

Capítulo 5. Aplicación de la integración numérica en deflectometría óptica

Este capítulo se centra en una de las aplicaciones del estudio de la integración numérica realizado. Se trata de la deflectometría óptica; técnica cuyo principal objetivo es la medición de la topografía de objetos, como por ejemplo, componentes ópticos, lentes, obleas, espejos,... El principio básico es la detección de las pendientes de la superficie a caracterizar; por ello, la importancia del estudio de la integración numérica de esta memoria. En este capítulo se describen dos aparatos diseñados y construidos dentro del proyecto mencionado en la introducción para mejorar las prestaciones de la industria semiconductora, basados en la deflectometría óptica. Los aparatos han sido construidos por uno de los socios del proyecto, **Trioptics GmbH**; y los algoritmos descritos en esta memoria han sido incorporados en el “software” de ambos aparatos.

El primer apartado se dedica a la descripción de los dos aparatos construidos en el proyecto: el sistema **FOS** (del inglés, “Fast Optical Scanning”) con el que se obtienen las pendientes de la superficie a determinar, diseñado para un sistema de coordenadas polares y que realiza un muestreo rápido, adecuado en las líneas de producción de la industria semiconductora; y el sistema **AMS** (del inglés, “Accurate Mechanical Scanning”) con el que se miden las diferencias de pendiente de la superficie, válido para un sistema de coordenadas cartesianas. El **AMS** muestrea la superficie mediante tres

haces láser y se miden las diferencias de pendiente de la superficie. El medir las diferencias de pendiente plantea el problema de reconstruir la pendiente en toda la muestra.

En el siguiente apartado se desarrollan algoritmos de preprocesado de las medidas experimentales. Así, se describen unos algoritmos para reducir la influencia de posibles desajustes mecánicos del **FOS**. También se describe brevemente un método para evaluar la precisión de las medidas experimentales válido para un sistema de coordenadas cartesianas (**AMS**). También se describe el algoritmo de la “Extensión Natural” propuesto por investigadores del **PTB** en [Els99a] y [Els99b] donde se describe para una y dos dimensiones para resolver el problema planteado en el **AMS**. La ventaja de medir las diferencias de pendiente es la reducción de errores debido a posibles desajustes mecánicos o vibraciones. Así, el **AMS** es un aparato más preciso cuya finalidad es ser un patrón de medición. Finalmente se muestran los primeros resultados obtenidos.

5.1. Fundamento de la deflectometría óptica

Tal y como se describió en la introducción, la deflectometría óptica es una técnica simple basada en la reflexión que sufre la luz al interactuar sobre una superficie cuya topografía se desea obtener. Consiste en muestrear la superficie a caracterizar mediante un haz láser y medir la desviación que sufre la luz reflejada por la misma. Para ello, es necesario realizar un muestreo en diferentes puntos de control ópticamente. La deflectometría presenta una alta resolución en la medida de las pendientes de la superficie a caracterizar.

En la figura 5.1 se muestra el principio de funcionamiento de la deflectometría óptica. En esta figura se dibuja la topografía de la superficie descrita por $f(x)$ (se ha simplificado el razonamiento considerando una función unidimensional). Se hace incidir un láser (representado en rojo) que se refleja (línea azul) formando un ángulo 2α con el haz incidente. Si se hace un muestreo en la dirección x , se obtiene una medida de $\alpha(x)$ en algunos puntos a partir de la cual puede obtenerse la derivada $f'(x)$ mediante la tangente de dichos ángulos según:

$$\tan \alpha(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) \quad . \quad (5.1)$$

Así, en esta técnica perfilométrica juega un papel muy importante el desarrollo de los diferentes métodos de integración presentados en esta memoria para obtener la topografía $f(x)$ de la superficie a reconocer.

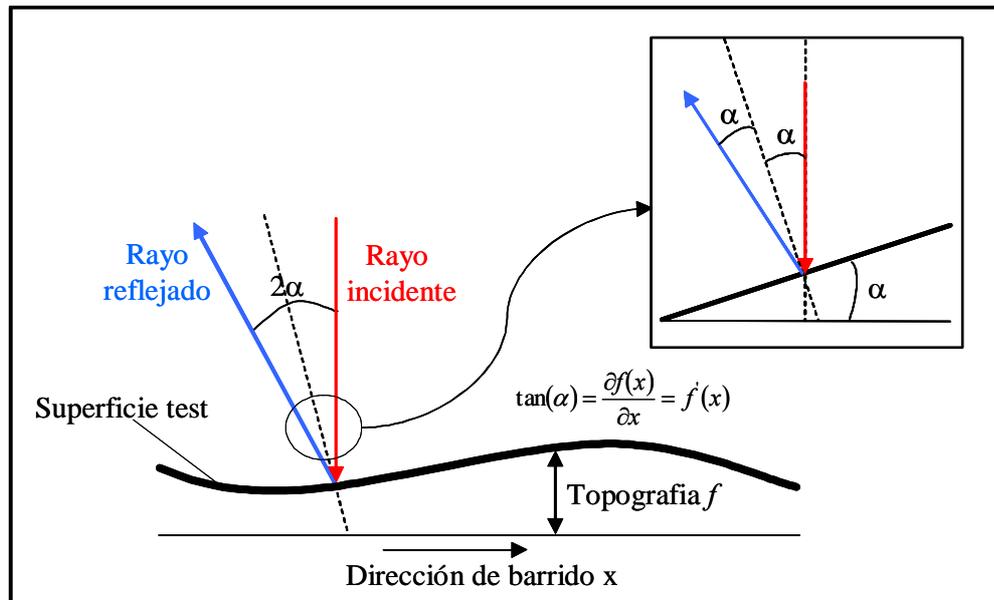


Figura 5.1. Principio de la deflectometría óptica. Se mide el ángulo 2α entre un rayo incidente sobre una superficie y el rayo reflejado.

Una vez explicado el principio fundamental en el que se basa la deflectometría óptica, a continuación se describen los dos aparatos que se han construido.

5.1.1. El aparato FOS

El aparato **FOS** es un deflectómetro compacto [Kre04] cuya primera aplicación es la medición rápida de la topografía de obleas semiconductoras. También se puede aplicar a la medición de cualquier superficie plana o ligeramente curvada. El principio básico de su funcionamiento consiste en la medición bidimensional de la pendiente local de la superficie en coordenadas polares.

La figura 5.2(a) representa un esquema del montaje óptico del **FOS**. Un haz láser incide sobre un espejo giratorio colocado en el plano focal de una lente. De esta forma, se consigue que la luz que se transmite al incidir sobre la lente sea paralela, es decir, que la luz que incide sobre la superficie tiene siempre la misma inclinación en todo el

muestreo de la superficie. Al incidir sobre la muestra, el haz láser es reflejado y se focaliza mediante la lente en un plano focal donde se coloca el detector de posición 2D PSD (en inglés, “2D Position Sensor Detector”).

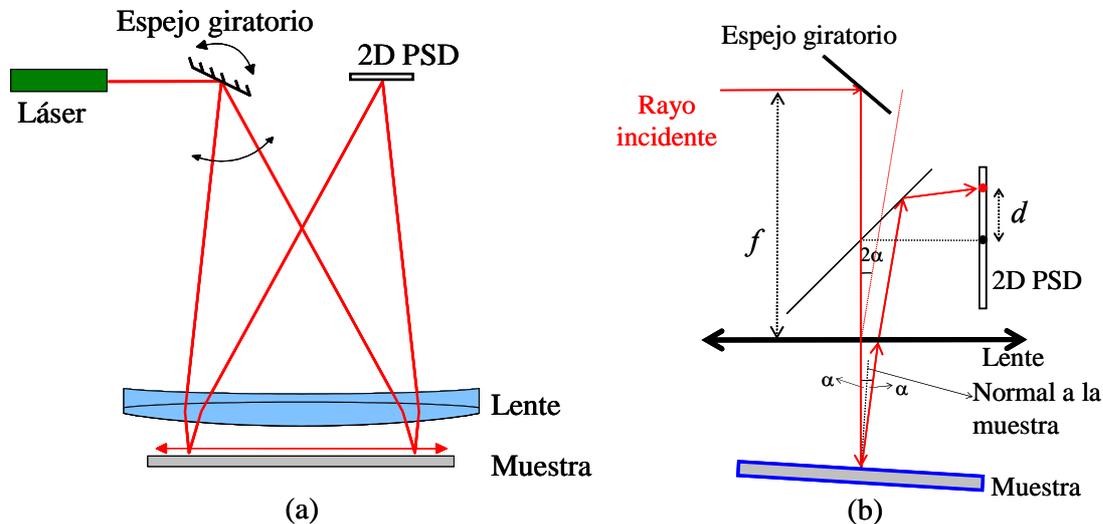


Figura 5.2. (a) Montaje básico del defleómetro FOS. (b) Sistema de medición.

En la figura 5.2(b) se ha representado un esquema del funcionamiento del aparato que permite determinar la pendiente de la superficie. Se supone que al incidir sobre la muestra, el haz láser se desvía un ángulo 2α respecto al haz procedente del espejo giratorio. El punto luminoso del haz desviado que se capta en el detector se ha desplazado lateralmente una cantidad d respecto al eje óptico tal y como se indica en la figura 5.2(b). Al medir el desplazamiento d y conociendo la focal f de la lente se determina la tangente del ángulo de desviación 2α mediante la siguiente expresión:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{d}{f} . \quad (5.2)$$

Por tanto, conocida la tangente de 2α , se obtiene la componente local de la pendiente de la superficie en los diferentes puntos de muestreo tal y como se deduce de la expresión (5.1). La lente es de focal f larga ya que, a partir de la expresión (5.2), para pequeños ángulos de desviación α se tendrían grandes desplazamientos d ; de esta manera, se consigue medir ángulos α muy pequeños y por tanto, se consigue más precisión en la medida de la pendiente de la superficie a caracterizar. Por otro lado, el rango de valores

de los ángulos α es limitado. Si la desviación α entre los haces reflejado e incidente es muy grande, puede darse que la luz reflejada no llegue al detector de posición ya que éste es de dimensiones limitadas. Así, por un lado, la lente aumenta la sensibilidad del aparato (pequeñas variaciones del ángulo de desviación provocan grandes desplazamientos); y a su vez, reduce el rango dinámico, es decir, los puntos luminosos pueden no caer dentro del detector si el ángulo de desviación es muy grande. Por tanto, este aparato ha sido diseñado para medir superficies suficientemente planas como por ejemplo obleas, espejos,..... para las que la luz sufra pequeñas desviaciones.

Para medir la posición del haz reflejado por la superficie, se ha incorporado un sensor de posición 2D (del inglés, “2D Position Sensor Device”, 2D PSD). Se trata de una estructura de tres capas de silicio, muy parecida a un fotodiodo convencional; está formado por dos capas p y n altamente conductoras junto a una tercera zona intrínseca i poco conductiva. Gracias a la múltiple conexión tanto en la capa superior como inferior, el PSD tiene la capacidad de medir posiciones en las dos direcciones, la de muestreo y su perpendicular. Así, cuando la luz incide en la zona p del PSD se generan pares electrón-hueco de manera que se polariza inversamente para acelerar las cargas de la zona i , que se dirigen a los electrodos en forma de corriente I_1 , I_2 . La distribución de corriente se puede relacionar con la distancia entre el haz incidente y los electrodos. La figura 5.3 muestra un esquema de un PSD unidimensional con dos conexiones en la capa superior.

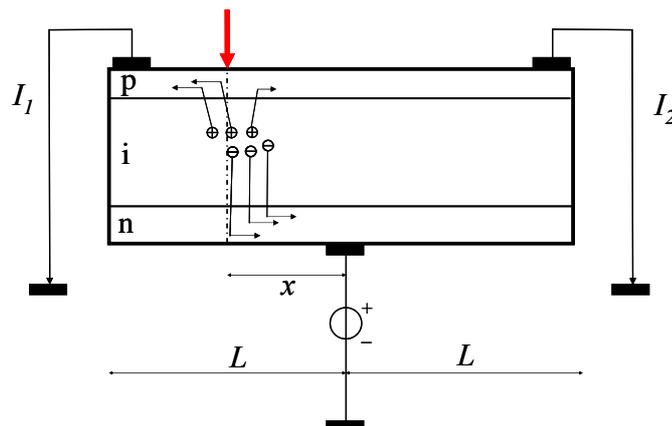


Figura 5.3. Esquema de un PSD unidimensional.

La posición x del haz incidente se calcula mediante la siguiente expresión:

$$x = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} L \quad , \quad (5.3)$$

donde I_1 y I_2 son las intensidades de la figura 5.3 y L es la mitad de las dimensiones del PSD. De esta manera se calcula el centro de gravedad de la luz que llega al detector. Este es el principio básico que se ha empleado para el 2D PSD incluido en el FOS. La figura 5.4 muestra el sensor que se ha incorporado en el FOS. La figura 5.4(a) muestra un esquema de su funcionamiento, análogo al caso unidimensional de la figura 5.3. La figura 5.4(b) muestra una fotografía del sensor.

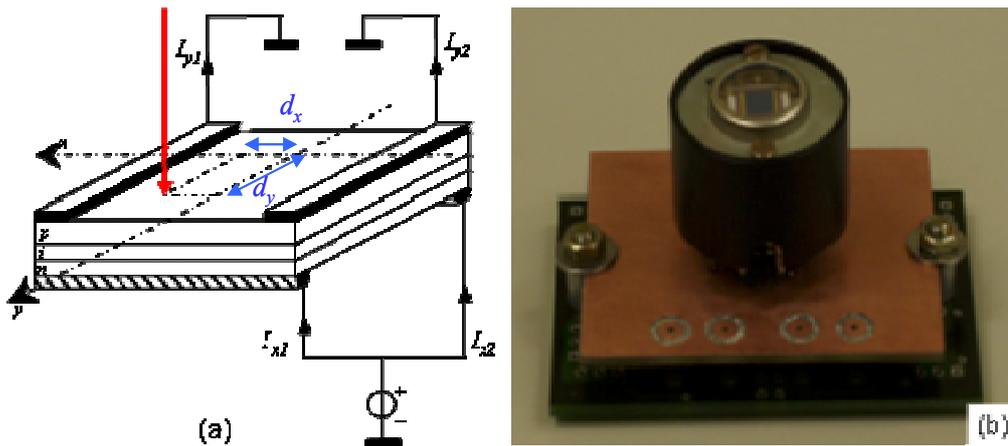


Figura 5.4. Esquema del funcionamiento del 2D PSD; (b) Fotografía de un prototipo del 2D PSD.

El 2D PSD mide 4 intensidades (dos valores en la dirección horizontal I_{x1}, I_{x2} y dos en la vertical I_{y1}, I_{y2}). Y a partir de estas intensidades se calcula la posición tanto en la dirección horizontal d_x como en la dirección vertical d_y dentro del sensor donde cae el haz incidente. De esta manera, se puede calcular el ángulo de desviación que sufre la luz al incidir sobre la muestra en ambas direcciones obteniendo así, las componentes de la pendiente en las dos direcciones perpendiculares. El primer prototipo FOS [Ams99a] emplea un PSD de área de $4 \times 4 \text{ mm}^2$ y un láser diodo cuyo tamaño en el espejo deformable es de 0.5 mm de modo que en el sustrato a determinar es menor que 1.5 mm y menor que 0.5 mm en el PSD. El mini-deflectómetro presentado en [Ams99b] trabaja con un láser cuyo tamaño en la muestra es menor que 0.1 mm y menor que un 1 mm en el PSD. El PSD del FOS fabricado por **Trioptics Gmb** tiene un área de $10 \times 10 \text{ mm}^2$ y la fuente de luz empleada es un láser de longitud de onda 655 nm que incide sobre la muestra con un tamaño de 0.53 mm y de 1.3 mm sobre el detector [Kre04].

Para aumentar las prestaciones del aparato, el muestreo en la dirección radial dado por el espejo giratorio se combina con la rotación de la muestra para medir toda la superficie en el caso de determinar muestras circulares; de esta manera, la integración en coordenadas polares presentada en el capítulo anterior es muy importante. El muestreo del **FOS** se consigue mediante la combinación del movimiento de la mesa giratoria sobre la que se coloca la muestra a caracterizar y el movimiento del espejo oscilante. La mesa giratoria se mueve a una velocidad constante de manera que se conseguiría un muestreo lineal y equidistante en la dirección angular. La figura 5.5 representa el muestreo del **FOS**: cuando el espejo gira un ángulo $\varphi(t)$ el haz incide a una distancia x respecto al eje óptico que se calcula a partir de la focal de la lente f y de $\varphi(t)$ mediante la siguiente expresión:

$$x = f \operatorname{tg} \theta = 2f \operatorname{tg}(\varphi(t)) \quad (5.4)$$

donde f es la focal de la lente y $\varphi(t)$ el ángulo de giro del espejo giratorio. La última igualdad de (5.4) es válida siempre y cuando el ángulo θ sea muy pequeño. Por tanto, la posición de los puntos de incidencia de la luz sobre la muestra y por tanto, los puntos del muestreo dependen del ángulo de giro $\varphi(t)$ del espejo y por tanto del tiempo mediante (5.4).

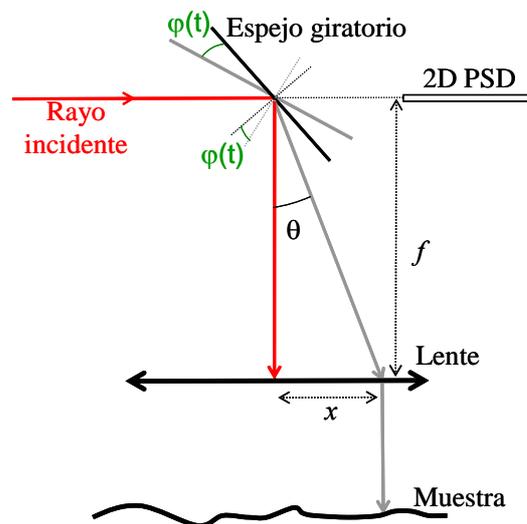


Figura 5.5. Muestreo del **FOS**.

La posición angular $\varphi(t)$ del espejo en función del tiempo es una función sinusoidal, tal y como se muestra en la figura 5.6. Por otro lado, la posición de muestreo x , depende

del ángulo φ , según la expresión (5.4). Todo esto hace que si se utiliza todo el recorrido del espejo giratorio, las posiciones de muestreo no serán equidistantes. En la figura 5.6 se puede observar que si se considera la parte central del movimiento del espejo, el ángulo $\varphi(t)$ en función de t es una función prácticamente lineal, si además, el ángulo no es muy grande, la posición x como función de t también será prácticamente lineal. Así pues, en estas condiciones, realizando un muestreo equiespaciado en el tiempo, se obtendrá un muestreo equiespaciado en el espacio. En la práctica sólo se ha utilizado una sexta parte del recorrido.

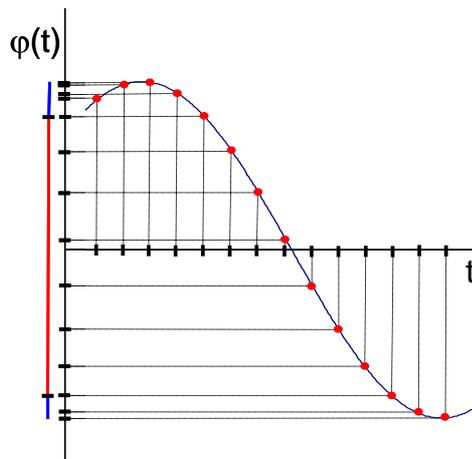


Figura 5.6. Dependencia temporal del movimiento del espejo giratorio.

El muestreo se realiza radialmente desde el centro de la muestra hasta sus extremos mientras rota debajo de la lente. La figura 5.7 muestra un esquema del muestreo polar: la superficie se ha representado mediante la zona circular rayada mientras que el muestreo se ha esquematizado mediante la lente de diámetro la mitad del de la muestra. De esta manera se consigue reducir las dimensiones de la lente y reducir aberraciones que pueda introducir. Las dimensiones de las superficies a medir con este aparato se ven limitadas por las dimensiones de la lente; es decir, con el **FOS** no se pueden medir grandes superficies. Otro aspecto importante es que todas las líneas de muestreo tienen el mismo centro de rotación lo que produce una redundancia de la información obtenida que se aprovechará para determinar los errores “offset” para las pendientes tal y como se explica más adelante.

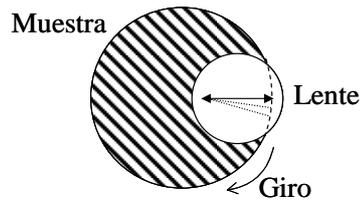


Figura 5.7. Principio básico del aparato con un muestreo polar.

La figura 5.8 representa el muestreo en coordenadas polares; se ha dibujado el intervalo de muestreo radial Δr y el angular $\Delta\phi$; así, la integración radial se realiza en puntos equidistantes separados la distancia de muestreo Δr . Respecto a la integración angular, se tiene en cuenta el camino de integración que varía según $r\Delta\phi$ siendo r la distancia del origen al punto de muestreo. La principal desventaja que presenta este tipo de muestreo es la variación de la distancia de muestreo desde el centro hacia fuera (como se aprecia en la figura 5.8); de esta forma, tal y como se mencionó anteriormente, el centro de la muestra se sobremuestra obteniendo información redundante útil para eliminar errores “offset”.

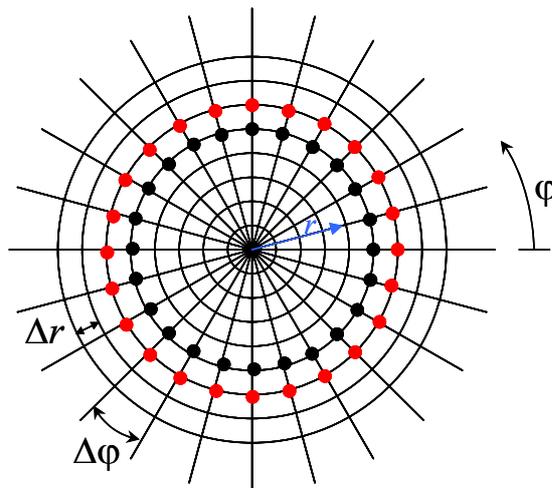


Figura 5.8. Muestreo polar donde se representa el muestreo radial y angular Δr , $\Delta\phi$.

La figura 5.9(a) muestra una fotografía del primer aparato **FOS**. La figura 5.9(b) muestra el montaje interno real del **FOS**. Se dibuja en rojo el haz procedente del láser que incide sobre el espejo giratorio tras incidir sobre un espejo colocado a 45° de inclinación como aparece en la figura. Se ha dibujado de manera que se indican los posibles rayos que se obtienen al girar el espejo oscilante; no se trata de que el haz se expanda sino que se indica el muestreo dado por el espejo giratorio. Del mismo modo, se representan en verde los posibles rayos reflejados por la superficie. En la figura se

supone que la muestra es perfectamente plana pues se ha dibujado de modo que todos los rayos reflejados van a parar al mismo punto del detector PSD. Se aprecia que el muestreo dado por el espejo oscilante recorre la mitad de la muestra ya que la otra mitad se consigue mediante el movimiento de la muestra mediante el “cojinete” rotatorio de aire, situado bajo la muestra, que permite el muestreo en coordenadas polares. Como la lente es de focal larga, se alarga el camino óptico que recorre la luz con dos espejos como los representados en la figura. También aparece el PSD que mide el desplazamiento respecto al eje óptico que ha sufrido el haz láser al incidir sobre la muestra y como ya se ha demostrado, se obtiene la tangente del ángulo de desviación que se relaciona con la pendiente de la muestra. Una vez obtenida la pendiente, se aplican los métodos de integración numérica desarrollados para obtener la topografía de la superficie muestra.

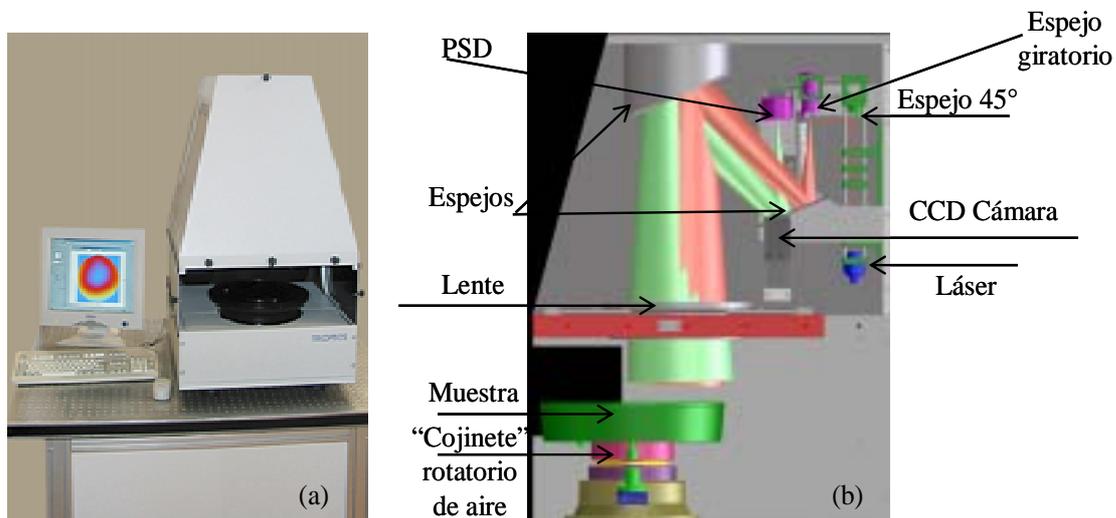


Figura 5.9. (a) Aparato real FOS, (b) Esquema del interior del FOS.

5.1.2. El aparato AMS

El AMS (“Accurate Mechanical System”) es un nuevo deflectómetro óptico que realiza un muestreo en coordenadas cartesianas mediante el movimiento de diferentes dispositivos mecánicos. Cada uno de estos dispositivos se ve afectado por seis posibles errores a causa de su movimiento: errores angulares y de posición. En la figura 5.10 se representa en negro un dispositivo mecánico que se desplaza a lo largo del eje x representado en azul como los otros dos ejes del espacio y, z . Debido al movimiento pueden darse posibles desajustes como los indicados en la figura 5.10 que introducirán errores en el muestreo y por tanto en las medidas; así, los desajustes en la dirección de

muestreo introducen un error denominado “roll”, en la dirección perpendicular “pitch” y en el eje vertical “yaw”.

