UNIVERSITAT DE BARCELONA

Haces reflexivos sobre espacios proyectivos

Rosa María Miró Roig

HACES REFLEXIVOS SOBRE ESPACIOS PROYECTIVOS.

Rosa María Miró Roig.

HACES REFLEXIVOS SOBRE ESPACIOS PROYECTIVOS.

Rosa María Miró Roig.

Memoria presentada por Rosa María Miró Roig para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Facultad de Matemáticas. Universidad de Barcelona.

Barcelona, 29 de Agosto de 1985.

CERTIFICO que la presente memoria ha sido realizada bajo mi dirección por Rosa M. Miró Roig, y que constituye su tesis para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

S. Xambó.

Barcelona 29 de Agosto de 1985.

Dr. S. Xambó Descamps.

Als meus pares.

I N D I C E

INTRODUCCION.

INTRODUCCION.

Esta memoria pretende contribuir al estudio de haces reflexivos sobre espacios proyectivos en los dos siguientes aspectos:

(A) Caracterización de las clases de Chern de haces reflexivos sobre espacios proyectivos.

(B) Estudio de esquemas que parametrizan haces reflexivos sobre espacios proyectivos con clases de Chern prefijadas.

El estudio sistemático de los haces reflexivos, y en particular de los haces reflexivos estables de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$, fue iniciado en 1980 por Hartshorne en su artículo "Stable reflexive sheaves" |H5|. Entre las razones que inducen al estudio de haces reflexivos y que Hartshorne aduce en |H5| cabe destacar las 3 siguientes:

(i) Sabemos que existe una correspondencia entre fibrados vectoriales de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y curvas Y de $\mathbb{P}^3$ localmente intersección completa y que verifican $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(m)$ para cierto entero m. Esta última condición impone una restricción muy fuerte a tales curvas. Usando haces reflexivos en lugar de fibrados vectoriales obtenemos una correspondencia biyectiva entre haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y curvas arbitrarias de $\mathbb{P}^3$.

(ii) Usando la llamada sucesión de reducción (Preliminares, Teorema 11) podemos clasificar fibrados vectoriales de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ relacionándolos con haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con segunda clase de Chern menor.

(iii) Los haces reflexivos aparecen de manera natural al estudiar fibrados vectoriales de rango elevado. Por ejemplo, dado un fibrado E de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ generado por secciones globales y una sección general $0 \neq s \in H^0E$ obtenemos una sucesión exacta del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

donde F es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Por lo tanto, podemos estudiar E en términos de F y de las extensiones de F por $\mathcal{O}$.

Sea X un esquema y E un haz coherente sobre X, se define el dual de E como $E^{\vee} := \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X)$ y se dice que E es reflexivo si la aplicación natural $E \longrightarrow E^{\vee\vee}$ es un isomorfismo. Un haz reflexivo de rango 2 (Resp. 3) sobre $\mathbb{P}^n$ se llama estable en el sentido de Mumford-Takemoto |T| si H^0E_{norm}=o (Resp. $H^0E_{norm} = H^0E^{\vee}_{norm} = 0$) donde E_{norm} denota el torcido de E con primera clase de Chern igual a 0 o -1 (Resp. 0, -1, o -2). Un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ se llama inestable si $H^oE_{norm} \neq 0$; como medida de la inestabilidad de un haz reflexivo inestable de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ se toma el mayor entero r tal que $H^oE^v_{norm}(-r)\neq 0$ y se le llama orden de inestabilidad de E.

En lo referente a cuestiones del tipo (A), los resultados más notables que se han obtenido son la solución de los problemas 1-3 que describimos a continuación.

<u>PROBLEMA 1.</u> |H5; § 4| Caracterizar $\{(c_1,c_2,c_3)\in \mathbb{Z}^3 /$ Existe un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, $c_3\}$.

Puesto que torciendo adecuadamente un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ siempre podemos conseguir un haz tal que $c_1=-1$, ó 0, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que esta condición es satisfecha. Siendo esto así, los valores de c_2, c_3 para un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ están sujetos a las siguientes restricciones:

i) $c_2 > 0$ |H5; Proposition 3.3, 9.7| .

ii) $c_1c_2 \equiv c_3$ (mod. 2) |H5; Corollary 2.4 |.

iii) $0 \leq c_3 \leq \begin{cases} c_2^2 & \text{si } c_1=-1 \\ c_2^2-c_2+2 & \text{si } c_1=0 \end{cases}$ |H5; Theorem 8.2|.

Nuestra contribución consiste en ver que dado $c_2>0$ existe un número finito de intervalos determinados explícitamente en los que c_3 no puede tomar valores (Cap. I; Teorema 3.2), y en ver que los restantes valores de c_3, bajo las condiciones i)– iii), son posibles (Cap. I; Teorema 2.5).

Como aplicación, caracterizamos los posibles valores de las clases de Chern y en el caso $c_1=0$ del α-invariante de Atiyah-Rees, de un fibrado vectorial estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Cap. I; Teorema 4.2).

PROBLEMA 2. |S; Pag. 5| Caracterizar $\{(c_1,c_2,c_3,r)\in \mathbb{Z}^4 /$ Existe un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern c_1, c_2, $c_3\}$.

Al igual que en la resolución del problema 1, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $c_1=0$, ó -1. Siendo esto así, los posibles valores de c_2, c_3 para un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, están sujetos a las siguientes restricciones:

i) $c_3 \equiv c_1c_2 \pmod{2}$ |H5; Corollary 2.4| .

ii) $c_1+r \geq 0$ |S;§ 1| .

iii) $c_2+r^2+c_1r \geq 0$ |S;§ 1| .

iv) $$0 \leq c_3 \leq \begin{cases} (c_2+r^2)(c_2+(r+1)) & \text{si } c_1=0 \\ (c_2+r^2-r)(c_2+r^2+r) & \text{si } c_1=-1 \end{cases}$$ |S; Thm. 3.8|.

Nuestra contribución consiste en ver que dados c_2, r tales que $c_2+r^2+c_1r \geq 0$ existe un número finito de intervalos determinados explicitamente en los que c_3 no puede tomar valores (Cap. II; Teorema 3.3); y en ver que los restantes valores de c_3, bajo las condiciones i) – iv), son posibles (Cap. II; Teorema 2.7).

Como corolario, caracterizamos el conjunto $\{(c_1,c_2,c_3)/$ Existe un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, $c_3\}$ (Cap. II; Teorema 4.1). En particular, poniendo $c_3=0$, reencontramos el Teorema de Atiyah-Horrocks-Rees que caracteriza las clases de Chern de un fibrado vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Cap. II; Corolario 4.2).

<u>PROBLEMA 3.</u> Caracterizar $\{(c_1,c_2,c_3)/$Existe un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, $c_3\}$.

En |V| Vogelaar demuestra que para toda terna de enteros que verifique la relación de Schwarzenberger $c_3 \equiv c_1c_2$ (mod. 2) existe un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, c_3. Nos preguntamos: ¿ Qué restricciones impone la estabilidad sobre las clases de Chern de un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$? Puesto que torciendo un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ podemos conseguir un haz tal que $c_1=0$, -1, ó -2, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que esta condición es satisfecha. Siendo esto así, los valores de c_2, c_3 para un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con $0 \leq s=h^0\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O})$ están sujetos a las siguientes restricciones:

i) $c_1c_2 \equiv c_3$ (mod. 2) |H5; Corollary 2.4| .

ii) Si $c_1=-1$, entonces $c_2 \geq 1$ y $-c_2^2+2s \leq c_3 \leq c_2^2-2c_2+ +2$ |E-H-V; Theorem 4.3|.

iii) Si $c_1=-2$, entonces $c_2 \geq 2$ y $-c_2^2+3c_2-4+2s \leq c_3 \leq c_2^2-3c_2+2$ |E-H-V; Theorem 4.3|.

iv) Si $c_1=0$, entonces $c_2 \geq 2$ y $-c_2^2+c_2+2s \leq c_3 \leq c_2^2-c_2$. Además, si la restricción de E a un plano general es estable , entonces $c_2 \geq 3$ y $-c_2^2+3c_2-6+2s \leq c_3 \leq c_2^2-3c_2+6$ |E-H-V; Theorem 4.2| .

Nuestra contribución consiste en ver que dado $c_2 \geq 3$, existe un número finito de intervalos determinados explícitamente en los que c_3 no puede tomar valores (Cap. III; Teorema 3.6); y en ver que los restantes valores de c_3, bajo las condiciones i)-iv), son posibles (Cap. III; Teorema 2.20).

A continuación vamos a describir los principales resultados que se han obtenido en relación a las cuestiones del tipo (B). En |M1| y |M2| Maruyama construye un esquema M que parametriza en el sentido de moduli |N| , los haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern prefijadas. Sin embargo, en muy pocos casos se conoce una descripción explícita de los mismos. En los Teoremas 2.5 y 2.7 del Cap. IV se han estudiado los espacios de moduli de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ cuyas clases de Chern corresponden a los extremos inferiores de los intervalos de inexistencia de c_3. De estos espacios de moduli determinamos su dimensión y demostramos que son irreducibles, racionales y lisos. En los Teoremas 2.8 y 2.10 del Cap. V se han estudiado los espacios de moduli de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ cuyas clases de Chern corresponden a los extremos superiores de los intervalos de inexistencia de c_3; demostrándose su irreducibilidad y calculándose la dimensión de los mismos. Así pues, han quedado clasificados los haces reflexivos de rango 2 cuya tercera clase de Chern es uno de los dos extremos de los intervalos de inexistencia descritos en el Teorema 3.2 del Cap. I (Véase el problema 1). Como aplicación de estos resultados construimos familias de curvas proyectivamente normales, de las que además damos una resolución localmente libre de su haz de ideales.

Finalmente, en el Cap. VI se demuestra la existencia de una variedad irreducible que parametriza los haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, cuyas clases de Chern corresponden a los extremos inferiores de los intervalos de inexistencia de c_3. Como aplicación se dan ejemplos de pares (d,g) tales que el abierto del esquema de Hilbert formado por las curvas lisas y conexas de grado d y género g es irreducible.

Presentados los resultados más notables, pasamos a describir el contenido de la memoria, así como las técnicas más importantes que en ella se han utilizado.

Como observación general digamos que un gran número de resultados de esta memoria hacen referencia a haces reflexivos normalizados de rango 2 (Resp. 3) sobre $\mathbb{P}^3$, en cuyo caso $c_1=0$, ó -1 (Resp. $c_1=0$, -1, ó -2), y que las demostraciones para un valor de c_1 son muy similares a las demostraciones para los otros valores. En consecuencia hemos optado por demostrar con detalle el caso $c_1=-1$ y en omitir las demostraciones en los demás casos. Los enunciados en que por esta razón, se omita la demostración, se distinguen con un (*).

Preliminares. En ellos se recopilan las definiciones de los conceptos que serán usados a lo largo de esta memoria, y sus propiedades fundamentales. Se incluye la demostración de los resultados que no son fáciomente accesibles y la de aquellos que han sufrido alguna modificación.

Capítulo I. El objetivo de este capítulo es demostrar los Teoremas 2.5 y 3.2 que resuelven el problema 1. Para ello se construyen, vía la correspondencia que existe entre haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y curvas de $\mathbb{P}^3$, familias de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y se analizan que valores de c_1, c_2, c_3 aparecen. Finalmente, usando las principales propiedades del espectro de un haz reflexivo de rango 2, se prueba que los intervalos no cubiertos por estas construcciones son intervalos de inexistencia de c_3.

Capítulo II. En este capítulo se resuelve el problema 2 (Teoremas 2.7 y 3.3). Para ello se construyen familias de haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y se analizan qué valores de c_1, c_2, c_3, r aparecen. A continuación se prueba que para valores de c_3 elevados, todo haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r posee un plano inestable de orden $t > r$. Por último, las propiedades del espectro junto con el Teorema de existencia de planos inestables (3.1 y 3.2) nos permiten probar que los intervalos no cubiertos por las construcciones anteriores son intervalos de inexistencia de c_3.

El capítulo finaliza con un apéndice donde se incluyen, para mayor comodidad del lector, algunos resultados auxiliares sobre rectas múltiples.

Capítulo III. Los resultados centrales de este capítulo son los Teoremas 2.20 y 3.6 que resuelven el problema 3.

En la primera sección damos una cota optimal de la tercera clase de Chern de un haz reflexivo semiestable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ en términos de c_1 y c_2; y cotas optimales del orden de inestabilidad de un plano inestable para un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ en función de c_1 y c_2. Para este último resultado ha sido necesario establecer un Teorema de anulación para el 2°grupo de cohomología de E (Teorema 2.10).

El resto del capítulo está destinado a demostrar los Teoremas 2.20 y 3.6. Para ello se construyen, vía extensiones de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ por fibrados de línea, familias de haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ y se analizan qué valores de c_3 aparecen. A continuación se prueba que para valores de c_3 elevados, todo haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ posee un plano inestable (Teorema 3.1). Por último usando las propiedades del espectro, las cotas dadas en la primera sección y la sucesión de reducción, se demuestra que los valores de c_3 no cubiertos por las construcciones anteriores son efectivamente intervalos de inexistencia de c_3.

Capítulo IV. En este capítulo se estudian los espacios de moduli $M:=M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$ y $N:=M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$ cuyas clases de Chern corresponden a los extremos inferiores de los intervalos de inexistencia de c_3.

En el §1 se construye una familia $\mathcal{F}$ (Resp. $\mathcal{L}$) irreducible, racional y lisa de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2rc_2+2r(r+1))$

(Resp. $(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2)$) y usando la sucesión de reducción se da una resolución localmente libre de cualquier haz E de M (Resp. N). Estas resoluciones son utilizadas en el § 2 para probar que M (Resp. N) es irreducible. En el §2 se calcula también la dimensión del espacio tangente de Zariski de M (Resp. N) en cualquier punto E de M (Resp. N), se demuestra la racionalidad y lisitud de M (Resp. N) y se calcula la dimensión de M (Resp. N).

Capítulo V. En este capítulo se estudian los espacios de moduli $M:=M^s_{\mathbb{P}^3}(-1,c_2,c_2^2-2(r-1)c_2)$ y $N:=M^s_{\mathbb{P}^3}(0,c_2,c_2^2-(2r-1)c_2)$ cuyas clases de Chern corresponden a los extremos superiores de los intervalos de inexistencia de c_3.

En el §1 se demuestra la existencia de una variedad irreducible, racional y lisa cuyos puntos cerrados están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfía de haces reflexivos semiestables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_2^2+c_2)$. Estos resultados y la sucesión de reducción nos permiten demostrar en el §2 que M (Resp. N) es irreducible y calcular su dimensión.

El capítulo finaliza con un ejemplo de espacio de moduli con dos componentes irreducibles que se cortan.

Capítulo VI. En este capítulo se estudian los haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$ y $(o,c_2,c_2^2+r^4+2c_2r+$ $+2c_2r^2+c_2+2r^3+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$.

Como resultados más notables destacamos la existencia de una variedad irreducible cuyos puntos cerrados están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfía de haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern $(-1, c_2, c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1))$ y $(0, c_2, c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+c_2+2r^3+r^2-2t(c_2+r^2-t-1))$; y la determinación de resoluciones localmente libres de los mismos.

El capítulo finaliza con ejemplos de pares (d,g) tales que el abierto del esquema de Hilbert formado por las curvas lisas, conexas, de grado d y género g es irreducible.

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. S. Xambó por haber dirigido este trabajo; al Profesor R. Hartshorne, por haberme proporcionado inestimable información sobre haces reflexivos; y a Juan por el apoyo y afecto que en todo momento me ha dado.

Barcelona, Agosto 1985.

PRELIMINARES.

PRELIMINARES

En este capítulo recopilamos las definiciones de los conceptos que serán utilizados en esta memoria, así como sus propiedades fundamentales. Se incluye la demostración de los resultados que no son fácilmente accesibles o la de aquellos que han sufrido alguna modificación.

A lo largo de esta memoria k será un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero, $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo de dimensión n sobre k, y $\mathcal{O}(t):=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)$ el fibrado de línea de $\mathbb{P}^n$ con primera clase de Chern $t\in\mathbb{Z}$.

Dado un subesquema cerrado X de $\mathbb{P}^n$, denotaremos por $\mathcal{O}_X$ su haz estructural, I_X el haz de ideales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ que define X y ω_X su haz dualizante. Llamaremos curva a todo subesquema cerrado de dimensión pura uno de $\mathbb{P}^n$, Cohen-Macaulay y genéricamente localmente intersección completa.

Para todo haz coherente E sobre $\mathbb{P}^n$ escribiremos

$E(t):= E\otimes\mathcal{O}(t)$, $H^q(E):=H^q(\mathbb{P}^n,E)$, $h^q(E):=\dim_k H^q(\mathbb{P}^n, E)$

y $E_Y := E \otimes \mathcal{O}_Y$ donde Y es un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^n$.

Dado un esquema íntegro y noetheriano X y un haz coherente E sobre X, se define el dual de E como $E^v := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E, \mathcal{O}_X)$. Un haz coherente E sobre X se llama reflexivo si la aplicación natural $\mu : E \longrightarrow E^{vv}$ es un isomorfismo. Tenemos las siguientes caracterizaciones y propiedades de los haces reflexivos:

<u>Proposición 1</u>. (Véase | H5; Propositions 1.1 y 1.3 |). Sea X un esquema noetheriano y normal, y sea F un haz coherente sobre X. Entonces son equivalentes:

(i) F es reflexivo

(ii) Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

con E localmente libre y G libre de torsión

(iii) F es libre de torsión y para todo $x \in X$ tal que $\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$, depth $F_x \geq 2$.

Dado un haz coherente E sobre un esquema noetheriano e íntegro X, pondremos

$$dhE := \sup_{x \in X} dp\ E_x$$

siendo dp E_x la dimensión proyectiva de E_x como $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo, y

$$S(E) := \{x \in X / E_x \text{ no es } \mathcal{O}_{X,x}\text{- libre}\} = \{x \in X / dp\ E_x \geq 1\};$$

es sabido que S(E) es un subconjunto cerrado de codimensión mayor o igual que uno.

Proposición 2. (Véase | 02 ; Proposition 1.2 | y | H5; Corollary 1.4 |). Sea E un haz coherente sobre un esquema noetheriano y regular X. Si E es reflexivo, entonces $\operatorname{codim}_X S(E) \geq 3$. Recíprocamente si dh $E \leq 1$ y $\operatorname{codim}_X S(E) \geq 3$, entonces E es reflexivo.

Corolario 3. (Véase | H5; Proposición 1.7 |). Sea X un esquema noetheriano localmente factorial y sea E un haz reflexivo de rango 1 sobre X. Entonces E es inversible.

Para más detalles sobre el concepto y la caracterización de haces reflesivos véase |H5|.

Sea E un fibrado vectorial de rango r sobre una variedad no singular X de dimensión n. Para toda i=0, 1,..., n se define la i-ésima clase de Chern de E, $c_i(E) \in A^i(X)$ por $c_o(E) = 1$, $c_i(E) = 0$ si $i > r$ y $\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, \pi^* c_i(E) \xi^{r-i} = 0$ en $A^r(\mathbb{P}(E))$, siendo $\pi\colon \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ la proyección natural y $\xi \in A^*(\mathbb{P}(E))$ la clase del divisor correspondiente a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ |H; Apéndice A|, |G1|.

Si $X = \mathbb{P}^n$, $A(X) = \mathbb{Z}|t|/(t^{n+1})$ donde t es la clase de un hiperplano y podemos considerar $c_i(E)$ como un entero.

Se define el polinomio de Chern de un fibrado vectorial E de rango r sobre una variedad no singular X por

$$c_t(E) = c_0(E) + c_1(E)t + \ldots + c_r(E)t^r .$$

Si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de fibrados vectoriales, entonces $c_t(E) = c_t(E') \cdot c_t(E'')$. Por lo tanto, podemos definir el polinomio de Chern sobre el grupo de Grothendieck $k_1(X)$ de fibrados vectoriales sobre X |H; pg. 238| y extender la definición a cualquier haz coherente F sobre X, vía el isomorfismo que existe entre $k_1(X)$ y el grupo de Grothendieck $k(X)$ de haces coherentes sobre X |H; Cap. III exercise 6.9|.

Del teorema de Grothendieck - Hirzebruch - Riemann - Roch |H; Apéndice A, 4.1| se deduce:

<u>Teorema 4.</u> Sea E un haz coherente de rango r sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, c_3 y sea $X(E) = \sum_i (-1)^i h^i E$ su característica de Euler. Entonces:

$$X(E) = r + \binom{c_1+3}{3} - 2c_2 + \frac{1}{2}(c_3 - c_1c_2) - 1.$$

En particular, se obtiene la relación de Schwarzenberger $c_1c_2 = c_3$ (mod. 2).

Es sabido (Véase |H5; Proposición 2.6|) que si E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, entonces $c_3(E) = h^0(\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}))$. En particular $c_3 \geq 0$ y $c_3 = 0$ si y sólo si E el localmente libre. Este resultado puede ser resumido diciendo que "c_3 es el número de puntos donde E no es libre". Para haces reflexivos de rango $r > 2$, ya no se verifica esta relación entre la c_3 y los puntos donde E no es libre contados con adecuada multiplicidad (Véase Capítulo III; Proposición 1.5).

Proposición 5. (Véase |H5; Lemma 2.1|) Sea E un haz coherente de rango r sobre $\mathbb{P}^n$, y $p \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$c_i E(p) = c_i E + (r-i+1)\, p\, c_{i-1}(E) + \binom{r-i+2}{2} p^2 c_{i-2}(E) + \dots + \binom{r}{i} p^i$$

Dado un k-espacio vectorial V, denotaremos por DV a su dual. Se tiene:

Teorema 6. (Teorema de dualidad de Serre). Sea E un haz reflexivo sobre $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, con dh $E \leq 1$. Se verifica:

(i) $DH^n E = H^o(E^v \otimes \omega)$

(ii) $DH^o E = H^n(E^v \otimes \omega)$

(iii) La sucesión $0 \to H^1(E^v \otimes \omega) \to DH^{n-1}E \to H^o(Ext^1(E,\omega)) \to$
$\dots \to H^i(E^v \otimes \omega) \to DH^{n-i}E \to H^{i-1}(Ext^1(E,\omega)) \to \dots \to$
$\to H^{n-3}(Ext^1(E,\omega)) \to H^{n-1}(E^v \otimes \omega) \to DH^1E \to 0$ es exacta.

Demostración: El caso $n=3$ (resp. $n = 4$) fue probado por Hartshorne en |H5; Theorem 2.5| (resp. Okonek en |Ø 2; Theorem 1.5|). El caso general, al igual que los casos $n = 3,4$, se deduce del Teorema de dualidad de Serre $DH^iE = Ext^{n-i}(E,\omega)$ |H; Cap. III Theorem 7.1| , de la sucesión espectral $E_2^{pq} = H^p(Ext^q(E,\omega)) \Longrightarrow Ext^{p+q}(E,\omega)$, de la hipótesis dh $E \leq 1$ y del hecho de que por ser E reflexivo, $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^n}(\operatorname{Supp}(\mathcal{E}xt^1(E,\omega))) \geq 3$.

Es bien conocido que existe una correspondencia biyectiva entre fibrados vectoriales de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y curvas X de $\mathbb{P}^3$ localmente intersección completa tales que $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(a)$ para cierto $a \in \mathbb{Z}$ |H2; §1|. Esta última condición impone una restricción muy fuerte a tales curvas. Usando haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ en lugar de fibrados vectoriales se obtienen curvas arbitrarias de $\mathbb{P}^3$. En concreto, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7. (Véase |H5; Theorem 4.1|) Para todo entero c_1, existe una correspondencia biyectiva entre:

(i) Los pares (E,s), donde E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1(E)= c_1$ y $s \in H^oE$ es una sección global cuyo esquema de ceros tiene codimensión dos, y

(ii) Los pares (Y,e), donde Y es una curva de $\mathbb{P}^3$ Cohen-Macaulay, genéricamente localmente intersección completa y $e \in H^o\omega_Y(4-c_1)$ es una sección global que genera el haz $\omega_Y(4-c_1)$ salvo quizás en un número finito de puntos. Además, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-c_1) \longrightarrow E^v \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

y $c_2(E)= \deg Y$, $c_3(E)= 2p_a(Y)-2 + \deg Y(4-c_1)$ donde $p_a(Y)$ es el género aritmético de Y.

A lo largo de la presente memoria, cuando digamos que E está determinado por el par (Y,e) se sobreentenderá que $0 \neq e \in H^0 \omega_Y(4-c_1)$ y que e genera $\omega_Y(4-c_1)$ salvo quizás en un número finito de puntos. Esta última condición sólo se verificará en aquellos casos en que no sea inmediata.

En |$\mathcal{O}$ 2; Theorem 2.5| Okonek prueba la siguiente generalización:

Para todo entero c_1, existe una correspondencia biyectiva entre:

(i) Los pares (E,s), donde E es un haz reflexivo de rango r sobre $\mathbb{P}^n$ con $c_1(E) = c_1$ y dh E ≤ 1, y $s = (s_1, \dots, s_{r-1}) \in H^0 E^{r-1}$ es una sección global cuyo esquema de ceros $(s_1 \wedge \dots \wedge s_{r-1})_0$ tiene codimensión dos, y

(ii) Los pares (Y,e), donde Y es un subesquema cerrado Cohen-Macaulay de codimensión 2 de $\mathbb{P}^n$ y $e = (e_1, \dots, e_{r-1}) \in H^0(\omega_Y(n+1-c_1))^{r-1}$ es una sección global que genera $\omega_Y(n+1-c_1)$ salvo quizás en un subconjunto cerrado de codimensión ≥ 3.

Usaremos la definición de estable (resp. semiestable) de Mumford-Takemoto |T|.

<u>Definición 8.</u> Un haz reflexivo E sobre $\mathbb{P}^n$ es estable (resp. semiestable) sí para todo subhaz coherente E' de E con $0 < \text{rg } E' < \text{rg } E$ se verifica que $\frac{c_1(E')}{\text{rg } E'} < \frac{c_1(E)}{\text{rg } E}$ (resp. $\leq$).

Como es habitual en la literatura escribiremos $\mu(E)= \dfrac{c_1(E)}{rg\ E}$, y le llamaremos la pendiente del haz E. Observemos que si $c_1(E)$ y $rg(E)$ son primos entre sí entonces los conceptos de estable y semiestable son equivalentes.

Para todo haz coherente E de rango r sobre $\mathbb{P}^n$ existe un único entero k_E tal que $c_1(E(k_E)) \in \{0, -1,\dots, -r+1\}$, pondremos $E_{norm} := E(k_E)$. Un haz coherente E de rango r sobre $\mathbb{P}^n$ se llama normalizado si $E_{norm} = E$.

Proposición 9. (i) Un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$ es estable (resp. semiestable) si y sólo si $H^o E_{norm} = 0$ (resp. $H^o\ E_{norm}(-1) = 0$).

(ii) Un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^n$ es estable (resp. semiestable) si y sólo si $H^o E_{norm} = H^o(E^v)_{norm} = 0$ (resp $H^o\ E_{norm}(-1) = H^o((E^v)_{norm}(-1)) = 0$).

Demostración. Véase | O-S-S; Cap. II - Lemma 1.2.5. y Remark 1.2.6|

Un haz reflexivo normalizado E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$ se llama inestable |S; pg. 4| si existe un entero no negativo r tal que $H^o E(-r) \neq 0$. Como medida de la inestabilidad de un haz reflexivo normalizado E, inestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, tomamos el mayor entero r tal que $H^o E^v(-r) \neq 0$, a este entero se le llama orden de inestabilidad del haz E.

En el estudio de haces reflexivos E de rango r sobre $\mathbb{P}^n$, una técnica importante es la de restricción de E a un hiperplano general H de $\mathbb{P}^n$ ya que información sobre la restricción suele proporcionar información sobre el haz original. En particular si E es un haz reflexivo estable (resp. semiestable) sobre $\mathbb{P}^n$ nos gustaría conocer si la restricción E_H de E a un hiperplano general es estable (resp. semiestable). Para haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$ la respuesta es conocida:

Si E es un haz reflexivo semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, entonces para todo hiperplano general H de $\mathbb{P}^n$, E_H es estable salvo en el caso n=3 y E el fibrado de la correlación nula |B; Theorem 3|. Si car $k = p > 0$, E_H es estable salvo en el caso n= 3 y E isomorfo al fibrado de la correlación nula o a un pullback por el automorfismo de Fröbenius del fibrado de la correlación nula |E|.

Para haces reflexivos de rango 3 sobre $\mathbb{P}^n$ la respuesta es casi completa |E-H-V|; mientras que para haces reflexivos de rango $r \geq 4$ sólo se conocen algunos resultados parciales |M3| y |M4|.

