset F^{cc}(x_0)$.

b) Sea $x^*\in \partial_H F(x_0)$, $h_0\in H$ tal que $F(x)\subset h_0([x^*, x])$ $\forall x$, $F(x_0)=$ $= h_0([x^*, x_0])$. De la inclusión se deduce $F^{cc}(x)\subset h_0([x^*,x])$ $\forall x$ y, por hipótesis, $F^{cc}(x_0)= F(x_0)= h_0([x^*, x_0])$. Entonces $x^*\in\partial_H F^{cc}(x_0)$.

Recíprocamente, sea $x^*\in\partial_H F^{cc}(x_0)$. Para algún $h_0\in H$ será: $F^{cc}(x)\subset h_0([x^*, x])$ $\forall x$, $F^{cc}(x_0)= h_0([x^*, x_0])$. Dado que $F(x)\subset F^{cc}(x)$ $\forall x$ y que $F(x_0)= F^{cc}(x_0)$, se obtiene que $x^*\in\partial_H F(x_0)$.

c) Si $F^c(x^*)([x^*, x_0])= F(x_0)$, dado que $F(x)\subset F^c(x^*)([x^*,x])$, basta tomar $h_0= F^c(x^*)$. Recíprocamente, si $x^*\in\partial_H F(x_0)$, para algún $h_0\in H$ se tiene: $F(x_0)\subset F^c(x^*)([x^*, x_0])=$ $= \bigcap\{h([x^*, x_0])/h\in H,\ F(x)\subset h([x^*, x])\ \forall x\}\subset h_0([x^*, x_0])=F(x_0)$.

Como se ve, con este esquema se conservan las propiedades esenciales que aparecieron en el capítulo I. Vamos a ver ahora que en un caso particular se obtienen unas conjugadas equivalentes a las de {10}.

Supongamos que $A= T$ es un grupo abeliano completamente ordenado y H es la familia de multiaplicaciones de T en T del tipo h_b, con $b\in\overline{T}= T\cup\{\pm\infty\}$, dadas por: $h_b(t)=$ $= \{t'/t'\geq t-b\}$. H es cerrada para la intersección puesto que para $\{b_i\}_{i\in I}$ familia de $\overline{T}$ se verifica: $\bigcap_{i\in I} h_{b_i}(t)=$ $= \{t'/t'\geq t-b_i\ \forall i\in I\}= \{t'/t'\geq t-\inf_{i\in I} b_i\}= h_{\inf_{i\in I} b_i}$. En este caso mediante algunos cálculos se puede ver la relación

ción de F^c con F^*, la conjugada que aparece en (10):

$$F^c(x^*)(t) = \bigcap\{h_b(t)/b\in\overline{T},\ F(x)\subset h_b([x^*,\ x])\ \forall x\} =$$
$$= \{t'/t' \geq t-b\ \forall b\in T \text{ tal que } z\in F(x)\quad z\geq [x^*,\ x]-b\} =$$
$$= \{t'/t' \geq t-\inf\{b/1_F(x) \geq [x^*,\ x]-b\}\} =$$
$$= \{t'/t' \geq t-(1_F)^*(x^*)\} = h_{(1_F*)(x^*)}(t).$$

Así que a partir de F^* se obtiene F^c por: $F^c(x^*) = h_{(1_F*)(x^*)}$.
Por otra parte $1_{F^c(x^*)}(t) = t-(1_F*)(x^*)$, de donde $(1_F*)(x^*) =$
$= t-1_{F^c(x^*)}(t)$ y se tiene:

$$F^*(x^*) = E(1_F*)(x^*) = \{t'/t' \geq t-1_{F^c(x^*)}(t)\} = h_{1_{F^c(x^*)}(t)}(t)\ \forall t.$$

Esta última expresión da F^* a partir de F^c. En cuanto a las biconjugadas, $F^{cc}(x) = \bigcap_{x^*} F^c(x^*)([x^*,\ x]) = \bigcap_{x^*} h_{(1_F*)(x^*)}([x^*, x])$
$= \{t'/t' \geq [x^*,\ x]-(1_F*)(x^*)\ \forall x^*\} = \{t'/t' \geq (1_F*)^*(x)\} =$
$= \{t'/t' \geq (1_F**)(x)\} = E(1_F**)(x) = F^{**}(x)$.