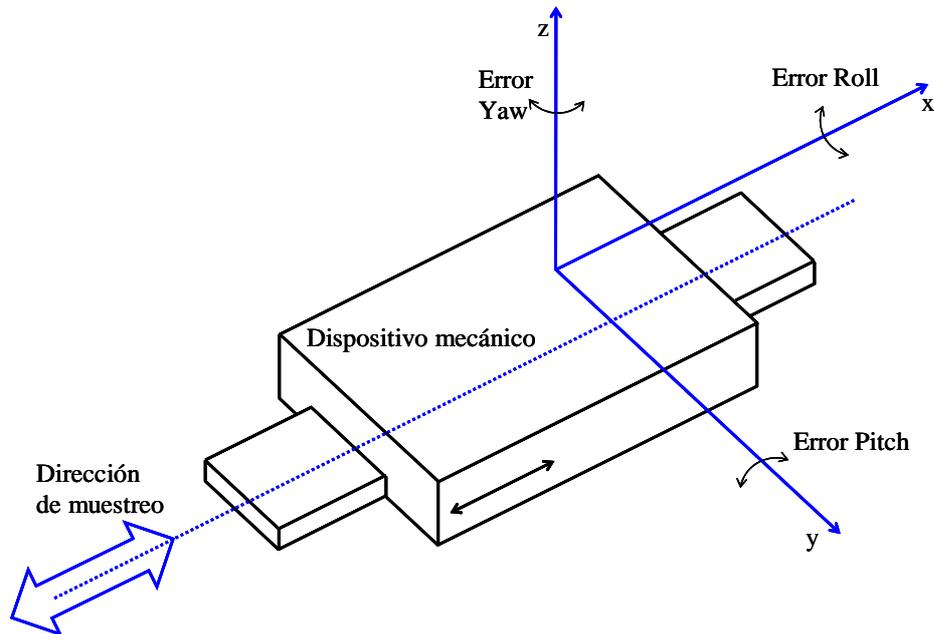


Figura 5.10. Errores de los dispositivos de muestreo originados por el movimiento que realiza.

La figura 5.11 representa un esquema básico del método standard para la obtención de superficies en el que se basa el AMS. El método consiste en medir con un telescopio autocolimador (ACT) el ángulo de desviación que sufre la luz al incidir sobre la superficie usando un pentaprisma externo. La luz procedente del ACT incide sobre el pentaprisma que orienta la luz hacia la muestra a determinar. Tal y como se observa en la figura, el pentaprisma está unido a un dispositivo mecánico y al desplazarse en la dirección indicada, se consigue muestrear la superficie. La ventaja de este dispositivo es el uso del pentaprisma ya que uno ideal introduce únicamente errores angulares de segundo orden e incluso elimina los errores “yaw” y “pitch” siendo el “roll” el único error a considerar.

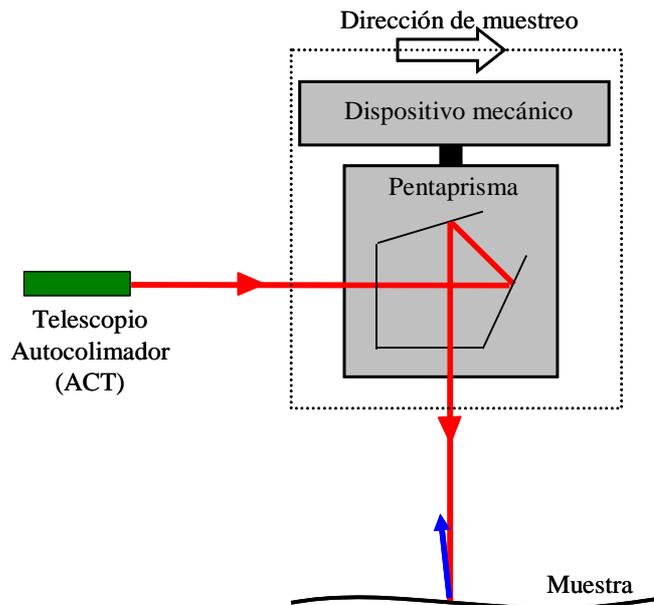


Figura 5.11. Muestreo óptico mediante un pentaprismo externo y un telescopio autocolimador (ACT).

La detección del haz reflejado (dibujado en azul) se hace mediante el mismo ACT, cuyo funcionamiento se ha esquematizado en la figura 5.12. En rojo, se dibuja el haz colimado procedente de la fuente de luz. Se coloca un diafragma situado en el plano focal del objetivo de manera que, al atravesar el objetivo, se obtiene un frente de ondas perfectamente plano que incide sobre la muestra a determinar. Los rayos reflejados por la superficie representados en azul forman un ángulo α respecto a los rayos incidentes y se focalizan en el detector a una distancia d de la posición donde se obtiene la imagen procedente del frente de ondas plano. Los colimadores comerciales actuales consiguen una resolución mejor que 0.005 arcsec con una precisión de 0.01 arcsec [Gec01], siendo una potente herramienta para la medida ultra-precisa de superficies ópticas.

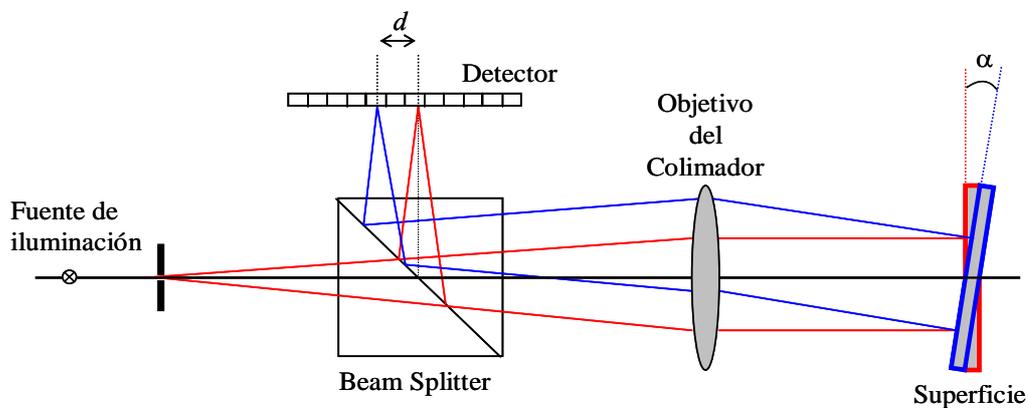


Figura 5.12. Funcionamiento de un autocolimador.

En la práctica, es imposible la fabricación de un pentaprismo ideal ya que las cuatro superficies que participan en la orientación del haz de luz lo desvían respecto al caso ideal. En [Sch99] obtienen una variación en el ángulo “pitch” y “yaw” del orden de 5 arcsec y 20 arcsec para el error “roll” y se propone un proceso de estabilización activa para eliminarlos y así conseguir una posición angular constante del pentaprismo. Aplicando dicho proceso, obtienen una variación en dichos ángulos inferior a 1 arcsec.

Mediante dos pentaprismas fijos uno respecto a otro separados una distancia conocida s y con dos autocolimadores (ACT) se puede medir dos ángulos simultáneamente en dos puntos de la muestra separados lateralmente una distancia s tal y como se muestra en la figura 5.13(a). De este modo se puede calcular la diferencia de dichos ángulos eliminando así la influencia de todos los errores “roll”, “yaw” y “pitch”, a excepción de los errores causados por la diferente óptica de los dos pentaprismas.

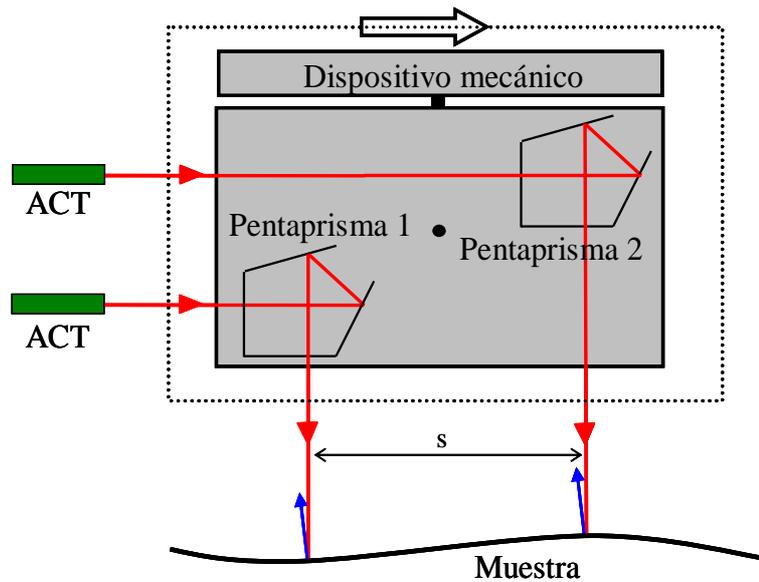


Figura 5.13. Muestreo óptico mediante dos autocolimadores y dos pentaprismas de manera simultánea.

A partir de las diferencias de ángulo se obtienen las diferencias de pendiente mediante la expresión (5.2); y si el desplazamiento s es pequeño, se aproximan a las derivadas de pendiente y aplicando métodos de integración numérica se obtiene directamente la pendiente en la dirección de muestreo. En el caso de desplazamientos grandes se aplica el algoritmo de la “Extensión Natural” [Els99a] y [Els99b] que se describe en el siguiente apartado.

En la figura 5.14 se dibuja un primer prototipo del **AMS** construido en el **PTB** con el que midieron una variación de 0.4 arcsec en el ángulo de desviación de la luz para una superficie de 143 mm de diámetro [Wei99]. Se ha dibujado la muestra a caracterizar situada encima de una plataforma mecánica que se desplaza (flecha roja) en la dirección perpendicular a la del muestreo, situada en una mesa antivibratoria. A una determinada altura de la muestra, se sitúa el pentaprisma unido al cabezal mecánico que se desplaza en la dirección de muestreo (flecha azul). También, se han representado los posibles errores (“roll”, “pitch” y “yaw”) comentados anteriormente. El autocolimador se sitúa a la misma altura que el pentaprisma y la luz incide sobre la superficie mediante el mecanismo de la figura 5.11.

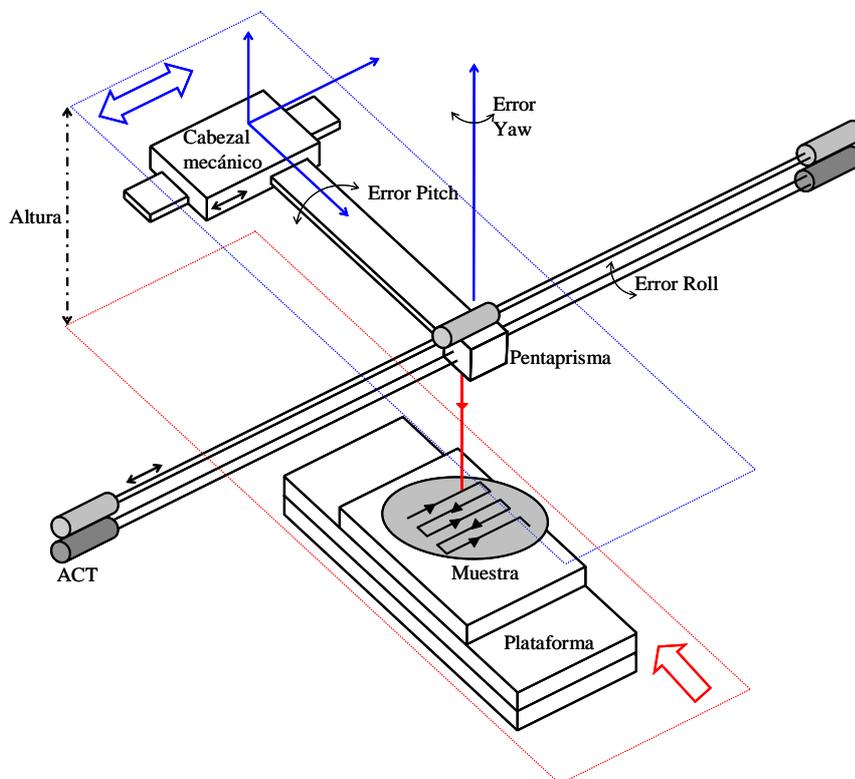


Figura 5.14. Primer prototipo del AMS.

Con el movimiento del cabezal mecánico se muestrea ópticamente una línea de puntos de la superficie, una vez recorrida toda la línea, la muestra se desplaza en la dirección indicada en rojo en la figura y se repite el muestreo y así repetidamente hasta muestrear toda la superficie. Así pues, se trata de un muestreo muy preciso pues se ha diseñado de manera que se consiguen reducir al máximo los errores causados por los diferentes movimientos de los dispositivos mecánicos que intervienen pero a la vez, se trata de un

muestreo extremadamente lento, de alrededor de 45 minutos para una superficie de 200 mm de diámetro.

La figura 5.15 representa el montaje experimental del aparato **AMS**. Se dispone de una fuente de luz (tanto puede ser un láser como una halógena) y mediante el colimador ACT se obtiene un haz perfectamente colimado que se divide en tres colocando tres aperturas como las que indicadas en la figura. La fuente de luz empleada es una luz halógena y el tamaño del punto luminoso que llega a la superficie es de 4 mm de diámetro siendo más grande que el que emplea el **FOS**; de esta manera, las medidas se calculan mediante el valor medio de los diferentes píxeles sobre los que recae el punto de luz. Mediante las aperturas se obtienen tres haces (líneas azul, roja y verde) y con el pentaprisma se hacen incidir sobre la superficie. A partir de la imagen captada con la cámara CCD de los puntos luminosos asociados a los tres haces reflejados se calculan las posiciones de los tres puntos y se calcula su diferencia eliminando los errores de "roll", "yaw" y "pitch" originados por desajustes mecánicos en el movimiento del soporte del pentaprisma y aumentando así, la precisión del aparato. El movimiento del pentaprisma se ha representado en la dirección horizontal desde las señales Eref y Efinal aunque el área de muestreo viene limitada por las señales E1 y E2; también se ha representado el motor que permite el movimiento del pentaprisma. Así, la dirección de muestreo es la dirección horizontal, la dirección x . Una vez muestreada toda la línea, la muestra se mueve en la dirección perpendicular a la del movimiento del pentaprisma (dirección y , hacia dentro de la hoja) mediante la plataforma mecánica y se repite el muestreo. De esta manera, se muestrea toda la superficie. Este tipo de muestreo tiene la ventaja que permite la medición de superficies de dimensiones grandes, al contrario que el aparato **FOS**. Las dimensiones standard de las obleas construidas en la industria semiconductora son de 200 mm de diámetro y actualmente ya se están fabricando obleas de dimensiones superiores que podrán medirse con los dos aparatos **FOS** y **AMS** en función de las exigencias.

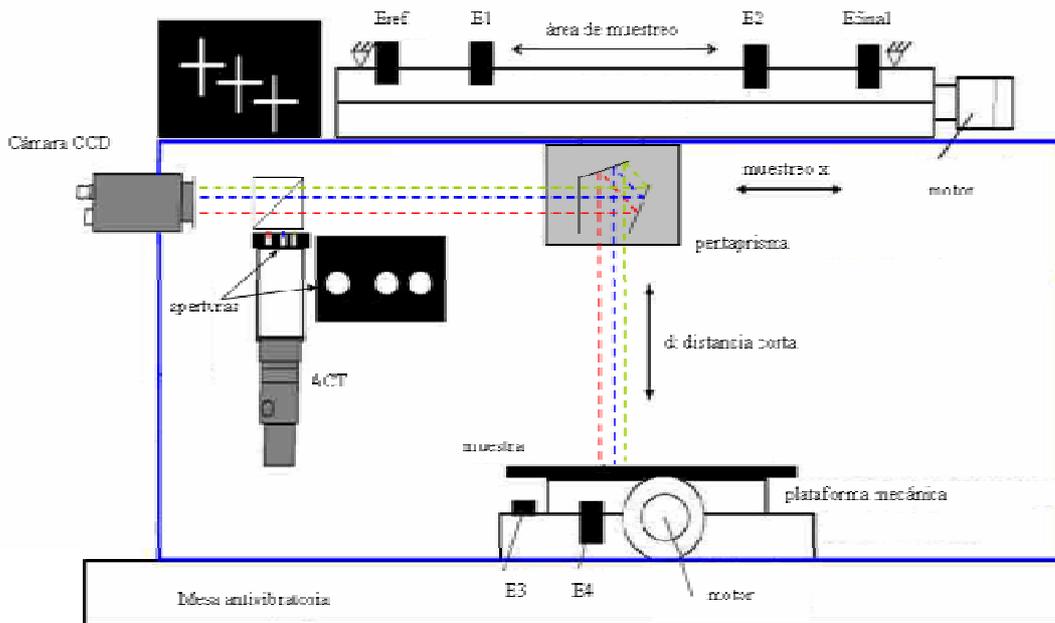


Figura 5.15. Montaje experimental AMS.

Mediante la imagen captada con la CCD se miden las posiciones d_i de los tres puntos de luz asociados a los tres haces procedentes de la superficie y se calcula su diferencia según:

$$\Delta d_i = d_{i+1} - d_i. \quad (5.5)$$

con $i = 1, 2$. De este modo se eliminan posibles errores causados por el movimiento del soporte mecánico que sujeta al pentaprisma. Sin embargo, teniendo en cuenta las expresiones (5.1) y (5.2), no se obtiene información directa sobre la pendiente de la muestra, sino que se obtienen las diferencias de pendiente. Así, antes de aplicar la integración numérica, se ha de resolver el problema de la obtención de la pendiente en todos los puntos de medición a partir de las diferencias de la misma obtenidas en un dominio inferior. Para ello, se ha implementado el algoritmo de la “Extensión Natural” [Els99a] y [Els99b]. En el siguiente apartado se describe brevemente la “Extensión Natural” y se muestran algunas simulaciones.

La figura 5.16 es una fotografía del aparato AMS en la que se indican los dispositivos más importantes como son la fuente de luz; el colimador cuyo objetivo es de focal 500 mm; las tres aperturas con las que se separa la luz en 3; el pentaprisma con el que los

haces inciden sobre la muestra a caracterizar y la plataforma mecánica que permite el desplazamiento de la muestra en la dirección perpendicular a la de muestreo.

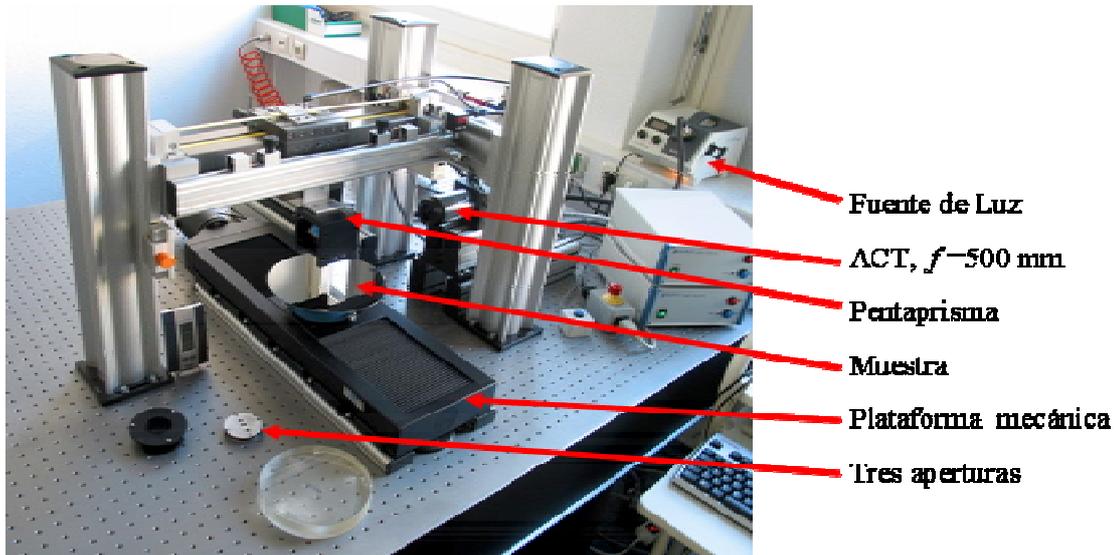


Figura 5.16. Aparato real AMS.

5.2. Preprocesado de las medidas experimentales

5.2.1 Influencia de los “offsets” en el FOS

Se han desarrollado métodos para el cálculo de los “offsets”. En nuestro caso, se trata de un valor constante añadido a las medidas experimentales obtenidas con el **FOS**, tanto en la dirección de muestreo como en su perpendicular, cuyo origen podría ser pequeños desajustes en el alineamiento del sensor de posición. El “offset” en la dirección de muestreo produce una forma cónica adicional en el perfil final; mientras que el “offset” en la dirección perpendicular produce un salto al pasar de 2π a 0 grados. De este modo, las medidas obtenidas con el **FOS** se ven alteradas por estos “offsets”, los cuales se han corregido con los métodos que seguidamente se desarrollan.

“Offset” de las derivadas en la dirección perpendicular a la de muestreo

Para cualquier radio r , la integral a lo largo del camino cerrado obtenido al variar el ángulo θ de 0 a 2π , debe ser cero. Asumiendo que no hay discontinuidades, esto significa, en primera aproximación, que la suma de las derivadas angulares debe ser cero. Pero si cada medida se ve afectada por un “offset” s_a , entonces la suma será $a = s_a n$, donde n es el número de puntos de medición a lo largo del círculo. Así, el “offset” es $s_a = a/n$. La figura 5.17 muestra el perfil obtenido a partir de unas derivadas

generadas analíticamente. La figura 5.17(a) corresponde al caso en que no se aplica el cálculo del “offset” para restarlo a las derivadas. Se aprecia la discontinuidad producida por el “offset”. Mientras que la figura 5.17(b) corresponde al perfil obtenido tras calcular el “offset” y restarlo a las derivadas a integrar. Se aprecia cómo se ha eliminado el salto al pasar de 0 a 2π .

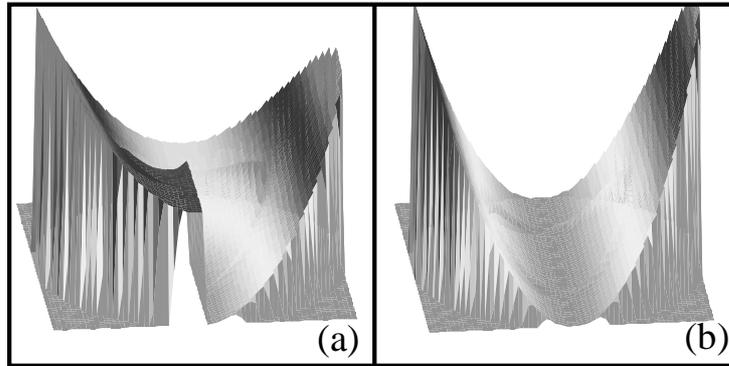


Figura 5.17 Función obtenida (a) sin restar el “offset” y (b) restando el “offset”.

“Offset” de las derivadas en la dirección de muestreo

Sea $f_0^r(\theta)$ la derivada en la dirección radial en el origen ($r = 0$) para un ángulo dado θ .

Si no hay “offsets”, entonces se debe cumplir la siguiente relación:

$$f_0^r(\theta) = -f_0^r(\theta + \pi) \Rightarrow f_0^r(\theta) + f_0^r(\theta + \pi) = 0 \quad (5.6)$$

pero si las medidas se ven afectadas por un “offset” s_r , entonces las medidas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} f_0^{r,s}(\theta) &= f_0^r(\theta) + s_r \\ f_0^{r,s}(\theta + \pi) &= f_0^r(\theta + \pi) + s_r \end{aligned} \quad (5.7)$$

Entonces, $f_0^{r,s}(\theta) + f_0^{r,s}(\theta + \pi) = 2s_r$. Así, una primera aproximación para evaluar estos “offsets” viene dada por la siguiente expresión:

$$\sum_1^{N_\theta} f_0^{r,s}(\theta) = N_\theta s_r \Rightarrow s_r = \frac{\sum_1^{N_\theta} f_0^{r,s}(\theta)}{N_\theta} \quad (5.8)$$

donde N_θ es el número de puntos en la dirección angular. Se han generado analíticamente las derivadas de una función y a la derivada radial se le ha añadido un “offset”. El perfil de la figura 5.18(a) se obtiene cuando no se corrige el “offset”. Se puede apreciar una forma cónica adicional debido al “offset” introducido. El perfil de la figura 5.18(b) se obtiene tras el cálculo del “offset” para restarlo a las derivadas eliminando así la forma cónica como se aprecia de la figura.

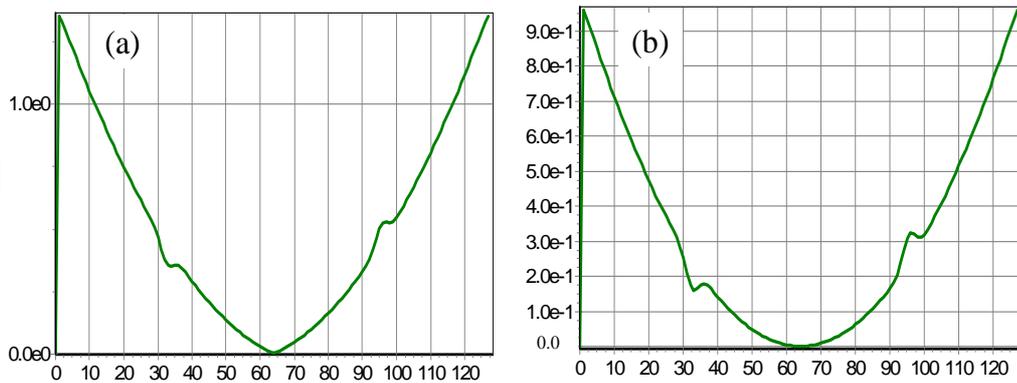


Figura 5.18. Función obtenida (a) sin restar el “offset” y (b) restando el “offset”.

5.2.2. Método para evaluar el mapa de error en el AMS

A continuación se explica un método para evaluar los errores en las medidas originales obtenidas con el AMS. Se trata de un método que sirve para determinar si las medidas se han realizado correctamente y sólo es válido en el caso en que se realicen en un sistema de coordenadas cartesianas. El método consiste en calcular el rotacional de las medidas experimentales asociadas al gradiente de la superficie ya que debe ser cero, $\nabla \times \left(\frac{\rho}{\nabla f} \right) = 0$, siempre y cuando las derivadas experimentales f^x, f^y sean consistentes.