<u>Definición 10.</u> (|H5; §9| , |S, §5|). Sea E un haz reflexivo normalizado de rango r sobre $\mathbb{P}^n$. Un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$ se llama inestable para E si existe un entero $s > 0$ tal que $H^0((E_H)^\vee(-s)) \neq 0$. Al mayor de tales enteros s se le llama orden de inestabilidad del hiperplano H.

Nótese que aplicando el teorema de dualidad de Serre a H se tiene que la condición $H^oE^v_H(-s)\neq 0$ es equivalente a la condición $H^{n-1}E_H(s-n-1)\neq 0$.

En el capítulo I, Corolario 1.3 (resp. capítulo 2, Teorema 1.3) damos una cota optimal del orden de inestabilidad de un plano inestable para un haz reflexivo E estable (respec. inestable de orden r) de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ en función de las clases de Chern de E (resp. las clases de Chern de E y el orden de inestabilidad r de E). Y en el capítulo 3, Teorema 1.11 damos una cota optimal del orden de inestabilidad de un plano inestable para un haz reflexivo E estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ en función de las clases de Chern de E.

A continuación introduciremos la llamada sucesión de reducción descrita por Hartshorne en |H5| y que permite reducir el estudio de haces reflexivos normalizados E de rango 2 (resp. 3) sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3), al estudio de haces reflexivos de rango 2 (resp. 3) sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1',c_2',c_3') donde $c_2' < c_2$.

<u>Teorema 11.</u> (Sucesión de reducción). Sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ normalizado con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) y sea $H\subset\mathbb{P}^3$ un plano inestable de orden t. Entonces:

(i) Existe una sucesión exacta

$$0\longrightarrow E'\longrightarrow E\longrightarrow I_{ZH}(-t)\longrightarrow 0$$

donde E' es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y Z un subesquema de dimensión 0 de H. Sea $n = h^o(\mathcal{O}_Z)$.

(ii) Las clases de Chern c_i' de E' vienen dadas por $c_1' = c_1 - 1$, $c_2' = c_2 - t - c_1$, $c_3' = c_3 - c_2 - c_1 t - t^2 + 2n$.

(iii) Existe una sucesión exacta dual

$$0 \longrightarrow E^v \longrightarrow E'^v \longrightarrow I_{WH}(t+1) \longrightarrow 0$$

donde W es un subesquema de dimensión 0 de H tal que $n' = h^o(\mathcal{O}_W) = c_2 + c_1 t + t^2 - n$.

(iv) Existe también una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E'^v, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E^v, \mathcal{O}) \longrightarrow \omega_W \longrightarrow 0$$

que nos da $n \leq c_3'$, $n' \leq c_3$ y $n + c_3 = n' + c_3'$.

<u>Demostración.</u> Para (i), (ii) y (iii) véase |H5; Proposición 9.1|.

(iii) Dualizando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E^v \longrightarrow E'^v \longrightarrow I_{WH}(t+1) \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(I_{WH}(t+1), \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E'^v, \mathcal{O}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E^v, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2(I_{WH}(t+1), \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

Obsérvese que $\mathcal{E}xt^1(I_{WH}(t+1), \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}_H(-t)$. En efecto, la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I_{WH}(t+1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(t+1) \longrightarrow \mathcal{O}_W \longrightarrow 0$$

nos da $\mathcal{E}xt^1(I_{WH}(t+1), \mathcal{O}) \simeq \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_H(t+1), \mathcal{O})$, además

$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_H(t+1),\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}_H(-t)$, por lo tanto tenemos que $\mathcal{E}xt^1((I_{WH}(t+1),\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}_H(-t)$. Análogamente se prueba que $\mathcal{E}xt^2(I_{WH}(t+1),\mathcal{O}) \simeq \omega_W$.

Por otro lado, la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(-t) \longrightarrow 0,$$

prueba que $\mathrm{Coker}(E \longrightarrow \mathcal{O}_H(-t)) \simeq \mathcal{O}_Z$, por lo tanto tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E'^{\vee},\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E^{\vee},\mathcal{O}) \longrightarrow \omega_W \longrightarrow 0$$

de la que se deduce $n = h^0(\mathcal{O}_Z) \leq h^0(\mathcal{E}xt^1(E'^{\vee},\mathcal{O}) = c_3'$, $n' = h^0(\mathcal{O}_W) \leq h^0(\mathcal{E}xt^1(E^{\vee},\mathcal{O})) = c_3$ y $n+c_3 = n'+c_3'$.

<u>Teorema 12.</u> (Sucesión de reducción) Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1, c_2, c_3), sea $0 \leq s = h^0(\mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O}))$ y sea $H \subset \mathbb{P}^3$ un plano inestable para E de orden t. Entonces:

(i) Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(-t) \longrightarrow 0$$

donde E' es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ y Z un subesquema de dimensión 0 de H. Sea $n = h^0(\mathcal{O}_Z)$.

(ii) Las clases de Chern c_i' de E' vienen dadas por $c_1' = c_1 - 1$, $c_2' = c_2 - t - c_1$, $c_3' = c_3 - c_2 - c_1 t - t^2 + 2n$. Sea $0 \leq s' = h^0(\mathcal{E}xt^1(E',\mathcal{O}))$.

(iii) Existe una sucesión exacta dual

$$0 \longrightarrow E^{\vee} \longrightarrow E'^{\vee} \longrightarrow I_{WH}(t+1) \longrightarrow 0$$

donde W es un subesquema de dimensión 0 de H, tal que $h^o(\mathcal{O}_W)=$ $n+s-s'$

(iv) Existe también una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E'^v,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E^v,\mathcal{O}) \longrightarrow \omega_W \longrightarrow 0$$

que nos da $n \leq s'$ y $n' \leq s$.

<u>Demostración.</u> Es análoga a la del Teorema 10 y por lo tanto la omitimos.

Recordemos a continuación la definición y las principales propiedades del espectro de un haz reflexivo.

El concepto de espectro de un haz localmente libre fue introducido por Barth y Elencwajg en |BE|. Recordemos su definición. Sean L y L' dos rectas disjuntas de $\mathbb{P}^3$, consideremos la correspondencia $X=\{(x,y)\in \mathbb{P}^3 x\, L'/\ x\in \text{Plano} <y, L>\}$ y denotemos por $p: X\longrightarrow \mathbb{P}^3$ y $q: X\longrightarrow L' \simeq \mathbb{P}^1$ la restricción de las proyecciones naturales. Sea E un fibrado vectorial estable de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,\ c_2)$. Entonces el haz $\mathcal{H}:=R^1q_*p^*E(-1)$ es un haz localmente libre de rango c_2 sobre $L\simeq \mathbb{P}^1$. Por lo tanto, existen enteros $k_1,\ \ldots,\ k_{c_2}$ tales que $\mathcal{H}\simeq \overset{c_2}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$ |G|.

Al conjunto de enteros $\{k_1\}_{i=1,\ldots,c_2}$ se le llama el espectro de E y verifica las siguientes propiedades:

(i) $\{-k_i\} = \{k_i\}$

(ii) $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2}$ es una sucesión conexa de enteros.

(iii) $H^1(\mathbb{P}^3, E(m)) \simeq H^o(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2} \mathcal{O}(k_i+m+1))$ para todo $m \leq -1$.

De estas propiedades se deduce el siguiente Teorema de anulación:

(iv) $H^1(\mathbb{P}^3, E(q)) = 0$ para $q \geq -\frac{1}{2} c_2 - 1$.

El concepto de espectro de un fibrado vectorial estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ ha sido generalizado por Hartshorne a haces reflexivos estables (resp. semiestables) de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ |H5|, probando el siguiente resultado:

Teorema 13. (Véase |H5; Theorem 7.1|). Sea E un haz reflexivo normalizado semiestable de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Entonces existe una única sucesión de enteros $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2}$, llamado el espectro de E, que verifica:

(i) $h^1(\mathbb{P}^3, E(m)) = h^0(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2} \mathcal{O}(k_i+m+1))$ para $m \leq -1$.

(ii) $h^2(\mathbb{P}^3, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2} \mathcal{O}(k_i+m+1))$ para $m \geq -3-c_1$.

Recordemos a continuación las principales propiedades del espectro de un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Sea E un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) y sea $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2}$ su espectro. Se verifica:

1.- $c_3 = -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i$ si $c_1 = 0$

|H5; Proposition 7.3|

$c_3 = -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i - c_2$ si $c_1 = -1$

2.- (i) Supongamos que $c_1=0$ y que E es semiestable. Se verifica:

(a) Si existe un $k > 0$ en el espectro, entonces $1, 2, \ldots, k$ están en el espectro.

(b) Si existe un $k < 0$ en el espectro, entonces $-1, -2, \ldots, k$ están en el espectro.

(ii) Supongamos que E es estable, se verifica:

(a) Si existe un $k > 0$ en el espectro, entonces $0, 1, \ldots, k$ están en el espectro.

(b) Si existe un $k < 0$ en el espectro, entonces $-1, -2, \ldots, k$ están en el espectro. Además, si $c_1=0$, entonces o bien 0 pertenece al espectro o bien -1 aparece dos veces en el espectro.

Como consecuencia de la propiedad 2 se tiene que si E es semiestable, el espectro es conexo salvo quizás en 0 y que si E es estable, el espectro es conexo |H5; Theorem 7.5|.

3.- Sea $k = \max_i \{-k_i\}$. Si existe un k_0 con $-k \leq k_0 \leq -2$ (o con $-k \leq k_0 \leq -1$, si $c_1=0$ y E es estable), que aparece exactamente una vez en el espec tro, entonces cada k_i con $-k \leq k_i \leq k_0$ aparece exactamente una vez en el espectro |H6; Proposition 5.1|.

4.- Si además E es localmente libre, entonces:

$\{-k_i\} = \{k_i\}$ si $c_1 = 0$

|H5; Proposition 7.2|

$\{-k_i\} = \{k_i+1\}$ si $c_1 = -1$

De los propiedades del espectro se deduce el siguiente resultado.

Teorema 14. (Teoremas de anulación y cotas de c_3). Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

(i) Si E es semiestable y $c_1 = 0$, entonces $H^1E(m) = 0$ para $m \leq -\frac{1}{2}(c_2+3)$, $H^2E(m) = 0$ para $m \geq c_2-2$ y $c_3 \leq c_2^2 + c_2$.

(ii) Si E es estable y $c_1=0$, entonces $H^1E(m)=0$ para $m \leq -\frac{1}{2}c_2-1$, $H^2E(m)=0$ para $m \geq c_2-3$ y $c_3 \leq c_2^2 - c_2 + 2$

(iii) Si E es estable y $c_1 = -1$, entonces $H^1E(m)=0$ para $m \leq -\frac{1}{2}(c_2+1)$, $H^2E(m)=0$ para $m \geq c_2-2$ y $c_3 \leq c_2^2$.

Demostración. Véase |H5; Theorem 8.1| y |H5; Theorem 8.2|

En |S| Sauer generaliza el concepto de espectro de haces reflexivos estables (resp. semiestables) normalizados de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ a haces reflexivos normalizados de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r:

Teorema 15. (Véase |S; Theorem 3.1|) Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Entonces existe una única sucesión de enteros $\{k_i\}_{i=1,\dots,c_2+r^2+c_1r}$, llamado el espectro de E, que verifica:

(i) $h^1(\mathbb{P}^3,E(m))= h^0(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2+r^2+c_1r} \mathcal{O}(k_i+m+1))$ para $m \leq r-1$.

(ii) $h^2(\mathbb{P}^3,E(m))= h^1(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2+r^2+c_1r} \mathcal{O}(k_i+m+1))$ para $m \geq -r-c_1-3$.

Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) y sea $\{k_i\}_{i=1,\dots,c_2+r^2+c_1r}$ su espectro. Se verifican las siguientes propiedades:

1.- $c_3= -2 \sum_{i=1}^{c_2+r^2} k_i$ si $c_1=0$

|S; Proposition 3.6|

$c_3= -2 \sum_{i=1}^{c_2+r^2-r} k_i-c_2-r^2+r$ si $c_1=-1$

2.- Si E no descompone, entonces -r-1 pertenece al espectro |S; Proposition 3.2|.

3.- (i) Si existe un $k > r+1+c_1$ en el espectro, entonces $r+1+c_1$, $r+2+c_1, \dots, k$ están en el espectro.

(ii) Si existe un $k < -r-1$ en el espectro, entonces $k, k+1, \dots, -r-1$ están en el espectro. |S; Proposition 3.4|.

4.- Sea $k = \max_i \{-k_i\}$, si existe un entero k_0 con $-k < k_0 \leq r-2$ que aparece exactamente una vez en el espectro, entonces cada k_i con $-k \leq k_i \leq k_0$ aparece una vez en el espectro |S; Lemma 5.1|.

5.- Si además E es localmente libre, entonces $\{-k_i\} = \{k_i - c_1\}$ |S; Proposition 3.5|.

De estas propiedades se deduce el siguiente Teorema de anulación.

<u>Teorema 16.</u> (Teorema de anulación y cotas de c_3) Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern, (c_1, c_2, c_3).

(i) Si $c_1=0$, entonces $H^1E(m)=0$ para $m \leq -\frac{1}{2}(c_2+r^2+3)-r$, $H^2E(m)=0$ para $m \geq c_2+r^2+r-2$, y $c_3 \leq (c_2+r^2)(c_2+(r+1)^2)$.

(ii) Si $c_1=-1$, entonces $H^1E(m)=0$ para $m \leq -\frac{1}{2}(c_2+r^2+r+1)$, $H^2E(m)=0$ para $m \geq c_2+r^2-r$, y $c_3 \leq (c_2+r(r-1))(c_2+(r+1)r)$.

Demostración. Véase |S; Theorems 3.7, 3.8|.

Recientemente el concepto de espectro ha sido generalizado por Okonek y Spindler primero a haces reflexivos de rango $r \geq 2$ sobre $\mathbb{P}^3$ |O-Sp 1| y después a haces libres de torsión de rango $r \geq 2$ sobre $\mathbb{P}^3$ |O-Sp 2| y |O-Sp 3|:

Para todo haz reflexivo E de rango r sobre $\mathbb{P}^n$ existen sucesiones de enteros $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r$ tales que

$E_L \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_L(a_i)$ para toda recta general L de $\mathbb{P}^n$

|O-S-S; Cap I, lemma 3.22|. A la r-pla $a_E=(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ se le llama tipo genérico de descomposición de E.

Teorema 17. (Véase |O-Sp 1; Theorem 3.1|) Sea E un haz reflexivo de rango r sobre $\mathbb{P}^3$ con tipo genérico de descomposición $(a_1,a_2,\ldots, a_r)$. Entonces existe una sucesión de enteros $k_E= (k_1,\ldots, k_m)$ con $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_{m'} \leq a_1 \leq a_r \leq k_{m'+1} \leq \ldots \leq k_m$, llamada el espectro de E, que verifica:

(i) $h^1(\mathbb{P}^3,E(q))= \bigoplus_i h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q+k_i+1))$ para $q\leq -a_r-1$

(ii) $h^2(\mathbb{P}^3,E(q))= \bigoplus_i h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q+k_i+1))$ para $q\geq a_1-3$

Además, se verifica que para todo entero $q \geq -a_1-3$
$\# \{i/k_i= -q-3\}= h^2E(q) - 2h^2E(q+1) + h^2E(q+2)$ (Véase |O-Sp1; Fórmulas (9) y (10) de la demostración del Teorema 3.1|)

y para todo entero $q \leq -a_r -1$ $\# \{i / k_i = -q-1\} = h^1E(q) - 2h^1E(q-1) + h^1E(q-2)$ (Véase |O-Sp 1; Fórmulas (4) y (5) de la demostración del Teorema 3.1|).

Sea E un haz reflexivo de rango r sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1, c_2, c_3) y con tipo genérico de descomposición $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ y sea $\{k_i\}_{i=1,\ldots,m}$ su espectro. Sea H (resp. L) un plano (resp. una recta) general de $\mathbb{P}^3$. Se verifican las siguientes propiedades:

1.- $m \leq -XE_H(-a_1-2) + \sum_{t=-a_r}^{-a_1-2} h^o E_L(t)$ si $a_r - a_1 \geq 2$

$$m = \begin{cases} -X\, E_H(-a_1-2) & \text{si } a_r - a_1 = 1 \quad |\mathcal{O}\text{-Sp1; Lemma 3.4}| \\ -X\, E_H(-a_1-1) & \text{si } a_r - a_1 = 0 \end{cases}$$

2.- $\sum_i k_i = m(a_r-1) - X\,E(-a_r-1)$ si $a_r - a_1 \leq 2$ |$\mathcal{O}$-Spl; Lemma 3.5

3.- (i) Si existe un $k \leq a_1-1$ en el espectro, entonces $a_1-1, a_1-2, \ldots, k$ están en el espectro.

(ii) Si existe un $k \geq a_r+1$ en el espectro, entonces $a_r+1, a_r+2, \ldots, k$ están en el espectro |$\mathcal{O}$-Spl; Proposition 3.3|.

4.- Si E es localmente libre y $k_{E^v} = (k_1^v, \ldots, k_{m^v}^v)$ es el espectro de E^v, entonces, $m^v = m$ y $(k_1^v, \ldots, k_m^v) = (-k_1, \ldots, -k_m)$ |O-Spl; Lemma 3.2|.

5.- Sea $k = \max\{-k_i\}$, si existe un k_0 con $-k < k_0 \leq a_1 - 2$ que aparece exactamente una vez en el espectro, entonces cada k_i con $-k \leq k_i \leq k_0$ aparece en el espectro exactamente una vez |O-Sp2; Theorem 4.1|.

<u>Teorema 18.</u> (Véase |O-S-S; Cap II, Theorem 2.1.4|). Sea E un haz reflexivo semiestable de rango r sobre $\mathbb{P}^n$ con tipo genérico de descomposición $\underline{a}_E = (a_1, \ldots, a_r)$, $a_1 \geq \ldots \geq a_r$. Entonces se verifica: $a_i - a_{i+1} \leq 1$ para $i = 1, \ldots, r-1$.

En particular, si E es un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, entonces

$$\underline{a}_E = \begin{cases} (0,0) & \text{si } c_1 = 0 \\ (0,-1) & \text{si } c_1 = -1 \end{cases}$$

Y si E es un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$, entonces:

$$\underline{a}_E = \begin{cases} (0,0,0) \quad \text{o} \quad (1,0,-1) & \text{si } c_1 = 0 \\ (0,0,-1) & \text{si } c_1 = -1 \\ (0,-1,-1) & \text{si } c_1 = -2 \end{cases}$$

Dados dos subesquemas $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{P}^3$ definidos por los haces de ideales I_1 e I_2, respectivamente, denotaremos por $Y_1 \cap Y_2$ el subesquema de $\mathbb{P}^3$ definido por $I_1 + I_2$ y por

$Y_1 \cup Y_2$ el subesquema de $\mathbb{P}^3$ definido por $I_1 \cap I_2$.

<u>Definición.</u> Diremos que dos curvas Y_1 e Y_2 de $\mathbb{P}^3$ se cortan en r puntos si $Y_1 \cap Y_2$ es un subesquema de dimensión 0 de $\mathbb{P}^3$ y $h^o(\mathcal{O}_{Y_1 \cap Y_2}) = r$.

<u>Lema 19.</u> (Véase |H7; Theorem 9.1|). Sea (A,m) un anillo local Gorenstein de dimensión n y M un A-módulo de longitud finita. Se verifica:

(i) $\mathrm{Ext}^{n-1}(M,A) = 0$

(ii) long $M =$ long $\mathrm{Ext}^n(M,A)$.

Del lema 19, se deduce el siguiente corolario que será usado en la demostración de la proposición 20.

<u>Corolario.</u> Sea Z un subesquema de dimensión cero de $\mathbb{P}^3$ y sea $\omega_Z = \mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_Z, \omega_{\mathbb{P}^3})$ su haz dualizante. Entonces $h^o(\omega_Z) = h^o(\mathcal{O}_Z)$.

<u>Proposición 20.</u> Sean Y_1, Y_2 dos curvas de $\mathbb{P}^3$ cortándose en r puntos y sea I_1, I_2 los correspondientes haces de ideales. Sea $Y := Y_1 \cup Y_2$ y $Z := Y_1 \cap Y_2$. Se verifica:

(i) $P_a(Y) = P_a(Y_1) + P_a(Y_2) - 1 + r$

(ii) Existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \omega_{Y_1} \oplus \omega_{Y_2} \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \omega_Z \longrightarrow 0$$

Demostración. La sucesión exacta:

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_1} \oplus \mathcal{O}_{Y_2} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

$$(\text{i.e. } 0 \longrightarrow \mathcal{O}/_{I_1 \cap I_2} \longrightarrow \mathcal{O}/_{I_1} \oplus \mathcal{O}/_{I_2} \longrightarrow \mathcal{O}/_{I_1+I_2} \longrightarrow 0)$$

nos da:

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = \chi(\mathcal{O}_{Y_1}) + \chi(\mathcal{O}_{Y_2}) - \chi(\mathcal{O}_Z),$$

$$1 - P_a(Y) = 1 - P_a(Y_1) + 1 - P_a(Y_2) - r$$

de donde se deduce:

$$P_a(Y) = P_a(Y_1) + P_a(Y_2) - 1 + r$$

Aplicando el funtor $\mathcal{H}om(\cdot, \omega_{\mathbb{P}^3})$ a la sucesión exacta (1) obtenemos la sucesión exacta:

$$0 = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Z, \omega_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{Y_1}, \omega_{\mathbb{P}^3}) \oplus \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{Y_2}, \omega_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Y, \omega_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_Z, \omega_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_{Y_1}, \omega_{\mathbb{P}^3}) \oplus$$

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{Y_2}, \omega_{\mathbb{P}^3})$$

Puesto que Y_1, Y_2 son curvas de $\mathbb{P}^3$ Cohen-Macaulay, $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_{Y_1}, \omega_{\mathbb{P}^3}) = \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_{Y_2}, \omega_{\mathbb{P}^3}) = 0$, y se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \omega_{Y_1} \oplus \omega_{Y_2} \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \omega_Z \longrightarrow 0$$

Observación 2.1. Para toda curva reducida Y de $\mathbb{P}^3$ existe una sección $\xi \in H^o \omega_Y(3)$ (resp $\omega_Y(2)$) que genera $\omega_Y(3)$ (resp $\omega_Y(2)$) salvo quizás en un número finito de puntos. En efecto:

(a) Si Y es irreducible, aplicando el teorema de dualidad de Serre y el Teorema de Riemann-Roch, tenemos que $h^o \omega_Y(3) = h^1 \mathcal{O}_Y(-3) = h^o \mathcal{O}_Y(-3) + 3(\deg Y) - 1 + P_a(Y) > 0$ (resp. $h^o \omega_Y(2) > 0$). Tomemos una sección $\xi \in H^o \omega_Y(3)$ (resp $H^o \omega_Y(2)$), por |EGA; Cap 0, Proposition 5.2| ξ genera $\omega_Y(3)$ (resp $\omega_Y(2)$) salvo quizás en un número finito de puntos.

(b) Si Y es reducible, basta aplicar el apartado (a) a cada componente irreducible de Y, y la proposición 20.

CAPITULO I.

CAPITULO I

CLASES DE CHERN DE UN HAZ REFLEXIVO ESTABLE DE RANGO 2 SOBRE $\mathbb{P}^3$

El objetivo de este capítulo es resolver el siguiente problema planteado por R. Hartshorne en |H5|:

Problema: Caracterización del conjunto $\{(c_1,c_2,c_3)\ \mathbb{Z}^3/$ Existe un haz reflexivo E estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1,c_2,c_3\}$.

En particular, teniendo en cuenta que un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ es localmente libre si y sólo si $c_3 = 0$ |H5; Proposición 2.6|, obtendremos una caracterización de las clases de Chern de un haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

Puesto que torciendo adecuadamente un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ siempre podemos conseguir un haz tal que $c_1 = 0$ o $c_1 = -1$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que esta condición es satisfecha. Siendo esto así, recordemos que los valores de c_2 y c_3 están sujetos a las siguientes restricciones:

(i) $c_2 > 0$ |H5; Corollary 3.3 y Lemma 9.7|.

(ii) $c_3 \equiv c_1 c_2 \pmod{2}$ |H5; Corollary 2.4|.

(iii) $0 \leq c_3 \leq \begin{cases} c_2^2 & \text{si } c_1 = -1 \\ c_2^2 - c_2 + 2 & \text{si } c_1 = 0 \end{cases}$ |H5;Theorem 8.2|

Pero dado $c_2>0$, no todos los valores de c_3 que verifican (ii) y (iii) son posibles. El primero en observarlo fue Hartshorne, al probar que no existen haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,4,14)$ |H6; example 5.1.4|. Más recientemente, Chang $|C_2|$ha demostrado que dado cualquier entero $c_2>0$ no existen haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1 = 0$ (resp $c_1 = -1$) y $c_2^2-3c_2+8 < c_3 < c_2^2-c_2$ (resp $c_2^2-2c_2+4 < c_3 < c_2^2$).

En este capítulo determinamos, dado un entero $c_2>0$, qué valores de c_3 verificando (ii) y (iii) son posibles y cuales no (Teoremas 2.5 y 3.2). El resultado es que para cada entero $c_2 > 0$ existe un número finito de intervalos bien determinados en los que c_3 no puede tomar valores. Uno de estos intervalos es el descubierto por Chang (Véase la observación 3.2.2).

Como corolario, caracterizamos los posibles valores de las clases de Chern, y en el caso $c_1=0$ del invariante α de Atiyah-Rees |A-R|, de un fibrado vectorial estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

Los resultados de las secciones 2-4 de este capítulo han sido publicadas en |MI 1|.

1. Cotas del orden de inestabilidad

En esta sección se da una cota optimal del orden de inestabilidad de una superficie X en función de las clases de Chern de E y del grado de X (Teorema 1.2), de lo cual se deduce como corolario una cota optimal del orden de inestabilidad de un plano inestable H para un haz reflexivo E (Corolario 1.3).

1.1. Definición. Sea E un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Una superficie $X \subset \mathbb{P}^3$ se llamará inestable para E si existe un entero $r>0$ tal que $H^o E^v_X(-r) \neq o$, donde $E^v_X := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E_X, \mathcal{O}_X)$. Al mayor de tales enteros r le llamaremos orden de inestabilidad de X.

Observación. 1.1.1.- Nótese que aplicando el Teorema de dualidad de Serre a X se tiene que la condición $H^o E^v_X(-r) \neq o$ es equivalente a la condición $H^2 E_X(r+d-4) \neq o$, siendo d el grado de la superficie X.

Observación 1.1.2.- En |H6| Hartshorne da la siguiente definición de superficie inestable:

Sea E un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Una superficie $X \subset \mathbb{P}^3$ se llamará inestable para E si existe un entero $r>o$ y una aplicación inyectiva $\mathcal{O}_X \longrightarrow E_X^{v}(-r)$, donde $E_X^{v} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(E_X, \mathcal{O}_X)$. Al mayor de tales enteros r le llamaremos orden de inestabilidad de X.

Si X es íntegro, entonces la existencia de una aplicación inyectiva $\mathcal{O}_X \longrightarrow E_X^{v}(-r)$ es equivalente a que $H^oE_X^{v}(-r)\neq o$ y por lo tanto en este caso las dos definiciones coinciden.

1.2. Teorema. Sea E un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Sea $X \subset \mathbb{P}^3$ una superficie inestable de grado d y orden r. Se verifica:

(i) Si E es semiestable, entonces $r \leq c_2-d+1$

(ii) Si $c_1=o$ y E es estable, entonces $r \leq c_2-d$

(iii) Estas cotas son óptimas

Demostración. (i) Consideremos la sucesión exacta de cohomología

$$\ldots \longrightarrow H^2\, E\,(p) \longrightarrow H^2\, E_X\,(p) \longrightarrow H^3\, E\,(p-d) \longrightarrow \ldots$$

asociada a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(-d) \longrightarrow E \longrightarrow E_X \longrightarrow 0$$

Usando el Teorema de dualidad de Serre para haces reflexivos (Preliminares; Teorema 6) y la hipótesis de semiestabilidad de E vemos que $H^3E(p-d)=0$ para $p \geq d-3$, por otro lado $H^2E(p) = 0$ para todo $p \geq c_2 - 2$ (Preliminares; Teorema 14), de donde se deduce:

$$H^2\ E_X(p)=0 \text{ para todo } p \geq \max\ (c_2-2,\ d-3)$$

Puesto que $X \subset \mathbb{P}^3$ es una superficie inestable para E de orden r se tiene que $H^2\ E_X(r+d-4) \neq 0$, lo cual implica que $r+d-4 < c_2$ o $r+d-4<d-3$, de donde se concluye que $r \leq c_2+1-d$.