Todo esto permite pues afirmar que las conjugadas son en cierto sentido equivalentes. No obstanta los subgradientes en general no coinciden. Un H-subgradiente es siempre un subgradiente en el sentido de Volle, pero el recíproco no es cierto en general (si lo es para multiaplicaciones epigráficas). Con la definición de Volle no se verifica el enunciado análogo al de la prop.3.3a).

La H-conjugación de funciones y las nociones relativas pueden obtenerse a partir de esta noción de conjugación de multiaplicaciones considerando las multiaplicaciones epigráficas. Incluso la conjugación cóncava puede derivarse de esta teoría utilizando las multiaplicaciones hipográficas.

Fuera de este contexto también puede ser aplicable la teoría de conjugación de multiaplicaciones dada en este párrafo, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$E= R^n$, $E^*= R^n$, $[x^*, x] = \langle x^*, x\rangle$, $T= R$, $A= R^p$. H será la familia de multiaplicaciones del tipo $h_f(t)= S_{-t}(f)$, donde f es cualquier aplicación $R^p \to \bar{R}$ convexa s.c.i. propia (incluyendo entre ellas las funciones constantes $\pm\infty$). Esta familia es cerrada para la intersección, ya que se verifica: $\bigcap_{i\in I} h_{f_i}(t) = \bigcap_{i\in I} S_{-t}(f_i) = S_{-t}(\sup_{i\in I} f_i) = h_{\sup_{i\in I} f_i}(t)\ \forall t$. Puede verse fácilmente que en este caso las multiaplicaciones H-convexas son aquellas que son cerradas ({6}) y cuyo grafo es convexo en R^{n+p}. En cuanto a los H-subgradientes puede comprobarse lo siguiente:

a) $F(x_0)= R^p \Rightarrow \partial_H F(x_0)= R^n$

b) Si $F(x_0)\neq R^p$, $x^*\neq 0$, se tiene:

$x^*\in\partial_H F(x_0) \Longleftrightarrow \exists C$ convexo cerrado de $R^{n+p}/G(F)\subset C$, $\forall y_0\in R^p$

$\{x/(x_0,y)\in C\}$ es un semiespacio del tipo

$\{x/\langle x^*, x\rangle\leq k\}$ con $k< +\infty$, $\{y/(x_0,y)\in C\}= F(x_0)$.

c) $0\in\partial_H F(x_0) \Longleftrightarrow F(x_0)$ es convexo cerrado, $F(x_0)=\bigcup_{x\in R^n} F(x)$.

BIBLIOGRAFÍA

1. AVRIEL, M. "Nonlinear programming. Analysis and methods", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1976)

2. CROUZEIX, J.P. "Contributions a l'étude des fonctions quasiconvexes", tesis doctoral, Université de Clermont (Francia), 1977.

3. CROUZEIX, J.P. "Conjugacy in quasiconvex analysis", en Convex Analysis and Its Applications ed. por Auslender, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg (1977).

4. DOLECKI. S.; KURCYUSZ, S. "Convexité generaliseé et optimisation", C.R.Acad.Sci.París Ser A-B, 283 (1976), pp. A-91-94.

5. DOLECKI, S.; KURCYUSZ, S. "On Φ-convexity in extremal problems", SIAM J. Control, (1978) Vol.16 nº2, pp.277-299

6. HOGAN, W. " Point-to-set maps in mathematical programming" SIAM Review, (1973) Vol.15, nº3.

7. LUENBERGER, D.G. "Quasi-Convex Programming", SIAM J. Appl. Math. (1968), Vol.16, pp.1090-1095.

8. MARTOS,B., "Quasi-Convexity and Quasi-Monotonicity in Nonlinear Programming", Studia Sci.Math.Hung. (1967) Vol.2, pp.265-273.

9. ROCKAFELLAR, R.T. "Convex Analysis", Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).

10. VOLLE, M. "Dualité en convexité generaliseé" (comunicación privada).

INDICE