Para obtener el mapa del rotacional del gradiente del perfil, las derivadas segundas f^{yx}, f^{xy} se calculan a partir de las derivadas medidas experimentalmente, basándose en las propiedades de la transformada de Fourier de las derivadas. Sean F^u, F^v las transformadas de Fourier de las derivadas experimentales. Mediante la derivación en el dominio de Fourier (ecuación 3.11) sobre F^u y F^v se obtienen las derivadas cruzadas según:

$$\begin{aligned} F^{uv} &= vF^u \\ F^{vu} &= uF^v \end{aligned} \quad (5.9)$$

y en el dominio espacial:

$$\begin{aligned} f^{xy} &= \mathfrak{F}^{-1}(vF^u) \\ f^{yx} &= \mathfrak{F}^{-1}(uF^v) \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde \mathfrak{F}^{-1} denota la transformada de Fourier inversa. Así, el mapa del rotacional viene dado por:

$$c = f^{xy} - f^{yx} . \quad (5.11)$$

Si las medidas son consistentes el rotacional del gradiente debe ser nulo:

$$c = f^{xy} - f^{yx} = 0 . \quad (5.12)$$

La información de las derivadas podría ser inconsistente de manera que la cantidad c sería diferente de cero. Cuantas más inconsistencias haya en las medidas experimentales, la cantidad c será más diferente de cero. Así, el valor de c es un indicador de la calidad de las medidas experimentales. Calculando c se evalúa la precisión de las medidas experimentales.

A continuación se presentan los resultados obtenidos tras simular todo el proceso. Se generan las derivadas en ambas direcciones descritas mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f_{nm}^x &= 2 \left(\frac{n}{N_x} - 0.5 \right) \\ f_{nm}^y &= 2 \left(\frac{m}{N_y} - 0.5 \right) , \end{aligned} \quad (5.13)$$

a las que se les ha sumado un defecto tipo delta para estudiar cómo afecta en el método propuesto para determinar la precisión de las medidas experimentales. Las figuras 5.19(a) y (b) muestran las derivadas en ambas direcciones (5.13) con el defecto tipo delta situado en $n = \frac{3N_x}{4}$ y $m = \frac{3N_y}{4}$ tal y como se aprecia en la figura. Se aplica el método para calcular el mapa de errores de tal modo que los efectos de borde que aparecen al emplear la transformada de Fourier se han eliminado mediante una extrapolación lineal de las derivadas. La figura 5.19(c) muestra el mapa de errores obtenido tras aplicar el método propuesto. Se aprecia cómo el error es nulo en todo el dominio de las derivadas excepto en la posición donde se ha situado el defecto delta.

Así pues, el método propuesto es un buen indicador de la precisión con la que se han realizado las medidas experimentales.

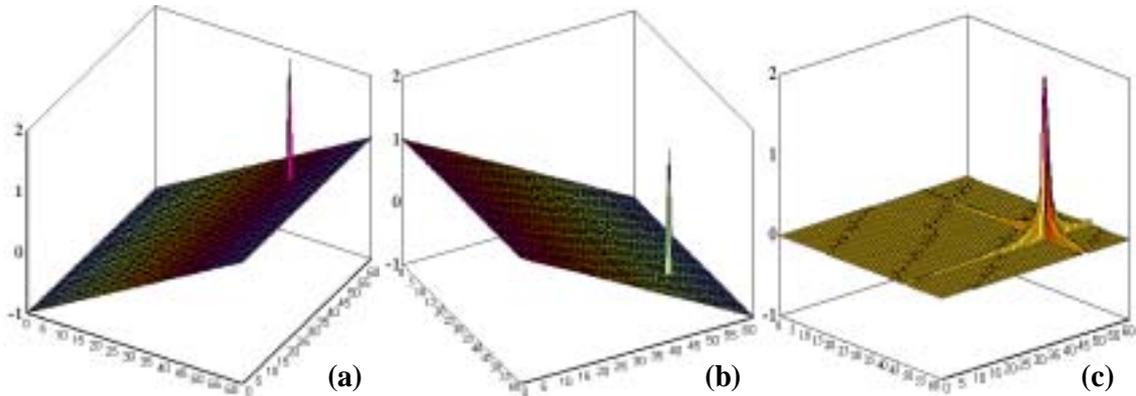


Figura 5.19. (a) Derivada en la dirección x ; (b) Derivada en la dirección y ; (c) Mapa de errores obtenido extrapolando linealmente las derivadas iniciales para evitar efectos de borde.

5.2.3. La “Extensión Natural”

Como hemos visto anteriormente, el **AMS** mide las diferencias de pendiente en la dirección de muestreo mediante el muestreo de tres haces de luz. En la figura 5.20 se representa el muestreo del **AMS** visto desde arriba: se tiene la plataforma (dibujada en azul claro) sobre la que se coloca la superficie a determinar en la que inciden los tres haces separados unas distancias conocidas s_1 y s_1+s_2 dibujados en rojo, azul y verde. Se han representado diferentes líneas de muestreo para representar el movimiento de la plataforma y por tanto de la superficie en la dirección que indica la flecha de la figura. Se han dibujado el principio y el final de una única línea de muestreo en diferentes líneas para visualizar mejor la importancia del inicio y final del muestreo. Se observa que al inicio y al final de la línea de muestreo los tres haces no llegan a incidir sobre la muestra (las cuatro primeras y las cinco últimas dibujadas) y por tanto, las diferencias de pendiente en la dirección de muestreo (dirección perpendicular al movimiento de la plataforma) no se pueden obtener en todo el objeto. p indica la longitud de la línea de muestreo sobre la superficie. Así pues, el problema que se plantea es la obtención de las diferencias de pendiente en los intervalos $[p-s_1, p]$ y $[p-s_2, p]$ correspondientes a los haces azul y verde respectivamente. En [Els99a] se propone un algoritmo de reconstrucción basado en la denominada “Extensión Natural” para resolver este problema.

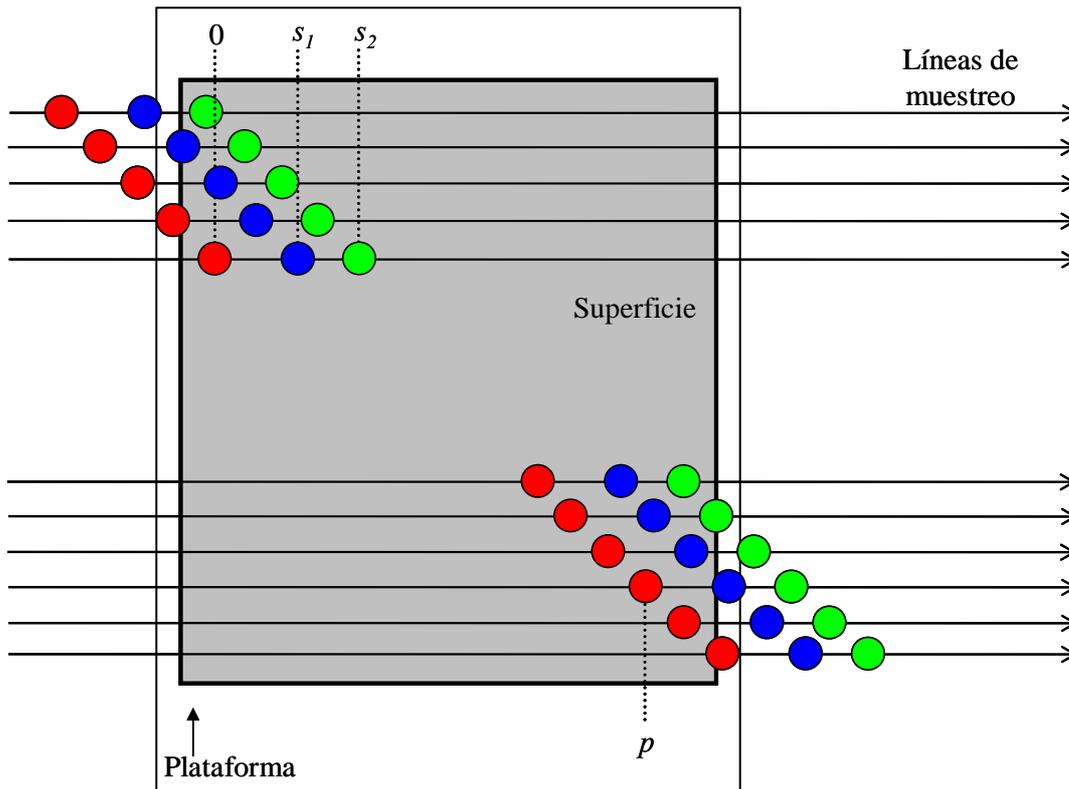


Figura 5.20. Esquema del muestreo del AMS donde s_1 y s_2 representan los desplazamientos y p indica la longitud de las líneas de muestreo.

A continuación se describe un resumen del trabajo realizado en [Mor03] en el que se desarrolla el algoritmo de la “Extensión Natural”; y para ello, se estudia el caso sencillo de una función periódica de dominio finito para aplicarlo en el caso real de una función no periódica de dominio finito. Finalmente se muestran los resultados obtenidos de diferentes simulaciones.

5.2.3.1. Estudio de una función periódica de dominio finito

Denominemos p al periodo de la función. Sus diferencias también son periódicas de manera que se dispone de la información en todo el periodo de la función. Así, al tratarse de una función periódica, se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \exp\left(\frac{i2\pi kx}{p}\right), \quad (5.14)$$

donde los coeficientes vienen dados por:

$$f_k = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{p}} f(x) \exp\left(-\frac{i2\pi kx}{p}\right) dx \quad (5.15)$$

Sean $\Delta f(x)$ las diferencias de la función $\Delta f(x) = f\left(x + \frac{s}{2}\right) - f\left(x - \frac{s}{2}\right)$. Teniendo en cuenta la expresión (5.14) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \left[\exp\left(\frac{i2\pi k\left(x+\frac{s}{2}\right)}{p}\right) - \exp\left(\frac{i2\pi k\left(x-\frac{s}{2}\right)}{p}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \left[\exp\left(\frac{i\pi ks}{p}\right) - \exp\left(-\frac{i\pi ks}{p}\right) \right] \exp\left(\frac{i2\pi kx}{p}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \left[i2\sin\left(\frac{\pi ks}{p}\right) \right] \exp\left(\frac{i2\pi kx}{p}\right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

De la relación anterior, los coeficientes del desarrollo de Fourier de las diferencias $\Delta f(x)$ vienen dados por $f_k \cdot \left[i2\sin\left(\frac{\pi ks}{p}\right) \right]$ que se anulan para las frecuencias que satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{k}{p} = \nu = \frac{n}{s}, \quad (5.17)$$

con n número natural y s el desplazamiento. Las frecuencias que cumplen la relación (5.17), incluyendo la frecuencia cero, caracterizan la parte periódica en s y no se recuperan mediante los datos experimentales. De este modo, se consigue recuperar la función salvo una función periódica en s debido a los coeficientes de Fourier que no se recuperan, característicos de la parte periódica en s como indica (5.17). Así, para cualquier número entero ν y cualquier A , la función $\omega(x) = f(x) + A \sin\left(\frac{2\pi\nu x}{s}\right)$ proporciona las mismas diferencias $\Delta f(x)$ que la función $f(x)$. Las frecuencias características de la parte periódica en el desplazamiento escogido no se pueden recuperar mediante los datos experimentales. De esta manera, la función se reconstruye salvo una función periódica de periodo igual al desplazamiento empleado o divisores de éste. La solución a este problema consiste en aplicar el desarrollo anterior con dos desplazamientos primos entre sí.

Una vez resuelto el problema para una función periódica de dominio finito, se estudia el caso más real posible: el de una función no periódica de dominio finito de la que sólo se dispone de sus diferencias. Se resuelve mediante el algoritmo de reconstrucción propuesto por C. Elster y I. Weingärtner en [Els99a] basado en lo que llaman la “Extensión Natural”.

5.2.3.2. Estudio de una función no periódica de dominio finito

A continuación se estudia el caso de una función no periódica de dominio finito p , de la que únicamente se conocen sus diferencias obtenidas mediante un único desplazamiento s . De manera similar al problema planteado en el AMS, las diferencias sólo se calculan en el intervalo $[0, p-s]$, es decir, tan sólo se tiene información en $[0, p-s]$. Para resolver este problema, se supone que la función es periódica y con un periodo igual al dominio finito, p . A partir de los datos medidos y suponiendo la periodicidad de la función, se evaluarán las diferencias en el intervalo $[p-s, p]$, con lo que se puede reconstruir la función en todo el dominio p aplicando el método del apartado anterior. Es importante recordar que la función no es periódica pero se supone como tal; por tanto, la reconstrucción sólo será válida en el dominio finito p que es lo que se pretende.

Así pues, el problema a resolver será el de la evaluación de las diferencias en el intervalo $[p-s, p]$ conociendo las diferencias en el intervalo $[0, p-s]$. La “Extensión Natural” consiste en extender la información del intervalo $[0, p-s]$ a todo el intervalo $[0, p]$ de manera que la reconstrucción de la función se puede realizar aplicando las técnicas resueltas para el caso de una función periódica de dominio finito. A continuación se presenta la “Extensión Natural” suponiendo que la función a reconstruir es periódica de periodo p , múltiplo entero del desplazamiento. La “Extensión Natural” viene dada por la siguiente expresión:

$$\Delta f_p(x) = \begin{cases} \Delta f(x) & \text{para } 0 \leq x \leq p-s \\ -\sum_{l=1}^{\frac{p-x}{s}} \Delta f(x-ls) & \text{para } p-s < x \leq p \end{cases}, \quad (5.18)$$

donde $\Delta f(x)$ representa las diferencias del intervalo $[0, p-s]$ y $\Delta f_p(x)$ las diferencias extendidas a todo el dominio $[0, p]$.

Intervalo $[p-s, p]$

A continuación se demuestra la igualdad de la expresión (5.18) con la que se obtienen las diferencias en el intervalo $[p-s, p]$:

$$\begin{aligned}
 \Delta f_p(x) &= -\sum_{l=1}^{\frac{p}{s}-1} \Delta f(x-ls) = -\left\{ \Delta f(x-s) + \Delta f(x-2s) + \dots + \Delta f\left(x - \left(\frac{p}{s}-1\right)s\right) \right\} = \\
 &= -\left\{ \Delta f(x-s) + \Delta f(x-2s) + \dots + \Delta f(x-p+s) \right\} = \\
 &= -\left\{ f(x) - f(x-s) + f(x-s) - f(x-2s) + \dots + f(x-p+2s) - f(x-p+s) \right\} = \\
 &= -\left\{ f(x) - f(x-p+s) \right\} \quad \text{para } p-s \leq x \leq p \quad .
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Nuevamente, al suponer la función periódica, $f(x-p+s) = f(x+s)$, la ecuación anterior se reduce a $\Delta f_p(x) = f(x+s) - f(x)$ para el intervalo $p-s \leq x \leq p$. Por tanto, la “Extensión Natural” (5.17) queda demostrada analíticamente. En la figura 5.21 se demuestra gráficamente la expresión (5.18); se representa en rojo una función lineal de dominio p de la que se indican determinados valores y en azul una copia de la misma desplaza una distancia s . Se representa un punto situado en el intervalo $[p-s, p]$ de la función roja al igual que su análogo en azul que cae fuera del dominio p de modo que no es posible calcular la diferencia entre ambos valores. Para obtener dicha diferencia, se emplea la “Extensión Natural” y para ello se ha representado en verde, los puntos $x-ls$ con $l = 1, \dots, p/s-1$ situados dentro del intervalo $[0, p-s]$. Sumando los valores de las diferencias de la función en $[0, p-s]$, se obtiene el valor de la diferencia extendida en el intervalo $[p-s, p]$ demostrando así la “Extensión Natural”.

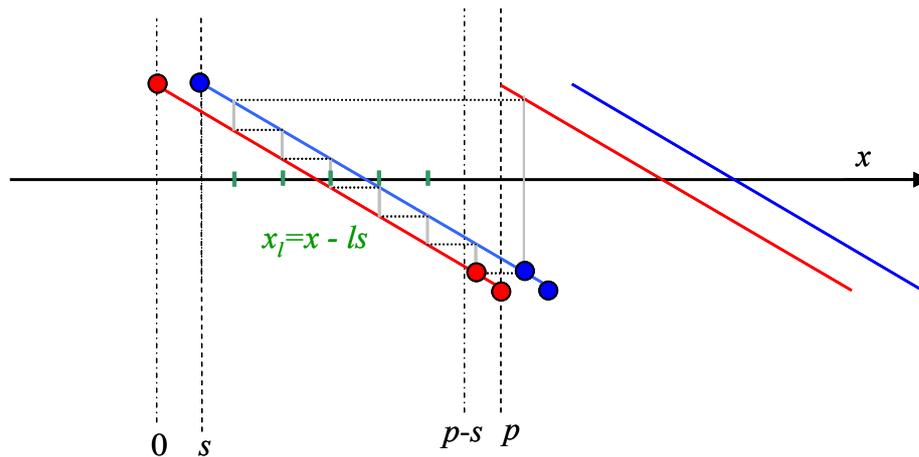


Figura 5.21. Esquema de la “Extensión Natural” para el intervalo $[p-s, p]$. Los puntos rojos indican el muestreo desde el origen mientras que los puntos azules representan el muestreo desplazado.

Así pues, se demuestra que mediante el algoritmo de la “Extensión Natural” propuesto por C. Elster y I. Weingärtner en [Elster99a] se obtiene una función no periódica de dominio finito a partir de sus diferencias. Al igual que en el caso de una función periódica, las frecuencias características de la parte periódica en el desplazamiento escogido no se pueden recuperar mediante los datos experimentales. De manera similar, el problema se resuelve aplicando el algoritmo de la “Extensión Natural” con dos desplazamientos primos entre sí. Para hallar la reconstrucción exacta de la función deseada se hace una combinación lineal de lo obtenido para cada desplazamiento.

5.2.3.3. Resultados

A continuación, se presentan los diferentes resultados obtenidos para diversas simulaciones en función del número de desplazamientos empleados (uno o dos). Como ejemplo, se ha tomado la configuración de 11/13 píxeles para los desplazamientos. Se presentan los resultados para $p = 11 \cdot 13 = 143$ y en los casos en que se emplee uno y dos desplazamientos.

La función $f(x)$ a reconstruir a partir de sus diferencias se ha generado analíticamente mediante una función lineal sumada a una función periódica, diferente según el intervalo ($[0, 0.5]$ o $[0.5, 1]$) más dos gaussianas centradas en las coordenadas 0.65 y 0.85 y finalmente en el primer intervalo se suman 20 gaussianas de signo y centro determinados. Dicha función se describe en la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin[1.8\pi(x-0.5)] & \text{si } 0 < x < 0.5 \\ x + \sin[1.6\pi] & \text{si } 0.5 \leq x < 1 \end{cases} - 0.17 \exp\left[-\frac{(x-0.65)^2}{10^{-4}}\right] + 0.17 \exp\left[-\frac{(x-0.85)^2}{10^{-4}}\right] + \sum_{j=0}^{20} \text{sign}_j \exp\left[-\frac{(x-x_j)^2}{10^{-4}}\right] . \quad (5.20)$$

La función se evalúa normalizando las abscisas a la unidad. El signo y el punto central de las veinte gaussianas se generan una vez mediante:

$$\begin{aligned} \text{sign}_j &= 0.3 \left[\left(\frac{\text{n}^\circ \text{ aleatorio entre } 0 \text{ y } p+1}{p} \right) - 0.5 \right] \\ x_j &= 0.5 \left(\frac{\text{n}^\circ \text{ aleatorio entre } 0 \text{ y } p+1}{p} \right) . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Seguidamente se calculan las diferencias a través de:

$$\Delta f(x) = f(x+s) - f(x) \quad , \quad (5.22)$$

y se aplica la “Extensión Natural” y la posterior reconstrucción recurriendo al espacio de Fourier.

Reconstrucción empleando un único desplazamiento divisor entero de p

A continuación se presenta el caso en que el dominio de la función es $p = 11 \cdot 13 = 143$ y el desplazamiento $s = 13$ píxeles. En la figura 5.22 se muestra la diferencia $\Delta f(x)$ en línea continua; hay que notar que el dominio de la diferencia no llega al total de 143 píxeles ya que su dominio de la diferencia es de $p_{\text{diferencia}} = p - s = 130$. Así, el intervalo del dominio que falta por determinar se llevará a cabo mediante la “Extensión Natural”; la diferencia extendida $\Delta f_p(x)$ se muestra en línea a trazos. El rango de las diferencias sin extender es $[-0.41, 0.59]$ mientras que al extenderlas, el rango aumenta a $[-2, 0.59]$ tal y como se aprecia en la figura 5.22.

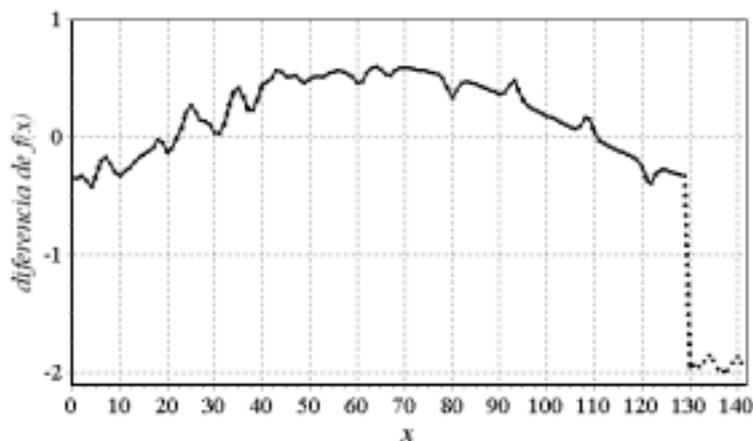


Figura 5.22. Diferencia de la función original (línea continua) y diferencia extendida (línea a trazos) para $s = 13$ y $p = 143$.

En la figura 5.23 se representa la función original generada analíticamente (línea negra) y la reconstruida (línea roja) evaluadas en todo el dominio ($p = 143$ píxeles). Las dos gaussianas en las coordenadas 0.65 y 0.85 corresponden a los píxeles $x = 93$ y $x = 121$ respectivamente. También se observan las veinte gaussianas generadas en la primera mitad del dominio. El rango de valores que toman ambas funciones es de $[-1.37, 1.41]$.

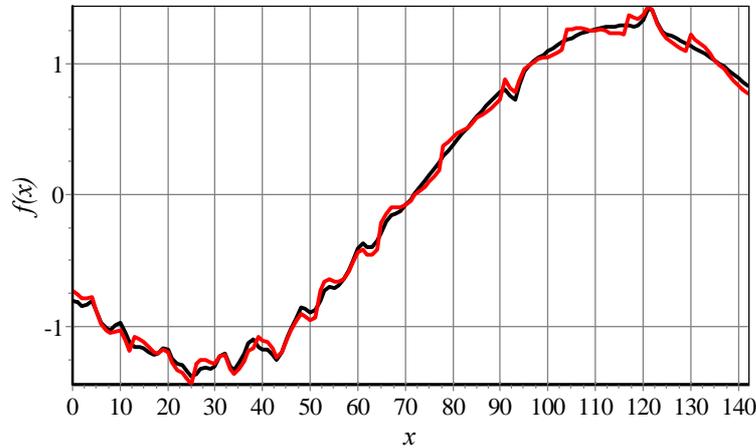


Figura 5.23. Función original (negra) y la reconstruida (roja) para $s = 13$ y $p = 143$.

Finalmente en la figura 5.24 se representa la diferencia entre la función original y la reconstruida. Se observa una periodicidad de 13 píxeles, valor que coincide con el desplazamiento; de esta manera se reconstruye la función original salvo una función periódica de periodo s tal y como se anunció anteriormente. De aquí viene la idea de emplear dos desplazamientos en la reconstrucción precisa de una función en todo su dominio a partir de sus diferencias en un dominio menor.

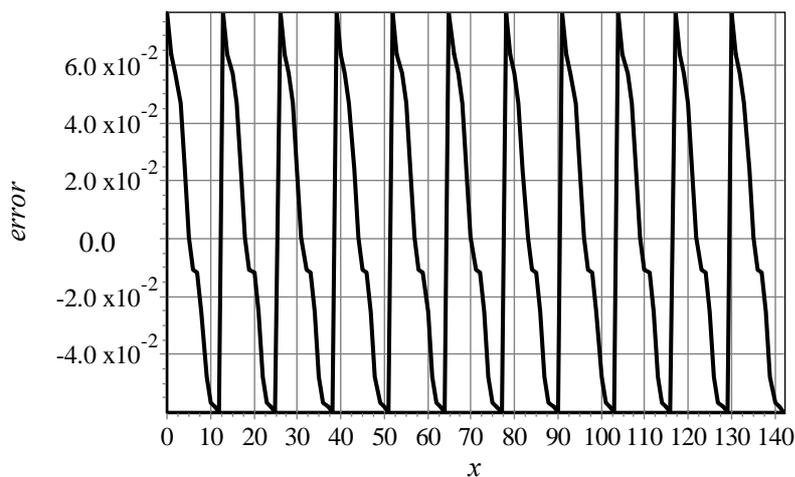


Figura 5.24. Diferencia entre la función original f^o y la reconstruida f^r mediante el algoritmo.

A partir de la diferencia de la figura 5.24 se calcula el error cuadrático medio de la función reconstruida mediante la expresión:

$$\sigma_{reconstruida}^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} [f_i^r - f_i^o]^2, \quad (5.23)$$

donde f^r y f^o corresponden a la función reconstruida y la función original respectivamente. Se obtiene $\sigma_{reconstruida}^2 = 2.2610^{-3}$.

Reconstrucción empleando dos desplazamientos divisores enteros de p

A continuación presentamos los resultados obtenidos para el caso de reconstruir la función (5.20) evaluada en $p = 143$ píxeles mediante dos desplazamientos, $s_1 = 11$ y $s_2 = 13$. En la figura 5.25 se representan en línea continua las diferencias originales: en color negro las diferencias correspondientes a $s_1 = 11$ y en rojo las correspondientes a $s_2 = 13$. Se observa que el dominio de las diferencias no es el mismo ya que depende del desplazamiento escogido; para $s_1 = 11$ el dominio es $p_{s_1} = p - s_1 = 132$ y análogamente para s_2 , $p_{s_2} = 130$. Respecto a los valores que toman las diferencias no extendidas, se encuentran en el mismo intervalo que en el caso de un único desplazamiento de $[-0.41, 0.59]$ y al extenderlas aumenta a $[-2, 0.59]$. En línea discontinua se representan las diferencias extendidas mediante la “Extensión Natural” obteniendo así, las diferencias en todo el dominio $p = 143$ de la función original.