(ii) La demostración es análoga a la de (i), por lo tanto la omitimos.

(iii) Caso semiestable. Demostraremos que para todo entero $c_2>o$ existe un haz reflexivo E semiestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1E=o$ (rep. $c_1E = -1$) y $c_2E = c_2$ que posee, para todo entero d con $1 \leq d \leq c_2$, una superficie inestable $X \subset \mathbb{P}^3$ de grado d y orden de inestabilidad $r = c_2+1-d$.

Para todo entero $c_2>0$, sea E un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,\ c_2,\ c_2^2+c_2)$ (Resp. $(-1,c_2,c_2^2)$). Para la existencia de tales haces véase |H5; Proposición 8.2|.

Sea $\{k_i\}_{i=1,\dots,c_2}$ el espectro de E. Puesto que $c_3E = c_2^2+c_2$ (resp $c_3E = c_2^2$), la fórmula $c_3 = -2 \cdot \sum_{i=1}^{c_2} k_i$ (resp $c_3 = -2 \cdot \sum_{i=1}^{c_2} k_i - c_2$) de |H5; Proposición 7.3| y las propiedades de conexión del espectro |H5; Theorem 7.5| implican que el espectro de E es $\{-1,-2,\dots,-c_2\}$.

De las fórmulas $h^2\ (\mathbb{P}^3,E\ (p)) = h^1\ (\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p+1+k_i))$ para $p \geq 3 - c_1$ y $h^1\ (\mathbb{P}^3,E(p))= h^o\ (\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\ (p+1+k_i)$

para $p \leq 1$ |H5; Theorem 7.1| deducimos que $h^2 E(c_2 - 3)=1$, $h^2 E(c_2-3-d) = \binom{d+2}{2}$ para $1 \leq d < c_2$, mientras que si $d = c_2$ $h^2 E(c_2-3-d) = h^2 E(-3) = h^1 E(-3) + \chi E(-3) =$

$$= \chi E(-3) = \begin{cases} \binom{c_2+2}{2} - 1 & \text{si } c_1 = 0 \\ \binom{c_2+2}{2} - 2 & \text{si } c_1 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, existe una forma $f \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$ tal que la aplicación $H^2 E(c_2-d-3) \xrightarrow{.f} H^2 E(c_2-3)$ inducida por f es cero. Sea X la superficie $f = 0$. Entonces la sucesión exacta de cohomología

$$H^2 E(c_2-3-d) \xrightarrow{.f} H^2 E(c_2-3) \longrightarrow H^2 E_X(c_2-3)$$

correspondiente a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(-d) \xrightarrow{.f} E \longrightarrow E_X \longrightarrow 0$$

muestra que $H^2 E_X(c_2-3) \neq 0$, o equivalentemente que X es una superficie inestable para E de grado d y orden de inestabilidad $r = c_2 + 1-d$.

<u>Caso estable y $c_1=0$</u>. Distinguimos varios subcasos:

. Subcaso 1, $c_2 \geq 4$. Demostraremos que para todo entero $c_2 \geq 4$ existe un haz reflexivo E estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1 E = 0$, $c_2 E = c_2$ que posee, para todo entero d con $1 \leq d \leq c_2 -1$, una superficie inestable $X \subseteq \mathbb{P}^3$ de grado d y orden de inestabilidad $r = c_2 -d$.

Para todo entero $c_2 \geq 4$, sea E un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0, c_2, c_2^2 - c_2+2)$. Para la existencia de tales haces véase |H5; Theorem 8.2|. La misma técnica que antes muestra que $h^2 E(c_2-4) = 1$ y

$$h^2 E(c_2-d-4) = \begin{cases} \binom{d+2}{2} & \text{si } 1 \leq d \leq c_2-3. \\ \binom{c_2}{2}+1 & \text{si } d = c_2-2 \\ \binom{c_2+1}{2}+1 & \text{si } d = c_2-1. \end{cases}$$

y concluimos que para todo entero d con $1 \leq d \leq c_2-1$, existe una forma $f \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d))$ tal que la superficie X de $\mathbb{P}^3$ definida por $f = 0$ es una superficie inestable para E de grado d y orden de inestabilidad $r = c_2-d$.

. Subcaso 2, $c_2 = 3$. Para d=1,2 demostraremos que existe un haz reflexivo E estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1 E=0$, $c_2E=3$ que posee una superficie inestable X de grado d y orden $r = 3-d$. Supongamos primero que $c_2=3$ y d=2. Consideremos el par (Y,e) donde $Y \subset \mathbb{P}^3$ es una curva lisa de grado 4 intersección completa de dos cuádricas no singulares, y $0 \neq e \in H^0\omega_Y(2) \simeq H^0\mathcal{O}_Y(2)$. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por (Y,e) (Preliminares; Teorema 7):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (0,3,8)

Afirmamos que E posee una cuádrica Q inestable de orden r=1. En efecto, sea $\{k_i\}_{i=1,2,3}$ el espectro de E. Puesto que $c_3=8$, la fórmula $c_3 = -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i$ de |H5; Proposición 7.3| y las propiedades de conexión del espectro |H5; Theorem 7.5 y Corollary 7.6| implican que $\{k_i\}_{i=1,2,3} = \{-1,-1,-2\}$. De la igualdad $h^2(\mathbb{P}^3, E(p))=h^1(\mathbb{P}^1, \oplus \mathcal{O}(p+k_i+1))$ para $p \geq -3$ |H5; Theorem 7.1| deducimos que $h^2E(-1)=1$ y $h^2E(-3)=7$. Por lo tanto, existe una forma $f\varepsilon\ H^o(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(2))$ tal que la aplicación $H^2\ E(-3) \xrightarrow{.f} H^2\ E(-1)$ inducida por f es cero. Sea Q la cuádrica f=o. Entonces la sucesión exacta de cohomología.

$$\cdots \longrightarrow H^2\ E(-3) \xrightarrow{.f} H^2\ E(-1) \longrightarrow H^2\ E_Q(-1) \longrightarrow \cdots$$

correspondiente a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(-2) \xrightarrow{.f} E \longrightarrow E_Q \longrightarrow 0$$

muestra que $H^2\ E_Q(-1)\neq o$, de donde deducimos que Q es una cuádrica inestable para E de orden de inestabilidad r=1.

Supongamos ahora que $c_2=3$ y d=1. Consideremos el par (Y,e) donde $Y=Y_1 \cup L \subset \mathbb{P}^3$ es una curva de grado 4 unión disjunta de una cúbica plana no singular Y_1 y una recta L, y $o\neq e \in H^o\omega_Y(2) \simeq H^o\mathcal{O}_{Y_1}(2) \oplus H^o\mathcal{O}_L$. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (0,3,6).

Afirmamos que E posee un plano inestable H de orden r=2. En efecto, $h^2\, E(-1)=h^2\, I_Y = h^1\mathcal{O}_Y = 1$ y $h^2\, E(-2) = h^2 I_Y(-1)=h^1\mathcal{O}_Y(-1)=3$. Por lo tanto, existe una forma lineal $f\varepsilon\, H^o(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ tal que la aplicación $H^2\, E(-2) \xrightarrow{\cdot f} H^2\, E(-1)$ inducida por f es cero. Sea H el plano f=o.

Como antes, la sucesión exacta de cohomología:

$$\dots \longrightarrow H^2\, E(-2) \longrightarrow H^2\, E(-1) \longrightarrow H^2\, E_H(-1) \longrightarrow \dots$$

nos da que H es un plano inestable de orden r=2.

. Subcaso 3, $c_2=2$. Demostraremos que existe un haz reflexivo E estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1E=o$, $c_2E=2$ que posee un plano inestable H de orden r=1. Para ello, consideramos el par (Y,e) donde $Y\subset\mathbb{P}^3$ es una curva de grado 3 unión disjunta de una cónica no singular y una recta y $o\neq e\varepsilon\, H^o\omega_Y(2)$. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (0,2,2)

Afirmamos que E posee un plano inestable H de orden r=1. En efecto, $h^2E(-2)= h^2\, I_Y(-1) = h^1\mathcal{O}_Y(-1)=1$ y $h^2E(-3) = h^2\, I_Y(-2)-h^3\,\mathcal{O}(-4) = 3$. Por lo tanto, existe una forma lineal $f\varepsilon\, H^o(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ tal que la aplicación $H^2E(-3) \xrightarrow{\cdot f} H^2E(-2)$ inducida por f es cero. El mismo argumento que antes prueba que el plano H definido por f=o es un plano inestable de orden r=1.

1.3 Corolario |MI2; Theorem 2| Sea E un haz reflexivo semiestable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Sea $H\subset\mathbb{P}^3$ un plano inestable de orden r. Se verifica:

(i) Si E es semiestable, entonces $r \leq c_2$

(ii) Si E es estable y c_1=o, entonces $r \leq c_2-1$

(iii) Estas cotas son óptimas

2. Construcción de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

En esta sección construimos, por medio de la correspondencia usual entre curvas de $\mathbb{P}^3$ y haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Preliminares; Teorema 7), familias de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ y analizamos que valores de c_3 aparecen.

Consideremos primero el caso $c_1 = -1$.

Si $c_1=-1$, entonces para todo par de enteros (c_2,c_3) tales que $0<c_2<4$, $c_1.c_2 \equiv c_3$ (mod 2) y $0 \leq c_3 \leq c_2^2$ existe un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) |H5; example 4,2,3|. Por lo tanto, supondremos $c_2 \geq 4$. No obstante, las construcciones 2.1 y 2.2 son también válidas para $0<c_2<4$, lo cual prueba de nuevo que en este caso todos los valores de $c_3 \equiv c_2$ (mod.2) y $0 \leq c_3 \leq c_2^2$ son posibles.

2.1 Construcción. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$ y $c_{2/2} + 1 \geq r \geq 1$, consideremos el par (Y,e) donde,

si r=1, Y es una curva plana de grado c_2, y si $r \geq 2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2 y una curva Y_2 de grado r(r-1) intersección completa de una superficie de grado r con una superficie de grado r-1 que corta a Y_1 en d puntos con $0 \leq d \leq r(r-1)$ (Para la existencia de estas curvas véase la observación 2.1.2), y donde $e \in H^o\omega_Y(5-2r)$ (Véase la observación 2.1.1). Sea E(r) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por (Y,e):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y(2r-1) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E = -1, c_2E = c_2$ y $c_3E = 2p_a(Y) - 2 + (5-2r)\cdot \deg Y = c_2^2 - 2(r-1)c_2 + 2d$.

2.1.1 Observación. En virtud de la proposición 20 del capítulo de preliminares, tenemos que $H^o\,\omega_{Y_1}(5-2r) \oplus H^o\,\omega_{Y_2}(5-2r) \hookrightarrow H^o\omega_Y(5-2r)$. Además, por ser Y_1 una curva plana de grado c_2 e Y_2 una curva de grado r(r-1) intersección completa de una superficie de grado r con una superficie de grado r-1, se tiene que $H^o\omega_{Y_1}(5-2r) \simeq H^o\mathcal{O}_{Y_1}(c_2+2-2r)$ y $H^o\omega_{Y_2}(5-2r) \simeq H^o\mathcal{O}_{Y_2}$. Por lo tanto, si $r \leq (c_2/2)+1$, existe una sección global e de $\omega_Y(5-2r)$ que genera $\omega_Y(5-2r)$ salvo quizás en un número finito de puntos.

2.1.2 Observación. Vamos a probar que las curvas Y utilizadas en la construcción 2.1 existen. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq c_{2/2}+ 1$, elijamos una curva no singular Y_2 intersección completa de una superficie no singular de grado r con una superficie no singular de grado r-1. Sea H un plano transversal a Y_2 y $S = Y_2 \cap H$ los r(r-1) puntos distintos de la intersección de Y_2 con H. Sea $D \subseteq S$ un subconjunto con exactamente d puntos, $1 \leq d \leq r(r-1)$. Para demostrar la existencia de una curva plana Y_1 de grado c_2 conteniendo a D pero no conteniendo ningún punto de $S \setminus D$, es suficiente demostrar que S impone r(r-1) condiciones independientes sobre las curvas planas de grado c_2. Para ello consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H(-2r+1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(-r) \oplus \mathcal{O}_H(-r+1) \longrightarrow I_S \longrightarrow 0$$

tensoralizando por $\mathcal{O}_H(c_2)$ y tomando cohomología obtenemos:

$$h^o\ I_S(c_2) = \binom{c_2+2}{2} - r(r-1) \qquad \text{si } (c_2+3)/_2 \geq r,$$

lo cual prueba la existencia de Y.

2.1.3 Observación. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq (c_{2/2})+1$, hemos construido haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, c_3)$ tales que $c_2 \equiv c_3 (\text{mod } 2)$ y

$$c_2^2 - 2(r-1)c_2 \leq c_3 \leq c_2^2 - 2(r-1)\ c_2 + 2r(r-1).$$

Esta construcción no cubre los intervalos:

$$c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1) < c_3 < c_2^2 - 2(r-1)\ c_2.$$

Nótese que la existencia de un entero c_3, $c_3 \equiv c_2$ (mod.2), en este intervalo es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1) + 4 \leq c_2^2 - 2(r-1)c_2, \quad r \geq 1 ;$$

lo cual es equivalente a:

$$1 \leq r \leq \frac{-1 + \sqrt{4\ c_2 - 7}}{2} \quad y \quad c_2 \geq 4.$$

Por otro lado el menor valor de c_3 que aparece usando la construcción 2.1 es $c_2^2-2(r-1)c_2$ para r máxima; i.e. $r = (c_{2/2})+1$ si c_2 es par y $r = (c_2+1)/2$ si c_2 es impar. Por lo tanto, el menor valor de c_3 que se obtiene con la construcción 2.1 es $c_3=0$ si c_2 es par y $c_3 = c_2$ si c_2 es impar. Si c_2 es impar para decidir qué valores de c_3 aparecen en el intervalo $0<c_3<c_2$ necesitamos otras construcciones.

<u>2.2 Construcción</u>. Para todo entero impar $c_2 \geq 5$, consideramos el par (Y,e) donde Y es una curva de grado $c_2 + 2$ unión de m curvas racionales dos a dos disjuntas y de grados superiores a 1 , $2 \leq m \leq 1 + (c_2-1)/2$, y donde $e \varepsilon H^0 \omega_Y(1)$.

Sea E(2) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(2) \longrightarrow I_Y(3) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E=-1$, $c_2E=c_2$ y $c_3E = 2p_a(Y) - 2+\deg(Y) = c_2-2(m-1)$. Por lo tanto, aparecen todos los valores de c_3 comprendidos entre 1 y c_2-2.

A continuación describimos las construcciones 2.3 y 2.4 correspondientes al caso $c_1=0$. Puesto que los argumentos son similares a los del caso $c_1=-1$, omitimos los detalles.

Si $c_1=0$, entonces para todo par de enteros $(c_2,c_3) \neq (1,2)$ tales que $0<c_2<6$, $c_1c_2 \equiv c_3 (\mathrm{mod}.2)$ y $o \leq c_3 \leq c_2^2 - c_2 +2$ existe un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) |H5;example 4.2.1|. Por lo tanto, supondremos $c_2 \geq 6$. No obstante, las construcciones 2.3 y 2.4 son también válidas para $o<c_2<6$, $(c_2,d) \neq (1,1)$, lo cual prueba de nueva que todos los valores $c_3 \equiv 0$ (mod.2) y $o \leq c_3 \leq c_2^2 - c_2+2$ son posibles, excepto el valor $c_3=2$ para $c_2=1$.

<u>2.3 Construcción</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 6$ y $(c_2+1)/_2 \geq r \geq 1$, consideremos el par (Y,e) donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2 con una curva Y_2 de grado r^2, intersección completa de dos superficies de grados r, que corta a Y_1 en d puntos con $o \leq d \leq r^2$, y donde $e \in H^o\omega_Y(4-2r)$. Sea E(r) el haz reflexivo

de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por (Y,e):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y(2r) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E=o$, $c_2E=c_2$ y $c_3E=c_2{}^2 - (2r-1)c_2 + 2d$.

<u>2.4 Construcción</u>. Para todo entero par $c_2 \geq 6$, consideremos el par (Y,e) donde Y es una curva de grado c_2+1 unión de m curvas racionales dos a dos disjuntas, $c_2+1 \geq m \geq c_2/2+1$, y donde $e \in H^o\omega_Y(2)$. Sea E(1) el haz reflexivo estable de de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E=o$, $c_2E=c_2$ y $c_3E=2c_2-2(m-1)$

En lo que sigue pondremos:

$$b(-1,c_2) = \frac{-1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$$ (Véase la observación 2.1.3).

También pondremos:

$$b(o,c_2) = -1+\sqrt{c_2-2}$$

que se obtiene de modo análogo en el caso $c_1=o$.

<u>2.5 Teorema</u> (a) Si $c_1=-1$, entonces para todo par de enteros (c_2,c_3) tales que:

(a_1) $c_2 \geq 4$

(a_2) $o \leq c_3 \leq c_2^2$

(a_3) $c_2 \equiv c_3 \pmod{2}$

(a_4) $c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{b(-1,c_2)} (c_2^2-2rc_2+2r(r+1),\ c_2^2 - 2(r-1)c_2)$

existe un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$.

(b) Si $c_1=o$, entonces para todo par de enteros (c_2,c_3) tales que:

(b_1) $c_2 \geq 6$

(b_2) $o \leq c_3 \leq c_2^2 - c_2+2$

(b_3) $c_3 \equiv o \pmod{2}$

(b_4) $c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{b(o,c_2)} (c_2^2-(2r+1)c_2+2(r+1)^2, c_2^2-(2r-1)c_2)$

existe un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3).

<u>Demostración</u> (a) Si $c_1=-1$, la observación 2.1.3 muestra que la construcción 2.1 da todos los valores $c_3 \geq o$ si c_2 es par, y todos los valores $c_3 \geq c_2$ si c_2 es impar, que satisfacen las condiciones $(a_i)_{i=1,\dots,4}$ del Teorema 2.5. Por otra parte, si c_2 es impar la construcción 2.2 da todos los valores $c_2>c_3 \geq 1$ satisfaciendo las mismas condiciones. Esto prueba la parte (a) del Teorema 2.5

(b) Un argumento similar, usando las construcciones 2.3 y 2.4 en lugar de las construcciones 2.1 y 2.2 prueba el caso $c_1=o$.

3. Intervalos de inexistencia de c_3.

En esta sección probamos que los intervalos no cubiertos por las construcciones 2.1 y 2.2 (Respectivamente 2.3 y 2.4) de la sección anterior son efectivamente intervalos de inexistencia de c_3.

3.1 Lema Sea E un haz reflexivo estable normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Sea $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2}$ su espectro y $-(c_2-a) = \min \{k_i\}$. Supongamos que $a < c_2/2$.

(i) si $c_1=-1$, entonces $c_2^2-(2a-1)c_2 < -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i < c_2^2 - (2a-1)c_2+2a(a+1)$.

(ii) si $c_1=o$, entonces $c_2^2 -(2a-1)\, c_2 < -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i < c_2^2 - (2a-1)c_2 + 2a^2$

Demostración (i) De entre todas las sucesiones conexas de enteros $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_{c_2}$ que verifican |H5; §7| y |H6; proposition 5.1| y tales que $k_1= -(c_2-a)$, la sucesión $\{-(c_2-a),\ldots, -(a+3),-(a+2),-(a+1),-(a+1),\ldots,-2,-1\}$ maximiza $-2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i$ y $\{-(c_2-a),\ldots,-1,0,1,\ldots,a-1\}$ minimiza $-2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i$.

De donde se deduce :

$$c_2^2 - (2a-1)c_2 < -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i < c_2^2 - (2a-1)c_2 + 2a(a+1).$$

(ii) La demostración es análoga a la de (i).

3.2 Teorema (i) Si $c_1=-1$, entonces para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 4$, $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$, no existen haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ que verifiquen:

$$c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1) < c_3 < c_2^2 - 2(r-1)c_2$$

(ii) Si $c_1=o$, entonces para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$, $1 \leq r \leq b(0,c_2)$, no existen haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_3)$ que verifiquen:

$$c_2^2 - (2r+1)c_2 + 2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 - (2r-1)c_2.$$

Observación 3.2.1. Las hipótesis del enunciado sobre c_2 y r son para garantizar que las condiciones

$$c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1) < c_3 < c_2^2 - 2(r-1)c_2$$

$$\text{(Resp. } c_2^2 - (2r+1)c_2 + 2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 - (2r-1)c_2 \text{)}$$

son no vacias.

Observación 3.2.2. El intervalo de inexistencia de c_3 que corresponde a $r=1$, $c_1=-1$ (Resp. $r=1$, $c_1=o$) es el hallado por Chang en $|c_2|$.

Demostración del Teorema 3.2 (i) Teniendo en cuenta que para todo entero r, $1 \leq r \leq b(-1,c_2)$ se verifica que $c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1) > \frac{1}{2}(c_2^2+c_2)$, podemos suponer que tene mos un haz reflexivo E estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1=-1$, $c_3 > \frac{1}{2}(c_2^2+c_2)$. Sea $k_1 \leq \ldots \leq k_{c_2}$ su espectro. De |H6; Proposition 5.2| deducimos que E posee un plano inestable de orden c_2-r para cierto entero r, $o \leq r \leq \frac{1}{2}(c_2-3)$ y que $k_1=-(c_2-r)$. Del lema 3.1 y la fórmula $c_3= -2 \sum_{i=1}^{c_2} k_i-c_2$ |H5; Proposition 7.3| obtenemos que:

$$c_2^2-2rc_2 \leq c_3 \leq c_2^2 - 2rc_2+2r(r+1)$$

De donde resulta que no existen haces reflexivos estables de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ que verifiquen:

$$c_2^2-2rc_2 + 2r(r+1) < c_3 < c_2^2 - 2(r-1)c_2.$$

Nótese que para que esta condición sea no vacía es necesario y suficiente que:

$$c_2^2-2rc_2 + 2r(r+1) + 4 \leq c_2^2-2(r-1)c_2 \ , \ y \ r \geq 1;$$

lo cual es equivalente a:

$$1 \leq r \leq \frac{-1+\sqrt{4c_2-7}}{2} = b(-1,c_2) \quad y \ c_2 \geq 4.$$

(ii) La demostración de (ii) es análoga a la de (i).

Con el fin de facilitar referencias posteriores, a continuación enunciamos las condiciones necesarias y suficientes que ha de verificar una terna de enteros para ser las clases de Chern de un haz reflexivo normalizado estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Esta caracterización no es más que una conjunción de los Teoremas 2.5 y 3.2 establecidos anteriormente.

3.3. Teorema. Las condiciones necesarias y suficientes que ha de verificar una terna de enteros (c_1,c_2,c_3) para ser las clases de Chern de un haz reflexivo normalizado estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ son:

(i) $c_1 \in \{0,-1\}$

(ii) $c_2 > 0$

(iii) $c_1 . c_2 \equiv c_3 \pmod{2}$

(iv) $(c_1,c_2,c_3) \neq (0,1,2)$

(v) $0 \leq c_3 \leq \begin{cases} c_2^2 - c_2 + 2 & \text{si } c_1 = 0 \\ c_2^2 & \text{si } c_1 = -1 \end{cases}$

(v) si $c_1=0$, entonces $c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{b(o,c_2)} \left(c_2^2-(2r+1)c_2+2(r+1)^2, c_2^2 -(2r-1)c_2\right)$

si $c_1=-1$, entonces $c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{b(-1,c_2)} \left(c_2^2-2rc_2+2r(r+1), c_2^2 -2(r-1)c_2\right)$

3.4 Corolario Sea E un haz reflexivo normalizado estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$, $n>3$, con clases de Chern $(c_1,c_2,\dots,c_n)$. Se verifica:

(a) $c_2 > 0$

(b) $c_3 \equiv c_1 . c_2 \pmod{2}$

(c) $o \leq c_3 \leq \begin{cases} c_2^2 - c_2 + 2 & \text{si } c_1 = o \\ c_2^2 & \text{si } c_1 = -1 \end{cases}$

(d) si $c_1 = o$, entonces $c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{b(o,c_2)}$

$$(c_2^2 - (2r+1)c_2 + 2(r+1)^2 \ , \ c_2^2 - (2r-1)c_2)$$

si $c_1 = 1$, entonces $c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{b(-1,c_2)}$

$$(c_2^2 - 2rc_2 + 2r(r+1), \ c_2^2 - 2(r-1)c_2)$$

Demostración. Teniendo en cuenta los teoremas de restricción de Barth |B; Theorem 3| y Hartshorne |H5; Remark 3.3.1|, basta aplicar el Teorema 3.3 a la restricción de E a un subespacio lineal general de dimensión 3 de $\mathbb{P}^n$.

4. Clases de Chern y α-invariante de un haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

En |A-R| Atiyah-Rees probaron que para todo par de enteros $(c_1,c_2) \in \mathbb{Z}^2$ con $c_1 . c_2 \equiv o \pmod{2}$ existe un haz localmente libre de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2). Además, probaron que si $c_1 \equiv -1 \pmod{2}$ entonces todos son topológicamente equivalentes y que si $c_1 \equiv o \pmod{2}$ entonces exis ten dos fibrados no topológicamente equivalentes. Estos dos fibrados se distinguen por el llamado α-invariante de Atiyah-Rees, que definimos a continuación:

<u>4.1 Definición</u> |H2; §2| . Sea E un haz localmente libre de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con c_1 par. Se define el invariante α de Atiyah-Rees por:

$$\alpha = \alpha(E) := h^o(\mathbb{P}^3, E(-\tfrac{1}{2}c_1-2)) + h^1(\mathbb{P}^3, E(-\tfrac{1}{2}c_1-2)). \quad (\text{mod.}2)$$

Nótese que $\alpha(E(m)) = \alpha(E)$ para todo entero m.

En esta sección caracterizamos las clases de Chern, y el α-invariante en el caso c_1 par, de un haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

<u>4.2 Teorema</u>. Las condiciones necesarias y suficientes a fin de que $(c_1,c_2) \in \mathbb{Z}^2$ y $\alpha \in \mathbb{Z}/_{(2)}$ sean las clases de Chern, y el α-invariante en el caso c_1=o, de un haz localmente libre normalizado estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ son:

(a) c_1=o ,α =o , $c_2 \geq 1$

(b) c_1=o ,α =1 , $c_2 \geq 3$

(c) c_1=-1, $c_2 \geq 2$ par.

<u>Demostración</u>. La necesidad de estas condiciones fue probada por R. Hartshorne en |H2; Corollary 8.4|. Veamos que son suficientes.

(a) Si $c_2 \geq 2$ y c_2 es par la construcción 2.4 da, tomando m = c_2+1, un ejemplo de haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2)$ y α-invariante $\alpha(E)=o$.

Si $c_2 \geq 1$ y c_2 es impar consideremos el par (Y,e) donde Y es una curva de grado c_2+1 unión de c_2+1 rectas y donde $o \neq e \varepsilon H^o\ \omega_Y(2)$. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow o$$

Por construcción E es un haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2) y α-invariante $\alpha(E)=o$.

(b) Para todo entero $c_2 \geq 3$ consideremos el par (Y,e) donde Y es una curva de grado c_2+4 unión disjunta de dos curvas elípticas no singulares de grados d_1,d_2 respectivamente, tales que Y no está contenida en ninguna superficie de grado dos y donde $o \neq e \varepsilon H^o\ \omega_Y$. Sea E(2) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(2) \longrightarrow I_Y(4) \longrightarrow o$$

Por construcción E es un haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2) y α-invariable $\alpha(E)=-1$.

(c) Si $c_2 \geq 2$ y c_2 es par la construcción 2.2 da, tomando $r = (c_2/2)+1$, un ejemplo de haz localmente libre estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2)$.

CAPITULO II.

CAPITULO II

CLASES DE CHERN Y ORDEN DE INESTABILIDAD DE UN HAZ REFLEXIVO INESTABLE DE RANGO DOS SOBRE $\mathbb{P}^3$

El objetivo de este capítulo es resolver el siguiente problema planteado por Sauer en |S|:

Problema: Caracterizar $\{(c_1,c_2,c_3,r) \in \mathbb{Z}^4/$ Existe un haz reflexivo E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern $c_1,c_2,c_3\}$.

Recordemos que un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=0$ o $c_1=-1$ se llama inestable |S; pg. 4| si deja de ser estable en el sentido de Mumford-Takemoto |T| i.e. si existe un entero no negativo s tal que $H^0(\mathbb{P}^3, E(-s)) \neq 0$. Como medida de la inestabilidad de un haz reflexivo inestable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=0$ o $c_1=-1$ se toma el mayor entero r tal que $H^o(\mathbb{P}^3, E^v(-r)) \neq 0$; a este entero se le llama orden de inestabilidad de E. Puesto que para haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ $E^v \simeq E(-c_1)$ |H5; Proposition 1.10| se tiene que si E es inestable de orden r entonces $r+c_1 \geq 0$.

Algunos resultados de este capítulo son similares a resultados del Capítulo I, y a primera vista parecen una generalización de ellos. No obstante esto no es así, ya que no existe ninguna noción de orden de inestabilidad que para un valor particular caracterice los haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Por ejemplo, si utilizamos la definición anterior de orden de inestabilidad sin la hipótesis $r+c_1 \geq 0$, entonces los haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=-1$ (resp. $c_1=0$) son los que verifican $r \leq 0$ (resp. $r \leq -1$).

Recordemos también que si E es un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) y σ una sección no nula de $E^v(-r)$ entonces la aplicación dual de la aplicación $\sigma: \mathcal{O} \longrightarrow E^v(-r)$ inducida por σ da una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(2r+c_1) \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

donde Y es un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^3$ de codimensión 2, Cohen-Macaulay y genéricamente localmente intersección completa. Salvo en el caso $E \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$, se tiene que $h^o E(-r-c_1)=1$, por lo que la curva Y sólo depende de E; la llamaremos la curva asociada a E. Además, es inmediato comprobar que

$$d := \deg(Y) = c_2 + c_1 r + r^2 \quad , \; y$$

$$p_a(Y) = \frac{1}{2}\,(c_3 + 2 - d(c_1 + 2r + 4))$$

Supuesto $c_1=0$ o $c_1=-1$, los posibles valores de c_2, c_3 para un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r están sujetos a las siguientes restricciones:

(i) $c_3 \equiv c_1 c_2 \pmod{2}$ |H5; Corollary 2.4|

(ii) $c_1 + r \geq 0$ |S; §1|

(iii) $c_2 + r^2 \geq 0$ si $c_1 = 0$

$c_2 + r^2 - r \geq 0$ si $c_1 = 1$ |S; §1|

(iv) $0 \leq c_3 \leq \begin{cases} (c_2+r^2)(c_2+(r+1)^2) & \text{si } c_1=0 \\ (c_2+r(r-1)(c_2+r(r+1)) & \text{si } c_1=-1 \end{cases}$ |S;Theorem 3.8

Pero dados enteros c_2, r tales que $c_2 + r^2 + c_1 r \geq 0$, no todos los valores de c_3 que verifican (iii) y (iv) son posibles. (Véase por ejemplo |S; Remark 7.1.1|).

En este capítulo determinamos, dados enteros c_2, r tales que $c_2 + c_1 r + r^2 \geq 0$ qué valores de c_3 entre los que verifican (iii) y (iv) son posibles y cuales no (Teoremas 2.7 y 3.3). El resultado es que para cada par de enteros c_2, r tales que $c_2 + c_1 r + r^2 \geq 0$ existe un número finito de intervalos bien determinados en los que c_3 no puede tomar valores.

Como aplicación obtendremos una caracterización de $\{(c_1,c_2,c_3) \in \mathbb{Z}^3$ / existe un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1,c_2,c_3\}$ (Teorema 4.1). En particular, teniendo en cuenta que un haz reflexivo de rango 2 so bre $\mathbb{P}^3$ es localmente libre si y sólo si $c_3=0$, reencontramos, para $c_3=0$, el teorema de Horrocks |H | y Atiyah-Rees |A-R|.

1. Cotas del orden de inestabilidad

Sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r. En esta sección caracterizamos el orden de inestabilidad r de E en función de la dimensión del espacio de endomorfismos de E (Proposición 1.1) y damos una cota optimal del orden de inestabilidad de un plano en función de r y de las clases de Chern de E (Teorema 1.3).

1.1 Proposición. Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Se verifica:

$$\dim \operatorname{End}(E) = \begin{cases} \binom{2r+c_1+3}{3} & \text{si } E \text{ es indescomponible} \\ 4 & \text{si } E\simeq \mathcal{O}\oplus\mathcal{O} \\ \binom{2r+3}{3} + 2 & \text{si } E\simeq\mathcal{O}(r)\oplus\mathcal{O}(-r) \text{ con } r\neq 0 \\ \binom{2r+2}{3} + 2 & \text{si } E\simeq\mathcal{O}(r-1)\oplus\mathcal{O}(-r) \end{cases}$$

Demostración. Podemos suponer que E es indescomponible, en caso contrario el resultado es inmediato. Por ser E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r existe una sección no nula σ de $E^{v}(-r)$ que da lugar a una sucesión exacta del tipo:

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(r+c_1) \longrightarrow E \longrightarrow I_Y(-r) \longrightarrow 0$$

donde Y es un subesquema de $\mathbb{P}^3$ de codimensión 2, Cohen-Macaulay y genéricamente localmente intersección completa. Aplicando el funtor Hom(E,.) a la sucesión exacta (1) obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}(r+c_1)) \longrightarrow \mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}\ (E,I_Y(r))$$

de donde resulta:

$$(2) \quad \dim \mathrm{End}(E) \leq \dim \mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}(r+c_1)) + \dim \mathrm{Hom}(E,\ I_Y\ (r)).$$

Aplicando el funtor Hom(E,.) a la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I_Y\ (-r) \longrightarrow \mathcal{O}(-r) \longrightarrow \ O_Y(-r) \longrightarrow 0$$

obtenemos que

$$(3) \quad \dim \mathrm{Hom}(E,\ I_Y(-r)) \leq \dim \mathrm{Hom}\ (E,\mathcal{O}(-r))$$

De las desigualdades (2) y (3), y de la sucesión exacta de cohomología asociada a la sucesión axacta (1) deducimos que:

$$\dim \mathrm{End}(E) \leq \dim \mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}(r+c_1)) + \dim \mathrm{Hom}(E,\mathcal{O}(-r)) = \dim H^0\ E(r) +$$

$$+ \dim H^0\ E(-r-c_1) = \binom{2r+c_1+3}{3} + 1$$

Por otro lado, para toda forma $f \in H^0\ (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2r+c_1))$, la sucesión exacta (1) da el morfismo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right] & I_Y(-r) \arrow[r] & \mathcal{O}(-r) \arrow[r, hook, "f"] & \mathcal{O}(r+c_1) \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

que no es ningún múltiplo escalar de la identidad. Por lo tanto:

$$\dim \operatorname{End}(E) \geq 1 + h^{o}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2r+c_1) = 1 + \binom{2r+c_1+3}{3},$$

lo cual prueba la igualdad.

Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$. Recordemos que un hiperplano H de $\mathbb{P}^n$ es un hiperplano inestable para E si existe un entero $t>o$ tal que $H^o\, E_H^v\,(-t) \neq 0$, donde $E_H^v := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_H}(E_H, \mathcal{O}_H)$. Al mayor de tales enteros t se le llama orden de inestabilidad del hiperplano H. (Preliminares; definición 10). Recordemos también que aplicando el Teorema de dualidad de Serre a H se obtiene que la condición $H^o E_H^v\,(-t) \neq 0$ es equivalente a la condición $H^{n-1}\, E_H(t-n) \neq 0$.

<u>1.2 Observación</u>. Si E es un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, inestable de orden r entonces la restricción E_H de E a un hiperplano general H de $\mathbb{P}^n$ es un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre H inestable de orden r (Véase |S; Proposition 1.1|).

<u>1.3 Teorema</u>. Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern (c_1, c_2, c_3). Sea $H \subset \mathbb{P}^3$ un plano inestable de orden $t > r$. Se verifica:

(i) $t \leq c_2 + r^2 + r$ si $c_1 = 0$

(ii) $t \leq c_2 + r^2$ si $c_1 = -1$

(iii) Estas cotas son óptimas.

Demostración (i) Consideremos la sucesión exacta de cohomología

$$\dots \longrightarrow H^2E(p) \longrightarrow H^2E_H(p) \longrightarrow H^3E(p-1) \longrightarrow \dots$$

asociada a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E \longrightarrow E_H \longrightarrow 0$$

Del Teorema de dualidad de Serre para haces reflexivos (Preliminares; Teorema 6) y de la definición de orden de inestabilidad de E deducimos que $H^3E(p-1)=0$ para $p\geq r-2$, por otro lado $H^2E(p)=0$ para todo $p\geq c_2+r^2+r-2$ |S; Theorem 3.8|. Por lo tanto:

$$H^2\ E_H\ (p)=0 \text{ para todo } p\geq \max\ (r-2,c_2+r^2+r-2)=c_2+r^2+r-2.$$

Puesto que $H\subseteq \mathbb{P}^3$ es un plano inestable para E de orden $t>r$, $H^2E_H\ (t-3)\neq 0$, lo cual implica que $t-3<c_2+r^2+r-2$, de donde se concluye que $t\leq c_2+r^2+r$.

(ii) La demostración es análoga a la de (i) y por lo tanto la omitimos.

(iii) Caso $c_1=0$. Para todo par de enteros c_2,r tales que $r\geq 0$ y $c_2+r^2>0$, demostraremos que existe un haz reflexivo E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con $c_1E=0$, $c_2E=c_2$ y que posee un plano inestable $H\subset\mathbb{P}^3$ de orden c_2+r^2+r.

Para ello, consideremos el par (Y,e) donde Y es una curva plana no singular de grado $d=c_2+r^2$ y $0\neq e\in H^0\omega_Y(2r+4) = H^0\mathcal{O}_Y(c_2+r^2+2r+1)$. Sea E(-r) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(-r) \longrightarrow I_Y(-2r) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern $(0, c_2, (c_2+(r+1)^2)(c_2+r^2))$. Sea $\{k_i\}_{i=1,2,\ldots,c_2+r^2}$ su espectro. La igualdad $c_3 = -2 \sum_{i=1}^{c_2+r^2} k_i$ |S; Proposition 3.6| y las propiedades de conexión del espectro |S; Proposition 3.4 - Lemma 7.1| implican que $\{k_i\}_{i=1,2,\ldots,c_2+r^2} =$ $\{-r-d, -r-d+1, \ldots, -r-1\}$.

De la fórmula $h^2(\mathbb{P}^3, E(m)) = h^1(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2+r^2} \mathcal{O}(k_i+m+1))$ para todo $m \geq -r-3$ deducimos que $h^2E(c_2+r^2+r-3) = 1$ y

$$h^2 E(c_2+r^2+r-4) = \begin{cases} 3 & \text{si } d>1 \\ 2 & \text{si } d=1 \end{cases}$$

Por lo tanto, existe una forma lineal $f \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1))$ tal que la aplicación

$$H^2 E(c_2+r^2+r-4) \xrightarrow{f} H^2 E(c_2+r^2+r-3)$$

inducida por f es cero. Sea H el plano de ecuación f=0. Entonces la sucesión exacta de cohomología

$$H^2 E(c_2+r^2+r-4) \xrightarrow{\cdot f} H^2 E(c_2+r^2+r-3) \longrightarrow H^2 E_H(c_2+r^2+r-3)$$

asociado a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E \longrightarrow E_H \longrightarrow 0$$

muestra que $H^2E_H(c_2+r^2+r-3) \neq 0$, o equivalentemente que H es un plano inestable para E de orden de inestabilidad $t=c_2+r^2+r$.

<u>Caso $c_1=1$</u>. Para todo par de enteros c_2, r tales que $r>0$ y $c_2+r^2-r>0$, demostraremos que existe un haz reflexivo E de

de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con $c_1E=0$, $c_2E=c_2$ y que posee un plano inestable $H\subset\mathbb{P}^3$ de orden c_2+r^2.

Un razonamiento análogo al del caso $c_1=0$, tomando el par (Y,e) donde Y es una curva plana lisa de grado c_2+r^2-r y e una sección no nula de $\omega_Y(2r+5)\simeq\mathcal{O}_Y(c_2+r^2+r+2)$, prueba que el haz E(r) determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r-1) \longrightarrow E \longrightarrow I_Y(-r) \longrightarrow 0$$

tiene las propiedades requeridas.

2. Construcción de haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestables de orden r.

El objetivo de esta sección es construir, por medio de la correspondencia usual entre curvas de $\mathbb{P}^3$ y haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Preliminares; Teorema 7), familias de haces reflexivos inestables de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ y analizar, fijados c_1,c_2 y r, qué valores de c_3 aparecen.

Consideremos primero el caso $c_1=-1$.

Sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ y sea $d=c_2+r^2-r$ el grado de la curva asociada. Si $d=0$ entonces E descompone y $c_3=0$; si $d=1$ entonces la curva Y asociada a E es una recta, luego $0=P_a(Y)=\frac{1}{2}(c_3+2-(2r+3))$ de donde $c_3=2r+1$. Por lo tanto supondremos $d=c_2+r^2-r\geq 2$.

2.1 Construcción. Para todo par de enteros c_2,r tales que $r\geq 1$ y $c_2+r^2-r\geq 2$; y para todo entero t tal que $o \leq t \leq \frac{1}{2}(c_2+r^2-r)$, consideremos el par (Y,e) donde, si t=0, Y es una curva plana de grado c_2+r^2+r, y si $t\geq 1$, $Y=Y_1\cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2+r^2+r con una curva Y_2 de grado t(t+2r+1) intersección completa de una superficie de grado t con una superficie de grado t+2r+1 que corta a Y_1 en j puntos con $0\leq j\leq$ t(t+2r+1).(Para la existencia de estas curvas véase la observación 2.1.2), y donde $0\neq e\in H^o\omega_Y(3-2r-2t)$ (Véase la observación 2.1.1).Sea E(r+t+1) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7).

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(r+t+1) \longrightarrow I_Y(2r+2t+1) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1E=-1$, $c_2E=c_2$, y $c_3E=2p_a(Y)-$ $-2+(\deg Y)(3-2r-2t)= c_2{}^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2+r)+ 2j$. Además, puesto que $h^oE(-r+1)=h^o\ I_Y(t+1)=h^o\ I_{Y_2}(t)= 1$ y $h^oE(-r)=h^o\ I_Y(t) = h^o\ I_{Y_2}(t-1) = 0$ se tiene que E es inestable de orden r.

2.1.1 Observación. En virtud de la proposición 20 del capítulo de preliminares, tenemos que $H^o\omega_{Y_1}(3-2r-2t)\oplus H^o\omega_{Y_2}(3-2r-2t)\hookrightarrow H^o\omega_Y(3-2r-2t)$. Además, por ser Y_1 una curva plana de grado c_2+r^2+r e Y_2 una curva intersección completa de dos superficies de grados t y t+2r+1 respectivamente, se tiene que $H^o\omega_{Y_1}(3-2r-2t)\simeq H^o\mathcal{O}_{Y_1}(c_2+r^2-2t-r)$ y

$H^o\omega_{Y_2}(3-2r-2t) \simeq H^o\mathcal{O}_{Y_2}$. Por lo tanto, si $t \leq \frac{1}{2}(c_2+r^2-r)$, existe una sección global no nula $0 \neq e \in H^o\omega_Y(3-2r-2t)$ que genera $\omega_Y(3-2r-2t)$ salvo quizás en un número finito de puntos.

<u>2.1.2 Observación</u>. Vamos a probar que las curvas Y utilizadas en la construcción 2.1 existen. Para todo terna de enteros (c_2,r,t) tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r \geq 2$ y $0 \leq t \leq \frac{1}{2}(c_2+r^2-r)$, elijamos una curva no singular Y_2 intersección completa de una superficie no singular de grado t con una superficie no singular de grado $t+2r+1$. Sea $H \subset \mathbb{P}^3$ un plano transversal a Y_2 y $S=Y_2 \cap H$ los $t(t+2r+1)$ puntos distintos de la intersección de Y_2 con H. Sea $D \subseteq S$ un subconjunto con exactamente j puntos, $1 \leq j \leq t(t+2r+1)$. Para demostrar la existencia de una curva plana Y_1 de grado c_2+r^2+r conteniendo a D pero no conteniendo ningún punto de S-D, es suficiente probar que S impone $t(t+2r+1)$ condiciones independientes sobre las curvas planas de grado c_2+r^2+r. Para ello consideramos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H(-2t-2r-1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(-t) \oplus \mathcal{O}_H(-t-2r-1) \longrightarrow I_S \longrightarrow 0$$

Tensorializando por $\mathcal{O}_H(c_2+r^2+r)$ y tomando cohomología obtenemos

$$h^o I_S(c_2+r^2+r) = \binom{c_2+r^2+r+2}{2} - t(t+2r+1) \text{ si } t \leq \frac{c_2+r^2-r+1}{2},$$

lo cual prueba la existencia de Y.

2.1.3 Observación. Para toda terna de enteros (c_2,r,t) tales que $r\geq 1$, $c_2+r^2-r\geq 2$ y $o\leq t\leq \frac{1}{2}\,(c_2+r^2-r)$ hemos construido haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestables de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ tales que $c_2\equiv c_3$ (mod.2) y

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2 - r^2 - 2t\,(c_2+r^2+r) \leq$$
$$\leq c_3 \leq c_2^2+r^4+2c_2r^2 - r^2-2t(c_2+r^2 - t-r-1)$$

Esta construcción no cubre los intervalos:

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t\,(c_2+r^2-r-t-1) <$$
$$<c_3 < c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2(t-1)(c_2+r^2+r)$$

Nótese que para la existencia de un entero $c_3, c_3\equiv c_2$ (mod.2) en este intervalo es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$c_2^2+2c_2r^2+r^4-r^2-2t(c_2+r^2-t-r-1)+ 4 \leq$$
$$\leq c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2(t-1)(c_2+r^2+r),\ t \geq 0;$$

lo cual equivale a:

$$0 \leq t \leq \frac{-(2r+1)+\sqrt{-7+4(c_2+2r^2+2r)}}{2} \text{ y } c_2+r^2+r \geq 2$$

Por otro lado el menor valor de c_3 que aparece usando la construcción 2.1 es $c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2+r)$ para t máxima, i.e. $t = \frac{1}{2}\,(c_2+r^2-r-1)$ si c_2+r^2-r es impar y $t = \frac{1}{2}\,(c_2+r^2-r)$ si c_2+r^2-r es par. Por lo tanto, el menor valor de c_3 que se obtiene con la construcción 2.1 es $c_3=c_2+r^2+r$ si c_2+r^2-r es impar y $c_3=0$ si c_2+r^2-r es par. Si c_2 es impar para decidir que valores de c_3 aparecen en el intervalo $0 < c_3 < c_2+r^2+r$ necesitamos otras construcciones.

<u>2.2 Construcción</u>. Para toda cuaterna de enteros c_2,r,q,j tales que $r\geq 1$, $c_2+r^2-r\geq 3$ impar, $q = \frac{1}{2}(c_2+r^2-r-1)$ y $0\leq j\leq q$, consideremos el par (Y,e) donde $Y = \bigcup_{i=1}^{j} Y_i \cup \bigcup_{k=j+1}^{q} Y_k \cup L$ es una curva de grado c_2+r^2-r unión disjunta de una recta simple L, con rectas dobles $Y_1,\ldots,Y_q$ tales que $\chi(\mathcal{O}_{Y_i})=2r+3$ para $i=1,\ldots,j$ y $\chi(\mathcal{O}_{Y_k}) = 2r+2$ para $k=j+1,\ldots,q$, y donde $0\neq e \in H^0\omega_Y(2r+3)$. Sea $E(-r+1)$ el haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares; Teorema 7).

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(2r-1) \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern $c_1E=-1$, $c_2E=c_2$ y $c_3E = c_2+r^2+r-2j$.

<u>2.2.1 Observación</u>. Para la existencia de las rectas dobles $Y_1,\ldots,Y_q$ y de la sección e véase el apéndice de este capítulo.

<u>2.2.2 Observación</u>. Para todo par de enteros c_2,r tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r \geq 3$ impar hemos construido haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ que verifican la relación de Schwarzenberger $c_2\equiv c_3$ (mod. 2) y las desigualdades $2r+1 \leq c_3 \leq c_2+r^2+r$.

2.3 Construcción. Para toda cuaterna de enteros c_2, r, p, j tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r \geq 3$ impar, $p = \frac{1}{2}(c_2+r^2-r-1)$ y $0 \leq j \leq r$, consideremos el par (Y,e) donde $Y = \bigcup_{i=1}^{p-1} Y_i \cup Y_o$ es una curva de grado c_2+r^2-r unión disjunta de rectas dobles $Y_1, \dots, Y_{p-1}$ tales que $\chi(\mathcal{O}_{Y_i}) = 2r+3$ para $i=1,\dots,p-1$, con una recta triple Y_o tal que $\chi(\mathcal{O}_{Y_o}) = 2r+4+j$, donde $0 \neq e \in H^o\ \omega_Y(2r+3)$. Sea $E(-r+1)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e) (Preliminares, Teorema 7).

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(2r-1) \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $c_1E=-1$, $c_2E=c_2$ y $c_3E= 2r+1-2j$.

2.3.1 Observación. Para la existencia de $Y_1, \dots, Y_{p-1}$, Y_o; y de la sección e véase el apéndice de este capítulo.

2.3.2 Observación. Para todo par de enteros c_2, r tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r \geq 3$ impar hemos construido haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern $(-1, c_2, c_3)$ que verifican la relación de Schwarzenberger $c_2 \equiv c_3$ (mod.2) y las desigualdades $0 < c_3 \leq 2r+1$.

A continuación describiremos las construcciones 2.4, 2.5 y 2.6 correspondientes al caso $c_1=0$. Puesto que los argumentos son similares a los del caso $c_1=-1$, los omitimos.

Sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $(0, c_2, c_3)$ y sea $d=c_2+r^2$ el grado de la curva asociada. Si $d=0$ entonces E descompone y $c_3=0$, si $d=1$ entonces la curva asociada a E es una recta, luego $0=p_a(Y) = \frac{1}{2}(c_3+2-(2r+4))$ de donde $c_3=2r+2$. Por lo tanto supondremos $d=c_2+r^2 \geq 2$.

<u>2.4 Construcción</u>. Para todo par de enteros c_2, r tales que $r \geq 0$ y $c_2+r^2 \geq 2$; y para todo entero t tal que $0 \leq t \leq \frac{c_2+r^2}{2}$, consideremos el par (Y,e) donde, si $t=0$, Y es una curva plana de grado c_2+r^2+2r+1, y si $t \geq 1$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2+r^2+2r+1 con una curva Y_2 de grado $t(t+2r+2)$ intersección completa de una superficie de grado t con una superficie de grado $t+2r+2$ que corta a Y_1 en j puntos con $0 \leq j \leq (t+2r+2)t$, donde $0 \neq e \in H^0\, \omega_Y(2-2r-2t)$. Sea $E(r+t+1)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E(r+t+1) \longrightarrow I_Y(2r+2t+2) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r, con clases de Chern $c_1E = 0$, $c_2E=c_2$ y $c_3E=c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2+2r+1)+2j$.

<u>2.5 Construcción</u>. Para toda cuaterna de enteros c_2, r, q, j tales que $r \geq 0$, $c_2+r^2 \geq 3$ impar, $q = \frac{c_2+r^2-1}{2}$ y $0 \leq j \leq q$, consideremos el par (Y,e) donde $Y = \bigcup_{i=1}^{j} Y_i \cup \bigcup_{k=j+1}^{q} Y_k \cup L$ es una curva de grado c_2+r^2 unión disjunta de una recta simple L, con rectas dobles $Y_1,\dots,Y_q$ tales que $\chi(\mathcal{O}_{Y_i})=2r+4$

para $i=1,\ldots,j$ y $\chi(\mathcal{O}_{Y_k}) = 2r+3$ para $k=j+1,\ldots,q$; y donde $0 \neq e \in H^o\omega_Y(2r+4)$. Sea $E(-r)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(2r) \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $c_1E=0$, $c_2E=c_2$ y $c_3E=c_2+r^2+2r+1-2j$.

<u>2.6 Construcción</u>. Para toda cuaterna de enteros c_2,r,q,j tales que $r \geq 0$, $c_2+r^2 \geq 3$ impar, $q = \frac{1}{2}(c_2+r^2)$ y $0 \leq j \leq r$, consideremos el par (Y,e) donde $Y = \bigcup_{i=1}^{q-1} Y_i \cup Y_o$ es una curva de grado c_2+r^2 unión disjunta de rectas dobles $Y_1,\ldots,Y_{q-1}$ tales que $\chi(\mathcal{O}_{Y_i}) = 2r+4$ para $i=1,\ldots,q-1$, con una recta triple Y_o tal que $\chi(\mathcal{O}_{Y_o}) = 2r+6+j$, donde $0 \neq e \in H^o\,\omega_Y(2r+4)$. Sea $E(-r)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,e)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(2r) \longrightarrow E(r) \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $c_1E=0$, $c_2E=0$, $c_3E = 2r-2j$.

En lo que sigue pondremos:

$$b(-1,c_2,r) = \frac{-(2r+1)+\sqrt{-7+4(c_2+2r^2+2r)}}{2}$$ (Véase la observación 2.1.3)

También pondremos:

$$b(0,c_2,r) = -(r+1)+\sqrt{c_2+2r^2+4r} \quad ,$$

que se obtiene de modo análogo en el caso $c_1=0$.

<u>2.7 Teorema</u>. (a) Si $c_1=-1$, entonces para toda terna de enteros tales que:

(a_1) $\quad r \geq 1$

(a_2) $\quad c_2+r^2-r \geq 2$

(a_3) $\quad c_2 \equiv c_3 \pmod{2}$

(a_4) $\quad 0 \leq c_3 \leq (c_2+(r-1)r)(c_2+(r+1)r)$

(a_5) $$c_3 \notin \bigcup_{t=1}^{b(-1,c_2r)} (c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1),\; c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2(t-1)(c_2+r^2+r))$$

existe un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$.

(b) Si $c_1=0$, entonces para toda terna de enteros tales que:

(b_1) $\quad r \geq 0$

(b_2) $\quad c_2+r^2 \geq 0$

(b_3) $\quad c_3 \equiv 0 \pmod{2}$

(b_4) $\quad 0 \leq c_3 \leq (c_2+r^2)\ (c_2+(r+1)^2)$

(b_5) $$c_3 \notin \bigcup_{t=1}^{b(0,c_2,r)} (c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2 \ldots\; c_2^2+r^4+2c_2r^2+2rc_2+2r^3+c_2+r^2-2(t-1)(c_2+r^2+ \ldots$$

existe un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $(0,c_2,c_3)$.

Demostración. (a) Si $c_1=-1$, la observación 2.1.3 muestra que la construcción 2.1 da todos los valores $c_3 \geq 0$ si c_2+r^2-r es par, y todos los valores $c_3 \geq c_2+r^2+r$ si c_2+r^2-r es impar, que satisfacen las condiciones a_j del enunciado; la observación 2.2.2 muestra que la construcción 2.2 da todos los valores c_3 tales que $c_2+r^2+r \geq c_3 \geq 2r+1$ si c_2+r^2-r es impar, que satisfacen las condiciones a_j del enunciado; y la observación 2.3.2 muestra que la construcción 2.3 de todos los valores c_3 tales que $2r+1>c_3>0$ si c_2+r^2-r es impar, que satisfacen las condiciones a_j del enunciado. Esto prueba la parte (a) del Teorema.

(b) Un argumento similar, usando las construcciones 2.4, 2.5 y 2.6 en lugar de las construcciones 2.1, 2.2 y 2.3, prueba el caso $c_1=0$.

3. Intervalos de inexistencia de c_3.

En esta sección probaremos que los intervalos no cubiertos por las construcciones 2.1, 2.2 y 2.3 (Resp. 2.4, 2.5 y 2.6) de la sección anterior son efectivamente intervalos de inexistencia de c_3.