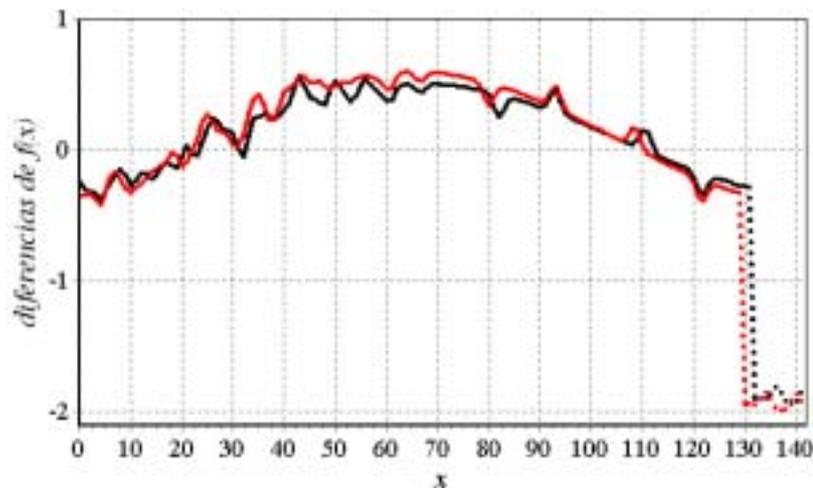


Figura 5.25. Diferencias de la función original (línea continua) y diferencias extendidas (línea a trazos) para $s_1 = 11$ (línea negra) y $s_2 = 13$ (línea roja).

En la figura 5.26 se muestran las funciones original (línea negra) y la reconstruida (línea roja). Al igual que el caso de un único desplazamiento, los valores que toman las funciones se encuentran en el intervalo $[-1.37, 1.41]$. Se observa que la reconstrucción es mucho más precisa y no se aprecia ninguna zona en todo el dominio donde la reconstrucción se separe de la función original tal y como ocurre al utilizar un único desplazamiento.

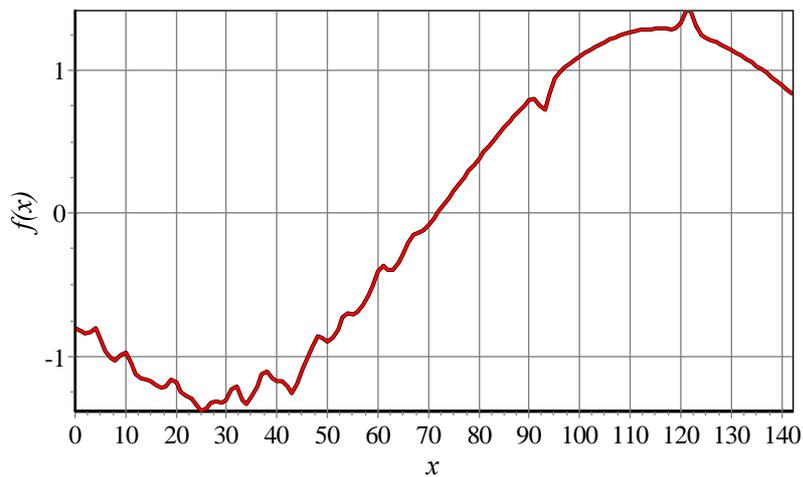


Figura 5.26. Función original (negra) y la reconstruida (roja) para $s_1 = 11$ y $s_2 = 13$ y $p = 143$.

Para evaluar la precisión del algoritmo se calcula la diferencia entre la función original y la reconstruida que se recoge en la figura 5.27. Comparando con el mismo cálculo realizado empleando un desplazamiento se observa que la diferencia pierde la periodicidad obtenida en la figura 5.21; los valores que toma la diferencia entre las funciones original y reconstruida son inferiores ($[-7,63 \cdot 10^{-16}, 7,91 \cdot 10^{-16}]$) a los obtenidos con un desplazamiento ($[-5 \cdot 10^{-2}, 8 \cdot 10^{-2}]$). Estos errores son debidos a la precisión con que se representan los números en el ordenador (doble precisión) y no al algoritmo de cálculo. Así pues, a partir de la expresión (5.23) el error cuadrático medio de la función reconstruida es inferior que empleando un único desplazamiento, $\sigma^2_{\text{reconstruida}} = 8.29 \cdot 10^{-32}$, demostrando la precisión del algoritmo propuesto mediante el uso de dos desplazamientos.

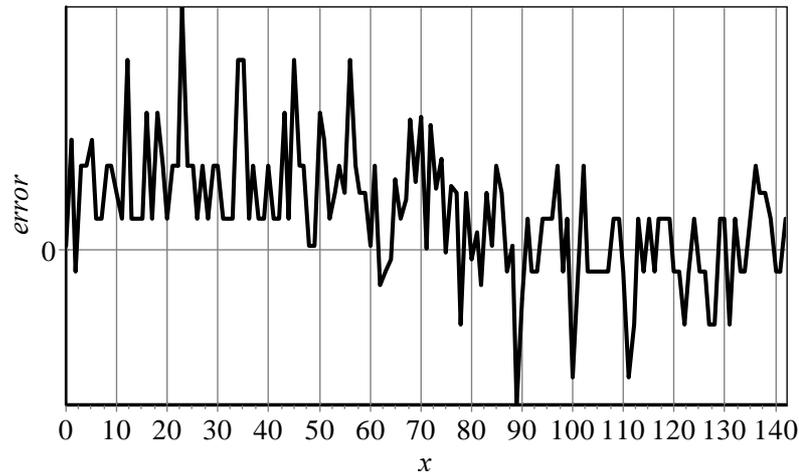


Figura 5.27. Diferencia entre la función original f^o y la reconstruida f^r para $s_1 = 11$ y $s_2 = 13$ y $p = 143$.

Así, se concluye que es necesario el uso de dos desplazamientos primos entre sí para la reconstrucción de una función unidimensional con el fin de obtener la máxima precisión posible.

5.3. Resultados preliminares

A continuación se muestran los primeros resultados reales obtenidos con el FOS. La figura 5.28 muestra los resultados obtenidos para una oblea circular y pulida de 200mm de diámetro. Cada línea de muestreo radial contiene 265 píxeles y se realizaron 1665 líneas angulares de muestreo. Las figuras 5.28(a) y (b) corresponden a los mapas de las derivadas en la dirección radial y angular respectivamente.

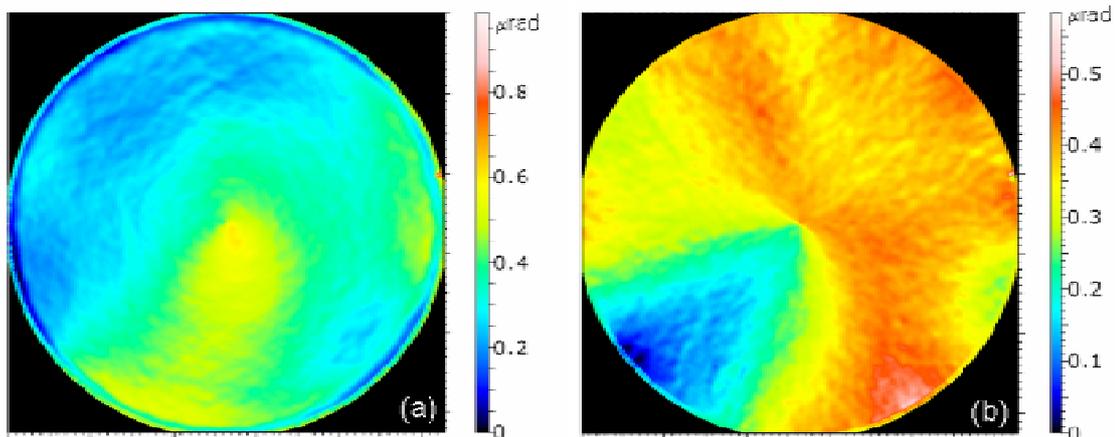


Figura 5.28. (a) Derivada en la dirección radial; (b) Derivada en la dirección angular.

La figura 5.29 corresponde a la topografía de la oblea obtenida tras aplicar la integración numérica sobre las derivadas. La figura 5.29(a) corresponde al resultado obtenido directamente tras la integración, sin eliminar la forma que adquiere al colocar

la muestra sobre la mesa rotatoria. Se aprecia que la altura máxima es del orden de 30 micras. Sobre el resultado obtenido se ha aplicado un filtro gaussiano que elimina las bajas frecuencias con el objetivo de eliminar la forma adquirida y así, poder estudiar los detalles de la oblea, la información residual de la oblea denominada nanotopografía. Es decir, mediante el filtro se eliminan las zonas de baja frecuencia manteniendo las zonas de alta frecuencia que corresponden a los detalles de la superficie. Así, la topografía obtenida tras aplicar el filtro se muestra en la figura 5.29(b) en la que se aprecia que ahora la escala se ha reducido a 1.5 micras obteniendo un muy buen resultado ya que indica que la oblea es muy plana y no presenta saltos abruptos o defectos. En la figura se ha representado una línea de la topografía y se aprecia cómo la topografía varía de -20 nm a 20 nm obteniendo así una alta precisión en la topografía.

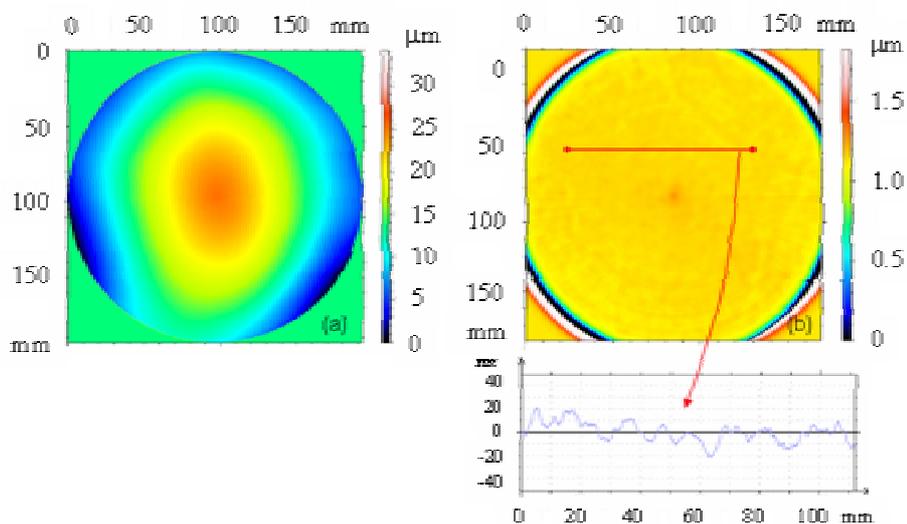


Figura 5.29(a) Topografía obtenida a partir de la integración numérica de las derivadas de la figura 5.14; (b) topografía obtenida tras aplicar un filtro gaussiano que elimina las bajas frecuencias.

La figura 5.30 representa la nanotopografía y uno de sus perfiles unidimensionales de dos obleas antes y después de ser sometidas a procesos químicos y mecánicos de pulido (CMP, del inglés, “chemical and mechanical polishing”). La oblea de la figura 5.30(a) no se ha pulido, mientras que la de la figura 5.30(b) ha sido pulida mediante procesos CMP durante 120 segundos. Las estructuras test se han gravado a lo largo de 535 nm sobre una capa metálica cubierta con 700 nm de una capa de óxido.

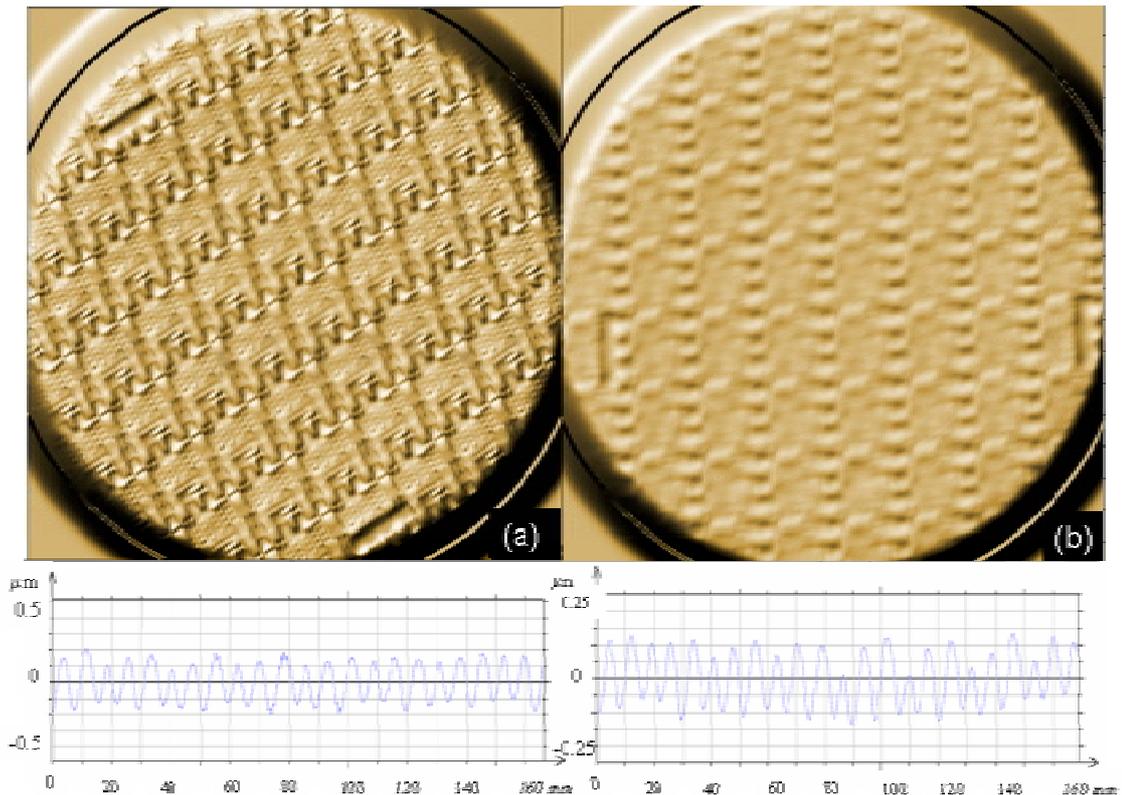


Figura 5.30. (a) Nanotopografía y perfil de una oblea antes de aplicarle procesos químicos y mecánicos de pulido (CMP, del inglés, “chemical and mechanical polishing”); (b) otra oblea después de aplicarle procesos CMP.

La figura 5.31 muestra una fotografía del primer prototipo **FOS** [Ams99a] diseñado para la medida de superficies de dimensiones pequeñas. En este primer prototipo no se ha incluido el mecanismo de rotación de la muestra sino que ésta se desplaza en la dirección perpendicular a la de incidencia de la luz y a la del movimiento del espejo; de esta forma, el muestreo realizado por este primer prototipo es válido en un sistema de coordenadas cartesianas.

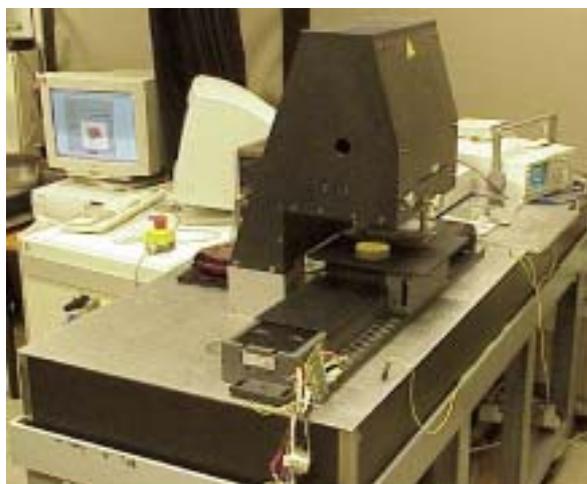


Figura 5.31. Primer prototipo **FOS** con muestreo en coordenadas cartesianas.

La figura 5.32 corresponde a las derivadas obtenidas mediante este primer prototipo **FOS** de un dispositivo electrónico de 20 mm x 20 mm que se deposita repetidamente sobre obleas. La figura 5.32(a) corresponde a la derivada en la dirección x , mientras que la figura 5.32(b) es la derivada en la dirección y . En la parte inferior de la derivada según x , la altura varía rápidamente de modo que se trata de una zona en que la topografía de la superficie no es plana, sino que hay saltos en su altura según la dirección x , es decir, que hacen que su derivada no sea plana y tenga la forma de la figura 5.32(a). Así pues, la derivada en la dirección de muestreo (la dirección x) presenta zonas de frecuencia muy alta. Lo mismo ocurre en la parte superior de la derivada según la dirección y como se aprecia en la figura 5.32(b): se trata una zona de la superficie en que la altura de la derivada en y varía rápidamente y por tanto, la topografía presenta saltos y no es plana. La derivada en la dirección perpendicular también presenta zonas en las que la frecuencia es alta pero siendo más suave. De esta forma, las dos derivadas presentan zonas en que varían rápidamente de manera que se pueden considerar zonas de alta frecuencia y por tanto, en función del método de integración escogido, los errores en la topografía final serán más importantes o no en función de la precisión del método escogido.

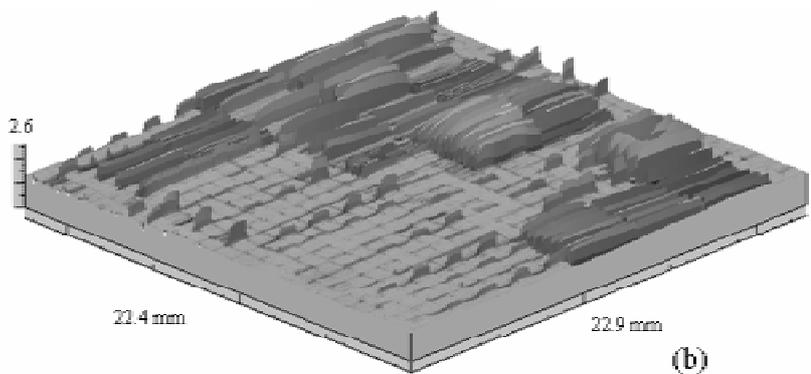
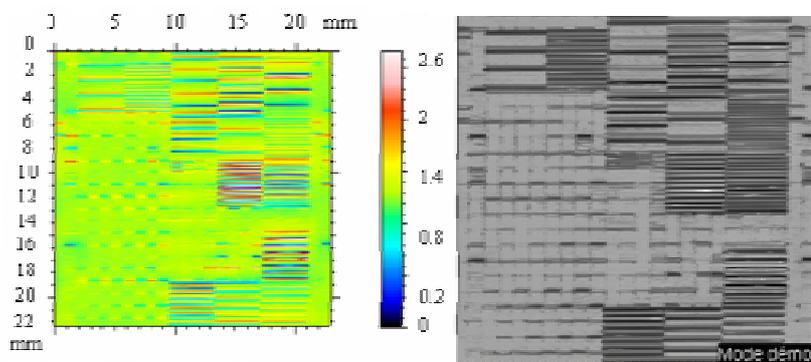
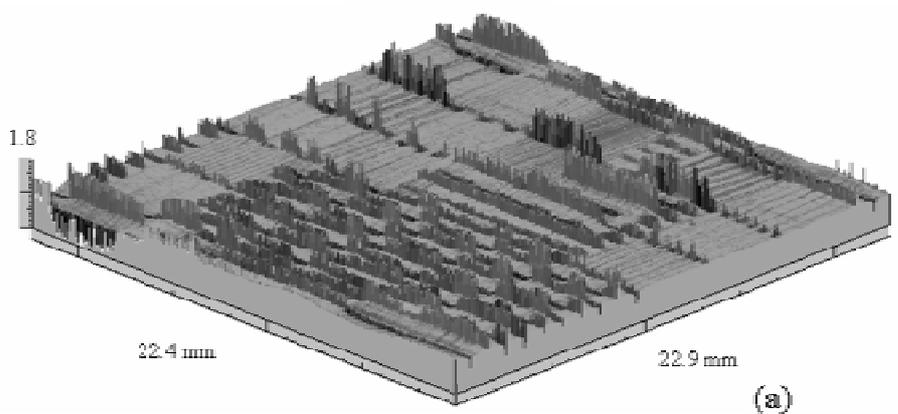
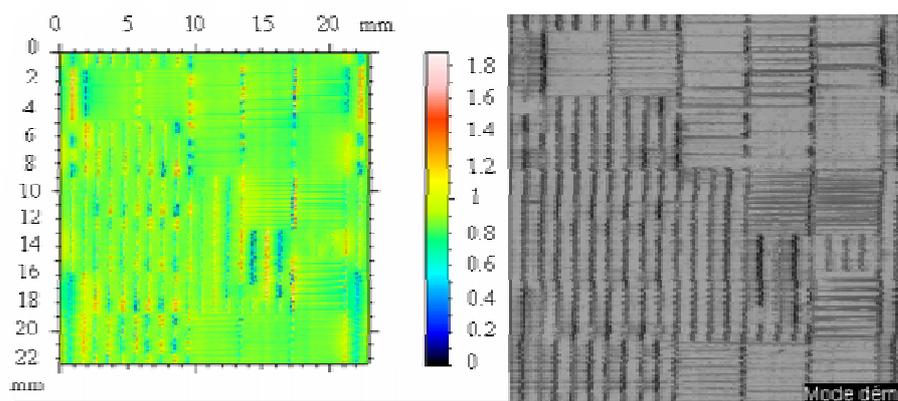


Figura 5.32. (a) Derivada en la dirección de muestreo, (b) derivada en la dirección perpendicular.

Para saber la precisión con la que se han obtenido las derivadas de la figura 5.32 se aplica el método del cálculo del rotacional a partir de las derivadas experimentales explicado anteriormente. La figura 5.33 recoge el mapa de errores obtenido a partir de las derivadas obtenidas experimentalmente. Se ha utilizado la extrapolación lineal de los datos para evitar los efectos de borde que produce la transformada de Fourier de las derivadas primeras para calcular las derivadas segundas. Se observa que las medidas se han realizado satisfactoriamente ya que el mapa de error es prácticamente nulo. Sin embargo hay zonas en las que difiere de cero, zonas en las que el ruido experimental afecta a las medidas de la derivada radial y por tanto hace que el rotacional de las derivadas difiera de cero (sobre todo la zona de las líneas verticales de la figura 5.32(a) y 5.33).

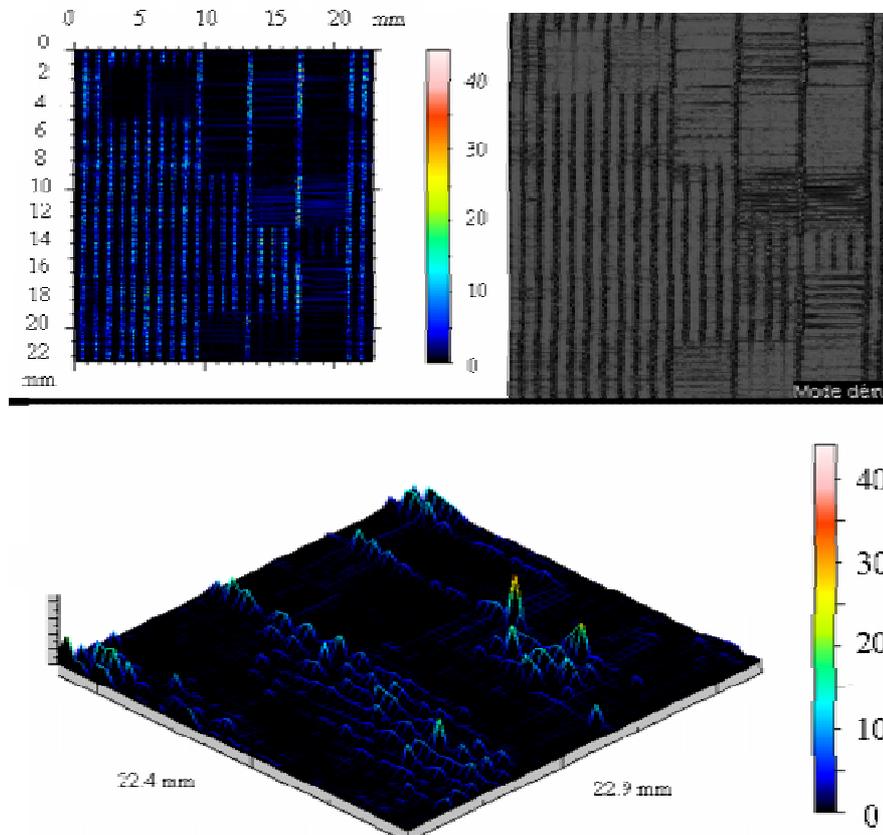


Figura 5.33. Mapa de errores obtenido analizando las derivadas de la figura 5.32 mediante el método del cálculo del rotacional.

La figura 5.34 muestra el perfil obtenido a partir de las medidas experimentales de la figura 5.32. La figura 5.34(a) corresponde al perfil obtenido mediante la minimización de la diferencia al integrar por separado en las dos direcciones mediante el método de las “splines” cúbicas, tomando como origen de integración el origen de la muestra

(configuración M1, ver Capítulo 3). La figura 5.34(b) corresponde a la topografía obtenida mediante el mismo método pero considerando el centro de la muestra como origen de integración (configuración M0, ver Capítulo 3). La figura 5.34(b) ofrece mejor resultado ya que la propagación del ruido de las derivadas es menor debido al origen de integración considerado. De todas maneras, el ruido está presente a lo largo de las líneas de muestreo para los dos casos debido a la integración por caminos empleada. El perfil obtenido mediante el método *DFCS* (diferencias finitas tras una interpolación por “splines” cúbicas de las derivadas) es el de la figura 5.34(c). Se obtiene un mejor resultado respecto a las figuras 5.34(a) y (b) aunque se detectan unas líneas diagonales posiblemente originadas por posibles inconsistencias en las medidas experimentales que se amplifican tras la integración. Estos efectos no aparecen en la figura 5.34(d) correspondiente al perfil obtenido con el método ideal de Fourier. Los perfiles 5.34(c) y (d) son mucho más precisos ya que aparecen detalles que no aparecen en las figuras 5.34(a) y (b); es decir, el método *DFCS* y el de Fourier reproducen óptimamente detalles en la muestra como podría ser un defecto o una rayadura,.... que se interpretan como señales de alta frecuencia. De todas maneras, también se aprecian diferencias entre ambos; el perfil obtenido mediante el método de Fourier es mucho más preciso, es decir, reproduce mejor las señales de alta frecuencia aunque requiere más tiempo computacional. La máxima altura es diferente para los diferentes perfiles obtenidos debido a la diferencia en el valor de la constante de integración obtenido en cada método. Así, el *DFCS* y el método de Fourier proporcionan una constante de integración inferior a la que ofrecen los otros dos métodos (figuras 5.34(a) y (b)).