3.1. Lema. Sea E un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$. Supongamos que:

$$c_3 > \frac{(c_2+r(r-1)(c_2+r(r+1))}{2} + (r+1)(c_2+r^2-r).$$

Entonces E posee un plano inestable de orden c_2+r^2-t para cierto t, $0 \leq t \leq \frac{c_2+r^2-r-3}{2}$; y en tal caso:

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2+r) \leq c_3 \leq c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1$$

Demostración. Sea $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_{c_2+r^2-r}$ el espectro de E. La hipótesis.

$$c_3 > \frac{(c_2+r(r-1)(c_2+(r+1)r)}{2} + (r+1)(c_2+r^2-r),$$

la fórmula $c_3=-2\sum_i k_i - c_2-r^2+r$ |S; Proposition 3.6| y las propiedades de conexión del espectro |S; Proposition 3.4, Lemma 7.1| implican que $k_1=-c_2+r^2+t$ para cierto entero t con $0 \leq t \leq \frac{c_2+r^2-r-3}{2}$ y que $k_1=-c_2-r^2+t$, $k_2=k_1+1$ aparecen exactamente una vez en el espectro. De donde, gracias a la igualdad $h^2(\mathbb{P}^3,E(m))=h^1(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{i=1}^{c_2+r^2-r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m+1+k_i))$ para $m \geq r-2$ |S; Theorem 3.1|, deducimos que $h^2E(-k_1-3)=1$ y $h^2E(-k_1-4)=3$. Por lo tanto, existe una forma lineal $h\varepsilon H^o(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1))$ tal que la aplicación $H^2E(-k_1-4) \xrightarrow{.h} H^2E(-k_1-3)$ inducida por h es cero. Sea H el plano de ecuación h=0. La sucesión exacta de cohomología:

$$H^2E(-k_1-4) \longrightarrow H^2E(-k_1-3) \longrightarrow H^2E_H(-k_1-3)$$

muestra que $H^2E_H(-k_1-3) \neq 0$ o equivalentemente que H es un plano inestable para E de orden $k_1= c_2+r^2-t$.

Por otro lado, de entre todas las sucesiones de enteros $k_1 \leq\ldots\leq k_{c_2+r^2-r}$ que verifican |S; §3 y Lemma 7.1| y tales que $k_1=-c_2-r^2+t$ con $0 \leq t \leq \frac{c_2+r^2-r-3}{2}$, la sucesión $\{-c_2-r^2+t,\ldots,-r-t-3,\ -r-t-2,\ -r-t-1,\ -r-t-1,\ldots,-r-2,$ $-r-2,\ -r-1\}$ maximiza $-2\sum_i k_i$ y $\{-c_2-r^2+t,\ldots,-r-1,$ $r+1,\ldots,\ r+t-1\}$ minimiza $-2\sum_i k_i$. Si además tenemos en cuenta que $c_3=-2\sum_i k_i - c_2-r^2+r$ |S; Proposition 3.6| obtenemos

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2+r) \leq c_3 \leq c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1)$$

3.2 Lema(*). Sea E un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r, con clases de Chern $(0,c_2,c_3)$ supongamos que

$$c_3 > \frac{(c_2+r^2)\ (c_2+(r+1)^2)}{2} + (r+1)(c_2+r^2)$$

Entonces E posee un plano inestable de orden c_2+r^2+r-t para cierto entero t con $0 \leq t \leq \dfrac{c_2+r^2-3}{2}$; y en tal caso

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2+2rc_2+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2+2r+1) \leq c_3 \leq c_2^2+r^4+$$
$$+2c_2r^2+2rc_2+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1).$$

Para todo par de enteros c_2,r sean $b(0,c_2,r)$ y $b(-1,c_2,r)$ los invariantes numéricos definidos en la sección 2.

3.3 Teorema (a) Si $c_1=-1$, entonces para todo terna de enteros c_2,r,t tales que $r \geq 1$, $c_2+r^2-r\geq 2$, y $1\leq t\leq b(-1,c_2,r)$, no existen haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r con clases de Chern $(-1,c_2c_3)$ que verifiquen:

(1) $c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1) < c_3 <$

$< c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-r^2-2(t-1).(c_2+r^2+r)$

(b) Si $c_1=0$, entonces para todo terna de enteros c_2,r,t tales que $r \geq 0$, $c_2+r^2 \geq 2$, y $1 \leq t \leq b(0,c_2,r)$, no existen haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestable de orden r con clases de Chern $(0,c_2,c_3)$ que verifiquen

(2) $c_2^2+2c_2r^2+2rc_2+2r^3+c_2+r^2-2t(c_2+r^2-t-1) < c_3 <$

$< c_2^2+r^4+2c_2r^2+2rc_2+2r^3+c_2+r^2-2(t-1)(c_2+r^2+2r+1)$.

<u>Observación 3.3.1</u> Las hipótesis del enunciado sobre t son para garantizar que las condiciones (1) y (2) son no vacias.

<u>Demostración del Teorema 3.3</u> (a) Teniendo en cuenta que para todo entero t con $0 \leq t \leq b(-1,c_2,r)$ se verifica que

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1)+2 >$$

$$> \frac{(c_2+r(r-1))(c_2+(r+1)r)}{2} + (r+1)(c_2+r^2-r);$$

podemos suponer que tenemos un haz reflexivo E de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern $c_1=-1$, y

y $c_3 > \dfrac{(c_2+(r-1)r)(c_2+(r+1)r)}{2} + (r+1)(c_2+r^2-r)$. Del lema 3.1 deducimos que E posee un plano inestable de orden

c_2+r^2-t con $0 \leq t \leq \dfrac{c_2+r^2-r-3}{3}$, y que

$$c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2+r) \leq c_3 \leq c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1).$$

De donde resulta que no existen haces reflexivos de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$, inestables de orden r, con clases de Chern

$(-1,c_2,c_3)$ que verifiquen:

$$(1)\quad c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1) < c_3 <$$
$$< c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-r^2-2(t-1)(c_2+r^2+r)$$

Nótese que para la existencia de un entero $c_3 \equiv c_2$ (mod.2) en el intervalo (1) es necesario y suficiente que
$c_2+r^4+2c_2r^2-r^2-2t(c_2+r^2-r-t-1)+4 \leq c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2\,(t-1)(c_2+r^2+r)$
y $t \geq 1$, lo cual es equivalente a $t^2+(2r+1)t-(c_2+r^2+r)+2 \leq 0$
y $t \geq 1$, y por lo tanto a:

$$1 \leq t \leq \frac{-(2r+1)+\sqrt{-7+4(c_2+2r^2+2r)}}{2} = b(-1,c_2,r)$$

(b) La demostración es análoga a la de (a).

<u>3.4 Corolario</u>. Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^n$, $n\geq 3$, inestable de orden r con clases de Chern $(c_2,c_2,\ldots,c_n)$ se verifica :

(a) $c_1+r \geq 0$

(b) $c_2+c_1r+r^2 \geq 0$

(c) $c_3 \equiv c_1 . c_2$ (mod.2)

(d) $0 \leq c_3 \leq \begin{cases} (c_2+(r-1)r)(c_2+(r+1)r) & \text{si } c_1=-1 \\ (c_2+r^2)(c_2+(r+1)^2) & \text{si } c_1=0 \end{cases}$

(e) si $c_1=-1$ entonces $c_3 \notin \bigcup_{t=1}^{b(-1,c_2,r)} (c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-$
$-2t(c_2+r^2-r-t-1),\ c_2^2+r^4+2c_2r^2-r^2-2(t-1)(c_2+r^2+r))$

$$\text{si } c_1=0 \text{ entonces } c_3 \notin \bigcup_{t=1}^{b(0,c_2,r)} (c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2- $$
$$-2t(c_2+r^2-t-1),\ c_2^2+r^4+2c_2r^2+2c_2r+2r^3+c_2+r^2-2(t-1)(c_2+r^2+2r+1)).$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de restricción (Observación 1.2), basta aplicar el Teorema 3.3 a la restricción de E a un subespacio lineal general de dimensión 3 de $\mathbb{P}^n$.

4. Clases de Chern de un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$.

En esta sección, como aplicación de los resultados obtenidos en las secciones anteriores de este capítulo, caracterizamos las clases de Chern (c_1,c_2,c_3) de un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Teorema 4.1). Concretamente, probaremos que la relación de Scharzenberger $c_1c_2 \equiv c_3$ (mod.2) |H5; Corollary 2.4| y la desigualdad $c_3 \geq 0$ |H5; Proposition 2.6| son las únicas condiciones que ha de verificar una terna de enteros (c_1,c_2,c_3) para ser las clases de Chern de un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. En particular, teniendo en cuenta que un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ es localmente libre si y sólo si $c_3=0$ |H5; Proposition 2.6| reencontramos, para $c_3=0$, el teorema de Atiyah-Horrocks-Rees |$\mathcal{O}$-S-S; Cap.I, Teorema 6.3.3| que caracteriza las clases de Chern de un haz localmente libre de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Corolario 4.2).

También como corolario de los Teoremas 2.7 y 3.3 reencontramos un teorema recientemente publicado por Bănica (Véase |BA|) que caracteriza las clases de Chern y el orden de inestabilidad de un fibrado vectorial de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ (Teorema 4.3).

4.1. Teorema. Las condiciones necesarias y suficientes para que una terna de enteros (c_1,c_2,c_3) sea las clases de Chern de un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ son:

(a) $c_1c_2 \equiv c_3 \pmod{2}$

(b) $c_3 \geq 0$.

Demostración. La necesidad de estas condiciones fue probada por Hartshorne |H5; Corollary 2.4 y Proposition 2.6|. Veamos que son suficientes.

Torciendo adecuadamente, podemos normalizar cualquier haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$. Por lo tanto, supondremos $c_1=0$ o $c_1=-1$.

Si $c_1=-1$, elijamos un entero $r \geq 1$ tal que:

(i) $c_2+r^2-r \geq 2$

(ii) $c_3 \leq c_2+r^4+2c_2r^2-r^2-2\left(\left[\dfrac{-(2r+1)+\sqrt{-7+4(c_2+2r^2+2r)}}{2}\right]+1\right).(c_2+r^2+r)$,

donde $[x] = \max \{n \in \mathbb{N}/n \leq x\}$

Entonces la construcción 2.1, 2.2 ó 2.3, según requiera el caso, da un ejemplo de haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ inestable de orden r con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$

Para el caso $c_1=0$ se procede análogamente.

4.2. Corolario. (Véase |HO| o |A-R|). La condición necesaria y suficiente para que un par de enteros (c_1,c_2) sea las clases de Chern de un haz localmente libre de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ es $c_1c_2\equiv 0$ (mod.2)

Demostración. Basta aplicar el Teorema 4.1, teniendo en cuenta que un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ es localmente libre si y sólo si $c_3=0$ |H5; Proposition 2.6|.

4.3. Teorema. (Véase |BA|). Las condiciones necesarias y suficientes que ha de verificar un par de enteros c_2,r para ser la 2ª clase de Chern y el orden de inestabilidad de un haz localmente libre, normalizado de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ son:

(a) $c_1=0$, $r \geq 0$, $c_2+r^2 \geq 0$, $c_2+r^2 \neq 1$.

(b) $c_1=-1$, $r \geq 1$, $c_2+r^2-r\geq 0$ par

Demostración. Basta aplicar los Teoremas 2.7 y 3.3, teniendo en cuenta que un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ es localmente libre si y sólo si $c_3=0$ |H5; Proposition 2.6|.

APENDICE

En este apéndice se enuncian, para mayor comodidad del lector, algunos resultados ya conocidos sobre rectas múltiples y se incluye la demostración de los que no son fácilmente accesibles.

Al igual que a lo largo de toda la memoria, una curva será un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^3$ de dimensión pura uno, Cohen-Macaulay, genéricamente localmente intersección completa.

1. Definición. (Véase |C3; §1|). Diremos que una curva Y de $\mathbb{P}^3$ es una recta con una estructura múltiple de multiplicidad n, si el soporte de Y es una recta L y $n = \min \{t/I_L^t \subset I_Y\}$ En particular, llamaremos recta doble (resp. triple) a toda recta con una estructura múltiple de multiplicidad dos (resp.tres).

2. Ejemplos. Sea x,y,z,t coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$ y sea L la recta de ecuaciones x=y=0. Para todo entero $r \geq 1$, sean $F,G \in k[z,t]$ dos formas de grado r sin ceros comunes. Consideremos la curva Y de $\mathbb{P}^3$ definida por $I_Y = (x^2, y^2, xy, xF+yG)$. Se verifica:

(a) Y es una recta doble.En efecto: $I_L^2 = (x^2,y^2,xy) \subset I_Y \subset I_L$

(b) deg Y=2 y $p_a(Y)=-r$. En efecto: Sea PHS_Y el polinomio de Hilbert-Samuel de Y, es inmediato comprobar que $PHS_Y(n) = 2n+r+1$, de donde se deduce que deg Y=2 y $p_a(Y)=-r$.

Para el estudio de rectas dobles el siguiente teorema de Ferrand |F| nos será de gran utilidad.

<u>3. Teorema de Ferrand</u>. Sea X una curva de $\mathbb{P}^3$, M un haz inversible sobre X, $u : I_X \longrightarrow M$ un epimorfismo e Y la curva definida por $I_Y = \operatorname{Ker} u$. Sea m un entero y supongamos que $M \simeq \omega_X(m)$ y que la aplicación $\bar{u}$: $H^1(\mathbb{P}^3, I_X(-m)) \longrightarrow H^1(X, \omega_X)$ inducida por u es cero. Entonces:

(i) $I_X^2 \subset I_Y \subset I_X$. En particular supp Y = supp X.

(ii) $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-m)$.

(iii) Y es localmente intersección completa.

(iv) Para todo $x \in \operatorname{Supp} X$, $2\operatorname{mult}_x X = \operatorname{mult}_x Y$

<u>Demostración</u> (Véase |F; Proposition 2| y |B-M; §4 Lemma 1|.

A continuación utilizaremos el Teorema de Ferrand para construir rectas dobles.

<u>4. Construcción</u>. Sea x,y,z,t coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$ y sea L la recta de ecuaciones x=y=0. Para todo entero $r \geq 1$, elijamos un epimorfismo.

$$u_o: I_{L,\mathbb{P}^3} \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}{\otimes} \mathcal{O}_L \simeq \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_L(r-1) \simeq \omega_L(r+1).$$

y consideramos la composición:

$$\begin{tikzcd} I_{L,\mathbb{P}^3} \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "u"'] & I_{L,\mathbb{P}^3} \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}{\otimes} \mathcal{O}_L \arrow[r, two heads, "u_o"] & \mathcal{O}_L(r-1) \simeq \omega_L(r+1) \end{tikzcd}$$

Sea Y la curva de $\mathbb{P}^3$ definida por $I_Y = \operatorname{Ker} u$. Se tiene la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I_Y \longrightarrow I_L \xrightarrow{u} \omega_L(r+1) \longrightarrow 0.$$

Puesto que $H^1(I_L(m))=0$ para todo entero m, se tiene que la aplicación $\bar{u}$: $H^1(\mathbb{P}^3, I_L(-r-1)) \longrightarrow H^1(L,\omega_L)$ es cero. Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Ferrand y obtener que deg Y=2.deg L=2, $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-r-1)$ y $p_a(Y)=-r$.

Por último, dualizando la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \omega_L(r+1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_L \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \omega_L \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \mathcal{O}_L(-1-r) \longrightarrow 0$$

de la que deducimos que si $s \geq 1+r$ entonces existe una sección global de $\omega_Y(s)$ que genera $\omega_Y(s)$ salvo quizás un número finito de puntos.

5. Ejemplos. Sean x,y,z,t coordenadas homogenéas de $\mathbb{P}^3$ y sea L la recta de ecuaciones x=y=0. Para todo entero $r \geq 1$, sean $F,G \in k[z,t]$ formas homogéneas de grados r+1 sin ceros comunes y sea $\alpha,\beta,\gamma \in k[z,t]$ formas homogémeas de grados r sin ceros comunes. Consideremos la curva Y de $\mathbb{P}^3$ definida por $I_Y = (x^3,y^3,x^2y, y^2x, xF+yG+ \alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)$ Se verifica:

(a) Y es una recta triple. En efecto: $I_L^3 \subset I_Y \subset I_L$.

(b) deg Y=3 y $p_a(4)=-3r-2$. En efecto: sea PHS_Y el polinomio de Hilbert-Samuel de Y, es inmediato comprobar que $PHS_Y(n)=3n+3r+3$, de donde se deduce que deg Y=3 y $p_a(Y)=-3r-2$.

6. <u>Construcción</u>. Sean x,y,z,t coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^3$ y sea L la recta de ecuaciones x=y=0. Para todo entero $r \geq -1$ elijamos un epimorfismo $U_o : I_{L,\mathbb{P}^3} \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}{\otimes} \mathcal{O}_L \twoheadrightarrow \mathcal{O}_L(r)$ y consideremos la composición

$$\begin{tikzcd} I_L \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "u"'] & I_{L,\mathbb{P}^3} \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}{\otimes} \mathcal{O}_L \arrow[r, two heads, "U_o"] & \mathcal{O}_L(r) \end{tikzcd}$$

Sea Y la curva de $\mathbb{P}^3$ definida por I_Y=Keru. En virtud de la construcción 4 tenemos que:

(i) $\chi\mathcal{O}_Y(n) = 2n+r+2$

(ii) si $p \geq r+2$, existe una sección σ de $\omega_Y(p)$ que genera $\omega_Y(p)$ salvo quizás en un número finito de puntos.

Para todo j=0,1,2 elijamos un epimorfismo

$$v_o^j : I_Y \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}{\otimes} \mathcal{O}_L \simeq \mathcal{O}_L(2r) \oplus \mathcal{O}_L(-r-2) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_L(2r+j)$$

y consideremos la composición:

$$\begin{tikzcd} I_Y \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "v_j"'] & I_Y \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}{\otimes} \mathcal{O}_L \arrow[r, two heads, "v_o^j"] & \mathcal{O}_L(2r+j) \end{tikzcd}$$

Sea Z el subesquema de $\mathbb{P}^3$ definido por I_Z=Ker v_j. Afirmamos:

(i) Z es una curva de $\mathbb{P}^3$. En efecto, de la sucesión exacta:

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(2r+j) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

deducimos que Supp Z=L, dim Z=1, y que Z es Cohen-Macaulay. Nos falta demostrar que Z es genéricamente localmente intersección completa. Para ello, veremos que Z es el subesquema de ceros de una sección no nula de un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$.

Si dualizamos la sucesión exacta (1), obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \omega_Z \longrightarrow \omega_L(-2r-j) \simeq \mathcal{O}_L(-2r-2-j) \longrightarrow 0$$

de la que se deduce que si $q \geq 2r+2+j$ entonces existe una sección global de $\omega_Z(q)$ que genera $\omega_Z(q)$ salvo quizás en un número finito de puntos. Sea $0 \neq \xi \in H^0\omega_Z(q)$ una tal sección, y sea F el haz coherente de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ que determina:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F \longrightarrow I_Z(4-q) \longrightarrow 0$$

Por ser Z un subesquema cerrado de $\mathbb{P}^3$ de codimensión 2 y Cohen-Macaulay, se tiene que dh $F \leq 1$ $|\sigma 2$; Propositión 1.4$|$. Por otro lado, F es localmente libre salvo en los puntos donde ξ no genera $\omega_Z(q)$, i,e, codim $S(F) \geq 3$. De donde se deduce que F es reflexivo $|\sigma 2$; Proposition 1.2$|$.

(ii) deg Z=3 y $p_a(Z)=-3r-2-j$. En efecto, de la sucesión exacta (1) deducimos que $\chi\mathcal{O}_Z(n)=2r+j+n+1+2n+r+2 =3n+3r+3+j$, i.e $p_a(Z)= -3r-2-j$ y deg Z=3.

CAPITULO III.

CAPITULO III

CLASES DE CHERN DE UN HAZ REFLEXIVO ESTABLE DE RANGO 3 SOBRE $\mathbb{P}^3$

El objetivo de este capítulo es caracterizar:

$\{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{Z}^3$ / Existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1, c_2, c_3\}$.

En |V| Vogelaar demuestra que para toda terna de enteros (c_1, c_2, c_3) que verifique la relación de Schwarzenberger $c_1c_2 \equiv c_3$ (mod.2) |H5; Corollory 2.4| existe un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, c_3. Nos preguntamos:

¿Qué restricciones impone la estabilidad sobre las clases de Chern de un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$?

Puesto que torciendo adecuadamente un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ siempre podemos conseguir un haz tal que, $c_1=0$ o $c_1=-1$ o $c_1=-2$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que esta condición es satisfecha. Siendo esto así, recordemos que los valores de c_2, c_3 para un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con $o \leq s :=$ long $\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{O})$ están sujetos a las siguientes restricciones:

(i) $c_3 \equiv c_1 c_2 \pmod{2}$ |H5; corollary 2.4|

(ii) Si $c_1 = -1$, entonces $c_2 \geq 1$ y $-c_2^2 + 2s \leq c_3 \leq c_2^2 - 2c_2 + 2$ |E-H-V; Theorem 4.3|

(iii) Si $c_1 = -2$, entonces $c_2 \geq 2$ y $-c_2^2 + 3c_2 - 4 + 2s \leq c_3 \leq c_2^2 - 3c_2 + 2$ |E-H-V; Theorem 4.3|

(iv) Si $c_1 = o$, entonces $c_2 \geq 2$ y $-c_2^2 + c_2 + 2s \leq c_3 \leq c_2^2 - c_2$. Además si la restricción E_H de E a un plano general es estable, entonces $c_2 \geq 3$ y $-c_2^2 + 3c_2 - 6 + 2s \leq c_3 \leq c_2^2 - 3c_2 + 6$ |E-H-V; Theorem 4.2|.

Pero dado $c_2 \geq 3$, no todos los valores de c_3 que verifican (i) - (iv) son posibles (Véase por ejemplo |E-H-V; Example 7.4.1|). En este capítulo determinamos para qué ternas $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{Z}^3$ existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, c_3 (Véase los Teoremas 2.20 y 3.6). Esto es un primer paso hacia el problema de caracterizar las cuaternas de enteros (c_1, c_2, c_3, s) tales que existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern c_1, c_2, c_3 y con s "puntos singulares", i.e. s = long $\mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O})$. Puesto que un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ es localmente libre si y sólo si s = o, dicho porblema es una generalización del problema 14 de |H3| (Véase el Teorema 4.7).

Sea E un haz reflexivo normalizado estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). A lo largo de todo este capítulo supondremos que $c_2 \geq 3$. Para los casos $c_2 \leq 2$ véase |O-Sp 4 |.

1. Cotas para haces reflexivos de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$

En |SC; §2 Satz 2| M. Schneider da una cota de la tercera clase de Chern de un fibrado vectorial semiestable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ en función de la primera y segunda clase de Chern. En esta sección extendemos esta cota a haces reflexivos semiestables normalizados de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ (Véase el Teorema 1.4). A continuación damos, para todo haz reflexivo E estable (resp. semiestable) normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$, una cota de s=long $\mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O})$ en función de las clases de Chern de E (Véase el Teorema 1.5). Y por último obtenemos una cota optimal del orden de inestabilidad de un plano inestable para un haz reflexivo E estable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ en función de las clases de Chern de E (Véase el Teorema 1.11).

Empezamos esta sección con una serie de proposiciones (Proposiciones 1.1-3) que no son más que una generalización a haces reflexivos de resultados ya conocidos para fibrados vectoriales y que nos permitirán determinar cuando un haz reflexivo de rango r sobre $\mathbb{P}^3$ descompone en suma directa de fibrados de linea.

<u>1.1 Proposición</u> (Teorema de Horrocks |O-S-S; cap I, Theorem 2.3.1| para haces reflexivos). Un haz reflexivo de rango r sobre $\mathbb{P}^n$ descompone si y sólo si $H^i(\mathbb{P}^n, E(p))=o$ para todo entero p y para todo $i= 1,\dots,n-1$.

<u>Demostración</u> Dado que por ser E reflexivo se verifica que $H^o(\mathbb{P}^n, E(m))=o$ para todo $m \ll o$, basta aplicar |H1;Lemma 6.3|.

<u>1.2 Proposición</u> Un haz reflexivo de rango r sobre $\mathbb{P}^3$ descompone si y sólo si su restricción E_H descompone para algún plano H de $\mathbb{P}^3$.

<u>Demostración</u> Es inmediato que si E descompone, entonces E_H descompone para todo plano H de $\mathbb{P}^3$. Recíprocamente, supongamos que existe un plano $H \subset \mathbb{P}^3$ tal que E_H descompone, veamos que E también descompone. Gracias a la proposición anterior es suficiente probar que $H^iE(m)=o$ para todo entero m e $i= 1,2$.

Consideremos la sucesión exacta de cohomología:

$$(1)\dots\longrightarrow H^1 E(m-1) \longrightarrow H^1 E_H(m) \longrightarrow H^1 E_H(m) \longrightarrow$$

$H^2 E(m-1) \longrightarrow H^2 E(m) \longrightarrow \ldots$ asociada a la sucesión exacta.

$$o \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E \longrightarrow E_H \longrightarrow o$$

Teniendo en cuenta que $H^1 E_H(m)=o$ para todo entero m, la sucesión exacta (1) nos da:

$$h^2 E(m) \geq h^2 E(m-1) \text{ para todo } m \text{ , y}$$

$$h^1 E(m) \leq h^1 E(m-1) \text{ para todo } m$$

Por otro lado el teorema B de Serre |SE| nos da $H^2 E(n)=o$ para todo $n >> o$ y |H5; Remark 2.5.1.| nos da $H^1 E(n)=o$ para $n << o$. De donde deducimos que $H^1 E(m)= = H^2 E(m)=o$ para todo entero m.

<u>1.3. Proposición</u> Sea E un haz reflexivo normalizado de rango r sobre $\mathbb{P}^3$. Si E es semiestable entonces $E\simeq \mathcal{O}^r$ o $h°E \leq r-1$.

<u>Demostración</u> Podemos suponer que $c_1=o$, en caso contrario E es estable y $H°E=o$.

Si $h°E \geq r$, elegimos r secciones linealmente independientes $s_1,\ldots,s_r \in H°E$ y consideramos el morfismo $f=(s_1, \ldots,s_r): \mathcal{O}^r \longrightarrow E$ inducido por ellas. Puesto que $\mathcal{O}^r$ y E son semiestables tenemos que $o= c_1(\mathcal{O}^r) \leq c_1(\mathrm{Imf}) \leq c_1(E)= =o$, lo cual implica que $c_1(\mathrm{Imf})=o$. En definitiva Imf es un haz sobre $\mathbb{P}^n$ libre de torsión con $c_1=o$ y generado por secciones globales; por lo tanto es trivial |O-S-S; Cap II, Proposition 1.3.3| ,i.e, existe un entero $t \leq r$ tal que $\mathrm{Imf}\simeq\mathcal{O}^t$. Por otro lado $H°(\mathcal{O}^r)\hookrightarrow H°(\mathcal{O}^t)$ luego $r \geq t$, de don de deducimos que r=t y que f es un isomorfismo.

1.4 Teorema Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3) y sea s= long $Ext^1(E,\mathcal{O})$ Entonces $-c_2^2 - c_2 + 2s \leq c_3 \leq c_2^2 + c_2$.

Demostración Podemos suponer que $h^\circ E \leq 2$ y que $h^\circ E_H \leq 2$ para cualquier plano H de $\mathbb{P}^3$, ya que en caso contrario, en virtud de las proposiciones 1.2 y 1.3 E sería trivial y $s=c_2=c_3=o$.

Aplicando |O-Sp 1; Theorem 4.1| obtenemos que:

$$c_2 \geq 3 - 2 = 1, \text{ y}$$

$$c_3 \leq 4c_2+2-6-2.\binom{3}{3}+(c_2-3)(c_2-4)+2\ h^\circ E+h^\circ E_H.(h^\circ E_H + +2c_2-7) \leq 4c_2-6+ c_2^2-7c_2 + 12+4+2.(2c_2-5) = c_2^2 + c_2.$$

La cota inferior de c_3 se obtiene aplicando la cota superior a E^v. Si E es un haz reflexivo semiestable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3), entonces E^v es un haz reflexivo semiestable |O-S-S;Cap II, Lemma 1.2.4| de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,-c_3+2s)$ |E-H-V; Lemma 4.1| Por lo tanto $-c_3+2s \leq c_2^2 + c_2$, de donde se deduce que $-c_2^2 - c_2 + 2s \leq c_3$.

Observación 1.4.1. Si s=o, entonces E es un fibrado vectorial y la cota $|c_3| \leq c_2^2 + c_2$ coincide con la dada por

Schneider en |SC; §2 Satz 2|.

Observación 1.4.2. Las cotas dadas en el Teorema 1.4 son optimales. En efecto, sea Y una curva plana no singular de grado c_2 y sea $0 \neq \xi \in H^o\, \omega_Y(4)$. Consideremos el haz reflexivo F de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,ξ):

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F \longrightarrow I_Y \longrightarrow o\ .$$

Por construcción F es un haz reflexivo semiestable de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,c_2^2+c_2)$. Obsérvese que dim $\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O}) > o$. En efecto, aplicando el funtor Hom $(\cdot,\mathcal{O})$ a la sucesión exacta (1) se obtiene que $\dim\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O}) \geq \dim \mathrm{Ext}^1(I_Y,\mathcal{O})-1$. Por otro lado, $\mathrm{Ext}^1(I_Y,\mathcal{O}) \simeq \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}) \simeq H^o\,\omega_Y(4)$. Luego dim Ext^1 $(F,\mathcal{O}) \geq h^o\omega_Y(4)-1 = \binom{c_2+3}{2} - 4 > o$

Sea $0 \neq e \in \mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O})$, el haz E determinado por la extensión:

$$e: \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow o$$

es un haz reflexivo semiestable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,c_2^2+c_2)$.

1.5 Teorema. Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) y sea $o \leq s =$ $=$ long $\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{O})$. Se verifica:

(i) Si E es semiestable y $c_1=o$, entonces $s \leq c_2^2 + c_2$.

(ii) Si E es estable y $c_1=o$, entonces $s \leq c_2^2 - c_2$.

(iii) Si E es estable y $c_1= -1$, entonces s $\leq c_2^2 -c_2+1$.

(iv) Si E es estable y $c_1= -2$, entonces s $\leq c_2^2-3c_2+3$.

Demostración Sólo probaremos (i), los demás casos se prueban análogamente. En este caso E es semiestable con clases de Chern (o,c_2,c_3) por lo tanto $c_3 \leq c_2^2 + c_2$ (Teorema 1.4) y E^V es un haz reflexivo semiestable |O-S-S; Cap II, Lemma 1.2.4| de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2, c_3 (E^V))$ | E-H-V; Lemma 4.1 |. Por otro lado, se tiene |E-H-V; Lemma 4.1| que $2s=c_3E+c_3E^V \leq c_2^2+c_2+c_2^2+c_2$ de donde se concluye que $s \leq c_2^2 + c_2$.

1.6 Lema Sea E un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3) y sea $\{k_i\}_{i=1,\ldots,m}$ su espectro |O-Sp 1; Theorem 3.1| . Se verifica:

(i) Si $c_1= -1$, entonces existen dos índices i_o,i_1 tales que $k_{i_o}, K_{i_1} \geq -1$

(ii) Si $c_1= -2$, entonces existe un índice i_o tal que $k_{i_o} \geq -1$

Demostración Sólo probaremos (i), dado que (ii) se prueba análogamente.

(i) Sea E un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ y sea $\{k_i\}_{l=1,\ldots,m}$ su espectro |O-Sp 1; Lemma 3.4| . Sea $n= \# \{i/ k_i \geq o\}$ basta demostrar que:

(a) Si n=o, entonces $\# \{i/k_i = -1\} \geq 2$

(b) Si n=1, entonces $\# \{i/k_i = -1\} \geq 1$

Sea n=o, en virtud del teorema |O-Sp 1; Theorem 3.1| tenemos que $\# \{i/k_i = -1\} = h^2E(-2) - 2h^2E(-1) + h^2E$. Por otro lado por ser E estable se tiene que $H^oE(q) = H^3E(q) = o$ para q=o,-1,-2, y por ser $k_i \leq -1$ para todo índice i, se tiene que $H^1E(-1)=H^1E(-2)=o$. De donde se deduce que $\# \{i/k_i=-1\} = \chi E(-2) - 2\chi E(-1) + \chi E + h^1E = \frac{1}{2}(c_3+c_2)-(c_3-c_2) +2-2c_2+ \frac{1}{2}(c_3+c_2) +h^1E=2 + h^1E \geq 2$

Sea n=1 y sea $k_{i_o} \geq o$. En virtud de la proposición |O-Sp 1;Proposition 3.3| tenemos que $k_{i_o}=o$ ó $k_{i_o} = 1$. Por otro lado, al ser estable la restricción E_H de E a un plano general, se verifica $h^1E \geq h^1E(-1)$. De donde se deduce que $\# \{i/k_i =-1\} = \chi E(-2)-2\chi E(-1) +\chi E + h^1E-2 h^1E(-1)+ h^1E(-2) \geq 1$.

<u>1.7 Lema.</u> Sea E un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3) y tipo genérico de descomposición (o,o,o). Sea $k_1 \leq \cdots \leq k_{c_2}$ su espectro |O-Sp 1; Theorem 3.1| . Supongamos que $k_i \leq o$ para todo índice i, entonces se verifica:

(i) $\# \{i/k_i =o\} > o$, o bien

(ii) $\# \{i/k_i = -1\} \geq 3$

Demostración Supongamos que $\# \{i/k_i=o\}=o$. De la igualdad $h^1(\mathbb{P}^3, E(-1)) = \overset{c_2}{\underset{i=1}{\oplus}} h^o(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k_i))$ de |O-Sp1; Theorem 3.1| deducimos que $h^1E(-1)=o$. Por otro lado $\#\{i/k_i=-1\}=h^2E(-2)$ $-2h^2E(-1) + h^2E = \chi E(-2) - 2\chi E(-1) + \chi E + h^1E = \frac{c_3}{2} - 2(\frac{c_3}{2}$ $- c_2) + 3 - 2c_2 + \frac{1}{2}c_3 + h^1E = 3 + h^1E \geq 3$.

1.8 Lema Sea E un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3) y tipo genérico de descomposición $(-1,o,1)$. Sea $k_1 \leq \ldots \leq k_m$ con $m \leq c_2+1$ su espectro |O-Sp1; Theorem 3.1, Lemma 3.4 |. Supongamos que la restricción E_H de E a un plano general H de $\mathbb{P}^3$ es estable y que para todo índice i $k_i \leq -1$. Se verifica:

Si $\# \{i/k_i = -1\} = t$ con $o \leq t \leq 3$, entonces $m \leq c_2-3+t$.

Demostración. Obsérvese que la hipótesis E_H estable para todo plano general H de $\mathbb{P}^3$ implica que $h^1E(-1) \leq h^1E$.

Gracias a |O-Sp1; Theorem 3.1| tenemos que $t= \#\{i/k_i=-1\} = h^2E(-2) - 2h^2E(-1) + h^2E = \chi E(-2) - 2\chi E(-1) +$ $+ \chi E + h^1E - 2h^1E(-1) = 3 + h^1E - 2h^1E(-1)$. De las relaciones $t=3+h^1E-2h^1E(-1)$ y $h^1E \geq h^1E(-1)$ deducimos que $h^1E(-1) \geq 3-t$ y $h^1E \geq 3-t$.

Por otro lado, usando |O-Sp1; Theorem 3.1, Lemmas 3.4 y 3.5| obtenemos que $\frac{c_3}{2} - c_2 + h^1E(-1) = \chi E(-1) + h^1E(-1)$

$$= h^2E(-1) = \sum_{k_i \leq -2} (-k_i-1) = \sum_{k_i \leq -1} (-k_i-1) = \frac{c_3}{2} -$$

$-m$. De donde se deduce que $m = c_2 - h^1E(-1) \leq c_2+t-3$.

1.9. Lemma Sea E un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3) y tipo genérico de descomposición $(-1,o,1)$. Sea $k_1 \leq \ldots \leq k_m$ con $m \leq c_2+1$ su espectro |O-Sp 1;Theorem 3.1, Lemma 3.4|. Supongamos que la restricción E_H de E a un plano general H de $\mathbb{P}^3$ es estable y que $k_1,\ldots,k_{m-q-1} \leq -1$ y $k_m,\ldots,k_{m-q} \geq 1$ con $o \leq q \leq 3$. Se verifica:

Si $\# \{ i/k_i=-1 \} = t$ con $o \leq t \leq 3$, entonces $m \leq c_2 -3 + q + t$.

Demostración. Es análoga a la del Lema 1.8 y por lo tanto la omitimos.

1.10. Teorema Sea E un haz reflexivo estable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Entonces $H^2E(n) = o$ para $n \geq c_2-3$

Demostración Distinguimos varios casos:

1er Caso $c_1=-1$ (Resp. $c_1=-2$). Sea $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2}$ (Resp. $\{k_i\}_{i=1,\ldots,c_2-1}$) el espectro de E |O-Sp1; Theorem 3.1, lemma 3.4| y sea $k = \min_i \{k_i\}$. La fórmula $c_2^2 -2c_2+2 \geq c_3 = -2\sum_i k_i - c_2$ (Resp. $c_2^2 - 3c_2+2 \geq c_3 \geq -2\sum_i k_i-2c_2+2$) de

| O-Spl, Lemma 3.5 |, las propiedades de conexión del espectro |O-Spl;Proposition 3.3| y el lema 1.6 implican que $k \geq -(c_2-1)$.

Por otro lado $h^2(\mathbb{P}^3, E(m)) = \bigoplus_i h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m+k_i+1)$ para $m \geq -2$ |O-Spl;Theorem 3.1 |. De donde concluimos que $h^2(\mathbb{P}^3, E(n)) = o$ para $n \geq c_2-3$.

2° Caso $c_1=o$ Distinguimos varios subcasos. 1er subcaso: la restricción E_H de E a un plano general es estable. En este caso la demostración es análoga a la del caso $c_1=-1$ usando los lemas 1.7,1.8 y 1.9 en lugar del lema 1.6, y por lo tanto lo omitimos. 2° Subcaso: la restricción E_H de E a un plano general no es estable. En virtud de |E-H-V; Proposition 5.1;Theorem 0.1| se verifica una de las tres condiciones siguientes:

(A) $(c_1,c_2,c_3)=(0,4,0)$ y $E \approx S^2(E°)$ donde E°es el fibrado de la correlación nula, en cuyo caso obviamente $H^2E(n) = o$ para $n \geq c_2-3$

ó (B) $c_2 \geq 4$ y $(c_1,c_2,c_3)=(o,c_2,c_2^2-c_2)$ en cuyo caso existe una sucesión exacta del tipo:

$$o \longrightarrow \Omega(1) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_{H_o}(-c_2+1) \longrightarrow o$$

para cierto plano H_o de $\mathbb{P}^3$ y por lo tanto $H^2E(n)=o$ para $n \geq c_2-3$

ó (C) $c_2=3$. En este último caso razonaremos por reducción al absurdo. Sea E un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,3,c_3)$. Supongamos que la restricción E_H de E a un plano general no es estable y que $h^2E \neq o$, llegaremos a una contradicción.

Sea $k_1 \leq \ldots \leq k_m$ con $m < 4$ el espectro de E |O-Sp 1; Theorem 3.1, Lemma 3.4|. De la igualdad $h^2(\mathbb{P}^3, E(t)) = = \bigoplus_i h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k_i+t+1))$ |O-Sp1; Theorem 3.1| y de la hipótesis $h^2E \neq o$ se deduce que $k_1 \leq -3$. De las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp 1; Proposition 3.3| y de la relación $c_2^2 - c_2 \geq c_3 = -2\sum_i k_i$ se deduce que $k_1 = -3, k_2 = -2$ y que $k_i \geq 1$ para $i \geq 2$. Por lo tanto, $h^2E = 1$ y $h^2E(-1) = 3$. Luego existe una forma lineal $h \in H^o(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(1))$ tal que la aplicación $H^2E(-1) \xrightarrow{\cdot h} H^2E$ inducida por h es cero. Sea H el plano de ecuación h=o. Es inmediato comprobar que H es un plano inestable para E de orden 3.

Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 1.2):

$$o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(-3) \longrightarrow o$$

donde E' es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1' = -1$, $c_2' = o$, $c_3' = c_3 - 12 + 2h^o\mathcal{O}_Z$, lo cual contradice el hecho de que si F es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1F = -1$, entonces $c_2F > o$ (Véase |E-H-V; Theorem 4.3 |.

Observación 1.10.1 Las cotas de anulación del segundo grupo de cohomología dadas en la proposición 1.10 son optimales. En efecto:

Caso $c_1 = -1$. Sea $X = X_1 \cup L$ la unión disjunta de una curva plana X_1 de grado c_2 con una recta L, y sean η, ξ dos secciones de $\omega_X(2)$ que generan $\omega_X(2)$ en todos los puntos salvo quizás en un número finito de puntos. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por (X, (ξ , η)):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_X(2) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2c_2)$ y verifica que $H^2E(c_2-4) \neq 0$

Caso $c_1=-2$. Sea Y una curva plana de grado c_2-1 y sean ξ , η dos secciones de $\omega_Y(3)$ que generan $\omega_Y(3)$ salvo quizás en un número finito de puntos. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por (Y, (ξ, η)):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow 0$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_2{}^2-3c_2+2)$ y verifica que $H^2E(c_2-4) \neq 0$.

Caso $c_1=0$. Véase | E-H-V; Proposition 5.1| .

Sea E un haz reflexivo normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$. Recordemos que un plano H de $\mathbb{P}^3$ es inestable para E si existe un entero $r > 0$ tal que $H^\circ E_H^\vee(-r) \neq 0$ donde $E_H^\vee = Hom_{\mathcal{O}_H}(E_H,\mathcal{O}_H)$. Al mayor de tales enteros r se le llama orden de inestabilidad de H. Recordemos también que aplicando el Teorema de dualidad de Serre a H se obtie ne que la condición $H^{\circ}E_H^{\vee}(-r) \neq 0$ es equivalente a la condición $H^2E_H(r-3) \neq o$.

<u>1.11 Teorema.</u> Sea E un haz reflexivo estable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3). Sea $H\subset\mathbb{P}^3$ un plano inestable de orden r. Se verifica:

(i) $r \leq c_2-1$.

(ii) Esta cota es optimal.

<u>Demostración</u>. (i) Consideremos la sucesión exacta de cohomología

$$\ldots \longrightarrow H^2E(m) \longrightarrow H^2E_H(m) \longrightarrow H^3E(m-1) \longrightarrow \ldots$$

asociada a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E \longrightarrow E_H \longrightarrow o$$

Usando el Teorema de dualidad de Serre y la hipótesis de estabilidad de E vemos que $H^3E(m-1)=0$ para $m \geq -3$, por otro lado $H^2E(m)=o$ para todo $m \geq c_2-3$ (Teorema 1,10). Por lo tanto, $H^2E_H(m)=o$ para todo $m \geq \max(c_2-3,-3) = c_2-3$.

Puesto que $H \subseteq \mathbb{P}^3$ es un plano inestable de orden r $H^2E_H(r-3) \neq o$, lo cual implica que $r-3 < c_2-3$, de donde se concluye que $r \leq c_2-1$.

(ii) Caso $c_1=-1$. Sea E el haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_2^2-2c_2)$ construido en la observación 1.10.1. Es inmediato comprobar que $h^2E(c_2-4)=1$ y que $h^2E(c_2-5)=3$. Luego existe una forma lineal $f\in H^{\circ}(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}(1))$ tal que la aplicación:

$$H^2E(c_2-5) \xrightarrow{\cdot f} H^2E(c_2-4)$$

inducida por f es cero. Sea H el plano de ecuación f=o. La sucesión exacta de cohomología

$$H^2E(c_2-5) \xrightarrow{\cdot f} H^2E(c_2-4) \longrightarrow H^2E_H(c_2-4)$$

muestra que $H^2E_H(c_2-4) \neq o$. De donde concluimos que H es un plano inestable de orden c_2-1.

Caso $c_1=-2$. Un razonamiento análogo al del caso $c_1=-1$ prueba que el haz construido en la observación 1.10.1 posee un plano inestable de orden c_2-1.

Caso $c_1=o$. Véase |E-H-V; Proposition 5.1| .

2. Construcción de haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$

En esta sección construimos familias de haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ y analizamos que valores de c_3 aparecen. Las construcciones de tales haces se hacen o bien a través de extensiones de haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ por fibrados de linea, o bien a través de la correspondencia que existe entre curvas Y de $\mathbb{P}^3$ y pares de secciones globales de $\omega_Y(4-c_1)$, y haces reflexivos de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ (Preliminares; Teorema 7).

2.1 Lema. Sea X un esquema noetheriano y normal, y sea $o \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow o$ una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulo. Si E y F son $\mathcal{O}_X$-módulos reflexivos, entonces G es un $\mathcal{O}_X$-módulo reflexivo.

Demostración. Usando la caracterización de haces reflexivos dada en |Preliminares; Proposición 1| es suficiente probar que G es un $\mathcal{O}_X$-módulo libre de torsión, y que para todo $x \in X$ tal que $\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq 2$ entonces $\operatorname{dep} G_x \geq 2$, lo cual se obtiene fácilmente de la sucesión exacta $0 \longrightarrow F_x \longrightarrow G_x \longrightarrow E_x \longrightarrow o$.

Consideremos primero el caso $c_1=-1$.

Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 > 1$ y $1 \leq r \leq \frac{c_2+1}{2}$, consideremos el par (Y, ξ) donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2 con una curva Y_2 de grado r^2 intersección completa de dos superficies de grado r que corta a Y_1 en $o \leq d \leq r^2$ puntos, y donde $o \neq \xi \in H^\circ \omega_Y (4-2r)$. Sea $F(r)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y, ξ):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F(r) \longrightarrow I_Y(2r) \longrightarrow o$$

Por construcción F es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1F=o$, $c_2F=c_2$ y $c_2^2-(2r-1)c_2 \leq c_3=c_2^2-(2r-1)c_2+2d \leq c_2^2-(2r-1)c_2+2r^2$. Para la existencia del haz F véase la construcción 2.3 del capítulo I.

2.2 Lema $\operatorname{Ext}^1(F, \mathcal{O}(-1)) \neq o$

Demostración. Aplicanco el funtor $\operatorname{Hom}(\cdot, \mathcal{O}(-1))$ a la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r) \longrightarrow F \longrightarrow I_Y(r) \longrightarrow o$$

obtenemos:

$$\mathrm{Hom}\,(\mathcal{O}(-r),\mathcal{O}(-1)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\,I_Y(r),\mathcal{O}(-1)) \longrightarrow$$

$$\| $$

$$H^\circ\mathcal{O}(r-1)$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O}(-1)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\,\mathcal{O}(-r),\mathcal{O}(-1))$$

$$\|$$

$$H^1\mathcal{O}\,(r-1)=o$$

Por lo tanto, para demostrar que $\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O}(-1)) \neq o$, basta ver que

$$\dim \mathrm{Ext}^1(I_Y(r),\mathcal{O}(-1)) > h^\circ\mathcal{O}(r-1)= \binom{r+2}{3}.$$

Para ver esta desigualdad, consideremos la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow I_Y(r) \longrightarrow \mathcal{O}(r) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(r) \longrightarrow o,$$

tenemos que:

$$\mathrm{Ext}^1(I_Y(r),\mathcal{O}(-1)) \simeq \mathrm{Ext}^2\,(\mathcal{O}_Y(r),\mathcal{O}(-1)) \simeq H^\circ\,\omega_Y\,(3-r).$$

Por otro lado, la sucesión exacta (Preliminares; Proposición 20):

$$0 \longrightarrow \omega_{Y_1}(3-r)\oplus\omega_{Y_2}(3-r) \longrightarrow \omega_Y(3-r) \longrightarrow \omega_{Y_1\cap Y_2}(3-r) \longrightarrow 0$$

nos da que:

$$h^\circ\omega_Y(3-r) \geq h^\circ\,\omega_{Y_1}(3-r) + h^\circ\,\omega_{Y_2}(3-r) = h^\circ\mathcal{O}_{Y_1}(c_2-r)+$$

$$+h^\circ\mathcal{O}_{Y_2}(r-1) = \binom{c_2-r+2}{2} + \binom{r+2}{3}$$

De donde deducimos que $h^\circ\mathcal{O}(r-1) < \dim \operatorname{Ext}^1 (I_Y(r), \mathcal{O}(-1))$, lo cual prueba el lema.

<u>2.3. Construcción</u>. Sea $o \neq e \in \operatorname{Ext}^1(F, \mathcal{O}(-1))$, consideremos el haz coherente de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por la extensión e:

(*) $\quad o \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow o$

Se verifica que:

(i) E es reflexivo (Lemma 2.1).

(ii) Las clases de Chern de E vienen dadas por $c_1(E) = -1$, $c_2(E)=c_2$, $c_3(E)=c_3-c_2$. En efecto, por ser el polinomio de Chern multiplicativo se tiene que $c_t(E)= c_t(F) \cdot c_t(\mathcal{O}(-1)) = (1+c_2t^2 + c_3t^3).(1-t) = 1-t + c_2t^2 + (c_3-c_2)\, t^2$. Además, puesto que las clases de Chern de F verifican:

$$c_2^2 -(2r-1)\, c_2 \leq c_3 \leq c_2^2 -(2r-1)\, c_2+2r^2,$$

tenemos que:

$$c_2^2 - 2rc_2 \leq c_3(E)= c_3-c_2 \leq c_2^2 -2rc_2 + 2r^2.$$

(iii) E es estable. En efecto, de la sucesión exacta (*) se deduce que $H^\circ E=o$. Por otro lado, si existiera un cociente de E libre de torsión y de rango uno, $\emptyset: E \twoheadrightarrow L$, con $c_1(L) \leq -1/3$, entonces o bien $\emptyset|_{\mathcal{O}(-1)} \equiv$ o en cuyo caso $\emptyset$ extiende a un epimorfismo $\varphi: F \twoheadrightarrow L$ lo cual contradice la estabilidad de F, o bien $\mathcal{O}(-1) \hookrightarrow L$ en cuyo caso $c_1L= -1$ y $L= \mathcal{O}(-1)$, lo que significa que la sucesión exacta

(*) escinde, en contradicción con el hecho de que la extensión e es no trivial.

2.3.1 Observación. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 > 1$ y $1 \leq r \leq \frac{(c_2)+1}{2}$, hemos construido haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ tales que $c_2 \equiv c_3$ (mod.2) y

$$c_2^2 - 2rc_2 \leq c_3 \leq c_2^2 - 2rc_2 + 2r^2 .$$

Esta construcción no cubre los intervalos:

$$c_2^2 - 2(r+1)c_2 + 2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 - 2rc_2 .$$

Nótese que para la existencia de un entero $c_2 \equiv c_3$ (mod.2) en este intervalo es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes desigualdades:

$$c_2^2 - 2(r+1)c_2 + 2(r+1)^2 + 4 \leq c_2^2 - 2rc_2, \quad r \geq 1;$$

lo cual es equivalente a:

$$1 \leq r \leq -1 + \sqrt{c_2 - 2} \qquad y \ c_2 \geq 6.$$

Por otro lado el menor valor de c_3 que aparece usando la construcción 2.3 es $c_c^2 - 2rc_2$ para r máxima, i.e. $r = \frac{(c_2)+1}{2}$ si c_2 es impar y $r = \frac{c_2}{2}$ si c_2 es par. Por lo tanto, el menor valor de c_3 se obtiene con la construcción 2.3 es $c_3 = -c_2$ si c_2 es impar y $c_3 = o$ si c_2 es par. Si c_2 es par, para decidir que valores de c_3 aparecen en el intervalo $-c_2 \leq c_3 < o$ necesitamos otras construcciones.

Para todo entero $c_2 \geq 2$ par, consideremos el par (Y, ξ) donde Y es una curva de grado c_2+1 unión de m curvas racionales dos a dos disjuntas con $c_2+1 \geq m \geq \frac{c_2}{2}+1$, y donde $o \neq \xi \in H^o\, \omega_Y(2)$. Sea $F(1)$ el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y, ξ):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow o.$$

Por construcción F es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1F=o$ $c_2F=c_2$ y $o \leq c_3F:=c_3=2c_2-2(m-1) \leq c_2$. Para la existencia del haz F véase la construcción 2.4 del capítulo I.

2.4 Lema $Ext^1(F, \mathcal{O}(-1)) \neq o$.

Demostración. Aplicando el funtor Hom $(\cdot, \mathcal{O}(-1))$ a la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow F \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o$$

obtenemos:

$$\begin{array}{l} Hom(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)) \longrightarrow Ext^1(I_Y(1), \mathcal{O}(-1)) \longrightarrow \\ \quad \| \\ H^o\mathcal{O} \\ \longrightarrow Ext^1(F, \mathcal{O}(-1)) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)). \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^1\mathcal{O} = o \end{array}$$

Por lo tanto, para demostrar que $Ext^1(F, \mathcal{O}(-1)) \neq o$, basta ver que $\dim Ext^1(I_Y(1), \mathcal{O}(-1)) > 1$.

Para ello, consideremos la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(1) \longrightarrow o,$$

tenemos que:

$$\mathrm{Ext}^1(I_Y(1),\mathcal{O}(-1)) \simeq \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Y(1),\mathcal{O}(-1)) \simeq H^\circ\omega_Y(2)$$

de donde deducimos que dim $\mathrm{Ext}^1(I_Y(1),\mathcal{O}(-1)) > 1$, lo cual prueba el lema.

<u>2.5. Construcción</u> Sea $o \neq e \in \mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O}(-1))$, consideremos el haz coherente E de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por la extensión e:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow o.$$

Se verifica que:

(i) E es reflexivo (Lema 2.1)

(ii) Las clases de Chern de E vienen dados por $c_1E=-1$, $c_2E=c_2$, $c_3E=c_3-c_2$ (Véase 2.3 (ii)) y verifican que $-c_2 \leq c_3E \leq o$ ya que $o \leq c_3 \leq c_2$.

(iii) E es estable.

A continuación daremos las construcciones 2.7 y 2.9 que tratarán con el caso $c_1=-2$. Puesto que los argumentos son similares a los del caso $c_1=-1$, los omitiremos.

Para todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 \geq 3$ y $1 \leq r \leq \frac{c_2+1}{2}$ consideremos el par (Y,ξ) donde, si r=1, Y es una curva plana de grado c_2-1, y si $r \geq 2$, $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-1 con una curva Y_2 de grado $r(r-1)$ intersección completa de una su perficie de grado r con una superficie de grado r-1 que corta a Y_1 en d puntos con $o \leq d \leq r(r-1)$, y donde $o \neq \xi \in H^{\circ}\omega_Y(5-2r)$. Sea F(r) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y, ξ):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F(r) \longrightarrow I_Y(2r-1) \longrightarrow o\,.$$

Por construcción F es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1F=-1$, $c_2F=c_2-1$ y $(c_2-1)^2-2(r-1)(c_2-1) \leq c_3F:=c_3=(c_2-1)^2-2(r-1)(c_2-1)+2d \leq (c_2-1)^2-2(r-1)(c_2-1)+2r(r-1)$. Para la existencia del haz F véase la construcción 2.1 del capítulo I.

<u>2.6 Lema</u> (*) $\mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{O}(-1)) \neq o$.

<u>2.7 Construcción</u>. Sea $o \neq e \in \mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{O}(-1))$, consideremos el haz coherente E de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por la extensión e:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow o$$

Se verifica que:

(i) E es reflexivo.

(ii) Las clases de Chern de E vienen dadas por $c_1E= =-2$, $c_2E=c_2$, $c_3E= c_3-(c_2-1)$ y verifican que:

$$c_2^2-(2r+1)c_2+2r \leq c_3(E) \leq c_2^2-(2r+1)c_2+2r^2.$$

(iii) E es estable.

Para todo entero $c_2 \geq 4$ par consideremos el par

(Y,ξ) donde Y es una curva de grado c_2+1 unión de m curvas racionales dos a dos disjuntas y de grados superiores a uno, $2 \leq m \leq \frac{c_2}{2}$ y donde $o \neq \xi \in H^\circ \omega_Y(1)$. Sea F(2) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,ξ):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F(2) \longrightarrow I_Y(3) \longrightarrow o.$$

Por construcción F es un haz reflexivo estable de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1F=-1$, $c_2F=c_2-1$ y $o < c_3F:=c_3=c_2+1-2m \leq c_2-3$. Para la existencia del haz F véase la construcción 2.2 del capítulo I.

<u>2.8 Lema</u> (*) $Ext^1(F, \mathcal{O}(-1)) \neq o$.

<u>2.9 Construcción</u>. Sea $0 \neq e \in Ext^1(F,\mathcal{O}(-1))$, consideremos el haz coherente E de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por la extensión e:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow o$$

Se verifica que:

(i) E es reflexivo.

(ii) Las clases de Chern de E son $c_1E=-2$, $c_2E=c_2$, $c_3E=c_3-(c_2-1)$ con $-c_2+2 \leq c_3E \leq -2$.

(iii) E es estable.

A continuación trataremos el caso $c_1=o$.

Para construir haces reflexivos estables E de ran go 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con c_1=o vía extensiones de haces reflexivos F de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=-1$ por fibrados de linea, necesitamos no sólo que F sea estable sino también que $H^\circ F(1)=o$. Por lo tanto, empezaremos construyendo haces reflexivos estables de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=-1$ y $H^oF(1)=0$.

<u>Definición</u>. |P-S| Se dice que dos curvas Y_1, Y_2 de $\mathbb{P}^3$ están geométricamente ligadas por una intersección completa X si Y_1, Y_2 no tienen componentes comunes y si $X=Y_1 \cup Y_2$ (i. e. $I_X=I_{Y_1} \cap I_{Y_2}$).