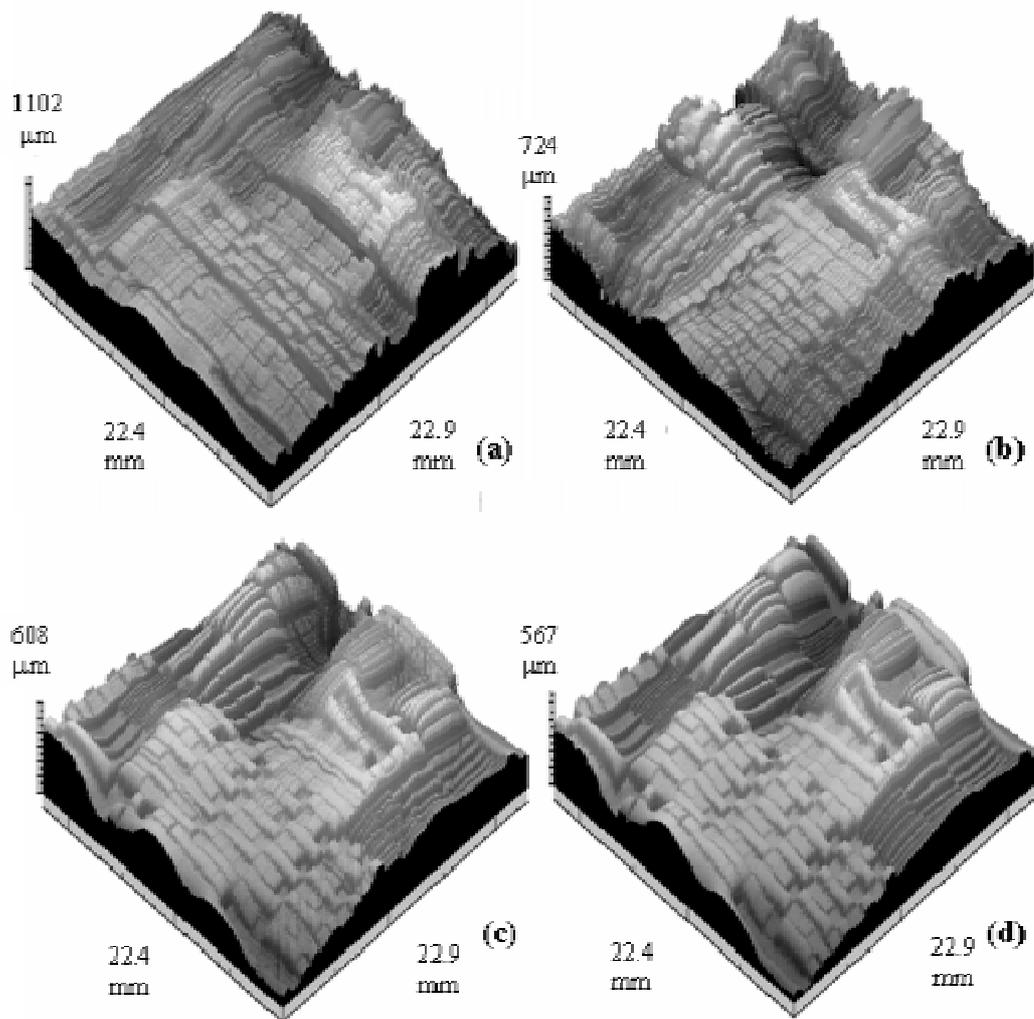


Figura 5.34. Perfil obtenido a partir de las medidas experimentales de la figura 5.32 integrando mediante (a) el método basado en la minimización de la diferencia entre las integrales unidimensionales en cada dirección obtenidas con el método *CS* tomando como origen (a) el origen de la muestra; (b) el centro de la muestra; (c) el método *DFCS* y (d) el método iterativo de Fourier

A continuación se muestra otro ejemplo de una oblea circular de 200 mm de diámetro que se ha medido con el reciente prototipo **FOS** construido y la integración se ha realizado en un sistema de coordenadas polares. La figura 5.35 muestra las derivadas obtenidas a partir de medidas experimentales y se han representado en un sistema de coordenadas cartesianas. La figura 5.35(a) corresponde a la derivada en la dirección angular y la figura 5.35(b) a la derivada en la dirección radial.

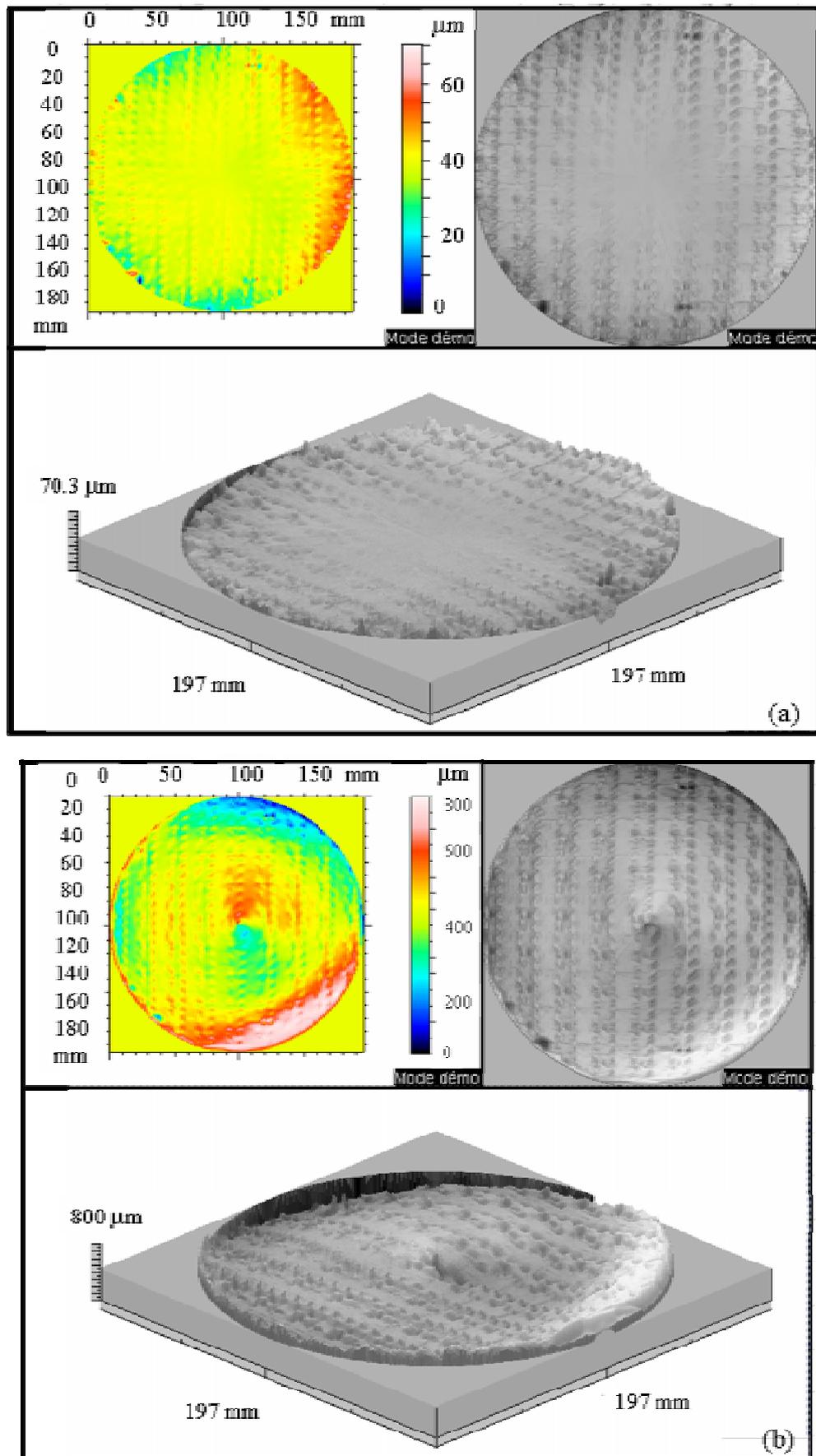


Figura 5.35. (a) Derivada en la dirección angular, (b) derivada en la dirección radial.

La figura 5.36 muestra el perfil obtenido a partir de medidas experimentales aplicando diferentes métodos de integración en coordenadas polares. La figura 5.36(a) y 5.36(b) corresponden al perfil obtenido usando la integración angular y radial mediante el método basado en las “splines” cúbicas respectivamente, *CS_Ang* y *CS_Rad*. De las figuras 5.36(a) y 5.36(b) se observa que los errores se propagan a lo largo del ángulo y del radio en forma de líneas angulares y radiales respectivamente. La figure 5.36(c) corresponde al perfil obtenido aplicando el método basado en las diferencias finitas (método *DFCS*); se aprecia cómo los detalles son más visibles y el error no se propaga. La máxima altura es diferente para los diferentes perfiles obtenidos debido a la diferencia en el valor de la constante de integración obtenido en cada método. Así, el *DFCS* es el método que proporciona una constante de integración inferior a la que ofrecen los otros dos métodos (figuras 5.36(a) y (b)).

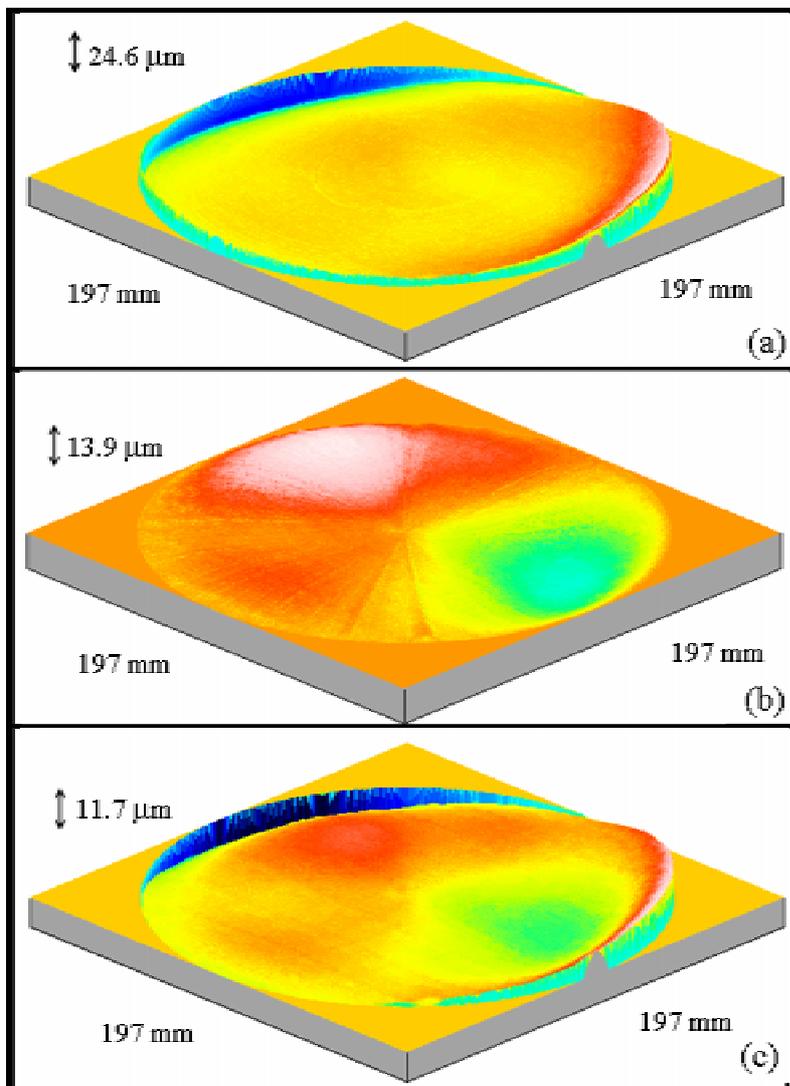


Figura 5.36. Perfil obtenido a partir de medidas experimentales con: (a) el método *CS_Rad*, (b) el método *CS_Ang* y (c) el método *DFCS*.

Finalmente, a modo de resumen, en la tabla 5.1 se recogen las características técnicas de los aparatos descritos; se recogen las especificaciones más importantes del modelo **FOS** de **Trioptics Gmb**, el modelo **AMS** del **PTB** y el modelo **AMS** de **Trioptics Gmb** que todavía está en fase preliminar y las especificaciones que se indican son las esperadas.

	FOS (Trioptics Gmb)	AMS (PTB)	AMS (Trioptics Gmb)
Fuente de iluminación	Diode Laser, $\lambda=655$ nm, 5 mW	Halogen, 150 W, 15 V	Halogen, 150 W, 15 V
Tamaño del haz láser	~ 0.7 mm	4 mm	4 – 6 mm
Área de medida	ϕ 300 mm	300 x 300 mm ²	600 x 1000 mm ²
Resolución lateral de muestreo	0.2 mm	4 mm	4 mm
Rango dinámico de las pendientes	~ 5 mrad	~ 3.5 mrad	~ 3 mrad
Resolución de las pendientes	~ 2 μ rad	~ 0.3 μ rad	~ 0.25 μ rad
Rango de altura	185 μ m ^(a) ~ 5 nm ^(b)	130 μ m ^(a) ~ 0.75 nm ^(b)	~ 20 μ m
Tiempo de medida	< 2 min.	45 min.	30 min.

Tabla 5.1. Especificaciones técnicas de los modelos **FOS** y **AMS**. (a) Con una muestra de 300 mm de diámetro, (b) obtenido a lo largo de un perfil de 20 mm.

Capítulo 6. Aplicación de la integración numérica en un sensor Shack-Hartmann

Una vez estudiados los métodos de integración y su aplicación en la reconstrucción de superficies en el campo de la deflectometría óptica, dedicamos el presente capítulo a otra posibilidad de caracterizar superficies ópticas. Se trata de hacer incidir un frente de ondas sobre la superficie a caracterizar para medir la fase del haz láser transmitido o reflejado mediante un sensor de Shack-Hartmann. El sensor de Shack-Hartmann es un dispositivo formado por una serie de microlentes que dividen el frente de onda incidente en un número de subfrentes en función del número de lentes. Cada lente forma una imagen en una matriz de detectores situados a la distancia focal de dichas lentes. Midiendo la separación entre la posición de los puntos luminosos del frente de ondas que se transmite al incidir sobre la superficie y un frente de ondas plano, se obtiene información del ángulo de inclinación del frente de ondas que caracteriza la superficie respecto al frente de ondas plano. Así, la posición de dichos puntos contiene información de las pendientes del frente de onda. De esta manera, aplicando los métodos de integración desarrollados en este trabajo, se determina el frente de ondas que se transmite por la superficie obteniendo información de la superficie óptica. En el primer apartado se describe con detalle el dispositivo de Shack-Hartmann. Seguidamente se explica la puesta en marcha de este sensor de frente de ondas

describiendo el problema de dos de sus importantes características opuestas, el rango dinámico y la sensibilidad. Así, se resuelve el problema mediante el diseño de una red de calibración variable basada en los polinomios de Zernike para pupilas circulares y de Legendre para pupilas rectangulares; y también se estudia cómo clasificar los píxeles situados en la región de interés. Finalmente, el último apartado se dedica a describir un experimento en el que se mide la derivada de una fase mediante el sensor de Shack-Hartmann, introducida a través de una pantalla de cristal-líquido.

6.1. El sensor de Shack-Hartmann

Un dispositivo Shack-Hartmann consiste en una matriz de microlentes y un detector, en nuestro caso una cámara CCD (del inglés, “Charge Coupled Device”), situada a la distancia focal de las lentes tal y como se representa en la figura 6.1. En negro se ha representado un frente de ondas plano mientras que en azul se indica el frente de ondas problema (frente de ondas que se transmite al incidir sobre la superficie óptica que se desea caracterizar). Al llegar a la pupila del sistema, ambos frentes de onda se dividen en frentes de onda locales o subfrentes debido al conjunto de microlentes [Prim03]; en el caso del frente de ondas plano, los subfrentes serán planos y con la misma dirección de propagación; y en el caso del frente de ondas distorsionado, los subfrentes también se verán afectados por la aberración introducida por la superficie y con diferentes direcciones de propagación. Los diferentes subfrentes se focalizan separadamente en el plano focal de las lentes donde se coloca la cámara CCD para detectar la imagen del conjunto de los puntos luminosos generados.

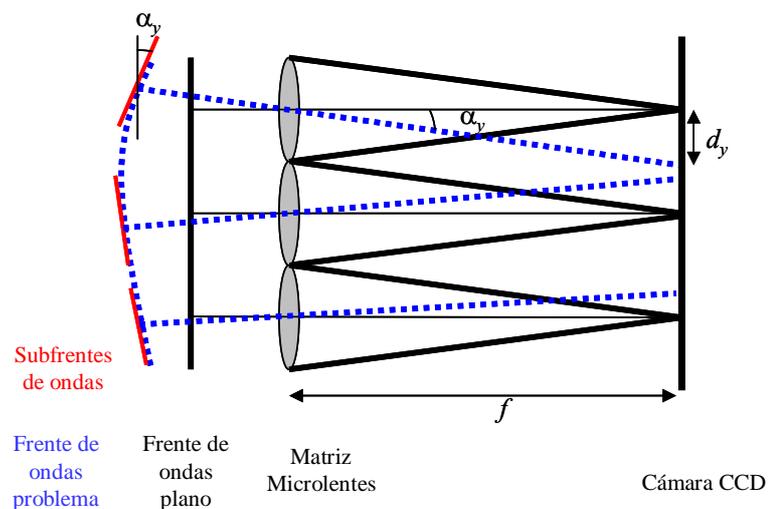


Figura 6.1. Principio teórico del sensor Shack-Hartmann. El esquema está realizado en 1D, aunque el desplazamiento puede producirse en los dos ejes.

Para conocer el frente de ondas problema se compara el patrón de puntos luminosos generado por dicho frente, con el patrón generado por el frente de ondas plano. Los subfrentes problema y de referencia inciden con un ángulo diferente en cada una de las microlentes que forman la matriz. De esta manera, los puntos luminosos correspondientes a los subfrentes de onda problema están desplazados lateralmente respecto a los puntos luminosos asociados a los subfrentes de ondas de referencia. Como cada una de las lentes focaliza por separado [Yoo96], si se observara una única lente del conjunto, la posición del punto luminoso asociado a los subfrentes problema y de referencia en el plano focal de la lente sería diferente debido a la aberración del frente de ondas problema respecto al de referencia.

Los desplazamientos relativos d_x y d_y , de cada una de las posiciones de los puntos luminosos problema se relacionan con los ángulos de incidencia α_x y α_y que forman los subfrentes problema con los de referencia:

$$\tan(\alpha_x) = \frac{d_x}{f}; \quad \tan(\alpha_y) = \frac{d_y}{f} , \quad (6.1)$$

donde f es la distancia focal de las microlentes. Por tanto, midiendo los desplazamientos d_x y d_y se obtiene la tangente de los ángulos de inclinación α_x y α_y que a su vez se relaciona con la pendiente del frente de ondas problema. Por tanto, aplicando la integración numérica se determina el frente de ondas desconocido.

Si denominamos $W(x, y)$ a la función que describe matemáticamente el frente de ondas problema, los desplazamientos d_x y d_y se pueden interpretar como el gradiente de un campo vectorial bidimensional discreto de derivadas parciales de la función frente de ondas $W(x, y)$ a determinar. Por tanto, el frente de ondas se reconstruye integrando numéricamente las pendientes de los subfrentes de onda obtenidas a partir de las medidas de los desplazamientos; de esta manera se obtiene la función escalar bidimensional $W(x, y)$ que representa matemáticamente el frente de onda problema que da información de cómo es la superficie óptica que se desea caracterizar.

6.2. Inicialización del sensor de Shack-Hartmann

Como se ha mencionado anteriormente, cada lente focaliza el subfrente de ondas que le llega sobre el detector CCD situado en su plano focal. Para cada lente lo que se obtiene es la imagen difraccional del frente de ondas aberrado. Esta imagen consiste en una distribución de luz más o menos compacta dependiendo no de la abertura y focal de la lente sino de la aberración del frente de ondas. Una inclinación del subfrente de ondas, correspondiente a una fase lineal origina un desplazamiento de la imagen dada por la lente; es este desplazamiento la medida que se ha de realizar, y por tanto es uno de los puntos cruciales del sensor del frente de ondas. Se puede mostrar que el centroide (centro de masas) de la imagen difraccional es una buena medida de su posición y que su desplazamiento depende de la inclinación promedio del subfrente de ondas. La posición del centroide viene dada por:

$$(\rho_x)_{i,j} = \frac{\sum_{(n,m) \in R_{ij}} I_{nm} n}{\sum_{(n,m) \in R_{ij}} I_{nm}}; \quad (\rho_y)_{i,j} = \frac{\sum_{(n,m) \in R_{ij}} I_{nm} m}{\sum_{(n,m) \in R_{ij}} I_{km}}, \quad (6.2)$$

donde los índices n,m hacen referencia a los píxeles, $I_{n,m}$ a la intensidad obtenida en el píxel situado en n,m . La suma se realiza a lo largo de todos los píxeles de una región R_{ij} . La suma no se puede extender a todos los píxeles del detector CCD ya que por cada una de las lentes tenemos una focalización diferente, así tenemos que limitar la suma a la región de focalización de la lente correspondiente. La determinación de esta región es uno de los mayores problemas técnicos que hay que resolver.

La figura 6.2 muestra una simulación correspondiente al caso más sencillo en el que un frente de ondas plano incide de manera perpendicular sobre el sensor de Hartman-Sach. Cada una de las lentes focalizará el subfrente correspondiente que también es un frente de ondas plano; así, sobre el detector tendríamos una distribución regular de imágenes difraccionales equiespaciadas (suponemos que las lentes de la matriz de lentes están equiespaciadas). En la figura 6.2(a) se muestra la distribución de intensidad que se obtendría en el plano del CCD cuando se ilumina el sensor de Shack-Hartmann con un frente de ondas plano. En la figura 6.2(b) se ha dibujado la red que delimitará las regiones asociadas a cada una de las microlentes que componen el sensor de Shack-

Hartmann. Aplicando las expresiones 6.2 a cada una de estas regiones se obtiene el conjunto de centroides $\left[(\rho_x)_{i,j}, (\rho_y)_{i,j} \right]_{\text{Ref}}$ que constituirán los centroides de referencia respecto a los cuales se medirán los desplazamientos que se producen al cambiar el frente de ondas incidente.

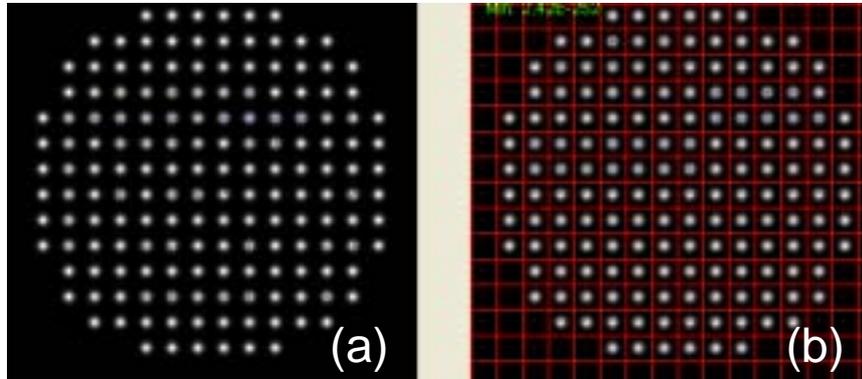


Figura 6.2. (a) Simulación de lo que se captaría con un sensor de Shack-Hartmann al incidir un frente de onda plano. (b) Red que delimita las regiones asociadas de cada una de las microlentes que forman el detector del sensor.

Una vez obtenidos los centroides correspondientes al caso de un frente de ondas incidente perfectamente plano y definida la red que delimita cada una de las microlentes del sensor, ya se puede estudiar el caso de un frente de ondas problema que se quiere medir. Ahora, el frente de ondas que llega al sensor presenta las aberraciones que introduce la superficie óptica a determinar; por tanto se obtiene un nuevo patrón de puntos luminosos que se desvían respecto al patrón obtenido mediante un frente de ondas perfectamente plano. Seguidamente, se procede al cálculo de los centroides del nuevo patrón mediante (6.2) y se calculan los desplazamientos d_x y d_y para cada uno de los rectángulos según:

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} \rho_x - (\rho_x)_{\text{Ref}} \\ \rho_y - (\rho_y)_{\text{Ref}} \end{bmatrix}_{ij} \quad (6.3)$$

donde ρ_x y ρ_y son las posiciones de los centroides de la imagen correspondiente al frente de ondas procedente de la superficie a determinar. Conocidos los desplazamientos se obtiene información de los ángulos de inclinación entre el frente de ondas incógnita y el perfectamente plano. La tangente de estos ángulos se relaciona con las pendientes de los diferentes subfrentes de onda generados por cada microlente de la matriz. Aplicando los diferentes métodos de integración presentados en este trabajo se obtiene de manera

rápida y precisa el frente de ondas procedente de la superficie y por tanto, se obtiene información de cómo es dicha superficie.

6.2.1. Rango dinámico y sensibilidad

Dos importantes características de este sensor de frente de onda son su rango dinámico y su sensibilidad. El rango dinámico hace referencia al conjunto de valores (valor máximo y mínimo) que pueden tomar las variaciones angulares (α_x, α_y) ; mientras que la sensibilidad hace referencia a la capacidad de medir pequeñas variaciones angulares α_x, α_y . De las expresiones (6.1) junto con las limitaciones $(d_x, d_y)_{\text{maximos}}$ de las regiones donde se calculan los centroides explicados anteriormente, se concluye la imposibilidad de tener un amplio rango dinámico y una buena sensibilidad simultáneamente. Uno de los primeros factores limitantes de la sensibilidad angular es el tamaño de los píxeles de la cámara CCD, cuanto menor sea la dimensión de los píxeles, mayor será la sensibilidad angular, ya que se podrán detectar desplazamientos (d_x, d_y) menores.