<u>2.10 Lema</u>. Para todo entero $r \geq 2$, sea Y una curva de grado r^2-r+1 geométricamente ligada con una curva plana C de grado r-1 por dos superficies de grado r. Entonces:

$$h^\circ \omega_Y(5-2r)=\begin{cases} 2 & \text{si } r=2 \\ 1 & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

<u>Demostración</u>. La resolución de $\mathcal{O}_C$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-r) \longrightarrow \mathcal{O}(-r+1) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow o$$

junto con |R;§ 2| nos da la siguiente resolución de $\mathcal{O}_Y$:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1-r) \oplus \mathcal{O}(-2r+1) \longrightarrow \mathcal{O}(-r) \oplus \mathcal{O}(-r) \oplus \mathcal{O}(-r) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow o$$

de donde obtenemos que $h^\circ\omega_Y(5-2r)=h^1 \mathcal{O}_Y(2r-5)=h^2 I_Y(2r-5)=$

$$=h^3 \mathcal{O}(r-6)+h^3\mathcal{O}(-4)-3h^3\mathcal{O}(r-5)=\begin{cases} 2 & \text{si } r=2 \\ 1 & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

2.11 Construcción. Por todo par de enteros c_2,r tales que $c_2 > 3$ y $2 \leq r \leq \frac{c_2+1}{2}$, consideremos el par (Y,ξ) donde $Y=Y_1 \cup Y_2$ es la unión de una curva plana Y_1 de grado c_2-1 y una curva Y_2 de grado r^2-r+1 geométricamente ligada con una curva plana de grado r-1 por dos superficies de grado r que corta a Y_1 en d puntos con $o \leq d \leq r^2-r+1$ (para la existencia de tales curvas véase la observación 2.11.2), y donde $o \neq \xi \in H^\circ \omega_Y(5-2r)$ (Para la existencia de la sección ξ véase la observación 2.11.1). Sea F(r) el haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y,ξ) (Preliminares, Teorema 7):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F(r) \longrightarrow I_Y(2r-1) \longrightarrow o .$$

Por construcción F es un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1F=-1$, $c_2F=c_2$, $c_3F=2pa-2+$ $+(5-2r)(\deg Y)=c_2^2-2rc_2 + 2r + 2d$ y $H^\circ F(1)=o$, en particular F es estable.

2.11.1. Observación. En virtud de la proposición 20 de los preliminares tenemos que

$$H^\circ \omega_{Y_1}(5-2r) \oplus H^\circ \omega_{Y_2}(5-2r) \hookrightarrow H^\circ \omega_Y(5-2r).$$

Además, por ser Y_1 una curva plana de grado c_2-1 e Y_2 una curva de grado r^2-r+1 geométricamente ligada con una curva plana de grado r-1 por dos superficies de grado r, se tiene que $H^\circ \omega_{Y_1}(5-2r) \simeq H^\circ \mathcal{O}_{Y_1}(c_2+1-2r)$ y $H^\circ \omega_{Y_2}(5-2r) \neq o$

(Véase el lema 2.10). Por lo tanto si $2 \leq r \leq \frac{c_2+1}{2}$, existe una sección global ξ de $\omega_Y(5-2r)$ que genera $\omega_Y(5-2r)$ salvo quizás en un número finito de puntos.

2.11.2. Observación. Vamos a probar que las curvas Y utilizadas en la construcción 2.11 existen. Elijamos una curva Y_2 de grado r^2-r+1 geométricamente ligada con una curva plana no singular de grado r-1 por dos superficies de grado r: S y S'. Sea H un plano transversal a $S\cdot S'$, $\Gamma = S\cdot S'\cap H$ los r^2 puntos distintos de la intersección de SS' con H, y $\Gamma' = Y_2 \cap H$ los r^2-r+1 puntos distintos de la intersección Y_2 con H. Sea $D\subset\Gamma'$ un subconjunto con d puntos. Para demostrar la existencia de una curva plana Y_1 de grado c_2-1 conteniendo a D pero no conteniendo ningún punto de $\Gamma'\setminus D$ es suficiente probar que Γ impone r^2 condiciones independientes sobre las curvas de grado c_2-1 contenidas en H. Para ello consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H(-2r) \longrightarrow \mathcal{O}_H(-r) \oplus \mathcal{O}_H(-r) \longrightarrow I_\Gamma \longrightarrow 0$$

tensorializando por $\mathcal{O}_H(c_2-1)$ y tomando cohomología obtenemos que:

$$h^0 I_\Gamma(c_2-1) = \binom{c_2+1}{2} - r^2 \qquad \text{si} \quad \frac{c_2+1}{2} \geq r,$$

lo cual prueba la existencia de Y.

2.11.3 Observación. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 > 3$ y $2 \leq r \leq \frac{c_2+1}{2}$ hemos construido haces reflexivos estables F de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $H^\circ F(1)=o$ y con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ que verifican:

$$c_2^2 -2rc_2+2r \leq c_3 \leq c_2^2 -2rc_2+2r^2+2 \quad y \quad c_2 \equiv c_3 \quad (\mathrm{mod}.2).$$

Esta construcción no cubre los intervalos:

$$c_2^2 -2(r+1)c_2+2\ (r^2+2r+2) < c_3 < c_2^2 -2rc_2+2r.$$

Nótese que para la existencia de un entero $c_3 \equiv c_2$ (mod.2) en este intervalo es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes desiguladades:

$$c_2^2 -2(r+1)c_2+2\ (r^2+2r+2) + 4 \leq c_2^2 -2rc_2+2r \quad , \ r \geq 2$$

lo cual es equivalente a

$$2 \leq r \leq \frac{-1+\sqrt{4c_2-15}}{2} \quad y \quad c_2 \geq 6.$$

Por otro lado el menor valor de c_3 que aparece usando la construcción 2.11 es $c_2^2 -2rc_2+2r$ para r máxima, i.e. $r=c_2/_2$ si c_2 es par y $r=\frac{c_2+1}{2}$ si c_2 es impar. Por lo tanto, el menor valor de c_3 que se obtiene con la construcción 2.11 es $c_3=c_2$ si c_2 es par y $c_3=1$ si c_2 es impar. Si c_2 es par para decidir que valores de c_3 aparecen en el intervalo $o \leq c_3 < c_2$ necesitamos otras construcciones.

2.12 Construcción. Para todo entero $c_2 \geq 4$ par consideremos el par (Y,ξ) donde Y es una curva de grado c_2+2 unión de m curvas racionales dos a dos disjuntas y de grados superiores a uno, $2 \leq m \leq \frac{c_2}{2} + 1$, y donde $o \neq \xi \in H^\circ \omega_Y(1)$.

Sea F el haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par (Y, ξ):

$$o \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow F(2) \longrightarrow I_Y(3) \longrightarrow o.$$

Por construcción F es un haz reflexivo de rango dos sobre $\mathbb{P}^3$ con $H^\circ F(1)=o$ y con clases de Chern $c_1F=-1$, $c_2F=$ $=c_2$ y $c_3F:=c_3=c_2-2(m-1)$. Por lo tanto, aparecen todos los valores de c_3 par comprendidos entre o y c_2-2.

Una vez construidos haces reflexivos estables normalizados F de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con $H^\circ F(1)=o$, vamos a construir haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ a través de extensiones de F por $\mathcal{O}(-2)$.

<u>2.13 Lema</u>. Para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 > 2$ y $2 \leq r \leq \frac{c_2}{2}+1$, sea F un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern$(-1, c_2+1, (c_2+1)^2 - 2r(c_2+1) +$ $+ 2r+2d)$ con $o \leq d \leq r^2-r+1$, construido según la construcción 2.11. Entonces: $\mathrm{Ext}^2(F, \mathcal{O}(-2)) \neq o$.

<u>Demostración</u>. Es análoga a la del lema 2.2 por lo tanto la omitimos.

<u>2.14 Construcción</u>. Sea $o \neq e \in \mathrm{Ext}^1(F, \mathcal{O}(-2))$, consideremos el haz coherente E de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por la extensión e:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow F \longrightarrow o.$$

Se verifica que:

(i) E es reflexivo.

(ii) Las clases de Chern de E vienen dadas por $c_1E=0$, $c_2E=c_2$ y $c_3E=c_3-c_2-1$ y verifican que:

$$c_2^2-(2r-1)\,c_2 \leq c_3E \leq c_2^2-(2r-1)\,c_2+2r^2-2r+2.$$

(iii) E es estable.

2.14.1. Observación. En |E-H-V; Proposition 5.1| Ein-Hartshorne-Vogelaar prueban que para todo entero $c_2 \geq 2$ existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,c_2^2-c_2)$ y en |E-H-V; Example 7.4.1| prueban que para todo entero $c_2\geq5$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1=o$, $c_2^2-3c_2+6 < c_3 < c_2^2-c_2$. En la construcción 2.14 hemos construido familias de haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=o$ y $c_3 \leq c_2^2-3c_2+6$.

2.15 Lema. Para todo entero $c_2 \geq 3$ impar, sea F un haz reflexivo de rango 2 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2+1,c_3)$, $o \leq c_3 \leq c_2-1$, construido según la construcción 2.12. Entonces $\mathrm{Ext}^1(F,\mathcal{O}(-2))\neq o$.

Demostración. Es análoga a la del lema 2.4 y por lo tanto la omitimos.

2.16 Construcción. Sea $o\neq e \in \mathrm{Ext}^2(F,\mathcal{O}(-2))$ consideremos el haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por la extensión e:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow F \longrightarrow o.$$

Se verifica que:

(i) E es reflexivo.

(ii) Las clases de Chern de E vienen dadas por $c_1E=o$, $c_2E=c_2$, $c_3E=c_3-c_2-1$ y verifican $-c_2-1 \leq c_3 \leq -2$.

(iii) E es estable .

2.17 Proposición. Para todo par de enteros c_2, c_3 tales que $c_2 \geq 3$, $c_3 \equiv c_2$ (mod.2) y $-c_2^2 \leq c_3 \leq -c_2$, existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$.

Demostración. Para todo par de enteros r,t tales que $o \leq r \leq c_2$ y $o \leq t \leq c_2-r$ consideremos el par $(X_r,(\xi_t,\eta_t))$ donde, si r=o, $X_0=Y_0$ es una curva plana no singular de grado c_2, y si $r \geq 1$, $X_r=Y_r \cup L_1 \cup \ldots \cup L_r$ es la unión disjunta de una curva plana Y_r no singular de grado c_2-r con r rectas $L_1,\ldots,L_r$ dos a dos disjuntas, y donde ξ_t, η_t son dos secciones de $\omega_{X_r}(3)$ que generan $\omega_{X_r}(3)$ salvo en t puntos (Para la existencia de tales secciones véase la observación 2.17.1). Sea E(1) el haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por $(X_r, (\xi_t, \eta_t))$ (Preliminares, Teorema 7):

(1) $\quad o \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_{X_r}(1) \longrightarrow o$.

Por construcción E(1) es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(1, c_2, c_2^2 - 2rc_2+r^2+r)$ y long $\mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O})=t$. Afirmamos que E(1) es estable. De la sucesión exacta (1) deducimos que $H^\circ E=o$. Así pues es suficiente ver que $H^\circ E^v(-1)= o$. Para ello dualizamos la sucesión exacta (1) y obtenemos la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow E^v(-1) \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \omega_{X_r}(3) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E(1),\mathcal{O}) \longrightarrow o.$$

Para demostrar que $H^\circ E^v(-1)=o$, basta demostrar que la aplicación $H^\circ\mathcal{O}^2 \longrightarrow H^\circ\omega_{X_r}(3)$ es inyectiva, si además tenemos en cuenta la factorización:

$$\begin{tikzcd} H^\circ\mathcal{O}^2 \arrow[r] \arrow[d] & H^\circ\omega_{X_r}(3) \\ H^\circ\mathcal{O}^2_{X_r} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

es suficiente demostrar que $H^\circ\mathcal{O}^2_{X_r} \longrightarrow H^\circ\omega_{X_r}(3)$ es inyectiva. Sea C (resp. N) el conúcleo (resp. núcleo) del morfismo $\mathcal{O}^2_{X_r} \longrightarrow \omega_{X_r}(3)$:

$$o \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{O}_{X_r}^{\ 2} \longrightarrow \omega_{X_r}(3) \longrightarrow C \longrightarrow o.$$

Es inmediato comprobar que C es un haz soportado por un número finito de puntos, que N es un $\mathcal{O}_X$- módulo inversible y que deg N < o. Por lo tanto $H^\circ N=o$, lo cual prueba la inyectividad del morfismo $H^\circ\mathcal{O}_{X_r}^{\ 2} \longrightarrow H^\circ\omega_{X_r}(3)$.

El dual de $E(1)$, $E^{v}(-1)$, es un haz reflexivo estable |$\mathcal{O}$-S-S; Cap II, Lemma 1.2.4| de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, -c_2^2 + 2rc_2 - r^2 - r + 2t)$ | E-H-V; Lemma 4.1|

Obsérvese que al variar r entre o y c_2, y t entre o y $c_2 - r$, obtenemos todos los valores de $c_3 \equiv c_2$ (mod. 2) y $-c_2^2 \leq c_3 \leq -c_2$, lo cual prueba la proposición.

2.17.1 Observación. Para todo entero $c_2 \geq 3$ y para todo par de enteros (r,t) tales que $o \leq r \leq c_2$ y $o \leq t \leq c_2 - r$, vamos a probar que existen dos secciones $\xi_t, \eta_t \in H^{\circ}\omega_{X_r}(3)$ que generan $\omega_{X_r}(3)$ salvo en exactamente t puntos.

Si r=o, $X_0 = Y_0$ es una curva plana irreducible y no singular de grado c_2 y $H^{\circ}\omega_{Y_0}(3) \simeq H^{\circ}\mathcal{O}_{Y_0}(c_2)$. Por lo tanto, para todo entero t con $o \leq t \leq c_2$, basta tomar $\eta_t = \eta'|_{X_0}$ siendo η' la ecuación de una curva plana de grado c_2 que corta a X_0 en c_2^2 puntos distintos y $\xi_t = \xi'_t|_X$ siendo ξ'_t la ecuación de una curva plana de grado c_2 que contiene exactamente t puntos de la intersección de X_0 con $V(\eta')$.

Si $r \geq 1$, $X_r = Y_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_r$ es la unión disjunta de una curva plana irreducible no singular de grado $c_2 - r$ con r rectas $L_1, \ldots L_r$ dos a dos disjuntas y $\xi_t = (\xi_t^0, \xi_t^1, \ldots, \xi_t^r)$, $\eta_t = (\eta_t^0, \eta_t^1, \ldots, \eta_t^r) \in H^{\circ}\omega_{X_r}(3) \simeq H^{\circ}\mathcal{O}_{Y_0}(c_2 - r) \oplus H^{\circ}\mathcal{O}_{L_1}(1) \oplus \ldots \oplus H^{O}\mathcal{O}_{L_r}(1)$. Por lo tanto, para todo entero t con

$o \leq t \leq c_2-r$, basta tomar $\eta_t^0 = \eta'^0_{|Y_0}$ siendo η'^0 la ecuación de una curva plana de grado c_2-r que corta a Y_0 en $(c_2-r)^2$ puntos distintos, $\xi_t^0 = \xi'^0_t{}_{|Y_0}$ siendo ξ'^0_t la ecuación de una curva plana de grado c_2-r que contiene exactamente t puntos de la intersección de Y_0 con $V(\eta'^0)$ y $\eta_t^i, \xi_t^i \in H^\circ\mathcal{O}_{L_i}(1)$ son dos formas de $\mathcal{O}_{L_i}(1)$ que generan $\mathcal{O}_{L_i}(1)$.

<u>2.18 Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2, c_3 tales que $c_2 \geq 3$, $c_3 \equiv o \pmod{2}$ y $-c_2^2 + 3c_2 - 4 \leq c_3 \leq o$, existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2, c_2, c_3)$.

<u>Demostración</u>. Para todo par de enteros r,t tales que $1 \leq$ $\leq r < c_2$ y $o \leq t < c_2-r$ consideremos el par $(X_r, (\xi_t, \eta_t))$ donde $X_r = Y_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_r$ es la unión disjunta de una curva plana lisa e irreducible Y_0 de grado c_2-r con r rectas dos a dos disjuntas , y donde ξ_t, η_t son dos secciones de $\omega_{X_r}(2)$ que generan $\omega_{X_r}(2)$ salvo en exactamente t puntos (La demostración de la existencia de tales secciones es análoga a la de la observación 2.17.1). Sea E(1) el haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por $(X_r, (\xi_t, \eta_t))$:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_{X_r}(2) \longrightarrow o.$$

Por construcción $E(1)$ es un haz reflexivo de rango tres sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(2, c_2, c_2^2 - (2r+1)\, c_2 + r^2 + r)$ y long $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}) = t$. Un razonamiento análogo al realizado en la proposición 2.17 prueba que $E(1)$ es estable.

Por lo tanto, el dual de $E(1)$, $E^{\vee}(-1)$ es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2, c_2, c_2^2 + (2r+1)c_2 - r^2 - r + 2t)$.

Obsérvese que al variar r entre 1 y $c_2 - 1$ y t entre o y $c_2 - r - 1$, obtenemos todos los valores de $c_3 \equiv o$ (mod.2) y $-c_2^2 + 3c_2 - 4 < c_3 \leq o$. El caso $c_3 = -c_2^2 + 3\, c_2 - 4$ se obtiene dualizando un haz localmente libre de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$, estable, con clases de Chern $(2, c_2, c_2^2 - 3c_2 + 4)$ (Véase |SC| y |SC1| para la existencia de tales haces).

<u>2.19 Proposición</u>. Para todo par de enteros c_2, c_3 tales que $c_2 \geq 3$, $c_3 \equiv o$ (mod.2) y $-c_2^2 + c_2 \leq c_3 \leq o$ existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o, c_2, c_3).

<u>Demostración</u>. Primero cubriremos el intervalo $-c_2^2 + c_2 \leq$ $\leq c_3 \leq -c_2^2 + 3c_2$. Para todo entero t, $o \leq t \leq c_2$, sea H un plano de $\mathbb{P}^3$, $\alpha = T_H(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(c_2)$ un morfismo de haces cuya imagen es el haz de ideales I_Z de $c_2^2 - c_2 + 1$ puntos de H y $\beta_t : \mathcal{O}_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(c_2)$ un morfismo cuya imagen es el ideal

de una curva de grado c_2 de H que pasa por exactamente t puntos de Z. Consideremos la composición:

$$\begin{tikzcd} T(-1) \arrow[r, "\text{restricción}"] \arrow[rrr, bend right, "\rho_t"'] & T(-1)_H \cong T_H(-1) \oplus \mathcal{O}_H \arrow[rr, "\alpha \oplus \beta_t"] & & \mathcal{O}_H(c_2) \end{tikzcd}$$

y sea $E=(\ker \rho_t)^{\vee}$. Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,c_2^2-c_2)$ y t= long $\mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O})$. Su dual, $E^{\vee}$, es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,-c_2^2+c_2+2t)$.

Falta cubrir el intervalo $-c_2^2+3c_2 \leq c_3 \leq o$, lo cual se hará por medio de otra construcción. Para todo par de enteros r,t tales que $o \leq r \leq \left[\frac{c_2-2}{2}\right] = \max\{n \in \mathbb{N} / n \leq \frac{c_2-2}{2}\}$ y $o \leq t \leq 2(c_2-2r-2)$, consideramos el par $(X_r, (\xi_t, \eta_t))$ donde $X_r= Y_1 \cup Y_2 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_r$ es la unión disjunta de una curva plana Y_1 de grado c_2-2r, una cúbica alabeada Y_2 y r cónicas $C_1,\ldots,C_r$ dos a dos disjuntas, y donde ξ_t, η_t son dos secciones globales de $\omega_{X_r}(1)$ que generan $\omega_{X_r}(1)$ salvo en exactamente t puntos. Sea E(1) el haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ determinado por el par $(X_r, (\xi_t, \eta_t))$:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_{X_r}(3) \longrightarrow o.$$

Por construcción E es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(o,c_2,c_2^2+4r^2-4c_2r-3c_2+4r)$ y long $Ext^1(E,\mathcal{O})=t$. Su dual es un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,-c_2^2+(4r+3)c_2-4r(r+1)+2t)$.

En lo que sigue pondremos $B_1:=b(-1,c_2)=-1+\sqrt{c_2-2}$ (Véase la observación 2.3.1). También pondremos $B_0:=b(o,c_2)=\frac{-1+\sqrt{4c_2-11}}{2}=b(-2,c_2)$, que se obtiene de modo análogo en el caso $c_1=0$ y $c_1=-2$.

<u>2.20 Teorema</u>. (i) Si $c_1=-1$, entonces para todo par de enteros c_2,c_3 tales que $c_2\geq 3$, $-c_2^2\leq c_2\leq c_2^2-2c_2+2$, que verifican la relación de Schwarzenberger $c_1c_2\equiv c_3$ (mod. 2) y tales que:

$$c_3\notin\bigcup_{r=1}^{B_1}(c_2^2-2(r+1).c_2+2(r+1)^2,\ c_2^2-2rc_2)$$

existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$.

(ii) Si $c_1=-2$, entonces para todo par de enteros c_2, c_3 tales que $c_2\geq 3$, $c_2^2+3c_2-4\leq c_3\leq c_2^2-3c_2+2$ que verifican la relación de Schwarzenberger $c_1\cdot c_2\equiv c_3$ (mod.2) y tales que:

$$c_3\notin\bigcup_{r=1}^{B_0}(c_2^2-(2r+3)\ c_2+2(r+1)^2,\ c_2^2-(2r+1)c_2+2r).$$

existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_3)$.

(iii) Si $c_1=o$, entonces para todo par de enteros c_2, c_3 tales que $c_2 \geq 3$, $-c_2^2 +c_2 \leq c_3 \leq c_2^2 -c_2$ que verifican la relación de Schwarzenberger $c_1c_2 \equiv c_3$ (mod.2) y tales que:

$$c_3 \notin \bigcup_{r=1}^{B_0} (c_2^2 - (2r+1)c_2 +2(r+1)^2 -2r, c_2^2 - (2r-1)c_2)$$

existe un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (o,c_2,c_3).

Demostración. (i). Si $c_1=-1$, la observación 2.3.1 muestra que la construcción 2.3 da todos los valores $c_3 \geq o$ si c_2 es par, y todos los valores $c_3 \geq -c_2$ si c_2 es impar, que satisfacen las condiciones de la parte (i) del Teorema; si c_2 es par la construcción 2.5 da todos los valores $-c_2 \leq c_3 < o$ que satisfacen dichas condiciones, y la proposición 2.14 da todos los valores $-c_2^2 \leq c_3 \leq -c_2$, que satisfacen a las mismas. Esto prueba la parte (i) del Teorema.

(ii) Un argumento similar, usando las construcciones 2.7 y 2.9 en lugar de las construcciones 2.3 y 2.5 y la proposición 2.18 en lugar de la proposición 2.17 prueba el caso $c_1= -2$.

(iii) Un argumento similar, usando las construcciones 2.14 y 2.16 en lugar de las construcciones 2.3 y 2.5 y la proposición 2.19 en lugar de la proposición 2.17 prueba el caso $c_1=o$.

§ 3. Intervalos de inexistencia de c_3.

En esta sección vamos a probar que los intervalos de c_3 no cubiertos por las construcciones de la sección anterior son efectivamente intervalos de inexistencia de c_3.

Como primer resultado damos una proposición (Proposición 3.1) que nos permitirá garantizar que todo haz reflexivo estable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con c_3 suficientemente grande posee un plano inestable.

<u>3.1 Proposición</u>. Sea E un haz reflexivo estable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1,c_2,c_3).

(i) Si $c_1=-1$ y $c_3 > \frac{1}{2} c_2^2 + c_2-2$, entonces E posee un plano inestable de orden c_2-r para cierto entero r, $1 \leq r \leq \frac{c_2-3}{2}$.

(ii) Si $c_1=-2$ y $c_3 > \frac{1}{2} c_2^2 -2$, entonces E posee un plano inestable de orden c_2-r para cierto entero r, $1 \leq r \leq \frac{c_2-3}{2}$.

(iii) Si $c_1=0$ y $c_3 > \frac{1}{2} c_2^2 +c_2- \frac{3}{2}$, entonces E posee un plano inestable de orden c_2-r para cierto entero r, $1 \leq r \leq \frac{c_2}{2} -1$.

<u>Demostración</u> (i) Sea $k_1 \leq \dots \leq k_{c_2}$ el espectro de E

$|\mathcal{O}$-Sp1; Theorem 3.1, Lemma 3.4$|$. La fórmula $c_3=-2\sum k_i - c_2$ de $|\mathcal{O}$-Sp1; Lemma 3.5$|$, la hipótesis $c_3 > \frac{1}{2} c_2^2 + c_2 - 2$, las propiedades de conexión del espectro $|\mathcal{O}$-Sp1; Proposition 3.3$|$, $|\mathcal{O}$-Sp2; Theorem 4.1$|$ y el lema 1.6 implican que $k_1=-c_2+r$ para cierto entero r, $1 \leq r \leq \frac{c_2}{2} - 1$, y que $k_1, k_2=k_1+1$ aparecen una vez y sólo una en el espectro de E.

Por otro lado $h^2(\mathbb{P}^3, E(q)) = h^1(\mathbb{P}^1, \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q+1+k_i))$, para $q \geq -2$ $|\mathcal{O}$-Sp1; Theorem 3.1 $|$. De donde se deduce que $h^2E(-k_1-3) = 1$ y $h^2E(-k_1-4) = 3$. Por lo tanto, existe una forma lineal $h \in H^\circ(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ tal que la aplicación $H^2(\mathbb{P}^3, E(-k_1-4)) \xrightarrow{\cdot h} H^2(\mathbb{P}^3, E(-k_1-3))$ inducida por h es cero. Sea $H \subset \mathbb{P}^3$ el plano de ecuación h=o. Es inmediato comprobar que H es un plano inestable de orden c_2-r.

(ii),(iii). Se demuestran por un razonamiento análogo al anterior.

<u>3.2 Observación</u>. Sea E un haz reflexivo estable normalizado de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (c_1, c_2, c_3). Sea $Y \subset \mathbb{P}^3$ una curva asociada a E(t) y sea H un plano tal que $H \cap Y$ sea una curva de grado r. Entonces H es un plano inestable para E de orden $r-c_1-2t$. El resultado es una generalización inmediata de $|C_2$; Remark 3.0 $|$.

<u>3.3 Proposición</u>. No existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (-1,6,22).

Demostración. Supongamos que exista y llegaremos a una contradicción. Sea $k_1 \leq \ldots \leq k_6$ su espectro |O-Sp1;Theorem 3.1,Lemma 3.4 |. Distinguimos varios casos:

(a) $k_1=-5$. Entonces las propiedades de conexión del espectro |O-Sp 1; Proposición 3.3| y el lema 1.6 implican que el espectro de E es $\{-5,-4,-3,-2,p,q\}$ con $p,q \geq -1$ y $p+q=o$. En cualquier caso E posee un plano inestable H de orden c_2-1. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares;Teorema 12) :

$$(*) \qquad o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(-5) \longrightarrow o$$

donde Z es un subesquema de dimensión 0 de H. Sea $n=h^\circ(\mathcal{O}_Z)$. Entonces E' es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,2,-4+2n)$. Afirmamos que el tipo genérico de descomposición de E' es$(-1,-1,o)$. En efecto, sea $L \subset \mathbb{P}^3$ una recta genérica no contenida en H y con $L \cap Z = \emptyset$, restringiendo a L la sucesión exacta (*), obtenemos la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow E'_L \longrightarrow E_L \longrightarrow \mathcal{O}_p \longrightarrow o,$$

de la que se deduce que $o \leq h^\circ E'_L \leq h^\circ E_L=2$ y $h^\circ E'_L(-1)=o$. Por lo tanto, el tipo genérico de descomposición de E' es $(-1,-1,o)$ ó $(-2,o,o)$. Supongamos que el tipo genérico de descomposición de E' fuese $(-2,o,o)$, y veremos que se obtiene una contradicción. Elijamos un plano H_0 suficientemente general para que E_{H_0} sea un haz localmente libre estable de rango 3, E'_{H_0} sea un haz localmente libre de rango 3, $H_0 \neq H$, $H_0 \cap Z = \emptyset$ y el tipo genérico de descomposición de E_{H_0} (resp E'_{H_0}) sea (-1,o,0) (resp. (-2,0,0)). En virtud de |$\mathcal{O}$-S-S;Cap II, Theorem 2.4.1| existe un subhaz normal $F \subset E'_{H_0}$ de rango 2 y con tipo genérico de descomposición (0,0), en particular, tenemos que $c_1F=o$, $F \subset E'_{H_0} \subset E_{H_0}$ y $\mu(F)=o > -\frac{1}{3} = \mu(E_{H_0})$, lo cual contradice la estabilidad de E_{H_0}.