Sea una cámara CCD con unas dimensiones (Lc_x, Lc_y) , y un número de lentes (Nl_x, Nl_y) . Las dimensiones de cada celdilla, y por tanto, de los desplazamientos vendrán dados por:

$$(d_x, d_y)_{\text{maximos}} = \left(\frac{Lc_x}{Nl_x}, \frac{Lc_y}{Nl_y} \right) . \quad (6.4)$$

En estas condiciones, el rango dinámico angular vendrá limitado por la focal de las lentes: $(\tan(\alpha_x), \tan(\alpha_y))_{\text{maximos}} = (d_x, d_y)_{\text{maximos}} / f$. Cuanto menor sea la focal f mayor será el rango dinámico. Como el desplazamiento lineal (d_x, d_y) de las imágenes viene dado por $(d_x, d_y) = f (\tan(\alpha_x), \tan(\alpha_y))$, para un desplazamiento angular (α_x, α_y) , cuanto menor sea la focal f , menor será el desplazamiento lineal (d_x, d_y) , esto implica una disminución de la sensibilidad, ya que para obtener el desplazamiento lineal mínimo detectable, se necesitará un mayor desplazamiento angular. Vemos pues que sensibilidad y rango dinámico son dos factores opuestos.

Para poder determinar el desplazamiento de las imágenes dadas por las lentes es necesaria, en primer lugar, la obtención de una buena correspondencia uno a uno entre

cada imagen y la lente que la produce. Es por ello que dividimos el detector en una red regular de rectángulos cuyas dimensiones vienen dados por la ecuación (6.4) situados cada uno de ellos en frente de cada una de las lentes. En la figura 6.3 se ha dibujado una de las lentes (L_1) y el rectángulo del detector CCD que le corresponde (Z_1). Un frente de ondas plano perpendicular al eje de la lente (en negro en la figura 6.3) focalizará en el centro del rectángulo Z_1 (punto negro). Si el subfrente de ondas que llega a la lente tiene una inclinación promedio α_A (en azul) la imagen se desplazará una distancia d_A . Cuanto mayor sea la inclinación, mayor será el desplazamiento. En la figura 6.3 se ha dibujado en rojo la inclinación máxima α_{max} , la imagen se saldrá del rectángulo asociado a la lente L_1 y se asociará a la lente siguiente produciéndose un error en la determinación del desplazamiento correspondiente. Por esta razón es muy importante encontrar la correcta correspondencia entre las microlentes L_i y sus correspondientes rectángulos Z_i ya que de este modo se determinarán correctamente los desplazamientos que sufren los puntos asociados al frente de ondas distorsionado por la superficie óptica a determinar.

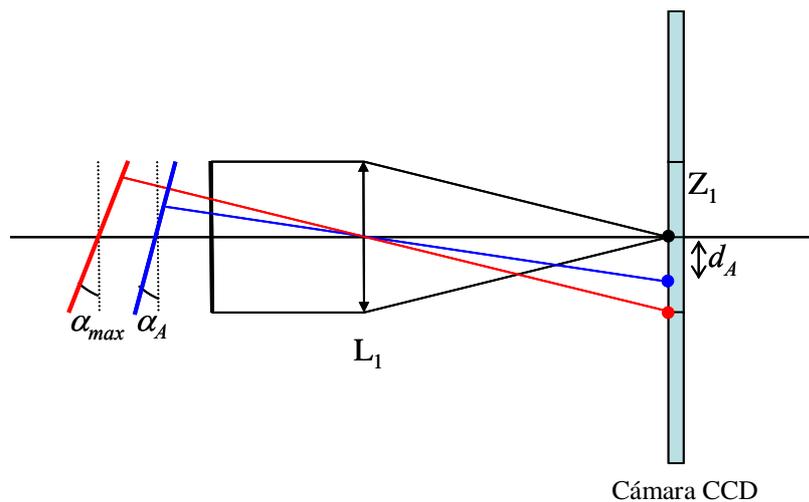


Figura 6.3. Esquema de la definición de rango dinámico.

En el caso de tener un frente de ondas incidente ligeramente aberrado, la imagen captada correspondería a una matriz de puntos casi equidistantes tal y como se muestra en la figura 6.4(a); de la que se aprecia que los puntos centrales están equiespaciados y sin embargo los extremos pierden esa regularidad e incluso caen fuera de su rectángulo correspondiente a la microlente. También aparece la red de calibración formada por un conjunto uniforme de rectángulos obtenidos fácilmente tras el cálculo de los centroides de cada una de los puntos luminosos de la imagen. En este caso, no hay ningún problema a la hora de determinar la correspondencia uno a uno entre los puntos

luminosos y las lentes ya que el frente de ondas está ligeramente aberrado. El problema surge al incidir con un frente de ondas fuertemente distorsionado al atravesar la superficie óptica que se desea caracterizar. La figura 6.4(b) muestra una simulación en la que el frente de ondas que llega al detector del sensor de Shack-Hartmann es fuertemente distorsionado. Se aprecia cómo los puntos luminosos no caen en las zonas previamente asignadas del detector separándose del patrón de rectángulos obtenido mediante un frente de ondas perfectamente plano. En esta simulación, se puede apreciar cómo en las regiones del centro del detector caen más de un punto luminoso mientras que en los extremos del detector, hay rectángulos en las que no cae ningún punto. Por tanto, no hay una correcta correspondencia entre las microlentes y los rectángulos de manera que la calibración no es muy adecuada para el posterior cálculo de los desplazamientos d_x y d_y .

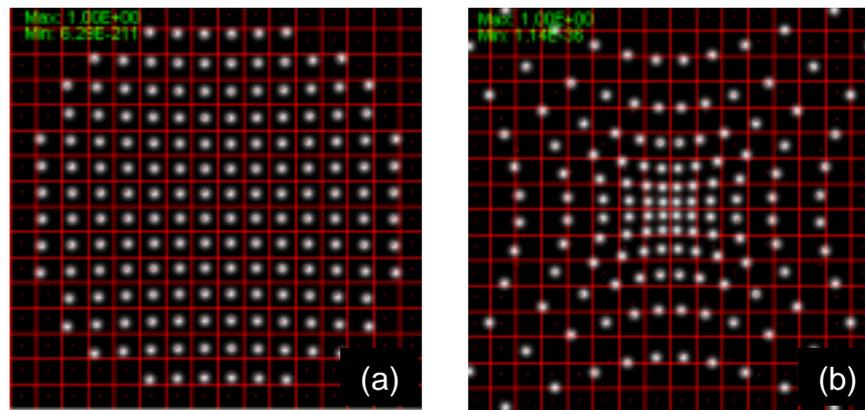


Figura 6.4. Simulación de lo que se captaría mediante el sensor de Shack-Hartmann con un frente de onda incidente: (a) ligeramente aberrado y (b) fuertemente aberrado.

Una de las aplicaciones del sensor de Shack-Hartmann es la del control de calidad de superficies, por ejemplo, superficies esféricas. En este caso, el frente de ondas que viene de la superficie no será plano, sin embargo, sí sufrirá pequeñas desviaciones respecto al frente de ondas de referencia que represente a la superficie ideal. En realidad la calidad de la superficie vendrá dada por las desviaciones respecto al frente de ondas ideal, que se suponen pequeñas. Si se pretende medir la fase absoluta, es decir, la desviación respecto a un frente de ondas plano, nos encontraremos con el problema descrito anteriormente, en el que si el rango dinámico de la señal a medir es muy grande, las imágenes se saldrán de la red de calibración. Así pues, lo que proponemos es la medición de la desviación del frente de ondas respecto al ideal, que se toma como referencia. En este caso el rango dinámico de las desviaciones es mucho menor y se

podrán medir. Para ello proponemos el uso de una red de rectángulos variable, cuya distancia no permanezca constante, sino que se adapte al frente de ondas de referencia. Para resolver este problema hemos desarrollado una red de calibración variable basada en los polinomios de Zernike para pupilas circulares y en los de Legendre para pupilas rectangulares; así, en función de la superficie a determinar, se construye una red que permitirá medir posibles desviaciones de superficies idénticas originadas por posibles defectos de fabricación. Así pues, resulta muy útil para la línea de producción pues resulta ser un criterio para determinar la calidad de fabricación de dichos elementos ópticos.

Los polinomios de Zernike forman una base ortogonal en el círculo unidad, mientras que los de Legendre lo son en una pupila cuadrada de lado unidad. Así, cualquier frente de ondas puede describirse a partir de una combinación lineal de estos polinomios. De esta manera, podemos desarrollar una red de calibración variable según el frente de ondas de referencia. Para ello se procede de la siguiente manera: el frente de ondas que se transmite al incidir sobre la superficie a determinar incide sobre la matriz de microlentes y se capta la imagen. Por otro lado se van variando los coeficientes de la combinación lineal de polinomios y a partir de ella los centros en los rectángulos de la red irregular. Se varía el número de polinomios y sus coeficientes hasta que en cada rectángulo de la red de calibración caiga una y sólo una de las imágenes formadas por la matriz de lentes. Cuando esto se consigue, se obtiene la red de calibración inicial. En la figura 6.5 se muestran tres simulaciones que corresponden a tres combinaciones de polinomios de Zernike diferentes. Se muestran la distribución de puntos luminosos obtenidos y la red de calibración obtenida. Se puede ver que se pueden obtener redes irregulares de diferente forma, en la que las distancias entre rectángulos son variables. Esto implica que las anchuras de estos rectángulos también lo son. Los límites entre los rectángulos se han tomado igual al punto medio entre los centroides de las imágenes teóricas. Esta anchura limitará el desplazamiento en las imágenes pero ahora es el desplazamiento respecto al frente de ondas ideal el que se toma como referencia.

Una vez obtenida la red de rectángulos teórica, correspondiente a una combinación lineal de polinomios, el proceso de medida se realiza de la siguiente manera. Se capta la imagen dada por el sensor. Dentro de cada rectángulo de la red se busca el valor máximo y centrado en este punto se traza otro rectángulo de anchura dada. Dentro de

este rectángulo se busca la posición del centroide y se determina el desplazamiento respecto a las imágenes dadas por el frente de ondas patrón. Si se quiere calcular el frente de ondas absoluto, a los desplazamientos medidos se les suma la posición de los centros dados por el polinomio de referencia, y se pasa al proceso de integración. Si solamente se quieren medir las diferencias respecto al frente de ondas patrón, en la integración se utilizarán directamente los desplazamientos medidos. Mediante la utilización de este método se ha aumentado el rango dinámico absoluto del sensor sin disminuir su sensibilidad.

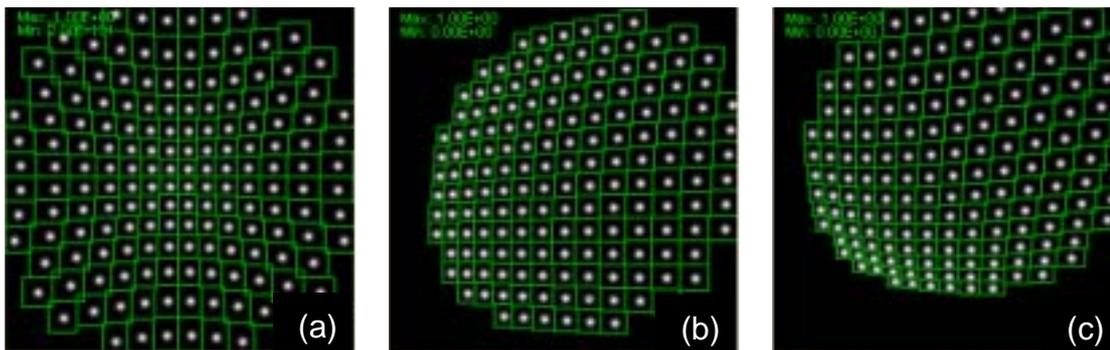


Figura 6.5. Simulaciones de diferentes frentes de onda distorsionados con su red de calibración calculada mediante el ajuste de los polinomios de Zernike.

6.2.2. Ajuste de un frente de ondas mediante polinomios de Zernike

Los efectos de las aberraciones en los sistemas ópticos pueden describirse matemáticamente a partir de la expansión en serie de una función de aberración W [Bor75]. En general, los sistemas ópticos presentan simetría circular de manera que es conveniente expandir la función W en términos de un conjunto completo de polinomios ortogonales en un círculo de radio unidad. La base de polinomios más adecuada para dicha expansión son los polinomios de Zernike ya que están relacionados con las aberraciones clásicas utilizadas en óptica.

Los polinomios de Zernike $Z_n^l(\rho, \theta)$ son polinomios de variables reales (ρ, θ) , que forman un conjunto completo de polinomios ortogonales en el interior de un círculo unidad donde n y l son números enteros pares o impares tales que $n \geq 0$, $n \geq |l|$, y $n - |l|$ es impar. La ortogonalidad y las propiedades de normalización vienen dadas por:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l Z_n^l(\rho, \varphi) Z_n^l(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{n+l} \delta_{nm} \delta_{ll'} \quad , \quad (6.5)$$

donde δ es la delta de Kronecker. Definiendo un nuevo índice m como $m = \frac{(n-l)}{2}$ los polinomios de Zernike se pueden escribir según:

$$Z_n^l(\rho, \theta) = R_n^l(\rho) \begin{bmatrix} \sin(l\theta) \\ \cos(l\theta) \end{bmatrix} = R_n^{n-2m}(\rho) \begin{bmatrix} \sin((n-2m)\theta) \\ \cos((n-2m)\theta) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

donde la función seno es válida cuando $n-2m > 0$ y la función coseno cuando $n-2m \leq 0$ y $R_n^l(\rho, \theta)$ es un polinomio radial que se define mediante la siguiente expresión:

$$R_n^{n-2m}(\rho) = R_n^{-(n-2m)}(\rho) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} \rho^{n-2s} \quad (6.7)$$

Los polinomios de Zernike pueden definirse mediante un único índice T, que según la representación ISO viene dado por:

$$T = \frac{n(n+l)}{2} + m \quad , \quad (6.8)$$

de manera que $Z_n^l(\rho, \theta) = Z_T(\rho, \theta)$. En la Tabla 6.1 se recogen los primeros polinomios de Zernike según los índices n , l y se indica el tipo de aberración óptica que representan.

Término	n	l	m	Polinomio	
0	0	0	0	1	Pistón
1	1	1	0	$\rho \cos(\theta)$	Inclinación sobre el eje y
2	1	-1	1	$\rho \sin(\theta)$	Inclinación sobre el eje x
3	2	0	1	$2\rho^2-1$	Desenfoque
4	2	2	0	$\rho^2 \cos(2\theta)$	Astigmatismo con el eje a 0° o 90°
5	2	-2	2	$\rho^2 \sin(2\theta)$	Astigmatismo con el eje a $+45^\circ$
6	3	1	1	$(3\rho^2-2)\rho \cos(\theta)$	Coma primaria en el eje y
7	3	-1	2	$(3\rho^2-2)\rho \sin(\theta)$	Coma primaria en el eje x
8	4	0	2	$6\rho^4-6\rho^2+1$	Aberración esférica primaria
9	3	3	0	$\rho^3 \cos(3\theta)$	
10	3	-3	3	$\rho^3 \sin(3\theta)$	
11	4	2	1	$(4\rho^2-3)\rho^2 \cos(2\theta)$	
12	4	-2	3	$(4\rho^2-3)\rho^2 \sin(2\theta)$	
13	5	1	2	$(10\rho^4-12\rho^2+3)\rho \cos(\theta)$	
14	5	-1	3	$(10\rho^4-12\rho^2+3)\rho \sin(\theta)$	
15	6	0	3	$20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1$	
16	4	4	0	$\rho^4 \cos(4\theta)$	
17	4	-4	4	$\rho^4 \sin(4\theta)$	
18	5	3	1	$(5\rho^2-4)\rho^3 \cos(3\theta)$	
19	5	-3	4	$(5\rho^2-4)\rho^3 \sin(3\theta)$	
20	6	2	2	$(15\rho^4-20\rho^2+6)\rho^2 \cos(2\theta)$	
21	6	-2	4	$(15\rho^4-20\rho^2+6)\rho^2 \sin(2\theta)$	
22	7	1	3	$(35\rho^6-60\rho^4+30\rho^2-4)\rho \cos(\theta)$	
23	7	-1	4	$(35\rho^6-60\rho^4+30\rho^2-4)\rho \sin(\theta)$	
24	8	0	4	$70\rho^8-140\rho^6+90\rho^4-20\rho^2+1$	
25	5	5	0	$\rho^5 \cos(5\theta)$	
26	5	-5	5	$\rho^5 \sin(5\theta)$	
27	6	4	1	$(6\rho^2-5)\rho^4 \cos(4\theta)$	
28	6	-4	5	$(6\rho^2-5)\rho^4 \sin(4\theta)$	
29	7	3	2	$(21\rho^4-30\rho^2+10)\rho^3 \cos(3\theta)$	
30	7	-3	5	$(21\rho^4-30\rho^2+10)\rho^3 \sin(3\theta)$	
31	8	2	3	$(56\rho^6-105\rho^4+60\rho^2-10)\rho^2 \cos(2\theta)$	
32	8	-2	5	$(56\rho^6-105\rho^4+60\rho^2-10)\rho^2 \sin(2\theta)$	
33	9	1	4	$(126\rho^8-280\rho^6+210\rho^4-60\rho^2+5)\rho \cos(\theta)$	
34	9	-1	5	$(126\rho^8-280\rho^6+210\rho^4-60\rho^2+5)\rho \sin(\theta)$	
35	10	0	5	$252\rho^{10}-630\rho^8+560\rho^6-210\rho^4+30\rho^2-1$	

Tabla 6.1. Los 36 primeros polinomios de Zernike ordenados según la representación ISO.

Una vez descritos los polinomios de Zernike, los utilizamos para ajustar un frente de ondas. Sea W el frente de ondas que se desea caracterizar; se supone que se ha muestreado en una serie de puntos de medición. Dicho frente de ondas se descompone en una combinación lineal de polinomios de Zernike Z_T , teniendo en cuenta la notación de un único índice T. La descomposición se puede escribir como:

$$W = \sum_T c_T Z_T \quad , \quad (6.9)$$

donde c_T son los coeficientes de la combinación. La proyección del frente de ondas original W sobre un polinomio de Zernike Z_R vendrá dada por:

$$\langle W, Z_R \rangle = \sum_T c_T \langle Z_T, Z_R \rangle . \quad (6.10)$$

Debido a que los polinomios de Zernike dejan de ser ortogonales cuando son muestreados o representados de manera discreta, se da la condición de $\langle Z_T, Z_R \rangle \neq \delta_{T,R}$. Los coeficientes c_T se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones lineal (6.10) que se escribe en forma matricial según:

$$\vec{p} = M \vec{c} , \quad (6.11)$$

donde M representa la matriz de los elementos $M_{T,R}$, definidos como $M_{T,R} = \langle Z_T, Z_R \rangle$, \vec{p} el vector cuyas componentes viene dadas por $p_R = \langle W, Z_R \rangle$ y \vec{c} el vector formado por los coeficientes de la combinación lineal c_T . Por tanto, la solución se obtiene mediante:

$$\vec{c} = (M)^{-1} \vec{p} . \quad (6.12)$$

A continuación se procede al ajuste por polinomios de Zernike de las derivadas del frente de ondas a determinar contenidas en las imágenes captadas por el sensor de Shack-Hartmann.

Sean W_x y W_y las derivadas parciales obtenidas a partir de los desplazamientos medidos de la imagen captada por el sensor. Si el frente de ondas W se puede describir según la ecuación (6.9), sus derivadas se pueden escribir mediante una combinación lineal de las derivadas de los polinomios de Zernike según:

$$\begin{aligned} W_x &= \sum_T c_T (Z_T)_x \\ W_y &= \sum_T c_T (Z_T)_y , \end{aligned} \quad (6.13)$$

donde $(Z_T)_x, (Z_T)_y$ son las derivadas de los polinomios respecto a x e y .

Las proyecciones de las derivadas sobre las derivadas de un polinomio de Zernike Z_R vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \langle W_x, (Z_R)_x \rangle &= \sum_T c_T \langle (Z_T)_x, (Z_R)_x \rangle \\ \langle W_y, (Z_R)_y \rangle &= \sum_T c_T \langle (Z_T)_y, (Z_R)_y \rangle, \end{aligned} \quad (6.14)$$

que se pueden escribir en forma matricial según:

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= M_x \vec{c} \\ \vec{p}_y &= M_y \vec{c}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde se ha definido M_x y M_y como las matrices formadas por los elementos $(M_{T,R})_x = \langle (Z_T)_x, (Z_R)_x \rangle$, y $(M_{T,R})_y = \langle (Z_T)_y, (Z_R)_y \rangle$, \vec{p}_x el vector cuyas componentes son $p_{Rx} = \langle (W)_x, (Z_R)_x \rangle$, \vec{p}_y vector de componentes $p_{Ry} = \langle (W)_y, (Z_R)_y \rangle$ y \vec{c} el vector formado por los coeficientes c_T de la combinación lineal de los polinomios de Zernike. Sumando las ecuaciones (6.15) se obtiene:

$$(\vec{p}_x + \vec{p}_y) = (M_x + M_y) \vec{c}. \quad (6.16)$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen los coeficientes \vec{c} de la combinación lineal, y evaluando la combinación (6.9) se obtiene el frente de ondas ajustado.

6.2.3. Región de interés, ROI

En muchos casos no toda la región cubierta por la matriz de microlentes es útil debido a que las pupilas de los instrumentos ópticos limitan el frente de ondas a estudiar. Por tanto, la localización de los puntos luminosos debe ser realizada dentro de una región de interés (ROI) a determinar, y en consecuencia, la integración debe realizarse considerando únicamente dicha región. Esta región debe determinarse en el proceso de calibración. Por otro lado, en el proceso de medida puede que alguna lente no dé un resultado fiable debido a la baja intensidad o a otros problemas. Estos puntos tampoco se tomarán en cuenta en la integración. Así, estos puntos también deben eliminarse de la

ROI. En un primer paso ponemos los puntos que pertenecen a la ROI a uno y los que no a cero. En un segundo paso se clasifican los puntos que pertenecen a la ROI según los vecinos que tenga pertenecientes también a la ROI. Así, si se desea clasificar, por ejemplo, el rectángulo *Proi1* de la figura 6.6, se debe comprobar si pertenece o no a la ROI. En caso de que pertenezca, el rectángulo se define cambiando el primer bit del byte que describe el rectángulo en código binario. En caso de que no pertenezca, el byte se pone a cero. Una vez se detecta si los rectángulos pertenecen o no a la ROI se estudian sus rectángulos adyacentes. Si el rectángulo que está justo encima del rectángulo a clasificar pertenece a la ROI, el rectángulo estudiado se clasifica transformando el segundo bit de su correspondiente byte manteniendo el resto de bits intacto, es decir, se suma un valor numérico de 2. Si existe el rectángulo adyacente situado debajo del analizado y pertenece a la ROI, el rectángulo se clasifica cambiando su quinto bit y por tanto sumando 16 a su valor numérico. De la misma manera, si el rectángulo a clasificar tiene uno adyacente a la derecha y a la izquierda, ambos pertenecientes a la ROI, la clasificación se realiza cambiando el cuarto bit y el tercero añadiendo un valor de 4 y 8 al valor numérico respectivamente.

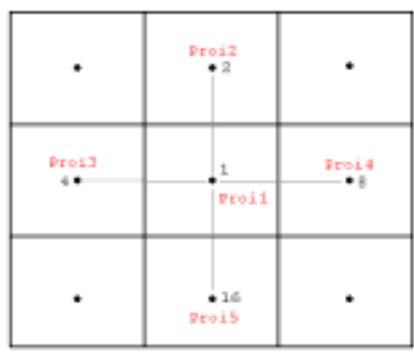


Figura 6.6. Definiciones de los rectángulos de la ROI.

En la integración numérica habrá que tener en cuenta si el punto en cuestión pertenece a la ROI y en caso afirmativo cuál de sus vecinos también pertenece. Así, si se utiliza el método de diferencias finitas sólo se tendrán en cuenta aquellas ecuaciones (3.19) para el método *DFL* o (3.32) para el método *DFCS* del capítulo 3 correspondientes a los puntos vecinos que pertenezcan a la ROI.

6.3. Determinación de la fase de un frente de ondas mediante un sensor de Shack-Hartmann.

Una vez estudiado y calibrado el sensor de Shack-Hartmann, este apartado se centra en la parte experimental realizada con el dispositivo. El propósito es evaluar la aberración de fase introducida electrónicamente por una pantalla de cristal líquido situada antes del sensor de frente de ondas. Las pantallas de cristal líquido han sido muy utilizadas en el procesado de imagen en los últimos años ([Liu85], y [Nic02a] entre otros) gracias a su capacidad de enviar imágenes y a actuar como un modulador espacial de luz programable. En nuestro caso las utilizaremos para cambiar la fase del frente de ondas que se va a medir con el sensor de Shack-Hartmann.

A continuación se describe el montaje experimental realizado y se muestran los resultados obtenidos al enviar a la pantalla de cristal líquido una fase lineal en la dirección x e y y una fase equivalente a una lente.

6.3.1. Montaje Experimental

La figura 6.7 muestra un esquema del montaje experimental realizado. La fuente de luz es un láser de iones de Ar^+ trabajando a una longitud de onda de 458 nm que focaliza en el pinhole de un filtro espacial de luz. Así, el pinhole es la fuente s , de una onda esférica que ilumina una primera lente $L1$ y a continuación una pantalla de cristal líquido LCD (del inglés, “Liquid Cristal Display”) capaz de enviar imágenes electrónicamente. El LCD utilizado se ha extraído de un videoprojector Sony VPL-V500 y es un modelo LCX012BL con resolución VGA (640 columnas \times 480 filas). La pantalla de cristal líquido es el elemento crucial ya que introduce la información de la fase a reconstruir y hace falta utilizarlo de modo que tenga una respuesta de modulación de la luz de sólo amplitud o de sólo fase. La principal dificultad que se encuentra en estos sistemas es desacoplar la respuesta de modulación de fase de la respuesta de modulación de amplitud al aplicar el voltaje, y, además, es necesario que en la respuesta de fase se llegue a una modulación de 0 a 2π . Hemos conseguido estas condiciones a base de utilizar polarizadores lineales y láminas retardadoras colocadas delante y detrás del dispositivo de cristal líquido. Hemos propuesto un modulador espacial ([Mar94], [Mar01], [Nic02b]) compuesto por una pantalla de cristal líquido nemático que tiene delante un polarizador lineal (P1) y una lámina desfasadora (WP1) y tras la pantalla, se

encuentra otra lámina desfasadora (WP2) y una vez que la luz pasa por ésta, otro polarizador lineal (P2). La incorporación de elementos de polarización tales como las láminas retardadoras incrementa los grados de libertad del sistema de modulación y ayuda a optimizar y encontrar regímenes de modulación de sólo amplitud o de sólo fase con un modulador espacial de luz. En este caso, se ha configurado el sistema para que la pantalla de cristal líquido trabaje como un modulador sólo de fase. Finalmente, la luz procedente de la fuente s que ilumina a todo el sistema incide sobre la matriz de microlentes del detector del sensor Shack-Hartmann y se recojen las imágenes mediante la cámara CCD del propio sensor situada a una distancia equivalente a la distancia focal de las microlentes. Concretamente, el sensor empleado en esta experiencia consta de 1024 microlentes colocadas en una matriz cuadrada de 32 X 32 separadas entre sí una distancia de 150 μm y de distancia focal 2 mm.

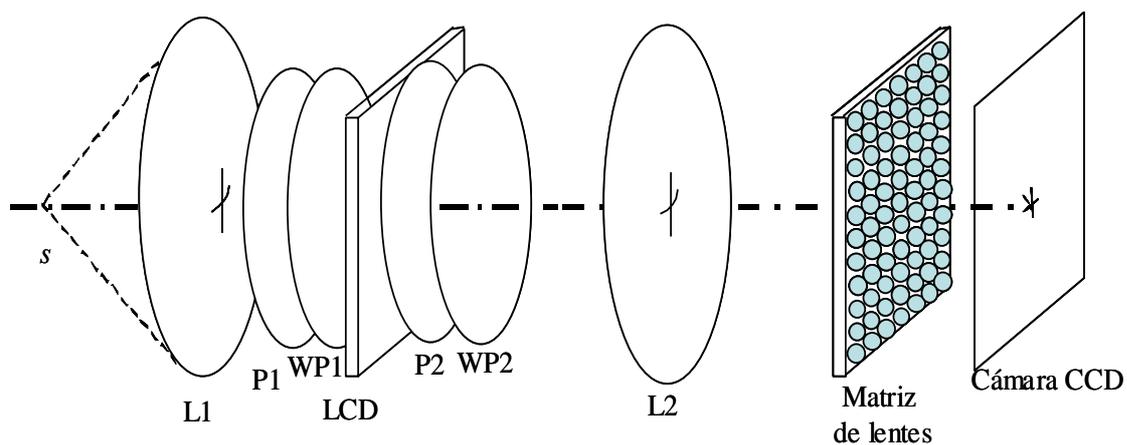


Figura 6.7. Esquema del montaje experimental realizado.

La figura 6.8 corresponde a dos fotografías de los elementos ópticos más importantes del sistema diseñado. La figura 6.8(a) corresponde a la pantalla de cristal-líquido sobre la que se envían imágenes. Se puede apreciar la electrónica que lo permite. La figura 6.8(b) corresponde a la parte detectora del sensor de Shack-Hartmann; se indica dónde se sitúa la matriz de microlentes y la cámara CCD.

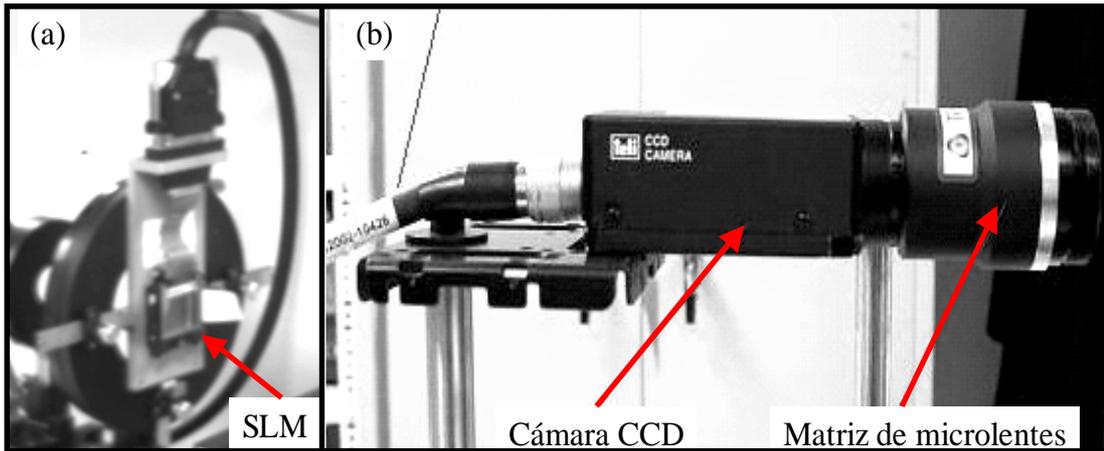


Figura 6.8. (a) Pantalla de cristal líquido SLM sobre la que se envían imágenes electrónicamente; (b) Detector del sensor de Shack-Hartmann en el que se aprecia donde se sitúa la matriz de microlentes y la cámara CCD.

Los experimentos realizados consisten en enviar una imagen conocida a la pantalla de cristal líquido que introduzca la fase que se desea recuperar mediante el sensor de frente de ondas. Así, se han realizado dos experimentos:

- Reconstrucción de una fase lineal en la dirección x e y ,
- Reconstrucción de una fase equivalente a la que introduce una lente.

En los siguientes apartados se describen detalladamente dichos experimentos y se muestran los resultados obtenidos.

6.3.2. Determinación de una fase lineal

El primero de los experimentos consiste en enviar una imagen correspondiente a una fase lineal en la dirección x . Recordemos que en un punto cualquiera, el campo eléctrico de una onda de luz coherente propagándose a lo largo del eje z se describe por una amplitud compleja independiente del tiempo:

$$\vec{E}(x, y) = |\vec{E}(x, y)| \exp\left(i2\pi \frac{\varphi(x, y)}{\lambda}\right), \quad (6.17)$$

donde $\varphi(x, y)$ corresponde a la fase de la luz. Así, la fase lineal enviada a la pantalla de cristal líquido que se pretende recuperar mediante el sensor del frente de ondas es de la forma:

$$\varphi(x, y) = \frac{2a}{N} x \quad \frac{-N}{2} \leq x \leq \frac{N}{2}, \quad (6.18)$$

donde a representa la pendiente de la fase y N el número de píxeles. En la figura 6.9 se muestran las diferentes imágenes enviadas a la pantalla de cristal líquido. Son fases lineales en la dirección x de diferente pendiente, diferente valor de a , generadas analíticamente.

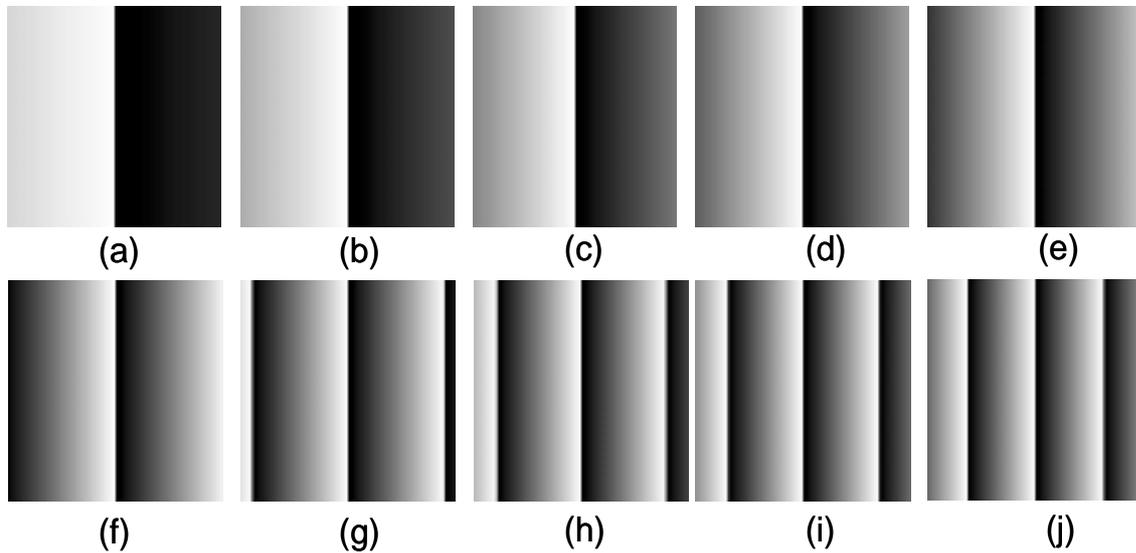


Figura 6.9. Imágenes de las fases lineales en la dirección x generadas analíticamente de pendiente: (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5, (f) 6, (g) 7, (h) 8, (i) 9, y (j) 10.

La figura 6.10 corresponde a la fase lineal recuperada a partir de las imágenes captadas por el sensor de Shack-Hartmann a partir de las cuales se calcula la derivada de la fase. Aplicando el método de integración basado en las diferencias finitas tras una interpolación por “splines” cúbicas de la derivada a integrar se han obtenido las imágenes de la figura 6.10. Cabe notar que no se han aplicado los diferentes métodos de integración presentados ya que no se consigue apreciar diferencias entre ellos a causa de la fuerte influencia del ruido experimental y de la captación entrelazada de la cámara CCD. Es decir, en primer lugar se captan las líneas pares y en un segundo barrido las líneas impares. Al medir en tiempo real se obtiene una imagen que presenta una fuerte discontinuidad entre las líneas pares e impares debido al entrelazado de la captación. Así, los métodos de integración estudiados se comportan de manera similar ya que el ruido presente es muy alto. Este es el motivo por el que no se aprecian diferencias a la hora de aplicar los diferentes métodos; de todos modos, se ha escogido el método de integración basado en las diferencias finitas que emplea la interpolación por “splines” cúbicas, *DFCS*, que es el más rápido y el más preciso después del método ideal de Fourier. A pesar de estos inconvenientes, se aprecia una correcta reconstrucción de la fase aunque no sea una medida altamente precisa.

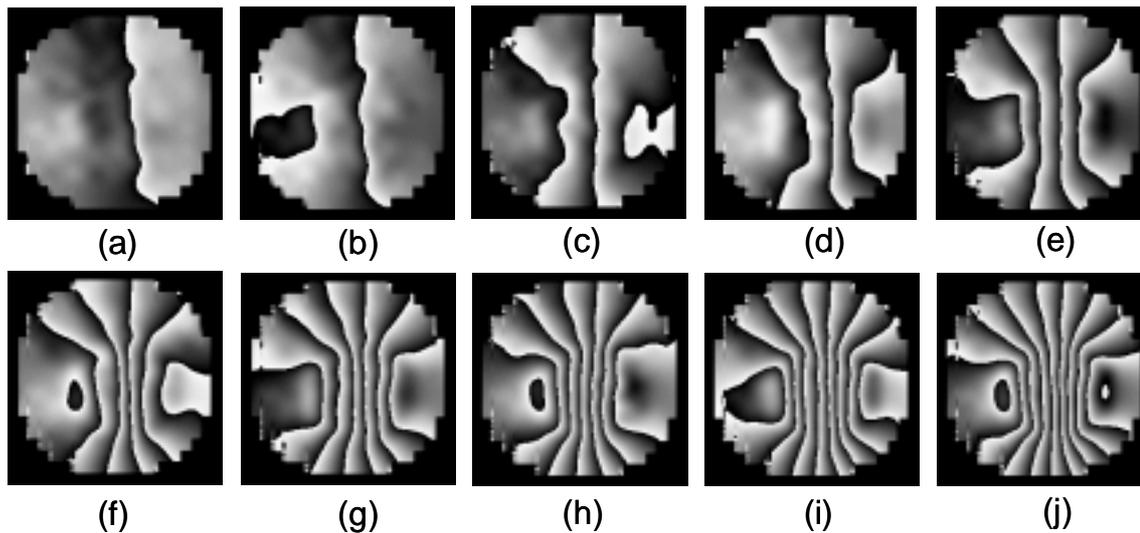


Figura 6.10. Imágenes experimentales obtenidas mediante el sensor de frente de ondas de la reconstrucción de la fase lineal en la dirección x enviada a la pantalla de cristal líquido de pendiente: (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5, (f) 6, (g) 7, (h) 8, (i) 9, y (j) 10.

En la figura 6.10 se puede apreciar que en el centro se reconstruye una fase lineal, mientras que en los bordes de la pupila esta fase se distorsiona debido a las aberraciones que introduce el sistema. Una vez recuperada la fase enviada a través de la pantalla de cristal líquido se ha ajustado mediante una combinación lineal de polinomios de Zernike. De esta manera se puede determinar la precisión de la medición comparando el coeficiente que acompaña al polinomio de Zernike Z_1^1 (ver Tabla 6.1) que describe una fase lineal en la dirección x con la pendiente de la fase lineal enviada a la pantalla de cristal líquido. En la figura 6.11 se representa el coeficiente del polinomio Z_1^1 de orden 1 correspondiente a una inclinación en el eje x en función de la pendiente teórica a de la fase enviada al LCD generada mediante (6.16). Este experimento se ha realizado de manera similar enviando fases lineales en la dirección y . En la figura 6.11 se muestran los resultados obtenidos para los dos casos. De la figura se observa una tendencia lineal y creciente de la correspondencia entre las dos variables que se comparan.

En la figura 6.11 se observa que la tendencia creciente es diferente según la dirección siendo menor para la dirección x . Esto es debido a la electrónica del LCD que permite reproducir la imagen que se le envía. En [Mar05] se demuestra que la modulación en fase depende de la frecuencia espacial de la imagen enviada al LCD a lo largo de la dirección horizontal mientras que en la dirección vertical, no hay esta dependencia. Esto hace que la imagen enviada al LCD no se reproduzca satisfactoriamente en la dirección x teniendo una reducción de la eficiencia óptica del elemento difractivo enviado al

LCD. Esto es lo que se comprueba en la figura 6.11 en la que se ve que la fase obtenida en la dirección x es menor que la obtenida en la dirección y .

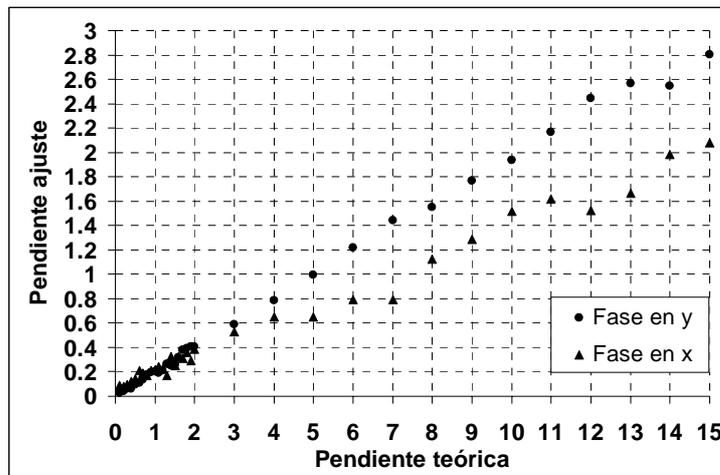


Figura 6.11. Coeficiente asociado a los polinomios de Zernike que describen una fase lineal en la dirección x e y en función de la pendiente de la fase teórica enviada al LCD.

6.3.3. Determinación de una fase cuadrática

El segundo experimento consiste en la determinación de una fase introducida por una lente. Es conocido que la fase introducida por una lente de focal f en la aproximación paraxial viene dada por:

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{f} \quad (6.17)$$

es decir, es una fase cuadrática en las dos direcciones x e y . La figura 6.12 muestra la fase generada analíticamente enviada a través del LCD. Las figuras 6.12(a) y (b) corresponden a la fase que introducen unas lentes de focal 500mm y -500 mm respectivamente; mientras que la figura 6.12(c) representa la fase que genera una lente de -1000 mm de focal.

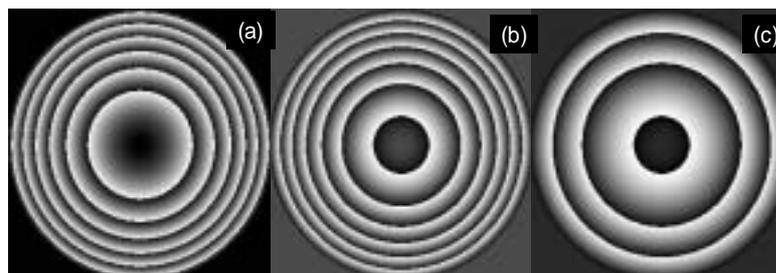


Figura 6.12. Imágenes generadas analíticamente y enviadas al LCD correspondientes a la fase que introducen unas lentes de focal (a) 500 mm, (b) -500 mm y (c) -1000 mm.

La figura 6.13 corresponde al frente de ondas obtenido a partir de las medidas experimentales a partir de las cuales se obtiene su derivada sobre la que ha aplicado el método *DFCS* y la interferencia entre dicho frente y un frente de ondas plano. Las figuras 6.13(a)-(c) corresponden a la reconstrucción del frente de ondas introducido mediante la pantalla de cristal líquido correspondiente a la lente de focal 500mm, -500 mm y 1000 mm respectivamente. Las figuras 6.13(d)-(f) corresponden a la interferencia entre los frentes de onda (a)-(c) con un frente de onda plano generado analíticamente.

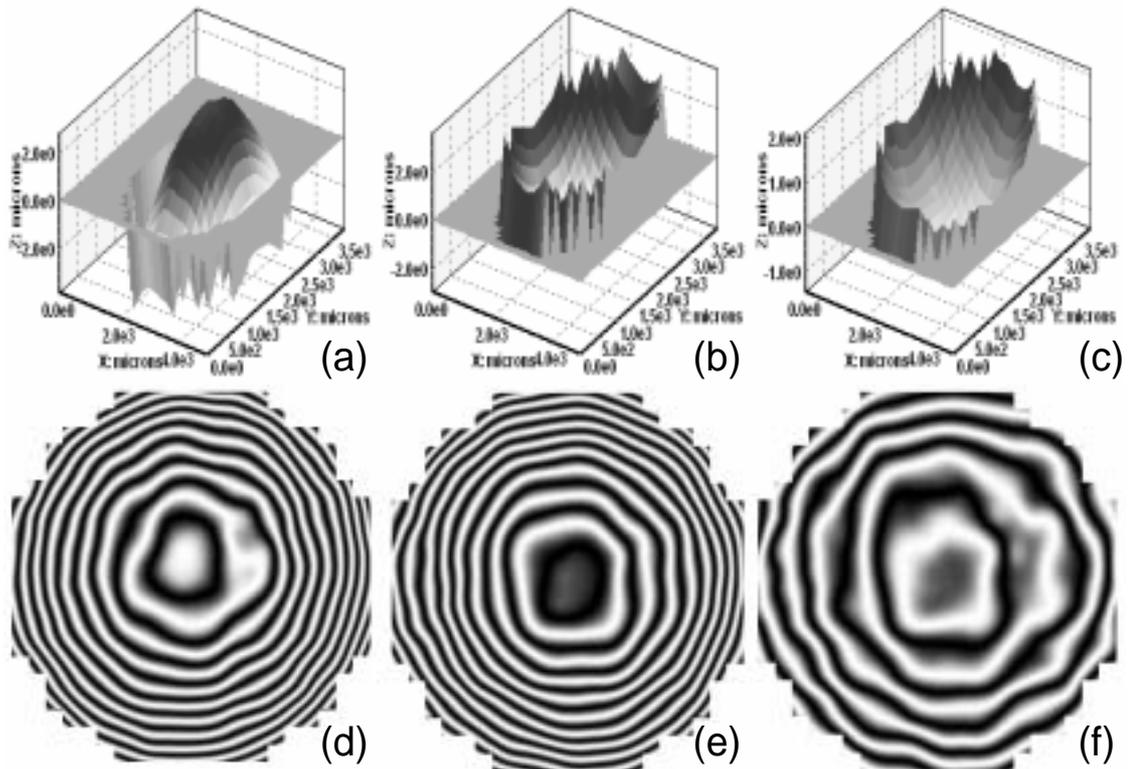


Figura 6.13. Frente de ondas obtenido a partir de medidas experimentales y su interferencia con un frente de ondas plano para una lente: (a), (d) de 500 mm, (b), (e) -500 mm y (c), (f) 1000 mm.

En las figuras 6.13(d)–(f) se puede observar la irregularidad de las franjas de interferencia debido al ruido experimental y al entrelazado de la cámara. En estos momentos la empresa **TRIOPTICS Gmb** está fabricando un sensor con una cámara secuencial y de mejor calidad que discriminará el ruido experimental.

Capítulo 7. Conclusiones

En la primer parte de esta memoria se ha presentado el estudio detallado de diferentes métodos numéricos de integración; para ello, se ha estudiado el caso unidimensional, muy útil para el desarrollo de métodos de integración en dos dimensiones. Debido a las exigencias del muestreo realizado por los deflectómetros, se han desarrollado métodos de integración bidimensional válidos en un sistema de coordenadas cartesianas y métodos de integración bidimensionales válidos en un sistema de coordenadas polares. En la segunda parte de esta memoria se han descrito los aparatos basados en deflectometría óptica y el sensor de frente de ondas Shack-Hartmann en cuyo software se han incorporado los métodos de integración estudiados. A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo:

- Se han estudiado los métodos de Newton-Cotes que se basan en una interpolación de los datos de entrada; éstos se ajustan a un polinomio de cierto grado que posteriormente se integra. Se ha desarrollado otro método que ajusta de manera suave los datos de entrada a una suma de polinomios de tercer orden denominados “splines” cúbicas que impone condiciones de continuidad en la función y en su primera y segunda derivada. Hemos demostrado que todos los métodos de integración estudiados se pueden considerar como filtros lineales recursivos de modo que el valor de la función en un cierto punto se obtiene a partir del valor de la función en un punto anterior más una cierta interpolación lineal de la derivada en los puntos cercanos.
- Analíticamente, la operación de integración se puede realizar en el dominio de Fourier. Digitalmente, con funciones muestreadas con un paso de muestreo constante, esta operación se debe realizar mediante una transformada de Fourier

discreta que implícitamente estaría realizando una interpolación “sinc”, que es la óptima según el teorema de muestreo. Así pues, hemos considerado el método de Fourier como el método Standard con el que se han comparado el resto de los métodos de integración. En el método de Fourier se producen efectos de borde. Para reducirlos se han desarrollado tres variantes del método que consisten en extrapolar la derivada al doble de su dominio. Las tres variantes desarrolladas se basan en una extrapolación lineal, por “splines” cúbicas y por “reflexión”.

- Es importante mencionar que los métodos de Fourier son válidos para un muestreo equiespaciado mientras que el resto de métodos se pueden aplicar a datos no equiespaciados.
- Como los métodos de integración estudiados se pueden considerar filtros recursivos lineales, éstos se pueden estudiar en el dominio de Fourier. Hemos propuesto el uso de la función de transferencia de los métodos de integración como herramienta para su comparación. Hemos calculado la función de transferencia de todos los métodos estudiados. De ella se deduce que la operación de integración es un filtro pasa-baja, es decir, las frecuencias altas se atenúan frente a las bajas. Se ha obtenido que todos los métodos tienen el mismo comportamiento en la región de bajas frecuencias y difieren en la región de medias y altas frecuencias. La función de transferencia del método de Simpson tiende a infinito cuando la frecuencia coincide con la frecuencia de muestreo, mientras que para el método de 3/8 de Simpson ocurre lo mismo para una frecuencia equivalente a 2/3 partes de la frecuencia de muestreo; como consecuencia, el ruido correspondiente a estas frecuencias se amplifica erróneamente. Las funciones de transferencia de la regla del Trapecio y del método basado en las “splines” cúbicas son las más cercanas a la función de transferencia analítica de Fourier aunque a altas frecuencias los dos métodos se separan ligeramente. El método del Trapecio se separa más que el método de las “splines” cúbicas.
- Se ha realizado la integración de señales sinusoidales con un número entero de periodos en el dominio de integración, con la que se ha constatado el estudio de la función de transferencia de los diferentes métodos: para una señal sinusoidal

de baja frecuencia, todos los métodos dan un error similar y a medida que aumenta la frecuencia, la regla de 3/8 de Simpson produce un error muy elevado que tiende a infinito para una frecuencia equivalente a $2/3$ de la frecuencia máxima. Lo mismo ocurre con la regla de Simpson cuando la frecuencia se acerca a la frecuencia máxima. La regla del Trapecio y el método basado en las “splines” cúbicas producen un error similar en todo el espectro de frecuencias, siendo menor para el método basado en las “splines” cúbicas. El error producido mediante la integración en el dominio de Fourier es prácticamente nulo debido a que se ha considerado una función periódica.

- Para estudiar los efectos de borde producidos en el método de Fourier, se ha realizado la integración de señales sinusoidales con un número no entero de periodos en el dominio de integración. En la zona de bajas frecuencias, los efectos de borde son más importantes en la integración de Fourier que en el método basado en las “splines” cúbicas; la variante por “reflexión” produce errores bajos aunque ligeramente superiores a los obtenidos con el método basado en las “splines” cúbicas. En la región de frecuencias medias, los efectos de borde son similares para los métodos de Fourier y de “splines” cúbicas mientras que para la extensión por “reflexión” son substancialmente inferiores. Comparando con la región de bajas frecuencias, se observa que el error ha aumentado para el método de Fourier y en la región estacionaria (a partir del décimo píxel), el error para el método basado en las “splines” cúbicas es más alto que el obtenido con el método de Fourier y su variante por “reflexión”. Para una alta frecuencia de la sinusoidal, el error producido por el método de las “splines” cúbicas es mucho más alto que el obtenido mediante los otros métodos ya que los errores estacionarios predominan sobre los efectos de borde. También se aprecia que para los métodos de Fourier los efectos de borde de los 10 primeros píxeles son más altos en valor absoluto que en la región interior. Finalmente, se ha repetido el experimento numérico para diferentes números de píxeles N donde la función y su derivada son muestreadas y se concluye que los errores de borde son similares en todos los casos y que no dependen del número de píxeles N . Los efectos de borde afectan principalmente a los 10 primeros píxeles, independientemente de N .