Por otro lado, dualizando la sucesión exacta (*), obtenemos la sucesión exacta:

$$(**) \qquad o \longrightarrow E^{V}(-1) \longrightarrow E'^{V}(-1) \longrightarrow I_{WH}(5) \longrightarrow o$$

donde W es un subesquema de dimensión o de H. Restringiendo la sucesión exacta (**) a una recta general L de $\mathbb{P}^3$ y teniendo en cuenta que $(E'^{V})_L \hookrightarrow (E_L)^{V}$ vemos que el tipo genérico de descomposición de $E'^{V}(-1)$ es (-1,0,0). Además, $h^oE'^{V}(-1) \leq 1$ y $h^oE'^{V}_H(-1) \leq 1$. En efecto: si $h^oE'^{V}(-1) \geq$ ≥ 2, elegimos dos secciones linealmente independientes s_1 y s_2 de $E'^{V}(-1)$, la sección $s_1 \wedge s_2$ es una sección no nula de $\Lambda^2 E'^{V}(-1) \simeq E'^{VV} \simeq E'$ lo cual contradice que $H^oE'=$ $=o$. Puesto que $h^oE'^{V}(-1) \leq 1$, aplicando el "glueing lemma" | E-H-V; Lemma 1.2 | obtenemos que $h^oE'^{V}_H(-1) \leq 1$.

Aplicando ahora |$\mathcal{O}$-Spl;Theorem 4.1| tenemos que: $c_3E'^{V}(-1) \leq 1$, i.e. $-4+2n \geq -2+2s'$ donde s'=long $Ext^1(E',\mathcal{O})$, de donde se deduce que $-2 \geq 2\,(s'-n)$, en contradicción con el hecho que $s'-n > o$ (Preliminares; Teorema 12).

(b) $k_1=-4$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1;Proposition 3.3| ,|$\mathcal{O}$-Sp2;Theorem 4.1| , el lema 1.6, la hipótesis $k_1=-(c_2-2)$ y la igualdad $22=c_3=-2\sum k_i-6$ implican que el espectro de E es $\{-4,-3,-3,-2,-1,-1\}$. En este caso $h^0E(1) \geq E(1)-h^2E(1) \geq 4$. Elijamos dos secciones σ_1, $\sigma_2 \in H^0E(1)$ linealmente independientes y consideremos la sucesión que determinan:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(2) \longrightarrow o$$

donde Y es una curva de grado d=7 y género aritmético $p_a=8$. Por ser E estable, Y no es plana, y por ser $h^0E(1) \geq 4$, Y está contenida en dos o más cuádricas. Nótese que al ser $d=7 > 4$, estas cuádricas han de ser reducibles. Sea $Q=H_1 \cup H_2$ una de las cuádricas con $d=7 > d_1:=\deg(Y\cap H_1) > d_2:=\deg(Y\cap H_2) \geq 1$. Gracias a la observación 3.2 tenemos que H_1 es un plano inestable de orden d_1-1. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H_1 (Preliminares; Teorema 1.2):

$$o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH_1}(1-d_1) \longrightarrow o$$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H_1. Sea n=long $\mathcal{O}_Z$. Entonces E' es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,8-d_1,14-d_1^2+3d_1+2n)$ y con tipo genérico de descomposición (-1,-1,0). Aplicando |$\mathcal{O}$-Sp1; Theorem 4.1 |obtenemos que:

$$14-d_1^2+3d_1+2n \leq 42+d_1^2-13d_1$$

pero $n \geq o$ (preliminares; Teorema 12), por lo tanto:

$$o \leq d_1^2-8d_1+14$$

Esta última desigualdad junto con las relaciones d_1+ $+d_2=7$ y $7 > d_1 > d_2 \geq 1$ nos da $d_1=6$ y que H_1 es un plano inestable de orden 5, i.e. $H^2E_{H_1}(2) \neq o$. De donde se deduce que $H^2E(2) \neq o$, que contradice la hipótesis $k_1=-4$.

(c) $k_1 \geq -3$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1;Proposition 3.3| ,|$\mathcal{O}$-Sp2; Theorem 4.1| , y el lema 1.6 implican que el espectro más negativo con $k_1 \geq -3$ es $\{-3,-3,-3,-2,-1,-1\}$ que junto con la fórmula $c_3=-2\cdot \cdot\sum_1 k_1-c_2$ |$\mathcal{O}$-Sp1; Lemma 3.5| nos da $c_3 \leq 20$ lo cual es una contradicción.

<u>3.4 Proposición</u>. Si $c_1=-2$ y $c_2=5,6,7,8$ ó 9, entonces no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_3)$ que verifiquen:

$$c_2^2-5c_2+8 < c_3 < c_2^2-3c_2+2.$$

<u>Demostración</u>. Supongamos que exista y llegaremos a una contradicción. Sea $k_1 \leq \dots \leq k_{c_2-1}$ su espectro |$\mathcal{O}$-Sp1; Theorem 3.1, Lemma 3.4|. Distinguimos varios casos:

(a) $k_1=-(c_2-1)$. Entonces las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1;Proposition 3.3| y el lema 1.6 implican que el espectro de E es $\{-(c_2-1),\dots,-2,p\}$ con $p \in \{-1,$

$o,1,2\}$ .En cualquier caso E posee un plano inestable H de orden c_2-1. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 12):

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(1-c_2) \longrightarrow 0$$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H. Sea n=long $\mathcal{O}_Z$. Entonces E'(1) es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,0,c_3-c_2^2+3c_2-2+2n)$ y s'=long $\mathcal{E}xt^1(E'.\mathcal{O}) \geq n$. Afirmamos que E', y por lo tanto E'(1), es semiestable. En efecto, si E no fuese semiestable, existiría un subhaz coherente $F \subset E'$ con $o < rg\ F < rg\ E'=3$ y tal que $\mu(F)=\dfrac{c_1(F)}{rg(F)} > \mu(E')=-1$. Distinguimos dos casos: si rango F=1, entonces $c_1(F) > -1$, de donde se deduce que $c_1(F) \geq o$ y concluimos que $\mu(F) \geq \mu(E)$ lo cual contradice la estabilidad de E; si rg F=2, entonces $c_1(F) > -2$, de donde se deduce que $c_1(F) \geq -1$ y por lo tanto $\mu(F) \geq \mu(E)$ lo cual contradice la estabilidad de E.

Usando el Teorema 1.4 deducimos que s'=n=o y $c_3-c_2^2+$ $+3c_2-2=o$, lo cual contradice la hipótesis $c_3 < c_2^2-3c_2+2$.

(b) $k_1= -(c_2-2)$. Distinguimos varios subcasos:

(b1) $c_2=5$ y $c_3=c_2^2-3c_2= c_2^2-5c_2+10$. Entonces las propiedades de conexión del espectro |O-Spl;Proposition 3.3|, el lema 1.6 y la hipótesis $k_1= -(c_2-2)$ implican que el espectro de E es $\{-3,-3,-2,-1\}$. Por otro lado $h^oE(1) \geq$ $\geq \chi E(1)-h^2E(1)=3$. Elijamos dos secciones $r_1,r_2 \in H^oE(1)$ li nealmente independientes y consideremos la sucesión que determinan:

$$o \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow E(1) \longrightarrow I_Y(1) \longrightarrow o$$

donde Y es una curva de grado 4 y género aritmético $p_a=2$. Por ser $h^\circ E(1) \geq 3$, se tiene que $h^\circ I_Y(1) \geq 1$ o equivalentemente Y es plana. Por lo tanto, y gracias a la observación 3.2, tenemos que el plano H que contiene a Y es un plano inestable para E de orden 4, i.e. $H^2 E_H(1) \neq o$, de donde se deduce que $H^2 E(1) \neq o$, lo cual contradice el hecho que $k_1=$ $=-3$.

(b2) $c_2=6$ y $16=c_2^2-5c_2+10 \leq c_3 \leq c_2^2-3c_2=18$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1;Proposition 3.3|, |$\mathcal{O}$-Sp2;Theorem 4.1| y el lema 1.6 implican que el espectro más negativo con $k_1=-(c_2-2)$ es $\{-4,-3,-3,-2,-1\}$. Este hecho junto con la fórmula $c_3=-2\sum_i k_i-2c_2+2$ |$\mathcal{O}$-Sp1; Lemma 3.5| prueba que el caso $c_3=18$ no puede darse; y que $c_3=16$ si y sólo si el espectro es $\{-4,-3,-3,-2,-1\}$, en cuyo caso $h^\circ E(1) \geq \chi E(1)-h^2E(1)=3$ y se finaliza con un razonamiento análogo al realizado en (b1).

(b3) $c_2 \geq 7$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1;Proposition 3.3|, |$\mathcal{O}$-Sp2; Theorem 4.1|, el lema 1.6 y la hipótesis $k_1=-c_2+2$ implican que el espectro de E es $\{-(c_2-2),-(c_2-3),\ldots,-2,p,q\}$ con $-3 \leq p$ y $-1 \leq q$. En cualquier caso E posee un plano inestable H de orden c_2-2. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 12):

$$o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(2-c_2) \longrightarrow o$$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H. Sea n=long $\mathcal{O}_Z$. Entonces E'(1) es un haz reflexivo semiestable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,1,c_3-c_2^2+5c_2-6+2n)$. Usando el Teorema 1.4 obtenemos que $-2 \leq c_3-c_2^2+5c_2-6+2n \leq 2$; i.e. $c_2^2-5c_2+4 \leq c_3 \leq c_2^2-5c_2+8$; lo cual contradice la hipótesis $c_3 > c_2^2-5c_2+8$.

(c) $k_1 \geq -(c_2-3)$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1; Proposition 3.3| ,|$\mathcal{O}$-Sp2; Theorem 4.1| y el lema 1.6 implican que el espectro más negativo con $k_1 \geq -(c_2-3)$ es $\{-2,-2,-2,-1\}$ si $c_2=5$, $\{-3,-3,-3,-2,-1\}$ si $c_1=6$ y $\{-(c_2-3),\ldots,-5,-4,-4,-3,-3,-2,-1\}$ si $c_2 \geq 7$, que junto con la fórmula $c_3= -2\sum k_i-2c_2+2$ |$\mathcal{O}$-Sp1; Lemma 3.5| nos da $c_3 < c_2^2-5c_2+10$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

<u>3.5 Proposición</u>. No existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern (-2,9,38)

<u>Demostración</u>. Supongamos que existiera y llegaremos a una contradicción. Sea $k_1 \leq \ldots \leq k_{c_2-1}$ su espectro |$\mathcal{O}$-Sp1; Theorem 3.1; Lemma 3.4| . De la proposición anterior deducimos que $k_1 \geq -(c_2-3)$. Distinguimos varios casos:

(a) $k_1 = -(c_2-3)=-6$. Un razonamiento análogo al realizado en la proposición 3.4,(b3) prueba que E posee un plano inestable de orden 6 y que $c_3 \leq c_2^2 -7c_2+18= 36$, lo cual contradice que $c_3=38$.

(b) $k_1= -(c_2-4)=-5$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1; Proposition 3.3| ,|$\mathcal{O}$-Sp2; Lemma 3.5| implican que espectro de E es $\{-5,-5,-4,-4,-3,-3,-2,-1\}$. De donde se sigue que $h^\circ E(1)\geq \chi E(1)-h^2E(1)=3$ y se finaliza con un razonamiento análogo al realizado en la proposición 3.4 (b1).

(c) $k_1 \geq -(c_2-5)=-4$. Las propiedades de conexión del espectro |$\mathcal{O}$-Sp1; Proposition 3.3| , |$\mathcal{O}$-Sp2; Theorem 4.1| y el lema 1.6 implican que el espectro más negativo con $k_1 \geq -4$ es $\{-4,-4,-4,-4,-3,-3,-2,-1\}$ que junto con la fórmula $c_3=-2\sum k_i-2c_2+2$ |$\mathcal{O}$-Sp1; Lemma 3.5| nos da $c_3 \leq c_2^2 - -7c_2+18=36$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

En lo que sigue pondremos:

$$B_0= b(0,c_2)=b(-2,c_2)= \frac{-1+\sqrt{4c_2-11}}{2}, \text{ y}$$

$$B_1= b(-1,c_2) =-1+ \sqrt{c_2-2} .$$

<u>3.6 Teorema</u>. (a). Si $c_1=-1$, entonces para todo par de enteros $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq B_1$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$

que verifiquen:

(1) $c_2^2 -2(r+1)c_2+2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 -2rc_2$

(b) Si $c_1=-2$, entonces para todo par de enteros $c_2 \geq$ ≥ 5 y $1 \leq r \leq B_0$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(2) $c_2^2 -(2r+3)c_2+2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 -(2r+1)c_2+2r.$

(c). Si $c_1=o$, entonces para todo par de enteros $c_2 \geq$ ≥ 5 y $1 \leq r \leq B_0$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(3) $c_2^2 -(2r+1)c_2+2(r+1)^2-2r < c_3 < c_2^2 -(2r-1)c_2.$

Observación. Las hipótesis sobre c_2 y r del enunciado son para garantizar que las condiciones (1), (2) y (3) son no vacías.

Demostración. (a) Dado que el caso $c_2=6$ fue probado en la proposición 3.3, podemos suponer que $c_2 > 6$. Además teniendo en cuenta que para todo $c_2 > 6$ y para todo $1 \leq r \leq B_1$ se verifica que $c_2^2 -2(r+1)c_2+2(r+1)^2+2 > \frac{c_2^2}{2} +c_2-2$ podemos también suponer que tenemos un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con $c_1=-1$ y $c_3 > \frac{c_2^2}{2} +c_2-2$. De la proposición 3.1 deducimos que E posee un plano inestable H de orden c_2-r con $1 \leq r \leq \frac{c_2-3}{2}$. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares;Teorema 12):

(*) $o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2) \longrightarrow o$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H. Sea $n=\text{long}\,\mathcal{O}_Z$. Entonces E' es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern$(-2,r+1,c_3-r-(c_2^2-2rc_2+r^2)+2n)$. Afirmamos que el tipo genérico de descomposición de E' es (-1,-1,0). En efecto, sea $L\subset\mathbb{P}^3$ una recta genérica no contenida en H y con $L\cap Z=\emptyset$, restringiendo a L la sucesión exacta (*), obtenemos la sucesión exacta:

$$o \longrightarrow E'_L \longrightarrow E_L \longrightarrow \mathcal{O}_{P=H\cap L} \longrightarrow o$$

de la que se deduce que $o \le h^oE'_L \le h^oE_L=2$ y $h^oE'_L(-1)=o$. Por lo tanto, el tipo genérico de descomposición de E' es (-1,-1,0) o (-2,0,0). Supongamos que fuese (-2,0,0) y veamos que se obtiene una contradicción. Elijamos un plano H_0 suficientemente general para que E_{H_0} sea un haz localmente libre estable de rango 3, E'_{H_0} un haz localmente libre de rango 3, $H_0\neq H$, $H_0\cap Z=\emptyset$ y el tipo genérico de descomposición de E_{H_0} (resp. E'_{H_0}) sea (-1,0,0) (resp. (-2,0,0)). En virtud de |O-S-S;Cap II, Theorem 2.1.4| existe un subhaz normal $F\subset E'_{H_0}$ de rango 2 y con tipo genérico de descomposición (0,0), en particular tenemos que $c_1F=o$, $F\subset E'_{H_0}\subset E_{H_0}$ y $\mu(F)=o > -\frac{1}{3}=\mu(E_{H_0})$ lo cual contradice la estabilidad de E_{H_0}.

Al ser el tipo genérico de descomposición de E'(-1,-1,0), estamos en condiciones de aplicar |O-Sp1;Theorem 4.1| y obtener que $c_3E' \le r^2-r$.

Busquemos ahora una cota inferior de c_3E'. Para ello dua lizamos la sucesión exacta(*) y obtenemos la sucesión exacta:

$$(**) \quad o \longrightarrow E^{V}(-1) \longrightarrow E'^{V}(-1) \longrightarrow I_{WH}(c_2-r) \longrightarrow o$$

donde W es un subesquema de dimensión o de H. Restringiendo la sucesión exacta (**) a una recta general de $\mathbb{P}^3$ y teniendo en cuenta que $(E'^{V})_L \hookrightarrow (E_L)^V$ vemos que el tipo genérico de descomposición de $E'^{V}(-1)$ es (-1,0,0). Por otro lado, $h^\circ E'^{V}(-1) \leq 1$ y $h^\circ E'_H{}^{V}(-1) \leq 1$. En efecto: si $h^\circ E'^{V}(-1) > 2$, elegimos dos secciones linealmente independientes s_1 y s_2 de $E'^{V}(-1)$, la sección $s_1 \wedge s_2$ es una sección no nula de $\Lambda^2 E'^{V}(-1) \simeq E'$ lo cual contradice que $H^\circ E'=o$. Puesto que $h^\circ E'^{V}(-1) \leq 1$, aplicando el "glueing lemma" |E-H-V; Lemma 1.2| se tiene que $h^\circ E'_H{}^{V}(-1) \leq 1$.

Al aplicar |$\mathcal{O}$-Sp1;Theorem 4.1| se obtiene que: $c_3E'^{V}(-1) \leq r^2$, i.e. $c_3E' \geq -r^2-r+2s'$ donde $s'=\text{long}\ \mathcal{E}xt^1(E',\mathcal{O})$.

En definitiva, se tiene que:

$-r^2-r+2s' \leq c_3E'=c_3-r-(c_2^2-2rc_2+r^2)+2n \leq r^2-r$, i.e.,

$c_2^2-2rc_2+2(s'-n) \leq c_3 \leq c_2^2-2rc_2+2r^2-2n$

pero $n \geq o$ y $s'-n \geq o$ (Preliminares; Teorema 12), por lo tanto:

$$c_2^2-2rc_2 \leq c_3 \leq c_2^2-2rc_2+2r^2.$$

De donde resulta que no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2c_3)$ que verifiquen:

(1) $c_2^2 -2(r+1)c_2+2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 -2rc_2$.

Nótese que para la existencia de un entero $c_3 \equiv c_2$ (mod.2) en el intervalo (1) es necesario y suficiente que $c_2^2 -2(r+1)c_2+2(r+1)^2+4 \leq c_2^2 -2rc_2$, y $r \geq 1$, lo cual es equivalente a $-c_2+(r+1)^2+2 \leq o$, y $r \geq 1$; y por lo tanto a $1 \leq r \leq -1+\sqrt{c_2-2} = B_1$ y $c_2 \geq 6$.

(b) Dado que los casos c_2=5,6,7,8 y 9 fueron tratados en las proposiciones 3.4 y 3.5, podemos suponer que $c_2 > 9$. Además teniendo en cuenta que para todo $c_2 > 9$ y para todo $1 \leq r \leq B_0$ se verifica que $c_2^2 -(2r+3)c_2+2(r+1)^2+2 > \frac{c_2^2}{2} -$ -2 podemos también suponer que tenemos un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1=-2$, $c_3 > \frac{c_2^2}{2} - 2$. De la proposición 3.1 deducimos que E posee un plano inestable H de orden c_2-r con $1 \leq r \leq \frac{c_2-3}{2}$. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares; Teorema 12):

$$o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2) \longrightarrow o$$

donde Z es un subesquema de dimensión cero de H. Sea n= =long $\mathcal{O}_Z$. Entonces E'(1) es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,r-1,c_3+c_2-r-(c_2^2 -2rc_2+r^2)+$ $+2n)$. Afirmamos que E', y por lo tanto E'(1), es semiestable. En efecto, si E' no fuese semiestable, existiría un subhaz coherente $F \subset E'$ con $o < rgF < rgE'=3$ y tal que $\mu(F)=$

$= \dfrac{c_1(F)}{rgF} > \mu(E') = -1$. Distinguimos dos subcasos: si rgF=1, entonces $c_1(F) > -1$, de donde se deduce que $c_1F \geq o$ y concluimos que $\mu(F) \geq \mu(E)$ contradiciendo la estabilidad de E; si rgF=2, entonces $c_1(F) > -2$, de donde se deduce que $c_1(F) \geq -1$ y por lo tanto $\mu(F) \geq \mu(E)$ contradiciendo la estabilidad de E.

Sea s'=long $\mathcal{E}xt^1(E',\mathcal{O})$. Al aplicar el teorema 1.4 a E' obtenemos:

$-r^2+r=2s' \leq c_3E'=c_3+c_2-r-(c_2^2+r^2-2c_2r)+2n \leq r^2-r$, i.e.

$c_2^2-(2r+1)c_2+2r+2(s'-n) \leq c_3 \leq c_2^2-(2r+1)c_2+2r^2-2n,$

pero $n \geq o$ y $s'-n \geq o$ (Preliminares; Teorema 12), por lo tanto:

$c_2^2-(2r+1)c_2+2r \leq c_3 \leq c_2^2-(2r+1)c_2+2r^2.$

Esto implica que no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(2) $c_2^2-(2r+3)c_2+2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2-(2r+1)c_2+2r.$

Nótese que para la existencia de un entero $c_3 \equiv o$ (mod.2) en el intervalo (2) es necesario y suficiente que $c_2^2-(2r+3)c_2+2(r+1)^2+4 \leq c_2^2-(2r+1)c_2+2r$, y $r \geq 1$, lo cual es equivalente a $c_2 \geq 5$ y $1 \leq r \leq \dfrac{-1+\sqrt{4c_2-11}}{2} = B_0$.

(c) En |E-H-V; Example 7.4.1| Ein, Hartshorne y Vogelaar prueban que para todo entero $c_2 \geq 5$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de de Chern $c_1=o$, $c_2^2-3c_2+6 < c_3 < c_2^2-c_2$. Por lo tanto, basta que demostremos que para todo par de enteros c_2,r tales que $1 \leq r \leq B_0$ y $c_2 \geq 9$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1=o$, $c_2^2-(2r+1)c_2+2(r+1)^2-2r < c_3 < c_2^2-(2r-1)c_2$. Además, teniendo en cuenta que para todo $2 \leq r \leq B_0$ y $c_2 \geq 9$ se verifica que $c_2^2-(2r+1)c_2+2(r+1)^2-2r+2 > \frac{c_2^2}{2}+c_2-\frac{3}{2}$, podemos suponer que tenemos un haz reflexivo estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $c_1=o$, $c_3 > \frac{c_2^2}{2}+c_2-\frac{3}{2}$. De la proposición 3.1, deducimos que E posee un plano inestable H de orden c_2-r para cierto r, $1 \leq r \leq \frac{c_2}{2}-1$. Consideremos la sucesión de reducción determinada por E y H (Preliminares,Teorema 12):

$$o \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow I_{ZH}(r-c_2) \longrightarrow o$$

donde Z es un subesquema de dimensión o de H. Sea n=long $\mathcal{O}_Z$. Entonces E' es un haz reflexivo de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,r,c_3-c_2-(c_2^2+r^2-2c_2r)+2n)$. Afirmamos que E' es estable. En efecto, si E' no fuese estable, existiría un subhaz coherente $F'\subset E$ con $o < rgF < rgE'$ y tal que $\mu(F) = \frac{c_1(F)}{rgF} \geq \mu(E') = \frac{-1}{3}$. Distinguimos dos casos, si rgF=1, entonces $3c_1(F) \geq -1$, de donde se deduce que $3c_1(F) \geq o$ y concluimos que $\mu(F) \geq \mu(E)$ contradiciendo la estabilidad de E; y si rgF=2, entonces $3c_1(F) \geq -2$, de donde se deduce que $3c_1(F) \geq o$ contradiciendo la estabilidad de E.

Sea s'=long $\mathcal{E}xt^1(E'\mathcal{O})$. Al aplicar |E-H-V; Theorem 4.3|

obtenemos:

$$-r^2+2s' \leq c_3E'=c_3-c_2-(c_2^2 +r^2-2c_2r)+2n \leq r^2-2r+2 \quad \text{, i.e.}$$

$$c_2^2 -(2r-1)c_2+2(s'-n) \leq c_3 \leq c_2^2 -(2r-1)c_2+2r^2-2r+2-2n;$$

pero $n \geq o$, y $s'-n \geq o$ (Preliminares; Teorema 12), por lo tanto:

$$c_2^2 -(2r-1)c_2 \leq c_3 \leq c_2^2 -(2r-1)c_2+2r^2-2r+2.$$

Esto implica que no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(0,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(3) $c_2^2 -(2r+1)c_2+2(r+1)^2-2r < c_3 < c_2^2 -(2r-1)c_2.$

Nótese que para la existencia de un entero $c_3 \equiv o$ (mod, 2) en el intervalo (3) es necesario y suficiente que $c_2^2 -(2r+1)c_2+2(r+1)^2-2r+4 \leq c_2^2 -(2r-1)c_2$, y $r \geq 1$; lo cual es equivalente a $c_2 \geq 5$ y $1 \leq r \leq \dfrac{-1+\sqrt{4c_2-11}}{2} = B_0$.

En particular, para haces localmente libres estables normalizados de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$, el teorema anterior nos da el siguiente resultado:

Pongamos $B_2=b'(-1,c_2):=b(-2,c_2+1)= \dfrac{-1+\sqrt{4c_2-7}}{2}$ y $B_3=b'(-2,c_2):=b(-1,c_2-1)= -1+\sqrt{c_2-3}$.

<u>3.7 Teorema</u> (a) Si $c_1=-1$, entonces para todo par de enteros $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq B_1$ no existen haces localmente libres

estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(1) $c_2^2 -2(r+1)c_2+2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 -2rc_2$.

Y para todo par de enteros $c_2 \geq 4$ y $1 \leq r \leq B_2$ no existen haces localmente libres estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(2) $-c_2^2 +2(r-1)c_2 < c_3 < - c_2^2 +2rc_2-2r^2-2r$.

(b) Si $c_1=-2$, entonces para todo par de enteros $c_2 \geq 5$ y $1 \leq r \leq B_0$ no existen haces reflexivos estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(3) $c_2^2 -(2r+3)c_2+2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 -(2r+1)c_2+2r$,

y para todo par de enteros $c_2 \geq 7$ y $1 \leq r \leq B_3$ no existen haces localmente libres estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2,c_2,c_3)$ que verifiquen:

(4) $-c_2^2 +(2r+1)c_2-2r < c_3 < - c_2^2 +(2r+3)c_2-2(r+1)(r+2)$.

(c) Si $c_1=o$, entonces para todo par de enteros $c_2 \geq 5$ y $1 \leq r \leq B_0$ no existen haces localmente libres de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern que verifiquen:

(5) $c_2^2 -(2r+1)c_2+2(r+1)^2-2r < c_3 < c_2^2 -(2r-1)c_2$

ó

(6) $-c_2^2 +(2r-1)c_2 < c_3 < -c_2^2 +(2r+1)c_2-2(r+1)^2+2r$.

Observación. Las hipótesis sobre c_2 y r del enunciado son para garantizar que las condiciones (1) - (6) son no vacías.

Demostración. Sólo probaremos (a), un argumento similar prueba (b) y (c).

(a) Que para todo par de enteros c_2, r tales que $c_2 \geq 6$ y $1 \leq r \leq B_1$ no existen haces localmente libres estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, c_3)$ que verifiquen:

$$c_2^2 - 2(r+1)c_2 + 2(r+1)^2 < c_3 < c_2^2 - 2rc_2$$

es una consecuencia inmediata del Teorema 3.6.

Veamos que para todo $c_2 \geq 4$, $1 \leq r \leq B_2$ tampoco existen haces localmente estables de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, c_3)$ que verifiquen:

$$-c_2^2 + 2(r-1)c_2 < c_3 < -c_2^2 + 2rc_2 - 2r^2 - 2r.$$

Procedamos por reducción al absurdo. Sea $c_2 > 4$, $1 < r < B_2$ y E un haz localmente libre estable de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-1, c_2, c_3)$ con $-c_2^2 + 2(r-1)c_2 < c_3 < -c_2^2 + 2rc_2 - 2r^2 - 2r$. Entonces $E^{\vee}(-1)$ es un haz localmente libre estable |O-S-S; Cap II, Proposition 1.2.4| de rango 3 sobre $\mathbb{P}^3$ con clases de Chern $(-2, c_2+1, -c_3-c_2)$ |E-H-V; Lemma 4.1| , con $(c_2+1)^2 - (2r+3)(c_2+1) + 2(r+1)^2 = c_2^2 - (2r+1)c_2 + 2r^2 + 2r < c_3 E^{\vee}(-1) = -c_3 - c_2 < c_2^2 - (2r-1)c_2 = (c_2+1)^2 - (2r+1)\cdot(c_2+1) + 2r$ lo cual contradice el Teorema 3.6 (b).