- Se ha estudiado otra herramienta definida en el dominio espacial, el poder resolutivo. Se han comparado los métodos más precisos mediante la integración de las derivadas correspondientes a dos impulsos cuando son de la misma amplitud y cuando uno de ellos es de amplitud la mitad del otro. El filtro basado en el dominio de Fourier produce picos muy agudos con un mínimo bien marcado entre ellos mientras que el filtro basado en las “splines” cúbicas y el filtro trapezoidal ofrecen un peor comportamiento. Las regla de Simpson y de 3/8 de Simpson no son capaces de reproducir los impulsos y tienden a producir fuertes oscilaciones en los extremos de los impulsos debido a la alta frecuencia de los mismos.
- Se han utilizado los métodos de integración unidimensional para desarrollar métodos bidimensionales en coordenadas cartesianas. Así, se han estudiado diferentes métodos para combinar la información obtenida de las integraciones unidimensionales. Se ha desarrollado un método que supone las derivadas como el gradiente de un campo vectorial conservativo, de modo que el perfil de la superficie se obtiene al realizar una integral de línea a lo largo de un camino. Se han considerado diferentes configuraciones de caminos de integración para reducir la propagación de ruido.
- Se ha desarrollado otro método que combina la información obtenida al integrar unidimensionalmente las derivadas en x e y . En este método se calculan las constantes de integración de cada perfil imponiendo que la diferencia entre los perfiles unidimensionales obtenidos en cada dirección sea mínima.
- El dominio de Fourier también ha sido una de las herramientas empleadas para obtener la integración bidimensional en coordenadas cartesianas. Se ha implementado y mejorado el método de integración bidimensional propuesto por Roddier en [Rod91]. Se ha mejorado el método desarrollando diferentes algoritmos de extrapolación de los datos de entrada para reducir los efectos de borde; concretamente, se ha implementado la extrapolación lineal, por “splines” cúbicas y por “reflexión”. El método se aplica de manera iterativa con el objetivo de hacerlo más preciso.

- Se ha implementado el método de integración bidimensional propuesto por Zou en [Zou00] basado en las diferencias finitas interpolando linealmente las derivadas previamente (*DFL*). Se ha mejorado el método mediante la interpolación por “splines” cúbicas (*DFCS*) y se han comparado los dos métodos. El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al aplicar las diferencias finitas ha sido resuelto mediante un método iterativo.
- De forma análoga al caso unidimensional, se ha calculado la función de transferencia de los métodos basados en las diferencias finitas y en el dominio de Fourier. Se ha encontrado que los tres métodos de integración se comportan de manera idéntica para bajas frecuencias y a medida que aumenta la frecuencia los métodos de las diferencias finitas se separan del método ideal de Fourier de manera que introducen errores en la integración. El método *DFCS* se separa menos que el método *DFL* y por tanto es más preciso.
- Se han comparado los diferentes métodos de integración estudiados analizando los resultados obtenidos para una señal sinusoidal en tres casos diferentes: las derivadas no presentan ruido, con ruido y sin ruido pero con un defecto tipo delta con el objetivo de simular el caso real en que las muestras presenten posibles motas de polvo, rayaduras o hayan posibles defectos de fabricación.
- Se ha calculado el error cuadrático medio producido en la integración en función de la frecuencia de la señal sinusoidal a integrar. Todos los métodos ofrecen errores bajos para una sinusoidal de baja frecuencia. Cuando la frecuencia aumenta, los diferentes métodos de integración tienen diferente comportamiento; los métodos que emplean una interpolación lineal ofrecen errores más altos que los obtenidos mediante los que emplean las “splines” cúbicas. Los resultados obtenidos están de acuerdo con la función de transferencia unidimensional y la interpolación por “splines” cúbicas es más precisa que la interpolación lineal. En el caso de integrar una función sinusoidal a partir de sus derivadas sin ruido, no hay diferencias entre los métodos basados en la integral de línea (incluyendo el de la minimización de la diferencia entre los perfiles de cada dirección) y los métodos basados en las diferencias finitas. Los métodos basados en el dominio

de Fourier son los más precisos y el error obtenido prácticamente no varía según la frecuencia de la función sinusoidal deseada.

- Se ha repetido el mismo experimento con unas derivadas ruidosas. En la región de bajas frecuencias se observa una diferencia entre los métodos basados en la integral de línea (*Trap* y *CS*) y los que minimizan la diferencia entre los valores obtenidos en cada dirección (*MDTrap* y *MDCS*); se aprecia que éstos últimos ofrecen mejores resultados que los primeros siendo más precisos ya que permiten encontrar las constantes de integración. Los métodos basados en las diferencias finitas superan a los anteriores en precisión, siendo mejor el que emplea el ajuste por “splines” cúbicas, *DFCS*. Se aprecia que a medida que aumenta la frecuencia, el error obtenido mediante el método *DFL* aumenta hasta tal punto que resulta incluso conveniente emplear el método *CS*.
- Finalmente, se ha realizado la integración de una señal sinusoidal de baja frecuencia no ruidosa con un defecto tipo delta de Dirac. Se obtiene que la propagación que genera el defecto añadido afecta a lo largo del camino de integración en los métodos basados en la integración unidimensional; mientras que los métodos basados en las diferencias finitas ofrecen un error que permanece local, alrededor de la posición original del defecto. Lo mismo ocurre con los métodos basados en el dominio de Fourier.
- Finalmente, se ha estudiado la precisión y el tiempo computacional de los métodos iterativos en función del número de iteraciones. Concretamente se ha estudiado el error cuadrático medio producido y el tiempo de cómputo requerido para cada uno de los métodos en función del número de iteraciones empleadas. Se ha obtenido que el *rms* producido con los métodos de diferencias finitas se estabiliza enseguida con pocas iteraciones; por tanto, no es necesario un elevado número de iteraciones para resolver el sistema lineal de ecuaciones en el que se relacionan los valores de la función deseada con los de sus derivadas. Sin embargo, el comportamiento es diferente para los métodos basados en el dominio de Fourier. Se ha obtenido una tendencia decreciente del *rms* para pocas iteraciones; de hecho, a partir de 30 iteraciones, los métodos de Fourier ofrecen un *rms* prácticamente constante aunque su tendencia sigue siendo

decreciente (a partir de la cuarta cifra significativa). Se aprecia que a partir de 30 iteraciones, los métodos de Fourier funcionan mejor que el método *DFL*. Respecto al tiempo computacional, los métodos basados en las diferencias finitas son extremadamente más rápidos que los de Fourier. Los métodos *IFL* y *IFR* emplean el mismo tiempo computacional ya que lo emplean en los cálculos de las transformadas de Fourier independientemente de la extrapolación inicial de las derivadas. Los métodos *DFL* y *DFCS* emplean el mismo tiempo computacional siendo ligeramente más rápido el que emplea una interpolación lineal ya que el cálculo de las “splines” es más laborioso.

- Debido a las exigencias del muestreo realizado por el deflectómetro **FOS**, se han desarrollado algoritmos de integración en coordenadas polares. Se han estudiado las integraciones radial y angular para adaptar los métodos basados en las propiedades de un campo vectorial conservativo; los que combinan los diferentes perfiles unidimensionales mediante la minimización del error cuadrático producido y los métodos de diferencias finitas.
- Se han comparado los diferentes métodos de integración para una señal periódica. El primer estudio se ha realizado a partir de derivadas sin ruido y se ha evaluado el error producido en la integración en función de la frecuencia de la señal a reconstruir. Se ha encontrado que todos los métodos se comportan de manera idéntica independientemente de la frecuencia siendo mejores los que emplean las “splines” cúbicas. A bajas frecuencias, todos los métodos ofrecen un error bajo y a medida que aumenta la frecuencia, el error aumenta de manera similar al estudio de una señal sinusoidal en coordenadas cartesianas.
- Se ha repetido el mismo estudio partiendo de derivadas ruidosas y se han obtenido importantes diferencias. A bajas frecuencias, los métodos que minimizan la diferencia entre los perfiles unidimensionales radiales y angulares responden mejor que la integración radial y angular. En cualquier caso, los métodos basados en las diferencias finitas son los más precisos. A medida que aumenta la frecuencia de la señal a reconstruir la diferencia entre los diferentes métodos va disminuyendo, ofreciendo un error similar.

- Finalmente, se ha sumado un defecto tipo delta a las derivadas de la señal periódica para estudiar la propagación de posibles defectos de fabricación, motas de polvo, rayaduras,... en la muestra. La propagación del error es más importante en la integración angular que en la radial pues influye en todo el camino de integración mientras que en la integración radial, la presencia del defecto influye a partir de los píxeles en los que está el defecto. Los métodos que minimizan la diferencia entre las integraciones radial y angular también sufren la propagación del defecto a lo largo de todo el camino de integración ya que el perfil final se obtiene promediando los perfiles obtenidos angular y radialmente; aún así, ofrecen mejores *rms* que los métodos anteriores. Los métodos basados en las diferencias finitas ofrecen mejores resultados y el error producido por el defecto tipo delta se mantiene local de manera que no se propaga a lo largo de todo el dominio de la función.
- Se han descrito los diferentes aparatos en los que se han implementado los métodos de integración desarrollados en esta memoria. Se tratan de dos aparatos que se basan en la deflectometría óptica para la medida de superficies. Los diferentes métodos de integración estudiados han sido implementados en el software de los dos deflectómetros **FOS** y **AMS** descritos en esta memoria.
- Se ha descrito el funcionamiento del **FOS** que se basa en un muestreo de la superficie a caracterizar en coordenadas polares combinando la rotación de la superficie y el movimiento oscilante de un espejo giratorio. Se han desarrollado e implementado métodos para el cálculo de los “offsets” que presentan las derivadas obtenidas con el **FOS** tanto en la dirección de muestreo como en su perpendicular y se han mostrado resultados numéricos que los validan.
- Se ha descrito el principio fundamental en el que se basa el segundo aparato **AMS**. Así, se ha explicado el principio de medición mediante un autocolimador y el movimiento de un pentaprisma; y se han analizado los diferentes errores motivados por el movimiento mecánico del soporte del pentaprisma y se han estudiado diferentes variantes para reducirlos. Se ha descrito el primer prototipo del **AMS** fabricado en el **PTB**, diseñado en un sistema de coordenadas

cartesianas en el que se ha basado un segundo modelo fabricado por **Trioptics Gmb**, todavía en fase preliminar y que está destinado a medir superficies todavía más grandes, como por ejemplo, láminas de vidrio de una área de $600 \times 1000 \text{ mm}^2$, con una precisión del nm. La alta precisión del **AMS** se consigue gracias al tipo de muestreo mediante tres haces láser obteniendo las diferencias de pendiente en la dirección de muestreo y reduciendo así, posibles errores. Así, se ha estudiado el algoritmo de la “Extensión Natural” propuesto por el **PTB** para obtener la pendiente a partir de sus diferencias y se han mostrado algunos de los resultados numéricos que constatan la validez del algoritmo que de hecho, se ha implementado en el software del **AMS**. También se ha desarrollado un método para evaluar la precisión de las medidas experimentales que consiste en el cálculo del rotacional del gradiente del perfil, válido únicamente en un sistema de coordenadas cartesianas, indicado para el **AMS**.

- Los métodos de integración desarrollados también se han implementado en un sensor de frente de ondas Shack-Hartmann con el que también se mide la derivada del frente de ondas que llega al sensor. Se ha descrito el funcionamiento de este sensor de frente de ondas basado en una matriz de microlentes y una cámara CCD. Se ha estudiado su puesta en marcha y se ha estudiado la incompatibilidad de dos de sus características más importantes: el rango dinámico y la sensibilidad. Se ha desarrollado un nuevo método para iniciar el sensor basado en los polinomios de Zernike para pupilas circulares y de Legendre para pupilas cuadradas que permite aumentar el rango dinámico del sensor sin disminuir su sensibilidad. También se ha estudiado cómo clasificar los píxeles de la región de interés del frente de ondas; y los métodos de integración han sido adaptados en función de dicha región.

Referencias

- [**Ams99a**] W. D. van Amstel, S. M. Bäumer, J. L. Horijon, “Optical figure testing by scanning deflectometry”, Proc. SPIE Vol. 3782, 320-327, (1999)
- [**Ams99b**] W. D. van Amstel, S. M. Bäumer, F. C. Couweleers, “Minideflectometer for measuring optical finish quality”, Proc. SPIE Vol. 3739, 363-368, (1999)
- [**Bie83**] K. von Bieren, “Interferometry of wave fronts reflected off conical surfaces”, Appl. Opt. 22, 2109-2114, (1983)
- [**Bor75**] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 5a Edición. Oxford, Ed. Pergamon Press, 1975
- [**Cam02**] J. Campos, L. P. Yaroslavsky, A. Moreno, M. J. Yzuel, “Integration in the Fourier Domain for restoration of a function from its slope: Comparison of four methods”, Optics Letters Vol 27 (2002) 1986-1988.

- [Che00] F. Chen, G. M. Brown, M. Song, “Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods”, *Opt. Eng.* 39, 10-22, (2000)
- [Cor80] A. Cornejo-Rodríguez, A. Cordero-Dávila, “Measurement of radii of curvature of convex and concave surfaces using a nodal bench and He-Ne laser”, *Appl. Opt.* 19, 1743-1745, (1980)
- [Día85] R. Díaz-Uribe, A. Cornejo-Rodríguez, J. Pedraza-Contreras. O. Cardona-Núñez, A. Cordero-Dávila, “Profile measurement of a conic surface, using a He-Ne laser and a nodal bench”, *Appl. Opt.* 25, 1707-1709, (1986)
- [Día86] R. Díaz-Uribe, J. Pedraza-Contreras. O. Cardona-Núñez, A. Cordero-Dávila, A. Cornejo-Rodríguez, “Cylindrical lenses: testing and radius of curvature measurement”, *Appl. Opt.* 25, 1707-1709, (1986)
- [Dum02] M. Dumberger, “Taking the pain out of laser triangulation”, http://www.sensorsmag.com/articles/article_index/, (2002)
- [Els99a] C. Elster, I. Weingärtner, “Exact wave-front reconstruction from two lateral shearing interferograms”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 16, 9, 2281-2285 (1999)
- [Els99b] C. Elster, I. Weingärtner, “Solution to the shearing problem” *Appl. Opt.* 38, 5024-5031 (1999)
- [Els00a] C. Elster, “Evaluation of lateral shearing interferograms”, *Advanced Mathematical Tools in Metrology IV*, 76-87, P. Ciarlini, ed. World Scientific, Singapore, 2000
- [Els00b] C. Elster, “Exact two-dimensional wave-front reconstruction from lateral shearing interferograms with large shears”, *Appl. Opt.* 39, 5353-5359 (2000)
- [Els02] C. Elster, I. Weingärtner, “High-accuracy reconstruction of a function $f(x)$ when only $df(x)/dx$ is known at discrete measurements points”, *Proc. SPIE Vol 4782*, 2002

- [Eva71] J. D. Evans, "Method for approximating the radius of curvature of small concave spherical mirrors using a He-Ne laser", *Appl. Opt.* 10, 995-996 (1971)
- [Fre86] K. R. Freischlad and C.L. Koliopoulos, "Modal estimation of a wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform", *J. Opt. Soc. Am.* 3, 1852-1861 (1986)
- [Fri77] D. L. Fried, "Least-squares fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements", *J. Opt. Soc. Am.* 67, 370-375 (1977)
- [Fro79] R. L. Frost, C. K. Rushforth, B. S. Baxter, "Fast FFT-based algorithm for phase estimation in speckle imaging", *Appl. Opt.* 18, 2056-2061, (1979)
- [Gec01] R. Geckeler, I. Weingärtner, "Use and traceable calibration of autocollimators for ultra-precise measurement of slope and topography", *Proc. SPIE Vol. 4401*, 184-195, (2001)
- [Ghi89] D. G. Ghiglia, L. A. Romero, "Direct phase estimation from phase differences using fast elliptic partial differential equation solvers", *Opt Lett.* 14, 1107-1109, (1989)
- [Goz92] I. Gozheil, "Hartmann and other screen tests", *Optical Shop Testing 2*. Ed. Wiley & Sons, New York, 1992
- [Har96] G. Harbers, P. J. Kunst, G. W. R. Leibbrandt, "Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernicke polynomials", *Appl. Opt.* 6162-6172, (1996)
- [Hud76] R. H. Hudgin, "Wave-front reconstruction for compensated imaging", *J. Opt. Soc. Am.* 67, 375-378, (1976)
- [Hun79] B. R. Hunt, "Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase difference", *J. Opt. Soc. Am.* 69, 393-399 (1979)
- [Iri92a] S. C. Irick, "Determining surface profile from sequential interference patterns from a long tracer profiler", *Rev. Sci. Instrum.* 63, 1432-1435, (1992)

- [Iri92b] S. C. Irick, W. R. McKinney, D. L. J. Lunt and P. Z. Takacs, “Using a straightness reference in obtaining more accurate surface profiles from a long trace profile”, *Rev. Sci. Instrum.* 63, 1436-1438, (1992)
- [Iri95] S. C. Irick, R. Krishna Kaza, and W. R. McKinney, “Obtaining three-dimensional height profiles from a two-dimensional slope measuring instrument”, *Rev. Sci. Instrum.* 66 2108-2111, (1995).
- [Kre04] S. Krey, W.D. van Amstel, J. Campos, A. Moreno, E.J. Lous, “A fast optical scanning deflectometer for measuring the topography of large silicon wafers.”, *Proc. SPIE 5523, SPIE’s 49th Annual Meeting, Denver, (2004)*
- [Lam04] H. Lammert and F. Siewert, “The Nano Optic Measuring Machine – NOM – High Accuracy with deflectometry for surface measuring and figuring”, <http://www.upob.de/hlem2004/programme.htm>, High Level Expert Meeting CC UPOB e.V, (2004)
- [Lei96] G. W. R. Leibbrandt, G. Harbers, P. J. Kunst, “Wave-front analysis with high accuracy by use of a double-grating lateral shearing interferometer“, *Appl. Opt.* 35, 6151-6161, (1996)
- [Li96] H. Li, X. Li, M. W. Grindel and P. Z. Takacs, “Measurement of x-ray telescope mirrors using a vertical scanning long trace profiler“, *Opt. Eng.* 35, 330-337, (1996)
- [Liu85] H. K. Liu, J. A. Davis, R. A. Lilly, “Optical-data-processing properties of liquid-crystal television spatial light modulator” *Opt. Lett.* **10**, 635, (1985).
- [Mal78] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Ed Wiley & Sons, New York, 1978
- [Math99] J.H. Mathews, K.D. Fink, *Numerical methods using MATLAB*, Prentice Hall, Inc, 1999.
- [Mar91] J.Marsden, A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

- [Mar94] A. Márquez, I. Moreno, J.A. Davis, J. Campos, M. J. Yzuel, “Quantitative prediction of the modulation behaviour of twisted nematic liquid crystal displays based on a simple physical model”, *Opt. Eng.* 33, 1806-1812, (1994)
- [Mar01] A. Márquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. A. Davis, J. Campos y M. J. Yzuel, “Quantitative prediction of the modulation behavior of twisted nematic liquid crystal displays based on a simple physical model”, *Opt. Eng.* 40, 2558-2564 (2001)
- [Mar05] A. Márquez, C. Iemmi, I. Moreno, J. Campos y M. J. Yzuel, “Anamorphic and spatial frequency dependent phase modulation on liquid crystal displays. Optimization of the modulation diffraction efficiency”, *Opt. Exp.* 13, 6, 2111-2119 (2005)
- [Men89] A. Menikoff, “Wave-front reconstruction with a square aperture”, *J. Opt. Soc. Am. A*, 6, 1027-1030, (1989)
- [Mor03] A. Moreno, “Algoritmos para la obtención de una función a partir de sus diferencias”, Trabajo de Investigación de Tercer Ciclo de Doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona, (2003)
- [Mor05] A. Moreno, J. Campos, L.P. Yaroslavsky, “Frequency response of five integration methods to obtain the profile from its slope”, *Opt. Eng.* 44, 3, 033604 (2005)
- [Nea97] D.R Neal, D.J. Armstrong and W.T. Turner. “Wavefront sensors for control and process monitoring in optics manufacture”. *Proc. SPIE*, Vol. 2993, Num. 29, 212, (1997)
- [Nic02a] J. Nicolás, J. Campos, C. Iemmi, I. Moreno, M. J. Yzuel, “Convergent optical correlator alignment based on frequency filtering”, *Appl. Opt.* 41, 1505, (2002).
- [Nic02b] J. Nicolás, J. Campos, M.J. Yzuel, "Phase and amplitude modulation of elliptic polarization states by non-absorbing anisotropic elements: application to liquid crystal devices", *J. Opt. Soc. Am. A* 19, pg.1013-1020 (2002).

- [**Nol78**] R. J. Noll, “Phase estimates from slope-type wavefront sensors”, *J. Opt. Soc. Am.* 68, 139-140 (1978)
- [**Pet68**] M. Petran, M Hadravsky, M. D. Egger, and R. Galambos, “Tandem-scanning reflected-light microscope”, *J. Opt. Soc. Am.* 58, 661-664, (1968)
- [**Pre87**] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. *Numerical recipes. The art of scientific computing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [**Prim03**] J.Primot, “Theoretical description of Shack-Hartmann wave-front sensor”. *Opt Communications*, Vol. 222, 82 (2003)
- [**Qia87**] S. Qian, H. Rarbarck, D. Shu and P. Z. Takacs, “*In situ* shearing interferometry of National Synchrotron Light source mirrors”, *Proc. SPIE*, Vol. 749, 30-36, (1987)
- [**Qia95**] S. Qian, W. Jark, P. Z. Takacs, K. J. Randall, W. Yun, “The penta-prism: A long-trace-profiler with stationary optical head and moving penta prism”, *Rev. Sci. Instrum.* 66, 2562-2569, (1995)
- [**Ras97**] P. K. Rastogi, *Optical measurement techniques and applications.* Artech House, Inc, Boston, 1997
- [**Rim74**] M. P. Rimmer, “Method for evaluating lateral shearing interferometer”, *Appl. Opt.* 13, 623-629, (1974)
- [**Rim75**] M. P. Rimmer, J. C. Wyant, “Evaluation of large aberrations using a lateral-shearing interferometer having variable shear“, *Appl. Opt.* 14, 142-150, (1975)
- [**Rod91**] F. Roddier, C. Roddier, “Wavefront reconstruction using iterative Fourier transforms”, *Appl. Opt.* 30, 1325, (1991)
- [**Ros93**] M. Roseta-Aguilar, R. Díaz-Urbe, “Profile testing of spherical surfaces by laser deflectometry”, *Appl. Opt.* 32, 4690-4697, (1993)
- [**Sch96**] H. Schreiber, J. Schwider, “Lateral shearing interferometer based on two Rochi gratings in series”, *Appl. Opt.* 36, 5321-5324, (1996)

- [Sch99] M. Schulz, I. Weingärtner, “Avoidance and elimination of errors in optical scanning”, Proc. SPIE Vol. 3823, 133-141, (1999)
- [Shi04] R. Shinozaki, O. Sasaki and T. Suzuki, “Fast scanning method for one-dimensional surface profile measurement by detecting angular deflection of a laser beam”, Appl. Opt. 43, 4157-4163, (2004)
- [Sic94] H. Sickinger, O. Falkenstörfer, N. Lindlein, J. Schwider, „Characterization of microlenses using a phase-shifting shearing interferometer“, Appl. Opt. 33, 2680-2686, (1994)
- [Smo78] F. M. Smolka, T. P. Caudell, “Surface profile measurement and angular deflection monitoring using a scanning laser beam: a non-contact method”, Appl. Opt. 17, 3284-3289, (1978)
- [Sno02] M. Snow, “Laser triangulation sensors in the Tire industry”, <http://www.sensorsmag.com/articles/0302/tire/>, (2002)
- [Sou80] W. H. Southwell, “Wave-front estimation from wave-front slope measurements”, J. Opt. Soc. Am. 70, 998-1006 (1980)
- [Tak89] P. Z. Takacs and S. Qian, “Surface profile interferometer”, Patent 4,884,697 (5 Diciembre 1989)
- [Tak99] P. Z. Takacs, E. L. Church, C. J. Bresloff and L. Assoufid, “Improvements in the accuracy and the repeatability of long trace profiler measurements”, Appl. Opt. 38, 5468-5479, (1999)
- [Tiz94] H. Tiziani and H. M. Uhde, “Three-dimensional analysis by a microlens-array confocal arrangement”, Appl. Opt. 33, 567-572, (1995)
- [Wei99] I. Weingärtner, M. Schulz, C. Elster, “Novel scanning technique for ultra-precise measurement of topography”, Proc. SPIE, Vol. 3782, 306-317, (1999)

- [Xia88] G. Q. Xiao, T. R. Corle, and G. S. Kino, "Real time confocal scanning optical microscope" *Appl. Phys. Lett.* 53, 716-718, (1988)
- [Yar96] L. Yaroslavsky, M. Eden, *Fundamentals of Digital Optics*, Birkhauser, Boston, 1996
- [Yar02] L. Yaroslavsky, Fast signal sinc-interpolation and its applications in signal and image processing, IS&T/SPIE's 14th Annual Symposium Electronic Imaging 2002, Science and Technology, Conference 4667 "Image Processing: Algorithms and Systems", San Jose, CA, 21-23 January 2002. *Proceedings of SPIE* vol. 4667
- [Yar04] L. Yaroslavsky, *Digital Holography and Digital Image Processing*, Kluwer Academic Publishers, 2004
- [Yar05] L. Yaroslavsky, A. Moreno, J. Campos, "Frequency responses and resolving power of numerical integration of sampled data", *Optics Express* 13, 8, 2892-2905, (2005)
- [Yoo96] G. Y. Yoon, T. Jitsuno, M. Nakatsuka and S. Nakai. "Shack-Hartmann wave-front measurement with a large F-number plastic microlens array", *Appl Opt*, Vol 35,1, 189, 1996.
- [Zou00] W. Zou and Z. Zhang, "Generalized wave-front reconstruction algorithm applied in a Shack-Hartmann test", *Appl. Opt.* 39, 250-268 (2000)